ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1963

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

τοῦ Paul Tannery

Περὶ τῶν χειρογράφων κωδίκων τοῦ Διοφάντου θὰ ὁμιλήσωμεν ἐκτενέστερον εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῆς παρούσης ἐκδόσεως· τώρα θὰ ἐκθέσω ὀλίγα τινα, τὰ ἀπολύτως ἀναγκαῖα.

Συνήθροισα διαφόρους γραφὰς ἐκ τῶν ἑξῆς πηγῶν:

A = Κῶδιξ Matritensis 48 (fol. 58 - 135) τοῦ 13ου αἰῶνος, ὁ ὁποῖος δηλ. ἐγράφη πρὸ τοῦ μεγάλου Πλανουδείου κώδικος, ὁ ἀρχαιότερος ὅλων τῶν εἰς ἡμᾶς γνωστῶν.

B_1 = κῶδιξ Μαρκιανὸς 308 (fol. 50 - 272), τοῦ 15ου αἰῶνος, τοῦ ποτε καρδιναλίου Βησσαρίωνος καὶ γνωστὸς ἀπὸ τοῦ 1464. Παρέχει τὴν Πλανούδειον συλλογὴν καὶ τὸ ὑπόμνημα.

Βα = Ἔκδοσις τοῦ Διοφάντου ὑπὸ Κλαυδίου Γάσπαρη Bacheto Meziriaco, ἐν Παρισίοις 1621. Δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψει ἡ ἔκδοσις τοῦ Fermat (Τουλούζη, 1670) διότι ἦτο πλήρης σφαλμάτων.

B = Διὰ τοῦ γράμματος B ἐδήλωσα τὴν συμφωνίαν τῶν B_1 καὶ Βα.

Ἐκτὸς τούτων ἐχρησιμοποίησα καὶ τὰς κάτωθι γραφάς:

V = κῶδιξ Βατικανὸς Ἑλληνικὸς 191 (fol. 360 - 392) ἀντιγεγραμμένος ἐν Ἰταλίᾳ περὶ τὰ μέσα τοῦ 15ου αἰῶνος ἐκ τοῦ κώδικος A, ὁ ὁποῖος οὐδόλως εἶναι ἐφθαρμένος. Ἡ λατινικὴ μετάφρασις τοῦ Ξυλανδρὸς (Xylander) ἡ ὁποία ἐξεδόθη ἐν Βασιλείᾳ τῷ 1575 μόλις ὑπ' ἐμοῦ ἐχρησιμοποιήθη. Ὁ Guelferbytanus κῶδιξ 1 τοῦ 15ου αἰῶνος, τὸν ὁποῖον εἶχε πρόχειρον κατὰ τὴν γνώμην μου ὁ Xylander, εἴτε εἶναι ἀντίγραφον τοῦ Μαρκιανοῦ εἴτε ὁμοιοτάτου τινος πρὸς τοῦτον, ἤδη ἀπολεσθέντος. Τούτου 10 φύλλα (14ου αἰῶνος) ἄθικτα διατηροῦνται ἐν τῷ Ἀμβροσιανῷ Et sup. 157.

Ὁ Auria Neapolitanus, τέλος τοῦ 16ου αἰῶνος, χρησιμοποιήσας τὴν μετάφρασιν τοῦ Xylander καὶ τρεῖς Βατικανοὺς κώδικας (191, 304, 200) συνεχώνευσε τὸ διασωθὲν Ἑλληνικὸν κείμενον εἰς τὸν Παρισινὸν κώδικα 2380 καὶ τὸν Ἀμβροσιανὸν E 5. Οὐχὶ σπανίως ὁ Marte συνεπλήρωσε ἐξ ἰδίων τὰ χάσματα καὶ ἀποκατέστησε τὰ νόθα χωρία, τὸ ὁποῖον δὲν ἔπρεπε νὰ κάμῃ. Ἤδη ἔκαμα μνείαν τῶν προαναφερθέντων Βατικανῶν κωδίκων, τοῦ ὑπ' ἀριθ.

191, τοῦ ὁποίου ἀπόγραφον εἶναι ὁ ὑπ' ἀριθ. 304 (16ου αἰῶνος)· ὁ ὑπ' ἀριθ. 200 ἐκ τοῦ 'Αμβροσιανοῦ Α 91· καὶ ἐκεῖνος ἀντεγράφη ἐκ τοῦ B_1 κατὰ τὸ ἔτος 1545.

Τὸν Βασιλικὸν κώδικα, ἤδη Παρισινὸν 2379, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου ὁ Bachet ἔκαμε τὴν ἔκδοσίν του (1621), ἀντέγραψεν ὁ Johannes Hydruntinus μετὰ τὸ 1545, ἀκολουθήσας εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία τὸν Βατικανὸν gr. 200, ἐν ᾧ εἰς τὰ ἄλλα τὸν gr. 304. Τὸν αὐτὸν gr. 304 ἐφρόντισεν ὁ Sirmondus νὰ μεταγράψῃ ἐκ τοῦ Bachet. Ὁ Παλατῖνος τέλος (ἤδη εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ Παλατῖνος gr. 391) περὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἐκδότης ἐδέχθη τὴν μαρτυρίαν τοῦ Salmasio, παρεσκευάσθη πρὸς ἐκτύπωσιν ὑπὸ τοῦ Xylander.

Ταῦτα λαβὼν ὑπ' ὄψει καὶ παραβαλὼν ὀκτὼ κώδικας τοῦ Διοφάντου καὶ ἐξετάσας ἀκάρπως ἄλλους δεκατέσσαρας, οὐδόλως ἀμφέβαλον, ὅτι ὁ κῶδιξ Matritensis A εἶναι πηγὴ ἔξοχος, κατ' ἐξοχὴν μοναδικός, ἄξιος ἐκλογῆς. Προσέτι ἡ Πλανούδειος συλλογὴ B θαυμαστῶς συμφωνεῖ πρὸς ὅλα τὰ ἡμαρτημένα, ἀλλαγέντων κατὰ μαρτυρίαν ὀλιγίστων χωρίων εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία ἢ γραφῶν τινων κατὰ τον κανόνα μεταγλωττισθεισῶν ἑλληνιστί. 'Αλλ' ἐγὼ εἶμαι πεπεισμένος, ὅτι ὁ 'Αλεξανδρινὸς ἀνὴρ (ὁ Διόφαντος) συγγραφεὺς μαθηματικῶν, γεννηθεὶς τὸν 3ον αἰῶνα παρέσχε δεῖγμα καθαροῦ λόγου καὶ οὐδέποτε προσέκρουσε πρὸς τοὺς γραμματικούς· ἀρκετὸν ἦτο νὰ ἀπαλειφθῶσιν ἐν τοσούτῳ οἱ βαρβαρισμοὶ οἱ εἰσαχθέντες ἐκ τῆς ἀμελείας τῶν ἀντιγραφέων...' Εν πρώτοις πρέπει νὰ μνημονευθῇ, ὅτι οἱ τακτικοὶ ἀριθμοὶ τῶν προβλημάτων ἐν τῷ κώδικι A εἰσῆλθον βραδύτερον ἐκ χειρογράφων τῆς οἰκογενείας B καὶ οὐδόλως ὑπῆρχον προηγουμένως· θὰ φανῇ διαφωνία μεταξὺ A καὶ B ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ, τὴν ὁποίαν ἐσημείωσα γεννηθεῖσαν ἐκ πλάνης προδήλου εἰς B_1. Διὰ τοὺς λοιποὺς κώδικας ὑπάρχει μεγάλη διαφωνία...Κατ' ἀρχὴν ἐγὼ ἐπεθύμουν νὰ ἀποκαταστήσω τὸ πνεῦμα τῶν τεχνικῶν συντομογραφιῶν τοῦ Διοφάντου, ἵνα μὴ ἀναφέρω τὴν χρῆσιν τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων, τὴν ὁποίαν ἀκατάστατον οὖσαν εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Bachet ἐθεώρουν λίαν ἡμαρτημένην. 'Αμέσως ἐπρόσεξα, ὅτι εἰς τοὺς κώδικας A καὶ B_1 ὑπάρχουσι σχεδὸν παντοῦ συντομογραφίαι τῶν πρώτων βιβλίων, ἐν ᾧ τῶν τελευταίων ἔχουσι παραλειφθῇ. Τοῦτο πρέπει ὡσαύτως νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν ἀντιγραφέα τοῦ ἀπολεσθέντος ἀρχετύπου τοῦ γραφέντος κατὰ τὸν 8ον ἢ 9ον αἰῶνα, ὅπερ εἶναι πηγὴ πάντων τῶν ἡμετέρων κωδίκων. Διότι, ἵνα παραλείψω τὰς ἐκ τούτων πλάνας, τὰς ὁποίας ἐσημείωσα εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα, κάκιστα διὰ τῶν ποικιλοτρόπων καταλήξεων ἀποδίδονται αἱ γραφαί, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔπρεπε νὰ εἶχον γραφῇ διὰ συντομογραφιῶν..."Οθεν ἀπεφάσισα, χωρὶς νὰ γίνῃ λόγος περὶ κωδίκων καὶ συντομογραφίας, νὰ θέσω λέξεις ἀντὶ συντομογραφιῶν, ἐπειδὴ ἔκρινα ὅτι καὶ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου τὸ αὐτὸ εἶχε συμβῆ. Δὲν προσέθεσα καταλήξεις εἰς τὰς συντομογραφίας (εἰ μὴ σπανιώτατα διὰ σαφήνειαν) ἂν καὶ εἰς τοὺς κώδικας παρατηρεῖται ἡ ἀντίθετος χρῆσις...Αἱ συντομογραφίαι τοῦ Διοφάντου εἶναι συντμήσεις γραφῆς καὶ οὐχὶ λέξεως (δηλ. εἶναι συμβολισμός)...Διὰ τὸ σημεῖον ϛ (ὁ ἄγνωστος x) ἐπὶ μακρὸν ἐδίστασα· τοιαύτην μορφὴν μόλις ἀληθῶς ἀνεκάλυψα ἐν B_1 καὶ μόνον ἐν χωρίῳ προσδιορισμοῦ (σελὶς 6, 5 κειμένου). Ὅμοιον παρατηρεῖται ἐν τῷ χωρίῳ ἐν τῷ A, ἀλλ' ὁ χάρτης εἶχεν ἀποξεσθῆ καὶ τὸ σημεῖον ἀποκατεστάθη διὰ μεταγενεστέρας χειρός...Ὅμοια θὰ εἴπω περὶ τοῦ σημείου ✕ (δηλοῦντος ὅτι ὁ ἀριθμός, εἰς τὸν ὁποῖον τοῦτο τίθεται ὡς ἐκθέτης εἶναι παρονομαστὴς κλάσματος) προτιμηθέντος ἐκ παραβολῆς μεταξὺ ἀναριθμήτων μορφῶν τοιούτων σημείων τὰς ὁποίας παρέχουσιν οἱ κώδικες...Τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων ἔγραψα παντοῦ ὑπὲρ τὴν γραμμὴν (εἰς τὴν θέσιν δηλ. τοῦ ἀριθμητοῦ)· τὸ αὐτό, ὡς φαίνεται, ἔκαμε καὶ ἡ πρώτη χεὶρ τοῦ κώδικος A εἰς σπάνια μὲν χωρία, τὰ ὁποῖα ὅμως δυνάμεθα νὰ ἐπικαλεσθῶμεν ὡς μαρτυρίαν. Διότι πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ γραφὴ τῶν κλασμάτων ὑπῆρξεν ὀλίγον διάφορος ἐν τῷ Μεγίστῳ Πλανουδείῳ (κώδικι), ὅστις ἀντὶ τρία τέταρτα π.χ. ἔγραφεν $\bar{\gamma}^{\delta}$. Ὅθεν εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία (τὰ ὁποῖα ἐσχολίασεν), ἐν τῷ κώδικι B_1 ὁμοίως ἀνευρίσκονται σημειωμένοι οἱ παρονομασταὶ καὶ διὰ μεταγενεστέρας χειρὸς ἐν τῷ A, ἐκεῖ ὅπου τούτους ἡ πρώτη χεὶρ εἶχε παραλείψει. Εἰς τὰ 4 τελευταῖα βιβλία ἑκάτερος κῶδιξ οὐδόλως παρέχει πάντας τοὺς παρονομαστάς, εἰ μὴ ὅπου ἀντίθετος γραφὴ ἐν τῷ κριτικῷ ὑπομνήματι ἀναφέρεται. Φαίνεται, ὅτι οἱ παρονομασταὶ εἰς τὴν κοινὴν πηγὴν εἶχον παραλειφθῆ.

[Πρὸς τούτοις ἐκτὸς τῶν ὅσων ὁ Διόφαντος ἐδήλωσεν εἰς τὴν εἰσαγωγήν του παρέθεσα συντμήσεις τινας ἄνευ καταλήξεων ὡς π.χ. $\beta^{\pi\lambda}$= διπλασίων, $\gamma^{\pi\lambda}$ = τριπλασίων κλπ., π^{λ} = πλευρά, γι= γίνεται ἢ γίνονται, ἴσ.= ἴσον ἢ ἴσα, $\square^{ος}$ = τετράγωνος, $\alpha^{ος}$ = πρῶτος, $\beta^{ος}$ = δεύτερος, ἂν καὶ εἰς τοὺς κώδικας τὰ τελευταῖα ταῦτα πολλάκις σημειοῦνται ἁπλῶς διὰ τόνου]...

Περὶ τῆς νέας ἰδικῆς μου μεταφράσεως εἰς τὴν λατινικὴν τί νὰ εἴπω; Ἐφ' ὅσον ὁ Ἑλληνικὸς λόγος ὑπερβάλλει πολὺ τὸν Λατινικὸν κατὰ τὴν ἐνάργειαν τῶν παραδιδομένων μαθήσεων, θὰ ἦτο ματαιοπονία, ἵνα εἴπω ὡς ὁ Vieta, ἐάν, ἀκολουθήσας τὴν ὁδὸν τῶν παλαιοτέρων μεταφραστῶν, θελήσω νὰ ἐξηγήσω τὰ σκοτεινὰ σημεῖα δι' ἔτι σκοτεινοτέρων. Τοὺς σημερινοὺς ὅρους καὶ τὰ σήμερον καλούμενα ἀλγεβρικὰ σημεῖα ἀπεδέχθην καὶ ἀποκατέστησα ὅσον ἠδυνήθην κατὰ τὴν γνώμην τοῦ συγγραφέως (δηλ. τοῦ Διοφάντου), νομίζων ὅτι δὲν πρέπει νὰ ἀναζητῆται ὁ τρόπος ἐκφράσεως τοῦ Διοφάντου εἰς τὸ Λατινικὸν κείμενον.

Ἔγραφον ἐν Παρισίοις κατὰ μῆνα Ὀκτώβριον 1892.

Paul Tannery

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Τὸ κείμενον τῆς παρούσης ἐκδόσεως τῶν ᾿Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου στηρίζεται εἰς τὴν δίτομον ἔκδοσιν τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery (B.C. Teubner, Λειψία 1893). Εἰς τὸν πρῶτον τόμον τῆς ἐκδόσεως ταύτης περιλαμβάνονται τὰ 6 περισωθέντα βιβλία ἐκ τῶν 13, ἅτινα εἶχε γράψει ὁ Διόφαντος, ὡς καὶ 4 θεωρήματα τῆς πραγματείας του Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν μετὰ ἐλαχίστου μέρους τῆς θεωρίας τούτων ἄνευ ἀριθμήσεως. Εἰς τὸν δεύτερον τόμον περιλαμβάνονται διάφοροι μαρτυρίαι περὶ τοῦ Διοφάντου, ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα καὶ σχόλια τινα εἰς τὰ ᾿Αριθμητικὰ συνταχθέντα ὑπὸ τῶν Βυζαντινῶν λογίων Μιχαὴλ Ψελλοῦ (11ος αἰών), Γεωργίου Παχυμέρη (13ος αἰὼν) καὶ Μαξίμου Πλανούδη (13ος αἰών), ὡς καὶ ἄλλων σχολιαστῶν διασωθέντα ἀνωνύμως. Τὸ τελευταῖον σχόλιον τοῦ δευτέρου τόμου ἀφορᾷ εἰς τὸ 8ον θεώρημα τοῦ 2ου βιβλίου, ὅπου ζητεῖται ὅπως δοθεὶς τετράγωνος ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς.

῾Η ψυχή σου Διόφαντε εἴη μετὰ τοῦ Σατανᾶ
ἕνεκα τῆς δυσκολίας τῶν τε ἄλλων σου θεωρημάτων
καὶ δὴ καὶ τοῦ παρόντος θεωρήματος.

῎Αλλο σχόλιον μνημονεῦον ὅτι τὰ ᾿Αριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου περιέχονται εἰς 13 βιβλία τελειώνει ὡς ἑξῆς·

τὸ φιλοσοφεῖν ἄρα διὰ τῶν μαθημάτων· (δηλ. μαθηματικῶν).
Γέρων ἐρασθεὶς ἐσχάτη κακὴ τύχη
Βίος βίου δεόμενος οὐκ ἔστι βίος.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν περιελήφθη τὸ κείμενον τοῦ πρώτου τόμου τῆς ἐκδόσεως P.Tannery, τὰ ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα ἐκ τοῦ δευτέρου τόμου, μετάφρασις τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν νέαν ῾Ελληνικὴν καὶ ἐπεξηγήσεις τῶν προβλημάτων τῶν ᾿Αριθμητικῶν καὶ τῶν προτάσεων περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. Περὶ τῶν κωδίκων ἐκ τῶν ὁποίων ἐλήφθη τὸ κείμενον ὁμιλεῖ ὁ P. Tannery. Τοῦτο διετηρήσαμεν ἀμετάβλητον πλὴν ἐλαχίστων τυπογραφικῶν παροραμάτων. Εἰς τὸ 5ον βιβλίον παρενεβάλομεν τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν ἀρχαῖον κείμενον 4 ἐλλειπόντων προβλημάτων (19, 19α, 19β, 19γ), ὅπερ ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον εἰς τὸ περιοδικὸν « Πλάτων » τῆς Ἑταιρείας τῶν Ἑλλήνων φιλολόγων (Ἔτος ΙΓ'-1961, Τεύχη Α καὶ Β 25)26 σελ. 125 - 137).

Ὁ Βίος τοῦ Διοφάντου

Περὶ τοῦ βίου τοῦ Διοφάντου ἐλάχιστα εἶναι γνωστά. Γνωρίζομεν ὅτι ἦτο Ἕλλην μαθηματικὸς ἀκμάσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ὅτι νυμφευθεὶς ἀπέκτησε υἱὸν καὶ ὅτι ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 84 ἐτῶν. (Ἴδε ἀριθμητ. ἐπίγραμμα ὑπ' ἀριθ. 24). Περὶ τοῦ χρόνου καὶ τοῦ τόπου τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου αὐτοῦ οὐδὲν εἶναι γνωστόν. Ἡ ἐποχὴ τῆς ἀκμῆς του τοποθετεῖται μετὰ μεγάλης πιθανότητος περὶ τὸ ἔτος 250 μ.χ. Περὶ τούτου συνηγορεῖ χωρίον τι τοῦ Μιχαὴλ Ψελλοῦ περιεχόμενον εἰς τὸν 2ον τόμον τῆς Ἐκδόσεως P. Tannery ἔχον οὕτω : « Περὶ δὲ τῆς αἰγυπτιακῆς μεθόδου ταύτης Διόφαντος μὲν διέλαβεν ἀκριβέστερον, ὁ δὲ λογιώτατος Ἀνατόλιος τὰ συνεκτικώτατα μέρη τῆς κατ' ἐκεῖνον ἐπιστήμης ἀπολεξάμενος ἑτέρως Διοφάντῳ συνοπτικώτατα προσεφώνησε ». [Ἑρμηνεία : Περὶ δὲ τῆς αἰγυπτιακῆς ταύτης μεθόδου (τῆς ἐφαρμοζομένης δηλ. ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων τῆς Ἀλεξανδρείας), ὁ μὲν Διόφαντος ἔγραψεν ἀκριβέστερον, ὁ δὲ λογιώτατος Ἀνατόλιος συλλέξας τὰ σπουδαιότερα μέρη τῆς μαθηματικῆς ἐκείνης ἐπιστήμης τὰ διετύπωσε συνοπτικώτατα κατ' ἄλλον τρόπον ἢ ὁ Διόφαντος]. Πρόκειται ἐνταῦθα περὶ τοῦ συμβολισμοῦ τῶν δυνάμεων, περὶ ὧν ὁ Διόφαντος γράφει εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του. Ὁ Ἀνατόλιος ἦτο λόγιος καὶ μαθηματικὸς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ τὸ πρῶτον, γενόμενος κατόπιν Ἐπίσκοπος Λαοδικείας περὶ τὸ 270. Ἐὰν πρόκειται περὶ τοῦ Ἀνατολίου τούτου, τὸν ὁποῖον μνημονεύει καὶ ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν μικρὰν πραγματείαν του Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς (Ἔκδ. Victorius de Falco, Teubner 1922) εἶναι λογικὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Διόφαντος ἤκμασε πρὸ τοῦ Ἀνατολίου. Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ Διόφαντος εἶναι νεώτερος τοῦ μαθηματικοῦ Ὑψικλέους (1ος αἰὼν π.χ.), τὸν ὁποῖον μνημονεύει εἰς τὴν πραγματείαν του περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν καὶ ἀρχαιότερος τῆς μαθηματικοῦ Ὑπατίας (†412μ.χ.), ἡ ὁποία, ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ Σουΐδας, εἶχε γράψει σχόλια εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (ἀπολεσθέντα). (Λεξικὸν Σουΐδα, Ὑπατία).

Αἱ πραγματεῖαι τοῦ Διοφάντου

Ἐκτὸς τῶν Ἀριθμητικῶν καὶ τῶν περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν ὁ Διόφαντος εἶχε γράψει καὶ ἄλλας δύο μαθηματικὰς πραγματείας (ἀπολεσθείσας). Ἡ μία ἔφερε τὸν τίτλον Πορίσματα καὶ λαμβάνομεν γνῶσιν τῆς ὑπάρξεώς της ἐκ τοῦ ἰδίου τοῦ Διοφάντου (Ἴδε προβλήματα 3, 4, 5, 16 τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν). Εἰς τὰ προβλήματα 3 καὶ 4 τοῦ 5ου βιβλίου λέγει ὅτι, ἐὰν

$\psi + \lambda = \alpha^2$ καὶ $z + \lambda = \beta^2$, ἡ παράστασις
$\psi z + \lambda$ εἶναι τετράγωνος, ἐὰν $\alpha = \beta \pm 1$ καὶ

ὅτι τοῦτο διδάσκεται εἰς τὰ Πορίσματα.

Εἰς τὸ πρόβλημα 5 τοῦ 5ου βιβλίου χρησιμοποιεῖ τὰς κάτωθι ταὐτότητας, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις ἔχει γίνει εἰς τὴν πραγματείαν του Πορίσματα:

Ἐὰν δοθῶσι δύο διαδοχικοὶ τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ σχηματίσωμεν τρίτον ἀριθμόν, ὅστις νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῶν δοθέντων σὺν δύο, ἰσχύουσιν αἱ ταὐτότητες

1) Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο σὺν τὸ ἄθροισμά των εἶναι τετράγωνος ἀριθμὸς καὶ

2) Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο σὺν τὸν τρίτον ἀριθμὸν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ἤτοι ἐὰν οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α^2 καὶ $(\alpha+1)^2$ καὶ σχηματίσωμεν τρίτον ἀριθμὸν τὸν $2[\alpha^2 + (\alpha+1)^2] + 2 = 4(\alpha^2 + \alpha + 1)$ ἰσχύουσιν αἱ κάτωθι 6 σχέσεις.

I

1. $\alpha^2(\alpha+1)^2 + \alpha^2 + (\alpha+1)^2 = (\alpha^2+\alpha+1)^2$
2. $\alpha^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + \alpha^2 + 4(\alpha^2+\alpha+1) = (2\alpha^2+\alpha+2)^2$
3. $(\alpha+1)^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + (\alpha+1)^2 + 4(\alpha^2+\alpha+1) = (2\alpha^2+3\alpha+3)^2$

II

4. $\alpha^2(\alpha+1)^2 + 4(\alpha^2+\alpha+1) = (\alpha^2+\alpha+2)^2$
5. $\alpha^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + (\alpha+1)^2 = (2\alpha^2+\alpha+1)^2$
6. $(\alpha+1)^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + \alpha^2 = (2\alpha^2+3\alpha+2)^2$.

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα 16 τοῦ 5ου βιβλίου χρησιμοποιεῖ τὴν πρότασιν, τὴν ὁποίαν ἔχει λάβει ἐκ τῶν Πορισμάτων, καθ' ἣν ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο κύβων..

Ἡ ἄλλη ἀπολεσθεῖσα πραγματεία τοῦ Διοφάντου ἔφερε τὸν τίτλον Μοριαστικὰ (δηλ. περὶ μορίων = περὶ κλασμάτων). Περὶ τῆς ὑπάρξεως ταύτης λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τοῦ Ἰαμβλίχου (H. Pistelli 127, 11).

Ὁ Διόφαντος ἔγραψε τὰ Ἀριθμητικά του 500 περίπου ἔτη μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου συγγραφὴν τῶν Στοιχείων. Εἰς τὸ διάστημα τῶν 500 ἐτῶν ὁ Εὐκλείδης καὶ τὰ Στοιχεῖά του εἶχον καταστῆ θρῦλος. Ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος, ὁ Πάππος, ὁ Μενέλαος καὶ ὁ Πτολεμαῖος καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι μεγάλοι μαθηματικοὶ ἐχρησιμοποίουν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἀληθείας ὡμολογημένας.

Ὅθεν εἶναι εὐνόητος ἡ σκέψις τοῦ Διοφάντου νὰ περιλάβῃ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀλγέβρας τῶν Ἑλλήνων εἰς 13 βιβλία, ὡς εἶχε πράξει ὁ Εὐκλείδης περιλαβὼν εἰς 13 βιβλία τὰ στοιχεῖα ἐν γένει τῶν μαθηματικῶν.

Ἀναγράφει δὲ ὁ ἴδιος εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του, ὅτι ταῦτα περιέχονται εἰς 13 βιβλία. Ἐκ τούτων διεσώθησαν μόνον τὰ πρῶτα 6, ἐν ᾧ τὰ ὑπόλοιπα 7 ἀπωλέσθησαν. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ περισωθέντα 6 βιβλία ἀπετέλουν τὴν συνήθη ὕλην διδασκαλίας εἰς Ἀνωτάτας Σχολὰς καὶ δι' αὐτὸ περιεσώθησαν, ὡς εὑρισκόμενα εἰς διαρκῆ χρῆσιν. Θεωροῦμεν ὅμως λογικὸν ὅτι τὰ ἀπολεσθέντα βιβλία θὰ ἀπετέλουν συνέχειαν τῶν διασωθέντων. Τοὐλάχιστον τὸ 7ον βιβλίον ἔπρεπε νὰ ἀσχολῆται μὲ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ τὴν ὁποίαν ἀσχολεῖται καὶ τὸ 6ον βιβλίον. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψει, τὸ μὲν ὅτι ὁλόκληρον τὸ 10ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (115 θεωρήματα) ἀσχολεῖται μὲ τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου δι' ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, τὸ δὲ ὅτι ὁ Διόφαντος εἰς τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων του χρησιμοποιεῖ πάντοτε ῥητὰς εὐθείας δικαιολογεῖται τὸ συμπέρασμα, ὅτι εἶναι λίαν πιθανὸν τὰ ἀπολεσθέντα 7 βιβλία νὰ ἠσχολοῦντο μὲ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ ῥητῶν εὐθειῶν. Ὁπωσδήποτε ὅμως οὐδὲν τεκμήριον ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τοῦ περιεχομένου τῶν ἀπολεσθέντων 7 βιβλίων.

Ἐκ τῆς σπουδῆς τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν Ἀριθμητικῶν συνάγεται μετὰ πολλῆς πιθανότητος τὸ συμπέρασμα, ὅτι ταῦτα δὲν περιεσώθησαν ὡς ἐγράφησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ Διοφάντου. Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνηγορεῖ, ἐκτὸς ἄλλων, καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ τέλος τῶν προτάσεων δὲν εἶναι ὁμοιόμορφον, ὅπως τοῦτο παρατηρεῖται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου μὲ τὰς τελικὰς φράσεις «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» ἢ «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι».

Ὁ ἀλγεβρικὸς συμβολισμὸς τοῦ Διοφάντου

Τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου εἶναι τὸ ἀρχαιότερον ἑλληνικὸν βιβλίον ἀλγέβρας εἰς τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται ἐξισώσεις πρὸς λύσιν προβλημάτων. Ὁ ἄγνωστος παρίσταται διὰ συμβόλου ὁμοιάζοντος πρὸς τὸ στίγμα (ϛ). Τὸ αὐτὸ σύμβολον χρησιμοποιεῖται διὰ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τοῦ αὐτοῦ προβλήματος καὶ ὄχι διάφορα σύμβολα. Οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζονται, ὡς γνωστόν, διὰ γραμμάτων. Ἡ ἐν σειρᾷ παράταξις αὐτῶν δηλοῖ πρόσθεσιν. Ὁ κανὼν διὰ τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὑποδηλοῦται μόνον διὰ δύο παράγοντας, πρᾶγμα ἀρκετὸν δι' ὁσουσδήποτε παράγοντας. Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου Δ^{Y} ἤτοι διὰ τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου γράμματος τῆς λέξεως Δύναμις ἐχούσης ὡς ἐκθέτην (ὄχι ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐκθέτου) τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως, τὸ ὕψιλον. $\Delta^{Y}\Delta$ σημαίνει δύναμις δυνάμεως ἤτοι ἡ τετάρτη δύναμις ἀριθμοῦ. Εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, κατ' ἐπαγωγήν, ὅτι $\Delta^{Y}\Delta\Delta$ θὰ ἐσήμαινε τὴν 6ην δύναμιν ἀριθμοῦ κλπ., τοιοῦτος ὅμως συμβολισμὸς δὲν ἔχει διασωθῇ. Ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου ἐκπεφρασμένου εἰς δύναμιν τινα τίθεται πάντοτε δεξιὰ τοῦ συμβόλου τοῦ δηλοῦντος τὴν δύναμιν π.χ. $\Delta^{Y}\alpha = \chi^2$, $\Delta^{Y}\beta = 2\chi^2$, $\Delta^{Y}\gamma = 3\chi^2$, $\Delta^{Y}\Delta\alpha = \chi^4$, $\Delta^{Y}\Delta\beta = 2\chi^4$ κλπ.

Ἡ τρίτη δύναμις, ὁ κύβος τοῦ ἀγνώστου παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου K^{Y} ἤτοι τοῦ ἀρχικοῦ Κεφαλαίου γράμματος τῆς λέξεως Κύβος ἔχοντος ὡς ἐκθέτην τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως τὸ ὕψιλον. $K^{Y}K$ σημαίνει κύβος εἰς τὸ τετράγωνον. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου τίθενται δεξιὰ τοῦ συμβόλου. πχ. $K^{Y}\alpha = \chi^3$, $K^{Y}\beta = 2\chi^3$, $K^{Y}\gamma = 3\chi^3$, $K^{Y}K\alpha = \chi^6$, $K^{Y}K\beta = 2\chi^6$ κλπ. Εἶναι φανερὸν ὅτι $K^{Y}KKKK\alpha$...σημαίνει $\chi^3 \cdot \chi^3 \cdot \chi^3 \cdot \chi^3 \cdot \chi^3 \cdots$

Ἐὰν δεξιὰ συμβόλου διὰ τὴν δύναμιν τοῦ ἀγνώστου, ὡς ἐκθέτης εἶναι ἓν χὶ ἀποκλίνον τοῦ συνήθους τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ παράστασις εἶναι παρανομαστὴς κλάσματος. πχ.

$$\Delta^{Y\times}\eta = \frac{8}{x^2},\ \Delta^{Y}\eta^{\times} = \frac{1}{8x^2},\ \Delta^{Y}\varepsilon^{\times}\theta = \frac{9}{5x^2},\ K^{Y\times}\iota = \frac{10}{x^3}$$

$$K^{Y}K\iota^{\times} = \frac{1}{10x^6},\ K^{Y}K\iota^{\times}\eta = \frac{8}{10x^6}$$

Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι ἀριθμητὴς καὶ ἔχει παρανομαστὴν πολυώνυμον λέγεται ἀριθμὸς τάδε ἐν μορίῳ τάδε. π.χ.

$$\frac{16}{x^4 + 36 + 12x^2}$$ λέγεται $\overset{o}{M}\iota\varsigma$ (μονάδες 16) ἐν μορίῳ $\Delta^{Y}\Delta\overset{o}{M}\lambda\varsigma\Delta^{Y}\iota\beta$.

Τὸ γράμμα $\overset{o}{M}$ (ἢ μ^{o}) σημαίνει μονάδες καὶ τίθεται πρὸ τοῦ γράμματος τοῦ δηλοῦντος ἀριθμόν τινα.

Εἰς τὰ προβλήματα τῶν Ἀριθμητικῶν δὲν χρησιμοποιοῦνται δυνάμεις μεγαλύτεραι τῆς ἕκτης. Ὁ Μιχαὴλ Ψελλὸς ὅμως (Ἀρχαὶ 11ου αἰῶνος ἐν Κων)πόλει) διὰ τῶν σχολίων του (ΙΙ τόμος τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου σελ. 37 - 38, ὑπὸ P. Tannery) πληροφορεῖ ἡμᾶς, ὅτι ἦτο γνωστὴ ἡ ἔκφρασις ὁσονδήποτε μεγάλης δυνάμεως. Οὕτω, λέγει, « $4 \cdot 8 = 32$. Ὁ 32 καλεῖται πρῶτος ἄλογος (διότι οὔτε τετράγωνος οὔτε κύβος εἶναι) καὶ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς π έ μ π τ ο ς (δηλ. ἡ 5η δύναμις τοῦ 2).

Δύναμις ἐπὶ ἄλογον πρῶτον ἴσον ἄλογος δεύτερος (ἤτοι $\alpha^2 . \alpha^5 = \alpha^{2+5} = \alpha^7$), ὅστις καλεῖται ἀ ρ ι θ μ ὸ ς ἔ β δ ο μ ο ς (εἶναι σαφὲς ὅτι πρόκειται διὰ τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.). Τετραπλῆ δύναμις καλεῖται, ὅταν ὁ κυβόκυβος (δηλ. α^6) πολ)σθῇ ἐπὶ δύναμιν (δηλ. α^2), ὁπότε $\alpha^6 \cdot \alpha^2 = \alpha^{6+2} = \alpha^8 = \alpha^{2+2+2+2}$, ἤτοι ὁ ἐκθέτης 8 εἶναι ἄθροισμα τεσσάρων 2. (Κατ' ἀναλογίαν ἕπεται τί εἶναι πενταπλῆ δύναμις, ἑξαπλῆ κλπ.).

Δύναμις ἐπὶ ἄλογον δεύτερον ἴσον κύβος ἐξελικτὸς (ἤτοι $\alpha^2 \cdot \alpha^7 = (\alpha^3)^3 = \alpha^9$. Ἐνταῦθα ἐννοεῖ τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν $3 \cdot 3$. Ταῦτα δύνανται νὰ εἶναι καὶ παρονομασταὶ κλασμάτων».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρων σχολίων τοῦ Ψελλοῦ βλέπομεν πῶς ἐσχηματίζοντο αἱ περιττῆς τάξεως δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος καὶ τὰς ὀνομασίας αὐτῶν. Ἀριθμὸς πέμπτος, ἕβδομος, ἔνατος, ἑνδέκατος κλπ. τοῦ ἀριθμοῦ α νοεῖται ὁ α^5, α^7, α^9, α^{11}....Διὰ τὰς δυνάμεις ἀρτίας τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ α συνάγεται ὁ κανὼν ἐκ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος τῆς τετραπλῆς δυνάμεως. Ὁ συμβολισμὸς τούτου εἶναι Δ^YΔΔΔΔ...ἤτοι $\alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2$... Δὲν ἐσώθησαν ὅμως προβλήματα, ὅπου νὰ ὑπάρχῃ δύναμις μεγαλυτέρα τῆς ἕκτης.

Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ αἱ ῥηταὶ λύσεις.

Οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ αἱ δι᾽ αὐτῶν πράξεις εἶναι γνωστὰ εἰς τὸν Διόφαντον. Ὁ θετικὸς ἀριθμὸς καλεῖται ὕπαρξις, ἐνῷ ὁ ἀρνητικὸς καλεῖται λεῖψις. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν, λέγει, ὅτι λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν ποιεῖ ὕπαρξιν (πλὴν ἐπὶ πλὴν = σύν) καὶ λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν (πλὴν ἐπὶ σὺν = πλήν). Ὁ Διόφαντος ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου θέτει εἰς τινα προβλήματα περιορισμοὺς διὰ νὰ ἔχῃ θετικὰς μόνον λύσεις. Ἐπίσης ἀποφεύγει τὰς ἀσυμμέτρους (ἀρρήτους) τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Εἰς πλεῖστα προβλήματα χρησιμοποιεῖ τεχνάσματα διὰ τὴν εὕρεσιν ῥητῶν λύσεων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄξια θαυμασμοῦ.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ μέθοδοι τοῦ Διοφάντου

Τὰ προβλήματα τῶν Ἀριθμητικῶν εἶναι προβλήματα λυόμενα διὰ ἁπλῶν ἐξισώσεων ἢ διὰ ἀλγεβρικων συστημάτων. Αἱ εἰς ταῦτα χρησιμοποιούμεναι ἐξισώσεις εἴτε εἶναι πρώτου βαθμοῦ, εἴτε δευτέρου, εἴτε ἀνάμικτοι. Μέγας ἀριθμὸς προβλημάτων εἶναι ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως εἴτε πρώτου βαθμοῦ εἴτε δευτέρου. Εἰς μίαν καὶ μόνην περίπτωσιν ὑπάρχει τριτοβάθμιος ἐξίσωσις (VI,17). Ἡ συνήθης μέθοδος ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος εἶναι ἡ τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἡ χρησιμοποίησις βοηθητικοῦ ἀγνώστου γίνεται πολλάκις. Ἡ λύσις τῆς ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ θεωρεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου γνωστὴ καὶ ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦτο γίνεται ἡ χρησιμοποίησίς της. Πολὺ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι συναληθεύουσι (διπλοϊσότης II,11) καὶ ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως συστήματος ἐξισώσεων, ἥτις καλεῖται παρισότητος ἀγωγὴ (μέθοδος προσεγγίσεως, V,9,11). Ἐκεῖ ὅπου γίνεται χρησιμοποίησις μεγίστης ἢ ἐλαχίστης τιμῆς ἑνὸς ἀγνώστου βλέπει κανεὶς μὲ θαυμασμὸν τὰς ἀλγεβρικὰς γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἰδιαιτέρως σημειοῦμεν τὴν μέθοδον ἀναλύσεως τετραγώνου ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων (II,8) καὶ τὴν μετατροπὴν τοῦ ἀθροίσματος δύο τετραγώνων εἰς ἄθροισμα ἄλλων δύο τετραγώνων (11,9). Ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν τί γράφει ὁ Thomas Heath εἰς τὴν ἔκδοσιν του τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Diophantus of Alexandria 1910, σελ. 145 : «Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου εἶναι αἰσθητῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ Ὄϊλερ (Euler) καίτοι ἡ τελευταία αὕτη ἐκφράζεται γενικώτερον» «Diophantus' solution is substantially the same as Eulers (Algebra, tr. Hewlett, Part II. Art 219). Δηλαδὴ ὁ Euler ἐχρησιμοποίησε τὴν λύσιν τοῦ Διοφάντου.

Τέλος ἡ μέθοδος κατασκευῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ ῥητῶν μεγεθῶν εἶναι ἀξία θαυμασμοῦ καὶ μαρτυρεῖ περὶ σπουδαίων γνώσεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ περίεργον εἶναι, ὅτι εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν προβλημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ζητοῦνται ἀκέραιαι λύσεις, ὅπως ζητοῦνται σήμερον (αἱ συναφεῖς ἐξισώσεις καλοῦνται Διοφαντικαί). Πιθανόν, ἡ ὀνομασία νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ προβλημάτων τῶν 7 ἀπολεσθέντων βιβλίων, ὅπου ἴσως νὰ ἐζητοῦντο ἀκέραιαι λύσεις.

Ἐὰν ἡ σπουδὴ τῶν προβλημάτων τοῦ Διοφάντου προκαλεῖ τὸν θαυμασμὸν διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, οὐχὶ μικρότερον θαυμασμὸν προκαλοῦσιν αἱ γνώσεις, τὰς ὁποίας ὁ Διόφαντος θεωρῶν γνωστὰς χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν δοθῶσι δύο ἀριθμοὶ (τὴν ταυτότητα δηλ. $(2\mu\nu)^2 + (\mu^2 - \nu^2)^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$).

Τὰ σχόλια ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν

Πρῶτος σχολιαστὴς τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου θεωρεῖται ἡ ὑπὸ τοῦ Βυζαντινοῦ λεξικογράφου Σουΐδα μνημονευομένη μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος Ὑπατία, θυγάτηρ τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἡ ὁποία κατὰ τὸ 412 ἐλιθοβολήθη ὑπὸ τοῦ εὐσεβοῦς μὲν ἀλλὰ θρησκοληπτου ὄχλου τῆς Ἀλεξανδρείας, ὡς Ἐθνική. Τὰ σχόλια ταῦτα δὲν ἐσώθησαν. Ἐκ τῶν Ἑλλήνων σχολιαστῶν θεωροῦνται ἐπιφανέστεροι οἱ ἐν Κων)πόλει ἀκμάσαντες λόγιοι Μιχαὴλ Ψελλὸς (11ος αἰών), Γεώργιος Παχυμέρης (13ος αἰὼν) καὶ Μάξιμος Πλανούδης (13ος αἰὼν))

Τὰ ἔργα τοῦ Διοφάντου ἐμελέτησαν πολὺ καὶ ἐσχολίασαν ἀπὸ τοῦ 8ου αἰῶνος καὶ ἑξῆς οἱ Ἄραβες, ἰδίως οἱ ἐν Αἰγύπτῳ, διὰ τῶν ὁποίων ταῦτα ἐγένοντο γνωστὰ εἰς τὴν Ἱσπανίαν. Κατὰ τὴν ἐποχὴν περίπου ἐκείνην εἶχον εἰσαχθῆ εἰς Ἀραβίαν ἐκ τῶν Ἰνδιῶν οἱ συμβολισμοὶ τῶν ἀριθμῶν 1....9 μετὰ τοῦ συμβολισμοῦ τοῦ μηδενὸς (0), ὅστις ἀποδίδεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων εἰς τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον (B.L. van der Waerden, Erwachende Wissen schaft σελ. 41). Ὁ νέος συμβολισμὸς ἐβοήθησε πολὺ τοὺς Ἄραβας εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀλγέβρας. Βασικὰς ὅμως νέας ἀλγεβρικὰς προτάσεις ἐπινοηθείσας ὑπὸ τῶν Ἀράβων ἡμεῖς δὲν ἔτυχε νὰ γνωρίσωμεν, ὅπως δὲν ἔτυχε νὰ γνωρίσωμεν τὰ τῆς ἐπινοήσεως ἔστω καὶ ἑνὸς γεωμετρικοῦ θεωρήματος ἢ μιᾶς μαθηματικῆς προτάσεως ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων. Ἡ λέξις ὅμως ἄλγεβρα εἶναι ἀραβικῆς, ὡς γνωστόν, προελεύσεως.

Εἰς τὴν Ἰταλίαν ἡ ἄλγεβρα εἰσήχθη κατὰ τὸν 12ον αἰῶνα (ἡ ἑλληνικὴ δηλ. μὲ τὸν νέον ἀραβικὸν συμβολισμὸν) ὑπὸ τοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης (Fibonazzi), ὅστις εἶχε ταξιδεύσει εἰς τὴν ἐγγὺς Ἀνατολὴν καὶ εἶχε γνωρισθῆ μὲ πολλοὺς λογίους Ἕλληνας καὶ Ἄραβας (λίαν πιθανῶς ἦτο ἐκ τῶν Σταυροφόρων). Ἡ ἐν Ἰταλίᾳ ἐκδοθεῖσα ἄλγεβρά του περὶ τὰ μέσα τοῦ 13ου αἰῶνος εἶναι διαπεποτισμένη ἐκ τῶν προβλημάτων τοῦ Διοφάντου χωρὶς βεβαίως νὰ μνημονεύεται τοῦτο, οὔτε καὶ ὁ Διόφαντος.

Τὸ ὄνομα τοῦ Διοφάντου μνημονεύεται ἐν Εὐρώπῃ διὰ πρώτην φορὰν κατὰ τὸ 1464 ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Regiomontanus (Ἰωάννου Müller), καταγομένου ἐκ τῆς πόλεως Königsberg τῆς Ἀνατολικῆς Πρωσσίας, εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν ἀστρονόμον τοῦ Δουκὸς τῆς Φερράρας Bianchini, ὅπου ἀναφέρεται, ὅτι εἰς τὴν Ἑνετίαν ἀνεκάλυψεν οὗτος μαθηματικὸν ἔργον τοῦ Ἕλληνος Διοφάντου μὴ μεταφρασθὲν ἀκόμη εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν. Ἐν τῷ μεταξὺ ἐδημοσιεύοντο ἐν Ἰταλίᾳ διάφορα ἐγχειρίδια ἀλγέβρας περιέχοντα προβλήματα τοῦ Διοφάντου χωρὶς ὅμως νὰ μνημονεύεται ὁ Διόφαντος. Κατὰ τὸ 1556 καὶ ὁ ἐπίσης Γερμανὸς μαθηματικὸς Ἰωακεὶμ Camerarius εἰς δημοσιευθεῖσαν ἐπιστολήν του ἐπισημαίνει τὴν ὕπαρξιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ, πλὴν ὅμως οὐδεμία προσπάθεια ἀνελήφθη πρὸς ἔκδοσίν των.

Κατὰ τὸ 1572 ὁ καλὸς Ἰταλὸς μαθηματικὸς Bombelli ἐδημοσίευσε τὴν περίφημον λεγομένην ἄλγεβράν του. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ταύτης γράφει, ὅτι ὁ φίλος του Ἀντώνιος Πάζης (Pazzi) τοῦ ἔδειξεν εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ ἓν Ἑλληνικὸν ἔργον ἐκδοθὲν ἀπὸ κάποιον Διόφαντον, ὁ ὁποῖος φαίνεται πολὺ καλὸς καὶ ὅτι ἐκ τοῦ ἔργου τούτου μετέφρασε μετὰ τοῦ Pazzi ἐκ τῶν 7 βιβλίων (Σημ. Παλαιοτέρα ἀρίθμησις τῶν 6 σωθέντων βιβλίων) τὰ 5. Εἰς τὴν ἄλγεβράν του αὐτὴν τὴν περίφημον, ὁ Bombelli περιέλαβε καὶ 143 προβλήματα (ἐκ τοῦ συνόλου τῶν 189 τῶν 6 βιβλίων τοῦ Διοφάντου) ὡς ἰδικά του, ἤτοι τὰ 35 ἐκ τῶν 39 τοῦ α′ βιβλίου, τὰ 27 ἐκ τῶν 35 τοῦ β′ βιβλίου, τὰ 21 ἐκ τῶν 21 ἤτοι τὸ σύνολον τοῦ γ′ βιβλίου, τὰ 40 ἐκ τῶν 40, ἤτοι τὸ σύνολον τοῦ δ′ βιβλίου καὶ τὰ 20 ἐκ τῶν 30 τοῦ ε′ βιβλίου. (Ἴδε P. ver Eecke, Diophante d' Alexandrie σελ. LXII - LXVII). Καὶ οὕτω πως ὁ Bombelli προήγαγεν ἐν Εὐρώπῃ τὴν ἄλγεβραν διὰ τῶν ἐπινοήσεών του.

Κατὰ τὸ 1575 ὁ Γερμανὸς Ἑλληνιστὴς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Heidelberg, Holzmann, ὅστις εἶχεν ἐξελληνίσει ἐξ ἀγάπης πρὸς τὴν Ἑλλάδα τὸ ὄνομά του εἰς Xylander (= Ξύλανδρος, Holz = ξύλον, mann = ἀνήρ) ἐδημοσίευσεν ἐν Γερμανίᾳ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου λατινιστὶ ἐξ Ἑλληνικοῦ χειρογράφου ἀνήκοντος εἰς τὸν ἐν Πολωνίᾳ Γερμανὸν πρεσβευτὴν Andreas Dudicius, τὸ ὁποῖον ἤδη εὑρίσκεται εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς παρὰ τὸ Αννόβερον γερμανικῆς Κωμοπόλεως Wolfenbüttel, ὅπου εὑρίσκεται καὶ τὸ χειρόγραφον τοῦ περιφήμου βοϊκοῦ προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους.

Τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Ἀριθμητικῶν μετὰ τοῦ ἐλαχίστου σωθέντος μέρους τῆς πραγματείας τοῦ Διοφάντου περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον τῷ 1621 ἐν Παρισίοις ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Claud Gaspar Bachet, Sieur de Méziriack, ἐκ χειρογράφου εὑρισκομένου ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῶν Παρισίων. Ὁ Bachet ἔκαμε καὶ σπουδαῖα σχόλια εἰς τὸν Διόφαντον καὶ οὕτω προήγαγε τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀλγέβρας. Εἶναι δὲ ὁ πρῶτος, ὅστις ἔλυσε τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \beta y = \gamma$. Τὰς συνεχεῖς ἐπιθέσεις τοῦ P. Fermat κατὰ τῶν ἐπὶ τοῦ Διοφάντου ἐργασιῶν τοῦ Bachet εὑρίσκομεν πάντη ἀδικαιολογήτους. Οὔτε εἶναι δυνατὸν νὰ συμφωνήσωμεν πρὸς τὸ θρυληθὲν δῆθεν «μέγα» θεώρημα τοῦ P. Fermat, καθ' ὃ δὲν ὑπάρχει λύσις τῆς ἐξισώσεως $z^3 = x^3 + y^3$, ἤτοι νὰ θεωρήσωμεν ὡς μέγα, ἁπλῶς τεθέν τι πρόβλημα δηλ. μίαν μὴ ἀποδειχθεῖσαν ἀρνητικὴν πρότασιν, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ ἐπίτευγμα τῆς ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου (530 π.Χ. περίπου) εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$, ἤτοι ἓν θετικὸν κατόρθωμα. Ἡ δευτέρα ἔκδοσις τοῦ κειμένου τῶν Ἀριθμητικῶν ἐγένετο πάλιν ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τοῦ υἱοῦ τοῦ P. Fermat τοῦ Samuel Fermat (Τουλούζῃ 1670) Αὕτη ὅμως ἦτο πλήρης σφαλμάτων. Ἡ τρίτη ἔκδοσις ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery ἐν Λειψίᾳ (B.C. Teubner) κατὰ τὸ 1893 (α' τόμος) καὶ κατὰ τὸ 1895 (β' τόμος, ὁ περιέχων τὰ σχόλια καὶ τὰ ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα). Ἡ παροῦσα ἔκδοσις εἶναι ἡ τετάρτη γενομένη ἔκδοσις τοῦ κειμένου ἐν Εὐρώπῃ καὶ ἡ πρώτη ἐν Ἑλλάδι διὰ τοῦ Τύπου.

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ Διοφάντου

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ Διοφάντου εἰς τὴν ἐξέλιξιν ἐν Εὐρώπῃ τῆς ἀλγέβρας καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν ὑπῆρξεν ἀποφασιστικῆς σημασίας. Διὰ τῶν Ἀράβων μετεδόθησαν εἰς τὴν Ἱσπανίαν αἱ πρῶται ἀλγεβρικαὶ γνώσεις αἱ προερχόμεναι ἐκ τῆς σπουδῆς καὶ τῶν σχολίων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἐν ᾧ διὰ τῶν Σταυροφόρων καὶ βραδύτερον διὰ τῶν εἰς τὴν Ἰταλίαν μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Κων)πόλεως καταφυγόντων λογίων μετεδόθησαν εἰς τὴν Εὐρώπην πλεῖσται ὅσαι ἑλληνικαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις. Ἀξιοσημείωτος εἶναι καὶ ἡ ἐν Ἰταλίᾳ ἐπίδρασις τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ Φραγκίσκου Μαυρολύκου, υἱοῦ Ἕλληνος ἰατροῦ ἐκ Κων)πόλεως, φυγόντος ἐκ ταύτης μετὰ τὴν ἅλωσιν. Σημειοῦμεν ἰδιαιτέρως τινὰς ἐκ τῶν νεωτέρων πως, οἱ ὁποῖοι ἐμελέτησαν μέ ἀγάπην καὶ ἀφοσίωσιν τὸν Διόφαντον. Οὗτοι εἶναι ὁ Xylander, ὁ Bachet, ὁ πατὴρ καὶ υἱὸς Fermat, ὁ Euler. Ὁ Πέτρος Φερμὰ (πατὴρ) ἔκαμε παρατηρήσεις εἰς ὅλα σχεδὸν τὰ προβλήματα τοῦ Διοφάντου, ἐν ᾧ ὁ Euler ἐνεπνεύσθη πολλὰς ἐκ τῶν μαθηματικῶν του ἀνακαλύψεων ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Ἐκ τῶν νεωτέρων ἐκδοτῶν καὶ μελετητῶν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ὀφείλομεν νὰ ἐξάρωμεν τοὺς F. Th. Poselger (Leipzig), Otto Schulz (Berlin), F. G. Nesselmann (Berlin), Thomas Heath (Cambridge), G. Wertheim (Leipzig), Paul ver Eecke (Bruges), Arthur Czwalina (Göttingen).

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ μῆνα Ἀπρίλιον 1963

Ε. Σ. Σταμάτης

ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

συμφώνως πρὸς τὸν σύγχρονον συμβολισμὸν (φ, χ, ψ, ω, z ἄγνωστοι, α, β, γ.... λ, μ, ν, ρ, φυσικοὶ ἀριθμοί).

Βιβλίον α΄.

1.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi - z = \beta$$

2.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi : z = \beta$$

3.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi = \beta z + \gamma$$

4.

$$\psi = \alpha z, \quad \psi - z = \beta$$

5.

$$\psi + z = \alpha, \qquad \frac{\psi}{\mu} + \frac{z}{\nu} = \beta$$

6.

$$\psi + z = \alpha, \qquad \frac{\psi}{\mu} - \frac{z}{\nu} = \beta$$

7.

$$\frac{\chi - \alpha}{\chi - \beta} = \rho$$

8.

$$\frac{\chi + \alpha}{\chi + \beta} = \rho$$

9.

$$\frac{\alpha - \chi}{\beta - \chi} = \rho$$

10.

$$\frac{\chi + \alpha}{\beta - \chi} = \rho$$

11.

$$\frac{\chi + \alpha}{\chi - \beta} = \rho$$

12.

$$\alpha = \psi_1 + \psi_2, \ (\psi_1 > \psi_2) \qquad \alpha = z_1 + z_2, \ (z_1 > z_2).$$

$$\frac{\psi_1}{z_2} = \mu, \qquad \frac{z_1}{\psi_2} = \nu$$

13.

$$\alpha = \psi_1 + \psi_2 = z_1 + z_2 = \omega_1 + \omega_2 . \qquad (\psi_1 > \psi_2, \ z_1 > z_2, \ \omega_1 > \omega_2).$$

$$\frac{\psi_1}{z_2} = \varkappa, \qquad \frac{z_1}{\omega_2} = \lambda, \qquad \frac{\omega_1}{\psi_2} = \mu$$

14.

$$\frac{\psi z}{\psi + z} = \frac{\mu}{\nu}$$

15.

$$\frac{\psi+\alpha}{z-\alpha}=\mu, \qquad \frac{z+\beta}{\psi-\beta}=\nu$$

16.

$$\psi + z = \alpha, \; z + \omega = \beta, \; \omega + \psi = \gamma$$

17.

$$\psi + z + \omega = \alpha, \; z + \omega + \varphi = \beta, \; \omega + \varphi + \psi = \gamma, \; \varphi + \psi + z = \delta.$$

18.

$$\psi + z = \omega + \alpha, \; z + \omega = \psi + \beta, \; \omega + \psi = z + \gamma$$

19.

$$\psi + z + \omega = \varphi + \alpha, \quad z + \omega + \varphi = \psi + \beta,$$
$$\omega + \varphi + \psi = z + \gamma, \quad \varphi + \psi + z = \omega + \delta$$

20

$$\psi + z + \omega = \alpha, \qquad \frac{\psi + z}{\omega} = \beta, \qquad \frac{z + \omega}{\psi} = \gamma$$

21.

$$\psi - z = \frac{\omega}{\lambda}, \quad z - \omega = \frac{\psi}{\mu}, \quad \omega - \alpha = \frac{z}{\nu}$$

22.

$$\psi - \frac{\psi}{\lambda} + \frac{\omega}{\nu} = z - \frac{z}{\mu} + \frac{\psi}{\lambda} = \omega - \frac{\omega}{\nu} + \frac{z}{\mu}$$

23.

$$\psi - \frac{\psi}{\varkappa} + \frac{\varphi}{\nu} = z - \frac{z}{\lambda} + \frac{\psi}{\varkappa} = \omega - \frac{\omega}{\mu} + \frac{z}{\lambda} = \varphi - \frac{\varphi}{\nu} + \frac{\omega}{\mu}$$

24.

$$\psi + \frac{z+\omega}{\lambda} = z + \frac{\psi+\omega}{\mu} = \omega + \frac{\psi+z}{\nu}$$

25.

$$\psi + \frac{z+\omega+\varphi}{\varkappa} = z + \frac{\omega+\varphi+\psi}{\lambda} = \omega + \frac{\varphi+\psi+z}{\mu} = \varphi + \frac{\psi+z+\omega}{\nu}$$

26.

$$\alpha\chi = \gamma^2, \quad \beta\chi = \gamma$$

27.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi z = \beta$$

28.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi^2 + z^2 = \beta$$

29.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi^2 - z^2 = \beta$$

30.

$$\psi - z = \alpha, \quad \psi z = \beta$$

31.

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{\psi^2+z^2}{\psi+z}=\beta$$

32.

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{\psi^2+z^2}{\psi-z}=\beta$$

33

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{\psi^2-z^2}{\psi+z}=\beta$$

34

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{\psi^2-z^2}{\psi-z}=\beta$$

35

$$\frac{\psi}{z}=\alpha, \qquad \frac{z^2}{\psi}=\beta$$

36.

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{z^2}{z}=\beta$$

37.

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{z^2}{\psi+z}=\beta$$

38.

$$\frac{\psi}{z}=\alpha \qquad \frac{z^2}{\psi-z}=\beta$$

39.

Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ α,β. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις χ, ὅπως οἱ $(\alpha+\beta)$, $(\beta+x)\alpha$, $(x+\alpha)\beta$ ἀποτελῶσι διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου.

Βιβλίον β'.

(Σημ. Τὰ προβλήματα 1 - 7 ἀποτελοῦσι συνέχειαν τοῦ α'. βιβλίου καὶ θεωροῦνται παρεμβολὴ ὑπὸ τινος σχολιαστοῦ ἢ σπουδαστοῦ τινος, ἂν τὸ βιβλίον τοῦτο ἐσώθη ἐκ σημειώσεων σπουδαστοῦ).

1.

$$\frac{\psi+z}{\psi^2+z^2}=\alpha$$

2.

$$\frac{\psi-z}{\psi^2-z^2}=\alpha$$

3.

$$\frac{\psi z}{\psi+z}=\alpha, \qquad \frac{\psi z}{\psi-z}=\beta$$

4.

$$\frac{\psi^2+z^2}{\psi-z}=\alpha$$

5.

$$\frac{\psi^2-z^2}{\psi+z}=\alpha$$

6.

$$\psi - z = \alpha, \quad \psi^2 - z^2 = \psi - z + \beta$$

7.

$$\psi^2 - z^2 = \alpha(\psi - z) + \beta$$

8.

Δοθεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

9.

Ἐὰν $\alpha = \beta^2 + \gamma^2$ νὰ εὑρεθῇ $\alpha = \delta^2 + \varepsilon^2$

10.

$$\psi^2 - \chi^2 = \alpha$$

11.

$\chi + \alpha = \gamma^2, \quad \chi + \beta = \delta^2.$ (Μέθοδος διπλοϊσότητος.)

12.

$$\alpha - \psi = \gamma^2, \quad \beta - \psi = \delta^2$$

13.

$$\chi - \alpha = \gamma^2, \quad \chi - \beta = \delta^2$$

14.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi + \chi^2 = \beta^2, \quad z + \chi^2 = \gamma^2$$

15.

$$\alpha = \psi + z, \quad \omega^2 - \psi = \beta^2, \quad \omega^2 - z = \gamma^2$$

16.

$$\psi = \rho z, \quad \psi + \alpha^2 = \beta^2, \quad z + \alpha^2 = \gamma^2$$

17.

$$\psi - \left(\frac{\psi}{\lambda} + \alpha\right) + \frac{\omega}{\nu} + \gamma = z - \left(\frac{z}{\mu} + \beta\right) + \frac{\psi}{\lambda} + \alpha = \omega - \left(\frac{\omega}{\nu} + \gamma\right) + \frac{z}{\mu} + \beta$$

18.

$\psi + z + \omega = \sigma$ καὶ τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου προβλήματος. Καὶ τὰ δύο προβλήματα (17,18) θεωροῦνται μὴ γνήσια.

19.

$$\frac{\psi^2 - z^2}{z^2 - \omega^2} = \rho$$

20.

$$\psi^2 + z = \alpha^2, \quad z^2 + \psi = \beta^2$$

21.

$$\psi^2 - z = \alpha^2, \quad z^2 - \psi = \beta^2$$

22.

$$\psi^2 + (\psi + z) = \alpha^2, \quad z^2 + \psi + z = \beta^2$$

23.

$$\psi^2 - (\psi + z) = \alpha^2, \quad z^2 - (\psi + z) = \beta^2$$

24.

$$(\psi + z)^2 + \psi = \alpha^2, \quad (\psi + z)^2 + z = \beta^2$$

25.

$$(\psi + z)^2 - \psi = \alpha^2, \qquad (\psi + z)^2 - z = \beta^2$$

26.

$$\psi z + \psi = \omega^2, \quad \psi z + z = \varphi^2, \quad \omega + \varphi = \alpha$$

27.

$$\psi z - \psi = \omega^2, \quad \psi z - z = \varphi^2, \quad \omega + \varphi = \alpha$$

28.

$$\psi^2 z^2 + \psi^2 = \alpha^2, \qquad \psi^2 z^2 + z^2 = \beta^2$$

29.

$$\psi^2 z^2 - \psi^2 = \alpha^2 \qquad \psi^2 z^2 - z^2 = \beta^2$$

30.

$$\psi z + (\psi + z) = \varkappa^2 \qquad \psi z - (\psi + z) = \lambda^2$$

31.

$$\psi + z = \omega^2, \qquad \psi z + (\psi + z) = \varkappa^2, \qquad \psi z - (\psi + z) = \lambda^2$$

32.

$$\psi^2 + z = \varkappa^2, \quad z^2 + \omega = \lambda^2, \quad \omega^2 + \psi = \xi^2$$

33.

$$\psi^2 - z = \varkappa^2, \quad z^2 - \omega = \lambda^2, \quad \omega^2 - \psi = \xi^2$$

34.

$$\psi^2 + (\psi + z + \omega) = \varkappa^2, \quad z^2 + (\psi + z + \omega) = \lambda^2, \quad \omega^2 + (\psi + z + \omega) = \xi^2$$

35.

$$\psi^2 - (\psi + z + \omega) = \varkappa^2, \quad z^2 - (\psi + z + \omega) = \lambda^2, \quad \omega^2 - (\psi + z + \omega) = \xi^2$$

Βιβλίον γ'.

1.

$$(\psi + z + \omega) - \psi^2 = \varkappa^2, \quad (\psi + z + \omega) - z^2 = \lambda^2, \quad (\psi + z + \omega) - \omega^2 = \mu^2$$

2.

$$(\psi + z + \omega)^2 + \psi = \varkappa^2, \quad (\psi + z + \omega)^2 + z = \lambda^2, \quad (\psi + z + \omega)^2 + \omega = \mu^2$$

3.

$$(\psi + z + \omega)^2 - \psi = \varkappa^2, \quad (\psi + z + \omega)^2 - z = \lambda^2, \quad (\psi + z + \omega)^2 - \omega = \mu^2$$

4.

$$\psi - (\psi + z + \omega)^2 = \varkappa^2, \quad z - (\psi + z + \omega)^2 = \lambda^2, \quad \omega - (\psi + z + \omega)^2 = \mu^2$$

5.

$$\psi + z + \omega = \varkappa^2, \quad \psi + z - \omega = \lambda^2, \quad z + \omega - \psi = \mu^2, \quad \omega + \psi - z = \nu^2$$

6.

$$\psi + z + \omega = \varkappa^2, \quad \psi + z = \lambda^2, \quad z + \omega = \mu^2, \quad \omega + \psi = \nu^2$$

7.

$$z - \psi = \omega - z, \quad z + \omega = \lambda^2, \quad \omega + \psi = \mu^2, \ \psi + z = \varkappa^2$$

8.

$$\psi + z + \alpha = \varkappa^2,\ z + \omega + \alpha = \lambda^2,\ \omega + \psi + \alpha = \mu^2,\ \psi + z + \omega + \alpha = \nu^2$$

9.

$$\psi + z - \alpha = \varkappa^2,\ z + \omega - \alpha = \lambda^2,\ \omega + \psi - \alpha = \mu^2,\ \psi + z + \omega - \alpha = \nu^2$$

10.

$$\psi z + \alpha = \varkappa^2,\quad z\omega + \alpha = \lambda^2,\quad \omega\psi + \alpha = \mu^2$$

11.

$$\psi z - \alpha = \varkappa^2,\quad z\omega - \alpha = \lambda^2,\quad \omega\psi - \alpha = \mu^2$$

12.

$$\psi z + \omega = \varkappa^2,\quad z\omega + \psi = \lambda^2,\quad \omega\psi + z = \mu^2$$

13.

$$\psi z - \omega = \varkappa^2,\quad z\omega - \psi = \lambda^2,\quad \omega\psi - z = \mu^2$$

14.

$$\psi z + \omega^2 = \varkappa^2,\quad z\omega + \psi^2 = \lambda^2,\quad \omega\psi + z^2 = \mu^2$$

15.

$$\psi z + (\psi + z) = \varkappa^2,\quad z\omega + (z + \omega) = \lambda^2,\quad \omega\psi + (\omega + \psi) = \mu^2$$

16.

$$\psi z - (\psi + z) = \varkappa^2,\quad z\omega - (z + \omega) = \lambda^2,\quad \omega\psi - (\omega + \psi) = \mu^2$$

17.

$$\psi z + \psi = \varkappa^2,\quad \psi z + z = \lambda^2,\quad \psi z + (\psi + z) = \mu^2$$

18.

$$\psi z - \psi = \varkappa^2, \quad \psi z - z = \lambda^2, \quad \psi z - (\psi + z) = \mu^2$$

19.

$$(\psi + z + \omega + \varphi)^2 \pm \psi, \pm z, \pm \omega, \pm \varphi = \text{τετράγωνος}$$

(Πρώτη χρῆσις κατασκευῆς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ῥητὰς πλευράς).

20.

$$\alpha = \psi + z, \quad \omega^2 - \psi = \varkappa^2, \quad \omega^2 - z = \lambda^2$$

21.

$$\alpha = \psi + z, \quad \omega^2 + \psi = \varkappa^2, \quad \omega^2 + z = \lambda^2$$

Βιβλίον δ'.

1.

$$\psi + z = \alpha, \quad \psi^3 + z^3 = \beta$$

2.

$$\psi - z = \alpha, \quad \psi^3 - z^3 = \beta$$

3.

$$\psi^2 z = \alpha, \quad \psi z = \alpha^3$$

4.

$$\psi^2 + z = \alpha^2, \quad \psi + z = \alpha$$

5.

$$\psi^2 + z = \alpha, \quad \psi + z = \alpha^2$$

6.

$$\psi^3 + z^2 = \varkappa^3, \quad \varphi^2 + z^2 = \lambda^2$$

7.

$$\psi^3 + z^2 = \varkappa^2, \quad \varphi^2 + z^2 = \lambda^3$$

8.

$$\psi^3 + z = \varkappa^3, \quad \psi + z = \varkappa$$

9.

$$\psi^3 + z = \varkappa, \quad \psi + z = \varkappa^3$$

10.

$$\psi^3 + z^3 = \psi + z$$

11.

$$\psi^3 - z^3 = \psi - z$$

12.

$$\psi^3 + z = z^3 + \psi$$

13.

$$\psi + 1 = \alpha^2, \quad z + 1 = \beta^2, \quad \psi + z + 1 = \gamma^2, \quad z - \psi + 1 = \delta^2$$

14.

$$\psi^2 + z^2 + \omega^2 = (\psi^2 - z^2) + (z^2 - \omega^2) + (\psi^2 - \omega^2), \quad (\psi^2 > z^2 > \omega^2)$$

15.

$$(\psi + z)\,\omega = \alpha, \quad (z + \omega)\,\psi = \beta, \quad (\omega + \psi)\,z = \gamma$$

16.

$$\psi + z + \omega = \alpha^2, \ \psi^2 + z = \beta^2, \ z^2 + \omega = \gamma^2, \ \omega^2 + \psi = \delta^2$$

17.

$$\psi + z + \omega = \alpha^2, \ \psi^2 - z = \beta^2, \ z^2 - \omega = \gamma^2, \ \omega^2 - \psi = \delta^2$$

18.

$$\psi^3 + z = \alpha^3, \qquad z^2 + \psi = \beta^2$$

19.

$$\psi z + 1 = \alpha^2, \ z\omega + 1 = \beta^2, \ \omega\psi + 1 = \gamma^2$$

20.

$$\psi z+1 = \alpha^2, \ \psi\omega+1 = \beta^2, \ \psi\varphi+1 = \gamma^2, \ z\omega+1 = \delta^2, \ z\varphi+1 = \varepsilon^2, \ \omega\varphi+1 = \zeta^2$$

21.

$$z - \psi = \alpha^2, \ \omega - z = \beta^2, \ \omega - \psi = \gamma^2, \ \psi : z = z : \omega$$

22.

$$\psi z\omega + \psi = \alpha^2, \ \psi z\omega + z = \beta^2, \ \psi z\omega + \omega = \gamma^2$$

23.

$$\psi z\omega - \psi = \alpha^2, \ \psi z\omega - z = \beta^2, \ \psi z\omega - \omega = \gamma^2$$

24.

$$\alpha = \psi + z, \ \psi z = \beta^3 - \beta$$

25.

$$\psi + z + \omega = \alpha, \quad \psi z \omega = [\,(\omega - z) + (\omega - \psi) + (z - \psi)\,]^3$$

26.

$$\psi z + \psi = \alpha^3, \quad \psi z + z = \beta^3$$

27.

$$\psi z - \psi = \alpha^3, \quad \psi z - z = \beta^3$$

28.

$$\psi z + (\psi + z) = \alpha^3, \quad \psi z - (\psi + z) = \beta^3$$

29.

$$\psi^2 + z^2 + \omega^2 + \varphi^2 + \psi + z + \omega + \varphi = \lambda$$

30.

$$\psi^2 + z^2 + \omega^2 + \varphi^2 - (\psi + z + \omega + \varphi) = \lambda$$

31.

$$\psi + z = 1, \quad (\psi + \alpha)(\psi + \beta) = \gamma^2$$

32.

$$\psi + z + \omega = \lambda, \quad \psi z + \omega = \alpha^2, \quad \psi z - \omega = \beta^2$$

33.

$$\psi + \frac{z}{\lambda} = \alpha\left(z - \frac{z}{\lambda}\right), \qquad z + \frac{\psi}{\lambda} = \beta\left(\psi - \frac{\psi}{\lambda}\right)$$

Λῆμμα

$$\psi z + (\psi + z) = \alpha, \qquad \psi = \frac{\alpha - z}{z + 1}$$

34.

$$\psi z + \psi + z = \alpha, \quad z\omega + z + \omega = \beta, \quad \omega\psi + \omega + \psi = \gamma$$

Λῆμμα

$$\psi z - (\psi + z) = \alpha, \qquad \psi = \frac{\alpha + z}{z - 1}$$

35.

$$\psi z - (\psi + z) = \alpha, \qquad z\omega - (z + \omega) = \beta, \qquad \omega\psi - (\omega + \psi) = \gamma$$

Λῆμμα

$$\frac{\psi z}{\psi + z} = \alpha, \qquad \psi = \frac{\alpha z}{z - \alpha}$$

36.

$$\frac{\psi z}{\psi + z} = \alpha, \qquad \frac{z\omega}{z + \omega} = \beta, \qquad \frac{\omega\psi}{\omega + \psi} = \gamma$$

37.

$$\frac{\psi z}{\psi + z + \omega} = \alpha, \qquad \frac{z\omega}{\psi + z + \omega} = \beta, \qquad \frac{\omega\psi}{\psi + z + \omega} = \gamma$$

38.

$$(\psi + z + \omega)\psi = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2}, \ (\psi + z + \omega)\, z = \beta^2, \ \ (\psi + z + \omega)\omega = \gamma^3$$

39.

$$\frac{\omega - z}{z - \psi} = \rho, \quad \psi + z = \alpha^2, \quad z + \omega = \beta^2, \quad \psi + \omega = \gamma^2, \quad (\omega > z > \psi).$$

40.

$$\frac{\omega^2 - z^2}{z - \psi} = \rho, \qquad \psi + z = \alpha^2, \quad z + \omega = \beta^2, \quad \psi + \omega = \gamma^2, \quad (\omega > z > \psi).$$

Βιβλίον ε΄.

1.

$$\frac{\psi}{z} = \frac{z}{\omega}, \qquad \psi - \delta = \alpha^2, \qquad z - \delta = \beta^2, \qquad \omega - \delta = \gamma^2$$

2.

$$\frac{\psi}{z} = \frac{z}{\omega}, \qquad \psi + \delta = \alpha^2, \qquad z + \delta = \beta^2, \qquad \omega + \delta = \gamma^2.$$

3.

$$\psi + \lambda = \alpha^2, z + \lambda = \beta^2, \omega + \lambda = \gamma^2, \psi z + \lambda = \delta^2, z\omega + \lambda = \varepsilon^2, \omega\psi + \lambda = \zeta^2$$

4.

$$\psi - \lambda = \alpha^2, \; z - \lambda = \beta^2, \; \omega - \lambda = \gamma^2, \; \psi z - \lambda = \delta^2, \; z\omega - \lambda = \varepsilon^2, \; \omega\psi - \lambda = \zeta^2.$$

5.

$$\psi^2 z^2 + (\psi^2 + z^2) = \alpha^2 \qquad \psi^2 z^2 + \omega^2 = \delta^2$$

$$z^2 \omega^2 + (z^2 + \omega^2) = \beta^2 \qquad z^2\omega^2 + \psi^2 = \varepsilon$$

$$\omega^2 \psi^2 + (\omega^2 + \psi^2) = \gamma^2 \qquad \omega^2 \psi^2 + z^2 = \zeta^2.$$

6.

$$\psi - 2 = \alpha^2 \qquad \psi z - (\psi + z) = \delta^2 \qquad \psi z - \omega = \varkappa^2$$

$$z - 2 = \beta^2 \qquad z\omega - (z + \omega) = \varepsilon^2 \qquad z\omega - \psi = \lambda^2$$

$$\omega - 2 = \gamma^2 \qquad \psi\omega - (\psi + \omega) = \zeta^2 \qquad \psi\omega - z = \mu^2$$

Λῆμμα

$\psi z + (\psi^2 + z^2) = \alpha^2$. Ἂν $\alpha^2 = (\psi - \lambda z)^2$ θὰ εἶναι $\psi = \dfrac{z\ (\lambda^2 - 1)}{1 + 2\lambda}$

Ἄλλο λῆμμα

Τρόπος εὑρέσεως τριῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἐχόντων ἴσα ἐμβαδά.

7.

$\psi^2 \pm (\psi + z + \omega) =$ τετράγωνος, $z^2 \pm (\psi + z + \omega) =$ τετράγωνος, $\omega^2 \pm (\psi + z + \omega) =$ τετράγωνος.

Λῆμμα

Δίδονται α^2, β^2, γ^2. Νὰ εὑρεθῶσι οἱ ψ, z, ω, ὥστε $\psi z = \alpha^2$, $\psi\omega = \beta^2$, $z\omega = \gamma^2$.

8.

$\psi z \pm (\psi + z + \omega) =$ τετράγωνος, $z\omega \pm (\psi + z + \omega) =$ τετράγωνος, $\psi\omega \pm (\psi + z + \omega) =$ τετράγωνος.

9.

$$\psi + z = 1, \quad \psi + \alpha = \varkappa^2, \quad z + \alpha = \lambda^2.$$

Περιορισμός. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α δὲν πρέπει νὰ εἶναι περιττός, οὔτε ὁ $2\alpha + 1$ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c - 1$.

10.

$$\psi + z = 1, \quad \psi + \alpha_1 = \beta^2, \quad z + \alpha_2 = \gamma^2.$$

11.

$$\psi + z + \omega = 1, \quad \psi + \delta = \alpha^2, \quad z + \delta = \beta^2, \quad \omega + \delta = \gamma^2.$$

12.

$$\psi + z + \omega = 1, \quad \psi + \delta_1 = \alpha^2, \quad z + \delta_2 = \beta^2, \quad \omega + \delta_3 = \gamma^2.$$

13.

$$\psi + z + \omega = \delta, \quad \psi + z = \alpha^2, \quad z + \omega = \beta^2, \quad \psi + \omega = \gamma^2.$$

14.

$$\psi + z + \omega + \varphi = \lambda, \quad \psi + z + \omega = \alpha^2,$$

$$z + \omega + \varphi = \beta^2, \quad \omega + \varphi + \psi = \gamma^2, \quad \varphi + \psi + z = \delta^2.$$

15.

$$\psi + z + \omega = x, \quad x^3 + \psi = \alpha^3, \quad x^3 + z = \beta^3, \quad x^3 + \omega = \gamma^3.$$

16.

$$\psi + z + \omega = x, \quad x^3 - \psi = \alpha^3, \quad x^3 - z = \beta^3, \quad x^3 - \omega = \gamma^3.$$

17.

$$\psi + z + \omega = x, \quad \psi - x^3 = \alpha^3, \quad z - x^3 = \beta^3, \quad \omega - x^3 = \gamma^3$$

18.

$$\psi + z + \omega = x^2, \quad x^6 + \psi = \alpha^2, \quad x^6 + z = \beta^2, \quad x^6 + \omega = \gamma^2$$

19.

$$\psi + z + \omega = x^2, \quad x^6 - \psi = \alpha^2, \quad x^6 - z = \beta^2, \quad x^6 - \omega = \gamma^2$$

⟨ 19α ⟩

$$\psi + z + \omega = x^2, \quad \psi - x^6 = \alpha^2, \quad z - x^6 = \beta^2, \quad \omega - x^6 = \gamma^2$$

⟨ 19β ⟩

$$\psi + z + \omega = \delta, \quad \delta^3 + \psi = \alpha^2, \quad \delta^3 + z = \beta^2, \quad \delta^3 + \omega = \gamma^2$$

⟨ 19γ ⟩

$$\psi + z + \omega = \delta, \quad \delta^3 - \psi = \alpha^2, \quad \delta^3 - z = \beta^2, \quad \delta^3 - \omega = \gamma^2$$

20.

$$\psi + z + \omega = \delta, \quad \psi - \delta^3 = \alpha^2, \quad z - \delta^3 = \beta^2, \quad \omega - \delta^3 = \gamma^2$$

21.

$$\psi^2 z^2 \omega^2 + \psi^2 = \alpha^2, \qquad \psi^2 z^2 \omega^2 + z^2 = \beta^2, \qquad \psi^2 z^2 \omega^2 + \omega^2 = \gamma^2$$

22.

$$\psi^2 z^2 \omega^2 - \psi^2 = \alpha^2, \qquad \psi^2 z^2 \omega^2 - z^2 = \beta^2, \qquad \psi^2 z^2 \omega^2 - \omega^2 = \gamma^2$$

23.

$$\psi^2 - \psi^2 z^2 \omega^2 = \alpha^2, \quad z^2 - \psi^2 z^2 \omega^2 = \beta^2, \quad \omega^2 - \psi^2 z^2 \omega^2 = \gamma^2$$

24.

$$\psi^2 z^2 + 1 = \alpha^2, \quad \psi^2 \omega^2 + 1 = \beta^2, \quad z^2 \omega^2 + 1 = \gamma^2$$

25.

$$\psi^2 z^2 - 1 = \alpha^2, \quad \psi^2 \omega^2 - 1 = \beta^2, \quad z^2 \omega^2 - 1 = \gamma^2$$

26.

$$1 - \psi^2 z^2 = \alpha^2, \quad 1 - \psi^2 \omega^2 = \beta^2, \quad 1 - z^2 \omega^2 = \gamma^2$$

27.

$$\psi^2 + z^2 + \delta = \alpha^2, \quad \psi^2 + \omega^2 + \delta = \beta^2, \quad z^2 + \omega^2 + \delta = \gamma^2$$

28.

$$\psi^2 + z^2 - \delta = \alpha^2, \quad \psi^2 + \omega^2 - \delta = \beta^2, \quad z^2 + \omega^2 - \delta = \gamma^2$$

29.

Νὰ εὑρεθῶσι οἱ ψ^2, z^2, ω^2, ὥστε $\psi^4 + z^4 + \omega^4 = \alpha^2$

30.

$$\gamma\psi = \alpha, \quad \delta z = \beta, \quad \alpha + \beta = \varkappa^2, \quad \varkappa^2 + \varepsilon = \mu^2, \quad \mu = \psi + z$$

Βιβλίον ϛ΄.

Εἰς τὰ 24 προβλήματα τοῦ 6ου βιβλίου ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου. Καλοῦμεν ψ,z τὰς καθέτους πλευρὰς καὶ ω τὴν ὑποτείνουσαν.

1.

$$\omega - \psi = \alpha^3, \qquad \omega - z = \beta^3,$$

2.

$$\omega + \psi = \alpha^3, \qquad \omega + z = \beta^3$$

3.

$$\frac{1}{2}\psi z + \delta = \alpha^2$$

4.

$$\frac{1}{2}\psi z - \delta = \alpha^2$$

5.

$$\delta - \frac{1}{2}\psi z = \alpha^2$$

6.

$$\frac{1}{2}\psi z + \psi = \delta, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\psi z + z = \varepsilon\right)$$

7.

$$\frac{1}{2}\psi z - \psi = \delta, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\psi z - z = \varepsilon\right)$$

8.

$$\frac{1}{2}\psi z + (\psi + z) = \delta$$

9.

$$\frac{1}{2}\psi z - (\psi + z) = \delta$$

10.

$$\frac{1}{2}\psi z + (\omega + \psi) = \delta, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\psi z + (\omega + z) = \delta\right)$$

11.

$$\frac{1}{2}\psi z - (\omega + \psi) = \delta, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\psi z - (\omega + z) = \delta\right)$$

Λῆμμα

$$\psi > z, \quad \psi - z = \alpha^2, \quad \psi = \beta^2, \qquad \frac{1}{2}\psi z + z = \gamma^2$$

Ἄλλο λῆμμα

Δίδονται $\alpha+\beta=\varkappa^2$. Εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι λ^2, μ^2,... ὥστε $\alpha\lambda^2+\beta=\tau^2$, $\beta\mu^2+\alpha=\sigma^2$

12.

$$\frac{1}{2}\psi z+\psi=\alpha^2, \qquad \frac{1}{2}\psi z+z=\beta^2$$

13.

$$\frac{1}{2}\psi z-\psi=\alpha^2, \qquad \frac{1}{2}\psi z-z=\beta^2$$

14.

$$\frac{1}{2}\psi z-\omega=\alpha^2, \qquad \frac{1}{2}\psi z-\psi=\beta^2, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\psi z-z=\gamma^2\right)$$

15.

$$\frac{1}{2}\psi z+\omega=\alpha^2, \qquad \frac{1}{2}\psi z+\psi=\beta^2, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\psi z+z=\gamma^2\right)$$

16.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ διχοτόμος μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν νὰ εἶναι ῥητὸς ἀριθμός.

17.

$$\frac{1}{2}\psi z+\omega=\alpha^2, \qquad \psi+z+\omega=\beta^3$$

18.

$$\frac{1}{2}\psi z+\omega=\alpha^3, \qquad \psi+z+\omega=\beta^2$$

19.

$$\frac{1}{2}\psi z + \psi = \alpha^2, \qquad \psi + z + \omega = \beta^3$$

20.

$$\frac{1}{2}\psi z + \psi = \alpha^3, \qquad \psi + z + \omega = \beta^2$$

21.

$$\psi + z + \omega = \alpha^2, \qquad \psi + z + \omega + \frac{1}{2}\psi z = \beta^3$$

22.

$$\psi + z + \omega = \alpha^3, \qquad \psi + z + \omega + \frac{1}{2}\psi z = \beta^2$$

23.

$$\omega^2 = \alpha^2 + \alpha, \qquad \frac{\omega^2}{\psi} = \beta^3 + \beta, \qquad \left(\text{ἢ } \frac{\omega^2}{z} = \gamma^3 + \gamma \right)$$

24.

$$\psi = \alpha^3, \qquad z = \beta^3 - \beta, \qquad \omega = \gamma^3 + \gamma$$

Περισωθέντα θεωρήματα περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν.

1.

Ἐὰν $AB > B\Gamma > \Gamma\Delta$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ἰσχύει πάντοτε

$$8\,AB \cdot B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = (AB + 2B\Gamma)^2$$

2.

Ἔστω δ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, α ὁ πρῶτος ὅρος, τ ὁ τελευταῖος καὶ ν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων. Ἀποδεικνύεται:

$$\tau - \alpha = (\nu - 1)\delta$$

3.

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $A + B + \Gamma + ... + Z = \Sigma$ μὲ πλῆθος τῶν ὅρων ν. Ἀποδεικνύεται:

$$(A + Z)\nu = 2\,(A + B + \Gamma + ... + Z) \quad \text{ἢ} \quad \Sigma = \frac{(A + Z)\nu.}{2}$$

4.

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῆς μορφῆς

$$\Sigma = 1 + (1 + \delta) + (1 + 2\delta) + ... + [1 + (\nu - 1)\delta]$$

εἶναι $\Sigma \cdot 8\delta + (\delta - 2)^2 = [2 + (2\nu - 1)\delta]^2$, ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων.

Τῆς ἀνωτέρω προόδου εἶναι

$$\Sigma = \frac{[2 + (2\nu - 1)\,\delta]^2 - (\delta - 2)^2}{8\delta}$$

Ἐὰν δοθῇ ὅτι ὁ Σ εἶναι πολύγωνος ἔχων γωνίας $n = \delta + 2$ (n εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν κανονικοῦ πολυγώνου, δ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμ. προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα) εἶναι

$$\nu = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\Sigma \cdot 8\,(n - 2) + (n - 4)^2} - 2}{n - 2} + 1\right]$$

ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου.

Ἡ τελευταία πρότασις: Δοθέντος ἀριθμοῦ νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσους τρόπους οὗτος δύναται νὰ εἶναι πολύγωνος θεωρεῖται ὑπὸ τοῦ P. Tannery ὡς παρεμβολή. Εἶναι ὅμως ἐξόχως ἐνδιαφέρουσα. Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἐσώθη ὁλόκληρος.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Α.

Τὴν εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, [ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον] ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν.

Ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστιν, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται, διά τε τὴν σὴν προθυμίαν καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν· ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

Ἀλλὰ καὶ πρὸς τοῖσδε γινώσκοντί σοι πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὕπαρξιν. τυγχανόντων δὴ οὖν ἐν τούτοις.

ὧν μὲν τετραγώνων, οἵ εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολυπλασιασθέντος· οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου·

ὧν δὲ κύβων, οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τὰς αὐτῶν πλευρὰς πολυπλασιασθέντων,

ὧν δὲ δυναμοδυνάμεων, οἵ εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτοὺς πολυπλασιασθέντων,

ὧν δὲ δυναμοκύβων, οἵ εἰσιν ἐκ τετραγώνων ἐπὶ τοὺς ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτοῖς πλευρᾶς κύβους πολυπλασιασθέντων,

ὧν δὲ κυβοκύβων, οἵ εἰσιν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτοὺς πολυπλασιασθέντων, ἔκ τε τῆς τούτων ἤτοι συνθέσεως ἢ ὑπεροχῆς ἢ πολυπλασιασμοῦ ἢ λόγου τοῦ πρὸς ἀλλήλους ἢ καὶ ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευρὰς συμβαίνει πλέκεσθαι πλεῖστα προβλήματα ἀριθμητικά· λύεται δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδειχθησομένην ὁδόν.

Ἐδοκιμάσθη οὖν ἕκαστος τούτων τῶν ἀριθμῶν συντομωτέραν ἐπωνυμίαν κτησάμενος στοιχεῖον τῆς ἀριθμητικῆς θεωρίας εἶναι· καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ Δ ἐπίσημον ἔχον Υ, $Δ^{Υ}$ δύναμις.

ὁ δὲ κύβος καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον Κ ἐπίσημον ἔχον Υ, $Κ^{Υ}$ κύβος·

ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολυπλασιασθέντος δυναμοδύνα-

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ι

Φίλτατέ μου Διονύσιε, γνωρίζων τὸ ἐνδιαφέρον σου νὰ μάθῃς τὴν λύσιν τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, προσεπάθησα, ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἁπλῶν στοιχείων ἀπὸ τῶν ὁποίων συνίστανται τὰ πράγματα, νὰ ἐκθέσω τὴν φύσιν καὶ τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τοὺς ἀριθμούς.

Ἴσως μὲν λοιπὸν τὸ πρᾶγμα νὰ φαίνεται δυσκολώτερον, ἐπειδὴ δὲν σοῦ εἶναι ἀκόμη γνώριμον, διότι αἱ ψυχαὶ τῶν ἀρχαρίων ἀμφιβάλλουσι εἰς τὴν ἐπιτυχίαν, ὅμως δὲ θὰ σοῦ γίνῃ εὐκατάληπτον, καὶ διὰ τὴν προθυμίαν σου καὶ διὰ τὴν ἀπόδειξίν μου· διότι ὁ ἐπιθυμῶν ἀντιλαμβάνεται ταχέως, ὅταν τύχῃ διδαχῆς.

Ἀλλὰ καὶ πρὸς τούτοις ἀφοῦ γνωρίζεις ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ σύγκεινται ἐκ μονάδων πλήθους τινος, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ σχηματισμός των δὲν ἔχει ὅριον. Διότι μεταξὺ τούτων ὑπάρχουσιν ἄλλοι μὲν τετράγωνοι, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἐξ ἀριθμοῦ τινος πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτόν· ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

ἄλλοι δὲ κύβοι, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἐκ τετραγώνων ἀφοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὴν αὐτὴν πλευράν,

ἄλλοι δὲ δυναμοδυνάμεις, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἐκ τετραγώνων ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἑαυτούς,

ἄλλοι δὲ δυναμόκυβοι, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἐκ τετραγώνων ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ κύβους ἔχοντας τὴν αὐτὴν πλευράν,

ἄλλοι δὲ κυβόκυβοι, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἐκ κύβων, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἑαυτούς, καὶ συμβαίνει εἴτε ἐκ τῆς προσθέσεως τούτων, ἢ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἢ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ ἐκ τοῦ λόγου πρὸς ἀλλήλους ἢ πρὸς τὰς ἰδίας ἑκάστων πλευρὰς νὰ συντίθενται πλεῖστα ἀριθμητικὰ προβλήματα. λύεται δὲ ἕκαστον πρόβλημα ὅταν βαδίζῃς τὴν ὑποδειχθησομένην ὁδόν.

Κατὰ ταῦτα ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀποκτήσας συμβολικὴν παράστασιν ὠνομάσθη στοιχεῖον τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν· καλεῖται λοιπὸν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις καὶ σύμβολον ταύτης τὸ σημεῖον Δ μὲ ἐκθέτην (= ἐπίσημον) τὸ Υ, Δ^{Υ} (x^2)·

ὁ δὲ καλεῖται κύβος καὶ εἶναι σημεῖον αὐτοῦ τὸ Κ μὲ ἐκθέτην τὸ Υ, K^{Υ} (x^3).

ὁ δὲ προερχόμενος ἐκ τετραγώνου πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτὸν καλεῖμ ι ς καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο ἐπίσημον ἔχοντα, Υ, $\Delta^{Y}\Delta$ δυναμοδύναμις·

ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αὐτῷ πλευρᾶς κύβου πολυπλασιασθέντος δ υ ν α μ ό κ υ β ο ς καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὰ ΔΚ ἐπίσημον ἔχοντα Υ, ΔK^{Y} δυναμόκυβος·

ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολυπλασιάσαντος κ υ β ό κ υ β ο ς καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κάππα ἐπίσημον ἔχοντα, Υ, $K^{Y}K$ κυβόκυβος.

ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἀόριστον, ἀ ρ ι θ μ ὸ ς καλεῖται καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ϛ.

ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μ ο ν ὰ ς καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ Μ ἐπίσημον ἔχον τὸ Ο, $\overset{\circ}{M}$.

Ὥσπερ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρομοίως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς, τοῦ μὲν τρία τὸ τρίτον, τοῦ δὲ τέσσαρα τὸ τέταρτον, οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομασθέντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρομοίως τοῖς ἀριθμοῖς·

τοῦ μὲν ἀριθμοῦ,	τὸ ἀριθμοστόν,
τῆς δὲ δυνάμεως,	τὸ δυναμοστόν,
τοῦ δὲ κύβου,	τὸ κυβοστόν,
τῆς δὲ δυναμοδυνάμεως,	τὸ δυναμοδυναμοστόν,
τοῦ δὲ δυναμοκύβου,	τὸ δυναμοκυβοστόν,
τοῦ δὲ κυβοκύβου,	τὸ κυβοκυβοστόν·

ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τὸ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γραμμὴν × διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

Ἐκθέμενος οὖν σοι τὴν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολυπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβήσομαι· ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι σχεδὸν διὰ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν ἐπὶ ἀριθμὸν πολυπλασιασθεὶς ποιεῖ δύναμιν,

	ἐπὶ δὲ δύναμιν,	κύβον,
	ἐπὶ δὲ κύβον,	δυναμοδύναμιν,
	ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	δυναμόκυβον,
	ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον,	κυβόκυβον.
Δύναμις δὲ	ἐπὶ μὲν δύναμιν,	δυναμοδύναμιν,
	ἐπὶ δὲ κύβον,	δυναμόκυβον,
	ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	κυβόκυβον.
Κύβος δὲ	ἐπὶ κύβον,	κυβόκυβον.

Πᾶς δ' ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ὁμώνυμον αὐτοῦ μόριον πολυπλασιασθεὶς μονάδα ποιεῖ.

ται δυναμοδύναμις καὶ εἶναι σημεῖον αὐτοῦ δύο δέλτα μὲ ἐκθέτην τὸ Υ, Δ^ΥΔ δυναμοδύναμις (x^4)·

ὁ δὲ προερχόμενος ἐκ τετραγώνου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ κύβου τῆς αὐτῆς πλευρᾶς καλεῖται δυναμόκυβος καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ΔΚ μὲ ἐκθέτην τὸ Υ, ΔΚ^Υ δυναμόκυβος (x^5)·

ὁ δὲ προερχόμενος ἐκ κύβου πολλαπλασιάσαντος ἑαυτὸν καλεῖται κυβόκυβος καὶ παρίσταται διὰ δύο κάππα ἔχοντα ἐκθέτην τὸ Υ, Κ^ΥΚ κυβόκυβος (x^6)·

ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ μὴ ὢν δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἀποτελούμενος δὲ ἐξ ἀορίστου (ἀγνώστου) πλήθους μονάδων καλεῖται ἀριθμὸς καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ϛ (x).

Ὑπάρχει δὲ καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν ἡ μονάς, ἥτις παρίσταται διὰ τοῦ Μ ἔχοντος ἐκθέτην τὸ Ο, $\overset{\circ}{M}$.

Καθὼς δὲ τῶν ἀριθμῶν αἱ ὁμώνυμοι κλασματικαὶ μονάδες καλοῦνται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀριθμῶν, τοῦ μὲν τρία τὸ τρίτον, τοῦ δὲ τέσσαρα τὸ τέταρτον, οὕτως καὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐπωνομάσθησαν τώρα θὰ καλῶνται ὁμοίως αἱ ὁμώνυμοι κλασματικαὶ μονάδες·

τοῦ μὲν ἀριθμοῦ, τὸ ἀριθμοστὸν (τοῦ x ἡ κλασμ. μονὰς $= \frac{1}{x}$),

τῆς δὲ δυνάμεως, τὸ δυναμοστὸν (τοῦ x^2 ἡ κλασμ. μονὰς $= \frac{1}{x^2}$),

τοῦ δὲ κύβου, τὸ κυβοστὸν (τοῦ x^3 τὸ $\frac{1}{x^3}$),

τῆς δὲ δυναμοδυνάμεως, τὸ δυναμοδυναμοστὸν (τοῦ x^5 τὸ $\frac{1}{x^5}$),

τοῦ δὲ κυβοκύβου, τὸ κυβοκυβοστὸν (τοῦ x^6 τὸ $\frac{1}{x^6}$).

Θὰ ἔχῃ δὲ ἑκάστη τοιαύτη κλασματικὴ μονὰς γραμμὴν × ἐπὶ τὸ σημεῖον τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ συμβολίζουσαν τὸ εἶδος.

Ἀφοῦ λοιπὸν σοῦ ἐξέθεσα τὴν ἐπωνυμίαν ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν, θὰ μεταβῶ εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτῶν· θὰ εἶναι δὲ εἰς σὲ καταφανεῖς, διότι οὗτοι σχεδὸν προδηλοῦνται διὰ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἀριθμὸν σχηματίζει δύναμιν ($x \times x = x^2$),

ἐπὶ δὲ δύναμιν, κύβον ($x \times x^2 = x^3$)
ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοδύναμιν ($x \times x^3 = x^4$)
ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κυβόκυβον ($x \times x^5 = x^6$).
Δύναμις δὲ ἐπὶ μὲν δύναμιν, δυναμοδύναμιν ($x^2 \times x^2 = x^4$),
ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμόκυβον ($x^2 \times x^3 = x^5$),
ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κυβόκυβον ($x^2 \times x^4 = x^6$),
κύβος δὲ ἐπὶ κύβον, κυβόκυβον ($x^3 \times x^3 = x^6$).

Πᾶς δὲ ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν ὁμώνυμον κλασματικὴν μο-

Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης καὶ ἑστώσης ἀεί, τὸ πολυπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται.

Τὰ δ' ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιαζόμενα ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς·

οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν	
ἐπὶ τὸ ἀριθμοστόν,	*δυναμοστὸν ποιεῖ,*
ἐπὶ δὲ δυναμοστόν,	*κυβοστόν,*
[ἐπὶ δὲ κυβοστόν,	*δυναμοδυναμοστόν,*
ἐπὶ δὲ δυναμοδυναμοστόν,	*δυναμοκυβοστόν,*
ἐπὶ δὲ τὸ δυναμοκυβοστόν,	*κυβοκυβοστόν,]*
καὶ τοῦτο ὁμωνύμως συμβήσεται.	
Ἀριθμοστὸν δὲ	
ἐπὶ μὲν δύναμιν,	*ἀριθμόν,*
ἐπὶ δὲ κύβον,	*δύναμιν,*
ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	*κύβον,*
ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον,	*δυναμοδύναμιν,*
ἐπὶ δὲ κυβόκυβον,	*δυναμόκυβον.*
Δυναμοστὸν δὲ	
ἐπὶ μὲν ἀριθμόν,	*ἀριθμοστόν,*
ἐπὶ δὲ κύβον,	*ἀριθμόν,*
ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	*δύναμιν,*
ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον,	*κύβον,*
ἐπὶ δὲ κυβόκυβον,	*δυναμοδύναμιν.*
Κυβοστὸν δὲ	
ἐπὶ μὲν ἀριθμόν,	*δυναμοστόν,*
ἐπὶ δὲ δύναμιν,	*ἀριθμοστόν,*
ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	*ἀριθμόν,*
ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον,	*δύναμιν,*
ἐπὶ δὲ κυβόκυβον.	*κύβον.*
Δυναμοδυναμοστὸν δὲ	
ἐπὶ μὲν ἀριθμόν,	*κυβοστόν,*
ἐπὶ δὲ δύναμιν,	*δυναμοστόν,*
ἐπὶ δὲ κύβον,	*ἀριθμοστόν,*
ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον,	*ἀριθμόν,*
ἐπὶ δὲ κυβόκυβον,	*δύναμιν.*
Δυναμοκυβοστὸν δὲ	
ἐπὶ μὲν ἀριθμόν,	*δυναμοδυναμοστόν,*

νάδα δίδει ἐξαγόμενον τὴν μονάδα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μονὰς εἶναι ἀμετάθετος καὶ ἀμετάβλητος, τὸ ἐπ' αὐτὴν πολλαπλασιαζόμενον εἶδος θὰ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ εἶδος.

Αἱ δὲ ὁμώνυμοι κλασματικαὶ μονάδες πολλαπλασιαζόμεναι ἐφ' ἑαυτὰς δίδουν κλασματικὰς μονάδας ὁμωνύμους πρὸς τοὺς ἀριθμούς.

Π.χ. τὸ μὲν ἀριθμοστὸν πολλαπλασιασθὲν

ἐπὶ τὸ ἀριθμοστὸν δίδει δυναμοστὸν ($\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$),

ἐπὶ δὲ δυναμοστόν, κυβοστὸν ($\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$),

[ἐπὶ δὲ κυβοστόν, δυναμοδυναμοστὸν ($\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^4}$),

ἐπὶ δὲ δυναμοδυναμοστόν, δυναμοκυβοστὸν ($\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^5}$),

ἐπὶ δὲ τὸ δυναμοκυβοστόν, κυβοκυβοστὸν ($\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^5} = \frac{1}{x^6}$)],

καὶ τοῦτο θὰ γίνεται ὁμωνύμως ($\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^{\nu-1}} = \frac{1}{x^\nu}$)

Ἀριθμοστὸν δὲ πολλαπλασιασθὲν δίδει,

ἐπὶ μὲν δύναμιν, ἀριθμὸν ($\frac{1}{x} \times x^2 = x$),

ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν ($\frac{1}{x} \times x^3 = x^2$)

ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον ($\frac{1}{x} \times x^4 = x^3$),

ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν ($\frac{1}{x} \times x^5 = x^4$),

ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμόκυβον ($\frac{1}{x} \times x^6 = x^5$).

Δυναμοστὸν δὲ πολλαπλασιασθὲν δίδει,

ἐπὶ μὲν ἀριθμόν, ἀριθμοστὸν ($\frac{1}{x^2} \times x = \frac{1}{x}$

ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμὸν ($\frac{1}{x^2} \times x^3 = x$),

ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δύναμιν, ($\frac{1}{x^2} \times x^4 = x^2$),

ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κύβον, ($\frac{1}{x^2} \times x^5 = x^3$),

Κυβοστὸν δὲ πολλαπλασιασθὲν δίδει,

ἐπὶ μὲν ἀριθμόν, δυναμοστὸν ($\frac{1}{x^3} \times x = \frac{1}{x^2}$)

ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοστὸν ($\frac{1}{x^3} \times x^2 = \frac{1}{x}$),

ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμὸν ($\frac{1}{x^3} \times x^4 = x$),

ἐπὶ δὲ δύναμιν,	κυβοστόν,
ἐπὶ δὲ κύβον,	δυναμοστόν,
ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	ἀριθμοστόν,
ἐπὶ δὲ κυβόκυβον,	ἀριθμόν.

Τὸ δὲ κυβοκυβοστὸν

ἐπὶ μὲν ἀριθμόν,	δυναμοκυβοστόν,
ἐπὶ δὲ δύναμιν,	δυναμοδυναμοστόν,
ἐπὶ δὲ κύβον,	κυβοστόν,
ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν,	δυναμοστόν,
ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον,	ἀριθμοστόν.

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον Ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον, ⋔.

Καὶ τῶν πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνισθέντων, φανεροί εἰσιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας συνθέσει καὶ ἀφαιρέσει καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι, καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα μὴ ὁμοπληθῆ προσθῇς ἑτέροις εἴδεσιν, ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δύναμιν ($\frac{1}{x^3} \times x^5 = x^2$),

ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβον ($\frac{1}{x^3} \times x^6 = x^3$).

Δυναμοδυναμοστὸν δὲ πολλαπλασιασθὲν δίδει,

ἐπὶ μὲν ἀριθμόν, κυβοστὸν ($\frac{1}{x^4} \times x = \frac{1}{x^3}$),

ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοστὸν ($\frac{1}{x^4} \times x^2 = \frac{1}{x^2}$),

ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμοστὸν ($\frac{1}{x^4} \times x^3 = \frac{1}{x}$

ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμὸν ($\frac{1}{x^4} \times x^5 = x$),

ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δύναμιν ($\frac{1}{x^4} \times x^6 = x^2$).

Δυναμοκυβοστὸν δέ, πολλαπλασιασθὲν δίδει,

ἐπὶ μὲν ἀριθμόν, δυναμοδυναμοστὸν ($\frac{1}{x^5} \times x = \frac{1}{x^4}$).

ἐπὶ δὲ δύναμιν, κυβοστὸν ($\frac{1}{x^5} \times x^2 = \frac{1}{x^3}$),

ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοστὸν ($\frac{1}{x^5} \times x^3 = \frac{1}{x^2}$),

ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοστὸν ($\frac{1}{x^5} \times x^4 = \frac{1}{x}$),

ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμὸν ($\frac{1}{x^5} \times x^6 = x$).

Τὸ δὲ κυβοκυβοόν, πολλαπλασιασθὲν δίδει,

ἐπὶ μὲν ἀριθμόν, δυναμοκυβοστὸν ($\frac{1}{x^6} \times x = \frac{1}{x^5}$),

ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοστὸν ($\frac{1}{x^6} \times x^2 = \frac{1}{x^4}$),

ἐπὶ δὲ κύβον, κυβοστὸν ($\frac{1}{x^6} \times x^3 = \frac{1}{x^3}$),

ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοστὸν ($\frac{1}{x^6} \times x^4 = \frac{1}{x^2}$),

ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοστὸν ($\frac{1}{x^6} \times x^5 = \frac{1}{x}$).

Πλὴν πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ πλὴν δίδει σύν, πλὴν δὲ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ σὺν δίδει πλήν, καὶ σημεῖον τοῦ πλὴν ἔστω ἐλλιπὲς Ψ ἀντεστραμμένον, ⩚.

Καὶ ἀφοῦ οἱ πολλαπλασιασμοὶ (τῶν δυνάμεων) ἔγιναν εἰς σὲ σαφεῖς, εἶναι φανεραὶ καὶ αἱ διαιρέσεις τῶν προκειμένων εἰδῶν. Εἶναι καλὸν λοιπόν, ἐν ᾧ ἀρχίζεις νὰ μελετᾷς τὴν πραγματείαν νὰ ἀσκηθῇς εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τοὺς συναφεῖς πρὸς τὰς ἀνωτέρω παραστάσεις, καὶ πῶς δύνασαι νὰ προσθέσῃς παραστάσεις ἀλγεβρικὰς θετικὰς ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι, καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν καὶ ἑτέρων λειπόντων ὑφέλῃς ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται εἴδη τινὰ ἴσα εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς, μὴ ὁμοπληθῆ δέ, ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐν ἐλλείψεσί τινα εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρων τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται, καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ.

Φιλοτεχνείσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ· ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται.

Νῦν δ' ἐπὶ τὰς προτάσεις χωρήσωμεν ὁδόν, πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς τοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῷ ἀριθμῷ καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, καὶ διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιουμένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτὰ καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρεῖν, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς ἀπὸ ἁπλουστέρων ἐπὶ σκολιώτερα διελεῖν ὡς προσῆκεν. οὕτως γὰρ εὐόδευτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.

α.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̅, ἡ δὲ ὑπεροχὴ Μ̊ μ̅. εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ α̅· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ α̅ Μ̊ μ̅· συναμφότεροι ἄρα γίνονται ϛ β̅ Μ̊ μ̅· δέδονται δὲ Μ̊ ρ̅.

Μ̊ ἄρα ρ̅ ἴσαι εἰσὶν ϛ β̅ Μ̊ μ̅.

καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν ρ̅, Μ̊ μ̅, [καὶ <ἀπὸ> τῶν β̅ ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̅ μονάδων ὁμοίως μονάδας μ̅.] λοιποὶ ϛ β̅ ἴσοι Μ̊ ξ̅. ἕκαστος ἄρα γίνεται ϛ, Μ̊ λ̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων Μ̊ λ̅, ὁ δὲ μείζων Μ̊ ο̅, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

β.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν δεῖ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ξ̅ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ γ̅ πλ.

ἢ ἀρνητικάς μὲ διαφόρους συντελεστὰς ἢ τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς, ἢ θετικάς ἢ καὶ θετικὰς καὶ ἀρνητικάς, καὶ πῶς ἀπὸ θετικὰς καὶ ἄλλας ἀρνητικὰς παραστάσεις δύνασαι νὰ ἀφαιρέσῃς ἄλλας ἢ θετικάς, ἢ καὶ ὁμοίως θετικὰς καὶ ἀρνητικάς.

Μετὰ δὲ ταῦτα ἐὰν ἔκ τινος προβλήματος προκύπτῃ ἐξίσωσίς τις, μὲ ὅρους ἔχοντας τὴν αὐτὴν δύναμιν καὶ διαφόρους συντελεστὰς εἰς τὰ δύο μέλη θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀφαιρῇς ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα, μέχρις ὅτου ἀπομείνῃ εἷς ὅρος ἴσος πρὸς ἕνα ὅρον. Ἐὰν δὲ εἴς τι μέλος ἢ καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ὑπάρχουν ἀρνητικαὶ παραστάσεις, πρέπει νὰ προσθέτῃς εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὰς ἀντιθέτους παραστάσεις, μέχρις ὅτου εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὑπάρχουν ἀθροίσματα, καὶ πάλιν νὰ ἀφαιρῇς τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων, μέχρις ὅτου εἰς ἕκαστον τῶν μελῶν ἀπομείνῃ μόνον ἀνὰ εἷς ὅρος.

Νὰ ἀσκηθῇς δὲ κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς τοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν ἐξισώσεων, ἐὰν παρίσταται ἀνάγκη, μέχρις ὅτου εἰς ἕκαστον μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀπομένῃ ἀνὰ εἷς ὅρος· ὕστερον δὲ θὰ σοῦ δείξωμεν πῶς λύεται ἡ ἐξίσωσις, ἐὰν εἰς ἕκαστον μέλος (τῆς ἰσότητος) ἔχει ἀπομείνει ἀνὰ εἷς ὅρος.

Τώρα δὲ θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰ προβλήματα, ἔχοντες συνηθροισμένον πολὺ συναφὲς ὑλικόν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι πολὺς ὁ ἀριθμὸς τούτων καὶ εἶναι λίαν ἐκτεταμένα, καὶ ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου εἶναι βραδέως ἀφομοιώσιμα καὶ δυσμνημόνευτα, προσεπάθησα νὰ διαιρέσω τὰ δυνάμενα νὰ διαιρεθοῦν, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἐκτιθέμενα, νὰ διαιρέσω ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων πρὸς τὰ δυσκολώτερα, ὡς ἦτο πρέπον. Διότι τοιουτοτρόπως θὰ γίνουν εὐκολονόητα εἰς τοὺς ἀρχαρίους, καὶ ἡ προέλευσις αὐτῶν θὰ ἀποτυπωθῇ εἰς τὴν μνήμην, ἐν ᾧ ἡ διαπραγμάτευσις αὐτῶν ἔχει γίνει εἰς δέκα τρία βιβλία.

1.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας δοθεῖσαν διαφοράν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ 100, ἡ δὲ διαφορὰ ἔστω μονάδες 40. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ δύο ἀριθμοί.

Ἂς κληθῇ ὁ μικρότερος x· ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x + 40$· τὸ ἄθροισμά των ἄρα εἶναι $2x + 40$. ἐδόθη δὲ ἴσον πρὸς 100.

Εἶναι ἄρα $100 = 2x + 40$,

Καὶ ἀπὸ ὁμοίων δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰ ὅμοια. Ἀφαιρῶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰς αὐτὰς 40 μονάδας. Μένει $2x = 60$. Ἕκαστος ἄρα $x = 30$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος $= 30$, ὁ δὲ μεγαλύτερος $= 70$, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

2.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας δοθέντα λόγον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 60 εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας λόγον 3.

Ἂς κληθῇ ὁ μικρότερος x. Ὁ μεγαλύτερος ἄρα εἶναι 3x καὶ εἶναι τρι-

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς $\overline{\alpha}$· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς $\overline{\gamma}$, καὶ ἔστιν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. δεῖ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι Μ̊ $\overline{\xi}$ ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ς εἰσι $\overline{\delta}$.

ς ἄρα $\overline{\delta}$ ἴσοι Μ̊ $\overline{\xi}$· ὁ ς ἄρα Μ̊ $\overline{\iota\varepsilon}$.

ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται Μ̊ $\overline{\iota\varepsilon}$, ὁ δὲ μείζων Μ̊ $\overline{\mu\varepsilon}$.

γ.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\pi}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμους ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος γ$^{\pi\lambda}$ ᾖ καὶ ἔτι Μ̊ $\overline{\delta}$ ὑπερέχῃ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς $\overline{\alpha}$, ὁ μείζων ἄρα ς $\overline{\gamma}$ καὶ Μ̊ $\overline{\delta}$· καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν γ$^{\pi\lambda}$ ἔτι καὶ Μ̊ $\overline{\delta}$ ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι Μ̊ $\overline{\pi}$. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ς εἰσι $\overline{\delta}$ καὶ Μ̊ $\overline{\delta}$.

ς ἄρα $\overline{\delta}$ καὶ Μ̊ $\overline{\delta}$ ἴσοι Μ̊ $\overline{\pi}$.

καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιπαὶ ἄρα Μ̊ $\overline{o\varsigma}$ ἴσαι ς $\overline{\delta}$· καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ $\overline{\iota\theta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς Μ̊ $\overline{\iota\theta}$. ὁ δὲ μείζων Μ̊ $\overline{\xi\alpha}$, [προστιθεμένων τῶν $\overline{\delta}$ Μ̊ ὧν ἀφεῖλον ἀπὸ τῶν $\overline{\pi}$ Μ̊. ἀφεῖλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων Μ̊ ἔσται ἕκαστος ἀριθμός, ὕστερον δὲ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προστίθημι τὰς $\overline{\delta}$ Μ̊, μετὰ τὸ γνῶναι πόσων ἕκαστος].

δ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν δοθῇ.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι ε$^{\pi\lambda}$, τὴν δὲ ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιεῖν Μ̊ $\overline{\kappa}$.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς $\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς $\overline{\varepsilon}$. λοιπὸν θέλω ς $\overline{\varepsilon}$ ὑπερέχειν ς $\overline{\alpha}$, Μ̊ $\overline{\kappa}$· ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστιν ς $\overline{\delta}$· οὗτοι ἴσοι Μ̊ $\overline{\kappa}$.

ἔσται ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς Μ̊ $\overline{\varepsilon}$, ὁ δὲ μείζων Μ̊ $\overline{\kappa\varepsilon}$ καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν ε$^{\pi\lambda}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ γίνεται Μ̊ $\overline{\kappa}$.

ε.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκατέρου τῶν διῃρημένων τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη συντεθέντα ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν δίδοσθαι ὥστε εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν γινομένων δύο ἀριθμῶν ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὰ δοθέντα μὴ τὰ αὐτὰ μέρη.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\rho}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ α^{ον} ἀριθμοῦ γ^{ον} καὶ τὸ τοῦ β^{ον} ε^{ον} ἐπὶ τὸ αὐτὸ συντεθέντα ποιῇ Μ̊ $\overline{\lambda}$.

πλάσιος ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου. Πρέπει λοιπὸν οἱ δύο νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 60· ἀλλὰ οἱ δύο ἀφοῦ προστεθῶσι γίνονται 4x.

Εἶναι ἄρα 4x = 60. Ὁ x ἄρα εἶναι 15.

Ὁ μικρότερος ἄρα εἶναι 15, ὁ δὲ μεγαλύτερος 45.

3.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας λόγον καὶ διαφορὰν τὴν δοθεῖσαν.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 80 εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου καὶ νὰ ὑπερέχῃ ἀκόμη τούτου κατὰ 4.

Ἄς κληθῇ ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι 3x + 4. Καὶ ὁ μεγαλύτερος εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου καὶ ὑπερέχει ἀκόμη τούτου κατὰ 4. Θέλω λοιπὸν οἱ δύο οὗτοι νὰ εἶναι ἴσοι πρὸς 80. Ἀλλὰ οἱ δύο προστεθέντες εἶναι 4x + 4.

Εἶναι ἄρα 4x + 4 = 80.

Καὶ ἀφαιρῶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα· μένει ἄρα

76 = 4x· ἐξ ἧς x = 19.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μικρότερος ἀριθμὸς 19, ὁ δὲ μεγαλύτερος 61, [προστιθεμένων τῶν 4 μονάδων τὰς ὁποίας ἀφήρεσα ἀπὸ τοῦ 80. Διότι ἀφήρεσα, διὰ νὰ εὕρω ἐκ πόσων μονάδων θὰ εἶναι ἕκαστος ἀριθμός, ὕστερον δὲ προσθέτω εἰς τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν τὰς 4 μονάδας, ἀφοῦ μάθω πόσας εἶναι ἕκαστος].

4.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον καὶ δοθεῖσαν διαφοράν.

Ἄς ληφθῇ ὁ μεγαλύτερος 5πλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν ἂς γίνεται 20.

Ἄς κληθῇ ὁ μικρότερος x, θὰ εἶναι ἄρα ὁ μεγαλύτερος 5x. Θέλω λοιπὸν ὁ 5x νὰ διαφέρῃ τοῦ x κατὰ 20. Ἡ διαφορὰ ὅμως αὐτῶν εἶναι 4x. Αὐτη θὰ εἶναι = 20. Ὁ μικρότερος ἀριθμὸς θὰ εἶναι 5, ὁ δὲ μεγαλύτερος 25. Καὶ μένει ὁ μεγαλύτερος 5πλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἡ δὲ διαφορὰ γίνεται 20.

5.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως κλασματικὰ μέρη ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν, μὴ τὰ αὐτά, προστιθέμενα δίδωσι δοθέντα ἀριθμόν.

Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος ἀριθμὸς νὰ δίδεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες προκύπτουσιν ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς δοθέντος ληφθῶσι δοθέντα, οὐχὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 100 εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ προστιθέμενα νὰ δίδωσι 30.

Λαμβάνω τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δευτέρου = x· ὁ δεύτερος ἄρα = 5x· τὸ $\frac{1}{3}$ ἄρα

Ἔταξα τὸ τοῦ β^{ου} ε^{ον}, ς α̅· αὐτὸς ἄρα ἔσται ς ε̅· τὸ ἄρα τοῦ α^{ου} γ^{ον} ἔσται Μ̊ λ̅ ⋔ ς α̅· αὐτὸς ἄρα ἔσται Μ̊ ϙ̅ ⋔ ς γ̅. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν Μ̊ ρ̅. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ς β̅ καὶ Μ̊ ϙ̅. ταῦτα ἴσα Μ̊ ρ̅.

καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα Μ̊ ι̅ ἴσαι ς β̅. [ὁ ς ἄρα ἔσται Μ̊ ε̅].

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ β^{ου} ε^{ον} ς α̅, ἔσται Μ̊ ε̅, αὐτὸς ἄρα Μ̊ κ̅ε̅. τὸ δὲ τοῦ α^{ου} γ^{ον}, Μ̊ λ̅ ⋔ ς α̅, ἔσται Μ̊ κ̅ε̅, αὐτὸς ἄρα ἔσται Μ̊ ο̅ε̅. καὶ μένει τὸ τοῦ α^{ου} γ^{ον} καὶ τὸ τοῦ β^{ου} ε^{ον} Μ̊ λ̅, (ἅπερ κοινῇ συντεθέντα ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν].

ς.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ πρώτου μέρος δοθὲν τοῦ τοῦ ἑτέρου μέρους δοθέντος ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ.

Δεῖ δὴ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐλάσσονα εἶναι τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐπιταχθέντος ληφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ἐν ᾧ ἐστιν ἡ ὑπεροχή.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̅ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ α^{ου} δ^{ον} τοῦ τοῦ β^{ου} ς^{ου} ὑπερέχῃ Μ̊ κ̅.

Ἔταξα τὸ τοῦ β^{ου} ς^{ον}, ς α̅· αὐτὸς ἄρα ἔσται ς ς̅. τὸ ἄρα τοῦ α^{ου} δ^{ον} ἔσται ς α̅ καὶ Μ̊ κ̅, αὐτὸς ἄρα ἔσται ς δ̅ καὶ Μ̊ π̅. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν Μ̊ ρ̅· ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ς ι̅ καὶ Μ̊ π̅· ταῦτα ἴσα Μ̊ ρ̅.

ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ς ι̅ ἴσοι Μ̊ κ̅, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ β̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ β^{ου} ς^{ον}, ς α̅· ἔσται Μ̊ β̅, αὐτὸς ἄρα ἔσται Μ̊ ι̅β̅· τὸ δὲ τοῦ α^{ου} δ^{ον}, ς α̅ καὶ Μ̊ κ̅· ἔσται Μ̊ κ̅β̅, αὐτὸς ἄρα ἔσται Μ̊ π̅η̅. καὶ μένει τὸ τοῦ α^{ου} δ^{ον} τοῦ τοῦ β^{ου} ς^{ου} ὑπερέχον Μ̊ κ̅, [οἵτινες κοινῇ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν].

ζ.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τὸν ρ̅ καὶ τὸν κ̅, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων γ^{πλ}.

Τετάχθω ὁ ζητούμενος ς α̅· κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̅, λοιπὸς ς α̅ ⋔ Μ̊ ρ̅· ἐὰν δὲ τὸν κ̅, λοιπὸς ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι γ^{πλ}· τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, τρὶς δὲ τὰ ἐλάσσονα γίνεται ς γ̅ ⋔ Μ̊ τ̅. ταῦτα ἴσα ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις· γίνεται ς γ̅ ἴσοι ς α̅ καὶ Μ̊ σ̅π̅. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ς β̅ ἴσοι Μ̊ σ̅π̅, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ρ̅μ̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ς α̅, ἔσται ἄρα Μ̊ ρ̅μ̅. κἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̅, λοιπαὶ Μ̊ μ̅· ἐὰν δὲ τὸν κ̅, λοιπαὶ Μ̊ ρ̅κ̅. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων τριπλάσια.

τοῦ πρώτου θὰ εἶναι 30 — x· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι 90 — 3x. Θέλω λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ δίδῃ 100. ($90 - 3x + 5x = 100$). Ἀλλ' οἱ δύο προστεθέντες δίδουν $2x + 90 = 100$.

Ἀφαιρῶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα. Θὰ μείνῃ ἄρα $10 = 2x$. [ὁ x ἄρα = 5].

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἔλαβα τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δευτέρου $x = 5$, ὁ δεύτερος ἄρα = 25. Τὸ δὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου $= 30 - x$ ἤτοι = 25, ὁ πρῶτος ἄρα = 75. Καὶ μένει $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου (τὸ 25) + $\frac{1}{5}$ τοῦ δευτέρου (τὸ 5) = 30 [τὰ ὁποῖα προστιθέμενα δίδουσι τὸν ἀριθμόν].

6.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως δοθὲν μέρος τοῦ πρώτου ὑπερέχῃ δοθέντος μέρους τοῦ δευτέρου κατὰ δοθέντα ἀριθμόν.

Πρέπει ὅμως ὁ δοθεὶς (δεύτερος) ἀριθμὸς νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος, ἐὰν τοῦ ἐξ ἀρχῆς δοθέντος ληφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ὅπου εἶναι ἡ ὑπεροχή.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 100 εἰς δύο ἀριθμούς (x_1, x_2) ὥστε τό, $\frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{6} = 20$.

Λαμβάνω $\frac{x_2}{6} = x$. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ $x_2 = 6x$. Θὰ εἶναι ἑπομένως $\frac{x_1}{4} = x + 20$, εἶναι ἄρα $x_1 = 4x + 80$. Θέλω λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ εἶναι 100. Ἀλλὰ οἱ δύο προστιθέμενοι ($x_1 + x_2$) δίδουν $10x + 80 = 100$. Ἀφαιρῶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα. Λαμβάνω $10x = 20$ καὶ $x = 2$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἔλαβον $\frac{x_2}{6} = x$· ὅπερ εἶναι 2, ὅτε $x_2 = 12$· τὸ δὲ $\frac{x_1}{4} = x + 20$. ἑπομένως = 22, εἶναι ἄρα $x_1 = 88$. Καὶ μένει $\frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{6} = 20$, [οἵτινες ($x_1 + x_2$) προστιθέμενοι δίδουσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν].

7.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρεθῶσι δύο δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ἡ μία διαφορὰ πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἔστω νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὁ 100 καὶ ὁ 20 καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαφορὰ νὰ εἶναι τριπλασία τῆς μικροτέρας.

Ἄς κληθῇ ὁ ζητούμενος x· καὶ ἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσω τὸν 100, ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι $x - 100$· ἐὰν δὲ τὸν 20, ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι $x - 20$. Καὶ θὰ εἶναι ἀνάγκη ἡ μεγαλυτέρα διαφορὰ νὰ εἶναι τριπλασία τῆς μικροτέρας· τρεῖς ἄρα φορὰς ἡ μικροτέρα ἰσοῦται πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, τρεῖς δὲ φορὰς ἡ μικροτέρα γίνεται $3x - 300$. Ταῦτα εἶναι $= x - 20$. Προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη 300 καὶ λαμβάνω $3x = x + 280$. Καὶ ἀφαιρῶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα. Ὅθεν $2x = 280$, καὶ γίνεται ὁ $x = 140$.

η.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον.

Δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον ἐλάσσονα εἶναι τοῦ λόγου οὗ ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάσσονα.

Ἐπιτετάχθω δὴ τῷ ρ̄ καὶ τῷ κ̄ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων γ^{πλ}.

Τετάχθω ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ϛ ᾱ. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, ἔσται ϛ ᾱ Μ̊ ρ̄· ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνεται ϛ ᾱ Μ̊ κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι γ^{πλ}· τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἔσται τοῖς μείζοσι. τρὶς δὲ τὰ ἐλάσσονα γίνεται ϛ γ̄ Μ̊ ξ̄· ταῦτα ἴσα ϛ ᾱ Μ̊ ρ̄.

ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ϛ β̄ ἴσοι Μ̊ μ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ κ̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ϛ ᾱ, ἔσται Μ̊ κ̄. κἂν μὲν τῷ ρ̄ προστεθῇ, γίνονται Μ̊ ρ̄κ̄· ἐὰν δὲ τῷ κ̄, γίνονται Μ̊ μ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων τριπλάσια.

θ.

Ἀπὸ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον.

Δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον μείζονα εἶναι τοῦ λόγου οὗ ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάσσονα.

Ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ κ̄ καὶ τοῦ ρ̄ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ς^{πλ}.

Τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ϛ ᾱ. κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ Μ̊ ρ̄ ⋔ ϛ ᾱ· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ κ̄, λοιπαὶ Μ̊ κ̄ ⋔ ϛ ᾱ. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι ς^{πλ}· ς^{κις} ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσιν, ς^{κις} δὲ τὰ ἐλάσσονα ποιεῖ Μ̊ ρ̄κ̄ ⋔ ϛ ς̄· ταῦτα ἴσα Μ̊ ρ̄ ⋔ ϛ ᾱ.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ϛ ε̄ ἴσοι Μ̊ κ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ δ̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ ϛ ᾱ, ἔσται Μ̊ δ̄. κἂν μὲν ἀπὸ τοῦ ρ̄ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ Μ̊ ϙ̄ς̄· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ κ̄, λοιπαὶ Μ̊ ῑς̄ καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ὄντα ἑξαπλάσια.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἐκάλεσα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν x, θὰ εἶναι ἄρα 140. Καὶ ἂν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσω τὸν 100, ἡ διαφορὰ εἶναι 40· ἐὰν δὲ τὸν 20, ἡ διαφορὰ εἶναι 120. Καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαφορὰ εἶναι τριπλασία τῆς μικροτέρας.

8.

Εἰς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὥστε οἱ προκύπτοντες νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς ἀλλήλους δεδομένον.

Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος λόγος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν δοθέντων πρὸς τὸν μικρότερον.

Ἔστω ὅτι πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν 100 καὶ τὸν 20 ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς οὕτως, ὥστε τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

Ἂς κληθῇ ὁ προστιθέμενος εἰς ἑκάτερον ἀριθμὸν x. Καὶ ἂν μὲν προστεθῇ εἰς τὸν 100 θὰ εἶναι $x + 100$. Ἐὰν δὲ εἰς τὸν 20 θὰ εἶναι $x + 20$. Καὶ θὰ εἶναι ἀνάγκη τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου· εἶναι ἄρα τὸ τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον. Εἶναι δὲ τρεῖς φορὰς τὸ μικρότερον ἄθροισμα $3x + 60 = x + 100$. Ἀφαιρῶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα. Θὰ ἔχω ἄρα $2x = 40$ καὶ $x = 20$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ὠνόμασα x τὸν προστιθέμενον εἰς ἑκάτερον τῶν ἀριθμῶν καὶ εἶναι οὗτος 20. Καὶ ἂν μὲν προστεθῇ οὗτος εἰς τὸν 100 γίνεται 120. ἐὰν δὲ εἰς τὸν 20 γίνεται 40. Καὶ εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα τριπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

9.

Ἀπὸ δύο δοθέντων ἀριθμῶν ν' ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὥστε ἡ μία διαφορὰ πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Πρέπει δὲ ὁ διδόμενος λόγος τῶν διαφορῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ μεγαλυτέρου τῶν δοθέντων πρὸς τὸν μικρότερον.

Ἔστω ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 20 καὶ τοῦ 100 ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὥστε νὰ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαφορὰ ἑξαπλασία τῆς μικροτέρας.

Ἂς κληθῇ ὁ ἀφαιρούμενος ἐξ ἑκατέρου ἀριθμοῦ x. Καὶ ἂν μὲν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 100 θὰ εἶναι $100 - x$· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ 20 θὰ εἶναι $20 - x$. Καὶ εἶναι ἀνάγκη ἡ μεγαλυτέρα διαφορὰ νὰ εἶναι ἑξαπλασία τῆς μικροτέρας· εἶναι ἄρα ἑξάκις ἡ μικροτέρα διαφορὰ ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, ἤτοι $120 - 6x = 100 - x$.

Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἡ λεῖψις ($6x$) καὶ ἂς ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὰ ἴσα (100). Ὅτε λαμβάνομεν $20 = 5x$, καὶ $x = 4$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἐκάλεσα τὸν ἀφαιρούμενον ἐξ ἑκατέρου ἀριθμοῦ x, ὅστις εἶναι 4. Καὶ ἂν μὲν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 100, θὰ μείνῃ 96. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ 20 θὰ μείνῃ 16. Καὶ εἶναι $96 = 6 \cdot 16$.

ι.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς, τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῶν προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὸν γενόμενον πρὸς τὸν λοιπὸν λόγον ἔχειν δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω τῷ μὲν κ̅ προσθεῖναι, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ̅ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων $δ^{πλ}$.

Τετάχθω ὁ προστιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς α̅. κἂν μὲν τῷ κ̅ προστεθῇ, γίνεται ς α̅ Μ̊ κ̅· ἐὰν δὲ τοῦ ρ̅ ἀφαιρεθῇ, γίνεται Μ̊ ρ̅ ⋔ ς α̅ καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι $δ^{πλ}$· $δ^{κις}$ ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, $δ^{κις}$ δὲ τὰ ἐλάσσονα γίνεται Μ̊ υ̅ ⋔ ς δ̅. ταῦτα ἴσα ς α̅ Μ̊ κ̅.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ς ε̅ ἴσοι Μ̊ τ̅π̅, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ο̅ς̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν προστιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ ς α̅, ἔσται Μ̊ ο̅ς̅. κἂν μὲν τῷ κ̅ Μ̊ ο̅ς̅ προστεθῶσι, γίνονται Μ̊ ϟ̅ς̅· ἐὰν δὲ τοῦ ρ̅ ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ Μ̊ κ̅δ̅. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ὄντα τετραπλάσια.

ια.

Δύο δοθέντας ἀριθμοὺς ὃν μὲν προσθεῖναι, τὸν δὲ ἕτερον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω τὸν μὲν κ̅ προσθεῖναι, τὸν δὲ ρ̅ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων $γ^{πλ}$.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ς α̅. κἂν μὲν τούτῳ προσθῶμεν Μ̊ κ̅, γίνεται ς α̅ Μ̊ κ̅· ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῶσι Μ̊ ρ̅, λοιπὸς ς α̅ ⋔ Μ̊ ρ̅. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων εἶναι $γ^{πλ}$· τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. ἀλλὰ τρὶς τὰ ἐλάσσονα γίνεται ς γ̅ ⋔ Μ̊ τ̅.

ς ἄρα γ̅ ⋔ Μ̊ τ̅ ἴσα ἐστὶ ς α̅ Μ̊ κ̅.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Μ̊ τ̅κ̅ ἄρα ἴσα εἰσὶν ς β̅, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ρ̅ξ̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων Μ̊ ρ̅π̅, ὁ δὲ ἀλάσσων Μ̊ ξ̅. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων τριπλάσια.

ιβ.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον

10.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἀριθμοί, εἰς μὲν τὸν μικρότερον νὰ προστεθῇ, εἰς δὲ τὸν μεγαλύτερον νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ ἄθροισμα πρὸς τὴν διαφορὰν νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς προστεθῇ μὲν εἰς τὸν 20, ἂς ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ 100 ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὥστε ἐκ τῶν προκυπτόντων ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου.

Ἂς κληθῇ ὁ προστιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος εἰς ἑκάτερον ἀριθμὸν x. Καὶ ἂν μὲν προστεθῇ εἰς τὸν 20, γίνεται $x + 20$· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 100, γίνεται $100 - x$. Καὶ εἶναι ἀνάγκη ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου· τὰ τετραπλάσια ἄρα τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσα πρὸς τὸν μεγαλύτερον, γίνεται δὲ $400 - 4x = x + 20$.

Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἡ λεῖψις ($4x$), καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ἴσον ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη. Ὅτε λαμβάνομεν $380 = 5x$, καὶ $x = 76$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἐκάλεσα τὸν προστιθέμενον καὶ ἀφαιρούμενον ἐξ ἑκατέρου ἀριθμοῦ x, ὅστις εἶναι $= 76$. Καὶ ἂν μὲν ὁ 76 προστεθῇ εἰς τὸ 20, γίνεται 96· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 100, μένει 24. Καὶ εἶναι ὁ μεγαλύτερος τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου.

11.

Δύο δοθέντας ἀριθμοὺς τὸν μὲν νὰ προσθέσωμεν, τὸν δὲ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥστε οἱ προκύπτοντες νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους δεδομένον λόγον.

Ἂς ὁρισθῇ ὁ μὲν 20 νὰ προστεθῇ, ὁ δὲ 100 νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥστε ὁ προκύπτων μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x. Καὶ ἂν μὲν εἰς τοῦτον προσθέσωμεν 20, γίνεται $x + 20$· ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσωμεν 100, λαμβάνομεν $x - 100$. Καὶ εἶναι ἀνάγκη ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου· τρεῖς φορὰς ἄρα ὁ μικρότερος γίνεται ἴσος πρὸς τὸν μεγαλύτερον. Ἀλλὰ τρεῖς φορὰς ὁ μικρότερος γίνεται $3x - 300$.

Εἶναι ἄρα $3x - 300 = x + 20$.

Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ πρὸς ἀφαίρεσιν καὶ ἂς ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα.

Εἶναι ἄρα $320 = 2x$, καὶ $x = 160$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν μεγαλύτερος 180 ὁ δὲ μικρότερος 60. Καὶ εἶναι ὁ μεγαλύτερος τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου.

12.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως *ἔχῃ δεδομένον, ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τὸν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον.*

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως ᾖ βπλ, ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως ᾖ γπλ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ὁ ἐκ τῆς βας διαιρέσεως ϛ ᾱ, ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως ἔσται ϛ β̄· ὁ ἐλάσσων ἄρα τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως ἔσται Μ̊ ρ̄ ⋔ ϛ β̄· καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ τριπλασίων ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως, ἔσται Μ̊ τ̄ ⋔ ϛ ϛ̄. λοιπόν ἐστι καὶ τοὺς τῆς βας διαιρέσεως συντεθέντας ποιεῖν Μ̊ ρ̄· ἀλλὰ συντεθέντες ποιοῦσι Μ̊ τ̄ ⋔ ϛ ε̄· ταῦτα ἴσα Μ̊ ρ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ μ̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν μείζονα τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως ϛ β̄, ἔσται Μ̊ π̄· τὸν δὲ ἐλάσσονα ‹τῶν ἐκ› τῆς αὐτῆς διαιρέσεως Μ̊ ρ̄ ⋔ ϛ β̄, ἔσται Μ̊ κ̄· τὸν δὲ μείζονα τὸν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως Μ̊ τ̄ ⋔ ϛ ϛ̄, ἔσται Μ̊ ξ̄· τὸν δὲ ἐλάσσονα τὸν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως ϛ ᾱ, ἔσται Μ̊ μ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

ιγ.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον, ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἔτι ὁ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τὸν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρίς, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς βας ᾖ γπλ, ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς γης ᾖ βπλ, καὶ ἔτι ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς γης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς αης ᾖ δπλ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς γης διαιρέσεως ϛ ᾱ· ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως ἔσται ϛ β̄. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ διαίρεσίς ἐστι Μ̊ ρ̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως ἔσται Μ̊ ρ̄ ⋔ ϛ β̄. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ γπλ ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως, ἔσται Μ̊ τ̄ ⋔ ϛ ϛ̄· ὁ ἄρα ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως ἔσται ϛ ϛ̄ ⋔ Μ̊ σ̄. καὶ ἐπεί ἐστιν αὐτοῦ δπλ ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς γης διαιρέσεως, ἔστω ϛ κ̄δ̄ ⋔ Μ̊ ω̄. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν γην διαίρεσιν συντεθεῖσαν ποιεῖν Μ̊ ρ̄· ἀλλὰ συντεθεῖσα ποιεῖ ϛ κ̄ε̄ ⋔ Μ̊ ω̄. ταῦτα ἴσα Μ̊ ρ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ λ̄ς̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς γης διαιρέσεως Μ̊ μ̄λ̄, ὁ δὲ μείζων ξ̄δ̄.

ὁ δὲ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς αης διαιρέσεως Μ̊ ῑς̄, ὁ δὲ μείζων π̄δ̄.

ὁ δὲ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς βας διαιρέσεως ‹Μ̊› κ̄η̄, ὁ δὲ μείζων ο̄β̄. καὶ δῆλον ὡς ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ἔχῃ λόγον δεδομένον, ὁ δὲ ἄλλος ἐκ τῶν τῆς δευτέρας διαιρέσεως νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν ἄλλον τὸν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον δεδομένον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 100 εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὥστε ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, ὁ δὲ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως.

Ἔστω ὁ μικρότερος ὁ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως θὰ εἶναι 2x· ὁ μικρότερος ἄρα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως θὰ εἶναι 100 — 2x· καὶ ἐπειδὴ ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι τριπλάσιος τούτου θὰ εἶναι 300 — 6x. Ἐὰν προστεθοῦν λοιπὸν οἱ τῆς δευτέρας διαιρέσεως θὰ δίδωσι 100· ἀλλὰ προστιθέμενοι δίδουν 300 — 5x· ταῦτα εἶναι = 100, καὶ γίνεται ὁ x = 40.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἔλαβα τὸν μεγαλύτερον τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως 2x, ὁπότε θὰ εἶναι = 80· τὸν δὲ μικρότερον τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως 100 — 2x, ὁπότε θὰ εἶναι = 20· τὸν δὲ μεγαλύτερον τὸν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως 300 — 6x ἤτοι = 60· τὸν δὲ μικρότερον τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως x ἤτοι = 40. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

13

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρεῖς φοράς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον, ὁ δὲ ἄλλος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον, καὶ ἀκόμη ὁ ἄλλος τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν ἄλλον τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ διαιρεθῇ ὁ 100 εἰς δύο ἀριθμοὺς τρεῖς φοράς, ὥστε ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου τῶν ἐκ τῆς δευτέρας, ὁ δὲ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου τῶν ἐκ τῆς τρίτης, καὶ ἀκόμη ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως νὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου τῶν ἐκ τῆς πρώτης.

Ἂς ληφθῇ ὁ μικρότερος τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως x· ὁ μεγαλύτερος ἄρα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως θὰ εἶναι 2x. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα εἶναι 100, ὁ μικρότερος ἄρα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως θὰ εἶναι 100 — 2x. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι τριπλάσιος τούτου, θὰ εἶναι 300 — 6x· ὁ μικρότερος ἄρα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως θὰ εἶναι 6x — 200. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μεγαλύτερος τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως εἶναι τετραπλάσιος αὐτοῦ, θὰ εἶναι 24x — 800. Ὑπολείπεται νὰ προσθέσωμεν τοὺς ὅρους τῆς τρίτης διαιρέσεως καὶ νὰ λάβωμεν 100· ἐὰν ὅμως προσθέσωμεν αὐτοὺς θὰ ἔχωμεν 25x — 800· ταῦτα = 100 καὶ γίνεται x = 36.

ιδ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Δεῖ δὴ τὸ ὑποτιθέμενον πλῆθος τῶν μονάδων ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν μεῖζον εἶναι τοῦ ὁμωνύμου τοῦ διδομένου λόγου.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχειν $\gamma^{\pi\lambda}$.

Τετάχθω ὁ μὲν εἷς αὐτῶν ϛ ᾱ, *ὁ δὲ ἕτερος, κατὰ τὸν προσδιορισμόν, πλείων* M̊ γ̅· *ἔστω* M̊ ιβ̅. *καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπ' αὐτῶν* ϛ ιβ̅, *ἡ δὲ σύνθεσις αὐτῶν* ϛ ᾱ M̊ ιβ̅. *λοιπόν ἐστιν* ϛ ιβ̅ $\gamma^{\pi\lambda}$ *εἶναι* ϛ ᾱ M̊ ιβ̅· *τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα [ἐστὶ] τοῖς μείζοσι· καὶ γίνεται ὁ* ϛ M̊ δ̅.

ἔσται ὁ μὲν αὐτῶν M̊ δ̅, *ὁ δὲ* M̊ ιβ̅. *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

ιε.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος παρὰ θατέρου λαβὼν τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν, λόγον ἔχῃ πρὸς τὸν ὑπολειφθέντα τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν α^{ov} *παρὰ τοῦ* β^{ov} *λαβόντα* M̊ λ̅, *γίνεσθαι αὐτοῦ* $\beta^{\pi\lambda}$, *τὸν δὲ* β^{ov} *παρὰ τοῦ* α^{ov} *λαβόντα* M̊ ν̅, *γίνεσθαι αὐτοῦ* $\gamma^{\pi\lambda}$.

Τετάχθω ὁ β^{os} ϛ ᾱ *καὶ ὧν δίδωσι* M̊ λ̅· *ὁ ἄρα* α^{os} *ἔσται* ϛ β̅ ⋔ M̊ λ̅, *ἵνα λαβὼν παρὰ τοῦ* β^{ov} *τὰς* M̊ λ̅, *γίνηται* $\beta^{\pi\lambda}$ *αὐτοῦ. λοιπόν ἐστιν καὶ τὸν* β^{ov} *παρὰ τοῦ* α^{ov} *λαβόντα* M̊ ν̅, *γίνεσθαι αὐτοῦ* $\gamma^{\pi\lambda}$· *ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ* α^{os} M̊ ν̅, *λοιπὸν ἔχει* ϛ β̅ ⋔ M̊ π̅· *λαβὼν δὲ αὖ ὁ* β^{os} *τὰς* M̊ ν̅, *γίνεται* ϛ ᾱ M̊ π̅· *λοιπόν ἐστιν* ϛ ᾱ M̊ π̅ $\gamma^{\pi\lambda}$ *εἶναι* ϛ β̅ ⋔ M̊ π̅· *τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, καὶ γίνεται ὁ* ϛ M̊ ξδ̅.

καὶ ἔσται ὁ μὲν α^{os} M̊ ϙη̅, *ὁ δὲ* β^{os} M̊ ϙδ̅. *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

ις.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τῶν ἐπιταττομένων τριῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν α^{ov} *μετὰ τοῦ* β^{ov} *συντεθέντας ποιεῖν* M̊ κ̅, *τὸν δὲ* β^{ov} *μετὰ τοῦ* γ^{ov} *ποιεῖν* M̊ λ̅, *τὸν δὲ* γ^{ov} *μετὰ τοῦ* α^{ov} *ποιεῖν* M̊ μ̅.

Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ϛ ᾱ. *καὶ ἐπεὶ ὁ* α^{os} *καὶ ὁ* β^{os} *ποιοῦσι* M̊ κ̅, *ἐὰν ἄρα ἀπὸ* ϛ ᾱ *ἀφέλω* M̊ κ̅, *ἕξω τὸν* γ^{ov} ϛ ᾱ ⋔ M̊ κ̅· *διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν* α^{os} *ἔσται* ϛ ᾱ ⋔ M̊ λ̅, *ὁ δὲ* β^{os} ϛ ᾱ ⋔ M̊ μ̅· *λοιπὸν ἔστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἀριθμοὺς*

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ὁ μὲν μικρότερος τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως εἶναι 36 ὁ δὲ μεγαλύτερος 64.

Ὁ δὲ μικρότερος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι 16, ὁ δὲ μεγαλύτερος 84.

Ὁ δὲ μικρότερος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως εἶναι 28, ὁ δὲ μεγαλύτερος 72. Καὶ εἶναι φανερὸν πῶς λύεται τὸ πρόβλημα.

14

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Πρέπει δὲ ὁ εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὁμωνύμου τοῦ διδομένου λόγου.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἔχῃ τὸ γινόμενον πρὸς τὸ ἄθροισμα λόγον 3.

Ἂς ληφθῇ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν x, ὁ δὲ ἄλλος, κατὰ τὸν περιορισμόν, μεγαλύτερος τοῦ 3· ἔστω $= 12$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν 12x, τὸ δὲ ἄθροισμα $x + 12$. Εἶναι λοιπὸν τὸ 12x τριπλάσιον τοῦ $x + 12$· εἶναι ἄρα $3(x + 12) = 12x$· ἐξ ἧς $x = 4$.

Θὰ εἶναι ὁ εἷς μὲν αὐτῶν 4, ὁ δὲ ἄλλος 12. Καὶ λύουσι τὸ πρόβλημα.

15

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἑκάτερος λαμβάνων παρὰ τοῦ ἄλλου τὸν δοθέντα ἀριθμόν ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τὸν δοθέντα.

Ἂς ἐπιταχθῇ ὁ μὲν πρῶτος λαμβάνων παρὰ τοῦ δευτέρου 30, νὰ γίνεται αὐτοῦ διπλάσιος, ὁ δὲ δεύτερος λαμβάνων παρὰ τοῦ πρώτου 50, νὰ γίνεται αὐτοῦ τριπλάσιος.

Ἂς ληφθῇ ὁ δεύτερος $x + 30$· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $2x - 30$, ἵνα λαμβάνων παρὰ τοῦ δευτέρου 30 γίνεται διπλάσιος αὐτοῦ. Ὑπολείπεται νὰ λάβῃ καὶ ὁ δεύτερος παρὰ τοῦ πρώτου 50 καὶ νὰ γίνῃ τριπλάσιος αὐτοῦ· ἀλλὰ ὁ πρῶτος δίδων μὲν 50, ἀπομένει $2x - 80$· λαμβάνων δὲ πάλιν ὁ δεύτερος 50 γίνεται $x + 80$. Εἶναι λοιπὸν $x + 80$ τριπλάσιον τοῦ $2x - 80$· τὰ μικρότερα ἄρα λαμβανόμενα τρεῖς φορὰς εἶναι ἴσα πρὸς τὰ μεγαλύτερα, ἐξ ἧς $x = 64$.

Καὶ θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 98, ὁ δὲ δεύτερος 94. Καὶ λύουσι τὸ πρόβλημα.

16

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως προστιθέμενοι ἀνὰ δύο σχηματίζωσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Πρέπει δὲ τὸ ἥμισυ τῶν τριῶν δοθέντων νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Ἂς ἐπιταχθῇ ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου νὰ δίδῃ 20, ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου νὰ δίδῃ 30, ὁ δὲ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου νὰ δίδῃ 40.

γίνεσθαι ἴσους ς α̅· ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ς γ̅ ⋔ Μ̊ η̅· ταῦτα ἴσα ς α̅· καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ μ̅ε̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος Μ̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ βος Μ̊ ε̅, ὁ δὲ γος Μ̊ κ̅ε̅ καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

ιζ.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως σὺν τρεῖς συντιθέμενοι ποιῶσι τοὺς ἐπιταχθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τῶν τεσσάρων τὸ τρίτον μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ αου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας ποιεῖν Μ̊ κ̅, τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ βου τρεῖς ποιεῖν Μ̊ κ̅β̅, τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ γου τρεῖς ποιεῖν Μ̊ κ̅δ̅, τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δου τρεῖς ποιεῖν Μ̊ κ̅ζ̅.

Τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ς α̅. καὶ ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς α̅ ἀφέλω τοὺς αους τρεῖς, τουτέστι, Μ̊ κ̅, λοιπὸν ἕξω τὸν δον ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅· διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν αος [ἔσται] ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅β̅, ὁ δὲ βος ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅δ̅, ὁ δὲ γος ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅ζ̅. λοιπόν ἐστι τοὺς δ̅ συντεθέντας ἀριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι ς α̅. ἀλλ' οἱ δ̅ συντεθέντες ποιοῦσιν ς δ̅ ⋔ Μ̊ η̅γ̅· ταῦτα ἴσα ς α̅. καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ λ̅α̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος Μ̊ θ̅, ὁ δὲ βος Μ̊ ξ̅, ὁ δὲ γος Μ̊ δ̅, ὁ δὲ δος Μ̊ ι̅α̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ιη.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν αον καὶ τὸν βον τοῦ γου ὑπερέχειν Μ̊ κ̅, τὸν δὲ βον καὶ τὸν γον τοῦ αου ὑπερέχειν Μ̊ λ̅, τὸν δὲ γον καὶ τὸν αον τοῦ βου ὑπερέχειν Μ̊ μ̅.

Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ς β̅. καὶ ἐπεὶ ὁ αος καὶ ὁ βος τοῦ γου ὑπερέχουσιν Μ̊ κ̅, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ γου, οἱ τρεῖς, δίς ἐστιν ὁ γος καὶ ἡ ὑπεροχὴ Μ̊ κ̅. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν τριῶν, τουτέστιν ς β̅, ἀφέλω Μ̊ κ̅, ἕξω δὶς τὸν γον ς β̅ ⋔ Μ̊ κ̅· ἅπαξ ἄρα ὁ γος ἔσται ς α̅ ⋔ Μ̊ ι̅.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν αος ἔσται ς α̅ ⋔ Μ̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ βος ς α̅ ⋔ Μ̊ κ̅. λοιπόν ἐστιν τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι ς β̅· ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ς γ̅ ⋔ Μ̊ μ̅ε̅· ταῦτα ἴσα ς β̅. καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ μ̅ε̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος Μ̊ λ̅, ὁ δὲ βος Μ̊ κ̅ε̅, ὁ δὲ γος Μ̊ λ̅ε̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

῞Ας ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x. Καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δίδουσιν 20, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ x ἀφαιρέσω 20 θὰ ἔχω τὸν τρίτον $x - 20$· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $x - 30$, ὁ δὲ δεύτερος $x - 40$· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τριῶν πρέπει νὰ δίδῃ x· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γίνεται $3x - 90$· ταῦτα εἶναι $= x$· ἐξ ἧς $x = 45$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 15, ὁ δὲ δεύτερος 5, ὁ δὲ τρίτος 25. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

17

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως προστιθέμενοι ἀνὰ τρεῖς σχηματίζωσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Πρέπει δὲ τῶν τεσσάρων τὸ τρίτον νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

῞Ας ἐπιταχθῇ οἱ μὲν τρεῖς ἀπὸ τοῦ πρώτου νὰ ἔχουν ἄθροισμα 20, οἱ δὲ τρεῖς ἀπὸ τοῦ δευτέρου 22, οἱ δὲ τρεῖς ἀπὸ τοῦ τρίτου 24, οἱ δὲ τρεῖς ἀπὸ τοῦ τετάρτου 27.

῞Ας ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων x. Καὶ ἐὰν ἄρα ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ x τοὺς πρώτους τρεῖς, τουτέστιν 20, θὰ λάβω ὑπόλοιπον $x - 20$· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $x - 22$, ὁ δὲ δεύτερος $x - 24$, ὁ δὲ τρίτος $x - 27$. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τεσσάρων πρέπει νὰ γίνεται $= x$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων εἶναι $4x - 93$· ταῦτα εἶναι $= x$. Ἐξ ἧς $x = 31$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 9, ὁ δὲ δεύτερος 7, ὁ δὲ τρίτος 4, ὁ δὲ τέταρτος 11. Καὶ λύουσι τὸ πρόβλημα.

18

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο ὑπερέχωσι τοῦ ἄλλου κατὰ τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

(Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ φ, ψ, ω).

῞Ας ἐπιταχθῇ $\varphi + \psi = \omega + 20$, $\psi + \omega = \varphi + 30$, καὶ $\omega + \varphi = \psi + 40$.

῞Ας ληφθῇ $\varphi + \psi + \omega = 2x$. Καὶ ἐπειδὴ $\varphi + \psi = \omega + 20$, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ ω θὰ εἶναι $\varphi + \psi + \omega = 2\omega + 20$.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, τουτέστι τοῦ $2x$ ἀφαιρέσω 20, θὰ ἔχω $2x - 20 = 2\omega$· εἶναι ἄρα $\omega = x - 10$.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $\varphi = x - 15$ καὶ $\psi = x - 20$.

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν τριῶν εἶναι $2x$· ἀλλὰ οἱ τρεῖς προστεθέντες δίδουσι $3x - 45 = 2x$. Ἐξ ἧς $x = 45$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν $\varphi = 30$, ὁ δὲ $\psi = 25$, ὁ δὲ $\omega = 35$. Καὶ ἐπαληθεύουσι τὴν πρότασιν.

[Ἄλλως.]

Ἐπεὶ ὁ αος καὶ ὁ βος τοῦ γου ὑπερέχουσι M̊ κ̅, ἔστω ὁ γος ϛ α̅· συναμφότερος ἄρα ὅ τε αος καὶ ὁ βος ἔσται ϛ α̅ M̊ κ̅. πάλιν ἐπεὶ ὁ βος καὶ ὁ γος τοῦ αου ὑπερέχουσι M̊ λ̅, τάσσω τὸν βον τοσούτων M̊ ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τοῦ τε κ̅ καὶ λ̅, τουτέστι M̊ κ̅ε̅· καὶ ἐπεὶ ὁ αος καὶ ὁ βος ἐστιν ϛ α̅ M̊ κ̅, ὧν ὁ βος ἐστιν M̊ κ̅ε̅, λοιπὸς ἄρα ὁ αος ἔσται ϛ α̅ ⋔ M̊ ε̅. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν γον μετὰ τοῦ αου, τοῦ βου ὑπερέχειν M̊ μ̅· ἀλλὰ ὁ αος μετὰ τοῦ γου ἐστὶν ϛ β̅ ⋔ M̊ ε̅· ἴσοι ἄρα εἰσὶ M̊ ξ̅ε̅.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις. ϛ ἄρα β̅ ἴσοι M̊ ο̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ λ̅ε̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν αον, ϛ α̅ ⋔ M̊ ε̅· ἔσται M̊ λ̅· τὸν δὲ βον M̊ κ̅ε̅· τὸν δὲ γον ϛ α̅· ἔσται M̊ λ̅ε̅.

ιθ.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως οἱ τρεῖς λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσιν ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ.

Δεῖ δὴ τῶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τεσσάρων τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ αου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ δου ὑπερέχειν M̊ κ̅, τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ βου τρεῖς τοῦ αου ὑπερέχειν M̊ λ̅, τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ γου τρεῖς ὁμοίως τοῦ βου ὑπερέχειν M̊ μ̅, καὶ ἔτι τοὺς ἀπὸ τοῦ δου τρεῖς κατὰ τὸ ἑξῆς συντεθέντας τοῦ γου ὑπερέχειν M̊ ν̅.

Τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ϛ β̅. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ αου τρεῖς τοῦ δου ὑπερέχουσι M̊ κ̅, ᾧ δὲ ὑπερέχουσιν οἱ αοι τρεῖς τοῦ δου, τούτῳ ὑπερέχουσι καὶ οἱ τέσσαρες, δὶς τοῦ δου, καί εἰσιν οἱ τέσσαρες, ϛ β̅, ϛ ἄρα β̅, δὶς τοῦ δου ὑπερέχουσι M̊ κ̅· ὁ ἄρα βπλ τοῦ δου ἔσται ϛ β̅ ⋔ M̊ κ̅, αὐτὸς ἄρα ἔσται ϛ α̅ ⋔ M̊ ι̅.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν αος ἔσται ϛ α̅ ⋔ M̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ βος ϛ α̅ ⋔ M̊ κ̅, καὶ ἔτι ὁ γος ϛ α̅ ⋔ M̊ κ̅ε̅. λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας ἴσους εἶναι ϛ β̅· ἀλλ᾽ οἱ τέσσαρές εἰσιν ϛ δ̅ ⋔ M̊ ο̅· ταῦτα ἴσα ϛ β̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ λ̅ε̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος M̊ κ̅, ὁ δὲ βος M̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ γος M̊ ι̅, ὁ δὲ δος M̊ κ̅ε̅. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

[Ἄλλως.]

Ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ αου τρεῖς τοῦ δου ὑπερέχουσι M̊ κ̅, τετάχθω ὁ δος ϛ α̅· οἱ τρεῖς ἄρα ἔσονται ϛ α̅ M̊ κ̅. πάλιν ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ βου τρεῖς τοῦ αου ὑπερέχουσι M̊ λ̅, τετάχθω συναμφότερος ὅ τε βος καὶ ὁ γος M̊ τοσούτων ὅσων ἐστὶν ὁ ἥμισυς τῶν δύο ὑπεροχῶν, (λέγω δὴ τοῦ κ̅ καὶ τοῦ λ̅) τουτέστι M̊ κ̅ε̅. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ αου τρεῖς εἰσιν ϛ α̅ M̊ κ̅, ὧν ὁ βος καὶ ὁ γος M̊ κ̅ε̅, λοιπὸς ἄρα ὁ αος ἔσται ϛ α̅ ⋔ M̊ ε̅.

[Ἄλλως]

Ἐπειδὴ $\varphi + \psi = \omega + 20$, ἔστω $\omega = x$· εἶναι ἄρα $\varphi + \psi = x + 20$, (1). Πάλιν, ἐπειδὴ $\psi + \omega = \varphi + 30$, (2) λαμβάνω $\psi = 25$· (ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (2) τὸ ω διὰ τοῦ x, προσθέτει μὲ τὴν (1) καὶ ἔχει $\psi = 50 : 2$). Καὶ ἐπειδὴ $\varphi + \psi = x + 20$ καὶ $\psi = 25$, εἶναι ἄρα $\varphi = x - 5$. Πρέπει τώρα $\omega + \varphi = \psi + 40$, (3). Ἀλλὰ $\varphi + \omega = 2x - 5$· εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (3), $2x - 5 = 65$.

Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ ἀφαιρετέος τοῦ πρώτου μέλους μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Εἶναι ἄρα $2x = 70$. Καὶ $x = 35$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἔταξα τὸν πρῶτον $\varphi = x - 5$· θὰ εἶναι $\varphi = 30$· τὸν δὲ δεύτερον $\psi = 25$· τὸν δὲ τρίτον x· θὰ εἶναι 35.

19

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως λαμβανόμενοι ἀνὰ τρεῖς ὑπερέχωσι τοῦ ἄλλου κατὰ δοθέντα ἀριθμόν.

Πρέπει ὅμως τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τεσσάρων νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. (ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

Ἂς ἐπιταχθῇ ὥστε $\alpha + \beta + \gamma = \delta + 20$, (1), $\beta + \gamma + \delta = \alpha + 30$, (2), $\gamma + \delta + \alpha = \beta + 40$, (3) καὶ ἀκόμη $\delta + \alpha + \beta = \gamma + 50$, (4).

Ἂς ληφθῇ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2x$, (5). Ἐκ τῶν (5) καὶ (1) εἶναι $2\delta + 20 = 2x$. Εἶναι ἄρα $2\delta = 2x - 20$, καὶ ἄρα $\delta = x - 10$.

Διὰ τῆς αὐτῆς σκέψεως εἶναι $\alpha = x - 15$, $\beta = x - 20$, καὶ ἀκόμη $\gamma = x - 25$. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τεσσάρων εἶναι 2x· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων εἶναι $4x - 70$, (6). Ἀλλὰ ταῦτα εἶναι 2x, (7). Ἐκ τῶν (6) καὶ (7) λαμβάνομεν $x = 35$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν $\alpha = 20$, ὁ δὲ $\beta = 15$, ὁ $\gamma = 10$, ὁ δὲ $\delta = 25$. Καὶ λύουσι τὸ πρόβλημα.

[Ἄλλως]

Ἐπειδὴ $\alpha + \beta + \gamma = \delta + 20$ ἂς ληφθῇ $\delta = x$. Θὰ εἶναι ἄρα $\alpha + \beta + \gamma = x + 20$. Πάλιν, ἐπειδὴ $\beta + \gamma + \delta = \alpha + 30$, λαμβάνεται (δι' ἀντικαταστάσεως) $\beta + \gamma = 25$. Καὶ ἐπειδὴ $\alpha + \beta + \gamma = x + 20$ καὶ $\beta + \gamma = 25$, εἶναι ἄρα $\alpha = x - 5$.

καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τοῦ βου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ αου Μ̊ λ̅, οἱ δὲ ἀπὸ τοῦ γου τρεῖς ὑπερέχουσι τοῦ βου Μ̊ μ̅, συναμφότερος ἄρα ὁ γος καὶ ὁ δος ἔσται Μ̊ λ̅ε̅· λοιπὸς ἄρα ὁ γος ἔσται Μ̊ λ̅ε̅ ⋔ ϛ α̅.

ἔστι δὲ καὶ ὁ βος καὶ ὁ γος Μ̊ κ̅ε̅, ὧν ὁ γος Μ̊ λ̅ε̅ ⋔ ϛ α̅· λοιπὸς ἄρα ὁ βος ἔσται ϛ α̅ ⋔ Μ̊ ι̅.

λοιπόν ἐστι τοὺς ἀπὸ τοῦ δου τρεῖς τοῦ γου ὑπερέχειν Μ̊ ν̅· ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ϛ γ̅ ⋔ Μ̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ γος ἐστὶ Μ̊ λ̅ε̅ ⋔ ϛ α̅. δεῖ δὴ καὶ ϛ γ̅ ⋔ Μ̊ ι̅ε̅ ὑπερέχειν Μ̊ λ̅ε̅ ⋔ ϛ α̅, Μ̊ ν̅, ὥστε Μ̊ π̅ε̅ ⋔ ϛ α̅ ἴσαι εἰσὶν ϛ γ̅ ⋔ Μ̊ ι̅ε̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ κ̅ε̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν αον ϛ α̅ ⋔ Μ̊ ε̅· ἔσται Μ̊ κ̅· ὁ δὲ βος ὁμοίως Μ̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ γος Μ̊ ι̅, ὁ δὲ δος Μ̊ κ̅ε̅.

κ.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων προσλαβὼν τὸν μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τῶν ἄκρων λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ρ̅ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ αος καὶ ὁ βος τοῦ γου ᾖ γπλ, ὁ δὲ βος καὶ ὁ γος τοῦ αου ᾖ δπλ.

Τετάχθω ὁ γος ϛ α̅· καὶ ἐπεὶ ὁ αος καὶ ὁ βος τοῦ γου ἐστὶ γπλ, τετάχθωσαν οἱ δύο ϛ γ̅. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ϛ δ̅· οὗτοι ἴσοι Μ̊ ρ̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ κ̅ε̅·

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸν γον ϛ α̅· ἔσται Μ̊ κ̅ε̅· τὸν δὲ αον καὶ τὸν βον ϛ γ̅ · ἔσονται Μ̊ ο̅ε̅·

πάλιν ἐπεὶ ὁ βος καὶ ὁ γος τοῦ αου εἰσὶ δπλ, τετάχθω ὁ αος ϛ α̅. ἔσται ἄρα ὁ βος καὶ ὁ γος ϛ δ̅· οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ϛ ε̅, ἀλλὰ καὶ Μ̊ ρ̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ, Μ̊ κ̅.

ἔσται ἄρα ὁ αος Μ̊ κ̅· ὁ δὲ βος καὶ ὁ γος Μ̊ π̅, ὧν ὁ γος Μ̊ κ̅ε̅, λοιπὸς ἄρα ὁ βος ἔσται Μ̊ ν̅ε̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

κα.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει, ὁ δὲ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει, ὁ δὲ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους.

Δεῖ δὴ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου τοσούτῳ μέρει τοῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τοῦ τοιούτου μέρους ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖν ἐν αὐτῷ πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον ἢ ἐν τῷ μέσῳ.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου γῳ μέρει, τὸν δὲ μέσον τοῦ ἐλαχίστου τῷ τοῦ μεγίστου γῳ μέρει, τὸν δὲ ἐλάχιστον ὑπερέχειν Μ̊ ι̅ τοῦ τοῦ μέσου γου μέρους.

Τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ϛ α̅ καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ τοῦ μέσου γου, Μ̊ ι̅· ὁ ἄρα μέσος ἔσται ϛ γ̅, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ γον τοῦ μέσου καὶ Μ̊ ι̅.

Καὶ ἐπειδὴ $\beta + \gamma + \delta = \alpha + 30$, $\gamma + \delta + \alpha = \beta + 40$, εἶναι ἄρα $\gamma + \delta = 35$· θὰ εἶναι ἄρα $\gamma = 35 - \delta = 35 - x$.

Εἶναι δὲ $\beta + \gamma = 25$, ἐξ ὧν $\gamma = 35 - x$· εἶναι ἄρα $\beta = x - 10$. Μένει λοιπὸν $\delta + \alpha + \beta = \gamma + 50$· ἀλλὰ $\delta + \alpha + \beta = 3x - 15$. Ὁ δὲ $\gamma = 35 - x$. Πρέπει λοιπὸν $3x - 15 = 35 - x + 50$, ὥστε εἶναι $85 - x = 3x - 15$, καὶ $x = 25$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Εὑρέθη ὁ $\alpha = x - 5$· θὰ εἶναι $\alpha = 20$· ὁμοίως δὲ ὁ $\beta = 15$, ὁ δὲ $\gamma = 10$, ὁ δὲ $\delta = 25$.

20

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων λαμβάνων τὸν μέσον ἔχῃ πρὸς τὸν ἄλλον τῶν ἄκρων λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ διαιρεθῇ ὁ 100 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, (α, β, γ), ὥστε $\alpha + \beta = 3\gamma$, $\beta + \gamma = 4\alpha$.

Ἂς ληφθῇ ὁ $\gamma = x$· καὶ ἐπειδὴ $\alpha + \beta = 3\gamma$, θὰ εἶναι $\alpha + \beta = 3x$. Οἱ τρεῖς ἄρα $\alpha + \beta + \gamma = 4x$· καὶ εἶναι $4x = 100$· καὶ λαμβάνεται $x = 25$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ἔλαβα τὸν $\gamma = x$· θὰ εἶναι $\gamma = 25$· τοὺς δὲ $\beta + \gamma = 3x$· θὰ εἶναι $= 75$.

Πάλιν, ἐπειδὴ $\beta + \gamma = 4\alpha$, ἂς ληφθῇ $\alpha = x$. Θὰ εἶναι ἄρα $\beta + \gamma = 4x$· οἱ τρεῖς ἄρα $\alpha + \beta + \gamma = 5x = 100$· καὶ λαμβάνεται $x = 20$.

Θὰ εἶναι ἄρα $\alpha = 20$· ὁ δὲ $\beta + \gamma = 80$, ἐξ ὧν $\gamma = 25$, ὁ ἄλλος ἄρα ὁ $\beta = 55$. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

21

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ μέγιστος ὑπερέχῃ τοῦ μέσου κατὰ τὸ δοθὲν μέρος τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ μέσος ὑπερέχῃ τοῦ ἐλαχίστου κατὰ τὸ δοθὲν μέρος τοῦ μεγίστου, ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπερέχῃ δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ δοθὲν μέρος τοῦ μέσου.

Πρέπει ὅμως ὁ μέσος νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐλαχίστου κατὰ τοσοῦτο μέρος τοῦ μεγίστου, ὥστε ὁ ὁμώνυμος τοῦ τοιούτου μέρους πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον, νὰ σχηματίζῃ τὸν συντελεστὴν τοῦ x τοῦ μεγαλυτέρου, μεγαλύτερον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x τοῦ μέσου.

Ἔστω ὅτι ὁ μέγιστος ὑπερέχει τοῦ μέσου κατὰ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ μέσος ὑπερέχει τοῦ ἐλαχίστου κατὰ τὸ ἓν τρίτον τοῦ μεγίστου ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπερέχει τοῦ 10 κατὰ τὸ ἓν τρίτον τοῦ μέσου.

Ἔστω ὁ ἐλάχιστος $x + 10$· ὁ μέσος ἄρα θὰ εἶναι $3x$, ἵνα ὁ ἐλάχιστος ἔχῃ τὸ τρίτον τοῦ μέσου καὶ 10.

ἢ καὶ οὕτως· τετάχθω ὁ μέσος ς γ̄· καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τοῦ γ^{ου} μέρους αὐτοῦ τοῦ μέσου, Μ̊ ῑ, ἔσται ς ᾱ καὶ Μ̊ ῑ.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τοῦ α^{ου} γ^{φ} μέρει· ἀλλ' ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει ς β̄ ⋔ Μ̊ ῑ· ταῦτα ἄρα γ^{ον} μέρος ἐστὶ τοῦ μεγίστου· αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσται ς ϛ̄ ⋔ Μ̊ λ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου γ^{φ} μέρει· ἀλλὰ ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχει ς γ̄ ⋔ Μ̊ λ̄· ταῦτα ἄρα γ^{ον} ἐστὶ μέρος τοῦ ἐλαχίστου· ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται ς θ̄ ⋔ Μ̊ ϙ̄· ἀλλὰ καὶ ς ᾱ Μ̊ ῑ ηὑρέθη· καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ιβ̄ L'.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν γ^{ος} Μ̊ κβ̄ L', ὁ δὲ μέσος Μ̊ λζ̄ L', ὁ δὲ μέγιστος Μ̊ με̄, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

[Ἄλλως.]

Εὑρεῖν κ.τ.έ.

Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον τοῦ μεγίστου μέρος τηλικοῦτον δίδοσθαι, ὥστε προστιθέμενον τῷ ἐλαχίστῳ, ποιεῖν τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμοὺς ἐλάσσονας τῶν ἐξ ἀρχῆς λαμβανομένων τοῦ μέσου.

Τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς ᾱ καὶ ὧν ὑπερέχει τοῦ τοῦ μέσου γ^{ου} μέρους, Μ̊ ῑ· ἔσται ἄρα ὁ μέσος ς γ̄, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος Μ̊ ῑ τοῦ τοῦ μέσου γ^{ου} μέρους· πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου γ^{φ} μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τὸ τοῦ ἐλαχίστου γ^{ον} μέρος, ἕξω τὸν μέγιστον ς γ̄ γ$^{\times}$ Μ̊ γ̄ γ$^{\times}$· λοιπὸν δεῖ [καὶ] τὸν μέσον ἴσον εἶναι τῷ ἐλαχίστῳ καὶ τῷ τοῦ μεγίστου γ^{φ} μέρει· ἀλλ' ὁ ἐλάχιστος μετὰ τοῦ γ^{ου} μέρους τοῦ μεγίστου, ς εἰσιν β̄ θ$^{\times}$ καὶ Μ̊ ιᾱ θ$^{\times}$. ταῦτα ἴσα τοῖς τοῦ μέσου ς γ̄.

ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ς ἄρα ᾱ ⋔ θ$^{\times}$ ἴσος ἐστὶ Μ̊ ιᾱθ$^{\times}$. πάντα θ^{κις}. ς ἄρα η̄ ἴσοι Μ̊ ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ιβ̄ L'. καὶ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις τῇ ἐπάνω.

κβ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν α^{ον} τῷ β^{φ} διδόναι ἑαυτοῦ τὸ γ^{ον}, τὸν δὲ β^{ον} τῷ γ^{φ} τὸ δ^{ον}, καὶ ἔτι τὸν γ^{ον} τῷ α^{φ} τὸ ε^{ον}, καὶ γίνεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν.

Τετάχθω ὁ α^{ος}, ς τινων γ^{ον} ἐχόντων μέρος, ἐπεὶ γ^{ον} δίδωσιν· ἔστω δὴ καὶ ς γ̄. ὁ δὲ β^{ος}, Μ̊ τινῶν δ^{ον} μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ δ^{ον} δίδωσιν· ἔστω δὴ Μ̊ δ̄, καὶ μὴν δὴ ὁ β^{ος} δοὺς καὶ λαβὼν γίνεται ς ᾱ Μ̊ γ̄.

Ἢ καὶ οὕτως· ἂς ληφθῇ ὁ μέσος 3x· καὶ ἐπειδὴ θέλω ὁ ἐλάχιστος νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου κατὰ 10 θὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος $x + 10$.

Μένει λοιπὸν νὰ ὑπερέχῃ καὶ ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου κατὰ τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρώτου· ἀλλ' ὁ μέσος ὑπερέχει τοῦ ἐλαχίστου, $2x - 10$ [$3x - (x + 10)$]· ταῦτα ἄρα εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ μεγίστου· αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος εἶναι $6x - 30$. Θὰ πρέπῃ ἄρα καὶ ὁ μέγιστος νὰ ὑπερέχῃ τοῦ μέσου κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἐλαχίστου· ἀλλὰ ὁ μέγιστος ὑπερέχει τοῦ μέσου κατὰ $3x - 30$· ταῦτα ἄρα εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἐλαχίστου· ὁ ἐλάχιστος ἄρα θὰ εἶναι $9x - 90$· ἀλλὰ εἶναι καὶ $x + 10$· καὶ λαμβάνεται $x = 12\frac{1}{2}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν τρίτος $22\frac{1}{2}$, ὁ δὲ μέσος $37\frac{1}{2}$, ὁ δὲ μέγιστος 45, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

[Ἄλλως]

Εὑρεῖν καὶ τὰ ἑξῆς.

(Περιορισμός). Πρέπει δὲ τὸ διδόμενον μέρος τοῦ μεγίστου νὰ δίδεται τόσον, ὥστε προστιθέμενον εἰς τὸν ἐλάχιστον νὰ σχηματίζῃ τὸν συντελεστὴν τοῦ x τοῦ μεσαίου μικρότερον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x τοῦ μεγαλυτέρου.

Ἔστω πάλιν ὁ μικρότερος x καὶ ὅτι ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου κατὰ 10· θὰ εἶναι ἄρα ὁ μέσος 3x, ἵνα ὁ ἐλάχιστος ὑπερέχῃ 10 τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου. Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω ὁ μέγιστος νὰ ὑπερέχῃ τοῦ μέσου κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἐλαχίστου, ἐὰν προσθέσω εἰς τὸν μέσον τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἐλαχίστου, θὰ ἔχω τὸν μέγιστον $3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$. Πρέπει δὲ καὶ ὁ μέσος νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ μεγίστου· ἀλλ' ὁ ἐλάχιστος μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μεγίστου εἶναι $2\frac{1}{9}x + 11\frac{1}{9}$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τὸν μέσον 3x.

Ἀφαιρῶ τὰ ἴσα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν. Θὰ εἶναι ἄρα $\left(1 - \frac{1}{9}\right)x = 11\frac{1}{9}$. Πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 9. Θὰ εἶναι ἄρα $8x = 100$. Ἐξ ἧς ὁ $x = 12\frac{1}{2}$. Καὶ ἡ αὐτὴ ἐπαλήθευσις πρὸς τὴν προηγουμένην.

22

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος ἐπιταχθὲν μέρος του δίδῃ εἰς τὸν ἑπόμενόν του, ἵνα δίδοντες καὶ λαμβάνοντες γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος νὰ δίδῃ τὸ τρίτον του εἰς τὸν δεύτερον, ὁ δὲ δεύτερος νὰ δίδῃ τὸ τέταρτόν του εἰς τὸν τρίτον καὶ ἀκόμη ὁ τρίτος νὰ δίδῃ τὸ πέμπτον του εἰς τὸν πρῶτον, καὶ μετὰ τὴν δόσιν καὶ τὴν λῆψιν νὰ γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὅτι ὁ x εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος δίδει *λοιπόν ἐστι καὶ τὸν αον δόντα καὶ λαβόντα γίνεσθαι ϛ α̅ M̊ γ̅· ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ γον, ϛ α̅, λαβὼν δὲ M̊ γ̅ ⋔ ϛ α̅, γίνεται ϛ α̅ M̊ γ̅. M̊ ἄρα γ̅ ⋔ ϛ α̅, εον μέρος εἰσὶ τοῦ γου· αὐτὸς ἄρα ἐστὶ M̊ ι̅ε̅ ⋔ ϛ ε̅.*

δεήσει ἄρα καὶ τὸν γον, δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ εον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ βου τὸ δον, M̊ α̅, γίνεσθαι ϛ α̅ M̊ γ̅· ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ εον, M̊ γ̅ ⋔ ϛ α̅, λοιπός ἐστι M̊ ι̅β̅ ⋔ ϛ δ̅· λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ βου τὸ δον, M̊ α̅, γίνεται M̊ ι̅γ̅ ⋔ ϛ δ̅. ταῦτα ἴσα ϛ α̅ M̊ γ̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ β̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος M̊ ς̅, ὁ δὲ βος M̊ δ̅, ὁ δὲ γος M̊ ε̅. καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

κγ.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ δῷ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι.

Ἐπιτετάχθω τὸν μὲν αον τῷ βῳ διδόναι τὸ γον, τὸν δὲ βον τῷ γῳ τὸ δον, τὸν δὲ γον τῷ δῳ τὸ εον, καὶ ἔτι τὸν δον τῷ αῳ τὸ ςον, καὶ γίνεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν.

Τετάχθω ὁ μὲν αος, ϛ τινων γον μέρος ἐχόντων, ἐπεὶ γον δίδωσιν· ἔστω ϛ γ̅· ὁ δὲ βος, M̊ τινῶν δον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ δον δίδωσιν· ἔστω M̊ δ̅. ὁ ἄρα βος, δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ δον, M̊ α̅, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ αου τὸ γον, ϛ α̅, γίνεται ϛ α̅ M̊ γ̅.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν αον, δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ γον, ϛ α̅, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δου τὸ ςον, γίνεσθαι ϛ α̅ M̊ γ̅· ἀλλὰ δοὺς μὲν ϛ α̅, λοιποὺς ἔχει ϛ β̅. δεήσει ἄρα λαβόντα αὐτὸν τοῦ δου τὸ ςον, γίνεσθαι ϛ α̅ M̊ γ̅· M̊ ἄρα γ̅ ⋔ ϛ α̅, ςον μέρος εἰσὶ τοῦ δου. αὐτὸς ὁ δος ἔσται M̊ ι̅η̅ ⋔ ϛ ς̅.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν δον, δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ςον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ γου τὸ εον, γίνεσθαι ϛ α̅ M̊ γ̅· ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ ςον, M̊ γ̅ ⋔ ϛ α̅, λοιπός ἐστι M̊ ι̅ε̅ ⋔ ϛ ε̅. δεήσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ γου εον γίνεσθαι ϛ α̅ M̊ γ̅·

τὸ τρίτον αὐτοῦ, ὁπότε ὁ πρῶτος εἶναι 3x. Ὁ δὲ δεύτερος ἔστω ὅτι εἶναι 4, ἐπειδὴ δίδει τὸ τέταρτον αὐτοῦ, ὁπότε ὁ δεύτερος ἀφοῦ δώσει καὶ λάβει γίνεται x + 3.

Πρέπει λοιπὸν καὶ ὁ πρῶτος ἀφοῦ δώσει καὶ λάβει νὰ γίνῃ x + 3· ἀλλὰ ἀφοῦ δώσει τὸ τρίτον αὐτοῦ, τὸ x, καὶ λάβει 3 — x, γίνεται x + 3. Εἶναι ἄρα 3— x τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ τρίτου· αὐτὸς ἄρα ὁ τρίτος εἶναι 15 — 5x.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ ὁ τρίτος, ἀφοῦ δώσει μὲν τὸ $\frac{1}{5}$ του, λάβει δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ νὰ γίνῃ x + 3· ἀλλὰ ἀφοῦ δώσει τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, 3 — x, ὁ ὑπόλοιπος θὰ εἶναι 12 — 4x· ἀφοῦ λάβει δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ 1, γίνεται 13 — 4x. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς x + 3· ἐξ ἧς x = 2.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 6, ὁ δὲ δεύτερος 4, ὁ δὲ τρίτος 5. Καὶ εἶναι φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

23

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος ἀφοῦ δώσει τὸ ἐπιταχθὲν μέρος εἰς τὸν ἑπόμενον, δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος δίδει εἰς τὸν δεύτερον τὸ $\frac{1}{3}$, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{4}$, ὁ δὲ τρίτος εἰς τὸν τέταρτον τὸ $\frac{1}{5}$, καὶ ἀκόμη ὁ τέταρτος εἰς τὸν πρῶτον τὸ $\frac{1}{6}$, καὶ μετὰ τὴν δόσιν καὶ τὴν λῆψιν νὰ γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὁ πρῶτος ἔχων x μονάδας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι τρίτον μέρος, ἐπειδὴ δίδει $\frac{1}{3}$· ἔστω 3x· ὁ δὲ δεύτερος ἔχων μονάδας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχωσι τέταρτον μέρος, ἐπειδὴ δίδει $\frac{1}{4}$· ἔστω 4. Ὁ δεύτερος ἄρα ἀφοῦ δώσει τὸ τέταρτόν του, τὸ 1, λάβει δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον, τὸ x, γίνεται x + 3.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ ὁ πρῶτος, ἀφοῦ δώσει τὸ τρίτον του, τὸ x, λάβει δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον, νὰ γίνῃ x + 3· ἀλλὰ ἀφοῦ δώσει μὲν τὸ x, θὰ μείνῃ 2x. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα, ἀφοῦ λάβει αὐτὸς τὸ ἕκτον τοῦ τετάρτου, νὰ γίνεται x + 3· εἶναι ἄρα τὸ 3 — x τὸ ἕκτον μέρος τοῦ τετάρτου· αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος θὰ εἶναι 18 — 6x.

Ὑπολείπεται λοιπόν, ὥστε ὁ τέταρτος, ἀφοῦ δώσει μὲν τὸ $\frac{1}{6}$ του, λάβει δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ $\frac{1}{5}$, νὰ γίνεται x + 3· ἀλλά, ἀφοῦ δώσει ἑαυτοῦ μὲν τὸ $\frac{1}{6}$, τὸ 3 — x, θὰ μένῃ ὑπόλοιπον 15 — 5x. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα αὐτός, *ἀλλὰ ἐὰν λάβῃ ς ϛ ⋔ M̊ ιβ, γίνεται ς α M̊ γ, ὥστε ς ϛ ⋔ M̊ ιβ, ε^{ον} μέρος εἰσὶ τοῦ γ^{ου}· αὐτὸς ἄρα ἔσται ς λ ⋔ M̊ ξ.*

δεήσει ἄρα καὶ τὸν γ^{ον}, δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ε^{ον} λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ β^{ου} τὸ δ^{ον}, γίνεσθαι ς α M̊ γ· ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ ε^{ον}, ς ϛ ⋔ M̊ ιβ, λοιποὺς ἔχει ς κδ ⋔ M̊ μη· λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ β^{ου} τὸ δ^{ον}, γίνεται ς κδ ⋔ M̊ μξ. ταῦτα ἴσα ς α M̊ γ· καὶ γίνεται ὁ ς ν κγ^{ων}.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} ρν, ὁ δὲ β^{ος} ϟβ, ὁ δὲ γ^{ος} ρκ, ὁ δὲ δ^{ος} ριδ· περιῃρήσθω τὸ μόριον· ἔσται δηλαδὴ ὁ μὲν α^{ος} M̊ ρν, ὁ δὲ β^{ος} ϟβ, ὁ δὲ γ^{ος} ρκ, ὁ δὲ δ^{ος} ριδ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

κδ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, καὶ γένωνται ἴσοι.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν α^{ον} παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ γ^{ον}, τὸν δὲ β^{ον} παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ δ^{ον}, τὸν δὲ γ^{ον} παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ ε^{ον}, καὶ γίνεσθαι ἴσους.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς α· οἱ δὲ λοιποὶ δύο, M̊ τινῶν τοῦ προχείρου ἕνεκεν γ^{ον} μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ γ^{ον} διδόασιν· ἔστω M̊ γ. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ς α M̊ γ, καὶ μένει ὁ α^{ος} λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ γ^{ον}, ς α M̊ α.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν β^{ον} παρὰ τῶν <λοιπῶν> δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ δ^{ον}, γίνεσθαι ς α M̊ α· πάντα δ^{κις}· δ^{κις} ἄρα ὁ β^{ος} προσλαβὼν τοὺς δύο, τρίς ἐστιν ὁ β^{ος} προσλαβὼν τοὺς τρεῖς· τρὶς ἄρα ὁ β^{ος} προσλαβὼν τοὺς τρεῖς γίνεται ς δ M̊ δ· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτων ἀφέλω τοὺς τρεῖς, λοιποὶ ς γ M̊ α τρίς ἐστιν ὁ β^{ος}· αὐτὸς ἄρα ὁ β^{ος} ἔσται ς α M̊ γ$^{×}$.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν γ^{ον} παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ ε^{ον}, ἀφοῦ λάβει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ τρίτου νὰ γίνεται $x + 3$, ὥστε $6x - 12$, εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ τρίτου· αὐτὸς ἄρα (ὁ τρίτος) θὰ εἶναι $30x - 60$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ ὁ τρίτος, ἀφοῦ δώσει ἑαυτοῦ μὲν τὸ $\frac{1}{5}$, λάβει δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ $\frac{1}{4}$, νὰ γίνεται $x + 3$· ἀλλὰ ἀφοῦ μὲν δώσει ἑαυτοῦ τὸ $\frac{1}{5}$, τὸ $6x - 12$, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον $24x - 48$· ἀφοῦ δὲ λάβει παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ $\frac{1}{4}$, γίνεται $24x - 47$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x + 3$· ἐξ ἧς $x = \frac{50}{23}$

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{150}{23}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{92}{23}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{120}{23}$, ὁ δὲ τέταρτος $\frac{114}{23}$· ἂς ἀπαλειφθῇ ὁ παρονομαστὴς (ἀφοῦ ληφθῇ τὸ 23πλάσιον ἑκάστου)· θὰ εἶναι ἑπομένως ὁ μὲν πρῶτος 150, ὁ δὲ δεύτερος 92, ὁ δὲ τρίτος 120, ὁ δὲ τέταρτος 114. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

24

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἀφοῦ ἕκαστος λάβει τὸ ἐπιταχθὲν μέρος παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γίνωνται ἴσοι.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος (x_1) νὰ λάβῃ παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ($x_2 + x_3$) τὸ $\frac{1}{3}$, ὁ δὲ δεύτερος παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων τὸ $\frac{1}{4}$, ὁ δὲ τρίτος παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων τὸ $\frac{1}{5}$, καὶ νὰ γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὁ πρῶτος $x_1 = x$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ($x_2 + x_3$) διὰ τὸ ἁπλούστερον τοῦ πράγματος νὰ ἔχῃ μονάδας, αἵτινες νὰ διαιρῶνται διὰ 3, ἐπειδὴ δίδει τὸ $\frac{1}{3}$· ἔστω 3. Οἱ τρεῖς ἄρα θὰ εἶναι $x_1 + x_2 + x_3 = x + 3$ καὶ εἶναι $x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) = x + 1$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶναι καὶ $x_2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_3) = x + 1$.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4 λαμβάνομεν
$4x_2 + x_1 + x_3 = 4x + 4$.
ἤτοι $3x_2 + (x_1 + x_2 + x_3) = 4x + 4$.

