ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ

ΑΡΘΡΑ

ΤΟΜΟΣ Α

ΑΘΗΝΑΙ 1972

F 194
Sda

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ

ΑΡΘΡΑ

ΤΟΜΟΣ Α'

ΑΘΗΝΑΙ 1972

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΑ I

῎Η ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ
῎Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ Α΄.

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ
1946

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α΄.

α΄. Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος.

β΄. εἴ κα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο, ᾧ ποτετέθη.

γ΄. ὁμοίως δὲ καί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος, ἀφ᾽ οὗ οὐκ ἀφῃρέθη.

δ΄. τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ᾽ ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ᾽ ἄλλαλα.

ε΄. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐσσεῖται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομες σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ᾽ ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιέοντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς.

στ΄. εἴ κα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει.

ζ΄. παντὸς σχήματος, οὗ κα ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶμεν δεῖ τοῦ σχήματος.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων

α΄.

Τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεα ἴσα ἐντί.

εἴπερ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπέοντα ἴσα ἐντί.

β΄.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον.

ἀφαιρεθείσας γὰρ τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησουντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτετέθη.

γ΄.

Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ μεῖζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μεῖζον το Α, καὶ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μακέων. δεικτέον, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾶς ΓΒ.

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α΄.

α΄. Λαμβάνομεν ὡς αἰτήματα τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μηκῶν (ἐξηρτημένα) νὰ ἰσορροποῦν, τὰ δὲ ἴσα βάρη ἀπὸ ἀνίσων μηκῶν νὰ μὴ ἰσορροποῦν, ἀλλὰ νὰ κλίνῃ (ὁ ζυγὸς) πρὸς τὸ βάρος τὸ ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον μῆκος.

β΄. ἐὰν ὑπάρχουν βάρη ἐξηρτημένα ἀπό τινων μηκῶν ἰσορροποῦντα καὶ εἰς τὸ ἓν τούτων προστεθῇ βάρος, τότε νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἀλλὰ (ὁ ζυγὸς) νὰ κλίνῃ πρὸς τὸ βάρος ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἔγινεν ἡ πρόσθεσις.

γ΄. ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν ἀπὸ τὸ ἓν βάρος ἀφαιρεθῇ τι, νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἀλλὰ νὰ κλίνῃ (ὁ ζυγὸς) πρὸς τὸ μέρος τοῦ βάρους, ἀπὸ τὸ ὁποῖον δὲν ἀφῃρέθη τίποτε.

δ΄. ἐὰν ἴσα καὶ ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα ἐφαρμόζουν ἐπ' ἄλληλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ἐφαρμόζουν ἐπ' ἄλληλα.

ε΄. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ (ἐπιπέδων σχημάτων) τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ κεῖνται ὁμοίως. ὁμοίως δὲ λέγομεν ὅτι σημεῖα κεῖνται πρὸς τὰ ὅμοια σχήματα, τοιαῦτα (σημεῖα), ὥστε αἱ ἐκ τούτων πρὸς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ σχηματίζουν μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίας ἴσας.

στ΄. ἐὰν μεγέθη ἐξηρτημένα ἀπό τινα μήκη (μοχλοβραχίονας) ἰσορροποῦν, καὶ τὰ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἐξηρτημένα ἀπὸ τὰ αὐτὰ μήκη θὰ ἰσορροποῦν.

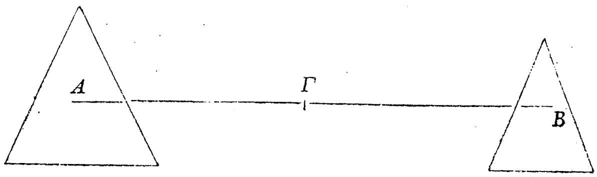
ζ΄. παντὸς σχήματος, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι πάντοτε κοίλη πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ σχήματος. κατόπιν τῶν αἰτημάτων τούτων

α΄.

Τὰ ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροποῦντα βάρη εἶναι ἴσα. διότι ἐὰν εἶναι ἄνισα, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἡ διαφορά, τότε τ' ἀπομένοντα βάρη δὲν θὰ ἰσορροποῦν, ἐπειδὴ ἐν ᾧ εὑρίσκοντο ἐν ἰσορροπίᾳ ἀφῃρέθη βάρος ἀπὸ τὸ ἕν. (αἴτημα γ΄.) ὥστε τὰ ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροποῦντα βάρη εἶναι ἴσα.

β΄.

Τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἄνισα βάρη δὲν ἰσορροποῦν, ἀλλ' ὁ ζυγὸς θὰ κλίνῃ πρὸς τὸ μεγαλύτερον βάρος. διότι ἂν ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ (τοῦ μεγαλυτέρου βάρους ἀπὸ τοῦ μικροτέρου) τότε θὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσορροποῦν. ἐὰν λοιπὸν προστεθῇ τὸ ἀφαιρεθὲν μέρος, ὁ ζυγὸς θὰ κλίνῃ πρὸς τὸ μεγαμὴ γὰρ ἔστω ἐλάσσων. ἀφαιρεθείσας δὴ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφήρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ Β. οὐ ῥέψει δέ· εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ ΓΑ τᾷ ΓΒ, ἰσορροπησοῦντι [τὰ γὰρ ἴσα

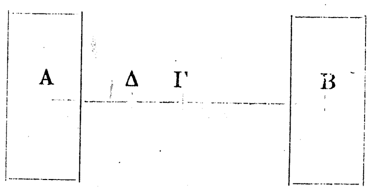


ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων], εἴτε μείζων ἁ ΓΑ τᾶς ΓΒ, ῥέπει ἐπὶ τὸ Α· τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾶς ΓΒ.

φανερὸν δέ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα ἄνισά ἐντι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

δ΄.

Εἴ κα δύο ἴσα μεγέθεα μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος.

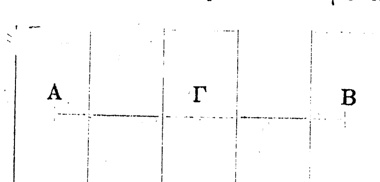


ἔστω τοῦ μὲν Α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Α, τοῦ δὲ Β τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΑΒ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Γ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω [τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β μεγεθῶν] κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Δ, εἰ δυνατὸν [ὅτι γὰρ ἔστιν ἐπὶ τῆς ΑΒ, προδέδεικται]. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ Δ ἰσορροπήσει· τὰ ἄρα Α, Β μεγέθεα ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μακέων· ὅπερ ἀδύνατον [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι]. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ Γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος.

ε΄.

Εἴ κα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.



ἔστω τρία μεγέθεα τὰ Α, Β, Γ, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ Α,Β,Γ λύτερον, ἐπειδὴ ἐν ᾧ ἰσορροποῦσαν προσετέθη βάρος εἰς τὸ ἓν ἐκ τούτων.

γ′

Τὰ ἄνισα βάρη ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν ἐξηρτημένα θὰ ἰσορροπήσουν, καὶ τὸ μεγαλύτερον θὰ εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ μικρότερον μῆκος.

ἔστω ἄνισα βάρη τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ Α, καὶ ὅτι ταῦτα ἰσορροποῦν ἀπὸ τὰ μήκη ΑΓ, ΓΒ. πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΒ. διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι μικροτέρα, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, τότε ἐπειδὴ τὰ βάρη ἦσαν ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ ἀφῃρέθη βάρος ἀπὸ τὸ ἕν, ὁ ζυγὸς θὰ κλίνῃ πρὸς τὸ Β. ἀλλὰ δὲν θὰ κλίνῃ· διότι εἴτε ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ θὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία [διότι εἶναι ἴσα βάρη ἐξηρτημένα ἀπὸ ἴσα μήκη], εἴτε ἡ ΓΑ εἶται μεγαλυνέρα τῆς ΓΒ, ὁπότε ὁ ζυγὸς θὰ κλίνῃ πρὸς τὸ Α· διότι τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν δὲν ἰσορροσοῦν, ἀλλ' ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ μεγαλυτέρου μήκους. διὰ ταῦτα ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΒ. εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν ἰσορροποῦντα βάρη εἶναι ἄνισα καὶ ὅτι μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἐξηρτημένον ἀπὸ τοῦ μικροτέρου μήκους.

δ′.

Ἐὰν δύο ἴσα μεγέθη δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους, τότε τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθῶν ἀποτελουμένου μεγέθους, θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεγεθῶν.

ἔστω τοῦ μὲν μεγέθους Α κέντρον τοῦ βάρος τὸ Α, τοῦ δὲ μεγέθους Β τὸ Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ τῆς ὁποίας μέσον ἔστω τὸ Γ· λέγω ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθῶν (Α, Β) κέντρον βάρους εἶναι τὸ Γ.

διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κέντρον βάρους [τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθῶν ΑΒ] τὸ Δ, [διότι ὅτι θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ ἔχει προαποδειχθῇ]. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β, τοῦτο (τὸ μέγεθος ΑΒ) ἐὰν στηριχθῇ εἰς τὸ Δ θὰ ἰσορροπήσει. ἄρα τὰ μεγέθη Α, Β θὰ ἰσορροπήσουν (ἐξηρτημένα) ἀπὸ τὰ μήκη ΑΔ, ΔΒ· ὅπερ ἀδύνατον [διότι τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν δὲν ἰσορροποῦν]. εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι τὸ Γ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ τὰ Α, Β μεγέθη.

ε′.

Ἐὰν τὰ κέντρα τοῦ βάρους τριῶν μεγεθῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεγέθη ταῦτα ἔχουν ἴσον βάρος ἕκαστον, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν σαμεῖα ἐπ᾽ εὐθείας κείμενα, ἔστω δὲ τά τε Α, Β, Γ ἴσα καὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Γ σαμεῖον.

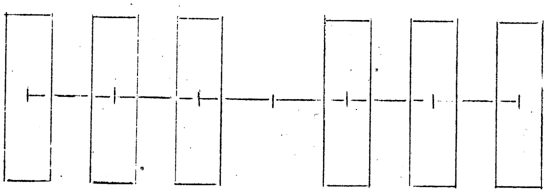
ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον, ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ. ἔστιν δὲ καὶ τοῦ Γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

Πόρισμα Α΄.

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ὁπόσων κα τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ᾽ εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴ κα τά τε ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

Πόρισμα Β΄.

εἴ κα καὶ ἄρτια ἔωντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ᾽ εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ᾽ αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.



στ΄.

Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν.

ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ Α, Β, ὧν κέντρα τὰ Α, Β, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓΕ μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ ποτὶ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα τῷ ΓΕ σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ· ὥστε τῶν ΕΓ, ΓΔ ἐστι κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ Ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ΕΓ ἴσα ἑκατέρα τᾶν ΔΗ, ΔΚ, τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἁ ΕΛ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ ΔΗ τᾷ ΓΕ, ἴσα καὶ ἁ ΔΓ τᾷ ΕΗ· ὥστε καὶ ἁ ΛΕ ἴσα τᾷ ΕΗ. διπλασία ἄρα ἁ μὲν ΛΗ τᾶς ΔΓ, ἁ δὲ ΗΚ τᾶς ΓΕ· ὥστε τὸ Ν καὶ ἑκατέραν τᾶν κέντρων εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τότε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν, θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον βάρους τοῦ μεσαίου μεγέθους.

ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἔστω δὲ ὅτι τὰ (βάρη) Α, Β, Γ, εἶναι ἴσα καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἴσαι. λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ πάντων τῶν μεγεθῶν εἶναι τὸ σημεῖον Γ.

διότι, ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β ἔχουν ἴσον βάρος τὸ κέντρον τοῦ βάρους (αὐτῶν) θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Γ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἴσαι· εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεσαίου μεγέθους.

Πόρισμα Α'.

Ἐκ τούτου ὅθεν εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὁσωνδήποτε τὸ πλῆθος περιττοῦ ἀριθμοῦ μεγεθῶν, τὰ κέντρα τοῦ βάρους κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ μεγέθη τὰ ἀπέχοντα ἰσάκις ἀπὸ τὸ μεσαῖον μέγεθος ἔχουν ἴσον βάρος, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ ὅλα τὰ μεγέθη θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεσαίου ἐξ αὐτῶν.

Πόρισμα Β'.

Καὶ ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων μεγεθῶν εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν κεῖνται ἀπ' εὐθείας καὶ τὰ μεσαῖα τῶν μεγεθῶν αὐτῶν καὶ τὰ ἰσάκις ἀπέχοντα αὐτῶν ἔχουν ἴσον βάρος, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τότε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεγεθῶν.

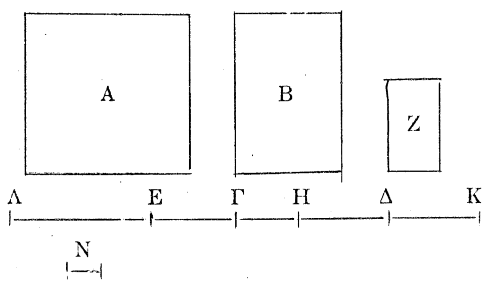
στ'

Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἰσορροποῦν ἀπὸ μήκη ἔχοντα λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν βαρῶν.

ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β τῶν ὁποίων κέντρα τοῦ βάρους εἶναι τὰ Α, Β, καὶ ἔστω τυχὸν μῆκος τὸ ΕΔ καὶ ἂς ὑπάρχῃ ἡ σχέσις Α : Β=μῆκος ΔΓ : μῆκος ΓΕ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθῶν Α, Β τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Γ.

Διότι, ἐπειδὴ Α : Β = ΔΓ : ΓΕ, τὸ δὲ (μέγεθος) Α εἶναι σύμμετρον τοῦ Β, θὰ εἶναι καὶ τὸ (τμῆμα) ΓΔ σύμμετρον πρὸς τὸ ΓΕ, δηλαδὴ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν (σύμμετρος)· ὥστε τῶν εὐθειῶν ΕΓ, ΓΔ ὑπάρχει κοινὸν μέτρον. ἔστω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ Ν καὶ ἂς ληφθῇ ΔΗ=ΔΚ

ΛΗ, ΗΚ μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτᾶν. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, ὡς δὲ ἁ ΔΓ ποτὶ ΓΕ, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α ποτὶ τὸ Β, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ ΛΗ τᾶς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Α ποτὶ Ζ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν. ὥστε τὸ Ζ τῶν Α,Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ.



ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν ΛΕ τᾷ ΗΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἄν, εἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ ΚΗ τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ Β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ Δ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Α ἐπικείμενον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει· δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.

ζʹ.

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν.

ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ ΑΒ, Γ, μάκεα δὲ τὰ ΔΕ, ΕΒ, ἐχέτω δὲ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ ΕΔ ποτὶ τὸ ΕΖ μᾶκος· λέγω, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, Γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε.

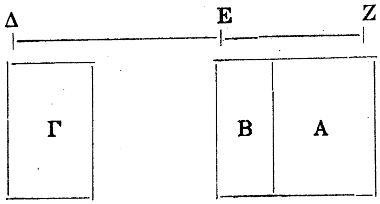
εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπήσει τὸ ΑΒ τεθὲν ἐπὶ τῷ Ζ τῷ Γ τεθέντι ἐπὶ τῷ Δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν [τῷ Γ] ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον,

=ΕΓ καὶ ΕΛ=ΔΓ. καὶ ἐπειδὴ ΔΗ=ΓΕ θὰ εἶναι ΔΓ=ΕΗ· ὥστε ΛΕ =ΕΗ. ἄρα ἡ ΛΗ εἶναι διπλασία τῆς ΔΓ, ἡ δὲ ΗΚ διπλασία τῆς ΓΕ· ὥστε τὸ μέτρον Ν εἶναι κοινὸν διὰ τὰς εὐθείας ΛΗ, ΗΚ, ἐπειδὴ καὶ διὰ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἶναι κοινόν. καὶ ἐπειδὴ Α : Β=ΔΓ : ΓΕ θὰ εἶναι καὶ ΔΓ : ΓΕ=ΛΗ : ΚΗ· διότι ἡ ΛΗ εἶναι διπλασία τῆς ΔΓ καὶ ἡ ΗΚ διπλασία τῆς ΓΕ· ἄρα Α : Β=ΛΗ : ΗΚ. καὶ ὅσας φορὰς ἡ ΛΗ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ Ν, τόσας φορὰς ἂς εἶναι μεγαλύτερον τὸ μέγεθος Α ἀπὸ τὸ μέγεθος Ζ· θὰ εἶναι ἄρα ΛΗ : Ν=Α : Ζ. εἶναι δὲ καὶ ΚΗ : ΛΗ=Β : Α· ἄρα ΚΗ : Ν=Β : Ζ· συνεπῶς ἡ ΚΗ εἶναι τὸ αὐτὸ πολλαπλάσιον τοῦ Ν, ὅπως τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ζ (ἐξ ὑποθέσεως)· ὥστε τὸ Ζ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν μεγεθῶν, Α, Β. ἐὰν διαιρεθῇ λοιπὸν ἡ ΛΗ εἰς ἴσα πρὸς τὸ Ν τμήματα τὸ δὲ μέγεθος Α εἰς ἴσα πρὸς τὸ Ζ μεγέθη, τὰ ἰσομεγέθη τμήματα τῆς *ΛΗ* ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ τὸ Ν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πρὸς τὰ ἰσομεγέθη τμήματα τοῦ Α, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ τὸ Ζ. ὥστε, ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ Ζ, ἔχον τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν αὐτῶν εἶναι τὸ Α, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθῶν τούτων (τῶν ἀποτελούντων τὸ Α) μεγέθους θὰ εἶναι τὸ Ε· διότι τὸ πλῆθος ὅλων τῶν μεγεθῶν τούτων εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ε ἔχει τοποθετηθῇ ἴσον πλῆθος, ἐπειδὴ ΛΕ=ΗΕ. ὁμοίως θ' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς ΚΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ Ζ ἔχον τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος, ὅλα τὰ μεγέθη ταῦτα θ' ἀποτελοῦν τὸ μέγεθος Β καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τούτων θὰ εἶναι τὸ Δ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν τοποθετηθῇ τὸ Α εἰς τὸ Ε τὸ δὲ Β εἰς τὸ Δ. θὰ ὑπάρχουν λοιπὸν μεγέθη ἴσα πρὸς ἄλληλα, κείμενα ἐπ' εὐθείας, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἀπέχουν ἴσον μεταξύ των [ἀποτελοῦντα] κατὰ τὸ πλῆθος ἀριθμὸν ἄρτιον· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν ἀποτελουμένου μεγέθους, εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν μεσαίων μεγεθῶν (πόρισμα Β'). ἐπειδὴ δὲ ΛΕ=ΓΔ ἡ δὲ ΕΓ=ΔΚ, θὰ εἶναι καὶ ὅλη ἡ ΛΓ=ΓΚ· ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Γ. συνεπῶς, ἐὰν τὸ Α κεῖται κατὰ τὸ Ε καὶ τὸ Β κατὰ τὸ Δ, θὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία κατὰ τὸ Γ.

ζ'.

Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρα ἐὰν εἶναι τὰ μεγέθη ὁμοίως θὰ ἰσορροποῦν, ἐὰν ἐξαρτηθοῦν ἀπὸ μήκη ἔχοντα λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν.

καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε [τὸ] λοιπὸν τὸ Α σύμμετρον εἶμεν τῷ Γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ Γ ἢ ἁ ΔΕ ποτὶ ΕΖ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ Α, Γ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν Α ἐπὶ τῷ Ζ, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τῷ Δ. διὰ ταὐτὰ δ', οὐδ' εἴ τὸ Γ μεῖζόν ἐστιν ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ ΑΒ·

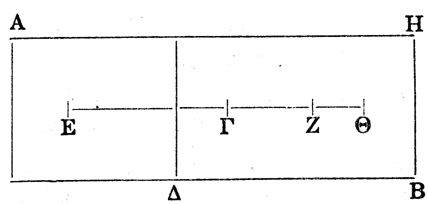


η′.

Εἴ κα ἀπό τινος μεγέθεος ἀφαιρεθῇ τι μέγεθος μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ [τᾶς] ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὰν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος ποτὶ τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας.

ἔστω μεγέθεός τινος τοῦ ΑΒ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ Ε, ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ΕΓ καὶ ἐκβληθείσας ἀπολελάφθω ἁ ΓΖ ποτὶ τὰν ΓΕ λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὸ ΑΔ μέγεθος ποτὶ τὸ ΔΗ· δεικτέον, ὅτι τοῦ ΔΗ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ζ σαμεῖον.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ σαμεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΔ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε, τοῦ δὲ ΔΗ τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΔ, ΔΗ μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΘ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθέμεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν· ὥστε οὐκ ἐσσεῖται τὸ Γ σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλογον τομὰν τᾷ εἰρημένᾳ. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ Γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΗ συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ ΑΒ. ἔστι δέ· ὑπέκειτο γάρ· οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ Θ κέντρον βάρεος τοῦ ΔΗ μεγέθεος.



ϑ′.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶν.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τᾶν ΑΒ, Ἔστω τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη ΑΒ, Γ, μήκη δὲ τὰ ΔΕ, ΕΖ, ἂς ὑπάρχει δὲ ἡ σχέσις ΑΒ : Γ=μῆκος ΕΔ : μῆκος ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν ΑΒ, Γ εἶναι τὸ Ε.

Διότι ἐὰν τὸ μέγεθος ΑΒ τεθὲν εἰς τὸ Ζ δὲν ἰσορροποπήσῃ τὸ μέγεθος Γ τεθὲν εἰς τὸ Δ, ἢ τὸ ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ ἀπὸ τοῦ νὰ ἰσορροπῇ [πρὸς τὸ Γ] ἢ ὄχι. ἔστω ὅτι εἶναι μεγαλύτερον, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ΑΒ μέγεθος (Β) μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν τὸ ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ ἀπὸ τοῦ νὰ ἰσορροποῦν, ὥστε τὸ ἀπομένον μέγεθος Α νὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ μεγέθη Α,Γ εἶναι σύμμετρα καὶ (κατόπιν τῆς ἀφαιρέσεως) Α : Γ <ΔΕ : ΕΖ, δὲν θὰ ἰσορροπήσουν τὰ μεγέθη Α,Γ ἀπὸ τῶν μηκῶν ΔΕ, ΕΖ, τοῦ μὲν Α τεθέντος εἰς τὸ Ζ, τοῦ δὲ Γ εἰς τὸ Δ. διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον (δὲν θὰ ἰσορροπήσουν), ἐὰν τὸ Γ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ ἀπὸ τοῦ νὰ ἰσορροποῦν.

η'.

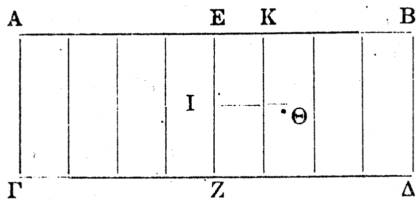
Ἐὰν ἀπό τινος μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθός τι τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἔχῃ τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους πρὸς τὸ ὅλον, τότε τοῦ ὑπολοίπου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι, ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνώνουσα τὰ κέντρα τῶν βαρῶν καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος, καὶ δὴ πρὸς τὸ μέρος ὅπου εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους, καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἐκβληθείσης ταύτης τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ εἰρημένα κέντρα τμῆμά τι, ὥστε τοῦτο νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαν, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἀπομένοντος μεγέθους, τὸ πέρας τῆς οὕτω ληφθείσης εὐθείας.

Ἔστω κέντρον τοῦ βάρους μεγέθους τινὸς ΑΒ τὸ Γ καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ τοῦ ὁποίου ἔστω κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ε, ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΓ καὶ ἀφοῦ αὕτη προεκβληθῇ ἂς ληφθῇ ΓΖ : ΓΕ= μέγεθος ΑΔ : μέγεθος ΑΗ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους ΔΗ εἶναι τὸ σημεῖον Ζ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι τοῦτο, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ σημεῖον Θ. ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν μεγέθους ΑΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ε, τοῦ δὲ ΔΗ τὸ σημεῖον Θ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν ΑΔ, ΔΗ, θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΘ τμηθείσης οὕτω πῶς, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς νὰ ἔχουν λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν· (θεώρ. στ')· ὥστε τὸ σημεῖον Γ δὲν εὑρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ πληροῦται τοιαύτη ἀναλογία· ἄρα τὸ Γ δὲν εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΗ ἀποτελουμένου μεγέθους, δῆλα δὴ τοῦ ΑΒ. ἀλλὰ τοῦτο εἶναι· διότι ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως· συνεπῶς τὸ σημεῖον Θ

ΓΔ ἁ ΕΖ· φαμὶ δή, ὅτι τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ.

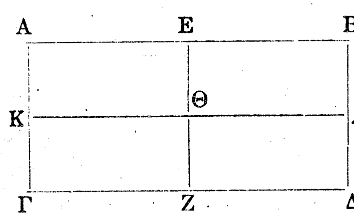
μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΒ ἁ ΘΙ. τᾶς [δὲ] δὴ ΕΒ διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖταί ποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ΙΘ· καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τᾶν ΑΕ, ΕΒ εἰς τὰς τᾷ ΕΚ ἴσας, καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΕΖ· διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὁμοῖα τῷ ΚΖ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ ΚΖ ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα, παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ΚΖ, ἄρτια τῷ πλήθει, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα, καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων αὐτά τε ἴσα ἐντὶ καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι· τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ· τὸ γὰρ Θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΕΖ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου.



ι'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διαμέτροι συμπίπτοντι.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ΕΖ δίχα τέμνουσα τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἁ δὲ ΚΛ τὰς ΑΓ, ΒΔ· ἔστιν δὴ τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΕΖ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς ΚΛ· τὸ Θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ Θ αἱ διαμέτροι τοῦ παλληλογράμμου συμπίπτοντι· ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.



Ἄλλως

ἔστιν δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ ΔΒ. τὰ ἄρα ΑΒΔ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐντὶ καὶ ὁμοῖα ἀλλάλοις· ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα τῶν τριγώνων καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον, καὶ τετμάσθω δίχα ἁ ΔΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΕΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΖΘ ἴσα τᾷ ΘΕ. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ ΑΒΔ δὲν εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους ΔΗ. (ἄρα εἶναι τὸ Ζ).

θ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, καὶ ἡ ΕΖ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΕΖ. διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. ἐὰν ἡ ΕΒ διχοτομεῖται διαρκῶς, θὰ φθάσῃ στιγμὴ ποὺ θὰ ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τμῆμα μικρότερον τῆς ΙΘ· ἂς διαιρεθῇ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΒ εἰς τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ΕΚ, καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΖ· τότε ὅλον τὸ παραλληλόγραμμα θὰ διαιρεθῇ εἰς ἴσα καὶ ὅμοια παραλληλόγραμμα πρὸς τὸ ΚΖ. ἐὰν λοιπὸν τὰ ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὸ ΚΖ παραλληλόγραμμον ἐφαρμόσουν ἐπ' ἄλληλα, τότε θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν (αἴτημα δ΄). θὰ ὑπάρχουν λοιπὸν μεγέθη, παραλληλόγραμμα ἴσα πρὸς τὸ ΚΖ, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος, ἔχοντα τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν ἐπ' εὐθείας, τὰ μεσαῖα ἐξ αὐτῶν ἴσα μεταξύ των καὶ ὅλα τὰ μεγέθη τὰ κείμενα ἑκατέρωθεν τῶν μεσαίων μεγεθῶν ἐπίσης ἴσα καὶ τὰς εὐθείας τὰς μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν βαρῶν τῶν μεγεθῶν τούτων ἴσας· ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεγεθῶν τούτων θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεσαίων μεγεθῶν (πόρισμα Β΄). ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει· διότι τὸ Θ εἶναι ἐκτὸς τῶν μεσαίων παραλληλογράμμων. εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ.

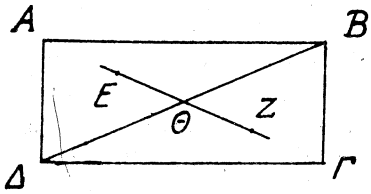
ι΄.

Παντὸς παραλλήλλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον, ὅπου τέμνονται αἱ διάμετροι (αἱ ἑνοῦσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν).

ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἐν αὐτῷ ἡ ΕΖ διχοτομοῦσα τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ΚΛ διχοτομοῦσα τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΒΔ· τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΖ· διότι αὐτὸ ἀπεδείχθη. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ κέντρον τοῦ βάρους εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς ΚΛ· ἄρα τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ κέτρον τοῦ βάρους. ἀλλὰ εἰς τὸ σημεῖον Θ τέμνονται αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως

ἠμπορεῖ ν' ἀποδειχθῇ τὸ ἴδιο καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. ἔστω τὸ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον καὶ τιθεμένας τᾶς μὲν ΑΒ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν ΔΓ, τᾶς δὲ ΑΔ ἐπὶ τὰν ΒΓ, ἐφαρμόξει καὶ ἁ ΘΕ εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ΖΘ,



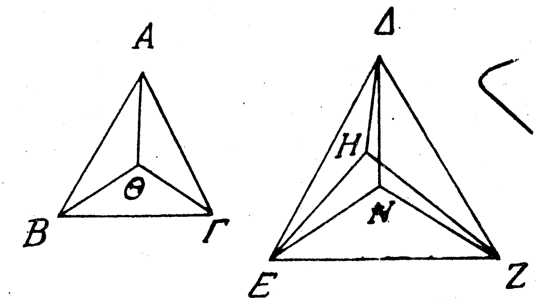
καὶ τὸ Ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΓ τὸ Ζ, δῆλον, ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ μέσον τᾶς ΕΖ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ Θ σαμεῖον.

ια′.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἀλλάλοις ᾖ καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ποτὶ τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σαμεῖον τοῦ, ἐν ᾧ ἐστι, τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ, ἐν ᾧ ἐστι, τριγώνου [ὁμοίως δέ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσας ποιοῦσιν γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς].

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ ΔΖ, οὕτως ἅ τε ΑΒ ποτὶ ΔΕ καὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΕΖ, καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ Θ, Ν [πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα], καὶ ἔστω τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ ΔΕΖ τριγώνου.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η κέντρον βάρεος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΔΝ, ΕΝ, ΖΝ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ τὰ Θ, Η σαμεῖα, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα



[ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας ποτὶ ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς ἕκαστον ἑκάσταις], ἴσα ἄρα ἁ ὑπὸ ΗΔΕ γωνία τᾷ ὑπὸ ΘΑΒ. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ ΘΑΒ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΔΝ [διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ Θ, Ν σαμεῖα]· καὶ ἁ ὑπὸ ΕΔΝ γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΔΗ, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου τὸ Ν σαμεῖον· ἔστιν ἄρα.

ιβ′.

Εἴ κα δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἔωντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐντι ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ἀγοπαραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΔΒ· τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ ὅμοια· ὥστε ἐὰν τὰ τρίγωνα ἐφαρμόσουν ἐπ' ἄλληλα, θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν. ἔστω λοιπὸν τὸ σημεῖον Ε κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΒ κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἑνωθῇ τὸ Ε μὲ τὸ Θ καὶ ἀφοῦ αὕτη προεκβληθῇ, ἂς ληφθῇ ΖΘ=ΘΕ. ἐὰν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, ἀφοῦ τεθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΔΓ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, τότε καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΘ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΖΘ καὶ τὸ σημεῖον Ε θὰ πέσῃ εἰς τὸ Ζ. ἀλλὰ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ε, τοῦ δὲ ΒΔΓ τὸ Ζ, εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων ἀποτελουμένου μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΕΖ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Θ.

ια΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια μεταξύ των καὶ εἰς αὐτὰ ὑπάρχουν σημεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται, τότε καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον τοῦτο κεῖται [λέγομεν δὲ σημεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς ὅμοια σχήματα, ἐκεῖνα ἐκ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς ἴσας γωνίας (πρὸς τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν) σχηματίζουν μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίας ἴσας].

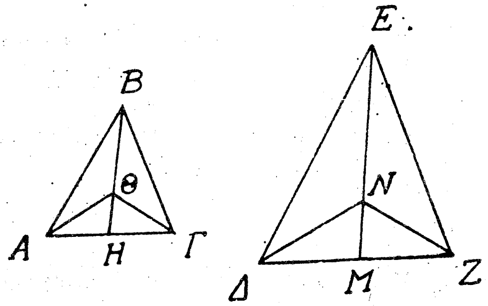
ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἔστω ΑΓ : ΔΖ=ΑΒ : ΔΕ= ΒΓ : ΕΖ καὶ εἰς τὰ εἰρημένα τρίγωνα ἔστω σημεῖα ὁμοίως κείμενα τὰ Θ, Ν [πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ] καὶ ἔστω τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Ν εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

διότι ἐὰν δὲ εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν τὸ σημεῖον Η νὰ εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΔΝ, ΕΝ, ΖΝ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ κέντρα βαρῶν [(τῶν τριγώνων τούτων) εἶναι νὰ σημεῖα Θ, Η, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρῶν κεῖνται ὁμοίως [ὥστε ἕκαστον νὰ σχηματίζῃ μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίας ἴσας], ἡ γωνία ΗΔΕ θα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΑΒ ἀλλὰ ἡ γωνία ΘΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΝ [διότι τὰ σημεῖα Θ, Ν κεῖνται ὁμοίως]· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΕΔΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΗ, ἤτοι ἡ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν. ὅπερ ἀδύνατον· συνεπῶς δὲν ἠμπορεῖ νὰ μὴν εἶναι τὸ σημεῖον Ν κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ· ἄρα εἶναι.

μένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας γραμμᾶς.

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ ΔΖ, οὕτως ἅ τε ΑΒ ποτὶ ΔΕ καὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΖΕ, καὶ τμαθείσας τᾶς ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η ἐπιζεύχθω ἁ ΒΗ, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὰς ΒΗ τὸ Θ· λέγω, ὅτι καὶ τοῦ ΕΔΖ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας.

τετμάσθω ἁ ΔΖ δίχα κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΕΜ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἁ ΒΗ ποτὶ ΒΘ, οὕτως ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΓ, ΔΝ, ΝΖ. ἐπεί ἐστι τᾶς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἁ ΑΗ, τᾶς δὲ ΔΖ ἡμίσεια ἁ ΔΜ, ἔστιν ἄρα καί, ὡς ἁ ΒΑ ποτὶ ΕΔ, οὕτως ἁ ΑΗ ποτὶ ΔΜ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία τᾷ ὑπὸ ΔΜΕ, καί ἐστιν, ὡς ἁ ΑΗ ποτὶ ΔΜ, οὕτως ἁ ΒΗ ποτὶ ΕΜ. ἔστιν δὲ καί, ὡς ἁ ΒΗ ποτὶ ΒΘ, οὕτως ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΝ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ ΒΘ ποτὶ ΕΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἁ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τᾷ ὑπὸ ΕΔΝ· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ ΘΑΓ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΝΔΖ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ ΒΓΘ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΖΝ, ἁ δὲ ὑπὸ ΘΓΗ τᾷ ὑπὸ ΝΖΜ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΑΒΘ τᾷ ὑπὸ ΔΕΜ ἴσα· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ ΘΒΓ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΝΕΖ. διὰ ταῦτα δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, Ν σαμεῖα [ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας ποιεῖ]. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, Ν σαμεῖα, καί ἐστι τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ τὸ Ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ ΔΕΖ.



ιγ'.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀγομένα τὰν βάσιν.

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ βάσιν· δεικτέον, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθω ἁ ΘΙ. ἀεὶ δὴ δίχα τεμνομένας τᾶς ΔΓ ἐσσεῖταί ποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ΘΙ· καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τᾶν ΒΔ, ΔΓ ἐς τὰς ἴσας, καὶ διὰ τᾶν τομᾶν παρὰ τὰν ΑΔ ἄχθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ· ἐσσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν ΒΓ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν ΜΝ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΥΣ, τοῦ δὲ ΚΞ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τᾶς ΤΥ, τοῦ δὲ ΖΟ ἐπὶ τᾶς ΤΔ· τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐὶπ τᾶς ΣΔ εὐθείας.

ιβ'.

Ἐάν δοθοῦν δύο ὅμοια τρίγωνα, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ἥτις ἄγεται ἀπὸ κορυφῆς τινος ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, τότε καὶ τοῦ ἄλλου τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὁμοίας πρὸς ταύτην ἀγομένης γραμμῆς.

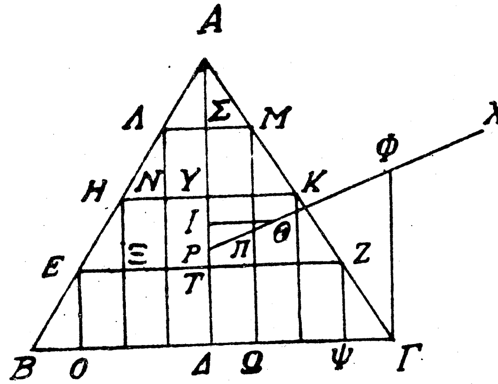
ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ΑΓ : ΔΖ=ΑΒ : ΔΕ= ΒΓ : ΖΕ καὶ ἀφοῦ τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κείμενον ἐπὶ τῆς ΒΗ τὸ σημεῖον Θ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ τριγώνου ΕΔΖ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θά κεῖται ἐπὶ τῆς ὁμοίως ἀγομένης εὐθείας.

ἂς τμηθῇ ἡ ΔΖ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Μ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΜ, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΗ : ΒΘ=ΜΕ : ΕΝ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΘ, ΘΓ, ΔΝ, ΝΖ. ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶνοι τὸ ἥμισυ τῆς ΓΑ καὶ ἡ ΔΜ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΖ, θὰ ὑπάρχει ἡ σχέσις ΒΑ : ΕΔ=ΑΗ : ΔΜ. καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· ἄρα ἡ γωνία ΑΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΜΕ καὶ θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις ΑΗ : ΔΜ=ΒΗ : ΕΜ. εἶναι δὲ καὶ ΒΗ : ΒΘ=ΜΕ : ΕΝ· ἄρα ΑΒ : ΔΕ=ΒΘ : ΕΝ. καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ (ὅπως ἐδῶ), ἡ γωνία ΒΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΝ· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος (τῆς ΒΑΓ) γωνία ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΔΖ. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ μὲν γωνία ΒΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΖΝ, ἡ δὲ γωνία ΘΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΖΜ. ἐδείχθη δὲ ὅτι ἡ γωνία ΑΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΜ· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος (τῆς ΑΒΓ) γωνία ΘΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΕΖ. δι' ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους τὰ σημεῖα Θ, Ν κεῖνται ὁμοίως [σχηματίζουν ἴσας γωνίας πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς]. ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σημεῖα Θ, Ν κεῖνται ὁμοίως καὶ τὸ Θ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι καὶ τὸ Ν κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

ιγ'.

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας ἐπὶ τὸ μέσον τῆς βάσεως (ἐπὶ μιᾶς διαμέσου).

ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ ΑΔ διάμεσος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΔ. διότι ἐὰν δὲν κεῖται, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ σημεῖον Θ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ΔΓ τέμνεται διαρκῶς εἰς τὸ μέσον (καὶ ἕκαστον τμῆμα πρὸς τὴν διεύθυνσιν Δ τέμνεται οὕτω πως) θὰ φθάσῃ στιγμὴ ποὺ θὰ ληφθῇ (ἀπὸ τοῦ Δ) τμῆμα μικρότερον τῆς ΘΙ· ἂς διαιρεθῇ ἑκάστη τῶν ΒΔ, ΔΓ εἰς ἴσα (οὕτω πως) τμήματα καὶ διὰ τῶν το-ἔστω δὴ τὸ Ρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΡΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΔ ἁ ΓΦ. τὸ δὴ ΑΔΓ [τρίγωνον] ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τῷ ΑΔΓ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ, διὰ τὸ ἴσας εἶμεν τὰς ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ ΑΛ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον,



ὃν ἔχει ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ. ἀλλὰ ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΡ ποτὶ ΡΘ· ὁ γὰρ τᾶς ΓΑ ποτὶ ΑΜ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ [ὅλας] τᾶς ΦΡ ποτὶ ΡΠ [διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρίγωνα]· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον ποτὶ τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΡ ποτὶ ΡΘ· ὥστε καὶ διελόντι τὰ ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλόγραμμα ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΘ ποτὶ ΘΡ. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων ποτὶ τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ ΧΘ ποτὶ ΘΡ. ἐπεὶ οὖν ἔστι τι μέγεθος τὸ ΑΒΓ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ, καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλογράμμων, καί ἐστιν τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΡΘ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας ποτὶ τὰν ΘΡ τοῦτον ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα Χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων· ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Χ εὐθείας παρὰ τὰν ΑΔ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταὐτὰ πάντα ἐντί [τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος]. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

Ἄλλως τὸ αὐτό

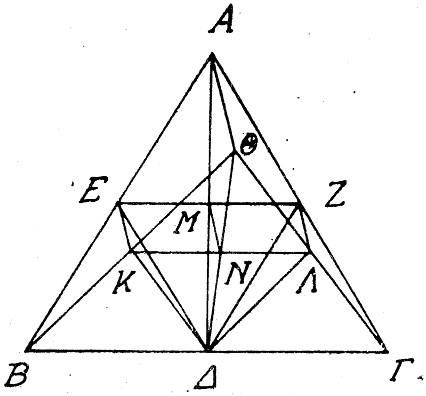
ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἁ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἵ τε ΑΘ, ΘΒ, ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ ἐπὶ μέσας τὰς ΒΑ, ΑΓ, καὶ παρὰ τὰν ΑΘ ἄχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. ἐπεὶ ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ διὰ τὸ παράλληλον εἶμεν τὰν ΒΑ τᾷ ΖΔ, καί ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον, καὶ τοῦ ΖΔΓ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Λ σαμεῖον· ὁμοίως γάρ ἐντι κείμενα τὰ Θ, Λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων [ἐπειδήπερ ποτὶ τὰς μῶν ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ· αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ. τότε τοῦ παραλληλογράμμου ΜΝ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΥΣ, τοῦ ΚΞ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΤΥ, καὶ τοῦ ΖΟ ἐπὶ τῆς ΤΔ· ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΣΔ. ἔστω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ Ρ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΡΘ καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη (πέραν τοῦ Θ) καὶ ἡ ΓΦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἔχει λόγον πρὸς ὅλα τὰ ὅμοια πρὸς αὐτὸ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν κατασκευοσθῇ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ ὃν λόγον ἔχει ἡ ΓΑ : ΑΜ, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἔχει λόγον πρὸς τὰ ὅμοια (πρὸς αὐτὸ) τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν κατασκευασθῇ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ ὃν λόγον ἔχει ἡ ΒΑ : ΑΛ, ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς ὅλα τὰ εἰρημένα τρίγωνα, (τὸ ἄθροισμα αὐτῶν) ὃν ἡ ΓΑ : ΑΜ. ἀλλὰ ΓΑ : ΑΜ $>$ΦΡ : ΡΘ· διότι ΓΑ:ΑΜ$=$ΦΡ : ΡΠ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων]· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα (τὸ ἄθροισμα αὐτῶν), ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἀπὸ τὸν ΦΡ : ΡΘ· ὥστε καὶ τὰ ληφθέντα κατόπιν τῆς διαιρέσεως (τοῦ τριγώνου ΑΒΓ) παραλληλόγραμμα ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ, πρὸς τὰ ἀπομένοντα τρίγωνα ἔχουν λόγον μεγαλύτερον τοῦ ΦΘ : ΘΡ. (τοῦτο στηρίζεται εἰς γνωστὴν σχέσιν τῶν ἀναλογιῶν· ἐὰν $\alpha : \beta > \gamma : \delta$, προκύπτει $(\alpha-\beta) : \beta > (\gamma-\delta) : \delta$). ἂς γίνῃ λοιπὸν ὁ λόγος (τοῦ ἀθροίσματος) τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ἴσος πρὸς ΧΘ : ΘΡ. ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει μέγεθός τι ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ καὶ ἀφῃρέθη ἐξ αὐτοῦ μέγεθος ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰ παραλληλλόγραμμα ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ, καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ρ, τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπομενόντων τριγώνων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΡΘ ἀφοῦ αὐτὴ ἐκβληθῇ καὶ ληφθῇ τμῆμα αὐτῆς ἔχον λόγον πρὸς τὴν ΘΡ ὃν λόγον ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος πρὸς τὸ ἀπομεῖναν (θεώρ. η΄). τὸ σημεῖον ἄρα Χ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν ἀπομενόντων (μικρῶν τριγωνων)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐὰν ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Χ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, ὅλα τὰ (μικρὰ) τρίγωνα μένουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου [δηλ. πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς παραλλήλου]· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως τὸ αὐτό

ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ τέμνουσα εἰς τὸ μέσον τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΔ.

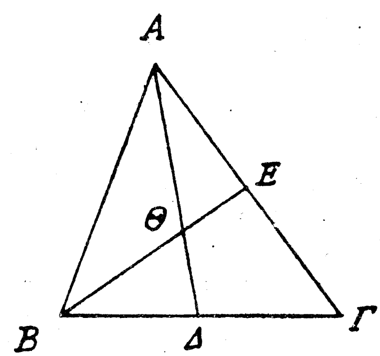
ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιέοντι γωνίας· φανερὸν γὰρ τοῦτο]. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΕΒΔ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Κ σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΕΒΔ, ΖΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τᾶς ΚΛ εὐθείας [ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ ΕΒΔ, ΖΔΓ τρίγωνα]. καί ἐστιν τᾶς ΚΛ μέσον τὸ Ν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἁ ΒΕ ποτὶ ΕΑ, οὕτως ἁ ΒΚ ποτὶ ΘΚ, ὡς δὲ ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΑ, οὕτως ἁ ΓΛ ποτὶ ΛΘ· εἰ δὲ τοῦτο, ἔστιν ἁ ΒΓ τᾷ ΚΛ παράλληλος. καὶ ἐπέζευκται ἁ ΔΘ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ ΔΓ, οὕτως ἁ ΚΝ ποτὶ τὰν ΝΛ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Ν. ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΕΔΖ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΜΝ εὐθείας. ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον· ἁ ΜΝ ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται διὰ τοῦ Θ σαμείου· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου οὐκ ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΑΔ εὐθείας· ἔστιν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.



ιδ'.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τᾶν γωνιᾶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἐπὶ μέσαν τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐφ' ἑκατέρας τᾶν ΑΔ, ΒΕ· δέδεικται γὰρ τοῦτο. ὥστε τὸ Θ σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν.



ιε'.

Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλάλαις τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τᾶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἁ ἴσα τᾷ διπλασίᾳ τᾶς μείζονος μετὰ διότι ἐὰν δὲν κεῖται, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθοῦν αἱ ΑΘ,ΘΒ,ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ ἑνώνουσα (ἡ ΖΕ) τὰ μέσα τῶν ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΘ αἱ ΕΚ, ΖΛ καὶ ἂς ἐπιζευχθοῦν αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΓ, διότι ἡ ΒΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ, θὰ εἶναι καὶ τοῦ τριγώνου ΖΔΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Λ· διότι τὰ σημεῖα Θ, Λ εἶναι ὁμοίως κείμενα εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων [ἐπειδὴ σχηματίζουν πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίας ἴσας· διότι τοῦτο εἶναι φανερὸν] (αἴτημα ε΄.) διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ τριγώνου ΕΒΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Κ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων ΕΒΔ, ΖΔΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΚΛ [ἐπειδὴ βέβαια τὰ τρίγωνα ΕΒΔ, ΖΔΓ εἶναι ἴσα]. καὶ τῆς ΚΛ μέσον εἶναι τὸ Ν, ἐπειδὴ ΒΕ: ΕΑ=ΒΚ : ΘΚ, καὶ ΓΖ : ΖΑ=ΓΛ : ΛΘ· ἐὰν δὲ συμβαίνῃ τοῦτο, ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΛ. καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΘ· τότε θὰ εἶναι ΒΔ : ΔΓ=ΚΝ : ΝΛ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ν. εἶναι δὲ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Μ (θεώρ. ι΄.)· ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ πάντων τούτων (δηλ. τῶν δύο τριγώνων, ΒΕΔ, ΔΖΓ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ) κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΝ. εἶναι δὲ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Θ· ἄρα ἡ ΜΝ ἐκβαλλομένη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Θ· ὅπερ ἀδύνατον· συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ· ἄρα εἶναι ἐπ' αὐτῆς.

ιδ΄.

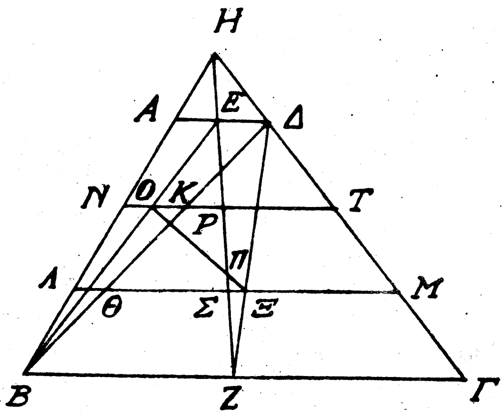
Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον ὅπου συμπίπτουν αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν (κορυφῶν) εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, καὶ ἡ ΒΕ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· θὰ κεῖται λοιπὸν τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΔ, ΒΕ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. ὥστε τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους.

ιε΄.

Παντὸς τραπεζίου ἔχοντος τὰς δύο πλευρὰς παραλλήλους μεταξύ των τὸ κέντρον τοῦ βάρους κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν παραλλήλων, διαιρεθείσης οὕτως, (διὰ τοῦ κέντρου βάρους) ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ ἔχον πέρας τὸ μέσον τῆς μικροτέρας παραλτᾶς ἐλάσσονος ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τᾶν παραλλήλων.

ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ παραλλήλους ἔχον τὰς ΑΔ, ΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν ΑΔ, ΒΓ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς ΕΖ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἐὰν γὰρ ἐκβαλῇς τὰς ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, δῆλον, ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται, καὶ ἐσσεῖται τοῦ ΗΒΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΗΖ καὶ ὁμοίως τοῦ ΑΗΔ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΕΗ· καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΒΔ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθωσαν αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ΔΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶςΘΜ, ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ ΘΒ τᾶς ΒΔ [καὶ διὰ τοῦ Θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἄκται ἁ ΜΘ]. ἔστιν δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΔΒΓ τριγώνου καὶ ἐπὶ τᾶς ΔΖ· ὥστε τὸ Ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τὸ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΟΞ εὐθείας. ἔστιν δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς ΕΖ· ὥστε τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Π σαμεῖον· ἔχοι δ' ἂν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ λόγον, ὃν ἁ ΟΠ ποτὶ ΠΞ. ἀλλ' ὡς τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, οὕτως ἐντὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, ὡς δὲ ἁ ΟΠ ποτὶ ΠΞ, οὕτως ἁ ΡΠ ποτὶ ΠΣ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἁ ΡΠ ποτὶ ΠΣ· ὥστε καί, ὡς δύο αἱ ΒΓ μετὰ τᾶς ΑΔ ποτὶ δύο τὰς ΑΔ μετὰ τᾶς ΒΓ, οὕτως δύο αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ ποτὶ δύο τὰς ΠΣ μετὰ τᾶς ΠΡ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ συναμφότερός ἐστιν ἁ ΣΡΠ, τουτέστιν ἁ ΠΕ, δύο δὲ αἱ ΠΣ μετὰ τᾶς ΠΡ συναμφότερός ἐστιν ἁ ΡΣΠ, τουτέστιν ἁ ΠΖ· δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα.



λήλου πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα, τοῦ διπλασίου τῆς μεγαλυτέρας παραλλήλου μὲ τὴν μικροτέραν πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τῆς μικροτέρας μὲ τὴν μεγαλυτέραν τῶν παραλλήλων.

ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχον παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΒΓ, ἡ δὲ ΕΖ ἃς ἑνώνῃ τὰ μέσα τῶν ΑΔ, ΒΓ. ὅτι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπεζίου κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΖ εἶναι φανερόν. διότι ἐὰν ἐκβάλῃς τὰς ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, εἶναι προφανὲς ὅτι συμπίπτουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ θὰ εἶναι τοῦ τριγώνου ΗΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΗΖ, ὁμοίως δὲ τοῦ τριγώνου ΑΗΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΗ. ἄρα καὶ τοῦ ἀπομένοντος ΑΒΓΔ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΖ. ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΔ ἃς διαιρεθῇ αὕτη διὰ τῶν σημείων Κ, Θ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ δι' αὐτῶν ἃς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ, αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ καὶ ἃς ἀχθοῦν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ· τοῦ τριγώνου ΔΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΘΜ, ἐπειδὴ βέβαια ἡ ΘΒ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΒΔ [καὶ ἡ ΜΘ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν]. εἶναι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΒΓ ἐπὶ τῆς ΔΖ· ὥστε τὸ σημεῖον Ξ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ· ἄρα τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΒΔΓ, ποὺ εἶναι τὸ τραπέζιον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΞ. εἶναι δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἐπὶ τῆς ΕΖ· ὥστε τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Π. εἶναι δὲ τρίγωνον ΒΔΓ : τρίγ. ΑΒΔ=ΟΠ : ΠΞ (θεώρ. στ' καὶ ζ'). ἀλλὰ τρίγωνον ΒΔΓ : τρίγ. ΑΒΔ=ΒΓ : ΑΔ (ἐπειδὴ ἔχουν τὰ αὐτὰ ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις), ὡς δὲ ΟΠ : ΠΞ=ΡΠ : ΠΣ· συνεπῶς ΒΓ : ΑΔ=ΡΠ : ΠΣ· ὥστε 2ΒΓ+ΑΔ : 2ΑΔ+ΒΓ=2ΡΠ+ΠΣ : 2ΠΣ+ΠΡ. ἀλλὰ 2ΡΠ+ΠΣ=ΣΡΠ=ΠΕ, καὶ 2ΠΣ+ΠΡ=ΡΣΠ=ΠΖ. ἀπεδείχθησαν ἄρα τὰ ζητούμενα.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Εἰς τὸ ζ'. ἔστω ὅτι δὲν ὑπάρχει ἰσορροπία καὶ ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ, συνεπείᾳ ὑπεροχῆς τινος τοῦ ΑΒ ἔναντι τοῦ Γ. ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ μέγεθος ΑΒ τὸ Β, ὥστε Α, Γ νὰ γίνουν σύμμετρα, τὸ δὲ Β νὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ΑΒ ἔναντι τοῦ Γ, καὶ ἥτις ὑπεροχὴ ἂν δὲν ὑπῆρχε θὰ ἦτο ἰσορροπία, τότε ὁ ζυγὸς θὰ ἐξακολουθῇ νὰ κλίνῃ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ, ἀφοῦ ἀφῃρέθη ἀπὸ τὸ ΑΒ μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς ἔναντι τοῦ Γ. ἡ σχέσις ὅμως ΑΒ : Γ=ΕΔ : ΕΖ θὰ ἐγίνετο μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ Β, Α : Γ< ΕΔ : ΕΖ ἤτοι ἡ στατικὴ ῥοπὴ Α.ΕΖ< Γ.ΕΔ. δηλαδὴ ὁ ζυγὸς ἔπρεπε νὰ κλίνῃ ὄχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ, ἀλλὰ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Δ· ὅπερ ἀδύνατον. ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ὅταν τὸ Γ ὑπερέχῃ τοῦ ΑΒ. ἀφοῦ ἀποκλείονται αἱ δύο αὐταὶ περιπτώσεις, ἀπομένει ἡ τρίτη, τοῦ νὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία μὲ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὅταν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις ΑΒ : Γ=ΕΔ : ΕΖ.

εἰς τὸ ιγ'. 1) αἱ ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ διότι ἐκ κατασκευῆς ΔΒ=ΔΓ καὶ ΟΒ=ΨΓ. συνεπῶς ΔΒ : ΟΒ=ΔΓ : ΨΓ, ἄρα (ΔΒ−ΟΒ): ΟΒ=(ΔΓ−ΨΓ) : ΨΓ ἤτοι ΔΟ : ΟΒ=ΔΨ : ΨΓ (κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν). ἀλλὰ ΔΟ : ΟΒ=ΑΕ : ΕΒ, διότι ἡ ΕΟ εἶναι παράλληλος ἐκ κατασκευῆς πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ ΔΨ : ΨΓ=ΑΖ : ΖΓ, διότι ἡ ΨΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΔ. συνεπῶς ΑΕ : ΕΒ=ΑΖ : ΖΓ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ. ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς ΗΚ, ΛΜ.—2) τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἔχει τετραπλασίαν βάσιν καὶ τετραπλάσιον ὕψος ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΣΜ. συνεπῶς ὁ λόγος τρίγ. ΑΔΓ=τρίγ. ΑΣΜ=16 : 1, ἡ δὲ ΑΓ : ΑΜ=4 : 1· ἄρα ΑΔΓ : πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν 4 μικρῶν τριγώνων=ΑΓ : ΑΜ. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τρίγ. ΑΔΒ : ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ τριγώνων=ΒΑ : ΑΛ.—3) ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΛΜ, ΒΓ ἔχομεν ΒΑ : ΑΛ=ΓΑ : ΑΜ. ἐὰν καλέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῶν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ τριγώνων διὰ σ_1 καὶ τῶν ἐπὶ ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ διὰ σ_2 θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ΑΔΓ : σ_1=ΓΑ : ΑΜ καὶ ΑΔΒ : σ_2 =ΒΑ : ΑΛ. συνεπῶς ΑΔΓ : ΑΔΒ=σ_1 : σ_2 = ΓΑ : ΑΜ. ἢ (ΑΔΓ+ΑΔΒ) : ΑΔΒ=($\sigma_1+\sigma_2$) : σ_2 ἢ ΑΒΓ : ($\sigma_1+\sigma_2$)=ΑΔΒ : σ_2. ὁ λόγος ὅμως ΑΔΒ : σ_2 εἶναι ἴσος πρὸς ΒΑ : ΑΛ=ΓΑ : ΑΜ καὶ ἡ σχέσις ΑΒΓ : ($\sigma_1+\sigma_2$)=ΓΑ : ΑΜ ἀπεδείχθη.

εἰς τὸ ιε'. ἴδε ἐπεξήγησιν τῶν ἀναλογιῶν εἰς τετραγωνισμὸν παραβολῆς ἔκδ. 1946. ὅτι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ἀπέχει τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς τὸ ἓν τρίτον τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς· ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα τοῦ θεωρ. ιδ' φέρωμεν τὴν ΕΔ αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. ἐὰν λάβω τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΘ, ΘΒ ἔστω Ζ, ΖΗ (λείπουν ἀπὸ τὸ σχῆμα) καὶ τὰ ἑνώσω, ἡ λαμβανομένη εὐθεῖα ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἄρα ἴση πρὸς τὴν ΕΔ. ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν σημείων τούτων πρὸς τὰ Ε καὶ Δ ἀντιστοίχως, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΕΔΗΖ. ἡ ΖΘ=ΘΔ ἄρα ΘΔ=$\frac{1}{3}$ ΑΔ. ὁ Εὐτόκιος ἀποδεικνύει τὴν σχέσιν αὐτὴν μόνον δι' ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΜΕΤΑ
ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ
ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΕΡΓΩΝ

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ :

ΕΙΣ ΤΟΝ ΣΕΒΑΣΤΟΝ ΜΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗΝ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΑΙ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ
κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΝ ΖΕΡΒΟΝ

ΑΘΗΝΑΙ
1946

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ Ἀρχιμήδης εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς Ἕλληνας ἀπὸ τὴν παράδοσιν καὶ τὴν ἱστορίαν τοῦ τραγικοῦ του θανάτου ἀπὸ ἄξεστον Ῥωμαῖον στρατιώτην καὶ ἀπὸ τὴν ὑδροστατικήν του καὶ τὰ θεωρήματα περὶ κύκλου, σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ λεχθὲν ὑπὸ τοῦ Leibnitz, ὅτι «ὁ ἐννοῶν τὸν Ἀρχιμήδην θαυμάζει ὀλιγώτερον τὰς ἐφευρέσεις τῶν νεωτέρων σοφῶν» τότε δὲν εἶναι ὑπερβολή, ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι εἶναι ὁ μεγαλύτερος μαθηματικὸς ποὺ ἐγέννησε μέχρι σήμερον ἡ ἀνθρωπότης.

Ὁ σκοπὸς τῆς ἀποδόσεως τῶν ἔργων του εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν εἶναι νὰ ἱκανοποιήσῃ κατὰ τὸ δυνατὸν τὴν ἐπιθυμίαν ἐκείνων τῶν φιλομαθῶν, οἱ ὁποῖοι θέλουν νὰ ἴδουν καὶ νὰ θαυμάσουν ἀπὸ κοντὰ τὸ πνεῦμα ἐρεύνης τοῦ μεγίστου τῶν Μαθηματικῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Δυσκολίαι γλωσσικαί, ἀλλὰ καὶ δυσκολίαι προερχόμεναι ἀπὸ τὴν ἔλλειψιν τῆς σχετικῆς βιβλιογραφίας ἐν Ἑλλάδι, καθιστοῦν τὴν προσπάθειάν μου ὄχι εὔκολον. Λόγοι καθαρῶς ἐκδοτικοὶ μὲ ἠνάγκασαν νὰ παραλείψω τὴν ἔκδοσιν τοῦ ἔργου ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I, εἰς πολλὰ μέρη τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ διὰ τῶν «μηχανικῶν» ἀπόδειξις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος καὶ νὰ προτάξω τὴν ἔκδοσιν τοῦ τετραγωνισμοῦ τῆς παραβολῆς ἢ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὡς τὴν ὀνομάζει ὁ Ἀρχιμήδης. Θὰ ἐπακολουθήσῃ ἡ ἔκδοσις, ὅταν αἱ συνθῆκαι τὸ ἐπιτρέψουν, τῶν ἔργων ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I καὶ II καὶ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, τὰ ὁποῖα ἔχω σχεδὸν ἕτοιμα.

Κατὰ τὴν μετάφρασιν προσεπάθησα νὰ μὴ ἀποστῶ διόλου τοῦ ἀρχαίου κειμένου, ἐχρησιμοποίησα ὅμως τοὺς σημερινοὺς συνήθεις ὅρους ἐκφράσεως. Ἐντὸς παρενθέσεως ἔθεσα λέξεις ἢ προτάσεις αἱ ὁποῖαι δὲν προέρχονται ἐκ μεταφράσεως. Αὗται ἐτέθησαν πρὸς διευκόλυνσιν τῆς κατανοήσεως τοῦ κειμένου.

Τὸ ἀρχαῖον κείμενον καὶ τὰ σχήματα ἐλήφθησαν ἀπὸ τὴν στερεότυπον ἔκδοσιν τοῦ Δανοῦ Heiberg: Archimedis opera omnia τόμ. II ἔκδοσις 1913 τοῦ ἐκδ. οἴκου Teubner, Λειψία.

Διὰ τὸν «βίον καὶ τὰ ἔργα» τοῦ Ἀρχιμήδους ἐχρησιμοποίησα ὡς πηγὰς 1) Τὰς ἐκδόσεις Heiberg, 2) Tannery, histoire des mathematiques, 3) G. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. 4) E. Hoppe, Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum.

Εἶναι αὐτονόητον ὅτι ὁ «βίος καὶ τὰ ἔργα» τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ περιγραφοῦν εἰς τὸν χῶρον ὀλίγων σελίδων. Ἐλπίζω, ὅτι θὰ εἶμαι εἰς θέσιν, ὅταν αἱ συνθῆκαι βελτιωθοῦν, ν' ἀνταποκριθῶ περισσότερον εἰς τὰς ἀπαιτήσεις μιᾶς πληρεστέρας περιγραφῆς, ἀξίας τοῦ ὀνόματος τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου παρέθεσα ἐπεξηγήσεις πρὸς εὐχερεστέραν κατανόησιν ὡρισμένων θεωρημάτων.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Ο ΒΙΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Ὁ Ἀρχιμήδης ἐγεννήθη εἰς τὰς Συρακούσας, πιθανώτατα τὸ 287 π. Χ. Κατ' ἄλλους ἔζησε μέχρις ἡλικίας 75 ἐτῶν. Ἱστορικῶς εἶναι βέβαιον ὅτι ἐφονεύθη τὸ 212 π.Χ. κατὰ τὴν ἅλωσιν τῶν Συρακουσῶν ἀπὸ τὸν Ρωμαῖον Μάρκελλον. Ἡ παράδοσις ἀναφέρει ὅτι ὅταν ὁ βάρβαρος Ρωμαῖος στρατιώτης ἐπλησίασε διὰ νὰ φονεύσῃ τὸν Ἀρχιμήδην, οὗτος τοῦ εἶπε «μή μου τοὺς κύκλους τάραττε» ἢ «ἀπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε, τοῦ διαγράμματός μου».

Ὁπωσδήποτε ὅμως πρέπει νὰ ἔζησε μακρὸν βίον καὶ τοῦτο ἐξάγεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἦτο φίλος τοῦ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ μαθηματικοῦ Κόνωνος, ὁ ὁποῖος ἀπέθανε τὸ 240 π. Χ. Διὰ τὸν πατέρα του, ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη, ὅτι οὗτος ἦτο ὁ ἀστρονόμος Φειδίας [Ψαμμίτης, σελὶς 220, 9. 21... Φειδίᾳ δὲ τοῦ ἁμοῦ Πατρὸς» ἔκδ. Heiberg 1913]. Εἰς τὸ σωζόμενον ὅμως χειρόγραφον τοῦ Ψαμμίτου διαβάζεται «τοῦ Ἀκούπατρος» πρᾶγμα ποὺ γεννᾷ τὴν ἀμφιβολίαν, ὡς πρὸς τὸν πατέρα τοῦ Ἀρχιμήδους. Πολὺ λογικὸν ὅμως εἶναι τὸ γενικῶς πιστευτόν, ὅτι «τοῦ Ἀκούπατρος» εἶναι κακοαντιγραφὴ «τοῦ ἁμοῦ Πατρός». Πολλοὶ ὑποστηρίζουν ὅτι ἦτο συγγενὴς τῆς βασιλικῆς οἰκογενείας τῶν Συρακουσῶν. Βέβαιον εἶναι, ὅτι ἦτο υἱὸς εὐπόρου οἰκογενείας, καὶ τοῦτο συνάγεται ἀπὸ τὰ ταξίδια ποὺ ἔκαμε εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν καὶ τὴν Ἱσπανίαν. Ὁ Πλούταρχος καὶ ὁ Πρόκλος ἀναφέρουν ὅτι ἦτο φίλος τῶν τυράννων τῶν Συρακουσῶν Ἱέρωνος καὶ Γέλωνος. Ἱστορικῶς εἶναι ἀκόμη παραδεκτόν, ὅτι μὲ τὰς μηχανικάς του ἐφευρέσεις ὑπερήσπισε τὰς Συρακούσας ἐναντίον τῶν πολιορκητῶν τῆς πόλεως κατὰ τὰ δύο τελευταῖα ἔτη τῆς πολιορκίας.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ἐπὶ τοῦ παρόντος ἂν ἔγραψε ἐκτεταμένον σύγραμμα. Ἀπὸ τὰ ἔργα του δὲ πολλὰ ἔχουν χαθῇ. Τὰ πλέον διαδεδομένα μετὰ τὸν θάνατόν του ἔργα εἶναι 1) τὸ περὶ Σφαίρας καὶ κυλίνδρου, 2) ἡ μέτρησις τοῦ κύκλου καὶ 3) τὸ περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν. Διὰ τὸ πρῶτον καὶ τρίτον ἐκ τούτων ἐγράφη σχόλιον τοῦ Εὐτοκίου, τὸ ὁποῖον σώζεται. Ἀπὸ τὸ ἀραβικὸν χειρόγραφον ἐσώθη τὸ ἔργον του μεταφρασθὲν εἰς τὴν λατινικὴν liber assumptorum ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἐπίπεδον Γεωμετρίαν, πολλαὶ δὲ ἀραβικαὶ πηγαὶ κάνουν μνείαν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ὁποῖα ἔχουν χαθῇ. Ἀλλὰ καὶ Ἕλληνες συγγραφεῖς ἀναφέρουν ἔργα ἀπολεσθέντα τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὰ ἔργα αὐτὰ εἶναι τὸ περὶ πολυέδρων ποὺ μνημονεύει ὁ Πάππος, αἱ Ἀρχαὶ εἰς τὰς ὁποίας ὁ Ἀρχιμήδης ἐξηγεῖ εἰς τὸν Ζεύξιππον τὴν ἀριθμητικὴν γραφήν, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ εἰς τὸν Ψαμμίτην, τὸ περὶ ζυγῶν ποὺ μνημονεύει ὁ Πάππος καὶ ὅπου περιέχεται ἡ περίφημος φράσις «δός μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινήσω». Ἐπίσης τὸ ἔργον περὶ κατοπτρικῶν, τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Θέων εἰς τὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου, τὸ περὶ σφαιροποιΐας καὶ αἱ τῶν ἐνιαυτῶν διαφοραί. Τὸ «βοεικὸν πρόβλημα» ἢ Ἀρχιμήδειον ὡς τὸ ἀπεκάλεσεν ὁ Κικέρων, σώζεται γραμμένον εἰς στίχους ἰωνικῆς διαλέκτου. Οἱ κριτικοὶ τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους παραδέχονται τοῦτο ὡς γνήσιον ἔργον ἀπὸ ἀπόψεως περιεχομένου, ὄχι ὅμως καὶ ὡς πρωτότυπον, διότι ὁ Ἀρχιμήδης ἔγραψεν εἰς δωρικὴν διάλεκτον. Τὸ βοεικὸν πρόβλημα ἀνευρέθη μαζὶ μὲ σχόλιον ὑπὸ τοῦ Lessing εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς γερμανικῆς κωμοπόλεως Wolfenbüttel (κειμένης νοτίως τοῦ Braunschweig). Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀπέστειλεν ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ μαθηματικὸν Ἐρατοσθένην. Μνεία τοῦ προβλήματος γίνεται καὶ εἰς Σχόλια τοῦ Χαρμίδου τοῦ Πλάτωνος «θεωρεῖ οὖν τοῦτο μὲν τὸ κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοεικὸν πρόβλημα...» Τὸ πρόβλημα εἶναι παίγνιον ἐξ ἐκείνων τὰ ὁποῖα συνήθιζε κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ Ἀρχιμήδης νὰ στέλλῃ εἰς διαφόρους μαθηματικούς.

Ἕνα ἀπὸ τὰ ὡς χαμένα θεωρούμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνευρέθη τὸ 1906. Τὸ ἔργον αὐτό, «Ἡ Ἔφοδος», εἶναι τὸ σπουδαιότερον τοῦ Ἀρχιμήδους. Δυστυχῶς δὲν ἐσώθη ὁλόκληρον. Τὸ ἔργον ἀνευρέθη ἀπὸ τὸν Δανὸν Heiberg εἰς τὸ Μετόχι Μοναστηρίου τοῦ Παναγίου Τάφου ἐν Κων)πόλει. Τὸ ἀνευρεθὲν χειρόγραφον βιβλίον περιέχει ἕνα εὐχολόγιον γραμμένο τὸν 13ον αἰῶνα. Ὁ γραφεὺς τοῦ εὐχολογίου ἐχρησιμοποίησε ἕνα χειρόγραφον βιβλίον τὸ ὁποῖον ἐγράφη τὸν 10ον αἰῶνα ὅπου ἦσαν γραμμένα τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους. Δὲν ἔσβυσε τελείως τὸ κείμενον τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἐπάνω εἰς τὸ ἀτελῶς καθαρισθὲν χαρτὶ ἔγραψε τὸ εὐχολόγιον. Τὸ εὑρεθὲν χειρόγραφον περιέχει μέγα μέρος «περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου» σχεδὸν ὁλόκληρον τὸ περὶ «ἑλίκων» μέρη ἀπὸ τὸ «κύκλου μέτρησις καὶ ἰσορροπικά», μέρη «περὶ ὀχουμένων» ἀρκετὸν μέρος «τῆς ἐφόδου» καὶ μέρος τοῦ «στομαχίου». Ἡ ἔφοδος ἢ ὅπως ὁ ἀρχικός του τίτλος «Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην Ἔφοδος» παριστᾷ τὴν μαθηματικὴν μέθοδον ἐρεύνης τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ εἶναι τὸ σπουδαιότατον ἔργον του.

Ἡ ἀνεύρεσις τοῦ ἔργου αὐτοῦ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς ἕνα εὐχολόγιον, καθιστᾷ πολὺ πιθανὴν τὴν γνώμην ὅτι μία ἐντατικωτέρα ἔρευνα τῶν διαφόρων εὐχολογίων τῶν Μοναστηρίων δὲν ἀποκλείεται νὰ φέρῃ εἰς φῶς καὶ ἄλλα ἔργα του θεωρούμενα ὡς χαμένα.

Ἡ ἐπίδρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν σύγχρονον ἐξέλιξιν τῆς ἐπιστήμης ἦτο μεγάλη. Θεωρεῖται βέβαιον ὅτι ὁ Γαλιλαῖος εἶχε χειρόγραφα τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν αὐτῶν ἐφεῦρε τοὺς νόμους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων. Ἡ πρώτη ἀνατύπωσις τῶν ἔργων τοῦ ἔγινε τὸ 1544 εἰς τὴν Βασιλείαν.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔγραψε εἰς τὴν δωρικὴν διάλεκτον. Τὰ σωζόμενα ἔργα του εἶναι:

1) Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I, II. 2) Τετραγωνισμὸς τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (παραβολῆς). 3) Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. 4) Κύκλου μέτρησις. 5) Περὶ ἑλίκων. 6) Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων. 7) Ψαμμίτης. 8) Περὶ ὀχουμένων. 9) Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος. 10) Στομάχιον. 11) Πρόβλημα βοεικόν. 12) Liber assumptorum. 13) Ἀποσπάσματα διαφόρων ἔργων.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἐθεώρει ἀπὸ τὰ ἔργα του, ὡς σπουδαιότερον, τὸ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Καὶ τοῦτο ὄχι ἄνευ λόγου. Μέχρι τῆς ἐποχῆς του, ὅλος ὁ τότε πολιτισμένος κόσμος ἐπερίμενε ἀνυπομόνως τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν, τὰ ὁποῖα διὰ τὸν κάθε ἄνθρωπον εἶναι ἀντικείμενα παρατηρήσεως καὶ χρήσεως συνήθους. Ἡ παραβολή, ἡ ἕλιξ κλπ. ἐνδιαφέρουν μόνον τοὺς μαθηματικούς. Εἶναι πιστευτὸν λοιπὸν ὅτι παρήγγειλε διὰ τῆς διαθήκης του νὰ χαράξουν εἰς τὴν πλάκα τοῦ τάφου του μίαν σφαῖραν περιβαλλομένην ἀπὸ κύλινδρον, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ὁ Κικέρων ἀνεκάλυψε τὸν τάφον τοῦ 'Αρχιμήδους.

Εἰς τὸ βιβλίον του ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I καὶ II ἡ μηχανικὰ πραγματεύεται περὶ τοῦ κέντρου βάρους τριγώνου, τραπεζίου, καὶ παραβολικῶν τμημάτων ὡς καὶ περὶ ἰσορροπίας τῶν μοχλῶν.

Τὸ βιβλίον περὶ παραβολῆς περιέχει ἐν πρώτοις προσφώνησιν πρὸς Δοσίθεον, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐξάγεται: ὅτι τοῦτο ἐγράφη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος, ὅτι ὁ Κόνων ἀσφαλῶς δὲν ἦτο ὁ διδάσκαλος τοῦ 'Αρχιμήδους, διότι τὸν προσφωνεῖ ὡς φίλον καὶ ὅτι ὁ Δοσίθεος ἦτο γνώριμος τοῦ Κόνωνος. Πάρα κάτω ἀνακρινώνει ὅτι εὗρε κατὰ πρῶτον τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς μηχανικῶς καὶ κατόπιν γεωμετρικῶς τῇ βοηθείᾳ τοῦ πέμπτου αἰτήματος τοῦ μνημονευομένου εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. 'Ακολουθοῦν τρία θεωρήματα ληφθέντα ἀπὸ «τὰ στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν τομῶν» χωρὶς νὰ τ' ἀποδεικνύῃ ἐκ νέου, τέταρτον νέον θεώρημα τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει καὶ κατόπιν ἀπὸ τὰ θεωρήματα 5—16 διὰ τῆς θεωρίας περὶ ἰσορροπίας ἐπιφανειῶν ἐξάγει τὸ θεώρημα 17 περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ τριγώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸ παραβολικὸν τμῆμα. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὰς παραγράφους ιη' — κδ' γεωμετρικῶς τῇ βοηθείᾳ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων.

Τοῦ ἔργου περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου προηγεῖται ἀφιέρωσις πρὸς τὸν Δοσίθεον. Εἰς αὐτὴν ὑπενθυμίζει τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς καὶ ἐξαίρει ὡς νέα θεωρήματα: 1) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας. 2) Ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια τμήματος τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. 3) Ὁ κύλινδρος μὲ βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἐπίσης τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Προτάσσονται 6 ὁρισμοὶ περὶ καμπύλων καὶ κυρτῶν ἐπιφανειῶν. 'Ακολουθοῦν αἰτήματα, τὰ σπουδαιότερα τῶν ὁποίων εἶναι: 1) Μεταξὺ δύο σημείων ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις. 2) Ἐὰν ληφθοῦν δύο σημεῖα ἐπὶ εὐθείας καὶ ἀχθοῦν διὰ τούτων δύο γραμμαὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἡ περικλείουσα γραμμὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περικλειομένης. 3) Ἐπεκτείνει τὸν τέταρτον ὁρισμὸν τοῦ πέμπτου βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὸ αἴτημα, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀνίσων μεγεθῶν, γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν ἢ σωμάτων εἶναι τοιαύτη, ὥστε διὰ συνεχοῦς ἐπαναλήψεως δύναται αὐτὴ νὰ ὑπερβῇ κάθε ὅμοιον μέγεθος (Νεώτεραι ἔρευναι ἀπέδειξαν ὅτι τὸ περίφημον τοῦτο αἴτημα εἶναι τοῦ Εὐδόξου).

Εἰς τὰ ἑπόμενα θεωρήματα πραγματεύεται ἐν πρώτοις τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου πολυγώνων, κατόπιν τὴν σχέσιν τοῦ κώνου πρὸς τὴν περιγεγραμμένην ἢ ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν πυραμίδα καὶ ἀκολουθοῦν παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου καὶ τοῦ ὄγκου των. Μετὰ βραχεῖαν ἐπισκόπησιν τοῦ διπλοῦ κώνου προετοιμάζει διὰ σειρᾶς θεωρημάτων περὶ ἐπιφανειῶν στερεῶν ἐκ περιστροφῆς τὴν ἀπόδειξιν τῶν νέων του εὑρημάτων, ὁπότε ἀναφαίνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὡς ὅριον ἢ ἄθροισμα κωνικῶν ἐπιφανειῶν καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς κῶνον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Τὸ πρῶτον βιβλίον περὶ σφαίρας τελειώνει μὲ θεωρήματα στερεῶν ἐκ περιστροφῆς τομέων μὲ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα πολύγωνα. Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον πραγματεύεται τὸ πρόβλημα: δοθέντος κώνου ἢ κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ ἰσοδύναμος σφαῖρα καὶ κατόπιν τὸ πρόβλημα: νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου σφαῖρα οὕτως, ὥστε τὰ δύο σφαιρικὰ τμήματα νὰ ἔχουν δοθεῖσαν σχέσιν. Ἀκολουθοῦν θεωρήματα περὶ ὄγκου τομέων καὶ τῆς σχέσεώς των πρὸς τὴν σφαῖραν. Τέλος εἰς τὸ ἔνατον θεώρημα τοῦ β' βιβλίου περὶ σφαίρας ἀποδεικνύει, ὅτι ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τομέων οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, μέγιστος εἶναι τὸ ἡμισφαίριον.

Εἰς τὸ βιβλίον περὶ τῆς μετρήσεως τοῦ κύκλου ἀποδεικνύονται: 1) Ὁ κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἰσοῦται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ἀκτῖνα, τῇ βοηθείᾳ περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων. — 2) Ἡ σχέσις τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ 11 : 14 ἢ ἡ σχέσις τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος μὲ 22 : 7. — 3) Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι μικροτέρα τοῦ $3\frac{10}{70}$ τῆς διαμέτρου καὶ μεγαλυτέρα τοῦ $3\frac{10}{71}$. Τὴν εὕρεσιν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν εὑρίσκει πάντοτε διὰ σχηματισμοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου τῶν πολυγωνικῶν περιμέτρων. Τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας ποὺ προκύπτουν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς αὐτοὺς ἀντικαθιστᾷ μὲ σχέσεις ἀριθμητικὰς (ἀναλογίας) καὶ εἶναι πιθανώτατον, ὅτι τὰς οὕτω εὑρισκομένας τιμὰς εὗρε χρησιμοποιῶν εἶδος συνεχῶν κλασμάτων, διότι αὗται σχεδὸν συμπίπτουν μὲ τὰ ἐξαγόμενα ποὺ λαμβάνομεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἀναγράφει τὴν μέθοδον ποὺ ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν αὐτῶν.

Τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου ἀκολουθεῖ τὸ βιβλίον περὶ ἑλίκων. Εἰς τὴν προσφώνησιν πρὸς τὸν Δοσίθεον ἀναφέρεται ὁ Ἡρακλείδης, ὡς ὁ μεταφέρων χειρόγραφα πρὸς τὸν Δοσίθεον. Ἴσως ὁ Ἡρακλείδης νὰ εἶναι ὁ συγγραφεὺς τῆς βιογραφίας τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία ἔχει χαθῆ. Ὁ Ἀρχιμήδης λέγει ὅτι ἀνέλαβε τὴν ἔρευναν τῆς ἕλικος πολλὰ ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος. Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν αὐτὴν συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐπικαλεῖται δι' ἑαυτὸν καὶ πατρότητα τῶν νέων εὑρημάτων περὶ ἕλικος, ὄχι ὅμως καὶ τῆς εὑρέσεως τῆς ἕλικος, ἡ ὁποία πρέπει ν' ἀποδοθῇ εἰς τὸν Κόνωνα. Διότι ὁ Ἀρχιμήδης ἐπερίμενε πολλὰ ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος μήπως ἀνακοινωθῇ ὑπὸ τῶν φίλων τοῦ Κόνωνος σχετικόν τι περὶ τῆς ἕλικος. Ὅταν ὅμως ἐπείσθη ὅτι δὲν ὑπῆρχε τίποτε τότε ἐπροχώρησε εἰς τὴν ἔρευναν. Συνεπῶς τὸ ἀναφερόμενον ὑπὸ τοῦ Πάππου, ὅτι ὁ Κόνων εἶναι ἐφευρέτης τῆς ἕλικος φαίνεται ἀληθές. Κατόπιν ὁ Ἀρχιμήδης ἀπαριθμεῖ τὰ θεωρήματα ποὺ ἔστειλε μὲ τὸν Ἡρακλείδην καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀποδειχθῆ εἰς τὸ βιβλίον περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἕλικος εἶναι: ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ περιστρέφεται ὁμαλῶς περὶ τὸ ἓν ἄκρον της μέχρις ὅτου γράψῃ ὁλόκληρον περιφέρειαν καὶ συγχρόνως ἓν σημεῖον ἀρχόμενον ἀπὸ τὸ ἄκρον τοῦτο κινεῖται ὁμαλῶς μέχρι τοῦ ἄλλου ἄκρου τῆς εὐθείας, ἡ γραμμὴ ποὺ γράφει εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον σημεῖον λέγεται ἕλιξ.

Σκοπὸς τῆς ἐρεύνης τῆς ἕλικος εἶναι τὸ εἰς τὸ θεώρημα 24 ἀναφερόμενον, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν γραμμὴν καὶ τὴν ἕλικα, ὅταν ἡ ἀρχικὴ γραμμὴ κάνῃ ὁλόκληρον περιστροφήν, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν (περιστρεφομένην) εὐθεῖαν. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου θεωροῦνται κατ' ἀρχὰς αἱ κινήσεις σημείου ἢ σημείων ἐπὶ εὐθείας, ὡς καὶ αἱ σχέσεις μεταξὺ χορδῶν καὶ τόξων. Ἀκολουθεῖ σειρὰ ὁρισμῶν οἱ ὁποῖοι ἔχουν σχέσιν μὲ τὴν γένεσιν τῆς ἕλικος.

Ἐπίσης θεωρήματα περὶ ἀκτινοειδῶν ἀνυσμάτων (πολικῶν ἀξόνων) καὶ ἐφαπτομένων τῆς ἕλικος καὶ ἡ σχέσις τοῦ ἀκτινοειδοῦς ἀνύσματος τῆς ἕλικος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν γενέτειραν εὐθεῖαν τῆς ἕλικος. Κατόπιν δεικνύεται ὅτι ἠμπορεῖ νὰ περιγραφῇ καὶ ἐγγραφῇ εἰς τὴν ἕλικα σχῆμα ἀπὸ πολλὰ κυκλικὰ τόξα καὶ οὕτω ἐπιτυγχάνεται ἡ μέτρησις τοῦ ζητουμένου ἐμβαδοῦ σχηματιζομένου κατόπιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων περιστροφῶν τῆς γενετείρας γραμμῆς. Τέλος ἀκολουθεῖ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς σχέσεως ἑλικοειδῶν τομέων πρὸς κυκλικοὺς τομεῖς. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τούτων ἐπιτυγχάνεται διὰ ἀθροίσεως ἐλαχίστων ἐπιφανειῶν τομέων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}\rho^2\theta$ ὅπου ρ ὁ πολικὸς ἄξων καὶ θ ἡ γωνία τοῦ τομέως. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐφαρμόζει ἐδῶ στοιχειώδη μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιφανείας δι' ὁλοκληρώσεως.

Οὐχὶ μικροτέρας σημασίας εἶναι τὸ βιβλίον του περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων. Εἰς τὴν ἀφιέρωσιν πρὸς τὸν Δοσίθεον κάνει μακρὰν εἰσαγωγήν. Λέγει ὅτι συνήντησε μεγάλας δυσκολίας διὰ νὰ λύσῃ τὰ προβλήματα τοῦ βιβλίου τούτου καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἐβράδυνε πολὺ εἰς τὴν δημοσίευσίν του. Κωνοειδῆ ὀνομάζει τὰ στερεὰ τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ περιστροφὴν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς περὶ τὸν ἄξονά των. Σφαιροειδῆ δὲ τὰ προκύπτοντα ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὸν μέγαν ἢ μικρὸν αὐτῆς ἄξονα. Κατ' ἀρχὰς ἀναφέρει θεωρήματα περὶ συνεχῶν ἀναλογιῶν, περὶ ἀναλογιῶν ἐπιφανειῶν καὶ περὶ ἀναλογιῶν παραβολικῶν τομέων, τὰ ὁποῖα συναντῶμεν ἤδη εἰς τὸν Εὐκλείδην. Τὰ θεωρήματα 4—7 ἀναφέρονται εἰς τὸν κῶνον καὶ ἔχουν ἐν μέρει ἀποδειχθῆ ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην.

Τὰ θεωρήματα 8—10 εἶναι νέα καὶ δείχνουν ὅτι εἰς κάθε ἔλλειψιν ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθοῦν πολλοὶ κῶνοι ἢ κύλινδροι, οὕτως, ὥστε ἡ ἔλλειψις φαίνεται ὡς τομὴ κυλίνδρου ἢ κώνου. Ἀκολουθοῦν θεωρήματα περὶ τομῶν καὶ ἐφαπτομένων εἰς τὰ κωνοειδῆ καὶ σφαιροειδῆ τὰ ὁποῖα τελειώνουν εἰς τὸ θεώρημα: νὰ τμηθῇ ἐλλειψοειδὲς εἰς δύο ἴσα μέρη δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα. Μετὰ ταῦτα ἀρχίζει τὸ κύριον μέρος τοῦ ἔργου, τὴν μέτρησιν τῶν ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδῶν, ὑπερβολοειδῶν καὶ ἐλλειψοειδῶν. Ἡ μέθοδος ποὺ ἀκολουθεῖ εἶναι παντοῦ ἡ αὐτή. Ἀποτέμνει μὲ ἐπίπεδα κατ' ἴσας ἀποστάσεις τὰ στερεά, εἰς μικρὰ τμήματα. Εἰς τὰ τμήματα ταῦτα περιγράφει καὶ ἐγγράφει κυλίνδρους. Δι' ἀθροίσεως τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων κλείνει τὰ ἐκ περιστροφῆς στερεὰ εἰς δύο ὅρια, τὰ ὁποῖα δι' αὐξήσεως τῶν ἐπιπέδων τομῆς, δύνανται νὰ πλησιάσουν πρὸς ἄλληλα, ὅσον θέλομεν. Ἡ ἄθροισις αὐτὴ ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐφόδου.

Ὁ Ψαμμίτης ἐγράφη μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ καταστήσῃ κατανοητὸν εἰς τὸν βασιλέα Γέλωνα ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον. Ὑποθέτει ὅτι σφαῖρα μὲ κέντρον τὴν Γῆν καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν μέχρι τῶν ἀπλανῶν εἶναι γεμάτη ἀπὸ κόκκους ἄμμου. Ὑπάρχει ἀριθμὸς ὅστις πάντοτε εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν κόκκων τῆς ἄμμου. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἀριθμητικὰς ἐκφράσεις, τὰς ὁποίας ἔχει σχηματίσει εἰς τὸ βιβλίον του Ἀρχαί.

Αἱ Ἀρχαὶ ἔχουν χαθῆ. Εἰς τὸν Ψαμμίτην ὅμως (3ον Κεφάλαιον) ἀναφέρεται περιληπτικῶς τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ βιβλίου τούτου. Οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ ἕνα ἕως μύρια μυριάδες εἶναι κοινῆς χρήσεως. Διὰ νὰ ἀριθμήσῃ πέραν αὐτῶν, ὀνομάζει τούτους τοὺς «πρώτους» ἀριθμοὺς ἢ ὅπως θὰ ἠμπορούσαμε νὰ ποῦμε σήμερα τὴν πρώτην σειρὰν ἀριθμῶν, ἤτοι μέχρι τοῦ 10^8. Τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν τῆς σειρᾶς αὐτῆς λαμβάνει ὡς μονάδα διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν οὕτως ὥστε ἡ δευτέρα αὐτὴ σειρὰ ἀριθμῶν νὰ περιλαμβάνῃ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 10^8—10^{16} κατὰ τὸ σημερινὸν σύστημα μετρήσεως. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον σχηματίζει τὴν τρίτην σειρὰν καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς σειρᾶς «μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας» ἤτοι μέχρι τῆς 10^8 σειρᾶς, δηλ. μέχρι $(10^8)^{10^8}$. Κατόπιν λαμβάνει τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς μονάδα ὀνομάζων αὐτὸν πρώτην περίοδον καὶ σχηματίζει τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῆς περιόδου αὐτῆς ἤτοι $\left[(10^8)^{10^8}\right]^2$ καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὸ σύστημα αὐτὸ ἀριθμήσεως εἶναι ἀπεριόριστον. Σημαντικῆς σπουδαιότητος εἶναι αἱ παρατηρήσεις ἀπὸ τῆς 5 — 8 παραγράφου. Εἰς αὐτὰς φανερώνει πῶς οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνουν ἐν συνεχῇ ἀναλογίᾳ καὶ πῶς αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀριθμῶν διατηροῦνται ἀνάλογοι.

Μετὰ τὴν παρένθεσιν αὐτὴν ἀπὸ τὰς Ἀρχάς, εἰς τὰς ὁποίας προφανῶς θὰ ἐκτίθεται λεπτομερέστερον ὁ τρόπος τῶν ὑπολογισμῶν, ὑπολογίζει τὸν ἀριθμὸν τῶν κόκκων τῆς ἄμμου τοὺς ὁποίους θὰ περιέχῃ σφαῖρα τὴν ὁποίαν θὰ παρίστανε ἡ θεωρία περὶ τοῦ Σύμπαντος, τοῦ Ἀριστάρχου, ὅστις ἀριθμὸς μᾶς παρέχει μίαν εἰκόνα τοῦ ἀπείρως μεγάλου. Μνημονεύει ῥητῶς ὅτι ὁ μέγας εὑρεθεὶς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀπείρως μέγας. Ὁ Ἀρχιμήδης αἰσθάνεται τὴν ἀνάγκην νὰ καταστήσῃ εἰς τοὺς ἀνθρώπους γνωστὴν τὴν διαφορὰν ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ πολὺ μεγάλου καὶ τοῦ ἀπείρως μεγάλου.

Ἀναφέρει τὴν μέτρησιν τῆς Γῆς ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους, χωρὶς νὰ μνημονεύῃ τὸ ὄνομά του καὶ ὅτι ὁ Εὔδοξος ὑπελόγισε τὴν φαινομένην διάμετρον τοῦ Ἡλίου ὡς ἐννεαπλασίαν τῆς διαμέτρου τῆς Σελήνης, ἐν ᾧ ὁ Φειδίας τὴν ἀνεῦρε δωδεκαπλασίαν καὶ ὁ Ἀρίσταρχος μεταξὺ 18—20πλασίας. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ Ἀριστάρχου ὡδήγησε πρὸς τὴν ἐκδοχὴν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ Ἡλίου εἶναι 1 : 180 τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. Ὁ Ἀρχιμήδης ἀναφέρει ἐδῶ, ὅτι ὁ Ἀρίσταρχος ὁ ἴδιος ὑπελόγισε τὴν διάμετρον τοῦ Ἡλίου ὡς τὸ 1 : 720 τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. Ὁ ἴδιος δὲ ὑπολογίζει τὴν διάμετρον ὡς τὸ 1 : 812.

Τὸ χειρόγραφον τῆς ἐφόδου, ὅπως ἀναφέρομεν παραπάνω, εὑρέθη εἰς τὸ Μετόχι τοῦ Παναγίου Τάφου εἰς τὴν Κων)πολιν. Δυστυχῶς δὲν εἶναι πλῆρες. Τὸ τέλος λείπει καὶ μερικὰ φύλλα εἶναι τόσον καλὰ καθαρισμένα ἀπὸ τὸν γραφέα τοῦ εὐχολογίου, κατὰ τὸν 13ον αἰῶνα, ὥστε ἀπὸ τὸ κείμενον τοῦ ἔργου, τοῦ 10 αἰῶνος, δὲν διαβάζεται τίποτε. Ὁ Heiberg ἔχει κατὰ τὸ δυνατὸν συμπληρώσει μερικὰ κενά.

Τὸ βιβλίον εἶναι ἀφιερωμένον ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδην εἰς τὸν Ἐρατοσθένην. Ὡς νέα θεωρήματα τοῦ βιβλίου τούτου εἶναι: 1) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐγγραφῇ κύλινδρος καὶ ἀχθῇ ἐπίπεδον διὰ μιᾶς ἐκ τῶν ἄνω ἀκμῶν τοῦ παραλληλεπίδου καὶ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τότε τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει ἀπὸ τὸν κύλινδρον τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ ἕκτον μέρος τοῦ παραλληλεπιπέδου. 2) Ἐὰν εἰς κύβον ἐγγραφοῦν δύο κύλινδροι (ὁ ἕνας π. χ. μὲ κάθετον, ὁ ἄλλος μὲ ὁριζόντιον ἄξονα) ὁ χῶρος ποῦ περικλείεται ὑπὸ τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ κύβου. Ὁ Ἀρχιμήδης θεωρεῖ ὡς σπουδαῖα τὰ θεωρήματα αὐτά, διότι διὰ πρώτην φορὰν εὑρίσκεται χῶρος περικλειόμενος ὑπὸ κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἴσος πρὸς χῶρον περικλειόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων. Τὸ σπουδαῖον ὅμως εἰς τὰ θεωρήματα αὐτὰ εἶναι ἡ μέθοδος ποὺ ἐφήρμοσε διὰ νὰ τὰ ἀποδείξῃ. Ἀνεχώρησε οὐχὶ ἀπὸ γεωμετρικὰς θεωρίας ἀλλὰ ἀπὸ καθαρῶς μηχανικὰς χρησιμοποιήσας τὰς θεωρίας περὶ κέντρου βάρους. Ὅταν ἐπείσθη, ὅτι διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς τὰ θεωρήματα αὐτὰ ἦσαν ὀρθά, τότε ἐπέτυχε τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν.

Καὶ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνεγνωρίσθησαν θεωρήματα ὡς ὀρθὰ χωρὶς ὅμως ν' ἀποδειχθοῦν, ὅπως π. χ. τὰ θεωρήματα ποὺ ἀπέδειξεν κατόπιν γεωμετρικῶς ὁ Εὔδοξος ἤτοι 1) ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος 2) ὁ κῶνος εἶναι $\frac{1}{3}$ τοῦ κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὰ θεωρήματα αὐτὰ εἶχε διατυπώσει προηγουμένως ὡς ὀρθὰ χωρὶς νὰ τ' ἀποδείξῃ ὁ Δημόκριτος. Δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶχεν ἀποδείξῃ τὰ θεωρήματα αὐτὰ ὁ Δημόκριτος διὰ ζυγίσεως ἢ μηχανικῶς.

Ἐπίσης ὑποστηρίζεται ὅτι εἶναι πολὺ πιθανὸν νὰ εἶχεν ὁ Δημόκριτος ἐφαρμόσῃ παρομοίαν σχεδὸν πρὸς τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων αὐτῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως εἰς τὸ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀναφέρει ὅτι οὐδεὶς πρὸ τοῦ Εὐδόξου εἶχεν ἀποδείξει γεωμετρικῶς τὰ θεωρήματα αὐτά. Ὅπως δήποτε τίποτε δὲν διασώζεται ποὺ ν' ἀποδεικνύῃ ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχεν ἐφαρμόσῃ μεθόδους ὁλοκληρώσεως, πλὴν τοῦ χωρίου τοῦ Πλουτάρχου, ὅπου ἀναφέρεται ὅτι «ὁ Δημόκριτος εὑρίσκετο ἐν ἀμφιβολίᾳ, ἐὰν αἱ παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν κώνου ἀποκοπτόμεναι ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι ἢ οὔ. κλπ.»

Ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν θέλει νὰ δείξῃ ὁ Ἀρχιμήδης εἶναι μηχανικὴ ὅπως ὁ ἴδιος τὴν ὀνομάζει. Χρησιμοποιεῖ κατ' ἀρχὰς ὀκτὼ θεωρήματα περὶ κέντρου βάρους τὰ ὁποῖα διατυποῦνται εἰς τὸ βιβλίον του «στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν» ἢ «ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν». Ὡς πρῶτον θεώρημα ἀποδεικνύει κατὰ τὴν νέαν μέθοδον, τὸ εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς ἀναφερόμενον, ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν παραβολὴν καὶ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Μὲ τὴν αὐτὴν μέθοδον θεωρεῖ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ὅτι εἶναι τετραπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα ἢ ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον εἶναι 2 : 3. Ἀκολουθεῖ ἡ θεωρία περὶ ἐλλειψοειδοῦς καὶ παραβολοειδοῦς, ἡ ἔρευνα τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραβολοειδοῦς τομέως καὶ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἡμισφαιρίου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τέμνεται εἰς λόγον 5 : 3. Τρία ἑπόμενα θεωρήματα ἀφοροῦν σφαιρικὸν τομέα. Ὡς δωδέκατον θεώρημα ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δύο νέων θεωρημάτων τὰ ὁποῖα μνημονεύει εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς «Ἐφόδου» καὶ τοῦτο δὲν σώζεται πλήρως. Τὸ δεύτερον νέον θεώρημα λείπει ἀπὸ τὸ χειρόγραφον τελείως. Ἀπὸ τὸ σωζόμενον χειρόγραφον τῆς ἐφόδου καὶ ἰδίως ἀπὸ τὸ ιε' θεώρημα φαίνεται πόσον καλὰ ὁ Ἀρχιμήδης κατέχει τὴν ἔννοιαν τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ δικαίως πρέπει νὰ θεωρῆται ὁ ἐφευρέτης τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημες, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστείλαι τοι γράψαντες, ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμες, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμάματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθεν, τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται· δείκνυται γάρ, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τᾶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρωμένοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λῆμμά τι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μέν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καί, ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰς ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

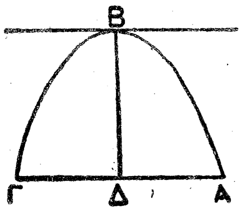
Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν.

Ἐπειδὴ ἄκουσα ὅτι ὁ μὲν Κόνων ἀπέθανε, ὁ ὁποῖος εἶχε πάντοτε ἐπιδείξει τὴν ἐγκάρδιον φιλίαν του σὲ μένα, σὺ δὲ ἕνας πεπειραμένος γεωμέτρης ἦσουν φίλος τοῦ Κόνωνος, ἐλυπήθηκα διὰ τὸν ἀποθανόντα καὶ ὡς φίλον καὶ ὡς θαυμάσιον μαθηματικὸν καὶ ἀπεφάσισα ν' ἀποστείλω σὲ σένα τὴν ἔρευναν ἐπὶ ἑνὸς προβλήματος, τὴν ὁποίαν ἀρχικῶς ἐσκόπευα ν' ἀποστείλω εἰς τὸν Κόνωνα, ἑνὸς δηλαδὴ προβλήματος μὲ τὸ ὁποῖον οὐδεὶς προηγουμένως εἶχεν ἀσχοληθῆ, τώρα δὲ ἀσχολοῦμαι ἐγώ, καὶ τὸ ὁποῖον ἔλυσα κατ' ἀρχὰς μὲν διὰ μεθόδων τῆς μηχανικῆς, κατόπιν δὲ διὰ γεωμετρικῶν μεθόδων.

Ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι πρότερον ἠσχολήθησαν μὲ τὴν γεωμετρίαν, ἐπεχείρησαν μερικοὶ ν' ἀποδείξουν, ὅτι ἦτο δυνατὸν νὰ κατασκευασθῆ ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς, ἡ ὁποία θὰ ἦτο ἴση κατὰ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς δοθέντα κύκλον ἢ δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα, κατόπιν δὲ ἐπεχείρησαν ν' ἀποδείξουν τὸ ἴδιο δι' ἓν τμῆμα ἐλλείψεως, χρησιμοποιοῦντες θεωρήματα τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια δὲν ἦτο ἀποδεδειγμένη, συνεπείᾳ τοῦ ὁποίου, οἱ περισσότεροι ἀνεγνώρισαν, ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν ἠμποροῦσαν νὰ λυθοῦν. δὲν ἄκουσα ὅμως ὅτι ἠμπόρεσε κανεὶς μαθηματικὸς μέχρι σήμερον νὰ τετραγωνίσῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς παραβολικοῦ τμήματος, ὅπως τοῦτο τώρα ἐπέτυχα ἐγώ. διότι ἀποδεικνύω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραβολικοῦ τμήματος εἶναι μεγαλύτερον κατὰ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα καὶ ἐχρησιμοποίησα πρὸς τοῦτο τὸ ἑπόμενον λῆμμα· ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρίσκεται ἕνα πολλαπλάσιον τῆς διαφορᾶς δύο δοθέντων ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μεγαλύτερον οἱασδήποτε δοθείσης ἐπιφανείας.

Χρησιμοποιοῦν δὲ καὶ οἱ προηγούμενοι γεωμέτραι τὸ λῆμμα τοῦτο· διότι οὗτοι μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ λήμματος τούτου ἀπέδειξαν, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς κύβους τῶν ἀκτίνων των, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ τὴν πυραμίδα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸν κῶνον.

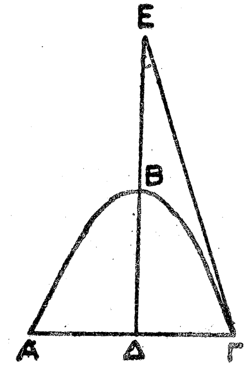
α'.



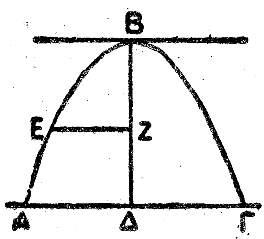
Εἴ κα ἦ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα ἐσσεῖται ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ· κἂν ἴσα ᾖ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ, παράλληλοι ἐσσοῦνται ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς.

β'.

Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ᾖ δὲ ἁ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΔΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ δὲ ΕΓ τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ Γ, ἐσσοῦνται αἱ ΒΔ, ΒΕ ἴσαι.



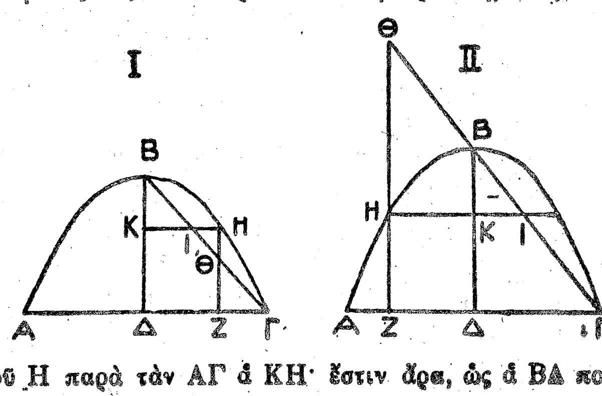
γ'.



Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ ΑΔ, ΕΖ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΖ, δυνάμει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΖ. ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ'.

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω ἢ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ ΒΓ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή κα ἀχθῇ τις ἄλλα ἁ ΖΘ παρὰ τὰν ΒΔ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν Β, Γ εὐθεῖαν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ.



ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΚΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ πιστεύεται δὲ ὅτι ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων δὲν ὑστερεῖ τῶν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀπεδείχθησαν χωρὶς τὴν βοήθειαν τοῦ λήμματος τούτου.

μοῦ εἶναι δὲ ἀρκετόν, ἐὰν τὰ ὑπ' ἐμοῦ εὑρεθέντα θεωρήματα ἔχουν τὸν αὐτὸν βαθμὸν ἀληθείας, ὅπως τὰ ἀνωτέρω ἀναφερόμενα.

τώρα, ἀφοῦ συνέγραψα τὰς ἀποδείξεις, σοῦ τὰς ἀποστέλλω, ἐν πρώτοις μὲν τὰς ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς μηχανικῆς στηριζομένας, κατόπιν δὲ τὰς ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἀρχῶν. προτάσσω δὲ τούτων στοιχεῖα τῶν κωνικῶν τομῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

α'.

Ἐὰν δοθῇ τομὴ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολὴ) ἤτοι ἡ ΑΒΓ, καὶ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον (τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς) ἢ ἡ ἴδια νὰ εἶναι διάμετρος, ἡ δὲ ΑΓ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ· καὶ ἂν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ τότε ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

β'.

Ἐὰν δοθῇ τομὴ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολὴ) ἡ ΑΒΓ, εἶναι δὲ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἴδια εἶναι διάμετρος, (ἄξων παραβολῆς) ἡ δὲ ΑΔΓ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, τότε ἡ ΒΔ=ΒΕ.

γ'.

Ἐὰν δοθῇ ἡ παραβολὴ ΑΒΓ ἡ δὲ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἡ ἴδια εἶναι διάμετρος, καὶ ἡ ΑΔ καὶ ΕΖ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία ΒΔ : ΒΖ=(ΑΔ)^2 : (ΕΖ)^2. Ταῦτα ἔχουν ἀποδειχθῇ εἰς τὰ στοιχεῖα περὶ κωνικῶν τομῶν.

δ'.

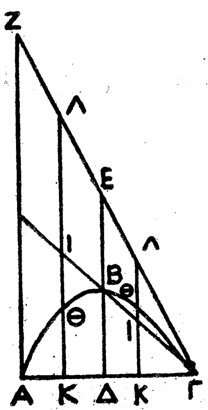
Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ, παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ ἡ ἴδια νὰ εἶναι διάμετρος καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ, ἢ νὰ προεκβληθῇ αὕτη (δεύτερον σχῆμα). ἐὰν τώρα ἀχθῇ οἵα δήποτε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΖΘ, τέμνουσα τὴν ΒΓ (ἢ τὴν προεκβολήν της, εἰς τὸ σημεῖον Θ), τότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία ΖΘ : ΘΗ = ΔΑ : ΔΖ.

διότι ἂν ἀχθῇ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, τότε εἶναι ΒΔ : ΒΚ = (ΔΓ)^2 : (ΚΗ)^2. διότι τοῦτο ἔχει ἤδη ἀποδειχθῇ. συνετὰν ΒΚ μάκει, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΚΗ δυνάμει· ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα, ὡς ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΙ μάκει, οὕτως ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ δυνάμει· ἴσαι γὰρ αἱ ΔΖ, ΚΗ· ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ ΒΓ, ΒΘ, ΒΙ γραμμαί. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ, ὃν ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΙ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἁ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ. τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἐστὶν ἁ ΔΑ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ, ὃν ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ.

ε΄

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ ἁ ΓΖ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παρὰ τὰν ΑΖ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς καὶ ἁ ΑΓ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας [ἀνάλογον], ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς ΑΓ τὸ ποτὶ τῷ Α τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τῷ Α.

ἄχθω γάρ τις ἁ ΔΕ παρὰ τὰν ΑΖ, καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ ΔΕ τὰν ΑΓ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ καὶ ἁ ἀγμένα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΔ, ΔΓ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ ΑΓ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν, ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν ἁ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΕ ἄκται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΔΓ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ ΕΒ τᾷ ΒΔ· ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἁ ΔΒ ποτὶν τὰ ΒΕ. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν ΑΓ, δέδεικται· εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ ΚΛ παρὰ τὰν ΑΖ· δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ, ὃν ἁ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ. ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ ΒΕ τᾷ ΒΔ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΙΛ τᾷ ΚΙ· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΚΙ, ὃν ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΔΑ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΚΙ ποτὶ τὰν ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΚ· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ, ὃν ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.



στ΄.

Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ] προκείμενον [ὁρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καὶ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ ΒΔΓ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Β γωνίαν καὶ τὰν ΒΓ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τᾶς ΑΒ τῇ ΒΓ], πῶς $ΒΓ : ΒΙ = (ΒΓ)^2 : (ΒΘ)^2$· διότι $ΔΖ = ΚΗ$. ὡς ἐκ τούτου ἡ ΒΘ εἶναι μέση ἀνάλογος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ΒΙ ὥστε $ΒΓ : ΒΘ = ΓΘ : ΘΙ$. συνεπῶς $ΓΔ : ΔΖ = ΘΖ : ΘΗ$ ἡ δὲ $ΔΓ = ΔΑ$· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι $ΔΑ : ΔΖ = ΖΘ : ΘΗ$.

ε'.

Ἔστω τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΖΑ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΖ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ.

ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΖΑΓ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ ἡ παράλληλος αὐτὴ θὰ τέμνεται ὑπὸ τῆς παραβολῆς εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ ΑΓ ὑπὸ τῆς παραλλήλου, καὶ δὴ τὸ τμῆμα τῆς ΑΓ τὸ ὁποῖον πρόσκειται τοῦ Α, θὰ εἶναι ὁμόλογον τοῦ τμήματος τῆς παραλλήλου, ἀπὸ τῆς παραβολῆς μέχρι τῆς τομῆς τῆς ΑΓ.

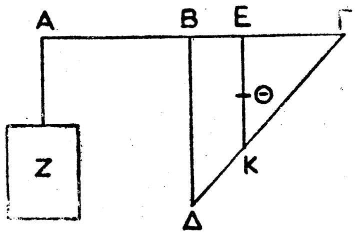
ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ ἂς τέμνῃ ἡ ΔΕ τὴν ΑΓ εἰς τὸ μέσον· ἐπειδὴ ἡ ΑΒΓ εἶναι παραβολὴ καὶ ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ δὲ $ΑΔ = ΔΓ$, ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. ἐπειδὴ πάλι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ἡ ΓΕ ἔχει ἀχθῇ ὡς ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἡ δὲ ΔΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε ἡ $ΕΒ = ΒΔ$. ὥστε $ΑΔ : ΔΓ = ΔΒ : ΒΕ$. ἡ ἀπόδειξις ἔγινε διὰ τὴν περίπτωσιν ποὺ ἡ ΔΕ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΑΓ. ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνει, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ. τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $ΑΚ : ΚΓ = ΚΘ : ΘΛ$. ἐπειδὴ $ΒΕ = ΒΔ$ εἶναι καὶ $ΙΛ = ΚΙ$, συνεπῶς $ΛΚ : ΚΙ = ΑΓ : ΔΑ$. ἔχει δὲ καὶ $ΚΙ : ΚΘ = ΔΑ : ΑΚ$· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ προηγουμένως. ὥστε $ΚΘ : ΘΛ = ΑΚ : ΚΓ$. ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

στ'.

Ἂς νοηθῇ τὸ παρατιθέμενον σχῆμα εὑρισκόμενον ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, τὸ μέρος τῆς εὐθείας εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται τὸ σημεῖον Δ ἂς νοηθῇ πρὸς τὸ κάτω μέρος, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τὸ ἄνω, ἔστω δὲ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Β καὶ ἔχον τὴν πλευρὰν $ΒΓ = ΑΒ$, ἂς νοηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐξηρτημένον ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ἂς θεωρηθῇ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἐξηρτημένη ἐκ τοῦ σημείου Α οὕτως, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ νὰ ἰσορροπῇ τὸ τρίγωνον, ὅπως εὑρίσκεται: ἰσχυρίζομαι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ὁριζοντία καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΓ εἶναι κατακόρυφοι, ὡς κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α κρεμάμενον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δή, τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΔΓ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη κα ἁ ΑΓ γραμμὰ παρὰ τὸν ὁρίζοντα, αἱ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ ΑΓ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμάσθω

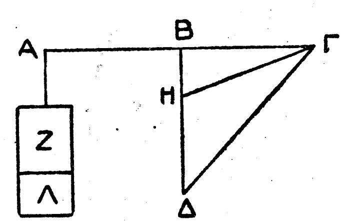


δὴ ἁ ΒΓ γραμμὰ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τᾶς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΒ ἁ ΚΕ καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΓ τριγώνου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. εἴ κα οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἁ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἐξ οὗ σαμείου κα καταστάθῃ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν Ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δῆλον, ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκεσιν, καὶ ἐστιν, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἁ ΑΒ τᾶς ΒΕ· καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Ζ χωρίου.

φανερὸν δὲ [ὅτι] καί, εἴ κα τριπλάσιον ᾖ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ'.

Ἔστω πάλιν ζυγὸς ἁ ΑΓ γραμμά, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον], τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου.



κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον τῷ ΖΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Λ, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΛ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ, φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ.

κείμεναι ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου. ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε ΓΕ = 2 ΒΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ καὶ ἂς ληφθῇ ΕΘ = ΘΚ. τὸ σημεῖον Θ εἶναι συνεπῶς τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Μηχανικὰ (ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν Ι). ἐὰν τὸ τρίγωνον τὸ θεωρήσωμεν τώρα ἐξηρτημένον, ὄχι ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε, θὰ μείνῃ τοῦτο ὡς ἔχει (δηλ. ἐν ἰσορροπίᾳ)· διότι τὸ κέντρον βάρους (Θ) τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Ε· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχει τὴν αὐτὴν θέσιν ὡς πρὸς τὸν ζυγὸν (τὴν φάλαγγα ΑΒΓ) θὰ εὑρίσκεται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ὁμοίως ἐν ἰσορροπίᾳ. ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐκ τοῦ Α ἐξαρτωμένη ἐπιφάνεια Ζ καὶ τὸ ἐκ τοῦ Ε ἐξαρτώμενον τρίγωνον ΒΔΓ εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι αὗται εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἀποστάσεων (ΑΒ, ΒΕ) καὶ συνεπῶς ΑΒ : ΒΕ = τριγ. ΒΔΓ : Ζ. εἶναι δὲ ἡ ΑΒ τριπλασία τῆς ΒΕ· καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ· ἐπίσης εἶναι φανερὸν. ὅτι ὅταν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ θὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία.

ζ'.

Ἔστω πάλιν ὡς ζυγός ἡ γραμμὴ ΑΓ, τὸ μέσον δὲ αὐτῆς ἔστω τὸ Β καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ Β τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΓΔΗ, ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΗ ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ζυγοῦ καὶ ἂς θεωρηθῇ τὸ τρίγωνον ἐξηρτημένον ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἂς θεωρηθῇ ἐξηρτημένη ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ ὅτι ἰσορροπεῖ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ, ὅπως εὑρίσκεται. κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο θ' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΓΔΗ.

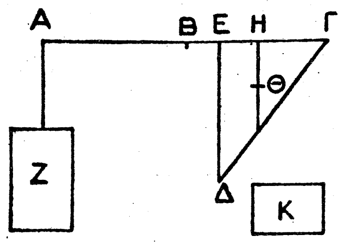
ἂς ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἄλλη ἐπιφάνεια (ἔστω ἡ Λ) ἡ ὁποία νὰ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ΒΓΗ· τὸ τρίγωνον ΒΔΓ θὰ ἰσορροπήσῃ τὰς ἐπιφανείας Ζ+Λ· ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΒΓΗ ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Λ, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΓΔ τὰς ἐπιφανείας Ζ+Λ, αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΔΗ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ.

η'.

Ἔστω (φάλαγξ) ζυγοῦ ἡ ΑΒΓ, τὸ μέσον αὐτῆς καὶ τὸ σημεῖον στηρίξεως τὸ Β, τὸ δὲ τρίγωνον ΓΔΕ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Ε, ἀνηρτημένον ἐκ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Ε, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Α ἂς ἐξαρτηθῇ ἡ ἐπιφάνεια Ζ ὥστε νὰ ἰσορροπῇ τὸ τρίγωνον ὅπως τώρα εὑρίσκεται, καὶ ἂς ὑπάρχει ἡ σχέσις ΑΒ : ΒΕ = τρίγωνον ΓΔΕ : δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν Κ. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τοῦ τριγώνου ΓΔΕ καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Κ.

η΄.

Ἔστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ξ, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον. φαμὶ δή, τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μεῖζον.



λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἁ ΘΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ ΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΗ, ποτὶ δὲ τὸ Κ, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, δῆλον, ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ Κ.

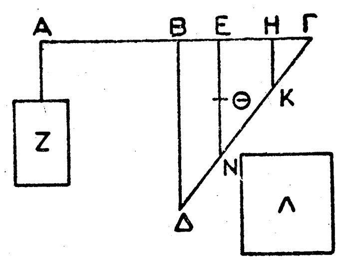
θ΄.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΚ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΚ, ὕψος δὲ τὰν ΕΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΓΚ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς τῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΚ τρίγωνον ποτὶ τὸ Λ. φαμὶ δή, τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ ΔΓΚ ἔλασσον.

δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι΄.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΒΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΚΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσαν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΒΔΚΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η σαμεῖα, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΒΔΚΗ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμί, τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ Λ.

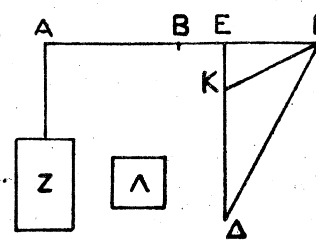


τετμάσθω γὰρ ἁ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς ΒΔ καὶ ἁ ΚΗ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΚΗ καὶ τὰν ΒΔ, τοῦτον ἔχειν τὰν ΕΗ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΒΔ ἀχθεῖσα ἁ ΕΝ τετμάδιότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Θ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ. ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ὑπάρχει ἡ σχέσις τρίγ. ΓΔΕ: ἐπιφαν. Ζ=ΑΒ: ΒΗ.

ἐπειδὴ δὲ τριγ. ΓΔΕ: ἐπίφ. Ζ=ΑΒ: ΒΗ καὶ τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. Κ=ΑΒ: ΒΕ, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ λόγος τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. Κ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τριγ. ΓΔΕ: ἐπιφ. Ζ· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Κ.

θʹ.

ἔστω πάλιν (φάλαγξ) ζυγοῦ ΑΓ, μέσον αὐτῆς τὸ Β τὸ δὲ τρίγωνον ΓΔΚ ἀμβλυγώνιον, ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΚ ὕψος δὲ τὴν ΕΓ καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ τοῦτο ἐκ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Ε, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Α καὶ ἂς ἰσορροπήσῃ αὕτη τὸ τρίγωνον, οὕτως ἔχον, ὡς τώρα εὑρίσκεται, ἂς ὑπάρχει δὲ ἡ σχέσις ΑΒ: ΒΕ =τριγ. ΓΔΚ: ἐπιφ. Λ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Λ καὶ μικροτέρα τοῦ τριγώνου ΔΓΚ. τοῦτο ἀποδεικνύεται ὅπως καὶ τὸ προηγούμενον.



ιʹ.

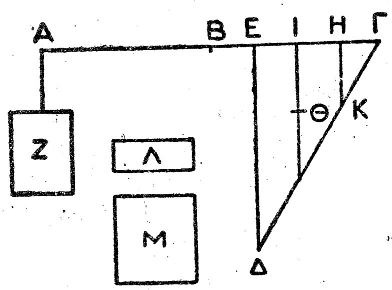
ἔστω πάλιν ὁ ζυγὸς ΑΒΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἔχον τὰς εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Η γωνίας ὀρθάς, τὴν δὲ πλευρὰν ΚΔ περατουμένην εἰς τὸ Γ, ἂς ὑπάρχει δὲ ἡ σχέσις ΑΒ: ΒΗ=τραπ. ΒΔΚΗ: Λ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ εἰς τὰ σημεῖα Β, Η, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ ἂς ἰσορροπεῖ αὕτη τὸ τραπέζιον ΒΔΚΗ ὅπως τοῦτο τώρα εἶναι ἐξηρτημένον. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τῆς Λ. ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις (2ΔΒ+ΚΗ):(2ΚΗ+ΒΔ)=ΕΗ: ΒΕ καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΕΝ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω τὸ Θ· τότε τὸ Θ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπεζίου· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Μηχανικά. ἐὰν τώρα τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ παύσῃ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Η καὶ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε, θὰ παραμείνῃ τοῦτο, ὡς εὑρίσκετο πρότερον καὶ θὰ ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἐξηρτημένον κατὰ τὸ σημεῖον Ε ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ ἐξηρτημένην κατὰ τὸ σημεῖον Α, θὰ ὑπάρχει ἡ σχέσις ΑΒ: ΒΕ=τραπ. ΒΔΗΚ: ἐπιφ. Ζ· ἄρα ὁ λόγος τοῦ τραπεζίου ΒΔΗΚ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν λόγον τοῦ τραπεζίου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Λ, ἐπειδὴ ὁ λόγος ΑΒ: ΒΕ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΑΒ: ΒΗ· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας Λ σθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΗΚ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. ἦν οὖν τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ Ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η σαμείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ Ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ τὸ Ε κρεμάμενον τῷ Ζ χωρίῳ κατὰ τὸ Α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ ἤπερ ποτὶ τὸ Λ, ἐπεὶ καὶ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ποτί τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ Ζ τοῦ Λ.

ια΄.

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΔΡ ἐπὶ τὸ Β πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, τὸ δὲ ΔΚΤΡ τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Ζ τῷ ΔΚΡΤ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Ζ χωρίον τοῦ Λ.

ιβ΄.

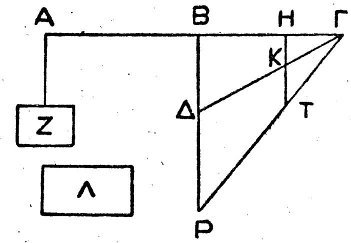
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΔΕΚΗ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ε, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ ΚΔ, ΕΗ γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νευούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δή, τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.



ἔλαβον γὰρ τοῦ ΔΚΕΗ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἔστω δὲ τὸ Θ· λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον· καὶ ἄγω τὰν ΘΙ παρὰ τὰν ΔΕ. ἂν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ, μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ Ζ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσσοροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ Ι τῷ Ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ Α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΙ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ΔΚΕΗ ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Ζ, ποτὶ δὲ τὸ Μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζόν ἐστι, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ια΄.

Ἔστω πάλι ὁ ζυγὸς ΑΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΚΔΤΡ ἔχον τὰς πλευρὰς ΚΔ, ΤΡ, συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ, τὰς δὲ πλευρὰς ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ΔΡ νὰ διέρχεται ἐκ τοῦ Β, νὰ ὑπάρχῃ δὲ ἡ σχέσις ΑΒ: ΒΗ=τραπεζ. ΔΚΤΡ: ἐπιφ. Λ, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΚΤΡ ἄς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Η καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ζ κατὰ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἄς ἰσορροπεῖ ἡ ἐπιφάνεια Ζ τὸ τραπέζιον ΔΚΤΡ, οὕτως ἔχον ὡς τώρα κεῖται. ὅπως προηγουμένως, κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας Λ.



ιβ΄.

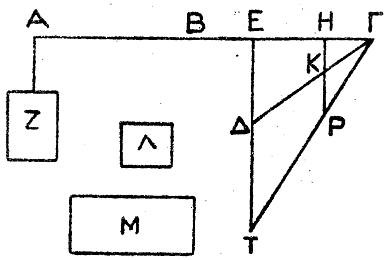
Ἔστω πάλι ὁ ζυγὸς ΑΓ, μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΕΚΗ ἔχον τὰς κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η, γωνίας ὀρθάς, τὰς δὲ πλευρὰς ΚΔ καὶ ΕΗ συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ καὶ ἄς ὑπάρχῃ ἡ σχέσις ΑΒ : ΒΗ=τραπ. ΔΚΕΗ: ἐπιφ. Μ, ἐπίσης δὲ ΑΒ: ΒΕ=τραπ. ΔΚΕΗ: ἐπιφ. Λ, ἄς ἀναρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ΔΚΕΗ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἄς ἀναρτηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Α καὶ ἄς ἰσορροπεῖ αὔτη τὸ τραπέζιον ὅπως τοῦτο τώρα εὑρίσκεται. λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Λ καὶ μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας Μ.

προσδιώρισα δηλαδὴ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπεζίου ΔΚΕΗ καὶ ἔστω τοῦτο τὸ Θ· τοῦτο λαμβάνεται ὅπως προηγουμένως· καὶ ἔφερα τὴν ΘΙ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ. ἄν τώρα τὸ τραπέζιον ἀναρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Ι καὶ οὐχὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Η θὰ παραμείνῃ τοῦτο εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν καὶ θὰ ἰσορροπήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ποὺ ἔχουν ἐκτεθῇ προηγουμένως. ἐπειδὴ δὲ τὸ τραπέζιον ἀνηρτημένον κατὰ τὸ σημεῖον Ι ἰσορροπεῖ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ ἀνηρτημένην κατὰ τὸ σημεῖον Α, θὰ ὑπάρχει ἡ σχέσις τραπ. ΔΚΕΗ: ἐπιφ. Ζ=ΑΒ: ΒΙ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι ὁ λόγος ΔΚΕΗ: Λ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου ΔΚΕΗ : Ζ καὶ ΔΚΕΗ : Μ μικρότερος τοῦ λόγου ΔΚΕΗ : Ζ· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τῆς Λ, μικροτέρα δὲ τῆς Μ.

ιγ΄.

Ἔστω πάλι ὁ ζυγὸς ΑΓ, τὸ μέσον αὐτοῦ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΚΔΤΡ ἔχον τὰς πλευρὰς ΚΔ, ΤΡ, συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἄς ἀναρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ζ ἄς ἀναρτηθῇ κατὰ τὸ Α καὶ ἄς ἰσορροπεῖ αὔτη τὸ τραπέζιον ΔΚΤΡ ὅπως τοῦτο εὑρίσκεται, ἄς

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΚΤΡ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.



ιδ'.

Ἔστω τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ ΒΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Β σαμείου ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ· ἐσσεῖται δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ ΒΓ ἐς ἴσα τμάματα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων ὧν ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΙΟΓ τριγώνου μεῖζον [ἐστιν] ἢ τριπλάσιον.

διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἁ ΑΒΓ, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΑΒ ἴσα τᾷ ΒΓ, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Β· καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Β, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐν δὲ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ Ρ, Χ, Ω, Δ χωρία κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν Ρ χωρίον τῷ ΔΕ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ τῷ ΞΙΓ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ ΡΧΨΩΔ χωρίου. καὶ ἐπεὶ ἐστιν τμᾶμα τὸ ΒΓΘ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἄκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΣΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΕ, ὃν ἁ ΣΕ ποτὶ τὰν ΕΦ· ὥστε καὶ ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ ΣΖ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΗ, ὃν τὸ ΤΗ ποτὶ τὸ ΜΗ, ποτὶ δὲ τὰν ὑπάρχῃ δὲ ἡ σχέσις ΑΒ : ΒΕ = τραπ. ΔΚΤΡ : ἐπιφ. Λ. ἐπίσης δὲ ΑΒ : ΒΗ = τραπ. ΔΚΤΡ : ἐπιφ. Μ. ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας Λ καὶ μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας Μ.

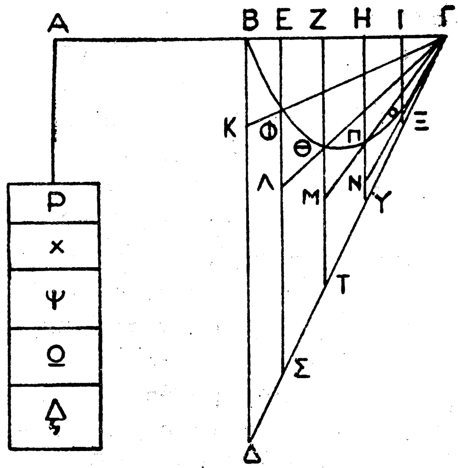
ιδ΄.

Ἔστω τὸ τμῆμα ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς. ἡ ΒΓ ἔστω πρῶτον κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Γ, ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ· τὸ τρίγωνον ΒΓΔ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον. ἂς διαιρεθῇ δὲ ἡ ΒΓ εἰς ὅσα δήποτε ἴσα τμήματα τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὰς τομὰς παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, τὰ δὲ σημεῖα ποὺ αἱ παράλληλοι αὗται τέμνουν τὴν παραβολὴν ἂς ἑνωθοῦν μὲ τὸ Γ καὶ ἂς προεκταθοῦν (αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὸ σημεῖον Γ καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς παραβολῆς ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος). λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ τριγώνου ΞΙΓ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ, καὶ τοῦ τριγώνου ΙΟΓ.

διότι ἂς διχοτομηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΒ = ΒΓ καὶ ἂς θεωρηθῇ ἡ ΑΓ ὡς ζυγὸς (μοχλός)· καὶ ὡς σημεῖον στηρίξεως αὐτοῦ τὸ Β· ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ζυγοῦ, εἰς τὸ σημεῖον Α, ἂς ἐξαρτηθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ, καὶ ἂς ἰσορροπεῖ ἡ ἐπιφάνεια Ρ τὸ τραπέζιον ΔΕ, ὡς τοῦτο εὑρίσκεται, ἡ ἐπιφάνεια Χ τὸ τραπέζιον ΖΣ, ἡ ἐπιφάνεια Ψ τὸ τραπέζιον ΤΗ, ἡ ἐπιφάνεια Ω τὸ τραπέζιον ΥΙ, καὶ ἐπιφάνεια Δ τὸ τρίγωνον ΞΙΓ· τότε τὸ ὅλον σύστημα θὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. ὥστε τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπιφανειῶν Ρ+Χ+Ψ+Ω+Δ.

καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τὸ τμῆμα ΒΓΘ, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ὀρθογωνίου κώνου (παραβολικὸν τμῆμα ΒΓΘ) ἐκ τοῦ Β ἔχει ἀχθῇ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἐκ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, πλὴν δὲ τούτου, ἡ ΣΕ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις (§ ε΄.) ΒΓ : ΒΕ = ΣΕ : ΕΦ· ὥστε ΒΑ : ΒΕ = τραπέζιον ΔΕ : τραπέζιον ΚΕ. κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ΑΒ : Β Ζ = τραπέζιον ΣΖ : τραπέζιον ΛΖ, ΑΒ : ΒΗ = τραπ. ΤΗ : τραπ. ΜΗ, ΑΒ : ΒΙ = τραπέζ· ΥΙ : ΝΙ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΔΕ εἶναι κατὰ τὰ σημεῖα Β, Ε, ὀρθογώνιον, αἱ δὲ πλευραί του (ΒΕ, ΔΣ) συγκλίνουν κατὰ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ τοῦτο, ὡς τώρα εὑρίσκεται τὴν ἐπιφάνειαν Ρ ἐξηρτημένην ἐκ τοῦ σημείου Α τοῦ ζυγοῦ, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει ἡ

ΒΙ, ὃν τὸ ΥΙ ποτὶ τὸ ΝΙ. ἐπεὶ οὖν ἐστι τραπέζιον τὸ ΔΕ τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ Ρ κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὡς ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΞ, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ ΚΕ χωρίον τοῦ Ρ χωρίου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ καὶ τὸ ΖΣ τραπέζιον τὰν μὲν ποτὶ τοῖς Ζ, Ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣΤ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ Χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὡς μὲν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΖΦ, ὡς δὲ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ· εἴη οὖν κα τὸ Χ χωρίον τοῦ μὲν ΛΖ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΖΦ μεῖζον· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν ΜΗ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘΗ μεῖζον, καὶ τὸ Ω χωρίον τοῦ μὲν ΝΟΙΗ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΠΙ μεῖζον, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Δ χωρίον τοῦ μὲν ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΓΙΟ μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΚΕ τραπέζιον μεῖζόν ἐστι τοῦ Ρ χωρίου, τὸ δὲ ΛΖ τοῦ Χ, τὸ δὲ ΜΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΝΙ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΞΙΓ τρίγωνον τοῦ Δ, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ΡΧΜΩΔ χωρίου. ἔστιν δὲ τὸ ΡΧΨΩΔ τρίτον μέρος τοῦ ΒΓΔ τριγώνου· δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ τραπεζίων καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου. πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν ΖΦ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΘΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΙΠ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΙΟΓ τρίγωνον τοῦ Δ, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ ΔΩΨΧ χωρίου· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΙΓΟ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.



ιε΄.

Ἔστω πάλιν τὸ ΒΘΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ ΒΓ μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ· ἀναγκαῖον δὴ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ Β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμάματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ Γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν ΒΓ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ ποτὶ τῷ Β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἁ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, καὶ διῃρήσθω ἁ ΒΓ εἰς τμάματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, σχέσις ΒΑ : ΒΕ = τραπέζ. ΔΕ : τραπ. ΚΕ, τὸ τραπέζιον ΚΕ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ρ. διότι τοῦτο ἔχει ἤδη ἀποδειχθῇ (§ ι'.). πάλι δὲ τὸ τραπέζιον ΖΣ εἶναι κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Ε, ὀρθογώνιον, ἡ δὲ πλευρά του ΣΤ συγκλίνει κατὰ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ τοῦτο, ὡς τώρα εὑρίσκεται, τὴν ἐπιφάνειαν Χ ἐξηρτημένην ἐκ τοῦ σημείου Α τοῦ ζυγοῦ, καὶ ὑπάρχει ἡ σχέσις ΑΒ : ΒΕ = τραπ. ΖΣ : τραπ. ΖΦ, καὶ ΑΒ : ΒΖ = τραπ. ΖΣ : τραπ. ΛΖ. θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια Χ τοῦ μὲν τραπεζίου ΛΖ μικροτέρα, τοῦ δὲ τραπεζίου ΖΦ μεγαλυτέρα· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (§ ιβ'). διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ἐπιφάνεια Ψ εἶναι μικροτέρα τοῦ τραπεζίου ΜΗ, καὶ μεγαλυτέρα τοῦ τραπεζίου ΘΗ, καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ω εἶναι μικροτέρα τοῦ τραπεζίου ΝΟΙΗ καὶ μεγαλυτέρα τοῦ τραπεζίου ΠΙ, ἐπίσης δὲ ἡ ἐπιφάνεια Δ εἶναι μικροτέρα τοῦ τριγώνου ΞΙΓ καὶ μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΓΙΟ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΚΕ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ρ, τὸ τραπέζιον ΛΖ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Χ, τὸ τραπέζιον ΜΗ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ψ, τὸ τραπέζιον ΝΙ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ω, καὶ τὸ τρίγωνον ΞΙΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Δ, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλαι αἱ εἰρημέναι ἐπιφάνειαι (των τραπεζίων ὁμοῦ)* εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ἐπιφανειῶν Ρ+Χ+Ψ+Ω+Δ. εἶναι δὲ αἱ ἐπιφάνειαι Ρ+Χ+Ψ+Ω+Δ τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ τριγώνου ΞΙΓ. ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον ΖΦ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Χ, τὸ τραπέζιον ΘΗ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Ψ, τὸ τραπέζιον ΙΠ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Ω, καὶ τὸ τρίγωνον ΙΟΓ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Δ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν εἰρημένων τούτων τραπεζίων, εἶναι μικρότερον τῶν ἐπιφανειῶν Δ+Ω+Ψ+Χ. εἶναι ἄρα ἐπίσης φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΙΓΟ, καὶ μικρότερον τοῦ τριπλασίου τῶν προαναφερθέντων (δηλ. μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ τριγώνου ΞΙΓ).

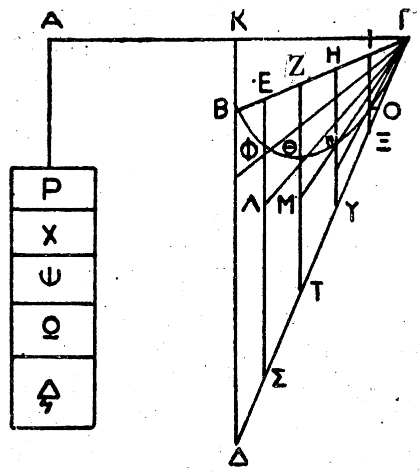
ιε'.

Ἔστω πάλι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ ἡ δὲ ΒΓ νὰ μὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον· τότε κατ' ἀνάγκην ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ πρὸς τὸ μέρος ταύτης, θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν ἀμβλεῖαν, ὡς ἐπίσης ἀμβλεῖαν γωνίαν θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΒΓ ἡ ἐκ τοῦ Γ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς παραβολῆς. ἔστω ἡ σχηματίζουσα τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΒΔ καὶ ἀπὸ τοῦ

* συν τριγ ΞΙΓ

ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Ζ, Η, Ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΞ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον.

ἐκβεβλήσθω ἁ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τᾷ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΑΚ. νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ χωρία, καὶ τὸ μὲν Ρ τῷ ΔΕ τραπεζίῳ ἰσορροπείτω οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ τῷ ΓΙΞ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩΔ χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ Ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΝΙ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΠΙ ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον μεῖζον τοῦ Δ χωρίου, τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον· δῆλον οὖν ἐστιν.



ις'.

Ἔστω πάλιν τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ Β ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ Ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ζ χωρίῳ.

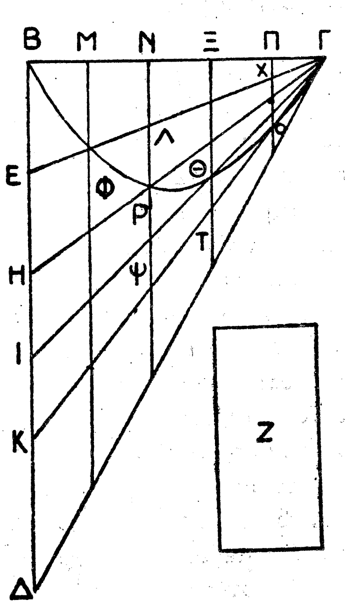
εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον· ἁ δὴ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ ΒΓΔ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ ΒΕ μέρος τᾶς ΒΔ. διῃρήσθω οὖν ἁ ΒΔ ἐς τὰ μέρεα, καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρεσίων σαμεῖα τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ι, Κ σαμείων ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν·

σημείου Γ ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ ΒΓ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τμήματα ἔστω ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἐκ τῶν σημείων δὲ Ε, Ζ, Η, Ι, ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς αἱ ΕΣ ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα αὗται τέμνουν τὴν παραβολὴν ἂς ἑνωθοῦν μὲ τὸ Γ καὶ ἂς προεκταθοῦν πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος (ὥστε νὰ τμήσουν τὰς παραλλήλους). λέγω καὶ τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ τριγώνου ΓΙΞ, μεγαλύτερον δὲ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΓΟΙ.

ἂς προεκταθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἀπὸ τὰς δύο διευθύνσεις της. ἐὰν φέρω τὴν κάθετον (ἐπὶ τὴν ΒΔ) τὴν ΓΚ λαμβάνω ΓΚ=ΑΚ. ἂς νοηθῇ πάλι ἡ ΑΓ ὡς ζυγὸς (μοχλός), μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ καὶ σημεῖον στηρίξεως ἐπίσης τὸ Κ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον ΓΚΔ ἀπὸ τὸ ἥμισυ τοῦ ζυγοῦ ὅπως οὗτος εὑρίσκεται κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Κ καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ζυγοῦ, ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, ἂς ἐξαρτηθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ, καὶ ἂς ἰσορροπῇ ἡ ἐπιφάνεια Ρ τὸ τραπέζιον ΔΕ, ὅπως τοῦτο εὑρίσκεται, ἡ ἐπιφάνεια Χ τὸ τραπέζιον ΖΣ, ἡ ἐπιφάνεια Ψ τὸ τραπέζιον ΤΗ, ἡ ἐπιφάνεια Ω τὸ τραπέζιον ΥΙ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Δ τὸ τρίγωνον ΓΙΞ. τὸ ὅλον σύστημα θὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. ὥστε, τὸ τρίγωνον ΔΒΓ θὰ εἶναι τριπλάσιον τῶν ἐπιφανειῶν Ρ+Χ+Ψ+Ω+Δ. ὅπως καὶ προηγουμένως, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τραπέζιον ΒΦ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφατείας Ρ, ὅτι τὸ τραπέζιον ΘΕ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Χ, ἐν ᾧ τὸ τραπέζιον ΖΦ εἶναι μικρότερον ταύτης, ὅτι τὸ τραπέζιον ΜΗ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ψ, ἐν ᾧ τὸ τραπέζιον ΗΘ εἶναι μικρότερον ταύτης, ὅτι τὸ τραπέζιον ΝΙ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ω, ἐν ᾧ τὸ τραπέζιον ΠΙ εἶναι μικρότερον ταύτης, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΞΙΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Δ, ἐν ᾧ τὸ τρίγωνον ΓΙΟ εἶναι μικρότερον ταύτης. διότι τοῦτο εἶναι φανερόν.

ιϛ΄.

Ἔστω πάλι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἔστω δὲ ἡ ἐπιφάνεια $Z = \frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. λέγω ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ. ἐὰν τὸ παραβολικὸν τμῆμα δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ταύτης· ἔστω πρῶτον, ὅτι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον. ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν (ἔστω ν) γίνεται μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. εἶναι δὲ δυνατόν, νὰ ληφθῇ ἐπιφάνεια μικροτέρα τῆς διαφορᾶς (τοῦ παρα-τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ᾽ ἃ τέμνοντι τὰν τομὰν αἱ εὐθεῖαι, ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν τι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, δῆλον, ὥς τὰ συναμφότερα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμάματος. καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι, δι᾽ ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον· τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ τὸ δὴ Ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. καὶ ἐστι τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου· τὸ δὴ ΒΔΓ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου.



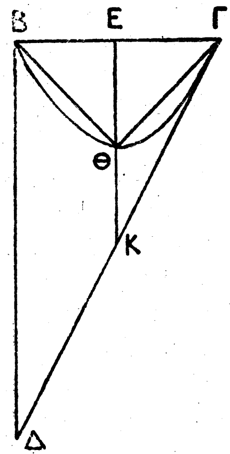
λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἄρα ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω οὖν τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ ἐστιν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίων ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου· ἔστιν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίον ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὥς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμάματος ἔλασσον εἴη κα καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἅ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα τὸ τμᾶμα τῷ Ζ χωρίῳ.

βολικοῦ τμήματος ΒΘΓ μεῖον ἐπιφ. Ζ) ἡ ὁποία νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. ἔστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, μικρότερον τῆς εἰρημένης διαφορᾶς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· ἡ δὲ ΒΕ νὰ εἶναι πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΒΔ. ἂς διαιρεθῇ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἰς τμήματα κατὰ τὰ σημεῖα Η, Ι, Κ καὶ ἂς ἑνωθῇ τὸ σημεῖον Γ μὲ τὰ σημεῖα ταῦτα. αἱ ἑνοῦσαι τὰ σημεῖα ταῦτα εὐθεῖαι θὰ τέμνουν τὴν παραβολὴν (ΒΘΓ) ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ· ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ τῶν τομῶν τῆς παραβολῆς, ἂς ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· θὰ εἶναι δὲ αὗται καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ, εἶναι πρόδηλον, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας Ζ καὶ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. τὰ τραπέζια τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῶν τεμνουσῶν εὐθειῶν ἤτοι τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΟΣ, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ· διότι τὸ μὲν τραπέζιον ΜΕ εἶναι κοινόν, τὸ δὲ τραπ. ΜΛ = τραπ. ΦΛ, τὸ τραπ. ΛΞ = τραπ. ΘΡ, τὸ τραπ. ΧΞ = τραπ. ΟΘ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΧΠ = τρίγ. ΓΟΣ· ἡ ἐπιφάνεια Ζ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ. τὸ δὲ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος, τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ. ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος (τῶν εἰρημένων τραπεζίων καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ). τὸ παραβολικὸν λοιπὸν τμῆμα ΒΘΓ δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Ζ.

λέγω ὅμως, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον. διότι ἂς δεχθῶμεν, ὅτι εἶναι μικρότερον. πάλι, ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν (ἔστω ν), γίνεται μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ληφθῇ ἐπιφάνεια, μικροτέρα τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία (ἐπιφ.) νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. ἔστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ μικρότερον τῆς διαφορᾶς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ, ἡ δὲ λοιπὴ κατασκευὴ νὰ γίνῃ ὅπως προηγουμένως. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῆς ἐπιφανείας Ζ ἀπὸ τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ καὶ τὸ παραβολικὸν τμῆμα (ὁμοῦ) θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ἐπιφανείας Ζ. εἶναι δὲ ἡ ἐπιφάνεια Ζ μικροτέρα (τοῦ ἀθροίσματος) τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ, καὶ τοῦ τριγώνου ΓΠΣ· διότι τὸ μὲν τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τῆς ἐπιφανείας Ζ, μικρότερον δὲ τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν εἰρημένων ἐπιφανειῶν (τῶν τετραπλεύρων καὶ τοῦ τριγώνου ΓΠΣ), ὡς ἐδείχθη προηγουμένως· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΕ καὶ τὸ παραβολικὸν ιζ'.

Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον.

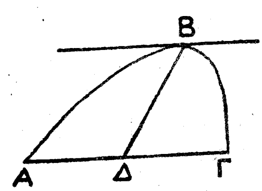
ἔστω γὰρ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν



τὸ Θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΒΓ ἐστι παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ. ἄχθω δὲ ἁ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, ἁ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΕΓ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμάματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δῆλον, ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη'.

Εἴ κα ἐν τμάματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν.



ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ ἄχθω ἁ ΔΒ παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ ἆκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΔ, ΔΓ, δῆλον, ὡς παραλλήλοι ἐντι ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν, ὅτι τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται ἁ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένα· κορυφὰ οὖν ἐστιν τοῦ τμάματος τὸ Β σαμεῖον.

τμῆμα ΒΘΓ (ὁμοῦ) εἶναι μικρότερα τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ, καὶ τοῦ τριγώνου ΓΠΣ· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη (τῆς ἀνισότητος) τὸ κοινὸν τμῆμα (τὸ παραβολικὸν) τότε τὸ τρίγωνον ΓΒΕ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑπολειπομένων ἐπιφανειῶν· τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι ἀδύνατον· διότι ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα, τῶν τραπεζίων ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τοῦ τριγώνου ΓΟΣ, ὅπερ ἄθροισμα, εἶναι μεγαλύτερον τῶν ὑπολοιπομένων ἐπιφανειῶν. ἄρα τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ δὲν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Ζ.' ἀπεδείχθη δὲ ὅτι οὔτε μεγαλύτερον εἶναι· ἄρα τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ζ.

ιζ'.

'Επὶ τῇ βάσει τῆς ἀποδείξεως ταύτης, εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶν παραβολικὸν τμῆμα εἶνα τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ παραβολικὸν τμῆμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό.

διότι ἔστω τὸ παραβολικὸν τμῆμα μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Θ καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΒΘΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα. ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ εἶναι κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Θ. ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΘ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΔ ἐπίσης παράλληλος πρὸς ταύτην, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΚΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Θ, τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΘΓ. (ἐκ τῶν προτάσεων τούτων εἶναι ΕΘ $= \frac{1}{2}$ ΕΚ κατὰ τὸ β'. θεώρημα καὶ ΕΚ $= \frac{1}{2}$ ΒΔ, ἄρα ΕΘ $= \frac{1}{4}$ΒΔ) ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον μὲν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ΒΘΓ, τετραπλάσιον δὲ τοῦ τριγώνου ΒΘΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΘΓ.

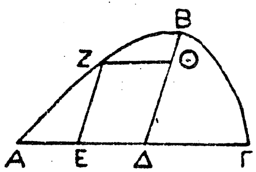
τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας καὶ καμπύλης γραμμῆς, τὴν μὲν εὐθεῖαν καλῶ βάσιν ὕψος δὲ τὴν μεγίστην κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς καμπύλης ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ μεγίστη κάθετος.

ιη'. (*γεωμετρικὴ ἀπόδειξις*)

'Εὰν εἰς τμῆμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ εὐθείας καὶ παρα-ιθ'.

Ἐν τμάματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἁ ἀπὸ μέσας τὰς βάσιος ἀχθεῖσα τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΔ, ἄχθω δὲ καὶ ἁ ΖΘ παρὰ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν

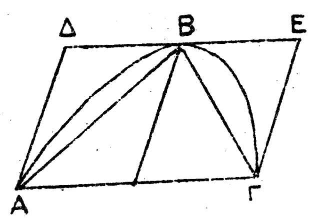


ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται, καὶ αἱ ΑΔ, ΖΘ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσάν ἐντι, δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΖΘ δυνάμει· τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἁ ΒΔ τᾶς ΒΘ μάκει. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ ΒΔ τᾶς ΕΖ μάκει.

κ'.

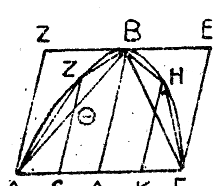
Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον ἢ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἀναγκαῖον, τὸ Β σαμεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμάματος· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς. ἄχθω ἁ ΔΕ διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ αἱ ΑΔ, ΓΕ παρὰ τὰν διάμετρον· πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΔΕΓ παραλληλογράμμου, φανερόν, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος.



Πόρισμα

Δεδειγμένου δὲ τούτου δῆλον, ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμᾶμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμάματα ποιήσομες ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.



κα'.

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τοβολῆς ἀχθῇ ἐκ τοῦ μέσου τῆς βάσεως παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, θὰ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς τέμνει τὴν παραβολήν.

διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ ἡ ΔΒ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς καὶ ΑΔ=ΔΓ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι παράλληλοι. ὁμοίως εἶναι φανεράν, ὅτι ἐκ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς παραβολῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β· εἶναι λοιπὸν τοῦτο κορυφὴ τοῦ τμήματος.

ιθ΄.

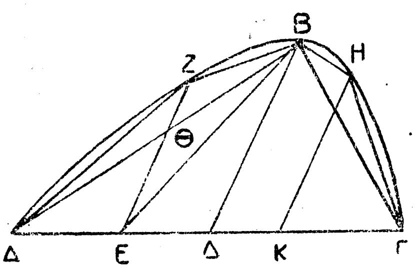
Εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς βάσεως εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς εὐθείας (τῆς παραλλήλου) τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως· (μέχρι τῆς παραβολῆς)· διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ ΕΖ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΔ (παράλ. πρὸς τὴν ΔΒ), ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς καὶ ΑΔ, ΖΘ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχει ἡ σχέσις $ΒΔ : ΒΘ = (ΑΔ)^2 : (ΖΘ)^2$· ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι τετραπλασία τῆς ΒΘ· συνεπῶς ἡ ΒΔ εἶναι $\frac{4}{3}$ ΕΖ.

κ΄.

Ἐὰν εἰς παραβολικὸν τμῆμα ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον βάσιν καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ μὲ τὸ παραβ. τμῆμα, τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

ἔστω τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα. ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα, τὸ σημεῖον Β εἶναι κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Β. ἂς ἀχθῇ δὲ διὰ τοῦ Β ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ αἱ ΑΔ, ΓΕ, παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς· αὗται θὰ εἶναι ἐκτὸς τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι τὸ ἥμισυ μᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα ἐς τὰ λειπόμενα τμάματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν.

ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται καὶ τετμάσθω ἁ ΑΓ δίχα τῷ Δ, ἁ δὲ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον· τὸ Β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστιν τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ ΑΔ τῷ Ε, καὶ ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δὲ ἁ ΑΒ κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα Ζ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος τοῦ ΑΖΒ. τὸ δὴ ΑΖΒ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ [ΑΖΒ] τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον, ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΖΒ τριγώνου.

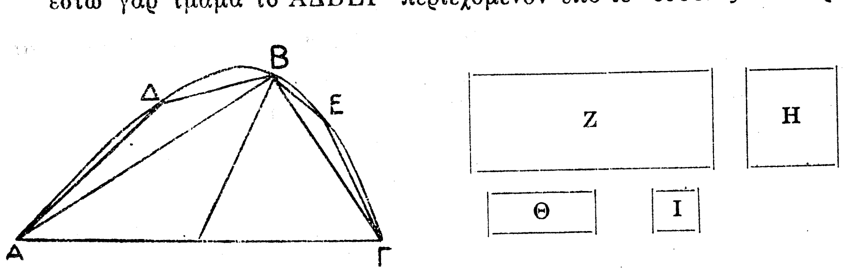


ἔστιν οὖν ἁ ΒΔ τᾶς μὲν ΕΖ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ ΕΘ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΕΘ τᾶς ΘΖ. ὥστε καὶ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον διπλάσιον ἐστι τοῦ ΖΒΑ· τὸ μὲν γὰρ ΑΕΘ διπλάσιον ἐστι τοῦ ΑΘΖ, τὸ δὲ ΘΒΕ τοῦ ΖΘΒ. ὥστε τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΖΒ ἐστιν ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ ΒΗΓ τμᾶμα ἐγγραφέντος.

κβ΄.

Εἴ κα ᾖ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ Ζ, Η, Θ, Ι, τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἁγούμενον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω τὸ Ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν.



τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΕΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

Π ό ρ ι σ μ α

Σύμφωνα μὲ τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν, εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγράφεται πολύγωνον εἰς παραβολικὸν τμῆμα, οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολειπομένων παραβολικῶν τμημάτων νὰ εἶναι μικρότερον πάσης δοθείσης ἐπιφανείας (ὅσονδήποτε μικρᾶς)· διότι ἐὰν πάντοτε ἀφαιροῦμεν ἀπὸ κάθε παραβολικὸν τμῆμα (ποὺ ὑπολείπεται) περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐλαττοῦντες διαρκῶς τὰ ὑπολειπόμενα τμήματα, θὰ καθιστῶμεν αὐτὰ μικρότερα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας (ὅσονδήποτε μικρᾶς).

κα΄

Ἐὰν εἰς παραβολικὸν τμῆμα ἐγγραφῇ τρίγωνον, ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα, εἰς δὲ τὰ οὕτω ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα ἐγγραφῶσι τρίγωνα, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὰ παραβολικὰ τμήματα, τότε τὸ ἀρχικῶς ἐγγραφὲν τρίγωνον θὰ εἶναι ὀκταπλάσιον ἑκάστου τῶν τριγώνων τῶν ἐγγραφέντων εἰς τὰ ὑπολειφθέντα παραβολικὰ τμήματα.

ἔστω τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ καὶ ἂς ληφθῇ ΑΔ=ΔΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς· τότε τὸ σημεῖον Β θὰ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸ παραβολικὸν τμῆμα. ἂς ληφθῇ πάλι ΑΕ=ΕΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Θ· ἄρα τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ΑΖΒ. τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΖΒ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΖΒ. Δέον ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΒ.

ἡ $\text{ΒΔ}=\frac{4}{3}\text{ΕΖ}$ καὶ ΒΔ=2ΕΘ. ἄρα ΕΘ=2ΘΖ.

ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΕΒ=2 τριγ. ΖΒΑ· διότι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΕΘ=2 τριγ. ΑΘΖ, τὸ δὲ τριγ. ΘΒΕ=2 τριγ. ΖΘΒ. ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ΑΖΒ. ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου τοῦ ἐγγραφέντος εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΗΓ.

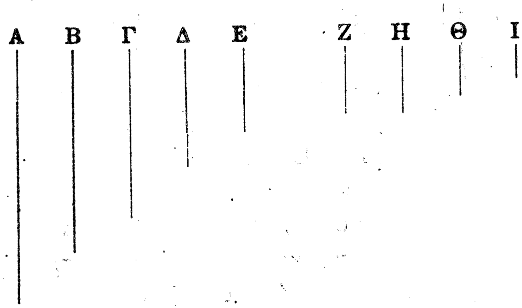
κβ΄.

Ἐὰν δοθῇ παραβολικὸν τμῆμα καὶ ὁσαιδήποτε ἐπιφάνειαι ἔχουσαι λόγον τετραπλάσιον, ἡ προηγουμένη τῆς ἑπομένης (ἀποτελοῦσαι γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\frac{1}{4}$), νὰ εἶναι δὲ ἡ μεγαλυτέρα τῶν ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ Β, τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, δῆλον, ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ Η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ τῷ Θ καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ Ι χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐλάσσονα ἐστι τοῦ τμάματος.

κγ'.

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε τετραπλα-



σίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δὲ Η τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ Ι τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ. ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ Ζ, Η, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν Β, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ Α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ τὸ Ι, τουτέστι τὸ τρίτον τὸ Ε, τοῦ **Α** ἐστιν ἐπίτριτα.

κδ'.

Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΔΒΞΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ Κ χωρίον. δει ἐπιφανειῶν, ἴση πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα, τότε ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι θὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. διότι, ἔστω τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΔΒΕΓ καὶ ἐπιφάνειαι ὁσαιδήποτε ἀποτελοῦσαι πρόοδον, (φθίνουσαν) αἱ Ζ, Η, Θ, Ι, νὰ εἶναι δὲ ἡ προηγουμένη ἐπιφάνεια τετραπλασία τῆς ἑπομένης καὶ μεγίστη ἔστω ἡ ἐπιφάνεια Ζ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἴση κατὰ τὸ ἐμβαδόν, μὲ τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραβολικὸν τμῆμα. λέγω ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπιφανειῶν Ζ, Η, Θ, Ι.

ἔστω κορυφὴ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος τὸ Β, τῶν δὲ ὑπολειπομένων παραβολ. τμημάτων (μετὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ) ἔστωσαν κορυφαὶ τὰ Δ, Ε. ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦ ἀθροίσματος τούτων εἶναι τετραπλάσιον. καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ $=$ ἐπφάνεια Η.

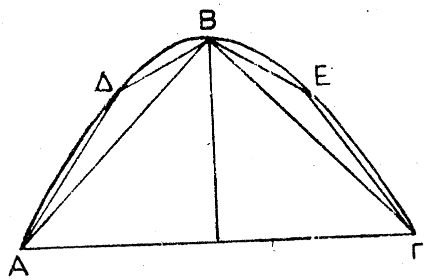
ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς τὰ ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ ταῦτα, εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Θ, ἐπίσης δὲ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς τὰ νέα ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα, εἶναι ἴσα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ι· ἄρα ὅλαι αἱ οὕτω πως ληφθεῖσαι ἐπιφάνειαι ἰσοῦνται μὲ πολύγωνον ἐγγραφὲν εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα. εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι μικρότερον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

κγʹ.

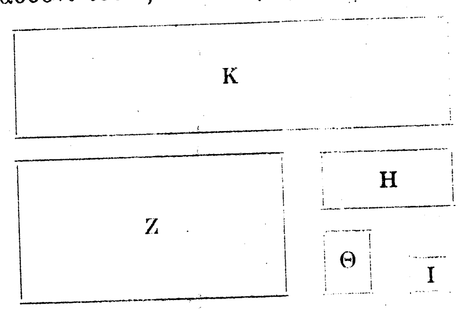
Ἐὰν ληφθῶσι μεγέθη (κατὰ φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον) μὲ λόγον $\frac{1}{4}$, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου ταύτης σὺν $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

ἔστω, ὁσαδήποτε μεγέθη κατὰ φθίνουσαν γεωμ. πρόοδον, τὰ Α,Β, Γ,Δ,Ε, μὲ λόγον $\frac{1}{4}$ καὶ μέγιστον τούτων τὸ Α, ἂς εἶναι δὲ τὸ μέγεθος $Ζ = \frac{1}{3}$ Β, τὸ $Η = \frac{1}{3}$ Γ, τὸ $Θ = \frac{1}{3}$ Δ, καὶ τὸ $Ι = \frac{1}{3}$. Ε. ἐπειδὴ λοιπὸν Ζ $= \frac{1}{3}$ Β καὶ $Β = \frac{1}{4}$ Α, ἕπεται ὅτι $Β+Ζ = \frac{1}{3}$ Α. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι $Η+Γ = \frac{1}{3}$ Β, $Θ+Δ = \frac{1}{3}$ Γ, καὶ $Ι+Ε = \frac{1}{3}$ Δ. συνεπῶς (διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν τελευταίων ἰσοτήτων) θὰ εἶναι $Β+Γ+Δ+Ε +Ζ+Η+Θ+Ι = \frac{1}{3}$ $(Α+Β+Γ+Δ)$. εἶναι ὅμως $Ζ+Η+Θ = \frac{1}{3}$ $(Β+Γ+Δ)$. ἄρα $Β+Γ+Δ+Ε+Ι = \frac{1}{3}$ Α. φανερὸν εἶναι λοιπὸν ὅτι (διὰ προσθέσεως τοῦ Α εἰς ἀμφότ. τὰ μέλη) $Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ι, = Α+ \frac{1}{3}$ $Α = \frac{4}{3}$ Α.

κτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔΒΕΓ τμάματι. εἰ γὰρ μὴ ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμάματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐστιν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων καὶ ἀεὶ οὕτω, δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ ἐπίτριτον ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστιν μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου.



ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ Ζ, τοῦ δὲ Ζ τέταρτον τὸ Η, καὶ ὁμοίως τοῦ Η τὸ Θ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Κ χωρίον τοῦ τμάματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι· ἔστιν δὴ τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ Ι ἐπίτριτα τοῦ Ζ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Κ τοῦ Ζ ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ Κ τοῖς Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ Ι. ἐπεὶ οὖν τὸ Κ χωρίον τῶν μὲν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ Ι, τοῦ δὲ τμάματος μείζονι τοῦ Ι, δῆλον, ὡς μείζονά ἐντι τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι, ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμᾶμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. οὐκ ἄρα τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Κ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ Κ. τὸ δὲ Κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ· καὶ τὸ ΑΔΒΕΓ ἄρα τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.



Πᾶν παραβολικὸν τμῆμα εἶναι $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

διότι ἔστω τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΔΒΕΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἡ δὲ ἐπιφάνεια $K = \frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. θ' ἀποδείξω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας Κ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

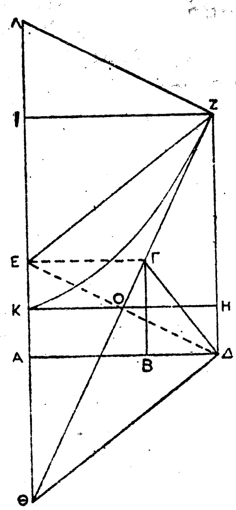
διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον, θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω πρῶτον, ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΔΒΕΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Κ. Ὡς προηγουμένως, ἐγγράφω τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ, κατόπιν δὲ εἰς τὰ ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα ἐγγράφω ὁμοίως ἀνὰ δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ ταῦτα καὶ εἰς τὰ νέα ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα ἐγγράφω ὁμοίως τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ μὲ ταῦτα. (ἐὰν οὕτω προχωρήσω ἐγγράφων εἰς τὰ ὑπολειπόμενα παραβολικὰ τμήματα τρίγωνα) τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολειπομένων παραβολικῶν τμημάτων θὰ εἶναι μικρότερον τῆς διαφορᾶς παραβολικοῦ τμήματος μεῖον ἐπιφανείας Κ. Ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Κ· ὅπερ ἀδύνατον, διότι, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν ἐπιφάνειαι σχηματιζόμεναι κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον $= \frac{1}{4}$ καὶ πρῶτον ὅρον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον (τοῦ ἀθροίσματος) τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ, ἔπειτα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων τούτων (ΑΔΒ, ΒΕΓ) εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος, τῶν εἰς τὰ ὑπόλοιπα παραβολικὰ τμήματα ἐγγραφομένων τριγώνων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς μεγαλυτέρας τῶν ἐπιφανειῶν (κατὰ τὴν § κγ'), ἡ δὲ ἐπιφάνεια Κ, εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανείας (τοῦ τριγ. ΑΒΓ). ἄρα τὸ παραβολικὸν τμῆμα δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας Κ.

ἔστω τώρα, ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Κ. ἂς εἶναι δὲ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν Ζ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Η ἂς εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{4}$ Ζ, ὁμοίως δὲ ἡ ἐπιφάνεια $\Theta = \frac{1}{4}$ Η καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ὅτου, ἡ οὕτω πως ληφθησομένη τελευταία ἐπιφάνεια εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ἐπιφανείας Κ – παραβολικοῦ τμήματος καὶ ἔστω ἡ τελευταῖα μικροτέρα ἐπιφάνεια Ι· εἶναι ὅμως τὸ ἄθροισμα, τῶν ἐπιφανειῶν Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ $I = \frac{4}{3} Z$. εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια $K = \frac{4}{3}$ Ζ (ἀφοῦ Ζ = τρίγ. ΑΒΓ)· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια $K = Z+H+\Theta+I+ \frac{1}{3} I$. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια $K - (Z+H+\Theta+I) < I$ καὶ Κ – παραβολ. τμῆμα $> I$, (ἐξ ὑποθέσεως) εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν Ζ, Η, Θ, Ι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ

παραβολικοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον. διότι ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν δοθῶσιν ἐπιφάνειαι σχηματίζουσαι φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\frac{1}{4}$, ἡ δὲ μεγαλυτέρα ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα ἐγγραφόμενον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραβολικοῦ τμήματος (§ κβ'). ἄρα τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΔΒΕΓ δὲν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Κ. ἀπεδείχθη δέ, ὅτι οὔτε μεγαλύτερον εἶναι· συνεπῶς εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν Κ. ἡ ἐπιφάνεια δὲ Κ εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριτοῦ τριγώνου ΑΒΓ. ἄρα τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΔΒΕΓ εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Εἰς τὸ β'. — Ε ἔστω ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς, ΖΘ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Ζ, ἡ ΙΖ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς ΚΗ καὶ ἡ ΖΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΗ. ἡ ΑΔ ἔστω ἡ διευθύνουσα τῆς παραβολῆς. ἡ ΖΕ = ΖΔ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραβολῆς, ἡ ΗΔ = ΕΚ ἐπειδὴ ΗΔ = ΚΑ ἡ ὁποία κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραβολῆς = ΕΚ. ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΕΟΚ καὶ ΗΟΔ ἕπεται ΟΚ =ΟΗ. τὰ τρίγωνα ΟΚΘ καὶ ΟΖΗ εἶναι ἴσα. συνεπῶς ΖΗ = ΚΘ καὶ ἐπειδὴ ΖΗ = ΙΚ ἕπεται ΙΚ = ΚΘ.

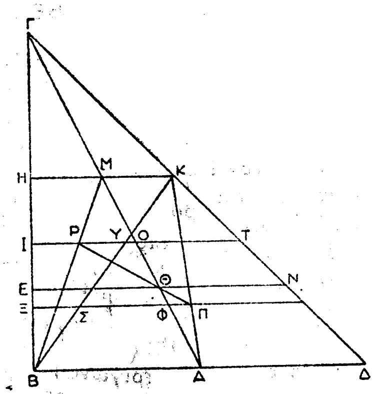


Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΕΟΚ, ΗΟΔ ἕπεται ΕΟ = ΟΔ. ἄρα ἡ ΖΘ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΕΔ, βάσιν τοῦ ἰσοσκ. τριγ. ΕΖΔ. ἡ ΓΒ ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, εἶναι δὲ μικροτέρα τῆς ΓΔ ὑποτεινούσης τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, ἄρα μικροτέρα τῆς ΓΕ. συνεπῶς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἐκτὸς τῆς παραβολῆς. τὸ ἴδιο ἰσχύει δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραβολῆς, πλὴν τοῦ σημείου Ζ. ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

Εἰς τὸ γ'. — Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν Β παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΗ, (ἐλλείπει ἀπὸ τὸ σχῆμα) ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΒΗ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΖ×ΒΗ. Τότε ὑπάρχει ἡ σχέσις ΒΔ×ΒΗ : ΒΖ×ΒΗ = ΒΔ : ΒΖ. συνεπῶς $(ΑΔ)^2 : (ΕΖ)^2 =$ ΒΔ : ΒΖ. (κ'. θεώρημα τοῦ α'. βιβλ. τῶν κωνικῶν τομῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, στερεοτ. ἔκδοσις, σελὶς 72).

Εἰς τὸ δ'.—Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΔΓ, ΒΚΙ ἕπεται ΒΔ : ΒΚ= ΒΓ : ΒΙ. ἐπειδὴ δὲ ΒΔ : ΒΚ $= (ΔΓ)^2 : (ΚΗ)^2$, λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ $= (ΔΓ)^2 : (ΚΗ)^2$. (1). ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΓ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΒΔ εἴς τι σημεῖον Λ. (ἡ ΘΛ λείπει ἀπὸ τὸ σχῆμα). ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΓΒ καὶ ΛΘΒ λαμβάνομεν ΔΓ: ΛΘ = ΒΓ : ΒΘ. ἢ ΔΓ : ΚΗ = ΒΓ : ΒΘ. ἐὰν εἰς τὴν (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸν λόγον ΔΓ : ΚΗ μὲ τὸν ἴσον του ΒΓ : ΒΘ λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ $= (ΒΓ)^2 : (ΒΘ)^2$. ἐκ ταύτης ἔχομεν ΒΓ. $(ΒΘ)^2 =$ ΒΙ. $(ΒΓ)^2$ ἢ $(ΒΘ)^2 =$ ΒΙ. ΒΓ ἢ ΒΓ : ΒΘ = ΒΘ : ΒΙ (2) ἤτοι ἡ ΒΘ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΒΙ. ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΘ = (ΒΓ−ΒΘ) : (ΒΘ −ΒΙ) ἤτοι ΒΓ : ΒΘ = ΓΘ : ΘΙ.

Εἰς τὸ ι'. Ἔστω τὸ δοθὲν τραπέζιον ΒΗΚΔ. διὰ προεκτάσεως τῶν ΒΗ, ΔΚ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΓΔ. ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΓΑ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου κεῖται ἐπὶ ταύτης. τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΗΚ κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΒΜ, καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΚΔ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΚΑ. χωρίζομεν τὴν ΒΗ εἰς τρία ἴσα μέρη διὰ τῶν σημείων Ξ, Ι καὶ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΔ. τότε τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΗΚ εἶναι τὸ Ρ καὶ τοῦ τριγώνου ΒΚΔ τὸ Π. τὸ κέντρον βάρους τοῦ τραπεζίου κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΜ. ἐπίσης ὅμως κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΠΡ ποὺ ἑνώνει τὰ δύο κέντρα βαρῶν τῶν τριγώνων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ τραπέζιον, συνεπῶς εἶναι τὸ Θ. ἀλλὰ τρίγ. ΒΚΔ : τρίγ. ΗΒΚ = ΘΡ : ΘΠ (διότι τὰ βάρη τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς μοχλοβραχίονας). ἐπίσης τριγ. ΒΚΔ : τρίγ. ΗΒΚ = ΒΔ : ΗΚ (διότι τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰ αὐτὰ ὕψη). ἀπὸ τὸ σχῆμα ὅμως λαμβάνομεν ΘΡ : ΘΠ = ΘΟ : ΘΦ. συνεπῶς ΒΔ : ΗΚ = ΘΟ : ΘΦ. Ἄρα (2ΒΔ+ΗΚ) : (2ΗΚ+ΒΔ)* = (2ΘΟ+ΘΦ) : (2ΘΦ+ΘΟ). ἀλλὰ 2ΘΟ+ΘΦ = ΟΦ+ΟΘ = ΟΜ+ΟΘ = ΘΜ καὶ 2ΘΦ+ΘΟ=ΟΦ+ΘΦ=ΑΦ+ΘΦ=ΑΘ. συνεπῶς (2ΒΔ+ΗΚ):(2ΗΚ+ΒΔ)=ΘΜ: ΑΘ. ἀλλὰ ΘΜ : ΑΘ=ΕΗ : ΒΕ καὶ ἡ σχέσις ἀπεδείχθη. (κατὰ τὸ ιε΄ θεώρημα τῶν ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I τοῦ Ἀρχιμήδους).



Εἰς τὸ ιδ΄.— Ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὸ α΄ βιβλίον περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν τὸ κέντρον βάρους τριγώνου εὑρίσκεται ἂν φέρωμεν τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου. τοῦτο ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσον κάθε πλευρᾶς $\frac{1}{3}$ τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τούτου ἀπὸ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς. ἂν ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ αὕτη τέμνει τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν ΒΔ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ΒΓ. συνεπῶς διὰ νὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ σύστημα ἰσορροπία θὰ ἔχωμεν ΑΒ×ἄθροισμα ἐξηρτημένων ἐπιφανειῶν εἰς τὸ σημεῖον Α=$\frac{1}{3}$ΒΓ×τρίγωνον ΒΔΓ. ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐξηρτημένων ἐπιφανειῶν εἰς τὸ σημεῖον Α. αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν τραπεζίων ΚΕ+ΛΖ+ΜΗ+ΝΙ+τρίγ. ΙΞΓ μεγαλύτεραι δὲ τῶν τραπεζίων ΖΘ+ΘΗ+ΠΙ+τρίγ. ΙΟΓ. ἐὰν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ χωρίσωμεν εἰς ἀπείρως μικρὰ τμήματα ἴσα ἢ ἄνισα, ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δευτέρων τραπεζίων ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἰσορροποῦσα τὰς ἐπιφανείας Ρ+Χ+Ψ+Ω+Δ αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι ἡ παραβολή. συνεπῶς ἡ παραβολὴ ΒΘΓ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνάγεται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδην εἰς τὸ θεώρ. ις΄ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς καὶ ὄχι μὲ χρῆσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπειροστοῦ. διὰ τοῦ θεωρήματος ιζ΄ συνάγεται ἡ διὰ τῶν «μηχανικῶν» ἀπόδειξις ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τριγώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐπίσης διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἀπόδειξις ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΕΘΓ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

Εἰς τὸ ιθ΄.— Ἐπειδὴ ΖΘ=$\frac{ΑΔ}{2}$ ἐκ κατασκευῆς, ἡ ἐκ τοῦ γ΄ θεωρ. λαμβανομένη σχέσις ΒΔ : ΒΘ=$(ΑΔ)^2$: $(ΖΘ)^2$ γίνεται ΒΔ : ΒΘ=$(ΑΔ)^2$: $\left(\frac{ΑΔ}{2}\right)^2$ ἐξ ἧς

* Ἡ σχέσις 2ΒΔ+ΗΚ : 2ΗΚ+ΒΔ = 2ΘΟ+ΘΦ : 2ΘΦ : ΘΟ ἐκ τῆς ἀναλογίας ΒΔ : ΗΚ = ΘΟ : ΘΦ ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. ἡ ἀναλογία ΒΔ : ΗΚ = ΘΟ : ΘΦ γράφεται καὶ ΒΔ : ΘΟ = ΗΚ : ΘΦ (1). αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν 2ΒΔ : 2ΘΟ = ΗΚ : ΘΦ. ἐκ ταύτης λαμβάνομεν (2ΒΔ+ΗΚ) : (2ΘΟ+ΘΦ) = ΗΚ : ΘΦ. (κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν μιᾶς ἀναλογίας διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν παρανομαστῶν ἰσοῦται μὲ ἕκαστον ὅρον τῆς ἀναλογίας). ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν ἐπίσης 2ΗΚ : 2ΘΦ = ΒΔ : ΘΟ ἐξ ἧς (2ΗΚ+ΒΔ) : (2ΘΦ+ΘΟ) = ΒΔ : ΘΟ. ἀλλὰ ΒΔ : ΘΟ = ΗΚ : ΘΦ. συνεπῶς (2ΗΚ+ΒΔ) : (2ΘΦ+ΘΟ) = (2ΒΔ+ΗΚ) : (2ΘΟ+ΘΦ) ἐκ τῆς ὁποίας (2ΒΔ+ΗΚ) : (2ΗΚ+ΒΔ) = (2ΘΟ+ΘΦ) : (2ΘΦ+ΘΟ).

$B\Delta=4B\Theta$ (1). ἡ $\Delta\Theta=4B\Theta-B\Theta=3B\Theta$(2). διαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (1) διὰ τῆς (2) ἔχομεν $B\Delta:\Delta\Theta=4B\Theta:3B\Theta$, ἐξ ἧς $B\Delta=\frac{4}{3}\Delta\Theta=\frac{4}{3}EZ$.

Εἰς τὸ κα'.—Ἐκ τοῦ ιθ' ἔχομεν ὅτι $B\Delta=\frac{4}{3}EZ$. ἡ $E\Theta=\frac{1}{2}B\Delta$, ὡς ἀγομένη παραλλήλως πρὸς ταύτην, ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΔ. συνεπῶς $B\Delta=2E\Theta=\frac{4}{3}(E\Theta+\Theta Z)$. ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $E\Theta=2\Theta Z$. τὸ τρίγωνον ΑΕΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΘΖ, διότι ἔχει διπλασίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὁμοίως τὸ τρίγωνον ΕΘΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘΖΒ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΒ. τὸ τρίγωνον ΑΕΒ=τρίγ. ΕΒΔ διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΒ. ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΔ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΒ.

Εἰς τὸ κδ'.— ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου ποὺ ἐγγράφεται εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι=1, τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων ποὺ ἐγγράφονται εἰς τ' ἀπομένοντα δύο παραβολ. τμήματα θὰ εἶναι $\frac{1}{4}$. τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 τριγώνων ποὺ ἐγγράφονται εἰς τ' ἀπομένοντα 4 παραβ. τμήματα θὰ εἶναι $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Τὸ ἐμβ. τῶν 8 τριγ. ποὺ ἐγγράφονται εἰς τὰ 8 ἀπομένοντα παρ. τμ. θὰ εἶναι $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^3$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἤτοι $\left(\frac{1}{4}\right)^4,\left(\frac{1}{4}\right)^5\ldots$ ἐὰν συνεχισθῇ ἡ ἐγγραφὴ τριγώνων ὥστε νὰ ἐγγραφοῦν ὁσαδήποτε τρίγωνα καὶ ἂν ἡ τελευταία ἐγγραφὴ κληθῇ (ν) δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῶν τελευταίως ἐγγραφέντων τριγώνων νὰ εἶναι $\left(\frac{1}{4}\right)^\nu$ τότε κατὰ τὸ θεώρημα κγ' τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου, μὲ τοὺς ν+1 ὅρους σὺν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ν+1 ὅρου θὰ εἶναι $1+\frac{1}{4}\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^\nu+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^\nu=\frac{4}{3}$· ἀλλὰ ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος πλὴν τοῦ τελευταίου ἀποτελοῦν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ποὺ ἐγγράφομεν συνεχῶς εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα. συνεπῶς εἶναι

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^\nu=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^\nu$$

ἤτοι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι $<\frac{4}{3}$ κατὰ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^\nu$· ἐὰν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, τότε ὁ ὅρος $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^\nu$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὸ πρῶτον μέλος ποὺ εἶναι τότε τὸ παραβολικὸν τμῆμα ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$· ἐὰν τὸ πρῶτον τρίγωνον ἔχῃ ἐμβαδὸν Α τότε τὸ παραβολικὸν τμῆμα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{4}{3}$ Α.

Ὁ Ἀρχιμήδης δὲν κάνει χρῆσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου διὰ νὰ εὕρῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$, ἀλλὰ φθάνει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβ. τμήματος εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. λαμβάνει ἐπιφάνειαν Κ= $\frac{4}{3}$ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου εἰς τὸ παραβολικὸν τμῆμα καὶ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα δὲν εἶναι μεγαλύτερον, οὔτε μικρότερον τῆς ἐπιφανείας Κ. Ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς αὐτὴν ἡ ὁποία εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Δημόκριτος ὁ Ἀβδηρίτης. Ἔζησε περίπου τὸ 470—380 π.Χ. Διάσημος Φιλόσοφος, Μαθηματικός, Φυσικός, Ἀστρονόμος.—Ἱδρυτὴς τῆς ἀτομικῆς θεωρίας.—Ἀπὸ τὰ ἔργα του ἐσώθησαν μόνον ἀποσπάσματα.

Εὔδοξος. Γεννηθεὶς εἰς τὴν Κνίδον τῆς Καρίας τὸ 410 π.Χ. Μαθηματικὸς καὶ Ἀστρονόμος. Μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος καὶ κατόπιν Καθηγητὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν. Ἀπέθανε εἰς τὴν Κνίδον τὸ 356 π.Χ. εἷς τῶν διασημοτέρων Μαθηματικῶν καὶ Ἀστρονόμων τῆς ἀρχαιότητος.

Ἀρίσταρχος. Σάμιος. Ἀστρονόμος καὶ Μαθηματικὸς γεννηθεὶς περίπου τὸ 310 π.Χ., ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ. Τὸ ἔτος τοῦ θανάτου δὲν εἶναι γνωστόν.

Πτολεμαῖος Κλαύδιος. Διάσημος Ἀστρονόνος καὶ Μαθηματικός, ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ τὸν 2ον μ.Χ. αἰῶνα.

Κόνων. Ἐκ Σάμου. Μαθηματικὸς καὶ Ἀστρονόμος, φίλος τοῦ Ἀρχιμήδους, ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ. Δὲν εἶνε βέβαιον πότε ἐγεννήθη. Ἀπέθανε τὸ 240 π.Χ.

Δοσίθεος. Μαθηματικὸς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, φίλος τοῦ Κόνωνος καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Περὶ τοῦ βίου του δὲν σώζεται τίποτε.

Ἐρατοσθένης. Ἐγεννήθη εἰς τὴν Κυρηναϊκὴν τὸ 276 π.Χ. ἔζησε καὶ ἀπέθανε εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν τὸ 194 κατόπιν ἀπεργίας πείνης. Μαθηματικὸς καὶ Ἀστρονόμος.

Ζεύξιππος. Σύγχρονος τοῦ Ἀρχιμήδους, Μαθηματικὸς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ.

Πάππος. Μαθηματικός. Ἐγεννήθη καὶ ἔζησεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν περὶ τὸ τέλος τοῦ τρίτου αἰῶνος μ.Χ.

Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς. Μαθηματικός, ζήσας κατὰ τὸν Δ΄. μ.Χ. αἰῶνα.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΤΟ ΔΗΛΙΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ΚΑΙ
Η ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΙΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΑΘΗΝΑΙ
1949

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

1. Τρία ἦσαν τὰ περίφημα μαθηματικὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα ἀπησχόλησαν τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας καὶ τοὺς μεταγενεστέρους μαθηματικούς: ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας.

Ἐνταῦθα πραγματευόμεθα περὶ τῶν δύο τελευταίων, ἐπιφυλασσόμενοι διὰ τὸ πρῶτον, ὅταν θὰ ἐκδώσωμεν τὸ σχετικὸν περὶ μετρήσεως τοῦ κύκλου ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Ὅταν γεωμετρικὸν θεώρημα τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν, λαμβάνεται πάντοτε ὡς δοθὲν ἓν γεωμετρικὸν σχῆμα. Αἱ εἰς τοῦτο ἐμφανιζόμεναι γραμμαὶ ἢ ἐπιφάνειαι εἶναι, εἴτε τοιαῦται τῶν ὁποίων αἱ ἰδιότητες ἔχουν καθορισθῇ διὰ τῶν ἀξιωμάτων, εἴτε πολυπλοκώτεροι γεωμετρικοὶ σχηματισμοὶ τῶν ὁποίων αἱ ἰδιότητες πρέπει νὰ καθορισθοῦν δι' ὁρισμῶν. Τὸ ἀντίστροφον τούτων καὶ ἡ συμπλήρωσις τῆς κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος χρησιμοποιηθείσης ἀναλύσεως, ἀποτελεῖ τὴν γεωμετρικὴν κατασκευήν. Αὔτη σκοπεῖ νὰ παραγάγῃ συνθετικῶς τὸ σχῆμα μὲ ὅλα τὰ ἰδιαίτερα στοιχεῖα του, ὅπως εἶναι τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι κλπ. Διὰ τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν προϋποτίθενται βοηθητικὰ μέσα διὰ τῶν ὁποίων δύνανται ἑκάστοτε νὰ σχεδιασθοῦν γραμμαὶ ὡρισμένου ὁρισμοῦ. Ὅταν τὰ βοηθητικὰ ταῦτα μέσα περιορίζωνται εἰς τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτην τότε τὸ πρόβλημα τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς ἔχει καὶ αὐτὸ περιορισμούς. Τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις τῆς γωνίας εἶναι προβλήματα διὰ τὰ ὁποῖα ἐζητήθη νὰ λυθοῦν διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ἡ ὁποία νὰ χρησιμοποιήσῃ ὡς βοηθητικὰ μέσα τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτην. Διὰ τῶν μέσων τούτων τοιαύτη γεωμετρικὴ κατασκευὴ εἶναι ἀδύνατος. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἐγνώριζον τοῦτο καὶ ἐπενόησαν ἰδίας μεθόδους ἐπιλύσεως, χρησιμοποιήσαντες κωνικὰς τομὰς ἢ καμπύλας ἄλλας διαφορετικὰς τοῦ κύκλου. Καίτοι ἐγνώριζον τὴν χρῆσιν συντεταγμένων καὶ ὁ Εὔδοξος καὶ ὁ Ἀρχιμήδης δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς οἱ ἐφευρέται τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, ἐν τούτοις δὲν ἀπέδειξαν τὸ ἀδύνατον τῆς ἐπιλύσεως διὰ κανόνος καὶ διαβήτου τοῦ Δηλίου προβλήματος καὶ τῆς τριχοτομήσεως γωνίας. Τοὐλάχιστον δὲν διασώζεται τοιαύτη ἀπόδειξις. Αὔτη ἐγένετο, ὅταν αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ ὑπεβλήθησαν εἰς κριτικὴν ἔρευναι τῇ βοηθείᾳ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, τῆς Ἀλγέβρας καὶ τῆς μαθηματικῆς Ἀναλύσεως, αἵτινες ἀνεπτύχθησαν κατὰ τὰ τελευταῖα 350 ἔτη. Τῇ βοηθείᾳ τούτων ἐρευνᾶται τὸ δυνατὸν μιᾶς γεωμετρικῆς κατασκευῆς καὶ τὰ πρὸς ταύτην βοηθητικὰ μέσα. Κατὰ ταύτας, ἵνα γεωμετρικὴ κατασκευὴ εἶναι δυνατὴ διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, πρέπει αὕτη κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν αὐτῆς ἔρευναν ν' ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν α'. ἢ β'. βαθμοῦ καὶ οἱ συντελεσταὶ αὐτῆς νὰ πληροῦν ὡρισμένας ἰδιότητας (K. Gauss, R. Descartes).

3. Εἰδικώτερον διὰ μὲν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Δηλίου προβλήματος, $x^3 - a = o$, ὁ O. Hölder ἀπέδειξεν ὅτι αὕτη δὲν ἀνάγεται εἰς β' βάθμιον, πλὴν ἐὰν α εἶναι κύβος, διὰ δὲ τὴν ἐξίσωσιν τῆς τριχοτομήσεως γωνίας, $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = o$, ὁ F. Enriques[1], ὅτι αὕτη ἐπίσης δὲν ἀνάγεται εἰς β' βάθμιον. Τὸ ὅτι ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ Δηλίου προβλήματος καὶ τῆς τριχοτομήσεως γωνίας καὶ γενικώτερον ὅτι γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀναλυτικὴ ἔρευνα ἄγει εἰς ἐξισώσεις 3ου ἢ 4ου βαθμοῦ, μὴ ἀναγομένας εἰς β' βαθμίους, εἶναι δυναταὶ διὰ κωνικῶν τομῶν ἢ ἄλλων καμπύλων, ὅπως π. χ. ἡ κισσοειδὴς καὶ ἡ κογχοειδὴς ἀπεδείχθη ἀναλυτικῶς ὑπὸ τῶν R. Descartes[2], H. Kortum, J. Smith, F. London[3]. Ὁ Πλάτων ἔλυσε τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ὁ Ἀρχιμήδης τὴν τριχοτόμησιν γωνίας διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Καὶ οἱ δύο ὅμως ἐφαρμόζουν κινητικὴν Γεωμετρίαν, ὡς εἰς τὰ οἰκεῖα κεφάλαια θὰ ἐκτεθῇ.

---

1. F. Enriques: Fragen der Elementargeometrie (γερμαν. μετάφρ. ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ).
2. Oevres de Descartes II, Paris 1902.
3. Zeitschrift für mathematische Physik, 1896.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ Β΄ βιβλίον αὐτοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀποδεικνύει ὡς πρῶτον πρόβλημα τὸ ἑξῆς: «δοθέντος κώνου ἢ κυλίνδρου, νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἴση πρὸς τὸν κῶνον ἢ τὸν κύλινδρον».

Τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ὁ Ἀρχιμήδης στηρίζει εἰς τὸ πρόβλημα: δοθεισῶν δύο εὐθειῶν νὰ εὑρεθοῦν δύο εὐθεῖαι μέσαι ἀνάλογοι τούτων ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ[1]. Ὁ σχολιαστὴς τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος (6ος αἰὼν μ. Χ.), ἀναφέρει τὰ ἑξῆς ἐπὶ τοῦ προβλήματος τούτου:

2. «εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ α΄

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτῷ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, ληξάσης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει· εὑρήσθωσαν· τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ὑπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν, πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γραφήν, ἐπειδὴ φησὶν μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι, ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν ὡς συνεχεῖ χρῆται· ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τὶ λέγω περὶ Εὐδόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὴ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθόντων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται».

(Τούτου ληφθέντος, ἀφοῦ ἔλυσε τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναλύσεως, ὅταν ἐτελείωσεν ἡ ἀνάλυσις καθ' ἣν δοθεισῶν δύο εὐθειῶν νὰ εὑρεθοῦν δύο μέσαι ἀνάλογοι τούτων ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, λέγεται ὅτι τὸ ἔλυσε καὶ διὰ τῆς συνθέσεως· ἔστω ὅτι εὑρέθησαν. Ἀλλὰ δὲν ἀνευρίσκομεν πουθενὰ τὴν εὕρεσιν αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, εὕρομεν ὅμως γραφὰς διασήμων ἀνδρῶν αἱ ὁποῖαι πραγματεύονται τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐκ τῶν ὁποίων δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψει τὴν γραφὴν τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου, ἐπειδὴ ἀναφέρεται μὲν εἰς τὸ προοίμιον, ὅτι ἔλυσε τὸ πρόβλημα διὰ καμπύλων γραμμῶν, κατὰ τὴν ἀπόδειξιν δὲ παρουσιάζεται, ὅτι δὲν χρησιμοποιεῖ καμπύλας γραμμάς, ἀλλ' ὅτι εὑρὼν ἀνεξαρτήτους ἁπλᾶς ἀναλογίας, χρησιμοποιεῖ ταύτας ὡς συνεχῆ ἀναλογίαν· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἦτο

---

1. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνήχθη τὸ Δήλιον πρόβλημα ὑπὸ τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου.

ἄτοπον νὰ ὑποθέσῃ κανείς, τὶ λέγω διὰ τὸν Εὔδοξον, ἀλλ' οὔτε καὶ διὰ τοὺς ἔχοντας μετρίαν γεωμετρικὴν μόρφωσιν. Ἵνα λοιπὸν γίνῃ ἐμφανὴς ἡ λύσις τοῦ προβλήματος, ἀπὸ τὰς λύσεις τῶν ἀνωτέρω ἀνδρῶν, αἱ ὁποῖαι διεσώθησαν μέχρις ἡμῶν, θὰ γράψωμεν κατωτέρω τὴν ἐπίλυσιν τοῦ καθενός).

Καὶ παραθέτει ὁ Εὐτόκιος δώδεκα λύσεις τοῦ προβλήματος τὰς μέχρι τῆς ἐποχῆς του διασωθείσας, ἀναγράφων αὐτὰς κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν· 1) ὡς Πλάτων, 2) ὡς Ἥρων, 3) ὡς Φίλων ὁ Βυζάντιος, 4) ὡς Ἀπολλώνιος, 5) ὡς Διοκλῆς, 6) ὡς Πάππος, 7) ὡς Σπόρος, 8) ὡς Μέναιχμος, 9) ἄλλως (δευτέρα ἀπόδειξις Μεναίχμου) 10) ἡ Ἀρχύτου εὕρησις, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ, 11) ὡς Ἐρατοσθένης, 12) ὡς Νικομήδης.

3. Κατὰ τὴν ἀναγραφὴν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους, ὁ Εὐτόκιος προτάσσει ταύτης ἐπιστολὴν τοῦ Ἐρατοσθένους πρὸς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον (τὸν Εὐεργέτην). Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἐπιστολῆς ταύτης καταφαίνεται τὸ ἱστορικὸν τοῦ Δηλίου προβλήματος, παραθέτω αὐτὴν ἐδῶ ὁλόκληρον.

4. «Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν

Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασὶν εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον, πυθόμενον δέ, ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη εἰπεῖν·

μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου·
διπλάσιος ἔστω, τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλεὶς
δίπλαζ' ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου.

ἐδόκει δὲ διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον· ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν, καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα κύβου διπλασιασμός· ὑποθέμενοι γὰρ κύβον ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον πρῶτος Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ἐστὶ διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτῷ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινας φασιν Δηλίους ἐπιβαλλομένους κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινα τῶν βωμῶν, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα, διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν Ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς καὶ ζητούντων δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν· συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι, χειρουργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τὸν Μέναιχμον καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ὑμῶν ὀργανικὴ *λῆψις ῥαδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον μετασχηματίζειν καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντες τὴν ὁμοιότητα, ὥστε καὶ βωμοὺς καὶ ναούς· δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν ἢ μέδιμνον, εἰς κύβον καθίστασθαι καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα, πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα· δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη καὶ τὰς κατατρήσεις καὶ τὰς χοινικίδας καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι, ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γεννέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέσεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι.*

5. Τὸ τέλος τῆς ἐπιστολῆς ἐπισφραγίζει τὸ ἑξῆς ἐπίγραμμα:

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλήσιον, ὦγαθέ, τεύχειν
φράζεαι ἢ στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν
εὖ μεταμορφῶσαι τό δε τοι πάρα, κἂν σὺ γε μάνδρην
ἢ σιρὸν ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος
τῇ δ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
μηδὲ σὺ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων
μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
διζήσῃ, μηδ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο
καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
τοῖς δε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις
ῥεῖα κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
εὐαίων, Πτολεμαῖε, πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα,
αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνιε Ζεῦ,
καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιντο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένεος.

Ἰδοὺ μετάφρασις τῆς ἀνωτέρω ἐπιστολῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ τοῦ ἐπιγράμματος.

6. Λέγουν, ὅτι κάποιος ἀρχαῖος τραγῳδοποιὸς εἰσήγαγε τὸν Μίνωα εἰς τὴν σκηνήν, ὁ ὁποῖος εἶχε διατάξῃ νὰ κατασκευασθῇ τάφος διὰ τὸν υἱόν του Γλαῦκον, καὶ ὅτι, ὅταν οὗτος ἐπληροφο-

(Σημ. τὸ δ' ἐς ὕστερον ὁ Wilamowitz θέτει: ὅ δ' ἐς ὕστερον).

ρήθη, ὅτι εἰς ὅλας τὰς διαστάσεις του ὁ τάφος ἦτο ἑκατὸ πόδια, (κύβος) εἶπε:

«Μικρὰν παρήγγειλες τὴν χωρητικότητα τοῦ βασιλικοῦ τάφου· νὰ διπλασιασθῇ αὕτη γρήγορα, ἀφοῦ διπλασιασθῇ κάθε πλευρά, χωρὶς ὅμως ὁ τάφος νὰ χάσῃ τὸ κομψόν του σχῆμα.

Ἐφαίνετο δέ, ὅτι ἔσφαλλε. Διότι, ὅταν διπλασιάζωνται αἱ πλευραί, ἡ μὲν παράπλευρος ἐπιφάνεια γίνεται τετραπλασία, ὁ δὲ ὄγκος ὀκταπλάσιος. Ἐζητεῖτο δὲ καὶ ἀπὸ τοὺς γεωμέτρας νὰ εὕρουν, μὲ ποῖον τρόπον διδόμενον στερεὸν θὰ ἐδιπλασιάζετο, χωρὶς νὰ χάνῃ τὸ σχῆμα του καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα διπλασιασμὸς τοῦ κύβου· διότι ὑποθέτοντες ὅτι τὸ διδόμενον στερεὸν ἦτο κύβος, ἐζήτουν νὰ διπλασιάσουν τοῦτον. Ἐν ᾧ δὲ ὅλοι ἐπὶ πολὺν χρόνον εὑρίσκοντο εἰς ἀμηχανίαν, πρῶτος ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθοῦν δύο μέσαι ἀνάλογοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, τότε ὁ κύβος διπλασιάζεται, ἀλλὰ μὲ τὴν ἐπινόησιν αὐτήν, ἡ πρώτη ἀμηχανία περιέπεσεν εἰς ἄλλην, οὐχὶ ὀλιγώτερον δύσκολον. Λέγεται ἀκόμη, ὅτι μετὰ πάροδον χρόνου, χρησμὸς ἐπέβαλεν εἰς τοὺς κατοίκους τῆς Δήλου νὰ διπλασιάσουν ἕνα τῶν βωμῶν των (βωμὸς Ἀπόλλωνος, σχήματος κύβου) καὶ ὅτι οὗτοι ἀφοῦ εὑρέθησαν εἰς τὴν αὐτὴν ἀμηχανίαν ἔστειλαν καὶ ἐζήτησαν ἀπὸ τοὺς γεωμέτρας τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος νὰ λύσουν τὸ πρόβλημα. Ἐν ᾧ δὲ οὗτοι φιλοπόνως ἐπεδόθησαν διὰ νὰ εὕρουν τὴν λύσιν, λέγεται ὅτι εὗρον αὐτήν, ὁ Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων, ὁ Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. Συνέβη δέ, ὥστε ὅλοι αὐτοὶ νὰ ἐπιτύχουν τὴν λύσιν θεωρητικῶς, χωρὶς νὰ κατορθώσουν νὰ εὕρουν τρόπον πρακτικῆς κατασκευῆς, πλὴν τοῦ Μεναίχμου, τοῦ ὁποίου ἡ πρακτικὴ ἐπίλυσις ἦτο δυσχερής. Ἐγώ, ἐπενόησα εὐκολόχρηστον συσκευὴν διὰ τῆς ὁποίας θὰ εὕρωμεν, ὄχι μόνον δύο μέσας ἀναλόγους, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. Τούτου δὲ εὑρισκομένου θὰ ἠμποροῦμεν ἐν γένει τὸ δοθὲν στερεόν, παραλληλεπιπέδου σχήματος νὰ μετατρέπωμεν εἰς κύβον, ἢ ἔχον ἄλλο σχῆμα νὰ μετατρέπωμεν εἰς ἄλλο διαφορετικὸν ἀλλ' ὅμοιον, καὶ νὰ αὐξάνωμεν τὴν χωρητικότητα, ὥστε νὰ ἐφαρμόζωμεν τὴν συσκευὴν καὶ εἰς τὴν ἀνοικοδόμησιν βωμῶν καὶ ναῶν. Θὰ ἠμποροῦμεν δὲ λέγω καὶ τὰ μέτρα τῶν ὑγρῶν ἢ τῶν ξηρῶν, ὅπως τὸν μετρητὴν [1] ἢ τὸν μέδιμνον [2] νὰ μετασχηματίζωμεν εἰς κύβον καὶ διὰ τῆς πλευρᾶς τούτου, νὰ ὑπολογί-

---

1. Μέτρον ὑγρῶν, χωρητικότητος 36 λίτρων περίπου.

2. Μέτρον ξηρῶν, χωρητικότητος 52,5 κιλῶν (ἀττικόν), τὸ σημερινὸ διπλὸ μισάδι.

ζωμεν πόσον ἕκαστον ἐκ τῶν δοχείων τούτων χωρεῖ. Θὰ εἶναι δὲ ἀκόμη χρήσιμον τὸ ἐπινόημα καὶ εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι θέλουν νὰ αὐξάνουν τὴν ἰσχὺν καταπαλτικῶν καὶ λιθοβόλων μηχανῶν· Θὰ πρέπει δῆλαδὴ ν' αὐξάνουν ἀναλόγως καὶ τὰ πάχη καὶ τὰς διατρήσεις καὶ τοὺς δακτυλίους καὶ τοὺς προσαρμοζομένους ἱμάντας, ἐὰν θέλουν ν' αὐξάνεται ἀναλόγως καὶ ἡ βολή, ταῦτα δέ, δὲν εἶναι δυνατά, ἄνευ τῆς εὑρέσεως τῶν μέσων ἀναλόγων. Τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὸν τρόπον κατασκευῆς, σοῦ γράφω κατωτέρω.

(Ἐὰν ὦ ἀγαθέ, θέλῃς νὰ ἐπιτύχῃς διπλάσιον κύβον ἀπὸ ἕνα μικρὸν ἢ θέλῃς νὰ μετασχηματίσῃς μὲ κομψὸν τρόπον κάθε ἄλλο στερεὸν σῶμα, τοῦτο εἶναι στὸ χέρι σου καὶ θὰ δυνηθῇς νὰ μετρήσῃς καὶ μάνδραν ἢ λάκκον ἢ εὐρὺ κύτος κοίλου πηγαδιοῦ, ἐὰν εὕρῃς δύο μέσας ἀναλόγους, ἀφοῦ συμπεριλάβῃς ἐντὸς δύο κανόνων συνδρομεῖς τῶν ὁποίων αἱ τομαὶ νὰ συγκλίνουν πρὸς τὰ ἄκρα τῶν τερμάτων των. Μηδὲ νὰ ζητᾷς νὰ ἐπιτύχῃς τοῦτο μὲ τὰ δυσμήχανα ἔργα τῶν κυλίνδρων τοῦ Ἀρχύτου, μηδὲ νὰ θέλῃς νὰ τὸ εὕρῃς μὲ τὰς τρεῖς ἐκείνας γραμμὰς τοῦ Μεναίχμου τὰς σχηματιζομένας διὰ κωνικῶν τομῶν, μηδὲ ἐὰν κατασκευάζεται ὑπὸ τοῦ θείου Εὐδόξου εἶδος τι καμπύλων γραμμῶν. Διότι μὲ αὐτὴν τὴν συσκευήν, ἠμπορεῖς ξεκκινῶν ἀπὸ μικρὰν ἀρχὴν νὰ εὕρῃς μυριάδας μέσων ἀναλόγων εὐκολώτερον. Εἶσαι εὐδαίμων Πτολεμαῖε, διότι ἀπολαμβάνων μὲ τὸ παιδί σου τὰς νεανικὰς διασκεδάσεις, σὺ ὁ ἴδιος ἐχάρισες εἰς αὐτὸ ὅλα ὅσα εἶναι ἀγαπητὰ καὶ εἰς τὰς Μούσας καὶ εἰς τοὺς βασιλεῖς· ὡς πρὸς ὅ,τι δὲ ἀφορᾷ τὸ μέλλον, οὐράνιε Ζεῦ, μακάρι τὸ παιδί σου νὰ δεχθῇ ἀπὸ τὸ χέρι σου καὶ τὰ σκῆπτρα. Καὶ αὐτὰ μὲν ἄς γίνουν ἔτσι, εἴθε δὲ ὅποιος βλέπει τὸ ἀνάθημα αὐτὸ νὰ λέγῃ, ὅτι τοῦτο εἶναι ἔργον τοῦ Ἐρατοσθένους τοῦ Κυρηναίου).

7. Τελειώνων ὁ Εὐτόκιος, ἀναφέρει τὰ ἑξῆς κατὰ τὴν ἀναγραφὴν τῆς ἐπιλύσεως τοῦ Νικομήδους. «*Γράφει δὲ καὶ Νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ Περὶ Κογχοειδῶν συγγράμματι*[1] *ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος χρείαν, ἐφ' ᾧ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνήρ, πολλὰ δὲ τοῖς Ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις· τοῦ τε ἀνελλιποῦς τοίνυν τῶν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων τῆς τε πρὸς Ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἕνεκα καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως*».

8. Ἐκ συγκριτικῆς μελέτης σωζομένων στίχων τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Εὐριπίδου «Πολύειδος» πρὸς τοὺς στίχους τοὺς ὁποίους προτάσσει τῆς ἐπιστολῆς του ὁ Ἐρατοσθένης, συμπεραί-

[1]. Τὸ σύγγραμμα τοῦτο ἔχει χαθῆ.

νεται ὑπὸ πολλῶν, ὅτι οἱ τελευταῖοι οὗτοι εἶναι τοῦ Εὐριπίδου.

9. Πλὴν τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ ὁ Πλούταρχος ἀναφέρει περίπου τὴν αὐτὴν ἐκδοχὴν διὰ τὸ ἱστορικὸν τοῦ Δηλίου προβλήματος.

10. Ἐὰν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2=2$, μία ῥίζα ταύτης εἶναι $\sqrt{2}$. Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος. Ἀριθμητικῶς ἀρκούμεθα εἰς μίαν προσέγγισιν τῆς τιμῆς 1,41... κλπ. Γεωμετρικῶς ὅμως εἶναι δυνατόν, διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου νὰ λάβωμεν πλήρως τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἡ μονάς. Τότε, ἂν καλέσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν x, θὰ εἶναι κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $x^2=2$ ἐξ ἧς $x=\sqrt{2}$. Διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου δυνάμεθα ἐπίσης νὰ τριχοτομήσωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἥτις παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\pi\alpha}{2}$, ὅπου α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ π ὁ ἀσύμμετρος (καὶ μάλιστα ὑπερβατικὸς) ἀριθμὸς 3,14...

11. Εἰς τὸ ἐν ἀρχῇ μνημονευόμενον πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι α καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ υ, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης σφαίρας x τότε θὰ ἔχωμεν, ὄγκος σφαίρας $\frac{4}{3}\pi x^3 =$ ὄγκον κυλίνδρου $\pi\alpha^2\upsilon$ (1), ἐξ ἧς $x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\alpha^2\upsilon}$ (2). Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς παραστάσεως (2) εἶναι ἀδύνατος διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου. Ὁ Ἀρχιμήδης μετατρέπει τὴν παράστασιν (2) εἰς τὴν σχέσιν $\frac{3}{2}\upsilon : y = y : 2x = 2x : 2\alpha$ (3) ἤτοι δοθεισῶν δύο εὐθειῶν $\frac{3}{2}\upsilon$ καὶ 2α νὰ εὑρεθοῦν δύο μέσαι ἀνάλογοι τούτων ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ y καὶ 2x. Ἡ μετατροπὴ αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν ἐπινόησιν τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου. Αἱ σχέσεις (3) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς.

$$\frac{\frac{3}{2}\upsilon}{y} = \frac{y}{2x} = \frac{2x}{2\alpha}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν $4x^2=2\alpha y$, (4). Ἐκ τῆς πρώτης καὶ τρίτης $2xy=3\upsilon\alpha$, (5). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) τὴν ἐκ τῆς (5) λαμβανομένην τιμὴν τοῦ y ἔχομεν $4x^2=2\alpha\cdot\frac{3\upsilon\alpha}{2x}$ ἢ $x^3=\frac{3}{4}\alpha^2\upsilon$, ἐξ ἧς $x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}\alpha^2\upsilon}$, ἡ ἰδία ἐξίσωσις μὲ τὴν (2).

Δὲν διασώζεται ὅμως ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς τελευταίας ταύτης παραστάσεως (ἡ ὁποία θὰ ἦτο καὶ λύσις τοῦ Δηλίου προβλήματος), τὴν ὁποίαν ἀσφαλῶς ἐγνώριζεν ὁ Ἀρχιμήδης. Τοῦτο συνάγεται 1) ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὴν ἐχρησιμοποίησε καὶ 2) ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὸ δ΄. πρόβλημα τοῦ β΄. βιβλίου του περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, ἐπικαλεῖται γεωμετρικὴν κατασκευήν, γενικωτέρας μορφῆς, ἡ ὁποία περιέχει τὸ Δήλιον πρόβλημα, τὴν λύσιν τῆς ὁποίας ἐξαγγέλλει ὅτι παραθέτει εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου καὶ ἡ ὁποία ἔχει χαθῆ.

12. Ὁ σχολιαστὴς τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος, ἀναφέρει λύσιν τῆς τελευταίας ταύτης, διὰ καμπύλων γραμμῶν, ὡς τοιαύτην τοῦ Ἀρχιμήδους, τὴν ὁποίαν λέγει ὅτι εὗρε εἰς ἓν παλαιὸν βιβλίον, περὶ τῆς ὁποίας θ' ἀσχοληθῶμεν κατὰ τὴν ἔκδοσιν καὶ τὰ σχόλια τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους «περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου».

13. Ἐδῶ ἀξίζει νὰ σημειωθῆ, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ προσπαθοῦσαν νὰ ἐπιλύσουν ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν, ἐφαρμόζοντες τὸν λογισμὸν τῶν ἀναλογιῶν (τὸν ὁποῖον ἀνέπτυξεν εἰς τὸ ἔπακρον ὁ Εὔδοξος τῇ αἰτήσει τοῦ Πλάτωνος) ὁ ὁποῖος εἶχε μεγίστην ἐφαρμογὴν καὶ εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικήν, ὅπως ὑποδηλοῖ ἡ κατασκευὴ τοῦ Παρθενῶνος, καὶ εἰς τὴν βλητικήν. Σημειοῦμεν ἀκόμη, ὅτι τὸ θεωρητικὸν μέρος τῆς ἐπιλύσεως τοῦ Δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος, ἀποδίδεται εἰς τοῦτον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν μηχανικὴν συσκευήν, ἥτις ἀντίκειται πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνος. Ἐπίσης, ὅτι ὁ Νικομήδης εἰρωνεύεται τὸν Ἐρατοσθένη, διότι ἡ ἐπίλυσις τοῦ Δηλίου προβλήματος ὑπὸ τούτου εἶναι μηχανικὴ καὶ ὄχι καθαρῶς γεωμετρική.

14. Ὁ Νεύτων ἐξέφρασε τὴν γνώμην, ὅτι ἡ ἐπίλυσις διὰ τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς τοῦ Νικομήδους, εἶναι ἡ καλυτέρα μέθοδος τῶν ἀρχαίων πρὸς ἐπίλυσιν γεωμετρικῶς τριτοβαθμίων ἐξισώσεων, ὅπως καταλήγῃ ἀναλυτικῶς τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας.

ΤΟ ΔΗΛΙΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ

Ἡ ἀκριβολογικὴ διατύπωσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

Δοθέντος κύβου πλευρᾶς α νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου.

Ὁ ὄγκος τοῦ διπλασίου κύβου θὰ εἶναι προφανῶς $2\alpha^3$ καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη πλευρὰ θὰ εἶναι $\alpha\sqrt[3]{2}$.

Λύσις τοῦ Δηλίου προβλήματος εἶναι νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\alpha\sqrt[3]{2}$. Διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου ἡ γεωμετρικὴ αὕτη κατασκευὴ εἶναι ἀδύνατος. Εἶναι ὅμως δυνατή: 1) Διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, δι' ἐφαρμογῆς κινητικῆς γεωμετρίας, ὡς ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ Πλάτωνος καὶ 2) Διὰ καμπύλων ἄλλων, ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἀνήγαγε τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ἑξῆς: Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι, α καὶ β καὶ $\beta=2\alpha$, νὰ εὑρεθοῦν δὺο εὐθεῖαι x καὶ y μέσαι ἀνάλογοι τούτων, ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ἤτοι νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $\beta:y=y:x=x:\alpha$ ἢ

$$\frac{\beta}{y}=\frac{y}{x}=\frac{x}{\alpha}$$

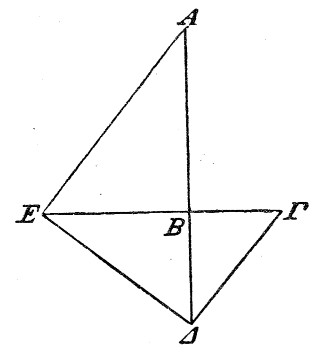
Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν $x^2=\alpha y$ (1), ἐκ τῆς πρώτης καὶ τρίτης $xy=\alpha\beta$ (2). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὴν ἐκ τῆς (2) λαμβανομένην τιμὴν τοῦ y λαμβάνομεν $x^2=\alpha\frac{\alpha\beta}{x}$ ἢ $x^3=\alpha^2\beta$. Καὶ ἐπειδὴ $\beta=2\alpha$, $x^3=2\alpha^3$ ἐξ ἧς $x=\alpha\sqrt[3]{2}$.

Ὅλαι αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαί, αἱ διασωζόμεναι ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου στηρίζονται εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναγωγὴν τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου. Ἐνταῦθα ἀναγράφομεν τὰς ἑξῆς λύσεις: 1) Πλάτωνος, 2) Μεναίχμου, 3) Διοκλέους, 4) Ἐρατοσθένους, 5) Νικομήδους καὶ 6) Τὴν διὰ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας. Τὰς πέντε λύσεις τῶν ἀρχαίων γράφομεν εἰς τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν γλῶσσαν.

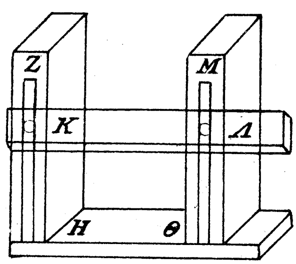
1. ΠΛΑΤΩΝΟΣ

Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι νὰ εὑρεθοῦν δύο μέσαι ἀνάλογοι τούτων ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ τὰς ὁποίας συνθέτομεν εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΒΔ καὶ τὴν ΓΒ πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΒΕ. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν ΖΗΘ ὅπου ὁ κανὼν ΚΛ δύναται νὰ διολισθαίνῃ παραλλήλως πρὸς τὴν ΗΘ. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΖΗΘ ἔχει τοποθετηθῇ ἀκινήτως τὸ σκέλος ΘΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΘ. Τοποθετοῦμεν τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ΖΗΘ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ. Διὰ κινήσεως τῆς ὀρθῆς ταύτης γωνίας περί τι σημεῖον τῆς ΒΔ καὶ συγχρόνου κινήσεως τοῦ κανόνος ΚΛ ἐπιτυγχάνομεν, ὥστε τὸ ἓν σκέλος τῆς ὀρθῆς



γωνίας νὰ ἐφάπτεται τῆς ΔΓ, ὁ δὲ κανὼν κατὰ μὲν τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ νὰ ἐφάπτεται τοῦ σημείου Α κατὰ δὲ τὸ ἄλλο νὰ συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ καὶ τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ὀρθῆς γωνίας ΖΗΘ, ἤτοι νὰ λάβωμεν τὸ πρῶτον σχῆμα ὅπου αἱ γωνίαι ΑΕΔ, ΕΔΓ εἶναι ὀρθαί. Τότε τὸ πρόβλημα ἐλύθη. Διότι ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΕΔ, ΕΔΓ λαμβάνομεν ΑΒ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΓ. Ἐὰν καλέσωμεν τὴν ΑΒ = β, τὴν ΒΕ = y, τὴν ΒΔ = x καὶ τὴν ΒΓ = α ἔχομεν δὲ λάβῃ $\beta = 2\alpha$ τότε



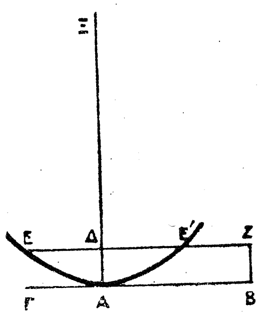
θὰ ἔχωμεν $\frac{\beta}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{\alpha}$ καὶ κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα $x = \alpha\sqrt[3]{2}$. Δηλαδὴ ἡ ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ ἀρχικοῦ κύβου εἶναι ἡ ΒΓ.

2. ΜΕΝΑΙΧΜΟΥ

Ὁ Μέναιχμος[1] ἐπέτυχε τὴν λύσιν τοῦ Δηλίου προβλήματος διὰ δύο τρόπων. Πρῶτον, διὰ τομῆς ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς καὶ δεύτερον διὰ τομῆς δύο παραβολῶν. Ἐνταῦθα παραθέτομεν τὸν δεύτερον τρόπον λύσεως. Πρὸ τούτου, σημειοῦμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς παραβολῆς. Ἔστω δοθὲν μῆκος ΑΒ = p (καλούμενον παράμετρος τῆς παραβολῆς), κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΞ (καλου-

1. Ὁ Μέναιχμος ἦτο μαθητὴς τοῦ Εὐδόξου καὶ κατόπιν τοῦ Πλάτωνος. Κατὰ τὸν Πρόκλον, οὗτος ἐφεῦρε τὰς κωνικὰς τομάς, ἔλλειψιν, παραβολήν, ὑπερβολήν, τὰς ὁποίας ὁ Ἐρατοσθένης εἰς τὴν πρὸς Πτολεμαῖον ἐπιστολήν του ὀνομάζει Μεναιχμείους τριάδας. Οὐδὲν τῶν βιβλίων του σώζεται, κατήγετο δὲ ἐκ Θράκης.

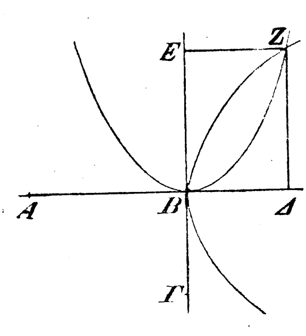
μένην ἄξονα) εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν δοθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ὑπάρχει πάντοτε ἐπὶ τῆς ΑΞ ἓν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ΑΒΖΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης ΑΓ ἢ τῆς ἴσης πρὸς ταύτην λαμβανομένης, ΔΕ. Καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ΑΞ καὶ



φέρομεν διὰ τούτου κάθετον ἐπὶ ταύτην, δοθέντος τοῦ p, ὑπάρχουν πάντοτε δύο σημεῖα Ε, Ε', τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον ΔΕ ἢ ΔΕ' νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι p καὶ ἡ ἄλλη ΑΔ. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν οὕτω πως λαμβανομένων σημείων, ἀποτελεῖ τὴν παραβολήν. [Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, εἶναι $\overline{ΔΕ}^2 = ΑΒ$. ΑΔ ἢ ΑΒ : ΔΕ = ΔΕ : ΑΔ, ἤτοι ἡ ΔΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΔ]. Ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὸ 11ον θεώρημα τοῦ α' βιβλίου του περὶ κωνικῶν τομῶν, ἀποδεικνύει, ὅτι ἐὰν ἐπίπεδον τμήσῃ ὀρθογώνιον κῶνον, παραλλήλως πρὸς τὴν μίαν τῶν πλευρῶν του, ἡ ἐκ τῆς τομῆς ταύτης προκύπτουσα καμπύλη, πληροῖ τὸ ἀνωτέρω ἐπίταγμα καὶ τὴν ὀνομάζει παραβολήν.

Ἔστω τώρα, ὅτι δίδονται δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν δύο εὐθεῖαι μέσαι ἀνάλογοι τούτων ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Ἀνάλυσις. Σχηματίζομεν μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἔστω, ὅτι εὑρέθησαν αἱ ζητούμεναι δύο μέσαι ἀνάλογοι αἱ ΒΔ, ΒΕ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις ΓΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΑ(1). Φέρομεν τὰς καθέτους ΔΖ, ΕΖ. Ἐπειδὴ [ἐκ τῆς (1)] ΓΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΕ ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ ἢ ΕΖ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον πλευράς, τὴν δοθεῖσαν ΒΓ καὶ τὴν ΒΕ, Κατὰ συνέπειαν, τὸ σημεῖον Ζ κεῖται ἐπὶ παραβολῆς τῆς ὁποίας ἄξων εἶναι ἡ ΒΕ. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ [ἐπίσης ἐκ τῆς (1)] ΒΔ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΑ ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ ἢ ΔΖ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευράς, τὴν δοθεῖσαν ΑΒ καὶ τὴν ΒΔ. Συνεπῶς τὸ σημεῖον Ζ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς τῆς ὁποίας ὁ ἄξων εἶναι ἡ ΒΔ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι καὶ σημεῖον τῆς παραβολῆς μὲ ἄξονα τὴν ΒΕ. Αἱ δὲ ΔΕ, ΖΕ ἔχουν ἀχθῇ κάθετοι. Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ καὶ τὰ σημεῖα Ε,Δ ἔχουν δοθῇ.



Σύνθεσις. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, κατ' ὀρθὴν γωνίαν ΑΒΓ. Προεκτείνομεν ταύτας ἐκ τοῦ σημείου Β. Μὲ ἄξονα τὴν ΒΕ γράφομεν παραβολήν, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ΒΕ, νὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια, τὰ ἔχοντα μίαν πλευράν, πάντοτε τὴν ΒΓ, ἄλλην δὲ πλευράν, τὰς ἑκάστοτε ἀποστάσεις τῶν τομῶν τῶν καθέτων τούτων, ἀπὸ τοῦ Β. (ὁρισμὸς παραβολῆς). Ὁμοίως, μὲ ἄξονα τὴν ΒΔ γράφομεν παραβολήν, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ΒΔ, νὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα μίαν πλευράν, πάντοτε τὴν ΑΒ, ἄλλην δὲ πλευράν, τὰς ἑκάστοτε ἀποστάσεις τῶν τομῶν τῶν καθέτων τούτων ἀπὸ τοῦ Β. Αἱ δύο παραβολαὶ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν τὰς καθέτους ΖΔ, ΖΕ. Ἐκ τῆς πρώτης παραβολῆς λαμβάνομεν ΓΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΕ (1). Ἐκ τῆς δευτέρας, ΒΑ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΔ ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ ΒΔ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΑ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ΓΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΕ = ΒΕ : ΒΑ καὶ τὸ πρόβλημα ἐλύθη. Ἐὰν καλέσωμεν ΓΒ $= \alpha$, ΒΔ $= x$, ΒΕ $= y$ καὶ ΒΑ $= \beta = 2\alpha$, θὰ ἔχωμεν $x = \alpha\sqrt[3]{2}$. [Ὁ Εὐτόκιος σημειώνει τὰ ἑξῆς διὰ τὸ ὄργανον σχεδιάσεως τῆς παραβολῆς: γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ[1] τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν Ἥρωνος Καμαρικῶν].

3. ΔΙΟΚΛΕΟΥΣ

Ὁ Διοκλῆς[2] ἐφεῦρε διὰ τὴν λύσιν τοῦ Δηλίου προβλήματος ἰδίαν καμπύλην, ὀνομαζομένην κισσοειδές, ἐκ τῆς ὁμοιότητος ταύτης πρὸς τὸ φύλλον τοῦ κισσοῦ.

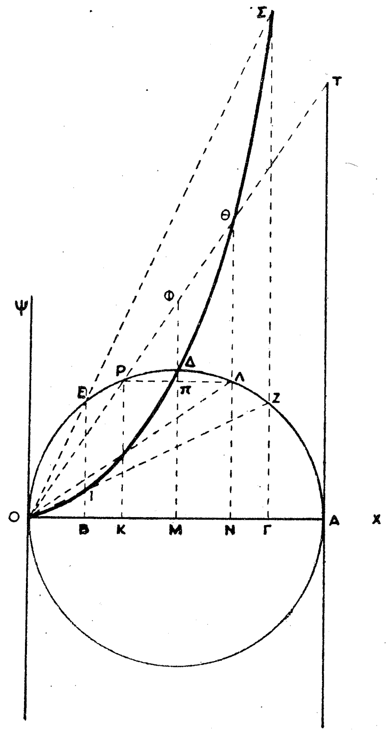
Κατασκευὴ τῆς κισσοειδοῦς γραμμῆς.

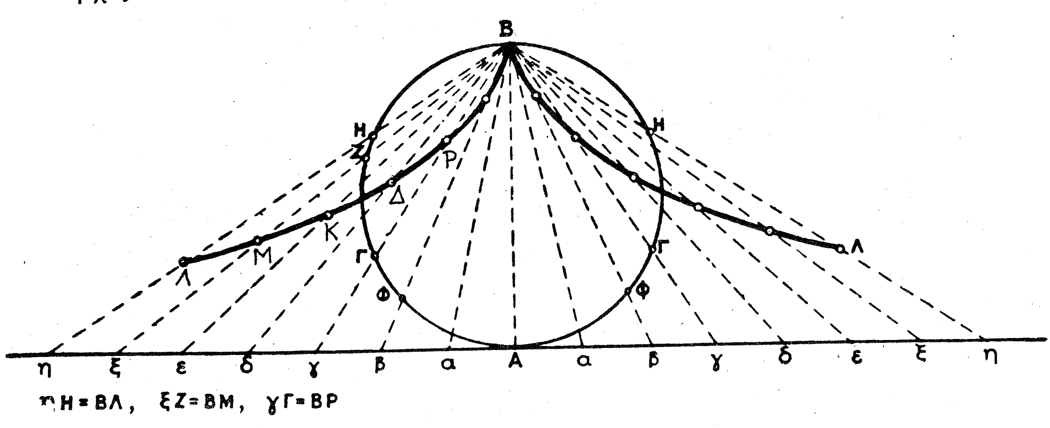
Ἔστω κύκλος ἀκτῖνος ΜΟ καὶ δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΟΑ. Ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΟ λαμβάνομεν διάφορα κατὰ τὸ μέγεθος τόξα, ἴσα δὲ τοιαῦτα ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΑ. Ἔστωσαν τὰ ἴσα τόξα ΔΕ = ΔΖ. Ἐκ τῶν σημείων Ε, Ζ, φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον, τὰς ΕΒ, ΖΓ. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Ζ μὲ τὸ Ο. Τὸ σημεῖον τομῆς Ι τῆς ΖΟ καὶ τῆς ΕΒ εἶναι σημεῖον τῆς κισσοειδοῦς. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὑποδιαιρέσεων τῶν τόξων ΔΟ, ΔΑ, λαμβάνομεν τὸ τμῆμα τῆς κισσο-

[1] Ὁ Ἰσίδωρος εἶναι ὁ εἷς ἐκ τῶν μηχανικῶν τῆς Ἁγίας Σοφίας. Λέγεται ὅτι ὁ Εὐτόκιος δὲν ἀναφέρει ἀντίστοιχα ὄργανα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐπιθυμῶν εὐγνωμόνως νὰ διαφημίσῃ τὰ καμπυλόγραμμα τοῦ διδασκάλου του.

[2] Μαθηματικὸς τοῦ 1ου π.Χ. αἰῶνος. Ἀποσπάσματα τοῦ ἔργου του περὶ Πυρίων σώζονται εἰς τὴν ἀραβικήν, ἀλλὰ δὲν περιέχουν περισσότερα ἐκείνων τὰ ὁποῖα μνημονεύει ὁ Εὐτόκιος.

ειδοῦς ΔΙΟ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν κάθετον ΓΖ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΕ τὸ σημεῖον τομῆς τούτων Σ, εἶναι σημεῖον τῆς κισσοειδοῦς. Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ μᾶς δίδει τὸ ἄλλο ἥμισυ τῆς κισσοειδοῦς, πρὸς τὸ κάτω μέρος τῆς ΟΑ. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁριζόμενον τρόπον κατασκευῆς τῆς κισσοειδοῦς, τὸ σημεῖον Θ εἶναι σημεῖον τῆς κισσοειδοῦς. Διότι ἐλήφθη τόξον ΔΡ = ΔΛ καὶ ἡ προέκτασις τῆς καθέτου ΝΛ συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΟΡ καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τούτων εἶναι τὸ Θ. Ἡ ΔΦ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν ΡΘ, διότι αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΘ καὶ χορδὴ ΠΡ = χορδὴ ΠΛ (ἐκ κατασκευῆς). Εἶναι ἄρα ΤΘ = ΟΡ, ἐπειδὴ ΤΦ = ΦΟ. Κατόπιν τούτου ἠμποροῦμεν νὰ ὁρίσωμεν ὡς ἑξῆς τὴν κατασκευὴν τῆς κισσοειδοῦς. Λαμβάνομεν κύκλον διαμέτρου, ἔστω ΒΑ. Εἰς τὸ Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου. Εκ τοῦ Β φέρομεν εὐθείας, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ τὴν ἐφαπτομένην. Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς των μὲ τὴν ἐφαπτομένην, λαμβάνομεν τμήματα ἴσα πρὸς τὰ τμήματα τὰ ὁποῖα ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ Β καὶ τελειώνουν εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περι-

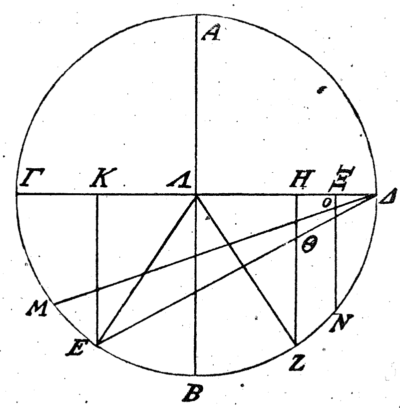




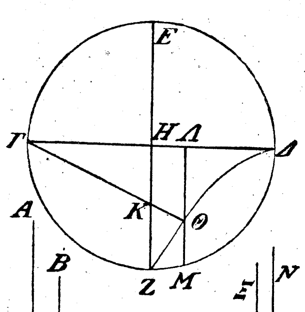
ηΗ = ΒΛ, ξΖ = ΒΜ, γΓ = ΒΡ

φερείας. Π. χ. ηΛ = ΒΗ, ξΜ = Βz, γΡ = ΒΓ. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τούτων π. χ. Λ, Μ, Ρ ἀποτελεῖ τὴν κισσοειδῆ γραμμήν. Εἶναι προφανές, ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς ὅτι ηΗ = ΒΛ, ξΖ = ΒΜ κλπ.

Ἔστω τώρα κύκλος μὲ τὰς καθέτους διαμέτρους ΒΑ, ΓΔ καὶ ἄς ληφθοῦν τὰ τόξα ΒΕ = ΒΖ καὶ ΕΜ = ΖΝ. Ἐκ τοῦ σημείου Ζ φέρομεν τὴν ΖΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Ε μὲ τὸ Δ. Ἡ εὐθεῖα ΕΔ τέμνει τὴν ΖΗ εἴς τι σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν ὁρισμόν, εἶναι σημεῖον τῆς κισσοειδοῦς. Λέγω ὅτι τῶν εὐθειῶν ΓΗ, ΗΘ αἱ εὐθεῖαι ΗΖ, ΗΔ εἶναι μέσαι ἀνάλογοι. Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ τὴν ΕΚ. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΕΚΛ, ΖΗΛ ἕπεται ΕΚ = ΖΗ, ΚΛ = ΛΗ καὶ συνεπῶς, ΚΓ = ΗΔ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΚΕΔ, ΗΘΔ ἕπεται ΔΚ : ΚΕ = ΗΔ : ΗΘ (1). Ἀλλὰ ΔΚ : ΚΕ = ΚΕ : ΚΓ (2) (ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΕΔ εἶναι ὀρθὴ καὶ ΕΚ ὕψος τοῦ τριγώνου ΓΕΔ) ἤτοι ἡ ΚΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΔΚ, ΚΓ. Ἐκ τῶν (2) καὶ (1) λαμβάνομεν ΔΚ : ΚΕ = ΚΕ : ΚΓ = ΗΔ : ΗΘ (3). Ἀλλὰ ΔΚ = ΓΗ, ΚΕ = ΗΖ, ΚΓ = ΗΔ. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν ΓΗ : ΗΖ = ΗΖ : ΗΔ = ΗΔ : ΗΘ (4). Δηλαδὴ αἱ εὐθεῖαι ΗΖ, ΗΔ εἶναι μέσαι ἀνάλογοι τῶν εὐθειῶν ΓΗ, ΗΘ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΔ καὶ ΝΞ, τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν Ο εἶναι σημεῖον τῆς κισσοειδοῦς. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν θὰ ἔχωμεν ΓΞ : ΞΝ = ΞΝ : ΞΔ = ΞΔ : ΞΟ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν ΓΞ, ΞΟ, αἱ εὐθεῖαι ΝΞ, ΔΞ εἶναι μέσαι ἀνάλογοι.



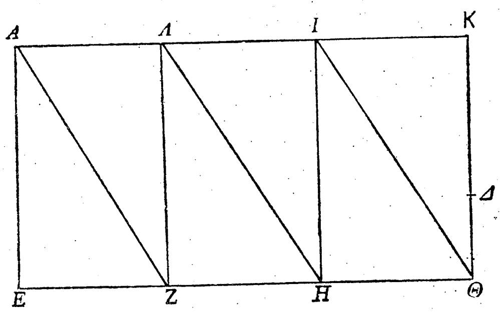
Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἔστω κύκλος μὲ τὰς δύο καθέτους διαμέτρους ΖΕ, ΓΔ καὶ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι Α, Β, καὶ Β νὰ παριστᾷ τὴν πλευρὰν δοθέντος κύβου. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Α, Β δύο μέσαι ἀνάλογοι, αἱ Ν, Ξ. Κατασκευάζομεν τὸ τμῆμα τῆς κισσοειδοῦς ΔΖ. Λαμβάνομεν Α : Β = ΓΗ : ΗΚ = 2. καὶ φέρομεν τὴν ΓΚ ἡ ὁποία προεκτεινομένη θὰ συναντήσῃ τὴν κισσοειδῆ γραμμὴν εἴς τι σημεῖον Θ. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν τὴν ΜΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΗ. Ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς (4) ἔχομεν ΓΛ : ΛΜ = ΛΜ : ΛΔ = ΛΔ : ΛΘ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν ΓΛ, ΛΘ, αἱ εὐθεῖαι ΛΜ, ΛΔ εἶναι μέσαι ἀνάλογοι, Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΛΘ, ΓΗΚ



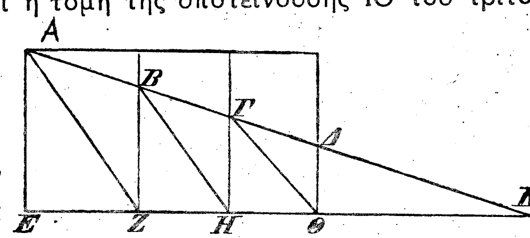
λαμβάνομεν ΓΛ : ΛΘ = ΓΗ : ΗΚ. Καὶ ἐπειδὴ ΓΗ : ΗΚ = Α : Β ἡ ἀνωτέρω συνεχὴς ἀναλογία θὰ εἶναι Α : ΛΜ = ΛΜ : ΛΔ = ΛΔ : Β. Ἐὰν καλέσωμεν Α = β = 2α, Β = α, τὰς εὑρεθείσας μέσας ἀναλόγους ΛΜ = Ν = y, ΛΔ = Ξ = x, ἡ εὑρεθεῖσα ἀναλογία γράφεται β : y = y : x = x : α, ἐξ ἧς $x = \alpha\sqrt[3]{2}$ ἤτοι ἡ ΛΔ = Ξ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου, Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ Διοκλέους, εἶναι προφανές, ὅτι ὅταν δοθῇ ἡ πλευρὰ α κύβου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευράν, ὄχι μόνον διπλασίου κύβου, ἀλλὰ τριπλασίου, τετραπλασίου, πενταπλασίου κλπ., ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν Α : Β = ΓΗ : ΗΚ = 3, 4, 5 κλπ.

4. ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΟΥΣ

Εἰς τὸ ὀρθογώνον μεταλλικὸν πλαίσιον * ΚΑΕΘ δύνανται νὰ διολισθαίνουν τὰ ἐκ μετάλλου ἢ ξύλου ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΛΖ, ΛΙΗ, ΙΚΘ. Λαμβάνομεν τὴν ΑΕ ὡς τὴν μεγαλυτέραν τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ τὴν ΔΘ ὡς τὴν μικροτέραν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πρώτης καὶ νὰ παριστᾷ τὴν πλευρὰν δοθέντος κύβου. Τὸ πρῶτον τρίγωνον διατηροῦμεν ἀκίνητον.



Τὸ δεύτερον καὶ τρίτον τρίγωνα τὰ κινοῦμεν πρὸς τ' ἀριστερά, μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε (ἐκ τοῦ α'. σχήματος) ἡ τομὴ τῆς ὑποτεινούσης ΛΗ τοῦ δευτέρου τριγώνου μετὰ τῆς καθέτου ΛΖ τοῦ πρώτου τριγώνου, καὶ ἡ τομὴ τῆς ὑποτεινούσης ΙΘ τοῦ τρίτου τριγώνου μετὰ τῆς καθέτου ΙΗ τοῦ δευτέρου τριγώνου, τὸ μέσον Δ τῆς καθέτου ΚΘ τοῦ τρίτου τριγώνου καὶ τὸ σημεῖον Α νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒΓΔ καὶ νὰ λάβωμεν τὸ δεύτερον σχῆμα. Τότε τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἡ ΓΗ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κύβου εἶναι ἡ ΔΘ. Ἀπόδειξις. Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ



* Ὀνομαζόμενον μεσολάβιον, διότι δι' αὐτοῦ εὑρίσκονται αἱ μέσαι ἀνάλογοι.

μέχρις ὅτου αὕτη συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΕΘ εἴς τι σημεῖον Κ. Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΕ, ΒΖ λαμβάνομεν ΑΚ : ΚΒ = ΕΚ : ΚΖ. Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΖ, ΒΗ λαμβάνομεν ΑΚ : ΚΒ = ΖΚ : ΚΗ Ἄρα ΑΚ : ΚΒ = ΕΚ : ΚΖ = ΖΚ : ΚΗ (1).

Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΒΖ, ΓΗ λαμβάνομεν ΒΚ : ΚΓ = ΖΚ : ΚΗ. Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΒΗ, ΓΘ λαμβάνομεν ΒΚ : ΚΓ = ΗΚ : ΚΘ. Ἄρα ΒΚ : ΚΓ = ΖΚ : ΚΗ = ΗΚ : ΚΘ (2).

Ἐκ τῆς (1) εἶναι ΕΚ : ΚΖ = ΖΚ : ΚΗ, ἐν ᾧ ἐκ τῆς (2) ΖΚ : ΚΗ = ΗΚ : ΚΘ. Ἄρα ΕΚ : ΚΖ = ΖΚ : ΚΗ = ΗΚ : ΚΘ (3).

Ἀλλὰ ΕΚ : ΚΖ = ΑΕ : ΒΖ
ΖΚ : ΚΗ = ΒΖ : ΓΗ
ΗΚ : ΚΘ = ΓΗ : ΔΘ

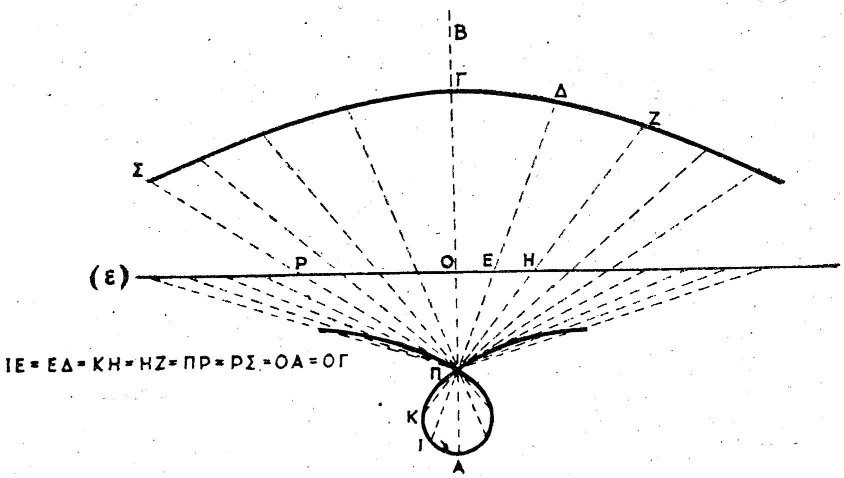
Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν ΑΕ : ΒΖ = ΒΖ : ΓΗ = ΓΗ : ΔΘ. ἤτοι αἱ ΒΖ, ΓΗ εἶναι αἱ ζητούμεναι μέσαι ἀνάλογοι. Ἐὰν καλέσωμεν ΑΕ = β = 2α, ΒΖ = y, ΓΗ = x, ΔΘ = α, θὰ ἔχωμεν τὴν ζητουμένην σχέσιν $x = \alpha\sqrt[3]{2}$ κατὰ τὴν ἀναγωγὴν τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου.

5. ΝΙΚΟΜΗΔΟΥΣ

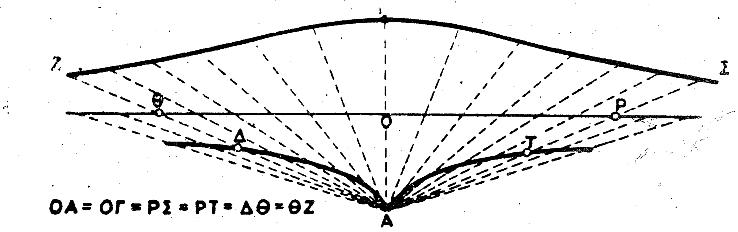
Ὁ Νικομήδης (200 π.Χ. περίπου) ἐφεῦρε ἰδίαν καμπύλην ὀνομαζομένην κογχοειδές, ἐκ τῆς ὁμοιότητος πρὸς γραμμὴν κογχυλίου. Διὰ ταύτης ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις καὶ τῶν δύο προβλημάτων· καὶ ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας. Λέγεται, ὅτι ἀρχικῶς ἡ γραμμὴ ὠνομάζετο κοχλοειδὴς καὶ ὅτι ἡ ὀνομασία κογχοειδὴς εἶναι μεταγενεστέρα.

Κατασκευὴ τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς.

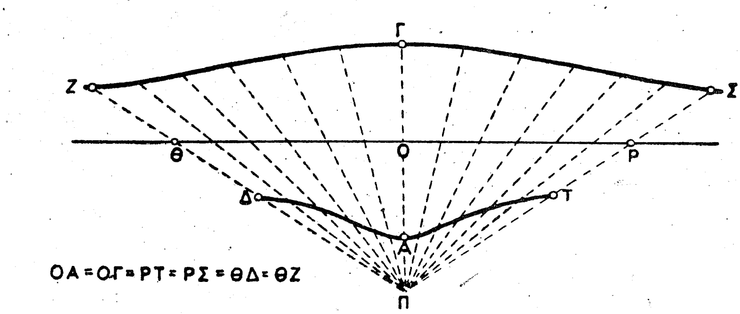
Ἔστω σταθερὰ εὐθεῖα (ε) ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ σημεῖον τι Π, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον, ὀνομαζόμενον Πόλος. Τοῦτο δύναται νὰ ληφθῇ πρὸς τὸ ἐπάνω ἢ πρὸς τὸ κάτω μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας (ε). Θεωροῦμεν εὐθεῖαν ΑΒ στρεφομένην περὶ τὸ ἀκίνητον σημεῖον Π (τὸν πόλον). Αὕτη θὰ τέμνῃ συνεχῶς τὴν εὐθεῖαν (ε). Λαμβάνομεν τυχὸν σταθερὸν τμῆμα, ἔστω ΟΑ, ἐνταῦθα μεγαλύτερον τῆς ΟΠ, καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) (πολικῆς ἀποστάσεως). Ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας (ε) ὑπὸ τῆς περὶ τὸ Π στρεφομένης εὐθείας ΑΒ, λαμβάνομεν εἰς ἑκάστην διαδοχικὴν θέσιν τῆς ΑΒ, τμήματα ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν σταθερὸν τμῆμα, ἐνταῦθα τὸ ΟΑ. (πρῶτον σχῆμα). Τοῦτο πράττομεν καὶ διὰ τὰς ἄνω τῆς εὐθείας (ε) εὐθείας γραμμὰς καὶ διὰ τὰς κάτω ταύτης π.χ. ΟΑ = ΟΓ = ΡΠ = ΡΣ = ΕΙ = ΕΔ = ΗΚ = ΗΖ κλπ. Τὰ πέρατα τῶν οὕτω πως ληφθέντων τμημάτων ἑνούμενα, μᾶς δίδουν τοὺς δύο κλάδους τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς, ἕνα πρὸς τὸ ἐπάνω μέρος καὶ ἕνα πρὸς



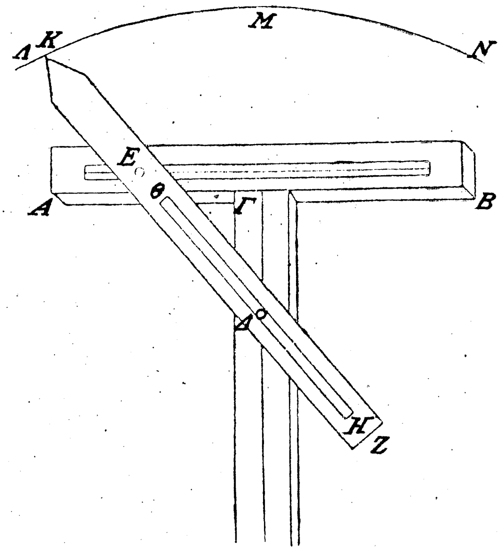
τὸ κάτω. Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα τὸ δοθὲν σταθερὸν τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πολικὴν ἀπόστασιν ΟΑ ἐν ᾧ εἰς τὸ τρίτον τὸ δοθὲν σταθερὸν τμῆμα ΟΑ εἶναι μικρότερον τῆς πολικῆς ἀποστάσεως ΟΠ.



Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς κογχοειδοῦς, ὁ Νικομήδης ἐπενόησεν ἰδίαν συσκευὴν ἀποτελουμένην ἐκ τριῶν κανόνων. Οἱ δύο ἐκ τούτων εἶναι στερεῶς συνδεδεμένοι πρὸς ὀρθὴν γωνίαν. Ὁ ὁριζόντιος



κανών, παριστῶν τὴν εὐθεῖαν (ε) φέρει καθ' ὅλον σχεδὸν τὸ μῆκος του τομήν. Ὁ κατακόρυφος φέρει στερεῶς μικρὰν στρογγύλην προεξοχὴν ἡ ὁποία παριστᾷ τὸν πόλον. Ὁ τρίτος κανών, πρὸς τὸ ἐπάνω μὲν μέρος φέρει μικρὰν στρογγύλην προεξοχήν, δι᾿ ἧς δύναται νὰ διολισθαίνῃ εἰς τὴν τομὴν τοῦ ὁριζοντίου κανόνος, πρὸς τὸ κάτω δὲ μέρος, ὀλίγον μακρότερον τῆς στρογύλης προεξοχῆς φέρει τομὴν δι᾿ ἧς δύναται νὰ διολισθαίνῃ ἐπὶ τῆς στρογγύλης προεξοχῆς τοῦ κατακορύφου κανόνος. Εἰς τὸ ἐπάνω ἄκρον, ὁ τρίτος κανὼν φέρει γραφίδα, ἡ ὁποία κατὰ τὴν διολίσθησιν τούτου γράφει τὴν κογχοειδῆ γραμμήν, δι᾿ ἧς ἐπιλύονται τὰ δύο προβλήματα. [Ὑπάρχει καὶ ἄλλη συσκευή, γράφουσα τὸν κάτω κλάδον τῆς κογχοειδοῦς].

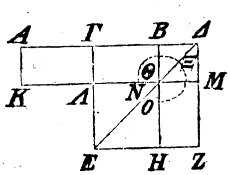


Τῆς ἐπιλύσεως τοῦ Νικομήδους, προτάσσομεν τὸ 6ον θεώρημα τοῦ β′ βιβλίου τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον δὲν ἀπαντᾶται εἰς τὰς σχολικὰς ἐκδόσεις τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας καὶ τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ὁ Νικομήδης, ἔχον ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον καὶ προστεθῇ εἰς αὐτὴν τυχὸν τμῆμα κατά τινα προέκτασίν της, τότε τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον βάσιν τὸ ἄθροισμα τῆς δοθείσης καὶ τῆς προεκτάσεως, ὕψος δὲ τὴν ληφθεῖσαν προέκτασιν σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευράν, τὸ ληφθὲν τυχὸν τμῆμα ἐπὶ τῆς προεκτάσεως σὺν τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας.

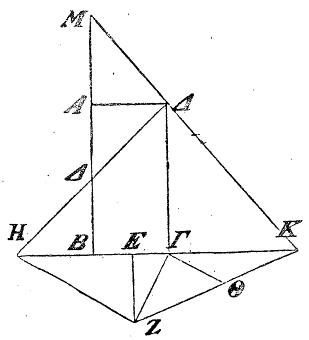
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ μέσον αὐτῆς Γ, ἂς ληφθῇ δὲ ἡ προέκτασις ΒΔ. Λέγω ὅτι $ΑΔ \cdot ΒΔ + \overline{ΓΒ}^2 = \overline{ΓΔ}^2$ Ἀπόδειξις.

Ἂς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΓΔΖΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΔΕ καὶ ἡ ΒΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ ἢ ΔΖ. Διὰ τοῦ



σημείου Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΜ, παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἢ ΕΖ καὶ ΑΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΛ ἢ ΔΜ. Τὸ παραλληλόγραμον ΑΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΘ. Ἀλλὰ παραλληλόγραμμον ΓΘ = παραλληλόγραμμον ΘΖ κατὰ τὸ 43ον θεώρημα τοῦ Ι βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, καθ᾿ ὃ παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα [ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΕΔΓ, ΕΔΖ, ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τρίγωνα ΕΘΛ+ΘΔΒ καὶ ΕΘΗ+ΘΜΔ, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα]. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ γνώμονος ΓΔΖΗΘΛ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΜΚ. Ἐὰν εἰς τοῦτο προστεθῇ τὸ τετράγωνον ΛΘΗΕ ἢ $\overline{ΓΒ}^2$ θὰ ἔχωμεν τὸ τετράγωνον ΓΔΖΕ ἢ $\overline{ΓΔ}^2$.

Κατόπιν τούτων ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ εὕρωμεν δύο μέσας ἀναλόγους ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Συνθέτομεν τὰς δοθείσας εὐθείας εἰς ὀρθὴν γωνίαν καὶ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΛ. Διχοτομοῦμεν τὰς ΑΒ, ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ,Ε. Φέρομεν τὴν ΛΔ καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ εἴς τι σημεῖον Η. Εἰς τὸ σημεῖον Ε φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον Ζ οὕτως, ὥστε ΓΖ=ΑΔ. Φέρομεν τὴν ΗΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ παράλληλον πρὸς ταύτην, τὴν ΓΘ. Τὴν ΓΘ λαμβάνομεν ὡς δοθεῖσαν σταθερὰν εὐθεῖαν, τὸ σημεῖον Ζ ὡς πόλον καὶ τὴν ΓΖ=ΑΔ ὡς τὸ δοθὲν σταθερὸν τμῆμα καὶ κατασκευάζομεν τὴν κογχοειδῆ γραμμήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἴς τι σημεῖον Κ, ὁπότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς κογχοειδοῦς εἶναι ΘΚ = ΓΖ = ΑΔ. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Κ μὲ τὸ Λ καὶ προεκτείνομεν μέχρις ὅτου συναντήσωμεν τὴ προέκτασιν τῆς ΒΑ, ἔστω εἰς τὸ Μ. λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΚ, ΑΜ εἶναι αἱ ζητούμεναι μέσαι ἀνάλογοι τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ τέμνεται εἰς τὸ μέσον καὶ πρόσκειται εἰς αὐτὴν ἡ ΚΓ θὰ ἔχωμεν $ΒΚ\cdot ΓΚ+\overline{ΕΓ}^2=\overline{ΕΚ}^2$ (6ον θεώρ. β΄. βιβλ. Εὐκλείδου). Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης προσθέσωμεν τὸ $\overline{ΕΖ}^2$ θὰ ἔχωμεν: $ΒΚ\cdot ΓΚ+\overline{ΕΓ}^2+\overline{ΕΖ}^2=\overline{ΕΚ}^2+\overline{ΕΖ}^2$ ἢ (ἐκ τοῦ σχήματος) $ΒΚ\cdot ΓΚ+\overline{ΓΖ}^2=\overline{ΖΚ}^2$. (1) Λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΛ, ΒΚ καὶ ΜΒ, ΛΓ θὰ ἔχωμεν: ΜΑ : ΑΒ=ΜΛ : ΛΚ καὶ ΜΛ : ΛΚ=ΒΓ : ΓΚ. Συνεπῶς ΜΑ : ΑΒ=ΒΓ : ΓΚ. Ἀλλὰ ΑΒ=2ΑΔ καὶ ΓΗ=2ΒΓ (ἐπειδὴ ΛΓ= =2ΔΒ). Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ΑΒ, ΒΓ εἰς τὴν προηγουμένην ἀναλογίαν, διὰ τῶν ἴσων των λαμβάνομεν:



$$ΜΑ : 2ΑΔ=\frac{ΓΗ}{2} : ΓΚ \text{ ἢ } ΜΑ : ΑΔ=ΓΗ : ΓΚ \ (2)$$

Λόγῳ τῶν παραλλήλων ΗΖ, ΓΘ λαμβάνομεν: ΓΗ : ΓΚ=ΘΖ : ΘΚ. Συνεπῶς ἐκ τῆς (2), ΜΑ : ΑΔ=ΘΖ : ΘΚ, καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν (ΜΑ+ΑΔ) : ΑΔ=(ΘΖ+ΘΚ) : ΘΚ ἢ ἐπειδὴ

$MA + A\Delta = \Delta M$ καὶ $\Theta Z + \Theta K = ZK$, θὰ ἔχωμεν $\Delta M : A\Delta = ZK : \Theta K$. Ἀλλὰ $\Theta K = A\Delta$ ἐκ κατασκευῆς. Συνεπῶς $\Delta M = ZK$. Ἄρα καὶ $\overline{\Delta M}^2 = \overline{ZK}^2$ (3). Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον καὶ ἔχει ληφθῆ ἡ προέκτασις ΑΜ, θὰ ἔχωμεν (κατὰ τὸ αὐτὸ 6ον θεώρ. τοῦ β'. βιβλ. τοῦ Εὐκλείδου) $BM \cdot AM + \overline{A\Delta}^2 = \overline{\Delta M}^2$ (4). Ἐκ τῆς (3) συνάγεται ἡ ἰσότης τῶν (1) καὶ (4) ἤτοι $BM \cdot AM + \overline{A\Delta}^2 = BK \cdot \Gamma K + \overline{\Gamma Z}^2$. Ἐπειδὴ δὲ $A\Delta = \Gamma Z$, θὰ ἔχωμεν $BM \cdot AM = BK \cdot \Gamma K$. Ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται ὡς ἀναλογία:

$BM : BK = \Gamma K : AM$. Ἀλλὰ

$\Gamma\Lambda : \Gamma K = BM : BK$ (ἐκ τοῦ σχήματος)

Συνεπῶς $\Gamma\Lambda : \Gamma K = \Gamma K : AM$. εἶναι δὲ

(ἐκ τοῦ σχήματος) $\Gamma\Lambda : \Gamma K = AM : A\Lambda$.

Συνεπῶς $\Gamma\Lambda : \Gamma K = \Gamma K : AM = AM : A\Lambda$ ὅ. ἔ. δ.

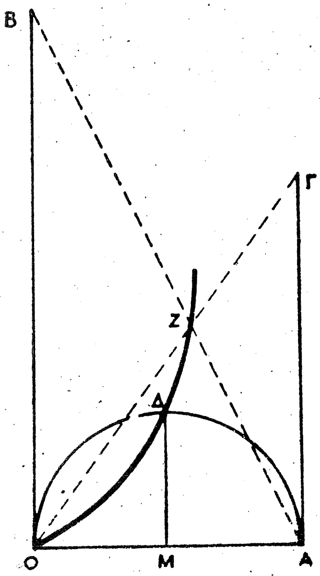
Ἐὰν δὲ καλέσωμεν $\Gamma\Lambda = AB = \beta$, $\Gamma K = y$, $AM = x$, $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἔχωμεν λάβῃ $\beta = 2\alpha$ θὰ ἔχωμεν $x = \alpha\sqrt[3]{2}$ ἤτοι ἡ ΑΜ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κύβου εἶναι ἡ ΒΓ.

6. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ.

Ἐξίσωσις τῆς κισσοειδοῦς γραμμῆς

Ἐπὶ τοῦ κύκλου ἀκτῖνος $OM = \alpha$ (σχῆμα 1ον σελίδος 18) ἔστω $OB = A\Gamma = x$ καὶ $BI = y$. Κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, ἔχομεν $\overline{\Gamma Z}^2 = O\Gamma \cdot A\Gamma = x\,(2\alpha - x)$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΙ, ΟΓΖ, λαμβάνομεν $BI : \Gamma Z = OB : O\Gamma$. Ἑπομένως $BI = \frac{OB \cdot \Gamma Z}{O\Gamma}$ (1). Ἀλλὰ $\Gamma Z = \sqrt{x(2\alpha - x)}$, $OB = x$ καὶ $BI = y$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν $y = \frac{x\sqrt{x\,(2\alpha - x)}}{2\alpha - x}$. Ὑψώνοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀπαλείφοντες παρανομαστάς, λαμβάνομεν $y^2\,(2\alpha - x) = x^3$, ὡς ἐξίσωσιν τῆς κισσοειδοῦς γραμμῆς.

Ἔστω τώρα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων ΨΟΧ. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x λαμβάνομεν τμῆμα $OA = \delta$ (διάμετρον κύκλου ἀκτῖνος α) ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y τμῆμα $OB = 2\delta$. Κατασκευάζομεν τὴν κισσοειδῆ γραμμὴν καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν κισσοειδῆ εἴς τι σημεῖον ἔστω Ζ. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Ο μὲ τὸ σημεῖον Ζ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΟΖ. Αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν ἐκ τοῦ σημείου Α παράλληλον πρὸς τὴν ΟΒ εἴς τι σημεῖον, ἔστω Γ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κύβου εἶναι ἡ ΟΑ $=\delta$ ἤτοι ὅτι ΑΓ $=\delta\sqrt[3]{2}$. Ἀπόδειξις. Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $y=mx+\beta$ (1) ὅπου m ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως καὶ β σταθερά. Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Α, Β τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι Α (δ, o) καὶ Β $(o, 2\delta)$. Ἑπομένως $o=m\delta+\beta$ καὶ $2\delta=$ $=m\cdot o+\beta$ ἐξ ὧν $\beta=2\delta$ καὶ $m=-2$. Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν $y=-2x+2\delta$ ἢ $y=2(\delta-x)$ (2). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετμημένην τοῦ σημείου Ζ θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (2) εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς κισσοειδοῦς γραμμῆς $y^2=\frac{x^3}{\delta-x}$ ὁπότε ἔχομεν :



$$\left[2\ (\delta-x)\right]^2=\frac{x^3}{\delta-x} \text{ ἢ } 4\ (\delta-x)^3=x^3, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$x=\frac{\delta\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}} \quad (\text{τετμ. Z})$$

Θέτοντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν.

$$y=2\left(\delta-\frac{\delta\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}\right) \text{ ἢ } y=\frac{2\delta}{1+\sqrt[3]{4}} \quad (\text{τεταγμ. Z}).$$

Ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων Ο (ο,ο) καὶ $Z\left(\frac{\delta\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}, \frac{2\delta}{1+\sqrt[3]{4}}\right)$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας ΟΖ (εἶναι τῆς μορφῆς $y=mx$), ἥτις θὰ εἶναι $y=\frac{2\delta x}{1+\sqrt[3]{4}}:\frac{\delta\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}$ ἢ $y=\frac{2x}{\sqrt[3]{4}}$.

Ἀλλὰ $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}$. Συνεπῶς $y=x\sqrt[3]{2}$. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει ἐξίσωσιν $x=\delta$. Τὸ σημεῖον Γ εἶναι σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ σημείου Α παραλλήλου πρὸς τὴν ΟΒ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΟΖ ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $y=x\sqrt[3]{2}$. Θέτοντες εἰς ταύτην τὴν τιμὴν $x=\delta$ λαμβάνομεν $y=\delta\sqrt[3]{2}$, ἤτοι τὴν πλευρὰν τοῦ διπλασίου κύβου ὅταν ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ εἶναι δ.

ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΙΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ἔστω ἡ πρὸς τριχοτόμησιν ὀξεῖα γωνία θ. (Ἐὰν ἡ γωνία εἶναι ἀμβλεῖα, ἀφαιροῦμεν τὴν ὀρθήν, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ τριχοτομήσωμεν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου).

Κατὰ γνωστὸν τύπον τῆς τριγωνομετρίας θὰ ἔχωμεν:

$$\text{εφ } 3\theta = (3 \text{ εφ}\theta - \text{εφ}^3\theta) : (1 - 3 \text{ εφ}^2\theta).$$

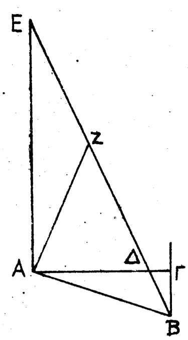
Ἐὰν ἀντὶ τῆς γωνίας θ λάβωμεν τὸ τρίτον αὐτῆς $\frac{\theta}{3}$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν: $\text{εφ}\theta = \left(3 \text{ εφ}\frac{\theta}{3} - \text{εφ}^3\frac{\theta}{3}\right) : \left(1 - 3 \text{ εφ}^2\frac{\theta}{3}\right)$.

Θέτοντες $\text{εφ}\theta = \alpha$, $\text{εφ}\frac{\theta}{3} = x$ καὶ ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν:

$$\alpha = (3x - x^3) : (1 - 3x^2) \text{ ἢ } x^3 - 3\alpha x^2 - 3x + \alpha = 0$$

ὡς ἐξίσωσιν τῆς τριχοτομήσεως γωνίας.

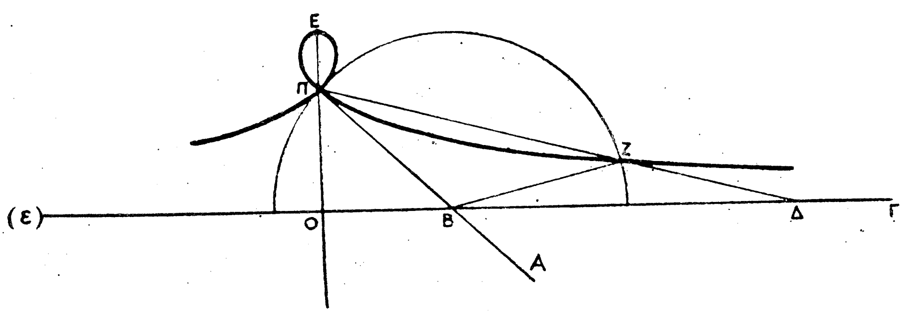
Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἀνάγεται εἰς β.΄ βάθμιον, ὡς ἀπέδειξεν ὁ F. Enriques καὶ συνεπῶς ἡ ἐπίλυσις αὐτῆς, διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς χρησιμοποιούσης κανόνα καὶ διαβήτην εἶναι ἀδύνατος. Ἡ κογχοειδὴς τοῦ Νικομήδους ἐπιλύει καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο. Ἐπίσης ἡ τετραγωνίζουσα καμπύλη τοῦ Ἱππίου ἐξ Ἠλείας, ὡς καὶ αἱ κωνικαὶ τομαί. Ἐνταῦθα πραγματευόμεθα τὴν τριχοτόμησιν 1) διὰ τῆς κογχοειδοῦς τοῦ Νικομήδους 2) Διὰ κανόνος καὶ διαβήτου τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐφαρμόζοντος κινητικὴν γεωμετρίαν καὶ 3) Διὰ κωνικῶν τομῶν.



1. Ἔστω πρὸς τριχοτόμησιν ἡ γωνία ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἴς τι σημεῖον Α. Τὴν κορυφὴν Β τῆς δοθείσης γωνίας λαμβάνομεν ὡς πόλον, τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ὡς σταθερὰν εὐθεῖαν καὶ τὴν ἀπόστασιν 2ΑΒ ὡς τὸ δοθὲν σταθερὸν τμῆμα καὶ κατασκευάζομεν τὴν κογχοειδῆ γραμμήν. Ἐκ τοῦ σημείου Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν κογχοειδῆ γραμμὴν εἴς τι σημεῖον Ε. Ἑνοῦμεν τὸ Ε μὲ τὸ Β, ὅπερ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς πρὸς τριχοτόμησιν γωνίας καὶ πόλος πρὸς κατασκευὴν τῆς κογχοειδοῦς. Λέγω ὅτι ἡ γωνία ΕΒΓ εἶναι τὸ

τρίτον τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ἀπόδειξις. Διχοτομοῦμεν τὴν ΕΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ καὶ φέρομεν τὴν ΑΖ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΑΔ συνάγεται ΑΖ = ΕΖ = ΖΔ. Εἶναι δὲ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς κογχοειδοῦς 2ΑΒ = ΕΔ. Συνεπῶς ΑΖ = ΑΒ. Κατὰ ταῦτα, τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΖΒ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἡ γωνία ΑΖΒ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΕΖ ἰσοῦται μὲ 2ΑΕΖ = ΑΒΖ. Εἶναι δὲ γωνία ΑΕΖ = γων. ΕΒΓ λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ. Συνεπῶς ἡ γωνία ΑΒΓ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς γωνίας ΕΒΓ, εἶναι δηλ. ἡ ΕΒΓ τὸ ἓν τρίτον τῆς γωνίας ΑΒΓ.

Ἀλλὰ καὶ μὲ τὸν ἄλλον κλάδον τῆς κογχοειδοῦς ἐπιτυγχάνεται ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας, διότι καὶ οὗτος προέρχεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐπιτάγματος κατασκευῆς τῆς κογχοειδοῦς. Ἔστω ἡ πρὸς τριχοτόμησιν γωνία ΑΒΓ. Τοποθετοῦμεν τὴν μίαν πλευρὰν

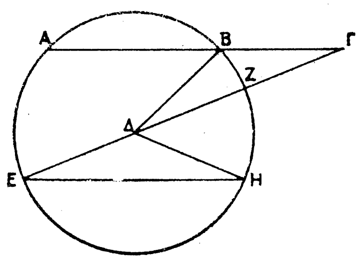


αὐτῆς, ἔστω τὴν ΒΓ ἐπὶ τῆς πρὸς κατατασκευὴν τῆς κογχοειδοῦς λαμβανομένης σταθερᾶς εὐθείας (ε). Προεκτείνομεν τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν τυχὸν τμῆμα ἐπὶ ταύτης, ὡς τὸ δοθὲν σταθερὸν τμῆμα, ἔστω τὸ ΒΠ. Μὲ πόλον τὸ Π καὶ τὰ λοιπὰ δοθέντα στοιχεῖα κατασκευάζομεν τὴν κογχοειδῆ. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΠ (τό λαμβανόμενον σταθερὸν τμῆμα) γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἡ ὁποία θὰ τμήσῃ τὴν κογχοειδῆ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἑνοῦμεν τὸ Ζ μὲ τὸ Β, καὶ τὸ Π μὲ τὸ Ζ. Ἡ προέκτασις τῆς ΠΖ συναντᾷ τὴν σταθερὰν εὐθεῖαν (ε) εἴς τι σημεῖον Δ. Ἡ ΖΔ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κογχοειδοῦς εἶναι ἴση πρὸς ΒΠ.

Τὸ τρίγωνον ΠΒΖ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐπειδὴ ΒΠ = ΒΖ. Ὁμοίως τὸ τρίγωνον ΒΖΔ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ΒΖ = ΒΠ = ΔΖ, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κογχοειδοῦς. Ἡ γωνία ΠΖΒ ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΒΖΔ ἰσοῦται μὲ 2ΖΒΔ. Ἡ δὲ γωνία ΑΒΔ + ΖΒΔ ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΠΒΖ ἰσοῦται μὲ 2ΠΖΒ. Ἀντικαθιστῶντες τὴν ΠΖΒ διὰ τῆς ἴσης της 2ΖΒΔ λαμβάνομεν ΑΒΔ + ΖΒΔ = 4ΖΒΔ ἢ ΑΒΔ = = 3ΖΒΔ, ἐξ ἧς $ΖΒΔ = \frac{ΑΒΔ}{3}$ ἤτοι ἡ γωνία ΖΒΔ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς γωνίας ΑΒΓ.

2. Ἐξ ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους σώζονται 15 θεωρήματα ἐπιπεδομετρίας εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν. Ταῦτα φέρονται μετέφρασμένα εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τὸ ὄνομα Liber assumptorum. Τὸ VIII θεώρημα ἐκ τούτων πραγματεύεται τὴν τριχοτόμησιν ὀξείας γωνίας.

Ἔστω πρὸς τριχοτόμησιν τὸ τόξον ΑΕ κύκλου Δ. Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν λαμβάνοντες τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Δ καὶ προεκτείνομεν τήν ΓΔ (ἡ ὁποία ἔχει τμήσει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ζ) μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ τὴν ΕΗ. Φέρομεν τέλος τὰς ἀκτῖνας ΔΒ, ΔΗ. Τὰ τρίγωνα ΒΔΓ, ΕΔΗ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἡ γωνία ΒΓΔ = γων. ΔΕΗ λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΓ, ΕΗ. Η γωνία ΖΔΗ ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΔΕΗ ἰσοῦται μὲ 2ΔΕΗ ἤτοι ἡ γωνία ΒΔΗ ἰσοῦται μὲ 3ΒΔΖ. Ἄρα τὸ τόξον ΒΖ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τόξου ΒΗ καὶ τοῦ ἴσου πρὸς τοῦτο ΑΕ. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ὅμως ἡ ἀνωτέρω τριχοτόμησις πρέπει ἡ χορδὴ ΑΒ νὰ ἐκλεγῇ δοκιμαστικῶς τοιαύτη διὰ κινήσεώς της, ὥστε ἀφ' ἑνὸς ἡ ΒΓ νὰ παραμένῃ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ προέκτασις ΓΔ νὰ συναντᾷ τὸ Ε. Ἐπιτυγχάνεται δηλ. τριχοτόμησις γωνίας διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, δι' ἐφαρμογῆς κινητικῆς γεωμετρίας.

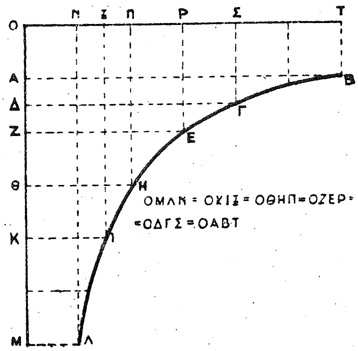


ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΙΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΙΑ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

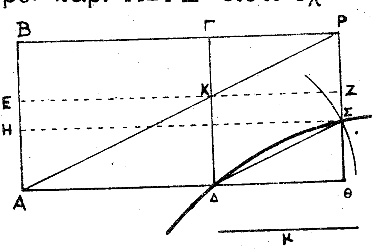
1. Ὁρισμὸς ὀρθογωνίου ἢ ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς.

Ἔστωσαν δύο κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι ΟΜ, ΟΤ καὶ τυχὸν σημεῖον Λ κείμενον ἐντὸς τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν προσδιορίζει ἡ ὀρθὴ γωνία ΜΟΤ. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Λ φέρωμεν τὰς καθέτους ΛΜ, ΛΝ λαμβάνομεν τὸ ὀρθογώνιον ΟΜΛΝ. Ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ὡς ἄνω ἐπιφανείας ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα τοιαῦτα, ὥστε ὅταν φέρωμεν τὰς καθέτους ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΜ, ΟΤ τὰ μετὰ τούτων σχηματιζόμενα ὀρθογώνια νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ΟΜΛΝ. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τούτων ἀποτελεῖ γραμμὴν τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν. Αἱ εὐθεῖαι ΟΜ, ΟΤ ὀνομάζονται ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς.

2. Διὰ τὴν τριχοτόμησιν γωνίας διὰ χρησιμοποιήσεως τομῆς ὑπερβολῆς καὶ κύκλου, πρέπει νὰ λυθῇ προηγουμένως τὸ ἑξῆς πρόβλημα: ἐὰν δοθῇ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ν᾽ ἀχθῇ ἔκ τινος σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, εὐθεῖα ΑΚΡ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Κ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ρ οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΚΡ νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν μ. [Σημ. τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι μερικὴ περίπτωσις γενικωτέρου προβλήματος, καθ᾽ ὃ τὸ δοθὲν σημεῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἀλλ᾽ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ γωνία ΑΒΓ: ᾽Απολλωνίου Κωνικαὶ τομαί, Πάππου Συναγωγή].



᾽Ανάλυσις. Ἔστω ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ ΚΡ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μ. ᾽Εκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΚΡ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ρ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ. Αὗται τέμνονται εἴς τι σημεῖον Σ. Τότε ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΚΡΣΔ ἔχομεν ΚΡ = ΔΣ = μ. Τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μ. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ = = ὀρθογ. παραλ. ΑΕΖΘ *. ᾽Αλλὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλ. ΑΕΖΘ = ὀρθ. παρ. ΗΒΡΣ διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ΚΔ = ΡΣ.



᾽Αφοῦ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον παρ. ΑΒΓΔ ἔχει δοθῇ καὶ τὸ ὀρθογώνιον παρ. ΗΒΡΣ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τοῦτο, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Δ. (Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ὑπερβολῆς).

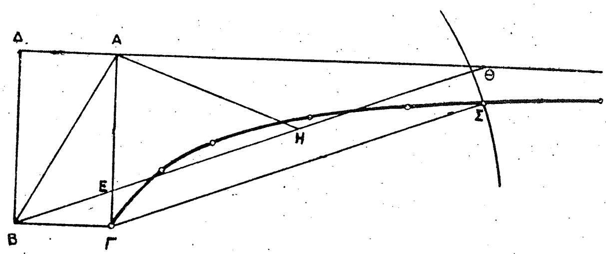
Σύνθεσις. Τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἀσυμπτώτους καὶ κατασκευάζομεν ὀρθογώνια ἰσοδύναμα πρὸς τὸ δοθέν, λαμβάνοντες οὕτω τὴν ὑπερβολὴν τῆς ὁποίας δοθὲν σημεῖον εἶναι τὸ Δ. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μ, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἡ ὁποία θὰ τέμνῃ τὴν ὑπερβολὴν εἴς τι σημεῖον Σ. ᾽Εκ τοῦ Σ φέρομεν παράλ-

---

* Κατὰ τὸ 43ον θεώρημα τοῦ α' βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, μνημονευόμενον εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ Νικομήδους.

ληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον σημεῖον Ρ. Ἡ ΡΑ τέμνουσα τὴν ΓΔ εἰς τὸ Κ μᾶς δίδει ΚΡ = μ.

3. Κατόπιν τούτων, ἔστω πρὸς τριχοτόμησιν ἡ γωνία ΑΒΓ. Ἀνάλυσις. Ἔστω ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ ἡ γωνία ΓΒΕ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς γωνίας ΑΒΓ. Σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΔΒΓ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΒΕ μέχρις ὅτου αὕτη συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΑ εἴς τι σημεῖον Θ. Διχοτομοῦμεν τὴν ΕΘ εἰς τὸ Η καὶ φέρομεν τὴν ΑΗ. Τότε, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς δύο γωνίας ΕΒΓ καὶ ἐπειδὴ γων. ΕΒΓ = γων. ΕΘΑ, λόγῳ τῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΘ, θὰ ἔχωμεν γων. ΑΒΕ = 2γων. ΑΘΗ = γων. ΑΗΒ (ὡς ἐξωτ. τοῦ τριγώνου ΑΗΘ). Συνεπῶς ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΗΘ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΗ



εἶναι ἰσοσκελές· (ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν). Ἄρα ΑΒ = ΑΗ = ΗΘ. Καὶ ἐπειδὴ ΕΘ = 2ΗΘ, θὰ εἶναι ΕΘ = 2ΑΒ. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάζωμεν ΕΘ = 2ΑΒ, ἡ ΕΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΑΒΓ.

Σύνθεσις. Δίδεται πρὸς τριχοτόμησιν ἡ γωνία ΑΒΓ. Σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΔΒΓ. Θεωροῦμεν τὰς ΔΒ, ΔΑ ἀσυμπτώτους ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς. Ἐκ τοῦ σημείου Β φέρομεν εὐθεῖαν ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΑ εἴς τι σημεῖον Θ, ὥστε ΕΘ = 2ΑΒ. [Τοῦτο τὸ ἐπιτυγχάνομεν κατόπιν τῆς ἐπιλύσεως τοῦ προηγουμένου προβλήματος, διὰ τῆς τομῆς κύκλου καὶ ὑπερβολῆς τῆς ὁποίας δεδομένον σημεῖον εἶναι τὸ Γ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΔΒ, ΔΑ. Τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὸ ΑΔΒΓ ὀρθογώνια μᾶς δίδουν τὰ σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν 2ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ὑπερβολὴν εἴς τι σημεῖον Σ. Ἐκ τοῦ Σ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΒ ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΑ εἰς τὸ Θ. Φέρομεν τὴν ΒΘ ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ε Ἡ ΕΘ εἶναι τότε ἴση μὲ 2ΑΒ]. Τότε ἡ γωνία ΕΒΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὸ Η μέσον τῆς ΕΘ. Ἑνοῦμεν τὸ Α μὲ τὸ Η, μέσον ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου ΕΑΘ. Ἡ ΑΗ = ΗΘ = ΕΗ = ΑΒ. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΑΒΗ εἶναι ἰσοσκελῆ (ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν ἀνὰ δύο). Ἡ γωνία ΑΘΗ = = γων. ΕΒΓ, λόγῳ τῶν παραλλήλων ΑΘ, ΒΓ. Ἡ γωνία ΑΗΕ = = 2 γων. ΑΘΗ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΗΘ. Ἀλλὰ γωνία ΑΗΕ = γων. ΑΒΕ. Ἄρα γων. ΑΒΕ = 2 γων. ΕΒΓ, ἤτοι ἡ γωνία ΕΒΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς γωνίας ΑΒΓ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Archimedis:** Opera omnia I. J. L. Heiberg.
2. **Archimedis:** Opera omnia III. J. L. Heiberg. Teubner, 1910, Leipzig.
3. **Πάππου:** Συναγωγὴ F. Hultsch - Berlin, 1876.
4. **T. L. Heath:** The works of Archimedes Cambridge, 1897.
5. **T. L. Heath:** A history of Greek Mathematics Oxford, 1921.
6. **M. Cantor:** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Teubner, 1907, Leipzig.
7. **E. Hoppe:** Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum, Heidelberg, 1911.
8. Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen III. Bd. Geometrie, Teubner. Leipzig.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

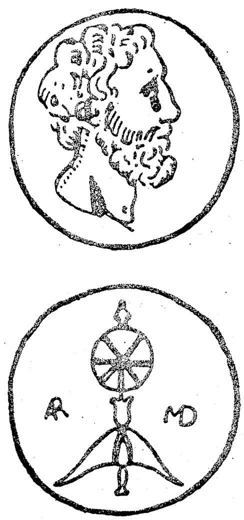
ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ

1950



Ἀπεικόνισις τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκ σικελικοῦ νομίσματος. Θεωρεῖται ἡ αὐθεντικωτέρα. Ἡ ἄλλη ὄψις τοῦ νομίσματος παριστᾷ σφαῖραν στηριζομένην ἐπὶ ποδὸς μὲ δύο συμπλέγματα γραμμάτων τὰ ὁποῖα συμβολίζουν τὸ ὄνομα τοῦ διασήμου σοφοῦ. Ὡς γνωστόν, ὁ Ἀρχιμήδης ἐθεώρει ὡς σπουδαιότερον ἐκ τῶν ἔργων του, τὸ «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου».

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Τὸ σωζόμενον ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις» περιλαμβάνει ἐν ὅλῳ τρία θεωρήματα. Εἰς τὸ πρῶτον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ἄλλη δὲ μὲ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Εἰς τὸ δεύτερον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν εἰς κύκλον περιγραφῇ τετράγωνον, τότε ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι 11 : 14. Τέλος εἰς τὸ τρίτον θεώρημα ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου (ὁ π) εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$, μεγαλύτερος δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$.

Τὰ θεωρήματα ταῦτα μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Μετρικὰ» (H. Schöne, Τόμ. III, Α΄ σελ. 66, Teubner, Λειψία 1903), τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς κώδικα, ἀνευρεθέντα πρὸ πεντήκοντα περίπου ἐτῶν ἐν Κων/πόλει. Δὲν ἀναφέρονται ὅμως καθ' ἣν σειρὰν ἀναγράφονται εἰς τὴν παροῦσαν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὸ δεύτερον θεώρημα μνημονεύεται ὡς πρῶτον, τὸ τρίτον ὡς δεύτερον καὶ τὸ πρῶτον ὡς τρίτον. Διὰ τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον θεωρήματα τῆς παρούσης πραγματείας, ὁ Ἥρων, λέγει, ὅτι περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις». Διὰ τὸ τρίτον ὅμως, διὰ τὸ ὁποῖον δὲν ἀναφέρει τοὺς ἀριθμοὺς $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$, ἀλλὰ ἄλλους, εὑρισκομένους κατὰ διόρθωσιν τοῦ ἐφθαρμένου κώδικος, μεταξὺ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$, ὁ Ἥρων λέγει, ὅτι περιέχεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι», τὸ ὁποῖον ἔχει ἀπολεσθῆ. Ὁ μαθηματικὸς Πάππος, ἕνα αἰῶνα περίπου μεταγενέστερος τοῦ Ἥρωνος, εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Συναγωγὴ» (Hultsch, Βερολῖνον, v, 312, 12), ἀναφέρει τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ παρόντος ἔργου, ὡς περιεχόμενον εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας» τὸ ὁποῖον ἔχει ἀπολεσθῆ. Ὁ ἱδρυτὴς τῆς Ἀλγέβρας, Διόφαντος, εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Ἐπιπεδομετρικὰ» (P. Tannery, Teubner, Λειψία, II. σελ, 22, 16) λέγει, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι 30 ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἰσοῦνται μὲ 13 τετράγωνα (ἐννοεῖ ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον, ἐπειδὴ τὸ σχετικὸν κεφάλαιον, ἀναφέρεται εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου). Ἐκ τῶν μαρτυριῶν τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Διοφάντου, συνάγεται ἡ μεγίστη πιθανότης, ὅτι ἡ παροῦσα πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι μικρὸν μέρος μεγάλου ἔργου του, ἀφορῶντος εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου, καὶ μὴ διασωθέντος. Ἡ ἄποψις αὕτη ἐνισχύεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι, ἐν ᾧ εἰς τὰ σωζόμενα καὶ ὡς πλήρη θεωρούμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπάρχει ἐν ἀρχῇ ἑκάστου, ἐν εἴδει προλόγου, προσφώνησις πρός τινα μαθηματικὸν φίλον του, εἰς τὸ ἔργον «Κύκλου μέτρησις» ὡς τοῦτο σώζεται, δὲν ὑπάρχει τοιαύτη προσφώνησις. Τοιαῦτα ἀτελῶς σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει προσφώνησις, εἶναι ἀκόμη τὸ «Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν I καὶ II» τὸ «περὶ Ὀχουμένων» καὶ τὸ εἰς λατινικὴν μετάφρασιν λίαν ἀτελῶς διασωθὲν καὶ φερόμενον ἤδη ὑπὸ τὸν τίτλον «Liber Assumptorum» (βιβλίον λημμάτων) ἔργον του.

2. Ὅτι μεταξὺ περιφερείας κύκλου καὶ διαμέτρου αὐτοῦ, ὑπάρχει σταθερὰ

σχέσις ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς Κινέζους, Ἰνδούς, Βαβυλωνίους, Αἰγυπτίους καὶ Ἕλληνας. Ὡς ἀκριβεστέρα ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς σχέσεως αὐτῆς, ἐθεωρεῖτο ὁ ἀριθμὸς 3,16. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δὲν ἦτο προϊὸν γεωμετρικῆς τινος ἀποδείξεως. Ὑποστηρίζεται σήμερον ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναφερομένη σχέσις ἦτο ἀποτέλεσμα μετρήσεων διὰ νήματος τῆς περιφερείας καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Ὅτι διὰ τοιούτων μεθόδων, γεωμετρικῶν πειραμάτων, ὡς θὰ ἐλέγομεν σήμερον, ἐλύοντο γεωμετρικὰ προβλήματα ὑπὸ τῶν πολιτισμένων λαῶν τῆς παλαιᾶς ἐκείνης ἐποχῆς, βεβαιοῦται καὶ ὑπ' αὐτοῦ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων, πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος» καὶ εἰς τὴν προσφώνησιν πρὸς τὸν Ἐρατοσθένην, λέγει: «Πρῶτος ὁ Εὔδοξος ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου καὶ ἡ πυραμὶς τὸ τρίτον πρίσματος, ἐχόντων τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ τὰ αὐτὰ ὕψη· ὀφείλονται ὅμως χάριτες εἰς τὸν Δημόκριτον, ὁ ὁποῖος εἶχεν ὑπολογίσει ταῦτα πρὸ τοῦ Εὐδόξου, χωρὶς γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν». Οἱ ἐρευνηταὶ τοῦ αἰῶνος μας, θεωροῦν πολὺ πιθανόν, ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχεν εὕρει τοὺς τύπους ὑπολογισμοῦ τῶν ὄγκων κώνου καὶ πυραμίδος διὰ ζυγίσεως δοχείων, πρῶτον κενῶν καὶ κατόπιν πλήρων ὕδατος.

3. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν θεωρηθοῦν δύο ἢ περισσότεροι διάφοροι κύκλοι, οἱ λόγοι τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν εἶναι, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων. Οὐδαμοῦ ὅμως εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπιχειρεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π. Τοιοῦτος ὑπολογισμὸς ἐγένετο τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τῆς περιγραφῆς καὶ ἐγγραφῆς εἰς κύκλον πολυγώνων.

Ὡς πρῶτος συλλαβὼν τὴν ἰδέαν τῆς ἐγγραφῆς εἰς κύκλον πολυγώνων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν νὰ διπλασιάζεται συνεχῶς, ἀναφέρεται ὁ Ἀντιφῶν, σύγχρονος τοῦ Σωκράτους, ὁ ὁποῖος ἐπεχείρησε διὰ τῆς μεθόδου ταύτης νὰ τετραγωνίσῃ τὸν κύκλον. Ὁ Βρύσων, ὀλίγον μεταγενέστερος τοῦ Ἀντιφῶντος, ἀναφέρεται, ὡς προσπαθήσας νὰ τετραγωνίσῃ τὸν κύκλον διὰ τῆς ἐγγραφῆς καὶ περιγραφῆς πολυγώνων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν νὰ διπλασιάζεται συνεχῶς. Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, θεωρεῖται τὸ σπουδαιότερον ἐκ τῶν τριῶν περιφήμων προβλημάτων τῆς ἀρχαιότητος. Τὰ ἄλλα δύο, ἦσαν, ὡς γνωστόν, ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου (τὸ δήλιον λεγόμενον πρόβλημα) καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας. Καὶ σήμερον ἀκόμη τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἀσκεῖ γοητείαν ἐπὶ τῶν λαϊκῶν μαζῶν, δὲν εἶναι δὲ ὀλίγοι, οἱ μὴ μαθηματικοί, οἱ ὁποῖοι παρουσιάζονται συχνά, ὡς εὑρόντες τὴν λύσιν. Καὶ οἱ ἀρχαῖοι Ἀθηναῖοι, φαίνεται, δὲν ἀπετέλουν ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος τούτου. Διὰ νὰ φθάσῃ ὁ Ἀριστοφάνης ν' ἀναφέρῃ τὸ πρόβλημα ἀπὸ σκηνῆς, τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ πρόβλημα ὡς τοιοῦτο, ἦτο κοινὸν κτῆμα τοῦ ἀθηναϊκοῦ λαοῦ. Ἰδοὺ τί γράφει ὁ Ἀριστοφάνης εἰς τοὺς «Ὄρνιθας» (στιχ. 1004 - 1005).

Μέτων. ὀρθῷ μετρήσω κανόνι προστιθείς, ἵνα
ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος...

(θὰ μετρήσω μὲ ὀρθογώνιον κανόνα, καὶ θὰ προσθέσω τὰ μικρὰ τμήματα, ἵνα πρὸς χάριν σου τετραγωνίσω τὸν κύκλον...)

4. Ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ μείνῃ ξένος πρὸς τὰ προβλήματα ταῦτα. Καὶ τὸ μὲν δήλιον πρόβλημα τὸ ἔλυσε διὰ γενικωτέρου τρόπου ἢ οἱ προηγούμενοι αὐτοῦ, ὡς μᾶς πληροφορεῖ ὁ σχολιαστὴς τῶν ἔργων του Εὐτόκιος, εἰς τὰ σχόλιά του, τοῦ δ' προβλήματος τοῦ β' βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους, περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Τὴν δὲ τριχοτόμησιν τῆς ὀξείας γωνίας, ἐπέτυχεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, δι' ἐφαρμογῆς κινητικῆς λεγομένης γεωμετρίας, ὡς πληροφορούμεθα ἐξ ἀποσπάσματος ἔργου του, ἀφορῶντος ἐπιπεδομετρίαν (**Liber Assumptorum**, βιβλίον λημμάτων).

Οἱ μελετηταὶ τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν συνδέουν τὴν προκειμένην πραγματείαν του μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Ἀναφέρομεν ἐκ τούτων τοὺς Γερμανοὺς E. Nizze, M. Cantor, τὸν Δανὸν J. Heiberg, τὸν Ἄγγλον T. Heath καὶ τὸν Γάλλον P. Tannery. Ἀλλὰ καὶ ὁ Εὐτόκιος δὲν ἐπιχειρεῖ τοιαύτην σύνδεσιν. Καὶ ὄχι μόνον τοῦτο, ἀλλὰ προσπαθεῖ νὰ ὑπερασπισθῇ τὸν Ἀρχιμήδην ἀπὸ τὴν κριτικὴν τοῦ μαθηματικοῦ Σπόρου (συγχρόνου τοῦ Πάππου), λέγων, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ γ' θεώρημα τῆς παρούσης πραγματείας του, δὲν διανοεῖται νὰ εὕρῃ ἀκριβῆ σχέσιν τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἀλλ' ὅτι διὰ τοῦ ἐν λόγῳ θεωρήματος σκοπεύει οὗτος νὰ δώσῃ ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ π κατὰ προσέγγισιν, χρήσιμον διὰ τὰς πρακτικὰς ἀνάγκας τῶν ἀνθρώπων.

Οἱ μελετηταὶ τοῦ γ' θεωρήματος λαμβάνουν ὡς ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ π, τὸν μέσον ὅρον τῶν ὁρικῶν τιμῶν $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$, ἤτοι ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν $\pi = 3{,}1418\ldots$ καὶ τὸν μέσον ὅρον τῶν τιμῶν τῶν λαμβανομένων κατὰ τὴν ἀπολεσθεῖσαν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι» τὴν μνημονευομένην ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, καθ' ἣν μετὰ τὴν διόρθωσιν τοῦ κώδικος τῆς Κων/πόλεως ὑπὸ τοῦ P. Tannery καὶ J. Heiben εἶναι $\pi = 3{,}141596\ldots$

Ἐκ τῆς ἐπισταμένης ὅμως μελέτης τοῦ γ' θεωρήματος ὡδηγήθημεν εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε νὰ ὑπολογίζῃ ἀριθμητικῶς τὴν πλευρὰν τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον πολυγώνων (6 γώνου, 12 γώνου κλπ.). Κατὰ συνέπειαν ἠδύνατο περιγράφων καὶ ἐγγράφων πολύγωνα ἔχοντα ἀριθμὸν πλευρῶν μεγαλύτερον τοῦ 96, νὰ εὕρῃ ὁσονδήποτε μεγάλην προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π ἤθελε. Ἐὰν δεχθῶμεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἐγνώριζε νὰ ὑπολογίζῃ ἀριθμητικῶς τὴν πλευρὰν τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων καὶ ὅτι διὰ τοῦ γ' θεωρήματος ἐσκόπευεν ἁπλῶς νὰ εὕρῃ τὴν ἀριθ. τιμὴν τοῦ π κατά τινα προσέγγισιν, τότε εἶναι λογικὸν νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι διὰ τῆς αὐτῆς ἀκριβῶς μεθόδου τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει εἰς τὸ γ' θεώρημα, ἠδύνατο περιγράφων καὶ ἐγγράφων πολύγωνα μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν 192, 384 κλπ. νὰ εὕρῃ ὁσονδήποτε μεγάλην προσέγγισιν τῆς ἀριθ. τιμῆς τοῦ π ἤθελε. Καταλήγομεν ὅθεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τοῦ γ' θεωρήματος τῆς παρούσης πραγματείας του, δὲν ἤθελε νὰ εὕρῃ ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ π κατὰ προσέγγισιν, ἀλλ' ὅτι ἤθελε νὰ δείξῃ, ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός. Ἐφ' ὅσον δὲ ὁ π εἶναι ἀριθμός, τότε ὑπάρχει κοινὸν μέτρον εὐθυγράμμου τμήματος καὶ περιφερείας κύκλου καὶ κατὰ συνέπειαν, δύναται τότε νὰ διατυπωθῇ πρὸς ἀπόδειξιν τὸ α' θεώρημα, καθ' ὃ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος καθέτους πλευράς, ἀφ' ἑνὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ ἀφ' ἑτέρου εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Διότι ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ἰσχυρισθῇ αὐθαιρέτως, ὅτι ὑπάρχει εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν κύκλου καὶ κατόπιν τούτου νὰ προβῇ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ α' θεωρήματος.

Εἰς ἐπίρρωσιν τῆς γνώμης, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τοῦ γ' θεωρήματος σκοπεύει νὰ δείξῃ, ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός, ἔρχεται καὶ τὸ γεγονός, ὅτι εἰς τὸ ἀπολεσθὲν ἔργον του «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι» τὸ μνημονευόμενον ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, ὁ π κλείνεται μεταξὺ δύο στενωτέρων ὁρίων ἢ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$. Τοῦτο δὲν φαίνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἥρωνος, διότι ὁ κῶδιξ τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς τὸν ὁποῖον τοῦτο περιέχεται εἶναι πολὺ ἐφθαρμένος καὶ τὰ διδόμενα σχήματα καὶ οἱ ἀριθμοί, οὐχὶ τὰ ὀρθά. Κατὰ τούτους εἶναι $\frac{211875}{67441} < \pi < \frac{197888}{62351}$. Κατὰ διόρθωσιν ὅμως τοῦ κώδικος ὑπὸ τοῦ P. Tannery ἔχομεν $\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$ καὶ κατ' ἄλλην διόρθωσιν ὑπὸ τοῦ J. L. Heiben $\frac{211875}{67444} < \pi < \frac{195888}{62351}$.

Πρὸς εὐχερεστέραν παρατήρησιν ἀναγράφομεν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰς τιμὰς τῶν κλασμάτων:

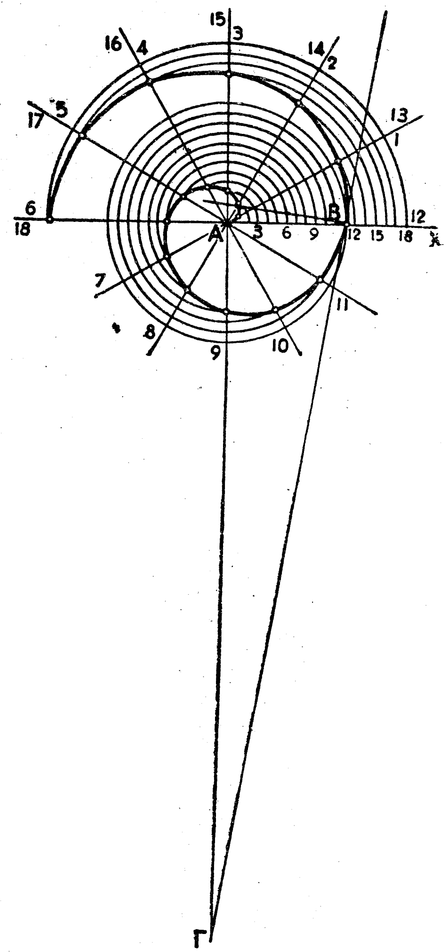
Κατὰ τὸ γ΄ θεώρημα εἶναι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ ἢ	$3{,}14085... < \pi < 3{,}142857....$
Κατὰ τὸν κώδικα τῆς Κωνσταντινουπόλεως	$3{,}141635... < \pi < 3{,}173774....$
Κατὰ τὴν διόρθωσιν τοῦ κώδικος ὑπὸ P. Tannery	$3{,}141590... < \pi < 3{,}141601....$
Κατὰ τὴν διόρθωσιν τοῦ κώδικος ὑπὸ J. Heiben	$3{,}141495... < \pi < 3{,}141697....$

6. Κατὰ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου, ὁ 'Απολλώνιος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «'Ωκυτόκιον» (ἀπολεσθὲν) καὶ ὁ Πτολεμαῖος, ἔκλεισαν τὸν π εἰς στενώτερα ὅρια ἢ ὁ 'Αρχιμήδης. 'Εφ' ὅσον δὲ παραδεχόμεθα, ὡς ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως, ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης καὶ ἑπομένως ὁ 'Απολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἐγνώριζον νὰ ὑπολογίζουν ἀριθμητικῶς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς κύκλον, τότε κατ' ἀνάγκην πρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι τόσον τὸ γ΄ θεώρημα ὅσον καὶ τὸ σχετικὸν εἰς τὸ ἔργον «Πλινθίδες καὶ Κύλινδροι» ὡς καὶ αἱ σχετικαὶ ἐργασίαι τοῦ 'Απολλωνίου καὶ τοῦ Πτολεμαίου, ἐσκόπευον νὰ δείξουν ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός. Οἱ νεώτεροι προκειμένου περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς τὴν μέθοδον τοῦ 'Αρχιμήδους. Κλείουν τούτους μεταξὺ συμμέτρων ἀριθμῶν. 'Ενταῦθα δὲ ἔγκειται ἡ ἰδιαιτάτη σπουδαιότης τοῦ γ΄ θεωρήματος, εἰς τὸ ὁποῖον διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς γεωμετρίας ἐπιχειρεῖται ἐπιτυχῶς ὑπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις προσδιορισμοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ διὰ τῆς τοποθετήσεως τούτου μεταξὺ συμμέτρων ἀριθμῶν. Στηρίζεται δὲ πρὸς τοῦτο ὁ 'Αρχιμήδης εἰς τὸ περίφημον ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου.

7. 'Η ἀπόδειξις τοῦ γ΄ θεωρήματος, ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμὸς καὶ κατόπιν τούτου ἡ ἀπόδειξις τοῦ α΄ θεωρήματος, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ὀρθογωνίου ἔχοντος ὡς καθέτους πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, λύουν κατ' ἀρχὴν τὸ πρῶτον μέρος τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Τὸ δεύτερον μέρος εἶναι νὰ εὑρεθῇ γεωμετρικὴ κατασκευή, καθ' ἣν νὰ λαμβάνεται εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου. 'Ο 'Αρχιμήδης ἐπεχείρησε καὶ ἐπέτυχε τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ὑπ' αὐτοῦ ἐφευρεθείσης ἕλικος τὴν ὁποίαν ὁρίζει ὡς ἑξῆς. 'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ εὑρισκομένη ἐπὶ ἐπιπέδου κινηθεῖσα ἰσοταχῶς πέριξ τοῦ ἑνὸς ἀκραίου σημείου της, ὅπερ μένει ἀκίνητον, ἐπανέλθῃ πάλιν εἰς τὴν θέσιν ἐξ ἧς ἐξεκίνησε, κατὰ τὸν ἴδιον δὲ χρόνον καθ' ὃν ἐκτελεῖ τὴν περιφοράν της ἡ εὐθεῖα, σημεῖον τι κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν, ἀρχίζον ἀπὸ τὸ ἄκρον ὅπερ μένει ἀκίνητον, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ γράψῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕλικα.

"Ας ὑποθέσωμεν ὅτι εὐθεῖα ΑΒ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Α κατ' ἀντίθετον φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καὶ γράφεται ὑπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ἕλιξ, ὡς ὁρίζεται ἀνωτέρω.

'Εὰν εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ φέρωμεν κάθετον καὶ ἐπὶ τοῦ σημείου Β τῆς ἕλικος, τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἕλικος, αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον, εἴς τι σημεῖον Γ. 'Ο 'Αρχιμήδης ἀποδεικνύει εἰς τὸ 18ον θεώρημα τοῦ ἔργου του περὶ ἑλίκων, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει μῆκος ὅσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος ΑΒ. 'Αποδεικνύει δηλ. γεωμετρικῶς, ὅτι κατασκευάζεται εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρὸς περιφέρειαν κύκλου. Τὸ θεώρημα τοῦτο λύει τελικῶς τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου καὶ ἀποτελεῖ ἓν ὀργανικὸν ὅλον πρὸς τὰ θεωρήματα γ΄ καὶ α΄ τῆς παρούσης πραγματείας τοῦ 'Αρχιμήδους. [Σημ. Τὸ ἱστορικὸν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἡ σπουδὴ τῆς τετραγωνιζούσης καμπύλης τοῦ 'Ιππίου ἐξ 'Ηλείας, καὶ ἡ ἀνάπτυξις τοῦ 18ου θεωρήματος τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ ἑλίκων, ἐξέρχονται τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος. Εἰς τὸ σχῆμα ἐσχεδιάσθη καὶ τμῆμα τῆς ἕλικος ἐκ δευτέρας περιστροφῆς τῆς ΑΒ]. Ὁ Εὐτόκιος, φαίνεται, δὲν ἐγνώριζε τὴν ὕπαρξιν τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ ἑλίκων, διότι οὐδαμοῦ τὸ μνημονεύει.



8. Διὰ τὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν ἐφήρμοσεν ὁ Ἀρχιμήδης πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς $\sqrt{3}$ καὶ γενικῶς διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ῥίζης δὲν γνωρίζομεν πολλὰ καίτοι ἐξ ὑπαρχόντων στοιχείων ἄλλων συγγραφέων καὶ ἰδίως τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Θέωνος, συνάγεται ἡ μεγάλη πιθανότης, ὅτι ἡ σημερινὴ μέθοδος εἶναι παραπλησία τῆς μεθόδου τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Διὰ τὴν μέθοδον ὅμως τὴν ὁποίαν ἐφήρμοσεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἀριθμῶν 153 καὶ 780 καὶ τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ εἰς τὸ γ' θεώρημα τοῦ προκειμένου ἔργου, οὐδὲν ἀπολύτως γνωρίζομεν. Ἐπὶ τούτου ἔχουν διατυπωθῆ πλεῖσται εἰκασίαι καὶ θεωρίαι μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὰς τῶν Zeuthen, Mollweide, Buzengeiger, Wertheim, Heilermann, Hultsch, de Lagny, Tannery, Bobynin. Σημειώνομεν ἀκόμη, ὅτι ἡ σημερινὴ ἀριθμητικὴ καὶ ἄλγεβρα (στοιχειώδης) ἐθεωροῦντο ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ὡς τέχνη καὶ ὄχι ὡς ἐπιστήμη. Ὠνομάζετο δὲ αὕτη λογιστική. Ἡ τέχνη αὕτη περιελάμβανε, ὡς πιστεύεται, τὰς μαθητικὰς πράξεις, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὕψωσιν εἰς δύναμιν καὶ ἐξαγωγὴν ῥίζης. Ἐπειδὴ δὲ ἡ λογιστικὴ ἐθεωρεῖτο κοινοτοπία, οὐδὲν γραπτὸν τεκμήριον ταύτης διεσώθη, καίτοι, ὡς φαίνεται, ὑπῆρχον τοιαῦτα βιβλία, ὡς ἡ λογιστικὴ τοῦ Μάγνου, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Εὐτόκιος.

9. Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη, παρὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Ἀλγέβρας καὶ τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως γνωρίζει περὶ τοῦ ἀριθμοῦ π ὀλιγώτερα ἢ ὅσα γνωρίζει περὶ τοῦ ἀριθμοῦ e ($=2{,}718281\ldots$). Ὅτι ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ J Lambert (Beiträge κλπ. Berlin 1770). Ὅτι δὲ εἶναι καὶ ὑπερβατικὸς ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ F. Lindemann (über die Zahl π, math. Annalen 20 (1882) καὶ κατόπιν δι' ἁπλουστέρου τρόπου ὑπὸ τοῦ D. Hilbert (über die Transzendenz der Zahlen e und π, math. Annalen 43 (1893). Δὲν κατωρθώθη ὅμως ἀκόμη ν' ἀποδειχθῇ τί εἴδους ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁ π. Ἡ ὑπερβατικότης τοῦ π σημαίνει, ὅτι ἡ εὐθυγράμμισις τῆς περιφερείας κύκλου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

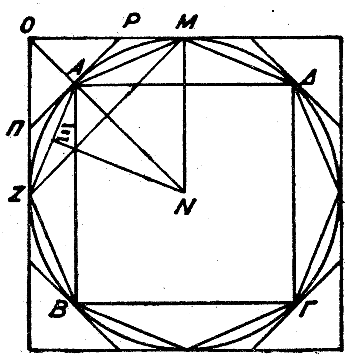
10. Μετὰ τὴν μετάφρασιν τῶν τριῶν θεωρημάτων παραθέτομεν ἐπεξηγήσεις καὶ ἀνάπτυξιν τούτων, ὡς καὶ τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου εἰς κύκλον πολυγώνου, ὡς οὗτος ἐξάγεται ἐκ τοῦ γ' θεωρήματος.

