ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ

ΑΡΘΡΑ

ΤΟΜΟΣ Β'

ΑΘΗΝΑΙ 1973

F 194
Sta

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ

ΑΡΘΡΑ

ΤΟΜΟΣ Β'

ΑΘΗΝΑΙ 1973

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

'Ανάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΕ' (1963), τεύχη 29/30

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 23ον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ἀποδεικνύει ὅτι:

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{4}$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει τὴν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4},$$

ὅπου A εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὅρος καὶ $\frac{A}{4^4}$ ὁ μικρότερος, καὶ ἀποδεικνύει ὅτι

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{4^4} = \frac{4}{3} A,$$

χωρὶς νὰ χρησιμοποιῇ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

Τὸ ἀρχιμήδειον θεώρημα εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ θεώρημα, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \cdots + \frac{A}{4^{\nu-1}} \text{ εἶναι } \frac{4}{3} A, \text{ ὅταν } \nu \to \infty.$$

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται διὰ τῆς αὐτῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως ὅτι:

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$, $(n=2, 3, 4 \ldots)$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{n-1}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{n}{n-1}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι ἐδόθησαν οἱ ἐν συνεχείᾳ ὅροι τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3}, \quad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Κατὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως θὰ εἶναι

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{n^3} = \frac{nA}{n-1}, \quad \left(= \frac{A}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τοῦτο, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁποίου δὲν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου, εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \cdots + \frac{A}{n^{\nu-1}}, \text{ ὅταν } \nu \to \infty.$$

2. Ὅπως εἶναι γνωστόν, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπέφευγον νὰ χρησιμοποιῶσι τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν συγκεκριμένων μαθηματικῶν πράξεων. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν πότε οἱ Ἕλληνες ἐχρησιμοποίησαν διὰ πρώτην φορὰν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὰ μαθηματικά. Ἀνώνυμος σχολιαστὴς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐχρησιμοποίησαν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, διὰ νὰ ἀποδείξωσιν ὅτι πᾶν μέγεθος δύναται νὰ τέμνηται ἐπ' ἄπειρον. (Euclidis Opera omnia V, 416—17, I. L. Heiberg). Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ Παρμενίδου τοῦ Πλάτωνος (127 a) καὶ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου ὑπολογίζεται ὅτι ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἀνέγνωσεν ἐν Ἀθήναις τὰ περίφημα αὐτοῦ γράμματα, ὅπου γίνεται μνεία τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου, περὶ τὸ ἔτος 435 π. Χ. Τέλος ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 430 π. Χ.), διὰ νὰ ἀποδείξῃ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, χρησιμοποιεῖ τὸ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (XII, 2) περιλαμβανόμενον θεώρημα, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων. Εἰς τὸ θεώρημα δὲ τοῦτο γίνεται χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ εὐκλείδειον θεώρημα XII, 2 δὲν εἶναι ἐπινόησις τοῦ Εὐδόξου (408—355 π. Χ.). Εἰς τὸν Εὔδοξον ὅμως ὀφείλεται κατὰ πληροφορίαν τοῦ Ἀρχιμήδους (Opera omnia I, σελ. 2, 1910, I. L. Heiberg) ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸν κῶνον. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν δὲ αὐτὴν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου.

Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (IX, 35) ἀποδεικνύεται ὁ τύπος ὁ παρέχων τὸ ἄθροισμα ν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ὁ $\Sigma = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$, (1), ὅπου α ὁ πρῶτος ὅρος, $0 < \omega \lessgtr 1$ ὁ λόγος τῆς προόδου καὶ ν=2, 3, 4 . . . . τὸ πλῆθος τῶν ὅρων. Εἰς τὸν τύπον (1) δὲν περιλαμβάνεται ἡ ἀπόδειξις ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι

$$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{\nu-1} = \frac{\alpha}{1-\omega}, \quad |\omega| < 1, \text{ διὰ } \nu \to \infty.$$

Ὁ Ἀριστοτέλης ὅμως πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$A\omega + A\omega^2 + \dots + A\omega^\nu \text{ εἶναι } \leqq A, \text{ διὰ } \nu \to \infty, \; |\omega| < 1.$$

Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς πραγματείας αὐτοῦ Φυσικῆς ἀκροάσεως (Γ 206 b 7—9), ὅπου κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου γράφεται :

«Ἐν γὰρ τῷ πεπερασμένῳ μεγέθει ἂν λαβών τις ὡρισμένον προσλαμβάνῃ τῷ αὐτῷ λόγῳ μὴ τὸ αὐτό τι μέγεθος τῷ ὅλῳ περιλαμβάνων, οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον».

Ἡ ἔννοια τοῦ χωρίου τούτου εἶναι ὅτι ἂν θεωρήσωμεν τὸ μέγεθος Α καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma = \frac{A}{\mu} + \frac{A}{\mu^2} + \dots + \frac{A}{\mu^\nu}, \quad \nu \to \infty, \; \mu = 2, 3, 4 \dots, \text{ θὰ εἶναι } \Sigma \leqq A, \; (3).$$

Τὸ ἄπειρον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ἐνταῦθα ὁ Ἀριστοτέλης, τὸ ὀνομάζει «δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει» γράφων :

«Ἄλλως μὲν οὖν οὐκ ἔστιν, οὕτως δ' ἔστι τὸ ἄπειρον, δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει». (Γ 206 b 13—14).

Δὲν ἔχει διασωθῆ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (3). Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως προχωρεῖ ἓν βῆμα περισσότερον ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς καὶ ὑπολογίζει τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \dots + \frac{A}{4^{\nu-1}}, \quad \nu \to \infty.$$

Διότι εἰς τοῦτο καταλήγει ἡ ἀπόδειξις τοῦ 23 θεωρήματος τῆς πραγματείας αὐτοῦ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

Καθ' ὅσον εἶναι γνωστόν, ὁ 'Αρχιμήδης, ὅταν χρησιμοποιῇ εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων του προτάσεις, αἵτινες ἔχουν ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων του μαθηματικῶν, δὲν ἀποδεικνύει αὐτάς. Οὕτω, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν πραγματείαν του Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως αὐτῆς, ἡ ὁποία δὲν σῴζεται, ἔχει γίνει πολὺ πρὸ τοῦ 'Αρχιμήδους. Κατὰ συνέπειαν τῶν ἀνωτέρω τὸ θεώρημα 23 τῆς πραγματείας του Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ἀποδεικνύεται διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους.

3. Ἡ γενίκευσις τοῦ ἀρχιμηδείου θεωρήματος.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε . . . . ἀποτελοῦντα ἐν συνεχείᾳ ὅρους φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$ ($n=2, 3, 4 \ldots.$), ὅπου Α ὁ μέγιστος ὅρος καὶ

$B=\frac{A}{n}$, (1), $\Gamma=\frac{B}{n}$ (2), $\Delta=\frac{\Gamma}{n}$, (3) καὶ $E=\frac{\Delta}{n}$ ὁ μικρότερος ὅρος (4).

Ἔστω δὲ

$$Z=\frac{B}{n-1},\ (5),\quad H=\frac{\Gamma}{n-1}\ (6),\quad \Theta=\frac{\Delta}{n-1},\ (7),\quad I=\frac{E}{n-1},\ (8).$$

Ἐκ τῶν (1 καὶ 5) λαμβάνομεν $B+Z=\frac{A}{n-1}$, (9)

Ἐκ τῶν (2 καὶ 6) » $\Gamma+H=\frac{B}{n-1}$, (10)

Ἐκ τῶν (3 καὶ 7) » $\Delta+\Theta=\frac{\Gamma}{n-1}$, (11)

Ἐκ τῶν (4 καὶ 8) » $E+I=\frac{\Delta}{n-1}$, (12).

Ἀλλὰ ἐκ τῶν (5, 6, 7) εἶναι $Z+H+\Theta=\frac{1}{n-1}(B+\Gamma+\Delta)$, (13).

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (9, 10, 11, 12) λαμβάνομεν

$$B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I=\frac{1}{n-1}(A+B+\Gamma+\Delta),\ (14).$$

Εἰς ταύτην δι' ἀπαλοιφῆς τῶν ἴσων ἐκ τῆς (13) εἶναι

$$B+\Gamma+\Delta+E+I=\frac{A}{n-1},\ (15).$$

Καὶ διὰ προσθέσεως τοῦ Α εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (15) λαμβάνομεν

$$A+B+\Gamma+\Delta+E+I=\frac{nA}{n-1}=\frac{A}{1-\frac{1}{n}}=\frac{A}{1-\omega},\ \text{ἐὰν τεθῇ}\ \frac{1}{n}=\omega.$$

Εἶναι δὲ $I=\frac{E}{n-1}$, (ἐκ τῆς 8), ὅπου Ε εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος τῆς φθινούσης προόδου. Κατὰ συνέπειαν διὰ τῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S=A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\ldots.\frac{A}{n^{\nu-1}},$$

ὅταν $\nu \to \infty$, χωρὶς ὅμως νὰ γίνεται κατ' αὐτὴν χρησιμοποίησις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

Zusammenfassung

Der 23. Lehrsatz der Quadratur der Parabel von Archimedes lautet: In einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ ist die um den dritten Teil des kleinstes Gliedes vermehrte Summe aller Glieder $\frac{4}{3}$ mal so gross wie das gröste. Es wird durch dasselbe archimedische Beweisverfahren bewiesen:

Liegt die abfallende geometrische Reihe $A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2}$, vor, $(n = 2, 3, 4 \ldots .)$,

$$\text{so ist } A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{n^2} = \frac{nA}{n-1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \ldots . \frac{A}{n^{\nu-1}} = \frac{A}{1 - \frac{1}{n}}, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad \left(\left| \frac{1}{n} \right| < 1 \right).$$

Es wird erwähnt, dass Aristoteles den folgenden Lehrsatz wusste:
Die Summe S der Glieder der abfallenden geometrischen Reihe

$$\frac{A}{\mu} + \frac{A}{\mu^2} + \frac{A}{\mu^3} \ldots . + \frac{A}{\mu^\nu}, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (\mu = 2, 3, 4 \ldots .), \quad \leqq A \text{ ist,}$$

(Phys. Γ 206 b 7—9).

Sonderdruck
aus der Zeitschrift

DAS ALTERTUM

Band 9 · 1963 · Heft 2

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

V/12/6

Über Euklid, den Mathematiker

Von Evangelos S. Stamatis

Wir wissen von Euklid, dem großen griechischen Mathematiker, weder Ort noch Zeit der Geburt und des Todes. Über sein Leben sind die Nachrichten der Alten sehr dürftig: Er war Grieche und wirkte in Alexandria, der Stadt, die Alexander der Große Anfang 331 v. u. Z. gegründet hat; seine Blüte fällt in die Zeit der Regierung Ptolemaios' I. (323—285 . Allem Anschein nach war Euklid Direktor der berühmten alexandrinischen Schule oder der erste Rektor der Universität Alexandria, wenn wir seinen Titel in der heutigen Ausdrucksweise wiedergeben wollen. Proklos (410—485), der Rektor der Akademie Platons in Athen, nennt Euklid einen Platoniker (*Πλατωνικός*), d. h. einen Kenner und Anhänger der Philosophie Platons.

Vom Tode Platons (347 v. Chr.) bis zum ersten Jahr der Regierungszeit Ptolemaios' I. (323 v. Chr.) verflossen vierundzwanzig Jahre. In diesem Zeitraum muß sich Euklid in Athen einen Namen als hervorragender Mathematiker gemacht haben, um vom ersten Herrscher Ägyptens (nach dem Tode Alexanders des Großen), Ptolemaios I., zum Leiter, höchstwahrscheinlich zum Organisator, der Universität Alexandrias berufen zu werden. Daß Ptolemaios I. die besten Köpfe der griechischen Geisteswelt für seine Hauptstadt gerade in Athen suchte, entnehmen wir Alkiphron, einem scharfsinnigen und reizvollen Schriftsteller Alexandrias. Alkiphron berichtet uns über die Einladung Menanders; der Dichter reiste jedoch wegen der Liebe zu Athen und der Abneigung seiner Freundin Glykera gegen die große Reise nicht nach Alexandria (W. Plankl, Alkiphron, Hetärenbriefe, München 1942, 26). Es galt also Euklid wenige Jahre nach dem Tode Platons als ein großer Mathematiker in Athen, ja er mußte sogar der größte gewesen sein, wenn er von Ptolemaios nach Alexandria eingeladen wurde, um die Leitung der Universität zu übernehmen.

Von dem Mathematiker Pappos, der im 3. Jahrhundert in Alexandria lebte, erfahren wir (2. Band, 7. Buch, S. 676, 25—678, 12 Hultsch), daß Euklid denjenigen, die Geometrie lernen wollten, sein Wohlwollen schenkte. Köstlich ist eine bei Stobaios erhaltene Geschichte von Euklid und einem reichen Jugendlichen (Meineke 4, 205): Ein Jugendlicher suchte einmal Euklid auf, um bei ihm Geometrie zu studieren. Nachdem er den ersten geometrischen Lehrsatz gelernt hatte, fragte er Euklid: „Und was werde ich nun mit diesem Satz verdienen?" Euklid drehte sich zu seinem Diener um und sagte: „Gib ihm drei Groschen, damit er etwas am Erlernen des Satzes verdienen kann!"

Seinen Witz könnte auch das folgende arithmetische Epigramm offenbaren, ein Rätsel aus der Algebra, das man Euklid zuschreibt (Anthologia Palatina, Editio stereotypa Tauchnitiana 3, Appendix 26):

Esel und Maultier schritten einher, beladen mit Säcken.
Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel:
„Alterchen, sprich, was weinst du und jammerst schier wie ein Mägdlein?

Über Euklid, den Mathematiker

Doppelt soviel als du grad' trüge ich, gäbst du ein Maß mir;
nähmst du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe."
Geometer, Du Kundiger, sprich, wieviel sie getragen.
(Der Esel hatte 5 Säcke und das Maultier 7.)

Um das Werk Euklids, hauptsächlich die „Elemente", die die Leistung von drei Jahrhunderten des griechischen Geistes in der Mathematik darstellen, besser zu verstehen, müssen wir, sei es auch kurz, auf die vorgriechische Mathematik eingehen. Die älteste schriftliche Quelle über die ägyptische Mathematik ist der sogenannte Papyrus Rhind, der um 1700 v. Chr. von Ahmes geschrieben wurde (Britisches Museum). Außerdem gibt es noch eine Fülle von babylonischen Tafeln, aus denen hervorgeht, daß die Sumerer (ein nichtsemitisches Volk) und ihre Nachfolger, die Babylonier (ein semitisches Volk), im Zweistromland Mathematik getrieben haben. Über die babylonischen Tafeln mathematischen Inhalts ist viel diskutiert und geschrieben worden. Zahlreiche Tafeln sind nicht gut erhalten. Meistens wissen wir gar nicht, welcher Zeit sie angehören. „Die im Handel erworbenen Tafeln stammen meist aus Raubgrabungen, so daß oft nicht einmal der Herkunftsort, geschweige denn die archäologische Schicht und damit das Alter festzustellen ist" (K. Vogel, Vorgriechische Mathematik 2, Hannover u. Paderborn 1959, 13). Trotzdem hat man „aus Vermutungen" und „freier Wiedergabe" eines schlecht zu lesenden babylonischen Textes geschlossen, daß die Babylonier nicht nur den Pythagoreischen Lehrsatz kannten, sondern sogar eine Art von Beweis in ihrer Mathematik hatten (O. Neugebauer, Vorgriechische Mathematik 1, Berlin 1934, 35, 168, 203).

Es ist klar, daß man vorerst einen Vergleich zwischen dem Inhalt der babylonischen Texte und der Mathematik Herons sowie Diophantos' anstellen muß, um sich eine wissenschaftlich vertretbare Meinung bilden zu können. Überdies stammen viele jener babylonischen Tafeln aus der Zeit Alexanders des Großen, sind also griechisches Geistesgut. Die wenig fundierte Auffassung über die babylonische Mathematik erreicht ihren Höhepunkt in der folgenden Aussage: „Sowohl im Bereich der Elementargeometrie wie im Bereich der elementaren Proportionenlehre wie schließlich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte inhaltliche Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluß ist in allen Punkten praktisch lückenlos herzustellen ... die einfache Tatsache, daß zu den zweieinhalb Jahrtausenden ‚Geschichte' seither reichlich weitere zweieinhalb Jahrtausende hinzugekommen sind, die Griechen also in der Mitte und nicht mehr am Anfang stehen ... In der Mathematik wurde die Einsicht in das Wesen der Irrationalzahlen erkauft mit dem abrupten Abbrechen eines bereits zu einem algebraischen Formalismus gelangten Systems, das sich in allen Punkten direkt in die Algebra der Renaissance hätte fortentwickeln können — ohne die tiefsten mathematischen Leistungen der Griechen wären vielleicht 2000 Jahre zu ‚gewinnen' gewesen" (O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra [Studien zur Geschichte der antiken Algebra III], in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik B 3, Berlin 1936, 258f.).

Wie wir heute wissen, ist in der Mathematik der alten orientalischen Kulturvölker keine Spur eines Beweises mathematischer Lehrsätze zu finden. Die Entdeckung des Beweises für die mathematischen Sätze blieb den Griechen vorbehalten. Die Begründung der Mathematik als Wissenschaft ist ausschließlich Werk der Griechen. In der Vorrede zur zweiten Auflage seiner „Kritik der reinen Vernunft" äußert sich Immanuel Kant wie folgt:

„Die Mathematik ist von den frühesten Zeiten her, wohin die Geschichte der menschlichen Vernunft reicht, in dem bewundernswürdigen Volke der Griechen den sicheren Weg einer Wissenschaft gegangen. Allein man darf nicht denken, daß es ihr so leicht geworden, wie der Logik, wo die Vernunft es nur mit sich selbst zu tun hat, jenen königlichen Weg zu treffen, oder vielmehr sich selbst zu bahnen; vielmehr glaube ich, daß es lange mit ihr (vornehmlich noch unter den Ägyptern) beim Herumtappen geblieben ist, und diese Umänderung einer Revolution zuzuschreiben sei, die der glückliche Einfall eines einzigen Mannes in einem Versuche zustande brachte, von welchem an die Bahn, die man nehmen mußte, nicht mehr zu verfehlen war, und der sichere Gang einer Wissenschaft für alle Zeiten und in unendliche Weiten eingeschlagen und vorgezeichnet war. Die Geschichte dieser Revolution der Denkart, welche viel wichtiger war als die Entdeckung des Weges um das berühmte Vorgebirge, und des Glücklichen, der sie zustande brachte, ist uns nicht aufbehalten. Doch beweist die Sage, welche Diogenes der Laertier uns überliefert, der von den kleinsten und nach dem gemeinen Urteil gar nicht einmal eines Beweises benötigten Elementen der geometrischen Demonstrationen den angeblichen Erfinder nennt, daß das Andenken der Veränderung, die durch die erste Spur der Entdeckung dieses neuen Weges bewirkt wurde, den Mathematikern äußerst wichtig geschienen haben müsse und dadurch unvergeßlich geworden sei. Dem ersten, der den gleichschenklichten Triangel demonstrierte (er mag nun Thales oder wie man will geheißen haben), dem ging ein Licht auf; denn er fand, daß er nicht dem, was er in der Figur sah, oder auch dem bloßen Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst a priori hineindachte und darstellte (durch Konstruktion), hervorbringen müsse, und daß er, um sicher etwas a priori zu wissen, der Sache nichts beilegen müsse, als was aus dem notwendig folgte, was er seinem Begriffe

Euklid (?). Miniatur aus einem Manuskript der römischen Landesvermesser (Wolfenbüttel, Herzog-August-Bibliothek, Ms. 2403), 6. Jahrhundert n. Chr.

gemäß selbst in sie gelegt hat“ (vgl. die Ausgabe von R. Schmidt, Leipzig 1944 [unveränderter Abdruck der 2. Auflage von 1930]).

Der Inhalt der „Elemente“

Aus dem Titel „Elemente“, den das Hauptwerk Euklids trägt, ist leicht zu ersehen, daß dieses Werk die Elemente der mathematischen Wissenschaft überhaupt enthalten muß. Das Material verteilt sich in 13 Büchern. Die Bücher 1 bis 6 und 10 bis 13 machen mit den Grundlagen der Geometrie vertraut, während die Bücher 7 bis 9 die Zahlentheorie behandeln. Man findet also in den Elementen Euklids alles, was für den Aufbau der mathematischen Wissenschaft unentbehrlich ist.

Die Figuren der „Elemente“

Die geometrischen Figuren der „Elemente“ Euklids beschränken sich auf gerade Linien und Kreise, d. h. Figuren, die sich mit Lineal und Zirkel darstellen lassen. Sehr früh aber, fast zwei Jahrhunderte vor Euklid, haben die Griechen in ihrer Mathematik auch andere Kurven gebraucht, wie z. B. die Kegelschnitte. Trotzdem dürften die „Elemente“ Sätze enthalten, die sich nur auf lineare oder kreisförmige Figuren gründen. Den Grund dafür entnehmen wir den Schriften Herons, in denen man sieht, welche Rolle das Religiöse und das Okkulte in der Mathematik, besonders seit Pythagoras, spielten. Nach Heron hat der Kreis keinen Anfang und kein Ende; er symbolisiert also Gott. Die gerade Linie setzt sich aus Punkten zusammen; sie hat Anfang, Mitte und Ende. Sie bedeutet Geburt, Leben und Tod. Gerade Linien und Kreise stellen also den Verkehr des Menschen mit Gott dar; sie verbinden den Menschen mit Gott (ed. J. L. Heiberg, Heronis Alexandrini vol. IV, Definitiones). Von solchen Gedanken ausgehend, die besonders den Stempel der Pythagoreischen Schule tragen, hat man mit Zirkel und Lineal vergeblich versucht, jene drei berühmten Probleme zu lösen: 1. die Quadratur des Kreises; 2. die Verdoppelung des Würfels und 3. die Trisektion des spitzen Winkels. Sie wurden indessen noch im Altertum mit anderen Mitteln gelöst.

Die Rechnung mit Zahlen und die „Elemente“

In den 13 Büchern der „Elemente“ gibt es absolut keine Zahlenrechnung. Die Zahlenrechnung hat im Unterschied zur Zahlentheorie mit der Wissenschaft und der Erziehung des Menschen nichts zu tun. Sie ist eine Sache des täglichen Bedürfnisses und der Technik und blieb im Altertum den Sklaven und den Schulmeistern der Anfänger überlassen.

Die Beziehung Euklids zu den Elementen

Sehr oft, auch im Altertum, wurde die Frage aufgeworfen, ob Euklid eigentlich bei der Schaffung der Elemente mitgewirkt hat. Aus Proklos und anderen Quellen erfahren wir, daß viele Lehrsätze der „Elemente“ Euklids von Eudoxos, Theaitetos und den Pythagoreern herrühren. Wir wissen nicht, ob Euklid auch nur einen einzigen Lehrsatz der „Elemente" persönlich erfunden hat. Wenn man jedoch die „Elemente" im Original, nicht in der Übersetzung liest, dann kommt man zu der festen Überzeugung, daß Euklid wirklich ein großer Mathematiker und zugleich ein Künstler war. Wie Pheidias der Künstler des Marmors, so ist Euklid der Künstler des menschlichen Geistes. Er ist der Pheidias des Geistes.

Die Herausgabe der „Elemente"

Die „Elemente" sind ungefähr um 300 v. u. Z. zum erstenmal erschienen. Bis etwa zum Jahre 380 n. Chr. wissen wir nichts über eine systematische Herausgabe der „Elemente". Die (vor 1814) zu allen Völkern gelangten „Elemente" stammen wahrscheinlich aus einer Edition des alexandrinischen Gelehrten Theon. Diese Ausgabe war jedoch mit einigem Ballast versehen. Als Napoleon I. Rom besetzte, fand der französische Mathematiker Peyrard in der Bibliothek des Vatikans Manuskripte der „Elemente", die aus einer vortheonischen Edition stammen. Nach der Pariser Edition Peyrards (1814—1818) wurden die „Elemente" in mühevoller und bewunderungswerter Arbeit von dem dänischen Gelehrten J. L. Heiberg in Leipzig bei B. G. Teubner herausgegeben (vier Bände „Elemente" und ein Band Kommentar, 1883—1888). Zu den erhaltenen Opera omnia Euklids gehören noch drei Bände, die auch bei B. G. Teubner erschienen sind. Der erste Band enthält die „Optica", die „Catoptrica" und den Kommentar (ed. J. L. Heiberg, 1895). Die anderen zwei Bände wurden von dem deutschen Gelehrten H. Menge herausgegeben: die Schrift Euklids „Data" (Gegebenes) mit Kommentar (1896), dann die Werke „Phaenomena" (Astronomie) mit Kommentar, „Sectio canonis" (Musik), „Introductio harmonica" (auch Musik) (1916). Leider sind wertvolle Schriften aus der Feder Euklids verlorengegangen. Es handelt sich dabei um: 1. Aufgaben zur Teilung von Figuren; 2. Trugschlüsse; 3. Porismen; 4. zwei Bücher über die Orte auf der Oberfläche; 5. vier Bücher über Kegelschnitte und 6. ein Buch über Mechanik.

Von den oben erwähnten Abhandlungen Euklids sind die „Data" und „Phaenomena" echt. Die anderen Schriften: „Optica", „Catoptrica", „Sectio canonis", „Introductio harmonica", sind meiner Meinung nach unecht. Allem Anschein nach stammen sie aus Schülerheften, die die Schriften Euklids benutzt haben. Gedruckt wurden zuerst die „Elemente" 1530 in Basel von Simon Grynaeus.

Auffassungen über die „Elemente"

Das Erlernen der Elemente in der Schule ist weder einfach noch leicht. Leider gibt es keinen „königlichen Weg" für die Mathematik. Außerdem kommt es in manchen Ländern zu Versuchen, den Unterricht der Mathematik in der Schule etwas leichter zu gestalten und den Schülern nur das Nützliche für die berufliche Ausbildung zu bieten. Die Technik hat ihre Ansprüche auf das Praktische und Nützliche und kein besonderes Interesse für die Erziehung der menschlichen

Seele. Man vergißt den im „Staate" Platons erhaltenen Spruch, daß der Unterricht der Geometrie bezweckt, die Idee des Guten leichter zu verstehen (*πρὸς τὸ κατιδεῖν ῥᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν*, 526 de). Auf Grund verschiedener Auffassungen, die wohl auf das Praktische, Nützliche und Gewinnbringende gerichtet sind, bemüht man sich, die Logik des Aristoteles und die Elemente Euklids aus dem Unterricht auszuschließen. Wir erlauben uns zu glauben, daß diese Bemühung sehr viel Ähnlichkeit mit dem Fall jenes reichen Jugendlichen hat, der damals Euklid fragte, was mit der Kenntnis des ersten geometrischen Lehrsatzes zu verdienen wäre.

Die Forschung zu den „Elementen" und ein Widerhall

In den letzten zwei Jahrhunderten war das Studium der „Elemente" und insbesondere die Erforschung der Grundlagen der Geometrie sehr intensiv. Man hat neue wichtige Sätze aufgestellt und bei der Ersetzung des 5. Postulats Euklids durch andere die sogenannten nicht-Euklidischen Geometrien erfunden. Mancher erachtet die Benennung „nicht-Euklidische Geometrie" als nicht zutreffend. „Übungen zu den ‚Elementen' Euklids" wäre richtiger. Wenn man aus den 14 Postulaten Euklids das eine ersetzt und mit diesem und den anderen 13 ein wissenschaftliches Gebäude errichtet, so darf man dies nicht nicht-Euklidisch nennen. Nicht-Euklidisch bedeutet, daß man mit den Elementen Euklids nichts zu tun hat, und dies trifft wahrhaftig nicht zu. Die nicht-Euklidischen Geometrien gaben dem französischen Gelehrten Jules Tannery Anlaß zu einigen Äußerungen, die wir mit einigen kleinen Abweichungen im folgenden wiedergeben (Science et philosophie, Paris 1934, Kap. 9):

„Wie sehr würden wir gewinnen können, wenn es möglich wäre, Euklid aus dem Jenseits zu uns zurückzuholen. Zeus, der Vater der Götter und Menschen nach Homer (*πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε*), hörte wohlwollend die Bitte der Menschen und gab Euklid die Erlaubnis, nach der Erde zu kommen. Als Begleiter bestimmte er Henri Poincaré. Euklid, seiner Geometrie folgend, kam vom Himmel blitzartig in Berlin an, wo man ihn mit großer Begeisterung empfing. Man überreichte ihm von Herrn Burbachis aus Sparta (er ist mit N. Bourbaki nicht zu verwechseln) ein Telegramm, worin er gebeten wurde, die blitzartige Ankunft aus dem Himmel nicht zu bezeugen, da es von der speziellen Relativitätstheorie verboten sei. Inzwischen ist Poincaré, der seine Reise nach der Erde nicht-Euklidisch unternommen hat, in den Andromeda-Spiralnebel gekommen, obwohl er während seines ersten Lebens erklärt hat, die Euklidische und die nicht-Euklidischen Geometrien seien gleichwertig. Euklid wurde von allen Staaten zum Generalinspektor der Mathematik ernannt und fuhr nach Leipzig, wo er sich bei B. G. Teubner das kostspielige Werk von J. L. Heiberg ‚Die Elemente Euklids' beschaffte. Mit diesem Werk als Rüstzeug fuhr er nach Göttingen, wo er von den nicht-Euklidischen Geometrien erfuhr. Mit Genugtuung nahm er Kenntnis davon, daß Gauß diesen nicht-Euklidischen Geometrien aus Furcht vor dem Geschrei der Böoter fernblieb. Es hat ihn sehr gefreut, als er erfuhr, daß man seinem 5. Postulat einen

Ehrenplatz im Hilbertschen Axiomensystem vorbehalten hat, und sagte, was in der Welt geschehen würde, hätte man ihm diesen Ehrenplatz nicht zugewiesen. ‚Ich bewundere', sagte er ferner, ‚das Stetigkeitsaxiom von Dedekind-Cantor, die vollständige Induktion von Pascal oder Poincaré und den Dedekindschen Schnitt, die alle auf meinen Elementen beruhen. Wie schön finde ich den Namen Exhaustionsverfahren, den man für meine Analysis im 12. Buche der Elemente mit großer Mühe erfand!' Inzwischen dehnte sich das Weltall unaufhörlich aus gemäß der nicht-Euklidischen Geometrie, und Euklid sah sich gezwungen zu fragen, wo eigentlich der Mittelpunkt dieses immer nicht-Euklidisch, aber stetig expandierenden Weltalls liege. ‚Es würde sehr schön sein', sagte er, ‚wenn man den kleinen Kindern solche Weltalls in hinreichender und entsprechender Größe als Spielzeuge geben könnte.' Euklid war sehr beunruhigt, weil Poincaré noch nicht aus dem Himmel gekommen war. ‚Wie ist es möglich?' sagte er. ‚Ich habe gehört, daß die nicht-Euklidischen Geometrien für die großen Entfernungen und die großen Dreiecke besondere Gültigkeit haben. Ich bin sehr zufrieden', fuhr er fort, ‚daß Ihre Raketen und Erdsatelliten auf Grund meiner Geometrie fliegen. Es wäre hochinteressant, wenn man sie auf Grund einer nicht-Euklidischen Geometrie konstruieren könnte. Ich glaube, in diesem Fall wären Sie mindestens schon auf dem Mond und dem Mars gelandet. Es ist schade, daß die Konstrukteure der Raketen und Erdsatelliten die nicht-Euklidischen Geometrien, die für die großen Entfernungen gelten, vernachlässigen.' Als man dem Generalinspektor der Mathematik der ganzen Welt erklärte, daß die heutige Jugend die Geometrie, um etwas zu verdienen, lerne, sprang er aus seinem Stuhl, öffnete seine großen Augen, schloß sie wieder und sagte zu sich: ‚Was sind doch für große Veränderungen im Leben der Menschen eingetreten, während früher die glanzvolle Sonne Griechenlands, die durchsichtigen Linien seines Horizonts, das unendliche Lächeln seiner Meere, die hellen Tempel, die glänzenden Standbilder, die Dichter und die philosophischen Gespräche, alles überhaupt, den Augen der Jugend offenstand!' "[1]

[1] Literatur: H. Diels u. W. Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker 1, 7. Auflage Berlin 1954. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1907. T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford 1921. P.-H. Michel, De Pythagore à Euclide, Paris 1950. O. Becker u. I. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bonn 1951. P. Leander Schönberger u. M. Steck, Proklus Diadochus. Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen", Halle (Saale) 1945. G. Hauser, Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid, Luzern 1955. B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, Basel u. Stuttgart 1956.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ ΕΚ ΤΟΥ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ
ΜΕΤ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ & ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΡΟΡΗ 11, (πάροδος Αἰόλου) ΤΗΛ. 228.993
ΑΘΗΝΑΙ, 1963

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ ἐν μεταφράσει ἐκ τῆς γερμανικῆς ἐκδιδόμενον ἄρθρον «περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Εὐκλείδου» ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ τριμηνιαῖον περιοδικὸν τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου «DAS ALTERTUM» (Η ΑΡΧΑΙΟΤΗΣ) Τεῦχος 2ον, Ἰούνιος 1963. Ἀφορμὴν εἰς τὴν δημοσίευσιν τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ παρέσχεν ἡ κατόπιν πρωτοβουλίας καὶ μεσολαβήσεως τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου ὑπογραφεῖσα κατὰ τὸ ἔτος 1961 σύμβασις μεταξὺ τοῦ Ἐκδοτικοῦ Οἴκου τῆς Λιψίας B. C. Τόιμπνερ καὶ ἐμοῦ πρὸς ἔκδοσιν ἐν Γερμανίᾳ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τῶν ὁποίων ἡ τελευταία ἔκδοσις εἶχε γίνει κατὰ τὰ ἔτη 1883 — 1888. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄρθρου ἐθεωρήθη ἐπιβεβλημένον ὅπως γίνῃ ἀπάντησις δι' ὀλίγων εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι προσπαθοῦν συστηματικῶς ἀπό τινων δεκαετηρίδων νὰ ἐκτοπίσουν ἐκ τοῦ ἐπιστημονικοῦ οἰκοδομήματος τὴν Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (τὰ βασικὰ δηλ. στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν). Τὸ ἐπιχείρημα διὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι ὅτι αἱ λέξεις μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου χάνουν τὴν σημασίαν των καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀνάγκη νὰ δημιουργηθῇ εἰδικὸς μαθηματικὸς συμβολισμὸς διὰ τοῦ ὁποίου νὰ ἐκφράζωνται οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς. Τὸ ἀξίωμα ἐπὶ παραδείγματι, τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους, τὸ περιεχόμενον καὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα

κινδυνεύει νὰ χάσῃ τὴν σημασίαν του καὶ δέον νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ :

$$\text{Ἐὰν } Α = Β \text{ καὶ } Γ = Β, \longrightarrow Α = Γ,$$

ὅπου δὲν ἀναφέρονται τὰ ὀνόματα Ἀριστοτέλης καὶ Εὐκλείδης.

Ἕτερον, ἐξ ἄλλου ἐπιχείρημα διὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ὅτι ταῦτα παρουσιάζουν δῆθεν μερικὰ κενὰ εἰς τὴν διατύπωσιν ὁρισμῶν τινων καὶ ἀξιωμάτων. Τὰ κενὰ αὐτὰ ἐπιχειρεῖ νὰ πληρώσῃ ὁ Δαυῒδ Χίλμπερτ (David Hilbert 1862 — 1943, ἐν Γερμανίᾳ), δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ εὐκλειδείου ὁρισμοῦ τοῦ σημείου καθ' ὃν «σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος» διὰ τῆς λέξεως π ρ ά γ μ α τ α, χωρὶς ὅμως νὰ ἑρμηνεύεται τί νοεῖται ὡς πράγματα εἰς τὴν γεωμετρίαν. Οὕτω ὁ Δαυῒδ Χίλμπερτ καθώρισεν ἓν σύστημα ὁρισμῶν καὶ ἀξιωμάτων, τὸ ὁποῖον ὑπὸ τῶν εἰδικῶν ἐχαρακτηρίσθη ὡς μορφοκρατικὸν (Formalismus). Ὁ ἴδιος ὁ Χίλμπερτ λέγει συναφῶς τὰ ἑξῆς·

«Θεωροῦμεν τρία διάφορα συστήματα πραγμάτων : Τὰ πράγματα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων A, B, C.... Τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων α, b, c.... Τὰ πράγματα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ,..... Τὰ σημεῖα τὰ καλοῦμεν ἐπίσης στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, καὶ τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ καλοῦμεν στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ ἁπλῶς στοιχεῖα τοῦ χώρου (Grundlagen der Geometrie, 8η ἔκδοσις, σελ. 2, 1956).

Καθίσταται φανερὸν ὅτι κατὰ κρυπτοφανῆ τρόπον εἰς τὰς ὑπὸ τοῦ Hilbert διδομένας διασαφηνίσεις γίνεται χρῆσις καὶ ἀοριστολογικὴ κατάχρησις τῶν εὐκλειδείων ὅρων.

Τὸ μορφοκρατικὸν σύστημα τοῦ Δαυῒδ Χίλμπερτ ἔχει εὕρει τὸ μὲν πολλοὺς ὀπαδούς, τὸ δὲ πολλοὺς ἀντιφρονοῦντας. Ὁ ἐκ τῶν ὀπαδῶν τοῦ χιλμπερτείου συστήματος Sir Whittacker ἔφθασεν εἰς τοιοῦτον σημεῖον ἀκρότητος καὶ φανατισμοῦ, ὥστε νὰ γράψῃ :

«Οὕτω τὸ ἔργον αὐτὸ (Σημ. Νοεῖ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου) ἔχασε πᾶσαν ἀξίωσιν νὰ ληφθῇ εἰς τὰ σοβαρὰ ὡς ἐπιστημονικὸν ἔργον» (From Euclid to Eddington, Dover 2α ἔκδ. 1958, Ν. Ὑόρκη).

Δὲν εἶναι τοῦ παρόντος νὰ σχολιάσωμεν τὴν γνώμην τοῦ Sir Whittacker περὶ τῆς ἀξίας τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου· ἁπλῶς θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἐκλογὴ ὑπ᾽ αὐτοῦ τοῦ Sir Eddington (1882 — 1944) ὡς ἐπιστημονικοῦ σταθμοῦ τῆς ἀνθρωπότητος ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐκλείδου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πολὺ τολμηρά.

Μεταξὺ τῶν ἀντιτιθεμένων σφοδρῶς εἰς τὸ μορφοκρατικὸν σύστημα τοῦ Δαυῒδ Χίλμπερτ καὶ εἰς τὰς λεγομένας μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας συγκαταλεγεται καὶ ὁ Hugo Dingler, τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Μονάχου, καὶ ὁ Georg Hammel, τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Βερολίνου. Καὶ οἱ δύο οὗτοι ἐπιστήμονες ὑποστηρίζουν ὅτι ἡ μόνη γεωμετρία, ἡ ὁποία εἶναι σύμφωνος πρὸς τὴν πραγματικότητα εἶναι ἡ εὐκλείδειος. Τὸ μορφοκρατικὸν σύστημα τοῦ Δαυῒδ Χίλμπερτ καὶ πᾶσα μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία πιθανόν, λέγουν, νὰ εἶναι λογικὰ κατασκευάσματα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, οὐδεμίαν ἔχουν ὅμως σχέσιν πρὸς τὴν πραγματικότητα. (Dingler: Über Geschichte und Wesen des Experiments, München 1952. Hammel: Was ist Geometrie? Math. Nachr. Band 4, 1950-51, S. 502, ff.).

Ἡ πολεμικὴ κατὰ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνεύματος ἤρχισεν ἐν Γερμανίᾳ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ μαθηματικοῦ Κλάιν (1849 — 1925).

Τροφὴν εἰς τὴν πολεμικὴν αὐτὴν ἔδωκεν :

1) ἡ δημιουργία τῶν λεγομένων μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν

2) ἡ κατὰ τὰς ἀνασκαφὰς τῆς Μεσοποταμίας, τὰς γενομένας πρὸ 80 περίπου ἐτῶν, εὕρεσις πινακίδων αἱ ὁποῖαι περιεῖχον μαθηματικὰς γνώσεις τῶν Βαβυλωνίων

καὶ 3) ἡ διατύπωσις τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ Γεωργίου Κάντορ (1845 — 1918).

Μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν διακρίνουν, ὡς γνωστόν, κυρίως δύο εἴδη : 1) ἐκείνην καθ᾽ ἣν ἀντικαθίσταται τὸ 5ον αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου περὶ παραλλήλων διὰ τοῦ ἑξῆς : ἐκ δοθέντος σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἄγονται πρὸς εὐθεῖαν κειμένην ἐπ᾽ αὐτοῦ τοὐλάχιστον δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ 2) ἐκείνην καθ᾽ ἣν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου πάντοτε τέμνονται. Ἡ τελευταία αὕτη γεωμετρία ὀνομάζεται ἐλλειπτική. (Σημ. Πρόκειται περὶ εὐθειῶν αἵτινες προέρχονται ἐκ τῆς προβολῆς εἰς ἐπίπεδον μεγίστων κύκλων σφαίρας).

Εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν στηρίζεται, ὡς γνωστόν, καὶ ἡ εἰδικὴ θεωρία τῆς σχετικότητος, τῆς ὁποίας ἡ κατὰ τὸ ἔτος 1905 διατυπωθεῖσα σχέσις περὶ ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας ($E = m \cdot c^2$) παρουσιάζει ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον. Ὑποστηρίζεται ὅμως ὅτι ἡ ἰσοδυναμία μάζης καὶ ἐνεργείας εἶχε διατυπωθῆ πολὺ ἐνωρίτερον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς εὐκλειδείου γεωμετρίας καὶ δὴ καὶ 1) κατὰ τὸ ἔτος 1895 ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ φυσικοχημικοῦ Ostwald (βραβεῖον Νόμπελ 1909), 2) ὑπὸ τοῦ Γάλλου φυσικοῦ καὶ κοινωνιολόγου Gustav Le Bon, τῷ 1897, 3) ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ φυσικοῦ Hasenöhrl τῷ 1904. Ὁ Hasenöhrl εἶχε διατυπώσει καὶ τὴν εὐκλείδειον σχέσιν $E = \frac{8}{3} m \cdot c^2$ (Wolfgang Riezler, Einführung in die Kernphysik, σελ. 26, 1959).

Περὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων ἔχει ἀσχοληθῆ ἰδιαιτέρως ὁ Neugebauer. Οὗτος κατὰ τὸ 1933, μὲ τὴν ἄνοδον τῶν Ἐθνικοσοσιαλιστῶν εἰς τὴν Ἀρχήν, κατέφυγεν ἐκ τῆς Γερμανίας εἰς τὴν Δανίαν καὶ ἐκεῖθεν εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς. Σήμερον ὑπηρετεῖ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Princeton. Ὁ Neugebauer εἰρωνευόμενος τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας λέγει ὅτι «ἄνευ τῶν βαθυτάτων μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἡ ἀνθρωπότης θὰ εἶχε ἤδη προχωρήσει κατὰ 2.000 ἔτη εἰς τὴν πρόοδον τῶν μαθηματικῶν». Δὲν λέγει ὅμως ὁ Neugebauer ποῖος καὶ διατί ἠμπόδισε τοὺς Βαβυλωνίους νὰ προχωρήσουν εἰς τὰ μαθηματικά των ἐπιτεύγματα.

Τῷ 1883 ὁ Γεώργιος Κάντορ (1845—1918) ἐδημοσίευσεν ἐν Λιψίᾳ την πραγματείαν του «Ἀρχαὶ μιᾶς θεωρίας τῶν Συνόλων» λέγων ὅτι διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τὸν ὁποῖον οὗτος δίδει εἰς τὸ Σύνολον, ὁρίζει κάτι τὸ ὁποῖον εἶναι συγγενὲς πρὸς τὸ Πλατωνικὸν εἶδος ἢ ἰδέαν, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὁ Πλάτων εἰς τὸν Διάλογον αὐτοῦ Φίληβος ὀνομάζει μεικτόν. Ἔκτοτε ὁ Γεώργιος Κάντορ ἐπλούτησε καὶ δι' ἄλλων πραγματειῶν τὴν ἀρχικήν του θεωρίαν περὶ Συνόλων, ἡ ὁποία ἐπηρέασε τόσον πολὺ τὴν μαθηματικὴν σκέψιν τῆς ἐποχῆς του, ὥστε ὁ Δαυῒδ Χίλμπερτ νὰ παρομοιάσῃ αὐτὴν πρὸς παράδεισον τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Δέον νὰ σημειωθῇ ἐνταῦθα ὅτι ὁλόκληρον θεωρίαν περὶ Συνόλων περιλαμβάνει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Διάλογον αὐτοῦ Παρμενίδης. Δὲν συναντᾷ τις ὅμως, εἰς κανένα Διάλογον τοῦ Πλάτωνος, προσπάθειάν του, ὅπως ἀντικαταστήσῃ τὴν ἀριθμητικὴν διὰ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων. Μερικὰ στοιχεῖα τῆς πλατωνικῆς θεωρίας περὶ Συνόλων ἀνεκοινώσαμεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (Πρακτικὰ αὐτῆς 16.10.1958). Ἀφορμὴν ἐκ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης λαβὼν ὁ Ἀμερικανὸς καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ **YALE R. S. Brumbaugh** συνέλεξεν ὅλα τὰ περὶ Συνόλων χωρία τοῦ Διαλόγου Παρμενίδης καὶ παρέθεσεν αὐτὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου του, **PLATO ON THE ONE, the hypotheses in the Parmenides, New Haven, 1961.**

Παρὰ τὴν γνώμην τοῦ Χίλμπερτ, ἑνὸς κορυφαίου μαθηματικοῦ, περὶ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, ἡ θεωρία αὕτη δὲν ἔπαυσε νὰ ἀποτελῇ ἀντικείμενον διαρκοῦς ἐλέγχου καὶ κριτικῆς. Καὶ τοῦτο διότι παρουσιάζει πολλὰς ἀντινομίας μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ἐκείνην καθ' ἣν τὸ μέρος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὅλον. Περὶ τῶν ἀντινομιῶν τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων πραγματεύεται καὶ ὁ ὑπέρμαχος τῆς θεωρίας αὐτῆς καθηγητὴς ἐν τῷ Ἑβραϊκῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Ἱερουσαλὴμ Ἀβραὰμ Φραῖνκελ, εἰς τὴν πραγματείαν του τὴν ἐκδοθεῖσαν ἐν Βερολίνῳ κατὰ τὸ ἔτος 1959, ὑπὸ τὸν τίτλον «Θεωρία τῶν Συνόλων καὶ Λογική» (Abraham Fraenkel, Mengenlehre und Logik, Berlin 1959, σελ. 50 κ.ἑ.)

Ὑπὸ πολλῶν ὑποστηρίζεται ὅτι εἰς μὲν τὰ Πανεπιστήμια ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα εἶναι ἀπολύτως ἐλευθέρα. Εἰς τὰ Γυμνάσια ὅμως δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ εἰσάγωνται θεωρίαι, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ὑπὸ ἔλεγχον καὶ κριτικὴν καὶ δὲν ἔχουν γίνει παραδεκταὶ ὑφ' ὅλων. Ἐκτὸς ὅμως τούτου πολλοὶ διερωτῶνται ποῦ ἔγκειται ἡ παιδευτικὴ σημασία τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, ὥστε νὰ εἰσαχθῇ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ Γυμνάσια ; Τοὐναντίον, δὲν διδάσκεται εἰς τὰ Γυμνάσια καὶ εἰς μερικὰ ἀκόμη Πανεπιστήμια ἡ ἐγγραφὴ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν (τῶν λεγομένων Πλατωνικῶν σχημάτων), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν ὑψίστων οὐ μόνον ἐπιστημονικῶν ἀλλὰ καὶ καλλιτεχνικῶν δημιουργημάτων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, δηλ. τοῦ Ἑλληνικοῦ. Ἐξ ἄλλου, τονίζεται ὅτι, ἀσχέτως πρὸς τὰς ἀντινομίας τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, τὸ γεγονὸς ὅτι μόνον 4 ἐπὶ τοῖς χιλίοις περίπου τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων ὅλου τοῦ κόσμου σπουδάζουν μαθηματικὰ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον ἔχει ἐπισύρει τὴν προσοχὴν πολλῶν διακεκριμένων Ἐκπαιδευτικῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης, οἱ ὁποῖοι ὑποστηρίζουν ὅτι εἶναι λίαν ἐπιβλαβὲς νὰ παραμελῆται ἡ μαθηματικὴ προπαιδεία τῶν μαθητῶν χάριν τῶν λεγομένων συγχρόνων δῆθεν μαθηματικῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἀξία καὶ ἡ ἀλήθεια ἀμφισβητοῦνται ὑπὸ πολλῶν.

Ε. Σ. Σ.

Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Ὑπὸ ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Περὶ τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ μεγάλου Ἕλληνος μαθηματικοῦ, δὲν γνωρίζομεν οὔτε τὸν τόπον οὔτε τὸν χρόνον τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου. Αἱ περὶ τοῦ βίου του πληροφορίαι τῶν ἀρχαίων εἶναι πολὺ ἐλλειπεῖς : Ἦτο Ἕλλην καὶ ἔδρασεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, πολιν τὴν ὁποίαν ἵδρυσεν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 331 π. Χ. ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος· ἡ ἀκμή του συμπίπτει μὲ τὸν χρόνον τῆς βασιλείας τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ (323 — 285 π. Χ.). Καθ' ὅλα τὰ φαινόμενα ὁ Εὐκλείδης ἦτο διευθυντὴς τῆς περιφήμου ἀλεξανδρινῆς Σχολῆς ἢ ὁ πρῶτος πρύτανις τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἀλεξανδρείας, ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὸν τίτλον του μὲ τὸν σύγχρονον τρόπον ἐκφράσεως. Ὁ Πρόκλος (410 — 485 μ.Χ.), ὁ πρύτανις τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ἐν Ἀθήναις, ἀποκαλεῖ τὸν Εὐκλείδην Πλατωνικόν, τουτέστι γνώστην καὶ ὀπαδὸν τῆς φιλοσοφίας τοῦ Πλάτωνος.

Ἀπὸ τοῦ θανάτου τοῦ Πλάτωνος (347 π. Χ.) μέχρι τοῦ πρώτου ἔτους τῆς βασιλείας τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ (323 π. Χ.) παρῆλθον εἴκοσι τέσσαρα ἔτη. Εἰς αὐτὸ τὸ χρονικὸν διάστημα πρέπει ὁ Εὐκλείδης νὰ εἶχε ἀποκτήσει ὄνομα ὡς διαπρεπὴς μαθηματικός, διὰ νὰ κληθῇ ὑπὸ τοῦ πρώτου ἡγεμόνος τῆς Αἰγύπτου (μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου), τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄, ὡς διευθυντής, πιθανώτατα ὡς ὀργανωτής, τοῦ ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἀλεξανδρείας. Ὅτι ὁ Πτολεμαῖος ὁ Α΄ ἐζήτει ἀκριβῶς εἰς τὰς Ἀθήνας τοὺς διαπρεπεστέρους ἐκ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνευματικοῦ Κόσμου διὰ τὴν πρωτεύουσάν του τὸ συνάγομεν ἐκ τοῦ Ἀ λ κ ί φ ρ ο ν ο ς, ἑνὸς ἀγχίνου καὶ χαριτωμένου συγγραφέως τῆς Ἀλεξάνδρειας. Ὁ Ἀ λ κ ί φ ρ ω ν μᾶς πληροφορεῖ περὶ τῆς προσκλήσεως τοῦ Μενάνδρου· ἐν τούτοις ὅμως ὁ ποιητὴς δὲν μετέβη εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ἕνεκα τῆς ἀγάπης του πρὸς τὴν πόλιν τῶν Ἀθηνῶν καὶ διότι ἡ φίλη του Γλυκέρα ᾐσθάνετο ἀποστροφὴν διὰ τὰ μακρυνὰ ταξίδια (W. Plankl. ΑΛΚΙΦΡΩΝ, Ἐπιστολαὶ Ἑταιρῶν, Μόναχον 1942, 26). Ἐθεωρεῖτο λοιπὸν ὁ Εὐκλείδης, ὀλίγα ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Πλάτωνος, ὡς μέγας μαθηματικὸς ἐν Ἀθήναις, μάλιστα ἔπρεπε νὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος, διὰ νὰ κληθῇ ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, διὰ νὰ ἀναλάβῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ Πανεπιστημίου.

Παρὰ τοῦ μαθηματικοῦ Πάππου, ὁ ὁποῖος ἔζησεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὸν τρίτον αἰῶνα μ. Χ., πληροφορούμεθα (II, 7, σ. 676 κ. ἑ. Hultsch), ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ μανθάνωσιν γεωμετρίαν. Χαριτωμένον εἶναι ἓν ἐπεισόδιον, τὸ ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Στοβαῖος, μεταξὺ τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἑνὸς πλουσίου νέου (Meineke 4, 205) : Εἷς νέος ἐπεσκέφθη κάποτε τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν παρεκάλεσε νὰ διδαχθῇ ἀπὸ αὐτὸν γεωμετρίαν. Ἀφοῦ ὅμως οὗτος ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα, ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην : «Καὶ τώρα τί θὰ κερδίσω μὲ τὸ θεώρημα αὐτό ;» ὁ Εὐκλείδης ἔστρεψε πρὸς τὸν ὑπηρέτην του καὶ τοῦ εἶπε : «δός του τρεῖς δεκάρες, διὰ νὰ κερδίσῃ κάτι ἀπὸ τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἔμαθε !».

Τὸ εὔχαρι τοῦ χαρακτῆρος του θὰ ἠδύνατο νὰ φανερώσῃ καὶ τὸ ἀκόλουθον ἀλγεβρικὸν πρόβλημα, διατυπωμένον ὑπὸ μορφὴν στίχων, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὐκλείδην (Ἀνθολογία Παλατίνα, Editio stereotypa Tauchnitiana 3, Appendix 26).

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιπορούσαν·
ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον, ἐστέναζεν ἡ ὄνος·
ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε·
«Μητέρα γιατί θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι;»
Ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον, θὰ εἶχα διπλασίους ἀπὸ σέ·
ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα, θὰ εἴχαμε ἴσον».
Εἰπὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σάκκων ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας.
(Ἡ ὄνος εἶχε 5 καὶ ἡ ἡμίονος 7 σάκκους).

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν καλύτερον τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου, ἰδίως τὰ Στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὴν μαθηματικὴν δημιουργίαν τριῶν αἰώνων τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνεύματος (600—300 π. Χ.) πρέπει, ἔστω καὶ διὰ βραχέων, νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὰ Προελληνικὰ μαθηματικά. Ἡ ἀρχαιοτέρα γραπτὴ πηγὴ διὰ τὰ αἰγυπτιακὰ μαθηματικὰ εἶναι ὁ πάπυρος, ὁ φερόμενος ὑπὸ τὸ ὄνομα Ρίντ, ὅστις ἐγράφη ὑπὸ τοῦ Ἄμες περὶ τὸ ἔτος 1.700 π.Χ. (Βρεταννικὸν Μουσεῖον). Ἐκτὸς τούτου ὑπάρχει ἀκόμη πλῆθος βαβυλωνιακῶν πινακίδων, ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται, ὅτι οἱ Σουμέριοι (μὴ σημιτικὸς λαὸς) καὶ οἱ διάδοχοί των οἱ Βαβυλώνιοι (σημιτικὸς λαός), εἶχον καλλιεργήσει τὰ μαθηματικὰ εἰς τὴν Μεσοποταμίαν χώραν. Περὶ τῶν βαβυλωνιακῶν πινακίδων μαθηματικοῦ περιεχομένου ἔχει γίνει πολλὴ συζήτησις καὶ ἔχουν γραφῆ πολλά. Πολλαὶ ἐκ τῶν πινακίδων αὐτῶν δὲν ἐσώθησαν εἰς καλὴν κατάστασιν. Κατὰ τὸ πλεῖστον δὲν γνωρίζομεν εἰς ποίαν ἐποχὴν ἀνήκουν. «Αἱ ἐκ τοῦ ἐμπορίου ἀποκτηθεῖσαι πινακίδες προέρχονται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας οὕτως, ὥστε συχνὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ ὁ τόπος τῆς προελεύσεώς των, πολὺ δὲ περισσότερον τὸ ἀρχαιολογικὸν στρῶμα καὶ ἡ χρονολογία τῆς γραφῆς των» (K. Vogel, Προελληνικὰ μαθηματικὰ 2, Ἀννόβερον καὶ Πάδερμπὸρν 1959, ·13). Παρὰ ταῦτα «ἀπὸ ὑποθέσεις» καὶ «ἀπὸ ἐλευθέραν ἀπόδοσιν» ἑνὸς μετὰ δυσκολίας ἀναγινωσκομένου βαβυλωνιακοῦ κειμένου συνήγαγόν τινες τὸ συμπέρασμα, ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ὄχι μόνον ἐγνώριζον τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, ἀλλὰ ἀκόμη, ὅτι εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των καὶ ἓν εἶδος ἀποδείξεως. (O. Neugebauer, Προελληνικὰ μαθηματικὰ 1, Βερολῖνον 1934, 35, 168, 203).

Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει κανεὶς πρῶτα νὰ κάμῃ μίαν σύγκρισιν τοῦ περιεχομένου τῶν βαβυλωνιακῶν κειμένων καὶ τῶν μαθηματικῶν τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Διοφάντου διὰ νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ σχηματίσῃ γνώμην θεμελιουμένην ἐπιστημονικῶς. Ἐκτὸς ὅμως τούτου πολλαὶ βαβυλωνιακαὶ πινακίδες προέρχονται ἐκ τῶν χρόνων τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, εἶναι δηλαδὴ τὸ περιεχόμενόν των προϊὸν τῆς δημιουργίας τοῦ Ἑλληνικοῦ Πνεύματος. Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς ἐλάχιστα θεμελιουμένης ἀντιλήψεως περὶ τῶν βαβυλωνιακῶν μαθηματικῶν τὸ συναντᾷ κανεὶς εἰς τὴν ἀκόλουθον διατύπωσιν : ...Τόσον εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, ὅσον καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στοιχειώδους θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, ὅσον τέλος καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ἐξισώσεων ὑπάρχει ὅλον τὸ ὑλικὸν ἐπὶ τοῦ ὁποίου οἰκοδομοῦν τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικά... Οἱ Ἕλληνες εὑρίσκονται εἰς τὸ μέσον καὶ ὄχι πλέον εἰς τὴν ἀρχήν... Ἡ κατανόησις τῆς ὑπάρξεως τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἐξηγοράσθη (Σημ. μετ. Ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων) μὲ τὴν ἀπότομον διακοπὴν ἑνὸς συστήματος, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἤδη ἐξελιχθῇ (Σημ. μετ. Ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων) εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν συμβολισμόν, ὁ ὁποῖος θὰ ἦτο δυνατὸν καθ' ὅλα τὰ σημεῖα νὰ ἀναπτυχθῇ καὶ νὰ φθάσῃ ἀμέσως εἰς τὴν ἄλγεβραν τῆς Ἀναγεννήσεως· χωρὶς τὰς βαθυτάτας (Σημ. μετ. Ἐδῶ μὲ τὴν λέξιν βαθυτάτας εἰρωνεύεται ὁ συγγραφεὺς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας) μαθηματικὰς δημιουργίας τῶν Ἑλλήνων, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ κερδηθοῦν 2.000 ἔτη. (Σημ. μεταφ. Δηλ. 2.000 ἔτη ὠπισθοδρόμησαν τὴν ἐπιστήμην τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὸν O. Neugebauer, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες!!) (O. Neugebauer, Σπουδαὶ ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς ἀρχαίας ἀλγέβρας III, Πηγαὶ καὶ σπουδαὶ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν B 3 1936).

Ὁ Εὐκλείδης (;). Εἰκὼν ἐκ ρωμαϊκοῦ χειρογράφου εὑρισκομένου εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς γερμανικῆς κωμοπόλεως Βόλφενμπύττελ (ἀριθ. χειρ. 2403) τοῦ 6ου αἰῶνος μ. Χ.

Ὡς γνωρίζομεν σήμερον, οὐδὲν ἴχνος ἀποδείξεως ὑπάρχει εἰς τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα τῶν παλαιῶν πεπολιτισμένων λαῶν τῆς Ἀνατολῆς. Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα ἐπεφυλάχθη ὑπὸ τῆς Θείας Προνοίας διὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Ἡ θεμελίωσις τῶν μαθηματικῶν ὡς ἐπιστήμης εἶναι ἀποκλειστικὸν ἔργον τῶν Ἑλλήνων. Εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεώς του «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου» ὁ Ἐμμανουὴλ Κάντιος λέγει τὰ ἀκόλουθα :

«Τὰ Μαθηματικὰ εὗρον κατὰ τοὺς ἀπωτάτους χρόνους, μέχρι τῶν ὁποίων φθάνει ἡ ἱστορία τῆς ἀνθρωπίνης λογικῆς, εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων τὸν ἀσφαλῆ δρόμον μιᾶς ἐπιστήμης. Ὅμως δὲν πρέπει νὰ σκεφθῇ κανείς, ὅτι τὸ πρᾶγμα ἦτο διὰ τὴν ἐπιστήμην αὐτὴν τόσον εὔκολον, ὥστε νὰ ἀκολουθήσῃ τὴν βασιλικὴν ἀτραπὸν ἢ πολὺ περισσότερον νὰ αὐτοδημιουργηθῇ ὅπως τοῦτο συνέβη μὲ τὴν Λογικήν, ὅπου αὕτη ἔχει νὰ κάμῃ μόνον μὲ τὸν ἑαυτόν της· πολὺ περισσότερον πιστεύω, ὅτι ἐπὶ μακρὸν (ἰδίως μεταξὺ τῶν Αἰγυπτίων) παρέμειναν ταῦτα παραπαίοντα καὶ ὅτι ἡ μεταβολὴ ἐκ τῆς καταστάσεώς των αὐτῆς δέον νὰ ἀποδοθῇ εἰς μίαν ἐπανάστασιν, τὴν ὁποίαν προεκάλεσεν ἡ εὐτυχὴς ἔμπνευσις ἑνὸς μόνου ἀνδρός, κατά τινα προσπάθειαν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁδός, ἡ ὁποία ἔπρεπε νὰ ἀκολουθηθῇ δὲν ἦτο πλέον δυνατὸν νὰ εἶναι ἐσφαλμένη καὶ εἶχε πλέον προδηλωθῆ καὶ διανοιχθῆ δι᾽ ὅλας τὰς ἐποχὰς ὁ ἀσφαλὴς καὶ ἀπεριόριστος δρόμος μιᾶς ἐπιστήμης. Ἡ ἱστορία τῆς ἐπαναστάσεως αὐτῆς τοῦ σκέπτεσθαι..., καὶ τοῦ εὐτυχοῦς, ὅστις τὴν ἐπραγματοποίησε, δὲν διεσώθη μέχρις ἡμῶν. Ἐν τούτοις ὁ θρῦλος, τὸν ὁποῖον μᾶς παραδίδει ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος, ὁ ὁποῖος κατονομάζει τὸν πιθανὸν εὑρετήν, ἐκ τῶν μικροτάτων καὶ κατὰ τὴν κοινὴν κρίσιν μὴ ἐχόντων ἀνάγκην ἀποδείξεως στοιχείων τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων, ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ἀνάμνησις τῆς μεταβολῆς, ἡ ὁποία προεκλήθη ἐκ τοῦ πρώτου ἴχνους τῆς ἀναπτύξεως τοῦ νέου αὐτοῦ δρόμου, ἔπρεπε νὰ εἶχε φανῆ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς ἐξόχως σπουδαία καὶ ὡς ἐκ τούτου νὰ παραμείνῃ ἀλησμόνητος. Ὁ πρῶτος ὅστις ἀπέδειξε τὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως) ἔσχε μίαν ἀναλαμπὴν ...... (R. Schmidt Λιψία 1944).

Τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων.

Ἐκ τοῦ τίτλου Στοιχεῖα τὸν ὁποῖον φέρει τὸ κύριον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου, εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσῃ τις, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο περιέχει γενικῶς τὰ στοιχεῖα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἡ ὕλη τῶν Στοιχείων ἔχει κατανεμηθῆ εἰς 13 βιβλία. Τὰ βιβλία 1—6 καὶ 10—13 περιέχουν τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἐν ᾧ τὰ βιβλία 7—9 περιέχουν τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκεται δηλ. εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, πᾶν ὅ,τι εἶναι ἀπαραίτητον διὰ τὴν περαιτέρω οἰκοδόμησιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Τὰ σχήματα τῶν Στοιχείων.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιορίζονται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν εὐθειῶν γραμμῶν καὶ κύκλων, δηλ. εἰς σχήματα, τὰ ὁποῖα σχεδιάζονται διὰ κανόνος καὶ διαβήτου. Πολὺ ἐνωρὶς ὅμως, σχεδὸν 200 ἔτη πρὸ τοῦ Εὐκλείδου, οἱ Ἕλληνες ἐχρησιμοποίησαν εἰς τὰ μαθηματικά των καὶ ἄλλας καμπύλας, ὅπως π.χ. τὰς κωνικὰς τομάς. Παρὰ ταῦτα ὅμως, τὰ Στοιχεῖα ἔπρεπε νὰ περιέχουν θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἀποδεικνύονται μὲ τὴν βοήθειαν μόνον εὐθειῶν γραμμῶν καὶ κύκλων. Τὴν αἰτίαν τούτου πληροφορούμεθα ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἥρωνος, ὅπου βλέπει κανεὶς ποίαν σημασίαν ἔχει διὰ τὰ μαθηματικὰ τὸ θεοσεβὲς καὶ τὸ μυστηριακόν, ἰδίως ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου. Κατὰ τὸν Ἥρωνα ὁ κύκλος δὲν ἔχει ἀρχὴν καὶ τέλος· ὅθεν συμβολίζει τὸν Θεόν. Ἡ εὐθεία γραμμὴ ἀποτελεῖται ἐκ σημείων· ἔχει ἀρχήν, μέσον καὶ τέλος. Παριστάνει τὴν γένεσιν, τὴν ζωὴν καὶ τὸν θάνατον. Εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ κύκλοι παριστάνουν κατὰ ταῦτα τὴν ἐπικοινωνίαν τῶν ἀνθρώπων πρὸς τὸν Θεόν· συνδέουν τὸν ἄνθρωπον πρὸς τὸν Θεὸν (ἔκδ. J. L. Heiberg, Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως τόμ. ΙΥ, ὁρισμοί). Ἐκ τοιούτων σκέψεων ὁρμώμενοι, αἱ ὁποῖαι φέρουν ἰδίως τὴν σφραγίδα τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς, ἐθεώρουν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὡς ἄλυτα τὰ τρία περίφημα προβλήματα: 1) τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, 2) τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου καὶ 3) τὴν τριχοτόμησιν ὀξείας γωνίας, καίτοι εἶχον λύσει αὐτὰ δι' ἄλλων καμπύλων παρὰ δι' εὐθειῶν γραμμῶν καὶ κύκλων. Διότι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν λύονται δι' εὐθειῶν καὶ κύκλων.

Οἱ ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοὶ καὶ τὰ Στοιχεῖα.

Εἰς τὰ 13 βιβλία τῶν Στοιχείων δὲν ὑπάρχει κανεὶς ἀριθμητικὸς ὑπολογισμός. Ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς δὲν ἔχει καμμίαν σχέσιν μὲ τὴν ἀγωγὴν τοῦ ἀνθρώπου καὶ τὴν ἐπιστήμην. Εἶναι οὗτος ὑπόθεσις τῶν καθημερινῶν ἀναγκῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς καὶ εἶχεν ἀφεθῆ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα εἰς τὰ καθήκοντα τῶν δούλων καὶ τῶν γραμματοδιδασκάλων.

Ἡ σχέσις τοῦ Εὐκλείδου πρὸς τὰ Στοιχεῖα.

Πολὺ συχνά, ἀκόμη καὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ἐτέθη τὸ ἐρώτημα, κατὰ πόσον ὁ Εὐκλείδης εἶχε συμβάλει εἰς τὴν δημιουργίαν τῶν Στοιχείων. Ἀπὸ τὸν Πρόκλον καὶ ἄλλας πηγὰς πληροφορούμεθα, ὅτι πολλὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὀφείλονται εἰς τὸν Εὔδοξον, τὸν Θεαίτητον καὶ τοὺς Πυθαγορείους. Δὲν γνωρίζομεν, ἂν ὁ Εὐκλείδης προσωπικῶς ἀνεκάλυψεν ἔστω καὶ ἓν θεώρημα τῶν Στοιχείων. Ἐὰν παρὰ ταῦτα διαβάζῃ κανεὶς τὰ Στοιχεῖα, εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ ὄχι ἐν μεταφράσει, καταλήγει εἰς τὴν ἀκράδαντον πεποίθησιν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο πράγματι μέγας μαθηματικὸς καὶ συγχρόνως καὶ καλλιτέχνης. Ὅπως ὁ Φειδίας ἦτο καλλιτέχνης τοῦ μαρμάρου, οὕτω πως ὁ Εὐκλείδης ἦτο καλλιτέχνης τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Εἶναι ὁ Φειδίας τοῦ πνεύματος.

Ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων.

Τὰ Στοιχεῖα ἐγράφησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου τὸ πρῶτον, περίπου κατὰ τὸ 300 π.Χ. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς αὐτῆς μέχρι τοῦ ἔτους 380 μ.Χ. περίπου δὲν γνωρίζομεν τίποτε περὶ μιᾶς συστηματικῆς ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων. Τὰ Στοιχεῖα, τὰ κυκλοφορήσαντα μέχρι τοῦ 1814 εἰς ὅλους τοὺς λαοὺς προέρχονται κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ἔκ τινος ἐκδόσεως τοῦ λογίου Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ἡ ἔκδοσις ὅμως αὕτη περιεῖχε καὶ πολλὰς ξένας προσθήκας. Ὅτε ὁ Ναπολέων ὁ πρῶτος κατέλαβε τὴν Ρώμην, ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Peyrard ηὗρε εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ χειρόγραφον τῶν Στοιχείων, τὰ ὁποῖα προήρχοντο ἐξ ἐκδόσεως παλαιοτέρας τῆς τοῦ Θέωνος. Μετὰ τὴν Παρισινὴν ἔκδοσιν τοῦ Peyrard (1814 — 1818) ἐξεδόθησαν τὰ Στοιχεῖα, κατόπιν λίαν κοπιώδους καὶ ἀξιοθαυμάστου ἐργασίας, ὑπὸ τοῦ Δανοῦ λογίου J. L. Heiberg ἐν Λιψίᾳ, εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον B. C. Teubner (4 τόμοι «Στοιχεῖα» καὶ 1 τόμος σχόλια, 1883 — 1888). Εἰς τὰ μέχρι σήμερον σωθέντα Ἅπαντα τοῦ Εὐκλείδου ἀνήκουν καὶ 3 τόμοι ἀκόμη, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐκδοθῆ ἐπίσης εἰς τὸν οἶκον B. C. Teubner. Ὁ πρῶτος τόμος ἐκ τούτων περιέχει τὰ «Ὀπτικὰ» τὰ «Κατοπτρικὰ» καὶ σχόλια (Ἔκδ. J. L. Heiberg, 1895). Οἱ ἄλλοι δύο τόμοι ἐξεδόθησαν ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ λογίου H. Menge: Ἡ πραγματεία τοῦ Εὐκλείδου «Δεδομένα» μὲ σχόλια (1896), ἔπειτα αἱ πραγματεῖαι «Φαινόμενα» (Ἀστρονομία) μέ σχόλια, «Κατατομὴ Κανόνος» (Μουσική), «Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ» (Ἐπίσης μουσική) (1916). Δυστυχῶς πολλαὶ σπουδαῖαι πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου ἐχάθησαν. Αὗται εἶναι: Τὸ περὶ Διαιρέσεων σχημάτων 6ιβλίον, 2) Ψευδάρια, 3) Πορίσματα, 4) δύο 6ιβλία, Τόποι πρὸς Ἐπιφανείᾳ, 5) τέσσαρα 6ιβλία Περὶ Κωνικῶν τομῶν, 6) ἓν 6ιβλίον Περὶ Μηχανικῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μνημονευμένων ἔργων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι γνήσια τὰ «Δεδομένα» καὶ τὰ «Φαινόμενα». Τὰ ἄλλα ἔργα: Ὀπτικά, Κατοπτρικά, Κατατομὴ κανόνος, Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ δὲν εἶναι γνήσια κατὰ τὴν γνώμην μου. Καθ᾽ ὅλα τὰ φαινόμενα τὰ ἔργα ταῦτα προέρχονται ἐκ τετραδίων μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι εἶχον χρησιμοποιήσει τὰς πραγματείας τοῦ Εὐκλείδου. Τὰ Στοιχεῖα ἐτυπώθησαν διὰ πρώτην φορὰν κατὰ τὸ 1530 ὑπὸ τοῦ Simon Grynaeus εἰς τὴν Βασιλείαν.

Σημεριναὶ ἀντιλήψεις περὶ τῶν Στοιχείων.

Ἡ ἐκμάθησις τῶν Στοιχείων εἰς τὰ Σχολεῖα οὔτε ἁπλῆ εἶναι οὔτε εὔκολος. Δυστυχῶς δὲν ὑπάρχει 6ασιλικὴ ἀτραπὸς διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῶν μαθηματικῶν. Ἐκτὸς τούτου, μετὰ κάθε μεγάλον πόλεμον ἐπιχειροῦν εἰς μερικὰς χώρας πειράματα, διὰ τῶν ὁποίων προσπαθοῦν νὰ καταστήσουν εὐκολωτέραν τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ Σχολεῖα καὶ νὰ προσφέρουν εἰς τοὺς μαθητάς, ὅ,τι θὰ εἶναι ὠφέλιμον διὰ τὴν ἐπαγγελματικὴν των μόρφωσιν. Ἡ Τεχνικὴ ἔχει τὰς ἀπαιτήσεις της διὰ τὸ πρακτικὸν καὶ τὸ ὠφέλιμον καὶ δὲν ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἀγωγὴν τῆς ἀνθρωπίνης ψυχῆς. Λησμονοῦν ὅμως ἐν προκειμένῳ τὴν εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος περιεχομένην ρῆσιν, ὅτι ἡ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας ἀποσκοπεῖ εἰς τὸ νὰ καταστήσῃ εὐκολώτερον κατανοητὴν τὴν ἰδέαν τοῦ Ἀγαθοῦ, δηλαδὴ τοῦ Θεοῦ (πρὸς τὸ κατιδεῖν ρᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν, 526 de). Ἐπὶ τῇ 6άσει διαφόρων ἀντιλήψεων, αἱ ὁποῖαι ἀποσκοποῦν 6εβαίως εἰς τὸ πρακτικόν, τὸ ὠφέλιμον καὶ τὸ κερδοφόρον, προσπαθοῦν πολλοὶ λόγιοι νὰ ἀπομακρύνουν ἐκ τοῦ οἰκοδομήματος τῆς ἐπιστήμης τὴν Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ νὰ ἀντικαταστήσουν αὐτὰ διὰ τῆς καλουμένης μαθηματικῆς λογικῆς καὶ τῶν σχεδὸν ἐμπειρικῶν μαθηματικῶν τῶν καλουμένων συγχρόνων. Ἂς μᾶς ἐπιτραπῆ νὰ φρονῶμεν ἐν προκειμένῳ, ὅτι ἡ προσπάθεια αὐτὴ ἔχει πολλὴν ὁμοιότητα μὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ πλουσίου ἐκείνου νέου, ὁ ὁποῖος ἠρώτησε τότε τὸν Εὐκλείδην, πόσα θὰ κερδίσῃ μὲ τὴν ἐκμάθησιν τοῦ πρώτου γεωμετρικοῦ θεωρήματος.

Ἡ ἔρευνα διὰ τὰ Στοιχεῖα καὶ μία ἀπήχησις αὐτῆς.

Κατὰ τὰ τελευταῖα 200 ἔτη ἡ σπουδὴ τῶν Στοιχείων καὶ πρὸ παντὸς ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας ἦτο πολὺ ἐντατική. Ἀνεκαλύφθησαν νέα σπουδαῖα θεωρήματα καὶ κατὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ 5ου αἰτήματος (ἀξιώματος) τοῦ Εὐκλείδου δι' ἄλλου, εὗρον τὰς καλουμένας μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας. Ἡ ὀνομασία «μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία» θεωρεῖται ὑπὸ τινων ὡς μὴ ἐπιτυχής. «Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου» θὰ ἦτο ὅρος ὀρθότερος. Ἐὰν κανεὶς ἐκ τῶν 14 ἀξιωμάτων τοῦ Εὐκλείδου ἀντικαθιστᾷ τὸ ἓν δι' ἄλλου καὶ μὲ τοῦτο καὶ τὰ ἄλλα 13 ἱδρύῃ ἓν ἐπιστημονικὸν οἰκοδόμημα, δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ὀνομάζῃ τοῦτο «μὴ εὐκλείδειον». Μὴ εὐκλείδειον σημαίνει, ὅτι τοῦτο δὲν ἔχει σχέσιν μὲ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦτο δὲν συμβαίνει, μὰ τὴν ἀλήθειαν. Αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι παρέσχον τὴν ἀφορμὴν εἰς τὸν Γάλλον λόγιον Ἰούλιον Ταννερὺ (Jules Tannery) νὰ γράψῃ μερικὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἀποδίδομεν κατωτέρω μὲ μερικὰς παραλλαγάς. (Science et Philosophie, Paris 1934 Kap. 9)·

«Πόσον θὰ εἴχομεν νὰ ὠφεληθῶμεν, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπαναφέρωμεν ἐκ τοῦ Ὑπερπέραν τὸν Εὐκλείδην μεταξύ μας. Ὁ Ζεύς, πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε κατὰ τὸν Ὅμηρον, ἤκουσε εὐμενῶς τὴν παράκλησιν αὐτὴν τῶν ἀνθρώπων καὶ ἔδωκε τὴν ἄδειαν εἰς τὸν Εὐκλείδην, νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν γῆν. Ὡς συνοδόν του ὥρισε τὸν Ἑρρῖκον Πουανκαρέ. Ὁ Εὐκλείδης ἀκολουθῶν τὴν γεωμετρίαν του ἔφθασεν ἐκ τοῦ οὐρανοῦ εἰς τὸ Βερολῖνον ἀστραπιαίως, ὅπου τὸν ὑπεδέχθησαν μὲ μεγάλον ἐνθουσιασμόν. Τοῦ ἐνεχείρισαν ἐκεῖ τηλεγράφημα ἐκ Σπάρτης τοῦ κ. Βούρβαχη (νὰ μὴ γίνῃ σύγχυσις μὲ τὸν λόγιον Παρισινὸν Ν. Βούρβαχην), διὰ τοῦ ὁποίου παρεκαλεῖτο ὁ Εὐκλείδης νὰ μὴ ἀνακοινώσῃ ὅτι ἀφίχθη ἐκ τοῦ οὐρανοῦ «ἀστραπιαίως», διότι τοῦτο ἀπαγορεύεται ὑπὸ τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητος. Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Πουανκαρὲ, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἀναλάβει τὸ ταξίδιόν του πρὸς τὴν γῆν μὴ εὐκλειδείως, εἶχε φθάσει εἰς τὸ νεφέλωμα τῆς Ἀνδρομέδας, καίτοι οὗτος κατὰ τὸ διάστημα τῆς πρώτης του ζωῆς εἶχε δηλώσει, ὅτι ἡ εὐκλείδειος καὶ αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι εἶναι ἰσότιμοι. Ὁ Εὐκλείδης ἀνεκηρύχθη ὑφ' ὅλων τῶν Κρατῶν Γενικὸς Ἐπιθεωρητὴς τῶν Μαθηματικῶν καὶ μετέβη εἰς τὴν Λιψίαν, ὅπου ἐπρομηθεύθη παρὰ τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου B. C. Teubner τὸ πολύτιμον ἔργον τοῦ J. L. Heiberg (Χάϊμπεργκ) «Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου». Μὲ ἐφόδιον τὸ ἔργον αὐτὸ μετέβη εἰς τὴν πόλιν Γκαίττιγκεν τῆς Γερμανίας, ὅπου ἐπληροφορήθη διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν. Μὲ ἱκανοποίησιν ἔλαβεν γνῶσιν, ὅτι ὁ Γκάους ἀπέσχε τῶν μὴ εὐκλειδείων αὐτῶν γεωμετριῶν ἐκ τοῦ φόβου τῶν κραυγῶν τῶν Βοιωτῶν. Ἔμεινε πολὺ εὐχαριστημένος ὅταν ἐπληροφορήθη, ὅτι εἰς τὸ 5ον αἴτημά του εἶχε δοθῆ τιμητικὴ θέσις εἰς τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Hilbert καὶ εἶπε, τί θὰ συνέβαινε εἰς τὸν κόσμον, ἂν τυχὸν δὲν εἶχε δοθῆ ἡ τιμητικὴ αὐτὴ θέσις. «Θαυμάζω, εἶπεν ἔπειτα, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Dedekind - Cantor, τὴν τελείαν ἐπαγωγὴν τοῦ Pascal ἢ τοῦ Poincaré καὶ τὴν τομὴν τοῦ Dedekind, τὰ ὁποῖα ὅλα στηρίζονται εἰς τὰ Στοιχεῖα μου. Πολὺ μοῦ ἀρέσει τὸ ὄνομα «ἐξαντλητικὴ μέθοδος» τὴν ὁποίαν μὲ πολὺν κόπον ἀνεκάλυψαν, διὰ τὴν Ἀνάλυσιν τὴν περιεχομένην εἰς τὸ 12ον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ἐν τῷ μεταξὺ τὸ σύμπαν διεστέλλετο ἀδιακόπως συμφώνως μὲ τὴν μὴ εὐκλείδειον γεωμετρίαν, καὶ ὁ Εὐκλείδης εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐρωτήσῃ ποῦ τέλος πάντων κεῖται τὸ κέντρον αὐτοῦ τοῦ πάντοτε μὴ εὐκλειδείως, ἀλλὰ συνεχῶς διατεινομένου σύμπαντος. «Θὰ ἦτο πολὺ ὡραῖον, εἶπε, ἐὰν ἠδύνατο κανεὶς νὰ δώσῃ εἰς τὰ μικρὰ παιδιὰ ὡς παιγνίδια τοιαῦτα σύμπαντα εἰς ἐπαρκῆ καὶ ἀνάλογον ἀριθμόν. Ὁ Εὐκλείδης ἦτο πολὺ ἀνήσυχος, διότι ὁ Πουανκαρὲ δὲν εἶχεν ἀκόμη φθάση ἀπὸ τὸν οὐρανόν. «Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ αὐτό ;», εἶπε. «Ἔχω ἀκούσει, ὅτι αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι ἰσχύουν ἰδιαιτέρως διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα. Εἶμαι πολὺ εὐχαριστημένος, συνέχισε, διότι οἱ πύραυλοί σας καὶ οἱ δορυφόροι σας ἵπτανται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γεωμετρίας μου. Θὰ ἦτο ἐξόχως ἐνδιαφέρον, ἐὰν κανεὶς ἦτο δυνατὸν νὰ δώσῃ εἰς τὰ σχήματα αὐτὰ μὴ εὐκλείδειον ταχύτητα. Νομίζω, ὅτι διὰ τοιαύτης μὴ εὐκλειδείου ταχύτητος θὰ εἴχατε ἤδη ἀποβιβασθῆ τοὐλάχιστον εἰς τὴν σελήνην καὶ τὸν ἄρην. Εἶναι κρίμα, ὅτι οἱ κατασκευασταὶ τῶν πυραύλων καὶ τῶν δορυφόρων παραμελοῦν τὰς μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις». Ὅταν ἐδήλωσαν εἰς τὸν Γενικὸν Ἐπιθεωρητὴν τῶν Μαθηματικῶν, ὅλου τοῦ κόσμου, ὅτι ἡ σημερινὴ νεολαία μανθάνει τὴν γεωμετρίαν διὰ νὰ κερδίζῃ κάτι, ἀνεπήδησεν ἀπὸ τὸ κάθισμά του, ἤνοιξε τοὺς μεγάλους οφθαλμούς του, τοὺς ἔκλεισε πάλιν καὶ εἶπε μονολογῶν: Τί μεγάλαι μεταβολαὶ ἐπῆλθον τώρα εἰς τὴν ζωὴν τῶν ἀνθρώπων, ἐν ᾧ προηγουμένως ὁ ἔκλαμπρος ἥλιος τῆς Ἑλλάδος, αἱ διαυγεῖς γραμμαὶ τοῦ ὁρίζοντός της, τὸ διαρκὲς γέλοιο τῶν θαλασσῶν της, οἱ λαμπροὶ ναοί, τὰ μεγαλοπρεπῆ ἀγάλματα, οἱ ποιηταὶ καὶ αἱ φιλοσοφικαὶ συζητήσεις, τὰ πάντα τέλος προσεφέροντο διὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν νέων!

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΤΥΠΟΝ ΤΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΕ' (1963), τεύχη 29/30

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & Σιας
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
ΑΘΗΝΑΙ

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΤΥΠΟΝ ΤΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ

Ὁ Ἰάμβλιχος, νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος τῶν ἀρχῶν τοῦ 4ου αἰῶνος μ.Χ., (ἐκ Χαλκίδος τῆς Συρίας καταγόμενος), εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» (H. Pistelli, σελ. 100) λέγει ὅτι ἐπὶ τῆς παλαιᾶς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου διέκρινον εἰς τὰ μαθηματικὰ τρεῖς μεσότητας (δηλ. ἀναλογίας), τὴν ἀριθμητικήν, τὴν γεωμετρικὴν καὶ τὴν ὑπεναντίαν, ἡ ὁποία μετωνομάσθη ὑπὸ τῶν περὶ τὸν Ἀρχύταν καὶ τὸν Ἵππασον ἁρμονική. Ἀφοῦ δὲ μετεβλήθη τὸ ὄνομα τῆς ὑπεναντίας εἰς ἁρμονικήν, οἱ περὶ τὸν Εὔδοξον μαθηματικοὶ προσανευρόντες ἄλλας τρεῖς ἀναλογίας ἀκόμη ὠνόμασαν ὑπεναντίαν τὴν τετάρτην. Οἱ νεώτεροι δὲ εὗρον ἀκόμη ἄλλας τέσσαρας ἀναλογίας. [Μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα . . . . Ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν . . . . οἱ δὲ νεώτεροι τέσσαρας ἄλλας τινὰς προσανεῦρον, ἐκ τῶν ὅρων καὶ τῶν διαστημάτων προστεχνησάμενοι τὴν εὕρεσιν αὐτῶν].

Τὰς δέκα ὡς ἄνω ἀναλογίας ἐκθέτει ὡς ἑξῆς ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ (R. Hoche, σελ. 144) :

«*Ἐπὶ κεφαλαίου τοίνυν οἱ τῶν δέκα ἀναλογιῶν ὅροι ἐκκείσθωσαν ὑφ' ἓν παράδειγμα πρὸς τὸ εὐσύνοπτον*».

πρώτης	α,	β,	γ
δευτέρας	α,	β,	δ
τρίτης	γ,	δ,	ς
τετάρτης	γ,	ε,	ς
πέμπτης	β,	δ,	ε
ἕκτης	α,	δ,	ς
ἑβδόμης	ς,	η,	ϑ
ὀγδόης	ς,	ζ,	ϑ
ἐνάτης	δ,	ς,	ζ
δεκάτης	γ,	ε,	η.

Ἑρμηνεύει δὲ καταλλήλως ὁ Νικόμαχος τὸν σχηματισμὸν ἑκάστης ἀναλογίας χρησιμοποιῶν ὡς παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς.

Κατὰ σημερινὴν διατύπωσιν, ἂν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς a, b, c, ὅπου $a > b > c$, αἱ δέκα ἀναλογίαι εἶναι αἱ κάτωθι :

1. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$, ἢ $a-b=b-c$, $a+c=2b$, ἀριθμητικὴ

2. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ ἢ $= \frac{b}{c}$, $ac=b^2$, γεωμετρικὴ

3. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, $b=\frac{2ac}{a+c}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, ἁρμονικὴ

4. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{a}$, $\frac{a^2+c^2}{a+c} = b$

5. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{b}$, $a=b+c-\frac{c^2}{b}$

6. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{b}{a}$, $c=a+b-\frac{a^2}{b}$

7. $\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{c}$, $c^2=2ac-ab$

8. $\frac{a-c}{a-b} = \frac{a}{c}$, $a^2+c^2=a(b+c)$

9. $\frac{a-c}{b-c} = \frac{b}{c}$, $b^2+c^2=c(a+b)$

10. $\frac{a-c}{a-b} = \frac{b}{c}$, $a=b+c$.

[Σ η μ ε ί ω σ ι ς : Οἱ ἀριθμοὶ τῆς (ἐξ ἀριστερῶν) τρίτης στήλης τῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων τοῦ Νικομάχου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ a τῆς ἀνωτέρω συγχρόνου διατυπώσεως, οἱ τῆς δευτέρας στήλης εἰς τὸ b καὶ οἱ τῆς πρώτης εἰς τὸ c].

Ὁ Νικόμαχος γράφει, ὅτι τὴν ὀνομασίαν τῆς τρίτης ἀναλογίας, (τὴν ἁρμονικήν), τινὲς τὴν ἀποδίδουν εἰς τὸν Φιλόλαον (Τινὲς δὲ αὐτὴν ἁρμονικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν ἀκολούθως Φιλολάῳ ἀπὸ τοῦ παρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἁρμονίᾳ . . .), (R. HOCHE, σελ. 135, 10), ἐν ᾧ ὁ Ἰάμβλιχος, ἀναφέρει, ὅτι ἡ ὀνομασία τῆς τρίτης ἀναλογίας εἰς ἁρμονικὴν ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου καὶ τοῦ Ἱππάσου. Καὶ διὰ μὲν τὸν Ἵππασον δὲν ὑπάρχει ἄλλη συναφὴς ἐπιβεβαιωτικὴ πληροφορία, ἐν ᾧ διὰ τὸν Ἀρχύταν ὑπάρχει ἡ μαρτυρία τοῦ Πορφυρίου (Εἰς Πτολεμαίου Ἁρμονικὰ σ. 82, H. Diels, Fragmente d. Vor. I σελ. 435, 1951) ἔχουσα ὡς ἑξῆς :

«μέσαι δὲ ἐντι τρεῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἂν καλέοντι ἁρμονικάν. ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι

τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτᾳ <τᾷ> ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἂν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι <τοῖοι· ᾧ> ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει· γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον».

Ἑ ρ μ η ν ε ί α : Εἰς δὲ τὴν μουσικὴν ὑπάρχουν τρεῖς ἀναλογίαι, μία μὲν ἀριθμητική, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρική, τρίτη δὲ ἡ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦσιν ἁρμονικήν. Ἡ ἀριθμητικὴ μὲν ὅταν ὑπάρχουν τρεῖς ἐν συνεχείᾳ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ (ἀνὰ δύο, ἐν συνεχείᾳ) ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ὅ,τι δηλ. ὑπερέχει ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, τόσον ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου. Καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν συμβαίνει, ὥστε τὸ (μουσικὸν) διάστημα τῶν μεγαλυτέρων ὅρων (ἀριθμῶν) νὰ εἶναι μικρότερον, τὸ δὲ τῶν μικροτέρων ὅρων νὰ εἶναι μεγαλύτερον. Ἡ γεωμετρικὴ δὲ ὅταν εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. Οἱ μεγαλύτεροι δὲ ἐκ τούτων ἔχουν τὸ αὐτὸ διάστημα, ὅπως καὶ οἱ μικρότεροι. Ἡ δὲ ὑπεναντία, τὴν ὁποῖαν καλοῦμεν ἁρμονικήν, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου κατὰ τόσον ἰδικόν του (τοῦ πρώτου) μέρος, τόσον ἰδικόν του μέρος ὁ μέσος ὑπερέχει τοῦ τρίτου. Γίνεται δὲ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν τὸ διάστημα τῶν μεγαλυτέρων μεγαλύτερον, τὸ δὲ τῶν μικροτέρων μικρότερον.

Ἂν δηλ. ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοὶ $a>b>c$ ὑπάρχει κατὰ τὸν Ἀρχύταν ἁρμονικὴ ἀναλογία ὅταν $a=b+\frac{a}{n}$ (ὁ a ὑπερέχει τοῦ b κατὰ μέρος αὐταύτου, κατὰ κλάσμα τοῦ ἑαυτοῦ του, δηλ. τοῦ a ($n=2, 3, 4, \ldots$) καὶ $b=c+\frac{c}{n}$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $a-b=\frac{a}{n}$ καὶ $b-c=\frac{c}{n}$. Καὶ διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$, ἐκ ταύτης δὲ εἶναι

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}, \text{ ἢ } \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b} \quad (1), \text{ ἐξ ἧς } b=\frac{2ac}{a+c} \text{ εἶναι}$$

τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν a, c. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἁρμονικὴν ἀναλογίαν θέσωμεν $a=12$, $c=6$ θὰ ἔχωμεν $b=8$ ὡς ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12. Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι 9. Ἐκ τῶν τεσσάρων ὅμως τούτων ἀριθμῶν 6, 8, 9, 12 σχηματίζεται ἡ μουσικὴ ἀναλογία $6 : 8 = 9 : 12$ ἐκ τῆς ὁποίας ὁ Πυθαγόρας κατεσκεύασε τὴν μουσικὴν Πυθαγόρειον κλίμακα.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος b καὶ φωτεινὸν ἀντικείμενον κείμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ κατόπτρου (ἔστω πέρα τοῦ κέντρου καμπυλότητος) εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, ἐν ᾧ τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν c ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ τρία ταῦτα μεγέθη ἐκφράζεται διὰ τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, ἤτοι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου. Δυνάμεθα δηλονότι νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ μαθηματικὸς νόμος καθ' ὃν σχηματίζονται τὰ εἴδωλα τῶν φωτεινῶν ἀντικειμένων εἰς τὸν ὀφθαλμὸν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν νόμον καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ φθόγγοι τῆς μουσικῆς, ἐφ' ὅσον τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι εἷς ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ἐκ τῆς ὁποίας κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

T. Heath, A history of Greek Mathematics.

O. Becker—J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik.

J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Sammlung Göschen, 1. Teil, 2. Auflage, 1963.

W. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, 1956, Basel—Stuttgart.

Paul—Henri Michel, De Pythagore a Euclide, Paris, 1950.

Πάππου, Συναγωγὴ III σ. 102, Hultsch.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1963

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ κείμενον τῆς παρούσης ἐκδόσεως τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου στηρίζεται εἰς τὴν δίτομον ἔκδοσιν τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery (B.C. Teubner, Λειψία 1893). Εἰς τὸν πρῶτον τόμον τῆς ἐκδόσεως ταύτης περιλαμβάνονται τὰ 6 περισωθέντα βιβλία ἐκ τῶν 13, ἅτινα εἶχε γράψει ὁ Διόφαντος, ὡς καὶ 4 θεωρήματα τῆς πραγματείας του Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν μετὰ ἐλαχίστου μέρους τῆς θεωρίας τούτων ἄνευ ἀριθμήσεως. Εἰς τὸν δεύτερον τόμον περιλαμβάνονται διάφοροι μαρτυρίαι περὶ τοῦ Διοφάντου, ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα καὶ σχόλια τινα εἰς τὰ 'Αριθμητικὰ συνταχθέντα ὑπὸ τῶν Βυζαντινῶν λογίων Μιχαὴλ Ψελλοῦ (11ος αἰών), Γεωργίου Παχυμέρη (13ος αἰὼν) καὶ Μαξίμου Πλανούδη (13ος αἰών), ὡς καὶ ἄλλων σχολιαστῶν διασωθέντα ἀνωνύμως. Τὸ τελευταῖον σχόλιον τοῦ δευτέρου τόμου ἀφορᾷ εἰς τὸ 8ον θεώρημα τοῦ 2ου βιβλίου, ὅπου ζητεῖται ὅπως δοθεὶς τετράγωνος ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς.

Ἡ ψυχή σου Διόφαντε εἴη μετὰ τοῦ Σατανᾶ
ἕνεκα τῆς δυσκολίας τῶν τε ἄλλων σου θεωρημάτων
καὶ δὴ καὶ τοῦ παρόντος θεωρήματος.

Ἄλλο σχόλιον μνημονεῦον ὅτι τὰ 'Αριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου περιέχονται εἰς 13 βιβλία τελειώνει ὡς ἑξῆς·

τὸ φιλοσοφεῖν ἄρα διὰ τῶν μαθημάτων· (δηλ. μαθηματικῶν).
Γέρων ἐρασθεὶς ἐσχάτη κακὴ τύχη
Βίος βίου δεόμενος οὐκ ἔστι βίος.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν περιελήφθη τὸ κείμενον τοῦ πρώτου τόμου τῆς ἐκδόσεως P.Tannery, τὰ ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα ἐκ τοῦ δευτέρου τόμου, μετάφρασις τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν νέαν 'Ελληνικὴν καὶ ἐπεξηγήσεις τῶν προβλημάτων τῶν 'Αριθμητικῶν καὶ τῶν προτάσεων περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. Περὶ τῶν κωδίκων ἐκ τῶν ὁποίων ἐλήφθη τὸ κείμενον ὁμιλεῖ ὁ P. Tannery. Τοῦτο διετηρήσαμεν ἀμετάβλητον πλὴν ἐλαχίστων τυπογραφικῶν παροραμάτων. Εἰς τὸ 5ον βιβλίον παρενεβάλομεν τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν ἀρχαῖον κείμενον 4 ἐλλειπόντων προβλημάτων (19, 19α, 19β, 19γ), ὅπερ ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον εἰς τὸ περιοδικὸν « Πλάτων » τῆς Ἑταιρείας τῶν Ἑλλήνων φιλολόγων (Ἔτος ΙΓ'-1961, Τεύχη Α καὶ Β 25)26 σελ. 125 - 137).

Ὁ Βίος τοῦ Διοφάντου

Περὶ τοῦ βίου τοῦ Διοφάντου ἐλάχιστα εἶναι γνωστά. Γνωρίζομεν ὅτι ἦτο Ἕλλην μαθηματικὸς ἀκμάσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ὅτι νυμφευθεὶς ἀπέκτησε υἱὸν καὶ ὅτι ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 84 ἐτῶν. (Ἴδε ἀριθμητ. ἐπίγραμμα ὑπ' ἀριθ. 24). Περὶ τοῦ χρόνου καὶ τοῦ τόπου τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου αὐτοῦ οὐδὲν εἶναι γνωστόν. Ἡ ἐποχὴ τῆς ἀκμῆς του τοποθετεῖται μετὰ μεγάλης πιθανότητος περὶ τὸ ἔτος 250 μ.χ. Περὶ τούτου συνηγορεῖ χωρίον τι τοῦ Μιχαὴλ Ψελλοῦ περιεχόμενον εἰς τὸν 2ον τόμον τῆς Ἐκδόσεως P. Tannery ἔχον οὕτω : « Περὶ δὲ τῆς αἰγυπτιακῆς μεθόδου ταύτης Διόφαντος μὲν διέλαβεν ἀκριβέστερον, ὁ δὲ λογιώτατος Ἀνατόλιος τὰ συνεκτικώτατα μέρη τῆς κατ' ἐκεῖνον ἐπιστήμης ἀπολεξάμενος ἑτέρως Διοφάντῳ συνοπτικώτατα προσεφώνησε ». [Ἑρμηνεία : Περὶ δὲ τῆς αἰγυπτιακῆς ταύτης μεθόδου (τῆς ἐφαρμοζομένης δηλ. ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων τῆς Ἀλεξανδρείας), ὁ μὲν Διόφαντος ἔγραψεν ἀκριβέστερον, ὁ δὲ λογιώτατος Ἀνατόλιος συλλέξας τὰ σπουδαιότερα μέρη τῆς μαθηματικῆς ἐκείνης ἐπιστήμης τὰ διετύπωσε συνοπτικώτατα κατ' ἄλλον τρόπον ἢ ὁ Διόφαντος]. Πρόκειται ἐνταῦθα περὶ τοῦ συμβολισμοῦ τῶν δυνάμεων, περὶ ὧν ὁ Διόφαντος γράφει εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του. Ὁ Ἀνατόλιος ἦτο λόγιος καὶ μαθηματικὸς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ τὸ πρῶτον, γενόμενος κατόπιν Ἐπίσκοπος Λαοδικείας περὶ τὸ 270. Ἐὰν πρόκειται περὶ τοῦ Ἀνατολίου τούτου, τὸν ὁποῖον μνημονεύει καὶ ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν μικρὰν πραγματείαν του Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς (Ἔκδ. Victorius de Falco, Teubner 1922) εἶναι λογικὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Διόφαντος ἤκμασε πρὸ τοῦ Ἀνατολίου. Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ Διόφαντος εἶναι νεώτερος τοῦ μαθηματικοῦ Ὑψικλέους (1ος αἰὼν π.χ.), τὸν ὁποῖον μνημονεύει εἰς τὴν πραγματείαν του περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν καὶ ἀρχαιότερος τῆς μαθηματικοῦ Ὑπατίας (†412μ.χ.), ἡ ὁποία, ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ Σουΐδας, εἶχε γράψει σχόλια εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (ἀπολεσθέντα). (Λεξικὸν Σουΐδα, Ὑπατία).

Αἱ πραγματεῖαι τοῦ Διοφάντου

Ἐκτὸς τῶν Ἀριθμητικῶν καὶ τῶν περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν ὁ Διόφαντος εἶχε γράψει καὶ ἄλλας δύο μαθηματικὰς πραγματείας (ἀπολεσθείσας). Ἡ μία ἔφερε τὸν τίτλον Πορίσματα καὶ λαμβάνομεν γνῶσιν τῆς ὑπάρξεώς της ἐκ τοῦ ἰδίου τοῦ Διοφάντου (Ἴδε προβλήματα 3, 4, 5, 16 τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν). Εἰς τὰ προβλήματα 3 καὶ 4 τοῦ 5ου βιβλίου λέγει ὅτι, ἐὰν

$\psi + \lambda = \alpha^2$ καὶ $z + \lambda = \beta^2$, ἡ παράστασις
$\psi z + \lambda$ εἶναι τετράγωνος, ἐὰν $\alpha = \beta \pm 1$ καὶ

ὅτι τοῦτο διδάσκεται εἰς τὰ Πορίσματα.

Εἰς τὸ πρόβλημα 5 τοῦ 5ου βιβλίου χρησιμοποιεῖ τὰς κάτωθι ταὐτότητας, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις ἔχει γίνει εἰς τὴν πραγματείαν του Πορίσματα:

Ἐὰν δοθῶσι δύο διαδοχικοὶ τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ σχηματίσωμεν τρίτον ἀριθμόν, ὅστις νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῶν δοθέντων σὺν δύο, ἰσχύουσιν αἱ ταὐτότητες

1) Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο σὺν τὸ ἄθροισμά των εἶναι τετράγωνος ἀριθμὸς καὶ

2) Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο σὺν τὸν τρίτον ἀριθμὸν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ἤτοι ἐὰν οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α^2 καὶ $(\alpha+1)^2$ καὶ σχηματίσωμεν τρίτον ἀριθμὸν τὸν $2[\alpha^2 + (\alpha+1)^2] + 2 = 4(\alpha^2+\alpha+1)$ ἰσχύουσιν αἱ κάτωθι 6 σχέσεις.

I

1. $\alpha^2(\alpha+1)^2 + \alpha^2 + (\alpha+1)^2 = (\alpha^2+\alpha+1)^2$
2. $\alpha^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + \alpha^2 + 4(\alpha^2+\alpha+1) = (2\alpha^2+\alpha+2)^2$
3. $(\alpha+1)^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + (\alpha+1)^2 + 4(\alpha^2+\alpha+1) = (2\alpha^2+3\alpha+3)^2$

II

4. $\alpha^2(\alpha+1)^2 + 4(\alpha^2+\alpha+1) = (\alpha^2+\alpha+2)^2$
5. $\alpha^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + (\alpha+1)^2 = (2\alpha^2+\alpha+1)^2$
6. $(\alpha+1)^2 . 4(\alpha^2+\alpha+1) + \alpha^2 = (2\alpha^2+3\alpha+2)^2$.

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα 16 τοῦ 5ου βιβλίου χρησιμοποιεῖ τὴν πρότασιν, τὴν ὁποίαν ἔχει λάβει ἐκ τῶν Πορισμάτων, καθ' ἣν ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο κύβων..

Ἡ ἄλλη ἀπολεσθεῖσα πραγματεία τοῦ Διοφάντου ἔφερε τὸν τίτλον Μοριαστικὰ (δηλ. περὶ μορίων = περὶ κλασμάτων). Περὶ τῆς ὑπάρξεως ταύτης λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τοῦ Ἰαμβλίχου (H. Pistelli 127, 11).

Ὁ Διόφαντος ἔγραψε τὰ Ἀριθμητικά του 500 περίπου ἔτη μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου συγγραφὴν τῶν Στοιχείων. Εἰς τὸ διάστημα τῶν 500 ἐτῶν ὁ Εὐκλείδης καὶ τὰ Στοιχεῖα του εἶχον καταστῆ θρῦλος. Ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος, ὁ Πάππος, ὁ Μενέλαος καὶ ὁ Πτολεμαῖος καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι μεγάλοι μαθηματικοὶ ἐχρησιμοποίουν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἀληθείας ὡμολογημένας.

Ὅθεν εἶναι εὐνόητος ἡ σκέψις τοῦ Διοφάντου νὰ περιλάβῃ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀλγέβρας τῶν Ἑλλήνων εἰς 13 βιβλία, ὡς εἶχε πράξει ὁ Εὐκλείδης περιλαβὼν εἰς 13 βιβλία τὰ στοιχεῖα ἐν γένει τῶν μαθηματικῶν.

Ἀναγράφει δὲ ὁ ἴδιος εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του, ὅτι ταῦτα περιέχονται εἰς 13 βιβλία. Ἐκ τούτων διεσώθησαν μόνον τὰ πρῶτα 6, ἐν ᾧ τὰ ὑπόλοιπα 7 ἀπωλέσθησαν. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ περισωθέντα 6 βιβλία ἀπετέλουν τὴν συνήθη ὕλην διδασκαλίας εἰς Ἀνωτάτας Σχολὰς καὶ δι' αὐτὸ περιεσώθησαν, ὡς εὑρισκόμενα εἰς διαρκῆ χρῆσιν. Θεωροῦμεν ὅμως λογικὸν ὅτι τὰ ἀπολεσθέντα βιβλία θὰ ἀπετέλουν συνέχειαν τῶν διασωθέντων. Τοὐλάχιστον τὸ 7ον βιβλίον ἔπρεπε νὰ ἀσχολῆται μὲ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ τὴν ὁποίαν ἀσχολεῖται καὶ τὸ 6ον βιβλίον. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψει, τὸ μὲν ὅτι ὁλόκληρον τὸ 10ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (115 θεωρήματα) ἀσχολεῖται μὲ τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου δι' ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, τὸ δὲ ὅτι ὁ Διόφαντος εἰς τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων του χρησιμοποιεῖ πάντοτε ῥητὰς εὐθείας δικαιολογεῖται τὸ συμπέρασμα, ὅτι εἶναι λίαν πιθανὸν τὰ ἀπολεσθέντα 7 βιβλία νὰ ἠσχολοῦντο μὲ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ ῥητῶν εὐθειῶν. Ὁπωσδήποτε ὅμως οὐδὲν τεκμήριον ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τοῦ περιεχομένου τῶν ἀπολεσθέντων 7 βιβλίων.

Ἐκ τῆς σπουδῆς τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν Ἀριθμητικῶν συνάγεται μετὰ πολλῆς πιθανότητος τὸ συμπέρασμα, ὅτι ταῦτα δὲν περιεσώθησαν ὡς ἐγράφησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ Διοφάντου. Εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνηγορεῖ, ἐκτὸς ἄλλων, καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ τέλος τῶν προτάσεων δὲν εἶναι ὁμοιόμορφον, ὅπως τοῦτο παρατηρεῖται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου μὲ τὰς τελικὰς φράσεις «ὅπερ ἔδει δεῖξαι» ἢ «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι».

Ὁ ἀλγεβρικὸς συμβολισμὸς τοῦ Διοφάντου

Τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου εἶναι τὸ ἀρχαιότερον ἑλληνικὸν βιβλίον ἀλγέβρας εἰς τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται ἐξισώσεις πρὸς λύσιν προβλημάτων. Ὁ ἄγνωστος παρίσταται διὰ συμβόλου ὁμοιάζοντος πρὸς τὸ στίγμα (ϛ). Τὸ αὐτὸ σύμβολον χρησιμοποιεῖται διὰ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τοῦ αὐτοῦ προβλήματος καὶ ὄχι διάφορα σύμβολα. Οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζονται, ὡς γνωστόν, διὰ γραμμάτων. Ἡ ἐν σειρᾷ παράταξις αὐτῶν δηλοῖ πρόσθεσιν. Ὁ κανὼν διὰ τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὑποδηλοῦται μόνον διὰ δύο παράγοντας, πρᾶγμα ἀρκετὸν δι' ὁσουσδήποτε παράγοντας. Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου Δ^{Y} ἤτοι διὰ τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου γράμματος τῆς λέξεως Δύναμις ἐχούσης ὡς ἐκθέτην (ὄχι ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐκθέτου) τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως, τὸ ὕψιλον. $\Delta^{Y}\Delta$ σημαίνει δύναμις δυνάμεως ἤτοι ἡ τετάρτη δύναμις ἀριθμοῦ. Εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, κατ' ἐπαγωγήν, ὅτι $\Delta^Y \Delta\Delta$ θὰ ἐσήμαινε τὴν 6ην δύναμιν ἀριθμοῦ κλπ., τοιοῦτος ὅμως συμβολισμὸς δὲν ἔχει διασωθῆ. Ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου ἐκπεφρασμένου εἰς δύναμιν τινα τίθεται πάντοτε δεξιὰ τοῦ συμβόλου τοῦ δηλοῦντος τὴν δύναμιν π.χ. $\Delta^Y \alpha = \chi^2$, $\Delta^Y \beta = 2\chi^2$, $\Delta^Y \gamma = 3\chi^2$, $\Delta^Y \Delta\alpha = \chi^4$, $\Delta^Y \Delta\beta = 2\chi^4$ κλπ.

Ἡ τρίτη δύναμις, ὁ κύβος τοῦ ἀγνώστου παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου K^Y ἤτοι τοῦ ἀρχικοῦ Κεφαλαίου γράμματος τῆς λέξεως Κύβος ἔχοντος ὡς ἐκθέτην τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως τὸ ὕψιλον. $K^Y K$ σημαίνει κύβος εἰς τὸ τετράγωνον. Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου τίθενται δεξιὰ τοῦ συμβόλου.

πχ. $K^Y \alpha = \chi^3$, $K^Y \beta = 2\chi^3$, $K^Y \gamma = 3\chi^3$, $K^Y K\alpha = \chi^6$, $K^Y K\beta = 2\chi^6$ κλπ. Εἶναι φανερὸν ὅτι $K^Y KKKK\alpha$...σημαίνει $\chi^3 \cdot \chi^3 \cdot \chi^3 \cdot \chi^3 \cdot \chi^3 \ldots$

Ἐὰν δεξιὰ συμβόλου διὰ τὴν δύναμιν τοῦ ἀγνώστου, ὡς ἐκθέτης εἶναι ἓν χὶ ἀποκλίνον τοῦ συνήθους τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ παράστασις εἶναι παρανομαστὴς κλάσματος. πχ.

$$\Delta^{Y\times}\eta = \frac{8}{x^2},\ \Delta^Y\eta^{\times} = \frac{1}{8x^2},\ \Delta^Y\varepsilon^{\times}\theta = \frac{9}{5x^2},\ K^{Y\times}\iota = \frac{10}{x^3}$$

$$K^Y K\iota^{\times} = \frac{1}{10x^6},\ K^Y K\iota^{\times}\eta = \frac{8}{10x^6}$$

Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι ἀριθμητὴς καὶ ἔχει παρανομαστὴν πολυώνυμον λέγεται ἀριθμὸς τάδε ἐν μορίῳ τάδε. π.χ.

$\dfrac{16}{x^4 + 36 + 12x^2}$ λέγεται $\dot{M}\iota\varsigma$ (μονάδες 16) ἐν μορίῳ $\Delta^Y \Delta \dot{M} \lambda\varsigma \Delta^Y \iota\beta$.

Τὸ γράμμα $\dot{M}$ (ἢ μ°) σημαίνει μονάδες καὶ τίθεται πρὸ τοῦ γράμματος τοῦ δηλοῦντος ἀριθμόν τινα.

Εἰς τὰ προβλήματα τῶν Ἀριθμητικῶν δὲν χρησιμοποιοῦνται δυνάμεις μεγαλύτεραι τῆς ἕκτης. Ὁ Μιχαὴλ Ψελλὸς ὅμως (Ἀρχαὶ 11ου αἰῶνος ἐν Κων)πόλει) διὰ τῶν σχολίων του (ΙΙ τόμος τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου σελ. 37 - 38, ὑπὸ P. Tannery) πληροφορεῖ ἡμᾶς, ὅτι ἦτο γνωστὴ ἡ ἔκφρασις ὁσονδήποτε μεγάλης δυνάμεως. Οὕτω, λέγει, « $4 \cdot 8 = 32$. Ὁ 32 καλεῖται πρῶτος ἄλογος (διότι οὔτε τετράγωνος οὔτε κύβος εἶναι) καὶ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς π έ μ π τ ο ς (δηλ. ἡ 5η δύναμις τοῦ 2).

Δύναμις ἐπὶ ἄλογον πρῶτον ἴσον ἄλογος δεύτερος (ἤτοι $\alpha^2 . \alpha^5 = \alpha^{2+5} = \alpha^7$), ὅστις καλεῖται ἀ ρ ι θ μ ὸ ς ἕ β δ ο μ ο ς (εἶναι σαφὲς ὅτι πρόκειται διὰ τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.). Τετραπλῆ δύναμις καλεῖται, ὅταν ὁ κυβόκυβος (δηλ. α^6) πολ)σθῇ ἐπὶ δύναμιν (δηλ. α^2), ὁπότε $\alpha^6 \cdot \alpha^2 = \alpha^{6+2} = \alpha^8 = \alpha^{2+2+2+2}$, ἤτοι ὁ ἐκθέτης 8 εἶναι ἄθροισμα τεσσάρων 2. (Κατ' ἀναλογίαν ἕπεται τί εἶναι πενταπλῆ δύναμις, ἑξαπλῆ κλπ.).

Δύναμις ἐπὶ ἄλογον δεύτερον ἴσον κύβος ἐξελικτὸς (ἤτοι $\alpha^2 \cdot \alpha^7 = (\alpha^3)^3 = \alpha^9$. Ἐνταῦθα ἐννοεῖ τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν $3 \cdot 3$. Ταῦτα δύνανται νὰ εἶναι καὶ παρονομασταὶ κλασμάτων».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρων σχολίων τοῦ Ψελλοῦ βλέπομεν πῶς ἐσχηματίζοντο αἱ περιττῆς τάξεως δυνάμεις ἀριθμοῦ τινος καὶ τὰς ὀνομασίας αὐτῶν. Ἀριθμὸς πέμπτος, ἕβδομος, ἔνατος, ἐνδέκατος κλπ. τοῦ ἀριθμοῦ α νοεῖται ὁ α^5, α^7, α^9, α^{11}....Διὰ τὰς δυνάμεις ἀρτίας τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ α συνάγεται ὁ κανὼν ἐκ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος τῆς τετραπλῆς δυνάμεως. Ὁ συμβολισμὸς τούτου εἶναι $\Delta^Y \Delta\Delta\Delta$...ἤτοι $\alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^2$... Δὲν ἐσώθησαν ὅμως προβλήματα, ὅπου νὰ ὑπάρχῃ δύναμις μεγαλυτέρα τῆς ἕκτης.

Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ αἱ ῥηταὶ λύσεις.

Οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ αἱ δι' αὐτῶν πράξεις εἶναι γνωστὰ εἰς τὸν Διόφαντον. Ὁ θετικὸς ἀριθμὸς καλεῖται ὕπαρξις, ἐνῷ ὁ ἀρνητικὸς καλεῖται λεῖψις. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν, λέγει, ὅτι λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν ποιεῖ ὕπαρξιν (πλὴν ἐπὶ πλὴν = σὺν) καὶ λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν (πλὴν ἐπὶ σὺν = πλὴν). Ὁ Διόφαντος ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου θέτει εἰς τινα προβλήματα περιορισμοὺς διὰ νὰ ἔχῃ θετικὰς μόνον λύσεις. Ἐπίσης ἀποφεύγει τὰς ἀσυμμέτρους (ἀρρήτους) τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Εἰς πλεῖστα προβλήματα χρησιμοποιεῖ τεχνάσματα διὰ τὴν εὕρεσιν ῥητῶν λύσεων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄξια θαυμασμοῦ.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ μέθοδοι τοῦ Διοφάντου

Τὰ προβλήματα τῶν Ἀριθμητικῶν εἶναι προβλήματα λυόμενα διὰ ἁπλῶν ἐξισώσεων ἢ διὰ ἀλγεβρικων συστημάτων. Αἱ εἰς ταῦτα χρησιμοποιούμεναι ἐξισώσεις εἴτε εἶναι πρώτου βαθμοῦ, εἴτε δευτέρου, εἴτε ἀνάμικτοι. Μέγας ἀριθμὸς προβλημάτων εἶναι ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως εἴτε πρώτου βαθμοῦ εἴτε δευτέρου. Εἰς μίαν καὶ μόνην περίπτωσιν ὑπάρχει τριτοβάθμιος ἐξίσωσις (VI,17). Ἡ συνήθης μέθοδος ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος εἶναι ἡ τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἡ χρησιμοποίησις βοηθητικοῦ ἀγνώστου γίνεται πολλάκις. Ἡ λύσις τῆς ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ θεωρεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου γνωστὴ καὶ ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦτο γίνεται ἡ χρησιμοποίησίς της. Πολὺ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι συναληθεύουσι (διπλοϊσότης II,11) καὶ ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως συστήματος ἐξισώσεων, ἥτις καλεῖται παρισότητος ἀγωγὴ (μέθοδος προσεγγίσεως, V,9,11). Ἐκεῖ ὅπου γίνεται χρησιμοποίησις μεγίστης ἢ ἐλαχίστης τιμῆς ἑνὸς ἀγνώστου βλέπει κανεὶς μὲ θαυμασμὸν τὰς ἀλγεβρικὰς γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἰδιαιτέρως σημειοῦμεν τὴν μέθοδον ἀναλύσεως τετραγώνου ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων (II,8) καὶ τὴν μετατροπὴν τοῦ ἀθροίσματος δύο τετραγώνων εἰς ἄθροισμα ἄλλων δύο τετραγώνων (11,9). Ἐπὶ τοῦ τελευταίου τούτου ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν τί γράφει ὁ Thomas Heath εἰς τὴν ἔκδοσιν του τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Diophantus of Alexandria 1910, σελ. 145 : «Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου εἶναι αἰσθητῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ Ὄϊλερ (Euler) καίτοι ἡ τελευταία αὕτη ἐκφράζεται γενικώτερον» «Diophantus' solution is substantially the same as Eulers (Algebra, tr. Hewlett, Part II. Art 219). Δηλαδὴ ὁ Euler ἐχρησιμοποίησε τὴν λύσιν τοῦ Διοφάντου.

Τέλος ἡ μέθοδος κατασκευῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ ρητῶν μεγεθῶν εἶναι ἀξία θαυμασμοῦ καὶ μαρτυρεῖ περὶ σπουδαίων γνώσεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ περίεργον εἶναι, ὅτι εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν προβλημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ζητοῦνται ἀκέραιαι λύσεις, ὅπως ζητοῦνται σήμερον (αἱ συναφεῖς ἐξισώσεις καλοῦνται Διοφαντικαί). Πιθανόν, ἡ ὀνομασία νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ προβλημάτων τῶν 7 ἀπολεσθέντων βιβλίων, ὅπου ἴσως νὰ ἐζητοῦντο ἀκέραιαι λύσεις.

Ἐὰν ἡ σπουδὴ τῶν προβλημάτων τοῦ Διοφάντου προκαλεῖ τὸν θαυμασμὸν διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, οὐχὶ μικρότερον θαυμασμὸν προκαλοῦσιν αἱ γνώσεις, τὰς ὁποίας ὁ Διόφαντος θεωρῶν γνωστὰς χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν δοθῶσι δύο ἀριθμοὶ (τὴν ταὐτότητα δηλ. $(2\mu\nu)^2 + (\mu^2 - \nu^2)^2 = (\mu^2 + \nu^2)^2$).

Τὰ σχόλια ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν

Πρῶτος σχολιαστὴς τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου θεωρεῖται ἡ ὑπὸ τοῦ Βυζαντινοῦ λεξικογράφου Σουΐδα μνημονευομένη μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος Ὑπατία, θυγάτηρ τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἡ ὁποία κατὰ τὸ 412 ἐλιθοβολήθη ὑπὸ τοῦ εὐσεβοῦς μὲν ἀλλὰ θρησκολήπτου ὄχλου τῆς Ἀλεξανδρείας, ὡς Ἐθνική. Τὰ σχόλια ταῦτα δὲν ἐσώθησαν. Ἐκ τῶν Ἑλλήνων σχολιαστῶν θεωροῦνται ἐπιφανέστεροι οἱ ἐν Κων)πόλει ἀκμάσαντες λόγιοι Μιχαὴλ Ψελλὸς (11ος αἰών), Γεώργιος Παχυμέρης (13ος αἰών) καὶ Μάξιμος Πλανούδης (13ος αἰών))

Τὰ ἔργα τοῦ Διοφάντου ἐμελέτησαν πολὺ καὶ ἐσχολίασαν ἀπὸ τοῦ 8ου αἰῶνος καὶ ἑξῆς οἱ Ἄραβες, ἰδίως οἱ ἐν Αἰγύπτῳ, διὰ τῶν ὁποίων ταῦτα ἐγένοντο γνωστὰ εἰς τὴν Ἱσπανίαν. Κατὰ τὴν ἐποχὴν περίπου ἐκείνην εἶχον εἰσαχθῆ εἰς Ἀραβίαν ἐκ τῶν Ἰνδιῶν οἱ συμβολισμοὶ τῶν ἀριθμῶν 1....9 μετὰ τοῦ συμβολισμοῦ τοῦ μηδενὸς (0), ὅστις ἀποδίδεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων εἰς τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον (B.L. van der Waerden, Erwachende Wissen schaft σελ. 41). Ὁ νέος συμβολισμὸς ἐβοήθησε πολὺ τοὺς Ἄραβας εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀλγέβρας. Βασικὰς ὅμως νέας ἀλγεβρικὰς προτάσεις ἐπινοηθείσας ὑπὸ τῶν Ἀράβων ἡμεῖς δὲν ἔτυχε νὰ γνωρίσωμεν, ὅπως δὲν ἔτυχε νὰ γνωρίσωμεν τὰ τῆς ἐπινοήσεως ἔστω καὶ ἑνὸς γεωμετρικοῦ θεωρήματος ἢ μιᾶς μαθηματικῆς προτάσεως ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων. Ἡ λέξις ὅμως ἄλγεβρα εἶναι ἀραβικῆς, ὡς γνωστόν, προελεύσεως.

Εἰς τὴν Ἰταλίαν ἡ ἄλγεβρα εἰσήχθη κατὰ τὸν 12ον αἰῶνα (ἡ ἑλληνικὴ δηλ. μὲ τὸν νέον ἀραβικὸν συμβολισμὸν) ὑπὸ τοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης (Fibonazzi), ὅστις εἶχε ταξιδεύσει εἰς τὴν ἐγγὺς Ἀνατολὴν καὶ εἶχε γνωρισθῆ μὲ πολλοὺς λογίους Ἕλληνας καὶ Ἄραβας (λίαν πιθανῶς ἦτο ἐκ τῶν Σταυροφόρων). Ἡ ἐν Ἰταλίᾳ ἐκδοθεῖσα ἄλγεβρά του περὶ τὰ μέσα τοῦ 13ου αἰῶνος εἶναι διαπεποτισμένη ἐκ τῶν προβλημάτων τοῦ Διοφάντου χωρὶς βεβαίως νὰ μνημονεύεται τοῦτο, οὔτε καὶ ὁ Διόφαντος.

Τὸ ὄνομα τοῦ Διοφάντου μνημονεύεται ἐν Εὐρώπῃ διὰ πρώτην φορὰν κατὰ τὸ 1464 ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ Regiomontanus (Ἰωάννου Müller), καταγομένου ἐκ τῆς πόλεως Königsberg τῆς Ἀνατολικῆς Πρωσσίας, εἰς ἐπιστολήν του πρὸς τὸν ἀστρονόμον τοῦ Δουκὸς τῆς Φερράρας Bianchini, ὅπου ἀναφέρεται, ὅτι εἰς τὴν Ἑνετίαν ἀνεκάλυψεν οὗτος μαθηματικὸν ἔργον τοῦ Ἕλληνος Διοφάντου μὴ μεταφρασθὲν ἀκόμη εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν. Ἐν τῷ μεταξὺ ἐδημοσιεύοντο ἐν Ἰταλίᾳ διάφορα ἐγχειρίδια ἀλγέβρας περιέχοντα προβλήματα τοῦ Διοφάντου χωρὶς ὅμως νὰ μνημονεύεται ὁ Διόφαντος. Κατὰ τὸ 1556 καὶ ὁ ἐπίσης Γερμανὸς μαθηματικὸς Ἰωακεὶμ Camerarius εἰς δημοσιευθεῖσαν ἐπιστολήν του ἐπισημαίνει τὴν ὕπαρξιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ, πλὴν ὅμως οὐδεμία προσπάθεια ἀνελήφθη πρὸς ἔκδοσίν των.

Κατὰ τὸ 1572 ὁ καλὸς Ἰταλὸς μαθηματικὸς Bombelli ἐδημοσίευσε τὴν περίφημον λεγομένην ἄλγεβράν του. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ταύτης γράφει, ὅτι ὁ φίλος του Ἀντώνιος Πάζης (Pazzi) τοῦ ἔδειξεν εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ ἓν Ἑλληνικὸν ἔργον ἐκδοθὲν ἀπὸ κάποιον Διόφαντον, ὁ ὁποῖος φαίνεται πολὺ καλὸς καὶ ὅτι ἐκ τοῦ ἔργου τούτου μετέφρασε μετὰ τοῦ Pazzi ἐκ τῶν 7 βιβλίων (Σημ. Παλαιοτέρα ἀρίθμησις τῶν 6 σωθέντων βιβλίων) τὰ 5. Εἰς τὴν ἄλγεβράν του αὐτὴν τὴν περίφημον, ὁ Bombelli περιέλαβε καὶ 143 προβλήματα (ἐκ τοῦ συνόλου τῶν 189 τῶν 6 βιβλίων τοῦ Διοφάντου) ὡς ἰδικά του, ἤτοι τὰ 35 ἐκ τῶν 39 τοῦ α′ βιβλίου, τὰ 27 ἐκ τῶν 35 τοῦ β′ βιβλίου, τὰ 21 ἐκ τῶν 21 ἤτοι τὸ σύνολον τοῦ γ′ βιβλίου, τὰ 40 ἐκ τῶν 40, ἤτοι τὸ σύνολον τοῦ δ′ βιβλίου καὶ τὰ 20 ἐκ τῶν 30 τοῦ ε′ βιβλίου. (Ἴδε P. ver Eecke, Diophante d' Alexandrie σελ. LXII - LXVII). Καὶ οὕτω πως ὁ Bombelli προήγαγεν ἐν Εὐρώπῃ τὴν ἄλγεβραν διὰ τῶν ἐπινοήσεών του.

Κατὰ τὸ 1575 ὁ Γερμανὸς Ἑλληνιστὴς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Heidelberg, Holzmann, ὅστις εἶχεν ἐξελληνίσει ἐξ ἀγάπης πρὸς τὴν Ἑλλάδα τὸ ὄνομά του εἰς Xylander (= Ξύλανδρος, Holz = ξύλον, mann = ἀνήρ) ἐδημοσίευσεν ἐν Γερμανίᾳ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου λατινιστὶ ἐξ Ἑλληνικοῦ χειρογράφου ἀνήκοντος εἰς τὸν ἐν Πολωνίᾳ Γερμανὸν πρεσβευτὴν Andreas Dudicius, τὸ ὁποῖον ἤδη εὑρίσκεται εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς παρὰ τὸ Αννόβερον γερμανικῆς Κωμοπόλεως Wolfenbüttel, ὅπου εὑρίσκεται καὶ τὸ χειρόγραφον τοῦ περιφήμου βοϊκοῦ προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους.

Τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Ἀριθμητικῶν μετὰ τοῦ ἐλαχίστου σωθέντος μέρους τῆς πραγματείας τοῦ Διοφάντου περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον τῷ 1621 ἐν Παρισίοις ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Claud Gaspar Bachet, Sieur de Méziriack, ἐκ χειρογράφου εὑρισκομένου ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῶν Παρισίων. Ὁ Bachet ἔκαμε καὶ σπουδαῖα σχόλια εἰς τὸν Διόφαντον καὶ οὕτω προήγαγε τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀλγέβρας. Εἶναι δὲ ὁ πρῶτος, ὅστις ἔλυσε τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \beta y = \gamma$. Τὰς συνεχεῖς ἐπιθέσεις τοῦ P. Fermat κατὰ τῶν ἐπὶ τοῦ Διοφάντου ἐργασιῶν τοῦ Bachet εὑρίσκομεν πάντη ἀδικαιολογήτους. Οὔτε εἶναι δυνατὸν νὰ συμφωνήσωμεν πρὸς τὸ θρυληθὲν δῆθεν «μέγα» θεώρημα τοῦ P. Fermat, καθ' ὃ δὲν ὑπάρχει λύσις τῆς ἐξισώσεως $z^3 = x^3 + y^3$, ἤτοι νὰ θεωρήσωμεν ὡς μέγα, ἁπλῶς τεθέν τι πρόβλημα δηλ. μίαν μὴ ἀποδειχθεῖσαν ἀρνητικὴν πρότασιν, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ ἐπίτευγμα τῆς ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου (530 π.Χ. περίπου) εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$, ἤτοι ἓν θετικὸν κατόρθωμα. Ἡ δευτέρα ἔκδοσις τοῦ κειμένου τῶν Ἀριθμητικῶν ἐγένετο πάλιν ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τοῦ υἱοῦ τοῦ P. Fermat τοῦ Samuel Fermat (Τουλούζη 1670) Αὕτη ὅμως ἦτο πλήρης σφαλμάτων. Ἡ τρίτη ἔκδοσις ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery ἐν Λειψίᾳ (B.C. Teubner) κατὰ τὸ 1893 (α' τόμος) καὶ κατὰ τὸ 1895 (β' τόμος, ὁ περιέχων τὰ σχόλια καὶ τὰ ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα). Ἡ παροῦσα ἔκδοσις εἶναι ἡ τετάρτη γενομένη ἔκδοσις τοῦ κειμένου ἐν Εὐρώπῃ καὶ ἡ πρώτη ἐν Ἑλλάδι διὰ τοῦ Τύπου.

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ Διοφάντου

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ Διοφάντου εἰς τὴν ἐξέλιξιν ἐν Εὐρώπῃ τῆς ἀλγέβρας καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν ὑπῆρξεν ἀποφασιστικῆς σημασίας. Διὰ τῶν Ἀράβων μετεδόθησαν εἰς τὴν Ἱσπανίαν αἱ πρῶται ἀλγεβρικαὶ γνώσεις αἱ προερχόμεναι ἐκ τῆς σπουδῆς καὶ τῶν σχολίων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἐν ᾧ διὰ τῶν Σταυροφόρων καὶ βραδύτερον διὰ τῶν εἰς τὴν Ἰταλίαν μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Κων)πόλεως καταφυγόντων λογίων μετεδόθησαν εἰς τὴν Εὐρώπην πλεῖσται ὅσαι ἑλληνικαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις. Ἀξιοσημείωτος εἶναι καὶ ἡ ἐν Ἰταλίᾳ ἐπίδρασις τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ Φραγκίσκου Μαυρολύκου, υἱοῦ Ἕλληνος ἰατροῦ ἐκ Κων)πόλεως, φυγόντος ἐκ ταύτης μετὰ τὴν ἅλωσιν. Σημειοῦμεν ἰδιαιτέρως τινὰς ἐκ τῶν νεωτέρων πως, οἱ ὁποῖοι ἐμελέτησαν μέ ἀγάπην καὶ ἀφοσίωσιν τὸν Διόφαντον. Οὗτοι εἶναι ὁ Xylander, ὁ Bachet, ὁ πατὴρ καὶ υἱὸς Fermat, ὁ Euler. Ὁ Πέτρος Φερμὰ (πατὴρ) ἔκαμε παρατηρήσεις εἰς ὅλα σχεδὸν τὰ προβλήματα τοῦ Διοφάντου, ἐν ᾧ ὁ Euler ἐνεπνεύσθη πολλὰς ἐκ τῶν μαθηματικῶν του ἀνακαλύψεων ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Ἐκ τῶν νεωτέρων ἐκδοτῶν καὶ μελετητῶν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ὀφείλομεν νὰ ἐξάρωμεν τοὺς F. Th. Poselger (Leipzig), Otto Schulz (Berlin), F. G. Nesselmann (Berlin), Thomas Heath (Cambridge), G. Wertheim (Leipzig), Paul ver Eecke (Bruges), Arthur Czwalina (Göttingen).

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ μῆνα Ἀπρίλιον 1963

Ε. Σ. Σταμάτης

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (IV, 39. V, 10, 11, 12, VI, ΛΗΜΜΑΤΑ 1, 2, ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12)

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΣΤ' (1964), τεύχη 31/32

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ & Σιας
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
Α Θ Η Ν Α Ι

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (IV, 39. V, 10, 11, 12, VI, ΛΗΜΜΑΤΑ 1, 2, ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12)

['Επὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς ἐκδόσεως παρ' ἡμῶν τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου (σελίδες 576), 'Ιούλιος 1964, 'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων 'Υπουργείου Παιδείας δημοσιεύομεν κατωτέρω ἀνάλυσιν προβλημάτων τινων ἐξ αὐτῶν].

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 39ον, IVου βιβλίου

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\omega > z > y$. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\omega-z}{z-y}=\rho,\ (1),\quad y+z=\alpha^2,\ (2),\quad z+\omega=\beta^2,\ (3),\quad y+\omega=\gamma^2,\ (4).$$

Λαμβάνει $\rho=3$ καὶ $y+z=\alpha^2=4$. Κατὰ συνέπειαν εἶναι $z>2$, ἀφοῦ $z>y$. Ἔστω $z=x+2$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει ἐκ τῆς (2), $y+x+2=4$, $y=2-x$, (5). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\omega-(x+2)=3[x+2-(2-x)]$, $\omega=7x+2$. Ἐκ τῆς (3) εἶναι $8x+4=\beta^2$, (6) καὶ ἐκ τῆς (4), $6x+4=\gamma^2$, (7). Αἱ ἐξισώσεις (6, 7), παρατηρεῖ, εἶναι συναληθεύουσαι (διπλοϊσότης). Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $2x=\beta^2-\gamma^2=(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)$. Ἀναλύει τὸν $2x$ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, $2x=\frac{x}{2}\cdot 4$ καὶ καλεῖ $\beta+\gamma=4$ καὶ $\beta-\gamma=\frac{x}{2}$ (μέθοδος διπλοϊσότητος). Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφιαρέσεως τούτων λαμβάνει

$$\beta=\frac{x}{4}+2,\quad \gamma=2-\frac{x}{4}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ β ἢ γ, διὰ τῆς τιμῆς του, εἰς τὴν (6) ἢ (7) ἀντιστοίχως λαμβάνει $x=112$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνεται $y<0$. Ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ὅθεν πρέπει νὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ x, ὥστε $0<x<2$ Ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ εἶναι ἐκ τῆς (7), $6x+4=\gamma^2<16$, (8), ἐν ᾧ ὅταν $x=2$ εἶναι $\gamma^2=16$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων $6x+4=\gamma^2$, $8x+4=\beta^2$, $\alpha^2=4$ ἔχομεν τρία τετράγωνα μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ σχέσις $8x+4<6x+4<4$, ἀφοῦ $0<x<2$. Ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι $2x$. Τοῦ δὲ μεσαίου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου εἶναι $6x$, ἤτοι ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ μεσαίου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρία τετράγωνα πληροῦντα τὰς σχέσεις αὐτάς, τῶν ὁποίων τὸ μικρότερον νὰ εἶναι 4, ἐπὶ πλέον δὲ τὸ μεσαῖον τῶν τετραγώνων τούτων νὰ εἶναι <16, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ θετικὴ λύσις. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ $\beta^2>\gamma^2>4$, ὅπου $\gamma^2<16$ Συμφώνως πρὸς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι

$$\beta^2-\gamma^2=\frac{1}{3}(\gamma^2-4),\ (9),\quad \text{ὅπου } \gamma^2<16,\ (10)$$

Λαμβάνει $\gamma=t+2$, $\gamma^2=t^2+4t+4$. Δι' ἀντικατασάσεως εἰς τὴν (9) εἶναι

$$\beta^2=\frac{4}{3}t^2+\frac{16}{3}t+4.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 9 εἶναι, τετράγωνος$=12t^2+48t+36$ καὶ διὰ διαιρέσεως διὰ 4 εἶναι, τετράγωνος$=3t^2+12t+9$, (11). Ἐκ τῆς (10) δι' ἀντι καταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ γ εἶναι $(t+2)^2<16$, $t+2<4$, $t<2$, (12). Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ t λαμβάνει δοκιμαστικῶς εἰς τὴν σχέσιν (11), $3t^2+12t+9=$τετράγωνος, ἔστω $=(3-\mu t)^2$, (13), ὅπου ὁ μ θὰ προσδιορισθῇ Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$$t=\frac{6\mu+12}{\mu^2-3}\cdot \text{ Καὶ ἐκ τῆς (12), } t=\frac{6\mu+12}{\mu^2-3}<2 \text{ ἢ } 6\mu+12<2\mu^2-6,\ 6\mu+18<2\mu^2.$$

Ἐπιλύοντες τὴν ἀνισότητα ταύτην κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου ἔχομεν

$$\mu^2-3\mu>9,\ \left(\mu-\frac{3}{2}\right)^2>\frac{9}{4}+9,\quad \mu-\frac{3}{2}>\frac{\sqrt{45}}{2},\ \mu>\frac{3+\sqrt{45}}{2},\ (14).$$

Ἀλλὰ $6<\sqrt{45}<7$. Ἐὰν λάβῃ ἀντὶ τῆς $\sqrt{45}$, τὸν 6, ἡ ἀνισότης (14) ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον καὶ θὰ εἶναι

$$\mu>4\frac{1}{2}\cdot \text{ Ἐὰν λάβῃ 7 ἀντὶ } \sqrt{45} \text{ θὰ εἶναι } \mu \geqq 5.$$

Λαμβάνει $\mu=5$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (13) γίνεται

$$3t^2+12t+9=(3-5t)^2,\ \text{ἐξ ἧς } t=\frac{21}{11}<2$$

Καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\gamma=t+2$, εἶναι δι' ἀντικαταστάσεως

$$\gamma=\frac{43}{11},\quad \gamma^2=\frac{1849}{121}.$$

Τώρα ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$$6x+4=\gamma^2=\frac{1849}{121},\ \text{ἐξ ἧς } x=\frac{1365}{726}<2.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $y=2-x=2-\frac{1365}{726}=\frac{87}{726}$, $z=x+2=\frac{2817}{726}$, $\omega=7x+2=\frac{11007}{726}$ ἢ

$$y=\frac{14\frac{1}{2}}{121},\ z=\frac{469\frac{1}{2}}{121},\ \omega=\frac{1834\frac{1}{2}}{121} \text{ ἢ } y=\frac{58}{484},\ z=\frac{1878}{484},\ \omega=\frac{7338}{484},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{\omega-z}{z-y}=\frac{5460}{1820}=3 \text{ καὶ } \omega+z=\left(\frac{96}{22}\right)^2,\ z+y=\left(\frac{44}{22}\right)^2,\ \omega+y=\left(\frac{86}{22}\right)^2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10ον Vου βιβλίου

Τὸ 10ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ἔχει ὡς ἑξῆς: Νὰ τμηθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μὲν δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ εἰς τὸ δέ, ἄλλος δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ἑκάστοτε τετράγωνος.

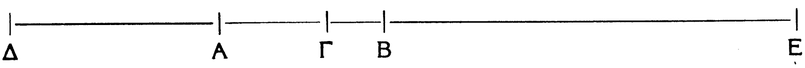
Ἔστωσαν τὰ κλάσματα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ μονὰς y καὶ z καὶ οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ α_1 καὶ α_2. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$y+z=1, \quad (1), \quad y+\alpha_1=\beta^2, \quad z+\alpha_2=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\alpha_1=2$ καὶ $\alpha_2=6$ ὁπότε εἶναι

$$y+2=\beta^2, \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad z+6=\gamma^2, \quad (3).$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ μοναδικὸν τῶν Ἀριθμητικῶν ὅπου χρησιμοποιοῦνται εὐθύγραμμα τμήματα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν



Ἔστω $AB=1$, $A\Gamma=y$, $\Gamma B=z$, $A\Delta=2$, $BE=6$, $A\Gamma+\Gamma B=1$.

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων ἕπεται, $\Delta E=9$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $\Delta\Gamma$=τετράγωνος, ΓE=τετράγωνος, ἤτοι ὁ 9 ($=\Delta E$) νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, τοὺς ΓΔ καὶ ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων, ὁ ΓΔ, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $A\Delta=2$ καὶ μικρότερος τοῦ $\Delta B=3$, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 9 εἰς δύο τετραγώνους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3. Ὅταν εὑρεθῇ ὁ τετράγωνος ΓΔ, δι' ἀφαιρέσεως ἀπ' αὐτοῦ, τοῦ ΑΔ εὑρίσκεται, λέγει, ὁ ΑΓ καὶ δι' ἀφαιρέσεως τούτου ἀπὸ τοῦ ΑΒ εὑρίσκεται ὁ ΒΓ.

Ἔστω ὁ εἷς τῶν τετραγώνων ὁ x^2, ὁπότε $2<x^2<3$, (4). Ὁ ἄλλος ζητούμενος τετράγωνος θὰ εἶναι $9-x^2$. Οὗτος ὑπολογίζεται κατὰ τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν (Ἰδὲ ΠΛΑΤΩΝ, ἔτος ΙΕ', 1963, τεύχη Α' καὶ Β'' 29/30, σελὶς 287). Ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, εἰς τὴν σχέσιν (4), λαμβάνει δύο τετραγώνους ἀριθμούς,

τὸν μὲν $\frac{289}{144}>2$, τὸν δὲ $\frac{361}{144}<3$ καὶ λέγει ὅτι ἐὰν κατασκευάσῃ $\frac{289}{144}<x^2<\frac{361}{144}$, θὰ λύσῃ τὸ ζητούμενον.

Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως εἶναι

$$\frac{17}{12}<x<\frac{19}{12}, \quad (5).$$

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου $(9-x^2)$ νὰ προσδιορισθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη (5). Θέτει κατὰ τὸ II, 8

$$9-x^2=(3-\mu x)^2, \quad (6)$$

ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως εἶναι $x=\frac{6\mu}{\mu^2+1}$, ὁπότε κατὰ τὴν (5) πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{17}{12}<\frac{6\mu}{\mu^2+1}<\frac{19}{12}.$$

Θεωρεῖ τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{17}{12} < \frac{6\mu}{\mu^2+1}$, τὴν ὁποίαν λύει κατὰ τὸν γνωστόν του τρόπον, ἤτοι

$$72\mu > 17\mu^2+17, \qquad 17^2\mu^2-17\cdot 72\mu < -17^2,$$

$$(17\mu-36)^2 < 36^2-17^2, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \mu < \frac{36+\sqrt{1007}}{17}.$$

Ἀλλὰ $31 < \sqrt{1007} < 32$. Θέτει

$$\mu \leqq \frac{36+31}{17} = \frac{67}{17}, \quad \left(\text{λέγων ὅτι ὁ } \mu \text{ δὲν εἶναι } > \frac{67}{17}\right).$$

Ἀκολούθως θεωρεῖ τὴν ἄλλην ἀνισότητα $\frac{6\mu}{\mu^2+1} < \frac{19}{12}$, τὴν ὁποίαν λύει ὁμοίως, ἤτοι

$$19\mu^2+19 > 72\mu, \qquad 19^2\mu^2-19\cdot 72\mu > -19^2,$$

$$(19\mu-36)^2 > 36^2-19^2, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \mu > \frac{36+\sqrt{935}}{19}.$$

Ἀλλὰ $30 < \sqrt{935} < 31$. Θέτει $\mu \geqq \frac{36+30}{19} = \frac{66}{19}$, (λέγων, ὅτι ὁ μ δὲν εἶναι $< \frac{66}{19}$).

Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{66}{19} \leqq \mu \leqq \frac{67}{17}$, λαμβάνει $\mu = 3\frac{1}{2}$ (κατὰ προσέγγισιν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν) καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν σχέσιν (6) ὁπότε λαμβάνεται

$$9-x^2 = \left(3-3\frac{1}{2}x\right)^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = \frac{84}{53} \quad \text{καὶ} \quad x^2 = \frac{7056}{2809}.$$

Τὰ ζητούμενα ἄρα κλάσματα τῆς μονάδος θὰ εἶναι

$$y = x^2-2, \quad \frac{7056}{2809}-2 = \frac{1438}{2809} \quad \text{καὶ} \quad z = 1-\frac{1438}{2809} = \frac{1371}{2809},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{1438}{2809} + \frac{1371}{2809} = 1.$$

[Σημείωσις: Ἐπειδὴ ὁ μ ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν $3\frac{1}{2}$, δὲν ἐπαληθεύεται ἡ σχέσις (5) ἐκ τῆς τιμῆς $x = \frac{84}{53}$, διότι εἶναι μὲν $\frac{17}{12} < \frac{84}{53}$, ὄχι ὅμως $\frac{84}{53} < \frac{19}{12}$. Τοῦτο δὲν ἐπηρεάζει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος].

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11ον

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὁ αὐτὸς δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ὑφ' ἑκάστου τετράγωνος.

Περιορισμός: Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος ἀριθμὸς νὰ μὴ εἶναι 2, οὔτε ἄθροισμα τοῦ 2 σὺν πολλαπλάσιον τοῦ 8.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ τμήματα τῆς μονάδος y, z, ω καὶ τὸν προστιθέμενον εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν δ θὰ ἔχωμεν

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta=\alpha^2, \quad z+\delta=\beta^2, \quad \omega+\delta=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta=3$, ὁπότε τὸ πρόβλημα γίνεται

$$y+z+\omega=1, \ (1), \quad y+3=\alpha^2, \ (2), \quad z+3=\beta^2, \ (3), \quad \omega+3=\gamma^2, \ (4).$$

Ἐκ τῶν (2, 3, 4) εἶναι διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη $y+z+\omega+9=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, καὶ ἐκ τῆς (1), $10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Ἑπομένως πρέπει ὁ 10 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3. Ἐφαρμόζει πρὸς τοῦτο τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἔχει ὀνομάσει «παρισότητος ἀγωγήν», δηλ. μέθοδον προσεγγίσεως καὶ ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει εἰς τὸ 9ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου.

Κατὰ ταύτην, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς τρία τετράγωνα λαμβάνει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα θὰ προσθέσῃ εἰς αὐτὸ διὰ νὰ προκύψῃ τετράγωνος ἀριθμός, ἤτοι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{x^2}=\text{τετράγωνος}, \ (5).$$

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου ὅρου δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 θέτει

$$x=3t \quad \text{καὶ} \quad x^2=9t^2, \ (6).$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{9t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{30}{9}+\frac{1}{9t^2}=\text{τετράγωνος},$$

καὶ ἐκ ταύτης $\quad 30t^2+1=\text{τετράγωνος}\cdot 9t^2=\text{τετράγωνος}.$

Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(5t+1)^2$, ὁπότε εἶναι

$$30t^2+1=(5t+1)^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad t=2,$$

καὶ ἐκ τῆς (6) εἶναι $x^2=36$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνει

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2.$$

Τρία τετράγωνα ἴσα, πλευρᾶς ἕκαστον $\frac{11}{6}$, εἶναι

$$3\cdot\frac{121}{36}=\frac{363}{36}>10.$$

Ὅθεν πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ γίνῃ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$.

Ὁ 10 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἤτοι εἶναι $10=3^2+1^2$. (Σημείωσις: Ἡ μέθοδος προσεγγίσεως ἐφαρμόζεται μόνον, ὅταν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων). Καὶ εἶναι $1^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$. Θὰ εἶναι ἄρα

$$10=9+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}.$$

Αἱ πλευραὶ τῶν 3 τούτων τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι 3, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$. Τρέπει τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν

$$\left(3,\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{11}{6}\right)$$

εἰς ὁμώνυμα κλάσματα $\left(\frac{90}{30},\ \frac{24}{30},\ \frac{18}{30},\ \frac{55}{30}\right)$

καὶ παραλείπων τοὺς παρονομαστὰς λέγει ὅτι ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν τριῶν τετραγώνων εἶναι ἴσαι πρὸς 55, πρέπει νὰ εἶναι $55=90-\kappa=24+\lambda=18+\mu$, ὅπου οἱ κ, λ, μ θὰ προσδιορισθοῦν.

Ἐκ τούτων λαμβάνεται $\kappa=35$, $\lambda=31$, $\mu=37$.

Θὰ εἶναι ἄρα

$$3\left(\frac{55}{30}\right)^2=\left(3-\frac{35}{30}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}\right)^2.$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν τριῶν τούτων ἴσων τετραγώνων εἶναι $\frac{363}{36}$, ὅπερ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 10 ἐκφράζει τὰς πλευρὰς αὐτῶν συναρτήσει τοῦ x, (ἄλλος x τώρα), θέτων

$$(3-35x)^2+\left(\frac{4}{5}+31x\right)^2+\left(\frac{3}{5}+37x\right)^2=10.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι

$$3555x^2+10-116x=10, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=\frac{116}{3555}.$$

Ἐπομένως τὰ τρία ζητούμενα τετράγωνα καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι

$$\alpha^2=\left(3-35\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1745041}{505521}, \qquad \alpha=\frac{1321}{711}$$

$$\beta^2=\left(\frac{4}{5}+31\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1658944}{505521}, \qquad \beta=\frac{1288}{711}$$

$$\gamma^2=\left(\frac{3}{5}+37\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1651225}{505521}, \qquad \gamma=\frac{1285}{711}$$

Ὅθεν εἶναι :

ἐκ τῆς (2), $y=\alpha^2-3=\frac{228478}{505521}$

ἐκ τῆς (3), $z=\beta^2-3=\frac{142381}{505521}$

ἐκ τῆς (4), $\omega=\gamma^2-3=\frac{134662}{505521}$

Καὶ εἶναι $\frac{228478+142381+134662}{505521}=\frac{505521}{505521}=1.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἷς δοθείς, διάφορος εἰς ἕκαστον, ἀριθμός, καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστος τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ἡ μονάς, οἱ y, z, ω καὶ τρεῖς προστιθέμενοι εἰς αὐτοὺς ἀντιστοίχως ἀριθμοί, οἱ δ_1, δ_2, δ_3, ὁπότε κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta_1=\alpha^2, \quad z+\delta_2=\beta^2, \quad \omega+\delta_3=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta_1=2$, $\delta_2=3$, $\delta_3=4$, ὁπότε εἶναι $y+z+\omega=1$, (1), $y+2=\alpha^2$, (2), $z+3=\beta^2$, (3), $\omega+4=\gamma^2$, (4).