Ἐὰν ἄρα ἀφαιρέσω ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν θὰ λάβω

$$3x_2 = 3x + 1.$$

Ἑπομένως ὁ $x_2 = x + \frac{1}{3}$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὅπως $x_3 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2) = x + 1$.

γίνεσθαι ϛᾱ Μ̊ᾱ· πάντα ὁμοίως εκις. καὶ συνάγεται διὰ τῶν ὁμοίων ὁ γος ϛ ᾱ Μ̊ L'.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γενέσθαι ϛᾱ Μ̊γ̄· καὶ γίνεται ὁ ϛι̅γ̅ ιβων· καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ μορίου, ἔσται ὁ μὲν αος Μ̊ ι̅γ̅, ὁ δὲ βος Μ̊ι̅ζ̅, ὁ δὲ γος Μ̊ι̅θ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

κε.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ἐπιταχθέν, καὶ γένωνται ἴσοι.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν μὲν αον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ γον, τὸν δὲ βον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς τὸ δον, τὸν δὲ γον ὁμοίως τὸ εον, τὸν δὲ δον τὸ ϛον, καὶ γίνεσθαι ἴσους.

Τετάχθω ὁ αος ϛᾱ· οἱ δὲ λοιποὶ τρεῖς Μ̊ τινῶν γον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ γον διδόασιν· ἔστωσαν Μ̊γ̄. ὁ ἄρα αος παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ γον, γίνεται ϛ ᾱ Μ̊ ᾱ.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν βον παρὰ τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ δον, γίνεσθαι, ϛ ᾱΜ̊ᾱ. πάντα πάλιν ὁμοίως δκις· καὶ συνάγεται διὰ τῶν αὐτῶν, ὁ μὲν βος ϛ ᾱ Μ̊γχ, ὁ δὲ γος ϛ ᾱ Μ̊L', ὁ δὲ δος ϛᾱ Μ̊γ̄ εων.

λοιπόν ἐστι τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ϛᾱ Μ̊γ̄· καὶ συνάγεται ὁ ϛ Μ̊μ̅ζ̅, ἐν μορίῳ μονάδος ϙφ.

ἔσται ὁ μὲν αος Μ̊μ̅ζ̅, ὁ δὲ βος Μ̊ο̅ζ̅, ὁ δὲ γος Μ̊ϙ̅β̅, ὁ δὲ δος Μ̊ρ̅α̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

κϛ.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν τινα ἀριθμόν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὃν μὲν τετράγωνον, ὃν δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅ τε σ̄ καὶ ὁ ε̄· καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ϛᾱ.

κἂν μὲν ἐπὶ τὰς σ̄Μ̊ πολλαπλασιασθῇ, ποιεῖ ϛσ̄, κἂν δὲ ἐπὶ τὰς Μ̊ε̄, Καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 5 λαμβάνομεν

$$5x_3 + (x_1 + x_2) = 5x + 5.$$

Καὶ ὁμοίως, ὡς προηγουμένως, [δηλ. $4x^3 + (x_1 + x_2 + x_3) = 5x + 5$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ $x + 3 = x_1 + x_2 + x_3$] λαμβάνομεν $x_3 = x + \frac{1}{2}$.

Τώρα πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ γίνεται ἴσον πρὸς $x + 3$· καὶ λαμβάνεται $x = \frac{13}{12}$· καὶ ἀφοῦ ἀπαλειφθῇ ὁ παρονομαστής, θὰ εἶναι ὁ μὲν $x_1 = 13$, ὁ δὲ $x_2 = 17$, ὁ δὲ $x_3 = 19$. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

25

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως ἀφοῦ ἕκαστος λάβει τὸ ἐπιταχθὲν μέρος παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἄλλων γίνωνται ἴσοι.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος (x_1) νὰ λάβῃ παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἄλλων τὸ τρίτον, ὁ δὲ δεύτερος νὰ λάβῃ παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἄλλων τὸ τέταρτον, ὁ δὲ τρίτος ὁμοίως τὸ πέμπτον, ὁ δὲ τέταρτος τὸ ἕκτον καὶ νὰ γίνωνται ἴσοι.

Ἔστω ὁ πρῶτος x ($= x_1$)· τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν λοιπῶν τριῶν ($x_2 + x_3 + x_4$) νὰ διαιρῆται διὰ τρία, ἐπειδὴ δίδει τὸ τρίτον· ἔστω 3. Ὁ πρῶτος ἄρα λαμβάνων παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων τὸ τρίτον γίνεται

$$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4) = x + 1.$$

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ

$$x_2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_3 + x_4) = x + 1.$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἀντικαταστάσεων λαμβάνομεν

$$x_2 = x + \frac{1}{3}, \quad x_3 = x + \frac{1}{2}, \quad x_4 = x + \frac{3}{5}.$$

Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x + 1.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $x = \frac{47}{90}$.

Καὶ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἀντικαταστάσεων λαμβάνομεν $x_1 = 47$, $x_2 = 77$, $x_3 = 92$, $x_4 = 101$. Καὶ ποιοῦσι τῆς προτάσεως.

26.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις, ὅστις πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν δοθέντων νὰ σχηματίζῃ τὸ ἓν γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου γινομένου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὁ 200 καὶ ὁ 5· καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος x.

ποιεῖ ϛ$\overline{ε}$. *δεῖ δὴ τούτων τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τοὺς* ϛ$\overline{ε}$ *τετραγωνίσω, γίνονται* $Δ^{Y}\overline{κε}$ *ἴσαι* ϛ$\overline{σ}$.

πάντα παρὰ 𐅻· 𐅻 *ἄρα* $\overline{κε}$ *ἴσοι* $\mathring{M}\overline{σ}$. *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\mathring{M}\overline{η}$ *καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.*

κζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν.

'Επιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν $\mathring{M}\overline{κ}$, *τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν* $\mathring{M}\overline{ϟϛ}$.

Τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν 𐅻 $\overline{β}$. *καὶ ἐπεὶ τὸ σύνθεμα αὐτῶν ἐστι* $\mathring{M}\overline{κ}$, *ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα, ἔσται ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως, τοῦ L' τοῦ συνθέματος,* $\mathring{M}\overline{ι}$. *κἂν τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς, τουτέστιν* ϛ$\overline{α}$ *ἑνὶ μὲν τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ, τοῦ δὲ λοιποῦ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα* $\mathring{M}\overline{κ}$, *ἡ δὲ ὑπεροχὴ* 𐅻$\overline{β}$. *τετάχθω οὖν ὁ μείζων* ϛ$\overline{α}$ *καὶ* $\mathring{M}\overline{ι}$ *τῶν ἡμίσεων τοῦ συνθέματος· ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται* $\mathring{M}\overline{ι}$ ⋔ ϛ $\overline{α}$. *καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα* $\mathring{M}\overline{κ}$, *ἡ δὲ ὑπεροχὴ* 𐅻$\overline{β}$.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν $\mathring{M}\overline{ϟϛ}$· *ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι* $\mathring{M}\overline{ρ}$ ⋔ $Δ^{Y}\overline{α}$· *ταῦτα ἴσα* $\mathring{M}\overline{ϟϛ}$· *καὶ γίνεται ὁ* 𐅻 $\mathring{M}\overline{β}$.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων $\mathring{M}\overline{ιβ}$, *ὁ δὲ ἐλάσσων* $\mathring{M}\overline{η}$. *καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.*

κη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν.

'Επιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν $\mathring{M}\overline{κ}$, *τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν* $\mathring{M}\overline{ση}$.

Τετάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν 𐅻$\overline{β}$. *καὶ ἔστω ὁ μείζων* ϛ$\overline{α}$ *καὶ* $\mathring{M}\overline{ι}$, *τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων* $\mathring{M}\overline{ι}$ ⋔ 𐅻 $\overline{α}$, *καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν* $\mathring{M}\overline{κ}$, *ἡ δὲ ὑπεροχὴ* 𐅻 $\overline{β}$.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν $\mathring{M}\overline{ση}$·

Καὶ ἂν μὲν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 200 δίδει 200x, ἂν δὲ ἐπὶ 5, 5x. Πρέπει λοιπὸν ἐκ τούτων νὰ εἶναι $200x = 5^2x^2$. Ἐὰν λοιπὸν σχηματίσω τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέλους λαμβάνω $200x = 25x^2$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x λαμβάνομεν $200 = 25x$. Ἐξ ἧς $x = 8$ καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς δύο δοθέντας ἀριθμούς.

(Περιορισμός). Πρέπει δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο ἀριθμῶν νὰ ὑπερέχῃ τοῦ γινομένου αὐτῶν κατὰ τετράγωνον. Εἶναι δὲ τοῦτο τυπικόν.

Ἂς ἐπιταχθῇ, τὸ μὲν ἄθροισμα νὰ γίνεται 20, τὸ δὲ γινόμενον 96.

Ἔστω ἡ διαφορὰ αὐτῶν 2x. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 20, τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν εἶναι 10. Καὶ ἂν τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς δηλ. τὸν x, προσθέσω μὲν εἰς τὸ ἓν ἡμιάθροισμα, ἀπὸ τοῦ ἄλλου δὲ ἀφαιρέσω, θὰ μείνῃ πάλιν τὸ ἄθροισμα 20, ἡ δὲ διαφορὰ 2x. Ἔστω λοιπὸν ὁ μεγαλύτερος $x + 10$· ὁ μικρότερος ἄρα θὰ εἶναι $10 - x$. Καὶ εἶναι $(10 + x) + (10 - x) = 20$ καὶ $(10 + x) - (10 - x) = 2x$.

Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι 96· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $100 - x^2$· ταῦτα εἶναι $= 96$. Ἑπομένως $x = 2$.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν μεγαλύτερος 12, ὁ δὲ μικρότερος 8. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

(Περιορισμός). Πρέπει δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν κατὰ τετράγωνον ἀριθμόν. Εἶναι δὲ καὶ τοῦτο τυπικόν.

Ἔστω ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 20 τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν 208. Ἂς κληθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 2x. Καὶ ἔστω ὁ μεγαλύτερος $x + 10$ ἔνθα 10 τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν, ὁ δὲ μικρότερος $10 - x$. Καὶ εἶναι πάλιν τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν 20, ἡ δὲ διαφορὰ 2x.

Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ δίδῃ 208.

ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ $\Delta^{Y}\overline{\beta}\,\mathring{M}\,\overline{\sigma}$. *ταῦτα ἴσα* $\mathring{M}\,\overline{\sigma\eta}$, *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\mathring{M}\,\overline{\beta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$, *ὁ δὲ ἐλάσσων* $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. *καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.*

κθ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\kappa}$, *τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν* $\mathring{M}\,\overline{\pi}$.

Τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ $\overline{\beta}$. *ἔσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων* ϛ $\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\iota}$, *ὁ δὲ ἐλάσσων* $\mathring{M}\,\overline{\iota}$ ⋔ ϛ $\overline{\alpha}$, *καὶ μένει πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν* $\mathring{M}\,\overline{\kappa}$, *ἡ δὲ ὑπεροχὴ* ϛ $\overline{\beta}$.

λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\pi}$· *ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν* ϛ $\overline{\mu}$· *ταῦτα ἴσα* $\mathring{M}\,\overline{\pi}$.

καὶ συνάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$, *ὁ δὲ ἐλάσσων* $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. *καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

λ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς.

Δεῖ δὴ τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι $\mathring{M}\,\overline{\delta}$, *τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν* $\mathring{M}\,\overline{\text{ϙ}\varsigma}$.

Τετάχθω τὸ σύνθεμα αὐτῶν ϛ $\overline{\beta}$· *ἔχομεν δὲ καὶ τὴν ὑπεροχὴν* $\mathring{M}\,\overline{\delta}$. *ἔσται ὁμοίως ὁ μείζων* ϛ $\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\beta}$, *ὁ δὲ ἐλάσσων* ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\beta}$, *καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν* ϛ $\overline{\beta}$, *ἡ δὲ ὑπεροχὴ* $\mathring{M}\,\overline{\delta}$.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\text{ϙ}\varsigma}$· *ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἐστι* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$· *ταῦτα ἴσα* $\mathring{M}\,\overline{\text{ϙ}\varsigma}$.

καὶ γίνεται πάλιν ὁ μὲν μείζων $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$, *ὁ δὲ ἐλάσσων* $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

λα.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας δεδομένον, ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον.

ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των δίδει, $2x^2 + 200$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 208, ἐξ ἧς $x = 2$. Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μὲν μεγαλύτερος 12, ὁ δὲ μικρότερος 8. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

29

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

Ἂς προσταχθῇ τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν, νὰ εἶναι 20, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των 80.

Ἔστω ἡ διαφορὰ αὐτῶν $2x$. Θὰ εἶναι ὁμοίως ὁ μὲν μεγαλύτερος $x + 10$, ὁ δὲ μικρότερος $10 - x$ καὶ εἶναι πάλιν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 20, ἡ δὲ διαφορά των $2x$.

Ὑπολείπεται, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ δίδῃ 80· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των εἶναι $40x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 80.

Καὶ συνάγεται πάλιν ἐκ τούτου (τοῦ $x = 2$) ὁ μὲν μεγαλύτερος 12, ὁ δὲ μικρότερος 8. Καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

30

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορά των καὶ τὸ γινόμενόν των δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

(Περιορισμός) : Πρέπει δὲ τὸ τετραπλάσιον γινόμενον αὐτῶν σὺν τῷ τετραγώνῳ τῆς διαφορᾶς των νὰ δίδῃ ἀριθμὸν τετράγωνον. Εἶναι δὲ καὶ τοῦτο τυπικόν.

Ἂς προσταχθῇ, ἡ μὲν διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶναι 4, τὸ δὲ γινόμενόν των 96.

Ἔστω τὸ ἄθροισμά των $2x$· ἔχομεν δὲ καὶ τὴν διαφοράν των 4. Θὰ εἶναι ὁμοίως ὁ μεγαλύτερος $x + 2$ καὶ ὁ μικρότερος $x - 2$, καὶ μένει τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν $2x$, ἡ δὲ διαφορά των 4.

Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ δίδῃ 96· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $x^2 - 4$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 96. Καὶ γίνεται πάλιν ὁ μὲν μεγαλύτερος 12, ὁ δὲ μικρότερος 8. Καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

31

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δεδομένον λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι γ^πλ, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ε^πλ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ α̅, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ γ̅. λοιπόν ἐστι τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ⟨συναμφοτέρου εἶναι ε^πλ· ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων⟩ ποιεῖ Δ^{Y} ι̅, τὸ δὲ αὐτῶν σύνθεμα ϛ δ̅· ὥστε Δ^{Y} ι̅ ε^πλ εἰσιν ϛ δ̅.

ϛ ἄρα κ̅ ἴσοι εἰσὶ Δ^{Y} ι̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ β̅.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων M̊ β̅, ὁ δὲ μείζων M̊ ϛ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

λβ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι γ^πλ, τὸ δὲ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ι^πλ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ α̅, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ γ̅. λοιπὸν θέλω τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ι^πλ· ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ Δ^{Y} ι̅, ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ β̅. Δ^{Y} ἄρα ι̅ ι^πλ· εἰσιν ϛ β̅.

καὶ πάντα παρὰ ϛ. ϛ ἄρα ι̅ ἴσοι εἰσὶ M̊ κ̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ β̅.

καὶ ἔσται πάλιν ὁ μὲν ἐλάσσων M̊ β̅, ὁ δὲ μείζων M̊ ϛ̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

λγ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι γ^πλ, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ϛ^πλ.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ α̅, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ γ̅. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι ϛ^πλ· ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων εἰσὶ Δ^{Y} η̅, συναμφότερος δὲ ϛ δ̅. Δ^{Y} ἄρα η̅ ϛ^πλ εἰσιν ϛ δ̅· ϛ ἄρα κδ̅ ἴσοι εἰσὶ Δ^{Y} η̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ γ̅.

⟨καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων M̊ γ̅, ὁ δὲ μείζων M̊ θ̅.⟩ καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Ἄς προσταχθῇ νὰ εἶναι τριπλάσιος ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἔστω ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι 3x. Ὑπολείπεται, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των εἶναι $10x^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶναι 4x· ὥστε $10x^2 = 5 \cdot 4x$. Εἶναι ἄρα $10x^2 = 20x$, καὶ γίνεται ὁ $x = 2$.

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι 2, ὁ δὲ μεγαλύτερος 6. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

32

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἄς προσταχθῇ νὰ εἶναι τριπλάσιος ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι δεκαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι 3x. Ἐξ ἄλλου θέλω, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι δεκαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι $10x^2$, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 2x. Εἶναι ἄρα $10x^2 = 10(2x)$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x. Εἶναι ἄρα $10x = 20$, ἐξ ἧς $x = 2$.

Καὶ θὰ εἶναι πάλιν ὁ μὲν μικρότερος 2, ὁ δὲ μεγαλύτερος 6. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

33

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἄς προσταχθῇ νὰ εἶναι τριπλάσιος ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι 6πλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι 3x.

Ὑπολείπεται, ὥστε καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι ἑξαπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ ἡ μὲν διαφορὰ τῶν τετραγώνων των εἶναι $8x^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶναι 4x· εἶναι ἄρα $8x^2 = 6(4x)$· εἶναι ἄρα $8x = 24x$, ἐξ ἧς $x = 3$.

⟨ Καὶ θὰ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος 3, ὁ δὲ μεγαλύτερος 9 ⟩. Καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

λδ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι $\gamma^{\pi\lambda}$, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι $\iota\beta^{\pi\lambda}$.

Τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς $\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς $\overline{\gamma}$. λοιπόν ἐστι καὶ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι $\iota\beta^{\pi\lambda}$. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶ $\Delta^{Y}\overline{\eta}$· αὐται ἄρα $\iota\beta^{\pi\lambda}$ εἰσιν ς $\overline{\beta}$.

ς ἄρα $\overline{\kappa\delta}$ ἴσοι εἰσὶ $\Delta^{Y}\overline{\eta}$· καὶ γίνεται πάλιν ὁ ς $\overset{\circ}{M}\overline{\gamma}$. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

[Π ό ρ ι σ μ α]. 'Ομοίως δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται

καὶ ἀριθμοὶ δύο πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχειν δεδομένον,

καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχειν δεδομένον.

λε.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος πρὸς τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι $\gamma^{\pi\lambda}$, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τοῦ μείζονος εἶναι ϛ$^{\pi\lambda}$.

Τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς$\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς$\overline{\gamma}$. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τοῦ μείζονος εἶναι ϛ$^{\pi\lambda}$· ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονός ἐστι $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· Δ^{Y} ἄρα $\overline{\alpha}$ ϛ$^{\pi\lambda}$ ἐστὶν ς $\overline{\gamma}$.

ς ἄρα $\overline{\iota\eta}$ ἴσοι εἰσὶ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\eta}$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\eta}$, ὁ δὲ μείζων $\overset{\circ}{M}\overline{\nu\delta}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

λϛ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ δεδομένον.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι $\gamma^{\pi\lambda}$, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονος ϛ$^{\pi\lambda}$.

"Εσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ς$\overline{\gamma}$, ὁ δὲ ἐλάσσων ς$\overline{\alpha}$, καὶ μένει ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος $\gamma^{\pi\lambda}$. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτοῦ τοῦ ἐλάσσονος εἶναι ϛ$^{\pi\lambda}$. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\alpha}$ ϛ$^{\pi\lambda}$. ἐστὶν ς$\overline{\alpha}$.

ς ἄρα $\overline{ϛ}$ ἴσοι $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\circ}{M}\overline{ϛ}$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\overline{ϛ}$, ὁ δὲ μείζων $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\eta}$. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

34

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς προσταχθῇ, ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι δωδεκαπλασία τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω πάλιν ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $3x$. Ὑπολείπεται, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι δωδεκαπλασία τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι $8x^2$· εἶναι ἄρα $8x^2 = 12\,(\,2x\,)$· εἶναι ἄρα $8x^2 = 24x$, ἐξ ἧς πάλιν $x = 3$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

[Πόρισμα] : Ὁμοίως δὲ διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν θὰ εὑρεθῶσι

καὶ δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δεδομένον λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμά των νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον,

καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δεδομένον λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸς τὴν διαφοράν των νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

35

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου ἔχῃ πρὸς τὸν μεγαλύτερον λόγον δεδομένον.

Ἂς προσταχθῇ νὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου.

Ἔστω πάλιν ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $3x$. Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου εἶναι x^2· εἶναι ἄρα $x^2 = 6(\,3x\,)$.

Εἶναι ἄρα $18x = x^2$, ἐξ ἧς $x = 18$. Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι 18, ὁ δὲ μεγαλύτερος 54. Καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

36

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου πρὸς αὐτὸν τὸν μικρότερον ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς προσταχθῇ ὁ μὲν μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

Ὁμοίως θὰ εἶναι ὁ μὲν μεγαλύτερος $3x$, ὁ δὲ μικρότερος x, καὶ εἶναι οὕτω ὁ μεγαλύτερος τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου. Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον αὐτοῦ τοῦ μικροτέρου· εἶναι ἄρα x^2 ἑξαπλάσιον τοῦ x.

Εἶναι ἄρα $6x = x^2$, ἐξ ἧς $x = 6$.

λζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι γπλ, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι βπλ.

Ἔσται πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛ $\overline{\gamma}$, ὁ δὲ ἐλάσσων ϛ $\overline{\alpha}$. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου εἶναι βπλ· ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονός τετράγωνός ἐστι $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, συναμφότερος δὲ ϛ $\overline{\delta}$. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\alpha}$ βπλ ἐστὶν ϛ $\overline{\delta}$.

ϛ ἄρα $\overline{\eta}$ ἴσοι εἰσὶ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· ⟨καὶ⟩ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$.

καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$, ὁ δὲ μείζων $\overset{\circ}{M}\overline{\kappa\delta}$. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

λη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι γπλ, τὸν δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ϛπλ.

Ἔσται πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛ $\overline{\gamma}$, ὁ δὲ ἐλάσσων ϛ $\overline{\alpha}$. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι ϛπλ. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\alpha}$ ϛπλ ἐστὶν ϛ $\overline{\beta}$.

ϛ ἄρα $\overline{\iota\beta}$ ἴσοι εἰσὶ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· ὁ ἄρα ϛ ἔσται $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\beta}$.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\beta}$, ὁ δὲ μείζων $\overset{\circ}{M}\overline{\lambda\varsigma}$. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

[Π ό ρ ι σ μ α]. Ὁμοίως δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται

ἀριθμοὶ δύο ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ δεδομένον,

καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς αὐτὸν τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον,

καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον,

καὶ ἔτι δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

λθ.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως τῶν τριῶν ἐκ-

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι 6, ὁ δὲ μεγαλύτερος 18. Καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

37

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἄς προσταχθῇ ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν.

Θὰ εἶναι πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μεγαλύτερος 3x, ὁ δὲ μικρότερος x. Ὑπολείπεται νὰ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου εἶναι x^2, τὸ δὲ ἄθροισμα εἶναι 4x.

Εἶναι ἄρα x^2 διπλάσιον τοῦ 4x.

Εἶναι ἄρα $8x = x^2$, ἐξ ἧς $x = 8$.

Καὶ θὰ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος 8, ὁ δὲ μεγαλύτερος 24. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

38

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἄς προσταχθῇ, ὁ μεγαλύτερος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ μικροτέρου, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

Θὰ εἶναι πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μεγαλύτερος 3x, ὁ δὲ μικρότερος x. Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν· εἶναι ἄρα x^2 ἑξαπλάσιον τοῦ 2x.

Εἶναι ἄρα $12x = x^2$· θὰ εἶναι ἄρα $x = 12$.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν μικρότερος 12, ὁ δὲ μεγαλύτερος 36. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

[Πόρισμα.] Ὁμοίως δὲ διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν εὑρίσκονται δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου ἔχῃ πρὸς τὸν μικρότερον λόγον δεδομένον,

καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς αὐτὸν τὸν μεγαλύτερον ἔχῃ λόγον δεδομένον,

καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

καὶ ἀκόμη δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

39

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ἄλλος ἀριθμός, ὅπως ἐκ τῶν τριῶν κειμένων σὺν δύο συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅ τε γ̄ καὶ ὁ ε̄, καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως σὺν δύο συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες, ποιῶσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν συντεθῇ μετὰ Μ̊ ε̄, γίνεται ϛ ᾱ Μ̊ ε̄· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λοιπόν, τουτέστι τὸν γ̄, γίνονται ϛ γ̄ Μ̊ ι̅ε̅. πάλιν ἐὰν ϛ ᾱ συντεθῇ μετὰ Μ̊ γ̄, γίνεται ϛ ᾱ Μ̊ γ̄· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ Μ̊ ε̄, γίνεται ϛ ε̄ Μ̊ ι̅ε̅. καὶ ἔτι ἐὰν Μ̊ ε̄ συντεθῶσι μετὰ Μ̊ γ̄, καὶ αἱ γινόμεναι Μ̊ η̄ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ϛ ᾱ, γίνονται ϛ η̄.

Ὅτι μὲν οὖν οὐδέποτε ἔσται μέγιστος ὁ τῶν ϛ γ̄ Μ̊ ι̅ε̅, φανερόν· μείζων γὰρ αὐτοῦ ἐστιν ὁ τῶν ϛ ε̄ Μ̊ ι̅ε̅· ὁ ἄρα ϛ γ̄ Μ̊ ι̅ε̅ ἤτοι μέσος ἐστὶν ἢ ἐλάσσων· ὁ δὲ τῶν ϛ ε̄ Μ̊ ι̅ε̅ ἤτοι μέγιστός ἐστιν ἢ μέσος· ὁ δὲ τῶν ϛ η̄ καὶ μέγιστος καὶ μέσος καὶ ἐλάχιστος δύναται τυγχάνειν, τῷ ἄδηλον εἶναι τὴν τοῦ ϛ ὑπόστασιν.

Τετάχθω οὖν πρῶτον μέγιστος μὲν ὁ τῶν ϛ ε̄ καὶ Μ̊ ι̅ε̅, ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ϛ γ̄ Μ̊ ι̅ε̅, μέσος δὲ δηλονότι ὁ τῶν ϛ η̄.

Ἐὰν δὲ ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου· καὶ ἔστιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ϛ η̄ Μ̊ λ̄· ταῦτα ἴσα ϛ ι̅ϛ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ ι̅ε̅ $^{\delta}$.

τοσούτου ἔσται ὁ ζητούμενος καὶ ποιῶν τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ϛ ε̄ Μ̊ ι̅ε̅, μέσος δὲ ὁ τῶν ϛ γ̄ Μ̊ ι̅ε̅, ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ϛ η̄.

Ἐὰν δὲ ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ᾧ ὑπερέχει ὁ μέγιστος τὸν μέσον, τούτῳ ὑπερέχει ὁ μέσος τὸν ἐλάχιστον· ὑπερέχει δὲ ὁ μὲν μέγιστος τὸν μέσον, ϛ β̄. ὁ δὲ μέσος τὸν ἐλάχιστον, Μ̊ ι̅ε̅ ⋀ ϛ ε̄.

Μ̊ ἄρα ι̅ε̅ ⋀ ϛ ε̄ ἴσαι εἰσὶν ϛ β̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ ι̅ε̅ $^{\zeta}$.

τοσούτου ἔσται ὁ ζητούμενος καὶ ποιῶν τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ϛ η̄, μέσος δὲ ὁ τῶν ϛ ε̄ Μ̊ ι̅ε̅, ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ϛ γ̄ Μ̊ ι̅ε̅.

Ἐπεὶ οὖν πάλιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου, ἀλλὰ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος εἰσιν ϛ ι̅α̅ Μ̊ ι̅ε̅ ταῦτα διπλάσιά εἰσι τῶν τοῦ μέσου· ὁ δὲ μέσος ἐστὶν ϛ ε̄ Μ̊ ι̅ε̅.

ϛ ἄρα ι̅ Μ̊ λ̄ ἴσοι εἰσὶν ϛ ι̅α̅ Μ̊ ι̅ε̅· ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος Μ̊ ι̅ε̅, καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

ἀριθμῶν, προστιθεμένων ἀνὰ δύο καὶ πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὸν ἄλλον σχηματίζωνται τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἴσην ὑπεροχήν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοί, καὶ ὁ 3 καὶ ὁ 5, καὶ ἔστω ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἄλλος ἀριθμός, ὥστε ἀνὰ δύο προστιθέμενοι καὶ ἐπὶ τὸν ἄλλον πολλαπλασιαζόμενοι νὰ σχηματίζωσι τρεῖς ἀριθμοὺς ἔχοντας ἴσην ὑπεροχήν.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x. Καὶ ἐὰν μὲν προστεθῇ μετὰ τοῦ 5 γίνεται $x + 5$· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ (τὸ ἄθροισμα) ἐπὶ τὸν ἄλλον, τουτέστι τὸν 3, γίνονται $3x + 15$. Πάλιν, ἐὰν ὁ x προστεθῇ μετὰ τοῦ 3, γίνονται $x + 3$· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, γίνεται $5x + 15$. Καὶ ἀκόμη ἐὰν ὁ 5 προστεθῇ μετὰ τοῦ 3, καὶ τὸ ἄθροισμα 8 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ x, γίνεται 8x.

Ὅτι μὲν λοιπὸν οὐδέποτε θὰ εἶναι μέγιστος ὁ $3x + 15$ εἶναι φανερόν· διότι ὁ $5x + 15$ εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ· θὰ εἶναι ἄρα ὁ $3x + 15$ ἢ μεσαῖος ἢ μικρότερος· ὁ δὲ $5x + 15$ θὰ εἶναι ἢ μέγιστος ἢ μεσαῖος· ὁ δὲ 8x δύναται νὰ εἶναι καὶ μέγιστος καὶ μεσαῖος καὶ ἐλάχιστος, ἐπειδὴ εἶναι ἄδηλος ἡ τιμὴ τοῦ x.

Ἔστω λοιπὸν πρῶτον μέγιστος μὲν ὁ $5x + 15$, ἐλάχιστος δὲ ὁ $3x + 15$ καὶ μέσος ἑπομένως ὁ 8x.

Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι διπλάσιον τοῦ μεσαίου· καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου $8x + 30$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 16x, ἐξ ἧς $x = \frac{15}{4}$.

Τόσον θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω μέγιστος μὲν ὁ $5x + 15$, μεσαῖος δὲ ὁ $3x + 15$, ἐλάχιστος δὲ ὁ 8x.

Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἴσην ὑπεροχήν, ὅσον ὑπερέχει ὁ μέγιστος τοῦ μεσαίου, τόσον ὑπερέχει ὁ μεσαῖος τοῦ ἐλαχίστου· ὑπερέχει δὲ ὁ μέγιστος τοῦ μεσαίου 2x· ὁ δὲ μεσαῖος ὑπερέχει τοῦ ἐλαχίστου $15 - 5x$.

Εἶναι ἄρα $15 - 5x = 2x$, ἐξ ἧς $x = \frac{15}{7}$

Τόσον θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος, καὶ ποιῶν τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω μέγιστος μὲν ὁ 8x μεσαῖος δὲ ὁ $5x + 15$, ἐλάχιστος δὲ ὁ $3x + 15$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν πάλιν, τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι διπλάσιον τοῦ μεσαίου, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι $11x + 15$, ταῦτα εἶναι διπλάσια τοῦ μεσαίου· ὁ δὲ μεσαῖος εἶναι $5x + 15$.

Εἶναι ἄρα $10x + 30 = 11x + 15$· θὰ εἶναι ἄρα ὁ ζητούμενος 15, καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β′

α.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν σύνθεσιν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν σύνθεσιν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν συνθέσεως εἶναι μέρος ι^ον.

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς $\overline{α}$, *ὁ δὲ μείζων* ς $\overline{β}$· *γίνεται ἡ μὲν σύνθεσις αὐτῶν* ς $\overline{γ}$, *ἡ δὲ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων* $Δ^{Υ}\overline{ε}$· *δεήσει ἄρα* ς $\overline{γ}$ *μέρος ι^ον εἶναι* $Δ^{Υ}\overline{ε}$.

ς *ἄρα* $\overline{λ}$ *ἴσοι εἰσὶ* $Δ^{Υ}\overline{ε}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\overline{ϛ}$.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων $\mathring{M}\overline{ϛ}$, *ὁ δὲ μείζων* $\mathring{M}\overline{ιβ}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

β.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχῆς εἶναι μέρος ϛ^ον.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς $\overline{α}$, *ὁ δὲ μείζων* ς $\overline{β}$· *καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν* ς $\overline{α}$, *ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ* $Δ^{Υ}\overline{γ}$. *δεήσει ἄρα* ς $\overline{α}$, *ϛ^ον μέρος εἶναι* $Δ^{Υ}\overline{γ}$.

ς *ἄρα* $\overline{ϛ}$ *ἴσοι* $Δ^{Υ}\overline{γ}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\overline{β}$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\mathring{M}\overline{β}$, *ὁ δὲ μείζων* $\mathring{M}\overline{δ}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

γ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς συναμφότερον ἢ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ πρότερον τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ συναμφοτέρου εἶναι ϛπλ.

Τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι ς $\overline{α}$ *καὶ* ς $\overline{β}$· *δύνανται δὲ οὗτοι προβάλλεσθαι καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι.*

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ II

1

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἃς ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τὸ ἓν δέκατον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ὁ μὲν μικρότερος x, ὁ δὲ μεγαλύτερος 2x· τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν γίνεται 3x, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των $5x^2$· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὅπως τὸ 3x εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ $5x^2$.

Εἶναι ἄρα $30x = 5x^2$, ἐξ ἧς $x = 6$.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν μικρότερος 6, ὁ δὲ μεγαλύτερος 12, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

2

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν τὸ ἓν ἕκτον τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ὁ μικρότερος x, ὁ δὲ μεγαλύτερος 2x· καὶ γίνεται τότε ἡ μὲν διαφορὰ αὐτῶν x, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των $3x^2$. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ x νὰ εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τοῦ $3x^2$.

Εἶναι ἄρα $6x = 3x^2$, ἐξ ἧς $x = 2$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος 2, ὁ δὲ μεγαλύτερος 4, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

3

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφοράν των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἃς ἐπιταχθῇ πρῶτον, τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος.

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι x καὶ 2x. Δύνανται δὲ οὗτοι νὰ ἔχωσι καὶ λόγον δοθέντα.

Ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν $\Delta^{Y}\overline{\beta}$, *ὁ δὲ συναμφότερος* ς$\overline{\gamma}$· *δεήσει ἄρα* $\Delta^{Y}\overline{\beta}$ $\varsigma^{\pi\lambda}$ *εἶναι* ς$\overline{\gamma}$.

ς *ἄρα* $\overline{\iota\eta}$ *ἴσοι εἰσὶν* $\Delta^{Y}\overline{\beta}$· *πάντα παρὰ* ς.

$\mathring{M}$ *ἄρα* $\overline{\iota\eta}$ *ἴσαι εἰσὶν* ς $\overline{\beta}$, *καὶγίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\overline{\theta}$.

*ἔσται ὁ μὲν α*ος $\mathring{M}\overline{\theta}$, *ὁ δὲ β*ος $\mathring{M}\overline{\iota\eta}$· *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

Ἐὰν δὲ ἐπιταχθῇ τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὑπεροχῆς εἶναι $\varsigma^{\pi\lambda}$, *ἔσται πάλιν ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ* $\Delta^{Y}\overline{\beta}$, *ἡ δὲ ὑπεροχὴ* ς$\overline{\alpha}$.

ς *πάλιν* $\overline{\varsigma}$ *ἴσοι* $\Delta^{Y}\overline{\beta}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\overline{\gamma}$.

*ἔσται ὁ μὲν α*ος $\mathring{M}\overline{\gamma}$, *ὁ δὲ β*ος $\mathring{M}\overline{\varsigma}$, *καὶ ποιοῦσι πάλιν τὸ πρόβλημα.*

δ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι $\iota^{\pi\lambda}$.

Τετάχθω πάλιν ὃς μὲν ς $\overline{\alpha}$, *ὃς δὲ* ς $\overline{\beta}$.

Ἔσται ἄρα ὁ μὲν συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, $\Delta^{Y}\overline{\varepsilon}$ *ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν* ς $\overline{\alpha}$· *δεήσει ἄρα* Δ^{Y} $\overline{\varepsilon}$ $\iota^{\pi\lambda}$ *εἶναι* ς $\overline{\alpha}$.

Δ^{Y} *ἄρα* $\overline{\varepsilon}$ *ἴσαι εἰσὶν* ς$\overline{\iota}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\overline{\beta}$.

*ἔσται ὁ μὲν α*ος $\mathring{M}\overline{\beta}$, *ὁ δὲ β*ος $\mathring{M}\overline{\delta}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

ε.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου εἶναι $\varsigma^{\pi\lambda}$.

Καὶ πάλιν τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ὃς μὲν ς$\overline{\alpha}$, *ὃς δὲ* ς $\overline{\beta}$, *καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων*, $\Delta^{Y}\overline{\gamma}$, *συναμφότερος δὲ* ς$\overline{\gamma}$· [*δεήσει, ἄρα* $\Delta^{Y}\overline{\gamma}$ $\varsigma^{\pi\lambda}$ *εἶναι* ς$\overline{\gamma}$].

Δ^{Y} *ἄρα* $\overline{\gamma}$ *ἴσαι εἰσὶν* ς$\overline{\iota\eta}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\overline{\varsigma}$.

καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

ϛ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ δοθείσῃ, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχῃ δοθέντι ἀριθμῷ.

Θὰ εἶναι ἄρα τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν $2x^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα $3x$· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα τὸ $2x^2$ νὰ εἶναι ἑξαπλάσιον τοῦ $3x$.

Εἶναι ἄρα $18x = 2x^2$· διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x.

Εἶναι ἄρα $18 = 2x$, ἐξ ἧς $x = 9$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 9, ὁ δὲ δεύτερος 18· καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

Ἐὰν δὲ ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον ἑξαπλάσιον τῆς διαφορᾶς, θὰ εἶναι πάλιν τὸ μὲν γινόμενον $2x^2$, ἡ δὲ διαφορὰ x.

Πάλιν $6x = 2x^2$, ἐξ ἧς $x = 3$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 3, ὁ δὲ δεύτερος 6, καὶ ποιοῦσι πάλιν τὸ πρόβλημα.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δεκαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω πάλιν ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος $2x$.

Θὰ εἶναι ἄρα τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν $5x^2$, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν x· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶναι τὸ $5x^2$ δεκαπλάσιον τοῦ x.

Εἶναι ἄρα $5x^2 = 10x$, ἐξ ἧς $x = 2$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 2, ὁ δὲ δεύτερος 4 καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

5.

Νὰ εὑρέθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμά των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἑξαπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι, ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος $2x$, καὶ γίνεται ἡ μὲν διαφορὰ τῶν τετραγώνων των $3x^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα $3x$· [θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ $3x$ νὰ εἶναι ἑξαπλάσιος τοῦ $3x$].

Εἶναι ἄρα $3x^2 = 18x$, ἐξ ἧς ὁ $x = 6$.

Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

6.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθεῖσαν διαφοράν, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ὑπερέχῃ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν κατὰ δοθέντα ἀριθμόν.

(Περιορισμός) : Πρέπει δὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

Δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου αὐτοῦ τε τοῦ τῆς ὑπεροχῆς καὶ τοῦ διδομένου τῶν ἀπ' αὐτῶν πρὸς τὴν αὐτῶν ὑπεροχήν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι Μ̊ β̄, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχειν Μ̊ κ̄.

Τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ϛ ᾱ· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ ᾱ Μ̊ β̄· καὶ μένει ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν Μ̊ β̄, ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ ϛ δ̄ Μ̊ δ̄· δεήσει ἄρα ϛ δ̄ Μ̊ δ̄ ὑπερέχειν Μ̊ β̄, Μ̊ κ̄. ὥστε ϛ δ̄ Μ̊ δ̄ ἴσοι εἰσὶ Μ̊ κ̄β̄· καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ δ̄ L'.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων Μ̊ δ̄ L', ὁ δὲ μείζων Μ̊ ϛ̄ L', καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν δοθέντι ἀριθμῷ μείζων ᾖ ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπιτετάχθω τὴν ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι γ^{πλ}, καὶ ἔτι ὑπερέχειν Μ̊ ῑ.

Δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου τοῦ τε γ^{πλ} τῆς ὑπεροχῆς καὶ τῶν δοθεισῶν Μ̊ ῑ.

Τετάχθω ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν Μ̊ β̄, ὁ δὲ ἐλάσσων ϛ ᾱ· ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ ᾱ Μ̊ β̄· δεήσει ἄρα ϛ δ̄ Μ̊ δ̄ γ^{πλ}. εἶναι Μ̊ β̄ καὶ ἔτι ὑπερέχειν Μ̊ ῑ. τρὶς ἄρα Μ̊ β̄ μετὰ Μ̊ ῑ ἴσαι εἰσὶν ϛ δ̄ Μ̊ δ̄· ἀλλὰ τρὶς Μ̊ β̄ μετὰ Μ̊ ῑ γίνονται Μ̊ ῑϛ̄· ταῦτα ἴσα ϛ δ̄ Μ̊ δ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ γ̄.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων ἀριθμὸς Μ̊ γ̄, ὁ δὲ μείζων Μ̊ ε̄, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

η.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ῑϛ̄ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ α^{ος} Δ^{Y} ᾱ, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται Μ̊ ῑϛ̄ ⋔ Δ^{Y} ᾱ· δεήσει ἄρα Μ̊ ῑϛ̄ ⋔ Δ^{Y} ᾱ ἴσας εἶναι □^{ῳ}.

πλάσσω τὸν □^{ον} ἀπὸ ϛ^{ῶν} ὅσων δήποτε ⋔ τοσούτων Μ̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ῑϛ̄ Μ̊ πλευρά· ἔστω ϛ β̄ ⋔ Μ̊ δ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ □^{ος} ἔσται Δ^{Y} δ̄ Μ̊ ῑϛ̄ ⋔ ϛ ῑϛ̄· ταῦτα ἴσα Μ̊ ῑϛ̄ ⋔ Δ^{Y} ᾱ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια.

Δ^{Y} ἄρα ε̄ ἴσαι ϛ ῑϛ̄, καὶ γίνεται ὁ ϛ ῑϛ̄ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\sigma\nu\varsigma}}$, ὁ δὲ $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\rho\mu\delta}}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\upsilon}}$, ἤτοι Μ̊ ῑϛ̄, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

Ἂς ἐπιταχθῇ ἡ διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶναι 2, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν κατὰ 20.

Ἔστω ὁ μικρότερος x· ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x + 2$· καὶ μένει ἡ μὲν διαφορὰ αὐτῶν 2, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των $4x + 4$· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ $4x + 4$ νὰ ὑπερέχῃ τοῦ 2 κατὰ 20. Ὥστε $4x + 4 = 22$· ἐξ ἧς $x = 4\frac{1}{2}$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος $4\frac{1}{2}$, ὁ δὲ μεγαλύτερος $6\frac{1}{2}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

7.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν, κατὰ δοθέντα ἀριθμὸν σὺν πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

Ἂς ἐπιταχθῇ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι τριπλασία τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν σὺν 10.

(Περιορισμός) : Πρέπει δὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τοῦ τριπλασίου τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν δοθεισῶν 10 μονάδων.

Ἔστω ἡ μὲν διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 2, ὁ δὲ μικρότερος x· ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x + 2$· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ $4x + 4$ νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ 2 καὶ νὰ ὑπερέχῃ ἀκόμη κατὰ 10. Εἶναι ἄρα $3 . 2 + 10 = 4x + 4$ ἀλλὰ $3 . 2 + 10 = 16$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $4x + 4$, ἐξ ἧς $x = 3$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος ἀριθμὸς 3, ὁ δὲ μεγαλύτερος 5, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

8.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον ἀριθμὸν νὰ ἀναλύσωμεν εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν 16 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν.

Καὶ ἔστω ὁ πρῶτος x^2, ὁ ἄλλος ἄρα θὰ εἶναι $16 - x^2$· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα $16 - x^2 =$ τετράγωνος ἀριθμός.

Σχηματίζω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου ἀριθμοῦ λαμβάνων πολλαπλάσιον τοῦ x μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 16· ἔστω $2x - 4$· αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $4x^2 + 16 - 16x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $16 - x^2$. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $x^2 + 16x$ καὶ ἂς ἀφαιρεθῶσι ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν οἱ ἴσοι ἀριθμοί.

Ἄλλως.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸν ι̅ς̅ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ α^ου πλευρὰ ϛ α̅, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ϛ^ῶν ὅσων δήποτε ⋔ M̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά· ἔστω δὴ ϛ β̅ ⋔ M̊ δ̅.

ἔσονται ἄρα οἱ □^οι, ὃς μὲν Δ^{Y} α̅, ὃς δὲ Δ^{Y} δ̅ M̊ ι̅ς̅ ⋔ ϛ ι̅ς̅. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι M̊ ι̅ς̅.

Δ^{Y} ἄρα ε̅ M̊ ι̅ς̅ ⋔ ϛ ι̅ς̅ ἴσαι εἰσὶ M̊ ι̅ς̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overline{\iota\varsigma}^{\,\varepsilon}$.

ἔσται ἡ μὲν τοῦ α^ου πλ. $\frac{\varepsilon}{\iota\varsigma}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται $\frac{\kappa\varepsilon}{\sigma\nu\varsigma}$.

ἡ δὲ τοῦ β^ου πλ. $\frac{\varepsilon}{\iota\beta}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται $\frac{\kappa\varepsilon}{\rho\mu\delta}$· καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

θ.

Τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ὃς σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, μεταδιελεῖν εἰς δύο ἑτέρους τετραγώνους.

Ἔστω τὸν ι̅γ̅, συγκείμενον ἔκ τε τοῦ δ̅ καὶ θ̅ τετραγώνων, μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους.

Εἰλήφθωσαν τῶν προειρημένων τετραγώνων αἱ πλ. M̊ β̅, M̊ γ̅, καὶ τετάχθωσαν αἱ τῶν ἐπιζητουμένων τετραγώνων πλ., ἡ μὲν ϛ ᾱ M̊ β̅, ἡ δὲ ϛ ὅσων δήποτε ⋔ M̊ ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ λοιποῦ πλευρά. ἔστω ϛ β̅ ⋔ M̊ γ̅· καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι, ὃς μὲν Δ^{Y} ᾱ ϛ δ̅ M̊ δ̅, ὃς δὲ Δ^{Y} δ̅ M̊ θ̅ ⋔ ϛ ι̅β̅.

λοιπόν ἐστι τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν M̊ ι̅γ̅· ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν Δ^{Y} ε̅ M̊ ι̅γ̅ ⋔ ϛ η̅· ταῦτα ἴσα M̊ ι̅γ̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overline{\eta}^{\,\varepsilon}$.

Εἶναι ἄρα $5x^2 = 16x$, ἐξ ἧς $x = \frac{16}{5}$.

Θὰ εἶναι ὁ μὲν εἷς $\frac{256}{25}$ ὁ δὲ ἄλλος $\frac{144}{25}$, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι $\frac{400}{25}$ ἤτοι 16 καὶ εἶναι ἑκάτερος τετράγωνος.

Ἄλλως

Ἔστω πάλιν ν' ἀναλύσωμεν τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν 16 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν.

Ἔστω πάλιν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου τετραγώνου ἀριθμοῦ ἡ x, τοῦ δὲ ἄλλου ὁσονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ x μεῖον τόσων μονάδων, ὅσαι εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀναλυομένου ἀριθμοῦ· ἔστω $2x - 4$.

Θὰ εἶναι ἄρα οἱ τετράγωνοι ἀριθμοί, ὁ εἷς μὲν x^2, ὁ δὲ ἄλλος $4x^2 + 16 - 16x$. Θέλω, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων νὰ εἶναι 16.

Εἶναι ἄρα $5x^2 + 16 - 16x = 16$· ἐξ ἧς $x = \frac{16}{5}$.

Θὰ εἶναι ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου $\frac{16}{5}$· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{256}{25}$. Ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι $\frac{12}{5}$· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{144}{25}$· καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

9.

Τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων νὰ ἀναλύσωμεν εἰς δύο ἄλλους τετραγώνους.

Ἔστω τὸν 13, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τοῦ 4 καὶ τοῦ 9, νὰ ἀναλύσωμεν εἰς δύο ἄλλους τετραγώνους.

Ἂς ληφθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν προειρημένων τετραγώνων αἱ 2, 3, καὶ ἔστωσαν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ζητουμένων τετραγώνων, ἡ μὲν μία $x + 2$, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι τυχὸν πολλαπλάσιον τοῦ x μεῖον τόσων μονάδων, ὅσαι εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἄλλου (ἡ 3). Ἔστω $2x - 3$· καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι, ὁ μὲν εἷς $x^2 + 4x + 4$, ὁ δὲ ἄλλος $4x^2 + 9 - 12x$.

Ὑπολείπεται τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ εἶναι 13. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι $5x^2 + 13 - 8x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 13· ἐξ ἧς $x = \frac{8}{5}$

Ἐπὶ τῶν δεδομένων· ἔλαβον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου $x + 2$· θὰ εἶναι αὕτη $\frac{18}{5}$·

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔταξα τὴν τοῦ $\alpha^{ου}$ πλ., $ς\,\bar{\alpha}\ \mathring{M}\bar{\beta}$· ἔσται $\overset{\varepsilon}{\overline{\iota\eta}}$.
τὴν δὲ τοῦ $\beta^{ου}$ πλ. $ς\,\bar{\beta} ⋔ \mathring{M}\bar{\gamma}$· ἔσται ἑνός. αὐτοὶ δὲ οἱ $\square^{οι}$ ἔσονται, ὃς μὲν $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\tau\kappa\delta}}$, ὃς δὲ ἑνός· καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\tau\kappa\varepsilon}}$, ἃ συνάγει τὰς ἐπιταχθείσας $\mathring{M}\,\overline{\iota\gamma}$.

ι.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι $\mathring{M}\bar{\xi}$.

Τετάχθω οὗ μὲν ἡ πλευρὰ $ς\,\bar{\alpha}$, οὗ δὲ $ς\,\bar{\alpha}$ καὶ $\mathring{M}$ ὅσων δήποτε θέλεις, μόνον ἵνα μὴ ὁ ἀπὸ τῶν $\mathring{M}$ $\square^{ος}$ ὑπεράρῃ τὴν ὑπεροχὴν τὴν δοθεῖσαν, [μήτε μὴν ἴσος ᾖ]· οὕτω γὰρ ἑνὸς εἴδους ἑνὶ [εἴδει] ἴσου καταλειπομένου, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

ἔστω $ς\,\bar{\alpha}\ \mathring{M}\bar{\gamma}$· αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι ἔσονται, $\Delta^{\upsilon}\bar{\alpha}$ καὶ $\Delta^{\upsilon}\bar{\alpha}\ ς\,\bar{ϛ}\ \mathring{M}\bar{\theta}$· ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν, $ς\,\bar{ϛ}\ \mathring{M}\bar{\theta}$· ταῦτα ἴσα $\mathring{M}\bar{\xi}$, καὶ γίνεται ὁ $ς\ \mathring{M}\bar{\eta}\,L'$.

ἔσται ἡ μὲν τοῦ $\alpha^{ου}$ πλευρὰ $\mathring{M}\bar{\eta}L'$, ἡ δὲ τοῦ $\beta^{ου}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\alpha}L'$· αὐτοὶ δὲ οἱ $\square^{οι}$ ἔσονται ὃς μὲν $\mathring{M}\,\overline{ο\beta}\ \delta^{\times}$, ὃς δὲ $\mathring{M}\,\overline{\varrho\lambda\beta}\ \delta^{\times}$, καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

ια.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον.

Ἔστω δὴ τῷ $\bar{\beta}$ καὶ τῷ $\bar{\gamma}$ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος $ς\,\bar{\alpha}$. ἔσται ἄρα ὁ μὲν $ς\,\bar{\alpha}\ \mathring{M}\bar{\beta}$, ὁ δὲ $ς\,\bar{\alpha}\ \mathring{M}\bar{\gamma}$, ἴσ. $\square$· καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοϊσότης· ἰσοῦται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἰδὼν τὴν ὑπεροχήν, ζήτει δύο ἀριθμοὺς ἵνα τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τὴν ὑπεροχήν· εἰσὶ δὲ $\mathring{M}\bar{\delta}$ καὶ $\mathring{M}^{ος}\ \delta^{\times}$. τούτων ἤτοι τῆς ὑπεροχῆς τὸ L' ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ L' ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι.

ἀλλὰ τῆς ὑπεροχῆς τὸ L' ἐφ' ἑαυτό ἐστι $\overset{\xi\delta}{\overline{\sigma\kappa\varepsilon}}$· ταῦτα ἴσα $ς\,\bar{\alpha}\ \mathring{M}\bar{\beta}$, καὶ γίνεται ὁ $ς\ \overset{\xi\delta}{\overline{ϟ\zeta}}$.

τὴν δὲ τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δευτέρου $2x - 3$. Θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{1}{5}$. Αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι θὰ εἶναι, ὁ μὲν εἷς $\frac{324}{25}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{1}{25}$. Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι $\frac{325}{25}$, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς 13.

10.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι ἔχοντες δοθεῖσαν διαφοράν.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἔχωσι διαφορὰν 60.

Ἔστω τοῦ μὲν ἑνὸς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα x, τοῦ δὲ ἄλλου x σὺν οἱονδήποτε ἀριθμόν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως, τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον [οὔτε ἴσον] τῆς δοθείσης διαφορᾶς· διότι ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τοῦτον ἀπομένει πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον, ὁπότε λύεται εὐκόλως τὸ πρόβλημα.

Ἔστω, ὁ ἄλλος ἀριθμὸς $x + 3$· αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι θὰ εἶναι x^2 καὶ $x^2 + 6x + 9$· ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι $6x + 9$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 60, ἐξ ἧς $x = 8\frac{1}{2}$.

Θὰ εἶναι ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου $8\frac{1}{2}$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου $11\frac{1}{2}$· αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι θὰ εἶναι ὁ μὲν εἷς $72\frac{1}{4}$, ὁ δὲ ἄλλος $132\frac{1}{4}$, καὶ εἶναι φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

11.

Εἰς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὅπως γίνῃ ἑκάτερος τετράγωνος.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος x. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν εἷς $x + 2$, ὁ δὲ ἄλλος $x + 3$ καὶ ἑκάτερος τούτων θὰ εἶναι τετράγωνος· τὸ εἶδος τοῦτο τῆς προτάσεως καλεῖται διπλοϊσότης· καὶ ἡ διαπραγμάτευσίς της γίνεται ὡς κάτωθι. Ἀφοῦ ἴδῃς τὴν διαφορὰν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (ἐνταῦθα 1), ζήτει δύο ἀριθμοὺς ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφοράν· οὗτοι ἔστωσαν ἐνταῦθα 4 καὶ $\frac{1}{4}$. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων τίθεται ἴσον πρὸς τὸν μικρότερον ἀριθμόν, ἐν ᾧ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τούτων τίθεται ἴσον πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν.

Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς εἶναι $\frac{225}{64}$· ταῦτα εἶναι τῆς δὲ συνθέσεως τὸ L′ ἐφ' ἑαυτό ἐστι $\frac{\xi\delta}{\sigma\pi\theta}$· ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστιν ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ πάλιν $\frac{\xi\delta}{\text{ϟ}\zeta}$.

ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος $\frac{\xi\delta}{\text{ϟ}\zeta}$, καὶ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλὴν ἰσότητα ἐμπέσῃ, δεικτέον οὕτως·

Τῷ $\overline{\beta}$ καὶ τῷ $\overline{\gamma}$ προσευρεῖν τινα ἀριθμόν, ὃς ἑκατέρῳ προστεθεὶς ποιε □ον· ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμόν, ὃς προσλαβὼν $\mathring{M}\,\overline{\beta}$ ποιεῖ □ον, ἢ καὶ τὶς ἀριθμὸς προσλαβὼν $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$ ποιεῖ □ον· ἀφ' οἵου δ' ἂν □ου ἀφέλω τὰς $\mathring{M}$, οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος· ἔστω δὴ ἐπὶ τῶν $\mathring{M}\,\overline{\beta}$, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· λοιπὸν ἔσται $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\beta}$, καὶ δῆλον ὡς, ἐὰν προσλάβῃ $\mathring{M}\,\overline{\beta}$, ποιεῖ □ον· λοιπόν ἐστι καὶ $\overline{\gamma}\mathring{M}$ αὐτὸν προσλαβόντα ποιεῖν □ον· ἀλλ' ἐὰν προσλάβῃ $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, γίνεται $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ταῦτα ἴσα □ῳ.

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}$ τοσούτων ὥστε τὴν τῆς Δ^{Y} ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως $\mathring{M}$ας, οἷον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰς $\mathring{M}\,\overline{\beta}$· οὕτως γὰρ ἂν πάλιν ἐν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ ἀπὸ ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ □ος, $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ ϛ $\overline{\eta}$· ταῦτα ἴσα $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$.

κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ϛ $\overline{\eta}$ ἴσοι $\mathring{M}\,\overline{\iota\varepsilon}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{\eta}{\iota\varepsilon}$·

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ προστιθέμενος $\frac{\xi\delta}{\text{ϟ}\zeta}$.

ιβ.

Ἀπὸ δύο δοθέντων ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ $\overline{\theta}$ καὶ τοῦ $\overline{\kappa\alpha}$ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.

Οἷον δ' ἂν τετράγωνον ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπόν· οὗτος γὰρ ἀφαιρούμενος καταλείπει τὸν τετράγωνον· ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τῶν $\mathring{M}\,\overline{\theta}$ ἀφαιρούμενος τετράγωνος, $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· λοιπὸν $\mathring{M}\,\overline{\theta}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$.

δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\alpha}$ ἀφελεῖν $\mathring{M}\,\overline{\theta}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ καὶ ποιεῖν □ον. ἀλλ' ἐὰν ἴσα πρὸς $x + 2$, ἐξ ἧς $x = \frac{97}{64}$.

Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος εἶναι $\frac{289}{64}$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν, τουτέστιν τὸν $x + 3$, ἐξ ἧς πάλιν ὁ $x = \frac{97}{64}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ προστιθέμενος $\frac{97}{64}$, καὶ εἶναι φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ ἐμπέσῃς εἰς δύο ἐξισώσεις, δύνασαι νὰ τὸ ἀποδείξῃς ὡς ἑξῆς.

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἑκάτερον τῶν 2 καὶ 3 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον ἀριθμόν· ζητῶ πρότερον ἀριθμόν τινα, ὅστις προσλαβὼν τὸν 2 σχηματίζει τετράγωνον, ἢ ἀριθμόν, ὅστις προσλαβὼν τὸν 3 σχηματίζει τετράγωνον. Ἐξ οἱουδήποτε δὲ τῶν τετραγώνων τούτων ἂν ἀφαιρέσω τὰς ἀντιστοίχους μονάδας, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος· ἔστω ὅτι αἱ μονάδες αὗται εἶναι 2 καὶ ἂς ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ x^2· θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον $x^2 - 2$, καὶ εἶναι φανερόν, ἐὰν προσλάβῃ τὸν 2 σχηματίζει τετράγωνον· ὑπολείπεται, ἐὰν προσλάβῃ καὶ τὸν 3 νὰ σχηματίσῃ τετράγωνον· ἀλλ' ἐὰν (ὁ $x^2 - 2$) προσλάβῃ τὸν 3, γίνεται $x^2 + 1$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Σχηματίζω τὸν τετράγωνον τοῦ $x - α$, ἐκλέγων τὸν α ὥστε οὗτος νὰ ὑπερβάλῃ τὰς μονάδας (τοῦ $x^2 - 2$) κατὰ 2· διότι τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν πάλιν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἔστω τοῦ $x - 4$· τὸ τετράγωνον ἄρα τούτου θὰ εἶναι $x^2 + 16 - 8x$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x^2 + 1$.

Προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τὸν $8x$ καὶ ἀφαιρῶ τὸν $x^2 + 1$· εἶναι ἄρα $8x = 15$, ἐξ ἧς $x = \frac{15}{8}$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ προστιθέμενος $\frac{97}{64}$.

12.

Ἀπὸ δύο δοθέντων ἀριθμῶν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅπως σχηματισθῇ ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων τετράγωνος.

Ἂς ἐπιταχθῇ ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 9 καὶ τοῦ 21 ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς (α) καὶ νὰ σχηματίζεται ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων τετράγωνος.

Ἀφοῦ ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων εἶναι τετράγωνος, ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν (9 καὶ 21) ἀφαιρέσω τὸν τετράγωνον τοῦτον, εὑρίσκω τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (α)· διότι οὗτος ἀφαιρούμενος καταλείπει τὸν τετράγωνον· ἔστω λοιπὸν ὁ ἀπὸ τοῦ 9 ἀφαιρούμενος τετράγωνος, x^2· μένει $9 - x^2$ ($= α$).

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ν' ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τοῦ 21 ὁ $9 - x^2$ ($= α$)

ἀπὸ M̊ κ̅α̅ *ἀφέλω* M̊θ̅ ⋔ Δ^{Y} α̅, *λοιπὸν* Δ^{Y} α̅ M̊ ι̅β̅· *ταῦτα ἴσα* □φ.

πλάσσω τὸν □ον *ἀπὸ* ϛ α̅ ⋔ M̊ *τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τῶν* M̊ι̅β̅· *οὕτω γὰρ πάλιν ἐν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος ἑνὶ ἴσον καταλειφθήσεται· ἔστω δὴ* M̊δ̅· *αὐτὸς ἄρα ὁ* □ος *ἔσται* Δ^{Y} α̅ M̊ι̅ϛ̅ ⋔ ϛη̅· *ταῦτα ἴσα* Δ^{Y} α̅ M̊ι̅β̅.

ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· λοιποὶ ϛ η̅ *ἴσοι* M̊δ̅· *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\overset{\eta}{\overline{\delta}}$.

αἱ μὲν θ̅ M̊ *συνάγουσιν* ο̅β̅ ηα, *τουτέστι* $\overset{\xi\delta}{\overline{\phi o\varsigma}}$· *ἡ δὲ λεῖψις τῆς* Δ^{Y} α̅ *ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῶν* $\overset{\xi\delta}{\overline{\iota\varsigma}}$, *καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.*

ιγ.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.

⟨ *Ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν τὸν* ς̅ *καὶ τὸν* ζ̅, *καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον.*⟩

Τετάχθω ὁ ζητούμενος ϛ α̅· *καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω* M̊ς̅, *λοιπὸς* ϛ α̅ ⋔ M̊ς̅ *ἴσος* □, *ἐὰν δὲ* M̊ ζ̅, *λοιπὸς* ϛα̅ ⋔ M̊ ζ̅ *ἴσος* □· *καὶ πάλιν ἐπὶ τούτου ὁμοίως ἐστὶν ἡ διπλοϊσότης.*

Ἐπειδήπερ ἡ ὑπεροχή, M̊ *οὖσα* α̅, *περιέχεται ὑπὸ* M̊β̅ *καὶ* M̊L′, *καὶ συνάγεται ὁ* ϛ $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\rho\kappa\alpha}}$, *καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.*

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἴσωσιν ἐξέρχηται, ζητητέον οὕτως· ζητῶ πρότερον ἀπὸ τίνος ἀριθμοῦ, ἐὰν ἀφέλω M̊ ς̅, *ποιεῖ* □ον. *ᾧ δ' ἂν* □φ *δηλονότι προσθῶ τὰς* M̊ ς̅, *ἐκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος· ἔστω δὴ* Δ^{Y} α̅· *ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος* Δ^{Y} α̅ M̊ ς̅ *καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλω* M̊ ς̅, *ὁ λοιπὸς ἔσται* □ος. *δεήσει ἄρα καὶ* M̊ ζ̅ *ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς* Δ^{Y} α̅ M̊ ς̅ *καὶ ποιεῖν* □ον.

Δ^{Y} *ἄρα* α̅ ⋔ M̊ α̅ *ἴσ.* □φ.

πλάσσω τὸν □ον *ἀπὸ* ϛ α̅ ⋔ M̊ β̅. *αὐτὸς ἄρα ὁ* □ος *ἔσται* Δ^{Y} α̅ M̊ δ̅ ⋔ ϛ δ̅· *ταῦτα ἴσα* Δ^{Y} α̅ ⋔ M̊ α̅· *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\overset{\delta}{\overline{\varepsilon}}$.

ἔσται ὁ ζητούμενος $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\rho\kappa\alpha}}$, *καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.*

ιδ.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς καὶ νὰ σχηματίζεται τετράγωνος ἀριθμός. Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τοῦ 21 ἀφαιρέσω τὸν $9 - x^2$ εὑρίσκω $12 + x^2$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Σχηματίζω τὸν τετράγωνον τοῦ $x - \beta$ ἔνθα β^2 μεγαλύτερος τοῦ 12· διότι οὕτω πως πάλιν καταλήγω εἰς ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον θετικόν· ἔστω λοιπὸν ὁ $\beta = 4$· αὐτὸς ὁ τετράγωνος τοῦ $x - 4$ θὰ εἶναι $x^2 + 16 - 8x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x^2 + 12$.

Ἀφαιρῶ καὶ προσθέτω τὰ ἴσα εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, ὅτε λαμβάνω $8x = 4$· ἐξ ἧς $x = \frac{4}{8}$.

Αἱ μὲν 9 μονάδες γίνονται ἴσαι πρὸς $\frac{72}{8} = \frac{576}{64}$. Ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸν x^2 $\left(= \frac{16}{64}\right)$ λαμβάνομεν τὰ τῆς προτάσεως.

13.

Νὰ ἀφαιρεθῶσι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δύο δοθέντες ἀριθμοί, ὅπως ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων γίνεται τετράγωνος.

⟨Ἂς ἐπιταχθῇ ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 6 καὶ ὁ 7 ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥστε ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων νὰ εἶναι τετράγωνος⟩.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x· καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσω 6 θὰ μείνῃ $x - 6 =$ τετράγωνος, ἐὰν δὲ ἀφαιρέσω 7 θὰ μείνῃ $x - 7 =$ τετράγωνος· τοῦτο καταλήγει πάλιν εἰς διπλοϊσότητα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διαφορὰ (μεταξὺ τοῦ $x - 6$ καὶ $x - 7$) εἶναι 1 τὸ ὁποῖον ἔστω $2 \cdot \frac{1}{2}$, συνάγομεν $x = \frac{121}{16}$ καὶ τοῦτο λύει τὸ πρόβλημα.

Ἵνα δὲ μὴ καταλήξῃ εἰς διπλῆν ἐξίσωσιν, θὰ ἐρευνηθῇ ὡς ἑξῆς· ζητῶ πρότερον ἀπὸ τίνος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφαιρέσω 6 προκύπτει τετράγωνος. Ὁπότε ἐὰν εἰς τὸν τετράγωνον τοῦτον προσθέσω τὸν 6 λαμβάνω τὸν ζητούμενον τετράγωνον ἀριθμόν. Ἔστω x^2· θὰ εἶναι ἄρα ὁ ζητούμενος $x^2 + 6$· καὶ εἶναι φανερόν, ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσω τὸν 6, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τετράγωνος. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπόν, ν' ἀφαιρεθῇ καὶ ὁ 7 ἀπὸ τοῦ $x^2 + 6$ καὶ νὰ λαμβάνεται τετράγωνος.

Εἶναι ἄρα $x^2 - 1 =$ τετράγωνος.

Σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ $x - 2$. Αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $x^2 + 4 - 4x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x^2 - 1$. Ἐξ ἧς $x = \frac{5}{4}$.

Ὁ ζητούμενος θὰ εἶναι $\frac{121}{16}$, καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

14.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγω-

τετράγωνον, ὃς προσλαβὼν ἑκάτερον τῶν διῃρημένων, ποιεῖ τετράγωνον.

Ἔστω τὸν κ̅ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς.

Ἔκθου δύο ἀριθμοὺς ὥστε τοὺς ἀπ' αὐτῶν □ους ἐλάσσονας εἶναι M̊ κ̅· ἔστω δὴ ὁ β̅ καὶ ὁ γ̅· καὶ προστεθέντος ἑκατέρῳ ς α̅, ἔσονται οἱ ἀπὸ τούτων □οι, ὃς μὲν ΔΥ α̅ ς δ̅ M̊ δ̅, ὃς δὲ ΔΥ α̅ ς ς̅ M̊ θ̅.

ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τὴν ΔΥ, τουτέστι τὸν □ον, ἕξομεν τοὺς ἐπιζητουμένους, οἳ προσλαμβάνοντες δηλονότι □ον, ποιοῦσι □ον. ἀλλ' ἐὰν ἀφέλω ΔΥ α̅, λοιποὶ ἔσονται, ὁ μὲν ς δ̅ M̊ δ̅, ὁ δὲ ς ς̅ M̊ θ̅. δεήσει ἄρα τὴν σύνθεσιν αὐτῶν, τουτέστιν ς ι̅ M̊ ι̅γ̅, ἴσους εἶναι M̊ κ· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\iota}{\overline{\zeta}}$· ἔσται ὁ μὲν $\overset{\iota}{\overline{\xi\eta}}$, ὁ δὲ $\overset{\iota}{\overline{\rho\lambda\beta}}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ιε.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον, ὃς λιπὼν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω πάλιν τὸν κ̅ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς.

καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος □ος ἀπὸ πλ. ς α̅ καὶ M̊ τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ̅. ἔστω δὴ ς α̅ M̊ β̅. ὁ ἄρα □ος ἔσται ΔΥ α̅ ς δ̅ M̊ δ̅· καὶ δῆλον ὡς λιπὼν ς δ̅ M̊ δ̅, καταλείπει □ον· καὶ ὁμοίως λιπὼν ς β̅ M̊ γ̅, καταλείπει □ον, ΔΥ α̅ ς β̅ M̊ α̅.

τάσσω οὖν διὰ ταῦτα τὸν μὲν αον ς δ̅ M̊ δ̅, τὸν δὲ βον ς β̅ M̊ γ̅, τὸν δὲ ζητούμενον ΔΥ α̅ ς δ̅ M̊ δ̅, καὶ λιπὼν ἑκάτερον, ποιεῖ □ον. λοιπὸν δεῖ τοὺς δύο ἴσους εἶναι τῷ διαιρουμένῳ· ἀλλ' οἱ δύο ποιοῦσιν ς ς̅ M̊ ζ̅· ταῦτα ἴσα M̊ κ̅.

ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\varsigma}{\overline{\iota\gamma}}$.

ἔσται ὁ μὲν αος $\overset{\varsigma}{\overline{o\varsigma}}$, ὁ δὲ βος $\overset{\varsigma}{\overline{\mu\delta}}$, ὁ δὲ □ος $\overset{\lambda\varsigma}{\overline{\chi\kappa\varepsilon}}$. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως

ις.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ἐπιταχθέντος τετραγώνου ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι γπλ., ἑκάτερον δ' αὐτῶν νος, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἑκάτερον τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 20 εἰς δύο ἀριθμούς.

Λάβε δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 20· ἔστωσαν ὁ 2 καὶ ὁ 3· ἐὰν εἰς ἕκαστον τούτων προστεθῇ ὁ x, καὶ λάβω τὰ τετράγωνα θὰ εἶναι, ὁ μὲν εἷς $x^2 + 4x + 4$, ὁ δὲ ἄλλος $x^2 + 6x + 9$.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφαιρέσω τὸν ἄγνωστον τετράγωνον θὰ ἔχωμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι προσλαβόντες τὸν τετράγωνον σχηματίζουσι τετράγωνον. Ἀλλ' ἐὰν ἀφαιρέσω τὸν x^2 οἱ λοιποὶ θὰ εἶναι $4x + 4$ ὁ εἷς καὶ $6x + 9$ ὁ ἄλλος. Θὰ πρέπει ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10x + 13 = 20$· ἐξ ἧς $x = \frac{7}{10}$· θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν εἷς $\frac{68}{10}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{132}{10}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

15.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος, ὅστις καταλίπει τετράγωνον, ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν.

Ἂς ἐπιταχθῇ πάλιν νὰ διαιρεθῇ ὁ 20 εἰς δύο ἀριθμούς.

Καὶ ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ζητουμένου τετραγώνου ἡ $x + \lambda$, ὥστε $\lambda^2 < 20$. Ἔστω $x + 2$. Θὰ εἶναι ἄρα $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$· καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ $4x + 4$, ὁ ἀπομένων εἶναι τετράγωνος· ἐὰν ἐπίσης ἀπὸ τοῦ ἰδίου ἀφαιρεθῇ ὁ $2x + 3$ ὁ ἀπομένων εἶναι τετράγωνος, ὁ $x^2 + 2x + 1$.

Ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου λαμβάνω τὸν πρῶτον μὲν $4x + 4$, τὸν δὲ δεύτερον $2x + 3$, τὸν δὲ ζητούμενον τετράγωνον $x^2 + 4x + 4$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιρούμενος ἑκάτερος ἀφίνει τετράγωνον· ὑπολείπεται, οἱ δύο εὑρεθέντες ἀριθμοὶ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα τὸν δοθέντα· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι $6x + 7$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 20· δι' ἀφαιρέσεως ἴσων ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν $x = \frac{13}{6}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{76}{6}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{44}{6}$, ὁ δὲ τετράγωνος $\frac{625}{36}$

Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι τριπλάσιος ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, ἑκάμετὰ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$ ποιεῖν τετράγωνον.

'Αφ' οὗ δ' ἂν $\square^{\text{ου}}$ ἀπὸ πλήθους ς$^{\text{ων}}$ καὶ $\mathring{M}\langle\overline{\gamma}\rangle$ ἀφέλω $\mathring{M}\,\overline{\theta}$, οὗτος ἔσται εἷς τῶν ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάσσων $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\varsigma}$, ὁ ἄρα μείζων ἔσται $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$ ς $\overline{\iota\eta}$.

δεήσει ἄρα καὶ τοῦτον, προσλαβόντα $\mathring{M}\,\overline{\theta}$, ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$. ἀλλὰ προσλαβόντα $\mathring{M}\,\overline{\theta}$, γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$ ς $\overline{\iota\eta}$ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$. ταῦτα ἴσα $\square^{\text{ῳ}}$.

πλάσσω τὸν $\square^{\text{ον}}$ ἀπὸ ς $\overline{\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\mathring{M}\,\overline{\lambda}$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\mathring{M}$ ͵$\overline{\alpha\pi}$, ὁ δὲ μείζων ͵$\overline{\gamma\sigma\mu}$, καὶ ποιοῦσι μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$ τὰ τῆς προτάσεως.

ιζ.

[Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ δῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν $\alpha^{\text{ον}}$ τῷ $\beta^{\text{ῳ}}$ διδόναι τὸ $\varepsilon^{\text{ον}}$ καὶ ἔτι $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$· τὸν δὲ $\beta^{\text{ον}}$ τῷ $\gamma^{\text{ῳ}}$ τὸ $\varsigma^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$, τὸν δὲ $\gamma^{\text{ον}}$ τῷ $\alpha^{\text{ῳ}}$ τὸ $\zeta^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$.

Τετάχθω ὁ μὲν $\alpha^{\text{ος}}$ ς $\overline{\varepsilon}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ ὁμοίως ς $\overline{\varsigma}$. καὶ μένει ὁ $\beta^{\text{ος}}$ λαβὼν μὲν παρὰ τοῦ $\alpha^{\text{ου}}$ ς $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$, ς $\overline{\zeta}$ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$· δοὺς δὲ τῷ $\gamma^{\text{ῳ}}$ τὸ $\varsigma^{\text{ον}}$, ς $\overline{\alpha}$, καὶ $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$, γί. ς $\overline{\varsigma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$.

ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ τὸ ἑαυτοῦ $\varepsilon^{\text{ον}}$ καὶ ἔτι $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$, γί. ς $\overline{\delta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$. δεήσει ἄρα καὶ λαβόντα αὐτὸν παρὰ τοῦ $\gamma^{\text{ου}}$ τὸ $\zeta^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$, γίνεσθαι ς $\overline{\varsigma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ἀλλ' ἐὰν ς $\overline{\delta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$ προσλάβωσιν ς $\overline{\beta}$ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$, γίνονται ς $\overline{\varsigma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ς ἄρα $\overline{\beta}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$ μέρος $\zeta^{\text{ον}}$ εἰσι τοῦ $\gamma^{\text{ου}}$ καὶ ἔτι $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. ἐὰν ἄρα ἀπὸ ς $\overline{\beta}$ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$, ἀφέλω $\mathring{M}\,\overline{\eta}$, λοιπὸν ς $\overline{\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$ $\zeta^{\text{ον}}$ μέρος εἰσὶ τοῦ $\gamma^{\text{ου}}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται ς $\overline{\iota\delta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\alpha}$.

λοιπὸν ἄρα δεήσει καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν παρὰ τοῦ μέσου τὸ ς$^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$, δόντα δὲ τὸ $\zeta^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$, γίνεσθαι ς $\overline{\varsigma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ἀλλὰ δοὺς μὲν τὸ $\zeta^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$, λοιπός ἐστιν ς $\overline{\iota\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\varsigma}$, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ μέσου τὸ $\zeta^{\text{ον}}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$, γί. ς $\overline{\iota\gamma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\theta}$· ταῦτα ἴσα ς $\overline{\varsigma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\zeta}{\overline{\iota\eta}}$.

τερος δὲ αὐτῶν μετὰ 9 μονάδων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ $(x + 3)^2$ τὸν 9, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι εἷς τῶν ζητουμένων. Ἔστω λοιπὸν ὁ μικρότερος $x^2 + 6x$· ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $3x^2 + 18x$.

Θὰ πρέπει ἄρα καὶ οὗτος, ἀφοῦ προσλάβει 9 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ ἀφοῦ προσλάβει 9 γίνεται $3x^2 + 18x + 9$. Ταῦτα εἶναι τετράγωνος. Σχηματίζω τὸν τετράγωνον τοῦ $2x - 3$ [$4x^2 - 12x + 9 = 3x^2 + 18x + 9$], ἐξ ἧς $x = 30$.

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι 1080, ὁ δὲ μεγαλύτερος 3240 καὶ μετὰ 9 ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

17.

[Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος δίδῃ εἰς τὸν ἑπόμενόν του ἓν μέρος ἑαυτοῦ καὶ δοθέντα ἀριθμόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ δώσῃ ὁ μὲν πρῶτος εἰς τὸν δεύτερον τὸ $\frac{1}{5}$ σὺν 6· ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{6}$ σὺν 7, ὁ δὲ τρίτος εἰς τὸν πρῶτον τὸ $\frac{1}{7}$ σὺν 8.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $5x$, ὁ δὲ δεύτερος ὁμοίως $6x$. Καὶ ὁ δεύτερος λαβὼν μὲν παρὰ τοῦ πρώτου $x + 6$ γίνεται $7x + 6$· δώσας δὲ εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ, δηλ. x, καὶ 7, θὰ γίνῃ $6x - 1$.

Ἀλλὰ ὁ πρῶτος δώσας τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ καὶ ἀκόμη 6, γίνεται $4x - 6$. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα, ἀφοῦ λάβει παρὰ τοῦ τρίτου τὸ $\frac{1}{7}$ καὶ 8, νὰ γίνῃ $6x - 1$· ἀλλ' ἐὰν ὁ $4x - 6$ προσλάβῃ $2x + 5$ γίνεται $6x - 1$· εἶναι ἄρα τὸ $2x + 5 =$ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ τρίτου σὺν 8. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ $2x + 5$ ἀφαιρέσω 8 μένει $2x - 3 = \frac{1}{7}$ τοῦ τρίτου· ὁ τρίτος ἄρα θὰ εἶναι $14x - 21$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ οὗτος ἀφοῦ λάβει μὲν παρὰ τοῦ μεσαίου $x+7$, δώσει δὲ εἰς τὸν πρῶτον τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ $+ 8$ νὰ γίνῃ $6x - 1$· ἀλλὰ ἀφοῦ μὲν δώσει τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ καὶ 8, θὰ μείνῃ $12x - 26$, ἀφοῦ δὲ λάβει παρὰ τοῦ μεσαίου τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ καὶ 7 θὰ γίνῃ $13x - 19$· ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι $= 6x - 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{18}{7}$.

ἔσται ὁ μὲν αος $\frac{\zeta}{\eta}$, ὁ δὲ βος $\frac{\zeta}{\rho\eta}$, ὁ δὲ γος $\frac{\zeta}{\rho\varepsilon}$, καὶ οὗτοι ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως].

ιη.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς τρεῖς, ὅπως ἕκαστος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ δῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν π̄ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ αος τῷ βῳ διδῷ τὸ εον καὶ ἔτι M̊ϛ̄, ὁ δὲ βος τῷ γῳ τὸ ϛ̄ον καὶ M̊ζ̄, ὁ δὲ γος τῷ αῳ τὸ ζ̄ον καὶ M̊η̄, ἵνα μετὰ τὴν ἀντίδοσιν γένωνται ἴσοι. . . . . .]

⟨ Ἄλλως τὸ ιζον. ⟩

[Τετάχθω ὁ αος ϛ ε̄ καὶ ὁ βος M̊ιβ̄, καὶ μένει ὁ βος λαβὼν μὲν παρὰ τοῦ αου τὸ εον, ϛ ᾱ, καὶ M̊ϛ̄, γινόμενος ϛ ᾱ M̊ιη̄· δοὺς δὲ τῷ γῳ τὸ ϛον καὶ ἔτι M̊ζ̄, γίνεται ϛ ᾱ M̊θ̄· λοιπόν ἐστι καὶ τοὺς λοιποὺς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ϛ ᾱ M̊θ̄.

ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ αος ἑαυτοῦ τὸ εον καὶ M̊ϛ̄ λοιπός ἐστιν ϛ δ̄ ⋔ M̊ϛ̄. δεήσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ ζον τοῦ γου καὶ M̊η̄, γίνεσθαι ϛ ᾱ M̊θ̄. ἀλλ' ἐὰν λάβῃ M̊ιε̄ ⋔ ϛγ̄, γίνεται ϛ ᾱ M̊θ̄. M̊ ἄρα ιε̄ ⋔ ϛγ̄, ζον μέρος εἰσὶ τοῦ γου καὶ ἔτι M̊η̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ M̊ιε̄ ⋔ ϛγ̄ ἀφέλωμεν M̊η̄, ἕξομεν τὸ τοῦ γου ζον, M̊ζ̄ ⋔ ϛγ̄· αὐτὸς ἄρα ἔσται M̊μθ̄ ⋔ ϛκᾱ.

λοιπόν ἐστι καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν παρὰ τοῦ μέσου τὸ ϛον καὶ M̊ζ̄, δόντα δὲ τῷ αῳ τὸ ζον καὶ M̊η̄, γίνεσθαι ϛ ᾱ καὶ M̊θ̄. ἀλλὰ δοὺς καὶ λαβὼν γί· M̊μγ̄ ⋔ ϛιη̄· ταῦτα ἴσα ϛ ᾱ M̊θ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{\iota\theta}{\lambda\delta}$.

ἔσται ὁ μὲν αος $\frac{\iota\theta}{\rho o}$, ὁ δὲ βος $\frac{\iota\theta}{\sigma\kappa\eta}$, ὁ δὲ γος $\frac{\iota\theta}{\sigma\iota\zeta}$.]

ιθ.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ὑπεροχῆς εἶναι γπλ.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $= \frac{90}{7}$, ὁ δὲ δεύτερος $= \frac{108}{7}$, ὁ δὲ τρίτος $= \frac{105}{7}$, καὶ οὗτοι ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως].

⟨Ἄλλως τὸ 17ον⟩

[Ἔστω ὁ πρῶτος 5x καὶ ὁ δεύτερος 12, καὶ γίνεται ὁ δεύτερος, ἀφοῦ λάβει παρὰ μὲν τοῦ πρώτου τὸ $\frac{1}{5}$, τὸ x, καὶ $6 = x + 18$· ἀφοῦ δώσει δὲ εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ καὶ 7 γίνεται $= x + 9$· ὑπολείπεται λοιπὸν καὶ οἱ ἄλλοι, δόντες καὶ λαβόντες νὰ γίνωνται ἴσοι πρὸς $x + 9$.

Ἀλλὰ ὁ μὲν πρῶτος ἀφοῦ δώσει τὸ $\frac{1}{5}$ ἑαυτοῦ καὶ 6 θὰ μείνῃ $4x - 6$. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα αὐτὸς καὶ ἀφοῦ λάβει παρὰ τοῦ τρίτου τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ καὶ 8, νὰ γίνῃ $x + 9$· ἀλλ' ἐὰν λάβῃ $15 - 3x$, γίνεται $x + 9$. Εἶναι ἄρα τὸ $15 - 3x$ τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ τρίτου, σὺν 8. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ $15 - 3x$ ἀφαιρέσωμεν 8, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{7}$ τοῦ τρίτου $= 7 - 3x$· αὐτὸς ἄρα ὁ τρίτος θὰ εἶναι $49 - 21x$.

Ὑπολείπεται ὅπως καὶ οὗτος ἀφοῦ λάβει μὲν παρὰ τοῦ μεσαίου τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ 7, δώσει δὲ εἰς τὸν πρῶτον τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτοῦ καὶ 8, νὰ γίνῃ $x + 9$. Ἀλλὰ ἀφοῦ δώσει καὶ λάβει γίνεται $43 - 18x$. ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x + 9$. Ἐξ ἧς $x = \frac{34}{19}$

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{170}{19}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{228}{19}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{217}{19}$].

18.

[Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν δώσῃ εἰς τὸν ἑπόμενόν του μέρος ἑαυτοῦ τὸ ἐπιταχθὲν καὶ ἀκόμη δοθέντα ἀριθμόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ διαιρεθῇ ὁ 70 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε ὁ πρῶτος νὰ δώσῃ εἰς τὸν δεύτερον τὸ $\frac{1}{5}$ ἑαυτοῦ καὶ ἀκόμη 6, ὁ δὲ δεύτερος νὰ δώσῃ εἰς τὸν τρίτον τὸ $\frac{1}{6}$ ἑαυτοῦ καὶ 7, ὁ δὲ τρίτος νὰ δώσῃ εἰς τὸν πρῶτον τὸ $\frac{1}{7}$ ἑαυτοῦ καὶ 8, ἵνα μετὰ τὴν δόσιν καὶ τὴν λῆψιν γίνωσιν ἴσοι. . . . .]

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων Δ^{Υ} α̅, *ὁ δὲ μέσος* Δ^{Υ} α̅ ς β̅ M̊ α̅, *ἀπὸ πλ. δηλονότι* ς α̅ M̊ α̅· *ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται* Δ^{Υ} α̅ ς η̅ M̊ δ̅.

δεήσει ἄρα καὶ Δ^{Υ} α̅ ς η̅ M̊ δ̅ *ἴσ. εἶναι* □$^{\varphi}$.

πλάσσω τὸν □^{ον} *ἀπὸ* ς ⟨α̅⟩, *ἵνα ἔχω τὴν* Δ^{Υ}, *καὶ ἔτι* M̊ *τοσούτων ὥστε τὰ λοιπὰ ἐν τῷ* □$^{\varphi}$ *γινόμενα εἴδη τῶν* ς *καὶ τῶν* M̊ *μὴ ὑπερβάλλειν κατὰ τὸ πλῆθος τοὺς* ς η̅ *καὶ* M̊ δ̅ *ἑκάτερα, ἀλλὰ τὸ μὲν ἐλλείπειν, τὸ δὲ πλεονάζειν· ἔστω δὴ* M̊ γ̅· *αὐτὸς ἄρα ὁ* □^{ος} *ἔσται* Δ^{Υ} α̅ ς ϛ̅ M̊ θ̅· *ταῦτα ἴσα* Δ^{Υ} α̅ ς η̅ M̊ δ̅· *καὶ γίνεται ὁ* ς M̊ β L′.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μέγιστος M̊ λ̅ δ$^{\times}$, *ὁ δὲ ἐλάχιστος* M̊ ϛ̅ δ$^{\times}$, *ὁ δὲ μέσος* M̊ ιβ̅ δ$^{\times}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

κ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος, προσλαβὼν τὸν λοιπόν, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς α̅, *ὁ δὲ* β^{ος} M̊ α̅ ς β̅, *ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ* α^{ου} □^{ος}, *προσλαβὼν τὸν* β^{ον}, *ποιῇ* □^{ον}· *λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ* β^{ου} □^{ον}, *προσλαβόντα τὸν* α^{ον}, *ποιεῖν* □^{ον}. *ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ* β^{ου} □^{ος}, *προσλαβὼν τὸν* α^{ον}, *ποιεῖ* Δ^{Υ} δ̅ ς ε̅ M̊ α̅· *ταῦτα ἴσα* □$^{\varphi}$.

πλάσσω τὸν □^{ον} *ἀπὸ* ς β̅ ⋔ M̊ β̅· *αὐτὸς ἄρα ἔσται* Δ^{Υ} δ̅ M̊ δ̅ ⋔ ς η̅· *καὶ γίνεται ὁ* ς $\frac{\iota\gamma}{\gamma}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\frac{\iota\gamma}{\gamma}$, *ὁ δὲ* β^{ος} $\frac{\iota\gamma}{\iota\theta}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

κα.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος, λείψει τοῦ λοιποῦ, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς α̅ *καὶ* M̊ *ὅσων δήποτε· ἔστω δὴ* M̊ α̅· *ὁ δὲ μεί-*

(Σημ. Δὲν σῴζεται ἡ λύσις τοῦ προβλήματος).

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ μεσαίου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου ἔχῃ δεδομένον λόγον.

Ἄς ἐπιταχθῇ νὰ ἔχῃ λόγον 3 ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν ὑπεροχήν.

Ἔστω ὁ μὲν μικρότερος x^2, ὁ δὲ μεσαῖος $x^2 + 2x + 1$ ἤτοι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου $= x + 1$· ὁ μέγιστος ἄρα θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $x^2 + 8x + 4$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶναι ὁ $x^2 + 8x + 4$ τετράγωνος.

Σχηματίζω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου, $x + \alpha$ ὥστε ὅταν ὑψώσω εἰς τὸ τετράγωνον νὰ ἔχω τὸν x^2 καὶ ὁ α νὰ εἶναι τοιοῦτος, ὥστε ἢ $2\alpha < 8$ καὶ $\alpha^2 > 4$ ἢ $2\alpha > 8$ καὶ $\alpha^2 < 4$. Ἔστω $\alpha = 3$. Ὁ $(x + 3)^2$ ἄρα θὰ εἶναι $x^2 + 6x + 9$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x^2 + 8x + 4$· ἐξ ἧς $x = \frac{5}{2}$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Θὰ εἶναι ὁ μέγιστος $30\frac{1}{4}$, ὁ δὲ ἐλάχιστος $6\frac{1}{4}$, ὁ δὲ μεσαῖος $12\frac{1}{4}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

20.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου σὺν τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ πρῶτος x, ὁ δὲ δεύτερος $(1 + 2x)$, ὥστε ὁ $x^2 + (1 + 2x)$ νὰ εἶναι τετράγωνος. Ὑπολείπεται, ὥστε καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου σὺν τὸν πρῶτον νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι $(1 + 2x)^2 + x = 4x^2 + 5x + 1$· οὗτος πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνος.

Σχηματίζω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου $= 2x - 2$· τὸ τετράγωνον ἄρα τούτου εἶναι $4x^2 - 8x + 4$ $(= 4x^2 + 5x + 1)$· ἐξ ἧς $x = \frac{3}{13}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{3}{13}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{19}{13}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου μεῖον τὸν ἄλλον εἶναι τετράγωνος.

Ἔστω ὁ μικρότερος $x + \alpha$ ἔνθα α τυχὼν ἀκέραιος· ἔστω $\alpha = 1$· ὁ δὲ μεγαλύτερος λαμβάνεται ἴσος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου μεῖον τὸ x^2, ζων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος □ον παρὰ Δ^{Υ} ᾱ, ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος □ος ⋔ τοῦ μείζονος ποιῇ □ον.

καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος □ος ἐστιν Δ^{Υ} α ς β̅ M̊ ᾱ, ὁ ἄρα μείζων ἔσται τῶν μετὰ τὴν Δ^{Υ}, ς β̅ M̊ ᾱ. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος □ος, ⋔ τοῦ μείζονος, ποιῶν □ον. δεῖ δὲ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος, Δ^{Υ} δ̅ ς δ̅ M̊ ᾱ, ⋔ τοῦ ἐλάσσονος, ποιεῖν □ον· ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος □ος, ⋔ τοῦ ἐλάσσονος, ποιεῖ Δ^{Υ} δ̅ ς γ̅· ταῦτα ἴσα □ῳ.

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ ς γ̅· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\varepsilon}{\overline{\gamma}}$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\overset{\varepsilon}{\overline{\eta}}$, ὁ δὲ μείζων $\overset{\varepsilon}{\overline{\iota\alpha}}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

κβ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος, προσλαβὼν συναμφότερον, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς ᾱ, ὁ δὲ μείζων ς ᾱ M̊ ᾱ, ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος □ος, τουτέστι Δ^{Υ} ᾱ, προσλαβοῦσα συναμφότερον, τουτέστιν ς β̅ M̊ ᾱ, ποιῇ □ον.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος □ον προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν □ον· ἀλλ' ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ μείζονος □ος προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται Δ^{Υ} ᾱ ς δ̅ M̊ β̅· ταῦτα ἴσ. □ῳ.

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ ς ᾱ ⋔ M̊ β̅· αὐτὸς ἄρα ὁ □ος ἔσται Δ^{Υ} ᾱ M̊ δ̅ ⋔ ς δ̅, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\eta}{\overline{\beta}}$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\overset{\eta}{\overline{\beta}}$, ὁ δὲ μείζων $\overset{\eta}{\overline{\iota}}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

κγ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει συναμφοτέρου ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς ᾱ, ὁ δὲ μείζων ς ᾱ M̊ ᾱ, ἵνα ὁμοίως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος □ος λείψει συναμφοτέρου, ποιῇ □ον.

ἵνα τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου, μεῖον τὸν μεγαλύτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου εἶναι $x^2 + 2x + 1$, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ x^2, ἴσος πρὸς $2x + 1$. Καὶ οὕτω τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου, μεῖον τὸν μεγαλύτερον σχηματίζει τετράγωνον. Πρέπει δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου, μεῖον τὸν μικρότερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μεῖον τὸν μικρότερον, εἶναι $4x^2 + 3x$· ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνος. Λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου, τὴν $3x$, ὁπότε εἶναι $4x^2 + 3x = 9x^2$· ἐξ ἧς $x = \frac{3}{5}$.

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι $\frac{8}{5}$, ὁ δὲ μεγαλύτερος $\frac{11}{5}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου αὐτῶν προσλαβὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ μὲν μικρότερος x, ὁ δὲ μεγαλύτερος $x + 1$, ἵνα τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου, τουτέστι τὸ x^2, προσλαβὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται, ὥστε καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου προσλαβὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γίνεται $x^2 + 4x + 2$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον.

Λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου τὴν $x - 2$· θὰ εἶναι ἑπομένως τὸ τετράγωνον τούτου, $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$, ἐξ ἧς $x = \frac{2}{8}$.

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι $\frac{2}{8}$, ὁ δὲ μεγαλύτερος $\frac{10}{8}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ μὲν μικρότερος x, ὁ δὲ μεγαλύτερος $x + 1$, ἵνα ὁμοίως, ἀπὸ τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μεῖον τὸ ἄθροισμα των σχηματίζεται τετράγωνος.

Δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος □ον λείψει συναμφοτέρου ποιεῖν □ον· ἔσται ἄρα $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \pitchfork\ \varsigma\,\overline{\beta}\ \mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ταῦτα ἴσα □φ.

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ πλ. $\varsigma\,\overline{\alpha}\ \pitchfork\ \mathring{M}\,\overline{\gamma}$.

Δ^{Y} ἄρα $\overline{\alpha}\ \mathring{M}\,\overline{\theta}\ \pitchfork\ \varsigma\,\overline{\digamma}$ ἴσαι εἰσὶ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \pitchfork\ \varsigma\,\overline{\beta}\ \mathring{M}\,\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ $\varsigma\ \mathring{M}\,\overline{\beta}\,L'$.

ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\mathring{M}\,\overline{\beta}\,L'$, ὁ δὲ μείζων $\mathring{M}\,\overline{\gamma}\,L'$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

κδ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐπεὶ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, ἐάν τε προσλάβῃ $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$, ἐάν τε $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$, ποιεῖ □ον, τάσσω τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$, τὸν δὲ $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$, τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῶν □ον. καὶ ἐπεὶ συναμφότερός ἐστι $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\alpha}$, ὁ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου ἔσται $\Delta^{Y}\Delta\,\overline{\rho\kappa\alpha}$· ἀλλ' ἔστιν καὶ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$.

$\Delta^{Y}\Delta$ ἄρα $\overline{\rho\kappa\alpha}$ ἴσαι $\Delta^{Y}\,\alpha$.

ὥστε καὶ πλ. τῇ πλ. ἴσῃ· ς ἄρα $\overline{\alpha}$ ἴσος $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\alpha}$.

καὶ πάντα παρὰ ς· ς ἄρα $\overline{\iota\alpha}$ ἴσοι $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ καὶ γίνεται ὁ ς $\iota\alpha^{\times}$ $\mathring{M}^{o\varsigma}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $\overline{\gamma}$ ρκαων, ὁ δὲ ἕτερος $\overline{\eta}$, ὁ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου $\overline{\rho\kappa\alpha}$ $\overset{Y}{M}\alpha$. ,δχμαων καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

κε.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον.

Λαμβάνω πρῶτόν τινα □ον, ἀφ' οὗ ἀφελὼν δύο τινὰς ἀριθμούς, κατα-

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν νὰ εἶναι τετράγωνος, θὰ εἶναι ἄρα $x^2 - (2x + 1) =$ τετράγωνος. Σχηματίζω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου $= x - 3$.

Εἶναι ἄρα $x^2 + 9 - 6x = x^2 - 2x - 1$· ἐξ ἧς $x = 2\frac{1}{2}$.

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι $2\frac{1}{2}$, ὁ δὲ μεγαλύτερος $3\frac{1}{2}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

24.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν σὺν ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ x^2, εἴτε προσλάβει τὸν $3x^2$, εἴτε τὸν $8x^2$, σχηματίζει τετράγωνον, λαμβάνω ἐκ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν τὸν μὲν $3x^2$, τὸν δὲ $8x^2$, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν x^2, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν σὺν ἑκάτερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $11x^2$, εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τούτου $121x^4$· ἀλλὰ τοῦτο ἐλήφθη καὶ x^2.

Εἶναι ἄρα $121x^4 = x^2$.

Ὥστε καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εἶναι ἴσαι· εἶναι ἄρα $x = 11x^2$.

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· εἶναι ἄρα $1 = 11x$ ἐξ ἧς $x = \frac{1}{11}$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων. Ὁ μὲν εἷς θὰ εἶναι $\frac{3}{121}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{8}{121}$, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν θὰ εἶναι $\frac{121}{14641}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

25.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Λαμβάνω πρῶτον τετράγωνόν τινα ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιρῶν δύο ἀριθμούς, νὰ ὑπολείπεται τετράγωνος· ἔστω τὸν 16. Διότι ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθοῦν 12 ὑπολείπεται τετράγωνος, καὶ ἐὰν πάλιν ἀφαιρεθοῦν 7 ὑπολείπεται τετράγωνος. Λαμβάνω λοιπὸν τοὺς ζητουμένους συναρτήσει τοῦ x^2 τὸν μὲν ἕνα ὡς $12x^2$, τὸν δὲ ἄλλον ὡς $7x^2$, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν *λείπω* □^{ον}· *ἔστω δὴ ὁ* $\overline{ις}$. *αὐτὸς γὰρ ἐάν τε λείψῃ* $\mathring{M}\,\overline{ιβ}$, *γίνεται* □^{ος}, *ἐάν τε πάλιν* $\mathring{M}\,\overline{ζ}$, *γίνεται* □^{ος}.

τάσσω οὖν πάλιν αὐτοὺς ἐν $Δ^Υ$, *καὶ τὸν μὲν* $Δ^Υ\,\overline{ιβ}$, *τὸν δὲ* $Δ^Υ\,\overline{ζ}$, *τὸν δὲ ἀπὸ συναμφοτέρου* $Δ^Υ\,\overline{ις}$, *καὶ μένει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου,* ⋔ *ἑκατέρου, ποιῶν* □^{ον}.

δεήσει λοιπὸν τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου ἴσον γίνεσθαι $Δ^Υ\,\overline{ις}$, *ὥστε καὶ τὴν πλ. τῇ πλ., τουτέστιν* $Δ^Υ\,\overline{ιθ}$ *ἴσας* ϛ *δ, καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\frac{ιθ}{δ}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\frac{τξα}{ρπβ}$, *ὁ δὲ* β^{ος} $\frac{τξα}{ριβ}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

κϛ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον, τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

'Επιτετάχθω δὴ ποιεῖν τὸν $\overline{ϛ}$.

'Επεὶ οὖν, ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονός ἐστι τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον, τάσσω τὸν μὲν ἐλάσσονα ϛ $\overline{α}$, *τὸν δὲ μείζονα* ϛ $\overline{δ}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{α}$, *καὶ συμβαίνει ὁμοίως τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν* □^{ον}.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν μείζονα, τουτέστιν ϛ $\overline{δ}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{α}$, *ποιεῖν* □^{ον}, *οὗ ἡ πλευρά ἐστι* $\mathring{M}\,\overline{ϛ}$ ⋔ *τῶν τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλάσσονος* ϛ $\overline{β}$, *ἵνα, κατὰ τὸ πρόβλημα, συντεθεῖσαι τῶν δύο αἱ πλευραὶ ποιῶσι* $\mathring{M}\,\overline{ϛ}$· *ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ* $Δ^Υ\,\overline{δ}$ ϛ $\overline{γ}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{α}$, *ὁ δὲ ἀπὸ* $\mathring{M}\,\overline{ϛ}$ ⋔ ϛ $\overline{β}$, $Δ^Υ\,\overline{δ}$ $\mathring{M}\,\overline{λϛ}$ ⋔ ϛ $\overline{κδ}$. *ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις· καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\frac{κζ}{λζ}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔταξα τὸν ἐλάσσονα ϛ $\overline{α}$, *ἔσται* $\overline{λζ}$, *τὸν δὲ μείζονα* ϛ $\overline{δ}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{α}$, *ἔσται* $\overline{ρκα}$, *καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.*

κζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον, τῶν δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{ε}$.

ὡς $16x^2$, καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρέσω ἑκάτερον τούτων ὑπολείπεται τετράγωνος.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο γίνεται $16x^2$, ὥστε $(12x^2 + 7x^2)^2 = 16x^2$, τουτέστι $19x^2 = 4x$, ἐξ ἧς $x = \frac{4}{19}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{192}{361}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{112}{361}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

26.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν ἑκάτερον τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων νὰ σχηματίζῃ ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ σχηματίζῃ τὸν 6.

Ἐπειδὴ λοιπόν, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου, μεῖον 1, τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν μικρότερον σχηματίζει τετράγωνον, λαμβάνω τὸν μὲν μικρότερον x, τὸν δὲ μεγαλύτερον $4x - 1$, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μικρότερον σχηματίζει τετράγωνον.

Ὑπολείπεται, ὅπως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν μεγαλύτερον τουτέστιν $4x - 1$, σχηματίζῃ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θὰ εἶναι $6 - 2x$, ἵνα κατὰ τὸ πρόβλημα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων εἶναι 6 [Σημ. Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν μεῖον τὸν μικρότερον $= 4x^2$ καὶ ἡ τεραγωνικὴ ῥίζα τούτου $2x$]. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν σὺν τὸν μεγαλύτερον εἶναι $4x^2 + 3x - 1$, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ $6 - 2x$ εἶναι $4x^2 + 36 - 24x$. Ταῦτα εἶναι ἴσα μεταξύ των· ἐξ ἧς ὁ $x = \frac{37}{27}$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων· ἔλαβα τὸν μικρότερον $= x$, θὰ εἶναι $= \frac{37}{27}$, τὸν δὲ μεγαλύτερον $4x - 1$, θὰ εἶναι $= \frac{121}{27}$, καὶ λύεται τὸ πρόβλημα.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων νὰ εἶναι δοθεὶς ἀριθμός.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εἶναι ὁ 5.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονός ἐστι τετραπλασίων καὶ μονὰς μία, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ ἐλάσσονος ποιεῖ τετράγωνον, τάσσω τὸν μὲν μείζονα $\varsigma\,\overline{\delta}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, *τὸν δὲ ἐλάσσονα* $\varsigma\,\overline{\alpha}$, *καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ ἐλάσσονος ποιεῖ τετράγωνον.*

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος ποιεῖν τετράγωνον· ὧν αἱ πλευραὶ συνάγουσι τὰς ἐπιταχθείσας $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· *ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τοῦ μείζονος γίνεται* $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}\pitchfork\varsigma\,\overline{\gamma}\;\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· *ταῦτα ἴσα* $\square^{\varphi}$ *τῷ ἀπὸ* π^{λ}. $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}\pitchfork\varsigma\,\overline{\beta}$, *καὶ γίνεται ὁ* $\varsigma\;\overset{\iota\zeta}{\overline{\kappa\varsigma}}$.

ἔσται ὁ ⟨μὲν⟩ ἐλάσσων $\overline{\kappa\varsigma}$, *ὁ δὲ μείζων* $\overline{\rho\kappa\alpha}$, *καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.*

κη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον.

Ἐὰν οὖν τάξω ἕνα τῶν τετραγώνων $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, *τὸν δὲ ἕτερον τετράγωνον* $\mathring{M}^{\alpha}$, *ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος* Δ^{Y}· *δεήσει ἄρα τοῦτον, προσλαβόντα ἑκάτερον, ποιεῖν* $\square^{ov}$· *ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ ζητῆσαι τίς τετράγωνος, προσλαβὼν* $\mathring{M}^{\alpha}$, *ποιεῖ* $\square^{ov}$.

Τετάχθω ὁ τετράγωνος ὃν θέλω εἶναι ὑπ' αὐτῶν, $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$.

Ἐὰν ἄρα οὗτος προσλάβῃ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, *γίνεται* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\,\mathring{M}\overline{\alpha}$· *τοῦτον δεήσει ἴσον εἶναι* $\square^{\varphi}$· *πλάσσω τὸν* $\square^{ov}$ *ἀπὸ* π^{λ}. $\varsigma\,\overline{\alpha}\pitchfork\mathring{M}\,\overline{\beta}$. *οὗτος ἴσος* $\Delta^{Y}\overline{\alpha}\;\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, *καὶ γίνεται ὁ* $\varsigma\;\overset{\delta}{\overline{\gamma}}$.

ἔσται ὁ μὲν $\overline{\theta}\;\iota\varsigma^{\omega\nu}$, *ὁ δὲ* $\overline{\iota\varsigma}$· *καὶ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν, προσλαβόντα τὴν* $\mathring{M}^{\alpha}$, *ποιεῖν* $\square^{ov}$.

Δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν, προσλαβόντα τὸν β^{ov}, *ποιεῖν* $\square^{ov}$, *καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν* $\overline{\theta}\;\iota\varsigma^{\omega\nu}$, *ὑποκείσθω νῦν ἐν* Δ^{Y}, *τουτέστι* $\Delta^{Y}\overline{\theta}\;\mathring{M}\overline{\theta}$, *πάντων* $\iota\varsigma^{\pi\lambda.}$· Δ^{Y} *ἄρα* $\overline{\theta}\;\mathring{M}\,\overline{\theta}$ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$.

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος εἶναι τετραπλάσιος τοῦ μικροτέρου σὺν 1, τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μικρότερον σχηματίζει τετράγωνον, λαμβάνω τὸν μὲν μεγαλύτερον $4x + 1$, τὸν δὲ μικρότερον x, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μικρότερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μεγαλύτερον εἶναι τετράγωνος· καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων νὰ εἶναι 5. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μεγαλύτερον εἶναι $4x^2 - 3x - 1$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $(5 - 2x)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{26}{17}$.

Ὁ μὲν μικρότερος θὰ εἶναι $\frac{26}{17}$, ὁ δὲ μεγαλύτερος $\frac{121}{17}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν προσλαβὸν ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσω ἕνα τῶν τετραγώνων x^2, τὸν δὲ ἄλλον τετράγωνον 1, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν τετράγωνος· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα οὗτος προσλαβὼν ἑκάτερον, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητηθῇ, ποῖος τετράγωνος προσλαβὼν τὴν μονάδα, σχηματίζει τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ὁ ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν ὁ x^2.

Ἐὰν ἄρα οὗτος προσλάβῃ 1 γίνεται $x^2 + 1$· οὗτος εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι τετράγωνος· λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου τὴν $x - 2$. Ἑπομένως $(x - 2)^2 = x^2 + 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{4}$.

Ὁ μὲν εἷς θὰ εἶναι $\frac{9}{16}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{16}{16}$· καὶ συμβαίνει, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν προσλαβὸν τὴν μονάδα νὰ γίνεται τετράγωνος.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὅπως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, προσλαβὸν τὸν δεύτερον σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{9}{16}$, ἂς ληφθῇ τώρα ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ x, τουτέστι $\frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}$ (σὺν τὸν ἄλλον) ἢ $9x^2 + 16$ ἀφοῦ πολλαπλασιασθοῦν ταῦτα ἐπὶ 16· εἶναι ἄρα $9x^2 + 9 =$ τετράγωνος.

Σχηματίζω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου $= 3x - 4$·

πλάσσω τὸν $\square^{\text{ον}}$ ἀπὸ π^{λ}. ϛγ ⋔ $\mathring{M}\overline{\delta}$· αὐτὸς ἄρα ὁ $\square^{\text{ος}}$ ἔσται $\Delta^{Y}\overline{\vartheta}\mathring{M}\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ ϛ$\overline{\kappa\delta}$. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\kappa\delta}{\overline{\zeta}}$.

ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{\text{ος}}$ $\overset{\varphi o\varsigma}{\overline{\tau\kappa\delta}}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ $\overset{\varphi o\varsigma}{\overline{\mu\theta}}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

κθ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν μὲν τάξω τὸν $\alpha^{\text{ον}}$ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, τὸν δὲ ἕτερον $\mathring{M}\overline{\alpha}$, ἔσται ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· δεήσει ἄρα καὶ αὐτὸν ⋔ $\mathring{M}\overline{\alpha}$ ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$, καὶ ἔστιν ἡ Δ^{Y} $\square^{\text{ος}}$· ἀπῆκται ἄρα εἰς τὸ ζητῆσαι τὶς τετράγωνος ⋔ $\mathring{M}\overline{\alpha}$ ποιεῖ $\square^{\text{ον}}$· ἔστι δὲ τετράγωνος ὁ $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$· οὗτος γάρ, ⋔ τῶν τῆς $\mathring{M}\overline{\iota\varsigma}$, ποιεῖ τὸν $\square^{\text{ον}}$ $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\theta}}$.

Τάσσω οὖν τὸν μὲν $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, τὸν δὲ $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$, καὶ ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν, ⋔ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, ποιεῖ $\square^{\text{ον}}$· δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν, ⋔ $\mathring{M}$ $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$, ἴσον εἶναι $\square^{\text{ῳ}}$· ἀλλ᾽ ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν, ⋔ $\mathring{M}\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$, γί. $\Delta^{Y}\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$ ⋔ $\mathring{M}$ $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$· ταῦτα ἴσα $\square^{\text{ῳ}}$· πάντα $\iota\varsigma^{\kappa\iota\varsigma}$ ⟨καὶ τὸ $\kappa\varepsilon^{\text{ον}}$⟩.

πλάσσω τὸν $\square^{\text{ον}}$ ἀπὸ ϛ$\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}$ $\overline{\delta}$. αὐτὸς ἄρα ἔσται $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ ϛ $\overline{\eta}$ ἴσ. $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{\alpha}$ καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\eta}{\overline{\iota\zeta}}$.

ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{\text{ος}}$, $\overset{\xi\delta}{\overline{\sigma\pi\theta}}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ $\overset{\xi\delta}{\overline{\varrho}}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τοῦ προβλήματος.

λ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λίπῃ, ποιῇ τετράγωνον.

τὸ τετράγωνον ἄρα τούτου θὰ εἶναι $9x^2 + 16 - 24x$ $(= 9x^2 + 9)$. Ἐξ ἧς $x = \frac{7}{24}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{324}{576}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{49}{576}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν μὲν λάβω τὸν πρῶτον x^2, τὸν δὲ ἄλλον 1, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν x^2· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ οὗτος μεῖον 1 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ εἶναι τετράγωνος ὁ x^2· ἀνήχθη ἄρα τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν, ποῖος τετράγωνος μεῖον 1 σχηματίζῃ τετράγωνον· εἶναι δὲ τοιοῦτος τετράγωνος ὁ $\frac{25}{16}$· διότι οὗτος, μεῖον $\frac{16}{16}$ σχηματίζει τετράγωνον, τὸν $\frac{9}{16}$. Θέτω λοιπὸν τὸν μὲν ἕνα x^2, τὸν δὲ ἄλλον $\frac{25}{16}$, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον x^2 σχηματίζει τετράγωνον· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον $\frac{25}{16}$ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον $\frac{25}{16}$ εἶναι $\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{16}$. ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον. Τὰ θέτω ἴσα πρὸς τετράγωνον καὶ ἀπαλείφω τοὺς παρονομαστὰς πολλαπλασιάζων ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 16 ⟨ καὶ τὸ $\frac{1}{25}$ ⟩ [Σημ. Καὶ τὸ $\frac{1}{25}$. Ἐννοεῖ, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 25 καὶ πάλιν ταῦτα εἶναι τετράγωνοι ἀριθμοί]. Λαμβάνω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου $= x - 4$. Θὰ εἶναι ἄρα $x^2 + 16 - 8x = x^2 - 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{17}{8}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{289}{64}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{100}{64}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τοῦ προβλήματος.

30.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἢ σὺν τὸ ἄθροισμα ἢ μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπεὶ πάντων δύο ἀριθμῶν οἱ ὑπ' αὐτῶν συντεθέντες, ἐάν τε προσλάβωσι τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε λίπωσι, ποιοῦσι □ον, ἐκτίθεμεν δύο ἀριθμούς, τόν τε $\overline{\beta}$ καὶ τὸν $\overline{\gamma}$.

Καὶ δῆλον ὡς ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν □ων, μετὰ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, συνάγουσα M̊ $\overline{\kappa\varepsilon}$, ποιεῖ □ον, καὶ πάλιν ἀπὸ τῆς συνθέσεως τῶν ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρουμένου τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, γίνεται □ος ἡ M̊· τάσσω οὖν τὸν ὑπ' αὐτῶν $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\gamma}$.

Τετάχθω οὖν ὃς μὲν ς $\overline{\alpha}$, ὃς δὲ ς $\overline{\iota\gamma}$, καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\gamma}$. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\iota\gamma}$, ἐάν τε προσλάβωσι $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\beta}$, ἐάν τε λίπωσι, ποιοῦσι □ον. δεήσει ἄρα $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\beta}$ ἴσας εἶναι συναμφοτέρῳ· ἀλλὰ συναμφότερός ἐστιν ς $\overline{\iota\delta}$. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\iota\beta}$ ἴσαι εἰσὶν ς $\overline{\iota\delta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\iota\beta}{\overline{\iota\delta}}$, τουτέστιν $\overset{\varsigma}{\overline{\zeta}}$.

ἔστιν οὖν ὁ μὲν αος ς $\overline{\alpha}$, ἔσται $\overset{\varsigma}{\overline{\zeta}}$, ὁ δὲ βος ς $\overline{\iota\gamma}$, ἔσται $\overset{\varsigma}{\overline{\text{ϟ}\alpha}}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

λα.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπεὶ οὖν, ἐὰν ὦσιν δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐστὶν διπλασίων, οἱ ἀπ' αὐτῶν συντεθέντες, ἐάν τε λείψωσι τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβωσι, ποιοῦσι □ον, ἐκτίθεμεν τὸν $\overline{\delta}$ καὶ τὸν $\overline{\beta}$.

Τετάχθωσαν οὖν ἐν Δ^{Y}, καὶ ἔστιν ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν $\Delta^{Y}\,\overline{\kappa}$, ὁ δὲ συναμφότερος $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$· ἔστω ὁ μὲν ς $\overline{\beta}$, ὁ δὲ ς $\overline{\iota}$, συναμφότερος δὲ ς $\overline{\iota\beta}$, ἀλλὰ καὶ $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\iota\varsigma}$ ἴσαι ς $\overline{\iota\beta}$ ⟨καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\iota\beta}}$⟩, τουτέστι $\overset{\delta}{\overline{\gamma}}$. ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\varsigma}$, ὁ δὲ βος $\overline{\lambda}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

λβ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν σχηματίζεται τετράγωνος, λαμβάνομεν δύο τυχόντας ἀριθμούς, τὸν 2 καὶ 3. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν σὺν τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν δίδον 25, εἶναι τετράγωνος, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἀφαιρουμένου τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ἀριθμῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, ἡ μονάς· λαμβάνω λοιπὸν τὸ γινόμενον αὐτῶν $= 13x^2$.

Ἔστω λοιπὸν ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος 13x, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $13x^2$. Ἐὰν εἰς τὸ $13x^2$ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸ $12x^2$ σχηματίζεται τετράγωνος. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς $12x^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς 14x. Εἶναι ἄρα $12x^2 = 14x$, ἐξ ἧς $x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.

Εἶναι λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος $x = \frac{7}{6}$, ὁ δὲ δεύτερος $13x = \frac{91}{6}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

31.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τετράγωνος, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἢ σὺν τὸ ἄθροισμα ἢ μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐπειδὴ λοιπόν, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν, ὁ προκύπτων εἶναι τετράγωνος, λαμβάνομεν τὸν 4 καὶ τὸν 2.

Οἱ ἀριθμοὶ ἃς ληφθῶσι συναρτήσει τοῦ x^2, καὶ εἶναι τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν $20x^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $16x^2$· ἔστω ὁ μὲν εἷς 2x, ὁ δὲ ἄλλος 10x, τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτῶν 12x, ἀλλὰ εἶναι καὶ $16x^2$.

Εἶναι ἄρα $16x^2 = 12x$· ἐξ ἧς $x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{6}{4}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{30}{4}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

32.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου προσλαβὼν τὸν ἑπόμενόν του σχηματίζῃ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μὲν α^{ος} ς $\overline{α}$, καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ διπλασίων καὶ μονάδι μείζων, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, προσλαβὼν τὸν μείζονα, ποιεῖ τετράγωνον, τετάχθω ὁ β^{ος} τοῦ α^{ου} διπλασίων καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται δηλονότι ς $\overline{β}$ Μ̊ $\overline{α}$, καὶ ἔτι ὁ γ^{ος} τούτου διπλασίων καὶ μονάδι μείζων καὶ ἔσται ς $\overline{δ}$ Μ̊ $\overline{γ}$. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ α^{ου} □^{ον} προσλαβόντα τὸν β^{ον}, γίνεσθαι □^{ον}, $Δ^{Y}$ $\overline{α}$ ς $\overline{β}$ Μ̊ $\overline{α}$, καὶ ὁμοίως τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου} προσλαβόντα τὸν γ^{ον}, ποιεῖν □^{ον}, $Δ^{Y}$ $\overline{δ}$ ς $\overline{η}$ Μ̊ $\overline{δ}$.

Δεήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ γ^{ου} □^{ον}, προσλαβόντα τὸν α^{ον}, ποιεῖν □^{ον}. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ γ^{ου}, προσλαβὼν τὸν α^{ον}, ποιεῖ $Δ^{Y}$ $\overline{ις}$ ς $\overline{κε}$ Μ̊ θ. ταῦτα ἴσα □^{φ}.

πλάσσω τὸν □^{ον} ἀπὸ πλ. ς $\overline{δ}$ ⋔ Μ̊ $\overline{δ}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται $Δ^{Y}$ $\overline{ις}$ Μ̊ $\overline{ις}$ ⋔ ς $\overline{λβ}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{νζ}{ζ}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος}, $\overline{ζ}$, ὁ δὲ β^{ος} $\overline{οα}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overline{ρϙθ}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

λγ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τοῦ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ διπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, λείψει τοῦ μείζονος, ποιεῖ □^{ον}, τάσσω τὸν μὲν α^{ον} ς $\overline{α}$ Μ̊ $\overline{α}$, τὸν δὲ β^{ον} ὁμοίως ς $\overline{β}$ Μ̊ $\overline{α}$, τὸν δὲ γ^{ον} ς $\overline{δ}$ Μ̊ $\overline{α}$, καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ α^{ου} τετράγωνον, ⋔ τοῦ β^{ου}, ποιεῖν □^{ον}, καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου}, ⋔ τοῦ γ^{ου}, ποιεῖν □^{ον}.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ γ^{ου}, ⋔ τοῦ α^{ου}, ποιεῖν □^{ον}. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ γ^{ου} □^{ος}, ⋔ τοῦ α^{ου}, ποιεῖ $Δ^{Y}$ $\overline{ις}$ ς $\overline{ζ}$· ταῦτα ἴσα □^{φ}.

πλάσσω τὸν □^{ον} ἀπὸ ς $\overline{ε}$· $Δ^{Y}$ ἄρα $\overline{κε}$ ἴσαι $Δ^{Y}$ $\overline{ις}$ ς $\overline{ζ}$., καὶ γί. ὁ ς $\frac{ϑ}{ζ}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\overline{ις}$, ὁ δὲ β^{ος} $\overline{κγ}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overline{λζ}$, καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

λδ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, προσλαβὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος x, καὶ ἐπειδὴ ἂν ὑπάρχουν δυὸ ἀριθμοὶ ἐξ ὧν ὁ εἷς νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου σὺν 1, τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου σὺν τὸν μεγαλύτερον εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος, ἔστω ὁ δεύτερος διπλάσιος τοῦ πρώτου σὺν 1, ὅτε θὰ εἶναι ὁ δεύτερος $x_2 = 2x + 1$, καὶ ἀκόμη ὁ τρίτος $x_3 = 2x_2 + 1$, ὅτε θὰ εἶναι οὗτος $4x + 3$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου σὺν τὸν δεύτερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον τὸν $x^2 + 2x + 1$, καὶ ὁμοίως τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου σὺν τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον τὸν $4x^2 + 8x + 4$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου σὺν τὸν πρῶτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου σὺν τὸν πρῶτον εἶναι $16x^2 + 25x + 9$. Ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνος. Λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου τὴν $4x - 4$· θὰ εἶναι ἄρα $16x^2 + 16 - 32x$ $(= 16x^2 + 25x + 9)$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{57}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{7}{57}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{71}{57}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{199}{57}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

33.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου μεῖον τὸν ἑπόμενον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι διπλάσιος ἄλλου μεῖον 1, τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου μεῖον τὸν μεγαλύτερον σχηματίζει τετράγωνον, λαμβάνω τὸν μὲν πρῶτον $x + 1$, τὸν δὲ δεύτερον ὁμοίως $2x + 1$, τὸν δὲ τρίτον $4x + 1$, καὶ συμβαίνει οὕτως, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου μεῖον τὸν δεύτερον, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ ἀκόμη τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου μεῖον τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ὑπολείπεται, τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου μεῖον τὸν πρῶτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου μεῖον τὸν πρῶτον εἶναι $16x^2 + 7x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον.

Λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου τὴν $5x$· εἶναι ἄρα $25x^2 = 16x^2 + 7x$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{9}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{16}{9}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{23}{9}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{37}{9}$, καὶ πληροῦνται τὰ τῆς προτάσεως.

34.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου, σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, καὶ λάβωμεν καθ᾽ ὃν μετρεῖται, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τοῦ μετροῦντος καὶ καθ᾽ ὃν μετρεῖ, ἀφέλωμεν τὸν ἐλάσσονα, ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ λοιποῦ □ος, προσλαβὼν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ποιεῖ □ον, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἀπὸ Δ^{Y} τινῶν ἐχουσῶν μετροῦντας τρεῖς· ἔστω δὴ ὁ $\overline{\iota\beta}$. μετρεῖ γὰρ αὐτὸν Μ̊ $\overline{\alpha}$ κατὰ τὸν $\overline{\iota\beta}$, καὶ Μ̊ $\overline{\beta}$ κατὰ τὸν $\overline{ϛ}$, καὶ Μ̊ $\overline{\gamma}$, κατὰ τὸν $\overline{\delta}$. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὸν μετροῦντα ἀπὸ τοῦ καθ᾽ ὃν μετρεῖ, καὶ τῶν λοιπῶν λάβω τὰ ἡμίση, τάσσω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν αον Μ̊ $\overline{\varepsilon}$ L′, τὸν δὲ βον Μ̊ $\overline{\beta}$, τὸν δὲ γον Μ̊ L′, καὶ δῆλον ὡς ὁ ἀπὸ ἑκάστου τούτων □ος προσλαβὼν τὸν $\overline{\iota\beta}$, ποιεῖ □ον, ὃν μὲν $\overline{\iota\beta}$ δ$^{\times}$, ὃν δὲ $\overline{\iota ϛ}$, ὃν δὲ $\overline{\mu\beta}$ δ$^{\times}$

τάσσω οὖν αὐτοὺς ἐν ς, τὸν μὲν αον ς $\overline{\varepsilon}$L′, τὸν δὲ βον ς$\overline{\beta}$, τὸν δὲ γον ς L′· δεῖ δὲ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι Δ^{Y} $\overline{\iota\beta}$. ἀλλ᾽ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς εἰσιν $\overline{\eta}$.

ς ἄρα $\overline{\eta}$ ἴσοι Δ^{Y} $\overline{\iota\beta}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\varsigma}{\overline{\delta}}$.

ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\kappa\beta}$, ὁ δὲ βος $\overline{\eta}$, ὁ δὲ γος $\overline{\beta}$, καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

λε.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος, λιπὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ποιῇ τετράγωνον.

Τάσσω ὁμοίως ἀριθμόν τινα ὃς μετροῦντας ἔχει τρεῖς· ἔστω πάλιν τὸν $\overline{\iota\beta}$· καὶ προσθεὶς τὸν μετροῦντα τῷ καθ᾽ ὃν μετρεῖ, καὶ ἥμισυ λαβών, τάσσω τοὺς τρεῖς ἀριθμούς, τὸν μὲν ς $\overline{ϛ}$L′, τὸν δὲ ς $\overline{\delta}$, τὸν δὲ ς $\overline{\gamma}$ L′· καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ ἑκάστου □ον, λιπόντα τὸν $\overline{\iota\beta}$, ποιεῖν □ον.

λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι ἴσους Δ^{Y} $\overline{\iota\beta}$. ἀλλ᾽ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσιν ς $\overline{\iota\delta}$.

ς ἄρα $\overline{\iota\delta}$ ἴσοι εἰσὶ Δ^{Y} $\overline{\iota\beta}$, καὶ γίνεται ς $\overset{\varsigma}{\overline{\zeta}}$.

ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\mu\varepsilon}$L′, ὁ δὲ βος $\overline{\kappa\eta}$, ὁ δὲ γος $\overline{\kappa\delta}$ L′, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῆται ὑπό τινος ἀριθμοῦ, καὶ λάβωμεν τὸ πηλίκον καὶ τὸν διαιρέτην, καὶ ἐκ τοῦ μεγαλυτέρου τούτων ἀφαιρέσωμεν τὸν μικρότερον, τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ λαμβανομένου ὑπολοίπου σὺν τὸν διαιρετέον εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, λαμβάνω τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τριῶν ὡς πολλαπλάσιον τοῦ x^2, διαιρούμενον διὰ τριῶν διαιρετῶν· ἔστω $12x^2$. Διότι ὁ 12 ἔχει διαιρέτην τὴν μονάδα καὶ πηλίκον τὸν 12, ἔχει διαιρέτην 2 καὶ πηλίκον 6, καὶ διαιρέτην 3 καὶ πηλίκον 4. Καὶ ἐὰν ἀφαιρέσω τὸν διαιρέτην ἀπὸ τοῦ πηλίκου ἀντιστοίχως, καὶ λάβω τὰ ἡμίση τῶν ὑπολοίπων, λαμβάνω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν πρῶτον $5\frac{1}{2}$, τὸν δὲ δεύτερον 2, τὸν δὲ τρίτον $\frac{1}{2}$. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τετράγωνον ἑκάστου τούτων σὺν 12 σχηματίζει τετράγωνον, τὸν μὲν $12\frac{1}{4}$, τὸν δὲ 16, τὸν δὲ $42\frac{1}{4}$.

Λαμβάνω λοιπὸν αὐτοὺς συναρτήσει τοῦ x, τὸν μὲν πρῶτον $5\frac{1}{2}x$, τὸν δὲ δεύτερον $2x$, τὸν δὲ τρίτον $\frac{1}{2}x$· πρέπει δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς $12x^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων εἶναι $8x$.

Εἶναι ἄρα $8x = 12x^2$. Ἐξ ἧς $x = \frac{4}{6}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 22, ὁ δὲ δεύτερος 8, ὁ δὲ τρίτος 2, καὶ πληροῦνται τὰ τῆς προτάσεως.

35.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Λαμβάνω, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἀριθμόν τινα, ὅστις νὰ ἔχῃ τρεῖς διαιρέτας· ἔστω πάλιν τὸν 12· καὶ προσθέτων ἑκάστοτε τὸν διαιρέτην εἰς τὸ πηλίκον καὶ λαμβάνων τὸ ἥμισυ, θέτω τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς συναρτήσει τοῦ x, τὸν μὲν ἕνα $6\frac{1}{2}x$, τὸν δὲ ἄλλον $4x$ καὶ τὸν τρίτον $3\frac{1}{2}x$· καὶ συμβαίνει ὥστε τὸ τετράγωνον ἑκάστου μεῖον 12 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς $12x^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $14x$.

Εἶναι ἄρα $14x = 12x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{6}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{28}{6}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Γ′

α.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λειφθεὶς ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον.

Ἐκτίθου δύο $\square^{ους}$, *τὸν μὲν ἀπὸ* ς $\overline{\alpha}$, *τὸν δὲ ἀπὸ* ς $\overline{\beta}$, *καὶ γίνονται οἱ ἀπ' αὐτῶν* $\square^{οι}$, $\Delta^{Y}\,\overline{\varepsilon}$.

Τάσσω τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν $\Delta^{Y}\,\overline{\varepsilon}$, *καὶ τῶν ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν* $α^{ον}$, ς $\bar{\alpha}$, *τὸν δὲ* $β^{ον}$ ς $\overline{\beta}$, *καὶ ἔστι δύο τῶν ἐπιταγμάτων λελυμένα· καὶ ἐπεὶ ἔχομεν τὸν* $\overline{\varepsilon}$ *διαιρούμενον εἰς δύο* $\square^{ους}$, *τήν τε μονάδα καὶ τὴν τετράδα, ἔστω μεταδιελεῖν αὐτόν, ὡς προδέδεικται, εἰς ἑτέρους δύο* $\square^{ους}$, *εἴς τε* $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\delta}}$ *καὶ* $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\rho\kappa\alpha}}$.

τάσσω νῦν τὸν $γ^{ον}$ *τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τούτων· ἔστω* $\overset{\varepsilon}{\overline{\beta}}$ ς· *καὶ μένει πάλιν ὁ ἀπ' αὐτοῦ λειφθεὶς ἀπὸ συναμφοτέρου ποιῶν* $\square^{ον}$ *τὸν* $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\rho\kappa\alpha}}$. *δεήσει τοὺς τρεῖς λοιπὸν ἴσους εἶναι* $\Delta^{Y}\,\overline{\varepsilon}$ · *ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσιν* ς $\overline{\gamma}$ *καὶ* $\overset{\varepsilon}{\overline{\beta}}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\overset{\rho\kappa\varepsilon}{\overline{\pi\varepsilon}}$.

ἔσται ὁ μὲν $α^{ος}$ $\overline{\pi\varepsilon}$, *ὁ δὲ* $β^{ος}$ $\overline{\rho o}$, *ὁ δὲ* $γ^{ος}$ $\overline{\lambda\delta}$, *καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.*

β.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος, προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$. *τάσσω τὸν μὲν* $α^{ον}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$, *τὸ δὲ* $β^{ον}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$, *τὸν δὲ* $γ^{ον}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varepsilon}$, *ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν, τουτέστιν ἡ* $\Delta^{Y}\,\bar{\alpha}$, *προσλαβοῦσα ἕκαστον, ποιῇ* $\square^{ον}$, *ὃν μὲν* $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}$, ⟨ *ὃν δὲ* $\Delta^{Y}\,\overline{\vartheta}$ ⟩, *ὃν δὲ* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ III

1.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου ἀφαιρούμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Λάβε δύο τετραγώνους, τὸν μὲν ἐκ τοῦ x τὸν δὲ ἐκ τοῦ $2x$, ὁπότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι $5x^2$.

Θέτω τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων τριῶν ἀριθμῶν $(x_1 + x_2 + x_3) = 5x^2$ καὶ τὸν μὲν πρῶτον ἐκ τούτων θέτω x, τὸν δὲ δεύτερον $2x$, ὁπότε ἔχουν πληρωθῆ δύο ἐπιτάγματα καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν τὸν 5, ὁ ὁποῖος διαιρεῖται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, τὸ 1^2 καὶ 2^2, ἔστω νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν εἰς ἄθροισμα ἄλλων δύο τετραγώνων, ὡς ἔχει προαποδειχθῆ (2, 9), εἰς $\frac{4}{25}$ καὶ $\frac{121}{25}$.

Λαμβάνω τώρα διὰ τὸν τρίτον ἀριθμὸν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς ἐκ τούτων καὶ θέτω $x_3 = \frac{2}{5}x$· καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τούτου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μένει ὁ $\frac{121}{25}x^2$, τετράγωνος. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ εἶναι $= 5x^2$· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $\left(x + 2x + \frac{2x}{5}\right)$ εἶναι $3\frac{2}{5}x$ $(= 5x^2)$, ἐξ ἧς $x = \frac{85}{125}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{85}{125}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{170}{125}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{34}{125}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

2.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν προσλαβὸν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν x^2. Λαμβάνω τὸν μὲν πρῶτον $3x^2$, τὸν δὲ δεύτερον $8x^2$, τὸν δὲ τρίτον $15x^2$, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, τουτέστι τὸ x^2, προσλαμβάνον ἕκαστον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸν μὲν $4x^2$, τὸν δὲ $9x^2$, τὸν δὲ $16x^2$.

καὶ δεήσει τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι τῇ πλευρᾷ τοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν, τουτέστιν $\varsigma\ \overline{\alpha}$. *ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι* $\Delta^{Y}\,\overline{\kappa\varsigma}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς *ἑνὸς* ⟨ $\kappa\varsigma^{ov}$ ⟩.

ἔσται ἄρα ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}\ \frac{\chi o\varsigma}{\gamma}$, *ὁ δὲ* $\beta^{o\varsigma}\ \frac{\chi o\varsigma}{\eta}$, *ὁ δὲ* $\gamma^{o\varsigma}\ \frac{\chi o\varsigma}{\overline{\iota\varepsilon}}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

γ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν $\varsigma\ \overline{\delta}$, *ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$, *ὃς λείψας* $\Delta^{Y}\,\overline{\zeta}$, *καὶ* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\beta}$, *καὶ* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varepsilon}$, *ποιεῖ* $\square^{ov}$.

τάσσω οὖν τὸν μὲν α^{ov} $\Delta^{Y}\,\overline{\zeta}$, *τὸν δὲ* β^{ov} $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\beta}$, *τὸν δὲ* γ^{ov} $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varepsilon}$. *λοιπόν ἐστι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι τοῖς τρισί. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ὑπόκειται* $\varsigma\ \overline{\delta}$, *οἱ δὲ τρεῖς εἰσιν* $\Delta^{Y}\,\overline{\lambda\delta}$· *καὶ γίνεται ὁ* $\varsigma\ \frac{\iota\zeta}{\overline{\beta}}$, *ἡ δὲ* $\Delta^{Y}\ \frac{\sigma\pi\theta}{\overline{\delta}}$.

ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}\ \overline{\kappa\eta}$, *ὁ δὲ* $\beta^{o\varsigma}\ \overline{\mu\eta}$, *ὁ δὲ* $\gamma^{o\varsigma}\ \overline{\xi}$, *καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.*

δ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος, λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν $\varsigma\ \overline{\alpha}$, *ὁ δὲ ἀπὸ τούτου τετράγωνος* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, *καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς, ὃς μὲν* $\Delta^{Y}\,\overline{\beta}$, *ὃς δὲ* $\Delta^{Y}\,\overline{\varepsilon}$, *ὃς δὲ* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota}$. *καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν, λείψας τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν, τουτέστιν τὴν* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, *ποιῶν* $\square^{ov}$.

καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν πλευρὰν δηλονότι ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἡ ἄρα σύνθεσις τῶν τριῶν ἐστιν $\varsigma\ \overline{\alpha}$, *ἀλλὰ καὶ* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\zeta}$. *καὶ γίνεται ὁ* ς *ἑνὸς* ⟨ $\iota\zeta^{ov}$ ⟩, *ἡ δὲ* Δ^{Y} *ἑνὸς* ⟨ $\sigma\pi\theta^{ov}$ ⟩.

ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}\ \overline{\beta}$, *ὁ δὲ* $\beta^{o\varsigma}\ \overline{\varepsilon}$, *ὁ δὲ* $\gamma^{o\varsigma}\ \overline{\iota}$, *καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.*

Καὶ θὰ εἶναι ἀνάγκη τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ γίνηται ἴσον πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, τουτέστι τοῦ x: Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $26x^2$, $(=x)$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{26}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν πρῶτος $\frac{3}{676}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{8}{676}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{15}{676}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

3.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $4x$, τὸ τετράγωνον δὲ τούτου $16x^2$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ $7x^2$ καὶ ὁ $12x^2$ καὶ ὁ $15x^2$ ὑπολείπεται τετράγωνον.

Λαμβάνω τὸν μὲν πρῶτον $7x^2$, τὸν δὲ δεύτερον $12x^2$, τὸν δὲ τρίτον $15x^2$. Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἐλήφθη ἴσον πρὸς $4x$, οἱ δὲ τρεῖς οὗτοι $= 34x^2$. Ἐξ ἧς $x=\frac{2}{17}$, καὶ $x^2=\frac{4}{289}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{28}{289}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{48}{289}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{60}{289}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος τούτων μεῖον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x ὁ δὲ τετράγωνος τούτου x^2, καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς, ὁ εἷς μὲν $2x^2$, ὁ ἄλλος δὲ $5x^2$, καὶ ὁ ἄλλος $10x^2$. Καὶ ἂν ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, τουτέστιν τὸ x^2, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τετράγωνος.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, εἶναι ἄρα $x = 17x^2$. Ἐξ ἧς $x=\frac{1}{17}$, καὶ $x^2=\frac{1}{289}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{2}{289}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{5}{289}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{10}{289}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ε.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ.

Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι □^{φ} ἀπὸ ς ᾱ M̊ ᾱ τουτέστι Δ^{Y} ᾱ ς β̄ M̊ ᾱ, ὧν ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} τοῦ γ^{ου} ὑπερεχέτωσαν M̊ ᾱ· ὁ ἄρα γ^{ος} ἔσται Δ^{Y} L' ς ᾱ, ἵνα καὶ ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} ὑπερέχωσι τοῦ γ^{ου} τῇ μονάδι.

πάλιν ὁ β^{ος} καὶ ὁ γ^{ος} τοῦ α^{ου} ὑπερέχουσι □^{φ}· ὑπερεχέτωσαν Δ^{Y} ᾱ· ἔσται ὁμοίως ὁ α^{ος} ς ᾱ M̊ L', καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν β^{ον} ἔχομεν Δ^{Y} L' M̊ L'.

λοιπὸν δεῖ τὸν α^{ον} μετὰ τοῦ γ^{ου} ὑπερέχειν τοῦ β^{ου} □^{φ}· ἀλλὰ ὁ α^{ος} μετὰ τοῦ γ^{ου} τοῦ μέσου ὑπερέχει ς β̄· ταῦτα ἴσα □^{φ}, τουτέστι M̊ ῑς̄· καὶ γίνεται ὁ ς M̊ η̄.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} M̊ η̄ L', ὁ δὲ β^{ος} M̊ λ̄β̄ L', ὁ δὲ γ^{ος} M̊ μ̄, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Ἄλλως.

Ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους εἶναι □^{φ}. ἐὰν δὲ συνθῶ δύο ἀριθμούς, οἷον τὸν δ̄ καὶ τὸν θ̄, καὶ ζητήσω τίς □^{ος}, προσλαβὼν τὸν ῑγ̄, ποιεῖ □^{ον}, εὑρήσω τὸν λ̄ς̄. καὶ ἔσονται οἱ τρεῖς □^{οι} ἴσοι ἑνὶ □^{φ}.

λοιπὸν ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι δοθέντι ἀριθμῷ, ὁ μὲν α^{ος} μετὰ τοῦ β^{ου}, τοῦ γ^{ου}, M̊ δ̄· ὁ δὲ β^{ος} μετὰ τοῦ γ^{ου}, τοῦ α^{ου}, M̊ θ̄· ὁ δὲ γ^{ος} μετὰ τοῦ α^{ου}, τοῦ β^{ου}, ταῖς M̊ λ̄ς̄.

τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ ἔστιν ὁ μὲν α^{ος} M̊ κ̄, ὁ δὲ β^{ος} M̊ ς̄ L', ὁ δὲ γ^{ος} M̊ κ̄β̄ L', καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ς.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον.

5.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο ὑπερέχῃ τοῦ ἄλλου κατὰ τέτράγωνον.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἴσον πρὸς $(x + 1)^2$, τουτέστι $x^2 + 2x + 1$, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ἃς ὑπερέχῃ τοῦ τρίτου κατὰ 1· ὁ τρίτος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{1}{2}x^2 + x$, διὰ νὰ ὑπερέχῃ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου, κατὰ μονάδα.

Πάλιν τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου πρέπει νὰ ὑπερέχῃ τοῦ πρώτου κατὰ τετράγωνον· ἃς ὑπερέχῃ κατὰ x^2· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ εἶναι ὁ πρῶτος $x + \frac{1}{2}$, καὶ συνεπῶς ὁ ὑπολειπόμενος δεύτερος θὰ εἶναι $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου κατὰ τετράγωνον· ἀλλὰ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι τοῦ δευτέρου κατὰ $2x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον, ἔστω 16· ἐξ ἧς $x = 8$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $8\frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος $32\frac{1}{2}$, ὁ δὲ τρίτος 40.

Ἄλλως

Ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν δὲ προσθέσω δύο ἀριθμούς, π.χ. τὸν 4 καὶ τὸν 9, καὶ ζητήσω, ποῖος τετράγωνος προσλαβὼν τὸν 13, σχηματίζει τετράγωνον, θὰ εὕρω 36. Καὶ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων ἴσον πρὸς ἕνα τετράγωνον.

Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητηθῇ ἡ εὕρεσις τριῶν ἀριθμῶν τοιούτων, ὥστε λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο νὰ ὑπερέχωσι τοῦ ἄλλου κατὰ δοθέντα ἀριθμόν, ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου νὰ ὑπερέχωσι τοῦ τρίτου κατὰ 4· ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου, νὰ ὑπερέχωσι τοῦ πρώτου κατὰ 9· ὁ δὲ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου νὰ ὑπερέχωσι τοῦ δευτέρου κατὰ 36.

Τοῦτο δὲ ἔχει προαποδειχθῇ καὶ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 20, ὁ δὲ δεύτερος $6\frac{1}{2}$, ὁ δὲ τρίτος $22\frac{1}{2}$, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

6.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, καὶ λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζωσι τετράγωνον.

Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι □^{ῳ}, $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ β̅ Μ̊ α̅· ὁ δὲ α^{ος} μετὰ τοῦ β^{ου}, $Δ^{Υ}$ α̅· λοιπὸς ἄρα ὁ γ^{ος} ἔσται ϛ β̅ Μ̊ α̅. πάλιν, ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν β^{ον} μετὰ τοῦ γ^{ου} ποιεῖν □^{ον}, ποιείτω $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ α̅ ⋔ ϛ β̅ ἀπὸ πλ. ϛ α̅ ⋔ Μ̊ α̅· καὶ εἰσιν οἱ τρεῖς $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ β̅ Μ̊ α̅· λοιπὸς ἄρα ὁ α^{ος} ἔσται ϛ δ̅· ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ β^{ῳ} τέτακται $Δ^{Υ}$ α̅, ὁ ἄρα β^{ος} ἔσται $Δ^{Υ}$ α̅ ⋔ ϛ δ̅.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν α^{ον} μετὰ τοῦ γ^{ου} συναγόμενον ϛ ϛ̅ Μ̊ α̅ ἰσῶσαι □^{ῳ}· ἔστω ἴσος Μ̊ ρ̅κ̅α̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ κ̅.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} Μ̊ π̅, ὁ δὲ β^{ος} Μ̊ τ̅κ̅, ὁ δὲ γ^{ος} Μ̊ μ̅α̅, καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

Ἄλλως.

Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ β̅ Μ̊ α̅· καὶ ἔστω ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} $Δ^{Υ}$ α̅, λοιπὸς ἄρα ὁ γ^{ος} ἔσται ϛ β̅ Μ̊ α̅. ἔστω δὲ καὶ ὁ β^{ος} μετὰ τοῦ γ^{ου} $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ α̅ ⋔ ϛ β̅, ὧν ὁ γ^{ος} ϛ β̅ Μ̊ α̅· λοιπὸς ἄρα ὁ β^{ος} ἔσται $Δ^{Υ}$ α̅ ⋔ ϛ δ̅. ἔστι δὲ καὶ ὁ α^{ος} μετὰ τοῦ β^{ου} $Δ^{Υ}$ α̅, ὧν ὁ β^{ος}, $Δ^{Υ}$ α̅ ⋔ ϛ δ̅· λοιπὸς ἄρα ὁ α^{ος} ἔσται ϛ δ̅. καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἐπιταχθέντα □^{ον}, $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ β̅ Μ̊ α̅, καὶ ὁ α^{ος} μετὰ τοῦ β^{ου}, καὶ ὁ β^{ος} μετὰ τοῦ γ^{ου} ποιοῦσι □^{ον}.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν γ^{ον} μετὰ τοῦ α^{ου} συναγόμενον ϛ ϛ̅ Μ̊ α̅, ἰσῶσαι □^{ῳ}· ἔστω Μ̊ λ̅ϛ̅ καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{ϛ}{\overline{λε}}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\overset{ϛ}{\overline{ρμ}}$, τουτέστιν $\overset{λϛ}{\overline{ωμ}}$, ὁ δὲ β^{ος} $\overset{λϛ}{\overline{τπε}}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overset{λϛ}{\overline{υνϛ}}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ζ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον.

Ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς ⟨ □^{ους} ⟩, ἵνα ὦσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὧν τὸ L', τῆς συνθέσεως τῶν τριῶν μεῖζόν ἐστιν ἑκάστου.

τετάχθω οὖν ὁ μὲν α^{ος} $Δ^{Υ}$ α̅, ὁ δὲ β^{ος} $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ β̅ Μ̊ α̅, καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ϛ β̅ Μ̊ α̅· ἐὰν δὲ προσθῶ τῷ β^{ῳ} τοὺς β̅ ϛ Μ̊ α̅, γίνεται ὁ γ^{ος} $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ δ̅ Μ̊ β̅· ταῦτα ἴσα □^{ῳ} τῷ ἀπὸ πλ. ϛ α̅ ⋔ Μ̊ η̅. γίνεται ὁ □^{ος}, $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ ξ̅δ̅ ⋔ ϛ ι̅ϛ̅ ἴσος $Δ^{Υ}$ α̅ ϛ δ̅ Μ̊ β̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{κ}{\overline{ξβ}}$, τουτέστι $\overset{ι}{\overline{λα}}$.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, ὁ τετράγωνος $x^2 + 2x + 1$· τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦ πρώτου μετὰ τοῦ δευτέρου ἔστω x^2· θὰ εἶναι ἄρα ὁ ἀπομένων τρίτος $2x + 1$. Πάλιν, ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἔστω τὸ τετράγωνον τοῦτο $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$· καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^2 + 2x + 1$· ὁ ἀπομένων ἄρα πρῶτος θὰ εἶναι $4x$· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτου μετὰ τοῦ δευτέρου ἐλήφθη x^2, καὶ συνεπῶς ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $x^2 - 4x$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου ἤτοι $6x + 1$ νὰ εἶναι τετράγωνος· ἔστω οὗτος ἴσος πρὸς 121, ἐξ ἧς $x = 20$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 80, ὁ δὲ δεύτερος 320, ὁ δὲ τρίτος 41, καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

Ἄλλως

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^2 + 2x + 1$· καὶ ἔστω τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου x^2, ὁ τρίτος ἄρα θὰ εἶναι $2x + 1$. Ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου $x^2 + 1 - 2x$, ἐξ ὧν ὁ τρίτος εἶναι $2x + 1$· ὁ ἀπομένων ἄρα δεύτερος εἶναι $x^2 - 4x$· Εἶναι δὲ καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου x^2, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι $x^2 - 4x$. ὁ ἀπομένων ἄρα πρῶτος θὰ εἶναι $4x$. Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σχηματίζει τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον $x^2 + 2x + 1$, καὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου σχηματίζουσι τετράγωνον. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὅπως καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ πρώτου, τὸ ὁποῖον ἔστω $6x + 1$ εἶναι τετράγωνος· ἔστω ὅτι εἶναι $(6x + 1) = 36$, ἐξ ἧς $x = \frac{35}{6}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{140}{6}$, τουτέστιν $\frac{840}{36}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{385}{36}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{456}{36}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

7.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἔχοντας τὴν αὐτὴν διαφοράν, ὥστε προστιθέμενοι ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζωσι τετράγωνον.

Ζητῶ πρῶτον τρεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους ἔχοντας τὴν αὐτὴν διαφοράν, ὥστε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τριῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἑκάστου.

Ἔστω λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος x^2, ὁ δὲ δεύτερος $x^2 + 2x + 1$, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $2x + 1$· ἐὰν δὲ προσθέσω εἰς τὸν δεύτερον τὸ $2x + 1$, γίνεται ὁ τρίτος $x^2 + 4x + 2$· ταῦτα ἔστω ὅτι εἶναι ἴσα πρὸς $(x - 8)^2$. Ὅτε εἶναι $x^2 + 64 - 16x = x^2 + 4x + 2$, ἐξ ἧς $x = \frac{62}{20}$, τουτέστι $\frac{31}{10}$.

ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{\text{ος}}$ $\overline{\text{ϡξα}}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ ͵$\overline{\text{αχπα}}$, ὁ δὲ $\gamma^{\text{ος}}$, ͵$\overline{\text{βυα}}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον, τουτέστι τρεῖς □$^{\text{ους}}$ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, καὶ ἔστι τῶν τριῶν τὸ L′ μεῖζον ἑκάστου αὐτῶν.

Νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι □$^{\text{ον}}$. ζητῶ πρότερον τρεῖς □$^{\text{ους}}$ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· τοῦτο δὲ προδέδεικται, καί εἰσιν οἱ □$^{\text{οι}}$, ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ $\overline{\text{ϡξα}}$, ὁ $\beta^{\text{ος}}$ ͵$\overline{\text{αχπα}}$, ὁ $\gamma^{\text{ος}}$ ͵$\overline{\text{βυα}}$.

νῦν δεῖ εὑρεῖν ὅπως ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ καὶ ὁ $\beta^{\text{ος}}$ ποιῶσι M̊ $\overline{\text{ϡξα}}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ καὶ ὁ $\gamma^{\text{ος}}$ ⟨ M̊ ⟩ ͵$\overline{\text{βυα}}$ (ἐνήλλακται γὰρ διὰ τὴν ὑπεροχήν), ὁ δὲ $\gamma^{\text{ος}}$ καὶ ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ M̊ ͵$\overline{\text{αχπα}}$.

Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ϛ $\overline{\text{α}}$, καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ϛ $\overline{\text{α}}$, ἐὰν ἄρα ἀφέλω τὰς τοῦ $\alpha^{\text{ου}}$ καὶ $\beta^{\text{ου}}$ M̊ $\overline{\text{ϡξα}}$, ἕξω τὸν $\gamma^{\text{ον}}$, ϛ $\overline{\text{α}}$ ⋔ M̊ $\overline{\text{ϡξα}}$. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ ϛ $\overline{\text{α}}$ ἀφέλω τὰς τοῦ $\beta^{\text{ου}}$ καὶ $\gamma^{\text{ου}}$ M̊ ͵$\overline{\text{βυα}}$, ἕξω τὸν $\alpha^{\text{ον}}$, ϛ $\overline{\text{α}}$ ⟨ ⋔ M̊ ͵$\overline{\text{βυα}}$· καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ ϛ $\overline{\text{α}}$ ἀφέλω τὰς τοῦ $\gamma^{\text{ου}}$ καὶ $\alpha^{\text{ου}}$ M̊ ͵$\overline{\text{αχπα}}$, ἕξω τὸν $\beta^{\text{ον}}$, ϛ $\overline{\text{α}}$ ⟩ ⋔ M̊ ͵$\overline{\text{αχπα}}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς συντεθέντας ἴσους εἶναι ϛ $\overline{\text{α}}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ ͵$\overline{\text{βφκα}}$ L′.

καὶ ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{\text{ος}}$ M̊ $\overline{\text{ρκ}}$ L′, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ M̊ $\overline{\text{ωμ}}$ L′, ὁ δὲ $\gamma^{\text{ος}}$ M̊ ͵$\overline{\text{αφξ}}$ L′, καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

η.

᾿Αριθμοῦ τινος δοθέντος, προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον, ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς συντεθέντες καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον.

῎Εστω ὁ μὲν δοθεὶς M̊ $\overline{\text{γ}}$, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τῶν $\alpha^{\text{ων}}$ Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{δ}}$ M̊ $\overline{\text{α}}$, ἵνα μετὰ τῶν $\overline{\text{γ}}$ M̊ ποιῇ □$^{\text{ον}}$, οἱ δὲ ἑξῆς δύο Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{ς}}$ M̊ $\overline{\text{ς}}$, οἱ δὲ τρεῖς Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{η}}$ M̊ $\overline{\text{ιγ}}$, ἵνα καὶ οὗτοι μετὰ M̊ $\overline{\text{γ}}$ ποιῶσι □$^{\text{ον}}$.

καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{η}}$ M̊ $\overline{\text{ιγ}}$, ὧν οἱ $\alpha^{\text{οι}}$ δύο Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{δ}}$ M̊ $\overline{\text{α}}$, λοιπὸς ἄρα ὁ $\gamma^{\text{ος}}$ ἐστὶν ϛ $\overline{\text{δ}}$ M̊ $\overline{\text{ιβ}}$.

πάλιν ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{η}}$ M̊ $\overline{\text{ιγ}}$, ὧν ὁ $\beta^{\text{ος}}$ καὶ $\gamma^{\text{ος}}$ ἐστὶ Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{ς}}$ M̊ $\overline{\text{ς}}$, λοιπὸς ἄρα ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ ἐστιν ϛ $\overline{\text{β}}$ M̊ $\overline{\text{ζ}}$.

ἀλλὰ καὶ ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ καὶ ὁ $\beta^{\text{ος}}$ εἰσι Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{δ}}$ M̊ $\overline{\text{α}}$, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $\beta^{\text{ος}}$ ἔσται Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$ ϛ $\overline{\text{β}}$ ⋔ M̊ $\overline{\text{ς}}$.

Ὁ μὲν πρῶτος τετράγωνος θὰ εἶναι 961, ὁ δὲ δεύτερος 1681, ὁ δὲ τρίτος 2401 καὶ πληροῦσι τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος, τουτέστι εἶναι τρεῖς τετράγωνοι ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφορὰν καὶ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τριῶν μεγαλύτερον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Τώρα ἔρχομαι εἰς τὸ πρόβλημα, τουτέστι νὰ εὕρω τρεῖς ἀριθμοὺς ἔχοντας τὴν αὐτὴν διαφοράν, ὥστε προστιθέμενοι ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζωσι τετράγωνον. Ζητῶ πρῶτον τρεῖς τετραγώνους ἔχοντας τὴν αὐτὴν διαφοράν· τοῦτο δὲ προαπεδείχθη καὶ εἶναι οὗτοι, ὁ πρῶτος 961, ὁ δεύτερος 1681, ὁ τρίτος 2401.

Τώρα πρέπει νὰ εὑρεθῇ, ὅπως τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου εἶναι 961, δευτέρου καὶ τρίτου 2401 (διότι ἕνεκα τῆς διαφορᾶς μετεβλήθη ἡ σειρά), τοῦ δὲ τρίτου καὶ πρώτου 1681.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι x, ἐὰν ἄρα ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου, τὸ 961, θὰ ἔχω τὸν τρίτον $= x - 961$. Καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τοῦ x ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα δευτέρου καὶ τρίτου, τὸ 2401, θὰ ἔχω τὸν πρῶτον $= x - 2401$· καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τοῦ x ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ πρώτου, τὸ 1681, θὰ ἔχω τὸν δεύτερον $= x - 1681$.

Ὑπολείπεται νὰ εἶναι $(x - 961) + (x - 2401) + (x - 1681) = x$, ἐξ ἧς $x = 2521 \frac{1}{2}$.

Καὶ θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $120 \frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος $840 \frac{1}{2}$, ὁ δὲ τρίτος $1560 \frac{1}{2}$, καὶ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα.

8.

Ἀριθμοῦ τινος δοθέντος, νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλοι τρεῖς, ὅπως τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς 3, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων $x^2 + 4x + 1$, ἵνα μετὰ τοῦ 3 σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ δὲ ἄθροισμα δευτέρου καὶ τρίτου $x^2 + 6x + 6$, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^2 + 8x + 13$, ἵνα καὶ οὗτοι μετὰ τοῦ 3 σχηματίζωσι τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $x^2 + 8x + 13$, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι εἶναι $x^2 + 4x + 1$, ὁ ἀπομένων ἄρα τρίτος εἶναι $4x + 12$.

Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $x^2 + 8x + 13$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος εἶναι $x^2 + 6x + 6$, ὁ ἀπομένων ἄρα πρῶτος εἶναι $2x + 7$.

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι $x^2 + 4x + 1$, καὶ ὁ ἀπομένων ἄρα δεύτερος θὰ εἶναι $x^2 + 2x - 6$.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν α^{ον} μετὰ τοῦ γ^{ου}, προσλαβόντα Μ̊ γ̅, ποιεῖν □^{ον}. ἀλλ' ὁ α^{ος} μετὰ τοῦ γ^{ου}, προσλαβὼν Μ̊ γ̅, γίνονται ς ς̅ Μ̊ κ̅β̅. ταῦτα ἴσα □^{ῳ}. ἔστω τῷ ρ̅, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ι̅γ̅.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} Μ̊ λ̅γ̅, ὁ δὲ β^{ος} Μ̊ ρ̅π̅θ̅, ὁ δὲ γ^{ος} Μ̊ ξ̅δ̅, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

θ.

Ἀριθμοῦ τινος δοθέντος, προσευρεῖν ἑτέρους τρεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν, λείψας τὸν δοθέντα, ποιῇ τετράγωνον, ἔτι δὲ καὶ οἱ τρεῖς, συντεθέντες καὶ λείψαντες τὸν δοθέντα, ποιῶσι τετράγωνον.

Ἔστω πάλιν ὁ μὲν δοθεὶς Μ̊ γ̅· ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν δύο α^{ων} $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ γ̅, ἵνα λείψας τὰς γ̅ Μ̊ ποιῇ □^{ον}· οἱ δὲ ἑξῆς δύο $Δ^{Υ}$ α̅ ς β̅ Μ̊ δ̅, οἱ δὲ τρεῖς $Δ^{Υ}$ α̅ ς δ̅ Μ̊ ζ̅, ἵνα καὶ οὗτοι, ⋔ Μ̊ γ̅, ποιῶσι □^{ον}.

καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι $Δ^{Υ}$ α̅ ς δ̅ Μ̊ ζ̅, ὧν ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ γ̅· λοιπὸς ἄρα ὁ γ^{ος} ἐστὶν ς δ̅ Μ̊ δ̅.

πάλιν ἐπεὶ ὁ β^{ος} καὶ ὁ γ^{ος} εἰσὶ $Δ^{Υ}$ α̅ ς β̅ Μ̊ δ̅, ὧν ὁ γ^{ος} ἐστὶν ς δ̅ Μ̊ δ̅· λοιπὸς ἄρα ὁ β^{ος} ἔσται $Δ^{Υ}$ α̅ ⋔ ς β̅.

ἔστι δὲ καὶ ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ γ̅, ὧν ὁ β^{ος} ἐστι $Δ^{Υ}$ α̅ ⋔ ς β̅· λοιπὸς ἄρα ὁ α^{ος} ἔσται ς β̅ Μ̊ γ̅.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν γ^{ον} μετὰ τοῦ α^{ου} ⋔ Μ̊ γ̅ ποιεῖν □^{ον}. ἀλλ' ὁ γ^{ος} μετὰ τοῦ α^{ου} ⋔ Μ̊ γ̅ ἐστιν ς ς̅ Μ̊ δ̅· ταῦτα ἴσα □^{ῳ}· ἔστω τῷ ξ̅δ̅, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ι̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^{ος} Μ̊ κ̅γ̅, ὁ δὲ β^{ος} Μ̊ π̅, ὁ δὲ γ^{ος} Μ̊ μ̅δ̅, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

ι.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ι̅β̅.

Ἐπεὶ οὖν ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου} προσλαβόντα τὸν ι̅β̅ ποιεῖν □^{ον}, ἐὰν ἄρα ἀπό τινος □^{ου} ἀφέλω τὸν ι̅β̅, ἕξω τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου}. ἔστω δὴ ὁ □^{ος} Μ̊ κ̅ε̅· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ι̅β̅, λοιπὸν ἕξω τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου}, Μ̊ ι̅γ̅. ἔστω οὖν ὁ μὲν α^{ος} Μ̊ ι̅γ̅, ὁ δὲ β^{ος} Μ̊ α̅, καὶ τετάχθωσαν ἐν ς^{οῖς} ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν Μ̊ ι̅γ̅. καὶ ἔστω ὁ μὲν α^{ος} ς ι̅γ̅, ὁ δὲ β^{ος} ἀριθμοστοῦ ⟨ α̅ ⟩.

Ὑπολείπεται, ὅπως καὶ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ τρίτου σὺν 3 σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ τρίτου σὺν 3 εἶναι $6x + 22$. Ταῦτα εἶναι τετράγωνος· ἔστω ἴσα πρὸς 100, ἐξ ἧς $x = 13$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 33, ὁ δὲ δεύτερος 189, ὁ δὲ τρίτος 64, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

9.

Ἀριθμοῦ τινος δοθέντος, νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλοι τρεῖς, ὅπως τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον, προσέτι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μεῖον τὸν δοθέντα, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω πάλιν ὁ μὲν δοθεὶς 3· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων $x^2 + 3$, ὥστε ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ 3 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἔστω δὲ τὸ ἄθροισμα δευτέρου καὶ τρίτου $x^2 + 2x + 4$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^2 + 4x + 7$, ἵνα καὶ οὗτοι, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ 3, σχηματίζωσι τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $x^2 + 4x + 7$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος εἶναι $x^2 + 3$· ὁ ἀπομένων ἄρα τρίτος εἶναι $4x + 4$.

Πάλιν ἐπειδὴ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος εἶναι $x^2 + 2x + 4$, ἐξ ὧν ὁ τρίτος εἶναι $4x + 4$· ὁ ἀπομένων ἄρα δεύτερος εἶναι $x^2 - 2x$.

Εἶναι δὲ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος $x^2 + 3$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ δεύτερος εἶναι $x^2 - 2x$· ὁ ἀπομένων ἄρα πρῶτος θὰ εἶναι $2x + 3$.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τρίτου καὶ πρώτου μεῖον 3 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου μεῖον 3 εἶναι $6x + 4$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον· ἔστω $= 64$, ἐξ ἧς $x = 10$.

Ἐπὶ τῶν δεδομένων· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 23, ὁ δὲ δεύτερος 80, ὁ δὲ τρίτος 44, καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

10.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω δοθεὶς ὁ 12.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ζητοῦμεν ἵνα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν 12 σχηματίσῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω τὸν 12, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἔστω λοιπὸν ὁ τετράγωνος 25· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσω τὸν 12, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, ὁ 13. Ἔστω λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος 13, ὁ δὲ δεύτερος 1, καὶ ἂς ἐκφρασθῶσιν οὗτοι συναρτήσει τοῦ x, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι 13. Καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $13x$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{1}{x}$·

ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ ἑτέρου □ου ἀφέλω $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$, *ἕξω τὸν ὑπὸ βου καὶ γου. ἔστω ἀπὸ τοῦ* $\overline{\iota\varsigma}$· *λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπὸ βου καὶ γου ἔσται* $\overset{o}{M}\overline{\delta}$. *τετάχθωσαν πάλιν ἐν* ϛοῖς *ὥστε ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν* $\overset{o}{M}\overline{\delta}$, *ὧν ὁ βος ἐστιν* ϛˣ· *λοιπὸς ἄρα ὁ γος ἔσται* ϛ $\overline{\delta}$.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ αου καὶ γου μετὰ $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ποιεῖν □ον. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ αου καὶ γου ἐστὶ* $\Delta^{Y}\overline{\nu\beta}$. *δεήσει ἄρα* $\Delta^{Y}\overline{\nu\beta}$ *μετὰ* $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ποιεῖν □ον, καὶ εἰ εἶχον τὸ πλῆθος τῶν* $\overline{\iota\gamma}$ $\overset{o}{M}$ *τοῦ αου □ον, εὐχερὴς ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' ἐπεὶ οὐ τοῦτο, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος καὶ ἔτι ἑκάτερος μετὰ* $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ποιῇ τετράγωνον· ἐὰν δὲ ἀντὶ ἀριθμῶν εὕρω τοὺς τετραγώνους, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος. γέγονεν οὖν εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος μετὰ* $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ποιεῖ □ον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ εὐχερῆ, ὡς ἔφαμεν, ποιοῦν τὴν ἴσωσιν. καὶ ἔστιν ὁ μὲν* $\overline{\delta}$, *ὁ δὲ* $\delta^{\times}$· *ἑκάτερος γὰρ τούτων μετὰ* $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ποιεῖ τετράγωνον.*

Τούτων εὑρεθέντων ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὸν μὲν αον ϛ $\overline{\delta}$, *τὸν δὲ βον* ϛˣ, *τὸν δὲ γον* ϛ $\delta^{\times}$. *καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ αου καὶ γου μετὰ* $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ποιεῖν □ον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ αου καὶ γου ἐστὶ* $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$.

Δ^{Y} *ἄρα* $\overline{\alpha}$ *μετὰ* $\overset{o}{M}\overline{\iota\beta}$ *ἴση ἐστὶ □ῳ.*

πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ πλευρᾶς ϛ $\overline{\alpha}$ $\overset{o}{M}\overline{\gamma}$· *αὐτὸς ἄρα ἔσται* $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\varsigma}$ $\overset{o}{M}\overline{\theta}$, *καὶ γίνεται ὁ* ϛ L', *καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.*

ια.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{\iota}$.

'Επεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ αου καὶ βου, ⋔ $\overset{o}{M}\overline{\iota}$, *ποιεῖν □ον, ἐὰν ἄρα τινὶ □ῳ προσθῶ* $\overset{o}{M}\overline{\iota}$, *ἕξω τὸν ὑπ' αὐτῶν· ἔστω τῷ* $\overline{\delta}$. *ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ αου καὶ βου* $\overset{o}{M}\overline{\iota\delta}$. *ἔστω ὁ αος* $\overset{o}{M}\overline{\iota\delta}$· *ὁ ἄρα βος ἔσται* $\overset{o}{M}\overline{\alpha}$. *καὶ τετάχθω πάλιν ἐν* ϛοῖς *ὥστε*

Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ ἄλλου τετραγώνου ἀφαιρέσω 12, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον. Ἔστω νὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 16· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα, τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, θὰ εἶναι 4. Ἂς ἐκφρασθῶσι πάλιν οὗτοι συναρτήσει τοῦ x, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ γίνεται 4, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι $\frac{1}{x}$· ὁ ἄλλος ἄρα θὰ εἶναι 4x.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι $52x^2$. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ $52x^2$ σὺν 12 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου, ὁ 13 ἦτο τετράγωνος, θὰ ἦτο εὐχερὴς ἡ ἐξίσωσις. Ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν εἶναι, ἄγομαι εἰς τὸ πρόβλημα, νὰ εὕρω δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ προσέτι ἑκάτερος τούτων μετὰ τοῦ 12 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν εὕρω τετραγώνους, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν τετράγωνος. Κατέληξε λοιπὸν τὸ πρόβλημα, νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι ἑκάτερος τῶν ὁποίων μετὰ τοῦ 12 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Τοῦτο δέ, ὡς προείπομεν, εἶναι εὔκολον καὶ καθιστᾷ εὐχερῆ τὴν ἐξίσωσιν. Καὶ εἶναι ὁ μὲν εἷς 4, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{1}{4}$· διότι ἑκάτερος τούτων μετὰ τοῦ 12 σχηματίζει τετράγωνον.

Τούτων εὑρεθέντων, ἔρχομαι εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτω τὸν μὲν πρῶτον 4x, τὸν δὲ δεύτερον $\frac{1}{x}$, τὸν δὲ τρίτον $\frac{1}{4}$ x. Καὶ ὑπολείπεται, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν 12 σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι x^2.

Εἶναι ἄρα $x^2 + 12 =$ τετράγωνος.

Λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου τὴν $x + 3$· τὸ τετράγωνον ἄρα τούτου θὰ εἶναι $x^2 + 6x + 9$ $(= x^2 + 12)$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{2}$, καὶ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα.

11.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἀφαιρῆται ὁ 10.

Ἐπειδὴ ζητοῦμεν ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον μεῖον 10 σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα εἰς τετράγωνον τινα προσθέσω 10 θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν· ἔστω ὅτι προσθέτω εἰς τὸν 4. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον 14. Ἔστω ὁ πρῶτος 14· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι 1. Ἂς ἐκφράσω τοὺς ἀριθμοὺς τούτους συναρτήσει τοῦ x, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν Μ̊ ι̅δ̅, καὶ ἔστω ὁ μὲν α^ος ϛ ι̅δ̅, ὁ δὲ β^ος ϛ^×.

πάλιν ἐὰν ἑτέρῳ □^φ προσθῶ Μ̊ ι̅, ἔξω τὸν ὑπὸ τοῦ β^ου καὶ γ^ου· ἔστω τῷ θ̅· ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ β^ου καὶ γ^ου, Μ̊ ι̅θ̅· ὧν ὁ β^ος ἐστιν ᾱ ϛ^×· λοιπὸς ἄρα ὁ γ^ος ἔσται ϛ ι̅θ̅.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ γ^ου καὶ α^ου ⋔ Μ̊ ι̅ ⟨ ποιεῖν □^ον· ἀλλ' ὁ ὑπὸ γ^ου καὶ α^ου ⋔ Μ̊ ι̅ ⟩ γίνεται Δ^Υ σ̅ξ̅ϛ̅ ⋔ Μ̊ ι̅· ταῦτα ἴσα □^φ. καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ πρὸ τούτου εἰρημένα, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος λείψει Μ̊ ι̅ ποιεῖ τετράγωνον· τοῦτο δὲ ῥᾴδιον.

[εὑρήσεις γάρ, ζητήσῃς ἂν τίς τετράγωνος λείψει Μ̊ ι̅ ποιῇ τετράγωνον· καὶ ἐπεὶ ἐάν τινι ἀριθμῷ προστεθῇ μονάς, καὶ τῶν γενομένων τὸ ἥμισυ τετραγωνίσωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου τετραγώνου ἀφέλωμεν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ὁ λοιπὸς πάλιν τετράγωνος ἔσται, προστίθημι ταῖς ι̅ Μ̊, Μ̊ ᾱ, καὶ τῶν γενομένων τὸ ἥμισυ, τουτέστι τὰ ε̅L', τετραγωνίσας, ἀπὸ τῶν γενομένων Μ̊ λ̅ δ^× ἀφελὼν τὰς Μ̊ ι̅, ἔξω □^ον Μ̊ κ̅ δ^× ἀπὸ πλ. δ̅L'. τάσσω οὖν τὸν μὲν α^ον λ̅ δ^×, τὸν δὲ γ^ον Δ^Υ ᾱ· δεήσει ἄρα καὶ ἀπὸ Δ^Υ ᾱ ἀφαιρεθεισῶν Μ̊ ι̅ τὸν λοιπὸν γίνεσθαι □^ον. Δ^Υ ἄρα ᾱ ⋔ Μ̊ ι̅ ἴση ἐστὶ □^φ· πλάσσω τὸν □^ον ἀπὸ πλ. ϛ ᾱ ⋔ Μ̊ β̅· αὐτὸς ἄρα ἔσται Δ^Υ ᾱ Μ̊ δ̅ ⋔ ϛ δ̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ γ̅ L'. ἐπεὶ ἔταξα τὸν γ^ον Δ^Υ ᾱ, ἔσται ι̅β̅ δ^×. ἔστι δὲ καὶ ὁ α^ος λ̅ δ^×· οἵτινες ⋔ Μ̊ ι̅ ποιοῦσι □^ους].

Ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον καὶ τάσσω τὸν α^ον ϛ λ̅ δ^×, τὸν δὲ β^ον ϛ^×, τὸν δὲ γ^ον ϛ ι̅β̅ δ^×, λοιπὸν δὴ τὸν ὑπὸ α^ου καὶ γ^ου γίνεσθαι Δ^Υ τ̅ο̅ L' ι̅ϛ̅^×· οὗτος ἄρα ⋔ Μ̊ ι̅ ἴσος ἐστὶ □^φ καὶ ἵνα ὅλαι Δ^Υ ὦσι, ποιῶ αὐτὰς ιϛ^κις.

τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι 14, καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος 14x, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{1}{x}$.

Πάλιν ἐὰν εἰς ἄλλον τετράγωνον προσθέσω 10 θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον· ἔστω εἰς τὸν 9· θὰ εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον 19· ἐκ τῶν ὁποίων ὁ δεύτερος εἶναι $\frac{1}{x}$ · ὁ ἄλλος ἄρα θὰ εἶναι 19x.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον μεῖον δέκα νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον μεῖον δέκα εἶναι $266x^2 - 10$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον. Καὶ συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἀνήχθη τὸ δοθὲν πρόβλημα, εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι, ἑκάτερος τῶν ὁποίων μεῖον 10 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον.

Διότι δύνασαι νὰ εὕρῃς, ἂν ζητήσῃς, ποῖος τετράγωνος μεῖον 10 σχηματίζει τετράγωνον· καὶ ἐπειδὴ ἐὰν εἰς ἀριθμόν τινα προστεθῇ ἡ μονάς, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ προκύπτοντος ἀθροίσματος ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, καὶ ἀπὸ τοῦ λαμβανομένου τετραγώνου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀρχικὸν ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τετράγωνος, προσθέτω εἰς τὸ 10 τὸ 1 καὶ λαμβάνω τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος, τουτέστι $5\frac{1}{2}$, καὶ ὑψῶ τοῦτο εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τούτου τοῦ $30\frac{1}{4}$ τὸ 10, ὅτε λαμβάνω τὸν τετράγωνον $20\frac{1}{4}$, τοῦ ὁποίου τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ὁ $4\frac{1}{2}$. Θέτω λοιπὸν τὸν μὲν πρῶτον $30\frac{1}{4}$, τὸν δὲ τρίτον x^2· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα, ἐὰν καὶ ἀπὸ τοῦ x^2 ἀφαιρεθῇ ὁ 10, τὸ ὑπόλοιπον νὰ γίνεται τετράγωνος· λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου τὴν $x - 2$· ὁ τετράγωνος ἄρα οὗτος θὰ εἶνα $x^2 - 4x + 4$ $(= x^2 - 10)$, ἐξ ἧς $x = 3\frac{1}{2}$· Ἐπειδὴ ἔθεσα τὸν τρίτον x^2, θὰ εἶναι οὗτος $12\frac{1}{4}$. Εἶναι δὲ καὶ ὁ πρῶτος $30\frac{1}{4}$· οἱ ὁποῖοι μεῖον 10 σχηματίζουσι τετραγώνους.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον καὶ θέτω τὸν πρῶτον $\left(30\frac{1}{4}\right)x$, τὸν δὲ δεύτερον $\frac{1}{x}$, τὸν δὲ τρίτον $\left(12\frac{1}{4}\right)x$, ὁπότε τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον γίνεται $\left(370 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)x^2$· τοῦτο ἄρα μεῖον 10 εἶναι τετράγωνος· καὶ ἵνα οἱ συντελεσταὶ τῶν x εἶναι ἀκέραιοι, πολλαπλασιάζω ταῦτα ἐπὶ 16.

Δ^{Y} ἄρα $\overline{,\varepsilon\text{Ϡ}\kappa\theta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\varrho\xi}$ ἴσαι □$^{\varphi}$ τῷ ἀπὸ πλ. ς $\overline{o\zeta}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{\beta}$, τουτέστι Δ^{Y} $\overline{,\varepsilon\text{Ϡ}\kappa\theta}$ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$ ⋔ ς$\overline{\tau\eta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{o\zeta}{\overline{\mu\alpha}}$.

ἔταξα τὸν α^{ον} ς $\overline{\lambda}$ δ$^{\times}$, ἔσται $\frac{o\zeta}{\overline{,\alpha\sigma\mu}}$ δ$^{\times}$· τὸν δὲ β^{ον} ς$^{\times}$, ἔσται $\frac{\mu\alpha}{o\zeta}$· τὸν δὲ γ^{ον} ς $\overline{\iota\beta}$ δ$^{\times}$, ἔσται $\frac{o\zeta}{\overline{\varphi\beta}}$ δ$^{\times}$· καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

ιβ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου} προσλαβόντα τὸν λοιπὸν ποιεῖν □^{ον}, ἐὰν ἄρα ἐκθέμενοί τινα □^{ον}, μέρος μέν τι αὐτοῦ τάξωμεν τὸν γ^{ον}, τὸν δὲ λοιπὸν τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου}, λύσομεν ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. πεπλάσθω ὁ □^{ος} ἀπὸ ς $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\overline{\gamma}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ς $\overline{\varsigma}$ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$· τετάχθω ὁ γ^{ος} $\mathring{M}\,\overline{\theta}$· λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου} $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ς$\overline{\varsigma}$. τετάχθω ὁ α^{ος} ς $\overline{\alpha}$· λοιπὸς ἄρα ὁ β^{ος} ἔσται ⟨ς $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου} προσλαβόντα τὸν α^{ον} καὶ γινόμενον⟩ ς$\overline{\iota}$ $\mathring{M}\overline{\nu\delta}$ ἴσον εἶναι □$^{\varphi}$ καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} προσλαβόντα τὸν β^{ον} καὶ γενόμενον ς $\overline{\iota}$ $\mathring{M}\overline{\varsigma}$ ἴσον πάλιν γίνεσθαι □$^{\varphi}$. καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ $\mathring{M}\,\overline{\mu\eta}$.

δεήσει ἄρα εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ $\mathring{M}\overline{\mu\eta}$· τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἀπειραχῶς γίνεται· καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐλάσσων $\mathring{M}\,\overline{\iota\varsigma}$, ὁ δὲ μείζων $\mathring{M}\,\overline{\xi\delta}$, καὶ πρὸς ὁποῖον ἂν αὐτῶν ποιήσωμαι τὴν ἰσότητα, εὑρήσω τὴν ὑπόστασιν τοῦ ς^{οῦ}· ἐάν τε γὰρ φήσωμεν τὰς τοῦ μείζονος $\mathring{M}\overline{\xi\delta}$ ἴσας εἶναι ς$\overline{\iota}$ $\mathring{M}\overline{\nu\delta}$, συνάγεται ὁ ς $\mathring{M}\overline{\alpha}$· ἐάν τε πάλιν φήσωμεν τὰς τοῦ ἐλάσσονος $\mathring{M}\overline{\iota\varsigma}$ ἴσας εἶναι ς$\overline{\iota}$ $\mathring{M}\overline{\varsigma}$, συνάγεται ὁ ς $\mathring{M}\overline{\alpha}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὁ δὲ β^{ος} $\mathring{M}\overline{\zeta}$· ἔστι δὲ καὶ ὁ γ^{ος} $\mathring{M}\overline{\theta}$, καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

ιγ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς $\overline{\alpha}$, ὁ δὲ β^{ος} ς $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\overline{\delta}$· ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν ἔσται $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ς $\overline{\delta}$.

Εἶναι ἄρα $5929x^2 - 160$ ἴσαι πρὸς τετράγωνον, τὸ ὁποῖον λαμβάνω ἴσον πρὸς $(77x - 2)^2$, ἤτοι ἴσον πρὸς $5929x^2 + 4 - 308x$ Ἐξ ἧς $x = \frac{41}{77}$.

Ἔθεσα τὸν πρῶτον $\left(30 \frac{1}{4}\right) x$, θὰ εἶναι οὗτος $\left(1240 \frac{1}{4}\right) : 77$· τὸν δὲ δεύτερον $\frac{1}{x}$, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{77}{41}$· τὸν δὲ τρίτον $\left(12 \frac{1}{4}\right) x$, ὁπότε θὰ εἶναι $\left(502 \frac{1}{4}\right) : 77$· καὶ πληροῦνται τὰ τοῦ προβλήματος.

12.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐπειδὴ ζητοῦμεν, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα λάβωμεν τετράγωνόν τινα καὶ μέρος μὲν αὐτοῦ θέσωμεν τὸν τρίτον, τὴν διαφορὰν δὲ ὡς τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, θὰ ἔχωμεν πληρώσει ἓν τῶν ἐπιταγμάτων. Ἂς σχηματισθῇ ὁ τετράγωνος ἔχων τετραγωνικὴν ῥίζαν τὴν $x - 3$· αὐτὸς ἄρα θὰ εἶναι $x^2 + 6x + 9$· ἂς ταχθῇ ὁ τρίτος 9· ὁ ἄλλος ἄρα θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, ὁ $x^2 + 6x$. Ἂς ταχθῇ ὁ πρῶτος x· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x + 6$. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸν πρῶτον, τὸ ὁποῖον εἶναι $10x + 54$ νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ ἀκόμη τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον σὺν τὸν δεύτερον, τὸ ὁποῖον εἶναι $10x + 6$ νὰ εἶναι πάλιν τετράγωνος. Καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται διπλῆ (δύο ἐξισώσεις) καὶ ἡ διαφορὰ εἶναι 48.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ διαφέροντες κατὰ 48· τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον καὶ γίνεται κατὰ πολλοὺς τρόπους· καὶ εἶναι ὁ μὲν μικρότερος 16, ὁ δὲ μεγαλύτερος 64, καὶ πρὸς ὁποιονδήποτε ἐξ αὐτῶν ἂν σχηματίσω τὴν ἐξίσωσιν θὰ εὕρω τὸν x· διότι ἐὰν εἴπωμεν ὁ μεγαλύτερος $10x + 54 = 64$, συνάγεται $x = 1$· ἐὰν πάλιν εἴπωμεν ὁ μικρότερος $10x + 6 = 16$, συνάγεται $x = 1$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 1, ὁ δὲ δεύτερος 7, ὁ δὲ τρίτος 9, καὶ πληροῦσι τὸ ἐπίταγμα.

13.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ πρῶτος x, ὁ δὲ δεύτερος $x + 4$· τὸ γινόμενον ἄρα αὐτῶν θὰ δεήσει ἄρα τοῦτον λείψαντα τὸν γ^{ον} ποιεῖν □^{ον}· ἐὰν οὖν τὸν γ^{ον} τάξω ς $\overline{δ}$, ⟨ λυθήσεται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.

δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου} λείψαντα τὸν α^{ον} ποιεῖν □^{ον} ⟩, καὶ τὸν ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} λείψαντα τὸν β^{ον} ποιεῖν □^{ον}· ἀλλ' ὁ μὲν ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου} λείψας τὸν α^{ον} ἐστι Δ^{Υ} $\overline{δ}$ ς $\overline{ιε}$, ἴσος □^{ῳ}· ὁ δὲ ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} λείψας τὸν β^{ον} ἐστι Δ^{Υ} $\overline{δ}$ ⋔ ς $\overline{α}$ M̊ $\overline{δ}$ ἴσος □^{ῳ}.

καὶ γίνεται πάλιν διπλῆ ἡ ἴσωσις· τῆς γὰρ ὑπεροχῆς αὐτῶν τυγχανούσης ς $\overline{ις}$ M̊ $\overline{δ}$, ζητῶ δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ποιεῖ ς $\overline{ις}$ M̊ $\overline{δ}$· εἰσὶ δὲ M̊ $\overline{δ}$ καὶ ς $\overline{δ}$ M̊ $\overline{α}$.

πάλιν οὖν ἢ τῆς συνθέσεως τούτων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι, ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι, καὶ συνάγεται ὁ ς $\frac{κ}{κε}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\overline{κε}$, ὁ δὲ β^{ος} $\overline{ρε}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overline{ρ}$, καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

ιδ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τετράγωνον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς $\overline{α}$, ὁ δὲ β^{ος} ς $\overline{δ}$ M̊ $\overline{δ}$, ὁ δὲ γ^{ος} M̊ $\overline{α}$, ἵνα ᾖ λελυμένα δύο τῶν ἐπιταγμάτων.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου}, ποιεῖν □^{ον}. ἀλλ' ὁ ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου} ποιεῖ Δ^{Υ} $\overline{ις}$ ς $\overline{λγ}$ M̊ $\overline{ις}$· ταῦτα ἴσα □^{ῳ} τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς $\overline{δ}$ ⋔ M̊ $\overline{ε}$ τουτέστι Δ^{Υ} $\overline{ις}$ M̊ $\overline{κε}$ ⋔ ς $\overline{μ}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{ογ}{θ}$.

ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\overline{θ}$, ὁ δὲ β^{ος} $\overline{τκη}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overline{ογ}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ιε.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον.

Πάντων δὴ δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ τετράγωνον.

εἶναι $x^2 + 4x$. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα τοῦτο μεῖον τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἐὰν λοιπὸν θέσω τὸν τρίτον $4x$ θὰ ἔχῃ πληρωθῇ ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.

Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον μεῖον τὸν πρῶτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον μεῖον τὸν δεύτερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον μεῖον τὸν πρῶτον εἶναι $4x^2 - 15x =$ τετράγωνος· τὸ δὲ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον μεῖον τὸν δεύτερον εἶναι $4x^2 - x - 4$ $=$ τετράγωνος.

Καὶ ἔχομεν πάλιν δύο ἐξισώσεις· ἐν ᾧ δὲ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $16x + 4$, ζητῶ δύο ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι $16x + 4$· εἶναι δὲ οὗτοι 4 καὶ $4x + 1$.

Πάλιν λοιπὸν ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸν μικρότερον, ἐξ ὧν $x = \frac{25}{20}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 25, ὁ δὲ δεύτερος 105, ὁ δὲ τρίτος 100 καὶ πληροῦνται τὰ τῆς προτάσεως.

14.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ δὲ δεύτερος $4x + 4$, ὁ δὲ τρίτος 1, ἵνα ἔχωσι πληρωθῇ δύο ἐκ τῶν ἐπιταγμάτων.

Ὑπολείπεται ὅπως καὶ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου εἶναι $16x^2 + 33x + 16$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον ἔχοντα τετραγωνικὴν ῥίζαν $4x - 5$, τουτέστι ἴσα πρὸς $16x^2 + 25 - 40x$· ἐξ ἧς $x = \frac{9}{73}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 9, ὁ δὲ δεύτερος 328, ὁ δὲ τρίτος 73, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

15.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος.

Τετάχθω τοίνυν ὁ μὲν α^{ος} M̊ δ̅, ὁ δὲ β^{ος} M̊ θ̅, ἵνα ὁ ὑπ' αὐτῶν γενόμενος □^{ος} M̊ λ̅ϛ̅, προσλαβὼν συναμφότερον, ποιῇ □^{ον}. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου} προσλαβόντα συναμφότερον καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν □^{ον}.