α´

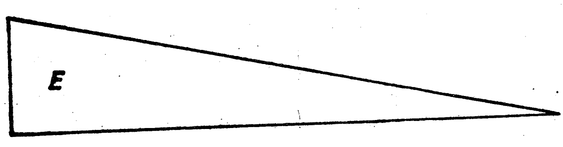
Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.



ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστιν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί. καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστιν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.



β´.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\iota\alpha}$ πρὸς $\overline{\iota\delta}$.

ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ, καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἕβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\kappa\alpha}$ πρὸς $\overline{\zeta}$, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστιν, ὡς $\overline{\kappa\beta}$ πρὸς $\overline{\zeta}$. ἀλλὰ τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστὶν α΄.

Πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ δὲ περιφέρεια εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον (τοῦτο) τρίγωνον·

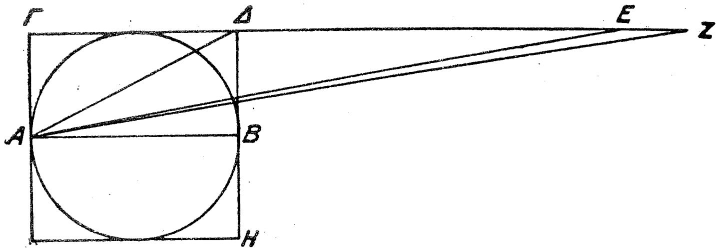
Ἄς ἔχει αὐτὴν τὴν σχέσιν ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ τρίγωνον Ε, ὅπως τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὰ ὑποκείμενα σχήματα· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τριγώνου καὶ ἄς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν τὸ τετράγωνον ΑΓ, καὶ ἄς ληφθοῦν τὰ μέσα τῶν τόξων, καὶ ἔστω ὅτι τὰ κυκλικὰ τμήματα εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου. Ἄς ληφθῇ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΝΞ. Ἄρα ἡ ΝΞ εἶναι μικροτέρα τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου (τῆς ληφθείσης ἴσης πρὸς τὴν ἀκτῖνα). Εἶναι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα τῆς ἄλλης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ἐπειδὴ εἶναι αὕτη μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· συνεπῶς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου Ε· ὅπερ ἄτοπον.

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, μικρότερος τοῦ τριγώνου Ε καὶ ἄς περιγραφῇ τὸ τετράγωνον, καὶ ἄς ληφθοῦν τὰ μέσα τῶν τόξων καὶ ἄς ἀχθοῦν εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν τόξων ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία ἄρα ΟΑΡ εἶναι ὀρθὴ καὶ συνεπῶς ἡ ΟΡ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΡΜ διότι ΡΜ = ΑΡ (καὶ ΟΡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγ. ΟΑΡ). Καὶ τὸ τρίγωνον ΡΟΠ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σχήματος ΟΖΑΜ. Ἄς ὑπολειφθοῦν τὰ ὅμοια πρὸς τὸ τμῆμα ΠΖΑ τμήματα (διὰ συνεχοῦς διαιρέσεως τῶν τόξων) οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς ἣν ὑπερέχει τὸ τρίγωνον Ε τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· τότε κατὰ μείζονα λόγον, τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου Ε· ὅπερ ἄτοπον. Διότι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον, ἐπειδὴ ἡ ΝΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος (τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου (ληφθείσης ἴσης πρὸς τὴν περιφέρειαν). Ἄρα ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον Ε.

β΄.

Ὁ κύκλος ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον, τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ὃν λόγον ἔχει τὸ 11 πρὸς τὸ 14.

Ἔστω κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ἄς περιγραφῇ [ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου

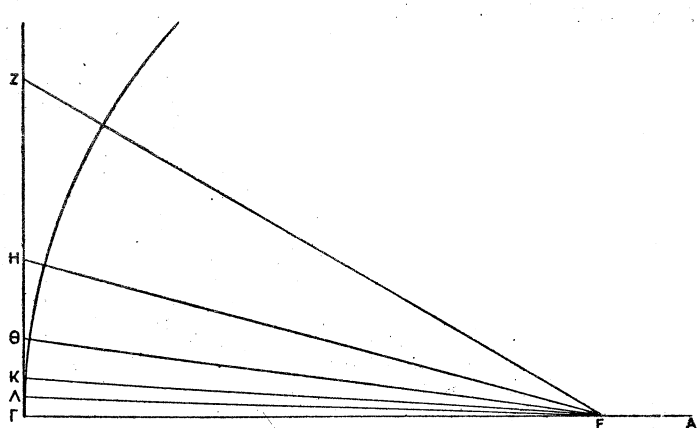


τριπλασίων καὶ τῷ ζʹ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται]· ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\iota\alpha}$ πρὸς $\overline{\iota\delta}$.

γʹ.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\tau\varsigma}$ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\sigma\xi\epsilon}$ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\varphi o\alpha}$ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$. ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}\overline{,\vartheta\upsilon\nu}$ πρὸς $\overset{\beta}{M}\overline{,\gamma\upsilon\vartheta}$. μήκει ἄρα, ὃν $\overline{\varphi\varrho\alpha}$ ηʹ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{,\alpha\varrho\xi\beta}$ ηʹ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$. ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{,\alpha\varrho o\beta}$ ηʹ πρὸς



$\overline{\varrho\nu\gamma}$. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{,\beta\tau\lambda\delta}$ δʹ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν $\overline{,\beta\tau\lambda\vartheta}$ δʹ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ $\overline{,\delta\chi o\gamma}$ ∠ʹ πρὸς $\overline{\varrho\nu\gamma}$. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μηʹ. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ τὸ τετράγωνον ΓΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ΔΕ $=$ 2ΓΔ καὶ ΕΖ $= \frac{1}{7}$ ΓΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχει λόγον, ὃν 21 πρὸς 7, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἔχει λόγον, ὃν 7 πρὸς 1, τὸ τρίγωνον ΑΓΖ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ὡς τὸ 22 πρὸς 7. Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ τὸ τετράγωνον ΓΗ εἶναι τετραπλάσιον, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΔΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κύκλον ΑΒ [ἐπειδὴ ἡ μὲν κάθετος πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ δὲ βάσις θὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ὀλίγον μικροτέρα τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου]· ὁ κύκλος λοιπὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον ΓΗ ὃν 11 πρὸς 14.

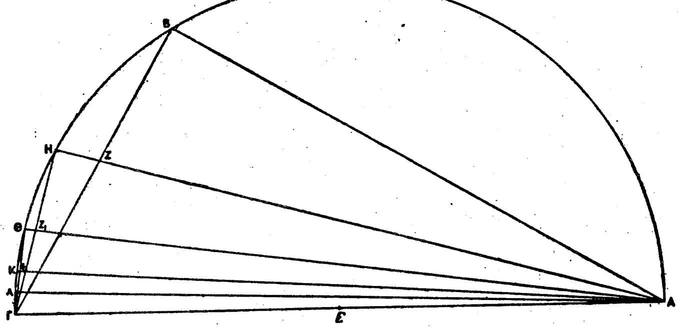
γ′

Παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι ὀλίγον μικροτέρα μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου, ὀλίγον μεγαλυτέρα δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ αὐτῆς. Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ γωνία ΖΕΓ ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς· ἄρα ἡ ΕΖ : ΖΓ $=$ 306 : 153, ἡ δὲ ΕΓ : ΓΖ $=$ 265 : 153. Ἂς διχοτομηθῇ λοιπὸν ἡ γωνία ΖΕΓ διὰ τῆς ΕΗ· τότε θὰ εἶναι ΖΕ : ΕΓ $=$ ΖΗ : ΗΓ [καὶ δι' ἐναλλαγῆς καὶ συνθέσεως].

Ἄρα (ΖΕ $+$ ΕΓ) : ΖΓ $=$ ΕΓ : ΓΗ· ὥστε ὁ λόγος ΓΕ : ΓΗ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου 571 : 153. Ἄρα ΕΗ^2 : ΗΓ^2 $=$ 349450 : 23409. Ἄρα καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τούτων θὰ εἶναι ἴσαι ἤτοι ΕΗ : ΗΓ $= 591\frac{1}{8}$: 153. Ἂς διχοτομηθῇ πάλιν ἡ γωνία ΗΕΓ ὑπὸ τῆς ΕΘ· διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν ὁ λόγος ΕΓ : ΓΘ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $1162\frac{1}{8}$: 153. Ἄρα ΘΕ : ΘΓ $> 1172\frac{1}{8}$: 153. Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΘΕΓ διὰ τῆς ΕΚ· τότε ΕΓ : ΓΚ $> 2334\frac{1}{4}$: 153· ἄρα ΕΚ : ΓΚ $> 2339\frac{1}{4}$: 153· Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΚΕΓ διὰ τῆς ΛΕ· τότε ΕΓ : ΛΓ $> 4673\frac{1}{2}$: 153. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΖΕΓ ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἓν τρίτον ὀρθῆς, ἐδιχοτομήθη τετράκις, ἡ γωνία ΛΕΓ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{48}$ ὀρθῆς. Ἂς ληφθῇ ἡ γωνία ΜΕΓ $=$ ΛΕΓ· τότε ἡ γωνία ΛΕΜ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ ὀρθῆς· συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΛΜ θὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 96 πλευράς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι ΕΓ : ΓΛ $> 4673\frac{1}{2}$: 153, ἀλλὰ ΑΓ $=$ 2ΕΓ καὶ ΛΜ $=$ 2ΓΛ συνάγεται, ὅτι ΑΓ : περίμετρον 96γώνου $> 4673\frac{1}{2}$: 14688. καὶ (ἀντιστρόφως) τὸ 14688 : $4673\frac{1}{2}$ εἶναι μικρό-

ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ′· καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος $\overline{\text{ϙς}}$. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ $\overline{\text{͵δχογ}}$ L′ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ $\overline{\text{ϙς}}$ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\text{͵δχογ}}$ L′ πρὸς $\overset{\alpha}{\text{M}}$ $\overline{\text{͵δχπη}}$. καί ἐστιν τριπλάσια, καὶ ὑπερέχουσιν $\overline{\text{χξζ}}$ L′, ἅπερ τῶν $\overline{\text{͵δχογ}}$ L′ ἐλάττονα ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\text{͵ατνα}}$ πρὸς $\overline{\text{ψπ}}$ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν $\overline{\text{͵αφξ}}$ πρὸς $\overline{\text{ψπ}}$]. δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ



ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\text{͵βϡια}}$ πρὸς $\overline{\text{ψπ}}$, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλλάσσονα ἢ ὅν, $\overline{\text{͵γιγ}}$ L′ δ′ πρὸς $\overline{\text{ψπ}}$. δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\text{͵εϡκδ}}$ L′ δ′ πρὸς $\overline{\text{ψπ}}$ ἢ ὃν $\overline{\text{͵αωκγ}}$ πρὸς $\overline{\text{σμ}}$· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας $\overline{\text{δ}}$ ιγ′. ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν $\overline{\text{͵αωλη}}$ $\overline{\text{θ}}$ ια′ πρὸς $\overline{\text{σμ}}$. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν $\overline{\text{͵αζ}}$ πρὸς $\overline{\text{ξς}}$· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας $\overline{\text{ια}}$ μ′· ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν $\overline{\text{͵αθ}}$ ς′ πρὸς $\overline{\text{ξς}}$. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ $\overline{\text{͵βις}}$ ς′ πρὸς $\overline{\text{ξς}}$, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΛΓ ἐλάσσονα ἢ τὰ $\overline{\text{͵βιζ}}$ δ′ πρὸς $\overline{\text{ξς}}$. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{\text{͵ςτλς}}$ πρὸς $\overline{\text{͵βιζ}}$ δ′, ἅπερ τῶν $\overline{\text{͵βιζ}}$ δ′ μείζονα ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ $\overline{\text{ϙς}}$ γώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ $\overline{\text{ι}}$ οα′· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ $\overline{\text{ι}}$ οα′.

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ $\overline{\text{ι}}$ οα′ μείζων.

τερον τοῦ $3\frac{1}{7}$ (τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $14688 : 4672\frac{1}{2}$)· ὥστε τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον (ἡ περίμετρος τούτου) εἶναι τριπλάσιον καὶ ὑπερέχον προσέτι κατὰ διάστημα μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑβδόμου τῆς διαμέτρου· ἄρα καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικροτέρα ἢ τριπλασία καὶ ὑπερέχουσα ἐπὶ πλέον κατὰ τὸ ἕβδομον μέρος (θὰ εἶναι δηλ. μικροτέρα τοῦ $3\frac{1}{7}$).

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΓ, ἔστω ἓν τρίτον ὀρθῆς· ἄρα ἡ ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὴν ΒΓ μικρότερον τοῦ λόγου τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 1351 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 780 [ἡ δὲ $ΑΓ : ΓΒ = 1560 : 780$].

Διὰ τῆς ΑΗ διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΒΑΓ. ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΓΒ καὶ τὴν γωνίαν ΗΑΓ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΗΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΑΓ. Καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΗΓ εἶναι ὀρθὴ καὶ διά τὸ τρίγωνον ΓΗΖ· ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία ΗΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τρίτην γωνίαν ΑΓΗ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΓΗΖ εἶναι ἰσογώνια. Συνεπῶς (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ΗΓΖ καὶ ΗΓΑ) ἕπεται $ΑΗ : ΗΓ = ΓΗ : ΗΖ = ΑΓ : ΓΖ$. Ἀλλά $ΑΓ : ΓΖ = (ΓΑ + ΑΒ) : ΒΓ$· ἄρα καὶ $(ΓΑ + ΑΒ) : ΒΓ = ΑΗ : ΗΓ$. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ $ΑΗ : ΗΓ < 2911 : 780$, ἡ δὲ $ΑΓ : ΓΗ < 3013\frac{3}{4} : 780$. ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΓΑΗ διὰ τῆς ΑΘ· ἄρα ἡ ΑΘ (διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω λόγους): $ΘΓ < 5924\frac{3}{4} : 780$ ἢ $ΑΘ : ΘΓ < 1823 : 240$· διότι οἱ ἀριθμοὶ 1823 καὶ 240 εἶναι τὰ $\frac{4}{13}$ ἀντιστοίχως, τῶν ἀριθμῶν $5924\frac{3}{4}$ καὶ 780· ὥστε $ΑΓ : ΓΘ < 1838\frac{9}{11} : 240$· ἀκόμη ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΘΑΓ διὰ τῆς ΚΑ· τότε $ΑΚ : ΚΓ < 1007 : 66$· διότι οἱ ἀριθμοὶ 1007 καὶ 66 εἶναι τὰ $\frac{11}{40}$ ἀντιστοίχως τῶν ἀριθμῶν $3661\frac{9}{11}$ καὶ 240· ἄρα ἡ $ΑΓ : ΚΓ < 1009\frac{1}{6} : 66$. ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΚΑΓ ὑπὸ τῆς ΛΑ· ἄρα $ΑΛ : ΛΓ < 2016\frac{1}{6} : 66$, καὶ $ΑΓ : ΓΛ < 2017\frac{1}{4} : 66$. καὶ δι' ἀντιστροφῆς τῶν ἀνισοτήτων (π. χ. $ΓΛ : ΑΓ > 66 : 2017\frac{1}{4}$) συνάγεται, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ (ἐγγεγραμμένου) πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἔχει λόγον $> 6336 : 2017\frac{1}{4}$, ὅστις λόγος ($6336 : 2017\frac{1}{4}$) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$. ἄρα ἡ περίμ. τοῦ 96γώνου τοῦ ἐγγ. εἰς κύκλον πρὸς διάμετρον $> 3\frac{10}{71}$. ὥστε κατὰ μείζονα λόγον, ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (μεγαλυτέρα οὖσα τῆς περιμέτρου τοῦ 96γώνου) εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $3\frac{10}{71}$. Ἄρα ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ αὐτῆς.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ἀνάπτυξις τοῦ α′ θεωρήματος (σχῆμα α′ θεωρ.)

Ὑπόθεσις: Δίδεται κύκλος ἐμβαδοῦ $=$ Κ, περιφερείας $=$ Π, ἀκτῖνος $=$ ρ καὶ τρίγωνον ἐμβαδοῦ $=$ Ε, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ $=$ ρ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος (ἡ βάσις) $=$ Π. Ζητεῖται ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι Κ $=$ Ε. Μεταξὺ κύκλου καὶ τριγώνου εἶναι δυνατὸν νὰ συμβαίνουν τρία τινα: $K \gtreqless E$

Ἐὰν ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος Κ οὔτε μεγαλύτερος οὔτε μικρότερος εἶναι τοῦ τριγώνου Ε, τότε ἀπομένει ὡς ἀληθὲς τὸ ζητούμενον, ἤτοι ὅτι $E = K$.

Ὑ π ό θ ε σ ι ς Ι.

Ἔστω ὅτι $K > E$ καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ (ὑπεροχὴ) τοῦ κύκλου ἀπὸ τὸ τρίγωνον εἶναι δ ἤτοι $K - E = \delta$. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον, πρῶτον τετράγωνον, κατόπιν 8γωνον ἢ 16γωνον, μέχρις ὅτου ἐπιτύχομεν, ὥστε τ᾿ ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ πολυγώνου ἀπὸ τὸν κύκλον, νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ δ. Ἂς καλέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τελευταίως ἐγγραφέντος (καὶ ἀφαιρεθέντος) πολυγώνου Z_1 καὶ τὴν περίμετρον αὐτοῦ T_1. Τότε θὰ εἶναι

$$K - Z_1 < \delta \qquad (1)$$

καὶ ἐξ ὑποθέσεως

$$K - E = \delta \qquad (2)$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα (2) ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1) λαμβάνομεν $Z_1 > E$. Θεωροῦμεν τώρα τὴν ἐκ τοῦ κέντρου Ν τοῦ κύκλου, κάθετον ΝΞ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΖ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι $Z_1 = \frac{1}{2}\, T_1 .\, N\Xi$. Ἐξ ἄλλου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι $E = \frac{1}{2}\, \Pi .\, \rho$. Ἀλλὰ $\Pi > T_1$, διότι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου περικλείει τὸ πολύγωνον καὶ $\rho > N\Xi$, διότι ἡ ἀκτὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀποστήματος. Συνεπῶς $\frac{1}{2}\, T_1 .\, N\Xi < \frac{1}{2}\, \Pi .\, \rho$. Ἄρα $Z_1 < E$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον. Διότι δὲν εἶναι δυνατὸν τὴν μίαν φορὰν νὰ εἶναι $Z_1 > E$ καὶ τὴν ἄλλην $Z_1 < E$. Ἀποκλείεται ὅθεν νὰ εἶναι ὁ κύκλος Κ μεγαλύτερος τοῦ τριγώνου Ε.

Ὑ π ό θ ε σ ι ς ΙΙ.

Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος $K < E$ καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ (ὑπεροχὴ) τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὸν κύκλον εἶναι δ ἤτοι $E - K = \delta$. Περιγράφομεν εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον, χωρίζομεν ἕκαστον τῶν τεσσάρων τόξων εἰς τὸ μέσον καὶ εἰς τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων φέρομεν ἰσαρίθμους ἐφαπτομένας, ὁπότε λαμβάνομεν περιγεγραμμένον ὀκτάγωνον. Φέρομεν τὴν ΝΑΟ. Τὸ τρίγωνον ΟΑΡ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΟΡ. Εἶναι δὲ ΟΡ > ΡΜ, διότι ΡΜ = ΑΡ (καὶ ΟΡ > ΑΡ). Τὸ τρίγωνον ΡΟΠ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος ΟΖΑΜ. Διότι τὸ τρίγωνον ΟΑΡ > τριγώνου ΑΡΜ ἐπειδὴ ἔχουν μὲν τὰ αὐτὰ ὕψη, ἀλλὰ βάσις ΟΡ > βάσεως ΡΜ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τρίγωνον ΟΑΠ > τριγώνου ΑΠΖ (βάσις ΟΠ > βάσεως ΠΖ). ['Εὰν καλέσωμεν ΟΠΡ $= \alpha$, ΠΖΑ + + ΑΡΜ $= \beta$ καὶ τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα ΟΖΑΜ $= \Theta$, τότε θὰ ἔχωμεν $\Theta = \alpha + + \beta$ (1) καὶ $\alpha > \beta$ (2). 'Αφαιροῦντες τὴν ἀνισότητα (2) ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) λαμβάνομεν $\Theta - \alpha < \alpha$ ἢ $\Theta < 2\alpha$ καὶ $\frac{\Theta}{2} < \alpha$ ἢ $\frac{\text{ΟΖΑΜ}}{2} <$ ΟΠΡ]. Κατὰ μείζονα ὅθεν λόγον τὸ τρίγωνον ΡΟΠ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σχήματος ΖΟΜ τόξον ΜΑ τόξον ΑΖ.

Τὸ νόημα τοῦ μέρους τούτου τῆς ἀποδείξεως εἶναι τὸ ἑξῆς: 'Εὰν θεωρήσωμεν ἓν μέγεθος καὶ λάβωμεν τούτου τὸ ἥμισυ, ἀπὸ τὸ ληφθὲν τοῦτο ἥμισυ λάβωμεν πάλιν τὸ ἥμισυ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν ὁσονδήποτε μικρὸν μέρος θέλομεν. 'Εὰν ὅμως θεωρήσωμεν ἓν μέγεθος καὶ λάβωμεν τούτου περισσότερον ἀπὸ τὸ ἥμισυ, ἀπὸ τὸ ὑπολειφθὲν λάβωμεν περισσότερον ἀπὸ τὸ ἥμισυ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν (ὡς ὑπόλοιπον) ὁσονδήποτε μικρὸν μέρος θέλομεν. Κατὰ τὴν περίπτωσιν ὅμως ταύτην λαμβάνομεν ταχύτερον τὸ ἐπιθυμητὸν μικρὸν μέρος ἢ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν. Αὐτὸ συμβαίνει κατὰ τὴν περιγραφὴν εἰς κύκλον πολυγώνων. Ἔχομεν ἓν μικρὸν μέγεθος δ (διαφοράν, ὑπεροχὴν τοῦ τριγώνου Ε ἀπὸ τὸν κύκλον Κ). Περιγράφομεν εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ὑπερέχει κατά τι μέγεθος τοῦ κύκλου. 'Εὰν περιγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον ὀκτάγωνον καὶ ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑπεροχὴν ἣν ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τοῦ ὀκταγώνου, τότε ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγέθους, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τοῦ κύκλου. Διὰ τῆς συνεχοῦς περιγραφῆς ὅθεν πολυγώνων καὶ ἀφαιρέσεως τοιούτων τμημάτων, φθάνομεν τάχιστα εἰς τὴν λῆψιν μεγέθους μικροτέρου τοῦ δοθέντος μεγέθους δ. Φθάνομεν δηλ. ταχέως εἰς τὴν λῆψιν τμήματος μεταξὺ περιγραμμένου πολυγώνου καὶ κύκλου, ὁσονδήποτε μικροῦ θέλομεν. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ἐλάβομεν τοιοῦτο τμῆμα τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δ καὶ ἂς καλέσωμεν τοῦτο δ'. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἔχομεν $E - K = \delta$ ἢ $K + \delta = E$ καὶ ἀφοῦ $\delta > \delta'$ θὰ εἶναι $K + \delta' < E$.

'Εὰν καλέσωμεν $K + \delta' = Z_2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, θὰ ἔχωμεν $Z_2 < E$.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ρ. 'Εὰν δὲ καλέσωμεν τὴν περίμετρον T_2, θὰ εἶναι $Z_2 = \frac{1}{2} T_2 . \rho$. 'Εξ ἄλλου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι $E = \frac{1}{2} \Pi . \rho$. 'Αλλὰ T_2 ὡς περικλείουσα τὴν περιφέρειαν Π εἶναι μεγαλυτέρα ταύτης. Ἄρα $Z_2 > E$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον. Διότι δὲν εἶναι δυνατὸν τὴν μίαν φορὰν νὰ εἶναι $Z_2 < E$ καὶ τὴν ἄλλην $Z_2 > E$. 'Αποκλείεται ὅθεν ὁ κύκλος Κ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ τριγώνου Ε. 'Αφοῦ δὲ ἀπεδείχθη κατὰ τὴν ὑπόθεσιν (Ι) ὅτι ὁ κύκλος Κ δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τριγώνου Ε, ἕπεται κατ' ἀνάγκην, ὅτι οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς αὐτό.

Εἰς τὸ β΄. Χωρίζει τὴν πλευρὰν ΓΔ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἰς 7 ἴσα μέρη. Λαμβάνει ΔΕ $=14$ καὶ ΕΖ $=1$. Τότε τὸ τρίγωνον ΑΓΖ : τρίγωνον ΑΓΔ $=22:7$ (εἶναι ὡς αἱ βάσεις, ἐπειδὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΓ). Ἀλλά, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι $\frac{1}{4}$ τοῦ τετραγώνου ΓΗ, τὸ τρίγωνον ΑΓΖ : τετράγωνον ΓΗ $=22:28$ ἢ $11:14$. Τὸ τρίγωνον ὅμως ΑΓΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κύκλον, [διότι ἡ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἡ δὲ ἄλλη θ' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι μικροτέρα τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου]. Ἄρα κύκλος πρὸς τετράγωνον $=11:14$. Τὸ θεώρημα τοῦτο σώζεται ἐλλιπῶς διατυπωμένον. Συμφώνως πρὸς τὰ ἐντὸς ἀγκυλῶν διατυπούμενα, θὰ ἔπρεπε, κύκλος : τετράγ. $=$ κατὰ προσέγγισιν $11:14$.

Εἰς τὸ γ΄ — (προεισαγωγικὰ γενικῶς).

Τὸ θεώρημα χωρίζεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον ἀποδεικνύει, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$. Εἰς τὸ δεύτερον, ὅτι ὁ λόγος οὗτος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$. Διατὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐξέλεξεν ὡς ἀνώτερον ὅριον τὸ $3\frac{1}{7}$ καὶ ὡς κατώτερον τὸ $3\frac{10}{71}$ παραμένει ἄγνωστον. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου μέρους, περιγράφει πολύγωνα διαδοχικῶς εἰς κύκλον, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ ἑξαγώνου καὶ καταλήγων εἰς 96γωνον. Δὲν προχωρεῖ εἰς περιγραφὴν πολυγώνων ἐχόντων περισσοτέρας τῶν 96 πλευράς, διότι ἐν ᾧ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ 48γώνου πρὸς τὴν διάμετρον ($=3{,}1461$) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ ($=3{,}142857\ldots$), ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον ($=3{,}14271\ldots$) εἶναι ὁ πρῶτος λαμβανόμενος μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ ἀρκῶν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τοῦ θεωρήματος. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος ἐγγράφει εἰς κύκλον διαδοχικῶς πολύγωνα, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ 6γώνου καὶ καταλήγων εἰς 96γωνον. Δὲν προχωρεῖ εἰς τὴν ἐγγραφὴν πολυγώνων ἐχόντων περισσοτέρας τῶν 96 πλευράς, διότι ἐν ᾧ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου 48γώνου πρὸς τὴν διάμετρον ($=3{,}1393\ldots$) εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{10}{71}$ ($=3{,}1408\ldots$), ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον ($=3{,}14103\ldots$), εἶναι ὁ πρῶτος λαμβανόμενος μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$ καὶ ἀρκῶν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τοῦ θεωρήματος.

Ἐπεξηγήσεις εἰς τὸ α΄ μέρος τοῦ θεωρήματος (Σχῆμα 1ον γ΄ θεωρ.).

Εἰς κύκλον κέντρου Ε, ἀκτῖνος ΕΓ, περιγράφει ἑξάγωνον καὶ θεωρεῖ τὸ τρίγωνον ΖΕΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς ἐκ τοῦ 6 ἰσοπλεύρων τριγώνων τοῦ ἑξαγώνου. Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΓΕ, πλευρὰ ΓΖ τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου. Διὰ τετραπλῆς, συνεχοῦς διχοτομήσεως τῆς γωνίας ΖΕΓ, λαμβάνει τὴν ΓΗ, ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγρ. 12γώνου, τὴν ΓΘ, ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγρ. 24γώνου, τὴν ΓΚ, ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγρ. 48γώνου καὶ τέλος τὴν ΓΛ, ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγρ. 96γώνου. Γνωρίζει δὲ νὰ ὑπολογίζῃ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τούτων (καὶ συνεπῶς τὰς πλευρὰς τῶν περιγραφομένων πολυγώνων) καὶ ἐκ τῆς γνώσεως ταύτης ὁρμώμενος προχωρεῖ εἰς τὴν ἀπόδειξιν. Ἡ γωνία $ΖΕΓ = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς. Συνεπῶς ἡ ὑποτείνουσα $ΖΕ = 2ΓΖ$.

Ἡ πλευρὰ ΓΕ (ἀκτὶς) εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως $ΓΕ^2 = ΖΕ^2 - ΓΖ^2$ ἢ $ΓΕ^2 = 4ΓΖ^2 - ΓΖ^2 = 3ΓΖ^2$. Ἐξ ἧς $ΓΕ = ΓΖ\sqrt{3}$. Ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται $ΓΕ : ΓΖ = \sqrt{3} : 1$. Τοῦτο δηλοῖ τὸν λόγον τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου δηλ. τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγρ. ἑξαγώνου. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν χρειάζεται τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν διάμετρον, ἵνα σχηματίσῃ τὸν λόγον τῆς περιμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἐν πρώτοις γνωρίζει νὰ ὑπολογίσῃ τὴν $\sqrt{3}$ κατὰ προσέγγισιν οἱανδήποτε, ὡς θὰ φανῇ κατωτέρω. Θέλει δὲ εὕρῃ ἀντὶ τῆς ἰσότητος $ΓΕ : ΓΖ = \sqrt{3} : 1$ ἀνισότητα τοιαύτην, ὥστε ὁ λόγος $ΓΕ : ΓΖ$ νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου λόγου τῆς ἀναλογίας (τοῦ $\sqrt{3} : 1$). Πρὸς τοῦτο λαμβάνει τὴν $\sqrt{3}$ κατ' ἔλλειψιν καὶ ἔχει τὴν ἐπιθυμητὴν σχέσιν. Δίδει εἰς τὴν πλευρὰν ΓΖ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 153. Τότε ἐκ τῆς σχέσεως $ΓΕ^2 = 3ΓΖ^2$ θὰ ἔχωμεν $ΓΕ^2 = 3.153^2 = 70227$ καὶ συνεπῶς $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = 3.153^2 : 153^2$ ἢ $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = 70227 : 23409$. Ὁ ἀριθμὸς 70227 εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερος ἑνὸς τελείου τετραγώνου, ἤτοι εἶναι $70227 = 265^2 + 2$. Ἄρα $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = (265^2 + 2) : 153^2$. Ἐὰν λάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν θὰ ἔχωμεν $ΓΕ : ΓΖ = \sqrt{265^2 + 2} : 153$. Ἀνωτέρω ὅμως εἴχομεν $ΓΕ : ΓΖ = \sqrt{3} : 1$. Συνεπῶς $\sqrt{265^2 + 2} : 153 = \sqrt{3} : 1$. Ἐὰν τώρα εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ἀναλογίας ταύτης παραλείψωμεν τὸν προσθετέον 2 θὰ ἔχωμεν $\sqrt{265^2} : 153 < \sqrt{3} : 1$ ἢ $ΓΕ : ΓΖ > 265 : 153$. ($\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ καὶ $265 : 153 = 1{,}73202\ldots$). Ἡ εὑρεθεῖσα ἀνισότης παριστᾷ σχέσιν ἀκτῖνος πρὸς ἥμισυ πλευρᾶς περιγεγραμμένου ἑξαγώνου ἢ σχέσιν διαμέτρου πρὸς πλευρὰν περιγεγρ. ἑξαγώνου. Εἶναι δὲ ἡ σχέσις αὕτη μεγαλυτέρα ἀριθμητικῆς τιμῆς μικροτέρας τῆς $\sqrt{3}$, τῆς $265 : 153$.

Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνει λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγ. 12γώνου ἀκόμη μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου, κατόπιν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς πλευρὰν περιγ. 24γώνου ἀκόμη μεγαλύτερον τοῦ ἀμέσως προηγουμένου κλπ. Λαμβάνει ἐν ὅλῳ πέντε λόγους διαμέτρου πρὸς πλευρὰν 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 46γώνου, 96γώνου, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἑπόμενος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου. Κατόπιν θεωρεῖ πέντε λόγους διαμέτρου πρὸς τὰς ἀντιστοίχους περιμέτρους 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου καὶ τέλος ἐκ τούτων θεωρεῖ τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον, ὁπότε ἕκαστος ἑπόμενος λόγος εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου (ἐπειδὴ αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται). Ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ περ. 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ κατὰ μείζονα τοιοῦτον, ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$.

Πῶς ὁ Ἀρχιμήδης ὑπελόγισε τὴν $\sqrt{3}$ δὲν γνωρίζομεν μετὰ βεβαιότητος. Παραμένει ὅμως τελείως ἄγνωστον, πόθεν καὶ πῶς ὡρμήθη εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀριθμοῦ 153.

Ἐπεξηγήσεις εἰς τὸ β′ μέρος τοῦ θεωρήματος (Σχ. 2ον γ′ θεωρ.)

Εἰς κύκλον κέντρου Ε, διαμέτρου ΑΓ, ἐγγράφει τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος πλευρὰ ΒΓ νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα. Αὕτη εἶναι τότε ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Διὰ τετραπλῆς συνεχοῦς διχοτομήσεως τῆς γωνίας ΒΑΓ τοῦ τριγώνου, λαμβάνει τὴν ΓΗ πλευρὰν τοῦ ἐγγεγρ. 12γώνου, τὴν ΓΘ πλευρὰν τοῦ ἐγγ. 24γώνου, τὴν ΓΚ πλευρὰν τοῦ ἐγγ. 48γώνου καὶ τὴν ΓΛ πλευρὰν τοῦ ἐγγεγρ. 96γώνου. Γνωρίζει δὲ νὰ ὑπολογίσῃ τὰς πλευρὰς ταύτας καὶ ἐκ τούτου ὁρμώμενος προχωρεῖ εἰς τὴν ἀπόδειξιν.

Ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΑΓ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ εἶναι $2:1$. Κατωτέρω, πρέπει νὰ ἐκφρασθοῦν ἀριθμητικῶς οἱ λόγοι τῆς διαμέτρου πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν ἐγγεγρ. πολυγώνων, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου καὶ 96γώνου, οὕτως, ὥστε κατὰ τὴν θεώρησιν τῶν λόγων τῆς διαμέτρου πρὸς τὰς περιμέτρους ἕκαστος λόγος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζει πρῶτον τὴν πλευρὰν ΑΒ ἐκ τῆς σχέσεως $\text{ΑΒ}^2 = 4\,\text{ΒΓ}^2 - \text{ΒΓ}^2 = 3\,\text{ΒΓ}^2$, ἐξ ἧς $\text{ΑΒ}=\text{ΒΓ}\sqrt{3}$. Ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}=\sqrt{3}:1$. Τώρα ὁ Ἀρχιμήδης θέλει νὰ ἔχῃ ἀντὶ τῆς ἰσότητος $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}=\sqrt{3}:1$ ἀνισότητα τοιαύτην, ὥστε ὁ λόγος $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}$ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου $\sqrt{3}:1$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνει τὴν $\sqrt{3}$ καθ' ὑπεροχὴν καὶ ἔχει τὴν ἐπιθυμητὴν σχέσιν. Δίδει εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 780. Τότε ἐκ τῆς σχέσεως $\text{ΑΒ}^2=3\text{ΒΓ}^2$ θὰ ἔχωμεν $\text{ΑΒ}^2=3.780^2=1825200$ καὶ συνεπῶς $\text{ΑΒ}^2:\text{ΒΓ}^2=3.780^2:780^2$, ἢ $\text{ΑΒ}^2:\text{ΒΓ}^2= =1825200:608400$. Ὁ ἀριθμὸς 1825200 εἶναι ὀλίγον μικρότερος ἑνὸς τελείου τετραγώνου, ἤτοι εἶναι $1825200=1351^2-1$. Ἄρα $\text{ΑΒ}^2:\text{ΒΓ}^2=(1351^2-1):780^2$.

Ἐὰν λάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν θὰ ἔχωμεν $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}=\sqrt{1351^2-1}:780$. Ἀνωτέρω ὅμως εἴχομεν $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}=\sqrt{3}:1$. Συνεπῶς $\sqrt{1351^2-1}:780=\sqrt{3}:1$. Ἐὰν τώρα εἰς τὴν ὑπόρ. ποσότ. τοῦ α′ ὅρου τῆς ἀναλογίας ταύτης προσθέσωμεν τὴν μονάδα θὰ ἔχωμεν $\sqrt{1351^2}:780>\sqrt{3}:1$ ἢ $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}<1351:780$ ($\sqrt{3}=1{,}732050$ καὶ $1351:780=1{,}732051$). Ἡ σχέσις $\text{ΑΒ}:\text{ΒΓ}<1351:780$ παριστᾷ τὸν λόγον τῆς μεγαλυτέρας τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν μικροτέραν πλευράν, διὰ νὰ ληφθῇ δὲ ὁ πρῶτος λόγος μικρότερος τοῦ δευτέρου, ἐλήφθη ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς $\sqrt{3}$ καθ' ὑπεροχήν. Ἐν συνεχείᾳ ἀφοῦ διχοτομεῖ τετράκις τὴν γωνίαν ΒΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΑΓ, λαμβάνει 4 ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ὑπολογίζει τοὺς λόγους τῶν τεσσάρων μεγαλυτέρων καθέτων πλευρῶν πρὸς τὰς τέσσαρας μικροτέρας καθέτους ἀντιστοίχως. Τῇ βοηθείᾳ δὲ τῶν λόγων τούτων, σχηματίζει, πλὴν τῆς πρώτης ἰσότητος, τέσσαρας ἀνισότητας αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν λόγους τῆς διαμέτρου πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων, οἱ ὁποῖοι βαίνουσιν ἐπίσης ἐλαττούμενοι. Τέλος θεωρεῖ τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον, οἱ ὁποῖοι βαίνουσιν αὐξανόμενοι (αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται). Ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ 96 γώνου πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\,\frac{10}{71}$ καὶ κατὰ μείζονα τοιοῦτον ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\,\frac{10}{71}$. Ἐπίσης καὶ ἐνταῦθα παραμένει ἄγνωστον, πόθεν καὶ πῶς ὁ Ἀρχιμήδης ὡρμήθη εἰς τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀριθμοῦ 780. Ὅπως δήποτε ὅμως οὐδεὶς ἄλλος τριψήφιος ἀριθμός, πλὴν τοῦ 780 εἶναι κατάλληλος διὰ τὴν ἐπιθυμητὴν σχέσιν τῆς ἐκφράσεως τῆς $\sqrt{3}$ καθ' ὑπεροχήν.

Ἀνάπτυξις τοῦ I μέρους τοῦ θεωρήματος (σχ. 1ον γ' θεωρήματος).

Εἰς κύκλον κέντρου Ε καὶ διαμέτρου ΓΑ, ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΓΖ, ὅπου γωνία $ΖΕΓ = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς, καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ πλευρὰ $ΖΕ = 2ΓΖ$ ἢ $ΖΕ : ΓΖ = 2 : 1$. Ἐὰν εἰς τὴν ΓΖ δώσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 153 τότε θὰ ἔχωμεν $ΖΕ : ΓΖ = 306 : 153$. Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας ταύτης λαμβάνομεν $ΖΕ^2 : ΓΖ^2 = 306^2 : 153^2$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν $(ΖΕ^2 - ΓΖ^2) : ΓΖ^2 = (306^2 - 153^2) : 153^2$ ἢ $(ΖΕ^2 - ΓΖ^2) : ΓΖ^2 = (93636 - 23409) : 23409$. Καὶ ἐπειδὴ $ΖΕ^2 - ΓΖ^2 = ΓΕ^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος), θὰ ἔχωμεν $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = 70227 : 23409$. Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν $ΓΕ : ΓΖ > 265 : 153$ (1)
(διότι $265^2 = 70225$). Ἀνωτέρω εἴχομεν $ΖΕ : ΓΖ = 306 : 153$
Προσθέτοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν $(ΓΕ + ΖΕ) : ΓΖ > 571 : 153$ (2)

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΕΗ τῆς γωνίας ΖΕΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν (στοιχ. Εὐκλ. 6ον βιβλ. θεώρ. 3) $ΖΕ : ΓΕ = ΖΗ : ΓΗ$
καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας $(ΖΕ + ΓΕ) : ΓΕ = (ΖΗ + ΓΗ) : ΓΗ$
ἢ $(ΖΕ + ΓΕ) : (ΖΗ + ΓΗ) = ΓΕ : ΓΗ$
ἀλλὰ $ΖΗ + ΓΗ = ΓΖ$, συνεπῶς $(ΖΕ + ΓΕ) : ΓΖ = ΓΕ : ΓΗ$
ἐκ τῆς (2) ὅθεν συνάγομεν $ΓΕ : ΓΗ > 571 : 153$ (3)

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $ΓΕ^2 : ΓΗ^2 > 326041 : 23409$
καὶ διὰ συνθέσ. τῆς ἀναλογίας $(ΓΕ^2 + ΓΗ^2) : ΓΗ^2 > (326041 + 23409) : 23409$.
Ἀλλὰ $ΓΕ^2 + ΓΗ^2 = ΗΕ^2$ ἄρα $ΗΕ^2 : ΓΗ^2 > 349450 : 23409$

Ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτ. τῶν μελῶν, ἔχομεν $HE:\Gamma H > 591\frac{1}{8} : 153$

[διότι $\left(591\frac{1}{8}\right)^2 = 349428\frac{49}{64}$, ὅτε κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ ἀνισότης].

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα καὶ τὴν (3) λαμβάνομεν... $(HE+\Gamma E) : \Gamma H > 1162\frac{1}{8} : 153\cdot$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον $E\Theta$ τῆς γωνίας $HE\Gamma$, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $HE : \Gamma E = H\Theta : \Gamma\Theta$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(HE+\Gamma E) : \Gamma E = (H\Theta+\Gamma\Theta) : \Gamma\Theta$

ἢ $(HE+\Gamma E) : (H\Theta+\Gamma\Theta) = \Gamma E : \Gamma\Theta$

Ἀλλὰ $H\Theta+\Gamma\Theta=\Gamma H$, συνεπῶς... $(HE+\Gamma E) : \Gamma H = \Gamma E : \Gamma\Theta$

Ἐκ τῆς (4) ὅθεν συνάγομεν... $\Gamma E : \Gamma\Theta > 1162\frac{1}{8} : 153$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότ. τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης, λαμβάνομεν $\Gamma E^2 : \Gamma\Theta^2 > 1350534\frac{33}{64} : 23409$

καὶ διὰ συνθέσεως $(\Gamma E^2+\Gamma\Theta^2) : \Gamma\Theta^2 > \left(1350534\frac{33}{64} + 23409\right) : 23409$

ἢ $(\Gamma E^2+\Gamma\Theta^2) : \Gamma\Theta^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409\cdot$

Ἀλλὰ $\Gamma E^2+\Gamma\Theta^2=\Theta E^2$ ἄρα.. $\Theta E^2 : \Gamma\Theta^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409\cdot$

Ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτ. τῶν μελῶν ἔχομεν $\Theta E : \Gamma\Theta > 1172\frac{1}{8} : 153$

[διότι $\left(1172\frac{1}{8}\right)^2 = 1373877\frac{1}{64}$, ὅτε κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ ἀνισότης].

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα καὶ τὴν (5) λαμβάνομεν $(\Theta E+\Gamma E) : \Gamma\Theta > 2334\frac{1}{4} : 153\cdot$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον EK τῆς γωνίας $\Theta E\Gamma$, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\Theta E : \Gamma E = \Theta K : \Gamma K$

καὶ διὰ συνθέσεως $(\Theta E+\Gamma E) : \Gamma E = (\Theta K+\Gamma K) : \Gamma K$

ἢ $(\Theta E+\Gamma E) : (\Theta K+\Gamma K) = \Gamma E : \Gamma K$

Ἀλλὰ $\Theta K+\Gamma K = \Gamma\Theta$, συνεπῶς $(\Theta E+\Gamma E) : \Gamma\Theta = \Gamma E : \Gamma K$

Ἐκ τῆς (6) ὅθεν συνάγομεν $\Gamma E : \Gamma K > 2334\frac{1}{4} : 153$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $\Gamma E^2 : \Gamma K^2 > 5448723\frac{1}{16} : 23409$

καὶ διὰ συνθέσεως $(\Gamma E^2+\Gamma K^2) : \Gamma K^2 > \left(5448723\frac{1}{16} + 23409\right) : 23409$

ἢ $(\Gamma E^2+\Gamma K^2) : \Gamma K^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409\cdot$

'Αλλὰ $ΓΕ^2+ΓΚ^2=ΚΕ^2$ ἄρα. $ΚΕ^2 : ΓΚ^2 > 5472132 \frac{1}{16} : 23409$

'Εξάγοντες τὴν τετραγ. ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν

$$ΚΕ : ΓΚ > 2339 \frac{1}{4} : 153$$

[διότι $\left(2339\frac{1}{4}\right)^2=5472090\frac{9}{16}$, ὅτε κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ ἀνισότης].

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα καὶ τὴν (7) λαμβάνομεν

$$(ΚΕ+ΓΕ) : ΓΚ > 4673 \frac{1}{2} : 153. \quad (8)$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΛΕ τῆς γωνίας ΓΕΚ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $ΚΕ : ΓΕ = ΚΛ : ΓΛ$

καὶ διὰ συνθέσεως $(ΚΕ + ΓΕ) : ΓΕ = (ΚΛ + ΓΛ) : ΓΛ$

ἢ $(ΚΕ + ΓΕ) : (ΚΛ + ΓΛ) = ΓΕ : ΓΛ.$

'Αλλὰ $ΚΛ + ΓΛ = ΓΚ$, ἄρα $(ΚΕ + ΓΕ) : ΓΚ = ΓΕ : ΓΛ.$

'Εκ τῆς (8) ὅθεν συνάγομεν $ΓΕ : ΓΛ > 4673 \frac{1}{2} : 153$ (9).

Αἱ εὑρεθεῖσαι ἀνισότητες (1), (3), (5), (7), (9) παριστοῦν τὸν λόγον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου.

'Αναγράφομεν ταύτας ὁμοῦ :

$$ΓΕ : ΓΖ > 265 : 153$$
$$ΓΕ : ΓΗ > 571 : 153$$
$$ΓΕ : ΓΘ > 1162 \frac{1}{8} : 153$$
$$ΓΕ : ΓΚ > 2334 \frac{1}{4} : 153$$
$$ΓΕ : ΓΛ > 4673 \frac{1}{2} : 153\cdot$$

$δ = 2ΓΕ$ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου καὶ $2ΓΖ =$ πλευρὰ περιγ. 6γώνου, $2ΓΗ =$ πλευρὰ περιγ. 12γώνου, $2ΓΘ =$ πλευρὰ περιγ. 24γώνου, $2ΓΚ =$ $=$ πλευρὰ περιγ. 48γώνου $2ΓΛ =$ πλευρὰ περ. 96γώνου.

Τότε αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γράφονται

$$δ : 2ΓΖ > 265 : 153$$
$$δ : 2ΓΗ > 571 : 153$$
$$δ : 2ΓΘ > 1162 \frac{1}{8} : 153$$
$$δ : 2ΓΚ > 2334 \frac{1}{4} : 153$$
$$δ : 2ΓΛ > 4673 \frac{1}{2} : 153.$$

'Εὰν τώρα λάβωμεν τὰς περιμέτρους τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων καὶ καλέσωμεν ταύτας ἀντιστοίχως $Π_6$, $Π_{12}$, $Π_{24}$, $Π_{48}$, $Π_{96}$ θὰ ἔχωμεν

$$δ : Π_6 > 265 : 153.6$$
$$δ : Π_{12} > 571 : 153.12$$

$$\delta : \Pi_{24} > 1162\,\frac{1}{8} : 153.24$$

$$\delta : \Pi_{48} > 2334\,\frac{1}{4} : 153.48$$

$$\delta : \Pi_{96} > 4673\,\frac{1}{2} : 153.96\cdot$$

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται $\left[\text{ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\delta}{\gamma}\right]$, ὁπότε ἔχομεν

$$\Pi_6 : \delta < 918 : 265 = 3{,}464150...$$

$$\Pi_{12} : \delta < 1836 : 571 = 3{,}215411...$$

$$\Pi_{24} : \delta < 3672 : 1162\,\frac{1}{8} = 3{,}159728..$$

$$\Pi_{48} : \delta < 7344 : 2334\,\frac{1}{4} = 3{,}146192..$$

$$\Pi_{96} : \delta < 14688 : 4673\,\frac{1}{2} = 3{,}142826..$$

Τὸ πηλίκον $14688 : 4673\,\frac{1}{2}$ δὲν εἶναι ἀκριβῶς $3\,\frac{1}{7}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν θὰ εὕρωμεν $3\,\dfrac{667\,\frac{1}{2}}{4673\,\frac{1}{2}}$. Τοῦτο ὅμως εἶναι μικρότερον τοῦ $3\,\dfrac{667\,\frac{1}{2}}{4672\,\frac{1}{2}}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκριβῶς $3\,\frac{1}{7}\left(\text{διότι } 4672\,\frac{1}{2} : 667\,\frac{1}{2} = 7\right)$

Εἶναι λοιπὸν κατὰ μείζονα λόγον $\Pi_{96} : \delta < 3\,\frac{1}{7}$ διότι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $3\,\dfrac{667\,\frac{1}{2}}{4673\,\frac{1}{2}}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μικρότερος τοῦ $\Pi_{96} : \delta$, ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον. [Ἐνταῦθα εἶναι ἄξιον θαυμασμοῦ, πῶς ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζεν ἐκ τῶν προτέρων, ὅτι θὰ καταλήξῃ εἰς τὴν σχέσιν $3\,\dfrac{667\,\frac{1}{2}}{4673\,\frac{1}{2}} < 3\,\dfrac{667\,\frac{1}{2}}{4672\,\frac{1}{2}}$ διότι δὲν ἔφθασεν ἐδῶ τυχαίως. Καὶ τοῦτο παραμένει ἄγνωστον.

Ἀνάπτυξις τοῦ II μέρους τοῦ θεωρήματος (Σχ. 2ον γ' θεωρήματος).

Εἰς κύκλον κέντρου Ε καὶ διαμέτρου ΑΓ, ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ΒΑΓ ἔστω $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς. Ἡ πλευρὰ $ΑΓ=2ΒΓ$ ἢ $ΑΓ:ΒΓ=2:1$ (1), Ἐὰν εἰς τὴν ΒΓ δώσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 780 τότε θὰ ἔχωμεν $ΑΓ:ΒΓ=1560:780$ (2).

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας ταύτης λαμβάνομεν $ΑΓ^2:ΒΓ^2=1560^2:780^2$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν $(ΑΓ^2-ΒΓ^2):ΒΓ^2=(1560^2-780^2):780^2$ ἢ $(ΑΓ^2-ΒΓ^2):ΒΓ^2=(2433600-608400):608400$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΓ^2-ΒΓ^2=ΑΒ^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος), θὰ ἔχωμεν $ΑΒ^2:ΒΓ^2=1825200:608400$ $(=3)$. Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν $ΑΒ:ΒΓ<1351:780$ [διότι $1351^2=1825201$].

Ἐκ τῆς ληφθείσης ἀνισότητος καὶ τῆς ἰσότητος (2), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $(ΑΒ+ΑΓ):ΒΓ<2911:780$ (3)

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΗ τῆς γωνίας ΒΑΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $ΑΒ:ΑΓ=ΒΖ:ΓΖ$
καὶ διὰ συνθέσεως $(ΑΒ+ΑΓ):ΑΓ=(ΒΖ+ΓΖ):ΓΖ$
ἢ $(ΑΒ+ΑΓ):(ΒΖ+ΓΖ)=ΑΓ:ΓΖ$

Ἀλλὰ $ΒΖ+ΓΖ=ΒΓ$, ἑπομένως $(ΑΒ+ΑΓ):ΒΓ=ΑΓ:ΓΖ$. (4)

Τὰ τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΓΗΖ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, διότι εἶναι γων. ΒΑΗ = γων. ΗΓΒ = γων. ΗΑΓ, καὶ γων. ΑΗΓ ὀρθὴ (κοινή). Ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία ΑΓΗ = γων. ΗΖΓ.

Συνεπῶς $ΑΓ:ΓΖ=ΑΗ:ΗΓ$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (3) καὶ (4), λαμβάνομεν $ΑΗ:ΗΓ<2911:780$· (5)

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $ΑΗ^2:ΗΓ^2<2911^2:780^2$
ἢ $ΑΗ^2:ΗΓ^2<8473921:608400$
καὶ διὰ συνθέσεως $(ΑΗ^2+ΗΓ^2):ΗΓ^2<(8473921+608400):608400$·
Ἀλλὰ $ΑΗ^2+ΗΓ^2=ΑΓ^2$ ἄρα $ΑΓ^2:ΗΓ^2<9082321:608400$·

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν $ΑΓ:ΗΓ<3013\frac{3}{4}:780$ [δηλ. σχέσιν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 12 γώνου].

[Ἡ προηγουμένη ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον διότι $\left(3013\frac{3}{4}\right)^2=9082689\frac{1}{16}>9082321$]. Ἐκ τῆς ληφθείσης ἀνισότητος καὶ τῆς (5) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $(ΑΓ+ΑΗ):ΗΓ<5924\frac{3}{4}:780$

ἢ διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ λόγου $5924\frac{3}{4} : 780$ διὰ $\frac{13}{4}$, ἔχομεν

$$(ΑΓ+ΑΗ) : ΗΓ < 1823 : 240 \quad (6)$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΘ τῆς γωνίας ΗΑΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $ΑΗ : ΑΓ = ΗΖ_1 : ΓΖ_1$

καὶ διὰ συνθέσεως $(ΑΗ+ΑΓ) : ΑΓ = (ΗΖ_1+ΓΖ_1) : ΓΖ_1$

ἢ $(ΑΗ+ΑΓ) : (ΗΖ_1+ΓΖ_1) = ΑΓ : ΓΖ_1$

Ἀλλὰ $ΗΖ_1+ΓΖ_1=ΗΓ$· συνεπῶς $(ΑΗ+ΑΓ) : ΗΓ = ΑΓ : ΓΖ_1 \quad (7)$

Τὰ τρίγωνα ΑΘΓ καὶ $ΓΘΖ_1$ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, διότι εἶναι γων. ΗΑΘ = = γων. ΘΑΓ = γων. ΘΓΗ καὶ γων. ΑΘΓ ὀρθὴ (κοινή)· ἄρα καὶ ἡ τρίτη γων. ΘΓΑ = γων. $ΘΖ_1Γ$. Συνεπῶς $ΑΓ : ΓΖ_1 = ΑΘ : ΘΓ$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (6) καὶ (7) λαμβάνομεν $ΑΘ : ΘΓ < 1823 : 240 \quad (8)$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $ΑΘ^2 : ΘΓ^2 < 1823^2 : 240^2$

ἢ $ΑΘ^2 : ΘΓ^2 < 3323329 : 57600$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(ΑΘ^2+ΘΓ^2) : ΘΓ^2 < (3323329+57600) : 57600$

ἢ $(ΑΘ^2+ΘΓ^2) : ΘΓ^2 < 3380929 : 57600$·

Ἀλλὰ $ΑΘ^2+ΘΓ^2=ΑΓ^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος)· ἄρα $ΑΓ^2 : ΘΓ^2 < 3380929 : 57600$·

Ἐξάγοντες τὴν τετραγ. ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$ΑΓ : ΘΓ \lessdot 1838\frac{9}{11} : 240$$

[ἡ ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον, διότι

$$\left(1838\frac{9}{11}\right)^2 = 3381252\frac{37}{121} > 3380929].$$

Ἐκ τῆς ληφθείσης ἀνισότητος καὶ τῆς (8), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(ΑΓ+ΑΘ) : ΘΓ < 3661\frac{9}{11} : 240$$

ἢ διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ λόγου $3661\frac{9}{11} : 240$ διὰ $\frac{40}{11}$ λαμβάνομεν

$$(ΑΓ+ΑΘ) : ΘΓ < 1007 : 66 \quad (9)$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΚ τῆς γωνίας ΘΑΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΘ : ΑΓ = ΘΖ_2 : ΓΖ_2$$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(ΑΘ + ΑΓ) : ΑΓ = (ΘΖ_2 + ΓΖ_2) : ΓΖ_2$

ἢ $(ΑΘ + ΑΓ) : (ΘΖ_2 + ΓΖ_2) = ΑΓ : ΓΖ_2$·

Ἀλλὰ $ΘΖ_2 + ΓΖ_2 = ΘΓ$ συνεπῶς $(ΑΘ + ΑΓ) : ΘΓ = ΑΓ : ΓΖ_2$· (10)

Τὰ τρίγωνα ΑΚΓ καὶ $ΓΚΖ_2$ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια (ἡ εὐθεῖα ΓΚ νοεῖται ἀχθεῖσα), διότι εἶναι γων. ΘΑΚ = γων. ΚΑΓ = γων. ΚΓΘ καὶ γων. ΑΚΓ ὀρθὴ (κοινή), ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία ΚΓΑ = γων. $ΚΖ_2Γ$.

Συνεπῶς $ΑΓ : ΓΖ_2 = ΑΚ : ΚΓ$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (9) καὶ (10) λαμβάνομεν $ΑΚ : ΚΓ < 1007 : 66 \quad (11)$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης ἔχομεν

$$ΑΚ^2 : ΚΓ^2 < 1007^2 : 66^2$$

ἢ $ΑΚ^2 : ΚΓ^2 < 1014049 : 4356$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(AK^2 + K\Gamma^2) : K\Gamma^2 < (1014049 + 4356) : 4356$

ἢ $(AK^2 + K\Gamma^2) : K\Gamma^2 < 1018405 : 4356.$

Ἀλλὰ $(AK^2 + K\Gamma^2) = A\Gamma^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος) ἄρα $A\Gamma^2 : K\Gamma^2 < 1018405 : 4356.$

Ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$A\Gamma : K\Gamma < 1009\frac{1}{6} : 66$$

[ἡ ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον, διότι

$$\left(1009\frac{1}{6}\right)^2 = 1018417\frac{13}{36} > 1018405].$$

Ἐκ τῆς ληφθείσης ἀνισότητος καὶ τῆς (11) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(A\Gamma + AK) : K\Gamma < 2016\frac{1}{6} : 66. \quad (12)$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΛ τῆς γωνίας ΚΑΓ ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$AK : A\Gamma = KZ_8 : \Gamma Z_8$$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(AK + A\Gamma) : A\Gamma = (KZ_8 + \Gamma Z_8) : \Gamma Z_8$

ἢ $(AK + A\Gamma) : (KZ_8 + \Gamma Z_8) = A\Gamma : \Gamma Z_8$·

Ἀλλὰ $KZ_8 + \Gamma Z_8 = K\Gamma$. συνεπῶς $(AK + A\Gamma) : K\Gamma = A\Gamma : \Gamma Z_8$· (13)

Τὰ τρίγωνα ΑΛΓ καὶ $\Gamma\Lambda Z_8$ εἶναι ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, διότι εἶναι γων. ΚΑΛ = γων. ΛΑΓ = γων. ΛΓΚ καὶ γων. ΑΛΓ ὀρθὴ (κοινή), (νοεῖται ἀχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ΓΛ, τὸ δὲ σημεῖον Z_8 εἶναι τομὴ τῶν ΑΛ, ΓΚ). Ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία ΛΓΑ = γων. $\Lambda Z_8 \Gamma$. Συνεπῶς $A\Gamma : \Gamma Z_8 = A\Lambda : \Lambda\Gamma$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (12) καὶ (13) λαμβάνομεν $A\Lambda : \Lambda\Gamma < 2016\frac{1}{6} : 66.$ (14)

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης ἔχομεν

$$A\Lambda^2 : \Lambda\Gamma^2 < \left(2016\frac{1}{6}\right)^2 : 66^2$$

$$\text{ἢ } A\Lambda^2 : \Lambda\Gamma^2 < 4064928\frac{1}{36} : 4356$$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(A\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2) : \Lambda\Gamma^2 < \left(4064928\frac{1}{36} + 4356\right) : 4356$

ἢ $(A\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2) : \Lambda\Gamma^2 < 4069284\frac{1}{36} : 4356$·

Ἀλλὰ $A\Lambda^2 + \Lambda\Gamma^2 = A\Gamma^2$ (ἐκ τοῦ σχ.). συνεπῶς $A\Gamma^2 : \Lambda\Gamma^2 < 4069284\frac{1}{36} : 4356$

Ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$A\Gamma : \Lambda\Gamma < 2017\frac{1}{4} : 66$$

[ἡ ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον,

διότι $$\left(2017\frac{1}{4}\right)^2 = 4069297\frac{9}{16} > 4069284\frac{1}{36}\Big].$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰς εὑρεθείσας σχέσεις τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τῶν ἐγγεγραμμένων, 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου ἔχομεν

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{B\Gamma} = 1560 : 780 = 2$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{H\Gamma} < 3013\,\frac{3}{4} : 780$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \Theta\Gamma < 1838\,\frac{9}{11} : 240$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{K\Gamma} < 1009\,\frac{1}{6} : \ 66$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \Lambda\Gamma < 2017\,\frac{1}{4} : \ 66$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τῆς διαμέτρου, ἣν καλοῦμεν δ, πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου θὰ ἔχωμεν

$$\delta : \ 6\,\mathrm{B\Gamma} = 1560 : 6.780$$

$$\delta : 12\,\mathrm{H\Gamma} < 3013\,\frac{3}{4} : 12.780$$

$$\delta : 24\,\Theta\Gamma < 1838\,\frac{9}{11} : 24.240$$

$$\delta : 48\,\mathrm{K\Gamma} < 1009\,\frac{1}{6} : \ 48.66$$

$$\delta : 96\,\Lambda\Gamma < 2017\,\frac{1}{4} : \ 96.66$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων ἀντιστοίχως Π_6, Π_{12}, Π_{24}, Π_{48}, Π_{96}, καὶ θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον (αἱ ἀνισότητες τότε ἀντιστρέφονται), θὰ ἔχωμεν

$$\Pi_6 : \delta = 4680 : 1560 \quad = 3$$

$$\Pi_{12} : \delta > 9360 : 3013\,\frac{3}{4}$$

$$\Pi_{24} : \delta > 5760 : 1838\,\frac{9}{11}$$

$$\Pi_{48} : \delta > 3168 : 1009\,\frac{1}{16} = 3{,}139\ldots.$$

$$\Pi_{96} : \delta > 6336 : 2017\,\frac{1}{4} = 3{,}1409\ldots.$$

[Ὁ λόγος $6336 : 2017\,\frac{1}{4} = 3{,}1409\ldots.$ ἐν ᾧ ἡ τιμὴ $3\,\frac{10}{71} = 3{,}1408$. Πῶς ὁ Ἀρχιμήδης ἐσκέφθη διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν σχέσιν $6336 : 2017\,\frac{1}{4} > 3\,\frac{10}{71}$ εἶναι ἄγνωστον]. Ἀφοῦ λοιπὸν $\Pi_{96} : \delta > 6336 : 2017\,\frac{1}{4}$ ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον ὅτι $\Pi_{96} : \delta > 3\,\frac{10}{71}$, διότι τὸ $3\,\frac{10}{71}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $6336 : 2017\,\frac{1}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μεγαλύτερος τοῦ Π_{96}: δ, ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον. Ἤτοι ἐδείχθη διὰ τῆς περιγραφῆς καὶ ἐγγραφῆς εἰς κύκλον πολυγώνων ὅτι $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἠδύνατο νὰ εὕρῃ (ἢ θὰ εἶχε εὕρῃ) ὁσηνδήποτε ἤθελε μεγάλην προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π, παραθέτομεν κατωτέρω ὑπολογισμὸν τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τῶν περιγεγραμμένων 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, λαμβανόμενον ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ γ' θεωρήματος. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐφαρμόζει αὐτὸν τὸν ὑπολογισμόν, καὶ πέραν τούτου προχωρῶν λαμβάνει ἀνισότητας. Μετεχειρίσθημεν δὲ καὶ τοὺς αὐτοὺς ὑπὸ τοῦ ἰδίου χρησιμοποιουμένους ἀριθμούς.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΖΕΓ (σχῆμα 1ον γ' θεωρήματος) ἥμισυ* τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος $\Gamma E =$ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ὅτι γωνία $Z E \Gamma = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς καὶ ὅτι λαμβάνομεν $\Gamma Z = 153$, ὁπότε $ZE = 306$. Συνεπῶς $ZE^2 : \Gamma Z^2 = 306^2 : 153^2$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν θὰ ἔχωμεν $(ZE^2 - \Gamma Z^2) : \Gamma Z^2 = (306^2 - 153^2) : 153^2$. Ἀλλὰ $ZE^2 - \Gamma Z^2 = \Gamma E^2$. Ἄρα $\Gamma E^2 : \Gamma Z^2 = (306^2 - 153^2) : 153^2$. Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν $\Gamma E : \Gamma Z = \sqrt{70227} : 153$ (1).

(Ἀφοῦ φθάσει ἐνταῦθα ὁ Ἀρχιμήδης μετατρέπει τὴν ἰσότητα εἰς ἀνισότητα). Ἐκ τῶν δεδομένων ὅμως τοῦ τριγώνου ἔχομεν $ZE : \Gamma Z = 306 : 153$ (2)

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$(\Gamma E + ZE) : \Gamma Z = (\sqrt{70227} + 306) : 153 \quad (3)$$

Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΖΕΓ. Τότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ZE : \Gamma E = ZH : \Gamma H.$$

Καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(ZE + \Gamma E) : \Gamma E = (ZH + \Gamma H) : \Gamma H$

ἢ $(ZE + \Gamma E) : (ZH + \Gamma H) = \Gamma E : \Gamma H$

Ἀλλὰ $ZH + \Gamma H = \Gamma Z$. Συνεπῶς $(ZE + \Gamma E) : \Gamma Z = \Gamma E : \Gamma H$ (4)

Αἱ ἰσότητες (3) καὶ (4) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη ἴσα. Ἄρα καὶ τὰ δεύτερα.

Ἑπομένως $\Gamma E : \Gamma H = (\sqrt{70227} + 306) : 153$ (5)

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ὁπότε λαμβάνομεν $\Gamma E^2 : \Gamma H^2 = (\sqrt{70227} + 306)^2 : 153^2$

Καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας

$$(\Gamma E^2 + \Gamma H^2) : \Gamma H^2 = [(\sqrt{70227} + 306)^2 + 153^2] : 153^2$$

Ἀλλὰ $\Gamma E^2 + \Gamma H^2 = HE^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος). Συνεπῶς:

$$HE^2 : \Gamma H^2 = [(\sqrt{70227} + 306)^2 + 153^2] : 153^2.$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$HE : \Gamma H = \sqrt{(\sqrt{70227} + 306)^2 + 153^2} : 153 \quad (6)$$

Ἐκ τῆς (5) ὅμως ἔχομεν $\Gamma E : \Gamma H = (\sqrt{70227} + 306) : 153$

Προσθέτοντες ταύτην μὲ τὴν (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(HE + \Gamma E) : \Gamma H = \left[\sqrt{(\sqrt{70227} + 306)^2 + 153^2} + \sqrt{70227} + 306\right] : 153 \quad (7)$$

* ἑνὸς τριγώνου

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΕΘ τῆς γωνίας ΗΕΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $HE:\Gamma E = H\Theta:\Gamma\Theta$.

Καὶ διὰ συνθέσεως $(HE + \Gamma E):\Gamma E = (H\Theta + \Gamma\Theta):\Gamma\Theta$

ἢ $(HE + \Gamma E):(H\Theta + \Gamma\Theta) = \Gamma E:\Gamma\Theta$

Ἀλλὰ $H\Theta + \Gamma\Theta = \Gamma H$ (ἐκ τοῦ σχήματος). Ἄρα

$$(HE:\Gamma E):\Gamma H = \Gamma E:\Gamma\Theta \quad (8)$$

Αἱ ἰσότητες (7) καὶ (8) ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη ἴσα. Ἄρα καὶ τὰ δεύτερα· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma E:\Gamma\Theta = \left[\sqrt{(\sqrt{70727}+306)^2+153^2}+\sqrt{70727}+306\right]:153.$$

Μέχρι τοῦδε εὕρομεν

$$\Gamma E:\Gamma Z = \sqrt{70727}:153$$

$$\Gamma E:\Gamma H = (\sqrt{70227}+306):153$$

καὶ

$$\Gamma E:\Gamma\Theta = \left[\sqrt{(\sqrt{70227}+306)^2+153^2}+\sqrt{70227}+306\right]:153$$

ἤτοι τὸν λόγον τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου 6 γώνου, 12 γώνου, 24 γώνου ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τὸν λόγον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ 6 γώνου, 12 γώνου, 24 γώνου. Ἡ μέθοδος αὕτη ὑπολογισμοῦ τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν περιγ. πολυγώνου τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν διπλασιάζεται συνεχῶς, δύναται νὰ συνεχισθῇ ἐπ᾽ ἄπειρον. Τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν λόγου κατὰ τὴν ἐγγραφὴν πολυγώνων. Αὕτη δὲ ἀκριβῶς εἶναι ἡ μέθοδος τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ Ἀρχιμήδης προχωρεῖ καὶ πέραν ταύτης καὶ λαμβάνει ὡρισμένας ἀνισότητας, διότι ἐνταῦθα θέλει ν᾽ ἀποδείξῃ, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εὑρίσκεται μεταξὺ δύο ὁρικῶν τιμῶν. Ἐὰν ἤθελε ἠδύνατο νὰ εὕρῃ λόγους περιμέτρων περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων (πρὸς τὴν διάμετρον) ἐχόντων ἑκατοντάδας πλευρῶν, οὐδόλως δὲ δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ τὸ ἀντίθετον. Διότι ἡ μόνη δυσκολία θὰ ἦτο ἡ ἄγνοια ἐξαγωγῆς τετραγ. ῥίζης. Ἀλλὰ ἡ σημερινὴ μέθοδος εἶναι περίπου ἡ αὐτὴ τῶν ἀρχαίων. Ἡ σωζομένη ἀπόδειξις, ὅτι ὁ π εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$ εἶναι ἡ πρώτη μέθοδος εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἡ ὁποία μᾶς παρουσιάζει ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν διὰ τῶν ὁρίων.

Ἡ πρωτοτυπία καὶ ἡ ἰδιορρυθμία αὐτῆς, ἔχουν προκαλέσει πράγματι τὸν θαυμασμὸν τῶν νεωτέρων καὶ ἀποτελοῦν δεῖγμα τῆς ἰδιοτύπου καὶ μεγαλοφυοῦς ἀρχιμηδείου σκέψεως.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ "ΜΕΝΩΝ,,

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ Γ' — ΤΕΥΧΟΣ Β' 1951

ΑΘΗΝΑΙ
1951

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ "ΜΕΝΩΝ,,

1. Ὁ διάλογος τοῦ Πλάτωνος «Μένων» ὑποστηρίζεται, ὅτι ἐγράφη μετὰ τὴν ἐπιστροφὴν τοῦ Πλάτωνος εἰς Ἀθήνας, ἐκ τοῦ πρώτου ταξιδίου αὐτοῦ εἰς Σικελίαν. Ὁ H. Leisegang εἰς τὸ περισπούδαστον ἄρθρον αὐτοῦ «Plato» τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν Real Enzyklopaedie, Pauly-Wissowa, 1951 (σελίδες 195) τοποθετεῖ τὸν μὲν «Πρωταγόραν» ὡς τέταρτον διάλογον τοῦ Πλάτωνος, τὸν δὲ «Μένωνα» ὡς δέκατον τέταρτον *. Ἐγράφη δηλ. ὁ «Μένων» πρὶν ἢ ἀκόμη ἡ Ἀκαδημία ἀνοίξῃ τὰς πύλας της καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν πρὶν ἢ ἀκόμη ἴδουν τὸ φῶς αἱ περίφημοι μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τοῦ Εὐδόξου, τοῦ Μεναίχμου, τοῦ Θεαιτήτου κλπ. αἱ ὁποῖαι ἐγένοντο καθ᾽ ὃν χρόνον ἐλειτούργει ἡ Ἀκαδημία.

Εἰς τὸν «Πρωταγόραν» ἔχει θιγῆ, ὡς γνωστόν, τὸ πρόβλημα ἂν ἡ ἀρετὴ εἶναι διδακτὴ ἢ οὔ. Εἰς τὸν «Μένωνα» ὅμως τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ κύριον θέμα τοῦ διαλόγου. Κατὰ τὴν προχώρησιν τοῦ διαλόγου, ὁ Σωκράτης ἐπιθυμῶν ν᾽ ἀποδείξῃ ὅτι πᾶσα μάθησις εἶναι «ἀνάμνησις», ἐπιτυγχάνει τοῦτο καθοδηγῶν διὰ τῆς συζητήσεως ἕνα ἐκ τῶν παρισταμένων δούλων, ἀγνοοῦντα τελείως τὴν γεωμετρίαν, ν᾽ ἀνακαλύψῃ ὅτι «δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α, ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου τετραγώνου εἶναι $\alpha\sqrt{2}$».—(81e—85c).

Προϊόντος τοῦ διαλόγου ὁ Σωκράτης λέγει τ᾽ ἀκόλουθα :

«Ἔοικεν οὖν σκεπτέον εἶναι ποῖόν τί ἐστιν ὃ μήπω ἴσμεν ὅ,τι ἐστιν. Εἰ μή τι οὖν ἀλλὰ σμικρόν γέ μοι τῆς ἀρχῆς χάλασον, καὶ συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι, εἴτε διδακτόν ἐστιν εἴτε ὁπωσοῦν. *Λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόν τε εἰς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἴποι ἄν τις, οὔπω οἶδα εἰ ἔστι τοῦτο τοιοῦτον, ἀλλ᾽ ὥσπερ μέν τινα ὑπόθεσιν προὔργου οἶμαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μὲν ἔστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ

* Τὸ ἄρθρον τοῦτο μοὶ παρεχωρήθη εὐγενῶς ὑπὸ τοῦ φίλου, καθηγητοῦ τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν, κ. Κ. Βουρβέρη, πρὸς ὃν ἀπεστάλη κατὰ τὸ τέλος τοῦ 1950 ὑπὸ τοῦ H. Leisegang, μετὰ τὴν πρώτην διόρθωσιν τῶν δοκιμίων, καὶ πρὶν ἀκόμη τοῦτο δημοσιευθῇ.

χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστιν ταῦτα παθεῖν. Ὑποθέμενος οὖν ἐθέλω εἰπεῖν σοι τὸ συμβαῖνον περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον, εἴτε ἀδύνατον εἴτε μή (86e—87b).

*Ἑρμην. λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὑπὸ τὴν ἑξῆς ἔννοιαν, ὅπως δηλ. οἱ γεωμέτραι πολλάκις ἐρευνοῦν, ὅταν τις ἐρωτήσῃ αὐτοὺς π.χ. περὶ εὐθυγράμμου τινος ἐπιφανείας, ἐὰν εἶναι δυνατὸν εἰς αὐτὸν ἐδῶ τὸν κύκλον (σχεδιάζει ὁ Σωκράτης μὲ τὴν ράβδον του κύκλον εἰς τὸ χῶμα) αὐτὴ ἐδῶ ἡ εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια (σχεδιάζει εἰς τὸ χῶμα τυχοῦσαν εὐθύγρ. ἐπιφάνειαν) νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον, θ' ἀπεκρίνετο εἷς γεωμέτρης ὅτι, δὲν γνωρίζω ν' ἀπαντήσω ἐκ τῶν προτέρων, ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιδεκτικὴ τοιαύτης ἐγγραφῆς, ἀλλά, νομίζω, ὅτι ἔχω μίαν ἀποτελεσματικὴν ὑπόθεσιν, ἐν σχέσει μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, τὴν ἀκόλουθον· ἐὰν μὲν ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ παραταθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης γραμμῆς αὐτῆς ἐπιφάνεια κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ ἴση πρὸς τὴν παραταθεῖσαν ἐπιφάνεια, θὰ προκύψῃ ἓν ἄλλο ἀποτέλεσμα, καὶ ἄλλο πάλιν ἀποτέλεσμα, ἐὰν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ αὕτη ἡ κατασκευή. Ἐκκινῶν λοιπὸν ἀπὸ ὑποθέσεις, ἔχω τὴν δύναμιν νὰ σοῦ εἴπω τί συμβαίνει σχετικῶς μὲ τὴν ἐγγραφὴν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας εἰς τὸν κύκλον, εἴτε αὕτη εἶναι ἀδύνατος εἴτε μή.

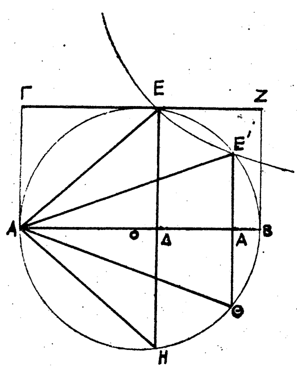
Διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ γεωμετρικοῦ τούτου χωρίου τοῦ «Μένωνος» ἔχουν γραφῆ τόσον πολλαὶ πραγματεῖαι, ὅσαι περίπου εἶναι αἱ γραφεῖσαι διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν γεωμετρικῶν ἀριθμῶν τῶν μνημονευομένων εἰς τὴν «Πολιτείαν». Ὁ B. Blass, εἰς δημοσιευθεῖσαν ἑρμηνείαν του κατὰ τὸ 1861, ἀναφέρει ἄλλας δέκα τρεῖς. Κατὰ τὸν Ἄγγλον T. Heath τὴν ὀρθοτέραν ἑρμηνείαν ἔχει δώσει ὁ S. H. Butcher (Journal of Philology, vol. XVII pp. 219 25 ; cf. E.S. Thomson's edition of the Meno). Ὁ T. Heath συμπληρώνων τὴν ἑρμηνείαν καὶ περιλαμβάνων αὐτὴν εἰς τὸ περισπούδαστον ἔργον αὐτοῦ A history of Greek mathematics 1921, pp. 299—301, ἀναφέρει, ὅτι τὸν S, H. Butcher προϋκατέλαβε εἰς τὴν ἑρμηνείαν αὐτὴν ὁ E. F. August, ὁ ἐκδότης τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου κατὰ τὸ 1829. Τὸ 1923 ἐδημοσιεύθη ἑτέρα λύσις τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ A.S.L. Farquarson εἰς τὸ περιοδικὸν Classical Quartarly XVII. I (Ἰανουάριος) ἡ ὁποία ὑπὸ πολλῶν θεωρεῖται ὡς λίαν ἐπιτυχής.

Ἐὰν δὲν λάβωμεν, πρὸς στιγμήν, ὑπ' ὄψει τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος, ὁ Σωκράτης θέτει τὸ ἑξῆς πρόβλημα· Ποία εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ ἢ ὄχι, ὡς τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

Ὑπὸ τὴν τοιαύτην τοποθέτησιν τοῦ προβλήματος ἡ λύσις Butcher-Heath δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθή. Ὁ T. Heath, γράφει ὅτι προσαρμόζει τὴν λύσιν καὶ πρὸς τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος. Ἐπὶ τούτου ὅμως διατυποῦνται ἐπιφυλάξεις τινες τῶν ἑρμηνευτῶν τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ ἡμέτερος φιλόλογος Κων. Γεωργούλης.

Ἡ λύσις Butcher - Heath

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΕΒ, διαμέτρου ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Α. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον. Συμπληρώνομεν τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΓΕΔ, ΕΔΒΖ. Τότε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΓΕΔΑ ἔχει «παραταθῆ» παρὰ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἐπίσης ὅτι «ἐλλείπει» ἓν εὐθύγγραμμον σχῆμα, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΔΒΖ, ὅμοιον πρὸς τὸ «παραταθὲν» ὀρθογώνιον παραλ., διότι $ΑΔ : ΔΕ = ΕΔ : ΔΒ$. Ὅθεν, ἐὰν ἡ ΕΔ προεκταθῇ, ὥστε νὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὸ Η, τότε τὸ ΑΕΗ εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διχοτομούμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ συνεπῶς ἴσον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγ. ΑΓΕΔ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο «παραταθῇ» παρὰ τὴν διάμετρον ΑΒ, καθ' ὃν τρόπον ἐξετέθη, καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν, ἡ εὐθύγραμμος αὕτη ἐπιφάνεια ἔχει ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ὡς τρίγωνον. Ὅθεν, διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθέντα κύκλον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἴσον πρὸς δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου σημεῖον τι Ε τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἡ ΕΔ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον Α, τὸ ὀρθογώνιον $ΑΔ \cdot ΔΕ$ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν (παρατείνειν παρὰ τὴν ΑΒ ἓν ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγρ. ἐπιφάνειαν Χ, καὶ ἐλλείπειν, ὅμοιον πρὸς τὸ παραταθέν, εἶναι ἁπλῶς ἄλλος τρόπος τοῦ νὰ ἐκφρασθῇ τοῦτο). Προφανῶς τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἀναφερομένη εἰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων x, y, εἶναι $x \cdot y = β^2$, ὅπου $β^2$ ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν. Διὰ νὰ ἔχωμεν πραγματικὴν λύσιν, εἶναι ἀνάγκη, ὥστε τὸ $β^2$ νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ δυναμένου νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τουτέστιν οὐχὶ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{3}{4}ρ^2\sqrt{3}$, ὅπου $ρ$ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν $β^2 = \frac{3}{4}ρ^2\sqrt{3}$, τότε ὑπάρχει μία μόνον λύσις (ἡ ὑπερβολὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐφάπτεται τοῦ κύκλου)· ἐὰν $β^2$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{3}{4}ρ^2\sqrt{3}$, τότε ἔχομεν δύο λύσεις ἀντιστοιχούσας εἰς τὰ δύο σημεῖα Ε, Ε', εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὑπερβολὴ τέμνει τὸν κύκλον. Ἐὰν $ΑΔ = x$, τότε $ΟΔ = x - ρ$, $ΔΕ = \sqrt{2ρx - x^2}$ καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως



$$x\sqrt{2ρx - x^2} = β^2$$

ἢ

$$x^2(2ρx - x^2) = β^4 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καὶ δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ὄχι ὅμως μὲ κανόνα καὶ διαβήτην. Ἡ λύσις παρέχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ὑπερβολῆς $x \cdot y = \beta^2$ καὶ τοῦ κύκλου $y^2 = 2\varrho x - x^2$ ἢ $x^2 + y^2 = 2\varrho x$. Ἀπὸ τοιαύτης ἀπόψεως, συνεπῶς, τὸ πρόβλημα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦ νὰ εὕρωμεν δύο μέσας ἀναλόγους, τὸ ὁποῖον ὁμοίως ἐλύθη, καίτοι οὐχὶ πολὺ βραδύτερον, διὰ κωνικῶν τομῶν (Μέναιχμος)».

2. Κατὰ τὴν παροῦσαν μελέτην κατεβλήθη προσπάθεια, ἵνα ἡ λύσις τοῦ προβλήματος προσαρμοσθῇ περισσότερον πρὸς τὴν φραστικὴν διατύπωσιν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος. Διὰ νὰ γίνῃ καταληπτὴ ἡ προτεινομένη λύσις, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἑρμηνεύσωμεν ὡρισμένας φράσεις τοῦ προκειμένου χωρίου τοῦ διαλόγου.

Α΄. Τὸ δοθὲν χωρίον, τὸ θεωροῦμεν, ὡς τυχοῦσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ἰσοδύναμον παραλληλόγραμμον, ὀρθογώνιον ἢ οὔ.

Β΄. «εἰ μὲν ἔστιν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, . . .».

1. Εἰς τὴν φράσιν «δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμήν», ἡ λέξις «αὐτοῦ» ἀναφέρεται προφανῶς εἰς τὸ «χωρίον». Τοιαύτην ἑρμηνείαν παρέχει ὁ Κων. Γεωργούλης εἰς ἄρθρον του δημοσιευθὲν εἰς τὸ ἐγκυκλοπαιδικὸν λεξικὸν «Ἥλιος» τόμος «Ἑλλὰς» (σελ. 767-768). Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ἑρμηνεία τοῦ Κων. Γεωργούλη εἶναι φιλολογικῶς ἡ ὀρθή. Εἰς τὴν ἑρμηνείαν ταύτην στηρίζομεν τὴν προτεινομένην λύσιν.

2. Εἰς τὸ προηγούμενον τοῦ παρόντος γεωμετρικὸν χωρίον τοῦ «Μένωνος» ἀπαντῶμεν τὴν λέξιν «γραμμὴν» ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς πλευρᾶς τετραγώνου.

3. Παρατείνειν χωρίον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν καὶ ἐλλείπειν τοιοῦτον χωρίον οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ ἑρμηνεύομεν κατὰ τὰ θεωρήματα 27 καὶ 28 τοῦ VI βιβλ. τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἡ ἑρμηνεία δὲ αὕτη θὰ γίνῃ καταληπτὴ κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς προτεινομένης λύσεως.

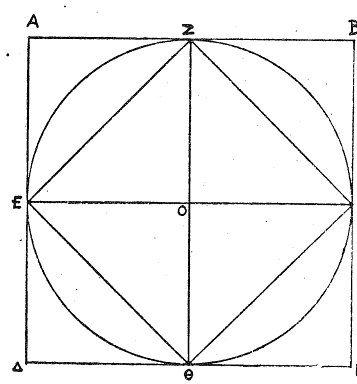
4. Τὴν κατασκευὴν τῆς συναφοῦς ἐλλείψεως, ἡ ὁποία προκύπτει κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ προβλήματος, τὴν λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἐκ τοῦ 13ου θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειωθῇ, ὅτι καὶ τὰ τρία ταῦτα θεωρήματα πιστεύεται ὅτι ἦσαν γνωστά, ὅτε ἐγράφη ὁ «Μένων». Τοῦτο, πλὴν ἄλλων μαρτυριῶν, συνάγεται καὶ ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου εἰς τὸ 44ον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔνθα οὗτος γράφει· «ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥτε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. Ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολὴν τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων (Procli Diadochi σελ. 419).

Ἡ προτεινομένη λύσις.

Ὑπόθεσις 1. (σχ. 1)

Ὑποθέτομεν τὸ ὑπάρχον σχῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, τοῦ προηγουμένου γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ Μένωνος, ἤτοι τὸ τετράγωνον ΕΔΘΟ καὶ τὸ διπλάσιον τούτου τὸ τετράγωνον ΕΘΗΖ. Συμπληροῦμεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω ὅτι ἡ δοθεῖσα καὶ μετασχηματισθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸν ὁποῖον γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Ο, εἶναι ἡ ΑΕΗΒ. Τότε παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν τοῦ χωρίου, τὴν ΑΔ (= ΑΒ) ἔχομεν παρατείνει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΕΗΒ ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει, ἴσον ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, τὸ ΕΔΓΗ *. Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα, ὅτι τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΕΗΒ, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, διότι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τετράγωνα, τὰ ΑΕΟΖ, ΖΟΗΒ, τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ διαλόγου εἶναι ἴσα πρὸς



Σχ. 1.

* Τὴν τοιαύτην θεώρησιν στηρίζομεν εἰς τὸ 27ον θεώρ. τοῦ VI τῶν Στοιχείων.

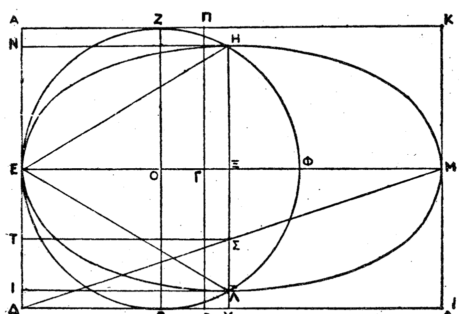
τὸ τετράγωνον ΕΘΗΖ, διὰ τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι τὸ μέγιστον τῶν παραλληλογράμμων, τῶν δυναμένων νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸν κύκλον.

Ὑπόθεσις 2. (σχ. 1).

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογ. παραλλ. ΑΕΗΒ, τὸ ἥμισυ τούτου, ἤτοι τὸ τετράγωνον ΖΟΗΒ, ὁπότε παραμένει τὸ τετράγωνον ΑΕΟΖ. Τοῦτο τὸ ἔχομεν παρατείνει παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν τοῦ χωρίου, τὴν ΑΔ, καὶ ἐλλείπει τοῦ ΑΔΘΖ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΗΒ) τὸ ΕΔΘΟ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παρατεταμένον ΑΕΟΖ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΕΟΖ ἐγγράφεται ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ΕΘΖ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις, ἡ ΘΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (δηλ. τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου). Ὅθεν, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς δοθεῖσαν σταθερὰν πλευρὰν τοῦ χωρίου τὴν μεγίστην πλευρὰν τριγώνου ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον καὶ νὰ προβῶμεν εἰς διαφόρους μετασχηματισμούς. Εἶναι ἐπίσης φανερόν, ὅτι, διατηροῦντες τὴν ΑΕ σταθερὰν καὶ μετακινοῦντες τὴν ΖΟ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΕ, λαμβάνομεν διαδοχικῶς μικροτέρας ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ τετράγωνον ΑΕΟΖ, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγράψιμος, ὡς τρίγωνον, εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

Ὑπόθεσις 3. (σχ. 2).

Θεωροῦμεν γνωστόν, ὅτε ἐγράφη ὁ Μένων, ὅτι τὸ μέγιστον τῶν τριγώνων τῶν δυναμένων νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸν κύκλον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ $\frac{3}{4}\varrho^2\sqrt{3}$, ὅπου ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν λοιπὸν ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τετραγώνου ΑΕΟΖ, τότε ἡ μεγίστη ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, μετασχηματιζομένη εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ σταθερὰν πλευρὰν τὴν ΑΕ, ἤτοι τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θὰ ἔχῃ ὡς ἄλλην πλευρὰν τὴν ΑΠ, ἴσην πρὸς $\frac{3}{4}\varrho\sqrt{3}$. [Σημ. Τὴν εὐθεῖαν $\varrho\sqrt{3}$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ὡς ἑξῆς· θεωροῦμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, μὲ ὀρθὴν γωνίαν τὴν Α καὶ καθέτους ΑΒ = ΑΓ = ρ.



Σχ. 2.

Εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, ἔστω τὸ Β, ὑψοῦμεν κάθετον καὶ λαμβάνομεν τμῆμα, ἔστω ΒΔ = ρ. Ἑνοῦμεν τὸ Δ μὲ τὸ Γ καὶ τότε τοῦ νέου ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, ὅπου Β ἡ ὀρθὴ γωνία, ἡ ὑποτείνουσα ΓΔ εἶναι ἴση μὲ $\varrho\sqrt{3}$. Δι' ἁπλῆς δὲ κατασκευῆς λαμβάνομεν τὰ $\frac{3}{4}$ ταύτης]. Ἐκ τοῦ σημείου Π φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Ρ. Τότε ἐπὶ τῆς δοθείσης γραμμῆς τοῦ χωρίου, τῆς ΑΔ, ἔχομεν παρατείνει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΕΓΠ, ἐλλείπει δὲ τὸ ὀρθογ. παραλληλ. ΕΔΡΓ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΓΠ (καὶ ὅμοιον πρὸς τοῦτο). Τὸ πρόβλημα τώρα τίθεται, φρονοῦμεν, πῶς ἡ ἐπιφάνεια ΑΕΓΠ θὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον. Ὑπάρχουν πρὸς τοῦτο ἀρκετοὶ τρόποι. Πρῶτον νὰ ἐγγράψωμεν ἑξάγωνον κανονικὸν εἰς τὸν κύκλον καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν του. Δεύτερον νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ὑπερβολὴν $xy=\beta^2=\frac{3}{4}\varrho^2\sqrt{3}$ (ὅπου $x=$ ΑΠ, $y=$ ΑΕ καὶ β^2 τὸ ἐμβαδὸν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας). Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς φέρωμεν κάθετον καὶ προεκτείνωμεν αὐτὴν μέχρις ὅτου συναντήσῃ αὕτη τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τότε λαμβάνομεν τὴν βάσιν τοῦ ζητουμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἔχοντος κορυφὴν τὸ Ε.

Ἐν προκειμένῳ, ὑποθέτομεν, ἀγόμενοι ἐκ τῆς φράσεως ἐλλείπειν κλπ. καὶ τοῦ 28 θεωρήματος τοῦ VI βιβλ. τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ 13 θεωρ. τοῦ I βιβλ. τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου γίνεται διὰ τῆς ἐλλείψεως.

Ἀνάλυσις.

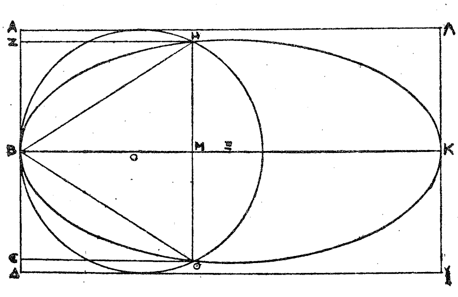
Ἔστω, ὅτι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ὑπάρχει σημεῖον Η (σχ. 2) ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΝΕΞΗ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΓΠ. Τότε εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΗΛ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΝΕΞΗ=ΑΕΓΠ. Εἶναι δὲ $\text{ΕΞ}=\frac{3\varrho}{2}$.

Σύνθεσις.

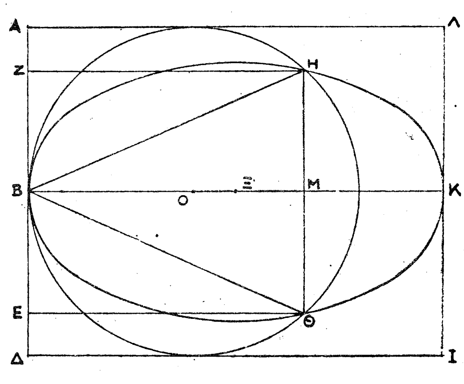
Μὲ ἡμιάξονα τῆς ἐλλείψεως $\alpha=\text{ΕΞ}=\frac{3\varrho}{2}$ καὶ παράμετρον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου $\varrho=2p=$ ΕΔ κατασκευάζομεν τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ 28 τοῦ VI βιβλ. τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸ 13 τοῦ I βιβλ. τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὡς ἑξῆς· σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΔΛ΄Μ (σχ. 2), ὅπου $\text{ΕΜ}=2\alpha$, ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως, καὶ $\text{ΕΔ}=\varrho=2p$ ἡ παράμετρος τὸς ἐλλείψεως. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΜΔ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΕΜ, ἔστω τὸ Ξ καὶ ἐκ τούτου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΛ΄, τὴν ΞΥ. Αὕτη τέμνει τὴν διαγώνιον ΜΔ εἴς τι σημεῖον Σ. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΜ, τέμνουσαν τὴν ΕΔ εἴς τι σημεῖον Τ. Τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΔ ἔχομεν παρατείνει τὸ παραλληλόγραμμον ΕΤΣΞ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τὸ ἴσον ΤΔΥΣ τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΔΛ΄Μ καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ τελευταῖον τοῦτο. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΕΤΣΞ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ ΞΛ. Τὸ σημεῖον Λ εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, Ἐὰν φέρωμεν τὴν συμμετρικὴν διαγώνιον ΜΑ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΜΚ διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς λαμβάνομεν τὸ σημεῖον τῆς ἐλλείψεως Η. Τὰ σημεῖα Η,Λ προσδιορίζουν τὸν ἄξονα β τῆς ἐλλείψεως, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μεγαλυτέρα κάθετος ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα, συμφώνως καὶ πρὸς τὸν διορισμὸν ὃν παριστᾷ τὸ 27ον θεώρημα τοῦ VI τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Δι' ὁμοίας κατασκευῆς, ἤτοι λαμβάνοντες τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΕΜ καὶ φέροντες τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΔΛ', ἔχομεν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς διαγωνίου ΔΜ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΜ (καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΔ). Τὰ πρὸς τὸ μέρος τοῦ μ. ἄξονος παραλληλόγραμμα (ἀφαιρουμένων τῶν πρὸς τὰ κάτω τῆς ἐκ τῆς διαγωνίου ἀχθείσης παραλλήλου) μετατρεπόμενα εἰς τετράγωνα, μᾶς δίδουν τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον, τῶν εἰς τετράγωνον οὕτω πως μετασχηματισθέντων παραληλλογράμμων, εἶναι μικρότερον τοῦ ΕΤΣΞ (κατὰ τὸ 27 θεώρ. τοῦ VI τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου). Ἡ τομὴ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μᾶς δίδει τὰ δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα ἑνούμενα παρέχουν τὴν βάσιν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου τριγώνου, ἔχοντος κορυφὴν τὸ Ε καὶ μεγίστου τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων τριγώνων.

Ὑπόθεσις 4.

Ἐὰν ἡ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος πλευρὰ τοῦ εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μετασχηματισθέντος χωρίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας $\frac{3}{4}\varrho\sqrt{3}$, τότε τὸ δο-



Σχ. 3.



Σχ. 4.

θὲν χωρίον, ὑπερβάλλει τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ $\varrho \cdot \frac{3}{4}\varrho\sqrt{3}$ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγράψιμον ὡς τρίγωνον εἰς τὸν κύκλον) καὶ συνεπῶς εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐγγραφῇ τὸ δοθὲν εἰς τὸν κύκλον ὡς τρίγωνον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποδίδομεν τὴν φράσιν τοῦ διαλόγου «εἰ ἀδύνατον ἔστι ταῦτα παθεῖν», δηλ. εἰ ἀδύνατον ἐστιν τὸ «ἐλλείπειν οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ».

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν, ἡ ὑπόθεσις 3 τοῦ προβλήματος, ἐρευνᾶται ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλλείψεως $y^2 = 2Px - \frac{Px^2}{\alpha}$ καὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ κύκλου $y^2 = 2\varrho x - x^2$, ὅπου $2P = \varrho$, $\alpha =$ μέγας ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας $\beta^2 \leqq \frac{3}{4} \varrho^2 \sqrt{3}$.

Εἰς τὸ σχῆμα 3 λαμβάνομεν τὸ ἐγγραφόμενον τρίγωνον $\beta^2 < \frac{3}{4} \varrho^2 \sqrt{3}$ ὅπου $\alpha = \frac{3\varrho}{2} + h$, ἐν ᾧ εἰς τὸ σχῆμα 4 λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον $\gamma^2 < \frac{3}{4} \varrho^2 \sqrt{3}$, ὅπου $\alpha = \frac{3\varrho}{2} - h \left(0 < h < \frac{\varrho}{2}\right)$ καὶ $2P = \varrho$. Ὁ κύκλος καὶ ἡ ἔλλειψις νὰ ἐφάπτωνται τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

ΤΟ ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ Δ'— ΤΕΥΧΟΣ Α' 1952

ΑΘΗΝΑΙ
1952

ΤΟ ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ

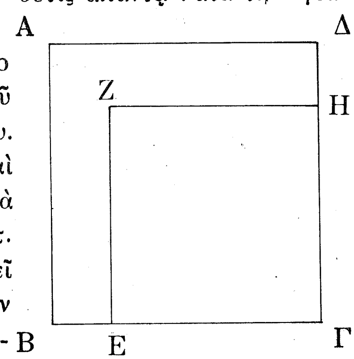
1. Αἱ ἐλάχισται εἰδήσεις, αἱ ὁποῖαι ἐσώθησαν μέχρις ἡμῶν περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Θυμαρίδου ὀφείλονται εἰς τὸν Ἰάμβλιχον (3—4ος αἰὼν μ. Χ.). Κατὰ ταύτας ὁ Θυμαρίδας κατήγετο ἐκ Πάρου καὶ ἦτο ἐκ τῶν μαθητῶν τοῦ Πυθαγόρου. Ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς ἀκμῆς τοῦ Θυμαρίδου εἶχον διατυπωθῆ πρό τινων δεκαετηρίδων ἀμφιβολίαι τινές. Αἱ ἐργασίαι ὅμως τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ P. Tannery ὡδήγησαν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς γνώμης, ὅτι ὁ Θυμαρίδας ἀνήκει εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους καὶ ὅτι οὗτος δέον νὰ θεωρῆται ἐκ τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος, (H. Diels, Fragmente der Vorsokratiker τόμ. I σ. 447, ἔκδ. 1951. Αὐτόθι δέον νὰ διορθωθῆ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγραφομένου τύπου, ὁ $n-1$, εἰς τὸ ὀρθὸν $n-2$).

Εἰς τὴν πραγματείαν του «περὶ τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» (H. Pistelli, Teubner, 1894) ὁ Ἰάμβλιχος χρησιμοποιεῖ τοὺς ὅρους «ἔφοδος θυμαριδείου ἐπανθήματος» (σ. 62 κ. ἑ.) καὶ «ἐπανθήματα» (σ. 68). Ἡ λέξις ἐπάνθημα δὲν ἔχει βέβαια σχέσιν τινα πρὸς τὰ μαθηματικά. Θεωρεῖται ὅμως λίαν πιθανόν, ὅτι ὁ ὅρος θυμαρίδειον ἐπάνθημα ἐνέχει καὶ λογοπαίγνιον προελθὸν ἐκ τῆς συνωνυμίας τοῦ Θυμαρίδου καὶ τοῦ φυτοῦ θυμάρι (θύμος). Τοιαύτην γνώμην ἐκφράζουν οἱ ἐκ τῶν κρατίστων τῶν παρ' ἡμῖν φιλολόγων Χ. Χαριτωνίδης, Κ. Γεωργούλης καὶ Σ. Κορρές. Ἡ ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου, φαίνεται, ἔκαμε τόσην ἐντύπωσιν, ὥστε παρωμοιάσθη μὲ τὸ εὔοσμον ἄνθος τοῦ θυμαριοῦ. Βραδύτερον δὲ ἐπεκράτησε νὰ λέγωνται ἀριθμητικὰ ἐπανθήματα, κανόνες ἐπιλύσεως ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς Ἀλγέβρας εἶναι λίαν σημαντικὴ ἡ διάκρισις ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου, τῶν ποσῶν, εἰς «ὡρισμένα» καὶ «ἀόριστα» ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ὅρος «ὡρισμένα» ἀφορᾷ εἰς τοὺς γνωστοὺς συντελεστὰς ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ὁ δὲ ὅρος «ἀόριστα» εἰς τοὺς ἀγνώστους. Οἱ ὅροι οὗτοι θεωροῦνται πυθαγορικῆς προελεύσεως, ἀπαντοῦν ὅμως τὸ πρῶτον εἰς πραγματείας τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ Διοφάντου.

Ἡ κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον «ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος» εἶναι μέθοδος ἐπιλύσεως ὡρισμένης μορφῆς συστήματος ν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους. Ἐκ τῆς ὀνομασίας τῆς μεθόδου θεωρεῖται αὐτονόητον ὅτι αὕτη εἶναι ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου. Ὁ Ἰάμβλιχος χρησιμοποιεῖ τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου καὶ διὰ τὴν λύσιν ν ἐξισώσεων μὲ $\nu+1$ ἀγνώστους, διὰ τὴν λύσιν δηλ. συστήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως (διοφαντικοῦ καλουμένου) πρώτου βαθμοῦ. Αἱ ν ἐξισώσεις μὲ $\nu+1$ ἀγνώστους, ἀνάγονται εἰς ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους, ὁπότε εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ πρὸς λύσιν, τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος, δηλ. τῆς μεθόδου τοῦ Θυμαρίδου. Δὲν ἀναφέρει ὅμως οὗτος, ὅτι ἡ μέθοδος μετατροπῆς τῶν ν ἐξισώσεων μὲ ν+1 ἀγνώστους, εἰς ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους ὀφείλεται εἰς τὸν Θυμαρίδαν. Δὲν θεωροῦμεν ἐν τούτοις ἀπίθανον τοιαύτην ἐκδοχήν, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι εἰς τὸν Πυθαγόραν τὸν ἴδιον ἀποδίδεται ἡ λύσις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ $x^2+y^2=z^2$ καὶ ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν+1 ἀγνώστους συνδέεται πρὸς τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα. Ὁπωσδήποτε ἡ τοποθέτησις τοῦ Θυμαρίδου εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος ὑπὸ τῆς κριτικῆς τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐγένετο πρὸ ἑξήκοντα περίπου ἐτῶν, ὅτε ἐμελετήθησαν μετὰ μεγαλυτέρας προσοχῆς αἱ μαθηματικαὶ πραγματεῖαι τοῦ Ἰαμβλίχου, αἱ ὁποῖαι ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τὸ ἀφορῶν εἰς τὸν Θυμαρίδαν καὶ τὴν ἄλγεβραν τῶν Πυθαγορείων προεκάλεσαν μεγάλην ἐντύπωσιν.

2. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τοῦ Εὐκλείδου (Στοιχείων VII, VIII, IX) περιέχεται μόνον ὅ,τι κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἐθεωρεῖτο βασικὸν μέρος τῆς θεωρίας. Ἄλλαι ἐκτενέστεραι ἀριθμητικαὶ πραγματεῖαι δὲν σῴζονται, πλὴν τῆς ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς τοῦ Πυθαγορικοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ (ἀρχαὶ 1ου αἰῶνος μ.Χ.), σχολίων εἰς ταύτην τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ ἀριθμητικῆς πραγματείας τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου. Ἐκ τῶν πραγματειῶν τούτων ἐκθέτομεν κατωτέρω στοιχεῖά τινα τῆς θεωρίας τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ αὕτη συνδέεται πρὸς τὴν ἔφοδον τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος. Ὁ Ἰάμβλιχος ἀναπτύσσων τὴν σχετικὴν περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν θεωρίαν τοῦ Νικομάχου ἐπάγεται· «ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη».

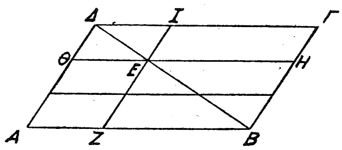
Ὁ ὅρος πολύγωνοι ἀριθμοὶ ἔχει τὴν προέλευσίν του προφανῶς ἐκ τῆς γεωμετρίας. Ὑπὸ τὸν ὅρον τοῦτον νοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ καλούμενοι τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, ἑξάγωνοι κλπ. τῶν ὁποίων τὴν σημασίαν θ' ἀναπτύξωμεν κατωτέρω. Πρὸ τούτου ὅμως θεωροῦμεν ἀναγκαῖον νὰ ἀναφέρωμεν ὀλίγα τινὰ περὶ τῆς σημασίας τοῦ γεωμετρικοῦ ὅρου «γνώμων» ὅστις ἀπαντᾷ κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.



Σχ. 1

3. Ἡ παράδοσις, ἀναφέρει, ὅτι ὁ γνώμων ἦτο ὀρθὴ γωνία, ἀποτελοῦσα τὸ κύριον μέρος ἡλιακοῦ ὡρολογίου, ἐπινοηθέντος ὑπὸ τοῦ Ἀναξιμάνδρου. «Εὗρε δὲ καὶ γνώμονα (Ἀναξίμανδρος) πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι, καθὰ φησὶ Φαβωρῖνος ἐν Παντοδαπῇ ἱστορίᾳ· (Διογ. Λαέρτ. II 1—2). Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ γνώμονος ἀρκεῖ ἐκ δοθέντος τετραγώνου ν' ἀφαιρέσωμεν μικρότερον τούτου τετράγωνον. Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 1). Ἐὰν ἐκ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον ΕΓΗΖ, τὸ ἀπομένον σχῆμα ΑΒΕΖΗΔ εἶναι γνώμων. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη γνώμων καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον περιτιθέμενον εἰς δοθὲν τετράγωνον δίδει μεγαλύτερον τετράγωνον. Εἰς τὸ σχ. 1 π.χ. ἐὰν μᾶς δοθῇ τὸ τετράγωνον ΕΓΗΖ καὶ περιθέσωμεν σχῆμα, ὥστε νὰ σχηματισθῇ μεγαλύτερον τετράγωνον, τὸ ΑΒΓΔ, τὸ περιτεθὲν σχῆμα, τὸ ΑΒΕΖΗΔ

εἶναι γνώμων. Ὁ Εὐκλείδης δίδει γενικώτερον ὁρισμὸν τοῦ γνώμονος τὸν ἑξῆς· Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω· ἑρμην. «Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, ἓν οἱόνδήποτε ἐκ τῶν περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων, μαζὶ μὲ τὰ δύο παραπληρώματα, ἂς ὀνομάζεται γνώμων» (Στοιχείων ΙΙ ὁρισ. 2). Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 2), διαγώνιος ἔχει ληφθῆ ἡ ΔΒ. Τὰ παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι δύο, τὰ ΘΕΙΔ, ΕΖΒΗ. Ἐὰν λάβωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΘΕΙΔ τότε τὰ παραπληρώματα τούτου εἶναι τὰ ΘΕΖΑ, ΙΕΗΓ καὶ συνεπῶς ὁ γνώμων εἶναι ὁ ΑΔΓΗΕΖ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Εὐκλείδου. Ἐὰν λάβωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΒΗ, τότε τα παραπληρώματα τούτου εἶναι τὰ ΑΖΕΘ, ΙΕΗΓ καὶ συνεπῶς ὁ γνώμων εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Εὐκλείδου ὁ ΘΑΒΓΙΕ.



Σχ. 2

Ἐκτὸς τῆς γεωμετρικῆς του σημασίας, ὁ ὅρος γνώμων διατηρεῖ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν Ἑλλήνων καὶ τὴν κυριολεκτικήν του σημασίαν· νοεῖται δηλ. τὸ σχῆμα τοῦτο ἢ παρόμοιον τούτου, ὡς κατευθυντήρ, ὁδηγός, ῥυθμιστὴς διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. Τοῦτο θὰ καταφανῇ κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

4. **Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι ἀριθμητικῶς.**— ***Τρίγωνοι ἀριθμοί.*** Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11.....

Εἰς τὴν ἀκολουθίαν ταύτην πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονάς. Τυχὼν δὲ ὅρος ταύτης σχηματίζεται ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ προσθέσεως εἰς τοῦτον τῆς μονάδος ἢ ἐκ τοῦ ἑπομένου δι' ἀφαιρέσεως ἐκ τούτου τῆς μονάδος. Εἶναι δηλ. ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἡ μονάς. Τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν τὴν ὀνομάζομεν, ὡς γνωστόν, πρόοδον ἀριθμητικήν, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονὰς καὶ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἡ μονάς. (κακῶς ὀνομάζεται ὑπό τινων ἡ διαφορὰ αὕτη «λόγος»). Τούτων δοθέντων, τίθεται τὸ πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς προόδου (ν=1,2,3,4....).

Εἶναι προφανές, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἐξ ἑνὸς μόνου ὅρου εἶναι $= 1 = s_1$
τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων 1+2 $= 3 = s_2$
» » » τριῶν » » 1+2+3 $= 6 = s_3$
» » » τεσσάρων » » 1+2+3+4 $= 10 = s_4$
» » » πέντε » » 1+2+3+4+5 $= 15 = s_5$
» » » ἕξ » » 1+2+3+4+5+6 $= 21 = s_6$

Ἀναγράφομεν κατωτέρω εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς φυσικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (τὴν πρόοδον 1,2,3,4....) καὶ εἰς δευτέραν γραμμὴν κάτωθεν τῆς πρώτης τὰ εὑρεθέντα μερικὰ ἀθροίσματα $s_1, s_2, s_3, s_4 \dots$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10....
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55....

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας γραμμῆς ὀνομάζονται τρίγωνοι ἀριθμοί.

Ἡ σημασία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν ἔγκειται εἰς τοῦτο :

Ζητεῖται π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν 9 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 1 2 3 4... Ἀναγινώσκομεν κάτωθεν τοῦ 9 τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 45.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον διατυπώσει κανόνας πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος ν ὅρων μιᾶς προόδου. Οἱ κανόνες οὗτοι, λέγεται, ὅτι εἶχον εὑρεθῆ ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ Πυθαγόρου ἢ τῶν Πυθαγορείων κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

Τετράγωνοι ἀριθμοί.

Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος (ἢ ἡ φυσικὴ ἀκολουθία τῶν περιττῶν ἀριθμῶν).

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19....

τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων $=2$.

Σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, ὅπως καὶ προηγουμένως.

Τὸ ἄθροισμα ἐξ ἑνὸς μόνου ὅρου εἶναι	$=1$	$=1^2$	$=s_1$
» τῶν δύο πρώτων ὅρων » $1+3$	$=4$	$=2^2$	$=s_2$
» » τριῶν » » » $1+3+5$	$=9$	$=3^2$	$=s_3$
» » τεσσάρων » » » $1+3+5+7$	$=16$	$=4^2$	$=s_4$
» » πέντε » » » $1+3+5+7+9$	$=25$	$=5^2$	$=s_5$
» » ν » » »		$=\nu^2$	$=s_\nu$

Ἀναγράφομεν τώρα, εἰς μίαν γραμμὴν τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰς δευτέραν γραμμὴν τὴν πρόοδον καὶ εἰς τρίτην γραμμὴν κάτωθεν τῆς δευτέρας τὰ μερικὰ ἀθροίσματα $s_1, s_2, s_3 \dots$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10....
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19....
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100....

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς τρίτης γραμμῆς ὀνομάζονται τετράγωνοι ἀριθμοί. Ἡ σημασία τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν ἔγκειται εἰς τοῦτο: Ζητεῖται π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν 7 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 1 3 5.... Ἀναγινώσκομεν κάτωθεν τοῦ ἑβδόμου ὅρου τῆς προόδου, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ 13, καὶ βλέπομεν ὅτι τοῦτο εἶναι 49.

Καθ' ὅμοιον, ὡς ἄνω ἐκτίθεται τρόπον, λαμβάνομεν ἐκ τῆς προόδου 1 4 7 10.... τοὺς πενταγώνους ἀριθμούς, ἐκ τῆς προόδου 1 5 9 13.... τοὺς ἑξαγώνους ἀριθμοὺς κ.ο.κ.ε.

Παρατηρήσεις. Εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ τρίγωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 2 3 4....ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι $1=(3-2)$.

Εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ τετράγωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 3 5 7.... ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι $2=(4-2)$.

Εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ πεντάγωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 4 7 10.... ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι $3=(5-2)$.

Καὶ γενικῶς, εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ ν—γωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 ν—1 2ν—3 3ν—5 4ν—7 5ν—9.... ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι ν—2.

Ἡ γενικῶς ἐκφραζομένη διαφορὰ αὕτη, ἡ ν—2, εἶναι ἡ ἔχουσα σχέσιν μὲ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, τοῦ λυομένου κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου. Ὀνομάζεται δὲ αὕτη, γνωμονικὸς ἀριθμός, διότι ὁδηγεῖ ἡμᾶς, ὅταν δοθῇ, εἰς τὸ νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ. Ὅταν π.χ. δοθῇ ὁ γνωμονικὸς ἀριθμὸς 13 (ὁπότε ν=15 καὶ ν—2=13), τότε γνωρίζομεν, ὅτι πρόκειται περὶ τῶν δεκαπενταγώνων ἀριθμῶν καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οὗτοι εἶναι 13. Θὰ εἶναι δηλ. ἡ πρόοδος :

1 14 27 40 53 66 79 92....

καὶ οἱ ἀντίστοιχοι δεκαπεντάγωνοι ἀριθμοὶ (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα δηλ.)

1 (1+14)=15, (1+14+27)=42, 82, 135, 201, 280, 372....

1ος 2ος 3ος 4ος 5ος 6ος 7ος 8ος....

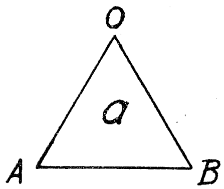
Ἡ ὀνομασία τῆς διαφορᾶς ν—2 (ὅπου ν παριστᾷ τοὺς ν - γώνους ἀριθμοὺς) ὡς γνωμονικοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς γεωμετρίας καὶ τοῦτο θὰ γίνῃ καταληπτὸν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν θεώρησιν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

Κατωτέρω παραθέτομεν πίνακα μερικῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. α=πρῶτος ὅρος τῆς προόδου, δ=διάφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων προόδου.

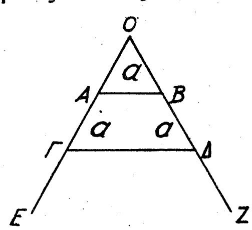
Αὔξων ἀριθμὸς	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α=1, δ=1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Τρίγωνοι ἀριθμοὶ	1	3	6	10	15	21	28	36	45
α=1, δ=2	1	3	5	7	9	11	13	15	17
Τετράγωνοι ἀριθμοὶ	1	4	9	16	25	36	49	64	81
α=1, δ=3	1	4	7	10	13	16	19	22	25
Πεντάγωνοι ἀριθμοὶ	1	5	12	22	35	51	70	92	117
α=1, δ=4	1	5	9	13	17	21	25	29	33
Ἑξάγωνοι ἀριθμοὶ	1	6	15	28	45	66	91	120	153
α=1, δ=5	1	6	11	16	21	26	31	36	41
Ἑπτάγωνοι ἀριθμοὶ	1	7	18	34	55	81	112	148	189
α=1, δ=6	1	7	13	19	25	31	37	43	49
Ὀκτάγωνοι ἀριθμοὶ	1	8	21	40	65	96	133	176	225

5. Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι γεωμετρικῶς.—*Τρίγωνοι ἀριθμοί.* Παριστῶμεν, κατὰ τὸν Νικόμαχον τὸν Γερασηνόν, τὴν μονάδα διὰ τοῦ γράμματος ἄλφα (α).

Ὁ ἀριθμὸς ἄλφα παριστᾷ τὸν πρῶτον τῇ τάξει τρίγωνον ἀριθμόν. Ἀλλὰ συγχρόνως οὗτος ὀνομάζεται καὶ ὁ πρῶτος «δυνάμει» τρίγωνος ἀριθμός. Διότι οὗτος, ὁ ἄλφα δηλ. τοποθετούμενος ἐντὸς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου (σχ. 3) ἐνέχει ἐν ἑαυτῷ ἐν λανθανούσῃ καταστάσει τὴν τριάδα, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἐντὸς τοῦ ὁποίου τοποθετεῖται εἶναι μὲν «ἓν τρίγωνον» ἀλλὰ τοῦτο δὲν παύει νὰ ἔχῃ τρεῖς πλευρὰς (καὶ τρεῖς γωνίας)! Θέλομεν τώρα νὰ σχηματίσωμεν γεωμετρικῶς τοὺς λοιποὺς τριγώνους ἀριθμούς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν γωνίαν τοῦ ληφθέντος τριγώνου διὰ τὴν παράστασιν τοῦ πρώτου τριγώνου ἀριθμοῦ, ἔστω τὴν ἐπάνω, τῆς ὁποίας προεκτείνομεν τὰς δύο πλευρὰς ἀπεριορίστως (σχ. 4). Ἀρχόμενοι ἐκ τῶν σημείων Α, Β λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκταθεισῶν πλευρῶν τμήματα ΑΓ=ΒΔ τὰ πέρατα τῶν ὁποίων ἑνοῦμεν δι᾿ εὐθείας γραμμῆς τῆς ΓΔ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ οὕτω σχηματισθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μονάδας μήκους. Ἐντὸς τοῦ νέου τριγώνου ΟΓΔ τοποθετοῦμεν συμμετρικῶς δύο ἄλφα ἀκόμη καὶ ἔχομεν ἐν ὅλῳ τρία ἄλφα. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ περιέχον τὰ τρία ἄλφα, παριστᾷ τὸν δεύτερον κατὰ τὴν τάξιν τρίγωνον ἀριθμόν, καλούμενον πρῶτον ἐνεργείᾳ τρίγωνον ἀριθμόν, διότι διὰ νὰ σχηματισθῇ οὗτος ἐχρειάσθη νὰ γίνουν κινήσεις ἀκολουθοῦσαι ὡρισμένους νόμους. Αἱ κινήσεις αὗται εἶναι ἡ τοποθέτησις δύο ἄλφα, παραλλήλως πρὸς τὸ πρῶτον ἄλφα.



Σχ. 3

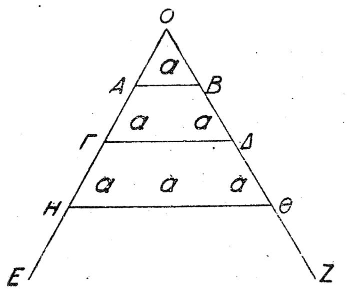


Σχ. 4

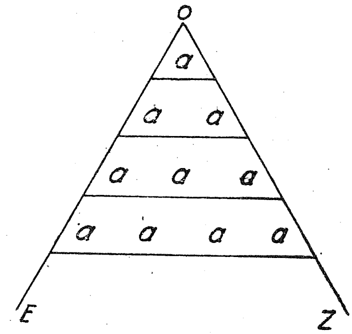
Ἂν ὡς πρῶτον ἀκίνητον ἄλφα θεωρήσωμεν ἀντὶ τοῦ ἄλφα τῆς γωνίας Ο, τὸ ἄλφα τῆς γωνίας Γ, τότε τὰ ἄλλα δύο ἄλφα ἔχουν τεθῆ παραλλήλως πρὸς τοῦτο ἐπὶ γραμμῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΖΟ. Ἂν πάλιν ὡς πρῶτον ἀκίνητον ἄλφα θεωρήσωμεν τὸ ἄλφα τῆς γωνίας Δ, τὰ ἄλφα ἔχουν τεθῆ παραλλήλως πρὸς τοῦτο ἐπὶ γραμμῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΟ. Διὰ νὰ σχηματισθῇ λοιπὸν ὁ δεύτερος τῇ τάξει τρίγωνος ἀριθμός, ὀνομαζόμενος πρῶτος ἐνεργείᾳ, ἐφέρομεν μίαν παράλληλον γραμμὴν πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΓΔ, διατηροῦντες τὴν ἀπόστασιν ταύτης ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς ΑΒ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ο, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ΟΓΔ. Ὁ δεύτερος τρίγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 3.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τώρα τὸν τρίτον τῇ τάξει, ἢ δεύτερον ἐνεργείᾳ τρίγωνον ἀριθμὸν λαμβάνομεν τὸ προηγούμενον σχῆμα καὶ τοποθετοῦμεν εἰς συμμετρικὰς ἀποστάσεις τρία ἄλφα κάτωθεν καὶ παραλλήλως τῶν δύο ἄλφα, ὡς τὸ σχῆμα 5. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλφα μᾶς δίδει τὸν τρίτον τρίγωνον ἀριθμὸν τὸν 6 (ἐνεργείᾳ δεύτερον) ἤτοι $1+2+3=6$ ἄλφα. Ὁμοίως λαμβάνομεν τὸν τέταρτον τρίγωνον ἀριθμὸν (ἐνεργείᾳ τρίτον) ὡς τὸ σχῆμα 6, ἤτοι $1+2+3+4=10$ ἄλφα κ.ο.κ.ἑ. Ἐκ τοῦ γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ τῶν τριγώνων ἀριθμῶν παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Αἱ δύο πλευραὶ μιᾶς γωνίας διατηροῦνται ἀμετάθετοι καὶ ἑκάστην φορὰν διὰ τὸν σχηματισμὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου προσθέτομεν μίαν γραμμήν, τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου ἐπὶ τῆς ὁποίας τοποθετοῦμεν εἰς συμμετρικὰς ἀποστάσεις τ' ἀνάλογα ἄλφα, δύο τὴν πρώτην φοράν, τρία τὴν δευτέραν, τέσσαρα τὴν τρίτην κ.ὁ.κ.ἑ. Ὅθεν, ὁ κανὼν τοῦ γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ τῶν τριγώνων ἀριθμῶν εἶναι : δοθείσης



Σχ. 5

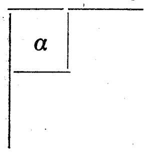


Σχ. 6

γωνίας 60° ἑκάστην φορὰν πρέπει νὰ τοποθετῶμεν τὴν βάσιν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ τοποθετήσωμεν κατόπιν συμμετρικῶς τ' ἀντίστοιχα ἄλφα. Τοποθετοῦμεν δηλ. ἑκάστοτε μίαν γραμμὴν ἐνῷ αἱ δύο πλευραὶ τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι μόνιμοι. Ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι ἐνταῦθα ὁ τριγωνικὸς γνώμων, ὁ ὁποῖος μᾶς κατευθύνει εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν τριγώνων ἀριθμῶν. Ἑκάστην φορὰν τὰ ἄλφα ἑκάστης γραμμῆς εἶναι περισσότερα τῶν ἄλφα τῆς προηγουμένης γραμμῆς κατὰ ἕν. Οὕτω τὰ τοποθετηθέντα ἐξ ἀρχῆς ἄλφα εἰς γραμμὰς εἶναι 1, 2, 3, 4.... (πρόοδος ἀριθμητική). Οἱ δὲ ἀντίστοιχοι τρίγωνοι ἀριθμοὶ 1, 3, 6, 10....

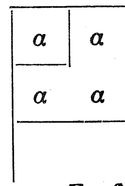
Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς πλευράς, ὁ γνώμων πρὸς σχηματισμὸν τῶν τριγώνων ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἂν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 3 ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονίμων πλευρῶν, τὸν 2. Εἶναι δηλ. ὁ συναφὴς τριγωνικὸς γνώμων (γνωμονικὸς ἀριθμὸς) 3—2=1 γραμμὴ εὐθεῖα.

Τετράγωνοι ἀριθμοί. Ὁ πρῶτος τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς. Τοποθετοῦμεν λοιπὸν ἐντὸς ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν μονάδα ἓν ἄλφα, ὡς τὸ σχῆμα 7. Ἐνταῦθα ἡ μονὰς παριστᾷ τὸν πρῶτον «δυνάμει» τετράγωνον ἀριθμόν, διότι τὸ τετράγωνον εἶναι «ἓν» ἐμπερικλείει ὅμως ἐν ἑαυτῇ ἡ μονὰς ἐν λανθανούσῃ καταστάσει, τὸν ἀριθμὸν 4, διότι τὸ τετράγωνον ἔχει τέσσαρας πλευρὰς (καὶ τέσσαρας γωνίας).



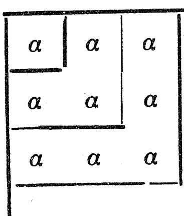
Σχ. 7

Διὰ νὰ λάβωμεν τώρα τὸν δεύτερον τετράγωνον ἀριθμὸν θὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸν γνώμονα τοῦ Ἀναξιμάνδρου, δηλ. μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὸ σχ. 7 μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ὡς τὸ σχῆμα 8 καὶ συμμετρικῶς τὰ ἀντίστοιχα ἄλφα. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι τὰ ἄλφα τὰ περιεχόμενα εἰς τὸν γνώμονα εἶναι τρία, ἤτοι δύο περισσότερα τοῦ ἀρχικοῦ. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἄλφα εἶναι 4. Οὗτος εἶναι ὁ δεύτερος τετράγωνος ἀριθμός. Ἐπειδὴ δὲ ἐχρειάσθη νὰ γίνουν ὡρισμέναι κινήσεις πλευρῶν καὶ ἄλφα, ὁ δεύτερος τετράγωνος ἀριθμός, ὁ 4, ὀνομάζεται ὁ πρῶτος ἐνεργείᾳ τετράγωνος ἀριθμός.



Σχ. 8

Διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου τῇ τάξει (δευτέρου ἐνεργείᾳ) τετραγώνου ἀριθμοῦ τοποθετοῦμεν εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν, δηλ. γνώμονα τετραγωγικὸν καὶ ἐντὸς ταύτης τὰ ἀντίστοιχα ἄλφα, ὡς τὸ σχῆμα 9. Παρατηροῦμεν πάλιν, ὅτι τὰ προστεθέντα ἄλφα εἶναι περισσότερα κατὰ δύο, τῶν ἄλφα τῶν εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα προστεθέντων. Μὲ ἑκάστην δηλ. προσθήκην γνώμονος (ὀρθῆς γωνίας) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄλφα αὐξάνεται κατὰ δύο περισσότερον ἀπὸ τὰ ἄλφα τοῦ προηγουμένου σχήματος. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἄλφα ἑκάστου σχήματος μᾶς δίδει τοὺς ἀντιστοίχους τετραγώνους ἀριθμούς, οἵτινες κατὰ ταῦτα εἶναι 1 4 9.... Ἡ δὲ συναφὴς πρόοδος εἶναι 1 3 5.... δηλ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄλφα ἑκάστου γνώμονος, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄλφα τοῦ πρώτου τετραγώνου.

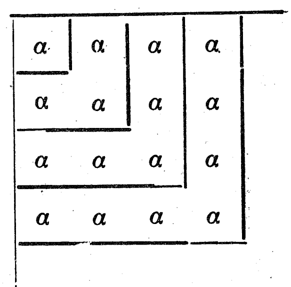


Σχ. 9

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν τέταρτον τῇ τάξει (τρίτον ἐνεργείᾳ) τετράγωνον ἀριθμὸν ὁ γνώμων μας θὰ περιέχῃ δύο ἄλφα, περισσότερα τῶν 5 ἤτοι 7, ὁ δὲ 4ος τετράγωνος ἀριθμὸς θὰ περιέχῃ 16 ἄλφα, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 10 φαίνεται.

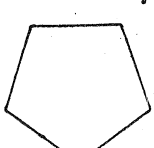
Αἱ δύο πλευραὶ τοῦ πρώτου τετραγώνου τοῦ σχ. 7 ἔχουν ἀπεριόριστον μῆκος καὶ εἶναι μόνιμοι. Κάθε φορὰν ἡ περιτιθεμένη ὀρθὴ γωνία ἔχει δύο πλευράς. Ἡ περίπτωσις ἐνταῦθα εὑρέσεως τοῦ γνώμονος (τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του) εἶναι κοινονοπία.

Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 4 τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονίμων πλευρῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι δύο. Ἔχει δηλ. ὁ γνώμων ἐνταῦθα πλευρὰς 4—2=2. Πάλιν, ὅπως καὶ εἰς τὸ τρίγωνον, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 2 ἀπὸ τὸν 4, ὅστις δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

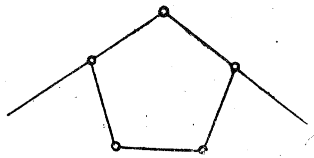


Σχ. 10

Πεντάγωνοι ἀριθμοί. Ὁ πρῶτος πεντάγωνος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς. Ὅθεν, ἓν πεντάγωνον κανονικὸν παριστᾷ τὸν πρῶτον πεντάγωνον ἀριθμόν. Ἐνταῦθα ἀντὶ τοῦ ἄλφα χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν δήλωσιν τῆς μονάδος μίαν στιγμὴν (ἢ νοοῦμεν ταύτην εἰς τὸ κέντρον, τοῦ πενταγώνου). Ἡ στιγμὴ αὕτη παριστᾷ τὸν πρῶτον δυνάμει πεντάγωνον ἀριθμόν, διότι τὸ πεντάγωνον περιέχει ἐν λαθανούσῃ καταστάσει τὸν ἀριθμὸν πέντε, λόγῳ τῶν 5 πλευρῶν του (καὶ 5 γωνιῶν του).

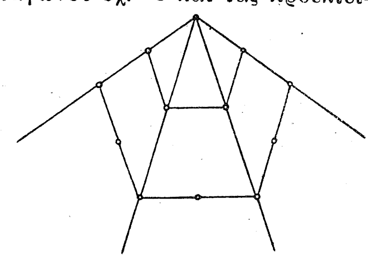

Σχ. 11

Ὁ δεύτερος πεντάγωνος ἀριθμός, παρίσταται πάλιν δ' ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου, εἰς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ὁποίου τοποθετοῦμεν στιγμὰς παριστώσας τὴν μονάδα, ὡς τὸ σχῆμα 12. Οὗτος ὀνομάζεται καὶ πρῶτος ἐνεργείᾳ πεντάγωνος ἀριθμός, διότι ἐχρειάσθη νὰ γίνουν κινήσεις μονάδων διὰ νὰ σχηματισθῇ.



Σχ. 12

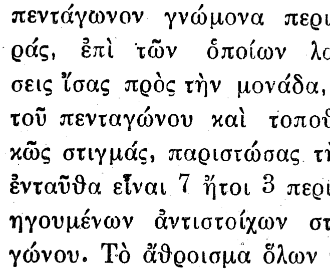
Διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου τῇ τάξει πενταγώνου ἀριθμοῦ (δευτέρου ἐνεργείᾳ) νοοῦμεν δύο πλευρὰς τυχούσης γωνίας τοῦ πενταγώνου προεκτεινομένας ἀπεριορίστως, ὡς τοῦτο δηλοῦται καὶ εἰς τὰ σχήματα 12 καὶ 13. Φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ληφθείσης τυχαίως γωνίας τὰς διαγωνίους τοῦ πενταγώνου σχ. 13 καὶ τὰς προεκτείνομεν ἀπεριορίστως. Περιθέτομεν τώρα εἰς τὸ πεντάγωνον γνώμονα περιέχοντα τρεῖς πλευράς, ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν ἀποστάσεις ἴσας πρὸς τὴν μονάδα, δηλ. τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου καὶ τοποθετοῦμεν συμμετρικῶς στιγμάς, παριστώσας τὴν μονάδα, αἵτινες ἐνταῦθα εἶναι 7 ἤτοι 3 περισσότεραι τῶν προηγουμένων ἀντιστοίχων στιγμῶν τοῦ πενταγώνου. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν στιγμῶν παριστᾷ τὸν τρίτον πεντάγωνον ἀριθμόν, ὅστις εἶναι ὁ 12 (δηλαδὴ 1+4+7). Ἡ συναφὴς πρόοδος εἶναι ὡς ἐκτίθεται κατωτέρω:



Σχ. 13

Ἡ στιγμὴ τῆς κορυφῆς τῆς ληφθείσης γωνίας	=	1
Αἱ στιγμαὶ τοῦ ἀκολουθοῦντος πρώτου τριπλεύρου γνώμονος	=	4
» » » » δευτέρου » »	=	7

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ στιγμαὶ τοῦ ἑπομένου γνώμονος θὰ εἶναι 10, τοῦ ἑπομένου τούτου 13 (ὡς τὸ σχῆμα 14) κλπ. καὶ οἱ συναφεῖς πεντάγωνοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι 1, 5 (=1+4), 12 (=1+4+7), 22 (=1+4+7+10), 35 (=1+4+7+10+13).



Σχ. 14

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ἀμετάθετοι, αἱ μόνιμοι πλευραὶ τοῦ πενταγώνου εἶναι δύο. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἑπομένως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ γνώμονος, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, τὸν 5, τὸν ἀριθμὸν τῶν μονίμων πλευρῶν, τὸν 2 καὶ ἔχομεν ὡς γνωμονικὸν ἀριθμὸν 5−2=3. Ἡ διαφορὰ δηλ. τῶν δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα εἶναι 3 καὶ συνεπῶς ἡ πρόοδος εἶναι:

	1	4	7	10	13	16	19....
καὶ οἱ συναφεῖς πεντάγωνοι ἀριθμοὶ	1	5	12	22	35	51	70....

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐργαζόμεθα διὰ τὸν γεωμετρικὸν σχηματισμὸν ἐκ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τῶν ἑξαγώνων ἀριθμῶν, ἐκ τοῦ καν. ἑπταγώνου τῶν ἑπταγώνων ἀριθμῶν κλπ.

Ἐὰν παραστήσωμεν γενικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου διὰ τοῦ ν εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι ὁ γνωμονικὸς ἀριθμός, ὁ ἀριθμὸς δηλ. ὁ δηλῶν τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθ. προόδου μὲ πρῶτον ὅρον πάντοτε τὴν μονάδα, θὰ εἶναι ν—2. Πρέπει δηλ. νὰ ἀφαιρῶμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ καν. πολυγώνου, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀμεταθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς τὰς ὁποίας ἑκάστοτε περιθέτομεν τὸν γνώμονα, καὶ ὅστις ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι πάντοτε ὁ 2. Ἤδη ἔγινε, φρονοῦμεν, καταφανὴς ἡ ὀνομασία τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν ἀφ᾽ ἑνός, καὶ ἡ σημασία τοῦ γνωμονικοῦ ἀριθμοῦ ν—2 ἀφ᾽ ἑτέρου.

Δὲν θεωροῦμεν ἄσκοπον νὰ τονίσωμεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω θεωρίας τὴν ἑρμηνείαν τῶν ὅρων «δυνάμει» καὶ «ἐνεργείᾳ» τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀριστοτέλης πρὸς διάκρισιν τοῦ ἀπείρου εἰς δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἄπειρον.

Ἐκ τοῦ γνωμονικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ν—2, ὁρμώμενος ὁ Ἰάμβλιχος λέγει, ὡς ἐμνημονεύσαμεν, «ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη» καὶ παρεμβάλλει εἰς τὰ σχόλια περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν 6 σελίδας καθαρᾶς ἀλγέβρας.

6. Τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα.— Τὸ τιθέμενον πρόβλημα ἔχει ὡς ἑξῆς:

Δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων $x+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{\nu-1}=S$

καὶ τὰ ἀθροίσματα ν—1 ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$x+x_1=S_1$$
$$x+x_2=S_2$$
$$x+x_3=S_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x+x_{\nu-1}=S_{\nu-1}$$

ἤτοι ἐν ὅλῳ ν ἐξισώσεις.

Κατὰ τὸν Θυμαρίδαν ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$x=\frac{(S_1+S_2+S_3+\ldots\ldots+S_{\nu-1})-S}{\nu-2}$$

Ὁ παρονομαστὴς ν—2, εἶναι ὁ γνωστός μας ἤδη γνωμονικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκ πρώτης ὄψεως, φαίνεται, ὅτι δὲν ἔχει σχέσιν μὲ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος. Παρὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εἰκάσωμεν τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς θεωρίας τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου. Πρὸ τούτου παραθέτομεν ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἐπιλύσεως συστήματος τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου.

Ἔστω π.χ. ὅτι οἱ ἄγνωστοι εἶναι πέντε (ν=5) καὶ αἱ συνδέουσαι αὐτοὺς πέντε ἐξιώσεις ἔχουν ὡς ἑξῆς:

$$x+y+z+u+t=139=S$$
$$x+y=40=S_1$$
$$x+z=60=S_2$$
$$x+u=70=S_3$$
$$x+t=38=S_4$$

Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ Θυμαρίδου, (ἐφαρμόζοντες δηλ. τὸν ἀνωτέρω τύπον) θὰ ἔχωμεν

$$x=\frac{(40+60+70+38)-139}{5-2}=\frac{208-139}{3}=\frac{69}{3}=23.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐξισώσεις $x+y=40$, $x+z=60$, $x+u=70$, $x+t=38$ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ x εὑρίσκομεν $y=17$, $z=37$, $u=47$, $t=15$.

Πῶς ὁ Θυμαρίδας ἤχθη εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως. Ὁ Ἰάμβλιχος οὐδὲν ἀναφέρει περὶ τούτου, οὔτε ἄλλος τις συγγραφεύς. Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου προέκυψεν ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν, ὡς κατωτέρω ἐκθέτομεν.

Ἔστω π.χ. ὅτι πρόκεινται οἱ ἀριθμοὶ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10... καὶ δίδεται τὸ ἄθροισμα πλήθους τινος ἐκ τούτων, ἔστω τῶν 6 πρώτων ἀριθμῶν, ἤτοι $(1+2+3+4+5+6)=21$, δίδεται δηλ. ὁ ἕκτος τῇ τάξει τρίγωνος ἀριθμὸς 21, καὶ ὅτι σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τοῦ πρώτου ἐκ τῶν ἓξ ἀριθμῶν μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν ὡς ἑξῆς

$$\begin{array}{l} 1+2=3\ldots\ldots S_1\\ 1+3=4\ldots\ldots S_2\\ 1+4=5\ldots\ldots S_3\\ 1+5=6\ldots\ldots S_4\\ \underline{1+6=7}\ldots\ldots S_5\\ 5+20=25 \end{array}$$

Ἐκ τῆς ἄνω διατάξεως καὶ τοῦ ἀθροίσματος $1+2+3+4+5+6=21$ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος, δηλ. ἡ μονάς, περιέχεται εἰς μὲν τὸν τρίγωνον ἀριθμὸν 21 μίαν φοράν, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε μερικῶν ἀθροισμάτων 5 φοράς. Ἐὰν ἑπομένως ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος εἶναι ἄγνωστος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τοῦτον, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος 25 τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων (τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $6-1=5$) τὸ δοθὲν ἄθροισμα 21. Εἰς τὴν προκύπτουσαν διαφοράν, $25-21=4$ θὰ περιλαμβάνεται ὁ πρῶτος ὅρος 4 φοράς. Ὅθεν διαιροῦμεν τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν διὰ τοῦ 4 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὑποτιθέμενον ἄγνωστον, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι $4:4=1$.

Ἡ μέθοδος παραμένει βεβαίως ἡ αὐτή, ὅταν δοθοῦν 1) τυχόντες ἄγνωστοι ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ 2) τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ 3) τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τυχόντος ἐκ τῶν ἀγνώστων, μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ μέθοδος τοῦ Θυμαρίδου.

6. I.— ***Γενικωτέρα διατύπωσις τοῦ ὑποτιθεμένου τρόπου εὑρέσεως τοῦ ἐπανθήματος ὑπὸ τοῦ Θυμαρίδου.*** Ἔστω, ὅτι δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων $x+y+z+u+t\ldots=S$, καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀγνώστων μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἤτοι,

$$\begin{array}{l} x+y=S_1\\ x+z=S_2\\ x+u=S_3\\ x+t=S_4, \end{array}$$

ἤτοι 5 ἐξισώσεις μὲ 5 ἀγνώστους

Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων καὶ ἔστω $=K$. Εἰς τὸ K τοῦτο ὁ x περιέχεται τέσσαρας φοράς, ἐν ᾧ εἰς τὸ ἄθροισμα S περιέχεται μίαν φοράν, Ἐὰν ἐπομένως ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα S ἀπὸ τὸ ἄθροισμα K, τότε εἰς τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν ὁ x θὰ περιέχεται 3 φοράς. Ὅθεν διαιροῦμεν τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν $K-S$ διὰ τοῦ 3 καὶ εὑρίσκομεν τὸν x. Ὁ διαιρέτης 3 προκύπτει ἐξ ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων, ἐνταῦθα τοῦ 5. Διὰ δοκιμῶν εἰς διαφόρους περιπτώσεις, γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ διαιρέτης τῆς προκυπτούσης διαφορᾶς, ὡς ἄνω, εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πάντοτε τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος, ἔστω ν. Ἀλλὰ $\nu-2$ εἶναι ὁ γνωστός μας ἤδη γνωμονικὸς ἀριθμός, τὸ δὲ 2 εἰς τὸν γνωμονικὸν ἀριθμὸν παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν ἀμεταθέτων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου κατὰ τὸν σχηματισμὸν γεωμετρικῶς τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ.

6. II. Ἡ δόξα τοῦ Θυμαρίδου δὲν θὰ ἦτο μικρά, ἐὰν αὕτη ὠφείλετο μόνον εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀνωτέρω ὁμωνύμου ἐπανθήματος. Ὁ Ἰάμβλιχος ὅμως, ἐν συνεχείᾳ, ἀναφέρει ἄλλας δύο περιπτώσεις ἐφαρμογῆς τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι λύσεις δύο συστημάτων ἐχόντων $\nu+1$ ἀγνώστους μὲ ν ἐξισώσεις ἕκαστον, ἤτοι λύσεις συστημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ. Καὶ ναὶ μὲν ὁ Ἰάμβλιχος δὲν μνημονεύει, ὅτι ἡ λύσις τῶν συστημάτων αὐτῶν ὀφείλεται εἰς τὸν Θυμαρίδαν, δὲν βλέπομεν ὅμως τὸν λόγον διὰ τὸν ὁποῖον πρέπει ν' ἀποδώσωμεν εἰς ἄλλον τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως. Ἡ γνώμη αὕτη ἐνισχύεται ὡς ἀναφέρομεν ἐν ἀρχῇ ἐκ τῆς ἀποδόσεως εἰς τὸν Πυθαγόραν τῆς λύσεως διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ καὶ ὀλίγον βραδύτερον ἐκ τῆς ἀποδόσεως εἰς τὸν Πλάτωνα τῆς λύσεως κατ' ἄλλον τρόπον τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως τῆς $x^2+y^2=z^2$.

Ἀλλ' ἄς ἐκθέσωμεν τὰ δύο συναφῆ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρει ὁ Ἰάμβλιχος.

1ον. «Ὅτι δὲ οὐ παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλὰ καὶ πρὸς θεώρημα ἀριθμητικὸν ἔχει τὴν ἀναφορὰν καὶ ἐφόδου γλαφυρωτάτης πρὸς ἀνεύρεσιν αἴτιον ἡμῖν γίνεται, οὕτως ἂν θεωρήσαιμεν. Προστετάχθω γὰρ ἡμῖν λόγου χάριν ἀριθμοὺς ἐκθέσθαι τέσσαρας ὧν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου διπλάσιος ἔσται τρίτου ἅμα καὶ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τριπλάσιος δευτέρου ἅμα καὶ τετάρτου, ὁμοίως τε ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δευτέρου ἅμα καὶ τρίτου, σύμπαντες δὲ ἅμα πενταπλάσιοι τῶν αὐτῶν δύο μέσων, ὡς ἂν καὶ τάξει φυσικῇ τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ διπλασίου εἰς πενταπλάσιον ἡ προχώρησις εἴη· ἐφοδευτέον δὴ οὕτως·

Ἐπεὶ ἡμίσους χρεία διὰ τὸν διπλάσιον, λαμβάνω τὸν δύο ἀριθμόν· πρώτιστος γὰρ ἡμίσους παρεκτικὸς καὶ πρῶτος διπλάσιος· ἐπεὶ δὲ καὶ τρίτου διὰ τὸν τριπλάσιον λόγον, τρὶς ποιῶ τὰ δύο· ὁ δὴ γενόμενος ϛ′ δι' ἀμφοτέρους τοὺς γεννήτορας πρῶτος ἔσται καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικός· πάλιν δὲ ἐπὶ τετάρτου μέρους δεῖ διὰ τὸν τετραπλάσιον λόγον, τετράκις τὰ ϛ′ ποιῶ, καὶ ἐπεὶ πενταπλασίου χρεία, τὰ κδ′ πεντάκις, ἅπερ γίνεται ρκ′ καὶ ἔχω τοῦτον τὸν ἀριθμὸν κοινὸν ὄντα συγκεφαλαίωμα τῶν τεσσάρων ὅρων, ὃ δὴ καὶ θετέον εἶναι μεριστὸν εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, οἷς ἐμφανίσονται οἱ προειρημένοι λόγοι. διανεμητέον τὸν ρκ´ τρόπῳ τούτῳ. ἐπεὶ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ τῶν λοιπῶν δύο διπλάσιοι ἔσονται, ἐστί δὲ διπλασίων πυθμὴν ὡς δύο πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ τρία, δὶς ποιῶ τὸν ρκ´, καὶ τὸν σμ´ μερίζω παρὰ τὸν τρίτον. γίνεται δὴ μέρος ἓν τὰ π´. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς, οἵπερ διπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δύο, ὄντων δηλονότι καὶ αὐτῶν ἐν τεσσαράκοντα μονάσι. πάλιν, ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος τριπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὡς τρία πρὸς ἕν, ἃ ἔστιν ὁμοῦ δ´, ποιῶ τρὶς τὸν αὐτὸν ρκ´ καὶ γίνεται τξ´, ἃ μερίζω παρὰ τὸ τέταρτον, ἵν ᾖ τὸ μέρος ϙ´. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τὸν πρῶτον ἅμα καὶ τὸν τρίτον, τοὺς τριπλασίους τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὄντων δηλονότι ἐν μονάσι λ´. πάλιν, ἐπεὶ ὁ πρῶτος σὺν τῷ τετάρτῳ τετραπλάσιος ἐστὶ τῶν δύο μέσων δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς τέσσαρα πρὸς ἕν, ἅ ἐστιν ὁμοῦ πέντε, τετράκις ποιῶ τὰ ρκ´, γίνεται υπ´, μερίζω παρὰ τὸν ε´ καὶ ἔχω μέρος ἓν τὰ ϙϛ´. τοσούτων οὖν φημι μονάδων εἶναι τὸν πρῶτον σὺν τῷ τετάρτῳ, οἵπερ τετραπλάσιοι εἰσι τῶν δύο μέσων ἐν μονάσιν ὄντων κδ´. κατὰ συνδυασμὸν οὖν εὑρημένων τῶν ἀριθμῶν, οὐδέπω δὲ καθ' ἑαυτοὺς διακεκριμένων, ἔφοδον ἡμῖν τῆς διακρίσεως παρέχει ἡ τοῦ Θυμαρίδου ἐπανθήματος γνῶσις.....».

(Ἑρμηνεία: ὅτι δὲ δὲν παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλ' ἀναφέρεται καὶ εἰς ἀριθμητικὸν θεώρημα καὶ γίνεται αἴτιον εἰς ἡμᾶς ν' ἀνεύρωμεν γλαφυρωτάτην μέθοδον, τὸ ἐρευνῶμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Ἂς ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τέσσαρας ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλάσιος τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ ὁμοίως ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν νὰ εἶναι πενταπλάσιον τῶν αὐτῶν δύο μέσων δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, ὡς ἐὰν ἡ προχώρησις κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ τοῦ διπλασίου εἰς τὸ πενταπλάσιον ν' ἀκολουθῇ φυσικήν τινα τάξιν. Πρὸς τοῦτο δέον ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον. Ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ ὁ ἥμισυς ἀριθμός, ἐπειδὴ ἐδόθη ὁ διπλάσιος, λαμβάνω τὸν ἀριθμὸν δύο· διότι ἐκ τῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὁ πρῶτος ὁ παρέχων ἡμίση, καὶ ὁ πρῶτος διπλάσιος. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἓν τρίτον, ἐπειδὴ ἐδόθη τὸ τριπλάσιον, τριπλασιάζω τὸν ληφθέντα δύο. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 6 ἕνεκα τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 3 εἶναι ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἀριθμῶν ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπιδεκτικὸς εἰς τὸ νὰ δίδῃ ἥμισυ καὶ τρίτον. Πάλιν δέ, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἓν τέταρτον, ἐπειδὴ ἐδόθη τὸ τετραπλάσιον τετραπλασιάζω τὸν 6, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ πενταπλάσιον, λαμβάνω τὰ 24 πεντάκις, τὰ ὁποῖα δίδουν 120 καὶ ἔχω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων (ἀγνώστων) ὅρων, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μερίσω εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἐμφανισθοῦν οἱ προειρημένοι λόγοι. Ὁ 120 δέον νὰ διαμοιρασθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι διπλάσιοι τῶν ἄλλων δύο, ὑπάρχει δὲ πυθμὴν τῶν διπλασίων ὡς τὸ δύο πρὸς ἓν (σημ. Ὁ 2 εἶναι διπλάσιος τοῦ 1. Ὁ 4 εἶναι διπλάσιος τοῦ 2. Ὁ 6 εἶναι διπλάσιος τοῦ 3, κλπ. Ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος εἶναι διπλάσιος ἄλλου, τοῦ μικροτάτου, τῆς μονάδος, εἶναι ὁ 2. Οὗτος λέγεται «πυθμὴν» «ἀρχὴ» τῶν διπλασίων), τὰ ὁποῖα ὁμοῦ δίδουν 3, διπλασιάζω τὸν 120 καὶ τὸν 240 διαιρῶ διὰ 3. Καὶ λαμβάνω πηλίκον 80. Λέγω, ὅτι τόσας μονάδας ἔχουν οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι διπλάσιοι τῶν δύο ἄλλων, οἱ ὁποῖοι συνεπῶς ἔχουν ἄθροισμα 40 μονάδας. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι τριπλάσιοι τῶν λοιπῶν, δηλ. τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου, εὑρίσκονται δηλ. τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἰς σχέσιν, ὡς 3 πρὸς 1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 4, τριπλασιάζω τὸν αὐτὸν 120 καὶ λαμβάνω 360 τὸν ὁποῖον διαιρῶ διὰ τοῦ 4, ὅτε τὸ πηλίκον εἶναι 90. Λέγω, ὅτι τόσας μονάδας ἔχουν ὁμοῦ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος, καὶ ὅτι συνεπῶς οὗτοι ἀφοῦ εἶναι τριπλάσιοι τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων τούτων θὰ εἶναι 30. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιοι τῶν δύο μέσων, τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, εὑρίσκονται δηλ. τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἰς σχέσιν 4 πρὸς 1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 5, τετραπλασιάζω τὸν 120 καὶ λαμβάνω 480, τὸν ὁποῖον διαιρῶ διὰ 5 καὶ λαμβάνω πηλίκον 96. Τόσας μονάδας ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου μετὰ τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μέσων, οἱ ὁποῖοι συνεπῶς θὰ ἔχουν ἄθροισμα 24. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἔχομεν εὕρει ἀθροίσματα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν κατὰ συνδυασμόν, χωρὶς ὅμως νὰ ἔχωμεν εὕρει τοὺς ἀριθμοὺς κεχωρισμένως, κατορθώνομεν νὰ λάβωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν κεχωρισμένως, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου....).