Ἐκ τῶν σχέσεων (2, 3, 4, 1) εἶναι $y+z+\omega+2+3+4=10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἀνάγεται ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερος τοῦ 2 τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Προσθέτει εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων, $\frac{1}{2}$ καὶ λέγει ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$2<\alpha^2<2\frac{1}{2}, \quad 3<\beta^2<3\frac{1}{2}, \quad 4<\gamma^2<4\frac{1}{2}.$$

Κατόπιν τούτων λέγει ὅτι ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ $10=1^2+3^2$ εἰς ἄθροισμα ἄλλων δύο τετραγώνων,

$$10=\alpha^2+\lambda^2, \quad \text{ἐξ ὧν} \quad 2<\alpha^2<2\frac{1}{2}, \quad \text{ὁπότε} \quad \alpha^2-2=y.$$

Καὶ πάλιν ἀναλύει τὸν λ^2 εἰς δύο τετραγώνους, τοὺς β^2, γ^2, ὥστε νὰ εἶναι

$$3<\beta^2<3\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 4<\gamma^2<4\frac{1}{2}, \quad \text{ὁπότε} \quad \beta^2-3=z \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2-4=\omega.$$

[Σημείωσις: Ὁ Διόφαντος ὑποδεικνύει τὴν λύσιν μέχρις ἐδῶ. Τὴν συνέχειαν τῆς λύσεως διετύπωσε πρῶτος ὁ G. Wertheim εἰς τὴν γερμανιστὶ ἔκδοσίν του τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, σελὶς 218, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890].

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ α^2 χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον προσεγγίσεως (παρισότητος ἀγωγὴν) τὴν χρησιμοποιουμένην ὑπὸ τοῦ Διοφάντου εἰς τὸ πρόβλημα 9 τοῦ V βιβλίου.

Θέλομεν νὰ εἶναι $2<\alpha^2<2\frac{1}{2}$. Ἀναζητοῦμεν κλάσμα τῆς μονάδος τετραγωνικόν, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω $\frac{5}{2}+\frac{1}{x^2}=$τετράγωνος, (5).

Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{10}{4}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος},$$

$$\text{ἢ} \quad 10t^2+1=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἔστω}=(3t+1)^2.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $t=6$, $t^2=36$, $x^2=4\cdot t^2=4\cdot 36=144$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) ἔχομεν

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{144}=\frac{361}{144}=\left(\frac{19}{12}\right)^2.$$

'Αφοῦ τὸ ἓν βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς $2\frac{1}{2}$ ἢ κατὰ προσέγγισιν

$$\left(\frac{19}{12}\right)^2 = 2\frac{73}{144} > \frac{5}{2},$$

τὸ ἄλλο θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς $7\frac{1}{2}$. 'Αναζητοῦμεν καὶ ἐδῶ τετραγωνικὸν κλάσμα τῆς μονάδος, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν $7\frac{1}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον. Ἔστω $\frac{15}{2} + \frac{1}{x^2}$ =τετράγωνος.

Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{15}{2} + \frac{1}{4t^2}$ = τετράγωνος, ἢ $\frac{30}{4} + \frac{1}{4t^2}$ = = τετράγωνος, $30t^2+1$ = τετράγωνος, ἔστω $=(5t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=2$, $t^2=4$, $x^2=4\cdot 4=16$.

'Επομένως τὸ δεύτερον βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι $7\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{121}{16} = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7\frac{9}{16} > 7\frac{1}{2}$.

Αἱ πλευραὶ τῶν δύο εὑρεθέντων βοηθητικῶν τετραγώνων εἶναι

$\frac{19}{12}$ καὶ $\frac{11}{4}$ ἢ $\frac{19}{12}$ καὶ $\frac{33}{12}$. 'Επειδὴ ὅμως

$$\left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2 = \frac{1450}{144} > 10$$

πρέπει αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων νὰ ἐλαττωθῶσιν, ὥστε τὰ δύο τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10.

'Ο $10=1^2+3^2$. Εἶναι δὲ ἀκόμη $10 \backsim \left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2$.

Συγκρίνομεν τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς δευτέρας ἀναλύσεως τοῦ 10 πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς πρώτης ἀναλύσεως. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} \quad \text{καὶ} \quad \frac{33}{12} = 3 - \frac{3}{12}.$$

Πρέπει λοιπὸν αἱ πλευραὶ τῶν δύο βοηθητικῶν τετραγώνων, αἱ $\left(1+\frac{7}{12}\right)$ καὶ $\left(3-\frac{3}{12}\right)$ νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10. 'Εκφράζομεν τὰς ζητουμένας αὐτὰς πλευρὰς συναρτήσει τοῦ x καὶ τῶν προηγουμένων τιμῶν ὁπότε ἔχομεν $(1+7x)^2 + (3-3x)^2 = 10$.

('Εκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν λαμβάνονται μικρότεροι ἀριθμοί). 'Εκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως ἔχομεν $x = \frac{2}{29}$.

Ὥστε τὸ πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι

$$\left(1+7\cdot\frac{2}{29}\right)^2 = \left(\frac{43}{29}\right)^2 = \frac{1849}{841}$$

καὶ τὸ δεύτερον εἶναι

$$\left(3-3\cdot\frac{2}{29}\right)^2 = \left(\frac{81}{29}\right)^2 = \frac{6561}{841}.$$

Εἶναι δὲ $2 < \frac{1849}{841} < 2\frac{1}{2}$. Τώρα πρέπει τὸ δεύτερον τετράγωνον $\frac{6561}{641}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων διὰ νὰ ἔχῃ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν. Καλοῦμεν τὸ ἓν τῶν ζητουμένων τετραγώνων x^2, ὁπότε τὸ ἄλλο θὰ εἶναι

$$\frac{6561}{841} - x^2. \text{ Θέλομεν ὅμως, ὅπως } 3 < x^2 < 3\frac{1}{2}.$$

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοιοῦτο τετράγωνον ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τοῦ 10ου προβλήματος τοῦ V βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν. Θέτομεν τὸν x^2 μεταξὺ δύο ὁρίων, ἐκλέγοντες δύο τετράγωνα εὑρισκόμενα ἐγγὺς τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Τοιαῦτα τετράγωνα εἶναι τὰ

$$\frac{49}{16} \text{ καὶ } \frac{64}{16}. \text{ Ὥστε: } \frac{49}{16} < x^2 < \frac{64}{16} \text{ καὶ } \frac{7}{4} < x < \frac{8}{4}, \quad (5).$$

'Εξισώνομεν τώρα τὸ τετράγωνον $\frac{6561}{841} - x^2$ πρὸς ἓν τετράγωνον τῆς μορφῆς $\left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2$, ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. ['Η θέσις τοῦ x^2 μεταξὺ δύο ὁρίων γίνεται κατὰ τὸ 10ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου. 'Η ἐξίσωσις πρὸς $\left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2$ γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 8ου προβλήματος τοῦ II βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν]. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{6561}{841} - \mu x^2 = \left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)}, \quad (6).$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι κατὰ τὴν σχέσιν (5)

$$\frac{7}{4} < \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)} < \frac{8}{4}.$$

'Επιλύομεν τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{7}{4} < \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)}$ κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου:

$$203(\mu^2+1) < 648\,\mu, \quad \mu^2+1 < \frac{648\,\mu}{203}, \quad \mu^2 - \frac{648\,\mu}{203} < -1, \quad \left(\mu - \frac{324}{203}\right)^2 < -1 + \left(\frac{324}{203}\right)^2,$$

ἐξ ἧς $\mu < 2{,}84$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνισότητος

$$\frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)} < \frac{8}{4} \text{ τὴν τιμὴν } \mu > 2{,}37, \text{ ὁπότε ἔχομεν } 2{,}37 < \mu < 2{,}84.$$

Λαμβάνομεν $\mu = 2\frac{1}{2}$, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν τὸν μέσον ὅρον τῶν τιμῶν 2,37 καὶ 2,84 καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (6) ἔχομεν

$$x = \frac{1620}{841}, \quad x^2 = \frac{2624400}{707281},$$

ἔχομεν δηλαδὴ τὸν πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ τετράγωνος $\frac{6561}{418}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ x^2 εἰς τὴν σχέσιν $\frac{6561}{841}-x^2$ λαμβάνομεν τὸν δεύτερον τετράγωνον ὅστις θὰ εἶναι

$$\frac{6561}{841}-\frac{2624400}{707281}=\frac{2893401}{707281}=\left(\frac{1701}{841}\right)^2.$$

Ὥστε οἱ τρεῖς τετράγωνοι εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 10, πληρουμένων τῶν τριῶν συνθηκῶν

$$2<\alpha^2<2\frac{1}{2},\quad 3<\beta^2<3\frac{1}{2},\quad 4<\gamma^2<4\frac{1}{2}$$

εἶναι $\alpha^2=\frac{1849}{841}$, $\beta^2=\frac{2624400}{707281}$, $\gamma^2=\frac{2893501}{707281}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2, 3, 4)

$$y=\frac{1849\cdot 841}{841\cdot 841}-2=\frac{140447}{707281},\quad z=\frac{2624400}{707281}-3=\frac{502557}{707281}$$

$$\omega=\frac{2893401}{707281}-4=\frac{64277}{707281}.$$ Εἶναι δὲ $y+z+\omega=1$.

[Σημ. Ὁ β^2 δὲν εἶναι $<3\frac{1}{2}$ ἀλλὰ εἶναι $\beta^2<4$. Ἔπρεπε νὰ τεθῇ ὁ x^2 μεταξὺ τῶν ὁρίων $\frac{49}{16}<x^2<\left(\frac{23}{12}\right)^2$, διότι ὁ τετράγωνος $\frac{529}{144}$ εἶναι ἐγγύτερον πρὸς τὸν $3\frac{1}{2}$ ἢ ὁ τετράγωνος $\frac{64}{16}$. ὁ β^2 γίνεται $<3\frac{1}{2}$, ἂν τεθῇ $\mu=2\frac{7}{10}$, ἀντὶ $\mu=2\frac{1}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως τῆς ἀλλαγῆς τῆς τιμῆς τοῦ μ θὰ ἐπηρεάζοντο αἱ τιμαὶ τῶν z, ω].

ΛΗΜΜΑ 1ον VIου βιβλίου
χρήσιμον εἰς τὸ 12ον πρόβλημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος εἶναι τετράγωνος, προσέτι δὲ ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν τὴν μικροτέραν κάθετον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $y>z$. Κατὰ τὸ λῆμμα θὰ εἶναι

$$y-z=\alpha^2,\ (1),\quad y=\beta^2,\ (2),\quad \frac{1}{2}yz+z=\gamma^2,\ (3).$$

Κατασκευάζει ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν μ, ν κατὰ τὴν ταυτότητα

$$(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu^2)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$$

καὶ λαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν κάθετον $y=2\mu\nu$ καὶ τὴν μικροτέραν $z=\mu^2-\nu^2$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $2\mu\nu-(\mu^2-\nu^2)=\alpha^2$.

Τοῦτο λέγει συμβαίνει πάντοτε ἂν ἐκ τῶν λαμβανομένων δύο ἀριθμῶν μ, ν ὁ μεγαλύτερος εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἔστω $\mu=2\nu$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα λαμβάνει

$$4\nu^2-(4\nu^2-\nu^2)=\nu^2,$$

ὁπότε πληροῦται καὶ ἡ συνθήκη (2),

$$y=2\mu\nu=4\nu^2=\beta^2.$$

'Εκ τῆς (3) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως

$$\frac{1}{2}\cdot 4\nu^2\cdot(4\nu^2-\nu^2)+(4\nu^2-\nu^2)=y^2,\ \text{ἢ}\ 6\nu^4+3\nu^2=y^2,\ \text{ἢ}\ 6\nu^2+3=(y^2:\nu^2)=\text{τετράγωνος},\ (4).$$

'Ανάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, λέγει, εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ τετραγώνου του σὺν 3 νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί, ὁπότε $\nu=1$ καὶ $\mu=2$.

Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ πληροῦσι τὰς συνθήκας (1, 2, 3) κατασκευάζεται ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 1 καὶ 2, ὁπότε θὰ ἔχῃ πλευρὰς (4, 3, 5).

[Σημείωσις

Διὰ τὴν σχέσιν (4) λέγει ὁ Διόφαντος ὅτι αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ τῆς μονάδος ($\nu=1$) καὶ ἄλλων ἀπείρων ἀριθμῶν. «Ἔστι δὲ ἡ μονὰς μία (ἡ ἐπαληθεύουσα) καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί». Οὐδὲν σχόλιον ἐσώθη ἐξ οὗ νὰ φαίνεται πῶς εὑρίσκονται οἱ ἄλλοι ἄπειροι αὐτοὶ ἀριθμοί Τοῦτο βεβαίως ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Διόφαντον, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἔγραφε περὶ ἄλλων ἀπείρων ἀριθμῶν.

'Εὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἐκ τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου τρόπους πρὸς εὕρεσιν τῆς μονάδος ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν (4), τὴν ὁποίαν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $6x^2+3=y^2$,

θὰ ἔχωμεν $6x'+3=(2x\pm1)^2$, ἐξ ἧς $x=\pm1$.

'Ο δεύτερος ἀκέραιος, ἐκτὸς τῆς μονάδος, ὁ ὁποῖος ἐπαληθεύει τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν εἶναι ὁ 11, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$6x^2+3=(3x\pm6)^2,\ \text{ἐξ ἧς εἶναι}\ x=\pm11\ \text{καὶ}\ \pm1.$$

Τὸ πρόβλημα, ὑπὸ τὴν γενικήν του μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta=y^2,\quad (5)$$

ἔλυσεν ὁ **Euler** διὰ τεχνάσματος, χρησιμοποιήσας τὴν μέθοδον τῆς διπλοϊσότητος τοῦ Διοφάντου. 'Εν συνεχείᾳ ὁ **Euler** εὑρίσκει καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5).

'Η λύσις τοῦ **Euler**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta=y^2$, ὅπου α, β ἀκέραιοι εἶναι ἀναποφεύκτως ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν ἢ νὰ μαντεύσωμεν τοὐλάχιστον μίαν λύσιν αὐτῆς· διότι ἄλλως θὰ ἦτο ματαιοπονία νὰ ζητῶμεν τοιούτους ἀριθμούς, ἐπειδὴ ἴσως ἡ παράστασις νὰ μὴ λύεται.

Ὅθεν δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει μία λύσις ἂν θέσωμεν $x=f$, ὁπότε τὸ προκῦπτον τετράγωνον ἔστω g^2 καὶ ἡ παράστασις νὰ γίνεται $\alpha f^2+\beta=g^2$, ὅπου f καὶ g εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοί.

'Εκ τούτου εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ ἴδωμεν πῶς θὰ εὕρωμεν ἀκόμη ἄλλας περιπτώσεις. 'Η ἔρευνα αὕτη εἶναι τόσον σπουδαιοτέρα, ὅσον περισσοτέρας δυσκολίας ἐμφανίζει, τὰς ὁποίας ὅμως ἡμεῖς θὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ τῶν ἀκολούθων τεχνασμάτων.

'Επειδὴ εὑρέθη ἤδη ἡ λύσις $\alpha f+\beta=g$ καὶ ἐκτὸς τούτου δέον ὅπως εἶναι $\alpha x^2+\beta=y^2$, ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἔχομεν

$$\alpha x^2-\alpha f^2=y^2-g^2.$$

Τὴν παράστασιν ταύτην ἀναλύομεν εἰς γινόμενα παραγόντων (σημ. συγγ. μέθοδος διπλοϊσότητος τοῦ Διοφάντου) καὶ ἔχομεν

$$\alpha(x+f)\,(x-f)=(y+g)\,(y-g).$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον pq καὶ ἔχομεν

$$\alpha pq\,(x+f)\,(x-f)=pq\,(y+g)\,(y-g).$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν χωρίζομεν εἰς

$$\alpha p\,(x+f)=q\,(y+g) \quad \text{καὶ} \quad q\,(x-f)=p\,(y-g)$$

καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς x καὶ y. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν σχέσεων τούτων διαιρουμένη διὰ q δίδει

$$y+g=\frac{\alpha px+\alpha pf}{q},$$

ἡ δὲ δευτέρα διαιρουμένη διὰ p δίδει $y-g=\dfrac{qx-qf}{p}$.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν ἐκ τῆς πρώτης θὰ ἔχωμεν

$$2g=\frac{(\alpha p^2-q^2)x+(\alpha p^2+q^2)f}{pq}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ pq λαμβάνομεν $2pqg=(\alpha p^2-q^2)\,x+(\alpha p^2+q^2)f$ καὶ ἐκ ταύτης $x=\dfrac{2gpq}{\alpha p^2-q^2}-\dfrac{(\alpha p^2+q^2)f}{\alpha p^2-q^2}$.

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν

$$y=g+\frac{2gq^2}{\alpha p^2-q^2}-\frac{(\alpha p^2+q^2)fq}{(\alpha p^2-q^2)p}-\frac{qf}{p} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{g(\alpha p^2+q^2)-2\alpha fpq}{\alpha p^2-q^2}.$$

Δι' ἄλλου τεχνάσματος εὑρίσκει ὁ **Euler** τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5). [Leonhard **Euler**, Vollständige Anleitung zur Algebra, Reclam, Stuttgart, von Joseph E. Hofmann, 1959, σελ 414)].

ΛΗΜΜΑ 2ον. VIου βιβλίου χρήσιμον εἰς τὸ 12ον πρόβλημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου.

Ἐκ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι τετράγωνος, εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι τῶν ὁποίων ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν δοθέντα καὶ προσλαβὼν τὸν ἄλλον σχηματίζει τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ διδόμενοι ἀριθμοὶ α καὶ β, ὥστε $\alpha+\beta=\kappa^2$. Εἶναι δυνατὸν λέγει νὰ εὑρεθοῦν ἄπειροι τετράγωνοι ἀριθμοὶ

$$\lambda^2,\ \mu^2,\ \ldots \text{ ὥστε νὰ εἶναι } \alpha\lambda^2+\beta=\tau^2,\ \beta\mu^2+\alpha=\sigma^2 \ldots$$

Λαμβάνει $\alpha=3$, $\beta=6$, ὁπότε εἶναι $3+6=3^2$.

Κατὰ τὸ λῆμμα εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθοῦν ἄπειροι τετράγωνοι, $\lambda^2, \mu^2, \ldots$ ὥστε νὰ εἶναι

$$3\lambda^2+6=\tau^2, \ (1), \quad 6\mu^2+3=\sigma^2, \ (2).$$

Ἔστω $\lambda^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι

$$3(x^2+2x+1)+6=\tau^2, \ \text{ἢ} \ 3x^2+6x+9=\tau^2, \ \text{ἔστω} =(3-3x)^2.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=4$. Θὰ εἶναι ἄρα $\lambda^2=(x+1)^2=(4+1)^2=25$ καὶ εἶναι

$3{,}25+6=9^2$. Ἐὰν $3x^2+6x+9=(3-4x)^2$ θὰ εἶναι

$$x=\frac{30}{13} \ \text{καὶ εἶναι} \ 3\left(\frac{30}{13}+1\right)^2+6=3\left(\frac{43}{13}\right)^2+6=\frac{6561}{169}=\left(\frac{81}{13}\right)^2.$$

Κατὰ τὴν (2), ἐὰν θέσωμεν $\mu^2=(x+1)^2$ θὰ ἔχωμεν

$6x^2+12x+9=\sigma^2$, ἔστω $=(3-3x)^2$, ἐξ ἧς $x=10$. Θὰ εἶναι ἄρα $\mu^2=(x+1)^2=11^2=121$ καὶ εἶναι $6.121+3=27^2$.

Ἐὰν $6x^2+12x+9=(3-5x)^2$, θὰ εἶναι $x=\frac{42}{19}$ καὶ εἶναι $6\left(\frac{42}{19}+1\right)^2+3=\left(\frac{153}{19}\right)^2$.

Ὥστε τὸ πλῆθος τῶν εὑρισκομένων τετραγώνων λ^2, μ^2,... εἶναι ὁσονδήποτε μεγάλον.

Γενικῶς δέ, ἐὰν $\alpha+\beta=\kappa^2$, ἡ παράστασις $\alpha y^2+\beta$ δύναται νὰ γίνῃ τετράγωνος, ἐὰν τεθῇ $y=x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως θὰ εἶναι

$$\alpha(x+1)^2+\beta=\alpha x^2+2\alpha x+\alpha+\beta, = \text{τετράγωνος} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha x^2+\alpha x+\kappa^2, \text{ ἔστω } =(\kappa-\lambda x)^2, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$x=\frac{2(\alpha+\kappa\lambda)}{\lambda^2-\alpha} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\lambda^2+2\kappa\lambda+\alpha}{\lambda^2-\alpha}, \quad (\lambda^2\neq\alpha).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον τοῦ VIου βιβλίου

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ y, z. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι

$$\frac{1}{2}yz+y=\alpha^2, \quad (1), \quad \frac{1}{2}yz+z=\beta^2, \quad (2).$$

Θέτει τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ($5x$, $12x$, $13x$). Κατὰ τὴν (2) εἶναι

$$30x^2+12x=\beta^2, \quad (3), \quad \text{ἔστω } =36x^2, \text{ ἐξ ἧς } x=2,$$

ὁπότε πληροῦται τὸ ἐπίταγμα τοῦτο.

Κατὰ τὴν (1) εἶναι $30x^2+5x=\alpha^2$, (4). Διὰ $x=2$ εἶναι $\alpha^2=130$, ἤτοι ὁ 130 δὲν εἶναι τετράγωνος. Ὅθεν πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\beta^2=36x^2$. Ἔστω $\beta^2=\lambda^2x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) εἶναι $x=\frac{12}{\lambda^2-30}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἔχομεν

$$30\left(\frac{12}{\lambda^2-30}\right)^2+\frac{5\cdot 12}{\lambda^2-30}=\alpha^2, \text{ ἢ } \frac{60\lambda^2+2520}{(\lambda^2-30)^2}=\alpha^2, \text{ ἢ } 60\lambda^2+2520=\text{τετράγωνος}, \ (5).$$

Ἡ σχέσις αὕτη πληροῦται κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ὅταν $60+2520=$τετράγωνος (6). Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 2520 Ὁ $60=5\cdot 12$, ἤτοι εἶναι τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν ($5x$, $12x$). Ὁ ἀριθμὸς $2520=12\,(12-5).30$, ἤτοι εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τῆς μεγαλυτέρας καθέτου (τῆς $12x$) ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τό, νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν σύν, τὴν μεγαλυτέραν κάθετον, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν, νὰ εἶναι τετράγωνος.

Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου, (ἔστω ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2). Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα ἡ μεγαλυτέρα κάθετος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν καλέσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ βοηθητικοῦ τούτου τριγώνου τ, σ ($\tau>\sigma$) καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ

$$E=\frac{1}{2}\tau\sigma$$

θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῆς (5) $\sigma\tau+\tau\,(\tau-\sigma)\,E=$ τετράγωνος.

Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ τ θὰ ἔχωμεν $\sigma+(\tau-\sigma)E=$ τετράγωνος, (7).

Ὅταν κατασκευασθῇ τὸ βοηθητικὸν τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2 αἱ πλευραί του θὰ εἶναι 3, 4, 5. Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν τετράγωνος, $4-3=1^2$, $4=2^2$ (ἡ μεγαλυτέρα κάθετος) καὶ $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+3=3^2$.

Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ἐπειδὴ $\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+3\right)=3^2$ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ μέγα πλῆθος τετραγώνων, ὥστε τὸ γινόμενον ἑνὸς τετραγώνου ἐκ τούτων ἐπὶ ἕνα τῶν ἀριθμῶν (6 ἢ 3) σὺν τὸν ἄλλον νὰ εἶναι τετράγωνος. Εἷς ἐκ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι ἡ μονάς, ὁπότε εἶναι $6\cdot 1^2+3=3^2$, σχέσις ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν (7), ὅπου

$$\tau-\sigma=4-3=1^2,\quad E=6,\quad \sigma=3.$$

Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι (3, 4, 5). Κατόπιν τούτου θέτει τὰς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $3x, 4x, 5x$ (ἀντὶ τῶν $5x, 12x, 13x$).

Κατὰ τὴν (2) εἶναι $6x^2+4x=\beta^2$, ἔστω $=t^2x^2$, (8), καὶ κατὰ τὴν (1) εἶναι $6x^2+3x=\alpha^2$, (9). Ἐκ τῆς (8) λαμβάνει $x=\frac{4}{t^2-6}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) ἔχει

$$\frac{12t^2+24}{t^4+36-12t^2}=\alpha^2,\quad \text{ἢ}\quad 12t^2+24=\alpha^2(t^2-6)^2,\quad \text{ἢ}\quad 3t^2+6=\text{τετράγωνος, (10).}$$

Ἐπειδὴ $3+6=3^2$ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ὁ t κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα. Ἔστω $t=\lambda+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (10) λαμβάνεται $3(\lambda+1)^2+6=$τετράγωνος,

ἔστω$=(3-3\lambda)^2$, ἐξ ἧς $\lambda=4$, $\lambda+1=t=5$, $t^2=25$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) εἶναι $6x^2+4x=25x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{19}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι

$$3\cdot\frac{4}{19}=\frac{12}{19},\quad 4\cdot\frac{4}{19}=\frac{16}{19},\quad 5\cdot\frac{4}{19}=\frac{20}{19},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{16}{19}+\frac{12}{19}=\left(\frac{18}{19}\right)^2 \text{ καὶ } \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{16}{19}+\frac{16}{19}=\left(\frac{20}{19}\right)^2.$$

MISCELLANEA CRITICA

TEIL I

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

LEIPZIG

'Ανάτυπον ἐκ τοῦ ἑορταστικοῦ τόμου τοῦ ἐκδοθέντος ὑπὸ τοῦ οἴκου τῆς Λειψίας B. G. TEUBNER, ἐπὶ τῇ 150ῃ ἐπετείῳ ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς του (1811 – 1961)

Rekonstruktion des griechischen Textes des fehlenden Beweises der Aufgabe V 19 des Diophantos von Alexandrien

Evangelos Stamatis, Athen

Die Aufgabe V 19 der Arithmetica des Diophantos von Alexandrien (Ed. P. Tannery, Leipzig 1893) lautet: Es sind drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihre Summe ein Quadrat gibt und daß der Kubus ihrer Summe ebenfalls ein Quadrat wird, wenn man jede der Zahlen davon subtrahiert.

Die Lösung dieser Aufgabe fehlt im Original. P. Tannery hat das durch eine Punktreihe angedeutet. Es folgt in derselben 19. Aufgabe fast die ganze Lösung einer Aufgabe, deren Wortlaut verloren ist.

Bachet de Méziriac, der erste Herausgeber Diophants (Paris 1621), vermutet sehr richtig, daß noch zwei Aufgaben im Text fehlen, und gibt die fehlende Lösung der 19. Aufgabe wieder [1].

Die Lösung Bachets für die 19. Aufgabe ist zwar richtig, aber in einem Punkt nicht ganz im Sinne Diophants, wie man aus der Aufgabe V 16 schließen kann.

Im folgenden rekonstruieren wir den Text des fehlenden Beweises der 19. Aufgabe [2] [in einem Punkt von Bachet abweichend: statt 1 nehmen wir $(\frac{6}{5})^4$] und geben noch die Übersetzung des rekonstruierten griechischen Textes.

Aufgabe V 19
Wortlaut wie in der Edition Tannerys.
Fehlender Beweis

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς $\Delta^{Y}\, \bar{\alpha}$, καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν $K^{Y} K\, \frac{\delta}{\gamma}$, ὁ δὲ $K^{Y} K\, \frac{\vartheta}{\eta}$, ὁ δὲ $K^{Y} K\, \frac{\iota\varsigma}{\iota\varepsilon}$. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπὸν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\, \bar{\alpha}$. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν $K^{Y} K\, \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$. ταῦτα ἴσα $\Delta^{Y}\, \bar{\alpha}$. καὶ πάντα παρὰ $\Delta^{Y}\, \bar{\alpha}$· γίνονται $\Delta^{Y} \Delta\, \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ ἴσαι $\mathring{M}\, \bar{\alpha}$ καὶ ἔστιν ἡ μονὰς $\square^{o\varsigma}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{o\nu}$, ὥστε ἄρα καὶ $\Delta^{Y} \Delta\, \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ δεήσει εἶναι $\square^{o\nu}$ πλευρὰν ἔχοντα $\square^{o\nu}$. εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\mathring{M}\, \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ $\square^{o\varsigma}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{o\nu}$, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν $\Delta^{Y}\Delta$; ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς τετραγώνους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha}$· καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha}$, τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ $\square^{ov}$, πλευρὰν ἔχοντα $\square^{ov}$.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha}$· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha}$, πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha}$· ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος $\square^{o\varsigma}$, πλευρὰν ἔχων $\square^{ov}$ μείζων εἶναι δυάδος.

τετάχθω ὁ καταλειπόμενος $\square^{o\varsigma}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{ov}$ μείζων εἶναι δυάδος· ἔστω $\overset{\circ}{M}\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha\sigma\koppa\varsigma}$. δεῖ οὖν τὰ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\vartheta}$ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi\kappa\vartheta}$, ὁ δὲ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\mu\vartheta}$, ὁ δὲ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha}$.

ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς $\Delta^{Y}\ \bar{\alpha}$, τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν $K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\koppa\varsigma}$, ὃν δὲ $K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\varsigma}$, ὃν δὲ $K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\chi\kappa\delta}$. καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν $\square^{ov}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\bar{\alpha}$· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha\sigma\koppa\varsigma}$. καὶ πάντα παρὰ $\Delta^{Y}\ \bar{\alpha}$· γίνονται $\Delta^{Y}\Delta\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha\sigma\koppa\varsigma}$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{\varsigma}{\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

Erläuterung der Zeichen:

$\Delta^{Y}\ \bar{\alpha} = x^2$, $K^{Y}K\ \frac{\delta}{\gamma} = \frac{3}{4}x^6$, $K^{Y}K\ \frac{\vartheta}{\eta} = \frac{8}{9}x^6$, $K^{Y}K\ \frac{\iota\varsigma}{\iota\varepsilon} = \frac{15}{16}x^6$,

$\square^{o\varsigma}$ =Quadratzahl , $\overset{\circ}{M}\ \bar{\alpha} = 1$, $\overset{\circ}{M}\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha\sigma\koppa\varsigma} = \frac{1296}{625}$, $K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\koppa\varsigma} = \frac{96}{625}x^6$,

$K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\varsigma} = \frac{576}{625}x^6$, $K^{Y}K\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\chi\kappa\delta} = \frac{624}{625}x^6$, $\Delta^{Y}\Delta\ \frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha\sigma\koppa\varsigma} = \frac{1296}{625}x^4$

ϛ = x, ς = 6.

Übersetzung

Es werde die Summe der drei Zahlen gleich x^2 gesetzt, und die drei Zahlen mögen als $\frac{3}{4}x^6$, $\frac{8}{9}x^6$, $\frac{15}{16}x^6$ angesetzt werden. Dann ist der Kubus der Summe, vermindert um jede einzelne der Zahlen, ein Quadrat. Es bleibt noch übrig, die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen.

Die Summe aber ist $\frac{371}{144}x^6$. Dies ist [nach den Bedingungen der Aufgabe] gleich x^2. Wenn wir auf beiden Seiten durch x^2 dividieren, bekommen wir $\frac{371}{144}x^4 = 1$. Wenn $\frac{371}{144}$ eine Biquadratzahl wäre, so wäre die Aufgabe gelöst. Wie ist aber dieser Koeffizient entstanden? Dadurch, daß wir die Summe von drei Quadraten, von denen jedes kleiner als 1 ist, von 3 subtrahierten.

Es kommt also darauf an, drei Quadrate zu finden, von denen jedes kleiner als 1 ist, und deren Summe, wenn sie von 3 subtrahiert wird, ein Biquadrat als Rest liefert.

Wir wollen, daß jedes Quadrat kleiner als 1 sei; wenn wir es nun so einrichten, daß die drei Quadrate zusammen kleiner als 1 sind, so wird jedes einzelne gewiß kleiner als 1 sein. Es muß dann das (bei der Subtraktion von 3) übrigbleibende Biquadrat größer als 2 sein.

Setzen wir dies übrigbleibende Biquadrat gleich $(\frac{6}{5})^4$ $[= \frac{1296}{625}]$, so haben wir $\frac{579}{625}$ in drei Quadrate zu zerlegen. Diese sind $\frac{529}{625}$, $\frac{49}{625}$, $\frac{1}{625}$. Jetzt gehen wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen die gesuchten Zahlen ein: $\frac{96}{625}\,x^6$, $\frac{576}{625}\,x^6$, $\frac{624}{625}\,x^6$. Es wird ein Quadrat geben, wenn jede dieser Zahlen vom Kubus ihrer Summe subtrahiert wird.

Es bleibt noch übrig, diese Summe gleich x^2 zu setzen. Die Summe aber ist $\frac{1296}{625}\,x^6$. Wenn wir auf beiden Seiten durch x^2 dividieren, so bekommen wir $\frac{1296}{625}\,x^4 = 1$. Folglich ist $x = \frac{5}{6}$.

Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

Anmerkungen

1) O. Schulz, Diophantus, Berlin 1822, 532

2) Diesen rekonstruierten Text, wie auch den Text der zwei vermißten Aufgaben und den Text und den Anfang des Beweises einer dritten Aufgabe werde ich in meine Diophant-Ausgabe (Text nach Tannery, Übersetzung ins Neugriechische mit Erläuterungen), die in Athen erscheinen wird , aufnehmen.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ο ΕΚ ΤΗΣ ΜΗΛΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ

Ἀνάτυπον
Ἐκ τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑταιρείας Κυκλαδικῶν Μελετῶν

ΤΟΜΟΣ Δ΄. 1964

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Γ. Δ. ΚΥΠΡΑΙΟΥ
1964

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ο ΕΚ ΜΗΛΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ ΚΑΙ Η ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΤΗΣ ΓΗΣ

Ὁ Ἀναξίμανδρος (611—546 π. Χ.) μαθητὴς καὶ διάδοχος τοῦ Θαλοῦ εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐν Μιλήτῳ Σχολῆς εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐξέφρασε τὴν γνώμην ὅτι ἡ γῆ εἶναι στρογγύλη εἰπὼν «....*τὴν δὲ γῆν εἶναι μετέωρον ὑπὸ μηδενὸς κρατουμένην, μένουσαν δὲ διὰ τὴν ὁμοίαν πάντων ἀπόστασιν. τὸ δὲ σχῆμα αὐτῆς γυρόν, στρογγύλον, κίονι λίθῳ παραπλήσιον*». [Hippol. Ref. I 6, 1–7 (D 559 W. 10). (Diels Fr.).

Ἑρμηνεία: ὅτι δὲ ἡ γῆ εἶναι μετέωρος καὶ ὑπὸ οὐδενὸς κρατεῖται, μένει δὲ εἰς τὴν θέσιν της ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν ἀποστάσεων (τῶν λοιπῶν ἄστρων ;). Τὸ δὲ σχῆμα αὐτῆς εἶναι κυρτόν, στρογγύλον, παραπλήσιον πρὸς λίθον κίονος.

Ὀλίγον βραδύτερον καὶ ὁ Πυθαγόρας ἐξέφρασε τὴν γνώμην ὅτι ἡ γῆ εἶναι στρογγύλη (ἐνταῦθα σφαιρική) ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος. «*Ἀλλὰ μὴν (Πυθαγόρας) καὶ τὸν οὐρανὸν πρῶτον ὀνομάσαι κόσμον καὶ τὴν γῆν στρογγύλην*». Διογ. Λ. VII 46.

Ἑρμηνεία: Ἀλλ' ὁ Πυθαγόρας πρῶτος ὠνόμασε τὸν οὐρανὸν ἁρμονίαν καὶ τὴν γῆν σφαιρικήν.

Ὁ Ἀριστοτέλης παρέχει καὶ μίαν ἀπόδειξιν ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαιρικὴ λέγων «*σχῆμα δ' ἔχειν (τὴν γῆν) σφαιροειδὲς ἀναγκαῖον αὐτήν.... οὔτε γὰρ ἂν αἱ τῆς σελήνης ἐκλείψεις τοιαύτας ἂν εἶχον τὰς ἀποτομάς.....*». (Περὶ οὐρανοῦ II, 14, 297b).

Ἑρμηνεία: Εἶναι δὲ ἀναγκαῖον νὰ ἔχῃ ἡ γῆ σχῆμα σφαιροειδές, διότι ἂν δὲν εἶχε αἱ ἐκλείψεις τῆς σελήνης δὲν θὰ παρεῖχον ὡς τομὴν τοιαύτην μορφήν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρεχομένων τεκμηρίων καθίσταται σαφὲς ὅτι ἡ ἀρχαία ἑλληνικὴ ἐπιστήμη ἐπρέσβευεν ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαιρική.

Εἶναι ἑπόμενον κατόπιν αὐτοῦ ὅτι θὰ κατεβλήθησαν προσπάθειαι νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέγεθος τῆς γηΐνης σφαίρας. Τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου σῴζεται μικρὰ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης». Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὁ Ἀρίσταρχος θὰ εἶχε μετρήσει καὶ τὰς διαστάσεις τῆς γηΐνης σφαίρας, ἀφοῦ προβαίνει εἰς τὰς μετρήσεις τοῦ ἡλίου καὶ τῆς σελήνης. Οὐδὲν ὅμως ἐσώθη περὶ τοιούτων μετρήσεων τοῦ Ἀριστάρχου. Καὶ ὁ Ἀρχιμήδης προβαίνει εἰς μετρήσεις τῆς σφαίρας τοῦ κόσμου ἰσχυριζόμενος, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς καὶ ὅτι αὕτη ἰσοῦται μὲ 10.000.000.000 στάδια (Ψαμμίτης, 2α ἔκδ. Heiberg σ. 235 κ. ἑ.).

Ἐκ τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, φαίνεται, ὅτι ἦτο γνωστὴ εἰς αὐτὸν ἡ μέτρησις τῆς περιμέτρου τῆς γῆς ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους, συγχρόνου καὶ φίλου τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἶναι δὲ πολὺ πιθανὸν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης θὰ εἶχε ὑπ' ὄψει του καὶ μέτρησιν τῆς περιμέτρου τῆς γῆς ὑπὸ τοῦ Ἀριστάρχου. Ὁπωσδήποτε ὁ Ἐρατοσθένης ἠκολούθησεν ἴδιον τρόπον μετρήσεως τῆς γῆς, ὁ ὁποῖος προκαλεῖ τὸν θαυμασμὸν καὶ τῶν συγχρόνων ἐπιστημόνων. Ὁ Ἐρατοσθένης εἶχε τὴν πληροφορίαν ὅτι εἰς τὴν Συήνην (Ἀσουάν), πόλιν κειμένην νοτίως τῆς Ἀλεξανδρείας 5000 στάδια, σχεδὸν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ, αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἡλίου πίπτουν καθέτως εἰς τὴν γῆν κατὰ τὴν 21 Ἰουνίου. Διὰ συνεργείων τὰ ὁποῖα διέθεσεν ὁ βασιλεὺς τῆς Αἰγύπτου Πτολεμαῖος ὁ 3ος (Εὐεργέτης) ὁ Ἐρατοσθένης προέβη εἰς μέτρησιν τῆς ἀποστάσεως Ἀλεξανδρείας - Συήνης. Ἀκολούθως ἐμέτρησε τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἡλίου τὴν 21 Ἰουνίου ἐν Ἀλεξανδρείᾳ μὲ τὴν κατακόρυφον τῆς πόλεως αὐτῆς καὶ ηὗρεν ὅτι αὕτη ἦτο τὸ 1/50 τῆς περιμέτρου τῆς γῆς περίπου. Ἀφοῦ δὲ εἰς τὸ 1/50 περίπου τῆς περιμέτρου ἀντιστοιχοῦν 5000 στάδια εἰς ὅλην τὴν περίμετρον τῆς γῆς θὰ ἀντιστοιχοῦν 50 . 5000 = 250.000 στάδια [Κλεομήδους (2ος αἰὼν μ. Χ.) Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων I , 10,50]. Κατὰ πληροφορίας ὅμως ἄλλων συγγραφέων ὁ Ἐρατοσθένης ηὗρεν ὡς περίμερον τῆς γῆς 252.000 στάδια Ἥρων, Schöne, τόμ. III σ. 302, 15, Περὶ Διόπτρας).

Μετὰ 150 περίπου ἔτη ὁ περίφημος στωϊκὸς φιλόσοφος καὶ Διευθυντὴς τῆς ἐν Ῥόδῳ Σχολῆς Ποσειδώνιος, ὁ ἐξ Ἀπαμείας τῆς Συρίας, (περίπου 135 –51 π. Χ.) προέβη εἰς διάφορον τοῦ Ἐρατοσθένους μέτρησιν πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς περιμέτρου τῆς γῆς. Εἰς ὡρισμένην ἐποχὴν τοῦ ἔτους ὁ Κάνωπος (ἢ Κάνωβος) ἀστὴρ τοῦ νοτίου ἡμισφαιρίου εἰς μὲν τὴν Ῥόδον φαίνεται μόλις ἐφαπτόμενος τοῦ ὁρίζοντος, εἰς δὲ τὴν Ἀλεξάνδρειαν σχηματίζει γωνίαν τινα μετὰ τοῦ ὁρίζοντος, τὴν ὁποίαν ὁ Ποσειδώνιος ὑπελόγισεν ὡς τὸ 1/48 τῆς περιμέτρου τῆς γῆς. Ἡ ἀπόστασις Ῥόδου - Ἀλεξανδρείας εἶναι 5000 στάδια. Ἑπομένως ἀφοῦ εἰς τὸ 1/48 τῆς περιμέτρου τῆς γῆς ἀντιστοιχοῦν 5000 στάδια, εἰς ἡν ὅλην περίμετρον θὰ ἀντιστοιχοῦν 48 . 5000 = 240.000 στάδια. Καὶ ἡ μέτρησις τοῦ Ποσειδωνίου προκαλεῖ καὶ αὐτὴ τὸν θαυμασμὸν τῶν μεταγενεστέρων. Φαίνεται ὅμως ὅτι θὰ ὑπῆρχον ἐπιστήμονες, οἱ ὁποῖοι θὰ ἐξέφραζον ἀμφιβολίας διὰ τὰς μετρήσεις τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ποσειδωνίου. Τοῦτο τὸ εἰκάζομεν ἐκ τῆς πληροφορίας τοῦ Πλινίου ὅτι ὁ Ἵππαρχος (190—120 π. Χ.), διάσημος ἀστρονόμος τῆς ἀρχαιότητος, προέβη εἰς ἔλεγχον τῶν θεωριῶν καὶ τῶν μετρήσεων τοῦ Ἐρατοσθένους τῶν συναφῶν πρὸς τὴν μέτρησιν τῆς περιμέτρου τῆς γῆς, ὡς μνημονεύεται κατωτέρω. Κατὰ τὴν αὐτὴν περίπου ἐποχὴν ἔζησεν καὶ ὁ ἐκ Μήλου μαθηματικὸς ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ, τὸν ὁποῖον ὁ Πλίνιος μνημονεύει ὡς διάσημον κατὰ τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας. Εἰκάζεται, ὅτι ὁ Διονυσόδωρος εἶχεν ἰδιαιτέρως ἀσχοληθῆ μὲ τὴν μέτρησιν τῆς περιμέτρου τῆς γῆς, διότι ἐκεῖνο εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἰδιαιτέρως πραγματεύεται ὁ Πλίνιος.

Ἐκτὸς λοιπὸν τοῦ ἐκ τῆς Πάρου μεγάλου μαθηματικοῦ τῆς ἀρχαιότητος, τοῦ Πυθαγορείου Θυμαρίδα (ἴδε εἰς 1ον καὶ 3ον τόμον τῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑταιρείας Κυκλαδικῶν μελετῶν: Ε. Σ. Σταμάτη, Ὁ μαθηματικὸς Θυμαρίδας ὁ Πάριος καὶ τὸ Θυμαρίδειον ἐπάνθημα) ἀναφέρεται καὶ ἄλλος σπουδαῖος μαθηματικὸς ἐκ τῶν Κυκλάδων, ὁ ἐκ τῆς Μήλου καταγόμενος ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ. Πρῶτος μνημονεύων τοῦ Διονυσοδώρου εἶναι ὁ ἐκ τῆς Ἀμασείας τοῦ Πόντου καταγόμενος γεωγράφος καὶ ἱστορικὸς Στράβων (64 π.Χ.—19 μ.Χ.) κατὰ τὴν περιγραφὴν τῶν ἐπαρχιῶν τοῦ Πόντου γράφων τὰ ἑξῆς·

«Μετὰ δὲ τὴν Θεμίσκυραν ἐστιν ἡ Σιδήνη, πεδίον εὔδαιμον, οὐχ' ὁμοίως δὲ κατάρρυτον ἔχον χωρία ἐρυμνὰ ἐπὶ τῇ παραλίᾳ, τήν τε Σίδην ἀφ' ἧς ὠνομάσθη Σιδήνη, καὶ Χάβακα καὶ Φάβδα· μέχρι μὲν δὴ δεῦρο Ἀμισηνή, ἄνδρες δὲ γεγόνασι ἄξιοι μνήμης κατὰ παιδείαν ἐνταῦθα μαθηματικὸς μὲν Δημήτριος ὁ τοῦ Ῥαθηνοῦ καὶ Διονυσόδωρος ὁμώνυμος τῷ Μηλίῳ γεωμέτρῃ, γραμματικὸς δὲ Τυραννίων οὗ ἡμεῖς ἠκροασάμεθα». (Γεωγρ. XII, 548).

[Ἑρμηνεία : Μετὰ δὲ τὴν (ἐπαρχίαν τοῦ Πόντου) Θεμίσκυραν εἶναι ἡ Σιδήνη, περιοχὴ εὔφορος, ὄχι ὅμως μὲ πολλὰ ὕδατα ὅπως ἡ

Θεμίσκυρα, ἔχουσα πρὸς τὴν παραλίαν ὀχυρὰς κωμοπόλεις, καὶ τὴν Σίδην, ἐκ τῆς ὁποίας ἡ περιοχὴ ὠνομάσθη Σιδήνη, καὶ τὰ Χάβακα καὶ τὴν Φάβδαν· μέχρι μὲν ἐδῶ ἐκτείνεται ἡ περιοχὴ τῆς Ἀμισηνῆς, ἄνδρες δ' ἄξιοι μνήμης κατὰ παιδείαν ὑπῆρξαν ἐνταῦθα μαθηματικὸς μὲν ὁ Δημήτριος ὁ υἱὸς τοῦ Ῥαθηνοῦ καὶ ὁ Διονυσόδωρος ὁ ὁμώνυμος πρὸς τὸν Μήλιον γεωμέτρην, φιλόλογος δὲ ὁ Τυραννίων τοῦ ὁποίου ἡμεῖς ὑπήρξαμεν μαθηταί].

Ὁ τρόπος καθ' ὃν ὁ Στράβων διαμνημονεύει τοῦ Ποντίου μαθηματικοῦ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΥ, λέγων, ὅτι εἶναι ὁμώνυμος πρὸς τὸν ἐκ Μήλου γεωμέτρην, σημαίνει ὅτι ὁ Μήλιος γεωμέτρης Διονυσόδωρος ἦτο πολὺ γνωστὸς καὶ ἐξέχων μαθηματικὸς τῆς ἐποχῆς του.

Ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς Πλίνιος ὁ πρεσβύτερος (23—79 μ. Χ.), ἀναφέρων τὰς διαφόρους μετρήσεις τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων διὰ τὴν περίμετρον τῆς γῆς λέγει τὰ κάτωθι·

«Ὁ Ἵππαρχος, ὅστις καὶ εἰς τὸν ἔλεγχον αὐτοῦ (τοῦ Ἐρατοσθένους) καὶ εἰς τὴν ὑπόλοιπον ἐπιμελῆ ἔρευνάν του εἶναι θαυμαστός, προσθέτει κατά τι ὀλιγώτερον ἀπὸ 26000 στάδια.

Ἄλλη εἶναι ἡ πίστις τοῦ Διονυσοδώρου (διότι δὲν θὰ ἀφήσω ἀμνημόνευτον τὸ μέγιστον τοῦτο παράδειγμα τῆς ἑλληνικῆς ἐπιπολαιότητος). Κατήγετο ἐκ τῆς Μήλου καὶ ὑπῆρξε διάσημος κατὰ τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας. Ἀπέθανεν εἰς βαθὺ γῆρας εἰς τὴν πατρίδα του, τὴν δὲ κηδείαν του ἐτέλεσαν αἱ συγγενικαί του γυναῖκες εἰς τὰς ὁποίας περιήρχετο ἡ κληρονομία του. Αὗται, ὅταν κατὰ τὰς ἐπακολουθησάσας (μετὰ τὸν θάνατόν του) ἡμέρας ἐτέλουν τὰς νενομισμένας (ἐπιταφίους) τιμάς, λέγεται ὅτι ἀνεῦρον εἰς τὸν τάφον ἐπιστολὴν ὑπογεγραμμένην ἀπὸ τὸν Διονυσόδωρον πρὸς τοὺς κατοίκους τῆς γῆς· εἰς αὐτὴν ἀνεγράφετο ὅτι εἶχε φθάσει ἀπὸ τὸν τάφον εἰς τὸ κατώτατον μέρος τῆς γῆς, καὶ ὅτι ἡ (μέχρις αὐτοῦ, τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἀπὸ τὸν τάφον) ἀπόστασις ἦτο 42000 στάδια. Δὲν ἔλειψαν ὅμως γεωμέτραι οἵτινες ἔδωκαν τὴν ἑρμηνείαν ὅτι ἐδηλοῦτο, ὅτι ἡ ἐπιστολὴ εἶχε σταλῆ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ γηΐνου κύκλου, τὸ ὁποῖον ἀπεῖχε τὴν μεγίστην πρὸς τὰ κάτω ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν (τῆς γῆς) καὶ ἦτο τὸ κέντρον τῆς (γηΐνης) σφαίρας. Ἐκ τούτου ὁ ἐπακολουθήσας ὑπολογισμὸς εἶναι νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀπόφανσις ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς σφαίρας εἶναι 252000 στάδια (σημ. ἐννοεῖ ἡ περίμετρος τῆς γῆς).

Ὁ ἁρμονικὸς λόγος ἐκ τοῦ ὁποίου ἀναγκαστικῶς ἀπορρέει ἡ φύσις τῶν πραγμάτων νὰ εἶναι συνακόλουθος πρὸς τὸν ἑαυτόν της, προσθέτει εἰς αὐτὸν τὸν ὑπολογισμὸν 12000 στάδια καὶ κάμνει τὴν γῆν τὸ *ἐνενηκοστὸν ἕκτον μέρος τοῦ ὅλου κόσμου».* (Plin. Naturalis Historia II, 247—248).

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω δὲν σῴζονται ἄλλαι πληροφορίαι διὰ τὸν Μήλιον μαθηματικὸν Διονυσόδωρον. Ὁ Γερμανὸς συγγραφεὺς Hofmann ὑποθέτει ὅτι ὁ ὑπὸ τοῦ Ἕλληνος γεωγράφου Μαρκιανοῦ μνημονευόμενος μαθηματικὸς Διονύσιος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Μήλιον Διονυσόδωρον καὶ ὅτι ἡ εἰς τὸ σῳζόμενον χειρόγραφον μετατροπὴ τοῦ ὀνόματος τούτου εἰς Διονύσιον ὀφείλεται εἰς συντομογραφίαν τοῦ ἀντιγραφέως κακῶς ἑρμηνευθεῖσαν. Ὁ Μαρκιανὸς ἀναφέρει τὰ ἑξῆς·

«Ἐρατοσθένης μὲν ὁ Κυρηναῖος τὴν μεγίστην περιφέρειαν τῆς (ἐγνωσμένης) ἁπάσης γῆς εἶναι λέγει σταδίους Μ. κε΄ καὶ ͵θσ. Οὕτω δὲ καὶ Διονύσιος ὁ τοῦ Διογένους ἀναμεμέτρηκεν. Πτολεμαῖος δὲ ὁ θειότατος τῇ μὲν πείρᾳ καὶ ἀληθεῖ παιδεύσει πρεσβύτερος, τοῖς δὲ χρόνοις Ἐρατοσθένους νεώτερος, σταδίων Μ. ιη΄ τὴν γῆν ἀπέδειξεν εἶναι.....». (Geographi Graeci Minores Μαρκιανοῦ Ἡρακλεώτου τοῦ Πόντου, Περίπλους τῆς ἔξω θαλάσσης, τῶν εἰς δύο τὸ πρότερον, σελ. 519, C. Mullerus).

[Ἑρμηνεία: Ὁ Ἐρατοσθένης μὲν ὁ Κυρηναῖος λέγει ὅτι ἡ μεγίστη περίμετρος ὅλης τῆς (γνωστῆς) γῆς εἶναι 250000 + 9200 στάδια. Τόσον δὲ ἐμέτρησε καὶ ὁ Διονύσιος ὁ υἱὸς τοῦ Διογένους. Ὁ Πτολεμαῖος δὲ ὁ θειότατος κατὰ μὲν τὴν πεῖραν καὶ τὴν ἀληθῆ παίδευσιν ἀνώτερος, κατὰ δὲ τὴν ἐποχὴν νεώτερος τοῦ Ἐρατοσθένους, ἀπέδειξεν ὅτι ἡ γῆ εἶναι 180000 στάδια....].

Ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῆς περιμέτρου τῆς γῆς δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι αἱ παρατηρούμεναι διαφοραὶ εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν διαφόρων ἐπιστημόνων ὀφείλονται εἰς τὸν διάφορον τρόπον μετρήσεως καὶ εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ὑπ' αὐτῶν σταδίων ἐχόντων διάφορον μῆκος. Τὸ ἀλεξανδρινὸν στάδιον θεωρεῖται ὅτι εἶχε μῆκος 157,5 μέτρα (ὀλυμπιακὸν 192 μ.). Ἑπομένως ἡ κατ' Ἐρατοσθένη μέτρησις τῆς περιμέτρου τῆς γῆς εἰς 252000 στάδια ($252000 \times 157{,}5 = 39690$ χιλιόμετρα) τὴν ὁποίαν εὑρίσκει καὶ ὁ Διονυσόδωρος πλησιάζει κατὰ πολὺ πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα τῶν συγχρόνων μετρήσεων (40000 χιλιόμετρα περίπου).

Δὲν εἶναι γνωστὸν πῶς ἔχει ἑρμηνευθῆ ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ Πλινίου, ὅτι ἂν προστεθοῦν 12000 στάδια εἰς τὰ 252000, εἰς ὅσα ὑπολογίζεται ἡ περίμετρος τῆς γῆς, θὰ ληφθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ὅλου τοῦ κόσμου, ὁ ὁποῖος ἐπιστεύετο ὅτι εἶναι σφαιρικός. Μόνον ὁ Ἀρχιμήδης ὁμιλεῖ περὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ὡς μνημονεύεται ἀνωτέρω. Εἴτε εἰς τὴν διάμετρον τῆς γῆς, εἴτε εἰς τὴν περίμετρον αὐτῆς προσθέσωμεν 12000 στάδια εὑρίσκομεν ἀριθμὸν πολὺ μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον παρέχει ὁ Ἀρχιμήδης ὡς διάμετρον τοῦ κόσμου.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Pauly-Wissowa R. E.

Hermann Diels, Fragmente der Vorsokratiker I.

Kleines Lexikon der Antike, Otto Hiltbrunner, Sammlung Dalp.

Tusculum Lexikon, Heimeran Verlag, von W. Buchwald, A. Hohlweg, O. Prinz.

Pappe-Benseler, Wörterbuch der griechischen Eigennamen.

E. Hoppe, Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΙΚΕΛΙΚΗΝ ΔΩΡΙΚΗΝ ΔΙΑΛΕΚΤΟΝ ΔΕΚΑΠΕΝΤΕ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΣΩΖΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ ΔΕΛΤΙΟΥ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Νέα Σειρά, Τόμος 6 II, Τεῦχος 2, 1965, σελ. 265–297.

Extrait du BULL. DE LA SOC. MATHÉMATIQUE DE GRÈCE
Nouvelle-Série, Tome 6 II, Fasc. 2, 1965, pp. 265–297.
ATHÈNES

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΙΚΕΛΙΚΗΝ ΔΩΡΙΚΗΝ ΔΙΑΛΕΚΤΟΝ ΔΕΚΑΠΕΝΤΕ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΣΩΖΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ

Ὑπὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ (ἐν Ἀθήναις)

Εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους περιέχονται 15 θεωρήματα εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τὸν τίτλον Liber Assumptorum (Βιβλίον Λημμάτων), (Archimedis opera omnia vol. II. p. 510–525, J. L. Heiberg, 1913, B.G. Teubner). Ταῦτα δὲν ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἀλλὰ εἰς τὴν ἀραβικὴν ἐκ τῆς ὁποίας μετεφράσθησαν εἰς τὴν λατινικὴν καὶ ἐξεδόθησαν τὸ πρῶτον ἐν Λονδίνῳ κατὰ τὸ 1659 ὑπὸ τοῦ S. Foster. Βραδύτερον μετεφράσθησαν καὶ εἰς ἄλλας γλώσσας. Ὁ ἀραβικὸς κῶδιξ εὑρίσκεται εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Φλωρεντίας. Ἰδοὺ τὶ γράφει συναφῶς ὁ Heiberg εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (σελ. 510—511):

« Τὸ βιβλιάριον τοῦτο πρῶτος ἐξέδωκε ὁ S. Foster εἰς τὰ Σύμμικτα (Λονδῖνον 1659) ἐκ μεταφράσεως τοῦ I. Gravii, ὅστις εἶχε χρησιμοποιήσει ἀραβικὸν κώδικα, διότι ἑλληνικὸς δὲν ὑπάρχει. Μετὰ ταῦτα αὐτὸ ἐκ τοῦ Μεδικαίου κώδικος μετέφρασεν ἐκ νέου λατινιστὶ ὁ Ἀβραὰμ Ecchellensis, τὴν μετάφρασιν δὲ αὐτὴν μετὰ τῶν βιβλίων V—VII τοῦ Ἀπολλωνίου ἐξέδωκεν ὁ I. A. Borellus (ἐν Φλωρεντίᾳ 1661). Εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπάρχει εἰς τρεῖς Μεδικαίους κώδικας, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ κῶδιξ 275 (ἴδε καὶ κατάλογον τῶν Ἀνατολικῶν κωδίκων τῆς Λαυρεντιανῆς Μεδικαίας Βιβλιοθήκης ἐκδόσεως S. E. Assemanus, ἐν Φλωρεντίᾳ 1742, σελὶς 385) μόνον τὸ ἀνωτέρω βιβλιάριον καὶ τὰ βιβλία V—VII τοῦ Ἀπολλωνίου περιέχει, δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αὐτὸν τὸν κώδικα ἐχρησιμοποίησεν ὁ Borellus (παράβαλε πρὸς τούτοις Assemanus σελὶς 383 ἀριθ. 271 καὶ σελὶς 392 ἀριθ. 286). Ἐνταῦθα περιέλαβον τὴν ἐκδοθεῖσαν μετάφρασιν τοῦ Borelli. Παρ' αὐτῷ ὁ τίτλος εἶναι Βιβλίον Λημμάτων τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ μετάφρασιν τοῦ Thebit ben Kora καὶ ἔκθεσιν τοῦ Δ^ρος Almochtasso Abilhasan Hali ben Ahmad Nosuensi. [Liber Assumptorum Archimedis interprete Thebit ben Kora et exponente Doctore Almochtasso Abilhasan Hali ben Ahmad Nosuensi]. Προτάσεις 16.

[ὁ Foster ὅμως ἔχει 15 ὅπως καὶ πράγματι εἶναι, διότι κακῶς ὁ Borellus προσέθεσεν (ὡς πρότασιν) τὸ ἀπόσπασμα τοῦ Ἀρχιμήδους τὸ παρ' Εὐτοκίῳ διαφυλαχθέν].

Ὁ Thebit ben Kora προέταξεν τὸν ἑξῆς πρόλογον (Borellus σελ. 385): «Ὁ Δρ Almochtasso διαβεβαιοῖ ὅτι αὐτὸ τὸ βιβλίον ἀναφέρεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ἐν τῷ ὁποίῳ ὑπάρχουσιν ὡραιόταται προτάσεις ὀλίγαι κατὰ τὸν ἀριθμόν, ἀλλὰ μεγίστης ὠφελείας περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, ἄρισται καὶ κομψόταται, τὰς ὁποίας οἱ καθηγηταὶ αὐτῆς τῆς ἐπιστήμης συγκαταριθμοῦσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν διαμέσων προτάσεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἀναγιγνώσκωνται μεταξὺ τοῦ βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῆς Ἀλμαγέστας (Σημ. Τῆς μεγάλης Μαθηματικῆς Συντάξεως τοῦ Κλ. Πτολεμαίου). Καὶ πράγματι, μερικὰ χωρία τῶν προτάσεων ἐκείνων ἔχουσιν ἀνάγκην ἄλλων προτάσεων, διὰ τῶν ὁποίων ἐκεῖναι αἱ προτάσεις ἀποβαίνουσι σαφέστεραι. Καὶ βεβαίως ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης ὑπέδειξεν αὐτὰς τὰς προτάσεις καὶ αὐτὰς ἀναφέρει εἰς ἄλλα ἔργα του, ἐφ' ὅσον εἶπε: καθ' ὃν τρόπον κατελήξαμεν εἰς τὰς προτάσεις. Περὶ ὀρθογωνίων. Ὡσαύτως καί: καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείξαμεν ἐν τῇ ἡμετέρᾳ ἐκθέσει διαπραγματευόμενοι Περὶ τριγώνων· πάλιν, καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείξαμεν εἰς τὰς προτάσεις Περὶ τετραπλεύρων· καὶ ἀνέφερεν ἐν τῇ πέμπτῃ προτάσει ἀπόδειξιν περὶ αὐτοῦ τοῦ πράγματος περισσότερον εἰδικήν. Ἔπειτα συνέθεσεν ὁ Abusahal Alkuhi βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἐπέγραψε Σύνταξις τοῦ βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ Λημμάτων καὶ ἐπραγματεύθη τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς τῆς προτάσεως δι' ὁδοῦ περισσότερον εἰδικῆς καὶ καλυτέρας καὶ ἰδίως ἐκεῖνα τὰ μέρη τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς συνθέσεως τῆς ἀναλογίας. Τὸ ὁποῖον βεβαίως, ὅταν τοῦτο ἐγὼ κατενόησα, προσέθεσα εἰς τὰ σκοτεινότερα χωρία τοῦ βιβλίου τούτου ἔκθεσιν, εἴ τε κατὰ τόπους σημειώσεις καὶ ἐστερέωσα ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὐτὸς εἶχεν ὑποδείξει διὰ τῶν προτάσεων, ὅπως εἶχον κρίνει καὶ ἀνέφερα ἐκ τῶν προτάσεων τοῦ Abusahal δύο προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀναγκαιοῦσι διὰ τὴν διασαφήνισιν τῆς πέμπτης προτάσεως, παραλείπων τὰ λοιπὰ χάριν συντομίας καὶ ἐπειδὴ ταῦτα δὲν εἶναι ἀναγκαῖα». Παράβαλε Wenrich, Περὶ τῆς αὐθεντίας ἑλληνικῶν μεταφράσεων Ἀράβων σελὶς 192 κ. ἑ.

Ἐκ τῶν σχολίων τούτων τῶν Ἀράβων ἐχρησιμοποίησα ὅσα μοῦ ἐφάνησαν ὠφέλιμα, τὰ ἄλλα δὲ τὰ ἀπέρριψα. Ὅπως δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν προέρχεται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη, ὅπως τὸ ἔχομεν, οὕτω εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι μερικαὶ προτάσεις αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἀρκετὰ ἐπιστημονικῶς καὶ ἔχουσιν εὑρεθῆ καὶ ἔχουσιν ἀποδειχθῆ, καθ' ὅσον βαθμὸν ἐξέχουσιν εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους· ἀλλὰ πόσον πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς αὐτὸν δὲν εἶναι ἀρκετὰ ἀκόμη διασαφηνισμένον. Παράβαλε Quaest. Arch. p. 24—25. Ὁ ἑλληνικὸς τίτλος ὑπῆρξε Λήμματα».

* * *

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὡς παρατηρεῖ ὁ J. L. Heiberg, ὅτι ἡ διατύπωσις τῶν ἐν λόγῳ θεωρημάτων, ὡς αὕτη ὑπάρχει εἰς τὴν ἀραβικήν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους. Διὰ τὴν γνώμην αὐτὴν συνηγοροῦν οἱ ἑξῆς λόγοι:

1. Εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα ὑπάρχει ἡ φράσις «σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης ὀνομάζει ἄρβηλον» καὶ εἰς τὸ δέκατον τέταρτον θεώρημα ὑπάρχει ἡ φράσις «σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης καλεῖ salinon». Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ φράσεις αὗται δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν τεθῆ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Εἰς τινας ἀποδείξεις ὑπάρχουν διασαφηνίσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείεται νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους. Αὗται ἔχουν τεθῆ μὲ τὸν σκοπὸν ὅπως αἱ ἀποδείξεις γίνουν εὐκόλως κατανοηταὶ ὑπὸ μαθητῶν μὴ προχωρημένων εἰς τὴν γεωμετρίαν.

Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν 15 θεωρημάτων καὶ τῆς συγκρίσεως αὐτῶν πρὸς τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους κατελήξαμεν εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

Α. Τὰ 15 θεωρήματα ἀποτελοῦν ἑνιαῖον ὅλον (ἀφορῶν εἰς κύκλους) καὶ εἶναι ὡς ἐκ τούτου, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, ἐπινόησις καὶ δημιουργία ἑνὸς προσώπου δηλ. τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅμως τὸ $7^{ον}$ θεώρημα εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι εἶναι παρεμβολή, διότι ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ XII, 2 χρησιμοποιεῖ τὴν πρότασιν ὅτι τὸ εἰς κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Β. Αἱ πρὸς εὐκολωτέραν κατανόησιν ὡρισμένων θεωρημάτων διασαφηνίσεις δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Αὗται δέον νὰ ἀποδοθοῦν εἰς τὸν ἄγνωστον Ἕλληνα μαθηματικόν, ὁ ὁποῖος εἶχε συντάξει συλλογὴν θεωρημάτων τὰ ὁποῖα εἶχε διαμορφώσει καταλλήλως, ὥστε νὰ εἶναι περισσότερον κατανοητὰ εἰς τοὺς μαθητάς του. Φρονοῦμεν ὅτι ὁ Ἄραψ μεταφραστὴς Thebit ben Kora δὲν ἐπέφερε μεταβολὰς εἰς τὸ ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιηθὲν ἑλληνικὸν κείμενον.

Γ. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου θεωρήματος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, διότι ἡ ἰσότης $BZ = ZE$ (σχ. 2α) συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων *ΑΖΕ*, *ΒΖΔ*. Θεωροῦμεν Ἀρχιμήδειον ἀπόδειξιν τὴν ὑπὸ τοῦ T. L. Heath διατυπουμένην, τὴν ὁποίαν καὶ ἔχομεν ἐνταῦθα ἀποδώσει εἰς τὴν ἑλληνικὴν (σχ. 2) (T. L. Heath, The works of Archimedes p. 302, Dover, N. York).

Δ. Φαίνεται πολὺ πιθανὸν ὅτι τὰ θεωρήματα ἀποτελοῦν μέρος μεγαλυτέρας πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη ὁλόκληρος καὶ ὅτι ταῦτα ἐπενοήθησαν ὅτε ὁ Ἀρχιμήδης ἦτο πολὺ νέος. Τῆς πραγματείας αὐτῆς προηγήθησαν αἱ πραγματεῖαι* Περὶ τριγώνων καὶ Περὶ τετραπλεύρων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν. Οὐδεμίαν ἄλλην πληροφορίαν ἔχομεν περὶ τῆς συγγραφῆς τῶν δύο αὐτῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, πλὴν τῆς διαμνημονεύσεώς των εἰς τὰ Λήμματα (θεωρήματα 5, 6, 12).

Ε. Ἡ διατύπωσις τοῦ 6ου θεωρήματος, φρονοῦμεν, ὅτι εἶναι Ἀρχιμήδειος. Διότι καὶ εἰς τὸ 9ον θεώρημα τῆς πραγματείας Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν II καὶ εἰς τὸ 23ον τῆς πραγματείας Τετραγωνισμὸς παραβολῆς σπουδάζονται ἐπίσης εἰδικαὶ περιπτώσεις καὶ ὄχι γενικαί. Ὅτι τὰ θεωρήματα δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς δυνάμεως εἶναι ὀρθόν. Ὅτι ὅμως μόνον τὰ δύσκολα ἐκ τούτων εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν εὐσταθεῖ, ὅταν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὴν σκέψιν ὅτι αὐτὰ ἀποτελοῦν ἑνιαῖον ὅλον. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ὀνομασίαν Salinon τοῦ σχήματος τοῦ 14ου θεωρήματος, φρονοῦμεν ὅτι πρόκειται περὶ λάθους κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν καὶ ὅτι ἡ ἑλληνικὴ λέξις ἦτο σελήνιον (μηνίσκος σελήνης), ὡς ὀρθῶς κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν ἔχει διορθώσει ὁ Ἰσαὰκ Μπάροου (Isaac Barrow), ὁ καθηγητὴς τοῦ Ἰσαὰκ Νεύτωνος (Isaac Newton), (P. ver Eecke, Les oeuvres complètes d' Archimed, Tom. II p. 539, ed. Vaillant—Carmanne, Liège 1960).

Διὰ τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ ἀνακατασκευασθέντος ἑλληνικοῦ κειμένου τῶν 15 θεωρημάτων εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον ἐστηρίχθημεν εἰς τὰ εἰς τὴν αὐτὴν διάλεκτον σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους: 1) Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, 2) Περὶ ἑλίκων, 3) Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν I καὶ II, 4) Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, 5) Ὀχουμένων I καὶ II, τὰ ὁποῖα ἔχομεν ἤδη μεταφράσει εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν. Μερικὰς διασαφηνίσεις τῶν ἀποδείξεων, διὰ τὰς ὁποίας πιστεύομεν ὅτι εἶναι παρεμβολή, τὰς παρελείψαμεν.

Εἰς τὴν προσεχῆ παρ' ἡμῶν ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ παρατεθῇ καὶ ἡ ἀκριβὴς μετάφρασις τῶν 15 θεωρημάτων ἐκ τῆς λατινικῆς (καὶ γαλλικῆς), ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ σύγκρισις τοῦ ανα-

* Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων.

κατασκευασθέντος παρ' ἡμῶν ἑλληνικοῦ κειμένου πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ἄραβος Thebit ben Kora χρησιμοποιηθεῖσαν ἑλληνικὴν διατύπωσιν. (Σημ. Ἡ μετάφρασις εἰς τὴν γερμανικὴν καὶ ἀγγλικὴν δὲν ἔχει γίνει κατὰ λέξιν).

Αἱ παρ' ἡμῶν τεθεῖσαι ἐκφωνήσεις τῶν θεωρημάτων 1, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14 δὲν ὑπάρχουν εἰς τὴν ἀραβικήν. Φρονοῦμεν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης θὰ εἶχε θέσει ἐκφωνήσεις εἰς τὰ θεωρήματα αὐτά.

RECONSTRUCTION OF THE ANCIENT TEXT (IN THE SICILIAN — DORIC DIALECT) OF FIFTEEN THEOREMS OF ARCHIMEDES WHICH ARE PRESERVED IN THE ARABIC LANGUAGE

The Greek title of the relative treatise was «Lemmata». In the translation from Arabic into Latin it is «Liber Assumptorum»... There is no doubt, as too I. L. Heiberg observes, that the formulation of the theorems in question, as this exists in Arabic, cannot possibly be attributed to Archimedes. The following reasons plead in support of this opinion:

1. The fourth theorem contains the phrase «figure which Archimedes calls Arvelos»; the fourteenth theorem, also, contains the phrase «figure which Archimedes calls Salinon». It is obvious that these phrases cannot have been written by Archimedes.

2. There are some elucidations in some proofs which could not possibly come from Archimedes. These have been made with the intention of rendering the proofs easily comprehensible to non advanced geometry students.

From the study of the fifteen theorems and their comparison with the preserved works of Archimedes we have come to the following conclusions:

A. The 15 theorems constitute a single whole (concerning circles) and, owing to this, in all probability, they must be the invention of one person, that is to say of Archimedes. The 7th theorem may, probably, be an interpolation, because Euclid uses in the Elements XII, 2 the proposition, that the square, circumscribed to a circle is double the one which is inscribed.

B. The elucidations, made for an easier understanding of certain theorems, do not belong to Archimedes. These must be attributed to the unknown Greek mathematician who had composed a collection of theorems which he had shaped in a suitable manner so that they could be understood by his students more easily. In our opinion the Arab translator Thebit Ben Kora did not effect any changes in the Greek text which he had used.

C. The proof of the second theorem cannot belong to Archimedes because the equation $BZ = ZE$ (fig. 2a) is immediately inferred from the equation of the triangles AZE, $BZ\Delta$.

We consider as an Archimedean proof that which was formulated by T. L. Heath, which we also have rendered here in Greek (fig. 2, T. L. Heath, The Works of Archimedes, p. 302, Dover, New York).

D. It seems very probable that the theorems constitute a part of a bigger treatise of Archimedes which has not been preserved in whole and that these were invented when Archimedes was very young. The treatises* on the Triangles and on the Quadrilaterals, which have not been preserved, had preceded the above treatise. We have no other information about the composition of these two Works of Archimedes excepting their having been mentioned in the «Lemmata» (theorems 5, 6, 12).

E. We believe that the formulation of the 6th theorem is Archimedean. Because both in the 9th theorem of the treatise on Equilibriums of Planes II and in the 23rd of the treatise on Quadrature of the Parabola, special and not general cases are also studied. It is true that the theorems are not all of the same strengh. But it cannot be supported that only the difficult ones among them are belong to Archimedes if we assume that these constitute one single whole.

As regards the name «Salinon» of the figure of the 14th theorem, we believe that this is due to a mistake in copying and that the Greek word was «Selenion» (meniscos of the moon-crescent), as, Isaac Barrow, Newton's teacher has correctly observed (P. ver Eecke, Les Oeuvres Complètes d' Archimed, Tom. II, p. 539, ed. Valliant—Carmanne, Liège 1960).

* On the Right - angled Triangles,

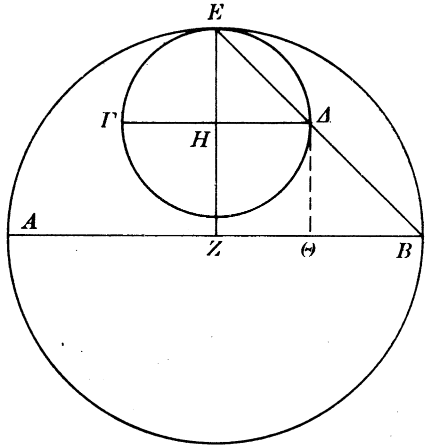
For the linguistic formulation of the reconstructed Greek text of the 15 theorems in the Sicilian Doric dialect we have relied on the preserved works of Archimedes which were written in the same dialect: 1. On Conoids and Spheroids, 2. On Spirals, 3. On the Equilibrium of Planes I and II, 4. On Quadrature of the Parabola, 5. On Floating Bodies I and II, which we have already translated into modern Greek. The formulations of the theorems 1, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14 do not exist in Arabic. We believe that Archimedes would have placed formulations in these theorems. We have left out some elucidations of the proofs which we believe to havebeen interpolated. In our coming edition of the Works of Archimedes we will also give an exact translation of the 15 theorems from Latin and French, so as to render possible the comparison between our reconstructed Greek text with the one formulated in Greek by the Arab Thebit Ben Kora (the translation into German and English has not been made verbatim).

ΤΟ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΘΕΝ ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΙΚΕΛΙΚΗΝ ΔΩΡΙΚΗΝ ΔΙΑΛΕΚΤΟΝ ΤΩΝ 15 ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

α'

Εἴ κα * δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντὸς διαμέτροι δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἀφῆς καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ἄν κέντρα τὰ Ζ, Η ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ Ε σαμεῖον, διάμετρος δὲ ἁ ΑΒ παρὰ διάμετρον τὰν ΓΔ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΒ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὸ Ε, ἄχθω δὲ ἁ ΔΘ παρὰ τὰν ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΕ ἴσαι ἐντὶ καὶ ἁ ΗΔ τᾷ ΖΘ, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΘ, τουτέστιν ἁ ΗΕ· λοιπαὶ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΘΔ, ΘΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΘΒΔ, τουτέστιν τᾷ ὑπὸ ΗΔΕ ἐστιν ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ ἐστιν ἴσα· ἔστι δὲ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴσα· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΒ· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

β'

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ. ἁ δὲ ΒΕ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ, ἐπεζεύχθω δὲ ἁ ΑΔ· φαμὶ δή, ἁ ΒΖ ἴσα εἶμεν τᾷ ΖΕ.

* *ἔωντι.*

1

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς αἱ δὲ διάμετροι αὐτῶν ληφθῶσι παράλληλοι, αἱ συνδέουσαι τὰ πέρατα τῶν διαμέτρων καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο εὐθεῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι τῶν ὁποίων κέντρα εἶναι τὰ σημεῖα Z, H ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ σημεῖον E, παράλληλοι δὲ διάμετροι αἱ AB, $\Gamma\Delta$· λέγω, ὅτι αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι $E\Delta$, ΔB θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ZH καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου E καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ $\Delta\Theta$ παράλληλος πρὸς τὴν ZH.

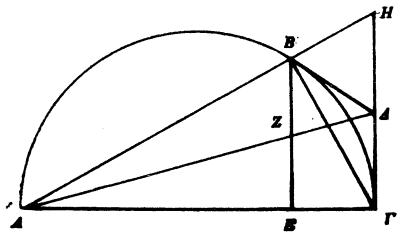
Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ZB, ZE εἶναι ἴσαι καὶ ἡ $H\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰς δύο (τελευταίας) ἡ $Z\Theta$ τουτέστιν ἡ HE· αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι $\Theta\Delta$, ΘB εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἡ γωνία ἄρα $\Theta\Delta B$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν $\Theta B\Delta$ δηλ. τὴν $H\Delta E$· ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ γωνία $H\Delta B$· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $H\Delta B$, ΔBZ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν $H\Delta B$, $E\Delta H$· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $H\Delta B$, ΔBZ ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $H\Delta B$, $E\Delta H$ ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς· ἐπ' εὐθείας ἄρα κεῖνται αἱ εὐθεῖαι $E\Delta$, ΔB· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

2

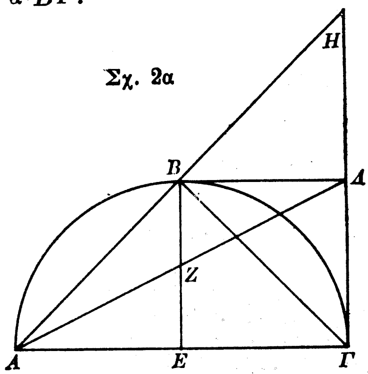
Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ $AB\Gamma$ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ αἱ ΔB, $\Delta\Gamma$, ἡ δὲ BE ἂς ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν $A\Gamma$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ $A\Delta$· λέγω, ὅτι ἡ $BZ = ZE$.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΒ καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ ἄχθω ἁ ΒΓ.

Σχ. 2



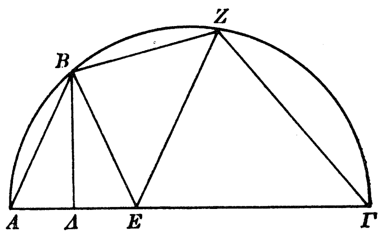
Σχ. 2α



Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΑ ὀρθή ἐστιν, ἐσσεῖται καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΗ ὀρθή· ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ τᾷ ΔΓ ἴσα· ἐσσεῖται ἄρα καὶ εὐθεῖα ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ τουτέστι τᾷ ΔΓ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΒΕ παρὰ τὰν ΗΓ ἐστίν, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ ΒΖ τᾷ ΖΕ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

γ'

Ἔστω τμᾶμα κύκλου τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ σαμείου τινος Β τᾶς περιφερείας ἄχθω τᾷ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΒΔ, λελάφθω δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΕ εὐθείᾳ τᾷ ΔΑ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΒΖ τᾷ ΑΒ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΓΖ εὐθεῖα τᾷ ΓΕ ἔστιν ἴσα.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΖ, ΖΕ, ΕΒ εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ ἁ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΕ ἔστιν ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΒ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΕΔΒ ἴσα· βάσις ἄρα ἁ ΕΒ βάσει τᾷ ΑΒ, τουτέστι τᾷ ΒΖ ἔστιν ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΖΕ ἔστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ ΑΒΖΓ ἐν κύκλῳ ἐστιν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΓΑΒ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΒΕΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί. ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΓΕΒ, ΒΕΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΕΑ· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΓΖΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΕΒ ἔστιν ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΖΕ, τουτέστιν ἁ ὑπὸ ΒΕΖ· λοι-

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ AB καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῶσιν αἱ AB, $ΓΔ$ ἂς συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον H, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ $BΓ$ (Σχ. 2).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία $ΓBA$ εἶναι ὀρθή, εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία $ΓBH$· εἶναι δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα $BΔ = ΔΓ$· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΔH = ΔB = ΔΓ$. (Διότι ἡ $ΓH$ εἶναι ἡ διάμετρος κύκλου $ΓBH$, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ $Δ$). Καὶ ἐπειδὴ ἡ BE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $HΓ$, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ $BZ = ZE$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

3

Ἔστω τμῆμα κύκλου $ABΓ$ καὶ ἀπὸ σημείου τινος B τῆς περιφερείας ἂς ἀχθῇ ἡ $BΔ$ κάθετος πρὸς τὴν $AΓ$, ἂς ληφθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα $ΔE = ΔA$ καὶ τὸ τόξον $BZ =$ τόξον AB· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΓZ$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν $ΓE$.

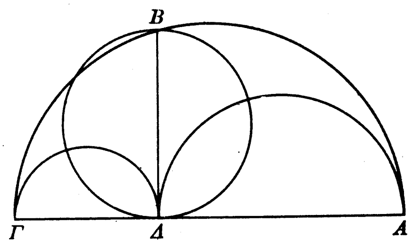
Διότι ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι AB, BZ, ZE, EB. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $AΔ = ΔE$ κοινὴ δὲ ἡ $BΔ$, ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι αἱ $AΔ$, $ΔB$ ἴσαι πρὸς δύο ἀντιστοίχως τὰς $EΔ$, $ΔB$· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία $AΔB = EΔB$· ἡ βάσις ἄρα $EB = AB = EZ$· ἡ γωνία ἄρα $BEZ = BZE$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον $ABZΓ$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν $ΓZB + ΓAB$ τουτέστι τὸ $ΓZB + BEA = 2$ ὀρθάς. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα $ΓEB + BEA = 2$ ὀρθάς· ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἀθροίσματα ἡ γωνία $BZE = BEZ$· αἱ ὑπόλοι-

καὶ ἄρα αἱ ποτὶ τᾷ βάσει τᾷ ΕΖ τριγώνου τοῦ ΕΓΖ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΖΕ, ΖΕΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· πλευρὰ ἄρα ἁ ΖΓ πλευρᾷ τᾷ ΕΓ ἔστιν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

δ'

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖον τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, γραφέωντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνασταθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ἔστ' ἐπὶ τὰν περιφέρειαν τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, σχᾶμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, ἴσον ἐστι κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ἀνασταθεῖσα κάθετος.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σαμεῖον τι ἐπὶ διαμέτρου τᾶς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν ΓΔ, ΔΑ ἁμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ ἁ ΔΒ· φαμὶ δή, σχᾶμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, τουτέστι τοῦ μείζονος ἁμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ ἴσον ἐστί.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἑξῆς ἀνάλογον ἐντί, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων, τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς τοῦ ἀπὸ τὰς ΒΔ ἔστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλάλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα ἐντί, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ δυσὶ κύκλοις ἂν διάμετρος ἁ ΔΒ καὶ δυσὶ κύκλοις, ἂν διαμέτροι αἱ ΑΔ, ΔΓ ἴσος, τουτέστιν ἁμικύκλιον τὸ ΑΓ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶν ἁμικυκλίοις, ἂν διαμέτροι αἱ ΑΔ, ΔΓ· κοινὸν ἀφαιρήσθω ἁμικύκλια τὰ ΑΔ, ΔΓ· λοιπὸν ἄρα χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ ἐστιν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ε'

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνασταθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, καὶ δύο κύκλοι γραφέωντι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας

ποι ἄρα παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου $EΓZ$ γωνίαι $ΓZE$, $ZEΓ$ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἡ πλευρὰ ἄρα $ZΓ$ = πρὸς τὴν πλευρὰν $EΓ$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

4

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ληφθῇ σημεῖον τι γραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς περιφερείας, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, ἰσοῦται μὲ κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ὑψωθεῖσα κάθετος.

Διότι ἔστω ἡμικύκλιον τὸ $ABΓ$ καὶ σημεῖον τι $Δ$ ἐπὶ τῆς διαμέτρου $AΓ$ καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἐντὸς ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς $ΓΔ$, $ΔA$, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου $Δ$ ἂς ὑψωθῇ κάθετος πρὸς τὴν $AΓ$ ἡ $ΔB$· λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, δηλαδὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἡμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντὸς ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἂς κληθῇ ἄρβηλος, εἶναι ἴσον μὲ κύκλον διαμέτρου $ΔB$.

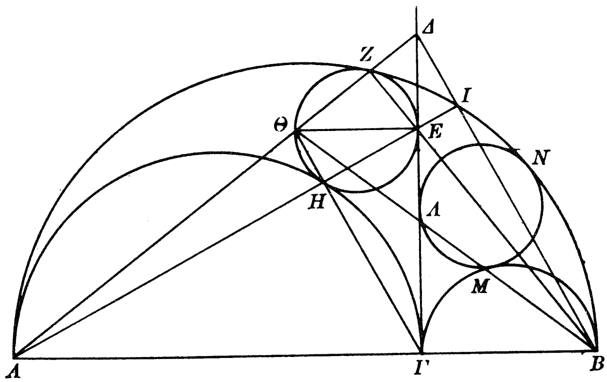
Διότι ἐπειδὴ ἡ $ΔB$ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν $ΔA$, $ΔΓ$, τὸ ὀρθογώνιον $ΔA \times ΔΓ = BΔ^2$ (Εὐκ. VI, 17)· ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ὀρθογώνιον $ΔA \times ΔΓ$ καὶ τὰ τετράγωνα $AΔ^2$, $ΔΓ^2$ (ὁπότε θὰ εἶναι $2ΔA \times ΔΓ + AΔ^2 + ΔΓ^2 = BΔ^2 + ΔA \times ΔΓ + AΔ^2 + ΔΓ^2$)· θὰ εἶναι ἄρα $AΓ^2 = 2BΔ^2 + AΔ^2 + ΔΓ^2$ (ἐπειδὴ $ΔA \times ΔΓ = BΔ^2$). Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι μεταξύ των, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν (Εὐκλ. XII, 2), ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ $AΓ$ θὰ εἶναι ἴσος μὲ δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ $BΔ$ καὶ μὲ δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ $AΔ$, $ΔΓ$, καὶ ἑπομένως τὸ ἡμικύκλιον $AΓ$ εἶναι ἴσον μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ $BΔ$, καὶ μὲ δύο ἡμικύκλια, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ $AΔ$, $ΔΓ$· ἂς ἀφαιρεθῶσι ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος τὰ ἡμικύκλια $AΔ$, $ΔΓ$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τόξων $AΓ$, $AΔ$, $ΔΓ$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἄρβηλος, ἰσοῦται μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ $ΔB$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

5

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῇ σημεῖον τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου γραφῶσι δύο ἡμικύκλια ἐντός,

ἐπιψαύοντες αὐτᾶς καὶ τῶν ἁμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι.

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ ΑΒ σαμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτᾶς τὸ Γ ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ ἁμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ, ἁ ΓΔ, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τᾶς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἁμικυκλίων· φαμὶ δή, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.



Ἔστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τᾶς ΓΔ κατὰ τὸ Ε σαμεῖον καὶ ἁμικυκλίου μὲν τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ Η, ἁμικυκλίου δὲ τοῦ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΘΕ· ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ ΑΘ, ΘΖ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΕ εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΕ, ΕΒ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ ΘΗ, ΗΓ, καὶ αἱ ΕΗ, ΗΑ, ἐκβεβλήσθω δὲ ἁ ΑΕ ἐπὶ τὸ Ι σαμεῖον, ἄχθω δὲ ἁ ΒΙ εὐθεῖα καὶ ἁ ΙΔ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΔ, ΑΒ εὐθεῖαι ἐντὶ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου τᾷ ΑΒ ἄκται ποτ' ὀρθὰς ἁ ΔΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΔΑ ἁ ΒΖ, τεμνέουσα τὰν ΔΓ κατὰ τὸ Ε, εὐθεῖα δὲ ἁ ΑΕΙ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΙ ᾖ, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΙ, ΙΔ ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων δέδεικται. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν ΓΗ ἐστιν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΘ, ὃν ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΘΕ, τουτέστιν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΘΕ ἔστιν ἴσον· ὁμοίως δὴ δείξομες ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ ΛΜΝ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ τᾷ διαμέτρῳ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἴσον ἐστί· αἱ διαμέτροι ἄρα κύκλων τῶν ΕΖΗ, ΛΜΝ ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ὑψωθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ γραφῶσι πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι αὐτῆς καὶ τῶν ἡμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσοι.

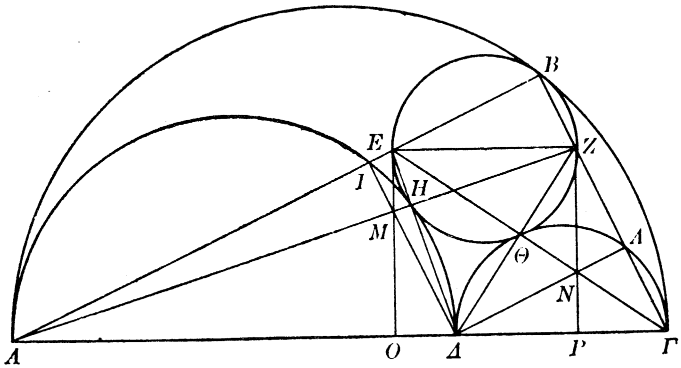
Ἔστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ AB καὶ σημεῖον τι ἐπ' αὐτῆς τὸ $Γ$, ἂς ἀναγραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων $AΓ$, $ΓB$ ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου $Γ$ ἂς ὑψωθῇ ἡ εὐθεῖα $ΓΔ$ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον AB, ἂς ἀναγραφῶσι δὲ δύο κύκλοι πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου, ἐφαπτόμενοι καὶ τῆς ὑψωθείσης καὶ τῶν ἡμικυκλίων· λέγω, ὅτι οἱ γραφέντες κύκλοι εἶναι μεταξύ των ἴσοι.

Διότι ἔστω πρότερον κύκλος ὁ ἐφαπτόμενος τῆς $ΓΔ$ κατὰ τὸ σημεῖον E, καὶ τοῦ μὲν ἡμικυκλίου $AΓ$ κατὰ τὸ H, τοῦ δὲ ἡμικυκλίου AB κατὰ τὸ σημεῖον Z, ἂς ἀχθῇ δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ $ΘE$· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι $AΘ$, $ΘZ$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας *(ϑ.1)*, καὶ αἱ AZ, $ΓE$ ἀφοῦ προεκβληθῶσι ἂς συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον $Δ$· ὁμοίως αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ZE, EB κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς ἐπίσης αἱ $ΘH$, $HΓ$ καὶ αἱ EH, HA, ἂς ἐκβληθῇ δὲ ἡ AE μέχρι τοῦ σημείου I, ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ BI καὶ ἡ $IΔ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ $AΔ$, AB εἶναι εὐθεῖαι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου $Δ$ ἔχει ἀχθῇ ἡ $ΔΓ$ κάθετος πρὸς τὴν AB καὶ ἀπὸ τοῦ B κάθετος ἡ $ΔA$ πρὸς τὴν BZ, τέμνουσα τὴν $ΔΓ$ κατὰ τὸ σημεῖον E, ἡ δὲ εὐθεῖα AEI εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BI, αἱ εὐθεῖαι BI, $IΔ$ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς ἀπεδείχθη παρ' ἡμῶν εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $BΔ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΓH$ θὰ εἶναι $AΔ:ΔΘ=AΓ:ΘE=AB:BΓ$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $AΓ\times ΓB=AB\times ΘE$· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι εἰς τὸν κύκλον $ΛMN$ τὸ ὀρθογώνιον $AΓ\times ΓB=AB$ ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου $ΛMN$· αἱ διάμετροι ἄρα τῶν κύκλων EZH, $ΛMN$, δηλαδὴ οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι· **ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.**

στ'

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖον τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων, τὸν λόγον τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, σαμεῖον δέ τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μεῖζον τμᾶμα τὸ ΑΔ ἐλάσσονος τοῦ ΔΓ ἁμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀναγεγράφθων ἁμικύκλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ ΕΖ ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἁμικυκλίων καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΕΖ. εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς ΑΓ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΒ· εὐθεῖαι δὴ ἐντὶ αἱ ΑΒ, ΓΒ ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. ἐπεζεύχθωσαν ἔτι αἱ ΖΗΑ, ΕΘΓ· δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι εἶμεν· ἔτι δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ αἱ ΔΙ, ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΜ, ΖΝ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ο, Ρ σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΕΔ ἁ ΑΗ τᾷ ΕΔ ποτ' ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἁ ΔΙ τᾷ ΑΕ, τεμνέοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ Μ σαμεῖον, ἁ ΕΜΟ τᾷ ΑΓ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη, καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΖΝΡ τᾷ ΓΑ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΛ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἁ ΔΙ παρὰ τὰν ΓΒ· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἔχει ἁ ΑΜ ποτὶ τὰν ΜΖ, τουτέστιν ἁ ΑΟ ποτὶ τὰν ΟΡ, καὶ ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΛ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἁ ΓΝ ποτὶ τὰν ΝΕ, τουτέστιν ἁ ΓΡ ποτὶ τὰν ΡΟ· ἦν δὲ ἁ ΑΔ ἁμιόλιος τᾶς ΔΓ· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα τᾶς

6

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ γραφῶσιν ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντὸς γραφῇ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ $AB\Gamma$ σημεῖον δέ τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Δ καὶ ἂς εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ $A\Delta$ τὰ $3:2$ τοῦ μικροτέρου τοῦ $\Delta\Gamma$, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων $A\Delta$, ΔB ἂς ἀναγραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντός, ἂς γραφῇ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον ὁ κύκλος EZ ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ EZ παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$.

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι AE, EB, καὶ αἱ ΓZ, ZB· θὰ εἶναι λοιπὸν εὐθεῖαι αἱ AB, ΓB, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (θ.1). Ἂς ἐπιζευχθῶσιν ἀκόμη αἱ ZH, HA καὶ αἱ $E\Theta$, $\Theta\Gamma$· ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι καὶ αὗται κεῖνται ἐπ' εὐθείας· προσέτι δὲ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔE, ΔZ, καὶ αἱ ΔI, $\Delta\Lambda$ καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ EM, ZN ἂς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων O, P.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον $AE\Delta$ ἡ AH εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $E\Delta$ καὶ ἡ ΔI ἐπὶ τὴν AE, τέμνονται δὲ κατὰ τὸ σημεῖον M, ἡ EMO εἶναι κάθετος πρὸς τὴν $A\Gamma$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν πραγματείαν μας περὶ τριγώνων καὶ ὑπετέθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ZNP εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΓA· εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα $\Delta\Lambda$ παράλληλος πρὸς τὴν AB καὶ ἡ ΔI παράλληλος πρὸς τὴν ΓB· ὥστε εἶναι $A\Delta : \Delta\Gamma = AM : MZ = AO : OP$ (1)

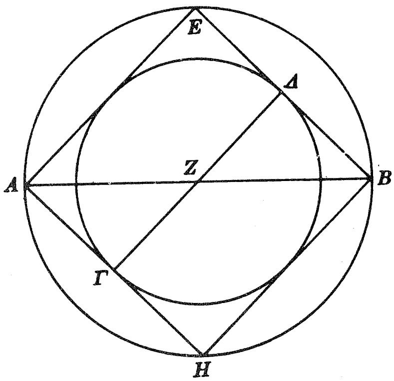
καὶ $\Gamma\Delta : \Delta A = \Gamma N : NE = \Gamma P : PO.$ (2)

Ἦτο δὲ ἡ $A\Delta = \frac{3}{2}\Delta\Gamma$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $AO = \frac{3}{2}OP$· εἶναι ἑπομένως ἡ $OP = \frac{3}{2}\Gamma P$· αἱ εὐθεῖαι ἄρα AO, OP, $O\Gamma$ εὑρίσκονται εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν, ἐν ᾧ ἡ μὲν $P\Gamma$ γίνεται 4, ἡ δὲ $OP=6$, ἡ δὲ $AO=9$, ἡ δὲ $\Gamma A=19$. Εἶναι δὲ ἡ $PO=EZ$· ὥστε $A\Gamma : EZ = 19:6$· καὶ εἶναι ἡ $A\Gamma$ διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου $AB\Gamma$, ἡ δὲ EZ διάμετρος τοῦ κύκλου EBZ· εὑρέθη ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἂν ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{n+1}{n}$. [**Σημ.** Ἐκ τῆς (1) ἀφοῦ $A\Delta = \frac{3}{2}\Delta\Gamma$ εἶναι καὶ $AO = \frac{3}{2}OP$, (3).

ΟΡ ἐστὶν ἁμιόλιος, καὶ ἁ ΟΡ τᾶς ΓΡ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΟ, ΟΡ, ΡΓ ἑξῆς ἀνάλογον ἐντί, ἂν ἁ μὲν ΡΓ ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἁ δὲ ΟΡ ἕξ, ἁ δὲ ΑΟ ἐννέα, ἁ δὲ ΓΑ ἐννεακαίδεκα. ἔστι δὲ ἁ ΡΟ τᾷ ΕΖ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ· καί ἐστι ἁ ΑΓ διάμετρος ἁμικυκλίου τοῦ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ κύκλου τοῦ ΕΒΖ· εὑρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται εἴ κα ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾖ.

< ζ′

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστι.

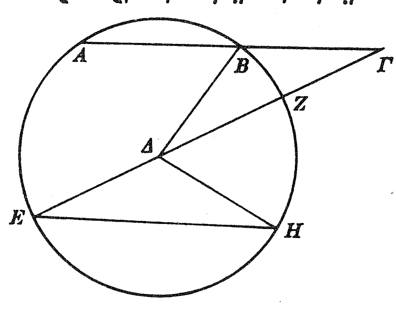


Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒ περὶ τετράγωνον τὸ ΑΒ καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου, ἁ ΑΒ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἁ ΓΔ παρὰ τὰν ΑΕ· φαμὶ δή, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίων.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ, τουτέστι τᾶς ΓΔ ἐστὶ διπλάσιον, οἱ κύκλοι δὲ ἐντὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν. >

η′

Εἴ κα ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις ΑΒ προσαρμοσμένη ᾖ ἐκβληθῇ δὲ κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ Ε σαμεῖον, ἐσσεῖται περιφέρεια ἁ ΑΕ περιφερείας τὰς ΒΖ τριπλασίων.



Ἄχθω γὰρ ἁ ΕΗ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΔΒ, ΔΗ. Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔΕΗ, ΔΗΕ ἴσαι ἀλλάλαις

Ἐκ τῆς (2), $ΓΔ : ΔΑ = ΓΡ : ΡΟ$, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος τῆς (1) ἕπεται $ΡΟ = \frac{3}{2} ΓΡ$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $ΑΟ = \frac{9}{4} ΓΡ$, ἤτοι ἔχομεν $ΑΟ = \frac{3}{2} ΟΡ = \frac{9}{4} ΓΡ$. Διαιροῦντες τὰ τρία μέλη τῶν ἰσοτήτων διὰ 9 λαμβάνομεν $\frac{ΓΡ}{4} = \frac{ΟΡ}{6} = \frac{ΑΟ}{9}$, καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν $\frac{ΓΡ}{4} = \frac{ΟΡ}{6} = \frac{ΑΟ}{9} = \frac{ΓΡ+ΟΡ+ΑΟ}{4+6+9} = \frac{ΑΓ}{19}$, ἢ $ΓΡ : ΟΡ : ΑΟ : ΑΓ = 4 : 6 : 9 : 19$, ἤτοι $ΑΓ : ΟΡ = 19 : 6$].

7

Ὁ περιγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον κύκλος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου. Διότι ἔστω ὁ κύκλος $ΑΒ$ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράγωνον $ΑΒ$ καὶ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος $ΓΔ$, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου (δηλ. διαγώνιος) ἡ $ΑΒ$, ἂς ἀχθῇ δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ $ΓΔ$, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν $ΑΕ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΑΒ^2 = 2ΑΕ^2 = 2ΓΔ^2$, οἱ δὲ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν. (Σημ. Ὅτι τὸ εἰς κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου XII, 2. Εἶναι ἄρα πιθανὸν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι παρεμβολή).

8

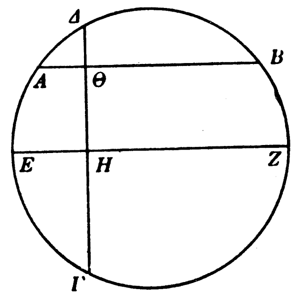
Ἐὰν εἰς κύκλον χορδή τις $ΑΒ$ ἐκβληθῇ κατὰ τὸ σημεῖον $Γ$, ὥστε ἡ εὐθεῖα $ΒΓ$ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ $Γ$ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖα τις μέχρι τοῦ σημείου $Ε$, τὸ τόξον $ΑΕ$ θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ τόξου $ΒΖ$.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ $ΕΗ$ παράλληλος πρὸς τὴν $ΑΒ$ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ $ΔΒ$, $ΔΗ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ γωνίαι $ΒΓΔ$, $ΒΔΓ$, $ΔΕΗ$, $ΔΗΕ$ εἶναι *ἐντί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΓΔΗ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶ διπλασίων, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΔΓ τριπλασίων. ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΒΗ, τουτέστιν ἁ ΑΕ, περιφερείας τᾶς ΒΖ τριπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.*

θ'

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέουσαι ἀλλάλας ποτ' ὀρθάς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· φαμὶ δή, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΑΔ, ΓΒ δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

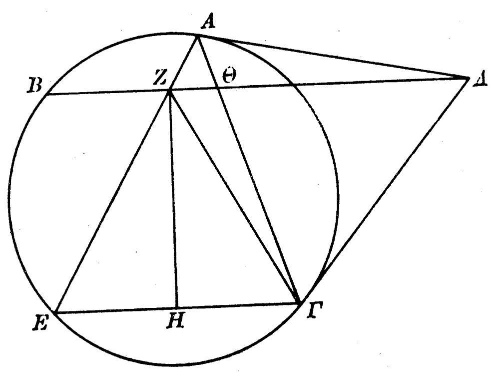


Τετμάσθω γὰρ δίχα ἁ ΓΔ κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ Η διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΑΒ.

Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἁ ΕΓ περιφερείαις ταῖς ΕΑ, ΑΔ ἴσα ἐστι, ἐσσοῦνται ἄρα περιφέρειαι αἱ ΓΖ, ΕΑ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἴσαι· ἔστι δὲ περιφέρεια ἁ ΕΑ περιφερείᾳ τᾷ ΒΖ ἴσα· συναμφότερος ἄρα περιφέρεια ἁ ΓΒ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἐστιν ἴσα· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος περιφέρεια ἁ ΑΓ, ΔΒ ἁμικυκλίῳ ἐστιν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ι'

Εἴ κα ᾖ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σαμεῖα, τεμνέουσα δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΒ, ἀχθῇ δὲ ἁ ΕΓ παρὰ τὰν ΒΔ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἁ ΕΑ τεμνέουσα τὰν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΕΓ ἀχθῇ ἁ ΖΗ, ἁ ἀγμένα τὰν ΕΓ δίχα τέμνει.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΔΑ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστι, ἁ δὲ ΑΓ τεμνέουσα αὐτοῦ, γωνία ἁ μεταξύ των ἴσαι, ἡ γωνία δὲ $ΓΔΗ = 2ΔΗΕ$, θὰ εἶναι ὅλη ἡ γωνία $ΒΔΗ = 3ΒΔΓ$· εἶναι ἑπομένως καὶ τὸ τόξον $ΒΗ = ΑΕ = 3ΒΖ$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

9

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καθέτως μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, τὰ δύο ἀπέναντι τόξα ἰσοῦνται μὲ τὰ ἄλλα δύο ἀπέναντι.

Ἔστω ὁ κύκλος $ΑΒΓ$ καὶ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι τὰ δύο ἀπέναντι τόξα $ΑΔ$, $ΓΒ$ ἰσοῦνται μὲ τὰ δύο ἀπέναντι $ΑΓ$, $ΒΔ$.

Διότι ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ εὐθεῖα $ΓΔ$ κατὰ τὸ σημεῖον $Η$ καὶ διὰ τοῦ $Η$ ἂς διαχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ $ΕΖ$ παράλληλος πρὸς τὴν $ΑΒ$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον $ΕΓ =$ τοξ $ΕΑ + ΑΔ$, θὰ εἶναι ἄρα τοξ $ΓΖ + ΕΑ + ΑΔ =$ μὲ ἡμικύκλιον· εἶναι δὲ τοξ $ΒΖ =$ τοξ $ΑΕ$· θὰ εἶναι ἄρα τοξ $ΓΒ + ΑΔ =$ μὲ ἡμικύκλιον· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τόξον $ΑΓ + ΔΒ =$ μὲ ἡμικύκλιον· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

10

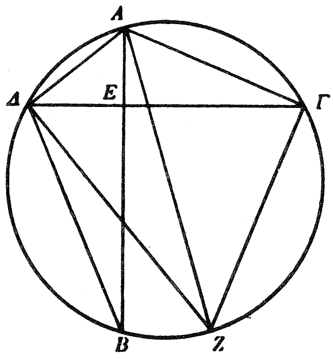
Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον $ΑΒΓ$ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΔΑ$, $ΔΓ$ ἐφάπτωνται αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεῖα $Α$, $Γ$, ἀχθῇ δὲ τέμνουσα ἡ $ΔΒ$ καὶ ἡ $ΕΓ$ παράλληλος πρὸς τὴν $ΒΔ$ καὶ ἡ ΕΑ τέμνουσα τὴν $ΔΒ$ κατὰ τὸ $Ζ$ καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν $ΕΓ$ ἡ $ΖΗ$, ἡ ἀχθεῖσα διχοτομεῖ τὴν $ΕΓ$.

ὑπὸ ΔΑΓ τᾷ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμάματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΑΖΔ ἔστιν ἴσα. ἔστι γὰρ ἁ ΓΕ παρὰ τὰν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΔΑΖ, ΑΘΔ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΖΔ, ΘΑΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ πρὸς τὸ Δ κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνῳ ἔστιν ἴσον· ἐπεὶ οὖν ὃν λόγον ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, τοῦτον ἔχει καὶ ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΔΘ, γωνία δὲ ἁ ποτὶ τὸ Δ σαμεῖον κοινά ἐστι, τρίγωνα ἄρα τὰ ΔΖΓ, ΔΓΘ ἐστιν ὅμοια καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΖΓ, ΔΓΘ, ΔΑΘ, ΑΖΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΖΓ τᾷ ὑπὸ ΖΓΕ ἴσα· ἦν δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΔΖΑ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσα· ἐν δυσὶ τριγώνοις ἄρα τοῖς ΕΗΖ, ΓΗΖ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΕΖ, ΗΓΖ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ αἱ ποτὶ τὸ Η σαμεῖον γωνίαι ὀρθαί· ἔστι δὲ πλευρὰ ἁ ΗΖ κοινά· ἔστιν ἄρα ἁ ΕΗ τᾷ ΗΓ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ια'

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν εὐθειῶν τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐντί.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνάσθων ποτ' ὀρθὰς κατὰ τὸ Ε σαμεῖον· φαμὶ δή, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστί.



Ἄχθω γὰρ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΑΖ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΓΖ, ΔΒ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΔΕ, ΑΖΓ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΔΕ, καὶ ΑΓΖ, ΑΖΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΖ, ΔΑΕ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἴσαι· περιφέρειαι ἄρα αἱ ΓΖ, ΔΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΒ· ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ ἴσον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΓΑ τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσον· ἐσσοῦνται ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ $ΑΓ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΔΑ$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἡ δὲ $ΑΓ$ χορδὴ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἡ γωνία $ΔΑΓ = ΑΕΓ = ΑΖΔ$· διότι ἡ $ΓΕ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΒΔ$. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα τὰ $ΔΑΖ$, $ΑΘΔ$ δύο γωνίαι αἱ $ΑΖΔ$, $ΘΑΔ$ εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ ἡ γωνία $Δ$ κοινή, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΖΔ \times ΔΘ = ΔΑ^2 = ΔΓ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὃν λόγον ἔχει ἡ $ΖΔ : ΔΓ = ΔΓ : ΔΘ$, ἡ δὲ πρὸς τὸ $Δ$ σημεῖον γωνία εἶναι κοινή, τὰ τρίγωνα ἄρα $ΔΖΓ$, $ΔΓΘ$ εἶναι ὅμοια καὶ ἡ γωνία $ΔΖΓ = ΔΓΘ = ΔΑΘ = ΑΖΔ$· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία $ΔΖΓ = ΖΓΕ$· ἦτο δὲ καὶ ἡ $ΔΖΑ = ΑΕΓ$· εἰς τὰ δύο τρίγωνα ἄρα $ΕΗΖ$, $ΓΗΖ$ εἶναι γωνία ἡ $ΗΕΖ = ΗΓΖ$, αἱ πρὸς τὸ σημεῖον $Η$ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἡ πλευρὰ $ΗΖ$ κοινή· εἶναι ἄρα $ΕΗ = ΗΓ$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

11

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καθέτως, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

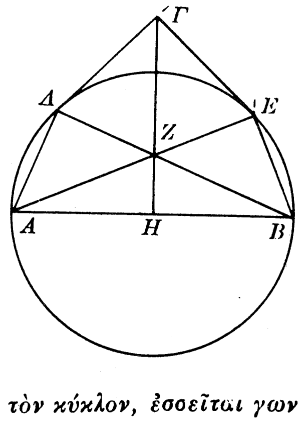
Διότι ἔστω ὁ $ΑΒΓ$ κύκλος καὶ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως κατὰ τὸ σημεῖον $Ε$ αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 + ΑΕ^2 + ΕΓ^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου $ΑΖ$ καὶ αἱ εὐθεῖαι $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΓΖ$, $ΔΒ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὰ δύο τρίγωνα $ΑΔΕ$, $ΑΖΓ$ δύο γωνίαι αἱ $ΑΕΔ$, $ΑΔΕ$ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο γωνίας ἀντιστοίχως τὰς $ΑΓΖ$, $ΑΖΓ$ θὰ εἶναι καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία $ΓΑΖ = ΔΑΕ$· τὰ τόξα ἄρα $ΓΖ$, $ΔΒ$ εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ αἱ εἰς αὐτὰ χορδαί, αἱ $ΓΖ$, $ΔΒ$· εἶναι δὲ καὶ $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 = ΔΒ^2 = ΓΖ^2$, καὶ $ΑΕ^2 + ΕΓ^2 = ΓΑ^2$, καὶ $ΓΖ^2 + ΓΑ^2 = ΖΑ^2$· θὰ εἶναι ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 + ΑΕ^2 + ΕΓ^2 =$ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

ιβ'

Εἴ κα ἐκ σαμείου ἐκτὸς ἁμικυκλίου δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφῆς δύο εὐθεῖαι ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάτεσσι τᾶς διαμέτρου τεμνέουσαι ἀλλάλας, ἁ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον τομᾶς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ποτὶ τὰν διάμετρον ἐσσεῖται ταύτᾳ ποτ' ὀρθάς.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ, σαμεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄχθων δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Δ, Ε σαμεῖα, ἐπεζεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφῆς ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάτεσσι τᾶς διαμέτρου τοῖς Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΔΒ, τεμνέουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀχθεῖσα ἁ ΓΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΓΗ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς.



Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΑΔ, ΕΒ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΑΒ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ ὀρθή ἐστιν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΒΑ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΕΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω ἁ ὑπὸ ΖΒΕ· συναμφότερος ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ, ΑΒΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΖΒΕ, ΖΕΒ, τουτέστιν ἐξωτερικᾷ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ, τριγώνου τοῦ ΖΒΕ ἔστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστί, διᾶκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφῆς τοῦ Δ ἁ ΔΒ τεμνέουσα τὸν κύκλον, ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΒ ἴσα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ τᾷ ὑπὸ ΕΒΑ ἔστιν ἴσα· καὶ συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ, ΓΔΖ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ ἔστιν ἴσα· καὶ δέδεικται παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων, ὅτι εἴ κα μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, οἷον τῶν ΓΔ, ΓΕ, δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνόμεναι, οἷον αἱ ΔΖ, ΕΖ, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ τούτων περιεχομένα, ὡς ἁ ποτὶ τὸ Ζ, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν περιεχομένᾳ, ὡς αἱ ποτὶ τὰ Ε, Δ σαμεῖα ἴσα ἐστιν, ἁ ἐπιζευγνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου ὅθι που αἱ δύο εὐθεῖαι συμβαλέοντι ἐπὶ τὸ σαμεῖον ὅθι που αὗται τεμνέοντι ἀλλάλας, ὡς ἁ ΓΖ εὐθεῖα, ἑκατέρᾳ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὡς αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐστιν ἴσα· ἁ ΓΖ εὐθεῖα ἄρα τᾷ ΓΔ ἐστιν ἴσα καὶ γω-

12

Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς ἡμικυκλίου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ, ἀχθῶσι δὲ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο εὐθεῖαι πρὸς τὰ ἀπέναντι αὐτῶν πέρατα τῆς διαμέτρου τεμνόμεναι, ἡ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σημείου πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα μέχρι τῆς διαμέτρου θὰ εἶναι πρὸς αὐτὴν κάθετος.

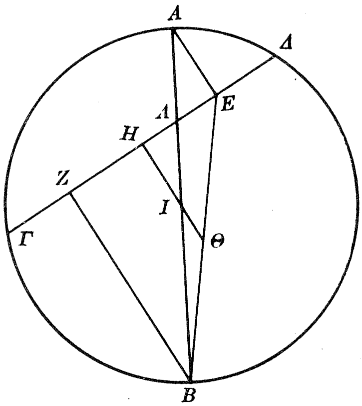
Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ AB σημεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Δ, E καὶ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς πρὸς τὰ ἀπέναντι πέρατα τῆς διαμέτρου τὰ A, B αἱ εὐθεῖαι EA, ΔB, τεμνόμεναι κατὰ τὸ Z καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΓZ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου H· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓH εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον AB.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔA, EB. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΔAB ἡ γωνία $A\Delta B$ εἶναι ὀρθή, αἱ ὑπόλοιποι δύο γωνίαι ΔAB, ΔBA ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία AEB ἴση μὲ μίαν ὀρθήν· ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ κοινὴ ZBE· τὸ ἄθροισμα ἑπομένως τῶν γωνιῶν $\Delta AB+ABE=ZBE+ZEB=$ πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΔZE τοῦ τριγώνου ZBE. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Delta$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἔχει δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ ἡ χορδὴ ΔB, θὰ εἶναι ἡ γωνία $\Gamma\Delta B=\Delta AB$· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ γωνία $\Gamma EZ=EBA$· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $\Gamma EZ+$ $+\Gamma\Delta Z=\Delta ZE$ καὶ ἔχομεν ἀποδείξει εἰς τὴν πραγματείαν μας Περὶ τετραπλεύρων ὅτι, ἐὰν μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, ὡς π.χ. τῶν $\Gamma\Delta$, ΓE, ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὡς αἱ ΔZ, EZ καὶ ἡ ὑπὸ τούτων περιεχομένη γωνία, ὡς ἡ πρὸς τὸ Z, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρὸς τὰ σημεῖα E, Δ γωνιῶν, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου ὅπου αὗται τέμνονται, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓZ, ἰσοῦται πρὸς ἑκάστην νία ἁ ὑπὸ ΓΖΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΔΖ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΔΑΗ· γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ ΓΖΔ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΗ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστί· λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΖΗ, αἱ ὑπὸ ΑΔΖ, ΑΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΗΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα ἐστί· ἔστιν ἄρα εὐθεῖα ἁ ΔΗ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθάς· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ιγ'

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς *, ἁ μὲν διάμετρος ἁ δὲ οὔ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἄλλᾳ εὐθείᾳ, αἱ ἀπολαφθεῖσάι ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλάλας μή ποτ' ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἂν ἁ ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν Α, Β ἄχθωσαν τᾷ ΓΔ ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ· φαμὶ δή, αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου ἀπολαφθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΕΒ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ Ι τᾷ ΓΔ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ ΙΗ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλέτω τᾷ ΕΒ κατὰ τὸ Θ σαμεῖον.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΙΗ παρὰ τὰν ΑΕ ᾖ, ἁ δὲ ΒΙ τᾷ ΙΑ ἴσα, εὐθεῖα ἄρα ἁ ΒΘ τᾷ ΘΕ ἐστιν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΒΖ παρὰ τὰν ΘΗ ᾖ, εὐθεῖα ἄρα ἁ ΖΗ εὐθείᾳ τᾷ ΗΕ ἔστιν ἴσα· ἔστι δὲ καὶ ἁ ΗΓ τᾷ ΗΔ ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΗ, τουτέστιν ἁ ΗΕ· λοιπὰ ἄρα ἁ ΖΓ λοιπᾷ τᾷ ΕΔ ἐστιν ἴσα· φανερὸν οὖν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'

Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἴσα τμάματα λαφθέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἁμικύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τᾶς διαμέτρου ἁμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος οὗ διάμετρος συναμφότερος ἁ ἀπὸ τοῦ

* ἔωντι

τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὡς εἶναι αἱ $ΓΔ$, $ΓΕ$· ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΓΖ = ΓΔ$ καὶ ἡ γωνία $ΓΖΔ = ΓΔΖ = ΔΑΗ$· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $ΓΖΔ + ΔΖΗ = 2$ ὀρθάς· καὶ τὸ ἄθροισμα ἑπομένως $ΔΑΗ + ΔΖΗ = 2$ ὀρθάς· αἱ ἄλλαι ἄρα γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου $ΑΔΖΗ$, αἱ $ΑΔΖ + ΑΗΖ = 2$ ὀρθάς· εἶναι δὲ ἡ γωνία $ΑΔΒ = 1$ ὀρθήν· καὶ ἡ γωνία ἄρα $ΑΗΓ = 1$ ὀρθήν· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα $ΓΗ$ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον $ΑΒ$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

13

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται οὐχὶ καθέτως καὶ ἡ μία εἶναι διάμετρος ἡ δὲ ἄλλη ὄχι, ἀχθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν, τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τμήματα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$ καὶ εἰς αὐτὸν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι οὐχὶ καθέτως αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ $ΑΒ$ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῶν $Α$, $Β$ ἄς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ $ΑΕ$, $ΒΖ$· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου λαμβανόμενα τμήματα τὰ $ΓΖ$, $ΔΕ$ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Διότι ἄς ἀχθῇ ἡ $ΕΒ$ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ $Ι$ ἄς ἀχθῇ ἡ $ΙΗ$ κάθετος πρὸς τὴν $ΓΔ$ καὶ ἐκβληθεῖσα ἄς συναντήσῃ τὴν $ΕΒ$ εἰς τὸ σημεῖον $Θ$.

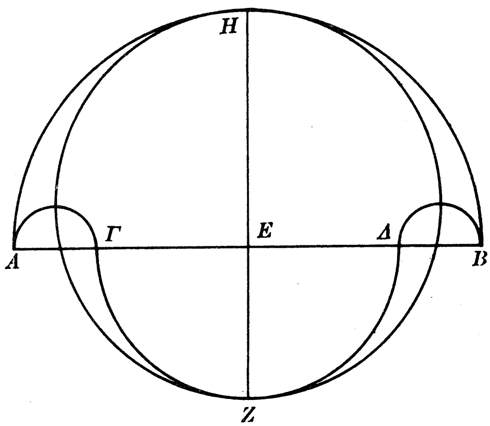
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΙΗ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΑΕ$, ἡ δὲ $ΒΙ = ΙΑ$, ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΒΘ = ΘΕ$. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΒΖ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΘΗ$, ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΖΗ = ΗΕ$· εἶναι δὲ καὶ ἡ $ΗΓ = ΗΔ$· ἄς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἡ $ΖΗ = ΗΕ$· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ $ΖΓ$ εἶναι πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν $ΕΔ$ ἴση· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

14

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῶσι δύο ἴσα τμήματα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τούτων γραφῶσιν ἐντὸς δύο ἡμικύκλια, γραφῇ δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τῆς διαμέτρου ἡμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ

κέντρου τοῦ ἁμικυκλίου καὶ ἁ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτός, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ ΑΒ καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν Α, Β δύο τμάματα ἴσα ἀλλάλοις λελάφθω τὰ ΑΓ, ΒΔ, γεγράφθω δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τοῦ ΓΔ γεγράφθω ἁμικύκλιον ἐκτός, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἁμικυκλίου τοῦ Ε διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον· φαμὶ δή, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ ἁ ΔΓ δίχα τέτμαται κατὰ τὸ Ε σαμεῖον ποτίκειται δὲ αὐτᾷ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἁ ΓΑ, τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΑ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ποτικειμένας τᾶς ΓΑ τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλασίονα ἐντὶ τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. ἔστι δὲ ἁ ΖΗ τᾷ ΔΑ ἴσα· ἔστιν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΒ τᾶς ΑΕ διπλασίων ἐστὶ καὶ ἁ ΓΔ τᾶς ΔΕ, ἐσσοῦνται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα· κύκλοι ἄρα, ἄν διαμέτροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι κύκλων, ἄν διαμέτροι αἱ ΖΗ, ΓΑ διπλασίονες ἐντί· ἁμικύκλια ἄρα ἄν διαμέτροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι κύκλων, ἄν διαμέτροι αἱ ΖΗ, ΓΑ ἴσοι ἐντί· κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, τουτέστι δύο ἁμικύκλια, ὧν διαμέτροι αἱ ΑΓ, ΔΒ· λοιπὸν ἄρα χωρίον, τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ ἴσον ἐστίν· δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

ληφθέντος ἡμικυκλίου καὶ τοῦ ἐκτὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἂς κληθῇ σελήνιον (μηνίσκος σελήνης).

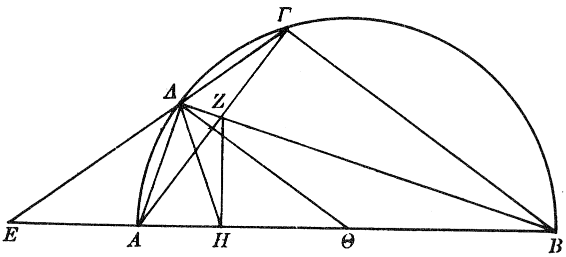
Ἔστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἡ AB καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῶν A, B ἂς ληφθῶσι δύο ἴσα μεταξύ των τμήματα τὰ $A\Gamma$, $B\Delta$, ἂς γραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ ἄλλου τμήματος ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον ἐκτός, διὰ τοῦ κέντρου δὲ E τοῦ ἡμικυκλίου ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον AB ἡ EZ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου H· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ZH ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἂς κληθῇ σελήνιον.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $\Delta\Gamma$ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ E σημεῖον πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΓA θὰ εἶναι $\Delta A^2+\Gamma A^2=2(\Delta E^2+EA^2)$, (Εὐκλ. II 10). Εἶναι δὲ ἡ $ZH=$ $=\Delta A$· θὰ εἶναι ἄρα $ZH^2+\Gamma A^2=2(\Delta E^2+EA^2)$, (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $AB=2EA$ καὶ ἡ $\Gamma\Delta=2\Delta E$ θὰ εἶναι $AB^2+\Delta\Gamma^2=4(EA^2+\Delta E^2)=$ $=2(ZH^2+\Gamma A^2)$, (ἐκ τῆς 1)· οἱ κύκλοι ἄρα τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ AB, $\Delta\Gamma$ εἶναι διπλάσιοι τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ZH, ΓA· τὰ ἡμικύκλια ἄρα τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ AB, $\Delta\Gamma$ εἶναι ἴσα πρὸς τοὺς κύκλους τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ZH, ΓA· ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ $A\Gamma$, δηλ. δύο ἡμικύκλια διαμέτρων $A\Gamma$, ΔB· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τόξων ἡμικυκλίων, τὸ καλούμενον σελήνιον, εἶναι ἴσον πρὸς κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ZH· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

ιε'

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἁ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τετμάσθω δὲ περιφέρεια ἁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω ἁ ΔΒ τεμνέουσα πλευρὰν τὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΖΗ· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΕΗ τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΓΒ καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σαμεῖον καὶ ἄχθωσαν αἱ ΘΔ, ΔΗ, ΑΔ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστι, γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΔ, τουτέστι ἁ ὑπὸ ΔΒΑ ὑποπενταπλασία ὀρθῆς ἐστί· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΘΑ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΖ, ΗΒΖ δύο γωνίαι αἱ ποτὶ τῷ Β ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ



Η, Γ σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΖ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ βάσις ἁ ΒΓ βάσει τᾷ ΒΗ ἴσα. Πάλιν ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΔ, ΗΒΔ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΗ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνίαι δὲ αἱ ποτὶ τὸ Β ἴσαι, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΔ, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΓΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΗΔ, τουτέστιν ἐπιπέμπτῳ ὀρθῆς ἴσα· ἔστι δὲ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΗΔ γωνιῶν, γωνίᾳ τᾷ ἐκτὸς τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΒΑΔΓ, τουτέστι τᾷ ΔΑΕ ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΑ ἔστιν ἴσα, καὶ πλευρὰ ἁ ΔΑ τᾷ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΘΗ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστι καὶ ἁ ὑπὸ ΔΗΘ ἐπίπεμπτος ὀρθῆς, γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΗ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστιν· πλευρὰ ἄρα ἁ ΔΗ πλευρᾷ τᾷ ΗΘ ἔστιν ἴσα. πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΓΒ ἐκτός ἐστι, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσα· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΘ ἔστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΕΔΑ, ΘΔΗ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΔΑ, ΔΑΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΘΔΗ, ΔΗΘ ἑκατέρα ἑκατέ-

15

Ἔστω τὸ ἡμικύκλιον AB καὶ ἡ $A\Gamma$ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου, ἂς τμηθῇ δὲ τὸ τόξον $A\Gamma$ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, ἀφοῦ δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ $\Gamma\Delta$ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη ἕως τὸ E καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔB τέμνουσα τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ κατὰ τὸ Z καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἂς ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν AB ἡ ZH· λέγω, ὅτι ἡ EH ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓB καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι $\Theta\Delta$, ΔH, $A\Delta$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία $AB\Gamma = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς θὰ εἶναι ἡ γωνία $\Gamma B\Delta = \Delta BA = \frac{1}{5}$ ὀρθῆς· ἡ γωνία ἄρα $\Delta\Theta A = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΓBZ, HBZ αἱ δύο πρὸς τὸ B γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι δὲ αἱ πρὸς τὰ σημεῖα H, Γ γωνίαι ὀρθαί, κοινὴ δὲ ἡ πλευρὰ BZ, θὰ εἶναι ἄρα ἡ βάσις $B\Gamma$ ἴση πρὸς τὴν βάσιν BH. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα $\Gamma B\Delta$, $HB\Delta$ δύο πλευραὶ αἱ ΓB, BH εἶναι ἴσαι μεταξύ των, αἱ δύο δὲ γωνίαι πρὸς τὸ B εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ πλευρὰ $B\Delta$ εἶναι κοινή, θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία $B\Gamma\Delta = BH\Delta = \frac{6}{5}$ ὀρθῆς· $\left(\Delta\widehat{\Gamma}A = \frac{1}{2}\Delta\Theta A = \Delta BA = \frac{1}{5} \text{ ὀρθῆς}\right)$· εἶναι δὲ ἑκάστη τῶν γωνιῶν $B\Gamma\Delta$, $BH\Delta$ ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου $BA\Delta\Gamma$, τὴν ΔAE· (διότι $B\Gamma\Delta + \Delta AB = 2$ ὀρ. καὶ $\Delta AB + \Delta AE = 2$ ὀρ.)· ἡ γωνία ἄρα $\Delta AB = \Delta HA$ καὶ ἡ πλευρὰ $\Delta A =$ πλευρὰν ΔH. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Delta\Theta H = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς καὶ ἡ γωνία $\Delta H\Theta = \frac{6}{5}$ ὀρθῆς, ἡ γωνία ἄρα $\Theta\Delta H = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς· ἡ πλευρὰ ἄρα $\Delta H =$ πλευρὰν $H\Theta$. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ γωνία $A\Delta E$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ εἰς τὸν κύκλον τετραπλεύρου $A\Delta\Gamma B$ θὰ εἶναι ἄρα ἡ $A\Delta E$ ἴση πρὸς τὴν $AB\Gamma$ ($\Gamma BA + A\Delta\Gamma = 2$ ὀρ. καὶ $A\Delta E + A\Delta\Gamma = 2$ ὀρ.)· εἶναι δὲ ἡ γωνία $AB\Gamma = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς· ἡ γωνία ἄρα $A\Delta E = H\Delta\Theta$. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα τὰ $E\Delta A$, $\Theta\Delta H$ αἱ δύο γωνίαι $E\Delta A$, ΔAE εἶναι πρὸς τὰς δύο ρᾳ ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἁ ΔΑ βάσει τᾷ ΔΗ ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἁ ΕΑ πλευρᾷ τᾷ ΘΗ ἴσα ἐστίν. κοινὰ ποτικείσθω ἁ ΑΗ· εὐθεῖα ἄρα ἁ ΕΗ εὐθείᾳ τᾷ ΑΘ, τουτέστι τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν, ὅτι εὐθεῖα ἁ ΔΕ τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἔστιν ἴσα. ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΘ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἁ ΔΘ πλευρᾷ τᾷ ΔΕ, τουτέστι τᾷ ΑΘ ἴσα.

Πόρισμα

Καὶ ἔτι δῆλον, ὅτι εὐθεῖα ἁ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμαται κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· τμᾶμα δὲ τὸ ΔΕ τὸ μεῖζον ἐστί, ἐπεὶ ἁ ΕΔ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἁ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.

$ΘΔΗ$, $ΔΗΘ$ ἀντιστοίχως, ἡ βάσις δὲ $ΔΑ =$ βάσιν $ΔΗ$, ἡ πλευρὰ ἄρα $ΕΑ$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν $ΘΗ$· ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ εὐθεῖα $ΑΗ$· ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΕΗ = ΑΘ$, τουτέστιν ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἐδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

Πόρισμα (1ον)

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΔΕ$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία $ΔΑΕ = ΔΗΘ$ θὰ εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ $ΔΘ =$ πλευρὰν $ΔΕ$.

Πόρισμα (2ον)

Καὶ ἀκόμη εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΑΓ$ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον $Δ$· τμῆμα δὲ τὸ $ΔΕ$ εἶναι τὸ μεγαλύτερον, ἐπειδὴ ἡ $ΕΔ$ εἶναι πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ $ΔΓ$ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων (Εὐκλ. XIII, 9).

BIBLIOGRAPHY

[1] *Nizze, Ernst*: Archimedes von Syrakus Vorhandene Werke, Stralsund 1824.

[2] *Heiberg, J. L.*: Archimedis opera omnia, vol. 3, B. G. Teubner, Leipzig 1910—13—15.

[3] *Eecke, Paul ver*: Les oeuvres complètes d' Archimède, vol 2, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.

[4] *Heath, T.L.*: The works of Archimedes. Dover Publications, INC. New York.

[5] *Steinschneider, Moritz*: Die arabischen Übersetzungen aus dem griechischen, Akademische Druck — U. Verlagsanstalt, Graz — Austria 1960.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Η ΝΗΣΟΣ ΘΟΥΛΗ ΚΑΙ Ο ΠΥΘΕΑΣ

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ Γ. Δ. ΚΥΠΡΑΙΟΥ & ΣΙΑΣ – ΖΩΟΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ 48

ΑΘΗΝΑΙ 1965

Η ΝΗΣΟΣ ΘΟΥΛΗ ΚΑΙ Ο ΠΥΘΕΑΣ

Κυρίῳ καθηγητῇ Δρ., Ἐπιτ. Δρ. I. E. ΧΟΦΜΑΝ ἐπὶ τῇ 65ῃ ἐπετείῳ ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του

Herrn Prof. Dr. h. c. Dr. J. E. HOFMANN zum 65. Geburtstag gewidmet.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὁμήρου οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι εἰς τὴν περὶ τὸν βόρειον πολικὸν κύκλον περιοχὴν ἡ μεγίστη ἡμέρα ἔχει διάρκειαν 20—22 ὡρῶν καὶ ἡ ἐλαχίστη νὺξ 4—2 ὡρῶν, προσέτι δὲ ὅτι βορειότερον ἡ διάρκεια τῆς ἡμέρας κατὰ τὸ θέρος εἶναι ἓξ συνεχῶν μηνῶν, ἐνῷ κατὰ τὸν χειμῶνα ἡ νὺξ εἰς τοὺς αὐτοὺς τόπους διαρκεῖ ἓξ μῆνας. Εἰς τὴν Ὀδύσσειαν ὁ Ὀδυσσεὺς ἀφηγεῖται ὅτι πλέοντες ἔφθασαν εἰς τὴν Εὐρύπυλον Λαιστρυγονίαν, ὅπου, ὅταν ποιμήν τις δὲν ἤθελε νὰ κοιμηθῇ, μετὰ τὸ τέλος τῆς ἡμέρας, ἠδύνατο νὰ κερδίζῃ δύο μισθούς, τὸν μὲν ἕνα βόσκων βοῦς, τὸν δὲ ἄλλον βόσκων ἐν συνεχείᾳ πρόβατα λευκά· διότι ἡ διαδοχὴ τῆς νυκτὸς ὑπὸ τῆς ἡμέρας γίνεται εἰς μικρὸν χρονικὸν διάστημα:

κ 80 Ἑξῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ·
ἑβδομάτῃ δ' ἱκόμεσθα Λάμου αἰπὺ πτολίεθρον
Τηλέπυλον Λαιστρυγονίην, ὅθι ποιμένα ποιμὴν
ἠπύει εἰσελάων, ὁ δέ τ' ἐξελάων ὑπακούει.
ἔνθα κ' ἄυπνος ἀνὴρ δοιοὺς ἐξήρατο μισθούς,
τὸν μὲν βουκολέων, τὸν δ' ἄργυφα μῆλα νομεύων·
ἐγγὺς γὰρ νυκτός τε καὶ ἤματός εἰσι κέλευθοι.

Ἐν συνεχείᾳ ἀφηγεῖται πάλιν ὁ Ὀδυσσεὺς ὅτι πλέοντες ἔφθασαν εἰς τὴν χώραν τῶν Κιμμερίων, τῶν ὁποίων ἡ περιοχὴ εἶναι κεκαλυμμένη ὑπὸ νεφῶν, οὐδέποτε δὲ φωτίζει αὐτοὺς διὰ τῶν ἀκτίνων του ὁ ἥλιος οὔτε ὅταν ἀνατέλλῃ οὔτε ὅταν δύῃ, ἀλλὰ εἰς τοὺς ἀτυχεῖς αὐτοὺς θνητοὺς ἁπλώνεται νὺξ συνεχής:

λ 13 Ἡ δ' ἐς πείραθ' ἵκανε βαθυρρόου ὠκεανοῖο.
ἔνθα δὲ Κιμμερίων ἀνδρῶν δῆμος τε πόλις τε,
ἠέρι καὶ νεφέλῃ κεκαλυμμένοι· οὐδέποτ' αὐτοὺς
Ἠέλιος φαέθων καταδέρκεται ἀκτίνεσσιν,
οὔθ' ὁπόταν στείχησι πρὸς οὐρανὸν ἀστερόεντα,
οὔθ' ὅτ' ἂν ἂψ ἐπὶ γαῖαν ἀπ' οὐρανόθεν προτράπηται,
ἀλλ' ἐπὶ νὺξ ὀλοὴ τέταται δειλοῖσι βροτοῖσι.

Ὑπὸ πολλῶν ὑποστηρίζεται ὅτι ὁ Ὅμηρος ποιητικῇ ἀδείᾳ ἀφίνει τὸν

ποιητὴν γὰρ ἔφη πάντα στοχάζεσθαι ψυχαγωγίας, οὐ διδασκαλίας... καὶ τὴν ποιητικὴν γραώδη μυθολογίαν ἀποφαίνων. (Ι κεφ. 2, 3).
Ἡ συναφὴς πραγματεία τοῦ Ἐρατοσθένους δὲν ἐσώθη.

Ἐκεῖ ὅπου ὁ Στράβων διαφωνεῖ ριζικῶς πρὸς τὸν Ἐρατοσθένη εἶναι οἱ παρεχόμενοι ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους ἀριθμοὶ διὰ γεωγραφικάς τινας ἀποστάσεις. Μεταξὺ αὐτῶν ἀναφέρεται ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ ἀπόστασις Μερόης (100 χιλιόμετρα περίπου βορείως τοῦ Χαρτούμ) — Ἀλεξανδρείας, εἶναι 10.000 στάδια, ἀπὸ δὲ τῆς Ἀλεξανδρείας μέχρι τοῦ Ἑλλησπόντου 8.100, ἀπὸ δὲ τοῦ Ἑλλησπόντου μέχρι τοῦ ποταμοῦ Βορυσθένους (Δνειπέρου τῆς Ρωσίας) 5.000, ἀπὸ δὲ τοῦ Βορυσθένους μέχρι τοῦ βορείου παραλλήλου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς Θούλης (διὰ τὴν ὁποίαν ὁ Πυθέας λέγει ὅτι ἀπέχει πρὸς βορρᾶν τῆς Βρεταννικῆς ἓξ ἡμερῶν πλοῦν καὶ ὅτι εὑρίσκεται πλησίον τῆς παγωμένης θαλάσσης) ἄλλα 11.500 στάδια περίπου:

Ἑξῆς δὲ τὸ πλάτος τῆς οἰκουμένης ἀφορίζων φησὶν ἀπὸ μὲν Μερόης ἐπὶ τοῦ δι' αὐτῆς μεσημβρινοῦ μέχρι Ἀλεξανδρείας εἶναι μυρίους, ἐνθένδε εἰς τὸν Ἑλλήσποντον περὶ ὀκτακισχιλίους ἑκατόν, εἶτα εἰς Βορυσθένη πεντακισχιλίους, εἶτα ἐπὶ τὸν κύκλον τὸν διὰ Θούλης (ἥν φησι Πυθέας ἀπὸ μὲν τῆς Βρεττανικῆς ἓξ ἡμερῶν πλοῦν ἀπέχειν πρὸς ἄρκτον, ἐγγὺς δ' εἶναι τῆς πεπηγυίας θαλάσσης) ἄλλους ὡς μυρίους χιλίους πεντακοσίους (1 κεφ. 4, 2).

Ἐκ τοῦ προηγουμένου χωρίου τοῦ Στράβωνος πληροφορούμεθα ὅτι ὁ Πυθέας ὁ Μασσαλιώτης ἐρευνῶν τὴν βόρειον πολικὴν περιοχὴν εἶχεν ἐπισκεφθῆ τὴν νῆσον Θούλην καὶ ὅτι τὰς κατὰ τὸν ἐξερευνητικὸν πλοῦν παρατηρήσεις του εἶχε δημοσιεύσει εἰς πραγματείαν του (ἔχουσαν τὸν τίτλον «Περὶ τοῦ ὠκεανοῦ»), ἐξ ἧς ὀγδοήκοντα περίπου ἔτη βραδύτερον ἠρύσθη τὰς συναφεῖς πληροφορίας του ὁ Ἐρατοσθένης. Ὁ πλοῦς τοῦ Πυθέου τοποθετεῖται κατ' ἄλλους μὲν τῷ 330 κατ' ἄλλους δὲ τῷ 310 π.Χ. Θεωροῦμεν σχεδὸν βεβαίαν τὴν ἐκδοχὴν ὅτι ὁ περίπλους τῆς βορείου πολικῆς περιοχῆς ὑπὸ τοῦ Πυθέου ἐγένετο κατὰ τὸ ἔτος 330 π.Χ. διὰ τὸν ἑξῆς λόγον: Μόνον βασιλικῇ ἐντολῇ καὶ δαπάνῃ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ οἱοσδήποτε ἐξερευνητικὸς περίπλους. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος εἶχε καταλύσει τὸ κράτος τῶν Περσῶν καὶ ἦτο κοσμοκράτωρ. Οἱ Δυτικοὶ καὶ Βόρειοι Εὐρωπαῖοι ἀνέμενον νὰ τὸν ὑποδεχθοῦν. Ὑπὸ τοιαύτην πολιτικὴν κατάστασιν εἶναι πιθανώτατον ὅτι ὁ Πυθέας ἐξετέλεσε τὸν εἰς τὴν βόρειον πολικὴν περιοχὴν περίπλουν του τῇ ἐντολῇ καὶ δαπάναις τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὅστις θὰ εἶχε θέσει εἰς τὴν διάθεσίν του ἀρκετὰ πολεμικὰ πλοῖα καὶ πλοῖα ἐφοδιασμοῦ. Ἐνισχυτικὸν τῶν ἀνωτέρω σκέψεων, τουτέστιν ὅτι ὁ Πυθέας ἡγεῖτο κατὰ τὸν πρὸς βορρᾶν περίπλουν του ἰσχυρᾶς ναυτικῆς δυνάμεως

Ὀδυσσέα νὰ περιπλανηθῇ εἰς τὴν θαλασσίαν ἀρκτικὴν περιοχήν. Ἡ γνώμη αὐτὴ πιθανώτατα εἶναι ὀρθή. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαψεύσῃ τὰς πληροφορίας τοῦ Ὁμήρου ὅτι ἐκεῖ κατὰ τὸ θέρος ἡ διάρκεια τῆς νυκτὸς εἶναι ἐλαχίστη καὶ ὅτι εἰς τὴν χώραν τῶν Κιμμερίων (φανταστικὴν πιθανῶς) ἐπικρατεῖ κατὰ τὸν χειμῶνα, ἓξ μῆνας νύξ. Ἡ καθ' Ὅμηρον χώρα τῶν Κιμμερίων ὑποτίθεται νοουμένη εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Σκανδιναυϊκῆς χερσονήσου. Καθ' Ἡρόδοτον ὅμως ὑπάρχει καὶ χώρα τῶν Κιμμερίων παρὰ τὴν Μαιώτιδα λίμνην (Ἀζοφικὴν θάλασσαν) (IV 11 κ.ε.).

Εἰς τὴν περιγραφὴν τῆς χώρας τῶν Σκυθῶν ὁ Ἡρόδοτος ἀναφέρει ὅτι μετὰ πορείαν εἴκοσι πέντε περίπου ἡμερῶν, πρὸς βορρᾶν τοῦ Εὐξείνου Πόντου, κατοικοῦν οἱ φαλακροὶ Ἀγριππαῖοι, οἱ ὁποῖοι διηγοῦνται ὅτι βορειότερον αὐτῶν κατοικοῦν ἄνθρωποι ἔχοντες πόδας αἰγῶν καὶ ἔτι βορειότερον ἄλλοι οἱ ὁποῖοι ἐπὶ ἓξ μῆνας κοιμοῦνται (ἤτοι ὅτι ἐκεῖ ἐπὶ ἓξ μῆνας κατὰ τὸν χειμῶνα εἶναι νύξ) προσθέτων ὅτι δὲν παραδέχεται ὡς ὀρθὴν τὴν πληροφορίαν αὐτὴν τῶν Ἀγριππαίων:

> Οἱ δὲ φαλακροὶ οὗτοι λέγουσι, ἐμοὶ μὲν οὐ πιστὰ λέγοντες, οἰκέειν τὰ ὄρεα αἰγίποδας ἄνδρας, ὑπερβάντι δὲ τούτους ἀνθρώπους ἄλλους οἳ τὴν ἑξάμηνον καθεύδουσι· τοῦτο δὲ οὐκ ἐνδέκομαι τὴν ἀρχήν. (IV 25).

Ὅτι ὁ Ὅμηρος ἐθεωρεῖτο κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὁ πρῶτος γεωγράφος τοῦ κόσμου, χωρὶς βέβαια νὰ ἔχῃ χρηματίσει οὗτος γεωλόγος ἢ παλαιοντολόγος, πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Στράβωνος, ὅστις λέγει ὅτι τόσον αὐτὸς ὅσον καὶ οἱ πρὸ αὐτοῦ, μεταξὺ τῶν ὁποίων καταλέγεται καὶ ὁ Ἵππαρχος, θεωροῦν ἀρχηγὸν καὶ ἱδρυτὴν τῆς γεωγραφικῆς μαθήσεως τὸν Ὅμηρον, ὁ ὁποῖος ὄχι μόνον ὡς ποιητὴς ὑπῆρξε καὶ εἶναι ἀνώτερος ὅλων, ἀλλὰ εἶναι σχεδὸν καὶ πρὸς τὴν πολιτικὴν μάθησιν ἀνώτερος:

> Καὶ πρῶτον ὅτι ὀρθῶς ὑπειλήφαμεν καὶ ἡμεῖς καὶ οἱ πρὸ ἡμῶν, ὧν ἔστι καὶ Ἵππαρχος, ἀρχηγέτην εἶναι τῆς γεωγραφικῆς ἐμπειρίας Ὅμηρον· ὃς οὐ μόνον ἐν τῇ κατὰ τὴν ποίησιν ἀρετῇ πάντας ὑπερβέβληται τοὺς πάλαι καὶ τοὺς ὕστερον, ἀλλὰ σχεδόν τι καὶ τῇ κατὰ τὸν βίον ἐμπειρίᾳ τὸν πολιτικόν. (Ι κεφ. 1, 2).

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν Γεωγραφικῶν του ὁ Στράβων ἀφοῦ πλέκει τὸ ἐγκώμιον τοῦ Ὁμήρου, ὡς γεωγράφου, ἀντιμάχεται σφοδρότατα πρὸς τὸν Ἐρατοσθένη, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἰσχυρισθῆ εἴς τινα πραγματείαν του (κατὰ τὸν Στράβωνα) ὅτι ὁ ποιητὴς (δηλ. ὁ Ὅμηρος) στοχάζεται τὰ πάντα ἕνεκα ψυχαγωγίας καὶ ὄχι ἕνεκα διδασκαλίας καὶ ὅτι ἡ ποίησις εἶναι γραώδης μυθολογία:

καὶ ὅτι οἱ κάτοικοι τῶν περιοχῶν ἐκείνων ἐγνώριζον τὰ τῶν κατακτήσεων τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου εἶναι ἡ πληροφορία τοῦ Γεμίνου καὶ τοῦ Κοσμᾶ τοῦ Ἰνδικοπλεύστου ὅτι οἱ κάτοικοι τῆς περιπλεομένης περιοχῆς παρεῖχον πληροφορίας εἰς τὸν Πυθέαν, ἐνῷ ἄλλως θὰ ἐπεχείρουν νὰ καταφάγουν αὐτόν. Ὁ Γεμῖνος σημειώνει ὅτι, ὡς φαίνεται, εἰς τοὺς τόπους αὐτοὺς τῆς βορείου πολικῆς περιοχῆς παρευρέθη καὶ ὁ Πυθέας ὁ Μασσαλιώτης. Ἰσχυρίζεται λοιπὸν εἰς τὴν Περὶ τοῦ ὠκεανοῦ πραγματείαν του, ὅτι «οἱ βάρβαροι ἐδείκνυον εἰς ἡμᾶς τὸ μέρος ὅπου ὁ ἥλιος κοιμᾶται. Διότι παρετηρεῖτο εἰς τοὺς τόπους αὐτούς ἡ μὲν νὺξ νὰ γίνεται ἐντελῶς μικρὰ ἤτοι εἰς ἄλλους μὲν νὰ ἔχῃ διάρκειαν δύο ὡρῶν καὶ εἰς ἄλλους τριῶν. Ὥστε μετὰ τὴν δύσιν τοῦ ἡλίου, ἀφοῦ ἐγίνετο μικρὸν διάλειμμα νυκτὸς νὰ ἐπανατέλλῃ ἀμέσως ὁ ἥλιος». Ὁ δὲ γραμματικὸς Κράτης λέγει ὅτι τῶν τόπων αὐτῶν μνημονεύει καὶ ὁ Ὅμηρος (ἔνθ. ἀνωτ. Ὀδυσσ. κ 80, λ 13) :

> Ἐπὶ δὲ τοῖς τόποις τούτοις δοκεῖ καὶ Πυθέας ὁ Μασσαλιώτης παρεῖναι. φησὶ γοῦν ἐν τοῖς Περὶ τοῦ ὠκεανοῦ πεπραγματευμένοις αὐτῷ, «ὅτι ἐδείκνυον ἡμῖν οἱ βάρβαροι, ὅπου ὁ ἥλιος κοιμᾶται. συνέβαινε γὰρ περὶ τούτους τοὺς τόπους τὴν μὲν νύκτα παντελῶς μικρὰν γίνεσθαι ὡρῶν οἷς μὲν β΄, οἷς δὲ γ΄. ὥστε κατὰ τὴν δύσιν μικροῦ διαλείμματος γενομένου ἐπανατέλλειν εὐθέως τὸν
> V 19).
> ἥλιον». Κράτης δὲ ὁ γραμματικὸς φησὶ τῶν τόπων τούτων καὶ Ὅμηρον μνημονεῦσαι ἐν οἷς φησίν. . . (κ 80, λ 13). (Γεμ. Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα,

Τὰ αὐτὰ περίπου πρὸς τὸν Γεμῖνον σημειώνει καὶ ὁ Κοσμᾶς ὁ Ἰνδικοπλεύστης λέγων ὅτι ὁ Πυθέας ἔγραφεν εἰς τὴν πραγματείαν του ὅτι, ὅταν ἔφθασαν εἰς τοὺς βορειοτάτους τόπους οἱ ἐκεῖ βάρβαροι ἐδείκνυον τὴν κοίτην τοῦ ἡλίου καὶ ὅτι ἐκεῖ (κατὰ τὸν χειμῶνα) ἦσαν διαρκεῖς νύκτες:

> Πυθέας. . . φησὶν ὅτι παραγενομένῳ αὐτῷ ἐν τοῖς βορειοτάτοις τόποις ἐδείκνυον οἱ αὐτόθι βάρβαροι τὴν ἡλίου κοίτην, ὡς ἐκεῖ τῶν νυκτῶν ἀεὶ-γινομένων παρ' αὐτοῖς (II 149 p. 116 Migne).