τετάχθω ὁ γ^{ος} ϛ α̅, καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου}, προσλαβὼν συναμφοτέρους, ϛ ι̅ M̊ θ̅ ἴσος □^{ῳ}, καὶ ἔτι ὁ ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου}, προσλαβὼν συναμφοτέρους, ϛ ε̅ M̊ δ̅ ἴσος □^{ῳ} καὶ γίνεται πάλιν καὶ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις καί ἐστιν ἡ ὑπεροχὴ ϛ ε̅ M̊ ε̅. ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπό ἐστιν ϛ ε̅ M̊ ε̅. καί εἰσιν ὧν τὸ ὑπὸ ποιεῖ τὴν ὑπεροχήν, ὃς μὲν ϛ α̅ M̊ α̅, ὃς δὲ M̊ ε̅. καὶ ὁμοίως [τὸ ἐν τῷ δευτέρῳ] ἢ τῆς συνθέσεως αὐτῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ⟨ ἐφ' ἑαυτὸ ⟩ ἴσον τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ κ̅η̅.

καὶ ἔστιν ὁ μὲν α^{ος} M̊ δ̅, ὁ δὲ β^{ος} M̊ θ̅, ὁ δὲ γ^{ος} M̊ κ̅η̅. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Ἄλλως.

Εὑρεῖν ἀριθμοὺς τρεῖς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μὲν α^{ος} ϛ α̅, ὁ δὲ β^{ος} M̊ γ̅, καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ϛ δ̅ M̊ γ̅· ταῦτα ἴσα □^{ῳ}· ἔστω M̊ κ̅ε̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ M̊ ε̅L'. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} M̊ ε̅L', ὁ δὲ β^{ος} M̊ γ̅, καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων· ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖ τὸν κ̅ε̅ □^{ον}. δεήσει ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ β^{ου} καὶ γου, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου}, προσλαβόντα συναμφότερον, ποιεῖν □^{ον}.

τετάχθω ὁ γ^{ος} ϛ α̅, καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου} προσλαβὼν συναμφοτέρους πάλιν ϛ δ̅ M̊ γ̅, ὁ δὲ ὑπὸ γ^{ου} καὶ α^{ου} ϛ ϛ̅ L' M̊ ε̅L', ἴσος ἑκάτερος □^{ῳ}.

Ἂς τεθῇ λοιπὸν ὁ μὲν πρῶτος 4, ὁ δὲ δεύτερος 9, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὁ τετράγωνος 36 σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ὑπολείπεται, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, καὶ ἀκόμη τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ τρίτος x, ὁπότε τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὁ $10x + 9$, γίνεται τετράγωνος, καὶ ἀκόμη τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὁ $5x + 4$, γίνεται τετράγωνος, καὶ ἔχομεν ἐνταῦθα πάλιν δύο ἐξισώσεις [$10x + 9 =$ τετράγωνος καὶ $5x + 4 =$ τετράγωνος] καὶ ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι $5x + 5$ Ζητῶ λοιπὸν πάλιν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι $5x + 5$. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον σχηματίζει τὴν διαφορὰν ταύτην, εἶναι ὁ μὲν εἷς $x + 1$, ὁ δὲ ἄλλος 5. Καὶ ὁμοίως [πρὸς προηγουμένην περίπτωσιν] ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν μικρότερον, ὁπότε ὁ $x = 28$.

Καὶ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 4, ὁ δὲ δεύτερος 9, ὁ δὲ τρίτος 28. Καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

Ἄλλος τρόπος λύσεως.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ μὲν πρῶτος x, ὁ δὲ δεύτερος 3, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων εἶναι $4x + 3$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον· ἔστω πρὸς 25, ὁπότε $x = 5\frac{1}{2}$. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $5\frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος 3, καὶ ἔχει πληρωθῆ ἓν τῶν ἐπιταγμάτων· διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων σχηματίζει τετράγωνον, τὸν 25. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ ἀκόμη τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων, ἀντιστοίχως, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ τρίτος x, ὁπότε τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι πάλιν $4x + 3$, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον (σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν) εἶναι $\left(6\frac{1}{2}\right)x + 5\frac{1}{2}$, καὶ ἑκατέρα τῶν παραστάσεων τούτων εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος· καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν μίαν παράστασιν τὸ πλῆθος τῶν x καὶ τῶν μονάδων εἶναι μεγαλύτερον τῶν ἀντιστοίχων τῆς ἄλλης παραστάσεως, καὶ ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ x καὶ αἱ μονάδες τῆς μιᾶς παραστάσεως, πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ x καὶ τὰς μονάδας *καὶ διὰ τὸ πλεονάζειν ἐν τῷ ἑτέρῳ τὸ πλῆθος τῶν ϛ καὶ τῶν M̊, καὶ μηδὲ λόγον αὐτοὺς ἔχειν ὃν* $\square^{ος}$ *πρὸς* $\square^{ον}$, *σχολάζει ἡ γεγενημένη ὑπόστασις.*

ἀπῆκται οὖν ⟨εἰς τὸ⟩ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ποιῇ τετράγωνον, καὶ ἔτι ⟨οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν⟩ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον.

Ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων καὶ M̊ γ̄ μείζων, οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν $\square^{ος}$ *ἀριθμὸς πρὸς* $\square^{ον}$ *ἀριθμόν, τάσσω τὸν μὲν* $α^{ον}$ *ϛ ᾱ, τὸν δὲ* $β^{ον}$ *ϛ δ̄ M̊ γ̄· δεῖ λοιπὸν τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ἴσον εἶναι* $\square^{ῳ}$· *ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ἐστὶν* $Δ^{Y}$ *δ̄ ϛ η̄ M̊ γ̄· ταῦτα ἴσα* $\square^{ῳ}$.

πλάσσω τὸν $\square^{ον}$ *ἀπὸ ϛ β̄ ⋔ M̊ γ̄· καὶ γίνεται ὁ* $\square^{ος}$, $Δ^{Y}$ *δ̄ M̊ θ̄ ⋔ ϛ ιβ̄· καὶ γίνεται ὁ ϛ* $\overset{\kappa}{\overline{\varsigma}}$ *τουτέστι* $\overset{\iota}{\overline{\gamma}}$. *ἔσται ὁ μὲν* $α^{ος}$ $\overset{\iota}{\overline{\gamma}}$, *ὁ δὲ* $β^{ος}$ $\overset{\iota}{\overline{\mu\beta}}$ *τουτέστι. M̊ δ̄* $ε^{\times}$ *καὶ μένει ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.*

λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ $β^{ου}$ *καὶ* $γ^{ου}$ *μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν* $\square^{ον}$. *τάσσω τὸν* $γ^{ον}$ *ϛ ᾱ· ἔστι δὲ καὶ ὁ* $β^{ος}$ *M̊ δ̄* $ε^{\times}$· *γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ϛ ε̄* $ε^{\times}$ *M̊ δ̄* $ε^{\times}$· *ταῦτα ἴσα* $\square^{ῳ}$.

πάλιν ἐπεὶ ὁ μὲν $γ^{ος}$ *ἐστὶ ϛ ᾱ, ὁ δὲ* $α^{ος}$ $\overset{\iota}{\overline{\gamma}}$, *ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων ϛ* $\overset{\iota}{\overline{\iota\gamma}}$ *M̊* $\overset{\iota}{\overline{\gamma}}$· *ταῦτα ἴσα* $\square^{ῳ}$.

ποιῶ τοὺς ϛ ε̄ $ε^{\times}$ *M̊ δ̄* $ε^{\times}$ *ἐπὶ τὸν κε̄· γίνονται ϛ ρλ̄ M̊ ρε̄ ἴσοι* $\square^{ῳ}$· *καὶ ὁμοίως τὰ τοῦ ϛ* $\overset{\iota}{\overline{\iota\gamma}}$ *M̊* $\overset{\iota}{\overline{\gamma}}$ *ἐπὶ τὸν ρ̄· γίνονται ϛ ρλ̄ M̊ λ̄ ἴσοι πάλιν* $\square^{ῳ}$. *καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ M̊ οε̄, καὶ ἔστι διπλῆ πάλιν ἰσότης, καὶ συνάγεται ὁ ϛ* $\overset{\iota}{\overline{\zeta}}$.

ἔσται ὁ μὲν $γ^{ος}$ $\overset{\iota}{\overline{\zeta}}$· *ἦν δὲ καὶ ὁ μὲν* $α^{ος}$ $\overset{\iota}{\overline{\gamma}}$, *ὁ δὲ* $β^{ος}$ $\overset{\iota}{\overline{\mu\beta}}$· *καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.*

τῆς ἄλλης παραστάσεως, δὲν ἔχουν λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, δὲν ἐνδείκνυται ἡ γενομένη ὑπόθεσις.

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ ἀκόμη οἱ κατὰ μονάδα μεγαλύτεροι τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπειδή, ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος ἄλλου καὶ ὑπερέχῃ ἀκόμη τούτου κατὰ 3 μονάδας, οἱ κατὰ μονάδα μεγαλύτεροι τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θέτω τὸν μὲν πρῶτον x, τὸν δὲ δεύτερον $4x + 3$. Πρέπει λοιπὸν τὸ γινόμενον τούτων σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των εἶναι $4x^2 + 8x + 3$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον.

Λαμβάνω ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου τὴν $2x - 3$· ὁπότε ὁ τετράγωνος εἶναι $4x^2 + 9 - 12x$ $(= 4x^2 + 8x + 3)$· ἐξ ἧς $x = \frac{6}{20}$ τουτέστι $\frac{3}{10}$. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{3}{10}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{42}{40}$ τουτέστι $4\frac{1}{5}$ καὶ πληροῦται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.

Ὑπολείπεται, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμά των, σχηματίζῃ τετράγωνον. Θέτω τὸν τρίτον x· εἶναι δὲ καὶ ὁ δεύτερος $4\frac{1}{5}$· τὸ γινόμενον τούτων σὺν τὸ ἄθροισμα των εἶναι $\left(5\frac{1}{5}\right) x + 4\frac{1}{5}$· ταῦτα = τετράγωνος.

Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ μὲν τρίτος εἶναι x, ὁ δὲ πρῶτος $\frac{3}{10}$, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα των $\frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$ = τετράγωνος.

Πολλαπλασιάζω τὸ ἄθροισμα $\left(5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}\right)$ ἐπὶ 25· ὁπότε εἶναι $130x + 105$ = τετράγωνος· καὶ ὁμοίως $\left(\frac{13}{10}x + \frac{3}{10}\right)$ x ἐπὶ $100 = 130x + 30$ = τετράγωνος. Καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 75, καὶ ἔχομεν πάλιν δύο ἐξισώσεις, ἐξ ὧν $x = \frac{7}{10}$.

Ὁ μὲν τρίτος θὰ εἶναι $\frac{7}{10}$· ἦτο δὲ καὶ ὁ μὲν πρῶτος $\frac{3}{10}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{42}{10}$· καὶ πληροῦσι τὸ ἐπίταγμα.

ιϛ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον.

Ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου, τετάχθω ὁ $α^{ος}$ ϛ ᾱ, ὁ $β^{ος}$ Μ̊ ὁσωνδήποτε, καὶ ἐλεύσομαι ὡσαύτως εἰς ἄπορον. ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ϛ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ϛ ἔχωμεν λόγον ἔχον ὃν □^{ος} ἀριθμὸς πρὸς □^{ον} ἀριθμόν, ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον ⟨καὶ ἔτι οἱ μονάδι αὐτῶν ἐλάσσους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν⟩.

Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ τετραπλασίων ᾖ παρὰ Μ̊ γ̄, οἱ μονάδι αὐτῶν ἐλάσσους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν □^{ος} ἀριθμὸς πρὸς □^{ον} ἀριθμόν, [ἐπειδήπερ καὶ τῆς Μ̊ ᾱ ἀφ' ἑκατέρου ἀφαιρουμένης γίνεται ἐλάττωσις Μ̊ δ̄ καὶ ᾱ, καὶ δῆλόν ἐστιν ὡς ἀπὸ τετραπλασίων λόγου τετραπλασίων ἀφαιρουμένου, καὶ ὁ καταλειπόμενος ἔσται τετραπλασίων, τουτέστι □ πρὸς □], τάσσω οὖν τὸν μὲν $α^{ον}$ ϛ ᾱ Μ̊ ᾱ, τὸν δὲ $β^{ον}$ ϛ δ̄ Μ̊ ᾱ· καὶ μένει ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον, γί. $Δ^{Υ}$ δ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ, ἴσος □^{ῳ}, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ β̄ ⋔ Μ̊ β̄, τουτέστι $Δ^{Υ}$ δ̄ Μ̊ δ̄ ⋔ ϛ η̄· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{η}{\overline{ε}}$. ἔσται ὁ μὲν $α^{ος}$ $\overset{η}{\overline{ιγ}}$, ὁ δὲ $β^{ος}$ $\overset{η}{\overline{κη}}$, καὶ λέλυται ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.

Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν $α^{ος}$ ἐστι $\overset{η}{\overline{ιγ}}$, ὁ δὲ $β^{ος}$ Μ̊ γ̄ L', τάσσω τὸν $γ^{ον}$ ϛ ᾱ. καὶ μένει ὁ ὑπὸ $β^{ου}$ καὶ $γ^{ου}$ συναγόμενος ϛ γ̄ L'· λείψας τὸν συναμφότερον, ϛ ᾱ Μ̊ γ̄ L', γί. ϛ β̄ L' ⋔ Μ̊ γ̄ L' ἴσ. □^{ῳ}. ⟨ταῦτα $δ^{κις}$· γίνονται ϛ ῑ ⋔ Μ̊ ιδ.⟩

ὁ δὲ ὑπὸ $γ^{ου}$ καὶ $α^{ου}$ γίνεται ϛ $\overset{η}{\overline{ιγ}}$· λείψας συναμφότερον, γί. ϛ $\overset{η}{\overline{ε}}$ ⋔ Μ̊ $\overset{η}{\overline{ιγ}}$ ἴσ. □^{ῳ}. ταῦτα $ιϛ^{κις}$· γίνονται ϛ ῑ ⋔ Μ̊ κϛ̄.

καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ Μ̊ ιβ̄· ὧν τὸ ὑπό, Μ̊ β̄ καὶ Μ̊ ϛ̄· συναμφοτέρου τὸ L' ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται Μ̊ ις̄ ἴσαι τῷ μείζονι, τουτέστιν ϛ ῑ ⋔ Μ̊ ιδ. καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ γ̄.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον, ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ δεύτερος ὁσαιδήποτε μονάδες, ὁπότε ἐπίσης θὰ φθάσω εἰς ἀδιέξοδον. Ἵνα λοιπὸν οἱ συντελεσταὶ τῶν x πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῶν x ἔχωσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητηθῶσι δύο ἀριθμοί, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον ⟨ καὶ ἀκόμη οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι αὐτῶν νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν ⟩.

Καὶ ἐπειδὴ ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος ἄλλου μεῖον 3, οἱ κατὰ μονάδα μικρότεροι τούτων ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, [ἐπειδὴ βεβαίως ὅταν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς γίνεται ἐλάττωσις 4 καὶ 1, ἀντιστοίχως, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ λόγος τοῦ $4\alpha - 4$ πρὸς $\alpha - 1$ εἶναι 4, τουτέστι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν], θέτω λοιπὸν τὸν μὲν πρῶτον $x + 1$ τὸν δὲ δεύτερον $4x + 1$· ὁπότε τὸ γινόμενον τούτων μεῖον τὸ ἄθροισμά των γίνεται $4x^2 - 1 =$ τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔστω $2x - 2$, ἤτοι $= 4x^2 + 4 - 8x$· ἐξ ἧς $x = \frac{5}{8}$. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{13}{8}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{28}{8}$, καὶ ἔχει πληρωθῇ ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν πρῶτος εἶναι $\frac{13}{8}$, ὁ δὲ δεύτερος $3\frac{1}{2}$, θέτω τὸν τρίτον x. Ὁπότε τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι $\left(3\frac{1}{2}\right)x$· μεῖον τὸ ἄθροισμά των τὸ ὁποῖον εἶναι $x + 3\frac{1}{2}$, λαμβάνομεν $2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2} =$ τετράγωνος. ⟨ Πολλαπλασιάζω ἐπὶ 4 καὶ ἔχω $10x - 14$ ⟩.

Τὸ δὲ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον γίνεται $\frac{13}{8}x$· μεῖον τὸ ἄθροισμά των, γίνεται $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8} =$ τετράγωνος. Πολλαπλασιάζω ἐπὶ 16, ὅτε λαμβάνω $10x - 26$.

Καὶ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν (τοῦ $10x - 14$ καὶ $10x - 26$) 12· τὸ ὁποῖον εἶναι γινόμενον τοῦ $2 \cdot 6$· τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος τούτων εἶναι $16 =$ πρὸς τὸν μεγαλύτερον ἤτοι $= 10x - 14$, ἐξ ἧς $x = 3$.

ἔσται ὁ μὲν γος $\mathring{M}\overline{\gamma}$ τουτέστιν $\frac{\eta}{\kappa\delta}$· ἔχομεν δὲ καὶ τὸν μὲν αον $\frac{\eta}{\iota\gamma}$, τὸν δὲ βον $\mathring{M}\overline{\gamma}L'$ τουτέστιν $\frac{\eta}{\kappa\eta}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ιζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε ἑκάτερον, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μὲν ϛ $\overline{\alpha}$, ὁ δὲ ϛ $\overline{\delta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ μονάδα, ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον.

ἑξῆς δεῖ καὶ τὰ λοιπὰ δύο ἐπιτάγματα κατασκευάσαι, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα ⟨τὸν βον ποιεῖν □ον καὶ ἔτι τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα⟩ συναμφότερον ποιεῖν □ον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν βον γίνεται $\Delta^{Y}\overline{\delta}$ ϛ $\overline{\gamma}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ· ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται $\Delta^{Y}\overline{\delta}$ ϛ $\overline{\delta}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ.

καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ ϛ $\overline{\alpha}$, καὶ περιέχεται ὑπὸ $\mathring{M}\,\delta^{\times}$, ϛ $\overline{\delta}$· καὶ συνάγεται ὁ ϛ $\frac{\sigma\kappa\delta}{\xi\varepsilon}$.

ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\xi\varepsilon}$, ὁ δὲ βος $\overline{\lambda\varsigma}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

ιη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε λείψῃ ἑκάτερον, ἐάν τε συναμφότερον, ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μὲν ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\overline{\alpha}$, ὁ δὲ ϛ $\overline{\delta}$, ἐπειδήπερ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ τετραπλασίων παρὰ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον.

λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν □ον, καὶ ἔτι τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν □ον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν ἐλάσσονα γίνεται $\Delta^{Y}\overline{\delta}$ ϛ $\overline{\gamma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον $\Delta^{Y}\overline{\delta}$ ⋔ ϛ $\overline{\alpha}\mathring{M}\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ὑπεροχὴ ϛ $\overline{\delta}$· τάσσω τὸν μὲν ϛ $\overline{\delta}$, τὸν δὲ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}\,\delta^{\times}$.

Ὁ μὲν τρίτος θὰ εἶναι 3 τουτέστιν $\frac{24}{8}$· ἔχομεν δὲ καὶ τὸν μὲν πρῶτον $\frac{13}{8}$, τὸν δὲ δεύτερον $3\frac{1}{2}$ τουτέστιν $\frac{28}{8}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἢ σὺν τὸ ἄθροισμά των ἢ σὺν ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος $4x - 1$, ἐπειδὴ βεβαίως ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος ἄλλου, μεῖον 1, τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν μικρότερον σχηματίζει τετράγωνον.

Ἐν συνεχείᾳ πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν καὶ τὰ ἄλλα δύο ἐπιτάγματα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν σὺν τὸν δεύτερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον καὶ ἀκόμη τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν δεύτερον γίνεται $4x^2 + 3x - 1 =$ τετράγωνος· τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των γίνεται $4x^2 + 4x - 1$ $=$ τετράγωνος.

Καὶ ἔχομεν δύο ἐξισώσεις καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι x, τὸ ὁποῖον ἀναλύεται εἰς $\frac{1}{4}$· 4x· καὶ συνάγεται ὁ $x = \frac{65}{224}$.

Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{65}{224}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{36}{224}$, καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

18.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἢ μεῖον ἑκάτερον, ἢ μεῖον τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ ὁ μὲν εἷς $x + 1$, ὁ δὲ ἄλλος 4x, ἐπειδὴ βεβαίως ἐὰν ἀριθμὸς εἶναι τετραπλάσιος ἄλλου μεῖον 4, τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μεγαλύτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μικρότερον σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ ἀκόμη ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μικρότερον γίνεται $4x^2 + 3x - 1$· τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των γίνεται $4x^2 - (x + 1) =$ τετράγωνος. Καὶ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων τούτων $=$ 4x· θέτω τὸν μὲν ἕνα παράγοντα 4x, τὸν δὲ ἄλλον 1, ἐξ ἧς $x = 1\frac{1}{4}$.

καὶ ἔσται ὁ μὲν αος Μ̊ β δˣ, ὁ δὲ βος Μ̊ ε. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ιθ.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τεσσάρων τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπεὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν δὶς ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἐάν τε λείψῃ, ποιεῖ τετράγωνον, ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας· τὸ δʼ αὐτὸ ἐστι τετράγωνόν τινα διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους ⟨ τετραχῶς ⟩, καὶ ἐμάθομεν τὸν δοθέντα □ον διελεῖν εἰς δύο □ους ἀπειραχῶς.

Νῦν οὖν ἐκθώμεθα δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν, οἷον γ, δ, ε· ε, ιβ, ιγ. καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ἐκκειμένων ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑτέρου, καὶ ἔσται τὸ μὲν αον τρίγωνον, λθ, νβ, ξε· τὸ δὲ βον κε, ξ, ξε. καὶ ἔστιν ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας.

ἔτι δὲ φυσικῶς ὁ ξε διαιρεῖται εἰς τετραγώνους διχῶς, εἴς τε τὸν ις καὶ τὸν μθ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ξδ καὶ τὴν Μ̊. τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ ξε ἀριθμὸς περιέχεται ὑπὸ τοῦ ιγ καὶ τοῦ ε, ὧν ἕκαστος διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους.

νῦν τῶν ἐκκειμένων, τοῦ τε μθ καὶ τοῦ ις, λαμβάνω τὰς πλευράς· εἰσὶν δὲ ζ καὶ δ, καὶ πλάσσω τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο τοῦ τε ζ καὶ τοῦ δ καὶ ἔστι λγ, νς, ξε.

ὁμοίως καὶ τοῦ ξδ καὶ τῆς Μ̊ αἱ πλευραὶ η καὶ α, καὶ πλάσσω πάλιν ἀπʼ αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ ις, ξγ, ξε.

Καὶ γίνεται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας· ἐλθὼν οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τεσσάρων, ϛ ξε, ἕκαστον δὲ τούτων τῶν τεσσάρων, ΔΥ τοσούτων ὅσων ἐστὶ δπλ. τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸν μὲν αον ⟨ΔΥ ͵διϛ, τὸν δὲ βον ΔΥ ͵γ, τὸν δὲ γον⟩ ΔΥ ͵γχϟϛ, καὶ ἔτι τὸν δον ΔΥ ͵βιϛ.

Καὶ θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $2\frac{1}{4}$, ὁ δὲ δεύτερος 5. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

19

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἢ σὺν ἕκαστον, ἢ μεῖον ἕκαστον ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐπειδὴ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἢ σὺν τῷ διπλασίῳ τῶν καθέτων πλευρῶν ἢ μεῖον τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τούτων σχηματίζει τετράγωνον, ζητῶ προηγουμένως τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα ὑποτεινούσας ἴσας· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ νὰ ἀναλύσωμεν τετράγωνόν τινα εἰς δύο τετραγώνους ⟨ κατὰ τέσσαρας τρόπους ⟩, καὶ ἡμεῖς ἐμάθομεν νὰ ἀναλύωμεν τετράγωνον εἰς δύο τετραγώνους κατ' ἀπείρους τρόπους.

Τώρα λοιπὸν λαμβάνομεν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 4, 5· 5, 12, 13. Καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἄλλου, ὁπότε τὸ μὲν πρῶτον τρίγωνον θὰ εἶναι 39, 52, 65· τὸ δὲ δεύτερον 25, 60, 65. Καὶ εἶναι ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας.

Προσέτι δὲ ὁ 65 ἀναλύεται φυσικῶς κατὰ δύο τρόπους εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καὶ εἰς $16 + 49$ καὶ εἰς $64 + 1$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 65 εἶναι γινόμενον τοῦ 13 καὶ τοῦ 5, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀναλύεται εἰς δύο τετραγώνους.

Τώρα λαμβάνω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ληφθέντων τετραγώνων, καὶ τοῦ 49 καὶ τοῦ 16· εἶναι δὲ αὗται 7 καὶ 4, καὶ σχηματίζω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, καὶ τοῦ 7 καὶ τοῦ 4, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς 33, 56, 65. [Σημ. Ἐὰν δοθῶσι δύο ἀριθμοὶ α, β, θέτομεν $\alpha^2 + \beta^2 = z$, $\alpha^2 - \beta^2 = x$, $2\alpha\beta = \psi$. Τότε εἶναι $z^2 = x^2 + \psi^2$, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει πλευρὰς z, x, ψ, αἱ ὁποῖαι ἐσχηματίσθησαν ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β. Ἡ σχέσις $(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2$ εἶναι ἡ II 5 τοῦ Εὐκλείδου].

Ἐπίσης λαμβάνω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας καὶ τοῦ 64 καὶ τοῦ 1, αἱ ὁποῖαι εἶναι 8 καὶ 1, καὶ σχηματίζω πάλιν ἐξ αὐτῶν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 16, 63, 65.

Καὶ γίνονται τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας· ἐπανερχόμενος λοιπὸν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, θέτω τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων τεσσάρων ἀριθμῶν 65x· ἕκαστον δὲ τούτων τῶν τεσσάρων τόσα x^2, ὅσα εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου τριγώνου, τὸν μὲν πρῶτον $4056x^2$, τὸν δὲ δεύτερον $3000x^2$, τὸν δὲ τρίτον $3696x^2$, καὶ ἀκόμη τὸν τέταρτον $2016x^2$.

καί εἰσιν οἱ τέσσαρες $\Delta^{Y}\ \overset{\alpha}{M}{}^{Y}.\ \mathring{M}\ \overline{,\beta\psi\xi\eta}$ *ἴσοι* ς $\overline{\xi\varepsilon}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς *μορίου* $\overset{\alpha}{M}{}^{Y}.\ \mathring{M}\ \overline{,\beta\psi\xi\eta},\ \overline{\xi\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος $\overset{,\alpha\psi\iota\gamma}{M}{}^{Y}.\ \mathring{M}\ \overline{,\varsigma\chi}$ ⟨*ὁ δὲ* βος $\overset{,\alpha\sigma\xi\zeta}{M}{}^{Y}.\ \mathring{M}\ \overline{,\varepsilon}$⟩ *μορίου τοῦ αὐτοῦ, ὁ δὲ* γος $\overset{,\alpha\varphi\xi\alpha}{M}{}^{Y}.\ \mathring{M}\ \overline{,\varepsilon\chi}$ *μορίου τοῦ αὐτοῦ, ὁ δὲ* δος $\overset{,\omega\nu\alpha}{M}{}^{Y}.\ \mathring{M}\ \overline{,\zeta\chi}$ *μορίου τοῦ αὐτοῦ· τὸ δὲ μόριον* $M\overset{\alpha}{M}{}^{Y}.\ \overset{,\varsigma\tau\beta}{M}{}^{Y}\ \mathring{M}\ \overline{,\alpha\omega\kappa\delta}$.

κ.

Δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς λείψας ἑκάτερον τῶν διῃρημένων ποιεῖ τετράγωνον.

Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς $\mathring{M}\ \overline{\iota}$.

Τετάχθω ὁ προσευρισκόμενος τετράγωνος $\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$· *οὗτος ἐὰν μὲν λείψῃ* ς $\overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$, *καταλείπεται* □ος, *ἐὰν δὲ* ς $\overline{\delta}$, *πάλιν καταλείπεται* □ος. *τάσσω οὖν τὸν μὲν* αον ς $\overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$, *τὸν δὲ* βον ς $\overline{\delta}$.

ταῦτα δεῖ συντεθέντα ποιεῖν τὸν δοθέντα, ἀλλὰ συντεθέντα ἐστὶν ς $\overline{ϛ}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$· *ταῦτα ἴσα* $\mathring{M}\ \overline{\iota}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\ \overline{\alpha}\ L'$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\delta}\ \mathring{M}$, *ὁ δὲ* βος $\overline{ϛ}\ \mathring{M}$, *ὁ δὲ* □ος $\mathring{M}\ \overline{ϛ}\ \delta^{\times}$.

κα.

Δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς δύο καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον, ὃς προσλαβὼν ἕκαστον τῶν διῃρημένων ποιεῖ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς $\mathring{M}\ \overline{\kappa}$.

Καὶ τετάχθω ὁ τετράγωνος $\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$· *τούτῳ δὲ ἐὰν προσθῶ* ς $\overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\gamma}$, *ἔστι* □ος, *ἀλλὰ μὴν καὶ ἐὰν προσθῶ* ς $\overline{\delta}\ \mathring{M}\ \overline{\eta}$. *συναμφότερος ἄρα ἔσται* ς $\overline{ϛ}\ \mathring{M}\ \overline{\iota\alpha}$... ⟨*ταῦτα ἴσα* $\mathring{M}\ \overline{\kappa}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\mathring{M}\ \overline{\alpha}\ L'$ *ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις·*⟩

ἔσται ὁ μὲν αος *τῶν διῃρημένων* $\mathring{M}\ \overline{ϛ}$, *ὁ δὲ* βος $\mathring{M}\ \overline{\iota\delta}$, *ὁ δὲ* □ος $\mathring{M}\ \overline{ϛ}\ \delta^{\times}$. *καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.*

Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν $12768x^2 = 65x$, ἐξ ἧς $x = \frac{65}{12768}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $17136600. \frac{1}{\nu} \left[= (10000 . 1713 + 6600) \frac{1}{\nu}\right]$ ὁ δὲ δεύτερος $12675000. \frac{1}{\nu} \left[= (10000 . 1267 + 5000) \frac{1}{\nu}\right]$ ὁ δὲ τρίτος $15615600. \frac{1}{\nu} \left[= (1000 . 1561 + 5600) \frac{1}{\nu}\right]$, ὁ δὲ τέταρτος $8517600. \frac{1}{\nu} \left[= (1000 . 851 + 7600) \frac{1}{\nu}\right]$· τὸ δὲ $\nu = 163021824$ $[= 10000^2 + 10000 . 6302 + 1824]$.

20.

Δοθεὶς ἀριθμὸς ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιρούμενος ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς ἀναλύσεως νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 10.

Ἂς τεθῇ ὁ εὑρισκόμενος τετράγωνος $x^2 + 2x + 1$· ἀπὸ τούτου ἐὰν μὲν ἀφαιρεθῇ ὁ $2x + 1$, μένει τετράγωνος, ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ὁ $4x$, μένει πάλιν τετράγωνος. Θέτω λοιπὸν τὸν μὲν πρῶτον $2x + 1$, τὸν δὲ δεύτερον $4x$.

Ταῦτα πρέπει προστιθέμενα νὰ σχηματίζωσι τὸν δοθέντα, εἶναι ὅμως τὸ ἄθροισμά των $6x + 1$· ταῦτα $= 10$, ἐξ ἧς $x = 1 \frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 4, ὁ δὲ δεύτερος 6, ὁ δὲ τετράγωνος $6 \frac{1}{4}$.

21.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος εἰς τὸν ὁποῖον προστιθέμενος ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς ἀναλύσεως νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 20.

Καὶ ἂς τεθῇ ὁ τετράγωνος $x^2 + 2x + 1$· ἐὰν εἰς τοῦτον προσθέσω $2x + 3$, σχηματίζεται τετράγωνος, ἀλλὰ καὶ ἐὰν προσθέσω $4x + 8$ σχηματίζεται τετράγωνος. Τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἐκ τῆς ἀναλύσεως δύο ἀριθμῶν θὰ εἶναι $6x + 11$ ..... (δηλ. $= 20$, ἐξ ἧς $x = 1 \frac{1}{2}$.)

Ὁ μὲν πρῶτος τῶν ἐκ τῆς ἀναλύσεως θὰ εἶναι 6, ὁ δὲ δεύτερος 14, ὁ δὲ τετράγωνος $6 \frac{1}{4}$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Δʹ

α.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραί εἰσι δοθεῖσαι.

Ἔστω δὴ τὸν $\overline{\tau o}$ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραὶ Μ̊ $\overline{\iota}$.

Τετάχθω ἡ τοῦ $\alpha^{o\upsilon}$ κύβου $\pi\lambda$. ϛ $\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\varepsilon}$ τουτέστι τοῦ Lʹ τῶν πλευρῶν. λοιπὸν ἄρα ἡ τοῦ ἑτέρου κύβου $\pi\lambda$. ἔσται Μ̊ $\overline{\varepsilon}$ ⋔ ϛ $\overline{\alpha}$· αὐτοὶ ἄρα ἔσονται οἱ κύβοι Δ^{Y} $\overline{\lambda}$ Μ̊ $\overline{\sigma\nu}$· ταῦτα ἴσα Μ̊ $\overline{\tau o}$ τουτέστι τῷ δοθέντι καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\overline{\beta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἡ ⟨μὲν⟩ τοῦ $\alpha^{o\upsilon}$ κύβου $\pi\lambda$. Μ̊ $\overline{\zeta}$, ἡ δὲ τοῦ $\beta^{o\upsilon}$ Μ̊ $\overline{\gamma}$· αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\overline{\tau\mu\gamma}$, ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ $\overline{\kappa\zeta}$.

β.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα, καὶ ἔτι ἡ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή.

Ἔστω δὴ τὴν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιεῖν Μ̊ $\overline{\varsigma}$, τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων Μ̊ $\overline{\varphi\delta}$.

Τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ μείζονος κύβου $\pi\lambda$. ϛ $\overline{\alpha}$ ⟨ Μ̊ $\overline{\gamma}$, ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος ϛ $\overline{\alpha}$ ⟩ ⋔ Μ̊ $\overline{\gamma}$· καὶ μένει ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι Μ̊ $\overline{\varsigma}$. λοιπὸν δεῖ τῶν κύβων τὴν ὑπεροχὴν εἶναι Μ̊ $\overline{\varphi\delta}$· ἀλλ' ἡ τῶν κύβων ὑπεροχή ἐστι Δ^{Y} $\overline{\iota\eta}$ Μ̊ $\overline{\nu\delta}$· ταῦτα ἴσα Μ̊ $\overline{\varphi\delta}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\overline{\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἡ μὲν τοῦ μείζονος κύβου $\pi\lambda$. Μ̊ $\overline{\eta}$, ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος Μ̊ $\overline{\beta}$. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν $\overline{\varphi\iota\beta}$, ὃς δὲ $\overline{\eta}$, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

γ.

Ἐπὶ τετράγωνον καὶ πλευρὰν πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὴν μὲν πλευρὰν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον πλευρὰν τοῦ κύβου.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ IV

1.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο κύβους, τῶν ὁποίων αἱ κυβικαὶ ῥίζαι νὰ ἔχωσι δοθὲν ἄθροισμα.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 370 εἰς δύο κύβους, τῶν ὁποίων αἱ κυβικαὶ ῥίζαι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10.

Ἂς ταχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου κύβου $x + 5$ ἔνθα 5 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κυβικῶν ῥιζῶν. Ἡ διαφορὰ ἄρα $[\,10 - (x + 5)\,]$ θὰ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἄλλου κύβου ἡ $5 - x$· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων κύβων $30x^2 + 250$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 370 τουτέστι πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ἐξ ἧς $x = 2$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· θὰ εἶναι ἡ μὲν κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου κύβου 7, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου κύβου 3· αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὁ μὲν πρῶτος 343, ὁ δὲ δεύτερος 27.

2.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτῶν δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν δίδῃ ἐπίσης δοθέντα.

Ἔστω ἡ μὲν διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν νὰ δίδῃ 6, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν νὰ δίδῃ 504.

Ἂς ταχθῇ πάλιν ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγαλυτέρου κύβου $x + 3$, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου $x - 3$· καὶ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν 6. Ὑπολείπεται νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κύβων 504· ἀλλὰ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι $18x^2 + 54$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 504, ἐξ ἧς $x = 5$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ἡ μὲν κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγαλυτέρου κύβου θὰ εἶναι 8, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου 2. Αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν εἷς 512, ὁ δὲ ἄλλος 8, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

3.

Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου, καὶ νὰ σχηματίζῃ τὴν μὲν τετραγωνικὴν ῥίζαν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κύβου.

Τετάχθω ὁ μὲν τετράγωνος $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, ἡ ἄρα πλ. αὐτοῦ ἔσται ς $\overline{\alpha}$· ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ἔστω ἀριθμοστῶν κυβικῶν ὁσωνδήποτε· ἔστω δὴ $\varsigma^{\times}\overline{\eta}$. ἐπὶ μὲν οὖν τὴν $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν ς $\overline{\eta}$· ἐπὶ δὲ τὸν ς ⟨$\overline{\alpha}$⟩ πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν $\mathring{M}\overline{\eta}$.

θέλομεν δὲ τοὺς ς $\overline{\eta}$ κυβικὴν εἶναι πλευρὰν τῶν $\overline{\eta}$ $\mathring{M}$· $\mathring{M}$ ἄρα $\overline{\beta}$ ἴσαι ς $\overline{\eta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\eta}{\overline{\beta}}$, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς $\mathring{M}\overline{\lambda\beta}$.

Ἐὰν δὲ θελήσωμεν μόρια μὴ ἐπιτιθέναι, εὑρήσομεν ς $\overline{\eta}$ ἴσους $\mathring{M}\overline{\beta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\delta^{\times}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος $\iota\varsigma^{\times}$, ἡ δὲ πλευρὰ $\delta^{\times}$, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ὁ $\overline{\lambda\beta}$. εἰ γὰρ ὁ ς ἐστι $\delta^{\times}$, τὸ ἀριθμοστόν ἐστι $\mathring{M}\overline{\delta}$. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

δ.

Τετραγώνῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά.

Ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ς $\overline{\alpha}$· ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω Δ^{Y} τοσούτων ἵνα μετὰ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ποιῇ $\square^{\text{ον}}$. ἔστω $\Delta^{Y}\overline{\gamma}$· αὗται προστεθεῖσαι τῇ μὲν Δ^{Y} ⟨$\overline{\alpha}$⟩ ποιοῦσι $\square^{\text{ον}}$· τῷ δὲ ς$\overline{\alpha}$, ποιοῦσι $\Delta^{Y}\overline{\gamma}$ ς$\overline{\alpha}$· ταῦτα ἴσα τῇ τοῦ $\square^{\text{ου}}$ πλ. τῶν $\Delta^{Y}\overline{\delta}$, τουτέστιν ς $\overline{\beta}$· καὶ γίνεται ὁ ς ἑνὸς $\gamma^{\text{ου}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος ἑνὸς $\theta^{\text{ου}}$, ἡ δὲ πλ.. ἑνὸς $\gamma^{\text{ου}}$, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς $\overset{\vartheta}{\overline{\gamma}}$.

ε.

Τετραγώνῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ.

Ἔστω ὁ τετράγωνος $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, ἡ ἄρα πλευρὰ ἔται ς $\overline{\alpha}$· ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα τὴν πλ. ποιῇ $\square^{\text{ον}}$, Δ^{Y} τετραγωνικῶν λείψει ς τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς. ἔστω δὴ $\Delta^{Y}\overline{\delta}$ $\pitchfork$ ς $\overline{\alpha}$. ⟨αὗται προστεθεῖσαι μὲν τῷ ς $\overline{\alpha}$ ποιοῦσι $\square^{\text{ον}}$· τῇ δὲ

Ἂς ταχθῇ ὁ μὲν τετράγωνος x^2, καὶ συνεπῶς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου x· ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ἔστω ὁσωνδήποτε $\frac{1}{x}$· ἔστω $\frac{8}{x}$· Πολλαπλασιάσαντες λοιπὸν ἐπὶ x^2, εὑρίσκομεν $8x$· πολλαπλασιάσαντες δὲ ἐπὶ x, εὑρίσκομεν 8.

Θέλομεν δὲ ὁ $8x$ νὰ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 8· θὰ εἶναι ἄρα $2 = 8x$, ἐξ ἧς $x = \frac{2}{8}$, καὶ ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς γίνεται 32.

Ἐὰν δὲ θελήσωμεν νὰ μὴ ἔχωμεν κλάσματα θὰ εὕρωμεν $8x = 2$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{4}$·

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν τετράγωνος θὰ εἶναι $\frac{1}{16}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα $\frac{1}{4}$, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς 32. Διότι ἐὰν ὁ x εἶναι $\frac{1}{4}$, τὸ $\frac{1}{x} = 4$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

4.

Εἰς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου.

Ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος x^2, ὁπότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου θὰ εἶναι x· ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω τόσα x^2 ἵνα σὺν x^2 σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἔστω $3x^2$· ταῦτα προστιθέμενα εἰς μὲν τὸν x^2 σχηματίζουσι τετράγωνον· εἰς δὲ τὸν x, σχηματίζουσι $3x^2 + x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $4x^2$, τουτέστιν $2x$· ἐξ ἧς $x = \frac{1}{3}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν τετράγωνος θὰ εἶναι $\frac{1}{9}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα $\frac{1}{3}$, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς $\frac{3}{9}$.

5.

Εἰς τετράγωνον καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζῃ τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ τετράγωνον ταύτης.

Ἔστω ὁ τετράγωνος x^2, τοῦ ὁποίου ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θὰ εἶναι x· ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν σχηματίζῃ τετράγωνον, θὰ εἶναι τόσα x^2, μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου. Ἔστω $4x^2 - x$.

$\Delta^{Y}\,\bar{\alpha}$, ποιοῦσι $\Delta^{Y}\,\bar{\varepsilon}$ ⋔ ς $\bar{\alpha}$·⟩ ταῦτα ἴσα ς $\bar{\beta}$ τῇ πλ. τοῦ □^ον τοῦ γεγενημένου ἐκ τῆς προσθέσεως· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\varepsilon}{\bar{\gamma}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος $\overset{\kappa\varepsilon}{\bar{\theta}}$, ἡ δὲ πλ. $\overset{\varepsilon}{\bar{\gamma}}$, ὁ δὲ προστιθέμενος $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\kappa\alpha}}$.

ς.

Κύβῳ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά.

Ἔστω ὁ μὲν κύβος $K^{Y}\,\bar{\alpha}$, ὁ δὲ τετράγωνος Δ^{Y} ὁσωνδήποτε τετραγωνικῶν, ἔστω $\Delta^{Y}\,\bar{\theta}$.

καὶ ἐπεὶ θέλομεν τετράγωνόν τινα μετὰ $\Delta^{Y}\,\bar{\theta}$ ποιεῖν □^ον, ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπό ἐστι $\overset{\circ}{M}\,\bar{\theta}$· ἔστω δὴ $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\bar{\theta}$. ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ τῶν $\bar{\theta}$ τὴν $\overset{\circ}{M}$, καὶ τῶν λοιπῶν τὸ Lʹ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιάσω, ἕξω $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\varsigma}$· οὗτος προσλαβὼν τὸν $\bar{\theta}$ ποιεῖ □^ον.

τάσσω οὖν τὸν προστιθέμενον τετράγωνον $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$· κἂν μὲν ταῖς $\Delta^{Y}\,\bar{\theta}$ προστεθῇ, γίνεται □^ος· ἐὰν δὲ τῷ $K^{Y}\,\bar{\alpha}$, γίνεται $K^{Y}\,\bar{\alpha}\ \Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$· ταῦτα ἴσα κύβῳ· ἔστω $K^{Y}\,\bar{\eta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\zeta}{\overline{\iota\varsigma}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν κύβος $\overset{\tau\mu\gamma}{\overline{,\delta\eta\varsigma}}$, ὁ δὲ τετράγωνος $\overset{\mu\theta}{\overline{,\beta\tau\delta}}$, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος $\overset{\mu\theta}{\overline{,\delta\eta\varsigma}}$.

ζ.

Κύβῳ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ.

Ἔστω ὁ μὲν κύβος ὁ α^ος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ β^ος, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ὁ γ^ος.

Καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν προστιθέμενον □^ον τὸν γ^ον τῷ □^ῳ τῷ β^ῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω κύβον τὸν α^ον· ὥστε ὁ α^ος ὑπερέχει τοῦ β^ου τῷ γ^ῳ τουτέστι □^ῳ· ὁ γὰρ γ^ος ἐστὶ □^ος· οἵους δή ἂν ἐκθῶμαι δύο ἀριθμούς, οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι προσλαβόντες τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν ἢ λείψανες ποιοῦσι τετράγωνον. ὀφείλω

⟨Ταῦτα προστιθέμενα μὲν εἰς τὸν x σχηματίζουσι τετράγωνον· προστιθέμενα δὲ εἰς τὸν x^2, δίδουσι $5x^2 - x$·⟩ ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 2x ἤτοι πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου, τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῆς προσθέσεως, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν τετράγωνος θὰ εἶναι $\frac{9}{25}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα $\frac{3}{5}$, ὁ δὲ προστιθέμενος $\frac{21}{25}$.

6.

Εἰς κύβον καὶ τετράγωνον νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς τετράγωνος καὶ νὰ σχηματίζηται κύβος καὶ τετράγωνος.

Ἔστω ὁ μὲν κύβος x^3, ὁ δὲ τετράγωνος τόσα x^2, ὥστε ὁ συντελεστὴς τούτου νὰ εἶναι τετράγωνος, ἔστω $9x^2$.

Καὶ ἐπειδὴ θέλομεν τετράγωνόν τινα, ὥστε οὗτος προστιθέμενος εἰς τὸν $9x^2$ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, λαμβάνω δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι 9· ἔστω 1 καὶ 9. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ 9 ἀφαιρέσω τὸ 1 καὶ πολλαπλασιάσω ἐφ' ἑαυτὸ τὸ ἥμισυ τῆς προκυπτούσης διαφορᾶς, θὰ ἔχω 16· οὗτος σὺν 9 σχηματίζει τετράγωνον.

Θέτω λοιπὸν τὸν προστιθέμενον τετράγωνον $16x^2$· καὶ ἂν μὲν οὗτος προστεθῇ εἰς τὸν $9x^2$ γίνεται τετράγωνος· ἐὰν δὲ εἰς τὸν x^3, γίνεται $x^3 + 16x^2$· ταῦτα εἶναι κύβος· ἔστω ἴσα $8x^3$, ἐξ ἧς $x = \frac{16}{7}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν κύβος θὰ εἶναι $\frac{4096}{343}$, ὁ δὲ τετράγωνος $\frac{2304}{49}$, ὁ δὲ προστιθέμενος εἰς αὐτοὺς τετράγωνος $\frac{4096}{49}$.

7.

Εἰς κύβον καὶ τετράγωνον νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς τετράγωνος καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος καὶ κύβος.

Ἔστω πρῶτος μὲν ὁ κύβος, δεύτερος δὲ ὁ τετράγωνος, ὁ δὲ προστιθέμενος εἰς αὐτοὺς τετράγωνος ὁ τρίτος.

Καὶ ἐπειδὴ θέλω ὁ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος, εἰς τὸν τετράγωνον τὸν δεύτερον, νὰ σχηματίζῃ κύβον, ἔστω ὅτι σχηματίζει κύβον τὸν πρῶτον· ὥστε ὁ πρῶτος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου κατὰ τὸν τρίτον, τουτέστι κατὰ τετράγωνον· διότι ὁ τρίτος εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν δὲ λάβω δύο ἀριθμοὺς τυχόντας, οἱ τετράγωνοι αὐτῶν σὺν ἢ πλὴν τὸ διπλάσιον γινόμενον οὖν, ἐκθέμενος δύο ἀριθμούς, τοὺς μὲν ἀπ' αὐτῶν τάσσειν τὸν α^ον^, ἐπεὶ ὁ α^ος^ τοῖς δυσὶ τετραγώνοις ἴσος ἐστί, τῷ ζητουμένῳ καὶ τῷ προστιθεμένῳ, τῷ γῳ καὶ τῷ βῳ τετραγώνοις, τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν τὸν γ^ον^· καὶ ἔστιν ⟨ ὁ ⟩ γ^ος^ □^ος^, ὥστε καὶ ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἐστι □^ος^.

Τετάχθω ὁ μὲν ς $\overline{α}$, ὁ δὲ ς $\overline{β}$, ἵνα ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ □^ος^· λαβὼν οὖν τοὺς ἀπ' αὐτῶν □^ους^, τάσσω τὸν α^ον^ $Δ^Υ \overline{ε}$· τὸν δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν, τὸν γ^ον^ $Δ^Υ \overline{δ}$· λοιπὸν ἄρα ἔσται τὸν β^ον^ εἶναι $Δ^Υ \overline{α}$· μετὰ γὰρ τοῦ γ^ου^ ἴσος ἐστὶ τῷ αῳ. λοιπόν ἐστι τὸν α^ον^ ποιεῖν κύβον.

$Δ^Υ$ ἄρα $\overline{ε}$ ἴσαι $K^Υ \overline{α}$, καὶ γίνεται ὁ ς ⟨ M̊ ⟩ $\overline{ε}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν κύβος ὁ α^ος^ M̊ $\overline{ρκε}$, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ β^ος^ ⟨ M̊ ⟩ $\overline{κε}$, ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ γ^ος^ M̊ $\overline{ρ}$· καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ἄλλως.

Ἔστω κύβος ὁ α^ος^, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ β^ος^, ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ γ^ος^.

Ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν προστιθέμενον □^ον^ προστεθέντα τῷ βῳ τουτέστι □ῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω τὸν α^ον^· ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸν α^ον^ συντεθέντα τῷ γῳ ποιεῖν □^ον^, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο □^ους^ ὧν ἡ σύνθεσις μετὰ ἑνὸς αὐτῶν ποιεῖ □^ον^, [διὰ τοῦτο δή, ἐπεὶ οἱ δύο □^οι^, ὅ τε προστιθέμενος τῷ βῳ καὶ ὁ β^ος^ ποιοῦσι κύβον τουτέστι τὸν α^ον^].

τετάχθωσαν οἱ δύο □^οι^, ὁ μὲν α^ος^ $Δ^Υ \overline{α}$, ὁ δὲ β^ος^ M̊ $\overline{δ}$· καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν μετὰ ἑνὸς αὐτῶν γί. $Δ^Υ \overline{β}$ M̊ $\overline{δ}$ ἴσ. □ῳ, τῷ ἀπὸ πλ. ς $\overline{β}$ ⋔ M̊ $\overline{β}$· γίνεται ὁ □^ος^ $Δ^Υ \overline{δ}$ ⟨ M̊ $\overline{δ}$ ⟩ ⋔ ς $\overline{η}$, καὶ γίνεται ὁ ς M̊ $\overline{δ}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν δ, ὁ δὲ $\overline{ις}$.

Νῦν τάξον τὸν μὲν προστιθέμενον αὐτοῖς □^ον^ $Δ^Υ \overline{ις}$, τὸν δὲ β^ον^ $Δ^Υ \overline{δ}$· ὁ ἄρα α^ος^ ἔσται $Δ^Υ \overline{κ}$· θέλομεν γὰρ συναμφοτέρῳ εἶναι αὐτόν ἴσον. λοιπὸν δεῖ $Δ^Υ \overline{κ}$ ἴσας εἶναι $K^Υ \overline{α}$, καὶ γίνεται ὁ ς M̊ $\overline{κ}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^ος^ ͵η, ὁ δὲ β^ος^ ͵αχ, ὁ δὲ προστιθέμενος ͵ςυ· τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

η.

Κύβῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά.

Ἔστω ὁ προστιθέμενος ς $\overline{α}$, ἡ δὲ τοῦ κύβου πλευρὰ ς ὁσωνδήποτε· ἔστω ς $\overline{β}$, ὁ ἄρα κύβος ἐστὶ $K^Υ \overline{η}$.

αὐτῶν σχηματίζουσι τετράγωνον. Ὀφείλω λοιπόν, λαμβάνων δύο ἀριθμούς, νὰ θέσω τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ὡς τὸν πρῶτον, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ πρὸς τὸν ζητούμενον καὶ πρὸς τὸν προστιθέμενον, τοὺς τετραγώνους τρίτον καὶ δεύτερον, ὡς τὸν τρίτον δὲ νὰ θέσω τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν· καὶ εἶναι ὁ τρίτος τετράγωνος, ὥστε καὶ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν εἶναι τετράγωνος.

Ἂς τεθῇ ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος 2x, ἵνα τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν εἶναι τετράγωνος· ἀφοῦ λάβω λοιπὸν τοὺς τετραγώνους αὐτῶν, θέτω τὸν πρῶτον $5x^2$, τὸ δὲ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν, τὸν τρίτον $4x^2$· ὑπολείπεται ἄρα ὁ δεύτερος νὰ εἶναι x^2· διότι μὲ τὸν τρίτον εἶναι ἴσος πρὸς τὸν πρῶτον. Ὑπολείπεται νὰ σχηματίσωμεν τὸν πρῶτον κύβον.

Εἶναι ἄρα $5x^2 = x^3$, ἐξ ἧς $x = 5$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· **ὁ μὲν** κύβος ὁ πρῶτος θὰ εἶναι 125, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος 25, ὁ δὲ προσ**τι**θέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος 100· καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

Ἄλλως

Ἔστω ὁ πρῶτος κύβος, ὁ δὲ δεύτερος τετράγωνος, ὁ δὲ προστιθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος.

Ἐπειδὴ λοιπὸν θέλω ὁ προστιθέμενος τετράγωνος ἀφοῦ προστεθῇ εἰς τὸν δεύτερον, τουτέστιν εἰς τετράγωνον, νὰ σχηματίζῃ κύβον, ἃς σχηματίζῃ τὸν πρῶτον· ἐπειδὴ πάλιν θέλω ὁ πρῶτος, προστεθεὶς εἰς τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρω δύο τετραγώνους, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα αὐξηθὲν κατὰ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, [διὰ τοῦτο δέ, ἐπειδὴ οἱ δύο εἶναι τετράγωνοι καὶ ὁ προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον καὶ ὁ δεύτερος σχηματίζουσι κύβον τουτέστι τὸν πρῶτον].

Ἂς τεθῶσι οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος x^2, ὁ δὲ δεύτερος 4· καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σὺν ἕνα ἐξ αὐτῶν γίνεται $2x^2 + 4 =$ τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔστω $2x - 2$· τὸ τετράγωνον τούτου εἶναι $4x^2 + 4 - 8x$, καὶ συνεπῶς $x = 4$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν εἷς θὰ εἶναι 4, ὁ δὲ ἄλλος 16.

Τώρα ἃς τεθῇ ὁ μὲν προστιθέμενος εἰς αὐτοὺς τετράγωνος 16, ὁ δὲ δεύτερος $4x^2$· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $20x^2$· διότι θέλομεν νὰ εἶναι οὗτος ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $20x^2 = x^3$, ἐξ ἧς $x = 20$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι, 8000, ὁ δὲ δεύτερος 1600, ὁ δὲ προστιθέμενος 6400. Τοῦτο δὲ ἀποδεικνύεται κατ' ἀπείρους τρόπους.

8.

Εἰς κύβον καὶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται κύβος καὶ κυβικὴ ῥίζα τούτου.

'Εὰν ἄρα ϛ $\overline{\alpha}$ προστεθῇ ϛ $\overline{\beta}$, γίνονται ϛ $\overline{\gamma}$· ἐὰν δὲ τοῖς $K^{Y}\,\overline{\eta}$, γί. $K^{Y}\,\overline{\eta}$ ϛ $\overline{\alpha}$· ταῦτα ἴσα $K^{Y}\,\overline{\kappa\zeta}$. ἀφῃρήσθωσαν οἱ $K^{Y}\,\overline{\eta}$· λοιπὸν ἄρα $K^{Y}\,\overline{\iota\theta}$ ἴσοι ϛ $\overline{\alpha}$. πάντα παρὰ ϛ. Δ^{Y} ἄρα $\overline{\iota\theta}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$.

Καὶ ἔστιν ἡ μία $\mathring{M}$ □ος· εἰ δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν $\overline{\iota\theta}$ Δ^{Y} ἦ̣ □ος, λέλυτο, ἂν ἡ ἰσότης· ἀλλὰ αἱ $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\theta}$ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ἧς ὑπερέχουσι $K^{Y}\,\overline{\kappa\zeta}$ $K^{Y}\,\overline{\eta}$, καὶ οἱ μὲν $K^{Y}\,\overline{\kappa\zeta}$ ἀπὸ ϛ $\overline{\gamma}$ κύβος εἰσίν, οἱ δὲ $K^{Y}\,\overline{\eta}$ ἀπὸ ϛ $\overline{\beta}$ κύβος ἐστίν· ὥστε τὰ $\overline{\iota\theta}$ γέγονεν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ ἀπὸ ϛ $\overline{\gamma}$ κύβος τοῦ ἀπὸ ϛ $\overline{\beta}$ κύβου. ἀλλ' οἱ μὲν ϛ $\overline{\beta}$ τῆς ὑποθέσεως εἰσίν, οἱ δὲ $\overline{\gamma}$ ἀεὶ μονάδι μείζονες τοῦ τυχόντος πλήθους τῶν τῆς πλευρᾶς ϛῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ποιῇ τετράγωνον.

"Εστω ὁ μὲν ϛ $\overline{\alpha}$, ὁ δὲ ϛ $\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ἐστὶ $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\gamma}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ταῦτα ἴσα □ῳ τῷ ἀπὸ πλ. $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ ϛ $\overline{\beta}$. γίνεται ὁ ϛ $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$· ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν $\overline{\zeta}$, ὁ δὲ $\overline{\eta}$.

"Ερχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον ϛ $\overline{\alpha}$, τὴν δὲ τοῦ κύβου πλευρὰν ϛ $\overline{\zeta}$· ὁ ἄρα κύβος ἔσται $K^{Y}\,\overline{\tau\mu\gamma}$, καὶ ὁ ϛ προστεθεὶς ἑκατέρῳ αὐτῶν ποιεῖ ὃν μὲν ϛ $\overline{\eta}$, ὃν δὲ $K^{Y}\,\overline{\tau\mu\gamma}$ ϛ $\overline{\alpha}$· θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι κύβον πλευρὰν ἔχοντα ϛ $\overline{\eta}$.

K^{Y} ἄρα $\overline{\phi\iota\beta}$ ἴσοι K^{Y} $\overline{\tau\mu\gamma}$ ϛ $\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ ἑνὸς ⟨ ιγου ⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν κύβος $\overset{,\beta\rho\varkappa\zeta}{\overline{\tau\mu\gamma}}$, ἡ δὲ πλευρὰ $\overset{\iota\gamma}{\overline{\zeta}}$, ὁ δὲ προστιθέμενος ἑνός.

θ.

Κύβῳ καὶ πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ.

"Εστω ὁ μὲν κύβος K^{Y} κυβικῶν ὁσωνδήποτε· ἔστω δὴ $\overline{\eta}$· ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ϛ $\overline{\beta}$· ⟨ ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα τὴν πλευρὰν ποιῇ κύβον, K^{Y} κυβικῶν ⋔ ϛ $\overline{\beta}$ ⟩, τουτέστι τῶν τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, $K^{Y}\,\overline{\kappa\zeta}$ ⋔ ϛ $\overline{\beta}$.

καὶ ἐὰν μὲν τοῖς ϛ $\overline{\beta}$ προστεθῶσι, ποιοῦσι $K^{Y}\,\overline{\kappa\zeta}$, καὶ ἔστιν ὁ κύβος ἀπὸ πλευρᾶς ϛ $\overline{\gamma}$· ἐὰν δὲ τοῖς $K^{Y}\,\overline{\eta}$, ποιοῦσι $K^{Y}\,\overline{\lambda\epsilon}$ ⋔ ϛ $\overline{\beta}$.

Ἔστω ὁ προστιθέμενος x, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος κύβου ὁσαδήποτε x· ἔστω 2x, ὁ κύβος ἄρα εἶναι $8x^3$.

Ἐὰν ἄρα ὁ x προστεθῇ εἰς τὸν 2x, γίνονται 3x· ἐὰν δὲ προστεθῇ εἰς τὸν $8x^3$ γίνονται $8x^3 + x$· ταῦτα ἔστω ἴσα πρὸς $27x^3$. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὁ $8x^3$· μένει ἄρα $19x^3 = x$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x. Εἶναι ἄρα $19x^2 = 1$.

Καὶ εἶναι τὸ 1 τετράγωνος· ἐὰν δὲ καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ $19x^2$ εἶναι τετράγωνος τὸ πρόβλημα θὰ εἶχε λυθῇ· ἀλλὰ $19x^2$ προέρχεται ἐκ τοῦ $27x^3$ καὶ τοῦ $8x^3$ καὶ τὸ μὲν $27x^3$ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 3x, τὸ δὲ $8x^3$ τοῦ 2x· ὥστε ὁ 19 προῆλθεν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύβος τοῦ 3x τοῦ κύβου τοῦ 2x. Ἀλλὰ ὁ μὲν 2x ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως, ὁ δὲ συντελεστὴς 3 λαμβάνεται πάντοτε μεγαλύτερος κατὰ μονάδα τοῦ τυχαίως ληφθέντος συντελεστοῦ τοῦ 2x. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἄνισοι, ἵνα ἡ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος $x + 1$, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι $3x^2 + 3x + 1$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔστω $1 - 2x$· ὅθεν εἶναι $x = 7$· ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν εἷς θὰ εἶναι 7, ὁ δὲ ἄλλος 8.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω τὸν μὲν προστιθέμενον x, τὴν δὲ κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κύβου 7x· ὁ κύβος ἄρα θὰ εἶναι $343x^3$, καὶ ὁ x προστιθέμενος εἰς ἑκάτερον τούτων σχηματίζει τὸν μὲν ἕνα 8x, τὸν δὲ ἄλλον $343x^3 + x$· θέλομεν λοιπὸν τοῦτο νὰ εἶναι κύβος ἔχων κυβικὴν ῥίζαν 8x.

Εἶναι ἄρα $512x^3 = 343x^3 + x$· ἐξ ἧς $x = \frac{1}{13}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν κύβος θὰ εἶναι $\frac{343}{2197}$, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα $\frac{7}{13}$, ὁ δὲ προστιθέμενος $\frac{1}{13}$.

9.

Εἰς κύβον καὶ κυβικὴν ῥίζαν νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται κυβικὴ ῥίζα καὶ κύβος.

Ἔστω ὁ μὲν κύβος x^3 ἔχων συντελεστὴν τυχόντα κύβον· ἔστω 8· εἶναι ἄρα ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ 2x· ⟨ ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα σχηματίζῃ τὴν κυβικὴν ῥίζαν κύβον, ἔστω $ax^3 - 2x$ ⟩, ἔνθα α ἔστω 27, 2x δὲ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου, $27x^3 - 2x$.

Καὶ ἐὰν μὲν ταῦτα προστεθῶσι εἰς τὸν 2x, σχηματίζουσι $27x^3$, καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου εἶναι 3x· ἐὰν δὲ προστεθῶσι εἰς τὸ $8x^3$ σχηματίζουσι $35x^3 - 2x$.

θέλομεν δὴ ταῦτα πλευρὰν εἶναι κυβικὴν τῶν γενομένων Κ^Υ κ̅ζ̅, τουτέστι, ς γ̅· Κ^Υ ἄρα λ̅ε̅ ⋔ ς β̅ ἴσοι ς γ̅· καὶ γίνονται ς ε̅ ἴσοι Κ^Υ λ̅ε̅· καὶ πάντα παρὰ ς· Δ^Υ ἄρα λ̅ε̅ ἴσαι Μ̊ ε̅.

καὶ γίνεται ὁ ς οὐ ῥητὸς τῷ μὴ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν □ον ἀριθμοῦ πρὸς □ον ἀριθμόν· ἀλλ' αἱ μὲν Δ^Υ λ̅ε̅ σύνθεσίς ἐστι δύο κύβων, τοῦ τε κ̅ζ̅ καὶ τοῦ η̅, αἱ δὲ Μ̊ ε̅ ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν πλευρῶν αὐτῶν· ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους οἵ συντεθέντες πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας λόγον ἕξουσιν ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς □ον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν συντεθεῖσαι Μ̊ ὁσαιδήποτε· ἔστωσαν δὴ β̅ καὶ τετάχθω ἡ μὲν τοῦ αου κύβου πλευρὰ ς α̅, ἡ ἄρα τοῦ ἑτέρου ἔσται Μ̊ β̅ ⋔ ς α̅· καὶ οἱ αὐτῶν κύβοι συντεθέντες ποιοῦσι Δ^Υ ϛ̅ Μ̊ η̅ ⋔ ς ι̅β̅.

θέλομεν οὖν ταῦτα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, τουτέστι πρὸς Μ̊ β̅, λόγον ἔχειν ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς ⟨□ον⟩ ἀριθμόν. καὶ εἰσι β̅ Μ̊ διπλάσιαι □ου· ὥστε καὶ Δ^Υ ϛ̅ Μ̊ η̅ ς ι̅β̅ διπλάσιαί εἰσι □ου· τὸ ἄρα L′ αὐτῶν ἴσον □ῳ, τουτέστι

Δ^Υ γ̅ Μ̊ δ̅ ⋔ ς ϛ̅ ἴσαι γίνονται τῷ ἀπὸ Μ̊ β̅ ⋔ ς δ̅.

καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{ιγ}{ι}$· ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἡ μὲν $\frac{ιγ}{ι}$, ἡ δὲ $\frac{ιγ}{ιϛ}$. αἴρω τὰ ιγα, καὶ τὸ L′· αὐτῶν οὖν τῶν κύβων αἱ πλευραὶ ἡ μὲν ε̅, ἡ δὲ η̅.

Ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ς ε̅· ὁ ἄρα κύβος ἔσται Κ^Υ ρ̅κ̅ε̅, ὁ δὲ προστιθέμενος, κύβος ἀπὸ τοῦ η̅, τουτέστι Κ^Υ φ̅ι̅β̅ ⋔ ς ε̅, καὶ προστεθεὶς ς ε̅, ποιεῖ κύβον, τοῖς δὲ ρ̅κ̅ε̅ Κ^Υ προστεθεὶς ποιεῖ Κ^Υ χ̅λ̅ζ̅ ⋔ ς ε̅· θέλομεν οὖν ταῦτα κυβικὴν εἶναι πλ. Κ^Υ φ̅ι̅β̅.

ς ἄρα η̅ ἴσοι εἰσὶ Κ^Υ χ̅λ̅ζ̅ ⋔ ς ε̅, καὶ γίνεται ὁ ς ἑνὸς ⟨ζου⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν κύβος $\frac{τμγ}{ρκε}$, ὁ δὲ πλευρὰ $\frac{ζ}{ε}$, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς $\frac{τμγ}{σξζ}$.

ι.

Εὑρεῖν δύο κύβους ἴσους ταῖς ἰδίαις πλευραῖς.

Ἔστωσαν δὴ αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἐν ς, ἡ μὲν ς β̅, ἡ δὲ ς γ̅· οἱ ἄρα κύβοι

Θέλομεν λοιπὸν ταῦτα νὰ εἶναι κυβικὴ ῥίζα τοῦ προκύψαντος $27x^3$, τουτέστι $3x$· εἶναι ἄρα $35x^3 - 2x = 3x$· ἐκ ταύτης εἶναι $35x^3 = 5x$· διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· εἶναι ἄρα $35x^2 = 5$.

Καὶ γίνεται ὁ x οὐχὶ ῥητός, διότι οἱ συντελεσταὶ (35 καὶ 5) δὲν ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν (Εὐκλ. X 8, 9)· ἀλλὰ ὁ 35 ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 εἶναι ἄθροισμα δύο κύβων, καὶ τοῦ 27 καὶ τοῦ 8, ὁ δὲ 5 εἶναι ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τούτων· ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο κύβους, οἱ ὁποῖοι προστεθέντες εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν αὐτῶν νὰ ἔχωσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι αὐτῶν προστεθεῖσαι, τυχὼν ἀριθμός· ἔστω 2· καὶ ἂς ταχθῇ τοῦ μὲν πρώτου κύβου, ἡ κυβικὴ ῥίζα x, θὰ εἶναι ἄρα ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἄλλου $2 - x$· καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι $6x^2 + 8 - 12x$.

Θέλομεν λοιπόν, ἵνα ταῦτα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, τουτέστι πρὸς 2, ἔχωσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ εἶναι ὁ 2 διπλάσιον τετραγώνου (τοῦ 1^2)· ὥστε καὶ $6x^2 + 8 - 12x$ εἶναι διπλάσιον τετραγώνου· τὸ ἥμισυ ἄρα αὐτῶν εἶναι τετράγωνος, τουτέστι $3x^2 + 4 - 6x =$ τετράγωνος, ἔστω $= (2 - 4x)^2$.

Ἐξ ἧς $x = \frac{10}{13}$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ἡ μὲν μία ῥίζα θὰ εἶναι $\frac{10}{13}$, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{16}{13}$. Ἀπαλείφω τοὺς παρονομαστὰς 13, καὶ λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῶν ἀριθμητῶν· εἶναι λοιπὸν αὐτῶν τῶν κύβων αἱ κυβικαὶ ῥίζαι, ἡ μὲν 5, ἡ δὲ 8.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κύβου, $5x$· ὁ κύβος ἄρα θὰ εἶναι $125x^3$, ὁ δὲ προστιθέμενος, σχηματιζόμενος ἐκ τοῦ κύβου τοῦ 8, ἔστω $512x^3 - 5x$, ὁπότε προστιθέμενος εἰς τὸν $5x$, δίδει κύβον, ἐὰν δὲ προστεθῇ εἰς τὸν $125x^3$ δίδει $637x^3 - 5x$· θέλομεν λοιπὸν ταῦτα νὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ $512x^3$.

Εἶναι ἄρα $8x = 637x^3 - 5x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{7}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν κύβος θὰ εἶναι $\frac{125}{343}$, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα $\frac{5}{7}$, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς $\frac{267}{343}$.

10.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο κύβοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τούτων.

Ἔστωσαν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν κύβων ἐκπεφρασμέναι συναρτήσει τοῦ x, συντεθέντες ποιήσουσι $K^{Y}\overline{\lambda\varepsilon}$ ἴσους ταῖς πλευραῖς, τουτέστιν ϛ $\overline{\varepsilon}$· καὶ πάντα παρὰ ϛ.

Δ^{Y} ἄρα $\overline{\lambda\varepsilon}$ ἴσαι $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ οὐ ῥητός.

ἀλλ' αἱ $\Delta^{Y}\overline{\lambda\varepsilon}$ σύνθεσίς εἰσι κύβων δύο, τοῦ τε $\overline{\eta}$ καὶ τοῦ $\overline{\kappa\zeta}$, αἱ δὲ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$ συντεθεισῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν· ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν κύβους δύο, οἳ συντεθέντες καὶ μερισθέντες εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας, ποιοῦσι τὴν παραβολὴν τετράγωνον.

Τοῦτο δὲ προεδείχθη, καὶ εἰσιν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ϛ $\overline{\eta}$, ἡ δὲ ϛ $\overline{\varepsilon}$· ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, ἣν μὲν ϛ $\overline{\eta}$, ἣν δὲ ϛ $\overline{\varepsilon}$· καὶ οἱ κύβοι συντεθέντες γίνονται $K^{Y}\overline{\chi\lambda\zeta}$. ταῦτα ἴσα ταῖς πλευραῖς, τουτέστιν ϛ $\overline{\iota\gamma}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ ἑνὸς ⟨ζ^{ov}⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ἡ μὲν τοῦ α^{ov} κύβου πλ. $\overline{\varepsilon}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\overline{\eta}$· αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν $\overset{\tau\mu\gamma}{\overline{\rho\kappa\varepsilon}}$, ὃς δὲ $\overset{\tau\mu\gamma}{\overline{\varphi\iota\beta}}$.

ια.

Εὑρεῖν δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἔσται τῇ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχῇ.

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἡ μὲν ϛ $\overline{\beta}$, ἡ δὲ ϛ $\overline{\gamma}$· καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων $K^{Y}\overline{\iota\theta}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν ϛ $\overline{\alpha}$. ϛ ἄρα $\overline{\alpha}$ ἴσος $K^{Y}\overline{\iota\theta}$.

Καὶ γίνεται ὁ ϛ οὐ ῥητὸς τῷ μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον □^{ov} πρὸς □^{ov}. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἡ μὲν μία $2x$, ἡ δὲ ἄλλη $3x$· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν κύβων θὰ εἶναι $35x^3$, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, τουτέστι $5x$· διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ x.

Εἶναι ἄρα $35x^2 = 5$. ἐξ ἧς x οὐχὶ ῥητός.

Ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς 35 τοῦ x^2 εἶναι ἄθροισμα δύο κύβων, καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 27, τὸ δὲ 5 εἶναι ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τούτων· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο κύβοι, οἱ ὁποῖοι προστεθέντες νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν των τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Τοῦτο δὲ ἀπεδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, καὶ εἶναι αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν κύβων, ἡ μὲν $8x$, ἡ δὲ $5x$· ἔρχομαι λοιπὸν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω τὰς κυβικὰς ῥίζας, τὴν μὲν μίαν $8x$, τὴν δὲ ἄλλην $5x$· καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων εἶναι $637x^3$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, τουτέστιν $13x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{7}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· θὰ εἶναι τοῦ μὲν πρώτου κύβου ἡ κυβικὴ ῥίζα $\frac{5}{7}$, τοῦ δὲ ἄλλου θὰ εἶναι $\frac{8}{7}$· αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι θὰ εἶναι, ὁ μὲν εἷς $\frac{125}{343}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{512}{343}$.

11.

Εὑρεῖν δύο κύβους, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τῶν κύβων.

Ἔστωσαν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν κύβων, ἡ μὲν μία $2x$, ἡ δὲ ἄλλη $3x$· καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἐκ τούτων κύβων εἶναι $19x^3$, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κυβικῶν ῥιζῶν εἶναι x. Εἶναι ἄρα $x = 19x^3$. Ἐξ ἧς ὁ x δὲν γίνεται ῥητός, διότι οἱ συντελεσταὶ (1 καὶ 19) δὲν ἔχουν λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν (Εὐκλ. X 8, 9)· ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο κύβοι, ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κυβικῶν των ῥιζῶν νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν κύβων, ἡ μὲν μία x, ἡ δὲ ἄλλη $x + 1$, ἵνα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι τετράγωνος τουτέστι τὸ 1· καὶ ἐπειδὴ τοῦ μὲν ἑνὸς ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι x, τοῦ δὲ ἄλλου $1 + x$, θὰ εἶναι ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν κυβικῶν ῥιζῶν 1 ⟨ ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων εἶναι $3x^2 + 3x + 1$ ⟩. Θέλομεν λοιπὸν τὸ $3x^2 + 3x + 1$ πρὸς τὸ 1, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τὸ γινόμενον ἄρα αὐτῶν πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνος· εἶναι δὲ τὸ γινόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν □ος ⟨ ἀριθμὸς ⟩ πρὸς □ον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ϛ $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ ϛ $\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$, ἵνα καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ᾖ □ος τουτέστι Μ̊ $\overline{\alpha}$· καὶ ἐπεὶ ἐστι τοῦ μὲν πλ. ϛ $\overline{\alpha}$, τοῦ δὲ Μ̊ $\overline{\alpha}$ καὶ ϛ $\overline{\alpha}$, ἔσται ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν Μ̊ $\overline{\alpha}$, ⟨ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν κύβων Δ^{Y} $\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\gamma}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$ ⟩ θέλομεν οὖν Δ^{Y} $\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\gamma}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$ πρὸς τὴν Μ̊ $\overline{\alpha}$, τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν, λόγον ἔχειν ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς □ον ἀριθμόν· τὸν ἄρα ὑπ' αὐτῶν δεῖ εἶναι □ον· ἔστι δὲ ὁ ὑπ' αὐτῶν Δ^{Y} $\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\gamma}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$. ταῦτα ἴσα □ῳ τῷ ἀπὸ πλ.. Μ̊ $\overline{\alpha}$ ⋔ ϛ $\overline{\beta}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\overline{\zeta}$· ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ ἡ μὲν $\overline{\zeta}$, ἡ δὲ $\overline{\eta}$.

Ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὰς πλ. τῶν κύβων, ἣν μὲν ϛ $\overline{\zeta}$, ἣν δὲ ϛ $\overline{\eta}$· καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχὴ ἐστιν ϛ $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχὴ K^{Y} $\overline{\rho\xi\theta}$.

K^{Y} ἄρα $\overline{\rho\xi\theta}$ ἴσοι ϛ $\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ ἑνὸς ⟨ ιγου ⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν $\overline{\zeta}$, ἡ δὲ $\overline{\eta}$.

ιβ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβῳ προσλαβόντι τὸν μείζονα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ μὲν ϛ $\overline{\beta}$, ὁ δὲ ϛ $\overline{\gamma}$. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ K^{Y} $\overline{\kappa\zeta}$ ϛ $\overline{\beta}$, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ K^{Y} $\overline{\eta}$ ϛ $\overline{\gamma}$.

K^{Y} ἄρα $\overline{\eta}$ ϛ $\overline{\gamma}$ ἴσοι εἰσὶ K^{Y} $\overline{\kappa\zeta}$ ϛ $\overline{\beta}$. καὶ πάντα παρὰ ϛ. καὶ γίνονται Δ^{Y} $\overline{\iota\theta}$ ἴσαι Μ̊ $\overline{\alpha}$, καὶ ὁ ϛ οὐ ῥητός.

ἀλλὰ αἱ μὲν Δ^{Y} $\overline{\iota\theta}$ δύο εἰσὶ κύβων ὑπεροχή, ἡ δὲ Μ̊ $\overline{\alpha}$ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐστιν ὑπεροχή. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχὴν λόγον ἔχει ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς □ον ἀριθμόν.

Τοῦτο δὲ προεδείχθη, καὶ εἰσιν αἱ πλ. τῶν κύβων, ἡ μὲν $\overline{\zeta}$, ἡ δὲ $\overline{\eta}$. ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω ὃν μὲν ϛ $\overline{\zeta}$, ὃν δὲ ϛ $\overline{\eta}$. καὶ γίνονται K^{Y} $\overline{\tau\mu\gamma}$ ϛ $\overline{\eta}$ ἴσοι K^{Y} $\overline{\varphi\iota\beta}$ ϛ $\overline{\zeta}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ ἑνὸς (ιγου).

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $\overline{\zeta}$, ὁ δὲ $\overline{\eta}$. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ιγ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν καὶ συναμφότερος καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιῇ τετράγωνον.

Ἐὰν ἄρα ἀπό τινος □ου ἀφέλω Μ̊ $\overline{\alpha}$, ἕξω αον· πλάσσω τινὰ □ον ἀπὸ ϛ αὐτῶν $3x^2 + 3x + 1$. Ταῦτα ἔστω ὅτι εἶναι ἴσα πρὸς $(1 - 2x)^2$· ἐξ ἧς $x = 7$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Αἱ κυβικαὶ ῥίζαι θὰ εἶναι ἡ μὲν μία 7, ἡ δὲ ἄλλη 8.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω τὰς κυβικὰς ῥίζας τῶν κύβων, τὴν μὲν μίαν $7x$, τὴν δὲ ἄλλην $8x$· καὶ ἡ μὲν διαφορὰ τούτων εἶναι x, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι $169x^3$.

Εἶναι ἄρα $169x^3 = x$· ἐξ ἧς $x = \frac{1}{13}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν κύβων, ἡ μὲν μία 7, ἡ δὲ ἄλλη 8.

12.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου σὺν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύβον τοῦ μικροτέρου σὺν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ μὲν εἷς $2x$, ὁ δὲ ἄλλος $3x$. Καὶ ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ σὺν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν γίνεται $27x^3 + 2x$, ὁ δὲ κύβος τοῦ μικροτέρου σὺν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν γίνεται $8x^3 + 3x$.

Εἶναι ἄρα $8x^3 + 3x = 27x^3 + 2x$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x. Ὁπότε εἶναι $19x^2 = 1$, καὶ ὁ x δὲν εἶναι ῥητός.

Ἀλλὰ ὁ μὲν 19 εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν συντελεστῶν τῶν δύο κύβων, τὸ δὲ 1 εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τῶν κύβων αὐτῶν. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο κύβους τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, ὃν λόγον ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Τοῦτο δὲ προαπεδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, καὶ εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν 7, ἡ δὲ 8. Ἔρχομαι λοιπὸν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω τὸν μὲν ἕνα $7x$, τὸν δὲ ἄλλον $8x$. Καὶ γίνονται $343x^3 + 8x = 512x^3 + 7x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{13}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν εἷς 7, ὁ δὲ ἄλλος 8. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

13.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἡ διαφορά των, σὺν 1, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω 1, θὰ ἔχω τὸν πρῶτον· σχηματίζω ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα νὰ εἶναι ὁσαδήποτε x

ὁσωνδήποτε καὶ Μ̊ α̅· καὶ ἔστω ϛ γ̅ Μ̊ α̅. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ □ος, Δ^Υ θ̅ ϛ ϛ̅ Μ̊ α̅, καὶ ἐὰν ἀφέλω τὴν Μ̊ α̅, τάσσω τὸν αον Δ^Υ θ̅ ϛ ϛ̅.

πάλιν ἐπεὶ θέλομεν τὸν αον καὶ τὸν βον μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖν □ον, ἀλλὰ συναμφότερος ὁ αος καὶ ὁ βος μετὰ Μ̊ α̅, ⟨ὁ βος μετὰ Μ̊ α̅⟩ καὶ Δ^Υ θ̅ ϛ ϛ̅ εἰσιν, ὁ δὲ βος μετὰ Μ̊ α̅ ἐστι □ος, γέγονέ μοι ζητῆσαι τίς □ος μετὰ Δ^Υ θ̅ ϛ ϛ̅ ποιεῖ □ον.

ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἐστι Δ^Υ θ̅ ϛ ϛ̅. ⟨μετροῦσιν ϛ θ̅ Μ̊ ϛ̅ κατὰ ϛ α̅· καὶ ἐὰν τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ ἡμίσεος τάξω τὴν τοῦ ἐλάσσονος □ου πλ., ἔσται ϛ δ̅ Μ̊ γ̅⟩· ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται Δ^Υ ιϛ̅ ϛ κδ̅ Μ̊ θ̅· ἀφαιρῶ Μ̊ α̅ καὶ τάσσω τὸν βον Δ^Υ ιϛ̅ ϛ κδ̅ Μ̊ η̅· ἔστι δὲ καὶ ὁ αος Δ^Υ θ̅ ϛ ϛ̅· καὶ ἑκάτερος μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖ □ον.

λοιπόν ἐστι τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν μετὰ Μ̊ α̅· ἔστι Δ^Υ ζ̅ ϛ ιη̅ Μ̊ θ̅ ἴσ. □ῳ τῷ ἀπὸ πλ. Μ̊ γ̅ ⋔ ϛ γ̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ ιη̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος ͵γκδ̅, ὁ δὲ βος ͵εχκδ̅, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ιδ.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ἀριθμοὺς οἳ συντεθέντες ἴσοι ἔσονται ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις.

Ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ἴση ἐστὶ τοῖς τρισίν, ἀλλ' αἱ τῶν τριῶν ὑπεροχαὶ δίς ἐστιν ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχή, δὶς ἄρα ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τοῖς τρισί.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων □ος Μ̊ α̅, ὁ δὲ μέγιστος Δ^Υ α̅ ϛ β̅ Μ̊ α̅· καὶ δὶς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ Δ^Υ β̅ ϛ δ̅· εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς □οι, ὧν οἱ δύο εἰσὶ Δ^Υ α̅ ϛ β̅ Μ̊ β̅· ⟨λοιπὸς ἄρα ὁ μέσος ἔσται Δ^Υ α̅ ϛ β̅ ⋔ Μ̊ β̅·⟩ δεῖ ἄρα ταῦτα ἴσα εἶναι □ῳ· ἔστω τῷ ἀπὸ πλ. ϛ α̅ ⋔ Μ̊ δ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ εων θ̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος $\overset{\kappa\epsilon}{\overline{\rho\text{ϙ}\varsigma}}$*, ὁ δὲ μέσος* $\overset{\kappa\epsilon}{\overline{\rho\kappa\alpha}}$*, ὁ δὲ ἐλάχιστος Μ̊ α̅. καὶ πάντα κεκις. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρϙϛ̅, ὁ δὲ μέσος ρκα̅, ὁ δὲ ἐλάχιστος κε̅.*

καὶ 1· καὶ ἔστω $3x + 1$. Ὁ τετράγωνος ἄρα θὰ εἶναι $9x^2 + 6x + 1$, καὶ ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θέτω τὸν πρῶτον $9x^2 + 6x$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλομεν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος σὺν 1 νὰ σχηματίζωσι τετράγωνον, εἶναι ὅμως τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου σὺν $1 =$ ⟨ὁ δεύτερος σὺν 1⟩ σὺν $9x^2 + 6x$, ὁ δὲ δεύτερος σὺν 1 εἶναι τετράγωνος, γίνεται τὸ πρόβλημα νὰ ζητήσω ποῖος τετράγωνος σὺν $9x^2 + 6x$ σχηματίζει τετράγωνον.

Λαμβάνω δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι $9x^2 + 6x$. ⟨Εἶναι οὗτοι $9x + 6$ καὶ x· καὶ ἐὰν ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μικροτέρου λάβω τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τούτων θὰ ἔχω $4x + 3$⟩· τοῦτο ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του γίνεται $16x^2 + 24x + 9$· ἀφαιρῶ τὴν μονάδα καὶ θέτω τὸν δεύτερον $16x^2 + 24x + 8$· εἶναι δὲ καὶ ὁ πρῶτος $9x^2 + 6x$· καὶ ἑκάτερος σὺν 1 σχηματίζει τετράγωνον.

Ὑπολείπεται ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτῶν σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον· εἶναι δὲ αὐτὴ $7x^2 + 18x + 9 =$ τετράγωνος, ἔστω τετραγωνικῆς ῥίζης $3 - 3x$, ἐξ ἧς $x = 18$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 3024, ὁ δὲ δεύτερος 5624, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

14.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῆς διαφορᾶς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μεσαίου, καὶ τῆς διαφορᾶς τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ τῆς διαφορᾶς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τῶν τριῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, εἶναι ἄρα τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν.

Ἄς τεθῇ ὁ μικρότερος τετράγωνος 1, ὁ δὲ μέγιστος $x^2 + 2x + 1$· καὶ τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $2x^2 + 4x$· εἶναι δὲ τοῦτο ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων, τῶν ὁποίων οἱ δύο ἔχουν ἄθροισμα $x^2 + 2x + 2$· (θὰ εἶναι ἄρα ὁ ὑπόλοιπος, ὁ μεσαῖος $x^2 + 2x - 2$)· πρέπει ἄρα ταῦτα νὰ εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον· ἔστω πρὸς τὸ $(x - 4)^2$. Ἐξ ἧς $x = \frac{9}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν μέγιστος θὰ εἶναι $\frac{196}{25}$, ὁ δὲ μεσαῖος $\frac{121}{25}$, ὁ δὲ ἐλάχιστος 1. Καὶ πολλαπλασιάζωμεν ὅλα ἐπὶ 25· ὁ μὲν μέγιστος θὰ εἶναι 196, ὁ δὲ μεσαῖος 121, ὁ δὲ μικρότερος 25.

ιε.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες καὶ ἐπὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιασθέντες ποιῶσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἐπιτετάχθω δὴ συναμφότερον τὸν α^{ον} καὶ τὸν β^{ον} ἐπὶ τὸν γ^{ον} πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\lambda\varepsilon}$, συναμφότερον δὲ τὸν β^{ον} καὶ τὸν γ^{ον} ἐπὶ τὸν α^{ον} πολλαπλασιασθέντα ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\kappa\zeta}$, καὶ ἔτι συναμφότερον τὸν α^{ον} καὶ τὸν γ^{ον} πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν β^{ον} ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\lambda\beta}$.

Τετάχθω ὁ γ^{ος} ς $\overline{\alpha}$· λοιπὸν ἄρα ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} ς$^{\times}$ $\overline{\lambda\varepsilon}$· ἔστω ὁ α^{ος} ς$^{\times}$ $\overline{\iota}$· ὁ β^{ος} ἔσται ς$^{\times}$ $\overline{\kappa\varepsilon}$.

Καὶ λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα· τὸ συναμφότερον τὸν β^{ον} καὶ τὸν γ^{ον} ἐπὶ τὸν α^{ον} ποιεῖν $\mathring{M}^{\kappa\zeta}$, ⟨καὶ ἔτι τὸ συναμφότερον τὸν α^{ον} καὶ τὸν γ^{ον} ἐπὶ τὸν β^{ον} ποιεῖν $\mathring{M}\,\overline{\lambda\beta}$⟩. ἀλλὰ ὁ β^{ος} καὶ ὁ γ^{ος} ἐπὶ τὸν α^{ον} ⟨ποιεῖ⟩ $\mathring{M}\,\overline{\iota}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\sigma\nu}$· $\mathring{M}$ ἄρα $\overline{\iota}$ μετὰ $\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\sigma\nu}$ ἴσαι $\mathring{M}\,\overline{\kappa\zeta}$. ὁ δὲ γ^{ος} καὶ ὁ α^{ος} ἐπὶ τὸν β^{ον} ποιεῖ

$\mathring{M}\,\overline{\kappa\varepsilon}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\sigma\nu}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\lambda\beta}$, καὶ $\mathring{M}\,\overline{\iota}$ καὶ $\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\sigma\nu}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\kappa\zeta}$. καὶ ὑπερέχουσιν αἱ $\mathring{M}$, τὰς $\mathring{M}$, $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· ὡσεὶ καὶ αἱ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\varepsilon}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\sigma\nu}$, $\mathring{M}\,\overline{\iota}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\sigma\nu}$ ὑπερεῖχον $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$, ἣν ἂν ἴση ἡ ὑπεροχή.

ἀλλὰ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\varepsilon}$ ἐκ τοῦ β^{ου} εἰσίν, αἱ δὲ $\mathring{M}\,\overline{\iota}$ ἐκ τοῦ α^{ου} εἰσίν. θέλομεν οὖν τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· αὐτοὶ δὲ ὁ α^{ος} καὶ ὁ β^{ος} οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ συναμφότεροι $\mathring{M}\,\overline{\lambda\varepsilon}$ εἰσίν. γέγονεν οὖν μοι τὸν $\overline{\lambda\varepsilon}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ὑπερέχῃ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· καὶ ἔστιν ὁ μὲν $\overline{\iota\varepsilon}$, ὁ δὲ $\overline{\kappa}$.

τάσσω τὸν μὲν α^{ον} ς$^{\times}$ $\overline{\iota\varepsilon}$, τὸ δὲ β^{ον} ς$^{\times}$ $\overline{\kappa}$· καὶ συναμφότερος ὁ β^{ος} καὶ ὁ γ^{ος} ἐπὶ τὸν α^{ον} ποιεῖ $\mathring{M}\,\overline{\iota\varepsilon}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\tau}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\kappa\zeta}$· συναμφότερος δὲ ὁ α^{ος} καὶ ὁ γ^{ος} ἐπὶ τὸν β^{ον} ποιεῖ $\mathring{M}\,\overline{\kappa}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\tau}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\lambda\beta}$. καὶ ἐὰν $\mathring{M}\,\overline{\kappa}\,\Delta^{\Upsilon}{}^{\times}\,\overline{\tau}$ ἰσώσω $\mathring{M}\,\overline{\lambda\beta}$, γίνεται ὁ ς $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, ὁ δὲ β^{ος} $\mathring{M}\,\overline{\delta}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$.

15.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἄλλον δίδῃ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἂς ἐπιταχθῇ, ὅπως τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν τρίτον δίδῃ 35, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν πρῶτον δίδῃ 27, καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδῃ 32.

Ἂς τεθῇ ὁ τρίτος x· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου $\frac{35}{x}$· ἔστω ὁ πρῶτος $\frac{10}{x}$· ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\frac{25}{x}$.

Καὶ ὑπολείπονται δύο ἐπιτάγματα· τὸ ἄθροισμα, δευτέρου καὶ τρίτου, ἐπὶ τὸν πρῶτον νὰ δίδῃ 27 (καὶ ἀκόμη πρώτου καὶ τρίτου, ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ δίδῃ 32). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον δίδει $10 + \frac{250}{x^2}$. εἶναι ἄρα $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει :

$25 + \frac{250}{x^2} = 32$, καὶ ἔχομεν $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἐξισώσεων εἶναι 5, ἤτοι ἔπρεπε νὰ εἶναι $(25 + \frac{250}{x^2}) - (10 + \frac{250}{x^2}) = 5$.

Ἀλλὰ ὁ 25 προέρχεται ἐκ τοῦ δευτέρου, ἐν ᾧ ὁ 10 προέρχεται ἐκ τοῦ πρώτου. Θέλομεν λοιπὸν ἡ διαφορὰ αὐτῶν νὰ εἶνα 5· αὐτοὶ δὲ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δὲν εἶναι τυχόντες, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα των εἶναι 35. Τίθεται λοιπὸν τὸ ζήτημα νὰ διαιρέσω τὸν 35 εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ εἷς ὑπερέχῃ τοῦ ἄλλου κατὰ 5· καὶ εἶναι ὁ μὲν εἷς 15, ὁ δὲ ἄλλος 20.

Θέτω τὸν μὲν πρῶτον $\frac{15}{x}$, τὸν δὲ δεύτερον $\frac{20}{x}$· καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον δίδει $15 + \frac{300}{x^2} = 27$· τὸ ἄθροισμα δὲ πρώτου καὶ τρίτου ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει $20 + \frac{300}{x^2} = 32$. Καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $20 + \frac{300}{x^2} = 32$ προκύπτει $x = 5$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι 3, ὁ δὲ δεύτερος 4, ὁ δὲ τρίτος 5.

ιϛ.

Εὑρεῖν ⟨τρεῖς⟩ ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ μέσος ϛ ὁσωνδήποτε· ἔστω ϛ δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ α^{ον} □^{ον} προσλαβόντα τὸν β^{ον} ποιεῖν □^{ον}, ἀπῆκται εἰς τὸ εὑρεῖν τίς □^{ος} προσλαβὼν ϛ δ ποιεῖ □^{ον}.

Ζήτησον πρῶτον ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπό ἐστιν ϛ δ· μετροῦσιν ϛ β κατὰ Μ̊ β· καὶ ἐὰν τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ ∠ʹ τάξω τὸν α^{ον}, ἔσται ϛ α ⋔ Μ̊ α, καὶ λέλυταί μοι ὥστε τὸν ἀπὸ τοῦ α^{ου} □^{ον} προσλαβόντα τὸν β^{ον} ποιεῖν □^{ον}.

δεῖ δὲ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μέσου □^{ον} προσλαβόντα τὸν γ^{ον} ποιεῖν □^{ον}, τουτέστι Δ^{Υ} ιϛ μετὰ τοῦ γ^{ου} ⟨ποιεῖν⟩ □^{ον}· ἐὰν ἄρα ἀπό τινος □^{ου} ἀφέλω τὰς Δ^{Υ} ιϛ, ἕξω τὸν γ^{ον}· τάσσω τὸν □^{ον} ἀπὸ τῆς πλ. τῶν Δ^{Υ} ιϛ, ϛ δ Μ̊ α· αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ □^{ος} Δ^{Υ} ιϛ ϛ η Μ̊ α. ἐὰν ἀφέλω τὰς Δ^{Υ} ιϛ, λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ γ^{ος} ϛ η Μ̊ α.

πάλιν, ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς ἴσους εἶναι □^{ῳ}, εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ϛ ιγ, ταῦτα ἴσα □^{ῳ}· ἔστω τετραγωνικαῖς Δ^{Υ} ρξθ· καὶ γίνεται ὁ ϛ Δ^{Υ} ιγ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ α^{ος} Δ^{Υ} ιγ ⋔ Μ̊ α, ὁ β^{ος} Δ^{Υ} νβ, ὁ γ^{ος} Δ^{Υ} ρδ Μ̊ α, καὶ λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ γ^{ου} □^{ον}, τουτέστι Δ^{Υ}Δ α. ωιϛ Δ^{Υ} ση Μ̊ α, μετὰ τοῦ α^{ου}, τουτέστι Δ^{Υ} ιγ ⋔ Μ̊ α, ποιεῖν □^{ον}· ποιεῖ δὲ Δ^{Υ}Δ α. ωιϛ Δ^{Υ} σκα ἴσ. □^{ῳ}. πάντα παρὰ Δ^{Υ}· γίνονται ἄρα Δ^{Υ} α. ωιϛ Μ̊ σκα ἴσ. □^{ῳ}, τῷ ἀπὸ πλ. ϛ ρδ Μ̊ α. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{νβ}{νε}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} γ. $\frac{,βψδ}{,ϛχκα}$, ὁ δὲ β^{ος} ιε. $\frac{,βψδ}{,ζτ}$, ὁ δὲ γ^{ος} λα. $\frac{,βψδ}{,ζτδ}$.

ιζ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψας τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω πάλιν ὁ μέσος ϛ δ, καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ α^{ου} □^{ον} λείψαντα τὸν β^{ον}, τουτέστι τοὺς δ ϛ, ποιεῖν □^{ον}, ἀπῆκταί μοι ⟨εἰς τὸ⟩ εὑρεῖν τίς ὁ □^{ος} λείψας ϛ δ ποιεῖ □^{ον}.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου αὐτῶν σὺν τὸν ἑπόμενόν του σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ ὁ μεσαῖος ὁσαδήποτε x· ἔστω 4x. Καὶ ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου σὺν τὸν δεύτερον σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ποῖος τετράγωνος σὺν 4x σχηματίζει τετράγωνον.

Ζήτησον πρῶτον δύο ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι 4x· οὗτοι εἶναι οἱ 2x καὶ 2· καὶ ἐὰν θέσω ὡς πρῶτον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, θὰ εἶναι $x - 1$, καὶ ἔχει ἤδη λυθῇ, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου σὺν τὸν δεύτερον (μεσαῖον) νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πρέπει δὲ καὶ ὁ τετράγωνος τοῦ μεσαίου σὺν τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον τουτέστι, $16x^2$ σὺν τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω $16x^2$ θὰ ἔχω τὸν τρίτον· λαμβάνω τὸν τετράγωνον ἐκ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $16x^2$ τοῦ 4x, σὺν 1· θὰ εἶναι ἄρα αὐτὸς ὁ τετράγωνος $16x^2 + 8x + 1$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὸ $16x^2$, θὰ ἔχω ὡς ὑπόλοιπον τὸν τρίτον, $8x + 1$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἰσοῦται πρὸς τετράγωνον, εἶναι δὲ τοῦτο 13x, ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον· ἔστω $169x^2$· καὶ γίνεται ὁ $x = 13x^2$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $13x^2 - 1$, ὁ δεύτερος $52x^2$, ὁ τρίτος $104x^2 + 1$ καὶ ἐλύθησαν οὕτω, συναρτήσει τοῦ x, τρία τῶν ἐπιταγμάτων.

Ὑπολείπεται ὅπως καὶ ὁ τετράγωνος τοῦ τρίτου, τουτέστι ὁ $10816x^4 + 208x^2 + 1$, σὺν τὸν πρῶτον, τουτέστι $13x^2 - 1$, σχηματίζῃ τετράγωνον ἤτοι $10816x^4 + 221x^2 =$ τετράγωνος. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· εἶναι ἄρα $10816x^2 + 221 =$ τετράγωνος, ἔστω $(104x + 1)^2$. Ἐξ ἧς $x = \frac{55}{52}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{36621}{2704}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{157300}{2704}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{317304}{2704}$.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου αὐτῶν μεῖον τὸν ἑπόμενόν του σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ πάλιν ὁ μεσαῖος 4x, καὶ ἐπειδὴ θέλω, ὁ τετράγωνος τοῦ πρώτου μεῖον τὸν δεύτερον τουτέστι τὸν 4x νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ποῖος τετράγωνος μεῖον 4x σχηματίζει τετράγωνον·

Καὶ ζητῶ πρότερον ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπό ἐστιν ς $\overline{δ}$. *μετροῦσι δὲ* ς^{οὺς} *δ,* $\mathring{M}\overline{β}$ *κατὰ* ς $\overline{β}$. *νῦν τῆς συνθέσεως αὐτῶν λαβὼν τὸ* L′, *τάσσω τὸν* α^{ον} ς $\overline{α}$ $\mathring{M}\overline{α}$, *καὶ λέλυταί μοι ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.*

πάλιν, ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου} □^{ον}, *τουτέστι* $Δ^{Υ}\overline{ις}$, *λείψαντα τὸν* γ^{ον}, *ποιεῖν* □^{ον}, *ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν* $Δ^{Υ}\overline{ις}$ *ἄρωμέν τινα* □^{ον}, *ἀπὸ* ς $\overline{δ}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{α}$, *γίνονται* $Δ^{Υ}\overline{ις}$ $\mathring{M}\overline{α}$ ⋔ ς $\overline{η}$· *ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ* $Δ^{Υ}\overline{ις}$· *λοιποὶ* ς $\overline{η}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{α}$ *τάσσω οὖν τὸν* γ^{ον} ς $\overline{η}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{α}$· *καὶ λέλυται ἕτερον ἐπίταγμα.*

πάλιν, ἐπεὶ θέλω τοὺς τρεῖς, τουτέστιν ς $\overline{ιγ}$, *ἴσους εἶναι* □φ, *ἔστω* $Δ^{Υ}$ *ὁ ἴσος* $\overline{ρξθ}$; *καὶ γίνεται ὁ* ς $Δ^{Υ}\overline{ιγ}$. *ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν* α^{ος} $Δ^{Υ}\overline{ιγ}$ $\mathring{M}\overline{α}$, *ὁ δὲ* β^{ος} $Δ^{Υ}\overline{νβ}$, *ὁ δὲ* γ^{ος} $Δ^{Υ}\overline{ρδ}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{α}$, *καὶ πάλιν λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων.*

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ γ^{ου} □^{ον} *λείψαντα τὸν* α^{ον} *ποιεῖν* □^{ον}. *ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τοῦ* γ^{ου} □^{ος} *λείψας τὸν* α^{ον} *ποιεῖ* $Δ^{Υ}Δ\overline{α}$. $\overline{ωις}$ ⋔ $Δ^{Υ}\overline{σκα}$ *ἴσ.* □φ, *καὶ πάντα παρὰ* $Δ^{Υ}$· *γίνονται* $Δ^{Υ}\overline{α}$. $\overline{ωις}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{σκα}$ *ἴσ.* □φ· *τῷ ἀπὸ πλ.* ς $\overline{ρδ}$ ⋔ $\mathring{M}\overline{α}$· *καὶ γίνεται ὁ* ς $\dfrac{ρδ}{\overline{ρια}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\dfrac{α\,.\,\overline{ωις}}{\overline{ιζ}.\ \overline{ϡπθ}}$, *ὁ δὲ* β^{ος} $\dfrac{α\,.\,\overline{ωις}}{\overline{ξδ}.\ \overline{χϟβ}}$, *ὁ δὲ* γ^{ος} $\dfrac{α\,.\,\overline{ωις}}{\overline{ρκζ}.\ \overline{φξη}}$.

ιη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ ⟨τοῦ⟩ πρώτου κύβος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς $\overline{α}$· *ὁ ἄρα* β^{ος} *ἔσται* $\mathring{M}$ *κυβικαὶ* $\overline{η}$ ⋔ $K^{Υ}\overline{α}$. *καὶ γίνεται ὁ ἀπὸ τοῦ* α^{ου} *κύβος, προσλαβὼν τὸν* β^{ον}, *κύβος.*

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ β^{ου} □^{ον}, *προσλαβόντα τὸν* α^{ον}, *ποιεῖν* □^{ον}. *ἀλλ᾽ ὁ ἀπὸ τοῦ* β^{ου} □^{ος}, *προσλαβὼν τὸν* α^{ον}, *ποιεῖ* $K^{Υ}K\overline{α}$ ς $\overline{α}\mathring{M}\overline{ξδ}$ ⋔ $K^{Υ}\overline{ις}$. ⟨*ταῦτα ἴσα* □φ *τῷ ἀπὸ πλ.* $K^{Υ}\overline{α}$ $\mathring{M}\overline{η}$, *τουτέστι* $K^{Υ}K\overline{α}$ $K^{Υ}\overline{ις}$ $\mathring{M}\overline{ξδ}$·⟩ *καὶ κοινῶν προστιθεμένων τῶν λειπομένων καὶ ἀφαιρουμένων τῶν ὁμοίων ἀπὸ ὁμοίων, λοιποὶ* $K^{Υ}\overline{λβ}$ *ἴσοι* ς $\overline{α}$· *καὶ πάντα παρὰ* ς· $Δ^{Υ}\overline{λβ}$ *ἴσαι* $\mathring{M}\overline{α}$.

Καὶ ἔστιν ἡ $\mathring{M}$ □^{ος}, *καὶ* $Δ^{Υ}\overline{λβ}$ *εἰ ἦσαν* □^{ος}, *λελυμένη ἄν μοι ἦν ἡ ἴσωσις· ἀλλ᾽ αἱ* $Δ^{Υ}\overline{λβ}$ *εἰσὶν ⟨ἐκ τῶν⟩ δὶς* $K^{Υ}\overline{ις}$· *οἱ δὲ* $K^{Υ}\overline{ις}$ *εἰσιν ὑπὸ τῶν δὶς* $\mathring{M}\overline{η}$

Καὶ ζητῶ προηγουμένως δύο ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι $4x$. Τὸ $4x$ γίνεται ἀπὸ τὸ 2 ἐπὶ $2x$. Τώρα, ἀφοῦ λάβω τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν, θέτω τὸν πρῶτον $x + 1$, καὶ ἔχω λύσει ἓν τῶν ἐπιταγμάτων.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω ὅπως ὁ τετράγωνος τοῦ δευτέρου, τουτέστι ὁ $16x^2$ μεῖον τὸν τρίτον σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ $16x^2$ ἀφαιρέσωμεν τετράγωνόν τινα, ἔστω τετραγωνικῆς ῥίζης $4x - 1$, θὰ εἶναι οὗτος $16x^2 + 1 - 8x$· ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ $16x^2$· μένει ὑπόλοιπον $8x - 1$. Θέτω λοιπὸν τὸν τρίτον $8x - 1$· καὶ ἔχει λυθῆ ἄλλο ἐπίταγμα.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, τουτέστι $13x$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἔστω ἴσον $169x^2$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης $x = 13x^2$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $13x^2 + 1$, ὁ δὲ δεύτερος $52x^2$, ὁ δὲ τρίτος $104x^2 - 1$, καὶ πάλιν ἔχουσι λυθῆ ἀορίστως (συναρτήσει τοῦ x) τρία τῶν ἐπιταγμάτων.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου μεῖον τὸν πρῶτον σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου μεῖον τὸν πρῶτον εἶναι $10816x^4 - 221x^2 =$ τετράγωνος. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· λαμβάνομεν $10816x^2 - 221 =$ τετράγωνος, ἔστω $(104x^2 - 1)^2$· ἐξ ἧς $x = \frac{111}{104}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{170989}{10816}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{640692}{10816}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{1270568}{10816}$.

18.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ πρώτου σὺν τὸν δεύτερον σχηματίζῃ κύβον, ὁ δὲ τετράγωνος τοῦ δευτέρου σὺν τὸν πρῶτον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῆ ὁ πρῶτος x· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ κύβου ἀπὸ κύβον, ἔστω $8 - x^3$. Καὶ γίνεται οὕτω ὁ κύβος τοῦ πρώτου, σὺν τὸν δεύτερον, κύβος.

Ὑπολείπεται ὅπως ὁ τετράγωνος τοῦ δευτέρου σὺν τὸν πρῶτον σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ ὁ τετράγωνος τοῦ δευτέρου, σὺν τὸν πρῶτον, δίδει $x^6 + x + 64 - 16x^3$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον, ἔστω $(x^3 + 8)^2$, τουτέστι $= x^6 + 16x^3 + 64$· καὶ δι' ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων, λαμβάνομεν $32x^3 = x$· διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· ὅτε εἶναι $32x^2 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς τετράγωνος, καὶ ἐὰν ὁ συντελεστὴς 32 τοῦ x^2, ἦτο τετράγωνος θὰ ἐλύετο ἡ ἐξίσωσις (διὰ x ῥητοῦ)· ἀλλὰ ὁ 32 τοῦ $32x^2$ προέρχεται ἐκ τοῦ $2 \cdot 16x^3$ · τὸ δὲ 16 τοῦ $16x^3$ προέρχεται ἐκ τοῦ $2 \cdot 8 \cdot x^3$, καὶ τοῦ $K^{Y}\overline{\alpha}$, τουτέστι δὶς τῶν $\mathring{M}\,\overline{\eta}$· ὥστε αἱ $\overline{\lambda\beta}$ Δ^{Y} ἐκ δκις $\overline{\eta}$ $\mathring{M}$. γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν κύβον ὃς δκις γενόμενος ποιεῖ □ον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος $K^{Y}\,\overline{\alpha}$· οὗτος δκις γενόμενος ποιεῖ $K^{Y}\,\overline{\delta}$ ἴσ. □$^{\varphi}$. ἔστω $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ K^{Y} $\mathring{M}\,\overline{\xi\delta}$.

Τάσσω ἄρα τὸν βον $\mathring{M}\,\overline{\xi\delta} \pitchfork K^{Y}\,\overline{\alpha}$. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ ⟨τοῦ⟩ βου □ον προσλαβόντα τὸν αον ποιεῖν □ον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τοῦ βου προσλαβὼν τὸν αον ποιεῖ $K^{Y}K\,\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{{,}\delta\text{ϟ}\varsigma}$ ϛ$\overline{\alpha} \pitchfork K^{Y}\,\overline{\rho\kappa\eta}$ ἴσ. □$^{\varphi}$ τῷ ἀπὸ πλ. $K^{Y}\,\overline{\alpha}\,\overline{M\xi\delta}$· καὶ γίνεται ὁ □ος $K^{Y}K\,\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{{,}\delta\text{ϟ}\varsigma}\,K^{Y}\,\overline{\rho\kappa\eta}$. καὶ γίνονται λοιποὶ $K^{Y}\,\overline{\sigma\nu\varsigma}$ ἴσ. ϛ$\overline{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ϛ ἑνὸς ⟨ ιςου ⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ αος ἑνὸς ιςου, ὁ δὲ βος $\overline{\kappa\varsigma}$. $\frac{{,}\delta\text{ϟ}\varsigma}{{,}\beta\rho\mu\gamma}$.

ιθ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ αου καὶ βου μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ποιεῖν □ον, ἐὰν ἀπό τινος □ου ἀφέλω τὴν $\mathring{M}$, ἕξω τὸν ὑπὸ αου καὶ βου. πλάσσω □ον ἀπὸ ϛ ὁσωνδήποτε καὶ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ἔστω ϛ$\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ □ος $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ$\overline{\beta}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ἐὰν ἀφέλω τὴν $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, λοιπὰ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ$\overline{\beta}$· ἔσται ὁ ὑπὸ αου καὶ βου.

ἔστω ὁ βος ϛ$\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα αος ἔσται ϛ$\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\beta}$.

πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ βου καὶ γου ποιεῖν □ον μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος □ου ἀφέλω $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ἕξω τὸν ὑπὸ βου καὶ γου. πεπλάσθω ὁ □ος ἀπὸ ϛ$\overline{\gamma}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ἔσται ὁ □ος $\Delta^{Y}\,\overline{\theta}$ ϛ$\overline{\varsigma}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$. ἐὰν ἄρα ἀφέλω $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{\theta}$ ϛ$\overline{\varsigma}$. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ βου καὶ γου εἶναι $\Delta^{Y}\,\overline{\theta}$ ϛ$\overline{\varsigma}$, ὧν ὁ βος ἐστιν ϛ$\overline{\alpha}$. λοιπὸς ἄρα ὁ γος ἔσται ϛ$\overline{\theta}$ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$.

πάλιν, ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ αου καὶ γου μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ποιεῖν □ον, ἀλλὰ ὁ ὑπὸ αου καὶ γου μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ἐστι $\Delta^{Y}\,\overline{\theta}$ ϛ$\overline{\kappa\delta}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\gamma}$, ἴσ. □$^{\varphi}$. καὶ ἔχω τὰς Δ^{Y} τετραγωνικάς· ⟨εἰ καὶ αἱ $\mathring{M}$ ἦσαν τετραγωνικαὶ⟩ καὶ τὸ δὶς τὸ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν Δ^{Y} καὶ τῶν $\mathring{M}$ ἴσον ἦν τοῖς ϛ, ἦν ἂν ἀορίστως τὰ τρία ἐπιτάγματα λελυμένα.

τουτέστι ὁ συντελεστὴς ἐκ τοῦ $2 \cdot 8$· ὥστε ὁ συντελεστὴς 32 προέρχεται ἐκ τοῦ $4 \cdot 8$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω κύβον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τέσσαρα σχηματίζει τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος κύβος x^3· οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 4 δίδει $4x^3 =$ τετράγωνος· ἔστω $= 16x^2$· ἐξ ἧς $x = 4$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ κύβος θὰ εἶναι 64.

Θέτω ἄρα τὸν δεύτερον $64 - x^3$. Καὶ μένει ὅπως ὁ τετράγωνος τοῦ δευτέρου σὺν τὸν πρῶτον σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου σὺν τὸν πρῶτον δίδει $x^6 + 4096 + x - 128x^3 =$ τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔστω $x^3 + 64$· ἑπομένως ὁ τετράγωνος εἶναι $x^6 + 4096 + 128x^3$. Καὶ δι' ἀναγωγῆς ἔχομεν $256x^3 = x$. Ἐξ ἧς $x = \frac{1}{16}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{1}{16}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{262143}{4096}$.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως (συναρτήσει τοῦ x), ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐπειδὴ θέλω, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τὸν τετράγωνον λαμβάνων ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου ὁσαδήποτε x σὺν 1· ἔστω $x + 1$· αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $x^2 + 2x + 1$· ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ $x^2 + 2x$· τοῦτο θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον.

Ἔστω ὁ δεύτερος x, ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $x + 2$.

Πάλιν ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ὁμοίως ἀφαιρέσω ἀπό τινος τετραγώνου 1, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον. Ἂς σχηματισθῇ ὁ τετράγωνος ἐκ τετραγωνικῆς ῥίζης $3x + 1$, ὁπότε θὰ εἶναι οὗτος $9x^2 + 6x + 1$. Ἐὰν ἄρα ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, γίνονται $9x^2 + 6x$. Πρέπει ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι $9x^2 + 6x$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι x. Ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος θὰ εἶναι $9x + 6$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν 1 εἶναι $9x^2 + 24x + 13 =$ τετράγωνος. Καὶ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 τετράγωνος· (ἐὰν καὶ αἱ μονάδες (δηλ. ὁ 13) ἦσαν τετράγωνος ἀριθμὸς) καὶ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς δυνάμεως (τοῦ 9) καὶ τῶν μονάδων (13) ἦτο ἴσον πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ x (τὸν 24), θὰ ἦσαν λελυμένα ἀορίστως (δηλ. συναρτήσει τοῦ x) τὰ τρία ἐπιτάγματα.

ἀλλ' αἱ Μ̊ ι̅γ̅ εἰσιν ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν Μ̊ β̅ καὶ Μ̊ ϛ̅ μετὰ Μ̊ α̅, ἀλλ' αἱ μὲν Μ̊ β̅ ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ς α̅ καὶ Μ̊ α̅, αἱ δὲ Μ̊ ϛ̅ πάλιν ἐκ τοῦ δὶς ὑπὸ ς γ̅ καὶ Μ̊ α̅. θέλω δὶς τοὺς ς ἐπὶ δὶς τοὺς ς μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖν □ον. ἀλλὰ δὶς οἱ ς ἐπὶ δὶς τοὺς ς ὁ δκις ὑπὸ τῶν ς ἐστιν. θέλω οὖν τὸν δκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖν □ον. ἀλλὰ μὴν καὶ πάντων δύο ἀριθμῶν ὁ δκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖ □ον. ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν Μ̊ α̅ κατασκευάσωμεν, ὁ δκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖ □ον.

Εἰ οὖν ὁ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν Μ̊ α̅, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστι Μ̊ α̅. δεῖ οὖν ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς ς πλάσσειν καὶ Μ̊ α̅, ἀπὸ ς α̅ καὶ Μ̊ α̅ καὶ ἀπὸ ς β̅ Μ̊ α̅. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἀπὸ ς α̅ Μ̊ α̅ □ος, ΔΥ ς β̅ Μ̊ α̅. ἐὰν ἀφέλω τὴν Μ̊, λοιπὸν γίνεται ΔΥ α̅ ς β̅. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ αου καὶ βου εἶναι ΔΥ α̅ ς β̅. τετάχθω ὁ βος ς α̅· λοιπὸς ἄρα ὁ αος ἔσται ς α̅ Μ̊ β̅.

Πάλιν, ἐπεὶ ὁ ἀπὸ ς β̅ Μ̊ α̅ □ος ἐστι ΔΥ δ̅ ς δ̅ Μ̊ α̅, ἐὰν ὁμοίως ἀφέλω τὴν Μ̊ α̅, λοιπὸς γίνεται ΔΥ δ̅ ς δ̅· δεῖ δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ βου καὶ γου εἶναι ΔΥ δ̅ ς δ̅, ὧν ὁ βος ἐστιν ς α̅· λοιπὸς ἄρα ὁ γος ἔσται ς δ̅ Μ̊ δ̅.

Καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖν □ον, καὶ γίνεται ὁ ς ὅσου τις θέλει. τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστιν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ς εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας, σώσῃ τὸ ἐπίταγμα.

κ.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μονάδα μίαν ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ αου καὶ βου μετὰ Μ̊ α̅ εἶναι □ον, ἐὰν ἄρα ἀπό τινος □ου ἄρω Μ̊ α̅, ἕξω τὸν ὑπὸ αου καὶ βου. πλάσσω □ον ἀπὸ ς α̅ Μ̊ α̅ καὶ γίνεται αὐτὸς ὁ □ος ΔΥ α̅ ς β̅ Μ̊ α̅. ἐὰν ἀφέλω τὴν Μ̊ α̅, λοιπὸς γίνεται ΔΥ α̅ ς β̅ ὁ ὑπὸ αου καὶ βου. ἔστω ὁ αος ς α̅· ⟨ὁ ἄρα βος ἔσται ς α̅⟩ Μ̊ β̅.

Πάλιν, ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ αου καὶ γου μετὰ Μ̊ α̅ ποιεῖν □ον, πλάσσω

Ἀλλὰ ὁ 13 προέρχεται ἐκ τοῦ $2 \cdot 6 + 1$, ἀλλ' αἱ μὲν 2 μονάδες προέρχονται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $2x \cdot 1$, αἱ δὲ 6 μονάδες πάλιν ἐκ τοῦ $2 \cdot 3x \cdot 1$. Θέλω ὅπως τὸ διπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x ἐπὶ τὸ διπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x ἐπὶ τὸ διπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x. Θέλω λοιπὸν τὸ τετραπλάσιον γινόμενον αὐτῶν, σὺν 1, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλ' ὅμως τὸ τετραπλάσιον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν σχηματίζει τετράγωνον. Ἐὰν λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν λάβωμεν ἴσον πρὸς 1, τὸ τετραπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν, σὺν 1, σχηματίζει τετράγωνον.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν εἶναι 1, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 1. Πρέπει λοιπὸν τὰ τετράγωνα νὰ σχηματισθῶσι ἀπὸ τετραγωνικὰς ῥίζας $\alpha x + 1$ καὶ $\beta x + 1$, ὅπου β καὶ α διαφέρουν κατὰ μονάδα, ἔστω ἀπὸ $x + 1$ καὶ $2x + 1$. Καὶ θὰ εἶναι ὁ μὲν $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, μένει $x^2 + 2x$. Πρέπει ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ εἶναι $x^2 + 2x$. Ἂς τεθῇ ὁ δεύτερος x· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ πρῶτος, θὰ εἶναι $x + 2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, ἐὰν ὁμοίως ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, μένει $4x^2 + 4x$· πρέπει λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι $4x^2 + 4x$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι x· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος εἶναι $4x + 4$.

Καὶ ἐλύθη συναρτήσει τοῦ x (ἐν τῷ ἀορίστῳ), τὸ πρόβλημα, ὥστε τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, σὺν 1, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, διδομένης τυχούσης τιμῆς εἰς τὸν x. Διότι τὸ ἀορίστως ζητεῖν εἶναι νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ζητούμενον συναρτήσει τοῦ x, ὥστε οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὸν x, καὶ ἀντικαταστήσωμεν, νὰ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα.

20.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε, σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν 1, σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω 1, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τετράγωνον ἐκ τοῦ $x + 1$, ὁπότε ὁ τετράγωνος αὐτὸς εἶναι $x^2 + 2x + 1$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, μένει $x^2 + 2x$ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἔστω ὁ πρῶτος x· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x + 2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον, σὺν 1, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, σχηματίζω τετράγωνον ἐκ τοῦ $2x + 1$, ὅπου ὁ συν-

□ον ἀπὸ ς β̄ Μ̊ ᾱ, τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς διὰ τὸ προδειχθέν, καὶ λαβὼν τὸν ἀπό, αἴρω τὴν Μ̊ ᾱ, καὶ τάσσω τὸν ὑπὸ αου καὶ γου ΔΥ δ̄ ς δ̄, ὧν ὁ αος ἐστιν ς ᾱ· λοιπὸς ἄρα ὁ γος ἐστὶν ς δ̄ Μ̊ δ̄.

Πάλιν, ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ τοῦ αου καὶ δου μετὰ Μ̊ ᾱ ποιεῖν □ον, πλάσσω □ον ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ς γ̄ Μ̊ ᾱ, καὶ λαβὼν τὸν ἀπό, ἀφελὼν Μ̊ ᾱ, ἕξω τὸν ὑπὸ αου καὶ δου ΔΥ θ̄ ς ϛ̄, ὧν ὁ αος ἐστιν ς ᾱ· λοιπὸς ἄρα ὁ δος ἔσται ς θ̄ Μ̊ ϛ̄.

Καὶ ἐπεὶ συμβαίνει τὸν ὑπὸ τοῦ γου καὶ δου μετὰ Μ̊ ᾱ ποιεῖν □ον, ἀλλὰ ὁ ὑπὸ βου καὶ δου μετὰ Μ̊ ᾱ ποιεῖ

ΔΥ θ̄ ς κ̅δ̅ Μ̊ ι̅γ̅, ἴσ. □ῳ τῷ ἀπὸ πλ.. ς γ̄ ⋀ Μ̊ δ̄· καὶ γίνεται ὁ ς ἑνὸς ⟨ ιϛον ⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος ᾱ, ὁ δὲ βος λ̅γ̅, ὁ δὲ γος ξ̅η̅, ὁ δὲ δος ρ̅ε̅.

κα.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἀνάλογον, ὅπως δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος.

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς ᾱ, ὁ δὲ μέσος ς ᾱ Μ̊ δ̄, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ ᾖ □ος, ὁ δὲ γος ς ᾱ Μ̊ ι̅γ̅, ἵνα καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ ᾖ □ος.

ἔτι δέ, εἰ ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἦν □ος, ἦν ἂν λελυμένον ἐν τῷ ἀορίστῳ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ □ος.

ὁ δὲ μέγιστος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει Μ̊ ι̅γ̅· αἱ δὲ Μ̊ ι̅γ̅ συντεθεῖσαί εἰσι □ων τοῦ δ̄ καὶ τοῦ θ̄· γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἴσους ἑνὶ τετραγώνῳ.

τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ἀπὸ τριγώνου ὀρθογωνίου· ἔστι δὴ ὁ θ̄ καὶ ὁ ι̅ϛ̅· καὶ τάσσω τὸν μὲν ἐλάχιστον ς ᾱ, τὸν δὲ μέσον ς ᾱ Μ̊ θ̄, τὸν δὲ γον ς ᾱ Μ̊ κ̅ε̅, καὶ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχή ἐστι □ος.

λοιπόν ἐστιν αὐτοὺς ἀνάλογον εἶναι· ἐὰν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου.

ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστιν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἔστι ΔΥ ᾱ ς κ̅ε̅· ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ μέσου τελεστὴς τοῦ $2x$ εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x (τοῦ δευτέρου $x + 2$), ὡς ἔδειξα εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, καὶ λαβὼν τὸ τετράγωνον τούτου, ἀφαιρῶ τὴν μονάδα, καὶ θέτω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον $4x^2 + 4x$, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι x· ὁ ἄλλος ἄρα ὁ τρίτος εἶναι $4x + 4$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον, σὺν 1, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, σχηματίζω τετράγωνον, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x νὰ εἶναι μεγαλύτερος κατὰ μονάδα τοῦ προηγουμένου (τοῦ τρίτου), $3x + 1$, καὶ ἀφοῦ λάβω τὸ τετράγωνον, καὶ ἀφαιρέσω τὴν μονάδα θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον $9x + 6x$, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι x· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τέταρτος, θὰ εἶναι $9x + 6$.

Καὶ ἐπειδὴ συμβαίνει, ὥστε τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν τέταρτον, σὺν 1, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τέταρτον, σὺν 1, εἶναι :

$$9x^2 + 24x + 13 = \text{τετράγωνος, ἔστω } (3x - 4)^2. \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{1}{16}.$$

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{1}{16}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{33}{16}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{68}{16}$, ὁ δὲ τέταρτος $\frac{105}{16}$.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἡ διαφορὰ δύο οἱωνδήποτε εἶναι τετράγωνος.

Ἂς τεθῇ ὁ μὲν μικρότερος x, ὁ δὲ μεσαῖος $x + 4$, ἵνα ἡ διαφορά των εἶναι τετράγωνος, ὁ δὲ τρίτος $x + 13$, ἵνα καὶ τούτου ἡ διαφορὰ πρὸς τὸν μεσαῖον εἶναι τετράγωνος.

Προσέτι δέ, ἐὰν ἡ διαφορὰ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἦτο τετράγωνος, θὰ εἶχε λυθῇ τὸ πρόβλημα συναρτήσει τυχούσης τιμῆς τοῦ x, ὥστε ἡ διαφορὰ δύο, οἱωνδήποτε νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ὁ δὲ μέγιστος ὑπερέχει τοῦ ἐλαχίστου κατὰ 13· τὸ δὲ 13 εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, τοῦ 4 καὶ τοῦ 9· ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, νὰ εὕρω δύο τετραγώνους, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος.

Τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον νὰ εὑρεθῇ ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου· οὗτοι εἶναι ὁ 9 καὶ ὁ 16· καὶ θέτω τὸν μὲν μικρότερον x, τὸν δὲ μεσαῖον $x + 9$, δὲ τρίτον $x + 25$, καὶ εἶναι οὕτω ἡ διαφορὰ δύο οἱωνδήποτε, τετράγωνος.

Ὑπολείπεται νὰ εἶναι οὗτοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ἐὰν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου.

Δ^{Υ} ς $\overline{\iota\eta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\pi\alpha}$, ἴσ. $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\kappa\varepsilon}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\zeta}{\overline{\pi\alpha}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\pi\alpha}$, ὁ δὲ βος $\overline{\varrho\mu\delta}$, ὁ δὲ γος $\overline{\sigma\nu\varsigma}$.

κβ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}$, ὁ δὲ αος $\overset{\circ}{M}\,\alpha$, ἵνα ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ αου ποιῇ □ον.

πάλιν, ἐπεὶ θέλω τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ βου ποιεῖν □ον, ἐὰν ἄρα ἀπό τινος □ου ἄρω $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}$, ἕξω τὸν βον. πλάσσω □ον ἀπὸ ς $\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$, καὶ ὁ ἀπὸ τούτου □ος ⋔ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}$ ποιεῖ ς $\overline{\delta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$· τάσσω οὖν τὸν βον ς $\overline{\delta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$.

ἀλλ᾽ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}$, ὁ δὲ ὑπὸ αου καὶ βου ς $\overline{\delta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$, ἐὰν ἄρα $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}$ παραβάλω παρὰ ς $\overline{\delta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$, ἕξω τὸν γον.

Οὐ δυνατὴ δὲ ἡ παραβολή· ἵνα δὲ δύνηται ἡ παραβολή, δεῖ εἶναι ὡς $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ πρὸς ς $\overline{\delta}$, οὕτως ς $\overline{\beta}$ πρὸς $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$, καὶ ἐναλλάξ· ὡς $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ πρὸς ς $\overline{\beta}$, οὕτως ς $\overline{\delta}$ πρὸς $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$· ἡ δὲ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ τῶν ς $\overline{\beta}$, Lʹ ἐστι τῷ πλήθει. ὡσεὶ οὖν καὶ ς $\overline{\delta}$ τῶν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$, Lʹ ἦν, ἦν ἂν ἡ παραβολή· ἀλλὰ οἱ $\overline{\delta}$ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν, ἧς ὑπερέχουσιν ς $\overline{\varsigma}$, $\overline{\beta}$ ς. ἀλλὰ οἱ $\overline{\varsigma}$ ς ἐκ τοῦ δίς εἰσιν ὑπὸ τῶν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$ καὶ ς $\overline{\alpha}$, τουτέστι δὶς τῶν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$· αἱ δὲ $\overline{\theta}$ $\overset{\circ}{M}$ ὁ ἀπὸ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$ ἐστι □ος· ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὡς τὰς $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$, ὅστις δὶς γενόμενος καὶ λείψας δυάδα, Lʹ ᾖ τοῦ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετραγώνου.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ς $\overline{\alpha}$· οὗτος δὶς γενόμενος καὶ λείψας δυάδα, γίνονται ς $\overline{\beta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$· ὁ δὲ ἀπ᾽ αὐτοῦ □ος ἐστι $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$. θέλομεν οὖν ς $\overline{\beta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$, Lʹ εἶναι $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$.

Δ^{Υ} ἄρα $\overline{\alpha}$ ἴση ς $\overline{\delta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$.

Νῦν ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ εἶχον τὸν μὲν αον ἀριθμὸν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\alpha}$, τὸν δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\beta}$. δεῖ δὲ καὶ τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν προσλαβόν-

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ μεγίστου ἐπὶ τὸν ἐλάχιστον, τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων, εἶναι $x^2 + 25x$· τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ μεσαίου εἶναι

$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 25x\text{· ἐξ ἧς } x = \frac{18}{7}.$$

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{81}{7}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{144}{7}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{256}{7}$.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν $x^2 + 2x$, ὁ δὲ πρῶτος 1, ἵνα τὸ γινόμενον τῶν τριῶν, σὺν τὸν πρῶτον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν σὺν τὸν δεύτερον σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω $x^2 + 2x$ θὰ ἔχω τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τετράγωνον ἐκ τοῦ $x + 3$ καὶ ἔχω $(x + 3)^2 - (x^2 + 2x) = 4x + 9$· θέτω λοιπὸν τὸν δεύτερον $4x + 9$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν εἶναι $x^2 + 2x$, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον εἶναι $4x + 9$, ἐὰν ἄρα διαιρέσω τὸ $x^2 + 2x$ διὰ τοῦ $4x + 9$, θὰ ἔχω τὸν τρίτον.

Δὲν εἶναι δυνατὴ δὲ ἡ διαίρεσις· ἵνα δὲ εἶναι δυνατὴ ἡ διαίρεσις, πρέπει νὰ εἶναι ὡς $x^2 : 4x = 2x : 9$, καὶ ἐναλλάξ· ὡς $x^2 : 2x = 4x : 9$. Ἡ δὲ μονὰς (συντελεστὴς) τοῦ x^2 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $2x$. Ἐὰν λοιπὸν καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ $4x$ ἦτο τὸ ἥμισυ τοῦ 9, θὰ ἦτο δυνατὴ ἡ διαίρεσις· ἀλλὰ ὁ 4 προέρχεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ $2x$ ἀπὸ τοῦ $6x$. Ἀλλὰ ὁ $6x$ εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τοῦ $3x$, τουτέστι (ὁ 6) $= 2 \cdot 3$· ὁ δὲ 9 εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 3· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα νὰ εὕρω ἀριθμόν τινα, ὅπως τὸν 3, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον γινόμενον, μεῖον δύο, δίδει τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου του.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x· τὸ διπλάσιον γινόμενον τούτου μεῖον δύο, δίδει $2x - 2$· τὸ δὲ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι x^2. Θέλομεν λοιπὸν ὅπως τὸ $2x - 2$ εἶναι $= \frac{1}{2} x^2$.

Εἶναι ἄρα $x^2 = 4x - 4$, ἐξ ἧς $x = 2$.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, ὅπου εἶχον λάβει τὸν πρῶτον 1, τὸ δὲ γινόμενον τῶν τριῶν $x^2 + 2x$. Πρέπει δὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν, σὺν τὸν δεύτερον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω $x^2 + 2x$, θὰ ἔχω τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τὸν τετράγωνον ἐκ τα τὸν β^{ον} ποιεῖν □^{ον}· ἐὰν ἄρα ἀπό τινος □^{ου} ἀφέλω τὴν Δ^{Υ} ᾱ ϛ β̄, ἕξω τὸν β^{ον}. πλάσσω τὸν □^{ον} ἀπὸ ϛ ᾱ καὶ M̊ τοσούτων, ἵνα αἱ M̊, δὶς γενόμεναι καὶ λείψασαι δυάδα, L′ ᾖ τοῦ ἀπ᾽ αὐτῶν □^{ου}· καὶ προδέδεικται, καὶ ἔστι M̊ β̄. πλάσσω τὸν □^{ον} ἀπὸ ϛ ᾱ M̊ β̄· ἔσται ἄρα ὁ ἀπό, Δ^{Υ} ᾱ ϛ δ̄ M̊ δ̄. ἐὰν ἄρω τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεόν, τουτέστι Δ^{Υ} ᾱ ϛ β̄, λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ β^{ος} ϛ β̄ M̊ δ̄. καὶ ἔστιν ὁ ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου}, ⟨ ϛ β̄ M̊ δ̄· ἐὰν ἄρα τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεόν, τουτέστι Δ^{Υ} ᾱ ϛ β̄, μερίσω εἰς τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου} ⟩ τουτέστιν εἰς ϛ β̄ M̊ δ̄, ἕξω τὸν γ^{ον}. ἀλλ᾽ ἔστιν ὁ μερισμὸς ϛ L′.

Καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν μετὰ τοῦ γ^{ου} ποιεῖν □^{ον}. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ γ^{ου} ἐστι Δ^{Υ} ᾱ ϛ β̄ L′ ἴσ. □^{φ} Δ^{Υ} δ̄· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{ϛ}{\overline{\varepsilon}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} ϛ̄, ὁ δὲ β^{ος} λ̄δ̄, ὁ δὲ γ^{ος} β̄ L′.

κγ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ϛ ᾱ, ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς Δ^{Υ} ᾱ ϛ ᾱ· καὶ λείψας τὸν α^{ον} ποιεῖ □^{ον}. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς Δ^{Υ} ᾱ ϛ ᾱ, ὁ δὲ α^{ος} ἐστιν ϛ ᾱ, ὁ ἄρα ὑπὸ β^{ου} καὶ γ^{ου} ἔσται ϛ ᾱ M̊ ᾱ· ἔστω ὁ β^{ος} M̊ ᾱ· λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ γ^{ος} ϛ ᾱ M̊ ᾱ.

λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν λείποντα τὸν β^{ον} καὶ τὸν γ^{ον} ποιεῖν □^{ον}· λιπὼν δὲ ὃν μὲν ποιεῖ Δ^{Υ} ᾱ ϛ ᾱ ⋔ M̊ ᾱ ἴσ. □· ὃν δὲ Δ^{Υ} ᾱ ⋔ M̊ ᾱ ἴσ. □^{φ}.

καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, καὶ λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν· ἔστι δὲ ϛ ᾱ· ἐκτίθεμαι ἀριθμοὺς δύο ὧν ὁ ὑπὸ τηλικοῦτός ἐστι. τοῦτον ϛ ᾱ μετρείτω M̊ L′ κατὰ ϛ β̄, τουτέστι κατὰ πλευρὰς β̄ τῆς Δ^{Υ}· καὶ ἔστιν αὐτῶν ὡς οἶδας ἡ ἴσωσις, καὶ γίνεται ὁ ϛ η^{ων} ῑζ̄.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^{ος} ῑζ̄, ὁ δὲ β^{ος} M̊ ᾱ, ὁ δὲ γ^{ος} η^{ων} κ̄ε̄.

τοῦ $x + $ τόσας μονάδας, ὥστε τὸ διπλάσιον τῶν μονάδων μεῖον δύο νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου των· καὶ τοῦτο προαπεδείχθη, καὶ αἱ μονάδες εἶναι 2. Σχηματίζω τὸν τετράγωνον ἐκ τοῦ $x + 2$· θὰ εἶναι ἄρα ὁ τετράγωνος $= x^2 + 4x + 4$. Ἐὰν ἐκ τούτου ἀφαιρέσω τὸ γινόμενον τῶν τριῶν, τουτέστι τὸν $x^2 + 2x$, θὰ εὕρω ὑπόλοιπον, τὸν δεύτερον $= 2x + 4$. Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον $2x + 4$· ἐὰν ἄρα τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τουτέστι $x^2 + 2x$, τὸ διαιρέσω διὰ τοῦ γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, τουτέστιν $2x + 4$, θὰ ἔχω τὸν τρίτον· ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι $\frac{x}{2}$.

Καὶ ὑπολείπεται, ὅπως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν, σὺν τὸν τρίτον σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν σὺν τὸν τρίτον εἶναι $x^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)x =$ τετράγωνος, ἔστω $= 4x^2$· ἐξ ἧς $x = \frac{5}{6}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{6}{6}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{34}{6}$, ὁ δὲ τρίτος $2\frac{1}{2} : 6$.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, τὸ δὲ γινόμενον τῶν τριῶν $x^2 + x$· τοῦτο μεῖον τὸν πρῶτον σχηματίζει τετράγωνον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν εἶναι $x^2 + x$, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι x, εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον $x + 1$· ἔστω ὁ δεύτερος 1· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, θὰ εἶναι $x + 1$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν μεῖον τὸν δεύτερον καὶ τὸν τρίτον σχηματίζει τετράγωνον· τοῦτο μεῖον μὲν τὸν ἕνα σχηματίζει $x^2 + x - 1 =$ τετράγωνος· μεῖον δὲ τὸν ἄλλον σχηματίζει $x^2 - 1 =$ τετράγωνος.

Καὶ ἔχομεν δύο ἐξισώσεις, τῶν ὁποίων λαμβάνω τὴν διαφοράν· εἶναι δὲ αὕτη x· λαμβάνω τώρα δύο ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι τόσον $(= x)$. Τὸ πηλίκον τούτου διὰ $\frac{1}{2}$ εἶναι $2x$, τουτέστι τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ x^2. καὶ ἡ ἐξίσωσις σχηματίζεται ὅπως γνωρίζεις, ἐξ ἧς $x = \frac{17}{8}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{17}{8}$, ὁ δὲ δεύτερος 1, ὁ δὲ τρίτος $\frac{25}{8}$.

κδ.

Δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν κύβον παρὰ πλευράν.

Ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ὁ ϛ̅.

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς α̅, λοιπὸς ἄρα ὁ β^{ος} ἔσται M̊ ϛ̅ ⋔ ς α̅.

λοιπὸν δεῖ εἶναι τὸν ὑπ' αὐτῶν κύβον παρὰ πλευράν· ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσται ς ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} α̅· ταῦτα ἴσα κύβῳ παρὰ πλευράν· πλάσσω κύβον ἀπὸ ς ὁσωνδήποτε ⋔ M̊ α̅· ἔστω δὴ ἀπὸ ς β̅ ⋔ M̊ α̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ K^{Y} η̅ ς δ̅ ⋔ Δ^{Y} ιβ̅. ταῦτα ἴσα ς ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} α̅.

Καὶ εἰ ἦσαν οἱ ς ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸν ἐγίνετο ἰσῶσαι K^{Y} ἴσους Δ^{Y}, καὶ ὁ ς ἦν ῥητός· ἀλλὰ οἱ ς β̅ ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ὑπὲρ ς β̅, τουτέστιν ἐκ τῶν τρὶς τῶν β̅ ς· καὶ ἐὰν τρὶς οἱ β̅ ς λείψωσιν ς β̅, ποιοῦσι δὶς τοὺς ς β̅. οἱ δὲ ϛ̅ τυχόντες εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὡς τοὺς ς β̅, ὃς δὶς γενόμενος ποιεῖ ϛ̅· ἔστι δὲ ὁ γ̅.

Ζητῶ οὖν ς ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} α̅ ἴσους κύβῳ παρὰ πλευράν· νῦν τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλ. ἀπὸ ς γ̅ ⋔ M̊ α̅· καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ K^{Y} κζ̅ ς ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} κζ̅ ἴσ. ς ϛ̅ ⋔ Δ^{Y} α̅, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{κζ}{\overline{κϛ}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^{ος} κϛ̅, ὁ δὲ β^{ος} ρλϛ̅.

κε.

Δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ποιῇ κύβον, οὗ ἡ πλευρὰ ἐστιν ἴση ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ δ̅.

Καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κύβος ἐστίν, ἔστω K^{Y} η̅ οὗ πλ. ἐστιν ς β̅. ἀλλὰ ἡ τοῦ β^{ου} καὶ τοῦ α^{ου} ὑπεροχὴ καὶ ἡ τοῦ γ^{ου} καὶ β^{ου} ὑπεροχὴ καὶ ἔτι τοῦ γ^{ου} καὶ τοῦ α^{ου}, δίς ἐστιν ὑπεροχὴ τοῦ γ^{ου} καὶ τοῦ α^{ου}, τουτέστιν, ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ τρεῖς ἄνισοι, ἡ τῶν τριῶν ὑπεροχὴ διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἄκρων.

ἔχομεν δ' ἐν τῇ ὑποστάσει τῆς πλ. τοῦ κύβου ς β̅· δεῖ δὲ τοὺς ς β̅ τῶν τριῶν τὴν ὑπεροχὴν εἶναι· ὁ γ^{ος} ἄρα τοῦ α^{ου} ὑπερέχει ς α̅. ἔστω ὁ α^{ος} ς β̅ ἢ ὁσωνδή-

24.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δυὸ ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς κύβον μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ 6.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ ἄλλος ἄρα ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $6 - x$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς κύβον μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $6x - x^2$· ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ κύβον μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου· σχηματίζω κύβον μὲ ὁσαδήποτε x μεῖον 1· ἔστω ἐκ τοῦ $2x - 1$. Καὶ ὁ κύβος τούτου μεῖον αὐτὸν (τὸν $2x - 1$) δίδει $8x^3 + 4x - 12x^2$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $6x - x^2$.

Καὶ ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ x ἦσαν ἴσοι εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως, θὰ ὑπελείπετο ὅπως ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ x^3 καὶ x^2 καὶ ὁ x θὰ ἦτο ῥητός· ἀλλὰ ὁ $4x$ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ $3 \cdot 2x$ καὶ τοῦ $2x$· καὶ εἶναι $3 \cdot 2x - 2x = 2 \cdot 2x$· ὁ δὲ 6 εἶναι τυχὼν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ἀριθμόν, ὡς τὸν $2x$, ὅστις διπλασιαζόμενος δίδει 6· εἶναι δὲ οὗτος ὁ 3.

Ζητῶ λοιπὸν νὰ εὕρω, ὥστε $6x - x^2$ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς κύβον μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου. Θέτω τώρα τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κύβου $= 3x - 1$· καὶ ὁ κύβος ταύτης μεῖον ταύτην εἶναι $27x^3 + 6x - 27x^2 = 6x - x^2$ ἐξ ἧς $x = \frac{26}{27}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{26}{27}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{136}{27}$.

25.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνηται κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν αὐτῶν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ 4.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν εἶναι κύβος, ἔστω $8x^3$, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι $2x$. Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ δευτέρου καὶ πρώτου καὶ ἡ διαφορὰ τρίτου καὶ δευτέρου καὶ ἀκόμη ἡ τοῦ τρίτου καὶ πρώτου, τουτέστιν, ἐὰν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διαφορᾶς τρίτου καὶ πρώτου.

Ἔχομεν δὲ καθ' ὑπόθεσιν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κύβου ἴσην πρὸς $2x$· πρέπει δὲ ὁ $2x$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαφορῶν [$2x = 2(x_3 - x_1)$]· ὁ τρίτος ἄρα ὑπερέχει τοῦ πρώτου κατὰ x. Ἔστω ὁ πρῶτος αx, *ποτε· ὁ $\gamma^{ος}$ ἔσται ἄρα ϛ $\overline{\gamma}$. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεός ἐστι $K^{Y}\,\overline{\eta}$, ὁ δὲ ὑπὸ ⟨τοῦ⟩ $\alpha^{ου}$ καὶ $\gamma^{ου}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\varsigma}$, λοιπὸς ἄρα ὁ $\beta^{ος}$ ἔσται ϛ $\overline{\alpha}\gamma^{\times}$.*

Καὶ εἰ μὲν ἦν ὁ $\beta^{ος}$ τοῦ $\alpha^{ου}$ μείζων, ἐλλάσσων δὲ τοῦ $\gamma^{ου}$, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ ὁ $\beta^{ος}$ ἐγένετο ἐκ τοῦ τὸν $\overline{\eta}$ μερισθῆναι εἰς τὸν ὑπὸ $\alpha^{ου}$ καὶ $\gamma^{ου}$. ἀλλὰ ὁ $\alpha^{ος}$ καὶ ὁ $\gamma^{ος}$ οὐκ εἰσι τυχόντες, ἀλλὰ μονάδι διαφέροντες· ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ὅπως ὁ $\overline{\eta}$ μεριζόμενος εἰς τὸν ὑπ' αὐτῶν ποιῇ τινα ὅς τοῦ μὲν ἐλάσσονος μείζων ᾖ, τοῦ δὲ μείζονος ἐλάσσων.

Τετάχθω ὁ ἐλάσσων ϛ $\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$. καὶ τὸν $\overline{\eta}$ ἐὰν μερίσω εἰς τὸν ὑπ' αὐτῶν, τουτέστιν εἰς $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\alpha}$, εὑρεθήσεται ὁ μέσος $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ μορίου $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\alpha}$. θέλομεν δὲ τοῦτον μείζονα μὲν εἶναι ϛ $\overline{\alpha}$, ἐλάσσονα δὲ ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστι $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $\alpha^{ου}$ καὶ τοῦ $\beta^{ου}$ ἐλάσσων ἐστὶ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὥστε ὁ $\beta^{ος}$ μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ μείζων ἐστὶ τοῦ $\alpha^{ου}$. ἀλλὰ ὁ $\beta^{ος}$, προσλαβὼν τὴν $\mathring{M}$ καὶ ἀναλυθεὶς εἰς τὴν $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\alpha}$, γίνεται $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ μορίου $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\alpha}$· ὥστε ταῦτα μείζονά ἐστιν ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· καὶ πάντα ἐπὶ τὸ μόριον.

*$\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ μείζονά εἰσιν $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\beta}$ ϛ $\overline{\alpha}$.
καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια καὶ γίνονται $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ μείζονες $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$.*

πλάσσω κύβον ὅς ἔχει $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· ἔσται ἄρα ἡ π^{λ}. τοῦ κύβου ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\gamma^{\times}$. ἀλλὰ ἐπεὶ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ μείζους εἰσὶ $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, ἔστι δὲ καὶ ὁ ἀπὸ ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\gamma^{\times}$ κύβος μείζων $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, ἐὰν ἰσώσω καὶ τὴν πλευράν, τουτέστι $\mathring{M}\,\overline{\beta}$ ἴσ. ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\gamma^{\times}$, καὶ γίνετα ὁ ϛ $\gamma^{ων}$ $\overline{\epsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ $\alpha^{ος}$ $\overset{\gamma}{\overline{\eta}}$, ὁ $\beta^{ος}$ $\overset{\epsilon}{\overline{\vartheta}}$, ὁ $\gamma^{ος}$ $\overset{\gamma}{\overline{\epsilon}}$, καὶ πάντα εἰς $\iota\epsilon^{\alpha}$. ἔσται ὁ $\alpha^{ος}$ $\overline{\mu}$, ὁ $\beta^{ος}$ $\overline{\kappa\zeta}$, ὁ $\gamma^{ος}$ $\overline{\kappa\epsilon}$. κοινὸν γὰρ ἤρθη τὸ $\overline{\iota\epsilon}$ μόριον, καὶ ηὑρημένοι εἰσὶν τρεῖς ἀριθμοὶ ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ᾖ κύβος πλευρὰν ἔχων τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν συντεθείσας.

Τάσσω τοίνυν τὸν μὲν $\alpha^{ον}$ ϛ $\overline{\mu}$, τὸν δὲ $\beta^{ον}$ ⟨ϛ $\overline{\kappa\zeta}$, τὸν δὲ $\gamma^{ον}$⟩ ϛ $\overline{\kappa\epsilon}$, καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κύβος οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπεροχαῖς ἔνθα α τυχών, ἔστω 2· ὁ τρίτος ἄρα θὰ εἶναι 3x. Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν εἶναι $8x^3$, τὸ δὲ γινόμενον πρώτου καὶ τρίτου $6x^2$, ὁ ἄλλος ἄρα ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\left(1\frac{1}{3}\right)x$.

Καὶ ἂν μὲν ἦτο $x_3 > x_2 > x_1$, θὰ εἶχε εὑρεθῆ τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου προῆλθεν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 8 διὰ τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον. Ἀλλὰ οἱ συντελεσταὶ οὗτοι δὲν εἶναι τυχόντες, ἀλλὰ διαφέρουν κατὰ μονάδα· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω δύο ἀριθμοὺς διαφέροντας κατὰ μονάδα, ὥστε ὁ 8 διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν νὰ δίδῃ ἀριθμόν, ὅστις νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου καὶ μικρότερος τοῦ μεγαλυτέρου.

Ἂς τεθῇ ὁ μικρότερος x, ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x + 1$. Καὶ ἂν διαιρέσω τὸν 8 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, τουτέστι τοῦ $x^2 + x$, θὰ εὑρεθῇ ὁ μεσαῖος $= 8 : x^2 + x$. Θέλομεν δὲ ὅπως οὗτος εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ x, μικρότερος δὲ τοῦ $x + 1$· καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 1, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ πρώτου καὶ δευτέρου εἶναι μικροτέρα τοῦ 1, ὥστε ὁ δεύτερος σὺν 1 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πρώτου. Ἀλλὰ ὁ δεύτερος, σὺν 1 διαιρούμενος διὰ τοῦ $x^2 + x$, γίνεται $(x^2 + x + 8) : x^2 + x$· ὥστε ταῦτα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ $x + 1$· πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν $(x^2 + x)$ καὶ ἔχομεν :

$x^2 + x + 8 > x^3 + 2x^2 + x$.

Δι' ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων λαμβάνομεν $8 > x^3 + x^2$.

Σχηματίζω κύβον ὅστις νὰ περιέχῃ τὸ ἄθροισμα $x^3 + x^2$· θὰ εἶναι ἄρα ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου, $x + \frac{1}{3}$. Ἀλλά, ἐπειδὴ $8 > x^3 + x^2$, εἶναι δὲ καὶ $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3 > x^3 + x^3$, ἐὰν ἐξισώσω καὶ τὰς κυβικὰς ῥίζας, τουτέστι $2 = x + \frac{1}{3}$ λαμβάνω $x = \frac{5}{3}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{8}{3}$, ὁ δεύτερος $\frac{9}{5}$, ὁ τρίτος $\frac{5}{3}$. Πολλαπλασιάζω καὶ τοὺς τρεῖς ἐπὶ 15. Ὁ πρῶτος θὰ εἶναι 40, ὁ δεύτερος 27, ὁ τρίτος 25. Διότι ἀπηλείφθησαν οἱ παρονομασταί, καὶ εὑρέθησαν τρεῖς ἀριθμοί, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν αὐτῶν.

Θέτω λοιπὸν τὸν μὲν πρῶτον 40x, τὸν δὲ δεύτερον 27x, τὸν δὲ τρίτον 25x, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν αὐτῶν· ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἀθροι-

αὐτῶν συντεθείσαις· λοιπὸν δεῖ ἰσῶσαι τοὺς τρεῖς ταῖς δοθείσαις M̊, *ἐδόθησαν δὲ* M̊ $\overline{δ}$· ς *ἄρα* $\overline{ϙβ}$ *ἴσοι* M̊ $\overline{δ}$. *καὶ γίνεται ὁ* ς *ἑνὸς* ⟨*κγ*^{ου}⟩.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\overline{μ}$, *ὁ δὲ β*^{ος} $\overline{κζ}$, *ὁ δὲ γ*^{ος} $\overline{κε}$.

κϛ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ κύβον.

Τάσσω τὸν α^{ον} *ἐκ κυβικῶν* ς· *ἔστω δὴ* $\overline{η}$· *τὸν β*^{ον} $Δ^{Υ}\,\overline{α}$ ⋀ M̊ $\overline{α}$· *καὶ συμφωνεῖ μοι ἓν ἐπίταγμα. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν α*^{ον} *ποιεῖ κύβον.*

λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν β^{ον} *ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν β*^{ον} *ποιεῖ* $K^{Υ}\,\overline{η}\; Δ^{Υ}\,\overline{α}$ ⋀ ς $\overline{η}$ M̊ $\overline{α}$ *ἴσ. κύβῳ· πλάσσω τὸν κύβον ἀπὸ* ς $\overline{β}$ ⋀ M̊ $\overline{α}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\frac{ιγ}{ιδ}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ⟨*μὲν*⟩ *α*^{ος} $\frac{ιγ}{ριβ}$, *ὁ δὲ β*^{ος} $\frac{ρξθ}{κζ}$.

κζ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἑκάτερον ποιῇ κύβον.

Ὁμοίως ὁ α^{ος} *τετάχθω κυβικῶν* ς $\overline{η}$, *ὁ β*^{ος} $Δ^{Υ}\,\overline{α}$ M̊ $\overline{α}$ *ἀεί, καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας* ⟨*τὸν α*^{ον} *κύβος. πάλιν ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας*⟩ *τὸν β*^{ον} *ποιεῖ* $K^{Υ}\,\overline{η}$ ς $\overline{η}$ ⋀ $Δ^{Υ}\,\overline{α}$ M̊ $\overline{α}$· *ταῦτα ἴσα κύβῳ· καὶ ἔστιν ἀδύνατον.*

Τάσσω τοίνυν πάλιν τὸν μὲν κυβικῶν ς M̊ $\overline{α}$· *ἔστω* ς $\overline{η}$ M̊ $\overline{α}$· *τὸν δὲ* $Δ^{Υ}\,\overline{α}$· *καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν β*^{ον} *κύβος. πάλιν ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν α*^{ον} *ποιεῖ* $K^{Υ}\,\overline{η}\; Δ^{Υ}\,\overline{α}$ ⋀ ς $\overline{η}$ M̊ $\overline{α}$· *ταῦτα ἴσα κύβῳ τῷ ἀπὸ πλ.* ς $\overline{β}$ ⋀ M̊ $\overline{α}$· *καὶ γίνεται ὁ* ς $\frac{ιγ}{ιδ}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\frac{ιγ}{ρκε}$, *ὁ δὲ β*^{ος} $\frac{ρξθ}{ρϙϛ}$.

σμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰς δοθείσας μονάδας, ἐδόθησαν δὲ 4· εἶναι ἄρα $92x = 4$. Ἐξ ἧς $x = \frac{1}{23}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{40}{23}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{27}{23}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{25}{23}$.

26.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν ἑκάτερον σχηματίζῃ κύβον.

Θέτω τὸν πρῶτον συναρτήσει τοῦ x ἔχοντος συντελεστὴν κύβον· ἔστω 8· τὸν δεύτερον θέτω $x^2 - 1$· καὶ πληροῦται οὕτω ἓν ἐπίταγμα. Διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν πρῶτον σχηματίζει κύβον.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν δεύτερον σχηματίζει κύβον. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν δεύτερον δίδει $8x^3 + x^2 - (8x + 1)$ $=$ κύβος· σχηματίζω τὸν κύβον ἔστω $= (2x - 1)^3$, ἐξ ἧς $x = \frac{14}{13}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{112}{13}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{27}{169}$.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον σχηματίζῃ κύβον.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος ὡς εἰς τὸ προηγούμενον 8x, ὁ δεύτερος $x^2 + 1$, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν πρῶτον γίνεται κύβος. Πάλιν, τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν δεύτερον δίδει $8x^3 + 8x - (x^2 + 1)$· ταῦτα $=$ κύβος· τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Θέτω λοιπὸν πάλιν τὸν ἕνα ἀριθμὸν συναρτήσει τοῦ $\alpha^3 x + 1$· ἔστω $8x + 1$· τὸν δὲ ἄλλον x^2· καὶ γίνεται τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν δεύτερον, κύβος. Πάλιν, τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν πρῶτον δίδει $8x^3 + x^2 - (8x + 1)$· ταῦτα $=$ κύβος, ἔστω $= (2x - 1)^3$· ἐξ ἧς $x = \frac{14}{13}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{125}{13}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{196}{169}$.

κη.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ κύβον.

Ἐπεὶ οὖν ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ κύβον, ποιείτω $\mathring{M}\,\overline{\xi\delta}$. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ ⟨κύβον, ποιείτω⟩ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. δὶς ἄρα συναμφότερος, ποιῶν αὐτῶν τὴν ὑπεροχήν, ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\nu\varsigma}$· ὥστε συναμφότερος ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\kappa\eta}$· ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ $\mathring{M}\,\overline{\xi\delta}$· λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\lambda\varsigma}$. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ⟨ὥστε συναμφότερον ποιεῖν⟩ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\eta}$, ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι $\mathring{M}\,\overline{\lambda\varsigma}$.

Τετάχθω ὁ μείζων ς $\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\iota\delta}$· ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\iota\delta}$ ⋔ ς $\overline{\alpha}$. λοιπόν ἐστι τὸν ὑπ' αὐτῶν, τουτέστι $\mathring{M}\,\overline{\rho\varsigma\varsigma}$ ⋔ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$, ἰσῶσαι $\mathring{M}\,\overline{\lambda\varsigma}$, καὶ γίνεται $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ἴση $\mathring{M}\,\overline{\rho\xi}$.

Καὶ εἰ ἦσαν $\mathring{M}\,\overline{\rho\xi}$ τετραγωνικαί, λελυμένον μοι ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλὰ αἱ $\mathring{M}\,\overline{\rho\xi}$ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχουσι $\mathring{M}\,\overline{\rho\varsigma\varsigma}$ τῶν $\overline{\lambda\varsigma}$. ἀλλὰ αἱ $\mathring{M}\,\overline{\rho\varsigma\varsigma}$ ἀπὸ $\mathring{M}\,\overline{\iota\delta}$ ἐστι □ος· ὁ δὲ $\overline{\iota\delta}$ ἥμισύ ἐστι τῶν $\overline{\kappa\eta}$· ὥστε τὰ $\overline{\rho\varsigma\varsigma}$ τὸ L' ἐστι τῶν $\overline{\kappa\eta}$ ἐφ' ἑαυτά· ἀλλὰ ὁ $\overline{\kappa\eta}$ ἥμισύ ἐστι τῶν $\overline{\nu\varsigma}$, ὥστε τὰ $\overline{\iota\delta}$, δον ἐστι $\overline{\nu\varsigma}$· ἀλλὰ ὁ $\overline{\nu\varsigma}$ δύο κύβων ἐστὶν ὑπεροχὴ τοῦ τε $\overline{\xi\delta}$ καὶ τοῦ $\overline{\eta}$, ὁ δὲ $\overline{\lambda\varsigma}$ συναμφοτέρου ἐστὶ τῶν κύβων τὸ L'. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ δον, ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ λεῖψαν συναμφοτέρου τὸ L', ποιῇ □ον.

Ἔστω ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλ. ς $\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ἡ δὲ τοῦ ἐλάσσονος ς $\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· καὶ γίνονται οἱ κύβοι, ὁ μὲν μείζων ⟨$K^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$⟩ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\gamma}$ ς $\overline{\gamma}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὁ δὲ ἐλάσσων $K^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\gamma}$ ⋔ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\gamma}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ δον, $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ L' $\mathring{M}$ L'. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνονται $\Delta^{\Upsilon}\Delta\,\overline{\beta}$ ⟨δ×⟩ $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ L' $\mathring{M}$ δ×. ταῦτα ἐὰν λείψῃ συναμφότερον τῶν κύβων L', ὅπερ ἐστὶ $K^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\gamma}$, λοιπὸν γίνονται $\Delta^{\Upsilon}\Delta\,\overline{\beta}$ δ× $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ L' $\mathring{M}$ δ× ⋔ $K^{\Upsilon}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\gamma}$ ἴσ. □ῳ· καὶ πάντα δκις διὰ τὸ μόριον· γίνεται $\Delta^{\Upsilon}\Delta\,\overline{\theta}\,\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\varsigma}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $K^{\Upsilon}\,\overline{\delta}$ ς $\overline{\iota\beta}$· ταῦτα ἴσα □ῳ τῷ ἀπὸ πλ. $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\gamma}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ ς $\overline{\varsigma}$· αὐτὸς ἄρα ἔσται $\Delta^{\Upsilon}\Delta\,\overline{\theta}\,\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\mu\beta}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $K^{\Upsilon}\,\overline{\lambda\varsigma}$ ς $\overline{\iota\beta}$ ἴσ. $\Delta^{\Upsilon}\Delta\,\overline{\theta}\,\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\varsigma}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $K^{\Upsilon}\,\overline{\delta}$ ς $\overline{\iota\beta}$. καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια· καὶ λοιποὶ $K^{\Upsilon}\,\overline{\lambda\beta}$ ἴσοι $\Delta^{\Upsilon}\,\overline{\lambda\varsigma}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{\theta}{\eta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὰς τῶν κύβων πλ., τὴν μὲν ς $\overline{\alpha}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, τὴν

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα εἴτε μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ κύβον.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα των σχηματίζει κύβον, ἔστω τὸν 64. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμα των σχηματίζει κύβον, ἔστω τὸν 8. Τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος ἄρα, προερχόμενον ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τοῦ ἄλλου, εἶναι 56 ὥστε τὸ ἄθροισμά των εἶναι 28· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα των εἶναι 64· ἡ διαφορὰ ἄρα τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τούτου, ἤτοι τὸ γινόμενον θὰ εἶναι 36. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ ἄθροισμά των νὰ δίδῃ 28, καὶ τὸ γινόμενον 36.

Ἂς τεθῇ ὁ μεγαλύτερος $x + 14$· ὁ μικρότερος ἄρα θὰ εἶναι $14 - x$. Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν, τουτέστι $196 - x^2$ τεθῇ $= 36$, ἐξ ἧς $x^2 = 160$.

Καὶ ἐὰν ὁ 160 ἦτο τετράγωνος, τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ. Ἀλλὰ ὁ 160 εἶναι ἡ διαφορὰ $196 - 36$. Ἀλλὰ $196 = 14^2$· ὁ δὲ 14 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 28· ὥστε ὁ 196 εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ 28· ἀλλὰ ὁ 28 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ 56, ὥστε ὁ 14 εἶναι τὸ ἓν τέταρτον τοῦ 56· ἀλλὰ ὁ 56 εἶναι ἡ διαφορὰ δύο κύβων, τοῦ 64 καὶ τοῦ 8, ὁ δὲ 36 εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω δύο κύβους, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ τετάρτου τῆς διαφορᾶς των, μεῖον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ μεγαλυτέρου $x + 1$, τοῦ δὲ μικροτέρου $x - 1$· καὶ οἱ κύβοι τούτων γίνονται, ὁ μὲν μεγαλύτερος $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, ὁ δὲ μικρότερος $x^3 + 3x - (3x^2 + 1)$ καὶ τὸ τέταρτον τῆς διαφορᾶς των εἶναι $\left(1\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{2}$. Τοῦτο εἰς τὸ τετράγωνον γίνεται $\left(2\frac{1}{4}\right)x^4 + \left(1\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{4}$. Ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων, τὸ ὁποῖον εἶναι $x^3 + 3x$, μένει : $\left(2\frac{1}{4}\right)x^4 + \left(1\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{4} - (x^3 + 3x) =$ τετράγωνος· πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4· ὁπότε ἔχομεν $9x^4 + 6x^2 + 1 - (4x^3 + 12x) =$ τετράγωνος, ἔστω $= (3x^2 + 1 - 6x)^2$· εἶναι ἄρα ὁ τετράγωνος οὗτος $9x^4 + 42x^2 + 1 - (36x^3 + 12x) = 9x^4 + 6x^2 + 1 - (4x^3 + 12x)$. Ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων· ὅτε λαμβάνομεν $32x^3 = 36x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{9}{8}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ἔθεσα τὰς κυβικὰς ῥίζας τῶν κύβων, τὴν μὲν μίαν δὲ ϛ α ⋔ Μ̊ α, καὶ ἔσται ἡ μὲν ιζ, ἡ δὲ α. αὐτοὶ ἄρα οἱ κύβοι ἔσονται, ὁ μὲν α$^{\text{ος}}$ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵δϡιγ}}$, ὁ δὲ β$^{\text{ος}}$ ἑνός.

Ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ ζητῶ τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν κύβον τῶν ͵δϡιγ, τὸν δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν κύβον τὸ α.

Ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν ὑπ᾽ αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖ κύβον, τουτέστι Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵δϡιγ}}$, ὧν ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ κύβον, τουτέστι Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{α}}$, ὁ δὶς ἄρα συναμφότερός ἐστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχή, τουτέστι ͵δϡιβ, ὥστε συναμφότερος ἔσται ͵βυνϛ· ἀλλὰ ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ͵δϡιγ, ὧν συναμφότερος ͵βυνϛ· ἔσται ἄρα ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵βυνζ}}$. καὶ προδέδεικται αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, καὶ νῦν δὲ δειχθήσεται διὰ τὸ πρόβλημα.

Τετάχθω ὁ α$^{\text{ος}}$, ϛ α καὶ Μ̊ τοῦ L´ ὧν εἰσι συναμφότερα, τουτέστι Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵ασκη}}$. ὁ β$^{\text{ος}}$ ἔσται Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵ασκη}}$ ⋔ ϛ α· καὶ ἔστι μὲν συναμφότερος Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵βυνϛ}}$· ἀλλὰ ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν ἐστι $\overset{\text{Υ}}{\text{Μ}}$ ϙν. ͵ζϡπδ μορίου κϛ. ͵βϙμδ ⋔ Δ$^{\text{Υ}}$ α· ταῦτα ἴσα Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{͵βυνζ}}$· καὶ πάντα ἐπὶ ⟨τὸ⟩ μόριον, τουτέστιν, κϛ. ͵βϙμδ. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. γίνεται Δ$^{\text{Υ}}$ κϛ. ͵βϙμδ ἴσαι $\overset{\text{Υ}}{\text{Μ}}$ κε. καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\overset{\text{φιβ}}{\text{φ}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ α$^{\text{ος}}$ ͵αψκη, ὁ β$^{\text{ος}}$ ψκη, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Ἄλλως.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ᾽ αὐτῶν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ κύβον.

Ἐν δὲ τῷ τοιούτῳ, ἅπας τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς εἴς τε τὴν πλευ-

$x + 1$, τὴν δὲ ἄλλην $x - 1$, καὶ θὰ εἶναι ἡ μὲν $\frac{17}{8}$, ἡ δὲ $\frac{1}{8}$. Οἱ κύβοι ἄρα θὰ εἶναι, ὁ μὲν πρῶτος $\frac{4913}{512}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{1}{512}$.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ ζητῶ ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ κύβον, τὸν $\frac{4913}{512}$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ κύβον, τὸν $\frac{1}{512}$.

Ἐπειδὴ λοιπόν, τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν μὲν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζει κύβον, τουτέστι $\frac{4913}{512}$, μεῖον δὲ τὸ ἄθροισμά των σχηματίζει κύβον, τουτέστι $\frac{1}{512}$, τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τοῦ ἄλλου, τουτέστι $\frac{4912}{512}$, ὥστε τὸ ἄθροισμά των εἶναι $\frac{2456}{512}$· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των εἶναι $\frac{4913}{512}$, ἐν ᾧ τὸ ἄθροισμά των εἶναι $\frac{2456}{512}$· θὰ εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{2457}{512}$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις αὕτη ἔχει γίνει εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον (θεώρ. 27), καὶ τώρα δὲ θ' ἀποδειχθῇ διὰ τὸ πρόβλημα.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος, x σὺν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{1228}{512}$· ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\frac{1228}{512} - x$· καὶ τὸ μὲν ἄθροισμά των εἶναι $\frac{2457}{512}$· ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{1507984}{262144} - x^2$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $\frac{2457}{512}$· πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸν 262144· καὶ ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων. Καὶ λαμβάνομεν $262144x^2 = 250.000$. Ἐξ ἧς $x = \frac{500}{512}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{1728}{512}$, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\frac{728}{512}$, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

Ἄλλη ἀπόδειξις

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα εἴτε μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ κύβον.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐφαρμόζομεν τὸ γνωστὸν ὅτι, πᾶς *ρὰν καὶ τὸν λοιπόν, ποιεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου κύβον. τετάχθω τοίνυν ὁ τετράγωνος $Δ^{Υ}\overline{α}$, καὶ διῃρήσθω εἴς τε τὴν πλ. καὶ τὸν λοιπόν. ἔσται $ϛ\,\overline{α}$ καὶ $Δ^{Υ}\overline{α} ⋔ ϛ\,\overline{α}$· καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου κύβος.*

λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ $Κ^{Υ}\overline{α} ⋔ Δ^{Υ}\overline{β}$· ταῦτα ἴσα κύβῳ ἐλάσσονι τοῦ $Κ^{Υ}\overline{α}$· πλάσσω $Κ^{Υ}η^{×}$, καὶ πάντα $η^{κις}$· γίνονται

$Κ^{Υ}\overline{η} ⋔ Δ^{Υ}\overline{ις}$ ἴσ. $Κ^{Υ}\overline{α}$, καὶ γίνεται ὁ $ϛ\,\overset{ζ}{\overline{ις}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $α^{ος}\,\overset{ζ}{\overline{ις}}$, ὁ δὲ $β^{ος}\,\overset{μθ}{\overline{ρμδ}}$.

κθ.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς ⟨τετραγώνους⟩, οἳ συντεθέντες καὶ προσλαβόντες τὰς ἰδίας πλευρὰς συντεθείσας ποιοῦσι δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω δὴ τὸν $\overline{ιβ}$.

Ἐπεὶ πᾶς $□^{ος}$ προσλαβὼν τὴν ἰδίαν πλ. καὶ $\mathring{Μ}δ^{×}$, ποιεῖ $□^{ον}$, οὗ ἡ πλ. $⋔ \mathring{Μ}\,L'$ ποιεῖ ἀριθμόν τινα, ὅς ἐστι τοῦ ἐξ ἀρχῆς $□^{ου}$ πλευρά, οἱ τέσσαρες ἀριθμοί ἄρα, προσλαβόντες μὲν τὰς ἰδίας πλ., ποιοῦσι $\mathring{Μ}\,\overline{ιβ}$, προσλαβόντες δὲ καὶ $\overline{δ}\ δ^{α}$, ποιοῦσι τέσσαρας $□^{ους}$· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ $\mathring{Μ}\,\overline{ιβ}$ μετὰ $\overline{δ}\ δ^{ων}$, ὅ ἐστι $\mathring{Μ}\overline{α}$, $\mathring{Μ}\,\overline{ιγ}$. τὰς $\overline{ιγ}$ ἄρα $\mathring{Μ}$ διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας $□^{ους}$, καὶ ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ἀφελὼν ἀπὸ ἑκάστης πλ. $\mathring{Μ}\,L'$, ἕξω τῶν $\overline{δ}\ □^{ων}$ τὰς πλ..

Διαιρεῖται δὲ ὁ $\overline{ιγ}$ εἰς δύο $□^{ους}$, τόν τε $\overline{δ}$ καὶ $\overline{θ}$. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς δύο $□^{ους}$, εἰς $\overset{κε}{\overline{ξδ}}$ καὶ $\overset{κε}{\overline{λϛ}}$, καὶ $\overset{κε}{\overline{ρμδ}}$, καὶ $\overset{κε}{\overline{πα}}$. λαβὼν τοίνυν ἑκά-

τετράγωνος ἀριθμὸς ἄθροισμα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτου καὶ τῆς διαφορᾶς ταύτης ἀπὸ τοῦ τετραγώνου, καὶ ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος σὺν τὸ ἄθροισμα τούτων δίδει κύβον. Ἄς τεθῇ λοιπὸν ὁ τετράγωνος x^2 καὶ ἂς ἀναλυθῇ εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου καὶ τὴν διαφορὰν ταύτης ἀπὸ τοῦ τετραγώνου. Θὰ εἶναι λοιπὸν $x + (x^2 - x)$· καὶ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ὅρων τούτων σὺν τὸ ἄθροισμα των, κύβος.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον τῶν ὅρων μεῖον τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι κύβος. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον μεῖον τὸ ἄθροισμα δίδει $x^3 - 2x^2$· ταῦτα εἶναι (κατὰ τὸ πρόβλημα) ἴσα πρὸς κύβον, ἀλλὰ μικρότερα τοῦ x^3· σχηματίζω τὸν κύβον τοῦτον, ἔστω $= \frac{1}{8}x^3$, καὶ πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ 8· ὁπότε ἔχω :

$$8x^3 - 16x^2 = x^3, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{16}{7}.$$

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{16}{7}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{144}{49}$.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοὶ τετράγωνοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν των νὰ σχηματίζωσι δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὅτι σχηματίζουσι τὸν 12.

Ἐπειδὴ πᾶς τετράγωνος ἀριθμός, σὺν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου, σὺν $\frac{1}{4}$ σχηματίζει ἀριθμὸν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα μεῖον $\frac{1}{2}$ σχηματίζει ἀριθμόν τινα, ὅστις εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ληφθέντος τετραγώνου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ (τετράγωνοι) ἄρα σὺν τὸ ἄθροισμα μὲν τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν των σχηματίζουσι 12, σὺν δὲ $\frac{4}{4}$, δίδουσι τέσσαρας τετραγώνους. εἶναι δὲ καὶ $12 + \frac{4}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶναι 1, $= 13$. Πρέπει ἄρα ν' ἀναλυθῇ ὁ 13 εἰς τέσσαρας τετραγώνους, καὶ ἀφοῦ ἀφαιρέσω ἐξ ἑκάστης τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν τετραγώνων τούτων, $\frac{1}{2}$, θὰ ἔχω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν τεσσάρων τετραγώνων ἀριθμῶν.

Ἀναλύεται δὲ ὁ 13 εἰς δύο τετραγώνους, καὶ τὸν 4 καὶ τὸν 9. Καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων ἀναλύεται εἰς δύο τετραγώνους, εἰς $\frac{64}{25}$ καὶ $\frac{36}{25}$, καὶ $\frac{144}{25}$ καὶ $\frac{81}{25}$. Ἀφοῦ λάβω λοιπὸν ἑκάστου τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, $\frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5}$, στου τὴν πλευράν, $\overset{ε}{\overline{η}}$, ⟨$\overset{ε}{\overline{ϛ}}$, $\overset{ε}{\overline{ιβ}}$⟩, $\overset{ε}{\overline{θ}}$, καὶ αἴρω ἀπὸ ἑκάστου τούτων πλευρᾶς $\mathring{M}L'$, καὶ ἔσονται αἱ πλ. τῶν ζητουμένων □^{ων}, $\overset{ι}{\overline{ια}}$, $\overset{ι}{\overline{ζ}}$, $\overset{ι}{\overline{ιθ}}$, $\overset{ι}{\overline{ιγ}}$. αὐτοὶ ἄρα οἱ □^{οι}, ὃς μὲν $\overset{ϱ}{\overline{ϱκα}}$, ὃς δὲ $\overset{ϱ}{\overline{μθ}}$, ὃς δὲ $\overset{ϱ}{\overline{τξα}}$, ὃς δὲ $\overset{ϱ}{\overline{ϱξθ}}$.

λ.

Εὑρεῖν τέσσαρας τετραγώνους οἳ συντεθέντες καὶ λείψαντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν συντεθείσας ποιοῦσι δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω δὴ $\mathring{M}\,\overline{δ}$.

Ἐπεὶ οὖν τὸν α^{ον} λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλ., καὶ τὸν β^{ον} λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλ., καὶ τὸν γ^{ον}, καὶ τὸν δ^{ον}, ὁμοίως λείψαντα, ⟨δεῖ⟩ ποιεῖν $\mathring{M}\overline{δ}$, ἀλλὰ μὴν καὶ πᾶς □^{ος}, λείψας τὴν ἑαυτοῦ πλ., καὶ προσλαβὼν $\mathring{M}δ^{\times}$, ποιεῖ □^{ον}, οὗ ἡ πλ. προσλαβοῦσα $\mathring{M}L'$ ποιεῖ τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς □^{ου} πλευράν, ὥστε οἱ τέσσαρες, λείψαντες αὐτῶν τὰς πλ., καὶ προσλαβόντες $\mathring{M}^{ος}\,\overline{δ}\,δ^{α}$, τουτέστι $\mathring{M}\overline{α}$, ποιήσουσι τέσσαρας □^{ους}· ἀλλὰ καὶ οἱ τέσσαρες, λείψαντες αὐτῶν τὰς πλ., ποιοῦσι $\mathring{M}\overline{δ}$· προσλαβόντες δὲ καὶ $\mathring{M}\overline{α}$, ποιοῦσι $\mathring{M}\overline{ε}$. ἀπῆκται οὖν μοι τὸν $\overline{ε}$ διελεῖν εἰς τέσσαρας □^{ους}. [ἑκάστῃ τῶν πλ. προσέθηκα $\mathring{M}L'$ καὶ εὗρον τὰς τῶν ζητουμένων □^{ων} πλ.].

Διαιρεῖται δὲ ὁ $\overline{ε}$ εἰς τέσσαρας □^{ους}, $\overset{κε}{\overline{θ}}$ καὶ $\overset{κε}{\overline{ιϛ}}$ καὶ $\overset{κε}{\overline{ξδ}}$ καὶ $\overset{κε}{\overline{λϛ}}$. λαμβάνω τούτων τὰς πλευράς, γίνονται $\overset{ε}{\overline{γ}}$, $\overset{ε}{\overline{δ}}$, $\overset{ε}{\overline{η}}$, $\overset{ε}{\overline{ϛ}}$. προστίθημι ἑκάστῳ τούτων $\mathring{M}L'$ καὶ εὑρίσκω τὰς πλευράς, ἣν μὲν $\overset{ι}{\overline{ια}}$, ἣν δὲ $\overset{ι}{\overline{ιγ}}$, ἣν δὲ $\overset{ι}{\overline{κα}}$, ἣν δὲ $\overset{ι}{\overline{ιζ}}$. ἔσονται δὲ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὃς μὲν $\overset{ϱ}{\overline{ϱκα}}$, ὃς δὲ $\overset{ϱ}{\overline{ϱξθ}}$, ὃς δὲ $\overset{ϱ}{\overline{υμα}}$, ὃς δὲ $\overset{ϱ}{\overline{σπθ}}$.

καὶ ἀφαιρέσω ἀπὸ ἑκάστης τούτων $\frac{1}{2}$, θὰ ἔχω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ζητουμένων τετραγώνων, ἤτοι $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{13}{10}$. Αὐτοὶ ἄρα οἱ τετράγωνοι εἶναι, ὁ μὲν $\frac{121}{100}$, ὁ δὲ $\frac{49}{100}$, ὁ δὲ $\frac{361}{100}$, ὁ δὲ $\frac{169}{100}$.

30

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες τετράγωνοι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν σχηματίζει δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὅτι σχηματίζει τὸν 4.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ πρῶτος μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, σὺν τὸν δεύτερον μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, σὺν τὸν τρίτον μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, σὺν τὸν τέταρτον μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ πρέπει νὰ σχηματίζῃ 4, ἀλλ' ὅμως καὶ πᾶς τετράγωνος μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ σὺν $\frac{1}{4}$ σχηματίζει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα σὺν $\frac{1}{2}$ δίδει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων (τετραγώνων) μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν αὐτῶν, σὺν $\frac{4}{4}$, τουτέστι 1, σχηματίζουσι τέσσαρας τετραγώνους· ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων (τετραγώνων), μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν αὐτῶν σχηματίζουσι 4· προσλαβόντες δὲ καὶ 1, δίδουσι 5. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, νὰ ἀναλύσω τὸν 5 εἰς τέσσαρας τετραγώνους. [Εἰς ἑκάστην τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν προσθέτω $\frac{1}{2}$ καὶ εὑρίσκω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ζητουμένων τετραγώνων].

Ἀναλύεται δὲ ὁ 5 εἰς τέσσαρας τετραγώνους, $\frac{9}{25}$, καὶ $\frac{16}{25}$ καὶ $\frac{64}{25}$ καὶ $\frac{36}{25}$. Λαμβάνω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τούτων, ὅτε ἔχω $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$. Προσθέτω εἰς ἑκάστην τούτων $\frac{1}{2}$ καὶ εὑρίσκω τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας, τὴν μὲν $\frac{11}{10}$, τὴν δὲ $\frac{13}{10}$, τὴν δὲ $\frac{21}{10}$, τὴν δὲ $\frac{17}{10}$. Θὰ εἶναι δὲ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὁ μὲν $\frac{121}{100}$, ὁ δὲ $\frac{169}{100}$, ὁ δὲ $\frac{441}{100}$, ὁ δὲ $\frac{289}{100}$.

λα.

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον.

Ἔστω τὴν $\mathring{M}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ᾧ μὲν προστιθέναι $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, ᾧ δὲ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν □ον.

Τετάχθω ὁ αος $\varsigma\,\overline{\alpha}$, ὁ ἄρα βος ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\varsigma\,\overline{\alpha}$· καὶ ἐὰν μὲν τῷ αῳ προστεθῶσι $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, ἔσται $\varsigma\,\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\gamma$· ἐὰν δὲ τῷ βῳ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$, ἔσται $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$ ⋔ $\varsigma\,\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν $\varsigma\,\overline{\gamma}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\eta}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ. ἔστω $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}$. καὶ κοινὴ προσκείσθω τὰ τῆς λείψεως· γίνονται $\varsigma\,\overline{\gamma}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\eta}$ ἴσ. $\Delta\,\overline{\varepsilon}$, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή.

ἀλλὰ αἱ $\Delta^{Y}\,\overline{\varepsilon}$ ἐστὶ □ος μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· δεῖ ταύτας ἐπὶ τὰς $\overline{\iota\eta}$ $\mathring{M}$ πολλαπλασιασθείσας καὶ προσλαβούσας τὸν ἀπὸ τοῦ ∠′ τῶν $\overline{\gamma}$ ς □ον, τουτέστι $\overline{\beta}$ $\delta^{\times}$, ποιεῖν □ον. διὰ τοῦτο τοίνυν ἀπῆκταί μοι εἰς τὸ ζητῆσαι □ον, ⟨ ὅς ⟩ προσλαβὼν $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, καὶ ιηκις γενόμενος, καὶ προσλαβὼν $\mathring{M}\,\overline{\beta}\,\delta^{\times}$, ποιεῖ □ον.

ἔστω ὁ □ος $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· οὗτος μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ιηκις γενόμενος καὶ προσλαβὼν $\mathring{M}\,\overline{\beta}\,\delta^{\times}$ ⟨ποιεῖ⟩ $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\eta}$ $\mathring{M}\,\overline{\kappa}\,\delta^{\times}$ ἴσ. □ῳ. πάντα δκις, γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{o\beta}$ $\mathring{M}\,\overline{\pi\alpha}$ ἴσ. □ῳ. καὶ πλάσσω τὸν □ον ἀπὸ $\varsigma\,\overline{\eta}$ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$· γίνεται ὁ ς $\mathring{M}\,\overline{\iota\eta}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ □ος $\overline{\tau\kappa\delta}$.

Ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, ἰσῶσαι $\varsigma\,\overline{\gamma}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\eta}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ.

νῦν τάσσω $\Delta^{Y}\,\overline{\tau\kappa\delta}$· καὶ γίνεται ὁ ς τκεων $\overline{o\eta}$, τουτέστιν $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\varsigma}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\varsigma}$· ὁ δὲ βος $\overline{\iota\theta}$.

Ἄλλως.

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον.

Ἔστω δὴ τὴν $\mathring{M}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ ᾧ μὲν προσθεῖναι $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, ᾧ δὲ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν □ον.

31.

Ἡ μονὰς νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε προστιθεμένου εἰς ἑκάτερον δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀθροισμάτων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ ἀναλυθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ εἰς μὲν τὸν ἕνα νὰ προστεθῇ ὁ 3, εἰς δὲ τὸν ἄλλον ὁ 5, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀθροισμάτων τούτων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι $1 - x$· καὶ ἐὰν μὲν εἰς τὸν πρῶτον προστεθῇ 3 θὰ γίνῃ $x + 3$· ἐὰν δὲ εἰς τὸν δεύτερον 5 θὰ γίνῃ $6 - x$· καὶ γίνεται τὸ γινόμενον αὐτῶν $3x + 18 - x^2 =$ τετράγωνος. Ἔστω $= 4x^2$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τὸ $+ x^2$· ὁπότε ἔχομεν $3x + 18 = 5x^2$, καὶ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις.

Ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς 5 εἶναι τετράγωνος σὺν 1· ὅθεν πρέπει οὗτος νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 18 καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ 3x, τουτέστι ὁ $2\frac{1}{4}$, καὶ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Διὰ τοῦτο ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητήσω τετράγωνον, εἰς τὸν ὁποῖον νὰ προσθέτω τὴν μονάδα καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ πολλαπλασιάζω ἐπὶ 18 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον νὰ προσθέτω $2\frac{1}{4}$, ὥστε νὰ γίνεται τετράγωνος.

Ἔστω ὁ τετράγωνος οὗτος x^2· τότε εἶναι :

$(x^2 + 1) \cdot 18 + 2\frac{1}{4} = 18x^2 + 20\frac{1}{4} =$ τετράγωνος. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ 4, ὅτε ἔχομεν $72x^2 + 81 =$ τετράγωνος. Καὶ σχηματίζω τὸν τετράγωνον ἐκ τοῦ $8x + 9$· ἐξ ἧς $x = 18$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι 324.

Ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα ὅπου πρέπει $3x + 18 - x^2 =$ τετράγωνος.

Θέτω τώρα $324x^2$ τὸν τετράγωνον τοῦτον· ἐξ ἧς $x = \frac{78}{325}$, τουτέστιν $\frac{6}{25}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{6}{25}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{19}{25}$.

Ἄλλη ἀπόδειξις

Ἡ μονὰς νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε προστιθεμένου εἰς ἑκάτερον δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀθροισμάτων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ν' ἀναλυθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὸν ἕνα νὰ προστεθῇ

Τετάχθω ὁ α^{ος} ς $\overline{α}$ καὶ ⋀ M̊ $\overline{γ}$ ἃς προσλαμβάνει. λοιπὸς ἄρα ὁ β^{ος} ἔσται M̊ $\overline{δ}$ ⋀ ς $\overline{α}$.

καὶ ἐὰν μὲν τῷ α^{ῳ} προστεθῶσι M̊$\overline{γ}$, γί. ς $\overline{α}$, ἐὰν δὲ τῷ β^{ῳ} M̊$\overline{ε}$, γί. M̊$\underset{ε}{\overline{θ}}$ ⋀ ς $\overline{α}$. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ς $\overline{θ}$ ⋀ Δ^{Υ} $\overline{α}$ ἴσ. □^{ῳ}· ἔστω Δ^{Υ} $\overline{δ}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\overline{θ}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· καὶ οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ς^{οῦ} $\overline{γ}$ M̊.

Δεῖ οὖν τὸν ς μείζονα μὲν εἶναι M̊$\overline{γ}$, ἐλάσσονα δὲ M̊ $\overline{δ}$. ὁ δὲ ς εὕρηται ἐκ τοῦ τὸν $\overline{θ}$ μερισθῆναι εἰς τὸν $\overline{ε}$, ὅς ἐστι □^{ος} σὺν M̊$\overline{α}$. εἰ δὲ ὁ $\overline{θ}$, μεριζόμενος εἴς τινα □^{ον} σὺν M̊$\overline{α}$, ποιεῖ M̊$\overline{γ}$, εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, ἔστι δὴ ὁ $\overline{γ}$· εἰς ὃν δὲ ὁ $\overline{θ}$ μερίζεται, □^{ός} ἐστι ⟨σὺν⟩ M̊, ὥστε ὁ □^{ος} σὺν M̊$\overline{α}$ ⟨ἐλάσσων ἐστὶ M̊$\overline{γ}$⟩. καὶ ἦρθω ἡ M̊· ὁ ἄρα □^{ος} ⟨ἐλάσσων⟩ ἐστὶ M̊$\overline{β}$.