Ἡ ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ἀναφερομένη λύσις, εἰς σύντομόν πως διατύπωσιν.

(Παριστῶμεν τοὺς ἀγνώστους ὡς x, y, z, u χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὸν ἐκτιθέμενον ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου τρόπον τῆς λύσεως τοῦ συστήματος).

«Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ διπλασίου, τριπλασίου, τετραπλασίου καὶ πενταπλασίου, θέτω τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀγνώστων ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $2 . 3 . 4 . 5 = 120$. Ἐπειδὴ τώρα $x+y=2(z+u)$ κατὰ τὸ πρόβλημα, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $2(x+y)$ ὅτε ἔχομεν

$$x+y+2(x+y)=2(z+u)+2(x+y), \quad \text{ἢ}$$
$$3(x+y)=2(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ $x+y+z+u=120$. Ἑπομένως πολ)ζω τὸ 120 ἐπὶ 2 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 3, ὅτε λαμβάνω τὸ $x+y$ ἤτοι $x+y=\frac{2.120}{3}=80$.

Ἐπειδὴ πάλιν $x+z=3(y+u)$ προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $3(x+z)$ καὶ ἔχω

$$x+z+3(x+z)=3(y+u)+3(x+z) \quad \text{ἢ}$$
$$4(x+z)=3(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ τὸ $x+y+z+u=120$ Ἑπομένως πολ)ζω τὸ 120 ἐπὶ 3 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 4 ἤτοι ἔχω

$$x+y=\frac{3.120}{4}=90$$

Ἐπειδὴ πάλιν $x+u=4\,(y+z)$, προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $4\,(x+u)$ καὶ ἔχω

$$x+u+4\,(x+u)=4\,(y+z)+4\,(x+u) \quad ἤ$$
$$5\,(x+u)=4\,(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ τὸ $x+y+z+u=120$. Ἑπομένως πολ)ζω τὸ 120 ἐπὶ 4 καὶ τὸ προπροκύπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 5, ἤτοι ἔχω

$$x+u=\frac{4.120}{5}=96.$$

Εὕρομεν δηλ. μέχρι τῆς στιγμῆς, $x+y+z+u=120$

καὶ
$$x+y=80$$
$$x+z=90$$
$$x+u=96$$

Τὸ σύστημα ὅμως τοῦτο εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου τοῦ ὁποίου ἡ μέθοδος (τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα) μᾶς δίδει

$$x=\frac{(80+90+96)-120}{2}=\frac{266-120}{2}=\frac{146}{2}=73.$$

Κατόπιν τούτου εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων

$$y=7,\ z=17,\ u=23.$$

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω διοφαντικοῦ συστήματος ὑπὸ τὴν γενικήν του μορφήν. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, τὸ

$$1\ldots\ldots(x+y)=\alpha\,(z+u)$$
$$2\ldots\ldots(x+z)=\beta\,(y+u)$$
$$3\ldots\ldots(x+u)=\gamma\,(y+z)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας ἐξισώσεις, ὅτε ἔχομεν

$$4\ldots\ldots\quad 3x+y+z+u=\alpha\,(z+u)+\beta\,(y+u)+\gamma\,(y+z)$$

Προσθέτομεν τὴν (2) καὶ (3) ὁπότε λαμβάνομεν

$$2x+z+u=\beta\,(y+u)+\gamma\,(y+z)$$

λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $2x$ ὅτε εἶναι

$$5\ldots\ldots\quad 2x=\beta\,(y+u)+\gamma\,(y+z)-(z+u)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀπὸ τὴν (4) ὅτε ἔχομεν

$$x+y+z+u=\alpha\,(z+u)+(z+u) \quad ἤ$$
$$6\ldots\ldots\quad x+y+z+u=(\alpha+1)\,(z+u).$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως λαμβάνομεν

$$7\ldots\ldots\quad x+y+z+u=(\beta+1)\,(y+u)$$
$$8\ldots\ldots\quad x+y+z+u=(\gamma+1)\,(y+z)$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τώρα ἀκεραίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων πρέπει τὸ ἄθροισμα $x+y+z+u$ νὰ περιέχῃ ὡς παράγοντας τοὺς συντελεστὰς $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, $(\gamma+1)$. Ἐὰν καλέσωμεν Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τούτων, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x+y+z+u=E$ ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6), (7), (8) λαμβάνομεν

$$E=(\alpha+1)\,(z+u)$$
$$E=(\beta+1)\,(y+u)$$
$$E=(\gamma+1)\,(y+z).$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας, ὡς πρὸς $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ ἔχομεν,

$$z+u=\frac{E}{\alpha+1},\qquad y+u=\frac{E}{\beta+1},\qquad y+z=\frac{E}{\gamma+1}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὰ ἐξισώσεις (1), (2), (3) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ λαμβάνομεν

$$9\ldots\ldots\; x+y=\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot E$$
$$10\ldots\ldots\; x+z=\frac{\beta}{\beta+1}\cdot E$$
$$11\ldots\ldots\; x+u=\frac{\gamma}{\gamma+1}\cdot E.$$ Ἔχομεν δὲ λάβει
$$12\ldots\ldots\; x+y+z+u=E$$

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων (9), (10), (11), (12) ($\nu=4$) εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου.

Ὅθεν, ἐφαρμόζοντες τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα (δηλ. τὴν μέθοδον λύσεως τοῦ Θυμαρίδου) ἔχομεν

$$x=\frac{E\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)-E}{2}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ x εἶναι μὲν ἀκέραιος, ἀλλ' εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι περιττὸς καὶ συνεπῶς διαιρούμενος διὰ 2 νὰ μὴ δίδῃ ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ **x**. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἀντὶ τοῦ E πρέπει νὰ λάβωμεν 2E.

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω λύσιν εἰς τὸ ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ἀναφερόμενον πρόβλημα:

$$x+y=2\,(z+u)$$
$$x+z=3\,(y+u)$$
$$x+u=4\,(y+z)$$
$$x+y+z+u=5\,(y+z)$$

ἔχομεν

$$\alpha'\ldots\ldots\; x+y=\frac{2}{3}\cdot E$$
$$\beta'\ldots\ldots\; x+z=\frac{3}{4}\cdot E$$
$$\gamma'\ldots\ldots\; x+u=\frac{4}{5}\cdot E$$

Ἐξ οὗ κατὰ τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα εἶναι

$$x=\frac{E\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)-E}{\nu-2}$$

E ὅμως εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν $(2+1)$, $(3+1)$, $(4+1)$, ἤτοι 60 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων $\nu=4$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$x=\frac{\frac{60\cdot 133}{60}-60}{2}=\frac{73}{2}.$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τῆς τιμῆς τοῦ x, ὁ 73, εἶναι περιττὸς διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x λαμβάνομεν $2E = 120$, ὁπότε εἶναι

$$x = \frac{\frac{120 \cdot 133}{60} - 120}{2} = \frac{266 - 120}{2} = 73.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ x, ἐκ τῶν ἐξισώσεων α', β', γ', θέτοντες ἀντὶ τοῦ E τὸ 2E εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς $y = 7$, $z = 17$, $u = 23$.

2ον. Τὸ δεύτερον πρόβλημα τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Ἰάμβλιχος εἶναι ὅπως τὸ πρῶτον μνημονευθὲν σύστημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ συντελεστάς ὅμως κλασματικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι :

$$1 \ldots\ldots\ldots x + y = \frac{3}{2}(z + u).$$

$$2 \ldots\ldots\ldots x + z = \frac{4}{3}(y + u).$$

$$3 \ldots\ldots\ldots x + u = \frac{5}{4}(y + z).$$

Ἡ λύσις, κατὰ τὴν ἔκθεσιν τοῦ Ἰαμβλίχου, εἰς σύγχρονον διατύπωσιν, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ τρόπος τῆς λύσεως. Ἡ μόνη μεταβολὴ εἶναι ἡ παράστασις τῶν ἀγνώστων μὲ γράμματα.

«Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ ἡμιολίου (ἡμιόλιον=ἓν καὶ ἥμισυ τοῦ ὅλου δηλ. $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ = ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου μέλους τῆς α'. ἐξισώσεως) ὁ πρῶτος δὲ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος δύναται νὰ δώσῃ ἥμισυ εἶναι ὁ 2, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{3}{2}$ εἶναι $= 5$, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸ 2 ἐπὶ 5 καὶ ἔχω $= 10$. Ἐπειδὴ ἀκόμη εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτρίτου $\left(\text{ἐπίτριτον} = \text{ἓν καὶ ἓν τρίτον δηλ. } 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\right)$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{4}{3}$ εἶναι $= 7$, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν 10 ἐπὶ τὸ 7 καὶ λαμβάνω $= 70$.

Ἐπειδὴ τέλος εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτετάρτου $\left(\text{ἐπιτέταρτον} = \text{ἓν καὶ ἓν τέταρτον, δηλ. } 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}\right)$ τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{4}$ εἶναι 9, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν 70 ἐπὶ 9 καὶ ἔχω $= 630$. Τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $x + y + z + u$ τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ εὕρωμεν.

Ἐπειδὴ τώρα εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἡμιολίου $\left(= \frac{3}{2}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὸ $\frac{3}{2}(x + y)$ καὶ ἔχομεν

$$x + y + \frac{3}{2}(x + y) = \frac{3}{2}(z + u) + \frac{3}{2}(x + y),$$

ἢ $\frac{5}{2}(x+y)=\frac{3}{2}(x+y+z+u)$,

ἢ $5(x+y)=3(x+y+z+u)$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $x+y$ λαμβάνομεν

$$x+y=\frac{3\,.\,630}{5}=\frac{1890}{5}=378.$$

Ἐπειδὴ πάλιν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτρίτου $\left(=\frac{4}{3}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) τὸ $\frac{4}{3}(x+z)$ καὶ ἔχομεν

$$x+z+\frac{4}{3}(x+z)=\frac{4}{3}(y+u)+\frac{4}{3}(x+z),$$

ἢ $\frac{7}{3}(x+z)=\frac{4}{3}(x+y+z+u)$,

ἢ $7(x+z)=4(x+y+z+u)$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $x+z$ ἔχομεν

$$x+z=\frac{4\,.\,630}{7}=\frac{2520}{7}=360.$$

Ἐπειδὴ τέλος εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτετάρτου $\left(=\frac{5}{4}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) τὸ $\frac{5}{4}(x+u)$ καὶ ἔχομεν

$$x+u+\frac{5}{4}(x+u)=\frac{5}{4}(y+z)+\frac{5}{4}(x+u),$$

ἢ $\frac{9}{4}(x+u)=\frac{5}{4}(x+y+z+u)$,

ἢ $9(x+u)=5(x+y+z+u)$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ὡς πρὸς $x+u$, ἔχομεν

$$x+u=\frac{5\,.\,630}{9}=\frac{3150}{9}=350.$$

Ἤτοι εὕρομεν : 4..... $x+y=378$

5..... $x+z=360$

6..... $x+u=350$

καὶ $x+y+z+u=630.$

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν 4 τούτων ἐξισώσεων εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις κατὰ τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα εἶναι

$$x=\frac{(378+360+350)-630}{2}=229.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐξισώσεις (4),)5), (6) τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ x εὑρίσκομεν $y=149$, $z=131$, $u=121$. Εἶναι λίαν ἐνδιαφέρον νὰ ἑρμηνευθῇ ἡ πυθαγορικὴ ἐπινόησις, διατί, ὅπως π. χ. εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, ὅταν πρόκειται περὶ ἡμιολίου καὶ ὁ πρῶτος παρέχων ἥμισυ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2 καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{3}{2}$ εἶναι $=5$, πολλαπλασιάζομεν τὸ 5 ἐπὶ 2. Εἰς τὴν ἐπινόησιν αὐτὴν κ.ἑ. στηρίζεται ἡ λύσις τοῦ διοφαντικοῦ συστήματος ἡ ὁποία μαρτυρεῖ σαφῶς περὶ μεγίστης ἀνθήσεως ἐν Ἑλλάδι τῆς ἐπιστήμης τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν.

Δὲν εἶναι δὲ ἄδικον, ἂν ἀποδώσωμεν τὴν ἐπινόησιν αὐτὴν εἰς τὸν Θυμαρίδαν, ἐφ᾿ ὅσον ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος γίνεται τελικῶς διὰ τοῦ ὁμωνύμου ἐπανθήματος.

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω διοφαντικοῦ συστήματος.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) τοῦ 2ου προβλήματος καὶ ἔχομεν 4.....$3x+y+z+u=\frac{3}{2}(z+u)+\frac{4}{3}(y+u)+\frac{5}{4}(y+z)$.

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν

$$2x+z+u=\frac{4}{3}(y+u)+\frac{5}{4}(y+z).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς 2x λαμβάνομεν

5..... $$2x=\frac{4}{3}(y+u)+\frac{5}{4}(y+z)-(z+u).$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀπὸ τὴν (4) καὶ ἔχομεν

$$x+y+z+u=\frac{3}{2}(z+u)+(z+u),$$

ἢ 6..... $$x+y+z+u=\frac{5}{2}(z+u).$$

Ἐργαζόμενοι καθ᾿ ὅμοιον τρόπον λαμβάνομεν

7..... $$x+y+z+u=\frac{7}{3}(y+u)$$

8..... $$x+y+z+u=\frac{9}{4}(y+z).$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6), (7), (8) λαμβάνομεν

9..... $2(x+y+z+u)=5(z+u)$

10..... $3(x+y+z+u)=7(y+u)$

11..... $4(x+y+z+u)=9(y+z)$

Ἐὰν καλέσωμεν E τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν 5, 7, 9 = 315, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἄθροισμα $x+y+z+u=E$ (=315), ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9), (10), (11) λαμβάνομεν

$$2E=5(z+u)$$
$$3E=7(y+u)$$
$$4E=9(y+z)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας ὡς πρὸς $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ ἔχομεν

$$z+u=\frac{2E}{5}$$

$$y+u=\frac{3E}{7}$$

$$y+z=\frac{4E}{9}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) ἔχομεν :

$$x+y=\frac{3}{2}\cdot\frac{2E}{5}$$

$$x+z=\frac{4}{3}\cdot\frac{3E}{7}$$

$$x+u=\frac{5}{4}\cdot\frac{4E}{9},$$

ἢ

12..... $x+y=\frac{3E}{5}$

13..... $x+z=\frac{4E}{7}$

14..... $x+u=\frac{5E}{9}$. Ἔχομεν δὲ λάβει

15..... $x+y+z+u=E\ (=315)$.

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν ἐξισώσεων (12), (13), (14), (15) εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου. Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα λαμβάνομεν

$$x=\frac{E\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\right)-E}{\nu-2}.$$

Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων $\nu=4$ καὶ $E=315$,

$$x=\frac{315\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\right)-315}{2}=\frac{229}{2}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμητὴς 229 εἶναι περιττὸς ἀριθμός, διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ E τὸ $2E=630$, ὁπότε ἔχομεν

$$x=\frac{\frac{630.544}{315}-630}{2}=\frac{1088-630}{2}=\frac{458}{2}=229.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (12), (13), (14) ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ τοῦ 229 καὶ τὸ E διὰ $2E=630$ εὑρίσκομεν $y=149$, $z=131$, $u=121$.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΕΛΕΙΟΙ, ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ, ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ. Η $\sqrt{2}$

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ Δ' — ΤΕΥΧΟΣ Β' 1952

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
1952

ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΕΛΕΙΟΙ, ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ, ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ. Η $\sqrt{2}$

1. Οἱ Πυθαγόρειοι διέκρινον τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἐλλιπεῖς, τελείους, ὑπερτελεῖς καὶ φιλίους. Κατὰ τὸν Νικόμαχον (Ἀριθ. Εἰσαγωγὴ R. Hoche, σ. 37 κ. ἑ. Teubner, 1866) ἐλλιπεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ μέρη προστιθέμενα εἶναι μικρότερα τοῦ ὅλου. Π. χ. ὁ 8 εἶναι ἐλλιπής, διότι πάντα τὰ δυνατὰ πηλίκα αὐτοῦ, λαμβανόμενα διὰ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν του (πλὴν τῆς μονάδος βεβαίως) καὶ προστιθέμενα δὲν δίδουν 8. Ὡς $8:8=1$, $8:4=2$, $8:2=4$, ἤτοι $1+2+4=7<8$. Ἐπίσης ὁ 14 εἶναι ἐλλιπής. Διότι $14:14=1$, $14:7=2$, $14:2=7$, ἤτοι $1+2+7=10<14$. Ὑπερτελεῖς ἀριθμοὶ κατὰ τὸν αὐτὸν συγγραφέα εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ μέρη προστιθέμενα δίδουν ἄθροισμα μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ 12 εἶναι ὑπερτελής, διότι $12:12=1$, $12:6=2$, $12:4=3$, $12:3=4$, $12:2=6$, ἤτοι $1+2+3+4+6=16>12$.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του (VII, ὁρ. 23). Π. χ. ὁ 6 εἶναι τέλειος, διότι $6:6=1$, $6:3=2$, $6:2=3$, ἤτοι $1+2+3=6$. Ἐπίσης ὁ 28 εἶναι τέλειος διότι, $28:28=1$, $28:14=2$, $28:7=4$, $28:4=7$, $28:2=14$ ἤτοι $1+2+4+7+14=28$. Καὶ ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, ἐπαναλαμβάνουν τὰ τοῦ Εὐκλείδου περὶ τῶν τελείων ἀριθμῶν, σημειοῦται δέ, ὅτι ὁ πρῶτος τέλειος ὁ 6 ἐκαλεῖτο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ Γάμος.

Τὸ 36ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου διαλαμβάνει 1) τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἱκανῆς **ἁπλῶς** συνθήκης, ἵνα ἀριθμός τις εἶναι τέλειος καὶ 2) τὸν τρόπον τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ τελείου ἀριθμοῦ, ὅταν πληροῦται ἡ ἐν λόγῳ συνθήκη. Κατὰ ταῦτα θεωροῦμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον:

$$1,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10},\ 2^{11},\ 2^{12},\ 2^{13},$$

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ 8192,$$

τῆς ὁποίας σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα. Ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον τοῦ μερικοῦ τούτου ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος, τῆς τάξεως τῶν προσθετέων λογιζομένης ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Π.χ.:

$\sigma_1 = 1$

$\sigma_2 = 1+2=3$. Ὁ 3 εἶναι πρῶτος· ἄρα $3\times 2=6$, τέλειος.

$σ_3=1+2+4=7$. Ὁ 7 εἶναι πρῶτος· ἄρα $7\times4=28$, τέλειος.

$σ_4=1+2+4+8=15$. Ὁ 15 δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα δὲν δίδεται τέλειος ἀριθμός.

$σ_5=1+2+4+8+16=31$. Ὁ 31 εἶναι πρῶτος· ἄρα $31\times16=496$, τέλειος.

$σ_6=1+2+4+8+16+32=63$. Ὁ 63 δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα δὲν δίδεται τέλειος.

$σ_7=1+2+4+8+16+32+64=127$. Ὁ 127 εἶναι πρῶτος· ἄρα $127\times64=$ $=8128$, τέλειος.

$σ_8=127+128=255$. Δὲν δίδεται τέλειος (: 5).

$σ_9=255+256=511$. Δὲν δίδεται τέλειος (: 7).

$σ_{10}=511+512=1023$. Δὲν δίδεται τέλειος (: 3).

$σ_{11}=1023+1024=2047$. Δὲν δίδεται τέλειος (: 23).

$σ_{12}=2047+2048=4095$. Δὲν δίδεται τέλειος (: 3, : 5).

$σ_{13}=4095+4096=8191$. Ὁ 8191 εἶναι πρῶτος, ἄρα $8191\times4096=$ $=33.550.336$ εἶναι τέλειος. Ὁ γενικὸς τύπος λήψεως τοῦ τελείου ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ ταῦτα $σ_ν\cdot 2^{ν-1}$ ἢ $(2^{ν}-1)\cdot 2^{ν-1}$, ὅταν ὁ $σ_ν$ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς (ν= 2,3...).

Ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν Ἀριθμ. Εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάχου (1) γράφει, ὅτι ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἷς τέλειος ἀριθμός, ἀπὸ 11—100, 101—1000, 1001—10000 ἀνὰ εἷς. Ἐὰν ἀπὸ βαθμοῦ τινος μυριάδος διαπιστωθῇ τέλειος ἀριθμὸς θὰ εἶναι μόνον εἷς. Ἐὰν δηλ. μεταξὺ 10^4+1 ἕως 10^8, 10^8+1 ἕως 10^{12} κλπ. διαπιστωθῇ ὅτι ὑπάρχει τέλειος ἀριθμὸς θὰ εἶναι μόνον εἷς. Ἡ παρατήρησις τοῦ Ἰαμβλίχου εἶναι ἀληθὴς μέχρι τοῦ 10^8, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ὑπολογίσει καὶ τὸν πέμπτον τέλειον ἀριθμόν. Πλὴν τούτων προσθέτει ὁ Ἰάμβλιχος, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῶν τελείων ἀριθμῶν θὰ λήγῃ εἰς 6 ἢ 8. Τοῦτο εἶναι ἀληθὲς ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν μέχρι σήμερον ὑπολογισθέντων 10 τελείων ἀριθμῶν. Ὁ δέκατος τέλειος ἀριθμὸς ὑπελογίσθη τῷ 1912 ὑπὸ τοῦ R. Powers καὶ εἶναι ὁ $2^{88}(2^{89}-1)$ (Bull. Amer. Math. Soc. 1912, σ. 162) (2). Φανερώνει ὅμως ἡ τελευταία παρατήρησις τοῦ Ἰαμβλίχου ὅτι θὰ ἐγνώριζον περὶ τούτου κριτήριον οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τὸ ὁποῖον δὲν ἐσώθη.

Ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν (η΄. 546 Β κ. ἑ.) γράφει «Ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δὲ... ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν,...». Πρόται περὶ τοῦ περιφήμου γεωμετρικοῦ ἀριθμοῦ (3). Οὗτος δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐνταῦθα. Σημειοῦμεν ὅμως ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ περιλαμβάνων τὴν περίοδον τοῦ θείου γεννητοῦ, ὁ κατὰ Adam 12.960.000, δὲν εἶναι τέλειος, ἐν ᾧ κατὰ τὸν Θέωνα τὸν

1) Pistelli, 1894 σ. 33, Teubner.

2) T. Heath, A history of Greek mathematics, I, σελ. 75, Oxford.

3) Κ. Γεωργούλη, Πλάτωνος Πολιτεία σ. 503—515, 1939.

Σμυρναῖον ὁ 3 καὶ 10 δι' εἰδικοὺς λόγους ἐκαλοῦντο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων τέλειοι (E. Hiller 1878, σ. 46, Teubner).

Τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ἑρμηνεύεται ὡς ἑξῆς : νοεῖται τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 5. Κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα ἡ διάμετρος (διαγώνιος) τοῦ τετραγώνου εἶναι ($\delta^2=2\,.\,5^2$) ἡ $\delta=\sqrt{50}$. Αὕτη εἶναι ἄρρητος (ἀσύμμετρος). Διὰ νὰ γίνῃ ῥητὴ πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ἀπὸ τὸ 50, ὅτε εἶναι $\delta=\sqrt{50-1}=7$. Ἐὰν ἀφαιρεθοῦν 2 μονάδες ἀπὸ τὸ 50 ἔχομεν $\delta=\sqrt{50-2}=\sqrt{48}$, διάμετρον ἄρρητον. Φρονοῦμεν, παρὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Adam, ὅτι τὸ «ἀρρήτων δὲ δυοῖν», ἐτέθη πρὸς ἀκριβέστερον προσδιορισμὸν τοῦ «ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων». Ὁπωσδήποτε θεωρεῖται βέβαιον ὅτι ὁ Πλάτων ἀρύεται τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν καὶ κυρίως ἐκ τοῦ συναφοῦς πρὸς τούτους τύπου $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2\mp1$, ὅπου α παριστᾷ τὴν πλευρὰν τετραγώνου καὶ δ τὴν διάμετρον (διαγώνιον) αὐτοῦ ($\nu=1, 2, 3\ldots$), ὡς θὰ καταδειχθῇ κατωτέρω.

Ὁ Πρόκλος ὄχι μόνον ῥητῶς ἀναφέρει τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ ὑπεδήλωσε καὶ τὴν συναφῆ γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν, κατὰ τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Πολιτείαν (τόμ. II. σ. 24 κ. ἑ. καὶ 393 κ.ἑ. Kroll. Ἀνάπτυξις τῆς προτάσεως ὑπὸ Hultsch). Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τοὺς ὁποίους ἐγνώριζεν ὁ Πλάτων, εἶναι ἡ πρώτη θεμελίωσις τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῶν ὁρίων, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τοῦ σημερινοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, καὶ ἡ πρώτη θεμελίωσις τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ καὶ ἡ σύγχρονος μαθηματικὴ ἐπιστήμη.

Ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου ἢ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καλεῖται παρὰ τοῖς ἀρχαίοις διάμετρος. Φαίνεται δ' ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς θεωρήσεως τετραγώνων ἢ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον. Ἐπεκράτησε δὲ γενικῶς νὰ ὀνομάζεται ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου, διάμετρος. Κατὰ τὴν ὀνομασίαν ταύτην διάμετρος νοεῖται ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Οἱ πλευρικοὶ ἀριθμοὶ ἀφοροῦν εἰς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰς πλευρὰς τετραγώνων, ἐν ᾧ οἱ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀφοροῦν εἰς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰς διαγωνίους τετραγώνων. Κατωτέρω διατηροῦμεν τὸν ὅρον διάμετρος ἀντὶ διαγώνιος τετραγώνου.

2. Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (E. Hiller, σ. 42—45, Teubner, 1878) οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι 1 καὶ ἡ διάμετρος ἐπίσης 1. Τοῦτο ἐκ πρώτης ὄψεως εἶναι ἀκατανόητον, διότι πῶς εἶναι δυνατὸν ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ; Καὶ ἐν τούτοις εἶναι ἀληθές, καὶ ἡ μαθηματικὴ αὕτη ἀλήθεια θὰ καταφανῇ κατωτέρω. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν δεύτερον πλευρικὸν ἀριθμόν, προσθέτομεν τοὺς προηγουμένους, πλευρικὸν καὶ διαμετρικὸν ἀριθμούς, ὅτε θὰ εἶναι $1+1=2$. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν δεύτερον διαμετρικὸν ἀριθμὸν λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον τοῦ προηγουμένου πλευρικοῦ ἀριθμοῦ

καὶ εἰς τὸ διπλάσιον τοῦτο προσθέτομεν τὸν προηγούμενον διαμετρικὸν ἀριθμόν, ὅτε θὰ εἶναι $2 . 1+1=3$. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ὁ τρίτος πλευρικὸς ἀριθμὸς εἶναι $2+3=5$, καὶ ὁ τρίτος διαμετρικὸς ἀριθμὸς $2 . 2+3=7$. Ὁ τέταρτος πλευρικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι $5+7=12$ καὶ ὁ τέταρτος διαμετρικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι $2 . 5+7=17$. Ἀναγράφομεν εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα τοὺς κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον σχηματιζομένους πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς.

Τετράγωνα	Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1ον Τετράγωνον	1	1
2ον »	$1+1=2$	3 $(=2 \cdot 1+1)$
3ον »	$2+3=5$	7 $(=2 \cdot 2+3)$
4ον »	$5+7=12$	17 $(=2 \cdot 5+7)$
5ον »	$12+17=29$	41 $(=2 \cdot 12+17)$
6ον »	$29+41=70$	99 $(=2 \cdot 29+41)$
7ον »	$70+99=169$	239 $(=2 \cdot 70+99)$
8ον »	$169+239=408$	577 $(=2 \cdot 169+239)$

Πόθεν πηγάζει ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀκόμη ἄγνωστον. Εἶναι προφανές, ὅτι κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν ἐπ' ἄπειρον πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, νὰ κατασκευάζωμεν δηλ. ἐπ ἄπειρον τετράγωνα, κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διάμετροι νὰ μετρῶνται (ἢ νὰ παρίστανται) ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Τοῦτο δὲ ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν, διότι ἐνταῦθα πρόκειται περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2 καὶ τῆς ἐνδείξεως ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμός. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὁ λόγος τῆς διαμέτρου (διαγωνίου) τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Ὁ λόγος δὲ αὐτὸς εἶναι ἡ $\sqrt{2}$. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμετρικῶν καὶ πλευρικῶν ἀριθμῶν θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1 = \lambda_1$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000\ldots = \lambda_2$$

$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000\ldots = \lambda_3$$

$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666\ldots = \lambda_4$$

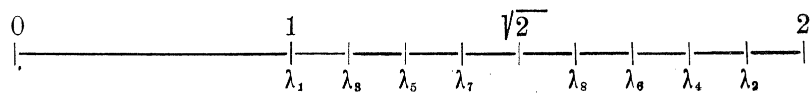
$$\frac{41}{29} = 1{,}4137931\ldots = \lambda_5$$

$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857\ldots = \lambda_6$$

$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011\ldots = \lambda_7$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156\ldots = \lambda_8$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι οἱ λόγοι, πρῶτος, τρίτος, πέμπτος, ἕβδομος... ($2\nu \pm 1$, ν ἀκέραιος) αὐξάνουν συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ λόγοι, δεύτερος, τέταρτος, ἕκτος, ὄγδοος... 2ν, ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ νυοστὸς περιττὸς λόγος καὶ ὁ νυοστὸς ἄρτιος λόγος, ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον θὰ συμπέσουν εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος τὸν ἀριθμὸν 2, ὡς ἐσυνήθιζον νὰ παριστοῦν τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος τούτου λάβωμεν τ' ἀντίστοιχα τμήματα τὰ ὁποῖα παριστοῦν οἱ ἀνωτέρω λόγοι θὰ ἔχωμεν



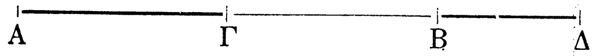
(ΣΗΜ. Δὲν ἐτηρήθη ἡ κλῖμαξ κατὰ τὴν παράστασιν τῶν λόγων διὰ νὰ εἶναι αὕτη καταφανής).

Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἐγκιβωτίζεται ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$. Διότι, ἡ πρώτη ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ δευτέρα ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ τὰ φράγματα ταῦτα συμπίπτουν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$, ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ὁμιλοῦν περὶ φραγμάτων ἀκολουθιῶν, οὔτε περὶ ἐγκιβωτισμοῦ (Intervallschachtelung) τῆς $\sqrt{2}$, οὔτε ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμός. Δηλαδὴ δὲν χρησιμοποιοῦν τὴν ὀνοματολογίαν αὐτήν, ἐν ᾧ ὅμως παρέχουν τὴν ἀπόδειξιν καὶ τοῦτο εἶναι τὸ θεμελιῶδες καὶ ὄχι ἡ ὀνοματολογία. Ὁ ἀνωτέρω ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τῆς $\sqrt{2}$ θεωρεῖται εὕρημα τῶν πρώτων πυθαγορείων χρόνων. Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς διέσωσεν θαυμασίαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, μὴ τελείου τετραγώνου, διὰ τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων, ἡ ὁποία ἀποδίδεται βασίμως κατὰ τὰ μέχρι σήμερον γνωστά, εἰς τὸν διάσημον μαθηματικὸν Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον.

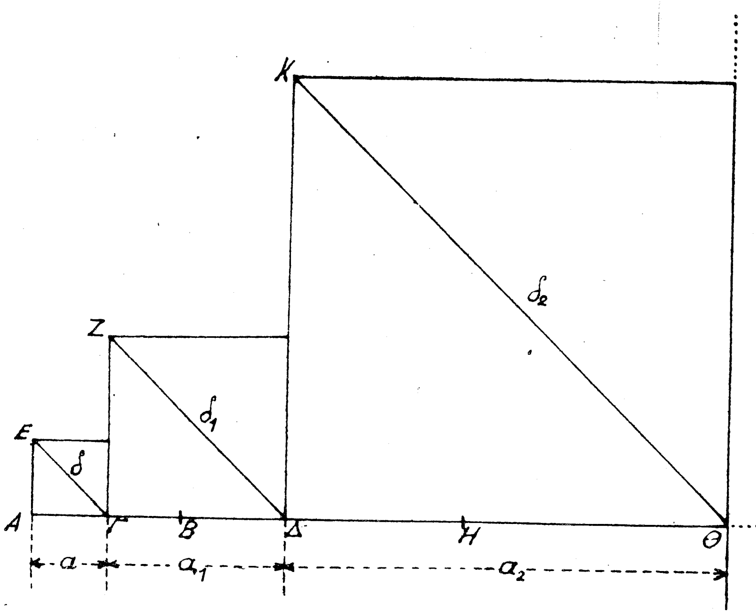
Ἡ εὔλογος ἀπορία περὶ τοῦ πῶς εἶναι δυνατὸν ἡ πλευρὰ τετραγώνου καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ ἰσοῦνται ἑκάστη πρὸς τὴν μονάδα διασκεδάζεται ὑπὸ τοῦ Θέωνος διὰ τῆς αἰτιολογίας ὅτι ἡ μονὰς «ὥσπερ πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνώτατον καὶ σπερματικὸν λόγον ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται». Ἐνέχει δηλ. ἐν ἑαυτῇ ἡ μονὰς δυναμικῶς τὴν ἰδιότητα νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου, ὅπως τὸ σπέρμα οἱουδήποτε φυτικοῦ ἢ ζωϊκοῦ ὀργανισμοῦ ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ μετέπειτα ζῶντος ὀργανισμοῦ. Ὅμως ἐνταῦθα πρόκειται περὶ καθαρᾶς μαθηματικῆς προτάσεως, τὴν ὁποίαν ὁ Θέων παρομοιάζει πρὸς ἕνα βιολογικὸν νόμον, καὶ ἥτις, φρονοῦμεν, εἶναι ἡ πρώτη πυθαγόρειος μαθηματικὴ πρότασις τῆς θεωρίας τῶν ὁρίων. Ἡ τοιαύτη γνώμη ἡμῶν, στηρίζεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ὑποδηλουμένη πρότασις συνδέεται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν.

3. Κατὰ τὴν ὁμολογίαν τοῦ Πρόκλου, τὴν ὁποίαν μνημονεύομεν ἀνωτέρω, ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου τοῦ σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν στηρίζεται εἰς τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖα τις ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις ἡ ΒΔ, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις



$(ΑΔ)^2+(ΒΔ)^2=2(ΑΓ)^2+2(ΓΔ)^2$ (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν : Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία 1. 2. 3. 4, Ε. Σταμάτη, 1952). Ἔστω λοιπὸν τετράγωνον πλευρᾶς ΑΓ καὶ διαμέτρου ΓΕ (σχ. 1). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν



Σχ. 1.

τμῆμα ΓΒ ἴσον πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ τετραγώνου τὴν ΓΕ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΓΔ κατασκευάζομεν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔστω ΔΖ. Λέγω, ὅτι ἡ διάμετρος ΔΖ ἰσοῦται μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ μνημονευθὲν 10ον θεώρημα τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων εἶναι :

$(ΑΔ)^2+(ΒΔ)^2=2(ΑΓ)^2+2(ΓΔ)^2$ (1). Ἐπειδὴ ἐλήφθη ΒΔ=ΓΕ, εἶναι δὲ ΓΕ ἡ διάμετρος τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΑΓ, ἕπεται κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα ὅτι $(ΓΕ)^2=2(ΑΓ)^2$, καὶ συνεπῶς $(ΒΔ)^2=2(ΑΓ)^2$. Ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (1) τὰ εὑρεθέντα ἴσα, λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2=2(ΓΔ)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα ΑΔ=ΔΖ. Ἡ ΑΔ ὅμως ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ. Εἶναι δὲ ΑΓ=ΓΒ καὶ ΒΔ=ΓΕ ἡ διάμετρος τοῦ δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς ΑΓ. Ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν ταύτην α καὶ τὴν διάμετρον ΓΕ=δ θὰ ἔχωμεν :

	πλευρὰ	διάμετρος
δοθέντος τετραγώνου	α	δ
πρώτου νέου »	$\alpha+\delta=\alpha_1$	$2\alpha+\delta=\delta_1$

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν τοῦ νέου τετραγώνου τὴν ΓΔ κατ' ἴσην ἀπόστασιν πρὸς αὐτήν, τὴν ΔΗ. Προεκτείνομεν τὴν ΔΗ λαμβάνοντες τμῆμα ΗΘ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ νέου τετραγώνου, τὴν ΔΖ. Ἐφαρμόζοντες τώρα πάλιν τὸ 10ον, ὡς ἄνω, θεώρημα ἔχομεν $(ΓΘ)^2+(ΗΘ)^2=2(ΓΔ)^2+2(ΔΘ)^2$ (2). Ἐπειδὴ ΗΘ=ΔΖ ἐκ κατασκευῆς καὶ $(ΔΖ)^2=2(ΓΔ)^2$, ἄρα $(ΗΘ)^2=2(ΓΔ)^2$. Ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (2) τὰ ἴσα λαμβάνομεν $(ΓΘ)^2=2(ΔΘ)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα ΓΘ=ΘΚ. Ἡ ΓΘ ὅμως ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ΓΔ+ΔΗ+ΗΘ. Εἶναι δὲ ΓΔ=ΔΗ, ΗΘ=ΔΖ. Καὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $(\alpha+\delta)+(\alpha+\delta)+(2\alpha+\delta)$. Ἐὰν καλέσωμεν $\alpha+\delta=\alpha_1$, $2\alpha+\delta=\delta_1$ καὶ ΘΚ$=\delta_2$ θὰ ἔχωμεν $\delta_2=2\alpha_1+\delta_1$. Ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου ἡ ΔΘ=ΔΗ+ΗΘ. Εἶναι δὲ ΔΗ$=\alpha+\delta$ καὶ ΗΘ$=2\alpha+\delta=\delta_1$, ἤτοι ΔΘ$=\alpha_2=\alpha_1+\delta_1$. Ἀναγράφο-κατωτέρω ὅλας τὰς εὑρεθείσας σχέσεις.

	πλευρὰ	διάμετρος
δοθέντος τετραγώνου	α	δ
πρώτου νέου τετραγώνου	$(\alpha+\delta)=\alpha_1$	$\delta_1\ (=2\,.\,\alpha+\delta)$
δευτέρου » »	$(\alpha_1+\delta_1)=\alpha_2$	$\delta_2\ (=2\,.\,\alpha_1+\delta_1)$
τρίτου » »	$(\alpha_2+\delta_2)=\alpha_3$	$\delta_3\ (=2\,.\,\alpha_2+\delta_2)$
νυοστοῦ νέου τετραγώνου	$(\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1})=\alpha_\nu$	$\delta_\nu\ (=2\,.\,\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1})$

Ἐὰν $\alpha=1$ καὶ $\delta=1$, τότε λαμβάνομεν τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς ὡς μᾶς δίδει τούτους ἀνωτέρω ὁ Θέων.

4. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις εἶναι γενικὴ καὶ ἄσχετος πρὸς τὴν λῆψιν $\alpha=1$, $\delta=1$. Ἡ εἰδικὴ τιμὴ $\alpha=1$, $\delta=1$ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$, ὅταν σχηματισθοῦν οἱ λόγοι $\delta:\alpha$, $\delta_1:\alpha_1$, $\delta_2:\alpha_2 \ldots\ldots \delta_\nu:\alpha_\nu$ καὶ τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ τύπου $\delta_\nu^2=2.\alpha_\nu^2\mp1$ ἐκ τοῦ ὁποίου, ὡς φρονοῦμεν, ὁ Πλάτων ἀρύεται τὴν διατύπωσιν τοῦ συναφοῦς χωρίου τῆς Πολιτείας, τὸ ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἐν ἀρχῇ. Καὶ πράγματι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον διαδοχικῶς τὰς τιμὰς α_ν, δ_ν ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ Θέωνος λαμβάνομεν

$$1^2=2\,.\,1^2-1=1$$
$$3^2=2\,.\,2^2+1=8+1=9$$

$7^2=2.5^2-1=50-1=49$ (τὸ χωρίον τῆς Πολιτείας)
$17^2=2.12^2+1=288+1=289$
$41^2=2.29^2-1=1682-1=1681$
$99^2=2.70^2+1=9800+1=9801$ κλπ.

Ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τοῦ τύπου $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2\mp1$ ἢ $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2+(-1)^\nu$ δὲν σώζεται, ἀλλ' ἀληθεύει οὗτος διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ὅτα $\alpha=1$ καὶ $\delta=1$ κλπ., ὡς φαίνεται ἀνωτέρω.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ α_ν^2 θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu^2}=2\mp\dfrac{1}{\alpha_\nu^2}$. Ἐὰν τὸ $\nu\to\infty$ τότε ὁ λόγος $\dfrac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu^2}=2$ καὶ συνεπῶς $\dfrac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}=\sqrt{2}$.

Πῶς οἱ Πυθαγόρειοι ὡδηγήθησαν εἰς ταῦτα παραμένει ἄγνωστον (1).

5. Ἀπομένει νὰ αἰτιολογηθῇ, ἡ διατύπωσις τοῦ Θέωνος ὅτι ἡ μονὰς ἐγκλείει ἐν ἑαυτῇ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι λόγος διαμέτρου πρὸς πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου. Καὶ πράγματι, τοῦτο φαίνεται, ἂν κατασκευάζωμεν ἐπ' ἄπειρον τετράγωνα ἀκολουθοῦντες τὴν ἀντίστροφον πορείαν ἐκείνης τὴν ὁποίαν ὑποδεικνύει ὁ Πρόκλος καὶ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν ἀνωτέρω. Πρὸς τοῦτο, ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον διαμέτρου ΘΚ (σχ. 1). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ οὕτως, ὥστε ΘΔ+ΔΓ=ΘΚ. (Μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα ΘΚ γράφομεν κύκλον). Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔστω ΔΖ. Εἶναι φανερόν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τοῦ νέου τετραγώνου ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΘΚ=ΘΓ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς δηλ. τὴν πλευρὰν ΘΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΘΔ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ, διότι ἂν ἡ ΘΔ ἦτο ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΘΚ, τότε 2ΘΔ=ΘΚ, δηλ. αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογ. τριγώνου ΘΔΚ θὰ ἦσαν ἴσαι πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου τούτου τὴν ΘΚ, ὅπερ ἄτοπον· διότι κατὰ τὸ 20ον θεώρημα τοῦ Ι τῶν Στοιχείων 2ΘΔ>ΘΚ. Ὥστε ΔΓ<ΘΔ. Προεκτείνομεν τὴν ΔΓ καὶ λαμβάνομεν εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς τμῆμα ΓΑ οὕτως, ὥστε ΔΓ+ΓΑ=ΔΖ (μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΖ γράφομεν κύκλον). Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔστω ΓΕ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἐνταῦθα ἡ πλευρὰ ΓΑ εἶναι μικροτέρα τῆς πλευρᾶς ΔΓ. Συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων, μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ἡ λαμβανομένη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος

1) Γεωμετρικὴν κατασκευὴν ἐξ ἧς συνάγεται ὁ τύπος $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2\mp1$ ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν ὁ μηχανικὸς τῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος κ. Κωνστ. Παπαδάκης, ἀσχολούμενος ἀπὸ ἐτῶν μὲ τοὺς πυθαγορείους ἀριθμούς. Ἐπειδὴ οὗτος συνεχίζει τὴν ἔρευναν, πιθανῶς νὰ δημοσιεύσωμεν τὰ πορίσματα ταῦτα εἰς τὸ προσεχὲς τεῦχος, ἐφ' ὅσον ὁ κ. Παπαδάκης θὰ ἔχῃ καταλήξει εἰς ὁριστικὰ συμπεράσματα.

(εὐθείας) ὁσονδήποτε μικρᾶς. Ὄχι δὲ μόνον τοῦτο, ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἤτοι $\delta_\nu - \alpha_\nu = 0$ ($\nu \to \infty$). Συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Τότε ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$, καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ἐλαχίστην ἀκεραίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\delta_\nu = 1$ καὶ $\alpha_\nu = 1$. Ἰδοὺ λοιπὸν πῶς ἑρμηνεύεται ἡ διατύπωσις τοῦ Θέωνος ὅτι ἡ μονὰς «κατὰ τὸν σπερματικὸν λόγον» δηλ. δυνάμει, ἐγκλείει ἐν ἑαυτῇ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι λόγος πλευρᾶς καὶ διαμέτρου τετραγώνου.

6. Τὸ συμπέρασμα ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι ὅτι διὰ τῆς γεωμετρίας ὑπολογίζεται ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς $\sqrt{2}$ καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος καὶ ὅτι ὑπάρχει τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον. Ὅθεν δικαίως ὁ Πλάτων γράφει εἰς τὴν Ἐπινομίδα (930 D) ὅτι τὴν ἐπιστήμην αὐτήν, ἥτις κατορθώνει τοιαῦτα ἐπιτεύγματα «καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν (δηλ. μέτρησιν τῆς Γῆς) τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν». Δηλαδὴ ἡ ἐξομοίωσις τῆς $\sqrt{\alpha}$, ὅταν τὸ α δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον (τῶν ἀσυμμέτρων δηλ.), πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, δὲν εἶναι ἀνθρώπινον θαῦμα ἀλλά, δύναται νὰ γίνῃ φανερόν, ὅτι εἶναι γεγονὸς θεῖον, δι' ἐκεῖνον ὅστις δύναται νὰ τὸ ἐννοήσῃ. Ἐκεῖνον δηλ. ὅστις δύναται νὰ ἐννοήσῃ τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται ἡ ἔννοια τῶν ὁρίων καὶ τὰς (ἀπολεσθείσας) ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}$, τοὺς ὁποίους μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ «Θεαίτητος» (147 d—e), ἰδίως δὲ τὸ θεώρημα τοῦ Ἀρχύτου περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου διὰ τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων (1). Τελευτῶντες σημειοῦμεν συντόμως ἑρμηνείαν τῆς δευτέρας ἀποδείξεως ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (Στοιχείων Χ, παράρτημα, 27.2). Ἔστω ὅτι ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς πλευρᾶς α καὶ τῆς διαμέτρου δ ἑνὸς τετραγώνου· ὅτι δηλ. ὁ λόγος $\delta : \alpha$ εἶναι σύμμετρος ἀριθμός. Καὶ ὅτι τὸ μέτρον τοῦτο ἔστω ἀπειροελαχίστως μικρόν, ὅμως σταθερὸν $=\varepsilon$. Τότε κατασκευάζοντες διαδοχικῶς μικρότερα τετράγωνα, ὡς ἀνωτέρω, θὰ φθάσωμεν εἰς στιγμὴν καθ' ἣν ἡ διάμετρος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου, ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ σταθεροῦ μήκους ε καὶ οὗτοι ὡς καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν νὰ μετρῶνται ὑπὸ τούτου. Οἱ μικρότεροι δηλ. ἀριθμοὶ νὰ μετρῶνται ὑπὸ τοῦ μεγαλυτέρου· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ λόγος $\delta : \alpha = \sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

1) Ἴδε Εἰσαγωγὴν «Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν», Τόμ. ΙΙ, Ε. Σταμάτη, 1953 (ὑπὸ ἐκτύπωσιν) καὶ Κ. Βουρβέρη 1) «Ἱστορικαὶ γνώσεις τοῦ Πλάτωνος» μέρ. Α', Βαρβαρικά, 2) Ἄρθρον: Νόμοι Πλάτωνος εἰς λεξικὸν «Ἥλιος».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ V. VI. VII. VIII. IX.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ — ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ II

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1953

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖ ὡς μαθηματικὸν ἀντικείμενον τὴν ἔννοιαν «μέγεθος» καὶ ὄχι τὴν ἔννοιαν «ἀριθμός».

Ἡ διάκρισις τῆς ἐννοίας « μέγεθος » ἀπὸ τῆς ἐννοίας « ἀριθμός » ὀφείλεται πιθανῶς εἰς τοὺς Πυθαγορείους, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, ἀπέδιδον εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἰδιότητας καὶ ἐννοίας διαφόρους τῶν σημερινῶν. Τὴν διάκρισιν τῶν μαθηματικῶν τούτων ἀντικειμένων διατηρεῖ καὶ ὁ Πλάτων καὶ οἱ ἐν τῇ Ἀκαδημείᾳ μαθηματικοί. Ἐκ τῶν διαλόγων ὅμως τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀριστοτέλους σχηματίζεται ἡ ἀντίληψις, ὅτι ἡ διάκρισις αὕτη δὲν ἔχει σχέσιν πρὸς τὰ ὑπό τινων νεωτέρων ὑποστηριζόμενα, καθ' ἃ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ τοὐναντίον ἀνεκάλυψαν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἀντίθετον ἐν τούτοις ἀντίληψιν διατυποῦσιν οἱ Γερμανοὶ μαθηματικοὶ Hultsch καὶ Stolz [1] καὶ ὁ Δανὸς μαθηματικὸς Zeuthen [2]. Ὁ Hultsch εἰς τὸ περισπούδαστον ἄρθρον αὐτοῦ περὶ Εὐκλείδου, τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν Ἐγκυκλοπαιδείαν Pauly-Wissowa, γράφει, ὅτι ὡς ὁμογενῆ μεγέθη νοοῦνται καὶ οἱ ἀριθμοὶ (als homogene Groessen sind auch die Zahlen anzusehen § 16). Καίτοι τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἔπρεπε νὰ διαπραγματευθῶμεν κατὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ τρίτου τόμου, τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ δέκατον βιβλίον τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων, ἐν τούτοις ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον, ὅπως καὶ ἐνταῦθα ἐρευνήσωμεν αὐτό, ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν περιλαμβάνει καὶ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ὡς σπουδαιότερον ἐπιχείρημα πρὸς ὑποστήριξιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, θεωρεῖται τὸ 7ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο « Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν ». Εἰς τοὺς ἀριθμοὺς δηλαδὴ ἀποκλείεται ἡ ἰδιότης τοῦ ἀσυμμέτρου. Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα : εἰς ποίους ἀριθμούς ; Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐκάλουν ἀριθμὸν πλῆθος ἀκεραίων μονάδων. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἰδιότης τοῦ ἀσυμμέτρου ἀποκλείεται εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Τοῦτο ὅμως δὲν συνεπάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἠγνόουν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ὅλη σύγχυσις ὀφείλεται καθαρῶς εἰς τὴν ὀνοματολογίαν καὶ ὄχι εἰς τὰ πράγματα. Ὅθεν θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκθέσωμεν ὡρισμένα στοιχεῖα προερχόμενα ἐκ διασωθέντων κειμένων, ἐλπίζοντες οὕτως, ὅτι θὰ συμβάλωμεν κατά τι εἰς τὴν ἑδραίωσιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον πλήρη συνείδησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους αὐτοὶ ἀνεκάλυψαν.

2. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου διεπιστώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου. Πρόκειται περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{2}$. Περὶ τοῦ ἀσυμμέτρου τούτου σῴζονται δύο ἀποδείξεις, τὰς ὁποίας ὁ J. Heiberg περιέλαβεν εἰς τὸ παράρτημα τοῦ 10ου βιβλίου τῶν Στοιχείων ὑπ' ἀριθ. 27. Ἡ δευτέρα δ' ἐκ τούτων σῴζεται συγκεχυμένως πως, χωρὶς ὅμως νὰ καταστρέφηται ἐκ

---

1. Allgemeine Arithmetik.
2. Mathematische Annalen, 1896 p. 222.

τούτου τὸ νόημα τῆς ἀποδείξεως. Ταύτην θ' ἀναπτύξωμεν μετὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ σημασία εἶναι σπουδαία εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

1η ἀπόδειξις. «Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει». (Ἔστω ὅτι τίθεται πρὸς ἀπόδειξιν, ὅτι εἰς τὰ τετράγωνα σχήματα ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἀσύμμετρος κατὰ τὸ μῆκος). [Σημ. Ἡ διαγώνιος τετραγώνου ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν ἀρχαίων διάμετρος. Φαίνεται δ' ὅτι ὁ ὅρος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένων παραλληλογράμμων. Ἐπεκράτησε δὲ γενικώτερον νὰ ὀνομάζηται ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου διάμετρος. Τὸν ὅρον τοῦτον διατηροῦμεν κατωτέρω, διότι εἶναι συναφὴς καὶ πρὸς τοὺς διαμετρικοὺς ἀριθμούς].

«Ἔστω διάμετρος τετραγώνου ΑΓ, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ διάμετρος ΑΓ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ κατὰ τὸ μῆκος.

Διότι—ἐὰν εἶναι δυνατὸν τοῦτο—ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος. Τότε θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ εἶναι συγχρόνως ἄρτιος καὶ περιττός. Εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωμεν $(\mathrm{A\Gamma})^2 = 2(\mathrm{AB})^2$ (1). Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη ἡ διάμετρος σύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν, αὗται θὰ ἔχωσι κοινὸν μέτρον καὶ ὁ λόγος αὐτῶν θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦσιν αὐτάς, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$, ἐὰν ΕΖ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὴν ΑΓ καὶ Η ὁ ἀριθμὸς ὁ μετρῶν τὴν ΑΒ (Χ. 6). Τὸν λόγον $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$ δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ἀνάγωγον, ἐὰν δὲν εἶναι (VII 33). Οἱ ἀριθμοὶ ἄρα ΕΖ, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Ὁ ἀριθμὸς ΕΖ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, διότι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ (I. 19). Ἐπειδὴ $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$, ἕπεται ὅτι $\frac{(\mathrm{A\Gamma})^2}{(\mathrm{AB})^2} = \frac{(\mathrm{EZ})^2}{\mathrm{H}^2}$ (VI. 20. πόρ., VIII. 11). Καὶ κατὰ τὴν (1) ἔχομεν $(\mathrm{EZ})^2 = 2\mathrm{H}^2$ (2). Τὸ $(\mathrm{EZ})^2$ ἄρα εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· συνεπῶς καὶ ὁ ΕΖ εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· διότι, ἂν ὁ ΕΖ ἦτο περιττός, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ ἦτο περιττὸς (IX. 23). [$(2\alpha + 1)^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 2(2\alpha^2 + 2\alpha) + 1$]. Ἀφοῦ ὅμως ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος, ὁ Η εἶναι περιττός· διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ κλάσμα $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί. Ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς ΕΖ εἶναι τῆς μορφῆς 2 (ΕΘ), καὶ ἀφοῦ ΕΖ=2 (ΕΘ), θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{EZ})^2 = 4(\mathrm{E\Theta})^2$. Καὶ κατὰ τὴν (2) θὰ εἶναι $2\mathrm{H}^2 = 4(\mathrm{E\Theta})^2$ ἢ $\mathrm{H}^2 = 2(\mathrm{E\Theta})^2$. Συνεπῶς ὁ ἀριθμὸς H^2 εἶναι ἄρτιος· καὶ ὁ Η εἶναι ἄρα ἄρτιος. Ἀνωτέρω ὅμως ἐδείχθη, ὅτι ὁ Η εἶναι περιττός· ὅθεν εἶναι ἀδύνατον ὁ Η νὰ εἶναι συγχρόνως καὶ ἄρτιος. Ἡ διάμετρος ἄρα ΑΓ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Εἶναι δηλ. ἀσύμμετροι κατὰ τὸ μῆκος». Εἰς τὴν ἀντίφασιν περιεπέσαμεν, διότι ἐδέχθημεν, ὅτι ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην φαίνεται, ὅτι εἶχεν ὑπ' ὄψει ὁ Ἀριστοτέλης γράφων *«ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης»* [ἡ διάμετρος εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν, διότι, ἂν δεχθῶμεν ταύτην σύμμετρον, περιπίπτομεν εἰς τὴν ἀντίφασιν νὰ δεχθῶμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς ἄρτιον καὶ περιττὸν] (Ἀναλυτικὰ Πρότερα 41 α 26).

3. Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί. Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰ μήκη πλευρῶν τετραγώνων. Διαμετρικοὶ δὲ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (διαγωνίων) τῶν τετραγώνων τούτων.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον [1] οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται

1. Θέ. Σμυρν. 42 - 45 (E. Hiller, Leipzig, 1878).

ὡς ἑξῆς· θεωροῦμεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ διάμετρος ἐπίσης. [Τοῦτο εἰς τὴν σημερινὴν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν λέγεται, θεωροῦμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν]. Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον μεγαλυτέρου τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Εἰς τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τετραγώνου προσθέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον τοιαύτης κατασκευῆς μεγαλυτέρων τετραγώνων ἐπ' ἄπειρον. Διατί ἀκολουθεῖται οὗτος ὁ δρόμος κατασκευῆς τῶν μεγαλυτέρων τετραγώνων, παραμένει ἄγνωστον. Κατὰ τὸν Θέωνα λοιπὸν θὰ ἔχωμεν :

Ἀριθμοὶ πλευρικοὶ			Ἀριθμοὶ διαμετρικοὶ		
Πλευρὰ πρώτου τετραγώνου		1	Διάμετρος πρώτου τετραγώνου		1
» δευτέρου »	1 + 1 =	2	» 2ου τετρ.	2. 1 + 1 =	3
» τρίτου »	2 + 3 =	5	» 3ου »	2. 2 + 3 =	7
» τετάρτου »	5 + 7 =	12	» 4ου »	2. 5 + 7 =	17
» πέμπτου »	12 + 17 =	29	» 5ου »	2. 12 + 17 =	41
» ἕκτου »	29 + 41 =	70	» 6ου »	2. 29 + 41 =	99
» ἑβδόμου »	70 + 99 =	169	» 7ου »	2. 70 + 99 =	239
» ὀγδόου »	169 + 239 =	408	» 8ου »	2.169 + 239 =	577

Καλοῦντες α τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διάμετρον τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ ἔχωμεν :

Ἀριθμοὶ πλευρικοὶ	Ἀριθμοὶ διαμετρικοὶ
α	δ
$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
$\alpha_2 + \delta_2 = \alpha_3$	$2.\alpha_2 + \delta_2 = \delta_3$
$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$

Πρὸς αἰτιολογίαν τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὁ Θέων γράφει : *«ἐπειδὴ ὅσον ἡ πλευρὰ δὶς δύναται ἡ διάμετρος ἅπαξ»* (ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ἰσοῦται πρὸς δύο τετράγωνα τῆς πλευρᾶς). Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων πρὸς τὰς πλευράς, ὡς ἐκθέτει αὐτὰς ὁ Θέων, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad = \lambda_1$$
$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000 \ldots\ldots = \lambda_2$$
$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000 \ldots\ldots = \lambda_3$$
$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666 \ldots\ldots = \lambda_4$$
$$\frac{41}{29} = 1{,}4137913 \ldots\ldots = \lambda_5$$
$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857 \ldots\ldots = \lambda_6$$
$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011 \ldots\ldots = \lambda_7$$
$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156 \ldots\ldots = \lambda_8$$
$$\delta_\nu : \alpha_\nu \qquad = \sqrt{2}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ **περιττῆς** τάξεως λόγοι αὐξάνονται συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Ἔχομεν δηλ. δύο ἀκολουθίας ἀριθμῶν, προκυπτούσας ἐξ ἑνὸς νόμου σχηματισμοῦ, τὴν μὲν αὔξουσαν, τὴν δὲ φθίνουσαν, αἱ ὁποῖαι ὅταν τὸ $\nu \rightarrow \infty$ συμπίπτουσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' εὐθυγράμμου τμήματος, ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι παράστασιν τῶν λόγων, τῶν ὁποίων ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν θὰ γίνεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5.

....	1				$\sqrt{2}$				1,5
	λ_1	λ_3	λ_5	λ_7		λ_8	λ_6	λ_4	λ_2

Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἡ περιττῆς τάξεως ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ ἀρτίας τάξεως ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ φράγμα εἶναι κοινόν, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$. Διὰ τῶν λόγων δηλ. τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἐγκιβωτίζεται, συλλαμβάνεται ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$, δηλ. ἡ $\sqrt{2}$, ὅταν $\nu \rightarrow \infty$. Φρονοῦμεν, ὅτι οὐδεὶς δύναται νὰ ὑποστηρίξῃ σοβαρῶς, ὅτι ὁλόκληρος ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας εἶναι μέγεθος καὶ ὄχι ἀριθμός. Βεβαίως ὁ Θέων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων αὐξούσης καὶ φθινούσης ἀκολουθίας ἀριθμῶν οὔτε περὶ ἐγκιβωτισμοῦ (Intervallschachtelung) τῆς $\sqrt{2}$. Δὲν χρησιμοποιεῖ δηλ. ὁ Θέων τὴν σημερινὴν ὀνοματολογίαν, διέσωσεν ὅμως τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα ὁμιλοῦσιν ἀφ' ἑαυτῶν. Ἐνταῦθα βλέπομεν ὅτι χρησιμοποιοῦνται δύο θεμελιώδεις ἔννοιαι τῶν μαθηματικῶν, ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας καὶ ἡ ἔννοια τοῦ δυνάμει ἀπείρου, ὡς αὗται διετυπώθησαν μαθηματικῶς ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου μὲν ἡ πρώτη καὶ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ἡ δευτέρα καὶ ὡς αὗται χρησιμοποιοῦνται καὶ σήμερον καὶ ἀποτελοῦσι τὸ θεμέλιον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Διὰ τὴν δευτέραν ἔννοιαν τοῦ δυνάμει ἀπείρου ὑπενθυμίζομεν τὴν διατύπωσιν τοῦ Ἀριστοτέλους : «οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον» (Φυσικῆς ἀκροάσεως Γ 206 b). Ἡ ἐπ' ἄπειρον δηλ. ἐνταῦθα λῆψις τῶν λόγων $\delta_\nu : \alpha_\nu$ δὲν δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὴν ὑπέρβασιν τοῦ φράγματος $\sqrt{2}$. Τὰ ἀνωτέρω ὅμως ἐκτεθέντα ἠρευνήθησαν καὶ διετυπώθησαν ὑπὸ τῶν πρώτων Πυθαγορείων, πρὶν ἢ ἀκόμη διατυπωθῶσι μαθηματικῶς αἱ ἔννοιαι τῆς συνεχείας καὶ τοῦ ἀπείρου. Τοὺς λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἀναπτύσσουσιν οἱ σύγχρονοι ἑρμηνευταὶ διὰ τῶν συνεχῶν κλασμάτων, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

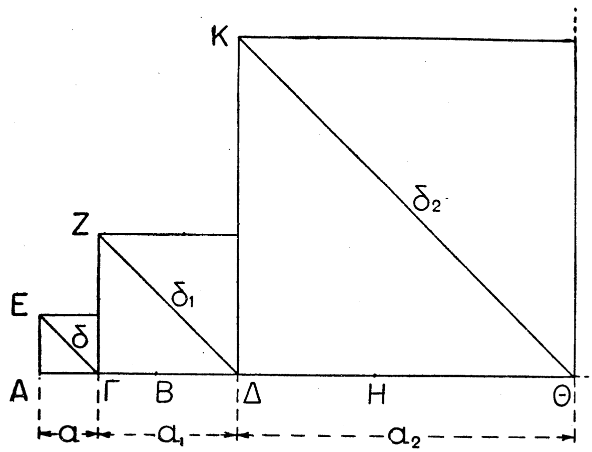
$$\frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$\vdots$$

Ὁ Θέων καὶ ὁ Πρόκλος, ὅστις διατυπώνει ἐπίσης τὸν νόμον σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, δὲν μνημονεύουσί τι περὶ κριτηρίου συγκλίσεως τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν. Ὡς τοιοῦτον ὅμως θεωρεῖται τὸ 2ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων, καθ' ὃ, ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, δὲν ὑπάρχει τελικὸν ὑπόλοιπον μετροῦν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ (προκειμένου περὶ ἀσυμμέτρων). Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ὑποδηλοῖ ὁ Πρόκλος, καθιστᾷ φανερὰν τοιαύτην σύγκλισιν.

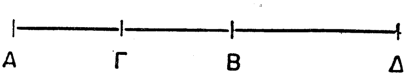
4. Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἐτέθη τὸ πρόβλημα, δοθέντος τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ζητουμένου τετραγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἕκαστον δὲ εὑρισκόμενον τετράγωνον νὰ θεωρῆται δοθὲν καὶ νὰ συνεχίζηται ἐπ' ἄπειρον ἡ κατασκευὴ τετραγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω νόμου.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΑΓ $=$ α καὶ διαμέτρου ΓΕ $=$ δ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΓΒ $=$ α καὶ ἐν συνεχείᾳ τούτου τμῆμα ΒΔ $=$ δ. Τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν ΓΔ $=$ α $+$ δ. Ἀπομένει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΔΖ.



Σχ. 1.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς διαμέτρου ΔΖ χρησιμοποιεῖται, ὡς λέγει ὁ Πρόκλος [1], τὸ 10ον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ, καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις τῆς ΑΒ, ἡ ΒΔ, τότε εἶναι



Σχ. 2.

$(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2 + 2(ΓΔ)^2$, (1) (σχ. 2) (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία I.II.III.IV., Ε. Σταμάτη, 1952). Ἐν προκειμένῳ εἶναι ΑΓ $=$ α, ΓΒ $=$ α καὶ ΒΔ $=$ δ (σχ. 1) καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις (1). Ἐπειδὴ ΒΔ $=$ ΓΕ καὶ $(ΓΕ)^2 = 2(ΑΓ)^2$, θὰ εἶναι $(ΒΔ)^2 = 2(ΑΓ)^2$. Ἀφαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2 = 2(ΓΔ)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ διάμετρος ὅμως τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα ΔΖ $=$ ΑΔ. Ἡ ΑΔ ὅμως $=$ ΑΓ $+$ ΓΒ $+$ ΒΔ, ἔνθα ΒΔ $=$ ΓΕ καὶ συνεπῶς ΑΔ $= 2α + δ$. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθη ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμετρος δ ἑνὸς τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι $α + δ = α_1$ καὶ ἡ διάμετρος $2α + δ = δ_1$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΔΗ $=$ ΓΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ΗΘ $=$ ΔΖ (σχ. 1). Κατὰ τὸ αὐτὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν $(ΓΘ)^2 + (ΗΘ)^2 = 2(ΓΔ)^2$

1. Πρόκλου Σχόλια εἰς Πλάτωνος Πολιτείαν, τόμ. II σ. 24 κέ. 393 κέ. (ἑρμηνεία Hultsch - Kroll, Teubner).

$+2(\Delta\Theta)^2 \cdot (2)$. Ἐπειδὴ $H\Theta = \Delta Z$ καὶ $(\Delta Z)^2 = 2(\Gamma\Delta)^2$, θὰ εἶναι καὶ $(H\Theta)^2 = 2(\Gamma\Delta)^2$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῆς (2) ἔχομεν $(\Gamma\Theta)^2 = 2(\Delta\Theta)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ διάμετρος δὲ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα $\Gamma\Theta = \Theta K$. Ἀλλὰ ἡ $\Delta\Theta = \Delta H + H\Theta = \alpha_1 + \delta_1$ καὶ $\Theta K = \Gamma\Delta + \Delta H + H\Theta = 2\alpha_1 + \delta_1$. Καὶ ἑπομένως τοῦ νυοστοῦ νέου τετραγώνου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι $\alpha_\nu = \alpha_{\nu\text{-}1} + \delta_{\nu\text{-}1}$, ἡ δὲ διάμετρος $\delta_\nu = 2.\alpha_{\nu\text{-}1} + \delta_{\nu\text{-}1}$.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς εὑρεθείσας πλευρὰς καὶ διαμέτρους τῶν συνεχῶν τετραγώνων :

	πλευρά	διάμετρος
Δοθέντος τετραγώνου	α	δ
πρώτου νέου τετραγώνου	$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_1$
δευτέρου νέου τετραγώνου	$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
....	....	....
νυοστοῦ νέου τετραγώνου	$\alpha_{\nu\text{-}1} + \delta_{\nu\text{-}1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu\text{-}1} + \delta_{\nu\text{-}1} = \delta_\nu$.

Ἐὰν λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$, ἔχομεν τότε τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀναφέρουσιν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Πρόκλος καὶ τοὺς ὁποίους ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω. Ἐὰν ἡ κατασκευὴ τετραγώνων συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, τότε ὁ λόγος $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ $(\nu \rightarrow \infty)$ προσδιορίζει τὴν $\sqrt{2}$.

Ἀπομένει νὰ ἐξετασθῇ, διατί ἔχομεν τὸ δικαίωμα νὰ λάβωμεν $\alpha = 1$ και $\delta = 1$. Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· *« ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτω καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται »* (καθὼς λοιπὸν πάντων τῶν σχημάτων ἄρχει ἡ μονὰς κατὰ τὸν πρωταρχικὸν καὶ σπερματικὸν λόγον, οὕτω καὶ ὡς λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν ἀνευρίσκομεν τὴν μονάδα). Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἀποδίδομεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ Θέωνος, καθ' ἣν « ὁ λόγος » τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἡ μονὰς καὶ ὄχι ὅτι ἡ διάμετρος εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν = 1.

Ἡ λέξις « σπερματικόν » ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ « δυνάμει ». Ὁ Θέων παρομοιάζει τὴν ἱκανότητα τῆς μονάδος νὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου πρὸς τὸν βιολογικὸν νόμον, καθ' ὃν τὸ σπέρμα ἑνὸς φυτικοῦ ἢ ζωϊκοῦ ὀργανισμοῦ ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ μετέπειτα ζῶντος ὀργανισμοῦ. Ἐνταῦθα ὅμως πρόκειται περὶ μιᾶς καθαρῶς γεωμετρικῆς προτάσεως, χρησιμοποιούσης τὴν ἔννοιαν τῶν ὁρίων, τοῦ ἀπείρου καὶ τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ὁ Θέων παρομοιάζει, κατὰ τοὺς Πυθαγορείους πιθανόν, ὑπὸ βιολογικὴν ἔκφρασιν. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος πορεία κατασκευῆς τετραγώνων, ἐκείνης τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν Πρόκλον, ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω καὶ ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς $\sqrt{2}$. Ἔστω δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΘΔ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν ΘΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΘΚ, γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ εἴς τι σημεῖον Γ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Τοῦτο τὸ θεωροῦμεν δοθὲν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἤτοι μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΔΖ γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἴς τι σημεῖον Α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς· Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου $\Theta K = \Theta\Gamma$ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὴν ΘΔ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ. Ἐπίσης πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΓΑ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου $\Delta Z = \Delta A$ τὴν πλευρὰν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΔΖ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἑπομένας κατασκευὰς τετραγώνων. [Ἐπὶ πλέον δὲ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ΘΔ, ἡ διάμετρος

ΔΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς διαμέτρου ΘΚ κλπ. Ἡ ἀπόδειξις τούτου παρέχεται ἐκ τῆς σχέσεως $\sqrt{2} < 1,5$ ἢ γεωμετρικῶς]. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων δυνάμεθα, συνεχίζοντες οὕτω τὴν κατασκευὴν τετραγώνων, νὰ λάβωμεν πλευρὰν τετραγώνου (καὶ διάμετρον) μικροτέραν πάσης δοθείσης πλευρᾶς ὁσονδήποτε μικρᾶς. Μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν $\nu \to \infty$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαμέτρου καὶ πλευρᾶς τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ. $(\delta_\nu - \alpha_\nu) = 0$, καὶ συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Ἄρα ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$. Καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ἀρίθμησις ἀρχίζει ἀπὸ τὴν μονάδα, θὰ ἔχωμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\alpha_\nu = 1$, $\delta_\nu = 1$.

Οὔτε ὁ Πρόκλος οὔτε ὁ Θέων ὁμιλοῦσι περὶ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς, ἡ ὁποία συνάγεται ἐκ τῆς ἀτελῶς πως σωθείσης δευτέρας ἀποδείξεως, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

2α ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ἔστω ὅτι $\delta : \alpha = \sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος, ἤτοι ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ δ καὶ α κοινὸν μέτρον σταθερόν, ἀπειροελαχίστως μικρὸν ἔστω ε. Τότε μετὰ ν κατασκευὰς τετραγώνων ($\nu \to \infty$) θὰ φθάσωμεν εἰς στιγμήν τινα, καθ' ἥν $\delta^\nu < \varepsilon$ καὶ $\alpha_\nu < \varepsilon$, ὁπότε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ε θὰ μετρῇ τοὺς μικροτέρους δ_ν καὶ α_ν καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· δὲν ὑπάρχει ἄρα κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ἡ φράσις « ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος » δὲν ἀπαντᾷ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις. Κατὰ τοὺς δεχομένους, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, θὰ πρέπει νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι μέγεθος ἀσύμμετρον. Τοῦτο ὅμως δὲν μεταβάλλει τὸ πρᾶγμα.

5. Τελειώνων ὁ Θέων τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἐπάγεται : « *αἱ δὲ διάμετροι τῶν πλευρῶν ἐναλλὰξ παρὰ μίαν ποτὲ μὲν μονάδι μείζους ἢ διπλάσιαι δυνάμει ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι ὁμαλῶς· πᾶσαι οὖν αἱ διάμετροι πασῶν τῶν πλευρῶν γενήσονται δυνάμει διπλάσιαι, τοῦ ἐναλλὰξ πλείονος καὶ ἐλάττονος τῇ αὐτῇ μονάδι ἐν πάσαις ὁμαλῶς τιθεμένη ἰσότητα ποιοῦντος εἰς τὸ μήτε ἐλλείπειν μήτε ὑπερβάλλειν ἐν ἁπάσαις τὸ διπλάσιον· τὸ γὰρ τῇ προτέρᾳ διαμέτρῳ λεῖπον δυνάμει τῇ ἐφεξῆς ὑπερβάλλει* » (ἑρμ. αἱ δὲ διάμετροι ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦνται ἐναλλὰξ ἄλλοτε μὲν πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς (ἀντιστοίχου) πλευρᾶς σὺν μίαν μονάδα καὶ ἄλλοτε πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς μεῖον μίαν μονάδα καὶ τοῦτο γίνεται συνεχῶς (ὁμαλῶς)· τὰ τετράγωνα λοιπὸν ὅλων τῶν διαμέτρων (τῶν διαμετρικῶν δηλ. ἀριθμῶν) θὰ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν πλευρῶν (τῶν πλευρικῶν δηλ. ἀριθμῶν), διότι ἡ ἐναλλὰξ καὶ συνεχῶς πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀποκαθιστᾷ ἰσότητα, ὥστε εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις νὰ μὴ ἐλλείπῃ οὔτε νὰ ὑπερβάλλῃ ἀπὸ τὸ διπλάσιον· διότι ὅ,τι ἐλλείπει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς προηγουμένης διαμέτρου, ὑπερβάλλει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ἑπομένης.

Ἔστωσαν πάλιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1	1
2	3
5	7
12	17

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα τούτων

$1^2 = 1$	$1^2 = 1$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀπόσπασμα τοῦ Θέωνος θὰ εἶναι :

$$1^2 = 2.\ 1^2 - 1 = 1$$
$$3^2 = 2.\ 2^2 + 1 = 9$$
$$7^2 = 2.\ 5^2 - 1 = 49$$
$$17^2 = 2.12^2 + 1 = 289$$

καὶ γενικῶς $\delta^2{}_\nu = 2.\ \alpha^2{}_\nu \mp 1$ (α πλευρά, δ διάμετρος).

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου δὲν ἐσώθη, ἀληθεύει ὅμως τοῦτο διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ὡς γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω. Ὁ Πλάτων ἐγνώριζε τὸ θεώρημα, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς Πολιτείας (546 c), ἔνθα οὗτος γράφει « ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν ». Νοεῖ δηλ. τετράγωνον πλευρᾶς 5, τοῦ ὁποίου ἡ ἄρρητος διάμετρος $\sqrt{50}$ γίνεται ῥητή, ὅταν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 2.5^2 ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, ἤτοι ληφθῇ $\sqrt{50-1} = 7$.

6. Ἡ θεωρία τοῦ Ἀρχύτου. Ὁ Ἀρχύτας[1] ἀνέλυσε τὸ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα $\frac{3}{2}$ (μιᾶς πέμπτης) εἰς τὸ διάστημα $\frac{5}{4}$ (μεγάλης τρίτης) καὶ τὸ διάστημα $\frac{6}{5}$ (μικρᾶς τρίτης), ὥστε $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$ (1). Ἡ σχέσις (1) ὅμως προκύπτει ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι 2 καὶ 3. Αὕτη ἐν προκειμένῳ εἶναι :

$2 : \frac{2+3}{2}$ (ἀριθμ. μέσον) $= \frac{2.\,2.\,3}{2+3}$ (ἁρμον. μέσον): 3, καὶ μετασχηματίζεται εἰς $2 \times 3 = \frac{5}{2} \times \frac{12}{5}$ ἢ $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$.

Ἐὰν τὸν ἐπιμόριον ἀριθμὸν (ἐπιμόριος λόγος λέγεται τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρανομαστοῦ κατὰ μονάδα) παραστήσωμεν γενικῶς ὡς $\frac{\nu+1}{\nu}$, τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἔλυσεν ὁ Ἀρχύτας διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ εἰς γινόμενον δύο μουσικῶν διαστημάτων, δοθέντων τῶν φθόγγων συχνότητος ν καὶ ν + 1. Καὶ ἡ μὲν μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι $\nu : \frac{2\nu+1}{2} = \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} : \nu+1$ (2), τὸ δὲ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα ἀναλύεται εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{\nu+1}{\nu} = \frac{2\nu+1}{2\nu} \times \frac{2\ (\nu+1\ )}{2\nu+1} \ (3).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἡ ὁποία ἐκφράζει μουσικὴν ἀναλογίαν, ἐτέθη τὸ πρόβλημα, ἂν εἶναι δυνατὸν οἱ δύο μέσοι ὅροι νὰ γίνωνται ἢ νὰ εἶναι ἴσοι. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν μουσικὴν πραγματείαν αὐτοῦ « Κατατομὴ Κανόνος » περιλαμβάνει ὡς τρίτον θεώρημα τὴν πρότασιν, ὅτι μεταξὺ τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, μεταξὺ τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῶν ν καὶ ν + 1, εἶναι ἀδύνατον νὰ παρεμβληθῶσιν εἷς ἢ περισσότεροι μέσοι ἀνάλογοι (ῥητοὶ ἀριθμοί).

Παρομοίαν πρὸς τὴν Εὐκλείδειον ἀπόδειξιν διέσωσεν ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς Βοήθιος (Boethius, 5ος αἰὼν μ.Χ.), ὅστις ἀποδίδει ταύτην εἰς τὸν Ἀρχύταν[2]. Ἐὰν τοῦτο ἤ-

1. P. Tannery, Mémoires scientifiques III σ. 68 καὶ 244.
2. De institutione arithmetica III. 11, σ. 285, Friedlein, Teubner, 1867.

το δυνατόν, θὰ ἐσήμαινε τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt{\nu(\nu+1)}$, λαμβανομένης ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\nu+1}{x}$ $= \frac{x}{\nu}$, $x^2 = \nu(\nu+1)$. Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου (ἀπὸ μουσικῆς θεωρητικῆς ἀπόψεως) δὲν κατέχομεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα, ἵνα συναγάγωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς παρεμβολῆς μέσων ἀναλόγων, μὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐσώθη ὅμως ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως σπουδαῖον στοιχεῖον, περιεχόμενον εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Μετρικὰ» (τόμ. III, σ. 18—20, Schoene, Leipzig 1903). Κατὰ τὸ στοιχεῖον τοῦτο εἶναι δυνατὸν ἡ σχέσις ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $\nu : \frac{2\nu+1}{2} = \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} : \nu+1$, ἡ $\nu(\nu+1) = \frac{2\nu+1}{2} \times \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$ νὰ δώσῃ ἰσότητα τῶν δύο παραγόντων, τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\frac{2\nu+1}{2}$ καὶ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου $\frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἀπείρων μουσικῶν ἀναλογιῶν, κατὰ τὴν ἀκόλουθον μέθοδον. Ἂς καλέσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας α_1 καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον β_1. Σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς α_1, β_1 καὶ ἔστω τὸ ἀριθμ. μέσον α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_2. Μὲ ἄκρους τοὺς α_2, β_2 σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμ. μέσον ἔστω β_3. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ὅτε τῆς νυοστῆς μουσικῆς ἀναλογίας τὸ ἀριθμ. μέσον θὰ εἶναι α_ν καὶ τὸ ἁρμ. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu \to \infty$, τότε $\alpha_\nu = \beta_\nu$ καὶ ἐλύθη τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ ν καὶ $\nu+1$ ἑνὸς μέσου ἀνάλογου, ὁ ὁποῖος βεβαίως δὲν εἶναι ἀκέραιος, διότι τοῦτο ἀποκλείεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχύτου. Ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{3}{2}$ εἰς τὸ γινόμενον $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχύταν. Δὲν ἐσώθη ὅμως στοιχεῖόν τι, ἐξ οὗ νὰ φαίνηται, ὅτι ὁ Ἀρχύτας ὠνόμασε τὸ $\alpha_\nu = \beta_\nu$ $(\nu \to \infty)$ ἀριθμόν, ἀσύμμετρον δηλ. ἀριθμόν. Στερούμεθα δηλ. καὶ ἐνταῦθα τῆς συναφοῦς ὀνοματολογίας, ὅπως καὶ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος τοῦ Ἀρχύτου ἀφορᾷ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου. Πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου ἐκ δύο παραγόντων. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι οἱ παράγοντες οὗτοι νὰ καταστῶσιν ἴσοι. Ἀλλ' ἂς ἐκθέσωμεν τὸ σωθὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος συναφὲς στοιχεῖον. Πρόκειται κατὰ τοῦτο νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. (Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις σῴζεται μὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, εἶναι ὅμως εὕρημα τοῦ Ἀρχιμήδους)[1]. «Ἔστω ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 7,8,9. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{aligned}
7+8+9 &= 24\\
24 : 2 &= 12\\
12-7 &= 5\\
12-8 &= 4\\
12-9 &= 3\\
12 \times 5 &= 60\\
60 \times 4 &= 240\\
240 \times 3 &= 720
\end{aligned}
$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 δίδει τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

1. T. Heath, A history of Greek mathematics, II. σ. 322, 1921.

Ἐπειδὴ τώρα ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὑπολογίζομεν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν 720 τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 729, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 27, διαιροῦμεν τὸν 720 διὰ τοῦ 27 καὶ λαμβάνομεν $26\frac{2}{3}$. Τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $26\frac{2}{3}$ σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι : $\frac{1}{2}\left(27+26\frac{2}{3}\right)=26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (α_1). Ὥστε ἡ $\sqrt{720}$ κατὰ προσέγγισιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν εἶναι $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, διότι $\left(26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=720\frac{1}{36}$. Ἐὰν ὅμως ἀποβλέπωμεν εἰς μεγαλυτέραν προσέγγισιν, τότε ἀντὶ 729 λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $720\frac{1}{36}$ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν διαφορὰν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{36}$. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ κἄτωθι......... ».

Προχωροῦμεν κατὰ τὴν ὑπόδειξιν τοῦ Ἥρωνος. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $720\frac{1}{36}=26\frac{5}{6}$. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 720 διὰ τοῦ $26\frac{5}{6}$ καὶ ἔχομεν $720 : 26\frac{5}{6}=\beta_1$. Τῶν $26\frac{5}{6}$ καὶ $720 : 26\frac{5}{6}$ λαμβάνομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 καθ' ὑπεροχὴν πάλιν, ἀλλὰ μικροτέραν τῆς προηγουμένης. Τὸ ἀριθμητικὸν τοῦτο μέσον εἶναι $\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=\alpha_2=26{,}83281573...$ Τὸ $(\alpha_2)^2=720\frac{1}{3732624}$, ὥστε ἀμέσως εἰς τὸ δεύτερον ἀριθμητικὸν μέσον ἡ προσέγγισις τῆς $\sqrt{720}$ εἶναι πολὺ μεγάλη. Τὸ β_1 παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $\frac{720}{27}$, ἐν ᾧ τὸ α_2 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ πρώτου ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου, ἤτοι $\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου εἶναι $\beta_1=26{,}832235....$ ἤτοι τοῦτο εἶναι ἡ $\sqrt{720}$ κατ' ἔλλειψιν. Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι προφανὴς καὶ ἀκριβῶς ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου. Ἂς παραστήσωμεν γενικῶς τὴν ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος διασωθεῖσαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{A}$, ὅταν αὐτὴ δὲν εἶναι ῥητή.

Λαμβάνομεν τὴν καθ' ὑπεροχὴν ῥίζαν τοῦ Α ἔστω α. Σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο α_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ καθ' ὑπεροχήν. Σχηματίζομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο β_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ κατ' ἔλλειψιν. Τῶν α_1 καὶ β_1 σχηματίζομεν τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_2. Τῶν α_2, β_2 σχηματίζομεν τὸ ἀριθ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_3, καὶ ἔστω α_ν τὸ νυοστὸν ἀριθ. μέσον κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον σχηματισμοῦ, καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu\to\infty$ τότε $\alpha_\nu=\beta_\nu$. Καὶ ἐνταῦθα εὑρισκόμεθα πρὸ τοῦ σχηματισμοῦ δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα, καὶ ἄλλης τῶν ἁρμονικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα. Καὶ αἱ δύο ἀκολουθίαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον, τὴν $\sqrt{A}$, ἤτοι τὸ ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἁρμονικῶν μέσων συμπίπτει πρὸς τὸ κατώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀριθμητικῶν μέσων. Ἐὰν παραστήσωμεν γραφικῶς τἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν :

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \sqrt{A} \quad \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \qquad (\nu \to \infty).$$

Ὁ Ἥρων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων ἀκολουθιῶν. Ἀφίνει ὅμως νὰ ὁμιλήσῃ περὶ τούτου ἡ χρησιμοποιουμένη μέθοδος καὶ ῥητῶς λέγει, ὅτι ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὅτι δηλ. εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. «Ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ (= 720) ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα...»· ἐπειδὴ δηλ. ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν.........

Ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς, ὡς διέσωσαν τοῦτον ὁ Πρόκλος καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, καὶ τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχύτου, ὡς ἐσώθη αὕτη ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν μίαν παρατήρησιν. Πρὸς τοῦτο ἀναγράφομεν κατωτέρω τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ τὰς δύο μεθόδους.

Μέθοδος λόγων διαμέτρου πρὸς πλευράν.		$\sqrt{2}$		Μέθοδος Ἀρχύτου Ἀριθμ. καὶ ἁρμ. μέσα μεταξὺ 1,2 ($\sqrt{1.2}$).
1ος	λόγος	1 : 1		
2ος = 2^1	»	3 : 2	→	πρῶτον ἀριθμ. μέσον 3 : 2
3ος	»	7 : 5		» ἁρμ. » 4 : 3
4ος = 2^2	»	17 : 12	→	δεύτερον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ = 17:12
5ος	»	41 : 29		» ἁρμ. » » » » = 24:17
6ος	»	99 : 70		
7ος	»	239 : 169		
8ος = 2^3	»	577 : 408	→	τρίτον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{17}{12}, \frac{24}{17}$ = 577:408
9ος	»	1393 : 985		» ἁρμ. » » » » = 816 : 577
10ος	»	3363 : 2378		
11ος	»	8119 : 5741		
12ος	»	19601 : 13860		
13ος	»	47321 : 33461		
14ος	»	114243 : 80782		
15ος	»	275807 : 195025		
16ος = 2^4	»	665857 : 470832	→	τέταρτον ἀριθμ. μέσον μεταξὺ $\frac{577}{408}, \frac{816}{577}$ = 665857 : 470832.

Ἤτοι εἰς τὸν 2^1 λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ τὸ πρῶτον ἀριθμ. μέσον.
» » 2^2 » » » » » » » τὸ δεύτερον » »
» » 2^3 » » » » » » » τὸ τρίτον » »
» » 2^4 » » » » » » » τὸ τέταρτον » »
καὶ γενικῶς » » 2^ν » » » » » » » τὸ νυοστὸν » »

Δηλαδὴ ἡ τάξις τῶν κατ' Ἀρχύταν ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι οἱ λογάριθμοι (μὲ βάσιν τὸ 2) τῆς τάξεως τῶν λόγων τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευράν. Ἐπισημειοῦμεν δ' ὅτι ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος 1, 2^1, 2^2 2^3....... εἶναι ἐκείνη, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνονται οἱ τέλειοι ἀριθμοί, ὡς θ' ἀναπτυχθῇ κατὰ τὴν ἐπεξήγησιν τοῦ 36ου θεωρήματος τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων. Φαίνεται δὲ πιθανόν, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ σχέσις τις μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς ἀνωτέρω γεωμ. προόδου, ὡς παρεχούσης τοὺς τελείους ἀριθμούς.

7. Δὲν εἶναι γνωστόν, ἂν ὁ 'Αρχύτας διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον δύο ἀριθμῶν α_ν ἢ τὸ ἁρμονικὸν μέσον αὐτῶν β_ν εἶναι ἀριθμός, ὅταν $\nu \to \infty$. Γνωρίζομεν ὅμως στοιχεῖά τινα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἐκ τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ 'Αριστοτέλους. Εἰς τὸν Θεαίτητον (147 d - 148 b) γίνεται λόγος περὶ τοῦ μὴ συμμέτρου τῶν $\sqrt{3}, \ldots\ldots \sqrt{17}$, εἰς δὲ τοὺς Νόμους (Ζ' 820 c) γράφει ὁ Πλάτων, ὅτι οἱ νέοι πρέπει νὰ ἐρευνῶσιν εἰς τὰς ἀξίας πρὸς τοῦτο σχολὰς τὰ περὶ τῶν μετρητῶν καὶ ἀμέτρων, κατὰ ποῖον τρόπον γίνεται τοῦτο *(τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα, ἥτινι φύσει γέγονε.......φιλονικεῖν ἐν ταῖς τούτων ἀξίαισιςχολαῖς)*. Εἰς δὲ τὴν 'Επινομίδα (990 d - 991 a) ἀφοῦ τονίζει, ὅτι οἱ νέοι πρέπει νὰ διδάσκωνται πρῶτον τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων), συνεχίζει : « *ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρεῖς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοίᾳ ταύτῃ, ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες* » (ἑρμην. ἀφοῦ δὲ μάθει ταῦτα, ἀκολουθεῖ ἵνα μάθῃ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον καλοῦσι μὲ τὸ πολὺ γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν (δηλ. μέτρησιν τῆς Γῆς), τῶν ἀριθμῶν δὲ οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους (δηλ. τῶν ἀσυμμέτρων) ἐξομοίωσις πρὸς τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν (δηλ. τῶν συμμέτρων) εἶναι διαφανής· ἐκεῖνο δὲ τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἀνθρώπινον θαῦμα, ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ φανερὸν εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἐννοήσῃ αὐτό. Μετὰ δὲ ταύτην (τὴν ἐπιπεδομετρίαν) νὰ μάθῃ τοὺς εἰς τὴν τρίτην δύναμιν καὶ ὁμοίους κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τοὺς στερεοὺς ἀριθμούς, τοὺς δὲ ἀνομοίους πάλιν προκύπτοντας δι' ἄλλου τρόπου ὁμοίου πρὸς τοῦτον (τὸν ὑπολ. δηλ. τοῦ ἀσυμμέτρου $\sqrt{\alpha}$), τὸν ὁποῖον ὠνόμασαν οἱ εἰδικοὶ στερεομετρίαν).

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν (ἀκεραίων) $\alpha \times \beta = \gamma$ καλεῖται ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἢ φυσικὸς ἀριθμός. Ἡ $\sqrt{\gamma}$ (ἀσύμμετρος) διὰ τῆς γεωμετρίας ἐξομοιοῦται πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Στερεὸς φυσικὸς ἀριθμὸς καλεῖται τὸ γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν ἀκεραίων (τριῶν διαστάσεων), $\alpha \times \beta \times \gamma = \delta$. Δι' ἄλλης τέχνης ὁμοίας πρὸς τὴν προηγουμένην διδάσκει ἡ στερεομετρία τὴν ἐξομοίωσιν τῆς $\sqrt[3]{\delta}$ (ἀσυμμέτρου) πρὸς τοὺς φυσικοὺς στερεοὺς ἀριθμούς. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Πλάτων ἔχει ὑπ' ὄψει τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα περὶ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τὴν μέθοδον τοῦ 'Αρχύτου τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων, ὡς καὶ τὰς ἀποδείξεις τὰς γεωμετρικὰς τοῦ διδασκάλου αὐτοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου περὶ τῆς $\sqrt{3}, \ldots. \sqrt{17}$, αἱ ὁποῖαι δυστυχῶς ἀπωλέσθησαν.

Ἡ σφοδρὰ πολεμικὴ τοῦ 'Αριστοτέλους ἐναντίον τῶν εἰδητικῶν καλουμένων ἀριθμῶν τοῦ Πλάτωνος (Μετὰ τὰ φυσικὰ Μ) εἶναι φύσεως καθαρῶς γνωσιολογικῆς. Διότι, ὡς λίαν εὐστόχως σημειώνει ὁ Κ. Γεωργούλης εἰς κριτικὴν περὶ τῆς πραγματείας ἡμῶν « 'Αρχιμήδους κύκλου μέτρησις »[1], ὁ 'Αριστοτέλης εἰς τὰ « 'Ηθικὰ Νικομάχεια » γράφει « *τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ* »[2] [ἑρμ. διότι ἀναλογία δὲν ὑφίσταται μόνον, ὅταν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (ἀποτελούμενος ἐξ ἀκεραίων μονάδων), ἀλλ' ὅταν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι ὅλως ἀριθμὸς (δηλ. ἀσύμμετρος ἀριθμός)]. Λέγει δηλ. ὁ 'Αριστοτέλης ὅτι ἡ σχέσις $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ δὲν ἰσχύει μόνον, ὅταν οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ καὶ ὅταν οὗτοι εἶναι ἀριθμοὶ ὑπὸ καθολικὴν ἔννοιαν, ὡς τούτους ἐννοεῖ ἀνωτέρω ὁ Πλάτων, ὅταν δηλ. εἶναι ἀσύμμετροι.

---

1. Περιοδικὸν Πλάτων, τεῦχος Α', 1950, σ. 160 κέ.
2. Βιβλίον Ε', 1131 a 30.

'Αλλὰ καὶ εἰς ἕτερον χωρίον ὁ 'Αριστοτέλης γράφει τὰ ἑξῆς· « *τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται* » [1], δηλ. ἡ σχέσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον (μέγεθος) εἶναι ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως ἐξ ὁλοκλήρου ἀόριστος· ἀλλ' ἡ ἐκφώνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ὑπερέχοντος καὶ ὑπερεχομένου προϋποθέτει οὐχὶ σύμμετρον (δηλ. ἀσύμμετρον) ἀριθμόν.

Ἡ τοιαύτη διατύπωσις τοῦ 'Αριστοτέλους φαίνεται, ὅτι στηρίζεται εἰς τὰς ἐρεύνας καὶ τὰ συμπεράσματα περὶ τῶν ἀσυμμέτρων τοῦ Εὐδόξου.

8. Ὅτε ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{2}$, ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα προσέκρουσεν εἰς ἀδιέξοδον. Ἡ ἁρμονία τοῦ κόσμου ὡς συνόλου καὶ ἡ ἁρμονία τῶν ἐπὶ μέρους ἀντικειμένων ἢ φαινομένων, ἡ ὁποία ἠρευνᾶτο καὶ ἐξεφράζετο διὰ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, ἔπαυον νὰ εἶναι ἀντικείμενον μαθηματικῆς ἐρεύνης. Πρὸς ἄρσιν τοῦ ἀδιεξόδου τούτου ἐτέθησαν ὑπὸ βάσανον αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῶν μαθηματικῶν. Αἱ ἔρευναι ἐπὶ τῶν τριῶν περιφήμων προβλημάτων τῆς ἀρχαιότητος, τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῆς τριχοτομήσεως ὀξείας γωνίας εἶχον προετοιμάσει τὸ ἔδαφος, ἵνα διαλάμψῃ ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ Εὐδόξου. 'Ιδοὺ λοιπὸν πῶς ὁ Εὔδοξος ἐγεφύρωσε τὸ χάσμα μεταξὺ τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς 3, 4, 5 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐμνημονεύθη ἤδη, ὁλόκληρον ἀποδίδεται εἰς αὐτόν.

Ὁ ρ ι σ μ ὸ ς 3. Λόγος δύο ὁμογενῶν (ὁμοειδῶν) μεγεθῶν εἶναι ἡ κατά τινα πηλικότητα σχέσις. 'Αδιαφόρως δηλ. ἂν τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, ὑπάρχει πάντοτε ἐκ συγκρίσεως σχέσις τις τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ ἄλλο καὶ λέγεται ἡ σχέσις αὕτη λόγος (πηλίκον διαιρέσεως).

Ὁ ρ ι σ μ ὸ ς 4. Μεγέθη λέγονται, ὅτι ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχωσιν ἀλλήλων. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος, ὡς φαίνεται, δὲν ἐσώθη σαφής. Ἡ ἔννοια αὐτοῦ ὅμως συνάγεται σαφῶς ἐκ τοῦ ὀγδόου θεωρήματος τοῦ V βιβλίου καὶ εἶναι ἡ ἑξῆς:

'Εὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορὰ τούτων λαμβανομένη πολλάκις δύναται νὰ ὑπερβῇ πολὺ μέγα μέγεθος. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος λογίζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὡς τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου, τοῦ ὁποίου ὅμως πρώτην διατύπωσιν ἔκαμεν ὁ 'Αναξαγόρας, ὡς γράφομεν εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ I τόμου τῶν Στοιχείων (σ.24) [2].

Ὁ ρ ι σ μ ὸ ς 5. Μεγέθη λέγονται, ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, πρῶτον πρὸς δεύτερον ἴσον μὲ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθῶσι καταλλήλως. Θὰ εἶναι δηλ. $Α : Β = Γ : Δ$, μόνον ἐὰν δι' οἱουσδήποτε δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων:

1) $\mu . Α > \nu . Β$ καὶ συγχρόνως $\mu . Γ > \nu . Δ$
2) $\mu . Α = \nu . Β$ » » $\mu . Γ = \nu . Δ$
3) $\mu . Α < \nu . Β$ » » $\mu . Γ < \nu . Δ$.

Ἡ δευτέρα ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν περιπτώσεων τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Εὐδόξου καλύπτει

---

1. Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4,

2. Δὲν κρίνομεν ἄσκοπον νὰ ὑπενθυμίσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ λεγόμενον ἀξίωμα συνεχείας Dedekind - Cantor εἶναι θεώρημα πηγάζον ἐκ τοῦ Εὐδοξείου ἀξιώματος τῆς συνεχείας κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Baldus.

τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ συμμέτρων μεγεθῶν (μαθηματικῶν ἀντικειμένων), ἐν ᾧ ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη περιλαμβάνουσι καὶ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἵνα γίνῃ καταληπτὸς ὁ ὁρισμὸς 5 τοῦ Εὐδόξου, ἀναφέρομεν ἐφαρμογὴν αὐτοῦ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ VI βιβλίου, καθ' ὃ τρίγωνα ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ὡς αἱ βάσεις, (πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος, σχῆμα τοῦ αὐτοῦ).

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΓ καὶ βάσεις ἀντιστοίχως ΒΓ, ΓΔ. Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΔ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ ἂς ληφθῇ ΒΓ = ΒΗ = ΗΘ καὶ ΓΔ = ΔΚ = ΚΛ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ ΓΒ = ΒΗ = ΗΘ, τὰ τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ εἶναι μεταξύ των ἴσα (I. 38). Θὰ εἶναι ἄρα ΘΓ = μ. ΒΓ καὶ τρίγωνον ΑΘΓ = μ. ΑΒΓ τρίγωνα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ΓΛ = ν. ΓΔ καὶ τρίγωνον ΑΓΛ = ν. ΑΓΔ τρίγωνα.

Καὶ ἐὰν ἡ βάσις μ.ΒΓ = βάσιν ν.ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ τρίγ. μ.ΑΒΓ = τρίγ. ν. ΑΓΔ.
» » » » μ.ΒΓ $>$ βάσεως ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ $>$ τριγ. ν. ΑΓΔ.
» » » » μ.ΒΓ $<$ » ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ $<$ τρίγ. ν. ΑΓΔ[1].

Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθησαν τέσσαρα μεγέθη, ἤτοι δύο βάσεις, αἱ ΒΓ, ΓΔ, καὶ δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ἐλήφθησαν τῆς μὲν βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μ.ΒΓ, μ.ΑΒΓ, τῆς δὲ βάσεως ΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ ἐλήφθησαν ἄλλα τυχόντα ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ν.ΓΔ, ν.ΑΓΔ. Καὶ ἐδείχθη, ὅτι

ἐὰν ἡ βάσις μ.ΒΓ $>$ βάσεως ν.ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ τριγ. μ.ΑΒΓ $>$ τρίγ. ν.ΑΓΔ,
» » » μ.ΒΓ = βάσιν ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ = τρίγ. ν.ΑΓΔ,
» » » μ.ΒΓ $<$ βάσεως ν.ΓΔ, » » » μ.ΑΒΓ $<$ τριγ. ν.ΑΓΔ.

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν εἶναι μ. ΑΒΓ $\gtreqless$ ν. ΑΓΔ καὶ συγχρόνως μ. ΒΓ $\gtreqless$ ν. ΓΔ, τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 εἶναι

$$\frac{AB\Gamma}{A\Gamma\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}.$$

Καὶ ἂν καλέσωμεν ΑΒΓ = Α, ΑΓΔ = Β, ΒΓ = Γ, ΓΔ = Δ, θὰ εἶναι

$$\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὁρισμοῦ 5 κατεβλήθησαν κατὰ καιροὺς πολλαὶ προσπάθειαι. Λίαν εὐστόχως κατώρθωσε νὰ ἐκφράσῃ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ὡς καὶ τὸν συναφῆ ὁρισμὸν 7, εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς Thomas Heath κατὰ τὸ 1906[2]. Ἡ διατύπωσις αὐτὴ ἔχει γίνει ἀποδεκτή. [Enzyklopaedie der mathematischen Wissenschaften I. 1 σ. 50, ὑπὸ A. Pringsheim (München)]. Κατὰ τὴν διατύπωσιν ταύτην τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ χωρίζει τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\mu}$ εἰς τοιούτους, ὥστε μ.Α $>$ ν.Β καὶ μ.Α $\leqq$ ν.Β. Ἡ τομὴ (κατὰ τὴν φρασεολογίαν τοῦ Dedekind) προσδιορίζει τὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\frac{A}{B}$. Τὸ κλάσμα $\frac{\Gamma}{\Delta}$ χωρίζει ὁμοίως τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν $\frac{\nu}{\mu}$ εἰς τοιούτους, ὥστε μ. Γ $>$ ν. Δ καὶ μ. Γ $\leqq$ ν. Δ. Ἡ τομὴ

---

1. Τὴν ἀπόδειξιν θεωρεῖ αὐτονόητον ὁ Εὐκλείδης καὶ ἔχει παραλείψει αὐτὴν διὰ τὰς περιπτώσεις ἀνισότητος. Αὐτὴ γίνεται διὰ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον (ἄτοπον).

2. The thirteen books of Euclid's Elements, 2α ἔκδ., 1926, Cambridge.

προσδιορίζει τὸν ῥητὸν ἢ ἀσύμμετρον ἀριθμόν $\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐὰν αἱ δύο τομαὶ συμπίπτωσι, τότε εἶναι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐὰν ἡ πρώτη τομὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δευτέρας, τότε $\frac{A}{B}>\frac{\Gamma}{\Delta}$ (ὁρισμ. 7).

Κατὰ τὴν γενομένην ἀποδεκτὴν ἑρμηνείαν τοῦ T. Heath καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς ἰσομορφίας [1] τὰ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κρατοῦντα ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. Αἴρεται δηλ. αὐτομάτως ἡ γνώμη, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν συνέλαβον τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ὁ A. Pringsheim σημειώνει ὅμως εἰς τὸ ἄρθρον ἐν τῇ Ἐγκυκλοπαιδείᾳ ὅτι « λείπει ἐν τούτοις ἀπὸ τοῦ Εὐδοξείου ὁρισμοῦ ἡ νεωτέρα ἀντίληψις, ὅτι ἑκάστη τομὴ παριστᾷ πραγματικὸν ἀριθμόν ἢ εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ εὐθύγραμμον γωνίαν». Φρονοῦμεν ὅτι ἡ φρασεολογία τοῦ Dedekind δὲν ἐπηρεάζει τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, ὁ ὁποῖος δὲν ἐχρησιμοποίησε τὴν λέξιν « τομή », ἵνα εἴπῃ, ὅτι ἡ τομὴ παριστᾷ ἀριθμόν. Πρὸς τούτοις γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Dedekind περὶ τῶν ἀσυμμέτρων εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὴν θεωρίαν τοῦ Εὐδόξου, τὴν σωθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων [2]. Ὁ M. Zacharias εἰς τὸ περισπούδαστον ἔργον αὐτοῦ «Elementargeometrie der Ebene und des Raumes» (Goeschen B. 16, 1930) ἑρμηνεύει ὡς ἑξῆς τὸν πέμπτον ὁρισμὸν τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων: Τὰ μεγέθη a, b, c, d εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ ἤτοι $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ἐὰν $p.\,a \gtreqless q.\,b$ καὶ συγχρόνως εἶναι $p.c \gtreqless q.\,d$. Εἰς τὴν σημερινὴν ἔκφρασιν τοῦτο σημαίνει : Ἐὰν ὑπάρχῃ οἱονδήποτε ῥητὸν κλάσμα $\frac{q}{p} \gtreqless \frac{a}{b}$, τὸ αὐτὸ κλάσμα εἶναι $\gtreqless \frac{c}{d}$. Εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ Dedekind τοῦτο σημαίνει : οἱ δύο ἴσοι λόγοι $\frac{a}{b}$ καὶ $\frac{c}{d}$ ὁρίζουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τομὴν εἰς τὸ πλῆθος τῶν ῥητῶν κλασμάτων. Κατὰ ταῦτα ἐλλείπει (ἀπὸ τὸν Εὐδόξειον ὁρισμὸν) τὸ κατὰ τὴν νεωτέραν διατύπωσιν βῆμα, νὰ ὁρισθῇ ἀντιστρόφως, ὅτι ἑκάστη τοιαύτη τομὴ παράγει ἕνα πραγματικὸν (σύμμετρον ἢ ἀσύμμετρον) ἀριθμόν. Τοῦτο τὸ βῆμα δὲν ἔκαμαν οἱ Ἕλληνες. Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ Εὐδόξειος ὁρισμὸς τῆς ἀναλογίας περιλαμβάνει τὰς δύο περιπτώσεις, τοῦ συμμέτρου καὶ τοῦ ἀσυμμέτρου λόγου (σελ. 86—87). Ὁ αὐτὸς συγγραφεὺς εἰς τὴν σελίδα 58 τοῦ αὐτοῦ ἔργου γράφει : « Εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ.......... ». Παραδέχεται δηλ. ὁ M. Zacharias, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, ἀλλὰ δὲν ἐχρησιμοποίησαν ὁρισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἐνταῦθα ὀφείλομεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν σκοπίμως οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπέφυγον νὰ δώσωσιν ὁρισμὸν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, ὅπως σκοπίμως δὲν ὥρισαν τὸ μηδὲν ὡς ἀριθμόν. Διότι καὶ μὲν αἱ ἔννοιαι « συνέχεια » καὶ « ἄπειρον », ὡς αὗται διετυπώθησαν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐγένοντο παραδεκταὶ καὶ ὑπὸ τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης, ἐν τούτοις δὲν δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι αὗται ἱκανοποιοῦσιν ἀπολύτως τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα. Τὸ πρόβλημα τῶν ἐννοιῶν τού-

1. H. Hasse, Höhere Algebra I σ. 25, 59. II σ. 62, Berlin—Leipzig 1926—1927.

2. Διεξοδικὴν ἔρευναν ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου καὶ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις παρέχει ἡ πραγματεία τῶν H. Hasse καὶ H. Scholz « Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik », Charlottenburg 1928 καὶ Leipzig 1940. Ἡ πρώτη ἔκδοσις μετεφράσθη εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ τῶν Φ. Βασιλείου καὶ Χρ. Καπνουκάγια, ἐκδοθεῖσα ὑπὸ τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (τόμ. ΙΔ' α', β' καὶ ΙΕ' α') τῷ 1934.

των παραμένει καθαρῶς ὑπερβατικὸν καὶ ἀντικείμενον φιλοσοφικῆς ἐρεύνης. Αἱ πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῶν μαθηματικῶν δὲν δύναται νὰ θεωρηθῶσιν, ὅτι δίδουσιν ἱκανοποιητικὴν ἀπάντησιν ἐπὶ τῆς ἑρμηνείας τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν. Αὗται κατὰ τὸν Ζήνωνα τὸν Ἐλεάτην ἐκφεύγουσι τῆς νοητικῆς δυνάμεως τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ εἰς τὴν ἀποφυγὴν τῆς ὀνομασίας τοῦ μηδενὸς ὡς ἀριθμοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, σημειοῦμεν, ὅτι οὗτοι δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ δεχθῶσιν ἀριθμὸν ὑπὸ περιορισμὸν (διὰ τοῦ ὁποίου δὲν γίνεται διαίρεσις).

Τελειώνοντες ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κύκλου (ὁ π) εἶναι μεταξὺ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$. Μεγαλυτέραν προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης τιμῆς εὗρον ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος. Θὰ εἶναι δὲ οὐχὶ λογικὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἐνόουν τὸν π ὡς μέγεθος καὶ ὄχι ὡς ἀριθμόν.

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.—**Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ,** *ὑπὸ **Εὐαγγέλου Σταμάτη****.

I. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς ἢ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, ἰσχυρότατον ἀποδεικτικὸν μέσον τῆς Ἀνωτέρας μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Τὴν σημασίαν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ἐξαίρει ἰδιαιτέρως ὁ Γάλλος μαθηματικὸς H. Poincaré εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις» [1]. Μεταξὺ ἄλλων μαθηματικῶν, οἵτινες τονίζουσιν ἰδιαιτέρως τὴν σημασίαν τοῦ συλλογιμοῦ τούτου εἰς τὴν Ἀνωτέραν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν μνημονεύομεν τὸν Γερμανὸν K. Knopp καὶ τὸν Φινλανδὸν E. Lindelöf. Ὡς πρῶτος διατυπώσας τὸν ἀποδεικτικὸν τοῦτον συλλογισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Ἀριστοτέλης, ὡς συνάγεται ἔκ τινος χωρίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀναλυτικὰ Ὕστερα» (73β 32), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς: «Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Μία δηλ. μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθ' ὅλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται. Πέρα τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Ἀριστοτέλους, οὐδεμία μέχρι τοῦ 1910 συγκεκριμένη περίπτωσις ἐφαρμογῆς τοῦ συλλογισμοῦ τούτου εἶχε σημειωθῆ εἰς τὰ σωθέντα μαθηματικὰ ἔργα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὸ 1910 ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca ἐπέστησε τὴν προσοχὴν τῶν συγχρόνων του ἐπιστημόνων ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἔκτοτε οὐδεμία ἄλλη σχετικὴ ἀνακοίνωσις ἐγένετο ἀφορῶσα εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ὑπὸ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

II. Κατὰ τὴν ἐργασίαν ἡμῶν πρὸς ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου διεπιστώσαμεν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Μεταξὺ τούτων μνημονεύομεν τὰ θεωρήματα 3,14,27,35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 20 τοῦ IX. Κατωτέρω ἀναφέρομεν τὸ 20ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου εἰς τὸ ὁποῖον, καθ' ἡμᾶς, γίνεται ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Κατὰ τὴν συνήθειαν τοῦ Εὐκλείδου οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων ὀνοματιζομένων, ὁτὲ μὲν δι' ἑνὸς γράμματος, ὁτὲ δὲ διὰ δύο.

---

* **EUAG. STAMATIS, Der Schluss der vollsdändigen Induktion bei Euklid.**

[1] Science et hypothése, C. 1. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ Παν. Σ. Ζερβοῦ, 1912, (ἔκδοσις Φέξη).

[2] *Mangold - Knopp,* Einführung in die höhere Mathematik. I 1944, (Teubner).

[3] *Lindelöf - Ullrich,* Einführung in die höhere Analysis, 1950, (Teubner).

Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν».

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ Α. Β. Γ

Α ———————, Β ———————————, Γ ———————————.

Λέγω, ὅτι τῶν

Η ———————————, Ε ——————————————— Δ ———— Ζ

πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,Γ ὑπάρχουσι περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοί. Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ καὶ ἔστω τοῦτο ὁ ἀριθμὸς ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τοῦτον ἡ μονὰς ΔΖ., ὥστε $ΕΖ = ΔΕ + ΔΖ$. Ὁ ΕΖ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι.

1. Ἔστω πρότερον ὅτι ΕΖ εἶναι πρῶτος. Τότε εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ΕΖ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων, τῶν Α,Β,Γ ἔγινε Α,Β,Γ,Ε,Ζ ἤτοι εὑρέθησαν περισσότεροι τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν. (ἐνταῦθα ὁ Εὐκλείδης παραλείπει, ὡς αὐτονόητον, τὴν πρότασιν, ὅτι ὁ ΕΖ πρὸς οὐδένα τῶν Α,Β,Γ εἶναι ὁ αὐτός).

2. Ἔστω δεύτερον ὅτι ὁ ΕΖ. δὲν εἶναι πρῶτος ἀλλὰ σύνθετος. Τότε οὗτος θὰ μετρῆται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Η (κατὰ τὸ 31ον θεώρημα τοῦ VII βιβλίου τῶν Στοιχείων). Λέγω ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἔστω ὅτι ὁ Η εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α,Β,Γ, οἱ δὲ Α,Β,Γ μετροῦσι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν τὸν ΔΕ. Ἄρα καὶ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΔΕ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Η καὶ τὸν ΕΖ. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $ΕΖ - ΔΕ = ΔΖ$. Ὁ ΔΖ ὅμως εἶναι ἡ μονάς, ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ Η ἀριθμὸς ὢν (δηλ. πλῆθος μονάδων) εἶναι ἀδύνατον νὰ μετρῇ τὴν μονάδα. Ἄρα ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α,Β,Γ εἶναι ὁ αὐτός. Ἄρα εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς καὶ τὸ πλῆθος τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,Γ ἔγινε Α,Β,Γ,Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III. Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α,Β,Γ δὲν ἀναφέρονται εἰς τὸ συγκεκριμένον πλῆθος τριῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀλλὰ παριστῶσι τυχὸν πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν διὰ τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμός. Ἐὰν τὸ τυχὸν τοῦτο πλῆθος τὸ καλέσωμεν ν τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι ὑπάρχουσι $ν + 1$ πρῶτοι ἀριθμοί.

Ἐὰν τὸ νέον πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν τὸ $ν + 1$ τὸ καλέσωμεν λ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. αὐτῶν· ἔστω Κ καὶ εἰς τὸν Κ προσθέτομεν τὴν μονάδα. Τότε ὁ $Κ + 1$ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἐὰν ὁ $Κ + 1$ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμός, ὁ $K + 1$, καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων ἔγινε $\nu + 2$. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ $K + 1$ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους $\nu + 1 = \lambda$. Ἐὰν δὲν εἶναι ὁ $K + 1$ πρῶτος, θὰ εἶναι σύνθετος, ὅτε οὗτος μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Λ. Κατὰ τὴν εὐκλείδιον ἀπόδειξιν ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Διότι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν ὁ Λ νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Ὁ Λ ὡς ὢν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἷς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ μετρεῖ τὸ ἐλ.κ.πολλ. αὐτῶν, τὸν K. Μετρεῖ ὅμως ὁ Λ καὶ τὸν $K + 1$. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $K + 1 - K = 1$· ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Λ εἶναι πλῆθος μονάδων. Ἄρα ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους $\lambda = \nu + 1$, ἤτοι εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Λ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων $\nu + 1$, πρώτων ἀριθμῶν ἔγινε $\nu + 2$. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν $\nu + 2$ τὸ καλέσωμεν μ, εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ὅτι ὑπάρχουσι $\mu + 1 = \nu + 3$ πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς: αἱ διαδοχικαὶ ὅμως αὗται ἀποδείξεις εἶναι περιτταί, διότι εἶναι ἐπανάληψις τῆς πρώτης ἀποδείξεως. Διὰ τὴν τιμὴν $\nu = 1$, εὐνοήτως δὲν γίνεται λόγος κατὰ τὴν εὐκλείδειον ἀπόδειξιν, διότι αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν ἤτοι ἀποκλείεται ἡ θεώρησις τῆς περιπτώσεως $\nu \Rightarrow 1$. Τὸ ὀλιγώτερον πρέπει νὰ εἶναι $\nu = 2$, ἤτοι τὸ θεώρημα ἔχει ἰσχὺν διὰ $\nu \geqq 2$. Ἡ ἔννοια τῆς ἀναδρομικῆς ἰσχύος τοῦ συλλογισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: ἐθεωρήθησαν γνωστοὶ ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ εὑρέθησαν $\nu + 1$ τὸ πλῆθος πρῶτοι. Ἐὰν θεωρηθῶσι γνωστοὶ $\nu - 1$ πρῶτοι ἀριθμοί, θὰ εὑρεθῇ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν εἷς ἀκόμη πρῶτος, ἤτοι ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοί. Ἐὰν θεωρηθῶσι διαδοχικῶς, δεδομένοι, $\nu - 2$, $\nu - 3$, $\nu - 4$ . . . 2 πρῶτοι ἀριθμοὶ θὰ εὑρεθῶσιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἀντιστοίχως $\nu - 1$, $\nu - 2$, $\nu - 3$ . . . . 3 πρῶτοι ἀριθμοί. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής, ὅταν $\nu = 2$, ὁπότε ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως διὰ $\nu = 3,4,5$ . . . . . Τοῦτο ὅμως εἶναι μία διατύπωσις ἑρμηνεύουσα τὴν φράσιν «ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς» καὶ καταλήγουσα εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι $\nu = 2$. Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι «ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς».

Ἀνατρέχομεν εἰς τὴν θεώρησιν τοῦ πλήθους τῶν συναρτήσεων $\nu - 1$, $\nu - 2$. $\nu - 3$ . . . . . 2. Ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον δύο συναρτήσεων, τότε προκειμένου νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰσχὺν αὐτοῦ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων θεωροῦμεν δύο συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν νὰ ἔχωμεν πρὸς ἀπόδειξιν γινόμενον δύο συναρτήσεων διὰ τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει τὴν πρότασιν. Προκειμένου διὰ γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων, θεωροῦμεν τρεῖς συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς γινόμενον δύο συναρτήσεων. Καὶ γενικῶς, ὅταν ἔχωμεν γινόμενον $\nu + 1$ τὸ πλῆθος συναρτήσεων, θεωροῦμεν ὡς ἕνα παράγοντα ν τὸ πλῆθος συναρτήσεις καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεχείας τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων. Εἶναι φανερὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀκριβολογία καὶ ἡ γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους, καθ' ὃν μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται.

Ἡ τυχοῦσα περίπτωσις τοῦ θεωρήματος, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν εἶναι, ὡς ἀνωτέρω μνημονεύεται, ἡ θεώρησις δοθέντων τριῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὁπότε ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ τέταρτος πρῶτος ἀριθμός, ἤτοι ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις γενικῶς.

ZUSAMMENFASSUNG

G. Vacca machte 1910 aufmerksam auf die Verwendung des Schlusses der Vollständigen Induktion in den Sätzen 8 und 9 des IX. Buches der Elemente von Euklid. E. Stamatis teilt mit, dass Euklid diese Beweismethode auf viele anderen Sätze der Elemente anwendet. Seine Behauptung stützt er, beispielweise, auf den Beweis des 20. Satzes des IX. Buches der Elemente.

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ — **Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου**, ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη****.

Α. 1 Τὸ 27ον θεώρημα τοῦ VI βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς: «Ἐκ πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἐλλεῖπον».

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 1). Ἐκ τοῦ μέσου ταύτης τοῦ Θ ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΘΗ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν· ἡ ΘΗ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάθετος). Ἐὰν ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀφαιρέσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒΓΗ, τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως πρὸς τοῦτο κείμενον παραλληλόγραμον ΘΒΓΗ.

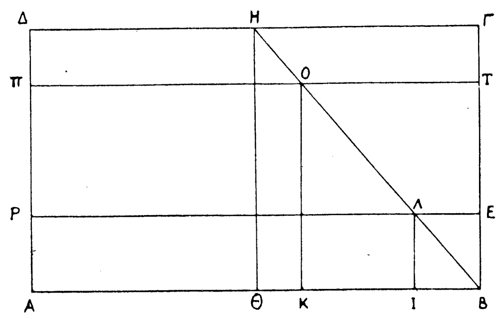
Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΗΒ καὶ λάβωμεν τυχόντα σημεῖα ἐπὶ ταύτης τὰ Ο, Λ, φέρωμεν δὲ ἀπὸ τῶν σημείων τούτων τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς εὐθείας

* **EVAN. STAMATIS, Über den euklidischen Satz über Maximum.**

ΑΒ, ΑΔ, τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν κατὰ τὸ θεώρημα παραβάλει τὰ ἑξῆς παραλληλόγραμμα:

1) ΑΚΟΠ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΟΚΒΤ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒΓΗ, τὸ ὁποῖον ἐπίσης εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ.

2) ΑΙΛΡ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΛΙΒΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ. Ἐκ τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλληλογράμμων ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, ὅτι μέγιστον εἶναι τὸ ΑΘΗΔ.



Σχ. 1.

Α. 2. Τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ ἑπόμενον τούτου πρόβλημα 28 χρησιμοποιοῦνται καὶ εἰς τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ πραγματευόμενον τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων. Ἡ θεωρία αὕτη ἀνεπτύχθη, ὡς γνωστόν, τὰ μέγιστα ἐκ τῶν ἐρευνῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου [1].

Ἐπὶ τοῦ 27ου θεωρήματος ὁ Μ. Cantor [2] γράφει τὰ ἑξῆς: «τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, ὅπερ διατυπούμενον ὡς συνάρτησις λέγει: $X(\alpha - X)$ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν διὰ $X = \frac{\alpha}{2}$.

Εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα 28 καὶ 29 ἀναγνωρίζεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων $X(\alpha - X) = \beta^2$ καὶ $X(\alpha + X) = \beta^2$. Τὸ θεώρημα 27 φαίνεται ἀναμφιβόλως, ἐκ τῆς συνεχείας τῶν 27 καὶ 28 ὅτι ἀποτελεῖ τὸν διορισμὸν (ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην) κατασκευῆς τοῦ τελευταίου, ἤτοι δὲν ἐπιτρέπεται τὸ β^2 νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν [3]».

Β.1. Ἡ ἑρμηνεία τοῦ 27ου θεωρήματος ὑπὸ τοῦ Μ. Cantor εἶναι μερικὴ

[1] *Μιχαὴλ Στεφανίδου,* Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 102, 1938, Ἀθῆναι.

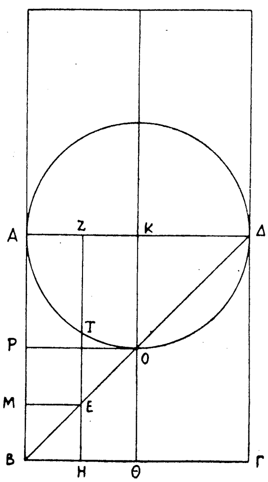
[2] Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, σ. 226 ἐκδ. 1907, (Teubner).

[3] *Matthiessen,* Grundzuege der antiken und modernen Algebra der Litteralen Gleichungen, σ. 926-931, (1878, Leipzig).

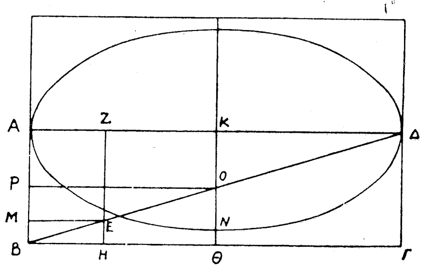
περίπτωσις ἐκείνου τὸ ὁποῖον δηλοῖ τὸ θεώρημα καὶ ἔχει αὕτη ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB (σχ. 2). Ἐκ τοῦ μέσου ταύτης, τοῦ P, ὑψοῦμεν κάθετον ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς AB τὴν PO καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ABΘK. Φέρομεν τὴν διαγώνιον BO καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον E ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς AB, AK τὰς ZH, ME. Τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας AB ἔχομεν κατὰ τὸ θεώρημα παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον AMEZ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον MBHE, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλλ. APOK.

Ἐὰν καλέσωμεν $X = AZ = MB$ καὶ $AB = \alpha$, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν $AMEZ = X(\alpha - X) = \beta^2 = (ZT)^2$. Τὸ β^2 εἶναι μέγιστον, ἐὰν $X = \frac{\alpha}{2}$

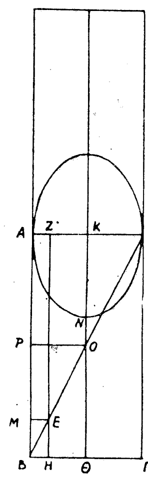
Τὸ μέγιστον τοῦτο εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον APOK. Ἡ παραβολὴ παρὰ τὴν εὐθεῖαν AB παραλληλογράμμων, ὡς ἀνωτέρω, ἀφοῦ ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς διαγωνίου BOΔ τυχόντα σημεῖα ὁδηγεῖ εἰς τὴν κατασκευὴν κύκλου.



Σχ. 2.



Σχ. 3.



Σχ. 4.

B.2. Ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος εἶναι γενικωτέρα. Τὸ θεώρημα ἰσχύει, ἐὰν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας AB κάθετος ἡ PO εἶναι μικροτέρα, ἴση, ἢ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς AB. 1) Ἐὰν $OP < \frac{AB}{2}$, ὁ μέγας ἄξων τῆς κατασκευαζομένης ἐλλείψεως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν σταθερὰν εὐθεῖαν AB (σχ. 4).

2) Ἐὰν $PO = \frac{AB}{2}$, κατασκευάζεται κύκλος (σχ. 2). Ἡ περίπτωσις αὕτη μνημονεύεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ 16ον θεώρημα τοῦ X. βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

3) Ἐὰν $PO > \frac{AB}{2}$, τοῦτο εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη κατα-

σκευῆς ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας ἡ μὲν σταθερὰ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ παράμετρος 2/Ρ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΡΟ εἶναι ὁ μέγας ἡμιάξων (σχ. 3).

Εἰς τὴν τρίτην ταύτην περίπτωσιν τὸ μέγιστον παραβαλλόμενον παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΡΟΚ $=(\mathrm{KN})^2$, ὅτε ΚΝ εἶναι ὁ μικρὸς ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως. Εἶναι φανερὰ ἡ ἰσχὺς τοῦ θεωρήματος, ὅταν ἡ ΡΟ, μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ δὲν εἶναι κάθετος ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, ἀλλὰ πλαγία.

ZUSSAMMENFASSUNG

Nach der von Moritz Cantor gegebenen Erklärung der 27. Satz des VI. Buches der Flemente von *Euklid*, der erste Satz, der in der Geschichte der Mathematik über Maximum vorkommt, als Funktion geschrieben besagen würde: $X(a-X)$ erhält seinen grössten Wert durch $X=\frac{a}{2}$.

E. Stamatis teilt mit, dass der Satz gilt allgemein, d. h. wenn die von der Mitte der gegebenen geraden Linie a gezogene gerade Linie kleiner, gleich oder grösser als $\frac{a}{2}$ ist.

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. — Παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις, *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σταμάτη*** **

1. Ὁ σχηματισμὸς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν παρέχεται ὑπὸ τῶν τύπων $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ καὶ $\delta_\nu = 2 . \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, ἔνθα α παριστᾷ τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διαγώνιον ἑνὸς τετραγώνου. [Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, σ. 42 - 45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰν Πολιτείαν Πλάτωνος, ἔκδ. Kroll. τόμ. II, σ. 24 κ.ἑ.]

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους, ἐὰν τὸ δοθὲν τετράγωνον θεωρηθῇ ἀπειροελαχίστως μικρόν, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς τὴν διαγώνιόν του καὶ ἴση πρὸς τὴν μονάδα, ἡ σειρὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶναι ἡ κάτωθι:

Πλευρικοὶ ἀριθμοί: 1, 2, 5, 12, 29 .... α_ν

Ἀντίστοιχοι διαμετρικοὶ ἀριθμοί: 1, 3, 7, 17, 41 .... δ_ν

ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$ παρέχει κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{2}$.

2. Ἐὰν ἡ $\sqrt{2}$ ὑπολογισθῇ κατὰ τὴν εἰς τὸν Ἀρχύταν ἀποδιδομένην μέθοδον τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων [1) Εὐκλείδου, Κατατομὴ Κανόνος θεώρ. 3, 2), Ἥρωνος, Μετρικά, τόμ. III σ. 18 - 20, 3) Boethius «De institutione arithmetica» III, 11 σ. 285] τότε λαμβάνομεν τὴν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν ταχύτερον ἢ διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 2 ὡς γινόμενον 2×1 καὶ μὲ πρώτους ἄκρους ὅρους τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 1 σχηματίζομεν ἐν συνεχείᾳ μουσικὰς ἀναλογίας ὡς κάτωθι:

** EVANG. STAMATIS, Eine Bemerkung auf die Berechnung von $\sqrt{2}$ bei den Alten.

$2 : \frac{3}{2}$ (πρῶτον ἀριθμητικὸν μέσον) $= \frac{4}{3}$ (πρῶτον ἁρμονικὸν μέσον) : 1

$\frac{3}{2} : \frac{17}{12}$ (β'. » ») $= \frac{24}{17}$ (β'. » ») : $\frac{4}{3}$

$\frac{17}{12} : \frac{577}{408}$ (γ'. » ») $= \frac{816}{577}$ (γ'. » ») : $\frac{24}{12}$

Ἀναγράφομεν κατωτέρω πίνακα ἐμφαίνοντα τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ τὰς δύο μεθόδους.

Α'. Μέθοδος λόγων, διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμούς.			Β'. Μέθοδος Ἀρχύτου, ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων.
1ος λόγος	1 : 1		
2ος $= 2^1$ »	3 : 2	→	πρῶτον ἀριθμ. μέσον τῶν ἀριθ. 1 καὶ 2 = 3 : 2
3ος »	7 : 5		πρῶτον ἁρμον. μέσον » » 1 » 2 = 4 : 3
4ος $= 2^2$ »	17 : 12	→	δεύτερον ἀριθμ. μέσον τῶν ἀριθ. $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ = 17 : 12
5ος »	41 : 29		δεύτερον ἁρμον. » » » $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ = 24 : 17
6ος »	99 : 70		
7ος »	239 : 169		
8ος $= 2^3$ »	577 : 408	→	τρίτον ἀριθμ μέσον τῶν ἀριθμῶν $\frac{17}{12}$, $\frac{24}{17}$ = 577 : 408
9ος »	1393 : 985		τρίτον ἁρμ. μέσον τῶν ἀριθμῶν $\frac{17}{12}$, $\frac{24}{17}$ = 816 : 577
10ος »	3363 : 2378		
11ος »	8119 : 5741		
12ος »	19601 : 13860		
13ος »	47321 : 33461		
14ος »	114243 : 80782		
15ος »	275807 : 195025		
16ος $= 2^4$ »	665857 : 470832	→	τέταρτον ἀριθ. μέσον τῶν ἀριθμῶν $\frac{577}{408}$, $\frac{816}{577}$ = = 665857 : 470832.
2^{ν} λόγος		→	νυοστὸν ἀριθμητικὸν μέσον.

3. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τάξις τῶν κατ' Ἀρχύταν ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι οἱ λογάριθμοι μὲ βάσιν τὸν 2 τῆς τάξεως τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1954: ΤΟΜΟΣ 29ος

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΑΡΑ ΤΟΙΣ ΑΡΧΑΙΟΙΣ.

E. STAMATIS: ÜBER DIE IRRATIONALENZAHLEN BEI DEN ALTEN.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1954

ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1954 ΤΟΜΟΣ 29ος

Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις

ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** *.

Εἰσαγωγή.

Εἰς τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, δημιουργήσαντες τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἠγνόουν ὅμως τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους θεωροῦσι δημιούργημα τῶν νεωτέρων χρόνων. Ἀντίθετον γνώμην διατυποῖ ὁ ἡμέτερος ἀκαδημαϊκὸς κ. Μιχαὴλ Στεφανίδης γράφων ὅτι ἡ θεωρία «τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν» ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν Εὔδοξον [1]. Ἔρευναν τοῦ προβλήματος τούτου ἐπεχείρησαν πολλοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων μνημονεύομεν τὸν Zeuthen [2], τὸν T. Heath, ὅστις ἡρμήνευσε τὸν 5ον ὁρισμὸν τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸν ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὔδοξον [3], καὶ τοὺς H. Hasse καὶ H. Scholz [4]. Οἱ τελευταῖοι καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι 1) Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, διότι δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς. 2) Δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς, διότι δὲν εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς, καὶ 3) Δὲν εἶχον τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς, διότι δὲν ἤθελον νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς (σ. 79 τῆς μεταφράσεως εἰς τὴν ἑλληνικήν).

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται, κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς διὰ τῆς παραθέσεως χωρίων ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ἑρμηνείας τινῶν ἐξ αὐτῶν, ὡς καὶ διὰ τῆς ἑρμηνείας τοῦ 35ου θεωρήματος τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

1. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς. Ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν γράφει «πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν» καὶ «ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος» Εἰς τοῦτο νοεῖται ἡ $\sqrt{2.5^2-1}=7$ ὡς ῥητὸς ἀριθμὸς (546, C).

---

* E. STAMATIS, Über die Irrationalenzahlen bei den Alten.

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 103, Ἀθῆναι, 1938.

2. Mathematische Annalen, σ. 222, 1896.

3. The thirteen books of Euclid's Elements καὶ *Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. II, σ. 20, Ἀθῆναι 1953. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν βιβλίων.

4. Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Charlottenburg 1928. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ τοῦ Φ. Βασιλείου καὶ Χ. Καπνουκάγια, 1934.

Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς προκειμένου τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{720}$ γράφει: «Ἐπεὶ οὖν αἱ ΨΚ (=720) ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι ληψόμεθα». Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 δὲν εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν... κλπ. (Μετρικά, τόμ. III σ. 18—20, Schoene, Teubner, 1903).

II. Ὁ Πλάτων εἰς τὸν Θεαίτητον γράφει:

Θεαίτητος. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος. ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Σωκράτης. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

Θεαίτητος. Ἔμοιγε δοκοῦμεν. σκόπει δὲ καὶ σύ.

Σωκράτης. Λέγε.

Θεαίτητος. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν. τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Σωκράτης. Καὶ εὖ γε.

Θεαίτητος. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

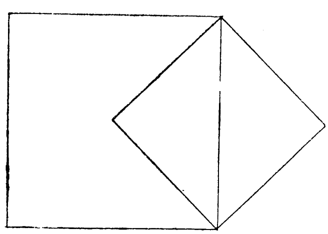
Σωκράτης. Κάλλιστα. Ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Θεαίτητος. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύναται. Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον (147 d — 148 b). Δηλαδή: Ὁ Θεόδωρος ἠσχολήθη μὲ τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας ἀριθμῶν, καὶ μὲ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ μὲ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδείξας ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 3 καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 5, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπέδειξε τὴν ἀσυμμετρίαν δι' ἑκάστην τῶν ῥιζῶν $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$... μέχρι τῆς $\sqrt{17}$. ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Δὲν ἔχει νόημα νὰ λέγεται ὅτι ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ μέγεθος $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ μέγεθος 3.

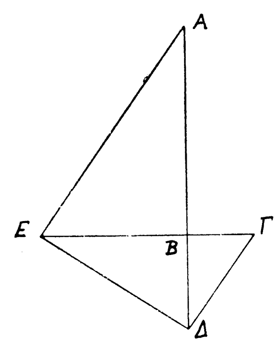
Εἰς δὲ τὴν Ἐπινομίδα:

«Ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής. ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοιοῖ [1], ταύτῃ ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες» (990d — 991α).

Οἱ ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἡ μοῖρα, ἡ τύχη, ἡ ἰδιότης τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι ὅτι οὗτοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ὅμοιος κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt{2}$, ρ). Ἡ γεωμετρία ὅμως ἀποδεικνύει ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1 \times 1 = 1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (σχ. 1), ὥστε οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ $1 \times 1 = 1$ καὶ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως



Σχ. 1.



Σχ. 2.

ὅμοιοι, νὰ ὑπόκεινται δηλ. εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων δὲν ὁμιλεῖ περὶ «ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν» ὡς ἑρμηνεύεται ὑπό τινων [2].

Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[3]{2}$ δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιος πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt[3]{2}$, ρ). Ἡ στερεομετρία ὅμως ἀποδεικνύει (δήλιον πρόβλημα, σχ. 2) ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1 \times 1 \times 1 = 1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$, ὥστε οἱ στερεοὶ ἀριθμοὶ $1 \times 1 \times 1 = 1$ καὶ $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι, δηλ. νὰ ὑπόκεινται εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων ὁμιλεῖ διὰ τοὺς ὁμοίους κατὰ τὴν στερεὰν φύσιν ἀριθμούς, τοὺς ὄντας γινόμενον τριῶν παραγόντων καὶ οὐχὶ διὰ τοὺς ὁμοίους στερεοὺς ἀριθμούς.

---

1. Ὁμοίᾳ.

2. E. *Des Places*, Le passage mathématique de l'Epinomis et la théorie des irrationelles. Revue des études grecques, σ. 546, 1935, καὶ *Paul - Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, σ. 505, 1950, Paris.

III. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ Ἠθικὰ Νικομάχεια γράφει:

«Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ» (Ε' ΙΙΙ. 8).

Εἰς δὲ τὰ Μετὰ τὰ φυσικά λέγει:

«Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν. ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται» (1021α 4).

Δηλαδὴ ὁ Ἀριστοτέλης ὁμιλεῖ περὶ μὴ συμμέτρων ἀριθμῶν.

IV. Τὸ 35ον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνῳ. Δηλαδή, νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι μέσον, τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν (δηλ. πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης). Ἢ νὰ κατασκευασθῇ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν θετικῶν ριζῶν αὐτῆς νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν αὐτῆς νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, καὶ τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ριζῶν νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν.

Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Τυχοῦσα εὐθεῖα ρ λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ρητή.

2. Εὐθεῖαι μήκει σύμμετροι ἢ μήκει ἀσύμμετροι λέγονται αἱ ἔχουσαι ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

3. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι ἢ δυνάμει ἀσύμμετροι λέγονται, ἐκεῖναι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα ἔχουσιν ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

4. Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μέσον, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι τῆς μορφῆς ρ, $\rho\sqrt{\alpha}$ ἢ $\rho\sqrt{\alpha}$, $\rho\sqrt{\beta}$, ἔνθα ρ ρητὴ καὶ α, β οὐχὶ τετράγωνοι. Ὅταν δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου περιέχῃ τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἢ ὅταν ἐπίπεδος ἀριθμὸς περιέχῃ τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

5. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον περιέχει τὸν παράγοντα $\rho\sqrt[4]{\alpha}$ (ἢ $\rho\sqrt[4]{\alpha\beta}$) καὶ καλεῖται μέση. Εἶναι φανερὸν ὅτι

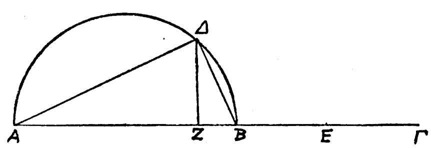
ἡ ρ $\sqrt[4]{\alpha}$ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ, ρ $\sqrt{\alpha}$, ἐξ οὗ καὶ αἰτιολογεῖται ὁ ὅρος μέση καὶ μέσον.

6. Ἐὰν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ>ΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὡς ὀρθογώνιον, ἔχον πλευρὰς ἀσυμμέτρους, τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τοῦτο σημαίνει: νά εὑρεθῶσιν αἱ ἀσύμμετροι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

$$x^2 - AB\,x + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$$

$$\text{αἱ } x_1 = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2} \text{ καὶ } x_2 = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν λαμβάνει δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους τὰς ΑΒ> ΒΓ (σχ. 3), ὥστε ΑΒ×ΒΓ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ ἀσύμμετρος πρὸς ΑΒ.



Σχ. 3.

Ἡ εὕρεσις τῶν δύο μέσων.

1. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ γ, δ οὐχὶ τετράγωνοι καὶ εὐθεῖα ρητὴ ἡ Α=ρ Τῶν γ, δ, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\omega = \rho \cdot \frac{\delta}{\gamma}$. Τῶν ρ, ω εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $B = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, (Χ. 6, πόρισμα). Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (Χ. 10).

2. Ἔστωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α^2, β^2, ὥστε $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος καὶ εὐθεῖα ρητὴ Α=ρ. Πρὸς εὕρεσιν τῶν δύο τούτων τετραγώνων ἀριθμῶν λαμβάνομεν δύο ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς ἀρτίους ἢ περιττούς, τοὺς μ, ν, ὁπότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι μ=κξ, ν=στ καὶ κ : ξ=σ : τ (κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι). Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα τοῦ Χ . 28 εἶναι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἢ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ οὐχὶ τετράγωνος [μν

$=\alpha^2$ κατὰ τὸ IX. 1, καὶ $\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\beta^2$]. Μὲ διάμετρον τὴν εὐθεῖαν ρ γράφομεν ἡμικύκλιον. Τῶν λ, α^2, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\varphi=\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$, καὶ τῶν ρ, φ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\Gamma=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ρ, $\sqrt{\rho^2-\frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (X. 30), (ρ πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$). Ἡ ρ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθεται πλευραὶ εἶναι $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $\sqrt{\rho^2-\frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$.

3. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων 1 καὶ 2 εὑρέθησαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ καὶ $\sqrt{\rho^2-\frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς ρ.

Τῶν ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $AB=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$.

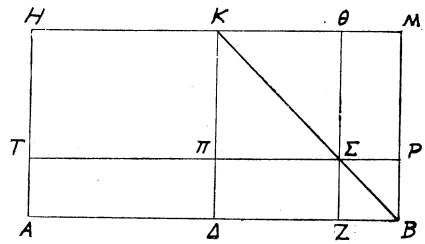
Τῶν $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $B\Gamma=$

$$=\frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda}}=\frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Αἱ $AB>B\Gamma$ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $AB\times B\Gamma$ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2-B\Gamma^2}$, AB μήκει ἀσύμμετροι (X. 32, δεύτερον μέρος).

Ἐπὶ τῆς AB γράφει ἡμικύκλιον (σχ. 3) καὶ παρὰ τὴν AB παραβάλλει ὡς ὀρθογώνιον τὸ $\frac{B\Gamma^2}{4}$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα. Τοῦτο σημαίνει τὴν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν καὶ ἀνίσων ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $X^2-ABX+\frac{B\Gamma^2}{4}=0$.

Ἡ ὕπαρξις τῶν ῥιζῶν τούτων εἶναι ἐξησφαλισμένη ἐκ τῶν 27 καὶ 28 τοῦ VI τῶν Στοιχείων. Αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ παραβαλλομένου ὀρθογωνίου αἱ AZ, ZB (X. 16 λῆμμα). Αὗται εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἐπειδὴ $\sqrt{AB^2-B\Gamma^2}$, AB εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. (X. 18). [Ἡ εὕρεσις τῶν AZ, ZB γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ (σχ. 4) ὑψοῦμεν κάθετον τὴν $\Delta K = \frac{AB}{2}$ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΜΗ φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον ΚΒ.



(Σχ. 4)

Τὴν διαφορὰν $\frac{AB^2}{4} - \frac{B\Gamma^2}{4}$ μετασχηματιζόμενον εἰς τετράγωνον πλευρᾶς $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - BA^2} = K\Pi$, καὶ τὸ τετράγωνον ΚΠΣΘ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΚΔΒΜ. Ὁ ἀπομένων γνώμων $\Pi\Delta BM\Theta\Sigma = AZ \times Z\Sigma = AZ \times ZB = \frac{B\Gamma^2}{4}$ καὶ ἐλλείπει τὸ τετράγωνον σχῆμα ΖΒΡΣ διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΡΤ][1].

Αἱ ΑΖ, ΖΒ (σχ. 3) ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι

$$AZ = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

$$ZB = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ΑΒ, ΒΓ διὰ τῶν τιμῶν των θὰ ἔχωμεν

$$AZ = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

1. Μερικὴ περίπτωσις τοῦ 28 τοῦ VI τῶν στοιχείων περὶ ἧς ἡμετέρα ἀνακοίνωσις ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν γενομένη διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 10-12-1953. Ἰδὲ καὶ *Ε. Σταμάτη* «Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. ΙΙ σ. 300. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1953, Ἀθῆναι.

$$ZB = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

δηλαδὴ τὰς ἀσυμμέτρους ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$X^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = o.$$

ἢ

$$X^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2} - 1\right)^2} = o.$$

Ἐκ τοῦ Ζ (σχ. 3) ὑψοῖ τὴν κάθετον ΖΔ καὶ φέρει τὰς ΑΔ, ΔΒ. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι αἱ ζητούμεναι κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσαι τὰς αἰτουμένας ἰδιότητας. Αἱ $A\Delta = \sqrt{AB \cdot AZ}$, $\Delta B = \sqrt{AB \cdot ZB}$ ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν ΑΒ,ΑΖ,ΖΒ θὰ εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

$$\Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

ἤτοι αἱ θετικαὶ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$X^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0, \quad \text{ἢ}$$

$$X^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2} = 0.$$

Ἡ ἀσυμμετρία τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ ἡ ἀσυμμετρία τοῦ γινομένου τῶν ριζῶν τούτων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν ἐκφράζονται διὰ πράξεων ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις γίνεται γεωμετρικῶς.

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Interpretation einiger Stellen aus Platon und Aristoteles, so wie der genaueren Interpetation des 35. Satzes des X. Buches der Elemente Euklids, teilte E. Stamatis mit, dass die Alten Griechen nicht nur die Irrationalgrössen, sondern auch die Irrationalzahlen kannten.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ ΥΠΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ $\sqrt{3}$

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ Ζ' — ΤΕΥΧΟΣ Β' 1955

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
1955

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΝΑΤΥΠΟΝ
ΣΕΛ. 255 - 262

Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 3,

ὑπὸ

Εὐαγγ. Σταμάτη*.

Α'.

Εἰς τὸ τρίτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον παντὸς κύκλου εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$, μεγαλύτερος δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$

Ἡ σχέσις αὕτη στηρίζεται εἰς τὰς ἀκεραίας λύσεις τῶν δύο διοφαντικῶν ἐξισώσεων $y^2=3x^2-2$ καὶ $y^2=3x^2+1$, τὰς ὁποίας ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα ἐπίσης ἄνευ ἀποδείξεως.

Τινὲς ἐκ τῶν ἑρμηνευτῶν τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους φρονοῦσιν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις εἶναι ἐπινοήσεις τοῦ Συρακοσίου σοφοῦ. Τοῦτο δὲν φαίνεται πιθανόν. Διότι ὁ Ἀρχιμήδης, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν σῳζομένων ἔργων του, ὁσάκις χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐρεύνας αὐτοῦ μαθηματικὰς προτάσεις ἀποδειχθείσας ὑπὸ ἄλλων χρησιμοποιεῖ αὐτὰς ἄνευ ἀποδείξεως.

Τὸ πιθανώτερον εἶναι ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις ἦσαν γνωσταὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους καὶ δὴ καὶ εἰς τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον. Ἐνδεικτικὸν τι ἀφορῶσα εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον ἰσχυρισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ μαθηματικὸν χωρίον τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος (147b - 148d). Κατὰ τοὺς δύο τελευταίους αἰῶνας ἐγένοντο πολλαὶ προσπάθειαι ἀποδείξεως τῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους χρησιμοποιουμένων ἀναποδείκτως προτάσεων τούτων.

Ὁ Τ. Heath (1) γράφει ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι ἡ ὀρθοτέρα ἑρμηνεία τῶν ἀνωτέρω προτάσεων ἐγένετο ὑπὸ τῶν Hultsch - Hunrath διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως

$$\alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} > \sqrt{\alpha^2 \pm \beta} > \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha \pm 1},$$

ἔνθα $\alpha^2 \pm \beta$ ἀκέραιος μὴ τετράγωνος, καὶ α^2 ὁ ἐγγὺς πρὸς τοῦτον τετράγωνος

1) *Archimedes* Werke, (Deutsch von *F. Kliem*, S. 72, Verlag *O. Häring*, Berlin 1914)

(ἀναλόγως τῆς ἑκάστοτε περιπτώσεως μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ). Ἐκτὸς τῆς μεθόδου Hultsch - Hunrath μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ T. Heath καὶ αἱ ἑξῆς: De Lagny, Zeuthen, Tannery, Heilermann, Rodet· ἐπὶ πλέον ἀναφέρονται ἐπίσης ὡς ἑρμηνευταὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ οἱ Mollweide, Hauber, Buzengeiger, Radicke, Pessl, Oppermann, Alexejeff, Schönborn (1).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἐν περιλήψει τὴν μέθοδον Heilermann, διότι αὕτη στηριζομένη εἰς τοὺς ἐκ τετραγώνων σχημάτων πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς παρουσιάζει συγγένειάν τινα πρὸς τὴν ἡμετέραν μέθοδον.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (2) οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
S_0	D_0
$S_1 = S_0 + D_0$	$D_1 = 2S_0 + D_0$
$S_2 = S_1 + D_1$	$D_2 = 2S_1 + D_1$
$S_3 = S_2 + D_2$	$D_3 = 2S_2 + D_2$
$\vdots$	$\vdots$
$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$	$D_n = 2S_{n-1} + D_{n-1}$

Ἐὰν $S_0=1$ καὶ $D_0=1$, οἱ λόγοι $\dfrac{D_n}{S_n}$ ὁδηγοῦσιν εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

Ὁ Heilermann ἀντὶ τοῦ 2 εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις θέτει τυχόντα ἀριθμὸν α (μὴ τετράγωνον) καὶ λαμβάνει τὸ ἑπόμενον σχῆμα:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
$S_1 = S_0 + D_0$	$D_1 = \alpha S_0 + D_0$
$S_2 = S_1 + D_1$	$D_2 = \alpha S_1 + D_1$
$S_3 = S_2 + D_2$	$D_2 = \alpha S_2 + D_2$
$\vdots$	$\vdots$
$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$	$D_n = \alpha S_{n-1} + D_{n-1}$

Οἱ λόγοι $\dfrac{D_n}{S_n}$ ἐκφράζουσι κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{\alpha}$.

Οὕτως ἐὰν θέσωμεν $\alpha=3$, $S_0=1$, $D_0=2$, λαμβάνομεν τοὺς λόγους:

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{D_1}{S_1} = \frac{5}{3}, \quad \frac{D_2}{S_2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \quad \frac{D_3}{S_3} = \frac{19}{11},$$

1) Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden, Leipzig 1882, von *Sigmund Günther*.

2) *Theonis Smyrnaei*, Philosophi Platonici, *E. Hiller*, σ. 43 κ. ἑ., Leipzig 1878, καὶ *Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8 κ. ἑ., Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953.

$$\frac{D_4}{S_4}=\frac{52}{30}=\frac{26}{15},\quad \frac{D_5}{S_5}=\frac{71}{41},\quad \frac{D_6}{S_6}=\frac{194}{112}=\frac{97}{56},\quad \frac{D_7}{S_7}=\frac{265}{153},$$

$$\frac{D_8}{S_8}=\frac{362}{209},\quad \frac{D_9}{S_9}=\frac{989}{571},\quad \frac{D_{10}}{S_{10}}=\frac{1351}{780},\quad \text{κλπ.}$$

Οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα. Τοῦτο εἶναι κοινὸν καὶ διὰ τὰς δύο ἀκολουθίας, ἤτοι εἶναι :

$$\frac{2}{1}>\frac{7}{4}>\frac{26}{15}>\frac{97}{56}>\frac{362}{209}>\frac{1351}{780}>\ldots\sqrt{3}\ldots>\frac{989}{571}>\frac{265}{153}>\frac{71}{41}>\frac{19}{11}>\frac{5}{3}.$$

Ἡ μέθοδος αὔτη ὁδηγεῖ, ὡς ἀποδεικνύει ὁ Heilermann, ταχύτερον πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐὰν αὔτη χρησιμοποιηθῇ οὐ μόνον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{\alpha}$, ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\beta\sqrt{\alpha}$, ἔνθα ὁ β ἐκλέγεται οὕτω πως, ὥστε τὸ $\beta^2\alpha$ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ α) νὰ κεῖται ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον πρὸς τὴν μονάδα. Ὅθεν ἐὰν θέσωμεν $\alpha=\frac{27}{25}$, ὥστε $\sqrt{\alpha}=\frac{3}{5}\sqrt{3}$ ἔχομεν (ἐὰν τεθῇ $D_0=S_0=1$)

$$S_1=2,\qquad D_1=\frac{52}{25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\backsim\frac{5}{3}\cdot\frac{26}{25}\ \text{ἢ}\ \frac{26}{15}$$

$$S_2=\frac{102}{25},\quad D_2=\frac{54+52}{25}=\frac{106}{25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\backsim\frac{5}{3}\cdot\frac{106}{102}\ \text{ἢ}\ \frac{265}{153}$$

$$S_3=\frac{208}{25},\quad D_3=\frac{102\,.\,27}{25\,.\,25}+\frac{106}{25}=\frac{5404}{25\,.\,25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\backsim\frac{5404}{25.208}\cdot\frac{5}{3}\ \text{ἢ}$$

$$\frac{1351}{780},\ \text{κλπ.}$$

Β΄.