Ἐκ τῶν περὶ τοῦ περίπλου τοῦ Πυθέου πληροφοριῶν τοῦ Στράβωνος, τὰ ὁποίας ἀρύεται οὗτος, ὡς φαίνεται, παρὰ τοῦ Πολυβίου, καὶ ἐκ πληροφοριῶν τοῦ Μαρίνου καὶ τοῦ Πτολεμαίου καὶ ἄλλων συγγραφέων συνάγεται ὅτι ἡ νῆσος Θούλη εἶναι ἡ σημερινὴ Ἰσλανδία. Ὁ Στράβων ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ παραδέχεται ὅτι ὁ Πυθέας ἐπεσκέφθη τὴν Θούλην, λέγων, ὅτι οὗτος εἶναι ψευδέστατος καὶ ὅτι οἱ ἰδόντες τὴν Βρεταννίαν καὶ τὴν Ἰρλανδίαν (Ἰέρνην) οὐδὲν λέγουν περὶ τῆς Θούλης ἀναφέροντες ἄλλας μικρὰς περὶ τὴν Βρεταννίαν νήσους. Παραδέχεται ὅμως τὰς λοιπὰς ὑπὸ τοῦ Πυθέου καθοριζομένας γεωγραφικὰς ἀποστάσεις:

> Τὰ μὲν οὖν ἄλλα διαστήματα δεδόσθω αὐτῷ· ὡμολόγηται γὰρ ἱκανῶς· τὸ δ' ἀπὸ τοῦ Βορυσθένους ἐπὶ τὸν διὰ Θούλης κύκλον τὶς ἂν δοίη νοῦν ἔχων; ὅ τε γαρ ἱστορῶν τὴν Θούλην Πυθέας ἀνὴρ ψευδίστατος ἐξήτασται, καὶ οἱ τὴν Βρεττανικὴν καὶ τὴν Ἰέρνην ἰδόντες οὐδὲν περὶ τῆς Θούλης λέγουσιν, ἄλλας νήσους λέγοντες μικρὰς περὶ τὴν Βρεττανικήν. (I κεφ. 4, 3).

Ἐν συνεχείᾳ ὁ Στράβων, ἀφοῦ ἀναφέρει τὴν γνώμην τοῦ Ἐρατοσθένους ὅτι, ἐὰν δὲν ἡμπόδιζε τὸ μέγεθος τοῦ Ἀτλαντικοῦ ὠκεανοῦ θὰ ἦτο δυνατὸν πλέοντες ἐκ τῆς Ἱσπανίας πρὸς δυσμὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου νὰ φθάσωμεν εἰς τὰς Ἰνδίας, ἐπιτιμᾷ αὐτὸν διότι ἐπιμένει εἰς τὴν γνώμην του ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαιροειδὴς (σημ. Σφαλλόμενος ὁ Στράβων προφανῶς):

> Ὥστ' εἰ μὴ τὸ μέγεθος τοῦ Ἀτλαντικοῦ πελάγους ἐκώλυε, κἂν πλεῖν ἡμᾶς ἐκ τῆς Ἰβηρίας εἰς τὴν Ἰνδικὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου... πάλιν δὲ ἐπιμένων τῇ περὶ τὴν σφαιροειδῆ τὴν γῆν ἀποδείξει τῆς αὐτῆς ἐπιτιμήσεως ἂν τυγχάνοι. (I κεφ. 4, 6).

Ὁ Πυθέας τοποθετεῖ τὴν Θούλην, κατὰ τὸν Στράβωνα, ἐκεῖ ὅπου ὁ θερινὸς τροπικὸς κύκλος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν ἀρκτικόν:

> Ὁ μὲν οὖν Μασσαλιώτης Πυθέας τὰ περὶ Θούλην τὴν βορειοτάτην τῶν Βρεττανίδων ὕστατα λέγει, παρ' οἷς ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀρκτικῷ ὁ θερινὸς τροπικὸς κύκλος (II κεφ. 5, 8).

Τὸ νόημα τοῦ χωρίου τούτου, φρονοῦμεν, εἶναι τὸ ἑξῆς· Ὁ Μασσαλιώτης Πυθέας τοποθετεῖ τὴν νῆσον Θούλην εἰς ἐκεῖνον τὸν βόρειον παράλληλον κύκλον, ὅστις ἀπέχει τοῦ βορείου πόλου τόσον, ὅσον ἀπέχει τοῦ ἰσημερινοῦ ὁ θερινὸς τροπικὸς τοῦ Καρκίνου (σημ. ὅπως καὶ πράγματι εἶναι, διότι ἡ Ἰσλανδία ἐφάπτεται πρὸς βορρᾶν τοῦ βορείου πολικοῦ κύκλου).

Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν Γεωγραφικῶν του ὁ Στράβων σημειώνει τὰ ἑξῆς: ὁ δὲ Πολύβιος ἐκθέτων τὴν γεωγραφίαν τῆς Εὐρώπης λέγει, ἂς ἀφήσωμεν τοὺς ἀρχαίους, νὰ ἐξετάσωμεν δὲ τοὺς ἐλέγχοντας ἐκείνους καὶ τὸν Δικαίαρχον καὶ τὸν Ἐρατοσθένη, ὁ ὁποῖος τελευταῖος ἐπραγματεύθη περὶ γεωγραφίας, καὶ τὸν Πυθέαν, ὑπὸ τοῦ ὁποίου πολλοὶ παρεπλανήθησαν, ὅστις ἔλεγεν ὅτι περιῆλθεν ὅλην τὴν προσιτὴν Βρεταννικὴν νῆσον καὶ ὅτι αὕτη εἶχε περίμετρον μεγαλυτέραν τῶν τεσσαράκοντα χιλιάδων σταδίων, ἱστόρησε δὲ προσέτι τὰ σχετικὰ μὲ τὴν Θούλην καὶ τοὺς τόπους ἐκείνους ὅπου οὔτε ξηρὰ καθ' ἑαυτὴν ὑπῆρχε οὔτε θάλασσα οὔτε ἀήρ, ἀλλὰ σύγκριμά τι ἐξ αὐτῶν ὁμοιάζον πρὸς θαλάσσιον πνεύμονα... Λέγει λοιπὸν ὁ Πολύβιος ὅτι ἀκόμη εἶναι ἀπίστευτον, πῶς ἰδιώτης καὶ πτωχὸς ἄνθρωπος ἦτο δυνατὸν νὰ διαπλεύσῃ τόσον μεγάλας ἀποστάσεις καὶ νὰ διανύσῃ τόσον μεγάλας ἀποστάσεις ἐπὶ τῆς ξηρᾶς:

> Πολύβιος δὲ τὴν Εὐρώπην χωρογραφῶν τοὺς μὲν ἀρχαίους ἐᾶν φησι, τοὺς δ' ἐκείνους ἐλέγχοντας ἐξετάζειν Δικαίαρχόν τε καὶ Ἐρατοσθένη, τὸν τελευταῖον πραγματευσάμενον περὶ γεωγραφίας, καὶ Πυθέαν, ὑφ' οὗ παρακρουσθῆναι πολλούς, ὅλην μὲν τὴν Βρεττανικὴν τὴν ἐμβατὸν ἐπελθεῖν φάσκοντος, τὴν δὲ περίμετρον πλειόνων ἢ τεσσάρων μυριάδων ἀποδόντος τῆς νήσου, προσιστορήσαντος δὲ καὶ τὰ περὶ τῆς Θούλης καὶ τῶν τόπων ἐκείνων ἐν οἷς οὔτε γῆ καθ' ἑαυτὴν ὑπῆρχεν ἔτι οὔτε θάλασσα οὔτ' ἀήρ, ἀλλὰ σύγκριμά τι ἐκ τούτων πλεύμονι θαλαττίῳ ἐοικός... Φησὶ δ' οὖν Πολύβιος ἄπιστον καὶ αὐτὸ τοῦτο, πῶς ἰδιώτῃ ἀνθρώπῳ καὶ πένητι τὰ τοσαῦτα διαστήματα πλωτὰ καὶ πορευτὰ γένοιτο· (ΙΙ κεφ. 4, 1, 2).

Ἡ σκέψις τοῦ Πολυβίου ὅτι ἰδιώτης ἄνθρωπος, ὡς ἐκλαμβάνει τὸν Πυθέαν, ἦτο ἀδύνατον νὰ διαθέσῃ στόλον διὰ τόσον μακρυνὰς ἐξερευνήσεις εἶναι ὀρθή. Ὅλαι ὅμως αἱ πληροφορίαι περὶ τῶν ἐξερευνήσεων τοῦ Πυθέου εἰς τὴν ἀρκτικὴν περιοχήν, αἱ μνημονευόμεναι ὑπὸ μεταγενεστέρων συγγραφέων ἐλέγχονται ὡς ἀληθεῖς. Κατὰ συνέπειαν ὁ Πυθέας ἐξετέλεσε πράγματι τὸν πρὸς τὴν ἀρκτικὴν περίπλουν καὶ δὲν ἔπραξε τοῦτο ὡς πτωχὸς ἰδιώτης ἀλλὰ ἐκτελῶν ἐντολὴν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὡς μετὰ μεγάλης πιθανότητος ὑποθέτομεν. Σπουδαῖον ἀκόμη συμπέρασμα συνάγομεν ἐκ τῆς φράσεως τοῦ ἀνωτέρω χωρίου τοῦ Πολυβίου «τὰ τοσαῦτα διαστήματα πλωτὰ καὶ πορευτὰ γένοιτο». Ὁ Πυθέας διέπλευσε μεγάλας ἀποστάσεις εἰς τὴν βόρειον πολικὴν περιοχὴν καὶ διήνυσε μεγάλας ἀποστάσεις ἐπὶ τῆς ξηρᾶς. Αἱ μεγάλαι ἀποστάσεις ἐπὶ τῆς ξηρᾶς τὰς ὁποίας φαίνεται, ὁ Πυθέας ἐμνημόνευεν εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τοῦ ὠκεανοῦ, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν διανυθῇ ἀλλοῦ παρὰ εἰς τὴν βόρειον Νορβηγίαν.

Καὶ εἰς τὸ τέταρτον βιβλίον τῶν γεωγραφικῶν του ἐπανέρχεται ὁ Στράβων διὰ τὴν Θούλην, λέγων ὅτι «ὅσα ἄλλοτε ἔχουν περὶ αὐτῆς ἱστορήσει εἶναι ἀσαφῆ, ὅταν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι αὕτη κεῖται ἐκτὸς τῆς οἰκουμένης γῆς· διότι μεταξὺ τῶν μνημονευομένων εἰς τὰς ἱστορίας αὐτὰς νήσων τοποθετοῦν τὴν Θούλην ἀρκτικώτατα· ἐκεῖνα δὲ τὰ ὁποῖα εἶπε περὶ αὐτῆς ὁ Πυθέας καὶ τῶν περὶ αὐτὴν τόπων, ὅτι μὲν εἶναι πλάσματα τῆς φαντασίας του εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν γνωστῶν ἤδη τόπων· διότι ἔχει καταψευσθῇ ὁ Πυθέας ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον διὰ τοὺς τόπους αὐτούς, τοὺς γνωστούς, ὡς ἔχει λεχθῇ καὶ προηγουμένως, ὥστε νὰ εἶναι φανερὸν ἀκόμη περισσότερον ὅτι ψεύδεται διὰ τοὺς ἀγνώστους τόπους τοὺς κειμένους ἐκτὸς τῆς κατοικουμένης γῆς». (σημ. Ὁ Στράβων σφάλλεται προφανῶς) :

Περὶ δὲ τῆς Θούλης ἔτι μᾶλλον ἀσαφὴς ἡ ἱστορία διὰ τὸν ἐκτοπισμόν· ταύτην γὰρ τῶν ὀνομαζομένων ἀρκτικωτάτην τιθέασιν. ἃ δ' εἴρηκε Πυθέας περί τε ταύτης καὶ τῶν ἄλλων τῶν ταύτῃ τόπων ὅτι μὲν πέπλασται, φανερὸν ἐκ τῶν γνωριζομένων χωρίων· κατέψευσται γὰρ αὐτῶν τὰ πλεῖστα, ὥσπερ καὶ πρότερον εἴρηται, ὥστε δῆλός ἐστιν ἐψευσμένος μᾶλλον περὶ τῶν ἐκτετοπισμένων. (ΙΥ κεφ. 5, 5).

Ὁ Στέφανος ὁ Βυζάντιος σημειώνει εἰς τὸ λεξικόν του ὅτι ἡ Θούλη εἶναι νῆσος μεγάλη, κειμένη εἰς τὰ ὑπερβόρεια μέρη τοῦ ὠκεανοῦ, ὅπου κατὰ τὸ θέρος ἡ μεγαλυτέρα ἡμέρα τοῦ ἔτους διαρκεῖ εἴκοσιν ὥρας καὶ ἡ νὺξ τέσσαρας, τοὐναντίον δὲ συμβαίνει κατὰ τὸν χειμῶνα:

Θούλη νῆσος μεγάλη ἐν τῷ ὠκεανῷ ὑπὸ τὰ ὑπερβόρεια μέρη, ἔνθα τὴν θερινὴν ἡμέραν ὡρῶν εἴκοσιν ὁ ἥλιος ἰσημερινῶν ποιεῖ, τὴν δὲ νύκτα τεσσάρων, τὰς δὲ χειμερινὰς τοὐναντίον.

Σαφέστερον ὅλων τῶν προηγουμένων του συγγραφέων καὶ μὲ ἀρκετὰς λεπτομερείας ὡς πρὸς τὴν γεωγραφικὴν θέσιν αὐτῆς ὁμιλεῖ περὶ τῆς νήσου Θούλης ὁ περίφημος γεωγράφος Μαρῖνος ὁ Τύριος, ὡς συνάγομεν ἐκ τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, ὅστις γράφει ὡς ἑξῆς εἰς τὴν Γεωγραφικήν του Ὑφήγησιν: Διὰ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος θέτει καὶ αὐτὸς (δηλ. ὁ Μαρῖνος) τὴν νῆσον Θούλην ὑπὸ τὸν παράλληλον κύκλον τὸν καθορίζοντα τὸ βορειότατον σύνορον τῆς γνωστῆς μας γῆς, ἀποδεικνύει δὲ ὅτι ὁ παράλληλος αὐτὸς ἀπέχει τοῦ ἰσημερινοῦ περίπου 63 μοίρας, ὅταν νοήσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς μεσημβρινοῦ 360 μοίρας, εἰς στάδια δὲ ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν ὅτι εἶναι 31.500, μὲ μῆκος ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν μοῖραν περίπου 500 στάδια.

Ἐπὶ τοίνυν τοῦ πλάτους πρῶτον ὑποτίθεται μὲν καὶ αὐτὸς τὴν Θούλην νῆσον ὑπὸ τὸν παράλληλον τὸν ἀφορίζοντα τὸ βορειότατον πέρας τῆς ἐγνωσμένης ἡμῖν γῆς, τὸν δὲ παράλληλον τοῦτον ἀποδείκνυσιν ὡς ἔτι μάλιστα ἀπέχοντα τοῦ ἰσημερινοῦ μοίρας ξγ΄, οἵων ἐστὶν ὁ μεσημβρινὸς κύκλος τξ΄, σταδίους δὲ τρισμυρίους χιλίους πεντακοσίους, ὡς τῆς μιᾶς μοίρας πεντακοσίους ἔγγιστα σταδίους περιεχούσης (Κλαυδίου Πτολεμαίου Γεωγραφικῆς Ὑφηγήσεως Ι κεφ. 7, ἔκδ. Carolus Müllerus, Parisiis 1883),

Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον τῆς Γεωγραφικῆς Ὑφηγήσεως (ΙΙ κεφ. 3, 14) ὁ Κλ. Πτολεμαῖος περιγράφων τὴν νῆσον Θούλην ἀναφέρει τὰ ἑξῆς: Παράκεινται δὲ (πρὸς βορρᾶν τῆς Βρεταννίας) νῆσοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ Δοῦμνα, ὑπὲρ τὴν ὁποίαν (δηλ. βορειότερον) κεῖνται αἱ Ὀρκάδες νῆσοι, περίπου τριάκοντα τὸν ἀριθμόν... καὶ βορειότερον αὐτῶν κεῖται ἡ νῆσος Θούλη τῆς ὁποίας

τὰ δυτικώτατα μέρη	ἔχουν ἀνατ. γεω. μῆκος 29°	βόρ. γεω. πλάτος 63°
τὰ ἀνατολικώτατα	ἔχουν ἀνατ. γεω. μῆκος 31° 40΄	βόρ. γεω. πλάτος 63°
τὰ βορειότατα	ἔχουν ἀνατ. γεω. μῆκος 30° 20΄	βόρ. γεω. πλάτος 63° 15΄
τὰ νοτιώτατα	ἔχουν ἀνατ. γεω. μῆκος 30° 20΄	βόρ. γεω. πλάτος 62° 40΄
τὰ μέσα	ἔχουν ἀνατ. γεω. μῆκος 30° 20΄	βόρ. γεω. πλάτος 63°

(Σημ. Ὡς πρῶτος μεσημβρινὸς λαμβάνεται ὁ διερχόμενος διὰ τῶν Καναρίων νήσων).

Εἰς τὸ ὄγδοον βιβλίον τῆς αὐτῆς πραγματείας του (VIII κεφ. 3, 3) ὁ Κλ. Πτολεμαῖος λέγει ὅτι ἡ μεγίστη ἡμέρα τοῦ ἔτους εἰς τὴν Θούλην διαρκεῖ 20 ὥρας καὶ ἡ νῆσος ἀπέχει τῆς Ἀλεξανδρείας δύο ἰσημερινὰς ὥρας (δηλ. δύο ἀτράκτους, ἤτοι 30 μοίρας) (χάρτης: Ptolemaei systema geographicum, ed. Carl Müller, Paris 1901, καὶ Wörterbuch der Antike, H. Lamer, Kröner Verlag. Stuttgart 1956).

Ἐνδιαφέρουσα τυγχάνει καὶ ἡ πληροφορία τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Διονύσιος ὁ περιηγητὴς περὶ τῆς νήσου Θούλης εἰς τὴν πραγματείαν του, τὴν φέρουσαν τὸν τίτλον Οἰκουμένης περιήγησις, ἥτις ἔχει γραφῆ εἰς δακτυλικὸν ἑξάμετρον καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Ἀφοῦ δὲ διαπλεύσεις μεγάλην ἀπόστασιν εἰς τὸν ὠκεανὸν διὰ καλῶς ναυπηγηθέντος πλοίου, θὰ φθάσῃς εἰς τὴν νῆσον Θούλην· ὅπου, ὅταν ὁ ἥλιος φθάσῃ εἰς τὸν βόρειον πόλον (νοεῖται ἡ 21η Ἰουνίου) ἐκχύνεται φῶς συνεχῶς κατὰ τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα· διότι τότε ὁ ἥλιος λαμβάνει λοξοτέραν θέσιν καὶ αἱ ἀκτῖνες του πίπτουν καταχορύφως (ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸν τροπικὸν τοῦ Καρκίνου) μέχρις ὅτου ἀρχίσει νὰ στρέφεται πάλιν πρὸς νότον πρὸς τοὺς κυανοὺς» (κυανοὶ νοοῦνται οἱ μαῦροι τῆς Ἀφρικῆς):

580. Πολλὴν δὲ προτέρωσε ταμὼν ὁδὸν ὠκεανοῖο
νῆσον κεν Θούλην εὐεργέϊ νηῒ περήσαις·
ἔνθα μὲν ἠελίοιο βεβηκότος ἐς πόλον ἄρκτων,
ἦμαθ' ὁμοῦ καὶ νύκτας ἀειφανὲς ἐκκέχυται πῦρ·
λοξοτέρῃ γὰρ τῆμος ἐπιστρέφεται στροφάλιγγι,
ἀκτίνων ἰθεῖαν ἐπὶ κλίσιν ἐρχομενάων,
μέσφ' ἐπὶ κυανέους νοτίην ὁδὸς αὖτις ἐλάσσῃ.

(Ceographi Craeci Minores, τόμ. 2, σελ. 141, Carolus Müllerus, Parisiis 1882),

Τὴν ἀνωτέρω πληροφορίαν τοῦ Διονυσίου σχολιάζει ὁ Εὐστάθιος ὡς κάτωθι:

581. Ὅτι μετὰ τὰς Βρεταννίδας νήσους πολὺ πρὸς τὰ βόρεια λέγει ὅτι κεῖται ἡ νῆσος Θούλη, τῆς ὁποίας ἡ θέσις εὑρίσκεται πολὺ ἔξω τῆς οἰκουμένης

γῆς, διότι τοποθετεῖται ὡς ἡ βορειοτάτη νῆσος. Δι' αὐτὴν λέγεται ὅτι κατὰ τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα ὑπάρχει διαρκῶς φῶς, ὅταν ὁ ἥλιος βαίνῃ εἰς τὸν ἀρκτικὸν πόλον καὶ φθάσῃ εἰς τὸν τροπικὸν τοῦ καρκίνου. Ἀλλὰ τοῦτο μὲν τὸ θεωροῦμεν ὑπερβολικόν, τὸ νὰ ὑπάρχῃ ἐκεῖ διαρκῶς ἡμέρα. Ἀκόμη δὲ περισσότερον ὑπερβολικὸν εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἱστοροῦν πολλοί, ὅτι ὁ ἥλιος κατὰ τὸ θέρος εὑρίσκεται πάντοτε ὑπὲρ τὴν γῆν (μὴ δύων), τὸν δὲ χειμῶνα ὑπὸ τὴν γῆν, ὥστε διὰ τοὺς τόπους αὐτοὺς νὰ ὑπάρχῃ μία ἡμέρα (ἑξαμηνιαία) καὶ μία νὺξ (ἑξαμηνιαία). Ὅπως λέγει καὶ ὁ Ἡρόδοτος διὰ τοὺς Κιμμερίους ἰσχυριζόμενος ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ἄνθρωποι κοιμώμενοι ἐπὶ ἓξ μῆνας (Ἡροδότου IV 25)). Ἄλλοι δὲ λέγουν ὅτι κατὰ τὸ θέρος ἡ μεγίστη ἡμέρα εἰς τοὺς τόπους αὐτοὺς ἔχει διάρκειαν εἴκοσιν ὡρῶν καὶ ὀλίγον περισσότερον, ἐνῷ ἡ νὺξ ἔχει διάρκειαν πολὺ ὀλίγων ὡρῶν καὶ ὅτι κατὰ τὸν χειμῶνα παρατηρεῖται τὸ ἀντίθετον.

(Εὐσταθίου παρεκβολαὶ ἐπὶ ταῖς Διονυσίου τοῦ περιηγητοῦ παρεκβολαῖς. Geogr. Graeci Minores II σελ. 329, Carolus Müllerus).

Κατὰ τὸν ἐκ Καρχηδόνος καταγόμενον Λατῖνον συγγραφέα Martianus Capella ὁ Πυθέας ἐπληροφορήθη ἐκ τῶν κατοίκων τῆς Θούλης ὅτι εἰς τὴν βόρειον πολικὴν περιοχὴν κατὰ τὸ θέρος ἡ ἡμέρα ἔχει διάρκειαν ἓξ μηνῶν συνεχῶν, ἐνῷ κατὰ τὸν χειμῶνα ἡ νὺξ ἔχει διάρκειαν ἓξ μηνῶν συνεχῶν.

(Mart. Capella VI 595).

Εἴς τινας ἄτλαντας τῆς ἀρχαιότητος ὡς νῆσος Θούλη σημειοῦνται αἱ νῆσοι τῆς Ἀγγλίας Shetland. Τοιοῦτος καθορισμὸς τῆς νήσου φαίνεται πιθανὸν ὅτι προέρχεται ἐκ πληροφορίας τοῦ Τακίτου ὅτι ὁ πενθερός του Agricola, ἁρμοστὴς ὢν τῆς Ρώμης ἐν Βρεταννίᾳ, ἐπεχείρησεν ἐξερευνητικὸν πλοῦν πρὸς βορρᾶν. Ἐκ τῶν προηγουμένως ὅμως ἐκτεθέντων δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ἡ νῆσος Θούλη τῶν ἀρχαίων εἶναι ἡ σημερινὴ Ἰσλανδία.

Ἐνισχυτικόν, τέλος, τῆς γνώμης ὅτι ὁ Πυθέας διενήργησε τὸν ἐξερευνητικὸν περίπλουν τῆς ἀρκτικῆς περὶ τ 330 π.Χ., οὐχὶ ὡς ἰδιώτης ἀλλὰ βασιλικῇ ἐντολῇ εἶναι ἡ κατὰ τὸν Φεβρουάριον τοῦ 1960 ἀνεύρεσις παρὰ τὴν θάλασσαν τῆς Βρέστης ἐν Γαλλίᾳ, χρυσοῦ ἑλληνικοῦ νομίσματος κοπέντος περὶ τὸ 330—320 π.Χ. ἐν Κυρηναϊκῇ. Κατ' ἀνακοίνωσιν τοῦ Γάλλου ἀρχαιολόγου Jean Bousquet γενομένην ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τῶν Ἐπιγραφῶν καὶ Φιλολογίας ἐν Παρισίοις (Comptes rendues de l' Akadémie des Inscriptions et Belles-Lettres, Séance 11—10—1960), τὸ χρυσοῦν τοῦτο νόμισμα ἀνήκει πιθανώτατα εἰς ναυαγῆσαν πλοῖον τοῦ στόλου τοῦ Πυθέου. Ὅλα τὰ περιστατικὰ συνηγοροῦν ὑπὲρ τῆς ὀρθότητος τῆς γνώμης τοῦ Jean Bousquet. Ἰδιωτικὴ ἀποστολὴ ἐμπορικὴ τοῦ ναυαγήσαντος πλοίου δὲν φαίνεται πιθανή.

[

Τὸ μῆκος τοῦ σταδίου

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀποστάσεων κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ἐχρησιμοποιεῖτο ὡς μονὰς μήκους ἡ καλουμένη στάδιον ἢ στάδιος. Ἡ μονὰς αὕτη δὲν ἦτο παντοῦ ἡ αὐτή. Ἄλλοτε δὲ ὑποδιῃρεῖτο εἰς 600 καὶ ἄλλοτε εἰς 500 πόδας. Τὸ μῆκος ἑκάστου ποδὸς ἦτο ποικίλον εἰς τοὺς διαφόρους τόπους καὶ κατὰ τὰς διαφόρους ἐποχάς. Ἐπίσης τὸ μῆκος ἑνὸς σταδίου τὸ ὁποῖον διέτρεχον οἱ ἀθληταὶ κατὰ τοὺς ἀγῶνας ἦτο ποικίλον εἰς τοὺς διαφόρους τόπους καὶ κατὰ τὰς διαφόρους ἐποχὰς καὶ δὲν ἦτο τὸ αὐτὸ πρὸς τὴν μονάδα στάδιον δι' ἧς ἐμέτρουν τὰς ἀποστάσεις ἐπὶ τῆς ξηρᾶς ἢ τῆς θαλάσσης.

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα παρέχονται αἱ τιμαὶ μερικῶν σταδίων ἐκ τῆς Ἐγκυκλοπαιδείας Pauly—Wissowa (Stadion), ὅταν τὸ μῆκος τοῦ διπλοῦ Βαβυλωνιακοῦ πήχεως τεθῇ εἰς μέτρα:

	Ἐλάχιστον	Μέσον	Μέγιστον
Διπλοῦς Βαβυλωνιακὸς πῆχυς	0,990 μ.	0,99233 μ.	0,996 μ.
Βαβυλωνιακὸν στάδιον	198 μ.	198,39 μ.	199,2 μ.
Ὀλυμπιακὸν στάδιον	178,2 μ.	178,62 μ.	179,28 μ.
Ἀττικὸν στάδιον 1)9 μιλίου	165 μ.	165,39 μ.	166 μ.
Ἀττικὸν στάδιον 1)10 μιλίου	148,5 μ.	148,825μ.	149,4 μ.
Δελφικὸν	297 μ.	297,7 μ.	298,8 μ.
Ἰταλικὸν	185,625μ.	186,03 μ.	186,25 μ.
Φοινικικὸν — Αἰγυπτιακὸν	212,14 μ.	212,61 μ.	213,43 μ.
Ἀττικὸς πούς	0,297 μ.	0,2977 μ.	0,2988 μ.
μικρὸς Πτολεμαϊκὸς πούς	0,3094 μ.	0,31 μ.	0,31045 μ.

Ἀττικὸς—Αἰγινητικὸς πούς κατὰ λεξικὸν Benseler, 0,328 μ. (ἐκ τούτου τὸ κοινὸν ἑλληνικὸν στάδιον ἐκ 500 ποδῶν = 164 μ.).

Μῆκος ἑνὸς σταδίου κατὰ τοὺς ἀγῶνας

Ὀλυμπιακὸν	192,25 μ.	ἔχον	600	πόδας	τῶν	0,3204	μ.	ἕκαστον
Ἐπιδαύριον	181,30 μ.	»	600	»	»	0,3021	μ.	»
Πριήνης	191,39 μ.	»	600	»	»	0,3189	μ.	»
Μιλήτου	177,36 μ.	»	600	»	»	0,2956	μ.	»
Δελφῶν	175,55 μ.	»	600	»	»	0,296	μ.	»
Ἀθηνῶν	184,96 μ.	»	600	»	»	0,3082	μ.	»

Χρονολογίαι τινες:

Agricola, Iul. 40—93 μ.Χ.
Διονύσιος περιηγητὴς 2ος αἰ. μ.Χ.
Εὐστάθιος 12ος αἰ. μ.Χ.
Ἡρόδοτος 485—425 π.Χ.
Ἵππαρχος 2ος αἰ π.Χ.
Κοσμᾶς ὁ Ἰνδικοπλεύστης 6ος αἰ. μ.Χ.
Κράτης ὁ γραμματικὸς 2ος αἰ. π.Χ.
Μαρῖνος ὁ Τύριος 1ος αἰ. μ.Χ.
Martianus Capella 5ος αἰ. μ.Χ.
Ὅμηρος 10ος — 9ος αἰ. π.Χ.
Πολύβιος 200—120 π.Χ.
Πτολεμαῖος Κλαύδιος 2ος αἰ μ.Χ.
Πυθέας, ἀκμὴ 330 π.Χ.
Στράβων 63 π.Χ. — 19 μ.Χ.
Τάκιτος 55—120 μ.Χ.

SUMMARY

Ever since Homer's era the Ancient Greeks knew about the duration of day and night in the North Arctic region. It seems very probable that the exploration undertaken by Pytheas up to Iceland and the Arctic region of Norway was ordered and financed by Alexander the Great who intented to start a campaign in North West Europe.

Βιβλιογραφία

BERGER, HUGO, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen, Leipzig 1903.

BOUSQUET, JEAN, Comptes rendues de l' Akadémie des Inscription et Belles—Lettres, Paris, 1960. (Librairie Klincksieck 1961, p. 317),

BROCHE, GASTON E., Pytheas le Massaliote, découvreur de l' extrême occident et du nord de l' Europe, Paris 1936.

HOPPE, EDMUND, Mathematik und Astronomie im Klassischen Altertum, Heidelberg 1911.

ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΪΔΗ, ΜΙΛΤΙΑΔΟΥ, Διὰ γαλλικοῦ ἑλικοπτέρου... ναυαγῆσαν ἑλληνικὸν πλοῖον τοῦ 4ου π.Χ. αἰῶνος. Ἐφημερὶς «Ἡ Καθημερινή» 28.8.1960, Ἀθῆναι.

PAULY—WISSOWA REAL ENZYKL. Pytheas–Thule, Ptolemaios, Agricola, Geographie.

ΦΩΤΕΙΝΟΥ, ΝΙΚΟΛΑΟΥ Γ., Ναυτικά, ἡ συμβολὴ τῶν Ἑλλήνων εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς θεωρητικῆς ναυτιλίας, Ἀθῆναι 1955.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΑΙ ΕΝ ΕΛΛΑΔΙ

Ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων μέχρι τοῦ 15ου αἰῶνος

ΑΝΑΤΥΠΟΝ
ἐκ τῆς Γενικῆς Παγκοσμίου Ἐγκυκλοπαιδείας
ΠΑΠΥΡΟΣ — ΛΑΡΟΥΣ
Τόμ. 6, ΕΛΛΑΣ, σελ. 382 — 399

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1966

ΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΑΙ ΕΝ ΕΛΛΑΔΙ

Μαθηματικὰ

Κατὰ τὰς μαρτυρίας τὰς ὁποίας παρέχουν εἰς ἡμᾶς ὁ Ἡρόδοτος, ὁ μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Εὔδημος, ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς καὶ ἄλλοι παλαιοὶ συγγραφεῖς, ἡ γεωμετρία εἶναι δημιούργημα τῶν Αἰγυπτίων. Κατὰ τοὺς συγγραφεῖς αὐτούς, οἱ Αἰγύπτιοι ὡδηγήθησαν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῆς γεωμετρίας ἐκ τῆς ἀνάγκης μετρήσεως τῆς παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ Νείλου γῆς, ἡ ὁποία μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν αὐτοῦ· καὶ ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων ἔπρεπε πάντοτε νὰ μετρῆται ἐκ νέου διὰ λόγους κτηματολογικοὺς καὶ φορολογικούς. Τὰ εἰσοδήματα τοῦ κράτους ἐκ τῆς φορολογίας τῶν παρὰ τὸν Νεῖλον καλλιεργουμένων ἐκτάσεων ἦσαν μεγάλα. Πρὸς ἀκριβῆ ὑπολογισμὸν τῶν φορολογητέων ἐκτάσεων οἱ Φαραὼ τῆς Αἰγύπτου εἶχον ἱδρύσει εἰδικὸν σῶμα, τοῦ ὁποίου τὰ μέλη ὠνομάζοντο ἁρπεδονάπται, δηλαδή, ὡς θὰ ἐλέγομεν σήμερον, εἶδος τοπογραφικῆς ὑπηρεσίας, ἡ ὁποία σκοπὸν εἶχε τὰς μετρήσεις τῶν καλλιεργουμένων ἐκτάσεων. Ὁ χρόνος τῆς ἱδρύσεως τοῦ σώματος τῶν ἁρπεδοναπτῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ μετά τινος ἀκριβείας. Ὑπὸ πολλῶν τοποθετεῖται κατὰ τὴν ε' χιλιετηρίδα π.Χ. Κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον τοποθετεῖται περίπου ἡ ἀκμὴ τοῦ μὴ σημιτικῆς καταγωγῆς λαοῦ τῶν Σουμερίων, ὅστις κατῴκει τὴν Μεσοποταμίαν χώραν. Δὲν περιεσώθησαν πληροφορίαι, ἐὰν καὶ οἱ Σουμέριοι εἶχον ἱδρύσει ὁμοίαν τοπογραφικὴν ὑπηρεσίαν, ὅπως οἱ Αἰγύπτιοι. Ἀσφαλῶς καὶ αὐτοὶ θὰ εἶχον ὅμοια προβλήματα, μὲ τὰς πλημμύρας τῶν ποταμῶν Τίγρητος καὶ Εὐφράτου. Ὑπάρχουν ὅμως ἀρχαιολογικὰ εὑρήματα (πινακίδες διάφοροι), ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται ὅτι καὶ οἱ Σουμέριοι εἶχον ἀσχοληθῇ μὲ προβλήματα γεωμετρικὰ καὶ ἀριθμητικά. Περὶ τὰς ἀρχὰς τῆς β' χιλιετηρίδος π.Χ. οἱ Σουμέριοι ὑπετάγησαν ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων, λαοῦ σημιτικῆς καταγωγῆς, ὅστις ἐκαλλιέργησε καὶ ἀνέπτυξε τὰς ἀριθμητικὰς καὶ γεωμετρικὰς γνώσεις τῶν Σουμερίων. Ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἀφ' ἑνὸς καὶ οἱ Σουμέριοι καὶ Βαβυλώνιοι ἀφ' ἑτέρου θὰ εἶχον ἔλθει εἰς ἐπικοινωνίαν πολιτιστικὴν μεταξύ των θεωρεῖται βέβαιον. Δὲν ὑπάρχουν πληροφορίαι ἂν οἱ Ἕλληνες τῆς τότε ἐποχῆς εἶχον ἔλθει εἰς τοιαύτην ἐπαφὴν πρὸς τοὺς Σουμερίους καὶ τοὺς Βαβυλωνίους. Μεταγενέστεροι συγγραφεῖς, ἀρχαιότερος τῶν ὁποίων εἶναι ὁ Ἡρόδοτος, ἀναφέρουν ὅτι οἱ Ἕλληνες εἰσήγαγον εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν γνῶσιν τῆς γεωμετρίας ἐκ τῆς Αἰγύπτου. Οὐδεμία πληροφορία ὑπάρχει, ὅτι, ἔστω καὶ βραδύτερον (πρὸ τοῦ 700 περίπου π.Χ.), οἱ Ἕλληνες εἶχον ἔλθει εἰς πνευματικὴν ἐπικοινωνίαν μὲ τοὺς Βαβυλωνίους. Ὁ Ἰάμβλιχος (νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος, ἀκμάσας περὶ τὸ τέλος τοῦ γ' αἰ. μ.Χ.) παρέχει τὴν πληροφορίαν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας μετέφερεν ἐκ τῆς Βαβυλῶνος τὴν γνῶσιν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, ἐκ τῆς ὁποίας κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ (πληροφορία, ἥτις δὲν θεωρεῖται ἀκριβής). Ἡ μόνη θετικὴ πληροφορία περὶ πολιτιστικῆς ἐπικοινωνίας μεταξὺ Ἑλλήνων καὶ Βαβυλωνίων εἶναι ἡ τοῦ Ἡροδότου (ΙΙ 109), καθ' ἣν «πόλον μὲν γὰρ καὶ γνώμονα καὶ τὰ δυώδεκα μέρεα τῆς ἡμέρης παρὰ Βαβυλωνίων ἔμαθον οἱ Ἕλληνες [Ἑρμηνεία: Τὰ περὶ τοῦ βορείου γεωγραφικοῦ πόλου τοῦ κόσμου (πολικοῦ ἀστέρος) καὶ τὰ περὶ γνώμονος (ὀρθῆς γωνίας δι' ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις) καὶ τὰ τῆς διαιρέσεως τῆς ἡμέρας εἰς δώδεκα ὥρας, οἱ Ἕλληνες ἔμαθον παρὰ τῶν Βαβυλωνίων]. Ἔμμεσος τέλος πληροφορία περὶ πνευματικῆς ἐπικοινωνίας Ἑλλήνων-Βαβυλωνίων, μέσῳ τῶν λαῶν τῆς Μικρᾶς Ἀσίας Λυδῶν, Φρυγῶν, θεωρεῖται ἡ ὀνομασία τῶν τόνων τῆς μουσικῆς εἰς λυδίους, φρυγίους, μιξολυδίους κλπ. [Εὐκλείδου Κατατομὴ Κανόνος ἐκ τοῦ Ἀριστοξένου, H. Menge, (J. L. Heilberg, vol. VIII. σ. 218) καὶ Ἀριστείδου Κουϊντιλιανοῦ, Περὶ Μουσικῆς, R. P. Winnigton - Ingram, Teubner, σ. 18 κἑξ., 1963].

Τὰ ἀρχαιότατα γραπτὰ μνημεῖα περὶ τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῶν Αἰγυπτίων καὶ τῶν Βαβυλωνίων εἶναι δύο. Ὁ πάπυρος τοῦ Rhind διὰ τὰς γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων καὶ αἱ ἐξ ἀρχαιολογικῶν ἀνασκαφῶν λίθινοι πινακίδες διὰ τὰς γνώσεις τῶν Βαβυλωνίων. Ὁ πάπυρος τοῦ Rhind φυλάσσεται εἰς τὸ ἐν Λονδίνῳ Βρεττανικὸν Μουσεῖον. (Rhind εἶναι τὸ ὄνομα τοῦ Ἄγγλου, τοῦ ἀγοράσαντος τὸν πάπυρον λαθρεμπορικῶς ἐν Αἰγύπτῳ). Ὑπολογίζεται ὅτι ἔχει γραφῇ περὶ τὸ ἔτος 1700 π. Χ. ὑπὸ τοῦ (μαθηματικοῦ) Ahmes. Κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν ἤκμαζεν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἡ Τίρυνς εἰς τὴν ἀργολικὴν πεδιάδα. Εἰς τὸν πάπυρον τοῦ Rhind περιέχονται διάφορα προβλήματα, ἰδίᾳ γεωμετρικά. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν προβλημάτων τούτων συνάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν Αἰγυπτίων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἦτο πάντη ἐμπειρικῆς μορφῆς. Δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ὀνομασθῇ ἐπιστήμη. Εἰς τὰς πινακίδας τῆς Μεσοποταμίας παρατηροῦνται πολλαὶ γνώσεις ἀλγεβρικαὶ ἰδίᾳ καὶ γεωμετρικαί, αἱ ὁποῖαι μαρτυροῦν περὶ μεγάλης ἀνθήσεως τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν περιοχὴν αὐτήν. Αἱ πινακίδες αὐταὶ ἔδωσαν ἀφορμὴν εἴς τινας νεωτέρους ἱστορικοὺς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης νὰ διατυπώσουν τὴν γνώμην, ὅτι πρῶτοι οἱ Βαβυλώνιοι ἔθεσαν τὰ θεμέλια τῶν μαθηματικῶν καὶ οἱ Ἕλληνες ἁπλῶς ἠκολούθησαν τοὺς Βαβυλωνίους. Κατὰ τὸν ἐν Μονάχῳ ὅμως ἀκαδημαϊκὸν καὶ καθηγητὴν Kurt Vogel, αἱ περισσότεραι βαβυλωνιακαὶ πινακίδες, αἱ περιέχουσαι μαθηματικά, προέρχονται ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ ὁ χρόνος γραφῆς αὐτῶν (Vorgriechische Mathematik II, σ. 13, Verlag Schroedel καὶ Schönigh, 1959). Κατὰ τὴν γνώμην τοῦ γράφοντος, αἱ περισσότεραι βαβυλωνιακαὶ πινακίδες, αἱ περιέχουσαι μαθηματικά, ἔχουν γραφῆ κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Σελευκιδῶν, διαδόχων ἐκεῖ τοῦ Μ. Ἀλεξάνδρου, περιέχουν δηλαδὴ αὗται γνώσεις ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Εἰς τοιαύτην γνώμην συνηγορεῖ ἡ σύγκρισις πολλῶν ἐκ τῶν γνώσεων αὐτῶν πρὸς τὰ γραφόμενα ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Διοφάντου. Οὐδαμοῦ εἰς τὰ βαβυλωνιακὰ καὶ αἰγυπτιακὰ μαθηματικὰ ὑπάρχει ἡ λέξις *Ἀπόδειξις* μιᾶς γεωμετρικῆς προτάσεως. Τὸ θεμέλιον δὲ καὶ τὸ κύριον γνώρισμα τῆς ἐπιστήμης τῶν μαθηματικῶν εἶναι ἡ Ἀπόδειξις τιθεμένων προτάσεων. Ποῖος ἐπενόησε τὴν Ἀπόδειξιν εἰς τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἄγνωστον. Μνημονεύεται ὅμως ὅτι πρῶτος, ὅστις ἐχρησιμοποίησεν ἀποδείξεις εἰς μαθηματικὰς προτάσεις, εἶναι ὁ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος Θαλῆς ὁ Μιλήσιος. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁ Θαλῆς θεωρεῖται ὡς ὁ ἐπινοητὴς τῆς μαθηματικῆς ἀποδείξεως. Χαρακτηριστικὴ ἐν προκειμένῳ εἶναι καὶ ἡ γνώμη τοῦ Γερμανοῦ φιλοσόφου Ἐμμανουὴλ Κάντ, ὁ ὁποῖος γράφει τὰ ἑξῆς: «Τὰ μαθηματικὰ εὗρον εἰς τὸν θαυμάσιον λαὸν τῶν Ἑλλήνων τὸν ἀσφαλῆ δρόμον μιᾶς ἐπιστήμης..Δὲν πρέπει κανεὶς ὅμως νὰ νομίσῃ ὅτι ἦτο εὔκολον εἰς αὐτά, ὅπως εἰς τὴν λογικήν, ὅπου αὕτη ἔχει νὰ κάμῃ μόνον μὲ τὸν ἑαυτόν της, διὰ νὰ εὕρῃ τὸν βασιλικὸν δρόμον (τῆς ἀναπτύξεώς της) ἢ νὰ τὸν δημιουργήσῃ ἡ ἰδία· πολὺ περισσότερον, νομίζω, ὅτι τὰ μαθηματικὰ παρέμενον στάσιμα, ἰδίᾳ παρὰ τοῖς Αἰγυπτίοις, ὁπότε αἴφνης ἔγινε μία ἐπαναστατικὴ μεταβολή, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν εὐτυχῆ ἔμπνευσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἀνθρώπου... Ὁ πρῶτος ὅστις ἀπέδειξεν ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως) ἔσχε μίαν ἀναλαμπήν...» (Πρόλογος τῆς β′ ἐκδόσεως *Kritik der reinen Vernunft*, ὑπὸ R. Schmidt, Leipzig 1944). Ὁ ἐπίσης Γερμανὸς καθηγητὴς εἰς τὸ Πολυτεχνεῖον τοῦ Μονάχου Max Steck θεωρεῖ τὴν ἐπινόησιν τῆς Ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικὰ ὡς τὸ βάθρον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐρείδεται ἡ δημιουργία τοῦ πολιτισμοῦ. «Ἄνευ τῆς ἑλληνικῆς αὐτῆς ἐπινοήσεως», γράφει, «ὁ ἄνθρωπος δὲν θὰ εἶχε δημιουργήσει πολιτισμὸν» (Max Steck, Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben. Περιοδικόν: Forschungen und Fortschritte 31, σ. 113-117, τοῦ 1957). Ὡς πρῶτα θεωρήματα, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια ἐδείχθη ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ μνημονεύονται τὰ ἑξῆς· 1) ὁ κύκλος διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς διαμέτρου, 2) αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι, 3) αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι, 4) ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας εἶναι ἴσα.

Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν θεωρημάτων τούτων δὲν περιέχεται εἰς τὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου καὶ δὲν θεωρεῖται γεωμετρικὴ πρότασις χρήζουσα ἀποδείξεως (δὲν θεωρεῖται δηλαδὴ θεώρημα), ἀλλὰ ἐν εἶδος αἰτήματος ἢ ἀξιώματος, πρότασις δηλαδὴ ἀφ' ἑαυτῆς φανερά. Εἰς τὸν Θαλῆν ἀποδίδεται ἐπίσης ἡ ἐπινόησις τῶν θεωρημάτων περὶ ὁμοιότητος, τὰ ὁποῖα ἀπετέλεσαν τὴν βάσιν τῆς θεωρίας διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀναλογιῶν. Χαρακτηριστικὴ εἶναι ἐν προκειμένῳ ἡ συναφὴς πληροφορία τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος (δ' αἰ. μ.Χ., Ι, 22-44), ἀντλήσας αὐτὴν ἐκ τοῦ περιφήμου ἱστορικοῦ τῆς ἀρχαιότητος Ἱερωνύμου (περίπου 350-260 π.Χ., καταγομένου ἐκ τῆς παρὰ τὸν Ἑλλήσποντον πόλεως Καρδία): *«καὶ ἐκμετρῆσαί, φησιν, αὐτὸν (τὸν Θαλῆν) τὰς πυραμίδας ἐκ τῆς σκιᾶς, παρατηρήσαντα ὅτε ἡμῖν ἰσομεγέθης ἐστίν».* (Ἑρμηνεία: καὶ λέγουν ὅτι ἐξεμέτρησε τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτῶν, ἐνῷ ἔκαμε τὴν παρατήρησιν (μέτρησιν), ὅταν αὕτη ἦτο ἰσομεγέθης μὲ ἡμᾶς). Τὴν αὐτὴν πληροφορίαν εὑρίσκομεν καὶ εἰς τὸν Πλούταρχον, ὅστις γράφει: «τὴν βακτηρίαν στήσας (Θαλῆς) ἐπὶ τῷ πέρατι τῆς σκιᾶς ἣν ἡ πυραμὶς ἐποίει, γενομένων τῇ ἐπαφῇ τῆς ἀκτῖνος δυεῖν τριγώνων ἔδειξας (ὦ Θαλῆ), ὃν ἡ σκιὰ πρὸς τὴν σκιὰν λόγον εἶχε, τὴν πυραμίδα πρὸς τὴν βακτηρίαν ἔχουσαν (Συμποσ. Προβλ. VII sap. 2p. 147 A). (Ἑρμηνεία: ἀφοῦ ἔστησες τὴν βακτηρίαν εἰς τὸ τέλος τῆς σκιᾶς τὴν ὁποίαν ἔρριπτεν ἡ πυραμίς, ἐκ τῶν δύο τριγώνων (ὁμοίων) τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς ἐπαφῆς τῆς ἀκτῖνος (τοῦ ἡλίου) ἀπέδειξας, ὅτι ὃν λόγον εἶχεν ἡ σκιὰ πρὸς τὴν σκιάν, τὸν αὐτὸν εἶχε καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος πρὸς τὸ μῆκος τῆς ράβδου). Αἱ ἀνωτέρω πληροφορίαι τοῦ Ἱερωνύμου καὶ τοῦ Πλουτάρχου ἀποτελοῦν καὶ μίαν ἀπόδειξιν, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι σοφοὶ (ἱερεῖς) δὲν ἐγνώριζον θεωρητικὴν γεωμετρίαν, δὲν εἶχον δηλαδὴ ἰδέαν τῆς Ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικά. Ἡ γοργὴ ἀνάπτυξις τῶν μαθηματικῶν, ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ, προεκάλεσε κατ' ἀνάγκην τὴν διαίρεσιν αὐτῶν εἰς κλάδους, ὅπως εἶναι ἡ Λογιστική, ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία. Ὑπὸ τὸν ὅρον Λογιστικὴ νοεῖται ἡ ὑπὸ τὴν σημερινὴν ἔννοιαν Πρακτικὴ Ἀριθμητικὴ καὶ Πρακτικὴ Γεωμετρία. Τοῦτο καταφαίνεται ἐκ τῆς *Πολιτείας* τοῦ Πλάτωνος (βιβλίον Ζ') καὶ ἐξ ἄλλων μεταγενεστέρων συγγραφέων, ὅπως εἶναι ὁ ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου, τοῦ σχολιαστοῦ τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (ε'-ς' αἰ. μ.Χ.), μνημονευόμενος Μάγνος. Ὁ Εὐτόκιος, μνημονεύων τὰ *Λογιστικὰ* τοῦ Μάγνου, ἐννοεῖ ἀριθμητικὰς πράξεις διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὑπὸ τῶν συγχρόνων καλουμένου ἀριθμοῦ π (3,141593...). Ἡ Ἀριθμητικὴ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον σήμερον καλεῖται διὰ δύο ὅρων: θεωρία τῶν ἀριθμῶν καὶ ἄλγεβρα. Ὁ ὅρος Ἄλγεβρα ἔχει ὡς γνωστὸν προέλθει ἐκ τῶν ἀραβικῶν ἐνασχολήσεων καὶ ἐρευνῶν ἐπὶ τῶν *Ἀριθμητικῶν* τοῦ Διοφάντου, τὰ ὁποῖα εἶναι πράγματι ἄλγεβρα, ὑπὸ τὴν σημερινὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου τούτου. Κατὰ τὴν κατωτέρω ἔκθεσιν περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν ἀκολουθοῦμεν τὴν σύγχρονον διαίρεσιν αὐτῶν εἰς διαφόρους κλάδους.

● *Θεωρία τῶν ἀριθμῶν.* Ἡ σπουδαιοτέρα πηγή, ἀπὸ τὴν ὁποίαν πληροφορούμεθα διὰ τὴν δημιουργίαν καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, εἶναι τὰ τρία βιβλία (ἐκ τῶν 13) τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὑπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 9. Εἰς τὰ βιβλία αὐτὰ εἶναι συγκεντρωμένη ἡ ὕλη τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Καὶ ἄλλοι ὅμως μεταγενέστεροι τοῦ Εὐκλείδου συγγραφεῖς, ὅπως εἶναι ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς (β' αἰὼν μ.Χ.) καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, τῆς αὐτῆς ἐποχῆς, παρέχουν εἰς ἡμᾶς ἀρκετὰς συναφεῖς πληροφορίας. Ὅπως εἶναι γνωστόν, τὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου δὲν εἶναι ἀποκλειστικὴ πνευματικὴ δημιουργία τοῦ Εὐκλείδου. Ἀντιπροσωπεύουν τὴν μαθηματικὴν δημιουργίαν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, ὑπὸ τὴν καθαρῶς στοιχειώδη μορφήν, μιᾶς ἐποχῆς τριῶν αἰώνων τοὐλάχιστον. Θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι καὶ ἄλλαι σπουδαῖαι γνώσεις ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν μαθηματικῶν ἐν γένει ἐδημιουργήθησαν κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, αἱ ὁποῖαι δὲν διεσώθησαν μέχρις ἡμῶν, διότι δὲν εἶχον τὴν τύχην νὰ περιληφθοῦν μεταξὺ τῆς ὕλης τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου. Ὡς πρῶτοι ἀσχοληθέντες μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν θεωροῦνται ὁ Θαλῆς, ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος (580-500 π.Χ.) καὶ ἡ Σχολή του, οἱ Πυθαγόρειοι. Ἡ Σχολὴ τοῦ Πυθαγόρου ἱδρύθη εἰς τὴν πόλιν τῆς Κάτω Ἰταλίας (τὴν Μεγάλην Ἑλλάδα) Κρότωνα. Ἦτο ἵδρυμα, τὸ ὁποῖον ἐπεδίωκε σκοποὺς πολιτικούς, ἠθικούς, θρησκευτικούς, ἐπιστημονικούς. Δὲν εἶναι πιθανὸν ὑπερβολή, ἂν τοῦτο θεωρηθῇ ὡς τὸ πρῶτον συστηματικὸν Πανεπιστήμιον τοῦ Κόσμου. Τὸ ἀρχαιότερον τούτου Πανεπιστήμιον τῆς Μιλήτου ἐν Μικρᾷ Ἀσίᾳ, ὅπου ἐδίδαξε τὸ πρῶτον ὁ Θαλῆς, δὲν εἶχε τὴν γενικὴν μορφὴν διδασκαλιῶν, ὡς εἶχεν ἡ Σχολὴ τοῦ Πυθαγόρου. Διὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν (ς' αἰ. π.Χ.) δὲν εἶναι γνωστὸν ἂν ἐλειτούργει εἰς τὰς Ἀθήνας Πανεπιστήμιον. Δύο ὅμως περιστατικὰ ἐνισχύουν τὴν γνώμην, ὅτι αἱ Ἀθῆναι κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην πρέπει νὰ ἦσαν ἐπιστημονικὸν κέντρον πρώτης γραμμῆς. Τὸ ἓν ἐκ τούτων εἶναι, ὅτι ἡ Μίλητος ἦτο ἀποικία τῶν Ἀθηναίων καὶ κατὰ συνέπειαν ἔλαβε τὰ ἐπιστημονικὰ φῶτα παρὰ τῆς μητροπόλεως. Τὸ ἄλλο περιστατικὸν τὸ συνάγομεν ἐκ τῆς περιγραφῆς τῆς μάχης τῶν Πλαταιῶν (479 π.Χ.) ὑπὸ τοῦ Ἡροδότου καὶ τοῦ Πλουτάρχου (βίος Ἀριστείδου). Γράφουν λοιπὸν οἱ συγγραφεῖς οὗτοι, ὅτι μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Μαρδονίου οἱ Πέρσαι ἐνεκλείσθησαν εἰς τὸ παρὰ τὸ βόρειον μέρος τοῦ Ἀσωποῦ ξύλινον στρατόπεδον (φρούριον), τὸ ὁποῖον πολιορκοῦντες ἐπ' ἀρκετὸν οἱ Σπαρτιᾶται δὲν ἠδυνήθησαν νὰ ἐκπορθήσουν, διότι δὲν ἦσαν εἰδικοὶ περὶ τὰς τειχομαχίας. Τὴν ἐκπόρθησιν ἐπέτυχον οἱ Ἀθηναῖοι, οἱ ὁποῖοι, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν συναφῶν περιγραφῶν, εἶχον τοιαύτην εἰδικότητα. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι οἱ Ἀθηναῖοι εἶχον πολιορκητικὰς μηχανὰς καὶ ἑπομένως ἀνεπτυγμένην μηχανικὴν καὶ ἀνεπτυγμένα μαθηματικά, τῶν ὁποίων ἐστεροῦντο οἱ Σπαρτιᾶται. Οὐδὲν ὅμως εἶναι συγκεκριμένως γνωστὸν περὶ μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν Ἀθηνῶν κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ 600-450 π.Χ.

Ἡ παλαιοτάτη ἐποχή, διὰ τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν, ὅτι εἰς τὰς Ἀθήνας ἐθεραπεύοντο τὰ μαθηματικά, εἶναι ἡ τῆς ἀκμῆς τοῦ Περικλέους περὶ τὸ 450 π.Χ. Κατὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν ὁ φίλος τοῦ Περικλέους Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος, εὑρισκόμενος εἰς τὴν φυλακήν, ὡς διωκόμενος ἐπὶ ἀσεβείᾳ, ἠσχολεῖτο μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Τοῦτο σημαίνει μεγάλην ἄνθησιν τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰς Ἀθήνας, διὰ τὴν ἐποχὴν αὐτὴν (Πλουτάρχου de exil. 17, 607 F καὶ Βιτρουβίου VII, pr. 11). Ὁ Ἀριστοτέλης, ἀναφερόμενος εἰς τὴν ἐποχὴν αὐτὴν καὶ τὴν πρὸ αὐτῆς, μᾶς παρέχει τὰς κάτωθι πληροφορίας περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων: «Ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων (σημ. ἐννοεῖ: τῶν Ἀναξαγόρου, Ἐμπεδοκλέους, Λευκίππου, Δημοκρίτου) οἱ καλούμενδι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι πάντων... ἐπειδὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνετο τὴν φύσιν ἀφωμοιῶσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἁρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμόν» (Μετὰ τὰ Φυσικὰ Α 5, 985 b 23). [Ἑρμηνεία: Μεταξὺ δὲ αὐτῶν, ἀλλὰ καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι ἀσχοληθέντες πρῶτοι μὲ τὰ μαθηματικά, τὰ ἀνέπτυξαν καὶ ἐνδιατρίψαντες πολὺ εἰς αὐτά, ἐνόμισαν ὅτι αἱ ἀρχαὶ τούτων εἶναι ἀρχαὶ ὅλων τῶν ὄντων... ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ μὲν ἄλλα πράγματα ἐφαίνοντο ὅτι ἀφωμοιοῦντο κατὰ τὴν φύσιν πᾶσαν πρὸς τοὺς ἀριθμούς, οἱ δὲ ἀριθμοὶ εἶναι τὸ πρῶτον πρᾶγμα παντὸς φυσικοῦ ἀντικειμένου, ἐξέλαβον ὅτι τὰ στοιχεῖα τῶν ἀριθμῶν εἶναι στοιχεῖα ὅλων τῶν ὄντων, καὶ ὅτι ὁ ὅλος οὐρανὸς εἶναι ἁρμονία καὶ ἀριθμός]. Εἶναι ἐκ τῶν ἀνωτέρω πληροφοριῶν τοῦ Ἀριστοτέλους εὐνόητον, ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι, ὁρμώμενοι ἐκ φιλοσοφικῶν καὶ θεολογικῶν ἀντιλήψεων διὰ τὴν σημασίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, ἐπεδόθησαν μὲ ζῆλον εἰς τὴν ἔρευνάν των. Ὁ ὁρισμὸς τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ἀπησχόλησεν ἐπὶ πολὺ τοὺς Ἕλληνας μαθηματικούς. Οἱ Πυθαγόρειοι ὥρισαν τὴν μονάδα ὡς «στιγμὴν ἄθετον» (Ἀρισ. Μ. τ. Φυσικὰ Μ 8, 1084 b 25). Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸν πρῶτον ὁρισμὸν τοῦ ἑβδόμου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* λέγει ὅτι «Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται». Διὰ τὸν ἀριθμὸν ὁ Θαλῆς ὥρισεν ὅτι εἶναι «μονάδων σύστημα», ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ, ***Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς*** (σ. 10, 8, ἔκδ. Pistelli). Ἐν συνεχείᾳ, ὁ Ἰάμβλιχος λέγει, ὅτι τὸν ἀριθμὸν ὁ Πυθαγόρας ὥρισεν «ἔκτασιν καὶ ἐνέργειαν τῶν ἐν μονάδι σπερματικῶν λόγων ἢ ἑτέρως τὸ πρὸ πάντων ὑποστὰν ἐν θείῳ νῷ ἀφ' οὗ καὶ ἐξ οὗ πάντα συντέτακται καὶ μένει τάξιν ἄλυτον διηριθμημένα». (Ἑρμηνεία: ἀριθμὸς εἶναι ἔκτασις καὶ ἐνέργεια τῶν σπερματικῶν αἰτίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγκεκλεισμένα εἰς τὴν μονάδα ἢ ἄλλως πως ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὑπῆρχε εἰς τὸν θεῖον νοῦν πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν πραγμάτων, ἀπὸ τοῦ ὁποίου καὶ διὰ τοῦ ὁποίου τὰ πάντα ἔχουν συνταχθῆ καὶ παραμένουν ἠριθμημένα, ἔχοντα ἀκατάλυτον τάξιν). Εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον ὁ Ἰάμβλιχος προσθέτει: «Εὔδοξος δὲ ὁ Πυθαγόρειος «ἀριθμός ἐστιν» εἶπε «πλῆθος ὡρισμένον», ἐν ᾧ ὁ Πυθαγόρειος Ἵππασος ὥρισε τὸν ἀριθμὸν ὡς «παράδειγμα πρῶτον κοσμοποιίας», καὶ ὁ ἐπίσης Πυθαγόρειος Φιλόλαος «φησὶν ἀριθμὸν εἶναι τῆς τῶν κοσμικῶν αἰωνίας διαμονῆς τὴν κρατιστεύουσαν καὶ αὐτογενῆ συνοχήν». (Ἑρμηνεία: Ἀριθμὸς εἶναι, λέγει, ἡ πάντοτε ἐπικρατοῦσα καὶ αὐτογενὴς συνοχὴ τῆς αἰωνίας ὑπάρξεως καὶ σταθερότητος τῶν κοσμικῶν πραγμάτων).

Χαρακτηρισμὸς τῶν ἀριθμῶν καὶ διάκρισις αὐτῶν. Ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν διαφόρων ἀριθμῶν καὶ ἡ διάκρισις αὐτῶν εἰς διαφόρους κατηγορίας ἀποδίδεται, κατὰ τὴν παράδοσιν, εἰς τοὺς Πυθαγορείους, τῶν ὁποίων τὴν συναφῆ ὀνοματολογίαν περιέλαβεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ βιβλία τῶν Ἀριθμητικῶν (*Στοιχείων* 7, 8, 9 βιβλία), ἰδίᾳ εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ 7ου βιβλίου, ἐκ τοῦ ὁποίου μεταφέρομεν ἐδῶ τοὺς κυριωτέρους: γ΄) Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. δ΄) Μέρη δέ, ὅταν δὲν καταμετρῇ. ε΄) Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ς΄) Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος. ζ΄) Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ. η΄) Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. θ΄) Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. ιβ΄) Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνον μετρούμενος· ιγ΄) Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. ιδ΄) Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος. ιζ΄) Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. ιη΄) Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. κα΄) Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν. κβ΄) Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. κγ΄) Τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν. [Ἑρμηνεία: γ) Μέρος ἀριθμοῦ εἶναι ὁ μικρότερος τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν διαιρῇ τὸν μεγαλύτερον· δ) Μέρη δέ, ὅταν δὲν διαιρῇ ὁ μικρότερος τὸν μεγαλύτερον (π.χ. ὁ 5 τοῦ 7 εἶναι τὰ 5/7 μέρη). ε) Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μεγαλύτερος τοῦ μικροτέρου, ὅταν διαιρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου. ς) Ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος διὰ δύο. δ) Περιττὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος διὰ δύο ἢ ὁ διαφέρων κατὰ μονάδα ἀρτίου ἀριθμοῦ. η) Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος ὑπὸ ἀρτίου καὶ δίδων πηλίκον ἄρτιον ἀριθμόν. θ) Ἀρτιάκις δὲ περιττὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος ὑπὸ ἀρτίου καὶ δίδων πηλίκον περιττόν. ιβ) Πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος ὑπὸ μόνης τῆς μονάδος. ιγ) Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες ὡς κοινὸν διαιρέτην μόνον τὴν μονάδα. ιδ) Σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι ὁ διαιρούμενος ὑπό τινος ἀριθμοῦ. ιζ) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμὸς ἐπίπεδος, οἱ δὲ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγονται πλευραὶ αὐτοῦ. ιη) Τὸ γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν λέγεται στερεὸς ἀριθμός, οἱ δὲ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγονται πλευραὶ αὐτοῦ. κα) Ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσιοι ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Π.χ.

1) Ἐὰν $A = B.\rho$ καὶ $\Gamma = \Delta.\rho$, τότε εἶναι $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\Gamma}{\Delta}$

2) Ἐὰν $A.\rho = B$ καὶ $\Gamma.\rho = \Delta$, » » $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\Gamma}{\Delta}$

3) Ἐὰν $A = \dfrac{\mu}{\nu} B$ καὶ $\Gamma = \dfrac{\mu}{\nu}\Delta$, » » $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\Gamma}{\Delta}$

κβ) Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους (τοὺς παράγοντας αὐτῶν). Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 6 καὶ 96 εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, διότι εἶναι $6 = 2 \times 3$ καὶ $96 = 8 \times 12$, εἶναι δὲ $2 : 8 = 3 : 12$. Οἱ ἀριθμοὶ 24 καὶ 3.000 εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί, διότι εἶναι $24 = 2 \times 3 \times 4$ καὶ $3.000 = 10 \times 15 \times 20$, εἶναι δὲ $2 : 10 = 3 : 15 = 4 : 20$. κγ) Τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του, π.χ. τὰ μέρη τοῦ 6 εἶναι 1, 2, 3 καὶ εἶναι $1 + 2 + 3 = 6$. Εἶναι ἄρα ὁ 6 ἀριθμὸς τέλειος. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κύβου παρέχεται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, καὶ αὐτὸν διατηροῦμεν καὶ σήμερον. Ὅταν ὅμως δύο πολλαπλασιάζοντες ἀλλήλους ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἴσοι, τὸ γινόμενον αὐτῶν καλεῖται προμήκης ἢ ἑτερομήκης (Πλάτωνος Θεαίτητος 147 d). Κατὰ τοὺς μεταγενεστέρους, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ Νικόμαχος καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, προμήκης ἀριθμὸς λέγεται τὸ γινόμενον, τοῦ ὁποίου οἱ δύο παράγοντες διαφέρουν κατὰ μονάδα. Π.χ. ὁ $k=m(m+1)$ λέγεται προμήκης. Ὅταν ὅμως εἶναι $x=m\,(m+n)$, ὅπου $n=2, 3, 4\ldots$, ὁ x λέγεται ἑτερομήκης. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἰδιάζουσαν θέσιν κατέχει τὸ θεώρημα τῆς εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον καὶ εἰς τὴν σύγχρονον θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν Ἀνωτέραν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν θεωρεῖται θεμελιῶδες (2ον θεώρημα, 7ον βιβλίον τῶν *Στοιχείων*). Ἡ χρησιμοποιουμένη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου συναφὴς μέθοδος ὀνομάζεται μέθοδος τῆς ἀνθυφαιρέσεως. Ἡ σύγχρονος διατύπωσις αὐτῆς εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐὰν δοθοῦν δύο ἀριθμοὶ $A>B$ καὶ καλέσωμεν τὰ διαδοχικὰ πηλίκα $\rho_1, \rho_2, \rho_3\ldots$ καὶ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\ldots$ θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned} A&=\rho_1\cdot B+\upsilon_1\\ B&=\rho_2\cdot \upsilon_1+\upsilon_2\\ \upsilon_1&=\rho_3\cdot \upsilon_2+\upsilon_3\\ &\vdots\\ \upsilon_{\nu-2}&=\rho_\nu\cdot \upsilon_{\nu-1}+\upsilon_\nu\,, \end{aligned}$$

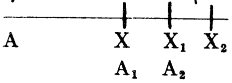
$$\text{ὅπου } A>B>\upsilon_1>\upsilon_2\ldots\upsilon_\nu>\ldots$$

Ἐὰν υ_ν εἶναι $=0$, τότε ὁ $\upsilon_{\nu-1}$ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἐὰν υ_ν μένῃ πάντοτε >0, τότε, ὅταν $\nu\to\infty$, ὁ $\upsilon_\nu\to 0$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β εἶναι ἀσύμμετροι. Ἡ τελευταία περίπτωσις ἀπαντᾷ εἰς τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως στηρίζεται, ὡς γνωστόν, ἡ θεωρία τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ ἡ ἐπίλυσις διοφαντικῶν ἐξισώσεων. Οἱ Πυθαγόρειοι διέκρινον τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἐλλιπεῖς, ὑπερτελεῖς, τελείους καὶ φιλίους. Ἐλλιπεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων τὰ μέρη ἀθροιζόμενα εἶναι μικρότερα τοῦ ἀριθμοῦ. Διὰ τοῦ ὅρου μέρη νοοῦνται πάντα τὰ δυνατὰ πηλίκα ἑνὸς ἀριθμοῦ (ἐκτὸς τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τῆς μονάδος). Τὰ μέρη τοῦ 10 π.χ. εἶναι $10:10=1$, $10:5=2$, $10:2=5$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν (πηλίκων) $1+2+5<10$. Ὁ 10 ἄρα εἶναι ἐλλιπὴς ἀριθμός, διότι ἐλλείπει κάτι ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του, διὰ νὰ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς τὸ 10. Τὰ μέρη τοῦ 12 εἶναι $12:12=1$, $12:6=2$, $12:4=3$, $12:3=4$, $12:2=6$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+3+4+6=16>12$. Εἶναι ἄρα ὁ 12 ὑπερτελὴς ἀριθμός, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 12. Τὰ μέρη τοῦ 28 εἶναι $28:28=1$, $28:14=2$, $28:7=4$, $28:4=7$, $28:2=14$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+4+7+14=28$, ἤτοι ἴσον πρὸς τὸν διαιρεθέντα ἀριθμόν. Εἶναι ἄρα ὁ ἀριθμὸς 28 τέλειος. Τὸ θεώρημα, διὰ τοῦ ὁποίου ἀποδεικνύεται πότε ἀριθμός τις εἶναι τέλειος εἶναι τὸ 36ον τοῦ 9ου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸ τελευταῖον τῶν ἀριθμητικῶν τοῦ βιβλίου τούτου θεωρημάτων. Ἡ ἐκφώνησις αὐτοῦ εἰς σύγχρονον διατύπωσιν εἶναι ἡ ἑξῆς: ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $1+2+8+16+32+64+128+\ldots$ καὶ σχηματίσωμεν διαδοχικῶς τὰ μερικὰ ἀθροίσματα αὐτῆς, εἶναι δὲ μερικόν τι ἄθροισμα πρῶτος ἀριθμός, τὸ γινόμενον τοῦ μερικοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Σχηματίζοντες ἐκ τῆς ἀνωτέρω προόδου τὰ μερικὰ ἀθροίσματα λαμβάνομεν, ἂν καλέσωμεν αὐτὰ διαδοχικῶς $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\ldots$ $\sigma_1=1$. Δὲν ὑπάρχει προηγούμενος ἀριθμὸς τοῦ 1, καὶ ἑπομένως ἡ περίπτωσις δὲν λογίζεται. $\sigma_2=1+2=3$. Ὁ τελευταῖος τοῦ μερικοῦ ἀθροίσματος εἶναι ὁ 2, ὁ δὲ 3 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2\times3=6$, ἀριθμὸς τέλειος. $\sigma_3=1+2+4=7$. Ὁ 7 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $4\times7=28$, ἀριθμὸς τέλειος. $\sigma_4=1+2+4+8=15$. Ὁ 15 δὲν εἶναι πρῶτος, ἑπομένως ὁ 8×15 δὲν εἶναι τέλειος. $\sigma_5=1+2+4+8+16=31$. Ὁ 31 εἶναι πρῶτος, ἑπομένως ὁ $16\times31=496$ εἶναι τέλειος. Εἶναι πολὺ δύσκολον διὰ πολὺ μεγάλους ἀριθμοὺς νὰ εὑρεθοῦν οἱ πρῶτοι ἐξ αὐτῶν καὶ ἐκ τούτων οἱ ἀντίστοιχοι τέλειοι ἀριθμοί. Διὰ ὄχι πολὺ μεγάλους ἀριθμοὺς εὑρίσκονται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ διὰ τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία λέγεται κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους (ὁ Ἐρατοσθένης ἔζησεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ τὸ 275-195 π.Χ., διευθυντὴς τῆς Βιβλιοθήκης καὶ τοῦ Πανεπιστημίου καὶ φίλος τοῦ Ἀρχιμήδους). Τὸ κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους ἀναφέρεται εἰς τὰ γυμνασιακὰ ἐγχειρίδια τῆς Ἀριθμητικῆς. Ὁ γενικὸς τύπος τῶν τελείων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ τὴν σύγχρονον διατύπωσιν, ὡς γνωστόν, $2^{\nu-1}$ ($2^{\nu}-1$), ὅπου $\nu=2$, 3. 4..., ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βέβαια ὅτι ὁ ($2^{\nu}-1$) εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται φίλιοι ἢ φίλοι, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τοῦ ἑνὸς (διαιρουμένου τοῦ ἀριθμοῦ ὑπὸ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν, πλὴν τῆς μονάδος) ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων (δηλαδὴ τῶν μερῶν) τοῦ ἄλλου.

Ἡ ὀνομασία ὀφείλεται πιθανῶς εἰς αὐτὸν τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν, ὅστις ἐρωτώμενος «τί ἐστι φίλος» ἀπήντα «ἄλλος ἐγώ». (Ἰάμβλιχος εἰς *Νικομάχου Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν* σ. 35, 1-7). Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 220 καὶ 284 εἶναι φίλιοι, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τοῦ 220 ἰσοῦται μὲ 284 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τοῦ 284 ἰσοῦται μὲ 220. Δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν πράγματι ὅτι εἶναι $220:220=1$, $220:110=2$, $220:55=4$, $220:44=5$, $220:22=10$, $220:20=11$, $220:11=20$, $220:10=22$, $220:5=44$, $220:4=55$, $220:2=110$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων ἴσον μὲ τὸν ἄλλον ἀριθμόν, ἤτοι εἶναι $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$. Τὰ μέρη (πηλίκα) τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ δηλαδὴ τοῦ 284 εἶναι $284:284=1$, $284:142=2$, $284:71=4$, $284:4=71$, $284:2=142$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν (πηλίκων) $1+2+4+71+142=220$, ἤτοι ὁ ἄλλος ἀριθμός. Δὲν εἶναι γνωστὸν πόσους φιλίους ἀριθμοὺς εἶχον εὕρει οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες. Ἐκ τῶν νεωτέρων ὁ Descartes (1596-1650) καὶ ὁ Van Schooten(1615 - 1660) εὗρον τρεῖς καὶ ὁ Euler (1707-1783) εὗρεν ἑξήκοντα ἕνα. Τὰ περὶ πολυγωνικῶν ἀριθμῶν ἐξετάζονται κατωτέρω εἰς τὸ οἰκεῖον κεφάλαιον τῆς ἀλγέβρας.

● *Γεωμετρία*. Ἡ κυριωτέρα πηγὴ ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν γνῶσιν περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῆς γεωμετρίας εἶναι ὁ ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, ὁ Πρόκλος (410-485 μ.Χ.), ὁ ὁποῖος εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου γράφει τὰ ἑξῆς: [«ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξι διὰ τὰς ἐμπορίας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις, οὕτω δὴ καὶ παρ' Αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν εὕρηται. Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν μετήγαγε εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρεν, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον. Μετὰ δὲ τοῦτον Μαμέρτιος ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφός, ὃς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς μνημονεύεται, καὶ Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος ἱστόρησεν ὡς ἐπὶ γεωμετρίᾳ δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. Ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀύλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν. Μετὰ δὲ τοῦτον Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος... Οἰνοπίδης ὁ Χῖος... Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρὼν καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ τὴν γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Πρῶτος γὰρ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε. Πλάτων δ' ἐπὶ τούτοις γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τά τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὰ σπουδήν,... ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος ἦν καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προῆλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώτερος ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων... ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυομένων ἐπιμελέστερον, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρόβλημα καὶ πότε ἀδύνατον. Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ηὔξησε καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκε καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. Ἀμύκλας δὲ ὁ Ἡρακλεώτης εἷς τῶν τοῦ Πλάτωνος ἑταίρων καὶ Μέναιχμος ἀκροατὴς ὢν Εὐδόξου καὶ Πλάτωνι δὲ συγγεγονὼς καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος ἔτι τελεοτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. Θεύδιος δὲ ὁ Μάγνης... καὶ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν... καὶ ὁ Κυζικηνὸς 'Αθήναιος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονὼς χρόνους... μάλιστα δὲ κατὰ γεωμετρίαν ἐπιφανὴς ἐγένετο· διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν 'Ακαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις. 'Ερμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον καὶ τῶν Στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψε· Φίλιππος δὲ ὁ Μενδαῖος... τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις... οὐ πολὺ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών... νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ 'Ερατοσθένους καὶ 'Αρχιμήδους· οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν 'Ερατοσθένης». (ἐκδ. Friedlein σελ. 65-68).

['Ερμηνεία: Καθὼς λοιπὸν ἐξ αἰτίας τοῦ ἐμπορίου καὶ τῶν συναλλαγῶν ἔλαβε τὴν ἀρχήν της εἰς τοὺς Φοίνικας ἡ ἀκριβὴς γνῶσις τῶν ἀριθμῶν, οὕτω πως διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν εὑρέθη ἡ γεωμετρία παρὰ τῶν Αἰγυπτίων. 'Ο Θαλῆς δὲ ἐλθὼν εἰς τὴν Αἴγυπτον μετέφερε τὸ πρῶτον εἰς τὴν 'Ελλάδα τὴν θεωρίαν αὐτὴν καὶ πολλὰ μὲν θεωρήματα εὗρεν ὁ ἴδιος, τὰς ἀρχὰς δὲ πολλῶν ἄλλων ὑπέδειξεν εἰς τοὺς νεωτέρους του, ἄλλα μὲν θεωρήματα καθορίζων νὰ ἔχουν γενικὴν ἰσχύν, ἄλλα δὲ νὰ εἶναι κομψότερα. Μετὰ δὲ τοῦτον ἀκολουθεῖ ὁ Μαμέρτιος, ὁ ἀδελφὸς τοῦ ποιητοῦ Στησιχόρου, ὅστις μνημονεύεται ὡς ἀσχοληθεὶς μὲ τὴν γεωμετρίαν, καὶ ὁ 'Ιππίας ὁ 'Ηλεῖος ἔγραψεν, ὅτι ἐδοξάσθη ἐπὶ γεωμετρίᾳ. Εἰς τούτους δὲ δέον νὰ προστεθῇ κατόπιν ὁ Πυθαγόρας, ὁ ὁποῖος τὴν περὶ τὴν γεωμετρίαν φιλοσοφίαν (δηλ. σπουδὴν) μετέβαλεν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρας, ἐξετάζων τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἄνωθεν (ἀπὸ ἀνωτέρας σκοπιᾶς) καὶ διερευνῶν τὰ θεωρήματα ἀΰλως καὶ νοερῶς, ὁ ὁποῖος ἀνεῦρε καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων καὶ τὴν σύστασιν τῶν κοσμικῶν σχημάτων (νοεῖ τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς σφαῖραν). Μετὰ δὲ τοῦτον ὁ 'Αναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος... ὁ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος,... ὁ 'Ιπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ εὑρὼν τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ μηνίσκου καὶ ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο ἐπιφανεῖς περὶ τὴν γεωμετρίαν. Μετὰ τούτους δὲ ἀκολουθεῖ ὁ Πλάτων, ὁ ὁποῖος συνετέλεσε νὰ λάβουν μεγίστην πρόοδον τόσον αἱ ἄλλαι μαθήσεις, ὅσον καὶ ἡ γεωμετρία, ἕνεκα τῆς σπουδῆς αὐτῶν... Κατ' αὐτὸν δὲ τὸν χρόνον ἤκμασαν ὁ Λεωδάμας ἐκ τῆς νήσου Θάσου καὶ ὁ 'Αρχύτας, ὁ ἐκ τοῦ Τάραντος καὶ ὁ Θεαίτητος ὁ 'Αθηναῖος, παρὰ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν θεωρημάτων ηὐξήθη καὶ ἡ διάρθρωσις αὐτῶν ἔγινεν ἐπιστημονικωτέρα. Νεώτερος δὲ τοῦ Λεωδάμαντος εἶναι ὁ Νεοκλείδης (σημ. περὶ αὐτοῦ οὐδεμία ἄλλη πληροφορία περιεσώθη) καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Λέων..., ὥστε ὁ Λέων νὰ συνθέσῃ καὶ Στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν ἐπιμελέστερον, τόσον κατὰ τὸ πλῆθος αὐτῶν, ὅσον καὶ κατὰ τὴν χρείαν των, δηλαδὴ πότε εἶναι δυνατὸν τὸ ζητούμενον πρόβλημα καὶ πότε εἶναι ἀδύνατον. 'Ο Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, ὀλίγον μὲν νεώτερος τοῦ Λέοντος, γενόμενος δὲ φίλος τοῦ Πλάτωνος πρῶτος ηὔξησε τὸ πλῆθος τῶν λεγομένων γενικῶν θεωρημάτων καὶ εἰς τὰς ὑπαρχούσας τρεῖς ἀναλογίας, εὑρὼν προσέθηκεν ἄλλας τρεῖς καὶ τὰ παρὰ τοῦ Πλάτωνος λαβόντα τὴν ἀρχήν, τὰ ἀφορῶντα εἰς τὴν τομὴν (εὐθείας) προήγαγε κατὰ τὸ πλῆθος χρησιμοποιήσας κατ' αὐτὰ καὶ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον. 'Ο 'Αμύκλας δὲ ὁ ἐξ 'Ηρακλείας, εἷς ἐκ τῶν φίλων τοῦ Πλάτωνος καὶ ὁ Μέναιχμος, μαθητὴς τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Πλάτωνος, καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος ἔκαμαν τελειοτέραν ἀκόμη ὅλην τὴν γεωμετρίαν. 'Ο Θεύδιος δὲ ὁ καταγόμενος ἐκ τῆς Μαγνησίας... καὶ τὰ στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν συνέταξε καλῶς... καὶ ὁ 'Αθήναιος ὁ καταγόμενος ἐκ τῆς Κυζίκου, ἀκμάσας κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχήν... ἐγένετο ἐπιφανὴς ἰδιαιτέρως εἰς τὴν γεωμετρίαν. Διότι αὐτοὶ ἔζων εἰς τὴν 'Ακαδημίαν κάμνοντες ἀπὸ κοινοῦ τὰς ἐρεύνας. 'Ερμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ εὑρεθέντα προηγουμένως ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Θεαιτήτου ἀνέπτυξεν ἔτι περισσότερον καὶ ἀνεῦρε πολλὰ ἐκ τῶν Στοιχείων τῶν μαθηματικῶν καὶ συνέγραψε μερικὰ περὶ τῶν γεωμετρικῶν τόπων· ὁ Φίλιππος δὲ ὁ Μενδαῖος (καταγόμενος ἐκ τῆς Μένδης, παραθαλασσίου πόλεως τῆς Χαλκιδικῆς) ...ἔκαμε τὰς ἐρεύνας του κατὰ τὰς ὑποδείξεις τοῦ Πλάτωνος... ὄχι δὲ πολὺ νεώτερος αὐτῶν εἶναι ὁ Εὐκλείδης, ὁ συναθροίσας τὰ στοιχεῖα καὶ συντάξας πολλὰ μὲν προερχόμενα ἐκ τοῦ Εὐδόξου, τελειοποιήσας δὲ πολλὰ ἐκ τῶν τοῦ Θεαιτήτου, ἀναγαγὼν δὲ προσέτι εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις πολλὰ τὰ ὁποῖα προηγουμένως εἶχον ἀποδειχθῇ ὄχι μὲ πολλὴν λογικὴν αὐστηρότητα... Εἶναι λοιπὸν οὗτος νεώτερος ἐκ τῶν περὶ τὸν Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι οὗτοι ἦσαν μεταξύ των σύγχρονοι, ὡς λέγει κάπου ὁ Ἐρατοσθένης]. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω πληροφορίαν τοῦ Πρόκλου, ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψε τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς (μεγέθη, ὀνομαζομένους γενικώτερον) καὶ τὴν σύστασιν τῶν κοσμικῶν σχημάτων. Ὡς τοιαῦτα νοοῦνται ὁ κύβος, τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, τὸ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον, δηλ. τὰ κανονικὰ πολύεδρα. Ἡ ἔρευνα τῶν ἰδιοτήτων τῶν κανονικῶν αὐτῶν πολυέδρων καὶ ἡ ἀπόδειξις, ὅτι μόνον αὐτὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφοῦν εἰς σφαῖραν ἀποδίδεται εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ ἰδίᾳ τὸν Θεαίτητον καὶ τὸν Εὔδοξον. Ἡ περιγραφὴ τῶν οἰκείων θεωρημάτων εἰς τὸ 13ον βιβλίον τῶν *Στοιχείων*, ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ἀποτελεῖ ὕψιστον καλλιτεχνικὸν δημιούργημα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Κατὰ τὴν παράδοσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐρευνῶν τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ($\sqrt{2} : 1$), ἀνεκάλυψε τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Ἡ ἀνακάλυψις αὐτὴ ἐπέφερεν ἀναστάτωσιν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν. Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν, ἡ ὁποία ἦτο σπουδαῖον μέσον μαθηματικῆς ἐρεύνης, ἀλλὰ καὶ τῆς ἐρεύνης εἰς τὴν μουσικήν, προσέκοψεν εἰς ἀνυπέρβλητα ἐμπόδια. Ἡ ἀναλογία μεταξὺ τῶν μεγεθῶν, $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, ἰσχύει ἂν τὰ μεγέθη αὐτὰ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, ἂν εἶναι δηλαδὴ ἀσύμμετρα; Τὸ χάσμα τὸ ὁποῖον προέκυψεν, ἐκάλυψεν ὁ Εὔδοξος διὰ μεγαλοφυοῦς ἐπινοήσεως, τὴν ὁποίαν ὁ Γερμανὸς Dedekind 1831-1916, διεμόρφωσεν ὡς θεωρίαν τομῶν. Ἡ ἐπινόησις τοῦ Εὐδόξου περιλαμβάνεται ὡς πέμπτος ὁρισμὸς τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ὁλόκληρον ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὔδοξον. Λέγει λοιπὸν ὁ Εὔδοξος, ὅτι καὶ διὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, θὰ εἶναι $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \Gamma : \Delta$, ἂν διὰ δύο τυχόντας φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ,ν ἰσχύουν αἱ σχέσεις: διὰ $\mu.\mathrm{A} \gtreqless \nu.\mathrm{B}$ εἶναι συγχρόνως $\mu.\Gamma \gtreqless \nu.\Delta$. Ἐκείνη ἡ ἔννοια ὅμως, ἡ ὁποία ἔφερε τὰς μεγαλυτέρας δυσκολίας εἰς τὴν βαθυτέραν μαθηματικὴν ἔρευναν ἦτο ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου. Φαίνεται, ὅτι τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἐχρησιμοποίησεν ὁ Ἀναξαγόρας κατὰ τὴν προσπάθειαν αὐτοῦ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον, ὅταν ἐγγράφωμεν καὶ περιγράφωμεν κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μεθ' ἑκάστην ἐγγραφὴν ἢ περιγραφὴν νὰ διπλασιάζεται, θὰ φθάσωμεν τέλος νὰ ἐξαντλήσωμεν, νὰ μετατρέψωμεν τὸν κύκλον εἰς πολύγωνον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ τετραγωνίσωμεν. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου ἀποτελεῖ θεμελιώδη ἔννοιαν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως. Κατὰ τὸν Πλάτωνα ἄπειρον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει ἀρχήν μέσον καὶ τέλος. Ὁ Ἀναξαγόρας εἰπὼν ὅτι τοῦ μικροῦ ὑπάρχει μικρότερον καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει μεγαλύτερον (Συμπλ. εἰς Φυσ. Ἀριστ., 164, 16 κἑξ.) διετύπωσε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τῶν τυγχρόνων ἀνωτέρων μαθηματικῶν, τὸ ὁποῖον τόσον δημιουργικῶς ἐχρησιμοποίησαν ὁ Εὔδοξος καὶ ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς τούτους, ὁ Leibnitz, ὁ Newton, ὁ Weierstrass καὶ οἱ νεώτεροι μεγάλοι μαθηματικοί. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει καὶ ὁ 4ος ὁρισμὸς τοῦ 5ου βιβλίου τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου, ὁ Εὔδοξος ἀπέδειξε τὰ περίφημα θεωρήματα περὶ κώνου καὶ κυλίνδρου καὶ ὁ Ἀρχιμήδης τὰ πλεῖστα ἐκ τῶν θεωρημάτων περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, τετραγωνισμοῦ, παραβολῆς, κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων κλπ. Ὁ σημερινὸς ἀπειροστικὸς λογισμὸς ἔχει τὰς ἀρχάς του εἰς τὸν Ἀναξαγόραν καὶ διασήμους συνεχιστάς του, τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Ἀρχιμήδη. Ὡς ἀνώτερα μαθηματικὰ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ὀνομάζουν πολλοὶ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν. Ταύτας ἠρεύνησεν ἰδιαιτέρως ὁ Ἀπολλώνιος, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖ καὶ συντεταγμένας. Ὁ Καρτέσιος ἐνεπνεύσθη ἐκ τοῦ Ἀπολλωνίου τὰς ἀρχὰς τῆς Ἀναλυτικῆς γεωμετρίας. Ἡ δάμασις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου πρὸς χρησιμοποίησιν αὐτῆς εἰς τὰ μαθηματικὰ δὲν ἦτο εὔκολος, ἰδίως ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Παρμενίδου καὶ τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου, ὅστις ἔφερε πραγματικὴν ἀναστάτωσιν εἰς τὰ μαθηματικά, ἀλλὰ καὶ συνέβαλε πολὺ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῶν, ἀκριβῶς λόγῳ τῶν ἐκ τῶν θεωριῶν του ἐρευνῶν καὶ συζητήσεων. Ἀναφέρομεν μόνον ἓν παράδειγμα τοῦ συλλογισμοῦ τοῦ Ζήνωνος, καθ' ὃν εἰς τὸν κόσμον δὲν ὑπάρχει κίνησις, καὶ ὅπου χρησιμοποιεῖται πρὸς ἀπόδειξιν ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου. Ὁ Ἀχιλλεὺς Α εἰς



τὸν αὐτὸν χρόνον τρέχει 10 φορὰς περισσότερον τῆς χελώνης Χ. Ὅταν ἡ χελώνη ἐκ τῆς θέσεως Χ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν X_1 ὁ Ἀχιλλεὺς ἐκ τῆς θέσεως Α θὰ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Χ· εἶναι δὲ ἡ ἀπόστασις $AX = 10$ φορὰς ἡ ἀπόστασις XX_1. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ ἐκ τοῦ Χ εἰς τὸ X_1 ἡ χελώνη θὰ φθάσῃ ἐκ τοῦ X_1 εἰς τὸ X_2· εἶναι δὲ $XX_1=10$ φορὰς ἡ ἀπόστασις X_1X_2. Κάθε φορὰν ἡ χελώνη προηγεῖται τοῦ Ἀχιλλέως κατὰ τὸ ἓν δέκατον τοῦ δρόμου τὸν ὁποῖον διανύει οὗτος καὶ συνεπῶς καὶ ἐπ' ἄπειρον ἂν τρέχουν, ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς οὐδέποτε θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην. Εἰς τὸν κόσμον ἄρα, ἐπάγεται ὁ Ζήνων, δὲν ὑπάρχει κίνησις. Ὁ Ἀριστοτέλης ἀντικρούων τὸν Ζήνωνα, λέγει, ὅτι οὗτος παραλογίζεται. Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη ἀκολουθεῖ ἐν προκειμένῳ τὴν ἀντίληψιν τοῦ Ἀριστοτέλους, ὡς πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, δὲν δύναται ὅμως νὰ ἀποδείξῃ τὸ ἀβάσιμον τῶν θεωριῶν τοῦ Ζήνωνος, λέγουσα, ὅτι διὰ τὸν Ζήνωνα τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι ἂν ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς θὰ φθάσῃ ἢ ὄχι τὴν χελώνην, διότι πράγματι θὰ τὴν φθάσῃ, καὶ τοῦτο τὸ ἐγνώριζε καὶ ὁ Ζήνων· τὸ πρόβλημα εἶναι πῶς θὰ τὴν φθάσῃ, ἀφοῦ θὰ τρέχῃ ἐπ' ἄπειρον· τὸ πρόβλημα δηλ. ἔγκειται εἰς τὸ δυνατὸν ἢ μὴ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου. [Θαυμαστὴν ἀπεικόνισιν τῆς γεωμετρικῆς δημιουργίας τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου μέχρι τοῦ Εὐκλείδου, ἤτοι εἰς διάστημα 300 ἐτῶν περίπου, παρέχει ὁ Γάλλος ἐπιστήμων Paul-Henri Michel εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ, De Pythagore à Euclide, Paris 1950, σελ. 700, Les Belles Lettres]. Ἐκτὸς τοῦ Παρμενίδου καὶ τοῦ Ζήνωνος, ἀλλὰ καὶ τοῦ Δημοκρίτου, ὁ ὁποῖος διετύπωσεν ἀπορίαν ἐν σχέσει πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, ὅταν οὗτος τμηθῇ εἰς λεπτὰς ἐπιφανείας, παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν, καὶ συνεπῶς διετύπωσε προϊδεασμὸν διὰ τὴν Ὁλοκλήρωσιν, τὴν ὁποίαν κατόπιν ἐπέτυχεν ὁ Εὔδοξος, σπουδαίως συνέβαλεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν ἡ διατύπωσις τῶν τριῶν περιφήμων προβλημάτων, τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου (δηλίου προβλήματος) καὶ τῆς τριχοτομήσεως ὀξείας γωνίας. Καὶ τὰ τρία προβλήματα δὲν λύονται διὰ κανόνος καὶ διαβήτου (δηλ. δὲν λύονται, ὅταν χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν ἀπόδειξιν εὐθείας γραμμὰς καὶ κύκλους). Λύονται ὅμως δι' ἄλλων καμπύλων, ὅπως εἶναι π.χ. ἡ τετραγωνίζουσα καμπύλη τοῦ σοφιστοῦ Ἱππίου τοῦ ἐξ Ἠλείας. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐπέτυχε τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου διὰ τῆς ἕλικος, ἐνῷ τὴν τριχοτόμησιν τῆς ὀξείας γωνίας ἐπέτυχε διὰ τῆς κινητικῆς λεγομένης γεωμετρίας. Δώδεκα λύσεις τοῦ δηλίου προβλήματος διέσωσεν ὁ Εὐτόκιος (ε' - ς' αἰ. μ.Χ.) εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ ἐπὶ τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*. Τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ Αὐτολύκου ἐκ Πιτάνης, συγχρόνου ἢ καὶ παλαιοτέρου τοῦ Εὐκλείδου σῴζονται ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ἀφορῶντα εἰς τὴν σφαιρικὴν γεωμετρίαν, ἅτινα εἶναι τὰ ἀρχαιότατα σῳζόμενα γραπτὰ κείμενα τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν (ἡ ἀκμὴ τοῦ Αὐτολύκου τοποθετεῖται περὶ τὸ τέλος τοῦ δ' αἰῶνος π.Χ.).

Αἱ μέθοδοι ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικά. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἐπενόησαν τέσσαρας μεθόδους ἀποδείξεως μαθηματικῶν προτάσεων. Ἡ αὐστηρότης τῶν διατυπώσεων τῶν μεθόδων αὐτῶν ἔγινε εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἰδίως ὅμως αὕτη ὀφείλεται εἰς τὰς πραγματείας περὶ Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους. Αἱ μέθοδοι αὗται εἶναι αἱ ἑξῆς: 1) ἡ Συνθετική. Ἐκ τῶν ὁρισμῶν καὶ τῶν ἀξιωμάτων (καὶ τῶν ἐκ τούτων ἀποδεικνυομένων ἁπλουστέρων προτάσεων), ἐπακολουθεῖ ἡ ἀπόδειξις. 2) Ἡ Ἀναλυτική. Ἡ ἐξεταζομένη πρότασις θεωρεῖται ὡς ἀληθής. Διὰ σειρᾶς συλλογισμῶν φθάνομεν κατόπιν εἰς ἀλήθειάν τινα, γνωστὴν ἐξ ἄλλων περιστατικῶν, καὶ ἀναγωγικῶς συμπεραίνομεν, ὅτι πράγματι ἡ ληφθεῖσα ὡς ἀληθὴς πρότασις, εἶναι ἀληθής. 3) Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον ἢ ἄτοπον. Ἐὰν διά τινα πρότασιν ἰσχύῃ τὸ Α ἢ τὸ Β, δεχόμενοι ὅτι ἰσχύει τὸ Β, ἀποδεικνύομεν ἢ καταλήγομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι σφάλμα. Ἰσχύει ἄρα τὸ Α. 4) Ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, λεγομένη καὶ μέθοδος τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ, κατὰ τὸν περίφημον Γάλλον μαθηματικὸν Henri Poincaré (1854-1912), ὅστις ἐξαίρει τὴν σημασίαν αὐτῆς διὰ τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Πρῶτος ἀντιληφθεὶς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἀπαγωγῆς ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων θεωρεῖται ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς Γεώργιος Vacca (1910). Ὁ ἡμέτερος Εὐάγγ. Σ. Σταμάτης, δι' ἀνακοινώσεως αὐτοῦ, γενομένης εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν, ἀπέδειξεν ὅτι πράγματι εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὑπάρχουν θεωρήματα ἀποδεικνυόμενα διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς, ὅπως π.χ. τὸ 20ὸν τοῦ ἐνάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων. Δι' ἄλλων ἐπιχειρημάτων ὑποστηρίζει τὴν αὐτὴν γνώμην ὁ Ὁλλανδὸς καθηγητὴς Freudenthal. 1) Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν 11-6-1953. 2) Archives Internationales d'Histoire des Sciences, Revue Trimestrielle de l'Union Internationale d'Histoire des Sciences, No 22 τοῦ 1953, pag. 17 - 37).

● *Αἱ ἀρχαὶ τῶν μαθηματικῶν.* Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, πᾶσα γνῶσις ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι, ὅπερ καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς, ἐνῷ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετική, μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία : 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ὁ χῶρος διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις καὶ 3) Αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον ἐπὶ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ φανερὰς ἀφ' ἑαυτῶν προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα. Ἡ κατὰ τὴν σύγχρονον ἐποχὴν διακήρυξις περὶ νέας μεθόδου εἰς τὰ μαθηματικά, τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου, εἶναι ἐπανάληψις τῶν θεωριῶν τοῦ Ἀριστοτέλους. Οἱ ἀριθμοὶ καὶ τὰ σχήματα ὁρίζονται εἰς τοὺς διαφόρους ὁρισμοὺς τῶν ***Στοιχείων*** τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου. Τὰ θεμελιώδη ἀξιώματα τὰ ἔχοντα ἰσχὺν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν προτάσσονται εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν ***Στοιχείων*** τοῦ Εὐκλείδου. Περίφημον ἔχει καταστῇ τὸ ἀξίωμα περὶ παραλλήλων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὰ τελευταῖα 100 ἔτη διετυπώθησαν ἀντ' αὐτοῦ ἄλλα ἀξιώματα καὶ διὰ τῶν ἀξιωμάτων αὐτῶν ἐδημιουργήθησαν αἱ λεγόμεναι μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι. Εἰς τὴν ἐκ τούτων λεγομένην ἐλλειπτικὴν στηρίζεται ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος. Ἐκ ταύτης ἡ Γενικὴ θεωρία δὲν ἔχει ἀκόμη ἐπαληθευθῇ ὑπὸ τῶν πραγμάτων. Οὐδεὶς πύραυλος, οὐδεὶς δορυφόρος καὶ οὐδεμία ἀτομικὴ βόμβα εἶναι δυνατὸν νὰ λειτουργήσουν, χωρὶς τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Σημαντικὴ θεωρεῖται ἐν προκειμένῳ ἡ γνώμη τοῦ Γάλλου φιλοσόφου Jules Tannery, ὅστις ἐκφράζεται εἰρωνικῶς διὰ τοὺς φρονοῦντας ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερκερασθῇ ἡ γεωμετρία τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων (Science et Philosophie, Paris 1934, κεφ. 9). Καὶ τὰ λεγόμενα σύγχρονα μαθηματικὰ δηλ. ἡ θεωρία τῶν Συνόλων, εἶναι δημιούργημα τῶν Ἑλλήνων καὶ μάλιστα τοῦ Πλάτωνος προσωπικῶς. Εἰς τὸν διάλογον τοῦ Πλάτωνος ***Παρμενίδης*** ὑπάρχει ὁλόκληρος ἡ θεωρία τῶν Συνόλων, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐνεπνεύσθη τὴν διατύπωσίν του ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Γεώργιος Κάντορ (1845 - 1918), ὡς πρῶτος ἀνεκοίνωσε τοῦτο εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ὁ ἡμέτερος Εὐάγγ. Σταμάτης (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν 16-10-1956) καὶ ἀκολούθως διετύπωσεν εἰς τὸ βιβλίον του ὁ Ἀμερικανὸς καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Yale, Robert S. Brumbaugh (Plato on the One, The Hypothesis in the Parmenides, New Haven, σελ. 263 - 344, Yale University Press, 1961). Ἡ θεωρία ὅμως τοῦ Πλάτωνος περὶ Συνόλων εἶναι θεολογικῆς μορφῆς καὶ ὄχι μαθηματικῆς· εἶναι δὲ χαρακτηριστικόν, ὅτι ἀμφισβητεῖται ἡ ἀξία τῆς θεωρίας αὐτῆς εἰς τὰ μαθηματικά, ὅπου παρατηροῦνται ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς της ἀντινομίαι τινές, αἱ ὁποῖαι παρ' ὅλας τὰς καλὰς καὶ φιλοτίμους προσπαθείας δὲν ἔχουν ἀκόμη ἀρθῆ. (Ἀντινομίαι κατὰ Bolzano, Brouwer).

● *Ἡ Ἄλγεβρα.* Τὰ πρῶτα στοιχεῖα τῆς ἀλγέβρας τὰ συναντῶμεν εἰς τὰ 10 πρῶτα θεωρήματα τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὑπὸ γεωμετρικὰς διατυπώσεις καὶ ἀποδείξεις. Βιβλίον καθαρᾶς ἀλγέβρας ὑπὸ τὸν τίτλον *Ἀριθμητικὰ* διεσώθη τὸ τοῦ Διοφάντου τοῦ 'Αλεξανδρέως, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 250 μ.Χ. Τοῦτο ἐξεδόθη διὰ πρώτην φορὰν ἐν 'Ελλάδι κατὰ τὸ 1964 ὑπὸ τοῦ Εὐαγγ. Σ. Σταμάτη. Εἰς τὰ 'Αριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου βλέπομεν τὸν πρῶτον ἀλγεβρικὸν συμβολισμὸν καὶ ἐπίλυσιν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων, ὅπου εἰς πολλὰς περιπτώσεις οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τῶν διδομένων ἐξισώσεων. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι γνωστοὶ εἰς τὸν Διόφαντον. 'Η ἐπίλυσις ἀνισοτήτων δευτέρου βαθμοῦ τυγχάνει ἐπίσης γνωστή. Τὰς ἀλγεβρικὰς γνώσεις τὰς περιεχομένας εἰς τὰ *'Αριθμητικὰ* τοῦ Διοφάντου μετέφερεν εἰς τὴν 'Ιταλίαν (καὶ ἐκεῖθεν εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην) ὁ 'Ιταλὸς σταυροφόρος, ἔμπορος καὶ μαθηματικὸς Λεονάρδος τῆς Πίζης ἢ Fibonazi (περὶ τὸ 1180 - 1242). Αἱ ἀλγεβρικαὶ γνώσεις τῶν ἀρχαίων 'Ελλήνων εἶναι πράγματι ἐκπληκτικαί, ὅπως καὶ αἱ γεωμετρικαί. Κατωτέρω ἐκθέτομεν συμβολισμούς τινας ἀλγεβρικούς, ἀπαντῶντας εἰς τὰ *'Αριθμητικὰ* τοῦ Διοφάντου.

$\Delta^{\upsilon}\,\alpha = x^2$, $\Delta^{\upsilon}\,\beta = 2x^2$, $\Delta^{\upsilon}\,\gamma = 3x^2$, $\varsigma = x$, $\Delta^{\upsilon}\,\alpha\Delta\alpha = x^4$, $\Delta^{\upsilon}\,\Delta\beta = 2x^4$ κλπ. $K^{\upsilon}\,\alpha = x^3$,

$$K^{\upsilon}\,\beta = 2x^3,\ K^{\upsilon}\,\gamma = 3x^3,\ \Delta^{\upsilon x} n = \frac{8}{x^2},$$

$$K^{\upsilon x}\,\iota = \frac{10}{x^3}$$

Καὶ τὸ δέκατον βιβλίον τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου περιέχει ἄλγεβραν καὶ μάλιστα ὁλόκληρον θεωρίαν μετατροπῆς διπλῶν ριζικῶν εἰς ἁπλᾶ. Τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς προόδους ἐρευνῶνται εἰς τὴν θεωρίαν περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν. Μερικὰ συναφῆ στοιχειώδη θεωρήματα περιέχονται καὶ εἰς τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Αἱ περισσότεραι πληροφορίαι περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν προέρχονται ἐκ τῆς *'Αριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς* τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ, ἐκ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, τοῦ Διοφάντου (σῴζονται μόνον τέσσαρα θεωρήματα σχετικὰ) καὶ τοῦ 'Ιαμβλίχου. 'Η ὀνομασία τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν ἔχει προέλθει ἐκ τῶν συναφῶν πρὸς αὐτοὺς γεωμετρικῶν σχημάτων. 'Εκ τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4..., ὅπου ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι ἡ μονάς, τὰ κατὰ σειρὰν σχηματιζόμενα μερικὰ ἀθροίσματα ὀνομάζονται τρίγωνοι ἀριθμοί. "Οταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 2, τὰ κατὰ σειρὰν μερικὰ ἀθροίσματα ὀνομάζονται τετράγωνοι ἀριθμοί. "Οταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀκολουθίας τινὸς εἶναι 3, τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ὀνομάζονται πεντάγωνοι ἀριθμοὶ κλπ. 'Η θεωρία τῶν ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προόδων ἦτο τελείως γνωστή. Κατωτέρω ἐκθέτομεν μερικοὺς πολυγώνους ἀριθμούς.

'Ακολουθία	1, 2, 3, 4, 5...	Τρίγωνοι	ἀριθμοὶ	1, 1+2=3, 1+2+3= 6, 1+2+3+ 4=10 κλπ.
»	1, 3, 5, 7, 9...	Τετράγωνοι	»	1, 1+3=4, 1+3+5= 9, 1+3+5+ 7=16 »
»	1, 4, 7, 10, 13...	Πεντάγωνοι	»	1, 1+4=5, 1+4+7=12, 1+4+7+10=22 »
»	1, 5, 9, 13, 17...	'Εξάγωνοι	»	1, 1+5=6, 1+5+9=15, 1+5+9+13=28 »

"Οπως βλέπομεν, τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι τετράγωνοι ἀριθμοί. Εἰς τὴν ἰδιότητα αὐτήν, φαίνεται, στηριζόμενος ὁ Πυθαγόρας εὗρε τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς καλουμένης, ὑπὸ τῶν συγχρόνων, ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$, κατὰ τὸν τύπον $\mu\, \frac{\mu^2-1}{2}, \frac{\mu^2+1}{2}$ ὅπου ὁ μ λαμβάνει τὰς περιττὰς τιμὰς 3, 5, 7, 9... Πράγματι, διὰ $\mu=3$, εἶναι $\frac{3^2-1}{2}=4$, $\frac{3^2+1}{2}=5$. Καὶ εἶναι κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $5^2 = 3^2 + 4^2$. Διὰ $\mu=5$, εἶναι $\frac{5^2-1}{2}=12$, $\frac{5^2+1}{2}=13$. Καὶ εἶναι κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $13^2 = 5^2 + 12^2$ κλπ. 'Ο τύπος β, $\frac{\beta^2}{4}-1$, $\frac{\beta^2}{4}+1$, ὅπου ὁ β λαμβάνει τὰς ἀρτίας τιμὰς 4, 6, 8... ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα. Πράγματι εἶναι διὰ $\beta=4$, $\frac{4^2}{4}-1=3$, $\frac{4^2}{4}+1=5$ καὶ $5^2=4^2+3^2$. Διὰ $\beta=6$ εἶναι

$\frac{6^2}{4}-1=8$, $\frac{6^2}{4}+1=10$ καὶ $10^2=6^2+8^2$.
Ὁ γενικώτερος τύπος $(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu^2)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$ περιέχεται εἰς τὸ 10ον βιβλίον τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου καὶ εἰς τὰ *Ἀριθμητικὰ* τοῦ Διοφάντου. Παρέχει δὲ πάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς προηγουμένης διοφαντικῆς ἐξισώσεως διὰ τυχούσας τιμὰς τοῦ μ, ν.

● *Ἡ τριγωνομετρία*. Ἀρχὰς τῆς τριγωνομετρίας παρατηροῦμεν ἐφαρμοζομένας ὑπὸ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου (περὶ τὸ 310 ἢ 320-230 π. Χ.), τοῦ Ἀρχιμήδους (287-212 π.Χ.) καὶ τῶν μεταγενεστέρων τούτων, μαθηματικῶν καὶ ἀστρονόμων. Ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων κλπ. χρησιμοποιοῦν τὰ ἀντίστοιχα τόξα τῶν γωνιῶν. Πάντως ὁ Ἀρίσταρχος θεωρεῖται ὡς ὁ πρῶτος χρησιμοποιησας τριγωνομετρικὰς σχέσεις.

● *Ἡ λογιστική*. (Πρακτικὴ ἀριθμητικὴ καὶ γεωμετρία). Προβλήματα τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων κλπ. διέσωσεν εἰς ἡμᾶς ὁ Εὐτόκιος, ὁ σχολιαστὴς τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους. Συστηματικὸν ἐγχειρίδιον πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς ἐξεδόθη τὸ 1963 ἐν Βιέννῃ ὑπὸ τῆς αὐτόθι Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν, περιέχον 100 προβλήματα τοῦ ιε' αἰ., τῆς βυζαντινῆς ἐποχῆς (Herbert Hunger καὶ Kurt Vogel, Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts). Κατωτέρω ἐκθέτομεν τὸ 30ὸν πρόβλημα τῆς συλλογῆς.

«Ἁλίκι τῆς Θεσσαλονίκης πουλεῖται, λέγωμεν εἰς ϛε' φορές. ἐπαίρνουν γοῦν οἱ καπιτζίδες ῥέσμ εἰς τὰ ‚α...' ἄσπρα β'. εἰς τὰ ϛε' φορὰς πόσα ἄσπρα τυχαίνει νὰ ἐπάρουν; τὰ αὐτὰ ἄσπρα πολλαπλασίασον μὲ τὰ β' καὶ ἐκ τὴν ὁμάδα κόφτε τὰ τρία ἔμπροσθεν ψηφιά· τὰ δὲ ὄπισθεν, εἴ τι ἀπομένουσι, ἐκεῖνα ἐστὶ τὸ ῥέσμ». (Σημ. Ἁλίκι = ἁλάτι, καπιτζίδες = τελῶναι, ἄσπρον=ἀργυροῦν νόμισμα, ‚α...= 1000, ῥέσμ = φόρος). Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ γλῶσσα τῶν προβλημάτων αὐτῶν τῆς κοινῆς ἀγορᾶς. Προβλήματα πρακτικῆς γεωμετρίας περιέχονται πολλὰ εἰς τὰς πραγματείας τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (περίπου α'-β' αἰὼν π.Χ.). Σπουδαῖοι μαθηματικοὶ μετὰ τὸν μέγαν γεωμέτρην τῆς ἀρχαιότητος Ἀπολλώνιον (περὶ τὸ 200 π.Χ.) ἀναφέρονται ὁ Ἥρων, ὁ Νικομήδης, ὁ Διοκλῆς, ὁ Σπόρος, ὁ Ζηνόδωρος, ὁ ἐκ Μήλου Διονυσόδωρος, ὁ Ὑψικλῆς, ὁ Σέλευκος, ὁ Ἵππαρχος, ὁ Θεοδόσιος, ὁ Μενέλαος, ὁ Νικόμαχος, ὁ Πάππος. (Σημ. ὁ Θυμαρίδας εἶναι ἐκ τῶν πρώτων Πυθαγορείων).

Ὡς τελευταῖος ἐπιστήμων τῆς ἑλληνικῆς ἀρχαιότητος θεωρεῖται ἡ φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς Ὑπατία, ἡ ὁποία ἐλιθοβολήθη ὑπὸ τοῦ φανατικοῦ καὶ θρησκοληπτου ὄχλου ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, περὶ τὸ 415 μ.Χ. Ἡ βυζαντινὴ ἐποχὴ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν μελέτην καὶ τὰς ἐφαρμογὰς ἐξ ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἐδημιούργησαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες. Κατὰ τὸν ϛ' αἰῶνα ἐξέχουν ὡς μαθηματικοὶ-φυσικοὶ καὶ μηχανικοὶ ὁ Ἰσίδωρος (ὁ Μιλήσιος), ὁ Ἀνθέμιος (ἐκ τῶν Τράλλεων Μ. Ἀσίας), οἱ ἀρχιτέκτονες τῆς Ἁγίας Σοφίας. Κατὰ τὸν θ' αἰ. ὁ φιλόσοφος Λέων προΐσταται καὶ ὀργανώνει καλλίτερον τὸ Πανεπιστήμιον τῆς ΚΠόλεως. Ὁ Εὐτόκιος καὶ ὁ Σιμπλίκιος (ὁ μὲν σχολιαστὴς ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ὁ δὲ τοῦ Ἀριστοτέλους), δροῦν ἐπίσης κατὰ τὸν ϛ' αἰ. Ἐκ τῶν βυζαντινῶν ἐπιστημόνων, ἰδίᾳ τῶν περὶ τὰ μαθηματικὰ ἀσχοληθέντων ἀξίζει νὰ μνημονεύσωμεν τὸν Μιχαὴλ Ψελλὸν (ια' αἰ.) (πραγματεῖαι ἀνέκδοτοι), τὸν Γεώργιον Παχυμέρην, τὸν Μάξιμον Πλανούδην (περίπου ιγ' αἰ. ἀμφότεροι), τὸν Νικόλαον Ραβδᾶν (ιδ' αἰ.) καὶ τὸν Μανουὴλ Μοσχόπουλον

Ὁ Ν. Ραβδᾶς εἶχε γράψει πρακτικὴν Ἀριθμητικὴν (χωρὶς νὰ χρησιμοποιῇ τοὺς γνωστοὺς ἤδη ἰνδικοὺς ἀριθμούς), ἡ ὁποία ἀρχίζει ὡς ἑξῆς: «Τῷ ὑπερλίαν ἐκθύμως φιλουμένῳ τῷ Κλαζομενεῖ Τζαβούχῃ Θεοδώρῳ, ὁ Νικόλαος Ἀρτάβασδος Σμυρνόθεν ἐκ Βυζαντίδος ὁ Ραβδᾶς γράφει τόδε». Σπουδαιότατος καθ' ἡμᾶς εἶναι ὁ Μανουὴλ Μοσχόπουλος, ὅστις παρουσιάζει διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν ἔρευναν ἐπὶ τῶν μαγικῶν τετραγώνων. Ἡ ἔρευνα αὐτὴ συνεχίσθη ἐν Ἰταλίᾳ. Ἐνδεικτικῶς ἀναγράφομεν τὰ πρῶτα τρία ἐξ αὐτῶν. Ὅπως καὶ ἂν γίνεται ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν (ὁριζοντίως ἢ καθέτως ἢ διαγωνίως) εὑρίσκεται πάντοτε τὸ αὐτὸ ἄθροισμα. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι προϊδεασμὸν τῶν τετραγώνων τούτων ἀπαντῶμεν εἰς τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (β' αἰ. π.Χ.) εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τὴν φέρουσαν τὸν τίτλον *Θέωνος Σμυρναίου Πλατωνικοῦ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν».* (σ. 101, ἔκδοσις Hiller).

3	3	3	3
1	1	1	3
1	1	1	3
1	1	1	3

15	15	15	15
4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15

65	65	65	65	65	65
11	24	7	20	3	65
4	12	25	8	16	65
17	5	13	21	9	65
10	18	1	14	22	65
23	6	19	2	15	65

Ἀστρονομία

Θεωρεῖται λίαν πιθανὸν ὅτι οἱ Ἕλληνες παρέλαβον πολλὰς ἀστρονομικὰς γνώσεις, ἰδίᾳ ἐκ συναφῶν παρατηρήσεων, παρὰ τῶν Βαβυλωνίων. Ἡ ἀρχαιοτέρα ὅμως ἔκλειψις Ἡλίου ἀνηγγέλθη ἀπὸ τὸν Θαλῆν, μῆνας ὁλοκλήρους πρὶν ἢ αὕτη λάβῃ χώραν (28 Μαΐου 585 π.Χ.). Ὁ Ἀναξίμανδρος, ὁ Πυθαγόρας καὶ ὁ Ἀναξαγόρας συνέβαλον πολὺ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀστρονομίας. Πρῶτος ὅμως ὁ Εὔδοξος θεωρεῖται ὁ ἱδρυτὴς τῆς οὐρανίου μηχανικῆς, μὲ τὴν ἐπινόησιν τῶν κινουμένων σφαιρῶν καὶ τῆς Ἱπποπέδης καμπύλης πρὸς ἑρμηνείαν τῶν κινήσεων τῶν πλανητῶν. Οἱ Πυθαγόρειοι Ἱκέτας καὶ Ἔκφαντος (ε' αἰ. π.Χ.) διετύπωσαν τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος, τὴν ὁποίαν βραδύτερον διετύπωσε, κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Πλουτάρχου, ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος. Περίφημος ἀστρονόμος τῆς ἀρχαιότητος θεωρεῖται ὁ ἐκ Βιθυνίας Ἵππαρχος (ἐκ τῆς Νικαίας, περὶ τὸ 190 - 125 π.Χ.), ὅστις ἀνεκάλυψε τὴν μετάπτωσιν τῶν Ἰσημεριῶν καὶ προσδιώρισεν ἀκριβέστερον τὴν διάρκειαν ἑκάστης τῶν τεσσάρων ἐποχῶν τοῦ ἔτους. Ὁ Ποσειδώνιος καὶ ἰδίᾳ ὁ Κλαύδιος Πτολεμαῖος εἶναι ἐκ τῶν τελευταίων μεγάλων ἀστρονόμων τῆς ἀρχαιότητος. Ὁ Πτολεμαῖος ἐπίστευεν εἰς τὸ γεωκεντρικὸν σύστημα, ἡ δὲ θεωρία του ἐπεκράτησεν ἐπὶ 1500 περίπου ἔτη· διότι πᾶσα ἀντίθετος γνώμη ἐθεωρεῖτο ἀντιβαίνουσα πρὸς τὰς ἰσχυούσας θρησκευτικὰς πεποιθήσεις (ἰδίᾳ τῆς Καθολικῆς Ἐκκλησίας).

Ἡ Γεωγραφία

Ὡς πρῶτος γεωγράφος θεωρεῖται ὁ Ὅμηρος μὲ τὰς περιγραφὰς τόπων, ἐθίμων κλπ. τῆς Ὀδυσσείας του. Πρῶτος ὅμως συστηματικὸς γεωγράφος θεωρεῖται ὁ Ἀναξίμανδρος, ὁ ὁποῖος κατεσκεύασε τὸν πρῶτον γεωγραφικὸν χάρτην. Μετὰ τὸν Ἀναξίμανδρον, ἄλλος γεωγράφος μνημονεύεται ὁ Ἕλλην Σκύλαξ ὁ Καρυανδεὺς (καταγόμενος ἀπὸ τὰ Καρύανδα, πόλιν τῆς Καρίας ἐν Μ. Ἀσίᾳ), ὅστις ἐνήργησεν ἐξερευνητικὸν περίπλουν ἀπὸ τῆς Ἰνδικῆς μέχρι τοῦ βορείου μυχοῦ τῆς Ἐρυθρᾶς θαλάσσης περὶ τὸ 516 π.Χ., τῇ ἐντολῇ τοῦ βασιλέως τῶν Περσῶν Δαρείου. Ἄλλοι σπουδαῖοι γεωγράφοι μνημονεύονται ὁ Ἑκαταῖος ὁ Μιλήσιος (ἀκμὴ περὶ τὸ 500 π.Χ.), ὁ Πυθέας ὁ ἐκ Μασσαλίας (ἀποικίας τῶν Φωκαέων) (ἀκμὴ περὶ τὸ 330 π.Χ.), ὁ ἐκ Μεσσήνης τῆς Σικελίας μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Δικαίαρχος (περὶ τὸ 300 π.Χ.), ὁ Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος (275-195 π.Χ.), ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ὁ Ποσειδώνιος, Ἕλλην ἐξ Ἀπαμείας τῆς Συρίας (135-51 π.Χ.), ἐν Ρόδῳ (ὁ διδάσκαλος τοῦ Κικέρωνος), ὁ Στράβων ἐξ Ἀμασείας τοῦ Πόντου (64 π.Χ.-19 μ.Χ.), ὁ Μαρῖνος ὁ Τύριος (περὶ τὸ 80 μ.Χ.), ὁ Κλ. Πτολεμαῖος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ (100-178 μ.Χ.). Ἰδιαιτέρως σημειοῦμεν, ὅτι Ἕλληνες ἐξερευνηταὶ εἶχον φθάσει μέχρι τῶν νήσων Σχέτλαντ τῆς Ἀγγλίας (Θούλης), τῆς Ἰσλανδίας, καὶ πιθανῶς καὶ τῆς Γροιλλανδίας. Εἰς τὴν Γροιλλανδίαν ὑπάρχει σήμερον οἰκισμὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα Θούλη. Ἐπίσης σημειοῦμεν τὴν μέτρησιν τῆς περιμέτρου τῆς Γῆς ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ποσειδωνίου καὶ τὴν κατασκευὴν τῶν χαρτῶν τῆς κυλινδρικῆς προβολῆς ἀπὸ τὸν Μαρῖνον τὸν Τύριον

Μηχανική

Ἐμπειρικὴν μηχανικὴν ἐγνώριζον ὅλοι οἱ πεπολιτισμένοι λαοὶ τῆς ἀρχαιότητος χιλιάδας ἔτη πρὸ Χριστοῦ. Τὸ πρῶτον δεῖγμα θεωρητικῆς μηχανικῆς παρέχει ἡ διάτρησις βουνοῦ διὰ τὴν ἵδρυσιν ὑδραγωγείου εἰς τὴν Σάμον, ὑπὸ τοῦ ἐκ Μεγάρων μηχανικοῦ Εὐπαλίνου (ἀκμὴ περὶ τὰ μέσα τοῦ ς΄ αἰ. π.Χ.). Ἡ διάτρησις ἔγινε συγχρόνως ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτων μερῶν τοῦ βουνοῦ, κατόπιν θεωρητικοῦ ὑπολογισμοῦ (μῆκος τῆς σήραγγος 1000 μέτρα περίπου) (Σχ. 1). Εἰς τὴν θεωρητικὴν μηχανικὴν συνέβαλον πολὺ ὁ Εὔδοξος καὶ ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, ἀκολούθως δὲ ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Κτησίβιος (γ΄ αἰ. π.Χ.), ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Φίλων ὁ Βυζάντιος καὶ ὁ Ἥρων. Τὸ ὁδόμετρον (ταξίμετρον σημερινὸν τῶν ταξὶ) εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἥρωνος (σχ. 2 καὶ 3). Εἰς τὰ σχήματα 4 καὶ 5 ἐκτίθενται τηλεβόλα τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Φίλωνος τοῦ Βυζαντίου, διὰ τῶν ὁποίων ἐβάλλοντο μεγάλοι λίθοι ἢ σιδηροῖ βῶλοι εἰς ἀρκετὴν ἀπόστασιν. Περίφημος εἶναι ἡ ἀνακάλυψις τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν ἰσορροπίαν εἰς τοὺς μοχλούς, ἡ ὁποία φέρεται σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα χρυσοῦς κανὼν τῆς μηχανικῆς καὶ περιέχεται εἰς τὰ θεωρήματα 6 καὶ 7 τῆς πραγματείας αὐτοῦ *Μηχανικὰ ἢ Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν*.

Φυσικὴ καὶ Χημεία

Ὁ Θαλῆς ἀνεκάλυψε τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν. Δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἔκαμον πειράματα. Τοὐναντίον, ὁ Ἀριστοτέλης ἀπέδειξε διὰ πειράματος (ζυγίσεως) ὅτι ὁ ἀὴρ ἔχει βάρος. Ὁ Πλάτων εἶχε κατασκευάσει κλεψύδραν διὰ νὰ τὸν ἐξυπνᾷ τὸ πρωὶ καὶ πλανητάριον, ὅπως καὶ ὁ Ἀρχιμήδης καὶ βραδύτερον ὁ Ποσειδώνιος, ὁ διδάσκαλος τοῦ Κικέρωνος. Ἐκ τῆς πραγματείας τοῦ Ἀριστοτέλους «Φυσικὴ ἀκρόασις» συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι οὗτος εἶναι ὁ πατὴρ τῆς θεωρητικῆς καὶ μαθηματικῆς φυσικῆς. Διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς φυσικῆς χρησιμοποιοῦνται μαθηματικὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων αὐτῆς. Τὸ παραλληλόγραμμον τῶν ταχυτήτων καὶ ἡ σύνθεσις δύο κινήσεων ἀποδεικνύονται τὸ πρῶτον μαθηματικῶς ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους (σχ. 6). Ἡ εὕρεσις τοῦ κέντρου βάρους διαφόρων στερεῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους προκαλεῖ τὸν θαυμασμὸν τῶν νεωτέρων. Ἡ ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια, ὡς καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ ἰδίου ἀνακάλυψις τοῦ ἀραιομέτρου, ἔχουν ἐπίσης προκαλέσει τὸν θαυμασμὸν τῶν νεωτέρων (σχ. 7). Ἡ εἰς τὴν ἀκουστικὴν ἀναφερομένη ἀνακάλυψις τῶν νόμων τῆς μουσικῆς ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου ἀποτελεῖ ὕψιστον δημιούργημα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. Ὁ Πυθαγόρας ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$. Πρὸς ἁπλούστευσιν διαιροῦμεν τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας διὰ ἓξ καὶ λαμβάνομεν:

1	: $\frac{4}{3}$	$=\frac{3}{2}$	: 2
ὑπάτη	μέση	παραμέση	νήτη
do	fa	sol	do

κάτωθι δὲ αὐτῶν γράφομεν τὰ ἀρχαῖα ὡς τὰ σημερινὰ ὀνόματα τῶν μουσικῶν φθόγγων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τοὺς ὅρους αὐτούς. Πρὸς κατασκευὴν τῆς μουσικῆς κλίμακος τοῦ Πυθαγόρου πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ $\frac{9}{8}$, τὸν προκύπτοντα πάλιν ἐπὶ $\frac{9}{8}$, τὸν $\frac{3}{2}$ ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ τὸν προκύπτοντα πάλιν ἐπὶ $\frac{9}{8}$. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὴν Πυθαγόρειο μουσικὴν κλίμακα, ἤτοι ἔχομεν:

do	re		mi	fa	sol		la		si	do
$1,$	$\frac{9}{8},$	$\frac{9}{8}\times\frac{9}{8}=$	$\frac{81}{64},$	$\frac{4}{3},$	$\frac{3}{2},$	$\frac{3}{2}\times\frac{9}{8}=$	$\frac{27}{16},$	$\frac{27}{16}\times\frac{9}{8}=$	$\frac{243}{128},$	2

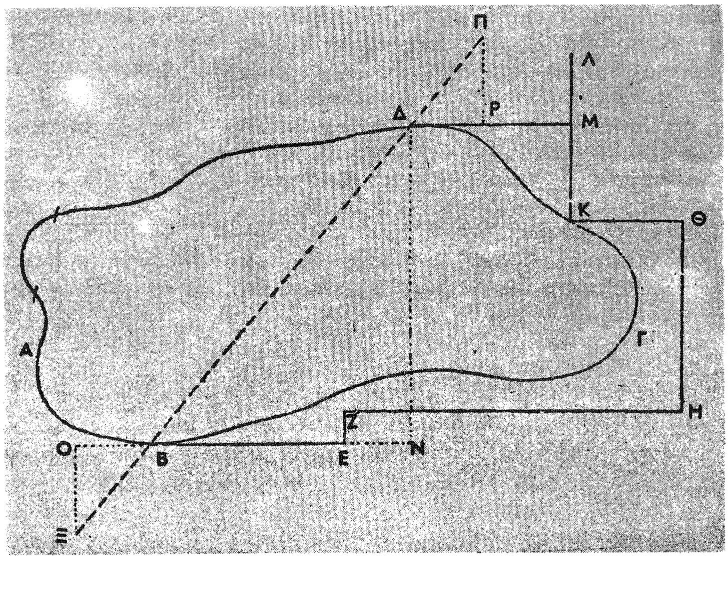
Ἡ ἀντίστοιχος ἀρχαία ὀνομασία εἶναι, κατὰ τὴν παράδοσιν, ἡ κάτωθι

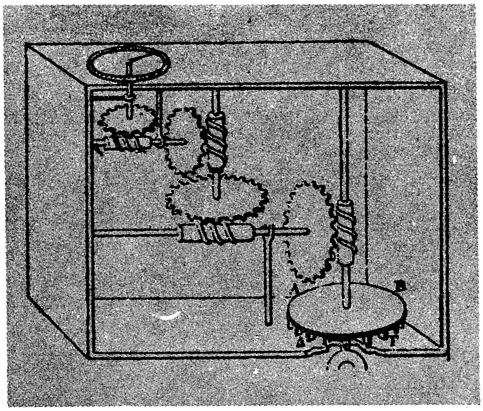
τή	τά		τέ	τώ	τή		τά		τώ	τή

῾Η βυζαντινὴ μουσικὴ ἔχει διατηρήσει ἐκ τῶν ἀρχαίων ὀνομάτων τῶν φθόγγων τοὺς πα (ὑ-πά-τη), νη (νή-τη) καὶ ζω ἀντὶ τοῦ τω. Τοὺς ἄλλους ἔχει ἀναπληρώσει διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου: πα βου γα δι κε ζω νη πα. ᾿Ελάχιστα γνωρίζομεν περὶ τῆς ἀρχαίας μουσικῆς, ἡ μελῳδία τῆς ὁποίας συνεκίνει τοὺς λίθους, ὥστε μόνοι των νὰ τοποθετοῦνται διὰ τὴν κτίσιν τῶν τειχῶν τῶν Θηβῶν, ὡς λέγει ἡ παράδοσις. Κατά τινας, ἐθεωρήθη αὕτη εἰδωλολατρικὴ καὶ ἐξηφανίσθη. Ὅλα τὰ ἀρχαῖα ἑλληνικὰ θέατρα ἔχουν κατασκευασθῆ ἐπὶ τῇ βάσει γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ἰδίᾳ τῆς χρυσῆς τομῆς καὶ τῶν κανόνων τῆς μουσικῆς. Ἔχει δὲ γίνει τοιοῦτος συνδυασμὸς αὐτῶν, ὥστε νὰ ἐνισχύεται τὰ μέγιστα ὁ ἦχος τῶν ὁμιλούντων ἀπὸ τῆς ὀρχήστρας καὶ τῆς σκηνῆς. Οἱ σχετικοὶ τῆς ἀκουστικῆς νόμοι δὲν ἔχουν εὑρεθῆ ἀκόμη. ῾Η πληροφορία τοῦ Βιτρουβίου (Λατίνου συγγραφέως τοῦ α' αἰ. π.Χ.) περὶ ἠχείων τῶν ἑλληνικῶν θεάτρων, ἀφορᾷ κυρίως εἰς τὴν μελῳδεστέραν μετάδοσιν τῶν ἤχων καὶ ὄχι εἰς τὴν ἐνίσχυσιν τῆς ἐντάσεως αὐτῶν (σχ. 8 καὶ 9).

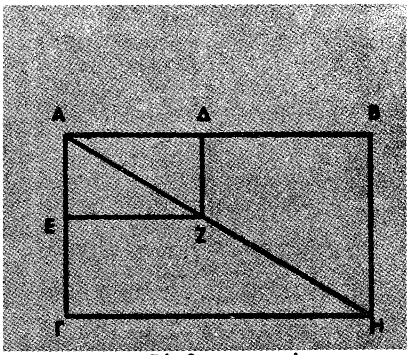
῾Η γνῶσις τῶν φακῶν εἶναι γνωστὴ εἰς τὰς ᾿Αθήνας περὶ τὸ 400 π.Χ., ἐκπληκτικὰ δὲ θεωροῦνται τὰ καυστικὰ κάτοπτρα τοῦ ᾿Αρχιμήδους καὶ τοῦ ᾿Απολλωνίου, τῶν ὁποίων ὅμως δὲν διεσώθη ἡ κατασκευὴ καὶ ὁ μηχανισμὸς τῆς λειτουργίας των διὰ τὴν καῦσιν τῶν ἐχθρικῶν πλοίων. Σπουδαῖα θεωροῦνται τὰ πειράματα τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται ὁ δείκτης διαθλάσεως ὕδατος καὶ ὑάλου, ὅταν τὸ φῶς προσπίπτῃ ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ὕδωρ ἢ τὴν ὕαλον, καὶ ἐκ τοῦ ὕδατος εἰς τὴν ὕαλον ἢ τἀνάπαλιν. Σῴζονται 27 συναφεῖς μετρήσεις. ῾Η ἀτομικὴ θεωρία τῶν ᾿Αναξαγόρου, Λευκίππου καὶ ἰδίᾳ τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Δημοκρίτου, εὗρε τὴν πλήρη δικαίωσίν της εἰς τὴν σύγχρονον φυσικὴν καὶ ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν μεγίστων ἐπιτευγμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. ῾Ως πρὸς τὴν χημείαν σημειοῦμεν ὅτι τὰ πρῶτα πειράματα, μὲ σκοπὸν ἰδίως μετατροπῆς εὐτελῶν οὐσιῶν εἰς χρυσὸν κλπ., ἔλαβον χώραν κατὰ τοὺς πρώτους αἰῶνας μ.Χ. εἰς τὴν Αἴγυπτον, ὅπου ἔδρασεν ἐπιστημονικῶς ὁ περίφημος Ζώσιμος ὁ Πανοπολίτης. Τὸ δὲ ὑγρὸν πῦρ τῶν Βυζαντινων ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν χρησιμοποιήσεως χημικῶν γνώσεων διὰ πολεμικοὺς σκοπούς.

Σχ. 1. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ διὰ τὴν διάνοιξιν τῆς σήραγγος ὑδραγωγείου εἰς τὴν Σάμον ὑπὸ τοῦ Εὐπαλίνου. Οἱ ἐργάται εἰργάζοντο συγχρόνως ἐκ τῆς διευθύνσεως ΞΒ καὶ ΠΔ. Κατὰ τὴν συνάντησίν των παρεξέκλιναν 10 περίπου μέτρα. ᾿Απόστασις ΒΔ=1000 μέτρα

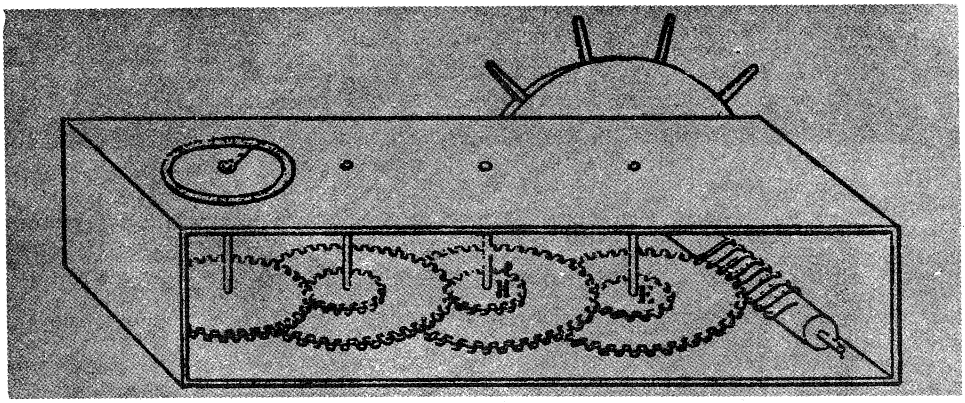




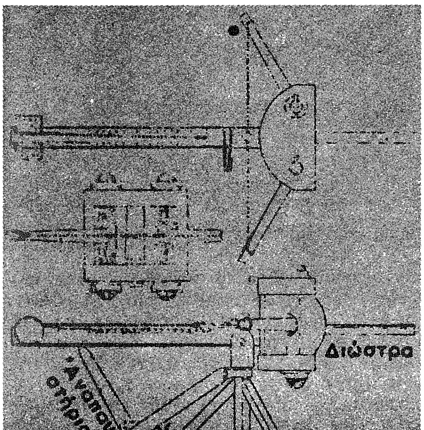
Σχ. 2. Ὁδόμετρον τοῦ Ἥρωνος διὰ τὴν μέτρησιν τῆς διανυομένης ἀποστάσεως ἑνὸς ὀχήματος ἐπὶ τῆς ξηρᾶς. (Τὸ σημερινὸν ταξίμετρον τῶν αὐτοκινήτων)



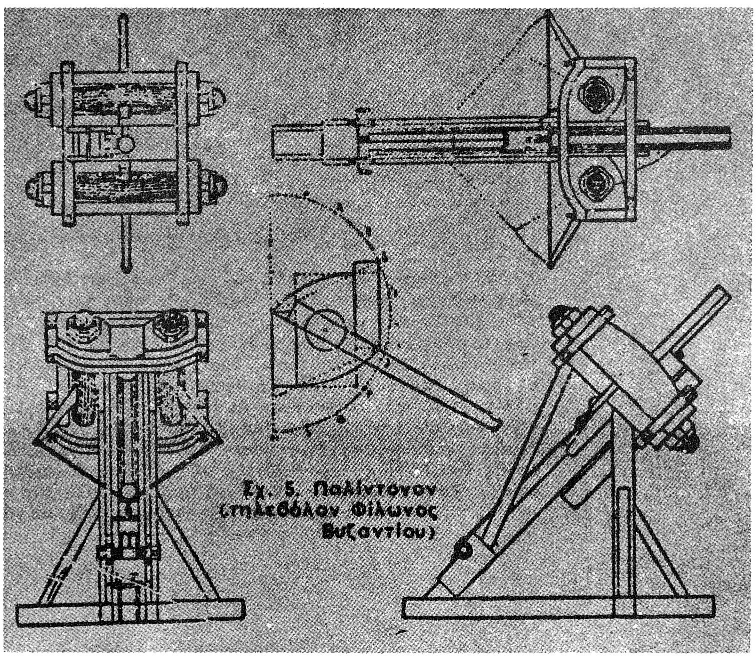
Σχ. 6. Σύνθεσις κινήσεων καὶ ταχυτήτων κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη. Ὅταν τὸ κινητὸν ἔχῃ τὰς ταχύτητας ΑΔ καὶ ΑΕ, θὰ ἀποκτήσῃ τὴν ταχύτητα ΑΖ καὶ τὴν θέσιν Ζ



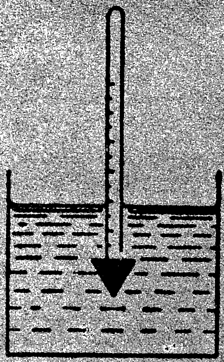
Σχ. 3. Δρομόμετρον, ἤτοι ὁδόμετρον, διὰ πλοῖα



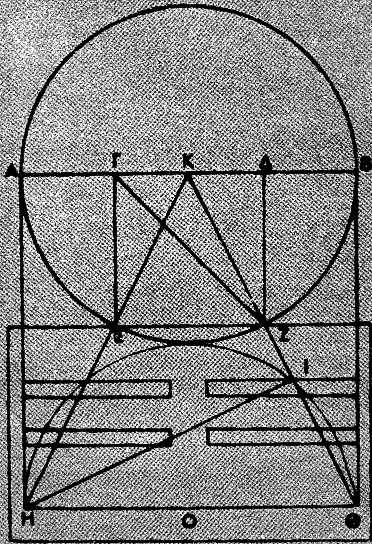
Σχ. 4. Εὐθύτονον (ὀξύσφυρον τηλεβόλον τοῦ Ἥρωνος)



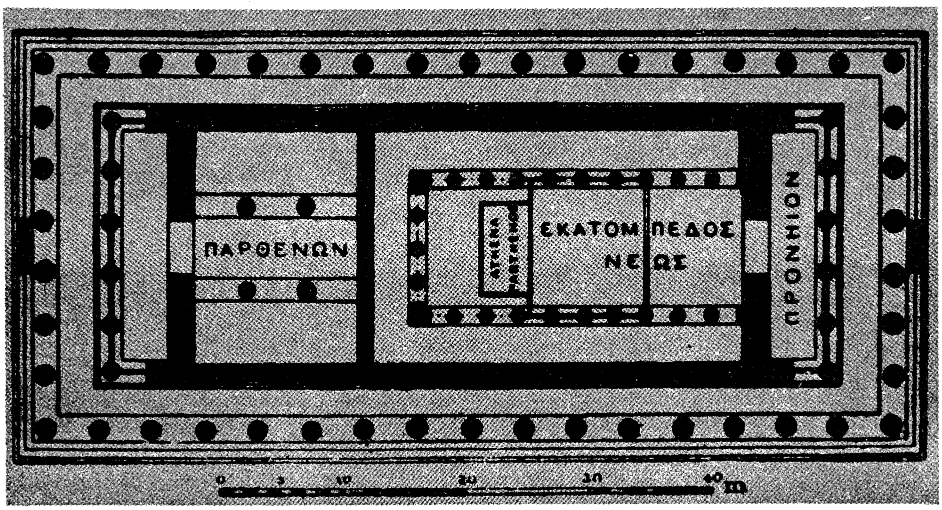
Σχ. 5. Παλίντονον (τηλεβόλον Φίλωνος Βυζαντίου)



Σχ. 7. Τὸ ἀραιόμετρον τοῦ Ἀρχιμήδους, περὶ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐξ ἐπιστολῆς τοῦ Ἐπισκόπου Συνεσίου πρὸς τὴν καθηγήτριαν αὐτοῦ εἰς τὴν φιλοσοφίαν καὶ τὰ μαθηματικὰ Ὑπατίαν, γραφείσης περὶ τὸ 410 μ.Χ.



Σχ. 8. Κάτοψις τοῦ θεάτρου τοῦ Ὠρωποῦ (Ἀττικῆς). Ἡ ὀρχήστρα (κύκλος) καὶ τὸ προσκήνιον (ὀρθογώνιον). Ἡ πλευρὰ ΓΔ τοῦ εἰς τὸ ἡμικύκλιον τῆς ὀρχήστρας ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ΓΔΖΕ ἀποτελεῖ τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς εὐθείας ΓΒ ἢ ΑΔ, τμηθείσης κατὰ τὸ σημεῖον Δ ἢ Γ ἀντιστοίχως εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον (χρυσῆ τομή). Ἡ κάθετος ΗΙ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΚΘ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΗΚΘ τέμνει αὐτὴν ἐπίσης κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς (ΚΙ τὸ μεγαλύτερον μέρος καὶ ΙΘ τὸ μικρότερον) (Das Theater in Oropos, E. Fiechter, Stuttgart 1930)



Σχ. 9. Κάτοψις τοῦ Παρθενῶνος. Πρῶτος ὅστις παρετήρησεν, ὅτι τὰ οἰκοδομήματα τῆς Ἀκροπόλεως καὶ πολλῶν ναῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος ἔχουν σχεδιασθῆ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς μουσικῆς εἶναι ὁ ἀρχιτέκτων Ἀθανάσιος Γεωργιάδης («Ἡ ἁρμονία ἐν τῇ ἀρχιτεκτονικῇ ποιήσει», Ἀθῆναι 1926). Ὁ Εὐ. Σταμάτης δι' ἀνακοινώσεώς του εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (τόμ. 31ος, 1956, σ. 10-16) παρατηρεῖ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τῆς μεγάλης πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 17, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων 9 καὶ 8 τοῦ κλάσματος 9:8, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὸν τόνον τῆς μουσικῆς. Εἶναι δὲ ὁ 8 (ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τῆς μικρᾶς πλευρᾶς) τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12 καὶ ὁ 9 τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἰδίων ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦν τοὺς ἄκρους ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6:8=9:12, ἐκ τῆς ὁποίας ὁ Πυθαγόρας κατεσκεύασε τὴν μουσικὴν κλίμακα. Ἐπισημειωτέον ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τῆς μικρᾶς πλευρᾶς ἑνὸς ναοῦ κληθῇ n, ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τῆς μεγάλης πλευρᾶς εἶναι 2n+1

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ

'Ανάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΗ' (1966), τεύχη 35/36

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ

Α′ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Εἰς τὰ σχόλια τῶν Ἁρμονικῶν τοῦ Πτολεμαίου ὁ Πορφύριος σημειώνει τὰ ἑξῆς :

Ὁ Ἀρχύτας δὲ λέγων περὶ τῶν μεσοτήτων (ἀναλογιῶν) γράφει ταῦτα· «Μέσαι δὲ ὑπάρχουν εἰς τὴν μουσικὴν τρεῖς, μία μὲν ἡ ἀριθμητική, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρική, τρίτη δὲ ἡ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦν ἁρμονικήν. Ἀριθμητικὴ μὲν εἶναι ὅταν ὑπάρχουν ἐν συνεχείᾳ τρεῖς ὅροι παρουσιάζοντες τὴν αὐτὴν ὑπεροχήν· δηλαδὴ ὅσον ὁ πρῶτος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου, τόσον ὁ δεύτερος ὑπερέχει τοῦ τρίτου. Καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν συμβαίνει, ὥστε ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγον τῶν μικροτέρων ὅρων. Ἡ γεωμετρικὴ δὲ εἶναι, ὅταν (ὑπαρχόντων ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὅρων) ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, οἷον ἔχει ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. Τούτων δὲ ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μικροτέρων. Ἡ δὲ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἁρμονικήν, εἶναι ὅταν οἱ ὅροι ἔχουν ὡς ἑξῆς· ὅσον μέρος τοῦ πρώτου ὑπερέχει ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, τόσον μέρος τοῦ τρίτου ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου. Εἰς τὴν ἀναλογίαν δὲ αὐτὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μικροτέρων ὅρων».

(Ἀρχύτας δὲ περὶ τῶν μεσοτήτων λέγων γράφει ταῦτα·
μέσαι δέ ἐντι τρῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἃν καλέοντι ἁρμονικάν. ἀριθμητικὰ μέν, ὄκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν· ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτᾳ ⟨τᾷ⟩ ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὄκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτί τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἃν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὄκκα ἔωντι ⟨τοῖοι· ᾧ⟩ ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον). (Porph. in Ptol. harm. p. 42. Diels Fragm. d. Vors. I, B. Fr. 2 p. 435, 1951).

*

Ἐὰν ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ $(\alpha > \beta > \gamma > o)$, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν Ἀρχύταν :

Ἀριθμητικὴ ἀναλογία, ὅταν $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ (1)

Θὰ εἶναι δὲ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$ (2)

Γεωμετρικὴ ἀναλογία, ὅταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ (3)

Ἁρμονικὴ ἀναλογία, ὅταν $\alpha = \beta + \frac{\alpha}{n}$ $(n \neq 1 > 0)$

$$\beta = \gamma + \frac{\gamma}{n}.$$

Θὰ εἶναι δὲ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$. (4)

Κατὰ τὸν Νικόμαχον τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\beta = \frac{2.\alpha.\gamma}{\alpha + \gamma}$, (5) (Introd. Arith. Hoche II 26 p. 135, 10).

Ἡ ἀπόδειξις τῶν προηγουμένων σχέσεων (2) καὶ (4) δὲν ἔχει σωθῆ, ἔχει ὅμως ὡς ἑξῆς :

Εἰς τὴν σχέσιν (1), ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος διὰ β καὶ τὸ δεύτερον διὰ γ, ἐπειδὴ $\beta > \gamma$, θὰ λάβωμεν

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} < \frac{\beta - \gamma}{\gamma}$$

ἢ $\frac{\alpha}{\beta} - 1 < \frac{\beta}{\gamma} - 1$, ἐξ ἧς ἕπεται

ἡ ἀλήθεια τῆς (2) $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Ἡ σχέσις (5) γράφεται $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$. (6)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (6) ἐπὶ β καὶ τὸ δεύτερον ἐπὶ α, ἐπειδὴ $\beta < \alpha$, θὰ λάβωμεν

$$\beta\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right) < \alpha\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

ἢ $\frac{\beta}{\gamma} - 1 < \frac{\alpha}{\beta} - 1$, ἐξ ἧς ἕπετα

ἡ ἀλήθεια τῆς (4) $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$.

2. Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον, εἰς τὴν τετρακτὺν τῶν Πυθαγορείων 1, 2, 3, 4 ἀπαντῶσιν αἱ θεμελιώδεις συμφωνίαι τῆς μουσικῆς, ἤτοι: ἡ διὰ τεσσάρων συμφωνία ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ (ὁ τέταρτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος συχνότητος $\frac{4}{3}$ ὅταν ὁ πρῶτος φθόγγος ἔχει συχνότητα 1 καὶ ὁ ὄγδοος 2). Ἡ διὰ πέντε συμφωνία ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ $\left(\text{δηλ. } 1\ \frac{1}{2}\right)$, (ὁ πέμπτος φθόγγος τῆς αὐτῆς κλίμακος συχνότητος $\left.\frac{3}{2}\right)$. Ἡ διὰ πασῶν συμφωνία ἐν διπλασίῳ λόγῳ (2 : 1) (ὁ ὄγδοος φθόγγος τῆς αὐτῆς κλίμακος συχνότητος 2). Ἡ δὶς διὰ πασῶν συμφωνία ἐν τετραπλασίῳ λόγῳ (4 : 1) (ἡ διπλῆ ὀκτάβα). (Theon Smyrnaeus, Sectio canonis, E. Hiller p. 93, 17, B. G. Teubner, Leipzig 1878).

3. Ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του σημειώνει ὅτι ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἔχει λάβει τὸ ὄνομα ἁρμονική, διότι παρέπεται πάσης γεωμετρικῆς ἁρμονίας. Ὀνομάζουν δέ, προσθέτει, γεωμετρικὴν ἁρμονίαν τὸν κύβον, ἐπειδὴ εἰς πάντα κύβον ἐνοπτρίζεται ἡ μεσότης αὕτη. Διότι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμὰς καὶ οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 12 ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν καὶ ὁ μέσος αὐτῶν ὁ 8, δηλ., τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων 6 καὶ 12, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων $\left(\text{ἤτοι } 8 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12}\right)$. (Nicomachi Introd. Arithm. R. Hoche, II 26 p. 135, 10, B. G. Teubner, Leipzig 1866).

Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ὁ Νικόμαχος ἀναπτύσσει τὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$ ἀποκαλῶν αὐτὴν τελειοτάτην καὶ χρήσιμον εἰς πᾶσαν προκοπὴν εἰς τὴν μουσικὴν καὶ τὴν φυσιολογίαν. Εἰς αὐτήν, τονίζει, ἀπαντᾷ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία $12 - 9 = 9 - 6$, ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία $12 : 8 = 9 : 6$ καὶ ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 12, ὅπου ὁ μεγαλύτερος ὅρος $12 = 8 + \frac{12}{3}$ καὶ ὁ μέσος ὅρος $8 = 6 + \frac{6}{3}$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας (R. Hoche II 29 p. 144, 20).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ: Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀντλεῖ κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου, σχολιάζων αὐτὴν προσθέτει, παραδόξως, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἔφερε τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος, ἀποκαλῶν αὐτὴν καὶ αὐτός, ὡς ὁ Νικόμαχος, τελειοτάτην. Ἡ πληροφορία τοῦ Ἰαμβλίχου θεωρεῖται ἀνακριβὴς καὶ ὑποτίθεται ὅτι πρόκειται μᾶλλον περὶ μεταγενεστέρας προσθήκης) (**Iamblichus in Nicom Arithm. Introd. p. 118, H. Pistelli, B. G. Teubner, Leipzig 1894**).

4. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ὁ Ἐμπεδοκλῆς πρῶτος διετύπωσε τὴν θεωρίαν ὅτι ὁ κόσμος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων στοιχείων, πυρὸς — ἀέρος — ὕδατος — γῆς (Aristoteles M. Phys. 985 a 21).

Ὁ Πλάτων ἔχει δεχθῆ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἐμπεδοκλέους (Τίμαιος 32b — c) καὶ συμβολίζει τὴν γῆν διὰ τοῦ κύβου (γῇ μὲν τὸ κυβικὸν εἶδος δῶμεν. Τίμαιος 55 d — e), τὸ πῦρ διὰ τῆς πυραμίδος (τετραέδρου), τὸν ἀέρα διὰ τοῦ ὀκταέδρου καὶ τὸ ὕδωρ διὰ τοῦ εἰκοσαέδρου.

(ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ συμβολισμοὶ αὐτοὶ ἀποδίδονται καὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους. **Diels, Doxog.** 334, **Frag. d. Vors.** I p. 403, 1951, Ἰαμβλίχου Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς, **de Falco** p. 87).

5. Ἡ ἁρμονία μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Δημιουργὸς ἔχει κατασκευάσει τὸν κόσμον, κατὰ τὸν Πλάτωνα, σχετίζεται μὲ τὸν συμβολισμὸν τῆς γῆς διὰ τοῦ κύβου καὶ τὴν ἁρμονίαν, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὸν κύβον.

Διότι εἰς τὸν κύβον παρατηροῦνται καὶ οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας οἱ 6 — 8 — 9 — 12, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ θεμελιώδεις φθόγγοι τῆς μουσικῆς κλίμακος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου 6, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν 12, ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν 8, ὅστις εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν 6 καὶ 12, καὶ ὁ ἀριθμὸς 9, ὅστις εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 6 καὶ 12.

Ἡ ὀνομασία τῶν 4 ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ἔχει ὡς ἑξῆς :

Κατὰ τὸν Φιλόλαον :	ὑπάτη	μέση	τρίτη	νήτη	(Diels. Fr. I [B 62]
Μεταγενεστέρως :	ὑπάτη	μέση	παραμέση	νήτη	
Σύγχρονος ἰταλικὴ :	do	fa	sol	do	
Συχνότης φθόγγων :	6	8	9	12	

6. Διὰ τὸ μέγεθος τῆς ἁρμονίας δηλ. τῆς μουσικῆς κλίμακος, ὁ Φιλόλαος γράφει τὰ ἑξῆς :

ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόῳ. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας, ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσσῳ μέσσας καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον· οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δέ, δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις. Stob. Eclogae p. 188, Diels Fr. I [62]).

(Δηλαδή : Τῆς μουσικῆς κλίμακος τὸ μέγεθος εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς καὶ διάστημα δι' ὀξειῶν· τὸ δὲ διάστημα δι' ὀξειῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαστήματος τῆς συλλαβῆς κατὰ ἓν ἐπόγδοον (κατὰ ἕνα φθόγγον). Διότι ἀπὸ τῆς ὑπάτης μέχρι τῆς μέσης εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς, ἀπὸ δὲ τῆς μέσης μέχρι τῆς νήτης εἶναι διάστημα δι' ὀξειῶν, ἀπὸ δὲ τῆς νήτης μέχρι τῆς τρίτης εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς, ἀπὸ δὲ τῆς τρίτης μέχρι τῆς ὑπάτης εἶναι διάστημα δι' ὀξειῶν· τὸ διάστημα δὲ μεταξὺ μέσης καὶ τρίτης ἐπόγδοον (δηλ. ἡ συχνότης τῆς τρίτης = sol, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συχνότητος τῆς μέσης = fa κατὰ $\frac{9}{8}$)· ἡ δὲ συχνότης τῆς συλλαβῆς εἶναι ἐπίτριτος $\left(= \frac{4}{3}\right)$, ἡ δὲ συχνότης τῆς δι' ὀξειῶν εἶναι ἡμιόλιος $\left(= \frac{3}{2}\right)$, ἡ συχνότης δὲ τοῦ ὀγδόου φθόγγου (διαπασῶν) εἶναι διπλασία τῆς τοῦ πρώτου φθόγγου. Κατὰ ταῦτα, ἡ μουσικὴ κλῖμαξ (ἡ ὀκτάβα) ἔχει πέντε φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον (ἐν σχέσει πρὸς τὸν πρῶτον φθόγγον τῆς ὀκτάβας) καὶ δύο διέσεις (δύο ἡμιτόνια), τὸ διάστημα δὲ δι' ὀξειῶν ἔχει τρεῖς φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον καὶ μίαν δίεσιν (ἓν ἡμιτόνιον), τὸ διάστημα δὲ μιᾶς συλλαβῆς ἔχει δύο φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον καὶ μίαν δίεσιν (ἓν ἡμιτόνιον).

7. Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων φαίνεται σαφῶς ὅτι ὁ Φιλόλαος διὰ τῆς λέξεως «συλλαβὴ» ἐννοεῖ τέσσαρας φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ τὸν τέταρτον φθόγγον αὐτῆς (τὴν τετάρτην), διὰ τῆς φράσεως δὲ «δι' ὀξειῶν» ἐννοεῖ πέντε φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ τὸν πέμπτον φθόγγον αὐτῆς (τὴν πέμπτην). Ἐκ τοῦ καθορισμοῦ τῶν πλήρων φθόγγων καὶ τῶν διέσεων (ἐνταῦθα ἡμιτονίων) ὑποδεικνύεται ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας).

Ἀναχωρεῖ ὁ Φιλόλαος ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας

$6 : 8 = 9 : 12$, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν πρὸς εὐκολίαν,

$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$ (διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων αὐτῆς διὰ 6) . . . . (μ)

8. Ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος ἔχει κατὰ τὰ προηγούμενα ὡς ἑξῆς (οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζουν συχνότητας) :

Πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας (μ) ὁ 1 = ὑπάτη = κάτω do.

Ὁ δεύτερος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ 1, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$ = παρυτάτη = re.

Ὁ τρίτος φθόγγος λαμβάνεται ἐπίσης διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{9}{8}$ ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$ = λιχανὸς = mi.

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ $\frac{4}{3}$, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀκραίων ὅρων τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας) τῶν 1 καὶ 2, ὁπότε εἶναι :

$$\text{ἁρμονικὸν μέσον} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3} = \text{μέση} = \text{fa}.$$

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι ὁ τρίτος ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ $\frac{3}{2}$, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς κλίμαμακος (τῆς ὀκτάβας), τῶν 1 καὶ 2, ὁπότε εἶναι :

$$\text{ἀριθμητικὸν μέσον} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = \text{παραμέση} = \text{sol}.$$

Ὁ ἕκτος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{3}{2}$, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$ = τρίτη = la.

Ὁ ἕβδομος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{27}{16}$, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{128}$ = παρανήτη = si.

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν ἀκραίων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ 2 =νήτη, ἄνω do ἔχων διπλασίαν συχνότητα τοῦ πρώτου φθόγγου.

Ἔχει λοιπὸν κατὰ τὸν Φιλόλαον ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ ὡς ἑξῆς :

	Ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
(M)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2.

Κατὰ τὸν Φιλόλαον πάλιν : Ἀρχίζοντες τὴν ἀρίθμησιν ἐκ τοῦ πρώτου φθόγγου πρὸς τὸν ὄγδοον ἔχομεν

do $\longrightarrow$ fa

Διάστημα συλλαβῆς=4 ἀνιόντες φθόγγοι, οἱ do, re, mi, fa

fa $\longrightarrow$ ἄνω do

Διάστημα δι' ὀξειῶν=5 ἀνιόντες φθόγγοι, οἱ fa, sol, la, si, do

Ἀρχίζοντες τὴν ἀρίθμησιν ἐκ τοῦ ὀγδόου φθόγγου πρὸς τὸν πρῶτον ἔχομεν

sol $\longleftarrow$ do

Διάστημα συλλαβῆς=4 κατιόντες φθόγγοι, οἱ do, si, la, sol

do $\longleftarrow$ sol

Διάστημα δι' ὀξειῶν=5 κατιόντες φθόγγοι, οἱ sol, fa, mi, re, do

Οἱ πλήρεις φθόγγοι (συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστος) εἶναι οἱ ἑξῆς πέντε:

$$\frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128}.$$

Ἕκαστος φθόγγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου του κατὰ $\frac{9}{8}$· Ὁ $\frac{3}{2}$ ἔχει προηγούμενον τὸν $\frac{4}{3}$· Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος δὲν λογίζεται.

Τὸ διάστημα (δηλαδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως) μεταξὺ $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{81}{64}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{9}{8}$ καὶ ὁ Φιλόλαος τὸ ὀνομάζει δίεσιν (σήμερον καλεῖται ἡμιτόνιον). Τὸ διάστημα μεταξὺ 2 καὶ $\frac{243}{128}$ εἶναι ἐπίσης μικρότερον τοῦ $\frac{9}{8}$ καὶ ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον, διότι εἶναι

$$\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$$

καὶ ἐπομένως καὶ αὐτὸ εἶναι μία δίεσις (ἐν ἡμιτόνιον). Ὑπάρχουν λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω μουσικὴν κλίμακα πέντε φθόγγοι πλήρεις καὶ δύο ἡμιτόνια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερὰ ἡ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος ὑπὸ τοῦ Φιλολάου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον.

9. Καὶ γενικῶς. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ γ, δ ($\gamma < \delta$), οἵτινες ἐκφράζουν συχνότητας καὶ ζητεῖται ἡ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν γ, δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{2 \cdot \gamma \cdot \delta}{\gamma+\delta}$· Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν γ, δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}$·

Κατόπιν σχηματίζομεν τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς γ, δ, ὁπότε εἶναι

$$\gamma \quad : \quad \frac{2 . \gamma . \delta}{\gamma+\delta} \quad = \quad \frac{\gamma+\delta}{2} \quad : \quad \delta$$

ὑπάτη	μέση	παραμέση	νήτη
κάτω do	fa	sol	ἄνω do

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ γ — ὑπάτη do

(ὁ γ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ δεύτερος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\gamma . \frac{9}{8}$ — παρυπάτη re

Ὁ τρίτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\gamma . \frac{9}{8} . \frac{9}{8}$ — λιχανὸς mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{2 . \gamma . \delta}{\gamma+\delta}$ — μέση fa

(ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}$ — παραμέση sol

(ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ ἕκτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2} . \frac{9}{8}$ — τρίτη la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2} . \frac{9}{8} . \frac{9}{8}$ — παρανήτη si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ δ — νήτη do

(ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Β΄

10. Τὸ πρὸς ἑρμηνείαν μουσικὸν χωρίον τοῦ Τιμαίου (35b—36c) ἔχει ὡς ἑξῆς :

Μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ' ἑπτακαιεικοσαπλασίαν τῆς πρώτης· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπί-

τριτα πάντα συνεπληροῦντο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια.

(Κατὰ πρῶτον ἀφήρεσεν ἀπὸ τὸ μεῖγμα ἓν μέρος, κατόπιν δὲ ἀφήρεσε διπλάσιον τούτου, κατὰ τὴν τρίτην δὲ φορὰν ἀφήρεσε μέρος ἴσον πρὸς 3/2 τοῦ δευτέρου, τριπλάσιον δὲ τοῦ πρώτου, κατὰ τὴν τετάρτην δὲ ἀφήρεσε μέρος ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου, κατὰ τὴν πέμπτην δὲ μέρος ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τρίτου, κατὰ τὴν ἕκτην δὲ μέρος ὀκταπλάσιον τοῦ πρώτου, κατὰ τὴν ἑβδόμην δὲ εἰκοσιεπταπλάσιον τοῦ πρώτου· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦντο καὶ τὰ διπλάσια καὶ τὰ τριπλάσια διαστήματα, ἐν ᾧ ἐλάμβανε ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ μείγματος μέρη καὶ τὰ ἔθετε εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα νὰ εἶναι δύο μεσότητες, ἡ μὲν μία νὰ ὑπερέχῃ καὶ νὰ ὑπερέχεται κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος τῶν ἄκρων, ἡ δὲ νὰ ὑπερέχῃ τόσον ἀριθμόν, ὅσον νὰ ὑπερέχεται. Ἀφοῦ δὲ ἐκ τῶν δεσμῶν αὐτῶν ἔγιναν διαστάσεις ἡμιόλιοι (3 : 2), ἐπίτριτοι (4 : 3) καὶ ἐπόγδοοι (9 : 8) εἰς τὰς πρώτας διαστάσεις, ὅλα τὰ ἐπίτριτα διαστήματα συνεπληροῦντο διὰ τοῦ ἐπογδόου διαστήματος, ἐν ᾧ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν (τῶν δύο) ἔλειπε μόριον ὥστε νὰ ὑπάρχῃ σχέσις ἴση πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν 256, παρονομαστὴν δὲ τὸν 243).

11. Τὸ νόημα τοῦ ἀνωτέρω χωρίου τοῦ Τιμαίου : Τὰ ἀφαιρεθέντα μέρη ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ μείγματος σχηματίζουν δύο γεωμετρικὰς προόδους :

(α)	**1**	**2**	**4**	**8**
(β)	**1**	**3**	**9**	**27**

Τὰ διπλάσια διαστήματα εἶναι τρία : 1—2, 2—4, 4— 8.
Τὰ τριπλάσια διαστήματα εἶναι ἐπίσης τρία : 1—3, 3—9, 9—27.

Τὰ διαστήματα αὐτὰ τὰ ὀνομάζει εἰς τὸ χωρίον (36α) καὶ διαστάσεις, ἐν ᾧ εἰς τὸ χωρίον (43d) τὰ ὀνομάζει ἀποστάσεις, λέγων εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο «ὥστε τὰς τοῦ διπλασίου καὶ τριπλασίου ***τρεῖς ἑκατέρας*** ἀποστάσεις . . . », ἐννοῶν τὰς ἀνωτέρω ἓξ διαστάσεις ἢ διαστήματα.

Τὰ ἀνωτέρω 6 διαστήματα συνεπληροῦντο διὰ μεσοτήτων, ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα νὰ εἶναι δύο μεσότητες, μία ἁρμονικὴ καὶ μία ἀριθμητική.

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρόκειται περὶ κατασκευῆς ἓξ (6) μουσικῶν κλιμάκων (6 ὀκτάβαι), ἀφοῦ προηγουμένως κατασκευάζονται αἱ ἀντίστοιχοι ἓξ μουσικαὶ ἀναλογίαι.

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (α) κατασκευάζει τρεῖς μουσικὰς κλίμακας (τρεῖς ὀκτάβας) : Ἡ πρώτη κλῖμαξ ἔχει ἄκρους ὅρους 1 καὶ 2 (1 κάτω do καὶ 2 ἄνω do). Ἡ δευτέρα ἔχει ἄκρους ὅρους 2 καὶ 4 (2 κάτω do καὶ 4 ἄνω do). Ἡ τρίτη ἔχει ἄκρους ὅρους 4 καὶ 8 (4 κάτω do καὶ 8 ἄνω do).

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (β) κατασκευάζει ἐπίσης τρεῖς μουσικὰς κλίμακας (3 ὀκτάβας). Ἡ πρώτη κλῖμαξ ἔχει ἄκρους ὅρους 1 καὶ 3 (1 κάτω do, 3 ἄνω do). Ἡ δευτέρα ἔχει ἄκρους ὅρους 3 καὶ 9 (3 κάτω do, 9 ἄνω do). Ἡ τρίτη ἔχει ἄκρους ὅρους 9 καὶ 27 (9 κάτω do, 27 ἄνω do).

Ἡ κατασκευὴ καὶ τῶν 6 κλιμάκων γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ διαφορά, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν κλιμάκων ἐκ τῶν δύο γεωμετρικῶν προόδων (α) καὶ (β), εἶναι ἡ ἑξῆς:

Αἱ τρεῖς πρῶται μουσικαὶ κλίμακες ἔχουν τὸ ἄνω do μὲ διπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do, ὅπως εἰς τὴν Πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα.

Αἱ ἄλλαι τρεῖς μουσικαὶ κλίμακες ἔχουν τὸ ἄνω do μὲ τριπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do.

Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑκάστης μουσικῆς κλίμακος νοεῖ πρῶτον τὴν κατασκευὴν ἑκάστης μουσικῆς ἀναλογίας, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν δύο μεσότητες: μία ἁρμονικὴ καὶ μία ἀριθμητική.

12. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν πρώτων μουσικῶν κλιμάκων.

Πρῶτον διάστημα. 1 — 2 (ἢ πρώτη διάστασις ἢ πρώτη ἀπόστασις).

Εὑρίσκεται τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3}.$$

Ἀκολούθως εὑρίσκεται τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ὥστε εἰς τὸ διάστημα 1 — 2 ὑπάρχουν δύο μεσότητες,

ἡ ἁρμονικὴ $\frac{4}{3}$ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ $\frac{3}{2}$,

ἤτοι σχηματίζεται ἡ μουσικὴ ἀναλογία

$$1 \ : \ \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \ : \ 2.$$

Ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας νοεῖ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν (§ 8 Μ).

Ἡ πρώτη μουσικὴ κλῖμαξ ἔχει κατὰ ταῦτα ὡς ἑξῆς:

ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	**2**

Δεύτερον διάστημα 2 — 4 (ἢ δευτέρα διάστασις ἢ δευτέρα ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 4 εἶναι :

$$\frac{2\,.\,2\,.\,4}{2+4}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3},$$

ἐν ᾧ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι $\frac{2+4}{2}=3$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι :

$$2 : \frac{8}{3} = 3 : 4.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης μουσικὴ κλῖμαξ εὑρίσκεται, ὡς ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ ἐκτίθεται (§ 9). Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

Πρῶτος φθόγγος	$2 =$ κάτω **do**	(ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)
Δεύτερος φθόγγος	$2\,.\,\frac{9}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}=$ **re**	
Τρίτος φθόγγος	$\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{32}=$ **mi**	
Τέταρτος φθόγγος	$\frac{8}{3}=$ **fa**	(ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)
Πέμπτος φθόγγος	$3 =$ **sol**	(ὁ τρίτος » » » » »)
Ἕκτος φθόγγος	$3\,.\,\frac{9}{8}=\frac{27}{8}=$ **la**	
Ἕβδομος φθόγγος	$\frac{27}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{243}{64}=$ **si**	
Ὄγδοος φθόγγος	$4 =$ ἄνω **do**	(ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Τρίτον διάστημα 4 — 8 (ἢ τρίτη διάστασις ἢ τρίτη ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 8 εἶναι :

$$\frac{2\,.\,4\,.\,8}{4+8}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3},$$

ἐν ᾧ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι $\frac{4+8}{2}=6$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$4 : \frac{16}{3} = 6 : 8.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης μουσικὴ κλῖμαξ εὑρίσκεται, ὡς ἐκτίθεται ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ (§ 9). Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

Πρῶτος φθόγγος	$4 \quad = \text{κάτω do}$	(ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)
Δεύτερος φθόγγος	$4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = \text{re}$	
Τρίτος φθόγγος	$\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{16} = \text{mi}$	
Τέταρτος φθόγγος	$\frac{16}{3} = \text{fa}$	(ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)
Πέμπτος φθόγγος	$6 \quad = \text{sol}$	(ὁ τρίτος » » » » »)
Ἕκτος φθόγγος	$6 \cdot \frac{9}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} = \text{la}$	
Ἕβδομος φθόγγος	$\frac{27}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{32} = \text{si}$	
Ὄγδοος φθόγγος	$8 = \text{ἄνω do}$	(ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς πρώτας μουσικὰς κλίμακας, ἑκάστης κλίμακος ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι ἐπίτριτος $\left(1 \frac{1}{3}\right)$ τοῦ πρώτου, ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι ἡμιόλιος $\left(1 \frac{1}{2}\right)$ τοῦ πρώτου, ὁ λόγος μεταξὺ τετάρτου καὶ τρίτου φθόγγου εἶναι $\frac{256}{243}$ καὶ ὁ λόγος μεταξὺ ὀγδόου καὶ ἑβδόμου φθόγγου εἶναι ἐπίσης $\frac{256}{243}$. Ὁ πλήρης δὲ φθόγγος εἶναι ἐπόγδοος $\left(\frac{9}{8}\right)$. Ἤτοι εἶναι: [α) = πρώτη κλῖμαξ, β) = δευτέρα κλῖμαξ, γ) = τρίτη κλῖμαξ].

	Πρῶτος φθόγγος	Τέταρτος φθόγγος	Πέμπτος φθόγγος	Λόγος 4ου : 3ου	Λόγος 8ου : 7ου
α)	1	$\frac{4}{3}$ ($\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου ἢ ἐπίτριτον)	$\frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2}$ τοῦ πρώτου ἢ ἡμιόλιον)	$\frac{256}{243}$.	$\frac{256}{243}$
β)	2	$\frac{8}{3}$ ($\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου ἢ ἐπίτριτον)	3 ($\frac{3}{2}$ τοῦ πρώτου ἢ ἡμιόλιον)	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$
γ)	4	$\frac{16}{3}$ ($\frac{4}{3}$ τοῦ πρώτου ἢ ἐπίτριτον)	6 ($\frac{3}{2}$ τοῦ πρώτου ἢ ἡμιόλιον)	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$

Τὰς τρεῖς αὐτὰς πρώτας κλίμακας ὑπονοεῖ λέγων «Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια».

13. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν δευτέρων μουσικῶν κλιμάκων

Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν δευτέρων μουσικῶν κλιμάκων γίνεται ὅπως καὶ τῶν τριῶν πρώτων. Εἰς αὐτὰς ὅμως δὲν ὑπάρχουν ἐπίτριτα διαστήματα, οὔτε ἡμιόλια*, οὔτε οἱ λόγοι 256 : 243, ἅτινα ὑπάρχουν εἰς τὰς τρεῖς πρώτας μουσικὰς κλίμακας, τὰς ὁποίας διαχωρίζει διὰ τῆς φράσεως «ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν».
Πρόσθεν διαστάσεις εἶναι αἱ τρεῖς πρῶται, ἤτοι :

$$1-2, \quad 2-4, \quad 4-8.$$

Πρῶτον διάστημα 1—3 (ἢ πρώτη διάστασις ἢ πρώτη ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 3 εἶναι

$$\frac{2\,.\,1\,.\,3}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ 3 εἶναι

$$\frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$1 \;:\; \frac{3}{2} = 2 \;:\; 3.$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 1=κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $1\,.\,\frac{9}{8} = \frac{9}{8} = \text{re}$

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $1\,.\,\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8} = \frac{81}{64} = \text{mi}$

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{3}{2} = \text{fa}$ (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι $2 = \text{sol}$ (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $2\,.\,\frac{9}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = \text{la}$

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{9}{4}\,.\,\frac{9}{8} = \frac{81}{32} = \text{si}$

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι $3 = \text{ἄνω do}$ (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

* ἐκτὸς ἑνός,

Δεύτερον διάστημα 3—9 (ἢ δευτέρα διάστασις ἢ δευτέρα ἀπόστασις). Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9 εἶναι

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 9}{3+9} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 3 καὶ 9 εἶναι $\frac{3+9}{2} = 6.$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$3 : \frac{9}{2} = 6 : 9$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 3=κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$ = re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{64}$ = mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{9}{2}$ = fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι 6 = sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $6 \cdot \frac{9}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$ = la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{32}$ = si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι 9 = ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Τρίτον διάστημα 9—27 (ἡ τρίτη διάστασις ἢ τρίτη ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 27 εἶναι

$$\frac{2 \,.\, 9 \,.\, 27}{9+27} = \frac{486}{36} = \frac{27}{2} \,.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 9 καὶ 27 εἶναι

$$\frac{9+27}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$9 \;:\; \frac{27}{2} = 18 \;:\; 27.$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 9 = κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $9 \,.\, \frac{9}{8} = \frac{81}{8} =$ re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $\frac{81}{8} \,.\, \frac{9}{8} = \frac{729}{64} =$ mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{2} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι 18 = sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $18 \,.\, \frac{9}{8} = \frac{162}{8} = \frac{81}{4} =$ la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{162}{8} \,.\, \frac{9}{8} = \frac{1458}{64} = \frac{729}{32} =$ si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι 27 = ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

14. Ἀναγράφομεν κατωτέρω ἐν ἀνακεφαλαιώσει τὰς ἓξ μουσικὰς κλίμακας, τὰς ὁποίας νοεῖ, κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, τὸ χωρίον τοῦ Τιμαίου (35b—36c).

Πρώτη κλῖμαξ

ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Δευτέρα κλῖμαξ

2	$\frac{9}{4}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{27}{8}$	$\frac{243}{64}$	4

Τρίτη κλῖμαξ

4	$\frac{9}{2}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{27}{4}$	$\frac{243}{32}$	8

*

Τετάρτη κλῖμαξ

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{81}{32}$	3

Πέμπτη κλῖμαξ

3	$\frac{27}{8}$	$\frac{243}{64}$	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{27}{4}$	$\frac{243}{32}$	9

Ἕκτη κλῖμαξ

9	$\frac{81}{8}$	$\frac{729}{64}$	$\frac{27}{2}$	18	$\frac{81}{4}$	$\frac{729}{32}$	27

*

15. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μετατρέψωμεν τὰς συχνότητας τῶν φθόγγων εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῆς πρώτης κλίμακος (384) καὶ μετατρέπομεν ὅλους τοὺς φθόγγους αὐτῆς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα. Ἀκολούθως μετατρέπομεν τοὺς φθόγγους τῶν λοιπῶν πέντε κλιμάκων εἰς ὁμώνυμα κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὸν 384. Παραλείποντες τοὺς παρονομαστὰς καὶ τῶν ἓξ κλιμάκων, λαμβάνομεν τὰς κάτωθι ἓξ ὀκτάβας, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες τῶν φθόγγων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Κατὰ ταῦτα εἶναι :

Πρώτη Κλῖμαξ

ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
do	re	mi	fa	sol	la	si	do
384	432	486	512	576	648	729	768

Δευτέρα κλῖμαξ

768	864	972	1024	1152	1296	1458	1536

Τρίτη κλῖμαξ

1536	1728	1944	2048	2304	2592	2916	3072

*

Τετάρτη κλῖμαξ

384	432	486	576	768	864	972	1152

Πέμπτη κλῖμαξ

1152	1296	1458	1728	2304	2592	2916	3456

Ἕκτη κλῖμας

3456	3888	4374	5184	6912	7776	8748	10368

Θεωροῦμεν πιθανὸν ὅτι ὁ Πλάτων λαμβάνει ἓξ μουσικὰς κλίμακας, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός, ἤτοι εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὰ μέρη του ($1 + 2 + 3 = 6$).

APERÇU

Contribution à l'interprétation d'un passage du dialogue Timée de Platon, se rapportant à la musique (35b - 36c).

Par. EVANGELOS S. STAMATIS

A'

A titre d'introduction est donné un extrait d'Archytas de son traité «**sur la musique**», que nous trouvons dans les commentaires de Porphyre sur les **harmoniques** de Ptolémée et sont démontrées les inégalités des rapports formés avec les termes des médiétés arithmétique et harmonique, dont les preuves ont été perdues (§ 1).

Ensuite sont rapportées les indications données par Nicomaque, Théon de Smyrne et Jamblique au sujet des médiétés arithmétique, géométrique, harmonique et de la proportion musicale (§ 2, 3).

Aussi est donnée la construction de la gamme musicale Pythagoricienne par Philolaos (§ 6, 7, 8, 9).

B'

Dans les deux progressions géométriques que forme Platon, il est clair qu'il existe en tout six intervalles musicaux, à savoir : trois dans chaque progression géométrique, soit :

1—2, 2—4, 4—8 (trois intervalles doubles)
1—3, 3—9, 9—27 (trois intervalles triples)

Dans chacun de ces six intervalles il forme la proportion musicale, dont le deuxième terme est la moyenne harmonique des termes extrêmes de la proportion et le troisième terme est la moyenne arithmétique de ces mêmes termes extrêmes. De sorte que les six proportions musicales seraient :

a) $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$, b) $2 : \frac{8}{3} = 3 : 4$, c) $4 : \frac{16}{3} = 6 : 8$

d) $1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$, e) $3 : \frac{9}{2} = 6 : 9$, f) $9 : \frac{27}{2} = 18 : 27$ (§ 10,11)

Ensuite, il forme en partant des trois premières proportions musicales, trois gammes musicales pythagoriciennes (§ 12), dans lequelles on trouve les intervalles un plus un demi, un plus un tiers et un plus un huitième. Ce n'est que dans ces trois gammes que

a) $\frac{4}{3} : \frac{51}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$,

b) $\frac{8}{3} : \frac{81}{32} = 4 : \frac{243}{64} = \frac{256}{243}$,

c) $\frac{16}{3} : \frac{81}{16} = 8 : \frac{243}{32} = \frac{257}{243}$.

Est aussi concevable la formation de trois autres gammes musicales (§ 13) en partant des proportions musicales d, e, f, dans lesquelles toutefois ne se trouvent pas les intervalles un plus un demi*, et un plus un tiers, pas plus que le rappor $\frac{256}{243}$, mais seulement les intervalles un plus un huitième et

a) $\frac{3}{2} : \frac{81}{64} = 3 : \frac{81}{32} = \frac{32}{27}$,

b) $\frac{9}{2} : \frac{243}{64} = 9 : \frac{243}{32} = \frac{32}{27}$,

c) $\frac{27}{2} : \frac{729}{64} = 27 : \frac{729}{32} = \frac{32}{27}$.

En prenant comme unité le chiffre 384, soit le plus petit commun multiple des dénominateurs des notes de la première gamme musicale, nous convertissons les notes des six gammes musicales en nombres entiers exprimant des fréquences de cordes vibrantes, bien entendu de longueurs différentes (§ 14, 15).

*excepté un

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἀριστείδου Κοϊντιλιανοῦ, Περὶ μουσικῆς, I § 8 p. 15, ἔκδ. R. P. Winnington - Ingram, B. G. Teubner, Λειψία 1963 (Aristides Quintilianus, de musica I 8).

Πλουτάρχου Ἠθικὰ VI. 1. Περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ ψυχογονίας, ἔκδ. C. Hubert, B. G. Teubner, Λειψία 1954 (Plutarchi Moralia Vol. VI. 1. 1012).

Πλουτάρχου Ἠθικὰ VI. 3. Περὶ μουσικῆς, ἔκδ. K. Ziegler - M. Pohlenz, B. G. Teubner, Λειψία 1953 (Plutarchi Moralia VI. 3, 1131).

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Πλάτωνος, τόμ. II σ. 211—231, ἔκδ. E. Diehl, B. G. Teubner, Λειψία 1904. (Proclus Diadochus in Platonis Timaeus commentaria).

Ψελλὸς Μιχαήλ. Εἰς ψυχογονίαν Πλάτωνος, Πατρολογία Migne τόμ. 122, στήλη 1078. (Psellos, Michael, Patrologia graeca tom. 122 col. 1078).

Diels Hermann. Fragmente der Vorsokratiker I (Archytas, Philolaos).

Moutsopoulos, Evanghélos. La musique dans l'oeuvres de Platon, Presses Universitaires de France, Paris 1959.

Pauly - Wissowa R. E. Musik.

Rivaud, Albert. Platon oeuvres complètes, tome X, Timée - Critias, p. 42—52, Les Belles Lettres (C. Budé, Paris 1949).

Taylor, A. E. A commentary of Plato's Timaeus, Oxford 1928.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ ΠΑΡ' ΑΡΧΙΜΗΔΕΙ

Καθηγητῇ ΙΩΣΗΦ Ε. ΧΟΦΜΑΝ

Ἐπὶ τῇ 68ῃ ἐπετείῳ ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του (7. 3. 1900)

POWERS WITH FRACTIONAL EXPONENTS BY ARCHIMEDES

For Prof. Dr. JOSEPH E. HOFMANN

On his 68th Birthday

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΘ΄ (1967), τεύχη 37/38

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ ΠΑΡ' ΑΡΧΙΜΗΔΕΙ

Καθηγητῇ **ΙΩΣΗΦ Ε. ΧΟΦΜΑΝ**

Ἐπὶ τῇ 68ῃ ἐπετείῳ τῆς γεννήσεώς του (7.3.1900)

1. **Ὁ Ἀρχιμήδης** εἰς τὸ 8. πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀποδεικνείει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον μὲν τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, εἰς τὴν $\frac{3}{2}$ δύναμιν.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ σφαιρικὰ τμήματα $\text{ΑΒΓ} > \text{ΑΔΓ}$ θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα.

$$\frac{\text{σφ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. τμ. ΑΔΓ}} < \left(\frac{\text{ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{ἐπιφ. ΑΔΓ}}\right)^2 \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{\text{σφ, τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. τμ. ΑΔΓ}} > \left(\frac{\text{ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{ἐπιφ. ΑΔΓ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

2. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἕπεται ὅτι αὗται εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν ἀρχιμηδείων ἔργων συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι αἱ βοηθητικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας οὗτος χρησιμοποιεῖ ἀναποδείκτως εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεών του, ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων αὐτοῦ Μαθηματικῶν. Ἐνδεικτικῶς πρὸς τοῦτο ἀναφέρομεν τὴν ἀναποδείκτως χρησιμοποιουμένην πρότασιν ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3, καθ' ἣν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Τὴν πρότασιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 3. θεώρημα τῆς πραγματείας αυτοῦ Κύκλου μέτρησις.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης προτάσεως, καίτοι αὕτη ἀπαντᾷ διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, δὲν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Διότι ὑπάρχουν τεκμήρια τοῦ συγγενοῦς πρὸς τοῦτον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2, τοῦ ἐπιτυγχανομένου διὰ τῶν καλουμένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ὅστις ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους (Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, Leipzig 1878, σελ. 42—45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος II, ἔκδ. Kroll. Leipzig σελ. 24 καὶ 393. Ταῦτα ἀναπτύσσονται εἰς Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλία V—IX, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8 κ.ἑ.).

3. Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἴτε ὑπὸ ἀριθμητικὴν εἴτε ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν, ἀνεπτύχθη συγχρόνως πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Ἡ γνώμη αὕτη ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς ἐνδείξεων:

α΄. Ἐκ τοῦ Θυμαριδείου Ἐπανθήματος. Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο καλεῖται μέθοδος ἐπιλύσεως προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ν—1 ἐξισώσεων καὶ ν ἀγνώστων, ἤτοι

$$\begin{aligned} x+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{\nu-1} &= S \\ x+x_1 &= S_1 \\ x+x_2 &= S_2 \\ x+x_{\nu-1} &= S_{\nu-1} \end{aligned}$$

Κατὰ τὸν ἐκ Πάρου μαθηματικὸν καὶ μαθητὴν τοῦ Πυθαγόρου **Θυμαρίδαν,** ἀκμάσαντα περὶ τὸ 500 π. Χ., ὅτε ὁ **Πυθαγόρας** ἦτο ἤδη γέρων, ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εἶναι

$$x = \frac{(S_1+S_2+\ldots\ldots+S_{\nu-1})-S}{\nu-2}$$

(Ε. Σταμάτη, Τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, «Πλάτων» ἔτος Δ΄—τεῦχος Α 1952 σελ. 123—142).

Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀναφέρει τὸ πρόβλημα τοῦτο, μνημονεύει καὶ τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως:

$$\textbf{1.}\quad \begin{aligned} x+y &= 2\,(z+u) \\ x+z &= 2\,(y+u) \\ x+u &= 2\,(y+z) \end{aligned}$$

[Ἐνταῦθα ἀναφέρει ἀκόμη $x+y+z+u= 5\,(y+z)$]

$$\text{καὶ}\quad \textbf{2.}\quad \begin{aligned} x+y &= \frac{3}{2}\,(z+u) \\ x+z &= \frac{4}{3}\,(y+u) \\ x+u &= \frac{5}{4}\,(y+z)\,\cdot \end{aligned}$$

Αἱ λύσεις καὶ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μνημονευομένων προβλημάτων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου λεκτικῶς μόνον καὶ ἄνευ συμβολισμοῦ τινος (Ἰάμβλιχος, εἰς Νικομάχου Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν, H. Pistelli, Leipzig 1894, σελ. 62 κ.ἑ.).

β'. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων VIII καὶ IX τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται θεωρήματα περὶ γεωμετρικῶν προόδων.

γ'. Ἐκ τῶν δέκα πρώτων θεωρημάτων τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου γίνεται ἀπόδειξις ἀλγεβρικῶν ταὐτοτήτων.

δ'. Ἐκ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις (α καὶ β) ἡ Ἄλγεβρα σπουδάζεται ἀριθμητικῶς, ἐν ᾧ εἰς τὰς περιπτώσεις γ καὶ δ γεωμετρικῶς.

4. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ἐκφραζομένους ὅμως ἐμμέσως, ἀπαντῶμεν καὶ εἴς τινα θεωρήματα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων ταῦ Εὐκλείδου. Δὲν ἀναφέρεται εἰς αὐτὰ ὅμως σαφῶς ὅτι πρόκειται περὶ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ὅπως τοῦτο γίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ X 27 θεώρημα τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται δύο εὐθεῖαι «μέσαι», αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ῥητόν. Αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$$

κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, ὅπου ρ εἶναι εὐθεῖα ῥητή, καὶ α,β ἀκέραιοι ἀριθμοί. (Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλίον X, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι 1957, σελ. 251).

5. **Ὁ Ἀρχιμήδης** κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου προβλήματος καταλήγει εἰς τὰς σχέσεις

$$\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{ZH}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{\Theta B}{BE=BK}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{KZ}{ZH}$$

καὶ συμπεραίνει ἀμέσως, παραλείπων τοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμοὺς ὡς εὐκόλους καὶ γνωστούς, ὅτι

$$\frac{\Theta Z}{ZH} > \left(\frac{KZ}{ZH}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Εἶναι δὲ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ΘΖ=σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, ΖΗ=σφαιρικὸν τμῆμα ΑΔΓ, καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος ΚΖ=ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΓ, καὶ ΖΗ=ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΔΓ.

6. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους **Εὐτόκιος** παρέχει τὴν ἑξῆς ἑρμηνείαν τῆς εὑρέσεως τῆς δυνάμεως μὲ τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην:

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ > Γ > Δ καὶ ἂς εἶναι

$$\frac{AB^2}{\Gamma^2} > \frac{\Gamma}{\Delta}. \ (1). \quad \text{Λέγω, ὅτι} \ \frac{AB}{\Delta} > \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Διότι, ἂς ληφθῇ τῶν Γ,Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε. [Ὁπότε εἶναι

$$\frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}, \quad \frac{\Gamma^2}{E^2} = \frac{E^2}{\Delta^2} = \frac{\Gamma \times E}{E \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta}, \quad (2).$$

Ταῦτα θεωρεῖ εὐκόλως ἐννοούμενα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 9 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου]. Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $\frac{AB}{\Gamma} > \frac{\Gamma}{E}$. Λαμβάνει εὐθεῖάν τινα $BZ < AB$, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{BZ}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E}$ [ὁπότε αἱ εὐθεῖαι ΒΖ,Γ,Ε,Δ ἀποτελοῦν τέσσαρας συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, ἤτοι εἶναι

$$\frac{BZ}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}, \quad \frac{BZ^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{E^3} = \frac{E^3}{\Delta^3} = \frac{BZ \times \Gamma \times E}{\Gamma \times E \times \Delta} = \frac{BZ}{\Delta} \quad (3).$$

Ταῦτα ἕπονται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου].

Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\frac{BZ}{\Delta} = \frac{\Gamma^3}{E^3}$, (4). Εἶναι δὲ ἐκ τῆς (2) καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Gamma^2}{E^2}$, (5).

Εἶναι ἄρα $\frac{BZ}{\Delta} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$, (6). [Διότι ἐκ τῆς (5) λαμβάνει $\frac{\Gamma}{E} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}$ καὶ κατόπιν $\left(\frac{\Gamma}{E}\right)^3 = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$ καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) ἕπεται ἡ (6)].

Ἐπειδὴ δὲ $AB > BZ$, ἕπεται $\frac{AB}{\Delta} > \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$.

7. Ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἑρμηνείας τοῦ Εὐτοκίου, ἡ εὕρεσις δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τὴν γενίκευσιν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 γνωρίζει ὁ Εὐκλείδης, ἀλλὰ δὲν τὴν ἀναφέρει, ὡς εὐκόλως νοητήν. Κατωτέρω διαμνημονεύομεν τὴν ἑρμηνείαν τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἀκολούθως δὲ τὴν ἐκ τούτων προκύπτουσαν γενίκευσιν, ἡ ὁποία ἐνθυμίζει εἰς ἡμᾶς τὴν γνωστὴν εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (Vollständige Induktion).

Εὐκλείδου V ὁρισμὸς 9. Ἔστωσαν τρεῖς συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου Α, Β, Γ ἤτοι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν $\frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{\Gamma^2} = \frac{A \times B}{B \times \Gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

Εὐκλείδου V ὁρισμὸς 10. Ἔστωσαν τέσσαρες συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου Α, Β, Γ, Δ ἤτοι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{\Delta^3} = \frac{A \times B \times \Gamma}{B \times \Gamma \times \Delta} = \frac{A}{\Delta}.$$

Ἡ γενίκευσις τῶν ἀνωτέρω Εὐκλειδείων ὁρισμῶν

Ἔστωσαν ν τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου

$A, B, \Gamma, \Delta, \ldots\ldots, K, \Lambda, M$ ἤτοι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}$, (7).

Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\frac{A^{\nu-1}}{B^{\nu-1}} = \frac{B^{\nu-1}}{\Gamma^{\nu-1}} = \frac{\Gamma^{\nu-1}}{\Delta^{\nu-1}} = \ldots\ldots \frac{K^{\nu-1}}{\Lambda^{\nu-1}} = \frac{\Lambda^{\nu-1}}{M^{\nu-1}} = \frac{A \times B \times \Gamma \times \ldots \times K \times \Lambda}{B \times \Gamma \times \ldots \times \Lambda \times M} = \frac{A}{M}, \quad (8).$$

Γενίκευσις τῆς εὑρέσεως δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην τῆς μορφῆς

$$\frac{\nu-1}{\nu-2} \quad (\nu=4, 5, 6 \ldots\ldots).$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ν—1 τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, παραλείποντες τὸν πρῶτον ὅρον A εἰς τὴν σχέσιν (7), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M},$$

$$\frac{B^{\nu-2}}{\Gamma^{\nu-2}} = \frac{\Gamma^{\nu-2}}{\Delta^{\nu-2}} = \ldots\ldots = \frac{K^{\nu-2}}{\Lambda^{\nu-2}} = \frac{\Lambda^{\nu-2}}{M^{\nu-2}} = \frac{B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K \times \Lambda}{\Gamma \times \Delta \times \ldots\ldots \times \Lambda \times M} = \frac{B}{M}, \quad (9).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν $\frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{1}{\nu-2}}$, (10), καὶ ἐκ ταύτης $\left(\frac{B}{\Gamma}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-2}}$, (11). Ἐκ τῶν (8) καὶ (11) εἶναι

$$\frac{A}{M} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-2}}, \quad (\nu=4, 5. 6 \ldots\ldots).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων θεωροῦμεν φανερὸν ὅτι δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας τῆς μορφῆς $\frac{\nu-1}{\nu-2}$ $(\nu = 4, 5, 6 \ldots\ldots)$ ἦσαν γνωσταὶ πολὺ πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ πότε διὰ πρώτην φορὰν ἔγινεν ἡ σπουδὴ αὐτῶν. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψει τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἀποδίδονται κατὰ μέγα μέρος εἰς τοὺς Πυθαγορείους, καταλήγομεν εἰς τὴν πιθανότητα ὅτι ἡ σπουδὴ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὸν 5ον αἰῶνα π.Χ. ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων.

SUMMARY

For Prof. Dr. JOSEPH E. HOFMANN

On his 68th Birthday

POWERS WITH FRACTIONAL EXPONENTS BY ARCHIMEDES

Powers with fractional exponents we meet for the first time in the history of Mathematics to the 8th problem of the second book of Archimedes work about sphere and cylinder.

The ancient Greeks developed the algebra contemporarily to tbe arithmetic and geometry. This is concluded from the «bloom» of Thymaridas and from the books II, V, VIII, IX, X of Euclid's Elements.

Powers with fractional exponents, but expressed indirectly and not visibly, we are finding in to the X book of Euclid's Elements, as e.g. to the X 27, where the two medial straight lines are of the form :

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ and } \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

The use of powers with fractional exponents by Archimedes without any proof, means that the study of them has been done long time before of the Archimedes. As it is concluded from the commentaries of Eutokios to the above 8th problem of Archimedes, the study of those powers is supported to the definitions 9 and 10 of the V book of the Euclid's Elements.

Which period for the first time have being showed those definitions, which constitutes theorems of general aspect, is unknown.

We are including these definitions :

Euclid V defin. 9. Let it be three continuous terms of geometrical progression, the A, B, Γ, that is $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$.

From these are $\frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{\Gamma^2} = \frac{A \times B}{B \times \Gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

Euclid V defin. 10. Let it be four continuous terms of geometrical progression, the A, B, Γ, Δ, that is $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

From these are $\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{\Gamma^3} = \frac{A \times B \times \Gamma}{B \times \Gamma \times \Delta} = \frac{A}{\Delta}$.

And in generaι

Let it be the goemetrical progression A, B, Γ, Δ, ... , K, Λ, M of continuous terms, that is

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\ldots\ldots=\frac{K}{\Lambda}=\frac{\Lambda}{M}, \quad (1).$$

From these are

$$\frac{A^{n-1}}{B^{n-1}}=\frac{B^{n-1}}{\Gamma^{n-1}}=\frac{\Gamma^{n-1}}{\Delta^{n-1}}=\ldots\ldots=\frac{K^{n-1}}{\Lambda^{n-1}}=\frac{\Lambda^{n-1}}{M^{n-1}}=$$

$$=\frac{A\times B\times\Gamma\times\ldots\ldots\times K\times\Lambda}{B\times\Gamma\times\Delta\times\ldots\ldots\times K\times\Lambda\times M}=\frac{A}{M}, \quad (2).$$

If to the geometrical progression A, B, Γ, ... , K, Λ, M we are going to omit the first term A, we shall have from the remaining n—1 terms

$$\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}=\ldots\ldots\frac{K}{\Lambda}=\frac{\Lambda}{M}.$$

From these are

$$\frac{B^{n-2}}{\Gamma^{n-2}}=\frac{\Gamma^{n-2}}{\Delta^{n-2}}=\ldots\ldots=\frac{K^{n-2}}{\Lambda^{n-2}}=\frac{\Lambda^{n-2}}{M^{n-2}}=\frac{B\times\Gamma\times\Delta\times\ldots\ldots\times K\times\Lambda}{\Gamma\times\Delta\times\ldots\ldots\times\Lambda\times M}=\frac{B}{M}, \quad (3).$$

From the (3) we get

$$\frac{B}{\Gamma}=\left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{1}{n-2}}, \ (4) \text{ and from these we have} \left(\frac{B}{\Gamma}\right)^{n-1}=\left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}, \quad (5).$$

From the (2,5) we get $\frac{A}{M}=\left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$, (n=4, 5, 6 . . . . .).

We believe very probable that the study of the powers with fractional exponents, has been done by the Pythagoreans during the 5th century b. C.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ Ι

Καθηγητῆ ΠΕΡΙΚΛΕΙ ΣΙΜΩ

Ἐπὶ τῆ 80ῃ ἐπετείῳ ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του

ARCHIMEDEA I

For Prof. PERIKLES SIMOS

On his 80th Birthday

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΘ′ (1967), τεύχη 37/38

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΦΥΛΗΣ 32 – ΑΘΗΝΑΙ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ I

Καθηγητῇ ΠΕΡΙΚΛΕΙ ΣΙΜΩ

Ἐπὶ τῇ 80ῃ ἐπετείῳ ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του

Ὁ πρῶτος τόμος τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους ἐξεδόθη ὑπὸ τοῦ J. L. Heiberg εἰς δευτέραν ἔκδοσιν ἐν Λειψίᾳ κατὰ τὸ 1910. Κατὰ τὸ 1928 ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca ἐδημοσίευσε περιγραφὴν κώδικος ἀφορῶντος εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Ψαμμίτης (Arenarius), εὑρισκομένου εἰς τὸ Ἀστεροσκοπεῖον Radcliffe τῆς Ὀξφόρδης, τὸν ὁποῖον, κατὰ τὸν Vacca, δὲν κατώρθωσε νὰ ἀνεύρῃ ὁ Heiberg [G. Vacca intorno ad un codice poco noto dell' Arenario di Archimede, nell' Osservatorio Radcliffe di Oxford : Rendiconti della R. Accademia dei Lincei IV 1928 (501—506). L' Année Philologique tom. IV 1930. Description d' un codex d' Archimède que Heiberg n' avait pas reussi à trouver et qui existe réellement à Oxford dans l' Observatoire Radcliffe sous la cote E. a 1.].

Κατὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους, εἰς τὸν ὁποῖον περιλαμβάνεται ἡ πραγματεία Ψαμμίτης, θὰ γράψωμεν περὶ αὐτοῦ τοῦ κώδικος.

Εἰς τὸν πρῶτον τόμον, τὸν ὁποῖον θὰ ἐκδώσωμεν προσεχῶς ἐν Ἀθήναις, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς β' ἐκδόσεως Heiberg, 1910, ἔχομεν ἐπιφέρει μικράς τινας διορθώσεις καὶ συμπληρώσεις ὡς ἑξῆς :

Σελὶς	4, 17.	Ἀντὶ *ἀπόφασιν* ἐτέθη *ἀπόφανσιν*
»	6, 1.	Ἀντὶ *ΑΞΙΩΜΑΤΑ* ἐτέθη ⟨*ΟΡΟΙ*⟩
»	8, 9.	Ἀντὶ *καὶ τῆς εὐθείας* ἐτέθη *[καὶ τῆς εὐθείας]*
»	18, 3.	Ἀντὶ *ΝΞΟ* ἐτέθη *ΟΝΞ*
»	24, 9.	Μετὰ τὸ *ΑΒΓ* ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*τρίγωνον*⟩
»	52.	Πρὸ τοῦ 1ου στίχου ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*Πόρισμα*⟩
»	52.	Μετὰ τὸν 12ον στίχον ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*Πόρισμα*⟩
»	74, 8.	Ἀντὶ *εἰσίν* ἐτέθη *εἰσὶν* ⟨*ἐκεῖνοι*⟩.
»	90.	Μετὰ τὸν 14ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ κγ' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨'Εὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας⟩.

Σελὶς 102, 5. 'Αντὶ *ἴσος* ἐτέθη *⟨ὅς⟩ ἴσος*

» 106. Μετὰ τὸν 10ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ κη' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨'Εὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας⟩.

Σελὶς 112, 9. 'Αντὶ $X\Sigma$ ἐτέθη XM

» 122, 5. Μετὰ τὴν λέξιν *πλευρὰν* ἐτέθη *⟨πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου⟩*

Σελὶς 124, 1. Μετὰ τὴν λέξιν *περιγεγραμμένου* ἐτέθη *⟨πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου⟩*

» 126, 17· Μετὰ τὴν λέξιν *περιγεγραμμένον* ἐτέθη *⟨πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον⟩*

Σελὶς 126, 24. Μετὰ τὴν λέξιν *ἐναλλὰξ* ἐτέθη *⟨πολλῷ ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον·⟩*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σελὶς 134. Μετὰ τὸν 17ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ λς' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨Ἐὰν ἐν τμήματι μεγίστου κύκλου σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον ἐγγραφῇ χωρὶς τῆς βάσεως, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος⟩.

Σελὶς 138,9. Μετὰ τὴν λέξιν *τμήματι* ἐτέθη *⟨τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου⟩*

Σελὶς 142. Μετὰ τὸν 25ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ λθ' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφανείας⟩.

Σελὶς 150. Μετὰ τὸν 16ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ μα' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ⟩.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Σελὶς 150, 20. Πρὸ τῆς λέξεως *ἀρτιόγωνον* ἐτέθη ⟨*ἰσόπλευρον καὶ*⟩

Σελὶς 152, 4. Μετὰ τὴν λέξιν *κώνῳ* ἐτέθη ⟨*πρὸς τὸ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ*⟩

Σελὶς 160, 25 καὶ 27 Μετὰ τὴν λέξιν *δύο* ἐτέθη ⟨*εὐθεῖαι*⟩

» 162, 14. Μετὰ τὴν λέξιν *μένου* ἐτέθη ⟨*πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου*⟩

Σελὶς 258. Μετὰ τὸν στίχον 18 ἐτέθη ὡς τίτλος ἡ λέξις ⟨*ΟΡΟΙ*⟩

Σελὶς 260. Μετὰ τὸν στίχον 16 ἐτέθη ὡς τίτλος ἡ λέξις ⟨*ΛΗΜΜΑ*⟩

Σελὶς 266, 2. Ἀντὶ *κα γραμμαὶ* ἐτέθη *κα* ⟨*εὐθεῖαι*⟩ *γραμμαὶ*

» 344, 24. Μετὰ τὴν λέξιν *ἄξονα* ἐτέθη ⟨*τὸν αὐτόν*⟩.

» 350, 15. Ἀντὶ *ΔΙ* ἐτέθη *ΔΒ* (*).

» 350, 23. Ἀντὶ *ΔΙ* ἐτέθη *ΔΒ* (*)

» 398, 28. Μετὰ τὴν λέξιν *ἀφαιρημένους* ἐτέθη ⟨*γνώμονας*⟩

Σελὶς 414, 24. Μετὰ τὴν λέξιν *τετραγώνῳ* ἐτέθη ⟨*τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΧ*⟩

* S. Heller, Abh. der Bayrischen Akad. d. Wiss. N. Folge 63,1954.

Ἡ γλῶσσα τῆς πραγματείας Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων εἶναι ἡ σικελικὴ δωρικὴ διάλεκτος. Οἱ κατὰ καιροὺς ὅμως ἀντιγραφεῖς ἔχουν ἐπιφέρει μερικὰς μεταβολάς, ὅπως π.χ. εἰς τὰς λέξεις : σημεῖον, ἥμισυς, ἡμικύκλιον, ἡμιόλιον, σχῆμα, αἵτινες ἔπρεπε νὰ γράφωνται : σαμεῖον, ἅμισυς, ἁμικύκλιον, ἁμιόλιον, σχᾶμα. Ἡ γραφὴ σαμεῖον ἀπαντᾷ εἰς τὸ θεώρ. 15 τῆς πραγματείας Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων καὶ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς Περὶ ἑλίκων. Ἡ γραφὴ ἁμίσεον ἀπαντᾷ εἰς τὰ θεωρήματα 27 καὶ 28 τῆς Περὶ κωνοειδέων καί σφαιροειδέων. Ἡ γραφὴ ἁμιόλιος, εἰς τὸ τέλος τοῦ θεωρ. 28 τῆς αὐτῆς πραγματείας, ὡς καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ θεωρ. 8 τῆς πραγματείας Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων II.

ARCHIMEDEA I SUMMARY

For. Prof. PERIKLES SIMOS

On his 8oth Birthday

It is mentioned the Code reported by G. Vacca, which includes the treatise of Archimedes Arenarius.

The Code will be further discussed in vol. 2 of our forthcoming edition of the opera of Archimedes. Vol. I will soon be publisched in Athens.

Corrections and completions in this article are on vol. I (based on the J. L. Heiberg edition, 1910) and include also the restored text of the pronounciations of the destroyed theorems 23, 28, 36, 39, 41 of the Sphere and Cylinder I.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΜΕΝΑΝΔΡΟΥ ΨΗΓΜΑΤΑ

ΑΘΗΝΑΙ 1968

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Ἡ ἀνὰ χεῖρας μικρὰ συλλογὴ ῥήσεων τοῦ Μενάνδρου προέρχεται ἀπὸ ὁμιλίαν, ἡ ὁποία ἔγινε τὴν 8ην Μαΐου ἐ.ἔ. εἰς τὸ ἐν Ἀθήναις Ξενοδοχεῖον Ambassadeurs, ἐνώπιον ἐκλεκτοῦ ἀκροατηρίου τοῦ Ἀθηναϊκοῦ Φιλικοῦ Ὁμίλου Συμποσίων. Ὁ τίτλος τῆς ὁμιλίας ἦτο «Ψήγματα ἀπὸ τὸν Μένανδρον».

Προεισαγωγικῶς ἐδόθη ἡ ἐτυμολογία τῆς λέξεως ψῆγμα, ἡ ὁποία παράγεται ἀπὸ τὸ ῥῆμα ψήχω, τὸ ὁποῖον σημαίνει τρίβω, ξύνω ἢ ξυστρίζω ἄλογο. Τὰ λεπτότατα μόρια, τὰ ὁποῖα πίπτουν ἀπὸ τὸ ξυνόμενον ἀντικείμενον λέγονται ψήγματα. Ἡ λέξις ἀπαντᾷ τὸ πρῶτον εἰς τὸν Αἰσχύλον (Ἀγαμ. 442), κατόπιν εἰς τὸν Ἡρόδοτον (4. 195) καὶ εἰς μεταγενεστέρους συγγραφεῖς.

Διὰ τῆς λέξεως ψιχία δηλοῦνται μικρὰ ψίχουλα ψωμιοῦ. Ἡ λέξις ψιχίον ἀναφέρεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ κατὰ Ματθαῖον Εὐαγγέλιον (κεφ. 15, 27), ὅπου λέγεται «ναὶ Κύριε· καὶ γὰρ τὰ κυνάρια ἐσθίει ἀπὸ τῶν ψιχίων τῶν πιπτόντων ἀπὸ τῆς τραπέζης τῶν κυρίων αὐτῶν».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Ὁ κωμικὸς ποιητὴς **Μένανδρος** *ἐγεννήθη εἰς τὴν Κηφισίαν περὶ τὸ ἔτος 342 π.Χ., ἀπὸ πατέρα τὸν* **Διοπείθη** *καὶ μητέρα τὴν* **Ἡγεστράτην** *(κατά τινας Ἡγησιστράτην), ἀπέθανε δὲ εἰς τὰς Ἀθήνας περὶ τὸ 291 π.Χ· Ἔγραψεν 108 ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων ἐβραβεύθησαν ὀλίγα μόνον, διότι ὁ Μένανδρος δὲν ἐκολάκευε τὸ ἀθηναϊκὸν κοινόν.*

Τὸ πρῶτον ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον **Ὀργὴ** *ἐπαίχθη καὶ ἐβραβεύθη, ὅταν ἦτο 20 ἐτῶν, ἐν ᾧ κατ' ἄλλην πληροφορίαν ἔλαβε τὸ πρῶτον βραβεῖον, ὅταν ἦτο ἡλικίας 25 ἐτῶν. Ὁ Μένανδρος θεωρεῖται ὁ ἐκπρόσωπος τῆς λεγομένης νέας κωμῳδίας, ἐν ᾧ τῆς παλαιᾶς κωμῳδίας ἐκπρόσωπος λογίζεται ὁ* **Ἀριστοφάνης** *(445—386 π.Χ.), καὶ τῆς ἔτι παλαιοτέρας ὁ* **Ἐπίχαρμος,** *ὁ ὁποῖος ἔδρασεν εἰς τὰς Συρακούσας τῆς Σικελίας περὶ τὸ 500 π. Χ.*

Ἐπὶ ἑκατοντάδας ἔτη μετὰ τὸν θάνατόν του ὁ Μένανδρος ἐδέσποζε τῆς ἑλληνικῆς κωμῳδίας καὶ ἐχρησίμευσεν ὡς πρότυπον πολλῶν Λατίνων κωμῳδιογράφων. Τόση ἦτο ἡ φήμη του ἀνὰ τὸ Πανελλήνιον, σημειώνει ὁ **Πλούταρχος** *εἰς τὰ Συμποσιακὰ προβλήματα* (VII 8, 3 p. 711 F), *ὥστε γλέντι χωρὶς κρασὶ μποροῦσε νὰ γίνῃ, χωρὶς ὅμως νὰ διαβάσουν ἀποσπάσματα ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Μενάνδρου ἦτο ἀδύνατον νὰ γίνῃ γλέντι (οὕτω γὰρ ἐγκέκραται τοῖς συμποσίοις, ὡς μᾶλλον ἂν οἴνου χωρὶς ἢ Μενάνδρου διακυβερνῆσαι τὸν πότον).*

Ὅτι ἦτο περίφημος ψυχολόγος τονίζεται εὔστοχα καὶ ἀπὸ τὸν γραμματικὸν **Ἀριστοφάνη,** *ὁ ὁποῖος ἔγραψε: «ὦ Μένανδρε καὶ βίε ποιὸς ἀπὸ τοὺς δυό σας ἀντέγραψε τὸν ἄλλον;» δηλ. ὁ Μένανδρος ἀντέγραψε τὰς παρατηρήσεις του ἀπὸ τὴν ζωήν, ἢ ἡ ζωὴ ἀντέγραψε τὰ καθ' ἑαυτὴν ἀπὸ τὸν Μένανδρον;*

Εἰς τὸ λεξικὸν τοῦ Βυζαντινοῦ Σουΐδα διαβάζομεν ὅτι ἦτο στραβὸς τὰς ὄψεις (ἀλλοίθωρος) καὶ περὶ τὰς γυναῖκας ἐμμανέστατος, δηλ. φοβερὸς γυναικᾶς. Ἐκ τῶν ἔργων του ἀνεκαλύφθη πρὸ ὀλίγων ἐτῶν τὸ φέρον τὸν τίτλον **Δύσκολος,** *ἐν ᾧ τὰ ἄλλα ἐχάθησαν. Ἀπὸ μερικὰ σώζονται ἀποσπάσματα.*

Ἐλάχισται γνῶμαι δὲν ἑρμηνεύονται ὡς εὐκόλως κατανοηταί.

ΓΝΩΜΑΙ ΜΕΝΑΝΔΡΟΥ

Ἀναφαίρετον κτῆμ' ἐστὶ παιδεία βροτοῖς.
Εἰς τοὺς ἀνθρώπους ἡ παιδεία εἶναι κτῆμα ἀναφαίρετον.
Ἀθάνατον ἔχθραν μὴ φύλαττε θνητὸς ὤν.
Ἀφοῦ εἶσαι θνητὸς νὰ μὴ φυλάττης ἀθάνατη ἔχθρα.
Ἄνθρωπος ὢν μέμνησο τῆς κοινῆς τύχης.
Ἀφοῦ εἶσαι ἄνθρωπος νὰ ἐνθυμῆσαι τὴν κοινὴν τύχην.
Ἀνὴρ ἀχάριστος μὴ νομιζέσθω φίλος.
Ἄνθρωπος ἀχάριστος ἂς μὴ θεωρῆται φίλος.
Ἀεὶ δ' ὁ σωθεὶς ἐστιν ἀχάριστος φύσει.
Πάντοτε δὲ ὁ σωθεὶς (ὁ εὐεργετηθεὶς) εἶναι ἀχάριστος ἐκ φύσεως.
Ἅμ' ἠλέηται καὶ τέθνηκεν ἡ χάρις.
Μόλις δοθῆ ἡ εὐεργεσία καὶ λησμονεῖται ἀμέσως.
Ἄνευ δὲ λύπης οὐδὲ εἷς βροτῶν βίος.
Κανεὶς βίος τῶν ἀνθρώπων εἶναι ἄνευ λύπης.
Ἅπαντες ἐσμὲν εἰς τὸ νουθετεῖν σοφοί.
Εἰς τὸ νὰ συμβουλεύωμεν τοὺς ἄλλους ὅλοι εἴμεθα σοφοί.
Ἄγει τὸ θεῖον τοὺς κακοὺς πρὸς τὴν δίκην.
Ὁδηγεῖ τὸ θεῖον τοὺς κακοὺς πρὸς τὴν δίκην.
Ἄνθρωπος, ἱκανὴ πρόφασις εἰς τὸ δυστυχεῖν.
Τὸ ὅτι εἶσαι ἄνθρωπος εἶναι ἀρκετὸ διὰ νὰ εἶσαι δυστυχής.
Ἀεὶ πονηρόν ἐστι τ' ἀνθρώπων γένος.
Πάντοτε τὸ γένος τῶν ἀνθρώπων εἶναι πονηρόν.
Βάδιζε τὴν εὐθεῖαν, ἵνα δίκαιος ἦς.
Βάδιζε τὸν ἴσιο δρόμο, γιὰ νὰ εἶσαι δίκαιος.
Βέβαιον οὐδέν ἐστιν ἐν θνητῷ βίῳ.
Εἰς τὸν θνητὸν βίον τίποτε δὲν εἶναι βέβαιον.
Βιοῖ οὐδεὶς ὃν προαιρεῖται βίον.
Κανεὶς δὲν ζῆ ὅπως θέλει.
Βίος ἐστίν, ἄν τις τῷ βίῳ χαίρῃ βιῶν.
Ζωὴ εἶναι, ὅταν κανεὶς τὴν ζωὴ ζῶν τὴν χαίρεται.
Βουλὴ πονηρὰ χρηστὸν οὐκ ἔχει τέλος.
Σκέψις πονηρὰ δὲν ἔχει καλὸ τέλος.

Γάμος ἀνθρώποισιν εὐκταῖον κακόν.
Ὁ γάμος εἰς τοὺς ἀνθρώπους εἶναι ἀναγκαῖον κακόν.
Γνῶμαι δ᾽ ἀμείνους εἰσὶ τῶν γεραιτέρων.
Αἱ καλύτεραι γνῶμαι εἶναι τῶν γεροντοτέρων.
Γλώσσης μάλιστα πανταχοῦ πειρῶ κρατεῖν.
Νὰ προσπαθῇς παντοῦ πρὸ παντὸς νὰ κρατῇς τὴ γλῶσσα.
Γυναιξὶ πάσαις κόσμον ἡ σιγὴ φέρει.
Εἰς ὅλες τὶς γυναῖκες ἡ σιωπὴ δίνει ὀμορφιά.
Γυναικὸς ἐσθλῆς ἐστι σῴζειν οἰκίαν.
Ἴδιον τῆς καλῆς γυναικὸς εἶναι νὰ σῴζῃ τὸ σπίτι.
Γυνὴ οὐδὲν οἶδε πλὴν ὃ βούλεται.
Ἡ γυναῖκα δὲν ξεύρει τίποτε ἄλλο πλὴν ἐκεῖνο ποὺ θέλει.
Γυνὴ δικαία τοῦ βίου σωτηρία.
Γυναικὸς ἐσθλῆς ἐπιτυχεῖν οὐ ῥᾴδιον.
Δὲν εἶναι εὔκολο νὰ εὕρῃς καλὴ γυναῖκα.
Γυνὴ δὲ χρηστὴ πηδάλιον ἐστ᾽ οἰκίας.
Καλὴ δὲ γυναῖκα εἶναι τὸ τιμόνι τοῦ σπιτιοῦ.
Γυνὴ γυναικὸς πώποτ᾽ οὐδὲν διαφέρει.
Οὐδέποτε διαφέρει γυναῖκα ἀπὸ γυναῖκα.
Γυναικὶ μὴ πίστευε μηδ᾽ ὅταν θάνῃ.
Μὴ πίστευε τὴ γυναῖκα οὔτε ὅταν πεθάνῃ.
Δειναὶ αἱ γυναῖκες εὑρίσκειν τέχνας.
Αἱ γυναῖκες εἶναι φοβερὲς εἰς τὸ νὰ εὑρίσκουν τεχνάσματα.
Δεῖ τοὺς μὲν εἶναι δυστυχεῖς, τοὺς δ᾽ εὐτυχεῖς.
Πρέπει ἄλλοι μὲν νὰ εἶναι δυστυχεῖς, ἄλλοι δὲ εὐτυχεῖς.
Δίκαια δράσας συμμάχους ἕξεις θεούς.
Ὅταν κι νῃς δίκαια πράγματα θὰ ἔχῃς συμμάχους τοὺς θεούς.
Διάλυε, μὴ σύγκρουε μαχομένους φίλους.
Τοὺς μαχομένους φίλους νὰ τοὺς χωρίζῃς καὶ ὄχι νὰ τοὺς βάζῃς νὰ μαλώνουν.
Δίκαιον εὖ πράττοντα μεμνῆσθαι θεοῦ.
Εἶναι δίκαιον, ὅταν εὐτυχῇς νὰ θυμᾶσαι τὸν θεόν.
Διὰ τῆς σιωπῆς πικρότερον κατηγόρει.
Δυσπαρακολούθητόν τι πρᾶγμ᾽ ἐστὶν ἡ τύχη.
Κάπως δυσπαρακολούθητον πρᾶγμα εἶναι ἡ τύχη.
Δίκαιος ἀδικεῖν οὐκ ἐπίσταται τρόπος.
Δὲν ὑπάρχει δίκαιος τρόπος νὰ ἀδικῇ κανείς.
Διὰ τὰς γυναῖκας ὅλα τὰ κακὰ γίγνεται.
Γιὰ τὶς γυναῖκες γίνονται ὅλα τὰ κακά.

Δὶς ἐξαμαρτεῖν ταὐτὸν οὐκ ἀνδρὸς σοφοῦ.

Τὸ νὰ κάνῃ κανεὶς τὸ αὐτὸ σφάλμα δυὸ φορὲς δὲν εἶναι ἴδιον σοφοῦ ἀνδρός.

Δρυὸς πεσούσης πᾶς ἀνὴρ ξυλεύεται.

Ἐν ταῖς ἀνάγκαις χρημάτων κρείττων φίλος.

Εἰς τὰς ἀνάγκας ὁ φίλος εἶναι καλύτερος ἀπὸ τὰ χρήματα.

Ἐκ τῶν γυναικῶν ὄλλυται κόσμος μέγας.

Ἀπ' τὶς γυναῖκες καταστρέφεται κόσμος πολύς.

Ἔστιν δίκης ὀφθαλμὸς ὃς τὰ πάνθ' ὁρᾷ.

Εἰ μὴ φυλάσσῃς μικρ', ἀπολεῖς τὰ μείζονα.

Ἐὰν δὲν φυλᾷς τὰ μικρά, θὰ χάσῃς τὰ μεγαλύτερα.

Εἷς ἐστι δοῦλος τῆς οἰκίας ὁ δεσπότης.

Ἕνας εἶναι δοῦλος τοῦ σπιτιοῦ ὁ νοικοκύρης.

Ἐξ ἡδονῆς φύεται τὸ δυστυχεῖν.

Ἀπὸ τὴν ἡδονὴν φυτρώνει ἡ δυστυχία.

Εἰς τὰς μεταβολὰς δεῖ σε τῆς τύχης σκοπεῖν.

Πρέπει νὰ ἔχῃς ὑπ' ὄψει σου τὰς μεταβολὰς τῆς τύχης.

Ἔχει τὸ πικρὸν τῆς γεωργίας γλυκύ.

Ἡ πίκρα τῆς γεωργίας ἔχει καὶ κάποια γλύκα.

Εὐεργετῶν νόμιζε μιμεῖσθαι θεόν.

Ὅταν εὐεργετῇς νὰ νομίζῃς ὅτι μιμεῖσαι τὸν θεόν.

Ζήσεις βίον κράτιστον ἣν θυμοῦ κρατῇς.

Θὰ ζήσῃς κάλλιστον βίον ἂν συγκρατῇς τὸν θυμόν σου.

Ζήτει γυναῖκα σύμμαχον τῶν πραγμάτων.

Ζῶμεν οὐχ' ὡς θέλομεν, ἀλλ' ὡς δυνάμεθα.

Ζοῦμε ὄχι ὅπως θέλουμε, ἀλλ' ὅπως μποροῦμε.

Ζῆν βουλόμενος μὴ πράττε θανάτου ἄξια.

Ὅταν θέλῃς νὰ ζῇς νὰ μὴ κάνῃς πράγματα ἄξια θανάτου.

Ζῆν οὐκ ἔδει γυναῖκα κατὰ πολλοὺς τρόπους.

Γιὰ πολλοὺς λόγους ἡ γυναῖκα δὲν ἔπρεπε νὰ ζῇ.

Ζῶμεν ἀλογίστως προσδοκοῦντες μὴ θανεῖν.

Ζοῦμε ἀλόγιστα μὲ τὴν προσδοκία ὅτι δὲν θὰ πεθάνουμε.

Ἡ γλῶσσα πολλοὺς εἰς ὄλεθρον ἤγαγε.

Ἡ γλῶσσα κατέστρεψε πολλούς.

Ἢ λέγε τι σιγῆς κρεῖττον ἢ σιγὴν ἔχε.

Ἡ γλῶσσ' ἁμαρτάνουσα τ' ἀληθῆ λέγει.

Ἡ πατρίς, ὡς ἔοικε, φίλτατον βροτοῖς.

Ὅπως φαίνεται, ἡ πατρὶς εἶναι φίλτατον πρᾶγμα εἰς τοὺς ἀνθρώπους.

῏Η δεῖ σιωπᾶν ἢ λέγειν ἀμείμονα.
῏Η πρέπει νὰ σιωπᾷς ἢ νὰ λὲς καλύτερα τῆς σιωπῆς.
Ἡ κοιλία καὶ πολλὰ χωρεῖ καὶ ὀλίγα.
Θεὸν προτίμα, δεύτερον δὲ τοὺς γονεῖς.
Θάλασσα καὶ πῦρ καὶ γυνὴ τρίτον κακόν.
Θεράπευε τὸν δυνάμενον αἰεὶ σ' ὠφελεῖν.
Νὰ περιποιῆσαι πάντοτε ἐκεῖνον ποὺ μπορεῖ νὰ σὲ ὠφελῆ.
Θεῶν ὄνειδος τοὺς κακοὺς εὐδαιμονεῖν.
Εἶναι ντροπὴ εἰς τοὺς θεοὺς νὰ εὐτυχοῦν οἱ κακοί.
Θεῷ μάχεσθαι δεινόν ἐστι καὶ τύχῃ.
Εἶναι φοβερὸν νὰ μάχεται κανεὶς μὲ τὸν θεὸ καὶ τὴν τύχη.
Θεὸν μὲν ἡγοῦ, δεύτερον δὲ τὴν τύχην.
Πίστευε πρῶτα στὸ θεό, δεύτερο δὲ στὴν τύχη.
Θηρῶν ἁπάντων ἀγριωτέρα γυνή.
Ἀπὸ ὅλα τὰ θηρία τὸ ἀγριώτερο εἶναι ἡ γυναῖκα.
Θεοῦ οὐδεὶς χωρὶς εὐτυχεῖ βροτῶν.
Χωρὶς τὴ βοήθεια τοῦ θεοῦ δὲν εὐτυχεῖ κανεὶς ἄνθρωπος.
Θανάτου μόνον οὐκ ἔστιν ἐπανόρθωμα.
Θέλω τύχης σταλαγμὸν ἢ φρενῶν πίθον.
Θέλω μιὰ στάλα τύχη παρὰ ἕνα πιθάρι μυαλό.
Ἱερὸν ἀληθῶς ἐστιν ἡ συμβουλία.
Ἡ συμβουλὴ εἶναι πράγματι ἱερὸν πρᾶγμα.
Ἴσον θεῷ σου τοὺς φίλους τιμᾶν θέλε.
Νὰ θέλῃς νὰ τιμῶνται οἱ φίλοι σου ὅπως ὁ θεός σου.
Ἰσχυρὸν ὄχλος ἐστίν, οὐκ ἔχει δὲ νοῦν.
Ἰσχυρὸν πρᾶγμα εἶναι ὁ ὄχλος, ἀλλὰ μυαλὸ δὲν ἔχει.
Ἴσον ἐστὶν ὀργῇ καὶ θάλασσα καὶ γυνή.
Καὶ ἡ θάλασσα καὶ ἡ γυναῖκα κατὰ τὸν θυμὸ εἶναι τὰ ἴδια.
Ἴση λεαίνης καὶ γυναικὸς ὠμότης.
Ἡ ὠμότης τῆς λεαίνης καὶ τῆς γυναικὸς εἶναι ἴση.
Ἴσον ἐστιν εἰς πῦρ καὶ γυναῖκας ἐμπεσεῖν.
῏Η στὴ φωτιὰ πέσῃ κανεὶς ἢ στὶς γυναῖκες εἶναι τὸ ἴδιο.
Κάλλιστόν ἐστι κτῆμα παιδεία βροτοῖς.
Εἰς τοὺς ἀνθρώπους ἡ παιδεία εἶναι κάλλιστον κτῆμα.
Κρίνει φίλους ὁ καιρός, ὡς χρυσὸν τὸ πῦρ.
Ὁ καιρὸς κρίνει τοὺς φίλους, ὅπως ἡ φωτιὰ τὸ χρυσάφι.
Καιρῷ σκόπει τὰ πράγματ', ἄν περ νοῦν ἔχῃς.
Νὰ ἐξετάζῃς τὰ πράγματα ἀναλόγως τῶν περιστάσεων, ἂν βέβαια ἔχῃς μυαλό.

Κρεῖττον σιωπᾶν ἐστιν ἢ λαλεῖν μάτην.
Εἶναι προτιμότερον νὰ σιωπᾷ κανεὶς παρὰ νὰ λαλῇ ματαίως.
Κάλλιστα Μουσῶν φθέγγεται πλουτῶν ἀνήρ.
Ὁ πλούσιος μιλάει καλύτερα καὶ ἀπὸ τὰς Μούσας.
Λιμὴν πέφυκε πᾶσι παιδεία βροτοῖς.
Ἡ παιδεία ἐκ φύσεως εἶναι λιμάνι γιὰ ὅλους τοὺς ἀνθρώπους.
Λιμὴν νεὼς ὅρμος, βίου δ' ἀλυπία.
Τοῦ πλοίου μὲν λιμάνι εἶναι ὁ ὅρμος, τοῦ βίου δὲ ἡ ἀλυπία.
Λέοντι κρεῖττον ἢ γυναικὶ συμβιοῦν.
Εἶναι προτιμότερον νὰ συζῇ κανεὶς μὲ λέοντα παρὰ μὲ γυναῖκα.
Λύπης ἰατρός ἐστιν ὁ χρηστὸς φίλος.
Ἰατρὸς τῆς λύπης εἶναι ὁ καλὸς φίλος.
Μακάριος, ὅστις ἔτυχε γενναίου φίλου.
Μηδέποτε πειρῶ δύο φίλων εἶναι κριτής.
Νὰ ἀποφεύγῃς νὰ εἶσαι κριτὴς δύο φίλων.
Μετὰ τὴν δόσιν τάχιστα γηράσκει χάρις.
Ἡ εὐεργεσία μόλις δοθῇ γερνάει ἀμέσως (τὴν ξεχνοῦν ἀμέσως).
Μὴ λοιδόρει γυναῖκα μηδὲ νουθέτει.
Νὰ μὴ κατηγορῇς γυναῖκα οὔτε νὰ νουθετῇς.
Μὴ καταφρονήσῃς τοῦ πένητος εὐτυχῶν.
Νὰ μὴ περιφρονήσῃς τὸν φτωχό, ὅταν εὐτυχῇς
Νοεῖν ἐστι κρεῖττον καὶ σιγὴν ἔχειν.
Εἶναι καλύτερο νὰ ἐννοῇς καὶ νὰ σιωπᾷς.
Νόμιζ' ἀδελφοὺς τοὺς ἀληθινοὺς φίλους.
Νόμος γονεῦσιν ἰσοθέους τιμὰς νέμειν.
Εἶναι φυσικὸς νόμος ν' ἀποδίδωνται εἰς τοὺς γονεῖς τιμαὶ ἴσαι πρὸς τὰς τῶν θεῶν.
Νόμιζε γήμας δοῦλος εἶναι διὰ βίου.
Ἅμα παντρευθῇς νὰ νομίζῃς ὅτι εἶσαι ἰσόβιος δοῦλος.
Νόμιζε πλουτεῖν, ἂν φίλους πολλοὺς ἔχῃς.
Νόμιζε ὅτι εἶσαι πλούσιος, ἂν ἔχῃς πολλοὺς φίλους.
Νόσον δὲ κρεῖττόν ἐστιν ἢ λύπην φέρειν.
Εἶναι προτιμότερον νὰ εἶσαι ἄρρωστος παρὰ λυπημένος.
Ξένους πένητας μὴ παραδράμῃς ἰδών.
Ἅμα στὸ δρόμο δῇς φτωχοὺς ξένους νὰ μὴ τοὺς προσπεράσῃς.
Ξίφος τιτρώσκει σῶμα, τὸν δὲ νοῦν λόγος.
Τὸ ξίφος πληγώνει τὸ σῶμα, τὸν δὲ νοῦν ὁ λόγος.
Ξένους ξένιζε μήποτε ξένος γένῃ.
Νὰ φιλοξενῇς τοὺς ξένους μήπως καὶ σὺ γίνῃς ξένος.

Ξένῳ δὲ σιγᾶν κρεῖττον ἢ κεκραγέναι.

Εἶναι προτιμότερον δὲ ὁ ξένος νὰ σιωπᾷ παρὰ νὰ φωνάζῃ.

Οὐκ ἔστι λύπης χεῖρον ἀνθρώποις κακόν.

Δὲν ὑπάρχει χειρότερο κακὸ εἰς τοὺς ἀνθρώκους ἀπὸ τὴ λύπη.

Οὐδεὶς μετ' ὀργῆς ἀσφαλῶς βουλεύεται.

Κανένας ὠργισμένος δὲν σκέπτεται σωστά.

Ὀργῆς χάριν τὰ κρυπτὰ μὴ ἐκφάνῃς φίλου.

Ἕνεκα ὀργῆς νὰ μὴ φανερώσῃς ποτὲ τὰ μυστικὰ τοῦ φίλου.

Οὐκ ἐσθ' ὑγιείας κρεῖττον οὐδὲν ἐν βίῳ.

Δὲν ὑπάρχει καλύτερο πρᾶγμα στὴ ζωὴ ἀπὸ τὴν ὑγεία.

Ὀχληρός ἐστ' ἄνθρωπος ἐν νέοις γέρων.

Γέρων ἄνθρωπος μεταξὺ τῶν νέων εἶναι ἐνοχλητικός.

Οὐδὲν σιωπῆς ἔστι χρησιμώτερον.

Τίποτε δὲν εἶναι χρησιμώτερον τῆς σιωπῆς.

Ὀργὴ φιλούντων ὀλίγον ἰσχύει χρόνον.

Ὁ θυμὸς τῶν ἀγαπώντων βαστάει πολὺ λίγο καιρό.

Πολλῶν ὁ καιρὸς γίγνεται διδάσκαλος.

Πλὴν τῆς τεκούσης μὴ φιλεῖν ἄλλην θέλε.

Ἐκτὸς ἀπ' τὴ μητέρα μὴ θέλῃς ν' ἀγαπᾷς ἄλλη.

Πενίας βαρύτερον οὐδέν ἐστι φορτίον.

Δὲν ὑπάρχει βαρύτερο φορτίο ἀπὸ τὴ φτώχεια.

Πολλὰς μεταβολὰς ὁ βίος ἡμῶν λαμβάνει.

Ἡ ζωή μας παίρνει πολλὲς μεταβολές.

Προσέχων ὅδευε τὴν βίου μακρὰν ὁδόν.

Νὰ βαδίζῃς τὸν μακρὺ δρόμο τῆς ζωῆς μὲ προσοχή.

Πολὺ χεῖρόν ἐστιν ἐρεθίσαι γραῦν ἢ κύνα.

Εἶναι πολὺ χειρότερο νὰ ἐρεθίσῃς γρῃὰν ἢ σκυλί.

Ῥοπή 'στιν ἡμῶν ὁ βίος, ὥσπερ ὁ ζυγός.

Μιὰ στιγμιαία κίνησις πρὸς τὰ κάτω εἶναι ἡ ζωή, ὅπως ὁ ζυγός.

Ῥᾳθυμίαν φεῦγε καὶ κακοὺς φίλους.

Ἀπόφευγε τὴν τεμπελιὰ καί τοὺς κακοὺς φίλους.

Ῥῆμα παρὰ καιρὸν ῥηθὲν ἀνατρέπει βίον.

Μιὰ λέξις λεχθεῖσα ἀκαίρως ἀνατρέπει τὴ ζωή.

Στρέφει δὲ πάντα τὰν βίῳ μικρὰ τύχη.

Μικρὴ τύχη ἀλλάζει ὅλη τὴ ζωή.

Σοφία δὲ πλούτου κτῆμα τιμιώτερον.

Ἡ σοφία δὲ εἶναι τιμιώτερον κτῆμα ἀπὸ τὸν πλοῦτον.

Στῦλοι οἴκων παῖδες εἰσιν ἄρσενες.
Τ' ἀρσενικὰ παιδιὰ εἶναι στῦλοι τῶν σπιτιῶν.
Σέβου τὸ θεῖον μὴ ἐξετάζων πῶς ἔχει.
Νὰ σέβεσαι τὸ θεῖον χωρὶς νὰ ἐξετάζῃς τὶ εἶναι αὐτό.
Τύχη τέχνην ὤρθωσεν, οὐ τέχνη τύχην.
Ἡ τύχη βοηθάει τὴν τέχνην, ὄχι ὅμως ἡ τέχνη τὴν τύχην.
Τὴν τῶν κρατούντων μάθε φέρειν ἐξουσίαν.
Νὰ μάθῃς νὰ συμμορφώνεσαι πρὸς τὴν ἐξουσίαν τῶν κρατούντων.
Ταμιεῖον ἀρετῆς ἐστιν ἡ σώφρων γυνή.
Ταμεῖον ἀρετῆς εἶναι ἡ μυαλομένη γυναῖκα.
Τῶν εὐτυχούντων πάντες εἰσὶ συγγενεῖς.
Τῶν εὐτυχούντων ὅλοι εἶναι συγγενεῖς.
Τερπνὸν κακὸν πέφυκεν ἀνθρώποις γυνή.
Εὐχάριστον κακὸν εἶναι ἡ γυναῖκα εἰς τοὺς ἀνθρώπους.
Τοῦ ζῆν τὸ μὴ ζῆν ἐστιν αἱρετώτερον.
Εἶναι προτιμότερον νὰ μὴ ζῇ κανεὶς παρὰ νὰ ζῇ.
Ὕπνος τὰ μικρὰ τοῦ θανάτου μυστήρια.
Ὁ ὕπνος εἶναι τὰ μικρὰ μυστήρια τοῦ θανάτου.
Ὑπέρ εὐσεβείας καὶ λάλει καὶ μάνθανε.
Ὑπὲρ σεαυτοῦ μὴ φράσῃς ἐγκώμιον.
Ποτὲ νὰ μὴ ἐπαινῇς τὸν ἑαυτόν σου.
Ὑπερηφανία μέγιστον ἀνθρώποις κακόν.
Μέγιστον κακὸν εἰς τοὺς ἀνθρώπους εἶναι ἡ περηφάνεια.
Ὑπὲρ γυναικὸς καὶ φίλου πονητέον.
Γιὰ τὴ γυναῖκα καὶ τὸ φίλο πρέπει νὰ κοπιάζῃ κανείς.
Φοβοῦ τὸ γῆρας· οὐ γὰρ ἔρχεται μόνον.
Φύσιν πονηρὰν μεταβαλεῖν οὐ ῥᾴδιον.
Φίλος φίλῳ γὰρ συμπονῶν αὑτῷ πονεῖ.
Φίλος κοπιάζων διὰ τὸν φίλον κοπιάζει διὰ τὸν ἑαυτόν του.
Φίλος με λυπῶν οὐδὲν ἐχθροῦ διαφέρει.
Φίλους ἔχων νόμιζε θησαυροὺς ἔχειν.
Ἔχων φίλους νόμιζε ὅτι ἔχεις θησαυρούς.
Χαλεπὸν θυγάτηρ κτῆμα καὶ δυσδιάθετον.
Τὸ κορίτσι εἶναι δύσκολο καὶ δυσδιάθετο κτῆμα.
Χεὶρ χεῖρα νίπτει, δάκτυλοι δὲ δακτύλους.
Τὸ χέρι νίβει τὸ χέρι, τὰ δάκτυλα δὲ τὰ δάκτυλα.
Χρόνος δίκαιον ἄνδρα δείκνυσιν μόνος.
Μόνος ὁ χρόνος φανερώνει τὸν δίκαιο ἄνθρωπο.

Χάριν λαβὼν μέμνησο καὶ δοὺς ἐπιλαθοῦ.

Ὅταν λάβῃς χάριν νὰ τὸ θυμᾶσαι καὶ ὅταν δίδῃς νὰ τὸ ξεχνᾷς.

Χρυσὸς καὶ γυνὴ τοὺς φίλους ἐχθοὺς ποιεῖ.

Τὸ χρῆμα καὶ ἡ γυναῖκα κάνει τοὺς φίλους ἐχθρούς.

Ψευδὴς διαβολὴ τὸν βίον λυμαίνεται.

Ἡ συκοφαντία ἐπιφέρει μεγάλην βλάβην εἰς τὴν ζωήν.

Ψεῦδος μέγιστόν ἐστιν ἀνθρώποις κακόν.

Τὸ ψεῦδος εἶναι μέγιστον κακὸν εἰς τοὺς ἀνθρώπους.

Ψυχῆς ὄλεθρός ἐστι σωμάτων ἔρως.

Ὁ ἔρως τῶν σωμάτων εἶναι καταστροφὴ τῆς ψυχῆς.

Ὡς χαρίεν ἔστ' ἄνθρωπος, ἂν ἄνθρωπος ᾖ.

Πόσον χαριτωμένον πρᾶγμα εἶναι ὁ ἄνθρωπος, ἂν εἶναι ἄνθρωπος.

Ὡς ἡδὺ τὸ ζῆν μὴ φθονούσης τῆς τύχης.

Πόσον εὐχάριστη εἶναι ἡ ζωή, ὅταν δὲν φθονῇ ἡ τύχη.

Ὡς ἡδὺς ὁ βίος, ἄν τις αὐτὸν μὴ μάθῃ.

Πόσον εὐχάριστη εἶναι ἡ ζωή, ὅταν κανεὶς δὲν τὴν μάθῃ.

Φύσει γὰρ ἐστ' ἔρως
τοῦ νουθετοῦντος κωφόν· ἅμα δ' οὐ ῥᾴδιον
νεότητα νικᾶν ἐστι καὶ θεὸν λόγῳ.

Διότι ὁ ἔρως ἐκ φύσεως
διὰ τὸν νουθετοῦντα εἶναι κουφός· δὲν εἶναι δὲ εὔκολον
νὰ νικᾷ κανεὶς τὰ νειᾶτα καί τὸν θεὸ (ἔρωτα) μὲ τὰ λόγια.

Κατὰ πόλλ' ἄρ' ἐστὶν οὐ καλῶς εἰρημένον
τὸ γνῶθι σαυτόν· χρησιμώτερον γὰρ ἦν
τὸ γνῶθι τοὺς ἄλλους.

Κατὰ πολλὰ συνεπῶς δὲν εἶναι καλὰ εἰπωμένο
τὸ γνῶθι σαυτόν· διότι θὰ ἦτο χρησιμώτερον
τὸ γνῶθι τοὺς ἄλλους.

Γέρων ἐραστὴς ἐσχάτη κακὴ τύχη·
βίος βίου δεόμενος οὐκ ἔστι βίος.

῎Ερως δὲ τῶν θεῶν
ἰσχὺν ἔχων πλείστην ἐπὶ τούτου δείκνυται·
διὰ τοῦτον ἐπιορκοῦσι τοὺς ἄλλους θεούς.
῞Οτι δὲ ἐκ τῶν θεῶν ὁ ῎Ερως
ἔχει μεγίστην δύναμιν φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς·
Γιὰ τὸν θεὸν αὐτὸν ἐπιορκοῦν τοὺς ἄλλους θεούς.

῞Οστις στρατηγεῖ μὴ στρατιώτης γενόμενος
οὗτος ἑκατόμβην ἐξάγει τοῖς πολεμίοις.
῞Οποιος διοικεῖ στρατὸν χωρὶς νὰ ἔχῃ γίνει στρατιώτης
αὐτὸς ἐξάγει θυσίαν εἰς τοὺς ἐχθρούς.

Θυγάτηρ ἐπίγαμος, κἂν ὅλως μηθὲν λαλῇ
διὰ τοῦ σιωπᾶν πλεῖστα περὶ αὑτῆς λέγει.
Κορίτσι τῆς παντρειᾶς κι' ἂν δὲν μιλάῃ καθόλου
διὰ τῆς σιωπῆς λέει πολλὰ περὶ τοῦ ἑαυτοῦ της.

Τῇ γυναικί σου μηδέποτε ἀπόρρητα φθέγγου·
ἀεὶ γὰρ ὁπλίζεται πῶς σου κυριεύσει.
Στὴ γυναῖκα σου ποτὲ νὰ μὴ λὲς μυστικά·
γιατὶ πάντοτε ὁπλίζεται πῶς θὰ σοῦ ἐπιβληθῇ.

Εὐπροσήγορος ἔσο τοῖς συναντῶσι σε, εἰδὼς ὅτι καὶ
τῷ κυνὶ ἡ οὐρὰ ἄρτον προσπορίζεται.
Νὰ εἶσαι εὐπροσήγορος πρὸς ὅσους ἔρχεσαι σὲ ἐπικοινωνία, γνωρίζων
ὅτι καὶ στὸ σκυλὶ τὸ κούνημα τῆς οὐρᾶς ἀποφέρει ψωμί.

῞Απαντα νικᾷ καὶ μεταστρέφει τύχη,
οὐδεὶς δὲ νικᾷ μὴ θελούσης τῆς τύχης.
῞Ολα τὰ νικᾷ καὶ τὰ μεταβάλλει ἡ τύχη,
οὔτε ἕνας δὲ νικᾷ χωρὶς νὰ θέλῃ ἡ τύχη.

Εἰ πάντες ἐβοηθοῦμεν ἀλλήλους ἀεί,
οὐδεὶς ἂν ὢν ἄνθρωπος ἐδεήθη τύχης.
῞Αμα βοηθούσαμε ὁ ἕνας τὸν ἄλλον πάντοτε
κανένας, ὢν ἄνθρωπος, θὰ εἶχε ἀνάγκη τὴν τύχη.

Οὐκ ἔστι λύπης, ἂν περ' ὀρθῶς τις σκοπῇ,
ἄλγειμα μεῖζον τῶν ἐν ἀνθρώποις φύσει.
Δὲν ὑπάρχει, ἐκ φύσεως, ἀπ' τὴ λύπη μεγαλύτερος
πόνος εἰς τοὺς ἀνθρώπους, ἂν κανεὶς σκέπτεται σωστά.

Οὐδέποτ' ἀληθὲς οὐδὲν οὐθ' υἱῷ πατὴρ
εἴωθ' ἀπειλεῖν οὔτ' ἐρῶν ἐρωμένῃ.
Ποτὲ δὲν ἀπειλεῖ στ' ἀλήθεια, οὔτε ὁ πατέρας
τὸ παιδί, οὔτε ὁ ἐραστὴς τὴν ἐρωμένη.

Ἅπαντα τὰ ζῷ' ἐστὶ μακαριώτερα
καὶ νοῦν ἔχοντα μᾶλλον ἀνθρώπων πολύ.
τὸν ὄνον ὁρᾶν ἔξεστι πρῶτα τουτονί.
οὗτος κακοδαίμων ἐστὶν ὁμολογουμένως.
τούτῳ κακὸν δι' αὐτὸν οὐδὲν γίνεται·
ἃ δ' ἡ φύσις δέδωκε, ταῦτ' ἔχει μόνα.
ἡμεῖς δὲ χωρὶς τῶν ἀναγκαίων κακῶν
αὐτοὶ παρ' αὐτῶν ἕτερα προσπορίζομεν.
λυπούμεθ' ἂν πτάρῃ τις· ἂν εἴπῃ κακῶς,
ὀργιζόμεθ'· ἂν ἴδῃ τις ἐνύπνιον, σφόδρα
φοβούμεθ'· ἂν γλαῦξ ἀνακράγῃ δεδοίκαμεν.
ἀγωνίαι, δόξαι, φιλοτιμίαι, νόμοι,
ἅπαντα ταῦτ' ἐπίθετα τῇ φύσει κακά.
Ὅλα τὰ ζῷα εἶναι μακαριώτερα καὶ ἔχουν
πολὺ περισσότερο μυαλὸ ἀπ' τοὺς ἀνθρώπους.
Ἂς δοῦμε πρῶτα αὐτὸ ἐδῶ τὸ γαϊδούρι.
Εἶναι στ' ἀλήθεια κακότυχο.
Ἐξ αἰτίας του ποτὲ δὲν παθαίνει κακό·
ἔχει δὲ μόνον ὅ,τι τοῦ ἔδωσε ἡ φύσις.
Ἐμεῖς δὲ ἐκτὸς τῶν κατ' ἀνάγκην κακῶν
οἱ ἴδιοι προμηθευόμεθα ἀπ' τὸν ἑαυτόν μας καὶ ἄλλα.
Λυπούμεθα ἂν κανεὶς φταρνισθῇ· θυμώνουμε ἂν
κανεὶς κακολογήσῃ. Φοβούμεθα πολὺ ἂν κανεὶς δῇ κανένα
ὄνειρο· τρέμουμε ἂν καμμιὰ κουκουβάγια φωνάξῃ.
Ἀγωνίαι, δόξαι, φιλοτιμίαι, νόμοι,
ὅλα αὐτὰ εἶναι κακὰ ἀντίθετα πρὸς τὴν φύσιν.

εἴ τις προσελθών μοι θεῶν λέγοι ʽΚράτων,
ἐπὰν ἀποθάνῃς, αὖθις ἐξ ἀρχῆς ἔσῃ·
ἔσῃ δ' ὅ,τι ἂν βούλῃ, κύων, πρόβατον, τράγος,
ἄνθρωπος, ἵππος· δὶς βιῶναι γάρ σε δεῖ·
εἱμαρμένον τοῦτ' ἐστίν, ὅ,τι βούλει δ' ἑλοῦ·'
ἅπαντα μᾶλλον, εὐθὺς εἰπεῖν ἂν δοκῶ,
πόει με πλὴν ἄνθρωπον· ἀδίκως εὐτυχεῖ
κακῶς τε πράττει τοῦτο τὸ ζῷον μόνον.
ὁ κράτιστος ἵππος ἐπιμελεστέραν ἔχει
ἑτέρου θεραπείαν· ἀγαθὸς ἂν γένῃ κύων,
ἐντιμότερος εἶ τοῦ κακοῦ κυνὸς πολύ.
ἀλεκτρυὼν γενναῖος ἐν ἑτέρᾳ τροφῇ
ἐστιν, ὁ δ' ἀγεννὴς καὶ δέδιε τὸν κρείττονα.
ἄνθρωπος ἂν ᾖ χοηστός, εὐγενής, σφόδρα
γενναῖος, οὐδὲν ὄφελος ἐν τῷ νῦν γένει.
πράττει δ' ὁ κόλαξ ἄριστα πάντων, δεύτερα
ὁ συκοφάντης, ὁ κακοήθης τρίτα λέγει.
ὄνον γενέσθαι κρεῖττον ἢ τοὺς χείρονας
ὁρᾶν ἑαυτοῦ ζῶντας ἐπιφανέστερον.
Ἐὰν ἤρχετο κανεὶς ἀπ' τοὺς θεοὺς καὶ μοὔλεγε«Κράτων,
ὅταν πεθάνῃς θὰ γεννηθῇς πάλι·
θὰ γίνῃς δὲ ὅ,τι θέλεις, σκυλί, πρόβατο, τράγος,
ἄνθρωπος, ἄλογο· γιατί πρέπει νὰ ζήσῃς δυὸ φορές·
τοῦτο εἶναι ἡ μοῖρα σου· διάλεξε δὲ ὅ,τι θέλεις».
Μοῦ φαίνεται ὅτι θὰ ἔλεγα κάνε με ἀπὸ ὅλα,
ἐκτὸς ἀπὸ ἄνθρωπο γιατὶ μόνον αὐτὸ τὸ ζῷον
ἀδίκως εὐτυχεῖ καὶ ἀδίκως δυστυχεῖ.
Τὸ καλύτερο ἄλογο ἔχει καλυτέρα περιποίησι
ἀπό τὰ ἄλλα· ἅμα τύχῃ καλὸ σκυλὶ
περνάει καλύτερα ἀπ' τὸ κακὸ σκυλί.
Κόκκορος παλληκάρι ἔχει διαφορετικὴ τροφή,
ὁ φοβιτσιάρης δὲ φοβᾶται τὸν παλληκαρά.
Ὁ ἄνθρωπος ἂν εἶναι καλός, εὐγενής, πολὺ
γενναῖος, δὲν ἔχει νὰ ὠφεληθῇ τίποτε στὴ ζωή του.
Ἀπὸ ὅλους περνάει καλύτερα ὁ κόλαξ, δεύτερα
ὁ συκοφάντης, τρίτο ὁ κακοήθης.
Εἶναι προτιμότερο νὰ γίνῃ κανεὶς γαϊδούρι, παρὰ νὰ βλέπῃ
τοὺς χειροτέρους του νὰ ζοῦν καλύτερα.

ὁ μὲν Ἐπίχαρμος τοὺς θεοὺς εἶναι λέγει
ἀνέμους, ὕδωρ, γῆν, ἥλιον, πῦρ, ἀστέρας·
ἐγὼ δ' ὑπέλαβον χρησίμους εἶναι θεοὺς
τ'ἀργύριον ἡμῖν καὶ τὸ χρυσίον μόνους.
ἱδρυσάμενος τούτους γὰρ εἰς τὴν οἰκίαν,
εὔξ' ὅ,τι βούλει, πάντα σοι γενήσεται,
ἀγρός, οἰκίαι, θεράποντες, ἀργυρώματα,
φίλοι, δικασταί, μάρτυρες. μόνον δίδου·
αὐτοὺς γὰρ ἕξεις τοὺς θεοὺς ὑπηρέτας.
Ὁ μὲν Ἐπίχαρμος λέει ὅτι θεοὶ εἶναι
οἱ ἄνεμοι, τὸ νερό, ἡ γῆ, ὁ ἥλιος, ἡ φωτιά, τ' ἀστέρια·
ἐγὼ δὲ νομίζω ὅτι χρήσιμοι θεοὶ εἶναι σὲ μᾶς
μόνο τὸ ἀργύριον καὶ τὸ χρυσίον.
Ὅταν τὰ ἔχῃς αὐτὰ στὸ σπίτι σου
εὐχήσου ὅ,τι θέλεις, ὅλα θὰ τὰ ἔχῃς,
χωράφια, σπίτια, ὑπηρέτας, ἀσημικά,
φίλους, δικαστάς, μάρτυρας. Μόνον δίδου·
γιατὶ κι' αὐτοὺς τοὺς θεοὺς θὰ ἔχῃς ὑπηρέτας.

Ἐπιλανθάνονται πάντες οἱ παθόντες εὖ,
ἔνιοι δὲ καὶ μισοῦσι τοὺς εὐεργέτας.
Ὅλοι οἱ εὐεργετηθέντες τὸ ξεχνοῦν,
μερικοὶ δὲ καὶ μισοῦν τοὺς εὐεργέτας.

Παύσασθε νοῦν ἔχοντες· οὐδὲν γὰρ πλέον
ἀνθρώπινος νοῦς ἐστιν, ἀλλ' ὁ τῆς Τύχης
—εἴτ' ἔστι τοῦτο πνεῦμα θεῖον, εἴτε νοῦς—
τοῦτ' ἔστι τὸ κυβερνῶν ἅπαντα καὶ στρέφον
καὶ σῷζον, ἡ πρόνοια δὲ ἡ θνητὴ καπνὸς
καὶ φλήναφος. πείσθητε καὶ οὐ μέμψεσθέ με·
πάνθ' ὅσα νοοῦμεν ἢ λέγομεν ἢ πράττομεν,
τύχ' στιν, ἡμεῖς δὲ ἐσμὲν ἐπιγεγραμμένοι.

Παῦτε νὰ ἔχετε μυαλό γιατὶ πιὰ δὲν περνάει
τὸ ἀνθρώπινο μυαλό, ἀλλὰ τὸ μυαλὸ τῆς τύχης
—εἴτε τοῦτο εἶναι πνεῦμα θεῖον, εἴτε μυαλὸ—
τοῦτο εἶναι τὸ κυβερνῶν ὅλα καὶ στρέφον
καὶ σῶζον, ἡ πρόνοια δὲ τῶν θνητῶν εἶναι καπνὸς
καὶ ἀνοησία. Πιστέφτε με καὶ δὲν θὰ μὲ κατηγορήσετε·
ὅλα ὅσα νοοῦμε ἢ λέμε ἢ κάνουμε
αὐτὰ εἶναι τύχη, ἐμεῖς δὲ ἁπλῶς τὰ ὑφιστάμεθα.

Τύχην ἔχεις, κάθευδε, μὴ λίαν πόνει,
εἰ δ' οὐκ ἔχεις, κάθευδε, μὴ μάτην πόνει.

Ἔχεις τύχη, κοιμήσου, μὴ πολυκουράζεσαι,
ἂν δὲ δὲν ἔχης, κοιμήσου, μὴ ματαιοπονῇς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἰωάννης Πασσᾶς, Νεώτερον Μέγα Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἡλίου, Ἀθῆναι.

Liddell - Scott, Μέγα Λεξικὸν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης, ἔκδ. Ἰω. Σιδέρης Ἀθῆναι.

Menander Reliquiae, ed. A. Koerte, B. G. Teubner, Leipzig, Pars I 1957, Pars II 1959.

Menandri Sententiae, ed. S Jaekel, B. G. Teubner, Leipzig 1964.

Pauly - Wissowa, Real - Enzyclopädie.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Α Ν Α Τ Υ Π Ο Ν

Ἐκ τῆς Μεγάλης Παιδαγωγικῆς Ἐγκυκλοπαιδείας

Εὐκλείδης

I. Βιογραφία

Μέγας Ἕλλην μαθηματικὸς τῶν Ἀλεξανδρινῶν χρόνων. Ὁ τόπος καὶ ὁ χρόνος τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου αὐτοῦ δὲν εἶναι γνωστά. Κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ἐγεννήθη περὶ τὸ 350 π.Χ. καὶ ἐσπούδασε φιλοσοφίαν καὶ μαθηματικὰ ἐν Ἀθήναις εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Φαίνεται ὅτι εἶχε διακριθῇ εἰς τὰς Ἀθήνας ὡς μαθηματικὸς καὶ εἶναι ὁ πρῶτος Πρύτανις τοῦ ὑπὸ τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου τοῦ Α΄ ἱδρυθέντος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ Πανεπιστημίου. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς διαμνημονεύσεως τοῦ νεοπλατωνικοῦ φιλοσόφου Πρόκλου (410-485 μ.Χ.), ὅστις εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὸ α΄ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοποθετεῖ αὐτὸν χρονικῶς ὀλίγον μετὰ τὸν μαθητὴν τοῦ Πλάτωνος Φίλιππον τὸν Μενδαῖον (καταγόμενον δηλ. ἐκ τῆς πόλεως Μένδης, τῆς Χαλκιδικῆς χερσονήσου) καὶ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (287-212 π.Χ.) καὶ τοῦ Ἐρατοσθέ-

Ε Ν Α Θ Η Ν Α Ι Σ

1 9 6 8

νους, λέγων τὰ ἑξῆς: «Γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. Οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν Ἐρατοσθένης. Καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν». Ἤκμασε δὲ ὁ ἀνὴρ οὗτος ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ (323-285 π.Χ.)· εἶναι λοιπὸν νεώτερος τῶν μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος, μεγαλύτερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι αὐτοὶ ἦσαν σύγχρονοι μεταξύ των, ὡς λέγει κάπου ὁ Ἐρατοσθένης. Εἶναι δὲ ὀπαδὸς τῶν φιλοσοφικῶν θεωριῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ οἰκεῖος πρὸς τὴν φιλοσοφίαν αὐτήν, καὶ ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου ἔθεσεν ὡς τελικὸν σκοπὸν τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων τὴν κατασκευὴν τῶν καλουμένων πλατωνικῶν σχημάτων δηλ. τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων. (Procli in primum Eucl. Elem. Comm. Ἔκδ. C. Friedlein, Lipsiae 1873, σελ. 68,10. Ἀνατύπωσις Lipsiae 1967).

Παρὰ τοῦ μαθηματικοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως πληροφορούμεθα ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ διδάσκωνται γεωμετρίαν (Πάππου Συναγωγή, ἔκδ. Hultsch, Βερολῖνον 1877, τόμ. II σελ. 676, 37. Ἀνατύπωσις Hakkert, Ἄμστερνταμ 1965), ὁ δὲ Στοβαῖος διέσωσε τὸ ἀκόλουθον χαρακτηριστικὸν ἐπεισόδιον μεταξὺ τοῦ Εὐκλείδου καί τινος μαθητοῦ του: «Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην, τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μανθάνοντι ; Καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας «δὸς αὐτῷ, ἔφη, τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν».[Ὅταν τις ἀρχίσας νὰ διδάσκεται γεωμετρίαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα (σημ. : κατασκευὴ ἰσοπλεύρου τριγώνου), ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην «καὶ τώρα τί κέρδος θὰ ἔχω ἀφοῦ ἔμαθα τοῦτο;». Καὶ ὁ Εὐκλείδης καλέσας τὸν ὑπηρέτην του, εἶπε, «δός του τρεῖς δεκάρες, ἐπειδὴ πρέπει νὰ κερδίζῃ ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα μανθάνει». Ἀνθ. Στοβαίου, ἔκδ.Meineke, τόμ. IV σελ. 205. Ἀνανέωσις C.Wachsmuth, Βερολῖνον 1884, τόμ. 2 σελ. 228,114. Ἀνατύπωσις, Βερολῖνον 1958)]. Εἰς τὸ προηγουμένως μνημονευθὲν μέρος τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου περιλαμβάνεται καὶ τὸ ἑξῆς ἀνέκδοτον : Λέγεται, ὅτι ὁ Πτολεμαῖος ὁ Α΄ ἠρώτησε κάποτε τὸν Εὐκλείδην, ἂν ὑπάρχῃ εὔκολος τρόπος ἐκμαθήσεως τῆς γεωμετρίας. Ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀπήντησεν ὅτι δὲν ὑπάρχει «βασιλικὴ ἀτραπὸς ἐπὶ γεωμετρίαν». Τὸ αὐτὸ ἀνέκδοτον μνημονεύει καὶ ὁ Στοβαῖος (ἔνθ' ἀνωτ.), ἀποδιδόμενον ὅμως μεταξὺ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Πλάτωνος, περιφήμου μαθηματικοῦ Μεναίχμου, ὡς ἑξῆς : «Μέναιχμον τὸν γεωμέτρην Ἀλέξανδρος ἠξίου συντόμως αὐτῷ παραδοῦναι τὴν γεωμετρίαν· ὁ δὲ «ὦ βασιλεῦ», εἶπε, «κατὰ μὲν τὴν χώραν ὁδοί εἰσιν ἰδιωτικαὶ καὶ βασιλικαί, ἐν δὲ τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσιν ἐστιν ὁδὸς μία». Ὁ Στοβαῖος γράφει ὅτι λαμβάνει τὰς πληροφορίας του ἐκ τῶν συγγραφῶν τοῦ μαθηματικοῦ Σερήνου (ἀκμὴ περὶ τὸ 350 μ.Χ.). Εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀποδίδεται καὶ τὸ ἑξῆς μαθηματικὸν ἐπίγραμμα:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖς·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
«Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη;
εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβῃς, πάντως ἰσότητα φυλάξεις».
Εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρέης ἐπίστορ.

[Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὁδοιποροῦσαν· /ἡ ὄνος ὅμως, ἕνεκα τοῦ βάρους, τὸ ὁποῖον ἔφερον, ἐστέναζε· ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν, ἠρώτησεν ἡ ἡμίονος·/«Μητέρα, γιατί θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι; /ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον θὰ ἔφερα διπλασίους ἀπὸ σέ· /ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα θὰ εἴχαμε ἴσους». Εἰπὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν σάκκων, ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας. (Ἡ ἡμίονος ἔφερεν 7 σάκκους καὶ ἡ ὄνος 5). (Ε.Σ.Σταμάτη, Διοφάντου Ἀριθμητικά, Ὀργ. Ἐκδ. Διδακτ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1963, σελ. 402)].

II. Τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου

Ὁ Εὐκλείδης ἔγραψε πολλὰ ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλα ἐσώθησαν καὶ ἄλλα ἀπωλέσθησαν. Εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα περιλαμβάνονται τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους: 1) Στοιχεῖα, 2) Δεδομένα, 3) Ὀπτικά, 4) Κατοπτρικά, 5) Φαινόμενα (ἀστρονομία), 6) Κατατομὴ κανόνος (θεωρία μουσικῆς), 7) Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ (ἐπίσης θεωρία μουσικῆς). Εἰς τὰ ἀπολεσθέντα ἔργα περιλαμβάνονται τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους: 1) Περὶ διαιρέσεων (σχημάτων), 2) Ψευδάρια. Εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ περιελαμβάνοντο ἀπατηλοὶ συλλογισμοὶ διὰ νὰ ἐξασκήσουν τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν διάκρισιν τῶν ὀρθῶν ἀπὸ τοὺς ἀπατηλούς, τοὺς ψευδεῖς συλλογισμούς. 3) Πορίσματα, 4) Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ,εἰς δύο βιβλία (περὶ γεωμετρικῶν τόπων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ), 5) Κωνικαὶ τομαί, εἰς τέσσαρα βιβλία, 6) Μηχανικά, εἰς ἓν βιβλίον. Ἐκ τῶν διασωθέντων βιβλίων δὲν θεωροῦνται γνήσια ἡ Κατατομὴ κανόνος καὶ ἡ Εἰσαγωγὴ ἁρμονική, ἅτινα ἀποδίδονται εἰς σημειώσεις μαθητῶν τοῦ Εὐκλείδου. Μεταβολὰς ἔχουν ὑποστῆ καὶ τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους Ὀπτικὰ καὶ Κατοπτρικὰ ἔργα.

III. Τὰ Στοιχεῖα

1. Τὸ σπουδαιότατον καὶ ἀθάνατον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου εἶναι τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον *Στοιχεῖα*. Ὑπὸ τοῦτον νοοῦνται τὰ στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ὕλη τοῦ περιφήμου αὐτοῦ συγγράμματος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ μαθηματικὸν Εὐαγγέλιον τῆς ἀνθρωπότητος, κατανέμεται εἰς δέκα τρία (13) βιβλία. Οἱ μεταγενέστεροι τοῦ Εὐκλείδου συγγραφεῖς, ἀναφερόμενοι εἰς αὐτὸν τὸν μνημονεύουν, κατὰ τὸ πλεῖστον, οὐχὶ ὀνομαστικῶς ἀλλὰ ὑπὸ τὸ ὄνομα «στοιχειωτής». Τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων προέρχεται ἐξ ἐμβριθεστάτης ἐπιλογῆς τῶν στοιχείων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης τῆς δημιουργηθείσης ἀποκλειστικῶς ὑπὸ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος ἀπὸ τοῦ 600 μέχρι τοῦ 300 π.Χ., ἤτοι εἰς διάστημα 300 ἐτῶν (ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Εὐκλείδου). Δὲν εἶναι γνωστὸν ἂν εἰς τὰ Στοιχεῖα περιλαμβάνωνται καὶ θεωρήματα ἐπινοηθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Πιστεύεται ὅμως ὅτι ἀρκετὰ ἐξ αὐτῶν ἀποτελοῦν εὐκλείδειον δημιουργίαν. Μνημειώδης καὶ εὐστοχωτάτη θεωρεῖται ἡ ἀξιολόγησις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ Πρόκλου, ὅστις εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον του σελ. 68,23 γράφει τὰ ἑξῆς : «Πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. Τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικὰ καὶ τὰ κατοπτρικά, τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Διαφερόντως δ' ἄν τις αὐτὸν ἀγασθείη κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχείωσιν τῆς τάξεως ἕνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. Καὶ γὰρ οὐχ' ὅσα ἐνεχώρει λέγειν ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἠδύνατο παρείληφεν,... πάντας δὲ (τοὺς συλλογισμοὺς) ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείους....ἔτι δὲ λέγομεν τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν, καὶ τὴν δύναμιν μεθ' ἧς ἕκαστα παραδίδωσιν.... τὰ γὰρ ἀρχοειδέστατα καὶ ἁπλούστατα θεωρήματα ἐνταῦθα συνήθροισται τάξιν λαβόντα τὴν πρέπουσαν... καθάπερ Ἀρχιμήδης καὶ Ἀπολλώνιος καὶ οἱ ἄλλοι πάντες φαίνονται τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ δεδειγμένοις ὡς ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι».[Ὑπάρχουν λοιπὸν καὶ πολλὰ ἄλλα μαθηματικὰ συγγράμματα τοῦ ἀνδρὸς τούτου πλήρη θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας. Διότι τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ Ὀπτικὰ καὶ τὰ Κατοπτρικὰ καὶ τὰ Στοιχεῖα τῆς μουσικῆς, προσέτι δὲ τὸ Περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Κατ' ἐξοχὴν δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ θαυμάσῃ κανεὶς αὐτὸν διὰ τὴν καταχώρησιν τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας, ἕνεκα τῆς τάξεως καὶ τῆς ἐπιλογῆς τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων τῶν

καταλλήλων διὰ τὰ στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν. Διότι δὲν περιέλαβεν ὅσα ἠδύνατο κανεὶς νὰ εἴπῃ περὶ αὐτῶν, ἀλλὰ μόνον ὅσα ἦσαν πράγματι στοιχεῖα..., περιέλαβε δὲ καὶ ὅλους τοὺς συλλογισμοὺς ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ καταλλήλους πρὸς ἐπιστήμην..., προσέτι δὲ λέγομεν τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν καὶ τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν παραδίδει ἕκαστον θεώρημα..., διότι ἐδῶ (εἰς τὰ Στοιχεῖα) ἔχουν συναθροισθῆ τὰ ἀρχοειδέστατα καὶ ἁπλούστατα θεωρήματα, λαβόντα τὴν πρέπουσαν τάξιν..., ὅπως βέβαια ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι (μεταγενέστεροι αὐτοῦ) μαθηματικοὶ χρησιμοποιοῦντες τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἀληθείας ὁμολογουμένας]. Ἡ πρώτη ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὑπολογίζεται ὅτι ἔγινε περὶ τὸ 300 π.Χ. Περὶ τὸ 370 μ.Χ. ἔγινεν ἔκδοσις αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Ἕλληνος Πρυτάνεως τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ἀλεξανδρείας Θέωνος τοῦ μαθηματικοῦ, πατρὸς τῆς φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ Ὑπατίας, τῆς λιθοβοληθείσης ὑπὸ τοῦ θρησκολήπτου ὄχλου (416 μ.Χ.), τοῦ πυρπολήσαντος τὴν δευτέραν Βιβλιοθήκην τῆς Ἀλεξανδρείας, τὸ Σαραπεῖον, περιέχουσαν 90.000 τόμους (σημ.: Ἡ πρώτη Βιβλιοθήκη περιέχουσα 500.000 τόμους ἐκάη περὶ τὸ 47 π.Χ. ὅτε ὁ Ἰούλιος Καῖσαρ κατέλαβε τὴν Ἀλεξάνδρειαν). Διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ 310 π.Χ. μέχρι 380 μ.Χ. δὲν εἶναι γνωστὸν πόσαι ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων ἔγιναν. Ὁ Θέων εἰς τὴν ἔκδοσίν του ἐπέφερε μερικὰς μεταβολὰς διὰ νὰ καταστήσῃ αὐτὰ εὐκολώτερα διὰ τοὺς μαθητάς του. Κατὰ τὸ 1809, ὅτε ὁ Ναπολέων Βοναπάρτης κατέλαβε τὴν Ρώμην, ὁ συνοδεύων αὐτὸν Γάλλος μαθηματικὸς Peyrard ἀνεκάλυψεν εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ χειρόγραφον ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων προγενεστέραν καὶ ἀκριβεστέραν τῆς τοῦ Θέωνος. Ταύτην ἐξέδωκεν ἐν Παρισίοις κατὰ τὰ ἔτη 1814-1818. Ἡ πρώτη διὰ τοῦ τύπου γενομένη ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἔλαβε χώραν ἐν τῇ Βασιλείᾳ τῆς Ἑλβετίας κατὰ τὸ 1530, ὑπὸ τοῦ Simon Grynaeus. Σήμερον καλυτέρα ἔκδοσις θεωρεῖται ἡ γενομένη ἐν Λειψίᾳ ὑπὸ τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ I.L. Heiberg καὶ τοῦ Γερμανοῦ H. Menge. Αὕτη περιλαμβάνει 8 τόμους. Οἱ 4 πρῶτοι τόμοι περιλαμβάνουν τὰ Στοιχεῖα. Ὁ πέμπτος ἔχει τὰ ἐπ' αὐτῶν σχόλια τῶν μεταγενεστέρων. Ὁ ἕκτος περιέχει τὰ Δεδομένα καὶ σχόλια ἐπ' αὐτῶν. Ὁ ἕβδομος περιλαμβάνει τὰ Ὀπτικά, σχόλια ἐπ' αὐτῶν, τὰ ἴδια Ὀπτικὰ κατ' ἔκδοσιν τοῦ Θέωνος, τὰ Κατοπτρικὰ καὶ σχόλια ἐπ' αὐτῶν. Εἰς τὸν 8ον τόμον περιέχονται τὰ Φαινόμενα, ἡ Κατατομὴ κανόνος, ἡ Εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ καὶ ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ἐκ διαφόρων πραγματειῶν τοῦ Εὐκλείδου. Ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐκδοτῶν ἐξεδόθη καὶ 9ος τόμος περιέχων σχόλια τοῦ Ἄραβος an - Nairizi (Ἀναριτίου) εἰς τὰ βιβλία 1-10 τῶν Στοιχείων (μετεφρ. εἰς τὴν λατινικήν). (Οἱ πρῶτοι 4 τόμοι 1883-1885, ὁ 5ος 1888, ὁ 6ος 1896, ὁ 7ος 1895, ὁ 8ος 1916, ὁ 9ος 1899). Ἐν Ἑλλάδι ὑπολογίζεται ὅτι αἱ τελευταῖαι χειρόγραφοι ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων ἔγιναν κατὰ τὸν 12.13. αἰῶνα. Ἡ πρώτη διὰ τοῦ τύπου ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἐν Ἑλλάδι ἔγινεν ὑπὸ τοῦ γράφοντος κατὰ τὰ ἔτη 1952-1957 ἐν Ἀθήναις, εἰς 4 τόμους. Αὕτη περιλαμβάνει τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἔναντι ἑκάστης σελίδος τούτου μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν καὶ ἐπεξηγήσεις. Αἱ ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων εἰς ὅλας τὰς γλώσσας τοῦ κόσμου εἶναι πάμπολλαι. Τὸ πλῆθος αὐτῶν ὑπολείπεται μόνον τῶν ἐκδόσεων τῆς Ἁγίας Γραφῆς.

Μὲ τὴν καταγραφὴν τῶν ἐκδόσεων τῶν Στοιχείων ἀσχολεῖται ἀπὸ ἐτῶν ὁ καθηγητὴς τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Μονάχου Max Steck, ὅστις ἐδημοσίευσε τὰς κυριωτέρας ἐκδόσεις εἰς τὸ περιοδικὸν Forschungen und Fortschritte, 31ον ἔτος ἐκδόσεως, τεῦχος 4, σελ. 113-117, ὑπὸ τὸν τίτλον Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben (Ἡ πνευματικὴ παράδοσις τῶν πρώτων εὐκλειδείων ἐκδόσεων).

2. Τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον προτάσσονται 23 ὁρισμοί, 5 αἰτήματα καὶ 9 κοιναὶ ἔννοιαι. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀριστοτέλους τὰ αἰτήματα καὶ αἱ κοιναὶ ἔννοιαι ὀνομάζονται ἀξιώματα. Ὁ ὅρος «κοιναὶ ἔννοιαι» ἀπαντᾷ εἰς τοὺς Στωϊκούς. Ὁ Εὐκλείδης, καίτοι μεταγενέστερος τοῦ Ἀριστοτέλους, διετήρησε τὸν ὅρον τῶν Στωϊκῶν, ὁ ὁποῖος ὅμως, ὡς καὶ ὁ ὅρος «αἰτήματα», πιθανὸν νὰ ἦσαν ἐν χρήσει εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Πιθανὸν ὅμως οἱ ὅροι οὗτοι νὰ εἶναι δημιουργήματα τοῦ Αὐτολύκου, ὀλίγον πρεσβυτέρου τοῦ Εὐκλείδου, ἢ καὶ αὐτοῦ τοῦ Εὐκλείδου. Ἀκολουθοῦν 48 θεωρήματα καὶ προβλήματα, ὅπου ἐξετάζονται τὰ περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τὰ περὶ τριγώνου. Τὸ πυθαγόρειον θεώρημα περιλαμβάνεται ὡς 47ον.

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιέχει 14 θεωρήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ 10 πρῶτα ἀφοροῦν εἰς ἄλγεβραν, σπουδαζομένην γεωμετρικῶς. Ἑνδεκάτη πρότασις εἶναι ἡ πραγματευομένη τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον (τὸ λεγόμενον ὑπὸ τῶν νεωτέρων πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς).

Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον προτάσσονται 11 ὁρισμοὶ καὶ ἀκολουθοῦν 37 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζονται αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες εἰς κύκλον.

Εἰς τὸ τέταρτον βιβλίον προτάσσονται 11 ὁρισμοὶ καὶ ἕπονται 16 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζεται ἡ κατασκευὴ τῶν ἁπλουστέρων κανονικῶν πολυγώνων.

Εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον προτάσσονται 18 ὁρισμοὶ καὶ ἀκολουθοῦν 25 θεωρήματα, ὅπου μελετῶνται αἱ ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. Ὁλόκληρον τὸ βιβλίον τοῦτο θεωρεῖται κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν δημιουργία τοῦ περιφήμου μαθηματικοῦ Εὐδόξου.

Εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον προτάσσονται 5 ὁρισμοὶ καὶ ἕπονται 33 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζονται αἱ ἰδιότητες τῶν ὁμοίων σχημάτων.

Τὰ βιβλία 7,8,9 περιέχουν τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ ἕβδομον βιβλίον προτάσσονται [illegible] ὁρισμοὶ καὶ ἀκολουθοῦν 39 θεωρήματα. Τὸ ὄγδοον βιβλίον περιέχει 27 θεωρήματα καὶ τὸ ἔνατον 36. Τὰ βιβλια 8 καὶ 9 δὲν περιέχουν ὁρισμούς.

Εἰς τὸ δέκατον βιβλίον, ὅπερ εἶναι τὸ ἐκτενέστερον ὅλων, γίνεται ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Προτάσσονται 4 ὁρισμοὶ καὶ ἀκολουθοῦν 115 θεωρήματα.

Τὰ τρία τελευταῖα βιβλία τῶν Στοιχείων περιέχουν τὴν στερεομετρίαν. Εἰς τὸ ἑνδέκατον προτάσσονται 28 ὁρισμοὶ καὶ ἕπονται 39 θεωρήματα. Τὸ δωδέκατον περιλαμβάνει 18 θεωρήματα καὶ τὸ δέκατον τρίτον περιέχει ἐπίσης 18 θεωρήματα. Εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο βιβλίον σπουδάζεται ἡ ἐγγραφὴ τῶν κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν.

Τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Δεδομένα βιβλίον περιλαμβάνει 94 θεωρήματα, εἰς μερικὰ τῶν ὁποίων σπουδάζονται ἀλγεβρικαὶ καὶ τριγωνομετρικαὶ προτάσεις ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ 93 θεώρημα, ὅπου σπουδάζεται γεωμετρικῶς ἡ πρότασις:

$$[2\eta\mu\,\gamma+2\,\eta\mu\,(\alpha+\gamma)] : 2\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)=2\,\eta\mu\,\alpha : 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}$$

καὶ

$$[2\,\eta\mu\,\gamma+2\eta\mu\,(\alpha+\gamma)].\frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}.\,\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}=2\eta\mu\,\alpha.\,2\eta\mu\frac{\alpha}{2}$$

Τὰ πρῶτα θεωρήματα τριγωνομετρίας ἀπαντοῦν εἰς τὴν πραγματείαν Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ τριγωνομετρικὸς συμβολισμὸς εἶναι βέβαια πολὺ μεταγενέστερος, καὶ τῆς ἐποχῆς ἀκόμη τῆς Ἀναγεννήσεως. Τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν Εὐρώπην εἰς τὴν λατινικήν, τροποποιημένον πολὺ καὶ μὲ διάφορα ὀνόματα συγγραφέων οἰκειοποιηθέντων αὐτό!! Κατὰ τὸ 1851 ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Woepeke ἀνεκάλυψεν εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων παλαιὸν χειρόγραφον τοῦ ἔργου τούτου εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ ἐδημοσίευσεν αὐτὸ εἰς τὴν λατινικήν. Ἐκ τῶν 36 θεωρημάτων τῆς πραγματείας αὐτῆς τοῦ Εὐκλείδου, ὁ

Ἄραψ μαθηματικὸς μετέφρασε τὰς ἀποδείξεις μόνον τεσσάρων (τῶν ὑπ' ἀριθ. 19,20,28,29), διότι κατὰ τὸν Ἄγγλον Heath τὰς ἄλλας ἐθεώρησε πολὺ εὐκόλους. Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς καὶ ἔμπορος Λεονάρδος τῆς Πίζης (ἢ Fibonacci), κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Σταυροφοριῶν, περίπου 1180-1250, ἐδημοσίευσε τὸ βιβλίον αὐτὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς ἰδικόν του(!!), μὲ μερικὰς τροποποιήσεις τοῦ εἰς τὴν ἀραβικὴν χειρογράφου, τὸ ὁποῖον ἐπρομηθεύθη εἰς τὴν Συρίαν. (T. Heath, A history of Greek Mathematics I, σελ. 429, Oxford 1921).

Τὰ σχήματα τῶν Στοιχείων σχεδιάζονται μόνον διὰ κανόνος καὶ διαβήτου (εὐθεῖαι καὶ κύκλοι). Ὁ λόγος εἶναι, πιστεύεται, θρησκευτικός. Διὰ τῆς εὐθείας ἐκφράζεται τὸ γινόμενον καὶ φθειρόμενον, τὸ πέρας καὶ τὸ ἄπειρον, ἡ ὕλη. Ὁ κύκλος δὲν ἔχει ἀρχὴν καὶ τέλος. Συμβολίζει τὸ θεῖον. Τὰ σχήματα τῶν Στοιχείων ἐκφράζουν κατὰ ταῦτα τὸ πνεῦμα - ψυχὴν καὶ τὴν ὕλην. Οὐδεμία ἄλλη καμπύλη ὑπάρχει εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ τὰ Δεδομένα, πλὴν τοῦ κύκλου.

Οὐδεὶς ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς ὑπάρχει εἰς αὐτά· καὶ τοῦτο, διότι μόνον αἱ ἀφῃρημέναι γεωμετρικαὶ καὶ ἀριθμητικαὶ ἔννοιαι θεωροῦνται ὡς συμβάλλουσαι εἰς τὴν καλλιέργειαν καὶ τὴν μόρφωσιν τῆς ψυχῆς καὶ ὄχι τὰ πρακτικὰ πράγματα. Ἐδῶ φαίνεται καθαρὰ ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἀκολουθεῖ κατὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων τὸν Πλάτωνα, ὅστις εἰς τὴν Πολιτείαν λέγει : «σφόδρα ἄνω ποι ἄγει τὴν ψυχὴν καὶ περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἀναγκάζει διαλέγεσθαι, οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον, ἐάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμοὺς προτεινόμενος διαλέγηται» (525 d) [Παρὰ πολὺ ὑψηλὰ ὁδηγεῖ τὴν ψυχὴν (τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα) καὶ ἀναγκάζει αὐτὴν νὰ διαλέγεται περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν, ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ παραδεχόμενον (τὸ μάθημα αὐτό), ἐάν τις διαλέγεται προτείνων ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἐκφραζόμενα δι' ἀριθμῶν]. Ἡ παιδαγωγικὴ λοιπὸν ἀξία τῶν μαθηματικῶν ἔγκειται κατὰ τὸν Πλάτωνα, καὶ τὸν ὀπαδὸν αὐτοῦ Εὐκλείδην, πρωτίστως εἰς τὴν θεωρίαν, εἰς τὸν νοητὸν λόγον, ὅστις «αἰσθητῷ παντάπασιν οὐδενὶ προσχρώμενος....» (511 b) (ὁ νοητὸς λόγος, δηλ. αἱ ἀποδείξεις τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς γεωμετρίας ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ χρησιμοποιοῦσαι αἰσθητὰ πράγματα...). Εἰς ἄλλο χωρίον τῆς Πολιτείας ὁ Πλάτων λέγει ὅτι σκοπὸς τῆς γεωμετρίας εἶναι νὰ καταστήσῃ εὐκολώτερον κατανοητὴν τὴν ἰδέαν τοῦ Ἀγαθοῦ, δηλ. τοῦ Θεοῦ (πρὸς τὸ κατιδεῖν ῥᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν) (526 de).

3. Ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη, τῆς ὁποίας τὰ Στοιχεῖα περιέλαβε μὲ ἀνέλεγκτον ἀκρίβειαν καὶ τέχνην εἰς τὸ ἀθάνατον ἔργον του ὁ Εὐκλείδης εἶναι ἀποκλειστικὸν δημιούργημα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. Βασίζεται εἰς τὴν ἐπινόησιν τῆς ἀποδείξεως. Αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον καὶ ἐξαίρεται ἰδιαζόντως ὑπὸ τοῦ μεγαλυτέρου Γερμανοῦ φιλοσόφου Καντίου, εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῆς πραγματείας του Κριτικὴ τοῦ Καθαροῦ Λόγου (Imm. Kant, Kritik der reinen Vernunft, R. Schmidt, Leipzig 1944). Αἱ μέθοδοι ἀποδείξεως, τὰς ὁποίας χρησιμοποιεῖ ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα εἶναι τέσσαρες : 1) ἡ συνθετική, 2) ἡ ἀναλυτική, 3) ἡ τῆς εἰς ἄτοπον (ἢ ἀδύνατον) ἀπαγωγῆς καὶ 4) ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Πρὸ 70 περίπου ἐτῶν καὶ ἑξῆς ἐγένετο ἰδιαιτέρα ἐξύμνησις τῆς ἀξίας τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων. Ὅταν ὅμως περὶ τὸ 1950 ἀνεκαλύφθη ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ ἀπαντᾷ καὶ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐχάθη αἰφνιδίως ἡ ἰδιαιτέρα αὐτὴ ἐξύμνησις. Τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ μὲ τὴν «ἀξιωματικὴν μέθοδον τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν», τὴν ὁποίαν πολλοὶ νεώτεροι, ἐξ ἀγνοίας, ἐθεώρησαν ὡς δημιούργημα τῶν νεωτέρων χρόνων, ἐνῷ αὕτη χρονολογεῖται μόνον ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 600 π.Χ.

Ἡ γεωμετρία τῶν Ἑλλήνων εἶναι ἡ ἐπιστήμη ἡ ἐρευνῶσα τὰς ἰδιότητας τοῦ χώρου, τὸν ὁποῖον θεωρεῖ τρισδιάστατον (μῆκος, πλάτος, ὕψος). Τὸ ὅλον οἰκοδόμημα αὐτῆς στηρίζεται εἰς τὴν ἀναπόδεικτον ἔννοιαν «σημεῖον».Σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος, λέγει ὁ Εὐκλείδης. Ἀπὸ πολλὰ σημεῖα ὅμως νοοῦμεν ἀποτελουμένας τὰς γραμμάς, ἀπὸ πολλὰς γραμμὰς ἀποτελουμένας τὰς ἐπιφανείας, ἀπὸ πολλὰς ἐπιφανείας ἀποτελούμενα τὰ στερεά. Ἡ βασικὴ λοιπὸν ἔννοια σημεῖον εἶναι ἀκαθόριστος. Ὥστε ἡ γεωμετρία ἔχει σχετικὴν ἀξίαν (ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν φιλοσοφίαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόλυτον), ὡς παρατηροῦμεν εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος, ὅπου γράφεται:« ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι ; Οὐδεμία ἦ δ' ὅς» (533c). [Διότι ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ (ὡς βάσις) κάτι ἄγνωστον (δηλ. ἡ ἔννοια σημεῖον), διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ αὐτοῦ συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῇ ποτὲ τὴν τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην; Οὐδεμία, ἀπήντησεν ἐκεῖνος].

4. Πρὸ 100 περίπου ἐτῶν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ 5. αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου (τῶν παραλλήλων) δι' ἄλλων ἀξιωμάτων ἐδημιουργήθησαν, ὡς λέγεται, αἱ *μὴ Εὐκλείδειοι* γεωμετρίαι. Τὸ 5. αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου λέγει (καθ' ἁπλῆν διατύπωσιν) ὅτι ἔκ τινος σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς δοθεῖσαν ἐπ' αὐτοῦ εὐθεῖαν ἄγεται μία καὶ μόνη παράλληλος. Ἐὰν τὸ 5. αἴτημα ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ἀξίωμα ὅτι «ἔκ τινος σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς δοθεῖσαν ἐπ' αὐτοῦ εὐθεῖαν ἄγονται ἄπειροι παράλληλοι (δηλ. μὴ τέμνουσαι) εὐθεῖαι», δημιουργεῖται ἡ λεγομένη *ὑπερβολικὴ γεωμετρία*. Ἐὰν τὸ 5. αἴτημα ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ἀξίωμα ὅτι «ἔκ τινος σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς δοθεῖσαν ἐπ' αὐτοῦ εὐθεῖαν οὐδεμία ἄγεται παράλληλος» δημιουργεῖται ἡ λεγομένη *ἐλλειπτικὴ γεωμετρία* τοῦ Ρῆμαν. Εἰς αὐτὴν στηρίζεται καὶ ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος, τῆς ὁποίας ἡ ἀξία κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους, ἰδίως τῆς γενικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητος, ἀμφισβητεῖται πολύ. Ὑπὸ πολλῶν νεωτέρων παρατηρεῖται ὅτι ἡ ὀνομασία «μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι» εἶναι ἀτυχής. Ὁ ὀρθὸς ὅρος θὰ ἦτο ἀσκήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου, διότι πλὴν τοῦ 5. αἰτήματος, ὁλόκληρον τὸ οἰκοδόμημα αὐτῶν εἶναι εὐκλείδειον. Εἶναι δὲ εὔλογος ἡ ἀπορία διατί εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἀτομικῶν βομβῶν, τῶν ἀτομικῶν ἀντιδραστήρων, τῶν πυραύλων, τῶν ἀεροπλάνων, τῶν αὐτοκινήτων κλπ. χρησιμοποιεῖται μόνον ἡ εὐκλείδειος γεωμετρία καὶ περιφρονοῦνται τόσον καταφώρως αἱ λεγόμεναι μὴ εὐκλείδειοι. Τέλος, ἡ προσπάθεια ἑνὸς σπουδαίου μαθηματικοῦ,ὡς ὁ Γερμανὸς D. Hilbert (Δαυΐδ Χίλμπερτ 1862-1943), ὅπως διορθώσῃ τὸν Εὐκλείδην, θεωρεῖται ὡς ἀτυχὴς καὶ ἔχει προκαλέσει τὴν θυμηδίαν καὶ εἰρωνείαν τοῦ ἐπίσης σπουδαίου Γερμανοῦ μαθηματικοῦ G. Frege (Jahresbericht DMV 12. 1903 - Ἐπετηρὶς Ἑνώσεως Γερμανῶν Μαθηματικῶν).

Βιβλιογραφία: Euclidis, Opera omnia, I. L. Heiberg et H. Menge, τόμοι 8, ἀρχαῖον κείμενον μὲ λατινικὴν μετάφρασιν.—Εὐκλείδου Γεωμετρία κλπ. Ε. Σ. Σταμάτη, Στοιχείων βιβλία 13, τόμοι 4, Ἀθῆναι (1952 - 1957) (ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις, ἐπεξηγήσεις).—De Pythagore à Euclide, Paul - Henri Michel, Paris (1950), Les Belles Letters ; Κ. Δ. Γεωργούλη, Ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπιστήμη, εἰς λεξικὸν Ἥλιος, τόμ. Ἑλλάς.—M Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I (1907, ἀνατύπωσις 1965), B. G. Teubner, Stuttgart ; T. L. Heath, A history of Greek mathematics I,II, Oxford (1921); Clarendon Press ; Charles Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris (1958), C. Klincksieck.

Ε. Σ. Σταμάτης

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΠΛΑΤΩΝ» τόμ. Κ' (1968), τεύχη 39/40

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1. Ἡ λέξις συνέχεια δὲν ἀπαντᾷ ὡς ὅρος μαθηματικὸς εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Φυσικῆς ἀκροάσεως» διατυπώνει ὡς ἑξῆς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας μεταξὺ μεγεθῶν:

«Ἐφεξῆς μὲν γάρ ἐστιν, ὧν μηθέν ἐστι μεταξὺ συγγενές, στιγμῶν δ' ἀεὶ τὸ μεταξὺ γραμμή» ἤτοι δύο μεγέθη εἶναι ἐφεξῆς, ὅταν μεταξὺ αὐτῶν δὲν παρεμβάληται ἄλλο συγγενὲς μέγεθος, τὸ διάστημα δὲ μεταξὺ δύο στιγμῶν εἶναι πάντοτε γραμμή (Ζ1. 231 b 8—9). Ὀλίγον κατωτέρω, εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς διατύπωσις:

«Λέγω δὲ συνεχὲς τὸ διαιρετὸν εἰς ἀεὶ διαιρετά» (Ζ2. 232 b 24—25).

2. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὸ σήμερον λεγόμενον ἀξίωμα τῆς συνεχείας ἀπαντᾷ ὡς τέταρτος ὁρισμὸς εἰς τὸ V βιβλίον καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς: «Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν» ἤτοι (δύο) μεγέθη λέγεται ὅτι μεταξύ των ἔχουν σχέσιν τινα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα ὑπερέχουν ἀλλήλων. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου δὲν ἀποδίδεται πιστῶς ἐκ τῆς κατὰ λέξιν μεταφράσεως. Εἰς τὸ 8ον ὅμως θεώρημα τοῦ αὐτοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἡ ἀκριβὴς εἶναι ἡ ἑξῆς: ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορὰ τούτων ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς μεγέθους, ὁσονδήποτε μεγάλου.

3. Εἰς τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους μνημονεύεται τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τρεῖς φορὰς ὡς ἑξῆς:

α΄. «Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων» (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Α΄ προλεγόμενα ε΄, σελ. 8, ἔκδ. Heiberg, Λειψία 1910).

(Προσέτι δὲ ὅταν ἔχωμεν ἀνίσους γραμμὰς καὶ ἀνίσους ἐπιφανείας καὶ ἄνισα στερεὰ ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς ἐκ τῶν συγκρινομένων μεγεθῶν).

β΄. «Τᾶν ἀνισᾶν γραμμᾶν καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων» (Περὶ ἑλίκων τόμ. II, σελ. 12, 7, Heiberg 1913).

(Τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς τῶν συγκρινομένων μεγεθῶν).

γ'. «Τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου» (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, τόμ. II, σελ. 264, 9)

(Τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα πάσης δοθείσης πεπερασμένης ἐπιφανείας).

Ἀμέσως μετὰ τοῦτο προσθέτει ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι οἱ προηγούμενοι αὐτοῦ γεωμέτραι διὰ τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ ἀπέδειξαν, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (Εὐκλείδου Στοιχεῖα XII 2), ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων (Εὐκλ, XII 18), ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὴν πυραμίδα καὶ ὕψος ἴσον (Εὐκλ. XII 7) καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον (Εὐκλ. XII 10). Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἑκάστης τῶν πραγματειῶν Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, σημειώνει ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι τὰ θεωρήματα : ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον καὶ ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον εἶναι ἀνακαλύψεις τοῦ Εὐδόξου.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ποῖος ἀπέδειξε τὸ θεώρημα ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅμως τοῦ θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων γνωρίζομεν παρὰ τοῦ Σιμπλικίου ὅτι κατὰ τὸν ἱστορικὸν τῆς γεωμετρίας Εὔδημον αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον. (Σιμπλικίου I. 2 σχόλια εἰς Φυσικὰ Ἀριστοτέλους 185α 14).

4. Κεκαλυμμένην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας παρέχει εἰς ἡμᾶς ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν (Ἔκδ. Hiller, Lipsiae 1878 σελ. 44—45), ὅπου γίνεται μνεία τῶν λεγομένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Κατὰ ταῦτα θεωρεῖται ἀπειροελαχίστως μικρὸν τετράγωνον ἔχον διάμετρον (δηλ. διαγώνιον) ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ κατασκευάζονται διαδοχικῶς τετράγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διάμετροι (δηλ. διαγώνιοι) λαμβάνουν τὰς ἑξῆς τιμάς :

		Πλευρά	διάμετρος (διαγώνιος)
1ον	τετράγωνον	1	1
2ον	»	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3
3ον	»	2 + 3 = 5	5 + 2 = 7
4ον	»	5 + 7 = 12	12 + 5 = 17

5ον	»	$12+17=29$	$29+12=41$
6ον	»	$29+41=70$	$70+29=99$
7ον	»	$70+99=169$	$169+70=239$
8ον		$169+239=408$	$408+169=577$
⋮			
ν		$\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}=\alpha_\nu$	$2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}=\delta_\nu$

Οἱ ἀνωτέρω πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως

$$y^2 = 2x^2 \mp 1$$

τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν (546 c) λέγων «...ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων ἀρρήτων δὲ δυοῖν» ἤτοι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν=5 θὰ ἔχῃ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα διαγώνιον δ, λαμβανομένην ἐκ τοῦ τύπου

$$\delta^2 = 2.5^2, \text{ ὁπότε}$$

$\delta = \sqrt{2\,.\,5^2}$. Ἡ διαγώνιος αὐτὴ γίνεται ῥητή, ὅταν ἐκ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, ὁπότε ἔχομεν

$$\delta = \sqrt{2.5^2-1} = \sqrt{50-1} = \sqrt{49} = 7,$$

ὅπερ ἐννοεῖται ἐκ τῆς ἀνωτέρω φράσεως τοῦ Πλάτωνος, ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ 50 ἀφαιρέσωμεν τὸν 2 θὰ ἔχωμεν

$$\delta = \sqrt{50-2} = \sqrt{48}, \text{ διαγώνιον ἄρρητον.}$$

Αὐτὸ τὸ χωρίον τῆς Πολιτείας θέλει νὰ ἑρμηνεύσῃ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος παραθέτων ὀλίγα τινα περὶ πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐξόχως ὅμως σπουδαῖα διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν.

Ἐὰν τῶν ἀνωτέρω πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (δηλ. διαγωνίων) πρὸς τὰς πλευρὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ λόγοι περιττῆς τάξεως ἀποτελοῦν αὔξουσαν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα τὴν $\sqrt{2}$, ἐν ᾧ οἱ λόγοι ἀρτίας τάξεως ἀποτελοῦν ἐλαττουμένην ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα τὸ αὐτὸ ἤτοι

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

῾Ο Θέων δὲν ὁμιλεῖ περὶ τῶν φραγμάτων αὐτῶν, καὶ δι' αὐτὸ ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω ὅτι γίνεται κεκαλυμμένη ἐφαρμογὴ τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο σημαίνει τὸ ἑξῆς :

᾿Εὰν δοθῇ μία ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀπέχουσα ἐλάχιστα ἐκ τῆς $\sqrt{2}$, εἴτε ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω βαίνομεν (ἀκολουθία ἀριστερὰ) εἴτε ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω (ἀκολουθία δεξιὰ) εἶναι δυνατὸν νὰ καταστήσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν λόγων τούτων ἀπὸ τῆς $\sqrt{2}$ ἀκόμη μικροτέραν, σχηματίζοντες τοὺς ἑπομένους πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους, ὡς τοῦτο εἶναι φανερόν. ᾿Ακριβῶς δὲ αὐτὸ τὸ περιστατικὸν ἐκφράζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας.

5. ῾Ο Δαυῒδ Χίλμπερτ ὀνομάζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, ἀξίωμα τοῦ ᾿Αρχιμήδους (ἐσφαλμένως) καὶ διατυπώνει τοῦτο ὡς ἑξῆς. V_1 (᾿Αξίωμα μετρήσεως ἢ ἀρχιμήδειον ἀξίωμα) :

᾿Εὰν ΔΒ καὶ CD εἶναι δύο τυχόντα εὐθύγραμμα τμήματα, ὑπάρχει ἀριθμός τις n τοιοῦτος, ὥστε ἡ διαδοχικῶς n—φορὰς ἀφαίρεσις τοῦ τμήματος CD ἀπὸ τοῦ AB θὰ ὁδηγήσῃ πέραν τοῦ σημείου B. ῾Η διατύπωσις αὕτη θὰ ἦτο ἀληθὴς ὅταν ἐσημειοῦτο $AB > CD$, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν λέγεται καὶ ζητεῖται τοὐναντίον τὰ τμήματα AB, CD νὰ εἶναι τυχόντα (David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, ed. Paul Bernays, Stuttgart 1956, σελ. 30).

6) Πρῶτος διατυπώσας τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας θεωρεῖται ὁ ἐκ Κλαζομενῶν τῆς Μ. ᾿Ασίας καταγόμενος ᾿Αναξαγόρας (ἀκμὴ περὶ τὸ 450 π. Χ.), ὅστις εἰς τὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Περὶ φύσεως πραγματείαν του, τῆς ὁποίας σώζονται ἐλάχιστα ἀποσπάσματα, γράφει τὰ ἑξῆς :

Οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεὶ (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον. καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ σμικρῷ πλῆθος, πρὸς ἑαυτὸ δὲ ἕκαστόν ἐστι καὶ μέγα καὶ σμικρόν.

(Διότι οὔτε τοῦ μικροῦ ὑπάρχει τὸ ἐλάχιστον, ἀλλὰ πάντοτε ὑπάρχει μικρότερον (διότι τὸ ὑπάρχον εἶναι ἀδύνατον νὰ γίνῃ μὴ ὑπάρχον (διὰ τῆς συνεχοῦς διαιρέσεως)—ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερον. Καὶ εἶναι ἴσον κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ μικρὸν (δηλ. τὸ ὁσονδήποτε μεγάλο ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ μικρά), ὡς πρὸς τὸν ἑαυτόν του ὅμως πᾶν μέγεθος εἶναι καὶ μέγα καὶ μικρόν). (H. Diels, Fragmente der Vorsokratiker II, Berlin 1952, B 3 σελ. 33).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Pauly — Wissowa R. E, Eukleides § 12.

Paul — Henri Michel. De Pythagore à Euclide, Les Belles Lettres, Paris 1950, p. 438 ff.

Knopp, K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1931, S. 26—27.

Σταμάτης Εὐάγγελος. Εὐκλείδου Γεωμετρία — Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμος II, ᾿Αθῆναι 1953, σελ. 8—11.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ ΤΟΥ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΕΠΤΑΓΩΝΟΥ

Ὑπὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

(Ἐν Ἀθήναις)

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ «ΔΕΛΤΙΟΥ»
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Νέα Σειρά, Τόμος 9, Τεῦχος 2, **1968**, σελ. 9–24

Extrait du BULL. DE LA SOC. MATHÉMATIQUE DE GRÈCE
Nouvelle Série, Tome 9, Fasc. 2, **1968**, pp. 9–24

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου

Ὑπὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ Ἀρχιμήδης (287—212 π. Χ.) γεννηθεὶς ἐν Συρακούσαις τῆς Σικελίας (ἀποικίας τῶν Δωριέων) καὶ φονευθεὶς αὐτόθι κατὰ τὴν διὰ προδοσίας κατάληψιν ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων τῆς πόλεως, τὴν ὁποίαν ἐπὶ τρία σχεδὸν ἔτη ὑπερήσπιζε μόνος του νικηφόρως διὰ τῶν πολεμικῶν μηχανῶν του, εἶχε γράψει πολλὰ ἔργα πρωτότυπα καταπληκτικῆς ἐπινοήσεως. Θεωρεῖται ὁ μεγαλύτερος μαθηματικός, μηχανικὸς καὶ φυσικός, τὸν ὁποῖον ἐγέννησεν ἡ ἀνθρωπότης.

Εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν διεσώθησαν τὰ ἑξῆς ἔργα του:

1. ***Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου***, βιβλία δύο.
2. ***Κύκλου μέτρησις*** (ὅπου ὑπολογίζεται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν ὁ ἀριθμὸς π $\left(3\frac{1}{7}>\pi>3\frac{10}{71}\right)$.
3. ***Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*** (δηλ. περὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδῶν καὶ ὑπερβολοειδῶν (κωνοειδῆ) καὶ τῶν ἐλλειψοειδῶν (σφαιροειδῆ)).
4. ***Περὶ ἑλίκων.***
5. ***Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*** (Μηχανικὰ) εἰς δύο βιβλία.
6. ***Ψαμμίτης*** (ἔργον ἀλγεβρικοῦ—ἀριθμητικοῦ περιεχομένου).
7. ***Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.***
8. ***Ὀχουμένων*** εἰς δύο βιβλία (Ὑδροστατική).
9. ***Στομάχιον*** (διαίρεσις παραλληλογράμμου εἰς 14 τμήματα).
10. ***Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος*** (δηλ. μέθοδος).
11. ***Πρόβλημα βοεικόν.***

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω ἔργων ἐσώθησαν καὶ τὰ κάτωθι ἔργα εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶχον μεταφρασθῆ ὑπὸ Ἀράβων Μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι κατεῖχον τὰ εἰς τὴν ἑλληνικὴν γραμμένα ἔργα τὰ ὁποῖα κατόπιν ἀπωλέσθησαν:

1. ***Βιβλίον λημμάτων,*** περιέχον 15 θεωρήματα ἐπιπεδομετρίας.

2. ***Κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου κανονικοῦ ἑπταγώνου,*** περιέχον 17 θεωρήματα.

3. ***Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους*** (λειτουργοῦντος διὰ ῥέοντος ὕδατος).

4. ***Περὶ κύκλων ἐφαπτομένων ἀλλήλων*** (ἀνέκδοτον).

5. ***Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας*** (ἀνέκδοτον).

Ἀπολεσθέντα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους

Ὑπὸ μεταγενεστέρων συγγραφέων Ἑλλήνων καὶ Ἀράβων μνημονεύονται τὰ ἑξῆς ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν:

1. ***Περὶ τριγώνων.***
2. ***Περὶ τετραπλεύρων.***
3. ***Περὶ 13 ἡμικανονικῶν πολυέδρων.***
4. ***Ἀριθμητικά.***
5. ***Περὶ ζυγῶν.***
6. ***Κεντροβαρικά.***
7. ***Πλινθίδες καὶ κύλινδροι*** (πλινθὶς ὀνομάζεται πρίσμα ἀκμῶν α, α, β, ἔνθα $\alpha > \beta$).
8. ***Κατοπτρικὰ*** (Ὀπτική).
9. ***Ἰσοπεριμετρικά.***
10. ***Στοιχεῖα τῶν Μηχανικῶν.***
11. ***Ἰσορροπίαι.***
12. ***Σφαιροποιΐα*** (κατασκευὴ πλανηταρίων).
13. ***Στοιχεῖα ἐπὶ τῶν στηρίξεων*** (Στατική).
14. ***Περὶ παραλλήλων γραμμῶν.***
15. ***Περὶ βαρύτητος καὶ ἐλαφρότητος*** (πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα.
16. ***Περὶ κοίλων παραβολικῶν καυστικῶν κατόπτρων.***
17. ***Προοπτική.***
18. ***Ἐπισίδια βιβλία*** (πιθανῶς περὶ Στατικῆς).
19. ***Βαρυουλκὸς — Ὑδροσκοπίαι — Πνευματικὰ*** (Ἕλξις βαρῶν, Ὑδροστατική, Ἀεροστατική).
20. ***Καῦσις διὰ τῶν κατόπτρων.***
21. ***Περὶ Ἀρχιτεκτονικῆς.***
22. ***Περὶ δρομομέτρων*** (*σημ.* τὸ ταξίμετρον τῶν πλοίων).

Ἄραβες συγγραφεῖς ἀναφέρουν καὶ τὰ ἑξῆς ἔργα:

1. ***Περὶ ἑλίκων.***
2. ***Στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν.***
3. ***Περὶ τῆς διαμέτρου.***
4. ***Συγγράμματα ἐν ἐπιτομῇ.***

Ἐκ τῶν ἔργων τούτων τὸ ***Περὶ ἑλίκων*** ἔχει διασωθῆ καὶ μνημονεύεται ἀνωτέρω εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα. Ἑπομένως τὰ ἀπολεσθέντα ἔργα ἀνέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 25 (22+3).

Ἐκ τῶν εἰς τὴν ἀραβικὴν διασωθέντων πέντε ἔργων, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ***Βιβλίον λημμάτων*** ἔχει μεταφρασθῆ εἰς τὴν λατινικήν, τὴν γερμανικήν, τὴν ἀγγλικὴν καὶ τὴν γαλλικήν. Κατὰ τὸ 1965 ἐδημοσιεύσαμεν τοῦτο εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Ἀρχιμήδους, τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον, μὲ μετάφρασιν εἰς τὴν ἑλληνικὴν (Δελτίον Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρείας Νέα Σειρά, τόμος 6 ΙΙ, τεῦχος 2, 1965, σελ. 265—297).

Ἡ πραγματεία ***Κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου*** ἔχει δημοσιευθῆ ἐκ τῆς ἀραβικῆς μόνον εἰς τὴν γερμανικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τοῦ Carl Schoy, περιέχεται δὲ εἰς τὴν πραγματείαν του Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomer al-Biruni, ἐκδοθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Julius Ruska καὶ Heinrich Wieleitner, Hannover 1927 (Τὰ μαθήματα τῆς Τριγωνομετρίας τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου ἀλ-Μπιρουνί,... Ἀννόβερον 1927). Ἐκ τῆς μεταφράσεως ταύτης τοῦ Schoy μεταγλωττίζομεν αὐτὴν κατωτέρω εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν.

Ἡ ὑπὸ τὸν τίτλον ***Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους*** πραγματεία ἔχει μεταφρασθῆ ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικήν.

Αἱ λοιπαὶ δύο εἰς τὴν ἀραβικὴν σωζόμεναι πραγματεῖαι ***Περὶ κύκλων ἐφαπτομένων ἀλλήλων*** καὶ ***Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας*** δὲν ἔχουν ἀκόμη ἐκδοθῆ διὰ τοῦ τύπου εὑρίσκονται δὲ εἰς χειρόγραφα φυλασσόμενα εἰς Βιβλιοθήκην τῶν Ἰνδιῶν, τῶν ὁποίων κατέχομεν φωτοτυπίας.

Η ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

Ἐν ὀνόματι τοῦ Θεοῦ, τοῦ εὐσπλάγχνου καὶ οἰκτίρμονος!

Τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου εἰς 7 ἴσα μέρη, μεταφρασθὲν ὑπὸ τοῦ Ἀμποὺλ-Χασὰν Ταμπὶτ ἴμπν Κουρᾶ ἀλ-Χαρανὶ (περὶ τὸ 900). Τὸ ἔργον ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς πραγματείας καὶ 17 σχημάτων.

Καὶ λέγω, μετὰ τὸν αἶνον πρὸς τὸν Ἀλλὰχ καὶ τὰς εὐχὰς πρὸς τὸν προφήτην του καὶ τὴν οἰκογένειάν του, ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν ὑπάρχει πλέον εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν τὸ εἶχον εἰς τὴν διάθεσίν μου, ἀλλὰ εἶχον ἓν ἀπόκρυφον κατεστραμμένον χειρόγραφον, ἕνεκα τῆς ἀμαθείας τοῦ ἀντιγραφέως καὶ τῆς ἀγνοίας αὐτοῦ περὶ τοῦ ἀντικειμένου. Καὶ κατέβαλον μεγάλον κόπον διὰ νὰ ἀνεύρω δυνατότητας ἐπαληθεύσεως τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἀποριῶν καὶ νὰ ἀνεύρω λύσεις περὶ αὐτῶν καὶ τὴν κανονικὴν διάταξιν τῶν σχημάτων, πρὸς τὸν σκοπὸν εὐκόλου ἐξετάσεως καὶ ἐρεύνης τῶν πηγῶν. Πιθανῶς νὰ χρησιμοποιήσω μερικὰς ἀποδείξεις μεταγενεστέρων. Πρὸς ταύτοις ὁ Ἀλλάχ, ὁ παρέχων βοήθειαν, ἄς δώσῃ διὰ τῆς συμβολῆς του ἐπιτυχίαν εἰς τὸ ἔργον μου.

1

Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 1) ***λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις:***

$$\Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta B^2 \tag{1}$$

Λέγω, ὅτι ἐπίσης εἶναι καὶ $AB^2 = 2A\Delta \times B\Gamma$.

Σχ. 1.

Ἀπόδειξις. *Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς* (1) *τὸ ἄθροισμα* $\Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$, *ὁπότε ἔχομεν :*

$$2\Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma^2 + \Delta B^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta. \tag{2}$$

Τὸ πρῶτον ὅμως μέλος τῆς (2) *εἶναι ἴσον πρὸς*

$$2\Gamma\Delta \cdot (\Gamma\Delta + A\Gamma) = 2\Gamma\Delta \cdot A\Delta,$$

ὁπότε ἡ (2) *γίνεται :*

$$A\Gamma^2 + \Delta B^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta = 2\Gamma\Delta \cdot A\Delta. \tag{3}$$

Ἐπειδὴ ὅμως $A\Delta^2 = (A\Gamma + \Gamma\Delta)^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$, *ἡ* (3) *γίνεται :*

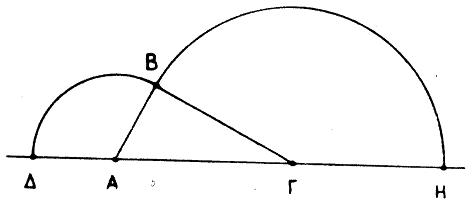
$$ΑΔ^2+ΔΒ^2=2ΓΔ\cdot ΑΔ. \qquad (4)$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) *τὸ* $2ΔΒ\cdot ΑΔ$, *ὁπότε λαμβάνομεν :* $ΑΔ^2+ΔΒ^2+2ΔΒ\cdot ΑΔ=2(ΑΔ\cdot ΔΓ+ΑΔ\cdot ΔΒ)$,

ἤτοι $ΑΒ^2 = 2ΑΔ\cdot ΓΒ$· *ὅ.ἔ.δ.*

2

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

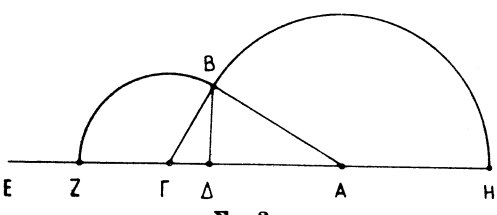


Σχ. 2.

Ἀπόδειξις. *Ἔστω ἡ ὑποτείνουσα* $ΑΓ$ (σχ. 2). *Προεκτείνομεν αὐτὴν ἑκατέρωθεν λαμβάνοντες* $ΑΔ=ΑΒ$ *καὶ* $ΓΗ=ΒΓ$, *ὁπότε ἔχομεν* $ΔΓ=ΑΒ+ΑΓ$, $ΑΗ=ΑΓ+ΓΗ$, $ΔΗ=ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ$, *ἤτοι ἡ* $ΔΗ$ *ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου* $ΑΒΓ$. *Καὶ ἐπειδὴ εἶναι* $ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2$ *θὰ εἶναι κατὰ τὸ α′ θεώρημα* $ΔΗ^2=2ΔΓ\cdot ΑΗ$· *ὅ.ἔ.δ.*

3

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς περιμέτρου σὺν τὸ ὕψος.



Σχ. 3.

Ἀπόδειξις. *Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον* $AB\Gamma$ (σχ. 3) *καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς* B *τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τὸ* $B\Delta$. *Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτῆς λαμβάνομεν* $AH = AB$, $\Gamma Z = \Gamma B$ *καὶ* $ZE = B\Delta$. *Λέγω, ὅτι* $HZ^2 = 2A\Gamma \cdot HE$.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $B\Gamma\Delta$, $B\Gamma A$ *εἶναι ὅμοια ἔχομεν :*

$$\frac{EZ(=B\Delta)}{\Gamma Z(=\Gamma B)} = \frac{AH(=AB)}{A\Gamma}.$$

Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι : $\dfrac{EZ+\Gamma Z}{\Gamma Z} = \dfrac{AH+A\Gamma}{A\Gamma}$, *τουτέστιν*

$\dfrac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \dfrac{H\Gamma}{A\Gamma}$, *καὶ ἐναλλὰξ εἶναι :* $\dfrac{E\Gamma}{H\Gamma} = \dfrac{\Gamma Z}{A\Gamma}$

καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι $\dfrac{E\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma} = \dfrac{\Gamma Z + A\Gamma}{A\Gamma}$, *τουτέστιν*

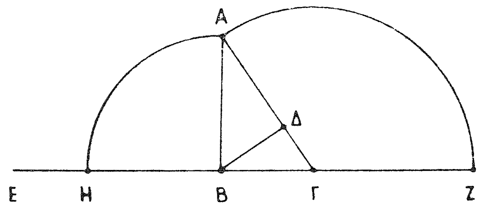
$\dfrac{EH}{H\Gamma} = \dfrac{AZ}{A\Gamma}$, *ἐξ ἧς* $HE \cdot A\Gamma = AZ \cdot H\Gamma$ *ἢ* $2HE \cdot A\Gamma = 2AZ \cdot H\Gamma$.

Ἀλλὰ $2AZ \cdot H\Gamma = HZ^2$ (θ. 2). *Δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν :*

$$2HE \cdot A\Gamma = HZ^2 \cdot \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

4

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς περιμέτρου σὺν τὸ ὕψος.



Σχ. 4.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 4). *Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς καθέτου πλευρᾶς* $B\Gamma$ *πρὸς τὰ δύο μέρη λαμβάνομεν τμῆμα* $BH = AB$, $HE = B\Delta$ *(ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν) καὶ* $\Gamma Z = \Gamma A$. *Λέγω, ὅτι :*

$$HZ^2 = 2\Gamma Z \cdot EZ.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $HB \cdot B\Gamma = HE \cdot \Gamma Z$, θὰ εἶναι καὶ

$$2HB \cdot B\Gamma = 2HE \cdot \Gamma Z,$$

καὶ εἶναι

$$HB^2 + B\Gamma^2 = \Gamma Z^2,$$

$$H\Gamma^2 = (HB + B\Gamma)^2 = HB^2 + B\Gamma^2 + 2HB \cdot B\Gamma.$$

$$H\Gamma^2 = \Gamma Z^2 + 2HE \cdot \Gamma Z.$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΓZ^2 καὶ ἔχομεν

$$H\Gamma^2 + \Gamma Z^2 = 2\Gamma Z^2 + 2HE \cdot \Gamma Z.$$

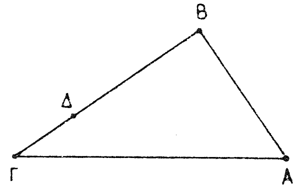
Ἐπειδὴ $HZ^2 = (H\Gamma + \Gamma Z)^2 = H\Gamma^2 + \Gamma Z^2 + 2H\Gamma \cdot \Gamma Z$, δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} HZ^2 &= 2\Gamma Z^2 + 2HE \cdot \Gamma Z + 2H\Gamma \cdot \Gamma Z \\ &= 2\Gamma Z(\Gamma Z + HE + H\Gamma) \\ &= 2\Gamma Z \cdot EZ \quad \text{ὅ.ἔ.δ.} \end{aligned}$$

5

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Β (σχ. 5). ***Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τμῆμα ΒΔ = ΑΒ. Λέγω, ὅτι***

$$\boldsymbol{(AB + B\Gamma + \Gamma A)^2 + \Delta\Gamma^2 = (A\Gamma + AB)^2 + (A\Gamma + B\Gamma)^2.}$$



Σχ. 5.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $B\Gamma^2 + B\Delta^2 = (B\Delta + \Delta\Gamma)^2 + B\Delta^2 = 2B\Delta^2 + 2B\Delta \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2$ καὶ $B\Delta = AB$, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} A\Gamma^2 &= 2AB^2 + 2AB \cdot (B\Gamma - AB) + \Delta\Gamma^2 \\ &= \Delta\Gamma^2 + 2AB \cdot B\Gamma. \end{aligned}$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ἄθροισμα $AB^2 + 2AB \cdot A\Gamma$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$A\Gamma^2 + AB^2 + 2AB \cdot A\Gamma = AB^2 + \Delta\Gamma^2 + 2AB(A\Gamma + \Gamma B).$$

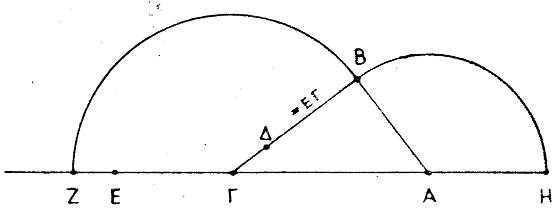
Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $(ΑΓ+ΒΓ)^2$, *ὁπότε ἔχομεν*

$$(ΑΓ+ΒΓ)^2+(ΑΒ+ΑΓ)^2 = ΑΒ^2+ΔΓ^2+(ΑΓ+ΒΓ)^2+2ΑΒ(ΑΓ+ΒΓ),$$

ἤτοι $(ΑΓ+ΒΓ)^2+(ΑΒ+ΑΓ)^2 = (ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ)^2+ΔΓ^2$ · *ὅ.ἔ.δ.*

6

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 6). **Προεκτείνομεν τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων καὶ λαμβάνομεν** $ΑΗ=ΑΒ=ΓΕ$, $ΓΖ=ΓΒ$, **ὁπότε εἶναι** $ΗΓ=ΑΒ+ΑΓ$, $ΑΖ=ΑΓ+ΒΓ$ **καὶ** $ΗΖ=$ **πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου. Λέγω, ὅτι** $ΗΖ^2+ΖΕ^2=ΗΓ^2+ΑΖ^2$.



Σχ. 6.

Ἀπόδειξις. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2+ΒΓ^2 = ΓΕ^2+ΓΖ^2 = ΖΕ^2+2ΓΕ\cdot ΓΖ$
$= ΖΕ^2+2ΑΗ\cdot ΓΖ.$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ γινόμενον $2ΑΗ\cdot ΑΓ$, *ὁπότε λαμβάνομεν*

$$ΑΓ^2+2ΑΓ\cdot ΑΗ = ΖΕ^2+2ΑΗ\cdot ΑΖ.$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΑΗ^2$, *ὁπότε ἔχομεν* ·

$$ΗΓ^2 = ΑΗ^2+ΖΕ^2+2ΑΗ\cdot ΑΖ.$$

Τέλος προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΑΖ^2$ *καὶ λαμβάνομεν*

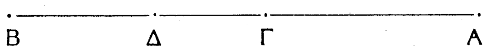
$$ΗΓ^2+ΑΖ^2 = (ΑΗ+ΑΖ)^2+ΖΕ^2 = ΗΖ^2+ΖΕ^2 \cdot$$ *ὅ.ἔ.δ.*

7

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 7), **ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης**

$$ΓΔ\cdot ΑΒ = ΑΓ\cdot ΔΒ.$$

Λέγω, ὅτι $2ΑΒ\cdot ΓΔ = ΑΔ\cdot ΓΒ.$



Σχ. 7.

Ἀπόδειξις. $ΑΓ \cdot ΔΒ = ΓΔ \cdot ΑΒ = ΓΔ(ΑΓ + ΓΒ) = ΑΓ \cdot ΓΔ + ΓΒ \cdot ΓΔ$ καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν,

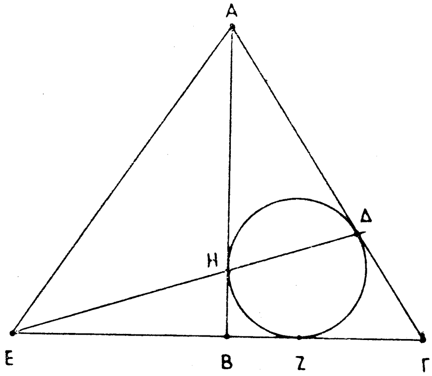
$$2ΑΓ \cdot ΔΒ = ΑΓ \cdot ΓΔ + ΓΒ \cdot ΓΔ + ΑΓ \cdot ΔΒ = 2ΑΒ \cdot ΓΔ.$$

Εἶναι ὅμως $ΑΓ \cdot ΓΔ + ΑΓ \cdot ΔΒ = ΑΓ \cdot ΓΒ$ καὶ κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$2ΑΒ \cdot ΓΔ = ΑΓ \cdot ΓΒ + ΒΓ \cdot ΓΔ = ΓΒ(ΑΓ + ΓΔ) = ΑΔ \cdot ΓΒ^{\cdot} \quad ὅ.ἔ.δ.$$

8

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 8) **ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Β. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον τὸν κύκλον ΔΗΖ, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΗ, ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου Δ καὶ Η καὶ προεκτείνομεν τὴν ΔΗ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Ε. Λέγω, ὅτι ΒΕ = ΑΗ.**



Σχ. 8.

Ἀπόδειξις. Ἑνοῦμεν τὸ Α μὲ τὸ Ε. Εἶναι $ΑΔ = ΑΗ$. Ἡ ΔΗ προεκτεινομένη συναντᾶται μὲ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε. Εἶναι δὲ

$$ΕΔ \cdot ΕΗ + ΑΗ^2 = ΑΕ^2, \quad ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = ΑΕ^2$$

καὶ ἐπομένως $\quad ΕΔ \cdot ΕΗ + ΑΗ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2.$

Προσέτι εἶναι $ΕΔ \cdot ΕΗ = ΕΖ^2$ καὶ ἐπομένως

$$ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = ΑΗ^2 + ΕΖ^2.$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΒΕ^2$ καὶ λαμβάνομεν

$$ΑΒ^2 = 2ΕΒ \cdot ΒΖ + ΒΖ^2 + ΑΗ^2.$$

Ἀφαιροῦντες τὸ $ΑΗ^2$ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ἔχομεν

$$2ΑΗ \cdot ΗΒ + ΗΒ^2 = 2ΕΒ \cdot ΒΖ + ΒΖ^2.$$

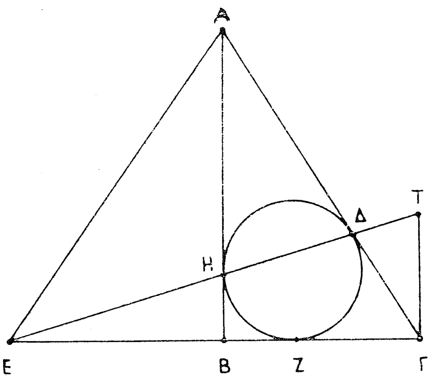
Ἐπειδὴ δὲ $HB^2 = BZ^2$, *θὰ ἔχωμεν*

$$2AH \cdot HB = 2EB \cdot BZ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $HB = BZ$, *θὰ ἔχωμεν* $AH = EB$ *ὅ.ἔ.δ.*

9

Θεωρῶ τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (σχ. 9).
Λέγω ἀκόμη, ὅτι $\dfrac{\mathbf{E\Gamma}}{\mathbf{EB}} = \dfrac{\mathbf{\Delta\Gamma}}{\mathbf{HB}}$.



Σχ. 9.

Ἀπόδειξις. *Φέρομεν εἰς τὸ* Γ *τὴν κάθετον καὶ προεκτείνομεν τὴν* $E\Delta$ *μέχρις ὅτου αὕτη συναντήσῃ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἴς τι σημεῖον, ἔστω* T. *Ἐπειδὴ ἡ* ΓT *εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν* AH *τὰ τρίγωνα* $T\Gamma\Delta$, $A\Delta H$ *εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν* $\dfrac{AH}{\Gamma T} = \dfrac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ *καὶ ἐναλλὰξ* $\dfrac{AH}{A\Delta} = \dfrac{\Gamma T}{\Gamma\Delta}$.

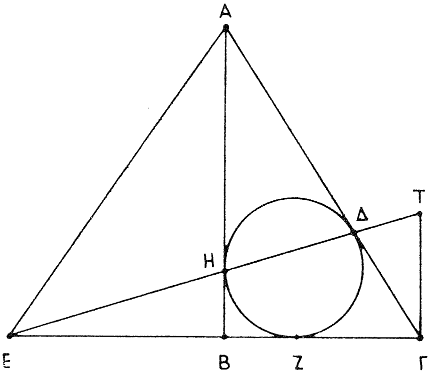
Εἶναι ὅμως $A\Delta = AH$, *ἄρα* $\Gamma T = \Gamma\Delta$. *Καὶ ἐπειδὴ* $\dfrac{\Gamma E}{EB} = \dfrac{\Gamma T}{HB}$,

θὰ ἔχωμεν $\dfrac{\Gamma E}{EB} = \dfrac{\Gamma\Delta}{HB}$. *ὅ.ἔ.δ.*

10

Θεωρῶ τὸ αὐτὸ σχῆμα, ὡς προηγουμένως (σχ. 10). ***Λέγω, ὅτι*** $\mathbf{A\Delta \cdot \Delta\Gamma} =$ ***τρίγωνον*** $\mathbf{AB\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. *Εἶναι* $\dfrac{E\Gamma}{EB} = \dfrac{\Gamma Z}{ZB}$, *ἐξ ἧς* $E\Gamma \cdot ZB = EB \cdot \Gamma Z$.



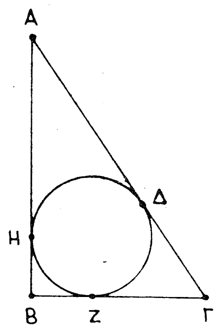
Σχ. 10

Καὶ ἐπειδὴ $EZ \cdot B\Gamma = 2A\Delta \cdot \Delta\Gamma$, $EB = AH$, $BZ = BH$ καὶ $AB = EZ$, θὰ εἶναι $AB \cdot B\Gamma = 2A\Delta \cdot \Delta\Gamma = 2$ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ συνεπῶς $A\Delta \cdot \Delta\Gamma =$ τρίγωνον $AB\Gamma$· ὅ.ἔ.δ.

11

Ἄλλη ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν ὀρθὴν (σχ. 11), ***εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος ΔΗΖ. Λέγω, ὅτι ΑΔ·ΔΓ = τρίγωνον ΑΒΓ.***



Σχ. 11.

Ἀπόδειξις. Εἶναι $A\Delta = AH$ καὶ $\Gamma\Delta = \Gamma Z$.

$$A\Gamma^2 = AH^2 + \Gamma Z^2 + 2A\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$, θὰ εἶναι ἐπίσης

$$AB^2 + B\Gamma^2 = AH^2 + \Gamma Z^2 + 2A\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ἄθροισμα $AH^2+\Gamma Z^2$ *καὶ λαμβάνομεν*

$$HB^2+BZ^2+2(HB\cdot AH+\Gamma Z\cdot ZB)=2A\Delta\cdot\Delta\Gamma.$$

Εἶναι ὅμως $HB^2=BZ^2$ *καὶ* $BZ^2+\Gamma Z\cdot ZB=\Gamma B\cdot BZ,$

$$2(HB\cdot AH+\Gamma B\cdot BZ)=2A\Delta\cdot\Delta\Gamma,\quad \text{καὶ}\quad HB=BZ,$$

καὶ $\quad 2(BZ\cdot AH+HB\cdot\Gamma B)=2A\Delta\cdot\Delta\Gamma.$

Ἐπειδὴ $2AH\cdot B\Gamma=2(BZ\cdot AH+\Gamma Z\cdot AH)=2(A\Delta\cdot\Delta\Gamma+ZB\cdot AH)$ *θὰ ἔχωμεν, ἐὰν προσθέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ κατόπιν ἀφαιρέσωμεν τὸ κοινὸν γινόμενον* $2ZB\cdot AH$

$$2(AH\cdot\Gamma B+HB\cdot\Gamma B)=4A\Delta\cdot\Delta\Gamma$$

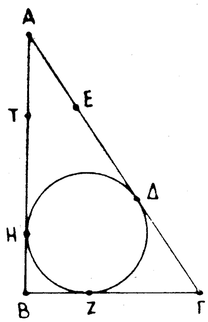
ἢ $$\Gamma B(AH+HB)=2A\Delta\cdot\Delta\Gamma$$

$$\Gamma B\cdot AB=2\ \text{τρίγωνα}\ AB\Gamma=2A\Delta\cdot\Delta\Gamma$$

ἤτοι $\quad A\Delta\cdot\Delta\Gamma=\text{τρίγωνον}\ AB\Gamma\cdot$ *ὅ.ἔ.δ.*

12

Λαμβάνομεν εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΔΕ καὶ ΗΤ ἴσον πρὸς ΓΔ (σχ. 12).



Σχ. 12.

Ἀπόδειξις. *Τότε θὰ εἶναι* $BT=B\Gamma$, *καὶ ἐπειδὴ*

$$A\Gamma^2=A\Delta^2+\Delta E^2+2A\Delta\cdot\Delta E=AB^2+BT^2,$$

καὶ $$A\Delta^2+\Delta E^2+2A\Delta\cdot\Delta E=AE^2+4A\Delta\cdot\Delta E,$$

θὰ ἔχωμεν $$AB^2+BT^2=AE^2+4A\Delta\cdot\Delta E.$$

Εἶναι ὅμως $$AE^4+4A\Delta\cdot\Delta E=AT^2+2AB\cdot BT.$$

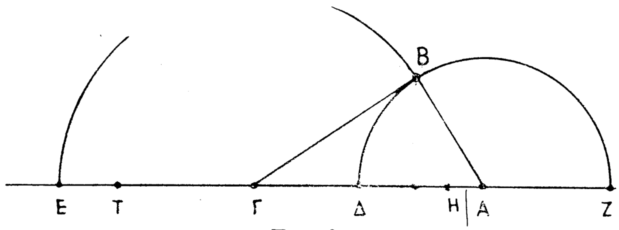
Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὴν ἰσότητα $AE^2=AT^2$, *θὰ ἔχωμεν* $\quad 4A\Delta\cdot\Delta E=2AB\cdot BT.$

ἢ $\quad 2A\Delta\ \Delta E=AB\cdot BT\cdot$

Εἶναι ἄρα $\quad A\Delta\cdot\Delta\Gamma=\text{τρίγ.}\ AB\Gamma\cdot$ *ὅ.ἔ.δ.*

13

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν ὀρθήν. Λαμβάνω $A\Delta = AB$ (σχ. 13). ***Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον ΗΔ ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου = 4 τρίγωνα*** $AB\Gamma$.



Σχ. 13.

Ἀπόδειξις. *Προεκτείνομεν τὴν* $A\Gamma$ *καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εὐθυγράμμως καὶ λαμβάνομεν* $ZA = AB$, $\Gamma E = \Gamma B$, $ET = H\Delta$ *καὶ* $ZE =$ *περίμετρος τοῦ τριγώνου* (**σημ.** *παρελείφθη νὰ σημειωθῇ ὅτι* $\Gamma H = \Gamma B$)

Καὶ εἶναι $ZA + \Gamma\Delta = A\Gamma$. *Ἐπίσης εἶναι*

$$2(A\Gamma\cdot AE + AZ\cdot AE) = ZE^2,$$

$$ZE^2 = ZA^2 + A\Gamma^2 + \Gamma E^2 + 2(ZA\cdot A\Gamma + ZA\cdot \Gamma E + A\Gamma\cdot \Gamma E),$$

$$2(A\Gamma\cdot AE + AZ\cdot AE) = AZ^2 + A\Gamma^2 + \Gamma E^2 + 2(AZ\cdot A\Gamma + Z\Gamma\cdot E\Gamma).$$

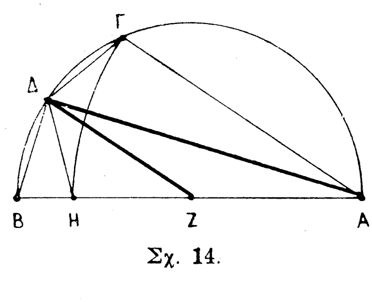
Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $2A\Gamma\cdot ZE$, *λαμβάνομεν*

$$ET\cdot ZE = 2AZ\cdot \Gamma E = 2AB\cdot B\Gamma = 4 \text{ τρίγωνα } AB\Gamma.$$

Ἐκ τούτου εἶναι $ET\cdot ZE = H\Delta$ *ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου* $= 4$ *τρίγωνα* $AB\Gamma$· *ὃ ἔ.δ.*

14

Ἔστω τὸ ἡμικύκλιον $A\Gamma\Delta B$ ***μὲ κέντρον τὸ*** Z (σχ. 14). ***Εἰς τὸ ἡμικύκλιον τοῦτο ἔστω ἡ χορδὴ*** $A\Gamma$. ***Διχοτομοῦμεν τὸ τόξον*** $B\Gamma$ ***διὰ τοῦ σημείου Δ, καὶ ἑνοῦμεν τοῦτο δι' εὐθειῶν μὲ τὰ σημεῖα*** B ***καὶ*** Γ, ***καὶ λαμβάνομεν*** $AH = A\Gamma$. ***Λέγω, ὅτι*** $ZB\cdot BH = B\Delta^2$.



Σχ. 14.

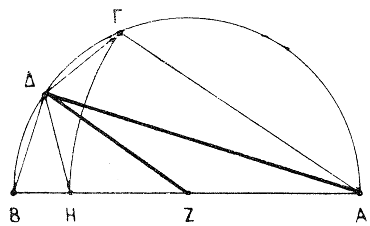
Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὰς εὐθείας $ΑΔ$, $ΔΖ$ καὶ $ΔΗ$. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν δύο τόξων $ΓΔ$ καὶ $ΔΒ$ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι $ΓΑΔ$ καὶ $ΔΑΒ$. Ἐπίσης εἶναι $ΑΓ = ΑΗ$, καὶ ἡ $ΑΔ$ εἶναι κοινὴ πλευρὰ τῶν δύο τριγώνων· ἄρα $ΔΗ = ΔΒ$, $\sphericalangle ΔΗΒ = \sphericalangle ΔΒΗ = \sphericalangle ΒΔΖ$, καὶ τὸ τρίγωνον $ΒΗΔ$ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $ΔΒΖ$.

Κατὰ συνέπειαν ὑπάρχει ἡ ἀναλογία $\frac{ΗΒ}{ΒΔ} = \frac{ΒΔ}{ΒΖ}$ καὶ ἐκ ταύτης εἶναι $ΒΖ \cdot ΗΒ = ΒΔ^2$· ὅ.ἔ.δ.

15

Θεωροῦμεν τὸ προηγούμενον σχῆμα (σχ. 15). ***Λέγω, ὅτι***

$$ΑΖ \cdot ΑΓ + ΔΒ^2 = 2ΑΖ^2.$$



Σχ. 15.

Ἀπόδειξις. $2ΖΒ^2 = ΑΒ \cdot ΖΒ = ΖΒ \cdot ΑΗ + ΖΒ \cdot ΒΗ = ΖΒ \cdot ΑΓ + ΖΒ \cdot ΒΗ = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ + ΖΒ \cdot ΒΗ.$

Ἐκ τοῦ προηγουμένου ὅμως εἶναι $ΖΒ \cdot ΗΒ = ΔΒ^2$ καὶ

$$2ΖΒ^2 = ΑΖ \cdot ΑΓ + ΔΒ^2$$ ὅ.ἔ.δ.

16

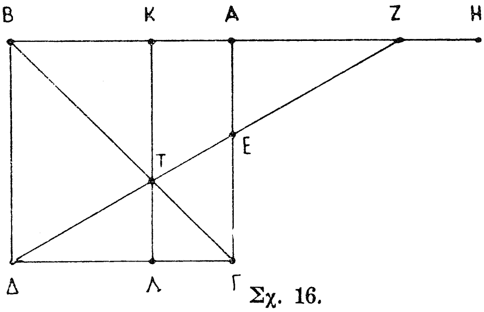
Ἔστω τὸ τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ (σχ. 16). ***Προεκτείνομεν τὴν*** $ΑΒ$ ***εὐθυγράμμως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ*** $Η$ ***καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον*** $ΒΓ$. ***Ἐκ τοῦ σημείου*** $Δ$ ***φέρομεν τὴν*** $ΔΖ$ ***κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τρίγωνον*** $ΑΖΕ =$ ***τρίγωνον*** $ΓΤΔ$. ***Διὰ τοῦ σημείου*** $Τ$ ***φέρομεν τὴν εὐθεῖαν*** $ΚΤΛ$ ***παράλληλον πρὸς τὴν*** $ΑΓ$. ***Λέγω, ὅτι***

$$ΑΒ \cdot ΚΒ = ΑΖ^2$$
$$ΖΚ \cdot ΑΚ = ΚΒ^2$$

καὶ ἀκόμη ὅτι ἑκάτερον τῶν τμημάτων $ΑΖ$, $ΒΚ$ ***εἶναι*** $> ΑΚ$.

Ἀπόδειξις. *Ἐπειδὴ* $ΓΔ \cdot ΤΛ = ΑΖ \cdot ΑΕ$, *θὰ εἶναι*

$$\frac{ΓΔ(=ΑΒ)}{ΑΖ} = \frac{ΑΕ}{ΤΛ}.$$



Σχ. 16.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $ΖΑΕ$, $ΖΚΤ$, $ΤΛΔ$ *εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις*

$$\frac{ΑΕ}{ΤΛ} = \frac{ΑΖ}{ΛΔ(=ΚΒ)}, \quad \frac{ΑΒ}{ΑΖ} = \frac{ΑΖ}{ΚΒ} \text{ καὶ } \frac{ΤΛ(=ΑΚ)}{ΚΤ(=ΚΒ)} = \frac{ΛΔ(=ΚΒ)}{ΖΚ}.$$

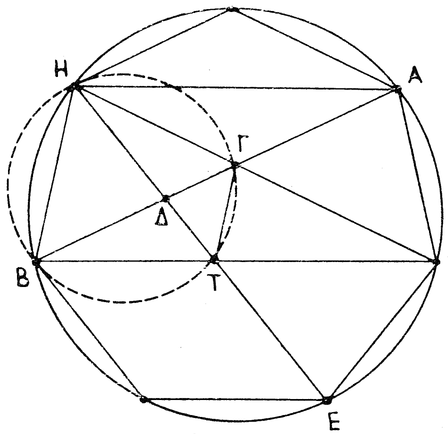
Ἐκ τούτων ἕπεται $ΑΒ \cdot ΚΒ = ΑΖ^2$

$$ΖΚ \cdot ΑΚ = ΚΒ^2$$

καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν $ΑΖ$, $ΚΒ > ΑΚ$· *ὅ.ἔ.δ.*

17

Θέλομεν τώρα νὰ χωρίσωμεν τὸν κύκλον εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη (σχ. 17).



Σχ. 17.

Ἀπόδειξις. *Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν* $ΑΒ$, *τὴν ὁποίαν ὑποθέ-*

μεν γνωστήν. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε $A\Delta\cdot\Gamma\Delta = \Delta B^2$ καὶ $\Gamma B\cdot\Delta B = A\Gamma^2$. Πρὸς τούτοις εἶναι ἑκάτερον τῶν τμημάτων $A\Gamma$ καὶ $\Delta B > \Gamma\Delta$, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Κατασκευάζομεν τώρα ἐκ τῶν εὐθειῶν $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ καὶ $B\Delta$ τὸ τρίγωνον $\Gamma H\Delta$. Ἐπὶ τούτοις εἶναι $\Gamma H = A\Gamma$, $\Delta H = \Delta B$ καὶ $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta$. Περιγράφομεν τώρα περὶ τὸ τρίγωνον AHB τὸν κύκλον $AHBEZ$ καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας $H\Gamma$ καὶ $H\Delta$ εὐθυγράμμως μέχρις ὅτου συναντήσουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα, ἔστω Z καὶ E. Αἱ εὐθεῖαι BZ καὶ HE τέμνονται εἴς τι σημεῖον T. Φέρομεν τὴν ΓT. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος $A\Gamma = \Gamma H$, εἰς τὸ τρίγωνον $A\Gamma H$ θὰ εἶναι

$$\sphericalangle HA\Gamma = \sphericalangle AH\Gamma, \quad \text{τόξον } AZ = \text{τόξον } HB.$$

Καὶ εἶναι

$$A\Delta\cdot\Gamma\Delta = \Delta B^2 = \Delta H^2$$

καὶ τὸ τρίγωνον $AH\Delta$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $\Gamma H\Delta$. Εἶναι ἄρα γωνία $\Delta AH =$ πρὸς τὴν γωνίαν $\Gamma H\Delta$, δηλαδὴ τὸ τόξον $ZE =$ πρὸς τὸ τόξον BH. Κατὰ ταῦτα τὰ τρία τόξα BH, AZ καὶ ZE εἶναι ἴσα μεταξύ των. Εἶναι δὲ ἡ $\sphericalangle\, \Gamma AH = \sphericalangle\, \Gamma H\Delta = \sphericalangle\, TB\Delta$ καὶ ἑπομένως τὰ τέσσαρα σημεῖα B, H, Γ, T κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Καὶ εἶναι $H\Delta = \Delta B$, $\Gamma\Delta = \Delta T$, $TH = B\Gamma$.

Ἐκ τῆς $TH \cdot H\Delta = H\Gamma^2$, ἕπεται ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τριγώνων $TH\Gamma$, $\Gamma H\Delta$.

$$\text{Εἶναι δὲ } \Gamma B = TH \text{ καὶ } \sphericalangle\Delta\Gamma H = \sphericalangle HT\Gamma = 2\cdot\sphericalangle\Gamma AH,$$
$$\sphericalangle\Gamma T\Delta = \sphericalangle\Delta BH = 2\cdot\sphericalangle\Gamma AH.$$

Κατὰ ταῦτα εἶναι τόξον $AH = 2\cdot$τόξον HB, καὶ ἐπειδὴ

$$\sphericalangle\Delta HB = \sphericalangle\Delta BH$$

θὰ εἶναι καὶ τόξον $EB = 2\cdot$τόξον HB, τουτέστιν ἑκάτερον τῶν τόξων AH καὶ $EB = 2\cdot$τόξον HB, καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος $AHBEZ$ ἐχωρίσθη εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἄς εἶναι αἶνος πρὸς τὸν θεόν, τὸν ἕνα κλπ.

Καὶ ἐδῶ ἐτελείωσεν ἡ βελτίωσις καὶ ἡ ἐπιμελὴς σύνταξις αὐτοῦ τοῦ περιφήμου ἀντιγράφου, ἐκ τοῦ χειρογράφου τοῦ διορθώσαντος αὐτὸ Φακίρου. Θεέ, πρὸς ὃν αἶνος καὶ ὕμνος ἔστω, εὐλόγησον τὸν προσκυνητὴν τῆς Μέκκας Μουσταφᾶ, τὸν πιστόν μου, γενναῖον υἱόν. Ἄς εἶναι ἔλεος ὁ Ἀλλὰχ πρὸς αὐτὸν καὶ ὅλους τοὺς Μουσουλμάνους.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑΙ

ΤΟΜΟΣ Α' 1968, σελὶς 293

Η ΝΕΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΤΙΚΗΣ

Διάλεξις γενομένη ἐν τῷ Λαϊκῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Ἑταιρείας τῶν Φίλων τοῦ Λαοῦ τῷ 1966.

Ὡς ἀρχαιότερα τεχνικὰ ἔργα τοῦ ἀνθρώπου θεωροῦνται αἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου, τῶν ὁποίων ἡ κατασκευὴ χρονολογεῖται περὶ τὸ ἔτος 2.600 π.Χ. Ὁ τρόπος κατασκευῆς τῶν πυραμίδων ὀφείλεται εἰς μακροχρόνιον πεῖραν, κτηθεῖσαν μὲ τὴν πάροδον πολλῶν αἰώνων. Ὁ πρῶτος λοιπὸν διδάσκαλος τοῦ ἀνθρώπου εἰς τὴν Τεχνικὴν εἶναι ἡ πεῖρα. Διὰ τὴν κατασκευὴν ὅμως πολυπλόκων κάπως μηχανημάτων ἡ πεῖρα δὲν εἶναι ἀρκετή. Χρειάζεται πρὸς τοῦτο τὴν βοήθειαν τῆς ἐπιστήμης.

Τὴν διαφορὰν μεταξὺ ἐπιστήμης καὶ ἐμπειρίας δυνάμεθα νὰ τὴν καταστήσωμεν σαφῆ μὲ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἐκ τῆς Ἱστορίας. Ὅπως εἶναι γνωστὸν αἱ πρῶται βάσεις τῆς ἐπιστήμης ἐτέθησαν εἰς τὰς Ἀθήνας καὶ τὴν ἀποικίαν αὐτῶν τὴν Μίλητον. Λέγοντες ἐπιστήμην ἐν προκειμένῳ ἐννοοῦμεν τὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ προϋπάρχῃ διὰ νὰ δημιουργηθῇ ἡ Τεχνικὴ ἐπιστημονικῶς. Ἡ ἀνάπτυξις τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὰς Ἀθήνας κατὰ τὸν 6ον καὶ 5ον αἰ. π.Χ. εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Μηχανικῆς καὶ ἐν γένει τῆς Τεχνικῆς. Οἱ Ἀθηναῖοι τῆς ἐποχῆς αὐτῆς χάρις εἰς τὴν ἐπιστήμην των εἶχον πολιορκητικὰς μηχανάς, τῶν ὁποίων ἐστεροῦντο οἱ Σπαρτιᾶται, ὡς μὴ ἔχοντες ἀνεπτυγμένην ἐπιστήμην. Τοῦτο συνάγεται ἐκ πληροφορίας τοῦ Πλουτάρχου (βίοι παρ. Ἀριστείδης), καθ' ἣν οἱ Σπαρτιᾶται εἰς τὰς Πλαταιὰς (479 π.Χ.) ἦτο ἀδύνατον νὰ κυριεύσουν τὸ ξύλινον τεῖχος τῶν Περσῶν καὶ ἐκάλεσαν εἰς βοήθειαν τοὺς Ἀθηναίους, οἱ ὁποῖοι ἐντὸς ὀλίγου χρόνου ἐξεπόρθησαν αὐτὸ διὰ τῶν πολιορκητικῶν μηχανῶν.

Εἶναι τόσον πολλοὶ οἱ εἰδικοὶ κλάδοι τῆς νεωτέρας Τεχνικῆς, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἑνιαία αὐτῆς ἐπισκόπησις. Ἀντιθέτως ὅμως ἡ ἐπιστήμη ἡ ἔχουσα ὡς ἀντικείμενον τὸν αὐτοματισμὸν εἶναι ἑνιαία.

ΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ

Πρὶν ἀκόμη δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ αὐτομάτου μηχανήματος θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ ἀνατρέξωμεν πάλιν εἰς τοὺς χρόνους τῆς ἀρχαιότητος. Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς θεωρεῖται ὁ πρῶτος συστηματικὸς κατασκευαστὴς αὐτομάτων μηχανημάτων. Τὰ πλεῖστα τῶν μηχανημάτων αὐτῶν ἦσαν ἁπλῶς παιγνίδια. Εἰς οἱανδήποτε Μεγάλην Ἐγκυκλοπαιδείαν εὑρίσκει κανεὶς εἰκόνας ἀπὸ τὰ αὐτόματα τοῦ Ἥρωνος. Ἀναφέρομεν ἐδῶ ἐνδεικτικῶς τὸν λύχνον, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ ἐλλύχνιον (κοινῶς φυτίλι) μετακινεῖται αὐτομάτως πρὸς τὰ ἐμπρὸς συνεχῶς, καὶ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δὲν σβήνει ὁ λύχνος, ἐφ' ὅσον ἔχει ἀκόμη ἀρκετὸ λάδι.

Ἐκ τῶν αὐτομάτων μηχανημάτων τοῦ Ἥρωνος προκαλεῖ ἐντύπωσιν καὶ θαυμασμὸν τὸ μηχάνημα διὰ τοῦ ὁποίου ἀνοίγουν καὶ κλείουν αὐτομάτως αἱ θύραι ἑνὸς ναοῦ. Εἰς τὸν παραπλεύρως τοῦ ναοῦ βωμὸν καίεται ζῶον προσφερόμενον ὡς θυσία εἰς τοὺς θεούς. Μετάλλινος σωλὴν συνδέει κατακορύφως τὸν ἀμέσως κάτωθεν τοῦ πυθμένος τοῦ βωμοῦ χῶρον πρὸς κλειστὸν δοχεῖον περιέχον ὕδωρ κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου του, εὑρισκόμενον δὲ εἰς χαμηλότερον ἐπίπεδον. Ἄλλος σωλὴν σχήματος ἀνεστραμμένου ὕψιλον συνδέει τὸ ρηθὲν δοχεῖον πρὸς ἄλλο μικροτέρου μεγέθους. Καὶ εἰς τὰ δύο δοχεῖα τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ ὑπόγειον τοῦ ναοῦ καὶ δὲν φαίνονται τὰ ἄκρα τοῦ κεκαμμένου σωλῆνος φθάνουν σχεδὸν μέχρι τοῦ πυθμένος αὐτῶν. Τὸ μικρότερον δοχεῖον εὑρίσκεται ἐν αἰωρήσει συγκρατούμενον δι᾽ ἁλύσεως, ἡ ὁποία διὰ τοῦ κοίλου τροχαλίας προχωρεῖ ὁριζοντίως καὶ φθάνει εἰς κατακόρυφον στήριγμα δυνάμενον νὰ περιστρέφεται, καὶ μετὰ δύο περιελίξεις εἰς αὐτὸ προχωρεῖ εἰς παράλληλον στήριγμα καὶ ἀφοῦ περιελιχθῇ καὶ εἰς αὐτὸ δύο φοράς, διερχόμενον διὰ τῆς αὔλακος ἄλλης τροχαλίας συνδέεται μὲ ἓν βάρος καὶ κρατεῖ αὐτὸ ἐν αἰωρήσει. Ὅταν καίεται τὸ ζῶον ὁ κάτωθεν τοῦ πυθμένος τοῦ βωμοῦ θερμὸς ἀὴρ πιέζει τοῦ πρώτου δοχείου τὸ ὕδωρ, τοῦ ὁποίου μέρος χύνεται διὰ τοῦ κεκαμμένου σωλῆνος εἰς τὸ μικρότερον δοχεῖον, τὸ ὁποῖον οὕτω καθίσταται βαρύτερον καὶ κατέρχεται ὀλίγον πρὸς τὰ κάτω παρασῦρον τὴν ἅλυσιν, ἡ ὁποία ἀνελισσομένη στρέφει τὰ στηρίγματα καὶ συνεπῶς καὶ τὰ φύλλα τῆς θύρας πρὸς τὰ ὁποῖα συνδέονται τὰ στηρίγματα καὶ οὕτω ἀνοίγουν αὐτομάτως αἱ θύραι τοῦ ναοῦ. Ὅταν καῇ τὸ σφάγιον καὶ παύσῃ ἡ θέρμανσις τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος ἀκολουθεῖ ψῦξις αὐτοῦ καὶ ἀντίστροφος πορεία τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ ἐν αἰωρήσει δοχείου πρὸς τὸ κάτωθεν τοῦ βωμοῦ εὑρισκόμενον καὶ συνεπῶς ἀκολουθεῖ τὸ κλείσιμον τῆς θύρας τοῦ Ναοῦ. Πολλοὶ προσκυνηταὶ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἀπέδιδον τὸ αὐτόματον ἄνοιγμα καὶ κλείσιμον τῶν θυρῶν τῶν ναῶν εἰς θαῦμα.

Ἀλλὰ καὶ ἑκατοντάδας ἐτῶν πρὸ τοῦ Ἥρωνος, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 100 μ.Χ., εἰς τὸν Ἥφαιστον καὶ εἰς εὐφυεῖς δεξιοτέχνας ἀποδίδεται ἡ κατασκευὴ παιγνιδίων καὶ ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὑπό τινων ὡς ἀπαρχὴ τῶν αὐτομάτων τοῦ Ἥρωνος (Ἰλιὰς Θ 195, Σ. 592, Ὀδύσσεια Δ 615, Ο 117), ὁ Πυθαγόρειος Ἀρχύτας εἶχε κατασκευάσει ἱπταμένην περιστεράν, ἡ ὁποία ἐλειτούργει δι᾽ ἐλατηρίου καὶ πεπιεσμένου ἀέρος, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Λατίνου συγγραφέως Gellius ὅστις ἀρύεται τὰς πληροφορίας του παρὰ τοῦ διδασκάλου του Φαβωρίνου (80 — 150 μ.Χ.). Gellius, Noctes Atticae (ἀττικαὶ νύκτες) X 12,8)

ΤΑ ΝΕΩΤΕΡΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Ὡς ἁπλᾶ αὐτόματα μηχανήματα θεωροῦνται ὁ θερμοστάτης καὶ ὁ ρυθμιστὴς τοῦ Watt. Τὸ πρῶτον ἐκ τούτων ρυθμίζει τὴν ἐπιθυμητὴν θερμοκρασίαν ἑνὸς χώρου ἢ ἑνὸς δοχείου ὕδατος ἐπὶ τῇ βάσει ἐνδείξεων, ἢ πληροφοριῶν ὡς λέγεται, παρεχομένων ἔξωθεν. Τὸ δεύτερον ρυθμίζει τὴν πίεσιν τοῦ ἀτμοῦ τῆς μηχανῆς, ἡ ὁποία δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ ἓν ὡρισμένον ὅριον. Αἱ ἐνέργειαι τῶν μηχανημάτων αὐτῶν δύνανται νὰ διατυπωθοῦν ὡς ἑξῆς: πρῶτον λαμβάνεται ἔξωθεν μία πληροφορία (ἢ ἔνδειξις ἢ ἐρεθισμὸς) καὶ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς ἀκολουθεῖ μία ἐνέργεια. Εἰς τὸν ἠλεκτρικὸν κώδωνα τῶν σπιτιῶν, μὲ τὴν πίεσιν τοῦ παρὰ τὴν θύραν κομβίου, παρέχεται μία πληροφορία. Ἡ ἀπάντησις δὲν δίδεται διὰ τοῦ κώδωνος, ἀλλὰ δι᾽ ἄλλου μέσου. Ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι νομίζομεν φανερὰ ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἑνὸς μηχανήματος ὡς εἶναι ὁ κώδων καὶ ἑνὸς αὐτομάτου μηχανήματος ὡς εἶναι ὁ θερμοστάτης καὶ ὁ ρυθμιστὴς τοῦ Watt.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἁπλῶν παραδειγμάτων εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τοῦ αὐτομάτου μηχανήματος: Αὐτόματον μηχάνημα εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παρουσιάσῃ ἄνευ ἐξωτερικῆς ἐπεμβάσεως ἀλλαγὴν εἰς τὸν τρόπον τῆς ἐνεργείας του καὶ νὰ ἐξασφαλίσῃ ἓν ὡρισμένον ἀποτέλεσμα. Πολλοὶ ἐρευνηταὶ προτιμοῦν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν: Αὐτόματον μηχάνημα εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ δίδῃ πληροφοριακὰς ἐνδείξεις εἰς τὰ ὄργανα τὰ ὁποῖα τὸ συναπαρτίζουν, πρὸς ἀλλαγὴν τῆς ἐνεργείας του. Τὰ δύο κύρια συστατικὰ τοῦ αὐτοματικοῦ μηχανήματος εἶναι τὸ μὲν ἡ παροχὴ τῆς πληροφοριακῆς ἐνδείξεως, τὸ δὲ ἡ ἐπακολουθοῦσα ἀντίδρασις.

*

Μεταξὺ τῶν σπουδαίων προβλημάτων τῆς συγχρόνου Τεχνικῆς περιλαμβάνεται καὶ ἡ τελειοποίησις τῶν πυραύλων. Λέγοντες τελειοποίησιν τῶν πυραύλων ἐννοοῦμεν κυρίως τὴν αὔξησιν τῆς ταχύτητος αὐτῶν. Ἡ φιλοδοξία τῶν κατασκευαστῶν τῶν πυραύλων εἶναι νὰ πραγματοποιήσουν δι᾽ αὐτῶν τὰ διαπλανητικὰ ταξίδια. Ὁ πλέον τολμηρὸς ἐκ τῶν κατασκευαστῶν πυραύλων θεωρεῖται ὁ Γερμανὸς καθηγητὴς Sänger (+1964). Ὁ Sänger προσεπάθησε νὰ εὕρῃ πυραυλικὴν μηχανὴν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ προωστικὴ δύναμις θὰ προέρχεται ἀπὸ ἔξοδον ἐκ τῆς μηχανῆς σωματιδίων κινουμένων μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός. Εἶναι φανερὸν ὅτι μία τοιαύτη πυραυλικὴ μηχανὴ εἶναι ἡ τελειοτέρα μηχανή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ συλλάβῃ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς ἐπιτεύξεως μεγίστης ταχύτητος. Πολλοὶ συνάδελφοι τοῦ Sänger θεωροῦν τὰς ἰδέας του διὰ τὴν πυραυλικὴν μηχανὴν τοῦ μέλλοντος ὡς οὐτοπίαν. Ἡ πεῖρα ὅμως μᾶς ἔχει διδάξει, ὅτι εἰς τὸ πεδίον τῶν τεχνικῶν ἐρευνῶν καὶ ἐπιτευγμάτων, τίποτε δὲν πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς οὐτοπία. Κατὰ τὸν δεύτερον αἰῶνα μ.Χ. ὁ Λουκιανὸς εἰς τὴν πραγματείαν του «Ἀληθῆ Διηγήματα» (α. 20) ὁμιλεῖ ὄχι μόνον περὶ συνήθων ταξιδίων μεταξὺ τῶν κατοίκων τῶν πλανητῶν, ἀλλὰ καὶ περὶ πολέμων μεταξὺ τῶν κατοίκων τοῦ Ἡλίου, τῶν Ἡλιωτῶν ὡς ἀποκαλεῖ αὐτούς, καὶ τῶν κατοίκων τῆς Σελήνης, τῶν Σεληνιτῶν. Ἰδοὺ καὶ ἓν ἀπόσπασμα τῆς συνθήκης εἰρήνης τὴν ὁποίαν ὑπέγραψαν οἱ Ἡλιῶται καὶ οἱ Σεληνῖται, οἱ ὁποῖοι προηγουμένως εἶχαν πόλεμον μεταξύ των.

«Συνθήκας ἐποιήσαντο Ἡλιῶται καὶ οἱ σύμμαχοι πρὸς Σεληνίτας καὶ τοὺς συμμάχους ἐπὶ τῷ καταλῦσαι μὲν τοὺς Ἡλιώτας τὸ διατείχισμα καὶ μηκέτι εἰς τὴν Σελήνην ἐσβάλλειν, ἀποδοῦναι δὲ καὶ τοὺς αἰχμαλώτους ρητοῦ ἕκαστον χρήματος, τοὺς δὲ Σεληνίτας, ἀφεῖναι μὲν αὐτονόμους τούς τε ἄλλους ἀστέρας, ὅπλα δὲ μὴ ἐπιφέρειν τοῖς Ἡλιώταις, συμμαχεῖν δὲ τῇ ἀλλήλων, ἤν τις ἐπίῃ φόρον δὲ ὑποτελεῖν ἑκάστου ἔτους τὸν βασιλέα τῶν Σεληνιτῶν τῷ βασιλεῖ τῶν Ἡλιωτῶν δρόσον ἀμφορέας μυρίους, καὶ ὁμήρους δὲ σφῶν αὐτῶν δοῦναι μυρίους, τὴν δὲ ἀποικίαν τὴν εἰς τὸν Ἑωσφόρον κοινῇ ποιεῖσθαι, καὶ μετέχειν τῶν ἄλλων τὸν βουλόμενον· ἐγγράψαι δὲ τὰς συνθήκας στήλῃ ἠλεκτρίνῃ καὶ ἀναστῆσαι ἐν μέσῳ τῷ ἀέρι ἐπὶ τοῖς μεθορίοις».

Δηλαδή, οἱ κάτοικοι τοῦ Ἡλίου καὶ οἱ σύμμαχοί των ἔκλεισαν συνθήκην πρὸς τοὺς κατοίκους τῆς Σελήνης καὶ τοὺς συμμάχους των, οἱ μὲν Ἡλιῶται νὰ κρημνίσουν τὸ μεταξὺ ἡλίου καὶ σελήνης τεῖχος καὶ νὰ μὴ εἰσβάλλουν πλέον εἰς τὴν σελήνην, νὰ ἀποδώσουν δὲ τοὺς αἰχμαλώτους λαμβάνοντες ὡρισμένα χρήματα δι' ἕκαστον, οἱ δὲ Σεληνῖται νὰ ἀφήσουν αὐτονόμους τοὺς ἄλλους Ἀστέρας καὶ νὰ μὴ ἐπιτεθοῦν ἄλλην φορὰν κατὰ τῶν Ἡλιωτῶν, νὰ εἶναι δὲ σύμμαχοι μεταξύ των ἂν κανεὶς τοὺς ἐπιτεθῇ.

Ὁ δὲ βασιλεὺς τῶν Σεληνιτῶν νὰ πληρώνῃ ἐτησίως φόρον εἰς τὸν βασιλέα τῶν Ἡλιωτῶν δέκα χιλιάδας ἀμφορεῖς, οἱ ὁποῖοι νὰ περιέχουν δρόσον, νὰ δώσουν 20.000 ὁμήρους καὶ τὴν ἀποικίαν εἰς τὸν Ἑωσφόρον νὰ κατέχουν ἀπὸ κοινοῦ καὶ ἐκ τῶν ἄλλων (βασιλέων) νὰ συμμετέχῃ εἰς τὴν κατοχὴν πᾶς ὁ ἐπιθυμῶν. Νὰ γραφοῦν δὲ αἱ συνθῆκαι εἰς ἠλεκτρίνην στήλην, ἡ ὁποία νὰ τοποθετηθῇ εἰς τὰ ἐναέρια σύνορα μεταξύ των».

Πρὸ 1.700 ἐτῶν περίπου ἡ τολμηρὰ φαντασία τοῦ Λουκιανοῦ περιγράφει πολέμους μεταξὺ τῶν κατοίκων τῶν ἄστρων καὶ συνθήκας μεταξύ των. Ποῖος σύγχρονος τοῦ Λουκιανοῦ δὲν θὰ ἐθεώρησεν αὐτὸν μέγαν οὐτοπιστήν; Ἐν τούτοις ὅμως ὅλοι τώρα πιστεύομεν, ὅτι συντόμως ὁ ἄνθρωπος θὰ ἐπισκεφθῇ τὴν Σελήνην καὶ τοὺς ἄλλους πλανήτας καὶ ὅτι ἡ οὐτοπία τοῦ Λουκιανοῦ πλησιάζει νὰ γίνῃ πραγματικότης διὰ τῶν πυραύλων. Ἂς ἐλπίσωμεν ὅμως ὅτι δὲν θὰ γίνῃ πόλεμος μεταξὺ τῶν κατοίκων τοῦ Ἄρεως, τῆς Ἀφροδίτης καὶ τῆς γῆς!

ΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΠΥΡΑΥΛΟΙ

Ἡ πρώτη κατασκευὴ πυραύλων ὀφείλεται εἰς τοὺς Κινέζους, οἱ ὁποῖοι διὰ τῆς πυρίτιδος τὴν ὁποίαν εἶχον ἤδη ἀνακαλύψει κατεσκεύαζον διάφορα παιγνίδια, ἃς τὰ ὀνομάσωμεν πυραυλικά. Ἡ ἐπινόησις τῶν κινεζικῶν πυραύλων ἔγινε περίπου κατὰ τὸ ἔτος 900. Ἑκατὸν ἔτη περίπου ἀργότερον, κατὰ τὸ ἔτος 1000 περίπου, οἱ Κινέζοι ἐχρησιμοποίουν τοὺς πυραύλους των ὡς φοβερὸν ὅπλον διὰ νὰ ἀναστέλλουν τὰς εἰς τὸ ἔδαφός των εἰσβολὰς τῶν Μογγόλων. Οἱ πρῶτοι κινεζικοὶ πύραυλοι ἦσαν ὅπως αἱ ρουκέται τὰς ὁποίας παρετηροῦμεν ριπτομένας ἄλλοτε κατὰ τὴν νύκτα τῆς Ἀναστάσεως τοῦ Χριστοῦ. Ἔκτοτε οὐδεμία τεχνικὴ τελειοποίησις αὐτῶν ἔγινε. Πρὸ 60 περίπου ἐτῶν ἤρχισεν ἡ θεωρητικὴ σπουδὴ τῶν πυραύλων ὑπὸ τῶν Ρώσων καὶ τῶν Γερμανῶν, σπουδὴ ἡ ὁποία εἶχε καταλήξει εἰς ὡρισμένα καλὰ ἀποτελέσματα, ἀποτελέσματα ὅμως καθαρῶς θεωρητικά, παραμένοντα ἀχρησιμοποίητα. Μόλις κατὰ τὰ μέσα τοῦ παρελθόντος πολέμου οἱ Γερμανοὶ κατώρθωσαν νὰ χρησιμοποιήσουν τοὺς πυραύλους ὡς σπουδαῖον πολεμικὸν ὅπλον, βάλλοντες, δι' αὐτῶν βλήματα εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἐξ ἀποστάσεως 200 χιλιομέτρων καὶ πλέον. Οἱ σημερινοὶ πύραυλοι δὲν συγκρίνονται βεβαίως πρὸς τοὺς πρώτους γερμανικοὺς πυραύλους, ἀποτελοῦν ὅμως λίαν βελτιωμένον ἀντίγραφον αὐτῶν. Ὁ ἀντίκτυπος τῆς βελτιώσεως τῶν πυραύλων παρουσιάζεται ἐμφανὴς εἰς τὴν ἀπὸ ἀέρος συγκοινωνίαν. Ἤδη εἰς μὲν τὴν Εὐρώπην κατασκευάζεται πυραυλικὸν ἀεροπλάνον ἔχον ταχύτητα 2.500 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, εἰς δὲ τὴν Ἀμερικὴν ὅμοιον περίπου ἔχον ταχύτητα 3.500 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Τὸ ταξίδι Εὐρώπης — Ἀμερικῆς, θὰ γίνεται μὲ τὸ ἀμερικανικὸν ἀεροπλάνον εἰς δύο περίπου ὥρας. Ἡ τελειοποίησις τῶν πυραύλων καὶ τῶν πυραυλικῶν ἀεροπλάνων συμβαδίζει μὲ τὴν τελειοποίησιν τῶν αὐτομάτων μηχανημάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα εἰς τὴν λειτουργίαν τῶν πυραύλων. Αὐτόματα μηχανήματα ἐπὶ τῶν πυραυλικῶν μηχανῶν ρυθμίζουν τὴν πορείαν των καὶ τὴν ταχύτητά των, ρυθμίζουν τὸν τρόπον απογειώσεως καὶ προσγειώσεως. Εἶναι τὰ αὐτόματα μηχανήματα οἱ ἀχώριστοι σύντροφοι τῶν πυραυλικῶν μηχανῶν. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν λειτουργίαν τῶν ἀτομικῶν ἀντιδραστήρων τὰ αὐτόματα μηχανήματα εἶναι ἀπαραίτητα. Ἡ τελειοποίησις τῶν αὐτομάτων μηχανημάτων τῶν ἀτομικῶν ἀντιδραστήρων ἁπλοποιεῖ τὴν λειτουργίαν τῶν ἀντιδραστήρων καὶ διανοίγει νέους δρόμους εἰς τὴν ἐκμετάλλευσιν τῆς ἀτομικῆς ἐνεργείας.

Η ΚΥΒΕΡΝΗΤΙΚΗ

ΓΕΦΥΡΑ ΜΕΤΑΞΥ ΖΩΗΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΗΣ

Δὲν ἔχουν παρέλθει πολλὰ ἔτη, ἀφ' ἧς ἐποχῆς ἔγινεν ἡ πρώτη σκέψις ἐπὶ τῶν εὐρυτέρων σκοπῶν καὶ τῆς εὐρυτέρας δράσεως τῶν αὐτομάτων μηχανημάτων. Καὶ ἡ σκέψις αὐτὴ ὀφείλεται εἰς τὸν Ἀμερικανὸν μαθηματικὸν Norbert Wiener (1894—1964). Ὁ Wiener εἶναι ὁ Ἱδρυτὴς τῆς νέας ἐπιστήμης, τῆς Κυβερνητικῆς, ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ τὸν αὐτοματισμόν. Κατὰ τὸ 1940 ἐτέθη εἰς τὸν Wiener ὑπὸ τοῦ Ἀμερικανικοῦ Ἐπιτελείου τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Νὰ εὑρεθῇ διὰ ἀεροπλάνον μηχάνημα, τὸ ὁποῖον νὰ ρυθμίζῃ τὴν βολὴν πυροβόλου ἀναλόγως τῆς ταχύτητος καὶ τῆς θέσεως ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου. — Τὸ τεθὲν πρόβλημα ἦτο διττῆς φύσεως. Τὸ μὲν ἦτο πρόβλημα μαθηματικόν, τὸ δὲ ἦτο πρόβλημα ψυχολογικόν. Ὁ ἀντίπαλος ἀεροπόρος, ὅταν ἀντιληφθῇ ὅτι βάλλεται θὰ ἀλλάξῃ πορείαν καὶ θὰ προσπαθήσῃ δι' ἑλιγμῶν νὰ ἀποφύγῃ τὰ ἐχθρικὰ βλήματα. Ἀκριβῶς ἐδῶ ἔπρεπε νὰ ἀπαντήσῃ ὁ Wiener. Τὸ ζητούμενον παρ' αὐτοῦ μηχάνημα ἔπρεπε νὰ εἶχε τὴν ἱκανότητα νὰ ἀντιλαμβάνεται τὰς κινήσεις τοῦ ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου καὶ νὰ ἀλλάσσῃ καὶ αὐτὸ τὴν βολὴν τοῦ πυροβόλου του ἀναλόγως τῶν θέσεων καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου. Ὁ Wiener ἐζήτησε τὴν συνεργασίαν τοῦ φυσιολόγου Rosenblueth

Ἡ συνεργασία αὐτη κατέδειξε τὴν ἀνάγκην, ὅτι ἔπρεπε νὰ δημιουργηθῇ μία νέα ἐπιστήμη, ἡ ὁποία νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐναρμονίσῃ τὰ πορίσματα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς φυσιολογίας καὶ νὰ ἱδρύσῃ μίαν γέφυραν μεταξὺ τῆς μηχανῆς καὶ τῶν φαινομένων τῆς ζωῆς. Ἡ νέα ἐπιστήμη ἔπρεπε φυσικὰ νὰ λάβῃ ἓν ὄνομα. Μετὰ βαθεῖαν σκέψιν ὁ Wiener κατέληξεν εἰς τὸ συμπέρασμα τὸ ὁποῖον ἐδέχθησαν καὶ οἱ συνεργάται του, ὅτι ἡ νέα ἐπιστήμη ἔπρεπε νὰ ὀνομασθῇ Κυβερνητική. Τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν παρέλαβεν ὁ Wiener, ὡς ἐδήλωσεν, ἀπὸ τὸν Γοργίαν τοῦ Πλάτωνος, ὅπου ὁ Σωκράτης ὁμιλεῖ περὶ τῆς ἱκανότητος διακυβερνήσεως ἑνὸς πλοίου, λέγων. «Τὴν Κυβερνητικήν, ἡ οὐ μόνον τὰς ψυχὰς σώζει, ἀλλὰ καὶ τὰ σώματα καὶ τὰ χρήματα ἐκ τῶν ἐσχάτων κινδύνων» δηλ. ἐννοῶ, λέγει ὁ Σωκράτης, τὴν ἐπιστήμην τοῦ κυβερνᾶν τὸ πλοῖον, ἡ ὁποία ὄχι μόνον σώζει τὰς ψυχάς, ἀλλὰ καὶ τὰ σώματα καὶ τὰ πράγματα ἐκ τῶν μεγίστων κινδύνων.

Εἰς τὰ προηγουμένως ἀναφερθέντα ἐδώσαμεν ἐν συντομίᾳ τὸν ὁρισμὸν τοῦ αὐτοματικοῦ μηχανήματος. Τώρα θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκθέσωμεν τὰς γενικὰς ἀρχικὰς σκέψεις τοῦ Wiener, τοῦ πατρὸς τῆς νέας ἐπιστήμης τῆς Κυβερνητικῆς. Ὁ ἄνθρωπος ἢ ἓν ζῷον δέχεται ἕνα ἐρεθισμὸν οἱονδήποτε ἔξωθεν. Ὁ ἐρεθισμὸς αὐτὸς μεταφέρεται εἰς τὸν ἐγκέφαλον, ὁ ὁποῖος ἀναλόγως τοῦ ἐρεθισμοῦ δίδει μίαν ἀπάντησιν εἰς αὐτὸν διὰ τῶν κινητηρίων νεύρων. Πρῶτον πρόβλημα λοιπὸν τῆς Κυβερνητικῆς εἶναι ἡ κατασκευὴ μηχανήματος, τὸ ὁποῖον ἀναλόγως τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐρεθισμοῦ νὰ δίδῃ τὴν ἁρμόζουσαν ἀπάντησιν. Μὲ τοιοῦτον μηχάνημα ἐφωδιάσθησαν κατὰ τὸν παρελθόντα πόλεμον τὰ ἀμερικανικὰ πολεμικὰ ἀεροπλάνα. Ἡ παρουσία τοῦ ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου ἀνακοινοῦται διὰ τοῦ ἐντοπισμοῦ (Ρανταρ) εἰς τὸ μηχάνημα τὸ ὁποῖον ἀρχίζει νὰ τελῇ ἐν διεγέρσει. Ὅταν τὸ ἐχθρικὸν ἀεροπλάνον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν βολῆς διεγείρει ἀναλόγως τὸ μηχάνημα, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει νὰ βάλλῃ χωρὶς νὰ χάνῃ οὐδεμίαν βολήν, διότι πᾶσα κίνησις τοῦ ἐχθρικοῦ ἀεροπλάνου προκαλεῖ ἀνάλογον ἐρεθισμὸν καὶ κίνησιν τοῦ μηχανήματος.

Οἱ ἐρεθισμοὶ τοὺς ὁποίους εἶναι δυνατὸν νὰ δεχθῇ ὁ ἀνθρώπινος ὀργανισμὸς εἶναι πολλοί, ὅπως πολλαὶ εἶναι καὶ αἱ ἀπαντήσεις, τὰς ὁποίας παρέχει καὶ διὰ τῶν ὀργάνων του ἐκτελεῖ ὁ ἐγκέφαλος. Ἡ φιλοδοξία τοῦ Wiener καὶ τῆς νέας ἐπιστήμης τῆς Κυβερνητικῆς εἶναι ἡ εὕρεσις μηχανήματος ἢ μηχανημάτων, τὰ ὁποῖα νὰ ἀντιδροῦν εἰς τὰ ἐξωτερικὰ ἐρεθίσματα, ὅπως ἀντιδρᾷ ὁ ἐγκέφαλος τοῦ ἀνθρώπου. Τὸ πρᾶγμα δὲν εἶναι ἁπλοῦν, οὔτε καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῇ διὰ τῆς εὑρέσεως ἑνὸς καὶ μόνον αὐτοματικοῦ μηχανήματος.

Τὰ αὐτόματα μηχανήματα ὀνομάζονται καὶ κυβερνητικαὶ μηχαναί. Ἡ λειτουργία τῶν κυβερνητικῶν μηχανῶν χαρακτηρίζεται ἀπὸ τρία στάδια. Τὸ πρῶτον στάδιον εἶναι ἡ λῆψις ἔξωθεν πληροφοριῶν, τὸ δεύτερον εἶναι ἡ ἐπεξεργασία τῶν πληροφοριῶν καὶ τὸ τρίτον εἶναι ἡ ἀνάλογος ἀντίδρασις ἢ ἀπάντησις. Ἡ τοιαύτη διάκρισις ἔχει τὸ πρότυπόν της εἰς τὸν ἀνθρώπινον ὀργανισμόν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἓν πολυπλοκώτατον καὶ θαυμαστότατον κυβερνητικὸν μηχάνημα. Διὰ τῶν αἰσθητηρίων ὀργάνων δέχεται ἔξωθεν πληροφορίας (ἢ ἐρεθισμούς). Πρῶτον στάδιον. Ἐπεξεργασία ἢ ἐναποθήκευσις τῶν πληροφοριῶν, δεύτερον στάδιον. Ἀπάντησις ἢ ἀντίδρασις ἐκτελουμένη διὰ τῶν κινητηρίων νεύρων τρίτον στάδιον.

Πολυπλόκων τινῶν κυβερνητικῶν μηχανῶν, ὡς εἶναι οἱ ἠλεκτρονικοὶ ἐγκέφαλοι, ἡ λειτουργία καὶ ὁ μηχανισμὸς ἐν γένει, ἔχει ὡς ὑπόβαθρον τὸ δυϊκὸν ἀριθμητικὸν σύστημα (καὶ ὄχι τὸ σύνηθες δεκαδικὸν ἀριθμ. σύστημα). Διὰ δύο καὶ μόνον ἀριθμητικῶν συμβόλων γίνονται ὅλαι αἱ ἀριθμητικαὶ λειτουργίαι τοῦ μηχανήματος. Διὰ τῆς μονάδος καὶ τοῦ μηδενός. Διὰ τῆς μονάδος ἐκφράζεται ἡ δίοδος τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Ἡ μὴ δίοδος ἐκφράζεται διὰ τοῦ μηδενός. Εἰς τὰς τηλεπικοινωνίας χρησιμοποιεῖται τὸ δυϊκὸν ἀριθμητικὸν σύστημα διὰ τὴν μετάδοσιν πληροφοριῶν, χρησιμοποιουμένου τοῦ συστήματος τῶν ὀπῶν (ἢ διατρήσεων) μιᾶς ταινίας, ἐν ᾧ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ἔχουν κωδικοποιηθῆ ἀναλόγως. Ἐπὶ παραδείγματι τὰ γράμματα α, β, γ ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς: α=11000, β=10011, γ=01110 κλπ. Οἱ προηγούμενοι ἀριθμοὶ διαβάζονται ὡς ἑξῆς: α=ἕνα, ἕνα, μηδέν, μηδέν, μηδέν, β=ἕνα, μηδέν, μηδέν, ἕνα, ἕνα, κλπ.

Αἱ περιοχαὶ δράσεως τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων εἶναι πολλαί, εἰς αὐτὰς δὲ περιλαμβάνονται ὅλαι αἱ ἐκδηλώσεις τῆς ἀνθρωπίνης δραστηριότητος. Διακρίνουν τὰς περιοχὰς αὐτὰς εἰς τρεῖς γενικὰς κατηγορίας:

1) Βιοκυβερνητικὴ περιοχή. Εἰς αὐτὴν ἐξετάζονται τὰ βιολογικὰ φαινόμενα γενικῶς. Ἡ διατήρησις σταθερᾶς θερμοκρασίας τοῦ σώματος γίνεται κατὰ τὸν μηχανισμὸν τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων.

Τὴν ἄποψιν αὐτὴν βέβαια κολακευόμεθα νὰ τὴν λέγωμεν. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως, τὸ κυβερητικὸν μηχάνημα εἶναι ἀντίγραφον βιολογικῆς λειτουργίας, τὸ ὁποῖον ἂς ὀνομάσωμεν βιολογικὸν μηχάνημα. Ἡ διατήρησις σταθερᾶς τῆς ποσότητος τοῦ σακχάρου εἰς τὸ αἷμα ἀκολουθεῖ ἐπίσης τοὺς νόμους τῆς κυβερνητικῆς. Τὸ ποσὸν τῶν ἐκκρινομένων οὐσιῶν ὑπὸ τῶν ἀδένων ἐσωτερικῆς ἐκκρίσεως ἐμπίπτει ἐπίσης εἰς τοὺς νόμους τῆς κυβερνητικῆς. Ἀντιλαμβάνεται κανεὶς ποία εἶναι ἡ σημασία τῆς ἐφαρμογῆς τῶν κυβερνητικῶν γνώσεων καὶ μεθόδων εἰς τὴν ἰατρικήν. Διατάραξις λειτουργίας τῶν αὐτοματικῶν συστημάτων τοῦ ὀργανισμοῦ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐμφάνισιν ἀσθενείας. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν τοῦ ἰατροῦ εἰς τὴν νέαν ἐποχὴν εἶναι ἡ παρακολούθησις τῆς τυχὸν μὴ ὀρθῆς λειτουργίας. τῶν αὐτοματικῶν συστημάτων τοῦ ὀργανισμοῦ καὶ ἡ λῆψις μέτρων πρὸς φυσιολογικὴν ἀποκατάστασίν των.

2) Τεχνικὴ περιοχή. Εἰς αὐτὴν ἐρευνῶνται αἱ δυνατότητες χρησιμοποιήσεως τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων εἰς τὴν βιομηχανίαν καὶ τὴν παραγωγὴν ἐν γένει. Ἄριστα ἀποτελέσματα ἔχομεν κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτομάτων εἰς τὴν ἐκτροφὴν τῶν ζώων. Ἐπίσης ὁλόκληρα ἐργοστάσια, χημικῶν προϊόντων π.χ., λειτουργοῦν δι' αὐτοματικῶν μηχανημάτων, τὰ ὁποῖα ρυθμίζουν τὴν παραγωγὴν πολλῶν χημικῶν οὐσιῶν χωρὶς ἀνθρωπίνην ἐπέμβασιν ἔξωθεν. Ἡ πρόοδος τῶν τηλεπικοινωνιῶν εἶναι ἀποτέλεσμα χρησιμοποιήσεως κυβερητικῶν μεθόδων καὶ κυβερνητικῶν μηχανημάτων.

3) Περιοχὴ τῶν πνευματικῶν ἐπιστημῶν. Αἱ ἐπιδράσεις τῆς Κυβερνητικῆς εἰς τὴν κοινωνικὴν ζωὴν εἶναι πολύπλευροι καὶ τυγχάνουν ποικίλης ἐρεύνης. Αἱ συνέπειαι τῆς κυβερνητικῆς ὁσημέραι ἐμφανίζονται ἐντονώτεραι τόσον εἰς τὴν κοινωνικὴν ζωήν, ὅσον καὶ εἰς τὴν ἀτομικήν. Ἐνθουσιώδεις τινὲς ἐρευνηταὶ προβλέπουν διὰ τὸ μέλλον μεγάλην ἐπίδρασιν τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων καὶ μεθόδων εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἀτομικῆς καὶ κοινωνικῆς ζωῆς, ἐν ᾧ ἀντιθέτως οἱ περισσότεροι ἐκ τούτων εἶναι κάπως ἐπιφυλακτικοὶ εἰς τὰς προβλέψεις των.

Τὸ πρόβλημα «Κυβερνητικὴ καὶ Κοινωνία» διαρθροῦται ὑπὸ τινων εἰς τὰς κάτωθι τέσσαρας κατηγορίας:

1) Κοινωνικαὶ συνέπειαι τοῦ αὐτοματισμοῦ γενικῶς.

2) Χειρισμὸς τῶν λαϊκῶν μαζῶν διὰ τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων.

3) Ἀπιδεολογικοποίησις τῆς Κοινωνίας (Entideologisierung).

4) Γενικοποίησις τῆς Τεχνικῆς.

Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ὑπάγεται ἡ ἐπίδρασις τῶν αὐτοματικῶν μηχανημάτων εἰς τὴν ἐργασίαν καὶ τὸ ἐπάγγελμα. Τὸ πρόβλημα, ἂν τὰ μηχανήματα αὐτὰ συντελοῦν εἰς τὴν αὔξησιν τῆς ἀνεργίας ἢ τοὐναντίον εἰς ἀπαιτήσεις μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ἐργατῶν δὲν εἶναι εὔκολον νὰ τύχῃ ἱκανοποιητικῆς ἀπαντήσεως. Ἀπὸ ἐπόψεως μελλοντικῶν ἐπαγγελμάτων ἐμφανίζεται τὸ ἐρώτημα, ἂν ὁ αὐτοματισμὸς ἄξιῇ ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον ἀνωτέραν ποιότητα κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἔργου τινος ἢ τοὐναντίον ἂν ἔχῃ καταστήσει τὴν ἐκμάθησιν καὶ ἐκτέλεσιν ἔργου τινος ἐντελῶς μηχανικὴν καὶ βραχυχρόνιον. Τὸ τεθὲν ἐρώτημα συνεπάγεται ἄλλα μερικώτερα ἐρωτήματα, ὅπως π.χ. 1) Κατὰ ποῖον τρόπον δέον νὰ μορφώνεται ἡ πλειονότης τῶν νέων, καὶ 2) Χρειάζεται ἀναπροσαρμογὴ καὶ διαφοροποίησις τῆς μορφώσεως ἢ ἀρκεῖ, διὰ μίαν στοιχειώδη ἐκπαίδευσιν εἰς τὴν Τεχνικήν, μία ἁπλῶς ἐπιπρόσθετος εἰδικὴ μόρφωσις;

Ὡς σπουδαία συνέπεια τοῦ αὐτοματισμοῦ (ἢ τῆς Κυβερνητικῆς) θεωρεῖται ἡ ἐπίδρασις αὐτοῦ εἰς τὴν μελλοντικὴν διάρθρωσιν τῆς Οἰκονομίας. Κατὰ ταῦτα τίθεται τὸ ἐρώτημα, ἄν, μὲ τὴν αὔξησιν τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων καὶ μεθόδων, εἶναι δυνατὴ ἡ ἐλευθέρα Οἰκονομία ἢ θὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς μίαν συγκεντρωτικὴν δημοσίαν ἢ ἰδιωτικὴν Οἰκονομίαν.

Ε ἰ ς τ ὴ ν δ ε υ τ έ ρ α ν κ α τ η γ ο ρ ί α ν ἀνάγεται τὸ θέμα τῆς ἐπιδράσεως τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἐπιθυμητῆς Κοινῆς γνώμης. Δι' ἐπιμεμελημένης ἀναλύσεως τῶν καθ' ὡρισμένα χρονικὰ διαστήματα γινομένων δημοσκοπήσεων εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν, ἐπὶ τῇ βάσει κυβερνητικῶν μηχανημάτων, σχεδὸν ἀκριβεῖς προβλέψεις διὰ τὸ μέλλον καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ πολιτικὰ Κόμματα τὰ χρησιμοποιοῦντα τὰ μηχανήματα αὐτὰ καὶ τὰς κυβερνητικὰς μεθόδους, θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ρυθμίζουν ἀναλόγως τὰς πολιτικὰς ἐνεργείας των. Ὁ φόβος ὅτι τοιουτοτρόπως εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ συγκέντρωσις τῆς κρατικῆς δυνάμεως δὲν εἶναι ἀδικαιολόγητος καὶ πρῶτος ἀναγνωρίσας τοῦτο εἶναι ὁ ἱδρυτὴς τῆς νέας ἐπιστήμης τῆς Κυβερνητικῆς ὁ Norbert Wiener ὅστις κατὰ τὸ 1948 ἔγραφε τὰ ἑξῆς εἰς τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Cybernetics (Κυβερνητική) βιβλίον του:

«Ὑπάρχουν ἐπιστήμονες, οἱ ὁποῖοι ἐλπίζουν, ὅτι ἡ εὐλογία ἥτις εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς ἀμοιβαίας κατανοήσεως τῶν ἀνθρώπων θὰ εἶναι τὸ ἀντίβαρον πρὸς τὰς δυνατότητας τὰς ὁποίας παρέχομεν εἰς ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θέλουν νὰ συγκεντρώσουν εἰς ἑαυτοὺς ὅλην τὴν κρατικὴν δύναμιν, καὶ οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι πάντοτε οἱ καλύτεροι. Ὀφείλω νὰ ὁμολογήσω ὅτι ἡ ἐλπὶς αὕτη εἶναι πολὺ μικρὰ (N. Wiener, Cybernetics 1948 σελὶς 38).

Ε ἰ ς τ ὴ ν τ ρ ί τ η ν κ α τ η γ ο ρ ί α ν ὑπάγεται ἡ διὰ κυβερνητικῶν μηχανημάτων καὶ μεθόδων ἐξάλειψις τῆς ἰδεολογίας ἐν γένει ἑνὸς λαοῦ, ἡ ἀπο - ἰδεολογικοποίησις αὐτοῦ (Entideologisierung) δηλ. ἡ μεταβολὴ τῶν ἀτομικῶν καὶ κοινωνικῶν ἀντιλήψεών του. Ἐπὶ τοῦ παρόντος πολὺ ὀλίγοι ἀντιλαμβάνονται τὴν συνέπειαν αὐτὴν τῆς Κυβερνητικῆς, ἡ ὁποία ὅμως δὲν θὰ βραδύνῃ νὰ φανῇ ὅτι εἶναι σπουδαιοτάτη.

Ε ἰ ς τ ὴ ν τ ε τ ά ρ τ η ν τέλος κ α τ η γ ο ρ ί α ν κατατάσσεται ἡ ἔρευνα τῆς Τεχνικῆς καὶ ἡ ἐπίδρασις αὐτῆς εἰς τὴν διαμόρφωσιν τεχνικῆς συνειδήσεως. Εἰς τὸν σύγχρονον τεχνικο - ἐπιστημονικὸν πολιτισμὸν ὡς γνώρισμα τῆς Τεχνικῆς θεωρεῖται ἡ ἱκανότης αὐτῆς πρὸς δ η μ ι ο υ ρ γ ί α ν. Ἡ Κυβερνητικὴ συμβάλλει εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ γνωρίσματος αὐτοῦ.

ΚΥΒΕΡΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ἡ διείσδυσις τῶν κυβερνητικῶν μηχανημάτων καὶ μεθόδων εἰς τὴν ἔρευναν τῶν βιολογικῶν νόμων καὶ τῶν πνευματικῶν καὶ κοινωνικῶν ἐπιστημῶν ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων ἐπιτευγμάτων τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης. Τὸ ὑπόβαθρον τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς εἶναι τὰ Μαθηματικά. Πᾶσα ἀνθρωπίνη δραστηριότης εἶναι συνέπεια νόμων, τῶν ὁποίων ἡ ἔρευνα ἐμπίπτει εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην. Ἡ θεωρία τῶν ἀποφάσεων, ἡ θεωρία τῶν πληροφοριῶν, ἡ θεωρία τῶν ρυθμιστῶν ἢ ρυθμίσεων, εἶναι μερικοὶ κλάδοι τῶν Ἐφηρμοσμένων Μαθηματικῶν, τῶν ὁποίων ἡ σπουδὴ ἀποτελεῖ τὸ μέσον διὰ τὴν ἔρευναν τῶν κυβερνητικῶν ἢ αὐτοματικῶν μηχανημάτων καὶ τῶν μεθόδων τῆς Κυβερνητικῆς Ἐπιστήμης. Ἡ θεωρία τῆς διαμορφώσεως τῶν γλωσσῶν καὶ ἡ θεωρία τῆς σκέψεως ἐμπίπτουν ἐπίσης εἰς τὸ πεδίον ἐρεύνης τῆς Κυβερνητικῆς. Δημιουργεῖται ὅμως τὸ ἐρώτημα: ὑπάρχει θεωρία τῆς σκέψεως δυναμένη νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἔρευναν ἢ τὴν διατύπωσιν μαθηματικῶν σχέσεων; Ἄλλα ἐρωτήματα συναφῆ πρὸς τὴν κυβερνητικὴν ἔρευνον τῶν πνευματικῶν καὶ κοινωνικῶν ἐπιστημῶν εἶναι ἡ δυνατότης ἢ μὴ τῆς ὑπαγωγῆς τῶν ψυχολογικῶν φαινομένων εἰς τὴν ἔρευναν αὐτήν. Οἱ ἐρευνηταὶ τῆς Κυβερνητικῆς πιστεύουν ὅτι καὶ τὰ ψυχολογικὰ φαινόμενα ἐμπίπτουν εἰς τὸν κύκλον τῶν ἐρευνῶν των. Ἁπλῶς πιστεύουν. Εἰς τὴν ἐπιστήμην ὅμως ἡ πίστις δὲν εἶναι ἀρκετή. Πρέπει νὰ τύχῃ τῆς ἐπικουρίας τῆς θεωρητικῆς καὶ ἐμπειρικῆς ἀποδείξεως. Τὰ πρῶτα βήματα τῆς νέας ἐπιστήμης τῆς Κυβερνητικῆς, ἀριθμούσης βίον μόλις 25 ἐτῶν, εἶναι εὐοίωνα διὰ τὰς μελλοντικὰς αὐτῆς προσπαθείας καὶ βλέψεις. Ἡ μέχρι σήμερον ὅμως πρόοδος τῶν φυσικῶν καὶ πνευματικῶν ἐπιστημῶν, ἀπὸ τοῦ 600 π.Χ., ἀπὸ τῆς ἐποχῆς δηλ. τοῦ Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου, μέχρι σήμερον, μᾶς διδάσκει, ὅτι ὁ ἐνθουσιασμὸς καὶ αἱ ἐλπίδες μερικῶν ἐρευνητῶν διὰ τὴν ἐπίδρασιν τῆς Κυβερνητικῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν διαβίωσιν τῶν ἀτόμων πρέπει νὰ συγκρατῆται ἐντὸς τῶν ὁρίων, τὰ ὁποῖα διαγράφει ἡ μέχρι σήμερον κτηθεῖσα πεῖρα.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑΙ

ΤΟΜΟΣ Α′ 1968, σελὶς 505

ΤΑ ΚΑΤΟΡΘΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Διάλεξις γενομένη ἐν τῷ Λαϊκῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Ἑταιρείας τῶν Φίλων τοῦ Λαοῦ τῷ 1966.

Ὁ Ἀρχιμήδης (287—212 π.Χ.), υἱὸς τοῦ ἀστρονόμου Φειδίου καὶ συγγενὴς τοῦ βασιλέως τῶν Συρακουσῶν Ἱέρωνος, μετέβη εἰς ἡλικίαν εἴκοσιν ἐτῶν περίπου εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν πρὸς τελειοποίησιν τῶν σπουδῶν του εἰς τὸ ἐκεῖ ἑλληνικὸν Πανεπιστήμιον, τὸ ἱδρυθὲν ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α′. Εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ἐγνωρίσθη καὶ ἔγινε φίλος μὲ τὸν περίφημον Σάμιον μαθηματικὸν Κόνωνα καὶ τὸν φιλόσοφον, μαθηματικὸν καὶ γεωγράφον Ἐρατοσθένη τὸν Κυρηναῖον.

Ο ΚΟΧΛΙΑΣ

Ὅτε ὁ Ἀρχιμήδης εὑρίσκετο εἰς τὴν Αἴγυπτον παρετήρησεν, ὅτι, ἐκτὸς τῆς ἐποχῆς τῶν πλημμυρῶν, ὅτε συνεσωρεύετο πολλὴ ἰλὺς εἰς τὰς παροχθίους περιοχάς, τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου ἦτο ἀδύνατον νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ γεωργικοὺς σκοπούς. Ἀφορμηθεὶς ἐκ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς ἐπενόησεν ἀντλητικὴν μηχανήν, ἡ ὁποία ὠνομάσθη κοχλίας. Δι' αὐτῆς ήτο δυνατὸν νὰ γίνεται ἄντλησις τῶν ὑδάτων τοῦ Νείλου πρὸς ἄρδευσιν διαφόρων πλησίον αὐτοῦ καλλιεργειῶν. Τὴν ἀντλητικὴν αὐτὴν μηχανὴν περιγράφει ὁ Ρωμαῖος ἀρχιτέκτων μηχανικὸς Βιτρούβιος εἰς τὸ περίφημον βιβλίον του «Περὶ Ἀρχιτεκτονικῆς».

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ κοχλίου διεδόθη ἐκ τῆς Αἰγύπτου εἰς ὅλον τὸν πολιτισμένον κόσμον. Ὁ Διόδωρος ὁ Σικελιώτης, συγγραφεὺς τοῦ πρώτου αἰῶνος π.Χ., πληροφορεῖ ἡμᾶς περὶ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κοχλίου διὰ τὴν ἄντλησιν τῶν ὑδάτων τῶν ὑπογείων στοῶν τῶν μεταλλείων ἀργύρου καὶ χρυσοῦ τῆς Ἱσπανίας γράφων τὰ ἑξῆς: «Ἐνίοτε οἱ μεταλλουργοὶ (ἐν Ἱσπανίᾳ) συναντοῦν εἰς βάθος ὑπογείους ποταμούς, τῶν ὁποίων διὰ πλαγίων ὀρυγμάτων ἀνακόπτουν τὴν ὁρμήν. Διότι πιεζόμενοι ἀπὸ τὸ ἀσφαλῶς ἀναμενόμενον κέρδος πραγματοποιοῦν τὰ σχέδιά των καὶ τὸ παραδοξότατον ὅλων, ἀντλοῦν τὰ ἀναβλύζοντα ὕδατα διὰ τῶν αἰγυπτιακῶν λεγομένων κοχλιῶν, τοὺς ὁποίους ἐπενόησεν ὁ Ἀρχιμήδης, ὅτε διέμενεν εἰς τὴν Αἴγυπτον· διὰ τούτων δὲ τῶν κοχλιῶν συνεχῶς κατὰ διαδοχὴν φέροντες τὰ ὕδατα μέχρι τοῦ στομίου (τῶν φρεάτων τῶν ὀρυχείων) ἀποξηραίνουν τὴν περιοχὴν τῶν μετάλλων καὶ χρησιμοποιοῦν κατάλληλον τρόπον διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὄργανον εἶναι κατεσκευασμένον μὲ πάρα πολλὴν δεξιότητα, μὲ ὀλίγην ἐργασίαν ἀντλεῖται παραδόξως πολὺ ὕδωρ, καὶ ὅλον τὸ εἰς τὸν βυθὸν ρέον ποτάμιον ρεῦμα ἐκχύνεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους. Εὐλόγως δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ θαυμάση κανεὶς τὴν ἐπινοητικότητα τοῦ ἐφευρέτου, ὄχι μόνον εἰς αὐτά, ἀλλὰ καὶ εἰς πολλὰ ἄλλα, τὰ ὁποῖα εἶναι φημισμένα εἰς ὅλην τὴν οἰκουμένην, καὶ περὶ τῶν ὁποίων τὰς λεπτομερείας θὰ διεξέλθωμεν, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν περιγραφὴν τοῦ βίου τοῦ Ἀρχιμήδους. (Σημ.: Δυστυχῶς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ τῆς πραγματείας δὲν ἐσώθη).

ΣΚΑΦΟΣ 4.000 ΤΟΝΝΩΝ!

Μετὰ τὴν ἐπιστροφήν του ἐκ τῆς Αἰγύπτου εἰς τὰς Συρακούσας ὁ Ἀρχιμήδης παρεκλήθη ὑπὸ τοῦ τυράννου τῶν Συρακουσῶν Ἱέρωνος νὰ ἐξοπλίση τὸ πλοῖον «Συρακοσία». Τὸ πλοῖον αὐτὸ ἦτο τὸ μεγαλύτερον μέχρι τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ναυπηγηθέν, ἦτο δὲ ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἰσχυρότατον καὶ ἀπρόσβλητον πολεμικὸν σκάφος καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου πολυτελεστάτη θαλαμηγός. Πληροφορίας περὶ τοῦ πλοίου αὐτοῦ λαμβάνομεν παρὰ τοῦ Ἀθηναίου, συγγραφέως ἀκμάσαντος περὶ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου αἰῶνος μ.Χ. Ἀρχιτέκτων τοῦ σκάφους ἦτο ὁ περίφημος μηχανικὸς Ἀρχίας, συνώνυμος τοῦ στρατηγοῦ τῶν Κορινθίων, ὅστις ἵδρυσε τὰς Συρακούσας. Ἡ ἀπαιτηθεῖσα ναυπηγικὴ ξυλεία ἐλήφθη ἐκ τῶν δασῶν τῆς Αἴτνης, ἦτο δὲ τόση πολλή, ὥστε ἦτο δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν ἐξ αὐτῆς ἑξήκοντα τριήρεις. (Σημείωσις: Ἡ χωρητικότης τῆς τριήρους ἐκυμαίνετο περὶ τοὺς 100 τόννους, ἐν ᾧ ἡ χωρητικότης τῆς «Συρακοσίας» ὑπολογίζεται εἰς 4.000 τόννους περίπου). Ὁ σκελετὸς τοῦ σκάφους ἡτοιμάσθη ἐντὸς ἓξ μηνῶν, εἰργάζοντο δὲ πρὸς τοῦτο τριακόσιοι τεχνῖται ἐκτὸς τοῦ πολυπληθοῦς ὑπηρετικοῦ προσωπικοῦ. Εἰς τοιαύτην κατάστασιν εὑρισκομένου τοῦ πλοίου διετάχθη ἡ πρὸς τὴν θάλασσαν καθέλκυσις διὰ νὰ γίνη ἐκεῖ ἡ ὑπόλοιπος κατασκευή. Ἐν ᾧ δὲ ἐγίνετο πολλὴ συζήτησις διὰ τὸ ἀπαιτούμενον προσωπικὸν πρὸς καθέλκυσιν αὐτοῦ, ὁ Ἀρχιμήδης τὸ μετέφερεν εἰς τὴν θάλασσαν διὰ μιᾶς ἕλικος. Πρῶτος δὲ ὁ Ἀρχιμήδης ἀνεκάλυψε τὴν κατασκευὴν τῆς ἕλικος. Ὅταν δὲ καὶ τὰ ὑπόλοιπα μέρη τοῦ πλοίου ἐντὸς ἄλλων ἓξ μηνῶν κατεσκευάσθησαν, ὅλον τὸ πλοῖον ἐστερεώθη διὰ χαλκῶν καρφιῶν, πολλὰ τῶν ὁποίων ἦσαν βάρους 4,4 χιλιογράμμων, τὰ ἄλλα δὲ 0,66 χιλιογρ. ἕκαστον. Διὰ τρυπάνων δὲ ἦσαν αὐτὰ προσηρμοσμένα καὶ συνεκράτουν τὰ ἐλάσματα. Μόλις ἐτελείωσε τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ σκάφους ἤρχισεν ἡ διασκευὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ. Τὸ πλοῖον ἦτο «εἰκοσήρης» (*) καὶ εἶχε τρία πατώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ κατώτατον ἦτο διὰ τὰ φορτία, κατέβαινον δὲ εἰς αὐτὰ διὰ κλιμάκων· τὸ δὲ ἄλλο πάτωμα (τὸ μεσαῖον) εἶχε κατασκευασθῆ ὡς χῶρος διαμονῆς· μετὰ τοῦτο, τὸ τελευταῖον πάτωμα ἦτο διὰ τὴν φρουράν. Εἰς τὸ μεσαῖον πάτωμα ὑπῆρχον εἰς ἕκαστον τῶν τοίχων θάλαμοι τετράκλινοι διὰ τοὺς ἄνδρας, κατὰ τὸ πλῆθος τριάκοντα· ὁ χῶρος διὰ τοὺς ναύτας περιελάμβανε δέκα πέντε κλίνας, θαλάμους δὲ εἶχε τρεῖς τρικλίνους, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τὸ πρὸς τὴν πρύμναν μαγειρεῖον.

ΜΥΘΩΔΗΣ ΠΟΛΥΤΕΛΕΙΑ

Ὅλα τὰ πατώματα εἶχον δάπεδα ἀποτελούμενα ἀπὸ τετραγώνους πλάκας ἐκ διαφόρων λίθων, ὅπου εἶχε θαυμάσια παρασταθῆ ἡ εἰς τὴν Ἰλιάδα περιγραφομένη ἱστορία· καὶ εἰς τὰ δάπεδα καὶ εἰς τὰς στέγας καὶ εἰς τὰ φύλλα τῶν θυρῶν ἦσαν ὅλα αὐτὰ μὲ προσο-

(*) Δηλ. εἶχεν ἑκατέρωθεν εἴκοσι σειρὰς κωπηλατῶν.

χὴν κατεσκευασμένα. Εἰς τὸ κατάστρωμα δὲ ὑπῆρχε γυμναστήριον καὶ χῶροι περιπάτου, ἔχοντες τὴν κατασκευὴν σύμμετρον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ πλοίου, ὅπου ἦσαν διάφοροι κῆποι μὲ θαυμασίας φυτείας, στεγαζόμενοι μὲ μολύβδινα φύλλα. Ὑπῆρχον δὲ ἀκόμη σκηναὶ (pergolae) ἀπὸ λευκὸν κισσὸν καὶ κλήματα ἀμπέλου, τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι ἐλάμβανον τὴν τροφὴν ἐκ πίθων γεμάτων μὲ χῶμα. Αἱ σκηναὶ δὲ αὗται ἔκαμνον σκιὰν εἰς τοὺς χώρους τῶν περιπάτων. Ἐν συνεχείᾳ δὲ πρὸς ταῦτα εἶχε κατασκευασθῇ ἱερὸν τῆς Ἀφροδίτης τρίκλινον, ἔχον δάπεδον ἐκ λίθων ἀχάτου καὶ ἄλλων χαριεστάτων ὅσοι ὑπῆρχον εἰς τὴν νῆσον. Εἶχον δὲ κατασκευασθῇ οἱ τοῖχοι καὶ ἡ ὀροφὴ ἀπὸ ξύλον ἐκ κυπαρίσσου, αἱ δὲ θύραι ἐξ ἐλεφαντοστοῦ καὶ κέδρου· εἶχον δὲ γραφῇ θαυμάσιαι ἐπιγραφαὶ καὶ εἶχον κατασκευασθῇ ἀγάλματα θαυμάσια καὶ ποτήρια. Ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὸ Ἀφροδίσιον ὑπῆρχε πεντάκλινος αἴθουσα διαμονῆς (σχολαστήριον) μετὰ βιβλιοθήκης. Οἱ τοῖχοι καὶ αἱ θύραι τῆς αἰθούσης ἦσαν κατεσκευασμέναι ἀπὸ ξύλον ὀξυᾶς. Ὑπῆρχε δὲ καὶ αἴθουσα λουτροῦ τρίκλινος μὲ τρία χαλκᾶ ἀτμόλουτρα καὶ λουτῆρα χωροῦντα πέντε μετρητὰς (176,5 λίτρα) μὲ ποικιλίαν μαρμάρων ἐκ τῆς πόλεως Ταυρομένιον (σημερινῆς Taormina). Εἶχον δὲ κατασκευασθῇ καὶ θάλαμοι πολλοὶ διὰ τοὺς ναύτας καὶ διὰ τοὺς φρουροὺς τῶν ἀντλιῶν. Ἐκτὸς δὲ τούτων ὑπῆρχον εἰς ἑκάστην τῶν (δύο) πλευρῶν δέκα ἱππῶνες (σταῦλοι). Παρ' αὐτοὺς δὲ εὑρίσκετο ἡ τροφὴ τῶν ἵππων καὶ τὰ σκεύη τῶν ἀναβατῶν καὶ τῶν βοηθῶν των. Εἰς τὴν πρώραν ὑπῆρχε καὶ σκεπασμένη ὑδαταποθήκη χωροῦσα δύο χιλιάδας μετρητὰς (70,6 τόννους), κατεσκευασμένη ἐκ σανίδων μὲ ἐπένδυσιν πίσσης καὶ ἐπένδυσιν ὑφασμάτων. Παρ' αὐτὴν δὲ εἶχε κατασκευασθῇ διὰ μολυβδίνων ἐλασμάτων καὶ σανίδων ἰχθυοτροφεῖον· ὑπῆρχον δὲ καὶ ἑκατέρωθεν τῶν τοιχωμάτων (πλευρῶν) τοῦ πλοίου ἐξέχουσαι δοκοὶ κατὰ συμμετρικὰς ἀποστάσεις· ἐπὶ τούτων ἦσαν κατεσκευασμέναι ξυλοθῆκαι καὶ κλίβανοι καὶ μαγειρεῖα καὶ μύλοι καὶ πολλοὶ ἄλλοι χῶροι ὑπηρεσίας. Πρὸς τὸ ἔσω μέρος τοῦ πλοίου ὑπῆρχον εἰς σειρὰν στηρίγματα ἐξ πήχεων ἕκαστον (1 πῆχυς = 0,49 μ.), τὰ ὁποῖα ὑπεβάσταζον ὑπεράνω κείμενα βάρη καὶ τὸ τρίγλυφον. Ὅλον δὲ τὸ πλοῖον εἶχε διακοσμηθῇ μὲ καταλλήλους εἰκόνας.

Ο ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ ΤΟΥ

Ἐπὶ τοῦ σκάφους ὑπῆρχον ἀκόμη ὀκτὼ πύργοι σύμμετροι κατὰ τὸ μέγεθος πρὸς τὰ βάρη τοῦ πλοίου· δύο μὲν κατὰ τὴν πρύμναν, ἄλλοι δὲ δύο κατὰ τὴν πρώραν, οἱ ὑπόλοιποι δὲ περὶ τὸ μέσον τοῦ πλοίου. Εἰς ἕκαστον τῶν πύργων εἶχον προσδεθῇ δύο κεραῖαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶχον κατασκευασθῇ φατνώματα (σκάφαι) ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐρρίπτοντο λίθοι πρὸς τοὺς ἐκ τῶν ἐχθρῶν προσπλέοντας. Εἰς ἕκαστον δὲ τῶν πύργων ἐτοποθετοῦντο τέσσαρες μὲν βαρέως ὡπλισμένοι ναῦται, δύο δὲ τοξόται. Ὅλος δὲ ὁ ἐντὸς τῶν πύργων χῶρος ἦτο πλήρης λίθων καὶ βελῶν. Εἶχε δὲ κατασκευασθῇ τεῖχος ἔχον ἐπάλξεις καὶ καταστρώματα ἐπὶ τριπόδων στηριγμάτων κατὰ μῆκος τοῦ πλοίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐστηρίζετο βαλλιστικὸν μηχάνημα λίθων δυνάμενον νὰ βάλῃ λίθον βάρους τριῶν ταλάντων (= 108 χιλιογράμμων) καὶ βέλος μήκους δώδεκα πήχεων (περίπου 6 μ.). Τοῦτο δὲ τὸ μηχάνημα τὸ κατεσκεύασεν ὁ Ἀρχιμήδης. Ἕκαστον δὲ τῶν βλημάτων τὸ ἔρριπτεν εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου (κοινὸν ἑλληνικὸν στάδιον = 164 μ.). Μετὰ δὲ ταῦτα ὑπῆρχον παραπετάσματα ἀποτελούμενα ἀπὸ παχείας δοκούς, αἱ ὁποῖαι ἐκρέμαντο διὰ χαλκῶν ἁλύσεων. Ἐν ᾧ δὲ ὑπῆρχον τρεῖς ἱστοὶ ἐξηρτῶντο ἐξ ἑκάστου δύο κεραῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἀφήνοντο πρὸς τοὺς ἐπιτιθεμένους ἁρπακτικὰ ἄγκιστρα καὶ πλίνθοι ἐκ μολύβδου. Γύρω - γύρω τοῦ πλοίου ὑπῆρχε σιδηροῦν κιγκλίδωμα καὶ ἐπίσης γύρω - γύρω (εἰς τὸ ἄκρον τοῦ καταστρώματος) σιδηραῖ ἁρπάγαι, αἱ ὁποῖαι ριπτόμεναι διὰ μηχανημάτων ἠμπόδιζον νὰ προσεγγίζουν τὰ σκάφη τῶν ἐχθρῶν καὶ τὰ κατέστρεφον. Εἰς ἑκάστην δὲ πλευρὰν τοῦ πλοίου ἐφρούρουν ἑξήκοντα πάνοπλοι ναῦται καὶ ἄλλοι τόσοι ἦσαν εἰς τοὺς ἱστοὺς καὶ τὰς κεραίας. Ἦσαν δὲ καὶ παρὰ τοὺς ἱστούς, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ ἦσαν χάλκινοι, εἰς μὲν τὸν πρῶτον τρεῖς ἄνδρες, εἰς δὲ τοὺς ἄλλους κατὰ σειρὰν ὀλιγώτεροι κατὰ ἕνα (δηλ. δύο εἰς τὸν δεύτερον, εἷς εἰς τὸν τρίτον)· διὰ τούτων δὲ μὲ πλεκτὰ καλάθια ἐγεμίζοντο διὰ τροχαλιῶν οἱ προμαχῶνες μὲ λίθους καὶ βέλη διὰ τῶν ὑπηρετῶν. Ὑπῆρχον δὲ ἄγκυραι ξύλιναι μὲν τέσσαρες, σιδηραῖ δὲ ὀκτώ. Ἐκ τῶν ἱστῶν δὲ εὑρέθησαν εὐκόλως ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος, μὲ δυσκολίαν δὲ ὁ πρῶτος εἰς τὰ ὄρη τῆς Βρεττίας (τῆς κάτω Ἰταλίας) ὑπό τινος χοιροβοσκοῦ· μετέφερε δὲ αὐτὸν εἰς τὴν παραλίαν ὁ Ταυρομενίτης μηχανικὸς Φιλέας. Ἡ δὲ ἀντλία καίτοι εἶχε μέγα μῆκος ἐλειτούργει δι' ἑνὸς ἀνδρὸς διὰ κοχλίου, τὸν ὁποῖον ἐπενόησεν ὁ Ἀρχιμήδης· τὸ ὄνομα δὲ τοῦ πλοίου ἦτο «Συρακοσία»· ὅτε δὲ ὁ Ἱέρων τὸ ἀπέστειλεν εἰς τὸν Πτολεμαῖον, τὸ μετωνόμασεν «᾿Αλεξάνδρειαν». Τὸ πλοῖον ἔφερε μεθ᾿ ἑαυτοῦ πλοιάρια, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον φορτηγόν, ἦτο χωρητικότητος τριῶν χιλιάδων ταλάντων (δηλ. 108 τόννων, φαλαινίς)· τοῦτο δὲ ἐκινεῖτο μόνον μὲ κώπας. ᾿Εκτὸς δὲ τούτου ἔφερε πολλὰς ἰχθυολέμβους, χωρητικότητος ἑκάστην 1.500 ταλάντων (= 54 τόννων) καὶ πολλὰς λέμβους. Τὸ πλήρωμα ἦτο οὐχὶ ὀλιγώτερον τῶν λεχθέντων προηγουμένως, ἐκτὸς δὲ αὐτῶν ὑπῆρχον παρὰ τὴν πρῶραν ἄλλοι ἑξακόσιοι πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν παραγγελιῶν. Διὰ τὰ ἀδικήματα, τὰ ὁποῖα ἐλάμβανον χώραν εἰς τὸ πλοῖον εἶχον ὁρισθῇ εἷς ναύτης, ὁ κυβερνήτης καὶ ὁ ὑποκυβερνήτης, οἱ ὁποῖοι ἐδίκαζον κατὰ τοὺς νόμους τῶν Συρακοσίων. ᾿Εφορτώνοντο δὲ εἰς τὸ πλοῖον σίτου μὲν 60.000 τάλαντα (2.160 τόννοι βάρους), 10.000 δὲ τάλαντα (360 τόννοι) μὲ ταριχευμένα σικελικὰ ψάρια, εἰς δοχεῖα ἀπὸ κέραμον, 20.000 τάλαντα (720 τόννοι) μάλλινα εἴδη καὶ ἄλλα 20.000 τάλαντα διάφορα φορτία. ᾿Εκτὸς δὲ τούτων ὑπῆρχον τὰ ἐφόδια διὰ τοὺς ταξιδεύοντας μὲ τὸ πλοῖον (φρουρὰν καὶ πλήρωμα). ῾Ο ῾Ιέρων ἀφοῦ ἐπληροφορήθη ὅτι ἀπὸ τοὺς λιμένας ἄλλοι μὲν δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ χωρέσουν τὸ πλοῖον, ἄλλοι δὲ θὰ ἔφερον αὐτὸ εἰς κίνδυνον, ἐσκέφθη νὰ τὸ ἀποστείλῃ ὡς δῶρον εἰς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον, εἰς τὴν ᾿Αλεξάνδρειαν, διὰ τὴν μεταφορὰν σίτου, διότι ὑπῆρχεν ἔλλειψις σίτου εἰς τὴν Αἴγυπτον. Τὸ σκάφος ἔπλευσεν εἰς τὴν ᾿Αλεξάνδρειαν, ὅπου καὶ ἐνεωλκήθη εἰς παραλίαν.

᾿Εδῶ τελειώνει ἡ περιγραφή, τὴν ὁποίαν μᾶς ἀφῆκεν ὁ ᾿Αθήναιος.

Η ΑΜΥΝΑ ΤΩΝ ΣΥΡΑΚΟΥΣΩΝ

῾Η καθέλκυσις τῆς «Συρακοσίας» εἰς τὴν θάλασσαν ὑπὸ τοῦ ᾿Αρχιμήδους διὰ συστήματος τροχαλιῶν, τὸ ὁποῖον ἐκίνει μόνος του, προεκάλεσε τὴν κατάπληξιν τοῦ ῾Ιέρωνος, ὅστις διέταξεν ὅπως ἀπ᾿ ἐκείνης τῆς ἡμέρας ὁ ᾿Αρχιμήδης εἶναι πιστευτὸς εἰς πᾶν ὅ,τι λέγει καὶ τοῦ ἀνέθεσε τὴν ὀργάνωσιν τῆς ᾿Αμύνης τῶν Συρακουσῶν διὰ τῶν μηχανῶν του. ῞Οταν κατὰ τὸ 215 π.Χ. ὁ στρατηγὸς τῶν Ρωμαίων Μάρκελλος προσεπάθησεν αἰφνιδιαστικῶς νὰ καταλάβῃ τὰς Συρακούσας ὑπέστη μεγάλας καταστροφὰς καὶ ἐξευτελισμοὺς ἐκ τῶν μηχανημάτων τοῦ ᾿Αρχιμήδους. Μόλις κατὰ τὸ τρίτον ἔτος τῆς πολιορκίας, κατὰ Σεπτέμβριον τοῦ 212 π.Χ. κατέλαβε τὴν πόλιν διὰ προδοσίας. ῾Η ἄμυνα τῆς πόλεως διὰ τῶν μηχανῶν τοῦ ᾿Αρχιμήδους ἦτο ἀκατάβλητος. Διὰ τελειοποιημένων καταπελτῶν ἔρριπτε βροχὴν λίθων ἐναντίον τῶν ἐπιτιθεμένων. Κατὰ ξηρὰν οἱ πλησιάζοντες εἰς τὰ τείχη διὰ νὰ προσαρμόσουν κλίμακας Ρωμαῖοι ἐφονεύοντο, ἐν ᾧ τὰ πλησιάζοντα πλοῖα συνελαμβάνοντο δι᾿ ἁρπάγης, ἀνυψώνοντο ἀρκετὰ ὑψηλὰ καὶ ἀφήνοντο νὰ πέσουν εἰς τὴν θάλασσαν, ὅπου ἐβυθίζοντο. ῏Ητο φοβερὸν τὸ θέαμα τῶν εἰς τὸν ἀέρα ἐκσφενδονιζομένων ναυτῶν καὶ πνιγομένων κατόπιν εἰς τὴν θάλασσαν.

῾Ο Ρωμαῖος συγγραφεὺς Σίλιος ᾿Ιταλικός, ὅστις διετέλεσεν ὕπατος κατὰ τὸ 68 μ.Χ., ἀναφέρει τὰ ἑξῆς διὰ μηχάνημα τοῦ ᾿Αρχιμήδους, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθη κατὰ τὴν ἄμυναν τῶν Συρακουσῶν: «Εἷς πύργος ἀνυψώθη ἕως τὰ οὐράνια μὲ τὰ πολυπληθῆ του διαμερίσματα. Διὰ νὰ κατασκευασθοῦν οἱ δέκα ὄροφοί του εἷς ῞Ελλην (νοεῖ τὸν ᾿Αρχιμήδη) ἄφησε νὰ κόψουν δένδρα, τὰ ὁποῖα ἀπετέλουν ὁλόκληρον δάσος. ᾿Εκ τοῦ πύργου αὐτοῦ οἱ πολιορκούμενοι ἔβαλλον ἀνημμένα ἐκ πεύκης ξύλα, παραλλήλως δὲ ἔρριπτον μεγάλους λίθους καὶ ἔχυναν χείμαρρον ζεούσης πίσσης. ῾Ο Κίμβρος (ὄνομα Ρωμαίου στρατιώτου) ἔρριψεν ἐκ τοῦ μακρόθεν ἓν φλεγόμενον ἀκόντιον, τὸ ὁποῖον ἐνεπήχθη εἰς τὰ πλευρὰ τοῦ πύργου. ᾿Ενισχυόμενον ἀπὸ τὸν πνέοντα ἀέρα τὸ πῦρ ἐξηπλώθη ἀμέσως. ᾿Επέφερε καταστροφὴν εἰς τὸ ἐσωτερικόν, διεδόθη ἀναφλέγον τοὺς δέκα ὀρόφους τοῦ γιγαντιαίου αὐτοῦ κατασκευάσματος, κατεβρόχθισε μὲ ταχύτητα τὰς δοκούς, αἱ ὁποῖαι ἔτριζον ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ πυρός. Τὰ ἐρείπια τοῦ πύργου μετεβλήθησαν εἰς τέφραν. Τὰ ἴδια ἔπαθεν καὶ ὁ στόλος τῶν Ρωμαίων. Μόλις ἐπλησίαζε τὰ τείχη καὶ τὰς κατοικίας τὰς διαβρεχομένας ἀπὸ τὰ διαυγῆ νερὰ τοῦ λιμένος, αἱ μηχαναί, δι᾿ ἐντελῶς νέου μηχανισμοῦ, ἐπέφερον τὴν καταστροφὴν καὶ τὸν τρόμον. ῝Εν ξύλινον στέλεχος, ἔχον εἰς τὸ ἄκρον του σιδηρᾶν ἁρπάγην, ἀφήνετο ἀπὸ τοῦ ὕψους τῶν τειχῶν, ἀνύψωνε εἰς τὸν ἀέρα τοὺς πολιορκητὰς διὰ τῆς ἐπικαμπυλίου ἁρπάγης καὶ ἀφοῦ τοὺς ὕψωνεν ἀρκετά, τοὺς ἀπέρριπτεν ἐντὸς τῆς πόλεως. ῎Οχι μόνον οἱ ἄνθρωποι, ἀλλὰ καὶ τὰ πλοῖα ὑφίσταντο τὴν δύναμιν τῶν φοβερῶν αὐτῶν πολεμικῶν μηχανῶν, τῶν ὁποίων ἡ κοπτερὰ καὶ δηκτικὴ ἁρπάγη, ριπτομένη ἀφ᾿ ὑψηλοῦ ἐνεσφηνοῦτο εἰς τὰ πλοῖα καὶ δὲν τὰ ἄφηνε πλέον. ῾Ο σίδηρος ἐμπηγνυόμενος εἰς τὰ σανιδώματα τῶν πλοίων, τὰ διετρύπα εἰς τὰ πλευρά, τὰ ἀνύψωνεν εἰς τὸν ἀέρα. ῎Επειτα αἱ ἁλύσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐξηρτᾶτο, ἐχαλαρώνοντο ἀποτόμως καὶ ἰδοὺ φρικτὸν θέαμα. Τὰ πλοῖα ἐπανέπιπτον εἰς τὴν θάλασσαν μὲ τόσην ὁρμὴν καὶ ταχύτητα, ὥστε ἡ θάλασσα τὰ κατεβρόχθιζε διὰ παντός, τόσον αὐτὰ ὅσον καὶ τὰ πληρώματά των. Ἐκτὸς τῶν ἐπινοήσεων τούτων τὰ τείχη εἶχον ὀπάς, μὲ ἐπιδεξιότητα κατεσκευασμένας, διὰ νὰ βάλλωνται ἐκ τοῦ ἀσφαλοῦς βέλη κατὰ τῶν πολιορκητῶν. Ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς των ὑπεβοήθει, ὥστε νὰ κρύπτεται ἡ λειτουργία των. Τὰ βέλη τῶν Συρακοσίων ἔφευγον ἀπὸ τὰς φονικὰς αὐτὰς θέσεις, καὶ τὰ βέλη, τὰ ὁποῖα ἔβαλλον οἱ Ρωμαῖοι δὲν ἠδύναντο νὰ ἀκολουθήσουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς. Ἡ θαυμαστὴ μεγαλοφυΐα ἑνὸς Ἕλληνος καὶ ἡ ἐπιδεξιότης του, πολὺ ἰσχυρότερα ἀπὸ τὰ ὅπλα, ἀπέκρουον κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸν Μάρκελλον καὶ τὰς φοβερὰς ἐπιθέσεις του καὶ ὅλαι αἱ πολεμικαί του προσπάθειαι ἀπετύγχανον πρὸ τῶν τειχῶν τῶν Συρακουσῶν. Εὑρίσκετο λοιπὸν εἰς αὐτὴν τὴν πόλιν εἷς ἄνθρωπος, ἡ ἀΐδιος δόξα τοῦ αἰῶνος του, ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ ὁποῖος χάρις εἰς τὴν μεγαλοφυΐαν ἀνυψώθη πολὺ ὑπὲρ τοὺς ἄλλους ἀνθρώπους. Ἦτο πτωχός, ἀλλὰ ὁ οὐρανὸς καὶ ἡ γῆ ἀπεκαλύφθησαν ἀπὸ τὰς ἐμπνεύσεις του. Ἐγνώριζε διατί ὁ ἥλιος, ὅταν ἀνατέλλῃ ὠχρὸς καὶ ὄχι θερμὸς προμηνύει θυέλλας· ἐγνώριζεν ἂν ἡ γῆ εἶναι ἀκίνητος ἢ αἰωρεῖται μεταβάλλουσα θέσιν· ἐγνώριζε διατί ὁ ὠκεανὸς πάντοτε διαχέεται περὶ τὴν γῆν μὲ τὰ κύματά του· πόθεν προέρχονται αἱ διαταραχαὶ τῆς θαλάσσης καὶ ποῦ ὀφείλονται αἱ διάφοροι φάσεις τῆς σελήνης· τέλος εἰς ποῖον νόμον ὑπείκει ὁ ὠκεανός, ὁ βασιλεὺς αὐτὸς τῶν ὑδάτων, ὅταν προκαλῇ τὴν πλημμυρίδα καὶ τὴν ἄμπωτιν. Πιστεύεται μάλιστα ὅτι εἶχεν ὑπολογίσει τὸ πλῆθος τῶν κόκκων τῆς ἄμμου ὁλοκλήρου τοῦ κόσμου, ἐκεῖνος διὰ τὸν ὁποῖον λέγουν ὅτι δὲν εἶχεν ἀνάγκην παρὰ μιᾶς γυναικείας χειρός, μικρᾶς δηλαδὴ δυνάμεως, διὰ νὰ μεταφέρῃ εἰς τὴν θάλασσαν ἓν πλοῖον καὶ διὰ νὰ φέρῃ ὑψηλὰ καὶ νὰ συσσωρεύῃ παρὰ τὸ βάρος των, βουνὰ ὁλόκληρα ἀπὸ βράχους.

ΔΟΣ ΜΟΙ ΠΑ ΣΤΩ ΚΑΙ ΤΑΝ ΓΑΝ ΚΙΝΗΣΩ.

Θεωρεῖται πιθανώτατον ὅτι μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους οἱ ἄνθρωποι ἐγνώριζον ἐκ πείρας τὴν χρησιμοποίησιν τῶν μοχλῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἀνεκάλυψε καὶ ἀπέδειξε θεωρητικῶς τὸν νόμον τῶν μοχλῶν. Περίφημος ἔχει καταστῆ ἡ ρῆσις του «δός μοι ποῦ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινήσω», τὴν ὁποίαν μνημονεύουν πολλοὶ συγγραφεῖς.

Παρὰ τοῦ Λατίνου ἐκκλησιαστικοῦ συγγραφέως Τερτουλλιανοῦ (150—230 μ.Χ.) πληροφορούμεθα ὅτι ὁ διάσημος ἐξ Ἀλεξανδρείας μηχανικὸς Κτησίβιος, ὀλίγα ἔτη πρεσβύτερος τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀνεκάλυψε τὸ διὰ κυκλοφοροῦντος εἰς αὐτὸ ὕδατος μουσικὸν ὄργανον ἁρμόνιον, τὸ ὁποῖον ἐτελειοποίησεν ὁ Ἀρχιμήδης.

ΕΥΡΗΚΑ, ΕΥΡΗΚΑ!

Περίφημος κατέστη ἡ ἀνακάλυψις τοῦ νόμου τῆς ἀνώσεως εἰς τὴν φυσικὴν καὶ ἡ δι' αὐτοῦ ἀπόδειξις ὅτι ὁ χρυσοῦς στέφανος, τὸν ὁποῖον εἶχεν παραγγείλει ὁ βασιλεὺς Ἱέρων εἶχε νοθευθῆ δι' ἀργύρου. Ἡ μοναδικὴ πληροφορία περὶ τῆς ἀνακαλύψεως αὐτῆς τοῦ Ἀρχιμήδους διεσώθη ὑπὸ τοῦ Ρωμαίου Ἀρχιτέκτονος Βιτρουβίου, ὅστις γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς:

«Ὅταν βραδύτερον διετυπώθη ἡ κατηγορία, ὅτι μέρος τοῦ χρυσοῦ ἀφῃρέθη καὶ ἀντ' αὐτοῦ ἀνεμείχθη εἰς τὸν στέφανον τὸ ἀνάλογον βάρος ἀργύρου, ὁ Ἱέρων, ὅστις ἠγανάκτησε, διότι ἐξηπατήθη καὶ εὑρίσκετο ἐν ἀπορίᾳ πῶς θὰ ἀποδείξῃ τὴν ἀπάτην, ἔδωκε τὴν ἐντολὴν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη νὰ ἐρευνήσῃ τὴν ὑπόθεσιν. Καθ' ὃν χρόνον ὁ τελευταῖος οὗτος προσεπάθει νὰ ἐκπληρώσῃ τὴν ἐντολὴν εἰσῆλθεν εἰς τὸ Βαλανεῖον διὰ νὰ λάβῃ τὸ λουτρόν του καὶ ὅταν ἐτέθη ἐντὸς τοῦ λουτῆρος ἦλθεν εἰς τὸν νοῦν του, ὅτι ὅσον ὕδωρ ἐχύνετο ἐκ τοῦ λουτῆρος, τόσον ἦτο τὸ βάρος τοῦ ἐμβαπτισθέντος σώματός του. Μόλις κατόπιν σκέψεως διὰ τὸ αἴτιον τοῦ φαινομένου αὐτοῦ, εὗρε τὴν ἑρμηνείαν, δὲν παρέμεινεν ἐκεῖ περισσότερον, ἀλλ' ἀνεπήδησεν ἐκ τοῦ λουτῆρος συγκεκινημένος ἐκ χαρᾶς καὶ τρέχων γυμνὸς πρὸς τὴν οἰκίαν του ἐφώναζεν ἰσχυρῶς ὅτι εὗρεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἀνεζήτει· διότι τρέχων ἐφώναζε διαρκῶς εἰς τὴν ἑλληνικὴν «εὕρηκα, εὕρηκα».

Ὡς ἐπληροφορήθημεν, ὁ Ἀρχιμήδης παρήγγειλε κατόπιν, στηριζόμενος εἰς τὴν ἀνακάλυψίν του, νὰ κατασκευάσουν δύο ὄγκους ἴσους κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ στεφάνου, τὸν ἕνα ἐκ χρυσοῦ καὶ τὸν ἄλλον ἐξ ἀργύρου. Ὅταν τοῦτο ἐξετελέσθη ἐπλήρωσε δι' ὕδατος ἓν ἀνάλογον δοχεῖον μέχρι τοῦ χείλους καὶ ἐβύθισεν εἰς αὐτὸ τὸν ἐξ ἀργύρου ὄγκον, ὁπότε ἐχύθη ἐκ τοῦ δοχείου ἴσος ὄγκος ὕδατος, τόσος ὅσον κατεῖχεν ἡ μᾶζα τοῦ ἐμβαπτισθέντος εἰς αὐτὸ ὄγκου ἐξ ἀργύρου. Ἀμέσως κατόπιν ἀφήρεσεν ἐκ τοῦ δοχείου μὲ τὸ ὕδωρ τὸν ἀργυροῦν ὄγκον καὶ ἐπλήρωσε τὸ δοχεῖον διὰ τοῦ χυθέντος ὕδατος, ὅπως προηγουμένως, μέχρι τοῦ χείλους αὐτοῦ, ἀφοῦ πρότερον προσδιώρισε διὰ τοῦ ξέστου (ξέστης = 0,547 λίτρου) τὸ βάρος τοῦ ἐναπομείναντος εἰς τὸ δοχεῖον ὕδατος. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἐξηκρίβωσε ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ βάρους τοῦ ἀργύρου καὶ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος. Ὅταν ὁ Ἀρχιμήδης ἐξηκρίβωσε τοῦτο ἐβύθισεν ἐντὸς τοῦ πλήρους ὕδατος δοχείου τὸν ἐκ χρυσοῦ ὄγκον, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἐπρόσθεσε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ μετρηθὲν ποσὸν ὕδατος καὶ εὗρεν, ὅτι δὲν ἐχύθη τὸ αὐτὸ ποσὸν ὕδατος ὅπως προηγουμένως, καὶ ὅτι τὸ χυθὲν κατὰ τὴν ἐμβάπτισιν τοῦ ἐκ χρυσοῦ ὄγκου ἦτο τόσον κατὰ τὸν ὄγκον ὀλιγώτερον, ὅσον ὁ ἐκ χρυσοῦ ὄγκος ἦτο μικρότερος τοῦ ὄγκου ἐξ ἀργύρου, τοῦ αὐτοῦ βάρους. Ἀφοῦ μετὰ ταῦτα ὁ Ἀρχιμήδης ἐβύθισε τὸν στέφανον εἰς τὸ πληρωθὲν ἐκ νέου δι' ὕδατος δοχεῖον, παρετήρησεν ὅτι δι' αὐτοῦ ἐχύθη περισσότερον ὕδωρ παρὰ ὅταν εἶχε βυθίσει τὸν ἐκ χρυσοῦ ὄγκον. Ὑπελόγισε δὲ κατόπιν ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τοῦ ἐκχυθέντος ὕδατος κατὰ τὴν ἐμβάπτισιν τοῦ στεφάνου καὶ κατὰ τὴν ἐμβάπτισιν τοῦ χρυσοῦ ὄγκου, τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου τοῦ ἀναμειχθέντος μὲ τὸν χρυσὸν καὶ ἀπέδειξεν οὕτω τὴν ὑπεξαίρεσιν τοῦ χρυσοχόου».

Σπουδαία ἀνακάλυψις εἶναι ἐπίσης ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀραιομέτρου πρὸς προσδιορισμὸν τῆς πυκνότητος τῶν ὑγρῶν περὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν γνῶσιν παρὰ τοῦ ἐπισκόπου Συνεσίου τῆς Κυρήνης, ἐξ ἐπιστολῆς του πρὸς τὴν καθηγήτριαν αὐτοῦ, τὴν φιλόσοφον καὶ μαθηματικὸν Ὑπατίαν. Τὴν ἀνακάλυψιν αὐτὴν ἀναφέρει καὶ ὁ Λατῖνος ποιητὴς Ρέμνιος Φάννιος Παλαίμων. Τόσον ὅμως ὁ Συνέσιος, ὅσον καὶ ὁ Παλαίμων δὲν ἀναφέρουν ρητῶς τὸ ὄνομα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐνδιαφέρουσα ἐπίσης εἶναι ἁπλῆ συσκευὴ πρὸς προσδιορισμὸν τῆς φαινομένης διαμέτρου τοῦ ἡλίου καὶ τῆς σελήνης καὶ ἐκ ταύτης πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἀποστάσεως ἐκ τῆς γῆς τῶν ἀστέρων τούτων. Τὴν συσκευὴν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν πραγματείαν του Ψαμμίτης.

Η ΠΥΡΠΟΛΗΣΙΣ ΤΟΥ ΡΩΜΑΪΚΟΥ ΣΤΟΛΟΥ

Παρὰ τοῦ Βυζαντινοῦ συγγραφέως Τζέτζη (11ος αἰὼν) πληροφορούμεθα ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν ἀνακαλύψει τὸ δρομόμετρον, ἤτοι ὁδόμετρον δι' ὀδοντωτῶν τροχῶν ἐπὶ τῶν πλοίων πρὸς μέτρησιν τῶν ἐπὶ τῆς θαλάσσης ὑπ' αὐτῶν διανυομένων ἀποστάσεων. Τὸ ἐπὶ τῶν σημερινῶν αὐτοκινήτων καὶ λοιπῶν ὀχημάτων ὁδόμετρον, τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Ἥρωνα, τὸν Ἀλεξανδρέα, εἶναι κατά τινα ἀραβικὴν πηγὴν ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ὁ Βυζαντινὸς ἐπίσης συγγραφεὺς Μιχαὴλ Ψελλὸς ἀναφέρει ὅτι ὁ Σίφων πρὸς μεταφορὰν ὑγροῦ τινος ἀπὸ δοχείου εἰς δοχεῖον εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Καὶ τί νὰ εἴπη κανεὶς διὰ τὰ κάτοπτρα διὰ τῶν ὁποίων ἔκαιε τὰ πλοῖα τῶν Ρωμαίων. Οἱ μεταγενέστεροι καὶ ἰδίως οἱ τῆς παρελθούσης ἑκατονταετίας Φυσικοὶ καὶ Μηχανικοὶ ἐθεώρουν τὸ ἐπίτευγμα αὐτὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀδύνατον. Καὶ τοῦτο, διότι, λέγουν, δὲν μνημονεύεται ὑπὸ τῶν συγγραφέων, οἱ ὁποῖοι ἔζησαν κατὰ τοὺς δύο πρώτους αἰῶνας μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐν τούτοις, ὅμως, ἐκτὸς τοῦ Πλουτάρχου καὶ τοῦ Λιβίου καὶ τοῦ Σιλίου τοῦ Ἰταλικοῦ (τὸ συναφὲς πρὸς τὴν ἅλωσιν χωρίον τοῦ Πολυβίου δὲν ἐσώθη), πλῆθος πολὺ ἄλλων συγγραφέων ἀναφέρει τὸ μέγα κατόρθωμα αὐτὸ τοῦ Ἀρχιμήδους. Μεταξὺ τῶν συγγραφέων αὐτῶν ἀναφέρομεν τὸν Ἀνθέμιον (6ος αἰὼν), τὸν Δίωνα Κάσσιον (3ος αἰὼν), τὸν Εὐστάθιον (12ος αἰὼν), τὸν Γαληνὸν (2ος αἰ.), τὸν Λουκιανὸν (2ος αἰ.), τὸν Ψελλὸν (11ος αἰ.), τὸν Τζέτζην (12ος αἰ.), τὸν Ζωναρᾶν (12ος αἰ.), τὸν Τερτουλλιανὸν (2—3ος αἰ.).

Εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρον νὰ ὑπενθυμίσωμεν, διατί ὁ ἐκ τῶν ἀνωτέρω συγγραφέων Εὐστάθιος, ὅστις διετέλεσε Μητροπολίτης Θεσσαλονίκης, ἀναφέρει ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἔκαυσε διὰ κατόπτρων τὰ πλοῖα τῶν Ρωμαίων. Ὁ Εὐστάθιος ἔγραφεν ἐκτεταμένα σχόλια εἰς τὴν Ἰλιάδα τοῦ Ὁμήρου. Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς Ε' ραψωδίας τῆς Ἰλιάδος, ὁ Ὅμηρος γράφει τὰ ἀκόλουθα, τὰ ὁποῖα ἐσχολίασεν ὁ Εὐστάθιος:

Ἰλ. Ε. 1 Ἔνθ' αὖ Τυδεΐδῃ, Διομήδεϊ Παλλὰς Ἀθήνη
δῶκε μένος καὶ θάρσος, ἵν' ἔκδηλος μετὰ πᾶσιν
Ἀργείοισι γένοιτο ἰδὲ κλέος ἐσθλὸν ἄροιτο.
δαῖε οἱ ἐκ κόρυθός τε καὶ ἀσπίδος ἀκάματον πῦρ,
5 ἀστέρ' ὀπωρινῷ ἐναλίγκιον, ὅς τε μάλιστα
λαμπρὸν παμφαίνῃσι λελουμένος Ὠκεανοῖο·
τοῖόν οἱ πῦρ δαῖεν ἀπὸ κράτος τε καὶ ὤμων,
8 ὦρσε δὲ μὶν κατὰ μέσον ὅθι (πλεῖστοι κλονέοντο.

(῾Οπότε ἡ Παλλὰς ᾽Αθηνᾶ
ἔδωσε θάρρος καὶ δύναμιν εἰς τὸν Διομήδη
τὸν υἱὸν τοῦ Τυδέως, ὥστε νὰ διακρίνεται μεταξὺ ὅλων
τῶν ᾽Αργείων καὶ ἀποκτήσῃ λαμπρὰν δόξαν.
῎Αφησε νὰ ἐκπέμπεται ἐκ τῆς περικεφαλαίας
καὶ τῆς ἀσπίδος ἄσβεστον πῦρ
ὅμοιον πρὸς τὸ πῦρ (λάμψιν) φθινοπωρινοῦ
ἀστέρος (τοῦ Σειρίου), ὁ ὁποῖος τὰ μάλιστα
φαίνεται λαμπρός, ὅταν ἀναδύεται ἐκ τῶν κυμάτων τοῦ ᾽Ωκεανοῦ.
Τοιοῦτον πῦρ ἧναψεν εἰς τὴν κεφαλὴν αὐτοῦ
καὶ τοὺς ὤμους του,
τὸν ὡδήγησε δὲ κατόπιν εἰς τὸ μέσον, ὅπου
ἐμάχοντο οἱ περισσότεροι).

Σχολιάζει λοιπὸν ὡς ἑξῆς ὁ Εὐστάθιος τοὺς στίχους αὐτοὺς τοῦ ῾Ομήρου: Μερικοὶ ὑποθέτουν ὅτι ὁ Διομήδης ἐσκέφθη νὰ θέσῃ εἰς τὴν περικεφαλαίαν του καὶ τὴν ἀσπίδα κάτοπτρα καὶ τοιουτοτρόπως νὰ φωτίζῃ ὑπερβολικὰ τοὺς ὀφθαλμούς, ἐκείνων οἵτινες ἦσαν ἀπέναντί του, ὅταν οὗτος εὑρίσκετο ἀπέναντι λάμποντος ἡλίου, καθ᾽ ὃν τρόπον καὶ ὁ σοφώτατος μὲν ᾽Αρχιμήδης ἔκαυσε τὰ πολεμικὰ πλοῖα, ὡς ἐὰν ἔρριπτε κεραυνόν, ἀργότερα δὲ ὁ ᾽Ανθέμιος ἐξεδίωξεν ἐκ τῆς οἰκίας του, μακρὰν αὐτοῦ, ἐπίσης διὰ τῶν κατόπτρων, πονηρὸν γείτονα.

ΤΟ «ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ» ΚΑΙ ΤΟ ΠΛΑΝΗΤΑΡΙΟΝ

Εἰς τοὺς Ρωμαίους συγγραφεῖς εἶχε προξενήσει μεγάλην ἐντύπωσιν ἡ ἐπινόησις τοῦ ᾽Αρχιμήδους, ἡ ὁποία ὠνομάζετο στομάχιον. ᾽Επρόκειτο περὶ τοῦ ἑξῆς παιγνιδίου. Εἶχε κατασκευάσει ἐπίπεδα πλακίδια ἐξ ἐλεφαντοστοῦ δεκατεσσάρων διαφόρων εὐθυγράμμων γεωμετρικῶν σχημάτων. Διὰ καταλλήλου συναρμολογήσεως τούτων κατεσκευάζετο ἄνθρωπος, ἵππος ἢ ἄλλο τι ζῶον. Τοῦ παιγνιδιοῦ αὐτοῦ ὑπῆρχε καὶ ἡ σχετικὴ θεωρία, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀνακαλύψει ὁ ᾽Αρχιμήδης καὶ εἶχε διατυπώσει εἰς πραγματείαν του, ἥτις ἔφερε τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ παίγνιον ὄνομα, δηλ. Στομάχιον. Τῆς πραγματείας αὐτῆς σώζονται δύο ἀποσπάσματα θεωρημάτων, τὸ ἓν εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὴν ἀραβικήν, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν μέρη ἀποδείξεων τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ ἑνὸς τετραγώνου εἰς δεκατέσσαρα διάφορα εὐθύγραμμα γεωμετρικὰ σχήματα.

Μὲ μεγάλον θαυμασμὸν ἀναφέρουν καὶ οἱ ῞Ελληνες καὶ οἱ Ρωμαῖοι συγγραφεῖς τὴν ὑπὸ τοῦ ᾽Αρχιμήδους ἐπινόησιν συσκευῆς, ὅπου ἐγίνοντο ὅλαι αἱ κινήσεις τῶν οὐρανίων σωμάτων, ὅλων τῶν ἀπλανῶν τοποθετηθέντων εἰς τὴν ἐξωτάτην ἐκ τῶν σφαιρῶν, εἰς τὰς ὁποίας παρεστάνοντο αἱ τροχιαί. Καὶ ἄλλοι πρὸ τοῦ ᾽Αρχιμήδους ῞Ελληνες ἐπιστήμονες εἶχον ἐπιχειρήσει τὴν κατασκευὴν πλανηταρίου. Τὸ πλανητάριον ὅμως τοῦ ᾽Αρχιμήδους εἶχε προξενήσει κατάπληξιν διὰ τὴν τελειότητα του. ῾Ο διὰ προδοσίας καταλαβὼν τὰς Συρακούσας Ρωμαῖος στρατηγὸς Μάρκελλος, ὡς μόνα λάφυρα, ἐξέλεξεν ἐκ τῆς πλουσίας λείας δύο πλανητάρια τοῦ ᾽Αρχιμήδους. Τὸ μικρότερον ἐκ τούτων εἶχε κρατήσει διὰ τὸν ἑαυτόν του. Τοῦτο περιῆλθεν εἰς τὴν κατοχὴν τοῦ ἐγγόνου του, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Κικέρωνος, ὅστις γράφει εἰς τὴν Περὶ πολιτείας πραγματείαν του ἀναμνήσεις τινος (Philus) ἐκ τινος διαλόγου, εἰς τὸν ὁποῖον παρευρίσκοντο οἱ δύο ῞Υπατοι Σουλπίκιος Γάλλος καὶ ὁ ἔγγονος τοῦ Μαρκέλλου.

«῾Ο Σουλπίκιος Γάλλος εὑρισκόμενος εἰς τὸ σπίτι τοῦ Μαρκέλλου διέταξε καὶ ἔφεραν ἐμπρός των τὸ πλανητάριον, τὸ ὁποῖον ὁ πάππος τοῦ Μαρκέλλου παρέλαβε διὰ τὸν ἑαυτόν του. Περὶ τῆς οὐρανίου αὐτῆς σφαίρας συχνότατα ἤκουον νὰ γίνεται μέγας ἔπαινος τοῦ ᾽Αρχιμήδους, τὸ σχῆμα της ὅμως δὲν θὰ ἐθαύμαζον πολύ, διότι ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὁ Μάρκελλος εἶχεν ἀφιερώσει εἰς τὸν ναὸν τῆς ᾽Ανδρείας, ἥτις ἐπίσης εἶχε κατασκευασθῆ ὑπὸ τοῦ ᾽Αρχιμήδους, ἦτο ὡραιοτέρα καὶ γενικῶς περιφημοτέρα. ῞Οτε ὅμως ὁ Γάλλος ἐπεξήγησε τὴν κατασκευὴν τοῦ πλανηταρίου μὲ πλήρη γνῶσιν αὐτοῦ, τότε ἔπρεπε νὰ ὁμολογήσω, ὅτι ἐκεῖνος ὁ Σικελιώτης ἔπρεπε νὰ εἶχε περισσότερον νοῦν ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἡ ἀνθρωπίνη φύσις εἶναι δυνατὸν νὰ περιλάβῃ. ῾Ο Γάλλος εἶπεν ὅτι ἡ ἐπινόησις ἐκείνης τῆς ὡλοκληρωμένης καὶ πλήρους σφαίρας εἶναι πολὺ παλαιά, καὶ μάλιστα ὅτι αὐτὴ κατεσκευάσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου, κατόπιν ὅμως ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τοῦ μαθητοῦ τοῦ Πλάτωνος, διεκοσμήθη μετὰ τῶν ἐν τῷ οὐρανῷ αἰωρουμένων ἀστέρων καὶ μετὰ πολλὰ ἔτη ὕστερον μὲ τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου παραληφθεῖσαν διακόσμησιν καὶ περιγραφήν, περιεγράφη εἰς στίχους ὑπὸ τοῦ ᾽Αράτου μετά τινος δόσεως ποιητικῆς τέχνης, μὴ γνωρίζοντος ἀστρονομίαν. Τοῦτο εἶναι τὸ ἀξιοθαύμαστον εἰς τὴν ἐφεύρεσιν αὐτὴν τοῦ ᾽Αρχιμήδους, ὅτε οὗτος διηρεύνησε, πῶς εἰς τὰς ἀνίσους κινήσεις ἡ ἀνισοταχὴς καὶ διάφορος τροχιὰ δύναται νὰ διατηρῆται διὰ μιᾶς κυρίας περιστροφῆς. ῞Οταν ὁ Γάλλος ἐκίνει αὐτὴν τὴν σφαῖραν ἡ σελήνη ἐπανήρχετο μετὰ πολλὰς περιστροφὰς εἰς τὴν συσκευήν, πάλιν εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν ἔναντι τοῦ ἡλίου, μετὰ τόσας περιστροφὰς ὅσαι ἡμέραι πρὸς τούτοις εἶναι ἀναγκαῖαι εἰς τὸν οὐράνιον χῶρον. Ὡς ἐκ τούτου, ἐπίσης ἡ σφαῖρα τοῦ ἡλίου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπεσκοτίζετο εἰς τὸν οὐρανόν, καὶ ἡ σελήνη ἐνεφανίζετο εἰς τὸν δίσκον, ὅστις ἐσχηματίζετο ὑπὸ τῆς σκιᾶς τῆς γῆς, ὅταν ὁ ἥλιος ἐκ τῆς διευθύνσεως...» Ἐδῶ διακόπτεται ἡ συνέχεια τῆς πραγματείας τοῦ Κικέρωνος ἡ ὁποία ἐσώθη ἀτελής.

Ἐπίσης ἄξιον θαυμασμοῦ εἶναι τὸ ὑδραυλικὸν ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ ὁποίου ἡ περιγραφὴ διεσώθη εἰς τὴν ἀραβικὴν εἰς τρία χειρόγραφα. Τὸ ἓν ἐκ τούτων εὑρίσκεται εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων, τὸ ἄλλο εἰς τὸ Βρεταννικὸν Μουσεῖον καὶ τὸ τρίτον εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Ὀξφόρδης.