πάλιν θέλομεν τὸν $\overline{θ}$ μερίζοντες εἰς □^{ον} σὺν M̊$\overline{α}$ ποιεῖν M̊ $\overline{δ}$. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, ⟨ἔστι δὴ M̊ $\overline{β}$ δ$^{\times}$· εἰς ὃν δὲ μερίζεται⟩ ὁ $\overline{θ}$, □^{ος} ἐστι σὺν M̊$\overline{α}$, ὥστε ὁ □^{ος} σὺν τῇ M̊ μείζων ἐστὶ M̊ $\overline{β}$ δ$^{\times}$· καὶ ἦρθω ἡ M̊$\overline{α}$· ὥστε ὁ □^{ος} μείζων M̊$\overline{α}$δ$^{\times}$.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἐλάσσων $\overline{β}$ □^{ος}· γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν τινα □^{ον} ὅς ἐστι μείζων M̊$\overline{α}$ δ$^{\times}$, ἐλάσσων δὲ $\overline{β}$.

Καὶ ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά, εἰς ξδ^{α}, καὶ γίνονται $\overline{π}$ καὶ $\overline{ρκη}$· τοῦτο δέ ἐστι ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν, ὁ □^{ος} $\overset{ξδ}{\overline{ρ}}$, τουτέστιν $\overset{ιϛ}{\overline{κε}}$.

Ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ἐζήτουν ς $\overline{θ}$ ⋀ Δ^{Υ} $\overline{α}$ ἴσ. □^{ῳ}, τουτέστι τῷ εὑρημένῳ ἴσ. Δ^{Υ} $\overset{ιϛ}{\overline{κε}}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{μα}{\overline{ρμδ}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ α^{ος} $\overline{κα}$, ὁ β^{ος} $\overline{κ}$.

λβ.

Δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ $\overline{ϛ}$.

ὁ 3, εἰς δὲ τὸν ἄλλον ὁ 5, καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος $x - 3$, μεῖον δηλ. ὅσας μονάδας προσθέτομεν. Ὁ ἄλλος ἄρα ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $4 - x$.

Καὶ ἂν μὲν εἰς τὸν πρῶτον προστεθῇ 3, γίνεται x, ἐὰν δὲ εἰς τὸν δεύτερον 5, γίνεται $9 - x$. Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $9x - x^2 =$ τετράγωνος· ἔστω $= 4x^2$. Ἐξ ἧς $x = \frac{9}{5}$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· καὶ δὲν δύναμαι ν' ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ x τὸ 3.

Πρέπει λοιπὸν ὁ x νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 καὶ μικρότερος τοῦ 4. Ὁ δὲ x εὑρέθη τὸ πηλίκον τοῦ 9 διὰ 5, ὁ ὁποῖος εἶναι τετράγωνος σὺν 1. Ἐὰν δὲ ὁ 9 διαιρούμενος διά τινος τετραγώνου σὺν 1, δίδει 3, καὶ ὁ 3 ἄρα εἶναι διαιρέτης· τὸ πηλίκον δὲ τότε τοῦ 9 εἶναι τετράγωνος σὺν 1, $(\alpha^2 + 1)$, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν 1 εἶναι μικρότερος τοῦ 3· καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς· ὁ τετράγωνος ἄρα εἶναι μικρότερος τοῦ 2.

Πάλιν θέλομεν, ὥστε $9 : \alpha^2 + 1 = 4$. Ὁ διαιρέτης ἄρα, εἶναι $= 2\frac{1}{4}$· ἀλλὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 9 καὶ ὁ $\alpha^2 + 1$, ὥστε $\alpha^2 + 1 > 2\frac{1}{4}$. καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς· ὥστε ὁ $\alpha^2 > 1\frac{1}{4}$.

Ἐδείχθη δὲ καὶ $\alpha^2 < 2$· ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω τετράγωνόν τινα, ὅστις νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ $1\frac{1}{4}$, μικρότερος δὲ τοῦ 2. Καὶ ἐκφράζω τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τετράγωνον, ἔστω 64, ὅτε εἶναι $\frac{80}{64}$ καὶ $\frac{128}{64}$· τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον, καὶ ὁ μεταξὺ τούτων τετράγωνος εἶναι ὁ $\frac{100}{64}$, τουτέστιν ὁ $\frac{25}{16}$.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, ὅτε ἐζήτουν $9x - x^2 =$ τετράγωνος, τουτέστι πρὸς τὸ εὑρεθὲν $\frac{25}{16}x^2$· ἐξ ἧς $x = \frac{144}{51}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{21}{41}$, ὁ δεύτερος $\frac{20}{41}$.

32

Δοθεὶς ἀριθμὸς ν' ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον εἴτε σὺν εἴτε μεῖον τὸν τρίτον, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ 6.

Τετάχθω ὁ $\gamma^{\text{ος}}$ ϛ $\overline{\alpha}$, καὶ ὁ $\beta^{\text{ος}}$ $\overset{\circ}{M}$ ἐλασσόνων τοῦ $\overline{\varsigma}$. ἔστω $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$· ὁ ἄρα $\alpha^{\text{ος}}$ ἔσται $\overset{\circ}{M}\,\delta$ ⋔ ϛ$\overline{\alpha}$· καὶ λοιπά ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τὸν ὑπὸ $\alpha^{\text{ου}}$ καὶ $\beta^{\text{ου}}$, ἐάν τε προλάβῃ τὸν $\gamma^{\text{ον}}$, ἐάν τε λείψῃ, ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$. καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης· $\overset{\circ}{M}\,\overline{\eta}$ ⋔ ϛ $\overline{\alpha}$ ἴσ. $\square^{\varphi}$· καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\eta}$ ⋔ ϛ$\overline{\gamma}$ ἴσ. $\square^{\varphi}$· καὶ οὐ ῥητόν ἐστι διὰ τὸ μὴ εἶναι τοὺς ϛ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας ὃν $\square^{\text{ος}}$ ἀριθμὸς πρὸς $\square^{\text{ον}}$ ἀριθμόν.

ἀλλὰ ὁ ϛ ὁ $\overline{\alpha}$ μονάδι ἐλάσσων τοῦ $\overline{\beta}$, οἱ δὲ ϛ$\overline{\gamma}$ ὁμοίως μείζ. ⟨ $\overset{\circ}{M}\iota$ ⟩ τοῦ $\overline{\beta}$. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὡς τὸν $\overline{\beta}$, ἵνα ὁ $\overset{\circ}{M}\iota$ αὐτοῦ μείζων, πρὸς τὸν $\overset{\circ}{M}\iota$ ⟨ αὐτοῦ ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ ὃν $\square^{\text{ος}}$ ἀριθμὸς πρὸς ⟩ $\square^{\text{ον}}$ ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ $\overline{\alpha}$, καὶ ⟨ ὁ ⟩ $\overset{\circ}{M}\iota\overline{\alpha}$ αὐτοῦ μείζων ἔσται ϛ$\overline{\alpha}\,\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$ ὁ δὲ $\overset{\circ}{M}\iota$ αὐτοῦ ἐλάσσων ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$. θέλομεν οὖν αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν ὃν $\square^{\text{ος}}$ ἀριθμὸς πρὸς $\square^{\text{ον}}$ ἀριθμόν. ἔστω ὃν $\overline{\delta}$ πρὸς $\overline{\alpha}$· ὥστε ϛ$\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$ ἐπὶ $\overset{\circ}{M}\overline{\delta}$ γίνονται ϛ$\overline{\delta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$· καὶ ϛ $\overline{\alpha}\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$ ἐπὶ τὴν $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$ ⟨ γίνονται ϛ$\overline{\alpha}\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$ ⟩. καί εἰσιν οὗτοι οἱ ἐκκείμενοι ἀριθμοὶ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει $\square^{\text{ος}}$ ἀριθμὸς πρὸς $\square^{\text{ον}}$ ἀριθμόν· νῦν ϛ$\overline{\delta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$ ἴσ. ϛα$\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\circ}{M}\overset{\gamma}{\overline{\varepsilon}}$.

τάσσω οὖν τὸν $\beta^{\text{ον}}$ $\overset{\circ}{M}\overset{\gamma}{\overline{\varepsilon}}$· ὁ γὰρ $\gamma^{\text{ος}}$ ἐστὶν ϛ$\overline{\alpha}$· ὁ ἄρα $\alpha^{\text{ος}}$ ἔσται $\overset{\circ}{M}\overset{\gamma}{\overline{\iota\gamma}}$ ⋔ ϛ$\overline{\alpha}$.

λοιπὸν δεῖ εἶναι τὸ ἐπίταγμα, ἔστω τὸν ὑπὸ $\alpha^{\text{ου}}$ καὶ $\beta^{\text{ου}}$, προσλαβόντα τὸν $\gamma^{\text{ον}}$, ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$, καὶ λείψαντα τὸν $\gamma^{\text{ον}}$, ποιεῖν $\square^{\text{ον}}$· ἀλλ' ὁ ὑπὸ $\alpha^{\text{ου}}$ καὶ $\beta^{\text{ου}}$, προσλαβὼν τὸν $\gamma^{\text{ον}}$, ποιεῖ $\overset{\circ}{M}\overset{\vartheta}{\overline{\xi\varepsilon}}$ ⋔ ϛ ω⁻ ἴσ. $\square^{\varphi}$· ⋔ δὲ τοῦ $\gamma^{\text{ου}}$, ποιεῖ $\overset{\circ}{M}\overset{\vartheta}{\overline{\xi\varepsilon}}$ ⋔ ϛ$\overline{\beta}$ ω⁻ ἴσ. $\square^{\varphi}$. καὶ πάντα ἐπὶ τὸν $\overline{\theta}$, καὶ γίνονται $\overset{\circ}{M}\overline{\xi\varepsilon}$ ⋔ ϛ $\overline{\varsigma}$ ἴσ. $\square^{\varphi}$, καὶ $\overset{\circ}{M}\overline{\xi\varepsilon}$ ⋔ ϛ$\overline{\kappa\delta}$ ἴσ. $\square^{\varphi}$. καὶ ἐξισῶ, τοὺς ϛ τῆς μείζονος ἰσότητος ποιήσας δκις., καὶ ἔστι

$\overset{\circ}{M}\,\overline{\sigma\xi}$ ⋔ ϛ $\overline{\kappa\delta}$. ἴσ. $\square^{\varphi}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\xi\varepsilon}$ ⋔ ϛ $\overline{\kappa\delta}$. ἴσ. $\square^{\varphi}$.

νῦν τούτων λαμβάνω τὴν ὑπεροχὴν καὶ ἔστι $\overset{\circ}{M}\overline{\rho\text{ϙ}\varepsilon}$· καὶ ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπό ἐστι $\overset{\circ}{M}\overline{\rho\text{ϙ}\varepsilon}$, καί εἰσι $\overline{\iota\varepsilon}$ καὶ $\overline{\iota\gamma}$· καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ L' ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι $\square^{\varphi}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\gamma^{\text{ων}}$ $\overline{\eta}$.

Ἂς τεθῇ ὁ τρίτος x, καὶ ὁ δεύτερος μικρότερος τοῦ 6, ἔστω 2· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $4 - x$· ὑπολείπονται δύο ἐπιτάγματα, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον εἴτε σὺν εἴτε πλὴν τὸν τρίτον σχηματίζῃ τετράγωνον. Καὶ γίνονται δύο ἐξισώσεις· $8 - x =$ τετράγωνος· καὶ $8 - 3x =$ τετράγωνος· καὶ ὁ ἄγνωστος δὲν εἶναι ῥητός, διότι οἱ συντελεσταὶ τοῦ x δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν (Εὐκλ. X 9).

Ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς 1 τοῦ x εἶναι μικρότερος τοῦ 2 κατὰ μονάδα, ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ 3x εἶναι ὁμοίως μεγαλύτερος τοῦ 2 κατὰ μονάδα· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ἀριθμόν τινα, ὡς τὸν 2, ἵνα ὁ μεγαλύτερος αὐτοῦ κατὰ μονάδα, πρὸς τὸν μικρότερον αὐτοῦ κατὰ μονάδα, ἔχῃ λόγον ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x, καὶ ὁ μεγαλύτερος αὐτοῦ κατὰ μονάδα θὰ εἶναι $x + 1$, ὁ δὲ μικρότερος αὐτοῦ κατὰ μονάδα θὰ εἶναι $x - 1$. Θέλομεν λοιπὸν αὐτοὶ νὰ ἔχουν λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἔστω $(x + 1) : (x - 1) = 4 : 1$. ὥστε $(x - 1) \cdot 4 = 4x - 4$· καὶ $(x + 1) \cdot 1 = x + 1$. Καὶ εἶναι οἱ ληφθέντες οὗτοι ἀριθμοὶ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· τώρα εἶναι $4x - 4 = x + 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{5}{3}$.

Θέτω λοιπὸν τὸν δεύτερον $\frac{5}{3}$· διότι ὁ τρίτος εἶναι x· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{13}{3} - x$.

Ὑπολείπεται ἤδη τὸ ἐπίταγμα, ὥστε τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τοῦ δεύτερον, σὺν τὸν τρίτον, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ μεῖον τὸν τρίτον, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν τὸν τρίτον, σχηματίζει $\frac{65}{9} - \frac{2}{3}\,x =$ τετράγωνος· τὸ αὐτὸ δὲ γινόμενον μεῖον τὸν τρίτον, σχηματίζει $\frac{65}{9} - \frac{8}{3}\,x =$ τετράγωνος. Καὶ πολλαπλασιάζοντες ὅλα ἐπὶ 9 λαμβάνομεν $65 - 6x =$ τετράγωνος, καὶ $65 - 24x =$ τετράγωνος· καὶ πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μεγαλυτέρας ἰσότητος ἐπὶ 4, ὁπότε θὰ ἔχω :

$260 - 24x =$ τετράγωνος, καὶ $65 - 24x =$ τετράγωνος.

Τώρα λαμβάνω τὴν διαφορὰν τούτων, ἡ ὁποία εἶναι 195· καὶ εὑρίσκω δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι 195, καὶ εἶναι οὗτοι 15 καὶ 13· καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τούτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον τετράγωνον, $(1 = 65 - 24x)$, ἐξ ἧς $x = \frac{8}{3}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^{ος} ε̄, ὁ δὲ β^{ος} ε̄, ὁ δὲ γ^{ος} η̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

λγ.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἕτερος, παρὰ τοῦ ἑτέρου προσλαβὼν τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, λόγον ἔχῃ πρὸς τὸν περιλειφθέντα ὑπὸ τοῦ δοθέντος τὸν ἐπιταχθέντα.

'Επιτετάχθω δὴ τὸν α^{ον}, προσλαβόντα παρὰ τοῦ β^{ου} μέρος τι ἢ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι γ$^{πλ.}$, τὸν δὲ β^{ον}, προσλαβόντα παρὰ τοῦ α^{ου} τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι ε$^{πλ.}$

Τετάχθω ὁ β^{ος} ϛ ᾱ Μ̊ ᾱ, τὸ δὲ μέρος ἢ μέρη αὐτοῦ ἔστω Μ̊ ᾱ· ὁ ἄρα α^{ος} ἔσται ϛ γ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ, καὶ ὁ α^{ος}, ἐὰν προσλάβῃ τοῦ β^{ου} μέρος τι ἢ μέρη, τουτέστι Μ̊ ᾱ, γίνεται τοῦ λοιποῦ γ$^{πλ.}$ θέλομεν δὲ καὶ τὸν β^{ον}, προσλαβόντα ⟨τοῦ α^{ου}⟩τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ εἶναι ε$^{πλ.}$.

ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δύο εἰσὶν ϛ δ̄ καὶ ὁ β^{ος} λαμβάνει τι καὶ ὁ α^{ος} δίδωσι, καὶ ὁ γενόμενος τοῦ λοιποῦ γίνεται ε$^{πλ.}$, ὥστε ὁ συναμφότερος, ὁ γενόμενος καὶ ὁ λοιπός, ἔσται ϛ δ̄, ὥστε ὁ λοιπὸς ἔσται ἐὰν τῶν ϛ δ̄ λάβωμεν τὸ ϛ^{ον}, τουτέστιν ϛ ω̄· ἐὰν ἄρα ἀπὸ ϛ γ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ ἄρωμεν ϛ ω̄, ἕξομεν τοῦ α^{ου} μέρος ἢ μέρη.

ἐὰν δὲ ἄρωμεν, λοιπός ἐστι γενόμενος ϛ $\overset{\gamma}{\overline{\zeta}}$ ⋔ Μ̊ ᾱ· λαβὼν γὰρ ὁ β^{ος}, ὁ ϛ ᾱ Μ̊ ᾱ παρὰ τοῦ α^{ου} ϛ $\overset{\gamma}{\overline{\zeta}}$ ⋔ Μ̊ ᾱ, γίνεται ε$^{πλ.}$. τοῦ καταλιμπανομένου τοῦ α^{ου}.

λοιπὸν δεῖ ἐνθάδε ζητῆσαι, εἰ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη Μ̊ ᾱ, ϛ^{οῦ} ᾱ Μ̊ ᾱ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ϛ^{ῶν} γ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ οἱ ϛ $\overset{\gamma}{\overline{\zeta}}$ ⋔ Μ̊ ᾱ.

ὅταν δέ τι τοιοῦτο ζητῇς, τὸ ὑπὸ ⟨τῶν⟩ ϛ $\overset{\gamma}{\overline{\zeta}}$ ⋔ Μ̊ α καὶ ϛ ᾱ Μ̊ ᾱ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ϛ γ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ ἐπὶ τὴν Μ̊, τουτέστι τὰ μέρη ἐναλλὰξ πολλαπλασιάζεται· ὧν εἰσιν Δ^{Υ} $\overset{\gamma}{\overline{\zeta}}$ ϛ $\overset{\gamma}{\overline{\delta}}$ ⋔ Μ̊ ᾱ ἴσ. ϛ γ̄ ⋔ Μ̊ ᾱ· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\zeta}{\overline{\varepsilon}}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{5}{3}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{5}{3}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{8}{3}$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

33.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ὁ εἷς προσλαμβάνων παρὰ τοῦ ἄλλου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔχει πρὸς τὸν ὑπολειπόμενον τὸν δοθέντα λόγον.

Ἂς προσταχθῇ ὅπως ὁ πρῶτος ἀφοῦ προσλάβει παρὰ τοῦ δευτέρου μέρος τι ἢ μέρη, νὰ εἶναι τοῦ ὑπολειπομένου τριπλάσιος, ὁ δὲ δεύτερος ἀφοῦ προσλάβει παρὰ τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, νὰ εἶναι τοῦ ὑπολειπομένου πενταπλάσιος.

Ἂς τεθῇ ὁ δεύτερος $x + 1$, τὸ δὲ μέρος ἢ μέρη αὐτοῦ ἔστω 1· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $3x - 1$, καὶ ὁ πρῶτος ἐὰν προσλάβῃ μέρος τι ἢ μέρη τοῦ δευτέρου, τουτέστι 1 γίνεται τοῦ ὑπολειπομένου τριπλάσιος. Θέλομεν δὲ καὶ ὁ δεύτερος, ἐὰν προσλάβῃ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ πρώτου νὰ εἶναι τοῦ ὑπολειπομένου πενταπλάσιος.

Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δύο ἔχουσι ἄθροισμα $4x$ καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει τι καὶ ὁ πρῶτος δίδει τι, καὶ ὁ προκύπτων γίνεται τοῦ ὑπολειπομένου πενταπλάσιος, συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τοῦ προκύπτοντος καὶ τοῦ ὑπολειπομένου θὰ εἶναι $4x$, ὥστε ὁ ὑπολειπόμενος θὰ εὑρεθῇ ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ $4x$, τουτέστιν εἶναι $\frac{2}{3}x$· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ $3x - 1$ ἀφαιρέσωμεν $\frac{2}{3}x$, θὰ ἔχωμεν μέρος ἢ μέρη τοῦ πρώτου.

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\frac{7}{3}x - 1$· διότι ὁ δεύτερος, ὁ $x + 1$, λαβὼν παρὰ τοῦ πρώτου τὸ $\frac{7}{3}x - 1$ γίνεται πενταπλάσιος τοῦ ὑπολειπομένου ἐκ τοῦ πρώτου (μετὰ τὴν δόσιν τοῦ $\frac{7}{3}x - 1$).

Ὑπολείπεται ἐδῶ νὰ ζητήσωμεν, ὅπως οἷον μέρος ἢ μέρη εἶναι τὸ 1 τοῦ $x + 1$, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη νὰ εἶναι τὸ $\frac{7}{3}x - 1$ τοῦ $3x - 1$.

Ὅταν δὲ ζητῇς τοιοῦτο τι, τὸ γινόμενον $\left(\frac{7}{3}x - 1\right) \cdot (x + 1)$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $(3x - 1) \cdot 1$, τουτέστι οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων $\left(\text{τῶν } \frac{1}{x+1} = \frac{\frac{7}{3}x - 1}{3x - 1}\right)$ πολλαπλασιάζονται χιαστί· ὁπότε λαμβάνομεν ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος $\overset{\zeta}{\overline{\eta}}$, ὁ δὲ βος $\overset{\zeta}{\overline{\iota\beta}}$.

Ἦν δὲ τοῦ βου μέρη M̊ ᾱ· σκεπτόμεθα· ἡ M̊ᾱ τοῦ βου· εἰσὶ δὲ $\overset{\iota\beta}{\overline{\zeta}}$· καὶ ποιῶ ζκις τοὺς δύο ἀριθμούς. ἔσται ὁ αος M̊η̄, ὁ βος M̊ιβ̄, τὰ δὲ μέρη $\overset{\iota\beta}{\overline{\zeta}}$. ἀλλὰ ἐπεὶ ὁ αος οὐκ ἔχει ιβον, ποιῶ αὐτὰ τρίς, ἵνα μὴ εἰς μόρια ἐμπίπτῃ· ἔσται ὁ αος κδ̄, ὁ βος λϛ̄, τὰ δὲ μέρη τῶν $\overset{\iota\beta}{\overline{\zeta}}$, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. ποιείτω M̊η̄.

Τετάχθω ὁ αος ϛ ᾱ, ὁ βος M̊γ̄· καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ἐστὶν ϛ δ̄ M̊γ̄· ταῦτα ἴσα M̊η̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ δων ⟨ε̄⟩. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ αος δων ε̄, ὁ βος M̊γ̄.

Νῦν σκέπτομαι ὁ ϛ πόθεν ἐγένετο $\overset{\delta}{\overline{\varepsilon}}$· ἐκ τοῦ τὸν ε̄ μερισθῆναι εἰς τοὺς ϛ δ̄· ἀλλ' ὁ ε̄ ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ η̄ ἧς ὑπερέχει τὸν γ̄. οἱ δὲ ϛ δ̄ εἰσιν ὁ M̊ι μείζων τοῦ βου.

ἐὰν ἄρα τάξωμεν τὸν βον ϛοῦ οἱουδήποτε, καὶ ἄρω αὐτὸν ἀπὸ M̊η̄, καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω παρὰ τὸν M̊ι μείζονα τοῦ βου, ἕξω τὸν αον.

οἷον, ἔστω ὁ βος ϛᾱ ⋔ M̊ᾱ· ταῦτα αἴρω ἀπὸ M̊η̄· λοιπὸν M̊ θ̄ ⋔ ϛᾱ· ταῦτα μερίζω εἰς τὸν M̊ιᾱ μείζονα, τουτέστιν εἰς ϛᾱ, καὶ γίνεται ϛ× θ̄ ⋔ M̊ᾱ· ἔσται ὁ αος.

Καὶ λέλυται ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν M̊η̄. τὸ δὴ ἐν τῷ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ϛ, ὅσων ἄν τις θέλῃ M̊ εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας, περανῇ τὸ πρόβλημα.

λδ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφό-

$\frac{7}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 3x - 1$· ἐξ ἧς $x = \frac{5}{7}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{8}{7}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{12}{7}$.

Ἦσαν δὲ τοῦ δευτέρου τὰ μέρη 1· τώρα σκεπτόμεθα· 1 : τοῦ δευτέρου = 7 : 12. καὶ πολλαπλασιάζω τοὺς δύο ἀριθμοὺς ἐπὶ 7. Θὰ εἶναι ὁ πρῶτος 8, ὁ δεύτερος 12, τὰ δὲ μέρη $\frac{7}{12}$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος δὲν διαιρεῖται διὰ 12, πολλαπλασιάζω τὰ μέρη ἐπὶ 3 διὰ νὰ ἀποφύγω τὰ κλάσματα· ὁ πρῶτος θὰ εἶναι 24, ὁ δεύτερος 36, τὰ δὲ μέρη των $\frac{7}{12}$, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζει τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Ἂς σχηματίζῃ τὸν 8.

Ἂς ταχθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ δεύτερος 3· καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των εἶναι $4x + 3$· ταῦτα ἴσον 8. Ἐξ ἧς $x = \frac{5}{4}$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα. ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{5}{4}$, ὁ δεύτερος 3.

Τώρα σκέπτομαι πῶς ὁ x ἔγινε $\frac{5}{4}$· ἔγινε ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 5 διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ 4x· ἀλλὰ ὁ 5 εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 8 ἀπὸ τοῦ 3· ὁ δὲ συντελεστὴς τοῦ 4x (ὁ 4) εἶναι ὁ δεύτερος σὺν 1.

Ἐὰν ἄρα τάξωμεν τὸν δεύτερον οἱαδήποτε μέρη τοῦ x, καὶ ἀφαιρέσω αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 8, καὶ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσω διὰ τοῦ δευτέρου σὺν 1, θὰ λάβω τὸν πρῶτον.

Παραδείγματος χάριν, ἔστω ὁ δεύτερος $x - 1$· ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ 8· λαμβάνω $9 - x$· ταῦτα διαιρῶ διὰ τοῦ δευτέρου σὺν 1, τουτέστι τοῦ x, καὶ γίνεται $\frac{9}{x} - 1$· τοῦτο θὰ εἶναι ὁ πρῶτος.

Καὶ ἐλύθη ἀπροσδιορίστως τὸ πρόβλημα, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμά των νὰ σχηματίζῃ 8. Ἡ ἀπροσδιόριστος λοιπὸν λύσις ἔγκειται εἰς τοῦτο, νὰ δίδῃ τις οἵαν τιμὴν θέλει εἰς τὸν x, καὶ νὰ ἀντικαθιστᾷ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων καὶ νὰ λύῃ τὸ πρόβλημα.

34.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν *τερον ποιῇ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. — Δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μονάδα μίαν.*

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ α^ου^ καὶ β^ου^ μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$, *τὸν ὑπὸ τοῦ β^ου^ καὶ γ^ου^ μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν* $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\varepsilon}$, *τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ α^ου^ καὶ τοῦ γ^ου^ μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν* $\overset{\circ}{M}\overline{\kappa\delta}$.

Ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν ὑπὸ α^ου^ καὶ β^ου^ μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$, *ἐὰν ἄρα τάξω τὸν β^ον^ ὁσουδήποτε καὶ ἀπὸ* $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$ *ἄρω αὐτόν, καὶ μερίσω παρὰ τὸν* $\overset{\circ}{M}{}^{\iota}$ *μείζονα τοῦ β^ου^, ἕξω τὸν α^ον^.*

*τετάχθω ὁ β^ος^* ς $\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$· *καὶ ἐὰν ἀπὸ* $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$ *ἄρω αὐτά, καὶ μερίσω παρὰ τὸν* $\overset{\circ}{M}{}^{\iota}\overline{\alpha}$ *μείζονα τοῦ β^ου^, ἔσται ὁ α^ος^* ς^×^ $\overline{\theta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$.

πάλιν ὁμοίως ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ τοῦ β^ου^ καὶ τοῦ γ^ου^ μετὰ συναμφοτέρου ποιεῖν $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\varepsilon}$, ⟨ *ἐὰν ἀπὸ* $\overset{\circ}{M}\overline{\iota\varepsilon}$ ⟩ *ἀφέλω* ς$\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$ *καὶ μερίσω εἰς τὸν* $\overset{\circ}{M}{}^{\iota}\overline{\alpha}$ *μείζονα τοῦ β^ου^, τουτέστιν, εἰς* ς$\overline{\alpha}$, *γίνονται* ς^×^ $\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$, *ἕξω τὸν γ^ον^.*

λοιπὸν ἔστι τὸν ὑπὸ α^ου^ καὶ γ^ου^ μετὰ συναμφοτέρου· ποιεῖ Δ^{Y} ×$\overline{\rho\mu\delta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$· *ταῦτα ἴσα* $\overset{\circ}{M}\overline{\kappa\delta}$, *καὶ γίνεται ὁ* ς $\frac{\varepsilon}{\iota\beta}$.

*ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^ος^* $\frac{\iota\beta}{\lambda\gamma}$, *ὁ δὲ β^ος^* $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, *ὁ δὲ γ^ος^* $\frac{\iota\beta}{\xi\eta}$. *καὶ πάντα εἰς ἓν μόριον καὶ γίνεται ὁ α^ος^* $\frac{\xi}{\rho\xi\varepsilon}$, *ὁ β^ος^* $\frac{\xi}{\pi\delta}$, *ὁ δὲ γ^ος^* $\frac{\xi}{\tau\mu}$.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τὸν δοθέντα. Ἔστω τὸν $\overline{\eta}$.

*Τετάχθω ὁ α^ος^* ς$\overline{\alpha}$, *ὁ β^ος^* $\overset{\circ}{M}\overline{\gamma}$, *καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον ποιεῖ* ς$\overline{\beta}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\overline{\gamma}$ *ἴσ.* $\overset{\circ}{M}\overline{\eta}$. *καὶ γίνεται ὁ* ς $\overset{\circ}{M}\overline{\varepsilon}L'$. *ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^ος^* $\overset{\circ}{M}\overline{\varepsilon}L'$, *ὁ δὲ β^ος^* $\overset{\circ}{M}\overline{\gamma}$.

Πάλιν οὖν σκέπτομαι πόθεν ἐγένετο ὁ ς $\overset{\circ}{M}\overline{\varepsilon}L'$· *ἐκ τοῦ τὸν* $\overline{\iota\alpha}$ *μερισθῆ-*

σὺν τὸ ἄθροισμα των σχηματίζῃ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. (Περιορισμός). Πρέπει δὲ οἱ δοθέντες νὰ εἶναι τετράγωνοι μεῖον 1.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ 8, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ 15, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ 24.

Ἐπειδὴ λοιπὸν θέλω ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ 8, ἐὰν ἄρα θέσω τὸν δεύτερον ὁσονδήποτε καὶ ἀφαιρέσω αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 8, καὶ διαιρέσω διὰ τοῦ δευτέρου σὺν 1, θὰ ἔχω τὸν πρῶτον.

Ἂς τεθῇ ὁ δεύτερος $x - 1$· καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ 8 ἀφαιρέσω τοῦτο, καὶ διαιρέσω τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου σὺν 1, θὰ εἶναι ὁ πρῶτος $\frac{9}{x} - 1$.

Πάλιν ὁμοίως, ἐπειδὴ θέλω ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ 15, ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 15 τὸν $x - 1$ καὶ διαιρέσω τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου σὺν 1, τουτέστι x, λαμβάνω $\frac{16}{x} - 1$, ὅτε θὰ ἔχω τὸν τρίτον.

Ὑπολείπεται ὅπως σχηματισθῇ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν τὸ ἄθροισμά των· τοῦτο δίδει $\frac{144}{x^2} - 1$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 24, ἐξ ἧς $x = \frac{12}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{33}{12}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{7}{5}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{68}{12}$. Καὶ καθιστῶντες τὰ κλάσματα ὁμώνυμα λαμβάνομεν τὸν πρῶτον $\frac{165}{60}$, τὸν δεύτερον $\frac{84}{60}$, καὶ τὸν τρίτον $\frac{340}{60}$.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἀόριστοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των νὰ σχηματίζῃ τὸν δοθέντα. Ἔστω τὸν 8.

Ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ δεύτερος 3, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των δίδει $2x - 3 = 8$. Ἐξ ἧς $x = 5\,\frac{1}{2}$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $5\,\frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος 3.

Πάλιν λοιπὸν σκέπτομαι πῶς προέκυψεν ὁ $x = 5\,\frac{1}{2}$· προέκυψεν ἐκ τῆς ναι εἰς τὸν $\overline{β}$· ἀλλὰ ὁ $\overline{ια}$ ὁ δοθείς ἐστι μετὰ τοῦ βου· οἱ δὲ ς $\overline{β}$ εἰσὶν ὁ Μ̊ ι ἐλάσσων τοῦ βου.

ἐὰν οὖν τάξω τὸν βον ὁσουδήποτε καὶ προσθῶμεν αὐτὸν τῷ δοθέντι, καὶ τὰ γενόμενα μερίσωμεν παρὰ τὸν Μ̊ ι $\overline{α}$ ἐλάσσονα τοῦ βου, εὑρήσομεν τὸν αον.

ἔστω ὁ βος ς $\overline{α}$ Μ̊ $\overline{α}$· ταῦτα μετὰ Μ̊ $\overline{η}$ ποιεῖ ς $\overline{α}$ Μ̊ $\overline{θ}$. μερίζω ταῦτα εἰς τὸν Μ̊ ι $\overline{α}$ ἐλάσσονα τοῦ βου, τουτέστιν εἰς ς $\overline{α}$, καὶ γίνεται Μ̊ $\overline{α}$ ς$^{×}$ $\overline{θ}$.

καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀορίστῳ, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν Μ̊ $\overline{η}$.

λε.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας συναμφότερον ποιῇ τοὺς δοθέντας. —Δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι παρὰ μονάδα.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ αου καὶ τοῦ βου, λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν Μ̊ $\overline{η}$, τὸν δὲ ὑπὸ βου καὶ γου, λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν Μ̊ $\overline{ιε}$, τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ γου καὶ τοῦ αου, λείψαντα συναμφότερον, ποιεῖν Μ̊ $\overline{κδ}$.

Ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ τοῦ αου καὶ τοῦ βου, λειψαντα συναμφότερον, ποιεῖν Μ̊ $\overline{η}$, ἐὰν ἄρα τάξω τὸν βον οἱουδήποτε, καὶ προσθῶμεν αὐτὸν εἰς Μ̊ $\overline{η}$, καὶ τὰ γενόμενα μερίσω παρὰ τὸν Μ̊ ι ἐλάσσονα τοῦ βου, ἕξω τὸν αον, κατὰ τὸ λῆμμα τὸ προγεγραμμένον.

ἔστω ὁ βος ς $\overline{α}$ Μ̊ $\overline{α}$· προστίθημι αὐτῷ Μ̊ $\overline{η}$· γίνεται ς $\overline{α}$ Μ̊ $\overline{θ}$· ταῦτα μερίζω εἰς τὸν πρῶτον ἐλάσσονα τοῦ βου, τουτέστιν εἰς ς $\overline{α}$, καὶ γίνεται Μ̊ $\overline{α}$ ς$^{×}$ $\overline{θ}$· ἔσται ὁ αος.

ὁμοίως δὲ καὶ ὁ γος ἔσται Μ̊ $\overline{α}$ ς$^{×}$ $\overline{ιϛ}$, καὶ λέλυταί μοι δύο ἐπιτάγματα.

λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ αου καὶ γου λείψαντα συναμφότερον· ποιεῖ Δ$^{Υ×}$ $\overline{ρμδ}$ ⋀ Μ̊ $\overline{α}$ ἴσ. Μ̊ $\overline{κδ}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{ε}{\overline{ιβ}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν αος $\overset{ιβ}{\overline{νζ}}$, ὁ δὲ βος $\overset{ε}{\overline{ιζ}}$, ὁ δὲ γος $\overset{ιβ}{\overline{ϙβ}}$· καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτοὺς εἶναι ἑνὸς μορίου, πάντα εἰς ξα, ἔσται ⟨ὁ αος⟩ $\overline{σπε}$, ὁ βος $\overline{σδ}$, ὁ γος $\overline{υξ}$.

διαιρέσεως τοῦ 11 διὰ 2· ἀλλὰ ὁ 11 εἶναι ὁ δοθεὶς σὺν τὸν δεύτερον· ὁ δὲ συντελεστὴς 2 τοῦ $2x$ εἶναι ὁ δεύτερος μεῖον 1.

Ἐὰν λοιπὸν θέσω τὸν δεύτερον τυχόντα καὶ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς τὸν δοθέντα καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ δευτέρου μεῖον 1, θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον.

Ἔστω ὁ δεύτερος $x + 1$· οὗτος σὺν 8 δίδει $x + 9$. Διαιρῶ ταῦτα διὰ τοῦ δευτέρου μεῖον 1, τουτέστι τοῦ x, καὶ λαμβάνω $1 + \frac{9}{x}$.

Καὶ λύεται τὸ πρόβλημα ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των νὰ δίδῃ 8.

35

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των δίδῃ τοὺς δοθέντας. Πρέπει δὲ οἱ δοθέντες νὰ εἶναι τετράγωνοι μεῖον 1.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, μεῖον τὸ ἄθροισμά των, δίδῃ 8, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, μεῖον τὸ ἄθροισμά των, δίδῃ 15, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον, μεῖον τὸ ἄθροισμά των, δίδῃ 24.

Ἐπειδὴ θέλω, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, μεῖον τὸ ἄθροισμά των δίδῃ 8, ἐὰν ἄρα θέσω τὸν δεύτερον τυχόντα, καὶ προσθέσω αὐτὸν εἰς τὸν 8, καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρέσω διὰ τοῦ δευτέρου μεῖον 1, θὰ ἔχω τὸν πρῶτον, κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα.

Ἔστω ὁ δεύτερος $x + 1$· προσθέτω εἰς αὐτὸν 8· γίνεται $x + 9$· ταῦτα διαιρῶ διὰ τοῦ δευτέρου μεῖον 1, τουτέστι διὰ τοῦ x, καὶ λαμβάνω $1 + \frac{9}{x}$· τοῦτο θὰ εἶναι ὁ πρῶτος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι $1 + \frac{16}{x}$, καὶ οὕτω πως ἔχουσι λυθῇ δύο ἐπιτάγματα.

Ὑπολείπεται ὅπως σχηματισθῇ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον μεῖον τὸ ἄθροισμά των· τοῦτο δίδει $\frac{144}{x^2} - 1 = 24$· ἐξ ἧς $x = \frac{12}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{57}{12}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{17}{5}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{92}{12}$. καὶ ἐὰν θέλῃς νὰ εἶναι τὰ κλάσματα ὁμώνυμα τρέψε ὅλα εἰς ἑξηκοστά, ὁπότε ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{285}{60}$· ὁ δεύτερος $\frac{204}{60}$, ὁ τρίτος $\frac{460}{60}$.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν ἀριθμοὺς ἀορίστους δύο, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ αὐτῶν συναμφότερον εἶναι τρίς.

Καὶ τετάχθω ὁ $α^{ος}$ ϛ α̅, ὁ $β^{ος}$ Μ̊ ε̅. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ϛ ε̅· ταῦτα θέλομεν εἶναι τρὶς ϛ α̅ Μ̊ ε̅. ὥστε ϛ γ̅ Μ̊ ι̅ε̅ ἴσοι εἰσὶν ϛ ε̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ ζ̅ L'. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ $α^{ος}$ Μ̊ ζ̅ L', ὁ $β^{ος}$ Μ̊ ε̅.

Βλέπω οὖν ⟨πόθεν⟩ ὁ ϛ γέγονεν Μ̊ ζ̅ L'· ἐκ τοῦ τὸν ι̅ε̅ μερισθῆναι εἰς β̅ ϛ· ἀλλὰ ὁ ι̅ε̅ ὁ $β^{ος}$ πολλαπλασιαζόμενός ἐστιν ἐπὶ τὸν λόγον. ὁ δὲ β̅ ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ $β^{ος}$ τοῦ λόγου.

Ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν $β^{ον}$ οἱουδήποτε ϛ, καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν λόγον, ποιεῖ ϛ γ̅, καὶ ἐὰν μερισθῇ εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ $β^{ος}$ τοῦ λόγου, τουτέστιν εἰς ϛ α̅ ⋔ Μ̊ γ̅, γίνεται ὁ $α^{ος}$ ϛ γ̅ ἐν μορίῳ ϛ α̅ ⋔ Μ̊ γ̅.

λϛ.

Εὑρεῖν ἀριθμοὺς τρεῖς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ $α^{ου}$ καὶ $β^{ου}$ συναμφοτέρους εἶναι $γ^{ίς}$, τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ $β^{ου}$ καὶ $γ^{ου}$ συναμφοτέρους εἶναι $δ^{κις}$, τὸν δὲ ὑπὸ $α^{ου}$ καὶ τοῦ $γ^{ου}$ συναμφοτέρους εἶναι $ε^{κις}$.

Τετάχθω ὁ $β^{ος}$ ϛ α̅· ἔσται δή, διὰ τὸ λῆμμα, ὁ $α^{ος}$ ϛ γ̅ ἐν μορίῳ ϛ α̅ ⋔ Μ̊ γ̅· ὁμοίως καὶ ὁ $γ^{ος}$ ϛ δ̅ ἐν μορίῳ ϛ α̅ ⋔ Μ̊ δ̅.

λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπὸ τοῦ $α^{ου}$ καὶ τοῦ $γ^{ου}$ συναμφοτέρους εἶναι $ε^{κις}$. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ $α^{ου}$ καὶ $γ^{ου}$ $Δ^{Υ}$ ι̅β̅ ἐν μορίῳ $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ ι̅β̅ ⋔ ϛ ζ̅, συναμφότερος δέ ἐστιν ὁ $α^{ος}$ καὶ ὁ $γ^{ος}$ $Δ^{Υ}$ ζ̅ ⋔ ϛ κ̅δ̅ μορίου $Δ^{Υ}$ α̅ Μ̊ ι̅β̅ ⋔ ϛ ζ̅.

Οὕτως· ὅταν γὰρ δεήσῃ συνθεῖναι μόρια, οἷον·

ϛ γ̅ μορ. ϛ α̅ ⋔ Μ̊ γ̅ καὶ ϛ δ̅ μορ. ϛ α̅ ⋔ Μ̊ δ̅, οἱ ϛ τοῦ μέρους ἐπὶ τὰ ἐναλλὰξ μόρια πολλαπλασιασθήσονται, οἷον ϛ γ̅ ἐπὶ τὰ τοῦ ἑτέρου μόρια τουτέστιν

Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἀπροσδιόριστοι, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμά των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

Καὶ ἂς τεθῇ ὁ πρῶτος x, ὁ δεύτερος 5. Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $5x$· ταῦτα θέλομεν νὰ εἶναι $= 3\,(x + 5)$. Ὥστε $3x + 15 = 5x$, ἐξ ἧς $x = 7\frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $7\frac{1}{2}$, ὁ δεύτερος 5.

Βλέπω λοιπὸν πῶς προέκυψεν ὁ $7\frac{1}{2}$· προέκυψεν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 15 διὰ τοῦ συντελεστοῦ 2 τοῦ $2x$. Ἀλλὰ ὁ 15 εἶναι ὁ δεύτερος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν λόγον. Ὁ δὲ δύο εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ λόγου.

Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν τὸν δεύτερον x, καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν λόγον, λαμβάνομεν $3x$, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ τοῦτο διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ λόγου, τουτέστι $x - 3$, γίνεται ὁ πρῶτος $3x$ μὲ παρονομαστὴν $x - 3$.

36.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμά των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἂς τεθῇ ὁ δεύτερος x· θὰ εἶναι συνεπῶς, κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα, ὁ πρῶτος $\frac{3\,x}{x - 3}$. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι $\frac{4\,x}{x - 4}$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτο, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι $\frac{12\,x^2}{x^2 + 12 - 7x}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τρίτου εἶναι $\frac{7x^2 - 24x}{x^2 + 12 - 7x}$.

Τοιουτοτρόπως. διότι ὅταν εἶναι ἀνάγκη νὰ προστεθῶσι κλάσματα, ὡς $\frac{3x}{x - 3} + \frac{4x}{x - 4}$, θὰ πολλαπλασιάσωμεν χιαστί, ἤτοι τὸ $3x$ ἐπὶ τὸν παροἐπὶ ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ M̊ $\overline{\delta}$, καὶ πάλιν οἱ ϛ $\overline{\delta}$ ἐπὶ τὰ μόρια τοῦ ἑτέρου, ἐπὶ ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ M̊ $\overline{\gamma}$. οὕτως ἐποίησεν ἡ σύνθεσις Δ^{Y} $\overline{\zeta}$ ⋔ ϛ $\overline{\kappa\delta}$ μορίου τοῦ ὑπὸ τῶν μορίων, τουτέστι Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\iota\beta}$ ⋔ ϛ $\overline{\zeta}$.

ἔχομεν δὲ καὶ τὸν ὑπὸ τοῦ $\alpha^{ου}$ καὶ $\gamma^{ου}$ Δ^{Y} $\overline{\iota\beta}$ μορίου Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\iota\beta}$ ⋔ ϛ $\overline{\zeta}$.

Δ^{Y} ἄρα $\overline{\iota\beta}$ ⟨μορίου Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\iota\beta}$⟩ ⋔ ϛ $\overline{\zeta}$ $\varepsilon^{πλ.}$ εἰσι τῆς συνθέσεως. $\varepsilon^{κις}$ ἄρα ἡ σύνθεσις· γίνεται Δ^{Y} $\overline{\lambda\varepsilon}$ ⋔ ϛ $\overline{\rho\kappa}$ μορίου Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\iota\beta}$ ⋔ ϛ $\overline{\zeta}$. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν μόριον ἐπὶ Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\iota\beta}$ ⋔ ϛ $\overline{\zeta}$· καὶ γίνονται Δ^{Y} $\overline{\iota\beta}$ ἴσαι Δ^{Y} $\overline{\lambda\varepsilon}$ ⋔ ϛ $\overline{\rho\kappa}$ καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\kappa\gamma}{\overline{\rho\kappa}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· εἶχες δὴ τὸν μὲν $\alpha^{ον}$ ϛ $\overline{\gamma}$ μορ. ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ M̊ $\overline{\gamma}$, τὸν δὲ $\beta^{ον}$ ϛ $\overline{\alpha}$, τὸν δὲ $\gamma^{ον}$ ϛ $\overline{\delta}$ μορ. ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ M̊ $\overline{\delta}$.

εὑρέθη δὲ ὁ ϛ $\overset{\kappa\gamma}{\overline{\rho\kappa}}$. ἐὰν μὲν ἐπὶ τὸν $\alpha^{ον}$ ποιῇς, ἐπὶ ϛ $\overline{\gamma}$, ἔσονται M̊ $\overline{\tau\xi}$· λοιπὸς ἐπὶ τὸ μόριον, M̊ $\overline{\rho\kappa}$ ἐπὶ ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ M̊ $\overline{\gamma}$. γίνονται M̊ $\overline{\nu\alpha}$. λοιπὸς ἄρα ὁ $\alpha^{ος}$ $\overset{\nu\alpha}{\overline{\tau\xi}}$· ὁ δὲ $\beta^{ος}$ $\overset{\kappa\gamma}{\overline{\rho\kappa}}$, οὐ γὰρ εἶχεν ἀριθμητικὸν μόριον· ὁ δὲ $\gamma^{ος}$. ὁμοίως $\overline{\rho\kappa}$ ἐπὶ τοὺς $\overline{\delta}$ ϛ, γίνονται $\overline{\upsilon\pi}$· ὁμοίως καὶ ἐπὶ τὸ μόριον, $\overline{\rho\kappa}$ ἐπὶ ϛ $\overline{\alpha}$ ⋔ M̊ $\overline{\delta}$, γίνονται M̊ $\overline{\kappa\eta}$, λοιπὸς ἄρα ὁ $\gamma^{ος}$ M̊ $\overset{\kappa\eta}{\overline{\upsilon\pi}}$. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

λζ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν μὲν ὑπὸ τοῦ $\alpha^{ου}$ καὶ τοῦ $\beta^{ου}$ τῶν τριῶν εἶναι $\gamma^{πλ.}$, τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ $\beta^{ου}$ καὶ τοῦ $\gamma^{ου}$ τῶν τριῶν εἶναι $\delta^{πλ.}$, τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ $\gamma^{ου}$ καὶ τοῦ $\alpha^{ου}$ τῶν τριῶν εἶναι $\varepsilon^{πλ.}$

νομαστὴν τοῦ ἄλλου, τουτέστι $x - 4$, καὶ πάλιν τὸ $4x$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου, ἐπὶ $x - 3$. Τοιουτοτρόπως προέκυψε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν $7x^2 - 24x$, καὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, τουτέστι τὸ $x^2 + 12 - 7x$.

Ἔχομεν δὲ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον $\frac{12\,x^2}{x^2 + 12 - 7x}$.

Εἶναι ἄρα $\frac{12\,x^2}{x^2 + 12 - 7x} = 5$ φορὰς τὸ ἄθροισμα.

Νὰ ληφθῇ ἄρα τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος· τοῦτο εἶναι $\frac{35x^2 - 120x}{x^2 + 12 - 7x}$. Καὶ πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν· ὁπότε λαμβάνομεν $12x^2 = 35x^2 - 120x$· ἐξ ἧς $x = \frac{120}{23}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· εἶχες λάβει βεβαίως τὸν μὲν πρῶτον $\frac{3\,x}{x - 3}$, τὸν δὲ δεύτερον x, τὸν δὲ τρίτον $\frac{4x}{x - 4}$.

Εὑρέθη δὲ ὁ $x = \frac{120}{23}$. Ἐὰν μὲν ἀντικαταστήσῃς εἰς τὸν πρῶτον ἤτοι τὸν $3x$, θὰ γίνῃ $\frac{360}{23}$· πολλαπλασιάζομεν τὴν διαφορὰν (3) ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν (23) καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 120, εἰς τὸ $x - 3$. Γίνονται 51. Ὁ πρῶτος ἄρα εἶναι $\frac{360}{51}$. ὁ δὲ δεύτερος εἶναι $\frac{120}{23}$, διότι δὲν εἶχε παρονομαστήν· ὁ δὲ τρίτος λαμβάνεται ὡς ἑξῆς· ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν $\frac{120}{23}$ τὸν συντελεστὴν 4 τοῦ $4x$, ὅτε ἔχομεν $\frac{480}{23}$· ὁμοίως πράττομεν εἰς τὸν παρονομαστὴν $x - 4$, θέτοντες $x = \frac{120}{23}$ ὁπότε ἔχομεν $(120 - 4 \cdot 23) = 28$, καὶ ἑπομένως, ὁ τρίτος $\frac{480}{28}$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

37

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἔχῃ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν λόγον δεδομένον.

Ἄς ἐπιταχθῇ λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματκς τῶν τριῶν, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, τὸ δὲ γινόμε-

Ἐπεὶ οὖν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν ἐκ τῶν τριῶν λόγον ἔχει δεδομένον, ζητῶ πρότερον τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ τυχόντα ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν πρὸς τὸν τυχόντα λόγον ἔχῃ τὸν ἐπιταχθέντα.

ἔστω ὁ τυχὼν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varepsilon}$· *καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ α*^{ου} *καὶ τοῦ β*^{ου}, *τυχόντος ἐστὶ γ*^{πλ}, *τουτέστι τοῦ* $\overline{\varepsilon}$, *ὁ ὑπὸ τοῦ α*^{ου} *ἄρα καὶ τοῦ β*^{ου} *ἔσται* $\overset{\circ}{M}\,\overline{ιε}$. *ἔστω ὁ β*^{ος} ς $\overline{α}$, *ὁ ἄρα α*^{ος} *ἔσται* ς$^{\times}$ $\overline{ιε}$.

πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τοῦ β^{ου} *καὶ τοῦ γ*^{ου}, *τοῦ* $\overline{\varepsilon}$ *ἐστὶ δ*$^{πλ.}$, *ὁ ἄρα ὑπὸ β*^{ου} *καὶ γ*^{ου} *ἔσται* $\overset{\circ}{M}\,\overline{κ}$. *ἔστι δὲ ὁ β*^{ος} ς $\overline{α}$· *ὁ ἄρα γ*^{ος} *ἔσται* ς$^{\times}$ $\overline{κ}$.

λοιπὸν ἐστι καὶ τὸν ὑπὸ τοῦ γ^{ου} *καὶ τοῦ α*^{ου}, *ὅς* $\Delta^{Y\times}$ *εἰσι* $\overline{τ}$, *ταῦτα τοῦ* $\overline{\varepsilon}$ *εἶναι ε*$^{πλ.}$· *γίνονται* $\Delta^{Y\times}$ $\overline{τ}$ *ἴσ.* $\overset{\circ}{M}\,\overline{κε}$.

Καὶ εἰ ἦν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχον ὃν □^{ος} *πρὸς* □^{ον}, *λελυμένον ἂν ἦν μοι τὸ ζητούμενον. ἀλλὰ τὰ* $\overline{τ}$ $\Delta^{Y\times}$ *ὑπὸ τοῦ* $\overline{ιε}$ *ἐστι καὶ τοῦ* $\overline{κ}$. *ἀλλὰ ὁ* $\overline{ιε}$ *γ*$^{πλ.}$ *ἐστὶ τοῦ* $\overline{\varepsilon}$, *ὁ δὲ* $\overline{κ}$ *δ*$^{πλ.}$ *τοῦ* $\overline{\varepsilon}$. *θέλομεν οὖν τὸν γ*$^{πλ.}$ *τοῦ* $\overline{\varepsilon}$ *ἐπὶ τὸν δ*$^{πλ.}$ *τοῦ* $\overline{\varepsilon}$ *γενόμενον πρὸς τὸν ε*$^{πλ.}$ *τοῦ* $\overline{\varepsilon}$ *λόγον ἔχειν ὃν* □^{ος} *πρὸς* □^{ον}· *ὁ δὲ* $\overline{\varepsilon}$, *τυχὼν ἐστιν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ ζητεῖν τινα ἀριθμόν, ὅπως ὁ γ*$^{πλ.}$ *αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν δ*$^{πλ.}$ *αὐτοῦ καὶ ὁ γενόμενος πρὸς τὸν ε*$^{πλ.}$ *αὐτοῦ λόγον ἔχῃ ὃν* □^{ος} *πρὸς* □^{ον}.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ς $\overline{α}$· *καὶ ὁ γ*$^{πλ.}$ *αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν δ*$^{πλ.}$ *αὐτοῦ ποιείτω* Δ^{Y} $\overline{ιβ}$· *δεῖ τοίνυν τοῦτον πρὸς τὸν ε*$^{πλ.}$ *αὐτοῦ λόγον ἔχειν ὃν* □^{ος} *πρὸς* □^{ον}. Δ^{Y} *ἄρα* $\overline{ιβ}$ *πρὸς* ς $\overline{\varepsilon}$ *θέλομεν εἶναι ἐν λόγῳ ᾧ ἔχει* □^{ος} *ἀριθμὸς πρὸς* □^{ον} *ἀριθμόν· ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν καὶ αὐτὸς ἔσται* □^{ος}· K^{Y} *ἄρα* $\overline{ξ}$ *ἴσ.* □*ῳ. τοῦτο δὲ ῥάδιον· ἴσ.* Δ^{Y} $\overline{ϡ}$. *καὶ γίνεται ὁ* ς $\overset{\circ}{M}\,\overline{ιε}$. *ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ζητούμενος* $\overset{\circ}{M}\,\overline{ιε}$.

νον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον νὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε πρὸς τὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἔχει λόγον δεδομένον, ζητῶ προηγουμένως τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ τυχόντα ἀριθμόν, ὥστε τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε πρὸς τὸν τυχόντα νὰ ἔχῃ λόγον τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 5· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον εἶναι τριπλάσιον τοῦ τυχόντος, τουτέστι τοῦ 5, τὸ γινόμενον ἄρα τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτεον εἶναι 15. Ἔστω ὁ δεύτερος x, ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{15}{x}$.

Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ 5, τὸ γινόμενον ἄρα τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον θὰ εἶναι 20. Εἶναι δὲ ὁ δεύτερος x· ὁ τρίτος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{20}{x}$.

Ὑπολείπεται καὶ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν πρῶτον, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{300}{x^2}$, νὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ 5· ἤτοι $\frac{300}{x^2} = 25$.

Καὶ ἐὰν συνέβαινε, ὥστε ὁ συντελεστὴς πρὸς τὸν συντελστὴν νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸ πρόβλημα θὰ εἶχε λυθῇ. Ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς 300 τοῦ $\frac{1}{x^2}$ εἶναι τὸ γινόμενον $15 \cdot 20$. Ἀλλὰ ὁ 15 εἶναι $3 \cdot 5$, ὁ δὲ 20 εἶναι $4 \cdot 5$. Θέλομεν λοιπὸν τὸ γινόμενον $3 \cdot 5$ ἐπὶ $4 \cdot 5$ πρὸς τὸ $5 \cdot 5$ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὁ δὲ 5 εἶναι τυχών. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ἀριθμόν τινα, ὥστε ὁ τριπλάσιος αὐτοῦ ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τετραπλάσιον αὐτοῦ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ, ὃν λόγον ἔχει τετράγωνος πρὸς τετράγωνον (Εὐκλ. X 9).

Ἔστω ὁ ζητούμενος x· καὶ ὁ τριπλάσιος αὐτοῦ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετραπλάσιον αὐτοῦ ἂς δίδῃ $12x^2$· πρέπει λοιπὸν οὗτος πρὸς τὸν πενταπλάσιον αὐτοῦ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. Θέλομεν ἄρα νὰ εἶναι $12x^2 : 5x =$ τετράγωνος ἀριθμός : τετραγώνου ἀριθμοῦ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν τετράγωνος· εἶνα ἄρα $60\,x^3 =$ τετράγωνος. Τοῦτο εἶναι εὔκολον νὰ εὑρεθῇ. Ἔστω $= 900x^2$. Ἐξ ἧς $x = 15$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ ζητούμενος θὰ εἶναι 15.

Θέτω λοιπὸν αὐτὸν 15· θὰ εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τάσσω οὖν αὐτὸν Μ̊ $\overline{\iota\varepsilon}$· ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ τοῦ α^{ου} καὶ τοῦ β^{ου} Μ̊ $\overline{\mu\varepsilon}$. καὶ ἔστιν ὁ β^{ος} ς $\overline{\alpha}$· ὁ ἄρα α^{ος} ἔσται ς$^{\times}$ $\overline{\mu\varepsilon}$. ὁμοίως καὶ ὁ γ^{ος} ς$^{\times}$ $\overline{\xi}$.

λοιπόν ἐστι τὸν ὑπὸ α^{ου} καὶ γ^{ου}, τουτέστι Δ$^{Υ\times}$ $\overline{,\beta\psi}$, τῶν Μ̊ $\overline{\iota\varepsilon}$ κατασκευάσαι επλ.. Δ$^{Υ\times}$ $\overline{,\beta\psi}$ ἴσ. Μ̊ $\overline{\sigma\varepsilon}$. καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ $\overline{\varsigma}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ α^{ος} Μ̊ $\overline{\zeta}$ L', ὁ δὲ β^{ος} Μ̊ $\overline{\varsigma}$, ὁ δὲ γ^{ος} Μ̊ $\overline{\iota}$.

Καὶ ὡσεὶ ἦν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν Μ̊ $\overline{\iota\varepsilon}$, λελυμένον ἂν ἦν μοι τὸ ζητούμενον· τάσσω οὖν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν Δ^{Υ} $\overline{\iota\varepsilon}$, αὐτοὺς δὲ τοὺς τρεῖς ἐν ς, ὡς εὕρομεν, τὸν μὲν α^{ον} ς $\overline{\zeta}$ L', τὸν δὲ β^{ον} ς $\overline{\varsigma}$, τὸν δὲ γ^{ον} ς $\overline{\iota}$.

Καὶ λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς εἶναι Δ^{Υ} $\overline{\iota\varepsilon}$· εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ς $\overline{\kappa\gamma}$ L'·

ς ἄρα $\overline{\kappa\gamma}$ L' ἴσ. Δ^{Υ} $\overline{\iota\varepsilon}$, καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ $\overset{\lambda}{\overline{\mu\zeta}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν α^{ος} $\overline{\tau\nu\beta}$ L', ὁ δὲ β^{ος} $\overline{\sigma\pi\beta}$, ὁ δὲ γ^{ος} $\overline{\upsilon\omicron}$.

λη.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον ποιῇ τρίγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον ποιῇ κύβον.

Τετάχθω δὴ οἱ τρεῖς Δ^{Υ} $\overline{\alpha}$, ὁ δὲ α^{ος} δυναμοστῶν τριγωνικῶν· ἔστω Δ$^{Υ\times}$ $\overline{\varsigma}$· ὁ δὲ β^{ος} Δ$^{Υ\times}$ $\overline{\delta}$, ὁ δὲ γ^{ος} δυναμοστῶν κυβικῶν· ἔστω Δ$^{Υ\times}$ $\overline{\eta}$.

Καὶ ἡ Δ^{Υ} $\overline{\alpha}$ παλλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μὲν τὸν α^{ον} ποιεῖ Μ̊ $\overline{\varsigma}$ ὅς ἐστι τρίγωδεύτερον 45. Καὶ εἶναι ὁ δεύτερος x· ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $\frac{45}{x}$. Ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος εἶναι $\frac{60}{x}$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον, τουτέστι $\frac{2700}{x^2}$ νὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ 15· ἤτοι $\frac{2700}{x^2} = 75$. Ἐξ ἧς $x = 6$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ πρῶτος θὰ εἶναι $7\frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος 6, ὁ δὲ τρίτος 10.

Καὶ ἐὰν ἦτο τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἴσον πρὸς 15, θὰ εἶχε λυθῆ τὸ πρόβλημα· θέτω λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $15x^2$, αὐτοὺς δὲ τοὺς τρεῖς συναρτήσει τοῦ x, ὡς τοὺς εὕρομεν, ἤτοι τὸν μὲν πρῶτον $7\frac{1}{2}x$, τὸν δὲ δεύτερον $6x$, τὸν τρίτον $10x$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $15x^2$· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $23\frac{1}{2}x$.

Εἶναι ἄρα $23\frac{1}{2}x = 15x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{47}{30}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{352\frac{1}{2}}{30}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{282}{30}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{470}{30}$.

38.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον δίδῃ τρίγωνον ἀριθμόν, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον δίδῃ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον δίδῃ κύβον.

Ἄς τεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha}{x^2}$, ἔνθα α ἀριθμὸς τρίγωνος. ἔστω $\frac{6}{x^2}$· ὁ δὲ δεύτερος $\frac{4}{x^2}$, ὁ δὲ τρίτος ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\beta}{x^2}$, ἔνθα β κύβος· ἔστω $\frac{8}{x^3}$. Καὶ ὁ x^2 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον δίδει 6, ὁ ὁποῖος εἶναι τρίγωνος· ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον δίδει 4, ὁ ὁποῖος εἶναι τετράγωνος· ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον δίδει 8, ὁ ὁποῖος εἶναι κύβος.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι x^2· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα *νος· ἐπὶ δὲ τὸν* β^{ov} *ποιεῖ* $\mathring{M}\,\overline{\delta}$, *ὅς ἐστι* $\square^{os}$· *ἐπὶ δὲ τὸν* γ^{ov} *ποιεῖ* $\mathring{M}\,\overline{\eta}$, *ὅς ἐστι κύβος.*

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς εἶναι $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· *ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσι* $\Delta^{Y\times}\,\overline{\iota\eta}$ *ἴσ.* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$. *καὶ πάντα ἐπὶ* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· *γίνεται* $\Delta^{Y}\Delta\,\overline{\alpha}$ *ἴσ.* $\mathring{M}\,\overline{\iota\eta}$.

δεῖ οὖν τὸν $\overline{\iota\eta}$ *εἶναι* $\square^{ov}$, *πλευρὰν ἔχοντα* $\square^{ov}$, *ἀλλὰ ὁ* $\overline{\iota\eta}$ *σύνθεσίς ἐστι τριγώνου καὶ τετραγώνου καὶ κύβου. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν·* $\square^{ov}$, *πλευρὰν ἔχοντα* $\square^{ov}$, *διελεῖν εἰς τρίγωνον καὶ τετράγωνον καὶ κύβον.*

ἔστω ὁ τετράγωνος $\Delta^{Y}\Delta\,\overline{\alpha}\;\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\beta}$. *ἐὰν ἄρα ἀπὸ* $\Delta^{Y}\Delta\,\overline{\alpha}$ *ἄρω* $\Delta^{Y}\Delta\,\overline{\alpha}\;\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\beta}$, *λοιπὸς καταλείπεται* $\Delta^{Y}\,\overline{\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· *πάλιν ταῦτα δεῖ διαιρεθῆναι εἴς τε κύβον καὶ τρίγωνον. καὶ ἔστω ὁ κύβος* $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. *λοιπὸς ἄρα ὁ τρίγωνος* $\Delta^{Y}\,\overline{\beta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$ *ἴσ. τριγώνῳ.*

πᾶς δὲ τρίγωνος, $\eta^{\kappa\iota\varsigma}$ *γενόμενος καὶ προσλαβὼν* $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, $\square^{os}$ *γίνεται.*

Δ^{Y} *ἄρα* $\overline{\iota\varsigma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{o\alpha}$ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$· *πλάσσω τὸν* $\square^{ov}$ *ἀπὸ* ϛ $\overline{\delta}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$. *γίνεται ὁ* $\square^{os}$, $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\varsigma}\;\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ⟨⋔ ϛ $\overline{\eta}$⟩· *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$. *ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν τρίγωνος* $\mathring{M}\,\overline{\rho\nu\gamma}$, *ὁ δὲ τετράγωνος* $\mathring{M}\,\overline{,\varsigma\upsilon}$, *ὁ δὲ κύβος* $\mathring{M}\,\overline{\eta}$.

Ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω τὸν ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενον τετράγωνον $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, *τὸν δὲ* α^{ov} $\Delta^{Y\times}\,\overline{\rho\nu\gamma}$, *ἐπεὶ δεῖ τρίγωνον γενέσθαι, τὸν δὲ* β^{ov} $\Delta^{Y\times}\,\overline{,\varsigma\upsilon}$, *ἐπεὶ δεῖ τετράγωνον γενέσθαι, τὸν δὲ* γ^{ov} $\Delta^{Y\times}\,\overline{\eta}$, *ἐπεὶ δεῖ κύβον γενέσθαι καὶ ἡ* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, *τετράγωνος οὖσα, ἐφ᾽ ὃν ἂν πολλαπλασιασθῇ, ποιεῖ ὃν μὲν τρίγωνον, ὃν δὲ τετράγωνον, ὃν δὲ κύβον.*

δεῖ δὴ τοὺς τρεῖς εἶναι $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· *εἰσὶ δὲ* $\Delta^{Y\times}\,\overline{,\varsigma\varphi\xi\alpha}$ *ἴσ.* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$. *καὶ πάντα ἐπὶ* Δ^{Y}· *γίνεται* $\Delta^{Y}\Delta\,\overline{\alpha}$ *ἴσ.* $\mathring{M}\,\overline{,\varsigma\varphi\xi\alpha}$· *καὶ ἔστιν ὁ* ϛ $\mathring{M}\,\overline{\theta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν α^{os} $\dfrac{\pi\alpha}{\overline{\rho\nu\gamma}}$, *ὁ δὲ* β^{os} $\dfrac{\pi\alpha}{\overline{,\varsigma\upsilon}}$, *ὁ δὲ* γ^{os} $\dfrac{\pi\alpha}{\overline{\eta}}$. *καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.*

λθ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου πρὸς τῶν τριῶν $\frac{18}{x^2} = x^2$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ x^2· ὅτε ἔχομεν $x^4 = 18$.

Πρέπει λοιπὸν ὁ 18 νὰ εἶναι τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα νὰ εἶναι τετράγωνος, ἀλλὰ ὁ 18 εἶναι τὸ ἄθροισμα τριγώνου ἀριθμοῦ καὶ τετραγώνου καὶ κύβου. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω· τετράγωνον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὁ εὑρισκόμενος δὲ τετράγωνος νὰ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τριγώνου, τετραγώνου καὶ κύβου.

Ἔστω ὁ τετράγωνος $x^4 + 1 - 2x^2$. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ x^4 ἀφαιρέσω τὸ $(x^4 + 1 - 2x^2)$ μένει ὑπόλοιπον $2x^2 - 1$· πάλιν πρέπει ὅπως ταῦτα ἀναλυθῶσιν εἰς ἄθροισμα κύβου καὶ τριγώνου. Καὶ ἔστω ὁ κύβος 8. Ὁ ἄλλος ἄρα ὁ τρίγωνος $2x^2 - 9 =$ τρίγωνος.

Πᾶς δὲ τρίγωνος, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 8 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προστεθῇ ἡ μονάς, γίνεται τετράγωνος.

Εἶναι ἄρα $16x^2 - 71 =$ τετράγωνος· σχηματίζω τὸν τετράγωνον ἀπὸ τετραγωνικῆς ῥίζης $4x - 1$. Ὁπότε ὁ τετράγωνος γίνεται $16x^2 + 1 - 8x$. ἐξ ἧς $x = 9$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν τρίγωνος θὰ εἶναι 153, ὁ δὲ τετράγωνος 6400, ὁ δὲ κύβος 8.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2, τὸν δὲ πρῶτον $\frac{153}{x^2}$, ἐπειδὴ πρέπει νὰ γίνῃ τρίγωνος, τὸν δὲ δεύτερον $\frac{6400}{x^2}$, ἐπειδὴ πρέπει νὰ γίνῃ τετράγωνος, τὸν δὲ τρίτον $\frac{8}{x^2}$, ἐπειδὴ πρέπει νὰ γίνῃ κύβος· καὶ ὁ x^2, ἀφοῦ εἶναι τετράγωνος, ἀναλόγως ἐκείνου ἐπὶ τὸν ὁποῖον θὰ πολλαπλασιασθῇ, δίδει τὸν μὲν τρίγωνον, τὸν δὲ τετράγωνον, τὸν δὲ κύβον.

Πρέπει λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ εἶναι x^2· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο $\frac{6561}{x^2} = x^2$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ x^2. καὶ ἔχομεν $x^4 = 6561$· ἐξ ἧς $x = 9$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{153}{81}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{6400}{81}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{8}{81}$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

39

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, ἔχῃ λόγον δεδομένον, *τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλάσσονος λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔτι δὲ καὶ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ποιῶσι τετράγωνον.*

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $\gamma^{\pi\lambda}$.

Ἐπεὶ δὲ συναμφότερος ὁ μέσος καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ $\square^{ον}$, *ποιείτω* M̊ δ̅. *ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος· ἔστω* ϛ α̅ M̊ β̅. *ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται* M̊ β̅ ⋔ ϛ α̅.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου $\gamma^{\pi\lambda}$ *⟨ἐστί⟩, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου* ϛ β̅, *ἡ ἄρα ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου ἔσται* ϛ ϛ̅, *καὶ ὁ μείζων ἄρα ἔσται* ϛ ζ̅ M̊ β̅.

λοιπόν ἐστι δύο ἐπιτάγματα, τό τε συναμφότερον ⟨τὸν μείζονα καὶ τὸν ἐλάχιστον ποιεῖν $\square^{ον}$, *καὶ τὸ τὸν μείζονα⟩ καὶ τὸν μέσον ποιεῖν* $\square^{ον}$. *καὶ γίνεταί μοι διπλῆ ἡ ἰσότης·*

ϛ η̅ M̊ δ̅ *ἴσ.* $\square^{ῳ}$, *καὶ* ϛ ϛ̅ M̊ δ̅ *ἴσ.* $\square^{ῳ}$.

καὶ διὰ τὸ τὰς M̊ *εἶναι τετραγωνικάς, εὐχερής ἐστιν ἡ ἴσωσις.*

πλάσσω ἀριθμοὺς δύο ἵνα ὁ ὑπ' αὐτῶν ᾖ ϛ β̅, *καθὼς ἴσμεν διπλῆν ἰσότητα· ἔστω οὖν* ϛ L' *καὶ* M̊ δ̅· *καὶ γίνεται ὁ* ϛ M̊ ρ̅ι̅β̅. *ἐλθὼν ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, οὐ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ* M̊ β̅ *τὸν* ϛ α̅ *τουτέστι τὰς* M̊ ρ̅ι̅β̅· *θέλω οὖν τὸν* ϛ *εὑρεθῆναι ἐλάττονα* M̊ β̅, *ὥστε καὶ* ϛ ϛ̅ M̊ δ̅ *ἐλάσσονες ἔσονται* M̊ ι̅ϛ̅. *ἐὰν γὰρ ἡ δυὰς ἐπὶ* ϛ ϛ̅ *γένηται καὶ προσλάβῃ* M̊ δ̅, *ποιεῖ* M̊ ι̅ϛ̅.

ἐπεὶ οὖν ζητῶ ϛ η̅ M̊ δ̅ *ἴσ.* $\square^{ῳ}$, *καὶ* ϛ ϛ̅ M̊ δ̅ *ἴσ.* $\square^{ῳ}$, *ἀλλὰ καὶ ὁ ἀπὸ τῆς δυάδος, τουτέστι* M̊ δ̅, $\square^{ός}$ *ἐστι, γεγόνασι τρεῖς* $\square^{οι}$, ϛ η̅ M̊ δ̅, *καὶ* ϛ ϛ̅ M̊ δ̅, *καὶ* M̊ δ̅, *καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου* $\gamma^{ον}$ *μέρος ἐστίν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν ⟨τρεῖς⟩ τετραγώνους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου* $\gamma^{ον}$ *μέρος ᾖ, ἔτι δὲ ὁ μὲν ἐλάχιστος ᾖ* M̊ δ̅, *ὁ δὲ μέσος ἐλάσσων* M̊ ι̅ϛ̅.

Τετάχθω ὁ μὲν ἐλάχιστος M̊ δ̅, *ἡ δὲ τοῦ μέσου* $\pi^{\lambda.}$ ϛ α̅ M̊ β̅· *αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ* $\square^{ος}$, Δ^{Y} α̅ ϛ δ̅ M̊ δ̅.

ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος καὶ τοῦ μέσου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου $\gamma^{ον}$ *μέρος ἐστίν, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλα-*

προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ἐπιταχθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τοῦ μεσαίου νὰ εἶναι τριπλασία τῆς διαφορᾶς τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ ἐλαχίστου.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ ἐλαχίστου σχηματίζει τετράγωνον, ἔστω ὅτι σχηματίζει 4. Ὁ μεσαῖος ἄρα εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2. ἔστω ὅτι εἶναι $x + 2$· ὁ ἐλάχιστος ἄρα θὰ εἶναι $2 - x$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τριπλασία τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $2x$, ἡ ὑπεροχὴ ἄρα τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου θὰ εἶναι $6x$, καὶ ὁ μεγαλύτερος ἄρα θὰ εἶναι $7x + 2$.

Ὑπολείπονται δύο ἐπιτάγματα, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τοῦ μικροτέρου νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τοῦ μεσαίου νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ὁπότε ἔχω δύο ἐξισώσεις (διπλῆ ἐξίσωσις).

$$8x + 4 = \text{τετράγωνος, καὶ } 6x + 4 = \text{τετράγωνος.}$$

Καὶ ἐπειδὴ οἱ σταθεροὶ ὅροι εἶναι τετράγωνοι, ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων εἶναι εὐχερής.

Σχηματίζω δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ εἶναι $2x$ συμφώνως πρὸς ὅ,τι γνωρίζομεν διὰ τὴν διπλῆν ἐξίσωσιν· ἔστω λοιπὸν $\frac{1}{2}x$ καὶ 4· καὶ γίνεται ὁ $x = 112$. Ὅταν ἔλθω εἰς τὰ δεδομένα βλέπω ὅτι δὲν δύναμαι ἀπὸ τοῦ 2 ν' ἀφαιρέσω τὸν x τουτέστι τὸν 112· θέλω λοιπὸν νὰ προσδιορίσω τὸν x, ὥστε νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 2, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $6x + 4 < 16$. Διότι ἐὰν ὁ 2 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 6 καὶ προστεθῇ εἰς τὸ ἐξαγόμενον 4, γίνεται 16.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ζητῶ $8x + 4 =$ τετράγωνος καὶ $6x + 4 =$ τετράγωνος, ἀλλὰ καὶ $2 \cdot 2$ τουτέστι $4 =$ τετράγωνος, ἔχουσι γίνει τρεῖς τετράγωνοι, οἱ $8x + 4$, καὶ $6x + 4$, καὶ 4, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου νὰ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, προσέτι δὲ ὁ μὲν ἐλάχιστος νὰ εἶναι 4, ὁ δὲ μεσαῖος μικρότερος τοῦ 16.

Ἂς τεθῇ ὁ μὲν ἐλάχιστος 4, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεσαίου $x + 2$· αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $x^2 + 4x + 4$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $x^2 + 4x$, ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ

*χίστου ΔΥ α ς δ, ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου ἔσται ΔΥ γ×
ς α γ×· καὶ ἔστιν ὁ μέσος ΔΥ α ς δ Μ̊ δ· ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται ΔΥ α γ×
ς ε γ× Μ̊ δ ἴσ. □φ· πάντα θκις· ΔΥ ἄρα ιβ ς μη Μ̊ λϛ ἴσ. □φ· καὶ τὸ
δον αὐτῶν· ΔΥ γ ς ιβ Μ̊ θ ἴσ. □φ.*

*ἔτι δὲ θέλω τὸν μέσον τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι Μ̊ ιϛ, καὶ τὴν πλ.
δηλαδὴ ἐλάσσονος Μ̊ δ. ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ μέσου ἐστὶν ς α Μ̊ β· ἐλάττονές εἰσι
Μ̊ δ. καὶ κοινῶν ἀφαιρεθεισῶν τῶν β Μ̊, ὁ ς ἔσται ἐλάσσονος Μ̊ β.*

*γέγονεν οὖν μοι ΔΥ γ ς ιβ Μ̊ θ ἴσ. ποιῆσαι □φ. πλάσσω □όν τινα ἀπὸ
Μ̊ γ λειπουσῶν ς τινας· καὶ γίνεται ὁ ς ἔκ τινος ἐριθμοῦ ϛκις γενομένου καὶ
προσλαβόντος τὸν ιβ, τουτέστι τῆς ἰσώσεως τῆς ς ιβ, καὶ μερισθέντος εἰς τὴν
ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ □ος τῶν ΔΥ τῶν ἐν τῇ ἰσώσει γ. ἀπῆ-
κται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὃς ϛκις γενόμενος καὶ προσλαβὼν
Μ̊ ιβ καὶ μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ □ὸς τρι-
άδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονος Μ̊ β.*

*Ἔστω ὁ ζητούμενος ς α· οὕτως ϛκις γενόμενος καὶ προσλαβὼν Μ̊ ιβ,
ποιεῖ ς ϛ Μ̊ ιβ· ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ □ος, ⋔ Μ̊ γ, ποιεῖ ΔΥ α ⋔ Μ̊ γ. θέλω οὖν
ς ϛ Μ̊ ιβ μερίζεσθαι εἰς ΔΥ α ⋔ Μ̊ γ καὶ ποιεῖν τὴν παραβολὴν ἐλάσσονος
Μ̊ β. ἀλλὰ καὶ ὁ β μεριζόμενος εἰς Μ̊ α, ποιεῖ τὴν παραβολὴν β· ὥστε ς ϛ
Μ̊ ιβ πρὸς ΔΥ α ⋔ Μ̊ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχουσιν ἤπερ β πρὸς α.*

*Καὶ χωρίον χωρίῳ ἄνισον· ὁ ἄρα ὑπὸ ς ϛ Μ̊ ιβ καὶ Μ̊ α ἐλάσσων ἐστὶν
τοῦ ὑπὸ δυάδος καὶ ΔΥ α ⋔ Μ̊ γ, τουτέστιν ς ϛ Μ̊ ιβ ἐλάσσονές εἰσιν ΔΥ β
⋔ Μ̊ ϛ. καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ Μ̊ ϛ. ς ϛ Μ̊ ιη ἐλάσσονες ΔΥ β.*

*ὅταν δὲ τοιαύτην ἴσωσιν ἰσώσωμεν, ποιοῦμεν τῶν ς τὸ L' ἐφ' ἑαυτό,
γίνεται θ, καὶ τὰς ΔΥ β ἐπὶ τὰς Μ̊ ιη, γίνονται λϛ· πρόσθες τοῖς θ, γίνονται
με, ὧν πλ.· οὐκ ἔλαττόν ἐστι Μ̊ ζ· πρόσθες τὸ ἡμίσευμα τῶν ς· ⟨γίνεται οὐκ
ἔλαττον Μ̊ ι· καὶ μέρισον εἰς τὰς ΔΥ·⟩ γίνεται οὐκ ἔλαττον Μ̊ ε.*

*γέγονεν οὖν μοι ΔΥ γ ς ιβ Μ̊ θ ἴσ. □φ τῷ ἀπὸ πλ.. Μ̊ γ ⋔ ς ε, καὶ γί-
νεται ὁ ς Μ̊* $\frac{\kappa\beta}{\mu\beta}$ *τουτέστιν* $\frac{\iota\alpha}{\kappa\alpha}$.

τοῦ μεσαίου θὰ εἶναι $\frac{1}{3}$ $x^2 + 1\frac{1}{3}$ x· καὶ εἶναι ὁ μεσαῖος $x^2 + 4x + 4$· ὁ μέγιστος ἄρα θὰ εἶναι $1\frac{1}{3}$ $x^2 + 5\frac{1}{3}$ $x + 4 =$ τετράγωνος. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 9· εἶναι ἄρα $12\,x^2 + 48x + 36 =$ τετράγωνος· καὶ τὸ ἓν τέταρτον αὐτῶν ἐπίσης $3x^2 + 12x + 9 =$ τετράγωνος.

Προσέτι δὲ θέλω ὁ μεσαῖος τετράγωνος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 16, καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα συνεπῶς τούτου νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 4. Ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεσαίου εἶναι $x + 2$· ὥστε $x + 2 < 4$. Καὶ ἀφοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἀφαιρέσωμεν τὸν 2 θὰ εἶναι $x < 2$.

Κατέληξα λοιπὸν εἰς τὸ νὰ σχηματίσω $3x^2 + 12x + 9 =$ τετράγωνος. Σχηματίζω τετράγωνον μὲ ἀριθμητήν τινα ἔχοντα τετραγωνικὴν ῥίζαν $3 - \alpha x$· καὶ ὁ x λαμβάνεται ἔκ τινος ἀριθμοῦ (α) λαμβανομένου ἑξάκις εἰς ὅν προσθέτομεν 12, τουτέστι τοῦ συντελεστοῦ τοῦ 12x τῆς ἐξισώσεως, καὶ μὲ παρονομαστὴν τὸ τετράγωνον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x (δηλ. τοῦ α) μεῖον 3, τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἐν τῇ ἐξισώσει $3x^2$. $\left(\text{δηλ. } x = \frac{6\alpha + 12}{\alpha^2 - 3}\right)$. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ἀριθμόν τινα, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 6 καὶ προσλαμβάνων τὸν 12 καὶ διαιρούμενος διὰ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ 3 νὰ σχηματίζῃ πηλίκον μικρότερον τοῦ 2.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x (ὁ προηγουμένως κληθεὶς α)· οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 6 καὶ προσλαμβάνων 12, γίνεται $6x + 12$· ὁ δὲ τετράγωνος τούτου, ἀφ' οὗ ἀφαιρεῖται ὁ 3, γίνεται $x^2 - 3$. Θέλω λοιπὸν τὸ $\frac{6x + 12}{x^2 - 3} < 2$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{2}{1}$ δίδει πηλίκον 2· ὥστε $\frac{6x + 12}{x^2 - 3} < \frac{1}{2}$. Καὶ τὰ χιαστὶ γινόμενα εἶναι ἄνισα· εἶναι ἄρα $(6x + 12) \,.\, 1 < 2\,(x^2 - 3)$, τουτέστι $6x + 12 < 2x^2 - 6$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ 6. Ὅτε εἶναι $6x + 18 < 2x^2$.

Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ λύσωμεν τοιαύτην ἀνισότητα, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 6 (συντελεστοῦ τοῦ x) εἰς τὸ τετράγωνον, ὁπότε γίνεται 9, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν 2 τοῦ $2x^2$ ἐπὶ 18, ὅτε γίνονται 36· πρόσθεσον εἰς τοῦτο τὸ 9, ὅτε γίνονται 45, τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν· αὕτη εἶναι μικροτέρα τοῦ 7· πρόσθεσον εἰς τοῦτο τὸ ἥμισυ τοῦ 6· δὲν γίνεται μικρότερον τοῦ 10· διαίρεσον τοῦτο διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $2x^2$· δὲν γίνεται μικρότερον τοῦ 5.

Κατέληξα λοιπὸν εἰς τὸ $3x^2 + 12x + 9 =$ τετράγωνος $= (3 - 5x)^2$, ἐξ ἧς ὁ $x = \frac{42}{22}$ τουτέστιν $\frac{21}{11}$.

Ἔχω δὲ λάβει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεσαίου τετραγώνου ἴσην τέταχα δὲ τὴν τοῦ μέσου $\square^{\text{ον}}$ πλ. ϛ $\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\beta}$· ἔσται ἡ τοῦ $\square^{\text{ου}}$ πλ. Μ̊ $\overset{\iota\alpha}{\overline{\mu\gamma}}$ αὐτὸς δὲ ὁ $\square^{\text{ος}}$ Μ̊ $\overset{\rho\kappa\alpha}{\overline{,\alpha\omega\mu\theta}}$.

Ἔρχομαι οὖν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω Μ̊ $\overset{\rho\kappa\alpha}{\overline{,\alpha\omega\mu\theta}}$, ὄντα $\square^{\text{ον}}$, ἴσ. τοῖς ϛ $\overline{ϛ}$ Μ̊ $\overline{\delta}$· καὶ πάντα εἰς $\overline{\rho\kappa\alpha}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\psi\kappa ϛ}{\overline{,\alpha\tau\xi\epsilon}}$, καὶ ἔστιν ἐλάσσων δυάδος.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις τοῦ προβλήματος τοῦ ἐξ ἀρχῆς· ὑπέστημεν δὴ τὸν μὲν μέσον ϛ $\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\beta}$, τὸν δὲ ἐλάχιστον Μ̊ $\overline{\beta}$ ⋔ ϛ $\overline{\alpha}$, τὸν δὲ μέγιστον ϛ $\overline{\zeta}$ Μ̊ $\overline{\beta}$. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος $\overline{\alpha.\ ,\alpha\zeta}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ $\overline{,\beta\omega\iota\zeta}$, ὁ δὲ ἐλάχιστος ὁ $\gamma^{\text{ος}}$ $\overline{\pi\zeta}$. καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον, ἔστι τὸ $\overline{\psi\kappa ϛ}^{\text{ον}}$, οὐκ ἔστιν $\square^{\text{ος}}$, $ϛ^{\text{ον}}$ δὲ ἐστιν αὐτοῦ, ἐὰν λάβωμεν $\overline{\rho\kappa\alpha}$, ὅ ἐστι $\square^{\text{ος}}$, πάντων οὖν τὸ $ϛ^{\text{ον}}$, καὶ ὁμοίως ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{\text{ος}}$ $\rho\kappa\alpha^{\text{ων}}$ $\overline{,\alpha\omega\lambda\delta\ L'}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ος}}$ $\overline{\upsilon\xi\theta\ L'}$, ὁ δὲ $\gamma^{\text{ος}}$ $\overline{\iota\delta\ L'}$.

Καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς ἵνα μὴ τὸ L' ἐπιτρέχῃ, εἰς δ^{α} ἔμβαλε. καὶ ἔσται ὁ $\alpha^{\text{ος}}$ $\overset{\upsilon\pi\delta}{\overline{,\zeta\tau\lambda\eta}}$, ὁ δὲ $\beta^{\text{ὸς}}$ $\overset{\upsilon\pi\delta}{\overline{,\alpha\omega o\eta}}$, ὁ δὲ $\gamma^{\text{ος}}$ $\overset{\upsilon\pi\delta}{\overline{\nu\eta}}$· καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

μ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔτι δὲ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον.

Ἡ δὴ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μγ· $\square^{\text{ος}}$ τοῦ ἀπὸ τοῦ μ^{σ}· $\square^{\text{ου}}$, τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ μ^{σ}· τοῦ ἐλ., ἔστω $\gamma^{\pi\lambda}$..

Ἐπεὶ ὁ μγ· καὶ ὁ μ^{σ}· ποιοῦσι $\square^{\text{ον}}$, ποιείτωσαν $\Delta^{Y}\,\overline{\iota ϛ}$· ὁ ἄρα μγ· ἔσται μείζων $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$· ἔστω $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$ Μ̊ $\overline{\beta}$.

καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ὁ μγ· καὶ ὁ μ^{σ}· μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ μγ· καὶ τοῦ ἐλ· καὶ ἔστι συναμφότερος ὁ μγ· καὶ ὁ μ^{σ}· $\Delta^{Y}\,\overline{\iota ϛ}$, συναμφότερος ὁ ἄρα μγ· καὶ ἐλ· ἐλάσσων μέν ἐστι $\Delta^{Y}\,\overline{\iota ϛ}$, μείζων δὲ $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$. ἔστω οὖν συναμφότερος ὁ μγ· καὶ ὁ ἐλ· $\Delta^{Y}\,\overline{\theta}$. ἔστιν καὶ ὁ μγ· καὶ ὁ μ^{σ}· $\Delta^{Y}\,\overline{\iota ϛ}$, ὧν ὁ μγ· ἐστι $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$ Μ̊ $\overline{\beta}$. ἔσται ἄρα καὶ ὁ μ^{σ}· $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\beta}$. ὁ δὲ $\gamma^{\text{ος}}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\beta}$.

πρὸς x + 2. ἐπομένως θὰ εἶναι αὐτὴ $\frac{43}{11}$. Αὐτὸς δὲ ὁ τετράγωνος $\frac{1849}{121}$.

Ἔρχομαι τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω $\frac{1849}{121}$, ὅστις εἶναι τετράγωνος, $= 6x + 4$· πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 121· καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{1365}{726}$, καὶ εἶναι μικρότερος τοῦ 2.

Ἐρχόμεθα εἰς τὰ δεδομένα τοῦ ἐξ ἀρχῆς προβλήματος. Ἐλάβομεν λοιπὸν τὸν μεσαῖον $x + 2$, τὸν δὲ ἐλάχιστον $2 - x$, τὸν δὲ μέγιστον $7x + 2$. Θὰ εἶναι ὁ μὲν μέγιστος $\frac{11007}{726}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{2817}{726}$, ὁ δὲ ἐλάχιστος ὁ τρίτος $\frac{87}{726}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής, ὁ 726, δὲν εἶναι τετράγωνος, ἐὰν ὅμως λάβωμεν τὸ ἓν ἕκτον αὐτοῦ, τὸ 121, τοῦτο εἶναι τετράγωνος, λαμβάνομεν ὅλων τὸ ἓν ἕκτον, ὁπότε θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $1834\frac{1}{2} : 121$, ὁ δὲ δεύτερος $469\frac{1}{2} : 121$, ὁ δὲ τρίτος $14\frac{1}{2} : 121$.

Καὶ ἐὰν θέλῃς νὰ ἔχῃς ἀκεραίους, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ τὸ ἓν δεύτερον, πολλαπλασίασον ὅλα ἐπὶ 4. Καὶ θὰ εἶναι ὁ πρῶτος $\frac{7338}{484}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{1878}{484}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{58}{484}$. Καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

40.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τετράγωνος τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, ἔχῃ λόγον δεδομένον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τετράγωνος τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ μεσαίου εἶναι τριπλασία τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ μεσαῖος ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μεσαίου εἶναι τετράγωνος, ἔστω τοῦτο $16x^2$· ὁ μέγιστος ἄρα εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $8x^2$· ἔστω ὅτι εἶναι $8x^2 + 2$.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μεσαίου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μεσαίου εἶναι $16x^2$, εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου μικρότερον μὲν τοῦ $16x^2$, μεγαλύτερον δὲ τοῦ $8x^2$. Ἔστω καὶ ἐπεὶ θέλω τὴν ὑπεροχὴν ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μ^{γ}· τὸν ἀπὸ τοῦ μ^{σ}., τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μ^{σ}. καὶ τοῦ ἐλ. εἶναι $\gamma^{\pi\lambda}$., ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μ^{γ}· $\square^{o\varsigma}$ τοῦ ἀπὸ τοῦ μ^{σ}· $\square^{ov}$ ἐστίν $\Delta^{Y}\,\overline{\xi\delta}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ τοῦ μ^{σ}· καὶ τοῦ ἐλ· ἐστιν $\Delta^{Y}\,\overline{\zeta}$· καὶ θέλομεν τὰς $\Delta^{Y}\,\overline{\xi\delta}$ τῶν $\Delta^{Y}\,\overline{\zeta}$ εἶναι $\gamma^{\pi\lambda}$. ἀλλὰ αἱ $\Delta^{Y}\,\overline{\zeta}$· $\gamma^{\pi\lambda}$. γενόμεναι ποιοῦσι $\Delta^{Y}\,\overline{\kappa\alpha}$. ἀλλὰ αἱ $\Delta^{Y}\,\overline{\xi\delta}$ ἐκ τοῦ $\lambda\beta^{\kappa\iota\varsigma}$ ἐστι τῶν $\mathring{M}\,\overline{\beta}$· γέγονεν οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὃς $\lambda\beta^{\kappa\iota\varsigma}$ γενόμενος ποιεῖ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\alpha}$· ἔστιν δὴ τὰ $\overset{\lambda\beta}{\overline{\kappa\alpha}}$.

τάσσω οὖν τὸν μὲν α^{ov} $\Delta^{Y}\,\overline{\eta}\,\mathring{M}\,\overset{\lambda\beta}{\overline{\kappa\alpha}}$, τὸν δὲ μ^{σ}. $\Delta^{Y}\,\overline{\eta} \pitchfork \mathring{M}\,\overset{\lambda\beta}{\overline{\kappa\alpha}}$, τὸν δὲ γ^{ov}· $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha} \pitchfork \mathring{M}\,\overset{\lambda\beta}{\overline{\kappa\alpha}}$.

καὶ λοιπόν ἐστιν ἓν ἐπίταγμα συναμφότερον τὸν μ^{σ}· καί· τὸν ἐλ· εἶναι $\square^{ov}$. ἔστιν δὲ ὁ μ^{σ}· καὶ ὁ ἐλ. $\Delta^{Y}\,\overline{\theta} \pitchfork \mathring{M}\,\overset{\lambda\beta}{\overline{\mu\beta}}$ ἴσ. $\square^{\varphi}$ ἀπὸ $\pi\lambda$. ϛ $\overline{\gamma} \pitchfork \mathring{M}\,\overline{\varsigma}$. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\varphi o\varsigma}{\varphi ϟ \zeta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\overline{\tau\varsigma}$. $\overline{,\theta}$ μορ. $\overline{\lambda\gamma}$. $\overline{,\alpha\psi o\varsigma}$, ὁ δὲ $\beta^{o\varsigma}$ $\overline{\sigma\xi\gamma}$. $\overline{,\gamma\varphi\mu\delta}$, ὁ δὲ $\gamma^{o\varsigma}$ $\overline{\iota\gamma}$. $\overline{,\eta\chi\pi\alpha}$.

λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου $9x^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μεσαίου $16x^2$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μέγιστος εἶναι $8x^2 + 2$. Θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὁ μεσαῖος $8x^2 - 2$, ὁ δὲ τρίτος $x^2 - 2$.

Καὶ ἐπειδὴ θέλω, ὅπως ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τετράγωνος τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ μεσαίου νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, ἀλλὰ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τετράγωνος τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ μεσαίου εἶναι $64x^2$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $7x^2$· καὶ θέλομεν ὅπως τὸ $64x^2 = 3 \cdot 7x^2$, ἀλλὰ $3 \cdot 7x^2 = 21x^2$. Ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς 64 τοῦ $64x^2$ προέρχεται ἐκ τοῦ $32 \cdot 2$. Κατέληξα λοιπὸν εἰς τὸ νὰ εὕρω ἀριθμόν τινα, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 32 δίδει 21· οὗτος εἶναι ὁ $\frac{21}{32}$.

Θέτω λοιπὸν τὸν μὲν πρῶτον $8x^2 + \frac{21}{32}$, τὸν δὲ μεσαῖον $8x^2 - \frac{21}{32}$, τὸν δὲ τρίτον $x^2 - \frac{21}{32}$.

Καὶ ὑπολείπεται ἓν ἐπίταγμα, νὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνος. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ ἐλαχίστου $= 9x^2 - \frac{42}{32} =$ τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $3x - 6$. Ἐξ ἧς ὁ $x = \frac{597}{576}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{3069000}{331776}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{2633544}{331776}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{138681}{331786}$.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ Ε′

α.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$.

Γεωμετρικὴ δή ἐστιν ἀναλογία ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀριθμὸς πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. — ζητῶ πρότερον τίς ⟨τετράγωνος⟩ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$ *⟨ποιεῖ* $\square^{ον}$*⟩· ἔστιν δὲ τοῦτο ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὁ* $\overline{\mu\beta}\,\delta^{\times}$.

‹Τάσσω οὖν τὸν $α^{ον}$ *τῶν ἄκρων* $\mathring{M}\,\overline{\mu\beta}\,\delta^{\times}$*⟩, τὸν δὲ* $β^{ον}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$*· ὁ ἄρα μέσος ἔσται* ς $\overline{ϛ}$ L'.

λοιπόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$ *ποιεῖν* $\square^{ον}$ *καὶ ἔστιν*

$\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$ *καὶ* ς $\overline{ϛ}$ L' ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$*. ἡ τούτων ὑπεροχή ἐστιν* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ⋔ ς $\overline{ϛ}$ L'*· ἡ μέτρησις· μετρεῖ* ς $\overline{\alpha}$ *κατὰ* ς $\overline{\alpha}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{ϛ}$ L'*. τῆς ὑπεροχῆς τὸ* L' *ἐφ' ἑαυτό ἐστι* $\mathring{M}\,\frac{\iota ϛ}{\rho\xi\theta}$*· ταῦτα ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστιν* ς $\overline{ϛ}$ L' ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\beta}$*· καὶ γί. ⟨ὁ* ς*⟩* $\frac{\rho\delta}{\tau\xi\alpha}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $α^{ος}$ $\mathring{M}\,\overline{\mu\beta}\,\delta^{\times}$*, ὁ δὲ* $β^{ος}$ $\frac{\rho\delta}{,\beta\tau\mu ϛ}$ L'*, ὁ δὲ* $γ^{ος}$ $\frac{\alpha\,.\,\omega\iota ϛ}{\iota\gamma\,.\,\tau\kappa\alpha}$.

β.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ V.

1.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος μεῖον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 12.

Γεωμετρικὴ δὲ ἀναλογία εἶναι ὅταν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων ἰσοῦται πρὸς τὸν μεσαῖον. Ζητῶ προηγουμένως νὰ εὕρω ποῖος τετράγωνος μεῖον 12 σχηματίζει τετράγωνον· εἶναι δὲ τοῦτο εὔκολον (2,10) καὶ εἶναι ὁ $42\frac{1}{4}$.

Θέτω λοιπὸν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν ἄκρων $42\frac{1}{4}$, τὸν δὲ δεύτερον x^2· ὁ μεσαῖος ἄρα θὰ εἶναι $6\frac{1}{2}x$.

Ὑπολείπεται ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄλλων μεῖον 12 σχηματίζῃ τετράγωνον καὶ εἶναι $x^2 - 12 =$ τετράγωνος καὶ $6\frac{1}{2}x - 12 =$ τετράγωνος.

Ἡ διαφορὰ τούτων εἶναι $x^2 - 6\frac{1}{2}x$· ἡ μέτρησις· ἐκ τῆς διαιρέσεως διὰ x εἶναι $x - 6\frac{1}{2}$. Τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς εἰς τὸ τετράγωνον εἶναι $\frac{169}{16}$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς τὸν μικρότερον, τουτέστιν $6\frac{1}{2}x - 12$. Ἐξ ἧς $x = \frac{361}{104}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $42\frac{1}{4}$, ὁ δὲ δεύτερος $2346\frac{1}{2}$: 104, ὁ δὲ τρίτος $\frac{130321}{10806}$.

2

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω δὴ τὸν κ̅.

Πάλιν ζητῶ τίς □ος προσλαβὼν Μ̊ κ̅ ποιεῖ □ον· ἔστιν δὲ ὁ ι̅ϛ̅. τάσσω τοίνυν ἕνα τῶν ἄκρων Μ̊ ι̅ϛ̅, τὸν δὲ ὕστερον τῶν ἄκρων Δ^Υ α̅· ὁ ἄρα μέσος ἔσται ϛ δ̅· καὶ κατὰ τὴν προτέραν λοιπὸν γίνεται ζητεῖν

ϛ δ̅ Μ̊ κ̅ ἴσ. □φ καὶ Δ^Υ α̅ Μ̊ κ̅ ἴσ. □φ.

καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ Δ^Υ α̅ ⋔ ϛ δ̅· μέτρησις· μετρεῖ ⟨ϛ α̅ κατὰ⟩ ϛ α̅ ⋔ Μ̊ δ̅. τῆς ὑπεροχῆς τὸ L′ ἐφ' ἑαυτὸ ποιεῖ Μ̊ δ̅ ἴσας τῷ ἐλάσσονι ϛ δ̅ Μ̊ κ̅· ὅπερ ἄτοπον, δεῖ γὰρ τὰς δ̅ Μ̊ μὴ ἐλάσσονας εἶναι Μ̊ κ̅.

ἀλλὰ αἱ δ̅ Μ̊, δον τῶν ι̅ϛ̅· αἱ δὲ Μ̊ ι̅ϛ̅ οὐκ εἰσὶν αἱ τυχοῦσαι, ἀλλὰ ὁ □ος ἐστιν ὁ προσλαβὼν Μ̊ κ̅ καὶ ποιῶν □ον· ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τίς □ος ἔχει μέρος δον καὶ μεῖζον Μ̊ κ̅, προσλαβὼν δὲ Μ̊ κ̅ ποιεῖ □ον. ὥστε ὁ □ος γίνεται μείζων Μ̊ π̅.

Ἔστιν δὲ ὁ π̅α̅ □ος μείζων π̅· ἐὰν ἄρα τὴν τοῦ ζητουμένου □ου πλ. κατασκευάσωμεν ἀπὸ ϛ α̅ Μ̊ θ̅, αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ □ος, Δ^Υ α̅ ϛ ι̅η̅ Μ̊ π̅α̅· οὗτος μετὰ Μ̊ κ̅ ὀφείλει γενέσθαι □ος· ἔστιν ἄρα Δ^Υ α̅ ϛ ι̅η̅ Μ̊ ρ̅α̅ ἴσ. □φ. ἔστω ἀπὸ πλ. ϛ α̅ ⋔ Μ̊ ι̅α̅· ὁ ἄρα □ος ἔσται Δ^Υ α̅ Μ̊ ρ̅κ̅α̅ ⋔ ϛ κ̅β̅· ταῦτα ἴσα Δ^Υ α̅ ϛ ι̅η̅ Μ̊ ρ̅α̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ L′. ἦν δὲ ἡ τοῦ ζητουμένου □ου πλ. ϛ α̅ Μ̊ θ̅· ἔσται ἄρα ὁ □ος Μ̊ ϟ̅ δ^×.

Νῦν ἀνατρέχω ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσω ἕνα τῶν ἄκρων Μ̊ ϟ̅ δ^×, τὸν δὲ γον Δ^Υ α̅· ὁ ἄρα μέσος ἔσται ϛ θ̅ L′· καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ζητεῖν

Δ^Υ α̅ Μ̊ κ̅ ἴσ. □φ καὶ ϛ θ̅ L′ Μ̊ κ̅ ἴσ. □φ.

καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ Δ^Υ α̅ ⋔ ϛ θ̅ L′· μετρεῖ ϛ α̅ κατὰ ϛ α̅ ⋔ Μ̊ θ̅ L′· τῆς ὑπεροχῆς τὸ L′ ἐφ' ἑαυτό ἐστι $\overset{\iota\varsigma}{\overline{\tau\xi\alpha}}$ ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστιν ϛ θ̅ L′ Μ̊ κ̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\rho\nu\beta}{\overline{\mu\alpha}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος ϟ̅ δ^×, ὁ ⟨δὲ⟩ βος $\overset{\rho\nu\beta}{\overline{\tau\pi\theta\ L'}}$, ὁ ⟨δὲ⟩ γος $\overset{\beta.\,{}_{,}\gamma\rho\delta}{\overline{{}_{,}\alpha\chi\pi\alpha}}$.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 20.

Πάλιν ζητῶ ποῖος τετράγωνος προσλαβὼν 20 σχηματίζει τετράγωνον· εἶναι δὲ ὁ 16. Θέτω λοιπὸν ἕνα τῶν ἄκρων ὅρων 16, τὸν δὲ ἄλλον x^2· ὁ μεσαῖος ἄρα θὰ εἶναι $4x$· καὶ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα καταλήγομεν εἰς τὸ νὰ ζητῶμεν, ὅπως $4x + 20 =$ τετράγωνος καὶ $x^2 + 20 =$ τετράγωνος. Καὶ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν $x^2 - 4x$· μέτρησις· διὰ διαιρέσεως (μετρεῖ ὁ x) διὰ x εἶναι $x - 4$. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς ὑπεροχῆς εἶναι $4 =$ πρὸς τὸν μικρότερον $4x + 20$· ὅπερ ἄτοπον, διότι πρέπει ὁ 4 νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ 20.

Ἀλλὰ $4 = \frac{1}{4}\,16$· ὁ δὲ 16 δὲν εἶναι ὁ τυχών, ἀλλὰ ὁ τετράγωνος ὁ προσλαβὼν 20 καὶ σχηματίζων τετράγωνον· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητήσω ποίου τετραγώνου τὸ ἓν τέταρτον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 20, προσλαβὼν δὲ ὁ τετράγωνος τὸν 20 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται μεγαλύτερος τοῦ 80.

Εἶναι δὲ ὁ $81 > 80$· ἐὰν ἄρα λάβωμεν ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου τὴν $x + 9$, αὐτὸς ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι, $x^2 + 18x + 81$. οὗτος σὺν 20 πρέπει νὰ γίνῃ τετράγωνος· εἶναι ἄρα $x^2 + 18x + 101 =$ τετράγωνος. Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου $x - 11$· ὁ τετράγωνος ἄρα θὰ εἶναι $x^2 + 121 - 22x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $x^2 + 18x + 101$. Ἐξ ἧς ὁ $x = \frac{1}{2}$. Ἦτο δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ζητουμένου τετραγώνου $x + 9$· θὰ εἶναι ἄρα ὁ τετράγωνος $90\,\frac{1}{4}$.

Τώρα ἀνατρέχω εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτω ἕνα τῶν ἄκρων $90\,\frac{1}{4}$, τὸν δὲ τρίτον x^2· ὁ μεσαῖος ἄρα εἶναι $9\,\frac{1}{2}\,x$· καὶ καταλήγω εἰς τὸ νὰ ζητήσω ὅπως $x^2 + 20 =$ τετράγωνος καὶ $9\,\frac{1}{2}\,x + 20 =$ τετράγωνος.

Καὶ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν $x^2 - 9\,\frac{1}{2}\,x$· ἐκ τῆς διαιρέσεως διὰ x εἶναι $x - 9\,\frac{1}{2}$. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς εἶναι $\frac{361}{16} =$ πρὸς τὸν μικρότερον, τουτέστιν $9\,\frac{1}{2}\,x + 20$· ἐξ ἧς $x = \frac{41}{152}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $90\,\frac{1}{4}$, ὁ δὲ δεύτερος $389\,\frac{1}{2} : 152$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{1681}{23104}$.

γ.

Δοθέντι ἀριθμῷ προσθεῖναι τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω δὴ τὸν ε̅.

Καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι «ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοθέντος ποιῇ τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς», ἐκτίθεμαι οὖν δύο □ους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ὃν μὲν ἀπὸ ϛ α̅ Μ̊ γ̅, ὃν δὲ ἀπὸ ϛ α̅ Μ̊ δ̅. καὶ γίνονται οἱ □οι, ὃς μὲν Δ^{Y} α̅ ϛ ς̅ Μ̊ θ̅, ὃς δὲ Δ^{Y} α̅ ϛ η̅ Μ̊ ις̅. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου Μ̊ ε̅ καὶ τάσσω ὃν μὲν Δ^{Y} α̅ ϛ ς̅ Μ̊ δ̅, ὃν δὲ Δ^{Y} α̅ ϛ η̅ Μ̊ ια̅, τὸν δὲ γον, συναμφότερον τὸν δὶς παρὰ Μ̊ α̅, τουτέστιν Δ^{Y} δ̅ ϛ κη̅ Μ̊ κθ̅.

λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον μετὰ Μ̊ ε̅ δεῖ ποιεῖν □ον. Δ^{Y} ἄρα δ̅ ϛ κη̅ Μ̊ λδ̅ ἴσ. □ῳ τῷ ἀπὸ πλ. ϛ β̅ ⋔ Μ̊ ς̅. καὶ γίνεται ὁ □ος Δ^{Y} δ̅ Μ̊ λς̅ ⋔ ϛ κδ̅ ἴσ. Δ^{Y} δ̅ ϛ κη̅ Μ̊ λδ̅ καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ ἑνὸς κςον.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν αος $\frac{\chi o\varsigma}{,\beta\omega\xi\alpha}$, ὁ δὲ βος $\frac{\chi o\varsigma}{,\zeta\chi\mu\varepsilon}$, ὁ δὲ γος $\frac{\chi o\varsigma}{\beta\,.\,\tau\lambda\varsigma}$.

δ.

Δοθέντι ἀριθμῷ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστός τε αὐτῶν καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ς̅.

Πάλιν δὴ ὁμοίως ἐκτίθεμαι δύο □ους τοὺς κατὰ τὸ ἑξῆς ὄντας ὃν μὲν Δ^{Y} α̅, ὃν δὲ Δ^{Y} α̅. ϛ β̅ Μ̊ α̅, καὶ τούτοις προστίθημι, τὸν δοθέντα καὶ τάσσω τὸν μὲν αον Δ^{Y} α̅ Μ̊ ς̅, τὸν δὲ βον Δ^{Y} α̅ ϛ β̅ Μ̊ ζ̅, τὸν δὲ γον ὁμοίως τοῦ δὶς συναμφότερον παρὰ Μ̊ α̅, τουτέστιν Δ^{Y} δ̅ ϛ δ̅ Μ̊ ⟨κε̅. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον, ⋔ Μ̊ ς̅, ποιεῖν □ον. Δ^{Y} ἄρα δ̅ ϛ δ̅ Μ̊ ιθ̅ ἴσ. □ῳ τῷ ἀπὸ πλ. ϛ β̅ ⋔ Μ̊ ς̅. καὶ γίνεται ὁ □ος Δ^{Y} δ̅ Μ̊ λς̅ ⋔ ϛ κδ̅ ἴσ. Δ^{Y} δ̅ ϛ ς̅ Μ̊⟩ ιθ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{\kappa\eta}{\iota\zeta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος $\frac{\psi\pi\delta}{,\delta\text{ϡ}\eta\gamma}$, ὁ δὲ βος $\frac{\psi\pi\delta}{,\varsigma\psi\kappa\theta}$, ὁ δὲ γος $\frac{\psi\pi\delta}{\beta\,.\,,\beta\chi\xi}$.

3.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως καὶ ἕκαστος αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 5.

Καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν εἰς τὴν πραγματείαν Πορίσματα (καὶ πρόβλ. III, 10) ὅτι « ἐὰν δύο ἀριθμοὶ καὶ ἑκάτερος καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον, οἱ δύο ἀριθμοὶ προέρχονται ἐκ δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι διαφέρουσι κατὰ μονάδα » λαμβάνομεν τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα, τὸν μὲν $x + 3$, τὸν δὲ $x + 4$. Καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι, ὁ μὲν $x^2 + 6x + 9$, ὁ δὲ $x^2 + 8x + 16$. Ἀφαιρῶ ἀπὸ ἑκάστου 5 καὶ λαμβάνω τὸν μὲν πρῶτον $x^2 + 6x + 4$, τὸν δὲ δεύτερον $x^2 + 8x + 11$, ὡς τρίτον δὲ τὸ διπλάσιον ἄθροισμα τῶν δύο τούτων μεῖον 1, τουτέστιν $4x^2 + 28x + 29$.

Ὑπολείπεται ὅπως καὶ οὗτος σὺν 5 σχηματίζῃ τετράγωνον. Εἶναι ἄρα $4x^2 + 28x + 34$ τετράγωνος, ἔστω $= (2x - 6)^2$. Καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος $4x^2 + 36 - 24x = 4x^2 + 28x + 34$. Ἐξ ἧς $x = \frac{1}{26}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{2861}{676}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{7645}{676}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{20336}{676}$.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως καὶ ἕκαστος αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 6.

Καθ' ὅμοιον τρόπον πάλιν λαμβάνω δύο τετραγώνους τῶν ὁποίων αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι διαφέρουσι κατὰ μονάδα, τὸν μὲν x^2, τὸν δὲ $x^2 + 2x + 1$ καὶ προσθέτω εἰς τούτους τὸν δοθέντα καὶ λαμβάνω τὸν μὲν πρῶτον $x^2 + 6$, τὸν δὲ δεύτερον $x^2 + 2x + 7$, τὸν δὲ τρίτον τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τούτων μεῖον 1, τουτέστιν $4x^2 + 4x + 25$. Ὑπολείπεται ἄρα ὅπως καὶ οὗτος μεῖον 6, σχηματίζῃ τετράγωνον. Εἶναι ἄρα $4x^2 + 4x + 19$ τετράγωνος, ἔστω $= (2x - 6)^2$. Καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος $4x^2 + 36 - 24x = 4x^2 + 4x + 19$. Ἐξ ἧς $x = \frac{17}{28}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{4993}{784}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{6729}{784}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{22660}{784}$.

ε.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε τὸν λοιπόν, ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι 'Πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμός, ὁ ὢν δὶς συναμφότερος καὶ δυάδι μείζων, ὅστις τὸν ἀριθμὸν μείζονα τριῶν ἀριθμῶν ποιεῖ, ⟨ὥστε⟩ τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε τὸν λοιπόν, ποιεῖν τετράγωνον'.

Τάσσομεν οὖν τῶν ἐκκειμένων τριῶν $\square^{\omega\nu}$, *ὃν μὲν* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$, *ὃν δὲ* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\delta}\ \mathring{M}\ \overline{\delta}$, *τὸν δὲ* $\gamma^{o\nu}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}\ \varsigma\ \overline{\iota\beta}$ ⟨$\mathring{M}\ \overline{\iota\beta}$⟩.

λοιπὸν δεῖ κατασκευάσαι τὸν $\gamma^{o\nu}$ *τουτέστι* $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}\ \varsigma\ \overline{\iota\beta}$ ⟨$\mathring{M}\ \overline{\iota\beta}$⟩ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$. *καὶ κοινὸν τὸ* $\delta^{o\nu}$, *γίνεται* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\gamma}\ \mathring{M}\ \overline{\gamma}$ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$. *πλάσσω τὸν* $\square^{o\nu}$ *ἀπὸ* $\varsigma\ \overline{\alpha} \pitchfork \mathring{M}\ \overline{\gamma}$· *αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ* $\square^{o\varsigma}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \mathring{M}\ \overline{\theta} \pitchfork \varsigma\ \overline{ϛ}$ *ἴσ.* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\gamma}\ \mathring{M}\ \overline{\gamma}$· *καὶ γίνεται ὁ* $\varsigma\ \mathring{M}\ \omega^{-}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\overset{\theta}{\overline{\kappa\varepsilon}}$, *ὁ δὲ* $\beta^{o\varsigma}$ $\overset{\theta}{\overline{\xi\delta}}$, *ὁ δὲ* $\gamma^{o\varsigma}$ $\overset{\theta}{\overline{\rhoϙϛ}}$.

ϛ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν λείψας δυάδα ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε λείψῃ συναμφότερον, ἐάν τε τὸν λοιπόν, ποιῇ τετράγωνον.

Ἐὰν ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ πρὸ τούτου εὑρεθέντων ἀριθμῶν προσθῶ δυάδα, οἱ γενόμενοι ποιοῦσι τὸ προκείμενον· τὸ δὴ λεγόμενον τοιοῦτόν ἐστι.

Τάσσομεν γὰρ ἕνα τῶν ζητουμένων $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \mathring{M}\ \overline{\beta}$, *τὸν δὲ ἕτερον* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\beta}\ \mathring{M}\ \overline{\gamma}$, *τὸν δὲ* $\gamma^{o\nu}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}\ \varsigma\ \overline{\delta}\ \mathring{M}\ \overline{ϛ}$, *καὶ μένει τὰ ἐπιταχθέντα.*

λοιπόν ἐστι $\Delta^{Y}\,\overline{\delta}\ \varsigma\ \overline{\delta}\ \mathring{M}\ \overline{\delta}$ *ἰσῶσαι* $\square^{\varphi}$· *καὶ τὸ* $\delta^{o\nu}$, *ὥστε καὶ* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\alpha}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$ *ἴσ.* $\square^{\varphi}$· *καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν* π^{λ}. *τοῦ* $\square^{o\upsilon}$ *ἀπὸ διαφορᾶς, ἔστω ἀπὸ* $\varsigma\ \overline{\alpha} \pitchfork \mathring{M}\ \overline{\beta}$, *γίνεται ὁ* $\square^{o\varsigma}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \mathring{M}\ \overline{\delta} \pitchfork \varsigma\ \overline{\delta}$ *ἴσ.* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\alpha}\ \mathring{M}\ \overline{\alpha}$. *καὶ γίνεται ὁ* $\varsigma\ \overset{\varepsilon}{\overline{\gamma}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν $\alpha^{o\varsigma}$ $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\nu\theta}}$, *ὁ ⟨δὲ⟩* $\beta^{o\varsigma}$ $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\rho\iota\delta}}$, *ὁ δὲ* $\gamma^{o\varsigma}$ $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\sigma\mu\varsigma}}$, *καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.*

5.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸ ἄθροισμά των, ἢ σὺν τὸν τρίτον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ γνωρίζομεν ἐκ τῶν πορισμάτων (III, 15 καὶ III, 12), ὅτι « Ὅταν ἔχωμεν τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον ἀριθμόν, ὅστις νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τετραγώνων σὺν δύο, ὅστις σχηματίζει τὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, ὥστε τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν, εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, εἴτε σὺν τὸν τρίτον, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον ».

Θέτομεν λοιπὸν τοὺς λαμβανομένους τρεῖς τετραγώνους, τὸν μὲν $x^2 + 2x + 1$, τὸν δὲ $x^2 + 4x + 4$, τὸν δὲ τρίτον $4x^2 + 12x + 12$.

Ὑπολείπεται νὰ κατασκευάσωμεν τὸν τρίτον, τουτέστι $4x^2 + 12x + 12 =$ τετράγωνος. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 4 λαμβάνομεν $x^2 + 3x + 3 =$ τετράγωνος. Σχηματίζω τὸν τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $x - 3$· θὰ εἶναι ἄρα αὐτὸς ὁ τετράγωνος $x^2 + 9 - 6x = x^2 + 3x + 3$· ἐξ ἧς $x = \frac{2}{3}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{25}{9}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{64}{9}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{196}{9}$.

6.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν μεῖον δύο σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ δὲ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε, εἴτε μεῖον τὸ ἄθροισμά των, εἴτε μεῖον τὸν ἄλλον, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν τοῦ προηγουμένου προβλήματος προσθέσω 2, οἱ προκύπτοντες ποιοῦσι τὸ προκείμενον· διότι τοιαύτη εἶναι ἡ ἐκφώνησις.

Θέτομεν λοιπὸν ἕνα τῶν ζητουμένων $x^2 + 2$, τὸν δὲ ἄλλον $x^2 + 2x + 3$, τὸν δὲ τρίτον $4x^2 + 4x + 6$, καὶ ἰσχύουσι τὰ ἐπιταχθέντα.

Ὑπολείπεται νὰ γίνῃ $4x^2 + 4x + 4 =$ τετράγωνος· καὶ διαιροῦντες διὰ 4 λαμβάνομεν $x^2 + x + 1 =$ τετράγωνος· καὶ ἐὰν θέσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου ὡς διαφοράν, ἔστω $(x - 2)$, γίνεται ὁ τετράγωνος $x^2 + 4 - 4x = x^2 + x + 1$. Ἐξ ἧς $x = \frac{3}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{59}{25}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{114}{25}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{246}{25}$, καὶ ἡ ἀπόδειξις εἶναι φανερά.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τὸν ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ⟨τὸν⟩ τῆς συνθέσεως ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ α^ος ϛ α̅, ὁ β^ος M̊ ὅσων θέλεις· ἔστω M̊ α̅· καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ αὐτῶν ϛ α̅· ὁ δὲ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν □^ος ποιεῖ Δ^Υ α̅ M̊ α̅· μετὰ τοῦ ϛ α̅, γίνεται Δ^Υ α̅ ϛ α̅ M̊ α̅ ἴσ. □φ· ἔστω δὴ τῷ ἀπὸ πλ. ϛ α̅ ⋔ M̊ β̅. γίνεται ὁ □^ος Δ^Υ α̅ M̊ δ̅ ⋔ ϛ δ̅ ἴσ. Δ^Υ α̅ ϛ α̅ M̊ α̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\varepsilon}{\overline{\gamma}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν α^ος γ̅ ὁ δὲ β^ος ε̅ καὶ ἀρθέντος τοῦ μορίου, ἔσται ὁ μὲν α^ος γ̅ M̊, ὁ ⟨ δὲ ⟩ β^ος ε̅, καὶ ποιοῦσι τὸ προκείμενον· τὰ γὰρ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα μετὰ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον, ὁσάκις δὲ ἂν θέλῃς, τὸν γ̅ καὶ τὸν ε̅ ποιῆσαι, ποιήσουσιν οἱ γενόμενοι ἀριθμοὶ τὸ ἐπίταγμα.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδά.

Πρότερον δεῖ ζητῆσαι δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὰ ἀπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ ⟨τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται καί εἰσι γ̅ καὶ ε̅ ὧν τὰ ἀπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον ⟩ πλευρὰν ἔχοντα τὸν ζ̅.

Νῦν τάσσω τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ἀπό τε τοῦ ζ̅ καὶ τοῦ γ̅, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ̅ καὶ τοῦ ε̅, καὶ ἔτι ἀπὸ τοῦ ζ̅ καὶ τῆς συνθέσεως τῶν εὑρημένων ἀριθμῶν τοῦ τε γ̅ καὶ τοῦ ε̅, τουτέστιν η̅, ἀπὸ ἄρα τοῦ ζ̅ καὶ τοῦ η̅.

ἔσται τὰ τρίγωνα·

μ̅, μ̅β̅, ν̅η̅, καὶ κ̅δ̅, ο̅, ο̅δ̅, καὶ ι̅ε̅, ρ̅ι̅β̅, ρ̅ι̅γ̅, καὶ ἔστιν τὰ τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδὰ ἀπὸ M̊ ω̅μ̅.

ζ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ τοῦ α^ου □^ον, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ, ποιεῖν □^ον, παντὸς δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης □^ος, ἐάν τε προσλάβῃ δ^κις τὸ ἐμβαδόν, ἐάν τε (πρῶτον) Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ πρῶτος x, ὁ δεύτερος ὁσωνδήποτε μονάδων θέλεις· ἔστω 1· καὶ γίνεται τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν x· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των δίδει $x^2 + 1$· προσθέτων τὸν x, ἔχω $x^2 + x + 1 =$ τετράγωνος· ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου $(x - 2)$. Γίνεται ὁ τετράγωνος $x^2 + 4 - 4x = x^2 + x + 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{3}{5}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{5}{5}$· καὶ ἀπαλειφομένου τοῦ παρονομαστοῦ, θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος 3, ὁ δὲ δεύτερος 5, καὶ ποιοῦσι τὸ προκείμενον· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν σὺν τὸ γινόμενον αὐτῶν σχηματίζει τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ μὲ τὰ αὐτὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 καὶ τοῦ 5 σχηματίζουσιν οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ τὸ ἐπίταγμα.

(δεύτερον) Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον.

Νὰ εὑρεθῶσι τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰ ἐμβαδὰ ἴσα.

Προηγουμένως πρέπει νὰ ζητήσω δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των σὺν τὸ γινόμενον αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον. Τοῦτο δὲ προαπεδείχθη καὶ εἶναι οἱ 3 καὶ 5, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων σὺν τὸ γινόμενον αὐτῶν σχηματίζει τετράγωνον τετραγωνικῆς ῥίζης 7.

Τώρα λαμβάνω τρία ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν, τοῦ 7 καὶ τοῦ 3, καὶ πάλιν τοῦ 7 καὶ τοῦ 5, καὶ ἀκόμη τοῦ 7 καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν 3 καὶ 5, τουτέστιν 8, μὲ τὸ ζεῦγος ἄρα 7 καὶ 8.

Τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι·

40, 42, 58 καὶ 24, 70, 74, καὶ 15, 112, 113, καὶ τὰ τρίγωνα ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδὰ ἤτοι 840.

7.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου, εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, εἴτε μεῖον τοῦτο, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ ζητοῦμεν, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου, εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, εἴτε μεῖον τοῦτο, σχηματίζῃ τετράγωνον, παντὸς δὲ ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης σὺν ἢ πλὴν τὸ τετραπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, σχηματίζει τετράγωνον, οἱ τρεῖς ἄρα ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ὑποτείνουσαι ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν θὰ εἶναι λείψῃ, ποιεῖ □ον, οἱ ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἔσονται ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτείνουσαι, ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενος ἔσται τεσσάρων ἐμβαδῶν ⟨τῶν⟩ τριγώνων ὧν εἰσιν αἱ ὑποτείνουσαι. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τρίγωνα τρία ἴσα ⟨ἔχοντα⟩ ἐμβαδά. τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ εἰσιν τὰ τρίγωνα· $\overline{\mu}$. $\overline{\mu\beta}$. $\overline{\nu\eta}$, καὶ $\overline{\kappa\delta}$. $\overline{o}$. $\overline{o\delta}$. καὶ $\overline{\iota\varepsilon}$. $\overline{\rho\iota\beta}$. $\overline{\rho\iota\gamma}$.

Νῦν τάσσω, ἐλθὼν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, τοὺς τρεῖς ἐν ς τῶν ὑποτεινουσῶν τῶν τριγώνων· καὶ ἔσται ὁ αος ς $\overline{\nu\eta}$, ὁ βος ς $\overline{o\delta}$, ὁ γος ς $\overline{\rho\iota\gamma}$· τὸν δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἐν ΔΥ τοῦ δπλ. τοῦ ἐμβαδοῦ.

ΔΥ ἄρα $\overline{,\gamma\tau\xi}$ ἴσαι ς $\overline{\sigma\mu\varepsilon}$, καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\overline{\eta\varsigma}}{\zeta}$.
ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\upsilon\varsigma}$, ὁ δὲ βος $\overline{\varphi\iota\eta}$, ὁ δὲ γος $\overline{\psi\text{ϟ}\alpha}$.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Τριῶν τετραγώνων ἀπὸ δοθέντων δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς.

Ἐὰν γὰρ ὦσιν οἱ δοθέντες τετράγωνοι, ὅ τε $\overline{\delta}$ καὶ ὁ $\overline{\theta}$ καὶ ὁ $\overline{\iota\varsigma}$, καὶ τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων ς $\overline{\alpha}$, ἔσονται τῶν λοιπῶν δύο, ὁ μὲν ςˣ $\overline{\delta}$, ὁ δὲ ςˣ $\overline{\theta}$, καὶ λοιπόν ἐστι τὸ ὑπὸ τοῦ βου καὶ τοῦ γου ποιεῖν Μ̊ $\overline{\iota\varsigma}$.

ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ βου καὶ τοῦ γου ἐστὶ ΔΥˣ $\overline{\lambda\varsigma}$ ἴσ. □φ· $\overline{\iota\varsigma}$· καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ $\overline{\alpha}$ L′. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν αος $\overline{\alpha}$ L′, ὁ ⟨δὲ⟩ βος $\overline{\beta}$ L′ ς′, ὁ ⟨δὲ⟩ γος $\overline{\varsigma}$.

Ἵνα δὲ καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ, εὗρον ΔΥˣ $\overline{\lambda\varsigma}$ ἴσ. Μ̊ $\overline{\iota\varsigma}$ καὶ πάντα ἐπὶ ΔΥ $\overline{\alpha}$· γίνονται ΔΥ $\overline{\iota\varsigma}$ ἴσαι Μ̊ $\overline{\lambda\varsigma}$, καὶ γίνεται ἡ ΔΥ ιςων $\overline{\lambda\varsigma}$ οὗ πλευρὰ δων $\overline{\varsigma}$· ἀλλὰ τὰ $\overline{\varsigma}$, τὰ ὑπὸ τῶν πλ. τοῦ $\overline{\delta}$ καὶ τοῦ $\overline{\theta}$, τουτέστιν τοῦ βου καὶ τοῦ γου, τὸ δὲ μόριον, τουτέστιν τὰ $\overline{\delta}$, πλευρά ἐστιν τοῦ $\overline{\iota\varsigma}$ τετραγώνου.

Ὅταν οὖν σοι προβληθῇ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους, οἷον τὸν $\overline{\delta}$ καὶ τὸν $\overline{\theta}$ καὶ τὸν $\overline{\iota\varsigma}$, ποίει τὸ ὑπὸ τῶν πλ. τοῦ $\overline{\delta}$ καὶ τοῦ $\overline{\theta}$, γίνεται $\overline{\varsigma}$, μέρισον ταῦτα παρὰ τὴν πλ. τοῦ $\overline{\iota\varsigma}$ □ον. [καὶ] γίνεται ὁ αος $\overset{\delta}{\overline{\varsigma}}$.

τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουσιν αἱ ὑποτείνουσαι. Ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω τρία τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδά. Τοῦτο δὲ προαπεδείχθη καὶ εἶναι τὰ τρίγωνα· 40, 42, 58, καὶ 24, 70, 74 καὶ 145, 112, 113.

Τώρα, ἐρχόμενος εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα, ἐκφράζω τὰς τρεῖς ὑποτεινούσας τῶν τριγώνων συναρτήσει τοῦ x· καὶ θὰ εἶναι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 58x, ὁ δεύτερος 74x, ὁ τρίτος 113x· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων τὸ ἐκφράζω συναρτήσει τοῦ τετραπλασίου ἐμβαδοῦ ἑνὸς τῶν τριγώνων, εἰς x^2.

Θὰ εἶναι ἄρα $3360x^2 = 245x$ ἐξ ἧς $x = \frac{7}{96}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι $\frac{406}{96}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{518}{96}$ ὁ δὲ τρίτος $\frac{791}{96}$.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον.

Ἀπὸ τριῶν δοθέντων τετραγώνων εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν δίδῃ τοὺς δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς.

Διότι ἐὰν οἱ δοθέντες τετράγωνοι εἶναι ὁ 4, ὁ 9 καὶ ὁ 16, καὶ θέσωμεν τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων x, θὰ εἶναι ἐκ τῶν ἄλλων δύο, ὁ μὲν εἷς $\frac{4}{x}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{9}{x}$, καὶ ὑπολείπεται, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον δίδῃ 16.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι $\frac{36}{x^2} = 16$· ἐξ ἧς $x = 1\frac{1}{2}$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $1\frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος $2\frac{1}{2}\frac{1}{6}$, ὁ δὲ τρίτος 6.

Ἵνα δὲ προκύψῃ ὁ συναφὴς κανών, εὗρον $\frac{36}{x^2} = 16$ καὶ ἐπολλαπλασίασα ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ x^2· λαμβάνω $16x^2 = 36$, καὶ γίνεται $x^2 = \frac{36}{16}$, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $\frac{6}{4}$. Ἀλλὰ ὁ 6 εἶναι τὸ γινόμενον τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 4 καὶ τοῦ 9, τουτέστιν τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, ὁ δὲ παρονομαστής, τουτέστιν ὁ 4 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου 16.

νῦν πάλιν τὸν $\overline{\delta}$ □^{ον} παρὰ τὸν $\overset{\delta}{\overline{\varsigma}}$, γίνονται ⟨ $\overset{\varsigma}{\overline{\iota\varsigma}}$, καὶ ἔτι τὸν $\overline{\theta}$ □^{ον} παρὰ τὸν $\overset{\delta}{\overline{\varsigma}}$, γίνονται ⟩ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varsigma}$.

ἔσται ἄρα ὁ $α^{ος}$ $\overset{\delta}{\overline{\varsigma}}$, ὁ $β^{ος}$ $\overset{\varsigma}{\overline{\iota\varsigma}}$, ὁ $γ^{ος}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varsigma}$.

η.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐάν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάν τε λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον.

Πάλιν ζητοῦμεν πρῶτον τρία τρίγωνα ⟨ἴσα ἔχοντα τὰ⟩ ἐμβαδά, καὶ εὑρόντες, λαμβάνομεν τοὺς ἀπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τετραγώνους· ἔστιν δὲ ὁ μὲν $\overline{\text{͵γτξδ}}$, ὁ δὲ $\overline{\text{͵ευος}}$, ὁ δὲ $\overline{\text{α}}$. $\overline{\text{͵βψξθ}}$. καὶ ἔχοντες τούτους, εὑρίσκομεν ὡς προγέγραπται τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας □^{ους}, ἔστω δὴ τοὺς κειμένους.

Τούτους δὲ ἐξεθέμεθα, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν □^{ων}, ἐάν τε προσλάβῃ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\text{͵γτξ}}$, ἐάν τε λείψῃ, ποιεῖν □^{ον}. ἀλλ' αἱ $\overline{\text{͵γτξ}}$ $\overset{\circ}{M}$ ὁ δπλ ἐστὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἑκάστου τῶν τριγώνων, καὶ διὰ τοῦτο τοίνυν τάσσω ἐν ϛ, ὃν μὲν ϛ $\overset{\text{ριγ}}{\overline{\text{͵δσκβ}}}$, ὃν δὲ καὶ † $\overset{\text{͵δσκβ}}{\overline{\text{δ . ͵γψλβ}}}$, ὃν δὲ $\overset{\text{͵δσκβ}}{\overline{\text{ζ . ͵αρπη}}}$, καὶ ὁ ὑπὸ δύο αὐτῶν ποιεῖ τοὺς ἐπάνω □^{ους}.

λοιπὸν δεῖ τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y} $\overline{\text{͵γτξ}}$, καὶ πάντα, ἵνα ἓν μόριον γένηται, βάλλομεν ⟨ εἰς ⟩ $\overline{\text{ε}}$. $\overline{\text{͵εψκς}}$. καὶ ⟨ γίνεται ὁ $α^{ος}$ ϛ $\overline{\text{͵αωμβ}}$. $\overline{\text{͵ασξδ}}$ μορίου $\overline{\text{ε}}$. $\overline{\text{͵εψκς}}$. ⟩ ὁ $β^{ος}$ ϛ $\overline{\text{νς}}$. $\overline{\text{͵ηφις}}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ· ὁ $γ^{ος}$ ϛ $\overline{\text{κβ}}$. $\overline{\text{͵ευμδ}}$ μορίου τοῦ αὐτοῦ. καὶ γίνονται οἱ τρεῖς ϛ $\overline{\text{͵αϡκα}}$. $\overline{\text{͵εσκδ}}$ μορίου $\overline{\text{ε}}$. $\overline{\text{͵εψκς}}$ ἴσ. Δ^{Y} $\overline{\text{͵γτξ}}$. καὶ πάντα εἰς $\overline{\text{ε}}$. $\overline{\text{͵εψκς}}$. καὶ γίνεται ϛ $\overline{\text{͵αϡκα}}$. $\overline{\text{͵εσκδ}}$ ἴσ. Δ^{Y} $\overline{\text{α}}$. $\overline{\text{͵ηψμζ}}$. $\overline{\text{͵δφξ}}$. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overline{\text{͵αϡκα}}$. $\overline{\text{͵εσκδ}}$ μορίου β' $\overset{Y}{M}$ $\overline{\text{α}}$ καὶ α' . $\overline{\text{͵ηψμζ}}$ καὶ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\text{͵δφξ}}$. μορίου κοινοῦ ληφθέντος τινός, [ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, πρῶτοι γὰρ πρὸς ἀλ-

Ὅταν λοιπὸν σοῦ δοθῇ νὰ εὕρῃς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σχηματίζῃ τοὺς δοθέντας τετραγώνους, οἷον τὸν 4 καὶ τὸν 9 καὶ τὸν 16, λάβε τὸ γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 4 καὶ τοῦ 9, τὸ ὁποῖον εἶναι 6, διαίρεσον τοῦτο διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τετραγώνου 16, ὅτε ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{6}{4}$.

Τώρα πάλιν διαίρεσον τὸν τετράγωνον 4 διὰ τοῦ $\frac{6}{4}$, ὅτε λαμβάνεις $\frac{16}{6}$, καὶ ἀκόμη διαίρεσον τὸν τετράγωνον 9 διὰ τοῦ $\frac{6}{4}$, ὅτε λαμβάνεις 6.

Θὰ εἶναι ἄρα ὁ πρῶτος $\frac{6}{4}$, ὁ δεύτερος $\frac{16}{6}$, ὁ τρίτος 6.

8.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἴτε μεῖον τοῦτο, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πάλιν ζητοῦμεν τρία τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδά, καὶ ἀφοῦ τὰ εὕρομεν, λαμβάνομεν τοὺς τετραγώνους τῶν ὑποτεινουσῶν· εἶναι δὲ ὁ μὲν 3364, ὁ δὲ 5476, ὁ δὲ 12769. Καὶ ἔχοντες τούτους, εὑρίσκομεν κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίζῃ τοὺς δοθέντας τετραγώνους, ἔστω τοὺς ἀνωτέρω ληφθέντας.

Τούτους δὲ ἐλάβομεν, διότι ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων, ἢ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν 3360, σχηματίζεται τετράγωνος· ἀλλὰ ὁ 3360 εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου τῶν τριγώνων, καὶ διὰ τοῦτο τώρα ἐκφράζω συναρτήσει τοῦ x, τὸν μὲν ἕνα $\frac{4292}{113}$ x, τὸν δὲ ἄλλον $\frac{380132}{4292}$ x, τὸν δὲ ἄλλον $\frac{618788}{4292}$ x, καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σχηματίζει τοὺς ἀνωτέρω τετραγώνους.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ $3360\,x^2$, καὶ τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, μὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν 484996. Καὶ γίνεται ὁ πρῶτος $\frac{18421264}{484996}$ x, ὁ δεύτερος $\frac{42954916}{484996}$ x, ὁ τρίτος $\frac{69923044}{484996}$ x. Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $\frac{131299224}{484996}\,x = 3360\,x^2$.

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 484996. Καὶ λαμβάνομεν $131299224\ x = 1629586560\ x^2$. Καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{131299224}{1629586560}$. Καὶ *λήλους εἰσὶν οἱ ἀριθμοί], ἔσται ὁ ς [M̊ $\overline{͵\alpha\sampi\eta\alpha}$. $\overline{͵\varepsilon\sigma\kappa\delta}$ μορίου $\overline{\alpha}$. $\overline{͵\eta\psi\mu\zeta}$. $\overline{͵\delta\varphi\xi}$]. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· ἔσται ὁ μὲν αος † . . . . . .*

θ.

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα καὶ ποιεῖν τετράγωνον. — Δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, μήτε † τὸν διπλάσιον αὐτοῦ καὶ μονάδι μιᾷ μείζονα μετρεῖσθαι ὑπό του πρώτου ἀριθμοῦ <οὗ ὁ μονάδι μιᾷ μείζων> ἔχῃ μέρος τέταρτον †.

Ἐπιτετάχθω δὴ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι M̊ $\overline{ϛ}$ καὶ ποιεῖν □ον.

Ἐπεὶ οὖν θέλομεν τὴν M̊ τεμεῖν καὶ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι M̊ $\overline{ϛ}$ καὶ ποιεῖν □ον, τὸ ἄρα σύνθεμα τῶν □ων ἐστὶν M̊ $\overline{\iota\gamma}$. δεήσει ἄρα τὸν $\overline{\iota\gamma}$ διελεῖν εἰς δύο □ους ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ M̊ $\overline{ϛ}$.

ἐὰν οὖν τὸν $\overline{\iota\gamma}$ διέλω εἰς δύο □ους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ἐστὶν M̊ $\overline{\alpha}$ λύω τὸ ζητούμενον· λαμβάνω τοῦ $\overline{\iota\gamma}$ τὸ Lʹ, γίνεται $\overline{ϛ}$ Lʹ, καὶ ζητῶ τί μόριον προσθεῖναι M̊ $\overline{ϛ}$ Lʹ καὶ ποιεῖν □ον. καὶ πάντα δκις· ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overline{\kappa ϛ}$ M̊, καὶ ποιεῖν □ον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον $\Delta^{Y\times}$ $\overline{\alpha}$ καὶ γίνονται M̊ $\overline{\kappa ϛ}$ $\Delta^{Y\times}$ $\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ.

καὶ πάντα ἐπὶ Δ^{Y} · γίνονται Δ^{Y} $\overline{\kappa ϛ}$ M̊ $\overline{\alpha}$ ἴσ. □ῳ· ἔστω τῷ ἀπὸ πλ. ς $\overline{\varepsilon}$ M̊ $\overline{\alpha}$, καὶ γίνεται ὁ ς M̊ $\overline{\iota}$· Δ^{Y} ἄρα M̊ $\overline{\rho}$, τὸ $\Delta^{Y\times}$ M̊ $\rho^{\times}$. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς $\overline{\kappa ϛ}$ προστιθέμενον $\rho^{\times}$· τὸ ἄρα ταῖς M̊ $\overline{ϛ}$ Lʹ καὶ γίνεται $\upsilon^{\times}$ καὶ ποιεῖ □ον τὸν ἀπὸ πλ. $\frac{\kappa}{\nu\alpha}$.

Δεῖ οὖν τὸν $\overline{\iota\gamma}$ διαιρούμενον εἰς δύο □ους κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλ. ὡς ἔγγιστα $\frac{\kappa}{\nu\alpha}$, καὶ ζητῶ τί ἡ τριὰς λείψασα, προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ τὸν αὐτόν, τουτέστιν $\frac{\kappa}{\nu\alpha}$.

δι' ἁπλοποιήσεως, [ὅπερ εἶναι ἀδύνατον, διότι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους], θὰ εἶναι $x = \frac{781543}{9699920}$. Ἐπὶ τὰ δεδομένα. εἶναι ὁ μὲν πρῶτος. . . .

9.

Ἡ μονὰς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τῶν κλασμάτων ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζεται τετράγωνος. Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος μήτε νὰ εἶναι περιττός, μήτε ὁ διπλάσιος αὐτοῦ σὺν 1 νὰ διαιρῆται ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ, ὅστις σὺν 1 διαιρεῖται διὰ 4.

Ἄς ἐπιταχθῇ λοιπὸν νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον κλάσμα ὁ 6 καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος.

Ἐπειδὴ λοιπὸν θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα (εἰς δύο) καὶ εἰς ἑκάτερον τῶν κλασμάτων νὰ προσθέσωμεν τὸν 6 καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος, θὰ εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων 13. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα, ὅπως ἀναλύσωμεν τὸν 13 εἰς δύο τετραγώνους, ὥστε ἑκάτερος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6.

Ἐὰν λοιπὸν ἀναλύσω τὸν 13 εἰς δύο τετραγώνους, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, λύω τὸ πρόβλημα· λαμβάνω τοῦ 13 τὸ ἥμισυ, γίνεται $6\frac{1}{2}$, καὶ ζητῶ ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸ $6\frac{1}{2}$ διὰ νὰ σχηματισθῇ τετράγωνος ἀριθμός. Καὶ πολλαπλασιάζω ἐπὶ 4· ζητῶ ἄρα νὰ εὕρω τετραγωνικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν 26 νὰ δίδῃ τετράγωνον· ἔστω τὸ προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{x^2}$· ὅτε ἔχω $26 + \frac{1}{x^2}$ = τετράγωνος.

Πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ x^2· γίνονται $26x^2 + 1$ = τετράγωνος· ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου $(5x + 1)$, ἐξ ἧς $x = 10$· εἶναι ἄρα $x^2 = 100$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{100}$. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ εἰς τὸν 26 προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{100}$· εἰς τὸ $6\frac{1}{2}$ ἄρα πρέπει νὰ προστεθῇ $\frac{1}{400}$, ὅτε σχηματίζεται τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι $\frac{51}{20}$.

Πρέπει λοιπὸν ὁ 13 ἀναλυόμενος εἰς δύο τετραγώνους νὰ δίδῃ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑκάστου κατὰ προσέγγισιν $\frac{51}{20}$ καὶ ζητῶ νὰ εὕρω ποῖος ἀριτάσσω οὖν δύο □^{ους}, ἕνα μὲν ἀπὸ ς $\overline{ια}$ Μ̊$\overline{β}$, τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ Μ̊$\overline{γ}$ ⋔ ς $\overline{θ}$, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν □^{ων}, $Δ^{Υ}$ $\overline{σβ}$ Μ̊$\overline{ιγ}$ ⋔ ς $\overline{ι}$ ἴσ. Μ̊$\overline{ιγ}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{ρα}{\overline{ε}}$. ἔσται ἄρα ἑνὸς τῶν □^{ων} ἡ πλ. $\overset{ρα}{\overline{σνζ}}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\overset{ρα}{\overline{σνη}}$.

καὶ ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἀπ' αὐτῶν □^{ων} ἄρωμεν Μ̊$\overline{ϛ}$, ἔσται τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος Μ̊ $\overset{α.σα}{\overline{,ετνη}}$, τὸ δὲ ἕτερον $\overset{α.σα}{\overline{,δωμγ}}$, καὶ δῆλον ὡς ἑκάτερον μετὰ Μ̊$\overline{ϛ}$ ποιεῖ □^{ον}.

ι.

Μονάδα τεμεῖν ⟨εἰς δύο μόρια⟩ καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ Μ̊ τεμεῖν, καὶ προσθεῖναι ᾧ μὲν Μ̊ $\overline{β}$, ᾧ δὲ Μ̊$\overline{ϛ}$, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον □^{ον}.

Ἐκκείσθω μονὰς ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μὲν ΑΓ προσκείσθω δυὰς ἡ ΑΔ, τῷ δὲ ΓΒ ἑξὰς ἡ ΒΕ· ἑκάτερος ἄρα τῶν ΓΔ, ΓΕ ἐστιν □^{ος}. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν ΑΒ ἐστιν Μ̊$\overline{α}$, συναμφότερος ὁ δὲ ΑΔ, ΒΕ ὀκτάς, ὅλος ἄρα ὁ ΔΕ [ἐπὶ τῆς Μ̊$\overline{α}$] γίνεται Μ̊$\overline{θ}$, καὶ ταύτας χρὴ διελεῖν εἰς δύο □^{ους} τοὺς ΓΔ, ΓΕ. ἀλλὰ ἐπεὶ εἷς τῶν □^{ων} τοῦ μὲν ΑΔ ἐστιν μείζων, τουτέστιν δυάδος, τοῦ δὲ ΔΒ ἐστιν ἐλάσσων τουτέστιν τριάδος, ἀπῆκταί μοι εἰς τὸν ἐπιταχθέντα □^{ον}, οἱονεὶ τὸν $\overline{θ}$, διελεῖν εἰς δύο □^{ους} τοὺς ΔΓ, ΓΕ, ὥστε ἕνα τὸν ΓΔ εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῆς τε δυάδος καὶ τῆς τριάδος· εὑρεθέντος γὰρ τοῦ ΓΔ, δοθεὶς ὢν ὁ ΑΔ ἐστιν δυάς, λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ δοθείς· ἔστιν δὲ ὁ ΑΒ Μ̊$\overline{α}$, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΓ ἐστιν δοθείς· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Γ, καθ' ὃ τέμνεται ἡ μονάς.

Ἡ δὲ ἀγωγὴ ὑπογραφήσεται. ἔστω γὰρ ὁ εἷς τῶν □^{ων}, μεταξύ τε δυάδος καὶ τῆς τριάδος, $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$· ὁ ἄρα λοιπὸς ἔσται Μ̊ $\overline{θ}$ ⋔ $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$· ταῦτα ἴσα □^{ῳ}.

καὶ ταῦτα ἴσα □^{ῳ} ποιεῖν ῥάδιόν ἐστιν, δεῖ δὲ εὑρεῖν $Δ^{Υ}$ μεταξὺ τοῦ τε $\overline{β}$ καὶ τοῦ $\overline{γ}$. λαμβάνομεν δύο □^{ους}, ἕνα μὲν μείζονα τοῦ $\overline{β}$, τὸν δὲ ἕτερον, ἐλάσσονα τοῦ $\overline{γ}$. εἰσὶν δὲ τὰ $\overset{ρμδ}{\overline{σπθ}}$ καὶ $\overset{ρμδ}{\overline{τξα}}$· ἐὰν οὖν τὴν $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$ κατασκευάσωμεν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν προειρημένων δύο □^{ων}, λύσομεν τὸ ζητούμενον.

δεῖ οὖν καὶ τὴν πλευρὰν $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$, τουτέστιν ς $\overline{α}$, μείζονα μὲν εἶναι $\overset{ιβ}{\overline{ιζ}}$, ἐλάσσονα δὲ $\overset{ιβ}{\overline{ιθ}}$, ὥστε δεῖ, ζητοῦντα Μ̊ $\overline{θ}$ ⋔ $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$ ἴσ. □^{ῳ}, εὑρεῖν τὸν ς μείζονα μὲν $\overset{ιβ}{\overline{ιζ}}$, ἐλάσσονα δὲ $\overset{ιβ}{\overline{ιθ}}$.

θμὸς μεῖον 3 ἢ σὺν 2 δίδει τὸν αὐτόν, τουτέστιν $\frac{51}{20}$.

Λαμβάνω λοιπὸν δύο τετραγώνους, τὸν μὲν ἕνα $(11x + 2)^2$, τὸν δὲ ἄλλον $(3 - 9x)^2$, καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τούτων $202x^2 + 13 - 10x = 13$. Ἐξ ἧς $x = \frac{5}{101}$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς τῶν τετραγώνων ἡ $\frac{257}{101}$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $\frac{258}{101}$.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἑκατέρου τῶν ἐκ τούτων τετραγώνων ἀφαιρέσωμεν 6, θὰ εἶναι τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος $\frac{5358}{10201}$, τὸ δὲ ἄλλο $\frac{4843}{10201}$, καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τούτων σὺν 6 δίδει τετράγωνον.

10.

Νὰ τμηθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μὲν δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ εἰς τὸ δὲ ἄλλος δοθεὶς καὶ νὰ σχηματίζεται ἑκάστοτε τετράγωνος.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν νὰ τμηθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο κλάσματα, καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ ἓν ὁ 2, εἰς τὸ ἄλλο δὲ ὁ 6 καὶ νὰ γίνηται ἑκάτερον ἄθροισμα τετράγωνος.

Ἂς ληφθῇ ἡ μονὰς ΑΒ, καὶ ἃς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰς μὲν τὸ τμῆμα ΑΓ ἃς προστεθῇ, ἡ δυὰς ΑΔ, εἰς δὲ τὸ ΓΒ ἡ ἑξὰς ΒΕ· ἑκάτερος ἄρα τῶν ΓΔ, ΓΕ εἶναι τετράγωνος. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν ΑΒ εἶναι 1, τὸ ἄθροισμα δὲ ΑΔ+ ΒΕ εἶναι ὀκτάς, ὅλος ἄρα ὁ ΔΕ γίνεται μονάδες 9, καὶ ταύτας πρέπει νὰ ἀναλύσωμεν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς ΓΔ, ΓΕ.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ εἷς τῶν τετραγώνων τοῦ μὲν ΑΔ εἶναι μεγαλύτερος, τουτέστι δυάδος, τοῦ δὲ ΔΒ εἶναι μικρότερος τουτέστιν τριάδος, ἀνήχθη τὸ πρόβλημα, νὰ ἀναλύσω τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον π.χ. τὸν 9, εἰς δύο τετραγώνους τοὺς ΔΓ, ΓΕ, ὥστε ὁ εἷς, ἔστω ὁ ΓΔ νὰ κεῖται μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3. Διότι εὑρεθέντος τοῦ ΓΔ, ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς ΑΔ εἶναι 2, ὁ ἄλλος ἄρα ὁ ΑΓ εἶναι δοθείς· εἶναι δὲ ὁ ΑΒ = 1, καὶ ὁ ἄλλος ἄρα ὁ ΒΓ εἶναι δοθείς· εἶναι ἄρα δοθὲν καὶ τὸ σημεῖον Γ, καθ' ὃ τέμνεται ἡ μονάς.

Ὁ δὲ τρόπος τοῦ συλλογισμοῦ θὰ ἀναγραφῇ κατωτέρω. Διότι ἔστω ὁ εἷς τῶν τετραγώνων μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, x^2· ὁ ἄλλος ἄρα θὰ εἶναι $9 - x^2$· ταῦτα = τετράγωνος.

Καὶ εἶναι εὔκολον νὰ σχηματίσωμεν ταῦτα εἰς τετράγωνον, πρέπει δὲ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 3. Λαμβάνομεν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν μεγαλύτερον τοῦ 2, τὸν δὲ ἄλλον μικρότερον τοῦ 3· εἶναι δὲ ταῦτα τὰ $\frac{289}{144}$ καὶ $\frac{361}{144}$· ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν τὸ x^2 μεταξὺ τῶν προειρημένων δύο τετραγώνων, θὰ λύσωμεν τὸ ζητούμενον.

ἐὰν δὲ Μ̊ $\overline{\theta}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ *ποιῶμεν ἴσας* □$^{\varphi}$, *πλάσσομεν τὴν τοῦ* □^{ου} *πλ. ἀπὸ* Μ̊ $\overline{\gamma}$ ⋔ ς *τινος, καὶ εὑρίσκομεν τὸν* ς *γινόμενον ἔκ τινος ἀριθμοῦ* ϛ^{κις} *γενομένου καὶ μεριζομένου εἰς τὸν* Μ̊ $\overline{\alpha}$ *μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ* □^{ου}· *ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς* ϛ^{κις} *γενόμενος καὶ παραβληθεὶς εἰς τὸν* Μ̊ $\overline{\alpha}$ *μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ* □^{ου}, *τὴν παραβολὴν ποιεῖ μείζονα μὲν* $\overset{\iota\beta}{\overline{\iota\zeta}}$, *ἐλάσσονα δὲ* $\overset{\iota\beta}{\overline{\iota\theta}}$.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ς $\overline{\alpha}$ *καὶ ζητῶ κατὰ τὸν προσδιορισμὸν* ς $\overline{ϛ}$ *ἐν μορίῳ* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$ *μείζονα μὲν εἶναι* $\overset{\iota\beta}{\overline{\iota\zeta}}$, *ἐλάσσονα δὲ* $\overset{\iota\beta}{\overline{\iota\theta}}$.

ἀλλὰ καὶ ὁ $\overline{\iota\zeta}$ *παραβληθεὶς παρὰ τὴν* $\overline{\iota\beta}$, *τὸν παραβολὴν ποιεῖ* Μ̊ $\overset{\iota\beta}{\overline{\iota\zeta}}$, *ὥστε δεῖ* ς $\overline{ϛ}$ *πρὸς* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$ *μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ* $\overline{\iota\zeta}$ *πρὸς* $\overline{\iota\beta}$. *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ς ⟨$\overline{ϛ}$⟩ *καὶ* Μ̊ $\overline{\iota\beta}$, *τουτέστιν* ς $\overline{o\beta}$ *ὀφείλουσι μείζονες εἶναι* ⟨*τοῦ ὑπὸ* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$ *καὶ* Μ̊ $\overline{\iota\zeta}$, *τουτέστι* $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\zeta}$ Μ̊ $\overline{\iota\zeta}$⟩.

τῶν ς *τὸ* L' *ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται* $\overline{,\alpha\sigma\kappa ϛ}$· *ὕφελε τὰς* Δ^{Y} *ἐπὶ τὰς* Μ̊, *τουτέστιν* $\overline{\sigma\pi\theta}$, *λοιπὸς ἄρα* $\overline{,\alpha\zeta}$· *τούτων πλευρά· οὐ μείζων* $\overline{\lambda\alpha}$· *πρόσθες τὸ* L' *τῶν* ς· *γίνεται οὐ μείζων* $\overline{\xi\zeta}$· *παράβαλε παρὰ τὸ πλῆθος τῶν* Δ^{Y}, *γίνεται ὁ* ς ⟨*οὐ μείζων*⟩ $\overset{\iota\zeta}{\overline{\xi\zeta}}$.

Καὶ ὁμοίως δεήσει ς $\overline{ϛ}$ *πρὸς* $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ Μ̊ $\overline{\alpha}$ *ἐλάσσονα λόγον ἔχειν* ⟨*ἤπερ* $\overline{\iota\theta}$ *πρὸς* $\overline{\iota\beta}$⟩· *εὑρήσομεν τὸν* ς *οὐκ ἐλάσσονα* $\overset{\iota\theta}{\overline{\xi ϛ}}$, *ἀλλὰ καὶ οὐ μείζονα* $\overset{\iota\zeta}{\overline{\xi\zeta}}$.

ἔστω Μ̊ $\overline{\gamma}$ L'· *πλάσσω οὖν τὴν πλ. τοῦ* □^{ου} *ἀπὸ* Μ̊ $\overline{\gamma}$ ⋔ ς $\overline{\gamma}$ L'· *γίνεται ὁ* □^{ος} $\Delta^{Y}\,\overline{\iota\beta}\,\delta^{\times}$ Μ̊ $\overline{\theta}$ ⋔ ς $\overline{\kappa\alpha}$· *ταῦτα ἴσα* Μ̊ $\overline{\theta}$ ⋔ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, *ὅθεν ὁ* ς $\overset{\nu\gamma}{\overline{\pi\delta}}$, *ἡ* Δ^{Y} $\overset{,\beta\omega\theta}{\overline{,\zeta\nu ϛ}}$. *καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὴν δυάδα, ἔσται ἓν τμῆμα τῆς* Μ̊, $\overset{,\beta\omega\theta}{\overline{,\alpha\upsilon\lambda\eta}}$, *ὥστε τὸ ἕτερον ἔσται* $\overset{,\beta\omega\theta}{\overline{,\alpha\tau o\alpha}}$. *καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.*

Πρέπει λοιπόν, καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ x^2, τουτέστιν x, νὰ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τοῦ $\frac{17}{12}$, μικροτέρα δὲ τοῦ $\frac{19}{12}$, ὥστε πρέπει, ἐν ᾧ ζητῶ $9 - x^2 =$ τετράγωνος, νὰ εὕρω $\frac{17}{12} < x < \frac{19}{12}$.

Ἐὰν δὲ καταστήσωμεν $9 - x^2 =$ τετράγωνον, σχηματίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου, ἔστω $(3 - \alpha x)$ καὶ εὑρίσκομεν τὸν x προκύπτοντα ἔκ τινος ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 6 καὶ διαιρούμενον διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, σὺν 1, $(6\alpha : \alpha^2 + 1)$· ἀνήχθη λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρω ἀριθμόν τινα ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 6 καὶ διαιρούμενος διὰ τοῦ τετραγώνου του σὺν 1, γίνεται μεγαλύτερος μὲν τοῦ $\frac{17}{12}$, μικρότερος δὲ τοῦ $\frac{19}{12}$.

Ἔστω ὁ ζητούμενος x (ἀντὶ τοῦ α) καὶ ζητῶ κατὰ τὸν προσδιορισμόν, νὰ εἶναι $\frac{17}{12} < \frac{6x}{x^2 + 1} < \frac{19}{12}$.

Ἀλλὰ καὶ ὁ 17 διαιρεθεὶς διὰ 12 δίδει πηλίκον $\frac{17}{12}$, ὥστε πρέπει $\frac{6x}{x^2 + 1} > \frac{17}{12}$. Πρέπει ἄρα $6x \,.\, 12$ τουτέστιν $72x$ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $(x^2 + 1)$. 17, τουτέστι τοῦ $17x^2 + 17$. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $72x$ εἶναι 1296· ἀφαίρεσον τὸ τετράγωνον τοῦ μὴ ἔχοντος τὸν x ὅρου τουτέστιν 289, ὅτε μένει ὑπόλοιπον 1007· λάβε τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου· δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 31 (ἐννοεῖ μεγαλυτέρα κατὰ μονάδα τοὐλάχιστον τοῦ 31, δὲν εἶναι δηλ. 32 καὶ ἄνω)· πρόσθεσον τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x (δηλ. 36)· δὲν γίνεται μεγαλύτερον τοῦ 67· διαίρεσον διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $17x^2$, ὅτε γίνεται ὁ x οὐχὶ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{67}{17}$.

Καὶ ὁμοίως θὰ εἶναι ἀνάγκη $6x : x^2 + 1 < 19 : 12$· θὰ εὕρωμεν τὸν x οὐχὶ μικρότερον τοῦ $\frac{66}{19}$, ἀλλὰ καὶ οὐχὶ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{67}{17}$.

Ἔστω $x = 3\,\frac{1}{2}$· σχηματίζω λοιπὸν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου ἴσην πρὸς $(3 - 3\,\frac{1}{2}\,x)$· γίνεται ὁ τετράγωνος $12\,\frac{1}{4}\,x^2 + 9 - 21x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $9 - x^2$, ὅθεν ὁ $x = \frac{84}{53}$, καὶ $x^2 = \frac{7056}{2809}$. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸν 2 θὰ εἶναι τὸ ἓν τμῆμα τῆς μονάδος $\frac{1438}{2809}$, ὥστε τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $\frac{1371}{2809}$. Καὶ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα.

ια.

Μονάδα διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν πρότερον τὸν αὐτὸν δοθέντα ⟨καὶ⟩ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον.

Δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάδι παραυξανομένων.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν $\mathring{M}$ διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$ καὶ ποιεῖν ἕκαστον $\square^{ον}$.

Πάλιν δεῖ τὸν $\overline{\iota}$ διελεῖν εἰς τρεῖς $\square^{ους}$ ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$. ἐὰν οὖν πάλιν τὸν $\overline{\iota}$ διέλωμεν εἰς τρεῖς $\square^{ους}$, τῇ τῆς παρισότητος ἀγωγῇ, ἔσται ἕκαστος αὐτῶν μείζων τριάδος καὶ δυνησόμεθα, ἀφ' ἑκάστου αὐτῶν ἀφελόντες $\mathring{M}\,\overline{\gamma}$, ἔχειν εἰς οὓς ἡ $\mathring{M}$ διαιρεῖται.

λαμβάνομεν ἄρτι τοῦ $\overline{\iota}$ τὸ $\gamma^{ον}$, γί. $\overline{\gamma}\,\gamma^{\times}$, καὶ ζητοῦμεν τί προστιθέντες μόριον τετραγωνικὸν ταῖς $\mathring{M}\,\overline{\gamma}\,\gamma^{\times}$, ποιήσομεν ⟨$\square^{ον}$⟩· πάντα $\theta^{κις}$. δεῖ καὶ τῷ $\overline{\lambda}$ προσθεῖναί τι μόριον τετραγωνικὸν καὶ ποιεῖν τὸν ὅλον $\square^{ον}$.

ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον $\Delta^{Y\times}\,\overline{\alpha}$· καὶ πάντα ἐπὶ Δ^{Y}· γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{\lambda}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ἴσ. $\square^{\varphi}$· τῷ ἀπὸ πλευρᾶς $\digamma\,\overline{\varepsilon}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· γίνεται ὁ $\square^{ος}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\kappa\varepsilon}\,\digamma\,\overline{\iota}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ἴσ. $\Delta^{Y}\,\overline{\lambda}\,\mathring{M}\,\overline{\alpha}$· ὅθεν ὁ $\digamma\,\mathring{M}\,\overline{\beta}$, ἡ $\Delta^{Y}\,\mathring{M}\,\overline{\delta}$, τὸ $\Delta^{Y\times}\,\mathring{M}\,\overline{\delta}^{\times}$.

Εἰ οὖν ταῖς ⟨$\mathring{M}$⟩ $\overline{\lambda}$ προστίθεται $\mathring{M}\,\overline{\delta}^{\times}$, ταῖς $\mathring{M}\,\overline{\gamma}\,\gamma^{\times}$ προστεθήσεται $\lambda\varsigma^{\times}$ καὶ γίνεται $\frac{\lambda\varsigma}{\rho\kappa\alpha}$· δεῖ οὖν τὸν $\overline{\iota}$ διελεῖν εἰς τρεῖς $\square^{ους}$ ὅπως ἑκάστου $\square^{ου}$ ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ $\mathring{M}\,\frac{\varsigma}{\iota\alpha}$.

ἀλλὰ καὶ ὁ $\overline{\iota}$ σύγκειται ἐκ δύο $\square^{ων}$, τοῦ τε $\overline{\theta}$ καὶ τῆς $\mathring{M}$. διαιροῦμεν τὴν $\mathring{M}$ εἰς δύο $\square^{ους}$ τά τε $\frac{\kappa\varepsilon}{\theta}$ καὶ τὰ $\frac{\kappa\varepsilon}{\iota\varsigma}$, ὥστε τὸν $\overline{\iota}$ συγκεῖσθαι ἐκ τριῶν $\square^{ων}$, ἔκ τε τοῦ $\overline{\theta}$ καὶ τοῦ $\frac{\kappa\varepsilon}{\iota\varsigma}$ καὶ τοῦ $\frac{\kappa\varepsilon}{\theta}$. δεῖ οὖν ἑκάστην τῶν $\pi\lambda$. τούτων παρασκευάσαι πάρισον $\frac{\varsigma}{\iota\alpha}$.

11.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὁ αὐτὸς δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ὑφ' ἑκάστου τετράγωνος.

Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος ἀριθμὸς μήτε νὰ εἶναι δυὰς μήτε ἄθροισμα τοῦ 2 σὺν πολλαπλάσιον τοῦ ὀκτώ.

Ἂς ἐπιταχθῇ λοιπὸν νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ὁ 3 καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστον ἄθροισμα τετράγωνον.

Πάλιν πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 10 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3. Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν πάλιν τὸν 10 εἰς τρεῖς τετραγώνους, κατὰ τὴν μέθοδον τῆς προσεγγίσεως, ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς τριάδος καὶ θὰ δυνηθῶμεν, ἀφαιροῦντες ἐξ ἑκάστου αὐτῶν τὸν 3, νὰ ἔχωμεν ἐκείνους εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ἡ μονάς.

Λαμβάνομεν λοιπὸν τὸ τρίτον τοῦ 10 ἤτοι $3\frac{1}{3}$, καὶ ζητοῦμεν, ποῖον κλάσμα εἰς τὸ τετράγωνον, προστιθέμενον εἰς τὸ $3\frac{1}{3}$ σχηματίζει τετράγωνον· πολλαπλασιάζομεν πάντα ἐπὶ ἐννέα. Πρέπει καὶ εἰς τὸν 30 νὰ προσθέσωμεν ἓν κλάσμα εἰς τὸ τετράγωνον καὶ νὰ σχηματίζηται τὸ ἄθροισμα, τετράγωνος.

Ἔστω τὸ προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{x^2}$ (ὅτε εἶναι $30+\frac{1}{x^2}$)· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ x^2· ὅτε λαμβάνομεν $30x^2+1=$ τετράγωνος· τοῦ τετραγώνου τούτου ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $5x+1$· ὁπότε γίνεται ὁ τετράγωνος τούτου, $25x^2+10x+1=30x^2+1$· ὅθεν $x=2$, $x^2=4$, $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ 30 προστίθεται $\frac{1}{4}$, εἰς τὸ $3\frac{1}{3}$ θὰ προστεθῇ $\frac{1}{36}$ καὶ θὰ γίνῃ $\frac{121}{36}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ διαιρεθῇ ὁ 10 εἰς τρεῖς τετραγώνους οὕτως, ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκάστου νὰ πλησιάζῃ πρὸς τὴν τιμὴν $\frac{11}{6}$.

Ἀλλὰ καὶ ὁ 10 εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καὶ τοῦ 9 καὶ τῆς μονάδος. Διαιροῦμεν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους, εἰς τὸν $\frac{9}{25}$ καὶ τὸν $\frac{16}{25}$, ὥστε ὁ 10 νὰ εἶναι ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἤτοι $9+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$. Πρέπει λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκάστου τῶν προσθετέων τούτων νὰ γίνῃ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$.

ἀλλὰ καὶ αἱ πλ. αὐτῶν εἰσιν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overset{\varepsilon}{\overline{\delta}}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overset{\varepsilon}{\overline{\gamma}}$· καὶ πάντα λ^κις^ καὶ γίνονται $\overset{\circ}{M}\,\overline{\eta}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa\delta}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\eta}$. τὰ δὲ $\overline{\iota\alpha}$ ϛ^α^ γίνονται $\overset{\circ}{M}\,\nu\varepsilon$· δεῖ οὖν ἑκάστην πλ. κατασκευάσαι $\overline{\nu\varepsilon}$.

πλάσσομεν ἑνὸς πλευρὰν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$ ⋀ ϛ $\overline{\lambda\varepsilon}$, ἑτέρου δὴ ϛ $\overline{\lambda\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$ εων, τοῦ δὲ ἑτέρου ϛ $\overline{\lambda\zeta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$ ⟨εων⟩. γίνονται οἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων □^οι^, Δ^{Y} $\overline{,\gamma\varphi\nu\varepsilon}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota}$ ⋀ ϛ $\overline{\varrho\iota\varsigma}$· ταῦτα ἴσα $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota}$. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ϛ $\dfrac{,\gamma\varphi\nu\,\varepsilon}{\varrho\iota\varsigma}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων δοθεῖσαι, ὥστε καὶ αὐτοί. τὰ λοιπὰ δῆλα.

ιβ.

Μονάδα διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὅ τε $\overline{\beta}$ καὶ ὁ $\overline{\gamma}$ καὶ ὁ $\overline{\delta}$.

Καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ τὸν $\overline{\iota}$ διελεῖν εἰς τρεῖς □^ους^, ὅπως αὐτῶν ὁ μὲν α^ος^ μείζων ᾖ δυάδος, ὁ δὲ ἕτερος μείζων ᾖ τριάδος, ὁ δὲ γ^ος^ μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$.

ἐὰν οὖν τεμόντες $\overset{\circ}{M}\,\overline{\alpha}$ δίχα, προσθῶμεν τοῖς δοθεῖσιν ἀνὰ $\overset{\circ}{M}$ L', γίνεται ἕνα τῶν □^ων^ ζητεῖν μείζονα μὲν δυάδος, ἐλάσσονα δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$ L', τὸν δὲ ἕτερον μείζονα μὲν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$, ἐλάσσονα δὲ ⟨$\overset{\circ}{M}$⟩ $\overline{\gamma}$ L', τὸν δὲ γ^ον^ μείζονα μὲν $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$, ἐλάσσονα δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$ L'. καὶ ἀπάγεται ἅπαντα εἰς τὸ τὸν $\overline{\iota}$ συγκείμενον ἐκ δύο □^ων^ μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο □^ους^ ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$, ἐλάσσων δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$ L'. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν δυάδα, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ἀπὸ τῆς $\overset{\circ}{M}$·

Καὶ πάλιν τὸν ἕτερον τῶν □^ων^ μεταδιαιροῦμεν εἰς ἑτέρους δύο □^ους^, ὅπως εἷς μὲν αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$, ἐλάσσων δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$ L'· καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ

Ἀλλὰ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τούτων εἶναι 3, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$· πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 30· ὅτε γίνονται 90, 24, 18. Τὰ δὲ $\frac{11}{6}$ ἐπὶ 30 γίνονται 55· πρέπει λοιπὸν ἑκάστην τετραγωνικὴν ῥίζαν νὰ τὴν κατασκευάσωμεν ἴσην (περίπου) πρὸς 55.

Σχηματίζομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἑνὸς ἴσην πρὸς $3 - 35x$, τοῦ ἄλλου ἴσην πρὸς $31x + \frac{4}{5}$ καὶ τοῦ ἄλλου ἴσην πρὸς $37x + \frac{3}{5}$. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν εἶναι $3555x^2 + 10 - 116x$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς 10. Ὅθεν εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{116}{3555}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· οὕτω αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν τετραγώνων εἶναι δοθεῖσαι καὶ συνεπῶς καὶ οἱ τετράγωνοι. Τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

12.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἷς δοθείς, διάφορος εἰς ἕκαστον, ἀριθμός, καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστος τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁ 2 καὶ ὁ 3 καὶ ὁ 4.

Καὶ πάλιν ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ διαιρεθῇ ὁ 10 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ὁ μὲν πρῶτος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς δυάδος, ὁ δὲ ἄλλος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς τριάδος, ὁ δὲ τρίτος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 4.

Ἐὰν λοιπὸν ἀφοῦ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς τὸ μέσον, προσθέσωμεν εἰς τοὺς δοθέντας ἀνὰ $\frac{1}{2}$, γίνεται, ὥστε νὰ ζητῶμεν ὁ εἷς τετράγωνος νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 2, μικρότερος δὲ τοῦ $2\frac{1}{2}$, ὁ δὲ ἄλλος νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 3, μικρότερος δὲ τοῦ $3\frac{1}{2}$, ὁ δὲ τρίτος νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 4, μικρότερος δὲ τοῦ $4\frac{1}{2}$. Καὶ ἅπαντα ἀνήχθησαν εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ ἕκαστος τῶν τετραγώνων τούτων νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ὥστε ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 2, μικρότερος δὲ τοῦ $2\frac{1}{2}$. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸ 2, θὰ εὕρωμεν τὸ ἓν ζητούμενον κλάσμα τῆς μονάδος.

Καὶ πάλιν ἀναλύομεν τὸν ἄλλον τῶν τετραγώνων εἰς ἄλλους δύο τετραγώνους, ὥστε ὁ εἷς μὲν αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 3, μικρότερος *τούτου ἀφέλωμεν M̊ γ̄, εὑρήσομεν ἕνα τῶν ζητουμένων, ὥστε καὶ τὸν γ$^{\text{ον}}$ ὁμοίως εὑρήσομεν.*

ιγ.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ῑ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν τοῖς ζητουμένοις τρισὶν ἀριθμοῖς ὁ μείζων καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι $\square^{\text{ον}}$, ὁμοίως καὶ ὁ μέσος μετὰ τοῦ γ$^{\text{ου}}$ ποιοῦσι $\square^{\text{ον}}$, καὶ ὁ γ$^{\text{ος}}$ μετὰ τοῦ α$^{\text{ου}}$, οἱ ἄρα τρεῖς δὶς γενόμενοι ποιοῦσι τρεῖς $\square^{\text{ους}}$ ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ M̊ ῑ. ἀλλὰ δὶς οἱ τρεῖς ποιοῦσι M̊ κ̄· δεῖ οὖν τὸν κ̄ διελεῖν εἰς τρεῖς $\square^{\text{ους}}$, ὅπως ἕκαστος ⟨ἐλάσσων⟩ ᾖ M̊ ῑ.

ὁ δὲ κ̄ σύγκειται ἐκ δύο $\square^{\text{ων}}$, τοῦ τε ιϛ̄ καὶ τοῦ δ̄· καὶ ἐὰν τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων M̊ δ̄, δεήσει τὸν ιϛ̄ διελεῖν εἰς δύο $\square^{\text{ους}}$, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ M̊ ῑ. ἐμάθομεν δὲ τὸν δοθέντα $\square^{\text{ον}}$ διελεῖν εἰς δύο $\square^{\text{ους}}$, ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ M̊ ϛ̄, ἐλάσσων δὲ M̊ ῑ.

ἔστω συναμφότερος M̊ ιϛ̄, ὥστε διῃρήσθω εἰς $\square^{\text{ους}}$ ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ M̊ ῑ καὶ ἐὰν ἕκαστον ἀφέλωμεν ἀπὸ M̊ ῑ, εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς οἳ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιοῦσι τετράγωνον.

ιδ.

Δοθέντα ἀριθμὸν εἰς τέσσαρας ἀριθμοὺς διελεῖν, οἳ σὺν τρεῖς λαμβανόμενοι ποιοῦσιν τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ῑ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἀπὸ τοῦ α$^{\text{ου}}$ ⟨τρεῖς λαμβανόμενοι⟩ οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ποιοῦσι $\square^{\text{ον}}$, ἀλλὰ καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ β$^{\text{ου}}$ τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιοῦσι, καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ γ$^{\text{ου}}$ τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιοῦσι, καὶ οἱ ἀπὸ τοῦ δ$^{\text{ου}}$ τρεῖς, οἱ ἄρα τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι τέσσαρας $\square^{\text{ους}}$. ἀλλὰ οἱ τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι M̊ λ̄· δεήσει ἄρα M̊ λ̄ διελεῖν εἰς τέσσαρας $\square^{\text{ους}}$, ὅπως ἕκαστος ἐλάσσων ᾖ M̊ ῑ· τοῦτο δὲ οὕτως εὑρεθήσεται.

ἐάν τε διὰ τῆς παρισότητος τάξαντες ἕκαστον αὐτῶν M̊ ζ̄ L', καὶ ἕκαστον $\square^{\text{ον}}$ ἀφέλωμεν ἀπὸ M̊ ῑ, εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους· εἰ δὲ μή, ὁρῶ τὸν λ̄ δὲ τοῦ $3\frac{1}{2}$· καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσωμεν 3, θὰ εὕρωμεν ἕνα (τὸν δεύτερον) τῶν ζητουμένων, ὥστε κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ εὕρωμεν καὶ τὸν τρίτον.

13.

Ὁ ἐπιταχθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ ἄθροισμα τούτων ἀνὰ δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ διαιρεθῇ ὁ 10.

Καὶ ἐπειδὴ εἰς τοὺς ζητουμένους τρεῖς ἀριθμοὺς τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ μεσαίου σχηματίζει τετράγωνον, ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τοῦ μεσαίου καὶ τοῦ τρίτου σχηματίζει τετράγωνον, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου σχηματίζει τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τριῶν διπλασιαζόμενον σχηματίζει τρεῖς τετραγώνους, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι μικρότερος τοῦ 10. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν εἶναι 20· πρέπει λοιπὸν νὰ διαιρεθῇ ὁ 20 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10.

Ὁ δὲ 20 εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καὶ τοῦ 16 καὶ τοῦ 4· καὶ ἐὰν λάβωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων 4, θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ διαιρεθῇ ὁ 16 εἰς δύο τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10. Ἐμάθομεν δὲ νὰ ἀναλύωμεν τὸν δοθέντα τετράγωνον εἰς δύο τετραγώνους, ὥστε εἷς ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ 6, μικρότερος δὲ τοῦ 10.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ εἶναι 16, ὥστε νὰ ἀναλυθῇ εἰς τετραγώνους, καὶ ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10· καὶ ἐὰν ἕκαστον τούτων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 10, θὰ εὕρωμεν τοὺς ἄλλους, οἱ ὁποῖοι προστιθέμενοι ἀνὰ δύο σχηματίζουσι τετράγωνον.

14.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ ἀναλυθῇ εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὅταν λαμβάνωνται ἀνὰ τρεῖς νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων σχηματίζει τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τριῶν ἐν συνεχείᾳ σχηματίζει τετράγωνον, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἐν συνεχείᾳ ἀπὸ τοῦ τρίτου κάμνει τὸ αὐτό, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ τοῦ τετάρτου τριῶν, τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τεσσάρων τρεῖς φορὰς ἰσοῦται πρὸς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τρεῖς φορὰς εἶναι 30· θὰ εἶναι ἄρα συγκείμενον ἔκ τε τοῦ $\overline{\iota\varsigma}$ καὶ τοῦ $\overline{\theta}$ καὶ τοῦ $\overline{\delta}$ καὶ τῆς $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$. θῶμεν τὸν $\overline{\delta}$ καὶ τὸν $\overline{\theta}$, ἐπειδὴ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ἐστὶ $\mathring{M}\,\overline{\iota}$· λοιπὸν γίνεται $\mathring{M}\,\overline{\iota\zeta}$ διελεῖν εἰς δύο □ους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάττων ᾖ $\mathring{M}\,\overline{\iota}$.

ἐὰν οὖν τὸν $\overline{\iota\zeta}$ διέλωμεν εἰς δύο □ους, ὡς ἐμάθομεν, ὥστε ἕνα αὐτῶν μείζονα εἶναι $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ L′, ἐλάσσονα δὲ $\mathring{M}\,\overline{\iota}$, ἔσται ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάσσων $\mathring{M}\,\overline{\iota}$ καὶ ἐὰν ἑκάτερον αὐτῶν ἀφέλωμεν ἀπὸ $\mathring{M}\,\overline{\iota}$, εὑρήσομεν τοὺς λοιποὺς τῶν ζητουμένων, [ὃν μὲν $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$, ὃν δὲ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὥστε λελύσθαι τὸ ζητούμενον].

ιε.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ κύβον.

Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ϛ $\overline{\alpha}$, ἕκαστος δὲ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν $K^{Y}\,\overline{\zeta}$, ὁ δὲ $K^{Y}\,\overline{\kappa\varsigma}$, ὁ δὲ $K^{Y}\,\overline{\xi\gamma}$, καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῶν ποιεῖν κύβον· λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ $\overline{\alpha}$.

ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν $K^{Y}\,\overline{\eta\varsigma}$· ὥστε $K^{Y}\,\overline{\eta\varsigma}$ ἴσοι ϛ $\overline{\alpha}$. καὶ πάντα παρὰ ϛ· $\Delta^{Y}\,\overline{\eta\varsigma}$ ἴσαι $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$.

καὶ ἔστιν ἡ $\mathring{M}$ □ος· εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\mathring{M}\,\overline{\eta\varsigma}$ □ος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· ὅθεν ζητῶ πόθεν ἐστὶν ὁ $\overline{\eta\varsigma}$· ἔστιν δὲ τριῶν ἀριθμῶν σύνθεμα ὧν ἕκαστος αὐτῶν μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ποιεῖ κύβον. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ποιῇ κύβον, ἔτι δὲ τὸ σύνθεμα τῶν τριῶν ᾖ □ος.

Ἐκκείσθω ἡ μὲν τοῦ αου πλ· ϛ $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ἡ δὲ τοῦ βου $\mathring{M}\,\overline{\beta}$ ⋔ ϛ $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ τοῦ γου $\mathring{M}\,\overline{\beta}$. οἱ κύβοι γίνονται, ὁ μὲν $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\gamma}$ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὁ δὲ $\Delta^{Y}\,\overline{\varsigma}$ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ ⋔ $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\iota\beta}$, ὁ δὲ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. αἴρω ἀπὸ ἑκάστου $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, καὶ τάσσω τὸν μὲν αον $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\gamma}$, τὸν δὲ βον $\Delta^{Y}\,\overline{\varsigma}$ $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$ ⋔ $K^{Y}\,\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\iota\beta}$, τὸν δὲ γον $\mathring{M}\,\overline{\zeta}$.

λοιπόν ἐστιν αὐτοὺς συντεθέντας ποιεῖν □ον. γί. δὲ $\Delta^{Y}\,\overline{\theta}$ $\mathring{M}\,\overline{\iota\delta}$ ⋔ ϛ $\overline{\theta}$ ἴσ. □ῳ τῷ ἀπὸ πλ· ϛ $\overline{\gamma}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\dfrac{\iota\epsilon}{\beta}$.

ἀνάγκη νὰ ἀναλύσωμεν τὸν 30 εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10· τοῦτο δὲ θὰ εὑρεθῇ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν ἕκαστον τετράγωνον ἴσον πρὸς $7 \frac{1}{2}$ καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 10 θὰ εὕρωμεν τοὺς ζητουμένους· εἰ δὲ μή, παρατηρῶ ὅτι ὁ 30 εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα $16 + 9 + 4 + 1$. Λαμβάνομεν ἐκ τούτων δύο τετραγώνους τὸν 4 καὶ τὸν 9, ἐπειδὴ ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τοῦ 10· τὸ ὑπόλοιπον (τοῦ $4 + 9$ ἀπὸ τοῦ 30) εἶναι 17 καὶ ἀναλύομεν τοῦτον εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10.

Ἐὰν λοιπὸν ἀναλύσωμεν τὸν 17 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ὡς ἐμάθομεν, ὥστε εἷς ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $8 \frac{1}{2}$ καὶ μικρότερος τοῦ 10, θὰ εἶναι ἕκαστος αὐτῶν μικρότερος τοῦ 10, καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 10, θὰ εὕρωμεν τοὺς λοιποὺς ἐκ τῶν ζητουμένων, [τὸν μὲν ἴσον πρὸς 6, τὸν δὲ ἴσον πρὸς 1, ὥστε νὰ ἔχῃ λυθῆ τὸ ζητούμενον].

15.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον ἐκ τούτων σχηματίζῃ κύβον.

Ἔστω ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι x, ἕκαστος δὲ τῶν ζητουμένων εἶναι, ὁ μὲν $7x^3$, ὁ δὲ $26x^3$, ὁ δὲ $63x^3$, καὶ ὑπολείπεται, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίζῃ κύβον· ὑπολείπεται τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἐξισωθῇ πρὸς x.

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $96x^3$· ὥστε $96x^3 = x$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· ὅτε εἶναι $96x^2 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς τετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ 96 ἦτο τετράγωνος, τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῆ· ὅθεν ζητῶ πόθεν προέρχεται ὁ 96· εἶναι δὲ οὗτος ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων μετὰ τῆς μονάδος σχηματίζει κύβον. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν μετὰ τῆς μονάδος νὰ σχηματίζῃ κύβον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἔστω ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου εἶναι $x + 1$, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου $2 - x$, ἡ δὲ τοῦ τρίτου 2. Οἱ κύβοι τούτων εἶναι, ὁ μὲν $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, ὁ δὲ $6x^2 + 8 - (x^3 + 12x)$, ὁ δὲ 8. Ἀφαιρῶ ἐξ ἑκάστου τὴν μονάδα καὶ λαμβάνω τὸν μὲν πρῶτον $x^3 + 3x^2 + 3x$, τὸν δὲ δεύτερον $6x^2 + 7 - (x^3 + 12x)$, τὸν δὲ τρίτον 7.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζει τετράγωνον. Ἤτοι *ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν* $\frac{,\gamma\tau o\varepsilon}{,\alpha\varphi\lambda\eta}$, *ὁ δὲ* $\frac{,\gamma\tau o\varepsilon}{\alpha\,.\,,\eta\varphi o\zeta}$, *ὁ δὲ* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\zeta}$.

Ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ πάλιν τάσσομεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ τὸν μὲν K^Y $\frac{,\gamma\tau o\varepsilon}{,\alpha\varphi\lambda\eta}$, *τὸν δὲ* K^Y $\frac{,\gamma\tau o\varepsilon}{\alpha\,.\,,\eta\varphi o\zeta}$, *τὸν δὲ* $K^Y\,\bar{\zeta}$.

πάλιν τάσσομεν τοὺς τρεῖς ϛ $\bar{\alpha}$, *καὶ γίνονται* K^Y $\frac{,\gamma\tau o\varepsilon}{\delta\,.\,,\gamma\psi\mu}$ *ἴσοι* ϛ $\bar{\alpha}$. *καὶ πάντων τὸ* $\iota\varepsilon^{o\nu}$· *καὶ παρὰ* ϛ· *καὶ γίνονται* $\Delta^Y\,\overline{,\beta ϡ\iota\varsigma}$ *ἴσαι* $\overset{\circ}{M}\,\overline{\sigma\kappa\varepsilon}$. *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\frac{\nu\delta}{\iota\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις καὶ μένει.

ιϛ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον.

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ϛ $\bar{\alpha}$, *καὶ αὐτῶν πάλιν ὁ μὲν* K^Y $\frac{\eta}{\zeta}$, *ὁ δὲ* K^Y $\frac{\kappa\zeta}{\kappa\varsigma}$, *ὁ δὲ* K^Y $\frac{\xi\delta}{\xi\gamma}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ϛ $\bar{\alpha}$· *γίνεται κυβικόν τι πλῆθος ἴσον* ϛ$\bar{\alpha}$. *πάντα παρὰ* ϛ· *καὶ γίνεται* Δ^Y *τι πλῆθος ἴσον* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$.

καὶ ἔστιν ἡ $\overset{\circ}{M}$ $\square^{o\varsigma}$· *δεήσει ἄρα καὶ τὰς* Δ^Y *εἶναι* $\square^{o\nu}$· *πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν* Δ^Y; *ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς κύβους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$· *καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$, *τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ* $\square^{o\nu}$.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν κύβον ἐλάσσονα εἶναι $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$· *ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$, *πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\alpha}$· *ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος* $\square^{o\varsigma}$ *μείζων εἶναι δυάδος.*

τετάχθω ὁ καταλειπόμενος $\square^{o\varsigma}$ *μείζων εἶναι δυάδος· ἔστω* $\overset{\circ}{M}\,\bar{\beta}\,\delta^{\times}$. *δεῖ οὖν τὰ* $\frac{\delta}{\gamma}$ *διελεῖν εἰς ⟨τρεῖς⟩ κύβους, καὶ τὰ τούτων πολλαπλάσια κατά τινων*

$9x^2 + 14 - 9x =$ τετράγωνος καὶ ἔστω ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου εἶναι $3x - 4$, ὁπότε $x = \frac{2}{15}$.

Τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θὰ εἶναι ὁ μὲν $\frac{1538}{3375}$, ὁ δὲ $\frac{18577}{3375}$. ὁ δὲ 7.

Ἐπανέρχομαι εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν τοὺς τρεῖς ἀριθμούς, τὸν μὲν $\frac{1538}{3375}x^3$, τὸν δὲ $\frac{18577}{3375}x^3$, τὸν δὲ $7x^3$.

Πάλιν θέτομεν τὸ ἄθροισμά των ἴσον πρὸς x, ὅτε λαμβάνομεν $\frac{43740}{3375}x^3 = x$. Ἁπλοποιοῦμεν διὰ 15 καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· ὅτε λαμβάνομεν $2916x^2 = 225$. Ἐξ ἧς $x = \frac{15}{54}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα καὶ μένει λελυμένον.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον ἐκ τούτων σχηματίζῃ κύβον.

Ἂς τεθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἴσον πρὸς x, καὶ αὐτῶν πάλιν ὁ μὲν ἴσος πρὸς $\frac{7}{8}x^3$, ὁ δὲ $\frac{26}{27}x^3$, ὁ δὲ $\frac{63}{64}x^3$.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x· ὁπότε λαμβάνομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\lambda x^3 = x$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· ὅτε ἔχομεν $\lambda x^2 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς τετράγωνος· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 νὰ εἶναι τετράγωνος· ἀλλὰ πόθεν προέρχεται ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2; Οὗτος λαμβάνεται, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἐκ τοῦ 3 τὸ ἄθροισμα τριῶν κύβων, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος· καὶ οὕτω ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς κύβοι, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ 3 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ζητοῦμεν προσέτι ὅπως ἕκαστος τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν μικρότερον τῆς μονάδος, κατὰ μείζονα λόγον ἕκαστος αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· ὥστε ὀφείλει ὁ ὑπολειπόμενος τετράγωνος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2.

Ἂς ληφθῇ ὁ ὑπολειπόμενος τετράγωνος μεγαλύτερος τοῦ 2· ἔστω $2\frac{1}{4}$.

κύβων διαιρεθέντων. ἔστω δὴ κατὰ τοῦ $\overline{\sigma\iota\varsigma}$· ὀφείλομεν οὖν τὸν $\overline{\varrho\xi\beta}$ διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους.

σύγκειται δὲ ὁ $\overline{\varrho\xi\beta}$ ἔκ τε κύβου τοῦ $\overline{\varrho\kappa\varepsilon}$ καὶ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦ τε $\overline{\xi\delta}$ καὶ τοῦ $\overline{\kappa\zeta}$· ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι 'πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κύβων ⟨δύο σύνθεμά ἐστιν⟩'.

'Ανατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν ἕκαστον K^{Y} τῶν εὑρεθέντων, τοὺς δὲ τρεῖς 𐆅 $\overline{\alpha}$· καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν κύβον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι 𐆅 $\overline{\alpha}$· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^{Y}\overline{\beta}$ $\delta^{\times}$· ταῦτα ἴσα 𐆅 $\overline{\alpha}$· ὅθεν γίνεται ὁ 𐆅 $\gamma^{\omega\nu}$ $\overline{\beta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

ιζ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ κύβον.

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς 𐆅 $\overline{\alpha}$, τῶν δὲ τριῶν ὁ μὲν K^{Y} $\overline{\beta}$, ὁ δὲ K^{Y} $\overline{\theta}$, ὁ δὲ K^{Y} $\overline{\kappa\eta}$. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι 𐆅 $\overline{\alpha}$· ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν K^{Y} $\overline{\lambda\theta}$, ὥστε K^{Y} $\overline{\lambda\theta}$ ἴσ. 𐆅 $\overline{\alpha}$. καὶ παρὰ 𐆅· ὥστε Δ^{Y} $\overline{\lambda\theta}$ ἴσ. $\mathring{M}$ $\overline{\alpha}$.

Καὶ εἰ ἦσαν αἱ Δ^{Y} $\overline{\lambda\theta}$ ⟨$\square^{o\varsigma}$, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἔστι δὲ ὁ $\overline{\lambda\theta}$ ⟩ τριῶν κύβων τὸ σύνθεμα μετὰ $\mathring{M}$ $\overline{\gamma}$· δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ $\mathring{M}$ $\overline{\gamma}$ πειεῖ $\square^{o\nu}$· τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ α^{ov} κύβου $\pi\lambda$. 𐆅 $\overline{\alpha}$ ἡ δὲ τοῦ β^{ov} $\mathring{M}\overline{\gamma}$ ⋔ 𐆅 $\overline{\alpha}$, ἡ δὲ λοιπὴ $\mathring{M}$ τινός· ἔστω δὴ $\mathring{M}\overline{\alpha}$· καὶ γίνεται τὸ σύνθεμα τῶν τριῶν κύβων Δ^{Y} $\overline{\theta}$ $\mathring{M}\overline{\kappa\eta}$ ⟨ ⋔ 𐆅 $\overline{\kappa\zeta}$ ⟩· ταῦτα μετὰ $\mathring{M}\overline{\gamma}$ γίνεται $\Delta^{Y}\overline{\theta}$ $\mathring{M}$ $\overline{\lambda\alpha}$ ⋔ 𐆅 $\overline{\kappa\zeta}$. ⟨ισ.⟩ $\square^{\varphi}$ τῷ ἀπὸ $\pi\lambda$. 𐆅 $\overline{\gamma}$ ⋔ $\mathring{M}$ $\overline{\zeta}$. καὶ γίνεται ὁ 𐆅 $\mathring{M}$ $\overset{\varepsilon}{\overline{\varsigma}}$. ⟨ἔσται ἡ μὲν τοῦ α^{ov} $\pi\lambda$. $\overline{\varsigma}$⟩ ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\overline{\theta}$, ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ $\mathring{M}\overline{\alpha}$.

Καὶ τῷ ἀπὸ ἑκάστου τούτων κύβῳ προστίθεμαι $\mathring{M}\overline{\alpha}$ καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον K^{Y} τοσούτων, ὑποτιθεμένων τῶν τριῶν 𐆅 $\overline{\alpha}$. λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι 𐆅 $\overline{\alpha}$· γίνονται οἱ τρεῖς K^{Y} $\overset{\kappa\varepsilon}{\overline{\sigma\pi\theta}}$· ταῦτα ἴσα 𐆅 $\overline{\alpha}$, καὶ γίνεται ὁ 𐆅 $\overset{\iota\zeta}{\overline{\varepsilon}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Πρέπει λοιπὸν τὰ $\frac{3}{4}$ νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τρεῖς κύβους ἢ νὰ ληφθῶσι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος τριῶν κύβων. Ἔστω τοῦ 216· ὀφείλομεν λοιπὸν νὰ ἀναλύσωμεν τὸν 162 εἰς ἄθροισμα τριῶν κύβων.

Εἶναι δὲ ὁ 162 ἄθροισμα τοῦ κύβου 125 καὶ τῆς διαφορᾶς δύο κύβων τοῦ 64 — 27· γνωρίζομεν δὲ ἐκ τῶν Πορισμάτων ὅτι « ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο κύβων ».

Ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτομεν εἰς ἕκαστον τῶν εὑρεθέντων κύβων συντελεστήν τινα, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν κύβων ἴσον πρὸς x· καὶ θὰ συμβαίνῃ, ὥστε ἡ διαφορὰ ἑκάστου κύβου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀριθμῶν νὰ σχηματίζῃ κύβον.

Ὑπολείπεται, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἐξισωθῇ πρὸς x· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $2\frac{1}{4}x^3$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς x· ὅθεν εἶναι $x = \frac{2}{3}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου σχηματίζῃ κύβον.

Ἃς τεθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x, ἐκ τῶν τριῶν δὲ τούτων ἃς τεθῇ ὁ μὲν $2x^3$, ὁ δὲ $9x^3$, ὁ δὲ $28x^3$. Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμά των πρὸς x· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των εἶναι $39x^3$, ὥστε $39x^3 = x$. Καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x· ὥστε $39x^2 = 1$.

Καὶ ἂν ὁ $39x^2$ ἦτο τετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ ἦτο λελυμένον. Εἶναι δὲ ὁ 39 τὸ ἄθροισμα τριῶν κύβων σὺν 3· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς κύβοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἃς τεθῇ λοιπὸν ἡ μὲν κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου x, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου 3 — x, ἡ δὲ ἄλλη τυχὼν ἀριθμός· ἔστω ἡ μονάς· καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν κύβων $9x^2 + 28 - 27x$· ταῦτα σὺν 3 γίνονται $9x^2 + 31 - 27x$ = τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔστω $3x - 7$. Καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{6}{5}$· ἡ μὲν κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου θὰ εἶναι $\frac{6}{5}$, ἡ δὲ τοὺ ἄλλου 9, ἡ δὲ τοῦ τρίτου 1.

Καὶ εἰς τὸν κύβον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων προσθέτω τὴν μονάδα καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. Θέτω συντελεστήν τινα εἰς τὸν x^3, ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι x. Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x· ὁπότε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $\frac{289}{25}x^3$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς x, καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{5}{17}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

ιη.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους <τετραγώνῳ> ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν, ἵνα ᾖ □ος, Δ^Υ ᾱ, καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν Κ^Υ Κ γ̄, ὁ δὲ Κ^Υ Κ η̄, ὁ δὲ Κ^Υ Κ ι̅ε̅. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, προσλαβόντα ἕκαστον, ποιεῖν □ον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^Υ ᾱ. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν Κ^Υ Κ κ̅ϛ̅· ταῦτα ἴσα Δ^Υ ᾱ. καὶ πάντα παρὰ Δ^Υ ᾱ· γίνονται Δ^Υ Δ κ̅ϛ̅ ἴσαι Μ̊ ᾱ.

Καὶ ἔστιν ἡ Μ̊ ᾱ □ος πλευρὰν ἔχων □ον, ὥστε ἄρα καὶ Δ^Υ Δ κ̅ϛ̅ δεήσει εἶναι □ον πλευρὰν ἔχοντα □ον· γέγονε δὲ τὸ εἰρημένον πλῆθος τῶν Δ^Υ Δ ἔκ τινων τριῶν ἀριθμῶν ὧν ἕκαστος μετὰ Μ̊ ᾱ ποιεῖ □ον. ⟨ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος μετὰ Μ̊ ᾱ ποιῇ □ον⟩, ἔτι δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ᾖ □ος πλευρὰν ἔχων □ον.

Τετάχθω εἷς τῶν ζητουμένων Δ^Υ Δ ᾱ ⋔ Δ^Υ β̄, ὁ δὲ ἕτερος Δ^Υ ᾱ ϛ β̄, ὁ δὲ λοιπὸς Δ^Υ ᾱ ⋔ ϛ β̄, καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ Μ̊ ᾱ ποιῶν □ον, ἔτι δὲ οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιοῦσι □ον ⟨πλευρὰν ἔχοντα □ον⟩, καὶ ἐν ἀορίστοις ϛ λέλυται τὸ ζητούμενον.

ὑποκείσθω οὖν ὁ ϛ Μ̊ γ̄· ἔσται ἄρα εἷς τῶν ζητουμένων Μ̊ ξ̅γ̅, ὁ δὲ βος Μ̊ ι̅ε̅, ὁ δὲ γος Μ̊ γ̄.

Ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς Δ^Υ ᾱ, τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν Κ^Υ Κ ξ̅γ̅, ὃν δὲ Κ^Υ Κ ι̅ε̅, ὃν δὲ Κ^Υ Κ γ̄.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^Υ ᾱ καὶ γίνονται Κ^Υ Κ π̅α̅ ἴσοι Δ^Υ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ϛ γ^χ.

τὰ λοιπὰ δῆλα.

ιθ.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 19ου προβλήματος δὲν ἐσώθη. Εἰς τὴν θέσιν της ὁ Tannery ἔχει τοποθετήσει τὴν ἀπόδειξιν τοῦ κατωτέρω σημειουμένου ὑπ' ἀριθ. 19γ προβλήματος. Ἐπίσης δὲν ἐσώθησαν τὰ προβλήματα τὰ σημειούμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν 19α, 19β καὶ ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος 19γ. Τὸ κατωτέρω ἐντὸς παρενθέσεων παρατιθέμενον ἀρχαῖον κείμενον 1) τῆς ἀποδείξεως τοῦ 19ου προβλήματος, 2) τοῦ προβλήματος 19α, 3) τοῦ προβλήματος 19β καὶ 4) τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος 19γ ἀνακατεσκευάσθη ὑπ' ἐμοῦ (ἴδε σελ. 11).

Ε. Σ. Σταμάτης

18.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀριθμῶν σὺν ἕκαστον ἐκ τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, διὰ νὰ εἶναι τοῦτο τετράγωνος, ἴσον πρὸς x^2, καὶ τῶν ζητουμένων ἂς τεθῇ ὁ μὲν $3x^6$, ὁ δὲ $8x^6$, ὁ δὲ $15x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν, σὺν ἕκαστον ἐκ τούτων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $26x^6$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς x^2. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· καὶ λαμβάνομεν $26x^4 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι τετράγωνος, ὥστε κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι ἀνάγκη ὁ $26x^4$ νὰ ἔχῃ τετραγωνικὴν ῥίζαν ἴσην πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἂς τεθῇ εἷς τῶν ζητουμένων $x^4 - 2x^2$, ὁ δὲ ἄλλος $x^2 + 2x$, ὁ δὲ τρίτος $x^2 - 2x$, καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος ἐξ αὐτῶν σὺν 1 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἔτι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σχηματίζει τετράγωνον, ἔχον τετραγωνικὴν ῥίζαν ἴσην πρὸς τετράγωνον καὶ οὕτω τὸ ζητούμενον εἶναι λελυμένον ἀπροσδιορίστως συναρτήσει τοῦ x.

Ἂς ὑποτεθῇ λοιπὸν ὁ $x = 3$· θὰ εἶναι ἄρα εἷς τῶν ζητουμένων 63, ὁ δὲ δεύτερος 15, ὁ δὲ τρίτος 3.

Ἀνατρέχομεν τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2, τῶν δὲ ζητουμένων τὸν μὲν $63x^6$, τὸν δὲ $15x^6$, τὸν δὲ $3x^6$.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2, ὁπότε λαμβάνομεν $81x^6 = x^2$. Ἐξ ἧς $x = \frac{1}{3}$. Τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς τετράγωνον, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον,

⟨ Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2 καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{3}{4}x^6$, ὁ δὲ $\frac{8}{9}x^6$, ὁ δὲ $\frac{15}{16}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

⟨*Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς* $\Delta^{Y}\alpha$, *καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν* $K^{Y}\frac{\delta}{\gamma}$, *ὁ δὲ* $K^{Y}K\frac{\theta}{\eta}$, *ὁ δὲ* $K^{Y}K\frac{\iota\varsigma}{\iota\varepsilon}$. *καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν* $\square^{ov}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\alpha$. *ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν* $K^{Y}K\frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$. *ἴσα* $\Delta^{Y}\alpha$. *Καὶ πάντα παρὰ* $\Delta^{Y}\alpha$· *γίνονται* $\Delta^{Y}\Delta\frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ *ἴσ.* $\mathring{M}\,\alpha$.

καὶ ἔστιν ἡ $\mathring{M}\,\alpha$ $\square^{os}$ *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ov}$· *ὥστε ἄρα καὶ* $\Delta^{Y}\Delta\frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ *δεήσει εἶναι* $\square^{ov}$, *πλευρὰν ἔχοντα* $\square^{ov}$. *εἰ ἦσαν καὶ αἱ* $\mathring{M}\frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ $\square^{os}$ *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ov}$, *λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν* $\Delta^{Y}\Delta$; *ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς τετραγώνους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν* $\mathring{M}\,\alpha$· *καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ* $\mathring{M}\,\alpha$, *τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ* $\square^{ov}$, *πλευρὰν ἔχοντα* $\square^{ov}$.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι $\mathring{M}\alpha$· *ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας* $\mathring{M}\,\alpha$, *πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων* $\mathring{M}\alpha$· *ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος* $\square^{os}$, *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ov}$ *μείζων εἶναι δυάδος. δεῖ οὖν τὰ* $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\theta}$ *διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν* $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi\kappa\theta}$, *ὁ δὲ* $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\mu\theta}$, *ὁ δὲ* $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha}$.

ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς $\Delta^{Y}\alpha$, *τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν* $K^{Y}K\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\eta\varsigma}$, *ὃν δὲ* $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\varsigma}$, *ὃν δὲ* $K^{Y}K\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\chi\kappa\delta}$· *καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον.*

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y}· *γίνονται δὲ οἱ τρεῖς* $K^{Y}K\frac{\chi\kappa\varepsilon}{{,}\alpha\sigma\eta\varsigma}$. *καὶ πάντα παρὰ* $\Delta^{Y}\alpha$· *γίνονται* $\Delta^{Y}\Delta\frac{\chi\kappa\varepsilon}{{,}\alpha\sigma\eta\varsigma}$ *ἴσ.* $\mathring{M}\alpha$. *καὶ γίνεται ὁ* ς $\frac{\varsigma}{\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ⟩

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $\frac{371}{144}x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς x^2. Καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· λαμβάνεται $\frac{371}{144}x^4 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος ἀριθμός, ὥστε ἄρα θὰ εἶναι ἀνάγκη καὶ ὁ $\frac{371}{144}x^4$ νὰ εἶναι διτετράγωνος ἀριθμός. (Σημ. διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις). Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{371}{144}$ ἦτο διτετράγωνος ἀριθμὸς τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ· πόθεν προῆλθεν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^4; προῆλθεν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ 3 τοῦ ἀθροίσματος τριῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· καὶ ἀνάγεται οὕτω τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ τετράγωνον ἀριθμόν.

Καὶ ζητοῦμεν ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μικρότερον τῆς μονάδος κατὰ μείζονα λόγον ἕκαστος αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος. Κατὰ συνέπειαν πρέπει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι διτετράγωνος, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2.

Ἂς ταχθῇ ὡς ὑπόλοιπον διτετράγωνος μεγαλύτερος τοῦ 2· ἔστω ὁ $\frac{1296}{625}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ $\frac{579}{625}$ εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ὁ εἷς τῶν ζητουμένων θὰ εἶναι $\frac{529}{625}$, ὁ ἄλλος $\frac{49}{625}$ καὶ ὁ τρίτος $\frac{1}{625}$.

Ἀνατρέχομεν τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2, ἐκ δὲ τῶν ζητουμένων τὸν μὲν $\frac{96}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{576}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{624}{625}x^6$. Καὶ θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $\frac{1296}{625}x^6$· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 λαμβάνεται $\frac{1296}{625}x^4 = 1$. Καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{5}{6}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.⟩

ιθ α.

⟨ Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς Δ^{Y} α, καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν Κ^{Y} Κ β, ὁ δὲ Κ^{Y} Κ ε, ὁ δὲ Κ^{Y} Κ ι. καὶ συμβαίνει ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιεῖν □^{ον}.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y} α. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν Κ^{Y} Κ ιζ· ταῦτα ἴσα Δ^{Y} α· καὶ πάντα παρὰ Δ^{Y} α· γίνονται Δ^{Y} Δ ιζ ἴσ. Μ̊ α.

Καὶ ἔστιν ἡ Μ̊ α □^{ος} πλευρὰν ἔχων □^{ον}· εἰ ἦσαν καὶ αἱ Μ̊ ιζ □^{ος} πλευρὰν ἔχων □^{ον} λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἔστι δὲ ὁ ιζ τριῶν τετραγώνων τὸ σύνθεμα μετὰ Μ̊ γ· δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ Μ̊ γ ποιεῖ □^{ον} πλευρὰν ἔχοντα □^{ον}. ἔστω Μ̊ ι ϛ. δεῖ οὖν Μ̊ ι γ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους· ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν θ, ὁ δὲ $\frac{\kappa\varepsilon}{\lambda\varsigma}$, ὁ δὲ $\frac{\kappa\varepsilon}{\xi\delta}$. καὶ ἑκάστῳ τούτων προστίθεμαι Μ̊ α καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον Κ^{Y} Κ τοσούτων, ὑποτιθεμένων τῶν τριῶν Δ^{Y} α. καὶ γίνονται ὁ μὲν Κ^{Y} Κ ι, ὁ δὲ Κ^{Y} Κ $\frac{\kappa\varepsilon}{\xi\alpha}$, ὁ δὲ Κ^{Y} Κ $\frac{\kappa\varepsilon}{\pi\theta}$· καὶ συμβήσεται ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y} α· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς Κ^{Y} Κ ι ϛ. καὶ πάντα παρὰ Δ^{Y} α· γίνονται Δ^{Y} Δ ἴσ. Μ̊ α· καὶ γίνεται ὁ ϛ L'. ⟩

ιθ β.

⟨ Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β'.

Καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ β ἀριθμοῦ κύβος Μ̊ η. δεῖ οὖν τὸν β διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τούτων προσλαβὼν Μ̊ η ποιῇ □^{ον}. δεήσει οὖν

19 α.

⟨ Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου δίδῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2 καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $2x^6$, ὁ δὲ $5x^6$, ὁ δὲ $10x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $17x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς x^2· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 γίνεται $17x^4 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ 17 ἦτο διτετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ. Εἶναι δὲ ὁ 17 τὸ ἄθροισμα 3 τετραγώνων σὺν 3. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16. Πρέπει λοιπὸν ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους· θὰ εἶναι ὁ μὲν 9, ὁ δὲ $\frac{36}{25}$, ὁ δὲ $\frac{64}{25}$. Καὶ εἰς ἕκαστον τούτων προσθέτω τὴν μονάδα καὶ ἐπανέρχομαι εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Θέτω ἕκαστον τούτων ὡς συντελεστὴν τοῦ x^6, λαμβανομένου τοῦ ἀθροίσματος ἴσου πρὸς x^2. Καὶ γίνονται ὁ μὲν $10x^6$, ὁ δὲ $\frac{61}{25}x^6$, ὁ δὲ $\frac{89}{25}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $16x^6$. Καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 γίνεται $16x^4 = 1$· καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. ⟩

19 β.

⟨ Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 2.

Καὶ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 2 ὁ 8. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 2 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 26 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι *τὸν κϛ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ M̊ η. τάσσω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων M̊ θ ὃς μείζων ἐστι M̊ η. ἐὰν οὖν διέλω τὸν ιζ εἰς δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ M̊ η λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιζ τὸ L′ καὶ γίνεται η L′, καὶ ζητῶ τὶ μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς M̊ η L′ καὶ ποιεῖν* $\square^{ον}$· *καὶ πάντα τετράκις· ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς M̊ λδ καὶ ποιεῖν* $\square^{ον}$· *ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον* $\Delta^{Y\times}$ *α καὶ γίνονται M̊ λδ* $\Delta^{Y\times}$ *α ἴσ.* $\square^{φ}$·

καὶ πάντα ἐπὶ Δ^{Y}· *γίνονται* Δ^{Y} *λδ M̊ α ἴσ.* $\square^{φ}$· *ἔστω τῷ ἀπὸ πλ. M̊ α ⋔ ς ϛ̄ καὶ γίνεται ὁ ς M̊ ϛ·* Δ^{Y} *ἄρα M̊ λϛ, τὸ* $\Delta^{Y\times}$ *M̊ λϛ*$^{\times}$. *ἔσται ἄρα τὸ ταῖς λδ προστιθέμενον λϛ*$^{\times}$· *τὸ ἄρα ταῖς M̊ η L′ προστιθέμενον ρμδ*$^{\times}$ *καὶ ποιεῖ* $\square^{ον}$ *τὸν ἀπὸ πλ.* $\frac{ιβ}{λε}$.

Δεῖ οὖν τὸν ιζ διαιρούμενον εἰς δύο $\square^{ους}$ *κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα* $\frac{ιβ}{λε}$, *καὶ ζητῶ τὶ ἡ τετρὰς λείψασα, προσλαβοῦσα μονὰς ποιεῖ τὸν αὐτόν, τουτέστιν* $\frac{ιβ}{λε}$.

τάσσω οὖν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἀπὸ ς κγ M̊ α, τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ M̊ δ ⋔ ς ιγ, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν $\square^{ων}$, Δ^{Y} *χϟη M̊ ιζ ⋔ ς νη ἴσ. ιζ. καὶ γίνεται ὁ ς* $\frac{τμθ}{κθ}$. *ἔσται ἄρα τοῦ ἑνὸς τῶν* $\square^{ων}$ *ἡ πλ.* $\frac{τμθ}{,αιϛ}$, *ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου* $\frac{τμθ}{,αιθ}$· *καὶ ἐὰν ἄρω ἀπὸ ἑκάστου τῶν* $\square^{ων}$ *M̊ η ἕξω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.*⟩

ιθ γ.

⟨*Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.*

ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β.⟩

καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν β̄ διελεῖν ὡς καὶ πρότερον καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ β̄ ἀριθμοῦ κύβος M̊ η̄. δεῖ οὖν ἀπὸ M̊ η̄ ἀφελεῖν ἕκαστον καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$. *δεήσει* μεγαλύτερος τοῦ 8. Θέτω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἐὰν λοιπὸν ἀναλύσω τὸν 17 εἰς δύο τετραγώνους λύω τὸ ζητούμενον. Λαμβάνω τοῦ 17 τὸ ἥμισυ, τὸ ὁποῖον εἶναι $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητῶ νὰ εὕρω ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ δίδεται τετράγωνος· πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4· ζητῶ ἄρα νὰ εὕρω τετραγωνικὸν κλάσμα, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν 34 νὰ δίδῃ τετράγωνον· ἔστω τὸ τετράγωνον κλάσμα $\frac{1}{x^2}$, ὁπότε εἶναι $34+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος, Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ x^2 λαμβάνομεν $34x^2+1=$ τετράγωνος· ἔστω $=(1-6x)^2$, ἐξ ἧς $x=6$· εἶναι ἄρα $x^2=36$, $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{36}$. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ εἰς τὰς μονάδας 34 προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{36}$· τὸ εἰς τὰς μονάδας ἄρα $8\frac{1}{2}$ προστιθέμενον κλάσμα θὰ εἶναι $\frac{1}{144}$ καὶ δίδει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $\frac{35}{12}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$ καὶ πρὸς τοῦτο ζητῶ νὰ εὕρω τί θὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 4 καὶ τί θὰ προσθέσω εἰς τὸ 1 διὰ νὰ ἔχω τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δηλ. $\frac{35}{12}$.

Θέτω λοιπὸν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἔχοντα πλευρὰν τὴν $(23x+1)$, τὸν δὲ ἄλλον τὴν $(4-13x)$ καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν $698x^2+17-58x=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου $\frac{1016}{349}$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $\frac{1019}{349}$· καὶ ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων 8 θὰ ἔχω τοὺς ζητουμένους τρεῖς. ⟩

19γ.

⟨ Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν τὸν 2. ⟩

Καὶ φθάνομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 2 ὡς καὶ προηγουμένως καὶ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 2 ὁ 8. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 8 ἕκαστον καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 22 εἰς *οὖν τὸν $\overline{\kappa\beta}$ διελεῖν εἰς τρεῖς $\square^{ους}$, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$. καὶ ἐὰν ἀπὸ $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ ἄρωμεν ἕκαστον τούτων, εὑρήσομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς τρεῖς. τοῦτο δὲ προεδείχθη, πῶς δεῖ τὸν $\overline{\kappa\beta}$ διελεῖν εἰς τρεῖς $\square^{ους}$, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ $\mathring{M}\,\overline{\varsigma}$.*

κ.

Τὸ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν, λεῖψαν τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβων, ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ δοθὲν μόριον $\mathring{M}\,\delta^{\times}$ καὶ δέον ἔστω τὸ $\delta^{\times}$ διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐπετάχθη.

ὥστε δεήσει ἕκαστον αὐτῶν $\pitchfork$ $\mathring{M}\,\xi\,\delta^{\times}$ ποιεῖν $\square^{ον}$. οἱ ἄρα τρεῖς $\pitchfork$ $\mathring{M}\,\overset{\xi\delta}{\overline{\gamma}}$ ποιοῦσι τρεῖς $\square^{ους}$, καὶ ἐὰν ἑκάστῳ τῶν $\square^{ων}$ προσθῶμεν $\xi\delta^{\times}$, εὑρήσομεν ἕκαστον τῶν ζητουμένων.

Τοῦτο δὲ ῥᾴδιον· ἔρχεται δὴ τὰ $\overset{\xi\delta}{\overline{\iota\gamma}}$ διελεῖν εἰς τρεῖς $\square^{ους}$, ὅπερ ἐστὶ ῥᾴδιον.

κα.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, καὶ ζητοῦμεν τρεῖς $\square^{ους}$ ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μετὰ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$ ποιῇ $\square^{ον}$.

Τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου· ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, μερίζω ⟨εἰς⟩ τὸν ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν ὀρθῶν. καὶ εὑρήσομεν τοὺς $\square^{ους}$, ἕνα μὲν $\Delta^{Y}\,\overset{\iota\varsigma}{\overline{\theta}}$, τὸν δὲ ἕτερον $\Delta^{Y}\,\overset{\rho\mu\delta}{\overline{\kappa\varepsilon}}$, τὸν δὲ $\gamma^{ον}$ $\Delta^{Y}\,\overset{\sigma\kappa\varepsilon}{\overline{\xi\delta}}$. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μετὰ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ποιῶν $\square^{ον}$.

λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$· γίνεται δὲ ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς $K^{Y}K\,\overset{\nu\alpha.\ ,\eta\upsilon}{\overline{\alpha.\ ,\delta\upsilon}}$· ταῦτα ἴσα $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$. καὶ πάντα [εἰς τὸ αὐτὸ μόριον καὶ] τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ 8 ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον τούτων, θὰ εὕρωμεν τοὺς ζητουμένους τρεῖς ἀριθμούς. Τοῦτο δὲ προαπεδείχθη, πῶς δηλ. πρέπει νὰ ἀναλύσωμεν τὸν 22 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6.

20.

Τὸ δοθὲν κλάσμα νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρία κλάσματα, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{1}{4}$ καὶ πρέπει ἔστω τὸ $\frac{1}{4}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρία κλάσματα καθὼς ἐπετάχθη.

Ὥστε θὰ εἶναι ἀνάγκη ἕκαστον αὐτῶν μεῖον $\frac{1}{64}$ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἄρα μεῖον $\frac{3}{64}$ δίδει ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, καὶ ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων προσθέσωμεν $\frac{1}{64}$ θὰ εὕρωμεν ἕκαστον τῶν ζητουμένων.

Τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον· καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸ νὰ ἀναλύσωμεν τὰ $\frac{13}{64}$ $\left(\text{δηλ. } \frac{1}{4}-\frac{3}{64}\right)$ εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπερ εἶναι εὔκολον.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἃς τεθῇ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἴσον πρὸς x^2, καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν σὺν 1 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Τοῦτο δὲ συμβαίνει εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον· λαμβάνω τὰ τρία ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ἀφοῦ λάβω τὸ τετράγωνον τῆς μιᾶς τῶν καθέτων διαιρῶ δι' αὐτοῦ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν. Καὶ θὰ εὕρωμεν τοὺς τετραγώνους, ἕνα μὲν $\frac{9}{16}x^2$, τὸν δὲ ἄλλον $\frac{25}{144}x^2$, τὸν δὲ τρίτον $\frac{64}{225}x^2$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν σὺν x^2 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται ὅπως ἐξισώσωμεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρὸς x^2· εἶναι δὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν $\frac{14400}{518400}x^6$. Ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς x^2. [Καθιστῶμεν ὅλα ὁμώνυμα] καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· λαμβάνομεν παρὰ Δ^{Y}· γίνεται $\Delta^{Y}\, \Delta\frac{\nu\alpha.\, ,\eta\upsilon}{\alpha.\, ,\delta\upsilon}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$. καὶ ἡ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ· γίνεται $\Delta^{Y}\, \frac{\psi\kappa}{\varrho\kappa}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$.

καὶ ἔστιν ἡ $\mathring{M}$ $\square^{\text{ος}}$. εἰ ἦν $\square^{\text{ος}}$ καὶ τὰ $\Delta^{Y}\, \frac{\psi\kappa}{\varrho\kappa}$, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· οὐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν τριῶν καθέτων αὐτῶν στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν βάσεων αὐτῶν στερεὸν ποιῇ $\square^{\text{ον}}$.

πλευρὰν ἐχέτω τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων. καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ εἰρημένου ὀρθογωνίου, γενήσεται ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ τὸν ⟨ὑπὸ τῶν⟩ περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἑτέρου τῶν τριγώνων.

καὶ ἐὰν τάξωμεν ἓν αὐτῶν $\overline{\gamma}.\ \overline{\delta}.\ \overline{\varepsilon}$, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ $\iota\beta^{\pi\lambda.}$ ὥστε καὶ ἐμβαδὸν ἐμβαδοῦ $\overline{\iota\beta}^{\pi\lambda.}$ εἰ δὲ $\overline{\iota\beta}^{\pi\lambda.}$, καὶ $\gamma^{\pi\lambda.}$.

τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὅμοιον ⟨τὸ μὲν⟩ τῷ $\overline{\theta}.\ \overline{\mu}.\ \overline{\mu\alpha}$, τὸ δὲ ἕτερον $\overline{\eta}.\ \overline{\iota\varepsilon}.\ \overline{\iota\zeta}$. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, τάσσομεν τῶν ζητουμένων τριῶν $\square^{\text{ων}}$, ὃν μὲν $\frac{\iota\varsigma}{\theta}$, ὃν δὲ $\frac{\xi\delta}{\sigma\kappa\varepsilon}$, ὃν δὲ $\frac{,\alpha\chi}{\pi\alpha}$.

καὶ ἐὰν τὸν ἐκ τῶνδε στερεὸν ἰσώσωμεν $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, γενήσεται ὁ ς ῥητός. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

κβ.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐκ τούτων στερεὸς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τρεῖς $\square^{\text{οι}}$ ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ἑνὸς μὲν $\frac{\kappa\varepsilon}{\iota\varsigma}$, τοῦ δὲ ἑτέρου $\frac{\varrho\xi\theta}{\kappa\varepsilon}$, τοῦ δὲ $\frac{\sigma\pi\theta}{\xi\delta}$. τάσσω αὐτοὺς ἐν Δ^{Y}, καὶ μένει ἡ $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ λείψασα ἕκαστον αὐτῶν ποιοῦσα $\square^{\text{ον}}$.

$\frac{14400}{518400}$ x^4 = 1. Καὶ λαμβάνομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου· ἡ ὁποία εἶναι $\frac{120}{720}$ x^2 = 1.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς τετράγωνος. Ἐὰν καὶ τὰ $\frac{120}{720}$ x^2 ἦτο τετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ ἦτο λελυμένον· ἀλλὰ δὲν εἶναι. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρία ὀρθογώνια τρίγωνα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ὑψῶν αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν βάσεων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου τούτου ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. Καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν ὅλα διὰ τοῦ γινομένου τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ εἰρημένου ὀρθογωνίου, θὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τὸ σχηματιζόμενον ἐκ τοῦ γινομένου τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν καθέτων τοῦ ἄλλου τριγώνου.

Καὶ ἐὰν θέσωμεν τὸ ἓν γινόμενον 3 · 4 · 5, ἀνάγεται τότε τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν καθέτων τοῦ ἑνὸς τριγώνου νὰ εἶναι δωδεκαπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν καθέτων τοῦ ἄλλου ὀρθογωνίου τριγώνου ἢ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου νὰ εἶναι δωδεκαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄλλου· ἐὰν δὲ εἶναι δωδεκαπλάσιον θὰ εἶναι καὶ τριπλάσιον.

Τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον καὶ εἶναι ὅμοιον τὸ μὲν πρὸς 9 · 40 · 41, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς 8 · 15 · 17. Ἔχοντες λοιπὸν τὰ τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτομεν τῶν ζητουμένων τριῶν τετραγώνων, τὸν μὲν $\frac{9}{16}$ x^2, τὸν δὲ $\frac{225}{64}$ x^2, τὸν δὲ $\frac{81}{1600}$ x^2.

Καὶ ἐὰν τὸ γινόμενον τούτων ἐξισώσωμεν πρὸς x^2, θὰ γίνῃ ὁ x ῥητός. Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον τούτων μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν x^2, καὶ ἂς σχηματισθῶσι πάλιν οἱ ζητούμενοι τρεῖς τετράγωνοι ἐξ ὀρθογωνίων τριγώνων, ὁ μὲν $\frac{16}{25}$, ὁ δὲ ἄλλος $\frac{25}{169}$, ὁ δὲ $\frac{64}{289}$. Πολλαπλασιάζω ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ x^2 καὶ γίνεται, ὥστε ὁ x^2 μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς $K^{Y}K\overline{\beta}$. $\overline{͵\varepsilon\chi}$ ἐν μορίῳ $\overline{\varrho\kappa\beta}$. $\overline{͵\alpha\kappa\varepsilon}$· ταῦτα ἴσα $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$. καὶ πάντα παρὰ $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$· γίνεται $\Delta^{Y}\Delta\overline{\beta}$. $\overline{͵\varepsilon\chi}$ ἐν μορίῳ $\overline{\varrho\kappa\beta}$. $\overline{͵\alpha\kappa\varepsilon}$ ἴσ. $\mathring{M}\overline{\alpha}$.

Καὶ ἔστιν ἡ $\mathring{M}$ $\square^{\text{ος}}$ πλευρὰν ἔχουσα $\square^{\text{ον}}$· δεήσει ἄρα καὶ $\Delta^{Y}\Delta\overline{\beta}$. $\overline{͵\varepsilon\chi}$ ἐν μορίῳ $\overline{\varrho\kappa\beta}$. $\overline{͵\alpha\kappa\varepsilon}$ εἶναι $\square^{\text{ον}}$ ⟨ πλευρὰν ἔχοντα $\square^{\text{ον}}$ ⟩. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ὧν ὁ ἐκ τῶν καθέτων στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ὑποτεινουσῶν στερεὸν ποιεῖ $\square^{\text{ον}}$.

Καὶ ἐὰν πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, δεήσει τὸν ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τοῦ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου πολλαπλάσιον εἶναι κατὰ τὸν ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ὀρθογωνίου τινός. ἔστω τὸ ἓν τῶν ὀρθογωνίων $\overline{\gamma}$. $\overline{\delta}$. $\overline{\varepsilon}$. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τοῦ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ᾖ $\overline{\kappa}^{\pi\lambda.}$.

Εἰ δὲ $\overline{\kappa}^{\pi\lambda.}$, καὶ $\overline{\varepsilon}^{\pi\lambda.}$· καὶ ἔστιν ῥᾴδιον ⟨ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν⟩ καὶ ἔστιν τὸ μὲν μεῖζον $\overline{\varepsilon}$. $\overline{\iota\beta}$. $\overline{\iota\gamma}$, τὸ δὲ ἔλαττον $\overline{\gamma}$. $\overline{\delta}$. $\overline{\varepsilon}$. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ᾖ ⟨τοῦ μὲν⟩ $\mathring{M}\overline{\varsigma}$, ⟨τοῦ δὲ $\mathring{M}\overline{\lambda}$⟩.

ἔστιν δὲ τοῦ μὲν μείζονος ἡ ὑποτείνουσα $\mathring{M}\overline{\varsigma}\,L'$, ἡ δὲ κάθετος $\frac{\iota\gamma}{\xi}$. τοῦ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ $\mathring{M}\overline{\beta}\,L'$, ὁ δ' ἐν τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, $\frac{\varepsilon}{\iota\beta}$. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τῶν ὁμοίων, ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$, αὐτῶν δὲ τῶν $\square^{\text{ων}}$, ὃν μὲν $\Delta^{Y}\frac{\kappa\varepsilon}{\iota\varsigma}$, ὃν δὲ $\Delta^{Y}\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\varsigma}$, ὃν δὲ $\Delta^{Y}\overline{\alpha\ .\ ͵\delta\upsilon}$ ἐν μορίῳ $\overline{\beta\ .\ ͵\eta\varphi\xi\alpha}$.

λοιπόν ἐστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ καὶ πάντα παρὰ Δ^{Y}· καὶ ἡ $\pi\lambda$. τῇ $\pi\lambda$.· καὶ εὑρίσκεται ὁ ϛ $\frac{\mu\eta}{\xi\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρὸς x^2· καὶ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν $\frac{25600}{1221025}x^6$· ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς x^2· Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· καὶ λαμβάνομεν $\frac{25600}{1221025}x^4 = 1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς τετράγωνος ἔχουσα τετραγωνικὴν ῥίζαν ἴσην πρὸς τετράγωνον· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα καὶ ὁ $\frac{25600}{1221025}x^4$ νὰ εἶναι τετράγωνος. Καὶ ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρία ὀρθογώνια τρίγωνα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τριῶν καθέτων ἐπὶ τὸ γινόμενον τριῶν ὑποτεινουσῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν πάντα διὰ τοῦ γινομένου μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, θὰ εἶναι ἀνάγκη ὅπως τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς καθέτου τοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς καθέτου τοῦ ἄλλου ὀρθογωνίου νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὴν κάθετον τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου (δι' οὗ γίνεται ἡ διαίρεσις). Ἔστω τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων $3 \cdot 4 \cdot 5$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ὥστε τὸ γινόμενον μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (τοῦ ἑνὸς τριγώνου) νὰ εἶναι πολλαπλάσιον μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (τοῦ ἄλλου τριγώνου).

Ἐὰν δὲ τὸ γινόμενον εἶναι εἰκοσαπλάσιον τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι καὶ πενταπλάσιον· καὶ εἶναι εὔκολον τοῦτο ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ ἐμβαδὰ καὶ εἶναι τὸ μὲν μεγαλύτερον τρίγωνον $5 \cdot 12 \cdot 13$, τὸ δὲ μικρότερον $3 \cdot 4 \cdot 5$· πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἄλλα δύο, ὥστε τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς καθέτου τοῦ μὲν νὰ εἶναι 6, τοῦ δὲ 30.

Εἶναι δὲ τοῦ μὲν μεγαλυτέρου ἡ ὑποτείνουσα $6\frac{1}{2}$, ἡ δὲ κάθετος $\frac{60}{13}$. Τοῦ δὲ μικροτέρου ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι $2\frac{1}{2}$, ἡ δὲ κάθετος $\frac{12}{5}$.

Καὶ ἀφοῦ λάβωμεν τὰ ἔχοντα τὰς ἐλαχίστας πλευρὰς ὅμοια τρίγωνα, ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, καὶ θέτομεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν x^2, ἕκαστον δὲ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, τὸν μὲν $\frac{16}{25}x^2$, τὸν δὲ $\frac{576}{625}x^2$, τὸν δὲ $\frac{14400}{28561}x^2$.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρὸς x^2 καὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· καὶ νὰ λάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· καὶ εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{65}{48}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

κγ.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν ⟨στερεὸς⟩ λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, αὐτοὶ δ' ἀφ' οἱωνδήποτε τριῶν ὀρθογωνίων· καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ πρὸ ταύτης προτάσει.

εἰ χρώμεθα οὖν καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τάσσομεν τῶν ζητουμένων □^{ων} ὃν μὲν $\Delta^{Y}\,\overset{\iota\varsigma}{\overline{\kappa\varepsilon}}$, ὃν δὲ $\Delta^{Y}\,\overset{\varphi o\varsigma}{\overline{\chi\kappa\varepsilon}}$, ὃν δὲ $\Delta^{Y}\,\overset{\alpha.\,{,}\delta\upsilon}{\overline{\beta.\,{,}\eta\varphi\xi\alpha}}$· καὶ πάλιν μένει ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῶν □^{ον}.

λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν στερεὸν ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$, ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ϛ $\overset{\xi\varepsilon}{\overline{\mu\eta}}$.

καὶ μένει.

κδ.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μονάδα μίαν ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐπεὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ α^{ον} καὶ β^{ον} μετὰ Μ̊ $\overline{\alpha}$ ποιεῖν □^{ον}, πάντα ἐπὶ τὸν γ^{ον} ὄντα □^{ον}· ὥστε δεήσει τὸν ὑπὸ α^{ον} καὶ β^{ον} ⟨ἐπὶ τὸν γ^{ον}⟩, τουτέστι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεόν, μετὰ τοῦ γ^{ου}, ποιεῖν ⟨□^{ον}⟩, ὡς καὶ μετὰ τοῦ α^{ου} καὶ ⟨τοῦ⟩ β^{ου}. τοῦτο γὰρ προεδείξαμεν· ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο τὸ ζήτημα.

κε.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μονάδα μίαν ποιῇ τετράγωνον.

πάντα ἐπὶ τὸν γ^{ον}· ὥστε τὸ ὑπὸ α^{ου} καὶ β^{ου} ἐπὶ τὸν γ^{ον}, τουτέστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεός, λείψας τὸν γ^{ον}, ποιεῖ □^{ον}. ὥστε καὶ ἑκάτερον τόν τε α^{ον} καὶ τὸν β^{ον} λείψας ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς ποιεῖ □^{ον}, τοῦτο δὲ προδέδεικται· ἐκεῖνοι οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἐξ ἑκάστου αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ πάλιν τὸ γινόμενον αὐτῶν x^2, αὐτοὶ δὲ νὰ θεωρηθῶσιν ὡς προερχόμενοι ἐκ τριῶν τυχόντων ὀρθογωνίων τριγώνων· καὶ πάλιν καὶ ἐδῶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρίγωνα ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Ἐὰν καὶ ἐδῶ χρησιμοποιήσωμεν τὰ αὐτὰ ὀρθογώνια, καὶ θέσωμεν ἐκ τῶν ζητουμένων τετραγώνων, τὸν μὲν $\frac{25}{16}x^2$, τὸν δὲ $\frac{625}{576}x^2$, τὸν δὲ $\frac{28561}{14400}x^2$ καὶ πάλιν γίνεται, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ ἑκάστου νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸς x^2, ὁπότε εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{48}{65}$.

Καὶ ἐπαληθεύεται.

24.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὴν μονάδα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ ζητῶ τὸ γινόμενον πρώτου καὶ δευτέρου σὺν 1 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν τρίτον ὄντα τετράγωνον· ὥστε θὰ εἶναι ἀνάγκη τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τετραγώνων σὺν τὸν τρίτον, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ὡς καὶ σὺν τὸν πρῶτον ἢ σὺν τὸν δεύτερον. Διότι τοῦτο τὸ προαπεδείξαμεν· ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ λύουσι καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο.

25.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὴν μονάδα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη (λαμβάνεται ὑπ' ὄψει τὸ προηγούμενον πρόβλημα) ἐπὶ τὸν τρίτον· ὥστε τὸ γινόμενον πρώτου καὶ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, τουτέστιν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν μεῖον τὸν τρίτον, σχηματίζει τετράγωνον· ὥστε καὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν μεῖον τὸν πρῶτον ἢ τὸν δεύτερον σχηματίζει τετράγωνον. Τοῦτο δὲ καὶ προαπεδείχθη· ἐκεῖνοι λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ λύουσι τὸ πρόβλημα.

κς.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον.

Πάλιν, ζητοῦντες τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀρθέντα ἀπὸ Μ̊ α ποιεῖν □ον, ἐὰν πάντα ποιήσωμεν ἐπὶ τὸν γον, πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ □ον. τοῦτο δὲ προεδείξαμεν.

κζ.

Δοθέντι ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι οἱ τετράγωνοι καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῶσι τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ιε.

Καὶ ἔστω εἷς τῶν ζητουμένων Μ̊ θ. ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ Μ̊ κδ ποιῇ □ον, συναμφότερος δὲ μετὰ Μ̊ ιε ποιῇ □ον.

δεῖ οὖν ζητεῖν δύο □ους ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ Μ̊ κδ ποιῇ □ον. λαμβάνομεν τοὺς μετροῦντας Μ̊ κδ καὶ τριγώνου ὀρθογωνίου πλ. τὰς περὶ τὴν ὀρθήν.

⟨ἔστω κατὰ ς× δ ὁ ἀντικείμενος ς ϛ· συναμφοτέρου τὸ L′ γίνεται ς× β καὶ ς γ· πάλιν⟩ ἔστω κατὰ ς× γ ὁ ἀντικείμενος ς η· συναμφοτέρου τὸ L′ γίνεται ς× α L′ καὶ ς δ.

ἔστω ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ἀπὸ διαφορᾶς ς× β καὶ ς γ, ⟨ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς ς× α L′ καὶ ς δ⟩. καὶ μένει ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ Μ̊ κδ ποιῶν □ον.

λοιπόν ἐστι καὶ συναμφότερον μετὰ Μ̊ ιε ποιεῖν □ον. γίνεται δὲ ΔΥ ×ϛ δ× ΔΥ κε ⋔ Μ̊ θ ἴσ. □φ ἴσ. ΔΥ κε. καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ ϛων ε.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

26.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆς μονάδος σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πάλιν, ζητοῦντες ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀφαιρούμενον ἀπὸ τῆς μονάδος σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸν τρίτον πάλιν ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ ἑκάστου σχηματίζῃ τετράγωνον. Τοῦτο δὲ προεδείξαμεν.

27.

Ἀφοῦ δοθῇ ἀριθμὸς νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων λαμβανομένων ἀνὰ δύο σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 15.

Καὶ ἔστω εἷς τῶν ζητουμένων 9. Πρέπει τώρα νὰ ζητηθῶσιν ἄλλοι δύο, ὥστε ἑκάτερος μὲν αὐτῶν σὺν 24 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα δὲ ἀνὰ δύο σὺν 15 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πρέπει λοιπὸν νὰ ζητήσωμεν δύο τετραγώνους, ὥστε ἑκάτερος αὐτῶν σὺν 24 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Λαμβάνομεν τυχόντα διαιρέτην τοῦ 24 καὶ σχηματίζομεν τὰς καθέτους πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν (τὸν 24) διὰ τοῦ 6x, ὅτε λαμβάνομεν $\frac{4}{x}$· τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ($\frac{4}{x} + 6x$) εἶναι $3x + \frac{2}{x}$· πάλιν ἔστω νὰ διαιρέσωμεν (τὸν 24) διὰ τοῦ 8x, ὅτε λαμβάνομεν $\frac{3}{x}$ · τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ($\frac{3}{x} + 8x$) εἶναι $1\frac{1}{2}x + 4x$.

Ἔστω ἡ ἀπὸ διαφορᾶς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἑνὸς $\frac{2}{x} - 3x$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $1\frac{1}{2}x - 4x$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἑκάτερος αὐτῶν σὺν 24 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται ὅπως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σὺν 15 σχηματίζῃ τετράγωνον. Γίνεται δὲ $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 25x^2 - 9 =$ τετράγωνος, ἔστω $25x^2$. Ἐξ ἧς $x = \frac{5}{6}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

κη.

Δοθέντι ἀριθμῷ προσευρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι καὶ λείψαντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\gamma}$.

Τετάχθω πάλιν εἷς τῶν ζητουμένων □ων $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa\epsilon}$· ⟨ζητητέον οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως⟩ ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\beta}$ ποιῇ □ον, συναμφότερος δὲ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\gamma}$ ποιῇ □ον.

πάλιν λαμβάνομεν τὴν μέτρησιν κατὰ ϛ $\overline{\gamma}$ καὶ ϛ$^{\times}\overline{\delta}$. γίνεται ἡ μὲν τοῦ αου πλ. ἀπὸ διαφορᾶς ϛ $\overline{\alpha}$ L' καὶ ϛ$^{\times}\,\overline{\beta}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ἀπὸ διαφορᾶς ϛ $\overline{\beta}$ καὶ ϛ$^{\times}\,\overline{\alpha}$ L', καὶ μένει ὁ ἀπὸ ἑκατέρου □ος μετὰ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\beta}$ ποιῶν □ον.

λοιπόν ἐστι συναμφότερον ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\gamma}$ ποιεῖν □ον· γίνεται δὲ Δ$^{Y\times}\,\overline{ϛ}$ δ$^{\times}$ Δ$^{Y}\,\overline{ϛ}$ δ$^{\times}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa\epsilon}$ ἴσ. □φ· ἔστω ἴσ. Δ$^{Y\times}\,\overline{ϛ}$ δ$^{\times}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

κθ.

Εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω δὴ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$, ὁ δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$, ὁ δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\theta}$, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν □ων, Δ^{Y}Δ $\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{ϟζ}$ ἴσ. □φ· τῷ ἀπὸ πλ. Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota}$· καὶ γίνονται λοιπαὶ Δ$^{Y}\,\overline{\kappa}$ ἴσαι $\overset{\circ}{M}\,\overline{\gamma}$.

Καὶ εἰ ἦν ἑκάτερος □ος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο □ους καὶ ἀριθμόν τινα ⟨ὅπως⟩ ὁ ἀπ' αὐτοῦ □ος λείψας τοὺς ἀπὸ τῶν ζητουμένων □ους ποιῇ ⟨ἀριθμὸν⟩ τινα, ὃς πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοῦ λόγον ἔχει ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς □ον ἀριθμόν.

Τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι □οι, ὃς μὲν Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$, ὃς δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$, ⟨ὁ δὲ τυχὼν ἀριθμὸς Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$⟩· καὶ ⟨ὁ⟩ ἀπὸ τούτου □ος, ἐὰν λείψῃ τοὺς ἀπ' αὐτῶν □ους καταλείπει Δ$^{Y}\,\overline{\eta}$. θέλομεν ταῦτα πρὸς τὸν δὶς Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$, τουτέστιν πρὸς Δ$^{Y}\,\overline{\beta}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\eta}$, λόγον ἔχειν ὃν □ος πρὸς □ον. καὶ πάντων τὸ L', ὥστε καὶ Δ$^{Y}\,\overline{\delta}$ πρὸς Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$ λόγον ἔχειν ὃν □ος ἀριθμὸς πρὸς □ον.

Καί εἰσιν αἱ Δ$^{Y}\,\overline{\delta}$ □ος, ὥστε καὶ Δ$^{Y}\,\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\delta}$ ἴσ. □φ· τῷ ἀπὸ πλ. ϛ $\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{\alpha}$·

28.

᾿Αφοῦ δοθῇ ἀριθμὸς νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀνὰ δύο μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

῎Εστω ὁ δοθεὶς 13.

῞Ας τεθῇ πάλιν εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων 25. Πρέπει λοιπὸν νὰ ζητηθῶσιν ἄλλοι δύο τετράγωνοι, ὥστε ἑκάτερος μὲν αὐτῶν σὺν 12 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτῶν μεῖον 13 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πάλιν λαμβάνομεν τοὺς διαιρέτας $3x$ καὶ $\frac{4}{x}$. ῾Οπότε γίνεται ἡ μὲν ἀπὸ διαφορᾶς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου $1\frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $2x - \frac{1\frac{1}{2}}{x}$ καὶ συμβαίνει, ὥστε ὁ τετράγωνος ἑκατέρου σὺν 12 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

῾Υπολείπεται, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μεῖον 13 σχηματίζῃ τετράγωνον· γίνεται δὲ $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 6\frac{1}{4}x^2 - 25 =$ τετράγωνος, ἔστω $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2}$, ἐξ ἧς $x = 2$.

᾿Επὶ τὰ δεδομένα.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

῞Ας τεθῇ ἐκ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν x^2, ὁ δὲ 4, ὁ δὲ 9, ὁπότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν γίνεται $x^4 + 97 =$ τετράγωνος, ἔστω τετραγωνικῆς ῥίζης $x^2 - 10$· ὁπότε $20x^2 = 3$.

Καὶ ἐὰν ἑκάτερος ἦτο τετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ ἦτο λελυμένον· καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο τετραγώνους καὶ ἀριθμόν τινα, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ δίδῃ ἀριθμόν τινα, ὁ ὁποῖος πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς δοθέντος ἀριθμοῦ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

῞Ας τεθῶσιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὁ μὲν x^2, ὁ δὲ 4, ὁ δὲ τυχὼν ἀριθμὸς $x^2 + 4$· καὶ τὸ τετράγωνον τούτου μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων δίδει $8x^2$. Θέλομεν ὅπως ταῦτα πρὸς $2(x^2 + 4)$, τουτέστιν πρὸς $2x^2 + 8$, ἔχῃ λόγον ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ, ὥστε καὶ $4x^2$ πρὸς $x^2 + 4$ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Καὶ εἶναι ὁ $4x^2$ τετράγωνος, ὥστε καὶ $x^2 + 4 =$ τετράγωνος· ἔστω ὅθεν ὁ ς Μ̊ $\overline{\alpha}$ L′. ἔσται τῶν ζητουμένων □ων, ὁ μὲν Μ̊ $\overline{\beta}$ δ×, ὁ δὲ Μ̊ $\overline{\delta}$, ὁ δὲ τυχὼν Μ̊ $\overline{\digamma}$ δ×. καὶ πάντα δκις· γίνεται ὁ μὲν Μ̊ $\overline{\theta}$, ὁ δὲ Μ̊ $\overline{\iota\digamma}$, ὁ δὲ τυχὼν Μ̊ $\overline{\kappa\varepsilon}$.

Ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν τῶν τριῶν □ων, ὃν μὲν Δ^{Y} $\overline{\alpha}$, ὃν δὲ Μ̊ $\overline{\theta}$, ὃν δὲ Μ̊ $\overline{\iota\digamma}$. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν □ων $\Delta^{Y}\Delta\overline{\alpha}$
ε
Μ̊ $\overline{\tau\lambda\zeta}$· ταῦτα [τὰ] ἴσα □ῳ τῷ ἀπὸ πλ. Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\kappa\varepsilon}$. ὅθεν ὁ ς Μ̊ $\overline{\iota\beta}$. τὰ λοιπὰ δῆλα.

λ.

Ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους χοέας τις ἔμιξε τοῖς ὁμοπλοῖσι ποιεῖν χρήστ' ἐπιταττόμενος,
καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον, τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενον μονάδας
καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοέων·
ὥστε διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν, καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους, παῖ, λέγε πενταδράχμους.

Τὸ σημαινόμενον διὰ τοῦ ἐπιγράμματός ἐστι τοιοῦτον.

Ἠγόρασέ τις δύο ἐνῆ οἴνου, ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα δραχμῶν $\overline{\eta}$, ἐκ δὲ τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα δραχμῶν $\overline{\varepsilon}$, καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμόν, ὃς πρὸς Μ̊ $\overline{\xi}$ ἐποίει τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τῶν χοέων· διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους.

Ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοέων ς $\overline{\alpha}$, ὥστε ἡ τιμὴ γενήσεται Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$. λοιπὸν δεῖ Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$ ποιεῖν ἴσ. □ῳ καὶ δεῖ τάσσειν τὴν τοῦ □ου πλ. ἀπὸ ς $\overline{\alpha}$ λείψαντος Μ̊ ὁσασδήποτε.

ἀλλὰ ἐπεὶ ἡ Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$ σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν, τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων καὶ τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, ⟨καὶ τὸ ε^ον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων⟩ ποιεῖ τὸ πλῆθος ⟨τῶν⟩ πενταδράχμων, τὸ δὲ η^ον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων ποιεῖ τὸ πλῆθος τῶν ὀκταδράχμων, καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν χοέων συντεθέντα ποιεῖ ς $\overline{\alpha}$, γέγονεν οὖν τινα τὸν ὄντα Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τοῦ ἑνὸς ε^ον καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου η^ον ποιῇ ς $\overline{\alpha}$.

Καὶ τοῦτο δὲ οὐ πάντοτε δύναμαι, εἰ μὴ κατεσκευάσθη ὁ ς μείζων μὲν τοῦ η^ον Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$, ἐλάσσων δὲ τοῦ ε^ου Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$. ἔστω Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ Μ̊ $\overline{\xi}$ μείζων ς $\overline{\varepsilon}$, ἐλάσσων δὲ ς $\overline{\eta}$.

τετραγωνικῆς ῥίζης $x + 1$· ὅθεν $x = 1\frac{1}{2}$. Θὰ εἶναι τῶν ζητουμένων τετραγώνων, ὁ μὲν $2\frac{1}{4}$, ὁ δὲ 4, ὁ δὲ τυχὼν ἀριθμὸς $6\frac{1}{4}$. Καὶ πολλαπλασιάζομεν ὅλους ἐπὶ 4· ὁπότε γίνεται, ὁ μὲν 9, ὁ δὲ 16, ὁ δὲ τυχὼν ἀριθμὸς 25.

Ἀνατρέχομεν τώρα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα καὶ θέτομεν ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνων, τὸν μὲν x^2, τὸν δὲ 9, τὸν δὲ 16. Καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν $x^4 + 337$· ταῦτα νὰ εἶναι ἴσα πρὸς τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα νὰ εἶναι $x^2 - 25$. Ὅθεν $x = \frac{12}{5}$.

Τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

30.

Ἀνέμιξέ τις χοέας (1 χοεὺς = 3,28 λίτρα) τῶν ὀκτὼ καὶ τῶν 5 δραχμῶν, παραγγελθεὶς νὰ ἐκδηλώσῃ τὰς εὐχαριστίας του πρὸς τοὺς κατὰ τὸν πλοῦν συντρόφους του

καὶ εἶπε νὰ εἶναι ἡ τιμή των τετράγωνος ἀριθμὸς
ὅστις ἀφοῦ δεχθῇ ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν
νὰ σχηματίσῃ πάλιν ἄλλον τετράγωνον
τοῦ ὁποίου τετραγ. ῥίζα νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν χοέων·
Ὥστε, ὦ παῖ, νὰ εὕρῃς τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν
καὶ πάλιν τοὺς πενταδράχμους χόας.

Τὸ σημαινόμενον διὰ τοῦ ἐπιγράμματος εἶναι τὸ ἑξῆς :

Ἠγόρασέ τις δύο εἴδη οἴνου, ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα πρὸς 8 δραχμάς, ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου τὸν χοέα πρὸς 5 δραχμάς, καὶ εἶπεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ὅλου νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸ 60 ἐσχημάτιζε τετράγωνον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χοέων· νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὀκτάδραχμοι καὶ πεντάδραχμοι χοεῖς.

Ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοέων x, ὁπότε ἡ τιμή των θὰ εἶναι $x^2 - 60$. Πρέπει λοιπὸν $x^2 - 60$ = τετράγωνος καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου νὰ εἶναι $x - \alpha$ ἔνθα α οἱοσδήποτε ἀκέραιος.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ ὁ $x^2 - 60$ ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀριθμῶν, τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων καὶ τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, καὶ τὸ πέμπτον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων δίδει τὸ πλῆθος τῶν πενταδράχμων, τὸ δὲ ὄγδοον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων δίδει τὸ πλῆθος τῶν ὀκταδράχμων (χοέων), καὶ ἐπειδὴ τὸ πλῆθος ὅλων τῶν χοέων ἰσοῦται πρὸς x, καταλήγει τὸ πρόβλημα νὰ ἀναλύσωμεν τὸν $x^2 - 60$ εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἄλλου νὰ ἰσῶνται πρὸς x.

ἐπεὶ οὖν Δ^{Y} α ⋔ M̊ ξ μείζων ἐστὶν ϛ ε, κοιναὶ προσκείσθωσαν M̊ ξ, ὥστε καὶ Δ^{Y} α μείζων ἐστὶν ϛ ε M̊ ξ. ὥστε καὶ Δ^{Y} α ⟨ἴσ.⟩ ϛ ε καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι M̊ ξ· ὥστε δεήσει τὸν ϛ μὴ εἶναι ἐλάσσονα M̊ ια.

πάλιν ἐπεὶ ἡ Δ^{Y} α ⋔ M̊ ξ ἐλάσσων ἐστὶν ϛ η, κοιναὶ προσκείσθωσαν M̊ ξ· ὥστε Δ^{Y} α ἴση ἐστὶν ϛ η καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάττονι M̊ ξ· ὅθεν δεῖ τὸν ϛ εὑρίσκεσθαι μὴ μείζονα M̊ ιβ· ἐδείχθη δὲ καὶ μὴ ἐλάττων M̊ ια· ὥστε δεήσει τὸν ϛ εὑρεῖν μὲν μείζονα M̊ ια, ἐλάσσονα δὲ M̊ ιβ.

ἐὰν δὲ ζητῶμεν Δ^{Y} α ⋔ M̊ ξ ἴσ. ⟨□φ⟩, πλάσσομεν τὴν τοῦ □^{ου} πλ. ἀπὸ ϛ α λείψαντος M̊ τινάς, καὶ γίνεται ὁ ϛ ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν γενομένου καὶ προσλαβόντος M̊ ξ καὶ παραβληθέντος παρὰ τὸν β$^{πλ.}$ αὐτοῦ· καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τινα ἀριθμόν, ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ □^{ος} προσλαβὼν M̊ ξ καὶ παραβληθεὶς παρὰ τὸν β$^{πλ.}$ αὐτοῦ, τὴν παραβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν M̊ ια, ἐλάσσονα δὲ M̊ ιβ.

[καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν ζητούμενον ϛ α, δεῖ Δ^{Y} α M̊ ξ μερίζοντα παρὰ ϛ β τὴν παραβολὴν ποιεῖν μείζονα μὲν M̊ ια, ἐλάσσονα δὲ M̊ ιβ] καὶ ἂν τάξωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν ϛ α, δεῖ οὖν Δ^{Y} α M̊ ξ μερίζοντα παρὰ ϛ β [παραβολὴν] ποιεῖν μείζονα μὲν M̊ ια, ὥστε Δ^{Y} α M̊ ξ μείζονες ὀφείλουσιν εἶναι ϛ κβ· ὥστε ϛ κβ ἴσοι εἰσὶν Δ^{Y} α καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάσσονι M̊ ξ· ὥστε ὁ ϛ οὐκ ὀφείλει εἶναι ἐλάσσων M̊ ιθ.

πάλιν δεῖ Δ^{Y} α M̊ ξ μερίζοντα παρὰ ϛ β [τὸν ϛ] εὑρεῖν ἐλάσσονα M̊ ιβ· ὥστε Δ^{Y} α M̊ ξ ἐλάσσους εἰσὶν ϛ κδ· ϛ ἄρα κδ ἴσοι εἰσὶν Δ^{Y} α καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι M̊ ξ· ὅθεν ὁ ϛ ὀφείλει ἐλάσσων εἶναι M̊ κα, ἀλλὰ καὶ μείζων M̊ ιθ. ἔστω M̊ κ.

ὥστε δεῖ Δ^{Y} α ⋔ M̊ ξ ἴσ. □φ ποιοῦντα, τάσσειν τὴν τοῦ □^{ου} πλ. ἀπὸ ϛ α ⋔ M̊ κ· ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ϛ M̊ ια L', ὁ □^{ος} ρλβ δ$^{×}$.

αἴρω M̊ ξ· λοιπαὶ M̊ οβ δ$^{×}$. δεῖ οὖν τὰς M̊ οβ δ$^{×}$ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τοῦ α^{ου} ε^{ον} μετὰ τοῦ β^{ου} ⟨η^{ου}⟩ ποιῇ M̊ ια δ$^{×}$. ἔστω τὸ τοῦ α^{ου}

Καὶ τοῦτο δὲ δὲν εἶναι πάντοτε δυνατόν, εἰ μὴ ἐὰν ὁ x εἶναι μεγαλύτερος μὲν τοῦ $\frac{x^2-60}{8}$, μικρότερος δὲ τοῦ $\frac{x^2-60}{5}$. Ἔστω $8x > x^2 - 60 > 5x$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν $x^2 - 60 > 5x$ ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη 60, ὁπότε $x^2 > 5x + 60$. Ὥστε καὶ $x^2 = 5x$ σὺν ἀριθμόν τινα μεγαλύτερον τοῦ 60· ὥστε θὰ εἶναι ἀνάγκη ὅπως ὁ x μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ 11.

Πάλιν, ἐπειδὴ $x^2 - 60 < 8x$, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη 60· ὥστε $x^2 < 8x + 60$ σὺν ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ 60· ὅθεν πρέπει ὁ x νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 12· ἐδείχθη δὲ καὶ μὴ μικρότερος τοῦ 11· ὥστε θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ $11 < x < 12$.

Ἐὰν δὲ ζητῶμεν $x^2 - 60 =$ τετράγωνος, λαμβάνομεν ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου, x μεῖον ἀριθμόν τινα, καὶ γίνεται ὁ x ἴσος πρὸς τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος σὺν 60, διαιρεθέντος τοῦ ἀθροίσματος τούτου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ληφθέντος ἀριθμοῦ τινος· καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ σὺν 60, διαιρούμενον διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον μὲν τοῦ 11, μικρότερον δὲ τοῦ 12.

[Καὶ ἐὰν θέσωμεν τὸν ζητούμενον x, πρέπει τὸ $x^2 + 60$ διαιρούμενον διὰ 2x νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον μὲν τοῦ 11 μικρότερον δὲ τοῦ 12] καὶ ἐὰν θέσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν x, πρέπει λοιπὸν $x^2 + 60$, διαιρούμενον διὰ 2x νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον μὲν τοῦ 11, ὥστε $x^2 + 60 > 22x$· ὥστε $22x = x^2 +$ ἀριθμόν τινα μικρότερον τοῦ 60· ὥστε ὁ x ὀφείλει νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ 19.

Πάλιν πρέπει τὸ ἄθροισμα $x^2 + 60$ διαιρούμενον διὰ 2x νὰ δίδῃ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ 12· ὥστε $x^2 + 60 < 24x$· εἶναι ἄρα $24x = x^2 +$ ἀριθμόν τινα μεγαλύτερον τοῦ 60· ὅθεν ὁ x ὀφείλει νὰ εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 21, μεγαλύτερος δὲ τοῦ 19· ἔστω ὅτι εἶναι 20.

Ὥστε πρέπει $x^2 - 60 =$ τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα νὰ τεθῇ ἴση πρὸς $x - 20$. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ $x = 11\frac{1}{2}$, ὁ δὲ $x^2 = 132\frac{1}{4}$.

Ἀφαιρῶ 60· μένει ὑπόλοιπον $72\frac{1}{4}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλύσωμεν τὸν $72\frac{1}{4}$ εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ ἓν πέμπτον τοῦ πρώτου σὺν τὸ ἓν ὄγδοον τοῦ δευτέρου νὰ δίδῃ $11\frac{1}{2}$. (Εἰς τὸ κείμενον ἐκ παραδρομῆς εἶναι $11\frac{1}{4}$).

Ἔστω τὸ πέμπτον τοῦ πρώτου ἴσον x· τὸ ὄγδοον ἄρα τοῦ δευτέρου θὰ εον μέρος ς α̅· τὸ ἄρα τοῦ βου ηον ἔσται M̊ ι̅α̅ L′ ⋔ ς α̅· αὐτοὶ ἄρα ἔσονται δ μὲν ς ε̅, ὁ δὲ M̊ ϙ̅β̅ ⋔ ς η̅· ταῦτα ἴσα ⟨M̊⟩ ο̅β̅ $δ^{\times}$. ἔσται ἄρα ⟨ὁ ς⟩ M̊ $\overset{ιβ}{\overline{οθ}}$.

τὸ ἄρα πλῆθος τῶν πενταδράχμων ἔσται χοέων ϛ̅ κοτυλῶν ζ̅, τὸ δὲ τῶν ὀκταδράχμων χοέων δ̅ κοτυλῶν ι̅α̅. τὰ λοιπὰ δῆλα.

εἶναι $11 \frac{1}{2} - x$· θὰ εἶναι ἄρα ὁ μὲν εἷς $5x$, ὁ δὲ ἄλλος $92 - 8x$· τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι ἴσον πρὸς $72 \frac{1}{4}$. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ $x = \frac{79}{12}$.

Τὸ πλῆθος ἄρα τῶν πενταδράχμων χοέων θὰ εἶναι 6 σὺν 7 κοτύλαι (3,28 λίτρα = 1 χοεὺς = 12 κοτύλαι), τῶν δὲ ὀκταδράχμων χοέων θὰ εἶναι 4 σὺν 11 κοτύλαι. Τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ϛ′

α.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ὀρθῶν ποιῇ κύβον.

Ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον πεπλασμένον ἀπὸ δύο ἀριθμῶν, καὶ ἔστω ὁ μὲν $ϛ\,\overline{α}$, *ὁ δὲ* $\mathring{M}\,\overline{γ}$. *γίνεται οὖν ἡ μὲν ὑποτείνουσα* $Δ^{Υ}\,\overline{α}\,\mathring{M}\,\overline{θ}$, *ἡ δὲ κάθετος* $ϛ\,\overline{ϛ}$, *ἡ δὲ βάσις* $Δ^{Υ}\,\overline{α} ⋔ \mathring{M}\,\overline{θ}$.

καὶ ἡ ὑποτείνουσα, ἐὰν λείψῃ τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν, τουτέστιν $Δ^{Υ}\,\overline{α} ⋔ \mathring{M}\,\overline{θ}$, *γίνεται* $\mathring{M}\,\overline{ιη}$, *καὶ οὐκ ἔστι κύβος.*

πόθεν ὁ $\overline{ιη}$; *ὁ ἀπὸ τοῦ* $\overline{γ}$ *ἐστὶν* □ος, *δὶς γενόμενος. δεῖ οὖν εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὅπως ὁ ἀπὸ τούτου* □ος *δὶς γενόμενος ποιῇ κύβον. ἔστω ὁ ζητούμενος* $ϛ\,\overline{α}$· *καὶ γίνεται* $Δ^{Υ}\,\overline{β}$ *ἴσ. κύβῳ. ἔστω ἴσ.* $K^{Υ}\,\overline{α}$, *καὶ γίνεται ὁ* $ϛ\,\mathring{M}\,\overline{β}$.

πάλιν πλάσσω τὸ τρίγωνον ἀπὸ $ϛ\,\overline{α}$ *καὶ οὐκέτι* $\mathring{M}\,\overline{γ}$, *ἀλλὰ* $\mathring{M}\,\overline{β}$. *καὶ γίνεται ἡ ⟨μὲν⟩ ὑποτείνουσα* $Δ^{Υ}\,\overline{α}\,\mathring{M}\,\overline{δ}$, *ἡ δὲ κάθετος* $ϛ\,\overline{δ}$, *ἡ δὲ βάσις* $Δ^{Υ}\,\overline{α} ⋔ \mathring{M}\,\overline{δ}$. *καὶ μένει ἡ ὑποτείνουσα λείψασα τὸν ἐν τῇ βάσει, τουτέστιν* $Δ^{Υ}\,\overline{α} ⋔ \mathring{M}\,\overline{δ}$, *ποιοῦσα κύβον.*

λοιπὸν καὶ τὴν οὖσαν $ϛ\,\overline{δ}$· *γίνεται δὲ* $Δ^{Υ}\,\overline{α}\,\mathring{M}\,\overline{δ} ⋔ ϛ\,\overline{δ}$ *ἴσ. κύβῳ. καὶ ἔστιν τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς* $ϛ\,\overline{α} ⋔ \mathring{M}\,\overline{β}$. *ἐὰν οὖν* $ϛ\,\overline{α} ⋔ \mathring{M}\,\overline{β}$ *ἰσώσωμεν κύβῳ, λύσομεν τὸ ζητούμενον. ἔστω ἴσ.* $\mathring{M}\,\overline{η}$ *καὶ γίνεται ὁ* $ϛ\,\mathring{M}\,\overline{ι}$.

ὥστε πλασθήσεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\mathring{M}\,\overline{ι}$ *καὶ* $\mathring{M}\,⟨\overline{β}⟩$, *καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα* $\mathring{M}\,\overline{ρδ}$, *ἡ δὲ κάθετος* $\mathring{M}\,\overline{μ}$, *ἡ δὲ βάσις* $\mathring{M}\,\overline{ϙϛ}$, *καὶ μένει.*

β.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ὀρθῶν ποιῇ κύβον.

Ἐὰν πλάσσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ὡς καὶ πρὸ τούτου,

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ VI

1.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ ὑποτείνουσα μεῖον ἑκατέραν τῶν καθέτων σχηματίζῃ κύβον.

Ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον κατεσκευασμένον ἐκ δύο ἀριθμῶν, καὶ ἔστω ὁ μὲν εἷς x, ὁ δὲ ἄλλος 3. Γίνεται λοιπὸν ἡ μὲν ὑποτείνουσα $x^2 + 9$, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων 6x, ἡ δὲ βάσις $x^2 - 9$.

Καὶ ἡ ὑποτείνουσα, μεῖον τὴν μίαν τῶν καθέτων, τουτέστιν $x^2 - 9$ γίνεται 18, καὶ δὲν εἶναι κύβος.

Πόθεν προέρχεται ὁ 18 ; οὗτος εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ 3. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ κύβον. Ἔστω ὁ ζητούμενος x καὶ γίνεται $2x^2$ = κύβος. Ἔστω $= x^3$, ἐξ ἧς $x = 2$.

Πάλιν κατασκευάζω τὸ τρίγωνον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς x καὶ ὄχι 3, ἀλλὰ 2. Καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα $x^2 + 4$, ἡ δὲ μία κάθετος 4x, ἡ δὲ βάσις $x^2 - 4$. Καὶ μένει, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα μεῖον τὴν βάσιν, τουτέστιν $x^2 - 4$ νὰ δίδῃ κύβον.

Ὑπολείπεται νὰ γίνηται τὸ αὐτὸ καὶ μὲ τὸ 4x· γίνεται δὲ $x^2 + 4 - 4x$ = κύβος. Καὶ οὗτος εἶναι τετράγωνος, τετραγωνικῆς ῥίζης $x - 2$. Ἐὰν λοιπὸν $x - 2$ ἐξισώσωμεν πρὸς κύβον, θὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα. Ἔστω ἴσον πρὸς 8, ὁπότε $x = 10$.

Ὥστε θὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 2, καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα 104, ἡ δὲ κάθετος 40, ἡ δὲ βάσις 96, καὶ ἐπαληθεύεται ἡ πρότασις.

2.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ ὑποτείνουσα σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων σχηματίζῃ κύβον.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον ἐκ δύο ἀριθμῶν, ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, καταλήγομεν νὰ ζητῶμεν τετράγωνόν τινα, ὥστε τὸ διπλάσιον γίνεται ζητεῖν τετράγωνόν τινα ὅπως ὁ διπλάσιος αὐτοῦ ⟨ᾖ⟩ κύβος, καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ πλευρᾶς M̊ β̅.

Πλάσσομεν οὖν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ϛα̅ [καὶ] M̊ β̅, καὶ γίνεται ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα Δ^{Y} α̅ M̊ δ̅, μία δὲ τῶν ὀρθῶν ϛ δ̅, ἡ δὲ λοιπὴ M̊ δ̅ ⟨ ⋔ Δ^{Y} α̅ ⟩·

λοιπὸν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ προσλαβόντα τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν ὀρθῶν ποιεῖν κύβον, ἀλλὰ διελθόντα εἰς τὴν ὑπόστασιν εὑρεῖν τὴν Δ^{Y} ἐλάσσονα M̊δ̅· ὁ ἄρα ⟨ϛ⟩ ἐλάσσων ἐστὶ M̊β̅, καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον ἐλάσσονα ⟨μὲν⟩ M̊ δ̅, μείζονα δὲ M̊ β̅, καὶ ἔστιν η^ων κ̅ζ̅· καὶ ἔστω ϛ α̅ M̊ β̅ ἴσ. η^οις κ̅ζ̅, καὶ γίνεται ὁ ϛ ι̅α̅.

ἔσται ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα $\frac{\xi\delta}{\overline{\tau o \zeta}}$, τῶν ⟨δὲ⟩ ὀρθῶν ἡ μὲν $\frac{\xi\delta}{\overline{\rho\lambda\varepsilon}}$, ἡ δὲ M̊ε̅ L′. καὶ εἰς ξδ^α· ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον τ̅ο̅ζ̅ καὶ ρ̅λ̅ε̅ καὶ τ̅ν̅β̅, καὶ μένει.

γ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς M̊ε̅

καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ϛ γ̅, ϛ δ̅, ϛ ε̅, καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ M̊ ε̅, Δ^{Y} ϛ̅ M̊ ε̅ ἴσ. □^φ.

ἔστω ἴσ. Δ^{Y} θ̅· καὶ ἀπὸ τῶν ὁμοίων τὰ ὅμοια· λοιπαὶ Δ^{Y} γ̅ ἴσ. M̊ε̅. καὶ δεῖ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν □^ος ἀριθμὸς πρὸς □^ον ἀριθμόν. [ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος·] καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ □^ον ἀριθμὸν ὅπως ὁ □^ος λείψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ τριγώνου ποιῇ ε^ον τετραγώνου, ἐπειδήπερ ὁ δοθεὶς M̊ε̅ ἐστίν.

πεπλάσθω ⟨τὸ τρίγωνον ἀπὸ⟩ ϛα̅ ⟨καὶ ϛ^× α̅⟩, καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ Δ^{Y} α̅ ⟨ ⋔ $\Delta^{Y\times}$ α̅⟩· ἔστω ἡ τοῦ □^ου πλευρὰ ϛ α̅ καὶ ϛ^× τοσούτων ὅσων ἐστὶν ὁ διπλάσιος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστιν ϛ^× ι̅. καὶ γίνεται ὁ □^ος Δ^{Y}α̅ $\Delta^{Y\times}$ ρ̅ M̊κ̅. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἄρωμεν τὸ ἐμβαδόν, τουτέστιν Δ^{Y} α̅ ⟨ ⋔ $\Delta^{Y\times}$ α̅⟩, λοιπὸν γίνεται $\Delta^{Y\times}$ ρ̅α̅ M̊κ̅· ταῦτα ε^κις. γίνεται $\Delta^{Y\times}$ φ̅ε̅ M̊ρ̅ ἴσος ὁ □^ος. καὶ αὐτοῦ νὰ εἶναι κύβος, καὶ εἶναι τοῦτο, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 2.

Σχηματίζομεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x καὶ 2 καὶ γίνεται ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα $x^2 + 4$, μία δὲ τῶν καθέτων $4x$, ἡ δὲ ἄλλη $4 - x^2$.

Ὑπολείπεται, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα σὺν τὴν ἄλλην κάθετον νὰ σχηματίζῃ κύβον, καὶ κατὰ τὴν κατασκευὴν νὰ εὕρωμεν $x^2 < 4$· εἶναι ἄρα ὁ $x < 2$, καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν κύβον μικρότερον μὲν τοῦ 4, μεγαλύτερον δὲ τοῦ 2, καὶ εἶναι οὗτος ὁ $\frac{27}{8}$· καὶ ἔστω $x + 2 = \frac{27}{8}$, ἐξ ἧς $x = \frac{11}{8}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα $\frac{377}{64}$, ἐκ δὲ τῶν καθέτων ἡ μὲν εἶναι $\frac{335}{64}$, ἡ δὲ $5\frac{1}{2}$. Καὶ πολλαπλασιάζομεν ὅλα ἐπὶ 64· θὰ εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον 377, 135, 352, καὶ ἐπαληθεύεται ἡ πρότασις.

3.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 5.

Καὶ ἂς ληφθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον δεδομένον πλευρῶν $3x$, $4x$, $5x$, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν σὺν 5 εἶναι $6x^2 + 5 =$ τετράγωνος.

Ἔστω $= 9x^2$· καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὰ ἴσα λαμβάνομεν $3x^2 = 5$. Καὶ πρέπει (διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις), αἱ πλευραὶ νὰ ἔχωσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. [ὀφείλουσι καὶ οἱ συντελεσταὶ (δηλ. $5:3$) νὰ εἶναι τετράγωνος]· καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἀριθμὸν τετράγωνον, ὥστε ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς μεῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου νὰ δίδῃ ἓν πέμπτον τετραγώνου, ἐπειδὴ βεβαίως ὁ δοθεὶς εἶναι 5.

Ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν x καὶ $\frac{1}{x}$, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν γίνεται $x^2 - \frac{1}{x^2}$· ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ $x +$ τόσα μέρη τοῦ x, ὅσα εἶναι ὁ διπλάσιος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστιν $\frac{10}{x}$. Καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος $= x^2 + \frac{100}{x^2} + 20$. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδόν, τουτέστιν $x^2 - \frac{1}{x^2}$ ἀπομένει $\frac{101}{x^2} + 20$· πολλαπλασιάζω πάντα ἐπὶ 5· γίνονται $\frac{505}{x^2} + 100 =$ τετράγωνος. Πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ *πάντα ἐπὶ ΔΥ ᾱ· γίνονται ΔΥ ρ̄ Μ̊ φε̄ ἴσ. ⟨□⟩· ἔστω ἴσ. τῷ ἀπὸ πλ. ϛ ῑ Μ̊ ε̄· ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ϛ εων κδ̄.*

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\overset{\varepsilon}{\overline{\kappa\delta}}$ *καὶ* $\overset{\kappa\delta}{\overline{\varepsilon}}$*, ἡ δὲ τοῦ □ου πλ.* $\overset{\xi}{\overline{\upsilon\iota\gamma}}$*· ἐὰν οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ϛ, καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μετὰ Μ̊ ε̄ ποιῶμεν ἴσον ΔΥ* $\overset{\gamma\chi}{\overline{\iota\zeta\,.\,\varphi\xi\theta}}$*, ἔσται ἡμῖν τὰ λοιπὰ δῆλα.*

δ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν δοθέντα [ἀριθμὸν] ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ς̄.

καὶ τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει, καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ΔΥ ς̄ ⋔ Μ̊ ς̄ ἴσ. □φ. ἔστω ἴσ. ΔΥ δ̄, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ □ον ἀριθμὸν ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἀρθῇ □ος, καὶ τὰ λοιπὰ ςκις γενόμενα ποιῇ □ον. πεπλάσθω πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ ϛ ᾱ καὶ ϛˣ ᾱ, ἡ δὲ τοῦ □ου πλ. ϛ ᾱ ⟨ ⋔ ϛˣ τοσούτων ὅσων⟩ καὶ ἔσται τὸ Lʹ τοῦ πλήθους τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστιν ϛˣ γ̄.

Μ̊ ς̄ ⋔ ΔΥˣ ῑ [ἴσ. □φ], καὶ ςκις· γίνεται ΔΥ λ̄ς̄ ⋔ Μ̊ ξ̄ ἴσ. □φ. τῷ ἀπὸ πλ. ϛ ς̄ ⋔ Μ̊ β̄, ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ϛ γων η̄.

πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\overset{\gamma}{\overline{\eta}}$ *καὶ* $\overset{\eta}{\overline{\gamma}}$*, ἡ δὲ τοῦ □ου ⟨πλ.⟩* $\overset{\kappa\delta}{\overline{\lambda\zeta}}$*. καὶ εὑρὼν τὸ τρίγωνον τάσσω ἐν ϛ, καὶ ἀκολουθήσας τῇ προτάσει, εὑρήσω τὸν ϛ ῥητόν, καὶ μένει.*

μέλη ἐπὶ x^2· ὅτε ἔχω $100x^2 + 505 =$ τετράγωνος· ἔστω τετραγωνικῆς ρίζης $10x + 5$· ὅθεν εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{24}{5}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Κατασκευάζεται ἄρα τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς $\frac{24}{5}$ καὶ $\frac{5}{24}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τετραγώνου εἶναι $\frac{413}{60}$. Ἐὰν λοιπὸν ἐκφράσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον συναρτήσει τοῦ x καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ 5, θὰ ἔχωμεν $\frac{170569}{3600}x^2$, καὶ τὰ λοιπὰ θὰ εἶναι φανερά.

4.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 6.

Καὶ ἂς θεωρηθῇ τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος (ἤτοι πλευρῶν $3x$, $4x$, $5x$), καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν νὰ εἶναι $6x^2 - 6 =$ τετράγωνος. ἔστω $= 4x^2$, ὁπότε καὶ πάλιν ἀνάγεται τὸ πρόβλημα νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὥστε νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ὁ τετράγωνος καὶ ἡ διαφορὰ λαμβανομένη ἑξάκις νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἂς κατασκευασθῇ πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ x καὶ $\frac{1}{x}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τετραγώνου ἔστω $x - \frac{1}{x}$ καὶ τὸ κλάσμα τοῦ x θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστιν $\frac{3}{x}$.

Τότε εἶναι $6 - \frac{10}{x^2} = \frac{1}{6}$ τοῦ τετραγώνου, καὶ πολλαπλασιάζω ἐπὶ $6x^2$, ὁπότε λαμβάνω $36x^2 - 60 =$ τετράγωνος· ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τούτου ἔστω $6x - 2$, ὁπότε εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{8}{3}$.

Σχηματίζεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν $\frac{8}{3}$ καὶ $\frac{3}{8}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τετραγώνου εἶναι $\frac{37}{24}$. Καὶ ἀφοῦ ηὗρα τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἐκφράζω ταύτας συναρτήσει τοῦ x καὶ ἀκολουθῶν τὰ τῆς προτάσεως, θὰ εὕρω τὸν x ῥητόν, καὶ ἐπαληθεύεται τὸ πρόβλημα.

ε.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ι̅.

καὶ πάλιν τετάχθω τὸ τρίγωνον ς γ̅, ς δ̅, ς ε̅· γίνεται Μ̊ ι̅ ⋔ Δ^Υ ϛ̅ ἴσαι □^φ. καὶ ἐὰν ποιῶμεν ἴσ. Δ^Υ τετραγωνικαῖς, ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ □^ον ἀριθμόν, ὅπως ὁ □^ος προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ ι^ον □^ον.

πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς α̅ καὶ ς^× α̅, ἡ δὲ τοῦ □^ου πλ., ς^× α̅ καὶ ς ε̅, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τοῦ ⟨□^ου⟩, Δ^Υ κ̅ϛ̅ Μ̊ ι̅· ταῦτα ι^κις. γίνεται Δ^Υ σ̅ξ̅ Μ̊ ρ̅ ἴσ. □^φ. καὶ τὰ δ^α. γίνονται Δ^Υ ξ̅ε̅ Μ̊ κ̅ε̅ ἴσ. □^φ· τῷ ἀπὸ πλ. Μ̊ ε̅ ς η̅, ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς Μ̊ π̅.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις· καὶ ὁμοίως τοῖς πρὸ τούτου εὑρήσομεν.

ϛ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ προσλαβὼν τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ζ̅.

Τετάχθω πάλιν τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ς γ̅, ς δ̅, ς ε̅· καὶ γίνονται Δ^Υ ϛ̅ ς γ̅ ἴσ. Μ̊ ζ̅. καὶ δεῖ τῶν ς τῷ Lʹ ἐφ᾽ ἑαυτὸ προσθεῖναι τὰς Δ^Υ ⟨ἐπὶ τὰς Μ̊⟩, καὶ ποιεῖν □^ον· οὐ ποιεῖ δέ· ὥστε δεήσει εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ Lʹ μιᾶς τῶν ὀρθῶν προσλαβὼν τὸν ζ^πλ. τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ □^ον.

ἔστω ὁ ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν ς α̅, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ Μ̊ α̅· καὶ γίνονται ς γ̅ Lʹ Μ̊ δ^×· καὶ πάντα δ^κις· γίνονται ς ι̅δ̅ ⟨Μ̊ α̅⟩ ἴσ. □^φ.

καὶ ἵνα καὶ τὸ ὀρθογώνιον ῥητὸν κατασκευάσωμεν, δεῖ καὶ Δ^Υ α̅ μετὰ Μ̊ α̅ εἶναι □^ον.

ἡ ὑπεροχὴ γίνεται Δ^Υ α̅ ⋔ ς ι̅δ̅· ἡ μέτρησις· ς α̅ κατὰ ς α̅ ⋔ Μ̊ ι̅δ̅· τῆς

5.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 10.

Καὶ πάλιν ἂς ληφθῇ τὸ τρίγωνον πλευρῶν 3x, 4x, 5x· ὁπότε ἔχομεν $10 - 6x^2 =$ τετράγωνος. Καὶ ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ τετραγώνου εἶναι τετράγωνος, ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὥστε ὁ τετράγωνος σὺν τὸ ἐμβαδὸν νὰ σχηματίζῃ ἓν δέκατον τετραγώνου.

Ἂς σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ἀπὸ x καὶ $\frac{1}{x}$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου ἔστω $\frac{1}{x} + 5x$, ὁπότε τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου γίνεται $26x^2 + 10$. Ταῦτα ἐπὶ δέκα· γίνονται $260x^2 + 100 =$ τετράγωνος· καὶ τὸ τέταρτον τούτου· ὁπότε ἔχομεν $65x^2 + 25 =$ τετράγωνος. ἔστω τετραγωνικῆς ῥίζης $5 + 8x$, ὁπότε εὑρίσκεται ὁ $x = 80$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα· καὶ θὰ εὕρωμεν τὸ τρίγωνον ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν.

6.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν σὺν τὴν μίαν κάθετον σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 7.

Ἂς ληφθῇ πάλιν τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος (δηλ. ὀρθογώνιον), πλευρῶν 3x, 4x, 5x· ὁπότε ἔχομεν $6x^2 + 3x = 7$. Καὶ πρέπει τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x σὺν τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 σὺν 7 νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον· ἀλλὰ δὲν σχηματίζει· ὥστε θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ ἥμισυ μιᾶς τῶν καθέτων σὺν τὸ ἕβδομον τοῦ ἐμβαδοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ἡ μία τῶν καθέτων x, ἡ δὲ ἄλλη 1· ὁπότε ἔχομεν $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$· καὶ ταῦτα τετράκις· γίνονται $14x + 1 =$ τετράγωνος.

Καὶ διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ῥητὸν πρέπει $x^2 + 1$ νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων τούτων γίνεται $x^2 - 14x$· ἀναλύομεν τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων· ὁπότε ἔχομεν $x\ (x - 14)$· ἡ διαφορὰ τοῦ ὑπεροχῆς τὸ L′ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται Μ̊ μθ ἴσαι τῷ ἐλάσσονι, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{\zeta}{\kappa\delta}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. τάσσω οὖν μίαν τῶν ὀρθῶν τοῦ τριγώνου $\frac{\zeta}{\kappa\delta}$, τὴν δὲ ἑτέραν Μ̊ α. καὶ πάντα $\zeta^{\kappa\iota\varsigma}$. γίνεται ἡ μὲν κδ, ἡ δὲ ζ, ἡ δὲ ὑποτείνουσα κε. [καὶ] γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ $\beta^{\alpha\varsigma}$ τῶν ὀρθῶν Δ^{Y} πδ ϛ ζ. ταῦτα ἴσα Μ̊ ζ. ὅθεν ὁ ϛ εὑρίσκεται ⟨ $\delta^{\times}$· ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον ⟩ Μ̊ ϛ, $\delta^{\omega\nu}$ ζ, $\delta^{\omega\nu}$ κε, καὶ μένει.

ζ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν ποιῇ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ζ.

Καὶ πάλιν, ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως μιᾶς ὀρθῆς τὸ L′ ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον καὶ προσλαβὸν τὸν $\zeta^{\pi\lambda}$. τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ $\square^{o\nu}$. καὶ εὕρηται ὃν ζ, κδ, κε.

τάσσω οὖν ἐν $ϛ^{oῖς}$, καὶ τὸ ἐμβαδόν, λεῖψαν τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν, γί. Δ^{Y} πδ ⋔ ϛ ζ· ταῦτα ἴσα Μ̊ ζ· καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\gamma^{\times}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

η.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέρῳ τῶν ὀρθῶν, ποιῇ δοθέντα.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ϛ.

Καὶ πάλιν τετάχθω δεδομένον τῷ εἴδει, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως συναμφοτέρου τῶν ὀρθῶν τὸ L′ ἐφ' ἑαυτὸ μετὰ τοῦ $ϛ^{\pi\lambda}$. τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ $\square^{o\nu}$.

Καὶ πάλιν ὑποκείσθω ⟨μία⟩ τῶν ὀρθῶν ϛ α, ἡ δὲ ἑτέρα Μ̊ α, καὶ γίνεται ἡμίσεος τῶν παραγόντων τούτων ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον δίδει 49, τὸ ὁποῖον ἐξισοῦμεν πρὸς τὸν μικρότερον ($14x + 1$), ὁπότε ὁ $x = \frac{24}{7}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θέτω λοιπὸν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου $\frac{24}{7}$, τὴν δὲ ἄλλην 1. Καὶ πολλαπλασιάζω ὅλα ἐπὶ 7· ὁπότε λαμβάνω τὴν μὲν μίαν κάθετον 24, τὴν δὲ ἄλλην 7, ἡ δὲ ὑποτείνουσα εἶναι 25. Καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐμβαδοῦ μετὰ τῆς δευτέρας τῶν καθέτων $84x^2 + 7x$· ταῦτα ἴσα πρὸς 7· ὅθεν εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{1}{4}$· θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου 6, $\frac{7}{4}$, $\frac{25}{4}$, καὶ ἐπαληθεύεται ἡ πρότασις.

7.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὴν μίαν τῶν καθέτων σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 7.

Καὶ πάλιν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς μιᾶς καθέτου σὺν τὸ ἑπταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Καὶ εὑρέθη ὅτι εἶναι 7, 24, 25.

Θέτω λοιπὸν τὰς πλευρὰς συναρτήσει τοῦ x, ὡς καὶ τὸ ἐμβαδὸν μεῖον μίαν τῶν καθέτων, ὁπότε λαμβάνω $84x^2 - 7x$· ταῦτα ἐξισώνω πρὸς 7· καὶ λαμβάνεται ὁ $x = \frac{1}{3}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

8.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 6.

Καὶ ἂς ληφθῇ πάλιν τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος, ὁπότε ἀνάγεται καὶ πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν καθέτων πλευρῶν σὺν τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ πάλιν ἂς τεθῇ μία τῶν καθέτων πλευρῶν x, ἡ δὲ ἄλλη 1, καὶ φθάζητεῖν $Δ^{Y}$ $δ^{x}$ ς γ̅ L′ Μ̊ $δ^{x}$ ἴσ. $□^{φ}$. καὶ πάντα $δ^{κις}$. γίνεται $Δ^{Y}$ α̅ ς ι̅δ̅ Μ̊ α̅ ἴσ. $□^{φ}$, καὶ $Δ^{Y}$ α̅ Μ̊ α̅ ἴσ. ⟨$□^{φ}$⟩.

ἡ ὑπεροχὴ ς ι̅δ̅· ἡ μέτρησις· ς β̅ κατὰ Μ̊ ζ̅· τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ L′ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται $Δ^{Y}$ α̅ Μ̊ ι̅β̅ $δ^{x}$ ⋔ ς ζ̅ ἴσ. $Δ^{Y}$ α̅ Μ̊ α̅. καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ $\overset{κη}{\overline{με}}$.

ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον Μ̊ $\overset{κη}{\overline{με}}$, Μ̊ α̅, Μ̊ $\overset{κη}{\overline{νγ}}$· καὶ πάντα $\overline{κη}^{κις}$· γίνεται ἄρα τὸ τρίγωνον ς μ̅ε̅, ς κ̅η̅, ς ν̅γ̅, καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν μετὰ συναμφοτέρου τῶν ὀρθῶν $Δ^{Y}$ χ̅λ̅ ς ο̅γ̅ ἴσ. Μ̊ ϛ̅, καὶ γίνεται ὁ ς ῥητός.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

θ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, λείψας τὸν ⟨ἐν⟩ συναμφοτέρῳ τῶν ὀρθῶν, ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ ϛ̅.

Καὶ πάλιν, ἐὰν τάξωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει, γίνεται ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως συναμφοτέρου τῶν ὀρθῶν τὸ L′ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὸν τὸν $ς^{πλ}$. τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ $□^{ον}$. τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ ἔστιν κ̅η̅, μ̅ε̅, ν̅γ̅.

τάσσω οὖν αὐτὰ ἐν ς, καὶ πάλιν γίνεται $Δ^{Y}$ χ̅λ̅ ⋔ ς ο̅γ̅ ἴσ. Μ̊ ϛ̅. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς Μ̊ $\overset{λε}{\overline{ϛ}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

ι.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέρῳ τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ δ̅.

Καὶ πάλιν τάξομεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει· ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως συναμφοτέρου ⟨τῆς⟩ τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ⟨μετὰ τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ $δ^{κις}$ γενομένου⟩ ποιῇ τετράγωνον.

νομεν εἰς τὸ νὰ ζητῶμεν ὅπως $\frac{1}{4}x^2 + 3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ = τετράγωνος. Πολλαπλασιάζομεν ὅλα ἐπὶ 4. Ὁπότε λαμβάνομεν $x^2 + 14x + 1$ = τετράγωνος, καὶ πρέπει ἐπίσης νὰ εἶναι $x^2 + 1$ = τετράγωνος.

Ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων τούτων εἶναι $14x$· ἀναλύομεν τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων· εἰς τοὺς παράγοντας $2x$ καὶ 7· τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς τούτων εἶναι $x^2+12\frac{1}{4}-7x = x^2+1$. Καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{45}{28}$.

Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $\frac{45}{28}$, 1, $\frac{53}{28}$· πολλαπλασιάζομεν ὅλα ἐπὶ 28· γίνονται ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $45x$, $28x$, $53x$ καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν $630x^2 + 73x = 6$, καὶ γίνεται ὁ x ῥητός.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

9.

Νὰ εὑρεθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 6.

Καὶ πάλιν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος, φθάνομεν εἰς τὸ νὰ ζητῶμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο καθέτων πλευρῶν σὺν τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Τοῦτο δὲ προαπεδείχθη καὶ εἶναι αἱ πλευραὶ 28, 45, 53.

Ἐκφράζω λοιπὸν ταύτας συναρτήσει τοῦ x, καὶ λαμβάνω πάλιν $630x^2 - 73x = 6$· ὅθεν εὑρίσκεται ὁ $x = \frac{6}{35}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

10.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 4.

Καὶ πάλιν ἂς θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος· ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος, τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν σὺν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ Μ̊ α̅ καὶ ϛ α̅ Μ̊ α̅, καὶ γίνεται συναμφοτέρου τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ⟩ ΔΥ Δ α̅ ΚΥ δ̅ ΔΥ ϛ̅ ϛ δ̅ Μ̊ α̅· ὁ δὲ δπλ. τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ΚΥ δ̅ ΔΥ ι̅β̅ ϛ η̅· ὥστε δεήσει ζητεῖν ΔΥ Δ α̅ ΚΥ η̅ ΔΥ ι̅η̅ ϛ ι̅β̅ Μ̊ α̅ ἴσ. □φ· τῷ ἀπὸ πλ. ϛ ϛ̅ Μ̊ α̅ ⋔ ΔΥ α̅ καὶ γίνεται ὁ ϛ, $\overset{\varepsilon}{\overline{\delta}}$ εων. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ⟨ Μ̊ α̅ καὶ⟩ $\overset{\varepsilon}{\overline{\theta}}$· καὶ ἅπαντα εκις· πλασθήσεται πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ θ̅ καὶ ε̅.

Καὶ λαβὼν τὰ ἐλάσσονα τῶν ὁμοίων, τάσσω αὐτὸ ἐν ϛ· γίνεται Ↄ κ̅η̅, Ↄ μ̅ε̅, Ↄ ν̅γ̅. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, ΔΥ χ̅λ̅ ϛ π̅α̅ ἴσ. Μ̊ δ̅· καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{\rho\varepsilon}{\overline{\delta}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

ια.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, λείψας τὸν ἐν συναμφοτέρῳ τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς Μ̊ δ̅.

Καὶ πάλιν τάξομεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει. ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ δκις γενόμενος προσλαβὼν συναμφοτέρου τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιῇ τετράγωνον, καὶ δειχθήσεται ὅτι ἔστιν κ̅η̅, μ̅ε̅, ν̅γ̅.

τάσσω αὐτὸ ἐν ϛ καὶ γίνονται ΔΥ χ̅λ̅ ⋔ ϛ π̅α̅ ἴσ. Μ̊ δ̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ ϛˣ.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ⟨ἡ ὑπεροχὴ τῶν ὀρθῶν ᾖ τετράγωνος⟩, καὶ ὁ ἐν τῇ μείζονι τῶν ὀρθῶν ᾖ τετράγωνος, ἔτι δὲ καὶ ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ ἐλάσσονος ὀρθῆς ποιῇ τετράγωνον.

Πεπλάσθω τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο καὶ ὑποκείσθω ἡ μείζων ὀρθὴ γενομένη ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν. δεῖ οὖν εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος, καὶ ἡ ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν τῆς ὑπεροχῆς

Ἂς σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ἀπὸ 1 καὶ $x + 1$, ὁπότε τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος, τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων γίνεται $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$· τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ γίνεται $4x^3 + 12x^2 + 8x$· ὥστε θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν, ὥστε $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 12x + 1 =$ τετράγωνος· ἔστω τετραγωνικῆς ῥίζης $6x + 1 - x^2$, ὁπότε ὁ $x = \frac{4}{5}$. Σχηματίζεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ 1 καὶ $\frac{9}{5}$· πολλαπλασιάζομεν ὅλα ἐπὶ 5· θὰ σχηματισθῇ πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ 9 καὶ 5.

Καὶ ἀφοῦ λάβω τοὺς μικροτέρους ἀριθμούς, ἐκφράζω αὐτὸ συναρτήσει τοῦ x· ὁπότε ἔχω 28x, 45x, 53x. Καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν σὺν τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων $630x^2 + 81x = 4$· ἐξ ἧς $x = \frac{4}{105}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

11.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν, δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς 4.

Καὶ πάλιν θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος. Ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος ἀθροίσματος τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, καὶ θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι 28, 45, 53.

Ἐκφράζω αὐτὸ συναρτήσει τοῦ x καὶ ἔχω $630x^2 - 81x = 4$. Ἐξ ἧς ὁ $x = \frac{1}{6}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι τετράγωνος, καὶ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος εἶναι τετράγωνος, προσέτι δὲ ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὴν μικροτέραν κάθετον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν καὶ ἂς ληφθῇ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος, καὶ ἡ διαφορά, καθ' ἣν διαφέρει τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν, νὰ σχηματίζῃ τετράτῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ποιῇ □^{ον}. τοῦτο δὲ ἐν πᾶσι δυσὶν ἀριθμοῖς, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ᾖ διπλασίων.

λοιπὸν ζητοῦμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μετὰ τῆς ἐλάσσονος τῶν ὀρθῶν ποιεῖν □^{ον}· γίνεται δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ϛ$^{πλ.}$ τῆς ἀπὸ τοῦ ⟨ἐλάσσονος⟩ ἀριθμοῦ δυναμοδυνάμεως· ὁ δ' ἐν τῇ τῶν ὀρθῶν ἐλάσσονι $\overline{γ}$ τῶν ἀπὸ ἐλάσσονος τετραγώνων· καὶ πάντα παρὰ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον· ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα ὅπως καὶ οἱ $\overline{ϛ}$ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι μετὰ Μ̊ $\overline{γ}$ ποιῶσι τετράγωνον.

ἔστι δὲ ἡ μονὰς μία καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί· ὥστε τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον ἔσται πεπλασμένον ἀπὸ Μ̊ $\overline{α}$ καὶ Μ̊ $\overline{β}$.

Ἕτερον εἰς τὸ αὐτὸ χρειῶδες.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ὧν τὸ σύνθεμα ποιεῖ τετράγωνον, εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι ὧν ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν δοθέντα ⟨καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον⟩ ποιεῖ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο ὅ τε $\overline{γ}$ καὶ ὁ $\overline{ϛ}$, καὶ δέον ἔστω προσευρεῖν □^{ον}, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν $\overline{γ}$ καὶ προσλαβὼν Μ̊ $\overline{ϛ}$ ποιεῖ □^{ον}.

Ἔστω ὁ ζητούμενος □^{ος}, $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$ ϛ $\overline{β}$ Μ̊ $\overline{α}$· καὶ γίνονται $Δ^{Υ}$ $\overline{γ}$ ϛ $\overline{ϛ}$ Μ̊ $\overline{θ}$ ἴσ. □ῳ, καὶ δυνατόν ἐστιν ἀπειραχῶς εὑρεῖν διὰ τὸ τὰς Μ̊ εἶναι τετραγωνικάς.

ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ πλ. Μ̊ $\overline{γ}$ ⋔ ϛ $\overline{γ}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\overline{δ}$· ὥστε ἄρα ἡ τοῦ □^{ου} πλ. Μ̊ $\overline{ε}$.

καὶ ἕτεροι ἄπειροι εὑρίσκονται.

ιβ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ὀρθῶν ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ϛ $\overline{ε}$, ϛ $\overline{ιβ}$, ϛ $\overline{ιγ}$· καὶ γίνεται $Δ^{Υ}$ $\overline{λ}$ ϛ $\overline{ιβ}$ ἴσ. □ῳ, [καὶ $Δ^{Υ}$ $\overline{λ}$ ϛ $\overline{ε}$ ἴσ. □ῳ]· καὶ ἔστω ἴσ. $Δ^{Υ}$ $\overline{λϛ}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ Μ̊ $\overline{β}$.

καὶ τοῦ ϛ ὄντος Μ̊ $\overline{β}$, δεήσει καὶ $Δ^{Υ}$ $\overline{λ}$ ϛ $\overline{ε}$ εἶναι □^{ον}· οὐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν □^{όν} τινα, ὃς λείψῃ τὸν $\overline{λ}$ καὶ παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ $\overline{ιβ}$, καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν $λ^{κις}$ καὶ προσλαβὼν τὸν ε$^{πλ.}$ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος ποιεῖν τετράγωνον $Δ^{Υ}$ $\overline{α}$· καὶ ⟨ἐὰν λείψῃ τὸν $\overline{λ}$ καὶ γωνον. Τοῦτο δὲ συμβαίνει πάντοτε μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, ὅταν ὁ μεγαλύτερος εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου.

Ζητοῦμεν κατόπιν ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου σὺν τὴν μικροτέραν κάθετον σχηματίζῃ τετράγωνον· εἶναι δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τὸ ἑξαπλάσιον τῆς τετάρτης δυνάμεως τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ· ἡ δὲ μικροτέρα κάθετος εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ· διαιροῦμεν ὅλα διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ· θὰ ζητήσωμεν ἄρα ἀριθμόν τινα (x), ὥστε καὶ $6x^2 + 3$ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Εἷς τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί· ὥστε τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἐσχηματισμένον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2.

Ἄλλο λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ αὐτό.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι τετράγωνος, εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι, τῶν ὁποίων ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα δοθέντα ἀριθμὸν καὶ προσλαβὼν τὸν ἄλλον σχηματίζει τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο, ὁ 3 καὶ ὁ 6, καὶ δέον ὅπως εὕρωμεν τετράγωνον, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν 3 καὶ προσλαβὼν τὸν 6 σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος $x^2 + 2x + 1$· ὁπότε πρέπει $3x^2 + 6x + 9 =$ τετράγωνος, καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ἀπείρους λύσεις τούτου, διότι αἱ μονάδες εἶναι τετράγωνος.

Ἔστω λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου $3 - 3x$, ὁπότε ὁ $x = 4$· εἶναι ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου 5.

Καὶ εὑρίσκονται ἄλλοι ἄπειροι.

12.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς ληφθῇ τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος 5x, 12x, 13x· καὶ γίνεται $30x^2 + 12x =$ τετράγωνος, καὶ $30x^2 + 5x =$ τετράγωνος· καὶ ἔστω $30x^2 + 12x = 36x^2$, ὁπότε $x = 2$.

Καὶ ἐν' ᾧ ὁ x εἶναι 2, θὰ εἶναι ἀνάγκη ὅπως καὶ $30x^2 + 5x =$ τετράγωνος· ἀλλὰ δὲν εἶναι. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τετράγωνόν τινα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου τοῦ 12 διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ τετραγώνου τούτου μεῖον 30, σὺν τὸ πενταπλάσιον τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος x^2· καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ 30 παρὰ τὸν λοιπὸν μερισθῇ ὁ ι̅β̅, γίνεται⟩ ὁ ἀριθμὸς Μ̊ ι̅β̅ ἐν μορίῳ ΔΥ α̅ ⋔ Μ̊ λ̅. ὁ τετράγωνος γίνεται ⟨Μ̊⟩ ρ̅μ̅δ̅ ἐν μορίῳ ΔΥΔ α̅ Μ̊ϡ̅ ⋔ ΔΥ ξ̅· ταῦτα λκις μετὰ τοῦ επλ. αὐτοῦ, γίνεται ΔΥ ξ̅ Μ̊ ͵β̅φ̅κ̅ ἐν μορίῳ ΔΥΔ α̅ Μ̊ϡ̅ ⋔ ΔΥ ξ̅.

καὶ ἔστι τὸ μόριον τετράγωνος, καὶ δεήσει ἄρα ΔΥ ξ̅ Μ̊ ͵β̅φ̅κ̅ εἶναι □ον. καὶ ἔστιν ὁ ς ἐκ τετραγώνου τινός· ⟨ζητητέον ἄρα τοῦτον⟩ ΔΥ ξκις γενόμενον καὶ προσλαβόντα Μ̊ ͵β̅φ̅κ̅ καὶ ποιοῦντα □ον· ἐὰν οὖν ἀλλασσομένῳ τῷ ὀρθογωνίῳ κατασκευάσωμεν τὸν ξ̅ μετὰ τοῦ ͵β̅φ̅κ̅ ποιεῖν □ον, λύσομεν τὸ ζητούμενον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ξ̅ ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ὁ δὲ ͵β̅φ̅κ̅ ἐκ τοῦ στερεοῦ περιεχομένου ἐκ τῆς μείζονος τῶν ὀρθῶν, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὀρθῶν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν στερεὸν τὸν περιεχόμενον ἔκ τε τῆς μείζονος τῶν ὀρθῶν καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὀρθῶν, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν μείζονα τῶν ὀρθῶν □ον, καὶ ἅπαντα παραβάλωμεν παρ' αὐτήν, ζητήσομεν τὸν ἐν τῇ ἐλάσσονι τῶν ὀρθῶν αὐτοῦ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὀρθῶν, ⟨ποιεῖν⟩ □ον·

ἀπάγεται εἰς τὸ δύο ἀριθμοὺς εὑρόντας ⟨τόν τε ὑπὸ⟩ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ὀρθῶν, ⟨καὶ τὸν ἐν τῇ ἐλάσσονι τῶν ὀρθῶν⟩ αὖθις ζητεῖν □όν τινα, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν δοθέντα, ⟨καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον⟩, ποιεῖ τετράγωνον.

ταῦτα δὲ λήμματα προεδείχθη καὶ ἔστιν τὸ ὀρθογώνιον γ̅, δ̅, ε̅. τάσσω αὐτὸ ἐν ς καὶ γίνεται ζητεῖν ΔΥ ϛ̅ ς δ̅ ἴσ. □φ, καὶ ΔΥ ϛ̅ ς γ̅ ἴσ. □φ. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπολύσωμεν τὴν μείζονα ἰσότητα, γίνεται ὁ ἀριθμὸς Μ̊ δ̅ ἐν μορίῳ ΔΥ α̅ ⋔ Μ̊ ϛ̅. ἡ ἄρα δύναμις γίνεται Μ̊ ι̅ϛ̅ ἐν μορίῳ ΔΥΔ α̅ Μ̊ λ̅ϛ̅ ⋔ ΔΥ ι̅β̅. ἔσται ἄρα δυνάμεις ϛ̅ μετὰ ἀριθμῶν γ̅, γί. ΔΥ ι̅β̅ Μ̊ κ̅δ̅ ἐν μορίῳ ΔΥΔ α̅ Μ̊ λ̅ϛ̅ ⋔ ΔΥ ι̅β̅· ⟨ὥστε Μ̊ ι̅β̅ καὶ⟩ Μ̊ κ̅δ̅ ὀφείλουσι τετράγωνον ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἐλάσσονα τὸν δοθέντα, καὶ προσλαβὼν τὸν μείζονα, ποιεῖ □ον. ἔστιν δὲ ὁ κ̅ε̅· ὥστε ἡ ΔΥ γίνεται Μ̊ κ̅ε̅, ὁ ἄρα ς ἔσται Μ̊ ε̅.

καὶ διὰ τῆς διαφορᾶς ταύτης διαιρεθῇ ὁ 12 λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{12}{x^2 - 30}$· τὸ τετράγωνον τούτου εἶναι $\frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2}$· ταῦτα ἀφοῦ τὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 30 καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ (τοῦ ἀνωτέρω κλάσματος), δίδουσι $\frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$.

Καὶ εἶναι ὁ παρονομαστὴς τετράγωνος, καὶ θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα ὁ $60x^2 + 2520$ νὰ εἶναι τετράγωνος. Καὶ εἶναι ὁ x ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τετραγώνου τινος· πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἄρα ὅπως οὗτος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 60 καὶ προσλαβὼν τὸν 2520 σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἐὰν λοιπὸν ἀφοῦ μεταβάλωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα $60 + 2520$, ὥστε νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, θὰ λύσωμεν τὸ ζητούμενον. Γίνεται δὲ ὁ μὲν 60 ἐκ τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν, ὁ δὲ 2520 ἐκ τοῦ γινομένου, τῆς μεγαλυτέρας τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων, ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν. Καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν σὺν τὸ γινόμενον τῆς μεγαλυτέρας καθέτου, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων, ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον. Καὶ ἐὰν λάβωμεν τὴν μεγαλυτέραν κάθετον τετράγωνον καὶ διαιρέσωμεν ὅλα δι' αὐτῆς, θὰ ζητήσωμεν κατόπιν ὅπως ἡ μικροτέρα κάθετος σὺν τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τό, ἀφοῦ εὕρομεν δύο ἀριθμούς, τὸν τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων, καὶ τὸν τῆς μικροτέρας καθέτου, νὰ ζητήσωμεν πάλιν νὰ εὕρωμεν τετράγωνόν τινα, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν δοθέντα καὶ προσλαβὼν τὸν ἄλλον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ταῦτα δὲ τὰ λήμματα προαπεδείχθησαν καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον 3, 4, 5. Ἐκφράζω αὐτὸ συναρτήσει τοῦ x καὶ καταλήγει εἰς τὸ νὰ ζητῶ ὅπως $6x^2 + 4x =$ τετράγωνος, καὶ $6x^2 + 3x =$ τετράγωνος. Καὶ πάλιν ἐὰν λύσωμεν τὴν μεγαλυτέραν ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν τὸ κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν 4 καὶ παρονομαστὴν $x^2 - 6$. Τὸ τετράγωνον ἄρα τούτου εἶναι ἀριθμητὴς μὲν ὁ 16 παρονομαστὴς δὲ ὁ $x^4 + 36 - 12x^2$. Θὰ εἶναι ἄρα $6x^2 + 3x = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2}$.

ὥστε $12x^2$ σὺν 24 ὀφείλουσι νὰ δίδωσι τετράγωνον, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν μικρότερον τῶν δοθέντων καὶ προσλαβὼν τὸν μεγαλύτερον νὰ δίδῃ τετράγωνον. Εἶναι δὲ ὁ 25· ὥστε $x^2 = 25$, ὁπότε ὁ $x = 5$.

ζητοῦντες οὖν Δ^{Υ} $\overline{\text{ϛ}}$ ς $\overline{\text{δ}}$ ἰσῶσαι, ποιοῦμεν ἴσ. Δ^{Υ} $\overline{\text{κε}}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\overline{\text{δ}}$ ιθων.

ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον $\overline{\text{ιβ}}$, $\overline{\text{ιϛ}}$, $\overline{\text{κ}}$, καὶ μένει.

ιγ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ὀρθῶν ποιῇ τετράγωνον.

Πάλιν ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου, ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον τῷ $\overline{\text{γ}}$, $\overline{\text{δ}}$, $\overline{\text{ε}}$. τετάχθω οὖν ἐν ς καὶ γίνεται ς $\overline{\text{γ}}$, ς $\overline{\text{δ}}$, ς $\overline{\text{ε}}$· καὶ Δ^{Υ} $\overline{\text{ϛ}}$ ⋔ ς $\overline{\text{δ}}$ ἴσ. □φ. Καὶ τάξομεν τὸν τετράγωνον ἐλάττονα Δ^{Υ} $\overline{\text{ϛ}}$· ἔρχεται ὁ ς Μ̊ $\overline{\text{δ}}$ ἐν μορίῳ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ⟨$\overline{\text{ϛ}}$⟩ τετραγώνου τινός.

καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον Δ^{Υ} $\overline{\text{α}}$, γίνεται, τηλικούτου ὄντος τοῦ ς^οῦ, Δ^{Υ} $\overline{\text{ϛ}}$ ⋔ ς $\overline{\text{γ}}$ ποιεῖν ἴσ. □φ· καὶ αἱ μὲν Δ^{Υ} $\overline{\text{ϛ}}$, Μ̊ $\overline{\text{ηϛ}}$ ἐν μορίῳ $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ $\overline{\text{α}}$ Μ̊ $\overline{\text{λϛ}}$ ⋔ Δ^{Υ} $\overline{\text{ιβ}}$· τῆς δὲ πλευρᾶς γπλ., Μ̊ $\overline{\text{ιβ}}$ ἐν μορίῳ Μ̊ $\overline{\text{ϛ}}$ ⋔ Δ^{Υ} $\overline{\text{α}}$, τουτέστιν Μ̊ $\overline{\text{οβ}}$ ⋔ Δ^{Υ} $\overline{\text{ιβ}}$ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ.

καὶ ἐὰν ταῦτα αἴρωμεν ἀπὸ Μ̊ $\overline{\text{ηϛ}}$ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, λοιπαί εἰσιν Δ^{Υ} $\overline{\text{ιβ}}$ ⟨Μ̊ $\overline{\text{κδ}}$⟩ ἐν μορίῳ $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ $\overline{\text{α}}$ Μ̊ $\overline{\text{λϛ}}$ ⋔ Δ^{Υ} $\overline{\text{ιβ}}$· καὶ ἔστιν τὸ μόριον □^ος, ὥστε καὶ Δ^{Υ} $\overline{\text{ιβ}}$ Μ̊ $\overline{\text{κδ}}$ ἴσ. □φ· καὶ ἔστιν ὁ ς Μ̊ $\overline{\text{α}}$.

τάσσω οὖν Δ^{Υ} $\overline{\text{ϛ}}$ ⋔ ς $\overline{\text{δ}}$ ἴσ. Δ^{Υ} $\overline{\text{α}}$, καὶ γίνεται ὁ ς εων $\overline{\text{δ}}$· ἔσονται οὖν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου πλευραὶ $\overline{\text{ιβ}}^{\text{ε}}$, $\overline{\text{ιϛ}}^{\text{ε}}$, Μ̊ $\overline{\text{δ}}$.

Καὶ ἐὰν μὴ θέλῃς χρήσασθαι τῇ Μ̊, τάξον τὸν ἐλάσσονα ς $\overline{\text{α}}$ Μ̊ $\overline{\text{α}}$· ὥστε αἱ Δ^{Υ} $\overline{\text{γ}}$ Μ̊ $\overline{\text{ϛ}}$ ἰσχύουσι Δ^{Υ} $\overline{\text{γ}}$ ς $\overline{\text{ϛ}}$ Μ̊ $\overline{\text{θ}}$· καὶ ταῦτα ἴσα □φ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς οὐ μείζων $\overline{\text{ιγ}}^{\text{θ}}$· ἦν δὲ ὁ ς, ς $\overline{\text{α}}$ Μ̊ $\overline{\text{α}}$· ἔσται ἄρα ὁ ς οὐ μείζων $\overline{\text{κβ}}^{\text{θ}}$, καὶ ὁ ἀπὸ τούτων □^ος ἀρθεὶς ἀπὸ Μ̊ $\overline{\text{ϛ}}$ ποιεῖ ς ῥητόν.

ιδ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, ποιῇ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ς $\overline{\text{γ}}$, ς $\overline{\text{δ}}$, ς $\overline{\text{ε}}$, καὶ πάλιν γίνεται

Ζητοῦντες λοιπὸν νὰ ἐξισώσωμεν τὸ $6x^2 + 4$ πρὸς τετράγωνον, θέτομεν τὸ τετράγωνον τοῦτο $= 25x^2$, ὁπότε $x = \frac{4}{19}$.

Θὰ εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον 12, 16, 20 καὶ ἐπαληθεύεται.

13.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον ἑκατέραν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἐὰν θεωρήσωμεν πάλιν τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος, καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς καὶ προηγουμένως, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5. Ἂς ἐκφρασθῶσι λοιπὸν αἱ πλευραὶ συναρτήσει τοῦ x, ὅτε εἶναι $3x$, $4x$, $5x$· καὶ $6x^2 - 4x =$ τετράγωνος.

Καὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁ τετράγωνος μικρότερος τοῦ $6x^2$· καταλήγει ὁ x νὰ εἶναι ἴσος πρὸς κλάσμα τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς εἶναι ὁ 4, παρονομαστὴς δὲ ἡ διαφορά, 6 μεῖον τετράγωνόν τι.

Καὶ ἐὰν λάβωμεν τὸν τετράγωνον ἴσον πρὸς x^2, γίνεται τοσούτου ὄντος τοῦ x, νὰ εἶναι $x^2 - 3x =$ τετράγωνος· καὶ εἶναι $6x^2 = \frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2}$· ὁ δὲ $3x = \frac{12}{6 - x^2}$, τουτέστιν $= \frac{72 - 12x^2}{x^4 + 36 - 12x^2}$.

Καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ταῦτα ἀπὸ τοῦ $\frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2}$ ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι $\frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2}$· καὶ εἶναι ὁ παρονομαστὴς τετράγωνος, ὥστε καὶ $12x^2 + 24$ πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνος· καὶ τοῦτο συμβαίνει ἂν $x = 1$.

Θέτω λοιπὸν $6x^2 - 4x = x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{4}{5}$· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, 4.

Καὶ ἐὰν δὲν θέλῃς νὰ λάβῃς $x = 1$, τάξε τὸν μικρότερον $x + 1$· ὥστε $3x^2 + 6$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς $3x^2 + 6x + 9$· καὶ εἶναι εὔκολον νὰ καταστῇ τοῦτο ἴσον πρὸς τετράγωνον, καὶ θὰ εὑρεθῇ ὁ x οὐχὶ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{13}{9}$· ἦτο δὲ ὁ x ἴσος πρὸς $x + 1$· θὰ εἶναι ἄρα ὁ x οὐχὶ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{22}{9}$, καὶ ὁ τετράγωνος τούτου ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ 6 δίδει τὸν x ῥητόν.

14.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἢ μεῖον τὴν ὑποτείνουσαν ἢ μεῖον μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω τὸ τρίγωνον δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος $3x$, $4x$, $5x$, καὶ πάλιν γίνεζητεῖν Δ^{Υ} ϛ̄ ⋔ ς ε̄ ἴσ. □^{φ}, καὶ Δ^{Υ} ϛ̄ ⋔ ς γ̄ ἴσ. □^{φ}. καὶ ἐὰν ποιήσω Δ^{Υ} ϛ̄ ⋔ ς γ̄ ἴσ. □^{φ}, γίνεται ὁ ς Μ̊ γ̄ ἐν μορίῳ Μ̊ ϛ̄ ⋔ Δ^{Υ} ᾱ.

καὶ τοιούτου εὑρεθέντος, αἱ Δ^{Υ} ϛ̄ γίνονται Μ̊ νδ̄ ἐν μορίῳ Δ^{Υ}Δ ᾱ Μ̊ λϛ̄ ⋔ Δ^{Υ} ιβ̄. καὶ δεῖ ἀπὸ Μ̊ νδ̄ ἐν μορίῳ Δ^{Υ}Δ ᾱ Μ̊ λϛ̄ ⋔ Δ^{Υ} ιβ̄. ⟨ἀφελεῖν τοὺς ε̄ ς⟩, ἔσονται ἄρα αἱ Μ̊ η̄ ⋔ Δ^{Υ} ιε̄ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιεῖν ἴσ. □^{φ}· γίνονται δὲ λοιπαὶ Δ^{Υ} ιε̄ ⋔ Μ̊ λϛ̄ ἐν μορίῳ Δ^{Υ}Δ ᾱ Μ̊ λϛ̄ ⋔ Δ^{Υ} ιβ̄ ἴσ. □^{φ}· καὶ ἔστιν τὸ μόριον □^{ος}· ὥστε καὶ Δ^{Υ} ιε̄ ⋔ Μ̊ λϛ̄ ἴσ. □^{φ}.

Καὶ αὕτη μὲν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ἐστι διὰ τὸ τὸν ιε̄ μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους· οὐ πάντως δὲ τὸ ἐξ ἀρχῆς ἀδύνατόν ἐστι· δέον οὖν διορίζεσθαι περὶ τοῦ τριγώνου. γεγόνασι γὰρ αἱ μὲν Δ^{Υ} ιε̄ ἔκ τινος □^{ου}, ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν· αἱ δ' ἐν λείψει Μ̊ λϛ̄ ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ἔκ τε τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν καὶ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς εἰρημένης τῶν ὀρθῶν. καὶ ἀπῆκται εἰς τὸ πρότερον εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ⟨ὑπὸ τῆς⟩ ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν ⟨λείψει⟩ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ἔκ τε τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς εἰρημένης τῶν ὀρθῶν καὶ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα ⟨τῆς εἰρημένης τῶν ὀρθῶν ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν πλάσσωμεν τὸ τρίγωνον ἀπὸ δύο ἀριθμῶν καὶ ὑποθώμεθα⟩ τὴν εἰρημένην τῶν ὀρθῶν γεγενῆσθαι ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν, καὶ πάντα παραβάλωμεν παρὰ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς ⟨αὐτῶν τουτέστι τὴν ὑπεροχὴν⟩ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν ὀρθῶν, ζητήσομεν πάλιν ἄλλον τινὰ τετράγωνον ⟨ὃς⟩ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ τὴν μίαν τῶν ὀρθῶν ὑπερέχει τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν τοὺς πλάσσοντας τὸ ὀρθογώνιον ὁμοίους εἶναι ἐπιπέδους, διαλύσομεν τὸ ζητούμενον.

Πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ Μ̊ δ̄ καὶ Μ̊ ᾱ· ὁ δὲ τετράγωνος ἔστω, ἵνα ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἐμβαδοῦ, Μ̊ λϛ̄· καὶ πλάσας τὸ τρίγωνον, πλάσσω αὐτὸ ἐν ς η̄, ς ιε̄, ς ιζ̄· καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ λείψας τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν, Δ^{Υ} ξ̄ ⋔ ς η̄· ταῦτα ἴσα Δ^{Υ} λϛ̄· καὶ γίνεται ὁ ς Μ̊ γ$^{\times}$.

ται νὰ ζητῶμεν ὅπως $6x^2 - 5x =$ τετράγωνος, καὶ $6x^2 - 3x =$ τετράγωνος. Καὶ ἐὰν κατασκευάσω $6x^2 - 3x =$ τετράγωνος, γίνεται ὁ x ἴσος πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν 3 καὶ παρονομαστὴν $6 - x^2$.

Καὶ εὑρεθέντος τοῦ x, ἔχομεν $6x^2 = \frac{54}{x^4 + 36 - 12x^2}$. Καὶ πρέπει ἀπὸ τοῦ $\frac{54}{x^4 + 36 - 12x^2}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν 5x, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{90 - 15\,x^2}{x^4 + 36 - 12x^2}$, καὶ ἡ διαφορὰ νὰ γίνῃ ἴση μὲ τετράγωνον· εἶναι δὲ ἡ διαφορὰ $\frac{15\,x^2 - 36}{x^4 + 36 - 12x^2} =$ τετράγωνος· καὶ εἶναι ὁ παρονομαστὴς τετράγωνος· ὥστε καὶ $15x^2 - 36 =$ τετράγωνος.

Καὶ ἡ ἐξίσωσις μὲν αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι ὁ 15 δὲν ἀναλύεται εἰς δύο τετραγώνους· ὁπωσδήποτε ὅμως τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα δὲν εἶναι ἀδύνατον· πρέπει λοιπὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἄλλης μορφῆς τρίγωνον. Διότι τὸ $15x^2$ προέρχεται ἔκ τινος τετραγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν· ἡ δὲ διαφορὰ 36 προέρχεται ἐκ τοῦ γινομένου, τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὴν διαφορὰν καθ' ἣν διαφέρει ἡ ὑποτείνουσα τῆς εἰρημένης καθέτου. Καὶ ἀνήχθη τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν προηγουμένως ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἐμβαδοῦ, ὥστε ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, μεῖον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ τὴν εἰρημένην τῶν καθέτων καὶ ἐπὶ τὴν διαφορὰν καθ' ἣν διαφέρει ἡ ὑποτείνουσα τῆς εἰρημένης καθέτου πλευρᾶς νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εἰρημένη κάθετος πλευρὰ ἔχει γίνει ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ διαιρέσωμεν ὅλα διὰ τοῦ τετραγώνου τῆς διαφορᾶς αὐτῶν τουτέστι τὴν διαφορὰν τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν, θὰ ζητήσωμεν πάλιν νὰ εὕρωμεν ἄλλον τινα τετράγωνον, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὑπερέχει τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν κατὰ τετράγωνον. Καὶ ἐὰν ὁρίσωμεν ὅτι οἱ σχηματίζοντες τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον.

Ἂς σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον, ἐκ τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 1· ὁ δὲ τετράγωνος, διὰ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἐμβαδοῦ, ἔστω 36· καὶ ἀφοῦ σχηματίσω τὸ τρίγωνον τὸ ἐκφράζω συναρτήσει τοῦ x, ὡς 8x, 15x, 17x· καὶ γίνεται ἡ διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ μεῖον τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν $60x^2 - 8x$· ταῦτα θέτω ἴσα πρὸς $36x^2$· καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{1}{3}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα τὸ τρίγωνον $\frac{\gamma}{\eta}$, $\frac{\gamma}{\iota\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\iota\zeta}$, καὶ μένει.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐὰν τετράγωνός τις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα αὐτῶν καὶ λείψας τὸν ἕτερον ποιῇ τετράγωνον, καὶ εὑρίσκεται τετράγωνος καὶ ἕτερος μείζων τοῦ προειρημένου τετραγώνου, τὸ αὐτὸ ποιῶν.

Δεδόσθωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅ τε $\overline{\gamma}$ καὶ ὁ $\overline{\iota\alpha}$, καὶ τετράγωνός τις, ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{\varepsilon}$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν $\overline{\gamma}$ καὶ λείψας τὸν $\overline{\iota\alpha}$, ποιείτω τετράγωνον, τὸν ὄντα ἀπὸ πλευρᾶς $\mathring{M}\,\overline{\eta}$. δέον ἔστω ζητεῖν ἕτερον τετράγωνον μείζονα τοῦ $\overline{\kappa\varepsilon}$, τὸ αὐτὸ ποιοῦντα.

Ἔστω ἡ τοῦ $\square^{\text{ου}}$ πλ. ς $\overline{\alpha}$ $\mathring{M}\,\overline{\varepsilon}$· ὁ $\square^{\text{ος}}$ γίνεται $\Delta^{Y}\,\overline{\alpha}$ ς $\overline{\iota}$ $\mathring{M}\,\overline{\kappa\varepsilon}$· ταῦτα τρὶς ⋔ $\mathring{M}\,\overline{\iota\alpha}$, γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{\gamma}$ ς $\overline{\lambda}$ $\mathring{M}\,\overline{\xi\delta}$ ἴσ. $\square^{\text{ῳ}}$ τῷ ἀπὸ πλ. $\mathring{M}\,\overline{\eta}$ ⋔ ς $\overline{\beta}$· καὶ γίνεται ὁ ς $\mathring{M}\,\overline{\xi\beta}$. ἔσται ἄρα ἡ πλ. $\mathring{M}\,\overline{\xi\zeta}$, ὁ $\square^{\text{ος}}$ $\overline{,\delta\upsilon\pi\theta}$, καὶ οὗτος ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν.

ιε.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, ποιῇ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν τάξωμεν αὐτὸ δεδομένον τῷ εἴδει, πάλιν ἔρχεται ἡμῖν διορίζεσθαι καὶ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα ὄντα τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ⟨ὑπὸ τῆς⟩ ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, ⟨λείψει⟩ τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου ⟨ἐκ τοῦ⟩ ἐν τῷ ἐμβαδῷ καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν ὀρθῶν καὶ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τῆς προειρημένης μιᾶς, τῆς ὑπεροχῆς τετραγώνου ⟨οὔσης, ποιῇ τετράγωνον⟩.

Πεπλάσθω οὖν τὸ τρίγωνον ἀπὸ $\mathring{M}\,\overline{\delta}$ καὶ $\mathring{M}\,\overline{\alpha}$, ὁ δὲ $\square^{\text{ος}}$ $\mathring{M}\,\overline{\text{λϛ}}$· καὶ οὐκ ἔστιν μείζων τοῦ ἐμβαδοῦ· ἔχοντες οὖν δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν ἕνα, τὸν ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν, τουτέστι $\mathring{M}\,\overline{\text{ρλϛ}}$· τὸν δὲ λοιπόν, τὸν στερεὸν τὸν περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ μιᾶς τῶν ὀρθῶν καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν ὀρθῶν, τὸν $\overline{,\delta\tau\kappa}$· ἐπεὶ οὖν $\square^{\text{ός}}$ τις, ὁ ὢν $\mathring{M}\,\overline{\text{λϛ}}$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν $\overline{\text{ρλϛ}}$ καὶ λείψας τὸν $\overline{,\delta\tau\kappa}$, Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{17}{3}$ καὶ ἐπαληθεύεται ἡ πρότασις.

Λῆμμα εἰς τὸ ἑπόμενον.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα ἐξ αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀφοῦ ἐκ τοῦ γινομένου τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ ἄλλος ἀριθμός, εὑρίσκεται καὶ ἄλλος τετράγωνος, μεγαλύτερος τοῦ προειρημένου τετραγώνου, ποιῶν τὸ αὐτό.

Ἔστω ὅτι δίδονται οἱ δύο ἀριθμοί, ὁ 3 καὶ ὁ 11, καὶ τετράγωνός τις, ὁ τετράγωνος τοῦ 5, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 3 καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ γινομένου τούτου ἀφαιρεθῇ ὁ 11, ἂς σχηματίζηται τετράγωνος, ὁ τετράγωνος τοῦ 8. Πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἄλλον τετράγωνον μεγαλύτερον τοῦ 25, ὁ ὁποῖος νὰ πράττῃ τὸ αὐτό.

Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου $x + 5$· ὁ τετράγωνος γίνεται $x^2 + 10x + 25$· ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 3 καὶ ἀφαιροῦμεν 11, ὅτε λαμβάνομεν $3x^2 + 10x + 64$ =τετράγωνος, ἔστω τετραγ. ῥίζης $8 - 2\chi$· καὶ γίνεται ὁ $\chi = 62$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $= 67$, ὁ τετράγωνος $=$ 4489 καὶ οὗτος ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν.

15.

Νὰ εὑρεθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἢ σὺν τὴν ὑποτείνουσαν ἢ σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Καὶ ἐὰν θέσωμεν αὐτὸ δεδομένον κατὰ τὸ εἶδος πάλιν καταλήγομεν εἰς τὸν περιορισμὸν νὰ ζητῶμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ὄντα μεγαλύτερον τοῦ ἐμβαδοῦ, ὥστε ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, μεῖον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τῆς διαφορᾶς, καθ' ἣν διαφέρει ἡ ὑποτείνουσα τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν, τῆς διαφορᾶς οὔσης τετραγώνου, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἂς σχηματισθῇ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 1, ὁ δὲ τετράγωνος ἔστω 36· καὶ δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐμβαδοῦ· ἔχοντες λοιπὸν δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν ἕνα, τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, τουτέστι 136· τὸν δὲ ἄλλον, τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων, τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπὶ μίαν τῶν καθέτων καὶ ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προειρημένης μιᾶς τῶν καθέτων τὸν 4320· ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει τετράγωνός τις, ὁ 36, καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν 136 μεῖον τὸν 4320 σχηματίζει τετράγωνον ζητοῦμεν δὲ ὁ τετράγωνος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 36, ἐὰν λοιπὸν ποιεῖ $\square^{ον}$, ζητοῦμεν δὲ τὸν $\square^{ον}$ μείζονα εἶναι τοῦ $\overline{λϛ}$, ἐὰν οὖν τάξωμεν $\Delta^{Y}\,\overline{α}$ ϛ $\overline{ιβ}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{λϛ}$, καὶ ἀκολουθήσωμεν τῇ προδεδειγμένῃ ἀποδείξει, εὑρήσομεν ἀπείρους $\square^{ους}$ ποιοῦντας τὸ πρόβλημα, ὧν εἷς ἔσται ὁ ὢν $\overset{\circ}{M}\,\overline{χοϛ}$.

Τάξομεν οὖν τὸ ὀρθογώνιον ϛ $\overline{η}$, ϛ $\overline{ιε}$, ϛ $\overline{ιζ}$, καὶ γίνονται $\Delta^{Y}\,\overline{ξ}$ ϛ $\overline{η}$ ἴσ. $\Delta^{Y}\,\overline{χοϛ}$· καὶ γίνεται ὁ ϛ $οζ^{\times}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

ιϛ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως, τῶν ὀξειῶν ⟨μιᾶς⟩ αὐτοῦ γωνιῶν τμηθείσης δίχα, ὁ τῆς τεμνούσης τὴν γωνίαν ἀριθμὸς ᾖ ῥητός.

Τετάχθω ἡ μὲν τέμνουσα γωνίαν δίχα ϛ $\overline{ε}$, ἡ δὲ μία τομὴ τῆς βάσεως ϛ $\overline{γ}$, ἡ ἄρα κάθετος ἔσται ϛ $\overline{δ}$.

τετάχθω δὴ καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς βάσις $\overset{\circ}{M}$ ὁσωνδήποτε ἐχουσῶν $γ^{ον}$, ἔστω δὴ $\overset{\circ}{M}\,\overline{γ}$· ὥστε δὴ τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως, $\overset{\circ}{M}\,\overline{γ}$ ⋔ ϛ $\overline{γ}$. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ γωνία δίχα ἐτμήθη, καὶ ἔστιν ἡ κάθετος ἀποτομῆς ἐπίτριτος, ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ λοιποῦ τῆς βάσεως ἐστὶν ἐπίτριτος, καὶ τέτακται τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως $\overset{\circ}{M}\,\overline{γ}$ ⋔ ϛ $\overline{γ}$, ἡ ἄρα ὑποτείνουσά ⟨ἐστι⟩ $\overset{\circ}{M}\,\overline{δ}$ ⋔ ϛ $\overline{δ}$.

λοιπόν ἐστι τὸν ἀπὸ τούτων τετράγωνον, τουτέστιν $\Delta^{Y}\,\overline{ιϛ}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{ιϛ}$ ⋔ ϛ $\overline{λβ}$, ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν ὀρθῶν τετραγώνοις, τουτέστι $\Delta^{Y}\,\overline{ιϛ}$ $\overset{\circ}{M}\,\overline{θ}$, καὶ γίνεται ὁ ϛ $\overset{λβ}{\overline{ζ}}$· τὰ λοιπὰ δῆλα.

καὶ ἐὰν πάντα $λβ^{κις}$ ποιήσω, ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος $\overset{\circ}{M}\,\overline{κη}$, ἡ δὲ βάσις $\overset{\circ}{M}\,\overline{ϙϛ}$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα $\overset{\circ}{M}\,\overline{ρ}$, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν $\overset{\circ}{M}\,\overline{λε}$, αἱ δὲ ⟨τομαὶ τῆς βάσεως, ἡ μὲν $\overset{\circ}{M}\,\overline{κα}$, ἡ δὲ $\overset{\circ}{M}\,\overline{οε}$⟩.

ιζ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος.

Τετάχθω ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ϛ $\overline{α}$, ὁ δὲ τῇ ὑποτεινούσῃ αὐτοῦ $\overset{\circ}{M}$ τινῶν τετραγωνικῶν ⋔ ϛ $\overline{α}$, ἔστω $\overset{\circ}{M}\,\overline{ιϛ}$ ⋔ ϛ $\overline{α}$.

ἀλλ' ἐπεὶ ὑπεθέμεθα τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ εἶναι ϛ $\overline{α}$, ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γίνεται ϛ $\overline{β}$. ἀλλὰ ϛ $\overline{β}$ περιέχονται ὑπὸ ϛ $\overline{α}$ καὶ $\overset{\circ}{M}\,\overline{β}$· ἐὰν οὖν τάξωμεν μίαν τῶν ὀρθῶν $\overset{\circ}{M}\,\overline{β}$, ἔσται ἡ ἑτέρα ϛ $\overline{α}$.

θέσωμεν τοῦτο $x^2 + 12x + 36$, καὶ ἀκολουθήσωμεν τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν, θὰ εὕρωμεν ἀπείρους τετραγώνους ἐπαληθεύοντας τὸ πρόβλημα, εἷς τῶν ὁποίων θὰ εἶναι ὁ 676.

Θέτομεν λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον 8x, 15x, 17x καὶ λαμβάνομεν $60x^2 + 8x = 676x^2$ καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{1}{77}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

16.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν διχοτόμον μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ῥητός.

Ἂς τεθῇ ἡ μὲν διχοτόμος τῆς γωνίας 5x, τὸ δὲ ἓν τμῆμα τῆς ἄλλης καθέτου τῆς τεμνομένης ὑπὸ τῆς διχοτόμου ἔστω 3x, ὁπότε ἡ ἄλλη κάθετος θὰ εἶναι 4x.

Ἂς τεθῇ λοιπὸν καὶ ἡ ἀρχικὴ κάθετος τοιαύτη, ὥστε νὰ διαιρῆται διὰ 3, ἔστω 3· ὥστε τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς καθέτου θὰ εἶναι $3 - 3x$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐδιχοτομήθη ἡ γωνία καὶ εἰς τὸ μερικὸν τρίγωνον ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι $\frac{4}{3}$, θὰ εἶναι καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς καθέτου τὰ $\frac{4}{3}$, καὶ ἔχει τεθῇ τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς καθέτου ἴσον πρὸς $3 - 3x$, ὁπότε ἡ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι $4 - 4x$.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισωθῇ τὸ τετράγωνον τούτου, τουτέστιν τὸ $16x^2 + 16 - 32x$ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν, τουτέστι $16x^2 + 9$, ὁπότε ὁ $x = \frac{7}{32}$· τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

Καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσω πάντα ἐπὶ 32, θὰ εἶναι ἄρα ἡ μὲν κάθετος 28, ἡ δὲ ἄλλη κάθετος 96, ἡ δὲ ὑποτείνουσα 100, ἡ δὲ διχοτόμος τῆς γωνίας 35, τὰ δὲ τμήματα τῆς καθέτου ὑπὸ τῆς διχοτόμου ὁριζόμενα, τὸ μὲν 21, τὸ δὲ 75.

17.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὴν ὑποτείνουσαν, σχηματίζει τετράγωνον, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι κύβος.

Ἂς τεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ x, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἴση, πρὸς τετράγωνόν τι μεῖον x, ἔστω $16 - x$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι x, θὰ εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσον πρὸς $2x$· ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν μίαν τῶν καθέτων 2, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι x.

καὶ γίνεται ἡ περίμετρος Μ̊ ιη καὶ οὐκ ἔστι κύβος· ὁ δὲ ιη γέγονεν ἔκ τινος □ου καὶ Μ̊ β· δεήσει ἄρα εὑρεῖν □όν τινα, ὅς, προσλαβὼν Μ̊ β, ποιεῖ κύβον, ὥστε κύβον □ῳ ὑπερέχειν Μ̊ β.

Τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ □ου ⟨πλ.⟩ ς α Μ̊ α, ἡ δὲ τοῦ κύβου ς α ⋔ Μ̊ α. γίνεται ὁ μὲν □ος, Δ^Υ α ς β Μ̊ α, ὁ δὲ κύβος, ⟨ Κ^Υ α ⟩ ς γ ⋔ Δ^Υ γ Μ̊ α. θέλω οὖν τὸν κύβον τὸν □ον ὑπερέχειν δυάδι· ὁ ἄρα □ος μετὰ δυάδος, τουτέστιν Δ^Υ α ς β Μ̊ γ, ἔστιν ἴσος Κ^Υ α ς ⟨γ ⋔ Δ^Υ γ Μ̊⟩ α, ὅθεν ὁ ς εὑρίσκεται Μ̊ δ.

ἔσται οὖν ἡ μὲν τοῦ □ου πλ. Μ̊ ε, ἡ δὲ τοῦ κύβου Μ̊ γ. αὐτοὶ ἄρα ὁ μὲν □ος Μ̊ κε, ὁ δὲ κύβος Μ̊ κζ.

Μεθυφίσταμαι οὖν τὸ ὀρθογώνιον, καὶ τάξας αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν ς α, τάσσω τὴν ὑποτείνουσαν Μ̊ κε ⋔ ς α· μένει δὲ καὶ ἡ βάσις Μ̊ β, ἡ δὲ κάθετος ς α.

λοιπόν ἐστιν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἴσον εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν· γίνεται δὲ Δ^Υ α Μ̊ χκε ⋔ ς ν· ἔσται ἴση Δ^Υ α Μ̊ δ. ὅθεν ὁ ς Μ̊ $\overset{\nu}{\chi\kappa\alpha}$. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις καὶ μένει.

ιη.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος.

Ἐὰν δὴ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς α, τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ Μ̊ κυβικῶν ⋔ ς α, ἔρχεται ζητεῖν τίς κύβος μετὰ Μ̊ β ποιεῖ τετράγωνον.

Τετάχθω ἡ τοῦ κύβου πλ. ς α ⋔ Μ̊ α· ὁ κύβος ⟨μετὰ Μ̊ β⟩ γίνεται Κ^Υ α ς γ Μ̊ α ⋔ Δ^Υ γ· ἔσται □ος· ἔστω ἀπὸ πλ. ς α Lʹ Μ̊ α. καὶ γίνεται ὁ ς μονάδος κα δων. ἔσται ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ $\overset{\delta}{\iota\zeta}$, αὐτὸς ἄρα ἔσται $\overset{\xi\delta}{͵\delta\text{ϡ}\iota\gamma}$.

Τάσσω πάλιν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς α, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν Μ̊ $\overset{\xi\delta}{͵\delta\text{ϡ}\iota\gamma}$ ⋔ ς α· ἔχομεν δὲ καὶ τὴν βάσιν Μ̊ β, τὴν δὲ κάθετον ς α. καὶ ἐὰν ἰσάσωμεν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης □ον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν □οις εὑρήσομεν τὸν ς ῥητόν.

Καὶ γίνεται ἡ περίμετρος 18 καὶ δὲν εἶναι κύβος· ὁ δὲ 18 ἔγινε ἔκ τινος τετραγώνου σὺν 2· θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὕρωμεν τετράγωνόν τινα, ὅστις προσλαμβάνων 2 νὰ σχηματίζῃ κύβον, ὥστε ὁ κύβος νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου κατὰ 2.

Ἂς τεθῇ λοιπὸν ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου $= x + 1$, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου $= x - 1$. Ὁ μὲν τετράγωνος γίνεται $x^2 + 2x + 1$, ὁ δὲ κύβος $x^3 + 3x - 3x^2 - 1$. Θέλω λοιπὸν νὰ ὑπερέχῃ ὁ κύβος τοῦ τετραγώνου κατὰ 2· ὁ τετράγωνος ἄρα σὺν δύο, τουτέστιν $x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1$, ὁπότε εὑρίσκεται $x = 4$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ μὲν τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τετραγώνου ὁ 5, ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου ὁ 3. Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα θὰ εἶναι, ὁ μὲν τετράγωνος 25, ὁ δὲ κύβος 27.

Μετασχηματίζω τώρα τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, καὶ ἀφοῦ ἔχω θέσει τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ x, θέτω τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην πρὸς $25 - x$· μένει δὲ καὶ ἡ βάσις 2, καὶ ἡ ἄλλη κάθετος x.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν· γίνεται δὲ

$$x^2 + 625 - 50x = x^2 + 4$$

Ὅθεν ὁ $x = \frac{621}{50}$.

Ἐρχόμεθα εἰς τὰ δεδομένα καὶ ἐπαληθεύεται τὸ πρόβλημα.

18.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, σὺν τὴν ὑποτείνουσαν σχηματίζῃ κύβον, καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τετράγωνος.

Ἐὰν λοιπὸν ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον θέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν x, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν ἀριθμόν τινα κύβον, μεῖον x, καταλήγομεν εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν ποῖος κύβος σὺν δύο σχηματίζει τετράγωνον.

Ἂς τεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου $x - 1$· ὁ κύβος σὺν 2 γίνεται $x^3 + 3x + 1 - 3x^2$· τοῦτο θὰ εἶναι τετράγωνος· ἔστω τετραγωνικῆς ῥίζης $1\frac{1}{2}x + 1$. Καὶ γίνεται ὁ $x = \frac{21}{4}$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κύβου $\frac{17}{4}$, ὁ ἴδιος ἄρα ὁ κύβος $\frac{4913}{64}$.

Θέτω πάλιν τὸ ἐμβαδὸν x, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν $\frac{4913}{64} - x$· ἔχομεν δὲ καὶ τὴν βάσιν 2, τὴν δὲ ἄλλην κάθετον πλευρὰν x. Καὶ ἐὰν ἐξισώσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν, θὰ εὕρωμεν τὸν x ῥητόν.

ιθ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν, ποιῇ τετράγωνον, ὁ δ' ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος.

Τετάχθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος ἀορίστου περισσοῦ· ἔστω δὴ ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$. *ἔσται ἄρα ἡ μὲν κάθετος* ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$, *ἡ δὲ βάσις* $\Delta^{Y}\overline{\beta}$ ϛ $\overline{\beta}$, *ἡ δὲ ὑποτείνουσα* $\Delta^{Y}\overline{\beta}$ ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$· *λοιπόν ἐστιν τὴν περίμετρον αὐτοῦ εἶναι κύβον, τὸν δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μετὰ μιᾶς τῶν ὀρθῶν ποιεῖν τετράγωνον.*

γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος $\Delta^{Y}\overline{\delta}$ ϛ $\overline{ϛ}$ M̊ $\overline{\beta}$ *ἴσαι κύβῳ· καὶ ἔστιν σύνθετος ἀριθμός· περιέχεται γὰρ ὑπὸ* ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\beta}$ *καὶ* ϛ $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\alpha}$· *ἐὰν οὖν ἑκάστην πλευρὰν μερίσωμεν παρὰ* ϛ $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\alpha}$, *ἕξομεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ* ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\beta}$· *ἔσται κύβος.*

λοιπὸν ἄρα ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ μιᾶς τῶν ὀρθῶν ποιεῖ □^{ον}. *γίνεται δὲ ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ* $K^{Y}\overline{\beta}$ $\Delta^{Y}\overline{\gamma}$ ϛ $\overline{\alpha}$ *ἐν μορίῳ* $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$, *ἡ δὲ μία τῶν ὀρθῶν* ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$ *ἐν μορίῳ* ϛ $\overline{\alpha}$ M̊ $\overline{\alpha}$. *καὶ ἐὰν ποιήσωμεν τὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ μόριον, γίνονται* $K^{Y}\overline{\beta}$ $\Delta^{Y}\overline{\varepsilon}$ ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\alpha}$. *καὶ ἔχουσι κοινὸν μόριον* $\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$, *ὥστε τὰ δύο συντεθέντα ποιεῖν* ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$, *ἴσ.* □$^{\varphi}$· *ἐζητοῦμεν δὲ καὶ* ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\beta}$ *ἴσ. κύβῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον* □^{ου} *διπλασίονα. ἔστιν δὲ ὁ* $\overline{\eta}$, M̊ $\overline{\delta}$.

ἔστω ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\beta}$ *ἴσ.* M̊ $\overline{\eta}$· *καὶ γίνεται ὁ* ϛ $\overline{\alpha}$ L'.

ἔσται ἄρα ὀρθογώνιον $\overset{\varepsilon}{\overline{\eta}}$, $\overset{\varepsilon}{\overline{\iota\varepsilon}}$, $\overset{\varepsilon}{\overline{\iota\zeta}}$. *καὶ μένει.*

κ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, προσλαβὼν τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν, ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος.

Πάλιν ἐὰν τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ χρησώμεθα τῇ πρὸ τούτου, ἀπάγεται εἰς τὸ ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\beta}$ *ποιεῖν ἴσ.* □$^{\varphi}$, *καὶ* ϛ $\overline{\beta}$ M̊ $\overline{\alpha}$ *ἴσ. κύβῳ. καὶ γίνεται ζητεῖν τετράγωνον κύβου βπλ.· ἔστιν* $\overline{\iota ϛ}$ *καὶ* $\overline{\eta}$· *καὶ πάλιν ἰσάζομεν* M̊ $\overline{\iota ϛ}$, ϛ $\overline{\delta}$ M̊ $\overline{\beta}$. *καὶ γίνεται ὁ* ϛ M̊ $\overline{\gamma}$ L'· *ἔσται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον* $\overset{\theta}{\overline{\iota ϛ}}$, $\overset{\theta}{\overline{\xi\gamma}}$, $\overset{\theta}{\overline{\xi\varepsilon}}$.

19.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι κύβος.

Ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος ἀπροσδιορίστου περιττοῦ· ἔστω ἀπὸ τοῦ $2x + 1$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ μὲν κάθετος πλευρὰ $2x + 1$, ἡ δὲ βάσις (ἄλλη κάθετος) $2x^2 + 2x$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα $2x^2 + 2x + 1$· ὑπολείπεται ἡ περίμετρος αὐτοῦ νὰ εἶναι κύβος, τὸ δὲ ἐμβαδὸν σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος $4x^2 + 6x + 2 =$ κύβος· καὶ εἶναι τοῦτο σύνθετος ἀριθμός· διότι εἶναι γινόμενον τοῦ $4x + 2$ ἐπὶ $x + 1$· ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν ἑκάστην κάθετον πλευρὰν διὰ $x + 1$, θὰ ἔχωμεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ $4x + 2$· τοῦτο θὰ εἶναι κύβος.

Ὑπολείπεται ἄρα ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον. Γίνεται δὲ τὸ μὲν ἐμβαδὸν αὐτοῦ $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων πλευρῶν $\frac{2x + 1}{x + 1}$. Καὶ ἐὰν καταστήσωμεν ὁμώνυμα τὰ δύο κλάσματα, λαμβάνομεν ὡς ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν $2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$. Καὶ ἔχουσι κοινὸν παρονομαστὴν τὸν $x^2 + 2x + 1$, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο νὰ σχηματίζῃ $2x + 1 =$ τετράγωνον· ἐζητοῦμεν δὲ καὶ $4x + 2 =$ κύβος. Καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν κύβον, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι διπλάσιος τετραγώνου· εἶναι δὲ οὗτος ὁ 8, ὅστις εἶναι διπλάσιος τοῦ τετραγώνου 4.

Ἔστω $4x + 2 = 8$· καὶ γίνεται ὁ $x = 1\frac{1}{2}$.

Θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\frac{8}{5}, \frac{15}{5}, \frac{17}{5}$ καὶ ἐπαληθεύεται τὸ πρόβλημα.

20.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ κύβον, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τετράγωνος.

Πάλιν, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὴν αὐτὴν διαδικασίαν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ καταστήσωμεν $4x + 2 =$ τετράγωνος, καὶ $2x + 1 =$ κύβος. Καὶ καταλήγει νὰ ζητῶμεν τετράγωνον, ὁ ὁποῖος νὰ εἶναι διπλάσιος κύβου. Τοῦτο εἶναι ὁ 16 διπλάσιος τοῦ 8· καὶ πάλιν ἐξισοῦμεν $16 = 4x + 2$. Καὶ γίνεται ὁ $x = 3\frac{1}{2}$· θὰ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\frac{16}{9}, \frac{63}{9}, \frac{65}{9}$.

κα.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος, καὶ προσλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ ποιῇ κύβον.

Πεπλάσθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ⸓ $\overline{α}$, $\mathring{M}\,\overline{α}$· γίνεται μία μὲν τῶν ὀρθῶν ⸓ $\overline{β}$, ἡ δὲ ἑτέρα $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{α}$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα $Δ^{Y}\,\overline{α}$ $\mathring{M}\,\overline{α}$. καὶ γίνεται ζητεῖν $Δ^{Y}\,\overline{β}$ ⸓ $\overline{β}$ ἴσ. □φ, καὶ $K^{Y}\,\overline{α}$ $Δ^{Y}\,\overline{β}$ ⸓ $\overline{α}$ ἴσ. κύβῳ. καὶ τὸ μὲν $Δ^{Y}\,\overline{β}$ ⸓ $\overline{β}$ κατασκευάζειν □ον ῥᾴδιόν ἐστιν· ἐὰν γὰρ δυάδα μερίσῃς εἰς □ον παρὰ δυάδα, εὑρήσεις τὸν ⸓ ἕνα· ἀλλὰ δεῖ τοιοῦτον εὑρίσκεσθαι, ὥστε τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ K^{Y} καὶ $\overline{β}$ τοὺς ἀπ᾽ αὐτοῦ □ους καὶ αὐτὸν συντιθέμενον ποιεῖν κύβον.

ἔστιν οὖν ὁ ⸓ ἐκ δυάδος μερισθείσης εἰς $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{β}$· ὁ κύβος γίνεται $\mathring{M}\,\overline{η}$ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{β}$ ⟨κύβῳ⟩. καὶ οἱ $\overline{β}$ ἀπ᾽ αὐτοῦ □οι γίνονται $\mathring{M}\,\overline{η}$ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{β}$ □φ· αὐτὸς δὲ $\mathring{M}\,\overline{β}$ ἐν μορίῳ $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{β}$. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μόριον· γί. $Δ^{Y}Δ\,\overline{β}$ ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{β}$ κύβῳ.

καὶ ἔστιν τὸ μόριον κυβικόν· ἔστω $Δ^{Y}Δ\,\overline{β}$ ἴσ. κύβῳ· καὶ πάντα παρὰ $K^{Y}\,\overline{α}$· γίνονται ⸓ $\overline{β}$ ἴσ. ⟨κύβῳ⟩. καὶ ἐὰν τάξωμεν ἴσ. $\mathring{M}$ κυβικαῖς, εὑρίσκεται ὁ ⸓ κύβου τινὸς τὸ ∟ʹ. ἔστω ὁ κύβος $\mathring{M}\,\overline{η}$· γίνεται ἄρα τοῦ ∟ʹ, $\mathring{M}\,\overline{δ}$ . . . .

□ος γίνεται μθ$^{\times}$ καὶ δεῖ ἀπὸ τούτου ἆραι $\mathring{M}\,\overline{α}$, ἐπειδήπερ ἡ μία τῶν ὀρθῶν ἐστιν $Δ^{Y}\,\overline{α}$ ⋔ $\mathring{M}\,\overline{α}$· καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ ζητῆσαι κύβον ὅπως τὸ δον τοῦ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετραγώνου μεῖζον μὲν $\mathring{M}\,\overline{β}$ ῃ, ἔλασσον δὲ $\mathring{M}\,\overline{δ}$.

καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸ κύβον $K^{Y}\,\overline{α}$, ζητήσομεν $K^{Y}Kδ^{\times}$ μεῖζον μὲν $\mathring{M}\,\overline{β}$, ἔλασσον δὲ $\mathring{M}\,\overline{δ}$· ὁ ἄρα $K^{Y}K$ μείζων μὲν $\mathring{M}\,\overline{η}$, ἐλάσσων δὲ $\mathring{M}\,\overline{ις}$· ἔστιν δὲ τὰ $\frac{ξδ}{ψκθ}$, ὥστε ὁ κύβος $\frac{η}{κζ}$.

τάσσω οὖν ⸓ $\overline{β}$ ἴσ. $\mathring{M}\,\frac{η}{κζ}$, καὶ γίνεται ὁ ⸓ $\frac{ις}{κζ}$, ἡ $Δ^{Y}$, $\frac{σνς}{ψκθ}$. καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμεν εἰς τὸν τοῦδε δυάδι ἐλάσσονα εὑρήσομεν τὸν ⸓ μονάδος $\frac{σιζ}{φιβ}$, καὶ ἔχομεν ἀπὸ τοῦ ἀπ᾽ αὐτοῦ □ου ἆραι $\mathring{M}\,\overline{α}$.

κβ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ κύβος, προσλαβὼν δὲ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον.

21.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τετράγωνος ἀριθμὸς, ὅστις σὺν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σχηματίζῃ κύβον.

Ἂς σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x καὶ 1· ἡ μία μὲν τῶν καθέτων πλευρῶν γίνεται $2\,x$, ἡ δὲ ἄλλη $x^2 - 1$, ἡ δὲ ὑποτείνουσα $x^2 + 1$. Καὶ καταλήγομεν νὰ ζητῶμεν ὅπως $2\,x^2 + 2\,x =$ τετράγωνος, καὶ $x^3 + 2\,x^2 + x =$ κύβος. Καὶ νὰ κατασκευάσωμεν μὲν τὸ $2\,x^2 + 2\,x$ $=$ τετράγωνος εἶναι εὔκολον· διότι ἐὰν διαιρέσῃς τὸν 2, διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ τινος μεῖον 2, θὰ εὕρῃς τὸν ἕνα x· ἀλλὰ πρέπει νὰ εἶναι τοιοῦτος, ὥστε $x^3 + 2\,x^2 + x =$ κύβος.

Ἀποτελεῖται λοιπὸν ὁ x ἐκ τοῦ 2 διαιρουμένου διὰ τοῦ $\alpha^2 - 2$ (ὅπου α οἱοσδήποτε)· ὁπότε γίνεται $x^3 = \dfrac{8}{(\alpha^2 - 2)^3}$. Καὶ τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ x γίνεται $2\,x^2 = \dfrac{8}{(\alpha^2 - 2)^2}$· αὐτὸς δὲ ὁ $x = \dfrac{2}{\alpha^2 - 2}$. Καὶ καθιστῶμεν πάντα ὁμώνυμα· γίνεται τὸ ἄθροισμα $= \dfrac{2\alpha^4}{(\alpha^2 - 2)^3}$.

Καὶ εἶναι ὁ παρονομαστὴς κύβος· καὶ ὁ ἀριθμητὴς $2\alpha^4$ θὰ εἶναι $=$ κύβος· καὶ διαιροῦμεν πάντα διὰ α^3· γίνονται $2\,\alpha =$ κύβος. Καὶ ἐὰν θέσωμεν ἴσον πρὸς τὸν κύβον ἀριθμοῦ τινος, εὑρίσκεται ὁ $\alpha =$ τὸ ἥμισυ κύβου τινός. Ἔστω ὁ κύβος 8· τὸ ἥμισυ ἄρα τούτου γίνεται 4......

Ὁ τετράγωνος γίνεται $\dfrac{1}{49}$ καὶ πρέπει ἀπὸ τούτου νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι $x^2 - 1$· καὶ ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν κύβον, ὥστε τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ νὰ εἶναι μεγαλύτερον μὲν τοῦ 2, μικρότερον δὲ τοῦ 4.

Καὶ ἐὰν θέσωμεν τὸν κύβον x^3, θὰ ζητήσωμεν νὰ εἶναι $2 < \dfrac{1}{4}\,x^6 < 4$· εἶναι ἄρα $8 < x^6 < 16$. Εἶναι δὲ τοιοῦτος ὁ $\dfrac{729}{64}$, ὥστε ὁ κύβος εἶναι $\dfrac{27}{8}$.

Θέτω λοιπὸν $2\,\alpha = \dfrac{27}{8}$, καὶ γίνεται $\alpha = \dfrac{27}{16}$, ὁ δὲ $\alpha^2 = \dfrac{729}{256}$. Καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 2, διὰ τοῦ τετραγώνου τούτου μεῖον 2, θὰ εὕρωμεν τὸν $x = \dfrac{512}{217}$, καὶ ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ τὴν μονάδα.

22.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι κύβος, ὅταν δὲ προσλάβῃ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Πρότερον δεῖ ἐπισκέψασθαι· δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ μὲν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἴσος ⟨ᾖ⟩ ἑνὶ τῶν δοθέντων, ὁ δ' ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ τῷ ἑτέρῳ.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅ τε ιβ καὶ ὁ ζ· καὶ ἐπιτετάχθω τὸν μὲν ιβ εἶναι τὸν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ, τὸν δὲ ζ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ ἔσται Μ̊ ιδ, καὶ ἐὰν τάξωμεν μίαν αὐτοῦ ὀρθὴν ς$^{\times}$ α, ἡ ἑτέρα αὐτοῦ ἔσται ς ιδ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ Μ̊ ιβ· ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται Μ̊ ιβ ⋔ ς$^{\times}$ α ς ιδ.

λοιπόν ἐστιν τὸν ἀπ' αὐτῆς □^{ον}, ὅσπερ ἐστι Δ$^{Y\times}$ α Δ^{Y} ρϙϛ Μ̊ ροβ ⋔ ς$^{\times}$ κδ ς τλϛ, ἰσῶσαι τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν □^{οις}, τουτέστιν Δ$^{Y\times}$ α Δ^{Y} ρϙϛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια καὶ πάντα ἐπὶ ς, γί. ς ροβ ἴσ. Δ^{Y} τλϛ Μ̊ κδ.

καὶ οὐ πάντοτε δυνατόν ἐστιν, εἰ μὴ τὸ L' τῶν ς ἐφ' ἑαυτό, λεῖψαν τὰς Δ^{Y} ἐπὶ τὰς Μ̊, ποιεῖ □^{ον}· καί εἰσιν οἱ μὲν ς ἐκ τοῦ ἀπὸ τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ δ^{πλ}. τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, αἱ δὲ Δ^{Y} ἐπὶ τὰς Μ̊ ἐκ τοῦ η^{κις} ἀπὸ τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν.

Ὥστε ἐὰν τοιοῦτοι δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί, καὶ ἔστω ὁ μὲν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ς α, ὁ δ' ἐν τῇ περιμέτρῳ, κύβος ἅμα καὶ □^{ος}, Μ̊ ξδ, καὶ ἵνα συσταθῇ τὸ τρίγωνον, δεῖ τοῦ ἀπὸ Μ̊ ξδ □^{ου} καὶ ς δ τὸ L' ποιήσαντα ⟨ἐφ' ἑαυτὸ⟩ ἀφελεῖν τὸν η^{κις} ἀπὸ τῆς περιμέτρου ἐπὶ ς α, καὶ λοιπὸν ζητῆσαι τὰ λοιπὰ ἴσα □^{ῳ}.

γίνονται Δ^{Y} δ $\overset{Y}{M}$ υιθ. ͵δτδ ⋔ ς β. ͵δφος· καὶ πάντων τὸ δ^{ον}· γίνεται. Δ^{Y} α $\overset{Y}{M}$ ρδ. ͵ηφοϛ ⋔ ς ͵ϛρμδ ἴσ. □^{ῳ}· ἔτι δὲ καὶ ςα Μ̊ ξδ ἴσ. □^{ῳ}. καὶ ἐξισούσθωσαν αἱ Μ̊ καὶ ἡ ὑπεροχὴ καὶ ἡ μέτρησις καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

κγ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος

Προηγουμένως πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἑξῆς· δύο ἀριθμῶν δοθέντων, νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ μὲν περίμετρος αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴση πρὸς ἕνα τῶν δοθέντων, τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἄλλον.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοί, ὁ 12 καὶ ὁ 7· καὶ ἂς ἐπιταχθῇ ὁ μὲν 12 νὰ εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ, ὁ δὲ 7 τὸ ἐμβαδὸν. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 14, καὶ ἐὰν θέσωμεν τὴν μίαν τῶν καθέτων $\frac{1}{x}$, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $14\,x$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ 12· ἡ ὑποτείνουσα ἄρα θὰ εἶναι $12 - \left(\frac{1}{x} + 14\,x\right)$.

Ὑπολείπεται ὅπως τὸ τετράγωνον αὐτῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{1}{x^2} + 196\,x^2 + 172 - \left(\frac{24}{x} + 336\,x\right)$, τὸ ἐξισώσωμεν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν, τουτέστιν πρὸς τὰ $\frac{1}{x^2} + 196\,x^2$. Ἂς προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοὺς ἀντιθέτους τῶν ἀρνητικῶν ὅρους, ἂς ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἴσους καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ x, ὅτε λαμβάνομεν $172\,x = 336\,x^2 + 24$.

Τοιαύτη ἐξίσωσις δὲν ἔχει ῥητὴν λύσιν, εἰ μὴ ἐὰν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, μεῖον τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 ἐπὶ τὸν ὅρον χωρὶς x, σχηματίζῃ τετράγωνον· καὶ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ x ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς περιμέτρου σὺν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 καὶ τοῦ ὅρου χωρὶς x ἴσον πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν.

Ὥστε ἐὰν τοιοῦτοι δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί, καὶ ἔστω ὁ μὲν τοῦ ἐμβαδοῦ x, ὁ δὲ τῆς περιμέτρου κύβος συγχρόνως καὶ τετράγωνος, ὁ 64, καὶ διὰ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, πρέπει ἀπὸ τοῦ $\left(\frac{64^2 + 4\,x}{2}\right)^2$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸν x, καὶ τὴν διαφορὰν νὰ ζητήσωμεν νὰ ἐξισώσωμεν πρὸς τετράγωνον.

Ὁπότε γίνονται $4\,x^2 + 4194304 - 24576\,x$· καὶ διαιροῦμεν ὅλα διὰ 4· ὁπότε ἔχομεν $x^2 + 1048576 - 6144\,x =$ τετράγωνος· προσέτι δὲ καὶ $x + 64 =$ τετράγωνος. Καὶ ἂς ἐξισωθῶσιν αἱ μονάδες, ἂς σχηματισθῇ ἡ διαφορὰ καὶ ἂς ἀναλυθῇ αὕτη εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

23.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τετραγώνου τινος σὺν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν *ἢ ἄλλος τετράγωνος καὶ πλευρά, ⟨καὶ⟩ μερισθεὶς παρὰ τὸν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν ποιῇ κύβον καὶ πλευράν.*

Τετάχθω ἡ μία τῶν ὀρθῶν ς $\overline{\alpha}$, *ἡ δὲ ἑτέρα* Δ^{Y} $\overline{\alpha}$· *καὶ μένει ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ὢν τετραγώνου καὶ πλευρᾶς.*

λοιπόν ἐστι $\Delta^{Y}\Delta$ $\overline{\alpha}$ Δ^{Y} $\overline{\alpha}$ *ἰσῶσαι* □φ, *καὶ πάντα παρὰ* Δ^{Y}· *γίνεται* Δ^{Y} $\underset{\delta}{\overline{\alpha}}$ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\alpha}$ *ἴσ.* □φ *τῷ ἀπὸ πλ.* ς $\overline{\alpha}$ ⋔ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\beta}$· *ὅθεν ὁ* ς *γίνεται μονάδος* $\overline{\gamma}$.

τὰ λοιπὰ δῆλα.

κδ.

Εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅπως ὁ μὲν ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ κύβος παρὰ πλευράν, ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κύβος καὶ πλευρά.

Τετάχθω ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ K^{Y} $\overline{\alpha}$ ς $\overline{\alpha}$, *ὁ δὲ ἐν μιᾷ τῶν ὀρθῶν* K^{Y} $\overline{\alpha}$ ⋔ ς $\overline{\alpha}$· *ὁ ἄρα ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἔσται* Δ^{Y} $\overline{\beta}$.

λοιπὸν ἐστι Δ^{Y} $\overline{\beta}$ *ἰσῶσαι κύβῳ· ἔστω ἰσῶσαι* K^{Y} $\overline{\alpha}$· *καὶ γίνεται ὁ* ς $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\beta}$. *ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. καὶ ἔσται τὸ τρίγωνον* $\overline{ϛ}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\iota}$, *καὶ μένει.*

αὐτοῦ καὶ τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα κύβου σὺν τὴν κυβικὴν ῥίζαν αὐτοῦ.

Ἄς τεθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, x, ἡ δὲ ἄλλη x^2· ὁπότε τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄθροισμα ἑνὸς τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτου.

Ὑπολείπεται ὅπως $x^4 + x^2 =$ τετράγωνος, καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· ὁπότε γίνεται $x^2 + 1 =$ τετράγωνος τετραγωνικῆς ῥίζης ἔστω $x - 2$· ὅθεν ὁ $x = \frac{3}{4}$.

Τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

24.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι κύβος, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι κύβος μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα νὰ εἶναι κύβος σὺν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου.

Ἄς τεθῇ ἡ ὑποτείνουσα $x^3 + x$, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων πλευρῶν $x^3 - x$. ἡ ἄλλη ἄρα κάθετος θὰ εἶναι $2x^2$.

Ὑπολείπεται νὰ εἶναι $2x^2 =$ κύβος· ἔστω $= x^3$· καὶ γίνεται ὁ $x = 2$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα. Καὶ θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον 6, 8, 10 καὶ ἐπαληθεύεται·

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

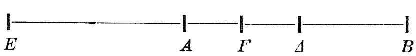
Ἕκαστος τῶν ἀπὸ τῆς τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάδι, πολύγωνός ἐστι πρῶτον ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔχει γωνίας τοσαύτας ὅσον ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων· πλευρά τε αὐτοῦ ἐστιν ὁ ἑξῆς τῆς μονάδος ἀριθμός, ὁ $\overline{β}$. ἔσται δὲ ὁ μὲν $\overline{γ}$ τρίγωνος, ὁ δὲ $\overline{δ}$ τετράγωνος, ὁ δὲ $\overline{ε}$ πεντάγωνος, καὶ τοῦτο ἑξῆς.

Τῶν δὴ τετραγώνων προδήλων ὄντων ὅτι καθεστήκασι τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἐδοκιμάσθη ἕκαστον τῶν πολυγώνων, πολυπλασιαζόμενον ἐπί τινα ἀριθμὸν κατὰ τὴν ἀνολογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα πάλιν κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, φαίνεσθαι τετράγωνον· **ὃ** *δὴ παραστήσομεν ὑποδείξαντες πῶς ἀπὸ δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται, καὶ πῶς δοθέντι πολυγώνῳ ἡ πλευρὰ λαμβάνεται· προδείξομεν δὲ τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα.*

α.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχωσιν, ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση ⟨ἐστὶ⟩ τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ μεγίστου καὶ δύο τῶν μέσων.

Τρεῖς γὰρ ἀριθμοί, ὁ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν· δεικτέον ὅτι ὁ η^{κις} ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ⟨προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΔΒ $\square^{ον}$, ποιεῖ $\square^{ον}$, οὗ ἡ πλ.$^{}$ ἴσ. τῷ τε ΑΒ καὶ $\overline{β}$ τοῖς ΒΓ.



Διαιρεῖται γὰρ ὁ η^{κις} ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ εἴς τε τὸν η^{κις} ἀπὸ ΒΓ $\square^{ον}$ καὶ εἰς τὸν η^{κις} ὑπὸ ΑΓ, ΒΓ.⟩ καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων δίχα, εἴς τε τὸν δ^{κις} ὑπὸ ΑΒ, ΓΒ, καὶ εἰς τὸν δ^{κις} ἀπὸ ΒΓ $\square^{ον}$ καὶ εἰς μὴν τὸν δ^{κις} ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ [τουτέστιν ὁ τετράκις ὑπὸ ΒΓ, ΓΔ· ἴσος γὰρ ὁ ΑΓ τῷ ΓΔ· μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ ΑΒ]. ὁ δὲ δεύτερος τῶν δ^{κις}, ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ, μιγεὶς ἑνὶ τετραγώνῳ ἀπὸ τοῦ ΔΒ, ποιεῖ τὸν τετράγωνον ἀπὸ

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἕκαστος τῆς φυσικῆς ἀκολουθίας ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ 3, εἶναι πολύγωνος ἔχων πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, καὶ ἔχει τόσας γωνίας, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν μονάδων του· πλευρὰ δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ μετὰ τὴν μονάδα ἀριθμὸς ὁ 2. Θὰ εἶναι δὲ ὁ μὲν 3 τρίγωνος, ὁ δὲ 4 τετράγωνος, ὁ δὲ 5 πεντάγωνος, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐνῷ διὰ τοὺς τετραγώνους ἀριθμοὺς εἶναι φανερὸν ὅτι ἔγιναν τετράγωνοι, διότι προκύπτουσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, ἀποδεικνύεται ὅτι ἕκαστος τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τινα ἀριθμὸν κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβὼν τετράγωνόν τινα πάλιν κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν του γίνεται τετράγωνος· τὸ ὁποῖον θὰ παραστήσωμεν ἀφοῦ ὑποδείξομεν πῶς εὑρίσκεται ὁ πολύγωνος ἀριθμός ἀπὸ δοθείσης πλευρᾶς, καὶ πῶς λαμβάνεται ἡ πλευρὰ ὅταν δοθῇ πολύγωνος· θὰ ἀποδείξωμεν δὲ κατωτέρω τὰς συναφεῖς προτάσεις.

1.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ διαφέρωσιν ἴσον ἀλλήλων, τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ μεγίστου ἐπὶ τὸν μέσον, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου, γίνεται τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ μέσου.

Διότι τρεῖς ἀριθμοί, ὁ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ἂς ὑπερέχωσιν ἴσον ἀλλήλων· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ γινομένου ΑΒ.ΒΓ, σὺν τὸν τετράγωνον τοῦ ΔΒ, σχηματίζει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν ΑΒ σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ ΒΓ.

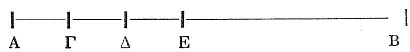
Διότι διαιρεῖται τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ γινομένου ΑΒ.ΒΓ καὶ εἰς τὸν τετράγωνον, ὅστις εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ ΒΓ καὶ εἰς τὸ ὀκταπλάσιον γινόμενον ΑΓ.ΒΓ. Καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων εἰς τὸ μέσον, καὶ εἰς τὸ τετραπλάσιον γινόμενον ΑΒ.ΓΒ, καὶ εἰς τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τοῦ ΒΓ καὶ βεβαίως εἰς τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τοῦ ΑΓ.ΓΒ [τουτέστιν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ΒΓ.ΓΔ· διότι εἶναι ΑΓ = ΓΔ· σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ΔΒ, γίνεται τὸ τετράγωνον τοῦ ΑΒ]. Ὁ δεύτερος τῶν τετραπλασίων, δηλ. τὸ γι-

τοῦ ΒΑ. καὶ ζητεῖται πῶς ὁ ἀπὸ τοῦ ΑΒ $\square^{ος}$, καὶ ὁ $\delta^{κις}$ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ὁ $\delta^{κις}$ ἀπὸ τοῦ ΒΓ συντεθέντες ποιοῦσι $\square^{ον}$. ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ ΒΓ ἴσον τὸν ΑΕ, μεταβησόμεθα τὸν $\delta^{κις}$ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ εἰς τὸν $\delta^{κις}$ ὑπὸ ΒΑ, ΑΕ, ὃς μιγεὶς τῷ $\delta^{κις}$ ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ, ποιήσει ἴσον τῷ $\delta^{κις}$ ὑπὸ ΒΕ, ΕΑ, ὃς μιγεὶς τῷ ἀπὸ τοῦ ΑΒ $\square^{φ}$, γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΕ, ΕΑ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. οἱ δὲ ΒΕ, ΕΑ ἴσ. τῷ τε ΑΒ καὶ $\overline{\beta}$ τοῖς ΑΕ, τουτέστι $\overline{\beta}$ τοῖς ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β.

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ⟨ἡ ὑπεροχὴ⟩ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοί, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· δεικτέον ὅτι ἡ τῶν ΑΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ τῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα ⟨τοῦ πλήθους⟩ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ.

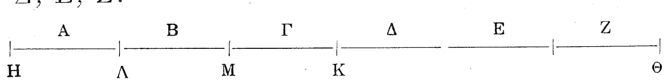


Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκεινται οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα ΕΑ τοῦ ΑΓ πολλαπλάσιος κατὰ τὸ πλῆθος τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ· τὸ δὲ πλῆθος τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ τοῦ πλήθους τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ μονάδι ἔλασσόν ἐστιν· ὥστε τὸ ΕΑ τοῦ ΑΓ πολλαπλάσιον ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ· καὶ ἔστιν ὁ μὲν ΑΕ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ ΑΓ ἐστὶν αὐτῶν μία ὑπεροχή.

γ.

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες καὶ πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἐκτεθέντων.

Ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· δεικτέον ὅτι συναμφότερος ὁ Α, Ζ, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ποιεῖ τινα ἀριθμόν, ὅς ἐστι διπλασίων τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.



Τὸ γὰρ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἤτοι ἀρτιόν ἐστιν ἢ περισσόν.

Ἔστω πρότερον ἄρτιον, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ΗΘ ἀριθμῷ· ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ΗΘ. τετμήσθω δίχα τῷ Κ, καὶ διῃρήσθω ὁ ΗΚ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὰ Λ, Μ.

νόμενον $4ΑΓ.ΓΒ$ σὺν $ΔΒ^2$ σχηματίζει τὸν $ΒΑ^2$. Καὶ ζητεῖται ὅπως τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + 4ΑΒ.ΒΓ + 4ΒΓ^2 =$ τετράγωνος. Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν $ΒΓ = ΑΕ$, θὰ μετασχηματίσωμεν τὸν $4ΑΒ.ΒΓ$ εἰς $4ΒΑ.ΑΕ$, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν $4ΓΒ^2$, τουτέστι τὸν $4ΑΕ^2$, θὰ σχηματίσῃ τὸν $4ΒΕ.ΕΑ$, ὅστις προστεθεὶς εἰς τὸν $ΑΒ^2$, γίνεται ἴσος πρὸς τὸ $(ΒΕ + ΕΑ)^2$. Τὸ δὲ $ΒΕ + ΕΑ$ εἶναι $= ΑΒ + 2ΑΕ = ΑΒ + 2ΒΓ$. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφοράν, ἡ διαφορὰ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι πολλαπλάσιον τῆς κοινῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα, τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν μεῖον 1.

Διότι ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοί, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ διαφέροντες κατὰ τὸ αὐτό· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΒΕ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ΑΒ,ΒΓ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ μεῖον 1.

Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθησαν οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΓ, ΒΕ διαφέροντες κατὰ τὸ αὐτό, εἶναι ἄρα οἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Εἶναι ἄρα ὁ ΕΑ πολλαπλάσιος τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ πλῆθος τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ· τὸ δὲ πλῆθος τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ πλήθους τῶν ΑΒ, ΒΓ,, ΒΔ, ΒΕ· ὥστε τὸ ΕΑ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ΑΓ κατὰ τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον, τοῦ πλήθους τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ· καὶ εἶναι ὁ μὲν ΑΕ διαφορὰ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ ΑΓ εἶναι ἡ μία ἐκ τῶν διαφορῶν αὐτῶν.

3.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφορὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος αὐτῶν σχηματίζει ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων.

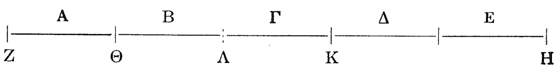
Διότι ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοί, οἱ Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφοράν· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $Α + Ζ$, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ σχηματίζει ἀριθμόν τινα, ὁ ὁποῖος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ.

Διότι τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ θὰ εἶναι ἢ ἄρτιος ἀριθμὸς ἢ περιττός.

Ἔστω πρότερον ἄρτιος, καὶ ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν τόσος ἀριθμὸς ἂς εἶναι ὁ ΗΘ· ὥστε ὁ ΗΘ εἶναι ἄρτιος. Ἂς τμηθῇ οὗτος εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Κ καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ΗΚ εἰς τὰς μονάδας του κατὰ τὰ σημεῖα Λ,Μ.

Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ Ζ τοῦ Δ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ τοῦ Α, συναμφότερος ἄρα ὁ Ζ, Α συναμφοτέρῳ τῷ Γ,Δ ἴσος ἐστίν. ἀλλὰ συναμφότερος ὁ Ζ,Α ἴσ. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ, Α καὶ τοῦ ΗΛ· ὥστε καὶ ὁ Γ, Δ ἴσ. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ, Α καὶ τοῦ ΛΜ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ Ε,Β ἴσ. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ, Α καὶ τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἴσ. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ, Α καὶ τοῦ ΗΚ· τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ, Α καὶ τοῦ ΗΚ διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ,Α καὶ τοῦ ΗΘ· ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Ζ, Α καὶ τοῦ ΗΘ, τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ὁ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε περισσός, καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΖΗ τοσαῦται μονάδες ὅσοι εἰσὶν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε. περισσὸς ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ ΖΗ· κείσθω ἐν αὐτῷ μονὰς ὁ ΖΘ, καὶ τετμήσθω ὁ ΘΗ δίχα τῷ Κ, καὶ τετμήσθω ὁ ΘΚ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὸ Λ.



Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ Ε τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ τοῦ Α, συναμφότερος ἄρα ὁ Ε, Α διπλασίων ἐστὶν τοῦ Γ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ Γ καὶ τοῦ ΛΚ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ Β,Δ διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ Γ καὶ ΛΘ· ὥστε οἱ Α, Ε, Β, Δ διπλασιόνές εἰσιν τοῦ ὑπὸ Γ καὶ τοῦ ΘΚ· ἀλλὰ τοῦ ΘΚ διπλασίων ἐστὶν ὁ ΘΗ· ὥστε καὶ οἱ Α, Ε, Β, Δ ἴσοι εἰσὶν τῷ ὑπὸ τοῦ Γ καὶ τοῦ ΘΗ· ἔστιν δὲ καὶ ὁ Γ ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ Γ καὶ τοῦ ΘΖ· ὥστε ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἴσ. τῷ ὑπὸ ⟨τοῦ⟩ Γ καὶ τοῦ ΖΗ· τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν Γ,ΖΗ διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Α,Ε καὶ τοῦ ΖΗ· ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Α, Ε. καὶ τοῦ ΖΗ, τουτέστιν τοῦ πλήθους τῶν ἐκτεθέντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ.

Ἐὰν ὦσιν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολυπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσται τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν κατά τινα ἀριθμόν, ὃς προσλαβὼν μονάδα διπλασίων ἐστὶ τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι.

Ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι γίνεται τὸ προκείμενον.

Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ΗΘ· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖ μονάδος, τῆς ὑπεροχῆς ᾗ

Καὶ ἐπειδή, ὅσον διαφέρει ὁ Ζ τοῦ Δ, τόσον διαφέρει καὶ ὁ Γ τοῦ Α, τὸ ἄθροισμα ἄρα $Ζ + Α = Γ + Δ$. Ἀλλὰ $Ζ + Α = (Ζ + Α).ΗΛ$· ὥστε καὶ ὁ $Γ + Δ = (Ζ + Α).ΛΜ$· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $Ε + Β = (Ζ + Α).ΜΚ$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $Α + Β + Γ + Δ + Ε + Ζ = (Ζ + Α).ΗΚ$· εἶναι δὲ $2(Ζ + Α).ΗΚ = (Ζ + Α.ΗΘ)$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $2(Α + Β + Γ + Δ + Ε + Ζ) = (Ζ + Α).ΗΘ$, τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε νὰ εἶναι ἀριθμὸς περιττός, καὶ ἔστω ὅτι ὁ ΖΗ εἶναι ὅσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ,Ε. Εἶναι ἄρα περιττὸς ὁ ΖΗ· ἔστω μέτρον εἰς αὐτὸν ἡ μονὰς ΖΘ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὁ ΘΗ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ ΘΚ εἰς τὰς μονάδας του κατὰ τὸ Λ.

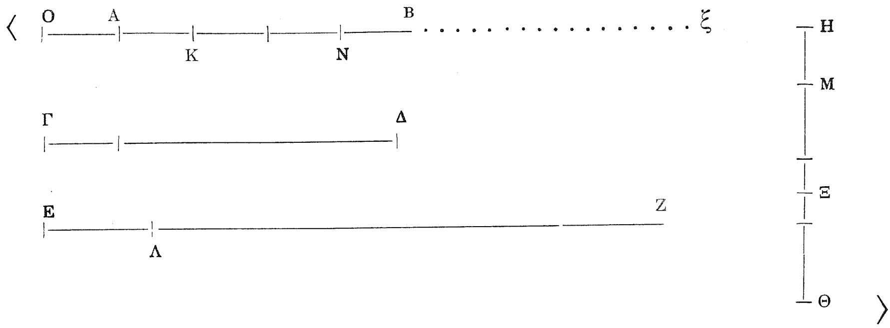
Καὶ ἐπειδὴ ὅσον διαφέρει ὁ Ε τοῦ Γ, τόσον διαφέρει καὶ ὁ Γ τοῦ Α, τὸ ἄθροισμα ἄρα $Ε + Α = 2Γ$, τουτέστι $= 2Γ.ΛΚ$· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $Β + Δ = 2Γ.ΛΘ$· ὥστε τὸ ἄθροισμα $Α + Ε + Β + Δ = 2Γ.ΘΚ$· ἀλλὰ $2ΘΚ = ΘΗ$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $Α + Ε + Β + Δ = Γ.ΘΗ$· εἶναι δὲ καὶ ὁ $Γ = Γ.ΘΖ$· ὥστε τὸ ἄθροισμα $Α + Β + Γ + Δ + Ε = Γ.ΖΗ$· εἶναι δὲ $2Γ.ΖΗ = (Α + Ε).ΖΗ$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $2(Α + Β + Γ + Δ + Ε) = (Α + Ε).ΖΗ$, τουτέστιν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ληφθέντων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφοράν, τὸ ἄθροισμά των πολλαπλασιαοθὲν ἐπὶ τὸ ὀκταπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν καὶ προσλαβὸν τὸν τετράγωνον, ὅστις προκύπτει ἂν ἀπὸ τῆς διαφορᾶς ἀφαιρεθῇ ὁ 2, γίνεται τετράγωνος τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ μεῖον 2 θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν κατά τινα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προσλαβὼν μονάδα θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ληφθέντων πάντων σὺν τὴν μονάδα.

Διότι ἔστωσαν ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφοράν, οἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι γίνεται τὸ προκείμενον.

Διότι ἔστω ὅτι ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ληφθέντων σὺν 1 τόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ΗΘ· καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ καθ' ἣν διαφέρει ὁ ΕΖ τῆς μονάδος, τῆς *ὑπερέχει ὁ ΑΒ ⟨μονάδος⟩, πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ ΗΘ, ἐὰν ἄρα θῶμεν ἕκαστον μονάδος τὸν ΑΚ, ΕΛ, ΗΜ, ἕξομεν τὸν ΛΖ τοῦ*



ΚΒ πολλαπλάσιον κατὰ τὸν ΜΘ· ὥστε ὁ ΛΖ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΒ, ΜΘ· καὶ ἐὰν θῶμεν δυάδος τὸν ΚΝ, ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπας πολυπλασιασθεὶς ἐπὶ η̅ τοὺς ΚΒ, (ὅς ἐστιν ὑπεροχὴ αὐτῶν), καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ, (ὄντος δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν), γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα ποιεῖ τινα ἀριθμόν, ὅς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, τοῦ ΚΒ, πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ συναμφότερον τὸν ΗΘ, ΘΜ.

Καὶ ἐπεὶ ὁ σύμπας ἥμισύς ἐστιν τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ΖΕ, ΕΛ καὶ τοῦ ΘΗ, ⟨διαιρεῖται δὲ ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ΖΕ, ΕΛ καὶ τοῦ ΘΗ⟩ εἴς τε τὸν ὑπὸ ΛΖ, ΗΘ, καὶ εἰς τὸν δὶς ὑπὸ ΕΛ, ΗΘ, τουτέστι β̅ τοὺς ΗΘ, πάλιν ἄρα ὁ σύμπας ⟨ἥμισύς⟩ ἐστι τοῦ ὑπὸ ΛΖ, ΗΘ καὶ β̅ τῶν ΗΘ. ἀλλὰ ὁ ΛΖ ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΚΒ, ΜΘ καὶ ὁ ὑπὸ ΛΖ, ΗΘ ἄρα ἴσ. τῷ ὑπὸ ΚΒ, ΜΘ, ΗΘ στερεῷ, καὶ ὁ σύμπας ἄρα ἐστὶν ἥμισυς τοῦ τε ὑπὸ ΚΒ, ΜΘ, ΘΗ στερεοῦ καὶ β̅ τῶν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέμωμεν τὴν ΜΘ δίχα κατὰ τὸ Ξ, ἕξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν ΚΒ,ΗΘ, ΘΞ στερεῷ καὶ ἑνὶ τῷ ΗΘ· ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ τῶν ΚΒ,ΗΘ,ΘΞ στερεὸς μετὰ τοῦ ΘΗ, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ η̅ τοὺς ΚΒ καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ον, γίνεται □ος.

Ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν ΚΒ,ΗΘ,ΘΞ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν ΚΒ, ποιεῖ τὸν ὑπὸ ΗΘ,ΘΞ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΚΒ, ΗΘ,ΘΞ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ η̅ τοὺς ΚΒ, ποιεῖ τὸν ὑπὸ ΗΘ,ΘΞ ἐπὶ η̅ τοὺς ἀπὸ ΚΒ □ους, τουτέστι τὸν ηκις ὑπὸ ΗΘ,ΘΞ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, τουτέστι τὸν δκις ὑπὸ ΗΘ,ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον.

⟨Εἰ⟩ προσλαβὼν τὸν ΗΘ ἐπὶ η̅ τοὺς ΚΒ, καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ον, γίνεται □ος; ὁ δὲ ΗΘ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ η̅ τοὺς ΚΒ ποιεῖ τὸν ηκις ὑπὸ τῶν ΗΘ, ΒΚ· οὐκοῦν πάλιν εἰ ὁ δκις ὑπὸ ΗΘ,ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, μετὰ τοῦ ηκις ὑπὸ ΗΘ,ΚΒ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ος, γίνεται □ος ;

διαφορᾶς καθ' ἣν διαφέρει ὁ ΑΒ τῆς μονάδος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ΗΘ μεῖον 1, ἐὰν ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΕΛ, ΗΜ, θέσωμεν $= 1$, θὰ ἔχωμεν τὸν ΛΖ, πολλαπλάσιον τοῦ ΚΒ κατὰ τὸν ΜΘ· ὥστε ΛΖ $=$ ΚΒ. ΜΘ· Καὶ ἐὰν θέσωμεν ΚΝ $= 2$, θὰ ζητήσωμεν μήπως τὸ ἄθροισμά των πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 8ΚΒ, ὅστις εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν, καὶ προσλαβὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ΝΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον κατὰ 2 τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, γίνεται τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ μεῖον 2 σχηματίζει ἀριθμόν τινα, ὁ ὁποῖος εἶναι πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, τοῦ ΚΒ, κατὰ τὸ ἄθροισμα ΗΘ + ΘΜ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμά των εἶναι $= \frac{1}{2}$ (ΖΕ + ΕΛ) . ΘΗ, ἀναλύεται δὲ τὸ ἄθροισμα (ΖΕ + ΕΛ). ΘΗ εἰς ΛΖ. ΗΘ καὶ εἰς 2ΕΛ . ΗΘ, τουτέστι 2ΗΘ, πάλιν ἄρα τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ (ΛΖ. ΗΘ + 2ΗΘ). Ἀλλὰ ὁ ΛΖ ἐδείχθη $=$ ΚΒ. ΜΘ καὶ ὁ ΛΖ. ΗΘ ἄρα εἶναι $=$ ΚΒ. ΜΘ . ΗΘ, καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ (ΚΒ. ΜΘ . ΘΗ + 2ΗΘ).

Ἐὰν ἄρα τάμωμεν εἰς τὸ μέσον τὸν ΜΘ κατὰ τὸ Ξ, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων εἶναι $=$ (ΚΒ. ΗΘ . ΘΞ + ΗΘ)· θὰ ζητήσωμεν ἄρα ἐὰν ὁ ΚΒ . ΗΘ . ΘΞ + ΘΗ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 8ΚΒ καὶ προσλαβὼν τὸν τετράγωνον τοῦ ΝΒ, γίνεται τετράγωνος.

Ἀλλὰ ὁ ΚΒ . ΗΘ . ΘΞ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν ΚΒ, σχηματίζει τὸν ΗΘ. ΘΞ. ΚΒ²· ὥστε τὸ γινόμενον ΚΒ . ΗΘ . ΘΞ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 8ΚΒ, σχηματίζει τὸν ΗΘ. ΘΞ. 8ΚΒ², τουτέστι τὸν 8ΗΘ . ΘΞ . ΚΒ², τουτέστι τὸν 4ΗΘ. ΘΜ . ΚΒ².

Ἐὰν προστεθῇ ὁ ΗΘ. 8ΚΒ+ ΝΒ², γίνεται τετράγωνος; Ὁ δὲ ΗΘ. 8ΚΒ= 8ΗΘ . ΒΚ· πάλιν λοιπὸν ἐξεταστέον ἐὰν ὁ 4ΗΘ . ΘΜ. ΚΒ² + 8ΗΘ . ΚΒ + ΝΒ² γίνεται τετράγωνος.

Ἀναλύεται δὲ ὁ 8ΗΘ. ΚΒ καὶ εἰς τὸν 4ΗΜ . ΚΒ + 4(ΗΘ+ΘΜ) . ΚΒ· ἐξεταστέον ἄρα ἂν 4ΗΘ. ΘΜ . ΚΒ² + 4ΗΜ . ΚΒ + 4(ΗΘ + ΘΜ) . ΚΒ + ΝΒ² $=$ τετράγωνος.

Ἀλλὰ 4ΗΜ . ΚΒ $=$ 2ΝΚ . ΚΒ καὶ ἐὰν προστεθῇ τὸ ΝΒ² σχηματίζει (ΚΒ² + ΚΝ²)· ἐξεταστέον ἄρα ἐὰν καὶ ὁ 4ΘΗ . ΘΜ . ΚΒ² + 4(ΗΘ + ΘΜ) . ΚΒ + ΚΒ² + ΚΝ² εἶναι τετράγωνος.

Πάλιν δὲ ὁ ΒΚ² ἀναλυεται εἰς ΗΜ² . ΚΒ², καὶ ἐὰν οὗτος προστεθῇ εἰς τὸν 4ΗΘ . ΘΜ . ΚΒ² σχηματίζει τὸν (ΗΘ + ΘΜ)² · ΚΒ²· ἐξεταστέον ἄρα ἐὰν ὁ (ΗΘ + ΘΜ)² . ΚΒ² + 4(ΗΘ + ΘΜ) . ΚΒ + ΚΝ², γίνεται τετράγωνος.

Διαιρεῖται δὲ ὁ ηκις ὑπὸ ΗΘ,ΚΒ εἴς τε τὸν δκις ὑπὸ ΗΜ,ΚΒ καὶ εἰς τὸν δκις ὑπὸ συναμφότερον τοῦ ΗΘ,ΘΜ ⟨καὶ τοῦ ΚΒ· εἰ ἄρα ὁ δκις ὑπὸ ΗΘ,ΘΜ⟩ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, μετὰ τοῦ δκις ὑπὸ ΗΜ.ΚΒ, καὶ ὁ δκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ . ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, καὶ ὁ ἀπὸ ΝΒ, ποιεῖ □ον ;

Ἀλλὰ ὁ δκις ὑπὸ ΗΜ,ΚΒ ἴσ. τῷ δὶς ὑπὸ ΝΚ,ΚΒ, καὶ μιγεὶς τῷ ἀπὸ ΝΒ, ποιεῖ τοὺς ἀπὸ ΚΒ, ΚΝ □ους· εἰ ἄρα καὶ ὁ δκις ὑπὸ ΘΗ,ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, καὶ ὁ δκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ,ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, μετὰ τῶν ἀπὸ ΒΚ, ΚΝ □ων, γίνεται □ος ;

Πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΚ □ος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ΗΜ □ον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, καὶ μιγεὶς οὗτος τῷ δκις ὑπὸ ΗΘ,ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, ⟨ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ,ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον⟩· εἰ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ,ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον, καὶ ὁ δκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ,ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΚΝ, γίνεται □ος ;

Ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ⟨ΘΜ⟩ καὶ τοῦ ΚΒ ἴσον τὸν Νξ ἀριθμόν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ΘΜ □ος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ Νξ □ῳ· ὅπερ ἑξῆς δειχθήσεται· εἰ ἄρα οἱ ἀπὸ τῶν ξΝ, ΝΚ □οι, μετὰ τοῦ δκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, γίνεται □ος ;

Ἀλλὰ ὁ δκις ὑπὸ ⟨συναμφοτέρου τοῦ⟩ ΗΘ, ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, ἴσ. δκις τῷ Νξ, ἐπείπερ καὶ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ ἴσος ἐτέθη ὁ Νξ· δ̄ δὲ οἱ Νξ ἴσ. τῷ δὶς ὑπὸ Νξ, ΝΚ· (δυὰς γὰρ ἐτέθη ὁ ΝΚ)· εἰ ἄρα καὶ οἱ ἀπὸ τῶν Νξ, ΝΚ □οι, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ Νξ, ΝΚ, ποιοῦσι □ον ;

Ποιοῦσι δὲ τὸν ἀπὸ τοῦ ξΚ, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ ξΚ, λιποῦσα δυάδα τῆς ΝΚ, ποιεῖ τινα ἀριθμὸν τὸν Νξ, ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, τοῦ ΚΒ, πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν συναμφότερον τοῦ ΗΘ, ΘΜ, ὃς προσλαβὼν μονάδα, τὸν ΗΜ, ⟨διπλάσιός⟩ ἐστι τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος.

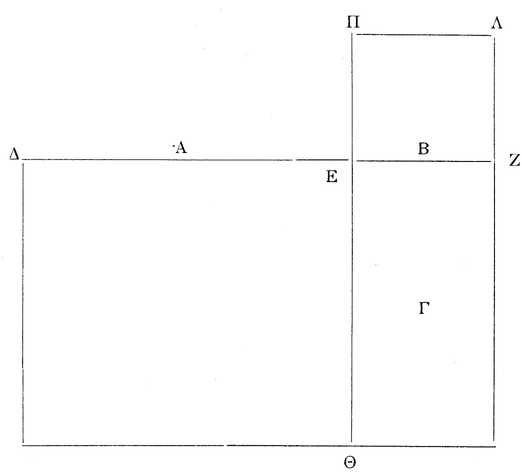
Τὸ ὑπερτεθὲν δεῖξαι.

Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $N\xi = (H\Theta + \Theta M) . KB$, θὰ εἶναι καὶ $(H\Theta + \Theta M)^2 . KB^2 = N\xi^2$· τὸ ὁποῖον θὰ ἀποδειχθῇ εἰς τὰ ἑπόμενα· ἐξεταστέον ἄρα ἐὰν τὸ ἄθροισμα $\xi N^2 + NK^2 + 4(H\Theta + \Theta M) . KB$ εἶναι τετράγωνος.

Ἀλλὰ $4(H\Theta + \Theta M) . KB = 4N\xi$, ἐπειδὴ βεβαίως ἐλήφθη $N\xi = (H\Theta + \Theta M) . KB$· εἶναι δὲ $4N\xi = 2N\xi . NK$· διότι ἐλήφθη $NK = 2$· ἐξεταστέον ἄρα ἐὰν καὶ τὸ ἄθροισμα $N\xi^2 + NK^2 + 2N\xi . NK$ εἶναι τετράγωνος.

Σχηματίζει δὲ τὸν ξK^2, τοῦ ὁποίου, ἡ πλευρὰ ἡ ξK μεῖον $2NK$, σχηματίζει ἀριθμόν τινα τὸν $N\xi$, ὁ ὁποῖος τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, τοῦ KB, εἶναι πολλαπλάσιον, κατὰ τὸν $(H\Theta + \Theta M)$, ὅστις προσλαβὼν τὴν μονάδα, τὸν HM, εἶναι διπλάσιος τοῦ ὅλου ληφθέντος πλήθους.

Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ὑποτεθὲν προηγουμένως.



Ἔστω συναμφοτέρῳ τῷ ΗΘ, ΘΜ ἴσος ὁ Α, τῷ δὲ ΚΒ ἴσος ὁ Β, τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ ἴσος ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ΘΜ (τουτέστιν ὁ ἀπὸ τοῦ Α), ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ (τουτέστιν ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ Β), ἴσ. τῷ ἀπὸ τοῦ Γ.

Κείσθω τοῖς Α, Β ἴσοι ἐπ' εὐθείας οἱ ΔΕ, ΕΖ καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τὰ ΔΘ, ΕΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΖ παραλληλόγραμμον.

Ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς ΖΘ παραλληλόγραμμον· ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, οὕτως τὸ ΘΖ παραλληλόγραμμον πρὸς ΕΛ· τὸ ἄρα ΘΖ παραλληλόγραμμον μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΔΘ,ΠΖ □ων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΘ,ΖΠ □ων ἴσ. τῷ ὑπὸ τοῦ ΘΖ παραλληλογράμμου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΘ ἴσον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ,ΘΜ, τὸ δὲ ΖΠ □ον ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ ΚΒ, τὸ δὲ ΘΖ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ Νξ. καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ, ΘΜ □ον ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ον ἴσ. τῷ ἀπὸ τοῦ Νξ τετραγώνῳ.

Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν ὅτι, ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἐν οἱᾳοῦν ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολύγωνός ἐστι· καὶ γὰρ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρά τε αὐτοῦ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι.

Ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων, γενόμενον ἐπὶ η τοὺς ΚΒ, καὶ προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ον, ποιοῦντα τὸν ἀπὸ τοῦ ξΚ □ον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλην μονάδα θῶμεν τὴν ΑΟ, ἕξομεν τὴν ΚΟ δυάδα, καὶ ἔστιν δὲ ὁμοίως καὶ ὁ ΚΝ δυάς· ἔσονται ἄρα οἱ ΟΒ, ΒΚ, ΒΝ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες· ὁ ἄρα ηκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου τοῦ ΟΒ καὶ τοῦ μέσου τοῦ ΒΚ, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τοῦ ΒΝ □ον, ποιεῖ □ον πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκειμενον ἔκ τε τοῦ μεγίστου τοῦ ΟΒ καὶ $\overline{\beta}$ τῶν μέσων τῶν ΒΚ· καὶ ὁ ΟΒ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ $\overline{\eta}$ τοὺς ΚΒ, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ον, ἴσ. τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε ΟΒ καὶ $\overline{\beta}$ τῶν ΚΒ, καὶ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα, τὸν ΟΚ, καταλείψει $\overline{\gamma}$ τοὺς ΚΒ, οἵ εἰσιν τοῦ ΚΒ πολλαπλάσιοι κατὰ τριάδα· ἡ δὲ τριάς, προσλαβοῦσα μονάδα, βπλ. ἐστὶ τῆς δυάδος.

Ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ ΟΒ, ὁ δὲ ΟΒ ὢν τυχὼν καὶ πολύγωνός ἐστιν αος ἀπὸ τῆς μονάδος (ἐπείπερ μονάς ἐστιν ὁ ΑΟ, ὁ δὲ βός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ ΑΒ), καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα· ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολύγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ ΟΒ, ἔχων γωνίας τοσαύτας ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων, τῇ ΟΚ, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ ΚΒ· καὶ πλευρὰν ἔχει τὸν ΗΘ, ὅς ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα ΗΘ + ΘΜ = Α καὶ ΚΒ = Β, τὸ δὲ ἄθροισμα (ΗΘ + ΘΜ) . ΚΒ = Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ $(ΗΘ + ΘΜ)^2$, (δηλ. $Α^2$), ἐπὶ $ΚΒ^2$ (δηλ. ἐπὶ $Β^2$) = $Γ^2$.

Ἔστωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΕΖ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τὰ ΔΘ, ΕΛ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΖ.

Εἶναι ἄρα ΔΕ : ΕΖ = παραλληλόγραμμον ΔΘ : παραλληλόγραμμον ΖΘ· ὡς δὲ ἡ ΘΕ: ΕΠ = παραλ. ΘΖ: πρὸς τὸ ΕΛ· εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΘΖ μέσον ἀνάλογον τῶν τετραγώνων ΔΘ, ΠΖ. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν τετραγώνων ΔΘ, ΖΠ = πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ παραλληλογράμμου ΘΖ· καὶ εἶναι τὸ μὲν τετράγωνον ΔΘ = $(ΗΘ + ΘΜ)^2$, τὸ δὲ τετράγωνον ΖΠ = $ΚΒ^2$, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΘΖ = Νξ. Εἶναι ἄρα καὶ $(ΗΘ + ΘΜ)^2 . ΚΒ^2 = Νξ^2$.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τὰ ἀνωτέρω δεδομένα, λέγομεν ὅτι, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα καὶ διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων οἱανδήποτε, τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι πολύγωνος ἀριθμός· διότι θὰ ἔχῃ τόσας γωνίας, ὅσας εἶναι ὁ μεγαλύτερος τῆς διαφορᾶς τῶν ὅρων αὐτῶν κατὰ δύο, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ληφθέντων ὅρων σὺν τὴν μονάδα.

Διότι, ἐπειδὴ ἐδείξαμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ληφθέντων ὅρων εἶναι = 8ΚΒ καὶ ὅτι τοῦτο προσλαβὸν τὸν $ΝΒ^2$ σχηματίζει τὸν $ξΚ^2$, ἀλλὰ καὶ ἐὰν θέσωμεν ἄλλην μονάδα τὴν ΑΟ, θὰ ἔχωμεν τὴν δυάδα ΚΟ, καὶ εἶναι δὲ ὁμοίως καὶ ὁ ΚΝ δυάς· θὰ ἔχωσιν ἄρα οἱ ΟΒ, ΒΚ, ΒΝ τὴν αὐτὴν διαφοράν· θὰ εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ μεγίστου ΟΒ ἐπὶ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ μεσαίου ΒΚ σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου τοῦ ΒΝ = πρὸς τετράγωνον, τοῦ ὁποίου πλευρὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου τοῦ ΟΒ καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ μεσαίου τοῦΒΚ· καὶ ὁ ΟΒ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 8ΚΒ καὶ προσλαβὼν τὸν τετράγωνον τοῦ ΝΒ εἶναι ἴσος πρὸς $(ΟΒ+2ΚΒ)^2$, καὶ ἡ πλευρὰ μεῖον δύο, τὸν ΟΚ, θὰ ἀφήσει 3ΚΒ, οἱ ὁποῖοι εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ ΚΒ κατὰ τριάδα· ἡ δὲ τριὰς σὺν ἕν, εἶναι διπλασία τῆς δυάδος.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων σὺν ἓν σχηματίζει τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὅπως ὁ ΟΒ, ὁ δὲ ΟΒ, τυχὼν ὢν εἶναι καὶ πολύγωνος πρῶτος ἀπὸ τῆς μονάδος (ἐπειδὴ βεβαίως ὁ ΑΟ εἶναι μονάς, ὁ δὲ δεύτερος εἶναι ἀριθμός, ὁ ΑΒ), καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων εἶναι πολύγωνος ἰσογώνιος πρὸς τὸν ΟΒ, ἔχων τόσας γωνίας, ὅσος εἶναι ὁ κατὰ δυάδα τὴν ΟΚ μεγαλύτερος τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, τοῦ ΚΒ· καὶ ἔχει πλευρὰν τὸν ΗΘ, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ληφθέντων σὺν τὴν μονάδα.

Καὶ ἀπεδείχθη τὸ παρὰ Ὑψικλεῖ ἐν ὅρῳ λεγόμενον, ὅτι, ʽἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁποσοιοῦν, μονάδος μενούσης τῆς ὑπεροχῆς, ὁ σύμπας ἐστὶν ⟨τρίγωνος, δυάδος δέ⟩, τετράγωνος, τριάδος δέ, πεντάγωνος· λέγεται δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὸν δυάδι μείζονα τῆς ὑπεροχῆς πλευραὶ δὲ αὐτῶν τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι.ʼ

Ὅθεν, ἐπεὶ οἱ τρίγωνοι μονάδος οὔσης τῆς ὑπεροχῆς γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσιν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, διπλασίων ἐστὶ τοῦ σημαινομένου τριγώνου· καὶ ἐπεὶ ὁ ΟΒ ὢν τοσαῦται γωνίαι ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ηπλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος (τουτέστιν τοῦ τῆς ὑπεροχῆς· ἐπὶ τὸν ηκις ἔσται τὸν ΚΒ), ⟨καὶ⟩ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος (τουτέστι τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ), ποιεῖ □ον· οὗτος ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων ὅτι·

Πᾶς πολύγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ηπλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον.

Συναποδειχθέντος οὖν καὶ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου καὶ τούτου τῶν πολυγώνων, ἑξῆς ἐστι δεικνύναι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται.

Ἔχοντες γὰρ πλευρὰν δοθεῖσαν τινὸς πολυγώνου τὸν ΗΘ, ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτοῦ τῶν γωνιῶν, ἔχομεν καὶ τὸν ΚΒ δοθέντα. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ,ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ ἕξομεν δοθέντα, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ Νξ· ὥστε ἕξομεν καὶ τὸν Κξ δοθέντα, ἐπείπερ δυάς ἐστιν ὁ ΝΚ· ὥστε καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ Κξ ἕξομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ον ὄντα δοθέντα, ἕξομεν καὶ τὸν λοιπὸν δοθέντα, ὅς ἐστιν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πολλαπλασίων κατὰ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ ΚΒ· ὥστε εὑρετός ἐστιν ὁ ζητούμενος πολύγωνος.

Ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὑρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ΗΘ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διδασκαλικώτερον δὲ ὑποδείξομεν καὶ τοῖς βουλομένοις εὐχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων.

Λαβόντες γὰρ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἀεὶ διπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθήσομεν ἀεὶ δυάδα, καὶ λαβόντες τὸν ἀπὸ τοῦ γενομένου □ον, ἀφελοῦμεν ἀπʼ αὐτοῦ τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσ-

Καὶ ἀπεδείχθη τὸ εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ Ὑψικλέους λεγόμενον, ὅτι «ἐὰν ὑπάρχῃ ἀπὸ μονάδος ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ οἱανδήποτε διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων, τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι ⟨τρίγωνος, δυάδος δέ⟩, τετράγωνος, τριάδος δέ, πεντάγωνος· λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὸν μεγαλύτερον τῆς διαφορᾶς κατὰ δύο, πλευραὶ δὲ αὐτῶν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ληφθέντων σὺν τὴν μονάδα».

Ὅθεν, ἐπειδὴ οἱ τρίγωνοι γίνονται ὅταν ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι ἡ μονάς, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι οἱ μέγιστοι τῶν ληφθέντων καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ληφθέντων σὺν τὸν κατὰ μονάδα μεγαλύτερον αὐτοῦ εἶναι διπλάσιος τοῦ σημαινομένου τριγώνου· καὶ ἐπειδὴ ὁ ΟΒ ἔχων τόσας γωνίας ὅσας ἔχει μονάδας, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ κατὰ δύο μικροτέρου (τουτέστι τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλάσιον θὰ εἶναι ὁ ΚΒ) καὶ προσλαβὼν τὸν τετράγωνον τοῦ κατὰ τέσσαρα μικροτέρου (τουτέστι τὸν NB^2), σχηματίζει τετράγωνον· οὗτος εἶναι ὁρισμὸς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν ὅτι·

Πᾶς πολύγωνος ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν μεῖον δύο, καὶ προσλαβὼν τὸν τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι κατὰ τέσσαρα μικρότερος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, σχηματίζει τετράγωνον.

Συναποδειχθέντος λοιπὸν καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Ὑψικλέους καὶ τούτου ἀφορῶντος εἰς τοὺς πολυγώνους ἀριθμούς, ἐναπόκειται ἀκολούθως νὰ δείξωμεν, πῶς δοθείσης πλευρᾶς εὑρίσκεται ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος.

Διότι ἔχοντες πολυγώνου τινος τὴν πλευρὰν δοθεῖσαν, τὸν ΗΘ, ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἔχομεν καὶ τὸν ΚΒ δοθέντα. Ὥστε θὰ ἔχωμεν δοθέντα καὶ τὸν τοῦ ἀθροίσματος $H\Theta + \Theta M + KB$, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς Νξ· ὥστε θὰ ἔχωμεν δοθέντα καὶ τὸν ΝΚ· ὥστε θὰ ἔχωμεν δοθέντα καὶ τὸν $K\xi^2$, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφαιροῦντες τὸν NB^2, ὄντα δοθέντα, θὰ ἔχωμεν καὶ τὸν ὑπόλοιπον δοθέντα, ὁ ὁποῖος εἶναι τοῦ ζητουμένου πολυγώνου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιος κατὰ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ ΚΒ· ὥστε δύναται νὰ εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος πολύγωνος.

Ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου ἀριθμοῦ δοθέντος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ΗΘ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

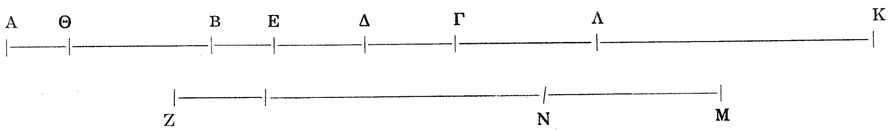
Παιδαγωγικώτερον δὲ θὰ ὑποδείξωμεν καὶ διὰ μεθόδων εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θέλουσιν εὐχερῶς νὰ μανθάνωσι τὰ ζητούμενα.

Διότι ἀφοῦ λάβομεν τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, διπλασιάζομεν πάντοτε, ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν μικρότερον κατὰ δυάδα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν πάντοτε *σονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τὸν λοιπὸν μερίσαντες εἰς τὸν ηπλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, εὑρήσομεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον.*

Πάλιν δὲ αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου δοθέντος, εὑρήσομεν οὕτως τὴν πλευράν· πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ἐπὶ τὸν ηπλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν □ον, εὑρήσομεν □ον, ἐάνπερ ᾖ ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος· τούτου δὲ τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφελόντες ἀεὶ δυάδα, τὸν λοιπὸν μερίσομεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τοῦ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ, ἕξομεν τὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

[Δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρεῖν ποσαχῶς δύναται εἶναι πολύγωνος.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ΑΒ, πλῆθος δὲ αὐτοῦ γωνιῶν ὁ ΒΓ, καὶ κείσθω ἐν τῷ ΒΓ δυὰς μὲν ὁ ΓΔ, τετρὰς δὲ ὁ ΓΕ· καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ ὢν πολύγωνος ἔχει γωνίας τοσαύτας ὅσος ἐστὶν ὁ ΒΓ, ὁ ἄρα ηκις ὑπὸ ΑΒ,ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ποιεῖ □ον.



Ἔστω αὐτοῦ πλευρὰ ὁ ΖΗ· ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ ΖΗ □ος ἴσ. τῷ τε ηκις ὑπὸ ΑΒ,ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ□φ· κείσθω ἐν τῷ ΑΒ Μ̊ ὁ ΑΘ, καὶ διῄρηται ὁ ηκις ὑπὸ ΑΒ,ΒΔ εἴς τε τὸν δκις ὑπὸ ΑΘ,ΒΔ καὶ εἰς τὸν δκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΑΒ, ΒΘ ⟨καὶ τοῦ ΒΔ. κείσθω ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ ΑΒ, ΒΘ⟩ δκις ὁ ΔΚ, καὶ μεταβησόμεθα τὸν μὲν δκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΑΒ, ΒΘ καὶ τοῦ ΒΔ εἰς τὸν ὑπὸ ΚΔΒ, τὸν δὲ δκις ὑπὸ ΑΘ, ΒΔ εἰς τὸν δὶς ὑπὸ ΒΔ,ΔΕ (δυὰς γάρ ἐστιν ὁ ΕΔ)· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΖΗ ἄρα □ος ἴσ. τῷ τε ὑπὸ ΚΔΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΒΔ, ΔΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ □φ.

Ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ ΒΔΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ □φ ἴσ. οἱ ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΕ □οι· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΖΗ ἄρα □ος ἴσ. τῷ τε ὑπὸ ΚΔΒ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ,ΔΕ □οις. τῷ δὲ ὑπὸ ΚΔΒ καὶ τῷ ⟨ἀπὸ⟩ ΒΔ ἴσ. τὸ ὑπὸ ΚΒΔ· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΖΗ ἄρα ἴσ. τῷ τε ὑπὸ ΚΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ □φ.

Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΚ, ἴσος ὢν δκις συναμφοτέρῳ τῷ ΑΒ,ΒΘ, μείζων ἐστὶ δκις τοῦ ΑΘ, τουτέστι τετράδος, ὧν ὁ ΔΓ ἐστὶ δυάς, λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΚ μείζων δυάδος τοῦ ΓΔ· ἡ ἄρα διχοτομία τοῦ ΔΚ πεσεῖται μεταξὺ τοῦ ΓΚ· ἔστω τὸ Λ. καὶ μεταβησόμεθα τὸν ὑπὸ ΚΒ,ΒΔ εἰς τὴν τῶν ἀπὸ ΒΛ, ΛΔ ὑπεροχήν, ἐπείπερ ἡ ΔΚ τέμνηται δίχα κατὰ τὸ Λ, πρόσκειται δὲ ἡ ΔΒ· καὶ ἔστιν καὶ τὸ δυάδα, καὶ ἀφοῦ λάβομεν τὸ τετράγωνον τοῦ γινομένου, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ τετράδα μικροτέρου τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ὀκταπλασίου τοῦ κατὰ δυάδα μικροτέρου τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον.

Πάλιν δὲ δοθέντος αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον τὴν πλευράν· διότι πολλαπλασιάζοντες αὐτὸν ἐπὶ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ κατὰ δυάδα μικροτέρου τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτοντες τὸν τετράγωνον τοῦ κατὰ τετράδα μικροτέρου τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, θὰ εὕρωμεν τετράγωνον, ἐὰν βεβαίως εἶναι ὁ ζητηθεὶς πολύγωνος· ἐὰν δὲ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τούτου ἀφαιρῶμεν πάντοτε δυάδα, καὶ διαιρῶμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ κατὰ δυάδα μικροτέρου τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτωμεν μονάδα, καὶ τοῦ ἐξαγομένου λάβωμεν τὸ ἥμισυ, θὰ ἔχωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου ἀριθμοῦ.

[Δοθέντος ἀριθμοῦ νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσους τρόπους δύναται οὗτος νὰ εἶναι πολύγωνος.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ΑΒ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἔστω ὁ ΒΓ, καὶ ἃς εἶναι εἰς τὸν ΒΓ ἀριθμόν, δυὰς μὲν ὁ ΓΔ, τετρὰς δὲ ὁ ΓΕ· καὶ ἐπειδὴ ὁ ΑΒ πολύγωνος ὢν ἔχει τόσας γωνίας ὅσος εἶναι ὁ ΒΓ, θὰ εἶναι ἄρα $8.\text{ΑΒ}.\text{ΒΔ} + \text{ΒΕ}^2 =$ τετράγωνος.

Ἔστω πλευρὰ αὐτοῦ ὁ ΖΗ· ὥστε $\text{ΖΗ}^2 = 8\text{ΑΒ}.\text{ΒΔ} + \text{ΒΕ}^2$.

Ἃς ληφθῇ ὁ ΑΘ, μέρος τοῦ ΑΒ, καὶ ἔχει ἀναλυθῇ ὁ 8ΑΒ.ΒΔ εἰς τὸν $4\text{ΑΘ}.\text{ΒΔ} + 4(\text{ΑΒ} + \text{ΒΘ}).\text{ΒΔ}$. Ἃς ληφθῇ $4\text{ΑΒ}.\text{ΒΘ} = \text{ΔΚ}$, καὶ ἃς μετασχηματίσωμεν τὸν $4(\text{ΑΒ} + \text{ΒΘ})\text{ΒΔ}$ εἰς τὸν ΚΔ.ΔΒ, καὶ τὸν 4ΑΘ.ΒΔ εἰς τὸν 2ΒΔ. ΔΕ (διότι ὁ ΕΔ εἶναι δυάς). εἶναι ἄρα καὶ ὁ $\text{ΖΗ}^2 = \text{ΚΔ}.\text{ΔΒ} + 2\text{ΒΔ}.\text{ΔΕ} + \text{ΒΕ}^2$.

Ἀλλὰ $2\text{ΒΔ}.\text{ΔΕ} + \text{ΒΕ}^2 = \text{ΒΔ}^2 + \text{ΔΕ}^2$· καὶ εἶναι ἄρα $\text{ΖΗ}^2 = \text{ΚΔ}.\text{ΔΒ} + \text{ΒΔ}^2 + \text{ΔΕ}^2$ Εἶναι δὲ $\text{ΚΔ}.\text{ΔΒ} + \text{ΒΔ}^2 = \text{ΚΒ}.\text{ΒΔ}$· εἶναι ἄρα καὶ $\text{ΖΗ}^2 = \text{ΚΒ}.\text{ΒΔ} + \text{ΔΕ}^2$.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ $\text{ΔΚ} = 4(\text{ΑΒ} + \text{ΒΘ})$, εἶναι οὗτος τέσσαρας φορὰς μεγαλύτερος τοῦ ΑΘ, τουτέστι τῆς τετράδος, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ΔΓ εἶναι δυάς, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΚ εἶναι μεγαλύτερος τῆς δυάδος ΓΔ· τὸ μέσον ἄρα τοῦ ΔΚ θὰ πέσῃ μεταξὺ τοῦ ΓΚ· ἔστω τὸ Λ. Καὶ θὰ μετασχηματίσωμεν τὸν ΚΒ. ΒΔ, εἰς $\text{ΒΛ}^2 - \text{ΛΔ}^2$, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ εὐθεῖα ΔΚ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ *ὑπὸ ΚΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΛ ἴσ. τῷ ἀπὸ ΛΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΛΒ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΛΔ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΚΒΔ· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΖΗ ἄρα □$^{\text{ος}}$ ἴσ. τῇ τε ἀπὸ τῶν ΒΛ, ΛΔ ὑπεροχῇ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ □$^{\text{φ}}$.*

Κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ ΔΛ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΔΛ ἄρα ἴσοι □$^{\text{οί}}$ εἰσίν τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΛ, ΔΕ □$^{\text{οις}}$· ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ ὡς εἷς καὶ δυσὶν ἀριθμοῖς ἴσοι ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν ἴσαι· ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΛΔ, ΔΕ ὑπεροχὴ ἴσ. τῇ τῶν ⟨ἀπὸ τῶν⟩ ΛΒ, ΖΗ ὑπεροχῇ· καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ τῷ ΔΓ ἴσ., πρόσκειται δὲ ὁ ΓΛ, τὸ ἄρα ΕΛΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσ. τῷ ἀπὸ ΔΛ· ἡ ἄρα ἀπὸ τῶν ΛΔ, ΔΓ ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ ⟨τῶν⟩ ἀπὸ τῶν ΛΔ, ΔΕ, ἥτις ἐστὶν ἡ ἀπὸ ΕΛΓ, ἴσ. τῇ <τῶν> ἀπὸ τῶν ΛΒ, ΖΗ ὑπεροχῇ.

Κείσθω τῷ ΒΛ ἴσος ὁ ΖΜ· (μείζων γάρ ἐστιν ὁ ΒΛ τοῦ ΖΗ, ἐπείπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΔΛ □$^{\text{α}}$ ἴσα τοῖς ἀπὸ ΒΛ, ΕΔ □$^{\text{οις}}$, λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΔΛ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΕ, ἐπείπερ καὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ μεῖζόν ἐστι, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΒΛ τοῦ ἀπὸ ΖΗ μεῖζόν ἐστι· κείσθω οὖν τῷ ΒΛ ⟨ἴσος⟩ ὁ ΖΜ.) ἔσται δὴ καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ΖΜ, ΖΗ ὑπεροχὴ ἴση τῷ ὑπὸ ΕΛ,ΛΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΚ δ$^{\text{πλ.}}$ ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ ΑΒ,ΒΘ, ὁ δὲ ΔΚ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καὶ ὁ ΔΛ ἄρα β$^{\text{πλ.}}$ ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ ΑΒ,ΒΘ· ὧν ὁ ΔΓ β$^{\text{πλ.}}$ ἐστὶ τοῦ ΑΘ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΛΓ β$^{\text{πλ.}}$ ἐστὶ β̄ τῶν ΒΘ· δ$^{\text{πλ.}}$ ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΛ τοῦ ΘΒ, ὥστε δ$^{\text{ον}}$ μέρος ἐστὶν ὁ ΘΒ τοῦ ΛΓ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΘ μονὰς δ$^{\text{όν}}$ ἐστιν τῆς ΕΓ τετράδος· ὅλος ἄρα ὁ ΑΒ δ$^{\text{όν}}$ ἐστι μέρος τοῦ ΕΛ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΘΒ τοῦ ΛΓ μέρος δ$^{\text{ον}}$· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ , ΒΘ ιϛ$^{\text{όν}}$ ἐστι τοῦ ὑπὸ ΕΛ,ΛΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΛ, ΛΓ ἴσ. τῷ ιϛ$^{\text{κις}}$ ὑπὸ ΑΒ,ΒΘ.

'Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΕΛ,ΛΓ ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ ΜΖ,ΖΗ ὑπεροχῇ· καὶ τὸ ιϛ$^{\text{κις}}$ ἄρα ὑπὸ ΑΒ,ΒΘ ἴσ. τῇ τῶν ἀπὸ ΜΖ,ΖΗ ὑπεροχῇ, τουτέστι τῷ τε ἀπὸ ΜΗ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΖΗ,ΗΜ· ὥστε ὁ ιϛ$^{\text{κις}}$ ὑπὸ ΑΒ,ΒΘ ἴσ. τῷ τε ἀπὸ ΗΜ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΖΗ,ΗΜ· ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ΗΜ· τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν.] . . . .

τὸ Λ, πρόσκειται δὲ ἡ ΔΒ· καὶ εἶναι τὸ γινόμενον $KB.B\Delta + \Delta\Lambda^2 = \Lambda B^2$, καὶ τὸ ΛB^2 ἄρα ὑπερέχει τοῦ $\Lambda\Delta^2$ κατὰ τὸ γινόμενον $KB.B\Delta$· καὶ τὸ ZH^2 ἄρα εἶναι $= B\Lambda^2 - \Lambda\Delta^2 + \Delta E^2$.

Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $\Delta\Lambda^2$· εἶναι ἄρα $ZH^2 + \Delta\Lambda^2 = B\Lambda^2 + \Delta E^2$· ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἄλλων δύο ἀριθμῶν καὶ ἐναλλὰξ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ἡ διαφορὰ ἄρα $\Lambda\Delta^2 - \Delta E^2 = \Lambda B^2 - ZH^2$· καὶ ἐπειδὴ $E\Delta = \Delta\Gamma$, πρόσκειται δὲ ὁ ΓΛ, τὸ γινόμενον ἄρα $E\Lambda.\Lambda\Gamma + \Gamma\Delta^2 = \Delta\Lambda^2$· ἡ διαφορὰ ἄρα $\Lambda\Delta^2 - \Delta\Gamma^2$, τουτέστιν ἡ $\Lambda\Delta^2 - \Delta E^2$, ἡ ὁποία εἶναι τὸ γινόμενον $E\Lambda.\Lambda\Gamma$ εἶναι $= \Lambda B^2 - ZH^2$.

Ἂς ληφθῇ $B\Lambda = ZM$· (διότι εἶναι $B\Lambda > ZH$, ἐπειδὴ βεβαίως ἀπεδείχθη ὅτι $ZH^2 + \Delta\Lambda^2 = B\Lambda^2 + E\Delta^2$, καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\Delta\Lambda^2$ εἶναι $> \Delta E^2$, ἐπειδὴ βεβαίως εἶναι καὶ τοῦ $\Delta\Gamma^2$ μεγαλύτερον, ὥστε καὶ $B\Lambda^2 > ZH^2$. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν $B\Lambda = ZM$). Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ $ZM^2 - ZH^2 =$ πρὸς τὸ γινόμενον $E\Lambda.\Lambda\Gamma$.

Καὶ ἐπειδὴ $\Delta K = 4(AB + B\Theta)$, ὁ δὲ ΔΚ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Λ, εἶναι ἄρα καὶ ὁ $\Delta\Lambda = 2(AB + B\Theta)$· ἐκ τῶν ὁποίων ὁ $\Delta\Gamma = 2A\Theta$· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ $\Lambda\Gamma = 2(2B\Theta)$· εἶναι ἄρα ὁ $\Gamma\Lambda = 4\Theta B$, ὥστε ὁ $\Theta B = \frac{\Gamma\Lambda}{4}$· ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς ΑΘ εἶναι τὸ ἓν τέταρτον τῆς τετράδος ΕΓ· ὅλος ἄρα ὁ $AB = \frac{E\Lambda}{4}$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ $\Theta B = \frac{\Lambda\Gamma}{4}$· τὸ γινόμενον ἄρα $E\Lambda.\Lambda\Gamma = 16\ AB.B\Theta$.

Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ γινόμενον $E\Lambda.\Lambda\Gamma = MZ^2 - ZH^2$· εἶναι ἄρα καὶ $16\ AB.B\Theta = MZ^2 - ZH^2$, τουτέστι $= MH^2 + 2ZH.HM$· ὥστε ὁ ΗΜ εἶναι ἄρτιος· ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν] . . . . .

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ι

1.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας δοθεῖσαν διαφοράν.

2.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας δοθέντα λόγον.

3.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας λόγον καὶ διαφορὰν τὴν δοθεῖσαν.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον καὶ δοθεῖσαν διαφοράν.

5.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως κλασματικὰ μέρη ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν, μὴ τὰ αὐτά, προστιθέμενα δίδωσι δοθέντα ἀριθμόν.

6.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως δοθὲν μέρος τοῦ πρώτου ὑπερέχῃ δοθέντος μέρους τοῦ δευτέρου κατὰ δοθέντα ἀριθμόν.

7.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρεθῶσι δύο δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ἡ μία διαφορὰ πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

8.

Εἰς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὥστε οἱ προκύπτοντες νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς ἀλλήλους δεδομένον.

9.

Ἀπὸ δύο δοθέντων ἀριθμῶν ν' ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὥστε ἡ μία διαφορὰ πρὸς τὴν ἄλλην νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

10.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἀριθμοί, εἰς μὲν τὸν μικρότερον νὰ προστεθῇ, εἰς δὲ τὸν μεγαλύτερον νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ ἄθροισμα πρὸς τὴν διαφορὰν νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον.

11.

Δύο δοθέντας ἀριθμοὺς τὸν μὲν νὰ προσθέσωμεν, τὸν δὲ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὥστε οἱ προκύπτοντες νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους δεδομένον λόγον.

12.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἀριθμοὺς δίς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔχῃ λόγον δεδομένον, ὁ δὲ ἄλλος ἐκ τῶν τῆς δευτέρας διαιρέσεως νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν ἄλλον τὸν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον δεδομένον.

13.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἀριθμοὺς τρεῖς φοράς, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ἔχῃ λόγον δεδομένον, ὁ δὲ ἄλλος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως ἔχῃ λόγον δεδομένον, καὶ ἀκόμη ὁ ἄλλος τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν ἄλλον τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔχῃ λόγον δεδομένον.

14.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

15.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἑκάτερος, λαμβάνων παρὰ τοῦ ἄλλου τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τὸν δοθέντα.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ὅπως προστιθέμενοι ἀνὰ δύο σχηματίζωσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως προστιθέμενοι ἀνὰ τρεῖς σχηματίζωσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

18.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο ὑπερέχωσι τοῦ ἄλλου κατὰ τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως λαμβανόμενοι ἀνὰ τρεῖς ὑπερέχωσι τοῦ ἄλλου κατὰ δοθέντα ἀριθμόν.

20.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων λαμβάνων τὸν μέσον ἔχῃ πρὸς τὸν ἄλλον τῶν ἄκρων λόγον δεδομένον.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ μέγιστος ὑπερέχῃ τοῦ μέσου κατὰ τὸ δοθὲν μέρος τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ μέσος ὑπερέχῃ τοῦ ἐλαχίστου κατὰ τὸ δοθὲν μέρος τοῦ μεγίστου, ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπερέχῃ δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ δοθὲν μέρος τοῦ μέσου.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος ἐπιταχθὲν μέρος του δίδῃ εἰς τὸν ἑπόμενόν του, ἵνα δίδοντες καὶ λαμβάνοντες γίνωνται ἴσοι.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος ἀφοῦ δώσει τὸ ἐπιταχθὲν μέρος εἰς τὸν ἑπόμενον, δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

24.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἀφοῦ ἕκαστος λάβει τὸ ἐπιταχθὲν μέρος παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, γίνωνται ἴσοι.

25.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως ἀφοῦ ἕκαστος λάβει τὸ ἐπιταχθὲν μέρος παρὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἄλλων γίνωνται ἴσοι.

26.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις, ὅστις πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν δοθέντων νὰ σχηματίζῃ τὸ ἓν γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου γινομένου.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμετον αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς δύο δοθέντας ἀριθμούς.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

30.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορά των καὶ τὸ γινόμενόν των δίδῃ δοθέντας ἀριθμούς.

31.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δεδομένον λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

32.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

33.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

34.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

35.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου ἔχῃ πρὸς τον μεγαλύτερον λόγον δεδομένον.

36.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου πρὸς αὐτὸν τὸν μικρότερον ἔχῃ λόγον δεδομένον.

37.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

38.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

39

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθῇ ἄλλος ἀριθμός, ὅπως ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, προστιθεμένων ἀνὰ δύο καὶ πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὸν ἄλλον σχηματίζωνται τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἴσην ὑπεροχήν.

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ II

1.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

2.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

3.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφοράν των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν ἔχῃ λόγον δεδομένον.

5.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμά των ἔχῃ λόγον δεδομένον.

6.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθεῖσαν διαφοράν, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ὑπερέχῃ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν κατὰ δοθέντα ἀριθμόν.

7.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν, κατὰ δοθέντα ἀριθμὸν σὺν πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.

8.

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον ἀριθμὸν νὰ ἀναλύσωμεν εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν.

9.

Τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων νὰ ἀναλύσωμεν εἰς δύο ἄλλους τετραγώνους.

10.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι ἔχοντες δοθεῖσαν διαφοράν.

11.

Εἰς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὅπως γίνῃ ἑκάτερος τετράγωνος.

12.

Ἀπὸ δύο δοθέντων ἀριθμῶν νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ὅπως σχηματισθῇ ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων τετράγωνος.

13.

Νὰ ἀφαιρεθῶσι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δύο δοθέντες ἀριθμοί, ὅπως ἑκάτερος τῶν ὑπολειπομένων γίνεται τετράγωνος.

14.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἑκάτερον τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

15.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος, ὅστις καταλίπῃ τετράγωνον, ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες δοθέντα λόγον, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου σχηματίζῃ τετράγωνον.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος δίδῃ εἰς τὸν ἑπόμενόν του ἓν μέρος ἑαυτοῦ καὶ δοθέντα ἀριθμόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

18.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν δώσῃ εἰς τὸν ἑπόμενόν του μέρος ἑαυτοῦ τὸ ἐπιταχθὲν καὶ ἀκόμη δοθέντα ἀριθμόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ μεσαίου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου ἔχῃ δεδομένον λόγον.

20.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου σὺν τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου μεῖον τὸν ἄλλον εἶναι τετράγωνος.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου αὐτῶν προσλαβὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκατέρου μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

24.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν σὺν ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

25.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

26.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν ἑκάτερον τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων νὰ σχηματίζῃ ἐπιταχθέντα ἀριθμόν.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων νὰ εἶναι δοθεὶς ἀριθμός.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν προσλαβὸν ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τετράγωνοι, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

30.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἢ σὺν τὸ ἄθροισμα ἢ μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

31.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τετράγωνος, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἢ σὺν τὸ ἄθροισμα ἢ μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

32.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου προσλαβὼν τὸν ἑπόμενόν του σχηματίζῃ τετράγωνον.

33.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου μεῖον τὸν ἑπόμενον σχηματίζῃ τετράγωνον.

34.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου, σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

35.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ III

1.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου ἀφαιρούμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

2.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν προσλαβὸν ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

3.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος τούτων μεῖον τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

5.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως τὸ ἄθροισμά των λαμβανομένων ἀνὰ δύο ὑπερέχῃ τοῦ ἄλλου κατὰ τετράγωνον.

6.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, καὶ λαμβανόμενοι ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζωσι τετράγωνον.

7.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς ἔχοντας τὴν αὐτὴν διαφοράν, ὥστε προστιθέμενοι ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζωσι τετράγωνον.

8.

Ἀριθμοῦ τινος δοθέντος, νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλοι τρεῖς, ὅπως τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον

9.

Ἀριθμοῦ τινος δοθέντος, νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλοι τρεῖς, ὅπως τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον, προσέτι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μεῖον τὸν δοθέντα, σχηματίζῃ τετράγωνον.

10.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

11.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

12.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον.

13.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τό γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸν ἄλλον σχηματίζῃ τετράγωνον.

14.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί. ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου σχηματίζῃ τετράγωνον.

15.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων σχηματίζῃ τετράγωνον.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἰδίων σχηματίζῃ τετράγωνον.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἢ σὺν τὸ ἄθροισμά των ἢ σὺν ἑκάτερον σχηματίζῃ τετράγωνον.

18.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἢ μεῖον ἑκάτερον ἢ μεῖον τὸ ἄθροισμά των σχηματίζῃ τετράγωνον.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἢ σὺν ἕκαστον, ἢ μεῖον ἕκαστον ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

20.

Δοθεὶς ἀριθμὸς ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιρούμενος ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς ἀναλύσεως νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

21.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος εἰς τὸν ὁποῖον προστιθέμενος ἑκάτερος τῶν ἐκ τῆς ἀναλύσεως νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ IV

1.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο κύβους, τῶν ὁποίων αἱ κυβικαὶ ῥίζαι νὰ ἔχωσι δοθὲν ἄθροισμα.

2.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἡ διαφορὰ αὐτῶν δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων αὐτῶν δίδῃ ἐπίσης δοθέντα.

3.

Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου, καὶ νὰ σχηματίζῃ τὴν μὲν τετραγωνικὴν ῥίζαν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον κυβικὴν ῥίζαν τοῦ κύβου.

4.

Εἰς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου.

5.

Εἰς τετράγωνον καὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζῃ τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ τετράγωνον ταύτης.

6.

Εἰς κύβον καὶ τετράγωνον νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς τετράγωνος καὶ νὰ σχηματίζηται κύβος καὶ τετράγωνος.

7.

Εἰς κύβον καὶ τετράγωνον νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς τετράγωνος καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος καὶ κύβος.

8.

Εἰς κύβον καὶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται κύβος καὶ κυβικὴ ῥίζα τούτου.

9.

Εἰς κύβον καὶ κυβικὴν ῥίζαν νὰ προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζητε κυβικὴ ῥίζα καὶ κύβος.

10.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο κύβοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τούτων.

11.

Εὑρεῖν δύο κύβους, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν κυβικῶν ῥιζῶν τῶν κύβων.

12.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου σὺν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύβον τοῦ μικροτέρου σὺν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν.

13.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἡ διαφορά των, σὺν 1, σχηματίζῃ τετράγωνον.

14.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν αὐτῶν.

15.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἄλλον δίδῃ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου αὐτῶν σὺν τὸν ἑπόμενόν του σχηματίζῃ τετράγωνον.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ τετράγωνος ἑκάστου αὐτῶν μεῖον τὸν ἑπόμενόν του σχηματίζῃ τετράγωνον.

18.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ πρώτου σὺν τὸν δεύτερον σχηματίζῃ κύβον, ὁ δὲ τετράγωνος τοῦ δευτέρου σὺν τὸν πρῶτον σχηματίζῃ τετράγωνον.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως (συναρτήσει τοῦ x), ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον.

20.

Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε, σὺν 1 σχηματίζῃ τετράγωνον.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἡ διαφορὰ δύο οἱωνδήποτε εἶναι τετράγωνος.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

24.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς κύβον μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου.

25.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνητε κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ κυβικὴ ῥίζα νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορῶν αὐτῶν

26.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν ἑκάτερον σχηματίζῃ κύβον.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον ἑκάτερον σχηματίζῃ κύβον.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα εἴτε μεῖον τὸ ἄθροισμα αὐτῶν σχηματίζῃ κύβον.

29

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοὶ τετράγωνοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν των νὰ σχηματίζωσι δοθέντα ἀριθμόν.

30.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες τετράγωνοι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν σχηματίζει δοθέντα ἀριθμόν.

31.

Ἡ μονὰς νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἀριθμούς, ὥστε προστιθεμένου εἰς ἑκάτερον δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀθροισμάτων νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

32.

Δοθεὶς ἀριθμὸς ν' ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον εἴτε σὺν εἴτε μεῖον τὸν τρίτον, σχηματίζῃ τετράγωνον.

33.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὅπως ὁ εἷς προσλαμβάνων παρὰ τοῦ ἄλλου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔχῃ πρὸς τὸν ὑπολειπόμενον τὸν δοθέντα λόγον.

34.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν σὺν τὸ ἄθροισμα των σχηματίζῃ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

35

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν μεῖον τὸ ἄθροισμά των δίδῃ τοὺς δοθέντας.

37.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἔχῃ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν λόγον δεδομένον.

38.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ μὲν τὸν πρῶτον δίδῃ τρίγωνον ἀριθμόν, ἐπὶ δὲ τὸν δεύτερον δίδῃ τετράγωνον, ἐπὶ δὲ τὸν τρίτον δίδῃ κύβον.

39.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

40.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τετράγωνος τοῦ μεγίστου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, ἔχῃ λόγον δεδομένον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ V

1.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος μεῖον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

2.

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν προσλαβὼν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

3.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως καὶ ἕκαστος αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν σὺν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

4.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

5.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὸ ἄθροισμά των, ἢ σὺν τὸν τρίτον σχηματίζῃ τετράγωνον.

6.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος μὲν αὐτῶν μεῖον δύο σχηματίζῃ τετράγωνον, τὸ δὲ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε, εἴτε μεῖον τὸ ἄθροισμά των εἴτε μεῖον τὸν ἄλλον, σχηματίζῃ τετράγωνον.

7.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον ἑκάστου, εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν, εἴτε μεῖον τοῦτο, σχηματίζῃ τετράγωνον.

8.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἐξ αὐτῶν εἴτε σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἴτε μεῖον τοῦτο, σχηματίζῃ τετράγωνον.

9.

Ἡ μονὰς νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τῶν κλασμάτων ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται τετράγωνος.

10.

Νὰ τμηθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μὲν δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ εἰς τὸ δὲ ἄλλος δοθεὶς καὶ νὰ σχηματίζηται ἑκάστοτε τετράγωνος·

11.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὁ αὐτὸς δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ὑφ' ἑκάστου τετράγωνος.

12.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἷς δοθείς, διάφορος εἰς ἕκαστον, ἀριθμός, καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστος τετράγωνον.

13.

Ὁ ἐπιταχθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως τὸ ἄθροισμα τούτων ἀνὰ δύο σχηματίζῃ τετράγωνον.

14.

Δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ ἀναλυθῇ εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὅταν λαμβάνωνται ἀνὰ τρεῖς νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

15.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον ἐκ τούτων σχηματίζῃ κύβον.

16.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον ἐκ τούτων σχηματίζῃ κύβον.

17.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου σχηματίζῃ κύβον.

18.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀριθμῶν σὺν ἕκαστον ἐκ τούτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς τετράγωνον, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον,

19 α.

⟨ Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου δίδῃ τετράγωνον.

19 β.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

19 γ.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον ⟩.

20.

Τὸ δοθὲν κλάσμα νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρία κλάσματα, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

21.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

22.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον τούτων μεῖον ἕκαστον σχηματίζῃ τετράγωνον.

23.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἐξ ἑκάστου αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

24.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε σὺν τὴν μονάδα σχηματίζῃ τετράγωνον.

25.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μεῖον τὴν μονάδα σχηματίζῃ τετράγωνον.

26.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆς μονάδος σχηματίζῃ τετράγωνον.

27.

Ἀφοῦ δοθῇ ἀριθμὸς νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων λαμβανομένων ἀνὰ δύο σὺν τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

28.

Ἀφοῦ δοθῇ ἀριθμὸς νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀνὰ δύο μεῖον τὸν δοθέντα σχηματίζῃ τετράγωνον.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

30.

Ἀνέμιξέ τις χοέας (1 χοεὺς = 3,28 λίτρα) τῶν ὀκτὼ καὶ τῶν 5 δραχμῶν, παραγγελθεὶς νὰ ἐκδηλώσῃ τὰς εὐχαριστίας του πρὸς τοὺς κατὰ τὸν πλοῦν συντρόφους του.........

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ VI

1.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ ὑποτείνουσα μεῖον ἑκατέραν τῶν καθέτων σχηματίζῃ κύβον.

2.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ ὑποτείνουσα σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων σχηματίζῃ κύβον.

3.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

4.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

5.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ σχηματίζῃ τετράγωνον.

6.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν σὺν τὴν μίαν κάθετον σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

7.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὴν μίαν τῶν καθέτων σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

8.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

9.

Νὰ εὑρεθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων σχηματίζῃ δοθέντα ἀριθμόν.

10.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν.

11.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν, δίδῃ δοθέντα ἀριθμόν.

12.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων σχηματίζῃ τετράγωνον.

13.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μεῖον ἑκατέραν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

14.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἢ μεῖον τὴν ὑποτείνουσαν ἢ μεῖον μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, σχηματίζῃ τετράγωνον.

15.

Νὰ εὑρεθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἢ σὺν τὴν ὑποτείνουσαν ἢ σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

16.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν διχοτόμον μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ῥητός.

17.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὴν ὑποτείνουσαν, σχηματίζῃ τετράγωνον, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι κύβος.

18.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, σὺν τὴν ὑποτείνουσαν σχηματίζῃ κύβον, καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τετράγωνος.

19.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι κύβος.

20.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ κύβον, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τετράγωνος.

21.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ὅστις σὺν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σχηματίζῃ κύβον.

22.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι κύβος, ὅταν δὲ προσλάβῃ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

23.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τετραγώνου τινος σὺν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ καὶ τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα κύβου σὺν τὴν κυβικὴν ῥίζαν αὐτοῦ.

24.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι κύβος, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι κύβος μεῖον τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα νὰ εἶναι κύβος σὺν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τούτου.

Η ΕΚΦΩΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

1.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ διαφέρωσιν ἴσον ἀλλήλων, τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ μεγίστου ἐπὶ τὸν μέσον, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ μικροτέρου, γίνεται τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ μέσου.

2.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφοράν, ἡ διαφορὰ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι πολλαπλάσιον τῆς κοινῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν μεῖον 1.

3.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφορὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν δηλοῦντα τὸ πλῆθος αὐτῶν σχηματίζει ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς ἔχοντες τὴν αὐτὴν διαφοράν, τὸ ἄθροισμά των πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὀκταπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν καὶ προσλαβὸν τὸν τετράγωνον, ὅστις προκύπτει ἂν ἀπὸ τῆς διαφορᾶς ἀφαιρεθῇ ὁ 2, γίνεται τετράγωνος τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ μεῖον 2 θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν κατά τινα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προσλαβὼν μονάδα θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ληφθέντων πάντων σὺν τὴν μονάδα.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΕΠΙΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΕΠΙΓΡΑΜΜΑΤΑ

Γυμνασίας χάριν καὶ ταῦτα τοῖς φιλοπόνοις προτίθημι, ἵνα γνῷς τὶ μὲν παλαιῶν παῖδες, τὶ δὲ νέων.

Σωκράτους

α.

Ὄλβιε Πυθαγόρη, Μουσέων Ἑλικώνιον ἔρνος,	
εἰπέ μοι εἰρομένῳ ὁπόσοι σοφίης κατ᾽ ἀγῶνα	
σοῖσι δόμοισιν ἔασιν ἀεθλεύοντες ἄριστα.	
Τοιγὰρ ἐγὼν εἴποιμι, Πολύκρατες· ἡμίσεες μὲν	$L' \ \overline{\iota\delta}$
ἀμφὶ καλὰ σπεύδουσι μαθήματα· τέτρατοι [δ᾽] αὖτε	$\delta' \ \overline{\zeta}$
ἀθανάτου φυσέως πεπονήαται· ἑβδομάτοις δὲ	$\zeta' \ \overline{\delta}$
σιγὴ πᾶσα μέμηλε καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι·	
τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ᾽ ἔξοχος ἄλλων·	$\overset{\pi.}{\lambda o\iota} \ \overline{\gamma}$
τόσσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.	$\cdot/\cdot/. \ \overline{\kappa\eta}$

β. εἰς ἄγαλμα Παλλάδος.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσῆ σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς	$L' \ \overline{\kappa}$
αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων·	$\eta' \ \overline{\varepsilon}$
ἥμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ	$\iota' \ \overline{\delta}$
Θέσπις καὶ δεκάτην μοῖραν ἔδωκε Σόλων·	$\langle \kappa' \ \overline{\beta} \rangle$
αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα	$\overset{\pi.}{\lambda o\iota} \ \overline{\theta}$
ἐννέα καὶ τέχνη δῶρον Ἀριστοδίκου.	$\cdot//. \ \overline{\mu}$

γ.

Ἁ Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιῶντα προσηύδα·	$\delta' \ \overline{\omega\mu}$
Τίπτε τοι, ὦ τέκος, ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ᾽ ἀπάμειπτο·	$\varepsilon' \ \overline{\chi o\beta}$
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη	$\zeta' \ \overline{\upsilon\pi}$
αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.	$\eta' \ \overline{\upsilon\kappa}$
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε, δωδέκατον δὲ	$\iota\beta' \ \overline{\sigma\pi}$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΕΠΙΓΡΑΜΜΑΤΑ

(ἐκ τῆς Παλατίνης Ἀνθολογίας καὶ συναφῶν σχολίων. Δὲν εἶναι τοῦ Διοφάντου).

Χάριν ἀσκήσεως παραθέτω καὶ τὰ κατωτέρω διὰ τοὺς ἐπιμελεῖς διὰ νὰ γνωρίζῃς τί ἐμάνθανον τὰ παιδιὰ τῶν παλαιῶν καὶ τί τῶν νεωτέρων.

Σωκράτους (μαθητοῦ τοῦ Πυθαγόρου)

1.

Εὐτυχισμένε Πυθαγόρα, Ἑλικώνιε γόνε τῶν Μουσῶν εἰπέ μου σὲ παρακαλῶ πόσοι εἶναι οἱ εἰς τὰ δώματά σου ἀριστεύοντες ἐκ τῶν εἰς τὴν ἐπιστήμην διαγωνιζομένων.

Βεβαίως θὰ σοῦ τὸ εἴπω, Πολυκράτη· οἱ ἡμίσεις ἀσχολοῦνται μὲ τὰ ὡραῖα μαθηματικά· τὸ ἓν τέταρτον ἐξ ἄλλου διαπονεῖται περὶ τὴν ἔρευναν τῆς ἀθανάτου φύσεως· τὸ ἓν ἕβδομον δὲ παραμένει ἀμίλητον τελείως καὶ διαλογίζεται ἀκοῦον ἀφθίτους μύθους· ὑπάρχουν δὲ τρεῖς γυναῖκες ἀκόμη, ἐκ τῶν ὁποίων ἐξέχει ἡ Θεανώ· τόσους ἐγὼ συγκαταλέγω μεταξὺ τῶν Πιερίδων Μουσῶν. (28)

2. Εἰς ἄγαλμα Παλλάδος.

Ἐγὼ εἶμαι ἡ Παλλὰς σφυρήλατος ἐκ χρυσοῦ, τὸν ὁποῖον ἔφεραν δῶρον ἔφηβοι τραγουδισταί·
τὸ ἥμισυ μὲν τοῦ χρυσοῦ ἔδωκε ὁ Χαρίσιος, τὸ ὄγδοον δὲ ἡ Θέσπις καὶ τὸ δέκατον ὁ Σόλων·

Τὸ εἰκοστὸν ἐξ ἄλλου ἔδωκεν ὁ Θεμίσων, τὰ ὑπόλοιπα δέ, ἐννέα τάλαντα μὲ τὰ ἔξοδα κατασκευῆς, κατέβαλεν ὁ Ἀριστόδικος. (40)

3.

Ἡ Κύπρις [Ἀφροδίτη] εἶπε πρὸς τὸν ἔρωτα, ὁ ὁποῖος μὲ κατήφειαν προσήρχετο·

Ποῖος πόνος σὲ βασανίζει παιδί μου; αὐτὸς δὲ ἀπήντησε· αἱ Πιερίδες Μοῦσαι μοῦ διήρπασαν τὰ μῆλα, τὰ ὁποῖα ἔφερα ἀπὸ τὸν Ἑλικῶνα, ἄλλα ἐδῶ καὶ ἄλλα ἀλλοῦ, λαβοῦσαι αὐτὰ ἀπὸ τοὺς κόλπους μου.

Ἡ Κλειὼ μὲν ἔλαβε τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν μήλων, τὸ $\frac{1}{12}$ δὲ ἡ Εὐτέρπη· τὸ $\frac{1}{8}$ ἑ-

Εὐτέρπη· ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα Θάλεια· κ′ $\overline{ρξη}$
Μελπομένη δ' εἰκοστὸν ἀπαίνυτο, Τερψιχόρη δὲ
τέτρατον· ἑβδομάτην δ' Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην·
ἡ δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων,
Οὐρανίη δ' ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι· Καλλιόπη δὲ
βριθομένη μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε·
σοὶ δ' ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκάνω, ϛὸ μονάδων $\overline{φ}$.
πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων. ὁ πᾶς οὖν $\overline{͵γτξ}$.

δ. εἰς τὴν Αὐγείαν κόπρον.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο
πληθὺν βουκολίων διζήμενος· ὃς δ' ἀπάμειπτο·
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοάς, φίλος, ἥμισυ τῶνδε·
μοίρῃ δ' ὀγδοάτῃ ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται,
δωδεκάτῃ δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' ἱρόν·
ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται·
αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα·
λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

. . . . . .

ϛ (κη). ἄλλο.

Ὡρονόμων ὄχ' ἄριστε, πόσον παρελήλυθεν ἠοῦς;
Ὅσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

ζ (ιθ).

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιά,
καὶ στόμα καὶ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός·
πλήθει δὲ κρητῆρα δυ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
καὶ λαιὸν τρισσοῖς, καὶ πισύροισι θέναρ·
ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι στόμα· ἓν δ' ἅμα πάντα,
καὶ στόμα καὶ γλῆναι καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον.

ια.

Τοὺς χιλίους στατῆρας οὓς ἐκτησάμην
λαβεῖν κελεύω τοὺς ἐμοὺς παῖδας δύο·
πλὴν γνησίου τὸ πέμπτον ηὐξήσθω δέκα
μέτρου τετάρτου τῶν λαχόντων τῷ νόθῳ.

τυχε εἰς τὴν θείαν Θάλειαν· ἡ Μελπομένη δὲ ἀφήρεσε τὸ $\frac{1}{20}$, ἡ δὲ Τερψιχόρη τὸ $\frac{1}{4}$· τὸ $\frac{1}{7}$ δὲ ἡ Ἐρατώ· ἡ δὲ Πολύμνια μοῦ ἐπῆρε 30 μῆλα, ἡ Οὐρανία δὲ 120· ἡ δὲ Καλλιόπη βαρέως φορτωμένη ἀπεχώρησε μὲ 300 μῆλα·

πρὸς σὲ δὲ ἐγὼ φθάνω μὲ ἐλαφρὰς χεῖρας, ἀποκομίζων 50 μῆλα τῶν θεῶν. (3360).

4. Εἰς τὴν Αὐγείαν κόπρον.

Ἠρώτησε κάποτε ἐπιθυμοῦσα νὰ μάθῃ, ἡ κραταιὰ δύναμις τοῦ Ἀλκείδου, τὸ πλῆθος τῶν βοῶν τοῦ Αὐγείου· αὐτὸς δὲ ἀπήντησε· «περὶ τὰς ὄχθας τοῦ Ἀλφειοῦ, φίλε, βόσκει τὸ ἥμισυ· τὸ ὄγδοον δὲ περιφέρεται εἰς τὸν λόφον τοῦ Κρόνου· τὸ δωδέκατον δὲ εἶναι πέρα εἰς τὸ ἱερὸν τοῦ Ταραξίππου· τὸ εἰκοστὸν δὲ βόσκει εἰς τὴν θείαν περιοχὴν τῆς Ἤλιδος· ἀλλὰ τὸ τριακοστὸν εἶναι ἀφημένον εἰς τὴν Ἀρκαδίαν· τὰς ὑπολοίπους δὲ πενῆντα δύνασαι νὰ ἴδῃς ἐδῶ. (240).

. . . . . .

6. Ἄλλο. (5)

Ἐξόχως ἄριστε μάντις τοῦ χρόνου, πόση ὥρα ἐπέρασε ἀπὸ τὴν ἀνατολήν; Λάβε ἀπὸ τὴν περασμένην τὰ δύο τρίτα, τὸ διπλάσιον λείπει.

Ἡ ἡμέρα λογίζεται ἔχουσα 12 ὥρας. Ἐὰν ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς παρῆλθον x ὧραι, ἀπομένουν ἀκόμη $\frac{4x}{3}$ ἤτοι εἶναι $x + \frac{4x}{3} = 12$, $x = \frac{36}{7}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $12 - \frac{36}{7} = \frac{48}{7}$ ὧραι.

7. (6)

Εἶμαι λέων ἐκ χαλκοῦ· ὑπάρχουν δὲ κρουνοὶ εἰς τοὺς δυὸ ὀφθαλμοὺς καὶ τὸ στόμα καὶ τὸ πέλμα τοῦ δεξιοῦ ποδός. Ὁ κρουνὸς τοῦ δεξιοῦ ὀφθαλμοῦ πληροῖ τὴν δεξαμενὴν εἰς δύο ἡμέρας· καὶ ὁ τοῦ ἀριστεροῦ εἰς τρεῖς καὶ ὁ τοῦ πέλματος εἰς τέσσαρας· διὰ τὸν κρουνὸν τοῦ στόματος ἀρκοῦσι 6 ὧραι. Ὅταν δὲ ὅλοι οἱ κρουνοὶ ῥέουν συγχρόνως καὶ τοῦ στόματος καὶ τῶν ὀφθαλμῶν καὶ τοῦ πέλματος, εἰπὲ εἰς πόσον χρόνον πληροῦται ἡ δεξαμενή; (Ἡμέρα = 12 ὧραι).

$\left(3\frac{33}{37}\ \text{ὧραι}\right)$.

11. (7)

Παραγγέλλω τοὺς χιλίους στατῆρας, τοὺς ὁποίους ἔχω νὰ λάβωσιν οἱ δύο παῖδες μου·

πλὴν ὅμως τὸ πέμπτον τοῦ γνησίου υἱοῦ νὰ εἶναι κατὰ δέκα μεγαλύτερον τοῦ τετάρτου τῶν τοῦ νόθου υἱοῦ. $\left(577\frac{7}{9},\ 422\frac{2}{9}\right)$.

ιβ.

Ἓξ μνῶν ἓξ φιάλας Κροῖσος βασιλεὺς ἀνέθηκεν
δραχμῇ τὴν ἑτέρην μείζονα τῆς ἑτέρης.

ιγ. εἰς ἀνδριάντας

τρεῖς, Ζήθου καὶ Ἀμφίονος καὶ τῆς μητρὸς αὐτῶν.

Ἄμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν
Ζῆθός τε χὠ ξύναιμος· ἢν δέ μου λάβῃς
τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦδ' Ἀμφίονος,
ἓξ [ἂν τὰ] πάντ' ἀνευρὼν μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

. . . . . .

⟨μη⟩.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθους φέρον, ἐν δὲ ἑκάστῃ
ἶσον ἔην πλῆθος. Μοῦσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν
ἐννέα καὶ μήλων σφέας ᾔτεον· αἱ δ' ἄρ' ἔδωκαν
ἶσον ἑκάστῃ πλῆθος, ἔχον δ' ἶσα ἐννέα καὶ τρεῖς.
εἰπὲ πόσον ‹μὲν› δῶκαν, ὅπως δ' ἶσα πᾶσαι ἔχεσκον.

⟨μθ⟩.

Τεῦξόν μοι στέφανον, χρυσὸν χαλκόν τε κεράσσας
κασσίτερόν θ' ἅμα τοῖσι πολύμκητόν τε σίδηρον,
μνῶν ἑξήκοντα· χρυσὸς δ' ἐχέτω μετὰ χαλκοῦ
δοιὰ μέρη τρισσῶν· χρυσὸς δ' ἅμα κασσίτερός τε
τρισσὰ μέρη τετόρων· χρυσὸς δ' ἅμ' ἠδὲ σίδηρος
τόσσα μέρη τῶν πέντε· πόσον δ' ἄρα δεῖ σε κεράσσαι
λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ' ἔτι λέξον
κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου
ὥστε σε τὸν στέφανον τεῦξαι μνῶν ἑξήκοντα.

ν. ἄλλο.

Τὸ τρίτον, ἀργυροποιέ, προσέμβαλε καὶ τὸ τέταρτον
τῆς φιάλης εἰς ἓν καὶ τὸ δυωδέκατον·
εἰς δὲ κάμινον ἔλαυνε βαλὼν καὶ πάντα κυκήσας
ἔξελέ μοι βῶλον, μνᾶν δέ μοι ἑλκυσάτω.

12. (8)

῾Ο βασιλεὺς Κροῖσος ἀφιέρωσε ἓξ φιάλας, αἱ ὁποῖαι ἐζύγιζον ὁμοῦ ἓξ μνᾶς· ἑκάστη ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης κατὰ μίαν δραχμήν. (1 μνᾶ βάρους = 100 δραχμαὶ βάρους = περίπου 440 γραμμάρια. ῾Η ἐλαφροτέρα φιάλη $x = 97 \frac{1}{2}$ δραχμαί).

13. (9)

Εἰς ἀνδριάντας τρεῖς (Ζήθου, ᾿Αμφίονος, Μητρός των)

Καὶ οἱ δυὸ ἡμεῖς ζυγίζομεν εἴκοσι μνᾶς,
καὶ ὁ Ζῆθος ἐγὼ καὶ ὁ ἀδελφός μου· (᾿Αμφίων).

ἐὰν δὲ λάβῃς ἀπὸ ἐμὲ τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ᾿Αμφίονος, θὰ εἶναι τοῦτο 6 μναῖ, ὅπερ εἶναι τὸ βάρος τῆς μητρός. (12, 8).

48. (10)

Αἱ Χάριτες ἔφερον καλάθια μὲ μῆλα, εἰς ἕκαστον δὲ ὑπῆρχε τὸ αὐτὸ πλῆθος. Αἱ 9 Μοῦσαι συνήντησαν αὐτὰς καὶ ἐζήτουν μῆλα· αὗται δὲ ἔδωκαν εἰς ἑκάστην ἴσον πλῆθος, καὶ εἶχον ἴσον, αἱ ἐννέα Μοῦσαι καὶ αἱ τρεῖς Χάριτες.

Εἰπέ, πόσον μὲν ἔδωκαν, διὰ νὰ ἔχωσι ὅλαι τὸ ἴδιον. (᾿Εὰν ἑκάστη Χάρις εἶχε χ μῆλα, ἑκάστη τῶν 12 Θεῶν εἶχε $\frac{3x}{12} = \frac{x}{4}$).

49. (11)

Κατασκεύασέ μου στέφανον, ἀφοῦ ἀναμίξεις χρυσόν, χαλκόν, κασσίτερον καὶ τὸν δυσκόλως κατεργαζόμενον σίδηρον, βάρους ἐν ὅλῳ 60 μνῶν· ὁ χρυσὸς δὲ μὲ τὸν χαλκὸν νὰ ζυγίζωσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὅλου· ὁ χρυσὸς δὲ μὲ τὸν κασσίτερον τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὅλου· ὁ χρυσὸς δὲ καὶ ὁ σίδηρος τὰ $\frac{3}{5}$. Εἰπέ, πόσον χρυσόν, πόσον χαλκόν, πόσον κασσίτερον, πόσον σίδηρον πρέπει νὰ ἀναμίξῃς, ὥστε ὁ στέφανος νὰ ζυγίζῃ 60 μνᾶς $\left(30 \frac{1}{2}, 9 \frac{1}{2}, 14 \frac{1}{2}, 5 \frac{1}{2}\right)$.

50. Ἄλλο. (12)

Ὦ ἀργυροποιέ, ἀνάμιξε εἰς ἕν, τὸ τέταρτον καὶ τὸ τρίτον καὶ τὸ δωδέκατον τῆς φιάλης·

καὶ ἀφοῦ τὰ βάλῃς εἰς κάμινον (θερμαινομένην) ἀνακάτευσέ τα, ὥστε νὰ γίνῃ εἷς βῶλος· τὸ βάρος του εἶναι μία μνᾶ. $\left(\frac{3}{2}\right)$.

να. ἄλλο.

Ἔχω τὸν ἑξῆς καὶ τὸ τοῦ τρίτου τρίτον. εἰσὶ $\overline{με}$
Κἀγὼ τὸν ἑξῆς καὶ τὸ τοῦ πρώτου τρίτον. $\overline{λζ}$ L′
Κἀγὼ δέκα μνᾶς καὶ τὸ τοῦ μέσου τρίτον. $\overline{κβ}$ L′

Μητροδώρου ἐπιγράμματα ἀριθμητικὰ

⟨β⟩.

Τίπτε με τῶν καρύων ἕνεκεν πληγῇσι πιέζεις,
ὦ μῆτερ ; τάδε πάντα καλαὶ διεμοιρήσαντο
παρθένοι· ἢ γὰρ ἐμεῖο Μελίσσιον ἕβδομα δοιά,
ἡ δὲ δυωδέκατον Τιτάνη λάβεν· ἕκτον ἔχουσιν
καὶ τρίτον Ἀστυόχη φιλοπαίγμονες ἠδὲ Φίλιννα·
εἴκοσι δ' ἁρπάξασα Θέτις λάβε, δώδεκα Θίσβη·
ἣν ὅρα καὶ δ' ἐγέλα Γλαύκη παλάμῃσιν ἔχουσα
ἕνδεκα· τοῦτο δέ μοι καρύων περιλείπεται οἶον.

γ. ἄλλο.

Ποῦ σοι μῆλα βέβηκεν, ἐμὸν τέκος ; Ἕκτα μὲν Ἰνὼ
δοιὰ καὶ ὀγδοάτην μοῖραν ἔχει Σεμέλη·
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν, αὐτὰρ Ἀγαυὴ
πέμπτον ἐμῶν κόλπων οἴχετ' ἀπαινυμένη.
σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται, αὐτὰρ ἔγωγε,
ναὶ μὰ φίλην Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

δ. ἄλλο.

Δρεψαμένη ποτὲ μῆλα φίλαις διεδάσσατο Μυρτώ·
Χρυσίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ἡροῖ,
ἐννεακαιδέκατον Ψαμάθῃ, δέκατον Κλεοπάτρῃ·
αὐτὰρ ἐεικοστὸν δωρήσατο Παρθενοπείῃ,
δώδεκα δ' Εὐάδνῃ μοῦνον πόρεν· αὐτὰρ ἐς αὐτὴν
ἤλυθον ἐκ πάντων ἑκατὸν καὶ εἴκοσι μῆλα.

ϛ. ἄλλο.

Ἀντομέναις ποτὲ μῆλα φίλαις διεμοιράσαντο
Ἰνὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικαῖς·
καὶ ταῖς μὲν Σεμέλη πόρεν ἄρτια, ταῖς δὲ περισσὰ
δῶκε κασιγνήτη, μῆλα δ' ἔχεν πλέονα.

51. Ἄλλο. (13)

Ἔχω τὸν ἑπόμενον καὶ τοῦ τρίτου τὸ τρίτον. Καὶ ἐγὼ τὸν ἑπόμενον καὶ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον. Καὶ ἐγὼ ἔχω δέκα μνᾶς καὶ τοῦ μεσαίου τὸ τρίτον. $\left(45,\ 37\,\frac{1}{2},\ 22\,\frac{1}{2}\right)$.

2. Μητροδώρου ἐπιγράμματα ἀριθμητικά. (14)

Κτύπα με, θέλεις νὰ μὲ δείρῃς γιὰ τὰ καρύδια, μητέρα; Αὐτὰ τὰ διεμοίρασαν αἱ καλαὶ παρθένοι. Ἤτοι τὸ Μελίσσιον μοῦ ἐπῆρε $\frac{2}{7}$, ἡ Τιτάνη $\frac{1}{12}$· αἱ φιλοπαίγμονες δὲ Ἀστυόχη καὶ Φίλιννα ἔλαβον $\frac{1}{6}$ καὶ $\frac{1}{3}$ ἀντιστοίχως· Ἁρπάξασα δὲ ἔλαβε 20 ἡ Θέτις, 12 ἡ Θίσβη· ἡ δὲ Γλαύκη, δές την πού γελᾷ, ἔλαβε εἰς τὴν παλάμην της 11· αὐτὸ δὲ μόνον τὸ ἓν καρύδι μοῦ ἀπέμεινε. (336).

3. Ἄλλο. (15)

Ποῦ εἶναι τὰ μῆλα σου παιδί μου; τὰ $\frac{2}{6}$ ἔχει ἡ Ἰνὼ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ ἡ Σεμέλη.

Ἡ Αὐτονόη δὲ ἀφήρπασε τὸ $\frac{1}{4}$· ἡ δὲ Ἀγανὴ ἐπῆρε ἀπὸ τὴν ποδιά μου τὸ $\frac{1}{5}$ καὶ ἔφυγε· γιὰ σένα ἔμειναν ἐδῶ 10 μῆλα· εἰς ἐμὲ δὲ ἔμεινε μόνον 1, ναὶ μὰ τὴν ἀγαπητὴν Κύπριν (Ἀφροδίτην). (120).

4. Ἄλλο. (16)

Ἡ Μυρτὼ κόψασα κάποτε μῆλα τὰ ἐμοίρασε εἰς τὰς φίλας της. Εἰς τὴν Χρυσίδα μὲν ἔδωσε τὸ $\frac{1}{5}$, τὸ $\frac{1}{4}$ εἰς τὴν Ἡρώ, τὸ $\frac{1}{19}$ εἰς τὴν Ψαμάθην, τὸ $\frac{1}{10}$ εἰς τὴν Κλεοπάτραν· κατόπιν ἐδώρησε τὸ $\frac{1}{20}$ εἰς τὴν Παρθενόπην· μόνον δὲ 12 ἔδωσε εἰς τὴν Εὐάδνην· ἔμειναν δὲ εἰς αὐτὴν 120 μῆλα ἀπὸ ὅλα. (380).

6. Ἄλλο. (17)

Ὅταν κάποτε ἡ Ἰνὼ καὶ ἡ Σεμέλη συνήντησαν 12 νεαρὰς φίλας διεμοίρασαν εἰς αὐτὰς μῆλα.

Καὶ ἡ μὲν Σεμέλη εἶχε πρὸς διανομὴν ἄρτιον ἀριθμὸν μήλων (εἰς τὰ ἕξ)· ἡ δὲ ἀδελφή της περιττὸν ἀριθμόν, εἶχε δὲ περισσότερα. Ἤτοι ἡ μὲν Ἰνὼ ἔδωσε $\frac{3}{7}$ εἰς τρεῖς φίλας, εἰς δὲ τὰς δύο $\frac{1}{5}$ ἔλαχε.

ἡ μὲν γὰρ τρισσῇσι τρί' ἕβδομα δῶκεν ἑταίραις,
ταῖς δὲ δύω πάντων πέμπτον ἔδωκε λάχος·
ἕνδεκα δ' Ἀστυνόμη μιν ἀφείλατο καί οἱ ἔλειπεν
μοῦνα κασιγνήταις μῆλα δύω φερέμεν.
ἡ δ' ἑτέρη πισύρεσσι πόρεν δύο τέτρατα μήλων,
πέμπτῃ δ' ἑκταίην μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν·
τέσσαρα δ' Εὐρυκόρῃ δῶρον πόρε· τέτρασι δ' ἄλλοις
μήλοισιν Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

⟨ζ⟩.

Ἡ καρύη πολλοῖσιν ἐβεβρίθει καρύοισιν·
νῦν δέ τις ἐξαπίνης μιν ἀπέθρισεν, ἀλλὰ τί φησιν ;
Ἐκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπεια·
ὀγδόατον δὲ Φίλιννα φέρει λάχος, ἡ δ' Ἀγανίππη
τέτρατον, ἑβδομάτῳ δ' ἐπιτρέπεται Ὠρείθυια·
ἕκτην δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδρέψατο μοίρην,
τρισσαὶ δ' ἓξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιράσαντο,
ἐννάκι δ' ἐννέα Μοῦσαι ἐμεῦ λάβον· ἑπτὰ δὲ λοιπὰ
δήεις ἀκρεμόνεσσιν ἐφήμενα τηλοτέροισιν.

η. ἄλλο.

Ἑπτάλοφον ποτὶ ἄστυ Γαρειδόθεν ἕκτον ὁδοῖο τὴν Ῥώμην λέγει
Βαίτιος εὐμύκους ἄχρις ἐν ἠιόνας· Βαῖτις ποταμός
κεῖθεν δ' αὖ πέμπτον Πυλάδου μετὰ Φώκιον οὖδας
Ταύρη χθὼν βοέης οὔνομ' ἀπ' εὐεπίης·
Πυρήνην δέ τοι ἔνθεν ἐπ' ὀρθόκραιρον ἰόντι
ὄγδοον ἠδὲ μιῆς δωδέκατον δεκάδος·
Πυρήνης δὲ μεσηγὺ καὶ Ἄλπιος ὑψικαρήνου
τέτρατον· Αὐσονίης αἶψα δυοδέκατον
ἀρχομένους ἤλεκτρα φαείνεται Ἠριδανοῖο.
ὦ μάκαρ, ὃς δισσὰς ἤνυσα χιλιάδας
πρὸς δ' ἔτι πέντ' ἐπὶ ταῖς ἑκατοντάδας ἔνθεν ἐλαύνων·
ἡ γὰρ Ταρπαίη μέμβλετ' ἀνακτορίη.

θ.

Εὐβλεφάροιο Δίκης ἱερὰ κρηδεμνὰ μιήνας
ὄφρα σε, πανδαμάτωρ χρυσέ, βλέποιμι τόσον,
οὐδὲν ἔχω· πίσυρας γὰρ ἐπ' οὐκ ἀγαθοῖσι ταλάντων
οἰωνοῖσι μάτην δῶκα φίλοις δεκάδας·

Ἡ Ἀστυνόμη δὲ ἐπῆρε 11 καὶ ἔμειναν (εἰς τὴν Ἰνὼ) μῆλα μόνον δύο, τὰ ὁποῖα ἐπῆγεν εἰς τὰς ἀδελφάς της. Ἡ δὲ ἄλλη (Σεμέλη) ἔδωσεν εἰς τὰς 4 φίλας της $\frac{2}{4}$ τῶν μήλων, εἰς τὴν πέμπτην δὲ ἔδωκε τὸ $\frac{1}{6}$· ἡ δὲ Εὐρυχόρη ἔλαβε δῶρον 4· μὲ 4 μῆλα, τὰ ὁποῖα τῆς ἔμειναν, ἔμεινεν εὐχαριστημένη. (Ἰνὼ 35, Σεμέλη 24).

7. (18)

Ἡ καρυδιὰ ἦτο κατάφορτη ἀπὸ καρύδια· Ξαφνικὰ κάποιος τὰ ἔκοψε. Καὶ τί εἶπεν αὐτή; Ἀπὸ τὰ καρύδια μου ἡ Παρθενόπη ἐπῆρε τὸ $\frac{1}{5}$· τὸ $\frac{1}{8}$ δὲ ἡ Φίλιννα, ἡ δὲ Ἀγανίππη τὸ $\frac{1}{4}$· εὐχαριστημένη δὲ εἶναι ἡ Ὠρείθυια μὲ τὸ $\frac{1}{7}$· τὸ $\frac{1}{6}$ δὲ τῶν καρυδιῶν ἐπῆρε ἡ Εὐρυνόμη· αἱ τρεῖς δὲ Χάριτες ἔλαβον 120· αἱ δὲ Μοῦσαι ἔλαβαν ἐννέα ἐπὶ ἐννέα· ἔμειναν δὲ ὑπόλοιπον 7 τὰ ὁποῖα βλέπεις νὰ κρέμωνται εἰς τοὺς ἀκραίους κλάδους. (1680).

8. Ἄλλο. (19)

Ἀπὸ τὰ Γάδειρα πρὸς τὸ ἑπτάλοφον ἄστυ, διανύει τις τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὁδοῦ μέχρι τῆς ὄχθης τοῦ ποταμοῦ Βαίτιος, ἡ ὁποία βρίθει ἀπὸ κοπάδια·

Ἀπὸ ἐκεῖ τὸ $\frac{1}{5}$ μέχρι τῆς φωκικῆς χώρας τοῦ Πυλάδου· Ταύρη εἶναι τὸ ὄνομά της λόγῳ τοῦ πλούτου εἰς ταύρους. Ἐκεῖθεν δὲ διὰ νὰ φθάσῃ κανεὶς ἕως τὴν κορυφὴν τῶν Πυρηναίων εἶναι $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{1}{120}$ τῆς ὁδοῦ.

Ἀπὸ τὰ Πυρηναῖα δὲ μέχρι τῶν ὑψικορύφων Ἄλπεων $\frac{1}{4}$· Ἀπὸ ἐδῶ πάλιν, ἀρχομένης τῆς Αὐσονίας περιοχῆς, μέχρις ὅτου φανῇ ὁ ποταμὸς Ἠριδανὸς μὲ τὰ ἤλεκτρα, τὸ $\frac{1}{12}$.

Ὢ μακάριος, ἐγώ, ὅστις διήνυσα δύο χιλιάδες στάδια καὶ 500 ἀκόμη, ἐρχόμενος ἀπὸ ἐκεῖ· διότι ἐφάνη ὁ ποθητὸς σκοπός, ἡ ἀκρόπολις τῆς Ταρπείας. (15.000).

9. (20)

Τῆς ὀξυδερκοῦς Δίκης ἀπεμάκρυνα τὸν ἱερὸν πέπλον, διὰ νὰ σὲ προσβλέπω, πανδαμάτωρ χρυσέ, διότι οὐδὲν ἔχω· διότι παρὰ τοὺς δυσμενεῖς οἰωνοὺς

ἥμισυ δ' αὖ τρίτατόν τε καὶ ὄγδοον, ὦ πολύμορφοι
ἀνθρώπων Κῆρες, ἐχθρὸν ἔχοντα βλέπω.

ι. ἄλλο.

Πέμπτον μοι κλήρου, παῖ, λάμβανε· δωδέκατον δὲ
δέξο, δάμαρ· πίσυρες δ' υἱέος οἰχομένου
παῖδες, ἀδελφειοί τε δύω καὶ ἀγάστονε μῆτερ,
ἑνδεκάτην κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
αὐτάρ, ἀνεψιοί, δύο καὶ δέκα δέχθε τάλαντα,
Εὔβουλος δ' ἐχέτω πέντε τάλαντα φίλος.
πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίην καὶ ἄποινα
μισθὸν ὑπηρεσίης τοῖσδε δίδωμι τάδε·
ὧδε λαμβανέτωσαν· 'Ονήσιμος εἰκοσίπεντε
μνᾶς ἐχέτω· Δοὸς δ' εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω·
πεντήκοντα Σύρος, Συνετὴ δέκα, Τίμιος ὀκτώ·
ἑπτὰ δὲ μνᾶς Συνετῷ παιδὶ δίδωμι Σύρου.
ἐκ δὲ τριηκόντων κοσμήσατε σῆμα ταλάντων,
ῥέζετε δ' Οὐδαίῳ Ζανὶ θυηπολίην.
δισσῶν ἐς δὲ πυρὴν καὶ ἄλφιτα καὶ τελαμῶνας·
εἰκαίην δοιῶν σῶμα χάριν λαβέτω.

ια. ἄλλο.

'Ηέλιος μήνη τε καὶ ἀμφιθέοντος ἀλῆται
ζωοφόρου τοίην τοι ἐπεκλώσαντο γενέθλην·
ἕκτην μὲν βιότοιο φίλη παρὰ μητέρι μεῖναι
ὀρφανόν, ὀγδοάτην δὲ μετ' ἀντιβίοισιν ἀνάγκῃ
θητεύειν· νόστον δὲ γυναῖκά τε παῖδα τ' ἐπ' αὐτῇ
τηλύγετον δώσουσι θεοὶ τριτάτῃ ἐπὶ μοίρῃ·
δὴ τότε σοι Σκυθικοῖσιν ὑπ' ἔγχεσι παῖς τε δάμαρ τε
ὄλλυνται· σοὶ δὲ τοῖσιν ἐπάλλιστα † δάκρυα χεύσας,
ἑπτὰ καὶ εἴκοσ' ἔτεσσι βίου ποτὶ τέρμα περήσεις.

ιβ. ἄλλο.

Τύμβος ἐγώ, κεύθω δὲ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,
τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
πέμπτον ἐν ἠιθέοις, τρίτατον δ' ἐνὶ παρθενικῇσιν,
τρεῖς δέ μοι ἀρτιγάμους δῶκε Φιλίννα κόρας.
λοιποὶ δ' ἠελίοιο πανάμμοροι ἠδὲ καὶ αὐδῆς
τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς 'Αχέροντα πέσον.

ἔδωκα εἰς τοὺς φίλους ματαίως 40 τάλαντα· $\frac{1}{2}$ δὲ πάλιν καὶ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{8}$, ὦ πολύμορφοι δυστυχισμένοι ἄνθρωποι βλέπω νὰ τὰ ἔχῃ ὁ ἐχθρός μου. (960)

10. Ἄλλο. (21)

Παιδί, λάβε ἀπὸ τὴν περιουσίαν μου τὸ $\frac{1}{5}$· τὸ $\frac{1}{12}$ δὲ δέξου, σύ, ὦ σύζυγος· τὰ τέσσαρα δὲ παιδιὰ τοῦ ἀποθανόντος υἱοῦ, οἱ δυὸ ἀδελφοὶ καὶ σὺ στενάζουσα μητέρα, ἂς λάβῃ καθεὶς τὸ $\frac{1}{11}$ τῆς περιουσίας· οἱ δὲ ἀνεψιοὶ ἂς λάβουν 12 τάλαντα· ὁ φίλος δὲ Εὔβουλος ἂς λάβῃ 5 τάλαντα. Ἐλευθερίαν καὶ λύτρα καθορίζω εἰς τοὺς πιστοτάτους ὑπηρέτας, διὰ ἀμοιβὴν τῶν ὑπηρεσιῶν των, τὰ ἑξῆς· κατ' αὐτὸν δὲ τὸν τρόπον ἂς τὰ λάβουν· ὁ Ὀνήσιμος ἂς λάβῃ 25 μνᾶς, ὁ Δᾶος 20 μνᾶς, ὁ Σύρος 50, ἡ Συνετὴ 10, ὁ Τίβιος 8· Εἰς τὸν Συνετὸν δὲ τὸν υἱὸν τοῦ Σύρου, δίδω 7 μνᾶς· νὰ ἐξοδεύσετε δὲ 30 τάλαντα διὰ τὸν τάφον μου· θυσιάσατε δὲ καὶ εἰς τὸν ὑποχθόνιον Δία· 2 (τάλαντα) διὰ τὴν πυρὰν καὶ τὴν τροφὴν καὶ τοὺς ἱμάντας· δύο δὲ ἀκόμη ἂς εἶναι διὰ τὴν διακόσμησιν τοῦ σώματος. (τάλαντον = 60 μναῖ) (660).

11. Ἄλλο. (22)

Ἥλιος, καὶ σελήνη καὶ περιφερόμενοι περὶ τὸν ζωδιακὸν κύκλον πλανῆται τοιαύτην μοῖραν σοῦ ἔκλωσαν κατὰ τὴν γέννησίν σου· τὸ $\frac{1}{6}$ μὲν τῆς ζωῆς νὰ μείνῃς κοντὰ εἰς τὴν ἀγαπητήν μητέρα σου, ὀρφανὸς πατρός· τὸ $\frac{1}{8}$ δὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐργάζεσαι ὡς δοῦλος εἰς τοὺς ἐχθρούς, ἔπειτα οἱ θεοὶ θὰ σοῦ χαρίσουν κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ζωῆς σου ἐπαναπατρισμόν, γυναῖκα καὶ ἀργογεννημένο (ἀκμάζον) παιδί· ἔπειτα δὲ θὰ σοῦ ἀποθάνουν ἀπὸ Σκυθικὰ βέλη τὸ παιδὶ καὶ ἡ γυναῖκα σου· σὺ δὲ χύσας δάκρυα διὰ τὸν πόνον μετὰ 27 ἔτη θὰ φθάσῃς εἰς τὸ τέρμα τοῦ βίου. (72).

12. Ἄλλο. (23)

Εἶμαι τύμβος· ἐγκλείω δὲ τὰ βασανισμένα παιδιὰ τῆς Φιλίννης, τὰ ὁποῖα ἦλθαν ἀπερισκέπως εἰς τὸν κόσμον· τὸ $\frac{1}{5}$ ἦσαν νέοι, $\frac{1}{3}$ δὲ νεάνιδες, 3 δὲ νεονύμφους κόρας μοῦ ἔδωκε ἡ Φίλιννα· οἱ λοιποὶ δὲ 4, πρὶν ἀκόμη ἴδουν τὸ φῶς τοῦ ἡλίου καὶ μάθουν νὰ ὁμιλοῦν, ἀπὸ τὸν κόλπον τῆς μητρός των ἔπεσαν εἰς τὸν Ἅδην. (15).

ιγ. ἄλλο.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἆ μέγα θαῦμα,
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
δωδεκάτην δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει·
αἴ αἴ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
τοῦδε καὶ ἧ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

ιδ ἄλλο.

Παντὸς ὅσου βεβίωκε χρόνου, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Δημοχάρης βεβίωκε, νεηνίσκος δὲ τὸ πέμπτον,
τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας· πολιὸν δ' ὅτ' ἀφίκετο γῆρας,
ἔζησεν λοιπὰ τρισκαίδεκα γήραος οὐδῷ.

ιε. ἄλλο.

Οἷον ἀδελφειός με βιήσατο, πέντε τάλαντα
οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος·
ἑπτὰ κασιγνήτοιο τόδ' ἑνδεκάτων πολύδακρυς
πέμπτον ἔχω μοίρης· Ζεῦ, βαθὺν ὕπνον ἔχεις.

ις. ἄλλο.

Εἶπε κυβερνητῆρι πλατὺν πόρον Ἀδριακοῖο
τέμνων νηί· ἁλὸς πόσα λείπεται εἴσετι μέτρα;
τόνδ' ἀπαμείβετο· ναῦτα, μέσον Κριοῖο μετώπου
Κρηταίου Σικελῆς τε Πελωρίδος ἑξάκι μέτρα
χίλια· δοιῶν δ' αὖτε παροιχομένοιο δρόμοιο
πέμπτων διπλάσιον Σικελὴν ἐπὶ πορθμίδα λείπει.

⟨ιζ⟩.

Τῶν πισύρων κρουνῶν ὁ μὲν ἤματι πλῆσεν ἅπασαν
δεξαμενήν, δύο δ' οὗτος ὁ δ' ἐν τρίσιν ἤμασιν οὗτος,
τέτρατος ἐν τετόρεσσι· πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

13. Ἄλλο. (24)

Εἰς αὐτὸν ἐδῶ τὸν τάφον κεῖται ὁ Διόφαντος· τί θαυμαστὸς τάφος· καὶ δι' ἀριθμητικῆς τέχνης μᾶς λέγει ὁ τάφος τὴν ἡλικίαν του. Τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ζωῆς του ἐχάρισεν ὁ θεὸς νὰ εἶναι παιδί· τὸ $\frac{1}{12}$ δὲ μετὰ τοῦτο νὰ βγάλη τρίχες παρὰ τὰ μῆλα (νεανίας)· μετὰ τὸ ἑπόμενον δὲ $\frac{1}{7}$ ἐνυμφεύθη, πέντε δὲ ἔτη μετὰ τὸν γάμον τοῦ ἐχάρισε υἱόν· ἀλλοίμονον, ἀργογεννημένο, ἀτυχὲς παιδί· εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρὸς ὅταν ἔφθασε, ἀφοῦ ἀπέθανε, κρῦον πτῶμα ἐκάη· παρηγορῶν δὲ τὸ πένθος του ἀπὸ τότε ἐπὶ τέσσαρα ἔτη μὲ τὴν σοφίαν τῶν ἀριθμῶν, οὕτω ἐτερμάτισε τὸν βίον (84).

14. Ἄλλο. (25)

Ὁ Δημοχάρης τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ζωῆς του ἦτο παιδί, νεανίσκος δὲ τὸ $\frac{1}{5}$, τὸ $\frac{1}{3}$ ἀνήρ· ὅταν δὲ ἐγήρασε μὲ ἄσπρα πλέον μαλλιὰ ἔζησε τὸ ὑπόλοιπον τῆς ζωῆς του 13 χρόνια (60).

15. Ἄλλο. (26)

Πόσον μὲ ἠπάτησε ὁ ἀδελφός μου, διαμοιράσας ἀνοσίως τὰ 5 τάλαντα τῆς πατρικῆς κληρονομίας· ἀπὸ τὰ $\frac{7}{11}$ τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ὁ ἀδελφός μου· ἐγὼ κλαίων ἔλαβα τὸ $\frac{1}{5}$· Ζεῦ, ἔχεις βαθὺν ὕπνον. $\left(4\,\frac{27}{62},\ \frac{35}{62}\right)$.

16. Ἄλλο. (27)

Εἶπε εἰς τὸν Κυβερνήτην πλοίου πλέοντος εἰς τὸ εὐρὺ Ἀδριατικὸν πέλαγος· «πόσα μέτρα εἰς τὸ πέλαγος ὑπολείπονται ἀκόμη νὰ διανύσωμεν; αὐτὸς δὲ ἀπήντησε· Ναῦτα, ἀπὸ τὸ μέτωπον τοῦ Κριοῦ τῆς Κρήτης, μέχρι τῆς Πελωρίδος τῆς Σικελίας εἶναι 6000 στάδια· μᾶς λείπουν ἀκόμη δύο φορὰς τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ διανυθέντος δρόμου διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ στενὸν τῆς Σικελίας. (ὑπολείπονται 2666 $\frac{2}{3}$ στάδια).

17. Ἄλλο. (28)

Ἐκ τῶν τεσσάρων κρουνῶν ὁ μὲν εἷς πληροῖ τὴν δεξαμενὴν εἰς μίαν ἡμέραν, ὁ ἄλλος δὲ εἰς δύο, ὁ ἄλλος εἰς τρεῖς καὶ ὁ τέταρτος εἰς τέσσαρας. Εἰς πόσον χρόνον πληροῦν τὴν δεξαμενήν, ὅταν ῥέουν ὅλοι ὁμοῦ; (12/25 ἡμέρας).

ιη. ἄλλο.

Ἴγέ με, καὶ πισύρεσσιν ἐνιπλήσω παρεοῦσαν
δεξαμενὴν ὥραις κρουνὸς ἅλις προρέων·
δεξιτερὸς δ' ἄρ' ἐμεῖο τόσαις ἀπολείπεται ὥραις
ὄφρα μιν ἐμπλήσει, δὶς δὲ τόσαις ὁ τρίτος·
εἰ δ' ἄμφω σὺν ἐμοὶ προχέειν ῥόον ἐσμὸν ἀνώγοις,
εἰν ὀλίγῃ μοίρῃ πλήσομεν ἠματίῃ.

κ. ἄλλο.

Κύκλωψ ἐγὼ † Πολύφημος ὁ χάλκεος· οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
τεῦξέ τις ὀφθαλμὸν καὶ στόμα καὶ παλάμην
κρουνοῖς συζεύξας· στάζοντι δὲ πάμπαν ἔοικεν
ἠδ' ἔτι καὶ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ στόματος·
κρουνῶν δ' οὔ τις ἄτακτος· ὁ μὲν παλάμης τρισὶ μούνοις
ἤμασιν ἐμπλήσει δεξαμενὴν προρέων,
ἠμάτιος γλήνης· στόμα δ' ἤματος ἐν δύο πέμπτοις·
τίς κ' ἐνέποι τρισσοῖς ἶσα θέοντα χρόνον;

κα. ἄλλο.

Ὡς ἀγαθὸν κρητῆρι θεοὶ κερόωσι ῥέεθρον
οἵδε δύω ποταμοὶ καὶ Βρομίοιο χάρις·
ἶσος δ' οὐ πάντεσσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἷος
Νεῖλος μὲν προρέων ἠμάτιος κορέσει,
τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀπερεύγεται· ἐκ δ' ἄρα Βάκχου
θυρσὸς ἐνὶ τρισσοῖς ἤμασιν οἶνον ἱείς·
σὸν δὲ κέρας, Ἀχελῷε, δύ' ἤμασιν· ἣν δ' ἅμα πάντες
ῥεῖτε καὶ εἰς ὥραις πλήσετε μὴν ὀλίγαις.

κβ. ἄλλο.

Ὦ γύναι, ὡς πενίης ἐπελήσαο, ἥδ' ἐπίκειται
αἰὲν ἀναγκαίῃ κέντρα φέρουσα πόνων.
μνᾶν ἐρίων νήθεσκες ἐν ἤματι, πρεσβυτέρη δὲ
θυγατέρων καὶ μνᾶν καὶ τρίτον εἷλκε κρόκης·
ὁπλοτέρη δὲ μιῆς φέρεν ἥμισυ. νῦν δ' ἅμα πάσαις
δόρπον ἐφοπλίζεις μνᾶν ἐρύσασα μόνον.

18. Ἄλλο. (29)

Εἶμαι κρουνὸς μὲ πολὺ ὕδωρ καὶ πληρῶ αὐτὴν ἐδῶ τὴν δεξαμενὴν εἰς 4 ὥρας. Ὁ δεξιὸς κρουνὸς μοῦ ὑπολείπεται 4 ὥρας διὰ νὰ πληρώσῃ τὴν δεξαμενήν· τὸ διπλάσιον δὲ τούτου ὑπολείπεται ὁ τρίτος. Ἐὰν δὲ καὶ οἱ δύο ἐκρέουν συγχρόνως μὲ ἐμὲ χρειαζόμεθα ὀλίγον μέρος τῆς ἡμέρας διὰ νὰ πληρώσωμεν αὐτήν. $\left(2\ \frac{2}{11}\right.$ ὥρας$\left.\right)$.

20. Ἄλλο. (30)

Ἰδοὺ ἐγὼ ὁ χαλκοῦς Κύκλωψ Πολύφημος· μὲ ποίαν τέχνην ἔχω κρουνοὺς εἰς τὸν ὀφθαλμόν, τὸ στόμα καὶ τὴν παλάμην, καὶ ὁμοιάζει ὅτι ἐκρέῃ ὕδωρ ἀπὸ ὅλον τὸ σῶμα ἐν ᾧ φαίνεται ὅτι ἐκρέῃ ἀπὸ τὸ στόμα.

Κανεὶς δὲ κρουνὸς δὲν ἐκρέῃ χωρὶς τάξιν· ὁ μὲν ἐκ τῆς παλάμης πληροῖ τὴν δεξαμενὴν εἰς τρεῖς μόνον ἡμέρας· ὁ τοῦ ὀφθαλμοῦ χρειάζεται μίαν· ὁ τοῦ στόματος δὲ δύο πέμπτα τῆς ἡμέρας. Εἰς πόσον χρόνον πληροῦν τὴν δεξαμενὴν ὅταν ῥέουν καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως; $\left(\frac{6}{23}\right)$.

21. Ἄλλο. (31)

Πόσον χαριτωμένα εἶναι, ἡ ἀνάμιξις τοῦ ταχέως ἐκρεομένου ὕδατος αὐτῶν τῶν δύο κρουνῶν καὶ τὸ ἄγαλμα τοῦ Βρομίου. Δὲν ἐκρέουν ὅμως τὸ αὐτὸ ποσὸν ὕδατος· ἀλλὰ ὁ μὲν κρουνὸς Νεῖλος πληροῖ μόνος τὴν δεξαμενὴν εἰς μίαν ἡμέραν, διότι τόσον ὕδωρ ἐκρέει. Ὁ δὲ κρουνὸς Βάκχος πληροῖ αὐτὴν μόνος εἰς τρεῖς ἡμέρας. Σὺ δὲ Ἀχελῷε πληροῖς αὐτὴν εἰς δύο. Ἐὰν ὅμως ῥέετε συγχρόνως τὴν πληροῖτε εἰς ὀλίγας ὥρας. $\left(\frac{6}{11}\right.$ ἡμέρας$\left.\right)$.

22. Ἄλλο. (32)

Ὦ γυναῖκα, πῶς ἐλησμόνησες τὴν φτώχεια· αὐτὴ ὅμως σὲ πιέζει πάντοτε κεντρίζουσα μὲ πόνους.

Ἄλλοτε ἔκλωθες μίαν μνᾶν ἐρίων τὴν ἡμέραν· ἡ πρεσβυτέρα δὲ τῶν θυγατέρων ἔκλωθε ὑφάδι μίαν μνᾶν καὶ $\frac{1}{3}$· ἡ νεωτέρα δὲ ἔκλωθε $\frac{1}{2}$ τῆς μνᾶς· τώρα ὅμως ὅλαι μαζὶ κερδίζετε τὸ δεῖπνον κλώθουσαι μόνον μίαν μνᾶν. $\left(\frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{3}{17}\right)$.

⟨ κγ ⟩.

Οἵδε λοετροχόοι τρεῖς ἕσταμεν ἐνθάδ' Ἔρωτες
καλλιρόου πέμποντες ἐπ' εὐρίποιο λοετρά.
δεξιτερός μὲν ἔγωγε τανυπτερύγων ἀπὸ ταρσῶν
ἤματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἔνι τόνδε κορέσσω.
λαιὸς δ' αὖ πισύρεσσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις,
ἐκ δ' ὁ μέσος τόξοιο κατ' ἤματος αὐτὸ τὸ μέσσον.
φράζεο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
ἐκ πτερύγων τόξου τε καὶ ἀμφιφορῆος ἱέντες.

⟨ κδ ⟩.

Πλινθουργοί, μάλα τοῦτον ἐπείγομαι οἶκον ἐγεῖραι,
ἦμαρ δ' ἀννέφελον τόδε σήμερον· οὐδ' ἔτι πολλῶν
χρηίζω, πᾶσαν δὲ τριηκοσίῃσι δέουσαν
πλίνθον ἔχω· σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔτευχες,
παῖς δέ τοι ἐκ καμάτοιο διηκοσίαις ἀπέληγεν,
γαμβρὸς δ' αὖ τόσσῃσι καί εἰσέτι πεντήκοντα.
τρισσαῖς συζυγίαις πόσσαις τόδε τεύχεται ὥραις ;

κε. ἄλλο.

Δάκρυ παραστάξαντες ἀμείβετε. Οἵδε γὰρ ἡμεῖς,
οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Ἀντιόχου
δαιτυμόνας, οἷσιν θεὸς δαιτός τε τάφου τε
τόνδ' ἔπορεν χῶρον, τέσσαρες ἐκ Τεγέης
κείμεθα, Μεσσήνης δὲ δυώδεκα, ἐκ δέ τε πέντε
Ἄργεος, ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων·
αὐτὸς τ' Ἀντίοχος, πέμπτου δέ τε πέμπτον ὄλοντο
Κεκροπίδαι. σύ δ' Ὕλαν κλαῖε, Κόρινθε, μόνον.

κϛ. ἄλλο.

Νικαρέτη παίζουσα σὺν ἡλικιώτισι πέντε,
ὧν εἶχεν καρύων Κλεῖτ' ἔπορεν τὸ τρίτον,
καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον, Ἀριστοδίκῃ δὲ τὸ πέμπτον,
εἰκοστὸν Θεανοῖ καὶ πάλι δωδέκατον,
εἰκοστὸν τέτρατον δὲ Φιλιννίδι, καὶ περιῆν δὲ
πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτῃ κάρυα.

23. (33)

Εἴμεθα τρεῖς Ἔρωτες ὡρισμένοι διὰ τὴν ἐκροὴν ὕδατος καὶ ἐκρέομεν καλλίροον ὕδωρ εἰς τὴν δεξαμενήν.

Ἐγὼ μὲν ὁ δεξιὸς ἀπὸ τὰ ἄκρα τῶν ἀνοικτῶν πτερύγων πληρῶ αὐτὴν εἰς $\frac{1}{6}$ τῆς ἡμέρας· ὁ πρὸς τὰ ἀριστερά μου εἰς 4 ὥρας ἀπὸ τὸν ἀμφορέα· ὁ μεσαῖος εἰς $\frac{1}{2}$ ἡμέρας ἀπὸ τὸ τόξον. Λέγε, πόσον ὀλίγος εἶναι ὁ χρόνος διὰ νὰ τὴν πληρώσωμεν καὶ οἱ τρεῖς τὴν δεξαμενήν, ἀπὸ τὰς πτέρυγας, ἀπὸ τὸν ἀμφορέα καὶ ἀπὸ τὸ τόξον ; $\left(1 \frac{1}{11}\right.$ ὥρας$\left.\right)$.

24. (34)

Πλινθουργοί, ἐπείγομαι νὰ ἀνεγείρω τοῦτον τὸν οἶκον, ἡ σημερινὴ ἡμέρα εἶναι ἀνέφελος, καὶ δὲν χρειάζομαι ἀκόμη πολλὰ τοῦβλα, μόνον 300 λείπουν. Σὺ δὲ μόνον τόσα κατεσκεύαζες εἰς μίαν ἡμέραν· καὶ ὁ υἱός σου 200· ὁ δὲ γαμβρός σου 250. Ἐὰν ἐργάζεσθε συγχρόνως εἰς πόσας ὥρας θὰ κατασκευάσετε αὐτά ; $\left(4 \frac{4}{5}\right.$ ὥρας$\left.\right)$.

Ἄλλο. 25. (35)

Ἀφῆστε τὰ δάκρυα καὶ ἀπαντῆστε· διότι ἡμεῖς οἱ συνδαιτημόνες εἴμεθα ἐδῶ χαμένοι, τοὺς ὁποίους κατεπλάκωσε ἡ κατακρημνισθεῖσα οἰκία τοῦ Ἀντιόχου, τὴν ὁποίαν ὁ θεὸς μᾶς ἔδωσε ὡς χῶρον φαγητοῦ καὶ τάφου, ἤτοι 4 ἐκ Τεγέας, 12 ἐκ Μεσσήνης, 5 ἀπὸ τὸ Ἄργος, τὸ ἥμισυ τῶν συνδαιτημόνων ἐκ Σπάρτης καὶ αὐτὸς ὁ Ἀντίοχος· τὸ πέμπτον δὲ τοῦ πέμπτου ἐχάθησαν Ἀθηναῖοι· σὺ δὲ Κόρινθε κλαῖε μόνον διὰ τὸν Ὕλαν. (50)

Ἄλλο. 26. (36)

Ὅτε ἡ Νικαρέτη ἔπαιζε μὲ τὰς πέντε φίλας της ἔδωσε ἀπὸ τὰ καρύδια της εἰς τὴν Κλείτην τὸ ἓν τρίτον καὶ εἰς τὴν Σαπφὼ τὸ ἓν τέταρτον, εἰς τὴν Ἀριστοδίκην δὲ τὸ ἓν πέμπτον, τὸ εἰκοστὸν εἰς τὴν Θεανὼ καὶ πάλιν εἰς αὐτὴν τὸ ἓν δωδέκατον, εἰς δὲ τὴν Φιλιννίδα τὸ ἓν εἰκοστὸν τέταρτον· καὶ ἀπέμειναν εἰς τὴν Νικαρέτην πενῆντα καρύδια. (1200)

⟨κζ⟩.

Γνωμονικῶν Διόδωρε μέγα κλέος, εἰπέ μοι ὥρην.
Ἡνίκ' ἀπ' ἀντολίης πόλον ἥλατο χρύσεα κύκλα
ἠελίου, τοῦδ' ἤτοι ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
τετράκι τόσσον ἔπειτα μεθ' ἑσπερίην ἅλα λείπει.

⟨κθ.⟩

Ζεῦ μάκαρ, ἦ ῥά τοι ἦ ῥα τάδ' εὔαδεν, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μαραίνεται ὄμμα σελήνης
ἐκ μερόπων, ἴδον αὐτός· ἔην δ' ἔτι νυκτὸς ἐπ' ἠῶ
δὶς τόσον ὅσσα δύ' ἕκτα καὶ ἕβδομον οἰχομένοιο.

λ. ἄλλο.

Ἀπλανέων ἄστρων παρόδους τ' ἐπὶ τοῖσιν ἀλητῶν
εἰπέ μοι, ἡνίκ' ἐμὴ χθιζὸν ἔτικτε δάμαρ·
ἦμαρ ἔην ὅσσον τε δὶς ἕβδομον ἀντολίηθεν
ἑξάκι τόσσον ἔην ἑσπερίην ἐς ἅλα.

λβ. ἄλλο.

Ἔγρεσθ', ἠριγένεια παρέδραμε· πέμπτον, ἔριθοι,
λειπομένης τρισσῶν οἴχεται ὀγδοάτων.

λγ. ἄλλο.

Σύρτιος ἐν τενάγεσσι πατὴρ θάνεν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
πέντε τάλαντα φέρων ἤλυθε ναυτιλίης
οὗτος ἀδελφειῶν προφερέστατος· ἦ γὰρ ἔμοιγε
δῶκεν ἑῆς μοίρης διπλάσιον τριτάτων
δοιῶν, ἡμετέρης δὲ δύ' ὄγδοα μητέρι μοίρης
ὤπασεν, οὐδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

λϛ. ἄλλο.

Ἁ βάσις ἂν πατέω σὺν ἐμοὶ βάρος ἀλίκον ἕλκει. —
Χ' ἁ κρηπὶς σὺν ἐμοὶ τόσσα τάλαντα φέρει. —
Ἀλλ' ἐγὼ οἷος ἅπαξ τὰν σὰν βάσιν ἐς δὶς ἀνέλκω. —
Κἠγὼ μοῦνος ἐὼν σὰν βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

27. (37)

Περίφημε ὡρολογοποιὲ Διόδωρε, λέγε μου τί ὥρα εἶναι, ἀφ' ὅτου ἀπὸ τὴν Ἀνατολὴν ἐσηκώθησαν οἱ χρυσοῖ τροχοὶ τοῦ ἅρματος τοῦ ἡλίου. Ἐὰν λάβῃς τὰ τρία πέμπτα τοῦ διανυθέντος δρόμου, τετράκις τόσον λείπει μέχρι τῆς Δύσεως. $\left(3\ \frac{9}{17}\right.$ ὧραι$\left.\right)$.

29. (38)

Μακάριε Ζεῦ, σοῦ ἀρέσουν τὰ ἔργα, τὰ ὁποῖα παίζουσαι ἔκαμαν αἱ Θεσσαλικαὶ γυναῖκες; Ἡ θέα τῆς Σελήνης ἐξαφανίζεται ἀπὸ τὸ βλέμμα τῶν θνητῶν. Τὸ εἶδα ὁ ἴδιος· ἀπομένει δὲ ἀπὸ τὴν ὥραν αὐτὴν τῆς νυκτὸς μέχρι τὸ πρωΐ δύο φορὰς τὰ δύο ἕκτα καὶ δύο φορὰς τὸ ἓν ἕβδομον τοῦ προηγηθέντος χρόνου. $\left(6\ \frac{6}{41}\right.$ ὧραι ἐπέρασαν$\left.\right)$.

30. Ἄλλο. (39)

Λέγε μου τὴν χθεσινὴν θέσιν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων καὶ τῶν πλανητῶν, ὅταν ἡ γυναίκα μου ἐγέννησε. Λάβε τὰ δύο ἕβδομα ἀπὸ τῆς Ἀνατολῆς, ἓξ φορὰς τόσον λείπει μέχρι τῆς Δύσεως. $\left(4\ \frac{8}{19}\right.$ ὧραι$\left.\right)$.

32. Ἄλλο. (40)

Σηκωθῆτε, ἐξημέρωσε· ἐπέρασε ἤδη τὸ ἓν πέμπτον τῶν τριῶν ὀγδόων τοῦ ὑπολοίπου χρόνου τῆς ἡμέρας. (ὑπολείπονται $11\ \frac{7}{43}$ ὧραι).

33. Ἄλλο. (41)

Εἰς τὰ τενάγη τῆς Σύρτιος ἀπέθανεν ὁ πατήρ· ἀπὸ τὸ ἐμπόριον δὲ αὐτὸ ἀπεκόμισε ὁ μεγαλύτερος ἀδελφὸς πέντε τάλαντα. Ἀπὸ αὐτὰ μοῦ ἔδωσε τὸ διπλάσιον τῶν δύο τρίτων, ἀπὸ ὅ,τι ἔλαβεν ὁ ἴδιος, ἐν ᾧ εἰς τὴν μητέρα μας ἔδωκε τὰ δύο ὄγδοα, ὅσων ἐλάβομεν οἱ δύο μας, καὶ δὲν ἔσφαλλε εἰς τὸ νὰ μοιράσῃ δίκαια. $\left(1\ \frac{5}{7},\ 2\ \frac{2}{7},\ 1\right)$.

36. Ἄλλο. (42)

Α. Ἡ βάσις τὴν ὁποίαν πατῶ καὶ τὸ βάρος μου εἶναι μεγάλα.
Β. Καὶ τὸ ἰδικόν μου βάρος μὲ τὴν βάσιν μου ἔχουν τὸ ἴδιο βάρος.
Α. Ἀλλὰ τὸ βάρος μου εἶναι διπλάσιον τῆς βάσεώς σου.
Β. Καὶ ἐγὼ μόνος μου ζυγίζω τρεῖς φορὰς τὴν βάσιν σου.
(Ἡ πρώτη βάσις x, ὁ πρῶτος ἀνδριὰς 4x, ἡ δευτέρα βάσις 2x, ὁ δεύτερος ἀνδριὰς 3x).

λη. ἄλλο.

Δός μοι δέκα μνᾶς, καὶ τριπλοῦς σοι γίνομαι. —
Κἀγὼ λαβών σου τὰς ἴσας, σοῦ πενταπλοῦς.

λθ. ἄλλο.

Δός μοι δύο μνᾶς, καὶ διπλοῦς σοι γίνομαι.
Κἀγὼ λαβών σου τὰς ἴσας, σοῦ τετραπλοῦς.
Ὅμηρος Ἡσιόδῳ ἐρωτήσαντι πόσων τὸ τῶν Ἑλλήνων
πλῆθος τὸ κατὰ τῆς Ἰλίου στρατεῦσαν·

Ἑπτὰ ἔσαν μαλεροῦ πυρὸς ἐσχάραι· ἐν δὲ ἑκάστη
πεντήκοντ' ὀβελοί, περὶ δὲ κρέα πεντήκοντα·
τρὶς δὲ τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Ἀχαιοί.

Μυριάδες ͵αφοε. ἤγουν χιλιάδες μύριαι πεντα
κισχίλιαι ἑπτακόσιαι πεντήκοντα.

(Εὐκλείδου)

(Anthologia Palatina, Editio stereotypa Tauchnitiana 3, Appendix 26).

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖς·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
'Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ηΰτε κούρη;
εἰ μέτρον ἓν μοὶ δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις'.
Εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίστορ.

38. Ἄλλο. (43)

Δός μου δέκα μνᾶς καὶ γίνομαι τριπλοῦς ἀπὸ σένα.
Καὶ ἐγὼ ἂν λάβω ἀπὸ σὲ τὸ ἴδιο γίνομαι πενταπλοῦς σου. $\left(15 \frac{5}{7},\ 18 \frac{4}{7}\right)$.

39. Ἄλλο. (44)

Δός μου δύο μνᾶς καὶ γίνομαι διπλοῦς σου.
Κι' ἐγὼ ἅμα πάρω δύο ἀπὸ σένα γίνομαι τετραπλοῦς σου. $\left(3 \frac{5}{7},\ 4 \frac{6}{7}\right)$.

(45)

Ὁ Ὅμηρος ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς εἰς τὸν Ἡσίοδον, ὅστις τὸν ἠρώτησε πόσοι ἦσαν οἱ Ἕλληνες οἱ πολιορκήσαντες τὴν Τροίαν·

Ἦσαν ἑπτὰ γιγαντιαῖαι ἑστίαι πυρός, εἰς ἑκάστην δὲ πενῆντα ὀβελοί, εἰς τούτους δὲ πενῆντα σφαχτά· ἐνακόσιοι δὲ Ἕλληνες ἀντιστοιχοῦσαν σὲ κάθε σφαχτό. (315.000). (Ἰλ. Β, 2).

(46)

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιποροῦσαν· ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον ἐστέναζεν ἡ ὄνος. Ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε· Μητέρα γιατὶ θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι ; ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον θὰ ἔφερα διπλάσιον ἀπὸ τὸ βάρος σου· ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα θὰ εἴχομεν ἴσον.

Εἰπὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σάκκων ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας. (5, 7).

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ I.

1.

$y + z = 100$, (1), $y - z = 40$, (2). $y > z$.

Ἔστω $z = x$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $y = x + 40$ καὶ ἐκ τῆς (1) $2x + 40 = 100$, ἐξ ἧς $x = 30 = z$ καὶ $y = 70$.

2.

$y + z = 60$, (1), $y : z = 3$, (2). $y > z$.

Ἔστω $z = x$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $y = 3x$ καὶ ἐκ τῆς (1), $4x = 60$, ἐξ ἧς $x = 15 = z$ καὶ $y = 45$.

3.

$y + z = 80$, (1), $y = 3z + 4$, (2). $y > z$.

Ἔστω $z = x$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $y = 3x + 4$ καὶ ἐκ τῆς (1) $4x + 4 = 80$, ἐξ ἧς $x = 19 = z$ καὶ $y = 61$.

4.

$y = 5z$, (1), $y - z = 20$, (2). $y > z$.

Ἔστω $z = x$. Ἐκ τῆς (1) καὶ κατόπιν ἐκ τῆς (2) εἶναι $4x = 20$, $x = 5 = z$ καὶ $y = 25$.

5.

$$y + z = \alpha, \ (1), \quad \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} = \beta, \ (2).$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z > 0$ πρέπει $\frac{\alpha}{\mu} > \beta > \frac{\alpha}{\nu}$ ἢ $\frac{\alpha}{\mu} < \beta < \frac{\alpha}{\nu}$. Ἔστω $\alpha = 100$, $\beta = 30$, $\mu = 3$, $\nu = 5$. Δι' ἀντικαταστάσεως, λαμβάνει $y + z = 100$, (3), $\frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 30$, (4).

Θέτει $\frac{z}{5} = x$, $z = 5x$ καὶ ἐκ τῆς (4) ἔχει $\frac{y}{3} = 30 - x$, $y = 90 - 3x$.
Καὶ ἐκ τῆς (3), $90 + 2x = 100$, ἐξ ἧς $x = 5$. Θὰ εἶναι ἄρα $z = 25$, $y = 75$.

6.

$$y + z = \alpha,\ (1),\quad \frac{y}{\mu} - \frac{z}{\nu} = \beta,\ (2).$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z > 0$ πρέπει $\beta < \frac{\alpha}{\mu}$. Ἔστω $\alpha = 100$, $\beta = 20$, $\mu = 4$, $\nu = 6$, ὁπότε $y + z = 100$, (3), $\frac{y}{4} - \frac{z}{6} = 20$, (4).

Θέτει $\frac{z}{6} = x$, $z = 6x$ καὶ ἐκ τῆς (4) εἶναι $\frac{y}{4} = x + 20$, $y = 4x + 80$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει $10x + 80 = 100$, ἐξ ἧς $x = 2$. Θὰ εἶναι ἄρα $z = 12$, $y = 88$.

7.

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} = \rho.$$

Ἔστω $\alpha = 20$, $\beta = 100$, $\rho = 3$, ὁπότε $\frac{x - 20}{x - 100} = 3$, $x - 20 = 3x - 300$, $2x = 280$, $x = 140$.

8.

$$\frac{x + \alpha}{x + \beta} = \rho \qquad \alpha > \beta.$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $x > 0$ πρέπει $\frac{\alpha}{\beta} > \rho$.

Ἔστω $\alpha = 100$, $\beta = 20$, $\rho = 3$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $x + 100 = 3x + 60$, ἐξ ἧς $x = 20$.

9.

$$\frac{\alpha - x}{\beta - x} = \rho$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $x > 0$ πρέπει $\frac{\alpha}{\beta} < \rho$.

Ἔστω $\alpha = 100$, $\beta = 20$, $\rho = 6$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $\frac{100 - x}{20 - x} = 6$, $100 - x = 120 - 6x$, $5x = 20$, $x = 4$.

10.

$$\frac{\alpha + x}{\beta - x} = \rho.$$

Ἔστω $\alpha = 20$, $\beta = 100$, $\rho = 4$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $20 + x = 400 - 4x$, $5x = 380$, $x = 76$.

11.

$$\frac{x + \alpha}{x - \beta} = \rho.$$

Ἔστω $\alpha = 20$, $\beta = 100$, $\rho = 3$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $\frac{x + 20}{x - 100} = 3$, $x + 20 = 3x - 300$, $2x = 320$, $x = 160$.

12.

$$\alpha = y_1 + y_2 \ (1), \ y_1 > y_2, \quad \alpha = z_1 + z_2, \ (2), \ z_1 > z_2,$$

$\frac{y_1}{z_2} = \mu$, (3), $\frac{z_1}{y_2} = \nu$, (4).

Ἔστω $\alpha = 100$, $\mu = 2$, $\nu = 3$, $z_2 = x$.

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως $y_1 = 2x$, ἐκ τῆς (1), $y_2 = 100 - 2x$ καὶ ἐκ τῆς (4), $z_1 = 300 - 6x$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν z_1, z_2 εἰς τὴν (2) λαμβάνει $100 = 300 - 5x$, ἐξ ἧς $x = 40$.

13.

$$\alpha = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 = \omega_1 + \omega_2, \ (y_1 > y_2, \ z_1 > z_2, \ \omega_1 > \omega_2)$$

$$\frac{y_1}{z_2} = \varkappa, (1), \quad \frac{z_1}{\omega_2} = \lambda, (2), \quad \frac{\omega_1}{y_2} = \mu, (3).$$

Ἔστω $\alpha = 100$, $\varkappa = 3$, $\lambda = 2$, $\mu = 4$, $\omega_2 = x$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) ἔχει $z_1 = 2x$. Ἐκ τῆς $100 = z_1 + z_2$ εἶναι $z_2 = 100 - 2x$, ἐκ τῆς (1) εἶναι $y_1 = 300 - 6x$, ἐκ τῆς $100 = y_1 + y_2$ εἶναι $100 - 300 + 6x = y_2$ ἢ $y_2 = 6x - 200$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει $\omega_1 = 24x - 800$ καὶ ἐκ τῆς $100 = \omega_1 + \omega_2$ ἔχει $100 = 24x - 800 + x$ ἢ $900 = 25x$, ἐξ ἧς $x = 36 = \omega_2$. Θὰ εἶναι ἄρα $z_1 = 72$, $z_2 = 100 - 72 = 28$, $y_1 = 300 - 216 = 84$, $y_2 = 216 - 200 = 16$, $\omega_1 = 24 . 36 - 800 = 64$.

14.

$\frac{xy}{x+y} = \frac{\mu}{\nu}$. Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $x, y > 0$ πρέπει νὰ εἶναι x ἢ $y > \frac{\mu}{\nu}$.

Ἔστω $y = 12$, $\frac{\mu}{\nu} = 3$, ὁπότε εἶναι $\frac{12x}{x+12} = 3$, $12x = 3(x+12)$, ἐξ ἧς $x = 4$.

15.

$\frac{y+\alpha}{z-\alpha} = \mu$, $\frac{z+\beta}{y-\beta} = \nu$. Λαμβάνει $\alpha = 30$, $\mu = 2$, $\beta = 50$, $\nu = 3$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $y + 30 = 2(z - 30)$, (1), $z + 50 = 3(y - 50)$, (2). Θέτει $z = x + 30$, ὁπότε εκ τῆς (1) εἶναι $y = 2x - 30$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) εἶναι $x + 80 = 3(2x - 80)$, ἐξ ἧς $x = 64$ καὶ $y = 98$, $z = 94$.

16.

$$y + z = \alpha, \quad z + \omega = \beta, \quad \omega + y = \gamma.$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z, \omega > 0$ πρέπει $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > y, z, \omega$, Θέτει $y+z+\omega=x$, (1), $\alpha=20$, $\beta=30$, $\gamma=40$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $\omega=x-20$, $y=x-30$, $z=x-40$ καὶ διὰ προσθέσεως τούτων $y+z+\omega=x=3x-90$, $x=45$, $y=15$, $z=5$, $\omega=25$.

17.

$$y+z+\omega=\alpha,\quad z+\omega+\varphi=\beta,\quad \omega+\varphi+y=\gamma,$$
$$\varphi+y+z=\delta.$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z, \omega, \varphi > 0$ πρέπει

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} > y, z, \omega, \varphi.$$

Θέτει $\alpha=20$, $\beta=22$, $\gamma=24$, $\delta=27$, $y+z+\omega+\varphi=x$, (1). Δι' ἀντικαταστάσεων λαμβάνει $\varphi=x-20$, $y=x-22$, $z=x-24$, $\omega=x-27$. Διὰ προσθέσεως τούτων εἶναι $\varphi+y+z+\omega=x=4x-93$, $x=31$, $y=9$, $z=7$, $\omega=4$, $\varphi=11$.

18.

$y+z=\omega+\alpha$, (1), $z+\omega=y+\beta$, (2), $\omega+y=z+\gamma$, (3).

Θέτει $\alpha=20$, $\beta=30$, $\gamma=40$, $y+z+\omega=2x$.

Ἐκ τῆς (1) διὰ προσθέσεως τοῦ ω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ ἀντικαταστάσεως τοῦ α λαμβάνει $y+z+\omega=2\omega+20=2x$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως τοῦ 20, $2\omega=2x-20$, $\omega=x-10$. Κατὰ τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν ἐκ τῆς (2) εἶναι διὰ προσθέσεως τοῦ y καὶ ἀφαιρέσεως τοῦ 30, $y+z+\omega=2y+30=2x$, $2y=2x-30$, $y=x-15$. Ὁμοίως ἐκ τῆς (3) $y+z+\omega=2z+40=2x$, $2z=2x-40$, $z=x-20$. Καὶ διὰ προσθέσεως εἶναι $y+z+\omega=2x=3x-45$, $x=45$, $y=30$, $z=25$, $\omega=35$.

Ἄλλως.

$y+z=\omega+20$ (1), $z+\omega=y+30$, (2), $\omega+y=z+40$, (3). Ἔστω $\omega=x$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $y+z=x+20$, (4).

Θέτει $z = \frac{20+30}{2} = 25$, καὶ ἐκ τῆς (4) εἶναι $y = x - 5$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ω, y, z εἰς τὴν (3) εἶναι $x + x - 5 = 65$, $x = 35 = \omega$, $y = 30$, $z = 25$.

19.

$y + z + \omega = \varphi + \alpha$, (1), $z + \omega + \varphi = y + \beta$, (2), $\omega + \varphi + y = z + \gamma$, (3), $\varphi + y + z = \omega + \delta$, (4). Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z, \omega, \varphi > o$ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} > \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Θέτει $\alpha = 20$, $\beta = 30$, $\gamma = 40$, $\delta = 50$, $y + z + \omega + \varphi = 2x$, (5) καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $y + z + \omega = \varphi + 20$, $z + \omega + \varphi = y + 30$, $\omega + \varphi + y = z + 40$, $\varphi + y + z = \omega + 50$. Ἐξ ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ τῆς (5) λαμβάνει $2\varphi + 20 = 2x$, $\varphi = x - 10$, $2y + 30 = 2x$, $y = x - 15$, $2z + 40 = 2x$, $z = x - 20$, $2\omega + 50 = 2x$, $\omega = x - 25$. Καὶ διὰ προσθέσεως εἶναι $y + z + \omega + \varphi = 4x - 70$, καὶ ἐκ τῆς (5), $2x = 4x - 70$, ἐξ ἧς $x = 35$. Θὰ εἶναι ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως $y = 20$, $z = 15$, $\omega = 10$, $\varphi = 25$.

Ἄλλως.

Ἔστω $\varphi = x$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) θὰ εἶναι $y + z + \omega = x + 20$. Θέτει $z + \omega = \frac{20+30}{2} = 25$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν εἶναι $y = x - 5$ καὶ ἐπειδὴ $z + \omega + x = y + 30$ καὶ $\omega + x + y = z + 40$ θὰ εἶναι διὰ προσθέσεως τούτων $2\omega + 2x + y + z = y + z + 70$, ἢ $\omega + x = 35$, $\omega = 35 - x$.

Εἶναι δὲ $z + \omega = 25$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ ω λαμβάνεται $z = x - 10$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν σχέσιν $\varphi + y + z = \omega + 50$ τῶν τιμῶν φ, y, z, ω θὰ εἶναι $3x - 15 = 85 - x$, $x = 25 = \varphi$, $y = 30$, $z = 15$, $\omega = 10$.

20.

$$y+z+\omega=100,\ (1),\ \frac{y+z}{\omega}=3,\ (2),\ \frac{z+\omega}{y}=4,\ (3).$$

Ἔστω $\omega=x$, ὁπότε ἐκ τῆς (2) εἶναι $y+z=3x$ καὶ ἐκ τῆς (1), $4x=100$, $x=25=\omega$, $y+z=75$.

Ἐκ τῆς (3) θέτων $y=x$ (ἄλλος x τώρα) λαμβάνει $z+\omega=4x$ καὶ ἐκ τῆς (1) $5x=100$, $x=20=y$. Πάλιν ἐκ τῆς (1) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ y εἶναι $z+\omega=80$, ἐν ᾧ, $\omega=25$, ὁπότε $z=55$.

21.

$$y-z=\frac{\omega}{\lambda},\ (1),\ z-\omega=\frac{y}{\mu},\ (2),\ \omega-\alpha=\frac{z}{\nu},\ (3).$$
$$(y>z>\omega).$$

Περιορισμός. Ὁ συντελεστὴς τοῦ x δι' οὗ ἐκφράζεται ὁ y δέον νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x δι' οὗ ἐκφράζεται ὁ z, διὰ νὰ εἶναι $y, z, \omega > 0$.

Ἐὰν $\omega=x$, ἐκ τῆς (3) εἶναι $z=\nu x-\nu\alpha$ καὶ ἐκ τῆς (1), $y=\frac{x}{\lambda}+z$ ἢ $y=\frac{x}{\lambda}+\nu x-\nu\alpha=\left(\nu+\frac{1}{\lambda}\right)x-\nu\alpha$.

Καὶ εἶναι $\left(\nu+\frac{1}{\lambda}\right)x>\nu x$. Ἐὰν $\omega=x+\alpha$, ὡς λαμβάνεται εἰς τὸ πρόβλημα, θὰ εἶναι ἐκ τῆς (3), $z=\nu x$ καὶ ἐκ τῆς (2), $y=\mu(\nu x-x-\alpha)$ ἢ $y=\mu\nu\chi-\mu\chi-\mu\alpha$, ἢ $y=x(\mu\nu-\mu)-\mu\alpha$. Κατὰ τὸν περιορισμὸν πρέπει ὁ συντελεστὴς τοῦ x δι' οὗ ἐκφράζεται ὁ y, ὁ $(\mu\nu-\mu)$, νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x δι' οὗ ἐκφράζεται ὁ z, δηλ. τοῦ ν, ἤτοι $\mu\nu-\mu>\nu$ ἢ $\mu\nu>\mu+\nu$. Ἐὰν θέσωμεν $\omega=x$ καὶ λύσωμεν τὸ σύστημα θὰ εὕρωμεν $x=\frac{\lambda\cdot\alpha(\mu-1)}{\lambda\mu\nu-(1+\lambda\mu+\lambda\nu)}$ ὅπου $\mu>1$ ἐξ ὑποθέσεως. Διὰ νὰ εἶναι ἑπομένως $\omega=x>0$ καὶ συνεπῶς $z, y>0$ πρέπει $\lambda\mu\nu>1+\lambda\mu+\lambda\nu$ ἢ $\mu\nu>\mu+\nu+\frac{1}{\lambda}$ ἢ κατὰ μείζονα λόγον $\mu\nu>\mu+\nu$.

Θέτει $\lambda = \mu = \nu = 3$, $\alpha = 10$, ὁπότε τὸ σύστημα γίνεται $y - z = \frac{\omega}{3}$, (4), $z - \omega = \frac{y}{3}$, (5), $\omega - 10 = \frac{z}{3}$, (6).

Ἔστω $\omega = x + 10$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει $z = 3x$ (ἢ ἐάν, λέγει, $z = 3x$ θὰ εἶναι ἐκ τῆς (3), $\omega = x + 10$). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνει $6x - 30 = y$ καὶ ἐκ τῆς (1), $6x - 30 - 3x = \frac{x + 10}{3}$, ἐξ ἧς $x = 12\frac{1}{2}$, ὁπότε $z = 37\frac{1}{2}$, $y = 45$.

Ἄλλως.

Θεωροῦμεν πάλιν τὰς ἐξισώσεις (4, 5, 6) καὶ $\omega = x + 10$. Ἐκ τῆς (6) εἶναι $z = 3x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι $y = 3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (5), $z = x + 10 + \frac{1}{3}\left(3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{\cdot}x + 11\frac{1}{9}$. Καὶ ἐπειδὴ $z = 3x$ θὰ εἶναι $3x = \frac{19x}{9} + \frac{100}{9}$ ἢ $\left(1 - \frac{1}{9}\right)x = 11\frac{1}{9}$. Καὶ διὰ πολ)σμοῦ ἐπὶ 9 εἶναι $8x = 100$, $x = 12\frac{1}{2}$.

Σημ. Ὁ περιορισμὸς εἶναι ὁ αὐτός, ὅπως προηγουμένως. Μὲ τὴν ἑξῆς ἀνάγνωσιν: ὁ συντελεστὴς τοῦ x τοῦ μεσαίου ἀριθμοῦ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ. Ἤτοι ἐκ τῶν σχέσεων $z = \nu x - \nu\alpha$ καὶ $y = \left(\nu + \frac{1}{\lambda}\right)x - \nu\alpha$ εἶναι $\nu < \left(\nu + \frac{1}{\lambda}\right)$, διὰ νὰ εἶναι $\omega, z, y > 0$.

22.

$$y - \frac{y}{\lambda} + \frac{\omega}{\nu} = z - \frac{z}{\mu} + \frac{y}{\lambda} = \omega - \frac{\omega}{\nu} + \frac{z}{\mu}.$$

Θέτει $\lambda = 3$, $\mu = 4$, $\nu = 5$, ὁπότε τὸ σύστημα γίνεται

$$y - \frac{y}{3} + \frac{\omega}{5} = z - \frac{z}{4} + \frac{y}{3} = \omega - \frac{\omega}{5} + \frac{z}{4}.$$

Λαμβάνει $y = 3x$ καὶ $z = 4$. Ἡ μεσαία παράστασις γίνεται δι' ἀντικαταστάσεως $x + 3$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς πρώτης εἶναι $\omega = 15 - 5x$, καὶ ἐκ τῆς $x + 3$ καὶ τῆς τρίτης δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $x + 3 = 15 - 5x - \frac{15 - x}{5} + 1$, ἢ $x + 3 = 13 - 4x$, $x = 2$, $y = 6$, $z = 4$, $\omega = 5$.

23.

$$y - \frac{y}{\varkappa} + \frac{\varphi}{\nu} = z - \frac{z}{\lambda} + \frac{y}{\varkappa} = \omega - \frac{\omega}{\mu} + \frac{z}{\lambda} = \varphi - \frac{\varphi}{\nu} + \frac{\omega}{\mu}.$$

Θέτει $\varkappa = 3, \lambda = 4, \mu = 5, \nu = 6$, ὁπότε τὸ σύστημα γίνεται

$$y - \frac{y}{3} + \frac{\varphi}{6} = z - \frac{z}{4} + \frac{y}{3} = \omega - \frac{\omega}{5} + \frac{z}{4} = \varphi - \frac{\varphi}{6} + \frac{\omega}{5}.$$

Λαμβάνει $y = 3x$, $z = 4$. Ἡ δευτέρα παράστασις γίνεται $x + 3$. Ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $\varphi = 18 - 6x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν τετάρτην ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν δευτέραν εἶναι $x + 3 = 18 - 6x - \frac{18 - 6x}{6} + \frac{\omega}{5}$, ἐξ ἧς $\omega = 30x - 60$. Δι' ἀντικαταστάσεως τέλος εἰς τὴν τρίτην ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν δευτέραν λαμβάνει $30x - 60 - \frac{30x - 60}{5} + 1 = x + 3$, ἐξ ἧς $x = \frac{50}{23}$. Ἑπομένως θὰ εἶναι $y = \frac{150}{23}$, $z = 4$, $\omega = 30.\frac{50}{23} - 60 = \frac{120}{23}$, $\varphi = 18 - 6.\frac{50}{23} = \frac{114}{23}$. Καὶ ἂν λάβωμεν τὰ 23πλάσια τούτων θὰ ἔχωμεν $y = 150$, $z = 92$, $\omega = 120$, $\varphi = 114$.

24.

$$y + \frac{z + \omega}{\lambda} = z + \frac{y + \omega}{\mu} = \omega + \frac{y + z}{\nu}.$$

Θέτει $\lambda = 3$, $\mu = 4$, $\nu = 5$, ὁπότε τὸ σύστημα γίνεται

$$y + \frac{z + \omega}{3} = z + \frac{y + \omega}{4} = \omega + \frac{y + z}{5}.$$

Λαμβάνει $y = x$, $z + \omega = 3$, ὁπότε $y + z + \omega = x + 3$.

Ἡ πρώτη παράστασις γίνεται δι' ἀντικατ. $x + 1$. Τοῦτο $= z + \frac{y + \omega}{4}$, $4x + 4 = 4z + y + \omega$, $4x + 4 = 3z + z + y + \omega$.

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $4x + 4 = 3z + x + 3$, $z = x + \frac{1}{3}$.

Ἡ τρίτη παράστασις γίνεται δι' ἀντικαταστάσεως, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν πρώτην

$$\omega + \frac{x + x + \frac{1}{3}}{5} = x + 1\text{, ἐξ ἧς } \omega = x + \frac{1}{2}$$

Τὸ ἄθροισμα ἄρα $y + z + \omega = x + \left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right)$ $= x + 3$, ἐξ ἧς $x = \frac{13}{12} = y$, $z = \frac{13}{12} + \frac{1}{3} = \frac{17}{12}$, $\omega = \frac{13}{12} + \frac{1}{2} = \frac{19}{12}$ καὶ ἂν λάβωμεν τὰ 12πλάσια, $y = 13$, $z = 17$, $\omega = 19$.

25.

$$y + \frac{z + \omega + \varphi}{\varkappa} = z + \frac{\omega + \varphi + y}{\lambda} = \omega + \frac{\varphi + y + z}{\mu} = \varphi + \frac{y + z + \omega}{\nu}$$

Θέτει $\varkappa = 3$, $\lambda = 4$, $\mu = 5$, $\nu = 6$, ὁπότε τὸ σύστημα γίνεται

$$y + \frac{z + \omega + \varphi}{3} = z + \frac{\omega + \varphi + y}{4} = \omega + \frac{\varphi + y + z}{5} = \varphi + \frac{y + z + \omega}{6}$$

Λαμβάνει $y = x$, (1) καὶ $z + \omega + \varphi = 3$, (2).

Ἡ α'. παράστασις δι' ἀντικ. γίνεται $x + 1$. Τοῦτο $= z + \frac{\omega + \varphi + y}{4}$. Ἐκ ταύτης $4x + 4 = 4z + \omega + \varphi + y = 3z + z + \omega + \varphi + y$. Καὶ δι' ἀντικ. ἐκ τῆς (1) καὶ (2) εἶναι $4x + 4 = 3z + 3 + x$, ἐξ ἧς $z = x + \frac{1}{3}$.

Ἡ δ'. παράστασις ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν α'. δίδει $x + 1 = \varphi + \frac{y + z + \omega}{6}$, $6x + 6 = 6\varphi + y + z + \omega$, $6x + 6 = 5\varphi + \varphi + y + z + \omega$. Καὶ δι' ἀντικ. ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $6x + 6 = 5\varphi + 3 + x$, ἐξ ἧς $\varphi = x + \frac{3}{5}$.

Ἡ γ′. παράστασις ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν α′. δίδει $x+1=\omega+\frac{\varphi+y+z}{5}$, $5x+5=5\omega+\varphi+y+z$, $5x+5=4\omega+\omega+\varphi+y+z$ Καὶ δι' ἀντικ. ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $5x+5=4\omega+3+x$, ἐξ ἧς $\omega=x+\frac{1}{2}$.

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ ἀντικαταστάσεως λαμβάνεται $x+\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{3}{5}\right)=x+3$, ἐξ ἧς $x=\frac{47}{90}=y$, $z=x+\frac{1}{3}=\frac{77}{90}$, $\omega=x+\frac{1}{2}=\frac{92}{90}$, $\varphi=x+\frac{3}{5}=\frac{101}{90}$.

Καὶ τὰ 90πλάσια τούτων, $y=47$, $z=77$, $\omega=92$, $\varphi=101$.

26.

$$\alpha x=\gamma^2, \qquad \beta x=\gamma$$

Ἔστω $\alpha=200$, $\beta=5$, ὁπότε εἶναι $200\,x=\gamma^2$, (1), $5x=\gamma$, (2). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $25\,x^2=\gamma^2$. Καὶ δι' ἀντικ. εἰς τὴν (1) εἶναι $200\,x=25\,x^2$, ἐξ ἧς $x=8$.

27.

$$y+z=\alpha,\ (1),\ yz=\beta,\ (2),\ (y>z).$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z>o$ πρέπει $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\beta=$ τετράγωνος. Τοῦτο εἶναι τυπικὸν (= πλασματικόν). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $x^2-\alpha x+\beta=o$, $x=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2-\beta}$ καὶ ὁ περιορισμὸς εἶναι φανερός. Δὲν ὑπολογίζεται τὸ ἐκτὸς τοῦ ῥιζ. πλήν.

Θέτει $\alpha=20$, $\beta=96$ καὶ $y-z=2\,x$, (3). Αἱ σχέσεις (1, 2) εἶναι $y+z=20$, (4), $yz=96$, (5). Ἐκ τῆς (4) λαμβάνει $\frac{y+z}{2}=10$, (6) καὶ ἐκ τῆς (3) $\frac{y-z}{2}=x$, (7) καὶ εἶναι ἐκ τῆς (6) $\left(\frac{y}{2}+x\right)+\left(\frac{z}{2}-x\right)=10$ ἢ $y+z=20$.

Θέτει $y = x + 10$, ὁπότε ἐκ τῆς (4) εἶναι $z = 10 - x$ καὶ εἶναι $y + z = x + 10 + 10 - x = 20$ καὶ $y - z = x + 10 - (10 - x) = 2x$. Τὸ δὲ γινόμενον τῶν ζητουμένων εἶναι $yz = (x + 10)(10 - x) = 96$ ἢ $100 - x^2 = 96$, ἐξ ἧς $x = 2$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = x + 10 = 12$, $z = 10 - x = 8$.

28.

$$y + z = \alpha, \ (1), \quad y^2 + z^2 = \beta, \ (2). \quad (y > z).$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z > 0$ πρέπει $2\beta - \alpha^2 =$ τετράγωνος. Εἶναι δὲ καὶ τοῦτο τυπικὸν (πλασματικόν). Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος λαμβάνεται $x = \frac{\alpha \pm \sqrt{2\beta - \alpha^2}}{2}$ καὶ ὁ περιορισμὸς εἶναι φανερός. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὅρου τυπικὸν «πλασματικὸν» (καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα) δεικνύει ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζε τοὺς τύπους ἐπιλύσεως τῶν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων καὶ τὴν διερεύνησιν αὐτῶν.

Ἔστω $y + z = 20$, (1), $y^2 + z^2 = 208$, (2) καὶ $y - z = 2x$, καὶ $y = x + 10$, $z = 10 - x$, ὅπως ἐλήφθησαν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμά των $y + z = x + 10 + 10 - x = 20$ καὶ ἡ διαφορά των $y - z = x + 10 - (10 - x) = 2x$. Ὑπολείπεται $(x + 10)^2 + (10 - x)^2 = 208$ ἢ $2x^2 + 200 = 208$, ἐξ ἧς $x = 2$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = x + 10 = 12$, $z = 10 - x = 8$.

29.

$$y + z = \alpha, \quad y^2 - z^2 = \beta. \quad (y > z).$$

Ἔστω $y + z = 20$, (1), $y^2 - z^2 = 80$. Θέτει $y - z = 2x$, $y = x + 10$, $z = 10 - x$ καὶ εἶναι πάλιν $y + z = x + 10 + 10 - x = 20$ καὶ $y - z = x + 10 - (10 - x) = 2x$. Ὑπολείπεται $(x + 10)^2 - (10 - x)^2 = 80$ ἢ $40x = 80$, ἐξ ἧς $x = 2$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = x + 10 = 12$, $z = 10 - x = 8$.

30.

$$y - z = \alpha, \quad yz = \beta. \quad (y > z).$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $y, z > 0$ πρέπει $4\beta + \alpha^2 =$ τετράγωνος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν $y = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$, $z = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$ καὶ ὁ περιορισμὸς εἶναι φανερός.

Ἔστω $y - z = 4$, (1), $yz = 96$, (2).

Θέτει $y + z = 2x$ καὶ εἶναι $y - z = 4$. Διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $y = x + 2$, $z = x - 2$ καὶ εἶναι $y + z = x + 2 + x - 2 = 2x$ καὶ $y - z = x + 2 - (x-2) = 4$. Ὑπολείπεται νὰ εἶναι $(x+2)(x-2) = 96$ ἢ $x^2 - 4 = 96$, ἐξ ἧς $x = 10$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = x + 2 = 12$, $z = x - 2 = 8$.

31.

$$\frac{y}{z} = \alpha, \quad \frac{y^2 + z^2}{y + z} = \beta. \quad (y > z).$$

Λαμβάνει $\alpha = 3$, $\beta = 5$, ὁπότε εἶναι $y = 3z$ (1), $y^2 + z^2 = 5(y + z)$, (2).

Θέτει $z = x$. Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (1) καὶ κατόπιν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχει $10x^2 = 20x$, ἐξ ἧς $x = 2 = z$, $y = 6$.

32.

$$\frac{y}{z} = \alpha, \quad \frac{y^2 + z^2}{y - z} = \beta. \quad (y > z).$$

Ἔστω $\alpha = 3$, $\beta = 10$. Αἱ σχέσεις γίνονται $y = 3z$, (1), $y^2 + z^2 = 10(y - z)$, (2).

Θέτει $z = x$, καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (1) καὶ (2), ἐξ ἧς λαμβάνει $10x^2 = 20x$, $x = 2$, $y = 6$.

33.

$$\frac{y}{z} = \alpha, \quad \frac{y^2 - z^2}{y + z} = \beta. \quad (y > z).$$

Λαμβάνει $\alpha = 3$, $\beta = 6$, $z = x$. $y = 3x$, (1), $y^2 - z^2 = 6(y + x)$, (2). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) ἐκ τῆς (1) ἔχει $8x^2 = 24x$, $x = 3$, $y = 9$.

34.

$$\frac{y}{z}=\alpha\,,\ \frac{y^2-z^2}{y-z}=\beta\,.\ (y>z)\,.$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=12$, $z=x$. Αἱ σχέσεις γίνονται $y=3\,x$, $8x^2=24x$, $x=3$, $y=9$.

Πόρισμα. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὑρίσκεται

$$1)\ \frac{y}{z}=\alpha,\quad \frac{yz}{y+z}=\beta,\quad 2)\ \frac{y}{z}=\alpha,\quad \frac{yz}{y-z}=\beta.$$

35.

$$\frac{y}{z}=\alpha,\ \frac{z^2}{y}=\beta\,.\ (y>z).$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=6$, $z=x$. Αἱ σχέσεις γίνονται $y=3\,x$, $x^2=18x$, $x=18=z$, $y=54$.

36.

$$\frac{y}{z}=\alpha\,,\ \frac{z^2}{z}=\beta\,.\ (y>z).$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=6$, $z=x$. Αἱ σχέσεις γίνονται $y=3\,x$, $x^2=6\,x$, $x=6=z$, $y=18$·

37.

$$\frac{y}{z}=\alpha,\ \frac{z^2}{y+z}=\beta.\ (y>z).$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=2$, $z=x$. Αἱ σχέσεις γίνονται $y=3\,x$, $x^2=8\,x$, $x=8=z$, $y=24$.

38.

$$\frac{y}{z}=\alpha,\ \frac{z^2}{y-z}=\beta.\ (y>z)$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=6$, $z=x$. Αἱ σχέσεις γίνονται $y=3\,x$, $x^2=12\,x$, $x=12=z$, $y=36$.

Πόρισμα. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὑρίσκεται, $(y > z)$:

1) $\frac{y}{z} = \alpha, \frac{y^2}{z} = \beta$, 2) $\frac{y}{z} = \alpha, \frac{y^2}{y} = \beta$, 3) $\frac{y}{z} = \alpha$, $\frac{y^2}{y+z} = \beta$, 4) $\frac{y}{z} = \alpha$, $\frac{y^2}{y-z} = \beta$.

39.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α, β. Ζητεῖται ἀριθμός τις x ὅπως $(\alpha + \beta)\,x$, $(\beta + x)\,\alpha$, $(x + \alpha)\,\beta$ ἀποτελῶσι διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἔστω $\alpha = 3$, $\beta = 5$ καὶ ὁ ζητούμενος x. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι $(x+5)\,3$, $(x+3)\,5$, $(5+3)\,x$ ἢ $(3x+15)$, $(5x+15)$, $8x$. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ $3x + 15$ θά εἶναι ἢ ἐλάχιστος ἢ μεσαῖος, ὅρος τῆς προόδου, ὁ δὲ $5x + 15$ θὰ εἶναι ἢ μέγιστος ἢ μεσαῖος. Ὁ δὲ 8x εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μέγιστος ἢ μεσαῖος ἢ ἐλάχιστος, ἐπειδὴ εἶναι ἄγνωστος ἡ τιμὴ τοῦ x.

1. Ἔστω $(5x+15) > 8x > (3x+15)$. Ἐπειδὴ οὗτοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι $(5x+15) + (3x+15) = 16x$, ἐξ ἧς $x = \frac{15}{4}$.

2. Ἔστω $(5x+15) > (3x+15) > 8x$. Ἐπειδὴ οὗτοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι

$(5x+15) - (3x+15) = (3x+15) - 8x$, ἢ $2x = 15 - 5x$, ἐξ ἧς $x = \frac{15}{7}$.

3. Ἔστω $8x > (5x+15) > (3x+15)$. Ἐπειδὴ οὗτοι ἀποτελοῦσι διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου θὰ εἶναι $8x + (3x+15) = 2(5x+15)$, ἢ $11x + 15 = 10x + 30$, ἐξ ἧς $x = 15$ καὶ τὸ πρόβλημα ἐπαληθεύεται καὶ μὲ τὰς τρεῖς τιμάς.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ II.

Σημείωσις. Τὰ προβλήματα 1—7 ἀποτελοῦσι συνέχειαν τῶν προβλημάτων τοῦ α'. βιβλίου καὶ δὲν θεωροῦνται γνήσια.

1.

$$\frac{y+z}{y^2+z^2}=\alpha.$$

Θέτει $\alpha=\frac{1}{10}$, $z=x$, $y=2x$. $\frac{3x}{5x^2}=\frac{1}{10}$, $x=6$, $y=12$.

2.

$$\frac{y-z}{y^2-z^2}=\alpha.$$

Θέτει $\alpha=\frac{1}{6}$, $z=x$, $y=2x$. $\frac{x}{3x^2}=\frac{1}{6}$, $x=2$, $y=4$.

3.

$$\frac{yz}{y+z}=\alpha,\ \frac{yz}{y-z}=\beta$$

1. Θέτει $\alpha=6$, $z=x$, $y=2x$. $\frac{2\,x^2}{3\,x}=6$, $x=9$, $y=18$.

Παραλλαγὴ τοῦ α'. πορίσματος τοῦ 1, 34.

2. Θέτει $\beta=6$, $z=x$, $y=2\,x$. $\frac{2\,x^2}{x}=6$, $x=3$, $y=6$

Παραλλαγὴ τοῦ β'. πορίσματος τοῦ 1, 34.

4.

$$\frac{y^2+z^2}{y-z}=\alpha.$$

Θέτει $\alpha=10$, $z=x$, $y=2\,x$. $\frac{5\,x^2}{x}=10$, $x=2$, $y=4$.

Παραλλαγὴ τοῦ 1, 32.

5.

$$\frac{y^2 - z^2}{y + z} = \alpha.$$

Θέτει $\alpha = 6$, $z = x$, $y = 2x$. $\frac{3x^2}{3x} = 6$, $x = 6$, $y = 12$.
Παραλλαγὴ τοῦ 1, 33.

6.

$$y - z = \alpha,\ y^2 - z^2 = y - z + \beta\ \ (y > z).$$

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι $z > o$ πρέπει $\alpha^2 < \alpha + \beta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων εἶναι $z = \frac{\alpha + \beta - \alpha^2}{2\alpha^2}$ καὶ ὁ περιορισμὸς εἶναι φανερός.

Ἔστω $\alpha = 2$, $\beta = 20$, $z = x$, ὁπότε $y = x + 2$. Καὶ εἶναι $x + 2 - x = 2$, $(x + 2)^2 - x^2 = 4x + 4$. Πρέπει ἄρα $4x + 4 = 2 + 20$, ἐξ ἧς $x = 4\frac{1}{2}$, $y = 6\frac{1}{2}$.

7.

$$y^2 - z^2 = \alpha(y - z) + \beta,\ (1).\ (y > z).$$

Περιορισμός. Ἔστω $y - z = \lambda$, (2). Διὰ νὰ εἶναι $z > o$ πρέπει νὰ εἶναι $\lambda^2 < \alpha\lambda + \beta$. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εἶναι $z = \frac{\alpha\lambda + \beta - \lambda^2}{2\lambda}$, $y = \frac{\alpha\lambda + \beta + \lambda^2}{2\lambda}$ καὶ ὁ περιορισμὸς εἶναι φανερός.

Θέτει $y - z = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 10$, $z = x$, ὁπότε $y = x + 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνει $4x + 4 = 16$, ἐξ ἧς $x = 3$, $y = 5$.

8.

Ἔστω ὁ δοθεὶς τετράγωνος 16 καὶ ὁ εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων x^2. Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $16 - x^2$. Θέτει τοῦτον ἴσον πρὸς $(\mu\chi - 4)^2$ (μεῖον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δοθέντος). Λαμβάνει $\mu = 2$, ὁπότε ἡ $(2x - 4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$, $5x^2 = 16x$, $x = \frac{16}{4}$. Ὁ εἷς τετράγωνος θὰ εἶναι $\left(\frac{16}{5}\right)^2$ καὶ ὁ ἄλλος $16 - \frac{256}{25} = \frac{144}{25}$.

Ἄλλως.

Ἡ δευτέρα λύσις δὲν διαφέρει τῆς πρώτης. Ὅθεν θεωρεῖται αὕτη παρεμβολή. Ἡ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος, ὡς καὶ ὅλων τῶν θεωρημάτων εἶναι γενική. Ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς γ^2 δέον ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν. Καλεῖ τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν x^2. Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $\gamma^2 - x^2$. (1) Λαμβάνει τυχὸν πολλαπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ x^2, ἔστω μx, ἔνθα $\mu \neq 1$ καὶ σχηματίζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἄλλου τετραγώνου ἀριθμοῦ ἴσην πρὸς $\mu x - \gamma$. Τότε θὰ εἶναι $\gamma^2 - x^2 = (\mu x - \gamma)^2$ ἐξ ἧς $x = \frac{2\mu\gamma}{\mu^2 + 1}$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ x εἰς τὴν (1) εὑρίσκει τὸν δεύτερον τετράγωνον ἀριθμὸν $= \left[\frac{\gamma(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2$. Ἑπομένως ὁ δοθεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἀνελύθη εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, ὥστε εἶναι

$$\gamma^2 = \left[\frac{2\mu\gamma}{\mu^2+1}\right]^2 + \left[\frac{\gamma(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2 \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν $(\mu^2 + 1)^2 = (2\mu)^2 + (\mu^2 - 1)^2$, (3)

Ἐὰν $\mu = \frac{m}{n}$ ἡ σχέσις (3) γίνεται

$$(m^2 + n^2)^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2. \qquad (4).$$

Ὁ τύπος (4) παρέχει ὅλας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$ ἤτοι ἁπάσας τὰς τριάδας ἀκεραίων ἀριθμῶν (τοὺς πυθαγορείους ἀριθμοὺς) οἵτινες εἶναι πλευραὶ ὀρθογωνίων τριγώνων καὶ εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὸν εὐκλείδειον τύπον Χ 28, Λῆμμα 1.

9.

Ἔστω $\alpha = \beta^2 + \gamma^2$. Νὰ εὑρεθῇ $\alpha = \delta^2 + \varepsilon^2$.

Λαμβάνει τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας β, γ καὶ σχηματίζει τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ζητουμένων δύο νέων τετραγώνων συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου, τὰς $x + \beta$ καὶ $\mu\chi - \gamma$, ὁπότε λαμβάνεται ἡ σχέσις

$\alpha = \beta^2 + \gamma^2 = (x + \beta)^2 + (\mu x - \gamma)^2$. Ἐκ τούτων λαμβάνομεν $x = \frac{2(\mu\gamma - \beta)}{\mu^2+1}$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως

$$\alpha = \beta^2 + \gamma^2 = \left[\frac{2(\mu\gamma-\beta)}{\mu^2+1} + \beta\right]^2 + \left[\frac{2\mu(\mu\gamma-\beta)}{\mu^2+1} - \gamma\right]^2$$

Ἐνδεικτικῶς λαμβάνει $\alpha = 13$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\mu = 2$, ὁπότε $x = \frac{8}{5}$.

Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν νέων τετραγώνων ἠδύνατο νὰ ληφθῇ, ὑφ' ἣν μορφὴν καὶ ὁ δεύτερος ἤτοι $(\varkappa x - \beta)^2$.

10.

$$y^2 - x^2 = \alpha$$

Ἐκφράζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλυτέρου συναρτήσει τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ μικροτέρου, ὁπότε εἶναι $(x+\beta)^2 - x^2 = \alpha$ (ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $\beta^2 < \alpha$) ἐξ ἧς $x = \frac{\alpha - \beta^2}{2\beta}$ καὶ $y = \frac{\alpha + \beta^2}{2\beta}$ καὶ ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι $\left(\frac{\alpha+\beta^2}{2\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta^2}{2\beta}\right)^2 = \alpha$.

11.

$$x + \alpha = \gamma^2, \ (1), \quad x + \beta = \delta^2, \ (2).$$

Ὅταν δύο ἐξισώσεις ἐπαληθεύωνται διὰ τῆς αὐτῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου, ὀνομάζονται διπλοϊσότης (διπλῆ ἐξίσωσις).

Ἔστω $\alpha = 3$, $\beta = 2$, ὁπότε ἔχομεν

$$x + 2 = \delta^2, \quad (4).$$
$$x + 3 = \gamma^2, \quad (5).$$

Ἀφαιρεῖ κατὰ μέλη (τὴν μικροτέραν ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας) καὶ λαμβάνει $1 = \gamma^2 - \delta^2 = (\gamma + \delta)\ (\gamma - \delta)$.

Ἀναλύει τὸν 1 εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, $1 = 4 . \frac{1}{4}$.

$$4 \cdot \frac{1}{4} = (\gamma + \delta)\ (\gamma - \delta).$$

Θέτει $\gamma + \delta = 4$

$$\gamma - \delta = \frac{1}{4}$$

Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $\gamma = \frac{17}{8}$, $\delta = \frac{15}{8}$. Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (4) καὶ (5) καὶ ἔχει καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις $x = \frac{97}{64}$. Καὶ εἶναι $\frac{97}{64} + 3 = \left(\frac{17}{8}\right)^2$. $\frac{97}{64} + 2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2$.

[Σημ. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι Πυθαγόρειος καὶ στηρίζεται εἰς τὸ 5ον θεώρημα τοῦ ΙΙ Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τοῦτο θεωρεῖται ὡς ἡ γεωμετρικὴ ἄλγεβρα τῶν Πυθαγορείων), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν εὐθεῖα τις τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας.

$$\mathrm{A}\overset{}{——}\overset{\Gamma}{|}\overset{}{——}\overset{\Delta}{|}\overset{}{——}\mathrm{B}\ :\ \mathrm{A}\Delta . \Delta\mathrm{B} + \Gamma\Delta^2 = \Gamma\mathrm{B}^2,\ (1).$$

$$(\mathrm{A}\Delta > \mathrm{A}\Gamma = \Gamma\mathrm{B}).$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\mathrm{A}\Delta = \mu$, $\Delta\mathrm{B} = \nu$ θὰ εἶναι

$\Gamma\Delta = \frac{\mu + \nu}{2} - \nu = \frac{\mu - \nu}{2}$ καὶ $\Gamma\mathrm{B} = \frac{\mu + \nu}{2}$, ὁπότε ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\mu\nu + \left(\frac{\mu - \nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)^2 \ \text{ἢ}\ \mu\nu = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu - \nu}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Τὴν σχέσιν (2) ἀπαντῶμεν ὡς μίαν περίπτωσιν τοῦ α'. λήμματος τοῦ θεωρ. 28 τοῦ 10ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὅταν οἱ μ, ν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (ἐὰν δηλ.

$\mu = \varkappa\xi$ καὶ $\nu = \sigma\tau$ καὶ εἶναι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$) ἄρτιοι ἢ περιττοὶ λαμβάνονται ἐκ τῆς σχέσεως (2) ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$. Εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2) εἶναι $(x + \alpha) - (x + \beta) = \gamma^2 - \delta^2$ ἢ $(\alpha - \beta) = \lambda = \gamma^2 - \delta^2 = (\gamma + \delta)\ (\gamma - \delta)$ καὶ ἡ διαφορὰ $(\alpha - \beta)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἐξ ὧν ὁ εἷς τίθεται ἴσος πρὸς $(\gamma + \delta)$ καὶ ὁ ἄλλος ἴσος πρὸς $(\gamma - \delta)$].

Δευτέρα λύσις. Διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον τῆς διπλοϊσότητος λύει τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

Ἔστω $y + 2 = \delta^2$, (1), ἢ $y = \delta^2 - 2$, (2).
$y + 3 = \gamma^2$, (3), ἢ $y = \gamma^2 - 3$, (4). Καλεῖ $\delta^2 = \chi^2$

Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (3) τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (2) ὁπότε ἔχει $x^2 + 1 = \gamma^2$, (5). Σχηματίζει τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ γ^2 οὕτως, ὥστε $x^2 > 2$. [ὁ περιορισμὸς τίθεται διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὴν ἀρνητικὴν τιμήν]. Ἔστω $\gamma = x - 4$, ὁπότε ἐκ τῆς (5) λαμβάνει $\delta^2 + 1 = (\delta - 4)^2$ ἢ $x^2 + 1 = x^2 + 16 - 8\,x$, ἐξ ἧς $\chi = \dfrac{15}{8}$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $y = \left(\dfrac{15}{8}\right)^2 - 2 = \dfrac{97}{64}$. Ἐὰν $x^2 + 1 = (x - 3)^2$, εἶναι $x = \dfrac{4}{3}$, $x^2 = \dfrac{16}{9} < 2$ καὶ ἐκ τῆς (1) $y = \dfrac{16}{9} - 2 = -\dfrac{2}{9}$. Τὸ πρόβλημα ὅμως ἐπαληθεύεται, διότι εἶναι

$$-\frac{2}{9} + 2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{ καὶ } -\frac{2}{9} + 3 = \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

12.

$$\alpha - y = \gamma^2, \quad \beta - y = \delta^2.$$

Θέτει $\alpha = 9$, $\beta = 21$. $9 - y = \gamma^2$, (1), $21 - y = \delta^2$, (2). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $9 - \gamma^2 = y$ καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (2), ὁπότε ἔχει $21 - (9 - \gamma^2) = \delta^2$, ἢ $\gamma^2 + 12 = \delta^2$. Θέτει $\gamma = x$, $\delta^2 = (x - \rho)^2$, ὥστε $\rho^2 > (21 - 9)$ (διὰ νὰ εἶναι $y > o$). Θὰ εἶναι λοιπὸν $x^2+12=x^2+\rho^2-2\rho x$, ἐξ ἧς $x=\frac{\rho^2-12}{2\rho}$. Ἔχει λάβει $\rho=4$ ὁπότε εἶναι $x=\gamma=\frac{4}{8}$ καὶ ἐκ τῆς (1) $y=9-\frac{16}{64}$ $=\frac{560}{64}$ καὶ $9-\frac{560}{64}=\left(\frac{4}{8}\right)^2$ καὶ ἐκ τῆς (2) $21-\frac{560}{64}=\left(\frac{28}{8}\right)^2$.

Σημ. Καὶ ἐνταῦθα ἔχομεν διπλοϊσότητα. Λύει τὸ πρόβλημα κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον τοῦ προηγουμένου προβλήματος, δι' ἀντικαταστάσεως.

Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον λύσεως θὰ ἔχωμεν δι' ἀφαιρέσεως τῆς (1) ἀπὸ τῆς (2)

$$12=\delta^2-\gamma^2=(\delta+\gamma)(\delta-\gamma)$$

Ὁ $12=3.\ 4$. Θέτομεν $\delta+\gamma=4$, $\delta-\gamma=3$. Διὰ προσθέσεως, καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως, κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\delta=\frac{7}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}$, ὁπότε ἐκ τῶν (1) ἢ (2) ἔχομεν $y=9-\frac{1}{4}=\frac{35}{4}$ καὶ $y=21-\frac{49}{4}=\frac{35}{4}$ καὶ εἶναι $9-\frac{35}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $21-\frac{35}{4}=\left(\frac{7}{2}\right)^2$.

Ἐὰν ὁ 12 ἀναλυθῇ εἰς 2.6 θὰ ἔχωμεν $2.6=(\delta+\gamma)(\delta-\gamma)$. Θέτοντες $6=\delta+\gamma$ καὶ $2=\delta-\gamma$ λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως, κατὰ μέλη $\delta=4$, $\gamma=2$, ὁπότε ἐκ τῶν (1) ἢ (2) λαμβάνομεν $9-4=5=y$, $21-16=5=y$ καὶ εἶναι $9-5=2^2$, $21-5=4^2$. Ἐὰν ὁ $12=12.1$ καὶ τεθῇ $12=\delta+\gamma$, $1=\delta-\gamma$, ὁ $y=-\frac{85}{4}$.

13.

$$x-\alpha=\gamma^2,\quad x-\beta=\delta^2$$

Θέτει $\alpha=6$ καὶ $\beta=7$. $x-6=\gamma^2$, (1), $x-7=\delta^2$, (2). Ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον τῆς διπλοϊσότητος. Ἀφαιρεῖ τὴν μικροτέραν ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας $(\gamma^2>\delta^2)$ καὶ ἔχει $1=\gamma^2-\delta^2=$ $(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)$. Ἀναλύει τὸν 1 εἰς $2.\frac{1}{2}$ καὶ θέτει $\gamma+\delta=2$,

$\gamma - \delta = \frac{1}{2}$. Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν $\gamma = \frac{5}{4}$ καὶ $\delta = \frac{3}{4}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἢ (2) εἶναι $x = \frac{121}{16}$.

Τώρα ἐφαρμόζει καὶ τὸν δεύτερον τρόπον λύσεως.

Καλεῖ $\gamma^2 = y^2$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $x = y^2 + 6$. Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (2) καὶ ἔχει $y^2 - 1 = \delta^2$, Θέτει $\delta = y - 2$ καὶ ἔχει $y^2 - 1 = (y-2)^2$ ἢ $y^2 - 1 = y^2 - 4y + 4$, ἐξ ἧς $y = \frac{5}{4}$, καὶ ἐκ τῆς (1) $x = \frac{25}{16} + 6 = \frac{121}{16}$ κλπ.

14.

$$y + z = \alpha, \ y + x^2 = \beta^2, \ z + x^2 = \gamma^2$$

Σχηματίζει $\beta^2 = (\mu + x)^2 = \mu^2 + 2\mu x + x^2$, (1) καὶ $\gamma^2 = (\nu + x)^2 = \nu^2 + 2\nu x + x^2$, (2) τοιούτους, ὥστε $\mu^2 + \nu^2 < \alpha$ (διὰ νὰ εἶναι $x > o$). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $y = \mu^2 + 2\mu \chi$ καὶ $z = \nu^2 + 2\nu x$ καὶ πρέπει $\mu^2 + 2\mu x + \nu^2 + 2\nu x = \alpha$, ἐξ ἧς $x = \frac{\alpha - (\mu^2 + \nu^2)}{2(\mu + \nu)}$. (Ὁ περιορισμὸς εἶναι φανερός). Ἔχει λάβει $\alpha = 20$, $\mu = 2$, $\nu = 3$, ὁπότε $x = \frac{7}{10}$, $y = 4 + \frac{28}{10} = \frac{68}{10}$, $z = 9 + \frac{42}{10} = \frac{132}{10}$ καὶ εἶναι $\frac{68}{10} + \frac{132}{10} = 20$, $\frac{68}{10} + \frac{49}{100} = \left(\frac{27}{10}\right)^2$, $\frac{132}{10} + \frac{49}{100} = \left(\frac{37}{10}\right)^2$.

15.

$$\alpha = y + z, \ \omega^2 - y = \beta^2, \ (1) \ \omega^2 - z = \gamma^2, \ (2).$$

Λαμβάνει $\alpha = 20$, $\omega = x + 2$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $(x+2)^2 - (4x+4) = x^2$ καὶ πληροῦται ἡ πρώτη συνθήκη. Ἐπίσης εἶναι $(x+2)^2 - (2x+3) = (x+1)^2$ καὶ πληροῦται δευτέρα συνθήκη. Μένει νὰ εἶναι $y + z = 20$ ἢ $(4x + 4) + (2x + 3) = 20$,

ἐξ ἧς $x=\frac{13}{6}$, ὁπότε $y=4\,\frac{13}{6}+4=\frac{76}{6}$ καὶ $z=2.\,\frac{13}{6}+3=\frac{44}{6}$,
καὶ εἶναι $\left(\frac{13}{6}+2\right)^2-\frac{76}{6}=\left(\frac{13}{6}\right)^2$, $\left(\frac{13}{6}+2\right)^2-\frac{44}{6}=\left(\frac{19}{6}\right)^2$.

Σημ. Ὁ περιορισμὸς ὅτι $2^2\leqq 20$, δὲν εἶναι ὀρθὸς καὶ φαίνεται ὅτι ἔχει ἀντιγραφῆ ἐσφαλμένως. Ὁ ὀρθὸς περιορισμὸς διὰ νὰ εἶναι $x>o$ εἶναι $2.\,2^2\leqq 20$, ἐλλείπει δηλ. ἀπὸ τὸ κείμενον ἡ λέξις «δὶς» εἰς τὴν φράσιν — ὥστε τὸν ⟨δὶς⟩ ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ —. Εἶναι φανερὰ ἡ παράλειψις τοῦ «δίς».

16.

$y>z$, $y=\rho z$, (1) $y+\alpha^2=\beta^2$ (2), $z+\alpha^2=\gamma^2$, (3).

Σχηματίζει $(x+\alpha)^2=x^2+2\alpha x+\alpha^2$ καὶ θέτει $z=2\alpha x+x^2$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (3). Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $y=\rho\,z=\rho\,x^2+2\,\alpha\,\rho\,x$. Μένει νὰ εἶναι $\rho x^2+2\,\alpha\rho\,x+\alpha^2=\beta^2$. Θέτει $\beta=\mu\chi-\alpha$, ὁπότε εἶναι $\rho\chi^2+2\alpha\rho\chi+\alpha^2=(\mu\chi-\alpha)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{2\,\alpha\,(\mu+\rho)}{\mu^2-\rho}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως, $z=\frac{4\alpha^2\mu(\mu+\rho)(\mu+1)}{(\mu^2-\rho)^2}$
$y=\frac{4\alpha^2\rho\mu(\rho+\mu)(\mu+1)}{(\mu^2-\rho)^2}$. Ἔχει λάβει $\rho=3$, $\mu=2$, $\alpha=3$ ὁπότε εἶναι $x=30$, $z=1080$, $y=3240$ καὶ εἶναι $1080+9=33^2$ καὶ $3240+9=57^2$.

17.

$$y-\left(\frac{y}{\lambda}+\alpha\right)+\frac{\omega}{\nu}+\gamma=z-\left(\frac{z}{\mu}+\beta\right)+\frac{y}{\lambda}+\alpha=$$
$$\omega-\left(\frac{\omega}{\nu}+\gamma\right)+\frac{z}{\mu}+\beta.$$

Θέτει $\lambda=5$, $\mu=6$, $\nu=7$, $\alpha=6$, $\beta=7$, $\gamma=8$.

$$y-\left(\frac{y}{5}+6\right)+\frac{\omega}{7}+8=z-\left(\frac{z}{6}+7\right)+\frac{y}{5}+6=$$
$\omega-\left(\frac{\omega}{7}+8\right)+\frac{z}{6}+7$, καὶ $y=5x$, $z=6x$. Τὸ μεσαῖον μέλος γίνεται $6\,x-(x+7)+x+6=6\,x-1$. Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὸ α'. μέλος καὶ ἔχει $\frac{\omega}{7}=2x-3$, ἐξ ἧς $\omega=14x-21$.