Ἡ παρ' ἡμῶν ἀνακοινουμένη κατωτέρω μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$ καὶ ἐπιλύσεως τῶν μνημονευθεισῶν δύο διοφαντικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται εἰς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς προκύπτοντας ἐκ τῆς θεωρήσεως ὁμοίων ῥόμβων ἐχόντων τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ 12ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $\text{ΑΓ}^2=3\text{ΑΒ}^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρά, δηλ. ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, καὶ συνεπῶς $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}=\sqrt{3}$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΕΖ=ΑΓ, ὥστε ΑΖ=2ΑΒ+ΕΖ. Κατὰ τὸν 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν) (1) θὰ ἔχωμεν :

$$AZ^2+EZ^2=2AB^2+2BZ^2.$$

Ἐπειδὴ $BZ=BE+EZ$, θὰ εἶναι

$$AZ^2+EZ^2=2AB^2+2(BE+EZ)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ EZ^2 λαμβάνομεν

$$AZ^2=2AB^2+2BE^2+EZ^2+4BE\times EZ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $BE=AB$ καὶ $EZ=A\Gamma$, θὰ ἔχωμεν

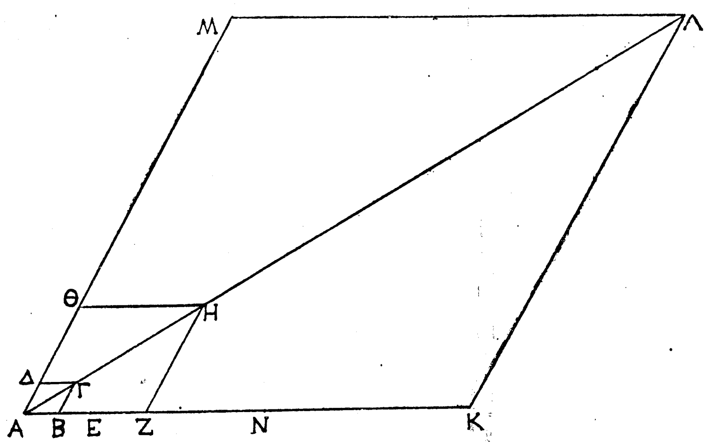
$$AZ^2=4AB^2+A\Gamma^2+4AB\times A\Gamma.$$

Ἄρα καὶ $3AZ^2=12AB^2+3A\Gamma^2+12AB\times A\Gamma.$

Ἀλλὰ $3AB^2=A\Gamma^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AZ^2=9AB^2+4A\Gamma^2+12AB\times A\Gamma=(3AB+2A\Gamma)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AZ=2AB+EZ=2AB+A\Gamma$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AB+2A\Gamma$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν με-



Σχ. 1

γαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΖΗΘ, ἔνθα $AH=3AB+2A\Gamma$ καὶ $AH^2=3AZ^2$. Ἐὰν καλέσωμεν $AB=\alpha$ καὶ $A\Gamma=\delta$, θὰ ἔχωμεν

$$AZ=2\alpha+\delta, \ (1) \ \text{καὶ} \ AH=3\alpha+2\delta, \ (2).$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λαμβάνομεν τμῆμα $ZN=AZ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΝ λαμβάνομεν τμῆμα $NK=AH$, ὥστε $AK=2AZ+NK$. Πάλιν κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$AK^2+NK^2=2AZ^2+2ZK^2.$$

Ἐπειδὴ $ZK=ZN+NK$, θὰ εἶναι

$$AK^2+NK^2=2AZ^2+2(ZN+NK)^2.$$

---

1) Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 κ.ἑ., 393 κ.ἑ. Ἑρμηνεία *Hultsch-Kroll*, Teubner, καὶ *Paul-Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, σ. 438 κ.ἑ. Paris Soc. d'édition Les Belles Lettres, 1950.

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ NK^2 λαμβάνομεν

$$AK^2=2AZ^2+2ZN^2+NK^2+4ZN\times NK.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ZN=AZ$ καὶ $NK=AH$, θὰ ἔχωμεν

$$AK^2=4AZ^2+AH^2+4AZ\times AH.$$

Ἄρα καὶ $\quad 3AK^2=12AZ^2+3AH^2+12AZ\times AH.$

Ἀλλὰ εἶναι $AH^2=3AZ^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AK^2=9AZ^2+4AH^2+12AZ\times AH=(3AZ+2AH)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AK=2AZ+NK=2AZ+AH$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AZ+2AH$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΚΛΜ, ἔνθα $A\Lambda=3AZ+2AH$ καὶ $A\Lambda^2=3AK^2$.

Ἐὰν εἰς τὰς ΑΚ καὶ ΑΛ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ΑΖ, ΑΗ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\quad A\Lambda=12\alpha+7\delta$ καὶ $AK=7\alpha+4\delta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ῥόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων.

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ		Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α		δ
$\alpha_1=2\alpha+\delta$		$\delta_1=3\alpha+2\delta$
$\alpha_2=7\alpha+4\delta$		$\delta_2=12\alpha+7\delta$
$\alpha_3=26\alpha+15\delta$		$\delta_3=45\alpha+26\delta$
$\alpha_4=97\alpha+56\delta$		$\delta_4=168\alpha+97\delta$
$\alpha_5=362\alpha+209\delta$		$\delta_5=627\alpha+362\delta$
$\vdots$		$\vdots$
α_1	Ἢ	δ_1
$\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$		$\delta_2=3\alpha_1+2\delta_1$
$\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$		$\delta_3=3\alpha_2+2\delta_2$
$\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$		$\delta_4=3\alpha_3+2\delta_3$
$\alpha_5=2\alpha_4+\delta_4$		$\delta_5=3\alpha_4+2\delta_4$
$\vdots$		$\vdots$
$\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$		$\delta_\nu=3\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}.$

Ἐὰν ἀνωτέρω θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\dfrac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{\delta_2}{\alpha_2}=\frac{5}{3},\quad \frac{\delta_3}{\alpha_3}=\frac{19}{11},\quad \frac{\delta_4}{\alpha_4}=\frac{71}{41},\quad \frac{\delta_5}{\alpha_5}=\frac{265}{153},\quad \text{κλπ.}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\dfrac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν

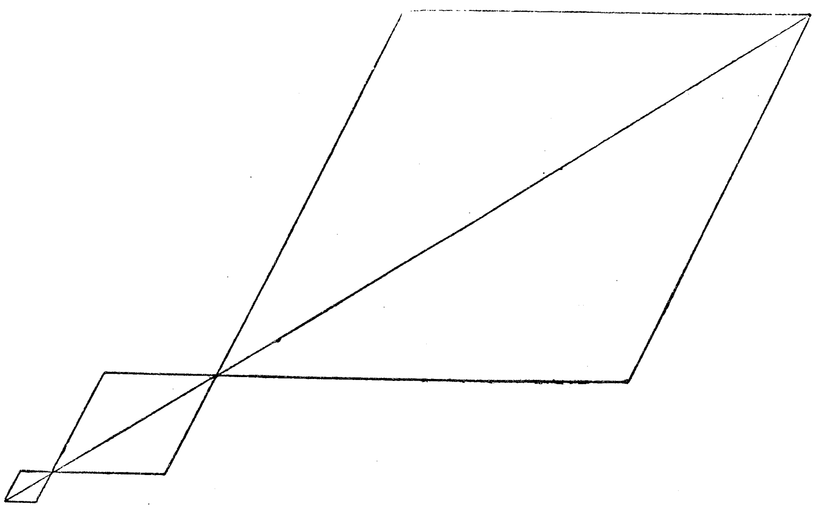
$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{7}{4}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{26}{15}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{97}{56}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{362}{209},$$

$$\frac{\delta_6}{\alpha_6} = \frac{1351}{780}, \quad \text{κλπ.}$$

Ἤτοι εἶναι :

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \ldots \sqrt{3} \ldots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

Αἱ τιμαὶ δ_ν , α_ν , ἐὰν τεθῇ $\delta_1=1$, $\alpha_1=1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις



Σχ. 2

τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2-2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1=2$, $\alpha_1=1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2+1$.

[Σημ. Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα οἱ ῥόμβοι ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως].

Zusammenfassung (*)

Archimedes benutzt in seiner Kreismessung, ohne eine Erklärung dafür anzugeben die Beziehungen $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ und

$$265^2=3.153^2-2, \quad 1351^2=3.780^2+1.$$

E. Stamatis teilt auf Grund der Theorie der Seiten-und Diagonalzahlen, wie sie uns von Theon von Smyrna und Proklos überliefert ist, einen geometrischen Beweis dieser Beziehungen mit.

---

*) *E. Stamatis*, Mitteilung in der Akademie der Wissenschaften zu Athen vorgelegt am 2.6.1955.

Es sei ein Rhombus (Fig. 1) gegeben, dessen grösserer Winkel gleich einem äusseren Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist, $AB=\alpha_1$ die Seite, $A\Gamma=\delta_1$ die grössere Diagonale des Rhombus. Nach Euklid II, 12 ist $\delta_1^2=3\alpha_1^2$, und $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{3}$. Auf die Verlängerung von AB tragen wir eine Strecke $BE=AB=\alpha_1$ und $EZ=A\Gamma=\delta_1$ ab. Dann ist nach Euklid II, 10 (was Proklos für die Seiten-und Diagonalzahlen erwähnt)

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2 .$$

Aus dieser, $(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2$. Es gilt aber auch $3(2\alpha_1+\delta_1)^2=12\alpha_1^2+12\alpha_1\delta_1+3\delta_1^2$, und weil $\delta_1^2=3\alpha_1^2$, so haben wir

$$3(2\alpha_1+\delta_1)^2=9\alpha_1^2+12\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(3\alpha_1+2\delta_1)^2 .$$

Diese Beziehung drückt die Tatsache aus, dass $(2\alpha_1+\delta_1)$ die Seite, $(3\alpha_1+2\alpha_1)$ die grössere Diagonale eines ähnlichen, wie der gegebene Rhombus $AB\Gamma\Delta$ ist. Das Verfahren lässt sich unendlich wiederholen.

Folglich ergeben sich die entsprechenden Seiten-und Diagonalzahlen :

		Seitenzahlen	Diagonalzahlen
1.	Rhombus	α_1	δ_1
2.	»	$\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$	$\delta_2=3\alpha_1+2\delta_1$
3.	»	$\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$	$\delta_3=3\alpha_2+2\delta_2$
4.	»	$\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$	$\delta_4=3\alpha_3+2\delta_3$
.		.	
.		.	
.		.	
ν.	»	$\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu=3\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$.

1. Setzen wir $\alpha_1=1$, $\delta_1=1$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die steigende Folge

$$\frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\ldots\sqrt{3} ,$$

und $265^2=3.153^2-2$

2. Setzen wir $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die fallende Folge

$$\sqrt{3}\ldots<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1} ,$$

und $1351^2=3.780^2+1$.

Wir haben also, auf Grund der von Theon von Smyrna und Proklos überlieferten Methode die Beziehungen die Archimedes, ohne Erklärung, als bekannt, angibt.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ Η' — ΤΕΥΧΟΣ Α' 1956

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ ΚΑΙ ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
1956

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ (¹)

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται κατὰ τὴν παράδοσιν ἡ ἀπόδειξις τοῦ περιφήμου ὁμωνύμου θεωρήματος (Εὐκλείδου I, 47), ὡρισμέναι ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2=x^2+y^2$ καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων (²). Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἐν γένει ἀποδίδεται μεταξὺ ἄλλων τὸ II Βιβλίον καὶ τὸ πλεῖστον τῶν ἀριθμητικῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $y^2=2x^2\mp 1$, (1), αἵτινες χρησιμεύουσι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κατὰ προσέγγισιν ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς $\sqrt{2}$. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) ὀνομάζονται, ὡς γνωστόν, πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, διότι οἱ μὲν ἐκ τούτων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς πλευράς, οἱ δὲ εἰς τὰς διαγωνίους τετραγώνων (³).

Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν διεσώθη ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ ἔχει ὡς κάτωθι:

	Πλευρικοὶ ἀριθμοί	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί
1.	1	1
2.	$1+1=2$	$2\cdot 1+1=3$
3.	$2+3=5$	$2\cdot 2+3=7$
4.	$5+7=12$	$2\cdot 5+7=17$
5.	$12+17=29$	$2\cdot 12+17=41$
.		
.		

*) *Evangelos Stamatis*, A contribution to the investigation of the geometrical algebra of the Pythagoreans.

1) Ἀνεκοινώθη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 2ας Ἰουνίου 1955 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. *Μιχαὴλ Στεφανίδου*.

2) *Μιχαὴλ Στεφανίδου*, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 55-65 καὶ 102-3, Ἀθῆναι 1938.—*Πρόκλος*, Σχόλια εἰς Εὐκλείδην I, σ. 65 καὶ 438, ἐκδ. Friedlein, Teubner.—*Ἰαμβλίχου* V. P. 246, ἐκδ. L. Deubner, Teubner.

3) *Theonis Smyrnaei*, Philosophi Platonici, ἐκδ. E. Hiller, σ. 43, Teubner.—*E. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8 (Ὀργαν. Ἐκδ. Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953).—*Paul-Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, p. 438, Paris 1950 (Soc. d'éd. Les Belles Lettres).—*M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik unter Theon von Smyrna.—*T. Heath*, A history of Greek mathematics I, p. 91, Oxford 1921, At the Clarendon Press.—*R. Moris Cohen - J. E. Drabkin*, A source book in Greek science, p. 43, McGraw - Hill book company inc. New York, Toronto, London, 1948.

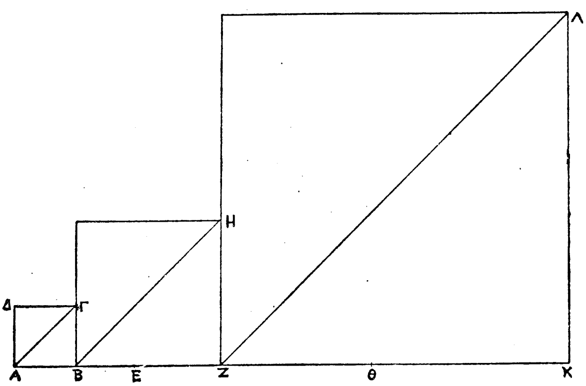
Εἶναι δὲ $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$,

καὶ

$$1^2 = 2 \cdot 1^2 - 1$$
$$3^2 = 2 \cdot 2^2 + 1$$
$$7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$$
$$17^2 = 2 \cdot 12^2 + 1$$
$$41^2 = 2 \cdot 29^2 - 1 \quad \text{κλπ.}$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Πρόκλου (1) καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς :

Ἔστω τετράγωνον πλευρᾶς $AB=\alpha_1$ καὶ διαγωνίου $A\Gamma=\delta_1$, (σχ. 1), ὅτε εἶναι



Σχ. 1

$\delta_1^2=2\alpha_1^2$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB λαμβάνομεν τμῆμα $BE=AB=\alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ=A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10 θὰ εἶναι :

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2\,(\alpha_1+\delta_1)^2.$$

Καὶ ἐπειδὴ $\delta_1^2=2\alpha_1^2$, θὰ ἔχωμεν δι' ἀφαιρέσεως τούτου κατὰ μέλη ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως, $(2\alpha_1+\delta_1)^2=2(\alpha_1+\delta_1)^2$. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(\alpha_1+\delta_1)=BE+EZ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(2\alpha_1+\delta_1)=AB+BE+EZ$ εἶναι διαγώνιος τετραγώνου, ἡ BH. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BZ λάβωμεν τμῆμα $Z\Theta=BZ$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $\Theta K=BH$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 10 θὰ λάβωμεν νέον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἡ $Z\Theta+\Theta K=3\alpha_1+2\delta_1$, ἡ δὲ διαγώνιος ἡ $Z\Lambda=BK=2BZ+\Theta K=4\alpha_1+3\delta_1$.

Ὅθεν λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς σχῆμα :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2=\alpha_1+\delta_1$	$\delta_2=2\alpha_1+\delta_1$
$\alpha_3=\alpha_2+\delta_2$	$\delta_3=2\alpha_2+\delta_2$
$\alpha_4=\alpha_3+\delta_3$	$\delta_4=2\alpha_3+\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=1$, λαμβάνομεν τοὺς κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρ-

1) Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 κ. ἑ., 393 κ. ἑ. ὑπὸ *F. Hultsch*, ἐκδ. Kroll, Teubner.

ναῖον πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=2x^2\mp1$, ἢ $\delta_\nu{}^2=2\alpha_\nu{}^2+(-1)^\nu$, $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$.

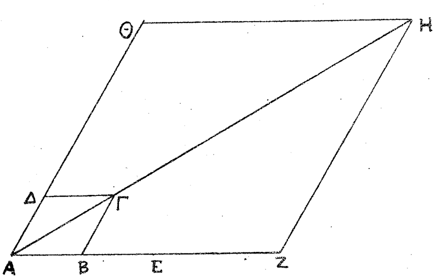
Ἐκ τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος πληροφορούμεθα, ὅτι οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἦσαν γνωστοὶ εἰς αὐτόν. Ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «*ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν*» (546 c). Ἐνταῦθα ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ δὴ καὶ μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, τὴν $7^2=2.5^2-1$. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ Πρόκλου, ὅστις γράφει «*ὅπου δὲ τὸ σύνεγγυς ἀγαπῶμεν, οἷον εὑρόντες ἐν γεωμετρίᾳ τετράγωνον τετραγώνου διπλάσιον, ἐν ἀριθμοῖς δὲ οὐκ ἔχοντες ἑνὸς δέοντος φαμὲν ἄλλον ἄλλου διπλάσιον ὑπάρχειν, ὥσπερ τοῦ ἀπὸ τῆς πεντάδος ὁ ἀπ τῆς ἑπτάδος διπλάσιον ἑνὸς δέοντος*». Καὶ ἀλλαχοῦ «*οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος εἰ μὴ λέγει τις τὸν σύνεγγυς. ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ' τοῦ ἀπὸ τοῦ ε' διπλάσιός ἐστιν ἑνὸς δέοντος*» (1). (Εἶναι δηλ. $7^2=2.5^2-1$).

2. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Κύκλου Μέτρησις» χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}, \quad \text{καὶ} \quad 265^2=3.153^2-2, \quad 1351^2=3.780^2+1$$

Γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τῶν σχέσεων τούτων ὑπεβάλομεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (2).

Αὕτη συνδέεται πρὸς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ (σχ. 2), τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα γωνία, ἡ $\hat{}$ΑΒΓ, νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 12, ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν $AB=\alpha_1$ καὶ τὴν $A\Gamma=\delta_1$, ἥτις βεβαίως εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι $\delta_1{}^2=3\alpha_1{}^2$, καὶ συνεπῶς $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{3}$. Ἐφαρμόζομεν τώρα ἀκριβῶς τὴν ὑπὸ τοῦ Πρόκλου ὑποδεικνυομένην μέθοδον διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἐκ τετραγώνων σχημάτων προκυπτόντων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE=AB=\alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ=A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10 θὰ ἔχωμεν: $(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1{}^2=2\alpha_1{}^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2$, καὶ ἐκ ταύτης:



Σχ. 2

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1{}^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1{}^2 \qquad (1).$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3(2\alpha_1+\delta_1)^2=12\alpha_1{}^2+12\alpha_1\delta_1+3\delta_1{}^2$. Ἀλλὰ $\delta_1{}^2=3\alpha_1{}^2$. Ἑπομένως

$$3(2\alpha_1+\delta_1)^2=9\alpha_1{}^2+12\alpha_1\delta_1+4\delta_1{}^2=(3\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(3\alpha_1+2\alpha_1)$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ὁμοίου ῥόμβου πρὸς τὸν ΑΒΓΔ τοῦ ΑΖΗΘ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λάβωμεν τμῆμα ἴσον πρὸς ΑΖ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ἴσον πρὸς ΑΗ, τότε ἔχομεν κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον τὴν πλευρὰν καὶ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον νέου ὁμοίου ῥόμβου πρὸς τὸν ἀρχικόν, ἤτοι πλευρὰ μὲν εἶναι ἡ $2AZ+AH$, διαγώνιος δὲ μεγαλυτέρα ἡ $3AZ+2AH$ ἢ $7\alpha_1+4\delta_1$ καὶ $12\alpha_1+7\delta_1$ ἀντιστοίχως. Καλοῦντες τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν πλευρικοὺς ἀρι-

1) *Πρόκλος* εἰς Εὐκλείδην I, σ. 61 καὶ 427, ἐκδ. G. Friedlein, Teubner.

2) Βλ. Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, 2.6.1955, σ. 255 κ. ἑξ. καὶ προηγούμενον τεῦχος «Πλάτωνος».

θμοὺς καὶ τὰς τιμὰς τῶν μεγαλυτέρων διαγωνίων, τῶν συνεχῶν κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον κατασκευαζομένων ῥόμβων, διαμετρικοὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
$\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4$	$\delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha=1$, $\delta=1$, λαμβάνομεν :

(A)

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 5$
$\alpha_3 = 11$	$\delta_3 = 19$
$\alpha_4 = 41$	$\delta_4 = 71$
$\alpha_5 = 153$	$\delta_5 = 265$
$\vdots$	$\vdots$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2-2$, ἤτοι εἶναι : $1^2=3.1^2-2$, $5^2=3.3^2-2$, $19^2=3.11^2-2$, κλπ.

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, λαμβάνομεν :

(B)

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$
$\vdots$	$\vdots$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2+1$, ἤτοι εἶναι : $2^2=3.1^2+1$, $7^2=3.4^2+1$, $26^2=3.15^2+1$, κλπ.

Οἱ λόγοι $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ τῶν (A) καὶ (B) ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν τῶν (A) εἶναι αὐξανομένη, ἡ δὲ τῶν (B) φθίνουσα. Τὸ κοινὸν φράγμα τούτων εἶναι ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι εἶναι

$$1)\quad \frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{41}{71}<\frac{265}{153}<\ldots\sqrt{3}\ldots<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1},$$

καὶ 2) $265^2=3.153^2-2$, $1351^2=3.780^2+1$, ὡς χρησιμοποιεῖ ταῦτα ἄνευ ἀποδείξεως, ὡς γνωστά, ὁ Ἀρχιμήδης.

II.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζον καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\delta_\nu{}^2 = \lambda\alpha_\nu{}^2+(\lambda-4)^\nu(-1)^\nu$$

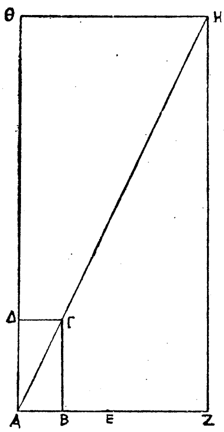
($\nu=1, 2, 3\ldots$ καὶ $\lambda\geqslant5$, ἀκέραιος μὴ τετράγωνος), καὶ ὅτι ἡ $\sqrt{\lambda}$ εἶναι τὸ κοινὸν φράγμα δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς αὐξανομένης καὶ μιᾶς φθινούσης, διότι ἡ ἀπόδειξις τούτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας.

Παρέχομεν τὴν ἀπόδειξιν διὰ τὰς ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\delta_\nu^2 &= 5\alpha_\nu^2 + (5-4)^\nu(-1)^\nu\\
\delta_\nu^2 &= 6\alpha_\nu^2 + (6-4)^\nu(-1)^\nu\\
\delta_\nu^2 &= 7\alpha_\nu^2 + (7-4)^\nu(-1)^\nu\\
\delta_\nu^2 &= 8\alpha_\nu^2 + (8-4)^\nu(-1)^\nu\\
&\vdots\\
\delta_\nu^2 &= 17\alpha_\nu^2 + (17-4)^\nu(-1)^\nu
\end{aligned}$$

καὶ τὴν $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... $\sqrt{17}$. Εἶναι δὲ γνωστὸν ἐκ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, ὅτι ὁ Θεόδωρος [1] (ὁ Κυρηναῖος, ὅστις θεωρεῖται Πυθαγόρειος) ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... $\sqrt{17}$ (Θεαίτητος 147 D—148 B).

II. 1. $\delta_\nu^2 = 5\alpha_\nu^2 + (5-4)^\nu(-1)^\nu$ καὶ $\sqrt{5}$. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 3), ἔνθα ἔστω $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=2\alpha_1$ καὶ ἡ διαγώνιος $A\Gamma=\delta_1$. Εἶναι ἄρα



Σχ. 3

$$\delta_1^2 = 5\alpha_1^2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{5}.$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE=AB=\alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ=A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10, θὰ ἔχωμεν:

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2$$

καὶ ἐκ ταύτης $(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2$

Εἶναι ἄρα καὶ

$$5(2\alpha_1+\delta_1)^2=20\alpha_1^2+20\alpha_1\delta_1+5\delta_1^2.$$

Ἀλλὰ $\delta_1^2=5\alpha_1^2$. Ἑπομένως

$$5(2\alpha_1+\delta_1)^2=20\alpha_1^2+5\alpha_1^2+20\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(5\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)=AZ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(5\alpha_1+2\delta_1)=AH$ εἶναι διαγώνιος ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ ΑΖΗΘ. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον τῆς κατασκευῆς ἐν συνεχείᾳ ὁμοίων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 5\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 5\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 5\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

1) *Pauly - Wissowa*, Realenzyklopädie unter Theodoros. Dort Literaturangabe: *M. Cantor*, *E. Frank*, *F. Hultsch*, *G. Junge*, *H. Vogt*, *H. G. Zeuthen*, *Eva Sachs*, *T. Bonnesen*, *H. Hasse-H. Scholz*, *T. Heath*. —2. Und *W. L. van der Waerden*, Die Arithmetik der Pythagoreer II. Die Theorie des Irrationalen, Mathem. Annalen, **120**, 5/6 Heft, 1949, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.—3. *K. Reidemeister*, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig, 1940.—4. *J. E. Hofmann*, Geschichte der Mathematik I, S. 26 - 27, Berlin, 1953 (Sammlung Göschen, 226, Walter de Gruyter und Co).—5. *Robert S. Brumbaugh*, Plato's Mathematical Imagination, p. 146, Indiana Univ. Press, Bloomington, 1954.

'Εὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν
$\alpha_2 = 4$, $\delta_2 = 9$
$\alpha_3 = 17$, $\delta_3 = 38$
$\alpha_4 = 72$, $\delta_4 = 161$
$\vdots$ $\vdots$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{38}{17} < \dots \sqrt{5} \dots < \frac{161}{72} < \frac{9}{4}$, καὶ

$$2^2 = 5 \,.\, 1^2 - 1$$
$$9^2 = 5 \,.\, 4^2 + 1$$
$$38^2 = 5 \,.\, 17^2 - 1$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 5 \,.\, \alpha_\nu{}^2 + (5-4)^\nu (-1)^\nu \,.$$

II. 2. $\delta_\nu{}^2 = 10\alpha_\nu{}^2 + (10-4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{10}$.

Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα 3 λαμβάνομεν $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 3\alpha_1$, ὁπότε

$$\delta_1{}^2 = 10\alpha_1{}^2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{10}.$$

'Εφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην κατασκευὴν (II. 1) λαμβάνομεν

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2$$

Εἶναι ἄρα καὶ $10(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 40\alpha_1{}^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 10\delta_1{}^2$

'Αλλὰ $\delta_1{}^2 = 10\alpha_1{}^2$. 'Επομένως

$$10(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 40\alpha_1{}^2 + 60\alpha_1{}^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2 = (10\alpha_1 + 2\delta_1)^2.$$

'Η σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(10\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος ὁμοίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. 'Ο νόμος τῆς κατασκευῆς τῶν ὁμοίων ἐν συνεχείᾳ παραλληλογράμμων εἶναι προφανής.

"Οθεν θὰ εἶναι

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 10\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 10\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 10\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 10\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

'Εὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν
$\alpha_2 = 4$ $\delta_2 = 14$
$\alpha_3 = 22$ $\delta_3 = 68$
$\alpha_4 = 112$ $\delta_4 = 356$
$\vdots$ $\vdots$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{68}{22} < \dots \sqrt{10} \dots < \frac{356}{112} < \frac{14}{4}$

καὶ

$$2^2 = 10 \,.\, 1^2 - 6$$
$$14^2 = 10 \,.\, 4^2 + 6^2$$
$$68^2 = 10 \,.\, 22^2 - 6^3$$
$$356^2 = 10 \,.\, 112^2 + 6^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 10 \,.\, \alpha_\nu{}^2 + (10-4)^\nu (-1)^\nu$$

II. 3. $\delta_\nu{}^2 = 17\alpha_1{}^2 + (17-4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{17}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα 3 λαμβάνομεν $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 4\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$, ὁπότε εἶναι

$\delta_1^2=17\alpha_1^2$ καὶ $\dfrac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{17}$. Ἐφαρμόζομεν πάλιν τὴν κατασκευὴν (ΙΙ. 1) ὁπότε ἔχομεν

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+17\delta_1^2$. Ἀλλὰ $\delta_1^2=17\alpha_1^2$.

Ἐπομένως $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+221\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(17\alpha_1+2\delta_1)^2$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(17\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος ὁμοίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν ὁμοίων ὀρθογ. παραλληλογράμμων εἶναι προφανής.

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$	$\delta_2=17\alpha_1+2\delta_1$
$\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$	$\delta_3=17\alpha_2+2\delta_2$
$\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$	$\delta_4=17\alpha_3+2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu=17\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$

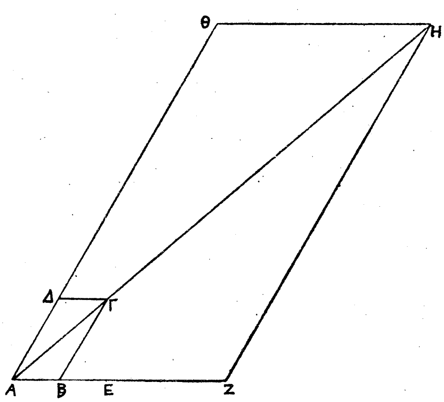
Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=2$ λαμβάνομεν

$\alpha_1=1$	$\delta_1=2$
$\alpha_2=4$	$\delta_2=21$
$\alpha_3=29$	$\delta_3=110$
$\alpha_4=168$	$\delta_4=713$

Εἶναι δὲ $\dfrac{2}{1}<\dfrac{110}{29}<\dots\sqrt{17}\dots<\dfrac{713}{168}<\dfrac{21}{4}$, καὶ

$$2^2=17\cdot1^2-13$$
$$21^2=17\cdot4^2+13^2$$
$$110^2=17\cdot29^2-13^3$$
$$713^2=17\cdot168^2+13^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2=17\cdot\alpha_\nu{}^2+(17-4)^\nu(-1)^\nu$$

ΙΙ. 4. Θεωροῦμεν τὸ ῥομβοειδὲς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 4) ἔνθα γωνία ΑΒΓ$=120'$, ΑΒ$=\alpha_1$, ΒΓ$=2\alpha_1$ καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ΑΓ$=\delta_1$.



Σχ. 4

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 12 θὰ εἶναι $\delta_1^2=7\alpha_1^2$ ὁπότε $\dfrac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{7}$.

Πάλιν ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν (ΙΙ. 1), ὁπότε λαμβάνοντες

ΒΕ$=\alpha_1$, ΕΖ$=\delta_1$,

θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 10 :

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2.$$

ἐξ ἧς $(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2$.

Εἶναι ἄρα καὶ

$$7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+7\delta_1^2.$$

Ἀλλὰ $\delta_1^2=7\alpha_1^2$. Ἐπομένως

$$7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+21\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=$$
$$=(7\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(7\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος μεγαλυτέρα ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ῥομβοειδοῦς παραλληλογράμμου. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον κατασκευῆς ὁμοίων ῥομβοειδῶν παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 7\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 7\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 7\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 7\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$, λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 11$
$\alpha_3 = 19$	$\delta_3 = 50$
$\alpha_4 = 88$	$\delta_4 = 233$
$\vdots$	

Εἶναι δὲ $\quad \frac{2}{1} < \frac{50}{19} < \ldots \sqrt{7} \ldots < \frac{233}{88} < \frac{11}{4}$,

καὶ

$$2^2 = 7 \cdot 1^2 - 3$$
$$11^2 = 7 \cdot 4^2 + 3^2$$
$$50^2 = 7 \cdot 19^2 - 3^3$$
$$233^2 = 7 \cdot 88^2 + 3^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 7 \cdot \alpha_\nu{}^2 + (7-4)^\nu\,(-1)^\nu\,.$$

II. 5. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα 4 λαμβάνομεν $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 12 εἶναι $\delta_1{}^2=13\alpha_1{}^2$, καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{13}$. Πάλιν ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὡς καὶ προηγουμένως, ἤτοι λαμβάνομεν $BE=\alpha_1$, $EZ=\delta_1$ ὁπότε κατὰ τὸ II, 10 τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1{}^2=2\alpha_1{}^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2, \quad \text{ἐξ ἧς}$$
$$(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1{}^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1{}^2.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $13(2\alpha_1+\delta_1)^2=52\alpha_1{}^2+52\alpha_1\delta_1+13\delta_1{}^2$.

Ἀλλὰ $\delta_1{}^2=13\alpha_1{}^2$ · ἑπομένως

$$13(2\alpha_1+\delta_1)^2=52\alpha_1{}^2+117\alpha_1{}^2+52\alpha_1\delta_1+4\delta_1{}^2=(13\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(13\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος μεγαλυτέρα ὁμοίου ῥομβοειδοῦς παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον κατασκευῆς τῶν ὁμοίων ῥομβοειδῶν παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 13\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 13\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 13\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 13\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 17$
$\alpha_3 = 25$	$\delta_3 = 86$
$\alpha_4 = 136$	$\delta_4 = 497$
$\vdots$	$\vdots$

Εἶναι δὲ $\quad \frac{2}{1} < \frac{86}{25} < \ldots \sqrt{13} < \ldots \frac{497}{136} < \frac{17}{4}$, $\quad$ καὶ

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 13 \,.\, 1^2 - 9 \\
17^2 &= 13 \,.\, 4^2 + 9^2 \\
86^2 &= 13 \,.\, 25^2 - 9^3 \\
497^2 &= 13 \,.\, 136^2 + 9^4 \\
&\vdots \\
\delta_\nu{}^2 &= 13\alpha_\nu{}^2 + (13-4)^\nu (-1)^\nu \,.
\end{aligned}
$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν κατασκευῶν καὶ ἀποδείξεων καθίσταται αὐτονόητος ὁ σχηματισμὸς ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν δι' ἀλγεβρικοῦ καθαρῶς ὑπολογισμοῦ καὶ οὐχὶ γεωμετρικοῦ, διὰ τὴν $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, ... καὶ τὰς συναφεῖς ἐξισώσεις.

Οὕτω θὰ εἶναι

II. 6. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 6\alpha_\nu{}^2 + (6-4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{6}$.

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 & \delta_1 \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 6\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_3 = 6\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & \delta_4 = 6\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 6\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}
\end{array}
$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 10 \\
\alpha_3 = 18 & \delta_3 = 44 \\
\alpha_4 = 80 & \delta_4 = 196
\end{array}
$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{44}{18} < \ldots \sqrt{6} \ldots < \frac{196}{80} < \frac{10}{4}$, καὶ

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 6 \,.\, 1^2 - 2 \\
10^2 &= 6 \,.\, 4^2 + 2^2 \\
44^2 &= 6 \,.\, 18^2 - 2^3 \\
196^2 &= 6 \,.\, 80^2 + 2^4 \\
&\vdots \\
\delta_\nu{}^2 &= 6 \,.\, \alpha_\nu{}^2 + (6-4)^\nu (-1)^\nu
\end{aligned}
$$

II. 7. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 8\alpha_\nu{}^2 + (8-4)^\nu (-1)^\nu$ καὶ $\sqrt{8}$.

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 & \delta_1 \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 8\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_3 = 8\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_2 & \delta_4 = 8\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 8\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}
\end{array}
$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 12 \\
\alpha_3 = 20 & \delta_3 = 56 \\
\alpha_4 = 96 & \delta_4 = 272 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{56}{20} < \ldots \sqrt{8} \ldots < \frac{272}{96} < \frac{12}{4}$, καὶ

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 8 \,.\, 1^2 - 4 \\
12^2 &= 8 \,.\, 4^2 + 4^2 \\
56^2 &= 8 \,.\, 20^2 - 4^3 \\
272^2 &= 8 \,.\, 96^2 + 4^4 \\
&\vdots \\
\delta_\nu{}^2 &= 8 \,.\, \alpha_\nu{}^2 + (8-4)^\nu (-1)^\nu \,.
\end{aligned}
$$

II. 8. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 11\alpha_\nu{}^2 + (11-4)^\nu(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{11}$.

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 & \delta_1 \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 11\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_3 = 11\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 = 2\gamma_3 + \delta_3 & \delta_4 = 11\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 11\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}
\end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 15 \\
\alpha_3 = 23 & \delta_3 = 74 \\
\alpha_4 = 120 & \delta_4 = 401,
\end{array}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{74}{23} < \ldots \sqrt{11} \ldots < \frac{401}{120} < \frac{15}{4}$, καὶ

$$\begin{array}{rl}
2^2 = & 11 \cdot 1^2 - 7 \\
15^2 = & 11 \cdot 4^2 + 7^2 \\
74^2 = & 11 \cdot 23^2 - 7^3 \\
401^2 = & 11 \cdot 120^2 + 7^4 \\
\vdots & \\
\delta_\nu{}^2 = & 11\alpha_\nu{}^2 + (11-4)^\nu(-1)^\nu .
\end{array}$$

II. 9. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 12\alpha_\nu{}^2 + (12-4)^\nu(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{12}$.

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 & \delta_1 \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 12\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_2 = 12\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & \delta_4 = 12\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 12\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}
\end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 16 \\
\alpha_3 = 24 & \delta_3 = 80 \\
\alpha_4 = 128 & \delta_4 = 448
\end{array}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{80}{24} < \ldots \sqrt{12} \ldots < \frac{448}{128} < \frac{16}{4}$, καὶ

$$\begin{array}{rl}
2^2 = & 12 \cdot 1^2 - 8 \\
16^2 = & 12 \cdot 4^2 + 8^2 \\
80^2 = & 12 \cdot 24^2 - 8^3 \\
448^2 = & 12 \cdot 128^2 + 8^4 \\
\vdots & \\
\delta_\nu{}^2 = & 12 \cdot \alpha_\nu{}^2 + (12-4)^\nu(-1)^\nu
\end{array}$$

II. 10. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 14\alpha_\nu{}^2 + (14-4)^\nu(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{14}$.

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 & \delta_1 \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 14\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_3 = 14\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & \delta_4 = 14\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 14\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}
\end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 18 \\
\alpha_3 = 26 & \delta_3 = 92 \\
\alpha_4 = 144 & \delta_4 = 548
\end{array}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{92}{26} < \ldots\sqrt{14}\ldots < \frac{548}{144} < \frac{18}{4}$, καὶ

$$2^2 = 14 \,.\, 1^2 - 10$$
$$18^2 = 14 \,.\, 4^2 + 10^2$$
$$92^2 = 14 \,.\, 26^2 - 10^3$$
$$548^2 = 14 \,.\, 144^2 + 10^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 14 \,.\, \alpha_\nu{}^2 + (14-4)^\nu\,(-1)^\nu \,.$$

II. 11. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 15\alpha_\nu{}^2 + (15-4)^\nu\,(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{15}$.

α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 15\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 15\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 15\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 15\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 19$
$\alpha_3 = 27$	$\delta_3 = 98$
$\alpha_4 = 152$	$\delta_4 = 601$
$\vdots$	

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{98}{27} < \ldots\sqrt{15}\ldots < \frac{601}{152} < \frac{19}{4}$, καὶ

$$2^2 = 15 \,.\, 1^2 - 11$$
$$19^2 = 15 \,.\, 4^2 + 11^2$$
$$98^2 = 15 \,.\, 27^2 - 11^3$$
$$601^2 = 15 \,.\, 152 + 11^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 15 \,.\, \alpha_\nu{}^2 + (15-4)^\nu\,(-1)^\nu \,.$$

III. 1. Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II. 10 γεωμετρικὴ κατασκευή, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πρόκλος, ἄγει εἰς τὴν ταυτότητα, (1), $(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2$, τὴν ἀποδεικνυομένην κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 4. Ἐὰν $\delta_1{}^2 = \lambda\alpha_1{}^2$, ἔνθα $\lambda > 5$, ἀκέραιος μὴ τετράγωνος, θὰ εἶναι καὶ $(\lambda-4)\delta_1{}^2 = (\lambda-4)\lambda\alpha_1{}^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\lambda(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\lambda\alpha_1{}^2 + 4\lambda\alpha_1\delta_1 + (\lambda-4)\lambda\alpha_1{}^2 + 4\delta_1{}^2 = (\lambda\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

Ἑπομένως θὰ εἶναι,

1)

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = \lambda\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = \lambda\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = \lambda\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

2) $\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \ldots\sqrt{\lambda}\ldots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}$, $(\alpha_1 = 1,\ \delta_1 = 2)$.

3) $\delta_\nu{}^2 = \lambda\alpha_\nu{}^2 + (\lambda-4)^\nu\,(-1)^\nu$

III. 2. Εἶναι δυνατὸν ἡ $\sqrt{2}$ νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$, ὅταν $\lambda = 2$. Τὴν μέθοδον ταύτην καλοῦμεν γενικὴν πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς μεθόδου τῆς διασωθείσης ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Πρόκλου, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν εἰδικήν.

Πρὸς σύγκρισιν παραθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα καὶ τῶν δύο μεθόδων.

Α'. Μέθοδος εἰδική, $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & \delta_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 & \delta_2 = 3 \\ \alpha_3 = 5 & \delta_3 = 7 \\ \alpha_4 = 12 & \delta_4 = 17 \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

$1^2=2.1^2-1$, $3^2=2.2^2+1$, $7^2=2.5^2-1$, $\delta_\nu{}^2 = 2\alpha_\nu{}^2 + (-1)^\nu$.

[Διὰ $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & \delta_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 & \delta_2 = 4 \\ \alpha_3 = 7 & \delta_3 = 10 \\ \alpha_4 = 17 & \delta_4 = 24 \\ \vdots & \end{array}$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} > \frac{\delta_3}{\alpha_3} > \frac{\delta_5}{\alpha_5} > \ldots \sqrt{2} \ldots > \frac{\delta_6}{\alpha_6} > \frac{\delta_4}{\alpha_4} > \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

$$\begin{array}{l} 2^2 = 2.1^2 + 2 \\ 4^2 = 2.3^2 - 2 \\ 10^2 = 2.7^2 + 2 \\ 24^2 = 2.17^2 - 2 \\ \vdots \\ \delta_\nu{}^2 = 2\alpha_\nu{}^2 + (2-4)(-1)^\nu \end{array}$$].

Β'. Μέθοδος γενική, $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$.

Διὰ $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & \delta_1 = 1 \\ \alpha_2 = 3 & \delta_2 = 4 \\ \alpha_3 = 10 & \delta_3 = 14 \\ \alpha_4 = 34 & \delta_4 = 48 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_2}{\alpha_2} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \ldots \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{l} 1^2 = 2.1^2 - 1 \\ 4^2 = 2.3^2 - 2 \\ 14^2 = 2.10^2 - 2^2 \\ 48^2 = 2.34^2 - 2^3 \\ \vdots \\ \delta_\nu{}^2 = 2.\alpha_\nu{}^2 + (2-4)^{\nu-1}.(-1)^\nu \end{array}$$

Διὰ $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$,

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 1 & \delta_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 & \delta_2 = 6 \\ \alpha_3 = 14 & \delta_3 = 20 \\ \alpha_4 = 48 & \delta_4 = 68, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\sqrt{2} \ldots < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta^2}{\alpha_2} < \frac{\delta_1}{\alpha_1}.$$

$$2^2 = 2.1^2 + 2$$
$$6^2 = 2.4^2 + 2^2$$
$$20^2 = 2.14^2 + 2^3$$
$$68^2 = 2.48^2 + 2^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 2.\alpha_\nu{}^2 + (2-4)^\nu.(-1)^\nu.$$

Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους παρεχομένην τιμὴν τῆς $\sqrt{3}$ θὰ εἴχομεν διὰ τὴν $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{1} < \frac{4}{3} < \frac{14}{10} < \frac{48}{34} < \frac{164}{116} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{792}{560} < \frac{232}{164} < \frac{68}{48} < \frac{20}{14} < \frac{6}{4} < \frac{2}{1}.$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι προτιμότερα ἡ ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Πρόκλου διασωθεῖσα μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

SUMMARY

I. 1. The law of formation of the side - and diameter - (diagonal -) numbers is explained by Theon of Smyrna. According to Proclus the related identity is proved by Euclid book II, proposition 10.

Side numbers $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu{}^2 = 2\alpha_\nu{}^2 \mp 1$. For $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ we have $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

2. Archimedes for the arithmetical approximation to π starts from a greater and a lesser limit of the value of $\sqrt{3}$, which without remark as known:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \quad 265^2 = 3.153^2 - 2, \quad 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

We give the following interpretation of the Archimedean formula, with Pythagorean method of the side—and diagonal—numbers. In the figure 2 is $AB = \alpha_1$ the side $A\Gamma = \delta_1$ the greater diagonal of the rhomb $AB\Gamma\Delta$, and the greater angle $AB\Gamma = 120^0$. Then, $\delta_1{}^2 = 3\alpha_1{}^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. According to Euclid II Prop. 10 we have

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1{}^2 = 2\alpha_1{}^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2, \qquad (2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2. \tag{1}$$

It is also $3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1{}^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1{}^2$, and because $\delta_1{}^2 = 3\alpha_1{}^2$,

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1{}^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2 = (3\alpha_1 + 2\delta_1)^2.$$

The law of formation of the corresponding side—and diagonal—numbers is evidently. Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

When	$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
	$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 5$
	$\alpha_3 = 11$	$\delta_3 = 19$
	$\alpha_4 = 41$	$\delta_4 = 71$
	$\alpha_5 = 153$	$\delta_5 = 265$
and	$\delta_\nu{}^2 = 3\alpha_\nu{}^2 - 2$	

When	$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
	$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
	$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
	$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
	$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
	$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$
and	$\delta_\nu{}^2 = 3\alpha_\nu{}^2 + 1.$	

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \ldots < \sqrt{3} \ldots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

II. In the following we start from the identity (1).

1. In the figure 3 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 2\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$. Then $\delta_1{}^2 = 5\alpha_1{}^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{5}$ and $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1{}^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 5\delta_1{}^2$. Because $\delta_1{}^2 = 5\alpha_1{}^2$,

is $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1{}^2 + 5\alpha_1{}^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2 = (5\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$,

$$\delta_\nu{}^2 = 5\alpha_\nu{}^2 + (5-4)^\nu(-1)^\nu.$$

When $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, $\frac{2}{1}<\frac{38}{14}<\ldots\sqrt{5}\ldots<\frac{161}{72}<\frac{9}{4}$.

2. In the same figure 3 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Then $\delta_1^2=10\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{10}$, and $10(2\alpha_1+\delta_1)^2=40\alpha_1^2+40\alpha_1\delta_1+10\delta_1^2$. Because $\delta_1^2=10\alpha_1^2$, is $10(2\alpha_1+\delta_1)^2=100\alpha_1^2+40\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(10\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu=10\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2=10\alpha_\nu^2+(10-4)^\nu(-1)^\nu$. When $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, $\frac{2}{1}<\frac{68}{22}<\ldots\sqrt{10}\ldots<\frac{356}{112}<\frac{14}{4}$.

3. In the same figure 3 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=4\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Then $\delta_1^2=17\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{17}$, and $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+17\delta_1^2$. Because $\delta_1^2=17\alpha_1^2$, is $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=289\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(17\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, D. N. $\delta_\nu=17\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$,

$$\delta_\nu^2=17\alpha_\nu^2+(17-4)^\nu(-1)^\nu.$$

When $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, $\frac{2}{1}<\frac{110}{29}<\ldots\sqrt{17}\ldots<\frac{713}{168}<\frac{21}{14}$.

4. In the figure 4 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=2\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. The angle $AB\Gamma=120^\circ$. Then $\delta_1^2=7\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{7}$, and $7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+7\delta_1^2$. Because $\delta_1^2=7\alpha_1^2$, $7(2\alpha_1+\delta_1)^2=49\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(7\alpha_1+2\delta_1)^2$.

S. N., $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, D. N., $\delta_\nu=7\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2=7\alpha_\nu^2+(7-4)^\nu(-1)^\nu$.

When $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, $\frac{2}{1}<\frac{50}{19}<\ldots\sqrt{7}\ldots<\frac{233}{88}<\frac{11}{4}$.

5. In the same figure 4 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$.

Then $\delta_1^2=13\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{13}$, $13(2\alpha_1+\delta_1)^2=52\alpha_1^2+52\alpha_1\delta_1+13\delta_1^2$.

Because $\delta_1^2=13\alpha_1^2$, is $13(2\alpha_1+\delta_1)^2=169\alpha_1^2+52\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(13\alpha_1+2\delta_1)^2$

S.N., $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, D. N., $\delta_\nu=13\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2=13\alpha_1^2+(13-4)^\nu(-1)^\nu$.

When $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, $\frac{2}{1}<\frac{86}{25}<\ldots\sqrt{13}\ldots<\frac{497}{136}<\frac{17}{4}$.

In the same way we take the side—and the diagonal—numbers for the $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$. (We cite Theaetetus of Plato 147 D).

III. If $\lambda>5$, integer no square number and $\delta_1^2=\lambda\alpha_1^2$, then $(\lambda-4)\delta_1^2=(\lambda-4)\lambda\alpha_1^2$, and according to the identity (1) $\lambda(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\lambda\alpha_1^2+4\lambda\alpha_1\delta_1+\lambda\delta_1^2$,

$$=4\lambda\alpha_1^2+(\lambda-4)\lambda\alpha_1^2+4\lambda\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(\lambda\alpha_1+2\delta_1)^2$$

Side numbers	Diagonal numbers
α_1	δ_1
$\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$	$\delta_2=\lambda\alpha_1+2\delta_1$
$\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$	$\delta_3=\lambda\alpha_2+2\delta_2$
$\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$	$\delta_4=\lambda\alpha_3+2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu=\lambda\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1}<\frac{\delta_3}{\alpha_3}<\frac{\delta_5}{\alpha_5}<\ldots\sqrt{\lambda}\ldots<\frac{\delta_6}{\alpha_6}<\frac{\delta_4}{\alpha_4}<\frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

and $\delta_\nu^2=\lambda\alpha_\nu^2+(\lambda-4)^\nu(-1)^\nu$. We take here always $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$. $\lambda=2$ and $\lambda=3$ are special cases.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1955: ΤΟΜΟΣ 30ος

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΟΤΙ ΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΩΣ ΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΤΡΩΝ.

EVANGELOS STAMATIS: ÜBER DEN EUKLIDISCHEN SATZ, KREISE VERHALTEN SICH ZU EINANDER, WIE DIE QUADRATE ÜBER DEN DURCHMESSERN.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1955

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΝΑΤΥΠΟΝ
ΣΕΛ. 410-414

Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων

ὑπὸ

Εὐαγγ. Σταμάτη*.

Α΄. Τὸ β΄ θεώρημα τοῦ XII βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, ἦτο ἤδη γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμάσαντα περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων[1]. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, τὸ ἀπαντῶν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ στηρίζεται εἰς τὸ X, 1 θεώρημα τῶν Στοιχείων, ὅπερ ἐξ ἄλλου στηρίζεται εἰς τὸν ὁρισμὸν V, 4 τῶν Στοιχείων. Τὸ X, 1 θεώρημα εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὀνομαζόμενον «εἰδικὸν κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν $\left(\alpha_\nu \leq \frac{1}{2}\, \alpha_{\nu-1}\right)$», ὁ δὲ ὁρισμὸς V, 4 «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν», διατυποῦται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (τετραγωνισμὸς παραβολῆς), «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου». Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ K_1, K_2 ἔχοντες ἀντιστοίχως διαμέτρους τὰς ΒΔ, ΖΘ. Λέγω ὅτι

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{\mathrm{Z\Theta}^2}. \qquad (1)$$

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über den euklidischen Satz, Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate über den Durchmessern.**

[1] ΕΥΔΗΜΟΥ ΤΟΥ ΡΟΔΙΟΥ καὶ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΤΟΥ ΑΦΡΟΔΙΣΙΕΩΣ μαρτυρίαι, ἀπαντώμεναι εἰς τὰ σχόλια τῶν Φυσικῶν Η΄ τοῦ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ ὑπὸ Σιμπλικίου. Ἔκδοσις τῆς *Πρωσσ. Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου* καὶ ἐν PAULY-WISSOWA, *Real-Enzyclopaedie der classischen Altertums-Wissenschaften* (VIII B, XVI Halbband, Sp. 1787), unter Hippokrates von Chios.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma} \tag{2}$$

ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $\leqslant K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$$

ἔνθα $\Sigma < K_2$, καὶ ἔστω $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, ὅπου ε ἀπείρως μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον K_2 ἐγγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον, ... καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην ἐγγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων τῶν μεταξὺ πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X, 1 τῶν Στοιχείων. ['Ακολουθεῖ ἡ ἀπόδειξις τούτου]. Ἔστω ὅτι τὸ πολύγωνον, μετὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ ὁποίου τ' ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ ε, εἶναι τὸ Π_2.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma + \varepsilon \tag{3}$$

καὶ

$$\text{ἄθροισμα κυκλικῶν τμημάτων} < \varepsilon. \tag{4}$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma. \tag{5}$$

Εἰς τὸν κύκλον K_1 ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} \tag{6}$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 < K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη $\Pi_2 > \Sigma$ Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, (α), ἔνθα M ἐπιφάνεια $< K_1$.

2. Ἔστω δεύτερον

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma} \tag{7}$$

ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἐκ τῆς (7) ἀνάπαλιν εἶναι

$$\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1} \tag{8}$$

Τῶν Σ, K_1, K_2 λαμβάνει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἔστω T,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \tag{9}$$

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν $\Sigma > K_2$ εἶναι ἄρα καὶ $K_1 > T$, (V, 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$. Ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἰς τὴν (α) ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1. Ὅθεν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\Sigma \lessgtr K_2$. Εἶναι ἄρα $\Sigma = K_2$ καὶ συνεπῶς $\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$.

Β′ Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, ὅπως καὶ τοῦ πρώτου, διὰ συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων ὡς ἑξῆς:

Ὑπετέθη $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $> K_2$, ὥστε $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ὅπου ε ἀπείρως μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον K_2 περιγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην περιγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ κύκλου K_2 ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου τινὸς νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε. [Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X, 1 τῶν Στοιχείων καὶ τὸ ἀνευρίσκομεν ἐφαρμοζόμενον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ α′ θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις» ἔνθα ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶς κύκλος ἰσοῦται πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ἄλλη δὲ πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ].

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon, \tag{1}$$

καὶ διαφορὰ κύκλου K_2 ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου $< \varepsilon$. (2)

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 < \Sigma, \tag{3}$$

ἂν καλέσωμεν Π_2 τὸ τελευταῖον πολύγωνον τὸ περιγραφὲν εἰς τὸν κύκλον K_2.

Εἰς τὸν κύκλον K_1 περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{\Theta Z^2}$. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_1$.

ZUSAMMENFASSUNG

Der euklidische Beweis, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern, lautet wie folgt: Gegeben zwei Kreise K_1, K_2, mit den Durchmessern $B\Delta$ bzw. $Z\Theta$. Ich behaupte $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{K_2}$, (1).

Wenn die Beziehung (1) nicht gilt, so muss $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei Σ eine Fläche $\lessgtr K_2$ ist.

I. Es sei erstens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (2), $\Sigma < K_2$, und $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, wobei ε unendlich klein ist. Im Kreise K_2 schreiben wir ein Viereck, ein Achteck .... ein n eck ein, bis der Unterschied zwischen einem Vieleck und dem Kreise K_2 kleiner als ε wird, (X, 1). Es sei dies das Vieleck Π_2. Wir haben also die Beziehungen

$$K = \Sigma + \varepsilon\,, \tag{3}$$

Summe der Kreisabschnitte zwischen dem Kreis K_2 und Vieleck $\Pi_2 < \varepsilon$, (4)

Ziehen wir (4) von (3) ab, so bekommen wir

$$\Pi_2 > \Sigma. \tag{5}$$

Im Kreise K_1 schreiben wir dem Vieleck Π_2 ein ähnliches Vieleck Π_1 ein. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (6)

Aus (2) und (6) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. (7)

Weil $\Pi_1 < K_1$, so ist auch $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Das ist aber wegen (5), unmöglich. Also es gilt nicht $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma < K_1$ ist. Derselbe Beweis, dass $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: eine Fläche kleiner als K_1 nicht gilt. (8)

II. Es sei zweitens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (9), wobei $\Sigma > K_2$ ist.

Aus (9) ist

$$\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}. \tag{10}$$

Zwischen Σ, K_1, K_2 finden wir die vierte Proportionale, es sei T,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \tag{11}$$

Weil $\Sigma > K_2$, so ist auch $K_1 > T$, (V, 14). Aus (10) und (11) haben wir $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$, $T < K_1$. Das aber ist, wegen (8) unmöglich. Weil die Beziehung $\Sigma \lessgtr K_2$ nicht gilt, so ist $\Sigma = K_2$, und die Behauptung bewiesen.

E. Stamatis, gestützt auf das von Archimedes in seiner Kreismessung 1 angewandte Verfahren, teilt folgenden Beweis für den 2. Teil des euklidischen Satzes mit:

Es ist angenommen $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (1), $\Sigma > K_2$, $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, wobei ε unendlich klein ist.

Im Kreise K_2 beschreiben wir stets Vielecke bis der Unterschsied zwischen einem Vieleck und dem Kreise K_2 kleiner als ε wird, (X,1 und Kreismessung von Archimedes 1). Es sei dies das Vieleck Π_2. Wir haben also die Beziehungen

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \tag{2}$$

Summe der Abschnitte zwischen dem Vieleck Π_2 und dem Kreise $K_2 < \varepsilon$, (3)

Durch Addition von (3) und (2) bekommen wir $\Pi_2 < \Sigma$. (4)

Dem Kreise K_1 umschreiben wir ein dem Vieleck Π_2 ähnliches Vieleck, es sei Π_1. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (5)

Aus (1) und (5) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_2$ ist.

Weil nun $\Pi_1 > K_1$, so ist auch $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Dies ist aber wegen (4) unmöglich. Derselbe Beweis, dass $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_1$, nicht gilt. Es bleibt also $\Sigma = K_2$.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ
ΕΝ Τῌ ΣΧΟΛῌ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

Μητρός τε καὶ πατρὸς καὶ τῶν ἄλλων προγόνων ἁπάντων τιμιώτερόν ἐστιν ἡ πατρὶς καὶ σεμνότερον καὶ ἁγιώτερον καὶ ἐν μείζονι μοίρᾳ καὶ παρὰ θεοῖς καὶ παρ' ἀνθρώποις τοῖς νοῦν ἔχουσιν.

Σωκράτης, (Πλάτωνος Κρίτων 51 α)

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ ΚΑΙ ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
1956

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΟΝ ΙΔΡΥΤΗΝ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

ΣΤΡΑΤΗΓΟΝ

ΣΟΛΩΝΑ ΓΚΙΚΑΝ

ΠΡΩΗΝ ΑΡΧΗΓΟΝ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

῞Οπου γὰρ ἄνδρες θεοὺς μὲν σέβοιντο τὰ δὲ πολεμικὰ ἀσκοῖεν, πειθαρχεῖν δὲ μελετῷεν, πῶς οὐκ εἰκὸς ἐνταῦθα πάντα μεστὰ ἐλπίδων ἀγαθῶν εἶναι;

Ξενοφῶντ. ῾Ελλην. III, iv. 18

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

῾Η παροῦσα μικρὰ πραγματεία εἶναι περίληψις παραδόσεων, αἵτινες ἐγένοντο ὑπ' ἐμοῦ κατὰ Μάιον 1955 ἐν τῇ Σχολῇ Γενικῆς Μορφώσεως ᾽Ανωτέρων ᾽Αξιωματικῶν τοῦ Γενικοῦ ᾽Επιτελείου Στρατοῦ.

Εἰσαγωγικῶς ἀναφέρεται ἡ συμβολὴ τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν καὶ ἀκολουθεῖ δι' ὀλίγων ἡ ἔκθεσις τῆς συμβολῆς τῶν ῾Ελλήνων, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ δημιουργοὶ καὶ οἱ θεμελιωταὶ τῶν ἐπιστημῶν. ᾽Εν παραρτήματι παρατίθενται εἰκόνες τινὲς ἑλληνικῶν καὶ νεωτέρων γλυπτῶν πρὸς σύγκρισιν, κατάλογος τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Δημοκρίτου καὶ κατάλογος τῶν σπουδαιοτέρων ῾Ελλήνων ἐπιστημόνων τῆς ἀρχαιότητος.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΠΡΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ὡς ἀρχαιότεραι κοιτίδες πολιτισμοῦ θεωροῦνται ὑπὸ πλείστων ἡ Κίνα, αἱ Ἰνδίαι, ἡ Μεσοποταμία καὶ ἡ Αἴγυπτος. Εἰς ποίαν ἐκ τῶν χωρῶν τούτων ἀνεπτύχθη ὁ πολιτισμὸς τὸ πρῶτον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ. Πιστεύεται ὅμως ὅτι τὰ πρῶτα στοιχεῖα τοῦ πολιτισμοῦ ἀνεπτύχθησαν εἰς τὰς χώρας ταύτας συγχρόνως. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν αἱ ἀρχαιότεραι πηγαί, τὰς ὁποίας ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν, εἶναι αἱ πρὸ ὀλίγων δεκαετηρίδων εὑρεθεῖσαι ἐν Μεσοποταμίᾳ, κατόπιν ἀνασκαφῶν, ἐνεπίγραφοι πλάκες. Κατὰ τοὺς μελετητὰς τῆς παλαιοτάτης ταύτης πολιτιστικῆς περιόδου τῆς ἀνθρωπότητος αἱ πλάκες αὗται ἐχαράχθησαν περὶ τὸ 2.000 π. Χ. Τὸ περιεχόμενον ὅμως αὐτῶν δὲν λογίζεται δημιούργημα τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ἀλλὰ πολὺ παλαιοτέρας, ἀναγομένης κατὰ τοὺς αὐτοὺς μελετητὰς εἰς τὴν τετάρτην χιλιετηρίδα π.Χ.

ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

Ὁ λαὸς ὅστις κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην κατῴκει τὴν περὶ τοὺς ποταμοὺς Τίγρητα καὶ Εὐφράτην περιοχὴν φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα Σουμέριοι. Οἱ Σουμέριοι δὲν θεωροῦνται ἀρίας ἢ σημιτικῆς καταγωγῆς, ἀλλὰ πιθανῶς μογγολικῆς. Αἱ πρόοδοι, τὰς ὁποίας οὗτοι ἐπέτυχον εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ τὴν ἀστρονομίαν, λογίζονται ἴσαι ἢ ἀνώτεραι τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ἐπυχὴν ἐπιτευχθεισῶν ὑπὸ τῶν Αἰγυπτίων εἰς τοὺς αὐτοὺς ἐπιστημονικοὺς κλάδους προόδων. Ὑποστηρίζεται ὅτι κατὰ τὸ 2.000 π. Χ. οἱ Σουμέριοι ὑποστάντες ἐπίθεσιν λαῶν σημιτικῆς καταγωγῆς (πιθανῶς Φοινίκων ἢ Ἑβραίων) ἀπώλεσαν τὴν ἐλευθερίαν των. Ἐκ τῆς ἐπελθούσης ὅμως ἐπιμειξίας ἐσυνεχίσθη ἡ ἄνθησις τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς ἀστρονομίας.

Ἡ εἰς τὰς ἐν τῇ Μεσοποταμίᾳ χώρᾳ εὑρεθείσας πλάκας χρησιμοποιουμένη γραφὴ εἶναι ἡ καλουμένη σφηνοειδὴς γραφή. Ἡ ἀποκρυπτογράφησις καὶ ἀνάγνωσις αὐτῆς δὲν εἶναι εὐχερής. Ἔχει ὅμως ἐν προκειμένῳ σημειωθῇ ἀρκετὴ πρόοδος, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ εἰκάσωμεν μετὰ βεβαιότητός τινος τὸ περιεχόμενον τῶν πλακῶν τούτων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν εὑρεθεισῶν πλακῶν ἀνέρχεται εἰς χιλιάδας τινάς. Αἱ μαθηματικοῦ ὅμως περιεχομένου πλάκες φθάνουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν διακοσίων περίπου. Αὗται δὲν ἀποτελοῦσι συστηματικὸν ἐγχειρίδιον μαθηματικῶν, ἀλλὰ περιέχουσι ποικίλα προβλήματα, ἐκ τῆς ἀποκρυπτογραφήσεως τῶν ὁποίων συνάγονται τὰ συναφῆ συμπεράσματα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἀρχαίων λαῶν τῆς Μεσοποταμίας. Εἰς τοὺς λαοὺς τούτους περιλαμβάνονται οἱ Σουμέριοι, οἱ Χαλδαῖοι, οἱ Χεττῖται, οἱ Ἀσσύριοι, οἱ Φοίνικες. Τούτους συνήθως καλοῦσι διὰ τοῦ περιληπτικοῦ ὀνόματος Βαβυλώνιοι. Ἐνταῦθα ἀξίζει νὰ μνημονεύσωμεν τοῦ διακεκριμένου Δανοῦ μαθηματικοῦ κ. Neugebauer, ὅστις ἔχει ἀφιερώσει δεκαετηρίδας ὁλοκλήρους τῆς ζωῆς του εἰς τὴν ἔρευναν τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων. Τὰ πρῶτα πορίσματα τῶν ἐρευνῶν του ἔχει συγκεντρώσει οὗτος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ τὸ φέρον τὸν τίτλον «Προελληνικὰ Μαθηματικὰ» (1). Ὁ κ. Neugebauer συνεχίζει τὰς συναφεῖς ἐρεύνας του ἀπὸ δεκαπενταετίας καὶ πλέον ἐν τῷ Ἱδρύματι Προκεχωρημένων Σπουδῶν τοῦ Princeton N. J. τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν τῆς Ἀμερικῆς. Ὁ ἀκάματος οὗτος ἐργάτης τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης εἶναι λίαν ἀντικειμενικὸς εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἐκ τῶν ἐρευνῶν του συναγομένων πορισμάτων. Εἴς τινα ὅμως σημεῖα τούτων εἶναι, κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, ὑπερβολικός. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι κυρίως τρία. Πρῶτον, ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ἐγνώριζον τὸ πυθαγόρειον θεώρημα (καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ εὑρέσεως τούτου δὲν ἀνήκει εἰς τὸν Πυθαγόραν). Δεύτερον, ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ἐγνώριζον ὡρισμένον τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, κατά τινα προσέγγισιν (καὶ συνεπῶς ἡ μέθοδος αὕτη δὲν ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἕλληνας). Τρίτον, ὅτι ἡ ἐπινόησις τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ εἰς τὰ μαθηματικὰ δὲν ἀνήκει εἰς τοὺς Ἕλληνας, ἀλλ' ἀνήκει εἰς τοὺς Βαβυλωνίους. Ἐπὶ τοῦ τρίτου τούτου σημείου γράφει ὁ κ. Neugebauer ἐν τῷ ἀνωτέρω μνημονευθέντι βιβλίῳ του τὰ ἑξῆς: «Συνηθίζουσί τινες νὰ βλέπωσιν ὡς μίαν τῶν ἀποφασιστικῶν διαφορῶν μεταξὺ τῶν Προελληνικῶν καὶ τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν τὴν ἐμφάνισιν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικὰ τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ. Τὰ πράγματα ταῦτα ὅμως ἔχασαν τὴν ἀξίαν των, ἀφ' ἧς γνωρίζομεν τὴν ὕπαρξιν μιᾶς λίαν ἀνεπτυγμένης Βαβυλωνιακῆς Ἀλγέβρας. Ἐάν τις προβάλῃ τοιαῦτα ἐρωτήματα, ὡς τὸ τῆς ἐμφανίσεως τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ εἰς τὰ ἀρχαῖα μαθηματικά, πρέπει προηγουμένως νὰ ἔχῃ καθορίσει τί ἐννοεῖ διὰ τῆς λέξεως ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Νομίζω, ὅτι εἰς ἱστορικὰ ζητήματα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ νοεῖ τις ὅτι δύναται ὡρισμένα μαθηματικὰ συμπεράσματα νὰ συναγάγῃ διὰ συνεχῶν συλλογισμῶν ἐξ ἄλλων μαθηματικῶν συμπερασμάτων, χωρὶς τὰ τελευταῖα ταῦτα συμπεράσματα νὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι ἢ νὰ θεωρῶνται καθ' οἱονδήποτε τρόπον ὡς ἀρχικὰ (σημ. συγγρ. χωρὶς δηλ. νὰ ἔχῃ τις ἀνάγκην τῶν ἀξιωμάτων). Τὴν ὕπαρξιν μιᾶς τοιαύτης διαδικασίας ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ πρέπει ν' ἀποδώσῃ τις ἀναμφισβητήτως εἰς τὴν Ἄλγεβραν τῶν Βαβυλωνίων». Οἱ συλλογισμοὶ οὗτοι τοῦ κ. Neugebauer φρονοῦμεν, ὅτι δὲν εἶναι ὀρθοί. Διότι οὗτος συνάγει τὰ συμπεράσματά του ἐξ εἰκασιῶν καὶ οὐχὶ ἐξ ἀποδείξεων. Μία ἐκ τῶν ἀποδείξεων ὅτι τὰ μαθηματικὰ τῆς βαβυλωνιακῆς ἐποχῆς δὲν δύνανται ν' ἀτενίσωσι τὸ γιγαντιαῖον οἰκοδόμημα τῆς δημιουργίας τῆς καθ' ὅλου μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀποκλειστικῶς ὑπὸ τοῦ Ἑλληνικοῦ καὶ μόνου πνεύματος εἶναι ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι διὰ νὰ ἐκφράσωσι τὴν σχέσιν, ἣ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐχρησιμοποίουν τὸν ἀριθμὸν 3, ἐνῷ οἱ σύγχρονοί των Ἰνδοὶ καὶ Αἰγύπτιοι ἐχρησιμοποίουν τὸν ἀκριβέ-

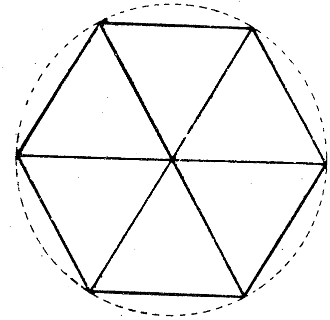
---

1) Vorgriechische Mathematik, Springer Verlag, Berlin, 1934.

στερον ἀριθμὸν 3,16. (Τὸν ἀριθμὸν 3,16 ἐχρησιμοποίουν καὶ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅστις ἀπέδειξε διὰ πρώτην φορὰν ὅτι ἡ καλυτέρα προσέγγισις εἶναι 3,14).

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡ σημερινὴ πεπολιτισμένη ἀνθρωπότης διατηρεῖ ἐκ τῶν μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν Βαβυλωνίων εἶναι ἡ διαίρεσις τοῦ κύκλου εἰς 360 μοίρας καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 24 ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλοῦμεν ὥραν. Πῶς ἀκριβῶς οἱ Βαβυλώνιοι κατέληξαν εἰς τὰς τοιαύτας διαιρέσεις δὲν εἶναι γνωστόν. Ἔκ τινων ὅμως ἐνδείξεων ὑποστηρίζεται ὅτι οὗτοι θὰ ἔφθασαν εἰς τὰς διαιρέσεις ταύτας ὡς ἑξῆς:

Διὰ τριῶν ἴσων ξυλίνων τεμαχίων εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τοιαύτη κατασκευὴ δὲν ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρας γεωμετρικὰς γνώσεις. Ἐξ τοιαῦτα ἰσόπλευρα τρίγωνα τιθέμενα τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο, καλύπτουσιν ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον (π. χ. τοῦ χάρτου ἔνθα τώρα ἀναγιγνώσκομεν), καὶ δὲν ὑπάρχει θέσις δι' ἄλλο τρίγωνον. Αἱ περὶ τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπαφῆς τῶν 6 τριγώνων ἴσαι γωνίαι ἀνέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 6. Ὅθεν ἡ πρώτη διαίρεσις τοῦ κύκλου (σχ. 1) ἔγινεν εἰς 6 ἴσα μέρη. Ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων, ἐπειδὴ ἦτο μέγα, διηρέθη εἰς 60 ἴσα μέρη, διότι οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον τὸ ἑξηκονταδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως (γινόμενον τῶν 10 δακτύλων ἐπὶ τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν 6). Κατὰ συνέπειαν ὁ ὅλος κύκλος διαιρεῖται εἰς 6×60 ἴσα μέρη ἤτοι 360 μοίρας. Κατ' ἀντιστοιχίαν ἐγένετο ἡ διαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 6 ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Ἡ τοιαύτη ὅμως διαίρεσις δὲν ἔσχε πρακτικὴν ἐφαρμογὴν καὶ ἐγένετο ἡ διαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 12 ἴσα μέρη. Ἀλλὰ καὶ ἕκαστον τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων ἦτο μέγα. Ὅθεν ἀπεφασίσθη νὰ διαιρεθῇ ἡ ἡμέρα εἰς 12 ἴσα μέρη καὶ ἡ νὺξ εἰς ἄλλα 12 ἴσα μέρη, ἀσχέτως πρὸς τὴν μὴ σταθερὰν τιμὴν αὐτῶν, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους. Ἡ διαίρεσις τῆς ὥρας εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἑκάστου πρώτου λεπτοῦ εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ εἶναι ἐπίσης βαβυλωνιακῆς προελεύσεως. Τὴν βαβυλωνιακὴν διαίρεσιν 12 δὲν διατηροῦμεν μόνον εἰς τὰ ὡρολόγιά μας. Εἰς τὴν ἀστρονομίαν ἡ διαίρεσις τοῦ ἔτους εἰς 12 μῆνας εἶναι ἐπίσης βαβυλωνιακῆς προελεύσεως. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς γαλλικῆς ἐπαναστάσεως ἐπεχειρήθη, ἡ ἀντικατάστασις τῆς βαβυλωνιακῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 360 μοίρας διὰ τῆς διαιρέσεως τούτου εἰς 400 βαθμούς. Ἡ τοιαύτη ὅμως διαίρεσις δὲν ἐγένετο δεκτὴ ὑπὸ τοῦ πεπολιτισμένου κόσμου, διότι εἶναι μειονεκτικὴ ἔναντι τῆς βαβυλωνιακῆς διαιρέσεως.



Σχ. 1

ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Τὰς γνώσεις ἡμῶν περὶ τῶν αἰγυπτιακῶν μαθηματικῶν τὰς ὀφείλομεν εἰς δύο κυρίως παπύρους. Ὁ εἷς ἐκ τούτων εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τοῦ Λονδίνου, ἐγράφη περὶ τὸ 1700 π.Χ. ὑπὸ τοῦ Ahmes καὶ φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα Λόρδου τινὸς ὀνομαζομένου Rhind. Αἱ μαθηματικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ πάπυρος οὗτος, ἀνέρχονται εἰς ὀγδοήκοντα καὶ θεωρεῖται ὅτι ἦσαν γνωσταὶ ἀρκετὰ πρὸ τοῦ 1700 π. Χ. Τὸ μῆκος τούτου εἶναι 5 ½ μέτρα καὶ τὸ πλάτος 32 ἑκατοστομέτρων.

Ὁ ἕτερος πάπυρος εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τῆς Μόσχας καὶ ἔχει μῆκος οἷον καὶ ὁ πάπυρος τοῦ Ahmes, ἀλλὰ πλάτος 8 ἑκατοστ. Ἐκτὸς τῶν δύο τούτων παπύρων σῴζονται καὶ μικρά τινα ἀποσπάσματα παπύρων εἰς τὰ Μουσεῖα τοῦ Βερολίνου, τοῦ Καΐρου καὶ τοῦ Λονδίνου. Ὅπως τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων οὕτω καὶ τὰ μαθηματικὰ τῶν Αἰγυπτίων εἶναι καθαρῶς ἐμπειρικῆς μορφῆς. Παρατηρήσεις χιλιάδων ἐτῶν ἐκ τῆς καθημερινῆς ζωῆς ὡδήγησαν τοὺς Βαβυλωνίους, τοὺς Αἰγυπτίους καὶ τοὺς ἄλλους παλαιοὺς πεπολιτισμένους λαοὺς εἰς τὴν εὕρεσιν ἀριθμητικῶν συστημάτων καὶ ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν, ὡς ἐπίσης εἰς τὴν εὕρεσιν στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν γνώσεων. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5 ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς Αἰγυπτίους. Ἀλλὰ καὶ εἰς τοὺς Βαβυλωνίους καὶ τοὺς Ἰνδοὺς ἦτο γνωστὸν τὸ τρίγωνον τοῦτο. Εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐχρησιμοποιεῖτο τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον διὰ τὴν κατασκευὴν ὀρθῆς γωνίας. Πρὸς τοῦτο ἐλάμβανον σχοινίον μήκους 12 μονάδων. Εἰς τὸ τέλος τῆς τρίτης μονάδος καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς ἑβδόμης μονάδος ἐσημείουν γνώρισμά τι. Προκειμένου νὰ κατασκευάσωσιν ὀρθὴν γωνίαν ἐπάκτουν εἰς τὸ ἔδαφος τὰ σημεῖα τοῦ σχοινίου τὰ φέροντα τὰς ὑποδιαιρέσεις 3 καὶ 7 καὶ ἔστρεφον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τεταμένα τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τοῦ σχοινίου πρὸς ἕνωσιν. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ἦτο ὀρθογώνιον ἔχον τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ὑποδιαιρέσεως 3. Ἡ κατασκευὴ ὀρθῆς γωνίας ἦτο ἀπαραίτητος διὰ τοὺς Αἰγυπτίους. Ἐχρειάζετο εἰς αὐτοὺς διὰ τὴν χωροστάθμησιν τῶν ὑπὸ τῶν πλημμυρῶν τοῦ Νείλου κατακλυζομένων ἐκτάσεων. Αἱ ἐκτάσεις αὗται ἀπετέλουν τὰ κτήματα τῶν Αἰγυπτίων. Μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν τοῦ Νείλου τὰ ὅρια τῶν κτημάτων τούτων ἐξηφανίζοντο καὶ ἦτο ἀνάγκη νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ νέου διὰ μετρήσεων. Τόσον τὸ συμφέρον τῶν ἰδιοκτητῶν, ὅσον καὶ τὸ συμφέρον τοῦ Κράτους, τὸ ὁποῖον εἰσέπραττεν φόρους ἀναλόγως τοῦ μεγέθους ἑκάστου κτήματος, ἐπέβαλον τὴν εὕρεσιν τῶν ἀκριβῶν ὁρίων τῶν ὑπὸ τῶν ὑδάτων τοῦ Νείλου κατακεκλυσμένων κτημάτων. Ἡ Αἰγυπτιακὴ πολιτεία εἶχεν ἱδρύσει εἰδικὸν σῶμα πρὸς καταμέτρησιν καὶ διαχωρισμὸν τῶν παρὰ τὸν Νεῖλον κτημάτων. Οἱ ἀνήκοντες εἰς τὸ σῶμα τοῦτο τεχνικοὶ ὠνομάζοντο Ἀρπεδονάπται. Ἡ ὑπηρεσία τῶν Ἀρπεδοναπτῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ πρόδρομος τῆς σημερινῆς Τοπογραφικῆς Ὑπηρεσίας. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ κύριον μέλημα τῶν Ἀρπεδοναπτῶν ἦτο ἡ μέτρησις τῆς Γῆς, εἰς ἣν ὀφείλεται ἡ παραγωγὴ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων τῆς λέξεως Γεωμετρία. Οἱ Αἰγύπτιοι δὲν ἤσκουν τὴν γεωμετρίαν ὡς ἐπιστήμην, ἀλλὰ καθαρῶς ὡς ἐμπειρικὴν τέχνην μετρήσεως τῆς Γῆς. Ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν ἐμπειρικὴν ταύτην τέχνην ἀπητοῦντο συστηματικαὶ παρατηρήσεις μακροχρόνιοι. Τὰ ἀνάκτορα τῆς Βαβυλῶνος, αἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου, τὰ ἀνάκτορα τῆς Κνωσοῦ καὶ τῆς Τίρυνθος, αἱ ἀρχαιότητες τῶν Μυκηνῶν καὶ τοῦ Ὀρχομενοῦ ἀποδεικνύουσιν ὅτι κατὰ τὰς παλαιὰς ἐποχὰς τοῦ πολιτισμοῦ πρέπει νὰ ἦσαν γνωσταὶ ἐμπειρικῶς σπουδαῖαι γνώσεις στατικῆς καὶ μηχανικῆς ἐν γένει, αἱ ὁποῖαι προϋποθέτουσιν ὡς ὑπόβαθρον αὐτῶν ἱκανὰς μαθηματικὰς προτάσεις. Αἱ μαθηματικαὶ ὅμως αὗται προτάσεις δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἐπιστήμη, ἀλλὰ ὡς ἀποτέλεσμα μακρᾶς παρατηρήσεως καὶ πείρας, εἶναι δηλ. γνώσεις ἐμπειρικαί.

ΕΛΛΗΝΕΣ

Ἂν καὶ ὁ ἀρχαῖος Ἑλληνικὸς πολιτισμὸς κατατάσσεται χρονολογικῶς ὑπὸ τῶν πλείστων μετὰ τὸν βαβυλωνιακὸν καὶ τὸν αἰγυπτιακὸν πολιτισμόν, ἐν τούτοις ὑποστηρίζεται διὰ σοβαρῶν ἐπιχειρημάτων καὶ ἡ γνώμη ὅτι ὁ Ἑλληνικὸς πολιτισμὸς τῆς προμηκυναϊκῆς ἐποχῆς εἶναι πολὺ παλαιότερος τοῦ βαβυλωνιακοῦ καὶ τοῦ αἰγυπτιακοῦ. Τοιαύτην γνώμην ἀναγιγνώσκομεν εἰς τὴν περισπούδαστον πραγματείαν τοῦ στρατηγοῦ ἐ. ἀ. κ. Ξ. Λίβα, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ Αἰγηίς, ἀπὸ παλαιοτάτων χρόνων μέχρι σήμερον, ὡς κοιτὶς τῶν Ἀρίων καὶ τοῦ Ἑλληνισμοῦ», Ἀθῆναι, 1956. Ἐνισχυτικὸν ἐπιχείρημα τῆς ἀπόψεως ταύτης τοῦ κ. Ξ. Λίβα, εἶναι ὅτι ὁ Ὅμηρος, ὅστις ἔζησε κατά τινας περὶ τὸ 1200 π.Χ., πρέπει νὰ εἶναι δημιούργημα πολιτισμοῦ προηγηθέντος αὐτοῦ κατὰ χιλιάδας τινὰς ἐτῶν.

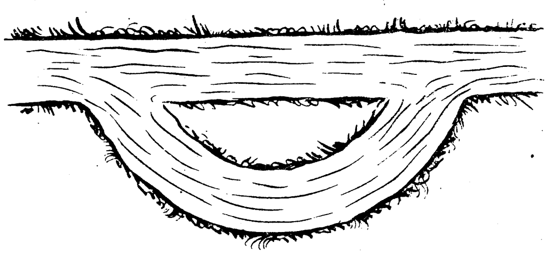
Ὁπωσδήποτε ἡ θεία Πρόνοια ἐπεφύλαξε τὴν τιμὴν τῆς δημιουργίας τῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸν λαὸν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ποῖος Ἕλλην πρῶτος συνέλαβε τὴν ἰδέαν τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ εἰς τὰ μαθηματικά, δὲν εἶναι γνωστόν. Εἶναι ὅμως γνωστὸν ἐξ ἱστορικῶν μαρτυριῶν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος Θαλῆς ὁ Μιλήσιος εἶχε πρῶτος ἀποδείξει ὡρισμένα γεωμετρικὰ θεωρήματα. Ὡς ἐκ τούτου ὁ Θαλῆς θεωρεῖται ὑπὸ πολλῶν ὁ θεμελιωτὴς τῶν ἐπιστημῶν. Ἀναμφισβητήτως δὲ ὁ θεμελιωτὴς οὗτος ἦτο Ἕλλην. Ὁ Θαλῆς ἐγεννήθη περὶ τὸ 640 π. Χ. ἐν Μιλήτῳ τῆς Μικρᾶς Ἀσίας. Κατὰ τὸν ἀρχαῖον συγγραφέα Δούριδα ἡ οἰκογένειά του ἀνῆκεν εἰς τὸ εὐγενέστατον γένος τῶν Θηλιδῶν, οἱ ὁποῖοι κατάγονται ἐκ Θηβῶν καὶ εἶναι ἀπόγονοι τοῦ Κάδμου καὶ τοῦ Ἀγήνορος. Κατὰ τὸν χρόνον τῶν σπουδῶν αὐτοῦ ἐπεσκέφθη καὶ τὴν Αἴγυπτον, ἥτις κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἐθεωρεῖτο κέντρον πολιτισμοῦ. Ἐκεῖ ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὸ αἰγυπτιακὸν ἱερατεῖον, τὸ ὁποῖον κατ' ἀποκλειστικότητα ἐκαλλιέργει τὰς ἀνθρωπίνους γνώσεις, τὰς ὁποίας ἐφύλαττε μυστικάς. Ἱστορικῶς μαρτυρεῖται ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἱερεῖς ἐξεπλάγησαν, ὅταν ὁ Θαλῆς ὑπελόγισε τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος ἐκ τῆς σκιᾶς τῆς ῥάβδου του καὶ τῆς σκιᾶς τῆς πυραμίδος. Ἡ μέτρησις αὕτη ἀποδεικνύει, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι δὲν ἐγνώριζον τὰς γεωμετρικὰς προτάσεις περὶ ὁμοιότητος, τὰς ὁποίας τοὐναντίον ἐγνώριζεν ὁ Θαλῆς.

ΑΙ ΑΝΑΚΑΛΥΨΕΙΣ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ

Ὁ Θαλῆς ἀνεκάλυψε τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν. Αἱ ἐν τῇ φύσει ὑπάρχουσαι δυνάμεις αὗται δὲν γίνονται εἰς ἡμᾶς γνωσταὶ διὰ τῶν αἰσθητηρίων ἡμῶν ὀργάνων ἀπ' εὐθείας, ἀλλ' ἐμμέσως ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ ἀνακάλυψις αὕτη τοῦ Θαλοῦ θεωρεῖται ἐκ τῶν μεγίστων ἀνακαλύψεων τοῦ ἀνθρώπου. Ἔμεινεν ὅμως ἡ ἀνακάλυψις αὕτη τοῦ Θαλοῦ ἀνερεύνητος ἐπὶ 2000 καὶ πλέον ἔτη. Κατόπιν τῆς ἀνακαλύψεως ταύτης ἔλεγεν ὁ Θαλῆς, ὅτι πάντα τὰ σώματα ἔχουσι ψυχήν, ἐννοῶν, ὡς φαίνεται, μὲ τὸ ὄνομα ψυχὴ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον καλοῦμεν ἐνέργειαν. Ὑποστηρίζεται ὑπό τινων ἡ γνώμη, ὅτι ἡ ἐπίδρασις τοῦ Πλάτωνος ἠμπόδισε τὴν ἔρευναν τῶν νόμων τῆς φύσεως διὰ τοῦ πειράματος. Τοῦτο δὲν εἶναι ἀληθές. Τοὐναντίον ὁ Πλάτων ἐπανειλημμένως προτρέπει τὴν ἔρευναν διὰ τοῦ πειράματος. Φαίνεται, ὅτι ἄλλοι εἶναι οἱ λόγοι, καὶ οὐχὶ ἡ πλατωνικὴ δῆθεν ἀντίδρασις, δι' οὓς ἡ πειραματικὴ ἔρευνα δὲν ἦτο κατὰ τὴν ἀρχαίαν ἐποχὴν τόσον ἐντατικὴ ὅσον εἶναι σήμερον. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐθεράπευον καὶ ἐδημιούργησαν τὰς ἐπιστήμας δι' ἕνα καὶ μόνον σκοπόν. Διὰ νὰ ἀτενίσωσι τὰ προβλήματα, ἅτινα ἔθεσαν εἰς ἑαυτούς : Θεός, ψυχή, ζωή, φύσις. Τὴν ἀπάντησιν ἐπὶ τῶν ἀποριῶν, τὰς ὁποίας θέτουσι τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, ἐπεχείρησαν νὰ δώσωσιν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες κυρίως διὰ τῆς λογικῆς καὶ τῆς σκέψεως. Ὀρθῶς δὲ ἔπραξαν. Διότι κατὰ τί μᾶς ἔφερε πλησιέστερον πρὸς τὴν ἔννοιαν Θεός, ψυχὴ κλπ. ἡ πρόοδος τῆς σημερινῆς τεχνικῆς ; Ἡ τεχνικὴ αὕτη εἶναι ἀσκήσεις καὶ προβλήματα τῆς θεωρίας, τὴν ὁποίαν ἐδημιούργησαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες. Καὶ πᾶν ὅ,τι ἐν τῷ μέλλοντι θ' ἀνακαλύπτεται, θὰ εἶναι ἀπόρροια τῶν θεωριῶν καὶ τῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος.

Διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ἡ γενικὴ τάσις τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ ἐτυμολογία τῆς λέξεως θεωρία : ὁρῶ τὸν Θεόν. Αὐτὸν τὸν σκοπὸν εἶχε πᾶσα προσπάθεια τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος : νὰ τείνῃ, νὰ ἀτενίζῃ πρὸς τὸ Θεῖον.

Ὁ Θαλῆς ὑπελόγισε καὶ προέβλεψεν ἔκλειψιν ἡλίου καὶ ἐθαυμάσθη πολὺ διὰ τὴν καταπληκτικὴν διὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην πρόρρησίν του. Ὁ βασιλεὺς τῶν Λυδῶν Κροῖσος, ὅτε κατέλαβε τὴν Μίλητον, προσέλαβε τὸν Θαλῆν ὡς τεχνικὸν αὐτοῦ σύμβουλον. Εἴς τινα ἐκστρατείαν ὁ Κροῖσος δὲν ἠδύνατο νὰ διαβῇ τὸν ποταμὸν Ἅλυν τῆς Μικρᾶς Ἀσίας, λόγῳ τοῦ μεγάλου πλάτους καὶ τῶν πολλῶν αὐτοῦ ὑδάτων. Ὁ Θαλῆς συνοδεύων τὸν Κροῖσον εἰς τὴν ἐκστρατείαν ἐκείνην ἐπενόησε τὸν ἑξῆς τρόπον (σχ.2) διαβάσεως τοῦ ποταμοῦ. Διήνοιξε διώρυγα ἀναχωροῦσαν ἔκ τινος σημείου τοῦ ποταμοῦ καὶ μετὰ ἑκατοντάδας



Σχ. 2

τινὰς μέτρων καταλήγουσαν εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ ποταμοῦ. Οὕτω τὰ ὕδατα τοῦ ποταμοῦ ἐμοιράσθησαν εἰς δύο βραχίονας καὶ ἡ διῶρυξ καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἔναντι ταύτης τμῆμα τοῦ ποταμοῦ κατέστησαν διαβατά. Ἐκ τῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων μνημονεύονται μεταξὺ ἄλλων ὡς εὑρήματα τοῦ Θαλοῦ : 1) Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. 2) Ἡ γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἡμικυκλίου εἶναι ὀρθὴ καὶ 3) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι. Λέγεται, ὅτι πρῶτος οὗτος ὑπελόγισε τὰς ἡμέρας τοῦ ἔτους εἰς 365 καὶ ὅτι πρῶτος ἐξήγγειλεν, ὅτι αἱ τέσσαρες ἐποχαὶ τοῦ ἔτους δὲν εἶναι ἰσόχρονοι.

Τινὲς ἐκ τῶν νεωτέρων ἐρευνητῶν τῆς ἱστορίας τῶν ἐπιστημῶν διερωτῶνται, ἂν εἶναι ὀρθὸν νὰ παραδεχθῇ τις τὴν ἄποψιν, ὅτι κατὰ θείαν τινὰ εὔνοιαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τὰς ἐπιστήμας καὶ τὸν πολιτισμὸν ἐν γένει. Οὗτοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ ἀνωτέρω μνημονευθεὶς διακεκριμένος Δανὸς ἐπιστήμων κ. Neugebauer, ἀπορρίπτουσι τὴν ἄποψιν ταύτην καὶ δέχονται, ὅτι ὁ Ἑλληνικὸς πολιτισμὸς εἶναι φυσιολογικὴ συνέχεια τῆς ἀναπτύξεως τοῦ πολιτισμοῦ τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων. Ἀπάντησις ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω διατυπουμένου ἐρωτήματος δὲν εἶναι εὔκολος. Παραμένει ὅμως τὸ γεγονός, ὅτι οἱ Ἕλληνες κατ' ἀποκλειστικότητα ἐδημιούργησαν τὰς ἐπιστήμας καὶ τὸν πολιτισμὸν καὶ ὅτι, ἐφ' ὅσον θὰ ὑπάρχωσιν πεπολιτισμένοι ἄνθρωποι ἐπὶ τῆς Γῆς, θὰ ἔχωσιν ὡς ὁδηγὸν κατὰ τὴν ζωήν των τὰ διδάγματα τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Ἐνταῦθα ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν περικοπὴν ἐκ ποιήματος τοῦ Γάλλου ποιητοῦ Ἀνατὸλ Φράνς, ὅστις εἰς ὀλίγους χαρακτηριστικοὺς στίχους ἐκδηλώνει τὸν θαυμασμόν του διὰ τὰ δημιουργήματα τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Τὸ ποίημα τοῦτο ἐξεδόθη, ὅτε πρὸ πεντήκοντα περίπου ἐτῶν ἐκυκλοφόρησεν ἐν Γαλλίᾳ ἡ λαϊκὴ Ἀστρονομία τοῦ Φλαμαριών, ἔνθα ἐγράφετο ὅτι μετὰ πάροδον ἑκατομμυρίων ἐτῶν ἡ Γῆ θὰ ψυγῇ καὶ θὰ παύσῃ πᾶσα ζωὴ ἐπ' αὐτῆς. Ἡ πρόρρησις τοῦ Φλαμαριὼν περὶ τῆς ἐλευσομένης ψύξεως τῆς Γῆς καὶ τῆς συνεπείᾳ ταύτης ἐξαφανίσεως πάσης ζωῆς ἐπ' αὐτῆς ὡδήγησε τὴν μοῦσαν τοῦ Γάλλου ποιητοῦ εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἑξῆς στίχων:

« . . . *Καὶ ἡ Γῆ θὰ ἐξακολουθῇ νὰ κυλίεται συμπαρασύρουσα εἰς τὸ σιωπηλὸν διάστημα τὴν τέφραν τῆς ἀνθρωπότητος, τὰ ποιήματα τοῦ Ὁμήρου καὶ τὰ πάνσεμνα συντρίμματα τῶν Ἑλληνικῶν μαρμάρων, ἐνσφηνωμένα ἐντὸς τῶν παγωμένων σπλάχνων της*» (Ἀ. Φράνς, *Ὁ κῆπος τοῦ Ἐπικούρου*).

Εἰς διάστημα δηλαδὴ τριῶν δισεκατομμυρίων ἐτῶν, ἅτινα θὰ ἔχωσι παρέλθει, ἀφ' ἧς ἐδημιουργήθη ἡ Γῆ μέχρι τῆς ψύξεως αὐτῆς, τὸ μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ δημιουργηθῇ ὑπὸ τῆς ἀνθρωπότητος κατὰ τὸν Ἀνατὸλ Φράνς, θὰ εἶναι ὁ ἀρχαῖος Ἑλληνικὸς πολιτισμός.

Ἐπισημειωτέοι ἀκόμη ἐνταῦθα καὶ χαρακτηρισμοί τινες, τοὺς ὁποίους κάμνουσι διάφοροι λαοὶ διὰ τὸν ἑαυτόν των συναφῶς πρὸς τὴν συμβολήν των εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ πολιτισμοῦ. Οἱ Ἑβραῖοι παραδείγματος χάριν ἐθεώρουν καὶ θεωροῦσιν ἑαυτοὺς ὡς τὸν περιούσιον λαὸν τοῦ Θεοῦ ἐπὶ τῆς Γῆς. Οἱ Ἄγγλοι ἐτυμολογοῦσι τὴν λέξιν Ἄγγλοι ἐκ τῆς λέξεως Ἄγγελοι, (ὡς γράφουσι καὶ σήμερον εἰς τὰ σχολικὰ αὐτῶν βιβλία). Οἱ Γερμανοὶ ἐθεώρουν ἑαυτοὺς ὡς λαὸν Κυρίων, προωρισμένον νὰ κυβερνᾷ ἄλλους λαούς. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ἐπίγνωσιν τῆς ἀξίας των καὶ διὰ τοῦτο διεχώριζον ἑαυτοὺς ἀπὸ τοὺς ἄλλους λαούς, τοὺς ὁποίους ὠνόμαζον συλλήβδην *βαρβάρους*. Ἡ ὀνομασία αὕτη δὲν προῆλθε κατὰ τὴν κλασσικὴν ἐποχὴν (5ος αἰὼν π.Χ.), ἀλλὰ εἶναι προομηρικῆς ἐποχῆς. Διότι ὁ Ὅμηρος ὀνομάζει τοὺς κατὰ τὸν Τρωικὸν πόλεμον συμμάχους τῶν Τρώων τοὺς ὁμιλοῦντας βάρβαρον φωνήν, ἄλλην δηλαδὴ γλῶσσαν πλὴν τῆς Ἑλληνικῆς, βαρ-

βαροφώνους (Ἰλ. Β 867: *Νάστης αὖ Καρῶν ἡγήσατο βαρβαροφώνων, οἳ Μίλητον ἔχον* κλπ.) Ἐκ τοῦ ὁμηρικοῦ τούτου στίχου συνάγεται τὸ λογικὸν συμπέρασμα, ὅτι οἱ Τρῶες καὶ οἱ σύμμαχοι αὐτῶν τῆς Μακεδονίας, Θράκης καὶ Μικρᾶς Ἀσίας ὡμίλουν τὴν Ἑλληνικὴν καὶ συνεπῶς ἦσαν Ἑλληνικὰ φῦλα. Ἀλλὰ δὲν εἶναι μόνον τὸ ὁμηρικὸν τοῦτο χωρίον, τὸ ὁποῖον συνηγορεῖ ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως ὅτι οἱ Τρῶες καὶ οἱ σύμμαχοί των, πλὴν τῶν Καρῶν, ἦσαν Ἑλληνικὰ φῦλα. Τὰ ὀνόματα τῶν Τρώων: Πρίαμος, Ἕκτωρ, Ἀνδρομάχη, Αἰνείας, Ἀλέξανδρος καὶ ἄλλα, μνημονευόμενα ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου εἶναι ὀνόματα Ἑλληνικά. Ἂν οἱ Τρῶες ἦσαν βάρβαροι καὶ ὄχι Ἑλληνικῆς καταγωγῆς, δὲν θὰ εἶχον ὀνόματα Ἑλληνικά. Ἀλλὰ καὶ οἱ θεοὶ τῶν Τρώων εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς θεοὺς τῶν Ἑλλήνων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς θεοὺς τῶν βαρβάρων.

Ἐπιγραμματικὸς εἶναι καὶ ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν Ἑλλήνων ὑπὸ τοῦ Ἰσοκράτους, ὅστις γράφει «*καὶ μᾶλλον Ἕλληνας καλεῖσθαι τοὺς τῆς παιδεύσεως τῆς ἡμετέρας ἢ τοὺς τῆς κοινῆς φύσεως μετέχοντας* (Πανηγυρικὸς 50e) [ἑρμηνεία: καὶ ὅτι Ἕλληνες καλοῦνται μᾶλλον οἱ τυχόντες τῆς ἡμετέρας παιδεύσεως ἢ οἱ μετέχοντες τῆς αὐτῆς καταγωγῆς]. Τὴν ἰσοκράτειον ταύτην ῥῆσιν ἀναγιγνώσκομεν σήμερον εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς ἐν Ἀθήναις Γενναδείου Βιβλιοθήκης τῆς Ἀμερικανικῆς Σχολῆς Κλασσικῶν Σπουδῶν ὡς ἑξῆς: Ἕλληνες καλοῦνται οἱ τῆς παιδεύσεως τῆς ἡμετέρας μετέχοντες.

Τὸ ἔργον τοῦ Θαλοῦ ἐσυνεχίσθη ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Ἀναξιμάνδρου, ὅστις πρῶτος εἶπεν, ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαιρικὴ καὶ αἰωρεῖται, τοῦ Ἀναξιμένους καὶ τοῦ Ἡρακλείτου ἐν τῇ Ἰωνίᾳ, ἐν ᾧ εἰς τὸν Κρότωνα τῆς κάτω Ἰταλίας ὁ Πυθαγόρας ἵδρυσε τὴν περίφημον αὐτοῦ σχολήν, ἡ ὁποία θεωρεῖται τὸ πρῶτον ἱδρυθὲν Πανεπιστήμιον ἐν τῷ κόσμῳ. Εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦτο τὰ μαθηματικὰ ἔλαβον μεγάλην ἀνάπτυξιν. Δὲν ἔχομεν στοιχεῖα διὰ νὰ κρίνωμεν περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἀθήναις κατὰ τὸν ἕκτον αἰῶνα πρὸ Χριστοῦ. Παρὰ τοῦ Ἡροδότου ὅμως πληροφορούμεθα, ὅτι κατὰ τὴν ἐν Πλαταιαῖς μάχην (479 π.Χ.) οἱ Σπαρτιᾶται δὲν κατώρθουν νὰ ἐκπορθήσωσι τὸ παρὰ τὸν Ἀσωπὸν ποταμὸν περιχαρακωμένον στρατόπεδον τῶν Περσῶν καὶ ἐκάλεσαν εἰς βοήθειαν τοὺς Ἀθηναίους, οἱ ὁποῖοι ἐπέτυχον κατόπιν κρατεροῦ ἀγῶνος τὴν ἅλωσιν τούτου (IX, 70). Φαίνεται, ὅτι οἱ Ἀθηναῖοι διέθετον τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἀνώτερον τεχνικὸν ἐξοπλισμὸν ἢ οἱ ἄλλοι Ἕλληνες, καὶ δὴ καὶ πολιορκητικὰς μηχανάς. Τοιαῦτα ὅμως τεχνικὰ μέσα προϋποθέτουσιν ὑψηλὴν στάθμην τεχνικῆς ἀναπτύξεως καὶ συνεπῶς ἄνθησιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ἔπρεπε νὰ ἔχῃ προηγηθῇ τῆς τεχνικῆς ἀναπτύξεως. Ἀλλὰ καὶ τὸ περίφημον ἔργον ἐν Σάμῳ τοῦ ἐκ Μεγάρων διασήμου μηχανικοῦ Εὐπαλίνου μαρτυρεῖ περὶ τῆς ἀναπτύξεως κατὰ τὸν 6ον αἰῶνα π.Χ. τῆς τεχνικῆς ἐν Ἑλλάδι καὶ ἑπομένως καὶ τῶν μαθηματικῶν. Ὡς γνωστόν, ὁ Εὐπαλῖνος κατ' ἐντολὴν τοῦ τυράννου τῆς Σάμου Πολυκράτους διήνοιξε σήραγγα (ὑδραγωγεῖον) μήκους 1000 μέτρων εἰς λόφον, ἔχοντα ὕψος 300 μέτρων περίπου. Τὸ ὕψος καὶ τὸ πλάτος τῆς σήραγγος ἦσαν 2 μέτρων. Οἱ ἐργάται εἰργάζοντο καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἀντιθέτους πλευρὰς τοῦ λόφου συγχρόνως καὶ ὅταν ἔφθασαν περὶ τὸ μέσον τῶν 1000 μέτρων ἀπεῖχον ἀλλήλων περὶ τὰ 10 μέτρα ἀπὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἥτις ἥνωνε τὰ δύο ἄκρα τῆς σήραγγος. Τοιοῦτον τεχνικὸν ἔργον προϋποθέτει ἀσφαλῶς γνώσεις τινας τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὅτι εἰς τὰς Ἀθήνας θὰ ὑπῆρχε μεγάλη ἄνθησις τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὸν 6ον πρὸ Χριστοῦ αἰῶνα, καθ' ἣν ἐποχὴν δηλαδὴ ἤκμαζεν ἐν Κρότωνι τῆς Μεγάλης Ἑλλάδος τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Πυθαγόρου, συνάγεται ἀπὸ τὸ περιστατικόν, καθ' ὃ ὁ Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος, κατὰ τὸ 450 π.Χ., διαμένων ἐν Ἀθήναις καὶ εὑρισκόμενος ἐν τῇ φυλακῇ ἠσχολεῖτο μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἦτο γνωστὸν καὶ εἰς τὸ εὐρὺ ἀθηναϊκὸν κοινόν, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀριστοφάνους Ὄρνιθες, ἔνθα τοῦτο μνημονεύεται (στίχ. 1004 - 1005). Διὰ νὰ γίνεται λόγος περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἔχωσι προηγουμένως λυθῆ πολλὰ ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα. Ὁ Ἀναξαγόρας ἐδίδασκεν ὅτι *«νοῦς ἐστιν ὁ διακοσμῶν καὶ πάντων αἴτιος»* (*Πλάτωνος* Φαίδων 97 b), ἀλλὰ καὶ ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι διάπυρος μύδρος (καὶ ὄχι θεότης). Διὰ τὴν τελευταίαν ταύτην διδασκαλίαν κατεδικάσθη οὗτος ὑπὸ τῶν Ἀθηναίων εἰς θάνατον, ἐπὶ ἀσεβείᾳ καὶ ἀθείᾳ, ἀλλ' ἐσώθη ὑπὸ τοῦ Περικλέους (Διογ. Λαέρτ. II, 6 - 15). Συγκεκριμένας γεωμετρικὰς προτάσεις ἀποδειχθείσας ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου δὲν γνωρίζομεν. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι οὗτος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις διετύπωσε τὸ περίφημον ἀξίωμα τῆς συνεχείας, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ βάθρον τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν, ἅτινα ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων καλοῦνται ἀνώτερα, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν, ἅτινα οὗτοι καλοῦσι κατώτερα ἢ στοιχειώδη. Τὸ ἐν λόγῳ ἀξίωμα ἔχει ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸν κόσμον δὲν ὑπάρχει τὸ ἀπολύτως μικρὸν καὶ τὸ ἀπολύτως μέγα, ἀλλὰ τοῦ μικροῦ ὑπάρχει μικρότερον καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει μεγαλύτερον. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο περιλαμβάνεται ὡς τέταρτος ὁρισμὸς εἰς τὸ V Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ Ἀρχιμήδης κάμνει χρῆσιν τοῦ ἀξιώματος τούτου κατὰ τὰς περιφήμους αὐτοῦ μαθηματικὰς ἐρεύνας καὶ ἀποδείξεις.

Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς ἀναπτύξεως αὐτῆς εὗρεν ἡ Ἑλληνικὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Ἐκεῖ οἱ διάσημοι ἐπιστήμονες Εὔδοξος, Θεαίτητος, Μέναιχμος, Δεινόστρατος, Ἀριστοτέλης καὶ ἄλλοι συνέβαλον τὰ μέγιστα εἰς τὴν πρόοδον τῶν μαθηματικῶν. Ὁ Πλάτων αὐτὸς δὲν ἦτο εἰδικὸς μαθηματικός. Ἡ συμβολή του ὅμως εἰς τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν καὶ τὴν θεμελίωσιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὑπῆρξε μεγίστη. Ἀλλὰ ὁ Πλάτων ὑπῆρξεν ἐπὶ ὀκτὼ ἔτη μαθητὴς τοῦ Σωκράτους. Παρὰ τοῦ Σωκράτους ἔμαθε τὴν διαλεκτικὴν καὶ τὸ λογικῶς σκέπτεσθαι. Κατὰ συνέπειαν πατὴρ τοῦ οἰκοδομήματος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης διὰ τῆς θεμελιώσεως αὐτῆς εἰς τὴν Λογικὴν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Σωκράτης. Τὴν Σωκράτειον καὶ Πλατωνικὴν Λογικὴν ἀνέπτυξε τελείως καὶ ἀπαραμίλλως ὁ Ἀριστοτέλης, ὅστις ἐπὶ εἴκοσιν ἔτη διετέλεσε μαθητὴς καὶ συνεργάτης τοῦ Πλάτωνος. Ὅθεν δικαίως τὰ τρία ἐκεῖνα μεγάλα πνεύματα, Σωκράτης, Πλάτων, Ἀριστοτέλης θεωροῦνται, καὶ θὰ παραμένωσιν, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουσιν ἄνθρωποι ἐπὶ τῆς Γῆς, οἱ πνευματικοὶ ἡγέται τῆς ἀνθρωπότητος.

Αἱ πηγαὶ περὶ τῆς δημιουργίας τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν εἶναι πτωχόταται. Ὁ πρῶτος, ὅστις ἔγραψεν ἐγχειρίδιον τῶν μαθηματικῶν, εἶναι κατὰ τὴν ἱστορικὴν παράδοσιν ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ ὁποῖος ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν μηνίσκων. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπεδείχθη, ὅτι ἐπιφάνειαι περικλειόμεναι ὑπὸ τόξων κύκλων εἶναι ἰσοδύναμοι κατὰ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς τρίγωνον ὀρθογώνιον, δηλαδὴ ἐτετραγωνίσθησαν. Ἀλλὰ ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἔγραψε πρῶτος κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Εὔδημος ὁ Ῥόδιος. Τὸ ἔργον ὅμως τοῦτο ἀπωλέσθη. Ἄλλος συγγραφεὺς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν μνημονεύεται ὁ Γεμῖνος, ὅστις ἤκμασε περίπου κατὰ τὸν πρῶτον προχριστιανικὸν αἰῶνα. Ἀλλὰ καὶ τούτου τὸ ἔργον ἀπωλέσθη. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ πέμπτου αἰῶνος μ.Χ. ὁ Πρόκλος, ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον σχολιάζει τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, περιλαμβάνει στοιχεῖά τινα ἐκ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα τοῦ Πρόκλου εἶναι σπουδαία πηγὴ διὰ τὴν σπουδὴν τῆς ἱστορίας τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Ἐνῷ ὅμως αἱ σωθεῖσαι ἱστορικαὶ πηγαὶ τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν εἶναι πενιχρόταται, αὐτῶν τούτων τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων διεσώθη ἱκανὸν μέρος. Εἰς τὰς σωθείσας πραγματείας περιλαμβάνονται τὰ 13 βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ πλεῖστον τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸ πλεῖστον τῶν ἔργων τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἡ Σύνταξις τοῦ Κλ. Πτολεμαίου, ἡ Συναγωγὴ τοῦ Πάππου καὶ τὸ πλεῖστον τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τοῦ Διοφάντου. Ἐκ τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων ἀναφέρομεν: Ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Εὐδόξου, ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Δημοκρίτου, τὰ ὁποῖα ἀφεώρων εἰς ὅλας τὰς ἀνθρωπίνους γνώσεις, ὅλα τὰ ἔργα τῶν Πυθαγορικῶν Φιλολάου, Θυμαρίδου καὶ Ἀρχύτου, τὸ πλεῖστον τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, πολλὰ τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, ὅστις πρῶτος ἐδίδαξεν, ὅτι ἡ Γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της καὶ περὶ τὸν Ἥλιον, τὰ περίφημα ἔργα περὶ Μουσικῆς τοῦ Ἀριστοξένου, πολλὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Διοφάντου καὶ ἄλλων. Ὡς γνωστόν, κατὰ τὴν ἀλεξανδρινὴν ἐποχὴν εἶχον συστηματικῶς συγκεντρωθῆ εἰς τὰς βιβλιοθήκας τῆς Ἀλεξανδρείας ἀνάτυπα ὅλων τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων. Ταῦτα ἐφυλάσσοντο εἰς δύο βιβλιοθήκας, εἰς τὴν περίφημον βιβλιοθήκην, τὴν κειμένην εἰς τὴν ἀριστοκρατικὴν παραλιακὴν συνοικίαν τῆς Ἀλεξανδρείας Βρύχειον, καὶ εἰς τὴν βιβλιοθήκην τὴν καλουμένην Σαραπεῖον. Εἰς τὸ Σαραπεῖον ἐφυλάσσοντο ἐπίσης τὰ ἔργα τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων τὰ συγκεντρωθέντα εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Περγάμου ὑπὸ τοῦ βασιλέως αὐτῆς Ἀττάλου τοῦ τρίτου. Τὴν βιβλιοθήκην ταύτην εἶχε δωρήσει ὁ βασιλεὺς οὗτος κατὰ τὸ 133 π.Χ. εἰς τὴν ῥωμαϊκὴν Γερουσίαν. Βραδύτερον ὁ Ῥωμαῖος ὕπατος Ἀντώνιος ἐδώρησε ταύτην εἰς τὴν βασίλισσαν τῆς Αἰγύπτου Κλεοπάτραν, τελευταίαν ἀπόγονον τῆς δυναστείας τῶν Πτολεμαίων. Ἡ πρώτη βιβλιοθήκη ἡ εὑρισκομένη εἰς τὸ Βρύχειον ἐκάη κατὰ τὸ 47 π.Χ., ὅτε ὁ Ἰούλιος Καῖσαρ κατέλαβε τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ἡ δευτέρα βιβλιοθήκη, τὸ Σαραπεῖον, ἐκάη κατὰ τὸ 415 μ.Χ. ὑπὸ μοναχῶν τινων ἀγομένων ὑπὸ θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην διηγέρθη ὁ λαὸς τῆς Ἀλεξανδρείας κατὰ τῆς Ἑλληνίδος ἐπιστήμονος, μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου Ὑπατίας, θυγατρὸς τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Αὕτη ὑπέστη τὸν διὰ λιθοβολισμοῦ ὑπὸ τοῦ ὄχλου θάνατον, οἱ δὲ ἐξωργισμένοι μοναχοὶ ἐπυρπόλησαν ἐν κατακλεῖδι τὸ Σαραπεῖον (1). Τὸ λεγόμενον ὅτι ὁ Ἄραψ χαλίφης Ὀμάρ, ὅστις κατέλαβε τὴν Ἀλεξάνδρειαν περὶ τὸ 600 μ.Χ., ἔκαυσε τὸ Σαραπεῖον, δὲν εἶναι ἀληθές. Ὅ,τι διεσώθη ἐκ τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων συγγραφέων εὑρέθη εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν καὶ εἰς ἰδιωτικὰς συλλογὰς τῆς Ἀνατολῆς καὶ τῆς Αἰγύπτου. Μέρος τούτων μετεφέρθη διὰ τῶν Ἀράβων εἰς τὴν Εὐρώπην, διὰ τῶν παραλίων τῆς Ἀφρικῆς καὶ τῆς Ἱσπανίας καὶ ἄλλο μέρος κατεκλάπη εἰς τὴν Ἀνατολὴν ὑπὸ τῶν περιπύστων σταυροφόρων καὶ μετεφέρθη εἰς τὴν δυτικὴν Εὐρώπην. Τὸ πνεῦμα ὅμως τὸ Ἑλληνικὸν εἶχε διεισδύσει εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην διὰ τῶν μεταφράσεων τοῦ Ῥωμαίου συγγραφέως Βοηθίου (480-524). Οὗτος εἶχε μεταφράσει εἰς τὴν λατινικὴν πολλὰ ἔργα τοῦ Πλάτωνος, τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Πτολεμαίου. Διὰ τῶν ἔργων τούτων ἐτέθησαν αἱ βάσεις τοῦ λεγομένου Δυτικοῦ πολιτισμοῦ. Ἡ ἐντατικὴ σπουδὴ τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων ὡδήγησεν εἰς τὴν σημερινὴν ἀνάπτυξιν τοῦ εὐρωπαϊκοῦ πολιτισμοῦ καὶ εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς χριστιανικῆς θρησκείας. Οἱ τρεῖς μεγάλοι Ἱεράρχαι τοῦ χριστιανισμοῦ, Βασίλειος ὁ μέγας, Γρηγόριος ὁ θεολόγος καὶ Ἰωάννης ὁ χρυσόστομος ἦσαν βαθύτατα ἐμπεποτισμένοι ὑπὸ τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος.

Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως, ὅτε ἤρχισεν μεγάλη ἀνάπτυξις τῶν ἐπιστημῶν ἐν Εὐρώπῃ, ὑπῆρχον ἔργα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τὰ ὁποῖα κατόπιν ἐξηφανίσθησαν. «Ἀναφέρομεν, γράφει ὁ ἱστορικὸς τῶν φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν ἐπιστημῶν Γερμανὸς καθηγητὴς Χόππε, τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Κατοπτρικά, τὸ ὁποῖον μνημονεύουσιν ὁ Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς, ὁ Ὀλυμπιόδωρος, ὁ Ἀπούλιος. Ὁ Γεώργιος Βάλλα ἀναφέρει τοῦτο ἐπανειλημμένως κατὰ τὸ 1492. Ἔκτοτε τὸ ἔργον τοῦτο ἐξηφανίσθη» (2). Ἀλλὰ καὶ ὁ διαφορικὸς καὶ ὁλοκληρωτικὸς λογισμός, καλούμενα ἀνωτέρα ἀνάλυσις καὶ ἀνώτερα μαθηματικὰ πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν Ἑλληνικῶν, ἅτινα καλοῦνται κατώτερα, ὡς μνημονεύομεν καὶ ἀνωτέρω, εἶναι εὑρήματα Ἑλληνικά. Πολλοὶ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ὠνόμαζον τὸν ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους ἐφαρμοζόμενον διαφορικὸν λογισμὸν μέθοδον ἐξαντλήσεως. Ἀφ' ἧς ὅμως (1907) ἀνευρέθη ἐν Κωνσταντινουπόλει τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος», ἤρχισε νὰ ἀναγράφεται ἡ ἀλήθεια ἐν προκειμένῳ. Διότι αὕτη δὲν μειώνει τὸ ἔργον τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τοῦ 17ου καὶ τοῦ 18ου αἰῶνος. Ἀλλὰ ἂς ἀφήσωμεν νὰ ὁμιλήσῃ ἐπὶ τούτου ὁ Γερμανὸς ἱστορικὸς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης Μὰξ Σίμων. Ἰδοὺ τί γράφει οὗτος εἰς τὸ ἔργον του «Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τὴν Ἀρχαιότητα» (3).

«Τὰς ἀποδείξεις εἰς τὸ ἔργον του περὶ ἑλίκων εὗρεν ὁ Ἀρχιμήδης μὲ τὴν

1) *E. Gerland*, Geschichte der Physik, München und Berlin, 1913, σελ. 129 - 131, Verlag R. Oldenburg.

2) *Edmund Hoppe*, Geschichte der Physik, σελ. 239 - 240, Verlag F. Vieweg, 1926, Braunschweig.

3) *Max Simon*, Geschichte der Mathematik im Altertum, σελ. 263 - 265. Verlag B. Cassirer, Berlin 1909.

βοήθειαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπειροστοῦ, ἐνῷ ἡ κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἕλικα στηρίζεται ἐπὶ διαφορικοῦ λογισμοῦ καὶ ὁ ὑπολογισμὸς ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων στηρίζεται ἐπὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ... Πόσον σαφῶς ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν ἀντιληφθῆ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου καὶ τῆς ὁλοκληρώσεως ἀπεδείχθη τώρα διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς μέχρι τοῦ 1907 ὡς ἀπολεσθείσης θεωρουμένης πραγματείας του «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος». Ἡ στέψις τῆς ἐργασίας τοῦ Heiberg, τοῦ εὑρόντος τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους, διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλληνικῆς ἐπιστήμης ἐγένετο διὰ τῆς ἀποκαταστάσεως τοῦ ἀνευρεθέντος ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους (παλιμψήστου)... Εἰς διάλεξιν, τὴν ὁποίαν ἔκαμα εἰς τὴν Φραγκφούρτην τῷ 1893, εἶπον, ὅτι ὁ Γαλιλαῖος εἶναι τόσον ἀκριβῶς προσκεκολλημένος εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, ὡς ἐὰν ἦτο μαθητής του. Ἡ ἀνευρεθεῖσα πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος» ἀποδεικνύει, ὅτι ἀκόμη ἡ μορφὴ τῶν ἔργων τοῦ Γαλιλαίου, καὶ ἀκόμη περισσότερον τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Καβαλιέρι, παραδόξως συμφωνοῦν μὲ τὸν Ἀρχιμήδην. Ἡ Ἀναγέννησις ἀσφαλῶς κατεῖχε ἀρκετὰ πρωτότυπα ἔργα τῶν Ἀρχαίων, τὰ ὁποῖα ἐν τῷ μεταξὺ ἐξηφανίσθησαν. Τοῦτο συνάγεται ἀπὸ τὸν κατάλογον τοῦ Regiomontanus καὶ ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ ὀχουμένων, τοῦ ὁποίου μέγα μέρος εὑρέθη εἰς τὸν παλίμψηστον τὸν περιέχοντα τὴν πραγματείαν «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος» καὶ θεωρῶ πιθανόν, ὅτι ὁ Γαλιλαῖος καὶ ὁ Καβαλιέρι εἶχον ἀντίγραφον τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Ἀρχιμήδους (τὸ ὁποῖον κατόπιν ἐχάθη). Οὕτως ὁ τεχνικὸς ὅρος διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα «omnia», τὸν ὁποῖον ὁ Leibnitz τὸ πρῶτον παρὰ τοῦ Καβαλιέρι παρέλαβε, εἶναι μετάφρασις τοῦ Ἑλληνικοῦ ὅρου «πάντα» τοῦ ἀπαντῶντος εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τῷ 1907 πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος»... Ἡ ταυτότης τῆς ἐξαντλητικῆς μεθόδου πρὸς τὸν διαφορικὸν λογισμὸν ἐτονίσθη ἤδη δεόντως ὑπὸ τοῦ Wallis». Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ἀναφέρομεν, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν ἀξιωμάτων τῆς δυναμικῆς τοῦ Νεύτωνος τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας διετυπώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ οὐχὶ ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος. Ἰδοὺ ἡ διατύπωσις τοῦ Νεύτωνος: Πᾶν σῶμα διατηρεῖ τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἐξαναγκάζεται ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἰς μεταβολὴν καταστάσεως (1).

Ἰδοὺ ἡ διατύπωσις τοῦ Ἀριστοτέλους: «*Ἔτι οὐδεὶς ἂν ἔχοι εἰπεῖν διατί κινηθὲν στήσεταί που· τί γὰρ μᾶλλον ἐνταῦθα ἢ ἐνταῦθα; ὥστε ἢ ἠρεμήσει ἢ εἰς ἄπειρον ἀνάγκη φέρεσθαι, ἐὰν μή τι ἐμποδίσῃ κρεῖττον*» (Φυσικῆς Ἀκροάσεως Δ (8), 215α 19-22), [ἑρμ. Οὐδεὶς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ὑποστηρίξῃ, διατί κινηθὲν σῶμα θὰ σταματήσῃ κάπου· διότι, διατὶ νὰ σταματήσῃ ἐδῶ καὶ ὄχι ἐκεῖ; ὥστε ἢ θὰ ἠρεμήσῃ ἢ εἶναι ἀνάγκη νὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον, ἐὰν δὲν εὕρῃ ἐμπόδιον μεγαλύτερον τῆς κινούσης δυνάμεως]. Ὅθεν δίκαιον εἶναι νὰ διδάσκεται εἰς ὅλα τὰ Σχολεῖα, ὅτι τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ὄχι ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος.

Τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικὰ διαιροῦνται εἰς δύο κλάδους. Τὴν θεωρίαν τῶν

---

1) *Κ. Παλαιολόγου - Σ. Περιστεράκη:* Στοιχεῖα Φυσικῆς, τόμ. Ι., σελ. 74, ἔκδοσις τετάρτη, 1954.

ἀριθμῶν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Τρία βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ VII, VIII, IX, ἔχουσιν ἀφιερωθῆ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Προτάσεις τινές, μὴ θεωρηθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου στοιχειώδεις, ἐσώθησαν διὰ τῶν ἔργων τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, οἵτινες ἤκμασαν αἰῶνάς τινας μετὰ τὸν Εὐκλείδην. Ἡ ἄλγεβρα ἐκαλλιεργεῖτο διὰ τῆς γεωμετρίας. Τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἄλγεβρα ἀναπτυχθεῖσα γεωμετρικῶς (τὰ πρῶτα 10 θεωρήματα ἐκ τῶν 14 τοῦ βιβλίου τούτου). Τὰ σωθέντα ἔργα τοῦ Διοφάντου (4ος αἰὼν) εἶναι κατὰ πρῶτον λόγον ἄλγεβρα καὶ κατὰ δεύτερον λόγον θεωρία τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὴν σωθεῖσαν πραγματείαν του *Ἀριθμητικά*, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος κυρίως ἀσχολεῖται μὲ τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ἀπαντῶμεν τὸ πρῶτον διατυπουμένην τὴν ἀλγεβρικὴν θεωρίαν ὅτι : πλὴν ἐπὶ πλὴν=σὺν καὶ πλὴν ἐπὶ σὺν=πλὴν *(Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν ποιεῖ ὕπαρξιν καὶ λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν)*. Ἡ προβολικὴ γεωμετρία εἶχεν ἀρκετὰ ἀναπτυχθῆ, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν σχημάτων τῆς στερεομετρίας τοῦ Εὐκλείδου (XI, XII, XIII βιβλία τῶν Στοιχείων), ἐπίσης δὲ καὶ ἡ προοπτική, ὀνομαζομένη σκηνογραφική, διότι ἐχρησιμοποιεῖτο εἰς τὰ θέατρα. Οἱ κλάδοι οὗτοι ὅμως τῶν μαθηματικῶν δὲν ἐθεωροῦντο ἐπιστήμη, ἀλλὰ ἐφαρμογαὶ μαθηματικῶν, καὶ διὰ τοῦτο φαίνεται, ὅτι δὲν περιελήφθησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὰ Στοιχεῖα αὐτοῦ. Εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου σωθεῖσαν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν περιλαμβάνονται τὰ Στοιχεῖα ἐκεῖνα, διὰ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ περαιτέρω ἔρευνα. Τοὺς ἀριθμοὺς (τοὺς ἀκεραίους μόνον ἐκάλουν ἀριθμοὺς) τοὺς διέκρινον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες (πρῶτοι οἱ Πυθαγόρειοι) εἰς ἐλλιπεῖς, ὑπερτελεῖς, φιλίους καὶ τελείους. Ἐλλιπὴς ἀριθμὸς καλεῖται ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ (εἰς τοὺς διαιρέτας περιλαμβάνεται καὶ ὁ ἀριθμός, ὄχι ὅμως ἡ μονάς). Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 15 εἶναι ἐλλιπής, διότι 15 : 15=1, 15 : 5=3 καὶ 15 : 3=5. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων 1+3+5=9, μικρότερον τοῦ 15. Ὑπερτελὴς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 12 εἶναι ὑπερτελής, διότι 12 : 12=1, 12 : 6=2, 12 : 4=3, 12 : 3=4, 12 : 2=6. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων 1+2+3+4+6=16, μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ 12. Δύο ἀριθμοὶ π.χ. Α καὶ Β λέγονται φίλιοι, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν τοῦ Α ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν τοῦ Β ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν Α. Τοιοῦτοι φίλιοι ἀριθμοὶ εἶναι π.χ. οἱ 220 καὶ 284. Διότι 220 : 220=1, 220 : 110=2, 220 : 55=4, 220 : 44=5, 220 : 22=10, 220 : 20=11, 220 : 11=20, 220 : 10=22, 220 : 5=44, 220 : 4=55, 220 : 2=110. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284. Ἐπίσης εἶναι 284 : 284=1, 284 : 142=2, 284 : 71=4, 284 : 4=71, 284 : 2=142. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων 1+2+4+71+142=220.

Τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν. Ὁ 6 π.χ. εἶναι τέλειος, διότι 6 : 6=1, 6 : 3=2, 6 : 2=3. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων 1+2+3=6. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 28 εἶναι τέλειος. Διότι $28 : 28 = 1$, $28 : 14 = 2$, $28 : 7 = 4$. $28 : 2 = 14$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+4+7+14=28$. Ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 6, ἀπὸ 11—100 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 28, ἀπὸ 101—1000 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 496, ἀπὸ 1001—10000 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 8128. Ἀπὸ 10001—100.000.000 ὑπάρχει εἷς μόνος τέλειος, ὁ 33.550.336. Οὗτοι ἦσαν γνωστοὶ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους εὑρέθησαν ἀκόμη 7 τέλειοι ἀριθμοί. Ὁ δωδέκατος εὑρέθη τὸ 1914. Οὗτος εἶναι ἴσος μὲ $2^{136}(2^{137}-1)$. Ὁ κανὼν εὑρέσεως τῶν τελείων ἀριθμῶν περιλαμβάνεται εἰς τὸ 36ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Σημειωτέον ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι οἱ τέλειοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄρτιοι καὶ ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν θὰ εἶναι ἢ 6 ἢ 8.

Ἓν ἐκ τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ εὕρεσις τύπου παρέχοντος τοὺς πρώτους ἀριθμούς. Ὁ Ἐρατοσθένης (ἀκμάζει περὶ τὸ 250 π. Χ. ἐν Ἀλεξανδρείᾳ) εἶχε διατυπώσει τρόπον εὑρέσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τὸν λεγόμενον «κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους». Ὁ τρόπος ὅμως οὗτος δὲν εἶναι ἐπαρκὴς καὶ εὔχρηστος διὰ τὴν εὕρεσιν μεγάλων πρώτων ἀριθμῶν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον λέγομεν σήμερον εἶναι ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς (ἐξαιρουμένου τοῦ 2) εἶναι τῆς μορφῆς $4c \pm 1$, ἔνθα τὸ c δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ... Παραδείγματος χάριν διὰ $c=1$ εἶναι $4.1-1=3$ καὶ $4.1+1=5$. Διὰ $c=2$, εἶναι $4.2-1=7$ καὶ $4.2+1=9$. Ὁ 9 ὅμως δὲν εἶναι πρῶτος. Ὁ 11 εἶναι $4.3-1$, ὁ 13 εἶναι $4.3+1$, ὁ 17 εἶναι $4.4+1$, ὁ 19 εἶναι $4.5-1$. Ὁ 25 εἶναι $4.6+1$. Οὗτος ὅμως δὲν εἶναι πρῶτος. Ὁ 27 εἶναι $4.7-1$. Καὶ οὗτος δὲν εἶναι πρῶτος. Εἶναι δηλαδὴ βέβαιον, ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $4c \pm 1$, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει· δὲν ἀληθεύει δηλ., ὅτι πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4c \pm 1$ εἶναι πρῶτος. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων περιλαμβάνεται καὶ τὸ πρόβλημα τῆς λύσεως ἐξισώσεως, ὅταν αὕτη ἔχῃ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους. Κατὰ τὴν παράδοσιν, ὁ ἴδιος ὁ Πυθαγόρας εὗρε τὸν τύπον τὸν παρέχοντα τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἀληθεύοντας τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=z^2$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λέγεται διοφαντικὴ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ. Εἶναι μία ἐξίσωσις περιέχουσα τρεῖς ἀγνώστους, ἕκαστον εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Ἡ λύσις τοῦ Πυθαγόρου ἀφορᾷ εἰς τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς. Οἱ τύποι τοῦ Πυθαγόρου οἱ παρέχοντες τὰς λύσεις, ὅταν ὁ μ λαμβάνῃ περιττὰς τιμὰς 3, 5, 7, 9, . . . εἶναι

$$\mu, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \quad \frac{\mu^2+1}{2}$$

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν, ἐὰν διαδοχικῶς δώσωμεν εἰς τὸν μ τιμὰς περιττάς :

$$\mu, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \quad \frac{\mu^2+1}{2} \qquad x^2+y^2=z^2$$

$$3, \quad \frac{3^2-1}{2}=4, \quad \frac{3^2+1}{2}=5 \quad \text{καὶ} \quad 3^2+4^2=5^2$$

$$5, \quad \frac{5^2-1}{2}=12, \quad \frac{5^2+1}{2}=13 \quad \text{»} \quad 5^2+12^2=13^2$$

$$7, \quad \frac{7^2-1}{2}=24, \quad \frac{7^2+1}{2}=25 \quad \text{καὶ} \quad 7^2+24^2=25^2$$

$$9, \quad \frac{9^2-1}{2}=40, \quad \frac{9^2+1}{2}=41 \quad » \quad 9^2+40^2=41^2 \quad \text{κλπ.}$$

Γεννᾶται τὸ ζήτημα πῶς ὁ Πυθαγόρας ἔφθασεν εἰς τὴν περίφημον ταύτην λύσιν . Οὗτος, φαίνεται, ἐγνώριζε τὸ θεώρημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, ὅταν οὗτοι λαμβάνωνται κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν, εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι $1^2=1$, τότε τὸ εἰς τὸν Πυθαγόραν γνωστὸν θεώρημα διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}
1^2&=1\\
2^2&=1+3\\
3^2&=1+3+5\\
4^2&=1+3+5+7\\
5^2&=1+3+5+7+9\\
6^2&=1+3+5+7+9+11\\
7^2&=1+3+5+7+9+11+13, \text{ κλπ.}
\end{aligned}$$

Ἐὰν δηλ. ἀναγράψωμεν τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μονάδος, κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν, ὁ ἑκάστοτε ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος τούτων ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ θεωρουμένου πλήθους ἀριθμῶν. Κατόπιν τούτου ὑποτίθεται, ὅτι ὁ Πυθαγόρας θὰ εἰργάσθη ὡς ἑξῆς: Ἀνέγραψεν εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς πέντε πρώτους περιττοὺς ἀριθμοὺς ὡς προσθετέους, (ἄνωθεν τῶν προσθετέων γράφομεν τὸν αὐξανόμενον ἀριθμὸν τούτων), $\quad 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5$

καὶ προσέθεσεν, $\quad 1+3+5+7+9.$

Τὸ πλῆθος τῶν περιττῶν τούτων ἀριθμῶν τῶν ἀναγεγραμμένων κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν εἶναι 5. Εἶναι συνεπῶς τὸ ἄθροισμά των ἴσον μὲ 5^2, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα. Ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ὁ 9 εἶναι τετράγωνος$=3^2$. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων προσθετέων τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος, ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος εἶναι 4, ἰσοῦται πρὸς 4^2.

Ἑπομένως εἶναι :

$$\begin{array}{l}
1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5\\
\underbrace{1+3+5+7}+9\\
\end{array}$$

$$5^2= \quad 4^2 \quad +3^2.$$

Περαιτέρω εἶναι (ἀναγράφομεν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τὸν αὐξανόμενον ἀριθμὸν)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\
1+ & 3+ & 5+ & 7+ & 9+ & 11+ & 13+ & 15+ & 17+ & 19+ & 21+ & 23+ & 25.
\end{array}$$

Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι 13. Τὸ ἄθροισμα ἄρα αὐτῶν εἶναι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα 13^2. Ὁ τελευταῖος ὅρος 25 εἶναι τετράγωνος $=5^2$. Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων 12 ὅρων εἶναι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα $=12^2$. Ἐπομένως θὰ εἶναι :

$$\overbrace{\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12} \quad 13}$$

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23}+25$$

$$13^2 = \qquad 12^2 \qquad + \ 5^2,$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ Πυθαγόρου εἶναι ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν εἰς μίαν γραμμὴν κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τελειώνει ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν εἰς τετράγωνον ἀριθμόν, τότε ἔχομεν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον σχηματισμοῦ, τριάδα ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουσι τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=z^2$.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουσι καὶ ἄρτιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παρέχουσιν ἀκεραίους ἀριθμοὺς (τὰς ἀκεραίας λύσεις ὡς λέγονται), οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν. Ἡ εὕρεσις τούτων ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\beta, \qquad \frac{\beta^2}{4}-1, \qquad \frac{\beta^2}{4}+1,$$

ἔνθα ὁ β λαμβάνει πάσας τὰς ἀρτίας τιμὰς ἀπὸ τοῦ 4 καὶ ἄνω. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{lllll}
\beta, & \dfrac{\beta^2}{4}-1, & \dfrac{\beta^2}{4}+1 & & x^2+y^2=z^2 \\
4, & \dfrac{4^2}{4}-1=3, & \dfrac{4^2}{4}+1=5 & \text{καὶ} & 4^2+3^2=5^2 \\
6, & \dfrac{6^2}{4}-1=8, & \dfrac{6^2}{4}+1=10 & \text{»} & 6^2+8^2=10^2 \\
8, & \dfrac{8^2}{4}-1=15, & \dfrac{8^2}{4}+1=17 & \text{»} & 8^2+15^2=17^2 \\
10, & \dfrac{10^2}{4}-1=24, & \dfrac{10^2}{4}+1=26 & \text{»} & 10^2+24^2=26^2, \text{ κλπ.}
\end{array}$$

Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ ἄλλοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουσι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν, χωρὶς νὰ λαμβάνωνται διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος. Ὅλους ἀνεξαιρέτως τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἐπαληθεύοντας τὴν ἀνωτέρω διοφαντικὴν ἐξίσωσιν τοὺς παρέχει τύπος περιλαμβανόμενος εἰς τὸ X Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (λῆμμα εἰς τὸ 28ον θεώρημα). Τινὲς ἐκ τῶν νεωτέρων φρονοῦσιν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας δὲν ἐσκέφθη ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὴν ἐξίσωσιν $x^\nu + y^\nu = z^\nu$, ἔνθα $\nu \geqslant 3$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ὀνομάζουσιν οὗτοι «Τὸ Μέγα θεώρημα τοῦ Fermat». Ἄλλοι ὅμως ἐκ τῶν νεωτέρων παρατηροῦσιν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀσφαλῶς θὰ τὸ ἐσκέφθησαν, ἀλλὰ οὗτοι δὲν ἠσχολοῦντο ν' ἀποδείξωσι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον δὲν γίνεται, ἀλλ' ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον γίνεται, ἐλάμβανον δηλ. θέσιν ἐπὶ τῶν διαφόρων ζητημάτων.

Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου εἶναι τὸ τελειότερον μαθηματικὸν σύγγραμμα, τὸ ὁποῖον ἐγράφη ποτε εἰς τὸν κόσμον. Πολλοὶ νεώτεροι, ὄχι ἐκ τῶν ἡμετέρων βεβαίως, προσπαθοῦσι νὰ συμπληρώσωσι τοῦτο καὶ νὰ τὸ βελτιώσωσι. Πάντοτε ὅμως αἱ συμπληρώσεις καὶ αἱ προσθῆκαι των ἀποδεικνύονται οὐχὶ ὀρθαί. Ἐν τέλει ἀνεκαλύφθη ὅτι ὑπάρχουσι καὶ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι. Οἱ ἔχοντες τὸν κοινὸν νοῦν ἀντιλαμβάνονται διὰ τοῦ ὅρου *μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία*, μίαν νέαν μαθηματικὴν ἐπιστήμην, μίαν νέαν γεωμετρίαν, ἡ ὁποία δὲν ἔχει καμμίαν σχέσιν μὲ τὴν γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου. Τοῦτο σημαίνει ὁ ὅρος *μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία*.

Τὸ πρᾶγμα ὅμως δὲν ἔχει οὕτω. Παραλαμβάνουσιν μερικοὶ νεώτεροι ὅλα τὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου, ἀντικαθιστῶσιν ἕν, καὶ τὸ νέον δημιούργημα τὸ ὀνομάζουσι μὴ εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου οὐδὲν εἶναι γνωστόν. Φαίνεται ὅμως λίαν πιθανόν, ὅτι οὗτος εἶχε φοιτήσει εἰς τὴν Πλατωνικὴν Ἀκαδημίαν καὶ ὅτι εἶχε μαθητεύσει πλησίον τοῦ Ἀριστοτέλους. Τὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων δὲν εἶναι εὑρήματα τοῦ Εὐκλείδου. Ταῦτα εἶναι καρπὸς τριῶν αἰώνων περίπου Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Ὁ Εὐκλείδης τὰ συνέταξε, τὰ κατέταξε καὶ τὰ διετύπωσε κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ταῦτα νὰ εἶναι ἀνέλεγκτα. Ὀρθῶς λέγεται ὑπό τινων, ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶναι ὁ Φειδίας, ὁ καλλιτέχνης τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Ἡ διατύπωσις τῶν θεωρημάτων ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἀποτελεῖ πράγματι ὕψιστον καλλιτεχνικὸν δημιούργημα. Εἰς τὴν Ἀμερικὴν καὶ τὴν Ἀγγλίαν διδάσκονται τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου αὐτούσια κατὰ πιστὴν μετάφρασιν ἐκ τοῦ Ἑλληνικοῦ κειμένου. Τελευταίως καταβάλλεται προσπάθεια ὅπως καὶ ἐν Ἑλλάδι διδάσκωνται τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ἤδη τῇ συνδρομῇ τῶν Ὑπουργείων Παιδείας καὶ Οἰκονομικῶν καὶ τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων πλησιάζει ἡ ἀποπεράτωσις τῆς ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὅ,τι παρατηροῦμεν ἀπὸ ἀπόψεως τελειότητος εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὸ βλέπομεν καὶ εἰς τὴν Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους. Καὶ τὸ ἔργον τοῦτο δὲν ἔχει τὸ ὅμοιόν του. Καὶ αὐτὸ προσεπάθησαν οἱ νεώτεροι νὰ τὸ βελτιώσωσι καὶ τὸ συμπληρώσωσι, ἀλλ' ἀπέτυχον.

Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΙΣ ΚΑΙ ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὴν Ὀρφικὴν παράδοσιν πρὸ τῆς δημιουργίας ὑπὸ τοῦ Θεοῦ τοῦ Οὐρανοῦ καὶ τῆς Γῆς ὑπῆρχε τὸ χάος. Κατὰ δὲ τὴν Πυθαγόρειον παράδοσιν ὁ κόσμος προῆλθεν ἐκ τοῦ χάους, ἀφοῦ ὁ Δημιουργὸς ἐχρησιμοποίησε τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέτρον.

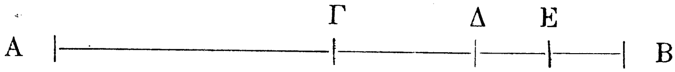
Τὰ ἁπλούστερα τῶν ἐν τῇ φύσει ὑπαρχόντων σχημάτων εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ ὁ κύκλος. Ταῦτα ἐξέλεξεν ὁ Δημιουργὸς διὰ νὰ δώσῃ μορφὴν εἰς τὸν ἐκ τοῦ χάους δημιουργηθέντα κόσμον. Ὅθεν ἡ σπουδὴ τῶν σχημάτων τούτων εἶναι ἔρευνα πρὸς ἐνατένισιν τοῦ δημιουργήσαντος καὶ κυβερνῶντος τὸν κόσμον θείου πνεύματος. Τὸ τρίγωνον ἀποτελεῖται ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν. Αἱ γραμμαὶ αὗται δὲν ἔχουσιν ὡρισμένον μῆκος, ἀλλὰ τὸ μῆκος των ποικίλλει ἀναλόγως τοῦ μεγέθους τοῦ τριγώνου. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν γραμμὴ δὲν ἀποτελεῖ ἐν τῷ κόσμῳ σταθερόν τι μέγεθος. Ἐγκλείει αὕτη ἐν ἑαυτῇ τὴν ἰδέαν τοῦ γεννωμένου καὶ τοῦ φθειρομένου. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα γραμμὴ ἔχει ἀρχήν, μέσον καὶ τέλος, παρωμοιάσθη αὕτη πρὸς τὴν ζωὴν τοῦ ἀνθρώπου, ἔνθα παρατηροῦμεν γέννησιν, ζωὴν καὶ θάνατον. Ἐκ τούτου καὶ ἡ ἱερότης τοῦ ἀριθμοῦ τρία διὰ τοὺς Πυθαγορείους. Εἰς τὸν κύκλον τοὐναντίον δὲν παρατηροῦμεν ἀρχὴν καὶ τέλος. Ὅθεν ὁ κύκλος συμβολίζει τὸν Θεόν. Εὐθείας γραμμὰς εἶναι δυνατὸν νὰ σύρωμεν χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο τὸν κανόνα, ἐνῷ κύκλους εἶναι δυνατὸν νὰ γράψωμεν χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο τὸν διαβήτην. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ κόσμῳ ὁ ἄνθρωπος παρατηρεῖ ἢ διαισθάνεται δύο τινα, πρῶτον τὸν Θεῖον Δημιουργὸν καὶ δεύτερον τὸ δημιούργημα τούτου, τὸν κόσμον, ἐκεῖνα τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα θεωροῦνται ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι παραδεκτὴν λύσιν, ὅταν πρὸς λύσιν τούτων χρησιμοποιῶνται ὁ κύκλος, τὸ σύμβολον τοῦ Θείου, καὶ ὁ κανών, τὸ σύμβολον τοῦ γεννωμένου καὶ φθειρομένου, τοῦ δημιουργουμένου καὶ καταστρεφομένου. Πάντα τὰ προβλήματα τὰ γεωμετρικὰ τὰ μὴ λυόμενα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κανόνος ἢ διαβήτου ἢ καὶ τῶν δύο τούτων ὀργάνων θεωροῦνται ἄλυτα. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὰ τρία περίφημα προβλήματα τῆς ἀρχαιότητος ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας καὶ ὁ διπλασιασμός, τοῦ κύβου, τὸ λεγόμενον δήλιον πρόβλημα, ἐθεωροῦντο προβλήματα ἄλυτα. Ταῦτα ὅμως ἐλύθησαν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων δι' εὐθειῶν γραμμῶν καὶ καμπύλων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἦσαν τόξα κύκλου ἢ κύκλοι.

Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης ἐπέτυχε τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου χρησιμοποιήσας εὐθεῖαν γραμμήν, κύκλον καὶ τὴν ἕλικα, ἥτις λέγεται ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὴν γραμμὴν ταύτην ἐρευνᾷ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς συναφῆ πραγματείαν του, ἥτις περιλαμβάνει 28 θεωρήματα. Τὸ κυκλοτρόνιον, τὸ λεπτότατον ὄργανον, τὸ ὁποῖον μέχρι τοῦδε κατεσκευάσθη ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον, ἀποτελούμενον ἐκ 2000 περίπου τεμαχίων καὶ χρησιμοποιούμενον εἰς πειράματα κατὰ τὴν διάσπασιν τοῦ ἀτόμου, ἔχει ὡς βάσιν τῆς λειτουργίας του τὴν ἕλικα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπερβολή, γραμμὴ χρησιμοποιουμένη διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μάζης τοῦ ἠλεκτρονίου, εἶναι μία ἐκ τῶν τριῶν κωνικῶν λεγομένων γραμμῶν (αἱ ἄλλαι εἶναι ἡ ἔλλειψις καὶ ἡ παραβολή), αἱ ὁποῖαι ἐμελετήθησαν ὑπὸ τῶν πρώτων Πυθαγορείων κατὰ τὸ 500 π.Χ. Ἔκτοτε δὲ ἐσπουδάσθησαν αὗται τελείως κατὰ τὴν ἀρχαιότητα καὶ εὐτυχῶς αἱ ἀθάνατοι συναφεῖς ἐργασίαι τοῦ Ἀπολλωνίου ἐσώθησαν κατὰ τὸ πλεῖστον μέρος. Σημειωτέον ὅτι αἱ τροχιαὶ τῶν κομητῶν εἶναι παραβολαὶ καὶ αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐλλείψεις. Ἡ ἔρευνα τῶν σχημάτων τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ Θείου Δημιουργοῦ κατὰ τὴν διαμόρφωσιν τοῦ κόσμου ἀπαιτεῖ καὶ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ μέτρου, τὴν σπουδὴν δηλαδὴ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Διότι εἰς τὰ σχήματα παρατηροῦνται σχέσεις αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται δι' ἀριθμῶν. Ἀλλὰ πλὴν τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μέτρου ὁ ἄνθρωπος, οἱ Ἕλληνες δηλαδή, παρετήρησαν ὅτι καὶ ἄλλαι ἀρχαὶ ὑπάρχουσιν ἢ ἐφαρμόζονται ἐν τῷ κόσμῳ. Αἱ ἀρχαὶ αὗται εἶναι τὸ πεπερασμένον καὶ τὸ ἄπειρον, τὸ συνεχὲς καὶ τὸ ἀσυνεχές, τὸ σύμμετρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον. Πρωτίστως ὅμως τὸ Ἑλληνικὸν πνεῦμα ἀπησχόλησαν τρεῖς σπουδαῖαι ἔννοιαι. Αἱ ἔννοιαι χῶρος, χρόνος, κίνησις. Καὶ αἱ τρεῖς αὗται ἔννοιαι, ἐμελετήθησαν συστηματικῶς ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Διὰ τὸν χρόνον λέγεται συνήθως, ὅτι ἔχομεν ἔννοιαν τούτου ἐκ τῆς κινήσεως. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ κίνησις, δὲν ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ χρόνου. Ἡ κίνησις ὅμως, λέγομεν, εἶναι μεταβολὴ τῆς θέσεως ἐν τῷ χώρῳ ἀντικειμένου τινος. Ὥστε τὸ βασικὸν πρόβλημα εἶναι νὰ ἑρμηνευθῇ ἡ ἔννοια χῶρος. Ἔννοιαν τοῦ χώρου ἔχομεν διὰ τῆς ἐνοράσεως καὶ τῆς ἐποπτείας. Εἰς τὸν χῶρον ἀποδίδομεν τρεῖς διαστάσεις, νοοῦντες τὴν διάστασιν ὡς γραμμὴν εὐθεῖαν, τὴν δὲ εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν νοοῦμεν ἀποτελουμένην ἐκ σημείων. Σημεῖον δὲ εἶναι, κατὰ τὸν Εὐκλείδην, πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος. Ἡ γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ἐρευνῶσα τὰς ἰδιότητας τοῦ χώρου. Περὶ τοῦ χώρου ὅμως οὐδὲν γνωρίζομεν. Λέγομεν ὅτι ὁ χῶρος ἀποτελεῖται ἐκ σημείων, τῶν ὁποίων δὲν γνωρίζομεν τὴν ὑπόστασιν. Ἀλλὰ πῶς εἶναι δυνατὸν τὰ σημεῖα νὰ εἶναι ὑπαρκτὰ ἀντικείμενα καὶ νὰ μὴ ἔχωσι μέρος οὐδέν ; Τὸ ὅλον λοιπὸν ἐπιστημονικὸν οἰκοδόμημα τῆς γεωμετρίας στηρίζεται εἰς μίαν ἔννοιαν, εἰς τὴν ἔννοιαν *σημεῖον*, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἱκανοποιητικῶς. Ὅθεν δικαίως ὁ Πλάτων, ὁ θιασώτης καὶ ὁ ὑμνητὴς τῶν μαθηματικῶν, γράφει εἰς τὴν Πολιτείαν : «*Ὧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι* ; *οὐδεμία, ἦ δ' ὅς*» [533 c.] (ἑρμην. Διότι ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ κάτι ἄγνωστον, διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ τούτου συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ τῶν ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῇ ποτε τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην ; Οὐδεμία, ἀπήντησεν ἐκεῖνος). Κατὰ τὸν Πλάτωνα, πᾶσα ἀνθρωπίνη γνῶσις εἶναι σχετική. Διὰ νὰ ἱδρύσωμεν τὰς ἐπιστήμας, κάμνομεν ὑποθέσεις τινὰς βασικὰς καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων τούτων προχωροῦμεν εἰς τὴν ἔρευναν. Αἱ ὑποθέσεις μας ὅμως αὗται ἔχουσι σχετικὴν ἀξίαν καὶ ὄχι ἀπόλυτον. Ἓν μόνον πρᾶγμα εἶναι ἄνευ ὑποθέσεων, ἀνυπόθετον, ὡς ἔλεγεν ὁ Πλάτων, ὁ Θεός. Περὶ Αὐτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ὑπόθεσίν τινα. Δὲν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν Θεὸν ὡς ἀντικείμενον, νὰ τοποθετήσωμεν ἡμᾶς ἔξω Τούτου, καὶ νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἔρευναν Αὐτοῦ. Τὸ δημιούργημα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κάμῃ σκέψεις περὶ τοῦ Δημιουργοῦ αὐτοῦ.

ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΝ ΚΑΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟΝ

Κατά τινα τρόπον ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ πεπερασμένου. Εἶναι δύσκολον ὅμως νὰ συλλάβωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου. Ἡ σημερινὴ ἐπιστήμη δέχεται τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, ὡς διετύπωσε ταύτην ὁ Ἀριστοτέλης. Ὁ Ἀριστοτέλης διακρίνει τὸ ἄπειρον εἰς δύο εἴδη. Εἰς ἄπειρον δυνάμει καὶ εἰς ἄπειρον ἐνεργείᾳ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5 . . ., παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέλος αὐτῶν. Ἡ ἀρίθμησις προχωρεῖ ἐπ' ἄπειρον. Τὸ ἄπειρον τοῦτο εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τὸ ἐνεργείᾳ ἄπειρον καὶ δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἄλλως ὅμως ἔχει τὸ πρᾶγμα μὲ τὸ δυνάμει ἄπειρον.

Τοῦτο ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἐὰν π.χ. θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΒ ἔχουσαν μῆκος δύο μέτρων καὶ λάβωμεν πρῶτον



τὸ ἥμισυ ταύτης, τὸ τμῆμα ΑΓ, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου, δηλ. τὸ τμῆμα ΓΔ, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου, δηλ. τὸ τμῆμα ΔΕ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ, δὲν θὰ ἐξέλθωμεν ποτὲ πέραν τοῦ σημείου Β, ἀλλὰ μετὰ τὰς ἀπείρους λήψεις, κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐν τέλει θὰ ἔχωμεν λάβει ὁλόκληρον τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν ΑΒ τῶν 2 μέτρων. Μαθηματικῶς τὸ πρόβλημα τοῦτο διατυποῦται ὡς ἑξῆς : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμ. προόδου $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, ἰσοῦται μὲ 2. Ἐάν, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης, λαμβάνῃ τις μέρη, ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐ π' ἄ π ε ι ρ ο ν, ΟΥ ΔΙΕΞΕΙΣΙ ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΝ (δὲν θὰ ἐξέλθῃ τοῦ πεπερασμένου) (Φυσικῆς Ἀκροάσεως Γ' 206 b).

ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΑΣΥΝΕΧΕΣ

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἐννοίας συνεχὲς καὶ ἀσυνεχές, ὁ Λεύκιππος καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Δημόκριτος δέχονται τὴν ὕπαρξιν τῆς ἀσυνεχείας ἐν τῷ Κόσμῳ, ἐν ᾧ ὁ Ἀριστοτέλης ὑποστηρίζει τὴν ὕπαρξιν τῆς συνεχείας. Ἡ θεωρία τοῦ Λευκίππου καὶ Δημοκρίτου, ἡ ἀτομικὴ θεωρία αὐτῶν, εὑρίσκει θιασώτας τοὺς ἐκπροσώπους τῆς σημερινῆς φυσικῆς. Εἰς τὰ μαθηματικὰ ὅμως ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας ἀποτελεῖ βασικὴν ἔννοιαν. Φαίνεται, ὅτι εἰς τὸν κόσμον καὶ αἱ δύο ἔννοιαι αὗται ἔχουσιν ἰσχύν.

ΤΟ ΣΥΜΜΕΤΡΟΝ ΚΑΙ ΤΟ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΝ

Ἐν ᾧ ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τοῦ κύκλου ἐδόθησαν εἰς τὸν ἄνθρωπον ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεως αὐτοῦ ἐπὶ τῆς Γῆς ἐκ τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων καὶ ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς Πανσελήνου, ἡ ἔννοια τοῦ μέτρου ἐγεννήθη, ὅταν ὁ ἄνθρωπος ᾐσθάνθη τὴν ἀνάγκην τῆς συγκρίσεως δύο μεγεθῶν. Τὰ μεγέθη ταῦτα ἦσαν βεβαίως πραγματικὰ ὁμοειδῆ ἀντικείμενα. Διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ὅμως, οἱ Ἕλληνες ἀνήγαγον τὴν ἔννοιαν ταύτην εἰς σπουδαιοτάτην μαθηματικὴν ἔννοιαν. Τὰς ἐννοίας σύμμετρον καὶ ἀσύμμετρον εὑρίσκομεν διατυπουμένας εἰς τὸ Χ Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὅταν ὑπάρχωσι δύο ἄνισα μεγέθη πρὸς σύγκρισιν καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ, τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου μεγέθους, τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἐὰν μὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπόν τι ἴσον μὲ μηδέν, τὰ μεγέθη λέγονται σύμμετρα, ἐὰν ὅμως οὐδέποτε εὑρίσκεται ὑπόλοιπον μηδέν, ἀλλὰ πάντοτε εὑρίσκεται ὑπόλοιπόν τι, τότε τὰ μεγέθη λέγονται ἀσύμμετρα. Ἔστωσαν π.χ. δύο μεγέθη τὸ Α μεγαλύτερον, τοῦ Β. Ἀφαιρῶ τὸ Β ἀπὸ τοῦ Α ἔστω 3 φοράς. Ἐὰν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, τὰ μεγέθη Α καὶ Β εἶναι σύμμετρα καὶ ἡ σχέσις μεταξὺ αὐτῶν εἶναι 3 : 1. Ἔστω ὅμως ὅτι ἀφοῦ ἀφαιρέσω τὸ Β ἀπὸ τοῦ Α τρεῖς φορὰς μένει ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον βεβαίως εἶναι μικρότερον τοῦ Β. Ἀφαιρῶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἀπὸ τοῦ Β ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν. Ἔστω ὅτι τὸ ἀφαιρῶ 7 φορὰς καὶ κατὰ τὴν ἑβδόμην φορὰν δὲν μένει ὑπόλοιπον. Τότε πάλιν τὰ μεγέθη Α καὶ Β εἶναι σύμμετρα. Ἡ σχέσις ἡ ὁποία ὑπάρχει τώρα μεταξὺ τῶν μεγεθῶν Α καὶ Β εἶναι $3\frac{1}{7}$ πρὸς 1 ἢ $\frac{22}{7} : \frac{7}{7}$.

Ὑπάρχει δηλαδὴ μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Β κοινόν τι μέτρον τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ Β.

Ἐὰν ὅμως κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας οὐδέποτε μένῃ ὑπόλοιπον, τότε τὰ μεγέθη λέγονται ἀσύμμετρα. Πρῶτος ὅστις ἀνεκάλυψε τοῦτο, πρῶτος ὅστις ἀνεκάλυψε τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, δηλαδὴ τὴν ὕπαρξιν ἐν τῷ κόσμῳ καὶ τῆς ἀσυμμετρίας εἶναι ὁ Πυθαγόρας. Λέγεται ὅτι οὗτος παρετήρησεν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς διαγωνίου τετραγώνου τινος ἀφαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἔχον διαγώνιον τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ νέου τετραγώνου, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον μικρότερον τῆς πλευρᾶς ταύτης. Τοιαύτη κατασκευὴ δύναται νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον. Τὰ μεγέθη ἄρα διαγώνιος τετραγώνου καὶ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα. Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ Πυθαγόρου κατετάραξε τοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς καὶ πρὸ παντὸς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν καὶ τοὺς μαθητὰς αὐτοῦ. Διότι ὁ Πυθαγόρας ἐδίδασκεν ὅτι ὁ κόσμος εἶναι ἁρμονία, ὅτι παντοῦ ὑπὸ τοῦ Δημιουργοῦ ὑπάρχει τὸ μέτρον καὶ ἡ ἀναλογία. Πρῶτος, ὅστις ἐξήγαγε τοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς ἐκ τοῦ ἀδιεξόδου, εἰς ὃ περιέπεσαν μετὰ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ Πυθαγόρου, εἶναι ὁ διάσημος ἐκ Κνίδου τῆς Μ. Ἀσίας (ἔναντι τῆς νήσου Κῶ) μαθηματικὸς Εὔδοξος, καθηγητὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Τόσον μεγάλη ἦτο ἡ φήμη διὰ τὴν μεγαλοφυΐαν τοῦ μαθηματικοῦ τούτου, ὥστε οὗτος ὠνομάζετο Ἔνδοξος ἀντὶ Εὔδοξος. Δυστυχῶς οὐδὲν ἔργον του ἐσώθη. Ἀναφέρεται ὅμως ὑπὸ σχολιαστοῦ τινος, ὅτι ὁλόκληρον τὸ 5ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι εὕρημα τοῦ Εὐδόξου.

Ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων μαθηματικῶν τῶν τελευταίων δύο αἰώνων ὑποστηρίζεται, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον μὲν ἀνακαλύψει τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὄχι ὅμως τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι κατάκτησις τῶν νεωτέρων. Τοῦτο δὲν εἶναι ἀληθές. Διότι ἡ ἔννοια μέγεθος ἐν πρώτοις εἶναι εὐρυτέρα τῆς ἐννοίας ἀριθμός. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὠνόμαζον ἀριθμοὺς μόνον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ὅταν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἔλεγον μέγεθος ἐνόουν καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Μία ἀπόδειξις τοῦ ἰσχυρισμοῦ ἡμῶν τούτου ἔστω ἡ κάτωθι :

Ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Θεαίτητος γράφει τὰ ἑξῆς : «Ὁ παρευρισκόμενος ἐδῶ Θεόδωρος (ὁ Κυρηναῖος μαθηματικὸς) μᾶς ἐδίδασκε περὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν, καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3 καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5, ἀποδεικνύων ὅτι αὗται δὲν εἶναι σύμμετροι πρὸς τὰς ὑπορρίζους ποσότητας καὶ ἐσυνέχισεν οὕτω τὰς ἀποδείξεις μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ

17. Εἰς αὐτὴν δὲ ἐσταμάτησε. *[Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο]* (147 d). Οἱ μνημονευθέντες ἀνωτέρω μαθηματικοὶ ἑρμηνεύουσι τὸ ἀνωτέρω χωρίον ὡς ἑξῆς: «Ὁ παρευρισκόμενος ἐδῶ Θεόδωρος μᾶς ἐδίδασκε περὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3 καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5 ἀποδεικνύων ὅτι τὸ μέγεθος $\sqrt{3}$ καὶ τὸ μέγεθος $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μεγέθη 3 καὶ 5 ἀντιστοίχως καὶ ἐσυνέχισεν οὕτω τὰς ἀποδείξεις μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ μεγέθους 17. Εἰς αὐτὴν δὲ ἐσταμάτησε». Ἀντιλαμβάνεταί τις εὐκόλως ὅτι ἡ ἑρμηνεία των αὕτη δὲν εἶναι ὀρθή. Τὸ νὰ τονισθῇ ὅτι ἡμεῖς σήμερον ἔχομεν ἄλλην, διάφορον ἐν πολλοῖς μαθηματικὴν ὁρολογίαν ἢ οἱ ἀρχαῖοι καὶ διάφορον μαθηματικὸν συμβολισμόν, εἶναι ὀρθόν. Ἡ θεωρία ὅμως τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ὑπάρχει καὶ δὲν εἶναι κατάκτησις τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία βεβαίως ἔχει σημειώσει ἀρκετὰς προόδους εἰς ἄλλους τομεῖς. Ἀνεφέρθη ἀνωτέρω, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον νὰ εὑρίσκωσι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ Εἰς τὴν πρόοδον αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου. Εἰς ὅλα τὰ βιβλία τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἀπαντᾶται ἡ πρόοδος αὕτη ὡς τὸ πρῶτον παράδειγμα. Ἀλλὰ καὶ ἄλλα πράγματα ἐγνώριζον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τὰ ὁποῖα οἱ νεώτεροι θεωροῦσιν ὡς σύγχρονον κατάκτησιν. Ἐγνώριζον παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ ἀποτελεῖ τὸ φράγμα δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς φθινούσης καὶ μιᾶς αὐξανομένης. Τυχαίως ὅλως πληροφορούμεθα περὶ αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου (2ος αἰὼν) καὶ τοῦ Πρόκλου (5ος αἰών), οἱ ὁποῖοι τὰ μνημονεύουσι εἰς τὰ σχόλια αὐτῶν εἰς στρυφνὴν μαθηματικὴν πρότασιν περιεχομένην εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος. Ἰδοὺ λοιπὸν ἐν συντομίᾳ ὁ τρόπος ἐγκιβωτισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν δύο ἀκολουθιῶν. Σχηματίζομεν δύο στήλας ἀριθμῶν, τὴν μίαν ἀριστερὰ καὶ τὴν ἄλλην δεξιά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ διὰ τὰς δύο στήλας. Οὕτως ἔχομεν εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 1. Ἀθροίζοντες τοὺς δύο αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἔχομεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῆς πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης ἴσον μὲ 2. Διπλασιάζοντες ὅμως τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀριθμὸν (τὸν 1) καὶ προσθέτοντες εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὸν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμὸν (τὸν 1) λαμβάνομεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν:

1.	1	1
2.	$1+1=2$	$2.1+1=3$
3.	$2+3=5$	$2.2+3=7$
4.	$5+7=12$	$2.5+7=17$
5.	$12+17=29$	$2.12+17=41$
6.	$29+41=70$	$2.29+41=99$
7.	$70+99=169$	$2.70+99=239$
8.	$169+239=408$	$2.169+239=577$, κλπ.

Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀριθμῶν τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς τῆς πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης, θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots \\ \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169}, & \frac{577}{408}\ldots \end{array}$$

Ἐκ τῶν λόγων τούτων οἱ περιττῆς τάξεως (δηλ. οἱ 1, 3, 5, 7 . . .) βαίνουσιν αὐξανόμενοι καὶ οὐδέποτε εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερβῶσι τὴν $\sqrt{2}$, ἐνῷ οἱ λόγοι ἀρτίας τάξεως βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἀλλ' οὐδέποτε εἶναι δυνατὸν νὰ κατέλθωσι κάτω τῆς $\sqrt{2}$, ἤτοι εἶναι

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$$

Καταπληκτικὴ εἶναι ἡ εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον ἀποδιδομένη ἀνακάλυψις, καθ' ἣν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἀπείρων μουσικῶν ἀναλογιῶν, ἤτοι διὰ τοῦ σχηματισμοῦ δύο ἀκολουθιῶν μιᾶς φθινούσης, τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, καὶ μιᾶς αὐξανομένης, τῶν ἁρμονικῶν μέσων [1]. Ἀλλά, φαίνεται, διὰ τὸν Ἀρχύταν δὲν ἦτο δύσκολον νὰ εὑρεθῇ τὸ πρᾶγμα τοῦτο, ἀφοῦ ὁ Ἀρχύτας εἶχε κατασκευάσει περιστεράν, ἡ ὁποία ἵπτατο. Δυστυχῶς οὐδὲν ἄλλο γνωρίζομεν περὶ τῆς περιστερᾶς αὐτῆς. Καὶ ἐπειδὴ ἐγένετο προηγουμένως λόγος περὶ μουσικῶν ἀναλογιῶν δὲν θεωροῦμεν περιττὸν ν' ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος καθωρίσθη ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$, ἐκ τῆς ὁποίας κατασκευάζεται ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ. Εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς γνώμης αὐτῆς κατελήξαμεν ἐκ τῆς σπουδῆς τοῦ μνημονευθέντος ἀνωτέρω χωρίου τοῦ Πλατωνικοῦ διαλόγου Θεαίτητος.

Τόμοι ὁλόκληροι ἔχουσι γραφῆ κατὰ τὰ τελευταῖα περίπου 1600 ἔτη διὰ νὰ δειχθῇ πῶς ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . $\sqrt{17}$ εἶναι ἀσύμμετροι καὶ διατὶ ὁ Πλάτων ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 17. Τὸ θέμα τοῦτο ἀπὸ τοῦ 1945 κατέστη καὶ πάλιν ἐπίκαιρον διὰ τοὺς μεγάλους Εὐρωπαίους μαθηματικοὺς τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Συναφὴς ἐργασία κατὰ τὸ 1949 τοῦ διαπρεποῦς καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ζυρίχης καὶ μεγάλου συγχρόνου ἀλγεβριστοῦ κ. B. L. van der Waerden, ἀποσταλεῖσα εἰς ἡμᾶς, κατέστη ἀφορμὴ ὅπως καὶ ἡμεῖς ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ θέμα τοῦτο τοῦ Πλατωνικοῦ διαλόγου. Σχετικὴ ἀνακοίνωσις ἐπὶ τούτου ἐγένετο εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 12 Ἰανουαρίου 1956. Τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνακοινώσεως ἡμῶν ταύτης εἶναι, ὅτι ὁ Πλάτων ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$, διότι θέλει οὕτω νὰ ὑποδηλώσῃ τὴν ἱερότητα, ἣν εἶχε διὰ τοὺς Πυθαγορείους ὁ ἀριθμὸς 17. Εἰς τὴν

1) Ἴδε *Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. II, Εἰσαγωγή, Ἐκδ. Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι, 1953.

ἀνωτέρω μουσικὴν ἀναλογίαν $6 : 8 = 9 : 12$, ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι διπλάσιος τοῦ 6, (τὸ ἄνω do τῆς μουσικῆς κλίμακος προέρχεται ἐκ διπλασίου ἀριθμοῦ παλμικῶν κινήσεων ἢ τὸ κάτω do) ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ 6 καὶ 12 $\left(\text{ἤτοι } 8 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12}\right)$ καὶ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12 $\left(\text{ἤτοι } 9 = \frac{6+12}{2}\right)$. Ὁ λόγος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 διὰ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8 ἤτοι τὸ κλάσμα $\frac{9}{8}$ ἀποτελεῖ τὸν τόνον τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 9 εἶναι 17, ὁ ἀριθμὸς δηλ. εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Πλάτων ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ. Κατωτέρω παραθέτομεν ἁπλοῦν τρόπον κατασκευῆς τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος. Ἐν πρώτοις διαιροῦμεν τοὺς ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6 (ἁπλοποιοῦμεν δηλ. ταύτην), ὁπότε λαμβάνομεν $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 1 ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $= \frac{9}{8}$.

Τὸ $\frac{9}{8}$ τοῦτο τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $= \frac{81}{64}$.

Τὸ $\frac{3}{2}$ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $= \frac{27}{16}$.

Τὸ $\frac{27}{16}$ τοῦτο τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $= \frac{243}{128}$.

Διὰ τῆς ἐργασίας ἡμῶν ταύτης παρενεβάλομεν μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ $\frac{4}{3}$ δύο μουσικοὺς φθόγγους καὶ μεταξὺ τοῦ $\frac{3}{2}$ καὶ τοῦ 2 ἄλλους δύο. Οὕτω δὲ ἔχομεν τὴν Πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6:8=9:12$ καὶ τοῦ κλάσματος $\frac{9}{8}$, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 17. Αὕτη εἶναι ἡ ἑξῆς: (τοὺς φθόγγους ὀνομάζομεν διὰ τῶν ἰταλικῶν ὀνομάτων).

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2.

Ὡς γνωστόν, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐκφράζουσι τὰς σχέσεις τῶν παλμικῶν κινήσεων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἕκαστον φθόγγον. Τὸ ἄνω do π.χ. ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν παλμικῶν κινήσεων ἢ τὸ κάτω do καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμικῶν κινήσεων διὰ τὸν φθόγγον re ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{9}{8}$ τῶν παλμικῶν κινήσεων τοῦ κάτω do.

Φρονοῦμεν ὅτι εἶναι λίαν πειστικὴ ἡ παρατήρησις ἡμῶν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος ἐλήφθη ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6 : 8=9 : 12, διότι τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τῆς μεγάλης πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 17 ἤτοι εἶναι τοῦτο τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 καὶ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8, τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας (δηλ. τοῦ 6 καὶ τοῦ 12), ἐνῷ τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τῆς μικρᾶς πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 8, ἤτοι εἶναι τοῦτο τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων (τῶν 6 καὶ 12) τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας. Εἶναι δὲ $\frac{9}{8}$ (ἐξ οὗ 9+8=17) ὁ μουσικὸς τόνος, δι' οὗ κατασκευάζεται ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ. Ἄξιον σημειώσεως εἶναι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν συλλαβῶν τοῦ πρώτου στίχου τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου εἶναι 17,

ἄν	δρα	μοι	ἔν	νε	πε	μοῦ	σα	πο	λύ	τρο	πον	ὅς	μά	λα	πολ	λὰ
1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8=ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12. 9=ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12

ΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Ἐκτὸς ἀναγκαίων τινῶν ὁρισμῶν, ὅπως π. χ. διὰ τὴν γεωμετρίαν εἶναι ὁ ὁρισμὸς τοῦ σημείου, τῆς γραμμῆς, τῆς εὐθείας γραμμῆς, τῆς γωνίας, τῆς ἐπιφανείας, τοῦ στερεοῦ κλπ., διὰ τὴν ἵδρυσιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες καθώρισαν προτάσεις τινὰς ἁπλᾶς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουσιν ἀνάγκην ἀποδείξεως. Δὲν εὑρίσκονται ὅμως εἰς ἀντίθεσιν αἱ προτάσεις αὗται πρὸς τὴν ἐποπτείαν, τὴν ἐνόρασιν καὶ τὴν λογικήν. Τὰς προτάσεις ταύτας ἀκριβῶς λόγῳ τῆς ἁπλότητος αὐτῶν τὰς ὀνομάζουσι κοινὰς ἐννοίας. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ Ι Βιβλίον τῶν Στοιχείων ἀναφέρει ἐννέα τοιαύτας κοινὰς ἐννοίας, τὰς ἑξῆς:

1) Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ ἴσα εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα.
2) Ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα.
3) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα.
4) Ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἄνισα.
5) Τὰ διπλάσια τοῦ αὐτοῦ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.
6) Τὰ ἡμίση τοῦ αὐτοῦ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.
7) Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.
8) Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους.
9) Δύο εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσαι ἐπ' ἀλλήλας δὲν περιέχουσιν ἐπιφάνειαν.

Εἶναι φανερὸν ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι αἱ ὑπ' ἀριθ. 7 καὶ 9 κοιναὶ ἔννοιαι ἀφορῶσιν εἰδικῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ ὄχι καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διάταξις τῶν 9 κοινῶν ἐννοιῶν, ὡς αὕτη σῴζεται, δὲν εἶναι ὅπως θὰ τὴν εἶχε διατυπώσει ὁ Εὐκλείδης.

Εἰς τὴν γεωμετρίαν ἐπίσης ἀφορῶσιν πέντε ἄλλαι προτάσεις περιεχόμεναι εἰς τὸ Ι Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται αἰτήματα. Ταῦτα εἶναι :

1) Ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν γραμμήν.

2) Πεπερασμένην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ προεκτείνωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εὐθυγράμμως καὶ ἐπ' ἄπειρον.

3) Μὲ πᾶν κέντρον καὶ πᾶσαν ἀκτῖνα γράφεται κύκλος.

4) Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ὀλλήλας.

5) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, αἱ δύο εὐθεῖαι προεκτεινόμεναι ἐπ', ἄπειρον συναντῶνται πρὸς ἃ μέρη εἶναι αἱ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν γωνίαι.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀριστοτέλους αἱ ἁπλούσταται τῶν προτάσεων αἱ χρησιμοποιούμεναι διὰ τὴν θεμελίωσιν μιᾶς ἐπιστήμης ὀνομάζονται ἀξιώματα. Μὲ τὸν ἀριστοτέλειον τοῦτον ὅρον οἱ νεώτεροι ὀνομάζουσιν ἀξιώματα τὰς κοινὰς ἐννοίας καὶ τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου.

ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Εἰς τὸ πρῶτον Βιβλίον ἐξετάζεται τὸ τρίγωνον.

Εἰς τὸ δεύτερον Βιβλίον περιέχονται τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας καὶ συμπληρώσεις εἰς τὸ τρίγωνον. Ἐνταῦθα περιλαμβάνεται καὶ τὸ περίφημον θεώρημα: δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον οὕτως, ὥστε τὸ γινόμενον τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ μικρότερον μέρος αὐτῆς νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μέρους. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχουσι κατασκευασθῆ ὅλα τὰ ἀρχαῖα θέατρα τῆς Ἑλλάδος. Κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται θεώρημα τῆς χρυσῆς τομῆς καὶ ἀποδίδεται εἰς τοῦτο μεγάλη μυστικιστικὴ δύναμις.

Εἰς τὸ τρίτον Βιβλίον ἐξετάζεται ὁ κύκλος,

Εἰς τὸ τέταρτον Βιβλίον ἐξετάζεται ἡ ἐγγραφὴ καὶ περιγραφὴ εἰς κύκλον τῶν κανονικῶν πολυγώνων.

Εἰς τὸ πέμπτον Βιβλίον περιέχεται ἡ περίφημος θεωρία τῶν ἀναλογιῶν ἡ ἀποδιδομένη εἰς τὸν Εὔδοξον, ἡ ὁποία ἀφορᾷ κυρίως εἰς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Εἰς τὸ ἕκτον Βιβλίον σπουδάζεται ἡ ὁμοιότης τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ λύονται γεωμετρικῶς αἱ ἐξισώσεις παραβολῆς, ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

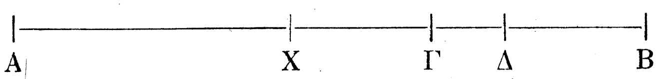
Τὰ Βιβλία 7, 8, 9 περιέχουσι τὰ Στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ δέκατον Βιβλίον περιλαμβάνει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ παρουσιάζει συμμετρίας σχηματιζομένας ἐξ ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Τὸ Βιβλίον τοῦτο εἶναι τὸ τελειότερον, ἀλλὰ καὶ τὸ δυσκολώτερον ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τόσον δύσκολον εἶναι, ὥστε Εὐρωπαῖοί τινες μαθηματικοὶ τοῦ 18ου αἰῶνος τὸ ὠνόμαζον «*Ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν*».

Τὰ Βιβλία 11, 12, 13 περιέχουσι τὴν Στερεομετρίαν. Ἐπιστέγασμα τῶν 13 Βιβλίων τῶν Στοιχείων εἶναι ὅτι εἰς τὴν σφαῖραν μόνον τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῶσι: τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, τὸ εἰκοσάεδρον, ὁ κύβος, τὸ δωδεκάεδρον καὶ μόνον αὐτά. Κατὰ τοὺς Πυθαγορείους (ἴδε καὶ Πλάτωνος Τίμαιος 53 c), τὸ τετράεδρον συμβολίζει τὸ πῦρ, τὸ ὀκτάεδρον τὸν ἀέρα, τὸ εἰκοσάεδρον τὸ ὕδωρ, ὁ κῦβος τὴν γῆν. Κατὰ τοὺς μεταγενεστέρους Πυθαγορείους τὸ δωδεκάεδρον συμβολίζει τὸν Δημιουργόν. Σημειωτέον ὅτι κατὰ τὸν Ἐμπεδοκλέα τὸ Σύμπαν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων στοιχείων: πυρός, ἀέρος, ὕδατος, γῆς, (πιθανῶς ἐννοεῖ τὴν ἐνέργειαν καὶ τὰς τρεῖς καταστάσεις τῶν σωμάτων δηλ. τὴν στερεάν, τὴν ὑγρὰν καὶ τὴν ἀερίαν).

Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΩΝ ΑΡΧΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὰ τέλη τοῦ 5ου αἰῶνος π.Χ. ὁ μαθητὴς τοῦ Παρμενίδου Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἤσκησε δριμυτάτην κριτικὴν τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Δυστυχῶς ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ἐσώθησαν. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὸ περιστατικὸν τοῦ Ἀχιλλέως καὶ τῆς Χελώνης, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ Ζήνων θέλει νὰ δείξῃ ὅτι δὲν ὑπάρχει κίνησις ἢ νὰ ἐλέγξῃ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦσιν οἱ μαθηματικοί.



Εἰς τὴν θέσιν Α εὑρίσκεται ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ εἰς τὴν θέσιν Χ εὑρίσκεται ἡ Χελώνη. Ἀναχωροῦσι καὶ οἱ δύο συγχρόνως. Ἔστω ἡ ἀπόστασις ΑΧ ἴση μὲ ἓν στάδιον καὶ ἡ ταχύτης τοῦ Ἀχιλλέως δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τῆς Χελώνης. Ὁ Ζήνων λέγει, ὅτι ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς εἶναι ἀδύνατον νὰ φθάσῃ τὴν χελώνην. Διότι, ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Χ ἡ χελώνη θὰ εἶναι εἰς τὴν θέσιν Γ, ἐνῷ $ΧΓ = \frac{1}{12}$ τοῦ ΑΧ. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Γ, ἡ χελώνη θὰ ἔχῃ φθάσει εἰς τὴν θέσιν Δ καὶ θὰ εἶναι $ΓΔ = \frac{1}{12}$ τοῦ ΧΓ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Πάντοτε ἡ χελώνη θὰ προηγῆται τοῦ Ἀχιλλέως. Ὁ Ἀριστοτέλης ἀπαντᾷ: «*Ζήνων δὲ παραλογίζεται*». Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Ἀχιλλέως τὸ πρόβλημα ἀπαιτεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ὅπερ ἦτο τότε γνωστόν.

Οἱ νεώτεροι λέγουσιν, ὅτι ὁ Ζήνων ἐγνώριζε τὰ τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἀλλὰ τὸ πρόβλημά του δὲν εἶναι πότε ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, ἀλλὰ π ῶ ς θ ὰ τ ὴ ν φ θ ά σ ῃ, ἀφοῦ θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἔννοια ἄπειρον.

Ἄλλο παράδειγμα κριτικῆς τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀπαντῶμεν εἰς πραγματείαν τοῦ Σέξτου τοῦ Ἐμπειρικοῦ (2ος αἰὼν μ.Χ.). Ὁ Σέξτος γράφει τὰ ἑξῆς:

Ἔστω εἷς κύκλος καὶ διάμετρός τις αὐτοῦ χωρίζουσα τοῦτον εἰς δύο ἡμικύκλια. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἓν καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον, εἰς ποῖον ἡμικύκλιον ἀνήκει; Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο τότε, τὸ σημεῖον διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐνῷ δὲν ἔχει μέρος κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σημείου. Ἐὰν εἰς οὐδέν, τότε ὁ κύκλος δὲν ἔχει κέντρον, ὅπερ ἄτοπον. Διότι ὁ κύκλος ἔχει κέντρον καὶ κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ κύκλου τοῦτο πρέπει κάπου νὰ μετέβη.

Ἐκτὸς ὅμως τῆς κριτικῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων διὰ τὴν γεωμετρίαν των καὶ ἰδίως τῆς κριτικῆς τοῦ Ζήνωνος, διὰ τῆς ὁποίας οὗτος, ὡς φαίνεται, θέλει νὰ τονίσῃ ὅτι ἡ νοητικὴ ἱκανότης τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος εἶναι πεπερασμένη, ὑπάρχει καὶ νεωτέρα τις κριτικὴ τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας διατυπωθεῖσα ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ κοινωνιολόγου Oswald Spengler. Οὗτος, ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πρώτου παγκοσμίου πολέμου, εἰς τὸ δίτομον ἔργον αὐτοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ καταστροφὴ τῆς Δύσεως» ἐκδοθὲν κατὰ τὸ 1918 - 1922, εὑρίσκει τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐπιτεθῇ καὶ κατὰ τοῦ Εὐκλείδου. Δὲν θὰ ἐμνημονεύομεν τῆς ἐκδόσεως ταύτης, διότι ἤδη αὕτη ἐν Εὐρώπῃ εἶναι δυσεύρετος. Κατὰ τὸ προπαρελθὸν ὅμως ἔτος ἐξεδόθη τὸ ἔργον τοῦτο ἐν Ἀμερικῇ, καὶ θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ σημειώσωμεν τὰ περὶ τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ Spengler γραφόμενα, ἅτινα ἔχουσιν ὡς ἑξῆς (σελὶς 118) : «Μέχρι τοῦ 18 αἰῶνος λαϊκαὶ εὐκλείδειοι προλήψεις ἐπεσκότισαν τὴν ἔννοιαν τοῦ διαφορικοῦ ἀξιώματος. Μὲ ὁσηνδήποτε προφύλαξιν καὶ ἂν χρησιμοποιήσῃ τις τὴν κατ' ἀρχὰς εὐνόητον ἔννοιαν τοῦ ἀπείρως μικροῦ, αὕτη διατηρεῖ ἴχνη τινὰ τῆς κατὰ τοὺς ἀρχαίους σταθερᾶς... Τὸ πρῶτον, τὸ βῆμα ἀπὸ τοῦ «ἀπείρως μικροῦ μεγέθους» εἰς τὸ κατώτερον ὅριον παντὸς «πεπερασμένου μεγέθους», ἄγει εἰς τὴν σύλληψιν ἑνὸς μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος κινεῖται κάτωθι παντὸς πεπερασμένου διαφόρου τοῦ μηδενὸς μεγέθους, δὲν ἔχει ἄρα καθ' ἑαυτὸν τὴν παραμικροτέραν χροιὰν μεγέθους». Εἰς τοὺς ἐπαΐοντας τὸ χωρίον τοῦτο τοῦ Spengler προκαλεῖ τὸν γέλωτα. Ἐὰν ὅμως ἔζων ὁ Spengler καὶ ὁ Ὀδυσσεύς, ὁ τελευταῖος οὗτος θὰ προεκάλει διὰ τοῦ χρυσοῦ σκήπτρου του εἰς τὸν Spengler, διὰ τὰς ἀμετροεπείας του, ὡς ἄλλοτε εἰς τὸν Θερσίτην (1), σμώδιγγα αἱματόεσσαν [=αἱματηρὰν μελανιάν, (Ἰλιάδ. Β 267)].

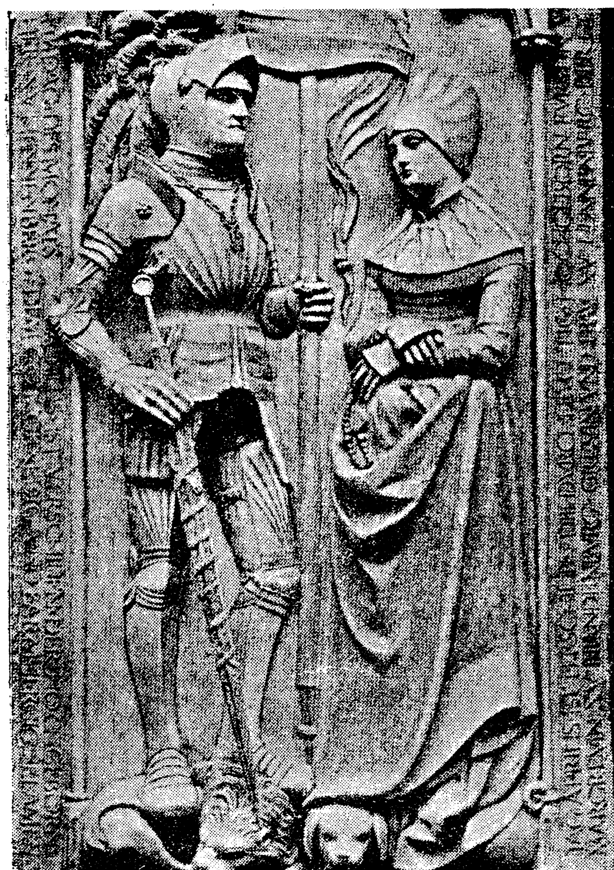
1) Δημαγωγὸς Ἕλλην μετασχὼν τοῦ ἐκστρατευτικοῦ σώματος κατὰ τῆς Τροίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

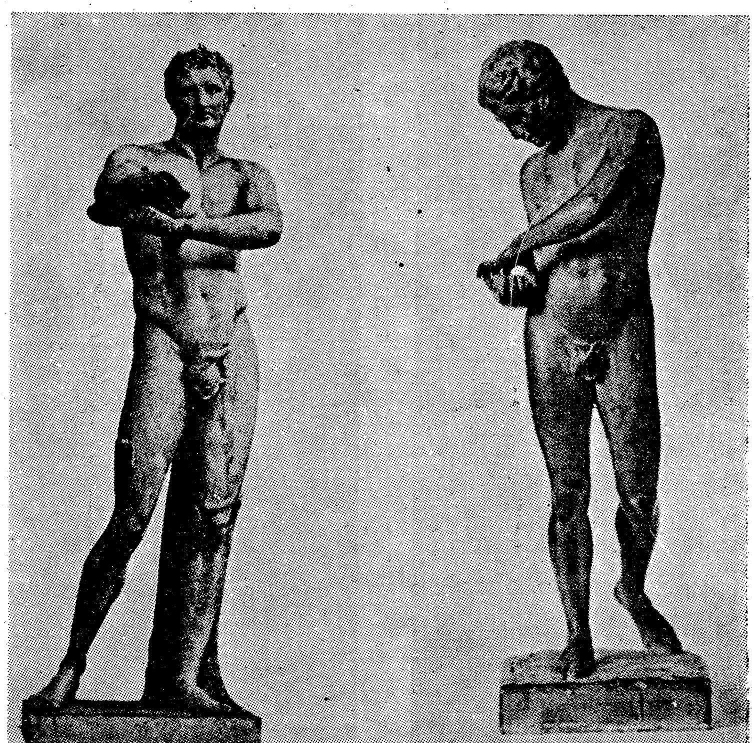
Δὲν εἶναι ὑπερβολὴ ἐὰν λεχθῇ ὅτι τὰ δημιουργήματα τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς ὅλα τὰ πεδία τοῦ ἐπιστητοῦ καὶ συνεπῶς καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἀποδείξεις διαφέρουσιν ἀπὸ ἀπόψεως κάλλους τῶν ἀντιστοίχων δημιουργημάτων τῶν νεωτέρων χρόνων, ὅσον καὶ ἡ Ἑλληνικὴ γλυπτικὴ διαφέρει τῆς νεωτέρας γλυπτικῆς. Κατωτέρω παραθέτομεν εἰκόνας τινὰς ἔργων τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς ἐποχῆς καὶ τῆς τῶν νεωτέρων χρόνων πρὸς σύγκρισιν.

1. Ο Ηνίοχος τῶν Δελφῶν.

2. Ἡ Ἄρτεμις τῶν Γαβίων, πόλεως τῆς Ἰταλίας. Θεωρεῖται ἀντίγραφον τοῦ ἐπὶ τῆς Ἀκροπόλεως ἔργου τοῦ Πραξιτέλους.



3. Ἱππότης καὶ εὐγενὴς Κυρία τοῦ Peter Vischer.



4. 'Αθλητὴς ἀποξυόμενος τοῦ Λυσίππου.

5. 'Αθλητὴς τοῦ Tait McKenzie.

6. Καρυᾶτις τοῦ 'Ερεχθείου

7. Καρυᾶτις τοῦ Rodin

8. Δημοσθένης
τοῦ Πολυεύκτου

9. Ἀβραάμ Λίνκολν
τοῦ Barnard

Αἱ εἰκόνες ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ βιβλίου «The Legacy of Greece» (Ἡ κληρονομία τῆς Ἑλλάδος) τοῦ *R. W. Livingstone,* Oxford at the Clarendon Press, 1937.

ΑΠΟΛΕΣΘΕΝΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΥ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΤΙΤΛΟΙ ΜΟΝΟΝ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΟΙ

ΗΘΙΚΑ

Πυθαγόρης. Περὶ τῆς τοῦ σοφοῦ διαθέσεως. Περὶ τῶν ἐν Ἅδου. Τριτογένεια (βουλεύεσθαι καλῶς, λέγειν ἀναμαρτήτως, πράττειν ἃ δεῖ). Περὶ ἀνδραγαθίας ἢ περὶ ἀρετῆς. Ἀμαλθείης κέρας. Περὶ εὐθυμίης ἢ εὐεστῷ (περὶ εὐαρέστου συναισθήματος).

ΦΥΣΙΚΑ

Μικρὸς διάκοσμος (Κοσμολογία, ζῳογονία, ἱστορία τοῦ πολιτισμοῦ). Κοσμογραφία. Περὶ τῶν πλανητῶν. Περὶ φύσεως Α'. Περὶ φύσεως Β'. Περὶ νοῦ ἢ περὶ ψυχῆς. Περὶ αἰσθήσεων. Περὶ χυμῶν (περὶ ὑγρῶν). Περὶ χροῶν (περὶ χρωμάτων). Περὶ τῶν διαφερόντων ῥυσμῶν (περὶ διαφόρων ἐκκρίσεων ἢ ῥοῶν). Περὶ ἀμειψιρυσμιῶν [ἀμειψιρυσμεῖν=ἀλλάσσειν τὴν σύγκρισιν (ἕνωσιν ἐξ ἐκκρίσεως) ἢ μεταμορφοῦσθαι] Κρατυντήρια (περὶ δυνάμεων). Περὶ εἰδώλων ἢ περὶ προνοίας (γεωμετρικὴ ὀπτική). Περὶ λογικῶν ἢ Κανὼν Α, Β, Γ. Ἀπορημάτων (Α, Β...).

ΑΣΥΝΤΑΚΤΑ

Αἰτίαι οὐράνιοι (ἀστρονομία). Αἰτίαι ἀέριοι (ἀεροστατικὴ—ἀεροδυναμική). Αἰτίαι ἐπίπεδοι (ἐπιπεδομετρία ;). Αἰτίαι περὶ πυρὸς καὶ τῶν ἐν πυρὶ (θερμότης—θερμοδυναμική). Αἰτίαι περὶ φωνῶν (ἀκουστική). Αἰτίαι περὶ σπερμάτων καὶ φυτῶν καὶ καρπῶν (βιολογία—φυτολογία). Αἰτίαι περὶ ζῴων (ζῳολογία). Αἰτίαι σύμμεικτοι. Περὶ τῆς λίθου (ὀρυκτολογία—πετρογραφία).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης (περὶ ἐπαφῆς κύκλου καὶ σφαίρας). Περὶ γεωμετρίας. Ἀριθμοὶ (θεωρία ἀριθμῶν). Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν (περὶ ἀσυμμέτρων γραμμῶν καὶ στερεῶν Α, Β). Ἐκπετάσματα (προβολὴ σφαίρας εἰς ἐπίπεδον, Diels, Fr. II, σ. 141 τοῦ 1952). Μέγας ἐνιαυτὸς ἢ ἀστρονομίη. Παράπηγμα. (Τὸ ἔτος τοῦτο τοῦ Δημοκρίτου ἀποτελεῖται ἐξ 82 συνήθων ἐτῶν μὲ 28 παρεμβαλλομένους μῆνας. Παράπηγμα=ἀστρονομικὸν ὄργανον). Ἅμιλλα κλεψύδραι (πιθανῶς μελέτη τῆς ἐκροῆς τοῦ ὕδατος). Οὐρανογραφίη (περὶ οὐρανοῦ). Γεωγραφίη. Πολογραφίη. Ἀκτινογραφίη.

ΜΟΥΣΙΚΑ

Περὶ ῥυθμῶν καὶ ἁρμονίας. Περὶ ποιήσιος (ποιήσεως). Περὶ καλλοσύνης ἐπέων (περὶ κάλλους τοῦ λόγου). Περὶ εὐφώνων καὶ δυσφώνων γραμμάτων. Περὶ Ὁμήρου ἢ ὀρθοεπείης καὶ γλώσσεων. Περὶ ἀοιδῆς (ᾄσματος). Περὶ ῥημάτων (ἀπαγγελίας). Ὀνομαστικῶν (γλωσσολογία—ἐτυμολογία).

ΤΕΧΝΙΚΑ

Πρόγνωσις (πιθανῶς μετεωρολογικόν). Περὶ διαίτης ἢ διαιτητικόν. Ἰητρικὴ γνώμη (ἰατρικαὶ συμβουλαί). Αἰτίαι περὶ ἀκαιριῶν καὶ ἐπικαιριῶν (δυναμικὴ μετεωρολογία). Περὶ γεωργίης ἢ γεωργικὸν (γεωργικά). Περὶ ζωγραφικῆς. Τακτικὸν (περὶ τακτικῆς ἐν πολέμῳ). Ὁπλομαχικόν.

ΕΡΓΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΓΝΗΣΙΟΤΗΣ ΑΜΦΙΣΒΗΤΕΙΤΑΙ

Περὶ τῶν ἐν Βαβυλῶνι ἱερῶν γραμμάτων. Περὶ τῶν ἐν Μερόῃ. Ὠκεανοῦ περίπλους. Περὶ ἱστορίης. Χαλδαϊκὸς λόγος. Φρύγιος λόγος. Περὶ πυρετοῦ καὶ τῶν ἀπὸ νόσου βησσόντων (φυματιολογία). Νομικὰ αἴτια. Χερνικὰ ἢ προβλήματα.

['Εκ τοῦ Βιβλίου : *H. Diels,* Fragmente der Vorsokratiker, τόμ. II, Berlin, 1952].

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ
ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΙΔΡΥΤΩΝ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΤΩΝ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΟΥΣΙΚΗΣ

Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (ἐγεν. 640 π. Χ.). Μαμέρτιος, ἀδελφὸς τοῦ ποιητοῦ Στησιχόρου. Ἀναξίμανδρος ὁ Μιλήσιος. Ἀναξιμένης ὁ Μιλήσιος. Πυθαγόρας ὁ Σάμιος (καὶ μουσικῆς). Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος. Ἵππασος ὁ Μεταποντῖνος. Θυμαρίδας ὁ ἐκ Πάρου. Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος. Ἀντιφῶν. Βρύσων. Ἀρχέλαος. Δημόκριτος. Σωκράτης. Οἰνοπίδης ὁ Χῖος. Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος. Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος. Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης. Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος. Φιλόλαος. Τίμαιος. Πλάτων. Λεωδάμας ὁ Θάσιος. Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος. Κλεινίας ὁ Ταραντῖνος. Μέτων ὁ Ἀθηναῖος. Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος. Νεοκλείδης. Βούθερος ὁ Κυζικηνός. Κάλλιππος ὁ Κυζικηνός. Λέων. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος. Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης. Ξενοκράτης. Μέναιχμος καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος (ἐκ Πριγκηποννήσου). Περσεύς. Θεύδιος ὁ Μάγνης. Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνός. Ἑλικὼν ὁ Κυζικηνός. Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος. Ἀμφίνομος. Φίλιππος ὁ Μενδαῖος (ἢ Ὀπούντιος). Σπεύσιππος. Ἀριστοτέλης. Θεόφραστος. Στράτων. Εὔδημος ὁ Ῥόδιος. Δικαίαρχος ὁ Μεσσήνιος. Αὐτόλυκος ἐκ Πιτάνης. Βίων ὁ Ἀβδηρίτης. Ἀριστόθερος.

Εὐκλείδης. Ἄνδρων. Ποσειδώνιος. Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος. Ἀρχιμήδης. Ἐρατοσθένης. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς (ἐκ Πόντου). Ἀπολλώνιος. Ἵππαρχος. Κτησίβιος. Ἥρων. Φίλων. Νικόμαχος. Νικομήδης. Διοκλῆς. Ζηνόδωρος. Ὑψικλῆς. Γεμῖνος. Θέων ὁ Σμυρναῖος. Μενέλαος. Κλαύδιος Πτολεμαῖος. Νικομήδης. Διοκλῆς. Πάππος. Διόφαντος. Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς. Ὑπατία (θυγάτηρ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως) † 415 μ. Χ.

ΜΟΥΣΙΚΗΣ

Ὀρφεὺς ἐκ Λειβήθρων Θράκης, περὶ τὸ 1500 π. Χ.
Ὄλυμπος (738—695 π.Χ.). Τέρπανδρος 700 π. Χ.
Κράτης. Ἱέραξ ὁ Ἀργεῖος
Θαλήτας ἐκ τῆς Γόρτυνος Κρήτης.
Καλλῖνος ὁ Ἐφέσιος (περὶ τὸ 700 π. Χ.). Ἀρχίλοχος ὁ Πάριος (650 π. Χ.).
Ἀριστόνικος (650 π. Χ.). Ἄσιος ὁ Σάμιος (625 π. Χ.).
Τυρταῖος ὁ Μιλήσιος. Ἀρίων (622—585 π. Χ.).
Ξενόδαμος ἐκ Κυθήρων (620 π. Χ.).
Ξενόκριτος ἐκ Λοκρίδος (620 π. Χ.).
Πολύμναστος ὁ Κολοφώνιος.
Σακάδας ὁ Ἀργεῖος (600 π. Χ.). Σαπφώ. Ἀλκαῖος.
Ἀλκμάν. Φρύνιχος. Πρατίνας ἐκ Φλειοῦντος.
Στησίχορος. Πίνδαρος ἐκ Θηβῶν (522—448 π. Χ.).
Ἀνακρέων. Σιμωνίδης. Πυθοκλῆς (520 π. Χ.). Λᾶσος ὁ Ἑρμιονεύς. Ἀγαθοκλῆς. Μίδας. Σίμος ὁ Ποσειδώνιος. Λαμπροκλῆς (διδάσκαλος Σοφοκλέους). Δράκων (διδάσκαλος Πλάτωνος). Πρόνομος ἐκ Θηβῶν (διδάσκαλος Ἀλκιβιάδου). Μέτελλος ἐξ Ἀκράγαντος (δεύτερος διδάσκαλος Πλάτωνος). Ἀριστόξενος.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1956: ΤΟΜΟΣ 31ος

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΠΑΡΑ ΤΟΙΣ ΑΡΧΑΙΟΙΣ.

EVANGELOS STAMATIS: A FEW REMARKS OF THE SUCCEEDING APPROXIMATION BY ITERATIO BY THE ANCIENT GREEKS.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1956

Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις,

ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη****.

Α'.

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος x τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω x_0, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2\ldots\ldots$ κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν ξ, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi=\varphi(\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως[1]. Ἀναφέρομεν παραδείγματά τινα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης καὶ κατόπιν θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἦτο γνωστὴ κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου.

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=2$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{2}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\frac{x+2}{x+1}$, (1). Πρὸς ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ x ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως, ἔστω $x_0=1$ καὶ θέτομεν ταύτην εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέλος λαμβάνομεν 1, εἰς δὲ τὸ δεύτερον $\frac{3}{2}$· Τὴν τιμὴν $\frac{3}{2}$ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ α' μέλος ἔχομεν $\frac{3}{2}$ εἰς δὲ τὸ β' $\frac{7}{5}$· Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$
$\frac{x+2}{x+1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$

Εἶναι δὲ $1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

---

* **EVANGELOS STAMATIS, A few remarks of the succeeding approximation by iteratio by the Ancient Greeks.**

[1] R. Courant, *Vorlesungen ü. Dif.-und Integralrechnung*, σ. 315, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.— R. Zurmühl, *Praktische Mathematik für Ingenieure* σ. 22 ff., Springer Verlag, Berlin κλπ. 1953.— G. Runge-H. König, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Spinger Verlag, Berlin, 1924, unter Iteratio.

Ἡ $\sqrt{2}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, (2). Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β′ μέλος τῆς (2) ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἐκ τοῦ α′ μέλους ἴσης τιμῆς της, τῆς $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ θὰ ἔχωμεν $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$. Ἐὰν καὶ πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β′ μέλος ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἴσης τιμῆς της ἐκ τῆς (2), θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὑπολογίζοντες διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ συνεχοῦς ἀπεριορίστου τούτου κλάσματος λαμβάνομεν

$$\sqrt{2}=1,\ \sqrt{2}=\frac{3}{2},\ \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5},$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \text{κλπ.}$$

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=3$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{3}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\dfrac{x+3}{x+1}$, (3). Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα λαμβάνοντες αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως $x_0=1$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α′ μέλος 1, εἰς δὲ τὸ β′ 2. Τὴν τιμὴν 2 θέτομεν εἰς τὴν (3) ἀντὶ τοῦ x, ὁπότε λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α′ μέλος 2, εἰς δὲ τὸ β′ $\frac{5}{3}$. Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

x	1	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\frac{989}{571}$
$\frac{x+3}{x+1}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\frac{989}{571}$	$\frac{1351}{780}$

Εἶναι δὲ

$$1<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\frac{989}{571}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<2.$$

Ἡ $\sqrt{3}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$. Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα διὰ τὴν $\sqrt{2}$ λαμβάνομεν τὴν $\sqrt{3}$ ὡς συνεχὲς ἀπεριόριστον κλάσμα.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ldots}}} \quad \text{κλπ.}$$

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ κλάσματος τούτου θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{3}=1\,,\quad \sqrt{3}=1+\frac{2}{2}=2\quad \sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}=\frac{5}{3}\,,$$

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}}=\frac{7}{4}\quad \text{κλπ.}$$

Β΄.

Ι. Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος[1] εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τὴν σκοποῦσαν τὴν ἑρμηνείαν τῶν μαθηματικῶν ἐκείνων, ἅτινα εἶναι χρήσιμα εἰς τὴν «Πλάτωνος ἀνάγνωσιν» ἀναπτύσσει δι' ὀλίγων καὶ τὴν θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν Ὁμοίαν διατύπωσιν τῆς θεωρίας ταύτης ἀναγιγνώσκομεν καὶ εἰς τὰ τοῦ Πρόκλου[2] σχόλια εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος. Παραθέτομεν τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Πρόκλου.

«ΚΓ. Ὅτι αἱ ταῖς ἀρρήτοις διαμέτροις παρακείμεναι ῥηταὶ μονάδι μείζους εἰσὶν ἢ ἐλάττους διπλασίου, διὰ τῶν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι δεικνύ|ουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρά ἐστιν καὶ διάμετρος. Ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἡ μὲν ὡς πλευρά [ἡ δ]ὲ ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο, ἐπείπερ ἡ ὡς διάμετρος μονάδι ἐλάσσων ἢ διπλασία τῆς ὡς πλευρᾶς. Ἔσται οὖν οὕτως ἡ μὲν δυοῖν μονάδων, ἡ δὲ τριῶν· καὶ τὰ μὲν ἀπὸ τούτων τῆς μὲν τεσσάρων, τῆς δὲ ἐννέα, ὅπερ ἐστὶν μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον. πάλιν προσκείσθω τῇ μὲν δυοῖν μία διάμετρος ἡ

---

[1] Ἔκδ. E. Hiller, σ. 42-55.

[2] Ἔκδ. E. Kroll, II, σ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. (Hultsch). Καὶ PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclide, σ. 427-441, *Soc. d'éd. Les Belles Lettres*, Paris 1950. Καὶ ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ, Εὐκλείδου, Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, σ. 8-18, (Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953).

τριῶν, τῇ δὲ τριῶν διαμέτρῳ δὶς ἡ πλευρὰ ταῖν δυοῖν. ἔσται οὖν ἡ μὲν πλευρὰ πέντε τινῶν, ἡ δὲ διάμετρος ἑπτά τινων, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τῆς μὲν κε΄, τῆς δὲ μθ΄, μονάδι ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον. ᾗ καὶ Πλάτων εἶπε τὸν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα ἀριθμὸν εἶναι ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν μὲν πεμπάδος δεομένων ἑνός, ἀρρήτων δὲ δεομένων δυοῖν, ἐπειδὴ διπλάσιον ἡ διάμετρος δύναται τῆς πλευρᾶς. ἐὰν δὲ λάβωμεν ἁπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων, ἔσονται διπλάσιαι ὄντως, ὧν ἑκάστη μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου· οἷον ἡ ἐννέα μετὰ τοῦ μθ΄ τῆς τοῦ κε΄ καὶ δ΄. διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ». (Σημ. ὡς γνωστὸν ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου ἐλέγετο ὑπὸ τῶν Ἀρχαίων διάμετρος).

Κατὰ τὸν Θέωνα καὶ τὸν Πρόκλον κατασκευάζονται ἐν συνεχείᾳ ἀριθμητικῶς τετράγωνα κατὰ νόμον ὅστις φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος.

		Πλευρὰ	Διαγώνιος
πρώτου τετραγώνου		1	1
δευτέρου	»	$1+1=2$	$2.1+1=3$
τρίτου	»	$2+3=5$	$2.2+3=7$
τετάρτου	»	$5+7=12$	$2.5+7=17$
πέμπτου	»	$12+17=29$	$2.12+17=41$
ἕκτου	»	$29+41=70$	$2.29+41=99$
⋮		⋮	⋮
$\nu+1$	»	$\alpha_\nu+\delta_\nu=\alpha_{\nu+1}$	$2.\alpha_\nu+\delta_\nu=\delta_{\nu+1}$,

ἐὰν τοῦ πρώτου τετραγώνου καλέσωμεν τὴν πλευρὰν α_1 καὶ τὴν διαγώνιον δ_1. Εἶναι δὲ

$$1^2=2.1^2-1\,, \quad 3^2=2.2^2+1\,, \quad 7^2=2.5^2-1\,, \quad 17^2=2.12^2+1\,.$$

Παρέχονται δηλ. διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων $y^2=2\chi^2\mp 1$. Τὴν αὐθαιρεσίαν τῆς θεωρήσεως τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ διαγώνιον ἐπίσης ἴσην πρὸς τὴν μονάδα ὁ Πρόκλος, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, τὴν αἰτιολογεῖ, γράφων, «ἐπεὶ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶ σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρὰ ἐστιν καὶ διάμετρος». ὁ Θέων γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται». Καὶ σήμερον, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) προσεγγίσεων ἡ πρώτη τιμὴ προσεγγίσεως λαμβάνεται αὐθαιρέτως. Κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν ὁ ὑπὸ τοῦ Θέωνος καὶ τοῦ Πρόκλου σωθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως.

$$x_{n+1}=\varphi(x_n\,,\,y_n) \quad \text{καὶ} \quad y_{n+1}=g(x_n\,,\,y_n).$$

Ὁ Πρόκλος μνημονεύει καὶ τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου κατασκευῆς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. «Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ στοιχείων γραμμικῶς ἀπ' ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ | εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς [ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ] καὶ τὸ ἀπὸ [ταύ]της [μόνης τετράγωνα δι]πλάσια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισεί[ας καὶ τοῦ ἀπὸ] τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμ[ισείας καὶ τῆς] προσληφθείσης». Οὐδεμία ἀμφιβολία γεννᾶται ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ θεωρήματος II, 10 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τόσον ἐκ τῆς ἀνωτέρω περιγραφῆς τοῦ Πρόκλου, ὅσον καὶ ἐκ τῆς φράσεως «προσλάβῃ δὲ .... *τὸ ἀπὸ τῆς* ...». Ἀποκλείεται νὰ εἶναι τὸ II, 6 τῶν Στοιχείων, διότι ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, *τὸ ὑπὸ τῆς*...»

Ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ δὲ τριγωνικοὺς καὶ τετραγωνικοὺς καὶ πενταγωνικοὺς καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ σχήματα λόγους ἔχουσι δυνάμει οἱ ἀριθμοὶ οὕτως καὶ πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους εὕροιμεν ἂν ἐμφανιζομένους τοῖς ἀριθμοῖς». Ἐκ τοῦ χωρίου τούτου καὶ τῆς φράσεως «τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται», τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, συνάγεται, ὅτι ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων διαγωνίων πρὸς τὰς πλευράς, ἤτοι οἱ λόγοι

$$\frac{1}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{7}{5}, \ \frac{17}{12}, \ \frac{41}{29}, \ \frac{99}{70}, \ \text{κλπ.}$$

Ὁ Θέων δὲν μνημονεύει ρητῶς τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} \,.$$

Θεωρεῖται ὅμως ἀναμφισβήτητον ὅτι ἡ θεωρία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἀφεώρα κατὰ πρῶτον λόγον εἰς τὴν σχέσιν ταύτην. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ $3^{ον}$ θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις διατυπώσεως παρομοίας σχέσεως διὰ τὴν $\sqrt{3}$, τῆς $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, ὡς καὶ τῶν σχέσεων

$$265^2 = 3.153^2 - 2\,, \quad 1351^2 = 3.780^2 + 1\,, \quad (y^2 = 3x^2 - 2\,, \quad y^2 = 3x^2 + 1).$$

Καθ' ἡμετέραν ἀνακοίνωσιν, γενομένην ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν[1] αἱ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους λαμβανόμεναι ἄνευ ἀποδείξεως σχέσεις λαμβάνονται διὰ λόγων διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῆς κατασκευῆς ὁμοίων ῥόμβων κατὰ τὸ εὐκλεί-

[1] Βλέπε *Πρακτικὰ Ἀκαδημίας*, **30**, 1955, σ. 255.

δειον θεώρημα II, 10. Ὁπωσδήποτε θεωροῦμεν βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τοὺς λόγους, οἵτινες ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας, τὴν μὲν αὐξανομένην, τὴν δὲ φθίνουσαν καὶ ὅτι μεταξὺ τούτων τῶν ἀκολουθιῶν εὑρίσκεται ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι ἐγνώριζε τὰς σχέσεις

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

II. Ὡς συνάγεται ἐκ τῶν Μετρικῶν τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως[1] ἦτο γνωστὸν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ σχηματισμοῦ διαδοχικῶν μουσικῶν ἀναλογιῶν. Ἐὰν δηλ. Α εἶναι ἀριθμὸς μὴ τετράγωνος, λαμβάνεται ὁ ἐγγύτερον πρὸς τοῦτον τετράγωνος μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ Α, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἔστω α, καὶ σχηματίζεται τὸ πηλίκον $\frac{A}{\alpha}$. Εἰς τὸ μνημονευόμενον παράδειγμα τοῦ Ἥρωνος εἶναι $\frac{A}{\alpha} < \alpha$. Σχηματίζεται ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α

$\frac{A}{\alpha} : \beta_1 = \gamma_1 : \alpha$, ἔνθα β_1 τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\dfrac{2\frac{A}{\alpha}\cdot\alpha}{\frac{A}{\alpha}+\alpha}$ καὶ γ_1 τὸ ἀριθμητικὸν μέσον $\left(\frac{A}{\alpha}+\alpha\right) : 2$ τῶν $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς β_1, γ_1 σχηματίζεται ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία

$\beta_1 : \beta_2 = \gamma_2 : \gamma_1$ ἔνθα $\beta_2 = \dfrac{2\beta_1\gamma_1}{\beta_1+\gamma_1}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\gamma_2 = \dfrac{\beta_1+\gamma_1}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν β_1, γ_1. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους τοὺς β_2, γ_2 σχηματίζεται ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Εἶναι δὲ

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \sqrt{A} < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον[2].

Κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{2}$ ἔχομεν:

Ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 2 τετράγωνος εἶναι ὁ 1^2, καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 1^2 εἶναι ὁ $\frac{2}{1}$. Ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς 1 (δηλ. τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ 1^2) καὶ $\frac{2}{1}$ εἶναι ἡ

$1 : \dfrac{2\cdot 1\cdot\frac{2}{1}}{1+\frac{2}{1}} = \dfrac{1+\frac{2}{1}}{2} : \dfrac{2}{1}$ ἢ $1 : \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{2} : 2$, ἔνθα $\frac{4}{3}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον

---

[1] ΗΡΩΝΟΣ, Μετρικά, (ἔκδ. Schöne, τόμ. III, σ. 18-20, Teubner, 1903) καὶ P. TANNERY, Mémoires Scientifiques III, σ. 68 καὶ 244, καὶ PAUL-HENRI MICHEL. Ἔνθ' ἀν., σ. 426.

[2] P. TANNERY, Ἔνθ' ἀν.

καὶ $\frac{3}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ $\frac{2}{1}$. Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$ εἶναι $\frac{4}{3} : \frac{24}{17} = \frac{17}{12} : \frac{3}{2}$, ἔνθα $\frac{24}{17}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{17}{12}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$.

Ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία εἶναι $\frac{24}{17} : \frac{816}{577} = \frac{577}{408} : \frac{17}{12}$, ἔνθα $\frac{816}{577}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{577}{408}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{24}{17}$, $\frac{17}{12}$, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Εἶναι δὲ $1 < \frac{4}{3} < \frac{24}{17} < \frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$.

Κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{3}$ ἔχομεν: ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετράγωνος εἶναι ὁ 2^2 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2^2 εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$. Ἄκροι ὅροι πρὸς σχηματισμὸν τῆς πρώτης μουσικῆς ἀναλογίας εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετραγώνου, ὁ 2. Αὕτη εἶναι

$$\frac{3}{2} : \frac{12}{7} = \frac{7}{4} : 2 .$$

Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία εἶναι

$$\frac{12}{7} : \frac{168}{97} = \frac{97}{56} : \frac{7}{4}, \quad \text{κλπ.}$$

Εἶναι δὲ

$$\frac{3}{2} < \frac{12}{7} < \frac{168}{97} < \sqrt{3} < \frac{97}{56} < \frac{7}{4} < 2 .$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τῶν ἀφορώντων εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

Εὑρίσκεται κατά τινα τρόπον προσέγγισίς τις πρὸς ζητουμένην ἀληθῆ τινα τιμήν. Ἡ προσέγγισις αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως, ἡ νέα προσέγγισις διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται σήμερον μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου, ἐγνώριζον τὴν μέθοδον ταύτην.

SUMMARY

The theory of 'Side'-and diameter-' numbers is developed as it has been saved by Theon of Smyrna and Proklus. It is reminded that

Archimedes knew the law of formation of relations $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{770}$

The theory of the Pythagoreans Archytas of Tarentum about the formation of succeeding musical proportions is also developed. From all this we come to the conclusion that the Ancient Greeks know the method of succeeding approximations by repeatition (iteratio) for the arithmetical solution of an equation, at least at the time of Plato and Archytas.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1956: ΤΟΜΟΣ 31ος

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ: ΕΠΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ I

EVANGELOS STAMATIS: ÜBER DIE MATHEMATISCHE STELLE DES THEAETETUS VON PLATON.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1956

Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος,

ὑπὸ *Εὐαγγέλου Σταμάτη**

Α'

Εἰς τὸν ὁμώνυμον πλατωνικὸν διάλογον ὁ Θεαίτητος ἐρωτώμενος ὑπὸ τοῦ Σωκράτους λέγει:

«*Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο*..... (147d-148b).

Σημειοῦμεν, ὅτι, ὡς συνάγεται ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ χωρίου, ἡ λέξις «δύναμις» σημαίνει ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν: τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ. Π.χ. ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι δύναμις τοῦ α, διότι αὕτη πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της, ΔΥΝΑΤΑΙ, τὸ τετράγωνον α.

Κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ ἀνωτέρω ἀναγραφομένου μέρους τοῦ χωρίου προβάλλουσι τὰ ἑξῆς δύο ἐρωτήματα:

Πρῶτον, κατὰ ποῖον τρόπον ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... ἕως καὶ $\sqrt{17}$, καὶ

Δεύτερον, διατὶ μετὰ τὴν $\sqrt{17}$ ἐσταμάτησεν.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν θ' ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ τὸ δεύτερον ἐρώτημα, ἀφοῦ μνημονεύσωμεν ἐν συνόψει τὰς ἀπαντήσεις ἐπὶ τῶν δύο ἐρωτημάτων ἐνίων ἐκ τῶν νεωτέρων διακεκριμένων ἐρευνητῶν.

Ὁ Zeuthen[1] ὑποθέτει, ὅτι ὁ Θεόδωρος[2] ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... $\sqrt{17}$ διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ ὅτι, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις διὰ τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{18}$ εἶναι εὔκολος, ἐπειδὴ αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $3\sqrt{2}$, γνωστὴν ἤδη πολὺ πρὸ τοῦ Θεοδώρου, τοὐναντίον ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν $\sqrt{19}$ εἶναι λίαν ἐπίπονος, διότι ἡ $\sqrt{19}$ ἔχει ἑξαψήφιον περίοδον. Ὅθεν λόγῳ τοῦ ἐπιπόνου τῆς ἀποδείξεως διὰ τὴν $\sqrt{19}$ ὁ Θεόδωρος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$

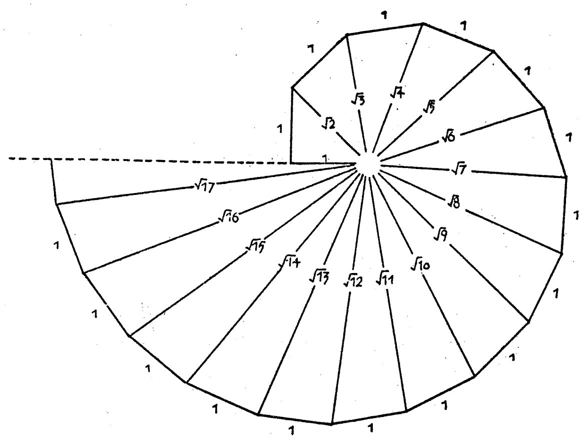
---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon**

1 H. G. ZEUTHEN, Oversigt Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1915, S. 348 ff. (Ἐκ τῆς μνημονευομένης πραγματείας τοῦ B. L. van der Waerden).

2 Βλ. ἐν PAULY-WISSOWA, *R. E.* 5. Band 10. Halbband, Sp. 1812-1825 (unter Theodoros).

Ὁ Σπυρίδων Μωραΐτης[1] ὑποθέτει, ὅτι ὁ Θεόδωρος προέβη εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν: Κατεσκεύασεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα. Ἡ ὑποτείνουσα τούτου εἶναι $\sqrt{2}$. Εἰς τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὕψωσε κάθετον ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἥνωσε τὸ ἐλεύθερον ἄκρον ταύτης μὲ τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης καθέτου (σχ. 1). Ἡ ὑποτείνουσα



Σχ. 1.

Κατὰ Σπυρ. Μωραΐτην. Τὴν γνώμην τούτου ὑποστηρίζει ὁ J. H. Anderhub ἐν 1) Wochenschrift für klassische Philologie, 1918, N° 49-50, p. 598-599 καὶ 2) Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, Gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co. A. G. S. 161 f f. Wiesbaden 1941. Μνημονεύει δὲ μεταξὺ ἄλλων καὶ ὁ Jean Bousquet ἐν Fouilles de Delphes, Tom. II. Le Tresor de Cyréne, p. 102-104, Paris 1952. Ἴδε καὶ J. E. Hofmann: Geschichte der Mathematik I. Samm. Göschen, Bd. 226 S. 26 ff, 1953 καὶ Siegfried Heller: Geometrischer Irrationalitätsbeweis der Alten Griechen.

τοῦ δευτέρου τριγώνου εἶναι $\sqrt{3}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κατεσκεύασε 16 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ 16ου τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{17}$.

Ὁ B. L. van der Waerden[2] παρέχει λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$, στηριζομένην εἰς τὰ εὐκλείδεια θεωρήματα II, 6 καὶ X, 2 καὶ ἐπάγεται: Ἐὰν ὁ Θεόδωρος δὲν ἤθελε νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν διδασκαλίαν του πέρα τοῦ κεκανονισμένου χρόνου ἔπραξε καλῶς νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν $\sqrt{17}$. Ἴσως νὰ ἠμποδίσθη οὗτος νὰ προχωρήσῃ καὶ ἐξ ἐξωτερικοῦ τινος αἰτίου.

[1] ΣΠΥΡ. ΜΩΡΑΪΤΟΥ, Πλάτων: τόμος 3ος Πλάτωνος Θεαίτητος, σελ. 188, Ἀθῆναι 1905.

[2] B. L. VAN DER WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer. II. Die Theorie des Irrationalen. *Mathematische Annalen*, Band, 120. 5./6. (Schluss-) Heft, 1949. Springer-Verlag, Berlin. Goettingen. Heidelberg.

Β'

Θεωροῦμεν λίαν πιθανὸν ὅτι ὁ Θεόδωρος ποιητικῇ ἀδείᾳ τοῦ Πλάτωνος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ καὶ δὲν ἐπροχώρησε πέρα ταύτης. Φαίνεται ὅτι ὁ Πλάτων ἐν προκειμένῳ ὑπαινίσσεται τὴν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ δὴ καὶ τὴν σχέσιν τὴν ὁποίαν ἔχει οὗτος πρὸς τὴν κατασκευὴν τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος, περὶ ἧς γίνεται λόγος εἰς τὸν Τίμαιον κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς συστάσεως ὑπὸ τοῦ Θεοῦ τῆς ψυχῆς τοῦ Κόσμου (Τίμ. 35). Τὴν γνώμην ἡμῶν ταύτην στηρίζομεν εἰς δύο χωρία· τὸ ἓν τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ τὸ ἕτερον τοῦ Πλουτάρχου.

Ι. Εἰς τὰ Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς[1] του ὁ Ἰάμβλιχος ἀναφέρει:

«*Οἱ μὲν γὰρ πρὸ αὐτοῦ (σημ. ἐννοεῖ τὸν 4) τετράγωνοι πλείονας ἔχουσι τὰς περιμέτρους τῶν ἐμβαδῶν, οἱ δὲ μετ' αὐτὸν ἀντικειμένως ἐλάττονας, οὗτος δὲ μονώτατος ἴσας. διὰ τοῦτο φαίνεται καὶ Πλάτων ἐν τῷ Θεαιτήτῳ μέχρις αὐτοῦ προελθὼν παύεσθαί πως ἐν τῇ ἑπτακαιδεκάποδι, πρὸς ἔμφασιν τοῦ κατὰ τὸν ἑπτακαίδεκα ἰδιώματος καὶ ἰσότητός τινος μεθεκτοῦ*».

ΙΙ. Εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος ὁ Πλούταρχος[2] γράφει:

«*Ἑβδόμῃ ἐπὶ δέκα (σημ. δηλαδὴ τὴν 17ην τοῦ μηνὸς) τὴν Ὀσίριδος γενέσθαι τελευτὴν Αἰγύπτιοι μυθολογοῦσιν, ἐν ᾗ μάλιστα γίνεται πληρουμένη κατάδηλος ἡ πανσέληνος. διὸ καὶ τὴν ἡμέραν ταύτην ἀντίφραξιν οἱ Πυθαγόρειοι καλοῦσι, καὶ ὅλως τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἀφοσιοῦνται. τοῦ γὰρ ἑξκαίδεκα τετραγώνου καὶ τοῦ ὀκτωκαίδεκα ἑτερομήκους, οἷς μόνοις ἀριθμῶν ἐπιπέδων συμβέβηκε τὰς περιμέτρους ἴσας ἔχειν τοῖς περιεχομένοις ὑπ' αὐτῶν χωρίοις, μέσος ὁ ἑπτακαίδεκα παρεμπίπτων, ἀντιφράσσει καὶ διαζεύγνυσι ἀπ' ἀλλήλων, καὶ διαιρεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον εἰς ἄνισα διαστήματα τεμνόμενος*».

Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον ὁ Πλάτων ἐσταμάτησεν εἰς τὴν $\sqrt{17}$, διότι ὁ 17 εἶναι ἐγγὺς πρὸς τὸν 16. Μόνον δὲ τοῦ τετραγώνου σχήματος τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς 4 τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος[3] ἐκφράζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 16. Εἰς τὴν

---

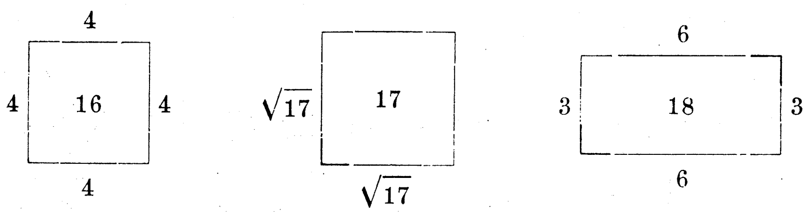
[1] IAMBLICHI, *Theologoumena arithmeticae*, ed. Victorius de Falco, Teubner 1922, 10, σ. 11 (καὶ 29).

[2] Πλουτάρχου, Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος 367. (ἔκδ. G. VERNARDAKIS, vol. II. σ. 514. Teubner).

[3] Ἀνώνυμος σχολιαστὴς τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος τοῦ 2ου αἰῶνος μ. Χ., κατὰ τὸν Anderhub (Joco-Seria κλπ. σ. 183-184), μνημονεύει τοῦ ἀριθμοῦ 16 καὶ τοῦ ἐπογδόου λόγου διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ συναφοῦς χωρίου (Papyrus 9782, bearb. von H. Diels, W. Schubart, Berliner Klassikertexte II, Berlin, 1905, 25, 37).

διατύπωσιν ταύτην τοῦ Ἰαμβλίχου δύναται ν' ἀντιταχθῇ ὅτι καὶ ὁ 15 εἶναι ἐγγὺς πρὸς τὸν 16 ὅσον καὶ ὁ 17 καὶ συνεπῶς ὁ Πλάτων θὰ ἠδύνατο κάλλιστα νὰ σταματήσῃ εἰς τὸν 15. Ἐκ τοῦ χωρίου ὅμως τοῦ Πλουτάρχου φαίνεται, διατὶ ὁ 17 προτιμᾶται τοῦ 15.

Κατὰ τὸν Πλούταρχον οἱ Πυθαγόρειοι θεωροῦσιν ἱερὸν τὸν ἀριθμὸν 17, διότι ἐκ τῶν τετραγώνων σχημάτων μόνον τὸ ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς 4 ἔχει περίμετρον



Σχ. 2.

καὶ ἐμβαδὸν τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 16, ἐν ᾧ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων μόνον τὸ ἔχον διαστάσεις 3×6 ἔχει περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν ἐκφραζόμενα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 18. Ὁ ἀριθμὸς 17 εὑρισκόμενος μεταξὺ 16 καὶ 18 ὑπογραμμίζει τὴν ἰσότητα ταύτην καὶ τεμνόμενος εἰς δύο ἄνισα μέρη ἀποτελεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον τῆς μουσικῆς κλίμακος.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον (36 κέ.) εἶναι

$$6 : 8 \quad = \quad 9 : 12$$

ὑπάτη 6, μέση 8 παραμέση 9, νήτη 12

Αὕτη εἶναι ἡ βάσις τῆς κατασκευῆς τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος. Ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀναλογίας ταύτης $\left(8 = \frac{2 . 6 . 12}{6+12}\right)$, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ὅρων τούτων. Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἁρμονικοῦ καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς μουσικῆς ταύτης ἀναλογίας εἶναι 17. Ἐὰν πρὸς ἁπλούστευσιν θεωρήσωμεν ὡς ἄκρους ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2 αὕτη θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$$

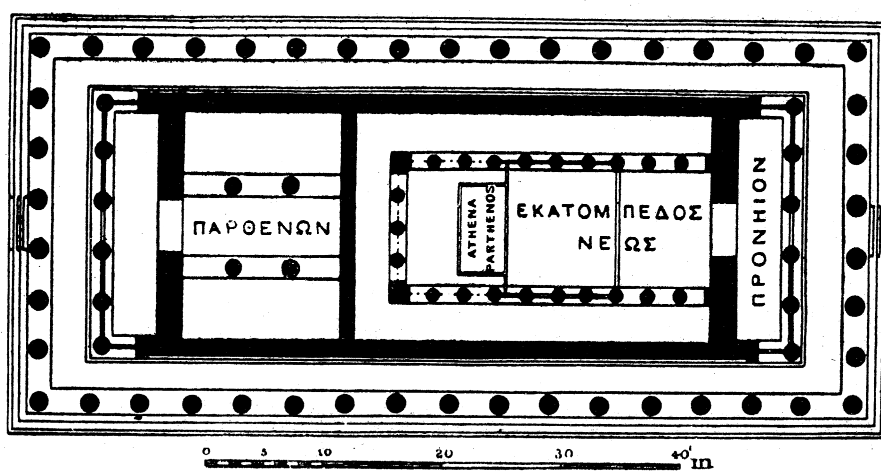
do fa sol do

Ἐὰν λάβωμεν τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ 1 καὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰ $\frac{9}{8}$, κατόπιν δὲ λάβωμεν τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ $\frac{3}{2}$ καὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰ $\frac{9}{8}$, θὰ ἔχωμεν τὴν πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα (Τίμ. 36). Ἀναγράφομεν κατωτέρω τοὺς 8 φθόγγους καὶ τὰ 7 διαστήματα (ἤτοι τὸν λόγον ἑκάστου φθόγγου πρὸς τὸν προηγούμενόν του). Ἄνωθεν ἑκάστου φθόγγου ἀναγράφομεν τὴν ἰταλικὴν ὀνομασίαν.

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}$$

Ὡς γνωστόν, ὁ λόγος $\frac{9}{8}$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, καλεῖται ἐπόγδοος λόγος ὑπὸ τῶν ἀρχαίων. Σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ κύβος, ἓν ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων τῶν ἐγγραφομένων εἰς σφαῖραν, δι' οὗ παρίστατο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων[1] ἡ Γῆ, ἔχει 6 ἕδρας 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς, ἤτοι τοὺς ἄκρους ὅρους καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῆς μουσικῆς



Σχ. 3: *Σχεδιάγραμμα τῆς κατόψεως τοῦ Παρθενῶνος*
(Ἐκ τοῦ βιβλίου: *Walther Judeich*, Topographie von Athen, σ. 252. C. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1931).

ἀναλογίας[2] 6 : 8 = 9 : 12. Ὑπομιμνήσκομεν προσέτι ὅτι οἱ κίονες τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 8, δηλαδὴ τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ 6 καὶ 12 καὶ τῆς

[1] ΘΕΟΦΡΑΣΤΟΣ-ΑΕΤΙΟΣ: *Diels*, Frag. d. Vors. I, 44 [32], 15, Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, Berlin-Grunewald, 1951.

[2] ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑΣΗΝΟΥ, Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή, σ. 135-6 (ἔκδ. R. Hoche, Teubner, 1866).

μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἶναι 17, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8 καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12[1] (σχ. 3).

Μνημονεύομεν τέλος ὅτι 1) εἰς τὸ δακτυλικὸν ἑξάμετρον τῶν ὁμηρικῶν ἐπῶν ἀπαντῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν 17 συλλαβῶν, ὡς π.χ.

Ἄν	δρα	μοι	ἔν	νε	πε	μοῦ	σα	πο	λύ	τρο	πον	ὃς	μά	λα	πολ	λὰ
–	∪	∪	–	∪	∪	–	∪	∪	–	∪	∪	–	∪	∪	–	–
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

καὶ 2) εἰς τὰ Πτολεμαίου[2] μουσικὰ ἀναγινώσκομεν: *Ἔστι δὲ ἡ εὕρεσις τῶν τόνων καὶ τῶν ἡμιτονίων καὶ τῶν διέσεων κατὰ τὸν Ἐρατοσθένην*

$\underbrace{8 \quad \text{τόνος} \quad 9}$

καὶ ταῦτα δὶς

$\underbrace{\underbrace{16 \quad \text{ἡμιτ.} \quad 17}\underbrace{\quad \text{ἡμιτ.} \quad 18}}_{\text{τόνος}}$

καὶ μεταξὺ εὑρίσκεται ἀριθμὸς ὁ 17.

Ὅθεν θεωροῦμεν λίαν πιθανὸν ὅτι ὁ Πλάτων, γράφων, ὅτι ὁ Θεόδωρος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ ὑπαινίσσεται τὴν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ τὴν σημασίαν, ἣν ἔχει ὁ ἐπόγδοος λόγος, $\left(\frac{9}{8}\right)$, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 17, εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Theaetetus (147d) schreibt Platon, der Mathematiker Theodoros habe die Irrationalität für $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... bis $\sqrt{17}$ bewiesen. Platon gibt keine Andeutung, wie der Beweis geführt wurde und warum Theodoros gerade bei $\sqrt{17}$ aufgehört habe. Verschiedene Erklärungen dafür haben unter anderen Zeuthen, Sp. Moraïtis, B. L. van der Waerden gegeben.

E. Stamatis gestützt auf zwei Stellen von Iamblichos und Plutarch teilt auf die Frage, warum Theodoros sich bei $\sqrt{17}$ aufhielt, eine neue Erklärung mit. Er behauptet, dass Platon nur aus poetischer Freiheit den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören liess, wahrscheinlich um die Heiligkeit, die

[1] Εἰς τὸν Σελινοῦντα τῆς Σικελίας, ἔνθα ἡ ἐπιρροὴ τῶν Πυθαγορείων θεωρεῖται ὅτι ἦτο μεγάλη, εἶχεν ἀνεγερθῆ ναός, χρονολογούμενος εἰς τοὺς πρὸ τῆς ἀνεγέρσεως τοῦ περικλείου Παρθενῶνος χρόνους, ἔχων εἰς τὴν μικρὰν πλευρὰν 8 κίονας καὶ εἰς τὴν μεγάλην 17. (WILLIAM B. DINSMOOR, The architecture of ancien Greece, *Chron. list*, ed. B. Batsford Ltd, London - N. York - Toronto - Sydney, 1950.

[2] Scriptores musici Graeci, IX. Excerpta Neapolitana, § 19 .(σ. 416, Teubner, 1895).

für die Pythagoreer die Zahl 17 hat und die Bedeutung, die ihre ungleichen Teile 9 und 8 $\left(\text{d. h. } \frac{9}{8}\right)$ für die Tonleiter haben, anzudeuten.

Nach Iamblichos ist das Quadrat 4×4 das einzige, dessen Umfang und Inhalt sich durch dieselbe Zahl 16 ausdrücken lassen. Die Zahl 17 liegt in der Nähe der Zahl 16, und deshalb scheint es, dass Platon im Theaetetus bei $\sqrt{17}$ aufhörte. Nach Plutarch ist die Zahl 17 für die Pythagoreer heilig und diese Zahl liegt zwischen 16 und 18. Umfang und Inhalt 16 hat nur ein einziges Quadrat, (4×4), und Umfang und Inhalt 18 hat nur ein einziges rechteckiges Parallelogramm (3×6). Ausserdem stammt das Verhältnis $\frac{9}{8}$ (was für die Tonleiter von Bedeutung ist) von den ungleichen Teilen der Zahl 17. Schliesslich bemerkt E. Stamatis, dass die Zahl 17 die Summe des arithmetischen Mittels und des harmonischen Mittels der Zahlen 6 und 12 ist, die die äusseren Glieder der musikalischen Proportion $6 : 8 = 9 : 12$ sind und von Platon im Timaeus erwähnt werden. Darüber hinaus ist die Zahl der Säulen der Schmalseite des Parthenon 8, die der Längsseite 17. Ferner begegnen wir der Zahl 17 im daktylischen Hexameter bei Homer und in den Μουσικὰ des Ptolemaeus.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1957: ΤΟΜΟΣ 32ος

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΕΠΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ. ΜΕΡΟΣ II.

EVANGELOS STAMATIS: ÜBER DIE MATHEMATISCHE STELLE DES THEAETETUS VON PLATON. TEIL II.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1957

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος. Μέρος II,

ὑπὸ **Εὐαγγ. Σταμάτη***.

Α΄. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἐπὶ τοῦ ζητήματος, διατὶ ὁ Θεόδωρος[1] ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 17, ὅπερ ἀπὸ δύο περίπου χιλιάδων ἐτῶν ἀπασχολεῖ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ὑπεστηρίξαμεν διὰ πραγματείας ἡμῶν ἀνακοινωθείσης ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 12.1.1956[2] ὅτι ὁ Πλάτων πιθανῶς νὰ ὑπαινίσσηται τὴν ἱερότητα, ἣν εἶχε διὰ τοὺς Πυθαγορείους ὁ ἀριθμὸς δεκαεπτά. Τὰ προβληθέντα παρ' ἡμῶν συναφῶς ἐπιχειρήματα ἦσαν: 1) χωρίον ἐκ τῶν Θεολογουμένων τῆς ἀριθμητικῆς τοῦ Ἰαμβλίχου[3] 2) χωρίον ἐκ τῆς πραγματείας τοῦ Πλουτάρχου[4] περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίρι-

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon, Teil II.**

1 «Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο». (147 d - 148 b).

2 Βλ. *Πρακτ. Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν*, **31** (1956), σελ. 10.

3 Iamblichi, Theologoumena arithmeticae, ed. V. de Falco, Teubner 1922, σ. 11, 19.

4 Πλουτάρχου, Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος 367 (ἔκδ. G. Vernardakis Vol. II σ. 514, Teubner).

δος 3) Ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι δεκαεπτὰ 4) ὅτι τὸν ἀριθμὸν 17 ἀπαντῶμεν εἰς τὸ δακτυλικὸν ἑξάμετρον τῶν ὁμηρικῶν ἐπῶν ὡς π. χ.

Ἄν	δρα	μοι	ἔν	νε	πε	μοῦ	σα	πο	λύ	τρο	πον	ὃς	μά	λα	πολ	λὰ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

καὶ 5) Ὅτι τὸν ἀριθμὸν 17 ἀπαντῶμεν εἰς τὰ Πτολεμαίου μουσικὰ ἔνθα γράφεται: ἔστι δὲ ἡ εὕρεσις τῶν τόνων καὶ τῶν ἡμιτονίων καὶ τῶν διέσεων κατὰ τὸν Ἐρατοσθένην [1]

8 τόνος 9

καὶ ταῦτα δὶς

16 ἡμιτ. 17 ἡμιτ. 18

τόνος

καὶ μεταξὺ εὑρίσκεται ἀριθμὸς ὁ 17.

Β'.

Ἐκ τῶν κατωτέρω παρατιθεμένων ὁμηρικῶν στίχων καταφαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἔχει συμβολικὸν νόημα καὶ εἰς τὸν Ὅμηρον. Φαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἀποτελεῖ παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἀπὸ ἀρχαιοτάτων χρόνων τέλειον χρονικὸν διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου συντελεῖται ἱεροπρεπὴς ἢ ἀξιόλογός τις πρᾶξις. Οὗτος εἶναι συντεθειμένος ἐκ δύο ἐξαιρετικῆς σημασίας ἀριθμῶν· ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν *δέκα* θεωρούμενον τέλειον καὶ ἀπὸ τὸν ἱερὸν ἀριθμὸν *ἑπτά* [2].

Οὕτω κατὰ τὴν ραψῳδίαν η τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσσεύς, ἀφοῦ περιεπλανήθη ἐπὶ ἐννέα ἡμέρας, ἔφθασε τὴν *δεκάτην* ἡμέραν εἰς τὴν νῆσον Ὠγυγίην ἔνθα παρέμεινεν *ἑπτὰ* ἔτη.

Ὀδυσ. η 253 *ἐννῆμαρ φερόμην· δεκάτῃ δέ με νυκτὶ μελαίνῃ*
νῆσον ἐς Ὠγυγίην πέλασαν θεοί, ἔνθα Καλυψώ

Ὀδυσ. η 259 *ἔνθα μὲν ἑπτάετες μένον ἔμπεδον, εἵματα δ' αἰεί.*

Κατὰ τὴν ραψῳδίαν κ τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσσεύς, ἀφοῦ ἔπλεεν ἐννέα νύκτας καὶ ἡμέρας, εἶδε κατὰ τὴν *δεκάτην* τὴν πατρίδα του καὶ μετὰ πλοῦν ἓξ ἡμερῶν ἔφθασεν τὴν *ἑβδόμην* ἡμέραν εἰς τὴν πόλιν τοῦ Λάμου.

Ὀδυσ. κ 28 *ἐννῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ,*
τῇ δεκάτῃ δ' ἤδη ἀνεφαίνετο πατρὶς ἄρουρα,

---

[1] Scriptores musici Graeci, IX Excerpta Neapolitana, § 19 σ. 416, Teubner 1895.

[2] Περὶ τοῦ ἀριθμοῦ *ἑπτὰ* ΜΙΧ. ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ, Ἀστρολογικὸν σημείωμα, *Ἡμερολόγιον Μεγάλης Ἑλλάδος* 192 b σ. 65. ΙΩ. ΚΑΛΙΤΣΟΥΝΑΚΗ, Ἑπταδικαὶ ἔρευναι. Ἀθ. 1922. (Ἀνάτυπον ἐκ τῆς *Ἀθηνᾶς*, τόμ. 33).

'Οδυσ. κ 80 *ἐξῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ·*
ἑβδομάτῃ δι' ἱκόμεσθα Λάμου αἰπὺ πτολίεθρον,

Κατὰ τὴν ραψῳδίαν ε τῆς 'Οδυσσείας, ὁ 'Οδυσσεὺς ἀποπλεύσας ἀπὸ τὴν νῆσον τῆς Καλυψοῦς συνεχίζει τὸν πλοῦν ἐπὶ δ ε κ α ε π τ ὰ ἡμέρας.

'Οδυσ. ε 278 *ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μὲν πλέεν ἤματα ποντοπορεύων,*
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἐφάνη ὄρεα σκιόεντα.

Καὶ εἰς τὸ η τῆς 'Οδυσσείας ἀπαντῶμεν τοὺς αὐτοὺς στίχους·

'Οδυσ. η 267 *ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μὲν πλέον ἤματα ποντοπορεύων,*
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἐφάνη ὄρεα σκιόεντα.

'Επίσης καὶ ἀπὸ τὴν ραψῳδίαν ω τῆς 'Οδυσσείας καταφαίνεται ἡ ἱερότης τοῦ ἀριθμοῦ δεκαεπτά. 'Ο Ὅμηρος παριστᾷ αὐτόθι διαλεγομένας τὰς ψυχὰς τοῦ 'Αγαμέμνονος καὶ τοῦ 'Αχιλλέως. 'Η ψυχὴ τοῦ 'Αγαμέμνονος πληροφορεῖ τὴν ψυχὴν τοῦ 'Αχιλλέως περὶ τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας ἀπέδωκαν εἰς τὸν νεκρὸν τοῦ 'Αχιλλέως ἐν Τροίᾳ θρηνήσαντες αὐτὸν ἐπὶ δ ε κ α ε π τ ὰ ἡμέρας.

'Οδυσ. ω 63 *ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μέν σε ὁμῶς νύκτας τε καὶ ἦμαρ*
κλαίομεν ἀθάνατοί τε θεοὶ θνητοί τ' ἄνθρωποι·
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἔδομεν πυρί, πολλὰ δὲ σ' ἀμφὶ

Ὅθεν ἐνισχύεται ἔτι περισσότερον ἡ ἄποψις ἡμῶν ἡ ἐκτεθεῖσα κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 'Ακαδημίας τῆς 12 - 1 - 1956[1], καθ' ἣν ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 17 ὑπαινίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

ZUSAMMENFASSUNG

A. Auf die Frage (im Theaetetus 147 d) warum Theodoros, während des Beweises von Irrationalitäten sich bei $\sqrt{17}$ aufhielt, teilte der Verfasser im vorigen Jahr (Prakt. d. Akad. **31** (1956) S. 10) mit, dass er es für wahrscheinlich hält, Platon liess den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören, um die Heiligkeit, die für die Pythagoreer die Zahl 17 hat, anzudeuten. Seine Argumente waren 1) Eine Stelle aus Iamblichos 2) Eine Stelle aus Plutarch 3) Die Zahl der Säulen der Längsseite von Parthenon ist 17 4) Man begegnet der Zahl 17 im daktylischen Hexameter bei Homer und 5) Man begegnet der Zahl 17 in den Μουσικὰ des Ptolemaeus.

B. Aus den unten angeführten homerischen Versen ist ersichtlich dass die Zahl 17 auch bei Homer einen symbolischen Sinn hat. Allem Anschein nach stellt die Zahl 17 bei den Griechen seit uralten Zeiten einen voll-

---

1 *Πρακτικὰ 'Ακαδ. 'Αθ.* 31 (1956) 10 ἑξ.

kommenen Zeitabschnitt dar, während dessen sich eine ehrwürdige oder ansehnliche Tat vollzieht. Sie ist aus zwei Zahlen von grosser Bedeutung zusammengesetzt: aus der Zahl zehn, die man als vollkommene Zahl betrachtete und aus der heiligen Zahl sieben.

Einige Beispiele aus der Odyssee.

η 253 *trieb neun Tage herum. In der zehnten der schrecklichen Nächte*
führten die Himmlischen mich gen Ogygia, wo Kalypso.

η 259 *Sieben Jahre blieb ich bei ihr und netzte mit Tränen.*

κ 28 *Schon durchsegelten wir neun Tage und Nächte die Wogen,*
und in der zehnten Nacht erschien uns das heimische Ufer,

κ 80 *Als wir nun sechs Tage und Nächte das Meer durchrundert,*
landeten wir am siebten bei der Festungsstadt von Lamos,

ε 278 *Siebzehn Tage befuhr er die ungeheueren Gewässer,*
am achtzehnten erschienen die fernen, schattigen Berge

η 267 *Siebzehn Tage befuhr ich die ungeheueren Gewässer,*
am achtzehnten erblickt' ich die fernen, schattigen Berge.

Im Gesang ω stellt Homer die Seelen von Agamemnon und Achilleus in Gespräch dar. Die Seele des Agamemnon erzählt der Seele des Achilleus über die Ehrungen, die die Griechen damals dem Toten Achilleus in Troja erwiesen, indem sie um ihn *siebzehn* Tage getrauert haben:

ω 63 *Siebzehn Tage und Nächte beweinten wir unaufhörlich*
deinen Tod, der Unsterblichen Chor und die sterblichen Menschen,
am achtzehnten verbrannten wir dich und schlachteten ringsum.

Infolgedessen wird die Meinung des Verfassers, dass Platon den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören liess, um die Heiligkeit der Zahl 17 anzudeuten, noch mehr erhärtet.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ Χ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ III

ΕΚ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1957

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀναπτυσσομένην εἰς 115 θεωρήματα κατὰ τὴν ἔκδοσιν Heiberg, ἣν ἀκολουθοῦμεν, καὶ θεωρεῖται τὸ τελειότερον ἐκ τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ Woepcke, τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων θεωρεῖται σημαντική, γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «τίποτε δὲν εἶναι ὡραιότερον καὶ τελειότερον ἢ ἡ τάξις καὶ ὁ παραλληλισμὸς τῶν ἑξάδων τοῦ X βιβλίου. Πανταχοῦ εἰς τοῦτο διαλάμπει ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ συγγραφέως τῶν Στοιχείων»[1].

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας ἀνάγονται εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους. Ἡ δημιουργία ὅμως καὶ ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων, δέον νὰ θεωρηθῇ ἔργον τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου (περίπου 417—369 π.Χ.) καὶ τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου (περίπου 408—355 π.Χ.). Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν[2] τὸ 9ον θεώρημα τοῦ X βιβλίου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται βασικὸν τῆς ὅλης θεωρίας, «θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα». Περὶ τῆς συμβολῆς τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Θεοδώρου[3] τοῦ Κυρηναίου, τοῦ διδασκάλου τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἀσυμμέτρων πληροφορούμεθα καὶ ἐκ τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος τοῦ ἀφιερωμένου εἰς τὸν Θεαίτητον (147 D — 148 B), ἔνθα γράφεται :

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον ;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Λέγε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Κάλλιστα· ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο ;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνί-

---

1. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius p. 675 (Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 453, éd. Les Belles Lettres, Paris 1950).

2. Ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ὑπὸ J. Heiberg, τόμ. 5ος, σ. 450.

3. Ἄρθρον Theodoros, Pauly-Wissowa, Real-Enzyklopaedie der klassischen Altertumswissenschaft.

ζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες».

[Ἑρμηνεία: Θ. Ὁ παρὼν ἐδῶ Θεόδωρος ἠσχολεῖτο μὲ τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδεικνύων ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετροι ἀντιστοίχως μὲ τὴν ὑπόρριζον ποσότητα 3 καὶ 5 καὶ οὕτω ἐξετάζων ἀνὰ μίαν ἔφθασε μέχρι τῆς $\sqrt{17}$· ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Ἡμεῖς λοιπὸν συνελάβομεν τὴν ἰδέαν, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν ἐφαίνοντο ἄπειροι, νὰ περιλάβωμεν εἰς ἕνα νόμον τὴν ἔκφρασιν τῶν ῥιζῶν τούτων.

Σ. Μήπως ηὕρετε τοιοῦτον νόμον;

Θ. Κατ' ἐμὲ νομίζω· ἰδέ το καὶ σύ.

Σ. Λέγε.

Θ. Πάντα ἀριθμὸν τὸν ἀνελύομεν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων· τὸν μὲν δυνάμενον νὰ εἶναι γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων παρομοιάσαντες πρὸς τετράγωνον σχῆμα τὸν ὠνομάσαμεν τετράγωνον καὶ ἰσόπλευρον.

Σ. Καὶ πολὺ ὀρθῶς.

Θ. Τὸν δὲ μεταξὺ δύο τετραγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀδύνατον ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων, ἀλλὰ ἢ ἔχει τὸν ἕνα παράγοντα μεγαλύτερον καὶ τὸν ἄλλον μικρότερον ἢ τὸν ἕνα μικρότερον καὶ τὸν ἄλλον μεγαλύτερον, πάντοτε δὲ οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἄνισοι, παρομοιάσαντες πρὸς τὸ πρόμηκες (ὀρθογώνιον) σχῆμα τὸν ἐκαλέσαμεν προμήκη.

Σ. Κάλλιστα. Ἀλλὰ ποῖον τὸ συμπέρασμα;

Θ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον παρέχουσι τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν ὠνομάσθησαν μῆκος, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ἐπειδὴ αὗται δὲν εἶναι σύμμετροι γραμμικῶς ἐξεταζόμεναι πρὸς τὰς πρώτας, ἐν ᾧ εἶναι σύμμετροι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐκφράζοντας ἐπίπεδα, ὅταν αὗται ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον. Ὁμοίως ἐπράξαμεν καὶ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν ἴσων ἢ ἀνίσων παραγόντων.

Σ. Ἄριστα παιδιά μου].

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ἡ ἑρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ἔχει ὡς ἑξῆς· τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\alpha\times\alpha$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς τετράγωνον σχῆμα πλευρᾶς α καὶ τὴν πλευρὰν ταύτην καλοῦμεν μῆκος. Τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\beta\times\gamma$, ἔνθα $\beta\gtrless\gamma$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (πρόμηκες σχῆμα) καὶ τὸν καλοῦμεν προμήκη. Τὴν γραμμήν, δηλ. τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τετραγώνου, τὴν $\sqrt{\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν δύναμιν (Σημ. Δύναμιν, διότι αὕτη ὑψουμένη, εἰς τὸ τετράγωνον, δύναται, παράγει τὸν ἀριθμὸν Α), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς Α, ἐν ᾧ ἡ $(\sqrt{\beta\times\gamma})^2$ εἶναι σύμμετρος πρὸς Α. Τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων. Ἐὰν δηλ. $A=\alpha\times\alpha\times\alpha$, ἡ πλευρὰ α καλεῖται μῆκος. Ἐὰν ὅμως $A=\alpha\times\beta\times\gamma$ (οὐχὶ κύβος ἀριθμός), τὴν πλευρὰν $\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν κύβον (Σημ. Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὀνομασίαν δύναμις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὕτη ὑψουμένη εἰς τὸν κύβον παρέχει τὸν ἀριθμὸν Α), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς Α, ἐν ᾧ $\left(\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}\right)^3$ εἶναι σύμμετρος πρὸς Α.

Συναφῶς πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχε γράψει πραγματείαν, μὴ σωθεῖσαν, ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν» (Περὶ ἀσυμμέτρων γραμμῶν καὶ στερεῶν,). [Diels, Fragm. II, σ. 141]. Ἐκ τοῦ σωθέντος τούτου τίτλου τῆς πραγματείας τοῦ Δημοκρίτου ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων θὰ εἶχε σημειώσει προόδους καὶ πρὸ τῶν χρόνων τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ περιεχόμενον τοῦ X βιβλίου.

Προτάσσονται τέσσαρες ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἰς τινας παλαιοτέρας τῆς τοῦ Heiberg ἐκδόσεις διαιροῦνται εἰς ἕνδεκα. Μετὰ τὸ θεώρημα 47 ἕπονται οἱ δεύτεροι ὁρισμοὶ καὶ μετὰ τὸ θεώρημα 84 οἱ τρίτοι ὁρισμοί. Οἱ δεύτεροι καὶ οἱ τρίτοι ὁρισμοὶ εἶναι ταυτόσημοι· οἱ μὲν ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, οἱ δὲ εἰς διαφοράς.

Ὁρισμὸς α΄. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

Ὁρ. β΄. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι λέγονται ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα μετροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου· δυνάμει δὲ ἀσύμμετροι λέγονται αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα οὐδὲν χωρίον ἔχουσιν ὡς κοινὸν μέτρον.

Ὁρ. γ΄. Ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ὡς μέτρον, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι εὐθεῖαι σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι πρὸς αὐτήν, αἱ μὲν μήκει μόνον (γραμμικῶς θεωρούμεναι, μονοδιαστάτως) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι, αἱ δὲ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνα αὐτῶν) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Ἂς καλῆται ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ῥητὴ καὶ αἱ πρὸς ταύτην μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι ῥηταί. Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης, αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. (Ὥστε κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἔννοια τοῦ ῥητοῦ εἶναι εὐρυτέρα τῆς σημερινῆς). Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὄχι μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἀσύμμετρα) αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ἄλογοι.

Ὁρ. δ΄. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς δοθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητὸν καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο ῥητά. Τὰ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα (ἄρρητα) καὶ αἱ πλευραὶ τούτων ἄλογοι (ἄρρητοι). Ἐὰν τὰ ἀσύμμετρα ταῦτα εἶναι ἄλλα εὐθύγραμμα καὶ ὄχι τετράγωνα, ἂς καλῶνται ἄλογοι αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων.

1. Πρῶτον θεώρημα εἶναι ἡ περίφημος πρότασις, καθ' ἣν δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος ἢ τὸ ἥμισυ, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ὁμοίως, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς πάντοτε, θὰ ληφθῇ μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους, ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν εἶναι τοῦτο.

2. Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως (τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν), ἐὰν δὲν λαμβάνεται ὑπόλοιπον μηδέν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

3–4. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν.

5. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

6. Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Πόρισμα. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Δ, Ε, (νοοῦνται μὴ τετράγωνοι) καὶ εὐθεῖά τις Α (λαμβανομένη ὡς μέτρον, ῥητή). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖά τις ἔστω Β, ὥστε αὕτη καὶ ἡ Α νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα ὅμως αὐτῶν νὰ εἶναι σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β ὀνομάζονται τότε ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (κατὰ τὸν ὁρ. 3). Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τῶν Δ, Ε καὶ Α τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : \mathrm{E} = \mathrm{A} : \mathrm{Z}$, (1). Τῶν Α, Ζ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{B} : \mathrm{Z}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 9 τοῦ V εἶναι $\mathrm{A} : \mathrm{Z} = \mathrm{A}^2 : \mathrm{B}^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $\Delta : \mathrm{E} = \mathrm{A}^2 : \mathrm{B}^2$. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (καὶ μήκει ἀσύμμετροι), διότι μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσι λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

7. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

8. Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

9. Τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους.

Τὰ δὲ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα μὴ ἔχοντα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

10. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μήκει ἀσυμμέτρων ἢ δυνάμει ἀσυμμέτρων.

11. Ἔστω $\alpha:\beta=\gamma:\delta$. Ἐὰν α, β σύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ σύμμετρα. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ ἀσύμμετρα.

12. Ἐὰν α, β σύμμετρα πρὸς γ, εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

13. Ἐὰν α, β σύμμετρα καὶ α, γ ἢ β, γ ἀσύμμετρα εἶναι καὶ β, γ ἢ α, γ ἀσύμμετρα.

14. Ἔστω $\alpha:\beta=\gamma:\delta$. Ἐὰν α, $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, εἶναι καὶ γ, $\sqrt{\gamma^2-\delta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

15. Ἐὰν α, β σύμμετρα, εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α σύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα. Καὶ ἂν $(\alpha+\beta)$, α ἢ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

16. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α ἀσύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β ἀσύμμετρα. Καὶ ἀντιστρόφως.

17. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-Ax+\frac{B^2}{4}=0$ εἶναι μήκει σύμμετροι (θεωρούμεναι δηλαδὴ γραμμικῶς), εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (δηλ. τὸ ἄθροισμα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν). Καὶ ἀντιστρόφως:

Ἐὰν εἶναι A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-Ax+\frac{B^2}{4}=0$ μήκει σύμμετροι.

18. Ἔστω πάλιν $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-Ax+\frac{B^2}{4}=0$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ τὸ ἀντίστροφον.

19. Ἐὰν $A > B$ καὶ A, B εὐθεῖαι ῥηταί, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2-Ax+\frac{B^2}{4}=0$ εἶναι ῥητόν.

20. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητόν, καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ῥητὸν καὶ μήκει σύμμετρον πρὸς τὸ πρῶτον τμῆμα.

21. Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν εἶναι ἄλογον καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μέση. [Σημ. Ὀρθογώνιον μέσον εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ μέση εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ].

22. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὸ πρῶτον.

23. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

24. Ἐὰν Α $>$ Β καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μέσαι μήκει σύμμετροι, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι ὀρθογώνιον μέσον.

25. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $\rho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho \sqrt{\varkappa} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων θὰ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Ῥητὸν θὰ εἶναι ἂν $\sqrt{\varkappa} = \mu \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄλλως μέσον.

26. Ἡ διαφορὰ $\rho^2 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho^2 \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ οὐδέποτε εἶναι ῥητή.

27. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων Α, Β, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ῥητόν.

28. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων Α, Β, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ μέσον.

Λῆμμα 1ον. Εὕρεσις τοῦ τύπου τοῦ παρέχοντος ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = z^2$ τοῦ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$ ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$. Ἐὰν δὲν εἶναι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$, ὁ $\varkappa\xi\sigma\tau = \left(\frac{\varkappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2$ **δὲν εἶναι** τετράγωνος.

Λῆμμα 2ον. Εὕρεσις μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ὅστις νὰ εἶναι ἄθροισμα δύο **τετραγώνων** ἀριθμῶν, τοῦ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$.

29. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου Α καὶ μιᾶς καθέτου Β, ὥστε αὗται νὰ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ Α καὶ ἡ ἄλλη **κάθετος** μήκει σύμμετροι.

30. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει ἀσύμμετροι.

31α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου Α καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς Β, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι μόνον A^2, B^2 σύμμετρα) καὶ $A \times B$ ῥητὸν καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει σύμμετροι.

31β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει ἀσύμμετροι.

32α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου Α καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς Β, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, καὶ $A + B$ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει σύμμετροι.

32β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, Α μήκει ἀσύμμετροι.

33. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου Α, Β, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητὸν καὶ $A \times B$ μέσον.

34. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου Α, Β, ὥστε A^2, B^2, ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν.

35. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, Α, Β, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$.

36. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα (καλούμενα ὀνόματα) ΑΒ, ΒΓ, ὥστε ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται, ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος).

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς δυωνύμου εἶναι $\rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἔνθα ρ τὸ μέτρον καὶ α, β, γ, δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ $\rho + \rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι δυώνυμος.

37. Ἔστωσαν ΑΒ, ΒΓ μέσαι, μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητόν.

Ἡ εὐθεῖα $Γ = AB + BΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων πρώτη.

38. AB, $BΓ$ μέσαι, μόνον AB^2, $BΓ^2$ σύμμετρα, $AB \times BΓ$ μέσον. Ἡ εὐθεῖα $AΓ = AB + BΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

39. AB^2, $BΓ^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + BΓ^2$ ῥητόν, $AB \times BΓ$ μέσον. Ἡ εὐθεῖα $AΓ = AB + BΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μείζων.

40. AB^2, $BΓ^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + BΔ^2$ μέσον, $AB \times BΓ$ ῥητόν. Ἡ εὐθεῖα $AΓ = AB + BΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

41. AB^2, $BΓ^2$ ἀσύμμετρα. $AB^2 + BΓ^2$ μέσον, $AB \times BΓ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $AB^2 + BΓ^2$. Ἡ εὐθεῖα $Γ = AB + BΓ$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δύο μέσα δυναμένη. Ἡ μέση τοῦ θ. 21 καὶ αἱ ἓξ εὐθεῖαι τῶν θ. 36—41 εἶναι αἱ πρῶται ἑπτὰ κύριαι ἄλογοι (ἄρρητοι) εὐθεῖαι.

Λῆμμα. Ἔστω $AΓ + ΓB = AΔ + ΔB$, $AΓ > ΔB > AΔ > ΓB$. Τότε εἶναι $AΓ^2 + ΓB^2 > AΔ^2 + ΔB^2$.

42-47. Τὰ μονώνυμα τῶν ἓξ ἀλόγων τῶν θ. 36-41 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι.

Ὑπαρχούσης ῥητῆς ρ καὶ τῆς δυωνύμου (ἐκ δύο ὀνομάτων) $Δ = A + B$, ἔνθα A, B ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (ῥηταὶ ἀλλὰ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, θ. 36), καὶ $A > B$.

I. Ἔστω $\sqrt{A^2 - B^2}$ καὶ A μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἃς καλῆται ἡ δυώνυμος $Δ$ πρώτη δυώνυμος.

» 2. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἃς καλῆται ἡ δυώνυμος $Δ$ δευτέρα δυώνυμος.

» 3. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἃς καλῆται ἡ δυώνυμος $Δ$ τρίτη δυώνυμος.

II. Ἔστω $\sqrt{A^2 - B^2}$ καὶ A μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἃς καλῆται ἡ δυώνυμος $Δ$ τετάρτη δυώνυμος.

» 5. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἃς καλῆται ἡ δυώνυμος $Δ$ πέμπτη δυώνυμος.

» 6. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἃς καλῆται ἡ δυώνυμος $Δ$ ἕκτη δυώνυμος.

48-53. Εὕρεσις τῶν ἓξ τούτων δυωνύμων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μὲν διάφοροι πρὸς ἀλλήλας, ἀλλὰ ἔχουσι τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς δυωνύμου (θ. 36), ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

54-59. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος, τὰ ἀντίστοιχα ὕψη εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη. (Ἓξ τρίγωνα).

Λῆμμα.

Ἐὰν α διάφορον τοῦ β, εἶναι $α^2 + β^2 > 2αβ$.

60-65. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὸν καὶ τὰ ὕψη κατὰ σειρὰν εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι κατὰ σειράν, πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος.

66. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή, ἤτοι ἂν ἡ δοθεῖσα εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώ-

νυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν εἶναι πρώτη, δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος.......... ἕκτη δυώνυμος.

67. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν οὖσαν ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν εἶναι καὶ αὐτὴ ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἂν δηλ. εἶναι $\Gamma=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ ἔνθα Α, Β μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $\mathrm{A}\times \mathrm{B}$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον καὶ Δ μήκει σύμμετρος πρὸς Γ, εἶναι καὶ $\Delta=\mathrm{E}+\mathrm{Z}$ ἔνθα Ε, Ζ μέσαι, μόνον E^2, Z^2 σύμμετρα, καὶ $\mathrm{E}\times \mathrm{Z}$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως.

68. Ἔστω ἡ μείζων $\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{EB}$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσσύμετρα, $\mathrm{AE}^2+\mathrm{EB}^2$ ρητὸν καὶ $\mathrm{AE}\times \mathrm{EB}$ μέσον καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι μείζων, τῆς μορφῆς $\Gamma\mathrm{Z}+\mathrm{Z}\Delta$ ἔνθα $\Gamma\mathrm{Z}^2$, $\mathrm{Z}\Delta^2$ ἀσύμμετρα, $\Gamma\mathrm{Z}^2+\mathrm{Z}\Delta^2$ ρητὸν, καὶ $\Gamma\mathrm{Z}\times \mathrm{Z}\Delta$ μέσον

69. Ἔστω ἡ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη $\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{EB}$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσύμμετρα, $\mathrm{AE}^2+\mathrm{EB}^2$ μέσον καὶ $\mathrm{AE}\times\mathrm{EB}$ ρητόν, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη τῆς μορφῆς $\Gamma\mathrm{Z}+\mathrm{Z}\Delta$ ἔνθα $\Gamma\mathrm{Z}^2$, $\mathrm{Z}\Delta^2$ ἀσύμμετρα, $\Gamma\mathrm{Z}^2+\mathrm{Z}\Delta^2$ μέσον καὶ $\Gamma\mathrm{Z}\times \mathrm{Z}\Delta$ ρητόν.

70. Ἔστω ἡ δύο μέσα δυναμένη $\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{EB}$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσύμμετρα, $\mathrm{AE}^2+\mathrm{EB}^2$ μέσον, $\mathrm{AE}\times \mathrm{EB}$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\mathrm{AE}^2+\mathrm{EB}^2$, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ. Καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δύο μέσα δυναμένη τῆς μορφῆς $\Gamma\mathrm{Z}+\mathrm{Z}\Delta$, ἔνθα $\Gamma\mathrm{Z}^2$, $\mathrm{Z}\Delta^2$ ἀσύμμετρα, $\mathrm{AE}^2+\mathrm{EB}^2$ μέσον, $\mathrm{AE}\times\mathrm{EB}$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma\mathrm{Z}^2+\mathrm{Z}\Delta^2$.

71. Ἐὰν Α εὐθύγραμμον σχῆμα ρητὸν καὶ Β εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων ἢ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 36, 37, 39, 40).

72. Ἐὰν Α εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον καὶ Β εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 38, 41).

73. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα $\mathrm{AB} > \mathrm{B}\Gamma$ ρητὰ καὶ μόνον AB^2, $\mathrm{B}\Gamma^2$ σύμμετρα. Ἡ διαφορὰ $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται ἀποτομή.

[ΣΗΜ. Ἐὰν ρητὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (ἤτοι εἶναι διαφορὰ ἄρρητος δύο ρητῶν μονωνύμων τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα), (XIII.6). Ἐπίσης ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή, XIII.17].

74. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $\mathrm{AB} > \mathrm{B}\Gamma$ καὶ μόνον AB^2, $\mathrm{B}\Gamma^2$ σύμμετρα, καὶ $\mathrm{AB}\times \mathrm{B}\Gamma$ ρητόν. Ἡ διαφορὰ $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

75. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $\mathrm{AB} > \mathrm{B}\Gamma$ καὶ μόνον AB^2, $\mathrm{B}\Gamma^2$ σύμμετρα, καὶ $\mathrm{AB}\times \mathrm{B}\Gamma$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

76. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $\mathrm{AB} > \mathrm{B}\Gamma$, ὥστε AB^2, $\mathrm{B}\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $\mathrm{AB}^2+\mathrm{B}\Gamma^2$ ρητὸν καὶ $\mathrm{AB}\times \mathrm{B}\Gamma$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐλάσσων. [Σημ. Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ρητὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων, (XIII.11). Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου ἐπίσης εἶναι ἐλάσσων, (XIII.16)].

77. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $\mathrm{AB} > \mathrm{B}\Gamma$, ὥστε AB^2, $\mathrm{B}\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $\mathrm{AB}^2+\mathrm{B}\Gamma^2$ μέσον καὶ $\mathrm{AB}\times \mathrm{B}\Gamma$ ρητόν. Ἡ διαφορὰ $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

78. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $\mathrm{AB} > \mathrm{B}\Gamma$, ὥστε AB^2, $\mathrm{B}\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $\mathrm{AB}^2+\mathrm{B}\Gamma^2$ μέσον, $\mathrm{A}\times \mathrm{B}$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\mathrm{AB}^2+\mathrm{B}\Gamma^2$. Ἡ διαφορὰ $\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{AB}-\mathrm{B}\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. [Σημ. Τὰ μονώνυμα τῶν θεωρημάτων 36—41 εἶναι ἀντιστοίχως τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν θεωρ. 73—78. Ἐκεῖ μὲν ἔχομεν πρόσθεσιν, ἐνταῦθα δὲ ἀφαίρεσιν τῶν μονωνύμων. Ὅθεν ἐκτὸς τῆς ἀλόγου μέσης ἔχομεν

καὶ 12 ἀκόμη κυρίας ἀλόγους. Ἓξ ἐκ προσθέσεως καὶ ἓξ ἐξ ἀφαιρέσεως (36-41 καὶ 73-78).

79–84. Τὰ μονώνυμα τῶν διαφορῶν τῶν θ. 73–78 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ἕπονται οἱ τρίτοι ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι ταὐτόσημοι πρὸς τοὺς δευτέρους. Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, ἐν ᾧ οἱ τρίτοι εἰς διαφοράς.

Ὁ μειωτέος καλεῖται ἡ ὅλη εὐθεῖα, ὁ ἀφαιρετέος ἡ προσαρμόζουσα εὐθεῖα εἰς τὴν διαφοράν (ἀποτομήν). Ὅπως εἰς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) τοῦ θ. 36 διακρίνομεν κατὰ τοὺς δευτέρους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη δυωνύμων ἀλόγων, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀποτομὴν τοῦ θ. 73 διακρίνομεν κατὰ τοὺς τρίτους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη ἀποτομῶν ἀλόγων, τὴν πρώτην ἀποτομήν, τὴν δευτέραν ἀποτομήν, τὴν τρίτην ἀποτομήν, τὴν τετάρτην ἀποτομήν, τὴν πέμπτην ἀποτομήν, τὴν ἕκτην ἀποτομήν. Ἑκάστη τούτων ἔχει ἰδίαν ἰδιότητα. Κοινὸν γνώρισμα ὅλων εἶναι ἡ ἰδιότης τῆς ἀποτομῆς, ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ρητά, ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

85–90. Εὑρίσκονται ἡ πρώτη, ἡ δευτέρα,...... ἡ ἕκτη ἀποτομή.

91–96. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ριζικῶν διαφορῶν]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογρ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἄλλο κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή, τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστοίχως ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, ἐλάσσων, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (εἶναι δηλ. τὰ ὕψη αἱ ἄρρητοι τῆς μορφῆς τῶν θ. 73–78 ἀντιστοίχως).

97–102. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν δηλ. τὰ ὕψη ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι κατὰ σειρὰν ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης...... ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ρητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα, ἀποτομή, τρίτη ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή.

103. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ ΑΒ=ΑΕ—ΕΒ, ὁπότε ΑΕ, ΕΒ ρηταὶ καὶ μόνον $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ σύμμετρα. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς ΓΖ—ΖΔ ὥστε ΓΖ, ΖΔ ρηταὶ καὶ μόνον $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ σύμμετρα, καὶ ἂν ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἢ δευτέρα ἀποτομή...... ἢ ἕκτη ἀποτομὴ θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΔ πρώτη ἀποτομὴ ἢ δευτέρα ἀποτομή, ... ἢ ἕκτη ἀποτομή.

104. Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω ΑΒ=ΑΕ—ΕΒ ἔνθα ΑΕ, ΕΒ μέσαι καὶ μόνον $ΑΕ^2$ $ΕΒ^2$ σύμμετρα ὁπότε θὰ εἶναι ΑΕ × ΕΒ ἢ ρητὸν ἢ μέσον. Ἐὰν ΓΔ = ΓΖ — ΖΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ΓΖ, ΖΔ μέσαι, μόνον $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ σύμμετρα καὶ ΓΖ × ΖΔ ἢ ρητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως

105–107. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἢ τὴν μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν ἢ τὴν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν εἶναι καὶ αὕτη ἀντιστοίχως ἐλάσσων, ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, δηλ. τῆς μορφῆς τῶν διαφορῶν τῶν θ. 76, 77, 78 ἀντιστοίχως.

Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα σχήματα Α > Β.

108. Ἐὰν Α εἶναι ὀρθογώνιον ρητὸν καὶ Β ὀρθογώνιον μέσον, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ ἀποτομὴ (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 73) ἢ ἐλάσσων (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 76).

109. Ἐὰν Α ὀρθογώνιον μέσον καὶ Β ὀρθογ. ρητόν, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 74) ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 77).

110. Ἐὰν Α ὀρθογώνιον μέσον καὶ Β ὀρθογώνιον μέσον, καὶ Α, Β ἀσύμμετρα, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονονωνύμων, ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 75) ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 78).

Πόρισμα. Ἡ μέση καὶ αἱ ἓξ ἄλογοι διαφοραὶ (θ. 73 — 78) οὐδέποτε μεταξύ των ταὐτίζονται.

112. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος,... ἕκτη δυώνυμος, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή,... ἕκτη ἀποτομὴ καὶ τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

113. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή,...... ἕκτη ἀποτομή, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινομένης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ τά μονώνυμα τῶν δυωνύμων εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

114. Ἐὰν τὸ ἕν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἀποτομὴ καὶ τὸ ἄλλο δυώνυμος, ὥστε τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ ὕψος εἶναι ρητόν.

115. Δοθείσης τῆς (ἀρρήτου) μέσης εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν ἄπειροι ἄρρητοι, αἱ ὁποῖαι δὲν ταὐτίζονται.

Σκοπὸς τοῦ X Βιβλίου.

Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν τῶν Στοιχείων (ἔκδ. Heiberg, τόμ. V, σ. 414), «Ὁ σκοπὸς τοῦ ι' βιβλίου τῷ Εὐκλείδῃ διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων·.......... περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων οὐ πασῶν ..... ἀλλὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει».

Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦ X βιβλίου καὶ τὴν συμβολὴν τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ περιεχομένου του πληροφορούμεθα καὶ ἐκ σχολίου τοῦ Ἄραβος Aboû Othman τοῦ ἐκ Δαμασκοῦ (περίπου 1000 μ.Χ.), τὸ ὁποῖον ὑπὸ τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων θεωρεῖται ὡς προερχόμενον ἐκ πραγματείας τοῦ Πάππου (300 μ.Χ.). Τὸ σχόλιον τοῦτο σῳζόμενον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν ἀνευρέθη καὶ ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Woepcke κατὰ τὸ 1855 καὶ ἔχει κατὰ τὰ κυριώτερα συναφῆ μέρη ὡς ἑξῆς: «Ὁ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων, τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν. Ἡ θεωρία αὕτη ἔχει τὴν ἀρχήν της εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου. Ἀνεπτύχθη σπουδαίως ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου, ὁ ὁποῖος ἐπέδειξεν εἰς τὸν κλάδον τοῦτον ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν τοιαύτην ὀξύνοιαν, ὥστε δικαίως νὰ προκαλῇ τὸν θαυμασμόν. Ἐξ ἄλλου οὗτος ὑπῆρξεν ἐξόχως πεπροικισμένη διάνοια καὶ ἀφωσιώθη μὲ εὐγενῆ ζῆλον εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἀληθείας τῆς περιεχομένης εἰς τὰς ἐπιστήμας, ὡς τοῦτο ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τοῦ ὁμωνύμου διαλόγου τοῦ Πλάτωνος. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἀκριβεῖς διακρίσεις τῶν ρηθέντων ἀνωτέρω μεγεθῶν καὶ τὰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τῆς θεωρίας αὐτῆς, πιστεύω, ὅτι αὗται κατὰ κύριον λόγον ὀφείλονται εἰς τὸν μαθηματικὸν τοῦτον. Καὶ βραδύτερον ὁ μέγας Ἀπολλώνιος τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐθαυμάσθη εἰς μέγαν βαθμὸν προσέθεσεν εἰς τὰς ἀνακαλύψεις αὐτὰς θαυμασίας θεωρίας κατόπιν πολλῶν προσπαθειῶν καὶ ἐργασιῶν. Διότι ὁ Θεαίτητος διέκρινε τὰς δυνάμεις εἰς μήκει συμμέτρους καὶ ἀσυμμέτρους καὶ διῄρεσε τὰς γνωστὰς ἀρρήτους εὐθείας κατὰ τὰς διαφόρους μεσότητας (ἀναλογίας) ἀποδίδων τὴν μέσην εἰς τὴν γεωμετρικὴν μεσότητα, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἀποτομὴν εἰς τὴν ἁρμονικήν, ὡς γράφεται, ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου τοῦ περιπατητικοῦ. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν Εὐκλείδην προσέφερεν οὗτος γενικῶς ἀνελέγκτους κανόνας σχετικῶς πρὸς τὴν συμμετρίαν καὶ τὴν ἀσυμμετρίαν. Διετύπωσε μετ' ἀκριβείας τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς διακρίσεις τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν καὶ τέλος ἀπέδειξε σαφῶς τὴν σπουδαιότητά των.

Τέλος ὁ Ἀπολλώνιος διεχώρισε τὰ εἴδη τῶν διατεταγμένων ἀσυμμετριῶν καὶ ἀνεκάλυψε τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀτάκτων ἀσυμμέτρων μεγεθῶν τῶν ὁποίων ἐδημιούργησε μέγαν ἀριθμὸν δι' ἀκριβῶν μεθόδων [1]».

Τινὲς τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων συμφωνοῦσι πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Δανοῦ μαθηματικοῦ Zeuthen διατυπωθεῖσαν γνώμην ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ καὶ διτετραγώνων.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ὡς σημειοῖ ὁ T. Heath (ὅστις γράφει ἐν προκειμένῳ ὅτι ὁ Zeuthen εὑρίσκεται πολὺ ἐγγὺς πρὸς τὴν ἀλήθειαν) τῆς μορφῆς

$$x^2 \pm 2\mu x\rho \pm \nu\rho^2 = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad x^4 \pm 2\mu x^2\rho^2 \pm \nu\rho^4 = 0.$$

ἔνθα ρ ῥητὴ εὐθεῖα καὶ μ, ν συντελεσταί [2].

Βεβαίως αἱ 12 κύριαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 36—41 καὶ 6 διαφοραί, θ. 73—78) εἶναι ῥίζαι διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης αἱ 12 δευτερεύουσαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 48—53 καὶ 6 διαφοραί, θ. 85—90) εἶναι ῥίζαι δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀρκετὸν διὰ νὰ πεισθῇ τις ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ ὑπὸ τοῦ Πρόκλου σημειούμενον ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο τῇ προαιρέσει Πλατωνικὸς καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος [3] εἶναι ἀνάγκη ν' ἀναπολήσωμεν τινὰ ἐξ ὅσων ὁ Πλάτων διαλαμβάνει περὶ τῶν μαθηματικῶν εἰς τοὺς διαλόγους αὐτοῦ, ἵνα δυνηθῶμεν καὶ ἐκ τούτων νὰ μορφώσωμεν γνώμην περὶ τοῦ σκοποῦ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων. Ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου, ὁ Πλάτων ἦτο ἐν γνώσει εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὸ κοσμολογικὸν πρόβλημα τῆς Ὀρφικῆς καὶ Πυθαγορείου θεωρίας, καθ' ἣν ὁ Κόσμος ἐδημιουργήθη ἐκ τοῦ χάους ὑπὸ τοῦ Δημιουργοῦ διὰ τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μέτρου.

Κατὰ τὸν Φίληβον ἡ ἀρχὴ καθ' ἣν διαμορφοῦται τὸ σχῆμα εἶναι τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν, τὸ ἄπειρον καὶ τὸ πεπερασμένον. Τὸ ἕν (τὸ μέτρον) καὶ ἡ ἀόριστος δυὰς (τὸ ἀσύμμετρον) εἶναι τὰ στοιχεῖα τῶν ὄντων. Εἰς τὴν τοιαύτην θεώρησιν ἔχει προέλθει, πιθανῶς, Πλάτων ἔχων ὑπ' ὄψει τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ ὡς οὗτος γίνεται διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀρχύτου

Λίαν προσφυῶς γράφει ἐν προκειμένῳ ὁ Κωνστ. Δ. Γεωργούλης «Συνεπῶς χρησιμοποιῶν ὁ Πλάτων τὴν ἔκφρασιν μέγα καὶ μικρὸν θέλει νὰ εἴπῃ ὅτι τὸ δεύτερον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον ἀνευρίσκομεν εἰς τὸ Σύμπαν εἶναι τὸ ἄλογον, κάτι τὸ ὁποῖον δὲν ὑποτάσσεται εἰς ἀκριβῆ καθορισμόν, ἀλλὰ ἀφίνει κατόπιν οἱουδήποτε προσδιορισμοῦ ὑπόλοιπον» [5].

Τὸ πρῶτον γεωμετρικὸν σχῆμα εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ δὴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον. Εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου τούτου κατὰ τὸ X βιβλίον ἀνευρίσκομεν τὰς δύο ἀρχὰς τὰς ὁποίας κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Σύμπαν, τὸ μέτρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον. Ὅθεν, φρονοῦμεν, σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται

---

1. Paul-Henri Michel: De Pythagore à Euclide, σ. 109 καὶ 457, Paris 1950, Ed. Les Belles Lettres. Καὶ Mémoir. prés. à l'Acad. des Sciences de Paris 1856, σ. 691.

2. T. Heath, A history of Greek mathematics I, σ. 411 καὶ Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444—5.

3. Σχόλια εἰς Εὐκλείδην I, σ. 68, G. Friedlein, Teubner.

4. Hans Leisegang: Die Platon Deutung der Gegenwart, S. 122 ff. 1929 καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη: Εὐκλείδου, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, σ. 8, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων 1953, Ἀθῆναι.

5. Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος, Τόμος Ἑλλάς, σ. 592.

τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα ἀλόγων εὐθειῶν. Ὡς πρὸς τὴν ἀναγωγὴν δὲ τῶν ἁπλουστάτων ἀρρήτων (ἀλόγων) εὐθειῶν ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὰς τρεῖς βασικὰς ἀναλογίας, τὴν γεωμετρικήν, τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἁρμονικὴν σημειοῦμεν τὰ ἑξῆς· ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἄρρητον μέσην, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὰς ἀρρήτους δυωνύμους θεωρουμένου τοῦ ἀθροίσματος τούτων $A + B$ ὡς τοῦ διπλασίου, μεγέθους τινος Γ, ὥστε $\Gamma = \frac{A+B}{2}$. Ἡ δὲ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Πράγματι θεωρουμένων τῶν μονωνύμων τῆς ἀποτομῆς ὡς ἄκρων ὅρων ἁρμονικῆς ἀναλογίας τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι $\dfrac{2\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}$, (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (1) ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ (θ. 114) θὰ ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\varkappa\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} - \lambda\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, (2), ἐὰν καλέσωμεν $\dfrac{2\rho\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \varkappa$ καὶ $\dfrac{2\rho\frac{\delta}{\gamma}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \lambda$.

Ἡ παράστασις ὅμως (2) εἶναι ἀποτομὴ ἤτοι τὰ μονώνυμα αὐτῆς εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Συνεπῶς πᾶσα ἀποτομὴ ἀντικατοπτρίζει τὴν προέλευσιν αὐτῆς ἐξ ἁρμονικοῦ τινος μέσου.

Ὅθεν λίαν προσφυῶς ὁ Paul-Henri Michel[1], γράφει, «οὕτω εἰς τὴν βάσιν τοῦ οἰκοδομήματος τοῦ X βιβλίου ἀνευρίσκομεν τὰς τρεῖς πρώτας μεσότητας (ἀναλογίας), ὡς ἐν ἐνθύμιον τοῦ ἀρχαίου Πυθαγορισμοῦ καὶ ὡς μίαν μαρτυρίαν τῆς εὐκλειδείου πίστεως πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνος».

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατ' Ἰανουάριον 1956.

ΕΥΑΓ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

1. De Pythagore à Euclide p. 455, Paris, 1950, éd. Les Belles Lettres.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1957: ΤΟΜΟΣ 32ος

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΕΠΙ ΤΟΥ Χ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ.

EVANGELOS STAMATIS: ÜBER DAS X. BUCH DER ELEMENTE EUKLIDS.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1957

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1957: ΤΟΜΟΣ 32ος

ΑΝΑΤΥΠΟΝ
ΣΕΛ. 251 - 266

Ἐπὶ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου,

ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη****.

Α΄ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. 1 Τὸ X (10ον) βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐθεωρεῖτο καὶ εἶναι τὸ δυσκολώτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ὁ Ὀλλανδὸς μαθηματικὸς Simon Stevin (1548-1620) τὸ ὠνόμασεν «ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν», ἐνῷ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Jean Montucla (1725-1799) ἀμφιβάλλει, ἐὰν κατὰ τὴν ἐποχήν του θὰ ὑπῆρχε γεωμέτρης, ὅστις θὰ ἐτόλμα νὰ παρακολουθήσῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς

* **EVANGELOS STAMATIS, Über das X. Buch der Elemente Euklids.**

τὸν σκοτεινὸν δαίδαλον τοῦ X βιβλίου[1]. Οἱ περισσότεροι ἐκ τῶν νεωτέρων ἑρμηνευτῶν τοῦ X βιβλίου καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι σκοπὸς τούτου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου διτετραγώνων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων[2]. Ὁ Cl. Taer, φρονεῖ, ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ πλήρης ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ἥτις παρέχει στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων[3].

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἐκ τῶν δώδεκα ἀλόγων εὐθειῶν τοῦ X βιβλίου (τῶν θεωρημάτων 36 - 41 καὶ 73 - 78) εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ριζῶν ἰσαρίθμων διτετραγώνων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν θετικῶν ριζῶν τῶν αὐτῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης εἶναι ἀληθὲς ὅτι αἱ ἄλογοι εὐθεῖαι τῶν θεωρημάτων 48 - 53 καὶ 85 - 90 εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ριζῶν ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι εἶναι διαφοραὶ τῶν ριζῶν τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἡ παρατήρησις ὅμως αὕτη δὲν ὑποχρεοῖ εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος, καθ' ὃ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων. Διότι εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν Στοιχείων ἐπιτελεῖται ἡ ἐπίλυσις τῶν δυσκολωτέρου τύπου δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων, (VI, 28). Ἡ λύσις τῶν ἐν τῷ X βιβλίῳ ἀπαντωσῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων στηρίζεται κυρίως εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἁπλουστάτου τύπου.

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ XIII βιβλίον τῶν Στοιχείων (θεωρ. 6, 11, 16, 17) ἀποδεικνύεται: 1) Ἐὰν εὐθεῖα ρητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (X, 73). 2) Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ρητή, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 3) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 4) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή (X, 73). Ταῦτα ὅμως ἐπίσης δὲν ὑποχρεοῦσιν εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς παρέχουσα στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, διότι ἐκ τῶν συναφῶν θεωρημάτων τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 6 καὶ 11 εἶναι προπαρασκευαστικὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17. Ἐὰν δὲ ἔλειπε τὸ δεύτερον μέρος τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17 δὲν θὰ ἐπηρεάζετο ἡ θεωρία τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

Α. 2. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται πρὸς τοῦτο αἱ ἁπλούσταται ἄλογοι

---

[1] Paul - Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444 κ. ἑ. éd. *Les Belles Lettres*, Paris, 1950.

[2] Thomas Heath, A history of Greek Mathematics I, σ. 402, Oxford, 1921.

[3] Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, σ. 103, Leipzig 1936.

εὐθεῖαι. Ἐκ τῆς ἑρμηνείας, ἣν παρέχομεν κατωτέρω τῶν κυριωτέρων θεωρημάτων τοῦ X βιβλίου, φρονοῦμεν, εἶναι καταφανὴς ἡ ὀρθότης τῆς ὑποστηριζομένης ἀπόψεως.

Β′

Β. 1. Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ ἔχοντα κοινὸν μέτρον· ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

2. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν (X, θ. 6 καὶ 7).

3. Τυχοῦσα εὐθεῖα λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ρητή.

4. Μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν αὗται θεωρῶνται γραμμικῶς.

5. Δυνάμει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

6. Πᾶσα εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν λέγεται ρητή. Ἔστωσαν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, μὴ τετράγωνοι καὶ ρητή τις εὐθεῖα ϱ. Ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ϱ, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν ϱ καὶ συνεπῶς εἶναι ρητή.

7. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ϱ καὶ $\varrho(\beta/\alpha)$, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ϱ καὶ πρὸς τὴν $\varrho(\beta/\alpha)$. Τὰ τετράγωνα ὅμως ϱ^2 καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ ἢ $\varrho^2(\beta^2/\alpha^2)$ καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι πρὸς ἄλληλα σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι ϱ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\varrho(\beta/\alpha)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

8. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ϱ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ λέγεται μέση [ἢ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\varrho(\beta/\alpha)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{3/4}$]. Μέση ἄρα λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

9. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τῆς μορφῆς $\varrho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\varrho^2(\beta/\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται μέσον. Μέσον ἄρα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μονώνυμον, περιέχον τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ θεωρούμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τετραγώνου εἶναι μέση, τὸ τετράγωνον δὲ τοῦτο εἶναι ἐπίσης μέσον.

10. Εὐθεῖά τις λέγεται ἄλογος, ὅταν τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας ληφθείσης ὡς ρητῆς.

Τὰ κατωτέρω δέκα θεωρήματα ὑπ' ἀριθ. 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 εἶναι προπαρασκευαστικὰ τῆς ὅλης θεωρίας τοῦ X βιβλίου.

10.

Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται εὐθεῖά τις ῥητή, ἔστω ϱ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἀκεραίων μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ϱ, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$. Ἡ ϱ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι εὐθεῖαι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι).

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται πάλιν ἡ ϱ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι μέση. Εἶναι δὲ ἡ ϱ καὶ ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ ὄχι μόνον μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ῥητόν. Ἡ πρώτη μέση λαμβάνεται κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ θ. 10 καὶ εἶναι ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δευτέρας μέσης κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν $\varrho(\beta/\alpha)$, καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10, τὴν $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τούτων, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{3/4}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση. Τὰ τετράγωνα τῶν μέσων, τὰ $\varrho^2(\beta/\alpha)^{1/2}$ καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)^{3/2}$ εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι ῥητόν.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι μέσον. Προκαταρκτικῶς εὑρίσκονται τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λαμβάνονται οἱ μὴ τετράγωνοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ α, β, γ, δ καὶ εὐθεῖά τις ῥητή, ἔστω ϱ. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ϱ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ϱ ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθ. τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ϱ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, δ, ϱ ἡ $\varrho(\delta/\gamma)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ϱ, $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης πρώτης μέσης.

Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὡς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὰ $\varrho(=\mathrm{A})$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $(=\mathrm{B})$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ $\Delta=\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης δευτέρας μέσης.

Τῶν $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ καὶ τῆς $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εὑρίσκει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν $\mathrm{E}=\varrho(\delta/\gamma)^{1/2}:(\beta/\alpha)^{1/4}$. Αὕτη εἶναι ἡ δευτέρα μέση.

Λῆμμα 1ον.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \text{ ἢ } \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

ἔνθα $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοὶ καὶ $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι. Ὁ $\mu\nu$ εἶναι τετράγωνος (IX, 1). Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$ ὁ $\mu\nu$ δὲν εἶναι τετράγωνος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνομεν $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu$ μὴ τετράγωνος ἢ $\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\varkappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$ μὴ τετράγωνος. Οἱ τύποι (1) παρέχουσιν ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$.

Λῆμμα 2ον.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda$ ἢ $\varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοί. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος.

29.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ρητὴ εὐθεῖα $\mathrm{AB}(=\varrho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ρητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $\mathrm{ZB}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AZ}^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ = \frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$, $ZB = \frac{\varrho\omega}{\varphi}$, $[\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος$]$.

30.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ρητὴ εὐθεῖα $AB(=\varrho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ρητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $BZ = \sqrt{AB^2 - AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ = \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB = \frac{\varrho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, $[\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος$]$.

31.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Δ νὰ εἶναι μέσαι, μόνον Γ^2, Δ^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Γ, Δ μήκει ἀσύμμετροι), τὸ γινόμενον $\Gamma \times \Delta$ νὰ εἶναι ρητὸν καὶ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $\Gamma = \frac{\varrho\vartheta^{1/4}}{\varphi^{1/2}}$, $\Delta = \frac{\varrho\vartheta^{3/4}}{\varphi^{3/2}}$, $[\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος$]$.

31.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

32.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Δ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ E νὰ εἶναι μέσαι, ἀλλὰ μόνον Δ^2, E^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Δ, E μήκει ἀσύμμετροι), τὸ γινόμενον $\Delta \times E$ νὰ εἶναι μέσον καὶ ἡ Δ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος, ἡ $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}, \quad E = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}, \quad [\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta, \ \gamma, \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

32.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Δ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}, \quad E = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 = \lambda, \ \gamma, \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

33.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς AZ, ZB, ὥστε AZ^2, ZB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $AZ^2 + ZB^2$ ρητὸν καὶ $AZ \times ZB$ μέσον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$AZ = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\quad ZB = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,$$ [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος].

34.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $A\Delta^2$, ΔB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον καὶ $A\Delta\times\Delta B$ ρητόν.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\quad \Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,$$

[$\alpha^2+\beta^2=\lambda$, μὴ τετράγωνος].

35.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $A\Delta^2$, ΔB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον, $A\Delta\times\Delta B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $A\Delta^2+\Delta B^2$. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\quad \Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,$$

[$\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ μὴ τετράγωνοι].

Β. 2. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένως ἀποδειχθέντων κατασκευάζονται 12 ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἑκάστη τῶν ἓξ πρώτων εὐθειῶν εἶναι ἄθροισμα δύο μονωνύμων (θεωρ. 36 - 41). Ἑκάστη τῶν ἓξ ἑπομένων εὐθειῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν μονωνύμων (ἀποτομαί, θεμ. 73 - 78). Αἱ εὐθεῖαι αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατασκευὴν δώδεκα ὀρθογωνίων τριγώνων. *Ἁπλούστεραι ἄλογοι εὐθεῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσιν.* Αὗται εἶναι:

1. Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) — 36
   Ἀποτομὴ (διαφορὰ) — 73
   $$\varrho \pm \varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Τὰ μονώνυμα λαμβάνονται ἐκ τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10 [Δύναται νὰ εἶναι $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \pm \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$]

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη — 37
   Πρώτη ἀποτομὴ μέσης — 74
   $$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$$

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα — 38
   Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης — 75
   $$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}.$$

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

4.	Μείζων Ἐλάσσων	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$	39 76
	Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33.		
5.	Ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη Μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$	40 77
	Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34.		
6.	Δύο μέσα δυναμένη Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$	41 78
	Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35.		

Ὁρισμοὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι. (Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς τὰ ἀθροίσματα, ἐνῷ οἱ τρίτοι εἰς τὰς διαφοράς).

Θεωρεῖται εὐθεῖά τις ρητὴ ϱ καὶ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα· ἔστω Α καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔστω Β. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β νὰ εἶναι ρηταί, ἀλλὰ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα (δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἔστω ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἡ Γ.

1) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει σύμμετροι διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος $A+B$ καὶ τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) $A-B$, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὔ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν ϱ.

I. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

1. Ἐὰν Α, ϱ μήκει σύμμετροι (Β, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
   ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἂς καλῆται πρώτη δυώνυμος
   ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἂς καλῆται πρώτη ἀποτομή.
2. Ἐὰν Β, ϱ μήκει σύμμετροι (Α, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
   ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἂς καλῆται δευτέρα δυώνυμος
   ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἂς καλῆται δευτέρα ἀποτομή.
3. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ϱ,
   ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἂς καλῆται τρίτη δυώνυμος
   ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἂς καλῆται τρίτη ἀποτομή.

2) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι διακρίνονται ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος $A+B$ καὶ ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) $A-B$, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὔ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητήν.

II. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

4. Ἐὰν Α, ϱ μήκει σύμμετροι (Β, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται τετάρτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν Β, ϱ μήκει σύμμετροι (Α, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται πέμπτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ϱ,
ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται' ἕκτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται ἕκτη ἀποτομή.

Κατασκευὴ τῶν ἓξ δυωνύμων καὶ ἓξ ἀποτομῶν (ἄλλαι 12 ἄλογοι εὐθεῖαι).

			θεώρημα
1.	Πρώτη δυώνυμος Πρώτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$.	48 85
2.	Δευτέρα δυώνυμος Δευτέρα ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}$.	49 86
3.	Τρίτη δυώνυμος Τρίτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \pm \varrho\frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$.	50 87

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

4.	Τετάρτη δυώνυμος Τετάρτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$.	51 88
5.	Πέμπτη δυώνυμος Πέμπτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}$.	52 89
6.	Ἕκτη δυώνυμος Ἕκτη ἀποτομὴ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \varrho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$.	53 90

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν 24 ἀλόγων εὐθειῶν κατασκευάζονται 24 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τὸ κύριον μέρος τοῦ περιεχομένου τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι καταφανὴς ἡ συμμετρία καὶ ἡ ἁρμονία ἥτις ὑπάρχει, ὅταν χρησιμοποιῶνται αἱ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐνταῦθα δύναται νὰ γίνῃ ἡ παρατήρησις, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ γινόμενον 4×6 ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν τετρακτὺν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ 6, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός. Παρέχομεν τὴν κατασκευὴν τῶν 24 ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τοὺ ἑπομένους τέσσαρας πίνακας.

ΠΙΝΑΞ Ι.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ			ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ	
Θεώρημα	Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους: α′ τμῆμα ῥητή	β′ τμῆμα ἄλογος	ἑπομένως τὸ ὕψος	Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
54	ϱ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} + \varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη δυώνυμος θ. 48.	$\varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 + \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$= \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\omega}{\varphi}\right)} + \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\omega}{\varphi}\right)}$ δηλ. τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων (δυωνύμου) τοῦ θεωρήματος	36.
55	ϱ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} + \varrho \frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα δυώνυμος 49.	$\varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} + 1\right)}$	$= \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi + \omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)} + \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi - \omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης	37.
56	ϱ	$\varrho \frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\varrho \sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη δυώνυμος 50.	$\varrho \sqrt{\frac{\varphi + \sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$= \varrho \sqrt{\frac{\varphi + \omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \varrho \sqrt{\frac{\varphi - \omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας	38.
57	ϱ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} + \varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη δυώνυμος 51.	$\varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$= \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} + \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$ τῆς μείζονος	39.
58	ϱ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \varrho \frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη δυώνυμος 52.	$\varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + 1\right)}$	$= \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} + \beta}{\alpha}\right)} + \varrho \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda} - \beta}{\alpha}\right)}$ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης	40.
59	ϱ	$\varrho \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη δυώνυμος 53.	$\varrho \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda} + \alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$= \varrho \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda} + \beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \varrho \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda} - \beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς δύο μέσα δυναμένης	41.
			[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος].		

ΠΙΝΑΞ II

Θεώρημα	Δ Ι Δ Ο Ν Τ Α Ι		Α Π Ο Δ Ε Ι Κ Ν Υ Ε Τ Α Ι
	Τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἄλογος	Ἓν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τεμν. ὑπὸ τοῦ ὕψους ρητὴ	Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
60	$\varrho + \varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ δυώνυμος τοῦ θεωρήματος 36	ϱ	$\varrho\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης δυωνύμου τοῦ θ. 48.
61	$\varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} + \varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ ἐκ δύο μέσων πρώτη **37.**	ϱ	$\varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\,\varrho\, \frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας δυωνύμου 49.
62	$\varrho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} + \frac{\varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38.	ϱ	$\varrho \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] + 2\,\varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης δυωνύμου 50.
63	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μείζων 39.		$\varrho + \frac{\varrho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης δυωνύμου 53.
64	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη 40.	ϱ	$\frac{\varrho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\varrho\,\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης δυωνύμου 52.
65	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ δύο μέσα δυναμένη 41.	ϱ	$\varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} + \varrho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης δυωνύμου 53

ΠΙΝΑΞ III.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ			ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ
Θεώρημα	Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους		ἑπομένως τὸ ὕψος	Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
	α' τμῆμα ῥητή	β' τμῆμα ἄλογος		
91	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη ἀποτομὴ θ. 85.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἀποτομῆς τοῦ θεωρήματος 73.
92	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα ἀποτομὴ 86.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$, τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης 74.
93	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη ἀποτομὴ 87.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς δευτέρας ἀποτομῆς μέσης 75.
94	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη ἀποτομὴ 88.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς ἐλάσσονος 76.
95	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη ἀποτομὴ 89.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης 77.
96	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη ἀποτομὴ 90.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης. 78.

[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐκ διαφορᾶς].

ΠΙΝΑΞ IV

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἄλογος	Ἓν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τεμν. ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητὴ	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
97	$\varrho - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἀποτομὴ τοῦ θεωρήματος 73.	ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης ἀποτομῆς τοῦ θ. 85.
98	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\,\varrho\,\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας ἀποτομῆς 86.
99	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75.	ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\,\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης ἀποτομῆς 87.
100	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ἐλάσσων 76.	ϱ	$\varrho - \frac{\varrho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης ἀποτομῆς 88.
101	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 77.	ϱ	$\frac{\varrho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\varrho\,\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς 89.
102	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετα μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 78.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης ἀποτομῆς 90.

B. 3. Τὰ θεωρήματα, τὸ 112 καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου 113, θεωροῦμεν γνήσια· ταῦτα ἀποτελοῦσι συνέχειαν ἄμεσον καὶ συνεπῶς ἀναπόσπαστον τμῆμα τοῦ κυρίου μέρους τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων. Παρέχομεν εἰκόνα τούτων εἰς τοὺς ἑπομένους δύο πίνακας. Εἰς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων τούτων κατασκευάζονται ἓξ ὀρθογώνια τρίγωνα. Γνήσια θεωροῦμεν καὶ τὰ θεωρήματα 114, 115.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ			ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ	
	Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας	Τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς		ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
Θ. 112	ῥητὴ	τῆς πρώτης δυωνύμου	θ. 48	τῆς πρώτης ἀποτομῆς	θ. 85
	»	» δευτέρας δυωνύμου	49	» δευτέρας ἀποτομῆς	86
	»	» τρίτης δυωνύμου	50	» τρίτης ἀποτομῆς	87
	»	» τετάρτης δυωνύμου	51	» τετάρτης ἀποτομῆς	88
	»	» πέμπτης δυωνύμου	52	» πέμπτης ἀποτομῆς	89
	»	» ἕκτης δυωνύμου	53	» ἕκτης ἀποτομῆς	90
Θ. 113		τῆς πρώτης ἀποτομῆς	85	τῆς πρώτης δυωνύμου	48
	»	» δευτέρας ἀποτομῆς	86	» δευτέρας δυωνύμου	49
	»	» τρίτης ἀποτομῆς	87	» τρίτης δυωνύμου	50
	»	» τετάρτης ἀποτ μῆς	88	» τετάρτης δυωνύμου	51
	»	» πέμπτης ἀποτομῆς	89	» πέμπτης δυωνύμου	52
	»	» ἕκτης ἀποτομῆς	90	» ἕκτης δυωνύμου	53

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser vertritt mit seiner Interpretation des X. Buches der Elemente Euklids die Meinung, der Zweck des X. Buches sei es, die Symmetrie und Harmonie aufzuzeigen die sich ergibt, wenn man bei der konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks die einfachsten irrationalen Grössen verwendet. Nach einigen Vorbemerkungen stellt der Verfasser fest, dass die Sätze 18 und 27-35 den Aufbau der ganzen Theorie des X. Buches der Elemente vorbereiten. In diesen zehn Sätzen werden die einfachsten möglichen Irrationale Grössen konstruiert, während in den folgenden Sätzen 36-41 sechs irrationale Summen von diesen Grössen gebildet werden. Diese sind: 1) Binomiale 2) Erste Bimediale 3) Zweite Bimediale 4) Major 5) Quadriert Rationales plus Medialem Ergebende 6) Quadriert die Summe zweier Medialer Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (zweite Definitions-gruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationalen Summen bildet. Diese sind: 1) Erste Binomiale

2) Zweite Binomiale 3) Dritte Binomiale 4) Vierte Binomiale 5) Fünfte Binomiale 6) Sechste Binomiale (48 - 53). Nun wird der erste entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er ist durch die Tafeln I und II wiedergegeben.