Ἀσφαλῶς θὰ ὑπῆρχον καὶ ἄλλαι μηχανικαὶ ἀνακαλύψεις τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ ὁποῖαι δὲν μνημονεύονται. Τοῦτο τὸ συνάγομεν ἐκ τῆς μετὰ 1500 ἔτη περίπου ἀπὸ τοῦ θανάτου τοῦ Ἀρχιμήδους μοναδικῆς διαμνημονεύσεως ὑπὸ τοῦ Πετράρχου (1304—1374) τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνακαλύψεως τοῦ δι᾿ ἀτμοῦ λειτουργοῦντος τηλεβόλου. Τρία σχεδιογραφήματα τοῦ Leonardo da Vinci εὑρεθέντα εἰς τὰ χειρόγραφά του ἑρμηνεύουν τὴν λειτουργίαν τοῦ τηλεβόλου αὐτοῦ. Εἰς τὸ ὀπίσω μέρος τῆς κάννης τοποθετεῖται τὸ σφαιρικὸν βλῆμα. Τὸ ἓν τρίτον περίπου τῆς κάννης, ὅπου εὑρίσκεται καὶ τὸ βλῆμα, θερμαίνεται εἰς μεγάλην θερμοκρασίαν καὶ δι᾿ ἁπλοῦ μηχανισμοῦ χύνεται ὕδωρ εἰς τὸν κενὸν χῶρον μεταξὺ βλήματος καὶ πέρατος τῆς κάννης. Ὁ σχηματιζόμενος ἀτμὸς ἐκσφενδονίζει μὲ μεγάλην δύναμιν τὸ βλῆμα. Αὐτὰ εἶναι ἐν συντόμῳ περιγραφῇ τὰ μηχανικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ ἀφθάστου μαθηματικοῦ καὶ μηχανικοῦ τῆς ἀνθρωπότητος, τοῦ Ἀρχιμήδους.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΙ ΜΥΣΤΙΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1969

ΑΙ ΜΥΣΤΙΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ἡ μετάδοσις διαταγῶν ὑπὸ τοῦ Κράτους εἰς ἀπεχούσας πολὺ ἀπὸ τῆς πρωτευούσης ἐπαρχίας καὶ ἡ λῆψις ἐξ αὐτῶν διαφόρων πληροφοριῶν ἔπρεπε νὰ γίνεται ταχέως, εἰς πολλὰς δὲ περιπτώσεις καὶ μετὰ πάσης μυστικότητος. Πρὸς τοῦτο εἶχον ἐπινοηθῆ διάφοροι τρόποι καὶ διάφορα κρυπτογραφικὰ συστήματα. Ὁ ἀρχαιότερος τρόπος κρυπτογραφικῆς συνεννοήσεως μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου καὶ ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀποστολὴν κρυπτογραφικῆς ἐπιστολῆς εἰς τὴν Λυκίαν τῆς Μ. Ἀσίας ὑπὸ τοῦ βασιλέως τῆς Τίρυνθος Προίτου. Ἡ Τίρυνς ἤκμασε περὶ τὸ 1750 π. Χ. Ὅθεν εἶναι ἄξιον θαυμασμοῦ ὅτι εἰς τόσον παλαιὰν ἐποχὴν εἶχον ἀναπτυχθῆ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων τρόποι μυστικῆς ἐπικοινωνίας. Ἡ κρυπτογραφικὴ ἐπιστολὴ τοῦ Προίτου ἐστάλη πρὸς τὸν πενθερόν του βασιλέα τῆς Λυκίας διὰ τοῦ διπτύχου

Τὸ δίπτυχον ἀπετελεῖτο ἐκ δύο ξυλίνων πλακῶν ὀρθογωνίου σχήματος διαστάσεων 20×30 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου περίπου, αἱ ὁποῖαι δι' ἀρθρώσεως ἡνοῦντο κατὰ τὴν μεγαλυτέραν αὐτῶν ἀκμήν, οὕτως ὥστε νὰ δύνανται νὰ ἀνοίγουν καὶ νὰ ἀποτελοῦν μίαν ἐπιφάνειαν. Ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς μιᾶς πλακός, τῆς παραμενούσης ὁριζοντίως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς τραπέζης ἐκαλύπτετο διὰ στρώματος κηροῦ μικροῦ πάχους. Εἰς τὴν κηρίνην αὐτὴν ἐπιφάνειαν ἐγράφετο ἡ μυστικὴ ἐπιστολή. Τὸ μυστικὸν τῆς ἐπιστολῆς συνίστατο εἰς τὴν γραφὴν τῶν γραμμάτων ἀντιστρόφως, ἤτοι κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ταῦτα νὰ ἀναγιγνώσκωνται ὀρθῶς ἐπὶ κατόπτρου τιθεμένου καθέτως εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διπτύχου καὶ ἐφαρμόζοντος κατὰ μῆκος τῆς μεγαλυτέρας ἀκμῆς. Τὸ γράμμα Α π. χ. ἐγράφετο ∀. Ἐὰν εἰς ἀπόστασιν 2–3 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου ἀπὸ τοῦ ∀ θέσωμεν κάτοπτρον, ὥστε τοῦτο νὰ σχηματίζῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου γωνίαν ὀρθήν, τότε βλέπομεν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου τὸ γράμμα ∀ ὀρθόν.

Ἀφοῦ λοιπὸν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐγράφετο ἡ ἐπιστολὴ ἐκλείετο τὸ δίπτυχον, ἐσφραγίζετο καὶ ἐστέλλετο δι' ἐμπίστου προσώπου πρὸς τὸν παραλήπτην, ὁ ὁποῖος ἀφοῦ ἤνοιγεν αὐτό, ἐδιάβαζεν αὐτὴν ὀρθῶς, ἐπὶ καταλλήλως τοποθετουμένου κατόπτρου. Κατὰ τὸν Ὅμηρον εἰς τὸν μυχὸν τοῦ Ἄργους ἔκειτο ἡ πόλις Ἐφύρη [Ἔφυρα ἢ Ἐφύρα ἦτο ἀκόμη 1) τὸ ἀρχαῖον ὄνομα τῆς Κορίνθου, 2) νησίδος κειμένης βορειοδυτικῶς τῆς Μήλου καὶ 3) πόλεως τῆς Ἠπείρου κειμένης ἀπέναντι τοῦ νοτίου ἄκρου τῆς Κερκύρας]. Εἰς τὴν Ἐφύρην ἢ Ἐφύραν ὁ Σίσυφος, υἱὸς τοῦ Αἰόλου ἐγέννησε τὸν Γλαῦκον καὶ ὁ Γλαῦκος ἐγέννησε τὸν Βελλερεφόντην, ἀμύμονα, «τῷ δὲ θεοὶ κάλλος τε καὶ ἠνορέην ἐρατεινὴν ὤπασαν» ἤτοι οἱ θεοὶ εἶχον χαρίσει εἰς αὐτὸν κάλλος καὶ θαυμαστὴν ἀνδρείαν (Ἰλ. Ζ 156).

Κατὰ τὴν παράδοσιν (Ἀπολλόδωρος ΙΙ 3. 1) ὁ **Βελλερεφόντης** φονεύσας ἀκουσίως τὸν ἀδελφόν του **Δηλιάδην** κατέφυγεν εἰς τὸν βασιλέα τῆς Τίρυνθος Προῖτον καὶ ἔτυχε φιλοξενίας εἰς τὰ ἀνάκτορα αὐτοῦ. Ἡ βασίλισσα **Ἄντεια** * ἠράσθη τοῦ Βελλερεφόντου, ὁ ὁποῖος ὅμως ἀπέκρουσε τὰς προτάσεις της. Ἡ βασίλισσα διὰ νὰ ἐκδικηθῇ αὐτὸν τὸν κατηγόρησεν εἰς τὸν Προῖτον ὅτι τῆς ἔκαμε ἀνοικείους προτάσεις, τὰς ὁποίας αὕτη ἀπέκρουσε. Ὁ **Προῖτος** ἀπεφάσισε νὰ φονεύσῃ τὸν Βελλερεφόντην, ἀλλὰ δὲν ἤθελε νὰ πράξῃ τοῦτο εἰς τὰ ἀνάκτορά του. Ἀπεφάσισε λοιπὸν νὰ ἀποστείλῃ αὐτὸν εἰς τὸν πενθερόν του Ἰοβάτην βασιλέα τῆς Λυκίας μὲ ἐπιστολήν, ἡ ὁποία εἶχε γραφῇ κρυπτογραφικῶς ἐπὶ διπτύχου. Εἰς τὴν ἐπιστολὴν ἀνεγράφετο τὸ ἐπεισόδιον τοῦ Βελλερεφόντου μὲ τὴν βασίλισσαν καὶ ἡ παράκλησις ὅπως οὗτος φονευθῇ. Τὴν ἐπιστολὴν μετέφερεν εἰς τὸν Ἰοβάτην ὁ Βελλερεφόντης, χωρὶς βέβαια οὗτος νὰ γνωρίζῃ τὸ περιεχόμενον αὐτῆς. Ἰδοὺ πῶς περιγράφει τὴν ὑπόθεσιν ὁ **Ὅμηρος** (Ἰλ. Ζ 166)

ὣς φάτο, τὸν δὲ ἄνακτα χόλος λάβεν, οἷον ἄκουσε·
κτεῖναι μὲν ῥ' ἀλέεινε, σεβάσσατο γὰρ τό γε θυμῷ,
πέμπε δέ μιν Λυκίηνδε, πόρεν δ' ὅ γε σήματα λυγρά,
γράψας ἐν πίνακι πτυκτῷ θυμοφθόρα πολλά,
δεῖξαι δ' ἠνώγειν ᾧ πενθερῷ, ὄφρ' ἀπόλοιτο.

(Αὐτὰ τοῦ εἶπε ἡ βασίλισσα, ὁ δὲ βασιληὰς μόλις τἄκουσε θύμωσε καὶ ἀπέφυγε μὲν νὰ τὸν φονεύσῃ ὁ ἴδιος, διότι δὲν τὸ ἤθελε ἡ καρδιά του, τὸν ἔστειλεν ὅμως εἰς τὴν Λυκίαν, καὶ τοῦ ἔδωσε θλιβερὰ σήματα, γράψας εἰς διπλωνόμενον πίνακα (δίπτυχον) θανατηφόρα πολλά, παρήγγειλε δὲ νὰ τὰ δείξῃ εἰς τὸν πεθερόν του, διὰ νὰ τὸν σκοτώσῃ αὐτός).

Ὁ Βελλερεφόντης μετέφερε τὴν θανατηφόρον ἐπιστολὴν εἰς τὴν Λυκίαν. Ὁ **Ἰοβάτης** ὅμως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς νεότητος καὶ τοῦ κάλλους τοῦ Βελλερεφόντου ἀπεφάσισε, πρὶν φονεύσῃ αὐτόν, νὰ τοῦ αναθέσῃ τὴν ἐκτέλεσιν σειρᾶς δυσκόλων ἄθλων. Ὁ Βελλερεφόντης ὑπέστη νικηφόρως τὰς δοκιμασίας πρὸς μεγάλην ἔκπληξιν τοῦ Ἰοβάτου, ὁ ὁποῖος τέλος θαυμάσας αὐτὸν τὸν ἔκαμε γαμβρόν του ! Ὁ δυσκολώτερος **καὶ**

* καθ' Ὅμηρον. Κατὰ τοὺς Τραγικοὺς Σθενέβοια.

τελευταῖος ἄθλος ἦτο ἡ πάλη πρὸς τὴν Χίμαιραν, τὴν ὁποίαν ὁ Βελλεροφόντης κατώρθωσε νὰ φονεύσῃ.

Ὅμοιον περιστατικὸν πρὸς τὴν ἀποστολὴν θανατηφόρου ἐπιστολῆς διὰ τοῦ ὑποψηφίου πρὸς θάνατον προσώπου, συμβὰν ὅμως 500 περίπου ἔτη μετὰ τὴν ἀποστολὴν τῆς ἐπιστολῆς τοῦ Προίτου διὰ τοῦ Βελλεροφόντου, ἀναφέρεται εἰς τὴν Παλαιὰν Διαθήκην (Σαμουὴλ Β' κεφ. 11). Ὁ βασιλεὺς Δαβὶδ ἐπιθυμῶν νὰ φονεύσῃ τὸν Οὐρίαν διὰ νὰ λάβῃ τὴν σύζυγόν του, ἔστειλε διὰ τοῦ Οὐρία τὴν θανατηφόρον ἐπιστολὴν πρὸς τὸν ἀρχιστράτηγον τῶν Ἰουδαίων Ἰωάβ, χωρὶς βέβαια ὁ Οὐρίας νὰ ἔχῃ γνῶσιν τοῦ περιεχομένου τῆς ἐπιστολῆς. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν ἂν ἡ ἐπιστολὴ εἶχε γραφῆ ἐπὶ διπτύχου κρυπτογραφικῶς.

Τὸ δίπτυχον δὲν ἐχρησιμοποιεῖτο μόνον διὰ τὰς κρατικὰς μυστικὰς ἐπικοινωνίας, ἐχρησιμοποιεῖτο ἀκόμη και διὰ τὴν ἀνταλλαγὴν ἐρωτικῶν ἐπιστολῶν, ὡς τοῦτο ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ μικροῦ ἀγάλματος Ταναγραίας Κόρης κρατούσης δίπτυχον (σχ. 1).

Σχ. 1. Ταναγραία κόρη κρατοῦσα δίπτυχον μὲ ἐρωτικὴν ἐπιστολήν. (H. Diels, Antike Technik, ἰδιωτικὴ συλλογὴ Saburoff).

***

Τὸ ἀρχαιότερον δίκτυον τηλεπικοινωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξυπηρέτουν ἀποκλειστικῶς κρατικὰς ἀνάγκας μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Αἰσχύλου (525—456 π. Χ.) εἰς τὴν τραγῳδίαν αὐτοῦ **Ἀγαμέμνων.** Διὰ τοῦ δικτύου αὐτοῦ μετεδόθη εἰς τὰς Μυκήνας ἡ εἴδησις τῆς ἁλώσεως τῆς Τροίας, τὴν πρώτην ἑσπέραν ἀπὸ τῆς καταλήψεως τῆς πόλεως. Ἡ ἅλωσις τῆς Τροίας καθ' ὑπολογισμοὺς γενομένους ἐπὶ τῇ βάσει πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας παρέχει ὁ Πορφύριος (3. αἱ. μ. Χ.) συνέβη περὶ τὸ ἔτος 1182 π. Χ.

(Porphyrii Philos. Platonici, opusc. selecta, ed. Nauck. Lipsiae 1886 p. 5 καὶ Σουΐδας λ. Ὅμηρος). (Τινὲς ἐκ τῶν νεωτέρων ἀντὶ Σουΐδας γράφουν Σούδας. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὴ ἡ προέλευσις τῆς λέξεως αὐτῆς, οὔτε φαίνεται πιθανὴ συσχέτισις πρὸς τὸν λιμένα Σούδα τῆς Κρήτης). Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 12ου αἰῶνος π. Χ. οἱ Ἕλληνες ἐχρησιμοποίουν δίκτυον τηλεπικοινωνιῶν. Ἡ ἐπικοινωνία ἐγίνετο κατὰ τὴν νύκτα διὰ τῶν φρυκτῶν, δηλ. τῶν πυρσῶν (μεγάλων φλογῶν) διὰ τῶν ὁποίων εἰδικῶς ἐκπαιδευμένοι στρατιῶται, οἱ φρυκτωροί, τοποθετημένοι εἰς κορυφὰς ὀρέων ἀπεχούσας χιλιόμετρά τινα ἡ μία τῆς ἄλλης, μετέδιδον τὰς εἰδήσεις. Ἡ συνεννόησις ὠνομάζετο φρυκτωρία, τὸ δὲ συναφὲς ῥῆμα εἶναι φρυκτωρέω. (Αἰσχ. Ἀγαμ. 30, 282, 292, 490. Θουκυδ. 2,94 — 3,22 — 3,80. Εὐριπ. Ῥῆσος 55. Ἀριστοφ. Ὄρν. 1161, Σέξτος Ἐμπ. adv. math. VIII, 193, 200). Ὁ πρῶτος πυρσὸς περὶ τῆς ἁλώσεως τῆς Τροίας ἀνήφθη εἰς τὸ νοτίως τῆς Τροίας κείμενον ὄρος Ἴδη, ἐκ τοῦ ὁποίου μετεδόθη ἡ εἴδησις εἰς τὴν Λῆμνον, ἀκολούθως εἰς τὸν Ἄθω, (συνεχῶς διὰ πυρσῶν) κατόπιν εἰς τὸ ὄρος Μήκιστον, κείμενον βορείως τῆς Χαλκίδος, ἐκ τούτου εἰς τὸ βορείως τῶν Θηβῶν κείμενον Μεσσάπιον ὄρος (σημερινόν, Χτυπᾶς), ἔπειτα εἰς τὸν Κιθαιρῶνα, ἐξ αὐτοῦ εἰς τὸ ὄρος Αἰγίπλαγκτον, παρὰ τὰ Μέγαρα, ἐκ τούτου δὲ εἰς τὸ παρὰ τὰς Μυκήνας ὄρος Ἀραχναῖον καὶ ἐξ αὐτοῦ εἰς τὰ ἀνάκτορα τῶν Μυκηνῶν.

Οἱ νεώτεροι μελετηταί, λέγουν, ὅτι ἡ ἀπόστασις Ἄθω–Μηκίστου ὄρους εἶναι 180 χιλιόμετρα καὶ συνεπῶς ἡ μετάδοσις φωτεινοῦ σήματος ἐκ τοσοῦτον μεμακρυσμένης ἀποστάσεως εἶναι ἀδύνατος. Φαίνεται ὅμως ὅτι θὰ ὑπῆρχον εἰς μικρὰς νησίδας τῶν Σποράδων ἄλλα φρυκτώρια δηλ. ἄλλοι ἐνδιάμεσοι σταθμοὶ ἐκπομπῆς φωτεινῶν σημάτων, τοὺς ὁποίους ὁ **Αἰσχύλος** ποιητικῇ ἀδείᾳ παρέλειψε νὰ ἀναφέρῃ. Δὲν εἶναι γνωστὸν πῶς ἐγίνοντο αὐτὰ τὰ φωτεινὰ σήματα. Ὑποτίθεται ὅτι μεταξὺ πομποῦ καὶ δέκτου θὰ εἶχον αὐτὰ καθορισθῆ καταλλήλως διὰ προσυμφωνίας.

Ἡ συναφὴς περιγραφὴ τοῦ Αἰσχύλου :

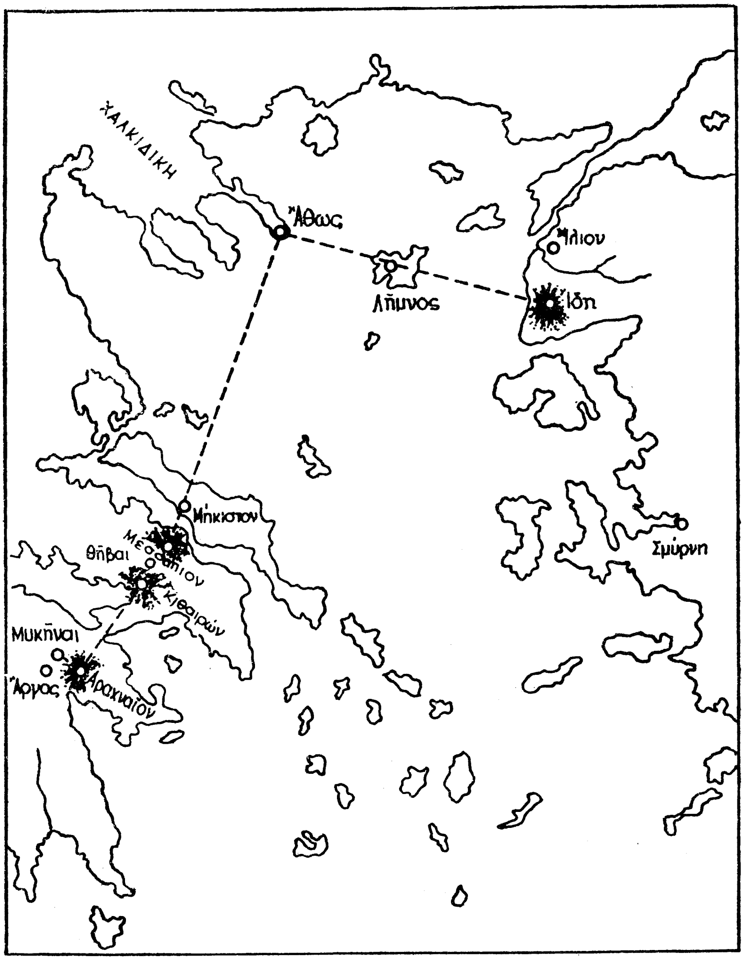
Χορός. *Καὶ τίς τόδ' ἐξίκοιτ' ἂν ἀγγέλλων τάχος ;* (Ἀγαμ. 280)
Κλυταιμνήστρα. *Ἥφαιστος Ἴδης λαμπρὸν ἐκπέμπων σέλας,*
φρυκτὸς δὲ φρυκτὸν δεῦρ' ἀπ' ἀγγάρου πυρὸς
ἔπεμπεν· Ἴδη μὲν πρὸς Ἑρμαῖον λέπας
Λήμνου· μέγαν δὲ πανὸν ἐκ νήσου τρίτον
Ἀθῷον αἶπος Ζηνὸς ἐξεδέξατο,
ὑπερτελής τε, πόντον ὥστε νωτίσαι
ἰσχὺς πορευτοῦ λαμπάδος πρὸς ἡδονήν,
πεύκη, τὸ χρυσοφεγγές, ὥς τις ἥλιος,

σέλας παραγγείλασα Μακίστου σκοπαῖς·
ὁ δ' οὔ τι μέλλων οὐδ' ἀφρασμόνως ὕπνῳ
νικώμενος παρῆκεν ἀγγέλου μέρος·
ἑκὰς δὲ φρυκτοῦ φῶς ἀπ' Εὐρίπου ῥοὰς
Μεσσαπίου φύλαξι σημαίνει μολόν.
οἱ δ' ἀντέλαμψαν καὶ παρήγγειλαν πρόσω
γραίας ἐρείκης θωμὸν ἅψαντες πυρί.
σθένουσα λαμπὰς δ' οὐδέπω μαυρουμένη,
ὑπερθοροῦσα πεδίον 'Ασωποῦ, δίκην
φαιδρᾶς σελήνης, πρὸς Κιθαιρῶνος λέπας
ἤγειρεν ἄλλην ἐκδοχὴν πομποῦ πυρός.
φάος δὲ τηλέπομπον οὐκ ἠναίνετο
φρουρά, πλέον καίουσα τῶν εἰρημένων,
λίμνην δ' ὑπὲρ Γοργῶπιν ἔσκηψεν φάος·
ὄρος τ' ἐπ' Αἰγίπλαγκτον ἐξικνούμενον
ὤτρυνε θεσμὸν μὴ χατίζεσθαι πυρός.
πέμπουσι δ' ἀνδαίοντες ἀφθόνῳ μένει
φλογὸς μέγαν πώγωνα καὶ Σαρωνικοῦ
πορθμοῦ κάτοπτρον πρῶν' ὑπερβάλλειν πρόσω
φλέγουσαν· εἶτ' ἔσκηψεν, εὖτ' ἀφίκετο
'Αραχναῖον αἶπος, ἀστυγείτονας σκοπάς·
κἄπειτ' 'Ατρειδῶν ἐς τόδε σκήπτει στέγος
φάος τόδ' οὐκ ἄπαππον 'Ιδαίου πυρός.
τοιοίδε τοί μοι λαμπαδηφόρων νόμοι,
ἄλλος παρ' ἄλλου διαδοχαῖς πληρούμενοι·
νικᾷ δ' ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος δραμών.
τέκμαρ τοιοῦτο σύμβολόν τε σοὶ λέγω
ἀνδρὸς παραγγείλαντος ἐκ Τροίας ἐμοί.

(Χορός. Καὶ ποιὸς ταχυδρόμος ἔφερε μὲ τόσην ταχύτητα τὴν πληροφορίαν ;

Κλυταιμνήστρα. 'Ο Ἥφαιστος, ὁ ὁποῖος ἀπὸ τὴν Ἴδην ἔστειλε λαμπρὸν σῆμα.

Ἔστελλε δὲ διαδοχικῶς διὰ τῶν σταθμῶν σῆμα μὲ σῆμα πρὸς ἡμᾶς· τὸ μὲν ὄρος Ἴδη ἔστειλε πρός τὸ ὄρος 'Ερμαῖον τῆς Λήμνου· μεγάλο δὲ τρίτον φωτεινὸν σῆμα ἐδέχθη τὸ βουνὸ τοῦ Διὸς εἰς Ἄθω καὶ τόσον μεγάλη ἦτο ἡ φωτιά, ὥστε ἡ δύναμις τοῦ μεταδιδομένου φωτὸς νὰ ὑπερπηδᾷ τὸ πέλαγος καὶ νὰ μεταδίδῃ τὸ εὐφρόσυνο χρυσὸ φῶς της εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ὄρους Μηκίστου, ὡσὰν νὰ ἦτο κάποιος ἥλιος. Κανεὶς δὲ δὲν ἠμέλησε οὔτε κατεβλήθη ὑπὸ τοῦ ὕπνου, ὥστε νὰ παραβλέψῃ τὴν πληροφορίαν τοῦ ἀγγέλου· γρήγορα δὲ ἔστειλε τὸ φῶς τοῦ πυρσοῦ εἰς τὰ νερὰ τοῦ Εὐρίπου διὰ νὰ γίνῃ γνωστὸν εἰς τοὺς σκοποὺς τοῦ Μεσσαπίου ὄρους. Αὐτοὶ δὲ ἐφώτισαν καὶ ἔδοσαν τὸ σῆμα πρὸς τὰ ἐμπρός, ἀφοῦ ἄναψαν διὰ τοῦ πυρὸς σωρὸν ξηρᾶς ἐρείκης. Ἰσχυρὰ δὲ λάμψις χωρὶς νὰ χάνῃ τὴν δύναμίν της, ὑπερπηδοῦσα τὴν πεδιάδα τοῦ Ἀσω-



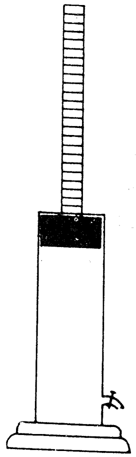
Σχ. 2

ποῦ, ὡς λαμπρὰ σελήνη, πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ Κιθαιρῶνος, προεκάλεσεν ἄλλην ἐκπομπὴν φωτεινοῦ σήματος. Τὸ λαμπρὸν δὲ σῆμα δὲν τὸ ἀπέκρουσεν ἡ φρουρὰ ἀλλά τὸ ἀπέστειλε ἐνισχυμένον ὑπὲρ τὴν Γοργῶπιν λίμνην, (σημ. Πρότερον ἐκαλεῖτο ἡ λίμνη Ἐσχατιῶτις. Σήμερον δὲν ὑπάρχει), ἀφοῦ δὲ ἔφθασεν εἰς τὸ Αἰγίπλαγκτον ὄρος (παρὰ τὰ Μέγαρα) παρώτρυνε τοὺς σκοποὺς νὰ μὴ κρατήσουν τὸ σῆμα. Ἀποστέλλουν δὲ μὲ πολλὴν προθυμίαν μεγάλην φωτεινὴν λωρίδα, ἡ ὁποία φλέγουσα ὑπερέβη τὸν Σαρωνικὸν κόλπον· ἔπειτα ἄστραψε καὶ ἔφθασεν εἰς τὸ Ἀραχναῖον ὄρος, εἰς τοὺς γειτονικοὺς σκοπούς· τέλος εἰσβάλλει εἰς αὐτὸ ἐδῶ τὸ ἀνάκτορον τῶν Ἀτρειδῶν, αὐτὸ τὸ φωτεινὸν σῆμα, τὸ προελθὸν ἀπὸ τὸ φῶς τοῦ ὄρους Ἴδη. Αὐτοὶ ἦσαν οἱ κανονισμοὶ δράσεως τῶν λαμπαδηφόρων μου, ἄλλος νὰ λαμβάνῃ παρ' ἄλλου τὸ σῆμα διαδοχικῶς· μετέχουν δὲ τῆς νίκης ὅλοι, ἤτοι ὁ πρῶτος μέχρι τοῦ τελευταίου. Σοῦ λέγω λοιπὸν αὐτὴν τὴν πληροφορίαν τῆς ἁλώσεως, τὴν ὁποίαν μοῦ παρήγγειλεν ὁ σύζυγός μου ἀπὸ τὴν Τροίαν) (Σχ. 2)

*
* *

Ἐκτὸς τοῦ συστήματος τῶν πυρσῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἔγινε ταχύτατα εἰς τὰς Μυκήνας γνωστὴ ἡ ἅλωσις τῆς Τροίας, ἀνεφέρετο ὑπὸ τοῦ συγγραφέως τῶν Πολιορκητικῶν Αἰνείου (ἀκμὴ 350 π. Χ.) τηλεπικοινωνιακὴ συσκευή, τὴν ὁποίαν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν ὑδραυλικὸν τηλέγραφον. Τὸ συναφὲς μέρος τῆς πραγματείας τοῦ Αἰνείου ἀπωλέσθη· διέσωσεν ὅμως τὴν περιγραφὴν τῆς συσκευῆς καὶ λειτουργίας αὐτῆς ἐκ τοῦ Αἰνείου ὁ **Πολύβιος** (Χ, 44) ὡς ἑξῆς :

«Διότι λέγει (ὁ Αἰνείας) ὅτι, ὅταν τις θέλῃ διὰ πυρσῶν νὰ μεταδώσῃ μηνύματα πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ (δύο) ἀγγεῖα ἐξ ἀργίλου ἔχοντα ἀκριβῶς τὸ αὐτὸ πλάτος καὶ βάθος. Τὸ μὲν βάθος νὰ εἶναι τριῶν πήχεων (1,5 μ. περίπου), τὸ δὲ πλάτος ἑνὸς πήχεως (0,49 μ.). Κόπτουν κατόπιν δίσκους φελλοῦ πλάτους ὀλίγον μικροτέρου τοῦ πλάτους τοῦ δοχείου, εἰς τὸ μέσον δὲ ἑκάστου ἐκ φελλοῦ δίσκου στερεώνουν κατακορύφως κυλινδρικὰ στελέχη, τὰ ὁποῖα χωρίζουν διὰ παραλλήλων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀπέχει τοῦ ἄλλου τρεῖς δακτύλους (19,3 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου$\times$3=57,9 χιλμ.=6 ἑκατ, μ. περίπου). Εἰς ἕκαστον δακτύλιον τοῦ πλάτους αὐτοῦ (τῶν 6 ἑκατ. μ.) γράφουν τὰ πλέον πιθανὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ συμβοῦν εἰς ἕνα πόλεμον, ὅπως εἰς τὸν πρῶτον δακτύλιον π.χ. «εἰσέβαλεν ἱππικὸν εἰς τὴν χώραν», εἰς τὸν δεύτερον «πεζοὶ βαρεῖς», εἰς τὸν τρίτον «ψιλοί», κατόπιν «πεζοὶ μὲ ἱππεῖς», κατόπιν «πλοῖα», ἔπειτα «σῖτος» καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις ὅτου συμπληρωθοῦν οἱ χῶροι ὅλοι τῶν κενῶν διαστημάτων μεταξὺ τῶν δακτυλίων, διὰ τοιούτων πιθανῶν νὰ λάβουν χώραν πολεμικῶν γεγονότων. Ἀφοῦ δὲ γίνουν αὐτά, λέγει ὁ Αἰνείας, πρέπει νὰ ἀνοίξουν ὀπὴν εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑκάστου κυλίνδρου, παρὰ τὴν βάσιν, ἴσην τοῦ ἑνός, πρὸς τὴν τοῦ ἄλλου κυλίνδρου. Κατόπιν ἀφοῦ πληρώσουν τὰ κυλινδρικὰ δοχεῖα ὕδατος ἐπιθέτουν τοὺς φελλοὺς ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι στερεωμένα τὰ στελέχη καὶ ἀνοίγουν τὰς παρὰ τὴν βάσιν αὐτῶν ὀπάς, ὥστε νὰ ἐκρέῃ τὸ ὕδωρ. Ἀφοῦ βεβαιωθοῦν ὅτι οἱ φελλοὶ οἱ φέροντες τὰ στελέχη κατέρχονται ὁμοιομόρφως, τότε φέρουν τὸ ἓν δοχεῖον εἰς τὸν σταθμὸν ἐκπομπῆς καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸν σταθμὸν λήψεως (ἀπέχοντα τοῦ πρώτου 20—30 χιλιόμ.) καὶ πληροῦν αὐτὰ ὕδατος ἕως ἐπάνω, ὥστε ἕκαστος φελλὸς (πλωτὴρ) νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ χεῖλος τοῦ δοχείου (σχ. 3).



Σχ. 3

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι πρόκειται νὰ μεταδοθῇ ἡ εἴδησις, ἡ ὁποία εἶναι γεγραμμένη εἰς τὴν τρίτην θέσιν τοῦ στελέχους (σημ. ἡ ἀρίθμησις θεωρεῖται ἀρχίζουσα ἐκ τῶν ἄνω) ἤτοι «ψιλοί». Ὁ σταθμὸς ἐκπομπῆς ἀνάπτει μεγάλην φλόγα, δίδει σημεῖον διὰ πυρσοῦ, «ἐστὲ ἕτοιμοι». Μετὰ πάροδον μικροῦ χρόνου δίδει νέον φωτεινὸν σῆμα καὶ ταὐτοχρόνως ἀνοίγει τὴν ὀπὴν τοῦ κυλίνδρου, ἐκ τῆς ὁποίας ἐκρέει ὕδωρ βραδέως καὶ βραδέως ἐπίσης κατέρχεται ὁ φελλὸς ὁ φέρων τὸ στέλεχος. Μὲ τὸ δεύτερον αὐτὸ σχῆμα τοῦ σταθμοῦ ἐκπομπῆς, ἀνοίγει καὶ εἰς τὸν σταθμὸν λήψεως ἡ ὀπὴ τοῦ κυλίνδρου ὁπότε κατέρχεται καὶ ἐκεῖ ὁ φελλὸς ὁ φέρων τὸ στέλεχος. Μόλις ὁ φελλὸς εἰς τὸν κύλινδρον τοῦ σταθμοῦ ἐκπομπῆς φθάσῃ εἰς τὸ στόμιον τοῦ κυλίνδρου ὅπου ἡ τρίτη (ἐκ τῶν ἄνω) εἴδησις εἶναι γεγραμμένη δίδεται νέον φωτεινὸν σῆμα καὶ κλείεται ἡ ὀπή. Ὁ σταθμὸς λήψεως κλείνει καὶ αὐτὸς ἀμέσως τὴν ὀπὴν καὶ διαβάζει εἰς τὸν παρὰ τὸ στόμιον τρίτον δακτύλιον τοῦ στελέχους τὴν εἴδησιν «ψιλοί».

Χρησιμοποίησιν τοῦ ἀνωτέρω περιγραφέντος ὑδραυλικοῦ τηλεγράφου ὑπὸ τῶν Καρχηδονίων κατὰ τὸν 2 αἰ. π.Χ. μνημονεύει ὁ **Πολύαινος,** Στρατηγήματα (VI 16.2).

***

Ἄλλος τρόπος κρυπτογραφικῆς συνεννοήσεως εἶναι ὁ διὰ τῆς σκυτάλης, ὅστις, κατὰ τὴν παράδοσιν, χρησιμοποιεῖται ἤδη εἰς τὴν Σπάρτην κατὰ τὸν 7ον αἰῶνα π.Χ. Δύο ἀκριβῶς ὅμοιαι κυλινδρικαὶ σκυτάλαι, ὅπως αἱ τῶν ἀθλητῶν τῆς σκυταλοδρομίας, λαμβανόμεναι δι' ἐγκαρσίου τομῆς εἰς τὸ μέσον ἑνὸς κυλινδρικοῦ ξύλου, διὰ νὰ ἔχουν ἀκριβῶς τὸ αὐτὸ πάχος καὶ μῆκος, ἦσαν οἱ φορεῖς τῶν μυστικῶν διαταγῶν τῶν Ἐφόρων τῆς Σπάρτης (Πλουτάρχου Βίοι παράλληλοι, Λύσανδρος, κεφ. 19), Τὴν μίαν σκυτάλην ἐκράτουν οἱ Ἔφοροι καὶ τὴν ἄλλην ὁ ἐν ἐκστρατείᾳ εὑρισκόμενος ἀρχιστράτηγος. Προκειμένου νὰ σταλῇ μυστικὴ δι' ἐμπίστου προσώπου διαταγὴ ἐκ Σπάρτης πρὸς τὸν ἀρχιτράτηγον περιετυλίσσετο περὶ τὴν σκυτάλην λεπτὴ κατὰ τὸ πάχος ταινία ἐκ κατειργασμένου δέρματος (διφθέρας) πλάτους 2—3 χιλιοστῶν τοῦ μέτρου οὕτως, ὥστε κατὰ τὴν περιέλιξιν νὰ μὴ ὑπάρχουν κενὰ διαστήματα μεταξὺ τῶν χειλέων τῆς ταινίας. Κατόπιν ἐγράφετο ἡ διαταγὴ παραλλήλως πρὸς τὸν διαμήκη ἄξονα τῆς σκυτάλης καὶ μετὰ τὴν γραφὴν ἐγίνετο ἀνέλιξις τῆς ταινίας, ἡ ὁποία ἐτοποθετεῖτο ἐντὸς κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ἐσφραγίζετο καὶ ἐστέλλετο εἰς τὸν ἀρχιστράτηγον. Ὁ ἀρχιστράτηγος περιείλισσε τὴν ταινίαν εἰς τὴν ἰδικήν του σκυτάλην μετὰ μεγάλης προσοχῆς καὶ ἀκριβείας καὶ κατόπιν ἐδιάβαζε εὐκόλως τὴν διαταγήν. Διὰ τὴν τήρησιν μεγαλυτέρας μυστικότητος, φαίνεται ὅτι εἰς τὸ πλάτος μιᾶς σπείρας τῆς ταινίας ἔγραφον ὁτὲ μὲν ἓν γράμμα ὁτὲ δὲ ἥμισυ γράμματος, ὥστε τὸ ὅλον γράμμα νὰ ἀνήκῃ εἰς δύο συνεχεῖς σπείρας, ἢ ἔγραφον παραλλήλως μὲν πρὸς τὸν διαμήκη ἄξονα τῆς σκυτάλης, γράφοντες ὅμως ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἐπίσης φαίνεται, ὅτι διὰ μεγαλυτέραν ἀσφάλειαν, θὰ ἔγραφον τὰ γράμματα ἀντιστρόφως, ὅπως ταῦτα ἐγράφοντο καὶ εἰς τὸ δίπτυχον καὶ θὰ ἐδιάβαζον χρησιμοποιοῦντες κάτοπτρον. Περὶ τῆς σκυτάλης τῶν Λακεδαιμονίων γράφει λεπτομερῶς, ἐκτὸς τοῦ Πλουτάρχου και ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς **Gellius** (XVII, 9. 6) Ἁπλῶς μνημονεύεται ἡ σκυτάλη ὑπὸ τοῦ **Θουκυδίδου** (1. 131), τοῦ **Ξενοφῶντος** (Ἑλλ. 3. 3. 8), τοῦ **Ἀριστοφάνους** (Λυσιστράτη 991), τοῦ **Πινδάρου** (Ο. 6. 154), τοῦ **Πλάτωνος** (Θεαίτ. 209 D).

* * *

Ὁ προηγουμένως μνημονευθεὶς συγγραφεὺς **Αἰνείας** εἰς τὸ βιβλίον του Πολιορκητικὰ (Κεφ. 31 Περὶ ἐπιστολῶν κρυφαίων) ἀναγράφει περιπτώσεις τινας κρυπτογραφικῆς ἐπικοινωνίας ἐκ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὰς κάτωθι :

α΄. Ἀποστέλλεται ἐπιστολὴ εἰς τὴν ὁποίαν τὰ φωνήεντα ἑκάστης λέξεως ἀντικαθίστανται διὰ τόσων στιγμῶν, ὅσας δηλοῖ ὁ ἀριθμὸς τῆς τάξεως τοῦ φωνήεντος κατὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ἑπτὰ φωνηέντων.

α	ε	η	ι	ο	υ	ω
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Π. χ. Ἡ φράσις «Διονύσιος καλὸς» γράφεται ὡς ἑξῆς·

Δ : : : · · . Ν : : : Σ : : : · : Σ Κ · Λ : · : Σ

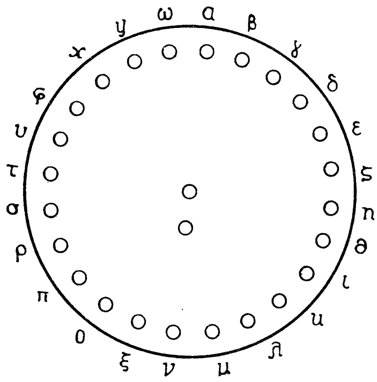
Δ Ι Ο Ν Υ Σ Ι Ο Σ Κ Α Λ Ο Σ

: · Ρ · Κ Λ · · : : Δ · Σ : · Κ · · Τ : : : ·

Η Ρ Α Κ Λ Ε Ι Δ Α Σ Η Κ Ε Τ Ω

β΄. Εἰς δίσκον πάχους 2—3 χιλ. μέτρου καὶ διαμέτρου 8—10 ἑκατ.

μέτρου, ἀφοῦ διῄρουν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς 24 ἴσα μέρη, ἤνοιγον **παρὰ** τὴν **περιφέρειαν 24** ὀπάς, ὅσα εἶναι τὰ **γράμματα** τοῦ **ἀλφαβήτου** (σχ. 4). Εἰς τὸ κέντρον τοῦ δίσκου **ἤνοιγον ἐπίσης** ὀπὴν **καὶ** εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς 2 περίπου ἑκατοστομέτρων ἤνοιγον ἄλλην ὀπήν. Ἡ τελευταία αὐτὴ ὀπὴ ἔπρετε νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὴν ὀπὴν τοῦ κέντρου καὶ μίαν τυχοῦσαν ἐκ τῶν 24 ὀπὴν παρὰ τὴν **περιφέ**ρειαν. Κατὰ συμφωνίαν μεταξὺ πομποῦ καὶ δέκτου ἡ παρὰ τὴν περιφέρειαν ὀπή, ἡ εὑρισκομένη ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὴν ὀπὴν τοῦ κέντρου καὶ τὴν παρ' αὐτὸ ὀπὴν ἐλογίζετο ὡς τὸ γράμμα ἄλφα (α). Κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἐλαμβάνοντο ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ τῶν μετὰ τὸ α ὀπῶν τὰ γράμματα β, γ, δ . . . . ω. Διὰ τὸν φόβον τυχὸν ἀποκρυπτογραφήσεως ἠδύνατο νὰ ληφθῇ ἡ ἀνάγνωσις τῶν γραμμάτων ἐξ ἀριστερῶν τοῦ α ἢ τὸ α νὰ λαμβάνεται 45 μοίρας δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τοῦ ἀνωτέρω ληφθέντος α κλπ. Λεπτὸν νῆμα μήκους 2—3 μέτρων προσεδένετο κατὰ τὸ ἓν ἄκρον μεταξὺ τῆς ὀπῆς τοῦ κέντρου καὶ τῆς παρ' αὐτὸ ὀπῆς. Ἔστω τώρα ὅτι ἐπρόκειτο νὰ σταλῇ ἡ διαταγὴ **ἀποστείλατε χρήματα**. Τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ προσδεδεμένου ὡς ἄνω νήματος τὸ «δίειρον», τὸ ἐπερνοῦσαν δηλαδὴ διὰ τῆς ὀπῆς τοῦ α, ἀκολούθως διὰ τῆς ὀπῆς τοῦ π, κατόπιν τοῦ ο, ἔπειτα τοῦ σ, κατόπιν τοῦ τ κλπ. (Ἂν τυχὸν μία λέξις εἶχε δύο ὅμοια γράμματα ὅπως π. χ. «σύμμαχοι», τὸ νῆμα διήρχετο δύο φορὰς τὴν ὀπὴν τοῦ μ. Τὴν δευτέραν φορὰν ἐκ τῆς ὀπῆς μ ἐξερχόμενον καὶ καλύπτον τὴν περιφέρειαν, εἰσήρχετο πάλιν εἰς τὴν ὀπὴν μ ἐκ τῆς ἀντιθέτου ἐπιφανείας τοῦ δίσκου). Μετὰ τὴν δίοδον τοῦ νήματος διὰ τῆς ἀντιστοίχου ὀπῆς τοῦ τελευταίου γράμματος προσεδένετο τὸ ἄκρον τούτου μὲ τὴν περιφέρειαν καὶ ἀπεστέλλετο ὁ δίσκος εἰς τὸν παραλήπτην. Οὗτος ἐξετύλισσε τὸ νῆμα, ἀφοῦ ἔκοπτε τὸν δεσμὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν περιφέρειαν καὶ ἐσημείωνε τὰ γράμματα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἑκάστην ἔξοδον τοῦ νήματος (αὕτη ὠνομάζετο «ἐξίεσις», ἐν ᾧ τὸ πέρασμα διὰ τῆς ὀπῆς ὠνομάζετο «ἔνερσις») γράφων αὐτὰ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἐνταῦθα θὰ ἔγραφε π.χ.:



Σχ. 4

....	λ	α	τ	ε	χ	ρ	η	μ	α	τ	α
....	11,	10,	9,	8	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

(Ἡ σειρὰ γραφῆς τῶν γραμμάτων σημειοῦται διὰ τῶν κάτωθι αὐτῶν τεθειμένων ἀριθμῶν).

Διὰ τὴν ἀποστολὴν μυστικῆς εἰδήσεως πρὸς πολιορκουμένους ἢ πρὸς πολιορκοῦντας ἐμηχανεύοντο πολλοὺς τρόπους. Ἐστέλλετο π.χ. ἐπιστολὴ φαινομενικῶς ἀθώου περιεχομένου εἰς ὡρισμένα ὅμως γράμματα τῆς ἐπιστολῆς ἐτίθεντο μικραὶ στιγμαὶ ἢ ἐγίνοντο μικραὶ προεκτάσεις τῶν γραμμάτων. Ὁ παραλήπτης ἔπρεπε νὰ διαχωρίσῃ αὐτὰ τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ἀπήρτιζον τὴν πραγματικὴν ἐπιστολήν. Π.χ., Ἔστω ὅτι ἐστέλλετο ἡ ἑξῆς ἐπιστολή.

Φιλτάτῳ, καὶ πάνυ ἀγαθῷ Διονυσίῳ

Ἐρρῶσθαι

Ἡμῖν, φίλτατε Διονύσιε, καιρὸς ἦν λαμπρός· σεισμοῦ ὅμως γενομένου περὶ λύχνων ἀφὰς καὶ σκότους μεγάλου πολλαὶ μὲν οἰκίαι ἠφανίσθησαν πολλοὶ δὲ ἐν αὐτοῖς εὑρισκόμενοι ἄνθρωποι ἀπωλέσθησαν.

Ἔρρωσο

Δημόκλειτος.

Ἐὰν τώρα γράψωμεν κατὰ σειρὰν τὰ γράμματα τὰ ἔχοντα κάτωθεν αὐτῶν στιγμὰς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐπιστολὴν

ἀποστείλατε ἄνδρας.

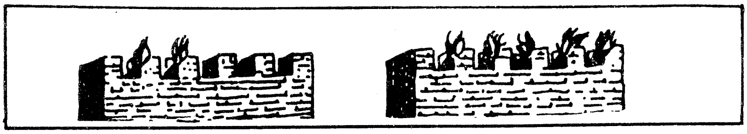
***

Καταπληκτικὴ θεωρεῖται ἡ ἐπινόησις, τοῦ κατὰ τὴν νύκτα λειτουργοῦντος ὀπτικοῦ τηλεγράφου, ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων τῆς Ἀλεξανδρείας **Κλεοξένου** καὶ **Δημοκλείτου**, περὶ τὸν 4ον αἰ. π. Χ. μνημονευομένη ὑπὸ τοῦ Πολυβίου (Χ 45.6).

Εἰς τὸν σταθμὸν ἐκπομπῆς, ἀπέχοντα τοῦ σταθμοῦ λήψεως 20—30 χιλιόμετρα, ἐκτίζοντο εἰς σχῆμα μαιάνδρου δύο τοῖχοι ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν σταθμὸν λήψεως, ἀπέχοντες ὁ εἷς τοῦ ἄλλου ὀλίγα μέτρα (σχ. 5). Τὸ γεῖσον ἑκάστου τοίχου εἶχε κατασκευασθῆ μὲ ἓξ ἐξοχὰς καὶ πέντε κοιλότητας. Τὸ πλάτος ἑκάστης κοιλότητος ἦτο περίπου 1 μ. Ὁ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῖχος τοῦ σταθμοῦ ἐκπομπῆς (διά παρατηρητὴν εὑρισκόμενον εἰς τὸν σταθμὸν λήψεως) ὀνομάζεται σταθμὸς ὁμάδων, ἐν ᾧ ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῖχος ὀνομάζεται σταθμὸς γραμμάτων. Διὰ διόπτρας ἀνεγνωρίζετο εἰς ποῖον ἐκ τῶν δύο τοίχων ἐγένοντο τὰ φωτεινὰ σήματα. Εἰς ἑκάστην κοιλότητα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνάπτεται πυρσός, δηλ. μεγάλη φωτιά, ὕψους ὀλίγων μέτρων, καὶ διαρκείας μικροῦ τινος χρόνου. Τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διῃροῦντο εἰς πέντε ὁμάδας, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πρῶται τέσσαρες εἶχον ἀνὰ πέντε γράμματα, ἐν ᾧ ἡ πέμπτη ὁμὰς εἶχε τέσσαρα. Τὰ οὕτω πως κατανεμηθέντα γράμματα ἐγράφοντο εἰς πέντε ὁριζοντίας σειράς, τῶν ὁποίων ἡ μία ἦτο κάτωθεν τῆς ἄλλης. Εἰς τοιοῦτο σχῆμα γραφῆς ἔχομεν πέντε ὁριζοντίας σειρὰς καὶ πέντε καθέτους στήλας δηλ. εὐθείας τετμημένας και κατηγμένας (ἢ τεταγμένας) ὡς ἑξῆς:

Ὁμάδες γραμμάτων	Στῆλαι γραμμάτων				
	1	2	3	4	5
1. Ὁμάς πρώτη	α	β	γ	δ	ε
2. Ὁμὰς δευτέρα	ζ	η	θ	ι	κ
3. Ὁμὰς τρίτη	λ	μ	ν	ξ	ο
4. Ὁμὰς τετάρτη	π	ρ	σ	τ	υ
5. Ὁμὰς πέμπτη	φ	χ	ψ	ω	

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ σταλῇ τὸ ἑξῆς τηλεγράφημα: «Ἐχθρὸς ἐν ὄψει». Τὸ γράμμα ε ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην ὁμάδα. Ἀνάπτεται πυρσὸς εἰς τὴν πρώτην κοιλότητα τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοίχου. Ἀνήκει ὅμως τὸ γράμμα ε εἰς τὴν πέμπτην στήλην. Ἀνάπτονται ἐν συνεχείᾳ πυρσοὶ εἰς τὰς πέντε κοιλότητας τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τοίχου. Εἰς τὸν σταθμὸν λήψε-



Σχ. 5.

ως σημειοῦται τὸ γράμμα ε. Διὰ τὸ γράμμα χ, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν πέμπτην ὁμάδα ἀνάπτονται καὶ εἰς τὰς πέντε κοιλότητας τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοίχου, πέντε πυρσοί. Ἀνήκει ὅμως τὸ γράμμα χ εἰς τὴν δευτέραν στήλην γραμμάτων. Ἀνάπτονται ἐν συνεχείᾳ δύο πυρσοί, εἰς τὰς δύο πρώτας κοιλότητας τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τοίχου (δεξιὰ τοῦ παρατηρητοῦ τοῦ σταθμοῦ λήψεως). Εἰς τὸν σταθμὸν λήψεως σημειοῦται μετὰ τὸ γράμμα ε τὸ γράμμα χ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Πρὸς ἀσφάλειαν, διὰ τὴν περίπτωσιν κλοπῆς τοῦ κώδικος αὐτοῦ ἦτο δυνατὸν νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων καὶ τῶν στηλῶν γραμμάτων, νὰ εἶναι π.χ. 8 ὁμάδες, ἐκ τριῶν γραμμάτων ἑκάστη, τὰ δὲ γράμματα νὰ γράφωνται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ κώδικος πρέπει νὰ εἶναι γνωστὴ καὶ εἰς τοὺς δύο σταθμοὺς (ἐκπομπῆς—λήψεως), ὅπως τοῦτο γίνεται καὶ σήμερον εἰς παρομοίας περιπτώσεις.

Εἶναι ἐνδιαφέρον τέλος νά μνημονευθῇ, ὅτι ὁ ἀθλητὴς Ταυροσθένης ἀναχωρῶν ἐκ τῆς πατρίδος του Αἰγίνης διὰ τὴν Ὀλυμπίαν, ἵνα μετάσχῃ τῶν Ὀλυμπιακῶν ἀγώνων, περὶ τὸ 500 π.Χ., παρέλαβε μεθ' ἑαυτοῦ περιστεράν, ἡ ὁποία ἔτρεφε νεοσσούς. Ὅταν ἐνίκησεν εἰς τοὺς ἀγῶνας ἄφησεν ἐλευθέραν τὴν περιστεράν, ἡ ὁποία φέρουσα εἰς ἕνα ἐκ τῶν ποδῶν της ἐρυθρὰν ταινίαν, τὸ σύμβολον τῆς νίκης, ἔφθασεν ἐντὸς μιᾶς περίπου ὥρας ἐκ τῆς Ὀλυμπίας εἰς τὴν Αἴγιναν. Κατ' ἄλλην παράδοσιν ἡ πληροφορία τῆς νίκης τοῦ Ταυροσθένους μετεδόθη εἰς τὴν Αἴγιναν ἐκ τῆς Ὀλυμπίας διὰ πυρσῶν (Αἰλιανός, Ποικίλη Ἱστορία 9,2).

Διὰ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων καὶ τῶν Συνδυασμῶν ἀναφέρομεν ὅτι ἡ πιθανότης ἀποκρυπτογραφήσεως ἑνὸς κώδικος εἶναι ἐλαχίστη, ὄχι ὅμως ἀδύνατος. Κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου παγκοσμίου πολέμου οἱ Μαθηματικοὶ τοῦ Κέντρου Ἐρευνῶν τῶν Ἀμερικανικῶν Ἐνόπλων Δυνάμεων κατώρθωσαν νὰ ἀποκρυπτογραφήσουν διὰ πολλῶν δοκιμῶν, στηριζομένων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων καὶ τῶν Συνδυασμῶν, τὸν μυστικὸν κώδικα τοῦ Ἰαπωνικοῦ Ναυαρχείου.

Τὰ γράμματα τῶν κατωτέρω λέξεων ἔχουν γραφῇ ὅπως θὰ ἐγράφοντο εἰς τὸ δίπτυχον καὶ διαβάζονται ὀρθῶς διὰ κατόπτρου.

VIΣXΓVOΣ	ΣΟΦΟΚVΗΣ	ΕΓΡΙΠΙVΗΣ
ΕΓΚVΕΙVΗΣ	ΙΚΤΙИΟΣ	ΕΓVΟΞΟΣ
VΗMΟΚΡΙΤΟΣ	ΠVVΤΩИ	VΠΟVVΩИΙΟΣ
ΒΕVVΕΡΕΦΟИΤΗΣ	VΡΙΣΤΟΤΕVΗΣ	ΠΙИVΡΟΣ
MΕΓVΣ VVΕΞVИVΡΟΣ	ΠΟVΓΚVΕΙΤΟΣ	ΘVVΗΣ
ΠΕΡΙΚVΗΣ	ΦΕΙVΙVΣ	ΟMΗΡΟΣ
VΧΙVVΕΓΣ	VΓVMΕMИΩИ	ΣΩΚΡVΤΗΣ
VΡΧΙMΗVΗΣ	ΠΓΘVΓΟΡVΣ	VΡΙΣΤVΡΧΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Αἰνείου Πολιορκητικά, Énée le Tacticien Poliorcétique, Les Belles Lettres, Paris 1967.
Hermann Diels, Antike Technik, Otto Zeller, Osnabrück 1965⁴.
Pauly — Wissowa R.E.

EVCLIDIS

ELEMENTA

VOL. I

LIBRI I–IV CVM APPENDICIBVS

POST

I. L. HEIBERG

EDIDIT

E. S. STAMATIS

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1969

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN
INSTITUT FÜR
GRIECHISCH-RÖMISCHE ALTERTUMSKUNDE

BIBLIOTHECA
SCRIPTORVM GRAECORVM ET ROMANORVM
TEVBNERIANA

LEIPZIG

BSB B.G.TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1969

HOC VOLVMINE CONTINENTVR

PRAEFATIO

Elementa Euclidis paene per tria saecula pro fundamento critico solam editionem principem habuerunt, quae prodiit Basileae a. 1533; nam Gregorius in elementis totus fere ab illa editione pendet. quod fundamentum quale fuerit, inde intellegitur, quod editio Basileensis pro consuetudine illius temporis ad fidem paucissimorum nec optimorum codicum facta est, cum tamen elementorum tot exstent codices antiquissimi et praestantissimi, quot haud facile cuiusquam scriptoris Graeci. itaque initio nostri saeculi Peyrardus optime de elementis meritus est, quod unum saltem codicem antiquum et eum omnium praestantissimum, quippe qui recensionem Theone antiquiorem contineret, in editione Basileensi emendanda adhibuit. hunc codicem e latebris Vaticanis protraxisse praestantiamque eius agnovisse, gloria est Peyrardi haud parvi aestimanda. sed neque ubique recto firmoque indicio in vera scriptura eligenda usus est, in primis quia bonis codicibus recensionis Theonis caruit, neque inventum suum tenuit recteque aestimavit. huc accedit, quod editio eius et inhabilis et his temporibus perrara est; nec ii, qui post Peyrardum elementa ediderunt, subsidia critica auxerunt neque omnino rem ita egerunt, ut textus elementorum satis certo et ad usum prompto fundamento niti videri possit. de ceteris scriptis Euclidis multo etiam peius actum esse satis constat.

Quae cum a multis intellegi viderem, Archimedi Euclidem adiungere constitui, et ut hunc laborem, quem iam diu animo volvebam, tandem aliquando susciperem, eo magis impellebar, quod editionem Archimedis ab hominibus doctis benevolenter accipi, et erroribus, quos in primitiis illis vitare non potuissem, indulgeri videbam, et usu edoctum me iam meliora praestare posse sperabam.

Sed statim apparuit neque res rationesque neque vires meas toti operi, quod mihi proposueram, sufficere. tot codices conferendi erant, tot bibliothecae itineribus longinquis adeundae. itaque Henricum Menge, v. d., quem sciebam et ipsum in Euclide occupatum esse, interrogavi velletne partem operis suscipere. annuit, et ita inter nos comparatum est, ut ille Data, Phaenomena, scripta musica, ego Elementa, Optica, Catoptrica ederem, et ut codices coniuncta opera conferremus. sed sic quoque in elementis e magna copia subsidiorum pauca eligere coactus sum. nam cum vix ulla sit minima bibliotheca, in qua non asservetur codex aliquis elementorum, inde ab initio de omnibus codicibus conferendis aut certe inspiciendis desperandum erat. vellem equidem licuisset pluribus codicibus uti, sed ut aliquo tamen modo paucis, quos contuli, contenti esse possimus, facit et singularis ratio, qua nobis tradita sunt elementa Euclidis, et vetustas et bonitas codicum a me usurpatorum. nam satis notum est, plerosque omnes codices e recensione Theonis fluxisse, et Vaticanum Peyrardi solum fere antiquiorem formam servasse. quem fructum ex hoc casu singulari capere liceat, et quam rationem critices factitandae inde sequi putem, pluribus exposui in libro, qui inscribitur Studien über Euklid p. 177sq. hoc quidem statim apparuit, primum omnium codicem Vaticanum, e quo Peyrardus ea sola enotaverat, quae ei memorabilia videbantur, quamvis ipse aliter praedicet, denuo diligenter esse conferendum et praeterea ex reliquis codicibus tantum numerum, ut veri similiter de scriptura Theonis iudicari posset. qua in re codices Bodleianum, Laurentianum, Vindobonensem sufficere putavi, praesertim cum animadverterem, eos a palimpsesto codice saeculi VII vel VIII, qui in Museo Britannico asservatur, non admodum discrepare. hos codices pro fundamento habui, sed ad eos in partibus quibusdam operis alii accesserunt et, ut spero, accedent, velut in hoc primo volumine Parisinus quidam et in primo libro Bononiensis. hunc ne totum conferrem, prohibuerunt temporis angustiae, sed spes mihi est, me brevi partem reliquam conferre posse; nam in libris stereometricis hic codex maximi momenti est. de ceteris subsidiis novis, sicut de codicibus operum minorum, in praefationibus singulorum voluminum dicetur.

Confiteor igitur fieri posse, ut inter codices nondum collatos lateat thesaurus aliquis (neque enim omnes recentiores sunt nec recentiores semper spernendi), qui mea subsidia vel aequet vel etiam superet. sed cum non maxime sit veri simile, haec, qualiacumque sunt, nunc edere malui, quam opus in infinitum differre.

De consilio meo satis dictum. de forma ac specie editionis sufficit commemorare, eandem me secutum esse quam in Archimede edendo. nam quamquam videbam, Latinam interpretationem meam a nonnullis improbari, tamen hic quoque Latinam Francogallicae Germanaeve aut nulli praetuli; nam interpretationem mathematici flagitant, et Latina a pluribus legi potest. praeterea res ipsae tritiores interpretandi molestiam leviorem reddunt in Euclide quam in Archimede. notas perpaucas addidi, quia perpaucis in Euclide discentibus consulenti opus est, si solam intellegentiam verborum tenorisque demonstrationis spectes. nam commentarium, cuius hic quoque ingens est materia, scribere nolui. quarto volumini copiosiora prolegomena praemittentur, quibus historia textus elementorum illustrabitur. eodem congeram, quae de subsidiis deterioribus collegi; nam perspicuitatis causa ea ab apparatu critico removenda erant, in quo iis tantum codicibus usus sum, quos supra commemoravi. eos his litteris significavi:

P cod. Vatican. Gr. 190 Peyrardi saec. X, membran. hic illic manus recentissima litteras tempore evanidas renovavit, quam littera π significavi, ubi parum recte scripturam antiquam reddere videbatur. libros IV–IX ipse contuli Romae 1881, librum II et partem tertii Mengius; primum et reliquam partem tertii Augustus Mau v. d. benevolenter conferenda suscepit.

B cod. Bodleian. Dorvillian. X, 1 inf. 2, 30, scr. a. 888, membran. libros I–VII ipse contuli Oxoniae 1882.

F cod. Florentin. Laurentian. XXVIII, 3 saec. X, membran. in hoc quoque codice scriptura antiqua saepe manu saeculi XVI renovata est, quae eadem multa folia foliorumve partes resarcinavit et ultimam partem codicis totam supplevit. eam significavi littera φ, ubicumque antiquam scripturam vel vitiavit vel ita obscuravit, ut dignosci non posset. totum codicem ipse contuli Florentiae 1881.

V cod. Vindobon. Gr. 103 saec. XI–XII, membran. partem ultimam in charta bombycina supplevit manus saeculi XIII. totum contuli ipse Hauniae 1880.

b cod. bibliothecae communalis Bononiensis numeris 18–19 signat., saec. XI, membran. librum I contuli et alios nonnullos locos inspexi Florentiae 1881.

p cod. Parisin. Gr. 2466 saec. XII, membran. librum I contuli Parisiis 1880, libros II–VII Hauniae 1882.

Restat, ut grato officio fungar iis viris gratias quam maximas agendi, qui labori meo faverunt. primum ut itinera Parisios et in Italiam toties facere possem, effectum est eximia liberalitate summi Ministerii, quod cultui scholisque nostris praeest, et instituti Carlsbergici, litteras scientiamque largiter adiuvantis. etiam praefectis bibliothecarum Vindobonensis, Parisinae, Bononiensis plurimum debeo, quod codices a se asservatos meum in usum alio transmitti siverunt, item praefectis bibliothecae regiae Hauniensis et bibliothecae Laurentianae, quibus intercedentibus hunc favorem adeptus sum. Carolo Graux, quocum magnam partem itineris Italici a. 1881 communiter feci, et qui me in codicum aetatibus definiendis ceterisque rebus palaeographicis, in quibus cedebat nemini, egregie adiuvabat, quominus hoc loco gratias debitas agerem, prohibuit fatum nobis amicis eius superstitibus scientiaeque iniquissimum.

Scr. Hauniae mense Aprili MDCCCLXXXIII

I. L. Heiberg

ADDITAMENTVM PRAEFATIONIS

Nemo ex viris antiquae geometriae peritis est quin putet nova editione Euclidis Elementorum in praesenti opus esse. exemplaria enim praeclarae editionis Heibergianae iamdudum divendita sunt, studia autem ad Elementa pertinentia nostra aetate admodum increverunt.

Qua de re cum a bibliopola honestissimo, hortatu Instituti scientiae antiquitatis Graecoromanae, quod auctoritate Academiae Scientiarum Germanicae Berolinensis constitutum est, invitatus essem, ut novam Euclidis Elementorum editionem curarem, gratissimo animo hoc negotium suscepi. nam multos studiosos scientiae mathematicae, qui Graece sciunt, Euclidianum textum desiderare cognovi.

Valde autem mihi consilium bibliopolae honestissimi placuit, qui mihi suasit, ut translationem Latinam qua Heiberg editionem suam instruxerat omitterem, quo nova editio brevior in lucem prodiret. patet enim linguae Graecae peritos Latina translatione non nimis egere. quae cum ita sint, ratio novae editionis, ita ut infra indicatur, ordinata est:

Textui primi voluminis praemittenda, quae de Elementis et de vita Euclidis et de principiis primordiisque geometriae tradita sunt, existimavi. annexui continuo tres indices. tertio loco conspectum, in quo praestantissimae Euclidis Elementorum editiones memorantur, adiunxi.

PRAEFATIO

Quod ad textum attinet Heibergianae editionis vestigia ingredi statui. nam inter omnes viros doctos Heiberg optime de Euclidis Elementis meritum esse constat. neque enim post obitum eius codices novi, praeter quos ille inspexerat, collati sunt, neque seges papyrorum nobis novas lectiones praebuit. ipse autem editionis Heibergianae perfectionem absolutionemque perspexi, cum meam Euclidis Elementorum editionem, quae annis 1952–1957 Athenis impressa est, absolverem.

Inferiorem paginarum marginem hoc modo disposui: notas ab Heiberg textui suae translationis Latinae insertas in superiorem locum transtuli, primo et ultimo Graeco vocabulo sententiae ad quam pertineant designato numeroque versus memorato. ibidem etiam testimonia ad eandem translationem spectantia eodem modo collocavi. adiunxi deinde reliqua testimonia ad propositiones spectantia, quae numeris Graecis significavi, et varias lectiones ex editione Heibergiana.

Varia additamenta in calce uniuscuiusque voluminis collocanda censui.

Restat, ut gratias maximas agam Iohannes Irmscher, quod non solum in hac editione curanda consilio me adiuvit, verum etiam auctor fuit, ut editio ipsa a bibliopola honestissimo mihi committeretur.

Scribebam Athenis mense Septembri MCMLXI

E. S. Stamatis

TESTIMONIA

DE EVCLIDIS ELEMENTORVM ET VITAE MEMORIA

1. Archimedes (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1910–15), De sphaera et cylindro, I p. 12, 3:

κείσθω διὰ τὸ β′ τοῦ α′ τῶν Εὐκλείδου.

2. – – I p. 20, 10–16:

φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει (Elem. 12, 2) *παραδέδοται.*

3. – De conoid. et sphaeroid., I p. 270, 24:

ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις (sc. Euclidis).

4. – Quadratura parabola, II p. 268, 3:

ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις (sc. Euclidis).

5. – De corpor. fluitant., II p. 350, 21:

δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς στοιχείοις τῶν μηχανικῶν (sc. Euclidis).

6. – Ad Eratosth. methodus, II p. 436, 3:

τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς στοιχείοις δείκνυται (sc. Euclidis).

7. – – p. 444, 27:
τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον | τὸ ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις (sc. Euclidis).

8. Pappus Alexandrinus (ed. Fr. Hultsch, Berolini 1876 u. ad 1878) I p. 178, 11:
καὶ ἔστι τοῦτο (sc. theorema Pappi) *καθολικώτερον πολλῷ τοῦ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἐπὶ τῶν τετραγώνων ἐν τοῖς στοιχείοις δεδειγμένου* (Elem. 1, 47).

9. – I p. 250, 31:
τοῦτο γὰρ δῆλον ἐκ τῶν στοιχείων.

10. – I p. 314, 8:
δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἀκολούθως τῇ ἀγωγῇ τῇ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων ἐγγράψαι εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον (Elem. 12, 2).

11. – I p. 338, 4:
[*ιε' τοῦ ε' στοιχείων*].

12. – I p. 358, 25–28:
ὅτι δὲ πλείω τῶν ε' τούτων (sc. polyedrorum quae Platonica vocantur) *ἀδύνατόν ἐστιν εὑρεῖν . . . καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου καὶ ὑπό τινων ἄλλων ἀποδέδεικται* (Elem. 13 extremo).

13. – I p. 376, 21:
ὡς ἔστιν δευτέρῳ στοιχείων.

14. – I p. 378, 8:
διὰ τὸ γ' τοῦ β' στοιχείων.

15. – I p. 380, 14:
διὰ τὸ γ' θεώρημα τοῦ β' στοιχείων.

16. – I p. 414, 7:
ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ὀκταέδρῳ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶν τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· (Elem. 13, 14).

17. – I p. 414, 11:

διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων

18. – I p. 414, 20:

ἡ ΕΖ ἄρα ἐκ κέντρου ἐστὶν τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις (Elem. 13, 14).

19. – I p. 420, 7:

ὡς ἔστιν στοιχείοις δ' τοῦ τρισκαιδεκάτου θεωρήματι.

20. – I p. 420, 11:

ὡς ἔστιν στοιχείοις τὸ γ' θεώρημα τοῦ β'.

21. – I p. 420, 19:

διὰ τὸ αὐτὸ γ' τοῦ β' στοιχείων θεώρημα.

22. – I p. 422, 34:

ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ ὁ δεχόμενος τὸ πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου, ὡς ἐν στοιχείοις (Elem. 13, 16).

23. – I p. 424, 2:

αὕτη δέ ἐστιν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις.

24. – I p. 424, 7:

ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ις' θεώρημα τοῦ ιγ'.

25. – I p. 424, 10:

διὰ τὸ ι' θεώρημα τοῦ ιγ' (sc. *στοιχείων*).

26. – I p. 424, 16:

ταῦτα γὰρ ἐν τοῖς στερεοῖς τῶν στοιχείων ἐδείχθη.

27. – I p. 428, 21:

διὰ τὸ η' θεώρημα τοῦ β' στοιχείων.

28. – I p. 430, 27:

διὰ τὸ β' θεώρημα τοῦ ιγ' στοιχείων.

29. – I p. 432, 23:

τοῦτο γὰρ δείκνυται διὰ τοῦ α' τοῦ ϛ' στοιχείων.

30. – I p. 436, 2:

ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' τῶν στοιχείων ἐπὶ τοῦ κύβου (prop. 15).

31. – I p. 438, 8:

ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' βιβλίῳ στοιχείων.

32. – I p. 438, 19:

δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ' στοιχείων καὶ τοῦτο.

33. – I p. 440, 6:

τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ιγ' στοιχείων.

34. – I p. 440, 13:

ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων.

35. – I p. 440, 16:

ἐκκείσθω δὴ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ AB καὶ εὐθεῖά τις ἡ MN, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ AB τοῦ ἀπὸ MN, ὡς ἔστιν λῆμμα ιγ' στοιχείων (prop. 2).

36. – I p. 440, 19:

ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων (prop. 16, *πόρισμα*).

37. – I p. 442, 8:

ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων.

38. – I p. 456, 17:

διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων.

39. – I p. 468, 1:

ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' τῶν στοιχείων.

40. – II p. 676, 25–678, 12 (vita):

ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον (sc. *πρεσβύτερον*) *ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς, . . ., ἐπιεικέστατος ὢν καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος* (sc. Apollonius), . . . *καὶ συσχολάσας* (sc. Apollonius) *τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, ὅθεν ἔσχεν καὶ τὴν τοιαύτην ἕξιν οὐκ ἀμαθῆ.*

41. – II p. 988, 10:

διὰ ἄρα τὸ ια' (prop. 5) *στοιχείων ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ ΒΕ ΒΓ εὐθεῖαι.*

42. – III p. 1100, 15:

διὰ τὸ κ' τοῦ ς' (sc. *στοιχείων*).

43. – III p. 1106, 23:

τοῦτο γὰρ πρῶτόν ἐστιν ἐν τῷ ς' λαμβανόμενον (sc. *στοιχείων*).

44. Ioannes Philoponus, De aeternitate mundi (ed. H. Rabe, Lipsiae 1899), p. 187, 18–188, 2:

καὶ τὸν μὲν κύκλον, ἐπειδὴ ἁπλούστερον ἦν, ὡρίσατο Εὐκλείδης σχῆμα ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν πᾶσαι αἱ ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν (Elem. 1, def. 15), *τὴν δὲ σφαῖραν θέλων δεῖξαι ὡς ἂν γινομένην ὡρίσατο ἡμικύκλιον διαμέτρου μενούσης περιφερόμενον, ἕως ἂν ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀποκατασταθῇ* (Elem. 11, def. 14).

45. Ioannes Stobaeus (rec. C. Wachsmuth, O. Hense, Berolini 1884, reimp. 1958) II p. 228, 25–29:

Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην „τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μανθάνοντι;" · καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας „δός“, ἔφη, „αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν“.

46. Anthol. Pal. (ed. F. Dübner, E. Cougny, Parisiis 1871 u. ad 1890) III, VII, 2:

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ᾽ ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ᾽ ἐρέεινεν ἐκείνη·
μῆτερ, τί κλαίουσ᾽ ὀλοφύρεαι, ἠύτε κούρη;
„εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις“.
εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίστορ.

DE PRINCIPIORVM GEOMETRIAE MEMORIA

47. Plato, Res publica 6, 510 C–511 A:

Οἶμαι γάρ σε εἰδέναι, ὅτι οἱ περὶ τὰς γεωμετρίας τε καὶ λογισμοὺς καὶ τὰ τοιαῦτα πραγματευόμενοι, ὑποθέμενοι τό τε περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον καὶ τὰ σχήματα καὶ γωνιῶν τριττὰ εἴδη καὶ ἄλλα τούτων ἀδελφὰ καθ᾽ ἑκάστην μέθοδον, ταῦτα μὲν ὡς εἰδότες, ποιησάμενοι ὑποθέσεις αὐτά, οὐδένα λόγον οὔτε αὑτοῖς οὔτε ἄλλοις ἔτι ἀξιοῦσι περὶ αὐτῶν διδόναι ὡς παντὶ φανερῶν, ἐκ τούτων δ᾽ ἀρχόμενοι τὰ λοιπὰ ἤδη διεξιόντες τελευτῶσιν ὁμολογουμένως ἐπὶ τοῦτο, οὗ ἂν ἐπὶ σκέψιν ὁρμήσωσιν. Πάνυ μὲν οὖν, ἔφη, τοῦτό γε οἶδα. Οὐκοῦν καὶ ὅτι τοῖς ὁρωμένοις εἴδεσι προσχρῶνται καὶ τοὺς λόγους περὶ αὐτῶν ποιοῦνται, οὐ περὶ τούτων διανοούμενοι, ἀλλ᾽ ἐκείνων πέρι, οἷς ταῦτα ἔοικε, τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἕνεκα τοὺς λόγους ποιούμενοι καὶ διαμέτρου αὐτῆς, ἀλλ᾽ οὐ ταύτης ἣν γράφουσι, καὶ τἆλλα οὕτως, αὐτὰ μὲν ταῦτα, ἃ πλάττουσί τε καὶ γράφουσιν, ὧν καὶ σκιαὶ καὶ ἐν ὕδασιν εἰκόνες εἰσί, τούτοις μὲν ὡς εἰκόσιν αὖ χρώμενοι, ζητοῦντές τε αὐτὰ ἐκεῖνα ἰδεῖν, ἃ οὐκ ἂν ἄλλως ἴδοι τις ἢ τῇ διανοίᾳ.

48. – – 6, 511 C–D:

Μανθάνω, ἔφη, ἱκανῶς μὲν οὔ – δοκεῖς γάρ μοι συχνὸν ἔργον λέγειν – ὅτι μέντοι βούλει διορίζειν σαφέστερον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ διαλέγεσθαι ἐπιστήμης τοῦ ὄντος τε καὶ νοητοῦ θεωρούμενον ἢ τὸ ὑπὸ τῶν τεχνῶν καλουμένων, αἷς αἱ ὑποθέσεις ἀρχαὶ καὶ διανοίᾳ μὲν ἀναγκάζονται ἀλλὰ μὴ αἰσθήσεσιν αὐτὰ θεᾶσθαι οἱ θεώμενοι, διὰ δὲ τὸ μὴ ἐπ' ἀρχὴν ἀνελθόντες σκοπεῖν, ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεων, νοῦν οὐκ ἴσχειν περὶ αὐτὰ δοκοῦσί σοι, καίτοι νοητῶν ὄντων μετὰ ἀρχῆς. διάνοιαν δὲ καλεῖν μοι δοκεῖς τὴν τῶν γεωμετρικῶν τε καὶ τὴν τῶν τοιούτων ἕξιν ἀλλ' οὐ νοῦν, ὡς μεταξύ τι δόξης τε καὶ νοῦ τὴν διάνοιαν οὖσαν. Ἱκανώτατα, ἦν δ' ἐγώ, ἀπεδέξω.

49. – – 7, 526 D–E:

Ἀλλ' οὖν δή, εἶπον, πρὸς μὲν τὰ τοιαῦτα βραχύ τι ἂν ἐξαρκοῖ γεωμετρίας τε καὶ λογισμῶν μόριον (sc. *πρὸς τὰς στρατοπεδεύσεις καὶ καταλήψεις χωρίων . . .*)· *τὸ δὲ πολὺ αὐτῆς* (sc. geometriae) *καὶ πορρωτέρω προϊὸν σκοπεῖσθαι δεῖ, εἴ τι πρὸς ἐκεῖνο τείνει, πρὸς τὸ ποιεῖν κατιδεῖν ῥᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν.*

50. – – 7, 528 A–B:

νῦν δὴ γὰρ οὐκ ὀρθῶς τὸ ἑξῆς ἐλάβομεν τῇ γεωμετρίᾳ . . . μετὰ ἐπίπεδον, ἦν δ' ἐγώ, ἐν περιφορᾷ ὂν ἤδη στερεὸν λαβόντες, πρὶν αὐτὸ καθ' αὑτὸ λαβεῖν· ὀρθῶς δὲ ἔχει ἑξῆς μετὰ δευτέραν αὔξην τρίτην λαμβάνειν. ἔστι δέ που τοῦτο περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθους μετέχον (sc. stereometria).

51. – Epinomis 990 C–E:

διὸ μαθημάτων δέον ἂν εἴη· τὸ δὲ μέγιστόν τε καὶ πρῶτον καὶ ἀριθμῶν αὐτῶν ἀλλ' οὐ σώματα ἐχόντων, ἀλλὰ ὅλης τῆς τοῦ περιττοῦ τε καὶ ἀρτίου γενέσεώς τε καὶ δυνάμεως, ὅσην παρέχεται πρὸς τὴν τῶν ὄντων φύσιν. ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι *μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστιν διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ συννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοιοῖ, ταύτῃ ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες.*

52. – – 981 B–C:

Στερεὰ δὲ σώματα λέγεσθαι χρὴ κατὰ τὸν εἰκότα λόγον πέντε, ἐξ ὧν κάλλιστα καὶ ἄριστά τις ἂν πλάττοι . . . πέντε οὖν ὄντων τῶν σωμάτων πῦρ χρὴ φάναι καὶ ὕδωρ εἶναι καὶ τρίτον ἀέρα, τέταρτον δὲ γῆν, πέμπτον δὲ αἰθέρα.

53. – Timaeus 54E–56B:

τρίγωνα δὲ ἰσόπλευρα συνιστάμενα τέτταρα . . . πρῶτον εἶδος στερεόν (sc. *τετράεδρον*) . . . *δεύτερον δὲ . . . τρίγωνα ὀκτὼ συστάντων* (sc. *ὀκτάεδρον*) . . ., *τὸ δὲ τρίτον . . . εἴκοσι βάσεις ἔχον* (sc. *εἰκοσάεδρον*) . . . *τοῦ τετάρτου φύσιν . . . σχῆμα τοῦ συστάντος σώματος γέγονεν κυβικόν . . . συστάσεως μιᾶς πέμπτης* (sc. *δωδεκάεδρον*), *ἐπὶ τὸ πᾶν ὁ θεὸς αὐτῇ κατεχρήσατο ἐκεῖνο διαζωγραφῶν . . . γῇ τὸ κυβικὸν εἶδος δῶμεν . . . πυραμίδος . . . πυρὸς στοιχεῖον, τὸ δὲ δεύτερον* (sc. *ὀκτάεδρον*) *κατὰ γένεσιν εἴπωμεν ἀέρος, τὸ δὲ τρίτον* (sc. *εἰκοσάεδρον*) *ὕδατος.*

54. Aristoteles, Aγ 1, 71a 1–4:

Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν.

55. — Aγ 2, 71b 19—23:

Εἰ τοίνυν ἐστὶ τὸ ἐπίστασθαι οἷον ἔθεμεν, ἀνάγκη καὶ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην ἐξ ἀληθῶν τ' εἶναι καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων καὶ γνωριμωτέρων καὶ προτέρων καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος· οὕτω γὰρ ἔσονται καὶ αἱ ἀρχαὶ οἰκεῖαι τοῦ δεικνυμένου.

56. — Aγ 2, 72a 5—8:

Ἐκ πρώτων δ' ἐστὶ τὸ ἐξ ἀρχῶν οἰκείων· ταὐτὸ γὰρ λέγω πρῶτον καὶ ἀρχήν. ἀρχὴ δ' ἐστὶν ἀποδείξεως πρότασις ἄμεσος, ἄμεσος δὲ ἧς μή ἐστιν ἄλλη προτέρα.

57. — Aγ 2, 72a 14—29:

Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι· ἣν δ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμα· ἔστι γὰρ ἔνια τοιαῦτα· τοῦτο γὰρ μάλιστ' ἐπὶ τοῖς τοιούτοις εἰώθαμεν ὄνομα λέγειν. θέσεως δ' ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀποφάνσεως λαμβάνουσα, οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, ὑπόθεσις, ἡ δ' ἄνευ τούτου ὁρισμός. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μέν ἐστι· τίθεται γὰρ ὁ ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι κατὰ τὸ ποσόν· ὑπόθεσις δ' οὐκ ἔστι· τὸ γὰρ τί ἐστι μονὰς καὶ τὸ εἶναι μονάδα οὐ ταὐτόν. ἐπεὶ δὲ δεῖ πιστεύειν τε καὶ εἰδέναι τὸ πρᾶγμα τῷ τοιοῦτον ἔχειν συλλογισμὸν ὃν καλοῦμεν ἀπόδειξιν, ἔστι δ' οὗτος τῷ τάδ' εἶναι ἐξ ὧν ὁ συλλογισμός, ἀνάγκη μὴ μόνον προγινώσκειν τὰ πρῶτα, ἢ πάντα ἢ ἔνια, ἀλλὰ καὶ μᾶλλον.

58. — Aγ 4, 73a 21—29:

Ἐπεὶ δ' ἀδύνατον ἄλλως ἔχειν οὗ ἐστιν ἐπιστήμη ἁπλῶς, ἀναγκαῖον ἂν εἴη τὸ ἐπιστητὸν τὸ κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην. ἀποδεικτικὴ δ' ἐστὶν ἣν ἔχομεν τῷ ἔχειν ἀπόδειξιν· ἐξ ἀναγκαίων ἄρα συλλογισμός ἐστιν ἡ ἀπόδειξις. ληπτέον ἄρα ἐκ τίνων καὶ ποίων αἱ ἀποδείξεις εἰσίν. πρῶτον δὲ διορίσωμεν τί λέγομεν *τὸ κατὰ παντὸς καὶ τί τὸ καθ' αὑτὸ καὶ τί τὸ καθόλου. κατὰ παντὸς μὲν οὖν τοῦτο λέγω ὃ ἂν ᾖ μὴ ἐπὶ τινὸς μὲν τινὸς δὲ μή, μηδὲ ποτὲ μὲν ποτὲ δὲ μή.*

59. – Aγ 4, 73b 25–33:

Τὸ μὲν οὖν κατὰ παντὸς καὶ καθ' αὑτὸ διωρίσθω τὸν τρόπον τοῦτον· καθόλου δὲ λέγω ὃ ἂν κατὰ παντός τε ὑπάρχῃ καὶ καθ' αὑτὸ καὶ ᾗ αὐτό. φανερὸν ἄρα ὅτι ὅσα καθόλου, ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχει τοῖς πράγμασιν. τὸ καθ' αὑτὸ δὲ καὶ ᾗ αὐτὸ ταὐτόν, οἷον καθ' αὑτὴν τῇ γραμμῇ ὑπάρχει στιγμὴ καὶ τὸ εὐθύ· καὶ γὰρ ᾗ γραμμή. καὶ τῷ τριγώνῳ ᾗ τρίγωνον δύο ὀρθαί· τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δεικνύηται.

60. – Aγ 7, 75a 38–b 2:

Οὐκ ἄρα ἔστιν ἐξ ἄλλου γένους μεταβάντα δεῖξαι, οἷον τὸ γεωμετρικὸν ἀριθμητικῇ. τρία γάρ ἐστι τὰ ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν, ἓν μὲν τὸ ἀποδεικνύμενον τὸ συμπέρασμα· τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ ὑπάρχον γένει τινὶ καθ' αὑτό. ἓν δὲ τὰ ἀξιώματα· ἀξιώματα δ' ἐστὶν ἐξ ὧν. τρίτον τὸ γένος τὸ ὑποκείμενον, οὗ τὰ πάθη καὶ τὰ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα δηλοῖ ἡ ἀπόδειξις.

61. – Aγ 9, 75b 37–42:

Ἐπεὶ δὲ φανερὸν ὅτι ἕκαστον ἀποδεῖξαι οὐκ ἔστιν ἀλλ' ἢ ἐκ τῶν ἑκάστου ἀρχῶν, ἂν τὸ δεικνύμενον ὑπάρχῃ ᾗ ἐκεῖνο, οὐκ ἔστι τὸ ἐπίστασθαι τοῦτο, ἂν ἐξ ἀληθῶν καὶ ἀναποδείκτων δειχθῇ καὶ ἀμέσων. ἔστι γὰρ οὕτω δεῖξαι, ὥσπερ Βρύσων τὸν τετραγωνισμόν. κατὰ κοινόν τε γὰρ δεικνύουσιν οἱ τοιοῦτοι λόγοι, ὃ καὶ ἑτέρῳ ὑπάρξει.

62. – Aγ 10, 76a 31–b 34:

Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται· ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι, οἷον τί μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον· εἶναι δὲ τὴν μονάδα λαβεῖν καὶ μέγεθος, τὰ δ᾽ ἕτερα δεικνύναι.

Ἔστι δ᾽ ὧν χρῶνται ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς ἐπιστήμαις τὰ μὲν ἴδια ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ δὲ κοινά, κοινὰ δὲ κατ᾽ ἀναλογίαν, ἐπεὶ χρήσιμόν γε ὅσον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ἐπιστήμην γένει. ἴδια μὲν οἷον γραμμὴν εἶναι τοιανδί, καὶ τὸ εὐθύ, κοινὰ δὲ οἷον τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λοιπά. ἱκανὸν δ᾽ ἕκαστον τούτων ὅσον ἐν τῷ γένει· ταὐτὸ γὰρ ποιήσει, κἂν μὴ κατὰ πάντων λάβῃ ἀλλ᾽ ἐπὶ μεγεθῶν μόνον, τῷ δ᾽ ἀριθμητικῷ ἐπ᾽ ἀριθμῶν.

Ἔστι δ᾽ ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ᾽ αὑτά, οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς . . . ὅτι δ᾽ ἔστι, δεικνύουσι διά τε τῶν κοινῶν καὶ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων . . . πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, ὅσα τε εἶναι τίθεται (ταῦτα δ᾽ ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ᾽ αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει . . . ἀλλ᾽ οὐδὲν ἧττον τῇ γε φύσει τρία ταῦτά ἐστι, περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν.

Οὐκ ἔστι δ᾽ ὑπόθεσις οὐδ᾽ αἴτημα, ὃ ἀνάγκη εἶναι δι᾽ αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη . . . ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτ᾽, ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται, καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον, ἂν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβάνῃ τὸ αὐτὸ αἰτεῖται. καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα· ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας.

63. – Aγ 11, 77a 26–28:

Ἐπικοινωνοῦσι δὲ πᾶσαι αἱ ἐπιστῆμαι ἀλλήλαις κατὰ τὰ κοινά. κοινὰ δὲ λέγω οἷς χρῶνται ὡς ἐκ τούτων *ἀποδεικνύντες, ἀλλ' οὐ περὶ ὧν δεικνύουσιν οὐδ' ὃ δεικνύουσιν.*

64. — τϑ 3, 158a 36—b 4:

Ἀδύνατον γὰρ ἀποδεῖξαί τι μὴ ἀρξάμενον ἀπὸ τῶν οἰκείων ἀρχῶν καὶ συνείρο ντα μέχρι τῶν ἐσχάτων. ὁρίζεσθαι μὲν οὖν οὔτ' ἀξιοῦσιν οἱ ἀποκρινόμενοι, οὔτ' ἂν ὁ ἐρωτῶν ὁρίζηται προσέχουσιν· μὴ γενομένου δὲ φανεροῦ τί ποτ' ἐστὶ τὸ προκείμενον, οὐ ῥᾴδιον ἐπιχειρεῖν. μάλιστα δὲ τὸ τοιοῦτον περὶ τὰς ἀρχὰς συμβαίνει· τὰ μὲν γὰρ ἄλλα διὰ τούτων δείκνυται, ταῦτα δ' οὐκ ἐνδέχεται δι' ἑτέρων, ἀλλ' ἀναγκαῖον ὁρισμῷ τῶν τοιούτων ἕκαστον γνωρίζειν.

65. — Μβ 2, 997a 10—13:

πᾶσαι γὰρ αἱ ἀποδεικτικαὶ χρῶνται τοῖς ἀξιώμασιν . . . καθόλου γὰρ μάλιστα καὶ πάντων ἀρχαὶ τὰ ἀξιώματά ἐστιν.

66. — Μγ 3, 1005b 28—34:

Ἐναντία δ' ἐστὶ δόξα δόξῃ ἡ τῆς ἀντιφάσεως, φανερὸν ὅτι ἀδύνατον ἅμα ὑπολαμβάνειν τὸν αὐτὸν εἶναι καὶ μὴ εἶναι τὸ αὐτό· ἅμα γὰρ ἂν ἔχοι τὰς ἐναντίας δόξας ὁ διεψευσμένος περὶ τούτου. διὸ πάντες οἱ ἀποδεικνύντες εἰς ταύτην ἀνάγουσιν ἐσχάτην δόξαν· φύσει γὰρ ἀρχὴ καὶ τῶν ἄλλων ἀξιωμάτων αὕτη πάντων.

67. — τα 1, 101a 13—14:

ἀλλ' ἐκ τῶν οἰκείων μὲν τῇ ἐπιστήμῃ λημμάτων.

68. Alexander Aphrod. (ed. I. Bruns, Berolini 1887–1892), De mixtione, II p. 217, 2 = Stoic. vet. frag. II p. 154, 28–30:

τὸ δὲ ταύτας τὰς διαφορὰς εἶναι τῆς μίξεως, πειρᾶται πιστοῦσθαι (sc. Chrysippus) *διὰ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, μάλιστα δὲ κριτήρια τῆς ἀληθείας φησὶν ἡμᾶς παρὰ τῆς φύσεως λαβεῖν ταύτας.*

69. Hero Alexandrinus (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1899 u. ad 1914), Defin., IV p. 112, 15–23:

ἀξίωμά ἐστι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλην, ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾖ καὶ καθ' αὑτὸ πιστὸν τὸ παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχήν, οἷον τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα· ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, πείθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσίς ἐστι· τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοιόνδε κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προείληφεν ἀδιδάκτως, ἀκούσας δὲ συγχωρεῖ χωρὶς ἀποδείξεως.

70. – IV p. 158, 15–160, 7:

αἱ ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας διαιροῦνται εἰς ἀξίωμα, ὑπόθεσιν, αἴτημα, τὰ δὲ μετὰ τὰς ἀρχὰς διαιροῦνται εἰς πρόβλημα καὶ θεώρημα ... τί ἐστιν αἴτημα; ὅταν ἄγνωστον ᾖ τὸ λεγόμενον ἢ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνηται, τηνικαῦτα, φησίν, αἴτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι.

71. – Geometrica, IV p. 172, 23–174, 16:

Τὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας, ὅθεν τυγχάνουσιν, ἔστιν ἐκ φιλοσοφίας δεῖξαι. ἵνα μὴ ἐξαγώνιοι γενώμεθα, εὔλογόν ἐστι τὸν ὅρον αὐτῆς εἰπεῖν. ἔστιν οὖν ἡ γεωμετρία ἐπιστήμη σχημάτων καὶ μεγεθῶν καὶ τῶν περὶ ταῦτα παθῶν, ὁ δὲ σκοπὸς αὐτῆς περὶ τούτων διαλαμβάνειν, ὁ δὲ τρόπος τῆς διδασκαλίας ἐστὶ συνθετικός· ἀρξάμενος γὰρ ἀπὸ σημείου ἀδιαστάτου ὄντος διὰ μέσης γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας καταντᾷ ἐπὶ τὸ στερεόν. τὸ δὲ χρήσιμον αὐτῆς ἄντικρυς εἰς φιλοσοφίαν συντελεῖ· τοῦτο γὰρ καὶ τῷ θείῳ Πλάτωνι δοκεῖ, ἔνθα φησί· ταῦτα τὰ μαθήματα εἴτε χαλεπὰ εἴτε ῥᾴδια, ταύτῃ ἰτέον (Plato, Epinomis 992 A 5: *πορευτέον*). *ἐπιγέγραπται δὲ στοιχεῖα, διότι ὁ μὴ διὰ τούτων πρότερον ἀχθεὶς οὐχ οἷός τέ ἐστι συνιέναι τι τῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων. ἡ δὲ γεωμετρία ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν διδασκαλίαν ἐποιήσατο· λαβοῦσα γὰρ φυσικὸν σῶμα, ὅ ἐστι τριχῇ διαστατὸν μετὰ ἀντιτυπίας,* *καὶ χωρίσασα τούτου τὴν ἀντιτυπίαν ἐποιήσατο τὸ μαθηματικὸν σῶμα, ὅ ἐστι στερεόν, καὶ ἀφαιροῦσα κατήντησεν ἐπὶ τὸ σημεῖον.*

72. Proclus in Eucl. (ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873), p. 75, 27–77, 2:

πρῶτον μὲν οὖν, ἅπερ ἔφην, ἔδει διαστείλασθαι τάς τε ἀρχὰς καὶ τὰ ἑπόμενα ταῖς ἀρχαῖς, ὃ δὴ καὶ ποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καθ' ἕκαστον ὡς εἰπεῖν βιβλίον καὶ πρὸ πάσης τῆς πραγματείας τὰς κοινὰς τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀρχὰς ἐκτιθέμενος. ἔπειτα καὶ αὐτὰς διαιρεῖ τὰς κοινὰς ἀρχὰς εἴς τε τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα. διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων καὶ οὐκ ἔστιν ταὐτὸ ἀξίωμα καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις, ὥς πού φησιν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης, ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾖ καὶ καθ' αὑτὸ πιστὸν τὸ παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα τὸ τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον τὸ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, τίθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσίς ἐστι. τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοῖον κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως, ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀποδείξεως χωρίς. ὅταν δὲ αὖ καὶ ἄγνωστον ᾖ τὸ λεγόμενον καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνηται, τηνικαῦτα, φησίν, αἴτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι. δηλοῦσι δὲ οἵ περί τινος τῶν αἰτημάτων καταπραγματεύεσθαι σπουδάσαντες, ὡς ὑπὸ μηδενὸς αὐτόθεν συγχωρεῖσθαι δυναμένου. καὶ κατὰ μὲν τὴν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν τοῦτον διώρισται τὸν τρόπον ἀξίωμα καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις.

73. – – p. 181, 16–182, 6:

Ἤδη δὲ οἱ μὲν πάντα αἰτήματα καλεῖν ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ προβλήματα τὰ ζητούμενα πάντα. καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης τῶν ἀνισορροπιῶν ἀρχόμενος: „Αἰτούμεθα, *φησί, τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσορροπεῖν". καίτοι τοῦτο μᾶλλον ἀξίωμα ἄν τις προσείποι. οἱ δὲ πάντα ἀξιώματα προσαγορεύουσιν, ὥσπερ δὴ καὶ θεωρήματα πάντα τὰ ἀποδείξεως δεόμενα. κατὰ τὴν αὐτὴν γὰρ ὡς ἔοικεν ἀναλογίαν ἀπὸ τῶν ἰδίων ἐπὶ τὰ κοινὰ μεταβεβήκασιν ὀνόματα. διέστηκεν δὲ ὅμως ὥσπερ πρόβλημα θεωρήματος οὕτως καὶ αἴτημα ἀξιώματος, εἰ καὶ ἀμφότερα ἀναπόδεικτά ἐστι, καὶ τὸ μὲν ὡς εὐπόριστον λαμβάνεται* (sc. *αἴτημα*), *τὸ δὲ ὡς εὔγνωστον ὁμολογεῖται* (sc. *ἀξίωμα*). *Γεμῖνος μὲν οὖν κατὰ τοῦτον τὸν λόγον τὰ αἰτήματα διαιρεῖ τῶν ἀξιωμάτων . . .*

74. – – p. 80, 20–81, 18:

ὅθεν καὶ οἱ περὶ τὸν Ποσειδώνιον τὸ μὲν ἀφωρίζοντο πρότασιν, καθ' ἣν ζητεῖται τὸ εἰ ἔστιν ἢ μή, τὸ δὲ πρόβλημα πρότασιν, ἐν ᾗ ζητεῖται τί ἐστιν ἢ ποῖόν τι, καὶ τὴν μὲν θεωρητικὴν πρότασιν ἔλεγον δεῖν ἀποφαντικῶς σχηματίζειν, οἷον πᾶν τρίγωνον μείζους ἔχει τὰς δύο τῆς λοιπῆς, καὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, τὴν δὲ προβληματικήν, ὥσπερ ζητοῦντας, εἰ ἔστιν ἐπὶ τῆσδε τῆς εὐθείας συστήσασθαι τρίγωνον. διαφέρειν γάρ, ἢ ἁπλῶς τε καὶ ἀορίστως ζητεῖν, εἰ ἔστι πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦδε τοῦ σημείου τῇδε τῇ εὐθείᾳ, ἢ τίς ἐστιν ἡ πρὸς ὀρθὰς θεωρεῖν.
Ἀλλ' ὅτι μὲν ἔστι τις διαφορὰ τοῦ τε προβλήματος καὶ τοῦ θεωρήματος, δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι δὲ καὶ ἡ Εὐκλείδου στοιχείωσις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα τὰ δὲ θεωρήματα, φανερὸν ἔσται τοῦτο διὰ τῶν καθ' ἕκαστον καὶ αὐτοῦ προστιθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ ,,ὅπερ ἔδει ποιῆσαι" (sc. problema) *ὅπου δὲ τὸ ,,ὅπερ ἔδει δεῖξαι", ὡς τῶν θεωρημάτων χαρακτηριστικόν, καίτοι, καθάπερ εἴπομεν, οὔσης καὶ ἐν τοῖς προβλήμασιν ἀποδείξεως, ἀλλ' ὅμως, ὅπου μὲν καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς γενέσεως χάριν – ἵνα γὰρ δείξωμεν, ὅτι πεποίηται τὸ προταχθέν, τὴν ἀπόδειξιν παραλαμ-*

βάνομεν – ὅπου δὲ αὐτὴ δι' ἑαυτήν ἐστιν σπουδῆς ἀξία τὴν φύσιν τοῦ ζητουμένου παριστάνειν δυναμένη.

75. Hero Alexandrinus (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1899 u. ad 1914), Defin., IV p. 48, 5–10:

Παράλληλοι δὲ καλοῦνται γραμμαὶ ἀσύμπτωτοι, ὅσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, αἳ μήτε συννεύουσαι μήτε ἀπονεύουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, ἴσας δὲ ἔχουσαι τὰς καθέτους πάσας τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν ἐπὶ τῆς ἑτέρας σημείων ἐπὶ τὴν λοιπήν.

76. Proclus in Eucl. (ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873), p. 176, 5–10:

Καὶ ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ὁρίζεται τὸν τρόπον τὰς παραλλήλους εὐθείας (Elem. 1, def. 23), *ὁ δὲ Ποσειδώνιος, παράλληλοι, φησίν, εἰσὶν αἳ μήτε συννεύουσαι μήτε ἀπονεύουσαι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ἴσας ἔχουσαι πάσας τὰς καθέτους τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν τῆς ἑτέρας σημείων ἐπὶ τὴν λοιπήν.*

77. Hero Alexandrinus (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1899 u. ad 1914), Defin., IV p. 108, 10–25:

Εὕρηται ἡ γεωμετρία πρῶτον μὲν ἐκ τῶν Αἰγυπτίων, ἤγαγε δὲ εἰς τοὺς Ἕλληνας Θαλῆς. μετὰ δὲ τὸν Θαλῆν Μαμέρτιος ὁ Στησιχόρου ⟨τοῦ⟩ ποιητοῦ ἀδελφὸς καὶ Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος καὶ μετὰ ταῦτα ὁ Πυθαγόρας ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀύλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος καὶ μετὰ τοῦτον Ἀναξαγόρας καὶ ὁ Πλάτων καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος καὶ Ἱπποκράτης (sc. *ὁ Χῖος*) *πρὸ τοῦ Πλάτωνος. μετὰ ταῦτα καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος καὶ τρισὶν ἀναλογίαις* (sc. *Εὔδοξος*) *ἄλλας τρεῖς προσέθηκε· καὶ ἄλλοι πολλοί. οὐ πολὺ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν ὁ Εὐκλείδης ὁ τὰ Στοιχεῖα συναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ἐπὶ τοῦ πρώτου*

Πτολεμαίου, νεώτερος μὲν τοῦ Πλάτωνος, ἀρχαιότερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους· οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις ἦσαν.

78. Proclus in Eucl. (ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873), p. 67, 20–70, 1:

Ἑρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ Μενδαῖος, Πλάτωνος ὢν μαθητὴς καὶ ὑπ' ἐκείνου προτραπεὶς εἰς τὰ μαθήματα, καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις καὶ ταῦτα προὔβαλλεν ἑαυτῷ, ὅσα ᾤετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν. οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν. οὐ πολὺ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης | ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου, καὶ μέντοι καί φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστιν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοιχειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν Ἐρατοσθένης. καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικὰ καὶ τὰ κατοπτρικά, *τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. διαφερόντως δ' ἄν τις αὐτὸν ἀγασθείη κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχείωσιν τῆς τάξεως ἕνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἠδύνατο παρείληφεν, ἔτι δὲ τοὺς τῶν συλλογισμῶν παντοίους τρόπους, τοὺς μὲν ἀπὸ τῶν αἰτιῶν λαμβάνοντας τὴν πίστιν, τοὺς δὲ ἀπὸ τεκμηρίων ὡρμημένους, πάντας δὲ ἀνελέγκτους καὶ ἀκριβεῖς καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείους, πρὸς δὲ τούτοις τὰς μεθόδους ἁπάσας τὰς διαλεκτικάς, τὴν μὲν διαιρετικὴν ἐν ταῖς εὑρέσεσι τῶν εἰδῶν, τὴν δὲ ὁριστικὴν ἐν τοῖς οὐσιώδεσι λόγοις, τὴν δὲ ἀποδεικτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς τὰ ζητούμενα μεταβάσεσι, τὴν δὲ ἀναλυτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ζητουμένων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναστροφαῖς. καὶ μὴν καὶ τὰ ποικίλα τῶν ἀντιστροφῶν εἴδη τῶν τε ἁπλουστέρων καὶ τῶν συνθετωτέρων ἱκανῶς ἐστιν ἐν τῇ πραγματείᾳ ταύτῃ διηκριβωμένα θεωρεῖν, καὶ τίνα μὲν ὅλα ὅλοις ἀντιστρέφειν δύναται, τίνα δὲ ὅλα μέρεσι καὶ ἀνάπαλιν, τίνα δὲ ὡς μέρη μέρεσιν. ἔτι δὲ λέγομεν τὴν συνέχειαν τῶν εὑρέσεων, τὴν οἰκονομίαν καὶ τὴν τάξιν τῶν τε προηγουμένων καὶ τῶν ἑπομένων, τὴν δύναμιν, μεθ' ἧς ἕκαστα παραδίδωσιν. ἢ καὶ τὸ τυχὸν προσθεὶς ἢ ἀφελὼν οὐκ ἐπιστήμης λανθάνεις ἀποπεσὼν καὶ εἰς τὸ ἐναντίον ψεῦδος καὶ τὴν ἄγνοιαν ὑπενεχθείς;*

79. – – p. 71, 5–21:

πρὸς δὲ τὸν μανθάνοντα διοριζόμενοι τὸν σκοπὸν αὐτὸ τοῦτο, ὃ λέγεται, στοιχείωσιν αὐτῷ προκεῖσθαι φήσομεν καὶ τελείωσιν τῆς τῶν μανθανόντων διανοίας πρὸς τὴν σύμπασαν γεωμετρίαν. ἀπὸ γὰρ τούτων ὁρμώμενοι καὶ τὰ ἄλλα γνῶναι δυνησόμεθα τῆς ἐπιστήμης ταύτης μέρη, καὶ τὴν ποικιλίαν τὴν ἐν αὐτῇ παραλαβεῖν ἄνευ τούτων ἀδύνατον ἡμῖν ἐστιν καὶ ἄληπτος ἡ τῶν ἄλλων μάθησις. τὰ γὰρ ἀρχοειδέστατα καὶ ἁπλούστατα θεωρήματα καὶ συγγενέστατα ταῖς πρώταις ὑποθέσεσιν ἐνταῦθα συνήθροισται τάξιν λαβόντα τὴν πρέπουσαν, καὶ αἱ τῶν ἄλλων ἀποδείξεις τούτοις ὡς γνωριμωτάταις χρῶνται καὶ ἀπὸ τούτων ὥρμηνται. καθάπερ δὴ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (I p. 12, 3; 20, 10) καὶ Ἀπολλώνιος (in libris conicorum) καὶ οἱ ἄλλοι πάντες φαίνονται τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ δεδειγμένοις ὡς ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι.

80. – – p. 74, 9–19:

κατὰ πάντας δὲ τούτους τοὺς τρόπους εὕροι τις ἂν τὴν Εὐκλείδου στοιχείωσιν τῶν ἄλλων διαφέρουσαν· τὸ μὲν γὰρ χρήσιμον αὐτῆς εἰς τὴν περὶ τῶν ἀρχικῶν σχημάτων συντελεῖ θεωρίαν, τὸ δὲ σαφὲς καὶ διηρθρωμένον ἡ ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἐπὶ τὰ ποικιλώτερα μετάβασις ἀπεργάζεται καὶ ἡ ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν καταβολὴ τῆς θεωρίας, τὸ δὲ καθολικὸν τῆς ἀποδείξεως ἡ διὰ τῶν πρώτων θεωρημάτων καὶ ἀρχοειδῶν ἐπὶ τὰ ζητούμενα μετάβασις. καὶ γὰρ ὅσα παραλιμπάνειν δοκεῖ, ἢ ταῖς αὐταῖς ἐφόδοις γίγνεται γνώριμα . . .

INDICES

INDEX RERVM GEOMETRICARVM

I

VOL. I—IV (LIBRI 1—13)

	Definitiones	Postulata	Comm. a. conc.	Propositiones	Appendix (Demonstr. alterae et scholia)	
Vol. I						
Liber 1	23	5	9	48		
Liber 2	2			14	1	
Liber 3	11			37	6	
Liber 4	7			16		
Vol. II						
Liber 5	18			25	1	
Liber 6	5			33	5	
Arithmetica						
Liber 7	23			39	4	
Liber 8				27		
Liber 9				36	2	
Vol. III						
Magnit. irration.						
Liber 10	16 (4+6+6)			115	28	
					47	
Vol. IV					App. I	App. II
Stereometria						
Liber 11	28			39	3	4
Liber 12				18	2	17
Liber 13				18	5	
					10	21
Summa	133	5	9	465	78	

II

VOL. I (LIBRI 1—4)

Liber 1							
Definitiones	23						
Postulata		5					
Comm. a. conc.			9				
Theoremata				34			(4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 47, 48).
Problemata					14		(1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 22, 23, 31, 42, 44, 45, 46).
Porismata						1	(in prop. 15).
Liber 2							
Definitiones	2						
Theoremata				12			(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13),
Problemata					2		(11, 14).
Porismata						1	(in prop. 4).
Liber 3							
Definitiones	11						
Theoremata				31			(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 36, 37).
Problemata					6		(1, 17, 25, 30, 33, 34).
Porismata						3	(in prop. 1, 16, 31).
Liber 4							
Definitiones	7						
Theoremata							
Problemata					16		
Porismata						2	(in prop. 5, 15).
Summa	43	5	9	77	38	7	

INDICES

INDEX PRINCIPIORVM QVIBVS DEMONSTRATIONES NITVNTVR

LIBRI 1—4

Postulata	Libri 1	2	3	4
1	in prop. 2			
2	in prop. 2, 3			
3	in prop. 1, 2			
4				
5	in prop. 29, 44	10		4

Comm. an. conc.	Libri 1	2	3	4
1	in prop. 1, 2, 13, 14, 15, 22, 26, 28, 29, 30, 32, 35, 36, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 48.			
2	in prop. 13, 29, 32, 34, 35, 41, 43, 45, 47, 48.			
3	in prop. 2, 5, 14, 15, 28, 35, 43.			
4	in prop. 17, 19, 21.			
5				
6				
7	in prop. 4, 8.			
8	in prop. 6, 7, 16, 18, 20, 24, 26.		24	
9	in prop. 4.			

ORDO RERVM MATHEMATICARVM QVAE ELEMENTORVM LIBRIS 1–4 CONTINENTVR

Libro primo XXIII definitiones, V postulata, IX communes animi conceptiones, XLVIII propositiones continentur. ex quibus XXVI primae ad constructionem et proprietates rectilineorum segmentorum angulorum et triangulorum pertinent. reliquae XXVII–XLVIII ad parallelas rectas, ad parallelogramma eorumque proprietates et ad transformationem rectilineorum segmentorum spectant. praecipue propositione XLIV, quo modo construatur parallelogrammum, demonstratur.

Liber secundus II definitiones et XIV propositiones continet. ex quibus decem primae ad aequalitates algebraicas spectant, quas mathematici nostrae aetatis Pythagoream algebram vocant. undecima est de recta secundum extremam et mediam rationem secanda, proportionibus non adhibitis. duodecima et tertia decima ad theorema, quod hodie theorema cosinus vocatur, pertinent; quarta decima transformationem rectilinei segmenti in quadratum demonstrat.

Libro tertio XI definitiones et XXXVII propositiones, quae ad circulum spectant, continentur.

Liber quartus VII definitiones et XVI propositiones continet, quibus de inscriptione et circumscriptione regularium multangulorum in circulum agitur.

DE RATIONE DEMONSTRANDI QVA EVCLIDES IN ELEMENTIS VTITVR

In Euclidis Elementis quattuor genera demonstrandi reperiuntur. nam non solum deductione et reductione ad absurdum, sed etiam ratione, quae a mathematicis analytica appellatur, utitur. in quibusdam autem theorematibus probandis methodus, quae inductio completa nominatur, adhibita est[1]). inductio completa primum ab Aristotele commemorata est: *Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δεικνύηται* (Anal. poster. 73 b 32).

Ratione analytica Euclides in propositione 17 quinti Elementorum libri utitur. aequaliter ea ratio in appendice prima voluminis quarti (propos. 1–5) reperitur. inductio completa in propositionibus 3, 14, 17, 35 septimi libri, 13 octavi libri et 8, 9, 20 libri noni adhibita est.

---

1) Cf. H. Freudenthal, Zur Geschichte der vollständigen Induktion, Archives Internat. d'Histoire des Sciences, Revue trimestrielle de l'Union Intern. d'Hist. d. Sciences, 22, 1953, 17—37. E. S. Stamatis, Über die vollständige Induktion bei Euklid, Praktika der Akademie Athen, 2, 6, 1953.

CONSPECTVS EDITIONVM[1])

Recensio antiquior quam editio Theonis Alexandrini

Theon Alexandrinus	Alexandriae circa 370 p. Chr.
Simon Grynaeus	Basileae 1530 (editio 2: 1533 apud Ioan. Hervagium („Hervagiana“), ed. 3: 1537, ed. 4: 1539, ed. 5: 1546, ed. 6: 1558
Angelus Caianus	Romae 1545 (sine demonstr.)
I. Camerarius	Lipsiae 1549
I. Scheybl	Basileae 1550 (1—6)
S. T. Gracilis	Lutetiae 1558, 1573, 1598
C. Dasypodius	Argentorati 1564
I. Sthen	Vitebergae 1564
M. Steinmetz	Lipsiae 1577 (cum demonstr.)
Dav. Gregorius	Oxonii 1703
Fr. Peyrard	Parisii 1814—18
I. G. Camerer et C. Fr. Hauber	Berolini 1824—25 (1—6)
G. C. Neide	Halis Saxonum 1825 (1—6, 11, 12)
E. F. August	Berolini 1826—29
I. L. Heiberg	Lipsiae 1883—88
E. S. Stamatis	Athenis 1952—57

1) P. Riccardi, Saggio di una bibliografia Euclidea, I—V, Bologna 1887—93.
I. Hard, Les livres arithmétiques d'Euclide, Paris 1961, 220.
I. L. Heiberg, Euclidis Elementa V, Leipzig 1888, CIV—CXIII.
I. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik I 170, Berlin 1953 (Samml. Göschen 226)
M. Steck, Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben, Forschungen und Fortschritte 31, 1957, 113—117.

CONSPECTVS LIBRORVM

Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii, ed. M. Curtze, 2. Aufl., Leipzig 1909

Bachmakova, I. G., Le livre d'arithmétique des Éléments d'Euclide (russ.), Istor.-mat. Issledovania 1948, I 296–328

Becker, O., Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg, München 1954

–, Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B III, 1936, 533–553

Becker, O., Hofmann, I. E., Geschichte der Mathematik, Bonn 1951

Bretschneider, C. A., Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig 1870

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Leipzig 1907

Cohen, M. R., Drabkin, I. E., A Source Book in Greek Science, New York, Toronto, London 1948

Dijksterhuis, J. E., De Elementen van Euclides I, II, Groningen 1929–1930

Duarte, F. I., Bibliografia, Euclides, Arquimedes, Newton, Caracas 1967

Enriques, F., Prinzipien der Geometrie, Enzykl. der Mathem. Wissensch. III, AB 1

Fladt, K., Euklid, Berlin 1927

–, Elementarmathematik I, Elementargeometrie, 2. Teil, Leipzig 1928

Frenkian, A. M., Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940

Fritz, K. v., Die ‚*APXAI*' in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte 1, 1955, 13–103

Günther, S., Geschichte der Mathematik I: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius, Berlin 1927 (Samml. Schubert)

Hankel, A., Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874

Hard, I., Les livres arithmétiques d'Euclide, Paris 1961

Hasse, H., Scholz, H., Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, Berlin 1928

Hauser, G., Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid, mit einem einleitenden Abschnitt über die vorgriechische Geometrie, Luzern 1955
Heath, T., The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge 1926
–, A History of Greek Mathematics I, Oxford 1921
Heiberg, I. L., Literargeschichtliche Studien über Euklid, Leipzig 1882 (= Studien)
Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1930
Hofmann, I. E., Geschichte der Mathematik I (Samml. Göschen 226), Berlin 1953
Hultsch, F., Eukleides, RE XI, 1907, 1003–1052

Loria, G., Le scienze esatte nell'antica Grecia, Milano 1914

Michel, P.-H., De Pythagore à Euclide, Paris 1950
Mugler, C., Euclide, extraits des Éléments, Paris 1967

Nesselmann, G., Die Algebra der Griechen, Berlin 1842
Neugebauer, O., The Exact Sciences in Antiquity, 2nd ed., Providence 1957

Plooij, E. B., Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by Arabian commentators, Rotterdam 1950
Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, ed. G. Friedlein, Leipzig 1873
Proclus de Lycie, Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide, trad. avec notes par P. Ver Eecke, Brüssel 1948
Proklus Diadochus, Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen, ed. M. Steck, Halle/Saale 1945

Raik, A. E., Le livre X des Éléments d'Euclide (russ.), Istor.-mat. Issledovania 1948, I 343–384
Rey, A., L'apogée de la science technique grecque, Paris 1948, 163–239
Riccardi, P., Saggio di una bibliografia Euclidea, I–V, Bologna 1887–1893

Sachs, E., Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917
Sarton, G., Ancient science and modern civilisation. Euclid and his time. Ptolemy and his time. The decline of Greek science and culture, Nebraska 1954
Scott, I. F., A history of mathematics. From antiquity to the beginning of the nineteenth century, London 1958
Simon, M., Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901
–, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909
Smith, D. E., History of Mathematics, New York 1958
Stamatis, E. S., On book X of Euclid's Elements, Platon 11, Athen 1959, 371–398

CONSPECTVS LIBRORVM

Steck, M., Die geistige Tradition der frühen Euklid-Ausgaben, Forschungen und Fortschritte 31, 1957, 113–117
Szabó, Á., Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? Acta Antiqua Acad. Scient. Hung. IV, 1956, 109–152

Tannery, P., Mémoires scientifiques I, II, Toulouse 1911–12
Thaer, Clem., Euklid, Die Elemente, Ostwald's Klassiker der ex. Wissensch., Leipzig 1933–37
Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik, Berlin 1921–24, 1930–40

Waerden, B. L. van der, Erwachende Wissenschaft, Basel, Stuttgart 1956
Wußing, H., Mathematik in der Antike, Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft, 2. Aufl., Leipzig 1965

Zacharias, M., Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Berlin 1930
Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896

CONSPECTVS ABBREVIATIONVM

Alex. Aphrod. Anal. I	Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Analyticorum Priorum librum I commentarium. Ed. M. Wallies. Berlin 1883 (Comm. in Arist. Graeca II, 1)
Alex. Aphrod. Metaph.	Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Metaphysica commentaria. Ed. M. Hayduck. Berlin 1891 (Comm. in Arist. Graeca I)
Alex. Aphrod. Top.	Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Topicorum libros octo commentaria. Ed. M. Wallies. Berlin 1891 (Comm. in Arist. Graeca II, 2)
Amm.	Ammonius in Porphyrii Isagogen sive V voces. Ed. Porphyr. A. Busse. Berlin 1891 (Comm. in Arist. Graeca IV, 3)
Archim.	Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. I–III. Iterum ed. I. L. Heiberg. Leipzig 1910–15
Aug.	Euclidis elementa (*ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ*). Ed. E. F. August. Berlin 1826–29
Boet.	Boetii de institutione arithmetica libri duo. De institutione musica libri quinque. Accedit geometria quae fertur Boetii. Ed. G. Friedlein. Leipzig 1867
Camp.	Euclidis Megarensis opus Elementorum una cum commentis Campani [ca. 1270]. Venetiis 1482
Eutoc. Apoll.	Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis (Eutocius). I–II. Ed. I. L. Heiberg. Leipzig 1891–93
Greg.	Euclidis opera omnia. Ed. Dav. Gregorius. Oxford 1703
Hero Def.	Heronis Alexandrini opera. Vol. IV. Definitiones cum variis collectionibus. Quae feruntur geometrica. Ed. I. L. Heiberg. Leipzig 1912
Mart. Cap.	Martianus Capella. Ed. A. Dick. Leipzig 1925
Olymp. Met.	Olympiodori in Aristotelis meteorol. commentaria. Ed. W. Stüve. Berlin 1900 (Comm. in Arist. Graeca XII, 2)
Papp.	Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt. I–III. Ed. F. Hultsch. Berlin 1876–78 (Vol. III p. 1166–1188 Scholia in Pappum)

CONSPECTVS ABBREVIATIONVM

Philop. Anal. II	Ioannis Philoponi in Aristotelis Analytica Posteriora commentaria. Ed. M. Wallies. Berlin 1909 (Comm. in Arist. Graeca XIII, 3)
Philop. Anima	Ioannis Philoponi in Aristotelis de Anima libros commentaria. Ed. M. Hayduck. Berlin 1897 (Comm. in Arist. Graeca XV)
Philop. Categ.	Philoponi (olim Ammonii) in Aristotelis Categorias commentarium. Ed. A. Busse. Berlin 1898 (Comm. in Arist. Graeca XIII, 1)
Philop. Phys.	Ioannis Philoponi in Aristotelis Physica commentaria. Ed. H. Vitelli. Berlin 1887–88 (Comm. in Arist. Graeca XVI, XVII)
Philop. Procl.	Ioannis Philoponi de aeternitate mundi contra Proclum. Ed. H. Rabe. Leipzig 1899
Procl.	Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii. Ex recogn. G. Friedlein. Leipzig 1873
Procl. Tim.	Procli in Platonis Timaeum commentarii I–III. Ed. E. Diehl. Leipzig 1903, 04, 06
Psell.	Mich. Pselli perspicuus liber de quattuor mathematicis scientiis, Arithmetica, Musica, Geometria, Astronomia, graece et latine, Guil. Xylandro interprete (cum annotationibus), Basileae (apud J. Oporinum) 1556
Sext. Emp.[1]	Sexti Empirici opera. Rec. H. Mutschmann. Vol. II. Adversus dogmaticos libros V continens. Leipzig 1914
Sext. Emp.[2]	Sexti Empirici opera. Rec. H. Mutschmann. Vol. III. Adversus mathematicos libros I–VI continens. Iterum ed. J. Mau. Leipzig 1961
Simplic. Caelo	Simplicii in Aristotelis de Caelo commentaria. Ed. I. L. Heiberg. Berlin 1894 (Comm. in Arist. Graeca VII)
Simplic. Phys.	Simplicii in Aristotelis Physica commentaria I–II. Ed. H. Diels. Berlin 1882 (Comm. in Arist. Graeca IX, X)
Them. Phys.	Themistii in Aristotelis Physica Paraphrasis. Ed. H. Schenkl. Berlin 1900 (Comm. in Arist. Graeca V, 2)
Theon Ptolem.	Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste. II. Théon d'Alexandrie, commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste. Roma 1936 (Studi e Testi 72)
Zamb.	Euclidis Elementorum libri XIII cum expositione Theonis, B. Lamberto interprete. Ed. B. Zamberti. Venetiis 1505

CONSPECTVS SIGLORVM ET NOTARVM

P, π	cod. Vatican. Gr. 190, s. X
B	cod. Bodleian. Dorvillian. 10, 1, s. IX
F, φ	cod. Florentin. Laurentian. 28, 3, s. X
V	cod. Vindobon. Gr. 103, s. XI–XII
b	cod. biblioth. comm. Bononiensis 18–19, s. XI
p	cod. Parisin. Gr. 2466, s. XII

παράλληλοι εὐθεῖαι	$\parallel$	parallelae rectae
κάθετος = πρὸς ὀρθάς	$\perp$	perpendicularis
γωνία	$\angle$	angulus
γωνία ὀρθή	∟	angulus rectus
τρίγωνον	$\triangle$	triangulum
τετράγωνον	$\square$	quadratum
παραλληλόγραμμον	▱	parallelogrammum
τραπέζιον	⏢	trapezium

ὅρος	definitio (= def.)
αἴτημα	postulatum (= post.)
κοιναὶ ἔννοιαι	communes animi conceptiones (= comm. a. conc.)
πόρισμα	corollarium (= coroll.)
θεώρημα	propositio (= prop.)

[ ] delendum aliquid in textu indicant

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΔΑΙΔΑΛΟΣ

Ὁ μυθικὸς κατασκευαστὴς ἀεροπλάνου

και

ΑΡΧΥΤΑΣ

Ὁ κατασκευαστὴς τοῦ πρώτου ἀεριωθουμένου ἀεροπλάνου

ΑΘΗΝΑΙ 1969

ΔΑΙΔΑΛΟΣ

Ὁ μυθικὸς κατασκευαστὴς ἀεροπλάνου

καὶ

ΑΡΧΥΤΑΣ

Ὁ κατασκευαστὴς τοῦ πρώτου ἀεριωθουμένου ἀεροπλάνου

'Ανακοίνωσις γενομένη τῇ 25 Μαΐου 1969 εἰς τὸ Διεθνὲς Διαστημικὸν Συνέδριον τῶν Χανίων Κρήτης.

Ὁ περίφημος μηχανικὸς πυραύλων Γερμανὸς καθηγητὴς τοῦ Τεχνικοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Βερολίνου Εὐγένιος Ζαΐνγκερ (+ 1964), ὁ διατελέσας ἐπὶ πολλὰ ἔτη μετὰ τὸν δεύτερον παγκόσμιον πόλεμον αἰχμάλωτος τῶν Ρώσων, προσεπάθει νὰ εὕρῃ πυραυλικὴν μηχανὴν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ προωστικὴ δύναμις θὰ προέρχεται ἀπὸ ἔξοδον ἐκ τῆς μηχανῆς σωματιδίων κινουμένων μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός. Πολλοὶ συνάδελφοι τοῦ Ζαΐνγκερ ἐθεώρουν τὰς ἰδέας του διὰ τὴν πυραυλικὴν μηχανὴν ὡς οὐτοπίαν. Ἡ πεῖρα ὅμως μᾶς ἔχει διδάξει, ὅτι εἰς τὸ πεδίον τῶν τεχνικῶν ἐρευνῶν καὶ ἐπιτευγμάτων, τίποτε δὲν πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς οὐτοπία. Κατὰ τὸν δεύτερον αἰῶνα μ.Χ. ὁ Λουκιανὸς εἰς τὴν πραγματείαν του «'Αληθῆ διηγήματα α.20» ὁμιλεῖ ὄχι μόνον περὶ συνήθων ταξιδίων μεταξὺ τῶν κατοίκων τῶν πλανητῶν, ἀλλὰ καὶ περὶ πολέμων μεταξὺ τῶν κατοίκων τοῦ Ἡλίου, τῶν Ἡλιωτῶν ὡς ἀποκαλεῖ αὐτούς, καὶ τῶν κατοίκων τῆς Σελήνης, τῶν Σεληνιτῶν. Ἰδοὺ καὶ ἓν ἀπόσπασμα τῆς συνθήκης εἰρήνης τὴν ὁποίαν ὑπέγραψαν οἱ Ἡλιῶται καὶ οἱ Σεληνῖται μετὰ ἕνα πόλεμον μεταξύ των :

«Συνθήκας ἐποιήσαντο Ἡλιῶται καὶ οἱ σύμμαχοι πρὸς Σεληνίτας καὶ τοὺς συμμάχους· ἐπὶ τῷ καταλῦσαι μὲν τοὺς Ἡλιώτας τὸ διατείχισμα καὶ μηκέτι εἰς τὴν σελήνην ἐσβάλλειν, ἀποδοῦναι δὲ καὶ τοὺς αἰχμαλώτους ρητοῦ ἕκαστον χρήματος, τοὺς δὲ Σεληνίτας, ἀφεῖναι μὲν αὐτονόμους τούς γε ἄλλους ἀστέρας, ὅπλα δὲ μὴ ἐπιφέρειν τοῖς Ἡλιώταις, συμμαχεῖν δὲ τῇ ἀλλήλων, ἤν τις ἐπίῃ· φόρον δὲ ὑποτελεῖν ἑκάστου ἔτους τὸν βασιλέα τῶν Σεληνιτῶν τῷ βασιλεῖ τῶν Ἡλιωτῶν δρόσου ἀμφορέας μυρίους, καὶ ὁμήρους δὲ σφῶν αὐτῶν δοῦναι μυρίους, τὴν δὲ ἀποικίαν τὴν ἐς τὸν Ἑωσφόρον κοινῇ ποιεῖσθαι, καὶ μετέχειν τῶν ἄλλων τὸν βουλόμενον· ἐγγράψαι δὲ τὰς συνθήκας στήλῃ ἠλεκτρίνῃ καὶ ἀναστῆσαι ἐν μέσῳ τῷ ἀέρι ἐπὶ τοῖς μεθορίοις».

Δηλαδή, οἱ κάτοικοι τοῦ Ἡλίου καὶ οἱ σύμμαχοί των ἔκλεισαν συνθήκην πρὸς τοὺς κατοίκους τῆς Σελήνης καὶ τοὺς συμμάχους των οἱ μὲν Ἡλιῶται νὰ κρημνίσουν τὸ μεταξὺ Ἡλίου καὶ Σελήνης τεῖχος καὶ νὰ μὴ εἰσβάλλουν πλέον εἰς τὴν Σελήνην, νὰ ἀποδώσουν δὲ τοὺς αἰχμαλώτους λαμβάνοντες ὡρισμένα χρήματα δι' ἕκαστον, οἱ δὲ Σεληνῖται νὰ ἀφήσουν αὐτονόμους τοὺς ἄλλους ἀστέρας καὶ νὰ μὴ ἐπιτεθοῦν ἄλλην φορὰν κατὰ τῶν Ἡλιωτῶν, νὰ εἶναι δὲ σύμμαχοι μεταξύ των ἂν κανεὶς τοὺς ἐπιτεθῇ.

Ὁ δὲ βασιλεὺς τῶν Σεληνιτῶν νὰ πληρώνῃ ἐτησίως φόρον εἰς τὸν βασιλέα τῶν Ἡλιωτῶν δέκα χιλιάδας ἀμφορεῖς, οἱ ὁποῖοι νὰ περιέχουν δρόσον, νὰ δώσουν 20.000 ὁμήρους καὶ τὴν ἀποικίαν εἰς τὸν Ἑωσφόρον, νὰ κατέχουν ἀπὸ κοινοῦ καὶ ἐκ τῶν ἄλλων (βασιλέων τῶν λοιπῶν ἀστέρων) νὰ συμμετέχῃ εἰς τὴν κατοχὴν πᾶς ὁ ἐπιθυμῶν. Νὰ γραφοῦν δὲ αἱ συνθῆκαι εἰς ἠλεκτρίνην στήλην, ἡ ὁποία νὰ τοποθετηθῇ εἰς τὰ ἐναέρια σύνορα μεταξύ των».

Ὁ ἄνθρωπος κατὰ τοὺς χρόνους τῆς δημιουργίας τῶν πρώτων στοιχείων τοῦ πολιτισμοῦ, ὁδηγούμενος ἐκ τῆς πτήσεως τῶν πτηνῶν καὶ τῶν ἐντόμων, θὰ ἔκαμε τὴν σκέψιν, ἂν ἦτο δυνατὸν καὶ αὐτὸς νὰ εὕρῃ τρόπον διὰ νὰ ἵπταται εἰς τοὺς αἰθέρας. Ἡ ἑλληνικὴ μυθολογία διέσωσε τὸ περίφημον περιστατικὸν τοῦ Δαιδάλου, ὁ ὁποῖος κατασκευάσας πτέρυγας καὶ προσκολλήσας αὐτὰς εἰς τὸ σῶμα του, κατώρθωσε νὰ μεταβῇ, ἱπτάμενος εἰς τοὺς αἰθέρας, ἐκ τῆς Κρήτης εἰς τὴν Σικελίαν.

Ἡ πτῆσις αὕτη τοῦ Δαιδάλου χρονολογεῖται κατὰ τὴν Μινωϊκὴν ἐποχήν, ἡ ὁποία τοποθετεῖται περὶ τὸ 1600—1500 π.Χ. Φαίνεται ὅμως πιθανόν, ὅτι ὁ μῦθος τῆς δημιουργίας ἱπταμένων ἀνθρώπων ἔχει πολὺ παλαιοτέραν προέλευσιν, ἀναγομένην εἰς πολλὰς χιλιάδας ἔτη π.Χ.

*
**

Κατὰ τὴν ἰσχύουσαν γεωλογικὴν θεωρίαν, ἡ Κρήτη πρὸ ἑκατοντάδων χιλιάδων ἐτῶν, πρὸς νότον μὲν ἐβρέχετο ὑπὸ τῆς θαλάσσης, ἐν ᾧ πρὸς βορρᾶν καὶ ἀνατολὰς ἀπετέλει ξηρὰν ἑνιαίαν μετὰ τῆς ἠπειρωτικῆς Ἑλλάδος καὶ τῆς Μικρᾶς Ἀσίας. Κατὰ τὴν πλειστόκαινον γεωλογικὴν ἐποχήν, ἥτις τοποθετεῖται περίπου ἓν ἑκατομμύριον ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς μας, ἡ μεταξὺ Κρήτης — ἠπειρωτικῆς Ἑλλάδος — Μ. Ἀσίας ξηρὰ κατεβυθίσθη καὶ ἡ Κρήτη ἀπετέλεσε νῆσον. Πότε τὸ πρῶτον ἐνεφανίσθησαν ἄνθρωποι εἰς τὴν Κρήτην καὶ τὴν λοιπὴν Ἑλλάδα παραμένει ἄγνωστον. Θεωρεῖται ὅμως πιθανώτατον ὅτι οἱ κάτοικοι τῆς ἠπειρωτικῆς Ἑλλάδος, τῆς Κρήτης καὶ τῶν λοιπῶν νήσων καὶ τῶν παραλιακῶν μερῶν τῆς Μ. Ἀσίας ἀνῆκον εἰς τὴν αὐτὴν ὁμοεθνίαν.

Ἡ ἀρχαιοτέρα πόλις τῆς Κρήτης ἀνάγεται εἰς τοὺς παλαιοτάτους προϊστορικοὺς χρόνους, τὰ ἐρείπια δὲ αὐτῆς εὑρίσκονται εἰς τὸ ἀνατολικὸν μέρος τῆς νήσου παρὰ τὴν ὁδὸν τὴν διευθυνομένην ἐκ τῆς πόλεως τοῦ Ἁγίου Νικολάου πρὸς τὴν Ἱεράπετραν, πλησίον τῆς διακλαδώσεως τῆς ὁδοῦ αὐτῆς πρὸς τὴν ἀνατολικωτάτην πόλιν τῆς Κρήτης, τὴν Σητείαν. Τὰ ἐρείπια τῆς πόλεως αὐτῆς, τῆς ὁποίας τὸ ὄνομα παραμένει ἄγνωστον ἀνεκαλύφθησαν πρὸ ἀρκετῶν ἐτῶν κατόπιν ἀνασκαφῶν γενομένων ὑπὸ Ἀμερικανῶν ἀρχαιολόγων. Ἔκ τινος τοπωνυμίου τῆς ἐκεῖ περιοχῆς ἡ ἀρχαιοτάτη αὐτὴ πόλις τῆς Κρήτης ὀνομάζεται σήμερον Γουρνιὲς (Pauly - Wissowa R.E. Κρήτη).

⁂

Κατὰ τὴν ἑλληνικὴν παράδοσιν ὁ ἥρως Δαίδαλος, πρόσωπον τῆς προϊστορικῆς ἐποχῆς, θεωρεῖται ὁ ἐκπρόσωπος τοῦ ἐφευρετικοῦ πνεύματος τῶν ἀνθρώπων καὶ ὁ ἐπινοητὴς πλείστων θαυμασίων μηχανικῶν κατασκευῶν. Οὗτος ἦτο σύγχρονος τοῦ Ἡρακλέους καὶ τοῦ Θησέως. Ἦτο γόνος τῆς βασιλικῆς οἰκογενείας τῶν Μητιονιδῶν. Τὸ ὄνομά του ἐδόθη εἰς αὐτὸν ἐκ τῆς ὀνομασίας τοῦ Δήμου τῆς Ἀττικῆς Δαιδαλίδαι, τὸν ὁποῖον οἱ νεώτεροι ἐρευνηταὶ τοποθετοῦν μεταξὺ τῆς σημερινῆς ὁδοῦ Πατησίων καὶ τῶν Τουρκοβουνίων. Ὁ πατὴρ τοῦ Δαιδάλου ὠνομάζετο Μητίων, ὅστις ἦτο υἱὸς τοῦ βασιλέως τῶν Ἀθηνῶν Ἐρεχθέως, ἡ δὲ μήτηρ του ὠνομάζετο Ἀλκίππη ἢ Ἰφινόη ἢ Φρασιμήδη.

Κατ᾽ ἄλλην παράδοσιν ὁ Δαίδαλος ἦτο υἱὸς τοῦ βασιλέως Εὐπαλάμου καὶ ἔγγονος τοῦ Ἐρεχθέως, τῶν ὁποίων ἡ καταγωγὴ ἀνήγετο εἰς τοὺς θεούς. Εὐλαβὲς δεῖγμα τῆς θείας προελεύσεως τοῦ Δαιδάλου παρέχει τὸ εἰς τὸν σηκὸν τοῦ Ἐρεχθείου τῆς Ἀκροπόλεως ὑπάρξαν κάθισμα, ὅπου ἦσαν καὶ τὰ ὁμοιώματα τῆς Ἀθηνᾶς καὶ τοῦ Ἑρμοῦ (Παυσανίας Ι 27, 1), τὸ ὁποῖον κατεσκεύασεν ἐκ χρυσοῦ καὶ ἐλεφαντοστοῦ ὁ θείας καταγωγῆς ἀρχιτεχνίτης Δαίδαλος. Ὁ ἡρωϊκὸς αὐτὸς ἀρχιτεχνίτης ἦτο ὁ ἐκπρόσωπος τοῦ εἰς τὸν Δῆμον τῆς Ἀττικῆς Ἰφιστιαδῶν ἢ Ἡφαιστειαδῶν, παρὰ τὴν Κηφισίαν, τιμωμένου θεοῦ Ἡφαίστου, ὡς εἰκάζεται ἔκ τινος παραστάσεως ἀγγείου, εὑρισκομένου σήμερον εἰς τὸ Βρεταννικὸν Μουσεῖον τοῦ Λονδίνου. Ἡ παράστασις αὕτη στηρίζεται εἰς τὸν μῦθον, καθ' ὃν ὁ Ἄρης θέλει νὰ ἀναγκάσῃ τὸν Ἥφαιστον νὰ λύσῃ τῶν δεσμῶν τὴν Ἥραν (ἀπόσπ. 66, Σαπφώ). Ἡ Ἥρα, τοποθετημένη εἰς τὸ μέσον τῆς εἰκόνος, διὰ τῆς ἀκάμπτου στάσεώς της παρίσταται σαφῶς ὡς δεδεμένη. Ὁ Ἄρης, καλούμενος ἐνάλιος, ὑποχωρεῖ πρὸ τοῦ εἰσερχομένου Ἡφαίστου.

Κατὰ τὸν ἀττικὸν μῦθον ὁ υἱὸς τῆς ἀδελφῆς τοῦ Δαιδάλου ὀνόματι Τάλως ἢ Κάλως διετέλεσε μαθητὴς τοῦ θείου του καὶ ἐξειλίχθη εἰς ἄριστον ἀρχιτεχνίτην, ὅστις ὑπερέβαλε τὸν θεῖον εἰς ἐφευρετικότητα. Ὁ Τάλως ἐμπνευσθεὶς ἐκ τῆς σιαγόνος τοῦ ὄφεως καὶ τῆς σπονδυλικῆς στήλης τῶν ἰχθύων ἀνεκάλυψε τὸν πρίονα, τὸν διαβήτην διὰ τὴν χάραξιν κύκλων καὶ τὸν τροχὸν διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἐξ ἀργίλου μαγειρικῶν σκευῶν. Φαίνεται, ὅτι ὁ θείας καταγωγῆς Δαίδαλος εἶχε τὴν κατοικίαν του καὶ τὸ ἐργαστήριόν του εἰς τὴν Ἀκρόπολιν. Ἡμέραν τινά, ζηλοτυπήσας βαθύτατα τὴν μηχανικὴν δεξιότητα καὶ ἐφευρετικότητα τοῦ ἀνεψιοῦ του Τάλω, ἐκρήμνισεν αὐτὸν ἐκ τῶν τειχῶν τῆς Ἀκροπόλεως. Ὁ τάφος τοῦ οὕτω πως φονευθέντος Τάλω εὑρίσκεται κατὰ τὴν παράδοσιν εἰς τὰς νοτίους ὑπωρείας τοῦ βράχου τῆς Ἀκροπόλεως. Κατά τινα παράδοσιν ὁ κατακρημνισθείς ἀνεψιὸς τοῦ Δαιδάλου ὠνομάζετο Πέρδιξ. Μετὰ τὸν βίαιον αὐτοῦ θάνατον, οὗτος μετενεσαρκώθη εἰς πτηνόν, τὸ ὁποῖον ὠνομάσθη πέρδιξ. Ἡ μήτηρ τοῦ Τάλω ἢ Πέρδικος καὶ ἀδελφὴ τοῦ Δαιδάλου λυπηθεῖσα διὰ τὸν τραγικὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ της ἀπηγχονίσθη, ἔτυχε δὲ τιμῶν ὑπὸ τῶν Ἀθηναίων, οἱ ὁποῖοι ἵδρυσαν εἰς τὴν Ἀκρόπολιν ἱερὸν ἐπ' ὀνόματι τοῦ φονευθέντος Πέρδικος.

Διὰ τὸν ἐκ Κρήτης καταγόμενον Γίγαντα Τάλω ὑποστηρίζεται ὅτι οὗτος δὲν ταὐτίζεται πρὸς τὸν ἀνεψιὸν τοῦ Δαιδάλου καὶ ὅτι πρόκειται περὶ ἁπλῆς συνωνυμίας. Ἐκ τοῦ Κρητὸς τούτου Γίγαντος αἱ βόρειοι προεκτάσεις τῆς Ἴδης ὠνομάσθησαν Ταλλαῖα ὄρη, εἰς αὐτὰ δὲ εἶχε ἱδρυθῆ καὶ ἱερὸν τοῦ Ταλλαίου Διός. Ὁ Γίγας Τάλως μυθολογεῖται ὡς υἱὸς τοῦ Διὸς καὶ τῆς Νύμφης Ἴδης, πατὴρ δὲ τοῦ Ἡφαίστου.

*
**

Ἕνεκα τοῦ φόνου τοῦ ἀνεψιοῦ του Τάλω ὁ Δαίδαλος κατεδικάσθη ὑπὸ τοῦ Ἀρείου Πάγου εἰς ἐξορίαν καὶ κατέφυγεν εἰς τὴν Κρήτην, ὅπου ἔγινε δεκτὸς εἰς τὴν Αὐλὴν τοῦ βασιλέως Μίνωος, ὡς ὁ ἐπίσημος ἀρχιτεχνίτης μηχανικὸς τοῦ βασιλέως. Εἰς τὰ Ἀνάκτορα τῆς

Κνωσοῦ ὑπῆρχεν ἄγαλμα τῆς θεᾶς Ἀριάδνης, θεωρούμενον ἔργον τοῦ Δαιδάλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπαράμιλλος δεξιοτεχνία ἐξετείνετο καὶ εἰς τὴν ἀγαλματοποιΐαν καὶ τὴν ἀρχιτεκτονικήν.

Ἡ παράστασις τοῦ ἐν τῷ Βρεταννικῷ Μουσείῳ εὑρισκομένου ἀγγείου εἰκονίζει εἰς μίαν ὄψιν τὸν Θησέα φονεύοντα κατόπιν πάλης τὸν Μινώταυρον, παρουσίᾳ τῆς κόρης τοῦ Μίνωος Ἀριάδνης καὶ τῶν 14 νέων καὶ νεανίδων τῶν Ἀθηνῶν. Δεξιὰ τῶν νέων εἰκονίζεται ὁ διὰ πτήσεως ἀπομακρυνόμενος Δαίδαλος. Εἰς τὴν ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον θέσιν τοῦ ἀγγείου παρίσταται ὡπλισμένος ἱππεύς, ὅστις ὅμως οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει πρὸς τὸν μῦθον τοῦ Δαιδάλου καὶ ἀποτελεῖ ἁπλῶς διακοσμητικὴν παράστασιν. Τὸ ἀγγεῖον τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ ἀρχαιότερον τεκμήριον ὅτι ὁ Δαίδαλος κατεσκεύασε πτέρυγας καὶ δι' αὐτῶν ἱπτάμενος ἐδραπέτευσεν ἐκ τῆς Κνωσοῦ φεύγων τὴν μῆνιν τοῦ Μίνωος διὰ τὴν ἀποκάλυψιν τοῦ μυστικοῦ τῆς ἐξόδου ἐκ τοῦ λαβυρίνθου.

***

Κατὰ τὸν Ἀθηναῖον συγγραφέα Ἀπολλόδωρον τοῦ 2ου αἰ. π.Χ. ὁ βασιλεύς τῆς Κρήτης Μίνως, ὢν θαλασσοκράτωρ τῆς Κεντρικῆς Μεσογείου περιῆλθεν εἰς πόλεμον πρὸς τοὺς Ἀθηναίους καὶ τοὺς Μεγαρεῖς. Ἀφοῦ κατέλαβε τὰ Μέγαρα ἐπολιόρκησε τὰς Ἀθήνας, τὰς ὁποίας δὲν ἠδύνατο νὰ καταλάβῃ. Κατόπιν τούτου παρεκάλεσε τὸν Δία, διότι ὁ Μίνως ἦτο θεϊκῆς καταγωγῆς (υἱὸς τοῦ Διὸς καὶ τῆς Εὐρώπης), νὰ ἐπέμβῃ ὑπὲρ αὐτοῦ. Ὁ Ζεὺς ἀπεδέχθη τὴν αἴτησιν τοῦ Μίνωος. Ἐπακολουθεῖ εἰς τὰς Ἀθήνας λοιμὸς καὶ λιμός, ὁπότε οἱ Ἀθηναῖοι, κατόπιν παλαιοῦ τινος χρησμοῦ, ἐθυσίασαν εἰς τὸν τάφον τοῦ Κύκλωπος Γεραίστου, τὰς κόρας τοῦ Ὑακίνθου Ἀνθηίδα, Αἰγληίδα, Λυταίαν, Ὀρθαίαν. Ὁ Ὑάκινθος κατήγετο ἐκ Λακεδαίμονος καὶ εἶχεν ἐγκατασταθῆ εἰς τὰς Ἀθήνας. Ἐπειδὴ οἱ Ἀθηναῖοι παρὰ τὴν θυσίαν ταύτην δὲν ἀπηλλάσσοντο τῆς πολιορκίας τοῦ Μίνωος ἀπετάθησαν εἰς τὸ Μαντεῖον τῶν Δελφῶν παρὰ τοῦ ὁποίου ἔλαβον τὸν χρησμὸν ὅτι πρέπει, διὰ νὰ κατευνάσουν τὸν Μίνω, νὰ δεχθοῦν προσφορὰν θυσίας, τὴν ὁποίαν θὰ προτείνῃ ἐκεῖνος. Ὁ Μίνως κατὰ τὸν Ἀπολλόδωρον (3.15.8), προέτεινε καὶ οἱ Ἀθηναῖοι ἀπεδέχθησαν, ὅπως κατ' ἔτος ἀποστέλλουν πρὸς βορὰν εἰς τὸν Μινώταυρον ἑπτὰ κόρους καὶ ἑπτὰ κόρας. Ἦτο δὲ ὁ Μινώταυρος ἐγκεκλεισμένος εἰς τὸν λαβύρινθον ἐκ τοῦ ὁποίου ὁ εἰσερχόμενος ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐξέλθῃ· διότι πολύπλοκοι καμπαὶ ἀπέκλειον τὴν ἀγνοουμένην ἔξοδον. Κατεσκεύασε δὲ αὐτὸν ὁ Δαίδαλος, υἱὸς τοῦ Εὐπάλμου, ὅστις ἦτο υἱὸς τοῦ Μητίονος καὶ τῆς Ἀλκίππης. Διότι ἦτο ἀρχιτέκτων ἄριστος καὶ πρῶτος εὑρετῆς κατασκευῆς ἀγαλμάτων. Οὗτος ἔφυγεν ἐξ Ἀθηνῶν, διότι ἐκρήμνισεν ἐκ τῆς Ἀκροπόλεως τὸν υἱὸν Τάλω τῆς ἀδελφῆς του Πέρδικος, μαθητήν του ὄντα, φοβηθεὶς μήπως τὸν ὑπερβάλῃ εἰς τὴν δεξιοτεχνίαν ἕνεκα τῆς εὐφυΐας του. Διότι εὑρὼν ὁ Τάλως σιαγόνα ὄφεως ἐπριόνισε ξύλον λεπτόν. Ἀποκαλυφθέντος δὲ τοῦ νεκροῦ καταδικασθεὶς ὑπὸ τοῦ Ἀρείου Πάγου ὁ Δαίδαλος ἐδραπέτευσε πρὸς τὸν Μίνωα καὶ ἐκεῖ συνείργησεν εἰς τὸν ἔρωτα τῆς Πασιφάης πρὸς τὸν Ποσειδώνειον ταῦρον, ἐπινοήσας τὴν κατασκευὴν ξυλίνης ἀγελάδος, καὶ τὸν λαβύριθον κατεσκεύασεν, εἰς τὸν ὁποῖον οἱ Ἀθηναῖοι ἀποστέλλουν κατ' ἔτος κόρους ἑπτὰ καὶ κόρας τὰς ἴσας πρὸς βορὰν τοῦ Μινωταύρου.

Ὁ Μινώταυρος ἦτο μυθολογικὸν τέρας τῆς Κρήτης ἔχον κεφαλὴν καὶ στῆθος ταύρου, τὸ ὑπόλοιπον δὲ σῶμα του ἦτο μέρος ἀνθρώπου. Τὸ θηρίον τοῦτο ὑπῆρξεν ὁ καρπὸς τῶν ἐρωτικῶν σχέσεων τῆς συζύγου τοῦ Μίνωος, βασιλίσσης Πασιφάης, μετὰ τοῦ ὡραίου ταύρου, τὸν ὁποῖον ἀνέσυρεν ἐκ τῆς θαλάσσης ὁ Ποσειδών, κατόπιν παρακλήσεως τοῦ Μίνωος, ἵνα τὸν θυσιάσῃ εἰς τὸν θεόν. Ὁ Μίνως ὅμως θαυμάσας τὴν ὡραιότητα τοῦ θαλασσίου αὐτοῦ ταύτου δὲν ἐθυσίασεν αὐτὸν ἀλλὰ τὸν κατεκράτησεν εἰς τὰς ἀγέλας του. Πρὸς τιμωρίαν τοῦ Μίνωος διὰ τὴν παράβασιν τῆς ὑποσχέσεώς του, ὁ Ποσειδὼν κατέστησε τὸν θαλάσσιον ταῦρον μανιώδη καὶ ἐνέπνευσεν εἰς τὴν βασίλισσαν Πασιφάην σφοδρὸν πρὸς τοῦτον ἔρωτα, καρπὸς τοῦ ὁποίου ἦτο ἡ γέννησις τοῦ Μινωταύρου.

Ὁ Μίνως ἔξαλλος γενόμενος ἐκ τῆς γεννήσεως τοῦ τέρατος αὐτοῦ ἐνέκλεισε τὸν Μινώταυρον εἰς τὴν ἐσχάτην ἄκραν τοῦ λαβυρίνθου. Ὁ Μινώταυρος ἐτρέφετο ἐξ ἀνθρωπίνου κρέατος.

Ὁ Θησεύς, ὅστις ἦτο υἱὸς καὶ διάδοχος τοῦ βασιλέως τῶν Ἀθηνῶν Αἰγέως, κατώρθωσε ν' ἀπαλλάξῃ τὰς Ἀθήνας ἐκ τοῦ φόρου ὑποτελείας πρὸς τὸν Μίνωα. Ὅταν ἔφθασεν εἰς τὴν Κνωσόν, συνοδεύων τοὺς πρὸς βορὰν τοῦ Μινωταύρου κόρους καὶ κόρας τῶν Ἀθηνῶν, ἡ κόρη τοῦ Μίνωος Ἀριάδνη ἠράσθη αὐτοῦ καὶ ὑπεσχέθη νὰ τὸν βοηθήσῃ διὰ νὰ θανατώσῃ τὸν Μινώταυρον καὶ ἐξέλθῃ τοῦ λαβυρίνθου, ὅταν λάβῃ τὴν ὑπόσχεσιν ὅτι μετὰ τοῦτο θὰ γίνῃ σύζυγος αὐτοῦ. Ὁ Θησεὺς συγκατένευσε καὶ ἡ Ἀριάδνη τῇ συμβουλῇ τοῦ Δαιδάλου, τοῦ κατασκευαστοῦ τοῦ λαβυρίνθου, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν μίτον, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον ἐστερέωσεν ὁ Θησεὺς κατὰ τὴν εἴσοδον τοῦ λαβυρίνθου. Προχωρῶν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ μὲ τὸ ἐξελισσόμενον νῆμα ἔφθασεν εἰς τὴν ἐσχατιὰν τοῦ λαβυρίνθου, ὅπου συνήντησε τὸν Μινώταυρον, τὸν ὁποῖον κατόπιν πάλης ἐφόνευσε. Ἀκολούθως, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ περὶ ἄτρακτον ἀνελισσομένου νήματος, ἔφθασεν εἰς τὴν ἔξοδον τοῦ λαβυρίνθου παρέλαβε τὴν Ἀριάδνην καὶ ἀνεχώρησε δι' Ἀθήνας. Ὁ Μίνως πληροφορηθεὶς τὰ γεγονότα ἐνέκλεισε τὸν Δαίδαλον καὶ τὸν υἱόν του Ἴκαρον ἐντὸς τοῦ λαβυρίνθου. Ἐκεῖ ὁ Δαίδαλος ἐπεδόθη εἰς τὴν κατασκευὴν πτερύγων, τὰς ὁποίας προσεκόλλησε διὰ κηροῦ εἰς τὸ σῶμα του καὶ τὸ σῶμα τοῦ Ἰκάρου καὶ διὰ τῶν πτερύγων αὐτῶν ἱπτάμενοι πατὴρ καὶ υἱὸς ἐδραπέτευσαν λαβόντες διαφόρους διευθύνσεις. Καὶ ὁ μὲν Δαίδαλος κατηυθύνθη πρὸς τὴν Σικελίαν, ὁ δὲ Ἴκαρος ἔλαβε διεύθυνσιν βορείως τῆς Κνωσοῦ. Ὁ Δαίδαλος εἶχε συμβουλεύσει τὸν υἱόν του Ἴκαρον νὰ μὴ πετᾷ πολὺ ψηλά, διότι ἐὰν ἐπλησίαζε πρὸς τὸν Ἥλιον ὑπῆρχε κίνδυνος ἐκ τῆς μεγάλης θερμοκρασίας ν' ἀναλυθῇ ὁ κηρὸς καὶ ν' ἀποκολληθοῦν αἱ πτέρυγες.