'Αντικαθιστᾷ εἰς τὸ γ'. μέλος καὶ λαμβάνει 13x — 19. Τοῦτο ἐξισώνει πρὸς τὸ μεσαῖον μέλος 6x — 1. 'Εκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι $x = \frac{18}{7}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = 5.\frac{18}{7} = \frac{90}{7}$, $z = 6.\frac{18}{7} = \frac{108}{7}$, $\omega = 14.\frac{18}{7} - 21 = \frac{105}{7}$, καὶ τὸ πρόβλημα ἐπαληθεύεται. (Σημ. Κατὰ τὸν P. Tannery τὰ προβλήματα 17 καὶ 18 εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ προβλήματα 22 καὶ 23 τοῦ α'. βιβλίου καὶ δέον νὰ θεωρῶνται παρεμβολαὶ ὑπό τινος σχολιαστοῦ).

18.

$y + z + \omega = \sigma$, καὶ ἀκριβῶς τὸ προηγούμενον σύστημα μὲ τὰ αὐτὰ δεδομένα καὶ $\sigma = 80$. Δὲν εἶναι ὅμως $\frac{90 + 108 + 105}{7}$ ἴσον 80. 'Ελλείπει εἰς τὸ κείμενον ἡ λύσις.

Ἄλλως τὸ 17ον.

Θέτει $y = 5x$, $z = 12$ καὶ ἐφαρμόζει τὰ αὐτά. Τὸ μεσαῖον μέλος γίνεται $x + 9$. Τὸ ἐξισώνει πρὸς τὸ α'. καὶ λαμβάνει $\omega = 49 - 21x$, ἀντικαθιστᾷ εἰς τὸ γ'. καὶ ἐξισώνει πρὸς τὸ μεσαῖον καὶ ἔχει $x = \frac{34}{19}$, ὁπότε $y = \frac{170}{19}$, $z = 12 = \frac{228}{19}$, $\omega = \frac{217}{19}$.

19.

$y^2 > z^2 > \omega^2$. $\quad \frac{y^2 - z^2}{z^2 - \omega^2} = \rho$.

Θέτει $\rho = 3$, $\omega^2 = x^2$, $z^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν ἐξίσωσιν λαμβάνων $y^2 = x^2 + 8x + 4 =$ τετράγωνος· Σχηματίζει τὸν τετράγωνον τοῦτον μὲ πλευρὰν $x + 3$, ὁπότε ἔχει $x^2 + 8x + 4 = x^2 + 6x + 9$, ἐξ ἧς $x = 2\frac{1}{2}$, $y = 30\frac{1}{4}$, $z = 12\frac{1}{2}$, $\omega = 6\frac{1}{4}$. Τὸν 3 ἂν καλέσωμεν τοῦτον α τὸν λαμβάνει μὲ τὸν περιορισμόν, εἴτε $2\alpha < 8$ καὶ $\alpha^2 > 4$, εἴτε $2\alpha > 8$

καὶ $\alpha^2 < 4$. Ἐνταῦθα εἶναι $2.3 < 8$ καὶ $3^2 > 4$, (διὰ νὰ εἶναι $x > o$).

20.

$$y^2 + z = \alpha^2, (1), \quad z^2 + y = \beta^2, (2)$$

Θέτει $y = x$, $z = 2x + 1$ καὶ ἀντικαθιστᾷ λαμβάνων $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = \alpha^2$, (3), $(2x+1)^2 + x =$ τετράγωνος, (4). Τοῦ τετραγώνου τούτου λαμβάνει τὴν πλευρὰν ἴσην πρὸς $2x - 2$ ὁπότε ἡ (4) γίνεται $4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 8x + 4$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{13} = y$, $z = \frac{19}{13}$ καὶ εἶναι $\frac{9}{169} + \frac{19}{13} = \left(\frac{16}{13}\right)^2$, $\frac{361}{169} + \frac{3}{13} = \left(\frac{20}{13}\right)^2$.

Σημ. Ὁ Euler ἔθεσε $z = \alpha^2 - y^2$ καὶ ἀντικατέστησε εἰς τὴν (2) λαβὼν τελικῶς $\alpha^4 - 2\alpha^2 y^2 + y^4 + y =$ τετράγωνος, τὴν ὁποίαν ἐγκατέλειψε, θέσας κατόπιν $y^2 + z = (\alpha - y)^2 = \alpha^2 - 2\alpha y + y^2$, ἐξ ἧς $z = \alpha^2 - 2\alpha y$. Τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἔθεσε ὑπὸ τὴν μορφὴν $z^2 + y = (\beta - z)^2 = \beta^2 - 2\beta z + z^2$, ἐξ ἧς $y = \beta^2 - 2\beta z$. Ὅθεν $y = \frac{2\beta\alpha^2 - \beta^2}{4\alpha\beta - 1}$, $z = \frac{2\alpha\beta^2 - \alpha^2}{4\alpha\beta - 1}$.

21.

$$y^2 - z = \alpha^2, (1), \quad z^2 - y = \beta^2, (2).$$

Ἔστω $y > z$. Θέτει $z = x + 1$, $y = 2x + 1$, ὁπότε πληροῦται ἡ σύνθήκη (2). Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (1) καὶ λαμβάνει $(2x+1)^2 - (x+1) =$ τετράγωνος. Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $9x^2$ ὁπότε $x = \frac{3}{5}$, $z = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$, $y = \frac{11}{5}$, $\left(\frac{11}{5}\right)^2 - \frac{8}{5} = \left(\frac{9}{5}\right)^2$, $\left(\frac{8}{5}\right)^2 - \frac{11}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$.

22.

$$y^2 + y + z = \alpha^2, (1), \quad z^2 + y + z = \beta^2, (2).$$

Ἔστω $y > z$. Θέτει $z = x$, $y = x + 1$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (2). Ἐκ τῆς (1) δι' ἀντικαταστάσεως ἔχει $x^2 + 4x + 2 =$

τετράγωνος. Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(x-2)^2$, ὁπότε $x=\frac{2}{8}$, $y=\frac{10}{8}$.

23.

$$y^2-(y+z)=\alpha^2,\ (1),\quad z^2-(y+z)=\beta^2,\ (2).$$

Ἔστω $y>z$. Θέτει $z=x$, $y=x+1$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (1). Ἐκ τῆς (2) δι' ἀντικαταστάσεως ἔχει $x^2-2x-1=$ τετράγωνος. Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(x-3)^2$, ὁπότε $x=2\frac{1}{2}=z$, $y=3\frac{1}{2}$.

24.

$$(y+z)^2+y=\alpha^2,\ (1),\quad (y+z)^2+z=\beta^2,\ (2).$$

Θέτει $y=3x^2$, (3), $z=8x^2$, (4), $(y+z)^2=x^2$, (5).

Οὕτω πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2). Μένει νὰ εἶναι $(3x^2+8x^2)^2=x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{11}$, $y=\frac{3}{121}$, $z=\frac{8}{121}$ καὶ εἶναι $\left(\frac{11}{121}\right)^2+\frac{3}{121}=\left(\frac{22}{121}\right)^2$, $\left(\frac{11}{121}\right)^2+\frac{8}{121}=\left(\frac{33}{121}\right)^2$, $\left(\frac{3}{121}+\frac{8}{121}\right)^2=\frac{121}{14641}$.

25.

$$(y+z)^2-y=\alpha^2,\ (1),\quad (y+z)^2-z=\beta^2,\ (2).$$

Θέτει $y=12x^2$, (3), $z=7x^2$. (4), $(y+z)^2=16x^2$, (5). Οὕτω πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2). Μένει νὰ εἶναι $(12x^2+7x^2)^2=16x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{19}$, $y=\frac{192}{361}$, $z=\frac{112}{361}$.

26.

$yz+y=\omega^2$, (1), $yz+z=\varphi^2$, (2) $\omega+\varphi=\alpha$, (3). Θέτει $\alpha=6$.

Ἐπειδὴ ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς β^2x-1 ὁ μεγαλύτερος καὶ x ὁ μικρότερος εἶναι $(\beta^2x-1)x+x=$ τετράγωνος θέτει τὸν μὲν μικρότερον $z=x$ καὶ τὸν μεγαλύτερον $y=4x-1$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (2), ἐκ τῆς ὁποίας εἶναι $\varphi=2x$. Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\omega=6-2x$ καὶ ἐκ τῆς (1),

$(4x-1)\,x+4x-1=(6-2x)^2$, ἢ $4x^2+3x-1=36-24x+4x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{37}{27}=z$, $y=\frac{148}{27}-1=\frac{121}{27}$.

27.

$yz-y=\omega^2$, (1), $yz-z=\varphi^2$, (2), $\omega+\varphi=\alpha$, (3).

Θέτει $\alpha=5$. Ἐπειδὴ ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς β^2x+1 ὁ μεγαλύτερος καὶ x ὁ μικρότερος εἶναι $(\beta^2x+1)x-x=$ τετράγωνος, θέτει τὸν μὲν μεγαλύτερον $4x+1$, τὸν δὲ μικρότερον $z=x$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (2) ἐξ ἧς εἶναι $\varphi=2x$. Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\omega=5-2x$ καὶ ἐκ τῆς (1), $(4x+1)x-(4x+1)=(5-2x)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{26}{17}=z$, $y=\frac{121}{17}$.

28.

$y^2z^2+y^2=\alpha^2$, (1), $y^2z^2+z^2=\beta^2$, (2).

Θέτει $y^2=x^2$, $z^2=1$ καὶ ἔχει $y^2z^2=x^2$. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $x^2+1=\beta^2$, ἔστω $=(x-2)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{3}{4}$. Εἶναι δὲ πάλιν εἰς τὴν (2), $\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=\left(\frac{5}{4}\right)^2$, πληρουμένης τῆς συνθήκης ταύτης. Λαμβάνει $y^2z^2=\frac{9}{16}\varphi^2$ καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (1), ὁπότε ἔχει $\frac{9}{16}\varphi^2+\frac{9}{16}=\alpha^2$, ἔστω $=(3\varphi-4)^2$, ἐξ ἧς $\varphi=\frac{7}{24}=z$, $z^2=\frac{49}{576}$, ἐν ᾧ $y=\frac{3}{4}$, $y^2=\frac{9}{16}=\frac{324}{576}$. Καὶ εἶναι $\frac{324}{576}\cdot\frac{49}{576}+\frac{324}{576}=\left(\frac{450}{576}\right)^2$, $\frac{324}{576}\cdot\frac{49}{576}+\frac{49}{576}=\left(\frac{210}{576}\right)^2$.

(ἀντὶ τοῦ βοηθητικοῦ ἀγνώστου φ λαμβάνει x, χρησιμοποιῶν πάντοτε τὸ αὐτὸ γράμμα x διὰ διαφόρους ἀγνώστους τοῦ αὐτοῦ προβλήματος).

29.

$y^2z^2-y^2=\alpha^2$ (1), $y^2z^2-z^2=\beta^2$, (2).

Θέτει $y^2=x^2$, $z^2=1$, ὁπότε $y^2z^2=x^2$. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $x^2 - 1 =$ τετράγωνος. Ἔστω $x^2 = \frac{25}{16}$, ὁπότε $\beta^2 = \frac{9}{16}$, Θέτει $z^2 = \frac{25}{16}$ καὶ ἐκ τῆς (1) ἔχει $\frac{25}{16}y^2 - y^2 = \frac{9}{16}y^2$ πληρουμένης τῆς συνθήκης ταύτης. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $\frac{25}{16}y^2 - \frac{25}{16} = \beta^2$ καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{16}{25}$, $y^2 - 1 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (y-4)^2$, ἐξ ἧς $y = \frac{17}{8}$, $y^2 = \frac{289}{64}$, $z^2 = \frac{25}{16} = \frac{100}{64}$.

30.

$$yz + (y+z) = \varkappa^2 \ (1), \ yz - (y+z) = \lambda^2, \ (2),$$

Ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν ταυτότητα $(\mu \pm \nu)^2 = \mu^2 + \nu^2 \pm 2\mu\nu$. Καλεῖ τὸ γινόμενον $yz = \mu^2 + \nu^2$ καὶ τὸ ἄθροισμα $y + z = 2\mu\nu$, θέτων $\mu = \alpha x$, $\nu = \beta x$, μὲ $\alpha = 2$, $\beta = 3$ καὶ ἔχει $yz = 13x^2$, $y + z = 12x^2$, (3). Εἶναι δὲ $(2x \pm 3x)^2 = 13x^2 \pm 12x^2$. Ἀναλύει τὸ γινόμενον $yz = 13x^2$ εἰς $y = x$ καὶ $z = 13x$. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι $14x$ καὶ ἐκ τῆς $(3) = 12x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{6} = y$, $z = \frac{91}{6}$.

31.

$$y + z = \omega^2, \ yz + (y+z) = \varkappa^2, \ (1), \ yz - (y+z) = \lambda^2, \ (2).$$

Ἀναχωρεῖ πάλιν ἀπὸ τὴν ταυτότητα $(\mu \pm \nu)^2 = \mu^2 + \nu^2 \pm 2\mu\nu$. Καλεῖ τὸ γινόμενον $yz = \mu^2 + \nu^2$ καὶ τὸ ἄθροισμα $y + z = 2\mu\nu$ θέτων $\mu = \alpha x$, $\nu = \beta x$, μὲ $\alpha = 2\beta$, $\beta = 2$ καὶ ἔχει $yz = (4x^2) + (2x^2) = 20x^2$, $y + z = 16x^2$, (3). Ἀναλύει τὸ γινόμενον $yz = 20x^2$ εἰς $y = 2x$, $z = 10x$. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι $12x =$ ἐκ τῆς (3) μὲ $16x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{6}{4}$, $z = \frac{30}{4}$, εἶναι δὲ $\frac{6}{4} + \frac{30}{4} = \left(\frac{6}{2}\right)^2$,

$$\frac{6}{4} \cdot \frac{30}{4} + \left(\frac{6}{4} + \frac{30}{4}\right) = \left(\frac{18}{4}\right)^2, \quad \frac{6}{4} \cdot \frac{30}{4} - \frac{36}{4} = \left(\frac{6}{4}\right)^2.$$

Σημ. Ὁ $20x^2$ ἀναλύεται καὶ εἰς $x \cdot 20x$. Τὸ ἄθροισμα τούτων $21x$ εἶναι $=$ ἐκ τῆς (3) μὲ $16x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{21}{16} = y$,

$z = 20. \frac{21}{16} = \frac{420}{16}$. Ἐπίσης εἶναι $20x^2 = 4x. 5x$. Τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων εἶναι $9x$ καὶ ἐκ τῆς (3) ἴσον μὲ $16x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{9}{16}$. $y = 4. \frac{9}{16} = \frac{36}{16}$, $z = 5. \frac{9}{16} = \frac{45}{16}$ καὶ τὸ πρόβλημα ἐπαληθεύεται.

32.

$y^2 + z = \varkappa^2$, (1), $z^2 + \omega = \lambda^2$, (2), $\omega^2 + y = \xi^2$, (3). Ἔστω $y < z < \omega$.

Ἐπειδή, ἐὰν $\mu = 2\nu + 1$ εἶναι $\nu^2 + \mu = (\nu + 1)^2$, θέτει $y = x$ καὶ $z = 2x + 1$. Ἐπίσης θέτει $\omega = 2z + 1 = 4x + 3$. Οὕτω πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2) διότι εἶναι $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ καὶ $(2x + 1)^2 + 4x + 3 = (2x + 2)^2$. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (3). Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει ἐκ τῆς (3) $(4x + 3)^2 + x =$ τετράγωνος, ἔστω $= (4x - 4)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{57}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{7}{57}$, $z = \frac{71}{57}$, $\omega = \frac{199}{57}$.

33.

$$y^2 - z = \varkappa^2, \ (1), \ z^2 - \omega = \lambda^2, \ (2), \ \omega^2 - y = \xi^2, \ (3)$$

Ἐπειδή, ἐὰν $\mu = 2\nu - 1$ εἶναι $\nu^2 - \mu = (\nu - 1)^2$, θέτει $y = x + 1$, $z = 2x + 1$, $\omega = 4x + 1$. Οὕτω πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2), διότι εἶναι $(x + 1)^2 - (2x + 1) = x^2$, $(2x + 1)^2 - (4x + 1) = (2x)^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $(4x + 1)^2 - (x + 1) =$ τετράγωνος, ἔστω $= 25x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{9}$, $y = \frac{16}{9}$, $z = \frac{23}{9}$, $\omega = \frac{37}{9}$.

34.

$y^2 + (y + z + \omega) = \varkappa^2$, $z^2 + (y + z + \omega) = \lambda^2$, $\omega^2 + (y + z + \omega) = \xi^2$.

Ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν ταὐτότητα $\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right)^2 + \mu\nu = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)^2$ καὶ θέτει $y + z + \omega = \mu\nu x^2$, (1), ἔνθα ὁ $\mu\nu$ νὰ εἶναι ἀριθμός, ὅστις νὰ ἀναλύεται εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τρεῖς τρόπους. Λαμβάνει μν $= 12 = 12.\ 1 = 6.\ 2 = 4.\ 3$.

Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ταὐτότητα εἶναι $\left(\frac{12-1}{2}\right)^2 + 12 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 42\frac{1}{4}$, ἐκ τοῦ πρώτου τρόπου ἀναλύσεως. Ἐκ τοῦ δευτέρου τρόπου εἶναι $\left(\frac{6-2}{2}\right)^2 + 12 = 16$ καὶ ἐκ τοῦ τρίτου $\left(\frac{4-3}{2}\right)^2 + 12 = 12\frac{1}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

Θέτει $y = \frac{12-1}{2}x = 5\frac{1}{2}x$, $z = \left(\frac{6-2}{2}\right)x = 2x$, $\omega = \frac{4-3}{2}x = \frac{1}{2}x$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εἶναι $y + z + \omega = 8x$. Καὶ ἐκ τῆς (1) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ μν ἕπεται $8x = 12x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{4}{6}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = 5\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{22}{6}$, $z = \frac{8}{6}$, $\omega = \frac{2}{6}$.

35.

$y^2 - (y+z+\omega) = \varkappa^2$, $z^2 - (y+z+\omega) = \lambda^2$, $\omega^2 - (y+z+\omega) = \xi^2$.

Ἐφαρμόζει τὴν ἀνωτέρω ταὐτότητα ὑπὸ τὴν μορφὴν $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$, ἀναλύων τὸν 12 ὡς προηγουμένως, ὁπότε ἐκ τοῦ πρώτου τρόπου ἀναλύσεως εἶναι $\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 12 = \left(\frac{11}{2}\right)^2$, ἐκ τοῦ δευτέρου $4^2 - 12 = 2^2$, καὶ ἐκ τοῦ τρίτου $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Λαμβ νει $y + z + \omega = 12x^2$, (1). Θέτει $y = \frac{13}{2}x$, $z = 4x$, $\omega = \frac{7}{2}x$ καὶ διὰ προσθέσεως $y + z + \omega = 14x$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $14x = 12x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{6}$. θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{13}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{91:2}{6}$, $z = \frac{28}{6}$, $\omega = \frac{49:2}{6}$.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ III.

1.

$y + z + \omega - y^2 = \varkappa^2$, (1), $y + z + \omega - z^2 = \lambda^2$, (2), $y + z + \omega - \omega^2 = \mu^2$, (3).

Θεωρεῖ δύο τετραγώνους, τοὺς x^2 καὶ $4x^2$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $5x^2$. Θέτει $y + z + \omega = 5x^2$ καὶ $y = x$, $z = 2x$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2). Ὁ $5 = 1^2 + 2^2$. Ἀναλύει τοῦτον εἰς ἄλλους δύο τετραγώνους κατὰ τὸ II, 9, ἤτοι $5 = \left[\frac{2(\mu\gamma - \beta)}{\mu^2 + 1} + \beta\right]^2 + \left[\frac{2\mu(\mu\gamma - \beta)}{\mu^2 + 1} - \gamma\right]^2$, ὅπου $\beta^2 = 1^2$, $\gamma^2 = 2^2$, $(\mu \neq 1, = 2)$, ὁπότε οἱ δύο νέοι τετράγωνοι εἶναι οἱ $\frac{4}{25}$ καὶ $\frac{121}{125}$. (σημ. διὰ $\mu = 1$ προκύπτουσιν οἱ ἴδιοι τετράγωνοι 1 καὶ 4). Θέτει $\omega = \frac{2x}{5}$ $\left(\text{ἠδύνατο νὰ θέσῃ καὶ } \frac{11x}{5}\right)$, ὁπότε πληροῦται καὶ τὸ ἐπίταγμα (3). Μένει νὰ εἶναι $y + z + \omega = 5x^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι

$x + 2x + \frac{2x}{5} = 5x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{17}{25} = y$, $z = \frac{34}{25}$, $\omega = \frac{34}{125}$, ἢ $x = y = \frac{85}{125}$, $z = \frac{170}{125}$, $\omega = \frac{34}{125}$.

2.

$(y + z + \omega)^2 + y = \varkappa^2$, (1), $(y + z + \omega)^2 + z = \lambda^2$, (2), $(y + z + \omega)^2 + \omega = \mu^2$, (3). Θέτει $(y + z + \omega)^2 = x^2$, (4), $y = 3x^2$, $z = 8x^2$, $\omega = 15x^2$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3). Διὰ τὸ ἐπίταγμα (4) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως $26x^2 = x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{26}$, $y = \frac{3}{676}$, $z = \frac{8}{676}$, $\omega = \frac{15}{676}$.

3.

$(y+z+\omega)^2 - y = \varkappa^2$, (1), $(y+z+\omega)^2 - z = \lambda^2$, (2), $(y+z+\omega)^2 - \omega = \mu^2$, (3).

Θέτει $y+z+\omega = 4x$, (4), $y = 7x^2$, $z = 12x^2$, $\omega = 15x^2$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3). Διὰ τὸ ἐπίταγμα (4) εἶναι $4x = 7x^2 + 12x^2 + 15x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{2}{17}$, $y = \frac{28}{289}$, $z = \frac{48}{289}$, $\omega = \frac{60}{289}$.

4.

$y - (y+z+\omega)^2 = \varkappa^2$, (1), $z - (y+z+\omega)^2 = \lambda^2$, (2), $\omega - (y+z+\omega)^2 = \mu^2$, (3).

Θέτει $y+z+\omega = x$, (4), $(y+z+\omega)^2 = x^2$, $y = 2x^2$, $z = 5x^2$, $\omega = 10x^2$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3). Διὰ τὸ ἐπίταγμα (4) λαμβάνει $x = 2x^2 + 5x^2 + 10x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{17}$. $y = \frac{2}{289}$, $z = \frac{5}{289}$, $\omega = \frac{10}{289}$.

5.

$y+z+\omega = \varkappa^2$, (1), $y+z-\omega = \lambda^2$, (2), $z+\omega-y = \mu^2$, (3), $\omega+y-z = \nu^2$, (4).

Θέτει $y+z+\omega = (x+1)^2 = x^2+2x+1$, (5) καὶ $y+z-\omega = 1$, (6)· Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) τῆς τιμῆς $y+z$ ἐκ τῆς (6) λαμβάνει $\omega = \frac{x^2}{2} + x$, (7). Θέτει εἰς τὴν (3) $z+\omega-y = x^2$, (8). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) τῆς τιμῆς $z+\omega$ ἐκ τῆς (8) λαμβάνει $y = x + \frac{1}{2}$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν ω, y εἰς τὴν (5) ἔχει $z = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ καὶ τέλος δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν y, z, ω λαμβάνει $2x = \nu^2$, ἔστω $= 16$, ἐξ ἧς $x = 8$. Ὅθεν $y = 8\frac{1}{2}$, $z = 32\frac{1}{2}$, $\omega = 40$.

"Αλλως.

Ζητεῖ τρεῖς τετραγώνους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος. Θεωρεῖ τὴν σχέσιν $4+9+\beta^2=\gamma^2$, ἐξ ἧς κατὰ τὸ (II,10) εἶναι $\beta^2=36$, $\gamma^2=49$. [σημ. Κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι $\beta=\frac{13-\alpha^2}{2\alpha}$ καὶ $\gamma=\frac{13+\alpha^2}{2\alpha}$. Διὰ $\alpha=1$ εἶναι $\beta=6, \gamma=7$]. "Οθεν θὰ εἶναι $4+9+36=49$. Κατόπιν τούτου ἀνάγει τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ἑξῆς: $y+z=\omega+4$, (1), $z+\omega=y+9$, (2), $\omega+y=z+36$, (3). Τώρα ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον λύσεως τοῦ (I,18). Καλοῦμεν $y+z+\omega=2x$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) τὸ ω καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν $\omega=x-2$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) τὸ y καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν $y=\frac{2x-9}{2}$. Ὁμοίως ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $z=x-16$. "Οθεν $y+z+\omega=2x=\left(\frac{2x-9}{2}\right)+(x-16)+(x-2)$, ἐξ ἧς $x=24\frac{1}{2}$. Συνεπῶς εἶναι $y=20$, $z=6\frac{1}{2}$, $\omega=22\frac{1}{2}$. Καὶ εἶναι $y+z+\omega=49$, $20+6\frac{1}{2}=22\frac{1}{2}+2^2$, $6\frac{1}{2}+22\frac{1}{2}=20+3^2$, $22\frac{1}{2}+20=6\frac{1}{2}+9^2$.

6.

$y+z+\omega=\varkappa^2$, $y+z=\lambda^2$, (1), $z+\omega=\mu^2$, (2), $\omega+y=\nu^2$, (3).

Θέτει $y+z+\omega=(x+1)^2=x^2+2x+1$, (4) καὶ $y+z=x^2$, (5). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) λαμβάνει $\omega=2x+1$. Θέτει $z+\omega=(x-1)^2=x^2-2x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι $y=4x$. Ἐκ τῆς (4) πάλιν δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y, ω λαμβάνει $z=x^2-4x$. Καὶ ἐκ τῆς (3) εἶναι $(2x+1)+4x=\nu^2$, ἔστω $=121$, ἐξ ἧς $x=20$. "Οθεν $y=80$, $z=320$, $\omega=41$.

Ἄλλως.

Ἔστω $y + z + \omega = x^2 + 2x + 1$, (1). $y + z = x^2$ (2) ὁπότε $\omega = 2x + 1$, (3). Ἔστω $z+\omega = x^2 - 2x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ ω εἶναι $z = x^2 - 4x$. Καὶ ἐκ τῆς (1) δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν z, ω εἶναι $y = 4x$. Διὰ προσθέσεως τῶν τιμῶν y, z, ω εἶναι $6x + 1$ = τετράγωνος, ἔστω $= 36$, ἐξ ἧς $x = \frac{35}{6}$. Ὅθεν $y = \frac{140}{6} = \frac{840}{36}$, $z = \frac{385}{36}$, $\omega = \frac{456}{36}$.

7.

Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἴσην ὑπεροχὴν σημαίνει τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, $z - y = \omega - z$.

$y + z = \varkappa^2$, (1), $z + \omega = \lambda^2$, (2), $\omega + y = \mu^2$ (3).

Εὑρίσκει πρῶτον τρεῖς τετραγώνους α^2, β^2, γ^2, ὥστε νὰ εἶναι $\beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ καὶ $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} > \alpha^2, \beta^2, \gamma^2$,

Ἔστω $\alpha^2 = x^2$, $\beta^2 = x^2 + 2x + 1$. Ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων τούτων εἶναι $2x + 1$. Ἑπομένως ὁ $\gamma^2 = x^2 + 4x + 2$. Ἔστω $\gamma = x - 8$, ὁπότε θὰ εἶναι $x^2 + 4x + 2 = x^2 - 16x + 64$, ἐξ ἧς $x = \frac{31}{10}$. Θὰ εἶναι ἄρα $\alpha^2 = \frac{961}{100}$, $\beta^2 = \frac{1681}{100}$, $\gamma^2 = \frac{2401}{100}$, καὶ τὰ ἑκατονταπλάσια τούτων: πρῶτος τετράγωνος 961, δεύτερος τετρ. 1681, τρίτος τετρ. 2401. Καὶ εἶναι $\frac{961 + 1681 + 2401}{2} > 961, 1681, 2401$.

Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y + z = 961$, (4), $z + \omega = 2401$, (5), $\omega + y = 1681$, (6), $y + z + \omega = x$, (7). Ἐκ τῆς (7) καὶ τῶν (4, 5, 6) λαμβάνει $\omega = x - 961$, $y = x - 2401$, $z = x - 1681$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $y + z + \omega = x = 3x - 5043$, ἐξ ἧς $x = 2521\frac{1}{2}$. Ὅθεν εἶναι $y = 120\frac{1}{2}$, $z = 840\frac{1}{2}$, $\omega = 1560\frac{1}{2}$.

8.

$y+z+\alpha=\varkappa^2$, (1), $z+\omega+\alpha=\lambda^2$, (2), $\omega+y+\alpha=\mu^2$, (3), $y+z+\omega+\alpha=\nu^2$, (4).

Ἔστω $\alpha=3$, $y+z=x^2+4x+1$, (5), $z+\omega=x^2+6x+6$, (6), $y+z+\omega=x^2+8x+13$, (7), ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 4). Ἐκ τῆς (7) καὶ (5, 6) λαμβάνει $\omega=4x+12$, $y=2x+7$. Καὶ ἐκ τῆς (5) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ y εἶναι $z=x^2+2x-6$. Ὑπολείπεται τὸ ἐπίταγμα (3). Δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $6x+22=\mu^2$, ἔστω $=100$, ἐξ ἧς $x=13$. Ὅθεν εἶναι $y=33$, $z=189$, $\omega=64$.

9.

$y+z-\alpha=\varkappa^2$ (1), $z+\omega-\alpha=\lambda^2$, (2), $\omega+y-\alpha=\mu^2$, (3), $y+z+\omega-\alpha=\nu^2$, (4).

Ἔστω $\alpha=3$, $y+z=x^2+3$, (5), $z+\omega=x^2+2x+4$, (6), $y+z+\omega=x^2+4x+7$, (7), ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 4). Ἐκ τῆς (7) καὶ (5) εἶναι $\omega=4x+4$, καὶ ἐκ τῆς (6) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ ω εἶναι $z=x^2-2x$. Καὶ ἐκ τῆς (5) $y=2x+3$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $6x+4=\mu^2$, ἔστω $=64$, ἐξ ἧς $x=10$. Ὅθεν εἶναι $y=23$, $z=80$, $\omega=44$.

10.

$yz+\alpha=\varkappa^2$, (1,) $z\omega+\alpha=\lambda^2$, (2), $\omega y+\alpha=\mu^2$, (3).

Ἔστω $\alpha=12$, $\varkappa^2=25$, $\lambda^2=16$ καὶ ἐκ τῆς (1), $yz=25-12=13$. Θέτει $y=13x$, $z=\frac{1}{x}$. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως, $\omega=4x$. Οὕτω πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) λαμβάνει $4x.\ 13x+12=5^2$. Τὸ πρόβλημα θὰ ἐλύετο ἂν ὁ $4.\ 13=52$ ἦτο τετράγωνος, κατὰ τὸ [II, 10]. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ ἕκαστος αὐτῶν σὺν 12 νὰ δίδῃ τετράγωνον, ἢ νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ ἕκαστος αὐτῶν σὺν 12 νὰ δίδῃ τετράγωνον. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εὑρίσκονται κατὰ τὴν ταὐτότητα τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ [II, 34], τὴν $\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2+\mu\nu=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$ [Σημ. Ἡ ταὐτότης αὕτη ἀποδεικνύεται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου [II, 5].

Ἔστω $\text{ΑΓ}=\text{ΓΒ}$, $\text{ΑΔ}>\text{ΔΒ}$. Ὡς ἐμνημονεύθη ἤδη (σελ. 423) κατὰ τὸ θεώρημα θὰ εἶναι $\text{ΑΔ}\,.\,\text{ΔΒ}+\text{ΓΔ}^2=\text{ΓΒ}^2$. Ἐὰν $\text{ΑΔ}=\mu$, $\text{ΔΒ}=\nu$ θὰ εἶναι $\text{ΓΒ}=\frac{\mu+\nu}{2}$ καὶ $\text{ΓΔ}=\frac{\mu+\nu}{2}-\nu=\frac{\mu-\nu}{2}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως $\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$. Ἴδε ἀνάλυσιν τούτου εἰς Ε. Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων Βιβλίον Χ, σελὶς 253]. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου τετραγώνου ἀναλύει τὸν $12=6.2$, ὁπότε εἶναι $6.2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2=\left(\frac{6+2}{2}\right)^2$, $12+4=16$ καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δευτέρου τετραγώνου $12=4.3$, $4.3+\left(\frac{4-3}{2}\right)^2=\left(\frac{4+3}{2}\right)^2$, $12+\frac{1}{4}=\frac{49}{4}$. Ὁ πρῶτος τῶν ζητουμένων τετραγώνων εἶναι 4 καὶ ὁ δεύτερος $\frac{1}{4}$. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y=4x$, $z=\frac{1}{x}$, $\omega=\frac{1}{4}x$. Καὶ ἐκ τῆς (3) δι' ἀντικαταστάσεως $x^2+12=\mu^2$, ἔστω $=(x+3)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{2}$. Ὅθεν εἶναι $y=2$, $z=2$, $\omega=\frac{1}{8}$.

11.

$$yz-\alpha=\varkappa^2,\ (1),\quad z\omega-\alpha=\lambda^2,\ (2),\quad \omega y-\alpha=\mu^2,\ (3).$$

Ἔστω $\alpha=10$, $\varkappa^2=4$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $yz=14$. Ἐὰν $z=1$

θὰ εἶναι $y=14$. Ἐκφράζει τούτους συναρτήσει τοῦ x, ὁπότε θὰ εἶναι $y=14x$, $z=\frac{1}{x}$, διὰ νὰ εἶναι $14x.\frac{1}{x}=14$. Θέτει $\lambda^2=9$ καὶ ἐκ τῆς (2) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως $\omega=19x$. Οὕτω πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1,2). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $19x.\ 14x-10=\mu^2$. Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν $19.14=266$ ἦτο τετράγωνος, τὸ πρόβλημα θὰ εἶχε λυθῆ κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ [II,10]. Ἀνάγεται λοιπὸν τοῦτο εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο βοηθητικοὶ τετράγωνοι ἕκαστος τῶν ὁποίων μειούμενος κατὰ 10 νὰ δίδῃ τετράγωνον. Ἀναλύει τὸν 10 κατὰ δύο τρόπους εἰς γινόμενον παραγόντων, $10=10.1=5.2$. Τὸν πρῶτον ζητούμενον βοηθητικὸν τετράγωνον εὑρίσκει ἐκ τῆς ταὐτότητος $\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$ (α), ὅπου $\mu=10$ καὶ $\nu=1$, ὁπότε εἶναι $\left(\frac{10+1}{2}\right)^2=\left(\frac{10-1}{2}\right)^2+10=30\frac{1}{4}$. Τὸν δεύτερον βοηθ. τετράγωνον δὲν τὸν εὑρίσκει ἐκ τῆς ταυτότητος αὐτῆς (διὰ $\mu=5$, $\nu=2$ εἶναι οὗτος $12\frac{1}{4}$), ἀλλὰ καλεῖ αὐτὸν x^2, ὁπότε κατὰ τὸ τιθέμενον ἐπίταγμα θὰ εἶναι $x^2-10=$ τετράγωνος. Σχηματίζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τούτου ἴσην μὲ x μεῖον τὸν μικρότερον παράγοντα τοῦ γινομένου $5.2=10$, δηλ. τὸν 2 καὶ ἔχει $x^2-10=(x-2)^2$, ἐξ ἧς $x=3\frac{1}{2}$, $x^2=12\frac{1}{4}$. Ὥστε οἱ δύο ζητούμενοι βοηθητικοὶ τετράγωνοι εἶναι $30\frac{1}{4}$ καὶ $12\frac{1}{4}$. Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y=30\frac{1}{4}x$, $z=\frac{1}{x}$, $\omega=12\frac{1}{4}x$, ὁπότε ἔχει ἐπιτύχει τὴν πλήρωσιν τῶν ἐπιταγμάτων (1, 2) ἤτοι $30\frac{1}{4}x.\frac{1}{x}-10=\left(\frac{9}{2}\right)^2$, $\frac{1}{2}x.\ 12\frac{1}{4}x-10=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ καὶ ἀκόμη ἐκ τῆς (3), $\omega y-10=12\frac{1}{4}x.\ 30\frac{1}{4}x-10=$ τετράγωνος, ὅπου τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τοῦ x, ὁ $12\frac{1}{4}.30\frac{1}{4}$ εἶναι τετράγωνος, ὁ $\frac{5929}{16} = \left(\frac{77}{4}\right)^2$. Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦ δευτέρου μέλους ἴσον μὲ $77x - 2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\frac{5929}{16}\ x^2 - 10 = (77x - 2)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{41}{77}$. Ὅθεν εἶναι $y = 30\frac{1}{4} \cdot \frac{41}{77} = \frac{1240\frac{1}{4}}{77}$. $z = \frac{77}{41}$ καὶ $\omega = 12\frac{1}{4} \cdot \frac{41}{77} = \frac{502\frac{1}{4}}{16}$.

12.

$$yz + \omega = \varkappa^2,\ (1),\quad z\omega + y = \lambda^2,\ (2),\quad \omega y + z = \mu^2,\ (3).$$

Ἐάν, λέγει, $\omega = \frac{\varkappa^2}{\xi}$, θὰ εἶναι $yz = \varkappa^2 - \frac{\varkappa^2}{\xi}$ καὶ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα (1). Θέτει $\varkappa^2 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ καὶ $\omega = 9$, ὁπότε $yz = x^2 + 6x = x\ (x+6)$. Ἐὰν $y = x$ θὰ εἶναι $z = x + 6$. Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὰς σχέσεις (2, 3) καὶ ἔχει $(x+6).\ 9 + x = 10x + 54 = \lambda^2$, (4), $10x + 6 = \mu^2$, (5) ἤτοι μίαν διπλῆν ἐξίσωσιν (διπλοϊσότητα). Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $48 = \lambda^2 - \mu^2 = (\lambda + \mu)\ (\lambda - \mu)$. Ἀναλύει τὸν 48 εἰς 12.4 καὶ θέτει

$$\lambda + \mu = 12$$
$$\lambda - \mu = 4$$

Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $\lambda = 8$, $\lambda^2 = 64$ καὶ $\mu = 4$, $\mu^2 = 16$. Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν (4 ἢ 5) καὶ λαμβάνει $x = 1$. Θὰ εἶναι ἐπομένως $y = 1$, $z = 1 + 6 = 7$, $\omega = 9$.

13

$$yz - \omega = \varkappa^2,\ (1),\quad z\omega - y = \lambda^2,\ (2),\quad \omega y - z = \mu^2,\ (3).$$

Θέτει $y=x$, $z=x+4$, $\omega=4x$ καὶ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα (1). Ἀντικαθιστᾷ εἰς τὰς (2, 3) καὶ λαμβάνει $4x^2+15x=\lambda^2$, (4), καὶ $4x^2-x-4=\mu^2$, (5), (διπλῆ ἐξίσωσις). Ἀφαιρεῖ ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἔχει $16x+4=\lambda^2-\mu^2=(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)$. Ἀναλύει τὸν $16x+4$ εἰς $4(4x+1)$ καὶ καλεῖ $4x+1=\lambda+\mu$, $4=\lambda-\mu$. Διὰ προσθέσεως τούτων καὶ ἀφαιρέσεως κατόπιν κατὰ μέλη λαμβάνει $\lambda=\frac{4x+5}{2}$, $\mu=\frac{4x-3}{2}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν 5 ἢ 6 τῆς τιμῆς τοῦ λ ἢ μ εἶναι $4x^2+15x=\left(\frac{4x+5}{2}\right)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{25}{20}\left(\text{ἢ } 4x^2-x-4=\left(\frac{4x+3}{2}\right)^2,\ x=\frac{25}{20}\right)$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $y=x=\frac{25}{20}$, $z=\frac{25}{20}+4=\frac{105}{20}$, $\omega=4.\frac{25}{20}=\frac{100}{20}$.

14.

$yz+\omega^2=\varkappa^2$, (1), $z\omega+y^2=\lambda^2$, (2), $\omega y+z^2=\mu^2$, (3).

Θέτει $y=x$, $z=4x+4$, $\omega=1$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $x+(4x+4)^2=\mu^2$, ἔστω $=(4x-5)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{9}{73}$. Ὅθεν εἶναι $y=x=\frac{9}{73}$, $z=\frac{328}{73}$, $\omega=1$, καὶ τὰ 73πλάσια τούτων, $y=9$, $z=328$, $\omega=73$.

15.

$yz+(y+z)=\varkappa^2$, (1), $z\omega+(z+\omega)=\lambda^2$, (2), $\omega y+(\omega+y)=\mu^2$, (3).

Εἶναι γνωστόν, λέγει ὅτι ἂν οἱ α, β εἶναι διαδοχικοὶ ἀκέραιοι α, α+1, θὰ εἶναι $\alpha^2(\alpha+1)^2+\alpha^2+(\alpha+1)^2=(\alpha^2+\alpha+1)^2$.

Θέτει $y=4$, $z=9$, ὁπότε $4.9+(4+9)=7^2$ πληρουμένου τοῦ ἐπιτάγματος (1), καὶ $\omega=x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3) λαμβάνει $10x+9=\lambda^2$, (4), $5x+4=\mu^2$, (5). Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχει $5x+5=\lambda^2-\mu^2=(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)$. Ἀναλύει τὸν $5x+5$ εἰς $5(x+1)$, καλεῖ $x+1=\lambda+\mu$, $5=\lambda-\mu$ καὶ διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατόπιν κατὰ μέλη λαμβάνει

$\lambda = \frac{x+6}{2}$, $\mu = \frac{x-4}{2}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4 ἢ 5) τῆς τιμῆς τοῦ (λ ἢ μ) εἶναι $10x+9 = \left(\frac{x+6}{2}\right)^2$, ἐξ ἧς $x=28$. Ὅθεν εἶναι $y=4$, $z=9$, $\omega=28$.

Ἄλλως.

$yz+(y+z) = \kappa^2$, (1), $z\omega+(z+\omega) = \lambda^2$, (2), $\omega y+(\omega+y) = \mu^2$, (3).

Θέτει $y=x$, $z=3$, $\kappa^2 = 25$ καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $4x+3 = 25$, ἐξ ἧς $x = 5\frac{1}{2}$ πληρουμένου τοῦ ἐπιτάγματος (1) διὰ $y = 5\frac{1}{2}$. Θέτει $\omega = x$ (ἄλλος x τώρα) καὶ ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $4x+3 = \lambda^2$, (4) καὶ ἐκ τῆς (3) $6\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} = \mu^2$, (5). Τὸ σύστημα τοῦτο δὲν δίδει ῥητὴν λύσιν διὰ τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως τῆς διπλῆς ἐξισώσεως καὶ τὸ ἐγκαταλείπει. Διὰ νὰ ἔχῃ ῥητὴν λύσιν ἀνάγει τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρῃ δύο ἀριθμοὺς η, ξ τοιούτους, ὥστε $\eta\xi + (\eta+\xi) = \nu^2$ καὶ $\frac{\eta+1}{\xi+1} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Ἐπειδή, λέγει, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς x καὶ $4x+3$ εἶναι $\frac{x+1}{(4x+3)+1} = \frac{\text{τετράγωνος}}{\text{τετράγωνος}}$, $\left(=\frac{1}{4}\right)$, θέτει $y = x$, $z = 4x+3$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι $4x^2+8x+3 = \kappa^2$, ἔστω $= (2x-3)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{10} = y$, $z = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦται τὸ ἐπίταγμα (1). Θέτει $\omega = x$ (ἄλλος x πάλιν) καὶ ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $\frac{26}{5}x + \frac{21}{5} = \lambda^2$, (6) καὶ ἐκ τῆς (3), $\frac{13}{10}x + \frac{3}{10} = \mu^2$. Πολλαπλασιάζει τὴν (6) ἐπὶ 25 καὶ τὴν (7) ἐπὶ 100 καὶ ἔχει

$130x + 105 = \varphi^2$, (8) καὶ $130x + 30 = \tau^2$, (9). Τώρα ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως τῆς διπλῆς ἐξισώσεως. Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (9) ἀπὸ τῆς (8) εἶναι $75 = \varphi^2 - \tau^2 = (\varphi+\tau)(\varphi-\tau)$. Ἀναλύει τὸν 75 εἰς 3.25 καὶ θέτει $25 = \varphi + \tau$, $3 = \varphi - \tau$ καὶ διὰ προσθέσεως τούτων καὶ ἀφαιρέσεως κατόπιν κατὰ μέλη ἔχει $\varphi = 14$, $\tau = 11$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8 ἢ 9) εἶναι $x = \frac{7}{10} = \omega$. Καὶ ἔχει εὑρεθῆ $y = \frac{3}{10}$, $z = \frac{42}{10}$.

16.

$yz - (y+z) = \varkappa^2$, (1), $z\omega - (z+\omega) = \lambda^2$, (2), $\omega y - (\omega + y) = \mu^2$, (3).

'Εάν, λέγει, ἐφαρμόσῃ τὰ ἐν ἀρχῇ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἐφαρμοσθέντα δὲν θὰ ἔχῃ ῥητὴν λύσιν. 'Ανάγει λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρῃ δύο ἀριθμοὺς η, ξ, τοιούτους, ὥστε $\eta\xi - (\eta + \xi) = \nu^2$ καὶ $\frac{\eta - 1}{\xi - 1} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$. 'Επειδή, λέγει, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς x καὶ $x-3$ εἶναι $\frac{x-1}{(x-3)-1} = \frac{\text{τετράγωνος}}{\text{τετράγωνος}}$ $\left(= \frac{1}{4}\right)$, θέτει $y = x+1$, $z = 4x+1$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $4x^2 - 1 = \varkappa^2$, ἔστω $= (2x-2)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{5}{8}$. Ὅθεν $y = \frac{13}{8}$, $z = \frac{28}{8}$ καὶ πληροῦται τὸ ἐπίταγμα (1). Θέτει $\omega = x$ (ἄλλος x). 'Εκ τῆς (2) λαμβάνει $\frac{7x}{2} - x - \frac{7}{2} = \lambda^2$ ἢ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 4, $10x - 14 = \varphi^2$, (4). 'Εκ τῆς (3) εἶναι $\frac{13}{8}x - \frac{13}{8} - x = \mu^2$ ἢ $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8} = \mu^2$. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 16 λαμβάνει $10x - 26 = \tau^2$, (5). Εἰς τὸ σύστημα (4, 5) ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως τῆς διπλῆς ἐξισώσεως. 'Αφαιρεῖ κατὰ μέλη καὶ ἔχει $12 = (\varphi^2 - \tau^2) = (\varphi + \tau)(\varphi - \tau)$. Ὁ $12 = 2.6$. Θέτει $6 = \varphi + \tau$, $2 = \varphi - \tau$ καὶ διὰ προσθέσεωςτούτων καὶ ἀφαιρέσεως κατόπιν κατὰ μέλη λαμβάνει $\varphi = 4$, $\tau = 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4 ἢ 5) εἶναι $x = 3 = \omega = \frac{24}{8}$. Καὶ ἔχει εὑρεθῆ $y = \frac{13}{8}$, $z = \frac{28}{8}$.

17.

$yz+y=\varkappa^2$, (1), $yz+z=\lambda^2$, (2). $yz+(y+z)=\mu^2$. (3).

Θέτει $y=x$, $z=4x-1$, ἐπειδή, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς x, $4x-1$ τὸ γινόμενον αὐτῶν σὺν τὸν μικρότερον δίδει τετράγωνον. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦται τὸ ἐπίταγμα (1). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3) λαμβάνει $4x^2+3x-1=\lambda^2$, (4), $4x^2+4x-1=\mu^2$, (5). Ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως τῆς διπλῆς ἐξισώσεως. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη (τῆς 4 ἀπὸ τῆς 5) εἶναι $x=\mu^2-\lambda^2=(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)$. Ἀναλύει τὸν x εἰς $\frac{1}{4}$. $4x$ καὶ θέτει $4x=\mu+\lambda$, $\frac{1}{4}=\mu-\lambda$. καὶ διά προσθέσεως τούτων καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $\mu=2x+\frac{1}{8}$, $\lambda=2x-\frac{1}{8}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν 4 ἢ 5 λαμβάνει $x=\frac{65}{224}$. Θὰ εἶναι ἑπομένως $y=x=\frac{65}{224}$, $z=4.\ \frac{65}{224}-1=\frac{36}{224}$.

18.

$yz-y=\varkappa^2$, (1), $yz-z=\lambda^2$, (2), $yz-(y+z)=\mu^2$, (3).

Θέτει $y=x+1$, $z=4x$, ἐπειδὴ ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς x, $4x-4$ τὸ γινόμενον αὐτῶν μεῖον τὸν μεγαλύτερον δίδει τετράγωνον (ὑποτίθεται $x>1$). Οὕτω πληροῦται τὸ ἐπίταγμα (2). Ἐκ τῶν (1, 3) λαμβάνει $4x^2+3x-1=\varkappa^2$, (4) καὶ $4x^2-x-1=\mu^2$, (5). Ἐφαρμόζει πάλιν τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως τῆς διπλῆς ἐξισώσεως ἀναλύων τὴν διαφορὰν τῆς (5) ἀπὸ τῆς (4), τὴν $4x$, εἰς $4x.\,1$ καὶ θέτων $(\varkappa+\mu)=4x$, $\varkappa-\mu=1$. Κατόπιν τῶν σχετικῶν πράξεων λαμβάνεται $x=\frac{5}{4}$. Θὰ εἶναι ἑπομένως $y=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$, $z=\frac{20}{4}=5$.

19.

$(y+z+\omega+\varphi)^2\pm y=$ τετράγωνος, (1), $(y+z+\omega+\varphi)^2\pm z=$

τετράγωνος, (2), $(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \omega =$ τετράγωνος, (3), $(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \varphi =$ τετράγωνος, (4).

Ἔστω $(y+z+\omega+\varphi) = \sigma$, ὁπότε αἱ σχέσεις γίνονται $\sigma^2 \pm y =$ τετράγωνος, $\sigma^2 \pm z =$ τετράγωνος, $\sigma^2 \pm \omega =$ τετράγωνος, $\sigma^2 \pm \varphi =$ τετράγωνος. Θεωρεῖ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ καὶ τὴν ἐκ ταύτης ταὐτότητα $\alpha^2 \pm 2\beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 \pm 2\beta\gamma = (\beta \pm \gamma)^2$ καὶ λέγει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ νὰ εὕρῃ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν καὶ διαφόρους καθέτους πλευράς. Τοῦτο σημαίνει, δοθεὶς τετράγωνος νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ τέσσαρας διαφόρους τρόπους. Τὸ πρόβλημα [II, 8] διδάσκει πῶς ἀναλύεται δοθεὶς τετράγωνος εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατ' ἀπείρους τρόπους.

Λαμβάνει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα πλευρὰς (3, 4, 5) καὶ (5, 12, 13), [ἐκ τῆς σχέσεως $\mu^2 + \left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu^2+1}{2}\right)^2$ [ὅπου $\mu = 3$ καὶ $\mu = 5$]

Πολλαπλασιάζει τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου ὀρθ. τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ δευτέρου καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ δευτέρου ὀρθ. τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ πρώτου καὶ οὕτω ἔχει τὰς πλευρὰς δύο ὀρθογωνίων τριγώνων ἐχόντων τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν 65 ἤτοι ἔχει δύο νέα ὀρθογ. τρίγωνα πλευρῶν (39, 52, 65) καὶ (25, 60, 65). Μένει νὰ εὕρῃ ἄλλα δύο ὀρθογ. τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν 65. Ὁ 65 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ δύο τρόπους ἤτοι εἶναι $65 = 4^2 + 7^2$ καὶ $65 = 8^2 + 1^2$. Σχηματίζει τώρα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀριθμῶν (7, 4), τὸ δὲ ἐκ τῶν ἀριθμῶν (8, 1) χρησιμοποιῶν τὴν ταὐτότητα τὴν παρέχουσαν ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς πυθαγορικῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$, τὴν $(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu^2)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\mu=7$, $\nu=4$ αἱ πλευραὶ τοῦ τρίτου ὀρθογ. τριγώνου εἶναι (33, 56, 65) καὶ ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\mu=8$, $\nu=1$ αἱ πλευραὶ τοῦ τετάρτου ὀρθογ. τριγώνου εἶναι (16, 63, 65). Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $(y+z+\omega+\varphi) = 65x$ καὶ ἕκαστον τῶν ζητουμένων ἀγνώστων ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου ὀρθογωνίου τριγώνου συναρτήσει τοῦ x^2, ἤτοι $y = \frac{4.39.52}{2} x^2 = 4056x^2$, $z = \frac{4.25.60}{2} x^2 = 3000x^2$, $\omega = \frac{4.33.56}{2} x^2 = 3696x^2$, $\varphi = \frac{4.16.63}{2} x^2 = 2016x^2$. Θὰ εἶναι ἑπομένως

$$65x = (4065 + 3000 + 3696 + 2016)x^2, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{65}{12768}.$$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ x εἶναι $y = 17136600 : \xi^2$, $z = 12675000 : \xi^2$, $\omega = 15615600 : \xi^2$, $\varphi = 8517600 : \xi^2$ ὅπου $\xi^2 = (12768)^2 = 163021824$.

20.

$$\alpha = y + z, \ (1), \quad \omega^2 - y = \kappa^2, \ (2), \quad \omega^2 - z = \lambda^2, \ (3).$$

Θέτει $\alpha = 10$, $\omega^2 = x^2 + 2x + 1$, $y = 2x + 1$, $z = 4$ καὶ οὕτω πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2,3). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνεται δι' ἀντικαταστάσεως $10 = 6x + 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{2}$ καὶ $y = 4$, $z = 4$, $\omega^2 = \frac{25}{4}$. (Σημ. Ἄλλη λύσις τοῦ προβλήματος [II,15]).

21.

$$\alpha = y + z, \ (1), \quad \omega^2 + y = \kappa^2, \ (2), \quad \omega^2 + z = \lambda^2, \ (3).$$

Ἔστω $\alpha = 20$, $\omega^2 = x^2 + 2x + 1$, $y = 2x + 3$, $z = 4x + 8$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2,3). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $x = \frac{3}{2}$ καὶ $y = 3$, $z = 14$. (Σημ. ἄλλη λύσις τοῦ [II,14]).

Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ τὰ δύο προβλήματα εἶναι παρεμβολαὶ διότι εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ [II,15] καὶ [II,14].

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ IV.

1.

$$y + z = \alpha, \ (1), \quad y^3 + z^3 = \beta, \ (2).$$

Ἔστω $\beta = 370$, $\alpha = 10$. Λαμβάνει $\frac{\alpha}{2} = 5$ καὶ θέτει $y = x + 5$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) εἶναι $z = 5 - x$. Καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $(x + 5)^3 + (5 - x)^3 = 370$ ἢ $30x^2 + 250 = 370$, ἐξ ἧς $x = 2$. Ἑπομένως $y = 7$, $z = 3$, $y^3 = 343$, $z^3 = 27$.

2.

$$y - z = \alpha, \ (1) \quad y^3 - z^3 = \beta, \ (2).$$

Ἔστω $\alpha = 6$, $\beta = 504$. Θέτει $y = x + 3$ $\left(\text{ὅπου } 3 = \frac{\alpha}{2}\right)$, $z = x - 3$ ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (1). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $(x + 3)^3 - (x - 3)^3 = 504$ ἢ $18x^2 + 54 = 504$, ἐξ ἧς $x = 5$. Ἑπομένως $y = 8$, $z = 2$, $y^3 = 512$, $z^3 = 8$.

3.

$$y^2 z = \alpha, \ (1), \ yz = \alpha^3, \ (2).$$

Θέτει $y^2 = x^2$, $y = x$ καὶ $z =$ οἱοσδήποτε κύβος διὰ x, ἔστω $= \frac{8}{x}$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\alpha = 8x$, (3), καὶ ἐκ τῆς (2) $\alpha^3 = 8$, ἐξ ἧς $\alpha = 2$ καὶ ἐκ τῆς (3), $x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = y$. Ὅθεν εἶναι $y^2 = \frac{1}{16}$, $z = 4$.

4.

$$y^2 + z = \alpha^2, \ (1), \quad y + z = \alpha, \ (2).$$

Ἔστω $y^2 = x^2$, $y = x$, ὁ δὲ $z = (\nu^2 - 1)x^2$, ὥστε

$(\nu^2-1) \cdot x^2 + x^2 = \nu^2 x^2$ καὶ ἔστω $\nu = 2$, ὁπότε $z = 3x^2$. Οὕτω πληροῦται ἡ συνθήκη (1), ὅπου $\alpha^2 = 4x^2$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι δι' ἀντικαταστάσεως $x + 3x^2 = 2x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{3}$. Ὅθεν εἶναι $y^2 = \frac{1}{9}$, $z = \frac{3}{9}$.

5.

$$y^2 + z = \alpha, \ (1), \quad y + z = \alpha^2, \ (2).$$

Ἔστω $y^2 = x^2$, $y = x$, $z = \nu^2 x^2 - x$, $\nu^2 = 4$, πληρουμένης τῆς συνθήκης (2) ἐξ ἧς $\alpha = 2x$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $x^2 + 4x^2 - x = 2x$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{5}$. Ὅθεν εἶναι $y^2 = \frac{9}{25}$, $z = \frac{21}{25}$.

6.

$$y^3 + z^2 = \varkappa^3, \ (1), \quad \varphi^2 + z^2 = \lambda^2, \ (2).$$

Ἔστω $y^3 = x^3$, $\varphi^2 = \nu^2 x^2$, ἔστω δὲ $\nu = 3$, $\varphi^2 = 9x^2$. Χρησιμοποιεῖ τώρα τὸν τύπον τὸν παρέχοντα ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς πυθαγορικῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = z^2$, τὸν $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$, ὅπου μ, ν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, ἄρτιοι ἢ περιττοί. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ σημαίνει, ἂν $\mu = \varkappa.\xi$, $\nu = \sigma.\tau$ νὰ εἶναι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$. Κατόπιν τούτου ὁ $\mu.\nu$ εἶναι τετράγωνος, διότι τὸ γινόμενον δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι τετράγωνος. (Εὐκλείδου [IX,1]). [Ἴδε Ε.Σ. Σταμάτη: Εὐκλείδου, Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. 2 καὶ Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, τόμ, 3, σελ. 253. Ὁ ἀνωτέρω τύπος τῶν λύσεων εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὸν $(2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$, τὸν ὁποῖον ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει ὁ Διόφαντος]. Ἐνταῦθα λαμβάνει $\mu = 9$, $\nu = 1$, ὁπότε $\left(\frac{9-1}{2}\right)^2 = 16$, καὶ $9 + 16 =$ τετράγωνος. Θέτει $z^2 = 16x^2$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (2). Ἐκ τῆς (1) δὲ εἶναι $x^3 + 16x^2 = \varkappa^3$, ἔστω $= 8x^3$, ἐξ ἧς $x = \frac{16}{7}$. Ὅθεν εἶναι $y^3 = \frac{4096}{343}$, $\varphi^2 = \frac{2304}{49}$, $z^2 = \frac{4096}{49}$.

7.

$$y^3 + z^2 = \varkappa^2,\ (1),\ \ \varphi^2 + z^2 = \lambda^3,\ (2),$$

Ἔστω $\lambda^3 = y^3$, ὁπότε $y^3 - \varphi^2$ = τετράγωνος = z^2, (3). Χρησιμοποιεῖ τὴν ταὐτότητα $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta$ καὶ θέτει $y^3 = \alpha^2 + \beta^2$, $z^2 = 2\alpha\beta$. Θέτει ἀκόμη $\alpha = x$, $\beta = 2x$, ὁπότε $z^2 = 4x^2$ καὶ $y^3 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) εἶναι $\varphi^2 = x^2$. Ὑπολείπεται, ὁ $y^3 = 5x^2$ νὰ γίνῃ ἴσος πρὸς κύβον, ἔστω $= x^3$, ἐξ ἧς $x = 5$. Θὰ εἶναι ἄρα $y^3 = 125$, $\varphi^2 = 25$, $z^2 = 100$.

Ἄλλως.

$$y^3 + z^2 = \varkappa^2\ (1),\ \ \varphi^2 + z^2 = \lambda^3,\ (2).$$

Ἔστω $\lambda^3 = y^3$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει ἀφοῦ ἀντικαθιστᾷ τὸ y^3 ἐκ τῆς (2), $\varphi^2 + z^2 + z^2 = \varkappa^2$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι (βοηθητικοί), ὥστε τὸ ἄθροισμά των σὺν τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος x^2, ὁ δὲ δεύτερος 4. Καὶ πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμά των μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν, τὸ $(x^2 + 4) + x^2$ = τετράγωνος, ἔστω $= (2x - 2)^2$, ἢ $2x^2 + 4 = 4x^2 - 8x + 4$, ἐξ ἧς $x = 4$. Ὥστε ὁ εἷς ζητούμενος (βοηθητικὸς) τετράγωνος θὰ εἶναι $x^2 = 16$ καὶ ὁ ἄλλος 4. Θέτει τώρα $z^2 = 16x^2$, $\varphi^2 = 4x^2$. Ἐκ τῆς (2) ἄρα θὰ εἶναι $4x^2 + 16x^2 = \lambda^3 = y^3$ ἔστω $= x^3$, ἐξ ἧς $x = 20$. Ὅθεν εἶναι $y^2 = 8000$, $\varphi^2 = 1600$, $z = 6400$.

8.

$$y^3 + z = \varkappa^3,\ (1),\ \ y + z = \varkappa,\ (2).$$

Ἔστω $z = x$, $y = \mu x$, ὅπου μ ἔστω $2, = 2x$, $y^3 = 8x^3$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $2x + x = 3x$ καὶ ἐκ τῆς (1), $8x^3 + x = 27x^3$, $27x^3 - 8x^3 = x$, $19x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{19}$. Ἐπειδὴ ἡ λύσις δὲν εἶναι ῥητὴ θεωρεῖ τὴν προέλευσιν τοῦ 19.

Ὁ $19 = (2+1)^3 - 2^3$, ἢ $(\mu + 1)^3 - \mu^3 = \lambda$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι (βοηθητικοὶ) τοιοῦτοι, ὥστε ὁ κύβος τῶν διαφορῶν λ νὰ εἶναι τετράγωνος, ὁπότε θὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις. Ἔστω ὁ εἷς βοηθητικὸς ἀριθμὸς x καὶ ὁ ἄλλος x+1, ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $(x+1)^3 - x^3 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (1 - 2x)^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x = 7$. Ὥστε ὁ εἷς βοηθητικὸς ἀριθμὸς εἶναι 7 καὶ ὁ ἄλλος $7 + 1 = 8$. Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $z = x$, $y = 7x$. Θὰ εἶναι ἄρα $y^3 = 343x^3$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $\varkappa = 8x$ καὶ ἐκ τῆς (1), $343x^3 + x = 512x^3$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{13}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y^3 = \frac{343}{2197}$, $y = \frac{7}{13}$, $z = \frac{1}{13}$.

9.

$$y^3 + z = \varkappa, \ (1), \quad y + z = \varkappa^3, \ (2).$$

Ἔστω $y^3 = \mu^3 x^3$, μ τυχών, ἔστω 2, ὁπότε $y^3 = 8x^3$, $y = 2x$, καὶ $z = 27x^3 - 2x$ πληρουμένης οὕτω τῆς συνθήκης (2), ἐξ ἧς εἶναι $\varkappa = 3x$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει δι᾿ ἀντικαταστάσεως $8x^3 + 27x^3 - 2x = 3x$, ἐξ ἧς $x^2 = \frac{5}{35}$. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ x δὲν εἶναι ῥητὴ $\left(\text{διότι } \frac{5}{35} \text{ δὲν εἶναι } \frac{\eta^2}{\lambda^2}\right)$ θεωρεῖ τὴν προέλευσιν τῶν ἀριθμῶν 35 καὶ 5. Ὁ μὲν $35 = 3^3 + 2^3$, ὁ δὲ $5 = 3 + 2$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο κύβοι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμά των πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν των νὰ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῶν δύο βοηθητικῶν κύβων ν, ὅπου $\nu = 2$ καὶ ἡ μὲν πλευρὰ τοῦ πρώτου κύβου x, τοῦ δὲ ἄλλου ἡ πλευρὰ ἔστω $2 - x$. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἶναι 2 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων εἶναι $x^3 + (2-x)^3 = 6x^2 + 8 - 12x$. Καὶ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{6x^2 + 8 - 12x}{2} =$ τετράγωνος, ἢ $3x^2 + 4 - 6x =$ τετράγωνος, ἔστω $= (2 - 4x)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{10}{13}$. Ἑπομένως ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου βοηθητικοῦ κύβου θὰ εἶναι $\frac{10}{13}$ καὶ τοῦ ἄλλου $2 - \frac{10}{13} = \frac{16}{13}$ ἢ ἂν λάβωμεν τὰ 13πλάσια τούτων καὶ κατόπιν τὸ ἥμισυ θὰ εἶναι 5 ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς καὶ 8 ἡ πλευρὰ τοῦ ἄλλου.

Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y = 5x$, $y^3 = 125x^3$, $z = 8^3x^3 - 5x$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (2), ἐξ ἧς εἶναι $\kappa^3 = 512x^3$, $\kappa = 8x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνει $125x^3 + 512x^3 - 5x = 8x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{7}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{5}{7}$, $y^3 = \frac{125}{343}$, $z = \frac{267}{343}$.

10.

$$y^3 + z^3 = y + z, \quad (1).$$

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἐκπεφρασμέναι συναρτήσει τοῦ x, ἡ μὲν $2x$, ἡ δὲ $3x$. Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (1), $8x^3 + 27x^3 = 2x + 3x$, ἐξ ἧς $x^2 = \frac{5}{35}$. Διὰ νὰ εἶναι ῥητὴ ἡ τιμὴ τοῦ x ζητεῖ δύο βοηθητικοὺς κύβους. Τούτους ὅμως ἔχει ἤδη εὕρει εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὅπου ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶναι 8 καὶ τοῦ ἄλλου 5 καὶ αὗται συναρτήσει τοῦ x εἶναι $8x$ καὶ τοῦ ἄλλου $5x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνει $512x^3 + 125x^3 = 13x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{7}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{5}{7}$, $y^3 = \frac{125}{343}$, $z = \frac{8}{7}$, $z^3 = \frac{512}{343}$.

11.

$$y^3 - z^3 = y - z, \quad (1).$$

Ἔστω $z = 2x$, $y = 3x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $27x^3 - 8x^3 = x$, ἢ $19x^3 = x$, $x^2 = \frac{1}{19}$ Ἐπειδὴ ὁ x δὲν εἶναι ῥητὸς ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο κύβοι τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν κύβων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν πλευρῶν νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν δύο ζητουμένων βοηθητικῶν κύβων, ἡ μὲν x, ἡ δὲ $x + 1$. Πρέπει νὰ εἶναι $\frac{(x+1)^3 - x^3}{(x+1) - x} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, ἢ $\frac{3x^2 + 3x + 1}{1} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, ἢ $3x^2 + 3x + 1 = \lambda^2$, ἔστω $= (1 - 2x)^2$, ἐξ ἧς $x = 7$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς βοηθητικοῦ κύβου 7, τοῦ δὲ ἄλλου 8.

Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $z = 7x$, $y = 8x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $512x^3 - 343x^3 = x$, $169x^3 = x$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{13}$. Ἑπομένως εἶναι $z = \frac{7}{13}$, $y = \frac{8}{13}$.

12.

$y > z$. $\qquad y^3 + z = z^3 + y$, (1).

Ἔστω $y = 3x$, $z = 2x$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνεται $27x^3 + 3x = 8x^3 + 2x$, $x^2 = \frac{1}{19}$. Ὁμοία περίπτωσις πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος, διὰ νὰ εἶναι ὁ x ῥητός. Οἱ βοηθητικοὶ κύβοι εὑρέθησαν ἐκεῖ ἔχοντες πλευρὰς 7 ὁ εἷς καὶ 8 ὁ ἄλλος. Θέτει $y = 8x$, $z = 7x$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $512x^3 + 7x = 343x^3 + 8x$, $169x^2 = 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{13}$. Ἑπομένως εἶναι $y = \frac{8}{13}$, $z = \frac{7}{13}$.

13.

$y + 1 = \alpha^2$, (1), $z + 1 = \beta^2$, (2), $y + z + 1 = \gamma^2$, (3), $z - y + 1 = \delta^2$, (4).

Σχηματίζει $(\xi x + 1)$, ὅπου ξ τυχών, ἔστω 3, $9x^2 + 6x + 1$, καὶ θέτει $y = 9x^2 + 6x$, (5), πληρουμένης τῆς συνθήκης (1). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $9x^2+6x+z+1=\gamma^2$ Καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $9x^2+6x+\beta^2=\gamma^2$, ἢ $9x^2+6x=\gamma^2-\beta^2$, $(9x+6)x=(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)$. Θέτει $9x+6=\gamma+\beta$ καὶ $x=\gamma-\beta$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $\beta=4x+3, \beta^2=16x^2+24x+9$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $z=16x^2+24x+8$, (6). Ἐκ τῆς (4) λαμβάνει $16x^2+24x+8-(9x^2+6x)+1=\delta^2$, ἢ $7x^2+18x+9=\delta^2$, ἔστω $=(3-3x)^2$, ἐξ ἧς $x=18$. Καὶ ἐκ τῶν (5,6) εἶναι $y=3024$, $z=5624$.

14.

$y^2 > z^2 > \omega^2$. $\quad y^2+z^2+\omega^2=(y^2-z^2)+(z^2-\omega^2)+(y^2-\omega^2)$, (1).

Ἐκ τῆς (1) εἶναι $y^2+z^2+\omega^2=2(y^2-\omega^2)$, (2). Θέτει $\omega^2=1$, καὶ $y^2=x^2+2x+1$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $y^2+z^2+\omega^2=2x^2+4x$, ἐξ ἧς $z^2=2x^2+4x-(y^2+\omega^2)$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y^2, ω^2 εἶναι $z^2=x^2+2x-2$. Ἔστω $z^2=(x-4)^2$, ὁπότε $x=\frac{9}{5}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y^2=\frac{196}{25}$, $z^2=\frac{121}{25}$, $\omega^2=\frac{25}{25}$. Καὶ τὰ 25πλάσια τούτων δίδουν $y^2=196$, $z^2=121$, $\omega^2=25$.

15.

$(y+z)\,\omega=\alpha$, (1), $(z+\omega)\,y=\beta$, (2), $(\omega+y)\,z=\gamma$, (3).

Ἔστω $\alpha=35$, $\beta=27$, $\gamma=32$. Θέτει $\omega=x$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $y+z=\frac{35}{x}$. Ἔστω $y=\frac{10}{x}$, ὁπότε $z=\frac{25}{x}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2,3) λαμβάνει $10+\frac{250}{x^2}=27$, (4), $25+\frac{250}{x^2}=32$, (5).

Παρατηρεῖ ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς (4) ἀπὸ τῆς (5) εἰς τὸ δεύτερον μέλος δίδει 5, ἐν ᾧ εἰς τὸ πρῶτον 15. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ $y=\frac{10}{x}$, $z=\frac{25}{x}$, οἱ 10, 25, ἔχουσιν ἄθροισμα 35.

Πρέπει λοιπὸν οὗτοι νὰ ἀντικατασταθῶσι ὑπὸ δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 35 καὶ διαφορὰν 5. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ [I, 1]. Ἔστω ὁ εἷς συντελεστὴς x. Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $35-x$, ἡ δὲ διαφορά των θὰ εἶναι $35-x-x=5$, ἐξ ἧς $x=15$. Ὁ δεύτερος ἀριθμὸς θὰ εἶναι $35-15=20$. Θέτει τώρα $y=\frac{15}{x}$, $z=\frac{20}{x}$ καὶ ἐκ τῶν (2,3) λαμβάνει $\frac{300}{x^2}+15=27$, $\frac{300}{x^2}+20=32$. Ἐκ μιᾶς τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνει $x=5$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{15}{5}=3$, $z=\frac{20}{5}=4$, $\omega=x=5$.

16.

$y+z+\omega=\alpha^2$, (1), $y^2+z=\beta^2$, (2), $z^2+\omega=\gamma^2$, (3), $\omega^2+y=\delta^2$, (4).

Ἔστω $z=\mu x$, ὅπου μ τυχών, ἔστω $z=4x$. Ἐκ τῆς (2) πρέπει τὰ εὑρεθῇ τετράγωνος ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν $4x$ δίδει τετράγωνον. Ἔστω οὗτος ε^2 ὁπότε εἶναι $\varepsilon^2+4x=\beta^2$, $4x=\beta^2-\varepsilon^2=(\beta+\varepsilon)(\beta-\varepsilon)$. Ἀναλύει τὸν $4x$ εἰς $2x.2$ καὶ θέτει $\beta+\varepsilon=2x$, $\beta-\varepsilon=2$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $\varepsilon=x-1$. Θέτει $y=x-1$, ὁπότε πληροῦται ἡ συνθήκη (2). Ἐκ τῆς (3) εἶναι $16x^2+\omega=\gamma^2$, $\omega=\gamma^2-16x^2$. Θέτει $\gamma^2=(4x+1)^2$, ὁπότε $\omega=8x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $y+z+\omega=(x-1)+4x+(8x+1)=\alpha^2$, $13x=\alpha^2$. Ἔστω $\alpha^2=169t^2$, ὁπότε $x=13t^2$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=x-1=13t^2-1$, $z=4x=52t^2$, $\omega=104t^2+1$ καὶ αἱ τιμαὶ y, z, ω ἔχουσιν ὑπολογισθῇ ἀπροσδιορίστως, συναρτήσει τοῦ t. Ἐκ τῆς (4) λαμβάνει $(104t^2+1)^2+(13t^2-1)=\delta^2$ ἢ $10816t^4+221t^2=\delta^2$ ἢ $10816t^2+221=\left(\frac{\delta}{t}\right)^2=\xi^2$. Θέτει $\xi=104t+1$, ὁπότε $t=\frac{55}{52}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=13t^2-1=\frac{36621}{2704}$, $z=52t^2=\frac{157300}{2704}$, $\omega=104t^2+1=\frac{317304}{2704}$.

17.

$y+z+\omega=\alpha^2$, (1), $y^2-z=\beta^2$, (2), $z^2-\omega=\gamma^2$, (3), $\omega^2-y=\delta^2$, (4).

Ἔστω πάλιν $z=4x$. Ἐκ τῆς (2) ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος, ὅστις μεῖον $4x$ νὰ δίδῃ τετράγωνον. Ἔστω $\varepsilon^2-4x=\beta^2$, $\varepsilon^2-\beta^2=4x$, $(\varepsilon+\beta)(\varepsilon-\beta)=2x.2$. Καλεῖ $\varepsilon+\beta=2x$, $\varepsilon-\beta=2$ καὶ διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $\varepsilon=x+1$, πληρουμένης τῆς συνθήκης (2), ἐὰν τεθῇ $y=x+1$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει $z^2-\gamma^2=\omega$, (5). Θέτει $\gamma^2=(4x-1)^2$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) εἶναι $16x^2-16x^2+8x-1=\omega$, $\omega=8x-1$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $(x+1)+4x+(8x-1)=\alpha^2$, ἢ $13x=\alpha^2$. Ἔστω $\alpha^2=169t^2$, ἐξ ἧς $x=13t^2$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=13t^2+1$, $z=4.13t^2$, $\omega=8.13t^2-1$. Ἐκ τῆς (4) εἶναι δι' ἀντικαταστάσεως $(104t^2-1)^2-(13t^2+1)=\delta^2$, ἢ $104t^4-221t^2=\delta^2$, $104t^2-221=\left(\frac{\delta}{t}\right)^2=\xi^2$. Ἔστω $\xi^2=(104t-1)^2$, ἐξ ἧς εἶναι $t=\frac{111}{104}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=13.\left(\frac{111}{104}\right)^2+1=\frac{170989}{10816}$, $z=4.13.\left(\frac{111}{104}\right)^2=\frac{640692}{10816}$, $\omega=8.13.\left(\frac{111}{104}\right)^2-1=\frac{1270568}{10816}$.

18.

$$y^3+z=\alpha^3,\ (1),\ z^2+y=\beta^2,\ (2).$$

Θέτει $y=x$, $z=8-x^3$ καὶ οὕτω πληροῦται ἡ συνθήκη (1). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνει $(8-x^3)^2+x=\beta^2$, ἔστω $=(x^3+8)^2$ ἐξ ἧς $32x^2=1$. Ἐπειδὴ ὁ x δὲν εἶναι ῥητὸς ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 32. Οὗτος προῆλθεν ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως ἐκ τοῦ $2.(16x^3)$, ὅπερ εἶναι $4.(2^3x^3)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ κύβος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 4 δίδει τετράγωνον. Ἔστω ὁ ζητούμενος βοηθητικὸς κύβος x^3 (ἄλλος x τώρα), ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $4x^3=$ τετράγωνος, ἔστω $=16x^2$, ἐξ ἧς $x=4$, $x^3=64$. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y=x$, $z=64-x^3$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (1). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $(64-x^3)^2+x=$ τετράγωνος, ἔστω $=(x^3+64)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{16}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{1}{16}$, $z=64-\frac{1}{4096}=\frac{262143}{4096}$.

19.

$$yz+1=\alpha^2,\ (1),\quad z\omega+1=\beta^2,\ (2),\quad \omega y+1=\gamma^2,\ (3).$$

Σχηματίζει $(\lambda x+1)^2$, ὅπου λ τυχών, ἔστω 1, x^2+2x+1 καὶ θέτει $yz=x^2+2x$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (1). Ἔστω $z=x$ ὁπότε $yx=x^2+2x=x\,(x+2)$. Εἶναι ἄρα $y=x+2$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $z\omega=\beta^2-1$. Θέτει $\beta^2=(3x+1)^2$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $x\omega=9x^2+6x=x\,(9x+6)$. Εἶναι ἄρα $\omega=9x+6$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) λαμβάνει $(x+2)\,(9x+6)+1=\gamma^2$ ἢ $9x^2+24x+13=\gamma^2$. Ἐὰν ὁ 13 ἦτο τετράγωνος καὶ ὁ 24x ἦτο τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $(13)^2$ ἐπὶ τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ $9x^2$ θὰ ἐπληροῦντο καὶ αἱ τρεῖς συνθῆκαι ἀπροσδιορίστως (συναρτήσει τοῦ x). Ὁ $13=2.6+1$. Καὶ ὁ μὲν 2 ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ 1.2x ὁ δὲ 6 ἐκ τοῦ 1.2.3x [ὁ 2 ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+1)^2=x^2+2x+1$ καὶ ὁ 6 ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος $(3x+1)^2=9x^2+6x+1$]. Καὶ ὁ μὲν 1 εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἰς τὴν παράστασιν $(1.x+1)^2$, ὁ δὲ 3 εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἰς τὴν παράστασιν $(3.x+1)^2$. Θέλει λοιπὸν ὅπως τὸ διπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x τῆς πρώτης τῶν προηγουμένων παραστάσεων, ἐπὶ τὸ διπλάσιον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, τῆς δευτέρας παραστάσεως, σὺν 1, δίδῃ τετράγωνον ἢ $2.(1).2.(3)+1=$ τετράγωνος, ἢ $4(1.3)+1=$ τετράγωνος, (4). Θεωρεῖ τὴν ταυτότητα $4\mu\nu+(\mu-\nu)^2=(\mu+\nu)^2$ καὶ θέτει $\mu=\nu+1$ ὁπότε $4\,(\nu+1)\nu+1=(2\nu+1)^2$, εἶναι δηλ. οἱ μ, ν διαδοχικοὶ ἀκέραιοι. Εἰς τὴν (4) ἑπομένως, ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου (1.3) εἶναι 1, ὁ δεύτερος πρέπει νὰ εἶναι 2 διὰ νὰ εἶναι $4(1.\ 2)+1=$ τετράγωνος. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ λάβῃ $\beta^2=(3x+1)^2$ λαμβάνει $\beta^2=(2x+1)^2$. Ἔχει δὲ λάβει $z=x$, $y=x+2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) εἶναι $z\omega=(2x+1)^2-1=4x^2+4x=x\,(4x+4)$. Εἶναι ἄρα $\omega=4x+4$. Οὕτω πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (1, 2). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$, καὶ τὸ πρόβλημα λύεται δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ x. Οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $z=x$, $y=x+2$, $\omega=4x+4$.

20.

$yz+1=\alpha^2$, (1), $y\omega+1=\beta^2$, (2), $y\varphi+1=\gamma^2$, (3), $z\omega+1=\delta^2$, (4), $z\varphi+1=\varepsilon^2$, (5), $\omega\varphi+1=\zeta^2$, (6).

Σχηματίζει τὸν $(x+1)^2=x^2+2x+1$ καὶ θέτει $yz=x^2+2x=x(x+2)$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (1). Θέτει $y=x$, ὁπότε $z=(x+2)$. Σχηματίζει τὸν $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$ καὶ θέτει $y\omega=4x^2+4x=x(4x+4)$. Καὶ ἀφοῦ $y=x$, εἶναι $\omega=4x+4$. Σχηματίζει τὸν $(3x+1)^2=9x^2+6x+1$ καὶ θέτει $y\varphi=9x^2+6x=x(9x+6)$, ὁπότε $\varphi=9x+6$. Διὰ τῶν τιμῶν $y=x$, $z=x+2$, $\omega=4x+4$, $\varphi=9x+6$ πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (1, 2, 3, 4, 6), συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι εἶναι $x(x+2)+1=(x+1)^2$, $x(4x+4)+1=(2x+1)^2$, $x(9x+6)+1=(3x+1)^2$, $(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$ $(4x+4)(9x+6)+1=(6x+5)^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) εἶναι $(x+2)(9x+6)+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(3x-4)^2$, ἢ $9x^2+24x+13=9x^2-24x+16$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{16}$. Θὰ εἶναι ἄρα

$$y=x=\frac{1}{16},\ z=\frac{1}{16}+2=\frac{33}{16},\ \omega=\frac{4}{16}+4=\frac{68}{16},\ \varphi=9x+6=\frac{9}{16}+6=\frac{105}{16}$$

καὶ εἶναι

$$yz+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{17}{16}\right)^2,\quad y\omega+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{18}{16}\right)^2,$$

$$y\varphi+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{19}{16}\right)^2,\quad z\omega+1=\frac{33}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{50}{16}\right)^2,$$

$$z\varphi+1=\frac{33}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{61}{16}\right)^2,\quad \omega\varphi+1=\frac{68}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{86}{16}\right)^2.$$

Ἡ γενίκευσις τοῦ προβλήματος

Ὁδηγηθέντες ἐκ τῆς μεθόδου ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος διὰ τέσσαρας ἀριθμοὺς διετυπώσαμεν τοῦτο γενικῶς ὡς ἑξῆς·

Νὰ εὑρεθῶσι n τὸ πλῆθος ἀριθμοί, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. [Σημ. Τὸ πρόβλημα δὲν γενικεύεται διὰ μίαν μοναδικὴν τιμὴν τοῦ x, ἀλλὰ διὰ διαφόρους τιμὰς τοῦ x].

Καλοῦμεν x ἕνα τῶν ἀγνώστων συναρτήσει τοῦ ὁποίου θὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λοιποὺς (n—1) ἀγνώστους. Τούτους παριστῶμεν ὡς ἑξῆς: $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots . x_\nu$, ὅπου $\nu = n - 1$.

Ἐνδεικτικῶς ἐπιλύομεν τὸ πρόβλημα διὰ ἑπτὰ ἀγνώστους καὶ ἀκολούθως διατυποῦμεν τοὺς γενικοὺς νόμους διὰ n ἀγνώστους, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι διὰ τοὺς ἑπτὰ ἀγνώστους:

1. $xx_1+1=\alpha_1^2$	7. $x_1x_2+1=\beta_1^2$	12. $x_2x_3+1=\gamma_1^2$	16. $x_3x_4+1=\delta_1^2$
2. $xx_2+1=\alpha_2^2$	8. $x_1x_3+1=\beta_2^2$	13. $x_2x_4+1=\gamma_2^2$	17. $x_3x_5+1=\delta_2^2$
3. $xx_3+1=\alpha_3^2$	9. $x_1x_4+1=\beta_3^2$	14. $x_2x_5+1=\gamma_3^2$	18. $x_3x_6+1=\delta_3^2$
4. $xx_4+1=\alpha_4^2$	10. $x_1x_5+1=\beta_4^2$	15. $x_2x_6+1=\gamma_4^2$	
5. $xx_5+1=\alpha_5^2$	11. $x_1x_6+1=\beta_5^2$		
6. $xx_6+1=\alpha_6^2$			
	19. $x_4x_5+1=\varepsilon_1^2$	20. $x_4x_6+1=\varepsilon_2^2$	21. $x_5x_6+1=\zeta_1^2$.

Θέτομεν

1. $xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1$. Εἶναι ἄρα $x_1 = x+2$
2. $xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1$. » » $x_2 = 4x+4$
3. $xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1$. » » $x_3 = 9x+6$
4. $xx_4+1=(4x+1)^2=x(16x+8)+1$. » » $x_4 = 16x+8$
5. $xx_5+1=(5x+1)^2=x(25x+10)+1$. » » $x_5 = 25x+10$
6. $xx_6+1=(6x+1)^2=x(36x+12)+1$. » » $x_6 = 36x+12$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $x_1\ x_2 \ldots . x_6$ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα

1—6 συναρτήσει τοῦ x. Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὰ ἐπιτάγματα 7—21 λαμβάνομεν:

7. $x_1x_2+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$
8. $x_1x_3+1=(x+2)(9x+6)+1=9x^2+24x+13$. Θέτομεν τοῦτο ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{16}$

[Σημ. Ἐὰν παραστήσωμεν γενικῶς τὸ τριώνυμον $9x^2+24x+13$ θὰ εἶναι $\lambda^2 x^2+\lambda\kappa x+\mu$. Ὁ Διόφαντος θέτει τοῦτο ἴσον πρὸς $\left(\lambda x-\frac{\kappa}{2}\right)^2$, ὅπου $\frac{\kappa}{2}=(\lambda\kappa : 2\lambda)$, καὶ $\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2$ νὰ εἶναι $>\mu$].

9. $x_1x_4+1=(x+2)(16x+8)+1=16x^2+40x+17=(4x-5)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{10}$

10. $x_1x_5+1=(x+2)(25x+10)+1=25x^2+60x+21=(5x-6)^2$, » » $x=\frac{1}{8}$

11. $x_1x_6+1=(x+2)(36x+12)+1=36x^2+84x+25=(6x-7)^2$, » » $x=\frac{1}{7}$

12. $x_2x_3+1=(4x+4)(9x+6)+1=(6x+5)^2$

13. $x_2x_4+1=(4x+4)(16x+8)+1=64x^2+96x+33=(8x-6)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{64}$

14. $x_2x_5+1=(4x+4)(25x+10)+1=100x^2+140x+41=(10x-7)^2$, » » $x=\frac{1}{35}$

15. $x_2x_6+1=(4x+4)(36x+12)+1=144x^2+192x+49=(12x-8)^2$, » » $x=\frac{5}{128}$

16. $x_3x_4+1=(9x+6)(16x+8)+1=144x^2+168x+49=(12x+7)^2$,

17. $x_3x_5+1=(9x+6)(25x+10)+1=225x^2+240x+61=(15x-8)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{160}$

18. $x_3x_6+1=(9x+6)(36x+12)+1=324x^2+324x+73=(18x-9)^2$, » » $x=\frac{1}{81}$

19. $x_4x_5+1=(16x+8)(25x+10)+1=400x^2+360x+81=(20x+9)^2$.

20. $x_4x_6+1=(16x+8)(36x+12)+1=576x^2+480x+97=(24x-10)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{320}$

21. $x_5x_6+1=(25x+10)(36x+12)+1=900x^2+660x+121=(30x+11)^2$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, οἱ γενικοὶ νόμοι ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι οἱ κάτωθι :

1. Τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων εἶναι $\frac{(n-1)n}{2}$

2. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων x_ν εἶναι συναρτήσει τοῦ x:

Ἐκ τοῦ
$$xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1 \qquad x_1=x+2$$
$$xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1 \qquad x_2=4x+4$$
$$xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1 \qquad x_3=9x+6$$
. . . .
. . . .
. . . .
$$xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=\nu^2x^2+2\nu x+1, \quad x_\nu=\nu^2x+2\nu.$$

3. Τὸ γινόμενον τοῦ x ἐφ'ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀγνώστων σὺν 1 εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$xx_i + 1 = (ix + 1)^2, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots). \tag{1}$$

4. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν 1 εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i\, x_{i+1} + 1 = \left[\, i\,(i+1)\, x + (2i+1)\,\right]^2 \tag{2}$$

5. Τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν 1 εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i\, x_{i+\varkappa} + 1 = (i^2 x + 2\, i)\ \left[\,(i+\varkappa)^2\, x + 2\,(i+\varkappa)\,\right] + 1 =$$
$$\left[\, i\,(i+\varkappa)\, x - (2i+\varkappa)\,\right]^2, \ \varkappa \geqslant 2, \tag{3}$$

Διὰ $i = 8$, $\varkappa = 3$ ἔχομεν π.χ, $x_i = x_8 = 8^2\, x + 16$ καὶ $x_{i+\varkappa} = x_{11} = 11x^2 + 22$, καὶ ἑπομένως

$$x_8\, x_{11} + 1 = (64x + 16)\ (121x + 22) + 1 = (88x - 19)^2.$$

6. Διὰ $n \geqslant 4$, τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων, τὰ ὁποῖα πληροῦνται διὰ τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (3) ἰσοῦται πρὸς $(n-2)\ (n-3) : 2$. Διὰ $n = 7$ τὰ συναφῆ ἐπιτάγματα εἶναι 10 ὡς βεβαιούμεθα ἐκ τῆς ἐνδεικτικῶς ἀνωτέρω διαπραγματευθείσης περιπτώσεως τοῦ προβλήματος μὲ 7 ἀγνώστους.

[Σημ. Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x παρέχονται : 1) Τὰ γινόμενα τοῦ x ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀγνώστων, σὺν 1 (τύπος 1) καὶ 2) τὰ γινόμενα δύο διαδοχικῶν ἀγνώστων, σὺν 1 (τύπος 2). Τὰ λοιπὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται δι' ὡρισμένων τιμῶν τοῦ x ὑπολογιζομένων ἐκ τοῦ τύπου (3)].

21.

$z - y = \alpha^2$, (1), $\omega - z = \beta^2$, (2), $\omega - y = \gamma^2$, $y : z = z : \omega$, (4).

Θέτει τὸν μικρότερον $y = x$, τὸν μεσαῖον $z = x + 4$ καὶ τὸν μεγαλύτερον $\omega = x + 13$, πληρουμένων τῶν συνθηκῶν (1,2). Ἐκ τῆς (3) εἶναι $x + 13 - x = \gamma^2$ ἢ $2^2 + 3^2 = \gamma^2$. Ἡ σχέσις αὕτη δηλοῖ ὅτι ὁ γ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρῃ δύο τετραγώνους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος. Ὡς τοιούτους λαμβάνει τοὺς μικροτέρους ἀκεραίους τοὺς ἐπαληθεύοντας τὴν πυθαγόρειον ἐξίσωσιν, τοὺς 3, 4, 5 καὶ θέτει $y = x$, $z = x + 9$, $\omega = x + 25$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3). Ἐκ τῆς (4) εἶναι $\frac{x}{x+9} = \frac{x+9}{x+25}$, ἐξ ἧς $x = \frac{81}{7}$.

Θὰ εἶναι ἄρα $y = x = \frac{81}{7}$, $z = \frac{144}{7}$, $\omega = \frac{256}{7}$.

22.

$$yz\omega + y = \alpha^2, \ (1), \quad yz\omega + z = \beta^2, \ (2), \quad yz\omega + \omega = \gamma^2 \ (3).$$

Θέτει $yz\omega = x^2 + 2x$, $y = 1$, πληρουμένης τῆς συνθήκης (1) καὶ εἶναι $z\omega = x^2 + 2x$. Λαμβάνει $\beta^2 = (x + 3)^2$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $z = (x+3)^2 - (x^2 + 2x) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 2x = 4x + 9$. Καὶ ἀφοῦ $y = 1$, $yz = 4x + 9$, (4) καὶ εἶναι $yz\omega = x^2 + 2x$, (5). Διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\omega = \frac{x^2 + 2x}{4x + 9}$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις πρέπει νὰ εἶναι $\frac{x^2}{4x} = \frac{2x}{9}$, ἢ $\frac{x^2}{2x} = \frac{4x}{9}$, ἢ $\frac{1}{2} = \frac{4}{9}$. Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 4 καὶ 9. Ὁ 4 προέρχεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν συντελεστῶν τοῦ $(6x - 2x)$ ἤτοι εἶναι $4 = 6 - 2 = 2.3 - 2$. Ὁ δὲ $9 = 3^2$ προέρχεται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δυωνύμου $(x + 3)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρῃ ἄλλον ἀριθμὸν ἀντὶ τοῦ 3, ἔστω τὸν t, ὥστε $2t - 2 = \frac{1}{2}t^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $t^2 - 4t + 4 = 0$, ἐξ ἧς $t = 2$. Ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $\beta^2 = (x + 2)^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (2) εἶναι $z = (x + 2)^2 - (x^2 + 2x) = 2x + 4$ καὶ $yz = 2x + 4$, (6), ἀφοῦ $y = 1$. Διὰ διαιρέσεως τῶν (5) καὶ (6) κατὰ μέλη λαμβάνεται $\omega = \frac{x^2 + 2x}{2x + 4} = \frac{x}{2}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι

$(2x+4).\ \frac{x}{2}+\frac{x}{2}=\gamma^2$, ἔστω $=4x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{5}{6}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{6}{6}, z=\frac{34}{6},\ \omega=\frac{2\frac{1}{2}}{6}$.

23.

$$yz\omega - y = \alpha^2,\ (1),\ yz\omega - z=\beta^2,\ (2),\ yz\omega-\omega=\gamma^2,\ (3).$$

Θέτει $y=x$, $yz\omega=x^2+x$, (4), πληρουμένης τῆς συνθήκης (1). Ἐκ τῆς (4) εἶναι $z\omega = x+1$. Ἔστω $z=1$, ὁπότε $\omega=x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3) λαμβάνει $x(x+1)-1=\beta^2$, $x(x+1)-(x+1)=\gamma^2$ ἢ $x^2+x-1=\beta^2$, (5), $x^2-1=\gamma^2$, (6). Αἱ (4,5) εἶναι συναληθεύουσαι ἐξισώσεις (διπλοϊσότης). Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (6) ἀπὸ τῆς (5) λαμβάνει $x=\beta^2-\gamma^2=(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)$. Ἀναλύει τὸν x εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, $x=\frac{1}{2}\cdot 2x$ καὶ θέτει $(\beta+\gamma)=2x$, $(\beta-\gamma)=\frac{1}{2}$.

Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\beta=\left(x+\frac{1}{4}\right)$, $\gamma=\left(x-\frac{1}{4}\right)$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν 5 ἢ 6 λαμβάνεται $x=\frac{17}{8}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=x=\frac{17}{8}, z=\frac{8}{8}, \omega=\frac{25}{8}$.

24.

$$\alpha = y+z,\ (1),\quad yz=\beta^3-\beta,\ (2).$$

Ἔστω $\alpha=6$, $y=x$, ὁπότε $z=6-x$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x(6-x)=6x-x^2=\beta^3-\beta$, (3). Σχηματίζει τὸν κύβον $(\nu x-1)^3$ ὅπου ἔστω $\nu=2$, $(8x^3-12x^2+6x-1)=\beta^3$, $(2x-1)=\beta$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $6x-x^2=8x^3-12x^2+6x-1-(2x-1)$, ἢ $6x-x^2=8x^3-12x^2+4x$, (4). Ἐὰν ὁ συντελεστὴς 4 τοῦ 4x ἦτο ἴσος πρὸς τὸν συντελεστὴν 6 τοῦ 6x θὰ ἐλαμβάνετο ῥητὴ τιμὴ τοῦ x. Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 4x. Ὁ $4x=6x-2x=3.2x-2x$ ἢ $2.2x=3.2x-2x$. Ὁ συντελεστὴς τοῦ x, ὁ 2, εἶναι τυχών, διότι ἐλήφθη $\nu=2$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις ὡς συντελεστὴς τοῦ x, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 2 νὰ δίδῃ 6. Τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 3 ἤτοι $2 . 3x = 3 . 3x - 3x$, $6x = 9x - 3x$. Θέτει τώρα $\beta = (3x - 1)$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) λαμβάνει $6x - x^2 = (27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) - (3x - 1)$, ἐξ ἧς $x = \frac{26}{27}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = x = \frac{26}{27}$, $z = 6 - \frac{26}{27} = \frac{136}{27}$.

25.

$y + z + \omega = \alpha$, (1), $yz\omega = \left[(\omega - z) + (\omega - y) + (z - y)\right]^3$, (2), $\omega > z > y$.

Ἔστω $\alpha = 4$, $yz\omega = 8x^3$, (3). Ἐκ τῆς (2) εἶναι $8x^3 = [2(\omega - y)]^3$. Καὶ ἐκ ταύτης $2x = 2(\omega - y)$, $x = \omega - y$, (4). Ἔστω $y = 2x$, ὁπότε ἐκ τῆς (4) εἶναι $\omega = 3x$. Καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι $y\omega = 6x^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς ταύτης εἰς τὴν (3) εἶναι $z = 8x^3 : 6x^2 = 1\frac{1}{3}x$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $y < z < \omega$, δηλ. $2x < 1\frac{1}{3}x < 3x$. Ἐπειδὴ δὲν εἶναι $2x < 1\frac{1}{3}x$, ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τῶν συντελεστῶν τοῦ x. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ $y = 2x$ καὶ $\omega = 3x$ διαφέρουσι κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον δὲ $y\omega = 6x^2$ καὶ $z = \frac{8x^3}{6x^2}$. Οἱ συντελεσταὶ 2 καὶ 3 εἰς τὰς σχέσεις $y = 2x$, $\omega = 3x$ προέκυψαν ἐκ τῆς ἀρχικῆς ὑποθέσεως $yz\omega = 8x^3$, $y = 2x$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς διαφέροντας κατὰ μονάδα, ἔστω t καὶ t+1, ὥστε $t < \frac{8}{t(t+1)} < t+1$, (5). Ἐπειδή, λέγει, $(t + 1) - t = 1$ καὶ εἶναι ἐκ τῆς (5), $t < \frac{8}{t(t+1)}$, ἕπεται ὅτι $(t+1) - \frac{8}{t(t+1)} < 1$, ἢ $\frac{8}{t(t+1)} + 1 > t + 1$. Ἐκ ταύτης εἶναι $8 > t^3 + t^2$, (6). Σχηματίζει κύβον, ὅστις νὰ περιέχῃ τοὺς ὅρους $t^3 + t^2$, ἐκ τοῦ δυωνύμου $\left(t + \frac{1}{3}\right)$, ὁπότε θὰ εἶναι

$\left(t+\frac{1}{3}\right)^3 = t^3+t^2+\frac{t}{3}+\frac{1}{27}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\left(t+\frac{1}{3}\right)^3 > t^3+t^2$ (7).
Ἐκ τῶν (6) καὶ (7) θέτει $8=\left(t+\frac{1}{3}\right)^3$, $2=t+\frac{1}{3}$, ἐξ ἧς $t=\frac{5}{3}$.
Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θὰ εἶναι $\frac{5}{3}$, ὁ μικρότερος, ὁ δεύτερος $\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$, ὁ μεγαλύτερος, καὶ ὁ $\frac{8}{t(t+1)}=\frac{8}{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{5}{3}}=\frac{9}{5}$
καὶ εἶναι $\frac{5}{3} < \frac{9}{5} < \frac{8}{3}$ ἢ $25 < 27 < 40$. Καὶ εἶναι $25.27.40=$ $[(40-27)+(40-25)+(27-25)]^3$, $27000=30^3$. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $\omega=40x$, $z=27x$, $y=25x$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (2), ὅπου εἶναι $25x.27x.40x=30x^3$
Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $25x+27x+40x=4$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{23}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{25}{23}$, $z=\frac{27}{23}$, $\omega=\frac{40}{23}$.

26.

$$yz+y=\alpha^3,\ (1),\quad yz+z=\beta^3,\ (2).$$

Θέτει $y=8x$, $z=x^2-1$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (1).
Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $8x^3+x^2-8x-1=\beta^3$, ἔστω $=(2x-1)^3$, ἐξ ἧς $x=\frac{14}{13}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{112}{13}$, $z=\frac{27}{169}$.

27.

$$yz-y=\alpha^3,\ (1),\quad yz-z=\beta^3,\ (2).$$

Θέτει $y=8x$, $z=x^2+1$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (1).
Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως $x^3+8x-x^2-1=\beta^3$.
Ἐὰν τεθῇ $\beta^3=(2x-1)^3$ λαμβάνεται $x<0$, ὅπερ ἀποφεύγει ὁ Διόφαντος.

Ὁ Διόφαντος θέτει $y=8x+1$, $z=x^2$ πληρουμένης τῆς συνθήκης (2). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι

$8x^3+x^2-8x-1=\alpha^3$, ἔστω $=(2x-1)^3$, ἐξ ἧς $x=\frac{14}{13}$. Ὅθεν εἶναι $y=\frac{125}{13}$, $z=\frac{196}{169}$.

28.

$$yz+(y+z)=\alpha^3,\ (1),\ yz-(y+z)=\beta^3,\ (2).$$

Ἔστω $\alpha^3=64$, $\beta^3=8$. Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνει $2(y+z)=56$, $(y+z)=28$, (3). Ἐκ τῆς (1) ἔχει διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη $yz=36$, (4). Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3,4) ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 28 καὶ τὸ γινόμενον 36. Ἔστω ὁ μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν $x+14$. Ὁ μικρότερος θὰ εἶναι $28-(x+14)=14-x$, καὶ $(x+14)(14-x)=36$ ἢ $196-x^2=36$, $x^2=160$. Ἐπειδὴ ὁ x δὲν εἶναι ῥητὸς ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 160 καὶ τοῦ 36. Ὁ $160=196-36$. Ἀλλὰ $196=14^2$, $14=\frac{28}{2}$ ἤτοι $196=\left(\frac{28}{2}\right)^2$. Ἀλλὰ $28=\frac{56}{2}$. Εἶναι ἄρα $14=\frac{56}{4}$. Ἀλλὰ ὁ $56=\alpha^3-\beta^3=64-8$ καὶ ὁ $36=\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}=\frac{64+8}{2}$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο κύβους τῶν ὁποίων τὸ τέταρτον τῆς διαφορᾶς των εἰς τὸ τετράγωνον μεῖον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματός των εἶναι τετράγωνος. Ἔστω τοῦ μεγαλυτέρου κύβου ἡ πλευρὰ $x+1$ καὶ ἡ τοῦ μικροτέρου $x-1$, οἱ δὲ κύβοι των εἶναι x^3+3x^2+3x+1 καὶ x^3-3x^2+3x-1. Τὸ τέταρτον τῆς διαφορᾶς των εἶναι $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$ καὶ $\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$. Τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων εἶναι x^3+3x. Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ προηγουμένου τετραγώνου δίδει $\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}-x^3-3x$. Τοῦτο ἴσον πρὸς τετράγωνον. Καὶ δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν εἶναι $9x^4+6x^2+1-4x^3-12x=$ τετράγωνος, ἔστω $=(3x^2+1-6x)^2$, ἐξ ἧς $32x^3=36x^2$, καὶ ἐκ ταύτης $x = \frac{9}{8}$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου κύβου $x+1 = \frac{17}{8}$ καὶ ἡ τοῦ μικροτέρου $\frac{1}{8}$, καὶ τῶν κύβων, ὁ πρῶτος $\frac{4913}{512}$ καὶ ὁ δεύτερος $\frac{1}{512}$.

Ἔρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $\alpha^3 = \frac{4913}{512}$, $\beta^3 = \frac{1}{512}$. Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνει $y + z = \frac{2456}{512}$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη $yz = \frac{2457}{512}$. Ἔχει δὲ ἀποδειχθῆ εἰς [I,27] πῶς εὑρίσκονται δύο ἀριθμοὶ ὅταν δίδεται τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ γινόμενον. Ἔστω ὁ πρῶτος τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν $y = x + \frac{1228}{512}$ (μεῖον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν). Ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $z = \frac{1228}{512} - x$, ἐν ᾧ τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι $\frac{2456}{512}$. Τὸ γινόμενον $\left(x + \frac{1228}{512}\right)\left(\frac{1228}{512} - x\right) = \frac{1507984}{262144} - x^2$. Τοῦτο $= \frac{2457}{512}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x = \frac{500}{512}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{500}{512} + \frac{1228}{512} = \frac{1728}{512}$, $z = \frac{728}{512}$.

Ἄλλως.

$$yz + (y + z) = \alpha^3, \ (1), \quad yz - (y + z) = \beta^3, \ (2).$$

Εἶναι γνωστόν, λέγει, ὅτι ἂν $x^2 = x + (x^2 - x)$ θὰ εἶναι $x(x^2 - x) + [x + (x^2 - x)] = x^3$. Μένει νὰ εἶναι $x(x^2 - x) - [x + (x^2 - x)] = \lambda^3$, ὅστις θὰ εἶναι $< x^3$. Ἔστω $\lambda^3 = \frac{1}{8}x^3$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν $x^3 - 2x^2 = \frac{1}{8}x^3$, $8x^3 - 16x^2 = x^3$, ἐξ ἧς $x = \frac{16}{7}$.

Θὰ εἶναι ἄρα $y = x = \frac{16}{7}$, $z = \left(\frac{16}{7}\right)^2 - \frac{16}{7} = \frac{144}{49}$.

29.

$$y^2 + z^2 + \omega^2 + \varphi^2 + y + z + \omega + \varphi = \lambda, \ (1)$$

Ἔστω $\lambda=12$. Ἐπειδὴ $\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2$ καὶ $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\alpha$ (2), θὰ εἶναι $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\omega+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\varphi+\frac{1}{2}\right)^2=$ $y^2+z^2+\omega^2+\varphi^2+y+z+\omega+\varphi+1=13$ ἂν γίνῃ ἀντικατάστασις εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἐκ τῆς (1). Εἶναι δὲ $13=2^2+3^2$ καὶ ἕκαστος τῶν τετραγώνων τούτων ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἤτοι εἶναι $4=\frac{64}{25}+\frac{36}{25}$ καὶ $9=\frac{144}{25}+\frac{81}{25}$. Λαμβάνει τὴν πλευρὰν ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{5}$ καὶ ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῆς $\frac{1}{2}$, ὁπότε κατὰ τὴν (2) θὰ εἶναι $\frac{8}{5}-\frac{1}{2}=\frac{11}{10}$, $\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$, $\frac{12}{5}-\frac{1}{2}=\frac{19}{10}$, $\frac{9}{5}-\frac{1}{2}=\frac{13}{10}$. Θέτει $y=\frac{11}{10}$, $z=\frac{7}{10}$, $\omega=\frac{19}{10}$, $\varphi=\frac{13}{10}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y^2=\frac{121}{100}$, $z^2=\frac{49}{100}$, $\omega^2=\frac{361}{100}$, $\varphi^2=\frac{169}{100}$.

[Σημ. Τὸ πρόβλημα ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάλυσιν παντὸς ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ὁ Διόφαντος εἶναι λίαν πιθανὸν ὅτι ἐγνώριζε τοῦτο, διότι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων του εἶναι γενικῆς μορφῆς, ἀσχέτως ἂν δὲν χρησιμοποιῇ τὸν σημερινὸν συμβολισμόν, τὸν ὁποῖον δὲν διέθετε. Δὲν ἐσώθη ὅμως ἀπόδειξις τῶν ἀρχαίων περὶ τοῦ δυνατοῦ τῆς ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Bachet, ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, εἰς τὴν Ἑλληνικήν, κατὰ τὸ 1621, προσεπάθησε νὰ εὕρῃ τὴν ἀπόδειξιν ἀλλὰ δὲν τὸ κατώρθωσε. Ὁ Fermat, λέγει εἴς τινα σημείωσιν, ὅτι τὸ ἀνεκάλυψε ἀλλὰ ἐσκέπτετο νὰ ἐκδώσῃ εἰδικὸν ἔργον καὶ νὰ ἐπεκτείνῃ κατὰ θαυμαστὸν τρόπον τὴν ἀριθμητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Τοιοῦτο ἔργον τοῦ Fermat δὲν ἐξεδόθη. Ἐκ τῶν νεωτέρων πρῶτος ὁ Lagrange ἀπέδειξεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. (Nouv. Mémoires de l' Akademie de Berlin 1770). ("Αν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνος (ἢ ἂν δὲν εἶναι καὶ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα 2 τετραγώνων) ἀναλύεται καὶ εἰς ὁσονδήποτε πλῆθος τετραγώνων κατὰ τὸ [II,8])].

30.

$$y^2 + z^2 + \omega^2 + \varphi^2 - (y + z + \omega + \varphi) = \lambda, \ (1).$$

Ἔστω $\lambda = 4$. Ἐπειδὴ $\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ καὶ $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \alpha, (2)$, θὰ εἶναι $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\omega - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 =$ $y^2 + z^2 + \omega^2 + \varphi^2 - (y + z + \omega + \varphi) + 1 = 5$, ἂν γίνη ἀντικατάστασις εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἐκ τῆς (1). Ὅθεν πρέπει ὁ 5 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ὁ $5 = 1 + 4$. Κατὰ τὸ [II,8] ἂν ὁ δοθεὶς εἶναι τετράγωνος, ἔστω γ^2 καὶ ὁ εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων εἶναι x^2, ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $\gamma^2 - x^2 = (\mu x - \gamma)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{2\gamma\mu}{\mu^2+1}$. Διὰ $\gamma = 2$, $\mu = 2$ εἶναι $x^2 = \frac{64}{25}$, $\gamma^2 - x^2 = \frac{36}{25}$.

Διὰ $\gamma = 1$, $\mu = 2$ εἶναι $x^2 = \frac{16}{25}$, $\gamma^2 - x^2 = \frac{9}{25}$.

Ἑπομένως ὁ $5 = 1 + 4 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + \frac{64}{25} + \frac{36}{25}$.

Αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$.

Κατὰ τὴν (2) θὰ ἔχωμεν $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{11}{10}$, $\frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$, $\frac{8}{5} + \frac{1}{2} = \frac{21}{10}$, $\frac{6}{5} + \frac{1}{2} = \frac{18}{10}$. Θέτει $y = \frac{11}{10}$, $z = \frac{13}{10}$, $\omega = \frac{21}{10}$, $\varphi = \frac{18}{10}$.

Θὰ εἶναι ἄρα $y^2 = \frac{121}{100}$, $z^2 = \frac{169}{100}$, $\omega^2 = \frac{441}{100}$, $\varphi^2 = \frac{324}{100}$.

31.

$$y+z=1,\ (1),\quad (y+\alpha)\ (y+\beta)=\gamma^2,\ (2).$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=5$, $y=x$. Ὁ z ἄρα $=1-x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνει $(x+3)(6-x)=\gamma^2$ ἢ $3x+18-x^2=\gamma^2$, ἔστω $=4x^2$, (3), $3x+18=5x^2$ καὶ ὁ x δὲν εἶναι ῥητός, διότι εἶναι $5x^2-3x=18$, $(5x)^2-15x=5.18$,

$$\left(5x-\frac{3}{2}\right)^2=5.18+\left(\frac{3}{2}\right)^2,\quad x=\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{5.18+\frac{9}{4}}}{5}$$

Διὰ νὰ εἶναι ὁ x ῥητὸς πρέπει, λέγει, $5.18+\frac{9}{4}$ νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἀναλύει τὸν 5 εἰς 2^2+1. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος εἰς τὸν ὁποῖον νὰ προσθέσωμεν τὴν μονάδα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα ἐπὶ 18 καὶ νὰ προσθέσωμεν $2\frac{1}{4}$ καὶ νὰ λαμβάνεται ὡς ἄθροισμα τετράγωνος. Ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος t^2. Τότε πρέπει νὰ εἶναι $(t^2+1).18+\frac{9}{4}$ $=$ τετράγωνος, ἢ $72t^2+81=$ τετράγωνος, ἔστω $=(8t-9)^2$, ἐξ ἧς $t=18$, $t^2=324$. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντὶ $(2x)^2$ τὸ $(18x)^2$, ὁπότε $3x+18-x^2=324x^2$, $325x^2-3x=18$, $(325x)^2-3.325x^2=18.325$,

$$\left(325\,x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+5850,\quad \left(325x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23409}{4},$$

$$325x-\frac{3}{2}=\frac{153}{2},\ 325x=\frac{156}{2}=78,\ x=\frac{78}{325}=\frac{6}{25}.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $y=x=\frac{6}{25}$, $z=1-\frac{6}{25}=\frac{19}{25}$.

Ἄλλως.

$$y+z=1,\ (1),\quad (y+\alpha)\ (z+\beta)=\gamma^2,\ (2).$$

Ἔστω $\alpha=3$, $\beta=5$, $y=x-3$, (3). Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (1) $z=4-x$, πληρουμένης τῆς συνθήκης (1). Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x.(9-x)=9x-x^2=\gamma^2$, ἔστω $=4x^2$ ἢ $5x^2=9x$, ἐξ ἧς $x=\frac{9}{5}$ Ἐκ τῆς (3) ὅμως λαμβάνεται $y < 0$. Πρέπει λοιπὸν $3 < x < 4$ διὰ νὰ εἶναι ἐκ τῶν (3,4) οἱ $y, z > 0$. Ὁ παρονομαστὴς τοῦ $\frac{9}{5}$ προέρχεται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ 5 τοῦ $5x^2$, εἶναι δὲ $5=2^2+1$. Ἐὰν δὲ $\frac{9}{t^2+1}=3$, θὰ ἔπρεπε $t^2+1=3$, Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν ὁ $x=\frac{9}{t^2+1} > 3$, πρέπει ὁ $t^2+1 < 3$ καὶ συνεπῶς $t^2 < 2$, (4). Ἐὰν ὅμως $\frac{9}{t^2+1}=4$, θὰ ἔπρεπε $t^2+1=\frac{9}{4}$ Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν ὁ $x=\frac{9}{t^2+1} < 4$, πρέπει ὁ $t^2+1 > \frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$ καὶ συνεπῶς $t^2 > 1\frac{1}{4}$, (5). Ἐκ τῆς (4) συνεπῶς καὶ τῆς (5) ἕπεται $1\frac{1}{4} < t^2 < 2$. Φέρει τὴν ἀνισότητα ταύτην νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν 64 εἰς τὰ ἀκραῖα μέλη, ὁπότε εἶναι $\frac{80}{64} < t^2 < \frac{128}{64}$.

Λαμβάνει $t^2=\frac{100}{64}=\frac{25}{16}$, διατηρουμένης τῆς ἀνισότητος, καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα θέτων εἰς τὴν ἐξίσωσιν $9x-x^2=4x^2$, ἀντὶ τοῦ $4x^2$ τὸ $\frac{25}{16}x^2$, ἐξ ἧς εἶναι $x=\frac{144}{41}$. Ὅθεν εἶναι $=\frac{144}{41}-3=\frac{21}{41}$, $z=4-\frac{144}{41}=\frac{20}{41}$.

32.

$y+z+\omega=\lambda$, (1), $yz+\omega=\alpha^2$, (2), $yz-\omega=\beta^2$, (3)·

Ἔστω $\lambda=6$, $\omega=x$, $z=\mu$, ὅπου $\mu < \lambda=6$. Ἔστω $z=2$. Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (1), $y=4-x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2,3) λαμβάνει $8-x=\alpha^2$, $8-3x=\beta^2$. Αἱ συναληθεύουσαι ἐξισώσεις δὲν δίδουσι ῥητὴν θετικὴν τιμὴν τοῦ x. Διὰ νὰ συνέβαινε τοῦτο ἔπρεπε οἱ συντελεσταὶ τοῦ x, οἱ 3 καὶ 1 νὰ δίδωσι,

$\frac{3}{1} = \frac{\varkappa^2}{\tau^2} = \xi^2$. Παρατηρεῖ ὅτι ὁ $3 = 2+1$ καὶ ὁ $1 = 2-1$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις t, ὥστε $\frac{t+1}{t-1}$ = τετράγωνος. Ἔστω=4, ὁπότε $t = \frac{5}{3}$. Ἀντὶ λοιπὸν $z = 2$ θέτει $z = \frac{5}{3}$, $\omega = x$, καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $y = 6 - \left(\frac{5}{3} + x\right) = \frac{13}{3} - x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2,3) λαμβάνει $\frac{65}{9} - \frac{2}{3}x = \alpha^2$, $\frac{65}{9} - \frac{8}{3}x = \beta^2$, ἢ $65 - 6x = \sigma^2$, (4), $65 - 24x = \tau^2$, (5). Πολλαπλασιάζει τὴν (4) ἐπὶ 4 καὶ ἔχει $260 - 24x = \xi^2$, (6). Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (5) ἀπὸ τῆς (6) λαμβάνει $195 = (\xi + \tau)(\xi - \tau)$. Ἀναλύει τὸν 195 εἰς 15.13 καὶ θέτει $\xi + \tau = 15$, $\xi - \tau = 13$. Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχει $\xi = 14$, $\tau = 1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5 ἢ 6) εἶναι $x = \frac{8}{3}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{13}{3} - \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$, $z = \frac{5}{3}$, $\omega = x = \frac{5}{3}$.

33.

$$y + \frac{z}{\lambda} = 3\left(z - \frac{z}{\lambda}\right),\ (1),\quad z + \frac{y}{\lambda} = 5\left(y - \frac{y}{\lambda}\right),\ (2).$$

[Σημ. Μέρος ἀριθμοῦ τινος εἶναι $\frac{1}{\lambda}$, μέρη δὲ $\frac{\varkappa}{\lambda}$].

Ἔστω $z = x + 1$ καὶ $\frac{1}{\lambda} z = 1$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $y = 3x - 1$ καὶ ἑπομένως $y + z = (3x - 1) + x + 1 = 4x$, (3). Διὰ προσθέσεως τοῦ y εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) ἔχει· $y + z + \frac{y}{\lambda} = y + 5\left(y - \frac{y}{\lambda}\right)$ ἢ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ $y+z$ ἐκ τῆς (3), $4x + \frac{y}{\lambda} = y + 5\left(y - \frac{y}{\lambda}\right)$ ἢ $4x = 6\left(y - \frac{y}{\lambda}\right)$, ἐξ ἧς $\left(y - \frac{y}{\lambda}\right) = \frac{2}{3}x$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ μειωτέου εἰς τὸ α′ μέλος, τῆς $3x-1$, λαμβάνει $\frac{y}{\lambda}=\frac{7}{3}x-1$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως πάλιν τῆς τιμῆς τοῦ y, $\lambda=\frac{3x-1}{\frac{7}{3}x-1}$. 'Αλλὰ $\lambda=z=\frac{x+1}{1}$. Ὅθεν εἶναι $\left(\frac{7}{3}x-1\right)(x+1)=(3x-1).\,1$.

'Εκ ταύτης εἶναι $x=\frac{5}{7}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=3.\,\frac{5}{7}-1=\frac{8}{7}$, $z=\frac{5}{7}+1=\frac{12}{7}$ καὶ τὸ ἑπταπλάσιον τῶν κλασμάτων δίδει $y=8$, $z=12$. 'Επειδὴ ὁ 8 δὲν διαιρεῖται διὰ 12 λαμβάνει τὰ τριπλάσια τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν, ὁπότε εἶναι $y=24$, $z=36$. 'Επειδὴ δὲ $z=\lambda=\frac{12}{7}$, $\frac{1}{\lambda}=\frac{7}{12}$, καὶ $\frac{y}{\lambda}=\frac{7}{12}.\,24=14$, $\frac{z}{\lambda}=\frac{7}{12}.\,36=21$

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

$yz+(y+z)=\alpha$. 'Εκφράζει τὸν y συναρτήσει τοῦ z, ὁπότε εἶναι $y=\frac{\alpha-z}{z+1}$.

34.

$yz+y+z=\alpha$, (1), $z\omega+z+\omega=\beta$, (2), $\omega y+\omega+y=\gamma$, (3).

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι οἱ y, z, ω ῥητοὶ > 0 πρέπει $\alpha+1=\varkappa^2$, $\beta+1=\lambda^2$, $\gamma+1=\mu^2$.

Θέτει $\alpha=8$, $\beta=15$, $\gamma=24$, $z=x-1$. Κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα λαμβάνει ἐκ τῆς (1), $y=\frac{9}{x}-1$, καὶ ἐκ τῆς (2), $\omega=\frac{16}{x}-1$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὴν (3) εἶναι $\frac{144}{x^2}-1=24$, ἐξ ἧς $x=\frac{12}{5}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{33}{12}$, $z=\frac{7}{5}$, $\omega=\frac{68}{12}$ ἢ $y=\frac{165}{60}$, $z=\frac{84}{60}$, $\omega=\frac{340}{60}$.

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

$yz-(y+z)=\alpha$. Ἐκφράζει τὸν y συναρτήσει τοῦ z, ὁπότε εἶναι $y=\frac{\alpha+z}{z-1}$.

35.

$yz-(y+z)=\alpha$, (1), $z\omega-(z+\omega)=\beta$, (2), $\omega y-(\omega+y)=\gamma$, (3).

Περιορισμός. Διὰ νὰ εἶναι οἱ y, z, ω ῥητοὶ >0 πρέπει $\alpha+1=\varkappa^2$, $\beta+1=\lambda^2$, $\gamma+1=\mu^2$.

Θέτει $\alpha=8$, $\beta=15$, $\gamma=24$, $z=x+1$. Κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα θὰ εἶναι ἐκ τῆς (1), $y=1+\frac{9}{x}$, ἐκ τῆς (2), $\omega=1+\frac{16}{x}$. πληρουμένων δύο ἐπιταγμάτων. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) λαμβάνει $\frac{144}{x^2}-1=24$, ἐξ ἧς $x=\frac{12}{5}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{57}{12}$, $z=\frac{17}{5}$, $\omega=\frac{92}{12}$, ἢ $y=\frac{285}{60}$, $z=\frac{204}{60}$, $\omega=\frac{460}{60}$.

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

$\frac{yz}{y+z}=\alpha$. Ἐκφράζει τὸν y συναρτήσει τοῦ z, $y=\frac{\alpha z}{z-\alpha}$.

36.

$$\frac{yz}{y+z}=\alpha,\ (1),\quad \frac{z\omega}{z+\omega}=\beta,\ (2),\quad \frac{\omega y}{\omega+y}=\gamma,\ (3).$$

Θέτει $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, $z=x$. Κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα θὰ εἶναι ἐκ τῆς (1), $y=\frac{3x}{x-3}$, ἐκ τῆς (2), $\omega=\frac{4x}{x-4}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $\omega y=\frac{12x^2}{x^2+12-7x}$, (4), $\omega+y=\frac{7x^2-24x}{x^2+12-7x}$. Καὶ ἐκ τῆς (3), $\frac{12x^2}{x^2+12-7x}=\frac{35x^2-120x}{x^2+12-7x}$ ἢ $12x^2=35x^2-120x$, ἐξ ἧς $x=\frac{120}{23}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{360}{51}$, $z=\frac{120}{23}$, $\omega=\frac{480}{28}$.

37.

$\frac{yz}{y+z+\omega}=\alpha$, (1), $\frac{z\omega}{y+z+\omega}=\beta$, (2), $\frac{\omega y}{y+z+\omega}=\gamma$, (3).

Θέτει $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$. Καλεῖ $y+z+\omega=\lambda=5$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $yz=3.5=15$. Ἔστω $z=x$, ὁπότε $y=\frac{15}{x}$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $z\omega=4.5=20$ καὶ συνεπῶς $\omega=\frac{20}{x}$ καὶ ἐκ τῆς (3), $\frac{15}{x}\cdot\frac{20}{x}=5.5=25$, $\frac{300}{x^2}=25$. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ $\frac{1}{x^2}$ καὶ τοῦ x^0, οἱ 300 καὶ 25 (τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος) εἶχον σχέσιν $\frac{300}{25}=\frac{\text{τετράγωνος}}{\text{τετράγωνος}}$ θὰ ὑπῆρχε ῥητὴ (θετικὴ πάντοτε) λύσις. Ἐπειδὴ ὁ 25 εἶναι ἤδη τετράγωνος ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 300. Οὗτος εἶναι $=15.20=(3.5)(4.5)$. Θέλει λοιπὸν ὁ τριπλάσιος τοῦ 5 ἐπὶ τὸν τετραπλάσιον τοῦ 5 νὰ εἶναι τετράγωνος, ὁ δὲ 5 εἶναι τυχών, (ὁ λ). Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις, εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις t, ὥστε $\frac{3t.\,4t}{5t}=\frac{\text{τετράγωνος}}{\text{τετράγωνος}}=\eta^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $12t^2=5t\eta^2$ ἢ $60t^3=25t^2\eta^2=\xi^2$, ἔστω $=900t^2$, ἐξ ἧς $t=15$. Ἀντὶ λοιπὸν $\lambda=5$ θέτει $\lambda=15$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $yz=3.15=45$ καὶ εἶναι $z=x$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{45}{x}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $\omega=\frac{4.\,15}{x}=\frac{60}{x}$. Καὶ ἐκ τῆς (3) λαμβάνει $\frac{45}{x}\cdot\frac{60}{x}=5.15=75$, ἐξ ἧς $x=6$. Ἑπομένως εἶναι $y=\frac{45}{6}=7\frac{1}{2}$, $z=6$, $\omega=10$. Εἶναι δὲ ἐκ τῶν τιμῶν τούτων $y+z+\omega=23\frac{1}{2}$. Ἔχει ὅμως τεθῇ $y+z+\omega=15$. Θέτει λοιπὸν $y+z+\omega=15x^2$, τοὺς δὲ y, z, ω συναρτήσει τοῦ x μὲ συντελεστὰς τὰς εὑρεθείσας προηγουμένας τιμάς, ἤτοι

$7\frac{1}{2}x+6x+10x=15x^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{47}{30}$. Θὰ εἶναι ἄρα

$$y=7\frac{1}{2}\cdot\frac{47}{30}=\frac{352\frac{1}{2}}{30},\quad z=\frac{282}{30},\quad \omega=\frac{470}{30}.$$

Ἡ γενικὴ διατύπωσις τῆς λύσεως.

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$yz = \alpha\,(y+z+\omega)$, (1), $z\omega = \beta\,(y+z+\omega)$, (2), $\omega y = \gamma(y+z+\omega)$, (3).

Θέτει $(y+z+\omega) = \sigma$, $z = x$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $y = \frac{\alpha\sigma}{x}$ καὶ ἐκ τῆς (2), $\omega = \frac{\beta\sigma}{x}$. Ἐκ τῆς (3) δὲ $\omega y = \frac{\alpha\sigma.\,\beta\sigma}{x^2} = \gamma\sigma$ ἢ $\frac{\alpha\sigma.\,\beta\sigma}{\gamma\sigma} = x^2$.

Διὰ νὰ εἶναι ὁ x ῥητὸς πρέπει $\frac{\alpha\sigma.\,\beta\sigma}{\gamma\sigma}$ νὰ εἶναι τετράγωνος. Λαμβάνει βοηθητικὸν ἄγνωστον t ἀντὶ τοῦ σ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\alpha\,\beta\,t^2}{\gamma t}$ = τετράγωνος. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ $\gamma^2\,t^2$ εἶναι $\alpha\beta\gamma t^3$ = τετράγωνος, ἔστω $= \delta^2 t^2$, ἐξ ἧς $t = \frac{\delta^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}$. Ἐκ τῶν (1,2) λαμβάνει $yz = \frac{\alpha\delta^2}{\alpha\beta\gamma}$ καὶ ἀφοῦ $z = x$, $y = \frac{\delta^2}{\beta\gamma x}$, (4), $\omega = \frac{\delta^2}{\alpha\gamma x}$, (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (4,5) εἶναι $\omega y = \frac{\delta^4}{\alpha\beta\gamma^2 x^2}$, (6). Ἐκ δὲ τῆς (3) εἶναι $\omega y = \frac{\gamma.\,\delta^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}$, (7), (δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ ἀθροίσματος διὰ τῆς τιμῆς τοῦ t). Ἐκ τῶν (6,7) εἶναι $x = \frac{\delta}{\gamma}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (4,5) εἶναι $y = \frac{\delta}{\beta}$, $\omega = \frac{\delta}{\alpha}$. Ἐὰν $(y+z+\omega)$ ἦτο $= \delta$ τὸ πρόβλημα, λέγει, θὰ εἶχε λυθῆ. Θέτει τοῦτο $= \frac{\delta^2 x^2}{\alpha\beta\gamma}$ καὶ $y = \frac{\delta x}{\beta}$, $z = \frac{\delta x}{\gamma}$, $\omega = \frac{\delta x}{\alpha}$, ὁπότε

$\left(y+z+\omega\right) = \delta x\,\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\delta^2 x^2}{\alpha\,\beta\,\gamma}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x = \frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{\delta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$. Θὰ εἶνα ἄρα $y = \frac{\delta x}{\beta} = \alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$, $z = \frac{\delta x}{\gamma} = \alpha\beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$, $\omega = \frac{\delta x}{\alpha} = \beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$.

38.

$(y+z+\omega)y=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$, (1), $(y+z+\omega)z=\beta^2$, (2), $(y+z+\omega)\omega=\gamma^3$, (3).

[Σημ. Τρίγωνος ἀριθμός καλεῖται πᾶν μερικὸν ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (1+2+3+4.....). Ἑπομένως οἱ τρίγωνοι ἀριθμοὶ εἶναι 1, 3, 6, 10, 15......... Παρὰ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου (ἔκδ, Hiller, Teubner, σ. 43,3) πληροφορούμεθα ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν τριγώνων ἀριθμῶν εἶναι τετράγωνος, καὶ παρὰ τοῦ Πλουτάρχου, Ἠθικὰ VI. 1, ἔκδ C. Hubert, Πλατωνικὰ ζητήματα, Ζήτημα Ε′, σελ. 123. F 2, Teubner 1954) καὶ τοῦ παρόντος προβλήματος τοῦ Διοφάντου ὅτι πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 καὶ προσλαμβάνων τὴν μονάδα γίνεται τετράγωνος].

Ἔστω $y+z+\omega=x^2$, (4), $y=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2x^2}$, $z=\frac{\beta^2}{x^2}$, $\omega=\frac{\gamma^3}{x^2}$ καὶ $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}=6$, $\beta^2=4$, $\gamma^3=8$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) λαμβάνει $\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^2}=x^2$, ἢ $x^4=18$, (5). Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις πρέπει ὁ 18 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος εἶναι ἄθροισμα : τρίγωνος + τετράγωνος + κύβος, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις, εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ διτετράγωνος ἀριθμός, ὅστις νὰ ἀναλύηται εἰς ἄθροισμα ἐκ τριγώνου ἀριθμοῦ, τετραγώνου καὶ κύβου. Ἔστω ὁ ἐκ τούτων τετράγωνος $(x^2-1)^2$. Ἐὰν ἄρα ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ x^4 ὁ τετράγωνος $(x^2-1)^2$, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἄθροισμα τριγώνου ἀριθμοῦ καὶ κύβου, ἤτοι $x^4-(x^2-1)^2$, ἢ $2x^2-1=$ τρίγωνος ἀριθμὸς+κύβος. Ἔστω ὁ κύβος 8. Θὰ εἶναι ἄρα $2x^2-9=$ τρίγωνος ἀριθμός. Πᾶς δὲ τρίγωνος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 καὶ προσλαμβάνων τὴν μονάδα γίνεται τετράγωνος. Ἑπομένως $8(2x^2-9)+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(4x-1)^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x=9$. Ὁ τρίγωνος ἄρα θὰ εἶναι $2.9^2-9=153$, ὁ τετράγωνος $(9^2-1)^2=6400$, καὶ ὁ κύβος ἐλήφθη 8. Ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y+z+\omega=x^2$, $y=\frac{153}{x^2}$, $z=\frac{6400}{x^2}$, $\omega=\frac{8}{x^2}$, πληρουμένων οὕτω τῶν ἐπιταγμάτων (1, 2, 3). Ἐκ δὲ τῆς (4) λαμβάνει $x^2=\frac{1}{x^2}(153+6400+8)$, ἢ $x^4=6561$, $x=9$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\frac{153}{81}$, $z=\frac{6400}{81}$, $\omega=\frac{8}{81}$.

39.

$\omega > z > y$, $\frac{\omega-z}{z-y}=\rho$, (1 , $y+z=\alpha^2$, (2), $z+\omega=\beta^2$, (3), $y+\omega=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $\rho=3$, $\alpha^2=4$. Καὶ ἀφοῦ $z > y$ εἶναι $z > 2$. Ἔστω $z=x+2$. Ἐκ τῆς (2) δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $y+x+2=4$, $y=2-x$, (5), ἐκ τῆς (1), $\omega-(x+2)=3[x+2-(2-x)]$, $\omega=7x+2$, ἐκ τῆς (3), $8x+4=\beta^2$, (6) καὶ ἐκ τῆς (4), $6x+4=\gamma^2$, (7). Αἱ ἐξισώσεις (6,7) εἶναι συναληθεύουσαι (διπλῆ ἰσότης). Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $2x=\beta^2-\gamma^2=(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)$. Ἀναλύει τὸν 2x εἰς γινόμενον δύο παραγόντων $\frac{x}{2}\cdot 4$, καλεῖ $\beta+\gamma=4$, $\beta-\gamma=\frac{x}{2}$. Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $\beta=\frac{x}{4}+2$, $\gamma=2-\frac{x}{4}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων (6) ἢ (7) ἔχει $x=112$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) εἶναι $y < 0$, ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ὅθεν πρέπει νὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ x ὥστε $0 < x < 2$. Ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ εἶναι ἐκ τῆς (7), $6x+4=\gamma^2 < 16$, (8), ἐν ᾧ ὅταν $x=2$ εἶναι $\gamma^2=16$. Ἐκ τῶν σχέσεων $6x+4=\gamma^2$, $8x+4=\beta^2$, $\alpha^2=4$ ἔχομεν τρία τετράγωνα μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ σχέσις $8x+4 > 6x+4 > 4$, ἀφοῦ $0 < x < 2$. Ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι 2x. Τοῦ δὲ μεσαίου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου εἶναι 6x, ἤτοι ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ μεσαίου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρία τετράγωνα πληροῦντα τὰς σχέσεις αὐτάς, τῶν ὁποίων τὸ μικρότερον νὰ εἶναι 4, ἐπὶ πλέον δὲ τὸ μεσαῖον τῶν τετραγώνων τούτων νὰ εἶναι < 16, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ θετικὴ λύσις. Πρέπει δηλ. νὰ εὑρεθῇ $\beta^2 > \gamma^2 > 4$, ὅπου $\gamma^2 < 16$. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι $\beta^2 - \gamma^2 = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 4)$, (9), ὅπου $\gamma^2 < 16$, (10). Λαμβάνει $\gamma = t + 2$, $\gamma^2 = t^2 + 4t + 4$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) εἶναι $\beta^2 = \frac{4}{3} t^2 + \frac{16}{3} t + 4$. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 9 εἶναι $\xi^2 = 12t^2 + 48t + 36$ καὶ διὰ διαιρέσεως διὰ 4 εἶναι $\varepsilon^2 = 3t^2 + 12t + 9$, (11). Ἐκ τῆς (10) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ γ εἶναι $(t+2)^2 < 16$, $t+2 < 4$, $t < 2$, (12). Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ t λαμβάνει δοκιμαστικῶς εἰς τὴν σχέσιν (11), $3t^2 + 12t + 9 = \varepsilon^2 = (3 - \mu t)^2$, (13), ἐξ ἧς $t = \frac{6\mu + 12}{\mu^2 - 3}$. Καὶ ἐκ τῆς (12) εἶναι $t = \frac{6\mu + 12}{\mu^2 - 3} < 2$, ἢ $6\mu + 12 < 2(\mu^2 - 3)$, $6\mu + 12 < 2\mu^2 - 6$, $6\mu + 18 < 2\mu^2$. Ἡ λύσις τῆς ἀνισότητος γίνεται ὅπως καὶ τῆς β)θμίου ἐξισώσεως.

$$\mu^2 - 3\mu > 9, \left(\mu - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} + 9,$$

$$\mu - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{45}}{2}, \ \mu > \frac{3 + \sqrt{45}}{2}. \text{ Ἀλλὰ } 6 < \sqrt{45} < 7.$$

Ἐὰν λάβῃ ἀντὶ τῆς $\sqrt{45}$ τὸν 6 ἡ ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον καὶ θὰ εἶναι $\mu > 4\frac{1}{2}$. Ἐὰν λάβῃ 7 ἀντὶ τῆς $\sqrt{45}$ θὰ εἶναι $\mu \geq 5$. Λαμβάνει $\mu = 5$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (13) γίνεται $3t^2 + 12t + 9 = (3 - 5t^2)$, ἐξ ἧς $t = \frac{21}{11} < 2$. Καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\gamma = t + 2$, εἶναι δι' ἀντικαταστάσεως $\gamma = \frac{43}{11}$, $\gamma^2 = \frac{1849}{121}$. Τώρα ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $6x + 4 = \gamma^2 = \frac{1849}{121}$, ἐξ ἧς $x = \frac{1365}{726} < 2$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = 2 - x = 2 - \frac{1365}{726} = \frac{87}{726}$, $z = x + 2 = \frac{2817}{726}$, $\omega = 7x + 2 = \frac{11007}{726}$ ἢ

$$y=\frac{14\frac{1}{2}}{121},\ z=\frac{469\frac{1}{2}}{121},\ \omega=\frac{1834\frac{1}{2}}{121},\ \text{ἢ}\ y=\frac{58}{484},\quad z=\frac{1878}{484},\quad \omega=\frac{7338}{484}.$$

40.

$$\omega > z > y,\ \frac{\omega^2-z^2}{z-y}=\rho,\ (1),\ y+z=\alpha^2,\ (2),\ z+\omega=\beta^2,\ (3),\ y+\omega=\gamma^2,\ (4).$$

Ἔστω $\rho=3$, $z+\omega=16x^2$, (5), καὶ ἀφοῦ $\omega > z$ θὰ εἶναι $\omega > 8x^2$. Ἔστω $\omega=8x^2+2$. Ἐπειδὴ $z+\omega > y+\omega$ καὶ $z+\omega=16x^2$, ἕπεται $16x^2 > y+\omega > 8x^2$, ἀφοῦ $\omega=8x^2+2$. Ἔστω $y+\omega=9x^2$, (6). Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ ω λαμβάνει ἐκ τῶν (5, 6), $z=8x^2-2$ καὶ $y=x^2-2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $64x^2=21x^2$, ἢ $32.2x^2=3.7x^2$. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ ἐπίταγμα (1) πρέπει $\frac{64x^2}{21x^2}=3$, καὶ τοῦτο δὲν συμβαίνει, ἐρευνᾷ τὴν προέλευσιν τοῦ 64, ὅστις προέκυψεν ἐκ τοῦ $32\cdot2$. Ἀναζητεῖ λοιπὸν ἀριθμὸν (ἀντὶ τοῦ 2), ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 32 δίδει 21. Ἔστω $32t=21$, $t=\frac{21}{32}$. Θέτει τώρα εἰς τὰς σχέσεις $\omega=8x^2+2$, $z=8x^2-2$, $y=x^2-2$, ἀντὶ τοῦ 2, τὸν $\frac{21}{32}$ καὶ λαμβάνει $\omega=8x^2+\frac{21}{32}$, $z=8x^2-\frac{21}{32}$, $y=x^2-\frac{21}{32}$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 3, 4). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) εἶναι

$$y+z=9x^2-\frac{42}{32}=\alpha^2,\ \text{ἔστω}=(3x-6)^2\ \text{ἐξ ἧς}\ x=\frac{597}{576}.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $\omega=\frac{3069000}{331776}$, $z=\frac{2633544}{331776}$, $y=\frac{138681}{331776}$.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ V.

1.

$\frac{y}{z} = \frac{z}{\omega}$, (1), $y - \delta = \alpha^2$, (2), $z - \delta = \beta^2$ (3), $\omega - \delta = \gamma^2$, (4).

Ἔστω $\delta = 12$. Ζητεῖ βοηθητικὸν τετράγωνον ἔστω t^2, ὥστε νὰ εἶναι $t^2 - 12 = \lambda^2$. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ [II,10]. Θέτει $t = \lambda + 1$, ὁπότε εἶναι $(\lambda + 1)^2 - 12 = \lambda^2$, ἐξ ἧς $\lambda = \frac{11}{2}$, $t = \frac{11}{2} + 1 = \frac{13}{2}$, $t^2 = \frac{169}{4}$. Θέτει $y = \frac{169}{4}$, $\omega = x^2$ καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνει δι' ἀντικαστάσεως $z = \frac{13}{2}x$. Διὰ τῶν τιμῶν, y, z, ω πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2). Ἐκ τῶν (3, 4) λαμβάνει $\frac{13}{2}x - 12 = \beta^2$, (5), $x^2 - 12 = \gamma^2$, (6). Αἱ (5,6) εἶναι συναληθεύουσαι ἐξισώσεις. Ἀφαιρεῖ τὴν (5) ἀπὸ τῆς (6) καὶ ἔχει $x^2 - \frac{13}{2}x = \gamma^2 - \beta^2 = (\gamma + \beta)(\gamma - \beta)$. Ἀναλύει τὸ πρῶτον μέλος εἰς $x\left(x - \frac{13}{2}\right)$ καὶ θέτει $\gamma + \beta = x$, $\gamma - \beta = x - \frac{13}{2}$. Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $\beta = \frac{13}{4}$ καὶ δι' ἀντικατχστάσεως εἰς τὴν (5) εἶναι $\frac{13}{2}x - 12 = \frac{169}{16}$, ἐξ ἧς $x = \frac{161}{104}$. Ὅθεν θὰ εἶναι $y = \frac{169}{4}$, $z = \frac{13}{2}x = \frac{2346\frac{1}{2}}{104}$, $\omega = \frac{130321}{10816}$.

2.

$\frac{y}{z} = \frac{z}{\omega}$, (1), $y + \delta = \alpha^2$,(2), $z + \delta = \beta^2$, (3), $\omega + \delta = \gamma^2$, (4).

Ἔστω $\delta = 20$.

Ζητεῖ βοηθητικὸν τετράγωνον t^2, ὥστε νὰ εἶναι $t^2 + 20 = \lambda^2$. [Ἐκ τῆς σχέσεως $\lambda^2 - t^2 = 20$ λαμβάνει $(\lambda + t)(\lambda - t) = 10.2$. Θέτει $\lambda + t = 10$, $\lambda - t = 2$ καὶ διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\lambda = 6$, $\lambda^2 = 36$. Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εἶναι $t = 4$, $t^2 = 16$, ἢ χρησιμοποιεῖ τὴν ταυτότητα $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$, ὅπου $\mu = 10$, $\nu = 2$, ὁπότε $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 = \lambda^2 = 36$, $\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = t^2 = 16$].

Θέτει $y = 16$, $\omega = x^2$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $z = 4x$, πληρουμένων τῶν ἐπιταγμάτων (1,2). Ἐκ τῶν (3,4) λαμβάνει $4x + 20 = \beta^2$, (5), $x^2 + 20 = \gamma^2$, (6). Αἱ (5,6) εἶναι συναληθεύουσαι. Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (5) ἀπὸ τῆς (6) λαμβάνει $\gamma^2 - \beta^2 = x^2 - 4x$ ἢ $(\gamma + \beta)(\gamma - \beta) = x(x - 4)$. Καλεῖ $\gamma + \beta = x$, $\gamma - \beta = x - 4$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $\beta = 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) προκύπτει $x = -4$. Ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. [Δὲν ὁμιλεῖ ἀπ' εὐθείας περὶ ἀρνητικῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου, ἀλλὰ ἐκ τῆς (5) ἔχων $4x + 20 = 4$ λέγει, ὅτι εἶναι ἄτοπον ὁ $4x + 20$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς 4] Πρέπει λοιπὸν τὸ δεύτερον μέλος τῆς (5) νὰ εἶναι > 20. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ $\beta^2 = 4 = \frac{1}{4} . 16$. Ἔχει δὲ ληφθῇ $y = 16$ καὶ κατὰ τὴν (2) πρέπει $y + 20 =$ τετράγωνος. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος ἀριθμὸς (ἀντὶ τοῦ 16) διαιρούμενος διὰ τοῦ 4, καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 20, προσλαβὼν δὲ τὸν 20 νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ζητούμενος βοηθητικὸς τετράγωνος t^2, ὁπότε πρέπει $\frac{t^2}{4} > 20$ ἢ $t^2 > 80$ καὶ κατὰ τὸ αἴτημα $t^2 + 20 =$ τετράγωνος, (7). Ἐπειδὴ $9^2 = 81$, καλεῖ $t^2 = (\lambda + 9)^2 = \lambda^2 + 18\lambda + 81$, (8). Ἐκ τῆς (7) εἶναι $\lambda^2 + 18\lambda + 101 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (\lambda - 11)^2$. [Σημ. Ἂν λάβῃ $(\lambda - 9)^2$ ἢ $(\lambda - 10)^2$ προκύπτει ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ λ]. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως εἶναι $\lambda = \frac{1}{2}$ καὶ ἐκ τῆς

(8), $t^2 = 90\frac{1}{4}$. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y = 90\frac{1}{4}$, $\omega = x^2$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $z = 9\frac{1}{2}x$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) καὶ (4) εἶναι $9\frac{1}{2}x + 20 = \beta^2$, (9), καὶ $x^2 + 20 = \gamma^2$, (10). Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (9) ἀπὸ τῆς (10) λαμβάνει $x^2 - 9\frac{1}{2}x = \gamma^2 - \beta^2 = (\gamma+\beta)(\gamma-\beta)$, ἢ $x\left(x - \frac{19}{2}\right) = (\gamma+\beta)(\gamma-\beta)$. Καλεῖ $\gamma+\beta = x$, $\gamma-\beta = \left(x - \frac{19}{2}\right)$ Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\beta = \frac{19}{4}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) λαμβάνεται $x = \frac{41}{152}$. Ὅθεν εἶναι $y = 90\frac{1}{4}$, $z = \frac{19}{2}x = \frac{389\frac{1}{2}}{152}$, $\omega = \frac{1681}{23104}$.

3.

$y+\lambda=\alpha^2$, (1), $z+\lambda=\beta^2$, (2), $\omega+\lambda=\gamma^2$, (3), $yz+\lambda=\delta^2$, (4), $z\omega+\lambda=\varepsilon^2$, (5), $\omega y+\lambda=\zeta^2$, (6).

Ἔστω $\lambda = 5$. Χρησιμοποιεῖ θεώρημα περιλαμβανόμενον εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ. Πορίσματα (ἥτις δὲν ἐσώθη) καθ' ὅ, ἐὰν $y+\lambda = \alpha^2$, $z+\lambda = \beta^2$, ἡ παράστασις $yz+\lambda$ εἶναι τετράγωνος ἐὰν $\alpha = \beta \pm 1$. Πράγματι, ἐκ τῶν σχέσεων $y = \alpha^2 - \lambda$ καὶ $z = \beta^2 - \lambda$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ προσθέσεως τοῦ λ εἰς ἀμφότερα τὰ ἐξαγόμενα μέλη εἶναι $yz+\lambda = (\alpha^2-\lambda)(\beta^2-\lambda)+\lambda = \alpha^2\beta^2 - \lambda(\alpha^2+\beta^2-1)+\lambda^2$, (7). Ἐὰν $\alpha^2+\beta^2-1 = 2\alpha\beta$, (8), ἡ παράστασις (7) εἶναι τετράγωνον. Ἐκ δὲ τῆς (8) εἶναι $(\alpha-\beta)^2 = 1$, $\alpha = \beta \pm 1$.

Λαμβάνει δύο διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς $(x+3)$, $(x+4)$ καὶ θέτει $y+5 = (x+3)^2$, ἐξ ἧς $y = x^2+6x+4$, (9) καὶ $z+5 = (x+4)^2$, ἐξ ἧς $z = x^2+8x+11$, (10). Διὰ τῶν τιμῶν τούτων τῶν y, z πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 4). Θέτει $\omega = 2(y+z) - 1$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως, $\omega = 4x^2+28x+29$, (11), ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (5,6). Λαμβάνει $\gamma = 2x - 6$ καὶ δι' ἀντικαταστάτεως εἰς τὴν (3) ἔχει $4x^2 + 28x + 29 = (2x-6)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{26}$. Καὶ ἐκ τῶν (9, 10, 11) εἶναι $y = \frac{4993}{784}$, $z = \frac{6729}{784}$, $\omega = \frac{22660}{784}$. [Σημ. Εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν ὁ συντελεστὴς 2 τοῦ x ἐτέθη διὰ νὰ ἀναχθῇ αὕτη εἰς α')θμιον, ὁ δὲ 6 διὰ νὰ εἶναι $6^2 > 29$, ὁπότε $x > 0$].

4.

$y - \lambda = \alpha^2$, (1), $z - \lambda = \beta^2$, (2), $\omega - \lambda = \gamma^2$, (3), $yz - \lambda = \delta^2$, (4), $z\omega - \lambda = \varepsilon^2$, (5), $y\omega - \lambda = \zeta^2$ (6).

Ἔστω $\lambda = 6$ Λαμβάνει τὰ τετράγωνα δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, τὰ x^2, $(x+1)^2$ καὶ θέτει $y = x^2 + 6$, $z = x^2 + 2x + 1 + 6$, $\omega = 2(y + z) - 1$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως $\omega = 4x^2 + 4x + 25$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα πλὴν τοῦ τρίτου. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $\omega - \lambda = 4x^2 + 4x + 19 = \gamma^2$, ἔστω $= (2x - 6)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{17}{28}$ Θὰ εἶναι ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως $y = \frac{4993}{784}$, $z = \frac{6729}{784}$, $\omega = \frac{22660}{784}$. [Σημ. Τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται καὶ ἂν τεθῇ $\gamma^2 = (2x - 5)^2$, διότι $5^2 > 19$ καὶ εἶναι $x = \frac{1}{4} > 0$. Θὰ εἶναι δὲ $y = \frac{97}{16}$, $z = \frac{121}{16}$, $\omega = \frac{420}{16}$].

5.

$$\begin{aligned} y^2 z^2 + (y^2 + z^2) &= \alpha^2 & \qquad y^2 z^2 + \omega^2 &= \delta^2 \\ z^2\omega^2 + (z^2 + \omega^2) &= \beta^2 & \qquad z^2\omega^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \\ \omega^2 y^2 + (\omega^2 + y^2) &= \gamma^2 & \qquad \omega^2 y^2 + z^2 &= \zeta^2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιεῖ πάλιν θεώρημα τῆς (ἀπολεσθείσης) πραγματείας του Πορίσματα, καθ' ὅ, ἐὰν δοθῶσι δύο διαδοχικοὶ τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ σχηματίσωμεν τρίτον ἀριθμόν, ὅστις νὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τῶν δοθέντων σὺν δύο, ἤτοι ἂν δοθῶσι οἱ δύο τετράγωνοι διαδοχικῶν ἀριθμῶν α^2, (1) καὶ $(\alpha+1)^2$, (2) καὶ σχηματίσωμεν τρίτον ἀριθμόν, τὸν $2[\alpha^2+(\alpha+1)^2]+2=4(\alpha^2+\alpha+1)$, (3) ἰσχύουσιν αἱ κάτωθι σχέσεις:

1. $\alpha^2(\alpha+1)^2+\alpha^2+(\alpha+1)^2 = (\alpha^2+\alpha+1)^2$
2. $\alpha^2.\,4(\alpha^2+\alpha+1)+\alpha^2+4(\alpha^2+\alpha+1)=(2\alpha^2+\alpha+2)^2$
3. $(\alpha+1)^2\,4(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha+1)^2+4(\alpha^2+\alpha+1)=(2\alpha^2+3\alpha+3)^2$
4. $\alpha^2(\alpha+1)^2+4(\alpha^2+\alpha+1)=(\alpha^2+\alpha+2)^2$
5. $\alpha^2.\,4(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha+1)^2=(2\alpha^2+\alpha+1)^2$
6. $(\alpha+1)^2.\,4(\alpha^2+\alpha+1)+\alpha^2=(2\alpha^2+3\alpha+2)^2$

Λαμβάνει $y^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$, $z^2=(x+2)^2=x^2+4x+4$ καὶ θέτει κατὰ τὸ προηγούμενον πόρισμα $\omega^2=2(y+z)+2=4x^2+12x+12$. Ἐὰν ἡ προηγουμένη σχέσις εἶναι τετράγωνος πληροῦνται ὅλα τὰ ἐπιτάγματα. Ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς θὰ εἶναι τετράγωνος, ἤτοι $x^2+3x+3=$ τετράγωνος, ἔστω $=(x-3)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{2}{3}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y^2=\frac{25}{9}$, $z^2=\frac{64}{9}$, $\omega^2=4x^2+12x+12=\frac{196}{9}$.

6.

1. $y-2=\alpha^2$	4. $yz-(y+z)=\delta^2$	7. $yz-\omega=\kappa^2$
2. $z-2=\beta^2$	5. $z\omega-(z+\omega)=\varepsilon^2$	8. $z\omega-y=\lambda^2$
3. $\omega-2=\gamma^2$	6. $y\omega-(y+\omega)=\zeta^2$	9. $y\omega-z=\mu^2$

Κατὰ τὸ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐφαρμοσθὲν πόρισμα ἐὰν δοθῶσι δύο διαδοχικοὶ τετράγωνοι καὶ σχηματισθῇ τρίτος ἀριθμός, ὅστις νὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων σὺν δύο, τὸ γινόμενον δύο ἐκ τούτων σὺν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τετράγωνος καὶ τὸ γινόμενον δύο ἐκ τούτων σὺν τὸν τρίτον εἶναι τετράγωνος. Θέτει τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων $y=x^2+2$, τὸν ἄλλον $z=(x+1)^2+2$ καὶ τὸν τρίτον $\omega=4(x^2+x+1)+2$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα πλὴν τοῦ τρίτου. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) λαμβάνει $4x^2+4x+4=\gamma^2$. Ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ τούτου εἶναι τετράγωνος ἤτοι $x^2+x+1=\theta^2$, ἔστω $=(x-2)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{3}{5}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y=\left(\frac{3}{5}\right)^2+2=\frac{59}{25}$, $z=\frac{114}{25}$, $\omega=\frac{246}{25}$.

(Πρῶτον) Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

$$yz+(y^2+z^2)=\alpha^2, \ (1).$$

Θέτει $y=x$, $z=1$, (τυχὼν ἀκέραιος ὁπότε ἐκ τῆς (1) εἶναι $x^2+x+1=\alpha^2$, ἔστω $=(x-2)^2$, ἐξ ἧς $x=y=\frac{3}{5}$, $z=\frac{5}{5}$ ἢ τὰ πενταπλάσια τῶν τιμῶν τούτων, $y=3$, $z=5$. Καὶ τὰ ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν τούτων πληροῦσι τὸ ἐπίταγμα.

Καὶ γενικῶς, ἂν $\alpha^2=(y-\lambda z)^2$ [τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν προηγουμένων τιμῶν $y=x$, $z=1$, $\alpha^2=(x-2.1)^2$] θὰ εἶναι ἐκ τῆς (1) $y=\frac{z(\lambda^2-1)}{1+2\lambda}$, $(\lambda > 1)$. Διὰ $\lambda=2$ καὶ $z=1$ εἶναι $y=\frac{3}{5}$.

(Δεύτερον) Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα

Προηγουμένως πρέπει νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, α, β, ὅπως $\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, (1). Τοῦτο, λέγει, ἔχει προαποδειχθῆ. [Εἰς τὸ προηγούμενον λῆμμα. Εἰς δὲ τὸ πρόβλημα [III,19] διδάσκεται, πῶς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν μ,ν, κατασκευάζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς σχέσεως $(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$, (2)]. Ἐνταῦθα, λέγει, ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις (1), (Πρῶτον λῆμμα) εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσι τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἐκ τῶν ζευγῶν τῶν ἀριθμῶν (α, γ), (β, γ) καὶ $(\alpha+\beta)$, γ. Πράγματι ἐκ τοῦ πρώτου ζεύγους ἀριθμῶν (α,γ) αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι κατὰ τὴν προηγουμένην ταὐτότητα (2), $2\alpha\gamma$, $(\gamma^2-\alpha^2)$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι $\alpha\gamma(\gamma^2-\alpha^2)$, (3). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\gamma^2-\alpha^2=\alpha\beta+\beta^2$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν $\gamma^2-\alpha^2$ εἰς τὴν (3) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι $\alpha\gamma\ (\gamma^2-\alpha^2)=\alpha\gamma\ (\alpha\beta+\beta^2)=\alpha\beta\gamma\ (\alpha+\beta)$.

Ἐκ τοῦ δευτέρου ζεύγους ἀριθμῶν (β,γ) αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι κατὰ τὴν ταὐτότητα (2) $2\beta\gamma$ καὶ $(\gamma^2 - \beta^2)$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι $\beta\gamma(\gamma^2 - \beta^2)$, (4). Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν $(\gamma^2 - \beta^2)$ ἐκ τῆς (1) τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι $\beta\gamma\,(\gamma^2 - \beta^2) = \beta\gamma\,(\alpha\beta + \alpha^2) = \alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta)$,

Ἐκ τοῦ τρίτου ζεύγους ἀριθμῶν γ, $(\alpha + \beta)$ αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ τρίτου ὀρθογωνίου εἶναι κατὰ τὴν ταὐτότητα (2), $2\gamma\,(\alpha + \beta)$, $(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου εἶναι $\gamma\,(\alpha + \beta)\,[(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2]$. Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ γ^2 ἐκ τῆς (1) εἶναι $\gamma\,(\alpha + \beta)\,[(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] = \gamma\,(\alpha + \beta)$ $[\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2] = \alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta)$.

Λαμβάνει τοὺς ἀριθμοὺς 3,5, ὁπότε εἶναι $3.5 + (3^2 + 5^2) = 7^2$, ἐκ τοῦ πρώτου λήμματος. Τὸ πρῶτον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν ἀριθμῶν (3,7) καὶ ἔχει πλευρὰς κατὰ τὴν ταὐτότητα (2) τὰς $2.3.7 = 42$, $7^2 - 3^2 = 40$, $7^2 + 3^2 = 58$ καὶ ἐμβαδὸν 840.

Τὸ δεύτερον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν ἀριθμῶν (5,7) καὶ ἔχει πλευρὰς $2.5.7 = 70$, $7^2 - 5^2 = 24$, $7^2 + 5^2 = 74$ καὶ ἐμβαδὸν 840.

Τὸ τρίτον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν ἀριθμῶν $[7, (5+3)]$ δηλ. 7 καὶ 8 καὶ ἔχει πλευρὰς $2.7.8 = 112$, $8^2 - 7^2 = 15$, $8^2 + 7^2 = 113$ καὶ ἐμβαδὸν 840.

7.

$$\begin{aligned} y^2 \pm (y+z+\omega) &= \text{τετράγωνος} \\ z^2 \pm (y+z+\omega) &= \text{τετράγωνος} \\ \omega^2 \pm (y+z+\omega) &= \text{τετράγωνος}. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ συνάγεται $\gamma^2 \pm 4\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right) =$ τετράγωνος [ἤτοι χρησιμοποιεῖ τὴν ταὐτότητα $\alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta = (\alpha \pm \beta)^2$]. Διὰ νὰ ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ y, z, ω πρέπει νὰ εἶναι ὑποτείνουσαι τριῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ὑποτεινουσῶν νὰ εἶναι τὸ τετραπλάσιον ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδά. Τοιαῦτα τρίγωνα εὑρέθησαν εἰς τὸ προηγούμενον β΄. λῆμμα καὶ εἶναι τὰ ἔχοντα πλευρὰς (40, 42, 58), (27, 70, 74), (15, 112, 113), τὸ δὲ ἐμβαδὸν ἑκάστου τούτων εἶναι 840. Ἤδη καλεῖ $y = 58x$, $z = 74x$, $\omega = 113x$ καὶ $y + z + \omega = 4.840x^2$, (1). Ἀλλὰ $y + z + \omega = (58 + 74 + 113)x$, (2)· Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $3360x^2 = 245x$, ἐξ ἧς $x = \frac{7}{96}$. Θὰ εἶναι ἄρα

$$y = \frac{406}{96},\ z = \frac{518}{96},\ \omega = \frac{791}{96}.$$

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

$$yz = \alpha^2,\ (1),\ y\omega = \beta^2,\ (2),\ z\omega = \gamma^2,\ (3).$$

Ἔστω $\alpha^2 = 4$, $\beta^2 = 9$, $\gamma^2 = 16$, $y = x$. Ἐκ τῆς (1) θὰ εἶναι $z = \frac{4}{x}$ καὶ ἐκ τῆς (2), $\omega = \frac{9}{x}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $\frac{36}{x^2} = 16$, ἐξ ἧς $x = \frac{6}{4}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{6}{4}$, $z = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2\,\frac{2}{3}$, $\omega = 6$. Ἀκολούθως δίδεται ὁ πρακτικὸς κανὼν εὑρέσεως τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες πληροῦσι τὰ ἐπιτάγματα. Κατὰ τοῦτον εἶναι $y = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$, $z = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$, $\omega = \frac{\beta^2}{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$

$$\left[\ \text{ἢ}\ y = \frac{\alpha\beta}{\gamma},\ z = \frac{\alpha\gamma}{\beta},\ \omega = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\ \right].$$

8.

$yz \pm (y + z + \omega) =$ τετράγωνος, (1), $z\omega \pm (y + z + \omega) =$ τετράγωνος, (2), $y\omega \pm (y + z + \omega) =$ τετράγωνος, (3).

Εὑρίσκει τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα ἴσα ἐμβαδά. Ὡς τοιαῦτα χρησιμοποιεῖ τὰ τοῦ προηγουμένου προβλήματος, τὰ ἔχοντα πλευρὰς (40, 42, 58), (27, 70, 74), (15, 112, 113).

Τὰ τετράγωνα τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι $58^2 = 3364$, $74^2 = 5476$, $113^2 = 12769$. Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων εἶναι 840, εἶναι δὲ $3364 \pm 4.840 = 3364 \pm 3360 = (82^2, 8^2)$, $5476 \pm 4.840 = 5476 \pm 3360 = (94^2, 46^2)$, $12769 \pm 4.840 = 12769 \pm 3360 = (127^2, 97^2)$, κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα 7. Ἀναζητεῖ τώρα τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο νὰ εἶναι τετράγωνος, θέτων (ἂν κληθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ κ, λ, μ), $\kappa\lambda = 3364 = 58^2$, $\lambda\mu = 5476 = 74^2$, $\kappa\mu = 12769 = 113^2$. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ προηγουμένου λήμματος οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι $\kappa = \frac{58.74}{113} = \frac{4292}{113}$, $\lambda = 58^2 : \left(\frac{4292}{113}\right) = \frac{380132}{4292}$, $\mu = 74^2 : \left(\frac{4292}{113}\right) = \frac{618718}{4292}$.

Ἐκφράζει τώρα τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους συναρτήσει τοῦ x καὶ τῶν εὑρεθέντων κ, λ, μ ὡς συντελεστῶν ἀντιστοίχως, ἤτοι $y = \frac{4292}{113}x$, $z = \frac{380132}{4292}x$, $\omega = \frac{618788}{4292}x$, διότι καὶ τὰ γινόμενα τῶν συντελεστῶν ἀνὰ δύο εἶναι τετράγωνοι. Εἶναι δηλ. $yz = \frac{4292}{113} \cdot \frac{380132}{4292}x^2 = 58^2x^2$, $y\omega = \frac{4292}{113} \cdot \frac{618788}{4292}x^2 = 74^2x^2$, $z\omega = \frac{380132}{4292} \cdot \frac{618788}{4292}x^2 = 113^2x^2$. Καθιστᾷ ὁμωνύμους τὰς διὰ τοὺς y, z, ω ἐκφρασθείσας τιμάς, ὁπότε εἶναι

$y = \frac{18421264}{484996}x$, $z = \frac{42954916}{484996}x$, $\omega = \frac{69923044}{484996}$.

Θέτει τὸ ἄθροισμα $y + z + \omega = 3360x^2$, (4). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἐκ τῶν προηγουμένως εὑρεθεισῶν τιμῶν $y + z + \omega = \frac{131299224}{484996}x$, (5). Ἐκ τῶν (4,5) λαμβάνεται $x = \frac{131\,299\,224}{1\,629\,586\,560}$. Καὶ δι' ἁπλοποιήσεως (διὰ τοῦ 168) εἶναι $x = \frac{781543}{9699920}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{781543}{255380}$, $z = \frac{781543}{109520}$, $\omega = \frac{781543}{67280}$.

[Σημ. Πολλοὶ ἀριθμοὶ τοῦ προβλήματος εἶναι ἐφθαρμένοι εἰς τὰ περισωθέντα χειρόγραφα καὶ ἔχουσι διορθωθῇ ὑπὸ τοῦ P. Tannery. Ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἔχουσι γίνει καὶ οἱ τελευταῖοι ὑπολογισμοὶ τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αἱ ὁποῖαι ἐλλείπουσι τελείως ἐκ τοῦ κειμένου].

9.

$$y+z=1, \quad y+\alpha=\varkappa^2 \quad z+\alpha=\lambda^2$$

Περιορισμός. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α δὲν πρέπει νὰ εἶναι περιττός, οὔτε ὁ $2\alpha+1$ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$.

Ἔστω $\alpha=6$, καὶ $y+z=1$, (1), $y+6=\beta^2$, (2), $z+6=\gamma^2$ (3).

Ἐκ τῶν (1, 2, 3) εἶναι $y+z+12=\beta^2+\gamma^2=13$, (4). Ὅθεν πρέπει ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων β^2, γ^2, ὥστε $\beta^2 > 6$, $\gamma^2 > 6$. Τὸ πρόβλημα, λέγει, λύεται ὅταν $\beta^2-\gamma^2 < 1$. Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς δύο τετράγωνα λαμβάνει τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ $\left(\frac{13}{2}\right)$ καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα προστιθέμενον εἰς τὸν $\frac{13}{2}$ δίδει τετράγωνον. Ἔστω $\frac{13}{2}+\frac{1}{4x^2}=$ τετράγωνος, (4), ἢ $26+\frac{1}{x^2}$ τετράγωνος, ἢ $26x^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(5x+1)^2$, ἐξ ἧς $x=10$, $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{100}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$.

Πρέπει λοιπόν, λέγει, ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑκάστου τούτων νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν $\frac{51}{20}$. Ὁ $13=3^2+2^2$. Πρέπει λοιπὸν κάτι νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 3 καὶ κάτι νὰ προστεθῇ εἰς τὸν 2, ὥστε $\frac{51}{20}=3-\mu=2+\nu$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶναι $\mu=\frac{9}{20}$ καὶ $\nu=\frac{11}{20}$. Εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν δύναται νὰ τεθῇ

$\beta^2 = \left(3-\frac{9}{20}\right)$ καὶ $\gamma^2 = \left(2+\frac{11}{20}\right)^2$, διότι $\beta^2+\gamma^2$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς 13 κατὰ τὴν (4), ἐν ᾧ εἶναι $\left(3-\frac{9}{20}\right)^2 + \left(2+\frac{11}{20}\right)^2 = 2\left(\frac{51}{20}\right)^2 = \frac{5202}{400} = 13{,}005 > 13.$

Ὅθεν αἱ τιμαὶ $\frac{9}{20}$ καὶ $\frac{11}{20}$ πρέπει νὰ μεταβληθῶσι διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων ἴσον πρὸς 13. Ἐκφράζει τὰς τιμὰς ταύτας συναρτήσει τοῦ x καὶ θέτει $\beta^2=(3-9x)^2$, $\gamma^2=(11x+2)^2$, $\beta^2+\gamma^2=(3-9x)^2+(11x+2)^2=13.$ Ἐκ ταύτης εἶναι $202x^2 - 10x + 13 = 13$, ἐξ ἧς $x = \frac{5}{101}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $\beta^2 = \left(3 - 9.\,\frac{5}{101}\right)^2 = \left(\frac{258}{101}\right)^2$ καὶ $\gamma^2 = 11.\,\left(\frac{5}{101}+2\right)^2$. Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνει

$y+6=\beta^2=\left(\frac{258}{101}\right)^2,\ y=\left(\frac{258}{101}\right)^2-6=\frac{66564-61206}{10201}=\frac{5358}{10201}$ καὶ

$z+6=\gamma^2=\left(\frac{257}{101}\right)^2,\ z=\left(\frac{257}{101}\right)^2-6=\frac{66049-61206}{10201}=\frac{4843}{10201}.$

Εἶναι δὲ $\frac{5358}{10201}+\frac{4843}{10201}=1=y+z.$

Ὁ περιορισμὸς τοῦ προβλήματος, ὡς ἀναγράφεται εἰς τὸ κείμενον, προέρχεται ἐξ ἐπανορθώσεως τοῦ κατεστραμμένου κειμένου ὑπὸ τοῦ P. Tannery. Ὁ πραγματικὸς περιορισμὸς δὲν ἐσώθη. Κατὰ τὸν Tannery ὁ διδόμενος ἀριθμὸς α δὲν πρέπει νὰ εἶναι περιττός, οὔτε νὰ διαιρῆται ὁ $2\alpha+1$ ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$ $(c=1, 2, 3...)$. Καὶ τοῦτο διὰ νὰ ἀναλύεται ὁ $2\alpha+1$ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Εἰς τὸ πρόβλημα λαμβάνεται $\alpha=6$. Ὁ $2\alpha+1=13$ δὲν διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$, ἑπομένως ὁ 13 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, 2^2+3^2. Ἐνταῦθα παρατηρεῖ ὀρθῶς ὁ Arthur Czwalina (Arithmetik des Diophantos aus Alexandria, Göttingen, 1952 σελ. 128) ὅτι, ἐὰν ὁ δοθεὶς α εἶναι

$=612$, ὁ $2α+1=1225$ εἶναι διαιρετὸς διὰ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$, τοῦ 7, διότι $1225:7=175$. Παρὰ ταῦτα ὁ 1225 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων τῶν 784 καὶ 441. Ὁ Fermat εἶχε διορθώσει τὸν ἐφθαρμένον περιορισμὸν ὡς ἑξῆς· «Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α δὲν πρέπει νὰ εἶναι περιττός, οὔτε τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται, ὅταν ὁ $2α+1$ διαιρούμενος διὰ τοῦ εἰς αὐτὸν περιεχομένου ὡς παράγοντος μεγαλυτέρου τετραγώνου, νὰ διαιρῆται διὰ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$». Φέρει ὡς παράδειγμα τὸν 77. Οὗτος εἶναι τῆς μορφῆς $2α+1=2.38+1$. Τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὁ 77 ὡς παράγοντα εἶναι 1. Τὸ πηλίκον $77:1=77$. Ὁ 77 διαιρεῖται διὰ δύο πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $4c-1$ τῶν 7 καὶ 11. Ἑπομένως δὲν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, οὔτε εἶναι τετράγωνος. Ἄλλο παράδειγμα φέρει ὁ Fermat τὸν ἀριθμὸν 84 λέγων ὅτι ὁ μεγαλύτερος τετράγωνος, τὸν ὁποῖον ὁ 84 περιέχει ὡς παράγοντα εἶναι ὁ 4. Τὸ πηλίκον $84:4=21$ διαιρεῖται διὰ δύο πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $4c-1$, τῶν 3 καὶ 7. Ἑπομένως ὁ 84 οὔτε ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, οὔτε ὁ ἴδιος εἶναι τετράγωνος (Opera, σελὶς 161) καὶ G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantus von Alexandria, σελὶς 208). Ἐνταῦθα παρατηρητέον ὅτι ὁ 84 δὲν εἶναι τῆς μορφῆς $2α+1$ καὶ δὲν προσιδιάζει ἑπομένως εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Ἐξ ἀφορμῆς τοῦ περιορισμοῦ τοῦ προβλήματος ὁ Jacobi ἐδημοσίευσε πραγματείαν εἰς τὴν ὁποίαν ὑποστηρίζει ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζεν ὅτι ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4c-1$ ἢ $4c+3$ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων (Über die Kenntnisse des Diophantos von der Zusammensetzung der Zahlen. Berliner Monatsberichte 1847, Gesammelte Werke VII, 1891 σελ. 332-344].

Σημείωσις

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ὁ Διόφαντος χρησιμοποιεῖ μέθοδον προσεγγίσεως, τὴν ὁποίαν ὀνομάζει «Παρισότητος ἀγωγή». Ἡ ὀνομασία τῆς μεθόδου γίνεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ μεθεπόμενον πρόβλημα 11, ἀκολούθως δὲ εἰς τὸ 14. Χρησιμοποιεῖται ὅμως ἡ μέθοδος καὶ εἰς τὸ 12ον πρόβλημα. Διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται ὅπως τὰ τετράγωνα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ἀριθμός τις μετασχηματίζωνται εἰς τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα.

Ἀνάλυσις τῆς μεθόδου.

I

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα, ὥστε τὸ ἀντίστροφον τούτου προστιθέμενον εἰς δοθέντα ἀκέραιον νὰ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς α καὶ ὁ ζητούμενος τετράγωνος t^2, ὁπότε θέλομεν $\alpha + \frac{1}{t^2} =$ τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι $\alpha t^2 + 1 =$ τετράγωνος. Θέτομεν τὸν τετράγωνον τοῦτον εἴτε ἴσον πρὸς $(1+\varkappa t)^2$, ὅπου $\varkappa^2 < \alpha$, εἴτε ἴσον πρὸς $(1-\lambda t)^2$, ὅπου $\lambda^2 > \alpha$.

Ἔστω $\alpha t^2+1=(1+\varkappa t)^2$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $t = \frac{2\varkappa}{\alpha-\varkappa^2}$. Καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\left(\frac{\alpha+\varkappa^2}{2\varkappa}\right)^2$, $(\varkappa = 1, 2, 3 \ldots)$.

Ἐὰν $\alpha t^2+1=(1-\lambda t)^2$ θὰ εἶναι ἐπίσης $\alpha + \frac{1}{t^2} = \left(\frac{\alpha+\lambda^2}{2\lambda}\right)^2$.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ α καὶ $\alpha + \frac{1}{t^2}$ εἶναι ἐλαχίστη.

II

Δίδεται ὁ ἀριθμὸς α καὶ ζητεῖται, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα n τὸ πλῆθος τετραγώνων, νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα πάλιν n τὸ πλῆθος τετραγώνων ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν ἴσων.

Ἐφαρμόζει ὁ Διόφαντος τὴν προηγουμένην μέθοδον I, ὁπότε λαμβάνει

$\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2t^2} =$ τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι $\alpha n t^2 + 1 =$ τετράγωνος, Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον εἴτε ἴσον πρὸς $(1+\varkappa t)^2$, ὅπου $\varkappa^2 < \alpha n$, εἴτε ἴσον πρὸς $(1-\lambda t)^2$, ὅπου $\lambda^2 > \alpha n$.

Ἔστω $\alpha n t^2 + 1 = (1+\varkappa t)^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $t = \dfrac{2\varkappa}{\alpha n - \varkappa^2}$.
Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνεται $\left(\dfrac{\alpha n + \varkappa^2}{2n\varkappa}\right)^2$.

Ἐὰν $\alpha n t^2 + 1 = (1-\lambda t)^2$ θὰ εἶναι ἐπίσης $\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{1}{n^2 t^2} = \left(\dfrac{\alpha n + \lambda^2}{2n\lambda}\right)^2$.

III

Τὸ ἓν ἐκ τῶν n κατὰ τὸ πλῆθος τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα μετασχηματίζεται ὁ ἀναλυόμενος εἰς ἄθροισμα τετραγώνων δοθεὶς ἀριθμὸς α εὑρέθη προηγουμένως $\left(\dfrac{\alpha n+\varkappa^2}{2n\varkappa}\right)^2$, ἢ $\left(\dfrac{\alpha n+\lambda^2}{2n\lambda}\right)^2$. Τὰ n ὅμως τὸ πλῆθος τετράγωνα αὐτὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα, τὸ δὲ ἄθροισμά των εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερον τοῦ α. Τὸ πρόβλημα ζητεῖ ὅπως τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον πρὸς τὸν α, τὰ δὲ τετράγωνα εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσα μεταξύ των ἢ τινὰ ἐκ τούτων ἴσα μεταξύ των.

Ἔστω ὅτι ὁ δοθείς ἀριθμὸς α ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα n τὸ πλῆθος τετραγώνων, τῶν

(1) $\alpha = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ

(2) $\alpha = \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{H}^2 + \ldots$, ὅπου $\mathfrak{E}^2, \mathfrak{Z}^2, \mathfrak{H}^2$ εἶναι μεταξύ των κατὰ προσέγγισιν ἴσα (ἢ τινὰ ἐκ τούτων ἴσα μεταξύ των).

Ἔστω $\beta < \varepsilon$, $\gamma > \zeta$, $\delta > \eta$/ (3). /ὅπου ε, ζ, η θὰ σχηματισθῶσι

Κατὰ τὴν (II) καὶ (III) θὰ εἶναι

$$n\left(\frac{\alpha n + \varkappa}{2n\varkappa}\right)^2 > \alpha,$$ ἐν ᾧ τὸ πρόβλημα ζητεῖ ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν n τὸ πλῆθος τετραγώνων εἶναι ἴσον πρὸς α.

Σχηματίζει ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3) καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τῆς $\dfrac{\alpha n + \varkappa^2}{2n\varkappa}$, τὰς σχέσεις

$$\frac{\alpha n+\varkappa^2}{2n\varkappa} = \beta + \varepsilon = \gamma - \zeta = \delta - \eta = \ldots$$

Ἐκ τούτων, ὑπολογίζονται οἱ $\varepsilon, \zeta, \eta, \ldots.$

Ἐκφράζει τώρα τὰ ζητούμενα τετράγωνα συναρτήσει προσδιοριστέου τινος x καὶ τῶν τιμῶν $\beta, \gamma, \delta, \ldots.$ καὶ $\varepsilon, \zeta, \eta, \ldots.$ (Οἱ ὑπάρχοντες τυχὸν παρονομασταὶ παραλείπονται, διότι οὕτω εὑρίσκονται τελικῶς μικρότεροι ἀριθμοί).

Κατὰ ταῦτα λαμβάνει

$$(\beta+\varepsilon x)^2+(\gamma-\zeta x)^2+(\delta-\eta x)^2+\ldots.=\alpha.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὑπολογίζεται ὁ x.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

Ὁ ἀριθμὸς 35 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων.

Κατὰ τὰς προηγουμένας σχέσεις μετατρέπομεν τὸν 35 εἰς τετράγωνον κατὰ προσέγγισιν, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\frac{35}{4}+\frac{1}{16t^2}=$ τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι $140t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(1-12t)^2$, ἐξ ἧς $t=6$ καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $\frac{35}{4}+\frac{1}{16.36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2$.

Ὁ 35 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, τῶν $1^2+3^2+3^2+4^2$. (Σημ. Ἡ μέθοδος βέβαια ἔχει ἐφαρμογήν, ἐφ' ὅσον ὁ διδόμενος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τετραγώνων).

Τὰ τέσσαρα ἴσα τετράγωνα, πλευρᾶς ἕκαστον $\frac{71}{24}$ ἔχουσιν ἄθροισμα $4.\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{20164}{576}=35\frac{4}{576}>35$.

Διὰ νὰ γίνωσιν τὰ τετράγωνα ἴσα μεταξύ των πρέπει ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα τῆς μονάδος (καὶ μικροτέρα τοῦ 3), τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου τετραγώνου ἡ πλευρὰ νὰ γίνῃ μικροτέρα τοῦ 3 (καὶ μεγαλυτέρα τῆς μονάδος). Πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως $\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=4-\mu$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $\varkappa=\frac{47}{24}$, $\lambda=\frac{1}{24}$, $\mu=\frac{25}{24}$.

Ἐπειδὴ ὅμως ζητεῖται ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων τεσσάρων τετραγώνων εἶναι ἀκριβῶς 35 ἐκφράζομεν, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου, τὴν πλευρὰν ἑκάστου τετραγώνου συναρτήσει τῶν τιμῶν κ, λ, μ καὶ ἀγνώστου τινος x, ὅστις πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχομεν

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{59}{1418}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35$

Σημ. Ἡ ἐξίσωσις ἠδύνατο νὰ εἶναι

$$\left(1+\frac{47}{24}x\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(4-\frac{25}{24}x\right)^2=35.$$

Ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκονται μικρότεροι ἀριθμοί.

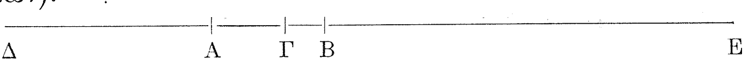
10.

$$y+z=1, \qquad y+\alpha_1=\beta^2, \qquad z+\alpha_2=\gamma^2.$$

Ἔστω $\alpha_1=2$, $\alpha_2=6$, καὶ $y+z=1$, (1),

$y+2=\beta^2$, (2), $z+6=\gamma^2$, (3).

Τοῦτο εἶναι τὸ μοναδικὸν πρόβλημα τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὅπου χρησιμοποιοῦνται εὐθύγραμμα τμήματα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν (Εὐκλείδειος τρόπος παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν).



Ἔστω ΑΒ=1, ΑΓ=y, ΓΒ=z, ΑΔ=2, ΒΕ=6, ΑΓ+ΓΒ=1. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν ἕπεται ΔΕ=9 καὶ πρέπει νὰ εἶναι ΔΓ= τετράγωνος, ΓΕ= τετράγωνος, ἤτοι ὁ 9 νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους τοὺς ΓΔ, ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων (ὁ ΓΔ) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΑΔ = 2 καὶ μικρότερος τοῦ ΔΒ (=3), ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 9 εἰς δύο τετραγώνους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3. Ὅταν δὲ εὑρεθῇ ὁ τετράγωνος οὗτος ΓΔ εὑρίσκεται δι' ἀφαιρέσεως τοῦ ΑΔ, ὁ ΑΓ, καὶ δι' ἀφαιρέσεως τούτου ἀπὸ τοῦ ΑΒ εὑρίσκεται ὁ ΒΓ.

Ἔστω ὁ εἷς τῶν τετραγώνων x^2, ὥστε $2 < x^2 < 3$, (4). Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $9-x^2$. Οὗτος ὑπολογίζεται κατὰ τὸ [II, 8]. Πρέπει ὅμως ὁ x^2 νὰ πληροῖ τὴν συνθήκην (4). Ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3 λαμβάνει δύο τετραγώνους τὸν μὲν ἕνα ὀλίγον μεγαλύτερον τοῦ 2, τὸν δὲ ἄλλον ὀλίγον μικρότερον τοῦ 3 καὶ θέτει $\frac{289}{144} < x^2 < \frac{361}{144}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{17}{12} < x < \frac{19}{12}$, (5). (Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου $(9-x^2)$ νὰ προσδιορισθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη (5). Θέτει $(9-x^2) = (3-\mu x)^2$ ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ ταύτης εἶναι $x = \frac{6\mu}{\mu^2+1}$ καὶ κατὰ τὴν (5) πρέπει $\frac{17}{12} < \frac{6\mu}{\mu^2+1} < \frac{19}{12}$. Θεωρεῖ τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{17}{12} < \frac{6\mu}{\mu^2+1}$ τὴν ὁποίαν λύει κατὰ τὸν γνωστὸν ἤδη τρόπον, ἤτοι

$72\mu > 17\mu^2+17,\ 17^2\mu^2-17.72\mu < -17^2,\ (17\mu-36)^2 < 36^2-17^2,$

$\mu < \frac{36+\sqrt{1007}}{17}$. Ἀλλὰ $31 < \sqrt{1007} < 32$. Θέτει

$\mu \leqq \frac{36+31}{17} = \frac{67}{17}$ (λέγων ὅτι ὁ μ δὲν εἶναι $> \frac{67}{17}$).

Ἀκολούθως θεωρεῖ τὴν ἄλλην ἀνισότητα $\frac{19}{12} > \frac{6\mu}{\mu^2+1}$, τὴν ὁποίαν λύει ὁμοίως, ἤτοι

$19\mu^2+19 > 72\mu,\ 19^2\mu^2-19.72\mu > -19^2,\ (19\mu-36)^2 > 36^2-19^2,$

$\mu > \frac{36+\sqrt{935}}{19}$. Ἀλλὰ $30 < \sqrt{935} < 31$. Θέτει $\mu \geqq \frac{36+30}{19} = \frac{66}{19}$, (λέγων ὅτι ὁ μ δὲν εἶναι $< \frac{66}{19}$).

Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{66}{19} \leqq \mu \leqq \frac{67}{17}$ λαμβάνει $\mu = 3\frac{1}{2}$ (κατὰ προσέγγισιν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν) καὶ θέτει

$9-x^2 = \left(3-3\frac{1}{2}x\right)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{84}{53}$ καὶ $x^2 = \frac{7056}{2809}$.

Τὰ κλάσματα ἑπομένως τῆς μονάδος

θὰ εἶναι $y = x^2-2 = \frac{7056}{2809} - 2 = \frac{1438}{2809}$ καὶ $z = 1 - \frac{1438}{2809} = \frac{1371}{2809}$.

11.

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta=\alpha^2, \quad z+\delta=\beta^2 \quad \omega+\delta=\gamma^2$$

Περιορισμός. Πρέπει ὁ δ οὔτε νὰ εἶναι 2, οὔτε ἄθροισμα τοῦ 2 σὺν πολλαπλάσιον τοῦ 8.

Ἔστω $\delta=3$, $y+z+\omega=1$, (1), $y+3=\alpha^2$, (2), $z+3=\beta^2$, (3), $\omega+3=\gamma^2$, (4). Ἐκ τῶν (2, 3, 4) εἶναι $10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Ἑπομένως πρέπει ὁ 10 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3. Ἐφαρμόζει πρὸς τοῦτο τὴν μέθοδον προσεγγίσεως τοῦ προβλήματος (9) τὴν ὁποίαν ὀνομάζει «μέθοδον παρισότητος» (παρισότητος ἀγωγή). Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς τρία τετράγωνα λαμβάνει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸ διὰ νὰ προκύψῃ τετράγωνος ἀριθμὸς ἤτοι $\frac{10}{3}+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος, ἢ $\frac{30}{9}+\frac{1}{x^2}$ τετράγωνος. Καλεῖ $x^2=9t^2$, (5), ὁπότε εἶναι $\frac{30}{9}+\frac{1}{9t^2}=$ τετράγωνος, ἢ $30t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(5t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=2$, καὶ ἐκ τῆς (5) εἶναι $x^2=36$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν $\frac{10}{3}+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος λαμβάνομεν $\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2$. Ἐπειδὴ 3 τετράγωνα πλευρᾶς $\frac{11}{6}$ εἶναι $\frac{363}{36}>10$ πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$.

Ἀλλὰ $10=3^2+1^2$ καὶ $1^2=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}$ καὶ συνεπῶς $10=9+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$ Αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι $3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$. Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$. Τρέπει τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν $\left(3,\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{11}{6}\right)$ εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ παραλείπων τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνει ἀντιστοίχως $(90, 24, 18, 55)$. Πρέπει λοιπόν, λέγει, ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 90, 24, 18 κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς 55. Ἐπειδὴ $90 = 55+35$, $24 = 55-31$, $18 = 55-37$, ἤτοι $55 = 90-35 = 24+31 = 18+37$ καὶ $\frac{55}{30} = 3 - \frac{35}{30} = \frac{4}{5} + \frac{31}{30} = \frac{3}{5} + \frac{18}{30}$ καὶ εἶναι $\left(3 - \frac{35}{50}\right)^2 + \left(\frac{4}{5} + \frac{31}{30}\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + \frac{37}{30}\right)^2 = \frac{363}{36} > 10$, πρέπει οἱ δεύτεροι ὅροι ἑκάστου τῶν δυωνύμων τοῦ α′ μέλους νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων νὰ εἶναι 10. Ἐκφράζει τούτους συναρτήσει τοῦ x, ὁπότε εἶναι $(3-35x)^2 + \left(\frac{4}{5} + 31x\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + 37x\right)^2 = 10$, ἢ

$3555x^2 + 10 - 116x = 10$, ἐξ ἧς $x = \frac{116}{3555}$. Ἑπομένως τὰ τρία ζητούμενα τετράγωνα θὰ εἶναι

$$\alpha^2 = \left(3 - 35.\ \frac{116}{3555}\right)^2 = \frac{1745041}{505521},\quad \alpha = \frac{1321}{711}.$$

$$\beta^2 = \left(\frac{4}{5} + 31.\ \frac{116}{3555}\right)^2 = \frac{1658944}{505521},\quad \beta = \frac{1288}{711}.$$

$\gamma^2 = \left(\frac{3}{5} + 37.\ \frac{116}{3555}\right)^2 = \frac{1651225}{505521},\ \gamma = \frac{1285}{711}$. Ὅθεν εἶναι

$y = \alpha^2 - 3 = \frac{228478}{505521}$, $z = \beta^2 - 3 = \frac{142381}{505521}$, $\omega = \gamma^2 - 3 = \frac{134662}{505521}$ καὶ εἶναι $y + z + \omega = 1$.

12.

$$y + z + \omega = 1,\quad y + \delta_1 = \alpha^2,\quad z + \delta_2 = \beta^2,\quad \omega + \delta_3 = \gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 3$, $\delta_3 = 4$, ὁπότε εἶναι $y + z + \omega = (1)$, $y + z = \alpha^2$, (2), $z + 3 = \beta^2$, (3), $\omega + 4 = \gamma^2$, (4).