Übersetzung der Titel der Tafeln.

TAFEL I, (und III).

<table>
<tr><th colspan="3">ES IST GEGEBEN:</th><th>ES WIRD BEWIESEN:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die von der Höhe geschnitten wird,</td><td rowspan="2">folglich
die Höhe</td><td rowspan="2">Die Höhe des Dreiecks ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
<tr><td>der 1. Teil
die Rationale</td><td>der 2. Teil
die Irrationale</td></tr>
</table>

TAFEL II, (und IV).

<table>
<tr><th colspan="2">ES IST GEGEBEN:</th><th>ES WIRD BEWIESEN:</th></tr>
<tr><td>Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus
die Irrationale</td><td>Der eine Hypotenusenabschnitt
die Rationale</td><td>Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
</table>

Anstatt der sechs Summen von irrationalen Grössen (Sätze 36 - 41) bildet nun Euklid sechs Differenzen von denselben irrationalen Grössen (Sätze 73 - 78). Diese sind: 1) Apotome 2) Erste Medialapotome 3) Zweite Medialapotome 4) Minor 5) Mit Rationalem mediale Summenfläche Ergebende 6) Mit Medialem mediale Summenfläche Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (dasselbe wie in der 2. Definitionsgruppe, nun 3. Definitionsgruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationale Differenzen bildet. Diese sind: 1) Erste Apotome 2) Zweite Apotome 3) Dritte Apotome 4) Vierte Apotome 5) Fünfte Apotome 6) Sechste Apotome (Sätze 85 - 90). Nun wird der zweite entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er wird durch die Tafeln III und IV wiedergegeben. Die Titel der Tafeln III und IV, sind dieselben wie die der Tafeln I bzw. II.

Satz 112 und seine Umkehrung (S. 113) geben die Konstruktion von 12 rechtwinkligen Dreiecken; die Sätze sind eng mit der ganzen Theorie des X. Buches verbunden.

	ES SIND GEGEBEN:			ES WIRD BEWIESEN:	
	Die Höhe des Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus	Der eine Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer		Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer	
112	eine Rationale	Ersten Binomiale	S. 48	Ersten Apotone	S. 85
	»	Zweiten Binomiale	49	Zweiten Apotome	86
	»	Dritten Binomiale	50	Dritten Apotome	87
	»	Vierten Binomiale	51	Vierten Apotome	88
	»	Fünften Binomiale	52	Fünften Apotome	89
	»	Sechsten Binomiale	53	Sechsten Apotome	90
113	»	Ersten Apotome	85	Ersten Binomiale	48
	»	Zweiten Apotome	86	Zweiten Binomiale	49
	»	Dritten Apotome	87	Dritten Binomiale	50
	»	Vierten Apotome	88	Vierten Binomiale	51
	»	Fünften Apotome	89	Fünften Binomiale	52
	»	Sechsten Apotome	90	Sechsten Binomiale	53

Auch die Sätze 114 und 115 sind eng mit der Theorie des X. Buches verbunden. Infolgedessen darf man sie als echte Sätze betrachten. Die zwölf Irrationallen Linien der Sätze 36-41 und 73-78, sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs biquadratischen Gleichungen. Die zwölf Irrationalen Linien der Sätze 48-53 und 85-90 sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs quadratischen Gleichungen. Es wird aber bemerkt, dass Satz VI 28 schwierigere Probleme löst.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1958: ΤΟΜΟΣ 33ΟΣ

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΠΑΡΑ ΠΛΑΤΩΝΙ.

EVANG. STAMATIS: THE THEORY OF SETS BY PLATO.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1958

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1958: ΤΟΜΟΣ 33ος

ΑΝΑΤΥΠΟΝ
ΣΕΛ. 298 - 303

Περὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων παρὰ Πλάτωνι,

ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** *.

Α΄. Ὁ Γεώργιος Κάντορ εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἀρχαὶ μιᾶς γενικῆς θεωρίας τῶν συνόλων, σελ. 43, Λειψία 1883 (Grundlagen einer allgemeinen Mannich-

* **EVANGELOS STAMATIS, The theory of sets by Plato.**

faltigkeitslehre) γράφει τὰ ἑξῆς: Θεωρῶ ποικιλίαν ἢ σύνολον πᾶν πλῆθος, τὸ ὁποῖον νοεῖται ὡς ἕν, δηλ. πᾶσαν συμπερίληψιν καθωρισμένων στοιχείων, τὰ ὁποῖα δυνάμει ἑνὸς νόμου δύνανται νὰ συνδεθῶσιν εἰς ἓν σύνολον καὶ πιστεύω ὅτι διὰ τούτου ὁρίζω τι, τὸ ὁποῖον εἶναι συγγενὲς πρὸς τὸ Πλατωνικὸν εἶδος ἢ ἰδέαν, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Φίληβος ὀνομάζει μεικτόν.

Β'. Περὶ ἰδεῶν καὶ εἰδῶν ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων εἰς τινας διαλόγους αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Παρμενίδης (129 - 135). Εἰς τὸν Παρμενίδην ὅμως ἀνευρίσκομεν μεταξὺ ἄλλων σπουδαίων μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ γενικάς τινας ἀρχὰς μιᾶς θεωρίας περὶ συνόλων. Ἐκ τῆς θεωρίας ταύτης ἀναφέρομεν ἐνταῦθα μόνον στοιχεῖά τινα, ὡς εἶναι ὁ ὁρισμὸς τοῦ μέρους (στοιχείου) καὶ τοῦ ὅλου (συνόλου):

Τὸ μέρος που μέρος ὅλου ἐστιν. Τὶ δὲ τὸ ὅλον; οὐχὶ οὗ ἂν μέρος μηδὲν ἀπῇ ὅλον ἂν εἴη; (137 c).

— Οὐκ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τὸ μόριον μόριον, ἀλλὰ μιᾶς τινος ἰδέας καὶ ἑνός τινος, ὃ καλοῦμεν ὅλον, ἐξ ἁπάντων ἓν τέλειον γεγονός, τούτου μόριον ἂν τὸ μόριον εἴη (157 d - e).

Ἑρμηνεία. Τὸ μέρος (στοιχεῖον) εἶναι βεβαίως μέρος ἑνὸς συνόλου. Τὶ εἶναι δὲ σύνολον; Δὲν εἶναι σύνολον ἐκεῖνο, ἀπὸ τοῦ ὁποίου οὐδὲν μέρος ἀπουσιάζει;

— Οὐχὶ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τῶν πραγμάτων τὸ μόριον (στοιχεῖον) εἶναι μόριον, ἀλλὰ μιᾶς τινος ἰδέας καὶ ἑνός τινος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν σύνολον καὶ τὸ ὁποῖον ἐξ ὅλων τῶν στοιχείων ἔχει σχηματισθῇ εἰς ἓν τέλειον, τούτου τὸ στοιχεῖον θὰ εἶναι στοιχεῖον.

Λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος περὶ συνόλων ἀνευρίσκομεν εἰς τὰ σχόλια τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Παρμενίδην καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ ἰδίου, ἥτις φέρεται ὑπὸ τὸν τίτλον Πρόκλου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική[1] (Fridericus Creuzer, Francofurti ad Moenum, 1822). Αὕτη περιλαμβάνει 211 προτάσεις. Ἐπισημειωτέον ὅτι ἀναίρεσιν τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως τοῦ Πρόκλου ἐπιχειρεῖ διὰ 198 προτάσεων ὁ Ἐπίσκοπος Μεθώνης Νικόλαος διὰ τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀνάπτυξις τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ» (J. Th. Voemel, Francofurti ad Moenum, 1822). Καὶ ἡ πραγματεία ὅμως αὐτὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς Πλατωνικῆς θεωρίας περὶ συνόλων. Κατωτέρω παραθέτομεν τέσσαρας ἐκ τῶν 211 προτάσεων τοῦ Πρόκλου, τὰς ὑπ' ἀριθμ.

---

[1] Ὁ Gordan χαρακτηρίζει τὴν πρώτην ἀπόδειξιν τοῦ Hilbert διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ πεπερασμένου συστήματος ἀναλλοιώτων ὡς θεολογικήν. A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, Springer - Verlag, Berlin 1928, σελ. 227.

66, 67, 68, 69 διὰ τῶν ὁποίων θεωροῦμεν, ὅτι ἑρμηνεύεται σημαντικῶς ἡ περὶ συνόλων θεωρία τοῦ Πλάτωνος.

Πρότασις 66.

Πάντα τὰ ὄντα πρὸ ἄλληλα ἢ ὅλα ἐστιν, ἢ μέρη, ἢ ταὐτά, ἢ ἕτερα·

Ἑρμηνεία. Πάντα τὰ ὄντα θεωρούμενα πρὸς ἄλληλα ἢ εἶναι σύνολα ἢ εἶναι στοιχεῖα, ἢ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἢ διάφορα.

Πρότασις 67.

Πᾶσα ὁλότης ἢ πρὸ τῶν μερῶν ἔστιν, ἢ ἐκ τῶν μερῶν, ἢ ἐν τῷ μέρει. ἢ γὰρ ἐν τῇ αἰτίᾳ τὸ ἑκάστου θεωροῦμεν εἶδος, καὶ ὅλον ἐκεῖνο πρὸ τῶν μερῶν λέγομεν, τὸ ἐν τῷ αἰτίῳ ὑποστάν, ἢ ἐν τοῖς μετέχουσιν αὐτοῦ μέρεσι. Καὶ τοῦτο διχῶς. ἢ γὰρ ἐν ἅπασιν ὁμοῦ τοῖς μέρεσι, καὶ ἔστι τοῦτο· ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, οὗ καὶ ὁτιοῦν μέρος ἀπὸν ἐλασσοῖ τὸ ὅλον· ἢ ἐν ἑκάστῳ τῶν μερῶν, ὡς καὶ τοῦ μέρους κατὰ μέθεξιν τοῦ ὅλου γεγονότος. ὃ καὶ ποιεῖ τὸ μέρος εἶναι ὅλον μερικῶς. καθ' ὕπαρξιν μὲν οὖν ὅλον τὸ ἐκ τῶν μερῶν· κατ' αἰτίαν δὲ τὸ πρὸ τῶν μερῶν· κατὰ μέθεξιν δὲ τὸ ἐν τῷ μέρει. Καὶ γὰρ τοῦτο κατὰ τὴν ἐσχάτην ὕφεσιν ὅλον, ᾗ μιμεῖται τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, ὅταν μὴ τὸ τυχὸν ᾖ μέρος, ἀλλὰ τῷ ὅλῳ δυνάμενον ἀφομοιοῦσθαι, οὗ καὶ τὰ μέρη ὅλα ἐστίν.

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἢ ὑπάρχει πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων του, ἢ ὑπάρχει ἐκ τῶν στοιχείων του, ἢ εἰς ἕκαστον στοιχεῖον του. Διότι ἢ θεωροῦμεν τὴν αἰτίαν[1], δι' ἣν ἐδημιουργήθη τὸ εἶδος ἑκάστου πράγματος (στοιχείου) καὶ τότε τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων τὸ γενόμενον κατ' ἀκολουθίαν τοῦ αἰτίου τῆς δημιουργίας τὸ λέγομεν σύνολον ὑπάρχον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν μερῶν (στοιχείων) ἢ λέγομεν σύνολον κάτι, δυνάμει τῶν μερῶν, ἅτινα μετέχουσιν αὐτοῦ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύνολον ὑπὸ διττὴν ἔννοιαν. 1) Ἢ διότι εἶναι σύνολον ἕνεκα ὅλων τῶν μερῶν αὐτοῦ, καὶ εἶναι τοῦτο σύνολον ἐξ ὅλων τῶν μερῶν του (στοιχείων του), καὶ τὸ ὁποῖον σύνολον ἐλαττοῦται, ὅταν ἀπουσιάζῃ τούτου ὁ,τιδήποτε μέρος. 2) Ἢ διότι ὑπάρχει σύνολον εἰς ἕκαστον τῶν μερῶν του (στοιχείων του) θεωρουμένου τοῦ μέρους ὡς γεγονότος κατὰ μέθεξιν τοῦ συνόλου. Πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον (ἡ μέθεξις) κάμνει τὸ μέρος (στοιχεῖον) νὰ εἶναι μερικὸν σύνολον (ὑποσύνολον). Καθ' ὕπαρξιν μὲν λοιπὸν ὑπάρχει σύνολον ἀπαρτιζόμενον ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ· κατ' αἰτίαν δὲ ὑπάρχει σύνολον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν μερῶν του (στοιχείων του)· κατὰ μέθεξιν δὲ ὑπάρχει σύνολον εἰς ἓν μέρος (στοιχεῖον). Διότι καὶ τοῦτο (τὸ σύνολον ἑνὸς στοιχείου) εἶναι σύνολον κατὰ τὴν ἐσχάτην ὑπόστασιν, καθ' ὅσον τὸ στοιχεῖον σύνολον ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων

[1] Εἰς τὸν Φίληβον, τὸν ὁποῖον μνημονεύει ὁ G. Cantor ἀναφέρονται τέσσαρες ἀρχαὶ τῶν ὄντων: τὸ ἄπειρον, τὸ πέρας ἔχον, τὸ ἐκ τούτων μεικτόν, καὶ ἡ αἰτία τῆς μείξεως τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ πέρας ἔχοντος (23 c . . . 30 α).

ἀποτελουμένου συνόλου, ὅταν τὸ στοιχεῖον τοῦτο δὲν εἶναι τὸ τυχὸν μέρος, ἀλλὰ δύναται νὰ ἀφομοιωθῇ πρὸς τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου καὶ τὰ στοιχεῖα εἶναι σύνολα.

Πρότασις 68.

Πᾶν τὸ ἓν τῷ μέρει ὅλον, μέρος ἐστὶ τοῦ ἐκ τῶν μερῶν ὅλου. Εἰ γὰρ μέρος ἐστίν, ὅλου τινός ἐστι μέρος, καὶ ἤτοι τοῦ ἐν αὐτῷ ὅλου, καθὸ λέγεται ἐν τῷ μέρει ὅλον. ἀλλ' οὕτως αὐτὸ ἑαυτοῦ μέρος, καὶ ἴσον τῷ ὅλῳ τὸ μέρος ἔσται καὶ ταὐτὸν ἑκάτερον· ἢ ἄλλου τινὸς ὅλου. Καὶ εἰ ἄλλου, ἢ μόνον ἐστὶν ἐκείνου μέρος καὶ οὕτως οὐδὲν ἂν πάλιν τοῦ ὅλου διαφέρει, ἑνὸς ὄντος ἓν ὂν μέρος, ἢ μεθ' ἑτέρου·

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς στοιχείου εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων συνόλου. Διότι, ἐὰν τὸ σύνολον εἶναι ἓν στοιχεῖον, εἶναι στοιχεῖον συνόλου τινός, καὶ ἢ εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἐν τῷ στοιχείῳ αὐτῷ συνόλου, καθόσον λέγεται σύνολον στοιχείου, ἀλλὰ τοιουτοτρόπως αὐτὸ εἶναι μέρος τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ θὰ εἶναι τὸ μέρος ἴσον πρὸς τὸ ὅλον, καὶ ἕκαστον ἐκ τῶν δύο (τὸ στοιχεῖον ὡς στοιχεῖον καὶ τὸ στοιχεῖον ὡς σύνολον) εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· ἢ εἶναι στοιχεῖον ἄλλου τινὸς συνόλου. Καὶ ἐὰν εἶναι στοιχεῖον ἄλλου τινὸς συνόλου (θὰ συμβαίνωσι δύο τινὰ) ἢ θὰ εἶναι τοῦτο τὸ μόνον στοιχεῖον ἐκείνου τοῦ συνόλου, καὶ τοιουτοτρόπως οὐδόλως θὰ διαφέρῃ πάλιν τοῦ συνόλου, διότι ὑπάρχει ἓν μέρος (στοιχεῖον) ὑπάρχοντος ἑνός, ἢ θὰ ἀποτελῇ σύνολον μὲ ἄλλο στοιχεῖον.

Πρότασις 69.

Πᾶν τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον μετέχει τῆς πρὸ τῶν μερῶν ὁλότητος.

[Ἑρμηνεία. Πᾶν τὸ ἐκ τῶν στοιχείων ἀποτελούμενον σύνολον μετέχει τοῦ συνόλου τοῦ ὑπάρχοντος πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων].

SUMMARY

George Cantor, in his treatise «Principles of a general theory of sets»[1], p. 43 (Leipzig 1883), mentions the following: I consider variety or set every multitude which is unterstood as a whole i.e., every summary of determined elements which, on the basis of a certain law, can be connected to a single set, and thus I believe that I define something which is relative to the platonic thing or idea and to that which, in this dialoge Philebus, Plato names as mixed» (μεικτόν).

Plato discusses ideas and things in several of his dialoges. Parmenides is one of them (129-135). In this dialoge, among various important mathematical meanings, we find several general principles of a theory of sets. Out of this theory we only quote certain elements, such as the definition of the part (element) and the whole (set):

[1] Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.

«The part surely is part of a whole. Yes. And what is the whole? Is not a whole of which no part is wanting?» (137 c).

«Then the part is a part, not of the many nor of all, but of a single form and a single concept which we call a whole, a perfect unity created out of all; this it is of which the part is a part» (157 d-e).

We meet a very interesting development of the platonic theory of sets in Proclus commentaries on Parmenides and in his treatise under the title «Theological Elementalism» [*Πρόκλου Διαδόχου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική*, Fridericus Creuzer, 1822]. It comprizes 211 Propositions. It should be noted that the Bishop of Methoni Nicolaus by his treatise «Development of Theological Elementalism of the Proclus» [*Νικολάου Ἐπισκόπου Μεθώνης*, Ἀνάπτυξις τῆς θεολογικῆς στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ, J. Th. Voemel, 1822], attempts to refute, which 198 Propositions, the theological Elementalism of Proclus. This treatise can be also considered as a contribution to interpretation of the platonic theory of sets.

We quote here 4 out of the 211 propositions of Proclus (66, 67, 68, 69) trough which, we think, that the platonic theory of sets is considerably interpretated.

Proposition 66.

All things are in relation to themselves, either sets or elements· or are the same elements, or other elements.

Proposition 67.

Every set, either it exists prior to the existence of its elements or it exists own elements· or it exists in each of its elements. Because we either concider the cause for which the thing of each element was created and then the set of things made in consequence of the cause of the creation is called set existing before the existence of the elements, or we call set someting, due to the elements which participate in it. The last set is under stood under two meanings as under: 1) Either because it is set owing to its all elements and it is set from all of its elements, and which set is being decreated, when any of its elements is wanting. 2) Or because a set exists in each of its elements, the element being considered as fact participating in the set. The participation constitutes the part to be a subset. Therefore a) There exists a set consisting of its own elements b) There exists a set a priori, i. e. before the existence of its elements c) There exists a set by participation of a single element. Because this set of one element is a set in the last substance, so far as the element «set» has the properties of the set being of its elements, when this element is not the accidental part, but it can assimilated to the set, of which the elements are also sets.

Proposition 68.

Every set consisting of a single element is an element of the set which consists of the elements. Because if the set is simply an element it is then an element of a certain set and 1) Either it is an element of the set, being set of one only element, because it is said to be a set of the element, but thus it is element of itself, and the part should be equal to the whole, and each of the two (i. e. the element as an element and the element as a whole) is the same thing. 2) Or it is an element of some other set. And if it is an element of some other set then there will be two cases. First either it will be the only element of that set, and thus it will not differ from the set, because there exists an element of an existing one, or second the element will constitute a set with an other element.

Proposition 69.

Every set which consists of elements participates in the set, which exists before the existence of the elements.

EVANGELOS STAMATIS

ON BOOK X OF EYCLID'S ELEMENTS

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ ΙΑ'—ΤΕΥΧΟΣ Β' 1959

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & Σ[ΙΑΣ]
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

EVANGELOS STAMATIS *

ON BOOK X OF EYCLID'S ELEMENTS

A' INTRODUCTION

A1. Book X of Euclid's Elements was regarded and really is the most difficult Book of the Elements. The Dutch mathematician Simon Stevin (1548 - 1620) named it as «the cross of martyrdom of the mathematicians», while the French mathematician Jean Montucla (1725 - 1799) doubts, whether in his epoch would be any geometrician who would dare to follow Euclid in the dark dedale of his Book X[1]. Most of the modern interpreters arrive at the conclusion that the purpose of this Book is to solve certain type of biquadratic and quadratic equations[2]. Cl. Thaer believes that the purpose of the Book X is the thorough investigation of incommensurable straight lines which gives a solid basis to the theory of regular polyhedrons[3].

It is true that out of the twelve irrational straight lines of Book X (theorems 36 - 41, 73 - 78) the six former are sums of the positive roots of equal in number of biquadratic equations, while the six latter are differences of the positive roots of the same biquatratic equations. It is also true that the irrational straight lines of theorems 48 - 53 and 85 - 90 are the six former sums of the positive roots of six quadratic equations, while the six latter differences of the roots of the same equations. This observation does not necessarily mean that the purpose of book X is to solve certain type of equations. Book VI of Euclid's Elements serves to solve the most difficult type of quadratic equations—the elleptical equations (VI, 28). The solution of the biquadratic equations met in Book X is mainly based on the solution of quadratic equations of a simplest type.

Besides in Book XIII of Elements (th. 6, 11, 16, 17) the following propositions are proved.

* Proceedings of the Akademie of Athens 32 (1957), 251 - 266).

1 Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 444 publ. by Le Belles Lettres, Paris 1930.

2 Thomas Heath, A History of Greek Mathematics I, p. 402, Oxford 1921.

3 Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, p. 103, Leipzig 1936.

1. If a commensurable straight line is divided in extreme and mean ratio each of the parts of the straight line is an apotome (X, 73).

2. If the diameter of a circle is rational the side of the inscribed regular pentagon is minor (X, 76).

3. The side of a regular icosahedron is minor (X, 76).

4. The side of a regular dodecahedron is an apotome (X, 73).

Even these do not lead to the conclusion that the purpose of Book X is the investigation of the incommensurable straight lines, granding a basic step to the theory of regular polyhedrons, because out of the relative theo rems the 6th and 11th are preparatory for the proof of the second part of theorems 16 and 17. The theory of regular polyhedrons would not be influenced even if the second part of theorems 16 and 17 missed.

A2. To my opinion the purpose of Bock X of Euclid's Elements is to demonstrate the symmetry which exists in the construction of a right triangle, when the most simple irrational straight lines are used. From the interpretation of the most important theorems of Book X, quoted hereunder, the point of view supported by me is quite right.

B′

We begin with the definition of certain terms.

1. «Commensurable» magnitudes are these having the same measure; «incommensurable» magnitudes are those having no common measure.

2. Two commensurable magnitudes have to one another the ratio of one number to another. The incommensurable magnitudes do not hane to one another the ratio of one number to another (X, 6 7).

3. A straight line regarded as measure is rational.

4. Straight lines are «commensurable in length» or «incommensurable in length» when they are considered linearly.

5. Straight lines are «commensurable in square» or «incommensurable insquare» when the squares of them are commensurable or incommensurable.

6. Every straight line commensurable in length to the assigned ra tional is rational. Let a, b be two integers, non square, and ϱ a rational straight line. The fourth proportional of α, β, ϱ, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is commensurable in length to the assigned rational ϱ and as a result $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is rational.

7. The mean proportional of ϱ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ is incom-

mensurable in length both to ϱ and to $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. But the squares ϱ^2 and $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ or $\varrho^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$ and $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ are commensurable to each other. So the straight lines ϱ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ or $\varrho\left(\frac{\beta}{a}\right)$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ are rational, commensurable only in square.

8. The mean proportional of ϱ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is called medial. [or the mean proportional of $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$]. Medial is therefore defined as a monomial containing the fourth rout of a factor of a nonsquare number.

9. The rectangle of the shape $\varrho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ or $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ is called medial. Therefore medial rectangle is called the monomial containing the square root of a factor of a nonsquare number. The side of the square equivalent to the regarded rectangle is medial, and this square is also medial.

10. A straight line is called irrational when its square is incommensurable to the square of a straight line assigned as rational.

The following ten theorems numbered 10, 27, 28 29, 30, 31, 32, 33, 34 are preparatory for the whole theory of Book X.

10.

Construction of the first right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height the rational straight line ϱ is taken. As the second part we use the fourth proportional of the nonsquare integers a, b, ϱ, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. The ϱ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, the height of the triangle, are rational straight lines, commensurable in square only (and incommensurable in length).

Gonstruction of the second triangle. As the first part of fhe hypotenuse the ϱ is again taken. As the second part we use the height of the former triangle, the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. The height of the second triangle, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is medial. The ϱ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ are incommensurable in both length and square, that is their squares are incommensurable.

To find two medials commensurable in square only, the product of which should be rational. The first medial is found in the second case of theorem 10, and is $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$. To find the second medial is constructed a right triangle which has as the first part of the hypotenuse intersected by the height the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ and as the second part the height of the triangle of the first case of th. 10, that is $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. The mean proportional of these parts, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ is the requiered second medial. The squares of the medials, the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}$ and the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/2}$ are commensurable. The product of the medials, the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is rational.

28.

To find two medials commensurable in square only, the product of which preliminary three rational numbers, commensurable in square only, are found. There is taken the non square integers, the α, β, γ δ and a rational straight line, the ϱ. Construction of the first right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height is taken the ϱ and as a second part the fourth proportional of a, b, ϱ the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. The height of the triangle is the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Construction of the second right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height is taken the ϱ and as the second part the fourth proportional of γ, δ, ϱ, the $\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$. The height of the triangle is the $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. The three straight lines: ϱ, $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ are rational, commensurable in square only.

Construction of the required first medial.

There is constructed a right triangle which has as parts of the hypotenuse intersected by the height the $\varrho(=A)$ and the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}(=B)$. The height of the triangle $\Delta=\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is the first medial.

Gonstruction of the required second medial.

We find the fourth proportional of the

$\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ the $E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}:\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$.

E is the second medial.

Lemma 1.

To find two square numbers the sum of which should be a square number. It is proved that these will be of the form:

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \quad \text{or} \quad \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2 \quad (1),$$

where $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν even or odd and $\varkappa, \xi, \sigma, \tau$ integers. According to Book IX, th. 1 $\mu\nu$ is square. But if is not $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, then $\mu\nu$ is not a square. In this case we take:

$$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu \text{ non square number, or}$$

$$\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\varkappa\xi\sigma\tau$$

non square number. To simplify we substitute $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$ where ϑ non square number. The formulas (1) give all the integer solutions of the equation of Diophantus $x^2+y^2=z^2$.

Lemma 2.

To find two square nunbers the sum of which should not be a square number, It is proved that:

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda \quad \text{or} \quad \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$$

non square, where $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν even or odd. To simplify we substitute $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, λ non square number.

29.

The rational straight line $AB(=\varrho)$ is given as the hypotenuse of a right triangle. To construct the triangle to have the perpendicular side AZ rational, but only AB^2, AZ^2 commeusurable (consequently AB, AZ incommensurable in length) and the hypotenuse AB and the other perpendicular side $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ commensurable in length.

His proved that

$$AZ=\frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\varphi}, \quad ZB=\frac{\varrho\omega}{\varphi}, \quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta \text{ non square number}].$$

30.

The rational straight line $AB(=\varrho)$ is given as the hypotenuse of a right triangle. To construct the triangle to have the perpendicular side AZ rational, but only AB^2, AZ^2 commensurable (consequently AB, AZ incommensurable in length) and the hypotenuse AB and the other perpendicular side $BZ=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ incommensurable in length. It is proved that $AZ=\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB=\frac{\varrho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ non square number].

31. 1.

To construct a right triangle to have the hypotenuse Γ and one perpendicular side Δ medial, but only Γ^2, Δ^2 commensurable (consequently Γ, Δ incommensurable in length), the product $\Gamma\times\Delta$ rational and the hypotenuse Γ and the other perpendicular $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ commensurable in length.

It is proved that

$$\Gamma=\frac{\varrho\,\vartheta^{1/4}}{\varphi^{1/2}},\quad \Delta=\frac{\varrho\,\vartheta^{3/4}}{\varphi^{3/2}},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta,\text{ non square number}].$$

31. 2.

As the precedent, but to have the hypotenuse Γ and $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ incommensurable in length.

32. 1.

To construct a right triangle to have the hypotenuse Δ and the one perpendicular side E medial, but only Δ^2, E^2 commensurable (consequently Δ, E incommensurable in length), the product $\Delta\times E$ should be medial and Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ should be commensurable in length.

It is proved that

$$\Delta=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta,\ \gamma,\ \delta\text{ non squares numbers}].$$

32. 2.

As the precedent, but to have Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ incommensurable in length. It is proved that:

$$\Delta=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda,\ \gamma,\ \delta\text{ non squares numbers}].$$

33.

To construct a right triangle having perpendicular sides the AZ, ZB so that the AZ^2, ZB^2 be incommensurable, AZ^2+ZB^2 rational and $AZ\times ZB$ medial. It is proved that:

$$AZ = \frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad ZB = \frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 = \lambda \text{ non}$$

square number].

34.

To construct a right triangle having perpendicular sides the $A\Delta$, ΔB, so that $A\Delta^2$, ΔB^2 be incommensurable, $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medial and $A\Delta \times \Delta B$ rational. It is proved that:

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad \Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 = \lambda,$$

nonsquare number].

35.

To construct a right triangle having perpendicular sides the $A\Delta$, ΔB so that $A\Delta^2$, ΔB^2 be incommensurable, $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medial, $A\Delta \times \Delta B$ medial and incommensurable to $A\Delta^2 + \Delta B^2$. It is proved that:

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad \Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 = \lambda,$$

γ, δ nonsquare number].

B. 2. On the basis of the previous theorems proved there are constructed twelve irrational straight lines. Each of fhe former six straight lines is the sum of two monomials. (th. 36 – 44). Each of the latter six straight lines is the difference of the same two monomials (apotomes, theor. 73—78). These straight lines are for the construction of twelve right triangles. More simple irrational straight lines is not possible to be constructed. These are:

1. Binomial / Apotome $\qquad \varrho \pm \varrho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $\qquad$ 36 / 73

   The monomials are taken from the first case of theorem 10 [It can be $\varrho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \pm \varrho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$].

2. First Bimedial / First apotome of a medial $\qquad \varrho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \varrho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ $\qquad$ 37 / 74

   The monomials are taken from th. 27.

3. Second bimedial / Second apotome of a medial $\qquad \varrho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \varrho \frac{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ $\qquad$ 38 / 75

   The monomials are taken from th 28.

4. Major / Minor $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 39 / 76

The monomials are taken from th. 33.

5. Side of rational plus a medial area / That which 'produces' with a rational area a medial whole $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 40 / 77

The monomials are taken from th. 34.

6. Side of the sum of two medial areas / That which 'produces' with a medial area a medial area $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm$

$\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 41 / 78

The monomials are taken from th. 35.

Second and third definitons. (the second are referred to the sums, while the third to the differences).

Let us consider a rational straight line ϱ, and the hypotenuse of a right triangle A and the one perpendicular side B. The straight lines A, B should be rational but only A^2, B^2 commensurable (commensurable only in sqnare and therefore incommensurable in length). Let Γ be the other perpendicular side of the triangle.

1) If the straight lines A, Γ are commensurable in length there are distinguished three cases of the construction of the sum A+B and three cases of the construction of the difference (apotome) A—B, characterized by the relation of the symmetry or no symmetry of A and B to the taken rational ϱ.

I. A and $\sqrt{A^2-B^2}$ are commensurable in length (A, B incommensurable in length).

1. If A, ϱ are commensurable in length (B, ϱ incommensurable in length),
   let the binomial $\Delta=A+B$ be called first binomial
   let the difference $\Delta=A-B$ be called first apotome.
2. If B, ϱ are commensurable in length (A, ϱ incommensurable in length),
   let the binomial $\Delta=A+B$ be called second bionomial
   let the difference $\Delta=A-B$ be called second apotome
3. If neither A nor B are commensurable in length with ϱ,
   let the binomial $\Delta=A+B$ be called third binomial
   let the difference $\Delta=\Delta-B$ be called third apotome

2) If the straight lines A, Γ are incommensurable in length there are distinguished another three cases of the construction of the sum A+B and another three cases of the construction of the difference (apotome)

A—B, which are characterized by the relation of symmetry or no symmetry of the A and B to the taken rational ϱ.

II. A and $\sqrt{A^2-B^2}$ are incommensurable in length (A, B incommensurable in length)

4. If A, ϱ are commensurable in length (B, ϱ incommensurable in length).
let the binomial $\Delta=A+B$ be called fourth binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called fourth apotome.

5. If B, ϱ are commensurable in length (A, ϱ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta=A+B$ be called fifth binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called fifth apotome.

6 If neither A nor B are commensurable in length with ϱ,
let the binomial $\Delta=A+B$ be called sixth binomial
let the binomial $\Delta=A-B$ be called sixth apotome.

constuction of the six binomials and the six apotomes (12 more irrational straight lines).

			th.
1	First Binomial First Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$	48 85
2.	Second Binomial Second Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}$	49 86
3.	Third Binomial Third Apotome	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \pm \varrho\frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$	50 87

In the three above cases $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$, γ, δ, ε non squares numbers.

4.	Fourth Binomial Fourth Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$	51 88
5.	Fifth Binomial Fifth Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}$	52 89
6.	Sixth Binomial Sixth Apotome	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \varrho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$	53 90

In the three above cases $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ, ε non squares numbers.

By the 24 irrational straight lines found we construct 24 right triangles. The construction of these triangles is the main object of the contents of Book X of Euclid's Elements. In constructing these triangles, the symmetry and harmony which exists is evident, whenever it is possible to use the simplest irrational straight lines.

There can be noted that the number 24 is the product 4×6 viz. of the number expressing the tetractys of Pythagoras and of six, which is the first perftect number.

We quote the construction of these 24 right triangles in the following four tables:

TABLE I.

Theorem	GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — first part rational	GIVEN: second part irrational	GIVEN: consequently the height	PROVED: The height is irrational of the form:	
54	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ first binomial th. 48.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, i. e. of the binomial of th.	36.
55	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ second binomial 49.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first bimedial	37.
56	ρ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third binomial 50.	$\rho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second bimedial	38.
57	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth binomial 51.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the major	39.
58	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth binomial 52.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of the side of rational plus a medial area	40.
59	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth binomial 53.	$\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the side of the sum of two medial areas	41.

[We here note six transformations of double radicals out of sums]

TABLE II

Theorem	GIVEN: The height of the right triangle, the corresponding to the hypotenuse — irrational	GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height — rational	PROVED: The other part of the hypotenuse has the form
60	$\rho+\rho\cdot\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ binomial of the theorem 36.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first binomial, th. 48.
61	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ first bimedial 37.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second binomial 49.
62	$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second bimedial 38.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third binomial 50.
63	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ major 39.	ρ	$\rho+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth binomial 51.
64	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ side of a rational plus a medial area 40.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth binomial 52.
65	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ side of the sum of two medial areas 41.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth binomial 53.

TABLE III.

Theorem	GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — First part rational	second part irrational	consequently the height	PROVED: the height is irrational of the form:
91	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma} - \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ first apotome th. 85.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, i. e. of the apotome of th. 73.
92	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - \rho\frac{\delta}{\gamma}$ second apotome 86.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first apotome of a medial 74.
93	ρ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third apotome 87.	$\rho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second apotome of a medial 75.
94	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma} - \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth apotome 88.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the minor 76.
95	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \rho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth apotome 89.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of that which 'produces' with a rational area a medial whole 77.
96	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth apotome 90.	$\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of that which 'produces' with a medial area a medial whole 78.

[We here note six transformations of double radicals aut of differences].

Theorem	GIVEN		PROVED
	The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse irrational	One part of the hypotenuse intersected by the height rational	The other part of the hypotenuse has the form:
97	$\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ Apotome of th. 73.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first apotome of th. 85.
98	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ First apotome of a medial, th. 74.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second apotome, 86.
99	$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second apotome of a medial, th. 75.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third apotome 87.
100	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ minor, th. 76.	ρ	$\rho - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth apotome 88.
101	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a rational area a medial whole th. 77.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth apotome 89.
102	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a medial area a medial whole th. 78.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth apotome 90.

B3. Theorems 112 and its reciprocal 113 are considered genuine. These constitute direct continuation' and are therefore inseparable part of Book X of Elements. We give a picture of these in the following table. In each of these theorems there are constructed six right triangles. We also consider genuine the theorems 114, 115.

	GIVEN		PROVED
	The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse	The first part of the hypotenuse intersected by the height is irrational of the form	The other part of the hypotenuse is irrational of the form
Th. 112	rational	of the first binomial th. 48	of the first apotome th. 85
	»	» » second binomial 49	» » second apotome 86
	»	» » third binomial 50	» » third apotome 87
	»	» » fourth binomial 51	» » fourth apotome 88
	»	» » fifth binomial 52	» » fifth apotome 89
	»	» » sixth binomial 53	» » sixth apotome 90
Th. 113	»	of the first apotome th. 85	of the first binomial th. 48
	»	» » second apotome 86	» » second binomial 49
	»	« » third apotome 87	» » third binomial 50
	»	» » fourth apotome 88	» » fourth binomial 51
	»	» » fifth apotome 89	» » fifth binomial 52
	»	» » sixth apotome 90	» » sixth binomial 53

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1959: ΤΟΜΟΣ 34^{ος}

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ.

EVANG. STAMATIS: ON THE PRINCIPLE OF INERTIA.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1959

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1959: ΤΟΜΟΣ 34ος

ΑΝΑΤΥΠΟΝ
ΣΕΛ. 272 - 273

Περὶ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας,

ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** *.

Α΄. Ὁ Ἰσαὰκ Νεύτων εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Philosophiae naturalis principia mathematica διαλαμβάνει ἐν ἀρχῇ τρία ἀξιώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον, τὸ λεγόμενον ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει ὡς ἑξῆς:

LEX. 1.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare. [Ἑρμηνεία: Πᾶν σῶμα διατηρεῖ τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἐξαναγκάζεται ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἰς μεταβολὴν καταστάσεως].

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ Νεύτων διαχωρίζει τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας εἰς δύο μέρη. Τὸ πρῶτον μέρος ἀφορᾷ εἰς σώματα εὑρισκόμενα ἐν ἠρεμίᾳ, ἐν ᾧ τὸ δεύτερον ἀφορᾷ εἰς σώματα εὑρισκόμενα ἐν εὐθυγράμμῳ ἰσοταχεῖ κινήσει.

Τινὲς τῶν ἐρευνητῶν τῆς ἱστορίας τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, θεωροῦντες, πιθανῶς, ὅτι τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀξιώματος εἶναι τὸ κυριώτερον, παρατηροῦσιν ὅτι τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει διατυπωθῇ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τῆς Φυσικῆς ἀκροάσεως, Δ8 215α, ἔνθα ἀναγράφεται τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀξιώματος, ὅπερ ἔχει ὡς ἑξῆς:

> Ἔτι οὐδεὶς ἂν ἔχοι εἰπεῖν διατὶ κινηθὲν στήσεταί που
> τὶ γὰρ μᾶλλον ἐνταῦθα ἢ ἐνταῦθα; ὥστε ἢ ἠρεμήσει
> ἢ εἰς ἄπειρον ἀνάγκη φέρεσθαι, ἐὰν μή τι ἐμποδίσῃ κρεῖττον.

---

* **EVANG. STAMATIS, On the principle of inertia.**

['Ερμηνεία: Προσέτι οὐδεὶς θὰ ἠδύνατο νὰ εἴπῃ διατὶ κινηθὲν σῶμα θὰ σταματήσῃ κάπου· διότι διατὶ νὰ σταματήσῃ ἐδῶ καὶ ὄχι ἐκεῖ; ὥστε ἢ θὰ ἠρεμήσῃ ἢ κατ' ἀνάγκην θὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον, ἐὰν δὲν τὸ ἐμποδίσῃ ἰσχυροτέρα τῆς κινούσης αὐτὸ δύναμις].

Β'. Ἀλλὰ καὶ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἀξιώματος τὸ συναντῶμεν διατετυπωμένον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Περὶ Οὐρανοῦ Β13 295α, ἔνθα ἀναγράφεται·

Εἰ δὲ μὴ ἔστι μήτε φύσει μήτε βίᾳ (κίνησις τῶν σωμάτων),
ὅλως οὐδὲν κινηθήσεται.

['Ερμηνεία: Ἐὰν δὲ δὲν ὑπάρχῃ κίνησις τῶν σωμάτων μήτε ἐκ φύσεως[1] μήτε ἐξ ἐπιδράσεως δυνάμεως, οὐδὲν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ κινηθῇ].

Ὅθεν τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει ἐν τῷ συνόλῳ του διατυπωθῆ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ πρέπει νὰ φέρηται ὑπὸ τὸ ὄνομα τούτου καὶ οὐχὶ τοῦ Νεύτωνος.

SUMMARY

A. Isaac Newton in his treatise Philosophiae naturalis principia mathematica, states thre principles, the first of which, the so called principle of inertia, is as under:

Every body continues in its state of rest or of uniform motion in a straight line, exept in so far as it is compelled by impressed forces to change that state.

It is obvious that Isaac Newton divides the principle of inertia into two parts. The firts part concerns bodies at rest, while the second concerns bodies in uniform motion in a straight line.

Some researchers of the history of Natural Scienes considering, perhaps, that the second part of the principle is the more important note that the principle of inertia has been stated by Aristotle in his treatise Physics D8 215a, where it is written:

Nor (if it did move) could a reason be assigned why the projectile should ever stop - for why here more than these? It must therfore either not move at all, or continue its movement at infinitum, unless some stronger force impedes it

B. Besides, the first part of the principle is stated by Aristotle im his treatise De Celo B 13 295a as follows:

If there is no motion in the bodies due either to nature or to the action of a force none can move.

Hence the principle of inertia has been first in its whole expressed by Aristotle and must bear his name rather than Newtons.

[1] Ὅπως εἶναι ἡ κίνησις συνεπείᾳ τῆς βαρύτητος.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

ΟΙ ΠΡΟΣΩΚΡΑΤΙΚΟΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΙ

ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ

Ο ΜΕΓΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΣ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗ
Δεκέμβρ.-Ἰανουάρ. Τεῦχος 116

ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ: ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΥ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1959

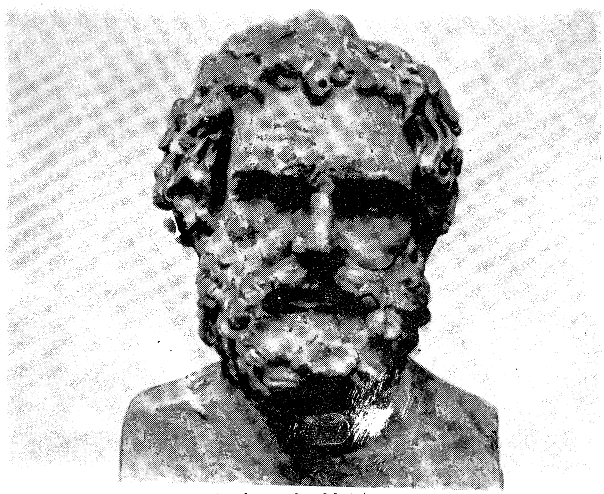
Οἱ προσωκρατικοὶ φιλόσοφοι

ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ

Ο ΜΕΓΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΣ

Ὑπὸ ***ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ***

Ὁ Θαλῆς, εἷς ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, ἐγεννήθη εἰς τὴν Ἑλληνικὴν πόλιν τῆς Μικρᾶς Ἀσίας Μίλητον κατὰ τὸ πρῶτον ἔτος τῆς τριακοστῆς πέμπτης Ὀλυμπιάδος (περὶ τὸ 640 π.Χ.) ἀπέθανε δὲ αὐτόθι κατὰ τὴν πεντηκοστὴν ὀγδόην Ὀλυμπιάδα (περὶ τὸ 546 π.Χ.). Κατὰ τὸν ἱστορικὸν καὶ βιογράφον Σωσικράτη (πρῶτος αἰὼν π.Χ.), ὁ Θαλῆς ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 98 ἐτῶν, ἐν ᾧ



Θαλῆς ὁ Μιλήσιος

κατ' ἄλλην πληροφορίαν ἀναγραφομένην ὑπὸ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου (4ος αἰὼν) ὁ Θαλῆς ἦτο ἡλικίας 78 ἐτῶν, ὅταν ἀπέθανε. Ἡ πατρὶς τοῦ Θαλοῦ Μίλητος ἦτο ἀρχαιοτάτη πόλις μνημονευομένη καὶ ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου (Ἰλ. Β. 868), ὑπέστη ὅμως κατὰ τὴν μακραίωνα αὐτῆς ἱστορίαν πολλὰς καταστροφάς. Μετὰ τὴν λῆξιν τοῦ Τρωικοῦ πολέμου ἀπῳκίσθη ἡ Μίλητος ὑπὸ τῶν Ἀθηναίων (περὶ τὸ 900 π.Χ.). Κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον περίπου ἱδρύθησαν καὶ αἱ λοιπαὶ Ἰωνικαὶ πόλεις ἐν Μικρᾷ Ἀσίᾳ καὶ βορειότερον τούτων, μὲ νοτιωτέραν τὴν Σμύρνην, ἱδρύθησαν αἱ Αἰολικαὶ πόλεις (ὑπὸ τῶν Θηβαίων, τῶν Ὀρχομενίων κλπ). Ὀλίγον βραδύτερον ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως τῆς Αἰολικῆς Σμύρνης οἱ Ἴωνες ἄποικοι κατέστησαν αὐτὴν Ἰωνικήν. Ἡ Μίλητος ἀνεπτύχθη ταχέως καὶ ἐξειλίχθη εἰς σπουδαιότατον πνευματικὸν καὶ ἐμπορικὸν κέντρον καὶ εἰς ἰσχυροτάτην ναυτικὴν δύναμιν. Αἱ σπουδαιότεραι Ἑλληνικαὶ ἀποικίαι τοῦ Εὐξείνου Πόντου, ἰδίως εἰς τὴν νότιον Ῥωσσίαν προέρχονται ἐκ τῆς Μιλήτου (7ος αἰὼν π.Χ.). Ὅτι ἡ Μίλητος ἦτο ἀποικία τῶν Ἀθηναίων πληροφορούμεθα καὶ ἐξ ἐπιστολῆς τοῦ Θαλοῦ πρὸς τὸν φίλον αὐτοῦ Σόλωνα περισωθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου. Κατὰ ταύτην ὁ Θαλῆς πληροφορηθεὶς ὅτι ὁ Σόλων ἐπρόκειτο νὰ ἐπισκεφθῇ τὰς ἐν Μ. Ἀσίᾳ Ἀθηναϊκὰς ἀποικίας καλεῖ αὐτὸν ὅπως τὸν φιλοξενήσῃ εἰς τὴν Μίλητον «τὴν ἀποικίαν ὑμῶν», ὥς γράφει.

Κατὰ τὸν Διογένη τὸν Λαέρτιον «Ἦν τοίνυν ὁ Θαλῆς, ὡς μὲν Ἡρόδοτος καὶ Δοῦρις καὶ Δημόκριτός φασι, πατρὸς μὲν Ἐξαμύου, μητρὸς δὲ Κλεοβουλίνης, ἐκ τῶν Θηλιδῶν, οἵ εἰσι Φοίνικες, εὐγενέστατοι τῶν ἀπὸ Κάδμου καὶ Ἀγήνορος. Ἦν δὲ τῶν ἑπτὰ σοφῶν καθὰ καὶ Πλάτων φησί». [Ἑρμηνεία: Εἶχε λοιπὸν ὁ Θαλῆς, ὥς μὲν λέγουσιν ὁ Ἡρόδοτος, ὁ Δοῦρις καὶ ὁ Δημόκριτος, πατέρα μὲν τὸν Ἐξάμυον, μητέρα δὲ τὴν Κλεοβουλίνην, οἱ ὁποῖοι προέρχονται ἐκ τοῦ γένους τῶν Θηλιδῶν, οἵτινες εἶναι Φοίνικες, εὐγενέστατοι ἐκ τῶν ἀπογόνων τοῦ Κάδμου καὶ τοῦ Ἀγήνορος. Ἦτο δὲ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν καθὼς λέγει καὶ ὁ Πλάτων]. Ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ὁ Θαλῆς ἀνῆκεν εἰς εὐγενέστατον γένος προερχόμενον ἐκ Θηβῶν, τοῦ ὁποίου οἱ ἀπώτατοι πρόγονοι ἕλκουσι τὴν καταγωγήν των ἐκ τοῦ Κάδμου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ παράδοσις ἔλεγεν ὅτι ὁ Κάδμος εἶναι Φοῖνιξ, διὰ τοῦτο καὶ ὁ Ἡρόδοτος γράφει περὶ τοῦ Θαλοῦ ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω εἰδήσεως τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου, «*τὸ ἀνέκαθεν γένος ἐόντος Φοίνικος*» (Ι 170) ὅτι δηλ. οἱ ἀπώτατοι πρόγονοι τοῦ Θαλοῦ ἦσαν Φοίνικες. Ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος παρέχει ὅμως τὴν πληροφορίαν, ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν ἀρχαίων συγγραφέων συμφωνοῦσιν ὅτι ὁ Θαλῆς εἶναι ἰθαγενὴς Μιλήσιος καὶ γένους λαμπροῦ. Μὲ τὴν πληροφορίαν τοῦ Ἡροδότου περὶ φοινικικῆς καταγωγῆς τοῦ Θαλοῦ ἀσχολεῖται καὶ ὁ Πλούταρχος εἰς πραγματείαν αὐτοῦ εἰς ἣν καταφέρεται κατὰ τοῦ Ἡροδότου. Ἐκ τῆς πραγματείας ταύτης τοῦ Πλουτάρχου φαίνεται ὅτι οὗτος ἐθεώρει τὸν Θαλῆν ὡς καταγόμενον ἐκ Θηβῶν. Τὸν μῦθον περὶ ἱδρύσεως τῶν Θηβῶν ὑπὸ τοῦ Κάδμου καὶ τῆς φοινικικῆς καταγωγῆς τούτου ἀπαντῶμεν εἰς τὰς Φοινίσσας τοῦ Εὐριπίδου (στ. 638 κ.ἑ.), ὅπου γράφεται :

Κάδμος ἔμολε τάν δε γᾶν
Τύριος . . .

[Ἑρμ. Ὁ Κάδμος ὁ ἐκ Τύρου καταγόμενος ἦλθεν εἰς αὐτὴν ἐδῶ τὴν γῆν. . .]

Κατὰ τὸν Ἡρόδοτον (Ι) οἱ σύγχρονοί του λόγιοι Πέρσαι ἰσχυρίζονται ὅτι οἱ Φοίνικες κατῴκουν παλαιότατα τὰ περὶ τὴν Ἐρυθρὰν θάλασσαν παράλια καὶ ὅτι ἐκεῖθεν μετῴκησαν εἰς τὴν Φοινίκην (ἔνθα ἡ Τύρος καὶ ἡ Σιδών). Οὗτοι διεξῆγον διὰ τοῦ ἐμπορικοῦ ναυτικοῦ των τὸ ἐμπόριον τῶν Ἀσσυρίων καὶ Αἰγυπτίων πρὸς τοὺς Ἕλληνας. Ὅταν ποτε οἱ Φοίνικες ἔμποροι ἦλθον εἰς τὴν μεγαλυτέραν τότε πόλιν τῆς Ἑλλάδος, τὸ Ἄργος, ἀπήγαγον ἑκουσίως τὴν θυγατέρα Ἰὼ τοῦ βασιλέως τοῦ Ἄργους Ἰνάχου. Βραδύτερον οἱ Ἕλληνες, ὡς ἀντίποινα, ἀπήγαγον ἐκ Τύρου τὴν θυγατέρα τοῦ βασιλέως τῶν Φοινίκων Εὐρώπην. Οἱ Ἕλληνες οὗτοι ἦσαν Κρῆτες. Μετὰ τοῦτο οἱ Ἕλληνες δὲν ἔμειναν ἥσυχοι, ἀλλὰ ἥρπασαν τὴν Μήδειαν ἐκ τῆς Κολχίδος. Τὴν ἁρπαγὴν ταύτην ἐκδικούμενοι οἱ Ἀσιᾶται ἀπήγαγον τὴν Ἑλένην τοῦ Μενελάου διὰ τοῦ Πάριδος καὶ οὕτω προεκλήθη ὁ Τρωικὸς πόλεμος. Ἀντίποινα διὰ τὸν πόλεμον τοῦτον εἶναι οἱ Μηδικοὶ πόλεμοι. Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω εἰδήσεις τοῦ Ἡροδότου, ἰδίως ὡς πρὸς τὸν μῦθον τῆς Εὐρώπης, αἱ προερχόμεναι ἐκ τῶν Περσῶν, ἔρχονται εἰς σύγκρουσιν πρὸς τὴν ἄλλην ἐκδοχὴν περὶ ἁρπαγῆς τῆς Εὐρώπης ὑπὸ τοῦ Διός.

Ὅλαι αἱ νεώτεραι ἔρευναι καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Κάδμος δὲν ἦτο Φοῖνιξ. Τὸ ὄνομα Κάδμος ἐτυμολογεῖται ἤδη ἐκ τῆς λέξεως κάω, κεκασμένος=λαμπρός, ἰσχυρὸς (ἐτυμολογικὸν λεξικὸν Boisacq) καὶ οὐχί, ὡς παλαιότερον, ἐκ τῆς ἑβραϊκῆς λέξεως (σημιτικῆς, φοινικικῆς) καδέμ. Εἰς τὴν περὶ τὴν Μίλητον περιοχὴν τῆς Καρίας ὑπῆρχεν ὄρος ὀνομαζόμενον Κάδμος καὶ ἡ βορειότερον τῆς Μιλήτου κειμένη ἀποικία Πριήνη ὠνομάζετο Κάδμη, οἱ δὲ κάτοικοι αὐτῆς Καδμεῖοι. Εἰς τὴν χερσόνησον τῆς Μυκάλης ὑπῆρχε κατὰ τὴν ἀρχαιότητα κωμόπολις ὑπὸ τὸ ὄνομα Θῆβαι. Τὸ σπουδαῖον ὅμως εἶναι ὅτι βορειότερον τῆς Καρίας, παρὰ τὸν Ἑλλήσποντον, εἰς τὴν Τρωάδα, ὑπῆρχεν εἰς τοὺς πρόποδας τοῦ ὄρους Πλάκος πόλις ὑπὸ τὸ ὄνομα Θῆβαι, ἡ ὁποία ποιητικῶς ὠνομάζετο Ὑποπλακίη Θήβη. Οἱ περισσότεροι ἐρευνηταὶ παραδέχονται ὅτι ὁ Κάδμος δὲν προέρχεται ἐκ τῆς Τύρου, ἀλλὰ ἐκ τῆς περὶ τὴν Μίλητον περιοχῆς. Κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ Κάδμος εἶχε σχέσεις πρὸς τὸ ἐν Σαμοθράκῃ ἱερὸν τῶν Καβείρων. Ἐκεῖ ἐλατρεύοντο, ὡς γνωστόν, αἱ θεότητες Κάβειρος καὶ ὁ υἱὸς αὐτοῦ Κάδμιλος. Εἰς τὴν Ἀττικὴν οὐδὲν ἱερὸν τῶν Καβείρων ὑπῆρχε, ἐν ᾧ εἰς τὴν Βοιωτίαν ὑπῆρχον τρία. Ἕν, 6 χιλιόμετρα δυτικῶς τῶν Θηβῶν, ὅπου σήμερον διενεργοῦνται ἀνασκαφαὶ ὑπὸ Γερμανῶν ἀρχαιολόγων, ἄλλο εἰς τὴν θηβαϊκὴν παραλιακὴν πόλιν Ἀνθηδῶνα (ἐπὶ τοῦ Εὐβοϊκοῦ κόλπου, παρὰ τὸ σημερινὸν χωρίον Λουκίσια) καὶ ἕτερον εἰς τὴν Λάρυμναν (παρὰ τὸ βορειοδυτικῶς τῶν Θηβῶν σημερινὸν χωρίον Κόκκινο). Ἱερὰ τῶν Καβείρων ὑπῆρχον ἐκτὸς τῆς Βοιωτίας καὶ τῆς Σαμοθράκης, εἰς τὴν Μακεδονίαν, τὰς νήσους Ἴμβρον καὶ Λῆμνον, εἰς τὴν Φρυγίαν (ἀνατολικῶς τῆς Τρωάδος), εἰς τὴν Πελοπόννησον καὶ εἰς τὴν Σικελίαν Οὐδὲν στοιχεῖον ὑπάρχει ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ τεκμαίρηται ὅτι ἡ λατρεία τῶν Καβείρων εἰσήχθη εἰς τὴν Βοιωτίαν ἢ τὰς νήσους ἐκ τῆς Φρυγίας.

Πιθανῶς ἡ λατρεία αὕτη νὰ εἰσήχθη εἰς τὴν Μ. Ἀσίαν ἐκ τῆς Στερεᾶς Ἑλλάδος. Ἐὰν λάβῃ τις ὑπ' ὄψει τὴν ἐκ παραδόσεως πληροφορίαν ὅτι ὁ Κάδμος μετέβη εἰς τὴν Ἰλλυρίαν, ὅπου ἀπέκτησε καὶ υἱὸν ὀνομασθέντα Ἰλλυριὸν καὶ ὅτι εἰς τὴν Ἰλλυρίαν ἀπέθανε καὶ ἐτάφη ἄγεται εἰς τὸ λίαν πιθανὸν συμπέρασμα ὅτι οὗτος, ἐὰν δὲν εἶναι αὐτόχθων Βοιωτός, θὰ προέρχεται ἐκ τῆς περιοχῆς τῆς Ἰλλυρίας—Θεσσαλίας—Μακεδονίας—Θράκης. Διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ ἑρμηνεία, πῶς ὁ ἄγνωστος μεταξὺ ἀγνώστων Φοῖνιξ—Κάδμος θὰ διήρχετο ἐχθρικὰς ἢ τοὐλάχιστον μὴ φιλικὰς χώρας διὰ νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν Ἰλλυρίαν; Ἡ συνεχιζομένη ἔρευνα περὶ τῶν παλαιῶν κατοίκων τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος φέρει διαρκῶς νέα στοιχεῖα ἐκ τῶν ὁποίων ἐνισχύεται πολὺ ἡ θεωρία τοῦ Ἕλληνος, ἐκ Μεσσηνίας καταγομένου, στρατηγοῦ κ. Ξ. Λίβα, ὅτι οἱ κάτοικοι τοῦ περὶ τὸ Αἰγαῖον πέλαγος χώρου (Ἑλληνικῆς Χερσονήσου καὶ νήσων) εἶναι αὐτόχθονες.[1] Αἱ κατὰ τὸ θέρος τοῦ 1958 γενόμεναι ἀνασκαφαὶ εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Λαρίσσης (παρὰ τὴν Ὁμηρικὴν πόλιν Ἄργισσαν, σήμερον Κρεμμαγούλαν) παρὰ τοῦ ἐν Ἀ-

1. Ἴδε πραγματείαν τούτου ὑπὸ τὸν τίτλον Ἡ Αἰγηὶς κοιτὶς τῶν Ἀρίων καὶ τοῦ Ἑλληνισμοῦ, Ἀθῆναι 1956.

θήναις Γερμανικοῦ Ἀρχαιολογικοῦ Ἰνστιτούτου καὶ ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν καὶ καθοδήγησιν τοῦ Γιουγκοσλάβου Μιλόϊσιτς (Milojcic), καθηγητοῦ τῆς Ἀρχαιολογίας ἐν τῷ Γερμανικῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Ζάαρμπρύκεν (Saarbrücken), πιστοποιοῦσιν ὅτι ἡ περιοχὴ αὕτη κατῳκεῖτο πρὸ 100 περίπου χιλιάδων ἐτῶν. Σπόνδυλος Μαμμοὺθ εὑρεθεὶς ἐκεῖ ὑπενθυμίζει εἰς ἡμᾶς τὰ ἀπολιθώματα τοῦ Πικερμίου τῆς Ἀττικῆς καὶ ὅτι τὸ κλίμα τῆς Θεσσαλίας πρὸ ἑκατομμυρίων τινῶν ἐτῶν ἦτο θερμότερον τοῦ σημερινοῦ. Ἄλλα ἀρχαιολογικὰ εὑρήματα παρέχουσι τὸ ἐνδόσιμον ὅτι ὁ πολιτισμὸς τοῦ Ἑλληνικοῦ χώρου εἶναι πολὺ παλαιότερος τοῦ πολιτισμοῦ τῶν Σουμερίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων. Τὰ ἐκπληκτικὰ πορίσματα τῶν ἀρχαιολογικῶν ἐρευνῶν τοῦ κ. Μιλόϊσιτς, ὅστις ἐβασίσθη ἐπὶ προηγουμένων ἀνασκαφῶν τοῦ ἀειμνήστου ἀρχαιολόγου Χρίστου Τσούντα, δὲν ἐδημοσιεύθησαν ἀκόμη. Ἀνεκοινώθησαν ὅμως ὑπὸ τοῦ κ. Μπήζαντς (Biesantz), βοηθοῦ τοῦ κ. Μιλόϊσιτς, κατὰ τὴν διάλεξιν τοῦ ἐν Ἀθήναις Γερμανικοῦ Ἀρχαιολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς 16 Δεκεμβρίου 1958. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ εὑρήματα τοῦ κ. Μιλόϊσιτς ἀνατρέπουσιν ἄρδην πᾶν ὅ,τι ἡ σημερινὴ ἐπιστήμη θεωρεῖ ὡς προϊστορίαν.

Τὰ λεγόμενα ὅτι ὁ Κάδμος εἰσήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου θεωροῦνται σκοτεινά. Ὁπωσδήποτε, ἡ σημερινὴ κριτικὴ παραδέχεται ὅτι ὁ Θαλῆς εἶναι Ἑλληνικῆς καταγωγῆς καὶ ὅτι προέρχεται ἐκ τοῦ Θηβαϊκοῦ ἀριστοκρατικοῦ γένους τῶν Θηλιδῶν. Γεννᾶται ὅμως ἡ ἀπορία, πῶς εἶναι δυνατὸν τὸ Θηβαϊκὸν τοῦτο γένος τῶν Θηλιδῶν νὰ ἔφθασε εἰς τὴν Ἰωνικὴν πόλιν Μίλητον; Πρὸς ἑρμηνείαν τούτου δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ πληροφορία τοῦ Ἡροδότου, καθ' ἥν, κατὰ τὸν ἀποικισμὸν τῶν Ἰωνικῶν πόλεων τῆς Μ. Ἀσίας Αἰολεῖς ἄποικοι (Ὀρχομένιοι καὶ Θηβαῖοι) ἀνεμίχθησαν πρὸς τοὺς Ἴωνας. *[Μινύαι δὲ Ὀρχομένιοι σφὶ ἀναμεμείχαται (τοῖς Ἴωσι) καὶ Καδμεῖοι. (Ι 146)].* Ὁ ἴδιος ὁ Θαλῆς, λέγει, κατὰ τὸν ἱστορικὸν καὶ βιογράφον τῶν φιλοσόφων Ἕρμιππον (τρίτος αἰὼν π. Χ.) ὅτι διὰ τρία πράγματα ὀφείλω χάριν εἰς τὴν τύχην: *«πρῶτον μὲν ὅτι ἄνθρωπος ἐγενόμην καὶ οὐ θηρίον, εἶτα ὅτι ἀνὴρ καὶ οὐ γυνή, τρίτον ὅτι Ἕλλην καὶ οὐ βάρβαρος»*. Οἱ Ἀθηναῖοι, φαίνεται, ὅτι ἐθεώρουν τοῦτον ὡς Ἀθηναῖον, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ Μίλητος ἔνθα ἐγεννήθη ὁ Θαλῆς ἦτο Ἀθηναϊκὴ ἀποικία. Ἐνισχυντικὸν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου εἶναι ὅτι ἐν Ἀθήναις ἐπὶ Ἄρχοντος Δαμασίου (582 π. Χ.) ἐγένετο ἡ ἀνακήρυξις τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς Ἑλλάδος μὲ ἐπὶ κεφαλῆς τούτων τὸν Θαλῆν καὶ τὸν Σόλωνα.

Τὸ ὄνομα τοῦ Θαλοῦ εἶναι συνδεδεμένον μὲ τὴν παράδοσιν περὶ τοῦ χρυσοῦ τρίποδος. Χρυσοῦς τρίπους, τῶν ἑπτὰ σοφῶν ὡς ἐκαλεῖτο, ὑπῆρχεν εἰς πλεῖστα ἱερὰ τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος καὶ ἐδεικνύετο εἰς τοὺς εὐλαβεῖς προσκυνητάς. Ἀναφέρεται, ὅτι χρυσοῦς τρίπους ὑπῆρχεν εἰς ἱερὸν τῶν Θηβῶν, εἰς τὸ Μαντεῖον τῶν Δελφῶν, εἰς τὸ ἱερὸν τοῦ Διδυμέως Ἀπόλλωνος παρὰ τὴν Μίλητον καὶ ἀλλαχοῦ. Κατά τινα παράδοσιν ὁ χρυσοῦς τρίπους εἶχεν ἀθλοθετηθῆ παρὰ τῶν Θεῶν, ὅπως δοθῇ εἰς τὸν σοφώτατον τῶν Ἑλλήνων. Οὗτος ἀπετέλει τὸ ἀντίβαρον, οὕτως εἰπεῖν, διὰ τὸ χρυσοῦν μῆλον, τὸ ὁποῖον προωρίζετο διὰ τὴν ὡραιοτάτην τῶν Θεῶν καὶ εἶχε προκαλέσει τὴν ἔριδα μεταξὺ Ἥρας, Ἀθηνᾶς καὶ Ἀφροδίτης. Δὲν εἶναι βέβαιον, ἂν ὁ μῦθος περὶ χρυσοῦ μήλου εἶναι παλαιότερος τοῦ μύθου περὶ χρυσοῦ τρίποδος. Ἀναφέρονται πολλαὶ ἐκδοχαὶ περὶ τοῦ χρυσοῦ τρίποδος τινὰς τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν κατωτέρω. Οὕτω, κατὰ τὸν ἱστορικὸν Διόδωρον (9, 13, 2) ἁλιεῖς Μεσσήνιοι ἀνελκύσαντες τὰ δι' ἁλιείαν ῥιφθέντα δίκτυα δὲν ἀπεκόμισαν ἰχθῦς, ἀλλὰ χαλκοῦν τρίποδα ἔχοντα ἐπιγραφὴν ΤΩ ΣΟΦΩΤΑΤΩ, τὸν ὁποῖον ἔστειλαν εἰς τὸν ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν Βίαντα τον Πριηνέα. Κατὰ σχολιαστήν τινα τῆς κωμῳδίας τοῦ 'Αριστοφάνους Πλοῦτος (9), ἁλιεῖς Μιλήσιοι συνεβλήθησαν μετά τινων ὅπως ἁλιεύσωσιν παρὰ τὰ ὕδατα τῆς Μιλήτου. Συνέβη ὅμως νὰ ἀνελκύσωσι χρυσοῦν τρίποδα ἀντὶ ἰχθύων καὶ ἤθελον νὰ κρατήσωσι τοῦτον δι' ἑαυτούς. 'Εν ᾧ οἱ ἐργοδόται ἐφιλονείκουν πρὸς τοὺς ἁλιεῖς διὰ τὴν κυριότητα τοῦ τρίποδος ἀπεφασίσθη τέλος ὑπὸ τῶν δύο μερῶν ὅπως ἐρωτηθῇ τὸ Μαντεῖον τῶν Δελφῶν, τὸ ὁποῖον ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς:

Ἔκγονε Μιλήτου, τρίποδος πέρι Φοῖβον ἐρωτᾷς;
ὅς σοφίῃ πάντων πρῶτος, τούτου τρίποδ' αὐδῶ.

['Ερμηνεία: Μιλήσιε, ἐρωτᾷς τὸν Φοῖβον 'Απόλλωνα περὶ τοῦ τρίποδος; ὁρίζω, ὅπως οὗτος δοθῇ εἰς τὸν πρῶτον ἐπὶ σοφίᾳ, ἐξ ὅλων τῶν ἀνθρώπων]. Κατόπιν τοῦ χρησμοῦ τούτου τῆς Πυθίας προσεφέρθη οὗτος εἰς τοὺς ἑπτὰ σοφούς· ἕκαστος ὅμως ἐκ τούτων δὲν τὸν ἐδέχετο, λέγων, ὅτι δὲν εἶναι σοφὸς καὶ συνίστα ὅπως ὁ τρίπους ἀφιερωθῇ εἰς τὸν 'Απόλλωνα. Οὕτω, ὁ τρίπους ἔγινε κτῆμα τοῦ Μαντείου τῶν Δελφῶν.

Κατ' ἄλλην παράδοσιν, λέγεται, ὅτι ὁ τρίπους ὁ ἐν Δελφοῖς εἶχε κατασκευασθῇ ὑπὸ τοῦ 'Ηφαίστου, ὅστις ἔστειλε τοῦτον ὡς γαμήλιον δῶρον εἰς τὸν Πέλοπα. 'Εκ τοῦ Πέλοπος ὁ τρίπους κατέληξεν εἰς τὸν Μενέλαον καὶ ἐκλάπη ὑπὸ τοῦ Πάριδος κατὰ τὴν ἁρπαγὴν τῆς 'Ελένης καὶ τῇ συστάσει αὐτῆς ἐρρίφθη εἰς τὴν παρὰ τὴν νῆσον Κῶ θάλασσαν, διότι ἄλλως θὰ ἐγίνετο ἀφορμὴ μεγάλης ἔριδος. Μετά τινα χρόνον κάτοικοι τῆς Λεβέδου, παραλιακῆς πόλεως τῆς 'Ιωνίας, προηγόρασαν παρά τινων ἁλιέων τὸ προϊὸν τῆς ἁλιείας των, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρέθη ὁ ὑπὸ τοῦ Πάριδος καὶ τῆς 'Ελένης εἰς τὴν θάλασσαν ῥιφθεὶς τρίπους. Οἱ ἁλιεῖς ἠρνοῦντο νὰ παραδώσωσιν εἰς τοὺς Λεβεδίους τὸν τρίποδα καὶ ἔφερον αὐτὸν εἰς τὴν Κῶ. Κατόπιν δὲ τῆς ἀρνήσεως καὶ τῶν Κώων, ὅπως ἀποδώσωσιν τὸν τρίποδα ἐξερράγη πόλεμος μεταξὺ Μιλήτου καὶ Κῶ, καθ' ὃν πολλοὶ ἀμφοτέρωθεν ἐφονεύοντο. 'Εν τῷ μεταξὺ ἐδόθη χρησμός, ὅπως ὁ τρίπους δοθῇ εἰς τὸν σοφώτατον· καὶ οἱ δύο ἀντίπαλοι συνήνεσαν, ὅπως δοθῇ οὗτος εἰς τὸν Θαλῆν. 'Ο Θαλῆς ὅμως ἀνέθεσε τοῦτον εἰς τὸ παρὰ τὴν Μίλητον ἱερὸν τοῦ Διδυμέως 'Απόλλωνος. 'Ο χρησμὸς (πιθανώτατα τοῦ Μαντείου τῶν Δελφῶν) εἶχεν ὡς ἑξῆς, κατὰ τὸν ἱστορικὸν Διόδωρον, 9,3,2):

Κῴοις μὴν οὖν τοῦτον ἐχρήσθη τὸν τρόπον·
οὔποτε μὴ λήξῃ πόλεμος Μερόπων καὶ 'Ιώνων,
πρὶν τρίποδα χρύσειον, ὃν Ἥφαιστος κάμε τεύχων
ἐκ μέσσου πέμψητε, καὶ ἐς δόμον ἀνδρὸς ἵκηται,
ὅς σοφίᾳ τὰ τ' ἐόντα τά τ' ἐσσόμενα προδέδορκεν.

['Ερμηνεία: Οὐδέποτε θὰ λήξῃ ὁ πόλεμος μεταξὺ τῶν Μερόπων (οὕτω ἐκαλοῦντο οἱ κάτοικοι τῆς Κῶ) καὶ τῶν 'Ιώνων πρὶν τὸν χρυσοῦν τρίποδα, τὸν ὁποῖον καλλιτεχνικῶς κατεσκεύασεν ὁ Ἥφαιστος ἀπομακρύνητε ἀφ' ὑμῶν, καὶ δοθῇ οὗτος εἰς τὸν οἶκον ἀνδρός, ὁ ὁποῖος ἐν σοφίᾳ προβλέπει καὶ τὰ παρόντα καὶ τὰ μέλλοντα].

Κατὰ τὸν ἱστορικὸν καὶ βιογράφον Φανόδικον, ὁ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν Βίας ὁ Πριηνεὺς ἠγόρασε μερικὰς κορασίδας ἐκ Μεσσηνίας καταγομένας, αἱ ὁποῖαι ἦσαν αἰχμάλωτοι πολέμου, ἀνέθρεψεν αὐτὰς ὡς θυγατέρας του, τὰς ἐφωδίασε μὲ προῖκας καὶ τὰς ἀπέστειλε εἰς τοὺς γονεῖς των, εἰς τὴν Μεσσηνίαν. Μετά τινα χρόνον εὑρέθη εἰς τὸν Σαρωνικὸν κόλπον χαλκοῦς τρίπους, φέρων ἐπιγραφὴν ΤΩ ΣΟΦΩ, ὅστις μετεφέρθη εἰς τὰς Ἀθήνας. Οἱ πατέρες τῶν κορασίδων, τὰς ὁποίας εὐηργέτησεν ὁ Βίας πληροφορηθέντες τοῦτο ἦλθον εἰς τὰς Ἀθήνας (κατὰ τὸν συγγραφέα δὲ Σάτυρον ἦλθον καὶ αἱ κόραι αὐτῶν) καὶ εἶπον ὅτι ὁ Βίας εἶναι σοφός, ἀφοῦ διηγήθησαν τὰ τῆς ἀπελευθερώσεως καὶ προικίσεως τῶν θυγατέρων των. Κατόπιν τούτου οἱ Ἀθηναῖοι ἔστειλαν τὸν τρίποδα εἰς τὸν Βίαντα, ὁ ὁποῖος ὅμως ἀπήντησε, ὅτι ὁ Ἀπόλλων (δηλ. μόνον ὁ Θεὸς) εἶναι σοφὸς καὶ δὲν ἐδέχθη αὐτόν.

Κατ' ἄλλην πληροφορίαν ὁ Βίας ἀνέθηκε τὸν τρίποδα ἐν Θήβαις, εἰς τὸν Ἡρακλῆ, ἐπειδὴ ὁ Βίας ἦτο ἀπόγονος τῶν Θηβαίων τῶν ὁποίων ἀποικία ἦτο ἡ Πριήνη, κατὰ τὸν ἱστορικὸν Φανόδικον, ὅστις ἤκμασε περὶ τὸ 200 π.Χ. (Διογένης Λαέρτιος Ι, 82).

Κατὰ τὸν ποιητὴν Καλλίμαχον (περὶ τὸ 275 π. Χ.) ὁ Ἀρκὰς Βαθυκλῆς κατέλιπε χρυσοῦν κύπελλον καὶ διέθεσεν ὅπως δοθῇ τοῦτο εἰς τὸν ἄριστον ἐκ πάντων τῶν σοφῶν· τοῦτο ἐδόθη εἰς τὸν Θαλῆν, ὁ ὁποῖος ὅμως τὸ ἀπέστειλεν εἰς τὸν Βίαντα τὸν Πριηνέα. Ὁ Βίας τὸ ἀπέστειλεν εἰς τὸν Περίανδρον τὸν Κορίνθιον, οὗτος εἰς τὸν Σόλωνα καὶ ὁ Σόλων εἰς τὸν Χίλωνα· ὁ Χίλων τὸ ἀπέστειλεν εἰς τὸν Πιττακὸν τὸν Μυτιληναῖον, οὗτος εἰς τὸν Κλεόβουλον τὸν Λίνδιον καὶ ὁ τελευταῖος ἀπέστειλε αὐτὸ πάλιν εἰς τὸν Θαλῆν, ὁ ὁποῖος τὸ ἀνέθεσεν εἰς τὸ παρὰ τὴν Μίλητον ἱερὸν τοῦ Διδυμέως Ἀπόλλωνος μὲ τὴν ἑξῆς ἀφιέρωσιν:

Θαλῆς με τῷ μεδεῦντι Νείλεω δήμου
δίδωσι τοῦτο δὶς λαβὼν ἀριστεῖον.

Ἑρμηνεία: [Μὲ δωρίζει (εἰς τὸν Ἀπόλλωνα) ὁ Θαλῆς ὁ καταγόμενος ἐκ τοῦ λαοῦ τοῦ Νείλεω (Ἄρχοντος τῆς Μιλήτου), λαβών με δύο φοράς, ὡς ἀριστεῖον]. Ἡ ἀφιέρωσις ἐσώθη καὶ εἰς τὸν πεζὸν λόγον ἔχουσα ὡς ἑξῆς: Θαλῆς Ἐξαμύου Μιλήσιος Ἀπόλλωνι Δελφινίῳ Ἑλλήνων ἀριστεῖον δὶς λαβών. [Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, υἱὸς τοῦ Ἐξαμύου, ἀναθέτει τὸ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων δοθὲν δὶς εἰς αὐτὸν ἀριστεῖον, εἰς τὸν Δελφίνιον Ἀπόλλωνα].

Κατὰ τὸν Εὔδοξον τὸν Κνίδιον καὶ τὸν Εὐάνθη τὸν Μιλήσιον, (σύγχρονον περίπου τοῦ Εὐδόξου) φίλος τις τοῦ Κροίσου ἔλαβε χρυσοῦν ποτήριον παρ' αὐτοῦ ὅπως δώσῃ τοῦτο εἰς τὸν σοφώτατον τῶν Ἑλλήνων καὶ ἔδωκεν αὐτὸ εἰς τὸν Θαλῆν. Οὗτος ἀπέστειλεν αὐτὸ εἰς τὸν Χίλωνα, ὅστις ἠρώτησε τὸ Μαντεῖον τῶν Δελφῶν, τὶς εἶναι σοφώτερος αὐτοῦ καὶ ἔλαβε τὴν ἀπάντησιν ὅτι εἶναι ὁ Μύσων ὁ Χηνεύς, πρὸς ὃν δέον νὰ δοθῇ τὸ χρυσοῦν ποτήριον. Ὁ μεταγενέστερος συγγραφεὺς Ἄνδρων ὁ Ἐφέσιος (περὶ τὸν δεύτερον αἰῶνα π. Χ.) ἀναγράφει τὴν πληροφορίαν ὅτι οἱ Ἀργεῖοι ἠθλοθέτησαν τρίποδα, ὅπως δοθῇ οὗτος εἰς τὸν σοφώτατον τῶν Ἑλλήνων καὶ ὅτι οὗτος ἐδόθη εἰς τὸν Σπαρτιάτην Ἀριστόδημον·

Κατ' ἄλλην πληροφορίαν, ὁ παρὰ τὴν θάλασσαν τῆς Κῶ ἀνευρεθεὶς τρίπους, ὁ γενόμενος ἀφορμὴ τοῦ πολέμου μεταξὺ Μιλήτου καὶ Κῶ, τοῦ μνημονευθέντος προηγουμένως, περιείχετο εἰς φορτίον, τὸ ὁποῖον ὁ Περίανδρος ἀπέστελλε δῶρον εἰς τὸν Τύραννον τῆς Μιλήτου Θρασύβουλον. Τὸ φέρον τὸν τρίποδα πλοῖον εὑρεθὲν εἰς μεγάλην τρικυμίαν ἐβυθίσθη παρὰ τὴν θάλασσαν τῆς Κῶ.

Συμφώνως πρὸς τὰς σωζομένας πληροφορίας ὁ Θαλῆς οὐδένα εἶχε καθηγητήν, ἀναφέρεται δὲ μόνον ὅτι μεταβὰς εἰς τὴν Αἴγυπτον συνδιέτριψεν αὐτόθι πρὸς τοὺς ἱερεῖς. Ἐκ ταύτης καὶ ἄλλων πληροφοριῶν περὶ τοῦ εἰς Αἴγυπτον ταξιδίου τοῦ Θαλοῦ συνάγεται ὑπὸ πλείστων τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ Θαλῆς ὀφείλει τὴν μόρφωσίν του εἰς τοὺς Αἰγυπτίους, παρὰ τῶν ὁποίων ἐκτὸς τῶν ἄλλων ἐδιδάχθη καὶ τὴν γεωμετρίαν, τὴν γνῶσιν τῆς ὁποίας μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ὅπου κατὰ τὰς πληροφορίας αὐτὰς ἡ γεωμετρία ἦτο ἄγνωστος. Εἰς τὴν πλάνην ταύτην, περὶ ἐκμαθήσεως ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ τῆς γεωμετρίας ἐν Αἰγύπτῳ καὶ μεταγωγῆς τῆς γνώσεως ταύτης εἰς τὴν Ἑλλάδα περιπίπτει καὶ ὁ ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος Πρόκλος (410-485), ὅστις πιθανώτατα ἀρύεται τὰς πληροφορίας του ἐκ τοῦ Γεμίνου (πρῶτος αἰὼν π. Χ.) καὶ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Εὐδήμου, ὅστις εἶχε συγγράψει τὸ πρῶτον ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν. Εἶναι δὲ πλάνη ὅτι ὁ Θαλῆς ἐδιδάχθη τὴν γεωμετρίαν εἰς τὴν Αἴγυπτον, διότι, καθ' ὅσον μέχρι σήμερον εἶναι γνωστόν, ἡ αἰγυπτιακὴ γεωμετρία (καὶ ἡ τῶν Σουμερίων καὶ Βαβυλωνίων) εἶναι καθαρῶς ἐμπειρικὴ καὶ ὄχι θεωρητική. Ὁ ἱστορικὸς Ἱερώνυμος (τρίτος αἰὼν π.Χ.) ἀναγράφει τὴν πληροφορίαν, ὅτι ὁ Θαλῆς εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐδίδαξε τοὺς ἱερεῖς, πῶς εἶναι δυνατὸν ἐκ τῆς σκιᾶς του (ἢ τῆς σκιᾶς τῆς βακτηρίας του) νὰ ὑπολογίζῃ τις τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων. Τοῦτο δὲν θὰ συνέβαινε, ἄν οἱ Αἰγύπτιοι ἱερεῖς ἐγνώριζον τὰς γεωμετρικὰς προτάσεις τὰς ἀφορώσας εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα. Ἡ σπουδαιοτάτη ὅμως ἀπόδειξις ὅτι ὁ Θαλῆς ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον ὄχι διὰ νὰ σπουδάσῃ, ἀλλὰ διὰ νὰ γνωρίσῃ μίαν πεπολιτισμένην χώραν, παρέχεται ἐκ σωζομένης ἐπιστολῆς τοῦ Θαλοῦ πρὸς τὸν ἐκ τῆς νήσου Σύρου καταγόμενον φιλόσοφον καὶ φίλον του Φερεκύδη. Γράφει λοιπὸν ὁ Θαλῆς πρὸς τὸν Φερεκύδη: «*καὶ ἢν κελεύῃς παρὰ σὲ ἀφίξομαι εἰς Σῦρον. ἦ γὰρ ἂν οὐ φρενήρεες εἴημεν ἐγώ τε καὶ Σόλων ὁ Ἀθηναῖος, εἰ πλώσαντες μὲν ἐς Κρήτην κατὰ τὴν τῶν κεῖθι ἱστορίην, πλώσαντες δὲ ἐς Αἴγυπτον ὁμιλήσοντες τοῖς ἐκεῖ ὅσοι ἱερέες τε καὶ ἀστρολόγοι, παρὰ σὲ δὲ μὴ [πλώσαιμεν]. ἥξει γὰρ καὶ ὁ Σόλων, ἢν ἐπιτρέπῃς.* [Ἑρμηνεία: καὶ ἂν παραγγείλῃς θὰ σὲ ἐπισκεφθῶ εἰς τὴν Σῦρον. Διότι θὰ εἴμεθα φρενοβλαβεῖς ἂν δὲν σὲ ἐπισκεπτώμεθα, ἐγὼ καὶ ὁ Σόλων ὁ Ἀθηναῖος, καθ' ἣν στιγμὴν ἐπλεύσαμεν εἰς τὴν Κρήτην διὰ νὰ μάθωμεν τὰ τῆς ἱστορίας της, καὶ ἐπλεύσαμεν εἰς τὴν Αἴγυπτον διὰ νὰ ἔχωμεν συνομιλίας πρὸς τοὺς ἐκεῖ ἱερεῖς καὶ ἀστρονόμους. Διότι θὰ ἔλθῃ καὶ ὁ Σόλων, ἄν τὸ ἐπιτρέπῃς]. Ἐκ τῆς ἐπιστολῆς αὐτῆς φαίνεται σαφῶς ὅτι ὁ Θαλῆς εἶχεν ἤδη μεγάλην φήμην ὅταν ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον καὶ δὲν μετέβη ἐκεῖ διὰ νὰ σπουδάσῃ. Τελειώνει δὲ τὴν ἐπιστολὴν αὐτὴν ὁ Θαλῆς μὲ τὸ παράπονον ὅτι ὁ Φερεκύδης δὲν τὸν ἐπισκέπτεται εἰς τὴν Ἰωνίαν, ἀλλὰ συγγράφει διαρκῶς, ἐν ᾧ αὐτός, μηδὲν γράφων, ταξιδεύει εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ τὴν Ἀσίαν. Ὁ Θαλῆς ἀνεμίχθη ἐνεργῶς εἰς τὰ πολιτικὰ πράγματα τῆς πατρίδος του καὶ κατόπιν ἠσχολήθη μὲ τὴν φυσικήν, τὰ μαθηματικά, τὴν ἀστρονομίαν καὶ τὴν φιλοσοφίαν. Ἀναφέρεται ὅτι, ὅταν ὁ Κροῖσος ἐζήτησε τὴν συμμαχίαν τῆς Μιλήτου ἐναντίον τῶν Περσῶν, ὁ Θαλῆς διαβλέπων τὴν ἧτταν τοῦ Κροίσου, συνεβούλευσε τοὺς συμπολίτας του νὰ μείνωσιν οὐδέτεροι, ὡς καὶ ἐγένετο.

Τοῦτο ἔσωσε τὴν Μίλητον μετὰ τὴν κατάλυσιν τοῦ κράτους τοῦ Κροίσου ὑπὸ τῶν Περσῶν. Ὅταν ὁ Κροῖσος εὑρίσκετο εἰς τὸ ἀπόγειον τῆς δόξης του καὶ διετέλει εἰς πόλεμον πρὸς τοὺς Πέρσας ἐπεχείρησε μετὰ τοῦ στρατοῦ του νὰ διαβῇ τὸν ἐν Μικρᾷ Ἀσίᾳ ποταμὸν Ἅλυν, ἵνα ἐπιτεθῇ ἐναντίον τῶν Περσῶν, ἀλλὰ δὲν τὸ κατώρθωνε ἕνεκα τοῦ μεγάλου βάθους καὶ πλάτους τοῦ ποταμοῦ. Κατὰ τὴν ἐκστρατείαν ἐκείνην ὁ Θαλῆς παρακολουθῶν τὰ στρατεύματα τοῦ Κροίσου, πιθανῶς ὡς σύμβουλος αὐτοῦ,συνέστησε νὰ ἀνοιγῇ μηνοειδὴς τάφρος οὕτως, ὥστε τὰ ὕδατα τοῦ ποταμοῦ νὰ ῥέωσιν εἰς δύο κλάδους αὐτοῦ, εἰς τὴν παλαιὰν κοίτην τοῦ ποταμοῦ καὶ εἰς τὴν τάφρον. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὁ στρατὸς τοῦ Κροίσου διέβη τὴν τάφρον καὶ τὸν ποταμόν, ἀφοῦ τὰ ὕδατα αὐτοῦ διά τινα ἀπόστασιν ἔρρεον εἰς δύο βραχίονας. Ἡ ἀνωτέρω ἁπλῆ ἐπινόησις τοῦ Θαλοῦ, τὴν ὁποίαν τὸ Γενικὸν Ἐπιτελεῖον τοῦ Κροίσου δὲν εἶχε τὴν ἱκανότητα νὰ συλλάβῃ προϋποθέτει γνώσεις τεχνικάς, τὰς ὁποίας ἀσφαλῶς κατεῖχεν ὁ Θαλῆς καὶ ἀποτελεῖ συνάμα καὶ ἀπόδειξιν τῆς κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ὑπεροχῆς τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος ἔναντι τῶν βαρβάρων λαῶν. Διαβλέπων ὁ Θαλῆς τὴν ἐπερχομένην ἀπειλὴν τῶν Περσῶν συνεβούλευσε τοὺς Ἴωνας, ὅπως ἑνωθῶσι καὶ ἔχωσι ἓν βουλευτήριον εἰς τὴν πόλιν Τέων, εὑρισκομένην εἰς τὸ μέσον των Ἰωνικῶν πόλεων. Ἡ συμβουλὴ αὕτη τοῦ Θαλοῦ ἀποδεικνύει ὅτι οὗτος εἶχε μεγάλην πολιτικὴν ὀξυδέρκειαν.

Ὡς πρὸς τὴν ἰδιωτικὴν ζωὴν τοῦ Θαλοῦ αἱ διασωθεῖσαι πληροφορίαι εἶναι ποικίλαι. Κατά τινας ἐνυμφεύθη καὶ ἀπέκτησεν υἱὸν ὀνόματι Κύβισθον, κατ' ἄλλους υἱοθέτησε τὸν υἱὸν τῆς ἀδελφῆς του καὶ κατὰ τὴν τρίτην ἐκδοχὴν παρέμεινε ἄγαμος. Ἐρωτηθεὶς διατί δὲν τεκνοποιεῖ, ἀπήντησε: Διὰ φιλοτεκνίαν. Φαίνεται ὅμως ὅτι μᾶλλον παρέμεινε ἄγαμος, ἐὰν πιστεύσωμεν τὸν διαμειφθέντα διάλογον μεταξὺ Θαλοῦ καὶ Σόλωνος, ὅταν ὁ τελευταῖος οὗτος ἐπεσκέφθη τὴν Μίλητον. Ὁ Σόλων μετὰ τὴν ἐπικράτησιν ἐν Ἀθήναις τοῦ συγγενοῦς του Πεισιστράτου ἐπεχείρησε ταξίδιον ἀναψυχῆς καὶ ἐπεσκέφθη πολλὰς πόλεις μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὴν Μίλητον. Ἀφῆκεν ὅμως εἰς τὰς Ἀθήνας βαρέως ἀσθενοῦντα υἱόν, διὰ τὴν ὑγείαν τοῦ ὁποίου ἀνησύχει πολύ. Κατά τινα συζήτησιν ἠρώτησε τὸν Θαλῆν, διατί ἔμεινε ἄγαμος. Ὁ Θαλῆς ἀπήντησεν εἰς αὐτὸν «θὰ σοῦ ἀπαντήσω ἀγαπητὲ Σόλων αὔριον». Τὴν ἑπομένην ἡμέραν ἀφίχθη εἰς τὴν Μίλητον ἐκ Πειραιῶς τὸ πλοῖον τῆς γραμμῆς Πειραιεὺς - Μίλητος. Ὁ Σόλων παρεκάλεσε τὸν Θαλῆν νὰ ζητήσῃ νὰ μάθῃ ἐκ τοῦ πλοίου τὰ ἐξ Ἀθηνῶν νέα. Ὁ Θαλῆς ἀπέστειλεν εἰς τὸν λιμένα ἔμπιστον πρόσωπον αὐτοῦ, διὰ νὰ πληροφορηθῇ τὰ νέα, συνεβούλευσεν ὅμως αὐτό, ὅπως φέρῃ ὡς νέα, ὅ,τι αὐτὸς τοῦ ὑπέδειξε. Κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν ἐκ τοῦ λιμένος διηγεῖται ὁ ἔμπιστος ἄνθρωπος τοῦ Θαλοῦ τὰς ἐντυπώσεις ταξιδιώτου προερχομένου ἐξ Ἀθηνῶν, ὁ ὁποῖος μεταξὺ ἄλλων ἀνέφερεν ὅτι παρέστη καὶ εἰς μίαν μεγαλοπρεπῆ κηδείαν νέου τινος, ἀνήκοντος εἰς πολὺ μεγάλην οἰκογένεαν τῶν Ἀθηνῶν. Ὁ Σόλων μόλις ἤκουσε τὴν εἴδησιν αὐτὴν ἤρχισε νὰ κλαίῃ καὶ νὰ μένῃ ἀπαρηγόρητος, ὑποθέσας ὅτι ἀπέθανε ὁ υἱός του. Ὁ Θαλῆς ὅμως τὸν ἐκτύπησε εἰς τὸν ὦμον καὶ τοῦ εἶπε «μὴ κλαῖς ἀγαπητὲ Σόλων, ἡ εἴδησις δὲν εἶναι ἀληθινή, γι' αὐτὸ δὲν παντρεύθηκα». Ἐξ ἄλλης εἰδήσεως πληροφορούμεθα ὅτι ἡ μήτηρ τοῦ Θαλοῦ ἐπίεζεν αὐτὸν ὅπως νυμφευθῇ. Ὁ Θαλῆς ἐπὶ διάστημα πολλῶν ἐτῶν ἀπήντα εἰς τὴν μητέρα του δὲν εἶναι ἀκόμη καιρὸς (οὔπω καιρός). Ὅταν ὅμως παρῆλθον καὶ ἄλλα ἔτη καὶ ἦτο πλέον πρεσβύτης ἀπήντα, ἐπέρασε πλέον ὁ καιρὸς (οὐκέτι καιρός).

Ἐν ᾧ οἱ πλεῖστοι τῶν συμπολιτῶν του ἐθαύμαζον αὐτὸν διὰ τὴν μεγαλοφυΐαν καὶ τὴν σοφίαν του ὑπῆρχον καὶ οἱ μεμψίμοιροι, οἱ ὁποῖοι κατηγόρουν αὐτοῦ ὅτι δὲν ἦτο εἰς θέσιν νὰ κερδίζῃ χρήματα καὶ διέθετε τὸν χρόνον του εἰς ἀσκόπους ἀπασχολήσεις, ὅπως εἶναι ἡ ἀσχολία μὲ τὴν φιλοσοφίαν. Διὰ νὰ ἀποδείξῃ εἰς τοὺς κατηγόρους του ὁ Θαλῆς ὅτι δὲν εἶχον δίκαιον προβλέψας δυνάμει τῶν γνώσεων τὰς ὁποίας εἶχε, ὅτι κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος ἡ ἐσοδεία τῶν ἐλαιώνων θὰ εἶναι πολὺ μεγάλη, προηγόρασε τὴν ἐσοδείαν τοῦ ἐλαίου τῆς Μιλήτου καὶ τῆς Χίου. Ὅταν ἦλθεν ὁ καιρὸς τῆς συγκομιδῆς ἐκέρδισε πολλὰ χρήματα, διότι ἡ πρόβλεψίς του στηριζομένη εἰς ἀστρονομικά, πιθανῶς, καὶ μετεωρολογικὰ δεδομένα ἐπηλήθευσεν καὶ εἶπεν, ὅτι διὰ τοὺς φιλοσόφους εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ πλουτίσωσι, ἂν θέλωσι, ἀλλὰ αὐτοὶ δὲν σπουδάζωσι διὰ νὰ κερδίζωσι χρήματα. Εἰς τὴν ἀστρονομίαν, φαίνεται, ὁ Θαλῆς ἠσχολεῖτο μέχρι βαθυτάτου γήρατος ὡς εἰκάζομεν ἐκ τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος Θεαίτητος ἔνθα γίνεται λόγος περὶ ἐπιστήμης καὶ φιλοσοφίας. Ὁμιλεῖ ἐκεῖ ὁ Σωκράτης πρὸς τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον, τὸν διδάσκαλον τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ λέγει ὅτι τὸ πνεῦμα τῶν φιλοσόφων δὲν ἀσχολεῖται μὲ τὰ ἐγκόσμια, ἀλλὰ πετᾷ ἐδῶ καὶ ἐκεῖ, ὑπὲρ τὴν γῆν, ὡς λέγει καὶ ὁ Πίνδαρος, καὶ ἀσχολεῖται μὲ τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν ἀστρονομίαν. «Θεόδωρος: *πῶς τοῦτο λέγεις, ὦ Σώκρατες;* Σωκρ. «*Ὥσπερ καὶ Θαλῆν ἀστρονομοῦντα, ὦ Θεόδωρε, καὶ ἄνω βλέποντα, πεσόντα εἰς φρέαρ, Θρᾷττα τις ἐμμελὴς καὶ χαρίεσσα θεραπαινὶς ἀποσκῶψαι λέγεται ὡς τὰ μὲν ἐν οὐρανῷ προθυμοῖτο εἰδέναι, τὰ δ' ἔμπροσθεν αὐτοῦ καὶ παρὰ πόδας λανθάνοι αὐτόν. Ταὐτὸν δὲ ἀρκεῖ σκῶμμα ἐπὶ πάντας, ὅσοι ἐν φιλοσοφίᾳ διάγουσι*». (174 α). [Θεόδωρος. Πῶς ἐννοεῖς αὐτό, Σωκράτη; Σωκρ. Νά, καθὼς λέγεται, ὦ Θεόδωρε, ὅτι ὑπηρέτριά τις ἐκ Θράκης, ὡραία καὶ χαριτωμένη εἰρωνεύθη τὸν Θαλῆν, ὅταν οὗτος σπουδάζων τὰ ἄστρα καὶ βλέπων πρὸς τὸν οὐρανὸν ἔπεσεν εἰς λάκκον, εἰποῦσα πρὸς αὐτόν ὅτι, ἐν ᾧ δὲν βλέπει τί γίνεται ἔμπροσθέν του καὶ παρὰ τοὺς πόδας του θέλει νὰ μάθῃ τί γίνεται εἰς τὸν οὐρανόν. Ἡ αὐτὴ εἰρωνεία εἶναι ἀρκετὴ δι' ὅλους ὅσοι ἀσχολοῦνται μὲ τὴν φιλοσοφίαν].

Ὁ Θαλῆς, γέρων ὤν, ἀπέθανεν εἰς τὸ Στάδιον τῆς Μιλήτου ἐν ᾧ παρηκολούθει γυμνικοὺς ἀγῶνας καταβληθεὶς ὑπὸ τοῦ καύματος, τῆς δίψης καὶ τῆς ἐξαντλήσεως. Ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος περιέσωσε τὸ ἑξῆς τετράστιχον διὰ τὸν θάνατον τοῦ Θάλητος (Ἀνθολογία Παλατ. VII 85):

Γυμνικὸν αὖ ποτ' ἀγῶνα θεώμενον, ἠέλιε Ζεῦ,
τὸν σοφὸν ἄνδρα Θαλῆν ἥρπασας ἐκ σταδίου.
αἰνέω, ὅττι μιν ἐγγὺς ἀπήγαγες· ἦ γὰρ ὁ πρέσβυς
οὐκέθ' ὁρᾶν ἀπὸ γῆς ἀστέρας ἐδύνατο.

[Ἑρμηνεία: Ὅταν ὁ σοφὸς ἀνὴρ Θαλῆς παρηκολούθει γυμνικὸν ἀγῶνα, τὸν ἥρπασες ἐκ τοῦ σταδίου ἥλιε Ζεῦ. Εὐλογῶ, ὅτι τὸν ἐπῆρες πλησίον σου, διότι πράγματι ὁ γέρων δὲν ἠδύνατο πλέον νὰ βλέπῃ τὰ ἄστρα ἀπὸ τῆς γῆς]. Εἰς ἄγαλμα τοῦ Θαλοῦ ἐν Μιλήτῳ ἐτέθη ἡ ἑξῆς ἐπιγραφή, (Ἀνθολ. Παλατ. VII 83).

Τόν δε Θαλῆν Μίλητος Ἰὰς θρέψασα ἔδειξεν
ἀστρολόγον πάντων πρεσβύτατον σοφίῃ.

[Ἑρμην. Αὐτὸν ἐδῶ τὸν Θαλῆν ἡ Ἰωνικὴ πόλις Μίλητος ἐκθρέψασα ἀνέδειξεν, ὅστις ἦτο ἀνώτερος ὅλων κατὰ τὴν σοφίαν]

Εἰς δὲ τὴν ἐπιτάφιον πλάκα τοῦ Θαλοῦ ἐχαράχθη τὸ ἑξῆς ἐπίγραμμα, (Ἀνθολ. Παλ. VII 84):

ἦ ὀλίγον τόδε σᾶμα—τὸ δὲ κλέος οὐρανόμηκες—
τῷ πολυφροντίστῳ τούτῳ Θάλητος ὅρη.

[Ἑρμην. Πόσον μικρὰ εἶναι τὰ ὅρια (τοῦ σήματος) τοῦ τάφου αὐτοῦ ἐδῶ, διὰ τὸν μέγαν σοφὸν Θαλῆν, τοῦ ὁποίου ἡ φήμη εἶναι οὐρανομήκης].

Ὡς πρὸς τὰ πρόσωπα τὰ ὁποῖα ἀπετέλουν τοὺς ἑπτὰ σοφοὺς τῆς ἀρχαιότητος δὲν ὑπάρχει ἀπὸ τοῦ τετάρτου αἰῶνος καὶ ἑξῆς ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν διαφόρων συγγραφέων. Ὁ Πλάτων π.χ. εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Πρωταγόρας (343A) θέτει εἰς τὸν κατάλογον τῶν ἑπτὰ σοφῶν τὸν Μύσωνα ἀντὶ τοῦ Περιάνδρου. Ὁ Ἕρμιππος, εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ περὶ τῶν σοφῶν, γράφει, ὅτι οὗτοι δὲν ἦσαν ἑπτὰ ἀλλὰ δέκα ἑπτά, οἱ ἑξῆς: Σόλων, Θαλῆς, Πιττακός, Βίας, Χίλων, Μύσων, Κλεόβουλος, Περίανδρος, Ἀνάχαρσις, Ἀκουσίλαος, Ἐπιμενίδης, Λεώφαντος, Φερεκύδης, Ἀριστόδημος, Πυθαγόρας, Λᾶσος, Ἀναξαγόρας. Εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρουσα ἡ ἀνωτέρω εἴδησις τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου ὅτι κατὰ τὸν Ἕρμιππον οἱ σοφοὶ τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος (κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς καὶ ἡμίσεος αἰῶνος ἤτοι μεταξὺ 600—450 π.Χ.) ἦσαν δέκα ἑπτά. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐθεωρεῖτο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων ὡς ἱερός, διότι εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἑπτὰ καὶ τοῦ δέκα ἢ τοῦ ἐννέα καὶ τοῦ ὀκτώ. Ἡ ἱερότης τοῦ ἀριθμοῦ 7 ἔχει προκύψει ἴσως ἀπὸ τὴν διάρκειαν εἰς ἡμέρας ἑκάστης τῶν φάσεων τῆς σελήνης, ἐν ᾧ ὁ ἀριθμὸς δέκα εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ τετρακτὺς τῶν Πυθαγορείων $(1+2+3+4)$, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτοι καὶ ὡρκίζοντο, θεωροῦντες αὐτὴν ἱεράν. Ἐξ ἄλλου ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ 6 καὶ τοῦ 12, ἤτοι $(6+12):2=9$ καὶ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12 ἤτοι $(2\times6\times12):(6+12)=8$. Ἀντιπροσωπεύουσι δὲ ὁ 6 καὶ ὁ 12, τοὺς ἄκρους ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας καὶ τὸ κλάσμα $\frac{9}{8}$ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι $=17$, ἀποτελεῖ τὸν μουσικὸν τόνον τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος. Τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ δέκα ἑπτὰ τὴν ἀπαντῶμεν καὶ εἰς τὸν Ὅμηρον, τετρακόσια περίπου ἔτη πρὸ τῆς ἀκμῆς τοῦ Πυθαγόρου ὅστις εἶχεν ἀσχοληθῆ πολὺ μὲ τοὺς ἀριθμούς. Εἰς τὴν ῥαψῳδίαν Ω 63 τῆς Ὀδυσσείας ὁ Ὅμηρος παριστᾷ διαλεγομένας εἰς τὸν Ἅδην τὰς ψυχὰς τοῦ Ἀγαμέμνονος καὶ τοῦ Ἀχιλλέως. Ἡ ψυχὴ τοῦ Ἀγαμέμνονος πληροφορεῖ τὴν ψυχὴν τοῦ Ἀχιλλέως περὶ τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας ἀπέδωκαν εἰς τὸν νεκρὸν τοῦ Ἀχιλλέως ἐν Τροίᾳ θρηνήσαντες αὐτὸν ἐπὶ δέκα ἑπτὰ ἡμέρας καὶ νύκτας:

Ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μέν σε ὁμῶς νύκτας τε καὶ ἦμαρ
κλαίομεν ἀθάνατοί τε θεοὶ θνητοί τ' ἄνθρωποι.

Ἑρμηνεία: [Ἐπὶ δέκα ἑπτὰ ἡμέρας καὶ νύκτας συνεχῶς σὲ ἐθρηνούσαμεν καὶ οἱ ἀθάνατοι Θεοὶ καὶ οἱ θνητοὶ ἄνθρωποι].

Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ ὁ εὐλαβὴς Ἀθηναϊκὸς Λαὸς ἐθεώρει τὸν ἀριθμὸν δέκα ἑπτὰ ἱερόν. Διότι οἱ κατὰ μῆκος τοῦ Παρθενῶνος κίονες εἶναι 17, ἐνῷ οἱ κατὰ πλάτος εἶναι 8 ἤτοι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων φθόγγων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, (δηλαδὴ τοῦ 6 καὶ τοῦ 12). Ἐπισημειωτέον ἀκόμη ἐνταῦθα ὅτι τὰ ἀγωνίσματα τῶν Ὀλυμπιακῶν Ἀγώνων κατὰ τὸν 3ον π.Χ. αἰῶνα καὶ ἑξῆς ἦσαν 17. Ἀλλὰ ἡ ἱερότης διαφόρων ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν διὰ μέσου χιλιάδων ἐτῶν διετήρησε μέχρι σήμερον ὁ εὐσεβὴς Ἑλληνικὸς Λαὸς (τριήμερα, ἑφτάψυχος, ἐννηάμερα, σαραντάμερα κλπ.) εἶναι θέμα, τὸ ὁποῖον χρήζει εἰδικῆς ἐρεύνης.

Ὁ Θαλῆς φαίνεται ὅτι δὲν κατέλιπε συγγραφικὸν ἔργον. Ἡ ὑπὸ τὸ ὄνομά του φερομένη ναυτικὴ ἀστρονομία, λέγεται, ὅτι εἶναι πραγματεία τοῦ Φώκου τοῦ Σαμίου. Κατὰ τὸν ἱστορικὸν Λόβωνα τὸν Ἀργεῖον ὁ Θαλῆς συνέγραψεν εἰς στίχους 200 ἔργα (ἢ κατὰ τὴν συνήθη ἑρμηνείαν 200 στίχους ἐν ὅλῳ). Ἐκ τῆς ἐπιστολῆς ὅμως τοῦ Θαλοῦ πρὸς τὸν Φερεκύδη, τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, ὁ ἴδιος ὁ Θαλῆς λέγει, ὅτι μηδὲν γράφει.

ΤΟ ΕΡΓΟΝ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ

Θεμελίωσις τῶν ἐπιστημῶν Γεωμετρία.

Ὁ σπουδαιότερος τῶν Γερμανῶν φιλοσόφων Ἐμμανουὴλ Κάντιος (Immanuel Kant) γράφει, εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῆς περιωνύμου πραγματείας αὐτοῦ Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου (Kritik der reinenVernunft), τὰ ἑξῆς:

«Τὰ μαθηματικὰ ὡς ἐπιστήμη εὗρον τὸν ἀσφαλῆ δρόμον αὐτῶν εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων Ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ ὑποθέσῃ τις, ὅτι τὸ πρᾶγμα ἦτο τόσον εὔκολον εἰς τὴν ἐπιστήμην αὐτήν, ὥστε ν' ἀκολουθήσῃ τὴν βασιλικὴν ἀτραπὸν τῆς λογικῆς, ἡ ὁποία ἔχει ν' ἀσχοληθῇ μόνον μὲ τὸν ἑαυτόν της. (Σημ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἐνταῦθα ὁ Κάντιος ὑπαινίσσεται τὴν ἀπάντησιν τοῦ Εὐκλείδου πρὸς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον, ὅταν οὗτος ἠρώτησεν αὐτόν, ἐὰν ὑπάρχῃ βασιλικὴ ἀτραπὸς πρὸς ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας (ἄκοπος δηλ. μέθοδος ἐκμαθήσεως τῆς γεωμετρίας) καὶ ὁ Εὐκλείδης ἀπήντησεν ὅτι πρὸς τοῦτο χρειάζεται μόνον μυαλό). Πιστεύω ὅτι ἐπ' ἀρκετὸν καιρὸν τὰ μαθηματικὰ ἔμειναν στάσιμα (ἰδίως εἰς τὸν λαὸν τῶν Αἰγυπτίων) μέχρις ὅτου ἔγινε μία ἐπανάστασις εἰς τὸν τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι. Τὴν ἐπανάστασιν αὐτὴν πρέπει νὰ τὴν ἀποδώσωμεν εἰς τὴν εὐτυχῆ ἔμπνευσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἀνθρώπου, ὅστις ἔθεσε τὰ θεμέλια τῆς ἐπιστήμης δι' ὅλους τοὺς αἰῶνας. Δὲν γνωρίζομεν ποῖος ἦτο αὐτὸς ὁ εὐτυχής. Ἐν τούτοις ὅμως ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος ὑποδεικνύει εἰς ἡμᾶς ὅτι ὁ ἐπιτυχὼν τοῦτο εἶναι ἀλησμόνητος (Σημ. ὁ Διογ. ὁ Λαέρτιος λέγει ὅτι πρῶτος ὁ Θαλῆς ἔκαμε διάφορα ἐπιτεύγματα εἰς τὰς ἐπιστήμας). Ὁ πρῶτος ὅστις ἀπέδειξε τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνιῶν (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως) ἔσχε μίαν ἀναλαμπήν». (Σημ. Κατὰ τὸν Πρόκλον, ἀρυόμενον τὰς πληροφορίας του παρὰ τοῦ Εὐδήμου, ὁ Θαλῆς εἶναι ὁ πρῶτος ὁ ἐπιτυχὼν τὴν ἀπόδειξιν τούτου καὶ ἄλλων γεωμετρικῶν θεωρημάτων).

Αἱ μέχρι σήμερον περισωθεῖσαι πληροφορίαι συνηγοροῦσιν ὑπὲρ τῆς ἐπόψεως ὅτι ὁ Θαλῆς εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐσκέφθη νὰ ἱδρύσῃ σύστημα ἀξιωμάτων καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τούτων νὰ αἰτιολογήσῃ τὴν ἀλήθειαν γεωμετρικῶν προτάσεων. Εἶναι δηλ. ὁ πρῶτος, ὅστις ἐπενόησε νὰ θεμελιώσῃ τὴν ἐπιστήμην, ἐξενεγκὼν τὸ διατὶ εἶναι ἀληθὴς μία γεωμετρικὴ πρότασις. Ἐσκέφθη δηλ. ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον οὐδεὶς ἄλλος πεπολιτισμένος λαὸς τῆς ἀρχαιότητος ἠδυνήθη νὰ σκεφθῇ. Καὶ ἀκριβῶς κατὰ τοῦτο διαφέρουσιν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες τῶν ἄλλων λαῶν.

Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς γεωμετρίας ἀποδίδεται εἰδικώτερον εἰς τὸν Θαλῆν ἡ ἀπόδειξις τῶν ἑξῆς γεωμετρικῶν προτάσεων: 1) Ἡ διάμετρος διχοτομεῖ τὸν κύκλον. 2) Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. 3) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι. 4) Πᾶσα γωνία βαίνουσα ἐπὶ ἡμικυκλίου εἶναι ὀρθή. 5) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας εἶναι ἴσα. 6) Θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων. Ἡ ἄγνοια τὴν ὁποίαν εἶχον οἱ Αἰγύπτιοι ἱερεῖς ἐπὶ τῶν σχέσεων τῶν ὁμοίων τριγώνων, τὰς ὁποίας ὁ Θαλῆς ἐφήρμοσεν ἐκεῖ διὰ νὰ εὕρῃ τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἐκ τῆς σκιᾶς τῆς βακτηρίας του ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἤσκουν γεωμετρίαν καθαρῶς ἐμπειρικήν. Εἶναι δὲ ἁπλουστάτη ἡ ἀγνοουμένη ὑπὸ τῶν Αἰγυπτίων γεωμετρικὴ αὕτη πρότασις, περὶ τῆς ὁποίας ὁ Πλούταρχος πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι εἶναι ἀνακάλυψις τοῦ Θαλοῦ (Conv. VII Sap. 2p 147 A).

Ἀστρονομία.

Εἰς τὴν ἀστρονομίαν ἀνάγονται πολλαὶ ἀνακαλύψεις τοῦ Θαλοῦ. Θεωρεῖται ὁ πρῶτος, ὅστις ἔσχε τὰ ἑξῆς ἀστρονομικὰ ἐπιτεύγματα:

1) Καθώρισεν ὅτι αἱ τέσσαρες ἐποχαὶ τοῦ ἔτους δὲν εἶναι ἰσόχρονοι. 2) Εὗρεν ὅτι ὁ πολικὸς ἀστὴρ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ὁδηγὸς κατὰ τὴν νύκτα, τῶν ναυτιλλομένων. 3) Ὑπελόγισεν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι τὸ 1 : 720 τῆς (φαινομένης) τροχιᾶς αὐτοῦ περὶ τὴν γῆν καὶ ὅτι ἐπίσης 1 : 720 εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σελήνης πρὸς τὴν τροχιὰν αὐτῆς περὶ τὴν γῆν. 4) Ἀνεκάλυψεν ὅτι ὁ ἥλιος κατὰ τὴν ἐτησίαν περιφοράν του περὶ τὴν γῆν δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν ταχύτητα [1]. [Σημ. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐπιστήμονες ἐγνώριζον ὅτι ἡ γῆ κινεῖται

(1) Θέων Σμυρναῖος Περὶ ἀστρονομίας 198,14.

περὶ τὸν ἥλιον καὶ ὄχι ὁ ἥλιος περὶ τὴν γῆν, ἀλλὰ δὲν ἐτόλμων νὰ διακηρύξωσι τοῦτο, διότι ἡ λαϊκὴ παράδοσις ἐθεώρει τὴν γῆν ὡς ἑστίαν τοῦ κόσμου καὶ κέντρον ἀκίνητον περὶ τὸ ὁποῖον κινεῖται ὁ ἔναστρος οὐρανός. Πᾶσα ἀντίθετος θεωρία ἐτιμωρεῖτο μὲ θάνατον. Καὶ ὁ μέγας ἀστρονόμος Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος, ὁ διακηρύξας (περὶ τὸ 280 π.Χ.) ὅτι ἡ γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς καὶ περὶ τὸν ἥλιον ἐμηνύθη ἐπὶ ἀθεΐα). 5) Διὰ τὴν ἔκλειψιν τοῦ ἡλίου ὁ Θαλῆς εὗρε τὴν ὀρθὴν ἑρμηνείαν εἰπὼν ὅτι αὕτη προέρχεται ἐκ τῆς εἰσόδου τῆς γῆς εἰς τὴν σκίαν τὴν ὁποίαν ῥίπτει ἡ σελήνη φωτιζομένη ὑπὸ τοῦ ἡλίου (1) Περίφημος ἀστρονομικὴ ἐπιτυχία τοῦ Θαλοῦ θεωρεῖται ἡ πρόβλεψις αὐτοῦ περὶ τῆς ἐκλείψεως τοῦ ἡλίου τῆς γενομένης κατὰ τὴν 28 Μαΐου τοῦ 585 π.Χ. Ὁ Θαλῆς προέβλεψε τὴν ἔκλειψιν αὐτὴν πολλοὺς μῆνας πρὶν αὕτη λάβῃ χώραν. Πῶς ὁ Θαλῆς ἦτο εἰς θέσιν νὰ προβαίνῃ εἰς προρρήσεις ἐκλείψεων ἡλίου δὲν εἶναι γνωστόν. 6) Εὗρε πρῶτος τὴν λόξωσιν τῆς ἐκλειπτικῆς. 7) Εἶπε πρῶτος ὅτι ἡ σελήνη δὲν ἔχει ἴδιον φῶς, ἀλλ' ὅτι ἀνακλᾷ τὸ φῶς τοῦ ἡλίου. 8) Διετύπωσε πρῶτος τὴν γνώμην ὅτι ὁ ἥλιος καὶ τὰ λοιπὰ ἄστρα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν συστατικῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται καὶ ἡ γῆ (γεώδη μὲν ἔμπυρα δὲ τὰ ἄστρα, γεοειδῆ τὸν ἥλιον). 9) Πρῶτος εἶπεν ὅτι ὁ κόσμος εἶναι σφαῖρα, τὴν ὁποίαν διῄρεσεν εἰς πέντε ζώνας. 10) Διετύπωσε τὴν θεωρίαν ὅτι ἡ γῆ ἐπιπλέει ἐπὶ τοῦ ὕδατος. Λέγεται ὅτι ἔγραψε μετεωρολογίαν.

Φυσική.

Ὁ Θαλῆς, ὅταν ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον ἔδωκεν ἑρμηνείαν περὶ τῶν πλημμυρῶν τοῦ Νείλου, εἰπών, ὅτι αὗται ὀφείλονται εἰς τοὺς ἐτησίας ἀνέμους, οἱ ὁποῖοι πνέοντες ἀντιθέτως πρὸς τὸν ῥοῦν τοῦ ποταμοῦ ἀνακόπτουσι τὴν ἔξοδον τῶν ὑδάτων τούτου πρὸς τὴν θάλασσαν καὶ προκαλοῦσιν οὕτω διόγκωσιν τούτων καὶ τὰς πλημμύρας. [Σημ. Ἡ ἑρμηνεία αὕτη δὲν εἶναι ὀρθὴ ἀποτελεῖ ὅμως καὶ μίαν ἀκόμη ἀπόδειξιν ὅτι ὁ Θαλῆς δὲν μετέβη εἰς τὴν Αἴγυπτον διὰ νὰ σπουδάσῃ].

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον καθιστᾷ ἄφθιτον τὴν δόξαν τοῦ Θαλοῦ εἶναι ἡ ἀνακάλυψις τοῦ ἠλεκτρισμοῦ καὶ τοῦ μαγνητισμοῦ. Διὰ τῆς ἀνακαλύψεως ταύτης ὁ Θαλῆς εἰσήγαγε τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα εἰς τὰ μυστικὰ τῆς Θείας Δημιουργίας. Καὶ σήμερον ἀκόμη παραμένει τελείως ἄγνωστον εἰς ποῖα νέα δώματα γνώσεως θὰ ὁδηγήσῃ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα ἡ ἀνακάλυψις αὕτη τοῦ Θαλοῦ. Ἡ ἰδιότης πρὸς ἕλξιν τῆς μαγνήτιδος λίθου καὶ τοῦ ἠλέκτρου ὡδήγησαν τὸν Θαλῆν εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς θεωρίας ὅτι τὸ πᾶν εἶναι ἔμψυχον καὶ δαιμόνων πλῆρες. Ἀφοῦ ὁ μαγνήτης ἕλκει τὸν σίδηρον θὰ ἔχῃ ψυχήν, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὴν κίνησιν. Ἡ θεωρία τοῦ Θαλοῦ δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἐξαγγέλλουσα τὰς ἀντιλήψεις τῆς σημερινῆς φυσικῆς περὶ τῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν περιέχουσι πάντα τὰ σώματα. Ἰδοὺ πῶς περιγράφει ὁ Ἀριστοτέλης τὴν θεωρίαν τοῦ Θαλοῦ περὶ τῆς κινητικῆς

(1) Στοβαῖος Ἐκλ. Ι 25.

ἰδιότητος τῆς ψυχῆς· *«ἔοικε δὲ καὶ Θαλῆς ἐξ ὧν ἀπομνημονεύουσι κινητικόν τι τὴν ψυχὴν ὑπολαβεῖν, εἴπερ τὴν λίθον ἔφη ψυχὴν ἔχειν, ὅτι τὸν σίδηρον κινεῖ».* (Περὶ ψυχῆς Α 405 α 19) [Ἑρμην. Φαίνεται δέ, ὡς γράφουσι, ὅτι ὁ Θαλῆς ἐκλαμβάνει τὴν ψυχὴν ὡς ἔχουσαν κινητικὴν ἱκανότητα, ἐὰν βεβαίως εἶπεν, ὅτι ὁ μαγνήτης ἔχει ψυχήν, διότι κινεῖ τὸν σίδηρον].

Φιλοσοφία.

Ἐὰν ἡ θεμελίωσις τῆς θεωρητικῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ θεμελίωσις τοῦ πολιτισμοῦ τῆς ἀνθρωπότητος ὀφείλεται εἰς τὴν ἀναλαμπὴν τοῦ Θαλοῦ, ὅστις ἐσκέφθη νὰ διατυπώσῃ τὰ γεωμετρικὰ ἀξιώματα καὶ τὴν ἀνάγκην ἀποδείξεως διὰ τούτων τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, ἡ συνολικὴ θεώρησις τοῦ κόσμου καὶ ἡ προσπάθεια ἀναγωγῆς ὅλων τῶν φαινομένων εἰς μίαν ἀρχὴν ἀποτελεῖ πράγματι ἐκπληκτικὸν ἐπίτευγμα τούτου. Ὁ Ἀριστοτέλης περιγράφει ὡς ἑξῆς τὴν προσπάθειαν τοῦ Θαλοῦ πρὸς διατύπωσιν τοῦ πρώτου φιλοσοφικοῦ συστήματος· «Οἱ πλεῖστοι ἐξ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι κατὰ πρώτην φορὰν ἐφιλοσόφησαν ὑπέλαβον ὅτι ἀρχαὶ τῶν πάντων εἶναι αἱ διάφοροι μορφαὶ τῆς ὕλης· διότι ἐκεῖνο ἐκ τοῦ ὁποίου συνίστανται ὅλα τὰ ὄντα καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου ἕκαστον κατὰ πρῶτον γίνεται καὶ εἰς τὸ ὁποῖον τελικῶς καταστρέφεται, ἐν ᾧ ἡ μὲν οὐσία του μένει ἀμετάβλητος, τὰ δὲ πράγματα μεταβάλλουσι μορφὰς τοῦτο, δηλ. τὴν ὕλην, λέγουσιν ὅτι εἶναι τὸ στοιχεῖον αὐτὸ καὶ αὐτὴ εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν ὄντων, καὶ διὰ τοῦτο νομίζουσιν ὅτι τίποτε δὲν γίνεται οὔτε καταστρέφεται, ἐπειδὴ ἡ τοιαύτη φύσις διασώζεται πάντοτε, διότι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ φύσις τις, ἢ μία ἢ περισσότεραι ἐκ τῶν ὁποίων γίνονται ὅλα τὰ ἄλλα χωρὶς αὕτη νὰ μεταβάλλεται. Ἀλλὰ τὸ πλῆθος καὶ τὸ εἶδος τῆς τοιαύτης ἀρχῆς δὲν λέγουσιν ὅλοι ὅτι εἶναι τὸ ἴδιον ἀλλὰ ὁ μὲν Θαλῆς, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀρχηγὸς τῆς τοιαύτης φιλοσοφίας, λέγει ὅτι τοιαύτη ἀρχὴ ἐκ τῆς ὁποίας τὰ πάντα γίνονται εἶναι τὸ ὕδωρ... (Μετὰ τὰ Φυσικὰ Α3 983 β 6. (Φρονοῦμεν ὅτι κατὰ βάσιν ἡ θεωρία τοῦ Θαλοῦ εἶναι ὁμοία πρὸς ὅ,τι διδάσκει ἡ σημερινὴ φυσική, ἡ ὁποία παραδέχεται ὡς ἀρχὴν τῶν ὄντων τὴν ἐνέργειαν ἀντὶ τοῦ ὕδατος.

Ἀποφθέγματα τοῦ Θαλοῦ.

Κατωτέρω ἀναγράφομεν μερικὰ ἐκ τῶν ἀποφθεγμάτων τοῦ Θαλοῦ.

1. Πρεσβύτατον τῶν ὄντων θεός· ἀγένητον γάρ. 2. Κάλλιστον κόσμος· ποίημα γὰρ θεοῦ. 3. ***Μέγιστον*** *τόπος· ἅπαντα γὰρ χωρεῖ. 4. Τάχιστον νοῦς· διὰ παντὸς γὰρ τρέχει. 5. Ἰσχυρότατον ἀνάγκη· κρατεῖ γὰρ πάντων.* ***6.*** *Σοφώτατον χρόνος· ἀνευρίσκει γὰρ πάντα. 7. Γνῶθι σ' αὐτόν. 8. Φίλων παρόντων καὶ ἀπόντων μέμνησο. 9. Ἐγγύα, πάρα δ' ἄτα. 10. Κολακεύειν γονεῖς μὴ ὄκνει. 11. Χαλεπὸν τὸ ἑαυτὸν γνῶναι. 12. Βαρὺ ἀπαιδευσία. 13. Μέτρῳ χρῶ. 14. Μὴ πλούτει κακῶς. 15. Ἀργός μὴ ἴσθι μηδ' ἂν πλουτῇς. 16. Φθονοῦ μᾶλλον ἢ οἰκτίρου. 17. Πρὸς τὸν πυθόμενον τί πρότερον γεγόνοι, νὺξ ἢ ἡμέρα «ἡ νὺξ» ἔφη, «μιᾷ ἡμέρᾳ πρότερον». 18.*

Οὐδὲν ἔφη τὸν θάνατον διαφέρειν τοῦ ζῆν. «σὺ οὖν», ἔφη τις, «διατί οὐκ ἀποθνήσκεις;» ὅτι, «ἔφη, «οὐδὲν διαφέρει».

[Ἑρμηνεία: 1. Πρεσβύτατον πάντων εἶναι ὁ Θεός· διότι εἶναι ἀγένητον. 2. Κάλλιστον πρᾶγμα εἶναι ὁ κόσμος· διότι εἶναι δημιούργημα Θεοῦ. 3. Μέγιστον πρᾶγμα εἶναι ὁ χῶρος· διότι χωρεῖ ὅλα τὰ δημιουργήματα. 4. Τάχιστον εἶναι ὁ νοῦς· διότι διὰ παντὸς τρέχει. 5. Ἡ ἀνάγκη εἶναι τὸ ἰσχυρότατον τῶν πραγμάτων· διότι ὑπερισχύει ὅλων. 6. Ὁ χρόνος εἶναι τὸ σοφώτατον ὅλων τῶν πραγμάτων· διότι μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἀνευρίσκονται ὅλα. 7. Γνώριζε τὸν ἑαυτόν σου. 8. Νὰ ἐνθυμεῖσαι τοὺς φίλους σου ὅταν εἶναι παρόντες καὶ ἀπόντες. 9. Ἔδωσες διὰ κάτι ἐγγύησιν, ἔχε ὑπ' ὄψει ὅτι ἂν δὲν τηρηθῇ ἡ ἐγγύησις ἐπακολουθεῖ τιμωρία. 10. Νὰ μὴ ἀμελῇς νὰ κολακεύῃς πάντοτε τοὺς γονεῖς. 11. Εἶναι δύσκολον τὸ νὰ γνωρίσῃ τις τὸν ἑαυτόν του. 12. Ἡ ἀπαιδευσία εἶναι βαρὺ πρᾶγμα. 13. Εἰς ὅλας τὰς ἐνεργείας νὰ ὑπάρχῃ μέτρον. 14. Μὴ πλούτει κακῶς. 15. Νὰ μὴ μένῃς ἀργὸς μηδὲ ὅταν εἶσαι πλούσιος. 16. Νὰ προτιμᾷς νὰ σὲ φθονῶσι παρὰ νὰ σὲ οἰκτίρωσι. 17. Πρὸς τὸν ἐρωτήσαντα τὶ ἔγινε πρῶτον ἡ νύχτα ἢ ἡ ἡμέρα, ἀπήντησεν; ἡ νύχτα ἔγινε μιὰ ἡμέρα ἐνωρίτερον. 18. Ἔλεγεν, ὅτι ὁ θάνατος δὲν διαφέρει τῆς ζωῆς. Τότε ἐσύ, διατί δὲν πεθαίνεις, τοῦ εἶπε κάποιος. Διότι, εἶπε, δὲν διαφέρει ὁ θάνατος τῆς ζωῆς].

Βιβλιογραφία: Διογένης Λαέρτιος Ι. Η. Diels: Fragmente der Vorsokratiker I. Pauly-Wissowa R.E., XX.HB.Sp. 1399 καὶ 1460. Die Sieben Weisen, Bruno Snell, Tusculum Bücher, Heimeran Verlag, München 1952. Ἰωάννου Καλλιτσουνάκη: Ἐπταδικαὶ ἔρευναι. Πλουτάρχου Ἠθικά, τόμος V, Ἔκδ. Βερναρδάκη σελ. 208 κ. ἑ. Περὶ τῆς Ἡροδότου κακοηθείας. Εὐαγ. Σταμάτη: Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος μέρη Ι καὶ ΙΙ, Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν τῆς 24-11-1955 καὶ 31-1-1957. Πλουτάρχου Σόλων.

Sonderdruck aus der Zeitschrift „Das Altertum", Band 6, Heft 2
Akademie- Verlag, Berlin 1960

Über Thales von Milet

Von EVANGELOS STAMATIS

Thales, einer der Sieben Weisen Griechenlands, ist im ersten Jahr der 35. Olympiade (etwa um 640 v. Chr.) in der kleinasiatischen Stadt Milet geboren und daselbst um 546 v. Chr. gestorben. Nach anderen Angaben lebte er von 624 bis 546 v. Chr.

Milet war eine sehr alte Stadt. Homer erwähnt sie als Verbündete Trojas (Il. 2, 868). Nach dem Fall Trojas (etwa um 1184 v. Chr.) wurde Milet mehrmals zerstört und schließlich von den Athenern neu besiedelt. In derselben Zeit (etwa 800—700 v. Chr.) haben die Griechen West-Kleinasien kolonisiert. Die Thebaner und Orchomenier, die Äoler waren, gründeten die äolischen Städte West-Kleinasiens, unter ihnen Smyrna, das aber einige Jahre später von den Ioniern besetzt wurde.

Milet entwickelte sich rasch und wurde sowohl ein wichtiger geistiger und Handelsmittelpunkt wie auch eine sehr starke Seemacht. Die bedeutendsten griechischen Kolonien am Schwarzen Meer, insbesondere die am nördlichen Rand dieses Meeres liegenden Städte, hat Milet gegründet (etwa um 700 v. Chr.). Daß Milet eine Kolonie der Athener war, wissen wir auch aus einem Brief des Thales an seinen Freund Solon, der durch Diogenes Laertios auf uns gekommen ist. Als Thales erfuhr, daß Solon die griechischen Kolonien in Kleinasien zu besuchen beabsichtigte, lud er ihn in diesem Brief nach Milet, „das eure Kolonie ist", ein.

Diogenes Laertios, ein griechischer Schriftsteller des 3. Jahrhunderts n. Chr., der Biographien der alten Philosophen geschrieben hat, sagt über Thales folgendes: Der Vater des Thales hieß, wie Herodot, Duris und Demokrit berichten, Examyos und seine Mutter Kleobuline, aus dem phönikischen Geschlecht der Theliden, das aus der Familie der Könige Agenor und Kadmos von Theben hervorging. Diogenes Laertios fügt weiter hinzu, daß sich die meisten alten Schriftsteller darin einig sind, daß Thales ein Urmilesier wäre und von einem Adelsgeschlecht abstammte.

Mit der Nachricht Herodots, nach der Thales phönikischer Abstammung sei, beschäftigte sich Plutarch, ein gebürtiger Böoter (aus Chaironeia, geboren etwa 50 n. Chr.), in seiner Schrift „Über die Bosheit Herodots" (*Περὶ τῆς Ἡροδότου κακοηθείας*). Aus dieser Schrift schließt man, daß Plutarch Thales als einen Thebaner betrachtete, dessen Vorahnen während der griechischen Kolonisation West-Kleinasiens aus Theben nach Milet übersiedelten. Der Legende über die Gründung Thebens in Böotien durch Kadmos und von dessen phönikischer Abstammung begegnen wir in den „Phönikerinnen" des Euripides (638 f.), wo es heißt: Kadmos aus Tyros (Phönikien) kam in dieses Land (Theben).

Es erhebt sich die Frage, ob Kadmos, ein Vorahne des Thales, wirklich aus Phönikien stammt und wann er nach Griechenland kam. Die Nachricht, Kadmos sei phönikischer Herkunft (und infolgedessen auch Thales als einer seiner Nachkommen), stützt sich hauptsächlich auf die Legenden, daß Kadmos das griechische Alphabet aus Phönikien nach Griechenland einführte und daß man dem Namen Theben (dem siebentorigen Theben Böotiens) auch in Ägypten begegnet (das hunderttorige Theben Ägyptens). Außerdem gibt es noch ein Zeugnis über das Verhältnis zwischen Böotien und Ägypten: der Name Sphinx, den wir in beiden Ländern finden. Weil die ägyptische Kultur offenbar bei weitem älter ist als die griechische, so neigt man zu dem Glauben, daß Böotien von Ägypten sehr beeinflußt war und Kadmos, der Gründer Thebens und ein Vorahne des Thales, mindestens aus Vorderasien kommt.

Zuerst müssen wir aber bedenken, daß es im Altertum sehr alte Städte mit dem Namen Theben gab wie z. B. in Karien (in Kleinasien, gegenüber der Insel Rhodos) und westlich von Troja. Man kann nicht belegen, welche dieser Städte die älteste ist. Die Legende, daß der König Kadmos aus Phönikien nach Böotien gekommen ist, verliert an Glaubwürdigkeit, wenn man in Betracht zieht, daß sich dieser König aus Böotien in Illyrien (dem heutigen Albanien) wie in einem befreundeten Land bewegte, dort einen Sohn namens Illyrios hinterließ und daselbst gestorben ist. Wir müssen die älteren Berichte und Legenden über die Anfänge der Kultur Griechenlands mit Skepsis aufnehmen. Im Sommer 1958 hat das Deutsche Archäologische Institut zu Athen Ausgrabungen in Thessalien, in einem Ort, heute Kremomagula genannt (einst die von Homer erwähnte Stadt Argissa), fünf Kilometer westlich von Larissa, durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Ausgrabungen waren verblüffend und fast unglaubhaft. Man hat festgestellt, daß es in Thessalien schon 100000 Jahre vor unserer Zeitrechnung Siedlungen gab, also erste Kulturspuren in diesem Lande. Nach diesen neueren Forschungen, für die allerdings eine weitere und eingehendere Bestätigung abzuwarten ist, müssen wir alle die Vorgeschichte betreffenden Nachrichten und Legenden zurückhaltend aufnehmen.

Der Name Thales ist mit der Sage vom Dreifuß verbunden. Einen Dreifuß der Sieben Weisen gab es in vielen heiligen Orten Griechenlands; man zeigte ihn den staunenden Besuchern, so in Theben, wahrscheinlich auch in Delphi und in dem Apollonheiligtum von Didyma bei Milet.

Die Gestalt des Sokrates hat auf die Geschichte des Dreifußes sehr eingewirkt. Sokrates wurde vom delphischen Orakel für den Weisesten von allen erklärt; von sich selbst aber sagte er, daß er nichts wisse. Der delphische Spruch lautete: Sophokles ist weise, Euripides ist weiser, Sokrates aber ist der Weiseste von allen Männern (*Σοφὸς Σοφοκλῆς, σοφώτερος Εὐριπίδης, ἀνδρῶν δ' ἁπάντων σοφώτατος Σωκράτης*). Diesen Spruch bringt man in Verbindung mit der im Altertum verbreiteten Frage nach dem Weisesten der Sieben Weisen.

Über den goldenen (manchmal spricht man vom ehernen) Dreifuß, mit dem der Name des Thales eng verbunden ist, gibt es viele Versionen. Wir möchten einige von ihnen erwähnen:

Einige Schiffer in Milet warfen für Lohn ihr Netz aus, damit der Fang dem gehörte, der den Fischzug bezahlt hatte. Es geschah aber, daß sie anstatt Fische einen goldenen Dreifuß mit dem Netz fischten. Darüber gerieten sie in Streit

Die Fischer sagten, sie hätten Fische, aber keinen Dreifuß verkauft; die Käufer, sie hätten alles, was heraufkäme und was sie fängen, gekauft. Da sie nun so stritten, kamen sie überein, Apollon zu fragen. Der aber verkündete ihnen:

Sprößling du von Milet, um den Dreifuß fragst du Apollon?
Wer an Weisheit der erste, für den bestimm' ich den Dreifuß.

Ἔκγονε Μιλήτου, τρίποδος πέρι Φοῖβον ἐρωτᾷς;
ὃς σοφίῃ πάντων πρῶτος, τούτου τρίποδ' αὐδῶ.

Sie brachten ihn nun zu den Sieben Weisen. Jeder von diesen bestritt aber, weise zu sein. Deswegen beschlossen sie, ihn dem Apollon als dem Weisesten von allen zu weihen. So, erzählt man, bekam Apollon den Dreifuß.

Eine andere Fassung der Geschichte über den Dreifuß hat der bedeutende hellenistische Dichter Kallimachos, der in Alexandrien in der ersten Hälfte des 3. Jahrhunderts wirkte, bearbeitet. Allerdings spricht Kallimachos in dieser Geschichte nicht von einem goldenen Dreifuß, sondern von einem goldenen Becher (Fr. 191, 52—77 PFEIFFER).

Bathykles, ein Mann aus Arkadien, verfügte letztwillig über sein Vermögen und übergab dem mittleren seiner Söhne, Amphalkes, einen goldenen Becher, damit er ihn dem besten der Sieben Weisen überreiche. Der aber

„fuhr nach Milet. Der Preis gehörte nämlich
dem Thales, der auch sonst in vieler Kenntnis
beschlagen war und der die Sterne, hieß es,
des Himmelswagens ausgemessen hatte ...
An ihn nun wandte sich sogleich Amphalkes ...
‚Mein Vater hat im Sterben mir bestimmt,
dies dem zu geben, der von euch der beste
der Sieben Weisen sei. Dir geb ich es.' " ...

(Thales schickte den Becher zu Bias von Priene, dieser zu Periander von Korinth, von diesem bekam ihn)

„Solon. Doch jener schickte ihn an Chilon"

(nach Sparta, dieser zu Pittakos von Mytilene, dieser zu Kleobulos von Lindos; von diesem wurde er weiter geschickt, und so)

„kam das Geschenk zurück zu Thales wieder".

(Der aber schickte ihn dem Apollon von Didyma mit folgender Widmung):

„Mich schenkt dem Herrn von Neileos' Volke Thales,
der mich zum zweitenmal als Preis erhielt."

Θαλῆς με τῷ μεδεῦντι Νείλεω δήμου
δίδωσι, τοῦτο δὶς λαβὼν ἀριστῆον.

Andere sagen, der Dreifuß sei ein Werk des Hephaistos und der Gott habe ihn dem Pelops zur Hochzeit geschenkt. Er sei dann an Menelaos gekommen, und Paris habe ihn mit der Helena geraubt; aber diese habe ihn ins Koische Meer geworfen mit den Worten: „Der wird Grund für viel Streit sein." Später kauften einige Leute aus (der Stadt) Lebedos dort einen Fang Fische; da wurde auch der Dreifuß gefischt. Darüber stritten sie mit den Fischern, bis sie nach Kos kamen, und als sie sich nicht einigen konnten, berichteten sie an ihre Stadt Milet. Die Milesier schickten eine Gesandtschaft nach Kos; sie wurde aber abgewiesen, und deshalb zogen sie gegen die Koer in den Krieg. Als viele auf beiden Seiten gefallen waren, verkündete ein Orakel, sie sollten den Dreifuß dem Weisesten geben. Sie einigten sich auf Thales. Der aber weihte den Dreifuß, nachdem er die Runde bei den Sieben Weisen gemacht hatte, dem Apollon von Didyma. Das Orakel an die Koer lautete (Diodor 9, 3, 2):

Niemals endet der Krieg der Meroper und der Ionier,
Bis ihr den Dreifuß aus Gold, den Hephaistos kunstvoll geschaffen,
Fortgesendet, bis er in das Haus des Mannes gekommen,
Der voller Weisheit schaut, was ist und was künftig noch sein wird.

Οὔποτε μὴ λήξῃ πόλεμος Μερόπων καὶ Ἰώνων,
πρὶν τρίποδα χρύσειον, ὅν Ἥφαιστος κάμε τεύχων,
ἐκ μέσσου πέμψητε καὶ ἐς δόμον ἀνδρὸς ἵκηται,
ὅς σοφίᾳ τά τ᾽ἐόντα τά τ᾽ἐσόμενα προδέδορκεν.

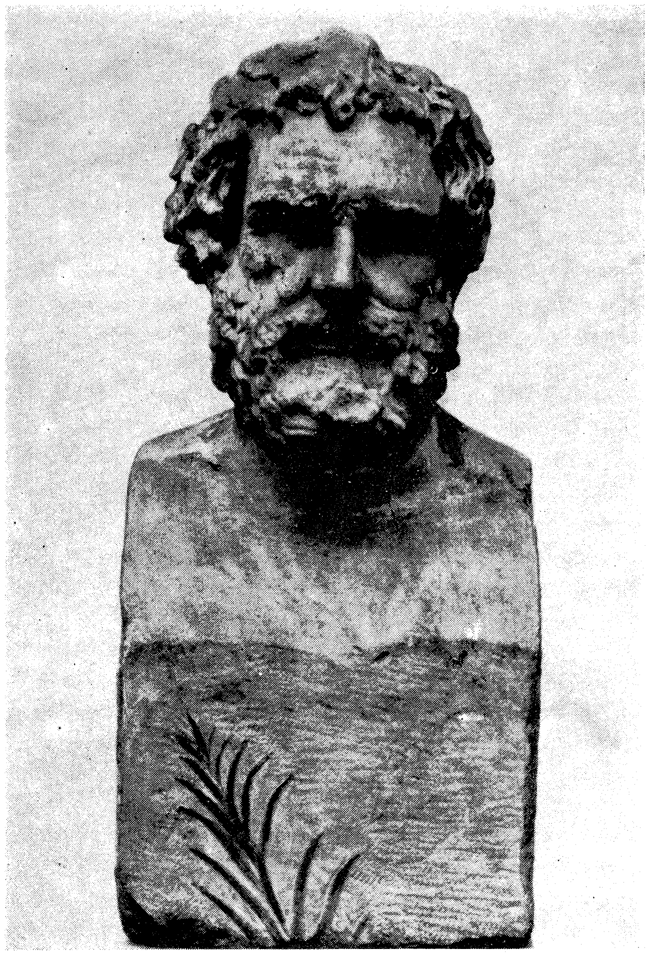
Ein paar Briefe, die durch Diogenes Laertios auf uns gekommen sind, werden von der neueren Forschung als Fragmente einer Art historischen Romans, der im 3. Jahrhundert v. Chr. abgefaßt worden ist, betrachtet. Trotzdem kann man aber nicht bestreiten, daß diese Briefe einen Kern von Wahrheit und wirklichen Geschehnissen enthalten. Wir führen auszugsweise einen Brief des Thales an Pherekydes (auf der Insel Syros) an: „Wenn du wünschest, komme ich zu dir nach Syros. Denn wir wären töricht, ich und Solon aus Athen, wenn wir nach Kreta führen, um dort Forschungen anzustellen, wenn wir nach Ägypten führen, um uns mit den dortigen Priestern und Astrologen zu unterhalten, zu dir aber nicht."

Über das private Leben des Thales gehen die Berichte auseinander. Einmal wird erwähnt, Thales war verheiratet und hatte einen Sohn namens Kybisthos. Andere erzählen, er war nicht verheiratet und adoptierte den Sohn seiner Schwester. Man fragte ihn, warum er keine Kinder zeuge. Er antwortete: nur aus Kinderliebe.

Ein köstliches Gespräch zwischen Thales und Solon hat uns Plutarch überliefert. Als Solon einmal Milet zur Erholung besuchte, wurde er von Thales gastfreundlich aufgenommen. Solon hatte aber in Athen einen sehr schwer erkrankten Sohn zurückgelassen. Ein paar Tage nach seiner Ankunft in Milet fragte Solon den Thales, warum er nicht verheiratet sei. Thales sagte ihm: „Ich werde dir morgen die Antwort geben." Am nächsten Tag kam das Schiff der Linie Piräus-Milet an. Solon fragte Thales, ob es möglich sei, Nachrichten aus Athen zu erfahren. Thales schickte zum eingelaufenen Schiff einen vertraulichen Boten. Als der Bote zurückkam, erzählte er dem Solon (nach dem geheimen Auftrag des Thales), er sah in Athen ein großes Staatsbegräbnis; er wußte aber nicht, wer gestorben war; wie er hörte, handelte es sich um eine Person des Hochadels von Athen. Als Solon diese Nachricht vernahm, begann er zu weinen. Er glaubte, sein Sohn sei gestorben. In diesem Moment sagte Thales zu ihm: „Weine nicht, mein lieber Solon! Die Nachricht ist nicht wahr. Ich wollte dir nur die Antwort geben, warum ich nicht geheiratet habe."

Amüsant ist auch die Geschichte, die man über ein Gespräch zwischen Thales und seiner Mutter erzählt. Die Mutter drängte den Sohn des öfteren, zu heiraten.

Thales gab ihr viele Jahre lang die Antwort: „Die Zeit dazu ist noch nicht gekommen" (οὔπω καιρός). Als aber viele Jahre vergingen und Thales ein älterer Mann war, gab er seiner Mutter auf dieselbe Frage die Antwort: „Die Zeit zum Heiraten ist schon vorbei" (οὐκέτι καιρός).



Philosoph, wahrscheinlich Thales von Milet. Römische Kopie aus dem 2. Jahrhundert n. Chr. Kopenhagen, Ny Carlsberg Glyptothek

Über die politische Tätigkeit des Thales erfahren wir von Herodot (1, 170) folgendes: „Gut war aber auch, noch ehe Ionien verlorenging, der Rat des Thales aus Milet (von weiterer Abstammung war er Phöniker); er forderte die Ionier auf, einen einheitlichen Rat zu bilden; der sollte in der Stadt Teos sein, denn Teos sei die Mitte von Ionien; ihre anderen Städte aber sollten trotzdem nach ihren Gesetzen wie selbständige Gemeinden verwaltet werden.“ Später, als Kroisos eine Gesandtschaft nach Milet wegen eines Bündnisses schickte, verhinderte er den Abschluß eines Vertrages, was die Stadt rettete, als Kyros zur Macht kam.

Die Legende will Zusammenkünfte der Sieben Weisen bei irgendeiner Gelegenheit oder Zusammentreffen bei einem Gastmahl kennen, wo sie ihre Meinungen über das Leben und sonstiges austauschten. Sie waren einmal bei dem König Kroisos von Lydien zusammengekommen. Geschichtlich aber ist gesichert, daß Thales eine längere oder kürzere Zeit bei Kroisos verbracht hat. So erfahren wir von Herodot folgendes (1, 75): „Als Kroisos zum Fluß Halys“ (in Kleinasien) „kam, brachte er sein Heer auf den vorhandenen Brücken hinüber; so meine ich jedenfalls. Nach den gewöhnlichen Erzählungen der Griechen half aber Thales aus Milet ihnen hinüber. Denn als Kroisos nicht wußte, wie das Heer über den Fluß käme (denn die Brücken hätten damals noch nicht gestanden), habe Thales, heißt es, der damals im Lager war, es zuwege gebracht, daß der Strom, der zur Linken des Heeres war, auch zur Rechten floß: Von einem Punkt oberhalb des Lagers aus grub er einen tiefen Kanal, führte ihn mondförmig so, daß er das Lager im Rücken umfaßte und der Fluß, aus seinem alten Strom in den Kanal abgeleitet, am Lager vorbei in das alte Bett einmündete. Sobald der Fluß geteilt war, wurde er auf beiden Seiten passierbar.“

Einen Trinkspruch des Thales bei einem Gastmahl der Sieben Weisen überliefert Diogenes Laertios: *Οὔ τι τὰ πολλὰ ἔπη φρονίμην ἀπεφήνατο δόξαν. ἕν τι μάτευε σοφόν, ἕν τι κεδνὸν αἱροῦ· λύσεις γὰρ ἀνδρῶν κωτίλων γλώσσας ἀπεραντολόγους.* (Nicht die vielen Worte verraten kluges Urteil. Such ein weises, wähl ein gutes! Sonst wirst du nur wüstredende Zungen der Schwätzer lockern.)

Die Sieben Weisen sind von Platon in die Geschichte der griechischen Philosophie eingeordnet; sie wurden als die ersten Philosophen betrachtet, weil Thales als erster den Versuch gemacht hat, die Fülle des Wirklichen als Einheit zu fassen, indem er das Wasser für den Ursprung und das Wesen der Dinge erklärte. Der erste, der eine Philosophiegeschichte geschrieben hat, scheint Hippias von Elis gewesen zu sein, ein Sophist des ausgehenden 5. Jahrhunderts; allem Anschein nach wurde Thales an den Anfang der Philosophiegeschichte gesetzt. Platon hat in der Liste der Sieben Weisen, die er in seinem „Protagoras“ anführt, den Tyrannen Periander gestrichen; an dessen Stelle setzte er den Myson. „Zu den Sieben Weisen“, schreibt Platon, „gehörte auch Thales von Milet, Pittakos von Mytilene, Bias von Priene, unser Solon, Kleobulos von Lindos, Myson von Chenai, und siebtens wurde zu ihnen auch der Lakedaimonier Chilon gezählt. Sie waren alle Nacheiferer, Liebhaber und Schüler der spartanischen Bildung. Da kann man verstehen, daß ihre Weisheit derart war: kurze denkwürdige Sprüche, die jeder von ihnen sagte. Sie kamen auch zusammen und brachten ein Erstlingsopfer ihrer Weisheit dem Apollon in den Tempel zu Delphi, indem sie dort die Inschriften anbrachten, die in aller Munde leben: ‚Erkenne dich selbst‘ und ‚Nichts zu sehr‘“ (343 ab). Im „Theätet“ spricht Sokrates mit dem Mathematiker Theodoros über die echten Philosophen: Ein solcher Philosoph wisse nicht, ob jemand in der Stadt guter oder schlechter Herkunft sei, ob wer eine Schuld von den Vorfahren väterlicher- oder mütterlicherseits trage. Der Geist fliege, wie Pindar sagt, „unter die Erde“ und vermesse ihre Flächen, treibe „über den Himmel hinaus“ Astronomie und forsche überall nach allem Wesen der Dinge in seiner Ganzheit, ohne sich auf die Dinge in der Nähe niederzulassen. Theodoros: „Wie meinst du das, Sokrates?“ Sokrates: „So wie es in der Geschichte von Thales heißt, mein Theodoros: Er beobachtete die Sterne, schaute nach oben und fiel in eine Zisterne. Da verspottete ihn eine witzige und muntere thrakische Magd: Was im Himmel sei, wolle er wissen, aber was vor ihm und zu seinen Füßen liege, das wisse er nicht“ (173d—174a).

Während Platon und die Platonische Akademie die Sieben Weisen als Menschen der reinen Theorie darstellt, gibt Aristoteles über Thales ein ganz anderes Bild, indem er schreibt: „Man beschimpfte Thales wegen seiner Armut, die zeige, wie unnütz die Philosophie sei. Da sah Thales, so erzählt man, auf Grund seiner Astronomie eine reiche Ölernte voraus, und noch im Winter, als er gerade ein wenig Geld hatte, sicherte er sich durch eine Anzahlung die gesamten Ölpressen in Milet und Chios; er konnte sie billig mieten, da ihn niemand überbot. Als die Zeit kam, war plötzlich eine starke Nachfrage; da vermietete er sie nach seinen Bedingungen weiter, verdiente viel Geld und bewies, daß Philosophen leicht reich sein können, falls sie wollen, aber daß dies nicht ihr Ziel ist“ (Politik 1259a).

Es ist interessant, was der Professor und Konsul Decimus Magnus Ausonius, ein Gelehrter in Bordeaux, um 390 n. Chr. über Thales in seinem Spiel von den Sieben Weisen schrieb:

Ich heiße Thales aus Milet. Das Wasser,
lehrt' ich, wie Pindar, ist der Dinge Ursprung.
Den Dreifuß brachten mir die Fischer einst,
den sie mit ihrem Netz emporgezogen.
Apollons Weisung führte sie zu mir,
da er dem Weisesten dies Werk bestimmte.
Ich wollt' es nicht behalten, gab's zurück,
damit sie es an andere weitergäben,
die ich für würdiger hielt. So ging's die Runde,
gesandt zu allen sieben weisen Männern;
zurückgesandt zu mir, bracht man es wieder.
Ich aber nahm's und weiht' es dem Apoll.
Wenn nämlich einen Weisen auszuwählen
Apoll befahl, ist's recht, auf Menschen nicht,
vielmehr auf einen Gott dies zu beziehen.
Der also bin ich. Auf die Bühne tret' ich
aus gleichem Grunde wie die beiden vor mir,
daß ich wie sie hier meinen Spruch vertrete.
Der wird mißfallen, aber nicht den Klugen,
die durch Erfahrung schon gewitzigt sind.
Ἐγγύα, πάρα δ' ἄτα sag' ich griechisch,
auf deutsch: Nimm Bürgschaft, doch schon hast du Schaden! ...
Doch will ich niemanden mit Namen nennen,
ihr mögt euch selber sagen und berechnen,
wie vielen Bürgschaft Leid und Schaden brachte.
Doch lieb bleibt dies Geschäft den lockren Burschen.