Ὁ Ἴκαρος ἀψηφήσας τὴν συμβουλὴν τοῦ πατρός του καὶ γοητευθείς ἐκ τῆς πτήσεως ἀνῆλθε πολὺ ὑψηλά, ὁπότε ὁ κηρὸς ἀνελύθη, αἱ πτέρυγες ἀπεσπάσθησαν τοῦ σώματός του καὶ αὐτὸς ἔπεσεν εἰς τὴν θάλασσαν καὶ ἐπνίγη πλησίον νήσου τινος, ἥτις ἐκ τοῦ περιστατικοῦ αὐτοῦ ἔλαβε τὸ ὄνομα Ἰκαρία. Ὁ Δαίδαλος ἱπτάμενος κανονικῶς ἔφθασεν εἰς τὸν Καμικόν, πόλιν τῆς νοτίου Σικελίας, παρὰ τὸν Ἀκράγαντα, ὅπου ἐγένετο εὐμενῶς δεκτὸς καὶ προσελήφθη ὡς ἀρχιτεχνίτης τοῦ βασιλέως Κωκάλου. Ἡ παρὰ τοῦ Δαιδάλου κατασκευὴ καλλιτεχνικῶν κοσμημάτων διὰ τὰς θυγατέρας τοῦ Κωκάλου ἐπέσυρε τὸν θαυμασμὸν καὶ τὴν συμπάθειαν αὐτῶν πρὸς τὸν Δαίδαλον.

Ὁ Μίνως πληροφορηθεὶς τὴν δραπέτευσιν τοῦ Δαιδάλου διέτρεξε πολλὰς χώρας ἀναζητῶν αὐτὸν χωρὶς ὅμως νὰ γνωρίζῃ τὴν χώραν εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος εἶχε καταφύγει. Πρὸς ἀνεύρεσιν αὐτοῦ προέβη εἰς τὸ ἑξῆς τέχνασμα: προεκήρυξεν ὅτι ἀναζητεῖ νὰ εὕρῃ καλλιτέχνην, ἐπὶ μεγάλῃ ἀμοιβῇ, ὅστις νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ διαπεράσῃ διὰ τῶν ἑλίκων ἑνὸς κοχλίου νῆμα μέχρι τοῦ ἐσχάτου βάθους τοῦ κοχλίου. Ὅταν ὁ Μίνως ἔφθασεν εἰς τὸν Κάμικον τῆς Σικελίας, ὅπου ἐφιλοξενήθη ὑπὸ τοῦ ἐκεῖ βασιλέως Κωκάλου, ἔλαβε τὴν ὑπόσχεσιν παρ' αὐτοῦ ὅτι θὰ κατορθώσῃ νὰ λύσῃ τὸ αἴνιγμά του. Καὶ πράγματι ὁ Κώκαλος τῇ ὑποδείξει τοῦ Δαιδάλου ἔθεσε λεπτὸν νῆμα εἰς μύρμηκα, ὁ ὁποῖος εὐκόλως μετέφερε τὸ νῆμα μέχρι τοῦ ἐσχάτου βάθους τοῦ κοχλίου. Ὁ Μίνως ἀντελήφθη ἀμέσως ὅτι ὁ ἀρχιτεχνίτης ὁ ἐπινοήσας τὴν λύσιν τοῦ αἰνίγματος εἶναι ὁ Δαίδαλος καὶ ἠξίωσε παρὰ τοῦ Κωκάλου τὴν παράδοσιν αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν ὁ Κώκαλος κατ' ἀνάγκην ὑπεσχέθη. Ὅταν ὅμως ὁ Μίνως ἐλάμβανε τὸ λουτρόν του αἱ θυγατέρες τοῦ Κωκάλου, αἱ ὁποῖαι εἶχον ἐκτιμήσει καὶ συμπαθήσει τὸν Δαίδαλον, ἐφόνευσαν τὸν Μίνωα διὰ ζέοντος ὕδατος.

Κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ Δαίδαλος εἶναι ὁ προϊστορικὸς ἄνθρωπος τοῦ ὁποίου τὸ ὄνομα συνδέεται πρὸς πᾶσαν τεχνικὴν ἀνακάλυψιν. Ἡ κατασκευὴ πτερύγων ὑπὸ τοῦ Δαιδάλου, ἵνα δι' αὐτῶν ὁ ἄνθρωπος εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἵπταται εἰς τοὺς αἰθέρας ἀνάγεται εἰς τὴν ἑλληνικὴν μυθολογίαν· ἐκφράζει ὅμως τὴν ἐπινοητικότητα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος καὶ τὴν πρώτην σκέψιν ὅτι ἡ πτῆσις θὰ εἶναι δυνατή.

*
**

Τὴν διὰ τῆς λαμπρᾶς αὐτῆς μυθολογίας ἐκφρασθεῖσαν σκέψιν ἐπραγματοποίησε κατὰ τὴν ἱστορικὴν πλέον ἐποχὴν ὁ περίφημος Ἕλλην πολιτικός, στρατηγός, μουσικός, μηχανικὸς καὶ μαθηματικός, ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος περὶ τὸ 400 π.Χ. διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου ἀεριωθουμένου ἀεροπλάνου.

Ὁ Ἀρχύτας κατεσκεύασε ξυλίνην περιστερὰν ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔθεσε μηχανισμὸν λειτουργοῦντα διὰ πεπιεσμένου ἀέρος. Διὰ τοῦ μηχανισμοῦ αὐτοῦ ἡ περιστερὰ ἵπτατο.

Ἰδοὺ πῶς περιγράφει τὸ πρῶτον αὐτὸ ἀεριωθούμενον ἀεροπλάνον τοῦ κόσμου ὁ Ρωμαῖος συγγραφεὺς GELLIUS (X, κεφ. 12, παράγρ. 9), εἰς τὸν ὁποῖον ἡ εἴδησις αὕτη φαίνεται ἀπίστευτος. Ἀφοῦ διηγεῖται διάφορα θαύματα περιγραφόμενα ὑπὸ τοῦ Πλινίου τοῦ πρεσβυτέρου, συνεχίζει ὡς ἑξῆς :

«Ἐπανέρχομαι πάλιν εἰς τὸν Πλίνιον, ὅστις λέγει ὅτι ἐὰν τὸν ἀριστερὸν πόδα τοῦ Χαμαιλέοντος ψήσωμεν εἰς θερμαινομένην πλάκα σιδήρου μὲ τὸ βότανον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ἐπίσης Χαμαιλέων (σημ. τὸ γαϊδουράγκαθο) καὶ τὸ ἐκ τῶν δύο προελθὸν μεῖγμα ἀναμίξωμεν εἰς μικρὸν ξύλινον κιβώτιον, τότε ἐκεῖνος ὅστις φέρει ἐπάνω του τὸ κιβώτιον αὐτό, ὅταν εὑρίσκεται ὁπουδήποτε, ἀκόμη καὶ εἰς τόπον ὅπου εἶναι συγκεντρωμένοι πολλοὶ ἄνθρωποι, καθίσταται ἀόρατος. Νομίζω ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ θαύματα καὶ αἱ ἀγυρτεῖαι, αἱ ὁποῖαι φέρονται ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Δημοκρίτου εἶναι ἀνάξια προσοχῆς. Ἢ ἐπίσης ἐκεῖνα τὰ παρόμοια, τὰ ὁποῖα ὁ Πλίνιος εἰς τὸ 10. Βιβλίον του ἱστορεῖ, ὅτι τὰ ἐδιάβασε εἰς τὰ ἔργα τοῦ Δημοκρίτου, ὅτι δηλαδὴ ὡρισμένα πτηνὰ ἔχουν ὡρισμένα ἀναγνωριστικὰ διὰ τῆς φωνῆς των συνθήματα (δηλ. ἔχουν μεταξύ των ὡρισμένην γλῶσσαν) καὶ ὅτι ἐὰν κανεὶς ἀναμίξῃ τὸ αἷμα ἐκ διαφόρων τοιούτων πτηνῶν γεννᾶται ἐκ τούτου ἕνα φεῖδι. Ὅποιος τρώγει ἀπὸ τὸ φεῖδι αὐτὸ εἶναι εἰς θέσιν νὰ κατανοῇ τὴν γλῶσσαν καὶ τὰς συνομιλίας τῶν πτηνῶν. Πολλὰ τοιαῦτα ψεύδη τίθενται εἰς κυκλοφορίαν ὑπὸ ἀνεπιτηδείων ἀνθρώπων, ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Δημοκρίτου.

Ὅ,τι ὅμως ἀφορᾷ εἰς ἓν τεχνικὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον καθ' ὁμολογίαν τοῦ ἰδίου τοῦ κατασκευαστοῦ, τοῦ Πυθαγορείου Ἀρχύτου, οὗτος κατεσκεύασε, τοῦτο καίτοι δὲν φαίνεται εἰς ἡμᾶς ὀλιγώτερον θαυμαστόν, ἐν τούτοις μᾶς φαίνεται ἀπίστευτον. Διότι ὄχι μόνον πολλοὶ ἐπιφανεῖς

Ἕλληνες διηγοῦνται τοῦτο, ἀλλὰ καὶ ὁ φιλόσοφος Φαβωρῖνος, ὁ μετὰ ζήλου ἐρευνητὴς ὅλων τῶν παλαιῶν ἱστορικῶν μνημείων. Ὅλοι αὐτοὶ μνημονεύουν μὲ ἔντονον διαβεβαίωσιν τὴν ἀλήθειαν ἑνὸς τεχνικοῦ ἔργου, γράφουν δηλαδὴ περὶ τῆς κατασκευῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου μιᾶς περιστερᾶς μὲ ὡρισμένον σύστημα καὶ διὰ μηχανικῆς τέχνης κατεσκευασμένης, ἡ ὁποία ἵπταται εἰς τὸν ἀέρα. Τὸ τεχνικὸν αὐτὸ κατασκεύασμα, (ὡς ἀφ' ἑαυτοῦ νοεῖται) φέρεται δι' ὡρισμένης ὠστικῆς δυνάμεως πρὸς τὰ ὕψη καὶ διὰ κεκρυμμένου ἐντὸς αὐτοῦ πεπιεσμένου ἀέρος τίθεται εἰς κίνησιν.

Θεωρῶ σκόπιμον νὰ προσθέσω ἐνταῦθα τὰ γραφόμενα ὑπὸ τοῦ Φαβωρίνου διὰ τὸ περίεργον καὶ ἀπίστευτον αὐτὸ τεχνικὸν κατασκεύασμα : «Ὁ φιλόσοφος Ἀρχύτας, ὁ ἐκ τῆς πόλεως Τάρας καταγόμενος, ἦτο ἐπὶ πλέον καὶ ἐξαίρετος μηχανικὸς καὶ κατεσκεύασε ξυλίνην ἱπταμένην περιστεράν, ἡ ὁποία ὅμως ὅταν προσεγειοῦτο δὲν ἠδύνατο πάλιν νὰ ἀπογειωθῇ μόνη της. Διότι μέχρις αὐτοῦ...» (σημ. Ἡ συνέχεια δὲν διεσώθη).

Ἐὰν λοιπὸν κατὰ τὴν Μυθολογίαν ὁ Δαίδαλος εἶναι ὁ πρῶτος ἐπινοητὴς καὶ κατασκευαστὴς πτερύγων διὰ τῶν ὁποίων ὁ ἄνθρωπος ἠδύνατο νὰ ἵπταται ὅπως τὰ πτηνά, ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος εἶναι ἱστορικὸν πρόσωπον, τὸ ὁποῖον εὐλόγως, διὰ τῆς κατασκευῆς τῆς ξυλίνης περιστερᾶς τῆς ἱπταμένης διὰ πεπιεσμένου ἀέρος, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ πρῶτος κατασκευαστὴς τοῦ ἀεριωθουμένου ἀεροπλάνου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἀπολλόδωρος, Loeb Classical Library I, II (Δαίδαλος). Pauly - Wissowa Real - Encyclopädie, Κρήτη, Δαίδαλος, Ἴκαρος. H. Diels, Fragm. d. Vorsokratiker, Archytas.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑΙ

ΤΟΜΟΣ Α' 1970, σελὶς 315

Η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ,
μέλους τῆς Διεθνοῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν

Δὲν εἶναι γνωστὸν πότε ἔγινεν ἡ ἀνακάλυψις τῆς πυρᾶς, ἥτις ἀποτελεῖ τὴν μεγαλυτέραν κατάκτησιν τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος. Δι' αὐτῆς μετεβλήθησαν αἱ συνθῆκαι διαβιώσεως τοῦ ἀνθρώπου. Ἡ ἐπίτευξις διὰ τῆς πυρᾶς πολὺ μεγάλης θερμοκρασίας ἀποτελεῖ ἐν συνεχείᾳ νέαν κατάκτησιν τοῦ ἀνθρώπου. Ἀποτέλεσμα τοῦ ἐπιτεύγματος αὐτοῦ εἶναι ἡ λῆψις καθαρῶν μετάλλων ἐκ τῶν ὀρυκτῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ταῦτα εὑρίσκονται. Τὰ πρῶτα ληφθέντα μέταλλα ἦσαν ὁ κασσίτερος (σημεῖον τήξεως 232°C) καὶ ὁ μόλυβδος (σ. τ. 327°C), ἐνῷ ἡ παρασκευὴ τῆς ὑάλου καὶ ἡ ἐκ τῶν ὀρυκτῶν παραλαβὴ τοῦ ψευδαργύρου (σ. τ. 420°C), τοῦ ἀργύρου (σ. τ. 960°C), τοῦ χαλκοῦ (σ. τ.1083° C) καὶ τοῦ χρυσοῦ (σ. τ. 1063°C) ἐπετεύχθη βραδύτερον.

Ἡ ἐποχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν κατεσκευάσθησαν τὰ πρῶτα ἐργαλεῖα καὶ ὅπλα ἐξ ὀρειχάλκου (κρᾶμα χαλκοῦ καὶ ψευδαργύρου) τοποθετεῖται περὶ τὴν δεκάτην χιλιετηρίδα π.Χ. Κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχήν, ἴσως καὶ παλαιότερον, ἔχει ἀρχίσει ἡ κατασκευὴ λέμβων.

Ἡ ἀνακάλυψις τῆς πυρᾶς, τοῦ τροχοῦ καὶ τῆς λέμβου ἀποτελοῦν σταθμοὺς τῆς ἐξελίξεως τῆς τεχνικῆς. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ σιδήρου καὶ ἡ κατεργασία αὐτοῦ, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖ μεγαλυτέραν θερμοκρασίαν τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν τοῦ ὀρειχάλκου, μαρτυρεῖται πολλαχῶς ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου, ὅστις μάλιστα ἀναφέρει, ὅτι διὰ νὰ ἀποκτήσῃ μεγαλυτέραν σκληρότητα ὁ σίδηρος ἐβαπτίζετο θερμός, ἐντὸς ψυχροῦ ὕδατος. Ἰδοὺ τὸ σχετικὸν χωρίον τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου:

ι 391: ὡς δ' ὅτ ἀνὴρ χαλκεὺς πέλεκυν (ἠὲ σκέπαρνον
εἰν ὕδατι ψυχρῷ βάπτῃ μεγάλα (ἰάχοντα
φαρμάσσων· τὸ γὰρ αὖτε σιδή- (ρου γε κράτος ἐστίν·

(ὅπως, ὅταν ὁ σιδηρουργὸς μέγαν πέλεκυν ἢ σκεπάρνι ἐμβαπτίζῃ ἐντὸς ψυχροῦ ὕδατος, προκαλουμένου μεγάλου συριγμοῦ ἐν ᾧ γίνεται σκλήρυνσις, διότι αὐτὸ δίδει ἰσχὺν εἰς τὸν σίδηρον).

Ἰδοὺ λοιπὸν κατὰ τὸ 1200 περίπου π.Χ. οἱ Ἕλληνες ἐγνώριζον τὴν βαφὴν τοῦ σιδήρου, διὰ νὰ δώσουν εἰς αὐτὸν μεγαλυτέραν σκληρότητα καὶ ἀνθεκτικότητα. Τὸ γεγονός, τὸ ὁποῖον περιγράφει συναφῶς ὁ Ὅμηρος εἶναι ἡ τύφλωσις τοῦ Κύκλωπος Πολυφήμου διὰ καίοντος σιδηροῦ πασσάλου ὑπὸ τοῦ Ὀδυσσέως ἡ ὁποία ἔλαβε χώραν ὀλίγον μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Τροίας (1184 π.Χ.). Παρὰ τοῦ Ὁμήρου λοιπὸν πληροφορούμεθα τὸ πρῶτον, ὅτι οἱ Ἕλληνες κατὰ τὴν ἀρχαιοτάτην ἐκείνην ἐποχὴν εἶχον ἐπιτελέσει μεγάλας προόδους εἰς τὴν μεταλλουργίαν.

Διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀνεπτυγμένης τεχνικῆς εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας πολὺ πρὸ τοῦ Τρωϊκοῦ πολέμου, ἔχομεν μαρτυρίας τὰ ἐρείπια τῶν Κυκλωπείων τειχῶν εἰς τὰς Πλαταιάς, τὰ ἐρείπια καὶ τὰ κτερίσματα τῶν Μυκηναϊκῶν ἀνακτόρων καὶ τῶν ἀνακτόρων τῆς Πύλου, τῆς Κνωσοῦ, τῶν Μαλίων, τῆς Φαιστοῦ, τῆς Τίρυνθος, κλπ.

Κατὰ τὸν 6ον π.Χ. αἰῶνα παρατηροῦμεν μεγάλην ἀνάπτυξιν τῆς τεχνικῆς τῶν ἐξ ὀρειχάλκου ἀντικειμένων, ἰδίως ἀγαλμάτων. Ἡ κατεργασία τοῦ σιδήρου παρουσιάζει ἀκόμη μεγάλας δυσκολίας, ἕνεκα τῆς πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένης πολὺ μεγάλης θερμοκρασίας. Περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνος αὐτοῦ (585 π.Χ.) ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, ὁ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, ὁ ἀνακαλύψας τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν, ἀκολουθεῖ τὸν βασιλέα τῶν Λυδῶν Κροῖσον εἰς τὴν ἐκστρατείαν του κατὰ τῶν Περσῶν, ὡς τεχνικὸς σύμβουλος αὐτοῦ. Ὅταν ὁ Κροῖσος ἔφθασε πρὸ τοῦ Ἅλυος ποταμοῦ, διεπίστωσεν, ὅτι ἦτο ἀδύνατον νὰ διαβῇ αὐτὸν καὶ εὑρέθη εἰς ἀμηχανίαν περὶ τοῦ πρακτέου. Ὁ Θαλῆς συνεβούλευσε τὴν κατασκευὴν μεγάλης μηνοειδοῦς τάφρου παρὰ τὸν Ἅλυν, διὰ τῆς ὁποίας τὰ ὕδατα τοῦ ποταμοῦ ἐχωρίσθησαν εἰς δύο, καὶ τοιουτοτρόπως ὁ ποταμὸς καὶ ἡ τάφρος ἔγιναν βατὰ διὰ τοὺς ἄνδρας τοῦ Κροίσου (Ἡροδότου Α' 75). Σύγχρονος τοῦ Θαλοῦ καὶ ἐπίσης ἐκ τῶν 7 σοφῶν ἦτο καὶ ὁ ἡγεμὼν τῆς Κορίνθου Περίανδρος, ὅστις εἶχεν ὀργανώσει τὸν δίολκον τοῦ Ἰσθμοῦ τῆς Κορίνθου (Στράβων 395), ὅπου τὰ πλοῖα μετεφέροντο ἐκ τοῦ Σαρωνικοῦ εἰς τὸν Κορινθιακὸν κόλπον καὶ τ' ἀνάπαλιν. Ὁ Περίανδρος εἶχεν ἐπιχειρήσει προηγουμένως νὰ διανοίξῃ τὸν Ἰσθμὸν ἀλλὰ διεπίστωσεν ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἦτο πολὺ ἀνώτερον τῆς τεχνικῆς τῆς ἐποχῆς του, ὡς λέγει ἡ παράδοσις.

Κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχὴν ἐκτελεῖται εἰς τὴν Σάμον ὑπὸ τοῦ ἐκ Μεγάρων μηχανικοῦ Εὐπαλίνου μέγα τεχνικὸν ἔργον, τὸ ὑδραγωγεῖον τῆς Σάμου, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Ἡροδότου (Γ' 60). Λόφος ὕψους 270 μέτρων καὶ διαμέτρου εἰς τὴν βάσιν 1.200 μέτρων περίπου (7 σταδίων) διατρυπᾶται διὰ τὴν κατασκευὴν ὑδραγωγείου. Ἡ διάνοιξις γίνεται συγχρόνως ἐκ δύο ἀντιθέτων πλευρῶν τοῦ λόφου. Τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος τῆς σήραγγος εἶναι 2,40 μέτρα. Ἐντὸς τῆς σήραγγος διηνοίχθη τάφρος βάθους 9 μ. καὶ πλάτους ἑνὸς μέτρου περίπου εἰς τὴν ὁποίαν εἶχον τοποθετηθῆ σωλῆνες διὰ τὴν διοχέτευσιν τοῦ ὕδατος πρὸς τὴν πόλιν. Τὸ ὕδωρ ἐλαμβάνετο ἀπὸ μεγάλην πηγὴν εὑρισκομένην πλησίον τοῦ λόφου. Ἡ συνάντησις τῶν ἐργατῶν τῶν ἐκ δύο ἀντιθέτων πλευρῶν τοῦ λόφου διανοιγόντων τὴν σήραγγα ἔγινε μὲ μικρὰν ἀπόκλισιν 6 περίπου μέτρων. Ἡ διάνοιξις τῆς σήραγγος αὐτῆς ἀπαιτεῖ γνώσεις γεωμετρικάς, γνώσεις μηχανικῆς, γεωλογίας, τοπογραφίας καὶ ὀπτικῆς. Θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι κατὰ τὴν κατασκευὴν ἐχρησιμοποιήθη διόπτρα διὰ τὴν παρακολούθησιν καὶ κατεύθυνσιν τῶν ἐργασιῶν τῆς διανοίξεως τῆς σήραγγος.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ποῦ ἐσπούδασεν ὁ Εὐπαλῖνος καὶ ποίους καθηγητὰς εἶχε. Τὸ πρῶτον Πανεπιστήμιον τοῦ κόσμου, ἐν σμικρογραφίᾳ βέβαια Πανεπιστήμιον, ὅμως ὑπὸ τὴν σημερινὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου, ἤτοι κέντρον ἐπιστημονικῆς διδασκαλίας καὶ ἐρεύνης, θεωρεῖται ἡ ἐν Μιλήτῳ ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ ἱδρυθεῖσα, περίπου τὸ 600—580, Σχολή. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς αὐτῆς μέχρι τῆς ἐποχῆς τῆς διανοίξεως τῆς σήραγγος τῆς Σάμου (περίπου 560 π.Χ.), τὸ χρονικὸν διάστημα δὲν εἶναι ἀρκετόν, ὥστε νὰ δικαιολογῆται ἡ ἀνάπτυξις τόσων ἐπιστημονικῶν κλάδων. Εἴμεθα λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ δεχθῶμεν, ὅτι εἰς ὅλον τὸν χῶρον, τὸν κατοικούμενον ὑπὸ Ἑλλήνων, ὑπῆρχον Σχολαὶ Τεχνικῆς Μορφώσεως, δηλαδὴ Πολυτεχνεῖα ὡς θὰ ἐλέγομεν σήμερον, εἰς τὰς ὁποίας ἡ διδασκαλία ἐστηρίζετο ἐπὶ τῆς κτηθείσης πείρας.

Ὁ Ἡρόδοτος εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον μνημονεύει ἄλλα δύο μεγάλα τεχνικὰ ἔργα εἰς τὴν Σάμον. Τὸ ἓν ἐκ τούτων εἶναι Ναὸς μέγιστος, ὁ μεγαλύτερος τῶν ὅσων Ναῶν εἶχεν ἴδει εἰς τὰς ἡμέρας του ὁ Ἡρόδοτος, καὶ τὸ ἄλλο, τεράστιος λιμενοβραχίων μήκους περίπου 400 μέτρων καὶ βάθους 30 μέτρων περίπου, μὲ ἀνάλογον πλάτος. Περὶ τὸ 560 π.Χ. ἤρχισεν ἡ ἀνοικοδόμησις τοῦ περιφήμου ναοῦ τῆς Ἀρτέμιδος εἰς τὴν Ἔφεσον, ὑπὸ τοῦ ἐκ Σάμου Ἀρχιτέκτονος Θεοδώρου, ἡ ὁποία συνεχίσθη ὑπὸ τοῦ ἐκ Κνωσοῦ ἀρχιτέκτονος Χερσίφρονος καὶ τοῦ υἱοῦ τούτου Μεταγένους. Ὁ ναὸς ἐπερατώθη εἰς διάστημα 120 ἐτῶν, ἐπυρπολήθη δὲ τῷ 356 π.Χ., καθ' ἣν ἡμέραν ἐγεννήθη ὁ Μ. Ἀλέξανδρος.

Περὶ τὸ 525 π.Χ. εἰς τὴν Αὐλὴν τοῦ Δαρείου τοῦ πρώτου ἔχει προσληφθῆ ὁ Ἕλλην Ἀρχιτέκτων Τηλεφάνης, ὅστις ἐσχεδίασεν καὶ ἐπώπτευσεν εἰς τὴν κατασκευὴν ὅλων τῶν μεγάλων μνημείων τῆς Περσεπόλεως, μιᾶς ἐκ τῶν 4 πρωτευουσῶν τοῦ Δαρείου. Τὰ σωζόμενα ἐρείπια τῆς πόλεως μαρτυροῦν καὶ αὐτὰ περὶ τῶν προόδων τῆς τεχνικῆς τῶν Ἑλλήνων κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην.

Σχεδὸν σύγχρονος τοῦ Τηλεφάνους, μνημονεύεται ὁ ἐκ Σάμου μηχανικὸς Μανδροκλῆς, ὁ ὁποῖος περὶ τὸ 512 π.Χ. τῇ ἐντολῇ τοῦ Δαρείου κατεσκεύασε διὰ πλοίων γέφυραν καὶ ἔζευξε τὸν Βόσπορον εἰς τὸ μικρότερον πλάτος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι περίπου 700 μ.

Ὁ Ἡρόδοτος (Δ' 83 καὶ ἑξῆς) λέγει, ὅτι ὁ στρατὸς τοῦ Δαρείου, ὅστις διῆλθε διὰ τῆς γεφύρας εἰς τὴν Εὐρωπαϊκὴν ἀκτὴν ἀνήρχετο εἰς 800.000 περίπου ἄνδρας. Φαίνεται ὅμως, ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητα ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἦτο πολὺ μικρότερος.

Ὀλίγα ἔτη βραδύτερον περὶ τὸ 481 π.Χ. ἄλλοι Ἕλληνες μηχανικοί, ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν τοῦ ἀστρονόμου Ἁρπάλου ἔζευξαν τῇ ἐντολῇ τοῦ Ξέρξου τὸν Ἑλλήσποντον εἰς τὸ στενώτερον αὐτοῦ μέρος, ὅπου τὸ πλάτος εἶναι 1.300 μ. περίπου, συνδέσαντες 674 πλοῖα διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς γεφύρας.

Εἰς τὰς πόλεις, ὅπου ὑπῆρχον Σχολαὶ καλλιεργείας τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Μηχανικῆς εἶχεν ἀρχίσει ἡ ἀνάπτυξις τῶν πολιορκητικῶν μηχανῶν. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς πληροφορίας τοῦ Πλουτάρχου (Βίος Ἀριστείδου) ὅτι κατὰ τὴν ἐν Πλαταιαῖς μάχην (479 π.Χ.) οἱ Σπαρτιᾶται εὑρέθησαν εἰς ἀδυναμίαν νὰ καταλάβουν τὸ παρὰ τὸ βόρειον μέρος τοῦ ποταμοῦ Ἀσωποῦ ἱδρυθὲν ὑπὸ τῶν Περσῶν ἰσχυρότατον ξύλινον τεῖχος, (ὅπου τὸ σημερινὸν στρατόπεδον τῶν Θηβῶν), τὸ ὁποῖον ἐξεπόρθησαν ἐντὸς μικροῦ χρόνου οἱ Ἀθηναῖοι διὰ τῶν πολιορκητικῶν μηχανῶν των, παρακληθέντες πρὸς τοῦτο ὑπὸ τῶν Σπαρτιατῶν.

Τὰ μνημεῖα τοῦ χρυσοῦ αἰῶνος τοῦ Περικλέους μαρτυροῦν ὄχι μόνον μεγάλην ἀνάπτυξιν τῆς τεχνικῆς, ἀλλὰ καὶ τῶν Καλῶν Τεχνῶν, ἰδίως τῆς γλυπτικῆς. Οἱ Ἀρχιτέκτονες Ἰκτῖνος καὶ Καλλικράτης, καὶ ὁ Φειδίας, ἀνήγαγον τὴν ἀνοικοδόμησιν καὶ διακόσμησιν τῶν ναῶν εἰς σημεῖον ἀπαράμιλλον καὶ ἀνυπέρβλητον ἐκφράσεως, δυνάμεως, κάλλους καὶ χάριτος. Ὡς πρὸς τὴν τεχνικὴν τῆς ἐποχῆς αὐτῆς δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν, ὅτι αὕτη τώρα πλέον δὲν στηρίζεται μόνον εἰς τὴν κτηθεῖσαν πεῖραν πολλῶν αἰώνων, ἀλλὰ συνεπικουρεῖται καὶ ὑπὸ τῆς Μηχανικῆς καὶ τῶν Μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ὀλίγον βραδύτερον ὁ Ἀριστοτέλης εἰσήγαγεν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς Θεωρητικῆς Φυσικῆς. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης τίθενται εἰς τὴν διάθεσιν τῆς τεχνικῆς. Αὐτὴν τὴν ἐποχὴν ἀνεπτύχθη ὡς ἐπιστημονικὸς κλάδος καὶ ἡ προοπτική, ἡ ὁποία ἐχρησιμοποιήθη καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν οἰκοδομημάτων τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν σκηνικῶν τῶν θεάτρων. Τὰ θέατρα ἀνεγείρονται ἐπὶ τῇ βάσει γεωμετρικῶν σχεδίων, εἰς τὰ ὁποῖα κυριαρχεῖ ὁ συνδυασμὸς τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἰσόπλευρον καὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ ἡ τομὴ εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἡ χρυσῆ τομὴ ὡς ἀποκαλεῖται σήμερον. Εἰς τὰ σωζόμενα ἀρχαῖα θέατρα παρατηροῦμεν καὶ σήμερον ἀκόμη, ὅτι ἡ κατασκευή των ἔχει γίνει κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἐνισχύεται τὰ μέγιστα ἡ ἀκουστική των. Ὁ Ρωμαῖος Ἀρχιτέκτων καὶ συγγραφεὺς Βιτρούβιος παρέχει τὴν πληροφορίαν, ὅτι διὰ τὴν ἐνίσχυσιν τοῦ ἤχου εἰς τὰ ἑλληνικὰ θέατρα ὑπῆρχον εἰς αὐτά, εἰς καταλλήλους θέσεις, καὶ εἰδικὰ ἠχεῖα. Τὸ θέατρον ὅμως τῆς Ἐπιδαύρου, καὶ εἰς τὴν σημερινήν του ἀκόμη κατάστασιν χωρὶς τὰ ἠχεῖα, παρέχει ἀκουστικήν, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὸν θαυμασμόν. Πιστεύεται ὅτι τὸ φαινόμενον αὐτὸ δὲν εἶναι τυχαῖον καὶ ὅτι τοὐναντίον ἠκολουθοῦντο διὰ τὴν ἐνίσχυσιν τῆς ἀκουστικῆς τῶν θεάτρων ὡρισμένοι νόμοι κατασκευῆς αὐτῶν, ἄγνωστοι μέχρι σήμερον.

Τὰ μακρὰ τείχη τῶν Ἀθηνῶν, δύνανται νὰ περιληφθοῦν εἰς τὰ μεγάλα τεχνικὰ ἔργα τῆς ἐποχῆς τοῦ Περικλέους, ὅπως ἐπίσης ἡ κατασκευὴ τοῦ λιμένος τοῦ Πειραιῶς καὶ τὸ πολεοδομικὸν σχέδιον τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, τῆς ἰδίας πόλεως ὑπὸ τοῦ ἐκ Μιλήτου μηχανικοῦ Ἱπποδάμου. Περὶ τὸ 441 π.Χ. ὁ Περικλῆς πολιορκῶν τὴν Σάμον ἐχρησιμοποίησε διὰ πρώτην φορὰν μηχανὰς αἱ ὁποῖαι ἔφερον πάσσαλον ἢ ἔμβολον καὶ δι᾿ αὐτῶν ἐπεχειρεῖτο διάνοιξις τῶν πυλῶν τῶν τειχῶν. Ὡς κατασκευαστὴς τῶν πολιορκητικῶν αὐτῶν μηχανῶν μνημονεύεται ὁ μηχανικὸς Ἀρτέμων, ἐκ τῶν Κλαζομενῶν τῆς Μικρᾶς Ἀσίας.

Κατα τὰς ἀρχὰς τοῦ Πελοποννησιακοῦ πολέμου, περὶ τὸ 430 π.Χ., οἱ Βοιωτοί, οἵτινες ἦσαν σύμμαχοι τῶν Σπαρτιατῶν, ἐπολιόρκησαν τὴν ἐπὶ τῆς Βοιωτίας παρὰ τὸν Εὐβοϊκὸν κόλπον κειμένην κωμόπολιν Δήλιον, τὴν ὁποίαν ὑπερήσπιζον οἱ Ἀθηναῖοι. Διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν πολιορκητικῶν μηχανῶν ἀναφέρεται μηχάνημα ἐμπρηστικὸν βοιωτικῆς ἐπινοήσεως, τὸ ὁποῖον περιγράφει ὁ Θουκυδίδης (IV 100). Εἰς πολλὰ μέρη τοῦ φρουρίου συνεκεντρώθησαν κλίματα ἀμπέλου ξηρὰ καὶ διάφορα ἄλλα ξύλα. Τὸ μηχάνημα ἀπετελεῖτο ἀπὸ μακρὸν σωλῆνα εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου κατέληγε μικρὸς λέβης μεταλλικός, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ὑπῆρχον ἡμιανημμένοι ἄνθρακες, θεῖον καὶ πίσσα. Ἐπλησίαζον τὸ μηχάνημα εἰς τὸ τεῖχος καὶ διὰ φυσητῆρος ἐνίσχυον τὴν καῦσιν εἰς τὸν λέβητα, ὁπότε μὲ τὴν θραῦσιν του ἐσχηματίζετο τεραστία φλόξ, ἡ ὁποία μετέδιδε τὸ πῦρ καὶ εἰς τὰ παρακείμενα ξύλα. Οὐδεὶς πλέον ἦτο δυνατὸν νὰ παραμείνῃ εἰς τὸ τεῖχος. Οἱ Βοιωτοὶ ἐχρησιμοποίησαν ἐκεῖ πολλὰ τοιαῦτα ἐμπρηστικὰ μηχανήματα καὶ δι᾿ αὐτῶν ἐπέτυχον τὴν ἅλωσιν τοῦ φρουρίου τοῦ Δηλίου.

Σταθμὸν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς τεχνικῆς ἀποτελεῖ ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν

Διονύσιος ὁ πρεσβύτερος (430 — 367 π.Χ.). Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ἡγεμονίας τοῦ Διονυσίου μέρος τῆς Σικελίας κατείχετο ὑπ' αὐτοῦ, μέρος δὲ ὑπὸ τῶν Καρχηδονίων. Ὁ ἀνταγωνισμὸς μεταξὺ Ἑλλήνων καὶ Καρχηδονίων ἦτο μεγάλος. Διὰ νὰ ἀντεπεξέλθῃ ὁ Διονύσιος κατὰ τῆς ἰσχύος τῆς Καρχηδόνος ἐσκέφθη ὅτι ἔπρεπε νὰ ὑπερβάλῃ αὐτὴν κατὰ τὴν τεχνικήν. Ὠργάνωσε λοιπὸν Κέντρον Στρατηγικῶν Ἐρευνῶν πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς ἀνακαλύψεως νέων ὅπλων καὶ τελειοποιήσεως τῶν ὑπαρχόντων παλαιῶν. Εἰς τὸ Κέντρον αὐτὸ προσεκάλεσεν ἐξ ὅλων τῶν μερῶν τῆς Ἑλλάδος πάσης εἰδικότητος μηχανικοὺς καὶ τεχνίτας καὶ παρέσχεν εἰς αὐτοὺς ὅλα τὰ μέσα διὰ τὴν ἐπίτευξιν νέων ἀνακαλύψεων χρησίμων εἰς πολεμικοὺς σκοποὺς ἀμύνης καὶ ἐπιθέσεως. Εἰς τοὺς συγχρόνους μεγάλους τεχνικοὺς καὶ τὰ ἐπιτελεῖα των προκαλεῖ ἔκπληξιν καὶ θαυμασμὸν ἡ καταπληκτικὴ διὰ τὴν ἐποχήν της ἰδέα τοῦ Διονυσίου. Μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων ἐρεύνης, ἅτινα ὁ Διονύσιος εἶχε θέσει εἰς τὸ Τεχνικὸν του Κέντρον ἦτο ἡ κατασκευὴ πλοίων πολεμικῶν, τὰ ὁποῖα νὰ ἦσαν ἀνώτερα τῶν γνωστῶν κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, τόσον κατὰ τὴν ταχύτητα, ὅσον καὶ κατὰ τὸν ὁπλισμὸν καὶ τὴν ἀνθεκτικότητα. Τότε ἀναπτύσσεται διὰ πρώτην φορὰν ἡ κατασκευὴ νέων (πλοίων) τετρήρων καὶ πεντήρων, δηλαδὴ πλοίων μὲ τέσσαρας ἢ πέντε σειρὰς κουπιῶν εἰς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ πλοίου. Ἑκατὸν πεντήκοντα ἔτη βραδύτερον ὁ Ἀρχιμήδης εὑρίσκει εἰς τὰς Συρακούσας μίαν τεχνικὴν παράδοσιν εἰς τὴν κατασκευὴν πολεμικῶν μηχανῶν, τὰς ὁποίας ἐτελειοποίησεν εἰς ἀξιοθαύμαστον βαθμόν.

Μία ὁμὰς μηχανικῶν τοῦ Διονυσίου ἀνεκάλυψε τὸν καταπέλτην, μηχάνημα διὰ τοῦ ὁποίου ἐβάλλοντο ἀκόντια μῆκος 1,8 μ. εἰς μεγάλο πλῆθος καὶ μὲ ἀρκετὴν ταχύτητα. Ἀλλὰ καὶ μεγάλους λίθους ἔρριπτεν ὁ καταπέλτης κατὰ τῶν ἐχθρικῶν πλοίων, προσέτι δὲ καὶ εἰς τὰς κατὰ ξηρὰν ἐπιχειρήσεις ἔρριπτε βροχὴν μικροτέρων βλημάτων κατὰ τῶν ἀντιπάλων. Μὲ τοὺς καταπέλτας αὐτοὺς τοῦ Διονυσίου ἀρχίζει ἡ ἱστορία τοῦ πυροβολικοῦ. Ὅτε ὁ Διονύσιος ἐπολιόρκησε τὴν ὑπὸ τοὺς Καρχηδονίους εἰς τὸ δυτικὸν μέρος τῆς Σικελίας κειμένην πόλιν Μοτύην ἀπέσυρεν εἰς τὴν παραλίαν τὰ πλοῖα του καὶ συνέχισε τὰς ἐπιθέσεις του κατὰ τῶν τειχῶν τῆς πόλεως διὰ τῶν καταπελτῶν. Ἐν τῷ μεταξὺ κατέφθασεν ἐκ Καρχηδόνος ἰσχυρὸς στόλος ὑπὸ τὸν ναύαρχον Ἰμίλκων, ὅστις προσεπάθησε νὰ γίνῃ κύριος τῶν εἰς τὴν ξηρὰν εὑρισκομένων πλοίων τοῦ Διονυσίου. Ὑποστὰς ὅμως φοβερὰν ἐπίθεσιν ὑπὸ τῶν ἐπὶ τῶν πλοίων εὑρισκομένων καταπελτῶν, οἱ ὁποῖοι ἀπετέλουν νέον καὶ φοβερὸν ὅπλον διὰ τὴν ἐποχὴν αὐτήν, ἐγκατέλειψε τὴν ἐπιχείρησιν καὶ ἐτράπη ταχέως πάλιν πρὸς τὴν Λιβύην (Διόδωρος Σικελιώτης 14,42 καὶ 14,50).

Ὅταν περὶ τὸ 350 π.Χ. ἔδειξαν εἰς τὸν βασιλέα τῆς Σπάρτης Ἀρχίδαμον τὸν τρίτον ἓν βλῆμα ριφθὲν ὑπὸ καταπέλτου, οὗτος ἀνεπήδησεν ἐκ τῆς θέσεώς του καὶ εἶπε διαμαρτυρόμενος: Ἡράκλεις, μὲ αὐτὰ καταργεῖται ἡ ἀνδρεία τῶν στρατιωτῶν. Εἶναι ἡ πρώτη διαμαρτυρία κατὰ τῆς μηχανοποιήσεως τῆς διεξαγωγῆς τοῦ πολέμου.

Ὁ Διονύσιος εἶναι καὶ ὁ πρῶτος τύραννος, ὅστις διὰ τὴν προστασίαν τῆς ζωῆς του ἔφερε πάντοτε κατὰ τὰς δημοσίας ἐμφανίσεις του θώρακα ἐκ χάλυβος.

Ἄλλη ὁμὰς μηχανικῶν τοῦ Κέντρου Στρατηγικῶν Ἐρευνῶν τοῦ Διονυσίου ἀνεκάλυψε τόξον, τὸ ὁποῖον διὰ προσαρμογῆς ἐλατηρίου ἔβαλλε βέλη μεγαλύτερα τῶν συνήθων εἰς μεγάλην ἀπόστασιν.

Κατὰ τὸν 5ον αἰῶνα π.Χ. ἐκτελοῦνται σπουδαῖα τεχνικὰ ἔργα εἰς τὸν Ἀκράγαντα τῆς νοτίου Σικελίας. Σπουδαῖα, ὄχι ἀπὸ ἐπόψεως ὄγκου ἀλλὰ ἀπὸ ἐπόψεως πρωτοτυπίας καὶ δημοσίας ὠφελείας. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν ἐγεννήθη καὶ ἤκμασεν ὁ περίφημος φυσικὸς φιλόσοφος Ἐμπεδοκλῆς (484—424 π.Χ.) τοῦ ὁποίου ἡ θεωρία ὅτι τὸ Σύμπαν ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων μόνον στοιχείων, ἤτοι γῆς - ὕδατος - ἀέρος - πυρός, ἐπεκράτησεν ἐπὶ 20 καὶ πλέον αἰῶνας. Οἱ κατὰ Μάρτιον ἑκάστου ἔτους πνέοντες εἰς τὸν Ἀκράγαντα νότιοι ἐτησίαι ἄνεμοι ἐπέφερον μεγάλας καταστροφὰς εἰς τὰς ἀγροτικὰς καλλιεργείας. Ὁ Ἐμπεδοκλῆς ὠργάνωσε τὴν ἀνέγερσιν ὑψηλῶν τοίχων πρὸς τὸ μέρος τῆς θαλάσσης, ἐκ τῶν ὁποίων ἔπνεον οἱ νότιοι ἄνεμοι καὶ εἰς ἄλλα μέρη ἐτοποθέτησε δέρματα ὄνων καὶ τοιουτοτρόπως ἀπήλλαξε τοὺς συμπολίτας του ἐκ τῶν μεγάλων ζημιῶν. Διὰ τὸ ἐπίτευγμά του αὐτὸ ὠνομάσθη ὑπὸ τῶν Ἀκραγαντίνων κωλυσανέμας, ἤτοι κωλύων, ἐμποδίζων τοὺς ἀνέμους. Τὸ ἄλλο τεχνικὸν ἐπίτευγμα τοῦ Ἐμπεδοκλέους εἶναι ἡ ἀποξήρανσις τῶν ἑλῶν τοῦ Σελινοῦντος, πόλεως παραλιακῆς κειμένης δυτικῶς τοῦ Ἀκράγαντος περὶ τὰ 60 χιλιόμετρα. Τὰ ἕλη ἐσχηματίζοντο ἐκ παραρρέοντος ποταμοῦ. Ἑκατοντάδες ἀνθρώπων ἀπέθνησκον ἐτησίως εἰς τὸν Σελινοῦντα ἐκ τῆς ἑλονοσίας. Ὁ Ἐμπεδοκλῆς παρακληθεὶς ὑπὸ τῶν Σελινουντίων ἐμελέτησε τὸ πρόβλημα καὶ ἀνεκάλυψε τὴν θεραπείαν του. Ἔρριψεν εἰς τὰ λιμνάζοντα ὕδατα τὰ νερὰ δύο ἄλλων μικρῶν παραρρεόντων ποταμῶν καὶ διὰ καταλλήλων ἀποχετευτικῶν αὐλάκων κατηύθυνε τὰ ρέοντα πλέον ὕδατα εἰς τὴν θάλασσαν. Ὁ Σελινοῦς ἀπηλλάγη τῆς ἑλονοσίας καὶ ἀπέδωσε θείας τιμὰς εἰς τὸν σωτῆρα του. Δέον νὰ προστεθῇ ἐδῶ ὅτι ὁ Ἐμπεδοκλῆς ἦτο πολὺ πλούσιος καὶ τὰς ἀπαιτηθείσας δαπάνας διέθεσεν ἐξ ἰδίων (H. Diehls, Fragm. der Vorsokratiker I, Berlin 1951, σελ. 276).

Μεγάλην συμβολὴν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς πολεμικῆς τεχνικῆς παρέσχεν ὁ βασιλεὺς τῆς Μακεδονίας Φίλιππος ὁ Β΄, ὁ πατὴρ τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὁ ὁποῖος εἶχεν ὀργανώσει εἰδικὸν Τεχνικὸν Σῶμα διὰ τὰς πολεμικάς του ἐπιχειρήσεις καὶ πρὸ παντὸς διὰ τὰς πολιορκίας τῶν πόλεων. Ἐπὶ κεφαλῆς τοῦ σώματος αὐτοῦ εἶχε ταχθῆ ὁ ἐκ Θεσσαλίας μηχανικὸς Πολύειδος τὸν ὁποῖον ἀκολούθως ἐπὶ βασιλείας τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου διεδέχθησαν οἱ ἀντάξιοι μαθηταί του Διάδης καὶ Χαρίας. Ὁ Διάδης εἶναι ὁ πρῶτος συγγραφεὺς βιβλίου περὶ πολιορκητικῶν μηχανῶν. Ἀνεκάλυψε δὲ ἁπλοῦν μηχάνημα ὀνομαζόμενον Κόραξ, τὸ ὁποῖον ἦτο μικρὰ γέφυρα τοποθετουμένη ἐπὶ φορητοῦ ὑψηλοῦ πύργου. Ὅταν ὁ πύργος ἐφέρετο πλησίον τοῦ τείχνους πολιορκουμένης πόλεως ἐρρίπτετο ἡ γέφυρα πρὸς τὸ τεῖχος καὶ δι' αὐτῆς ἀπεβιβάζοντο ἐπ' αὐτοῦ οἱ πολεμισταὶ (Βιτρούβιος X. 13).

Κατάπληξιν προεκάλεσαν εἰς τοὺς ἐπιγόνους τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου τὰ πολιορκητικὰ μηχανήματα τοῦ Δημητρίου τοῦ πολιορκητοῦ, ὅταν οὗτος ἐπολιόρκησε τὴν Ρόδον κατὰ τὸ ἔτος 305 π.Χ. Ὁ πατὴρ τοῦ Δημητρίου Ἀντίγονος ἦλθεν εἰς προστριβὰς πρὸς τὸν βασιλέα τῆς Αἰγύπτου Πτολεμαῖον καὶ ἐπεθύμει νὰ ἔχῃ ὡς συμμάχους τοὺς Ροδίους διὰ τὴν κατ' αὐτοῦ μελετωμένην ἐκστρατεῖαν. Οἱ Ρόδιοι ἠρνήθησαν νὰ γίνουν Σύμμαχοι τοῦ Ἀντιγόνου καὶ ὁ Διάδοχος τοῦ Ἀντιγόνου Δημήτριος ἐπῆλθε κατὰ τῆς Ρόδου ἄγων 40.000 στρατοῦ καὶ ἰσχυρότατα πολιορκητικὰ μηχανήματα. Ἡ πρώτη προσβολὴ τῆς πόλεως ἔγινεν ἀπὸ θαλάσσης διὰ τεσσάρων μεγάλων πολιορκητικῶν μηχανῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶχε τοποθετηθῆ ἐπὶ μικροῦ ἀριθμοῦ πλοίων, τὰ ὁποῖα εἶχον συνδεθῆ στερεῶς μεταξύ των. Δύο ἐκ τῶν μηχανῶν αὐτῶν ἔφερον ὑψηλοὺς πύργους, ἐκ τεσσάρων ὀρόφων ἕκαστον, ἐφωδιασμένους μὲ κόρακας καὶ διάφορα ἄλλα βοηθητικὰ μηχανήματα. Αἱ ἄλλαι δύο ἔφερον καταπέλτας καὶ ποικίλα βαλλιστικὰ μηχανήματα λίθων, μολυβδίνων σφαιρῶν κλπ. Κατὰ νυκτερινὴν αἰφνιδιαστικὴν ἐπίθεσιν κατέλαβεν ὁ Δημήτριος τὸν κύριον λιμενοβραχίονα τῆς Ρόδου. Ἐκεῖ ὁ ἀρχηγὸς τοῦ πυροβολικοῦ τοῦ Δημητρίου, ὁ ἀρχηγὸς δηλαδὴ τῶν καταπελτῶν, μηχανικὸς Ἀπολλώνιος, ἐγκατέστησε γιγαντιαίους καταπέλτας διὰ τῶν ὁποίων ἔβαλλε κατὰ τῶν ἀμυνομένων σφαίρας λιθίνας ἢ μεταλλικὰς βάρους 80 περίπου χιλιογράμμων ἑκάστην. Παρὰ ταῦτα ἡ πόλις ἔμενεν ἀήττητος καὶ ὁ Δημήτριος ὠργάνωσε προσβολὴν ἀπὸ ξηρᾶς διὰ μηχανῶν, αἱ ὁποῖαι ἔφερον ἰσχυρὰ ἔμβολα, διὰ τῶν ὁποίων ἠλπίζετο νὰ ἐπενεχθοῦν ρήγματα εἰς ἀσθενῆ σημεῖα τῶν πυλῶν ἢ τῶν τειχῶν. Τὸ μεγαλύτερον πολιορκητικὸν μηχάνημα τοῦ Δημητρίου ἦτο εἷς φορητὸς πύργος, τὸν ὁποῖον κατεσκεύασεν ὁ Ἀθηναῖος μηχανικὸς Ἐπίμαχος. Ὁ πύργος αὐτὸς εἶχεν ὕψος 30 μέτρων καὶ διάμετρον εἰς τὴν βάσιν περίπου 30 μέτρων καὶ 9 ὀρόφους, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶχον τοποθετηθῆ καταπέλται. Κλίμακες ἀνόδου καὶ καθόδου ὑπῆρχον εἰς ὅλους τοὺς ὀρόφους καὶ δεξαμεναὶ ὕδατος καὶ ἀριθμὸς κάδων, διὰ τὴν κατάσβεσιν τῶν πυρκαϊῶν, αἵτινες θὰ προεκαλοῦντο ἐξ ἐχθρικῶν ἐπιθέσεων. Ἀρχηγὸς τῆς τεχνικῆς ἀμύνης τῶν Ροδίων ἦτο ὁ Ἀρχιτέκτων Διόγνητος. Οὗτος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς πολιορκίας ἀντικατεστάθη διὰ τοῦ μηχανικοῦ Καλλίου, ὅστις εἶχεν ἐφεύρει γερανὸν μὲ ἁρπάγην καὶ ὑπέσχετο νὰ ἐξουδετερώσῃ τὸ μεγαθήριον τοῦ Δημητρίου. Τοῦτο ὅμως κατέστη ἀδύνατον, διότι τὸ θαυμάσιον μηχάνημα τοῦ Καλλίου, τὸ ὁποῖον μετὰ 100 περίπου ἔτη ἔχει τελειοποιήσει ὁ Ἀρχιμήδης καὶ δι' αὐτοῦ τρομοκρατεῖ τοὺς Ρωμαίους, εἶναι πολὺ μικρῶν διαστάσεων ἔναντι τοῦ πύργου τοῦ Δημητρίου. Ὁ Καλλίας ἀντικαθίσταται πάλιν διὰ τοῦ Διογνήτου, ὁ ὁποῖος κατώρθωσε νὰ ἐξουδετερώσῃ τὸ μεγαθήριον τοῦ Δημητρίου. Κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ Διόγνητος διήνοιξεν ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς πόλεως πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ δρόμου ἐκ τοῦ ὁποίου προσεκομίζετο πρὸς τὸ τεῖχος ὁ Πύργος τοῦ Δημητρίου, στοάν. Ὅταν ὁ πύργος ἐπλησίαζε διὰ τὴν ἐπίθεσιν καὶ ἔφθασεν ἄνωθεν τῆς ὑπογείου στοᾶς κατέπεσε τὸ ἄνω τείχωμα αὐτῆς καὶ ὁ πύργος ἐβυθίσθη καὶ καθηλώθη ἐπὶ τόπου. Ὁ Δημήτριος μετὰ ἓν ἔτος πολιορκίας ἠναγκάσθη νὰ ἀποχωρήσῃ ἄπρακτος. Ὁ Διόγνητος ἔλαβεν ὡς δῶρον τὸν τεράτωδη αὐτὸν πύργον τὸν ὁποῖον ἐξέθεσεν εἰς κεντρικὴν πλατεῖαν τῆς Ρόδου μὲ τὴν ἀφιέρωσιν «ἐκ τῆς πολεμικῆς λείας τῷ λαῷ ὑπὸ τοῦ Διογνήτου.» (Βιτρούβιος X. 280, 16).

Βραδύτερον τὰ ὑλικὰ τοῦ πύργου ἐπωλήθησαν τὰ δὲ εἰσπραχθέντα χρήματα διετέθησαν διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ περιφήμου κολοσσιαίου ἀγάλματος τῆς Ρόδου.

Τὰ μεγάλα τεχνικὰ ἔργα τῆς **ἀρχαιότητος**, τὰ ὁποῖα κατὰ **τὸ πλεῖστον διε-**

κρίνοντο καὶ διὰ τὴν ἐξαίρετον καλλιτεχνικὴν αὐτῶν ἀξίαν εἶχον προκαλέσει τὸν γενικὸν θαυμασμὸν καὶ ἐφέροντο κατὰ τὴν παράδοσιν ὡς θαύματα, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς ἀνήρχετο εἰς ἑπτά. Ταῦτα ἦσαν κατὰ τὴν ἐπικρατεστέραν ἐκδοχήν: 1) ὁ ναὸς τῆς Ἀρτέμιδος ἐν Ἐφέσῳ, 2) τὸ ἄγαλμα τοῦ Ὀλυμπίου Διὸς τὸ φιλοτεχνηθὲν ὑπὸ τοῦ Φειδίου, 3) τὸ Μαυσωλεῖον τῆς Ἁλικαρνασσοῦ, 4) ὁ κολοσσὸς τῆς Ρόδου, 5) ὁ Φάρος τῆς Ἀλεξανδρείας (καὶ τὰ πέντε ἐκτελεσθέντα ὑπὸ Ἑλλήνων), 6) αἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου καὶ 7) οἱ κρεμαστοὶ κῆποι τῆς Βαβυλῶνος. Ἐκ τῶν ἔργων τούτων ἂς ἐπιτραπῇ νὰ μνημονεύσωμεν τὸν Φάρον τῆς Ἀλεξανδρείας, τοῦ ὁποίου ἡ ἔναρξις κατασκευῆς ἐγένετο ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ πρώτου (βασιλεύσαντος ἀπὸ 323—285) καὶ ἡ ἀποπεράτωσις συνετελέσθη ἐπὶ Πτολεμαίου τοῦ δευτέρου (βασιλεύσαντος ἀπὸ 285—246 π.Χ.). Ἡ τοποθεσία ἱδρύσεως τῆς Ἀλεξανδρείας ἐξελέγη ὑπὸ τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὅστις ἀνέθεσε τὴν ἐκπόνησιν καὶ ἐκτέλεσιν τοῦ σχεδίου τῆς πόλεως εἰς τὸν ἐκ Ρόδου ἢ κατ' ἄλλους εἰς τὸν ἐκ Μακεδονίας καταγόμενον ἀρχιτέκτονα Δεινοκράτην. Ἡ νέα πόλις ἐστερεῖτο λιμένος. Κατὰ μῆκος ὅμως τῆς πλησίον αὐτῆς θαλάσσης ἐξετείνετο συστὰς μικρῶν νήσων, τῶν ὁποίων ἡ μεγαλυτέρα ὠνομάζετο Φάρος. Ὁ Πτολεμαῖος ὁ α΄ συνήνωσε μεταξύ των τὰς μικρὰς νησίδας καὶ ἐσχημάτισε σπουδαῖον λιμενοβραχίονα καὶ ἀνήγειρεν ἐπὶ τῆς νήσου Φάρου πύργον φέροντα εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτοῦ μέρος πυρσὸν φωτίζοντα κατὰ τὴν νύκτα. Κατὰ τὰς διασωθείσας ἐνδείξεις, τὸ ὕψος τοῦ πύργου ἔφθανε τὰ 115—135 μ. Οὗτος ἀπετελεῖτο ἐκ τριῶν διαφόρων μερῶν. Τὸ κατώτερον εἶχε βάσιν τετράγωνον, τὸ μεσαῖον εἶχε βάσιν ὀκτάγωνον καὶ τὸ ἀνώτερον κυλινδρικήν. Κλῖμαξ ἑλικοειδὴς ἔφερε μέχρι τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου τοῦ πύργου. Κατὰ τὴν περιγραφὴν Ἀράβων συγγραφέων ἡ κορυφὴ τοῦ πύργου ἦτο ὁρατὴ κατὰ τὴν ἡμέραν εἰς ἀπόστασιν 150 χιλιομέτρων. Ἐκ τοῦ ὀνόματος τῆς νήσου Φάρου, ὅπου εὑρίσκετο ὁ πύργος ὠνομάσθη ἔκτοτε φάρος, πᾶσα ἐγκατάστασις διαθέτουσα φωτισμὸν κατὰ τὴν νύκτα διὰ τὴν ὁδήγησιν τῶν ναυτιλλομένων. Ἀρχιτέκτων τοῦ Φάρου τῆς Ἀλεξανδρείας ἦτο ὁ Κνίδιος Σώστρατος υἱὸς τοῦ Δεξιφάνους, ὡς εὑρέθη εἰς σκαλιστὴν ἐπὶ τοῦ τοίχου τοῦ Φάρου ἐπιγραφήν. Κατὰ τὰ ἔθιμα τῆς τότε ἐποχῆς ἀπηγορεύετο ἡ ἀναγραφὴ τῶν ὀνομάτων τῶν Ἀρχιτεκτόνων εἰς τὰ μεγάλα δημόσια ἔργα εἰς τὰ ὁποῖα ἐμνημονεύετο μόνον τὸ ὄνομα τοῦ Βασιλέως. Ὁ Σώστρατος ἐσκάλισεν ἐπὶ μαρμαρίνης πλακὸς τοῦ τοίχου, ὅτι «ὁ Σώστρατος υἱὸς τοῦ Δεξιφάνους ἐκ Κνίδου ἐποίησεν ἐν ὀνόματι ὅλων τῶν ναυτιλλομένων· ἀφιεροῦται εἰς τοὺς σωτῆρας Θεούς» καὶ ἐκάλυψεν αὐτὴν διὰ γύψου. Ἐπὶ τοῦ γύψου ἔγραψε τὸ ὄνομα τοῦ Πτολεμαίου. Μετὰ πάροδον πολλῶν ἐτῶν κατέπεσεν ὁ γύψος καὶ ἀνεφάνη ἡ κάτωθεν αὐτοῦ ὑπάρχουσα ἐπιγραφὴ τοῦ Σωστράτου.

Ἡ Ἀλεξάνδρεια ἀπέβη μέγα κέντρον, τὸ μεγαλύτερον κέντρον Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνολογίας τοῦ τρίτου αἰῶνος π.Χ. Ἐκεῖ ἱδρύθη περίφημον Πανεπιστήμιον, ὅπου ἐδίδαξεν ὁ μέγας μαθηματικὸς Εὐκλείδης, ὁ Ἐρατοσθένης, ὁ Κόνων ὁ Σάμιος, ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος καὶ ἄλλοι μεγάλοι ἐπιστήμονες καὶ ἐκεῖ ἱδρύθη ἡ πρώτη μεγάλη βιβλιοθήκη τοῦ κόσμου, ἡ ὁποία περιελάμβανε 500.000 τόμους ἔργων τῶν μεγάλων Ἑλλήνων συγγραφέων. Ἐκεῖ ἐγεννήθη περὶ τὸ 300 π.Χ. ὁ περίφημος Ἕλλην μηχανικὸς Κτησίβιος. Ὁ Κτησίβιος κατὰ πληροφορίαν τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ συγγραφεὺς Ἀθήναιος ἦτο υἱὸς κουρέως, εἶχε μάθει ὀλίγα γράμματα καὶ ἀπὸ ἡλικίας 13 ἐτῶν εἰργάζετο εἰς τὸ κουρεῖον τοῦ πατρός του. Ἀπὸ τῆς μικρᾶς αὐτῆς ἡλικίας ἤρχισε νὰ διαλάμπῃ ἡ τεχνικὴ μεγαλοφυΐα τοῦ μικροῦ Κτησιβίου, ὁ ὁποῖος ἐπενόησε μικρὰν συσκευὴν διὰ τῆς ὁποίας μεγάλος καθρέπτης ἀνήρχετο καὶ κατήρχετο εἰς ἕνα τῶν τειχῶν τοῦ κουρείου, χωρὶς νὰ φαίνεται ποῖος τὸν κινεῖ. Ἡ πελατεία τοῦ κουρείου ηὐξήθη ταχέως. Μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ὁ Κτησίβιος ἔκαμε σπουδαίας ἀνακαλύψεις, αἱ ὁποῖαι προεκάλεσαν τὴν κατάπληξιν τῶν συγχρόνων του Τεχνικῶν. Μεταξὺ τῶν ἀνακαλύψεων αὐτῶν ἀναφέρονται: 1) Τὸ περίφημον μουσικὸν ὄργανον, τὸ ἁρμόνιον, τὸ ὁποῖον ἐλειτούργει διὰ κυκλοφοροῦντος ὕδατος. 2) Τὰ ὡρολόγια τὰ λειτουργοῦντα ἐπίσης διὰ κυκλοφοροῦντος ὕδατος, τὰ καλούμενα ὡροσκοπεῖα, 3) ἡ ἀναρροφητικὴ καὶ καταθλιπτικὴ ἀντλία τὴν ὁποίαν περιγράφει ὁ Ρωμαῖος συγγραφεὺς Βιτρούβιος, 4) ἐτελειοποίησε τὸν καταπέλτην καὶ τοὺς ὀδοντωτοὺς τροχούς, τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἀρχὴ πιθανολογεῖται, ὅτι ἔγινε ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Στράτωνος, πολὺ ὀλίγα ἔτη πρεσβυτέρου τοῦ Κτησιβίου. Ἄλλη πληροφορία τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως λέγει ὅτι ὁ Κτησίβιος εἶχε σπουδάσει μηχανικὸς καὶ δὲν ἦτο κουρεύς. (Ἀθηναίου Δειπνοσοφισταὶ IV 75).

Ὀλίγα ἔτη νεώτερος τοῦ Κτησιβίου ἦτο ὁ Ἀρχιμήδης (287—212 π.Χ.), ὅστις ἐγεννήθη καὶ ἀπέθανεν εἰς τὰς Συρακούσας τῆς Σικελίας, περίλαμπρον πόλιν ἱδρυθεῖσαν ὑπὸ τῶν ἐκ Κορίνθου Δωριέων ὑπὸ τὴν ἀρχηγίαν τοῦ στρατηγοῦ Ἀρχίου. Ὁ πατήρ του ὠνομάζετο Φειδίας καὶ ἦτο ἀστρονόμος, ἀρκετὰ εὔπορος καὶ συγγενὴς τοῦ Τυράννου τῶν Συρακουσῶν Ἱέρωνος. Τὰ πρῶτα γράμματα ἐδιδάχθη ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὰς Συρακούσας. Κατόπιν διέμενεν ἀρκετὸν καιρὸν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν διὰ σπουδάς. Κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν διεπίστωσεν, ὅτι ἐνῷ ἡ Αἴγυπτος διερρέετο ὑπὸ τοῦ Νείλου, ἑνὸς τῶν μεγαλυτέρων ποταμῶν τοῦ κόσμου, αἱ παρόχθιοι περιοχαὶ δὲν ἐκαλλιεργοῦντο. Τότε ὁ Ἀρχιμήδης ἐπενόησε τὴν περίφημον καταστᾶσαν ἀντλητικὴν μηχανήν, ἡ ὁποία ὠνομάσθη κοχλίας ἢ ἕλιξ. Ἐπὶ δύο χιλιάδας περίπου ἔτη οἱ παρόχθιοι τοῦ Νείλου ἀγροὶ ἐποτίζοντο διὰ τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἠντλεῖτο διὰ τοῦ κοχλίου τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἡ τεχνικὴ μεγαλοφυΐα τοῦ Ἀρχιμήδους διέλαμψε κατὰ τὴν πολιορκίαν τῶν Συρακουσῶν ὑπὸ τῶν Ρωμαίων. Ἐπὶ τρία σχεδὸν ἔτη οἱ Ρωμαῖοι εὑρίσκοντο εἰς ἀδυναμίαν νὰ καταλάβουν τὴν πόλιν. Αἱ φοβεραὶ κατὰ θάλασσαν ἐπιθέσεις των συνετρίβοντο ἐκ τῶν μηχανημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὰ πλοῖα τῶν Ρωμαίων ἀνηρπάζοντο δι' ἁρπάγης, μετεωρίζοντο ὑψηλὰ καὶ ἀφίνοντο νὰ πέσουν εἰς τὴν θάλασσαν ὅπου ἐβυθίζοντο. Φοβερὸν θέαμα παρεῖχεν κατὰ τοὺς ἱστορικούς, ἡ ἐκσφενδόνισις τῶν ναυτῶν εἰς τὴν θάλασσαν, ἐκ τῶν περιστρεφομένων ἐν αἰωρήσει πλοίων τῶν Ρωμαίων.

Οἱ Ρωμαῖοι προσεπάθησαν τέλος νὰ κυριεύσουν ἀπὸ θαλάσσης τὴν πόλιν πλησιάζοντες εἰς αὐτὴν τεραστίους πολεμικοὺς πύργους, ὀνομαζομένους σαμβύκας, ἐπειδὴ οὗτοι ὡμοίαζον πρὸς τὸ μουσικὸν τριγωνικὸν ὄργανον σαμβύκη. Ἑκάστη σαμβύκη, ἦτο τοποθετημένη ἐπὶ ὀκτώ, συνεζευγμένων ἀνὰ δύο, πλοίων. Ὅταν αὕτη ἐπλησίαζεν εἰς τὸ τεῖχος ἀνυψοῦτο διὰ τροχαλίας κλῖμαξ ὕψους ἀναλόγου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τείχους, εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὁποίας εὑρίσκοντο ἐπὶ προστατευμένου μικροῦ χώρου 4—5 ὁπλῖται ἕτοιμοι νὰ εἰσπηδήσουν εἰς τὸ τεῖχος καὶ νὰ σχηματίσουν προγεφύρωμα. Ἡ σαμβύκη ἦτο τελειοποιημένη παραλλαγὴ τοῦ πολεμικοῦ πύργου τοῦ Δημητρίου τοῦ πολιορκητοῦ, ἦτο δηλαδὴ ἑλληνικῆς ἐπινοήσεως κατασκευή. Ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε λάβει τὰ μέτρα του καὶ διὰ τὰς συμβύκας. Ὅταν αὗται ἐπλησίαζον εἰς τὸ τεῖχος ἄφινε ἀπὸ μεγάλο ὕψος νὰ πέσουν εἰς αὐτὰς διὰ τῶν περιστρεφομένων γερανῶν του τεράστιοι λίθοι, οἱ ὁποῖοι τὰς συνέτριβον. Ἐκτὸς τῶν παντὸς εἴδους βαλλιστικῶν μηχανημάτων του ὁ Ἀρχιμήδης ἔκαιε τὰ πλοῖα τῶν Ρωμαίων διὰ κατόπτρων, διὰ τῶν ὁποίων συνεκέντρωνε τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἡλίου καὶ τὰς κατηύθυνε πρὸς αὐτά. Οἱ Ρωμαῖοι ἀπεγοητεύθησαν καὶ ἐσταμάτησαν τὰς ἐπιθέσεις καὶ περιωρίσθησαν εἰς ἀποκλεισμὸν ἐλπίζοντες νὰ ἀναγκάσουν τὴν πόλιν εἰς παράδοσιν διὰ τῆς πείνης.

Κατὰ τὸ τρίτον ὅμως τοῦ πολέμου ἔτος, ὁ σύμμαχος τῶν Συρακουσίων Ἱσπανὸς στρατηγὸς Mericos, ὅστις εἶχεν ἀναλάβει τὴν φύλαξιν ὡρισμένων πυλῶν τοῦ φρουρίου, ἐπρόδωσε τὴν πόλιν καὶ ἄφησε τὸν στρατὸν τῶν Ρωμαίων νὰ εἰσέλθῃ εἰς αὐτὴν ἀμαχητί. Τὰ μηχανήματα ὅμως τοῦ Ἀρχιμήδους ἀπεδείχθησαν ἀήττητα.

Ἐκ τῶν ἄλλων τεχνικῶν ἀνακαλύψεων τοῦ Ἀρχιμήδους ἀναφέρομεν τὴν κατασκευὴν τοῦ πλανηταρίου, ἤτοι μεγάλης ὑαλίνης ἢ μεταλλικῆς σφαίρας, ἡ ὁποία περιεῖχε τὸν ἥλιον καὶ ὅλους τοὺς πλανήτας ἐκτελοῦντας τὰς ἐτησίας κινήσεις των. Θαυμάσια ἐσημειοῦντο ἐπίσης αἱ κινήσεις καὶ αἱ φάσεις τῆς σελήνης καὶ τῶν 12 ζῳδίων. Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ νόμου τῶν μοχλῶν, ἡ θεμελίωσις τῶν νόμων τῆς Στατικῆς, ἡ ἀνακάλυψις τοῦ νόμου τῆς ἀνώσεως εἰς τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια ἀποτελοῦν ὑπέροχα τεχνικὰ ἐπιτεύγματα, τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὰ ἴχνη τοῦ Ἀρχιμήδους βαδίζουν καὶ οἱ περίφημοι μηχανικοὶ Φίλων ὁ Βυζάντιος καὶ ὁ Ἥρων. Ὁ Φίλων ἦτο μαθητὴς τοῦ Κτησιβίου καὶ ἀντάξιος αὐτοῦ εἰς ἐφευρετικότητα. Ἐτελειοποίησε πολλὰς μηχανικὰς κατασκευάς, περὶ τῶν ὁποίων ὅμως οὐδεμία λεπτομέρεια εἶναι γνωστή. Ἔγραψε σπουδαῖον βιβλίον Μηχανικῆς ὑπὸ τὸν τίτλον Μηχανικὴ Σύστασις τοῦ ὁποίου ἐσώθησαν ἀποσπάσματα, μερικὰ τῶν ὁποίων ἀφοροῦν εἰς πολεμικὰς μηχανὰς καὶ ἄλλα εἰς τὴν ὀχύρωσιν πόλεων. Ἐδίδαξεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν πιθανῶς δὲ καὶ εἰς τὴν Ρόδον.

Ὁ Ἥρων ἤκμασε περὶ τὸ 100 μ.Χ. Διετέλεσε Πρύτανις τοῦ Ἑλληνικοῦ Πολυτεχνείου τῆς Ἀλεξανδρείας, ὑπῆρξε πολυγραφώτατος εἰς τεχνικὰς πραγματείας καὶ ἐπέτυχε σπουδαίας ἀνακαλύψεις καὶ ἐφευρέσεις. Ἐτελειοποίησε πολλὰς βλητικὰς μηχανὰς καὶ ἐπενόησε τὰ πρῶτα αὐτόματα μηχανήματα, τὰ ὁποῖα τόσην ἐξέλιξιν ἔχουν λάβει σήμερον. Εἶναι ὁ πρῶτος φυσικὸς καὶ μηχανικός,* ὅστις ἀνεκάλυψε τὴν δύναμιν τοῦ ἀτμοῦ πρὸς κίνησιν, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποίησε εἰς τὴν κατασκευὴν παιγνίων προκαλούντων τὸν θαυμασμόν. Μόνον 1915 ἔτη ἐχρειάσθη νὰ παρέλθουν διὰ νὰ σκεφθῇ ὁ Ἄγγλος φυσικὸς καὶ μηχανικὸς Βάτ (Watt) τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀτμοῦ διὰ τὴν κίνησιν τῆς πρώτης ἀτμομηχανῆς, τὴν ὁποίαν ἐπέτυχε κατὰ τὸ ἔτος 1765.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀνασκοπήσωμεν δι' ὀλίγων τὰ τεχνικὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων θὰ καταλήξωμεν εἰς τὴν

*μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη

ἑξῆς διαπίστωσιν: Αἱ βάσεις τῶν τεχνικῶν ἐπιστημῶν τόσον ἀπὸ καθαρῶς θεωρητικῆς, ὅσον καὶ ἀπὸ ἐμπειρικῆς ἀπόψεως εἶναι ἔργον τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ὁ ἠλεκτρισμὸς καὶ ὁ μαγνητισμὸς ἀνακαλυφθέντες ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ περὶ τὸ 600 π.Χ. δεσπόζουν τῆς σημερινῆς τεχνικῆς. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ μαθηματικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν θεωρητικὴν φυσικὴν ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους διήνοιξε νέους δρόμους εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν. Ἡ ἀνάπτυξις τῶν μαθηματικῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἡ χρησιμοποίησις αὐτῶν εἰς τὰς μηχανικάς του ἀνακαλύψεις, ἡ ἀνακάλυψις ὑπ' αὐτοῦ ἀγνώστων μέχρι τότε φυσικῶν νόμων καὶ ἡ χρησιμοποίησις καὶ ἡ ἐφαρμογὴ ὅλων τῶν πορισμάτων ἐκ τῶν ἐρευνῶν του ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος ὡδήγησαν τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα διὰ νὰ παρουσιάσῃ τὸ σύγχρονον θαυμάσιον οἰκοδόμημα τῆς τεχνικῆς.

Γεννῶνται ὅμως τὰ ἐρωτήματα: 1) Ποία εἶναι ἡ ἐπίδρασις τῶν τεχνικῶν ἐπιτευγμάτων εἰς τὸν πνευματικὸν καὶ τὸν ψυχικὸν βίον τοῦ ἀνθρώπου; 2) Ἡ ἀνθρωπίνη ψυχὴ εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρῃ λύτρωσιν ἐκ τῶν προόδων τῆς τεχνικῆς;

Ὡς πρὸς τὸ πρῶτον ἐρώτημα οἱ εἰδικοὶ ἐπιστήμονες δὲν καταλήγουν εἰς συμφωνίαν, ἐκφράζεται δὲ ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν τυχὸν ἐπίδρασιν τῆς τεχνικῆς εἰς τὸν πνευματικὸν καὶ τὸν ψυχικὸν βίον τοῦ ἀνθρώπου.

Ὡς πρὸς τὸ δεύτερον ἐρώτημα ὁμόφωνος εἶναι ἡ γνώμη τῶν εἰδικῶν, ὅτι ἡ λύτρωσις τῆς ἀνθρωπίνης ψυχῆς ἐκ τῶν πόνων τῆς καθημερινῆς ζωῆς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῶν προόδων τῆς τεχνικῆς. Ὁμολογεῖται δέ, ὅτι ἡ θρησκεία εἶναι τὸ παρήγορον καὶ ἀσφαλὲς καταφύγιον τῆς ἀναζητούσης τὴν λύτρωσιν ἀνθρωπίνης ψυχῆς.

ΕΥΑΓΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑΙ

ΤΟΜΟΣ Β' 1970, σελὶς 33

ΠΟΣΕΙΔΩΝΙΟΣ

Ο ΜΕΓΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΣ

Ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ κ. ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ,
μέλους τῆς Διεθνοῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν

Ὁ Ποσειδώνιος ἐγεννήθη εἰς τὴν Ἀπάμειαν τῆς Συρίας περὶ τὸ 135 π.Χ. Ἐσπούδασεν εἰς τὰς Ἀθήνας, ὅπου ἐφοίτησεν εἰς τὴν Σχολὴν τῶν Στωϊκῶν, τῆς ὁποίας διευθυντὴς ἦτο ὁ Παναίτιος. Ὁ μεγάλος πλοῦτος τῆς οἰκογενείας του ἐπέτρεψεν εἰς αὐτὸν νὰ ἐπιχειρήσῃ μακρινὰ ἐπιστημονικὰ ταξίδια καὶ νὰ γνωρίσῃ καὶ συνδεθῇ μὲ τὴν ἀνωτάτην ἀριστοκρατίαν τῆς Ρώμης. Ἠσχολήθη μὲ μεγάλην ἐπιτυχίαν τόσον μὲ τὰ θέματα τῶν θεωρητικῶν ἐπιστημῶν, ὅσον καὶ μὲ τὰ θέματα τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν. Ἐπεσκέφθη τὴν Ἱσπανίαν, τὴν νότιον Γαλλίαν, τὴν Σικελίαν, τὴν Ἰταλίαν καὶ τὴν Βόρειον Ἀφρικὴν κατὰ τὴν ἐπάνοδον ἐκ τῆς Ἱσπανίας πρὸς τὴν Σικελίαν. Σκοπὸς τοῦ ταξιδίου αὐτοῦ ἦτο νὰ μελετήσῃ τὴν ἱστορίαν καὶ τὰ ἤθη καὶ ἔθιμα τῶν λαῶν τῶν περιοχῶν αὐτῶν, τὴν γεωλογικὴν σύστασιν καὶ γενικῶς τὴν μορφολογίαν τοῦ ἐδάφους, ὡς καὶ τὰ μετεωρολογικὰ φαινόμενα, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τοὺς ἐν Σικελίᾳ ἐτησίας ἀνέμους.

Περὶ τὸ 90 π.Χ. ἵδρυσε Σχολὴν εἰς τὴν Ρόδον, ἡ ὁποία χάρις εἰς τὴν προσωπικότητα τοῦ ἱδρυτοῦ ἀνεδείχθη ἰσότιμον πρὸς τὰ ἄλλα δύο μέγιστα ἑλληνικὰ πνευματικὰ κέντρα παγκοσμίου ἐπιβολῆς, τὰς Ἀθήνας καὶ τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ὡς φιλόσοφος, ὡς θεολόγος, ὡς μαθηματικός, ὡς ἀστρονόμος, ὡς φυσικός, ὡς γεωγράφος, ὡς ἱστορικὸς ὁ Ποσειδώνιος ἦτο ἡ μεγαλυτέρα φυσιογνωμία τῆς ἐποχῆς του. Ἡ φήμη τῆς Σχολῆς προσείλκυσεν ὡς μαθητάς του ἐξέχοντας Ρωμαίους, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Κικέρων. Κατὰ τὸν Δεκέμβριον τοῦ 87—Ἰανουάριον τοῦ 86 π.Χ., ἀπεστάλη ὡς πρεσβευτὴς τῆς Ρόδου εἰς τὴν Ρώμην, ὅπου προεκάλεσε μεγάλον θαυμασμόν. Περὶ τὸ 66 π.Χ. ἐπεσκέφθη τὸν Ποσειδώνιον εἰς τὴν Ρόδον ὁ Ρωμαῖος στρατηγὸς Πομπήϊος, ὁ ὁποῖος εἶχε γνωρίσει αὐτὸν εἰς τὴν Ρώμην, μεταβαίνων εἰς τὴν Μικρὰν Ἀσίαν, ὡς ἀρχιστράτηγος τῶν Ρωμαίων ἐναντίον τοῦ Μιθριδάτου. Ὁ Πομπήϊος 40 ἐτῶν τότε, θαυμαστὴς τοῦ Ποσειδωνίου, παρηκολούθησε μίαν διάλεξιν αὐτοῦ καὶ ἀναχωρῶν διὰ τὴν ἐκστρατείαν ἐζήτησε τὴν εὐχὴν τοῦ γέροντος ἤδη Ποσειδωνίου, ὁ ὁποῖος τοῦ ηὐχήθη τὸ τοῦ Ὁμήρου «αἰὲν ἀριστεύειν καὶ ὑπείροχον ἔμμεναι ἄλλων» (Ἰλιὰς Ζ 208). Κατὰ τὸ 62 π.Χ. ἐπιστρέφων εἰς τὴν Ρώμην νικητὴς τοῦ Μιθριδάτου ὁ Πομπήϊος διῆλθε πάλιν διὰ τῆς Ρόδου διὰ νὰ ἐπισκεφθῇ τὸν Ποσειδώνιον καὶ ὑποβάλῃ τὰ σεβάσματά του. Δεκατέσσαρα ἔτη μετὰ τὴν ἐπίσκεψιν τοῦ Πομπηΐου ὁ Ποσειδώνιος ἀπέθανεν εἰς ἡλικίαν 84 ἐτῶν περὶ τὸ 51 π.Χ. Ὁ Ποσειδώνιος ἦτο πολυγραφώτατος. Ἀπὸ μεταγενεστέρους συγγραφεῖς πληροφορούμεθα, ὅτι εἶχε γράψει τὰ ἑξῆς 26 ἔργα, τὰ ὁποῖα ὅλα ἐχάθησαν: 1) Φυσικὸς λόγος, 2) Περὶ κόσμου, 3) Περὶ Θεῶν, 4) Περὶ ἡρώων καὶ δαιμόνων, 5) Περὶ εἱμαρμένης, 6) Περὶ μαντικῆς, 7) Περὶ ψυχῆς, 8) Περὶ παθῶν, 9) Περὶ ἀρετῶν, 10) Σύνταγμα περὶ ὀργῆς, 11) Ἠθικὸς λόγος, 12) Περὶ καθήκοντος, 13) Περὶ τοῦ προτρέπεσθαι, 14) Περὶ κριτηρίου, 15) Περὶ λέξεως εἰσαγωγή, 16) Πρὸς Ἑρμαγόραν, 17) Περὶ ὠκεανοῦ καὶ τῶν κατ' αὐτόν, 18) Περὶ μετεώρων, 19) Μετεωρολογικὴ Στοιχείωσις, 20) Περὶ τοῦ ἡλίου μεγέθους, 21) Περὶ συγκρίσεως Ὁμήρου καὶ Ἀράτου, 22) Πρὸς Ζήνωνα (ἔργον μαθηματικοῦ περιεχομένου), 23) Τὰ μετὰ Πολύβιον εἰς 52 βιβλία,

24) Ἱστορία περὶ τὸν Πομπήϊον, 25) Ἐπιστολαὶ ἠθικοῦ περιεχομένου, 26) Περὶ τακτικῆς.

Ἕνεκα τῆς ἀπωλείας τῶν ἔργων του ὁ Ποσειδώνιος παρέμενεν, ἄσημος καὶ σχεδὸν ἄγνωστος μέχρι τῶν τελευταίων χρόνων τοῦ 19ου αἰῶνος, ἤτοι ἐπὶ 1900 ἔτη περίπου. Ἀπὸ τοῦ 1878 ὅμως, χάρις εἰς μίαν διδακτορικὴν ἐργασίαν τοῦ Γερμανοῦ Corssen, ἡ ὁποία ἐνεκρίθη εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Bonn, ὁ Ποσειδώνιος ἔγινε γνωστός. Ἔκτοτε ἐπὶ 80 περίπου ἔτη ἐπηκολούθησε συστηματικὴ ἔρευνα διὰ τὸν Ποσειδώνιον καὶ κατωρθώθη νὰ σχηματισθῇ σαφὴς γνώμη περὶ τοῦ ἔργου καὶ τῆς ἀξίας τοῦ μεγάλου τούτου Ἕλληνος ἐπιστήμονος καὶ φιλοσόφου. Δυστυχῶς τὰ διασωθέντα ἀποσπάσματα, καίτοι ἐμελετήθησαν ἐπισταμένως ὑπὸ τῶν Γερμανῶν λογίων, δὲν ἐξεδόθησαν ἀκόμη εἰς ἀνεξάρτητον πραγματείαν, δὲν εἶναι δὲ γνωστὸν ἂν τυχὸν Ἕλληνες λόγιοι τῶν ἐπιστημονικῶν Κέντρων Ἐρευνῶν τῆς Ἑλλάδος ἔχουν ἀσχοληθῆ μὲ τὸν Ποσειδώνιον καὶ τὴν ἔκδοσιν τῶν διασωθέντων ἀποσπασμάτων. Κατὰ τοὺς λογίους Γερμανοὺς ὁ Ποσειδώνιος ὡς πνευματικὴ ἀξία κατατάσσεται εἰς τὴν χορείαν τοῦ Δημοκρίτου, τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους, ἡ ἐπίδρασις δὲ τοῦ Ποσειδωνίου εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ συγχρόνου δυτικοῦ πολιτισμοῦ ὀφείλεται κατὰ τοὺς αὐτοὺς λογίους περισσότερον εἰς αὐτὸν παρὰ εἰς τὸν Δημόκριτον, τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη. Ὁ Ποσειδώνιος ὁρίζει τὴν φιλοσοφίαν ὡς γνῶσιν τῶν θείων καὶ ἀνθρωπίνων πραγμάτων. Ὅλα τὰ ὑπάρχοντα εἰς τὸν κόσμον πράγματα, συνδέονται ὑπὸ τῆς συμπαθείας. Ὁ Θεὸς εἶναι πανταχοῦ παρών. Ὁ κόσμος ἀποτελεῖ ἑνιαῖον ὀργανικὸν σύνολον. Εἰς τὸ κοσμικὸν σύστημα ἐνυπάρχει ἡ ψυχὴ τοῦ κόσμου, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν γῆν. Ἐδῶ ὁ Ποσειδώνιος φαίνεται, ὅτι ἔχει ἐγκαταλείψει τὰς θεωρίας τῶν Στωϊκῶν καὶ εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὰς κοσμογονικὰς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος, αἱ ὁποῖαι ἐκτίθενται λεπτομερῶς εἰς τὸν Τίμαιον μαζὶ μὲ τὴν πληροφορίαν τοῦ σοφοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως, ὅτι ἡ μεγάλη νῆσος Ἀτλαντὶς εὑρισκομένη ἔξω τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτὰρ ἐβυθίσθη περὶ τὸ 9600 π.Χ. κατὰ τὸν κατακλυσμὸν τοῦ Δευκαλίωνος.

Ἡ φιλοσοφία τοῦ Ποσειδωνίου ἀποτελεῖ σύνθεσιν, ἡ ὁποία μὲ δεξιοτεχνίαν συγχωνεύει ὅλας τὰς φιλοσοφικὰς δοξασίας τῆς ἐποχῆς του. Προσπαθεῖ νὰ συμφιλιώσῃ τὰς ἀντιθέσεις, αἱ ὁποῖαι παρατηροῦνται εἰς τὰς θρησκευτικὰς καὶ συναισθηματικὰς ἀντιλήψεις τῶν συγχρόνων του. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς ἐξεταζομένη ἡ φιλοσοφία τοῦ Ποσειδωνίου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προάγγελος τῆς ἐρχομένης νέας θρησκείας, τῆς θρησκείας τῆς Χριστιανικῆς.

Ἐκτὸς τῶν φιλοσοφικῶν ἀντιλήψεων καὶ θεωριῶν τοῦ Ποσειδωνίου θαυμασμὸν προκαλοῦν διὰ τὴν μεγαλοφυΐαν του τρεῖς διασωθεῖσαι πληροφορίαι σχετικαὶ πρὸς τὰς θετικὰς ἐπιστήμας. Ἡ πρώτη ἐκ τούτων εἶναι γεωγραφικοῦ περιεχομένου καὶ διεσώθη ὑπὸ τοῦ Ρωμαίου συγγραφέως Σενέκα, ὁ ὁποῖος λέγει, ὅτι κατὰ τὸν Ποσειδώνιον, ἂν πλεύσωμεν εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν κατευθυνόμενοι πρὸς δυσμὰς θὰ φθάσωμεν εἰς τὰς Ἰνδίας. Λέγεται, ὅτι ὁ Κολόμβος εἶχεν ἀναγνώσει τὴν πληροφορίαν αὐτὴν τοῦ Σενέκα. Ἡ δευτέρα πληροφορία εἶναι μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ διεσώθη ὑπὸ τοῦ Πρόκλου (410 — 485 μ.Χ.), διατελέσαντος διευθυντοῦ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος. Ὁ ἐπικούρειος φιλόσοφος Ζήνων ὁ Σιδώνιος ὑπεστήριζεν, ὅτι αἱ μαθηματικαὶ ἀποδείξεις δὲν ἔχουν καμμίαν ἀξίαν, διότι τὰ ἀξιώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζονται αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀναπόδεικτα. Δι' εἰδικῆς πραγματείας ὁ Ποσειδώνιος ἀνήρεσε τὰς θεωρίας τοῦ Ζήνωνος, καίτοι καὶ σήμερον ἀκόμη ἡ σχετικὴ συζήτησις δὲν θεωρεῖται τερματισθεῖσα. Σπουδαῖος θεωρεῖται ὁ ὁρισμὸς τῶν παραλλήλων γραμμῶν ὑπὸ τοῦ Ποσειδωνίου, ὁ ὁποῖος εἶναι διάφορος τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Εὐκλείδου. Ἡ τρίτη πληροφορία ἀφορᾷ εἰς τὴν ἐφεύρεσιν τῆς τυπογραφίας, ἡ ὁποία ἀνάγεται εἰς σκέψιν τοῦ Ποσειδωνίου. Ὁ Κικέρων ἀναφέρει τὴν συγκεχυμένην κάπως πληροφορίαν, ὅτι ὁ Ποσειδώνιος αὐτὸς εἶχε διατυπώσει τὴν γνώμην, περὶ κατασκευῆς κινητῶν γραμμάτων στοιχείων, τὴν ὁποίαν μαθὼν ὁ Γουτεμβέργιος ἐξ ἀναγνώσεως ἔργου τοῦ Κικέρωνος ἔθεσεν εἰς ἐφαρμογήν, ὡς γράφει ὁ Γερμανὸς καθηγητὴς Hermann Diels, (H. Diels, Antike Technik, Λειψία 1920, σελὶς 119).

ΕΥΑΓΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Βιβλιογραφία : Pauly - Wissowa R. E. Stuttgart 1953, Posidonios.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΕΑΙ

ΤΟΜΟΣ Β' 1970, σελὶς 235

ΤΟ ΤΗΛΕΒΟΛΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΑΙ ΤΟ ΥΓΡΟΝ ΠΥΡ ΤΩΝ ΒΥΖΑΝΤΙΝΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ,
μέλους τῆς Διεθνοῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν

Ι

Ἡ πολιορκία τῶν Συρακουσῶν ὑπὸ τῶν Ρωμαίων διήρκεσε τρία περίπου ἔτη (215—212 π.Χ.). Ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν χρόνον τῆς ἁλώσεως συγγραφεὺς εἶναι ὁ Πολύβιος, ὁ ὁποῖος ἤκμασε περὶ τὸ 150 π.Χ. καὶ διετέλεσεν εἰς τὴν ὑπηρεσίαν τοῦ Σκιπίωνος τοῦ Ἀφρικανοῦ. Ἡ περιγραφὴ τῆς ἁλώσεως τῶν Συρακουσῶν ὑπὸ τοῦ Πολυβίου δὲν ἐσώθη ὁλόκληρος. Ἀπὸ τὴν περιγραφὴν ὅμως αὐτὴν ἀντλεῖ τὰς πληροφορίας του ὁ Πλούταρχος, ὁ ὁποῖος ἔγραφε τὰ τῆς πολιορκίας καὶ ἁλώσεως τῆς πόλεως περὶ τὸ 100 μ.Χ. Τόσον οἱ Ἕλληνες συγγραφεῖς, ὅσον καὶ οἱ Λατῖνοι ἀναγράφουν πολλὰς πληροφορίας διὰ τὰ μηχανήματα τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τῶν ὁποίων ἀπεκρούοντο αἱ λυσσαλέαι ἐπιθέσεις τῶν Ρωμαίων, Καμμία ὅμως πληροφορία δὲν ἀναφέρει συγκεκριμένως περὶ τοῦ τηλεβόλου τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ὁποῖον ἔρριπτε μεγάλο σφαιρικὸν βλῆμα, λίθινον ἢ μεταλλικόν, εἰς ἀπόστασιν 1000—1200 μέτρων. Μόλις κατὰ τὰ μέσα τοῦ 14ου αἰῶνος ὁ Ἰταλὸς ποιητὴς Πετράρχης μνημονεύει τοῦ Ἀρχιμήδους τηλεβόλον, τοῦ ὁποίου τρία σχεδιάσματα 100 ἔτη βραδύτερον διέσωσεν ὁ περίφημος καλλιτέχνης καὶ ἐφευρέτης Λεονάρδος ντὰ Βίντσι. Κατὰ τὰ σχεδιάσματα αὐτὰ τὸ τηλεβόλον ἀπετελεῖτο ἀπὸ μίαν κάννην ἐκ σκληροῦ ξύλου, μήκους 1,5 μέτρου περίπου καὶ διαμέτρου μερικῶν ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου. Εἰς τὸ ὀπίσθιον στόμιον τῆς κάννης ἐτοποθετεῖτο τὸ σφαιρικὸν βλῆμα. Τὸ ὀπίσθιον αὐτὸ μέρος κατέληγεν εἰς σιδηροῦν δοχεῖον σχήματος κύβου, μὲ τὸ ὁποῖον συνεδέετο ἑρμητικῶς. Τὸ δοχεῖον εἶχε ἰσχυρὰ τοιχώματα καὶ ἦτο κενόν. Εἰς αὐτὸ κατέληγε τὸ στόμιον σωλῆνος ἀναχωροῦντος ἐκ δοχείου πλήρους ὕδατος εὑρισκομένου ὀλίγον ὑψηλότερον. Τὸ δοχεῖον τὸ συνδεδεμένον μὲ τὴν κάννην ἐθερμαίνετο σχεδὸν μέχρι διαπυρώσεως, ὁπότε διὰ δικλεῖδος ἀφίνετο νὰ εἰσρεύσῃ ἐντὸς αὐτοῦ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον μετετρέπετο ἀμέσως εἰς ἀτμόν, μὲ τὴν τάσιν τοῦ ὁποίου ἐβάλλετο τὸ βλῆμα εἰς ἀπόστασιν 1000—1200 μέτρων. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης θὰ εἶχε κατασκευάσει καὶ σκοπευτικὰ ὄργανα, ἀλλὰ περὶ αὐτῶν οὐδεμία πληροφορία διεσώθη. Τὸ πρῶτον λοιπὸν τηλεβόλον τοῦ κόσμου, ὑπὸ τὴν σύγχρονον ἔννοιαν τοῦ τηλεβόλου, ἦτο ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Κατὰ τὸν 14ον αἰ. εἰσήχθη εἰς τὴν Εὐρώπην ἡ χρῆσις τῆς πυρίτιδος ἐκ τῆς Κίνας, ὁπότε ἀντὶ τοῦ ἀτμοῦ διὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τοῦ βλήματος ἐχρησιμοποιήθη ἡ πυρῖτις. Ἀκριβῶς ἐναντίον τοῦ νέου αὐτοῦ ὅπλου διαμαρτύρεται ὁ ἀνθρωπιστὴς Πετράρχης καὶ κατὰ τὴν διαμαρτυρίαν του ἀναφέρει τὸ τηλεβόλον τοῦ Ἀρχιμήδους, προσθέτων ὅτι τοὐλάχιστον ὁ Ἀρχιμήδης ἐπενόησε τὸ τηλεβόλον διὰ νὰ προστατεύσῃ τὴν πατρίδα του καὶ ὄχι διὰ κατακτητικοὺς σκοπούς. Πολλὰ ἀπὸ τὰ πολεμικὰ μηχανήματα τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν ἔγιναν γνωστά, ἐν ᾧ ἄλλα ἐγνώσθησαν καὶ ἐχρησιμοποιήθησαν ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων. Μεταξὺ τῶν μηχανημάτων αὐτῶν περιλαμβάνονται καὶ κάτοπτρα, καταλλήλως συνδεδεμένα, διὰ τῶν ὁποίων ὁ Ἀρχιμήδης ἔκαιε ἐκ τοῦ μακρόθεν τὰ πλοῖα τῶν Ρωμαίων. Περὶ τὸ 518 μ.Χ., ἐπὶ Αὐτοκράτορος τοῦ Βυζαντίου Ἀναστασίου, ὁ μηχανικὸς καὶ φυσικὸς Πρόκλος διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κατόπτρων ἔκαυσε τὸν στόλον τῶν Σκυθῶν καὶ τῶν Μυσῶν, διὰ τοῦ ὁποίου οὗτοι εἶχον ἐπέλθει κατὰ τοῦ Βυζαντίου, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Ἰωάννου Ζωναρᾶ (Ἐπιτομὴ XIV 3, 17 - 3, 28, Corpus Script. Hist. Byzantinae, ἔκδ. B. G. Nieburius, Vol. III, Berolini 1897, P. 137, 11).

II

Ἐκτὸς τοῦ τηλεβόλου καὶ τῶν καυστικῶν κατόπτρων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἄλλη σπουδαία ἐφεύρεσις ἑλληνικὴ εἶναι τὸ ὑγρὸν πῦρ τῶν Βυζαντινῶν.

Διὰ τὸ ὑγρὸν πῦρ, τὸ Βυζαντινὸν Κράτος εἶχε λάβει μέτρα, ὥστε τὰ ὑλικὰ καὶ ὁ τρόπος τῆς συνθέσεως αὐτῶν νὰ παραμείνουν μυστικά. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν ἔχομεν σαφῆ καὶ ἀκριβῆ γνῶσιν τῶν ὑλικῶν, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιοῦντο διὰ τὴν δημιουργίαν τοῦ ὑγροῦ πυρός. Ἀπὸ διαφυγούσας πληροφορίας, τὰ ὑλικὰ δημιουργίας τοῦ ὑγροῦ πυρὸς καὶ ἡ ποσολογία τῆς συνθέσεώς των ἦσαν τὰ ἑξῆς: 1 μέρος κολοφωνίου (λαμβανομένου κατὰ τὴν ἀπόσταξιν τῆς ρητίνης), 1 μέρος θείου καὶ 6 μέρη νίτρου. Ἡ πληροφορία αὕτη προέρχεται ἐκ συνταγῆς τοῦ Ἕλληνος συγγραφέως Μάρκου, τῆς ὁποίας σώζεται μετάφρασις εἰς τὴν λατινικήν, τοῦ 12ου αἰῶνος (Berthelot Chimie au Moyen AGE I 108). Τὸ μεῖγμα αὐτὸ διελύετο εἰς λινέλαιον ἢ δαφνέλαιον καὶ ἀφοῦ ἠνάπτετο ἐξηκοντίζετο, ὡς φλεγόμενον ὑγρόν, διὰ σωλῆνος ἐναντίον τῶν ἐχθρικῶν στόχων. Ἡ πρώτη χρῆσις τοῦ ὑγροῦ πυρὸς ἔγινε κατὰ 673 μ.Χ., ὅτε ὁ Ἀρχιτέκτων Καλλίνικος, ἐφευρέτης τοῦ ὑγροῦ πυρός, κατέκαυσε τὸν στόλον τῶν Ἀράβων, οἱ ὁποῖοι ἐπολιόρκουν τὴν Κωνσταντινούπολιν. Ἄλλη συνταγὴ τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως Μάρκου παρέχει τὴν ἑξῆς σύνθεσιν τοῦ μείγματος τοῦ προκαλοῦντος τὸ ὑγρὸν πῦρ: 1 μέρος θείου, 2 μέρη λινελαίου ἢ ἐλαίου ἰτυάς, 6 μέρη νίτρου. Εἰς τὸ βιβλίον του Τακτικὴ τῶν Τριήρων, ὁ συγγραφεὺς Λέων (πιθανῶς τῶν Ἰσαύρων, 717—741) λέγει ὅτι εἰς τὴν πρῷραν τῶν πολεμικῶν πλοίων ἐτοποθετεῖτο σίφων (κεκαμμένος σωλὴν) διὰ τοῦ ὁποίου ἐβάλλετο τὸ ὑγρὸν πῦρ ἐναντίον τῶν ἐχθρικῶν πλοίων, ἐν ᾧ συγχρόνως ἠκούετο κατὰ τὴν βολὴν μέγας κρότος καὶ ἐφαίνετο πολὺς καπνός. Ἄλλαι πληροφορίαι φέρουν ἀντὶ τοῦ λινελαίου χρησιμοποίησιν νάφθας (ἀκαθάρτου πετρελαίου). Μυστικὸν ἐκρατεῖτο κυρίως ἡ χρῆσις τοῦ νίτρου, τὸ ὁποῖον ἐλαμβάνετο ἀπὸ τὴν Ἐγγὺς Ἀνατολήν. Ὅτι τὸ ὑγρὸν πῦρ ἐξεσφενδονίζετο διὰ σωλήνων κατὰ τῶν ἐχθρικῶν στόχων πληροφορούμεθα καὶ ἔκ τινος σχεδιαγράμματος εὑρισκομένου εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τοῦ Βατικανοῦ. Εἰς αὐτὸ παρίστατο πολεμιστής, ὁ ὁποῖος διὰ κλίμακος ἔχει φθάσει εἰς τὸ ὕψος τοῦ τοίχου πολιορκουμένης πόλεως καὶ διὰ σωλῆνος βάλλει πῦρ καὶ ἐκδιώκει τοὺς ὑπερασπιστὰς τῆς πόλεως.

Ἐνδιαφερούσας πληροφορίας διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ ὑγροῦ πυρὸς ἔχει διασώσει ἡ συγγραφεὺς Ἄννα Κομνηνή, κόρη τοῦ Αὐτοκράτορος Ἀλεξίου Κομνηνοῦ Α΄ (περὶ τὸ 1080 μ.Χ.), περιγράφουσα τὴν πολιορκίαν τοῦ Δυρραχίου ὑπὸ τοῦ Νορμανδοῦ Βαϊμούνδου. Ὁ Βαϊμοῦνδος προσέβαλε τὴν πόλιν διὰ τεραστίου πολεμικοῦ μηχανήματος πολυορόφου, φερομένου ἐπὶ τροχῶν, τὸ ὁποῖον ὠνομάζετο κριός, διότι ἐπέπιπτε κατὰ τῶν πυλῶν τοῦ φρουρίου διὰ νὰ ἀνοίξῃ χάσμα. Οἱ πολιορκούμενοι ρίπτοντες ἐκ τῶν ἐπάλξεων ὑγρὸν πῦρ κατὰ τοῦ μηχανήματος μετέβαλον αὐτὸ εἰς τέφραν. Ἀφοῦ ὁ Ἀρχηγὸς τοῦ «φραγγικοῦ» στρατεύματος ἀπέτυχε νὰ καταλάβῃ τὴν πόλιν διὰ τοῦ μηχανήματος αὐτοῦ, ἐσοφίσθη ἄλλον τρόπον. Ἤρχισε νὰ σκάπτῃ ἀπὸ τὸ ἔξω μέρος τοῦ τείχους ὄρυγμα ὥστε δι' αὐτοῦ νὰ εἰσέλθῃ ὁ στρατὸς εἰς τὸ Δυρράχιον ὑπογείως. Οἱ πολιορκούμενοι παρηκολούθουν ἀπὸ τοὺς ἤχους τῆς ἀνασκαφῆς τὰς ἐργασίας τῆς ὀρύξεως καὶ ἀφοῦ κατετοπίσθησαν ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνοιγομένου ὀρύγματος ἤνοιγον καὶ αὐτοὶ ὄρυγμα μὲ ἀντίθετον διεύθυνσιν. Ὅταν συνήντησαν τὸ ἐχθρικὸν ὄρυγμα ἔρριπτον συνεχῶς ὑγρὸν πῦρ κατὰ τῶν ἐχθρῶν, οἱ ὁποῖοι πυρπολούμενοι ἐτράπησαν εἰς φυγήν. Τὴν σύνθεσιν καὶ χρῆσιν τοῦ πυρὸς αὐτοῦ περιγράφει ὡς ἑξῆς ἡ Ἄννα Κομνηνή: «Τοῦτο δὲ τὸ πῦρ ἀπὸ τοιούτων μηχανημάτων αὐτοῖς διεσκεύασεν. Ἀπὸ τῆς πεύκης καὶ ἄλλων τινῶν τοιούτων δένδρων ἀειθαλῶν συνάγεται δάκρυον εὔκαυστον. Τοῦτο μετὰ θείου τριβόμενον ἐμβάλλεται εἰς αὐλίσκους καλάμων καὶ ἐμφυσᾶται παρὰ τοῦ παίζοντος λάβρῳ καὶ συνεχεῖ πνεύματι... καὶ ἐξάπτεται καὶ ἐμπίπτει ταῖς ὄψεσιν. Τούτῳ τῷ πυρὶ κεχρημένοι... τάς τε γενειάδας αὐτῶν κατέφλεξαν καὶ τὰ πρόσωπα. Καὶ ἦ ἰδεῖν τούτους καθάπερ σμῆνος μελισσῶν ὑπὸ καπνοῦ διωκόμενον ἐξαγομένους ἀτάκτως, ὅθεν εὐτάκτως εἰσήεσαν».

Ὁ Βαϊμοῦνδος ἀφοῦ ἀπέτυχε καὶ διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ νὰ καταλάβῃ τὸ Δυρράχιον κατεσκεύασε τεράστιον πύργον-φρούριον, κινούμενον ἐπὶ τροχῶν δι' ἀνδρῶν εὑρισκομένων ἐντὸς τοῦ πύργου καὶ ἐπομένως ἀοράτων καὶ ἀπροσβλήτων ὑπὸ τῶν πολιορκουμένων. Ὁ πύργος αὐτὸς ὡμοίαζε πρὸς τὸν πύργον τοῦ Δημητρίου τοῦ πολιορκητοῦ, ὁ ὁποῖος εἶχε πολιορκήσει τὴν Ρόδον περὶ τὸ 300 π.Χ. Τὸ ὕψος τῶν ὀρόφων τοῦ τερατώδους αὐτοῦ πολιορκητικοῦ μηχανήματος εἶχεν ὑπολογισθῆ νὰ φθάνη ὀλίγον ὑψηλότερον τοῦ ὕψους τοῦ τείχους τῆς πόλεως. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῶν τειχῶν προσθέτει ἡ Ἄννα, οἱ βάρβαροι Φράγκοι ἐχρησιμοποίουν διόπτρας, τὰς ὁποίας βέβαια αὐτοὶ δὲν ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐφεύρουν. «Ὁ γοῦν πύργος ἐκεῖνος φοβερὸς μὲν ἰδεῖν, φοβερώτερος δὲ κινούμενος κατεφαίνετο». Οἱ πολιορκούμενοι ὑπολογίσαντες καὶ αὐτοὶ τὸ ὕψος τοῦ πύργου ἐγκατέστησαν ἐπὶ τοῦ τείχους (ὅπου ἐφέρετο ὁ πύργος) τέσσαρα μακρότατα ξύλα καὶ ἐπ' αὐτῶν ἐστερέωσαν μικρὸν δάπεδον ξύλινον, ὅπου στρατιῶται ἔχοντες ὑγρὸν πῦρ, ἀνέμενον τὸν πύργον νὰ πλησιάσῃ. Ὅταν τοῦτο συνέβη ἔρριπτον συνεχῶς ὑγρὸν πῦρ ἐναντίον του. Ἡ ἀπόστασις ὅμως τοῦ πύργου ἀπὸ τῶν τειχῶν δὲν ἦτο μικρὰ καὶ τὸ ὑγρὸν πῦρ προσέβαλλε μόλις μερικοὺς εἰς τὸ ὑψηλότερον μέρος αὐτοῦ ἀναβαίνοντας στρατιώτας. Ὁ πύργος ἔμενεν ἀκίνητος καὶ οἱ ἐντὸς αὐτοῦ ἀνέμενον κατάλληλον εὐκαιρίαν διὰ νὰ εἰσπηδήσουν εἰς τὸ τεῖχος. Οἱ πολιορκούμενοι τότε ἔρριψαν εἰς τὸ μεταξὺ πύργου καὶ τείχους διάστημα παντοίαν εὔφλεκτον ὕλην καὶ ἔλαιον πολὺ «κατὰ ποταμοὺς κινούμενον». Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὑγροῦ πυρὸς προεκάλεσαν τεραστίαν πυρκαϊάν, ἡ ὁποία ἀπετέφρωσε τὸν πύργον. «Θόρυβος δὲ καὶ ταραχὴ τοῖς ἔνδον βαρβάροις πολλὴ καὶ ἀμήχανος, τῶν μὲν ἐναπειλημένων (ἐγκαταλελειμμένων) τῷ πυρὶ καὶ ἀποτεφρουμένων, τῶν δὲ ἀπὸ μετεώρου ῥιπτούντων πρὸς τὴν γήν· βοὴ δὲ πολλὴ καὶ ἀμήχανος ταραχὴ ἀντηχούντων καὶ τῶν ἐκτός». (Ἄννα Κομνηνή, ᾿Αλεξιὰς XIII, 10).

ΕΥΑΓΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

H. Diels, Antike Technik, Osnabrück (1965).

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΦΙΛΟΓΕΛΩΣ

ΑΝΑΤΥΠΟΝ

ΕΚ ΤΗΣ ΕΠΕΤΗΡΙΔΟΣ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΑΔΙΚΩΝ ΜΕΛΕΤΩΝ

ΤΟΜΟΣ Η′ 1969

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1970

ΤΥΠΟΙΣ Β. ΚΑΡΥΔΗ - Α. ΣΙΑΦΑΚΑ

ΖΩΟΔΟΧΟΥ ΠΗΓΗΣ 48 — ΤΗΛ. 611-552

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΦΙΛΟΓΕΛΩΣ

Εἰς τὰς συγχρόνους πολιτισμένας κοινωνίας ἀστεῖα ἢ ἀνέκδοτα, λεγόμενα εἰς διαφόρους περιστάσεις ἀποτελοῦν σύνηθες φαινόμενον. Δὲν συνέβαινεν ὅμως τὸ ἴδιον καὶ εἰς τοὺς ἀρχαίους πολιτισμένους λαούς. Ὡς τονίζει ὁ τελευταῖος ἐκδότης τῶν περισωθέντων ἀρχαίων ἑλληνικῶν ἀστείων Γερμανὸς λόγιος Andreas Thierfelder ἡ δημιουργία τῶν ἀστείων κατὰ τὴν ἀρχαίαν ἐποχὴν «παρατηρεῖται μόνον εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας, τοὺς μεγάλους θεωρητικοὺς καὶ διδασκάλους ὅλων τῶν λαῶν». (Andreas Thierfelder, Philogelos, Heimeran Verlag, München 1968 P. 17). Τοὺς Ἕλληνας ἐμιμήθησαν οἱ Ρωμαῖοι καὶ βραδύτερον οἱ λαοὶ τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης.

Εἰς τὴν πολιτικὴν ζωὴν τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν Πόλεων - Κρατῶν εἶχον ἀποκτήσει τὰ ἀστεῖα καὶ ἡ δι' αὐτῶν ἐκφραζομένη πολλάκις βαθεῖα εἰρωνεία μεγάλην σημασίαν. Οἱ ρήτορες παρεμβάλλοντες εἰς τὴν ρύμην τοῦ λόγου των κατάλληλον ἀστεῖον προεκάλουν εὐμενεῖς διαθέσεις ὑπὲρ ἑαυτῶν ἢ δυσμενεῖς κρίσεις διὰ τοὺς ἀντιπάλους των.

Ἡ ἀρχαιοτέρα πηγὴ ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν γνῶσιν περὶ ὑπάρξεως ἀστείων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἶναι δύο στίχοι τοῦ ἐκ τῆς νήσου Πάρου καταγομένου ποιητοῦ Ἀρχιλόχου (7ος αἰὼν π.Χ.), οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς ἑξῆς:

Ἀπόσπ. 107. Ἐρασμονίδη Χαρίλαε, χρῆμα τι γελοῖον
ἐρέω, πολὺ φίλταθ' ἑταίρων, τέρψεαι δ' ἀκούων.

(Anthologia Lyrica Graeca, Ed. Ernestus Diehl. Fasc. 3, B. G. Teubner, Lipsiae 1954, P. 44).

(Γυιὲ τοῦ Ἐράσμου Χαρίλαε, θὰ σοῦ πῶ κάποιο ἀστεῖο, ἀγαπητότατε πολὺ μεταξὺ τῶν φίλων, θὰ εὐχαριστηθῇς δέ, ὅταν τὸ ἀκούσῃς).

Ἐκ τῶν διασωθέντων ἀστείων μερικὰ ἀπαντοῦν εἰς τὰς κωμῳδίας τῆς κλασσικῆς ἐποχῆς, ἄλλα δὲ εἰς τοὺς μύθους τοῦ Αἰσώπου. Κατὰ τὴν ἑλληνιστικὴν ἐποχὴν ἡ δημιουργία ἀστείων ἔλαβε μεγάλην ἀνάπτυξιν διὰ τῶν παρασίτων. **Παράσιτα** ὠνομάζοντο ἄνθρωποι εὐφυεῖς μὲν ἀλλὰ πτωχοί, οἱ ὁποῖοι ἐκαλοῦντο ὑπὸ τῶν πλουσίων ἢ τῶν ἀρχόντων εἰς τὰ δεῖπνα των, ὅπου ἔλεγον διάφορα ἀστεῖα πρὸς τέρψιν τῶν συνδαιτημόνων. Φαίνεται ὅμως βέβαιον, ὅτι **παράσιτα** ὑπῆρχον μὲ εὐρυτέραν ἀποστολὴν καὶ εἰς τὴν κλασσικὴν ἐποχὴν καὶ ἔτι παλαιότερον ἀκόμη, ἰδίως εἰς τοὺς κρατικοὺς Προϋπολογισμούς!!

Ὡς ἀρχαιότατον βιβλίον ἀστείων μνημονεύεται ἡ πραγματεία τοῦ ποιητοῦ Φιλιστίωνος, ὁ ὁποῖος ἤκμασε κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ πρώτου αἰῶνος. Τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ἔχει διασωθῆ μόνον ὁ τίτλος, ὁ ὁποῖος εἶναι «Φιλόγελως», δηλ. ὁ προκαλῶν τὰ γέλοια. Ἡ περισυλλογὴ τῶν διασωθέντων ἀστείων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς ἀνέρχεται εἰς 265 περίπου, ἀνάγεται εἰς τὸν 6ον αἰῶνα καὶ ἀποδίδεται εἰς τοὺς Ἀλεξανδρινοὺς γραμματικοὺς Φιλάγριον καὶ Ἱεροκλῆ. Πιθανὸν ὁ Ἱεροκλῆς αὐτὸς νὰ εἶναι Νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος.

Ὁ συνήθης τύπος ἀνθρώπου, περὶ τὸν ὁποῖον στρέφονται τὰ ἀστεῖα τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον «Φιλόγελως» συλλογῆς, εἶναι ὁ σχολαστικός. Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο νοεῖται γενικῶς ὁ φοιτῶν εἰς τὰς Σχολὰς εἴτε ὡς διδάσκαλος εἴτε ὡς σπουδαστής. Μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἡ λέξις ἔλαβε καὶ κάποιαν εἰρωνικὴν σημασίαν. Ἀναφέρεται ὅμως ὁ τίτλος τοῦ σχολαστικοῦ καὶ εἰς ἄλλα ἐπαγγέλματα.

Ἐκτὸς τοῦ σχολαστικοῦ διακρίνονται καὶ ἄλλοι τύποι ἀνθρώπων περὶ τοὺς ὁποίους δημιουργοῦνται ἀστεῖα. Οἱ τύποι αὐτοὶ εἶναι: ὁ φιλάργυρος, ὁ μωρός, ὁ εὐτράπελος, ὁ δύσκολος, ὁ δειλός, ὁ ἀφυής, ὁ ὀζόστομος (βρωμάει τὸ στόμα του), ὁ ὀζόχρωμος (βρωμάει τὸ σῶμα του), ὁ φθονερός, ὁ Ἀβδηρίτης, ὁ Κυμαῖος, ὁ Σιδόνιος καὶ ἄλλοι. Οἱ τελευταῖοι τρεῖς τύποι ἀφοροῦν εἰς ὅλους τοὺς κατοίκους τῶν πόλεων: Ἄβδηρα (κειμένης εἰς τὰς ἐκβολὰς τοῦ ποταμοῦ Νέστου), Κύμη (εἰς τὴν Μικρασιατικὴν παραλίαν, ὀλίγα χιλιόμετρα βορείως τῆς Σμύρνης) καὶ Σιδὼν (ἐξελληνισθείσης πόλεως τῆς Συρίας), οἱ ὁποῖοι εἶχον χαρακτηρισθῆ ὑπὸ τῶν λοιπῶν Ἑλλήνων ὡς ἀφελεῖς. Περίφημος ἔχει παραμείνει ἡ φρᾶσις «ἀβδηριτισμὸν ὀφλισκάνειν», δηλ. αὐτὸς χρωστάει τῆς Μιχαλοῦς.

Τὰ κυκλοφοροῦντα ἀστεῖα ἦσαν ποικίλης δυναμικότητος ἀστεϊσμοῦ. Ἄλλα ἦσαν περισσότερον καὶ ἄλλα ὀλιγώτερον πνευματώδη. Τὰ περισσότερον πνευματώδη ἦσαν τὰ ἀττικά, ἐνῷ τὰ ὀλιγώτερον ἦσαν τὰ σικελικά. Κατωτέρω προτάσσεται τὸ ἀρχαῖον κείμενον καὶ ἀκολουθεῖ ἀμέσως ἡ μετάφρασις ἑκάστου ἀστείου. Οἱ ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμοὶ δηλοῦν τοὺς ἀριθμοὺς τῆς γερμανικῆς ἐκδόσεως And. Thierfelder.

ΦΙΛΟΓΕΛΩΣ
ΕΚ ΤΩΝ
ΙΕΡΟΚΛΕΟΥΣ ΚΑΙ ΦΙΛΑΓΡΙΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΥ

1 (1) Σχολαστικὸς ἀργυροκόπῳ ἐπέταξε λύχνον ποιῆσαι, τοῦ δὲ ἐξετάσαντος πηλίκον ποιήσει, ἀπεκρίνατο· Ὡς πρὸς ὀκτὼ ἀνθρώπους.

Σχολαστικὸς παρήγγειλε σ' ἕναν ἀργυροχόο ἕνα λύχνο. Ὅταν δὲ αὐτὸς τὸν ἐρώτησε πόσο μεγάλος νὰ εἶναι, τοῦ εἶπε· Γιὰ ὀχτὼ ἀνθρώπους.

2 (2) Σχολαστικὸς κολυμβῶν παρὰ μικρὸν ἐπνίγη· ὤμοσε δὲ εἰς ὕδωρ μὴ εἰσελθεῖν, ἐὰν μὴ μάθῃ πρῶτον κολυμβᾶν.

Σχολαστικὸς ἐνῷ ἐκολύμβα παρ' ὀλίγον θὰ ἐπνίγετο· ὡρκίσθη δὲ νὰ μὴ ξαναμπῇ στὸ νερό, ἐὰν δὲν μάθῃ πρῶτα νὰ κολυμβᾷ.

3 (3) Σχολαστικῷ τις ἰατρῷ προσελθὼν εἶπεν· Ἰατρέ, ὅταν ἀναστῶ ἐκ τοῦ ὕπνου, ἡμιώριον ἐσκότωμαι καὶ εἶθ' οὕτως ἀποκαθίσταμαι. καὶ ὁ ἰατρός· Μετὰ τὸ ἡμίωρον ἐγείρου.

Κάποιος ἐπεσκέφθη ἕνα σχολαστικὸ γιατρὸ καὶ τοῦ εἶπε· Γιατρέ, μόλις σηκωθῶ ἀπὸ τὸν ὕπνο μὲ πιάνει μισὴ ὥρα σκοτοδίνη καὶ ὕστερα συνέρχομαι. Καὶ ὁ γιατρὸς τοῦ εἶπε· Νὰ σηκώνεσαι μισὴ ὥρα ἀργότερα.

4 (5) Σχολαστικῷ τις ἀπαντήσας ἔφη· Κύριε σχολαστικέ, καθ' ὕπνους σε εἶδον. Ὁ δέ· Μὰ τοὺς θεούς, εἶπεν, ἀσχολῶν οὐ προσέσχον.

Κάποιος συνήντησε ἕνα σχολαστικὸ καὶ τοῦ εἶπε· Κύριε σχολαστικέ, σὲ εἶδα στὸν ὕπνο μου. Καὶ αὐτὸς τοῦ ἀπήντησε· Μὰ τὸ θεὸ ἤμουν ἀπησχολημένος καὶ δὲν σὲ κατάλαβα.

5 (6) Σχολαστικὸς ἰατρὸν συναντήσας ὑπὸ τοῖχον ἐκρύβη. τινὸς δὲ πυθομένου τὴν αἰτίαν, ἔφη· Καιρὸν ἔχω μὴ ἀσθενήσας καὶ αἰσχύνομαι εἰς ὄψιν ἐλθεῖν τοῦ ἰατροῦ.

Σχολαστικὸς συναντήσας στὸ δρόμο τὸ γιατρό του κρύφθηκε πίσω ἀπὸ ἕνα τοῖχο. Ὅταν δὲ κάποιος τὸν ἐρώτησε γιατί τὸ ἔκανε αὐτό, τοῦ εἶπε· Ἔχω πολὺ καιρὸ ν' ἀρρωστήσω καὶ ντρέπομαι νὰ δῶ τὸν γιατρο.

6 (8) Σχολαστικὸς θέλων πιάσαι μῦν συνεχῶς τὰ βιβλία αὐτοῦ τρώγοντα κρέας δακὼν ἐν τῇ σκοτίᾳ ἐκάθισεν.

Σχολαστικὸς θέλων νὰ πιάσῃ ποντικὸ ποὺ τοὔτρωγε συνεχῶς τὰ βιβλία του, ἀφοῦ δάγκωσε ἕνα κομμάτι κρέας κάθησε στὸ σκοτάδι καὶ τὸν περίμενε.

7 (9) Σχολαστικὸς θέλων αὐτοῦ τὸν ὄνον διδάξαι μὴ τρώγειν οὐ πα

ρέβαλεν αὐτῷ τροφάς. ἀποθανόντος δὲ τοῦ ὄνου ἀπὸ λιμοῦ ἔλεγε· Μεγάλα ἐζημιώθην· ὅτε γὰρ ἔμαθε μὴ τρώγειν, τότε ἀπέθανεν.

Σχολαστικὸς θέλων νὰ μάθῃ τὸ γαϊδούρι του νὰ μὴν τρώῃ, δὲν τοῦ ἔδινε τροφή. Ὅταν λοιπὸν ψόφησε τὸ γαϊδούρι ἀπὸ τὴν πεῖνα ἔλεγε· Πολὺ ζημιώθηκα· γιατὶ μόλις ἔμαθε νὰ μὴν τρώῃ τότε πέθανε.

8 (11) Σχολαστικὸς θέλων ἰδεῖν, εἰ πρέποι αὐτῷ κοιμᾶσθαι, καμμύσας ἐσωπτρίζετο.

Σχολαστικὸς θέλων νὰ ἰδῇ πῶς τοῦ πάει, ὅταν κοιμᾶται, πῆγε στὸν καθρέφτη μὲ κλειστὰ τὰ μάτια.

9 (12) Σχολαστικῷ ἀποδημοῦντι φίλος αὐτοῦ ἔλεγεν· ἀξιῶ σε δύο παῖδας ἀγοράσαι μοι, ἑκάτερον πεντεκαίδεκα ἐτῶν. Ὁ δὲ εἶπεν· Ἐὰν τοιούτους μὴ εὕρω, ἀγοράσω σοι ἕνα τριάκοντα ἐτῶν;

Σχολαστικόν, ὁ ὁποῖος θὰ ταξίδευε, τὸν παρεκάλεσε ἕνας φίλος του νὰ τοῦ ἀγοράσῃ δύο δούλους δέκα πέντε ἐτῶν τὸν καθένα. Ὁ δὲ σχολαστικὸς τὸν ρώτησε· Ἐὰν δὲν βρῶ δύο τῶν 15 νὰ σοῦ πάρω ἕνα τῶν 30;

10 (15) Σχολαστικὸς καθ' ὕπνους ἧλον πεπατηκέναι δόξας τὸν πόδα περιέδησεν. ἑταῖρος δὲ αὐτοῦ πυθόμενος τὴν αἰτίαν καὶ γνούς· Δικαίως, ἔφη, μωροὶ καλούμεθα. διατί γὰρ ἀνυπόδητος κοιμᾶσαι;

Σχολαστικός, ἀφοῦ εἶδε στὸν ὕπνο του ὅτι πάτησε ἕνα καρφί, ἔδεσε τὸ πόδι του μὲ ἐπίδεσμο. Ὅταν δὲ ἕνας φίλος του σχολαστικὸς τὸν ἐρώτησε γιὰ ποιό λόγο ἔχει δεμένο τὸ πόδι του καὶ πῆρε τὴν ἀπάντησι, τοῦ εἶπε. Ἔχουνε δίκαιο νὰ μᾶς λένε κουτούς. Ποιός σοῦ εἶπε νὰ κοιμᾶσαι χωρὶς παπούτσια;

11 (17) Σχολαστικῷ ἑταῖρος ἀποδημῶν ἔγραφεν, ἵνα αὐτῷ βιβλία ἀγοράσῃ. ὁ δὲ ἀμελήσας, ἐπανελθόντι αὐτῷ ἀπαντήσας· Τὴν ἐπιστολήν, εἶπεν, ἣν περὶ τῶν βιβλίων ἀπέστειλας, οὐκ ἐδεξάμην.

Σχολαστικὸς ἔλαβε γράμμα ἀπὸ ἕνα φίλο του ταξιδεύοντα, νὰ τοῦ ἀγοράσῃ βιβλία. Τὸ ξέχασε ὅμως καὶ ὅταν ὁ φίλος του γύρισε καὶ τὸν συνήντησε τοῦ εἶπε· Τὸ γράμμα ποὺ μοὔστειλες γιὰ τὰ βιβλία δὲν τὸ ἔλαβα.

12 (18) Σχολαστικῷ τις ἀπαντήσας εἶπεν· Ὁ δοῦλος ὃν ἐπώλησάς μοι, ἀπέθανε. Μὰ τοὺς θεούς, ἔφη, παρ' ἐμοὶ ὅτε ἦν, τοιοῦτον οὐδὲν ἐποίησεν.

Κάποιος συναντήσας στὸ δρόμο ἕνα σχολαστικὸ τοῦ εἶπεν· Ὁ δοῦλος ποὺ μοῦ πούλησες, πέθανε. Μὰ τὸ θεό, ἀπήντησε, ὅταν ἦταν σὲ μένα δὲν ἔκανε τέτοιο πρᾶγμα.

13 (19) Σχολαστικὸς ἰδὼν πολλοὺς στρουθοὺς ἐπὶ δένδρου ἑστῶτας, ἀ-

πλώσας τὸν κόλπον ἔσειε τὸ δένδρον ὡς ὑποδεξόμενος τοὺς στρουθούς.

Σχολαστικὸς ὅταν εἶδε μιὰ μέρα σ' ἕνα δένδρο πολλὰ σπουργίτια, ἀφοῦ ἄνοιξε τὸν κόλπο του ἔσειε τὸ δένδρο γιὰ νὰ μαζέψῃ τὰ σπουργίτια.

14 (21) Σχολαστικὸς καθευδῆσαι βουλόμενος, μὴ ἔχων προσκεφάλαιον ἐκέλευσε τῷ δούλῳ κεράμιον ὑποθεῖναι. τοῦ δὲ εἰπόντος, ὅτι σκληρόν ἐστι, πτερῶν αὐτὸ γεμισθῆναι ἐκέλευσεν.

Σχολαστικὸς θέλων νὰ κοιμηθῇ καὶ μὴ ἔχων προσκεφάλαιον, διέταξε τὸν δοῦλον του νὰ τοῦ βάλῃ γιὰ προσκέφαλο μιὰ στάμνα. Ὅταν δὲ ὁ δοῦλος τοῦ εἶπε ὅτι ἡ στάμνα εἶναι σκληρή, τὸν διέταξε νὰ τὴν γεμίσῃ μὲ φτερά.

15 (22) Σχολαστικὸς ἀπαντήσας τινὶ φίλῳ αὐτοῦ εἶπεν· Ἤκουσα ὅτι ἀπέθανες. ὁ δὲ ἀπεκρίνατο· Ἀλλ' ὁρᾷς με ζῶντα. καὶ ὁ σχολαστικός· Καὶ μὴν ὁ εἰπών μοι κατὰ πολὺ σοῦ ἀξιοπιστότερος ἦν.

Σχολαστικὸς συναντήσας ἕνα φίλο του τοῦ εἶπε· Ἄκουσα ὅτι πέθανες. Καὶ αὐτὸς τοῦ ἀπήντησε· Μὰ μὲ βλέπεις ζωντανό. Καὶ ὁ σχολαστικὸς ἀνταπήντησε· Μὰ αὐτὸς ποὺ μοῦ τὸ εἶπε εἶναι πολὺ ἀξιοπιστότερος ἀπὸ σένα.

16 (24) Σχολαστικὸς μαχόμενος τῷ πατρὶ λέγει πρὸς αὐτόν· Κακὲ δοῦλε, οὐχ' ὁρᾷς, οἷά με ἐζημίωσας; εἰ γὰρ σὺ μὴ ἐγεννήθης, ἐγὼ ἂν τὸν πάππον μου ἐκληρονόμησα.

Σχολαστικὸς ποὺ μάλωνε μὲ τὸν πατέρα του τοῦ εἶπε· Κακὲ δοῦλε, δὲν βλέπεις πόσο μ' ἐζημίωσες; Γιατὶ ἅμα ἐσὺ δὲν εἶχες γεννηθῇ θὰ κληρονομοῦσα τὸν παπποῦ μου.

17 (26) Σχολαστικὸς ἐρευνῶν, ποῦ ὀφείλει κτίσαι ἑαυτῷ οἴκημα (ἤγουν μνῆμα), εἰπόντων δὲ τινῶν, ὅτι καλὸν εἴη ὧδε που ἔφη· Ἀλλὰ νοσώδης ὁ τόπος.

Σχολαστικὸς ψάχνων νὰ βρῇ ποῦ εἶναι καλλίτερα νὰ κτίσῃ τὸν τάφον του, ὅταν μερικοὶ τοῦ ὑπέδειξαν κάποιο μέρος γιὰ καλό, εἶπε· Ναί, ἀλλὰ ὁ τόπος ἐκεῖ εἶναι ἀνθυγιεινός.

18 (29) Διδύμων ἀδελφῶν ὁ ἕτερος ἐτελεύτησεν. Σχολαστικὸς οὖν ἀπαντήσας τῷ ζῶντι ἠρώτα· Σὺ ἀπέθανες ἢ ὁ ἀδελφός σου;

Διδύμων ἀδελφῶν ὁ ἕνας πέθανε. Ὅταν ἕνας σχολαστικὸς συνήντησε τὸν ζωντανό, τὸν ἐρώτησε· Σὺ πέθανες ἢ ὁ ἀδελφός σου;

19 (40) Σχολαστικὸς μικρὸν υἱὸν ἀπολέσας, θεασάμενος πολλοὺς ἐπὶ τὸ κῆδος ἀπαντήσαντας διὰ τὴν ἐξουσίαν αὐτοῦ ἔλεγεν· Αἰδοῦμαι μικρὸν

παιδίον εἰς τοσοῦτον ὄχλον ἐκφέρων.

Σχολαστικὸς τοῦ ὁποίου πέθανε ἕνα μικρὸ παιδί, ὅταν εἶδε πάρα πολλοὺς ἀνθρώπους στὴν κηδεία, οἱ ὁποῖοι ἐπῆγαν ἐπειδὴ εἶχε μεγάλο ἀξίωμα, εἶπε· Ντρέπομαι μὲ τόσο πολλοὺς ἀνθρώπους νὰ κηδεύω ἕνα μικρὸ παιδί.

20 (45) Σχολαστικὸς νυκτὸς ἐπανέστη τῇ μάμμῃ αὐτοῦ. πληγὰς δὲ διὰ τοῦτο ὑπὸ τοῦ πατρὸς λαβών· Σύ, εἶπεν, τοσοῦτος χρόνος ἐστὶν ἐξ οὗ τὴν μητέρα μου ὀχεύεις, μηδὲν ὑπ' ἐμοῦ παθών, καὶ νῦν ὀργίζῃ ἐπὶ τῇ μητρί σου ἅπαξ με εὑρών;

Σχολαστικὸς ἕνα βράδυ πιάστηκε κοιμώμενος μὲ τὴ μάμμη του. Ὅταν γι' αὐτὸ τὸ πρᾶγμα ὁ πατέρας του τὸν ἔδειρε, τοῦ εἶπε· Ἐσὺ τόσα χρόνια κοιμᾶσαι μὲ τὴν μητέρα μου, καὶ δὲν ἔπαθες τίποτα ἀπὸ μένα, καὶ τώρα θυμώνεις γιατὶ μ' ἔπιασες μιὰ φορὰ νὰ κοιμᾶμαι μὲ τὴν μητέρα σου;

21 (55) Σχολαστικὸς εὐτράπελος ἀπορῶν δαπανημάτων τὰ βιβλία αὐτοῦ ἐπίπρασκε· καὶ γράφων πρὸς τὸν πατέρα ἔλεγε· Σύγχαιρε ἡμῖν πάτερ, ἤδη γὰρ ἡμᾶς τὰ βιβλία τρέφει.

Σχολαστικὸς εὐτράπελος ἐπειδὴ ἔμεινε χωρὶς χρήματα πωλοῦσε τὰ βιβλία του· καὶ γράφων πρὸς τὸν πατέρα του ἔλεγε· Πατέρα δόσε μας συγχαρητήρια, γιατὶ τώρα πιὰ μᾶς τρέφουν τὰ βιβλία.

22 (56) Σχολαστικὸς καὶ φαλακρὸς καὶ κουρεὺς συνοδεύοντες καί ἔν τινι ἐρημίᾳ μείναντες συνέθεντο πρὸς τέσσαρας ὥρας ἀγρυπνῆσαι καὶ τὰ σκεύη ἕκαστος τηρῆσαι. ὡς δὲ ἔλαχε τῷ κουρεῖ πρώτῳ φυλάξαι, μετεωρισθῆναι θέλων τὸν σχολαστικὸν καθεύδοντα ἔξυρεν καὶ τῶν ὡρῶν πληρωθεισῶν διύπνισεν. ὁ δὲ σχολαστικὸς ψήχων ὡς ἀπὸ ὕπνου τὴν κεφαλὴν καὶ εὑρὼν ἑαυτὸν ψιλόν· Μέγα κάθαρμα, φησίν, ὁ κουρεύς· πλανηθεὶς γὰρ ἀντ' ἐμοῦ τὸν φαλακρὸν ἐξύπνισεν.

Σχολαστικὸς καὶ φαλακρὸς καὶ κουρεὺς πηγαίνανε κάπου μαζὶ καὶ ὅταν σὲ κάποιο ἔρημο μέρος τοὺς ἔπιασε τὸ σκοτάδι, ἀπεφάσισαν νὰ κοιμηθοῦν ἐκεῖ καὶ ὁ καθένας τους νὰ φυλάξῃ τέσσερις ὧρες σκοπιά. Ὁ κλῆρος ἔπεσε νὰ φυλάξῃ πρῶτος ὁ κουρεύς, ὁ ὁποῖος χάριν ἀστειότητος ἐξύρισε τὸν σχολαστικὸν ἐνῶ ἐκοιμᾶτο, καὶ ὅταν ἦλθε ἡ ὥρα τὸν ἐξύπνησε. Ὁ δὲ σχολαστικὸς ξύνων τὸ κεφάλι του, ὡς ἦταν ἀπὸ τὸν ὕπνο, καὶ εὑρὼν τὸν ἑαυτόν του χωρὶς μαλλιὰ εἶπε· Μέγα κάθαρμα εἶναι ὁ κουρεύς· γιατὶ κατὰ λάθος ἀντὶ νὰ ξυπνήσῃ ἐμένα ἐξύπνησε τὸν φαλακρό.

23 (65) Σχολαστικὸς υἱὸς ὑπὸ τοῦ πατρὸς εἰς τὸν πόλεμον ἐκπεμπόμενος ὑπέσχετο κεφαλὴν ἑνὸς τῶν ἐχθρῶν ἔχων ἐλεύσεσθαι, ὁ δὲ ἔφη· Κἂν χωρίς σε κεφαλῆς ἐλθόντα ἴδω, εὐφρανθήσομαι.

Ἑνὸς σχολαστικοῦ τὸ παιδί, ὅταν ὁ πατέρας του τὸ κατευώδωνε στὸν πόλεμο, τοῦ ὑπεσχέθη νὰ ξανάλθῃ φέρων τὸ κεφάλι ἑνὸς ἐχθροῦ. Ὁ δὲ πατέρας του τοῦ εἶπε· Καὶ ἂν σὲ ἴδω ἐπιστρέφοντα χωρὶς κεφάλι θὰ εὐφρανθῶ.

24 (72) Σχολαστικὸς ἐν γάμοις ἑστιαθεὶς εἶτα ἀναχωρῶν· Εὔχομαι, εἶπεν, εὐτυχῶς καὶ ἀεὶ ταῦτα ὑμᾶς ποιεῖν.

Σχολαστικὸς ἀφοῦ ἔφαγε σ' ἕνα γάμο, φεύγοντας εἶπε· Εὔχομαι καὶ τοῦ χρόνου.

25 (93) Σχολαστικὸς μαθὼν περὶ κλίμακός τινος, ὅτι ἀναβαινόντων ἔχει βαθμοὺς εἴκοσιν, ἐπύθετο, εἰ καὶ καταβαινόντων τοσοῦτοί εἰσιν.

Σχολαστικὸς ἀφοῦ ἄκουσε γιὰ μιὰ σκάλα, ὅτι ὅταν ἀνεβαίνῃ κανεὶς ἔχει 20 σκαλοπάτια, ἐρώτησε, ἐὰν ἔχῃ τόσα καὶ ὅταν κατεβαίνῃ.

26 (98) Σχολαστικῷ ἑταῖρος ἀπαντήσας· Συγχαίρω σοι, εἶπεν, ὅτι σοι παιδίον ἐγεννήθη. ὁ δὲ ἀπεκρίνατο· Τοῦτο ὑμεῖς οἱ φίλοι ποιεῖτε.

Ἕνας φίλος σχολαστικοῦ συναντήσας αὐτὸν στὸ δρόμο τοῦ εἶπε· Σὲ συγχαίρω γιὰ τὸ νεογέννητο, καὶ ὁ σχολαστικὸς τοῦ ἀπήντησε· Μὰ τοῦτο τὸ χρωστάω σὲ σᾶς τοὺς φίλους.

27 (104) Φιλάργυρος διαθήκας γράφων ἑαυτὸν κληρονόμον ἔταξεν.

Φιλάργυρος γράφων τὴν διαθήκην του ἔβαλε κληρονόμον τὸν ἑαυτόν του.

28 (109) Μωρὸς ἀκούσας, ὅτι ἐν Ἅδου δίκαια κριτήρια, πρᾶγμα ἔχων ἀπήγξατο.

Ἕνας κουτὸς ἀκούσας ὅτι εἰς τὸν Ἅδην ἀπονέμεται δικαιοσύνη, ἔχων ἐκκρεμῆ ὑπόθεσιν ἀπηγχονίσθη.

29 (111) Ἐν Ἀβδήροις ὄνος λαθὼν εἰς τὸ γυμνάσιον εἰσῆλθε καὶ τὸ ἔλαιον ἐξέχεεν. οἱ δὲ συνελθόντες καὶ μεταπεμψάμενοι πάντας τοὺς ὄνους τοὺς ἐν τῇ πόλει καὶ εἰς ἕνα συναγαγόντες τόπον πρὸς τὸ ἀσφαλίσασθαι ἐνώπιον αὐτῶν τὸν ὄνον ἐμαστίγωσαν.

Εἰς τὰ Ἄβδηρα ξέφυγε ἕνας γάϊδαρος, μπῆκε στὸ γυμναστήριο καὶ ἔχυσε τὸ λάδι ποὺ ἄλειφαν τοὺς ἀθλητάς. Οἱ ἁρμόδιοι δὲ ἀφοῦ συνεσκέφθησαν καὶ ἔφεραν ὅλα τὰ γαϊδούρια εἰς ἕνα μέρος, διὰ νὰ μὴ ἐπαναληφθῇ τὸ κακό, ἔδειραν τὸ γαϊδούρι ἐνώπιόν των.

30 (112) Ἀβδηρίτης ἀπάγξασθαι βουλόμενος καὶ τοῦ σχοινίου διαρραγέντος τὴν κεφαλὴν ἐπλήγη. λαβὼν οὖν ἔμπλαστρον παρὰ τοῦ ἰατροῦ καὶ θεὶς κατὰ τοῦ τραύματος, ἀπελθὼν πάλιν ἀπήγξατο.

Ἀβδηρίτης ὁ ὁποῖος ἤθελε νὰ κρεμασθῇ, ὅταν ἔσπασε τὸ σχοινὶ ἐτραυματίσθη στο κεφάλι. Ἀφοῦ ἔδεσε τὴν πληγὴ μὲ ἐπίδεσμον ποὺ τοῦ ἔδωσε ὁ γιατρὸς ἐπῆγε πάλι καὶ ἐκρεμάσθη.

31 (115) Ἀβδηρίτης εὐνοῦχον ἰδὼν γυναικὶ ὁμιλοῦντα ἠρώτα ἄλλον, εἰ ἄρα γυνὴ αὐτοῦ ἐστι. τοῦ δὲ εἰπόντος εὐνοῦχον γυναῖκα ἔχειν μὴ δύνασθαι, ἔφη· Οὐκοῦν θυγάτηρ αὐτοῦ ἐστιν.

Ἀβδηρίτης ἰδὼν ἕνα εὐνοῦχον νὰ μιλάῃ σὲ μιὰ γυναῖκα, ἐρώτησε ἄλλον Ἀβδηρίτην, ἐὰν αὐτὴ ἤτανε γυναῖκα τοῦ εὐνούχου. Ὅταν δὲ ἐκεῖνος τοῦ εἶπεν ὅτι ὁ εὐνοῦχος δὲν μπορεῖ νὰ ἔχῃ γυναῖκα, εἶπε· Θὰ εἶναι λοιπὸν κορίτσι του.

32 (127) Ἀβδηρίτης ὀνάριόν τι χρεωστῶν καὶ μὴ ἔχων παρεκάλει, ἵνα ἀντ' αὐτοῦ δύο ἡμιόνους παράσχῃ.

Ἀβδηρίτης χρεωστοῦσε ἕνα γαϊδαρο καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶχε νὰ τὸν ξεπληρώσῃ παρεκάλει, ἂν ἦτο δυνατόν, ἀντὶ ἑνὸς ὄνου νὰ δώσῃ δύο ἡμιόνους.

33 (136) Σιδόνιος γραμματικὸς ἠρώτα τὸν διδάσκαλον· Ἡ πεντακότυλος λήκυθος πόσον χωρεῖ; ὁ δὲ εἶπεν· Οἶνον λέγεις ἢ ἔλαιον;

Σιδόνιος γραμματικὸς ρωτοῦσε τὸν διδάσκαλο· Τὸ πεντάλιτρο δοχεῖο πόσο χωρεῖ; Αὐτὸς δὲ τοῦ εἶπε· Κρασὶ ἐννοεῖς ἢ λάδι;

34 (140) Εὐτράπελος ἰδὼν γραμματοδιδάσκαλον ἀφυῆ διδάσκοντα προσελθὼν ἠρώτα, διατί κιθαρίζειν οὐ διδάσκει. τοῦ δὲ εἰπόντος· Ὅτι οὐκ ἐπίσταμαι, εἶπε· Πῶς οὖν γράμματα διδάσκεις οὐκ ἐπιστάμενος;

Ἕνας εὐτράπελος, ὅταν εἶδε ἕναν ἀνίκανο γραμματοδιδάσκαλο νὰ διδάσκῃ ἐπῆγε κοντὰ καὶ τὸν ἐρώτησε, γιατί δὲν διδάσκει καὶ κιθάρα. Ὅταν δὲ αὐτὸς τοῦ εἶπε, δὲν ξέρω κιθάρα, τοῦ εἶπε· Τότε πῶς διδάσκεις γράμματα, ἀφοῦ δὲν ξέρῃς;

35 (148) Εὐτράπελος φλυάρου κουρέως ἐρωτήσαντος· Πῶς σε κείρω; Σιωπῶν, ἔφη.

Ὅταν ἕνας εὐτράπελος ἐρωτήθη ἀπὸ τὸν φλύαρον κουρέα· Πῶς νὰ σὲ κουρέψω; τοῦ εἶπε, νὰ μὴ μιλᾷς.

36 (156) Κυμαῖος οἰκίαν πωλῶν λίθον ἐξ αὐτῆς ἐκβαλὼν εἰς δεῖγμα περιέφερεν.

Ἕνας Κυμαῖος ποὺ πουλοῦσε τὸ σπίτι του, πῆρε μιὰ πέτρα ἀπ' αὐτὸ καὶ τὴν περιέφερε γιὰ δεῖγμα.

37 (158) Κυμαῖος κλεψιμαῖα ἱμάτια ἀγοράσας διὰ τὸ μὴ γνωρισθῆναι ἐπίσσωσεν αὐτά.

Ἕνας Κυμαῖος ποὺ ἀγόρασε κλοπιμαῖα ροῦχα γιὰ νὰ μὴ τὰ ἀναγνωρίσουνε τὰ ἄλειψε μὲ πίσσα.

38 (164) Κυμαῖος ἐν τῷ κολυμβᾶν βροχῆς γενομένης διὰ τὸ μὴ βραχῆναι εἰς τὸ βάθος κατέδυ.

῞Ενας Κυμαῖος ἐνῶ κολυμβοῦσε τὸν ἔπιασε βροχή. Γιὰ νὰ μὴν βραχῆ κατέβηκε βαθύτερα.

39 (165) Κυμαῖος θυρίδας ἀγοράζων ἠρώτα, εἰ δύνανται πρὸς μεσημβρίαν βλέπειν.

῞Ενας Κυμαῖος ἐνῶ ἀγόραζε παράθυρα ρωτοῦσε, ἂν μποροῦσε μ' αὐτὰ νὰ βλέπη στὸ νοτιά.

40 (167) Κυμαῖος ἰδὼν πρόβατον συμπεποδισμένον καὶ οὕτω κειρόμενον εἶπεν Εὐχαριστῶ τῷ κουρεῖ μου, ὅτι οὐδέποτέ με δήσας ἔκειρεν.

῞Ενας Κυμαῖος, ὅταν εἶδε ἕνα πρόβατο νὰ τὸ κουρεύουν μὲ δεμένα τὰ πόδια εἶπεν· Εὐχαριστῶ τὸν κουρέα μου γιατὶ ποτὲ δὲν μὲ δένει, ὅταν μὲ κουρεύη.

41 (170) Κυμαίου τις ἐπύθετο, ποῦ μένει Δρακοντίδης ὁ Ρήτωρ. ὁ δὲ μόνος εἰμί, εἶπεν· εἰ δὲ θέλεις, τήρει τὸ ἐργαστήριον, κἀγὼ ἀπελθὼν δείξω σοι.

Κάποιος ἐζήτησε πληροφορίες ἀπὸ ἕνα Κυμαῖο, ποῦ μένει ὁ Ρήτωρ Δρακοντίδης. Αὐτὸς δὲ τοῦ ἀπήντησε· Εἶμαι μόνος στὸ μαγαζί, ἂν θέλης, φύλαξε ἐδῶ μιὰ στιγμή, καὶ ἐγὼ θὰ πάω νὰ σοῦ δείξω.

42 (173) Κυμαῖος μέλι ἐπίπρασκεν. ἐλθόντος δέ τινος καὶ γευσαμένου καὶ εἰπόντος, ὅτι πάνυ καλόν, ἔφη· Εἰ μὴ γὰρ μῦς ἐνέπεσεν εἰς αὐτό, οὐκ ἂν ἐπώλουν.

῞Ενας Κυμαῖος πουλοῦσε μέλι. ῞Οταν δὲ κάποιος ἀγοραστὴς ἦλθε καὶ ἐδοκίμασε καὶ εἶπε ὅτι εἶναι πολὺ καλό, εἶπε· Ἂν δὲν εἶχε πέση μέσα ἕνας ποντικός, δὲν θὰ τὸ πουλοῦσα.

43 (177) Κυμαῖος ἰατρὸς τέμνων τινὰ δεινῶς ἀλγοῦντα καὶ βοῶντα ἀμβλυτέραν σμίλην μετέλαβεν.

῞Ενας Κυμαῖος ἰατρὸς χειρουργῶν κάποιον, ἐπειδὴ ὁ ἄρρωστος πονοῦσε καὶ φώναζε δυνατά, γιὰ νὰ τὸν ξαλαφρώση, πῆρε μαχαίρι ποὺ δὲν ἔκοβε πολύ.

44 (183) Δυσκόλῳ ἰατρῷ προσελθών τις εἶπε· Σοφιστά, ἀνακεῖσθαι οὐ δύναμαι οὔτε ἑστάναι, ἀλλ' οὐδὲ καθῆσαι. καὶ ὁ ἰατρὸς εἶπεν· Οὐδέν σοι λείπει ἢ κρεμασθῆναι.

῞Οταν κάποιος ἄρρωστος ἐπεσκέφθη ἕναν ἰδιότροπο γιατρό, τοῦ εἶπε· Γιατρὲ δὲν μπορῶ νὰ εἶμαι ξαπλωμένος, οὔτε νὰ μένω ὄρθιος, οὔτε νὰ κάθωμαι. καὶ ὁ γιατρὸς τοῦ εἶπε· Δὲν σοῦ μένει τίποτε ἄλλο παρὰ νὰ κρεμασθῆς.

45 (206) Δειλὸς ἐρωτηθείς· Ποῖα τῶν πλοίων ἀσφαλέστερα, τὰ μακρὰ

ἢ τὰ στρογγύλα; ἔφη· Τὰ νενεωλκημένα.

Ἕνας δειλός, ὅταν ἐρωτήθη κάποτε ποιά πλοῖα εἶναι ἀσφαλέστερα, τὰ μακρυὰ ἢ τὰ στρογγυλά; εἶπε· Αὐτὰ που εἶναι βγαλμένα στὴν ξηρά.

46 (227) Σχολαστικῷ ἐν καπηλείῳ πίνοντι ἐπιστάς τις ἔφη· Ἡ γυνή σου ἀπέθανεν. ὁ δὲ ἀκούσας πρὸς τὸν κάπηλον ἔφη· Οὐκοῦν αὐθέντα, ἐκ τοῦ μελανοῦ κέρασον.

Ὅταν κάποιος συνάντησε σ' ἕνα καπηλειὸ ἕνα σχολαστικὸ νὰ πίνη τοῦ εἶπε· Ἡ γυναῖκα σου πέθανε. Αὐτὸς δὲ μόλις τὸ ἄκουσε εἶπε στὸν κάπηλο· Ἀφεντικὸ κέρασε μαῦρο κρασί.