[Ὁ Διόφαντος ὑποδεικνύει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, στηριζομένην εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα, χωρὶς νὰ ἀναγράφῃ αὐτήν. Πρῶτος διατυπώσας τὴν λύσιν εἶναι ὁ Wertheim (σ. 218). Τοῦτον ἠκολούθησεν ὁ T. Heath (σ. 209), ὁ P. Eecke (σ. 206) καὶ ὁ Czwalina (σ. 129)]

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων εἶναι $y+z+\omega+2+3+4=10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Ἀνάγεται ἄρα τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερον τοῦ 2 τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Προσθέτει εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων $\frac{1}{2}$ καὶ λέγει ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $2<\alpha^2<2\frac{1}{2}$, $3<\beta^2<3\frac{1}{2}$, $4<\gamma^2<4\frac{1}{2}$. Κατόπιν τούτου ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα νὰ ἀναλύσωμεν τὸν $10=1^2+3^2$ εἰς ἄλλους δύο τετραγώνους, $10=\alpha^2+\lambda^2$, ἐξ ὧν $2<\alpha^2<2\frac{1}{2}$, ὁπότε $\alpha^2-2=y$. Κατόπιν, λέγει ἀναλύομεν τὸν λ^2 εἰς δύο τετραγώνους β^2, γ^2, ὥστε $3<\beta^2<3\frac{1}{2}$, $4<\gamma^2<4\frac{1}{2}$, ὁπότε $\beta^2-3=z$, $\gamma^2-4=\omega$. Ταῦτα εἶναι ἡ ὑπόδειξις τῆς λύσεως ὑπὸ τοῦ Διοφάντου.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ α^2 χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον προσεγγίσεως (παρισότητος ἀγωγή) τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν εἰς τὸ πρόβλημα 9. Θέλομεν νὰ εἶναι $2<\alpha^2<2\frac{1}{2}$. Ἐν πρώτοις ἀναζητοῦμεν κλάσμα τῆς μονάδος τετραγωνικόν, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν $2\frac{1}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον. Ἔστω $\frac{5}{2}+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος, ἢ $\frac{10}{4}+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος. Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{10}{4}+\frac{1}{4t^2}=$ τετράγωνος, $\frac{10.4t^2}{4}+1=$ τετράγωνος, $10t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(3t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=6$, $t^2=36$, $x^2=4.36=144$. Τὸ ζητούμενον βοηθητικὸν τετράγωνον εἶναι $\frac{5}{2}+\frac{1}{144}=\frac{361}{144}=\left(\frac{19}{12}\right)^2$.

Ἀφοῦ τὸ ἓν βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον $2\frac{1}{2}$, ἢ κατὰ προσέγ-

γισιν $\left(\frac{19}{12}\right)^2 = 2\,\frac{73}{144} > \frac{5}{2}$ τὸ ἄλλο θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον $7\frac{1}{2}$. Ἀναζητοῦμεν τετραγωνικὸν κλάσμα τῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν $7\frac{1}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον. Ἔστω $\frac{15}{2} + \frac{1}{x^2} =$ τετράγωνος, ἢ $\frac{30}{4} + \frac{1}{x^2} =$ τετράγωνος. Καλοῦμεν $x^2 = 4t^2$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{30}{4} + \frac{1}{4t^2} =$ τετράγωνος, $\frac{30.4t^2}{4} + 1 =$ τετράγωνος, $30t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(5t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=2, t^2=4, x^2=4.4=16$. Ἑπομένως τὸ δεύτερον βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι $7\,\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{121}{16} = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7\,\frac{9}{16} > 7\,\frac{1}{2}$.
Αἱ πλευραὶ τῶν δύο εὑρεθέντων βοηθητικῶν τετραγώνων εἶναι $\frac{19}{12}$ καὶ $\frac{11}{4}$ ἢ $\frac{19}{12}$ καὶ $\frac{33}{12}$. Ἐπειδὴ ὅμως $\left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2 = \frac{1450}{144} > 10$ πρέπει αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων νὰ ἐλαττωθῶσι, ὥστε τὰ τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10. Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος τοῦ προβλήματος 9. Ὁ $10 = 1^2+3^2$. Εἶναι δὲ $10 \backsim \left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2$.
Συγκρίνομεν τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς δευτέρας ἀναλύσεως τοῦ 10 πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς πρώτης ἀναλύσεως. Κατὰ ταῦτα εἶναι $\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12}$ καὶ $\frac{33}{12} = 3 - \frac{3}{12}$. Πρέπει λοιπὸν αἱ πλευραὶ τῶν δύο βοηθητικῶν τετραγώνων, αἱ $\left(1 + \frac{7}{12}\right)$ καὶ $\left(3 - \frac{3}{12}\right)$ νὰ μεταβληθῶσι, ὥστε νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10. Ἐκφράζομεν τοὺς δευτέρους ὅρους τῶν προηγουμένων παραστάσεων συναρτήσει τοῦ x, ὁπότε κατὰ τὸ αἴτημα πρέπει νὰ εἶναι $(1+7x)^2 + (3-3x)^2 = 10$, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ προβλήματος 9. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν $x = \frac{2}{29}$. Ὥστε τὸ πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ

ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι $\left(1+7\cdot\frac{2}{29}\right)^2=\left(\frac{43}{29}\right)^2=\frac{1849}{841}$ καὶ τὸ δεύτερον εἶναι $\left(3-3\cdot\frac{2}{29}\right)^2=\left(\frac{81}{29}\right)^2=\frac{6561}{841}$. Εἶναι δὲ $2<\frac{1849}{841}<2\frac{1}{2}$.

Τώρα πρέπει τὸ δεύτερον τετράγωνον $\frac{6561}{841}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ [II,8]. Καλοῦμεν τὸ ἓν τῶν ζητουμένων τετραγώνων x^2, ὁπότε τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $\frac{6561}{841}-x^2$. Θέλομεν ὅμως, ὅπως $3<x^2<3\frac{1}{2}$. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοιοῦτο τετράγωνον ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τοῦ 10^{ου}, προβλήματος. Θέτομεν τὸν x^2 μεταξὺ δύο ὁρίων, ἐκλέγοντες δύο τετράγωνα εὑρισκόμενα ἐγγὺς τοῦ 3 καὶ 4. Τοιαῦτα εἶναι τὰ τετράγωνα $\frac{49}{16}$ καὶ $\frac{64}{16}$. Ὥστε $\frac{49}{16}<x^2<\frac{64}{16}$, καὶ $\frac{7}{4}<x<\frac{8}{4}$. Ἐξισώνομεν τώρα τὸ τετράγωνον $\frac{6561}{841}-x^2$ πρὸς ἓν τετράγωνον τῆς μορφῆς $\left(\frac{81}{29}-\mu x\right)^2$ ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ (μέθοδος τοῦ 10^{ου} προβλήματος). Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν $\frac{6561}{861}-x^2=\left(\frac{81}{29}-\mu x\right)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{162\mu}{29(\mu^2+1)}$, (5). Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\frac{7}{4}<\frac{162\mu}{29(\mu^2+1)}<\frac{8}{4}$. Θεωροῦμεν τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{7}{4}<\frac{162\mu}{29(\mu^2+1)}$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου. $203(\mu^2+1)<648\mu$, $\mu^2+1<\frac{648\mu}{203}$, $\mu^2-\frac{648\mu}{203}<-1$, $\left(\mu-\frac{324}{203}\right)^2<-1+\left(\frac{324}{203}\right)^2$, ἐξ ἧς $\mu<2{,}84$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνισότητος $\frac{162\mu}{29(\mu^2+1)}<2$ τὴν τιμὴν $\mu>2{,}37$, ἤτοι εἶναι $2{,}37<\mu<2{,}84$. Λαμβάνομεν $\mu=2\frac{1}{2}$ (κατὰ προσέγγισιν τὸν μέσον ὅρον τῶν τιμῶν 2,37 καὶ 2,84) καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (5) ἔχομεν $x=\frac{1620}{841}$, $x^2=\frac{2624400}{707281}$.

Τὸ δεύτερον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ $\frac{6561}{841}$ θὰ εἶναι $\frac{6561}{841} - \frac{2624400}{707281} = \frac{2893401}{707281} = \left(\frac{1701}{841}\right)^2$. Ὥστε τὰ τρία τετράγωνα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 πληρουμένων τῶν τριῶν συνθηκῶν $2 < \alpha^2 < 2\frac{1}{2}$, $3 < \beta^2 < 3\frac{1}{2}$, $4 < \gamma^2 < 4\frac{1}{2}$ εἶναι $\alpha^2 = \frac{1849}{841}$, $\beta^2 = \frac{2624400}{707281}$, $\gamma^2 = \frac{2893401}{707281}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2, 3, 4)

$$y = \frac{1849.841}{841.841} - 2 = \frac{140447}{707281},\quad z = \frac{2624400}{707281} - 3 = \frac{502557}{707281},$$

$$\omega = \frac{2893401}{707281} - 4 = \frac{64277}{707281}.$$ Εἶναι δὲ $y + z + \omega = 1$.

[Σημ. Ὁ β^2 δὲν εἶναι $< 3\frac{1}{2}$, ἀλλὰ τοῦ 4. Ἔπρεπε νὰ τεθῇ ὁ x^2 μεταξὺ τῶν ὁρίων, $\frac{49}{16} < x^2 < \left(\frac{23}{12}\right)^2$, διότι τὸ τετράγωνον $\frac{529}{144}$ εἶναι ἐγγύτερον πρὸς τὸν $3\frac{1}{2}$ ἢ τὸ τετράγωνον $\frac{64}{16}$. Παρὰ τὴν ἐκλογὴν ὅμως τοῦ τετραγώνου $\frac{64}{16}$ ὁ β^2 γίνεται $< 3\frac{1}{2}$, ἂν τεθῇ $\mu = 2\frac{7}{10}$ ἀντὶ $\mu = 2\frac{1}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀλλαγῆς τῆς τιμῆς τοῦ μ θὰ ἐπηρεάζοντο αἱ τιμαὶ z, ω].

13.

$y+z+\omega = \delta$, (1), $y+z = \alpha^2$, (2), $z+\omega = \beta^2$, (3), $y+\omega = \gamma^2$, (4).

Λαμβάνει $\delta = 10$. Διὰ προσθέσεως τῶν (2, 3, 4) καὶ ἀντικαταστάσεως ἐκ τῆς (1) εἶναι $20 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Ὅθεν ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 20 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 10. Ἐπειδὴ $20 = 4 + 16$ λαμβάνει τὸν 4 ὡς ἓν τῶν ζητουμένων τετραγώνων. Ἀπομένει νὰ ἀναλυθῇ ὁ 16 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 10. Ἔστω τὸ ἓν τῶν ζητουμένων δύο τετραγώνων x^2, καὶ νὰ εἶναι $6 < x^2 < 10$. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοιοῦτο τετράγωνον θέτομεν τὸν x^2 μεταξὺ δύο ὁρίων τετραγώνων, ἔστω $\frac{25}{4} < x^2 < 9$, ὁπότε $\frac{5}{2} < x < 3$, (5), (μέθοδος 10 προβλήματος). Τὸ ἄλλο τετράγωνον θὰ εἶναι $16 - x^2$ ὅπερ θέτομεν $= (4 - \mu x)^2$, ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι $x = \frac{8\mu}{\mu^2+1}$, (6) καὶ ἐκ τῆς (5) εἶναι $\frac{5}{2} < \frac{8\mu}{\mu^2+1} < 3$. Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\frac{5}{2} < \frac{8\mu}{\mu^2+1}$ εἶναι $\mu < 2{,}848$ καὶ ἐκ τῆς $\frac{8\mu}{\mu^2+1} < 3$, εἶναι $\mu > 2{,}213$. Λαμβάνομεν $\mu = 2\frac{1}{2}$, ὁπότε ἐκ τῆς (6) εἶναι $x = \frac{80}{29}$, $x^2 = \frac{6400}{841}$ καὶ $16 - x^2 = \frac{7056}{841}$. Ὥστε τὰ τρία τετράγωνα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 20, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι μικρότερον τοῦ 10 εἶναι $\alpha^2 = 4$, $\beta^2 = \frac{6400}{841}$, $\gamma^2 = \frac{7056}{841}$. Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) εἶναι $\omega = 6$, τῆς (3) ἀπὸ τῆς (1), $y = \frac{2010}{841}$, τῆς (4) ἀπὸ τῆς (1), $z = \frac{1354}{841}$.

14.

$y + z + \omega + \varphi = \lambda$, ἔστω $= 10$ (1), $y + z + \omega = \alpha^2$, (2), $z + \omega + \varphi = \beta^2$, (3), $\omega + \varphi + y = \gamma^2$, (4), $\varphi + y + z = \delta^2$, (5).

Διὰ προσθέσεως τῶν (2, 3, 4, 5) καὶ ἀντικαταστάσεως ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $30 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$. Πρέπει ἄρα ὁ 30 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων ἀριθμῶν ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, λέγει, κατὰ δύο τρόπους. Πρῶτον μὲ τὴν μέθοδον τῆς προσεγγίσεως (παρισότητος ἀγωγὴ) ἀφοῦ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 30 καὶ ἀφαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν εὑρεθησομένων τετραγώνων ἀπὸ τοῦ 10. Διότι ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶναι $\varphi = 10 - \alpha^2$, $y = 10 - \beta^2$, $z = 10 - \gamma^2$, $\omega = 10 - \delta^2$, (6). Δεύτερον, λέγει, ὅτι ὁ 4 καὶ ὁ 9 εἶναι ἤδη τετράγωνοι, ἕκαστος μικρότερος τοῦ 10. Ἐὰν ἑπομένως ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι $30 = 1 + 4 + 9 + 16$ ἀπομένει ὅπως ὁ $1 + 16 = 17$ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10. Ἐὰν ὁ εἷς τῶν τετραγώνων τούτων ὁ x^2 πληροῖ τὴν σχέσιν $8\frac{1}{2} < x^2 < 10$ θὰ εἶναι καὶ ὁ ἄλλος μικρότερος τοῦ 10. Ἕως ἐδῶ τελειώνει ἡ ὑπόδειξις τῆς λύσεως μὲ τὴν παρεμβολὴν σχολιαστοῦ (τὸ ἐντὸς ἀγκυλῶν εἰς τὸ κείμενον) ὅτι ὁ εἷς ἄγνωστος εἶναι $10-4=6$ καὶ ὁ ἄλλος $10-9=1$.

Ὁ πρῶτος τρόπος λύσεως:

$\frac{30}{4}+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος. $x^2=4t^2$, $30t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(5t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=2$, $4t^2=x^2=16$, $\frac{30}{4}+\frac{1}{16}=\frac{121}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$

Ὁ $30=1+4+9+16$, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν τεσσάρων τούτων τετραγώνων εἶναι ἀντιστοίχως 1, 2, 3, 4. Εἶναι δὲ $1=\frac{11}{4}-\frac{7}{4}$, $2=\frac{11}{4}-\frac{3}{4}$, $3=\frac{11}{4}+\frac{1}{4}$, $4=\frac{11}{4}+\frac{5}{4}$ ἤτοι $\frac{11}{4}=1+\frac{7}{4}=2+\frac{3}{4}=3-\frac{1}{4}=4-\frac{5}{4}$.

Ἀλλὰ $4\left(\frac{11}{4}\right)^2=\left(1+\frac{7}{4}\right)^2+\left(2+\frac{3}{4}\right)^2+\left(3-\frac{1}{4}\right)^2+\left(4-\frac{5}{4}\right)^2=30\frac{1}{4}>30$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τεσσάρων τετραγώνων νὰ μεταβληθῇ διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμά των $=30$. Ἐκφράζομεν ταύτην συναρτήσει τοῦ x, ὁπότε κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ προβλήματος 9 θὰ εἶναι $(1+7x)^2+(2+3x)^2+(3-x)^2+(4-5x)^2=30$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{5}{21}$. Ὅθεν τὰ τέσσαρα τετράγωνα θὰ εἶναι

$$\left(1+\frac{35}{21}\right)^2=\left(\frac{56}{21}\right)^2=\frac{3136}{441},\ \left(2+\frac{15}{21}\right)^2=\left(\frac{57}{21}\right)^2=\frac{3249}{441},$$

$$\left(3-\frac{5}{21}\right)^2=\left(\frac{58}{21}\right)^2=\frac{3364}{441},\ \left(4-\frac{25}{21}\right)^2=\left(\frac{59}{21}\right)^2=\frac{3481}{441}.$$

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (6), $\varphi=10-\frac{3136}{441}=\frac{1274}{441}$, $y=10-\frac{3249}{441}=\frac{1161}{441}$, $z=10-\frac{3364}{441}=\frac{1046}{441}$, $\omega=10-\frac{3481}{441}=\frac{929}{441}$ καὶ εἶναι $y+z+\omega+\varphi=10$, $y+z+\omega=\left(\frac{56}{21}\right)^2$, $z+\omega+\varphi=\left(\frac{57}{21}\right)^2$, $\omega+\varphi+y=\left(\frac{58}{21}\right)^2$, $\varphi+y+z=\left(\frac{59}{21}\right)^2$.

Ὁ δεύτερος τρόπος λύσεως:

Ἀφοῦ $30 = 1 + 4 + 9 + 16$ καὶ λαμβάνει $\beta^2 = 4$, $\gamma^2 = 9$ (ἕκαστος εἶναι < 10) μένει νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ α^2, δ^2 τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 17 ἤτοι νὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ὧν ὁ εἷς μεγαλύτερος τοῦ $8\frac{1}{2}$ καὶ μικρότερος τοῦ 10. Λαμβάνομεν $\frac{17}{2} + \frac{1}{x^2}$ = τετράγωνος, (1), ἢ $\frac{34}{4} + \frac{1}{x^2}$ = τετράγωνος, Θέτομεν $x^2 = 4t^2$, $34t^2 + 1$ = τετράγωνος, ἔστω $= (6t-1)^2$, ἐξ ἧς $t = 6$, $t^2 = 36$, $x^2 = 144$. [Σημ. Δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τοῦ $(6t-1)^2$ ὁ $(5t+1)^2$, ἀλλὰ θὰ ἔχωμεν ὀλίγον μεγαλυτέρους ἀριθμούς]. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\frac{17}{2} + \frac{1}{144} = \left(\frac{35}{12}\right)^2$. Ὥστε ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο (ἴσων) τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 17 εἶναι κατὰ προσέγγισιν $\frac{35}{12}$. Ἐπειδὴ $17 = 1^2 + 4^2$ καὶ εἶναι $\frac{35}{12} = 1 + \frac{23}{12} = 4 - \frac{13}{12}$ εἶναι δὲ $\left(1 + \frac{23}{12}\right)^2 + \left(4 - \frac{13}{12}\right)^2 = \left(\frac{35}{12}\right)^2 >$ πρέπει νὰ μεταβάλλωμεν τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τούτων, διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμά των 17. Εκφράζομεν ταύτας συναρτήσει τοῦ x, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $(1+23x)^2 + (4-13x)^2 = 17$, ἐξ ἧς $x = \frac{29}{349}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι

$$\left(1 + 23.\frac{29}{349}\right)^2 = \frac{1032256}{121801} = \alpha^2, \quad \left(4 - 13.\frac{29}{349}\right)^2 = \frac{1038361}{121801} = \delta^2.$$

Ὅθεν εἶναι $\varphi = 10 - \alpha^2 = \frac{185754}{121801}$, $\omega = 10 - \delta^2 = \frac{179649}{121801}$. Ἐλήφθη δὲ $\beta^2 = 4$, $y = 10 - 4 = 6$, $\gamma^2 = 9$, $z = 10 - 9 = 1$. Εἶναι δὲ $y + z + \omega + \varphi = 10$.

15.

$y + z + \omega$, (1), $x^3 + y = \alpha^3$, (2), $x^3 + z = \beta^3$, (3), $x^3 + \omega = \gamma^3$, (4).

Ἔστω $y = 7x^3$, (5), $z = 26x^3$ (6), $\omega = 63x^3$, (7), ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x. Ἐκ τῶν (5, 6, 7) εἶναι $y + z + \omega = 96x^3$. Καὶ ἐκ τῆς

(1), $x=96x^3$, $96x^2=1$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 96. Οὗτος προῆλθεν ἐκ τῶν $7=2^3-1$, $26=3^3-1$, $63=4^3-1$, ἤτοι $96=(2^3-1)+(3^3-1)+(4^3-1)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων 1) τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ 2) ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν προστίθεται ἡ μονὰς νὰ προκύπτῃ κύβος. Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\varkappa$, λ, μ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν προκυπτόντων κύβων ἐκ τῆς προσθέσεως εἰς ἕκαστον τῆς μονάδος αἱ $(x+1)$, $(2-x)$, 2 ἤτοι $\varkappa+1=(x+1)^3$, $\lambda+1=(2-x)^3$, $\mu+1=2^3=8$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων εἶναι $\varkappa=x^3+3x^2+3x$, (8) $\lambda=6x^2+7-x^3-12x$, (9), $\mu=7$, (10), καὶ πρέπει νὰ εἶναι $\varkappa+\lambda+\mu=9x^2+14-9x=$ τετράγωνος, ἔστω$=(3x-4)^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{2}{15}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (8,9) εἶναι $\varkappa=\frac{1538}{3375}$, $\lambda=\frac{18577}{3375}$ καὶ $\mu=7$. Εἶναι δὲ $(\varkappa+\lambda+\mu)^2=\frac{2916}{225}=\left(\frac{54}{15}\right)^2$ καὶ $\varkappa+1=\frac{1538}{3375}+1=\left(\frac{17}{15}\right)^3$, $\lambda+1=\frac{18577}{3375}+1=\left(\frac{28}{15}\right)^3$, $\mu+1=2^3$.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y=\frac{1538}{3375}x^3$, $z=\frac{18577}{3375}x^3$, $\omega=7x^3$. Διὰ προσθέσεως τούτων λαμβάνει $y+z+\omega=\frac{43740}{3375}x^3$. Ἀλλὰ εἶναι καὶ $y+z+\omega=x$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τούτων εἶναι $\frac{43740}{3375}x^2=1$, $x=\frac{15}{54}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι $y=\frac{1538}{3375}\cdot\left(\frac{15}{54}\right)^3=\frac{1538}{157464}$, $z=\frac{18577}{157464}$, $\omega=\frac{23625}{157464}$.

16.

$$y+z+\omega=x,\quad x^3-y=\alpha^3,\ (1),\ x^3-z=\beta^3,\ (2),\ x^3-\omega=\gamma^3,\ (3).$$

Ἔστω $y=\frac{7}{8}x^3$, $z=\frac{26}{27}x^3$, $\omega=\frac{63}{64}x^3$.

Ἐκ τούτων λαμβάνεται $x=\left(\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64}\right)x^3=\frac{4877}{1728}x^3$ ἢ

$\frac{4877}{1728}$ $x^2 = 1$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐρευνᾷ τὴν προέλευσιν τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2. Ὁ $\frac{4877}{1728} = \frac{7}{8} + \frac{26}{27} + \frac{63}{64} = \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{27}\right) + \left(1 - \frac{1}{64}\right) = 3 - \left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right]$.

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς κύβοι ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τούτων ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ τετράγωνον ἀριθμόν. Ἐὰν κατασκευάσωμεν, λέγει, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων μικρότερον τῆς μονάδος κατὰ μείζονα λόγον ἕκαστος τῶν κύβων θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος. Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι κύβοι $\varkappa^3$, λ^3, μ^3. Ἀφοῦ $(\varkappa^3+\lambda^3+\mu^3)$ θὰ κατασκευασθῇ < 1, θὰ εἶναι $3 - (\varkappa^3 + \lambda^3 + \mu^3) =$ τετράγωνος > 2.

Ἔστω ὁ τετράγωνος οὗτος $\delta^2 = \frac{9}{4}$, ὁπότε $(\varkappa^3+\lambda^3+\mu^3) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Πρέπει λοιπὸν ὁ $\frac{3}{4}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν κύβων. Πολλαπλασιάζει ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ κύβον τοιοῦτον, ὥστε νὰ μείνῃ μόνον ὁ ἀριθμητὴς πρὸς ἀνάλυσιν εἰς ἄθροισμα τριῶν κύβων. Ἔστω ὁ κύβος οὗτος ὁ $216 = 6^3$, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{3}{4} = \frac{3.216}{4.216} = \frac{162}{216} = \varkappa^3 + \lambda^3 + \mu^3$. Ὁ $162 = 5^3 + 4^3 - 3^3$. Τώρα χρησιμοποιεῖ θεώρημα περιλαμβανόμενον εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Πορίσματα (ἀπολεσθεῖσαν), καθ' ὃ ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὸ ἄθροισμα δύο κύβων. Ἐνταῦθα δὲν ἀναλύει τὴν διαφορὰν τῶν κύβων $4^3 - 3^3$ εἰς ἄθροισμα δύο κύβων ἀρκούμενος εἰς τὴν ὑπόδειξιν ὅτι αὕτη γίνεται ἄθροισμα δύο κύβων. Περαιτέρω ὑποδεικνύει ἐπίσης τὴν λύσιν χωρὶς νὰ ἀναγράφῃ αὐτήν. Ὁ Viète ἀπέδειξεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν κύβων $\alpha^3 - \beta^3 = x^3 + y^3$. Διὰ $\alpha > \beta$, εἶναι $x = \frac{\alpha}{\alpha^3 + \beta^3}\left(\alpha^3 - 2\beta^3\right)$ καὶ $y = \frac{\beta}{\alpha^3 + \beta^3}\,(2\alpha^3 - \beta^3)$.

Ὁ Euler διεπραγματεύθη τὸ ζήτημα γενικώτερον (Novi Commentarii Acad. Petropol. 1761, τόμ. VI, σ. 155).

Κατὰ τοὺς προηγουμένους τύπους τοῦ Viète διὰ $\alpha=4$, $\beta=3$ εἶναι $x=\frac{40}{91}$, $y=\frac{303}{91}$.

[Σημ. Εἶναι πράγματι $\left(\frac{40}{91}\right)^3+\left(\frac{303}{91}\right)^3=\frac{64000+27818127}{753571}$ $=\frac{27882127}{753571}=37=4^3-3^3$.

Διὰ α ὅμως $=6$ καὶ $\beta=5$ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων 6^3-5^3 ἀναλύεται κατὰ τοὺς τύπους τοῦ Viète εἰς

$$x=\frac{6(6^3-2.5^3)}{6^3+5^3}=\frac{6(216-250)}{341}=-\frac{204}{341}$$

$$y=\frac{5(2.6^3-5^3)}{6^3+5^3}=\frac{5(432-125)}{341}=\frac{1535}{341},$$

ἤτοι δὲν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα, ἀλλὰ εἰς διαφοράν. Ἐν τούτοις ὅμως τὸ θεώρημα τοῦ Διοφάντου τὸ ἀπολεσθὲν ἰσχύει, διότι εἶναι $6^3-5^3=91=4^3+3^3$. Κατὰ συνέπειαν τὸ θεώρημα τοῦ Viète, ὡς τοὐλάχιστον τὸ γνωρίζομεν χρειάζεται συμπλήρωσιν διὰ νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν ἀπολεσθεῖσαν ἀπόδειξιν τοῦ Διοφάντου].

Κατὰ τὴν προηγηθεῖσαν ἀνάλυσιν θὰ εἶναι

$$\frac{3}{4}=\frac{162}{6^3}=\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{303}{6.91}\right)^3+\left(\frac{40}{6.91}\right)^3 \text{ ἢ } \left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{101}{182}\right)^3+\left(\frac{20}{182}\right)^3.$$

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$$y=\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^3\right]x^3, (4),\ z=\left[1-\left(\frac{101}{182}\right)^3\right]x^3, (5),\ \omega=\left[1-\left(\frac{20}{273}\right)^3\right]x^3, (6)$$

καὶ $y+z+\omega=x$, (7). Ἐκ τῶν (4, 5, 6) πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3) συναρτήσει τοῦ x διότι εἶναι

$$x^3-\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^3\right]x^3=\left(\frac{5x}{6}\right)^3,\ x^3-\left[1-\left(\frac{101}{182}\right)^3\right]x^3=\left(\frac{101x}{182}\right)^3,$$

$x^3-\left[1-\left(\frac{20}{273}\right)^3\right]x^3=\left(\frac{20x}{273}\right)^3$. Μένει νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x. Ἐκ τῆς (7) καὶ τῶν (4, 5, 6) εἶναι

$$y+z+\omega=x=\left[3-\left(\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{101}{182}\right)^3+\left(\frac{20}{273}\right)^3\right)\right]x^3$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων ἐντὸς παρενθέσεως εἶναι $= \frac{3}{4}$ καὶ συνεπῶς εἶναι $x = \left(3 - \frac{3}{4}\right) x^3$, ἢ $1 = \frac{9}{4} x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{2}{3}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (4, 5, 6), $y = \frac{91}{216} \cdot \frac{8}{27} = \frac{728}{5832}$,

$$z = \frac{4998267}{6028568} \cdot \frac{8}{27} = \frac{39986136}{162771336}$$

$$\omega = \frac{20338417}{20346417} \cdot \frac{8}{27} = \frac{162707336}{549353259}.$$

17.

$y - (y+z+\omega)^3 = \alpha^3$, (1), $z - (y+z+\omega)^3 = \beta^3$, (2), $\omega - (y+z+\omega)^3 = \gamma^3$, (3).

Θέτει $y + z + \omega = x$, (4), $y = 2x^3$, $z = 9x^3$, $\omega = 28x^3$ πληρουμένων τῶν ἐπιταγμάτων (1, 2, 3) συναρτήσει τοῦ x. Ἐκ τῆς (4) καὶ τῶν τιμῶν y, z, ω εἶναι $x = 39x^3$, $1 = 39x^2$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐρευνᾷ τὴν προέλευσιν τοῦ 39. Οὗτος εἶναι $2 + 9 + 28 = (1^3 + 1) + (2^3 + 1) + (3^3 + 1)$ ἢ $39 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 3$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς κύβοι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων κύβων $\varkappa = t$, $\lambda = 3 - t$, $\mu = 1$, ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $\varkappa^3 + \lambda^3 + \mu^3 + 3 =$ τετράγωνος, ἢ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν κ, λ, μ, $t^3 + (3-t)^3 + 1 + 3 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (3t - 7)^2$, ἐξ ἧς $t = \frac{6}{5}$. [Σημ. Ἠδύνατο νὰ τεθῇ $(3t - 6)^2$ ἀφοῦ $36 > 31$, $x > 0$].

Θὰ εἶναι ἄρα $\varkappa = t = \frac{6}{5}$, $\lambda = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$, $\mu = 1$ καὶ εἶναι

$$\varkappa^3 + 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 + 1 = \frac{341}{125},\ \lambda^3 + 1 = \left(\frac{9}{5}\right)^3 + 1 = \frac{854}{125},\ \mu^3 + 1 = 2 = \frac{250}{125}.$$

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y = \frac{341}{125} x^3$, $z = \frac{854}{125} x^3$, $\omega = \frac{250}{125} x^3$, $y + z + \omega = x$. Ἐκ τούτων εἶναι $x = \left(\frac{341}{125} + \frac{854}{125} + \frac{250}{125}\right) x^3$ ἢ $1 = \frac{1445}{125} x^2$ ἢ

$1 = \frac{289}{25} x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{5}{17}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{341}{125} \cdot \left(\frac{5}{17}\right)^3 = \frac{341}{4913}$, $z = \frac{854}{4913}$, $\omega = \frac{250}{4913}$.

18.

$y+z+\omega = \alpha^2$, (1), $(y+z+\omega)^3 + y = \beta^2$, (2), $(y+z+\omega)^3 + z = \gamma^2$, (3), $(y+z+\omega)^3 + \omega = \delta^2$, (4).

Θέτει $y+z+\omega = x^2$, (5), $y = 3x^6$, $z = 8x^6$, $\omega = 15x^6$, ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x. Ἐκ τῆς (5) καὶ τῶν τιμῶν τῶν y, z, ω, λαμβάνει $x^2 = 26x^6$, ἢ $1 = 26x^4$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 26. Οὗτος εἶναι ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων λαμβάνων μονάδα γίνεται τετράγωνος, ἤτοι $26 = (2^2-1) + (3^2-1) + (4^2-1)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων λαμβάνων μονάδα νὰ γίνεται τετράγωνος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εἶναι διτετράγωνος ἀριθμός. Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ κ, λ, μ καὶ ἔστω $\kappa = t^4 - 2t^2$, $\lambda = t^2 + 2t$, $\mu = t^2 - 2t$, ὁπότε εἶναι $\kappa + 1 = t^4 - 2t^2 + 1 = (t^2-1)^2$, $\lambda + 1 = (t^2+2t+1) = (t+1)^2$, $\mu = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ καὶ εἶναι $\kappa + \lambda + \mu = (t^4 - 2t^2) + (t^2 + 2t) + (t^2 - 2t) = t^4$. Λαμβάνει $t = 3$, ὁπότε εἶναι $\kappa = 81 - 18 = 63$, $\lambda = 15$, $\mu = 3$. Τώρα ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $y+z+\omega = x^2$, $y = 63x^6$, $z = 15x^6$, $\omega = 3x^6$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x. Ἐκ τῆς (5) καὶ τῶν τιμῶν τῶν y, z, ω εἶναι $x^2 = (63+15+3)\,x^6$ ἢ $1 = 81x^4$. ἐξ ἧς $x = \frac{1}{3}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{63}{729} = \frac{7}{81}$, $z = 15\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{15}{729} = \frac{5}{243}$, $\omega = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{243}$.

Δημοσιεύομεν κατωτέρω τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐργασίας ἡμῶν τῆς δημοσιευθείσης εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Ἑταιρείας τῶν Ἑλλήνων φιλολόγων «Πλάτων», ἔτος ΙΓ'—1961, τεύχη Α' καὶ Β' 25/26, τῆς ἀφορώσης εἰς τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῶν 4 ἐλλειπόντων προβλημάτων τοῦ V βιβλίου.

«Τοῦ προβλήματος V, 19 τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου σῴζεται μόνον ἡ ἐκφώνησις, ἐνῷ ἡ ἀπόδειξις ἐλλείπει. 'Ο P. Tannery, ἐκδότης τῶν 'Αριθμητικῶν (1893, Teubner), σημειοῖ τὴν ἔλλειψιν τῆς ἀποδείξεως διὰ μιᾶς γραμμῆς ἐκ στιγμῶν, παραθέτει δὲ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς ἄλλου προβλήματος, τοῦ ὁποίου ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο σημειοῦμεν κατωτέρω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 19γ.

'Ο πρῶτος ἐκδότης τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Γάλλος μαθηματικὸς Bachet de Méziriac (1621), Paris, ὁρμηθεὶς ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 καὶ ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος V, 19 γ διατυπώνει τὴν γνώμην ὅτι ἐκτὸς τούτων ἐλλείπουν ἀκόμη τελείως καὶ ἄλλα δύο προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατωτέρω σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν 19α καὶ 19 β. 'Ο Bachet παρέχει καὶ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων 19, 19 α, 19 β ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Διοφάντου. [ἴδε O. Schulz Diophantus, Berlin 1822].

Τὴν γνώμην τοῦ Bachet συμμερίζονται οἱ ἑξῆς ἐκδόται καὶ σχολιασταὶ τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου: Schulz, Diophantus, Berlin, 1822. G. Nesselmann, Die, Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890. T. Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge, 1910. P. ver Eecke, Diophant d'Alexandrie, Bruges, 1926.

Διὰ νὰ γίνῃ καταληπτὴ ἡ ὀρθότης τῆς παρατηρήσεως τοῦ Bachet παραθέτομεν κατωτέρω 9 προβλήματα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ὁποίων καταφαίνεται ὅτι πρόκειται περὶ τριῶν ὁμάδων, ἐκ τριῶν συγγενῶν προβλημάτων ἑκάστης, ἐκ τῶν ὁποίων ἐλλείπουν: 1) 'Η ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος 19, 2) τελείως τὰ προβλήματα 19α καὶ 19β, 3) ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος 19γ.

'Ακολούθως ἀνακατασκευάζομεν τὰ ἐλλείποντα ἀρχαῖα κείμενα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου καὶ προβαίνομεν, τὸ μὲν εἰς τὴν μετάφρασιν τούτων εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν, τὸ δὲ εἰς τὴν σύγχρονον διατύπωσιν τῶν λύσεων ([1]).

Τὰ 9 προβλήματα τοῦ V βιβλίου (ἔκδ. Tannery, B. G. Teubner).

15

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x \\ x^3+y&=\alpha^3 \\ x^3+z&=\beta^3 \\ x^3+\omega&=\gamma^3 \end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x \\ x^3-y&=\alpha^3 \\ x^3-z&=\beta^3 \\ x^3-\omega&=\gamma^3 \end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x \\ y-x^3&=\alpha^3 \\ z-x^3&=\beta^3 \\ \omega-x^3&=\gamma^3 \end{aligned}$$

18

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x \\ x^6+y&=\alpha^2 \\ x^6+z&=\beta^2 \\ x^6+\omega&=\gamma^2 \end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x^2 \\ x^6-y&=\alpha^2 \\ x^6-z&=\beta^2 \\ x^6-\omega&=\gamma^2 \end{aligned}$$

[ἐλλείπει ἡ ἀπόδειξις]

19α

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x^2 \\ y-x^6&=\alpha^2 \\ z-x^6&=\beta^2 \\ \omega-x^6&=\gamma^2 \end{aligned}$$

[ἐλλείπει τελείως]

19 β

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=\delta \\ \delta^3+y&=\alpha^2 \\ \delta^3+z&=\beta^2 \\ \delta^3+\omega&=\gamma^2 \end{aligned}$$

[ἐλλείπει τελείως]

19 γ

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=\delta \\ \delta^3-y&=\alpha^2 \\ \delta^3-z&=\beta^2 \\ \delta^3-\omega&=\gamma^2 \end{aligned}$$

[ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως]

20

$$\begin{aligned} y+z+\omega&=\delta \\ y-\delta^3&=\alpha^2 \\ z-\delta^3&=\beta^2 \\ \omega-\delta^3&=\gamma^2 \end{aligned}$$

».

19.

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=x^2,\ (1),\quad x^6-y=\alpha^2,\ (2),\quad x^6-z=\beta^2,\ (3)\quad x^6-\omega=\gamma^2,\ (4).$$

([1]) Τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 ἀπεστείλαμεν εἰς Λειψίαν κατ' Ἀπρίλιον 1961 πρὸς δημοσίευσιν εἰς τὸν ἑορταστικὸν τόμον τοῦ οἴκου B. G. Teubner ἐπὶ τῇ συμπληρώσει 150 ἐτῶν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς του (1811 — 1961).

Ἔστω $y=\frac{3}{4}x^6$, $z=\frac{8}{9}x^6$, $\omega=\frac{15}{16}x^6$, ὁπότε θὰ εἶναι $x^6-\frac{3}{4}x^6=\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{8}{9}x^6=\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{15}{16}x^6=\left(\frac{1}{4}x^3\right)^2$ ἤτοι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1), εἰς τὴν ὁποίαν δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $\left(\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}\right)x^6=x^2$, ἢ $\frac{371}{144}x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς $\frac{371}{144}$ νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου.

Ὁ $\frac{3}{4}=\left(1-\frac{1}{4}\right)$, ὁ $\frac{8}{9}=\left(1-\frac{1}{9}\right)$, ὁ $\frac{15}{16}=\left(1-\frac{1}{16}\right)$. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ ἦτο $3-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=$ διτετράγωνος. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, (καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μικρότερον τῆς μονάδος), τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν. Ἐὰν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους κ^2, λ^2, μ^2 καὶ τὸν διτετράγωνον ξ^4 θὰ εἶναι $3-\xi^4=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$. Ἔστω $\xi^4=\left(\frac{6}{5}\right)^4=\frac{1296}{625}$ ὁπότε θὰ εἶναι $3-\frac{1296}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$ ἢ $\frac{579}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$. Εἶναι δὲ $2<\frac{1296}{625}<3$ καὶ $\frac{579}{625}<1$. Ὁ $\frac{579}{625}$ ἀναλύεται εἰς τρεῖς τετραγώνους, τοὺς $\kappa^2=\frac{529}{625}$, $\lambda^2=\frac{49}{625}$, $\mu^2=\frac{1}{625}$.

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν $y+z+\omega=x^2$ καὶ $y=\left(1-\frac{529}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } y=\left(1-\frac{1}{4}\right)x^6\right]$, $z=\left(1-\frac{49}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } z=\left(1-\frac{1}{9}\right)x^6\right]$, $\omega=\left(1-\frac{1}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } \omega=\left(1-\frac{1}{16}\right)x^6\right]$, ἤτοι $y=\frac{96}{625}x^6$, (5), $z=\frac{576}{625}x^6$, (6) $\omega=\frac{624}{625}x^6$, (7).

Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι εἶναι

$$x^6 - \frac{96}{525}x^6 = \left(\frac{23}{25}x^3\right)^2,\ x^6 - \frac{576}{625}x^6 = \left(\frac{7}{25}x^3\right)^2,\ x^6 - \frac{624}{625}x^6 = \left(\frac{1}{25}x^3\right)^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) τῶν τιμῶν y, z, ω λαμβάνομεν

$$\left(\frac{96}{625} + \frac{576}{624} + \frac{624}{625}\right)x^6 = x^2,\ \text{ἐξ ἧς}\ x = \frac{5}{6}.$$

Ἐκ τῶν (5, 6, 7) εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y = \frac{96}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{2400}{46656},\quad x^6 - y = \frac{15625}{46656} - \frac{2400}{46656} = \left(\frac{115}{216}\right)^2$$

$$z = \frac{576}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{14400}{46656},\quad x^6 - z = \frac{15625}{46656} - \frac{14400}{46656} = \left(\frac{35}{216}\right)^2$$

$$\omega = \frac{624}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15600}{46656},\quad x^6 - \omega = \frac{15625}{46656} - \frac{15600}{46656} = \left(\frac{5}{216}\right)^2$$

$$y + z + \omega = \frac{2400 + 14400 + 15600}{46656} - \frac{32400}{46656} = \left(\frac{180}{216}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

19α.

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$x + z + \omega = x^2,\ (1),\ y - x^6 = \alpha^2,\ (2),\ z - x^6 = \beta^2,\ (3),\ \omega - x^6 = \gamma^2,\ (4).$$

Ἔστω $y = 2x^6$, $z = 5x^6$, $\omega = 10x^6$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4), συναρτήσει τοῦ x. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1). Ἐκ ταύτης δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y, z, ω εἶναι $17x^6 = x^2$ ἢ $17x^4 = 1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς 17 νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου. Ὁ $17 = (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος· Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι, ἂν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους κ^2, λ^2, μ^2.

$\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 3 = 16$ ἢ $\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 13$. Ὁ 13 ἀναλύεται εἰς τρεῖς τετραγώνους $9, \frac{36}{25}, \frac{64}{25}$. Εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων προσθέτομεν τὴν μονάδα, ὁπότε εἶναι $10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}=16$ καὶ θέτομεν $y=10x^6$, (5), $z=\frac{61}{25}x^6$, (6), $\omega=\frac{89}{25}x^6$, (7). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\left(10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}\right)x^6=x^2 \text{ ἢ } 16x^4=1, \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{1}{2}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (5, 6, 7) λαμβάνομεν

$$y=10\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{32},\ z=\frac{61}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{61}{1600},\ \omega=\frac{89}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{89}{1600}$$

καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y+z+\omega=\frac{5}{32}+\frac{61}{1600}+\frac{89}{1600}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y-x^6=\frac{5}{32}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{3}{8}\right)^2,\ z-x^6=\frac{61}{1600}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{3}{20}\right)^2$$

$$\omega-x^6=\frac{89}{1600}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

19β.

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=\delta,\ (1),\quad \delta^3+y=\alpha^2,\ (2),\quad \delta^3+z=\beta^2,\ (3),\quad \delta^3+\omega=\gamma^2,\ (4).$$

Ἔστω $\delta=2$, $\delta^3=8$. Πρέπει λοιπὸν ὁ 2 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3, 4) καὶ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν $26=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ἤτοι πρέπει ὁ 26 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἔστω ὁ εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁπότε ὁ $17=(26-9)$ πρέπει νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8 καὶ μικρότερος τοῦ 9. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 17, τὸν $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ λάβωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν (σημ. Μέθοδος τοῦ προβλήματος V, 9) ἤτοι νὰ εἶναι $8\frac{1}{2}+\frac{1}{4t^2}=$ τετράγωνος, (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 4 ἔχομεν $34+\frac{1}{t^2}=$ τετράγωνος, ἢ $34t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $(1-6t)^2$, ἐξ ἧς $t=6$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν $\frac{17}{2}+\frac{1}{144}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$. Καὶ εἶναι $8<\frac{1225}{144}<9$. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 πρέπει νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$. Ἐπειδὴ $17=4^2+1^2$, πρέπει ἡ πλευρά ἑκάστου τῶν δύο νέων τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ εἶναι ἡ μὲν μικροτέρα τοῦ 4, ἡ δὲ μεγαλυτέρα τοῦ 1. Πρέπει λοιπὸν ἐκ μὲν τοῦ 4 νὰ ἀφαιρεθῇ κάτι εἰς δὲ τὸ 1 νὰ προστεθῇ κάτι, ὥστε νὰ λαμβάνεται καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις $\frac{35}{12}$, ἤτοι νὰ εἶναι $4-\varkappa=\frac{35}{12}$ καὶ $1+\lambda=\frac{35}{12}$. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν $\varkappa=\frac{13}{12}$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\lambda=\frac{23}{12}$. Σχηματίζομεν τώρα τοὺς δύο ζητουμένους τετραγώνους θέτοντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν $(23x+1)$ καὶ τοῦ ἄλλου $(4-13x)$, ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $(23x+1)^2+(4-13x)^2=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$. Ἑπομένως ὁ δεύτερος τετράγωνος ἐκ τῶν τριῶν εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 26 εἶναι $\left(23.\frac{29}{349}+1\right)^2=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$ καὶ ὁ τρίτος εἶναι $\left(4-13.\frac{29}{349}\right)^2=\left(\frac{1019}{349}\right)^2$, ἐν ᾧ ὁ πρῶτος εἶναι 9. Δι' ἀφαιρέσεως ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων τοῦ 8 (ἐκ τῶν σχέσεων (2,3,4)) λαμβάνομεν $y=1$, $z=\frac{57848}{121801}$, $\omega=\frac{63953}{121801}$ καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$\delta=y+z+\omega=1+\frac{57848}{121801}+\frac{63953}{121801}=2, \text{ καὶ}$$

$$\delta^3+y=8+1=3^2,$$

$$\delta^3+z=8+\frac{57848}{121801}=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$$

$$\delta^3+\omega=8+\frac{63953}{121801}=\left(\frac{1019}{349}\right)^2.$$

19γ.

Τὸ πρόβλημα εἶναι: $y+z+\omega=\delta$, (1), $\delta^3-y=\alpha^2$, (2), $\delta^3-z=\beta^2$, (3), $\delta^3-\omega=\gamma^2$, (4). Ἔστω $\delta=2$, $\delta^3=8$.

Πρέπει λοιπὸν ὁ 2 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀφαιρούμενος ἀπὸ τοῦ 8 νὰ δίδῃ τετράγωνον. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ δ καὶ προσθέσεως τῶν σχέσεων (2, 3, 4) λαμβάνομεν $22=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Πρέπει λοιπὸν ὁ 22 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 8. Δι' ἀφαιρέσεως δὲ ἑκάστου τῶν εὑρεθησομένων τετραγώνων ἀπὸ τοῦ 8 θὰ ἔχωμεν τοὺς ζητουμένους τρεῖς ἀριθμούς. (Σημ. Κατὰ τὸ διασωθὲν τμῆμα τῆς ἀποδείξεως ἕκαστος τῶν τετραγώνων (α^2, β^2, γ^2) δέον νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6. Ἐκ τῆς λύσεως ὅμως τοῦ προβλήματος φαίνεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 8 καὶ μεγαλύτερος τοῦ 7. Ἐὰν βέβαια καὶ οἱ τρεῖς ζητούμενοι τετράγωνοι ἦσαν ἴσοι, ἕκαστος τούτων θὰ ἦτο ἴσος πρὸς $\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$. Ὁ $7\frac{1}{3}$ ὅμως δὲν εἶναι τετράγωνος).

Ὁ 22 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων $=4+9+9$. Πρέπει ὅμως ἕκαστος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 8 διὰ νὰ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 8, ὡς ζητεῖ τὸ πρόβλημα. Πρὸς τοῦτο ἀναλύομεν τὸν 22 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων. (Μέθοδος προβλημάτων 9, 11, 12, 14).

Πρῶτον μετατρέπομεν τὸν $\frac{22}{3}$ εἰς τετράγωνον ὡς ἑξῆς·

$\frac{22}{3}+\frac{1}{9t^2}=$ τετράγωνος (5). Ἐκ ταύτης εἶναι $66t^2+1=$ τετράγωνος. Ἔστω ὁ τετράγωνος οὗτος $=(1+8t)^2$. (Τὸ σημεῖον $+$ εἰς τὸ δυώνυμον τοῦτο λαμβάνεται ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ t, ὁ 8, ὑψούμε,ος εἰς τὸ τετράγωνον γίνεται μικρότερος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ t^2, ἤτοι $64 < 66$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ 8 ἐλαμβάνομεν 9 τὸ δυώνυμον θὰ ἦτο $=(1-9t)^2$. Ὡς συντελεστὴς τοῦ t^2 εἰς τὴν (5) λαμβάνεται τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος $\frac{22}{3}$ ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος εἰς πόσα τετράγωνα θὰ ἀναλυθῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμός, ἐνταῦθα ὁ 22). Ὁ t πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς σχέσεως $66t^2+1=(1+8t)^2$ λαμβάνομεν $t=8$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\frac{4224+1}{576}=\left(\frac{65}{24}\right)^2$.

$\left(\frac{65}{24}\right)^2$ εἶναι τὸ ἓν τετράγωνον ἐξ ἐκείνων εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ἀναλυθῇ ὁ 22. Τρία τοιαῦτα τετράγωνα, ἴσα μεταξύ των, θὰ εἶναι $3\left(\frac{65}{24}\right)^2=22\frac{3}{576}$. Τὸ πρόβλημα ὅμως ἀπαιτεῖ ὅπως τὰ τρία τετράγωνα εἰς τὰ ὁποῖα θὰ ἀναλυθῇ ὁ 22 ἔχωσιν ἄθροισμα ἀκριβῶς 22. Πρὸς εὕρεσιν τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τοῦ προβλήματος (V, 9).

$$\text{ὁ } 22 = 2^2+3^2+3^2$$

Πρέπει ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 2 καὶ μικροτέρα τοῦ 3.

Καλοῦντες ἑπομένως κ τὴν αὔξησιν τοῦ 2 καὶ λ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ 3 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{65}{24}=\kappa+2=3-\lambda=3-\lambda.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{17}{24}$ καὶ $\lambda=\frac{7}{24}$. Τώρα τὰ ζητούμενα τρία τετράγωνα θὰ εἶναι

$$\left(2+\frac{17}{24}x\right)^2+\left(3-\frac{7}{24}x\right)^2+\left(3-\frac{7}{24}x\right)^2=22, \quad (6).$$

Καὶ διὰ παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν (εὑρίσκονται μικρότεροι ἀριθμοί), ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$(2+17x)^2+(3-7x)^2+(3-7x)^2=22$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{16}{387}$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) ἔχομεν

$$\left(\frac{1046}{387}\right)^2+\left(\frac{1049}{387}\right)^2+\left(\frac{1049}{387}\right)^2=22.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3, 4) λαμβάνομεν

$$8-\left(\frac{1046}{387}\right)^2=y=\frac{104036}{149769},\quad 8-\left(\frac{1049}{387}\right)^2=z=\frac{97751}{149769}$$

$$8-\left(\frac{1049}{387}\right)^2=\omega=\frac{97751}{149769}.$$

Εἶναι δὲ $\dfrac{104036+97751+97751}{149769}=2.$

20.

$$\frac{1}{\xi}=\frac{\eta}{\theta}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\frac{\mu}{\nu},\ \frac{\eta}{\theta}-\left(\frac{\eta}{\theta}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\frac{\mu}{\nu}\right)^3=\alpha^2,\ \frac{\varkappa}{\lambda}-\left(\frac{\eta}{\theta}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\frac{\mu}{\nu}\right)^3=\beta^2.$$

$$\frac{\mu}{\nu}-\left(\frac{\eta}{\theta}+\frac{\varkappa}{\lambda}+\frac{\mu}{\nu}\right)^3=\gamma^2.$$

Θέτομεν $\dfrac{\eta}{\theta}=y$, $\dfrac{\varkappa}{\lambda}=z$, $\dfrac{\mu}{\nu}=\omega$, ὁπότε τὸ πρόβλημα εἶναι $y-(y+z+\omega)^3=\alpha^2$, (1), $z-(y+z+\omega)^3=\beta^2$, (2), $\omega-(y+z+\omega)^3=\gamma^2$,(3). Λαμβάνει $\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{4}=(y+z+\omega)$, (4). Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1, 2, 3) λαμβάνει $\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{64}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ἢ $\dfrac{13}{64}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ $\dfrac{13}{64}$ εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων. Ὁ $\dfrac{13}{64}=\dfrac{4}{64}+\dfrac{9}{64}$. Ἀναλύομεν τὸν $\dfrac{4}{64}$ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ τὸ [II,8]. Ἐὰν ὁ εἷς τετράγωνος εἶναι x^2 ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $\dfrac{4}{64}-x^2=\left(\dfrac{1}{4}-\mu x\right)^2$, ἐξ ἧς $x=\dfrac{1}{5}$ (διὰ $\mu=2$). Θὰ εἶναι ἄρα $\dfrac{13}{64}=\dfrac{9}{64}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{9}{400}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ὁπότε ἐκ τῶν (1, 2, 3) εἶναι

$$y=\frac{9}{64}+\frac{1}{64}=\frac{10}{64},\ z=\frac{1}{25}+\frac{1}{64}=\frac{89}{1600},\ \omega=\frac{9}{400}+\frac{1}{64}=\frac{976}{25600}=\frac{61}{1600}.$$

21.

$$y^2z^2\omega^2+y^2=\alpha^2, \ (1), \quad y^2z^2\omega^2+z^2=\beta^2, \ (2) \quad y^2z^2\omega^2+\omega^2=\gamma^2, \ (3).$$

Θέτει $y^2 z^2 \omega^2 = x^2$, (4) καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ τρία τετράγωνα τοιαῦτα, ὥστε ἕκαστον τούτων σὺν 1 νὰ δίδῃ τετράγωνον. Τοιαῦτα τετράγωνα λαμβάνονται ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. Διότι, ἐὰν καλέσωμνν Υ τὴν ὑποτείνουσαν, υ τὸ ὕψος καὶ β τὴν βάσιν θὰ ἔχωμεν $\Upsilon^2=\upsilon^2+\beta^2$, ἐξ ἧς εἶναι $\frac{\Upsilon^2}{\upsilon^2}=\frac{\beta^2}{\upsilon^2}+1$ καὶ $\frac{\Upsilon^2}{\beta^2}=\frac{\upsilon^2}{\beta^2}+1$.

Ἐκλέγει τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα πλευρὰς (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (ὕψος, βάσις, ὑποτείνουσα), ἐξ ὧν εἶναι $\frac{25}{16}=\frac{9}{16}+1$, $\frac{169}{144}=\frac{25}{144}+1$, $\frac{289}{225}=\frac{64}{225}+1$ καὶ θέτει $y^2=\frac{9}{16}x^2$, (5), $z^2=\frac{25}{144}x^2$, (6), $\omega^2=\frac{64}{225}x^2$, (7), πληρουμένων διὰ τῶν τιμῶν τούτων τῶν ἐπιταγμάτων (1, 2, 3) συναρτήσει τοῦ x. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἐκ τῶν (5, 6, 7) εἶναι $\frac{14400}{518400}x^6=x^2$ ἢ $\frac{120}{720}x^2=1$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ συντελεστοῦ $\frac{120}{720}=\frac{3.\,5.\,8.}{4.12.15}$. Οἱ ἀριθμοὶ (3, 5, 8) εἶναι τὰ ὕψη καὶ οἱ ἀριθμοὶ (4, 12, 15) εἶναι αἱ βάσεις τῶν ληφθέντων τριῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἐὰν καλέσωμεν $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ τὰ ὕψη καὶ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τὰς βάσεις τῶν τριγώνων τούτων πρέπει νὰ εἶναι διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις,

$$\frac{\upsilon_1\,\upsilon_2\,\upsilon_3}{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3}=\text{τετράγωνος} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\upsilon_1\,\upsilon_2\,\upsilon_3}{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3}(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3)^2=\text{τετράγωνος.}\ (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3)^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\upsilon_1\,\upsilon_2\,\upsilon_3\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3=\text{τετράγωνος}, \ (8).$$

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῶσι τρία ὀρθογώνια τρίγωνα τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ὑψῶν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν βάσεων νὰ εἶναι ἀριθμός τετράγωνος. Ἔστω ὅτι ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἔχει πλευρὰν τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἤτοι $\upsilon_1 \upsilon_2 \upsilon_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 = (\upsilon_2 \beta_2)^2$ ἢ $\upsilon_1 \upsilon_3 \beta_1 \beta_3 = \upsilon_2 \beta_2$. Ἐὰν δὲ ὡς πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου λάβωμεν τὴν $(2\upsilon_2 \beta_2)$, ἀντὶ $\upsilon_2 \beta_2$, ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται $\upsilon_1 \upsilon_2 \upsilon_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 = (2\upsilon_2 \beta_2)^2$ ἢ $\upsilon_1 \beta_1 . \upsilon_3 \beta_3 = 4\upsilon_2 \beta_2$, (9). Ἐὰν λάβωμεν ὡς πλευρὰς τοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς (3, 4, 5) καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (9) θὰ ἔχωμεν $3.4. \upsilon_3 \beta_3 = 4\upsilon_2 \beta_2$, ἢ $3\, \upsilon_3 \beta_3 = \upsilon_2 \beta_2$. Ἤδη ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου. [Σημ. ἡ λῆψις τοῦ $(2\upsilon_2 \beta_2)^2$ γίνεται διὰ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ἀριθμούς. Τοῦτο παρετήρησε πρῶτος ὁ Fermat εἰς τὰ σχόλιά του ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τούτου σημειώσας καὶ τὰ συναφῆ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, VII, 16, 21. Ὁ Διόφαντος θεωρῶν γνωστὸν τὸν τρόπον κατασκευῆς δύο ὀρθογωνίων τριγώνων, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου δὲν ἀναφέρει αὐτόν. Ὁ Fermat ὑποδεικνύει εἰς τὰ μνημονευθέντα σχόλιά του τέσσαρας τρόπους κατασκευῆς].

Ἐὰν θέλωμεν ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ὀρθογ· τριγώνων νὰ εἶναι $\mu : \nu$, $(\mu > 2\nu)$, οἱ δύο ἀριθμοὶ διὰ τῶν ὁποίων θὰ κατασκευασθῶσι τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι $2\mu - \nu$ καὶ $\mu + \nu$ διὰ τὸ ἕν, καὶ $\mu + \nu$ καὶ $\mu - 2\nu$ διὰ τὸ ἄλλο. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι (ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ταυτότητος $(2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$), $\upsilon_1 = (2\mu-\nu)^2-(\mu+\nu)^2$, $\beta_1 = 2\,(2\mu-\nu)(\mu+\nu)$, $\Upsilon_1 = (2\mu-\nu)^2+(\mu+\nu)^2$, $\upsilon_2 = (\mu+\nu)^2-(\mu-2\nu)^2$, $\beta_2 = 2\,(\mu-2\nu)(\mu+\nu)$, $\Upsilon_2 = (\mu+\nu)^2+(\mu-2\nu)^2$.

Ἐὰν $\mu = 3$, $\nu = 1$ θὰ ἔχωμεν : $\upsilon_1 = 9$, $\beta_1 = 40$, $\Upsilon_1 = 41$, $\upsilon_2 = 15$, $\beta_2 = 8$, $\Upsilon_2 = 17$. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων ἔχουσι λόγον $\frac{9.40}{15.8} = \frac{3}{1}$. Ἑπομένως, ἀφοῦ ὡς πρῶτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐλήφθη τὸ ἔχον πλευρὰς (3, 4, 5), τὰ τρία ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ζητηθέντα κατὰ τὴν πρώτην ἀναγωγὴν τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι τὰ ἔχοντα πλευρὰς (3, 4, 5), (15, 8, 17), (9, 40, 41). Πληροῦται δὲ ἡ αἰτηθεῖσα ἀρχικῶς συνθήκη, ὅπως τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ἤτοι εἶναι $3.4.8.15.9.40 = 518400 = (720)^2$. Τώρα ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$$y^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2,\ z^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 x^2,\ \omega = \left(\frac{9}{40}\right)^2 x^2.$$

Δι' ἀντικατχστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{225}{64} \cdot \frac{81}{1600} x^6 = x^2,\ \text{ἢ}\ \frac{6561}{65536} x^4 = 1,\ x^2 = \frac{256}{81},\ x = \frac{16}{9}.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $y^2 = \frac{16}{9}$, $z^2 = \frac{100}{9}$, $\omega^2 = \frac{4}{25}$.

22.

$$y^2z^2\omega^2 - y^2 = \alpha^2,\ (1),\ y^2z^2\omega^2 - z^2 = \beta^2,\ (2),\ y^2z^2\omega^2 - \omega^2 = \gamma^2,\ (3).$$

Θέτει $y^2z^2\omega^2 = x^2$, (4)· Λαμβάνει τὰ τρία ἀρχικῶς ληφθέντα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὀρθογώνια τρίγωνα (μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τώρα ἐναλλάσσει τὸ ὕψος καὶ τὴν βάσιν τοῦ πρώτου τριγώνου) ἤτοι λαμβάνει τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα πλευρὰς (4, 3, 5), (5,12,13), (8,15,17), (ὕψος, βάσις, ὑποτείνουσα). Ἐκ τῆς σχέσεως $\Upsilon^2 = \upsilon^2 + \beta^2$ λαμβάνει $1 - \frac{\beta^2}{\Upsilon^2} = \frac{\upsilon^2}{\Upsilon^2}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἶναι

$$1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},\ 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169},\ 1 - \frac{225}{289} = \frac{64}{289}.$$ Θέτει

$y^2 = \frac{16}{25} x^2$, $z^2 = \frac{25}{169} x^2$, $\omega = \frac{64}{289} x^2$ ὁπότε πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3) συναρτήσει τοῦ x. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει $\frac{16}{25} \cdot \frac{25}{169} \cdot \frac{64}{289} x^4 = 1$ ἢ $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{17} x^2 = 1$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρία ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅπως τὸ γινόμενον τῶν ὑψῶν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἡ αἰτουμένη ἀρχικῶς σχέσις εἶναι, ὅπως το γινόμενον τῶν ὑψῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν καλέσωμεν τὸ πρῶτον γινόμενον $\upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3$ καὶ τὸ δεύτερον $\Upsilon_1\Upsilon_2\Upsilon_3$ πρέπει νὰ εἶναι διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις

$$\frac{\upsilon_1\,\upsilon_2\,\upsilon_3}{\Upsilon_1\Upsilon_2\Upsilon_3} = \eta^2,\ \text{ἢ}\ \upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3\ \Upsilon_1\Upsilon_2\Upsilon_3 = \Upsilon_1^2\Upsilon_2^2\Upsilon_3^2\eta^2 = \text{τετράγωνος}.$$

Ἔστω ὅτι ὁ τετράγωνος οὗτος εἶναι ὁ $(\upsilon_1 \Upsilon_1)^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν θὰ ἔχωμεν $\upsilon_2 \upsilon_3 \Upsilon_2 \Upsilon_3 = \upsilon_1 \Upsilon_1$, (5). Ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν τριῶν ζητουμένων τριγώνων ληφθῇ ἔχον πλευρὰς $(\upsilon_3 = 4,\ \beta_3 = 3,\ \Upsilon_3 = 5)$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (5) θὰ εἶναι $4.5.\upsilon_2 \Upsilon_2 = \upsilon_1 \Upsilon_1$, ἢ ἐὰν $\left(\upsilon_3 = \frac{4}{2},\ \beta_3 = \frac{3}{2},\ \Upsilon_3 = \frac{5}{2}\right)$ θὰ εἶναι $5.\upsilon_2 \Upsilon_2 = \upsilon_1 \Upsilon_1$, (Τοῦτο γίνεται διὰ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ἀριθμούς). Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑνὸς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ γινομένου τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἄλλου. [Σημ. ὁ Διόφαντος, λέγει, εἶναι εὔκολον νὰ εὑρεθῶσι δύο τοιαῦτα τρίγωνα, χωρὶς νὰ ἀναγράφῃ τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως, ἀλλὰ χρησιμοποιεῖ τοὺς ἐκ ταύτης προκύπτοντας ἀριθμούς. Ὁ Fermat, λέγει, ὅτι ἐβασανίσθη πολὺ ἀπὸ τὸ πρόβλημα αὐτὸ καὶ ὅτι ἐν τέλει τὸ ἔλυσε εὑρὼν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα πλευρὰς (48543669109, 36083779309, 32472275580), (42636752938, 41990695480, 7394200038), (ὑποτείνουσα, βάσις, ὕψος). Ἡ κατωτέρω ἀναγραφομένη μέθοδος εὑρέσεως τῶν τριγώνων τούτων στηρίζεται εἰς τοῦ P. ver Eecke, Diopnante d'Alexandrie, σ. 223, Paris 1959. Ἡ ἐπινόησις τῆς κατασκευῆς τῶν τριγώνων προῆλθεν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος].

Κατασκευάζομεν δύο βοηθητικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα πλευρὰς $(\varkappa, \lambda, \mu)$, (ν, ξ, τ), (ὕψος, βάσις, ὑποτείνουσα), ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄλλου (κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ προηγουμένου προβλήματος), ἤτοι $\varkappa\lambda = 5\nu\xi$. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ μικροτέρου τριγώνου εἶναι $(\nu = 4,\ \xi = 3,\ \tau = 5)$ τοῦ μεγαλυτέρου θὰ εἶναι $(\varkappa = 12,\ \lambda = 5,\ \mu = 13)$, ὁπότε $5.12 = 5(3.4)$.

Τὰ ζητούμενα ὀρθογώνια τρίγωνα, ὅπως τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἑνὸς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ γινομένου του ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἄλλου τὰ κατασκευάζωμεν διὰ τῶν βοηθητικῶν τριγώνων ὡς ἑξῆς· Τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ μεγαλυτέρου θέτομεν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγαλυτέρου βοηθητικοῦ τριγώνου, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ μικροτέρου θέτομεν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροτέρου βοηθητικοῦ τριγώνου, ἤτοι

$$\upsilon_1 \Upsilon_1 = \frac{1}{2}\varkappa\lambda, \quad \upsilon_2 \Upsilon_2 = \frac{1}{2}\nu\xi.$$

Θέτοντες $\Upsilon_1 = \frac{1}{2}\mu$, (6), $\upsilon_1 = \frac{\varkappa\lambda}{\mu}$, (7), λαμβάνομεν ἐκ τῆς σχέσεως $\beta_1^2 = \Upsilon_1^2 - \upsilon_1^2$ δι' ἀντικαταστάσεως $\beta_1^2 = \frac{\mu^2}{4} - \frac{\varkappa^2\lambda^2}{\mu^2} = \frac{\mu^4 - 4\varkappa^2\lambda^2}{4\mu^2} = \frac{(\varkappa^2 - \lambda^2)^2}{4\mu^2}$, (δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν ἀριθμητὴν ἐκ τῆς σχέσεως $\mu^2 = \varkappa^2 + \lambda^2$, $\mu^4 = \varkappa^4 t \lambda^4 + 2\varkappa^2\lambda^2$, $\mu^4 - 4\varkappa^2\lambda^2 = (\varkappa^2 - \lambda^2)^2$, ἐξ ἧς $\beta_1 = \frac{\varkappa^2 - \lambda^2}{2\mu}$, (8).

Θέτοντες ὁμοίως $\Upsilon_2 = \frac{1}{2}\tau$, (9), $\upsilon^2 = \frac{\nu\xi}{\tau}$, (10), λαμβάνομεν ἐκ τῆς σχέσεως $\beta_2^2 = \Upsilon_2^2 - \upsilon_2^2$ δι' ἀντικαταστάσεως $\beta_2^2 = \frac{\tau^2}{4} - \frac{\nu^2\xi^2}{\tau^2} = \frac{\tau^4 - 4\nu^2\xi^2}{4\tau^2} = \frac{(\nu^2 - \xi^2)^2}{4z^2}$ (δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν ἀριθμητὴν ἐκ τῆς σχέσεως $\tau^2 = \nu^2 + \xi^2$) κλπ., ἐξ ἧς $\beta_2 = \frac{\nu^2 - \xi^2}{2\tau}$, (11). Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν ($\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, τ) εἰς τὰς (6, 7, 8, 9, 10, 11)

ἔχομεν $\Upsilon_1 = \frac{13}{2}$, $\upsilon_1 = \frac{60}{13}$, $\beta_1 = \frac{12^2 - 5^2}{2.13} = \frac{119}{26}$

$\Upsilon_2 = \frac{5}{2}$, $\upsilon_2 = \frac{12}{5}$, $\beta_2 = \frac{4^2 - 3^2}{2.5} = \frac{7}{10}$.

Ἤδη ἔχομεν τρία ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ ἀρχικῶς ληφθὲν τὸ ἔχον πλευρὰς (4, 3, 5) καὶ τὰ δύο εὑρεθέντα συναρτήσει τῶν βοηθητικῶν, τὰ ἔχοντα πλευρὰς $\left(\frac{12}{5}, \frac{7}{10}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{60}{13}, \frac{119}{26}, \frac{13}{2}\right)$. Εἶναι δὲ τὸ γινόμενον τῶν ὑψῶν ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ὑποτεινουσῶν τετράγωνος, ἤτοι $4 . \frac{12}{5} . \frac{60}{13} . 5 . \frac{5}{2} . \frac{13}{2} = 60^2$. ἢ τὸ γινόμενον τῶν ὑψῶν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποτεινουσῶν εἶναι τετράγωνος ἤτοι $\left(4 . \frac{12}{5} . \frac{60}{13}\right) : \left(5 . \frac{5}{2} . \frac{13}{2}\right) = \left(\frac{48}{65}\right)^2$.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει τὰ τετράγωνα τῶν ἀντιστοίχων λόγων τῶν ὑψῶν πρὸς τὰς ὑποτεινούσας ὡς συντελεστὰς τοῦ x^2 δι' ἕκαστον τῶν ζητουμένων ἀγνώστων ἤτοι $y^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 x^2$, $z^2 = \left(\frac{12}{5} : \frac{5}{2}\right)^2 x^2 = \left(\frac{24}{25}\right)^2 x^2$, $\omega^2 = \left(\frac{60}{13} : \frac{13}{2}\right)^2 x^2 = \left(\frac{120}{169}\right)^2 x^2$ ἢ $y^2 = \frac{16}{25} x^2$, $z^2 = \frac{576}{625} x^2$, $\omega^2 = \frac{14400}{28561} x^2$. Θέτει ἐπίσης $y^2 z^2 \omega^2 = x^2$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ πρῶτον μέλος ταύτης τῶν τιμῶν $(y^2 z^2 \omega^2)$ λαμβάνομεν

$$\frac{16}{25} \cdot \frac{576}{625} \cdot \frac{14400}{28561} x^6 = x^2 \text{ ἢ } \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{120}{169} x^2 = 1,$$

ἢ $\frac{48^2}{65^2} x^2 = 1$, ἐξ ἧς $x = \frac{65}{48}$.

Θὰ εἶναι ἄρα $y^2 = \frac{16}{25} \cdot \left(\frac{65}{48}\right)^2 = \frac{169}{144}$, $z^2 = \frac{576}{625} \left(\frac{65}{48}\right)^2 = \frac{169}{100}$, $\omega^2 = \frac{14400}{28561} \cdot \left(\frac{65}{48}\right)^2 = \frac{625}{576}$.

23.

$$y^2 - y^2 z^2 \omega^2 = \alpha^2 \ (1), \quad z^2 - y^2 z^2 \omega^2 = \beta^2, (2), \quad \omega^2 - y^2 z^2 \omega^2 = \gamma^2, (3).$$

Θέτει $y^2 z^2 \omega^2 = x^2$, (4).

Λαμβάνει τὰ τρία ὀρθογώνια τρίγωνα τοῦ προηγουμένου προβλήματος πλευρῶν (4, 3, 5), $\left(\frac{12}{5}, \frac{7}{10}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{60}{13}, \frac{119}{26}, \frac{13}{2}\right)$ καὶ θέτει $y^2 = \frac{25}{16} x^2$, $z^2 = \frac{625}{576} x^2$, $\omega^2 = \frac{28561}{14400} x^2$, (ἤτοι μὲ ἀντεστραμμένα τὰ κλάσματα τῶν συντελεστῶν). Οὕτω πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3) συναρτήσει τοῦ x. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y^2, z^2, ω^2, ὡς εἰς τὴν (4) λαμβάνει $\frac{25}{16} \cdot \frac{625}{576} \cdot \frac{28561}{14400} x^6 = x^2$, ἢ $\left(\frac{65}{48}\right)^2 x^2 = 1$ ἐξ ἧς $x = \frac{48}{65}$.

Θὰ εἶναι ἄρα $y^2 = \frac{25}{16} \cdot \left(\frac{48}{65}\right)^2 = \frac{144}{169}$, $z^2 = \frac{625}{567} \left(\frac{48}{65}\right)^2 = \frac{100}{169}$, $\omega^2 = \frac{28561}{14400} \left(\frac{48}{65}\right)^2 = \frac{576}{625}$.

24.

$y^2z^2 + 1 = \alpha^2$, (1), $y^2\omega^2 + 1 = \beta^2$, (2), $z^2\omega^2 + 1 = \gamma^2$, (3).

Πολλαπλασιάζει τὴν (1) ἐπὶ ω^2, τὴν (2) ἐπὶ z^2 καὶ τὴν (3) ἐπὶ y^2, ὁπότε ἔχει

$y^2z^2\omega^2 + \omega^2 = \alpha_1^2$, $y^2z^2\omega^2 + z^2 = \beta_1^2$, $y^2z^2\omega^2 + y^2 = \gamma_1^2$.

Τὸ πρόβλημα γίνεται τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ πρόβλημα 21.

25.

$y^2z^2 - 1 = \alpha^2$, (1), $y^2\omega^2 - 1 = \beta^2$, (2), $z^2\omega^2 - 1 = \gamma^2$, (3).

Πολλαπλασιάζει τὴν (1) ἐπὶ ω^2, τὴν (2) ἐπὶ z^2 καὶ τὴν (3) ἐπὶ y^2, ὁπότε ἔχει

$y^2z^2\omega^2 - \omega^2 = \alpha_1^2$, $y^2z^2\omega^2 - z^2 = \beta_2^2$, $y^2z^2\omega^2 - y^2 = \gamma_1^2$.

Τὸ πρόβλημα γίνεται τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ πρόβλημα 22.

26.

$1 - y^2z^2 = \alpha^2$ (1), $1 - y^2\omega^2 = \beta^2$, (2), $1 - z^2\omega^2 = \gamma^2$, (3).

Πολλαπλασιάζει τὴν (1) ἐπὶ ω^2, τὴν (2) ἐπὶ z^2, καὶ τὴν (3) ἐπὶ y^2, ὁπότε ἔχει $\omega^2 - y^2z^2\omega^2 = \alpha_1^2$, $z^2 - y^2z^2\omega^2 = \beta_1^2$, $y^2 - y^2z^2\omega^2 = \gamma_1^2$. Τὸ πρόβλημα γίνεται τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ πρόβλημα 23.

27.

$y^2 + z^2 + \delta = \alpha^2$, (1), $y^2 + \omega^2 + \delta = \beta^2$, (2), $z^2 + \omega^2 + \delta = \gamma^2$, (3).

Ἔστω $\delta = 15$ καὶ $y^2 = 9$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (1,2,3) εἶναι $z^2 + 24 = \alpha^2$, (4), $\omega^2 + 24 = \beta^2$, (5), $z^2 + \omega^2 + 15 = \gamma^2$, (6). Ἐκ τῶν (4,5) λαμβάνει $24 = \alpha^2 - z^2 = (\alpha + z)(\alpha - z)$

$24 = \beta^2 - \omega^2 = (\beta + \omega)(\beta - \omega)$.

Ἀναλύει τὸν 24 εἰς γινόμενα παραγόντων ἐκφράζων ταῦτα συναρτήσει τοῦ x, $24 = \frac{4}{x} . 6x$ καὶ $\frac{3}{x} . 8x$ καὶ θέτει

$\alpha + z = \frac{4}{x}$, $\alpha - z = 6x$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι

$z = \frac{2}{x} - 3x$, $z^2 = \left(\frac{2}{x} - 3x\right)^2$, (7). Θέτει ἐπίσης $\beta + \omega = \frac{3}{x}$, $\beta - \omega = 8x$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι

$$\omega = \frac{3}{2x} - 4x, \ \omega^2 = \left(\frac{3}{2x} - 4x\right)^2, \ (8).$$

Διὰ τῶν τιμῶν (7,8) πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (4,5) συναρτήσει τοῦ x. Θέτει $\gamma^2 = 25x^2$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) εἶναι $\left(\frac{2}{x} - 3x\right)^2 + \left(\frac{3}{2x} - 4x\right)^2 + 15 = 25x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{5}{6}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (7,8) εἶναι $z^2 = \frac{1}{100}$, $\omega^2 = \frac{529}{225}$ καὶ ἔχει ληφθῇ $y^2 = 9$.

28.

$y^2 + z^2 - \delta = \alpha^2$, (1), $y^2 + \omega^2 - \delta = \beta^2$, (2), $z^2 + \omega^2 - \delta = \gamma^2$, (3).

Ἔστω $\delta = 13$, $y^2 = 25$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (1,2,3) λαμβάνει $z^2 + 12 = \alpha^2$, (4), $\omega^2 + 12 = \beta^2$, (5), $z^2 + \omega^2 - 13 = \gamma^2$, (6). Ἐκ τῶν (4,5) ἔχει

$$12 = \alpha^2 - z^2 = (\alpha + z)(\alpha - z)$$
$$12 = \beta^2 - \omega^2 = (\beta + \omega)(\beta - \omega).$$

Ἀναλύει τὸν 12 εἰς γινόμενα παραγόντων ἐκφράζων τοῦτον συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι $12 = 3x \cdot \frac{4}{x} = 4x \cdot \frac{3}{x}$ καὶ θέτει $\alpha + z = 3x$, $\alpha - z = \frac{4}{x}$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $z = \left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{x}\right)$, $z^2 = \left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{x}\right)^2$, (7). Θέτει ἐπίσης $\beta + \omega = 4x$, $\beta - \omega = \frac{3}{x}$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχει $\omega = \left(2x - \frac{3}{2x}\right)$, $\omega^2 = \left(2x - \frac{3}{2x}\right)^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) λαμβάνει, θέτων $\gamma^2 = \frac{25}{4x^2}$, $\left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{x}\right)^2 + \left(2x - \frac{3}{2x}\right)^2 - 13 = \frac{25}{4x^2}$,

$$x^2\left(4 + \frac{9}{4}\right) + \frac{1}{x^2}\left(4 + \frac{9}{4}\right) - 25 = \frac{25}{4x^2},$$

$$\frac{25}{4}x^2+\frac{25}{4x^2}-25=\frac{25}{4x^2},\quad \frac{25}{4}x^2=25,\ \text{ἐξ ἧς}\ x=2.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $z^2=4$, $\omega^2=\frac{169}{16}$ καὶ ἔχει ληφθῆ $y^2=25$.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι y^2, z^2, ω^2, ὥστε $y^4+z^4+\omega^4=\alpha^2$, (1).

Ἔστω $y^2=x^2$, $z^2=4$, $\omega^2=9$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως $x^4+16+81=\alpha^2$, ἔστω $=(x^2-10)^2$, ἢ $x^4+97=x^4-20x^2+100$, ἐξ ἧς $x^2=\frac{3}{20}$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ $\frac{3}{20}$. Ὁ 3 προέκυψεν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος δύο τετραγώνων ἀριθμῶν (τοῦ 4^2+9^2) ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τυχόντος ἀριθμοῦ (τοῦ 10^2). Ὁ δὲ 20 εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ (τοῦ 10). Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός τις καὶ οἱ δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς (t^2+4) καὶ οἱ ζητούμενοι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ ὁ t^2 καὶ ὁ 4. Κατὰ τὸ αἴτημα θὰ πρέπει νὰ εἶναι $[(t^2+4)^2-(t^4+4^2)]:2(t^2+4)=$ τετράγωνος. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{4t^2}{t^2+4}=$ τετράγωνος. Καὶ ἀφοῦ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου μέλους εἶναι τετράγωνος πρέπει καὶ ὁ $t^2+4=$ τετράγωνος, ἔστω $=(t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{3}{2}$. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶναι $t^2+4=\frac{25}{4}$, καὶ οἱ δύο ζητούμενοι τετράγωνοι $t^2=\frac{9}{4}$, 4. Καὶ τὰ τετραπλάσια τῶν $\frac{25}{4}$, $\frac{9}{4}$, 4 εἶναι 25, 9, 16.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$y^2 = x^2$, $z^2 = 9$, $\omega^2 = 16$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνει $x^4 + 81 + 256 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (x^2 - 25)^2$, ἐξ ἧς $x^2 = \frac{144}{25}$.

Θὰ εἶναι ἄρα $y^2 = \frac{144}{25}$, $z^2 = 9$, $\omega^2 = 16$.

30.

Ὁ χοῦς εἶναι μέτρον διὰ τὰ ὑγρὰ $=12$ κοτύλαι $=3{,}28$ λίτρα.
$5y = \alpha$, (1), $8z = \beta$, (2), $5y + 8z = \alpha + \beta = \varkappa^2$, (3),
$\varkappa^2 + 60 = \mu^2$ (4), $\mu = y + z$, (5).
Ἔστω $\mu = (y+z) = x$, $\mu^2 = x^2$.

Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $y = \frac{\alpha}{5}$, (6), $z = \frac{\beta}{8}$, (7).

Ἐκ τῆς (4) εἶναι $\varkappa^2 = x^2 - 60$ καὶ ἐκ τῆς (3), $\alpha + \beta = x^2 - 60$, (8).

Ἐκ τῶν (5, 6, 7) εἶναι $y + z = \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{8} = x$, (9). Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\alpha = 5x - \frac{5\beta}{8}$ καὶ ἐκ τῆς (8), $x^2 - 60 = 5x + \frac{3\beta}{8}$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{5}\left(x^2 - 60 - \frac{3\beta}{8}\right)$. Ἐκ τούτου λαμβάνει $x < \frac{1}{5}(x^2 - 60)$, (10).

Ἐκ τῆς (9) εἶναι πάλιν $\beta = 8x - \frac{8\alpha}{5}$ καὶ ἐκ τῆς (8) $x^2 - 60 = 8x - \frac{3\alpha}{5}$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{8}\left(x^2 - 60 + \frac{3\alpha}{5}\right)$. Ἐκ τούτου λαμβάνει $x > \frac{1}{8}(x^2 - 60)$, (11). Ἐκ τῶν (10, 11) ἔχει

$$5x < x^2 - 60 < 8x.$$

Λύοντες κατὰ τὸν τρόπον τοῦ Διοφάντου τὴν πρώτην ἀνισότητα ἔχομεν $x^2 - 60 > 5$, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > \frac{25}{4} + 60$, $x - \frac{5}{2} > \frac{\sqrt{265}}{2}$, $x > \frac{5 + \sqrt{265}}{2}$, $x > 10,6$, ἢ λέγει $x > 11$, (12).
Ἐκ τῆς δευτέρας ἀνισότητος ἔχομεν $x^2 - 60 < 8x$, $x^2 - 8x < 60$, $(x - 4)^2 < 16 + 60$, $x - 4 < \sqrt{76}$, $x < 4 + \sqrt{76}$, $x < 12,7$ ἤ, λέγει, $x < 12$, (13). Ἐκ τῶν (12, 13) λαμβάνει $11 < x < 12$, (14).

'Εκ τῆς (4) εἶναι $x^2-60=\varkappa^2$, ἔστω $=(x-\lambda)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{\lambda^2+60}{2\lambda}$, (15).

Καὶ ἐκ τῆς (14) εἶναι $11 < \frac{\lambda^2+60}{2\lambda} < 12$.

'Εκ τῆς πρώτης ἀνισότητος λαμβάνομεν $22\lambda < \lambda^2 + 60$, $\lambda^2 - 22\lambda > - 60$, $(\lambda - 11)^2 > 121 - 60$, $\lambda - 11 > \sqrt{61}$, $\lambda > 11 + \sqrt{61}$, $\lambda > 18{,}8$. Ὥστε ὁ λ δὲν πρέπει νὰ εἶναι < 19. 'Εκ τῆς δευτέρας ἀνισότητος λαμβάνομεν $\lambda^2 + 60 < 24$, ἐξ ἧς $\lambda < 21{,}16$. Ὥστε ὁ λ πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 21, ἢ $19 < \lambda < 21$. Λαμβάνει $\lambda = 20$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (15) εἶναι $x = \frac{23}{2}$, $x^2 = \frac{529}{4}$.

Καὶ ἐκ τῆς (8) εἶναι $\alpha + \beta = \frac{529}{4} - 60 = \frac{289}{4}$, (16).

'Εκ τῆς (9) ἔχομεν $\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{8}=\frac{23}{2}$, καὶ ἐκ τῆς (6), $\frac{\beta}{8} = \frac{23}{2}-y$, (17) ἐξ ἧς $\beta=92-8y$. Εἶναι δὲ ἐκ τῆς (6), $\alpha=5y$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (16) λαμβάνομεν $5y+92-8y=\frac{289}{4}$, ἐξ ἧς $y=\frac{79}{12}=6$ χοεῖς καὶ 7 κοτύλαι. 'Εκ τῶν (7,17) λαμβάνομεν $z=\frac{\beta}{8}=\frac{23}{2}-\frac{79}{12}=4$ χοεῖς καὶ 11 κοτύλαι.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ VI.

Εἰς τὰ 24 προβλήματα τοῦ ἕκτου βιβλίου ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου. Καλοῦμεν y, z τὰς καθέτους πλευρὰς καὶ ω τὴν ὑποτείνουσαν.

1.

$$\omega - y = \alpha^3, \ (1), \quad \omega - z = \beta^3, \ (2).$$

Κατασκευάζει τὸ ζητούμενον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν (x, 3) ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ταὐτότητος $(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu^2)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι $(6x,\ x^2-9,\ x^2+9)$. Ἐὰν $z=x^2-9$ θὰ εἶναι ἐκ τῆς (2), $x^2+9-(x^2-9)=\beta^3$ ἢ $18=\beta^3$. Ἐπειδὴ ὁ β δὲν εἶναι ῥητὸς ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 18. Ὁ $18=2.\,3^2$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου του νὰ εἶναι κύβος. Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς t, ὁπότε πρέπει $2t^2=$ κύβος, ἔστω $=t^3$, ἐξ ἧς $t=2$. Κατασκευάζει τώρα τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν (x, 2), ἀντὶ (x, 3). Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι $(4x,\ x^2-4,\ x^2+4)$. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνει $x^2+4-(x^2-4)=\beta^3=2^3$, πληρουμένου τοῦ ἐπιτάγματος. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $x^2+4-4x=\alpha^3=(x-2)^2$, Ὅταν ὅμως τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ εἶναι κύβος καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι κύβος [Εὐκλείδου (IX,6)]. Θὰ εἶναι ἄρα $x-2=\kappa^3$, ἔστω $=8$, ἐξ ἧς $x=10$. Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι

$$y=4x=40,\ z=x^2-4=96,\ \omega=x^2+4=104.$$

2.

$$\omega + y = \alpha^3, \ (1), \ \omega + z = \beta^3, \ (2).$$

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ὡς ἐν ἀρχῇ τοῦ προηγουμένου προβλήματος θὰ ἔχωμεν πάλιν $18 = 2.3^2$ ἤτοι διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου του νὰ εἶναι κύβος. Κατασκευάζει τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν $(x, 2)$ κατὰ τὴν εἰς τὸ προηγούμενον μνημονευθεῖσαν ταὐτότητα. Ἡ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι, $\omega = x^2 + 4$, καὶ αἱ κάθετοι $y = 4x$, $z = 4 - x^2$. [Διὰ $x = 2$ δὲν ὑπάρχει τρίγωνον καὶ διὰ $x > 2$ ἡ πλευρὰ εἶναι ἀρνητική. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει λάβει $x^2 < 4$, $x < 2$, ἐν ᾧ εἰς τὸ προηγούμενον $x^2 > 4$, $x > 2$]. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x^2 + 4 + 4 - x^2 = 8$, πληρουμένου τοῦ ἐπιτάγματος. Ἐκ δὲ τῆς (1) εἶναι $x^2 + 4 + 4x = (x + 2)^2 = \alpha^3$. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως $(x + 2)^2$ κύβος πρέπει καὶ $(x + 2)$ νὰ εἶναι κύβος, [Εὐκλείδου (IX,6)]. Ἔστω $x + 2 = \kappa^3$, (3). Καὶ ἀφοῦ $x < 2$, θὰ εἶναι $2 < \kappa^3 < 4$. Ἔστω $\kappa^3 = \frac{27}{8}$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) εἶναι $x + 2 = \frac{27}{8}$, $x = \frac{11}{8}$. Θὰ εἶναι ἄρα $y = \frac{44}{8} = \frac{352}{64}$, $z = 4 - x^2 = \frac{135}{64}$, $\omega = x^2 + 4 = \frac{377}{64}$.

3.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta = 5$, $\frac{1}{2} yz + 5 = \alpha^2$, (1),

Θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $y = 3x$, $z = 4x$, $\omega = 5x$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι $6x^2 + 5 = \alpha^2$, ἔστω $= 9x^2$, ἐξ ἧς $\frac{3}{5} x^2 = 1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις πρέπει οἱ ὅροι τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 νὰ εἶναι τετράγωνοι. Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 3. Οὗτος προέκυψεν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἀπό τινος τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος ἀριθμὸς καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ ὁ τετράγωνος οὗτος νὰ ἔχῃ πέμπτον μέρος, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\text{τετράγωνος}}{5} = \frac{\text{τετράγωνος}}{\text{τετράγωνος}} =$ τετράγωνος.

Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν t καὶ $\frac{1}{t}$ κατὰ τὴν γνωστὴν ταὐτότητα. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι: ἡ μία κάθετος 2, ἡ ἄλλη $t^2 - \frac{1}{t^2}$, ἡ ὑποτείνουσα $t^2 + \frac{1}{t^2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν $t^2 - \frac{1}{t^2}$. Κατὰ τὴν ἀναγωγὴν πρέπει νὰ εἶναι, ἐὰν καλέσωμεν τὸν ζητούμενον τετράγωνον ἀριθμὸν $\left(t + \frac{10}{t}\right)^2$, $\left[\left(t + \frac{10}{t}\right)^2 - \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)\right] : 5 =$ τετράγωνος ἢ $\left(\frac{101}{t^2} + 20\right) : 5 =$ τετράγωνος, ἢ $5\left(\frac{101}{t^2} + 20\right) = 25.$ τετράγωνος $=$ τετράγωνος, ἢ $505 + 100t^2 = 25 \, . \, t^2.$ τετράγωνος ἢ $100t^2 + 505 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (10t + 5)^2$, ἐξ ἧς $t = \frac{24}{5}$.
Ὥστε τὸ βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον θὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{24}{5}$ καὶ $\frac{5}{24}$, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι 2, $\left(\frac{24}{5}\right)^2 - \left(\frac{5}{24}\right)^2 = \frac{331151}{14400}$, ἡ ὑποτείνουσα $\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{24}\right)^2 = \frac{332401}{14400}$, τὸ ἐμβαδὸν $\frac{331151}{14400}$ καὶ ὁ βοηθητικὸς τετράγωνος

$$\left(t + \frac{10}{t}\right)^2 = \left(\frac{24}{5} + \frac{50}{24}\right)^2 = \left(\frac{413}{60}\right)^2.$$

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$$\omega = \frac{332401}{14400}x, \quad y = \frac{331151}{14400}x, \quad z = 2x \text{ καὶ } \alpha^2 = \left(\frac{413}{60}\right)^2 x^2$$

Κατὰ τὴν (1) εἶναι $\frac{1}{2}yz + 5 = \frac{331\,151}{14400}x^2 + 5 = \left(\frac{413}{60}\right)^2 x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{24}{53}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ τριγώνου εἶναι

$$\omega = \frac{332401}{31800}, \quad y = \frac{331151}{31800}, \quad z = \frac{48}{53} = \frac{28800}{3180}.$$

4.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta = 6$, $\frac{1}{2}yz - 6 = \alpha^2$, (1).

Κατασκευάζει πάλιν ὀρθογώνιον τρίγωνον πλευρῶν (3x, 4x, 5x), ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $6x^2 - 6 = \alpha^2$, ἔστω $= 4x^2$, ἐξ ἧς $\frac{2}{6}x^2 = 1$.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις πρέπει $\frac{2}{6} = \frac{\text{τετράγωνος}}{\text{τετράγωνος}} =$ τετράγωνος.

Ὁ 2 ἔχει προέλθει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τετραγώνου ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου διὰ 6 νὰ εἶναι τετράγωνος. Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν t καὶ $\frac{1}{t}$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι : 2 ἡ μία κάθετος, $t^2 - \frac{1}{t^2}$ ἡ ἄλλη, $t^2 + \frac{1}{t^2}$ ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ἐμβαδὸν $t^2 - \frac{1}{t^2}$. Τὸν ζητούμενον τετράγωνον θέτει ἴσον πρὸς $\left(t - \frac{3}{t}\right)^2$ [Σημ. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς ἦτο 5. Τὸν ζητούμενον τετράγωνον εἶχε λάβει $\left(t + \frac{10}{t}\right)^2$ ἤτοι ὡς ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ διωνύμου εἶχε λάβει τὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα λαμβάνει ὡς ἀριθμητὴν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δοθέντος. Ταῦτα δὲν εἶναι τυχαῖα. Προέρχονται ἐκ συναφοῦς θεωρίας, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη].

Κατὰ τὴν ἀναγωγὴν πρέπει νὰ εἶναι

$\left[t^2 - \frac{1}{t^2} - \left(t - \frac{3}{t}\right)^2\right] : 6 =$ τετράγωνος, ἢ $\left(6 - \frac{10}{t^2}\right) : 6 =$ τετράγωνος, ἢ $6\left(6 - \frac{10}{t^2}\right) = 36.$ τετράγωνος, ἢ $36t^2 - 60 = 36.\ t^2.$

τετράγωνος = τετράγωνος, ἔστω $= (6t-2)^2$ ἐξ ἧς $t = \frac{8}{3}$. Ὥστε τὸ βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον θὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{8}{3}$ καὶ $\frac{3}{8}$, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι 2, $\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{4015}{576}$, ἡ ὑποτείνουσα $\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{4177}{576}$, τὸ ἐμβαδὸν $\frac{4015}{576}$ καὶ ὁ βοηθητικὸς τετράγωνος $\left(t - \frac{3}{t}\right)^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{37}{24}\right)^2$.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει ὡς καθέτους πλευρὰς $2x$, $\frac{4015}{576}x$, ὑποτείνουσαν $\frac{4177}{576}x$, ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $\frac{4015}{576}x$ καὶ $\alpha^2 = \left(\frac{37}{24}\right)^2 x^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $\frac{4015}{576}x^2 - 6 = \frac{1369}{576}x^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{8}{7}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι : ἡ μία κάθετος $\frac{16}{7}$, ἡ ἄλλη $\frac{4015}{576} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4015}{504}$, καὶ ἡ ὑποτείνουσα $\frac{4177}{576} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4177}{504}$.

5.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta = 10$, $10 - \frac{1}{2}yz = \alpha^2$, (1).

Κατασκευάζει πάλιν ὀρθογώνιον τρίγωνον πλευρῶν $(3x, 4x, 5x)$ ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι $10 - 6x^2 = \alpha^2$, ἔστω $= x^2$, ἐξ ἧς $\frac{7}{10}x^2 = 1$. Ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τετράγωνος ἀριθμός, ὥστε ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου διὰ 10 νὰ εἶναι τετράγωνος : τετράγωνος = τετράγωνος. Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν t καὶ $\frac{1}{t}$. Αἱ πλευραί του θὰ εἶναι : 2, $t^2 - \frac{1}{t^2}$, ἡ ὑποτείνουσα $t^2 + \frac{1}{t^2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν $t^2 - \frac{1}{t^2}$. Τὸν ζητούμενον τετράγωνον θέτει

$\left(\frac{1}{t}+5t\right)^2$. [Σημ. Τώρα θέτει τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 10 ὡς συντελεστὴν τοῦ t καὶ ὄχι τοῦ $\frac{1}{t}$, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον].

Κατὰ τὴν ἀναγωγὴν θὰ εἶναι

$\left[t^2-\frac{1}{t^2}+\left(\frac{1}{t}+5t\right)^2\right]:10=$τετράγωνος, ἢ $[26t^2+10]:10=$τετράγωνος, ἢ $10\,(26t^2+10)=100.$ τετράγωνος, ἢ $260t^2+100=$ τετράγωνος, ἢ $65t^2+25=$τετράγωνος$:4=$τετράγωνος, ἔστω$=(8t+5)^2$, ἐξ ἧς $t=80$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μὲν 2, ἡ ἄλλη $t^2-\frac{1}{t^2}=\frac{40959999}{6400}$, ἡ ὑποτείνουσα $\frac{40960001}{6400}$, τὸ ἐμβαδὸν $\frac{4095.999}{6400}$ καὶ ὁ βοηθητικὸς τετράγωνος $\left(\frac{1}{t}+5t\right)^2=\left(\frac{32001}{80}\right)^2$.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου: τὴν μὲν $2x$, τὴν δὲ $\frac{40959999}{6400}x$, τὴν ὑποτείνουσαν $\frac{40960001}{6400}x$ καὶ $\alpha^2=\left(\frac{32001}{80}\right)^2x^2$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι

$$10-\frac{40959999}{6400}x^2=\left(\frac{32001}{80}\right)^2x^2, \quad \text{ἐξ ἧς } x=\frac{1}{129}.$$

Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου τριγώνου θὰ εἶναι: ἡ ὑποτείνουσα$=\frac{40960001}{825600}$, ἡ μία τῶν καθέτων $\frac{40959999}{825600}$ καὶ ἡ ἄλλη $\frac{2}{129}=\frac{12800}{825600}$.

6.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta=7$

$$\frac{1}{2}yz+y=7,\ (1)\ \text{ἢ}\ \frac{1}{2}yz+z=7,\ (2).$$

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $(3x, 4x, 5x)$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $6x^2+3x=7$. Ἐκ ταύτης εἶναι $36x^2 + 18x = 6.7$ ἢ $\left(6x + \frac{3}{2}\right)^2 = 6.7 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις, καθ' ἣν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ ἦτο τετράγωνος, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν λαμβανόμενον ἑπτάκις, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τῆς μιᾶς τῶν καθέτων νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἔστω ἡ μία κάθετος πλευρὰ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου t καὶ ἡ ἄλλη 1. Κατὰ τὴν ἀναγωγὴν πρέπει νὰ εἶναι $\frac{t}{2} . 7 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2$, (3). Ἐπειδὴ τὸ βοηθητικὸν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον θὰ εἶναι $t^2 + 1 = \mu^2$, (4). Αἱ προηγούμεναι ἐξισώσεις εἶναι συναληθεύουσαι (διπλοϊσότης). Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $14t + 1 = 4.\lambda^2 = \nu^2$, (5). Δι' ἀφαιρέσεως ταύτης ἀπὸ τῆς (4) εἶναι $t^2 - 14t = \mu^2 - \nu^2 = (\mu + \nu)\ (\mu - \nu)$. Ἀναλύει τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἰς γινόμενον παραγόντων $t\ (t - 14)$ καὶ καλεῖ $t = \mu + \nu$, $t - 14 = \mu - \nu$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνεται $\mu = t - 7$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι $t^2 + 1 = (t - 7)^2$, ἐξ ἧς $t = \frac{24}{7}$. Ὥστε αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{24}{7}$ καὶ 1. Τὸ ἑπταπλάσιον τούτων δίδει τὰς καθέτους πλευρὰς ὁμοίου τριγώνου, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι 24 καὶ 7. Ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 25. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τάς: $7x$, $24x$, $25x$. Κατὰ τὴν (1) εἶναι $84x^2 + 7x = 7$, ἢ $12x^2 + x = 1$, ἢ $144x^2 + 12x = 12$, ἢ $\left(12x + \frac{1}{2}\right)^2 = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{4}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{7}{4}$, 6, $\frac{25}{4}$.

[Ἐκ τῆς (2) λαμβάνεται $6x^2 + 4x = 7$ καὶ ἐφαρμόζεται ἡ αὐτ μέθοδος].

7.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta = 7$.

$\frac{1}{2}yz - y = 7$, (1), ἢ $\frac{1}{2}yz - z = 7$, (2).

Ἀφοῦ ἐφαρμόζει ἀκριβῶς τὴν αὐτὴν κατασκευὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκει τὰς πλευρὰς τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (7, 24, 25) καὶ θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς (7x, 24x, 25x). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $84x^2 - 7x = 7$ ἢ $12x^2 - x = 1$, ἢ $144x^2 - 12 = 12$, ἢ $\left(12x - \frac{1}{2}\right)^2 = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{3}$. Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{7}{3}$, 8, $\frac{25}{3}$. [Ἐκ τῆς (2) λαμβάνεται $6x^2 - 4x = 7$ καὶ ἐφαρμόζεται ἡ αὐτὴ μέθοδος τοῦ προηγουμένου προβλήματος].

8.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta = 6$.

$\frac{1}{2}yz + (y + z) = 6$, (1).

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου (3x, 4x, 5x). Κατὰ τὴν (1) εἶναι $6x^2 + 7x = 6$. Ἐκ ταύτης εἶναι $36x^2 + 42x = 36$, $\left(6x + \frac{7}{2}\right)^2 = 6.6 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν λαμβανόμενον ἑξάκις, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν καθέτων πλευρῶν, νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἔστω ἡ μία κάθετος τοῦ βοηθητικοῦ τούτου ὀρθογωνίου τριγώνου t καὶ ἡ ἄλλη 1. Κατὰ τὴν ἀναγωγὴν πρέπει νὰ εἶναι $\frac{t}{2} \cdot 6 + \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 = \lambda^2$ ἢ $t^2 + 14t + 1 = 4\lambda^2 = \mu^2$, (2). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον θὰ εἶναι $t^2 + 1 = \nu^2$, (3). Δ' ἀφαιρέσεως τῆς (3) ἀπὸ τῆς (2) εἶναι $14t = \mu^2 - \nu^2$ ἢ $2t.7 = (\mu + \nu)(\mu - \nu)$.

Θέτει $\mu+\nu=2t$, $\mu-\nu=7$ καὶ δ' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\nu=\frac{2t-7}{2}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $t^2+1=t^2-7t+\frac{49}{4}$, ἐξ ἧς $t=\frac{45}{28}$. Αἱ πλευραὶ ἑπομένως τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\left(\frac{45}{28}, 1, \frac{53}{28}\right)$. Καὶ τὰ 28πλάσια τούτων δίδουν τὰς πλευρὰς ὁμοίου τριγώνου (45, 28, 53).

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς $(45x, 28x, 53x)$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $630x^2+73x=6$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{18}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $\frac{45}{18}, \frac{28}{18}, \frac{53}{18}$.

9.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta=6$

$$\frac{1}{2}yz-(y+z)=6, \ (1).$$

Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς τοῦ προηγουμένου προβλήματος αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογ. τριγώνου θὰ εἶναι $(45x, 28x, 53x)$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι $630x^2-73x=6$, ἐξ ἧς $x=\frac{6}{35}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $\frac{270}{35}, \frac{168}{35}, \frac{318}{35}$.

10.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta=4$.

$$\frac{1}{2}yz+(\omega+y)=4, \ (1), \ \text{ἢ} \ \frac{1}{2}yz+(\omega+z)=4, \ (2).$$

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ $(3x, 4x, 5x)$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $6x^2+(5x+3x)=4$, ἢ $36x^2+48x=4.6$ ἢ $(6x+4)^2=4.6+\left(\frac{3+5}{2}\right)^2$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν καθέτων εἶναι τετράγωνος. Κατασκευάζει τὸ βοηθητικὸν τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $t+1$ κατὰ τὴν γνωστὴν ταὐτότητα. Αἱ πλευραί του θὰ εἶναι $2(t+1)$, $(t+1)^2-1=t^2+2t$ καὶ $(t+1)^2+1=t^2+2t+2$. Κατὰ τὴν ἀναγωγὴν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι $4(t+1)(t^2+2t)+\left[\frac{(t^2+2t+2)+(t^2+2t)}{2}\right]^2=$ τετράγωνος, ἢ $(4t^3+12t^2+8t)+(t^4+4t^3+6t^2+4t+1)=$ τετράγωνος ἢ $t^4+8t^3+18t^2+12t+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(6t+1-t^2)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{4}{5}$. Ὅθεν αἱ πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ κατασκευασθῶσιν ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $\left(\frac{4}{5}+1\right)=\frac{9}{5}$ καὶ τοῦ ὁμοίου πρὸς τοῦτο τριγώνου ἐκ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 9. Αὗται θὰ εἶναι (90, 56, 106) καὶ τοῦ ὁμοίου πρὸς τοῦτο τριγώνου αἱ πλευραὶ θὰ εἶναι (45, 28, 53). Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς $(28x, 45x, 53x)$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $630x^2+81x=4$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{105}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου

$$28\cdot\frac{4}{105}=\frac{112}{105},\ \frac{180}{105},\ \frac{212}{105}.$$

11.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς $\delta=4$

$$\frac{1}{2}yz-(\omega+y)=4,\ (1),\ \text{ἢ}\ \frac{1}{2}yz-(\omega+z)=4,\ (2).$$

Εὑρίσκει κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς $(28x, 45x, 53x)$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $630x^2-81x=4$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{6}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $\frac{28}{6}, \frac{45}{6}, \frac{53}{6}$. [Ἂν ληφθῇ ἡ ἄλλη κάθετος θὰ γίνῃ ἀνάλογος κατασκευὴ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ προηγουμένου προβλήματος].

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα ($1^{ον}$.)

Ἔστω ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $y > z$.

Κατὰ τὸ λῆμμα εἶναι

$$y - z = \alpha^2, (1), \quad y = \beta^2, (2), \quad \frac{1}{2} yz + z = \gamma^2, (3).$$

Κατασκευάζει ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν μ, ν κατὰ τὴν ταὐτότητα $(2\mu\nu)^2 + (\mu^2 - \nu^2)^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$ καὶ λαμβάνει ὡς μεγαλυτέραν κάθετον τὴν $y = 2\mu\nu$ καὶ μικροτέραν τὴν $z = \mu^2 - \nu^2$. Κατὰ τὴν (1) πρέπει νὰ εἶναι $2\mu\nu - (\mu^2 - \nu^2) = \alpha^2$. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἂν $\mu = 2\nu$, ὁπότε εἶναι $4\nu^2 - (4\nu^2 - \nu^2) = \nu^2$. Οὕτω πληροῦται καὶ ἡ συνθήκη (2), $4\nu^2 = \beta^2$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει $\frac{1}{2} \cdot 4\nu^2 (4\nu^2 - \nu^2) + (4\nu^2 - \nu^2) = \gamma^2$, ἢ $6\nu^4 + 3\nu^2 = \gamma^2$ ἢ $6\nu^2 + 3 = (\gamma^2 : \nu^2) =$ τετράγωνος.

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ τετραγώνου του σὺν 3 νὰ εἶναι τετράγωνος. Τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονὰς καὶ πολλοὶ ἄλλοι ἀριθμοί, ὅπως πχ. ὁ 11 διότι εἶναι $6.11^2 + 3 = 27^2$. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πληροῦσι τὰς συνθήκας (1, 2, 3) κατασκευάζεται ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν (1 καὶ 2). Καὶ τὰ πολλαπλάσια τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου πληροῦσι καὶ τὰς τρεῖς συνθήκας.

Ἄλλο λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα ($2^{ον}$).

Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, ὥστε $\alpha + \beta = \kappa^2$.

Εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ὁσονδήποτε μεγάλον πλῆθος τετραγώνων ἀριθμῶν λ^2, μ^2.... ὥστε νὰ εἶναι

$$\alpha\lambda^2 + \beta = \tau^2, \quad \beta\mu^2 + \alpha = \sigma^2$$

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ $\alpha = 3$, $\beta = 6$, ὁπότε $3+6=3^2$. Κατὰ τὸ λῆμμα δύνανται νὰ εὑρεθῶσι πολλοὶ τετράγωνοι ἀριθμοί, ὡς οἱ $\lambda^2, \mu^2 \ldots$, ὥστε νὰ εἶναι $3\lambda^2 + 6 = \tau^2$, (1), $6\mu^2 + 3 = \sigma^2$, (2). Ἔστω $\lambda^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι $3(x^2+2x+1)+6 = \tau^2$, ἢ $3x^2+6x+9 = \tau^2$, ἔστω $= (3-3x)^2$, ἐξ ἧς $x = 4$. Θὰ εἶναι ἄρα $\lambda^2 = (x+1)^2 = (4+1)^2 = 25$ καὶ εἶναι $3.25 + 6 = 9^2$. Ἐὰν $3x^2 + 6x + 9 = (3-4x)^2$ θὰ εἶναι $x = \frac{30}{13}$ καὶ $3\left(\frac{30}{13}+1\right)^2 + 6 = 3\left(\frac{43}{13}\right)^2 + 6 = \frac{6561}{169} = \left(\frac{81}{13}\right)^2$.

Κατὰ τὴν (2) εἶναι, ἐὰν πάλιν θέσωμεν $\mu^2 = (x+1)^2$, $6x^2 + 12x + 9 = \sigma^2$, ἔστω $= (3-3x)^2$, ἐξ ἧς $x = 10$. Θὰ εἶναι ἄρα $\mu^2 = (x+1)^2 = 11^2 = 121$ καὶ εἶναι $6.121 + 3 = 27^2$. Ἐὰν $6x^2 + 12x + 9 = (3-5x)^2$ θὰ εἶναι $x = \frac{42}{19}$ καὶ $6\left(\frac{42}{19}+1^2\right) + 3 = \left(\frac{153}{19}\right)^2$.

Ὥστε τὸ πλῆθος τῶν εὑρισκομένων τετραγώνων $\lambda^2, \mu^2 \ldots$, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὰ ἐπιτάγματα εἶναι ὁσονδήποτε μεγάλον.

Καὶ γενικῶς

Ἐὰν $\alpha + \beta = \varkappa^2$, ἡ παράστασις $\alpha y^2 + \beta$ δύναται νὰ γίνῃ τετράγωνος, ἐὰν τεθῇ $y = x + 1$. Δι' ἀντικαταστάσεως θὰ εἶναι $\alpha(x+1)^2 + \beta = \alpha x^2 + 2\alpha x + \alpha + \beta$ ἢ $\alpha x^2 + 2\alpha x + \varkappa^2$, ἔστω $= (\varkappa - \lambda x)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{2(\alpha + \varkappa\lambda)}{\lambda^2 - \alpha}$ καὶ $y = \frac{\lambda^2 + 2\varkappa\lambda + \alpha}{\lambda^2 - \alpha}$, $(\lambda^2 \neq \alpha)$.

[Σημ. Ὁ Ὄιλερ (Euler) ἀφορμηθεὶς ἐκ τῶν λημμάτων τούτων εὗρε τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta = y^2$, ὅπου α, β ἀκέραιοι. (Leonhard Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, σελ. 414, Reclam-Verlag, Stuttgart, 1959, von J. E. Hofmann)].

12.

$$\frac{1}{2} yz + y = \alpha^2, \ (1), \quad \frac{1}{2} yz + z = \beta^2, \ (2).$$

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ (5x, 12x, 13x). Κατὰ τὴν (2) εἶναι $30x^2+12x=\beta^2$, (3), ἔστω $=36x^2$, ἐξ ἧς $x=2$ πληρουμένου τοῦ ἐπιτάγματος τούτου. Κατὰ τὴν (1) εἶναι $30x^2+5x=\alpha^2$, (4). Διὰ $x=2$ εἶναι $\alpha^2=130$ ἤτοι ὁ 130 δὲν εἶναι τετράγωνος. Ὅθεν πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\beta^2=36x^2$. Ἔστω $\beta^2=\lambda^2x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) εἶναι $x=\dfrac{12}{\lambda^2-30}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι $30\left(\dfrac{12}{\lambda^2-30}\right)^2+\dfrac{5.12}{\lambda^2-30}=\alpha^2$, ἢ $\dfrac{60\lambda^2+2520}{(\lambda^2-30)^2}=\alpha^2$, ἢ

$60\lambda^2+2520=$ τετράγωνος, (5). Ἡ σχέσις αὕτη πληροῦται κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ὅταν $60+2520=$ τετράγωνος, (6). Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 2520. Ὁ $60=5.12$ ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν (5x, 12x). Ὁ $2520=12\,(12-5)\,30$, ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τῆς μεγαλυτέρας καθέτου ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἐμβαδοῦ. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν σὺν τὴν μεγαλυτέραν κάθετον, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν, νὰ εἶναι τετράγωνος. Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου (ἔστω τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2). Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα ἡ μεγαλυτέρα κάθετος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν καλέσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου τούτου τ, σ, $(\tau > \sigma)$ καὶ $\frac{1}{2}\,\tau.\,\sigma=E$ θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῆς (6)

$$\tau\sigma+\tau\,(\tau-\sigma)\,E=\text{τετράγωνος}.$$

Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ τ θὰ ἔχωμεν

$$\sigma+(\tau-\sigma)\,E=\text{τετράγωνος}, \quad (7).$$

Ὅταν κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, αἱ πλευραί του θὰ εἶναι 3, 4, 5. Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα εἶναι $4-3=1^2$, $4=2^2$, $\frac{1}{2}\,.\,4\,.\,3+3=3^2$.

Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ἐπειδὴ $\left(\frac{1}{2}4.3+3\right)=3^2$, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ μέγα πλῆθος τετραγώνων ὥστε τὸ γινόμενον ἑνὸς τετραγώνου ἐκ τούτων ἐπὶ ἕνα τῶν ἀριθμῶν (6 ἢ 3) σὺν τὸν ἄλλον νὰ εἶναι τετράγωνος. Εἷς ἐκ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι ἡ μονάς, ὁπότε εἶναι $6.1^2+3=3^2$, σχέσις ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν (7), ὅπου $\tau-\sigma=4-3=1^2$, $E=6$, $\sigma=3$. Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι (3, 4, 5). Θέτει τὰς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογ. τριγώνου (3x, 4x, 5x), (ἀντὶ τῶν 5x, 12x, 13x).

Κατὰ τὴν (2) εἶναι $6x^2+4x=\beta^2$, ἔστω $=t^2x^2$, (8), καὶ κατὰ τὴν (1) εἶναι $6x^2+3x=\gamma^2$, (9). Ἐκ τῆς (8) λαμβάνει $x=\frac{4}{t^2-6}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) ἔχει $\frac{12t^2+24}{t^4+36-12t^2}=\gamma^2$ ἢ $12t^2+24=\gamma^2(t^2-6)^2$ ἢ $3t^2+6=$ τετράγωνος, (10). Ἐπειδὴ $3+6=3^2$ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ὁ t κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα. Ἔστω $t=\lambda+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (10) λαμβάνεται $3(\lambda+1)^2+6=$ τετράγωνος, ἔστω $=(3-3\lambda)^2$, ἐξ ἧς $\lambda=4$, $\lambda+1=t=5$, $t^2=25$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) εἶναι $6x^2+4x=25x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{19}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι $3.\frac{4}{19}=\frac{12}{19}, \frac{16}{19}, \frac{20}{19}$.

13.

$$\frac{1}{2}yz-y=\alpha^2, \ (1), \quad \frac{1}{2}yz-z=\beta^2, \ (2).$$

Λαμβάνει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος, (3x, 4x, 5x). Κατὰ τὴν (2) εἶναι $6x^2-4x=\beta^2$. Ἔστω $=t^2x^2$, (3) καὶ κατὰ τὴν (1), $6x^2-3x=\alpha^2$, (4). Θέτει ἐκ τῆς (3) $t^2x^2<6x^2$, $t^2<6$, (5). Ἐκ τῆς (3) εἶναι $x=\frac{4}{6-t^2}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) λαμβάνει $\frac{12t^2+24}{t^4+36-12t^2}=$ τετράγωνος ἢ $12t^2+24=$ τετράγωνος, (6).

Ἐπειδὴ $12+24=$τετράγωνος, εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα νὰ προσδιορισθῇ ὁ t^2. Λαμβάνει $t^2=1$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) ἔχει $6x^2-4x=x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{5}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $3.\frac{4}{5}=\frac{12}{5}, \frac{16}{5}, \frac{20}{5}=4$.

Ἐάν, λέγει, δὲν θέλομεν νὰ λάβωμεν $t=1$, ἔστω $t=\lambda+1$, ὁπότε ἐκ τῆς (6) εἶναι $12(\lambda+1)^2+24=$ τετράγωνος, ἢ $3(\lambda+1)^2+6=$ τετράγωνος, ἔστω $=(3-3\lambda)^2$, (7), ἐξ ἧς $\lambda=4$, $\lambda+1=t=5$, $t^2=25$. Ἐπειδὴ ὅμως κατὰ τὴν (5), $t^2 < 6$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $(\lambda+1)^2 < 6$, (8), $\lambda+1 < \sqrt{6}$, $\lambda < \sqrt{6}-1$ ἢ $\lambda \leqq 1{,}44$, ἢ $\lambda \leqq \frac{13}{9}$ καὶ ἐπομένως $\lambda+1 \leqq \frac{13}{9}+1=\frac{22}{9}$. Λαμβάνει $\lambda+1=\frac{22}{9}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) εἶναι $\left(\frac{22}{9}\right)^2=t^2=\frac{484}{81} < 6$. Καὶ ἐκ τῆς (3) λαμβάνεται $6x^2-4x=\frac{484}{81}.x^2$, ἐξ ἧς $x=162$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι $3.162=486$, $4.162=648$, $5.162=810$.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ κείμενον σημειοῦται μόνον ὅτι ἡ τιμὴ $\frac{484}{81}=t^2$ καθιστᾷ τὸν x ῥητὸν καὶ δὲν ἀναφέρεται τίποτε ἄλλο, ἂν δηλ. πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος, ὡς συνηθίζεται πάντοτε νὰ ἀναφέρεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου προβλήματος. Κατὰ τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου πρέπει νὰ εἶναι

$\frac{1}{2}\,486.648-486=$ τετράγωνος, (1) καὶ $\frac{1}{2}\,486.648-648=$ τετράγωνος, (2). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $157464-486=156978$, οὐχὶ τετράγωνος, ἐν ᾧ εἶναι ἐκ τῆς (2) $157464-648=(396)^2$. Ἀντιθέτως, αἱ πρῶται εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν πλευρῶν $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, 4 πληροῦσι τὰ ἐπιτάγματα, διότι εἶναι

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{16}{5}-\frac{12}{5}=\frac{96}{25}-\frac{60}{25}=\frac{36}{25} \text{ καὶ } \frac{96}{25}-\frac{16}{5}=\frac{16}{25}.$$

[Σημ. Ὁ Fermat ἀφορμηθεὶς ἐκ τοῦ προβλήματος τούτου, λέγει, ὅτι ἔλυσε τὸ πρόβλημα $y-\frac{1}{2}yz=\alpha^2$ καὶ $z-\frac{1}{2}yz=\beta^2$, χωρὶς ὅμως νὰ εὑρεθῇ τούτου ἀπόδειξις. Τὸ πρόβλημα ἔλυσεν ὁ Euler. (Commentationes arithmeticae, I σ. 62—72). (y, z αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου)].

14.

$$\frac{1}{2}yz-\omega=\alpha^2, \ (1), \ \frac{1}{2}yz-y=\beta^2, \ (2), \ [\text{ἢ } \frac{1}{2}yz-z=\gamma^2].$$

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον πλευρῶν $(3x, 4x, 5x)$. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $6x^2-5x=\alpha^2$, (3) καὶ ἐκ τῆς (2), $6x^2-3x=\beta^2$, ἔστω $=t^2x^2$, (4), ἐξ ἧς $x=\frac{3}{6-t^2}$, (δὲν ἐπαναλαμβάνει, ὡς νοούμενον, τὸ ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ὅτι $t^2<6$ διὰ νὰ εἶναι $x>0$). Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ x εἰς τὴν (3) λαμβάνει τελικῶς $\frac{15t^2-36}{t^4+36-12t^2}=\alpha^2$. Ἐὰν καὶ ὁ ἀριθμητὴς τῆς παραστάσεως ταύτης ἦτο τετράγωνος θὰ ὑπῆρχε ῥητὴ λύσις. [Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν παράστασιν $\delta x^2-\varepsilon^2=\zeta^2$ καὶ μίαν τιμὴν τοῦ x καθιστῶσαν τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον, ἔστω τὴν $x=\frac{\eta}{\theta}$ θὰ ἔχωμεν $\delta\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2-\varepsilon^2=\zeta^2$, ἐξ ἧς $\delta=\left(\frac{\varepsilon\theta}{\eta}\right)^2+\left(\frac{\zeta\theta}{\eta}\right)^2$ ἤτοι διὰ νὰ γίνεται ἡ παράστασις $\delta x^2-\varepsilon^2$ τετράγωνος πρέπει ὁ δ νὰ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Ταῦτα τὰ θεωρεῖ γνωστά].

Ὁ ἀριθμητὴς ὅμως $15t^2-6^2$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ τετράγωνος, διότι ὁ 15 δὲν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων (ἐπειδὴ εἶναι τῆς μορφῆς $4c-1$). Τοῦτο ὅμως δὲν σημαίνει ὅτι τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα δὲν ἔχει ῥητὴν λύσιν. Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσι κατάλληλοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ ἀριθμητοῦ $15t^2-36$. Ὁ $15t^2=3.5t^2=y.\,\omega.\,t^2$, (θεωρεῖ ὀρθογ. τρίγωνον πλευρῶν 3, 4, 5 ὅμοιον πρὸς τὸ ληφθέν, πλευρῶν $3x$, $4x$, $5x$). Ὁ $36=2.3.6=3.6\,(5-3)=y.\,\frac{1}{2}\,yz\,(\omega-y)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τετράγωνος ἀριθμός, (ὁ t^2) μικρότερος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου (ἡ συνθήκη αὕτη ἐκ τῆς σχέσεως (4), ὥστε, ὅταν ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἐπὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον τῆς καθέτου ταύτης ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς καθέτου ταύτης ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης, νὰ προκύπτῃ τετράγωνος, ἤτοι $y.\,\omega.\,t^2 - y.\,\frac{1}{2}\,yz\,(\omega-y)=$ τετράγωνος.

Ἀναζητεῖ λοιπὸν βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον πλευρῶν (τ, σ, Υ) καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν t^2, ὅπου $t^2 < \frac{1}{2}\tau\sigma$, ὥστε νὰ εἶναι $\tau\Upsilon t^2 - \tau\frac{1}{2}\tau\sigma\,(\Upsilon-\tau)=$ τετράγωνος, (5). Ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου σχηματισθῶσιν ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν (μ, ν) θὰ εἶναι αὗται $(2\mu\nu, \mu^2-\nu^2, \mu^2+\nu^2)$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) θὰ ἔχωμεν $2\mu\nu\,(\mu^2+\nu^2)t^2-2\mu\nu\,\frac{1}{2}\,2\mu\nu.\,(\mu^2-\nu^2)\,(\mu-\nu)^2=$ τετράγωνος. Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ $(\mu-\nu)^2$ λαμβάνομεν $2\mu\nu\,(\mu^2+\nu^2)\frac{t^2}{(\mu-\nu)^2}-\mu\nu\,(\mu^2-\nu^2)\,2\mu\nu=$ τετράγωνος.

Θέτοντες $\frac{t^2}{(\mu-\nu)^2}=\varkappa^2$, (6) ἔχομεν $2\mu\nu\,(\mu^2+\nu^2)\,\varkappa^2-\mu\nu\,(\mu^2-\nu^2)\,2\mu\nu=$ τετράγωνος, (7), ἤτοι πρέπει νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν $\varkappa^2$, ὥστε τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὴν κάθετον $(2\mu\nu)$ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν $(\mu^2+\nu^2)$ νὰ ὑπερέχῃ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ $[\mu\nu\,(\mu^2-\nu^2)]$ ἐπὶ τὴν αὐτὴν κάθετον $(2\mu\nu)$ κατὰ τετράγωνον ἀριθμόν. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, λέγει, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ (μ, ν) ἐξ ὧν κατασκευάζεται τὸ βοηθητικὸν τρίγωνον εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. [Σημ. Οἱ ἀριθμοὶ μ, ν λέγονται ἐπίπεδοι ὅταν ἕκαστος τούτων εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων. Ἔστω $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$. Οἱ μ, ν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ὅταν $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$. Τὸ γινόμενον δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. (Ἴδε Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων [x,1], τόμος 2ος).]. Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ (μ, ν) εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι θὰ εἶναι $(\mu\nu)$ = τετράγωνος. Θέτοντες $\mu\nu = \varkappa^2$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (7) λαμβάνομεν $4\varkappa^4\nu^2$ = τετράγωνος καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ $\varkappa^4 = (\mu\nu)^2$ ἔχομεν $4\nu^4\mu^2$ = τετράγωνος, σχέσις, ἥτις ἐπαληθεύεται διὰ $\nu = 1$, $\mu = 4$. Ὅθεν κατασκευάζομεν τὸ βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 4, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ θὰ εἶναι $2\mu\nu = 8$, $\mu^2 - \nu^2 = 15$, $\mu^2 + \nu^2 = 17$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) λαμβάνομεν $t^2 = 36$, ἀριθμόν, ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ ἐμβαδοῦ $[\mu\nu\,(\mu^2 - \nu^2) = 60]$.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει ὡς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου τὰς (8x, 15x, 17x) (ἀντὶ τῶν 3x, 4x, 5x), ὁπότε ἐκ τῆς (2) εἶναι $60x - 8x = \beta^2 = t^2x^2 = 36x^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x = \frac{1}{3}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι $\frac{8}{3}, \frac{15}{3}, \frac{17}{3}$. [Σημ. Ἀνάλογος κατασκευὴ διὰ τὰς ἐξισώσεις (1, 3)].

Λῆμμα διὰ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 3 καὶ 11. Ἐὰν $3.5^2 - 11 = 8^2$, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἄλλος τετράγωνος μεγαλύτερος τοῦ 25 ὥστε 3 ἐπὶ τὸν τετράγωνον τοῦτον, μεῖον 11 νὰ δίδῃ τετράγωνον. Ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος $(x+5)^2$, ὁπότε θὰ εἶναι $3(x+5)^2 - 11$ = τετράγωνος, ἢ $3x^2 + 30x + 64$ = τετράγωνος, ἔστω $= (8 - 2x)^2$, ἐξ ἧς $x = 62$. Θὰ εἶναι ἄρα ὁ ζητούμενος τετράγωνος $(62+5)^2$. Καὶ εἶναι $3.67^2 - 11 = 116^2$.

Καὶ γενικῶς

Ἐὰν $\alpha\tau^2 - \beta = \gamma^2$, (1), εὑρίσκεται καὶ $\varphi^2 > \tau^2$, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha\varphi^2 - \beta = \delta^2$, (2).

Ἔστω $\varphi = x + \tau$. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $\alpha x^2 + 2\alpha\tau x + \alpha\tau^2 - \beta = \delta^2$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ $\alpha\tau^2 - \beta$ ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\alpha x^2 + 2\alpha\tau x + \gamma^2 = \delta^2, \text{ ἔστω} = (\gamma - \lambda x)^2 \text{ ἐξ ἧς}$$

$$x = \frac{2(\alpha\tau + \gamma\lambda)}{\lambda^2 - \alpha}.$$ (Ὁ λ ἐκλέγεται, ὥστε νὰ εἶναι $\lambda^2 > \alpha$).

15.

$$\frac{1}{2} yz + \omega = \alpha^2, (1), \frac{1}{2} yz + y = \beta^2, (2), \left(\text{ἢ } \frac{1}{2} yz + z = \gamma^2\right)$$

Ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογ. τριγώνου ($3x$, $4x$, $5x$). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $6x^2 + 5x = \alpha^2$, (3) καὶ ἐκ τῆς (2), $6x^2 + 3x = \beta^2$, ἔστω $= t^2 x^2$, (4). Ἐκ ταύτης εἶναι $x = \frac{3}{t^2 - 6}$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ θετικὴ τιμὴ τοῦ x πρέπει $t^2 > 6$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ x εἰς τὴν (3) λαμβάνεται $\frac{15t^2 - 36}{t^4 + 36 - 12t}$. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἐπαναλαμβάνεται ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ὅπου εὑρίσκονται δύο ἀριθμοὶ οἱ 4 καὶ 1 δι' ὧν κατασκευάζεται τὸ βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον πλευρῶν (8, 15, 17) τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν 60 ἦτο $> t^2 = 36$. Εἰς τὸ προκείμενον ὅμως πρόβλημα ζητεῖται ὅπως $t^2 >$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογ. τριγώνου. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ προηγουμένου λήμματος. Ἐκ τῆς σχέσεως (5) τοῦ προηγουμένου προβλήματος, $\tau \Upsilon t^2 - \tau \frac{1}{2} \tau\sigma (\Upsilon - \tau) =$ τετράγωνος, λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως τῶν πλευρῶν $\tau = 8$, $\sigma = 15$, $\Upsilon = 17$, $136t^2 - 4320 =$ τετράγωνος, (5).

Διὰ νὰ εὕρῃ τετράγωνον μεγαλύτερον τοῦ t^2, ὥστε ὁ τετράγωνος οὗτος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐμβαδοῦ 60 θέτει κατὰ τὸ προηγούμενον λῆμμα τὸν ζητούμενον τετράγωνον $\lambda^2 = (t+6)^2$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) εἶναι $136(t^2 + 12t + 36) - 4320 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (16t - 24)^2$, ἐξ ἧς $t = 20$, $\lambda^2 = (t+6)^2 = 26^2 = 676$.

Κατασκευάζει τώρα τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν ($8x$, $15x$, $17x$) καὶ ἐκ τῆς (2) λαμβάνει

$60x^2+8x=\beta^2=(t+6)^2x^2$ ἢ $60x^2+8x=676x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{77}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου

$$\frac{8}{77},\ \frac{15}{77},\ \frac{17}{77}.$$

16.

Ἔστω ἡ διχοτόμος μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου $5x$ καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς τομῆς τῆς βάσεως μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας $3x$. Ἑπομένως ἡ μία κάθετος θὰ εἶναι $4x$. Ἔστω ἡ πλευρὰ τὴν ὁποίαν τέμνει ἡ διχοτόμος, ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 3, ἔστω 3, ὁπότε τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς θὰ εἶναι $3-3x$.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου ἐσωτερικῆς γωνίας τριγώνου (Εὐκλ. [VI, 3]) θὰ εἶναι, ἂν καλέσωμεν ΒΓ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $4x : 3x = \text{ΒΓ} : (3-3x)$, ἐξ ἧς $\text{ΒΓ} = 4-4x$. Καὶ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $(4-4x)^2=16x^2+9$, ἐξ ἧς $x=\frac{7}{32}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $\frac{28}{32}$, 3, $\frac{100}{32}$ καὶ ἡ διχοτόμος $\frac{35}{32}$. Τὰ τμήματα τῆς τεμνομένης πλευρᾶς (βάσεως) ὑπὸ τῆς διχοτόμου θὰ εἶναι $\frac{21}{32}, \frac{75}{32}$. Καὶ ὁμοίου πρὸς τοῦτο τριγώνου αἱ πλευραὶ θὰ εἶναι 28, 96, 100, ἡ διχοτόμος 35 καὶ τὰ τμήματα τῆς βάσεως 21, 75.

17.

$$\frac{1}{2}yz+\omega=\alpha^2,\ (1),\quad y+z+\omega=\beta^3,\ (2).$$

Ἔστω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $\frac{1}{2}yz=x$, ἡ ὑποτείνουσα $\omega=\lambda^2-x=16-x$. Τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι $2x$ καὶ ἔστω $y=2$, $z=x$. Ἡ περίμετρος γίνεται $18=\beta^3$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ῥητὴ λύσις ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ 18. Οὗτος εἶναι ἄθροισμα ἑνὸς τετραγώνου ($\lambda^2=16$) καὶ τοῦ 2. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος ἀριθμός, ὅστις προσλαμβάνων τὸν 2 γίνεται κύβος. Ἔστω ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου $x+1$, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ κύβου $x-1$, ὁπότε κατὰ τὸ αἴτημα εἶναι $(x+1)^2+2=(x-1)^3$, ἢ $x^2+2x+3=x^3-3x^2+3x-1$, (3), ἐξ ἧς $x=4$. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ μὲν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου $x+1=5$, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ κύβου $x-1=3$, καὶ συνεπῶς $(x+1)^2=25$, $(x-1)^3=27$. Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει $\frac{1}{2}yz=x$, $\omega=25-x$, τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν 2 καὶ τὴν ἄλλην x. Ἡ περίμετρος γίνεται $2+x+25-x=3^3$. Ἀπομένει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος (διὰ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης πλευρᾶς καὶ κατόπιν γίνῃ ἡ πλήρωσις τῶν ἐπιταγμάτων).

Κατὰ τοῦτο εἶναι $(25-x)^2=x^2+4$, ἐξ ἧς $x=\frac{625}{50}$.

[Σημ. Ὁ Διόφαντος δὲν ὑποδεικνύει τὴν λύσιν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως (3) θεωρήσας, φαίνεται, αὐτὴν κοινοτυπίαν. Πιθανὸν νὰ προέβη εἰς τὸν μετασχηματισμὸν $4x^2+4=x^3+x$, $4(x^2+1)=x(x^2+1)$, ὁπότε λαμβάνεται ἡ μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $x=4$].

18.

$$\frac{1}{2}yz+\omega=\alpha^3,\ (1),\quad y+z+\omega=\beta^2\ (2).$$

Θέτει πάλιν, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $\frac{1}{2}yz=x$ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν $\omega=\lambda^3-x=8-x$, τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν $yz=2x$, $y=2$, $z=x$. Ἡ περίμετρος εἶναι $8-x+2+x=10$, ἤτοι ὁ ληφθεὶς κύβος σὺν 2. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ κύβος, ὅστις προσλαμβάνων τὸν 2 δίδει τετράγωνον. Ἔστω ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κύβου $x-1$, ὁπότε κατὰ τὴν ἀναγωγὴν πρέπει νὰ εἶναι $(x-1)^3+2=\lambda^2$, ἢ $x^3+3x+1-3x^2=\lambda^2$, ἔστω $=\left(\frac{3x}{2}+1\right)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{21}{4}$. Ἑπομένως ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κύβου εἶναι $(x-1)=\frac{17}{4}$ καὶ ὁ κύβος $\frac{4913}{64}$.

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει τὸ ἐμβαδὸν x, τὴν μίαν κάθετον 2, τὴν ἄλλην x καὶ τὴν ὑποτείνουσαν $\frac{4913}{64}-x$. Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος εὑρίσκεται ὁ x ῥητὸς ἤτοι εἶναι $\left(\frac{4913}{64}-x\right)^2=x^2+4$, ἐξ ἧς $x=\frac{24121185}{628864}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι

$$\frac{24121185}{628864},\ 2=\frac{1257728}{628864},\ \frac{24153953}{628864}.$$

19.

$$\frac{1}{2}yz+y=\alpha^2,\ (1),\ y+z+\omega=\beta^3,\ (2).$$

Κατασκευάζει τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ $2x+1$ κατὰ τὴν πυθαγόρειον ταυτότητα $\mu^2+\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu^2+1}{2}\right)^2$, ὅπου μ περιττός, ὁπότε αἱ πλευραί του εἶναι, ὕψος $=2x+1$, βάσις $=2x^2+2x$, ὑποτείνουσα $=2x^2+2x+1$. Ἐκ τῆς (2), ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι $4x^2+6x+2=\beta^3$, ἢ $(4x+2)(x+1)=\beta^3$. Διαιρεῖ ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ παράγοντος $(x+1)$, ὁπότε ἡ περίμετρος τοῦ ὁμοίου τριγώνου θὰ εἶναι $4x+2=$ κύβος, ἑκάστη δὲ τῶν πλευρῶν, $y=\frac{2x+1}{x+1}$, $z=\frac{2x^2+2x}{x+1}$, $\omega=\frac{2x^2+2x+1}{x+1}$. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+2x+1}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^2+2x+1}=\alpha^2$, ἢ $2x+1=\alpha^2$, (3) καὶ ἐκ τῆς (2), $4x+2=$ κύβος ἢ $2(2x+1)=$ κύβος, (4). Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (3) καὶ (4) ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ κύβος, ὅστις νὰ εἶναι τὸ διπλάσιον τετραγώνου.

Τοιοῦτος κύβος εἶναι ὁ 8. Εἰς τὴν (4) θέτει $2(2x+1)=8$, ἐξ ἧς $x=\frac{3}{2}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{8}{3}$, $z=\frac{15}{5}$, $\omega=\frac{17}{5}$.

20.

$$\frac{1}{2}yz+y=\alpha^3,\ (1),\quad y+z+\omega=\beta^2,\ (2).$$

Προβαίνει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος, καθ' ἣν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου σὺν μίαν κάθετον εἶναι $2x+1$ καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ $4x+2$. Κατὰ τὸ προκείμενον πρόβλημα εἶναι $2x+1=\alpha^3$, (3), $4x+2=\beta^2$ ἢ $2(2x+1)=\beta^2$, (4). Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (3) καὶ (4) ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ τετράγωνος, ὅστις νὰ εἶναι τὸ διπλάσιον κύβου. Ἔστω $2(2x+1)=16$, ἐξ ἧς $x=\frac{7}{2}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου (αἱ παραστάσεις y, z, ω ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος) $y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{16}{9}$, $z=\frac{63}{9}$, $\omega=\frac{65}{9}$.

21.

$$y+z+\omega=\alpha^2,\ (1),\quad y+z+\omega+\frac{1}{2}yz=\beta^3,\ (2).$$

Κατασκευάζει ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x καὶ 1. Ἡ μία κάθετος εἶναι $2\mu\nu=2x$, ἡ ἄλλη $\mu^2-\nu^2=x^2-1$ καὶ ἡ ὑποτείνουσα x^2+1. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνει $2x^2+2x=\alpha^2$, (3) καὶ ἐκ τῆς (2), $x^3+2x^2+x=\beta^3$, (4). Ἔστω $2x^2+2x=t^2x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{2}{t^2-2}$, (5). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) εἶναι $\frac{2t^4}{(t^2-2)^3}=\beta^3$, ἢ $2t^4=$ κύβος. Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ t^3 λαμβάνομεν $2t=$ κύβος, ἔστω $=8$, $t=4$, $t^2=16$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) εἶναι $x=\frac{1}{7}$, $x^2=\frac{1}{49}$. Διὰ τὴν τιμὴν ὅμως ταύτην ἡ κάθετος x^2-1 γίνεται ἀρνητική. Διὰ νὰ εἶναι $x^2-1>0$ πρέπει ὁ $x=\frac{2}{t^2-2}>1$, (6), καὶ $t^2>2$. Ἐκ τῆς ἀνισότητος (6) εἶναι $4>t^2$. Συνεπῶς $2<t^2<4$, (7). Ἀντὶ λοιπὸν $2t=8$, θέτει $2t=\lambda^3$, ἐξ ἧς $t=\frac{\lambda^3}{2}$, $t^2=\frac{\lambda^6}{4}$. Καὶ ἐκ τῆς (7) εἶναι $2<\frac{\lambda^6}{4}<4$ ἢ $8<\lambda^6<16$. Αἱ σχέσεις αὗται ἐπαληθεύονται διὰ $\lambda^6=\frac{729}{64}$. Ὅθεν εἶναι $\lambda^3=\frac{27}{8}=2t$, ἐξ ἧς $t=\frac{27}{16}$, $t^2=\frac{729}{64}$ καὶ εἶναι $x=\frac{2}{\frac{729}{64}-2}=\frac{512}{217}>1$.

Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι $2x=\frac{1024}{217}=\frac{222208}{47089}$, $\frac{215055}{47089}$, $\frac{309233}{47089}$.

22.

$$y+z+\omega=\alpha^3,\ (1),\quad y+z+\omega+\frac{1}{2}yz=\beta^2,\ (2).$$

Λύει προηγουμένως τὸ ἑξῆς πρόβλημα· Δίδονται δύο τυχόντες ἀριθμοὶ γ, δ. Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔστω πλευρῶν τ, σ, Υ, ὥστε $\tau+\sigma+\Upsilon=\gamma$, (3), $\frac{1}{2}\tau\sigma=\delta$, (4). Ἔστω $\gamma=12$, $\delta=7$. Ἐκ τῆς (4) εἶναι $\tau\sigma=14$. Ἐὰν ἡ μία τῶν καθέτων κληθῇ $\frac{1}{t}$, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $14t$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $\Upsilon=12-\frac{1}{t}-14t$ καὶ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $\left(12-\frac{1}{t}-14t\right)^2=\left(\frac{1}{t}\right)^2+(14t)^2$ ἢ $172t=336t^2+24$, (5). Ἐκ ταύτης λαμβάνεται $336t^2-172t=-24$,

$(336t)^2-336.172t=-24.336$, $(336t-86)^2=-24.336+86^2$,

$336t=86\pm\sqrt{86^2-24.336.}$

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης νὰ εἶναι τετράγωνος, ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ t (τῆς ἐξισώσεως 5) μεῖον τὸ γινόμενον τοῦ σταθεροῦ ὅρου ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ t^2 νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἀλλὰ ὁ συντελεστὴς τοῦ t, ὁ $172 = 12^2 + 4.7$, εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, σὺν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ, ὁ δὲ $24.336 = 8064$ εἶναι τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς περιμέτρου ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν ($8064{=}8.12^2.7$), ἤτοι εἶναι

$$172 = (\tau+\sigma+\Upsilon)^2 + 4.\,\frac{1}{2}\tau\sigma \quad\text{καὶ}\quad 8064 = 8\,(\tau+\sigma+\Upsilon)^2.\,\frac{1}{2}\tau\sigma.$$

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν ῥητὴ λύσις πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν οἱ διδόμενοι ἀριθμοὶ 12 καὶ 7 ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουσιν οἱ ἀριθμοὶ 172 καὶ 8064, ὥστε νὰ εἶναι

$$\left[\frac{(\tau+\sigma+\Upsilon)^2+4.\frac{1}{2}\tau\sigma}{2}\right]^2 - 8(\tau+\sigma+\Upsilon)^2.\,\frac{1}{2}\tau\sigma = \text{τετράγωνος, (6).}$$

Ἔστω $\gamma = 64$ (τετράγωνος συγχρόνως καὶ κύβος), $\delta = \varphi$ ὁπότε κατὰ τὴν (3) εἶναι $\tau + \sigma + \Upsilon = 64 = 8^2 = 4^3$ καὶ κατὰ τὴν (4), $\frac{1}{2}\tau\sigma = \varphi$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) λαμβάνεται

$$\left(\frac{64^2+4\varphi}{2}\right)^2 - 8.64^2.\,\varphi = \text{τετράγωνος, ἢ}$$

$$4\varphi^2 + 4194304 - 24576\varphi = \text{τετράγωνος}$$

ἢ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ 4

$$\varphi^2 + 1048576 - 6144\varphi = \text{τετράγωνος, ἔστω}{=}\xi^2, \text{ (7).}$$

Κατὰ τὴν (2) πρέπει νὰ εἶναι

$$\varphi + 64 = \text{τετράγωνος, ἔστω} = \rho^2, \text{ (8).}$$

Ἐδῶ σταματᾷ τὴν ἀπόδειξιν ὑποδεικνύων τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως δύο ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι συναληθεύουσι καὶ λέγων ὅτι τὰ λοιπὰ εἶναι φανερά.

Ὁ 1048576 ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ $\left(\frac{64^2}{2}\right)^2 : 4$, ἤτοι εἶναι $1048576 = 64.16384 = 64.128^2$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (8) ἐπὶ 16384, ὁπότε αἱ συναληθεύουσαι ἐξισώσεις εἶναι

$$\varphi^2 + 1048576 - 6144\varphi = \xi^2, \ (9)$$

$$1048576 + 16384\varphi = \lambda^2, (10)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\varphi^2 - 22528\varphi = \xi^2 - \lambda^2 = (\xi+\lambda)\ (\xi-\lambda).$$

Ὁ 22528 διαιρεῖται διὰ 11. Ἀναλύομεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἰς γινόμενον παραγόντων, ὁπότε εἶναι

$$11\varphi\left(\frac{\varphi}{11} - 2048\right) = (\xi + \lambda)\ (\xi - \lambda).$$

Θέτομεν $\xi + \lambda = 11\varphi$ καὶ $\xi - \lambda = \frac{\varphi}{11} - 2048$. Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\lambda = \frac{120\varphi + 22528}{22}$ καὶ $\lambda^2 = \left(\frac{120\varphi + 22528}{22}\right)^2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (10) τοῦ λ^2 λαμβάνομεν $14400\,\varphi^2 = 252316\,\varphi$, ἐξ ἧς $\varphi = \frac{39424}{225}$.

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν $y + z + \omega = 4^3$, (11), $\frac{1}{2}yz = \frac{39424}{225}$, (12), ὁπότε κατὰ τὴν (2) εἶναι

$$y + z + \omega + \frac{1}{2}yz = 64 + \frac{39424}{225} = \frac{53824}{225} = \left(\frac{232}{225}\right)^2.$$

Ἐκ τῆς (12) εἶναι $yz = \frac{78848}{225}$. Ἐὰν ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν κληθῇ $\frac{1}{x} = y$, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $\frac{78848}{225}x = z$ καὶ ἐκ τῆς (11) εἶναι $\omega = 64 - \frac{1}{x} - \frac{78848}{225}x$.

Κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\left(64 - \frac{1}{x} - \frac{78848}{225}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \left(\frac{78848}{225}x\right)^2 \text{ ἐξ ἧς } x_1 = \frac{25}{448} \text{ καὶ } x_2 = \frac{9}{176}.$$

Ὅθεν αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι διὰ $x = \frac{25}{448}$, $y = \frac{448}{25}$, $z = \frac{176}{9}$, $\omega = \frac{5968}{225}$ καὶ διὰ

$x = \frac{9}{176}$, $y = \frac{176}{9}$, $z = \frac{448}{25}$, $\omega = \frac{5968}{225}$.

23

$$\omega^2 = \alpha^2 + \alpha, \ (1), \ \frac{\omega^2}{y} = \beta^3 + \beta, \ (2).$$

Θέτει τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου x καὶ τὴν ἄλλην x^2· Κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα θὰ εἶναι $\omega^2 = x^2 + x^4$, (3) καὶ διὰ διαιρέσεως διὰ x εἶναι $\frac{\omega^2}{x} = x + x^3$ πληρουμένων οὕτω καὶ τῶν δύο ἐπιταγμάτων συναρτήσει τοῦ x. Ἐκ τῆς (3) διὰ διαιρέσεως διὰ x^2 λαμβάνεται $x^2+1 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (x-2)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{3}{4}$. Θὰ εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογ. τριγώνου $\frac{3}{4}$, ἡ ἄλλη $\frac{9}{16}$ καὶ ἡ ὑποτείνουσα $\frac{15}{16}$.

24.

$$y = \alpha^3, \ (1) \ z = \beta^3 - \beta, \ (2), \ \omega = \gamma^3 + \gamma, \ (3).$$

Θέτει $\omega = x^3 + x$, $z = x^3 - x$, ὁπότε θὰ εἶναι $y = \sqrt{(x^3+x)^2 - (x^3-x)^2} = 2x^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $2x^2 = \alpha^3$, ἔστω $= x^3$, ἐξ ἧς $x = 2$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι $y = 8$, $z = 6$, $\omega = 10$.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ
ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τῆς προόδου $1 + 2 + 3 \ldots . + \nu$ πᾶν μερικὸν ἄθροισμα καλεῖται τρίγωνος ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$\sigma_1 = 1$	πρῶτος τρίγωνος ἀριθμὸς
$\sigma_2 = 1+2 = 3$	δεύτερος » »
$\sigma_3 = 1 + 2 + 3 = 6$	τρίτος » »
. . . .	. . . .
$\sigma_\nu = 1 + 2 + 3 + \ldots . + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$,	νυοστὸς » »

Πλευρὰ παντὸς τριγώνου ἀριθμοῦ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῶν ὁποίων οὗτος εἶναι ἄθροισμα. Γωνίαι παντὸς τριγώνου ἀριθμοῦ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

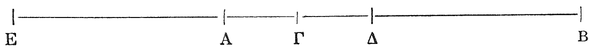
Τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν τριγώνων ἀριθμῶν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός : $\frac{1}{2}\nu\ (\nu - 1) + \frac{1}{2}\nu(\nu + 1) = \nu^2$

Τὸ ὀκταπλάσιον παντὸς τριγώνου ἀριθμοῦ σὺν 1 εἶναι τετράγωνος : $8.\ \frac{1}{2}(\nu + 1)\ \nu + 1 = (2\nu + 1)^2$. Τὸ θεώρημα τοῦτο μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου [VI,38] καὶ τοῦ Πλουτάρχου, Πλατωνικὰ ζητήματα (1003 F).

Τῆς προόδου $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots . + 2\nu - 1$ πᾶν μερικὸν ἄθροισμα καλεῖται τετράγωνος ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα πλευρὰ παντὸς πολυγώνου ἀριθμοῦ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου ὁ πολύγωνος ἀριθμὸς ὀνομάζεται.

1.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου $AB > B\Gamma > B\Delta$ καὶ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων $A\Gamma = \Gamma\Delta$. Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $8AB.\,B\Gamma + B\Delta^2 = (AB + 2B\Gamma)^2$, (1).



Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A\Gamma = \Gamma\Delta$, $AB = B\Gamma + A\Gamma$, $B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta$. Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) γράφεται

$$8\,AB\,.\,B\Gamma = 4\,AB\,.\,B\Gamma + 4\,AB\,.\,B\Gamma$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ $AB = B\Gamma + A\Gamma$ εἰς τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ β'. μέλους λαμβάνομεν

$$8\,AB\,.\,B\Gamma = 4AB\,.\,B\Gamma + 4\,(B\Gamma + A\Gamma)\,B\Gamma = 4AB.B\Gamma + 4\,A\Gamma\,.\,B\Gamma + 4B\Gamma^2.$$

Ἐπειδὴ $A\Gamma = \Gamma\Delta$ θὰ ἔχωμεν

$$8\,AB\,.\,B\Gamma = 4\,AB\,.\,B\Gamma + 4\,\Gamma\Delta\,.\,B\Gamma + 4\,B\Gamma^2$$

Διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $B\Delta^2$ ἔχομεν

$$8\,AB\,.\,B\Gamma + B\Delta^2 = 4AB\,.\,B\Gamma + 4\Gamma\Delta\,.\,B\Gamma + 4B\Gamma^2 + B\Delta^2 \qquad (2).$$

Τώρα ἐφαρμόζει τὸ [II, 8] τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καθ' ὅ, ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ (ἡ $B\Gamma$) τμηθῇ ὡς ἔτυχεν (κατὰ τὸ σημεῖον Δ) θὰ εἶναι $4\Gamma\Delta\,.\,B\Gamma + B\Delta^2 = (B\Gamma + \Gamma\Delta)^2$. [Σημ. Ἐὰν $\Gamma\Delta = \alpha$, $\Delta B = \beta$, τὸ εὐκλείδειον θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ταὐτότητα $4\alpha\,(\alpha+\beta) + \beta^2 = (2\alpha+\beta)^2$]. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $8AB\,.\,B\Gamma + B\Delta^2 = 4AB\,.\,B\Gamma + 4\,B\Gamma^2 + (B\Gamma + \Gamma\Delta)^2$. Ἐπειδὴ $\Gamma\Delta = A\Gamma$ καὶ συνεπῶς $B\Gamma + \Gamma\Delta = A\Gamma + B\Gamma = AB$ θὰ εἶναι $= 4AB\,.\,B\Gamma + 4B\Gamma^2 + AB^2$, (3). Λαμβάνει $AE = B\Gamma$, ὁπότε ἡ (3) γίνεται $= 4AB\,.\,AE + 4AE^2 + AB^2$. Ἐπειδὴ $AB = BE - AE$ (ἐκ τοῦ σχήματος) θὰ ἔχωμεν $= 4\,(BE - AE)\,AE + 4AE^2 + (BE - AE)^2$ $= (BE + AE)^2$. Ἐπειδὴ $BE = BA + AE$ (ἐκ τοῦ σχήματος), θὰ ἔχωμεν $= (\,BA + 2AE\,)^2$, ἢ ἐπειδὴ $AE = B\Gamma$ θὰ εἶναι $= (\,AB + 2B\Gamma\,)^2$, ὅ. ἔ. δ.

[Σημ. Ἐὰν δηλ. οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι τῆς προόδου εἶναι $\alpha + \delta$, $\alpha + 2\delta$, $\alpha + 3\delta$ θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα $8\,(\alpha + 3\delta)\,(\alpha + 2\delta) = [\,(\alpha + 3\delta) + 2\,(\alpha + 2\delta)\,]^2$].

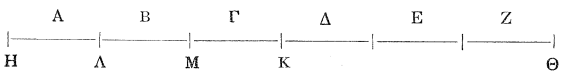
2.

Ἔστω ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου δ, ὁ πρῶτος ὅρος α, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τ. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι $\tau - \alpha = (\nu - 1)\delta$.

3.

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $\Sigma = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \ldots\ldots + \mathrm{Z}$ μὲ πλῆθος ὅρων ν. Ἀποδεικνύεται ὅτι $(\mathrm{A}+\mathrm{Z})\nu = 2(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\ldots+\mathrm{Z})$, ἢ $\Sigma = \left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{Z}}{2}\right)\nu$.

1. Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἀποτελοῦντες ἀριθμ. πρόοδον καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν ν ἀριθμὸς ἄρτιος = ΗΘ.



Ἂς τμηθῇ ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμὸς ΗΘ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Κ καὶ ἂς διαιρεθῇ ὁ ΗΚ εἰς τὰς μονάδας του κατὰ τὰ σημεῖα Λ, Μ (ἤτοι $\mathrm{H\Lambda} = \mathrm{\Lambda M} = \mathrm{MK} = 1$).

Ἐπειδὴ $\mathrm{Z} - \Delta = \Gamma - \mathrm{A}$, εἶναι $\mathrm{Z} + \mathrm{A} = \Gamma + \Delta$, (1).

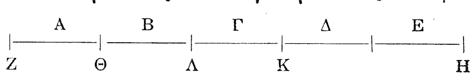
Ἀλλὰ $\mathrm{Z}+\mathrm{A} = (\mathrm{Z}+\mathrm{A}).\ \mathrm{H\Lambda}$. Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{H\Lambda} = \mathrm{\Lambda M}$ εἶναι ἐκ τῆς (1) $\Gamma+\Delta = (\mathrm{Z}+\mathrm{A}).\ \mathrm{\Lambda M}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $\mathrm{E}+\mathrm{B} = (\mathrm{Z}+\mathrm{A}).\ \mathrm{MK}$. Καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εἶναι

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}+\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}+\mathrm{A})\,(\mathrm{H\Lambda}+\mathrm{\Lambda M}+\mathrm{MK}). \qquad (2)$$

Ἀλλὰ $\mathrm{H\Lambda}+\mathrm{\Lambda M}+\mathrm{MK} = \frac{\mathrm{H\Theta}}{2} = \frac{\nu}{2}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (2), $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}+\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}+\mathrm{A})\,\frac{\nu}{2} = \Sigma$ ἢ $2\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}+\mathrm{Z}) = (\mathrm{Z}+\mathrm{A})\nu$.

2. Ἔστω $\nu = \mathrm{ZH}$ περιττὸς καὶ ἡ πρόοδος $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}$.



Ἂς ληφθῇ $\mathrm{Z\Theta} = 1$ καὶ ἂς τμηθῇ ὁ ΘΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Κ καὶ ἂς διαιρεθῶσι τὰ δύο τμήματα εἰς τὰς μονάδας των $\mathrm{\Theta\Lambda} + \mathrm{\Lambda K}\ldots = 1$.

Ἐπειδὴ $\text{Ε}-\Gamma=\Gamma-\text{Α}$ θὰ εἶναι $\text{Ε}+\text{Α}=2\Gamma=2\,\Gamma.\,\Lambda\text{Κ}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $\text{Β}+\Delta=2\Gamma=2\Gamma.\Lambda\Theta$. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εἶναι $\text{Α}+\text{Β}+\Delta+\text{Ε}=2\Gamma(\Lambda\text{Κ}+\Lambda\Theta)=2\Gamma.\,\Theta\text{Κ}$. Ἀλλὰ $2\,\Theta\text{Κ}=\Theta\text{Η}$. Ὥστε εἶναι $\text{Α}+\text{Β}+\Delta+\text{Ε}=\Gamma.\ \Theta\text{Η}$, (1). Ἀλλὰ $\Gamma=\Gamma.\ \Theta\text{Ζ}$. Διὰ προσθέσεως τούτου εἰς τὴν (1) εἶναι $\text{Α}+\text{Β}+\Gamma+\Delta+\text{Ε}=\Gamma\,(\Theta\text{Ζ}+\Theta\text{Η})=\Gamma.\ \text{ΖΗ}$, (2) Ἀλλὰ $(\text{Α}+\text{Ε}).\ \text{ΖΗ}=2\,\Gamma.\ \text{ΖΗ}$. Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (2) $2\,(\text{Α}+\text{Β}+\Gamma+\Delta+\text{Ε})=(\text{Α}+\text{Ε}).\ \text{ΖΗ}$. Εἶναι δὲ $\text{ΖΗ}=\nu$.

4.

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῆς μορφῆς

$$\Sigma=1+(1+\delta)+(1+2\delta)+\ldots\ldots+[1+(\nu-1)\,\delta]$$

εἶναι $\Sigma.\ 8\delta+(\delta-2)^2=[\,2+(2\nu-1)\,\delta\,]^2$.

Ἔστωσαν οἱ ὅροι τῆς προόδου οἱ 1, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ΗΘ $(=\nu)$ καὶ Σ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἀφοῦ $\delta=\text{ΑΒ}-1$ θὰ εἶναι κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα

$$\text{ΕΖ}-1=(\text{Η}\Theta-1)(\text{ΑΒ}-1),\ (1)$$

Ἔστω $\text{ΑΚ}=\text{Ε}\Lambda=\text{ΗΜ}=1$. Ἐπειδὴ $\text{ΕΖ}-1=\Lambda\text{Ζ}$, $\text{ΑΒ}-1=\text{ΚΒ}\,(=\delta)$, $\text{Η}\Theta-1=\text{Μ}\Theta\ (=\nu-1)$ θὰ εἶναι ἐκ τῆς (1)

$$\Lambda\text{Ζ}=\text{ΚΒ}.\ \text{Μ}\Theta,\ (2).$$

Ἔστω $\text{ΚΝ}=2$, ὁπότε $\text{ΝΒ}=\text{ΚΒ}-2$, (ἐκ τοῦ σχήματος).

Ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\Sigma.\ 8\text{ΚΒ}+\text{ΝΒ}^2=[\,2+(\text{Η}\Theta+\Theta\text{Μ})\,\text{ΚΒ}\,]^2,\ (3).$$

($\text{ΚΒ}=\delta$, $\text{ΝΒ}=\delta-2$, $\text{Η}\Theta+\Theta\text{Μ}=2\nu-1$, ἐκ τοῦ σχήματος)

Ἐπειδὴ $\Sigma=\frac{1}{2}\,(\text{ΖΕ}+\text{Ε}\Lambda)\ \Theta\text{Η}\ (\text{ΖΕ}=\tau,\ \text{Ε}\Lambda=\alpha,\ \Theta\text{Η}=\nu)$ καὶ $\text{ΖΕ}=\text{Ε}\Lambda+\Lambda\text{Ζ}$ θὰ εἶναι $\Sigma=\frac{1}{2}\,(\Lambda\text{Ζ}.\ \text{Η}\Theta+2\ \text{Η}\Theta)$, ἀφοῦ $\text{Ε}\Lambda=1$.

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ΛΖ ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν

$$\Sigma=\frac{1}{2}\,(\text{ΚΒ}.\ \text{Μ}\Theta.\ \text{Η}\Theta+2\text{Η}\Theta) \qquad (4).$$

Διαιροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΜΘ $(=\nu-1)$ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ξ, ὁπότε $\frac{\text{Μ}\Theta}{2}=\Theta\Xi$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν $\Sigma = \text{ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ} + \text{ΗΘ}$ (5).

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν

$(\text{ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ} + \text{ΗΘ})\ 8\text{ΚΒ} + \text{ΝΒ}^2 = [2 + (\text{ΗΘ} + \text{ΘΜ})\,\text{ΚΒ}]^2$, (6).

Πρέπει τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ δεύτερον.

$$(\text{ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ})\ \text{ΚΒ} = \text{ΗΘ. ΘΞ. ΚΒ}^2$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 8 ἔχομεν

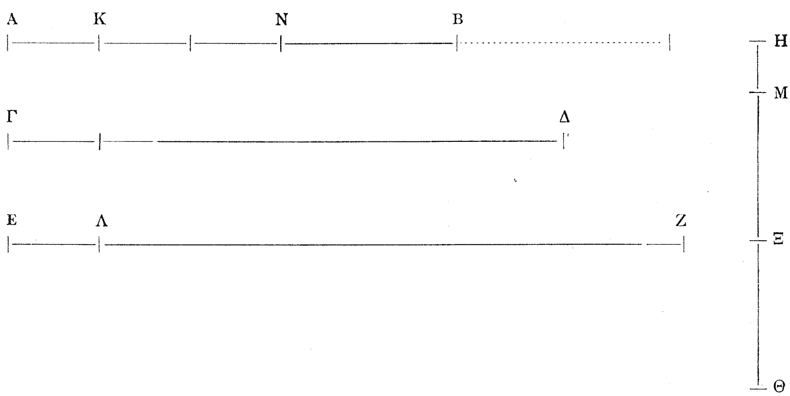
$$8(\text{ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ})\ \text{ΚΒ} = 8\ \text{ΗΘ. ΘΞ. ΚΒ}^2.$$

Ἐπειδὴ $\text{ΘΞ} = \frac{\text{ΘΜ}}{2}$ θὰ ἔχωμεν

$$8(\text{ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ})\ \text{ΚΒ} = 4\ \text{ΗΘ. ΘΜ. ΚΒ}^2$$

Δ' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) λαμβάνομεν

$4\ \text{ΗΘ. ΘΜ. ΚΒ}^2 + 8\ \text{ΗΘ. ΚΒ} + \text{ΝΒ}^2 =$ τετράγωνος, (7).



Ἀλλὰ $8\ \text{ΗΘ} = 4\ \text{ΗΘ} + 4\ \text{ΘΜ} + 4\ \text{ΗΜ}$, (ἐκ τοῦ σχήματος),

ἢ $8\ \text{ΗΘ} = 4\,(\text{ΗΜ} + \text{ΘΜ}) + 4\text{ΗΘ}$ καὶ

$$\begin{aligned} 8\ \text{ΗΘ. ΚΒ} &= 4\,(\text{ΗΜ} + \text{ΘΜ})\,\text{ΚΒ} + 4\ \text{ΗΘ. ΚΒ} \\ &= 4\ \text{ΗΜ. ΚΒ} + 4\ \text{ΘΜ. ΚΒ} + 4\text{ΗΘ. ΚΒ} \\ &= 4\ \text{ΗΜ. ΚΒ} + 4\ (\text{ΗΘ} + \text{ΘΜ})\ \text{ΚΒ}. \end{aligned}$$

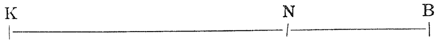
Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ 8 ΗΘ. ΚΒ εἰς τὴν (7) λαμβάνομεν $4\text{ΗΘ. ΘΜ. ΚΒ}^2 + 4\,\text{ΗΜ.ΚΒ} + 4\ (\text{ΗΘ}+\text{ΘΜ})\ \text{ΚΒ} + \text{ΝΒ}^2$ = τετράγωνος, (8).

Ἀλλὰ $4\text{ΗΜ. ΚΒ} = 2\,\text{ΝΚ. ΚΒ}$, (ΝΚ ἐλήφθη = 2, ΗΜ = 1).

Διὰ προσθέσεως εἰς ταύτην τοῦ ΝΒ^2 ἔχομεν

$$4\ \text{ΗΜ. ΚΒ} + \text{ΝΒ}^2 = 2\,\text{ΝΚ. ΚΒ} + \text{ΝΒ}^2,\ (9).$$

Κατὰ τὸ [ΙΙ,7] τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐὰν εὐθεῖα τις (ἡ ΚΒ) τμηθῇ ὡς ἔτυχεν (κατὰ τὸ σημεῖον Ν) θὰ εἶναι



$$\mathrm{KB}^2 + \mathrm{NK}^2 = 2\,\mathrm{NK}.\ \mathrm{KB} + \mathrm{NB}^2$$

('Εκ τῆς σχέσεως $\mathrm{KB} - \mathrm{NK} = \mathrm{NB}$, $(\mathrm{KB} - \mathrm{NK})^2 = \mathrm{NB}^2$)

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) θὰ ἔχωμεν

$$4\mathrm{HM}. + \mathrm{KB} + \mathrm{NB}^2 = \mathrm{KB}^2 + \mathrm{NK}^2.$$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τούτου εἰς τὴν (8) εἶναι

$4\mathrm{H\Theta}.\ \mathrm{\Theta M}.\ \mathrm{KB}^2 + 4(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})\mathrm{KB} + \mathrm{KB}^2 + \mathrm{NK}^2 =$ τετράγωνος, (10).

'Επειδὴ $\mathrm{KB}^2 = \mathrm{HM}^2.\ \mathrm{KB}^2$, $(\mathrm{HM} = 1)$, ἡ (10) γράφεται

$4\,\mathrm{H\Theta}.\ \mathrm{\Theta M}.\ \mathrm{KB}^2 + 4(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})\,\mathrm{KB} + \mathrm{HM}^2.\ \mathrm{KB}^2 + \mathrm{NK}^2 =$ τετράγωνος, (11).

Κατὰ τὸ [ΙΙ, 8] τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐὰν εὐθεῖα τις (ἡ ΗΘ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ σημεῖον Μ) θὰ εἶναι

$$4\,\mathrm{H\Theta}.\ \mathrm{\Theta M} + \mathrm{HM}^2 = (\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})^2, \qquad (12).$$

('Εὰν κληθῇ $\mathrm{HM} = \alpha$, $\mathrm{M\Theta} = \beta$, τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ταὐτότητα $4(\alpha + \beta)\beta + \alpha^2 = (\alpha + 2\beta)^2$).

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (12) ἐπὶ KB^2 λαμβάνομεν

$$4\,\mathrm{H\Theta}.\ \mathrm{\Theta M}.\ \mathrm{KB}^2 + \mathrm{HM}^2.\ \mathrm{KB}^2 = (\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})^2.\ \mathrm{KB}^2.$$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (11) ἔχομεν

$(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})^2.\ \mathrm{KB}^2 + 4(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})\ \mathrm{KB} + \mathrm{NK}^2 =$ τετράγωνος, (13).

'Εὰν λάβωμεν $(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})\mathrm{KB} = \mathrm{N}\xi$ $(= (2\nu - 1)\,\delta)$, (14) θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})^2.\ \mathrm{KB}^2 = \mathrm{N}\xi^2$. (Τοῦτο τὸ ἀποδεικνύει κατόπιν γεωμετρικῶς). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (13) λαμβάνομεν

$$\mathrm{N}\xi^2 + 4\mathrm{N}\xi + \mathrm{NK}^2 = \text{τετράγωνος}, \ (15).$$

'Αλλὰ $4\mathrm{N}\xi = 2\mathrm{N}\xi.\ \mathrm{NK}$ (ἀφοῦ $\mathrm{NK} = 2$).

'Η (15) ἄρα γράφεται $\mathrm{N}\xi^2 + 2\mathrm{N}\xi.\ \mathrm{NK} + \mathrm{NK}^2 =$ τετράγωνος, ἢ $\mathrm{N}\xi^2 + 2\,\mathrm{N}\xi.\mathrm{NK} + \mathrm{NK}^2 = (\mathrm{N}\xi + \mathrm{NK})^2 = \mathrm{K}\xi^2$, (ἐκ τοῦ σχήματος), (16).

Εἰς $\mathrm{K}\xi^2$ μετεσχηματίσθη τὸ α'. μέλος τῆς (3).

'Αλλὰ $\mathrm{K}\xi - 2 = \mathrm{N}\xi = (\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})\ \mathrm{KB}$, (ἐκ τῆς 14) καὶ ἔχει ληφθῇ $\mathrm{NK} = 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (16) λαμβάνομεν $[(\mathrm{H\Theta} + \mathrm{\Theta M})\ \mathrm{KB} + 2]^2 = \mathrm{K}\xi^2$, ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδειχθῇ κατὰ τὴν (3).

Καὶ εἶναι $HΘ = ν$, $ΘM = ν - 1$, $KB = δ$. Ἑπομένως $[1 + (1 + δ) + (1 + 2δ) + ... (1 + (ν - 1) δ)]\, 8δ + (δ - 2)^2 = Kξ^2 = [2 + (2ν - 1) δ]^2$.

Τὸ ὑπερτεθὲν δεῖξαι, εἶναι γεωμετρικὴ ἀπόδειξις ὅτι δυνάμεθα τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως.

Ἐὰν $Σ = 1 + (1 + δ) + (1 + 2δ) + ... + [1 + (ν - 1) δ]$, (1) θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρ. 4

$$Σ.\ 8\,δ + (δ - 2)^2 = [2 + (2ν - 1)\,δ]^2,\ (2).$$

Θεωρεῖ τώρα τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $(δ - 2) + δ + (δ + 2)$.

Κατὰ τὸ θεώρημα 1 θὰ εἶναι

$$8\,(δ + 2)\,δ + (δ - 2)^2 = [(δ + 2) + 2δ]^2 = (2 + 3δ)^2$$

ἢ $8\,(δ + 2)\,δ + (δ - 2)^2 = [2 + (2.\,2 - 1)\,δ]^2$, (3).

Συγκρίνει τώρα τὰς σχέσεις (2) καὶ (3). Ὁ $(δ+2)$ τῆς (3) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $Σ$ τῆς (2). Ὁ παράγων 2 τοῦ β΄. μέλους τῆς (3) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν παράγοντα $ν$ τοῦ β΄. μέλους τῆς (2). Ὁ $(δ+2)$ ὅμως εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ β΄. μέλους τῆς (1) ἤτοι εἶναι πρόοδος ἔχουσα πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα καὶ συνεπῶς ἐξ ἐκείνων αἵτινες παρέχουσι πολυγώνους ἀριθμούς. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ σχέσεις (3) καὶ (2) ὑπόκεινται εἰς τοὺς αὐτοὺς νόμους (τῶν πολυγωνικῶν προόδων) καὶ ὁ ἀριθμὸς $δ+2=σ_2$ εἶναι πολύγωνος ἀριθμὸς (ἔχων πλευρὰν 2 δηλ. ἄθροισμα δύο ὅρων) καὶ τὸ πολύγωνον ἐξ οὗ προέρχεται καὶ ὀνομάζεται ἔχει γωνίας $δ + 2$ [ἡ διαφορὰ $δ$ ἰσοῦται μὲ $n - 2$· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου $n = δ + 2$], ἕπεται ὅτι κατ' ἀντιστοιχίαν ὁ $Σ$ εἶναι πολύγωνος ἀριθμὸς ἔχων καὶ αὐτὸς ἀριθμὸν γωνιῶν $δ + 2$ καὶ πλευράν, ἤτοι πλῆθος ὅρων τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμα, τὸ $ν$.

Ἐὰν εἰς τὸν προηγούμενον τύπον (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸν $δ$ διὰ τοῦ ἴσου του $n - 2$, ὅπου n τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐξ οὗ προέρχεται ἡ πρόοδος ἡ παρέχουσα τοὺς πολυγώνους ἀριθμοὺς θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς σχέσιν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν

$$\Sigma \cdot 8\ (n-2)+(n-4)^2=[2+(2\nu-1\ (n-2)]^2.$$

Συναποδειχθέντος οὖν καὶ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου....

Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ θεωρ. 4

$$\Sigma \cdot 8\delta+(\delta-2)^2=[2+(2\nu-1)\delta]^2$$

ὅταν γνωρίζωμεν, λέγει, τὸν $n-2=\delta$ καὶ τὸν ν εὑρίσκομεν τὸν

$$\Sigma=\frac{[2+(2\nu-1)\delta]^2-(\delta-2)^2}{8\delta}$$

Διδακτικώτερον δέ, λέγει, θὰ ὑποδείξωμεν τὰ προηγούμενα διὰ τύπων.

Ὁ προηγούμενος τύπος διὰ $\delta=n-2$ γίνεται

$$\Sigma=\frac{[2+(2\nu-1)(n-2)]^2-(n-4)^2}{8(n-2)}$$

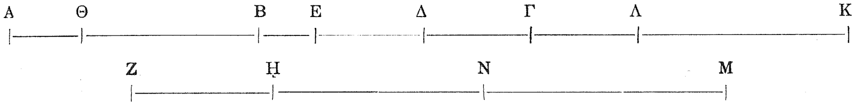
Ἐὰν δοθῇ ὅτι ὁ Σ εἶναι πολύγωνος ἔχων γωνίας $n=\delta+2$ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι

$$\nu=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\Sigma.\ 8\,(n-2)+(n-4)^2}-2}{n-2}+1\right].$$

Εἰς τὸ θεώρ. 4 ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὑπόρριζος ποσότης εἶναι τετράγωνος. Δὲν ἔχει σωθῇ ἀπόδειξις ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι διαιρετὸς διὰ $n-2$ καὶ ὅτι τὸ β′. μέλος εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

Δοθέντος ἀριθμοῦ πολυγώνου νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσους τρόπους δύναται οὗτος νὰ εἶναι πολύγωνος.

Ἔστω ὁ δοθεὶς (πολύγωνος) ἀριθμὸς ΑΒ καὶ ΒΓ ὁ ἀριθμὸς



τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ΒΓ (ὁ $n=\delta+2$, ὅπου δ ἡ διαφορὰ τῆς προόδου ἐκ τῆς ὁποίας ἐσχηματίσθη ὁ πολύγωνος ἀριθμὸς) καὶ ἔστω εἰς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ τὸ τμῆμα $\Gamma\Delta=2$, $E\Delta=2$, $\Gamma E=4$.

Κατὰ τὸ θεώρημα 4 εἶναι

$8\ \mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Delta} + \mathrm{BE}^2 =$ τετράγωνος ($\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{n}$,

$\Gamma\mathrm{E} = 4,\ \mathrm{BE} = \mathrm{B\Gamma} - \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{n} - 4$).

Ἔστω $8\ \mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Delta} + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{ZH}^2$, (1)

Ἐπὶ τῆς AB λαμβάνει $\mathrm{A\Theta} = 1$.

Ἐπειδὴ $8\ \mathrm{AB} = 4 + 4\ (2\ \mathrm{AB} - 1)$ καὶ $2\mathrm{AB} - 1 = \mathrm{AB} + \mathrm{B\Theta}$ (ἐκ τοῦ σχήματος) θὰ εἶναι $8\ \mathrm{AB} = 4\ \mathrm{A\Theta} + 4\ (\mathrm{AB} + \mathrm{B\Theta})$ Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ταύτης ἐπὶ ΒΔ λαμβάνει

$8\ \mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Delta} = 4\ \mathrm{A\Theta}.\ \mathrm{B\Delta} + 4\ (\mathrm{AB} + \mathrm{B\Theta})\ \mathrm{B\Delta}$, $(\mathrm{B\Delta} = \mathrm{n} - 2 = \delta)$.

Ἔστω $4\,(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Theta}) = \Delta\mathrm{K}$, (2), ὁπότε $4\,(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Theta})\ \mathrm{B\Delta} = \Delta\mathrm{K}.\mathrm{B\Delta}$.

Ὁ $4\ \mathrm{A\Theta}.\ \mathrm{B\Delta} = 2\ \mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{E}$ (ἀφοῦ $\Delta\mathrm{E} = 2$, $\mathrm{A\Theta} = 1$), ἤτοι εἶναι $8\ \mathrm{AB}.\ \mathrm{B\Delta} = \Delta\mathrm{K}.\ \mathrm{B\Delta} + 2\ \mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{E}$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) εἶναι

$\mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{K} + 2\ \mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{E} + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{ZH}^2$, (3)

Ἀλλὰ $2\ \mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{E} + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{B\Delta}^2 + \Delta\mathrm{E}^2$ [Κατὰ τὸ [ΙΙ,7] τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καθ' ὃ ἐὰν εὐθεῖα (ἡ ΒΔ) τμηθῇ ὡς ἔτυχεν, (κατὰ τὸ Ε) θὰ εἶναι $\mathrm{B\Delta}^2 + \Delta\mathrm{E}^2 = 2\ \mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{E} + \mathrm{BE}^2$, ἤτοι ἐὰν καλέσωμεν $\mathrm{BE} = \alpha$, $\Delta\mathrm{E} = \beta$, $\mathrm{B\Delta} = \alpha + \beta$ τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ταὐτότητα $2(\alpha+\beta)\,\beta + \alpha^2 = (\alpha+\beta)^2 + \beta^2$].

Ἐκ τῆς (3) ἄρα λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως

$\mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{K} + \mathrm{B\Delta}^2 + \Delta\mathrm{E}^2 = \mathrm{ZH}^2$, (4).

Ἀλλὰ $\mathrm{B\Delta}.\ \Delta\mathrm{K} + \mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{KB}.\ \mathrm{B\Delta}$ [Κατὰ τὸ [ΙΙ, 3], τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καθ' ὃ ἐὰν καλέσωμεν $\mathrm{B\Delta} = \alpha$, $\Delta\mathrm{K} = \beta$, $\mathrm{BK} = \alpha+\beta$, ἀποδεικνύεται ἡ ταὐτότης $\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)\,\beta$] Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἔχομεν $\mathrm{KB}.\ \mathrm{B\Delta} + \Delta\mathrm{E}^2 = \mathrm{ZH}^2$, (5).

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς (2) εἶναι $\Delta\mathrm{K} = 4\,(\mathrm{AB} + \mathrm{B\Theta})$ καὶ ἔχει ληφθῇ $\mathrm{A\Theta} = 1$, θὰ εἶναι $\Delta\mathrm{K} = 4\,(\mathrm{AB} + \mathrm{B\Theta}) > 4\ \mathrm{A\Theta}$ ἤτοι $\Delta\mathrm{K} > 4$. Ἐπειδὴ $\Delta\mathrm{K} = \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{K} > 4$ καὶ ἔχει ληφθῇ $\Delta\Gamma = 2$ ἕπεται $\Gamma\mathrm{K} > \Delta\Gamma$. Κατὰ συνέπειαν, ἐὰν διχοτομήσωμεν τὴν ΔΚ τὸ σημεῖον τῆς διχοτομίας θὰ πέσῃ μεταξὺ τοῦ ΓΚ. Ἔστω τοῦτο τὸ Λ. Εἶναι δὲ $\mathrm{KB}.\ \mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Lambda}^2 - \Lambda\Delta^2$.

[Κατὰ τὸ [ΙΙ,6] τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καθ' ὅ, ἐὰν εὐθεῖα τις (ἡ ΔΚ) τμηθῇ εἰς τὸ μέσον (κατὰ τὸ Λ) προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖα τις (ἡ ΒΔ) θὰ εἶναι

$(ΔΚ+ΒΔ)$ $ΒΔ+ΛΔ^2=(ΛΔ+ΒΔ)^2$. Καὶ ἐπειδὴ $ΔΚ+ΒΔ=ΚΒ$ καὶ $ΛΔ+ΒΔ=ΒΛ$ θὰ εἶναι $ΚΒ.\ ΒΔ+ΛΔ^2=ΒΛ^2$. Ἐκ ταύτης δὲ $ΚΒ.\ ΒΔ=ΒΛ^2-ΛΔ^2$. Ἐὰν καλέσωμεν $ΔΛ=ΛΚ=α$, $ΔΚ=2α$, $ΒΔ=β$, $ΚΒ=2α+β$ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ταὐτότητα $(2α+β)+α^2=(α+β)^2$ ἢ $(2α+β)β=(α+β)^2-α^2$].

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ $ΚΒ.\ ΒΔ$ εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν

$$ΒΛ^2-ΛΔ^2+ΔΕ^2=ΖΗ^2, \text{ ἢ } ΒΛ^2+ΔΕ^2=ΖΗ^2+ΛΔ^2. \text{ ἢ }$$
$$ΛΔ^2-ΔΕ^2=ΒΛ^2-ΖΗ^2, \quad (6).$$

Καὶ εἶναι $ΛΔ^2=ΕΛ.\ ΛΓ+ΔΕ^2$, (7). [Κατὰ τὸ αὐτὸ [II,6] τῶν Στοιχ. τοῦ Εὐκλείδου. Ἡ εὐθεῖα ΕΓ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ καὶ ἔχει προστεθῆ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς ἡ ΓΛ. Θὰ εἶναι ἄρα $(ΕΓ+ΓΛ)$ $ΓΛ+ΔΕ^2=(ΔΓ+ΓΛ)^2$. Καὶ ἐπειδὴ $ΕΓ+ΓΛ=ΕΛ$ καὶ $ΔΓ+ΓΛ=ΛΔ$ θὰ εἶναι $ΕΛ.\ ΓΛ+ΔΕ^2=ΛΔ^2$. Ἐκ ταύτης δὲ $ΛΔ^2-ΔΕ^2=ΕΛ.\ ΓΛ$. Ἡ ἀπόδειξις τῆς αὐτῆς ταὐτότητος. Ἐὰν καλέσωμεν $ΔΕ=ΔΓ=α$, $ΕΓ=2α$, $ΓΛ=β$, $ΕΛ=ΕΓ+ΓΛ=2α+β$ θὰ εἶναι κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα $(2α+β)\,β+α^2=(α+β)^2$]. Ἐκ τῆς (7) εἶναι $ΛΔ^2-ΔΕ^2=ΕΛ\cdot ΛΓ$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (6) ἔχομεν $ΕΛ.\ ΛΓ=ΒΛ^2-ΖΗ^2$, (8).

Λαμβάνει τὴν εὐθεῖαν $ΖΜ=ΒΛ$. [Εἶναι δὲ $ΒΛ > ΖΗ$, διότι κατὰ τὴν (6) εἶναι $ΛΔ^2+ΖΗ^2=ΒΛ^2+ΔΕ^2$, καὶ εἶναι $ΛΔ^2 > ΔΓ^2$, διότι $ΔΓ=ΔΕ\ (=2)$, $ΛΔ=ΛΓ+ΔΓ$, εἶναι ἄρα $ΛΔ > ΔΓ$. Συνεπῶς $ΒΛ^2 > ΖΗ^2$, $ΒΛ > ΖΗ$]. [Σημ. Τοῦτο θεωρεῖται παρεμβολὴ κατὰ τὸν Tannery. Φρονοῦμεν ὅμως ὅτι ἐτέθη διὰ νὰ δείξῃ ὅτι δὲν λαμβάνεται ἀρνητικὴ τιμή]

Ἑπομένως ἡ (8) γίνεται $ΕΛ.\ ΛΓ=ΖΜ^2-ΖΗ^2$, (9). Ἐπειδὴ $ΔΚ=4\,(ΑΒ+ΒΘ$, (κατὰ τὴν (2)) καὶ ἡ ΔΚ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ Λ, θὰ εἶναι $ΔΛ=2\ (ΑΒ+ΒΘ)$.

Ἀλλὰ $ΔΛ=ΓΛ+ΔΓ$, (ἐκ τοῦ σχήματος). Εἶναι ἄρα

$$ΓΛ=ΔΛ-ΔΓ=2\ ΑΒ+2\ ΒΘ-ΔΓ, \quad (10).$$

Ἀλλὰ $ΔΓ=2\,ΑΘ$, $(ΔΓ=2, ΑΘ=1)$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (10) εἶναι $ΓΛ=2ΑΒ+2\ ΒΘ-2\ ΑΘ$, (11).

Εἶναι δὲ $ΑΘ+ΒΘ=ΑΒ$, (ἐκ τοῦ σχήματος), $2ΑΘ+2ΒΘ=2ΑΒ$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (11) ἔχομεν

$$ΓΛ = 4\,ΒΘ \text{ καὶ } ΒΘ = \frac{1}{4}\,ΓΛ, \qquad (12).$$

'Επειδὴ ἔχει ληφθῆ $ΕΔ = ΔΓ = 2$, $ΕΓ = 4$, $ΑΘ = 1$ θὰ εἶναι $ΑΘ = \frac{1}{4}\,ΕΓ$, (13). Διὰ προσθέσεως τῶν (12) καὶ (13) λαμβάνομεν $ΑΘ + ΒΘ = \frac{1}{4}\,(ΓΛ + ΕΓ)$ ἢ $ΑΒ = \frac{1}{4}\,ΕΛ$, (14). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (12) καὶ (14) ἔχομεν $ΑΒ.\,ΒΘ = \frac{1}{16}\,ΕΛ.\,ΓΛ$ ἢ $16\,ΑΒ.\,ΒΘ = ΕΛ.\,ΓΛ$. Καὶ ἐκ τῆς (9) εἶναι

$$ΖΜ^2 - ΖΗ^2 = 16\,ΑΒ.\,ΒΘ, \quad (15).$$

'Αλλὰ $ΖΜ = ΖΗ + ΗΜ$, $ΖΜ^2 = ΖΗ^2 + ΗΜ^2 + 2\,ΖΗ.\,ΗΜ$,

$$ΖΜ^2 - ΖΗ^2 = ΗΜ^2 + 2\,ΖΗ.\,ΗΜ = ΗΜ\,(ΗΜ + 2\,ΖΗ).$$

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (15) εἶναι

$$ΗΜ\,(ΗΜ + 2\,ΖΗ) = 16\,ΑΒ.\,ΒΘ.$$

Κατὰ συνέπειαν ὁ ΗΜ εἶναι ἄρτιος· ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν]. 'Ενταῦθα διακόπτεται τὸ κείμενον. 'Ο Tannery θεωρεῖ τὸ περίφημον τοῦτο πρόβλημα, τοῦ ὁποίου ἐσώθη μικρὸν μόνον μέρος τῆς ἀποδείξεως, ὡς παρεμβολὴν σχολιαστοῦ τινος. Δὲν φαίνεται ὅμως νὰ ἀνταποκρίνεται τοῦτο εἰς τὰ πράγματα.

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΝ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Οἱ ἀριθμοὶ δηλοῦσι σελίδας

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς

17 στίχ. 8 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ Πολυμέρης, νὰ γραφῇ Παχυμέρης

17 στίχ. 3 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ ἐν Ἀραβίᾳ νὰ γραφῇ εἰς τὴν Ἀραβίαν

30 στίχ. 1 ἐκ τῶν κάτω. Ὁλόκληρος ὁ στίχος νὰ γραφῇ :

$$\omega - z = z - y, \quad y + z = \varkappa^2, \quad z + \omega = \lambda^2, \quad \omega + y = \mu^2$$

161 στίχ. 4 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ 65, νὰ γραφῇ 65x

278 εἰς τίτλον. Ἀντὶ Δ′ νὰ γραφῇ Ε′

280 στίχ. 3. Ἀντὶ ταιῶν, νὰ γραφῇ τριῶν

402 στίχ. 3 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ διπλάσιαν νὰ γραφῇ διπλάσιον

475 στίχ. 5 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ $\frac{3x}{x-3}$, νὰ γραφῇ $\frac{3x}{x-3}$.

495 στίχ. 10 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ $\alpha = \varepsilon^2 + \zeta^2 + \eta^2 + \ldots$, ὅπου ε^2, ζ^2, η^2 νὰ γραφῇ $\alpha = E^2 + Z^2 + H^2 + \ldots$, ὅπου E^2, Z^2, H^2

495 στίχ. 7 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ $\beta < \varepsilon,\ \gamma > \zeta,\ \delta > \eta$, νὰ γραφῇ $\beta < \varepsilon,\ \gamma > \zeta,\ \delta > \eta, \ldots$ ὅπου $\varepsilon, \zeta, \eta \ldots$ θὰ προσδιορισθοῦν.

495 στίχ. 3 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ (1, 2, 3), νὰ γραφῇ (1, 3)

496 στίχ. 9 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ $4.\left(\frac{71}{24}\right)$, νὰ γραφῇ $4.\left(\frac{71}{24}\right)^2$

514 στίχ. 4 ἐκ τῶν κάτω. Ἀντὶ ἀνακτασκευὴν νὰ γραφῇ, ἀνακατασκευήν

521 στίχ. 4 Εἰς τὸν παρονομαστὴν ἀντὶ 109769 νὰ γραφῇ 149769

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ ν. 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβερν. 1946 Α′ 108).

ΕΚΔΟΣΙΣ Α′, 1964 (VI) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 2.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ 1167/28-3-63

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΑΘΗΝΩΝ Α. Ε. ΦΩΚΙΔΟΣ 15

Z