Nach der Überlieferung ist Thales im Stadion von Milet, während er den Kampfspielen zuschaute, wegen der Hitze, des Durstes und der Erschöpfung im hohen Alter gestorben.

Diogenes Laertius überliefert uns ein paar alte Verse über den Tod des Thales (Anthologia Graeca 7, 85):

Γυμνικὸν αὖ ποτ᾽ ἀγῶνα θεώμενον, ἠέλιε Ζεῦ,
τὸν σοφὸν ἄνδρα Θαλῆν ἥρπασας ἐκ σταδίου.
Αἰνέω, ὅττι μιν ἐγγὺς ἀπήγαγες· ἦ γὰρ ὁ πρέσβυς
οὐκέθ᾽ ὁρᾶν ἀπὸ γῆς ἀστέρας ἠδύνατο.

Einst, als Thales der Weise ein gymnisches Wettspiel sich ansah,
nahmst du ihn, Helios-Zeus, jäh aus dem Stadion fort,
recht war's, daß du hinauf ihn geführt; denn der Alte vermochte
hier von der Erde nicht mehr droben die Sterne zu sehn.

Milet, die Heimatstadt des Thales, ließ zu seinem Standbild folgende Verse schreiben (Anthologia Graeca 7, 83):

Τόνδε Θαλῆν Μίλητος Ἰὰς θρέψασ᾽ ἀνέδειξεν
ἀστρολόγων πάντων πρεσβύτατον σοφίῃ.

Ioniens Erde, Milet, gab Thales Leben und Größe;
niemand kannte so gut droben die Sterne wie er.

Auf dem Grabmal des Thales las man folgende Inschrift: *Ἦ ὀλίγον τόδε σῆμα οὐρανόμηκες τοῦ πολυφροντίστου τοῦτο Θάλητος ὅρη.* (Klein ist das Grabmal des Thales, gewiß, doch erwäge des großen Denkers Weltruhm, der weit wie der Himmel sich dehnt.)

Die wissenschaftlichen Leistungen des Thales

Thales hat keinen Lehrer gehabt. So will es die Tradition wissen. Von Proklos (410—485), der Rektor der Platonischen Akademie war, erfahren wir, daß die Geometrie, wie die meisten berichten, bei den Ägyptern zuerst ausgebildet wurde und ihren Ursprung mit den Landesvermessungen nahm . . . „Thales verpflanzte zuerst, nachdem er nach Ägypten gekommen, die Geometrie nach Griechenland und machte selbst viele Entdeckungen. Sein Verfahren war dabei teilweise mehr allgemeiner Art, teilweise mehr auf die Sinnendinge ausgerichtet. Nach ihm war es Mamertios, der Bruder des Dichters Stesichoros, der sich nach der Überlieferung mit dem Studium der Geometrie befaßte.“ . . . Thales hat den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gefunden, und zwar habe er die Winkel nicht gleich, sondern ähnlich genannt. Außerdem hat Thales den Satz über die Gleichheit der Scheitelwinkel bewiesen und den Satz, daß der Durchmesser den Kreis halbiert. Der Euklidische Satz 1, 26 rührt von Thales her, der sich seiner notwendig bedienen mußte bei seiner Methode, die Entfernung der Schiffe im Meer zu bestimmen.

Aus anderen Berichten erfahren wir, daß Thales der erste war, der bewies, daß der Winkel auf dem Halbkreis ein rechter ist. Außer von Proklos haben wir Angaben von Plutarch, wonach Thales die Höhe der Pyramiden in Ägypten durch

Messung ihres Schattens bestimmt habe. Dieser Bericht stammt nach Diogenes Laertios aus Hieronymos von Rhodos, der sagt, Thales maß die Pyramiden am Schatten, wenn der Schatten der Pyramidenhöhe gleich war, d. h. bei einer Sonnenhöhe von 45°.

Es gilt als ganz sicher, daß die ägyptische und die sumerisch-babylonische Geometrie empirisch war. Es gibt keine Spur davon, daß die Mathematik dieser Kulturvölker eine Wissenschaft wie im griechischen und im heutigen Sinne darstellte. Bekanntlich nennen wir heute die griechische Mathematik eine deduktive Wissenschaft, d. h. eine Wissenschaft, die auf wenigen Definitionen und einfachen Sätzen, die keines Beweises bedürfen und die wir Axiome nennen, ihr ganzes Gebäude aufbaut. Der mathematische Beweis, den wir nur bei den Grie-

Die Sieben Weisen. Mosaik aus Torre Annunziata, 1. Jahrhundert v. Chr. Neapel, Muzeo Nazionale chen finden und der erst die Mathematik zu einer Wissenschaft macht, ist eine Entdeckung des griechischen Geistes. Alles, was uns über diese Entdeckung überliefert ist, spricht dafür, daß der geniale Entdecker der Notwendigkeit eines Beweises in der Mathematik Thales von Milet war. Eine Berechnung der Pyramidenhöhe durch die Schatten der Pyramide und eines Stocks, wie es Thales in Ägypten nach Hieronymos machte, setzt die Kenntnis der Ähnlichkeitssätze der Geometrie voraus, und diese Kenntnis hatten die ägyptischen Priester nicht. Außerdem erfahren wir aus dem oben angeführten Brief des Thales an Pherekydes, daß Thales Ägypten nicht zum Studium besuchte, sondern um mit den Priestern Gespräche zu führen. Aus demselben Brief schließt man, daß Thales, als er nach Ägypten reiste, einen sehr hohen Ruf als Gelehrter genoß.

IMMANUEL KANT äußert sich in der Vorrede seiner „Kritik der reinen Vernunft" über die Entdeckung des Beweises in der Mathematik folgendermaßen:

„Die Mathematik ist von den frühesten Zeiten her, wohin die Geschichte der menschlichen Vernunft reicht, in dem bewundernswürdigen Volke der Griechen den sicheren Weg einer Wissenschaft gegangen ... Dem ersten, der den gleichschenkligen Triangel demonstrierte (er mag nun Thales oder wie man will geheißen haben), dem ging ein Licht auf; denn er fand, daß er nicht dem, was er in der Figur sah, oder auch dem bloßen Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst a priori hineindachte und darstellte (durch Konstruktion), hervorbringen müsse und daß er, um sicher etwas a priori zu wissen, der Sache nichts beilegen müsse, als was aus dem notwendig folgte, was er seinem Begriffe gemäß selbst in sie gelegt hat."

Daß sich Thales mit der Astronomie befaßte, haben wir schon oben zitiert. Er hat als erster, wie Herodot berichtet, eine Sonnenfinsternis vorausgesagt, die vom 28. Mai 585 v. Chr. Bei dieser Sonnenfinsternis fand die Schlacht zwischen den Medern und Lydern statt. Thales hat die Himmelskugel in die fünf Zonen der Erde durch die Wendekreise und Polarkreise geteilt. Er lehrte die Entstehung der Sonnenfinsternis durch das Dazwischentreten des Mondes, daß der Mond von der Sonne erleuchtet wird und die Erde (mit Kugelgestalt) in der Mitte der Welt auf Wasser ruht. Thales ist der erste, der sagte, daß die Sonne nicht mit gleichmäßiger Geschwindigkeit vorrücke (er fand die Ungleichheit der vier Jahreszeiten), daß aber die Dauer eines Jahres 365 Tage betrage und daß der Sonnendurchmesser der 720. Teil der Sonnenbahn sei. Er hat die Mondfinsternis durch den Eintritt des Mondes in den Schattenkegel der Erde erklärt, und er lehrte die Schiefe der Ekliptik.

Thales war der erste, der die Meinung äußerte, daß die Sonne und alle anderen Sterne aus denselben Materialien wie die Erde geschaffen sind. Im Altertum behauptete man, er habe auch ein Meteorologiebuch verfaßt; von diesem aber findet sich keine Spur.

Als Thales Ägypten besuchte, gab er eine Erklärung über die Nilschwelle, indem er behauptete, daß sie durch die jährlichen Winde (*ἐτησίαι*), die gegen die Strömung des Flusses wehen, verursacht wird. Diese Erklärung ist zwar nicht richtig, erweist sich aber als ein Argument, daß Thales Ägypten nicht besuchte, um zu studieren.

Was den Ruhm des Thales unvergänglich macht, ist die Entdeckung des Magnetismus und der Elektrizität. Im Altertum waren diese großen Entdeckungen des Thales mit philosophischen Spekulationen verknüpft und physikalisch nicht ausgewertet. Das Vorhandensein einer unsichtbaren Kraft wie des Magnetismus und der Elektrizität führte Thales zu der Erklärung, daß alle Körper mit beweglicher Seele und Dämonen gefüllt sind. Man kann diese Auffassung des Thales als eine Vorankündigung der heutigen physikalischen Theorie, daß die Materie in sich eine ungeheuere Kraft schließt — gemäß der EINSTEINschen Theorie über die Wechselwirkung zwischen Materie und Energie —, betrachten. Aristoteles beschreibt wie folgt die Theorie des Thales über die bewegliche Natur der Seele:

Ἔοικε δὲ καὶ Θαλῆς ... κινητικόν τι τὴν ψυχὴν ὑπολαβεῖν, εἴπερ τὴν λίθον ἔφη ψυχὴν ἔχειν, ὅτι τὸν σίδηρον κινεῖ. (Es scheint, daß Thales ... die Seele als etwas Bewegliches betrachtete, wenn er gesagt hat, daß der Magnetstein eine Seele hat, weil er das Eisen bewegt.)

Was die Lehre des Thales über die Welt betrifft, so erfahren wir von Aristoteles (Metaphysik 983b—984a) folgendes:

„Die meisten unter den ältesten Denkern wollten überall nur die stofflichen Ursachen anerkennen. Denn woraus alle Gegenstände bestehen, woraus sie sich entwickeln und worin sie sich schließlich wieder auflösen, wobei das Wesen bleibt und nur die Eigenschaften sich wandeln, das ist nach ihrer Auffassung Element und Urgrund aller Gegenstände; und dies bewirkt, so meinen sie, daß nichts entstehen oder vergehen kann, weil ein solcher Grundstoff seiner Natur nach ewig erhalten bleibt, wie wir ja auch von Sokrates nicht sagen, daß er an sich ‚wird', wenn er schön oder gebildet ‚wird', oder daß er vergeht, wenn diese Eigenschaften vergehen, weil der zugrundeliegende Gegenstand selbst, in diesem Falle Sokrates, ja bleibt. So auch in allen anderen Fällen. Denn es muß einen natürlichen Stoff geben, einen oder mehrere, aus dem das andere entsteht, während er selber erhalten bleibt. Freilich über Zahl und Art dieses Grundstoffes waren sie nicht einig: Thales, der Begründer dieses Gedankenganges, behauptet, es sei das Wasser. Deswegen lehrte er auch, die Erde schwimme auf dem Wasser. Vielleicht kam er zu dieser Auffassung durch die Beobachtung, daß überall die Nahrung flüssig ist und daß selbst die Wärme aus dem Wasser komme und von ihm lebe; das aber, woraus etwas entsteht, muß ja immer sein Urgrund sein. Dies also veranlaßte ihn zu seiner Lehre ... Ob dies wirklich die älteste Ansicht über die Natur gewesen ist, möge dahingestellt bleiben; von Thales dagegen ist es überliefert, daß er so über die oberste Ursache gelehrt habe."

V/12/6 0.063

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1960: ΤΟΜΟΣ 35ος

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ: ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΥ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ.

EVANG. STAMATIS: VERALLGEMEINERUNG EINES PROBLEMS UNBESTIMMTER ANALYTIK DES DIOPHANTOS.

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ ΙΒ'—ΤΕΥΧΟΣ Α' 1960

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1960

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΥ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Α΄. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ Διόφαντος ἐπιλύει εἰς τὸ Δ΄ Βιβλίον τῶν Ἀριθμητικῶν του τὰ ἑξῆς προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως·

Πρόβλημα 19

«Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον.

[Ἑρμηνεία: Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν σχηματίζῃ τετράγωνον].

Ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν ἓν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τετράγωνον ἔχοντα πλευρὰν τὸν $\mathbf{x}$ μὲ τυχόντα συντελεστὴν (σημ. ἐνταῦθα τὴν μονάδα) σὺν ἕν, καὶ ἔστω ἡ πλευρὰ αὕτη $(\mathbf{x}+1)$· αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}+1$· ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα θὰ μείνῃ $\mathbf{x}^2+2\mathbf{x}$· τοῦτο θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἐὰν ὁ δεύτερος κληθῇ $\mathbf{x}$, ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $\mathbf{x}+2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον. Ἂς σχηματισθῇ ὁ τετράγωνος οὗτος ἔχων πλευρὰν τὴν $(3\mathbf{x}+1)$, ὁπότε ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $9\mathbf{x}^2+6\mathbf{x}+1$. Ἐὰν ἄρα ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ $9\mathbf{x}^2+6\mathbf{x}$. Πρέπει λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι $9\mathbf{x}^2+6\mathbf{x}$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι $\mathbf{x}$. Ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, θὰ εἶναι $9\mathbf{x}+6$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον, σὺν ἕν, νὰ εἶναι τετράγωνος, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον, σὺν ἕν, εἶναι $9\mathbf{x}^2+24\mathbf{x}+13$, ἐξισώνω ταῦτα πρὸς τετράγωνον. Καὶ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ $\mathbf{x}^2$ τετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος ἦτο τετράγωνος καὶ τὸ $24\mathbf{x}$ ἦτο τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τοῦ $9\mathbf{x}^2$ καὶ τοῦ 13, τὰ τρία ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος θὰ ἐπληροῦντο ἀπροσδιορίστως (συναρτήσει τοῦ $\mathbf{x}$).

Ἀλλὰ ὁ 13 προέρχεται ἐκ τοῦ $2.6+1$, ἀλλὰ ὁ μὲν 2 προέρχεται ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ $\mathbf{x}$ ἐπὶ τὴν μονάδα, ὁ δὲ 6 πάλιν προέρχεται ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ $3\mathbf{x}$ ἐπὶ τὴν μονάδα. Θέλω λοιπόν, ὅπως τὸ διπλάσιον ἑνὸς συντελεστοῦ τοῦ $\mathbf{x}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἄλλου συντελεστοῦ τοῦ $\mathbf{x}$, σὺν ἕν, νὰ δίδῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον ἑνὸς συντελεστοῦ τοῦ $\mathbf{x}$ ἐπὶ τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἄλλου συντελεστοῦ τοῦ $\mathbf{x}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τῶν συντελεστῶν τούτων. Θέλω λοιπόν, ὅπως τὸ τετραπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν σὺν ἕν, σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ γινομένου δύο τυχόντων ἀριθμῶν σὺν τῷ τετραγώνῳ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν σχηματίζει τετράγωνον [ἰσχύει δηλ. ἡ ταυτότης $4\mu\nu+(\mu-\nu)^2=(\mu+\nu)^2$]. Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν ἴσον πρὸς ἓν καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ἕν. Πρέπει λοιπὸν νὰ σχηματίζωμεν τὰς πλευράς τῶν τετραγώνων μὲ συντελεστὰς τοῦ x, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ἀριθμοί [διότι τότε ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα· ἤτοι ἀφοῦ ἡ πρώτη πλευρὰ ἐλήφθη $(1 . x+1)$, ἡ δευτέρα νὰ ληφθῇ $(2 . x+1)$ καὶ ὄχι $(3 . x+1)$]. Καὶ θὰ εἶναι (ὡς ἐλέχθη) ὁ μὲν $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ x^2+2x. Πρέπει ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς x^2+2x. Ἂς τεθῇ ὁ δεύτερος $=x$· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ πρῶτος, θὰ εἶναι $x+4$.

Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$, ἐὰν ὁμοίως ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ $4x^2+4x$· πρέπει λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι $4x^2+4x$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι $=x$· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, θὰ εἶναι $(4x+4)$.

Καὶ ἐλύθη τὸ πρόβλημα ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἀγνώστων, σὺν ἕν, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον καὶ δίδεται εἰς τὸν x οἱαδήποτε τιμὴ θέλει τις. Διότι τὸ νὰ ζητῇ νὰ λύσῃ τις ἓν πρόβλημα ἀπροσδιορίστως σημαίνει νὰ δίδῃ οἱανδήποτε τιμὴν εἰς τὸν x καὶ ἀφοῦ ἀντικαθιστᾷ εις τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος να πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα».

[Σημ. Ἡ λύσις εἰς σύγχρονον διατύπωσιν: Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ y, z, ω. Τὸ πρόβλημα εἶναι $yz+1=\alpha^2$, $z\omega+1=\beta^2$, $y\omega+1=\gamma^2$. Θέτει $yz+1=(x+1)^2=x^2+2x+1$. Ἐκ τούτου εἶναι $yz=x^2+2x=x(x+2)$. Καλεῖ $z=x$, ὁπότε $y=x+2$. Θέτει ἀκόμη $z\omega+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$.

Ἐκ τούτου εἶναι $z\omega=4x^2+4x=x(4x+4)$. Καὶ ἐπειδὴ $z=x$ εἶναι ἄρα $\omega=4x+4$. Καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι εἶναι

$$yz+1=(x+1)^2, \quad z\omega+1=(2x+1)^2 \quad \text{καὶ} \quad y\omega+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2 \text{]}.$$

Πρόβλημα 20

«Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μονάδα μίαν ποιῇ τετράγωνον.

[Ἑρμηνεία: Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν σχηματίζῃ τετράγωνον].

Ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν ἕν, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω μίαν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ $(x+1)$, τὸ ὁποῖον εἶναι x^2+2x+1. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, μένει x^2+2x ὡς γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἔστω ὁ πρῶτος x· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x+2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος, σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ $(2x+1)$, δηλαδὴ μὲ συντελεστὴν τοῦ x τὸν κατὰ μονάδα ηὐξημένον συντελεστὴν τοῦ x τοῦ προηγουμένως ληφθέντος $(x+1)$ συμφώνως πρὸς τὸ προδειχθὲν (εἰς τὸ πρόβλημα 19) καὶ ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος τετραγώνου ἀφαιρῶ τὴν μονάδα καὶ θέτω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον ἴσον πρὸς $4x^2+4x$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι x· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, εἶναι $(4x+4)$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον σὺν ἓν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ ἑπομένου τοῦ $(2x+1)$, ἤτοι τοῦ $(3x+1$ καὶ ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος τετραγώνου ἀφαιρῶν τὴν μονάδα θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον ἴσον πρὸς $9x^2+6x$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι x· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τέταρτος, θὰ εἶναι $(9x+6)$.

Καὶ ἐπειδὴ συμβαίνει τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν τέταρτον σὺν ἓν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τέταρτον σὺν ἓν εἶναι $9x^2+24x+13$, θέτω ταῦτα ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$. Ἐξ ἧς $x=\frac{1}{16}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{1}{16}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{33}{16}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{68}{16}$, ὁ δὲ τέταρτος $\frac{105}{16}$ ».

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ἔχει ὡς κάτωθι :

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἄγνωστοι y, z, ω, φ. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι :

$$yz+1=\alpha^2 \quad (1)$$
$$y\omega+1=\beta^2 \quad (2)$$
$$y\varphi+1=\gamma^2 \quad (3)$$
$$z\omega+1=\delta^2 \quad (4)$$
$$z\varphi+1=\varepsilon^2 \quad (5)$$
$$\omega\varphi+1=\zeta^2 \quad (6).$$

Θέτει $yz+1=(x+1)^2=x^2+2x+1$, ὁπότε $yz=x^2+2x$. Καλεῖ $y=x$, ὅτε $z=x+2$.

Λαμβάνει $y\omega+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$, ὁπότε $y\omega=4x^2+4x=x(4x+4)$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος εἶναι x, ὁ τρίτος ω θὰ εἶναι $=4x+4$.

Θέτει $y\varphi+1=(3x+1)^2=9x^2+6x+1$, ὁπότε $y\varphi=9x^2+6x=x(9x+6)$ καὶ ἀφοῦ $y=x$, θὰ εἶναι $\varphi=(9x+6)$. Τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3) πληροῦνται συναρτήσει τοῦ x (δηλ. τοῦ πρώτου τῶν ζητουμένων ἀγνώστων). Ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν z, ω, φ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (4, 6) διότι εἶναι $z\omega+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$ καὶ $\omega\varphi+1=(4x+4)(9x+6)+1=(6x+5)^2$. Μένει πρὸς πλήρωσιν τὸ ἐπίταγμα (5), ἤτοι $z\varphi+1=$τετράγωνος. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν z, φ εἶναι $(x+2)(9x+6)+1=$τετράγωνος. Λαμβάνει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$, ὁπότε εἶναι

$$9x^2+24x+13=9x^2-24x+16, \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{1}{16}=y, \quad z=x+2=\frac{1}{16}+2=\frac{33}{16},$$

$$\omega=4\cdot\frac{1}{16}+4=\frac{68}{16}, \quad \varphi=9x+6=9\cdot\frac{1}{16}+6=\frac{105}{16}$$

καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι :

$$yz+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{17}{16}\right)^2 \quad (1)$$
$$y\omega+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{18}{16}\right)^2 \quad (2)$$
$$y\varphi+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{19}{16}\right)^2 \quad (3)$$
$$z\omega+1=\frac{33}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{50}{16}\right)^2 \quad (4)$$
$$z\varphi+1=\frac{33}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{61}{16}\right)^2 \quad (5)$$
$$\omega\varphi+1=\frac{68}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{86}{16}\right)^2 \quad (6)$$

Ἱστορικὸν σημείωμα

Τὰ σημεῖα σὺν (+) καὶ πλὴν (—) ἐμφανίζονται διὰ πρώτην φορὰν εἰς ἓν ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς τοῦ I. W. Eger, ἐκδοθὲν κατὰ τὸ ἔτος 1489. Ἡ χρῆσις ὅμως τῶν σημείων τούτων γίνεται συνήθης ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως τοῦ ἔργου τοῦ Μιχαὴλ Stiefel : Arithmetica integra authore Mich. Stifelio cum praefatione Phil. Melanchton. Norinbergae, 1544 (Νυρεμβέργη).

Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος (=) εἰσήχθη εἰς τὰ μαθηματικὰ κατὰ τὸ ἔτος 1557 ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου Γεωμέτρου Robert Recorde εἰς ἐγχειρίδιον αὐτοῦ ἀλγέβρας.

Ὑπὸ τοῦ François Viète (1540—1600) εἰσήχθησαν αἱ διὰ γραμμάτων ἀλγεβρικαὶ πράξεις ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν.

Κατωτέρω παρέχομεν συμβολισμούς τινας τοῦ Διοφάντου χρησιμοποιουμένους εἰς τὰ προβλήματα IV, 19, 20.

Ἡ μονὰς συμβολίζεται διὰ		$\overset{o}{M}\ \overline{\alpha}$
Αἱ δύο μονάδες	»	$\overset{o}{M}\ \overline{\beta}$
Ὁ ἄγνωστος x	»	ς
Τὸ $x+1$	»	ς $\overline{\alpha}\ \overset{o}{M}\ \overline{\alpha}$
Τὸ $x+2$	»	ς $\overline{\alpha}\ \overset{o}{M}\ \overline{\beta}$
Τὸ $4x^2+4x$	»	$\overline{\Delta^{Y}}\ \delta$ ς $\overline{\delta}$
Τὸ $4x+4$	»	ς $\overline{\delta}\ \overset{o}{M}\ \overline{\delta}$
Τὸ $3x-4$	»	ς $\overline{\gamma}\ \pitchfork\ \overset{o}{M}\ \overline{\delta}$

Τὸ $x^2+18x+81=x^2+25x$ συμβολίζεται διὰ $\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}$ ς $\overline{\iota\eta}\ \overset{o}{M}\ \overline{\pi\alpha}$, ἴσ. $\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}$ ς $\overline{\kappa\varepsilon}$.

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τίθεται δεξιὰ τοῦ $\overset{o}{M}$. Εἶναι π. χ. $\overset{o}{M}\ \overline{\gamma}=$ Μονάδες 3. Ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου **x** τίθεται δεξιὰ αὐτοῦ ἀντὶ ἀριστερά, ὡς συνηθίζεται σήμερον. Ἡ τοποθέτησις τῶν διαφόρων ἀριθμῶν (συμβόλων) κατὰ παράταξιν σημαίνει πρόσθεσιν. Εἶναι π. χ.

$$ς\ \overline{\gamma}\ \overset{o}{M}\overline{\varepsilon}=x\,.\,3+\text{μονάδες}\ 5=3x+5.$$

Τὸ τετράγωνον τοῦ **x** ἐκφράζεται διὰ τοῦ Δ^{Y}, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τῆς λέξεως Δύναμις. Τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως ΔΥΝΑΜΙΣ τίθεται ὡς ἐκθέτης τοῦ πρώτου γράμματος Δ. Τὸ σημεῖον «πλὴν» παρίσταται δι' ἑνὸς λάμβδα κεφαλαίου ἔχοντος καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ Λ, ἤτοι $\pitchfork$. Ἡ ἐξίσωσις $x^2+18x+81=x^2+25x$ παρίσταται $\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}$ ς $\overline{\iota\eta}\ \overset{o}{M}\ \overline{\pi\alpha}$, ἴσ. $\Delta^{Y}\ \overline{\alpha}$ ς $\overline{\kappa\varepsilon}$ δηλ. ἓν τετράγωνον τοῦ $x+x\,.\,18+$μονάδες $81=$ἓν τετράγωνον τοῦ $x+x\,.\,25$.

Σημείωσις. Ἐπὶ τοῦ 20 προβλήματος τοῦ IV Βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Fermat, ὅστις εἶναι σπουδαῖος σχολιαστὴς τοῦ Διοφάντου, γράφει τὰ ἑξῆς: «Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ 1, 3, 8, ὁπότε κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ 19 προβλήματος τοῦ IV Βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου θὰ εἶναι $1\,.\,3+1=2^2$, $1\,.\,8+1=3^2$, $3\,.\,8+1=5^2$. Ἐὰν ζητῆται καὶ τέταρτος ἀριθμὸς καὶ καλέσωμεν αὐτὸν **x**, θὰ εἶναι ἀκόμη $3x+1=$τετράγωνος, $8x+1=$τετράγωνος, $x+1=$τετράγωνος, ἤτοι προκύπτουσι τρεῖς συναληθεύουσαι ἐξισώσεις, αἵτινες ἐπιλύονται κατὰ τὴν ὑπ' ἐμοῦ ἐπινοηθεῖσαν μέθοδον. Ἴδε τὴν παρατήρησίν μου εἰς τὸ 24 πρόβλημα τοῦ VI Βιβλίου (τοῦ Διοφάντου)». [G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos von Alexandria, Teubner, σ. 145—146].

Παρατήρησις

Ὁ Διόφαντος λύει τὸ πρόβλημα: νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἀκολούθως λύει τὸ πρόβλημα: νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος, ἤτοι λύει τὸ πρόβλημα δι' ἕνα ἀκόμη ἄγνωστον καὶ δὲν προχωρεῖ νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα διὰ πέντε ἀγνώστους, διὰ ἓξ ἀγνώστους κλπ, διότι εἶναι ἀρκετὴ πρὸς τοῦτο ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει. Τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (ἢ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ) ἐγνώριζον οἱ Πυθαγόρειοι, καὶ ὁ Εὐκλείδης, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης εἰς πολλὰ θεωρήματα τῶν Ἀριθμητικῶν Βιβλίων τῶν Στοιχείων αὐτοῦ. Ἴδε Εὐαγγέλου **Σ. Σταμάτη**: Εὐκλείδου Στερεομετρία, Στοιχείων τόμος IV, σελὶς 271, Ἀθῆναι, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1957.

Β'. Η ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Νὰ εὑρεθῶσι n τὸ πλῆθος ἀριθμοί, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός.

Παρατήρησις

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα IV 20 ὁ Διόφαντος θέτει $9x^2+24x+13=(3x-4)^2$. Ἐκ τούτου γεννᾶται εὐλόγως ἡ ἀπορία : πόθεν ὁ Διόφαντος ὡρμήθη, διὰ νὰ λάβῃ ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τριωνύμου τὴν $(3x-4)$; Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην τοιαύτη λῆψις ὀφείλεται εἰς ἀριθμητικὰς ἐρεύνας τῶν Πυθαγορείων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὡς μειωτέος τῆς διαφορᾶς $(3x-4)$ ἔχει ληφθῆ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $9x^2$. Τοῦτο γίνεται, ἵνα ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἀναχθῇ εἰς πρωτοβάθμιον. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ $(3x-4)^2$ ἐλάμβανε $(3x\pm 3)^2$ ἢ $(3x+5)^2$, ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ ἦτο ἀρνητική. Ὁ Διόφαντος ὅμως, καίτοι χρησιμοποιεῖ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ἀποφεύγει πάντοτε τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν ἐλάμβανεν ἀντὶ τοῦ $(3x-4)^2$ τὸ $(3x+4)^2$, θὰ εἶχε $0=3$. Ἐὰν ἐλάμβανε $(3x-5)^2$, ὁ x θὰ ἦτο θετικὸς $=\frac{2}{9}$ καὶ τὸ συναφὲς ἐπίταγμα θὰ ἐπληροῦτο διὰ μίαν ἀκόμη θετικὴν τιμὴν τοῦ x. Ὁ ἀφαιρετέος 4 εἰς τὴν διαφορὰν $(3x-4)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅρου τοῦ τριωνύμου τοῦ περιέχοντος τὸν x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $9x^2$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι προκειμένου ἀλγεβρικὴ παράστασις τῆς μορφῆς $\lambda^2x^2+\lambda\kappa x+\mu$, (1), νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, λαμβάνεται (ὑπὸ τοῦ Διοφάντου), κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἡ διαφορὰ $\left(\lambda x-\frac{\kappa}{2}\right)$, ὅπου $\frac{\kappa}{2}=(\lambda\kappa x : 2\lambda x)$. Ἀκριβῶς τὸν νόμον τοῦτον χρησιμοποιοῦμεν κατὰ τὴν κατωτέρω ἐκτιθεμένην γενίκευσιν τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς ἐρεύνης, τὴν ὁποίαν διενηργήσαμεν κατὰ τὴν γενίκευσιν αὐτήν, διεπιστώσαμεν ὅτι, χωρὶς νὰ θίγηται ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑνὸς τριωνύμου τῆς μορφῆς (1) καὶ τὰ ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τούτου λαμβανόμενα ἀποτελέσματα, εἶναι δυνατὸν εἴς τινας περιπτώσεις ὁ ἀφαιρετέος τῆς τετραγων. ῥίζης νὰ λαμβάνηται μικρότερος τοῦ $\frac{\kappa}{2}$, πάντοτε ὅμως πρέπει νὰ εἶναι $\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2>\mu$ διὰ νὰ εἶναι $x>0$. Εἰς τὴν παράστασιν π.χ. $x_1x_5+1=(x+2)(25x+10)+1=25x^2+60x+21$, (2), τὴν ὁποίαν θὰ συναντήσωμεν κατωτέρω, θέτομεν τὸ τριώνυμον (2) ἴσον πρὸς $(5x-6)^2$, κατὰ τὸν καθ' ἡμᾶς ὑποτιθέμενον τρόπον σχηματισμοῦ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τριωνύμου θεωρουμένου ὡς τετραγώνου. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ τεθῇ τὸ τριώνυμον καὶ ἴσον πρὸς $(5x-5)^2$ καὶ νὰ πληροῦται τὸ ζητούμενον ἐπίταγμα, ἐφ' ὅσον ὁ $5^2>21$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετική.

Ἡ γενίκευσις τοῦ προβλήματος

Τὸ πρόβλημα εἶναι .

$xx_1+1=\alpha_1^2$	$x_1x_2+1=\beta_1^2$	$x_2x_3+1=\gamma_1^2$	$x_3x_4+1=\delta_1^2$	$\ldots x_{\nu-1}x_\nu+1=\xi^2$
$xx_2+1=\alpha_2^2$	$x_1x_3+1=\beta_2^2$	$x_2x_4+1=\gamma_1^2$	$x_3x_5+1=\delta_2^2$	
$xx_3+1=\alpha_3^2$	$x_1x_4+1=\beta_3^2$	$x_2x_5+1=\gamma_3^2$	$x_3x_6+1=\delta_3^2$	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
$xx_\nu+1=\alpha_\nu^2$	$x_1x_\nu+1=\beta^2_{\nu-1}$	$x_2x_\nu+1=\gamma^2_{\nu-2}$	$x_3x_\nu+1=\delta^2_{\nu-3}$	

Ἐπιλύομεν τὸ πρόβλημα ἐνδεικτικῶς διὰ ἑπτὰ ἀγνώστους καὶ ἀκολούθως διατυποῦμεν τοὺς γενικοὺς νόμους διὰ n ἀγνώστους, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος.

Καλοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων x καὶ τοὺς ἄλλους ἐξ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι :

1. $xx_1+1=\alpha_1^2$
2. $xx_2+1=\alpha_2^2$
3. $xx_3+1=\alpha_3^2$
4. $xx_4+1=\alpha_4^2$
5. $xx_5+1=\alpha_5^2$
6. $xx_6+1=\alpha_6^2$
7. $x_1x_2+1=\beta_1^2$
8. $x_1x_3+1=\beta_2^2$
9. $x_1x_4+1=\beta_3^2$
10. $x_1x_5+1=\beta_4^2$
11. $x_1x_6+1=\beta_5^2$
12. $x_2x_3+1=\gamma_1^2$
13. $x_2x_4+1=\gamma_2^2$
14. $x_2x_5+1=\gamma_3^2$
15. $x_2x_6+1=\gamma_4^2$
16. $x_3x_4+1=\delta_1^2$
17. $x_3x_5+1=\delta_2^2$
18. $x_3x_6+1=\delta_3^2$

19. $x_4x_5+1=\varepsilon_1^2$, 20. $x_4x_6+1=\varepsilon_2^2$, 21. $x_5x_6+1=\zeta_1^2$.

Θέτομεν 1. $xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1$ Εἶναι ἄρα $x_1=x+2$

2. $xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1$ » » $x_2=4x+4$

3. $xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1$ » » $x_3=9x+6$

4. $xx_4+1=(4x+1)^2=x(16x+8)+1$ » » $x_4=16x+8$

5. $xx_5+1=(5x+1)^2=x(25x+10)+1$ » » $x_5=25x+10$

6. $xx_6+1=(6x+1)^2=x(36x+12)+1$ » » $x_6=36x+12$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $x_1, x_2 \ldots x_6$ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα 1–6 συναρτήσει τοῦ x. Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὰ ἐπιτάγματα 7—21 λαμβάνομεν :

7. $x_1x_2+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$.

8. $x_1x_3+1=(x+2)(9x+6)+1=9x^2+24x+13$. Θέτομεν τοῦτο ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$, (ὡς πράττει ὁ Διόφαντος εἰς τὸ πρόβλημα 20), ἐξ ἧς λαμβάνομεν $x=\frac{1}{16}$.

9. $x_1x_4+1=(x+2)(16x+8)+1=16x^2+40x+17=(4x-5)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{10}$.

[Σημ. Ὁ τρόπος σχηματισμοῦ τῆς διαφορᾶς $(4x-5)$ ἐκτίθεται εἰς τὴν προηγουμένην παρατήρησιν. Οὗτος θὰ ἐφαρμοσθῇ κατωτέρω ὀκτὼ φορὰς ἀκόμη].

10. $x_1x_5+1=(x+2)(25x+10)+1=25x^2+60x+21=(5x-6)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{8}$

11. $x_1x_6+1=(x+2)(36x+12)+1=36x^2+84x+25=(6x-7)^2$ » $x=\frac{1}{7}$

12. $x_2x_3+1=(4x+4)(9x+6)+1=36x^2+60x+25=(6x+5)^2$

13. $x_2x_4+1=(4x+4)(16x+8)+1=64x^2+96x+33=(8x-6)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{64}$

14. $x_2x_5+1=(4x+4)(25x+10)+1=100x^2+140x+41=(10x-7)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{35}$

15. $x_2x_6+1=(4x+4)(36x+12)+1=144x^2+192x+49=(12x-8)^2$ » $x=\frac{5}{128}$

16. $x_3x_4+1=(9x+6)(16x+8)+1=144x^2+168x+49=(12x+7)^2$

17. $x_3x_5+1=(9x+6)(25x+10)+1=225x^2+240x+61=(15x-8)^2$ » $x=\frac{1}{160}$

18. $x_3x_6+1=(9x+6)(36x+12)+1=324x^2+324x+73=(18x-9)^2$ » $x=\frac{1}{81}$

19. $x_4x_5+1=(16x+8)(25x+10)+1=400x^2+360x+81=(20x+9)^2$

20. $x_4x_6+1=(16x+8)(36x+12)+1=576x^2+480x+97=(24x-10)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{320}$

21. $x_5x_6+1=(25x+10)(36x+12)+1=900x^2+660x+121=(30x+11)^2$.

Οἱ γενικοὶ νόμοι ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος

Καλοῦμεν x ἕνα τῶν ἀγνώστων n, συναρτήσει τοῦ ὁποίου θὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λοιποὺς $(n-1)$ ἀγνώστους. Τούτους παριστῶμεν ὡς ἑξῆς : $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots . x_\nu$, ὅπου

$$\nu=n-1.$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν 21 ἐπιταγμάτων τὰ 11 πληροῦνται διὰ πάσ~ς τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x, ἐνῷ τὰ 10 δὲν πληροῦνται διὰ πάσης τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος μὲ ἑπτὰ ἀγνώστους συνάγομεν ἐπαγωγικῶς τοὺς κάτωθι νόμους διὰ n ὁσονδήποτε μεγάλον.

Νόμος 1. Τὸ πλῆθος τῶν ζητουμένων ἐπιταγμάτων εἶναι $\frac{(n-1)n}{2}$.

Νόμος 2. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων x_ν συναρτήσει τοῦ x εἶναι κατὰ τὴν ἐπαγωγικὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου

ἐκ τοῦ	$xx_1+1=(x+1)^2=x^2+2x+1$	$x_1=x+2$
» »	$xx_2+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$	$x_2=4x+4$
» »	$xx_3+1=(3x+1)^2=9x^2+6x+1$	$x_3=9x+6$
» »	$xx_4+1=(4x+1)^2=16x^2+8x+1$	$x_4=16x+8$
» »	.	.
» »	.	.
» »	$xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=\nu^2x^2+2\nu x+1$	$x_\nu=\nu^2x+2\nu$

$\nu=1, 2, 3 \ldots .)$

Νόμος 3. Τὸ γινόμενον τοῦ x ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀγνώστων, σὺν ἕν, εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$xx_i+1=(ix+1)^2, \quad (i=1, 2, 3 \ldots), \quad (1)$$

Νόμος 4. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i\, x_{i+1}+1=[i(i+1)x+(2i+1)]^2, \quad (2)$$

Διὰ $i=10$ π. χ. ἔχομεν $x_{10}=10^2x+20$, $x_{11}=11^2x+22$ καὶ

$$x_{10}x_{11}+1=(10^2x+20)(11^2x+22)+1=[10 . 11x+21]^2=(110x+21)^2.$$

Νόμος 5. Τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος τῆς μορφῆς

$$x_i\, x_{i+\varkappa}+1=(i^2x+2i)[(i+\varkappa)^2x+2(i+\kappa)]+1=[i(i+\varkappa)x-(2i+\varkappa)]^2, \quad \varkappa \geqq 2, \quad (3)$$

Διὰ $i=8$, $\varkappa=3$ π. χ. ἔχομεν $x_i=x_8=8^2x+16$, $x_{i+\varkappa}=x_{11}=11^2x+22$ καὶ

$$x_8x_{11}+1=(64x+16)(121x+22)+1=(88x-19)^2.$$

Νόμος 6 Διὰ $n \geqq 4$ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων, τὰ ὁποῖα πληροῦνται διὰ τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (3) ἰσοῦται πρὸς $(n-2)(n-3) : 2$. Διὰ $n=7$ π. χ. τὰ συναφῆ ἐπιτάγματα εἶναι $(7-2)(7-3) : 2=10$, ὡς βεβαιούμεθα ἐκ τῆς διαπραγματευθείσης ἐνδεικτικῶς περιπτώσεως τοῦ προβλήματος μὲ ἑπτὰ ἀγνώστους.

Σημείωσις. Σχετικῶς πρὸς τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἰς τὸ μόλις ἐκδοθὲν Μαθηματικὸν Λεξικόν, ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, ἀναγράφονται εἰς τὴν λέξιν Μαυρόλυκος (Maurolico, Francesco) τὰ ἑξῆς· « . . . Ἐκ τῶν πονηματίων (Opuscula) παρέλαβεν ὁ Pascal τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία, ἐννοεῖται, εὑρίσκετο ἤδη εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου VII, 27 ».

Zusammenfassung

Diophant löst das Problem drei bzw vier Zahlen von der Art zu finden, dass die Produkte von je zweien Zahlen vermehrt um 1, ein Quadrat ergeben (Diophantos' Arithm. IV 19, 20). Es wird das Problem für n Zahlen, wobei n beliebig gross ist, gelöst und die allgemeinen Gesetze aufgestellt.

Bemerkung. Man setzt als Quadratwurzel eines Polynoms von der Form $\lambda^2x^2+\lambda\kappa x+\mu$ die Differenz $\left(\lambda x-\frac{\lambda\kappa x}{2\lambda x}\right)$, so dass $\lambda^2x^2+\lambda\kappa x+\mu=\left(\lambda x-\frac{\kappa}{2}\right)^2$ ist.

Wir nennen x eine der unbekannten Zahlen und ordnen die anderen in einer Reihe mit Indizen, wie $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_\nu$, $(\nu=n-1)$.

1. Die Zahl der Forderungen ist gleich $\frac{(n-1)n}{2}$.

2. Die Werte der unbekannten Zahlen als Funktionen von x sind

$$x_1= x+2 \quad \text{aus} \quad xx_1+1=(x+1)^2=x^2+2x+1=x(x+2)+1$$
$$x_2=4x+4 \quad \text{»} \quad xx_2+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1=x(4x+4)+1$$
$$x_3=9x+6 \quad \text{»} \quad xx_3+1=(3x+1)^2=9x^2+6x+1=x(9x+6)+1$$
$$\vdots$$
$$x_\nu=\nu^2x+2\nu \quad \text{»} \quad xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=\nu^2x^2+2\nu x+1=x(\nu^2x+2\nu)+1$$

3. Das Produkt von x mit je einer der unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$xx_i+1=[ix+1]^2, \quad (i=1, 2, 3 \ldots), \quad (1)$$

4. Das Produkt von je zweien sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_i\, x_{i+1}+1=[i(i+1)x+(2i+1)]^2, \quad (2).$$

5. Das Produkt von je zweien nicht sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_i\, x_{i+\varkappa}+1=[i(i+\varkappa)x-(2i+\varkappa)]^2, \quad \varkappa\geqq 2, \ (3).$$

6. Für $n\geqq 4$ ist die Zahl der Forderungen, die gemäss der vorigen Formel (3) für positive Werte von x erfüllt sind, gleich $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Anmerkuug. In Bezug auf das Prinzip der vollständigen Induktion, das man nach unserer Auffassung in den Problemen IV, 19, 20 findet, lesen wir im mathematischen Wörterbuch der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1961) im Stichwort M a u r o l i c o folgendes; « . . . . Aus den Opuscula entnahm P a s c a l das Prinzip der vollständigen Induktion, das freilich schon bei E u k l i d, Elemente VII, 27 zu finden gewesen wäre ».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΕΛΛΕΙΠΟΝΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ 5ου ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

REKONSTRUKTION DES GRIECHISCHEN TEXTES VON VIER FEHLENDEN AUFGABEN DES V. BUCHES DER ARITHMETIKA DES DIOPHANTOS

«ΠΛΑΤΩΝ»
ΕΤΟΣ ΙΓ′—1961
ΤΕΥΧΗ Α′ καὶ Β′ 25/26

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΕΛΛΕΙΠΟΝΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Τοῦ προβλήματος V, 19 τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου σῴζεται μόνον ἡ ἐκφώνησις, ἐνῷ ἡ ἀπόδειξις ἐλλείπει. Ὁ P. Tannery, ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν (1893, Teubner), σημειοῖ τὴν ἔλλειψιν τῆς ἀποδείξεως διὰ μιᾶς γραμμῆς ἐκ στιγμῶν, παραθέτει δὲ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς ἄλλου προβλήματος, τοῦ ὁποίου ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο σημειοῦμεν κατωτέρω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 19 γ.

Ὁ πρῶτος ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Γάλλος μαθηματικὸς Bachet de Méziriac (1621, Paris) ὁρμηθεὶς ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 καὶ ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος V, 19 γ διατυπώνει τὴν γνώμην ὅτι ἐκτὸς τούτων ἐλλείπουν ἀκόμη πλήρως καὶ ἄλλα δύο προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατωτέρω σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν 19 α καὶ 19 β. Ὁ Bachet παρέχει καὶ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων 19, 19 α, 19 β ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Διοφάντου. [Ἴδε O. Schulz Diophantus, Berlin 1822].

Τὴν γνώμην τοῦ Bachet συμμερίζονται οἱ ἑξῆς ἐκδόται καὶ σχολιασταὶ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου : O. Schulz, Diophantus, Berlin, 1822. G. Nesselmann, Die, Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890. T. Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge 1910. P. ver Eecke, Diophant d' Alexandrie, Bruges 1926.

Διὰ νὰ γίνῃ καταληπτὴ ἡ ὀρθότης τῆς παρατηρήσεως τοῦ Bachet παραθέτομεν κατωτέρω 9 προβλήματα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ὁποίων καταφαίνεται ὅτι πρόκειται περὶ τριῶν ὁμάδων, ἐκ τριῶν συγγενῶν προβλημάτων ἑκάστης, ἐκ τῶν ὁποίων ἐλλείπουν 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος 19, 2) πλήρως τὰ προβλήματα 19 α καὶ 19 β, 3) ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος 19 γ.

Ἀκολούθως ἀνακατασκευάζομεν τὰ ἐλλείποντα ἀρχαῖα κείμενα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου καὶ προβαίνομεν, τὸ μὲν εἰς τὴν μετάφρασιν τούτων εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν, τὸ δὲ εἰς τὴν σύγχρονον διατύπωσιν τῶν λύσεων (1).

---

1) Τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 ἀπεστείλαμεν εἰς Λειψίαν κατ' Ἀπρίλιον 1961 πρὸς δημοσίευσιν εἰς τὸν ἑορταστικὸν τόμον τοῦ οἴκου B. C. Teubner ἐπὶ τῇ συμπληρώσει 150 ἐτῶν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς του (1811—1961).

Τὰ 9 προβλήματα τοῦ V βιβλίου (ἔκδ. Tannery, B. C. Teubner).

15

$y + z + \omega = x$
$x^3 + y = \alpha^3$
$x^3 + z = \beta^3$
$x^3 + \omega = \gamma^3$

16

$y + z + \omega = x$
$x^3 - y = \alpha^3$
$x^3 - z = \beta^3$
$x^3 - \omega = \gamma^3$

17

$y + z + \omega = x$
$y - x^3 = \alpha^3$
$z - x^3 = \beta^3$
$\omega - x^3 = \gamma^3$

18

$y + z + \omega = x^3$
$x^6 + y = \alpha^2$
$x^6 + z = \beta^2$
$x^6 + \omega = \gamma^2$

19

$y + z + \omega = x^2$
$x^6 - y = \alpha^2$
$x^6 - z = \beta^2$
$x^6 - \omega = \gamma^2$

[ἐλλείπει ἡ ἀπόδειξις
Beweis fehlt]

19α

$y + z + \omega = x^2$
$y - x^6 = \alpha^2$
$z - x^6 = \beta^2$
$\omega - x^6 = \gamma^2$

[ἐλλείπει πλήρως
es fehlt ganz]

19β

$y + z + \omega = \delta$
$\delta^3 + y = \alpha^2$
$\delta^3 + z = \beta^2$
$\delta^3 + \omega = \gamma^2$

[ἐλλείπει πλήρως]
es fehlt ganz

19γ

$y + z + \omega = \delta$
$\delta^3 - y = \alpha^2$
$\delta^3 - z = \beta^2$
$\delta^3 - \omega = \gamma^2$

[ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως
Wortlaut und geringer Teil vom Anfang des Beweises fehlt]

20

$y + z + \omega = \delta$
$y - \delta^3 = \alpha^2$
$z - \delta^3 = \beta^2$
$\omega - \delta^3 = \gamma^2$

Ἡ ἀνακατασκευὴ τῶν 4 τελείως ἐλλειπόντων κειμένων

V, 19 (Ἀπόδειξις)

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς Δ^Y α, καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν $K^Y K \frac{\delta}{\gamma}$, ὁ δὲ $K^Y K \frac{\vartheta}{\eta}$, ὁ δὲ $K^Y K \frac{\iota\varsigma}{\iota\varepsilon}$. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν □ον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^Y α. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν $K^Y K \frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$· ταῦτα ἴσα Δ^Y α. καὶ πάντα παρὰ Δ^Y α· γίνονται $\Delta^Y \Delta \frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ ἴσ. $\overset{o}{M}$ α.

καὶ ἔστιν ἡ $\overset{o}{M}$ α □ος πλευρὰν ἔχων □ον· ὥστε ἄρα καὶ $\Delta^Y \Delta \frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ δεήσει εἶναι □ον πλευρὰν ἔχοντα □ον. εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\overset{o}{M} \frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ □ος πλευρὰν ἔχων □ον, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν $\Delta^Y \Delta$; ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς τετραγώνους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν M α·

καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ α, τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ □^{ον}, πλευρὰν ἔχοντα □^{ον}.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι $\overset{\circ}{M}$ α· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας $\overset{\circ}{M}$ α, πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων M α· ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος □^{ος}, πλευρὰν ἔχων □^{ον} μείζων εἶναι δυάδος. δεῖ οὖν τὰ $\frac{χκε}{φοθ}$ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{χκε}{φκθ}$, ὁ δὲ $\frac{χκε}{μθ}$, ὁ δὲ $\frac{χκε}{α}$.

ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς $Δ^Y$ α, τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν $K^Y K \frac{χκε}{ϟϛ}$, ὃν δὲ $\frac{χκε}{φοϛ}$, ὃν δὲ $K^Y K \frac{χκε}{χκδ}$· καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $Δ^Y$· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^Y K \frac{χκε}{͵ασϟϛ}$· καὶ πάντα παρὰ $Δ^Y$ α· γίνονται $Δ^Y Δ \frac{χκε}{͵ασϟϛ}$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{ϛ}{ε}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

V, 19 a

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς $Δ^Y$ α, καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $K^Y K$ β, ὁ δὲ $K^Y K$ ε, ὁ δὲ $K^Y K$ ι. καὶ συμβαίνει ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιεῖν □^{ον}.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $Δ^Y$ α. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν $K^Y K$ ιζ· ταῦτα ἴσα $Δ^Y$ α· καὶ πάντα παρὰ $Δ^Y$ α· γίνονται $Δ^Y Δ$ ιζ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α.

Καὶ ἔστιν ἡ $\overset{\circ}{M}$ α □^{ος} πλευρὰν ἔχων □^{ον}· εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\overset{\circ}{M}$ ιζ □^{ος} πλευρὰν ἔχων □^{ον} λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. Ἔστι δὲ ὁ ιζ τριῶν τετραγώνων τὸ σύνθεμα μετὰ $\overset{\circ}{M}$ γ· δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ $\overset{\circ}{M}$ γ ποιεῖ □^{ον} πλευρὰν ἔχοντα □^{ον}. ἔστω $\overset{\circ}{M}$ ιϛ. δεῖ οὖν $\overset{\circ}{M}$ ιγ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους· ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν θ, ὁ δὲ $\frac{κε}{λϛ}$, ὁ δὲ $\frac{κε}{ξδ}$.

καὶ ἑκάστῳ τούτων προστίθεμαι $\overset{\circ}{M}$ α καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον $K^Y K$ τοσούτων, ὑποτιθεμένων τῶν τριῶν $Δ^Y$ α. καὶ γίνονται ὁ μὲν $K^Y K$ ι, ὁ δὲ $K^Y K \frac{κε}{ξα}$, ὁ δὲ $K^Y K \frac{κε}{πθ}$· καὶ συμβήσεται ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y} α· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς K^{Y} K ις. καὶ πάντα παρὰ Δ^{Y} α· γίνονται Δ^{Y} Δ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α· καὶ γίνεται ὁ ς L'.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

V, 19 β

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β'.

Καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ β ἀριθμοῦ κύβος $\overset{\circ}{M}$ η. δεῖ οὖν τὸν β διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τούτων προσλαβὼν $\overset{\circ}{M}$ η ποιῇ $\square^{ον}$. δεήσει οὖν τὸν κς διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ η. τάσσω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων $\overset{\circ}{M}$ θ ὅς μείζων ἐστι $\overset{\circ}{M}$ η. ἐὰν οὖν διέλω τὸν ιζ εἰς δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ η λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιζ τὸ L' καὶ γίνεται η L', καὶ ζητῶ τὶ μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overset{\circ}{M}$ η L' καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$· καὶ πάντα τετράκις· ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overset{\circ}{M}$ λδ καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$· ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον $\Delta^{Y\chi}$ α καὶ γίνονται $\overset{\circ}{M}$ λδ $\Delta^{Y\chi}$ α ἴσ. $\square^{\varphi}$.

καὶ πάντα ἐπὶ Δ^{Y}· γίνονται Δ^{Y} λδ $\overset{\circ}{M}$ α ἴσ. $\square^{\varphi}$· ἔστω τῷ ἀπὸ π^{λ}· $\overset{\circ}{M}$ α ⋔ ς ς καὶ γίνεται ὁ ς $\overset{\circ}{M}$ ς· Δ^{Y} ἄρα $\overset{\circ}{M}$ λς, τὸ $\Delta^{Y\chi}$ $\overset{\circ}{M}$ λς χ. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς λδ προστιθέμενον λς χ· τὸ ἄρα ταῖς $\overset{\circ}{M}$ η L' προστιθέμενον ρμδ χ καὶ ποιεῖ $\square^{ον}$ τὸν ἀπὸ π^{λ}· $\frac{\iota\beta}{\lambda\varepsilon}$.

Δεῖ οὖν τὸν ιζ διαιρούμενον εἰς δύο $\square^{οὺς}$ κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα $\frac{\iota\beta}{\lambda\varepsilon}$, καὶ ζητῶ τὶ ἡ τετρὰς λείψασα, προσλαβοῦσα μονὰς ποιεῖ τὸν αὐτόν, τουτέστιν $\frac{\iota\beta}{\lambda\varepsilon}$.

τάσσω οὖν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἀπὸ ς κγ $\overset{\circ}{M}$ α, τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ $\overset{\circ}{M}$ δ ⋔ ς ιγ, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν $\square^{ων}$, Δ^{Y} χ͵η $\overset{\circ}{M}$ ιζ ⋔ ς νη ἴσ. ιζ. καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{\tau\mu\vartheta}{\kappa\vartheta}$· ἔσται ἄρα τοῦ ἑνὸς τῶν $\square^{ων}$ ἡ π^{λ}· $\frac{\tau\mu\vartheta}{\text{͵}\alpha\iota\varsigma}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\frac{\tau\mu\vartheta}{\text{͵}\alpha\iota\vartheta}$· καὶ ἐὰν ἄρω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τριῶν $\square^{ων}$ $\overset{\circ}{M}$ η ἕξω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.

V, 19 γ.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, *ὅ π ω ς ὁ ἀ π ὸ τ ο ῦ σ υ γ κ ε ι μ έ ν ο υ ἐ κ τ ῶ ν τ ρ ι ῶ ν κ ύ β ο ς λ ε ί ψ α ς ἕ κ α σ τ ο ν π ο ι ῇ τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν.*

ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β.

(Ἑ ρ μ η ν ε ί α : ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον δίδῃ τετράγωνον. Ἔστω ὁ δοθεὶς 2). Σ η μ. Ἡ ἀπόδειξις ὑπάρχει εἰς τὸ κείμενον.

Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V 19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2 καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{3}{4}x^6$, ὁ δὲ $\frac{8}{9}x^6$, ὁ δὲ $\frac{15}{16}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $\frac{371}{144}x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς x^2. Καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· λαμβάνεται $\frac{371}{144}x^4=1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος ἀριθμός· ὥστε ἄρα θὰ εἶναι ἀνάγκη καὶ ὁ $\frac{371}{144}x^4$ νὰ εἶναι διτετράγωνος ἀριθμός. (Σημ. διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις). Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{371}{144}$ ἦτο διτετράγωνος ἀριθμὸς τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ· πόθεν προῆλθεν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^4; προῆλθεν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ 3 τοῦ ἀθροίσματος τριῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· καὶ ἀνάγεται οὕτω τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν.

Καὶ ζητοῦμεν ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μικρότερον τῆς μονάδος κατὰ μείζονα λόγον ἕκαστος αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος. Κατὰ συνέπειαν πρέπει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι διτετράγωνος, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2.

Ἂς ταχθῇ ὡς ὑπόλοιπον διτετράγωνος μεγαλύτερος τοῦ 2· ἔστω ὁ $\frac{1296}{625}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ $\frac{579}{625}$ εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ὁ εἷς τῶν ζητουμένων θὰ εἶναι $\frac{529}{625}$, ὁ ἄλλος $\frac{49}{625}$ καὶ ὁ τρίτος $\frac{1}{625}$·

Ἀνατρέχομεν τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2, ἐκ δὲ τῶν ζητουμένων τὸν μὲν $\frac{96}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{576}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{624}{625}x^6$. Καὶ θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $\frac{1296}{625}x^6$· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 λαμβάνεται $\frac{1296}{625}x^4=1$. Καὶ γίνεται ὁ $x=\frac{5}{6}$·

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=x^2$, (1), $x^6-y=\alpha^2$, (2), $x^6-z=\beta^2$, (3), $x^6-\omega=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $y=\frac{3}{4}x^6$, $z=\frac{8}{9}x^6$, $\omega=\frac{15}{16}x^6$, ὁπότε θὰ εἶναι $x^6-\frac{3}{4}x^6=\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{8}{9}x^6=\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{15}{16}x^6=\left(\frac{1}{4}x^3\right)^2$ ἤτοι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1), εἰς τὴν ὁποίαν δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $\left(\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}\right)x^6=x^2$, ἢ $\frac{371}{144}x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς $\frac{371}{144}$ νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου.

Ὁ $\frac{3}{4}=\left(1-\frac{1}{4}\right)$, ὁ $\frac{8}{9}=\left(1-\frac{1}{9}\right)$, ὁ $\frac{15}{16}=\left(1-\frac{1}{16}\right)$. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ ἦτο $3-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=$ διτετράγωνος. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, (καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μικρότερον τῆς μονάδος), τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν. Ἐὰν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους κ^2, λ^2, μ^2 καὶ τὸν διτετράγωνον ξ^4 θὰ εἶναι $3-\xi^4=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$.

Ἔστω $\xi^4=\left(\frac{6}{5}\right)^4=\frac{1296}{625}$ ὁπότε θὰ εἶναι $3-\frac{1296}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$ ἢ $\frac{579}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$.

Εἶναι δὲ $2<\frac{1296}{625}<3$ καὶ $\frac{579}{625}<1$. Ὁ $\frac{579}{625}$ ἀναλύεται εἰς τρεῖς τετραγώνους, τοὺς $\kappa^2=\frac{529}{625}$, $\lambda^2=\frac{49}{625}$, $\mu^2=\frac{1}{625}$.

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν $y+z+\omega=x^2$ καὶ $y=\left(1-\frac{529}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } y=\left(1-\frac{1}{4}\right)x^6\right]$, $z=\left(1-\frac{49}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } z=\left(1-\frac{1}{9}\right)x^6\right]$, $\omega=\left(1-\frac{1}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } \omega=\left(1-\frac{1}{16}\right)x^6\right]$, ἤτοι $y=\frac{96}{625}x^6$, (5), $z=\frac{576}{625}x^6$, (6), $\omega=\frac{624}{625}x^6$, (7). Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι εἶναι

$$x^6-\frac{96}{625}x^6=\left(\frac{23}{25}x^3\right)^2,\ x^6-\frac{576}{625}x^6=\left(\frac{7}{25}x^3\right)^2,\ x^6-\frac{624}{625}x^6=\left(\frac{1}{25}x^3\right)^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) τῶν τιμῶν y, z, ω λαμβάνομεν

$$\left(\frac{96}{625}+\frac{576}{624}+\frac{624}{625}\right)x^6=x^2, \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{5}{6}.$$

Ἐκ τῶν (5, 6, 7) εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y=\frac{96}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{2400}{46656},\ x^6-y=\frac{15625}{46656}-\frac{2400}{46656}=\left(\frac{115}{216}\right)^2$$

$$z=\frac{576}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{14400}{46656},\ x^6-z=\frac{15625}{36656}-\frac{14400}{46656}=\left(\frac{35}{216}\right)^2$$

$$\omega=\frac{624}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15600}{46656},\ x^6-\omega=\frac{15625}{46656}-\frac{15600}{46656}=\left(\frac{5}{216}\right)^2$$

$$y+z+\omega=\frac{2400+14400+15600}{46656}-\frac{32400}{46656}=\left(\frac{180}{216}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V, 19 α

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου δίδῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2 καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $2x^6$, ὁ δὲ $5x^6$, ὁ δὲ $10x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $17x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς x^2· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 γίνεται $17x^4=1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ 17 ἦτο διτετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ. Εἶναι δὲ ὁ 17 τὸ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων σὺν 3. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νά εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16. Πρέπει λοιπὸν ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους· θὰ εἶναι ὁ μὲν 9, ὁ δὲ $\frac{36}{25}$, ὁ δὲ $\frac{64}{25}$. Καὶ εἰς ἕκαστον τούτων προσθέτω τὴν μονάδα καὶ ἐπανέρχομαι εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Θέτω ἕκαστον τούτων ὡς συντελεστὴν τοῦ x^6, λαμβανομένου τοῦ ἀθροίσματος ἴσου πρὸς x^2. Καὶ γίνονται ὁ μὲν $10x^6$ ὁ δὲ $\frac{61}{25}x^6$, ὁ δὲ $\frac{89}{25}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $16x^6$. Καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 γίνεται $16x^4=1$. καὶ γίνεται ὁ $x=\frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=x^2$, (1), $y-x^6=\alpha^2$, (2), $z-x^6=\beta^2$, (3), $\omega-x^6=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $y=2x^6$, $z=5x^6$, $\omega=10x^6$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4), συναρτήσει τοῦ x. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1). Ἐκ ταύτης δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y, z, ω εἶναι $17x^6=x^2$ ἢ $17x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς 17 νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου. Ὁ $17=(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι, ἂν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους κ^2, λ^2, μ^2,

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+3=16$ ἢ $\kappa^2+\lambda^2+\mu^2=13$. Ὁ 13 ἀναλύεται εἰς τοὺς τρεῖς τετραγώνους 9, $\frac{36}{25}$, $\frac{64}{25}$. Εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων προσθέτομεν τὴν μονάδα, ὁπότε εἶναι $10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}=16$ καὶ θέτομεν $y=10x^6$, (5), $z=\frac{61}{25}x^6$, (6), $\omega=\frac{89}{25}x^6$, (7). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\left(10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}\right)x^6=x^2 \quad ἢ \quad 16x^4=1, \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{1}{2}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (5, 6, 7) λαμβάνομεν

$$y=10\,.\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{32},\ z=\frac{61}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{61}{1600},\ \omega=\frac{89}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{89}{1600}$$

καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y+z+\omega=\frac{5}{32}+\frac{61}{1600}+\frac{89}{1600}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y-x^6=\frac{5}{32}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{3}{8}\right)^2,\ z-x^6=\frac{61}{1600}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{3}{20}\right)^2$$

$$\omega-x^6=\frac{89}{1600}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V, 19 β.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 2.

Καὶ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 2 ὁ 8. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 2 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 26 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Θέτω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἐὰν λοιπὸν ἀναλύσω τὸν 17 εἰς δύο τετραγώνους λύω τὸ ζητούμενον. Λαμβάνω τοῦ 17 τὸ ἥμισυ, τὸ ὁποῖον εἶναι $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητῶ νὰ εὕρω ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ δίδεται τετράγωνος· πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4· ζητῶ ἄρα νὰ εὕρω τετραγ. κλάσμα, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν 34 νὰ δίδῃ τετράγωνον· ἔστω τὸ τετραγωνικὸν κλάσμα $\frac{1}{x^2}$, ὁπότε εἶναι $34+\frac{1}{x^2}=$ τετράγωνος. Διὰ πολ)σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ x^2 λαμβάνομεν $34x^2+1=$τετράγωνος· ἔστω$=(1-6x)^2$, ἐξ ἧς $x=6$· εἶναι ἄρα $x^2=36$, $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{36}$. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ εἰς τὰς μονάδας 34 προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{36}$. τὸ εἰς τὰς μονάδας ἄρα $8\frac{1}{2}$ προστιθέμενον κλάσμα θὰ εἶναι $\frac{1}{144}$ καὶ δίδει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $\frac{35}{12}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$ καὶ πρὸς τοῦτο ζητῶ νὰ εὕρω τί θὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 4 καὶ τί θὰ προσθέσω εἰς τὸ 1 διὰ νὰ ἔχω τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δηλ. $\frac{35}{12}$.

Θέτω λοιπὸν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἔχοντα πλευρὰν τὴν $(23x+1)$, τὸν δὲ ἄλλον τὴν $(4-13x)$ καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν $598x^2+17-58x=17$ ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου $\frac{1016}{349}$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $\frac{1019}{349}$ καὶ ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων 8 θὰ ἔχω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=\delta$, (1), $\delta^3+y=\alpha^2$, (2), $\delta^3+z=\beta^2$, (3), $\delta^3+\omega=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $\delta=2$, $\delta^3=8$. Πρέπει λοιπὸν ὁ 2 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3, 4) καὶ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν $26=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ἤτοι πρέπει ὁ 26 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἔστω ὁ εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁπότε ὁ $17=(26-9)$ πρέπει νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8 καὶ μικρότερος τοῦ 9. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 17, τὸν $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ λάβωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν (Σημ. Μέθοδος τοῦ προβλήματος V, 9) ἤτοι νὰ εἶναι $8\frac{1}{2}+\frac{1}{4t^2}=$ τετράγωνος, (5). Διὰ πολ]σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 4 ἔχομεν $34+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, ἢ $34t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(1-6t)^2$, ἐξ ἧς $t=6$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λάμβάνομεν $\frac{17}{2}+\frac{1}{144}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$. Καὶ εἶναι $8<\frac{1225}{144}<9$. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 πρέπει νὰ εἶναι, κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$. Ἐπειδὴ $17=4^2+1^2$, πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο νέων τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ εἶναι ἡ μὲν μικροτέρα τοῦ 4, ἡ δὲ μεγαλυτέρα τοῦ 1. Πρέπει λοιπὸν ἐκ μὲν τοῦ 4 νὰ ἀφαιρεθῇ κάτι εἰς δὲ τὸ 1 νὰ προστεθῇ κάτι, ὥστε νὰ λαμβάνεται καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις $\frac{35}{12}$, ἤτοι νὰ εἶναι $4-\kappa=\frac{35}{12}$ καὶ $1+\lambda=\frac{35}{12}$. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{13}{12}$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\lambda=\frac{23}{12}$. Σχηματίζομεν τώρα τοὺς δύο ζητουμένους τετραγώνους θέτοντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν $(23x+1)$ καὶ τοῦ ἄλλου $(4-13x)$, ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $(23x+1)^2+(4-13x)^2=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$. Ἑπομένως ὁ δεύτερος τετράγωνος ἐκ τῶν τριῶν εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 26 εἶναι $\left(23\cdot\frac{29}{349}+1\right)^2=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$ καὶ ὁ τρίτος εἶναι $\left(4-13\cdot\frac{29}{349}\right)^2=\left(\frac{1019}{349}\right)^2$, ἐν ᾧ ὁ πρῶτος εἶναι 9. Δι' ἀφαιρέσεως ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων τοῦ 8 (ἐκ τῶν σχέσεων (2, 3, 4)) λαμβάνομεν $y=1$, $z=\frac{57848}{121801}$, $\omega=\frac{63953}{121801}$ καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι $\delta=y+z+\omega=1+\frac{57848}{121801}+\frac{63953}{121801}=2$, καὶ

$$\delta^3+y=8+1=3^2,$$

$$\delta^3+z=8+\frac{57848}{121801}=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$$

$$\delta^3+\omega=8+\frac{63953}{121801}=\left(\frac{1019}{349}\right)^2.$$

Σημ. Τὰ ἀνακατασκευασθέντα κείμενα θὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὴν ἡμετέραν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἥτις θὰ γίνῃ κατὰ τὸ προσεχὲς ἔτος 1962 ἐν Ἀθήναις.

ZUSAMMENFASSUNG

REKONSTRUKTION DES GRIECHISCHEN TEXTES VON VIER FEHLENDEN AUFGABEN DES V. BUCHES DER ARITHMETIKA DES DIOPHANTOS

Von der Aufgabe V, 19 der Arithmetika des Diophantos fehlt der Beweis. P. Tannery, der Herausgeber der Arithmetika (Teubner 1893) hat dies durch eine Punktreihe angedeutet. Es folgt in derselben 19. Aufgabe fast die ganze Lösung einer anderen Aufgabe, deren Wortlaut verloren ist. Diese Aufgabe wird im folgenden als 19 γ bezeichnet.

Der erste Herausgeber der Arithmetika, der französischer Mathematiker Bachet de Méziriac (Paris, 1621) meinte, dass noch zwei Aufgaben fehlen (die wir im folgenden als 19α und 19β bezeichnen) und gab die Lösungen der Aufgaben 19, 19α, 19β im Geiste Diophants wieder. (Siehe : O. Schulz, Diophantus, Berlin 1822).

Der Meinung Bachets stimmen die folgenden Herausgeber und Kommentatoren Diophants überein : O. Schulz. G. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Leipzig, 1890. T. Heath, (Cambridge, 1910 ; P. ver Eecke, Bruges, 1926.

Um die Richtigkeit der Meinung Bachets verständlich zu machen, legen wir 9 Aufgaben vor, aus deren Vergleichung hervorgeht, dass es sich um drei Gruppen von je drei verwandten Aufgaben handelt. Aus diesen Aufgaben fehlen im Text : 1) Der Beweis von 19 ; 2) ganz die Aufgaben 19α und 19β und 3) der Wortlaut und kleinere Teil vom Anfang des Beweises der Aufgabe 19γ. Weiter rekonstruieren wir die fehlenden griechischen Texte auf Grund der diophantischen Ausdrucksweise, übersetzen sie ins Neugriechische und geben noch die gegenwärtige Ausdrucksweise wieder. Unsere Lösung der Aufgabe 19 unterscheidet sich von der Lösung Bachets, indem wir $3-(\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2)=\left(\frac{6}{5}\right)^4$ anstatt $=1$ setzen (1). Diese Änderung unternahmen wir auf Grund der Aufgabe V, 16.

Übersetzung der rekonstruierten griechischen Texte.

V, 19 (Fehlender Beweis).

Es werde die Summe der drei Zahlen gleich x^2 gesetzt, und die drei Zahlen mögen als $\frac{3}{4}x^6$, $\frac{8}{9}x^6$, $\frac{15}{16}x^6$ angesetzt werden. Dann ist ist der Kubus der Summe der drei Zahlen, vermindert um jede einzelne der Zahlen, ein Quadrat. Es erübrigt sich die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen.

---

1) Den rekonstruierten Text der Aufgabe 19 übersandten wir im April 1961 für die Teubner · Festschrift (1811—1961) nach Leipzig.

Die Summe ist aber $\frac{371}{144}x^6$. Dies ist gleich x^2. Und wenn wir beiderseitig durch x^2 dividieren bekommen wir $\frac{371}{144}x^4 = 1$. Wenn $\frac{371}{144}$ ein Biquadrat würde, so wäre die Aufgabe gelöst. Wie ist aber dieser Koeffizient entstanden ? Dadurch, dass wir die Summe von drei Quadraten, von denen jedes kleiner als 1 ist, von 3 subtrahieren.

Es kommt also darauf an, drei Quadrate zu finden, von denen jedes kleiner als 1 ist, und deren Summe, wenn sie von 3 subtrahiert wird, ein Biquadrat als Rest liefert. Wir wollen nämlich, dass jedes Quadrat kleiner als 1 sei ; wenn wir es also so einrichten, dass die drei Quadrate zusammen kleiner als 1 sind, so wird jedes einzelne gewiss kleiner als 1 sein. Es muss dann das (bei der Subtraktion von 3) übrigbleibende Biquadrat grösser als 2 sein. Setzen wir dies übrigbleibende Biquadrat gleich $\left(\frac{6}{5}\right)^4$, so haben wir $\frac{579}{625}$ in drei Quadrate zu zerlegen. Diese sind $\frac{529}{625}$, $\frac{49}{625}$, $\frac{1}{625}$. Jetzt gehen wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen die eine der gesuchten Zahlen $\frac{96}{625}x^6$, die andere $\frac{576}{625}x^6$, die dritte $\frac{624}{625}x^6$; und es wird ein Quadrat geben, wenn jede dieser Zahlen vom Kubus ihrer Summe subtrahiert wird.

Es erübrigt sich noch, diese Summe gleich x^2 zu setzen. Die Summe aber ist $\frac{1296}{625}x^6$; und wenn wir beiderseitig durch x^2 dividieren bekommen wir $\frac{1296}{625}x^4=1$. Daraus ergibt sich $x = \frac{5}{6}$. Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

V, 19a

Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass ihre Summe ein Quadrat ist, und dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird ein Quadrat als Rest gibt.

Wir setzen wieder die Summe der drei Zahlen gleich x^2 und die eine der gesuchten Zahlen gleich $2x^6$, die zweite $5x^6$ und die dritte $10x^6$. Dann ist schon die Bedingung erfüllt, dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gibt.

Eserübrigt sich, die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen. Diese Summe ist aber $17x^6$. Es soll also $17x^6=x^2$ sein. Wird alles durch x^2 dividiert, so folgt $17x^4=1$. Und die 1 ist eine Biquadratzahl. Wenn 17 ein Biquadrat wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Die Zahl 17 aber ist die Summe von drei Quadraten plus 3. Wir müssen daher drei Quadratzahlen finden so, dass ihre Summe plus 3 ein Biquadrat ergebe. Die Biquadratzahl sei 16. Wir müssen also 13 in drei Quadrate zerlegen ; das eine ist 9,

das zweite $\frac{36}{25}$ und das dritte $\frac{64}{25}$. Zu jedem dieser Quadrate addiere ich 1 und komme zu den ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Ich setze jede der gesuchten Zahlen entsprechend den obigen Zahlen, mal x^6, und die Summe der drei Zahlen wieder gleich x^2. Es wird die eine $10x^6$. die zweite $\frac{61}{25}$ x^6, die dritte $\frac{89}{25}$ x^6 sein. So wird die Bedingung erfüllt,
(4) dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gibt.

Es erübrigt sich die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen. Diese Summe ist aber $16x^6$. Wird alles durch x^2 dividiert, so folgt $16x^4=1$. Daraus ergibt sich $x=\frac{1}{2}$. Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

(5)

V, 19 β

Die gegebene Zahl in drei Zahlen zu zerlegen, dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermehrt wird ein Quadrat gibt.

Es sei die Zahl 2 gegeben.

Der Kubus von 2 ist 8. Wir müssen also die Zahl 2 in drei Zahlen zerlegen, so dass jede der Zahlen vermehrt um 8 ein Quadrat gibt Wir müssen also die Zahl 26 so in drei Quadrate zerlegen, dass jedes von diesen Quadraten grösser als 8 ist. Ich setze das eine Quadrat gleich 9, was grösser als 8 ist. Wenn ich nun die Zahl 17 in zwei Quadrate zerlege, so dass jedes grösser als 8 ist, ist die Aufgabe gelöst. Ich nehme die Hälfte von 17, das ist $8\frac{1}{2}$, und untersuche welcher quadratischer Bruch zu $8\frac{1}{2}$ zu addieren ist, damit ein Quadrat entstehe. Es wird alles mit 4 multipliziert. Ich suche folglich einen quadratischen Bruch zu 34 zu addieren,
(6) damit ein Quadrat entsteht. Dieser quadratischer Bruch sei $\frac{1}{t^2}$; es wird $34+\frac{1}{t^2}=$ Quadrat sein. Durch Multiplikation mit t^2 bekomme ich $34t^2+1=$ Quadrat. Dies Quadrat sei gleich $(1-6t)^2$. Aus dieser Gleichung ergibt sich $t=6$, $t^2=36$; der zu 34 addierende quadratische Bruch ist folglich $\frac{1}{36}$; der zu $8\frac{1}{2}$ wird $\frac{1}{144}$ sein und es wird $8\frac{1}{2}+\frac{1}{144}=$Quadrat.
(7) Die Seite dieses Quadrats ist gleich $\frac{35}{12}$.

Wir müssen also die Zahl 17 so in zwei Quadrate zerlegen, dass die Seite jedes derselben nahezu gleich $\frac{35}{12}$ ist. Zu diesem Zwecke suche ich, um welche Zahl 4 vermindert und 1 vergrössert werden muss, damit man $\frac{35}{12}$ erhält.

Ich bilde also zwei Quadrate, das eine über $23x+1$, das andere über $4-13x$ $\left[\text{da } \frac{35}{12}=1+\frac{23}{12}=4-\frac{13}{12} \text{ ist}\right]$. Die Summe dieser beiden Quadrate wird $698x^2+17-58x=17$. Daraus ergibt sich $x=\frac{29}{349}$. Folglich ist die Seite des einen Quadrats $\frac{1016}{349}$ und die des anderen $\frac{1017}{349}$. Wenn ich von jedem der drei Quadrate 8 subtrahiere, so erhalte ich die gesuchten drei Zahlen.

V, 19 γ

Die gegebene Zahl in drei Zahlen zu zerlegen, dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird ein Quadrat ergibt.

[Eingegangen am 25 Juli 1961].

Die rekonstruierten griechischen Texte werden in meiner Diophant–Ausgabe, die im nächsten Jahr 1962 in Athen erscheint, eingeschaltet.

Κατωτέρω παρέχομεν την αποκατάστασιν του κειμένου ~~[illegible]~~ των προβλημάτων 19, 19a, 19b, 19γ και τας αντιστοίχους μεταφράσεις εις την γερμανικήν και αναλυτικώς τας λύσεις των αυτών προβλημάτων.

19. (Fehlender Text)

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς $Δ^{Υ}$ ᾱ, καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν $Κ^{Υ}Κ\,\frac{δ}{γ}$, ὁ δὲ $Κ^{Υ}Κ\,\frac{δ}{η}$, ὁ δὲ $Κ^{Υ}Κ\,\frac{ιϛ}{ιε}$, καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν $□^{ον}$.

Λοιπὸν ἔστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $Δ^{Υ}$ α. Ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσιν $Κ^{Υ}Κ\,\frac{ρμδ}{τοα}$· ταῦτα ἴσα $Δ^{Υ}$ α. καὶ πάντα παρὰ $Δ^{Υ}$ α· γίνονται $Δ^{Υ}Δ\,\frac{ρμδ}{τοα}$ ἴσαι $\mathring{Μ}$ ᾱ.

Καί ἔστιν ἡ $\mathring{Μ}$ ᾱ $□^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $□^{ον}$, ὥστε ἄρα καὶ $Δ^{Υ}Δ\,\frac{ρμδ}{τοα}$ δεήσει εἶναι $□^{ον}$ πλευρὰν ἔχοντα $□^{ον}$. # πόθεν ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν $Δ^{Υ}Δ$, ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς τετραγώνους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν $\mathring{Μ}$ ᾱ καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ $\mathring{Μ}$ ᾱ, τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ $□^{ον}$, πλευρὰν ἔχοντα $□^{ον}$.

καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι $\mathring{Μ}$ ᾱ· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας $\mathring{Μ}$ α, πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μονάδος· ὥστε δεήσει ὁ καταλειπόμενος $□^{ος}$, ~~μείζων~~ πλευρὰν ἔχων $□^{ον}$ μείζων εἶναι δυάδος.

τετάχθω ὁ καταλειπόμενος $□^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $□^{ον}$ μείζων εἶναι δυάδος· ἔστω $\mathring{Μ}\,\frac{χκε}{,αϛϙϛ}$. δεῖ οὖν τὰ $\frac{,αϛϙϛ}{φοθ}$ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{,αϛϙϛ}{φκθ}$, ὁ δὲ $\frac{,αϛϙϛ}{μθ}$, ὁ δὲ $\frac{,αϛϙϛ}{ᾱ}$

εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\mathring{Μ}\,\frac{ρμδ}{τοα}$ $□^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $□^{ον}$, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον.

Ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς $Δ^{Υ}$ α, τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν $Κ^{Υ}Κ\,\frac{,αϛϙϛ}{φκθ}$, ὃν δὲ $Κ^{Υ}Κ\,\frac{,αϛϙϛ}{μθ}$, ὃν δὲ $Κ^{Υ}Κ\,\frac{,αϛϙϛ}{ᾱ}$· καὶ συμβαίνουσι τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον λείψαντα ἕκαστον

Übersetzung ins Deutsche des rekonstruierten Textes.

V, 19 (Fehlender Beweis).

Übersetzung ins Deutsche des rekonstruierten Textes von V, 19a.

Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihre Summe ein Quadrat ist, und daß eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gebe.

Wir setzen wieder die Summe der drei Zahlen gleich x^2 und die eine der gesuchten Zahlen gleich $2x^6$, die zweite $5x^6$ und die dritte $10x^6$. Dann ist schon die Bedingung erfüllt, daß eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird ein Quadrat als Rest gibt.

Es erübrigt sich noch, daß die Summe der drei Zahlen gleich x^2 sei. Diese Summe ist aber $17x^6$. Es soll also $17x^6 = x^2$ sein. Wird alles durch x^2 dividiert, so folgt $17x^4 = 1$. Und die 1 ist eine Biquadratzahl. Wenn 17 ein Biquadrat wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Die Zahl 17 aber ist die Summe von drei Quadratzahlen plus 3. Es muß daher drei Quadratzahlen zu finden, so daß ihre Summe plus 3 eine Biquadratzahl ergebe. Die Biquadratzahl sei 16. Es muß also 13 in drei Quadrate zerlegen; das eine ist 9, das zweite $\frac{36}{25}$ und das dritte $\frac{64}{25}$. Zu jedem dieser Quadrate addiere ich 1 und komme zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Ich setze jede der (gesuchten) Zahlen entsprechend der obigen Zahlen, jede mit x^6,

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ "ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ" ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΣ)

«ΠΛΑΤΩΝ»
ΕΤΟΣ ΙΓ'—1961
ΤΕΥΧΗ Α' καὶ Β' 25/26

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ "ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ" ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΣ)

I

Εἰς τὸ 5ον βιβλίον τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου παρουσιάζεται ἡ περίπτωσις νὰ ἀναλυθῇ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα δύο ἴσων περίπου τετραγώνων (V 9) ἢ εἰς ἄθροισμα τριῶν ἴσων περίπου τετραγώνων (V 11). Ἡ χρησιμοποιουμένη πρὸς τοῦτο μέθοδος προσεγγίσεως καλεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου παρισότητος ἀγωγή. Εἰς ἕκαστον τῶν προβλημάτων τούτων ὑπάρχει περιορισμὸς καθορίζων πότε τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ λύσιν. Οὕτω, εἰς τὸ πρόβλημα V 9 ὁ περιορισμὸς εἶναι:

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν (νὰ ἀναλύεται δηλ. ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων) πρέπει ὁ δοθεὶς ἀκέραιος, ἔστω α, νὰ μὴ εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ $2\alpha+1$ νὰ μὴ διαιρῆται ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$.

Εἰς τὸ πρόβλημα V 11 ὁ περιορισμὸς εἶναι:

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν (νὰ ἀναλύεται δηλ. ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων) πρέπει ὁ δοθεὶς νὰ μὴ εἶναι 2 οὔτε νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $8k+2$. (Σημ. Ὁ δεύτερος περιορισμὸς εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς συνθήκης, καθ' ἣν ἀριθμὸς τῆς μορφῆς 4^{λ} $(8k+7)$ δὲν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων). Ἐκ τῶν περιορισμῶν τῶν προβλημάτων τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζε πότε ἀριθμός τις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν τετραγώνων. Ἐξ ἐνδείξεων δὲ ἐξ ἄλλων προβλημάτων τῶν 'Αριθμητικῶν του (IV 29 καὶ 30, καὶ V 14), φαίνεται, ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ἀπόδειξιν τῆς τελευταίας ταύτης προτάσεως ἐπέτυχεν ὁ Lagrange [1].

Ὑπὸ τοὺς ἀνωτέρω περιορισμούς, καθ' οὓς εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν τετραγώνων, ἡ μέθοδος «Παρισότητος ἀγωγή» (δηλ. μέθοδος προσεγγίσεως) εὑρίσκει ἐφαρμογὴν εἰς τὰς περιπτώσεις: νὰ ἀναλυθῇ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων (V 9), ἢ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων (V 11).

Ἀναφέρομεν τὰ δύο συναφῆ παραδείγματα τοῦ Διοφάντου:

1ον. Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 13 εἰς ἄθροισμα δύο ἴσων περίπου τετραγώνων.

Λαμβάνει τὸ ἥμισυ τοῦ 13 καὶ προσθέτει εἰς τοῦτο τὸ $\frac{1}{4t^2}$, ὅπου ὁ t πρέπει να προσδιορισθῇ, ὥστε ὁ $\frac{13}{2}+\frac{1}{4t^2}$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, (1).

---

1) Demonstration d' un théorème d' arithmetique in Nouveaux Memoires de l' Academie Royal des sciences de Berlin, année 1770, Berlin 1772, p. 12—133. Oeuvres de Lagrange, III P. 187—201.

Ἐκ ταύτης εἶναι $26t^2+1$=τετράγωνος, ἔστω$=(1+5t)^2$, ἐξ ἧς $t=10$. Καὶ εἶναι ἐκ τῆς (1), $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$. Ἀλλὰ δύο τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{51}{20}$ ἔχουν ἄθροισμα $13+\frac{1}{200}$, ὅπερ εἶναι>13.

Ὁ $13=3^2+2^2$. Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 2, ἔστω κατὰ λ, ὁπότε διὰ νὰ εἶναι μὲν τὰ δύο τετράγωνα ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμάτων κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς τὸν 13 (ὀλίγον μεγαλύτερον τούτου) πρέπει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι $\frac{51}{20}=3-\kappa$ καὶ τοῦ ἄλλου $\frac{51}{20}=2+\lambda$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{9}{20}$ καὶ $\lambda=\frac{11}{20}$.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι

$$2.\left(\frac{51}{20}\right)^2=\left(3-\frac{9}{20}\right)^2+\left(2+\frac{11}{22}\right)^2=13+\frac{1}{200}.$$

Ἐνταῦθα τὰ δύο ζητούμενα τετράγωνα εἶναι ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς 13. Τὸ πρόβλημα θέλει τὰ μὲν δύο τετράγωνα νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τὸ δὲ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 13. Πρὸς τοῦτο ἐκφράζει τὰς πλευρὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου **x** καὶ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $\left(3-\frac{9}{20}\right)$ καὶ $\left(2+\frac{11}{20}\right)$, ὁπότε λαμβάνει

$$(3-9x)^2+(2+11x)^2=13, \quad (2).$$

(Σημ. Ἡ παράλειψις τῶν παρονομαστῶν γίνεται διὰ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ἀριθμούς. Τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται).

Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{5}{101}$ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων εἶναι

$$\frac{257}{101} \text{ καὶ } \frac{258}{101}, \text{ εἶναι δὲ } \left(\frac{257}{101}\right)^2+\left(\frac{258}{101}\right)^2=13.$$

Εἶναι λοιπὸν τὰ κατὰ προσέγγισιν ἴσα τετράγωνα, τὸ μὲν $\frac{66049}{10201}$, τὸ δὲ $\frac{66564}{10201}$ καὶ τὸ ἄθροισμά των εἶναι $=13$.

2ον. Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν ἴσων κατὰ προσέγγισιν τετραγώνων.

Λαμβάνει $\frac{10}{3}+\frac{1}{9t^2}$ =τετράγωνος, (3), ὅπου ὁ t πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ ταύτης εἶναι

$30t^2+1$=τετράγωνος, ἔστω $=(1+5t)^2$, ἐξ ἧς $t=2$ καὶ ἐκ τῆς (3) εἶναι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2.$$

Ἀλλὰ τρία τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{11}{6}$ εἶναι

$$3.\ \frac{121}{36}=\frac{363}{36}=10\ \frac{3}{36}>10.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθοῦν τρία τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τῶν ὁποίων ὅμως τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἀκριβῶς 10.

Ὁ $10=3^2+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$ ἤτοι εἶναι ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως $3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$

Διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὰ κλάσματα πολ]ζει ἐπὶ 30 καὶ ἔχῃ ἀντιστοίχως 90, 24, 18 ὡς πλευρὰς τριῶν τετραγώνων καὶ $\frac{11}{6}$, 30=55 ὡς πλευράν, ἐὰν τὰ τρία τετράγωνα εἶναι ἴσα.

Πρέπει λοιπόν, λέγει ὁ Διόφαντος, ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 90, 24, 18 κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς 55. Ἐπειδὴ 90=55+35, 24=55—31, 18=55—37, ἤτοι 55=90—35=24+31=18+37 καὶ

$$\frac{55}{30}=3-\frac{35}{30}=\frac{4}{5}+\frac{31}{30}=\frac{3}{5}+\frac{37}{30} \text{ καὶ εἶναι}$$

$$\left(3-\frac{35}{30}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}\right)^2=\frac{363}{36}>10,$$

πρέπει οἱ δεύτεροι ὅροι ἑκάστου τῶν δυωνύμων τοῦ α΄. μέλους νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων νὰ εἶναι ἀκριβῶς 10. Πρὸς τοῦτο σχηματίζει τὴν ἐξίσωσιν

$$(3-35x)^2+\left(\frac{4}{5}+31x\right)^2+\left(\frac{3}{5}+37x\right)^2=10.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{116}{3555}$ καὶ τὰ ζητούμενα τρία τετράγωνα εἶναι

$$\left(\frac{6605}{3555}\right)^2+\left(\frac{6440}{3555}\right)^2+\left(\frac{6425}{3555}\right)^2=10.$$

II

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τοῦ Διοφάντου καὶ ἐκ τῆς σπουδῆς πολλῶν συναφῶν περιπτώσεων συνάγομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

II 1

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα, ὥστε τὸ ἀντίστροφον τούτου προστιθέμενον εἰς δοθέντα ἀκέραιον νὰ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀκέραιος α καὶ ὁ ζητούμενος τετράγωνος t^2, ὁπότε θὰ εἶναι

$$\alpha+\frac{1}{t^2}=\text{τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι } \alpha t^2+1=\text{τετράγωνος.}$$

Τὸν τετράγωνον τοῦτον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $=(1+\kappa t)^2$ ὅπου $\kappa^2<\alpha$.

ἢ $=(1-\lambda t)^2$, ὅπου $\lambda^2>\alpha$.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

α) $7+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, (2), ἢ $7t^2+1=$τετράγωνος$=(1+2t)^2$ ἐξ ἧς $t=\frac{4}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

β) $7t^2+1=(1-3t)^2$, ἐξ ἧς $t=3$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $7+\frac{1}{9}=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$.

II 2

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα (t^2), ὥστε ἡ παράστασις

$\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ νὰ εἶναι $=$τετράγωνος, (1), (α δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς καί, $n=2, 3, 4\ldots$).

Ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\alpha n t^2+1=\text{τετράγωνος, ἔστω}=(1+\varkappa t)^2, \text{ ὅπου}$$
$$\varkappa^2<\alpha n \quad \text{ἢ} \quad =(1-\lambda t)^2, \quad \text{ὅπου } \lambda^2>\alpha n.$$

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

α) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}=$τετράγωνος, (2) ἢ $55t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(1+7t)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{7}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2$.

β) $55t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(1-8t)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{16}{9}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25.256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2.$$

II 3.

Ἐφ᾿ ὅσον πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων, πέντε, ἓξ . . . ν τετραγώνων, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ καὶ εἰς ἄθροισμα 4, 5, 6 . . . ν τετραγώνων, κατὰ προσέγγισιν ἴσων, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου προσεγγίσεως τοῦ Διοφάντου, ἀφοῦ καταστήσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν α τετράγωνον δυνάμει τῆς σχέσεως II 2.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 35 εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων.

Κατὰ τὴν σχέσιν II 2 θὰ ἔχωμεν $\frac{35}{4}+\frac{1}{16t^2}=$τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι

$$140t^2+1=\text{τετράγωνος, ἔστω}=(1-12t)^2, \text{ ἐξ ἧς } t=6,$$

καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\,.\,36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2$$

Ὁ 35 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, τῶν $1^2+3^2+3^2+4^2$. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἴσων τετραγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ ἀναλυθῇ ὁ 35, τὸ πρῶτον θὰ ἔχῃ πλευρὰν μεγαλυτέραν τῆς μονάδος καὶ <3, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν τριῶν πρέπει νὰ εἶναι <3. Ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ κάτι, ἔστω ϰ, ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν ἐκ τοῦ 3 ἀφαιρεθῇ κάτι, ἔστω λ, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετάρτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν ἐκ τοῦ 4 ἀφαιρεθῇ κάτι, ἔστω μ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν

$$\varkappa=\frac{47}{24}, \quad \lambda=\frac{1}{24}, \quad \mu=\frac{25}{24}.$$

Ἀλλὰ τέσσαρα τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{71}{24}$ ἔχουν ἄθροισμα 4. $\left(\frac{71}{24}\right)^2 = \frac{20164}{576} = 35\frac{4}{576}$, ὅπερ εἶναι >35. Διὰ νὰ εἶναι τὰ ζητούμενα τέσσαρα τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 35 ἐκφράζομεν τὰς πλευρὰς τούτων, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου, συναρτήσει ἀγνώστου τινος $\mathbf{x}$ καὶ τῶν τιμῶν τῶν $\varkappa$, λ, μ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

(Σημ. Ἡ ἐξίσωσις ἠδύνατο νὰ εἶναι

$$\left(1+\frac{47}{24}x\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(4-\frac{25}{24}x\right)^2=35.$$

Ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται· λαμβάνονται μόνον μικρότεροι ἀριθμοί).

Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{59}{1418}$ και δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν τὰ ζητούμενα 4 τετράγωνα

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

SUMMARY

A few remarks on the method ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ of Diophantus (Method of approximation to limits).

From studying the problems V 9, 11 of the Arithmetica of Diophantus we conclude the following :

II 1.

We can always define a square t^2 so that the converse of that, when additioned to a given whole number, to make that square.

Let a be the given whole number and t^2 the square we want to find. Then $a+\frac{1}{t^2}$ =square, (1). From this relation we have $at^2+1=$ square. We can write this square$=(1+\varkappa t)^2$, with $\varkappa^2 < a$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2 > a$.

Examble

a) $7+\frac{1}{t^2}$=square, (2), or $7t^2+1$=square, let$=(1+2t)^2$, then $t=\frac{4}{3}$ and from the (2) we have $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$

b) $7t^2+1=(1-3t)^2$, then $t=3$ and from the (2) we have

$$7+\frac{1}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$$

II 2.

We can always define a square t^2, so that the representation $\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ to be a square number, (1), (a is the given whole number and

$n=2, 3, 4 \ldots$).

From the (1) we have ant^2+1=square. Let it be $=(1+\varkappa t)^2$, with $\varkappa^2<an$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2>an$.

Examble

a) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}$ =square. (2) or $55t^2+1$=square.

Let it be$=(1+7t)^2$, then $t=\frac{7}{3}$ and from the (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2.$$

b) $55t^2+1$=square, let it be $=(1-8t)^2$, $t=\frac{16}{9}$ and from (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25\,.\,256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2$$

II 3.

While every whole number is analysed to a sum of four, five, six, . . , ν squares, is also possible tc be analysed to a sum of 4, 5, 6 . . , ν squares, appoximately equal, by the application of the method of appoximation of Diophantus, after we have made the given number a square according to the relation II 2.

Examble

To be analysed the number 35 in four approximately equal squares.

With respect to the II 2 we will have $\frac{35}{4}+\frac{1}{16t^2}$ =square, (1). From this relation we have $140t^2+1$=square, let it be$=(1-12t)^2$, then $t=6$, and from the (1) we have

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\,.\,36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2$$

The number 35 is analysed to a sum of four squares that is of

$$1^2+3^2+3^2+4^2.$$

The number 35 must be analysed to a sum of four squares, each of them has a side about equal to $\frac{71}{24}$. The side of the first of the required squares will be larger of 1 and smaller of 3, the side of other three squares will be smaller of 3 i. e. if the 4 squares are equal we will have as side of each of them the following

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

From the above relations we have

$$\varkappa=\frac{47}{24},\ \lambda=\frac{1}{24},\ \mu=\frac{25}{24}.$$

But four equal squares, each of them has as side $\frac{71}{24}$, have a sum $4\cdot\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{20164}{576}=35\frac{4}{576}$, thus >35. In order to be the required squares approximately equal, with their sum exactly equal to 35, we express the sides of them according to the method of Diophantus. Then we have

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

From this relation we find $x=\frac{59}{1418}$ and by substituting in the (2) we take the required four squares

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

BIBLIOGRAPHY

T. L. Heath, Diophantus of Alexandria (95—98), Cambridge 1910.

T. Nagell, Introduction to Number Theory (John Wiley, New York 1951).

O. Ore, Number Theory and his History (Mc Graw - Hill, New York 1948).

J. V. Uspensky and M. A. Heaslet, Elementary Number Theory (Mc Graw - Hill, New York 1939).

H. Davenport, The Higher Arithmetik, Hutchinson's University Library, London 1952).

E. Cahen, Théorie des nombres, Hermann, Paris 1924.

P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, B. C. Teubner, Leipzig; Vol. I, 1920 Vol. II, 1910.

E. Bessel-Hagen, Zahlentheorie (Pascals Repertorium, Vol. I, Teil 3; B. C. Teubner, Leipzig 1929).

F. T. Poselger, Beiträge zur unbestimmten Analysis, Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1832, Berlin 1834.

M. Kraitchic, Théorie des nombres, I, II, Paris 1922, 1926.

EVANGELOS S. STAMATIS

A CONTRIBUTION TO THE INTERPRETATION OF GEOMETRIC PASSAGE OF THE DIALOGUE MENON, PLATOS, (86 e - 87 b)

«ΠΛΑΤΩΝ»
ΕΤΟΣ ΙΔ'—1962
ΤΕΥΧΗ Α' καὶ Β' (27/28)

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

A CONTRIBUTION TO THE INTERPRETATION OF GEOMETRIC PASSAGE OF THE DIALOGUE MENON, PLATOS, (86 e - 87 b) *

Below is published in English the main part of a treatise, which is published in Greek in the «Platon» (Year Γ', part B', p. 218=227, 1951).

It is about the passage where the discovery of the possibility or not of the inscription of plane surface in the form of a triangle in a circle. In the issue of 1951 the two solutions of the problem by 1) Butcher — Heath and 2) A. S. L. Farquarson [1) T. L. Heath, A history of Greek Mathematics I p. 229—301, 1921. 2) Classical Quartarly XVII, 1, Januar 1923] are also mentioned in detail.

The solution of this problem I propose is the following:

Hypothesis I (fig. 1)

Suppose that the figure on the ground, in the above passage of the M e n o is the square EDGO and that its doubled square is EGHZ. We fill out the square ABCD; let AEHB be the given rectilinear area that must be inscribed as a triangle in the given circle with center O.

We extend the rectangle AEHB along the given line AD(=AB), from which the rectangle of equal area EDCH is left **. As is obvious from the figure, the rectangle AEHB cannot be inscribed as a triangle in the given circle, because it consists of two squares, AEOZ and ZOHB; for these squares, according to the solution of the previous geometric passage of the dialogue (81e—85c), are equal to the square EGHZ, which, as is

* 'Η παροῦσα μελέτη εἰς τὴν ἀγγλικὴν γλῶσσαν ἀποτελεῖ τὸ κύριον μέρος πραγματείας ἡμῶν δημοσιευθείσης ἑλληνιστὶ εἰς τὸν Πλάτωνα ("Ετος Γ' τεῦχος Β', σελὶς 218—227, 1951). Πρόκειται περὶ τοῦ χωρίου, ὅπου συζητεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ τῆς ἐγγραφῆς ἐπιπέδου εὐθυγράμμου ἐπιφανείας ὑπὸ μορφὴν τριγώνου εἰς κύκλον.

known, is the maximum of the parallelograms that can be inscribed in the circle.

Hypothesis II (fig. 1)

We leave out half of the rectangle AEHB, i.e. the square ZOHB, We extend the remaining square AEOZ along the given line AD of the figure. Thus, EDGO, which is equal to the extended AEOZ, is left out from ADGZ, which is equal to AEHB. It is obvious that the square AEOZ can be inscribed in the given circle as a triangle EGZ, the base of which,

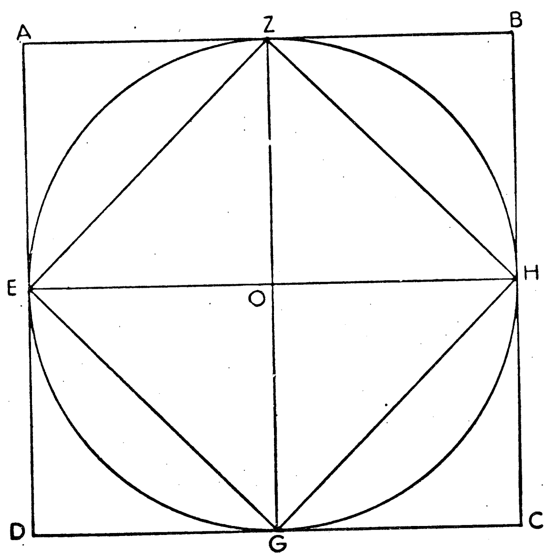


fig. 1.

GZ, is equal to AD (i.e. the diameter of the circle). Therefore, we can consider the longest of the lines of the triangle which is equal to the diameter as the given fixed side of the area and proceed with various transformations. It is also obvious that if we keep AB fixed and move ZO along a line parallel to itself in the direction of AE, we obtain areas progressively smaller than the square AEOZ, each of which can be inscribed in the given circle.

Hypothesis III (fig. 2)

We suppose that at the time the *Meno* was written it was known that the largest triangle that can be inscribed in a circle is an equilateral the area of which is equal to $\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$, where r is the radius of the circle.

If the given area is larger than the square AEOZ, then the maximum area which can be inscribed as a triangle in the given circle (if transformed to a rectangle with AE, the radius of the circle, as the constant side) will have the side $AB = \frac{3}{4} r\sqrt{3}$ as its other side [Note: We can draw the straight line $r\sqrt{3}$ with a rule and compass as follows: We suppose a right triangle ABC, of which A is the right angle and AB=AC=r its perpendicular side. At one of the ends of the hypotenuse, e.g. B, we draw a perpendicular line and take a part of it so that BD=r. We draw a line from D to C. The hypotenuse CD of the new right triangle BDC (where B is the right angle) equals $r\sqrt{3}$]. From a point B we draw a perpendicular to the diameter of the circle and extend it to a point P. Thus, we have

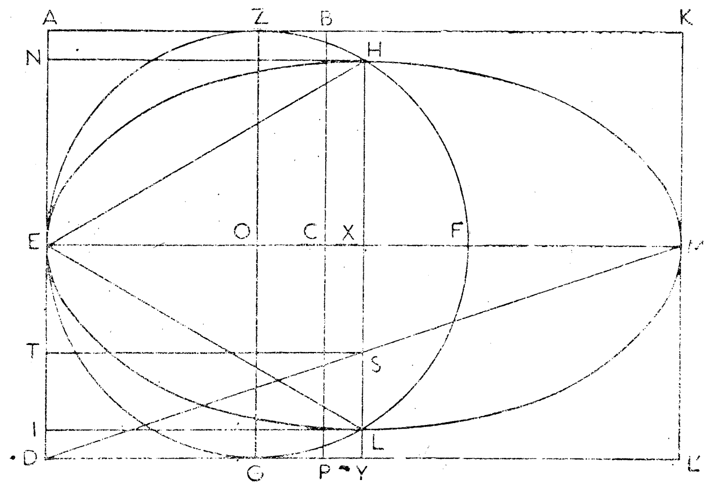


fig. 2

extended the rectangle AECB along the given line AD leaving out the rectangle EDPC, which is equal to AECB.

In our opinion, the problem is now how to inscribe the area AECB in the given circle as a triangle. There are several methods to solve this problem. First, we may inscribe an hexagon in the circle and join every two vertexes together. Second, we may construct the hyperbole

$$xy = b^2 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$$

(where x=AB, y=AE and b^2 the area of the given surface). If we draw a perpendicular on the point of contact and prolong the line until it cuts the circumference, we obtain the base of the desired equilateral triangle with vertex point E.

In this case, we suppose that we can obtain the desired equilateral triangle through an ellipsis, on the basis of the words ἐλλείπειν κλπ. of the text as well as Theorem 28 of book VI of Euclid's Elements and Theorem 13 of book I of Apollonius' Conics.

Analysis.

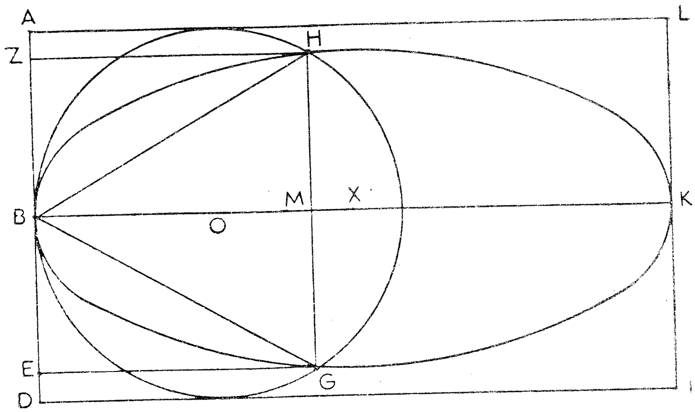
We take a point H in the circumference of a circle (fig. 2) so that the parallelogram NEXH is equivalent to the parallelogram AECB. It is obvious that the triangle EHL is equivalent to the parallelogram NEXH=AECB. $EX=\frac{3r}{2}$.

Synthesis.

With $\alpha=EX=\frac{3r}{2}$ as the semiaxis of the ellipsis and with the radius of the circle $r=2p=ED$ we construct an ellipsis, in accordance with Theorem 28 of book VI of Euclid's Elements and Theorem 13 of book I of Apollonius' Conics. This construction takes place as follows: We form the rectangle EDL'M (fig. 2), in which the great axis $EM=2a$ and the parameter of the ellipsis $ED=r=2p$. We draw the diagonal MD. From a point X of the axis EM we draw the line XY perpendicular to DL'. This line sects the diagonal MD at point S. We then prolong the parallelogram ETSX along the line ED. From this the rectangle TDYS is left out, which is equal to ETSX as well as similar to EDL'M and situated similarly to the latter. The area of the parallelogram ETSX is equivalent to a square with side the line XL. The point L is a point of the ellipsis. In the same way, if we draw the symmetrical diagonal MA of the parallelogram AEMK we obtain the point H of the ellipsis. These two points L and H determine the axis b of the ellipsis, which is the longest perpendicular that can be drawn to the great axis according to the definition given in Theor. 27 of book VI of Euclid's Elements. With a similar construction, i. e. by drawing perpendiculars from whatever two points of the axis EM to DL', we obtain the points in which they sect the diagonal DM ; from these we draw parallel lines to EM (which are perpendicular to ED). The parallelograms on the side of the small axis (with the exception of those below the parallel drawn from the diagonal) if transformed into squares give the points of the ellipsis. It is clear that each of the parallelograms thus transformed into squares is smaller than ETSX, according to Theor. 27 of book VI of Euclid's Elements. The section of the ellipsis and of the circle give the two points on the circumference of the circle which joined together form the basis of the inscribed triangle which has point E as vertex and which is the maximum triangle that can be inscribed in the circle.

pothesis IV.

If the side of the surface which is transformed into a rectangle is ger than the radius of the circle and indeed longer that $\frac{3}{4}$ r $\sqrt{3}$ then



feg. 3

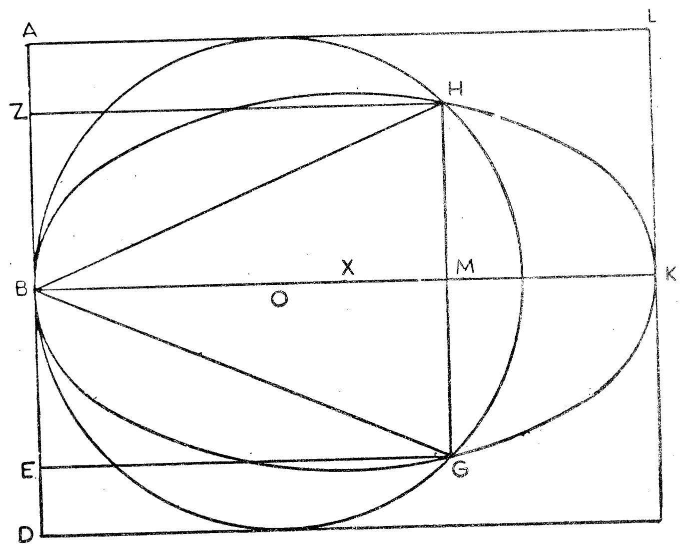


fig 4

1e given surface is larger than the maximum rectangle, i.e.r $\frac{3}{4}$ r $\sqrt{3}$ (which an be inscribed in the circle as triangle) and therefore cannot be inscri- ed in the given circle as triangle. In our opinion this is the case refer- ed to in the dialogue with the words «εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν»

i. e. if it is impossible «τὸ ἐλλείπειν οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ».

In a modern formulation, hypothesis 3 can be solved with the equation $y^2=2px-\frac{px^2}{a}$ and the equation of the circle $y^2=2rx-x^2$, where $2p=r$, $a=$ the great semiaxis and $b^2 \leqq \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}$ is the area of the given surface.

In fig. 3 obtain the inscribed triangle $b^2 < \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$, where $a=\frac{3r}{2}+h$, while in fig. 4 we obtain the triangle $\gamma^2 < \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}$, where $a=\frac{3r}{2}-h$ $\left(o<h<\frac{r}{2}\right)$ and $2p=r$. The ellipsis and the circle ought to ~~be cotan~~ touch at the origin of the coordinates,

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ 17 ΚΑΙ 18 ΤΟΥ 5ου ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΡΟΥ "ΔΙ' ΙΣΟΥ„

«ΠΛΑΤΩΝ»
ΕΤΟΣ ΙΔ'—1962
ΤΕΥΧΗ Α' καὶ Β' 27/28

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & Σιας
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ 17 ΚΑΙ 18 ΤΟΥ 5ου ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΡΟΥ "ΔΙ' ΙΣΟΥ„

Οἱ ὁρισμοὶ 17 καὶ 18 τοῦ 5ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχουσιν ὡς ἑξῆς :

Ὁρισμὸς 17

Δι' ἴσου λόγος εἶναι, ἐὰν ὑπάρχωσι πολλὰ μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὅταν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ τὸ θεώρημα V, 22, ἐὰν δοθῶσιν αἱ δύο γεωμετρικαὶ ἀκολουθίαι, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκατέρα, τῆς μορφῆς α, αρ, αρλ, αρλμ . . . . καὶ β, βρ, βρλ, βρλμ . . . . ὅπου εἶναι

$$\frac{\alpha}{\alpha\rho} = \frac{\beta}{\beta\rho} \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha\rho}{\alpha\rho\lambda} = \frac{\beta\rho}{\beta\rho\lambda} \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha\rho\lambda}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta\rho\lambda}{\beta\rho\lambda\mu} \qquad (3)$$

«δι' ἴσου λόγος» εἶναι ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$, (4), ἡ ὁποία λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων (1, 2, 3) κατὰ μέλη. Εἰς τὸ θεώρημα 22 τοῦ 5ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων γίνεται ἀπόδειξις τῆς σχέσεως (4), διότι ὁ Εὐκλείδης περιλαμβάνει κατ' αὐτὴν καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Εἴς τι χειρόγραφον τῶν Στοιχείων ὁ «δι' ἴσου λόγος» τοῦ ὁρισμοῦ 17 ὀνομάζεται τεταγμένη ἀναλογία (ΙΙ τόμος τῆς κατὰ I. L. Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων, σελὶς 7). Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη εἶναι γνησία καὶ ὅτι ὁ «δι' ἴσου λόγος» (ἀναλογία) θὰ ἐχαρακτηρίσθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς «τεταγμένη ἀναλογία» πρὸς διάκρισιν τῶν δύο σχέσεων τοῦ ὁρισμοῦ 18, αἵτινες ὀνομάζονται τεταραγμένη ἀναλογία.

Ὁρισμὸς 18

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία εἶναι, ὅταν, ἐν ᾧ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, γίνηται ὡς μὲν εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως εἰς τὰ δεύτερα ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ τὸ θεώρημα V, 23, ἐὰν δοθῶσιν αἱ ἀκολουθίαι Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ ὅπου εἶναι

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}, \quad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E}, \quad (2)$$

αἱ σχέσεις (1, 2) ὀνομάζονται «τεταραγμένη ἀναλογία».

Ὁ ὅρος «δι' ἴσου»

Τὸν ὅρον «δι' ἴσου» συναντῶμεν εἰς τὰ κάτωθι 17 θεωρήματα τῶν Στοιχείων:

Πέμπτου Βιβλίου	:	22, 23, 24 (δίς).
Ἕκτου	» :	4, 20 (δίς), 22, 23, 24.
Ἑβδόμου	» :	14.
Ὀγδόου	» :	1, 5, 6, 8, 13, 21.
Ἐνάτου	» :	19, 36 (δίς).

Εἰς τὰ 15 ἐξ αὐτῶν (πλὴν τῶν V, 23. VII, 14), ἀφοῦ δίδονται δύο γεωμετρικαὶ ἀκολουθίαι, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκατέρα, αἱ Α, Β, Γ, ... καὶ Δ, Ε, Ζ, ... ὅπου εἶναι

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E} = \rho \quad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \lambda \quad (2)$$

συνάγεται πάντοτε «δι' ἴσου ἄρα» εἶναι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$.

Εἰς τὸ θεώρημα 23 τοῦ 5ου Βιβλίου δίδονται δύο ἀκολουθίαι ἐκ τριῶν ὅρων ἑκατέρα, αἱ Α, Β, Γ, καὶ Δ, Ε, Ζ, ὅπου εἶναι

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z} = \eta$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E} = \theta$$

καὶ συνάγεται πάλιν ὅτι «καὶ δι' ἴσου» θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}.$$

Πρὸς κατανόησιν τοῦ ὅρου «δι' ἴσου» ἀναγράφομεν κατωτέρω ἐν συντομίᾳ τὰ θεωρήματα 22 καὶ 23 τοῦ 5ου Βιβλίου.

V, 22

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ .... καὶ Δ, Ε, Ζ .... τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων πρὸς τὰ πρῶτα καὶ

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E} = \alpha \quad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \beta \quad (2).$$

Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἂς ληφθῇ $Η=Αρ$, $Θ=Δρ$, $Κ=Βλ$, $Λ=Ελ$, $Μ=Γμ$, $Ν=Ζμ$, (3).

Ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3) λαμβάνομεν

$$\frac{Αρ}{Βλ}=\frac{Δρ}{Ελ} \quad (4)$$

$$\frac{Βλ}{Γμ}=\frac{Ελ}{Ζμ} \quad (5).$$

Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\frac{Αρ}{Γμ}=\frac{Δρ}{Ζμ}$ Ἐὰν δὲ εἶναι $Αρ \gtreqless Γμ$ καὶ συγχρόνως $Δρ \gtreqless Ζμ$ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ 5ου Βιβλίου καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$:

V, 23

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία αὐτῶν, καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ, τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{Α}{Β}=\frac{Ε}{Ζ} \quad (1)$$

$$\frac{Β}{Γ}=\frac{Δ}{Ε} \quad (2)$$

ἤτοι ἡ ἀναλογία αὐτῶν νὰ εἶναι τεταραγμένη. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$ (δηλ. οἱ δι' ἴσου λόγοι θὰ εἶναι ἴσοι).

Λαμβάνει $Η=Αρ$, $Θ=Βρ$, $Λ=Γλ$. $Κ=Δρ$, $Μ=Ελ$, $Ν=Ζλ$ καὶ ἀποδεικνύει, ὅτι εἶναι

$$\frac{Η}{Θ}=\frac{Μ}{Ν}=α \qquad \frac{Αρ}{Βρ}=\frac{Ελ}{Ζλ}=α$$

ἢ

$$\frac{Θ}{Λ}=\frac{Κ}{Μ}=β \qquad \frac{Βρ}{Γλ}=\frac{Δρ}{Ελ}=β$$

ἐπάγεται δὲ ὅτι «καὶ δι' ἴσου» εἶναι

$$\frac{Αρ}{Γλ}=\frac{Δρ}{Ζλ}$$

Ἐὰν δὲ εἶναι $Αρ \gtreqless Γλ$ καὶ συγχρόνως $Δρ \gtreqless Ζλ$. θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ 5ου Βιβλίου καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$

Εἰς τὰ θεωρήματα V, 22, 23, VII 14 ἀποδεικνύεται πότε οἱ «δι' ἴσου» λαμβανόμενοι λόγοι εἶναι ἴσοι. Εἰς τὰ λοιπὰ θεωρήματα τῶν Βιβλίων V, VI, VIII, IX, τὰ μνημονευόμενα ἀνωτέρω, γίνεται ἁπλῶς ἐφαρμογὴ τοῦ ὅρου δι' ἴσου. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ συναφὲς μέρος τοῦ 4ου θεωρήματος τοῦ VI Βιβλίου. Εἰς τοῦτο ὁ Εὐκλείδης σχηματίζει τὰς δύο ἀκολουθίας ΑΒ ΒΓ ΓΑ καὶ ΔΓ, ΓΕ, ΕΔ, ὅπου εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΓ}{ΓΕ}=ρ$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΑ}=\frac{ΓΕ}{ΕΔ}=λ$$

καὶ ἐπάγεται «δι' ἴσου ἄρα» εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΓΑ}=\frac{ΔΓ}{ΕΔ}$. (δηλ. διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων καθίσταται φανερόν, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου» σημαίνει τὸν σχηματισμὸν τῶν λόγων τῶν ἄκρων ὅρων δύο δοθεισῶν ἀκολουθιῶν. Ὡς πρὸς τὰς ἀκολουθίας αὐτὰς διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1) Ὅταν αὗται εἶναι γεωμετρικαί, ἔχωσι τὸ αὐτό πλῆθος ὅρων καὶ ἔχωσι σχηματισθῇ κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς α, αρ, αρλ, αρλμ . . . . καὶ β, βρ, βρλ, βρλμ . . . . Δι' ἴσου νοοῦνται πάντοτε οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων ἑκατέρας ἀκολουθίας, οἱ $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu}$, $\frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$. Εἶναι δὲ πάντοτε εἰς τὰς ἀκολουθίας αὐτὰς κατὰ τὸ V, 22 $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu}=\frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$.

Φαίνεται πιθανόν, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου» ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων διὰ παραραλείψεως μεταξὺ τούτων ἴσου πλήθους ὅρων εἰς ἑκατέραν τῶν ἀκολουθιῶν.

2) Ὅταν ἑκατέρα τῶν δοθεισῶν ἀκολουθιῶν ἔχῃ μόνον τρεῖς ὅρους, τοὺς Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ καὶ εἶναι:

$$\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}=\eta \qquad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}=\theta \qquad (2)$$

ἤτοι ἡ ἀναλογία (δηλ. αἱ σχέσεις 1, 2) εἶναι τεταραγμένη. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν «δι' ἴσου» νοοῦνται οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων τῶν ἀκολουθιῶν, οἱ $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{\Delta}{Z}$.

Εἶναι δὲ πάντοτε $\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{Z}$ κατὰ τὸ θεώρημα 23 τοῦ 5ου Βιβλίου.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ 3ου θεωρήματος τοῦ 5ου Βιβλίου, ἐὰν Α=Βρ, (1), Γ=Δρ, (2), ΕΖ=Αλ, (3), ΗΘ=Γλ, (4) «καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» θὰ εἶναι ΕΖ=Βρλ, (5), ΗΘ=Δρλ, (6).

Ἡ ἀπόδειξις ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ΕΖ=ΕΚ+ΚΖ+ . . . =Α +Α + . . . =Αλ

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εἶναι ΕΖ= =Βρ+Βρ+ . . =Βρλ ἢ (5).

Ἔστω ἐπίσης ΗΘ=ΗΛ+ΛΘ+ . . . =Γ +Γ + . . . =Γλ

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) εἶναι ΗΘ= =Δρ+Δρ+ . . .=Δρλ, ἢ (6).

Ὁ ὅρος «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων», δὲν μνημονεύεται διόλου εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ὅμως αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι διὰ τοῦ ὅρου «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» νοεῖται ἡ ἰσότης τῶν πολλαπλασίων ρλ τῶν σχέσεων (5, 6).

ZUSAMMENFASSUNQ

Uber die Definitionen 17 und 18 des V. Buches der Elemente Euklids und über den Terminus «durch Gleichheit» (δι' ἴσου, ex aequo).

Es werden die Definitionen 17 und 18 in Zusammenhang mit den Sätzen V, 22, 23, erklärt. Ferner wird der Terminus «durch Gleichheit» folgendermassen erläutert: Es werden zwei Folgen mit je derselben Gliederanzahl gegeben. Die Bildung der Verhältnisse der äusseren Glieder jeder Folge heisst «δι' ἴσου» (ex aequo). Was die Folgen selbst betrifft, so underscheiden sich zwei Fälle: 1) Die Folgen sind geometrische, haben dieselbe Gliederanzahl und sind von der Form α, αρ, αρλ, αρλμ .... und β, βρ, βρλ, βρλμ, ... Bei diesen Folgen werden «durch Gleichheit» die Verhältnisse der äusseren Glieder $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu}$, $\frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$ verstanden. Diese sind immer gleich gemäs dem Satz V, 22. 2) Jede von den zwei gegebenen Folgen hat nur drei Glieder, Α, Β, Γ und Δ, Ε, Ζ, wobei $\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}=\eta$, (1) und $\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}=\vartheta$, (2) ist, d. h. die Proportion (die Beziehungen 1, 2) eine ungeordnete Proportion ist. Auch hier werden «durch Gleichheit» die Verhältnisse $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{\Delta}{Z}$ verstanden Diese sind immer gleich gemäss dem Satz v, 23.

Dem Terminus «durch Gleichheit» begegnen wir bei den folgenden 17 Sätzen der Elemeute: V, 22, 23, 24 (zweimal). VI, 4, 20 (zweimal), 22, 23, 24. VII, 14. VIII, 1, 5, 6, 8, 13, 21. IX, 19, 36 (zweimal).

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

«Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ τεύχους διαλέξεων τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας τοῦ ἔτους 1962»

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1962

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ *)

Ὑπὸ

ΕΥΑΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

1. Βιβλίον 5ον, πρόβλημα 9ον.

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο μέρη καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον αὐτῶν δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ γίνεται τετράγωνος.

Περιορισμός. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν πρέπει νὰ εἶναι περιττός, οὔτε τὸ διπλάσιον αὐτοῦ σὺν ἓν νὰ διαιρῆται διὰ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4\varrho-1$.

Ἔστωσαν τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ μονὰς y, z καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δ. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι

$$y+z=1, \quad y+\delta=\alpha^2, \quad z+\delta=\beta^2.$$

Λαμβάνει $\delta=6$, ὁπότε τὸ πρόβλημα γίνεται

$$y+z=1, \quad (1), \quad y+6=\alpha^2, \quad (2), \quad z+6=\beta^2, \quad (3).$$

Προσθέτει τὰς (2) καὶ (3), ὁπότε ἔχει

$$y+z+12=\alpha^2+\beta^2 \quad \text{ἢ} \quad 13=\alpha^2+\beta^2.$$

Πρέπει λοιπὸν ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6. Ἐὰν διαιρέσῃ, λέγει, τὸν 13 εἰς δύο τετραγώνους, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, τὸ πρόβλημα λύεται. Λαμβάνει τὸ ἥμισυ τοῦ 13 καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ τετραγωνικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν $\frac{13}{2}$ νὰ δίδῃ τετράγωνον, ἤτοι

$$\frac{13}{2}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος} \qquad (4)$$

ὅπου ὁ t πρέπει νὰ προσδιορισθῇ.

Ἐκ ταύτης εἶναι $26t^2+1=$τετράγωνος. Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(1+5t)^2$, καὶ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως λαμβάνει $t=10$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἔχει $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$.

*) Διάλεξις δοθεῖσα ὑπὸ τῆς Ε.Μ.Ε. τὴν 8-3-1962.

Ἐὰν λάβῃ δύο τετράγωνα ἴσα, πλευρᾶς ἕκαστον $\frac{51}{20}$ θὰ εἶναι $2\left(\frac{51}{20}\right)^2=13\frac{1}{200}$. Ἐπειδὴ θέλει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων νὰ εἶναι ἀκριβῶς 13, πρέπει, λέγει, ἡ πλευρὰ ἑκάστου τετραγώνου νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{51}{20}$. Ὁ $13=3^2+2^2$. Ζητεῖ λοιπὸν νὰ εὕρῃ τὶ θὰ ἀφαιρέσῃ ἀπὸ τοῦ 3 καὶ τὶ θὰ προσθέσῃ εἰς τὸν 2, ὥστε ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων, ἂν εἶναι ἴσα, νὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{51}{20}$ ἤτοι $\frac{51}{20}=3-\varkappa=2+\lambda$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνει $\varkappa=\frac{9}{20}$ καὶ $\lambda=\frac{11}{20}$, ὁπότε θὰ εἶναι $\left(3-\frac{9}{20}\right)^2+\left(2+\frac{11}{20}\right)^2=13\frac{1}{200}$, εἶναι δὲ τὰ δύο τετράγωνα τοῦ πρώτου μέλους ἴσα. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 13 πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τούτων νὰ μεταβληθῇ, ὥστε τὰ μὲν ζητούμενα τετράγωνα νὰ γίνουν κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τὸ δὲ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς 13.

Πρὸς τοῦτο ἐκφράζει τὰς εὑρεθείσας τιμὰς διὰ $\varkappa$, λ συναρτήσει τοῦ x καὶ ἔχει *)

$$(3-9x)^2+(2+11x)^2=13 \tag{5}$$

ἐξ ἧς $x=\frac{5}{101}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) ἔχει τὰ δύο τετράγωνα α^2, β^2 κατὰ προσέγγισιν ἴσα ἤτοι $\left(\frac{258}{101}\right)^2+\left(\frac{257}{101}\right)^2=13.$

Καὶ ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) λαμβάνει

$$\left(\frac{258}{101}\right)^2-6=\frac{5358}{10201}=y \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{257}{101}\right)^2-6=\frac{4843}{10201}=z,$$

καὶ εἶναι $\frac{5358}{10201}+\frac{4843}{10201}=1.$

Σημ. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος, καθ' ἣν ἀριθμὸς ἀναλυόμενος εἰς ἄθροισμα δύο (ἢ περισσοτέρων) τετραγώνων δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο (ἢ περισσοτέρων) κατὰ προσέγγισιν ἴσων τετραγώνων, λέγεται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου ***παρισότητος ἀγωγή***, δηλ. μέθοδος προσεγγίσεως.

---

*) Ἡ παράλειψις τοῦ παρονομαστοῦ 20 δὲν μεταβάλλει τό ἀποτέλεσμα. Εὑρίσκονται μικρότεροι ἀριθμοί.

2. Βιβλίον 5ον, πρόβλημα 16ον.

Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἀφαιρούμενος ἐκ τοῦ κύβου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν δίδῃ κύβον.

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ

$$y,\ z,\ \omega \quad \text{καὶ} \quad y+z+\omega=x. \tag{1}$$

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι

$$x^3-y=\alpha^3, \quad (2), \qquad x^3-z=\beta^3, \quad (3), \qquad x^3-\omega=\gamma^3, \quad (4).$$

Θέτει $y=\frac{7}{8}x^3$, $z=\frac{26}{27}x^3$, $\omega=\frac{63}{64}x^3$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2), (3), (4). Μένει νὰ πληρωθῇ τὸ ἐπίταγμα (1). Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y, z, ω λαμβάνει ἐκ τῆς (1)

$$\left(\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64}\right)x^3=x \quad \text{ἢ} \quad \frac{4877}{1728}x^2=1.$$

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 ἦτο τετράγωγος ἀριθμός, ὁ x θὰ εἶχε τιμὴν ρητήν *). Ἐπειδὴ ὅμως δὲν εἶναι οὗτος τετράγωνος καὶ θέλει νὰ εὕρῃ ρητὴν λύσιν ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τοῦ συντελεστοῦ τούτου. Ὁ

$$\frac{4877}{1728}=\left(\frac{7}{8}+\frac{26}{27}+\frac{63}{64}\right)=\left(1-\frac{1}{8}\right)+\left(1-\frac{1}{27}\right)+\left(1-\frac{1}{64}\right)=$$
$$=3-\left[\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\right]$$

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς κύβοι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ τετράγωνον ἀριθμόν. Ἐὰν λέγῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων τριῶν κύβων τὸ κατασκευάσωμεν μικρότερον τῆς μονάδος, τότε καὶ ἕκαστος τῶν κύβων θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν κύβων ἀπὸ τοῦ 3 θὰ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 2. Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι κύβοι $\varkappa^3$, λ^3, μ^3, ὁπότε πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$3-(\varkappa^3+\lambda^3+\mu^3)=\eta^2, \quad \text{ἔστω,} \quad \eta^2=2\frac{1}{4}.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}=\varkappa^3+\lambda^3+\mu^3$.

---

*) Ὁ Διόφαντος ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς καὶ τὰς ἀρρήτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ $\frac{3}{4}$ εἰς ἄθροισμα τριῶν κύβων. Πολλαπλασιάζει ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $6^3=3^3+4^3+5^3$ καὶ ἔχει

$$\frac{3\times 216}{4\times 216}=\frac{162}{6^3} \tag{5}$$

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται πάλιν εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 162 εἰς ἄθροισμα τριῶν κύβων. 'Ο $162=5^3+4^3-3^3$. 'Ενταῦθα προσθέτει ὅτι «γνωρίζομεν ἀπὸ τὰ Πορίσματα ὅτι πᾶσα διαφορὰ δύο κύβων ἰσοῦται μὲ ἄθροισμα δύο κύβων». Πορίσματα εἶναι ὁ τίτλος πραγματείας τοῦ Διοφάντου, ἡ ὁποία ἔχει ἀπολεσθῇ. 'Αφοῦ λοιπόν, λέγει, μετατραπῇ ἡ διαφορὰ 4^3-3^3 εἰς ἄθροισμα δύο κύβων τὸ πρόβλημα λύεται δι' ἀντικαταστάσεως. Διότι πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2), (3), (4) καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνεται $\frac{9}{4}x^2=1$, ἐξ ἧς $x=\frac{2}{3}$.

'Αντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὰς (2), (3), (4) ἔχομεν τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων ἀγνώστων.

'Ο σπουδαῖος μελετητὴς τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου Γάλλος μαθηματικὸς Viète (1540—1603) προσεπάθησε νὰ εὕρῃ μέθοδον πρὸς ἀναπλήρωσιν τοῦ ἀπολεσθέντος θεωρήματος τοῦ Διοφάντου, καθ' ὃ πᾶσα διαφορὰ κύβων μετατρέπεται εἰς ἄθροισμα δύο κύβων καὶ εὗρε διὰ τὴν διαφορὰν $\alpha^3-\beta^3$, $(\alpha>\beta)$, τὰς κυβικὰς ρίζας

$$x=\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}(\alpha^3-2\beta^3) \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\beta}{\alpha^3+\beta^3}(2\alpha^3-\beta^3).$$

Διὰ $\alpha=4$ καὶ $\beta=3$ λαμβάνεται $x=\frac{40}{91}$ καὶ $y=\frac{303}{91}$.

'Επομένως ἡ διαφορὰ $4^3-3^3=\left(\frac{40}{91}\right)^3+\left(\frac{303}{91}\right)^3$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) ἔχομεν

$$\frac{162}{6^3}=\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{303}{6\cdot 91}\right)^3+\left(\frac{40}{6\cdot 91}\right)^3 \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{162}{6^3}=\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{101}{182}\right)^3+\left(\frac{20}{273}\right)^3=\varkappa^3+\lambda^3+\mu^3.$$

'Αντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὰς σχέσεις

$$y=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]x^3,\quad z=\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]x^3,\quad \omega=\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]x^3$$

τὰς εὑρεθείσας τιμὰς διὰ τοὺς κύβους τῶν ἀφαιρετέων τῶν συντελεστῶν λαμβάνομεν

$$y=\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^3\right]x^3,\ z=\left[1-\left(\frac{101}{182}\right)^3\right]x^3,\ \omega=\left[1-\left(\frac{20}{273}\right)^3\right]x^3,\ (6).$$

Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (2), (3), (4), διότι εἶναι

$$x^3-\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^3\right]x^3=\left(\frac{5}{6}x\right)^3,\quad x^3-\left[1-\left(\frac{101}{182}\right)^3\right]x^3=\left(\frac{101}{182}x\right)^3$$

$$\omega=x^3-\left[1-\left(\frac{20}{273}\right)^3\right]x^3=\left(\frac{20}{273}x\right)^3.$$

Μένει νὰ πληρωθῇ τὸ ἐπίταγμα (1). Ἔχει ληφθῆ ὅμως

$$3-(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)=\eta^2=2\frac{1}{4}$$

καὶ συνεπῶς εἶναι $\frac{9}{4}x^2=1$, ἐξ ἧς $x=\frac{2}{3}$.

Δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς τιμὰς διὰ y, z, ω τῶν (6) λαμβάνομεν

$$y=\frac{91}{216}\cdot\frac{8}{27}=\frac{728}{5832},\quad z=\frac{39{\cdot}986{\cdot}136}{162{\cdot}771{\cdot}336},\quad \omega=\frac{162{\cdot}707{\cdot}336}{549{\cdot}353{\cdot}259}.$$

Παρατήρησις. Οἱ τύποι τοῦ Viète

$$\alpha^3-\beta^3=x^3+y^3 \quad \text{διὰ} \quad x=\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}(\alpha^3-2\beta^3),\quad y=\frac{\beta}{\alpha^3+\beta^3}(2\alpha^3-\beta^3),$$

διὰ $\alpha=6$ καὶ $\beta=5$ δὲν ἰσχύουν, διότι λαμβάνεται $x<0$, ἤτοι

$$x=\frac{6}{341}(216-250)=-\frac{204}{341}.$$

Ἐν τούτοις ὅμως τὸ θεώρημα τοῦ Διοφάντου (τὸ ὁποῖον δὲν ἐσώθη) εἶναι ὀρθόν, διότι εἶναι

$$6^3-5^3=4^3+3^3.$$

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΕ΄ (1963), τεύχη 29/30

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὰ πρῶτα δέκα θεωρήματα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχουν τὴν λεγομένην γεωμετρικὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, θεωροῦνται δὲ ὡς δημιουργία τῶν πρώτων Πυθαγορείων, οἱ ὁποῖοι τοποθετοῦνται χρονικῶς περὶ τὸ ἔτος 500 π. Χ. Τὸ περιεχόμενον τῶν δέκα αὐτῶν θεωρημάτων ἀναφέρεται εἰς τὰς θεμελιώδεις ταὐτότητας τῆς ἀλγέβρας. Ἡ ἀπόδειξις εἰς αὐτὰ γίνεται γεωμετρικῶς. Ὁ ὅρος «ἄλγεβρα» εἶναι ὡς γνωστὸν ἀραβικός. Εἰς πολλοὺς ἐπικρατεῖ ἡ ἀντίληψις ὅτι ὁ κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὁ ἐπικαλούμενος ἄλγεβρα εἶναι δημιούργημα τῶν Ἀράβων. Οὐδὲν τούτου ἀναληθέστερον. Πρόκειται περὶ μύθου, ὁ ὁποῖος μεταδιδόμενος ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεὰν κινδυνεύει νὰ μετατραπῇ εἰς ἱστορικὴν ἀλήθειαν. Τὸ ἀληθὲς ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι οἱ Ἄραβες ἀπὸ τοῦ ὀγδόου περίπου αἰῶνος μ. Χ. ἤρχισαν νὰ μεταφράζουν τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ νὰ μελετοῦν αὐτὰ ἐπισταμένως. Ἐπινόησις ἢ ἀνακάλυψις ἔστω καὶ ἑνὸς μόνου μαθηματικοῦ θεωρήματος ὑπὸ τῶν Ἀράβων, εἰς ἡμᾶς τοὐλάχιστον δὲν εἶναι γνωστή, ὅπως δὲν εἶναι γνωστὴ καὶ ἐπινόησις ἢ ἀνακάλυψις θεωρήματός τινος ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων. Ἀρκεταὶ μαθηματικαὶ προτάσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν διεσώθησαν εἰς τὴν ἀραβικήν. Οὕτω ἐκ τῶν 8 βιβλίων τῶν περιφήμων Κωνικῶν τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς ἀρχαιότητος Ἀπολλωνίου, τὰ τέσσαρα πρῶτα ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὰ τρία ἑπόμενα εἰς τὴν ἀραβικήν, ἐν ᾧ τὸ ὄγδοον ἀπωλέσθη.

Οἱ Πυθαγόρειοι δὲν εἶχον δημιουργήσει ἀλγεβρικὸν συμβολισμόν. Καθ' ὅσον εἶναι γνωστὸν μέχρι σήμερον ὁ ἀλγεβρικὸς συμβολισμὸς παρετηρήθη τὸ πρῶτον εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου.

Ὁ Διόφαντος ἤκμασε, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, περὶ τὸ 250 μ. Χ. ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ὅπου ἀπέθανε καὶ ἐτάφη. Ἐκ τῶν ἔργων του ἡ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικὰ ἀπετελεῖτο ἐκ 13 βιβλίων. Ἐκ τούτων ἐσώθησαν μόνον τὰ πρῶτα ἕξ, ἐν ᾧ τὰ ἑπόμενα ἑπτὰ ἀπωλέσθησαν.

Τὸ περιεχόμενον τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων καὶ μάλιστα συστημάτων, ὅπου οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τῶν διδομένων ἐξισώσεων. Ἀλλὰ καὶ μεμονωμέναι ἐξισώσεις περιέχουσαι περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους ὑπάρχουν εἰς τὰ Ἀριθμητικά. Ἐκεῖθεν δὲ καὶ ἡ ὀνομασία τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὡς διοφαντικῶν ἐξισώσεων. Ἐνταῦθα δέον νὰ προστεθῇ ὅτι αἱ διοφαντικαὶ ἐξισώσεις δὲν εἶναι ἐπινόησις τοῦ Διοφάντου. Ὁ Πυθαγόρας μνημονεύεται ὡς πρῶτος ἐπιλύσας τὴν ἐξίσωσιν $z^2=x^2+y^2$, ἥτις εἶναι διοφαντικὴ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, περιέχουσα τρεῖς ἀγνώστους εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἔρευνα τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων γίνεται τὸ πρῶτον περὶ τὸ 540 π. Χ., ὅτε τοποθετεῖται ἡ ἀκμὴ τοῦ Πυθαγόρου.

Εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην αἱ ἀλγεβρικαὶ γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου μετεφέρθησαν τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου καὶ μαθηματικοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης (Fibonazzi) περὶ τὸ ἔτος 1200 μ. Χ. Φαίνεται ὅτι ὁ Fibonazzi μετεῖχε τῶν Σταυροφοριῶν εἴτε ὡς ὁπλίτης εἴτε ὡς ἔμπορος. Εἰς τὴν ἐν Ἰταλίᾳ ἐκδοθεῖσαν ἄλγεβραν τοῦ Fibonazzi ὑπάρχουν πολλὰ προβλήματα ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὡς προβλήματα Fibonazzi. Κατὰ τὸ ἔτος 1572 ὁ καλός, Ἰταλὸς ἐπίσης, μαθηματικὸς Bombelli ἐδημοσίευσε τὴν περίφημον ἄλγεβράν του, ἡ ὁποία περιεῖχε 143 προβλήματα ἐκ τῶν 189 τῶν ἐξ σωθέντων βιβλίων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὡς ἰδικά του. (P. ver Eecke, Diophante d' Alexandrie, σελ. LXII—LXVII).

Τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, μετὰ τοῦ περισωθέντος μικροῦ μέρους (τεσσάρων θεωρημάτων) τῆς πραγματείας του περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν, ἐδημοσιεύθη διὰ τοῦ τύπου τὸ πρῶτον ἐν Παρισίοις τῷ 1621 ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Gaspar Bachet, Sieur de Méziriack ἐκ χειρογράφου εὑρισκομένου ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῶν Παρισίων. Ἡ δευτέρα ἔκδοσις τούτου ἐγένετο πάλιν ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τοῦ Σαμουὴλ Fermat, υἱοῦ τοῦ Πέτρου Fermat, σπουδαίου τούτου μελετητοῦ καὶ σχολιαστοῦ τοῦ Διοφάντου. Ἡ τρίτη ἔκδοσις τῶν Ἀριθμητικῶν ἐγένετο ἐν Λιψίᾳ ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery (B. G. Teubner) εἰς δύο τόμους. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον (1893) περιέχονται τὰ Ἀριθμητικὰ καὶ τὸ Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν (ἀρχαῖον κείμενον και μετάφρασις ἀντίστοιχος εἰς τὴν λατινικήν), ἐν ᾧ εἰς τὸν δεύτερον τόμον (1895) περιέχονται ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα ἐκ τῆς Παλατίνης Ἀνθολογίας καὶ σχόλια εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου. Ἡ τετάρτη ἔκδοσις τοῦ κειμένου τῶν Ἀριθμητικῶν ἐν Εὐρώπῃ ἐγένετο ὑπ' ἐμοῦ περὶ τὸ τέλος τοῦ 1963 (Ἀθῆναι, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων). Αὕτη περιέχει τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἀντίστοιχον μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν Ἑλληνικὴν καὶ ἐπεξηγήσεις ἀναγκαίας πρὸς κατανόησιν τῶν προβλημάτων. Εἰς τὴν ἔκδοσιν ταύτην δὲν περιελήφθησαν τὰ παλαιὰ σχόλια.

Τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀναλύεται κατωτέρω εἶναι τὸ 19ον τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν. Ὁ ἀναγνώστης δὲν θὰ δυσκολευθῇ νὰ ἀντιληφθῇ καὶ νὰ ἐκτιμήσῃ τὸ μεγαλεῖον τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος καὶ εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν. Ὁ χρησιμοποιούμενος κατὰ τὴν ἀνάλυσιν συμβολισμὸς εἶναι ὁ σύγχρονος ἀλγεβρικὸς συμβολισμός. Ὁ Διόφαντος ἀντὶ τοῦ συμβολισμοῦ τούτου χρησιμοποιεῖ φράσεις καὶ λέξεις δηλωτικὰς τῶν πράξεων. Καὶ τοῦτο ἐπιτείνει ἔτι περισσότερον τὸν θαυμασμόν μας διὰ τὴν ἀλγεβρικὴν δημιουργίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Τὸ πρὸς ἀνάλυσιν πρόβλημα:

Βιβλίον III, πρόβλημα 19ον.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἢ σὺν ἕκαστον ἢ μεῖον ἕκαστον ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἄγνωστοι ἀριθμοὶ y, z, ω, φ.

Τὰ τέσσαρα ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος εἶναι:

$(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm y = \text{τετράγωνος}$, (1), $(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm z = \text{τετράγωνος}$, (2),

$(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \omega = \text{τετράγωνος}$, (3), $(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \varphi = \text{τετράγωνος}$, (4).

Θεωρεῖ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ τὴν ἐκ ταύτης ταὐτότητα

$$\alpha^2 \pm 2\beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 \pm 2\beta\gamma = (\beta \pm \gamma)^2$$

καὶ λέγει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρόβλημα, νὰ εὕρῃ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν καὶ διαφόρους καθέτους πλευράς. Τοῦτο, λέγει, εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ πρόβλημα, δοθεὶς τετράγωνος νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ τέσσαρας διαφόρους τρόπους, «καὶ ἡμεῖς ἐμάθομεν νὰ ἀναλύωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν εἰς δύο τετραγώνους κατ' ἀπείρους τρόπους».

[Ἡ ἀνάλυσις τετραγώνου ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τοῦ 8ου προβλήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὁ πρὸς ἀνάλυσιν τετράγωνος ὁ γ^2. Καλεῖ τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων x^2. Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι τότε γ^2-x^2, (1). Λαμβάνει τυχὸν πολλαπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ x^2, ἔστω τὸ μx, ἔνθα $\mu \neq 1$ καὶ σχηματίζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἄλλου τετραγώνου ἀριθμοῦ ἴσην πρὸς $\mu x-\gamma$. Τότε θὰ εἶναι $\gamma^2=x^2+(\mu x-\gamma)^2$.

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\dfrac{2\mu\gamma}{\mu^2+1}$.

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ x εἰς τὴν (1) εὑρίσκεται ὁ δεύτερος ζητούμενος τετράγωνος ἀριθμὸς $=\left[\dfrac{\gamma(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2$. Ἐπομένως ὁ δοθεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἀνελύθη εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, ἤτοι εἶναι

$$\gamma^2=\left[\frac{2\mu\gamma}{\mu^2+1}\right]^2+\left[\frac{\gamma(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2 \quad (2).$$

Δίδοντες εἰς τὸν μ τὰς τιμὰς 2, 3, 4.... ἀναλύομεν τὸν γ^2 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατ' ἀπείρους τρόπους.

(Σημείωσις. Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν

$$(\mu^2+1)^2=(2\mu)^2+(\mu^2-1)^2, \quad (3).$$

Ἐὰν $\mu=\dfrac{m}{n}$, ἡ σχέσις (3) γίνεται

$$(m^2+n^2)^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2, \quad (4).$$

Ὁ τύπος (4) παρέχει ὅλας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2=x^2+y^2$, ἤτοι ἁπάσας τὰς τριάδας ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὸν Εὐκλείδειον τύπον X, 28, Λῆμμα 1. Τὴν σχέσιν (4) χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος εἰς τὸ προκείμενον 19ον πρόβλημα τοῦ 3ου βιβλίου)].

Ἀφοῦ λοιπὸν ὑπενθυμίζει ὅτι ἐμάθομεν πῶς δοθεὶς τετράγωνος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ πολλοὺς τρόπους, λαμβάνει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 4, 5 καὶ 5, 12, 13. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λαμβάνονται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀποδιδομένου εἰς τὸν Πυθαγόραν

$$\mu^2+\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu^2+1}{2}\right)^2, \text{ ὅπου } \mu \text{ περιττός},$$

(ἐνταῦθα πρῶτον 3 καὶ κατόπιν 5).

Πολλαπλασιάζει ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἄλλου τριγώνου, ὁπότε ἔχει 39, 52, 65 καὶ 25, 60, 65 ἤτοι ἔχει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας. Μένει νὰ εὕρῃ ἄλλα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὸν 65 ὡς ὑποτείνουσαν. Ὁ 65, λέγει, ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι εἶναι $65=4^2+7^2$ καὶ $65=8^2+1^2$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπειδὴ $65=5 \cdot 13$ καὶ εἶναι $5=1^2+2^2$ καὶ $13=2^2+3^2$. —

Σχηματίζει τώρα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀριθμῶν (7, 4), τὸ δὲ ἐκ τῶν ἀριθμῶν (8, 1) χρησιμοποιῶν τὴν ταὐτότητα, τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, τὴν

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2.$$

Τὸ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ 4 λαμβανόμενον κατὰ τὴν ἀνωτέρω ταὐτότητα τρίτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ($m=7$, $n=4$), ἔχει πλευρὰς (33, 56, 65), ἐν ᾧ τὸ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 8 καὶ 1 λαμβανόμενον ὁμοίως τέταρτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει πλευρὰς (16, 63, 65).

Κατὰ συνέπειαν τὰ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν 65 εἶναι (39, 52, 65), (25, 60, 65), (33, 56, 65), (16, 63, 65).

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀγνώστων $(y+z+\omega+\varphi) = 65x$, (5), καὶ ἕκαστον τῶν ζητουμένων ἀγνώστων ἴσον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου ὀρθογωνίου τριγώνου, συναρτήσει τοῦ x^2, ἤτοι

$$y=\frac{4\,.\,39\,.\,52}{2}\,x^2=4056x^2, \qquad z=\frac{4\,.\,25\,.\,60}{2}\,x^2=3000x^2,$$

$$\omega=\frac{4\,.\,33\,.\,56}{2}\,x^2=3696x^2, \qquad \varphi=\frac{4\,.\,16\,.\,63}{2}\,x^2=2016x^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνει $12768x^2=65x$, ἐξ ἧς $x=\dfrac{65}{12768}$.

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τέλος τῆς τιμῆς τοῦ x εἰς τὰς προηγουμένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων εἶναι

$$y = 17136600 : \xi^2\,, \qquad z = 12675000 : \xi^2$$

$$\omega = 15615600 : \xi^2\,, \qquad \varphi = 8517600 : \xi^2$$

ὅπου $\xi^2 = (12768)^2 = 163\ 021\ 824.$

Ἐπαλήθευσις

Καλοῦμεν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ τὰς τιμὰς τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἀγνώστων καὶ ἀναλύομεν αὐτάς, τὸ ἄθροισμά των, ὡς καὶ τὸν παρονομαστὴν (τὸ ξ^2) εἰς γινόμενα παραγόντων, ὁπότε ἔχομεν

$$\alpha= 17\ 136\ 600=2^3.\,3\,.\,5^2.\,13^4, \qquad \beta= 12\ 675\ 000=2^3\ 3\,.\,5^5.\,13^2,$$

$$\gamma= 15\ 615\ 600=2^4.\,3\,.\,5^2.\,11\,.\,13^2, \qquad \delta= 8\ 517\ 600=2^5.\,3^2.\,5^2.\,7\,.\,13^2,$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 53\ 944\ 800=2^5.\,3\,.\,5^2.\,7\,.\,13^2.\,19, \qquad \xi^2=163\ 021\ 824=2^{10}.\,3^2.\,7^2.\,19^2$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3, 4) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

1) $$\left(\frac{53\ 944\ 800}{163\ 021\ 824}\right)^2 \pm \frac{17\ 136\ 600}{163\ 021\ 824}$$

$$\frac{(2^5.\,3\,.\,5^2.\,7\,.\,13^2.\,19)^2 \pm 2^3.\,3.\,5^2.\,13^4.\,2^{10}.\,3^2.\,7^2.\,19^2}{(163\ 021\ 824)^2}$$

$$\frac{2^{10}.\,3^2.\,5^2.\,7^2.\,13^4.\,19^2\,(5^2 \pm 2^3.\,3)}{(163\ 021\ 824)^2} = \left[\begin{array}{l}\to\\ \\ \to\end{array}\right.$$

Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται

$$2^{10}.\,3^2.\,5^2.\,7^2.\,13^4.\,19^2.\,7^2 = (32\,.\,3\,.\,5\,.\,49\,.\,169\,.\,19)^2 = (75\ 522\ 720)^2$$

καὶ $$2^{10}.\,3^2.\,5^2.\,7^2.\,13^4.\,19^2 = (32\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,169\,.\,19)^2 = (10\ 788\ 960)^2.$$

Ἐπομένως εἶναι

$$= \left[\begin{array}{l}\to \left(\dfrac{75\ 522\ 720}{163\ 021\ 824}\right)^2\\ \to \left(\dfrac{10\ 788\ 960}{163\ 021\ 824}\right)^2.\end{array}\right.$$

2)

$$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{12\,675\,000}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^3 . 3 . 5^5 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10} . 3^2 . 5^4 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (13^2 \pm 2^3 . 3 . 5)}{(163\,021\,824)^2} = \left[\begin{array}{l} \rightarrow \left(\dfrac{70\,543\,200}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\dfrac{29\,047\,200}{163\,021\,824}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{15\,615\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^4 . 3 . 5^2 . 7 . 11 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10} . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (5^2 . 13^2 \pm 2^4 . 3 . 7 . 11)}{(163\,021\,824)^2} = \left[\begin{array}{l} \rightarrow \left(\dfrac{73\,862\,880}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\dfrac{19\,088\,160}{163\,021\,824}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{8\,517\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^5 . 3^2 . 5^2 . 7 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$2^{10} . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (5^2 . 13^2 \pm 2^5 . 3^2 . 7) = \left[\begin{array}{l} \rightarrow \left(\dfrac{65\,563\,680}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\dfrac{39\,006\,240}{163\,021\,824}\right)^2 \end{array}\right.$$

Α. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
PHOTO - OFFSET
ΚΑΝΙΓΓΟΣ 32 ΤΗΛ. 636-944•536-712

ΤΟΜΟΣ Α'

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ ΑΡΘΡΑ

ΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