47 (241) Μωρὸς κωφῷ συγκαθεύδων ἔδδεσε. τοῦ δὲ τὴν δυσωδίαν αἰσθομένου καὶ κατακράξαντος ἔφη· Ἴδε, πῶς ἀκούεις, ἀλλ' ἐμπαίζεις μοι.

Ἕνας κουτός, ἐνῶ ἐκοιμόταν μ' ἕναν κουφό, ἔκλασε. Ὅταν δὲ ὁ κουφὸς βρωμίστηκε καὶ τοῦ ἔβαλε τὶς φωνές, ὁ κουτὸς τοῦ εἶπε· βλέπεις ὅτι ἀκοῦς καὶ μοῦ κάνεις τὸν κουφό.

48 (244) Νεανίσκος πρὸς τὴν γυναῖκα οὖσαν ἀσελγῆ εἶπε· Κυρία τί ποιοῦμεν; ἀριστοῦμεν ἢ ἀφροδισιάζομεν; κἀκείνη πρὸς αὐτὸν ἔφη· Ὡς θέλεις· ψωμίν οὐκ ἔστιν.

Ἕνας νεαρός, εἶπε πρὸς τὴν γυναῖκα του, ἡ ὁποία ἦτο ἀσελγής· Κυρία τί θὰ κάνουμε; θὰ φᾶμε ἢ θὰ πέσουμε γιὰ ὕπνο; Καὶ ἐκείνη τοῦ εἶπε· Ὅ,τι θέλεις. Ψωμὶ δὲν ὑπάρχει καθόλου.

49 (245) Γραΐδας ἐρωτευομένας νεανίσκος ξενοδοχήσας πρὸς τοὺς παῖδας αὐτοῦ ἔφη· Τὴν θέλουσαν κεράσατε καὶ τὴν θέλουσαν ἀφροδισιάσατε. κἀκεῖνα εἶπον· Ἡμεῖς οὐ διψῶμεν.

Δύο ἐρωτευόμενα γραΐδια, κάποιος νεαρός, ἀφοῦ τὰ δέχτηκε στὸ ξενοδοχεῖο του, εἶπε στοὺς ὑπαλλήλους· Παιδιὰ ὅποια θέλει νὰ τὴν κεράσετε καὶ ὅποια θέλει νὰ τὴν ἀφροδισιάσετε. Κι' αὐτὲς μὲ μιὰ φωνὴ εἶπαν· Ἐμεῖς δὲν διψᾶμε καθόλου.

50 (254) Σχολαστικὸς ἀμιναίαν ἔχων ἐσφράγισεν αὐτήν. τοῦ δὲ δούλου κάτωθεν τρήσαντος καὶ τὸν οἶνον αἴροντος ἐθαύμαζεν, ὅτι τῶν σημάντρων σώων ὄντων ὁ οἶνος ἐλαττοῦται. Ἕτερος δὲ εἶπεν· Ὅρα μὴ κάτωθεν ἀφηρέθη. ὁ δέ· Ἀμαθέστατε ἔφη, οὐ τὸ κάτωθεν λείπει, ἀλλὰ τὸ ἄνωθεν μέρος.

Σχολαστικὸς ἔχων ἕνα βαρελάκι κρασὶ τὸ σφράγισε. Ἐνῷ δὲ ὁ ὑπηρέτης ἐτρύπησε τὸ κάτω μέρος καὶ ἔπαιρνε κρασί, ὁ σχολαστικὸς μὲ ἔκπληξί του παρετήρησε ὅτι, ἐνῷ τὰ σφραγίσματα ἦταν στὴν θέσι των, τὸ κρασὶ λιγόστευε. Κάποιος δὲ τοῦ εἶπε· Δὲν κυττᾷς μήπως τὸ τραβοῦν ἀπὸ κάτω; Αὐτὸς δὲ τοῦ εἶπε· Ἀμαθέστατε, δὲν λείπει τὸ κάτω μέρος, λείπει τὸ ἐπάνω.

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Ὑ π ὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ ΔΕΛΤΙΟΥ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Νέα Σειρά, Τόμος 11, Τεῦχος 2, **1970,** σελ. 1—10

Extrait du BULL. DE LA SOC. MATHÉMATIQUE DE GRÈCE
Nouvelle Série, Tome 11, Fasc. 2, **1970,** pp. 1—10

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Ὑπὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Α'.

Αἱ πληροφορίαι, αἱ ὁποῖαι διεσώθησαν εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὰς ἐφαρμογὰς τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὴν πρακτικὴν ζωὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἶναι ὀλίγαι. Μόλις κατὰ τὸν πρῶτον αἰῶνα μ. Χ. ἀπαντῶμεν ἐφαρμογὰς τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὰ συγγράμματα τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως τὰ ὑπὸ τοὺς τίτλους Μετρικά, Γεωμετρικὰ καὶ Στερεομετρικά. (Ἥρωνος ἅπαντα τόμ. III ἔκδ. H. Schöne, Lipsiae 1903 καὶ τόμ. IV καὶ V, ἔκδ. I. L. Heiberg, Lipsiae 1912 καὶ 1914). Περὶ τοῦ μηχανισμοῦ τῆς ἐκτελέσεως τῶν τεσσάρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς λαμβάνομεν γνῶσιν ἀκόμη βραδύτερον, κατὰ τὸν 4ον αἰῶνα ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως εἰς τὴν Μαθηματικὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου καὶ κατὰ τὸν 6ον αἰῶνα, ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις. Ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο κατὰ τὴν ἀρχαιότητα λογιστικὴ τέχνη καὶ φαίνεται, ὅτι ὑπῆρχον συναφῆ βιβλία, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς διαμνημονεύσεως ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου τῆς λογιστικῆς τοῦ Μάγνου, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη. (Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμ. III ἔκδ. I. L. Heiberg, σελ. 258, 31).

Ὁ διαχωρισμὸς τῶν Μαθηματικῶν εἰς θεωρητικὰ καὶ ἐφηρμοσμένα φαίνεται καὶ ἐκ τῶν Διαλόγων τοῦ Πλάτωνος εἰς μερικοὺς τῶν ὁποίων ἀπαντῶμεν τὰς ἑξῆς φράσεις:

> *Οἷον ἡ ἀριθμητικὴ καὶ λογιστικὴ καὶ γεωμετρικὴ* (Γοργίας 450 D). *Ἀλλὰ μὴν λογιστικὴ καὶ ἀριθμητικὴ περὶ ἀριθμὸν πᾶσα* (Πολιτεία 525 A). *Τῆς λογιστικῆς τέχνης ἢ τῆς γεωμετρικῆς* (Χαρμίδης 165 E).

Ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ καὶ ὁ τρόπος λύσεως προβλημάτων αὐτῆς, μετὰ πάροδον πολλῶν αἰώνων ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος, ὠνομάζετο ἁπλῶς «τέχνη», κατὰ παράλειψιν τῆς λέξεως λογιστική, ὡς πληροφορούμεθα ἐκ βυζαντινοῦ βιβλίου ἀριθμητικῆς τοῦ 15ου αἰῶνος (Herbert Hunger und Kurt Vogel, ein byzantinisches Rechenbuch des

15. Jahrhunderts, H. Böhlaus, Wien 1963, προβλήματα 81, 83 καὶ ἄλλα). Εἰς τὸ αὐτὸ βυζαντινὸν βιβλίον πρόβλ. 82 ὁ μαθηματικὸς ὁ λύων τὰ προβλήματα ὀνομάζεται τεχνίτης.

Ὁ Πλάτων διαμνημονεύει εἰς τοὺς Διαλόγους του δύο σπουδαίας μαθηματικὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπὸ οὐδενὸς μεταγενεστέρου συγγραφέως ἀναφέρονται.

Ἡ μία ἐκ τῶν προτάσεων τούτων εἶναι, ὅτι ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὸ ἓν ἥμισυ εἶναι ἀριθμοὶ περιττοὶ καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ εἶναι ἀριθμοὶ ἄρτιοι. Εἰς τὸ συναφὲς χωρίον τονίζεται ἡ διάκρισις μεταξὺ τῶν ὀνομάτων τριάς, πεντὰς κλπ. καὶ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὀνόματος, περιττοὶ ἀριθμοί. Τὸ αὐτὸ γίνεται διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 2,4 κλπ. (δυάς, τετρὰς κλπ.) καὶ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὀνόματος, ἄρτιοι ἀριθμοί.

Ἡ ἄλλη ἐκ τῶν Πλατωνικῶν προτάσεων, ἡ μὴ μνημονευομένη ὑπὸ ἄλλου παλαιοῦ συγγραφέως, εἶναι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 5040 εἶναι 59: «ὁ δὲ τῶν τετταράκοντα καὶ πεντακισχιλίων εἰς τε πόλεμον καὶ ὅσα κατ' εἰρήνην πρὸς ἅπαντα τὰ συμβόλαια καὶ κοινωνήματα, εἰσφορῶν τε πέρι καὶ διανομῶν, οὐ πλείους μιᾶς δεουσῶν ἑξήκοντα δύναι τ' ἂν τέμνεσθαι τομῶν, συνεχεῖς δὲ ἀπὸ μιᾶς μέχρι τῶν δέκα» (Νόμοι 738 Α). (Ὁ δὲ ἀριθμὸς 5040, ὅστις εἶναι χρήσιμος καὶ εἰς τὰ πρὸς πόλεμον καὶ εἰς ὅλα τὰ ἐν καιρῷ εἰρήνης συμβόλαια καὶ κοινωνήματα, καὶ εἰς τὰ σχετικὰ μὲ τοὺς φόρους καὶ τὰς διανομάς, δύναται νὰ διαιρῆται οὐχὶ διὰ περισσοτέρων τῶν 60-1 τομῶν καὶ μάλιστα αἱ τομαὶ αὗται ἀπὸ τῆς μιᾶς μέχρι τῶν δέκα εἶναι συνεχεῖς.

Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι $5040 = 7!$ (παραγοντικὸν) καὶ ὅτι οἱ πρῶτοι δέκα ἐκ τῶν 59 διαιρετῶν τοῦ 5040 εἶναι οἱ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀριθμοῦ 5040 ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος, φαίνεται, ὅτι δὲν ἔγινε τυχαίως.

Αἱ διὰ τοῦ Πλάτωνος περισωθεῖσαι, ὡς ἀνωτέρω μνημονεύονται, ἀριθμητικαὶ γνώσεις καταδεικνύουν, ὅτι οἱ σύγχρονοι καὶ οἱ παλαιότεροι τοῦ Πλάτωνος μαθηματικοὶ εἶχον ἀσχοληθῆ καὶ μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ πλήθους τῶν περιττῶν καὶ ἀρτίων ἀριθμῶν ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων καὶ τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἤτοι μὲ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀπησχόλησαν πολὺ τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ 19ου αἰῶνος, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ F. Gauss καὶ ὁ G. Cantor. Τοιαῦτα προβλήματα δὲν περιλαμβάνονται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, διότι προφανῶς δὲν ἐθεωρήθησαν ὑπ' αὐτοῦ στοιχεῖα θεμελιοῦντα τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην.

Β΄.

Περὶ τῆς ὑπάρξεως κατὰ τὴν ἀρχαιότητα θεωρίας τινος τῶν συνδυασμῶν συμπεραίνομεν ἐκ πραγματειῶν τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Πλουτάρχου, τοῦ Ἡφαιστίωνος, τοῦ Διοφάντου, τοῦ Πάππου, τοῦ Ἀμμωνίου.

I. Εἰς τὰ Ἀναλυτικὰ Πρότερα τοῦ Ἀριστοτέλους ἐξετάζονται ὅλοι οἱ δυνατοὶ τρόποι σχηματισμοῦ συλλογισμῶν, ὅταν δίδωνται τρεῖς διάφοροι προτάσεις.

II. Εἰς τὸ 10ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου φαίνεται, ὅτι εἶναι γνωστοὶ οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ μ, ν εἶναι μικροί.

III. Εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (τὴν Ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων) ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς περιπτώσεις συνδυασμῶν:

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ 4ου βιβλίου, ὑπ' ἀριθμ. 19, 35, 36, 37, 39, 40 καὶ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ 5ου βιβλίου, ὑπ' ἀριθμ. 5, 6, 24, 25, 26, 27, 28 παρατηροῦμεν Σ_8^2.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ 4ου βιβλίου, ὑπ' ἀριθμ. 20 παρατηροῦμεν Σ_4^2.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ 5ου βιβλίου, ὑπ' ἀριθμ. 14 καὶ 15 παρατηροῦμεν Σ_4^3.

IV. Εἰς τὰ Συμποσιακὰ προβλήματα τοῦ Πλουτάρχου, ὅπου γίνεται λόγος περὶ τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν νοσημάτων τῶν ἀνθρώπων διαβάζομεν: «Τὸ μὲν γὰρ κατὰ φύσιν τέτακται καὶ διώρισται, τάξις γὰρ ἢ τάξεως ἔργον ἡ φύσις· ἡ δ' ἀταξία καθάπερ ἡ Πινδαρικὴ ψάμμος ἀριθμὸν περιπέφευγε, καὶ τὸ παρὰ τὴν φύσιν εὐθὺς ἀόριστον καὶ ἄπειρόν ἐστιν. Ἀληθεύειν μὲν γὰρ ἁπλῶς ψεύδεσθαι δ' ἀπειραχῶς παρέχει τὰ πράγματα· καὶ ῥυθμοὶ καὶ ἁρμονίαι λόγους ἔχουσιν· ἃ δὲ πλημμελοῦσιν ἄνθρωποι περὶ λύραν καὶ ᾠδὴν καὶ ὄρχησιν, οὐκ ἄν τις περιλάβοι· καίτοι καὶ Φρύνιχος ὁ τῶν τραγῳδιῶν ποιητὴς περὶ αὐτοῦ φησιν ὅτι

> *«σχήματα δ' ὄρχησις τόσα μοι πόρεν, ὅσσ' ἐνὶ πόντῳ*
> *κύματα ποιεῖται χείματι νὺξ ὀλοή».*

καὶ Χρύσιππος τὰς ἐκ δέκα μόνων ἀξιωμάτων συμπλοκὰς πλήθει φησὶν ἑκατὸν μυριάδας ὑπερβάλλειν, ἀλλὰ τοῦτο μὲν ἤλεγξεν Ἵππαρχος, ἀποδείξας ὅτι τὸ μὲν καταφατικὸν περιέχει συμπεπλεγμένων μυριάδας δέκα καὶ πρὸς ταύτας χίλια τεσσαράκοντα ἐννέα· τὸ δ' ἀποφατικὸν αὐτοῦ μυριάδας τριάκοντα μίαν καὶ πρὸς ταύταις ἐνακόσια πεντήκοντα δύο. Ξενοκράτης δὲ τὸν τῶν συλλαβῶν ἀριθμόν, ὃν τὰ στοιχεῖα μιγνύμενα πρὸς ἄλληλα παρέχει, μυριάδων ἀπέφηνεν εἰκοσάκις καὶ μυριάκις μυρίων. (Πλούταρχος, Συμπόσ. προβλ. VIII 732.3. E). (Διότι αὐτὸ μὲν ἔχει ταχθῆ καὶ καθορισθῆ ἐκ φύσεως, ἐπειδὴ ἡ φύσις εἶναι τάξις ἢ τάξεως ἔργον· ἡ δὲ ἀταξία, ὅπως ἡ ἄμμος τοῦ Πινδάρου ἐκφεύγει τὴν ἀρίθμησιν, καὶ τὸ παρὰ τὴν φύσιν εἶναι ἀμέσως ἀόριστον καὶ ἄπειρον. Διότι τὰ πράγματα παρέχουν τὴν μὲν ἀλήθειαν ἁπλῶς, τὸ ψεῦδος δὲ τὸ παρέχουν κατ' ἀπείρους τρόπους· καὶ οἱ ῥυθμοὶ καὶ αἱ ἁρμονίαι εἰς τὴν ποίησιν καὶ τὴν μουσικὴν παρουσιάζουν ἀναλογίας· ἐκεῖνα δὲ εἰς τὰ ὁποῖα σφάλλονται οἱ ἄνθρωποι, τὰ ἀφορῶντα εἰς τὴν ἐνόργανον μουσικὴν καὶ τὰ ᾄσματα καὶ τὸν χορόν, εἶναι ἀδύνατον νὰ τὰ ἀπαριθμήσῃ τις. Καίτοι καὶ ὁ Φρύνιχος ὁ ποιητὴς τῶν τραγῳδιῶν λέγει διὰ τὸν ἑαυτόν του, ὅτι

> *«σχήματα δὲ ὁ χορὸς τόσα πολλὰ μοῦ παρουσιάζει, ὅσα εἰς τὴν θάλασσαν κύματα παράγει κατὰ τὸν χειμῶνα καταστρεπτικὴ νύχτα».*

Καὶ ὁ Χρύσιππος λέγει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν ἐκ δέκα μόνον ἀξιωμάτων εἶναι μεγαλύτερος τῶν ἑκατὸν μυριάδων (1.000.000). Ἀλλὰ τοῦτο μὲν ἤλεγξεν ὡς μὴ ἀληθὲς ὁ Ἵππαρχος, ἀποδείξας ὅτι αἱ μὲν καταφατικαὶ προτάσεις περιέχουν συνδυασμοὺς μυριάδας δέκα σὺν χίλια τεσσαράκοντα ἐννέα (=101049), αἱ δὲ ἀποφατικαὶ προτάσεις περιέχουν συνδυασμοὺς μυριάδας τριάκοντα μίαν σὺν ἐνακόσια πεντήκοντα δύο (=310952). Ὁ δὲ Ξενοκράτης λέγει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν συλλαβῶν, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐκ τοῦ μεταξύ των συνδυασμοῦ τῶν (24) γραμμάτων ἀνέρχεται εἰς μυριάδας, εἰκοσάκις μυρίας σὺν μυριάκις μυρίας $(= 10000 \times (20 \times 10.000 + 10.000 \times 10.000) = 1.002.000.000.000)$.

V. Εἰς ἄλλην πραγματείαν του ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ στωϊκῶν ἐναντιωμάτων» (1047.29. C) ὁ Πλούταρχος γράφει τὰ ἑξῆς:

«Ἀλλὰ μὴν αὐτὸς τὰς διὰ δέκα ἀξιωμάτων συμπλοκὰς πλήθει φησιν ὑπερβάλλειν ἑκατὸν μυριάδας οὔτε δι' αὑτοῦ ζητήσας ἐπιμελῶς οὔτε διὰ τῶν ἐμπείρων τὸ ἀληθὲς ἱστορήσας... Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλέγχουσιν οἱ ἀριθμητικοί, ὧν καὶ Ἵππαρχος ἐστιν ἀποδεικνύων τὸ διάπτωμα τοῦ λογισμοῦ παμμέγεθες αὐτῷ γεγονός, εἴ γε τὸ μὲν καταφατικὸν ποιεῖ συμπεπλεγμένων ἀξιωμάτων μυριάδας δέκα καὶ πρὸς ταύταις τρισχίλια τεσσαράκοντα ἐννέα, τὸ δ' ἀποφατικὸν ἐνακόσια πεντήκοντα δύο πρὸς τριάκοντα καὶ μιᾷ μυριάσι». ('Αλλ' ὅμως αὐτὸς (ὁ Χρύσιππος) λέγει, ὅτι οἱ συνδυασμοὶ ἐκ τῶν δέκα ἀξιωμάτων κατὰ τὸ πλῆθος εἶναι περισσότεροι τῶν ἑκατὸν μυριάδων (1.000.000) οὔτε ὁ ἴδιος ἐπιχειρήσας νὰ ἀποδείξῃ τὴν ἀλήθειαν οὔτε διὰ τῶν εἰδικῶν (τῶν μαθηματικῶν)... Τὸν Χρύσιππον δὲ ὅλοι ἐλέγχουν οἱ μαθηματικοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Ἵππαρχος ἀποδεικνύων τὸ παμμέγιστον σφάλμα εἰς τὸ ὁποῖον ὑπέπεσεν αὐτός, ἐὰν ἰσχυρίζεται, ὅτι αἱ μὲν καταφατικαὶ προτάσεις ἐκ του συνδυασμοῦ τῶν δέκα ἀξιωμάτων ἀνέρχονται εἰς μυριάδας δέκα σὺν τρεῖς χιλιάδες τεσσαράκοντα ἐννέα (=103049), (σημείωσις. Εἰς τὴν προηγουμένην πραγματείαν του γράφεται 101049), αἱ δὲ ἀποφατικαὶ προτάσεις εἰς ἐνακοσίας πεντήκοντα δύο σὺν τριάκοντα μίαν μυριάδας (=310952).

Οἱ παρὰ τοῦ Πλουτάρχου παρεχόμενοι ἀνωτέρω ἀριθμοὶ καίτοι δὲν εἶναι ἀκριβεῖς ἐν τούτοις ἀποδεικνύουν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἦσαν ξένοι πρὸς μεθόδους ὑπολογισμοῦ πλήθους συνδυασμῶν. Διότι οἱ διδόμενοι παρ' αὐτοῦ ἀριθμοὶ δὲν φαίνεται, ὅτι ἐδόθησαν αὐθαιρέτως.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ κατὰ τὸν Πίνδαρον ἀναρίθμητον τῶν κόκκον τῆς ἄμμου (ἢ ψάμμου), ὁ Πλούταρχος ὑπαινίσσεται δι' αὐτοῦ ᾠδὴν τοῦ Πινδάρου πρὸς τὸν Ὀλυμπιονίκην Θήρωνα τὸν Ἀκραγαντῖνον, ἡγεμόνα τοῦ Ἀκράγαντος τῆς Σικελίας, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ποιητὴς λέγει :

ἐπεὶ ψάμμος ἀριθμὸν περιπέφευγεν
ὅσα χάρματ' ἄλλοις ἔθηκεν,
τίς ἂν φράσαι δύναιτο ; ('Ολυμπ. Π. 172-181, Bruno Snell, Lipsiae 1959, P. 12).
ὅπως ἡ ἄμμος διαφεύγει τὴν ἀρίθμησιν, οὕτω πως καὶ τοῦ Θήρωνος τὰ καλὰ ποιὸς θὰ μποροῦσε νὰ τὰ μετρήσῃ ; (εἶναι ἀναρίθμητα).

Ὁ Ἀρχιμήδης, φαίνεται, ὅτι ἐκ τῆς ᾠδῆς αὐτῆς τοῦ Πινδάρου παρωρμήθη νὰ γράψῃ τὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Ψαμμίτης πραγματείαν του, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ χωρητικότης τοῦ κατ' αὐτὸν σφαιρικοῦ καὶ πεπερασμένου σύμπαντος (τοῦ ὁποίου ὑπολογίζει τὴν ἀκτῖνα) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ περιλαμβάνῃ περισσοτέρους τῶν 10^{63}

κόκκων ἄμμου, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν κόκκον μήκωνος.

VI. Ὅτι ὁ μέγας γεωμέτρης τῆς ἀρχαιότητος Ἀπολλώνιος εἶχε γνῶσιν προτάσεων τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Πάππου, ὁ ὁποῖος γράφει, ὅτι κατὰ τὸν Ἀπολλώνιον οἱ συνδυασμοὶ τῶν τριῶν πραγμάτων ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως εἶναι 6, τῶν δὲ τριῶν πραγμάτων ἀνὰ τρία μετ' ἐπαναλήψεως εἶναι 10: Ἡ φράσις «ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως» ὀνομάζεται ὑπὸ τοῦ Πάππου «δυάδες ἄτακτοι διάφοροι», ἐν ᾧ ἡ φράσις «ἀνὰ τρία μετ' ἐπαναλήψεως» ὀνομάζεται «τριάδες διάφοροι ἄτακτοι». (Ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆθος ϛ'. Καί, ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται ι'). (Pappus Alexandrinus, F. Hultsch, Berlin 1877, σελὶς 648, 7 καὶ 646, 1).

Ἐνταῦθα πρόκειται περὶ τοῦ πλήθους τῶν δυνατῶν κυρίων περιπτώσεων ἐπαφῆς σημείου, εὐθείας, κύκλου, ὅταν δίδεται ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου (αἱ 6 περιπτώσεις) καὶ ὅταν αὕτη δὲν δίδεται (αἱ 10 περιπτώσεις).

VII. Πολὺ ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν διὰ τὴν θεωρίαν τῶν συνδυασμῶν παρατηρήσεις τοῦ Ἕλληνος γραμματικοῦ Ἡφαιστίωνος, ὁ ὁποῖος ἤκμασε κατὰ τὸν 2ον μ. Χ. αἰῶνα ἐν Ἀλεξανδρείᾳ. Εἰς τὸ περισωθὲν μικρὸν ἐγχειρίδιόν του Περὶ μέτρων, εἰς τὴν ποίησιν, ὅπου ἀναπτύσσονται οἱ συνδυασμοὶ μετ' ἐπαναλήψεως τῆς μακρᾶς (β) καὶ βραχείας (α) συλλαβῆς διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ στίχου ἑνὸς ποιήματος, ὁ Ἡφαιστίων γράφει τὰ ἀκόλουθα :

Περὶ τῶν κατ' ἀντιπάθειαν μίξεων, κεφ. ιδ'.

1. Ἐπιχοριαμβικὸν τὸ Σαπφικὸν ἑνδεκασύλλαβον (μέτρον)

βαβα	βααβ	αββ
βαββ	βααβ	αβα

2. Ἐπιωνικὸν ἑνδεκασύλλαβον

αβαβ	ββαα	βαα
ββαβ	ββαα	βαα
αβαβ	αβαα	βαα
ββαβ	αβαα	βαα

3. Τρίμετρον (δωδεκασύλλαβον)

αβαβ	ββαα	βαβα
ββαβ	αβαα	βαββ

4. Τετράμετρον καταληκτικὸν Ἐπιωνικὸν (δεκαπεντασύλλαβον)

αβαβ	ββαα	ββαα	βαα
ββαβ	αβαα	βαββ	βαβ

5. Ἐπιωνικὸν τρίμετρον ἀκατάληκτον (δωδεκασύλλαβον)

αβαβ	ααβα	ααββ
ββαβ	ααββ	ααβα

6. Ἀνακλώμενον Ἰωνικὸν (δωδεκασύλλαβον)

αβαβ	ααβα	βαββ
ββαβ	ααβα	βαβα

(Ἡφαιστίωνος ἐγχειρίδιον Περὶ μέτρων, Scriptores Metrici Graeci, R. Westphal, Lipsiae 1866, σελ. 44). Ὁ Ἡφαιστίων δὲν γράφει σαφῶς ποία εἶναι ἡ βραχεῖα καὶ ποία εἶναι ἡ μακρὰ συλλαβή. Ἐκ τῶν γραφομένων του ὅμως συμπεραίνομεν, ὅτι διὰ τοῦ α παρίσταται ἡ βραχεῖα συλλαβὴ καὶ διὰ τοῦ β ἡ μακρά.

VIII. Σαφὴς μαρτυρία, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τὴν θεωρίαν τῶν συνδυασμῶν λαμβάνεται ἐκ τοῦ φιλοσόφου Πορφυρίου (3ος αἰ. μ. Χ.) καὶ τοῦ σχολιαστοῦ τῆς συναφοῦς πραγματείας τοῦ Πορφυρίου, τοῦ Ἀμμωνίου τοῦ Ἀλεξανδρέως (5–6 αἰὼν μ. Χ).

Ὁ Πορφύριος ἐπιθυμῶν νὰ εἰσαγάγῃ τὸν μαθητήν του, Ῥωμαῖον Ὕπατον Χρυσαόριον, κατόπιν παρακλήσεως τούτου, εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀριστοτέλους «Κατηγορίαι», ἔγραψε πρὸς τοῦτο μικρὸν ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον «Εἰσαγωγὴ» (ἢ περὶ τῶν 5 φωνῶν). Ὀνομάζει φωνὰς τοὺς πέντε χαρακτηρισμοὺς τοῦ Ἀριστοτέλους:

Γένος, εἶδος, διαφορά, ἴδιον, συμβεβηκὸς

καὶ λέγει, ὅτι οἱ πέντε αὐτοὶ χαρακτηρισμοὶ ἢ ἰδιότητες (ἢ φωναὶ) ἐξεταζόμενοι ἀνὰ δύο παρέχουν 10 διαφόρους χαρακτηρισμοὺς ὡς ἑξῆς: «πέντε μὲν ὄντων, ἑνὸς δὲ ἑκάστου τῶν τεττάρων διαφέροντος, τετράκις τὰ πέντε, εἴκοσι γίνεσθαι τὰς πάσας διαφοράς. ἀλλ' οὐχ' οὕτως ἔχει, ἀλλ' ἀεὶ τῶν ἐφεξῆς καταριθμουμένων καὶ τῶν μὲν δύο μιᾷ λειπομένων διαφορᾷ διὰ τὸ ἤδη εἰλῆφθαι, τῶν δὲ τριῶν δυσίν, τῶν δὲ τεσσάρων τρισί, τῶν δὲ πέντε τέτρασι, δέκα αἱ πᾶσαι γίνονται διαφοραί, τέσσαρες, τρεῖς, δύο, μία». (Διότι ἐν ᾧ οἱ χαρακτηρισμοὶ (ἰδιότητες) εἶναι πέντε, ἕκαστος δὲ ἐκ τούτων διαφέρει τῶν ὑπολοίπων τεσσάρων, ὅλαι αἱ διφοραὶ γίνονται $4 \times 5 = 20$. Δὲν εἶναι ὅμως ἔτσι, ἀλλὰ πάντοτε κατὰ τὴν ἐφεξῆς καταρίθμησιν, ἐπειδὴ τὰ μὲν δύο δίδουν μίαν διαφοράν, διότι ἔχει ἤδη ληφθῇ αὕτη (ἐννοεῖ ὅτι ἐκ τῶν αβ, βα λαμβάνεται μόνον τὸ αβ ἢ τὸ βα), τὰ δὲ τρία δίδουν δύο, τὰ δὲ τέσσαρα δίδουν τρεῖς, τὰ δὲ πέντε δίδουν τέσσαρας, ὅλαι αἱ διαφοραὶ (οἱ χαρακτηρισμοὶ) γίνονται 10 ἤτοι $4+3+2+1$). (Πορφυρίου Εἰσαγωγή, Porphyrii Isagoge et in Aristotelis Categorias Commentarium C.A.G. IV/1, Ad. Busse, Βερολῖνον 1887, σελ. 17, 15).

IX. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἀνωτέρου χωρίου τοῦ Πορφυρίου, Ἀμμώνιος ὁ Ἀλεξανδρεύς, ἀναπτύσσει ἔτι σαφέστερον τὰ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν λέγων τὰ ἀκόλουθα:

«Ἰστέον δὲ ὅτι εἰ ὅρων τινῶν ὁπωσοῦν ὑποκειμένων θελήσομεν μαθεῖν, πόσας ποιοῦσιν οὗτοι διαφορὰς τῶν πρὸς ἀλλήλους συμπλοκῶν, μεθόδῳ τοιαύτῃ ὀφείλομεν χρήσασθαι· δεῖ γὰρ λαμβάνειν τὸν μονάδι ἐλάττονα ἀριθμὸν καὶ πολυπλασιάζειν ἐπὶ τὸν ἐξ ἀρχῆς προκείμενον καὶ τὸν γενόμενον μερίζειν δίχα, καὶ τοσαύτας συμπλοκὰς λέγειν γίνεσθαι· οἷον πέντε εἰσὶν αἱ φωναὶ αἱ νῦν συγκρινόμεναι πρὸς ἀλλήλας· λάβε τὸν μονάδι ἐλάττονα τοῦ πέντε τὸν τέσσαρα καὶ ποίησον τετράκις πέντε, καὶ γίνονται εἴκοσιν· τούτων λάβε τὸ ἥμισυ, ὅπερ ἐστὶ δέκα, καὶ τοσαύτας λέγε γίνεσθαι τῶν πέντε τὰς πρὸς ἀλλήλας συμπλοκάς τε καὶ συγκρίσεις· λαμβάνομεν δὲ τὸν μονάδι ἐλάσσονα, ἐπειδὴ αὐτό τι πρὸς αὐτὸ οὐδὲν παραβάλλεται, ἀλλὰ ἄλλο πρὸς ἄλλο· πρὸς ἀλλήλους δὲ πολυπλασιάζομεν, ἐπειδὴ τὴν πρὸς ἄλληλα παραβολὴν ζητοῦμεν, τοῦ δὲ γινομένου ἀριθμοῦ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ γενομένου πολλαπλασιασμοῦ συμβαίνει δὶς τὰ αὐτὰ πρὸς ἄλληλα παραβάλλεσθαι· ἕκαστον γὰρ τῶν πέντε πρὸς τὰ λοιπὰ τέσσαρα πολλαπλασιάζεται, οἷον τὸ γένος πρὸς τὰ ἐφεξῆς τέσσαρα καὶ πάλιν τὸ εἶδος πρὸς τὸ γένος καὶ τὰ λοιπὰ τρία καὶ συμβαίνει δὶς τὴν αὐτὴν ἑκάστου παραβολὴν ποιεῖσθαι· διὰ τοῦτο οὖν τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ τὸ ἥμισυ λαμβάνομεν. (Ἀμμωνίου Ἑρμείου ἐξήγησις τῶν πέντε φωνῶν. Ammonius in Porphyrii Isagogen sive V Voces, Ad. Busse, C.A.G. IV/3, Βερολῖνον 1891, σελ. 115, 10). (Πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν ὅτι, ἐὰν δοθοῦν ὁσαδήποτε στοιχεῖα καὶ θελήσωμεν νὰ μάθωμεν πόσοι διάφοροι συνδυασμοὶ μεταξύ των ἀνὰ δύο γίνονται, ὀφείλομεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον: διότι πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὸν κατὰ τὴν μονάδα μικρότερον (τὸν ν–1) καὶ νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν δοθέντα (τὸν ν) καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιροῦμεν διὰ δύο, καὶ τὸ πηλίκον θὰ λέγωμεν, ὅτι εἶναι οἱ ζητούμενοι συνδυασμοί. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν τώρα αἱ πρὸς ἀλλήλας συγκρινόμεναι φωναὶ εἶναι πέντε λάβε τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ πέντε, τὸν τέσσαρα, καὶ κάμε 4 × 5 καὶ γίνονται 20· τούτων λάβε τὸ ἥμισυ, τὸ ὁποῖον εἶναι δέκα, καὶ λέγε ὅτι τόσοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν πέντε στοιχείων μεταξύ των ἀνὰ δύο. Λαμβάνομεν δε τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον, διότι ἓν στοιχεῖον πρὸς τὸν ἑαυτόν του δὲν συγκρίνεται, ἀλλὰ πρὸς τὰ ἄλλα. Πολλαπλασιάζομεν δὲ μεταξύ των (τὸν ν ἐπὶ ν – 1), ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὴν σύγκρισιν πρὸς ὅλα τὰ στοιχεῖα μεταξύ των. Λαμβάνομεν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ γενομένου πολλαπλασιασμοῦ συμβαίνει νὰ γίνεται διττῶς ἡ σύγκρισις μεταξύ των (τὸ α πρὸς τὸ β καὶ τὸ β πρὸς τὸ α)· διότι ἕκαστον τῶν πέντε στοιχείων πολλαπλασιάζεται πρὸς τὰ ὑπόλοιπα τέσσαρα, π. χ. τὸ γένος πρὸς τὰ ὑπόλοιπα τέσσαρα (σημ. τὰ στοιχεῖα ἢ αἱ φωναί, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη, εἶναι : γένος, εἶδος, διαφορά, ἴδιον, συμβεβηκὸς) καὶ πάλιν τὸ εἶδος πρὸς τὸ γένος καὶ τὰ ὑπόλοιπα τρία, καὶ συμβαίνει νὰ γίνεται ἡ σύγκρισις ἑκάστου στοιχείου διττῶς. Διὰ τὸν λόγον λοιπὸν αὐτὸν λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ προκύπτοντος γινομένου).

Αἱ γνώσεις τῶν Ἑλλήνων περὶ συνδυασμῶν φαίνεται ὅτι, πολὺ βραδύτερον τῆς ἐκστρατείας τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ἔφθασαν εἰς τὰς Ἰνδίας, μόλις δὲ κατὰ τὸν 11–12 αἰῶνα ὁ Ἰνδὸς Bhaskara γνωρίζει τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἄνευ ἐπαναλήψεως. Ἀπὸ τοῦ 15ου αἰῶνος ἤρχισεν ἐν Εὐρώπῃ ἐκ νέου συστηματικὴ σπουδὴ τῶν συνδυασμῶν (Pacioli, Buckley, Tartaglia, Cardano, Stiefel, Clavius, Schwenter, Buteo, Hérigone, Tacquet, Pascal, Fermat) (Johannes Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Vol. VI, Berlin, Leipzig 1924, S.66).

THE COMBINATIONS' THEORY OF THE GREEKS

SUMMARY

A.

As we can extract from Platon and Eutocius the ancient Greeks used to call the application of Mathematics «Logistic».

Mathematical terms (sentences) used by Platon, such as half the total of integers are odd and the other half one even ones, and that the number of divisors of 5040 are 59, were not included in the elements of Euclid, because it seems that he did not consider them as elements for the foundation of the Mathematical science.

B.

During ancient times there existed a certain theory about combinations as it can be concluded from the following: I) The Analytical Prior by Aristotle, II) The X book of Euclid's Elements, III) Diophantus' Arithmetica, IV) Plutarch's Sym posium Problems, V) Plutarch's contradiction with Stoics, VI) From Apollonius, through Pappus. VII) The Greek Grammarian Hephestion, VIII) From Porphyrius, and IX) Ammonius the Alexandrian, who, like Porphyrius, says that $\Sigma_{\nu}^{2} = \frac{\nu(\nu - 1)}{2}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] *Moritz Cantor*: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, N. York - Stuttgart 1965.

[2] *Thomas Heath*: A History of Greek Mathematics I, II Oxford 1921.

[3] *Joseph E. Hofmann*: Geschichte der Mathematik I, Sammlung Göschen BD 226/226 α, Berlin 1963.

Τύποις: Α. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ — Κοδράτου 23 — ΑΘΗΝΑΙ 106 — Τηλ. 531-571

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ἡ προέλευσις τῶν συγχρόνων συμβόλων τῶν ἀριθμῶν. Τὰ μαθηματικὰ τοῦ Ὁμήρου. Αἱ ἀρχαὶ τοῦ ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ καὶ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας.

Πλάτων ἔλεγε
τὸν Θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν
Πλούταρχος

ΑΝΑΤΥΠΟΝ

Ἐκ τοῦ περιοδικοῦ τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας «Ὁ Εὐκλείδης» μηνῶν Ἰανουαρίου, Φεβρουαρίου, Σεπτεμβρίου – Ὀκτωβρίου, Νοεμβρίου, Δεκεμβρίου 1970

ΑΘΗΝΑΙ 1971

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ἡ προέλευσις τῶν συγχρόνων συμβόλων τῶν ἀριθμῶν

Αἱ ἀραβικαὶ πηγαὶ τοῦ δεκάτου περίπου αἰῶνος μ. Χ. ἀποδίδουν τὴν ἐπινόησιν τῶν συγχρόνων συμβόλων τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς Ἰνδούς. Ἐπὶ τῶν πληροφοριῶν τούτων στηριζόμενοι οἱ ἐπιστήμονες τῆς Δύσεως ἔμειναν σύμφωνοι πρὸς τὴν ἀραβικὴν παράδοσιν, ὠνόμασαν ὅμως τὰ σύμβολα αὐτὰ ἀραβικοὺς ἀριθμούς, διότι ταῦτα ἔφθασαν εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην διὰ τῶν Ἀράβων τῆς Ἱσπανίας. Ὡς πρὸς τὴν γνώμην ὅτι ἡ ἐπινόησις τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἰνδοὺς ὑπάρχουν πολλαὶ ἀμφιβολίαι καὶ τὸ ζήτημα τοῦτο δὲν ἔχει καταστῇ δυνατὸν μέχρι σήμερον νὰ διαλευκανθῇ καὶ παραμένει σκοτεινόν. Ὁ C. R. Kaye ἀποκλείει ὅτι ἡ ἐπινόησις τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἰνδοὺς διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους : Πρῶτον, διότι οἱ Ἰνδοὶ τοῦ Θιβὲτ καὶ τῆς ὀρεινῆς Βιρμανίας, οἱ ὁποῖοι ἦσαν ἀπομεμονωμένοι ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν ξένων λαῶν καὶ «σήμερον ἀκόμη» (τὸ ἔτος 1915 - 19 ὅτε ἔγραψε σχετικῶς ὁ Kaye) χρησιμοποιοῦν παμπάλαιον σύστημα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν μηδεμίαν ἔχον σχέσιν πρὸς τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν. Δεύτερον, διότι οἱ Ἰνδοί, ὡς καὶ οἱ Σημῖται, ἔγραφον ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἐν ᾧ οἱ Ἕλληνες ἔγραφον καὶ γράφουν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ὁ Kaye παραδέχεται ὅτι αἱ Ἰνδίαι εἶναι ἡ περιοχὴ ὅπου ἐνεφανίσθησαν τὸ πρῶτον τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν ἀποδίδει ὅμως τὴν ἔμπνευσιν τῆς δημιουργίας αὐτῆς εἰς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, τόσον τῆς ἐποχῆς τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὅσον καὶ τῆς μεταγενεστέρας ἀλεξανδρινῆς ἐποχῆς. Πρὸς τοῦτο ἐπικαλεῖται τὸ ἐπιχείρημα ὅτι οἱ Ἕλληνες μὲ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἔγραφον ἤδη πολὺ παλαιὰ κατὰ τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα θέσεως, ὅπως γράφονται ἤδη οἱ ἀριθμοί. Ὁ ἀριθμὸς 124 π. χ. γράφεται ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ρκδ'. (G. R. Kaye, Indian Mathematics, Calcutta and Simla, καὶ Influence Grecque dans le développement des Mathématiques Hindoues, Scientia 25. Bologna 1919. No 81, 1).

Ἡ ἐπινόησις τοῦ συμβόλου διὰ τὸ μηδὲν ὀφείλεται εἰς τὸν μεγάλον Ἕλληνα ἀστρονόμον καὶ μαθηματικὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον (100 - 178 μ. Χ. περίπου), ὡς πληροφορούμεθα ἐκ τοῦ περιφήμου ἔργου του Μαθηματικὴ Σύνταξις, εἰς τὸν τίτλον τοῦ ὁποίου οἱ μεταγενέστεροι προέταξαν τὴν λέξιν μεγάλην καὶ οἱ Ἄραβες μετεγλώττισαν τὸν τίτλον αὐτὸν εἰς Ἀλμαγέστη. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τῆς Μαθηματικῆς Συντάξεως ἀπαντῶμεν τὰς ἐκφράσεις

$$\text{ο} \quad \mu\zeta' \quad \eta' \quad (= 0^{0} \quad 47' \quad 8'')$$

$$\mu\alpha' \quad \text{ο} \quad \iota\eta' \quad (= 41^{0} \quad 0' \quad 18'')$$

Τὸ σύμβολον διὰ τὸ μηδὲν (ο) εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως οὐδέν.

Ὅπως παρατηροῦμεν, ὁ Πτολεμαῖος ἤδη χρησιμοποιεῖ τὸ σύστημα θέσεως γραφῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ ὅπου ἐλλείπει ἀριθμὸς θέτει εἰς τὴν θέσιν του τὸ μηδέν, ἐν ᾧ ὡς σύμβολα ἀριθμητικὰ μεταχειρίζεται τὰ γράμματα τοῦ ἄλφα βήτου. Ὁ Ὁλλανδὸς καθηγητὴς Freudenthal τοῦ Πανεπιστημίου Utrecht καὶ ὁ Neugebauer τοῦ Κέντρου Προκεχωρημένων Σπουδῶν τοῦ Princeton (ΗΠΑ) γράφουν ὅτι, ὅταν μεταξὺ 200 - 600 μ. Χ. ἐδημιουργεῖτο τὸ σύστημα θέσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς Ἰνδίας, οἱ Ἰνδοὶ ἐγνώριζον ἤδη καὶ ἐσπούδαζον ἐντατικῶς τὴν ἑλληνικὴν Ἀστρονομίαν τοῦ Πτολεμαίου, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ κυριωτέρου ἰνδικοῦ ἀστρονομικοῦ ἔργου, τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, τὸ ὁποῖον ἔφερε τὸν τίτλον Surya Siddhanta, εἰς τὸ ὁποῖον ἀπαντῶσι πλεῖσται ἑλληνικαὶ φράσεις, ὡς π. χ. kendra (κέντρα), lipta (λεπτὰ) καὶ ἄλλαι. Τοῦτο σημαίνει, κατὰ τοὺς ἰδίους ἐπιστήμονας, ὅτι ἡ ἀστρονομικὴ θεωρία τοῦ ἀνωτέρω ἔργου στηρίζεται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐπικύκλων τοῦ Πτολεμαίου καὶ ὅτι οἱ Ἰνδοὶ ἔμαθον ἤδη ἐκ τοῦ Πτολεμαίου νὰ χρησιμοποιοῦν ὡς σύμβολον διὰ τὸ μηδὲν ἕνα κύκλον καὶ τὸ σύστημα θέσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ὅτι οἱ Ἰνδοὶ κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, προσθέτουν οἱ προηγουμένως ἀναφερθέντες ἐπιστήμονες, εἶχον ὑποστῇ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γραφῆς τῶν κλασμάτων, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ Ἰνδοὶ ἔγραφον τὸν παρονομαστὴν ἄνωθεν τοῦ ἀριθμητοῦ, χωρὶς τὴν διαχωριστικὴν τούτων γραμμήν, ὅπως ἀκριβῶς ἔγραφον τὰ κλάσματα οἱ Ἕλληνες. (W. L., van der Waerden, Erwachende Wissenschaft 1956, σελὶς 91 - 93). Σχετικῶς πρὸς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὰς Ἰνδίας καὶ τὴν Ἀσίαν γενικῶς, ἂς ἐπιτραπῇ νὰ σημειώσωμεν τί γράφεται εἰς τὸ γερμανικὸν λεξικὸν τῆς Ἀρχαιότητος εἰς τὸ λῆμμα (λέξιν) Κίνα.

«Ὁ ἑλληνικὸς πολιτισμὸς ἐξηπλώθη μέσῳ Ἰταλίας καὶ Κωνσταντινουπόλεως εἰς τὴν λοιπὴν Εὐρώπην, εἰς τὴν Αἰθιοπίαν, τὰς Ἰνδίας, τὸ Τουρκεστάν, μέχρι τῆς Κίνας διὰ τοῦ ἐμπορίου. Οἱ Κινέζοι ὠνομάζοντο ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων Σῖναι. Ὁ ἐκ τῆς Ἡρακλείας Ἕλλην γεωγράφος Μαρκιανὸς (400 μ. Χ. περίπου) παρέχει πολλὰς πληροφορίας περὶ τῶν χωρῶν αὐτῶν, χρησίμους διὰ τοὺς ναυτιλλομένους καὶ ἐμπορευομένους, στηριζομένας εἰς παλαιότερα ἑλληνικὰ ἔργα ἀπολεσθέντα.

Ἡ ἐπικρατοῦσα ἀντίληψις ὅτι οἱ Ἕλληνες ἐγνώριζον τὴν Ἀσίαν μόνον μέχρι τῆς Ταπροβάνης (Κεϋλάνης) εἶναι ἐσφαλμένη. Ὁ Μαρκιανὸς μάλιστα μνημονεύει καὶ μίαν νοτίως τῆς Κίνας ἄγνωστον χώραν. Οἱ Λατῖνοι μετέφρασαν τὴν φράσιν τοῦ Μαρκιανοῦ εἰς terra australis incognita (χώρα νοτία ἄγνωστος), ἐξ οὗ australis = νοτία, βραδύτερον ἔλαβε τὸ ὄνομα ἡ Αὐστραλία. Παλαιοὶ Κινέζοι συγγραφεῖς λέγουν, ὅτι ὁ Ῥωμαῖος αὐτοκράτωρ Μάρκος Αὐρήλιος Ἀντωνῖνος εἶχεν ἀποστείλει πρεσβείαν εἰς τὴν Κίναν μέσῳ τοῦ Annam. Εἰς κινεζικὸν παλαιὸν βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον «Πληροφορίαι περὶ τῶν Δυτικῶν Χωρῶν» αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ πόλεων δὲν ἔχουν δοθῆ εἰς κινεζικὰ μέτρα ἀλλὰ εἰς ἑλληνικὰ στάδια, ἀσφαλῶς ληφθεῖσαι ἔκ τινος ἑλληνικοῦ βιβλίου γραμμένου διὰ τοὺς περιηγητὰς τῆς ἐποχῆς ἐκείνης...» (Kröner, Wörterbuch der Antike, λέξις China).

Τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα εἶναι σημαντικὰ διὰ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὴν ἐπινόησιν τῶν συμβόλων τῶν ἀριθμῶν ὑπὸ τῶν Ἰνδῶν, δὲν σημαίνουν ὅμως ὅτι ἡ ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν διὰ τὰ σύμβολα ὡρισμένων ἀριθμῶν χάνει τὴν ἀξίαν της καὶ τὴν πρωτοτυπίαν της. Εἰς τὴν περιοχὴν τῶν Ἰνδιῶν ἐτέθησαν αἱ πρῶται βάσεις διαμορφώσεως τοῦ σημερινοῦ συμβολισμοῦ τῶν ἀριθμῶν, ὡς τοῦτο ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ κατωτέρω παρατιθεμένου πίνακος, ὅπου ἐκτίθεται λίαν παραστατικῶς ἡ ἐξέλιξις τῆς διαμορφώσεως τῶν συμβόλων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 200 μ. Χ. μέχρι τοῦ 1600 μ. Χ. (Johannes TROPFKE, Geschichte der Elementar — Mathematik, τόμος I, Berlin und Leipzig 1921, σελ. 28).

Ἀπόδειξις ἀκόμη τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τοὺς Ἰνδοὺς διὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων εἶναι, ὅτι τὸ σύμβολον διὰ τὸν ἀριθμὸν 4 (πρώτη καὶ δευτέρα σειρὰ τοῦ παρατιθεμένου πίνακος) χρησιμοποιεῖται ἤδη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς παραπεμπτικὸν σημεῖον εἰς σχῆμα τοῦ 9 προβλήματος τοῦ β′ βιβλίου Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Ἂς ἐπιτραπῆ νὰ προσθέσωμεν μερικὰς ἐνδιαφερούσας πληροφορίας, τὰς ὁποίας παρέχει ὁ van der Waerden εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν βιβλίον του, σελ. 94.

«Κατὰ τὸ 776 μ. Χ. ὁ Χαλίφης Al - Mansur, ἵδρυσε τὴν Βαγδάτην ὄχι μακρὰν τῆς Σελευκείας... Ὁ ἔγγονος τούτου Al - Mamun ἵδρυσεν ἐκεῖ Ἀκαδημίαν, Ἀστεροσκοπεῖον καὶ Βιβλιοθήκην. Εἰς τὴν Βιβλιοθήκην αὐτὴν εἰργάζετο ὁ Ἄραψ (μαθηματικὸς) Muhammed Ben Musa, ἐπονομαζόμενος Al - Khwarismi (ἀλκγαρισμί), ὁ ὁποῖος ἔγραψε τὸ πρῶτον ἀραβικὸν βιβλίον περὶ Ἀλγέβρας. Ὁ αὐτὸς Ἀλκγαρισμὶ ἔγραψε μικρὸν βιβλίον περὶ ἀριθμητικῶν πράξεων κατ' Ἰνδούς. Τὸ βιβλίον αὐτὸ μετεφράσθη εἰς τὴν λατινικὴν κατὰ τὸν 12ον αἰῶνα ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου Μοναχοῦ Adelhard ἐκ Bath. Διὰ τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ἔγιναν γνωστοὶ εἰς τὴν Εὐρώπην οἱ ἰνδικοὶ - ἀραβικοὶ ἀριθμοί. Τὸ ὄνομα τοῦ Ἀλκγαρισμὶ παρεφράσθη εἰς ἀλγόριθμος».

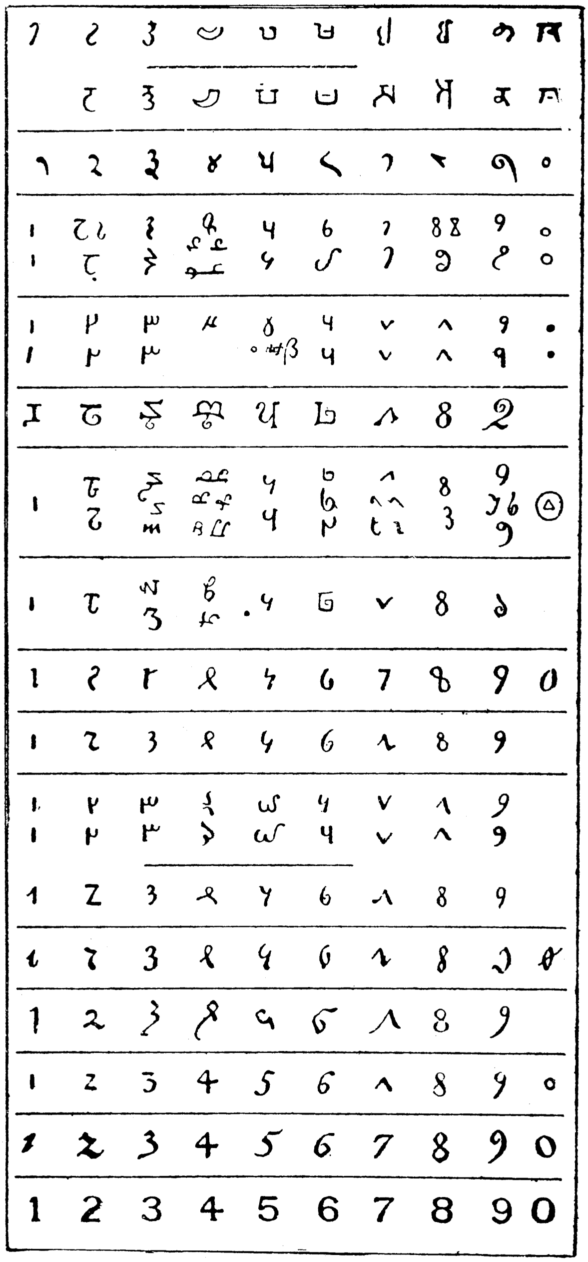
Βραδύτερον ἡ λέξις ἀλγόριθμος ἔγινε μαθηματικὸς ὅρος σημαίνων τρόπον λογισμοῦ, ὅπως ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδου κλπ.

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ μεσαιω-

Πίναξ

ἐμφαίνων τὰς ἐποχὰς κατὰ τὰς ὁποίας διεμορφώθησαν τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν (J. Tropfke)

1. Ἰνδικὰ ἀρχικὰ γράμματα ἀριθμ. λέξεων 2 αἰῶνος.
2. Ἀριθμ. ἰνδ. σύμβολα ἐπιγρ. Gwalior 876 μ. Χ.
3. Ἀριθμητικὰ σύμβολα Δυτικῶν Ἀράβων 9 - 10 αἰῶνος.
4. Ἀριθμ. σύμβολα Ἀνατολ. Ἀράβων 9 - 10 αἰ.
5. Ἀριθμ. σύμβολα τῶν ἀβακιστῶν 9 - 10 αἰ.
6. Ἀριθμ. σύμβολα τῆς γεωμετρίας Βοηθίου 11 αἰ.
7. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Gui d' Arezzo 12 αἰ.
8. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Lechenfeld 12 αἰ.
9. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Sacrobosco 13 αἰ.
10. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Μαξίμου Πλανούδη. Ἀρχαὶ 14 αἰ. Βυζάντιον.
11. Ἀριθμ. σύμβολα τέλους 14 αἰ.
12. Ἀριθμ. σύμβολα Βασιλείας 15 αἰ.
13. Ἀριθμ. σύμβολα 16 αἰ.
14. Ἀριθμ. σύμβολα Dürer 1525.
15. Σύγχρονα ἀριθμ. σύμβολα.



νικοῦ, ἰνδικοῦ καὶ ἀραβικοῦ πολιτισμοῦ συνεχίσθη ἐπὶ ἀρκετὰς ἑκατονταετίας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως τοῦ Βυζαντινοῦ Κράτους, ὡς συνάγεται ἐκτὸς ἄλλων, καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς περιστατικῶν :

1) Ὁ ἀνωτέρω μνημονευθεὶς Χαλίφης Al - Mamun (813 - 833), ὅτε κατὰ τὸ 823 ἐνίκησε τὸν Βυζαντινὸν αὐτοκράτορα Μιχαὴλ τὸν 2ον, ἔθεσεν ὡς ὅρον πρὸς σύναψιν εἰρήνης καὶ ἀπόδοσιν τῶν αἰχμαλώτων, τὴν παράδοσιν εἰς αὐτὸν ὑπὸ τοῦ Μιχαὴλ ἑλληνικῶν χειρογράφων ἐπιστημονικῶν ἔργων ἢ ἀντιγράφων αὐτῶν, ὅρον τὸν ὁποῖον ὁ Μιχαὴλ ἀπεδέχθη. (Ἴδε Μεγάλη Σύνταξις τοῦ Πτολεμαίου, μετάφρασις εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ Karl Manitius, Λειψία 1912, ἀνατύπωσις Λειψία 1962 σελ. VI).

2) Κατὰ τὸ ἔτος 529 ὁ αὐτοκράτωρ τοῦ Βυζαντίου Ἰουστινιανὸς ἔκλεισε τὴν ἐν Ἀθήναις Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ὅπου εἶχον σπουδάσει φιλοσοφίαν καὶ ἑλληνικὰ γράμματα οἱ Μεγάλοι Ἱεράρχαι Βασίλειος ὁ Μέγας καὶ Γρηγόριος ὁ Θεολόγος καὶ τὰς ἄλλας ἑλληνικὰς φιλοσοφικὰς Σχολάς, ὅπου εἶχον σπουδάσει φιλοσοφίαν καὶ ἑλληνικὰ γράμματα ὁ Ἀπόστολος Παῦλος καὶ ὁ Ἰωάννης ὁ Χρυσόστομος καὶ ἄλλοι μεγάλοι καὶ διαπρεπεῖς Ἱεράρχαι τοῦ Χριστιανισμοῦ. Οἱ καθηγηταὶ τῶν Σχολῶν αὐτῶν ἠναγκάσθησαν νὰ μεταβοῦν εἰς τὴν Περσίαν καὶ τὴν Ἀραβίαν ἔνθα ἵδρυσαν Σχολάς, οἱ διάδοχοί των δὲ εἶναι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι συνεβούλευσαν τὸν Χαλίφην Al - Mamun νὰ ζητήσῃ ἑλληνικὰ χειρόγραφα ἀπὸ τὸν αὐτοκράτορα Μιχαήλ, τὰ ὁποῖα ἦσαν εἰς αὐτοὺς ἀπαραίτητα διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν Περσῶν καὶ τῶν Ἀράβων καὶ διὰ τὰς ἐπιστημονικάς των ἐρεύνας.

Ἡ τελικὴ διαμόρφωσις τῶν ἰνδικῶν συμβόλων διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἔγινεν εἰς τὴν Εὐρώπην κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα, ἐν ᾧ εἰς τὸ Βυζάντιον γίνεται διαμνημόνευσις τῶν συμβόλων αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Βυζαντινοῦ λογίου Μαξίμου Πλανούδη (1255 - 1305), ὁ ὁποῖος τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις διὰ τῶν ἰνδικῶν ἀριθμῶν τὰς ὀνομάζει «ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς». (Paul Tannery, Mémoires Scientifiques τόμ. IV, σελ. 199).

Τὰ μαθηματικὰ τοῦ Ὁμήρου

Ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης ἐποχῆς ὅλοι συμφωνοῦν ὅτι ὁ Ὅμηρος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ποιητής, τὸν ὁποῖον ἐγέννησεν ἡ ἀνθρωπότης. Ὅτι ὅμως ὁ Ὅμηρος ἦτο καὶ σπουδαῖος μαθηματικὸς καὶ ὅτι εἰς τοὺς στίχους τῶν ποιημάτων του παίζει μὲ τὰ μαθηματικά, αὐτὸ εἰς τοὺς πολλοὺς εἶναι ἄγνωστον.

Περὶ τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τοῦ Ὁμήρου, ἀμυδρὰν μὲν ἀλλ' ἐνδιαφέρουσαν πληροφορίαν παρέχει εἰς ἡμᾶς ὁ Ῥωμαῖος συγγραφεὺς Aulus G. Gellius (2ος αἰὼν μ. Χ.). Ὁ Gellius (Γκέλλιος) ἐσπούδασεν εἰς τὰς Ἀθήνας, εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος· καὶ ἔγραψε πραγματείαν εἰς δύο τόμους ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀττικαὶ νύκτες» (Noctes Atticae). Εἰς τὸν δεύτερον τόμον

(XIV cap. 6 § 4) ἀναφέρει ὁ Γκέλλιος ὅτι Ἀθηναῖος φίλος του, τοῦ ἔδωκε πρὸς μελέτην βιβλίον του, ὅπου οὗτος εἶχε συγκεντρώσει ἐνδιαφερούσας πληροφορίας, τὰς ὁποίας δὲν εὕρισκε κανεὶς εἰς τὰ ἐν κυκλοφορίᾳ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Μεταξὺ τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν ἦτο ἡ παρατήρησις, ὅτι εἰς ὡρισμένους στίχους τοῦ Ὁμήρου, ἂν ἀντικατασταθοῦν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν αὐτῶν τιμῶν λαμβάνεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ὡς π. χ. :

Ἰλιὰς Η΄.

στίχος 264 **ἀλλ' ἀναχασσάμενος λίθον εἵλετο χειρὶ παχείῃ** = 3498
» 265 **κείμενον ἐν πεδίῳ, μέλανα, τρηχύν τε μέγαν τε** = 3498

(ἀλλ' ὑπεχώρησε (ὁ Ἕκτωρ) καὶ σήκωσε μὲ τὸ γερό του χέρι μιὰ πέτρα, ἡ ὁποία ἦτο στὸ ἔδαφος, μαύρη καὶ τραχεῖα καὶ πολὺ μεγάλη).

Ἀλλ'	$= 1+30+30 = 61$,
ἀναχασσάμενος	$= 1+50+1+600+1+200+200+1+40+5+50+70+200 = 1419$,
λίθον	$= 30+10+9+70+50 = 169$,
εἵλετο	$= 5+10+30+5+300+70 = 420$,
χειρὶ	$= 600+5+10+100+10 = 725$,
παχείῃ	$= 80+1+600+5+10+8 = 704$.
Ἐν ὅλῳ	$61+1419+169+420+725+704 = 3498$.
κείμενον	$= 20+5+10+40+5+50+70+50 = 250$,
ἐν	$= 5+50 = 55$,
πεδίῳ	$= 80+5+4+10+800 = 899$,
μέλανα	$= 40+5+30+1+50+1 = 127$,
τρηχὺν	$= 300+100+8+600+400+50 = 1458$,
τε	$= 300+5 = 305$,
μέγαν	$= 40+5+3+1+50 = 99$,
τε	$= 305$.
Ἐν ὅλῳ	$250+55+899+127+1458+305+99+305 = 3498$

Ἰλιὰς Τ.

στίχος 306 **μή με πρὶν σίτοιο κελεύετε μηδὲ ποτῆτος** = 2848
» 307 **ἄσασθαι φίλον ἦτορ, ἐπεὶ μ' ἄχος αἰνὸν ἱκάνει** = 2848

(Μὴ μὲ προτρέπετε νὰ χορτάσω τὴν καρδιά μου προηγουμένως μὲ φαγητὸ καὶ ποτό, γιατὶ μὲ καταλαμβάνει πόνος φοβερός).

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις διὰ τὰ μαθηματικὰ τοῦ Ὁμήρου εἶχον προκαλέσει τὸ ἐνδιαφέρον πολλῶν μελετητῶν τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ἐνδιαφέρον, τὸ ὁποῖον συνεχίσθη καὶ κατὰ τοὺς πρώτους μετὰ Χριστὸν αἰῶνας. Ὁ ἐκκλησιαστικὸς συγγραφεὺς Κλήμης ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἀφορμώμενος ἐκ τοιούτων παρατηρήσεων σημειώνει, ὅτι ὁ Θεὸς τιμωρεῖ τοὺς ἀνθρώπους συχνὰ μὲ 5 ἢ 6 ἢ 7 γράμματα, ἐννοῶν τὰς λέξεις λιμός, λοιμός, πόλεμος (Gellius ἔ. α.).

(σημ. μονάδες (1 - 9) α', β', γ', δ', ε', ς', ζ', η', θ',
δεκάδες (10 - 90) ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ϙ'
ἑκατοντάδες (100 - 900) ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϡ).

Ἄλλοι μελετηταὶ παρετήρησαν ὅτι τὰ δύο πρῶτα γράμματα τῆς πρώτης λέξεως τῆς Ἰλιάδος μῆ—νιν, τὰ μη, παριστοῦν τὸν ἀριθμὸν τῶν ῥαψῳδιῶν τῆς Ἰλιάδος καὶ τῆς Ὀδυσσείας (24 + 24 = 48) καὶ ὅτι εἰς ἕνα στίχον τῆς Ἰλιάδος ἑκάστη ἑπομένη λέξις ἔχει μίαν συλλαβὴν περισσοτέραν, τῶν συλλαβῶν τῆς προηγουμένης λέξεως :

Ἰλιὰς Γ 182 **ὦ μάκαρ Ἀτρεΐδη, μοιρηγενές, ὀλβιόδαιμον**
1 2 3 4 5

(Σημ. Ἐδῶ πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ λέξις Ἀ - τρεί - δη εἰς πεζὸν λόγον ἔχει 3 συλλαβάς. Εἰς τὸν ὁμηρικὸν στίχον ὅμως ἔχει 4 συλλαβὰς Ἀ - τρε - ΐ - δη). Ἄλλη παλαιὰ παρατήρησις ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν τοῦ Ὁμήρου εἶναι ἡ χρησιμοποίησις ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιρρήματος τρίς, εἰς τὸν στίχον τῆς Ἰλιάδος Ο 189, ὅπου διαβάζομεν :

τριχθὰ δὲ πάντα δέδασται, ἕκαστος δ' ἔμμορε τιμῆς.

ἤτοι τὰ πάντα ἐκφράζονται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3, ἕκαστος δὲ μετέχει τιμῆς. (π. χ. ἀρχὴ—μέσον—τέλος, πρωΐ—μεσημέρι—βράδυ, παρελθὸν—παρὸν μέλλον).

Κατὰ λέξιν ἑρμηνεία : Ὁ Ζεύς, ὁ Ποσειδῶν, ὁ Ἅδης διεμοίρασαν ὅλον τὸν κόσμον εἰς τρία. Ἕκαστος δὲ ἔλαβε τὸ μερίδιόν του.

Αἱ ἀρχαὶ τοῦ ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ καὶ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας

Οἱ εἰδικοὶ ἀνθρωπολόγοι παραδέχονται, ὅτι ὁ ἄνθρωπος ἐνεφανίσθη ἐπὶ τῆς γῆς περὶ τὸ 1 ἑκατομμ. ἔτη π. Χ. Πολλοὶ ἐκ τούτων δέχονται τὴν γνώμην τοῦ Ἀναξιμάνδρου (611 - 546 π. Χ.), ὅτι ὁ ἄνθρωπος προῆλθεν ἐκ τῆς ἐξελίξεως τῶν εἰδῶν, τὴν ὁποίαν μετὰ 2440 ἔτη περίπου διετύπωσε καὶ ὁ Ἄγγλος φυσιοδίφης Δαρβῖνος (1809 - 1882). (Ἴδε Ε. Σ. Σταμάτη, Προσωκρατικοὶ φιλόσοφοι, Ἀθῆναι 1966, σελ. 32 — Πλουτάρχου Στρωματεῖς 2. Δοξογράφοι 579).

Τὰ ἀρχαιότερα πολιτιστικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ ἀνθρώπου ἐπὶ τῆς γῆς, ὑπὸ μορφὴν πρωτογόνων οἰκισμῶν ἀνεκαλύφθησαν εἰς τὴν Θεσσαλίαν πρὸ ὀλίγων ἐτῶν παρὰ τὴν Ὁμηρικὴν πόλιν Ἄργισσαν, τὸ σημερινὸν χωρίον Κρεμομαγούλα, κείμενον 5 χιλιόμετρα δυτικῶς τῆς Λαρίσης, κατόπιν ἀνασκαφῶν τοῦ ἐν Ἀθήναις Γερμανικοῦ Ἀρχαιολογικοῦ Ἰνστιτούτου, ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ καθηγητοῦ Μιλόϊσιτς, βασισθέντος εἰς προηγουμένας ἀνασκαφὰς γενομένας ὑπὸ τοῦ Ἕλληνος καθηγητοῦ Χρίστου Τσούντα. Ἀνακοίνωσις ἐπίσημος τῶν ἐν Θεσσαλίᾳ ἀνασκαφῶν τῶν Γερμανῶν ἐγένετο ἐν Ἀθήναις παρὰ τοῦ Γερμανοῦ καθηγητοῦ Biesants τὴν 16 - 12 - 1958. Οἱ ἀνακαλυφθέντες αὐτοὶ πρωτόγονοι οἰκισμοὶ τοῦ ἑλληνικοῦ χώρου χρονολογοῦνται 100 χιλ. ἔτη π. Χ. Ἔκτοτε καὶ μέχρι τοῦ 9600 π. Χ. περίπου οὐδεμίαν παλαιὰν πληρροφορίαν ἔχομεν περὶ δημιουργίας πολιτιστικῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ ἀνθρώπου γενικῶς ἐπὶ τῆς γῆς, πλὴν τῶν πληροφοριῶν ἐκ τῶν εὑρημάτων εἰς σπήλαια τοῦ Πηλίου, τῆς Γαλλίας καὶ ἀλλοῦ (περίπου 30 χιλ. ἔτη π. Χ.), καὶ τῶν πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας ἀνεκοίνωσεν εἰς τὸν Σόλωνα ὁ Αἰγύπτιος σοφὸς ἱερεύς, ὅταν ὁ Σόλων περὶ τὸ 580 π. Χ. ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον. Τὰς πληροφορίας αὐτὰς δημοσιεύει ὁ Πλάτων εἰς τοὺς διαλόγους του Τίμαιος καὶ Κριτίας. Οἱ Ἀθηναῖοι δὲν εἶχον γνῶσιν αὐτῶν, διότι κατὰ διαστήματα εἶχον γίνει πολλοὶ κατακλυσμοὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα, τῶν ὁποίων καταστρεπτικώτερος ἦτο ὁ κατακλυσμὸς τοῦ Δευκαλίωνος, ὁ ὁποῖος κατὰ τὰς σημειώσεις τοῦ αἰγυπτιακοῦ ἀρχείου συνέβη περὶ τὰ 9000 ἔτη πρὸ τοῦ χρόνου τῆς μεταβάσεως τοῦ Σόλωνος εἰς τὴν Αἴγυπτον. Ὑποτίθεται, ὅτι τὸ ἀρχεῖον τῶν Αἰγυπτίων ἀπετελεῖτο ἀπὸ πλίνθους, αἱ ὁποῖαι ἐξηραίνοντο κατόπιν θερμάνσεως, ἀφοῦ εἶχον εἰς αὐτὰς γραφῆ τὰ διάφορα γεγονότα, τῶν ὁποίων ἤθελον νὰ κρατήσουν σημείωσιν.

Κατὰ τὰς πληροφορίας λοιπὸν τὰς παρεχομένας ὑπὸ τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως καὶ δημοσιευομένας ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος εἰς τοὺς διαλόγους του Τίμαιος καὶ Κριτίας οἱ Ἀθηναῖοι 9000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος εἶχον μεγάλον πολιτισμόν, ἐν ᾧ ὁ πολιτισμὸς τῶν Αἰγυπτίων ἀρχίζει 1000 ἔτη βραδύτερον, ἤτοι 8000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος, ὡς λέγουν αἱ σημειώσεις τοῦ αἰγυπτιακοῦ ἀρχείου. Ἐπὶ πλέον, τονίζει ὁ Αἰγύπτιος ἱερεύς, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἐξώπλισαν τὸν αἰγυπτιακὸν στρατὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὅπλων, τὰ ὁποῖα τοὺς ἔδοσαν ὡς ὑπόδειγμα οἱ Ἀθηναῖοι καὶ ὅτι οἱ Ἀθηναῖοι πρὸ τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος εἶχον ἰσχυρότατον Κράτος, τὸ ὁποῖον ἔσωσε τὴν Ἑλλάδα καὶ τὴν Αἴγυπτον ἐκ τῶν ἐπιθέσεων τοῦ στρατοῦ τῆς μεγάλης νήσου Ἀτλαντίδος τῆς εὑρισκομένης ἔξω τοῦ πορθμοῦ τῶν Ἡρακλείων στηλῶν, δηλαδὴ ἔξω τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτάρ, εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανόν, καὶ καταβυθισθείσης κατὰ τὸν μεγάλον κατακλυσμὸν τοῦ Δευκαλίωνος 9000 ἔτη πρὸ τῆς ἐπισκέψεως τοῦ Σόλωνος εἰς τὴν Αἴγυπτον.

Τὸ ὑποστηριζόμενον, ὅτι ἡ Ἀτλαντὶς ἦτο μικρὰ νῆσος παρὰ τὴν νῆσον Θήραν καὶ ὅτι ἐβυθίσθη κατὰ τὴν ἐκεῖ ἡφαιστειακὴν ἔκρηξιν τοῦ 1500 π. Χ. κατόπιν νεωτέρων ἐρευνῶν δὲν εὐσταθεῖ. Τὰ κυριώτερα ἐπιχειρήματα διὰ τὴν ὑποστήριξιν τῆς γνώμης, ὅτι ἡ Ἀτλαντὶς εὑρίσκετο περὶ τὴν Θήραν καὶ ἐβυθίσθη τῷ 1500 π. Χ. εἶναι δύο. Πρῶτον, ὅτι ὁ Πλάτων ἔκαμε λάθος κατὰ τὸν παράγοντα 10 καὶ ἀντὶ νὰ γράψῃ 900 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος ἔγραψεν 9000 ἔτη. Δεύτερον, ὅτι οἱ κάτοικοι τῆς Ἀτλαντίδος ἐγνώριζον τὸν ὀρείχαλκον, ἡ δὲ ὀρειχαλκίνη ἐποχὴ τοποθετεῖται ὑπὸ τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης περὶ τὸ ἔτος 2100 - 1200 π. Χ.

Καὶ τὰ δύο προηγούμενα ἐπιχειρήματα εἶναι ἐσφαλμένα. Τὸ πρῶτον διότι οἱ Αἰγύπτιοι εἶχον ἄλλο σύμβολον διὰ τὸν ἀριθμὸν 100 καὶ ἄλλο, ἐντελῶς διάφορον, διὰ τὸν ἀριθμὸν 1000 καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπεκλείετο ὁ ἀριθμὸς 100 νὰ ἐκληφθῇ ὡς 1000. (Ἴδε τὰ αἰγυπτιακὰ σύμβολα διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τὸ περιοδικὸν «Εὐκλείδης», τεῦχος 2, Φεβρουάριος 1968 σελ. 83). Ἐξ ἄλλου ὁ Σόλων μετέφερε τὴν συναφῆ διήγησιν τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως εἰς τὰς Ἀθήνας προφορικῶς καὶ ὄχι γραπτῶς, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου, ὅπου γράφεται :

«Λέγε ἐξ ἀρχῆς», ἦ δ' ὅς, «τί τε καὶ πῶς καὶ παρά τίνων ὡς ἀληθῆ διακηκοὼς ἔλεγεν ὁ Σόλων». (Τίμαιος 21 D). Ἐπὶ πλέον, τὸ σύμβολον διὰ τὸ μηδὲν (0) ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ τὸ 150 μ. Χ., ὡς ἐμνημονεύθη προηγουμένως.

Καὶ τὸ δεύτερον ἐπιχείρημα εἶναι ἐσφαλμένον, διότι ὁ ὀρείχαλκος περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων εἰς τὸν Κριτίαν δὲν εἶναι τὸ σημερινὸν κρᾶμα ὀρείχαλκος, ἀλλὰ τὸ ἄγνωστον εἰς ἡμᾶς μέταλλον ὀρείχαλκος, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ Κριτίου τοῦ Πλάτωνος ὅπου γράφεται :

«Πολλὰ μὲν γὰρ διὰ τὴν ἀρχὴν αὐτοῖς προσῄειν ἔξωθεν, πλεῖστα δὲ ἡ νῆσος αὐτὴ παρείχετο εἰς τὰς τοῦ βίου κατασκευάς, πρῶτον μὲν ὅσα ὑπὸ μεταλλείας ὀρυττόμενα στερεὰ καὶ ὅσα τηκτὰ γέγονε, καὶ τὸ νῦν ὀνομαζόμενον μόνον — τότε δὲ πλέον ὀνόματος ἦν τὸ γένος ἐκ γῆς ὀρυττόμενον ὀρειχάλκου κατὰ τόπους πολλοὺς τῆς νήσου, πλὴν χρυσοῦ τιμιώτατον ἐν τοῖς τότε ὄν..».

(Κριτίας 114 DE). (Διότι ἕνεκα τῆς ἐξουσίας, τὴν ὁποίαν εἶχον (σημ. οἱ βασιλεῖς τῆς Ἀτλαντίδος) πολλὰ πράγματα μετεφέροντο ἐκ τοῦ Ἐξωτερικοῦ, πλεῖστα δὲ ἐπρομήθευεν εἰς αὐτοὺς ἡ ἰδία ἡ νῆσος, ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐχρειάζοντο διὰ τὰς ἀνάγκας τοῦ βίου των, πρῶτον μὲν τοὺς ἔδιδε τὰ μέταλλα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐξορύσσονται αὐτούσια καὶ στερὰ ἀπὸ τὴν γῆν, καὶ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται διὰ τήξεως, καὶ τὸ μέταλλον ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου σήμερον μόνον τὸ ὄνομά του ἀκούομεν, ἐν ᾧ τότε ὑπῆρχε πολὺ περισσότερον τὸ μέταλλον ἀπὸ τὸ ὄνομα, δηλαδὴ τὸν ὀρείχαλκον, ὁ ὁποῖος ἐξωρύσσετο εἰς πολλὰ μέρη τῆς νήσου, καὶ ἦτο τὸ πολυτιμότερον μέταλλον πλὴν τοῦ χρυσοῦ διὰ τοὺς τότε ἀνθρώπους...).

Ἀλλὰ καὶ ἡ τοποθέτησις τῆς χαλκίνης ἐποχῆς εἰς τὸ χρονικὸν διάστημα 3900 - 2100 π. Χ. ἀποδεικνύεται οὐχὶ ὀρθὴ κατόπιν τῶν ἀνασκαφῶν τῆς ἀνοίξεως 1970, τῶν γενομένων ὑπὸ τοῦ Ἀμερικανοῦ Robert J. Braindwood, τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Σικάγου καὶ τοῦ Τούρκου Halet Cambel τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Κωνσταντινουπόλεως παρὰ τὸ χωρίον Tepesi κείμενον πλησίον παραποτάμου τοῦ Τίγρητος ποταμοῦ, ὅπου εὑρέθησαν χάλκινα ἀντικείμενα καὶ ἐργαλεῖα χρονολογούμενα διὰ τῶν νεωτάτων μεθόδων περὶ τὸ ἔτος 7000 π. Χ.

(Scientific American — Frankfurter Allgemeine Zeitung, Mai 1970, NR. 104, Natur und Wissenschaft, Seite II).

***

Ὁ Κρητικὸς πολιτισμός, ὁ Μυκηναϊκὸς πολιτισμός, ἡ δημιουργία τῆς γλώσσης τῆς Ὀδυσσείας καὶ τῆς Ἰλιάδος τοῦ Ὁμήρου δὲν ἔγιναν εἰς χρονικὸν διάστημα ὀλίγων ἑκατοντάδων ἐτῶν, ἀλλὰ εἰς διάστημα πολλῶν χιλιάδων ἐτῶν. Ὅλα λοιπὸν τὰ ὑπάρχοντα στοιχεῖα συνηγοροῦν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Δευκαλίωνος, περὶ τὸ ἔτος 9600 π. Χ., ὁπότε ἐβυθίσθη ἡ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν εὑρισκομένη μεγάλη νῆσος Ἀτλαντίς, ὑπῆρχεν εἰς τὴν Ἑλλάδα μεγάλος πολιτισμός.

Ὁ πολιτισμὸς δὲ αὐτὸς μετεδόθη εἰς τὴν Ἐγγὺς Ἀνατολὴν καὶ τὴν Αἴγυπτον, ὡς ἀφηγεῖται ὁ ἱερεὺς εἰς τὸν Σόλωνα (Τίμαιος 23 - 26). Ὅθεν τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ Ἡροδότου, ὅτι ἡ γεωμετρία (ἡ πρακτικὴ) εὑρεθεῖσα εἰς τὴν Αἴγυπτον εἰς πολὺ νεωτέραν ἐποχὴν μετεφέρθη εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἐλέγχεται ὡς ἀνακριβές. Καίτοι ἡ σχετικὴ φράσις τοῦ Ἡροδότου θεωρεῖται ὑπό τινων διφορουμένη, ἐν τούτοις οἱ πλεῖστοι τῶν μεταγενεστέρων συγγραφέων, παραλαβόντες ἐξ αὐτοῦ διετήρησαν καὶ διέδοσαν τὴν πληροφορίαν αὐτήν, ὅτι δηλ. ἡ γεωμετρία εὑρέθη πρῶτον εἰς τὴν Αἴγυπτον καὶ ἐκεῖθεν μετεφέρθη εἰς τὴν Ἑλλάδα, τῆς ὁποίας ἡ Ἡροδότειος διατύπωσις ἔχει ὡς ἑξῆς :

«δοκέει δέ μοι ἐντεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν» (Ἡρόδοτος Β' 109). (Μοῦ φαίνεται δέ, ὅτι ἀπὸ ἐδῶ (τὴν Αἴγυπτον) εὑρεθεῖσα ἡ γεωμετρία μετεφέρθη εἰς τὴν Ἑλλάδα).

Ἡ ἀνωτέρω ἀνακρίβεια τοῦ Ἡροδότου δὲν εἶναι ἡ μόνη, ἡ ὁποία ἀπαντᾷ εἰς τὸ ἀξιοθαύμαστον πράγματι ἔργον τοῦ πατρὸς τῆς Ἱστορίας. Ὁ πατὴρ τῆς Ἱστορίας δὲν ἦτο δυνατόν, κατὰ τὴν παλαιὰν ἐκείνην ἐποχήν, νὰ ἐλέγξῃ τὴν ἀκρίβειαν ὅλων τῶν πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας ἐλάμβανεν. Ὁ Πλούταρχος ἐξ ἄλλου θεωρεῖ πολλὰς ἀνακριβείας τῆς Ἱστορίας τοῦ Ἡροδότου γενομένας σκοπίμως καὶ πρὸς ἀναίρεσιν τῶν ἀνακριβειῶν αὐτῶν ἔγραψε πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον Περὶ τῆς Ἡροδότου κακοηθείας. Μία τῶν ἀνακρι βειῶν, γράφει ὁ Πλούταρχος, εἶναι καὶ ἐκείνη, καθ' ἣν ὁ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, ἦτο Φοῖνιξ, δηλ. Σημίτης (Α' 170). Ἄλλη ἀνακρίβεια εἶναι, ὅτι οἱ Ἕλληνες ἔλαβον τὰ ὀνόματα τῶν θεῶν τοῦ Ὀλύμπου παρὰ τῶν Αἰγυπτίων (Β' 50). Ἀλλὰ καὶ αἱ πληροφορίαι τοῦ Ἡροδότου περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πεσόντων εἰς τὰς μάχας τοῦ Μαραθῶνος καὶ τῶν Πλαταιῶν φαίνονται ἀνακριβεῖς. Γράφει, παραδείγματος χάριν, ὁ πατὴρ τῆς Ἱστορίας, ὅτι εἰς τὸν Μαραθῶνα ἔπεσαν 6400 Πέρσαι καὶ 192 Ἀθηναῖοι, ἐνῷ εἰς τὰς Πλαταιὰς ἔπεσαν 257.000 Πέρσαι καὶ 159 Ἕλληνες (Ζ' 117, Ι' 70).

Σχετικῶς πρὸς τὰς ἀνακριβείας τοῦ Ἡροδότου, ἰδίως ὅσον ἀφορᾷ εἰς τούς Αἰγυπτίους γράφουν ἐκτὸς τοῦ Πλουτάρχου, καὶ ἄλλοι ἀρχαῖοι συγγραφεῖς ὡς ἑξῆς :

«Ὅσα μὲν οὖν Ἡρόδοτος καί τινες τῶν τὰς Αἰγυπτίων πράξεις συνταξαμένων ἐσχεδιάκασιν, ἑκουσίως προκρίναντες τῆς ἀληθείας τὸ παραδοξολογεῖν καὶ μύθους πλάττειν ψυχαγωγίας ἕνεκα, παρήσομεν...). (Διόδωρος I 69, 7). (Ὅσα μὲν λοιπὸν ὁ Ἡρόδοτος καὶ μερικοὶ ἐκ τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὴν ἱστορίαν τῶν Αἰγυπτίων ἔγραψαν, προκρίναντες ἀπὸ τὴν ἀλήθειαν, νὰ γράφουν παραδοξολογίας καὶ νὰ πλάττουν μύθους ἕνεκα ψυχαγωγίας, θὰ τὰ ἀντιπαρέλθωμεν).

«Ῥᾷον δ' ἄν τις Ἡσιόδῳ καὶ Ὁμήρῳ πιστεύσειεν ἡρωολογοῦσι καὶ τοῖς τραγικοῖς ποιηταῖς ἢ Κτησίᾳ τε καὶ Ἡροδότῳ καὶ Ἑλλανίκῳ καὶ ἄλλοις τοιούτοις». (Στράβων Γεωγραφικὰ XI 6, 3). (Εὐκολώτερον θὰ ἠδύνατο κανεὶς νὰ πιστεύσῃ τὸν Ἡσίοδον καὶ τὸν Ὅμηρον, οἱ ὁποῖοι ὁμιλοῦν περὶ ἡρώων, καὶ τοὺς τραγικοὺς ποιητάς, παρὰ τὸν Κτησίαν καὶ τὸν Ἡρόδοτον καὶ τὸν Ἑλλάνικον καὶ ἄλλους τοιούτους συγγραφεῖς).

«Πολλὰ τὸν Ἡρόδοτον ἐλέγχει τῶν Αἰγυπτιακῶν ὑπ' ἀγνοίας ἐψευσμένον». (Ἰώσηπος, κατὰ Ἀπίωνος I 14). (Εἰς πολλὰ σημεῖα ἐλέγχει τὸν Ἡρόδοτον (ὁ Μανέθων) διὰ τὰς πληροφορίας περὶ Αἰγύπτου, ὡς γράφοντα ψεύδη ἕνεκα ἀγνοίας).

«Ἔφορος μὲν Ἑλλάνικον ἐν τοῖς πλείστοις ψευδόμενον ἐπιδείκνυσιν, Ἔφορον δὲ Τίμαιος καὶ Τίμαιον οἱ μετ' ἐκεῖνον γεγονότες, Ἡρόδοτον δὲ πάντες». (Ἰώσηπος, Κατὰ Ἀπίωνος I 3). (Ὁ Ἔφορος μὲν ἀποδεικνύει, ὅτι ὁ Ἑλλάνικος εἰς τὰ περισσότερα γράφει ψεύδη, ὁ Τίμαιος γράφει τὸ αὐτὸ διὰ τὸν Ἔφορον, διὰ τὸν Τίμαιον γράφουν τὸ αὐτὸ οἱ μεταγενέστεροι, τὸν Ἡρόδοτον δὲ ὅλοι ἀποδεικνύουν ψευδόμενον).

***

Ὡς συνάγεται λοιπὸν ἐκ τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος ὁ ἀρχαιότερος πολιτισμὸς ἐπὶ τῆς γῆς καὶ συνεπῶς καὶ ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας ἐδημιουργήθη εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον πολὺ πρὸ τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος.

Αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ τὸ σχῆμα τοῦ ἡλίου καὶ τῆς πανσελήνου ἔδοσαν εἰς τὸν ἄνθρωπον εὐθὺς ἀμέσως ἀπὸ τῆς δημιουργίας του τὴν ἔννοιαν τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τοῦ κύκλου. Μὲ τὴν ἐξέλιξιν τοῦ πολιτισμοῦ εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον ἐδημιουργήθη ἡ ἔννοια τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Τοῦτο, ὑποτίθεται, ὅτι ἔγινε παραλλήλως πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης. Ἀντικείμενα τῆς καθημερινῆς ζωῆς ἔδοσαν τὸ ὄνομά των εἰς τὰ πρῶτα γεωμετρικὰ σχήματα, ὡς λίαν προσφυῶς τονίζει ὁ σοφὸς Γάλλος καθηγητὴς Charles Mugler εἰς τὸ περίφημον λεξικόν του τῶν γεωμετρικῶν ὅρων τῶν Ἑλλήνων (Charles

Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris 1958, σελ. 5 - 32).

***

᾿Αφ᾿ ἧς ἐποχῆς ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ῾Ελλήνων ἡ ἀπόδειξις εἰς τὰς μαθηματικὰς προτάσεις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μίαν τῶν ὑψίστων ἀνακαλύψεων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, ἀπὸ τότε ἤρχισεν ἡ δημιουργία τῶν ἐπιστημῶν ὑπὸ τῶν ῾Ελλήνων, ὑπὸ τὴν σημερινὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου ᾿Επιστήμη. Τὰ χρονικὰ ὅρια τῆς ἐποχῆς αὐτῆς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν, διότι δὲν ὑπάρχουν τὰ πρὸς τοῦτο γραπτὰ στοιχεῖα. ῾Ο Πρόκλος (410 - 485 μ. Χ.), ὁ ὁποῖος ἀντλεῖ τὰς πληροφορίας του παρὰ τοῦ ἱστορικοῦ τῶν Μαθηματικῶν, τοῦ μαθητοῦ τοῦ ᾿Αριστοτέλους, Εὐδήμου τοῦ ῾Ροδίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον δὲν διεσώθη, ἀναφέρει ὡς πρῶτον χρησιμοποιήσαντα ἀπόδειξιν εἰς μαθηματικὰς προτάσεις τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον (640 - 546 π. Χ.) γράφων τὰ ἑξῆς :

«Τὸ μὲν οὖν διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαί φασιν».

«Τῷ μὲν οὖν Θαλῇ τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὑρέσεως ἕνεκα καὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος χάρις. Λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἀρχαϊκώτερον δὲ τὰς «ἴσας» ὁμοίας προσειρηκέναι».

«Τοῦτο γὰρ τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εὑρημένου μέν, ὥς φησιν, Εὔδημος, ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου».

«Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα» (σημ. τὸ θεώρημα ἐν συντομίᾳ εἶναι : ᾿Εὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, εἶναι ἴσα). (῎Εκδοσις Friedlein, 157,10 - 250,20 - 299,1 - 352,14).

᾿Επειδὴ δὲ ὁ Θαλῆς θεωρεῖται ὁ ἀρχαιότερος τῶν σοφῶν τῆς ῾Ελλάδος ὁ χρησιμοποιήσας ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἀποδίδεται εἰς αὐτὸν ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀποδείξεως. Συναφῶς ὁ μεγαλύτερος τῶν Γερμανῶν φιλοσόφων ᾿Εμμανουὴλ Κάντιος (Immanuel KANT, 1724 - 1804) ἐκθειάζει ἰδιαιτέρως τὸ μέγα τοῦτο ἐπίτευγμα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, λέγων, ὅτι ὅπως καὶ ἂν ὀνομάζεται ὁ ἐπινοήσας τὴν ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἴτε Θαλῆς, εἴτε ἄλλως πως, οὗτος ἔσχε μίαν ἀναλαμπὴν (Πρόλογος εἰς τὴν πραγματείαν του, Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου (Kant, Kritik der reinen Vernunft, Vorwort).

῾Η ἀπόδειξις εἰς τὰ Μαθηματικὰ

Καὶ ἄλλοι ἐκ τῶν παλαιῶν πολιτισμένων λαῶν εἶχον ἀποκτήσει ἐκ τῆς μακραίωνος πείρας γνώσεις γεωμετρικὰς καὶ ἀριθμητικάς, ὅπως π. χ. οἱ Σουμέριοι, οἱ Βαβυλώνιοι, οἱ Αἰγύπτιοι, οἱ Ἰνδοί, οἱ Κινέζοι. Αἱ ἀρχαιότεραι ἐμπειρικαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις τῶν λαῶν αὐτῶν (ἰδίως τῶν Σουμερίων) ἀνάγονται περὶ τὴν 4 - 3ην χιλιετηρίδα π. Χ. Οὐδεὶς ὅμως ἐκ τῶν λαῶν αὐτῶν εἶχε τὴν ἀγαθὴν τύχην τῆς ἐπινοήσεως τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά, πλὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, οἱ ὁποῖοι καὶ μόνοι ἐδημιούργησαν τὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν καὶ τὴν ἐπιστήμην τῆς Λογικῆς κατορθώσαντες δι' αὐτῶν ν' ἀνοίξουν τοὺς ὀφθαλμοὺς τῶν ἀνθρώπων εἰς πᾶσαν πνευματικὴν δραστηριότητα καὶ πᾶσαν φιλοσοφικὴν καὶ θεολογικὴν ἀναζήτησιν. Ἡ ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν διὰ τοὺς Ἕλληνας δὲν εἶχε καμμίαν σχέσιν μὲ τὰς Ἐπιχειρησιακὰς Ἐρεύνας καὶ τὸν Κερδῷον Ἑρμῆν ἀλλὰ εἶχε σκοπὸν τὴν καλλιέργειαν τοῦ νοῦ καὶ τῆς ψυχῆς τοῦ ἀνθρώπου, διὰ τὴν βαθυτέραν κατανόησιν τοῦ Θείου. Τοῦτο συνάγεται πλὴν ἄλλων, καὶ ἐκ τῶν διασωθεισῶν πληροφοριῶν περὶ τῆς λειτουργίας τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου (580 - 500 π. Χ. περίπου) καὶ ἐκ τῶν εἰς τὸν Πλάτωνα ἀποδιδομένων ῥήσεων **«μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην»**. (Τζέτζης, Χιλιάδες VIII 973) καὶ **«πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν»** (Πλούταρχος, Συμποσιακὰ Προβλήματα VIII Β'). Εἰς τὸν προηγούμενον Διάλογον τοῦ Πλουτάρχου ὁ μετέχων τῆς συζητήσεως Τυνδάρης προσθέτει ὅτι κατὰ τὸν Πυθαγόρειον Φιλόλαον, ἡ γεωμετρία ἀρχὴ καὶ μητρόπολις οὖσα τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν ἐπαναφέρει καὶ καθοδηγεῖ τὴν διάνοιαν ὡς ἐκκαθαριζομένην καὶ διαχωριζομένην ἡσύχως ἀπὸ τὰ αἰσθητὰ πράγματα. **«Διὸ καὶ Πλάτων αὐτὸς ἐμέμψατο τοὺς περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν καὶ Μέναιχμον εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας, ὥσπερ πειρωμένους δι' ἀλόγου δύο μέσας ἀνάλογον ᾗ παρείκοι, λαβεῖν· ἀπόλλυσθαι γὰρ οὕτω καὶ διαφθείρεσθαι τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν αὖθις ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ παλινδρομούσης καὶ μὴ φερομένης ἄνω μηδ' ἀντιλαμβανομένης τῶν ἀϊδίων καὶ ἀσωμάτων εἰκόνων, πρὸς αἷσπερ ὢν ὁ θεὸς ἀεὶ θεός ἐστι»**. (Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καὶ αὐτὸς ὁ Πλάτων κατηγόρησε τοὺς περὶ τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Ἀρχύταν καὶ τὸν Μέναιχμον, οἱ ὁποῖοι προσεπάθησαν νὰ ἀναγάγουν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου (τοῦ δηλίου προβλήματος) εἰς λύσιν δι' ὀργανικῶν καὶ μηχανικῶν κατασκευῶν, προσπαθοῦντας δηλαδὴ νὰ λάβουν δι' ἀσυμμέτρου σχέσεως δύο μέσας ἀναλόγους, ὡς ἐὰν τοῦτο ἦτο ἐπιτρεπτόν, διότι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ τῆς λύσεως χάνεται καὶ καταστρέφεται τὸ ἀγαθὸν τῆς γεωμετρίας, ἡ ὁποία παλινδρομεῖ πάλιν πρὸς τὰ αἰσθητὰ καὶ δὲν φέρεται ἄνω (πρὸς τὸν θεὸν) οὔτε κατανοεῖ τὰς αἰωνίους καὶ ἀσωμάτους εἰκόνας, εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχων ὁ θεὸς εἶναι πάντοτε θεός).

Ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ὑπῆρξε βέβαια μία ἀναλαμπὴ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, αὕτη ὅμως δὲν προἦλθεν αὐτομάτως. Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα εἰς τὴν ἀνακάλυψιν, ὅτι διὰ τὴν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας μιᾶς γεωμετρικῆς προτάσεως εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπόδειξις αὐτῆς ἔπρεπε νὰ ἔχουν προηγηθῆ ἄλλαι γνώσεις ἐκ τῶν ὁποίων νὰ προκύπτῃ ὡς λογικὴ συνέπεια ἡ ἀνάγκη τῆς ἀποδείξεως. Αἱ γνώσεις αὗται εἶναι πρῶτον ὁ καθορισμὸς τοῦ γεωμετρικοῦ (καὶ γενικῶς τοῦ μαθηματικοῦ) ἀντικειμένου καὶ δεύτερον ὁ καθορισμὸς τῶν ἀξιωμάτων. Ὑπὸ τὸν ὅρον ἀξιώματα νοοῦνται ἀλήθειαι ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί. (σημ. ὁ ὅρος ἀλήθεια θὰ ἀναλυθῆ εἰς τὸ κεφάλαιον 'Αριστοτέλης). Καθίσταται φανερόν, ὅτι πρὸς τούτοις πρέπει νὰ εἶναι γνωσταὶ αἱ σπουδαιότεραι ἀρχαὶ τῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ὀνομάζεται Λογική. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ (ἀκμὴ 600 π. Χ.), ὁπότε μαρτυροῦνται ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπ' αὐτοῦ ἔπρεπε νὰ εἶναι γνωστοὶ οἱ σπουδαιότεροι νόμοι τῆς Λογικῆς καὶ τὰ κυριώτερα μαθηματικὰ ἀξιώματα, διότι ἄνευ γνώσεως αὐτῶν εἶναι ἀδύνατον νὰ ζητηθῆ καὶ νὰ γίνῃ ἀπόδειξις μαθηματικῆς προτάσεως.

Ὅθεν τὸ ὑποστηριζόμενον, ὅτι ὑπὸ τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert, 1862 - 1943) ἱδρύθη περὶ τὸ 1900, ἤτοι 2500 ἔτη ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ, ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος τῆς γεωμετρίας καὶ τῶν μαθηματικῶν δικαίως προκαλεῖ εἰς τοὺς ἐπαΐοντας τὴν θυμηδίαν.

Διὰ ν' ἀποδείξῃ ὁ Θαλῆς, ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι χρησιμοποιεῖ τὸ ἀξίωμα, τὸ ὁποῖον ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ διὰ τὴν γεωμετρίαν, ὅτι «ἐὰν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρέσωμεν ἴσα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα». Θεωρεῖται λογικόν, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ εἶχεν ἐξαντληθῆ ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῶν Μαθηματικῶν. Τοὐναντίον, καθ' ὅσον εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς γραπτῆς παραδόσεως, αὕτη συνεχίσθη ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας καὶ συνεχίζεται ἀκόμη καὶ ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας. 'Αρκεῖ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν ὅλων τῶν ἐπιστημῶν, ἀποδεικτικῶν καὶ μή, διενεργεῖται εἰς τὴν ἐποχήν μας ὑπὸ τῶν Κέντρων 'Επιστημονικῶν 'Ερευνῶν τῶν διαφόρων Κρατῶν. Καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα λειτουργεῖ ἀπό τινων ἐτῶν τὸ 'Εθνικὸν Ἵδρυμα 'Ερευνῶν καὶ τὰ Κέντρα 'Ερεύνης τῆς 'Ακαδημίας 'Αθηνῶν. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν ἂν ἐν Ἑλλάδι ἐδημοσιεύθησαν ἢ πρόκειται νὰ δημοσιευθοῦν πορίσματα ἐρευνῶν καὶ ἰδίως τῶν συναφῶν ἐρευνῶν πρὸς τὰς ἀρχὰς τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῶν ἐπιστημῶν ἀπαιτεῖ μεγάλο χρονικὸν διάστημα, συμβαδίζει δὲ αὕτη πρὸς τὴν ἔρευναν τῆς θεωρίας τῆς γνώσεως.

***

Κατὰ τὸν 'Αριστοτέλη (384 - 322 π. Χ.), πᾶσα γνῶσις εἶναι γνῶσις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ π. χ. εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ σκέψις τοῦ ἀνθρώπου ἀναφέρεται πρωτίστως εἴς τι ἀντικείμενον, δευτερευόντως δὲ δύναται νὰ στραφῇ αὕτη πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἐπιστητὸν δὲν ὑπάρχει ἐπιστήμη. Ἡ μὴ ὕπαρξις ἐπιστήμης δὲν ἐμποδίζει νὰ ὑπάρχῃ ἐπιστητόν, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης. Ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου π. χ. ἀποτελεῖ ἐπιστητόν. Τοῦ ἐπιστητοῦ ὅμως τούτου δὲν ὑπάρχει γνῶσις, δὲν ὑπάρχει ἐπιστήμη (σημ. Ἐννοεῖ, ὅτι δὲν ὑπάρχει γνῶσις τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου διὰ κανόνος καὶ διαβήτου).

«Ἐπιστητοῦ μὲν γὰρ μὴ ὄντος οὐκ ἔστιν ἐπιστήμη (οὐδενὸς γὰρ ἔσται ἐπιστήμη) ἐπιστήμης δὲ μὴ οὔσης οὐδὲν κωλύει ἐπιστητὸν εἶναι, οἷον καὶ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἴ γε ἔστιν ἐπιστητόν, ἐπιστήμης μὲν αὐτοῦ οὐκ ἔστιν οὐδέπω, αὐτὸς δὲ ἐπιστητὸν ἐστὶ» (Ἀριστοτέλους Κατηγορίαι 7 β 29, (εἴ γε = ἀφοῦ).

Ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία : 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν, δηλαδὴ τὰ ἀξιώματα καὶ 3) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον διὰ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ ἀφ' ἑαυτῶν φανερὰς προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα. Τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ προχωρήσουν πέρα τῶν ἀναποδείκτων ἀρχικῶν προτάσεων. Τὴν ἔρευναν τῶν προτάσεων τούτων ἐπιτελεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ πρώτη φιλοσοφία, ἡ λεγομένη ὑπὸ τῶν νεωτέρων γνωσιολογία ἢ γνωσιοθεωρία. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες ἔχουν μὲν ὕπαρξιν ὄχι ὅμως καὶ αὐθυπαρξίαν. Αὗται ὑπάρχουν ὡς σταθερὰ χαρακτηριστικὰ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἄνευ τῶν ὁποίων θὰ ἦσαν ἀνύπαρκτοι. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἀντίθεσιν τοῦ Ἀριστοτέλους πρὸς τὴν αὐθυπαρξίαν τῶν ἰδεῶν τοῦ Πλάτωνος. Πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν Ἰδεῶν τοῦ Πλάτωνος τάσσονται νεώτεροί τινες Μαθηματικοὶ παραδεχόμενοι, ὅτι τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα προϋπάρχουν ἀσχέτως πρὸς τὸν αἰσθητὸν κόσμον.

Τὸ ἀντικείμενον ἐρεύνης τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τρισδιαστάτου χώρου, ὅπως οὗτος ὑποπίπτει εἰς τὰς αἰσθήσεις μας, ὅπως γίνεται ἀντιληπτὸς παρ' ἡμῶν. Ὁ χῶρος, ὡς ἐννοοῦμεν τοῦτον σήμερον, ἐκαλεῖτο κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τόπος. Παρὰ τοῦ Ἀριστοτέλους πληροφορούμεθα πῶς ὁ Δημόκριτος ὠνόμαζε τὸν χῶρον :

«Προσαγορεύει Δημόκριτος τὸν τόπον τοῖς δε τοῖς ὀνόμασι, τῷ τε κενῷ καὶ τῷ οὐθενὶ καὶ τῷ ἀπείρῳ». Fragmenta 202. 1514 β 11). (Ὁ Δημόκριτος ὀνομάζει τὸν χῶρον μὲ τὰ ἑξῆς ὀνόματα, καὶ μὲ τὸ ὄνομα κενόν, καὶ μὲ τὸ ὄνομα οὐδέν, καὶ μὲ τὸ ὄνομα ἄπειρον).

῾Ο ἴδιος ὁ ᾿Αριστοτέλης ορίζει τὸν χῶρον ὡς ἑξῆς.

«Τὸ τοῦ περιέχοντος πέρας ἀκίνητον πρῶτον, τοῦτ' ἔστιν ὁ τόπος». (Φ δ 4. 212 α 20).

῾Ο Ζήνων ὁ ᾿Ελεάτης δὲν παραδέχεται τὴν ὕπαρξιν τοῦ χώρου, λέγων, ὅτι χῶρος δὲν ὑπάρχει, διότι ἐὰν ὑπῆρχε ἔπρεπε νὰ ἦτο εἰς κάποιον χῶρον, αὐτὸς εἰς κάποιον ἄλλον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Τὸ ζήτημα τοῦτο θὰ ἐκτεθῇ λεπτομερέστερον εἰς τὸ κεφάλαιον Ζήνων ὁ ᾿Ελεάτης.

Τὸ πρόβλημα τί εἶναι χῶρος παραμένει καὶ σήμερον ἄλυτον, ὡς εὐστόχως παρατηρεῖ εἰς τοὺς δύο τελευταίους στίχους τοῦ βιβλίου του, Τὸ πρόβλημα τοῦ χώρου, ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Bar - Ilan τοῦ ᾿Ισραήλ, Μὰξ Γιάμμερ (Max Jammer, Das Problem des Raumes, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1960, σελὶς 220, μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀμερικανικοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον Concept of Space, Harvard University Press, Cambridge U.S.A.). ῾Ο χῶρος ὅμως ὑπάρχει, ζῶμεν ἐντὸς αὐτοῦ, ἀσχέτως ἂν δὲν δυνάμεθα νὰ τὸν ὁρίσωμεν καὶ περὶ αὐτὸν ἀσχολεῖται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία.

῾Η ἑλληνικὴ γεωμετρία χωρὶς νὰ κατονομάζῃ τὸν χῶρον ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ χρησιμοποιοῦσα ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἔννοιαν «σημεῖον» τὸ ὁποῖον καθορίζει ὡς ἑξῆς: **«σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν»** (σημεῖον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει μέρος).

᾿Αμέσως γεννᾶται τὸ ἐρώτημα τί εἶναι μέρος, δηλαδὴ διάστασις, τὸ ὁποῖον μένει ἀναπάντητον. ῾Η οὕτω πως ὁριζομένη ἔννοια σημεῖον εἶναι μία ἀρχὴ πέρα τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁ Πλάτων σημειώνει, ὅτι ἡ γεωμετρία, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῆς μὴ ἱκανοποιητικῶς ὁριζομένης ἐννοίας σημεῖον, εἶναι ἐπιστήμη σχετικὴ καὶ ὄχι ἀπόλυτος ὡς εἶναι ἡ φιλοσοφία, ἡ ὁποία ἐρευνᾷ χωρὶς νὰ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ κάμῃ οὐδεμίαν ὑπόθεσιν, γράφων:

«῟Ω γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; Οὐδεμία ἦδ' ὅς». (Πολιτεία 533 C). (Διότι, ὅταν μία ἐπιστήμη λαμβάνει ὡς ἀρχὴν κάτι, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει (σημ. τὴν ἔννοιαν σημεῖον), τὰ τελικὰ δὲ συμπεράσματα καὶ τὰ ἐνδιάμεσα συναρμολογοῦνται ἐξ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει, ποία ἐπινόησις εἶναι δυνατόν ποτε τὴν τοιαύτην παραδοχὴν νὰ θεωρήσῃ ὡς ἐπιστήμην; Οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος).

῾Η ἔννοια σημεῖον ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία ὑπέστη κριτικὴν ὑπὸ τοῦ ἰατροφιλοσόφου Σέξτου τοῦ ᾿Εμπειρικοῦ (᾿Αλεξάνδρεια 2ος αἰ. μ.Χ.), ὁ ὁποῖος λέγει, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ διχοτομηθῇ ὁ κύκλος. Διότι τὸ κέντρον του, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον ἢ τέμνεται εἰς δύο κατὰ τὴν διχοτόμησιν παντὸς κύκλου ἢ περιέρχεται εἰς ἓν τῶν ἡμικυκλίων. ᾿Αλλὰ νὰ διχοτομῆται τὸ κέντρον εἶναι ἀδύνατον· διότι πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι τὸ μὴ ἔχον μέρος (τὸ σημεῖον) διχοτομεῖται ; ἐὰν δὲ τὸ κέντρον περιέρχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν ἡμικυκλίων, τὰ ἡμικύκλια γίνονται ἄνισα καὶ ὁ κύκλος δὲν διχοτομεῖται. **(πρόβλημά ἐστι τὸν κύκλον δίχα τεμεῖν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. τὸ γὰρ κέντρον, ὅπερ παντὸς τοῦ κύκλου μεσαίτατόν ἐστιν, ἤτοι δίχα τέμνεται κατὰ τὴν τοῦ κύκλου διχοτόμησιν ἢ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι. ἀλλὰ δίχα μὲν τμηθῆναι τῶν ἀδυνάτων· πῶς γὰρ οἷόν τε τὸ ἀμερὲς ἐπινοεῖν μεριζόμενον ; εἰ δὲ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι, ἄνισα γίνεται τὰ τμήματα καὶ ὁ κύκλος οὐ μέσος διαιρεῖται).** (Πρὸς Φυσικοὺς Α', adv. math. IX 284).

*
* *

Ἡ προσπάθεια τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert), ὅπως καταργήσῃ τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν καὶ ἱδρύσῃ ἰδικήν του γεωμετρίαν θεωρεῖται ὑπὸ πολλῶν ὡς ἀποτυχοῦσα, καίτοι μερικοὶ ἐκ τῶν μαθητῶν του διορθώνουν αὐτὴν ἐκ τῶν σφαλμάτων, ὡς λέγουν εἰς ἑκάστην ἔκδοσίν της.

Ὁ γερμανικὸς τίτλος τοῦ βιβλίου τοῦ Χίλμπερτ εἶναι Grundlagen der Geometrie (Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας). Κατὰ τὸ ἔτος 1956 ἔγινεν ἡ ὀγδόη ἔκδοσις τοῦ βιβλίου ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Χίλμπερτ Paul Bernays, καθηγητοῦ τοῦ Πολυτεχνείου τῆς Ζυρίχης, χωρὶς νὰ σημειοῦται πότε ἔγινεν ἡ πρώτη ἔκδοσις. Ἐκ κριτικῆς ὅμως δημοσιευομένης τῷ 1903 τοποθετοῦμεν τὴν πρώτην ἔκδοσιν περὶ τὸ 1900. Αἱ ἑπτὰ προηγούμεναι ἐκδόσεις ἔγιναν ζῶντος τοῦ Χίλμπερτ, ὅστις ἐπέφερεν ἑκάστοτε διορθώσεις τῇ ὑποδείξει τῶν μαθητῶν του, ὡς γράφει ὁ ἴδιος. Ὁ τίτλος τῆς ὀγδόης ἐκδόσεως εἶναι D. Hilbert Grundlagen der Geometrie, mit Revisionen und Ergänzungen, von Paul Bernays, B. G. Teubner, Stuttgart 1956 (Δ. Χίλμπερτ Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας, μετ' ἀναθεωρήσεων καὶ συμπληρώσεων ὑπὸ Paul Bernays, B. G. Τόϊμπνερ Στουτγάρτη 1956). Τὸ βιβλίον ἀρχίζει ὡς ἑξῆς :

« § 1. Τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας καὶ αἱ πέντε ὁμάδες ἀξιωμάτων. Δήλωσις (= Erklärung) (σημ. ἀποφεύγει τὴν λέξιν Definition = ὁρισμός, αὐτὴν ὅμως ἐννοεῖ). Νοοῦμεν τρία διάφορα συστήματα πραγμάτων (ἀντικειμένων) : Τὰ πράγματα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ A, B, C... Τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ a, b, c... Τὰ πράγματα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ α, β, γ... Τὰ σημεῖα τὰ ὀνομάζομεν ἐπίσης τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας τὰ ὀνομάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, καὶ τὰ σημεῖα τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὀνομάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ τοῦ χώρου».

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ Δαβὶδ Χίλμπερτ ἐν ᾧ φιλοδοξεῖ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν διὰ γεωμετρίας ἰδικῆς του κατασκευῆς, κατὰ κρυπτοφανῆ τρόπον κάμνει χρῆσιν καὶ ἀοριστολογικὴν κατάχρησιν τῶν ἑλληνικῶν γεωμετρικῶν ὅρων. Πρὸς τούτοις παρουσιάζεται, ὅτι ἐκλαμβάνει τὸν χῶρον ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ καὶ τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου!!

Τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ διατυπούμενον ἀξίωμα ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Ὅταν δοθοῦν δύο σημεῖα Α, Β, (σημ. δὲν ἔχει ὁρίσει τί εἶναι σημεῖον) ὑπάρχει πάντοτε εὐθεῖα τις, (σημ. δὲν ἔχει ὁρίσει τί εἶναι εὐθεῖα), ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς ἕκαστον τῶν δύο σημείων Α, Β».

Ὅταν ἐδημοσιεύθη ἡ πρώτη ἔκδοσις τῆς γεωμετρίας τοῦ Χίλμπερτ, ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Γκότλοπ Φρέγγε (Gottlob Frege 1828 - 1926) ἔγραψε τὰ ἑξῆς εἰς τὴν Ἐπετηρίδα τῶν Μαθηματικῶν τῆς Γερμανίας τοῦ 1903:

«Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ εἶναι ἓν σύστημα ἐξισώσεων μὲ πολλοὺς ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ λύσῃ κανείς. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα, ἂν ἓν ἀντικείμενον π. χ. τὸ ὡρολόγιόν μου, εἶναι ἓν σημεῖον προσκρούομεν ἀμέσως εἰς τὴν δυσκολίαν τοῦ πρώτου ἀξιώματος, διότι ἐκεῖ γίνεται λόγος περὶ δύο σημείων». Ἀκολούθως ὁ Φρέγγε παρῳδεῖ τὸν Χίλμπερτ γράφων τὰ ἑξῆς:

«Δήλωσις. Νοοῦμεν ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν θεούς. Ἀξίωμα 1. Πᾶς θεὸς εἶναι παντοδύναμος. Ἀξίωμα 2. Ὑπάρχει τοὐλάχιστον εἷς θεός». (Jahresbericht DMV 12, 1903. Ἐπετηρὶς τῆς Ἑνώσεως τῶν Μαθηματικῶν τῆς Γερμανίας).

Διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ἡ σύγχυσις, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς:

Εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν τῆς γεωμετρίας αὐτῆς τίθεται ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ ὡς ἀξίωμα ἡ πρότασις.

«Δίδονται τέσσαρα τυχόντα σημεῖα μιᾶς εὐθείας (σημ. χρησιμοποιεῖ τοὺς ἑλληνικοὺς αὐτοὺς ὅρους, χωρὶς νὰ τοὺς ἔχῃ ὁρίσει). Τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ παριστῶμεν αὐτὰ μὲ A, B, C, D κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ διὰ τοῦ B παριστώμενον σημεῖον νὰ κεῖται μεταξὺ A καὶ C, καὶ ἐπίσης μεταξὺ τοῦ A καὶ D καὶ ἀκόμη τὸ μὲ C παριστώμενον σημεῖον νὰ κεῖται μεταξὺ A καὶ D καὶ ἐπίσης μεταξὺ B καὶ D».

Εἰς τὴν ὀγδόην ἔκδοσιν τοῦ 1956 ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἐκδότου καὶ μαθητοῦ τοῦ Χίλμπερτ Paul Bernays ὡς 5ον θεώρημα (σελὶς 6).

Ἐπίσης εἰς τὴν αὐτὴν πρώτην ἔκδοσιν τίθεται ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ ὡς ἀξίωμα ἡ πρότασις:

«Ἐὰν δύο γωνίαι α, β, εἶναι ἴσαι πρὸς τρίτην γωνίαν γ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι». Εἰς τὴν ὀγδόην ἔκδοσιν τοῦ 1956 ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ Paul Bernays ὡς 19ον θεώρημα, (σελὶς 21).

Ὡς γνωστόν, εἰς τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τὸ ἀξίωμα «τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα». (σημείωσις. Λεπτομερεστέρα ἐξέτασις τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας θὰ γίνῃ εἰς τὸ κεφάλαιον Εὐκλείδης — Εὐκλείδειος Γεωμετρία).

***

Τὸ ὑποστηριζόμενον ὅτι αἱ μαθηματικαὶ θεωρίαι θεωροῦνται ὡς λογικὰ οἰκοδομήματα ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγκαίας σχέσεως πρὸς τὴν φυσικὴν ἐμπειρίαν δὲν εὐσταθεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ὁ ὁποῖος λέγει :

1) **Πᾶσα μάθησις διὰ προγιγνωσκομένων ἢ πάντων ἢ τινῶν ἐστί, καὶ ἡ δι' ἀποδείξεως καὶ ἡ δι' ὁρισμῶν.** (Μετὰ τὰ Φυσικὰ Α, 992 β 30). (Πᾶσα μάθησις γίνεται διὰ προγιγνωσκομένων ἢ καθ' ὁλοκληρίαν γνωστῶν ἢ μερικῶς, τόσον ἡ δι' ἀποδείξεως μάθησις, ὅσον καὶ ἡ δι' ὁρισμῶν).

2) Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν. (Ἀναλυτικὰ Ὕστερα Α. 71 α 1 - 4). (Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα διανοητικὴ μάθησις γίνεται ἐκ προϋπαρχούσης γνώσεως· θεωροῦν δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐπὶ ὅλων τῶν ἐπιστημῶν, διότι καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι διὰ τούτου τοῦ τρόπου ἐπιτυγχάνονται καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων τεχνῶν).

(Σημείωσις. Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη αἱ ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ εἰσήχθησαν καὶ εἰς τὰ Γυμνάσια μερικῶν ὑπαναπτύκτων διανοητικῶς χωρῶν τῆς Ἀφρικῆς καὶ τῆς Εὐρώπης, ἀλλὰ ἐγένοντο ἐγκαίρως γνωστὰ τὰ σφάλματα αὐτῆς ὑπὸ τῶν οἰκείων καθηγητῶν καὶ τὰ συναφῆ βιβλία ἀπεσύρθησαν τῆς κυκλοφορίας).

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ «ΠΑΤΡΙΣ» Α.Ε. ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ 58 ΤΗΛ. 368.216, 365.347 — ΑΘΗΝΑΙ — ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ: ΠΑΝ. ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΣ, Ἄστρους 142, Κολωνὸς

HISTORY OF MATHEMATICS

I. THE MATHEMATICS OF HOMER
II. ORIGINS OF GREEK CULTURE AND GEOMETRY

By **EVANGELOS S. STAMATIS**

REPRINTED FROM
THE MAGAZINE «EUCLID» OF THE MATHEMATICAL SOCIETY
OF GREECE (1, 2, 9-10, 11, 12) ATHENS 1970

What Plato meant by saying that God
is always doing Geometry [13]

PART I THE MATHEMATICS OF HOMER

It is universally conceded that Homer is the foremost poet of mankind. On the other hand, few scholars realize that he was also a good mathematician. The great epic poet integrated mathematics with his incomparable verse.

The first and only inkling we have of this fact is provided by the second century Roman author Aulus Gellius.

Gellius who studied at the Academy of Plato was the writer of a treatise in two volumes entitled «Noctes Atticae». In the second volume (XIV, Ch. 6, para. 4), the Roman records that he was given a book to read by an Athenian acquaintance in which he found fascinating information not readily available in the works of the ancient Greeks circulating at the time. In substituting numbers for letters, certain verses of Homer yielded the same sums. For example:

Ilias (VII)
V. 264 ἀλλ' ἀναχασσάμενος λίθον εἵλετο χειρὶ παχείῃ = 3498
V. 265 κείμενον ἐν πεδίῳ, μέλανα, τρηχύν τε μέγαν τε = 3498

(but giving ground he seiz with stout hand a stone that lay upon the plain, black and jagged and geat).

(translation by A. T. Murray) (Loeb)

'Αλλ'	$= 1+30+30=61$,
ἀναχασσάμενος	$= 1+50+1+600+1+200+200+1+40+5+50+70+200=1419$,
λίθον	$= 30+10+9+70+50=169$,
εἵλετο	$= 5+10+30+5+300+70=420$,
χειρὶ	$= 600+5+10+100+10=725$,
παχείῃ	$= 80+1+600+5+10+8=704$.
sum	$61+1419+169+420+725+704=3498$.
κείμενον	$= 20+5+10+40+5+50+70+50=250$,
ἐν	$= 5+50=55$,
πεδίῳ	$= 80+5+4+10+800=899$,
μέλανα	$= 40+5+30+1+50+1=127$,
τρηχὺν	$= 300+100+8+600+400+50=1458$,
τε	$= 300+5=305$,
μέγαν	$= 40+5+3+1+50=99$,
τε	$= 305$.
sum	$250+55+899+127+1458+305+99+305=3498$.

Ilias (XIX)

306 *μή με πρὶν σίτοιο κελεύετε μηδὲ ποτῆτος* = *2848*

307 *ἄσασθαι φίλον ἦτορ, ἐπεὶ μ' ἄχος αἰνὸν ἱκάνει* = *2848*

(bid me not bevore the time sate my heart
with food or drink, seeing dread grief is come upon me

(transl. by A. T. Murray)

(units (1 to 9) α', β', γ', δ', ε', ς', ζ', η', θ',
tens (10 to 90) ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ϙ'
hundreds (100 to 900) ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϡ').

PART II ORIGINS OF GREEK CULTURE AND GEOMETRY

Anthropologists agree that man has existed on the Earth for about one million years. Many also concur with the theory first propounded by Anaximander (611 - 546 B.C.) [1], that man appeared on the Earth through a process of evolution, a theory adopted by Darwin some 2440 years later.

The oldest discovered communities of man were uncovered in Thessaly a few years ago at the Homeric site of Argissa (the modern village of Kremomagoula) some five kilometers west of Larissa by the German Archaeological Institute under the direction of Professor Miloisits. Previous excavations at the same site had been made by Professor Christos Tsountas. An official report given in Athens on the results of the excavations by Professor Biesants on Dec. 16, 1958 showed :

That these primitive settlements in Greek lands date to as early as 100,000 years B.C. From that period to about 9600 B.C.no other indication of human habitation has been recorded except for the discoveries in the caves of Pelion, of France and elsewhere (about 30,000 B.C.). Another exception is the information communicated to Solon by the Egyprian philosopher priest.

Plato provides the information on Solon's visit to Egypt (about 580 B.C.) in his Timaeus and Critias [2]. The Athenians were totally unaware of previously existing civilizations in their country due to the numerous cataclysms that had occurred over that long period.

Of these, the most destructive was the deluge of Deucalion. According to the records of the Egyptians, this occurred about 9,000 years before Solon's visit to Egypt. The Egyptian archives consisted of records imprinted on dried bricks.

According to Plato's reference to the Egyptian priest, the Athenians had 9,000 years before Solon's time an outstanding civilization, whereas Egyptian culture flourished a full 1,000 years later or 8000 years before Solon's visit in accordance with the Egyptian records.

Moreover, as the priest pointed out, the Egyptian army was supplied with weapons of war provided by the Athenians, and that the Athenians constituted a powerful nation that had saved Greece and Egypt from the onslaught of invaders originating in the large island of Atlantis situated beyond the Straits of Hercules (Gibraltar) in the great ocean. And Atlantis was engulfed by the great cataclysm of Deucalion 9,000 years before Solon's sojourn in Egypt.

The theory that Atlantis was situated on the island of Thera (Santorini) and was subsequently destroyed by a tremendous volcanic eruption in about 1500 B.C. does not hold water. Two lines of thought support the contention that Thera was in fact the mythical Atlantis.

Firstly, that Plato erred with the factor 10, and instead of writing 900 years before Solon, wrote 9,000. And secondly that the inhabitants of Atlantis lived in the Bronze Age which according to modern authorities is dated 2100-1200 B.C. But both these assumptions are incorrect. The Egyptians had different symbols to represent the numbers 100 and 1000. There was no possibility of confusing the two symbols. Moreover, Solon, carried the story of the Egyptian priest to Athens by word of mouth and not in writing as is concluded from the Timaeus [3]:

> «Tell us from the beginning, said Amynander, what Solon related and how, were the informants who vouched for its truth».
>
> (transl. by R. G. Bury)

Since the zero (0) was first used by Claudius Ptolemy in Alexandria in about 150 A.D. ([4], p. 91). It is absurd to accuse Plato of misinterpreting, it.

Moreover, the bronze or copper ore (orichalcum) about which Plato speaks is not the contemporary alloy of bronze but a metal unknown to Plato and to us ([2], 2) 114 E).

Cretan and Mycenaean civilization and the growth and development of the language of the Iliad and Odyssey were not creations of a few hundred years, but of many thousands.

All extant evidence supports the conclusion that at the time of the

Deucalion deluge in about 9600 B.C., when the island empire of Atlantis disappeared, there existed a thriving civilization in Greece.

Greek culture spread to the Near East and Egypt in accordance with the narrative of the priest as related to Solon [2]. The statement of Herodotus that the knowledge of applied geometry originated in Egypt and later spread to Greece is quite inaccurate, although the relevant phrase in Herodotus can be variously interpreted. Most subsequent authors using Herodotus as a source of reference perpetuated the misinformation that geometry was born in Egypt and was later introduced into Greece. Herodotus's remark reads:

> *«δοκέει δέ μοι ἐντεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν» [5]*
>
> (From this, to my thinking, the Greeks learnt the art of measuring land).
> (transl. by A.D. Goldey)

Such inaccurate statements are not uncommon in the otherwise remarkably brilliant work of the father of history. But Herodotus was not in the position then to verify or substantiate all the stories and anecdotes he had collected.

Plutarch himself remarks on the many inaccuracies in the narrative of Herodotus. One of his essays deals with «The Improbity of Herodotus». He points out that the historian stated erroneously that Thales of Miletus, one of the seven wise men of ancient Greece, was a Phoenician. Also that the Greeks borrowed the names of the gods of Olympus from theEgyptians [6]. Moreover, the information provided by Herodotus on the number of dead at the battle of Marathon (and Plataea), appeared, to be grossly inaccurate when he maintained that 6400 Persians were slain and 192 Athenians were killed [7].

Other authors besides Plutarch remark on the inaccuracies of Herodotus when dealing with the Egyptians, as, for example, Diodorus, Strabo and Josephus. The latter states:

> *«πολλὰ τὸν Ἡρόδοτον ἐλέγχει τῶν Αἰγυπτιακῶν ὑπ' ἀγνοίας ἐψευσμένον» [8]*
>
> (As the say himself, from the sacred books in which he convicts Herodotus of being misled through ignorance on many points of Egyptian history)
> (transl. by H. S. Thackeray)

One can conclude from the Timaeus of Plato, therefore, that the most ancient civilization and the birth of geometry occurred in Greek lands long before the deluge of Deucalion.

The rays of the luminous bodies of the universe and the shape of the sun and of the full moon conveyed to early man the significance of both the straight line and the circle. Thereupon was conceived the idea of the plain geometric figure and the simple geometric construction. This evolution of ideas in all probability ran parallel to the evolution of the Greek language.

Objects in everyday use and life in all likelihood provided the names for the first geometric figures, including the point, as the Frenchman Charles Mugler notes ([9], p. 5-32).

It is reputed that Thales was the first who proved that the diameter bisected the circle.

He was also the first to prove the theorem that every isosceles triangle had equal base angles. Eudemus in his History of Geometry first said this. ([10], p. 157, 10—250, 20—299,1—352, 14).

Since Thales is considered the most ancient of the wise men of Greece who first used the mathematical proof, he is given credit for its discovery. Kant (1724-1804) specially praises this great achievement of the Greek genius ([11], Vorrede).

THE MATHEMATICAL PROOF

Other ancient races had through long experience acquired a knowledge of geometry and arithmetic including the Sumerians, Babylonians, Egyptians, Indians and the Chinese. The most ancient of these to have practical knowledge of mathematics were the Sumerians dating back to 4000-3000 B.C.

However none of these races had attained the wisdom of mathematical proof. The ancient Greeks were the first to create the science of mathematics and logic, thus opening the paths to intellectual advancement both philosophical and theological.

To the Greeks the science of mathematics was not a means of practical applications and to commerce. Its sole purpose was the cultivation of the mind and a quest for a deeper knowledge of God.

This is clearly brought out by the extant information we have of the Pythagorean School and of Plato's reputed saying «Let no one come to our school, who has not first learnt geometry, ([12], VIII, v. 973).

What Plato meant by saying that God is always doing geometry ([13], VIII 2) :

> «But geometry especially, being, as Philolaus says, the source and mother-city of the rest of the sciences, leads the unterstanding upward and turns it in a new direction, as it undergoes, so to speak, a complete purification and a gradual deliverance from sence-perception. It was for this reason that Plato himself reproached Eudoxus and Archytas and Menaichmus for setting out to remove the problem of doubling the cube to the realm of instruments and mechanical devices, as if they were trying to find two mean proportionals not by the use of reason but in whatever way would work. In his way, he thought, the advantage of geometry was dissipated and destroyed, since it slipped back in to the realm of sense-perception instead of soaring upward and laying hold of the eternal and immaterial images in the presence of which Cod is always God».
>
> (transl. by E. L. Minar)

The discovery of mathematical proof was indeed a brillant breakthrough of the Greek mind but this did not come about spontaneously. It was the result of a long process. For the Greek genius to make this discovery it first had to verify the validity or truth of a geometric statement, and to verify this it must have had an a priori knowledge of the need for a proof, and this in turn meant a knowledge of logic. This knowledge or awareness consists firstly of the definition of a geometric or mathematical idea and secondly a definition of the axiom. Axioms mean truths that are in themselves self-evident.

It becomes obvious there fore that the basic principle of science is logic. In the age of Thales when geometric statements were first proved, it must follow that the most important laws of logic and the basic mathematical axioms had been established since without these no proofs of theorems could be made.

I therefore maintain that the argument supported to the effect that the axiomatic method of the approach to geometry and mathematics was first established by David Hilbert in about 1900, that is, 2500 years after Thales, is nothing short of ludicrous.

Thales proved that the base angles of an isosceles triangle are equal by utilizing the axiom which is applicable to both geometry and arithmetic, i.e., «If equals are subtracted from equals, the remainders are equal».

It is reasonable to assume that in the age of Thales the search for the principles of mathematics had not been exhausted. On the contrary in fact, the written tradition indicates that this search continued for many centuries afterwards and continues to the very present.

According to Aristotle (384-322 B.C.), all knowledge is a knowledge of knowable. And the knowable is that which is apprehended by knowledge:

> «If the object no longer exists, there can no longer be any knowledge, there being now nothing to know. If, however, of this or that object no knowledge has yet been acquired, yet that object itself may exist. Take the squaring of the circle, for instance, if that can be called such an object. Although it exists as an object, the knowledge does not yet exist» ([14], 7 b 29).
>
> (transl. by H. P. Cook)

Knowledge is a relative meaning not able to exist without the knowable. The components of mathematics as a science of proof number three according to Aristotle:

1. Numbers for arithmetic and figures for geometry.
2. Principles of proof used in the proving process, i.e. axioms.
3. The propositions that are to be proved ([15], § 10-12).

The aim of mathematics as a science of proof is to show with certainly the proving reason by which the truth of a certain proposition is laid down. This will be brought about by the reference of the proposition to its initial and selfevident propositions, i.e., to the axioms. Mathematics cannot advance beyong the improvable initial propositions.

This search and examination of these proposition constitutes for Aristotle, the initial or first philosophy.

Mathematical entities are thought to have existence but not to be self-existent. These exist as stable features of objects which are perceived without which they would be non-existent. Here we observe a contradiction between Aristotle and the non-existence of the ideas of Plato. Some modern mathematicians support Plato's theory of ideas by which mathematical objects pre-existed irrespective of the perceptive world.

The aim of Greek geometry is the study of the properties of three-dimensional space as this comes within our perception, and how it is understood by us. Space as we mean today was known as 'topos' by the ancients.

Zeno of Elea does not accept the existence of space. He maintains that space is non-existent because if it did exist it would be contained in some definable space, and this latter by another space, and so on to infinity [16], p. 252-3).

The problem of the definition of space still remains unsolved, as Max Jammer's Concept of Space points out [17]. But space does exist, we live within it, irrespective of whether we can define it and Greek geometry concerns itself with space.

Without specifying what space is, Greek geometry concerns itself with exploring its properties using as a datum the 'point' which it defines as 'that point which has no part', that is, dimension, which remains unanswered. The meaning of a point in a way is a beginning beyond which we cannot proceed. It is precisely for this reason that Plato writes that geometry which is based upon an unsatifactory definition of a point is a relative science and not absolute as is philosophy, the latter of which searches without being obligated to assume any hypothesis :

«For where the starting-point is something that the reasoner does not Know, and the conclusion and all that intervenes is a tissue of things not really known, what possibility is there that assent in such cases can ever be converted in to true knowledge or science? None said he ([18], 533 C).

(transl. by P. Shorey)

The definition or idea of a point which was supported by Greek geometers suffered some criticism at the hands of Sextus Empiricus of Alexandria in the 2nd century A.D., who maintained that it was impossible to bisect a circle :

«Then, on these conditions, the problem is to bisect the circle; and this is imposible. For the centre, which is in the very middle of the whole circle, either is bisected in the bisection of the circle, or is added on to one or other of the sections. But it is possible to conceive what is; without parts as partitioned ? An if it is added on to either of the sections, the sections become unequal and the circle is not divided in the middle» ([19], IX 284).

(transl. by R. G. Bury)

David Hilbert's attempts to abolish Greek geometry and to establish his own geometrical theories is considered a failure by many authorities although some of his disciples keep correcting and revising the errors of the master in each new edition.

The book by Hilbert is entitled «Grundlagen der Geometrie» (Principles of Geometry). The 8th edition of the book was brought out by his pupil Paul Bernays, wherein however there is no reference to the date of the first edition. But we can date the first edition by a book review that exists to about 1900. The seven earlier editions were brought out when Hilbert was still living. Each of the editions contained corrections or revisions suggested by his pupils. The 8th edition, «D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, mit Revisionem und Ergänzungen, von Paul Bernay's», was published by Teubner of Stuttgart in 1956.
His opening statements read:

«1. The elements of geometry and the five groups of axioms. Erklärung (he avoids the word definition, but this is what he means):

We mean three different systems of objects: the objects of the first system which we call points and represent as A, B, C ... ; the things or objects of the 2nd system which we call straight lines and represent as a, b, c...; and the objects of the 3rd system which we call planes, and represent as α, β, γ, ... Points we call also elements of linear geometry; points and straight lines we call elements of plane geometry; and points of a line and the plane we call elements of the geometry of space, or space ([20], p. 2)».

It is quite obvious that David Hilber thas most ambitiously attempted to replace Greek geometry with his own brand of new geometry. But he cryptically makes use of and speaks vaguely and abusively of Greek geometric terminology. Moreover, he construes space as a conglomeration of letters from both the Greek and Latin alphabets.

The space within which we live is real and not imaginary as David Hilbert supposes.

The first axiom as defined by Hilbert reads:

«Given two points A and B there is always a straight line belonging to each of the two points A and B.»

When the first edition of Hilbert's geometry made its debut, Gottlob Frege (1848-1925), the German mathematician wrote [21], the following:

«The system of axioms of David Hilbert is a system of equations of many unknowns, insoluble for any one. If we wish to answer the question as to whether an object, e.g. my watch, is a point we immediately are confronted with the difficulty involving the first axioms, because there reference is made to two points».

Frege then proceeds to parody Hilbert:

«Statement: We consider objects which we call Gods.

Axiom 1: Every God is almighty. Axiom 2: Ther exists at least one God».

To grasp the confusion encountered in Hilbertian geometry we cite the following facts:

In the first edition of his geometry, the proposition is stated as an axiom :

«Any four points of a straight line are given. Then we can always represent them with A, B, C, D in such manner that the point represented by B shall always lie between A and C, and moreover between A and D, and also point C would lie between A and D as well as between B and D».

In the eighth edition, 1956, this proposition is designated as the 5th theorem by the editor and pupil of Hilbert, Paul Bernays (p. 6).

Also in the first edition the following proposition is presented as an axiom by Hilbert:

«If two angles a, b, are equal to a third angle c, they are equal to each other». In the 8th edition this proposition is designated as the 19th theorem (p. 21).

In Greek geometry, as known, this proposition is the first axiom of Euclid.

The argument that mathematical theories are treated as logical constructions without need for relationships to natural experience does not hold water in accordance with Aristotle who says:

> 1. But all learning proceeds, wholly or in part, from what is already Known, whether it is through demonstration or through definition ([22], A. 992 b30).
>
> 2. All teaching and learning that involves the use of reason proceeds from pre-existent knowlege. This is evident if we consider alle the different branches of learning, because both the mathematical sciences and every other art are acquired in this way ([23], A. 71 a, 1-4).
>
> (transl. by H. Tredennick)

ADDENDA

CONCERNING THE FIRST PRINCIPLES OF GEOMETRY

GAUSS

(Gauss to Bessel. Göttingen, January 27, 1829)

...Also I have been preoccupied in my free hours with another subject about which I have been thinking for the last forty years, I mean the first principles of geometry. I do not know whether I have ever informed you of my opinions concerning this theme. Here again I have arrived at some conclusion, and I believe that we are unable to establish completely a geometry a priori has been even more reinforced.

SCHOPENHAUER

451 .... But between Socrates and Kant we note several similarities. Both refuse all dogmatism and both accept complete metaphysical uncertainty.

Being a Kantian myself I wish to express here in one word my attitude towards him. Kant teaches that we are unable to know anything beyond experience and its possibilities. ([24], p. 246).

BIBLIOGRAPHY

[1] PLUTARCH'S Strom. 2 and H. DIELS, Dox. Graeci 579, Fragm. der Vorsokratiker I, 12 [2], Berlin 1951.

[2] PLATO'S, 1. Timaeus 23-26, 2. Kritias 108-120.

[3] PLATO'S, Timaeus 21 D.

[4] WAERDEN, B. L. VAN DER, Erwachende Wissenschaft. Basel-Stuttgart 1956.

[5] HERODOT, II 109.

[6] PLUTARCH, De Herodoti malignitate 13. 857 C.

[7] HERODOT, VII 117, X 70.

[8] JOSEPHUS, Contra Apionem I 14.

[9] MUGLER, CHARLES, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris 1958.

[10] PROCLI DIADOCHI, In primum Euclidis Elem. libri comment., ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873, Nachdruck Hildesheim 1967.

[11] KANT, IMMANUEL, Kritik der reinen Vernunft I, Vorrede, ed. Felix Gross, Deutsche Bibliothek, Berlin, p. 15, 3.

[12] TZETZES, JOHANNES, Histor. varior. Chiliades, ed. T. Kiessling, Leipzig 1826, Nachdruck Hildesheim 1963.

[13] PLUTARCH, Quaestionum Convivalium.

[14] ARISTOTLE, Categoriae, ed. Imm. Bekkeri, Berolini 1831, Nachdruck Berlin 1960.

[15] ARISTOTLE, Analytica Posteriora.

[16] DIELS, HERMANN, Fragm. der Vorsokratiker I 29 [19], p. 252-3.

[17] JAMMER, MAX, Das Problem des Raumes, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1960 p. 220 (Concept of Space, Harvard Univers. Press, Cambridge U.S.A.).

[18] PLATO'S, Respublica.

[19] SEXTUS EMPIRICUS, Adv. Mathematicos.

[20] HILBERT, DAVID, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1956.

[21] FREGE, GOTTLOB, Jahresbericht DMV 12, 1903.

[22] ARISTOTLE, Metaphysics.

[23] ARISTOTLE, Analytica Posteriora.

[24] SCHOPENHAUER, APTHUR, Auswahl aus seinen Schriften, ed.S. Friedlaender. Goldmanns Tasch., München 1962.

Author: Evangelos Stamatis, Paraschou str. 3, Athens 701, Creece.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1971 : ΤΟΜΟΣ 46ος

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ : ΤΟ ΗΛΙΟΚΕΝΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

EVANGELOS S. STAMATIS : DAS HELIOZENTRISCHE SYSTEM DER ALTEN GRIECHEN

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1971

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 11ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1971

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΣΠΥΡ. ΜΑΡΙΝΑΤΟΥ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ.— **Τὸ Ἡλιοκεντρικὸν Σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων,** *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἰω. Ξανθάκη.

1. Κατὰ τὴν ἀφήγησιν τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα, γενομένην περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 6ου αἰῶνος π. Χ., «εἰς τὴν Ἑλλάδα εἶχον γίνει πολλοὶ κατακλυσμοί, οἵτινες εἶχον ἐπιφέρει μεγάλας καταστροφάς, ἕνεκα τῶν ὁποίων οἱ Ἕλληνες δὲν ἐγνώριζον τὴν ἱστορίαν των». «Οἱ Αἰγύπτιοι ὅμως εἶχον καταχωρίσει εἰς τὸ Ἀρχεῖόν των ὅλα τὰ συμβάντα, τὰ ὁποῖα συνέβησαν εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον. Κατὰ τὸ Ἀρχεῖον τῶν Αἰγυπτίων οἱ Ἀθηναῖοι εἶχον πολιτισμὸν 9000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Κατὰ τὴν αὐτὴν παλαιὰν ἐποχὴν ἐβυθίσθη ἡ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν Ὠκεανόν, πέραν τοῦ πορθμοῦ τῶν Ἡρακλείων Στηλῶν (τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτὰρ) εὑρισκομένη μεγάλη νῆσος Ἀτλαντίς. Οἱ Αἰγύπτιοι ἔλαβον τὸν πολιτισμόν των παρὰ τῶν Ἀθηναίων 1000 ἔτη βραδύτερον, ἤτοι 8000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς, καθ' ἣν ἐγένετο ἡ συνομιλία τοῦ ἱερέως μετὰ τοῦ Σόλωνος» (Πλάτων, Τίμαιος 23 - 26).

Ἔκτοτε καὶ μέχρι τῆς πρωτομινωικῆς ἐποχῆς, ἡ ὁποία τοποθετεῖται περὶ τὰ 2000 ἔτη π. Χ., δὲν ὑπάρχουν πληροφορίαι περὶ πολιτιστικῶν ἐπιτευγμάτων εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον. Ἡ μεταγενεστέρα παράδοσις ἐκφράζεται μὲ θαυμασμὸν διὰ τὰ πολιτιστικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ ἐκ τῶν Λειβήθρων τῆς Θρᾴκης καταγομένου

* EVANGELOS S. STAMATIS, **Das heliozentrische System der alten Griechen.**

Ὀρφέως, ὁ ὁποῖος διετέλεσε μαθητὴς τοῦ Λίνου τοῦ Θηβαίου καὶ ἔσχε μαθητὴν τὸν Ἀθηναῖον Μουσαῖον (Λεξ. Σου(ί)δα). Ἡ ἀκμὴ τοῦ Ὀρφέως ἀνάγεται εἰς τὸν 15ον αἰῶνα π. Χ. Ἡ παλαιοτέρα ἑλληνικὴ θεωρία περὶ γενέσεως τοῦ κόσμου ἀποδίδεται εἰς τὸν Ὀρφέα καὶ ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοφάνους εἰς τοὺς Ὄρνιθας.

693 Χορός. Χάος ἦν καὶ Νὺξ Ἔρεβός τε μέλαν πρῶτον καὶ Τάρταρος εὐρύς,
γῆ δ' οὐδ ἀὴρ οὐδ' οὐρανὸς ἦν· Ἐρέβους δ' ἐν ἀπείροσι κόλποις
τίκτει πρώτιστον ὑπηνέμιον Νὺξ ἡ μελανόπτερος ᾠόν,
ἐξ οὗ περιτελλομέναις ὥραις ἔβλαστεν Ἔρως ὁ ποθεινός.
. . . .
πρότερον δ' οὐκ ἦν γένος ἀθανάτων, πρὶν Ἔρως ξυνέμιξεν ἅπαντα·
ξυμμιγνυμένων δ' ἑτέρων ἑτέροις γένετ' οὐρανὸς ὠκεανός τε,
καὶ γῆ, πάντων τε θεῶν μακάρων γένος ἄφθιτον.

(Κατὰ πρῶτον ἦτο χάος καὶ νύχτα καὶ μαῦρο σκοτάδι καὶ εὐρὺς Τάρταρος, δὲν ὑπῆρχε δὲ οὔτε γῆ οὔτε ἀὴρ οὔτε οὐρανός· εἰς τοὺς ἀπείρους δὲ κόλπους τοῦ σκότους ἡ μελανόπτερος νύχτα γεννᾷ χωρὶς σπορὰν πρῶτον ἕνα αὐγό, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἰς τὴν κατάλληλον ὥραν ἐγεννήθη ὁ Ἔρως ὁ ποθεινός . . . . , προηγουμένως δὲ δὲν ὑπῆρχε τὸ γένος τῶν ἀθανάτων, πρὶν ὁ Ἔρως συμμείξῃ ὅλα μεταξύ των· μὲ τὴν ἐπιμειξίαν δὲ τῶν ἀντιθέτων ἔγινεν ὁ οὐρανὸς καὶ ὁ ὠκεανὸς καὶ ἡ γῆ καὶ τὸ ἀθάνατον γένος ὅλων τῶν μακαρίων θεῶν).

2. Γραπτὰ μνημεῖα τῆς διδασκαλίας τοῦ Ὀρφέως καὶ τῶν μαθητῶν του δὲν ἐσώθησαν. Περισωθεῖσαι πληροφορίαι συνελέγησαν καὶ ἐδημοσιεύθησαν ὑπὸ τοὺς τίτλους 1) Ὀρφικὰ καὶ 2) Ἀποσπάσματα Ὀρφικῶν. (1. Orphica, G. Hermann, Lipsiae 1805, 2. Orphicorum Fragmenta, O. Kern, Berolini 1922.) Νεώτεροι ἐρευνηταί, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Willamowitz, ἀνάγουν τὴν πρώτην συλλογὴν καὶ δημοσίευσιν τῶν διεσκορπισμένων αὐτῶν κειμένων εἰς τὸν 2ον αἰῶνα μ. Χ. (Pauly-Wissowa, R. E., Orphische Dicthung, στ. 1332, VIII, 49 - 59).

Τὰ Ὀρφικὰ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν Ἀργοναυτικῶν, ἐκ τῶν Ὕμνων τῆς ὀρφικῆς λατρείας, ἐκ τῶν Λιθικῶν καὶ ἐκ τῶν Ἀποσπασματίων καὶ Ἐπιγραφῶν. Τὸ περιεχόμενον αὐτῶν, ὡς καὶ τῶν Ὀρφικῶν ἀποσπασμάτων, ἀποδίδεται εἰς τὸν Ὀρφέα καὶ τοὺς μαθητάς του, ἀνάγεται δέ, ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς πρώτης διατυπώσεως, εἰς τὸν 15ον αἰῶνα π. Χ.

Εἰς τὰ Ὀρφικὰ Ἀποσπάσματα ἀπαντῶμεν τὴν πληροφορίαν, ὅτι ἡ οὐράνιος σφαῖρα κινεῖται περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, ὅστις συμπίπτει μετὰ τοῦ ἄξονος τῆς γῆς, ἡ ὁποία κινεῖται περιστροφικῶς περὶ τὸν ἄξονά της, μένοντα εἰς τὸν αὐτὸν τόπον :

Ἴδρις γὰρ ἔην ἄστροιο πορείης
καὶ σφαίρης ἥτ' ἀμφὶς ὀχῆος ἀεὶ περιτέλλει,
κυκλοτερὴς ἴση τε κατὰ σφέτερον κνώδακα.

(Orphicorum frag. O. Kern, Berolini 1922, σελ. 261, 24. Εὐσεβίου, ἐκ συγγραφῆς τοῦ Ἰουδαίου Ἀριστοβούλου). (Aristobul, Ap. Euseb. Praeparat. Evangelic. XIII 12).

(Διότι ἦτο γνώστης τῆς πορείας τοῦ ἄστρου, καὶ τῆς κινήσεως τῆς οὐρανίου σφαίρας περὶ τὴν γῆν, καθὼς αὕτη (ἡ γῆ) στρογγύλη οὖσα περιστρέφεται καὶ μάλιστα εἰς ἴσον χρόνον περὶ τὸν ἰδικόν της ἄξονα).

3. Τὴν πληροφορίαν τῶν Ὀρφικῶν, ὅτι ἡ γῆ περιστρέφεται περὶ τὸν μένοντα ἄξονά της, ὅστις συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, περὶ τὸν ὁποῖον περιστρέφεται ἡ οὐράνιος σφαῖρα, ἀπαντῶμεν καὶ εἰς τὸν Τίμαιον τοῦ Πλάτωνος καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀριστοτέλους Περὶ οὐρανοῦ, ὡς μνημονεύεται κατωτέρω.

4. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὀρφέως μέχρι τοῦ 7ου αἰ. π. Χ. αἱ περισωθεῖσαι πληροφορίαι περὶ τῆς γενέσεως τοῦ κόσμου ἀναφέρονται, ἐκ παραδόσεως, κυρίως ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου καὶ τοῦ Ἡσιόδου. Μόλις κατὰ τὸν 7ον - 6ον αἰῶνα ἀρχίζει ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα ἐπὶ τῆς γενέσεως τοῦ κόσμου, εἰς τὴν Σχολὴν τῆς Μιλήτου ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ.
Κατωτέρω ἐκθέτομεν πληροφορίας, ἀναφερομένας εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος τῶν Ἑλλήνων, τὰς διατυπωθείσας ἀπὸ τοῦ 6ου αἰῶνος π. Χ. μέχρι τῶν πρώτων χριστιανικῶν χρόνων, ἀκολούθως δὲ τὰ περὶ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ ἀστρονομικοῦ βιβλίου τοῦ Κοπερνίκου.

ΑΝΑΞΙΜΑΝΔΡΟΣ

5. Εὔδημος ἱστορεῖ ἐν ταῖς Ἀστρολογίαις, ὅτι Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὴν τοῦ ζῳδιακοῦ διάζωσιν καὶ τὴν τοῦ μεγάλου ἐνιαυτοῦ περίστασιν· Θαλῆς δὲ ἡλίου ἔκλειψιν καὶ τὴν κατὰ τὰς τροπὰς αὐτοῦ περίοδον, ὡς οὐκ ἴση ἀεὶ συμβαίνει. Ἀναξίμανδρος δὲ ὅτι ἐστὶν ἡ γῆ μετέωρος καὶ κινεῖται περὶ τὸ τοῦ κόσμου μέσον.

(Θέων Σμυρναῖος, Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, E. Hiller, Lipsiae 1878, σελ. 198, 14-19).

(Ὁ Εὔδημος ἱστορεῖ εἰς τὰς Ἀστρολογίας, ὅτι ὁ Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὸν ζῳδιακὸν κύκλον καὶ τὴν διάρκειαν τοῦ μεγάλου ἔτους, ὁ Θαλῆς δὲ τὴν ἔκλειψιν ἡλίου καὶ ὅτι οἱ χρόνοι τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους δὲν εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ὁ Ἀναξίμανδρος δέ, ὅτι ἡ γῆ εἶναι μετέωρος καὶ κινεῖται περὶ τὸ μέσον τοῦ κόσμου).

ΦΙΛΟΛΑΟΣ

6. Φιλόλαος πῦρ ἐν μέσῳ περὶ τὸ κέντρον ὅπερ ἑστίαν τοῦ παντὸς καλεῖ καὶ Διὸς οἶκον καὶ μητέρα θεῶν, βωμόν τε καὶ συνοχὴν καὶ μέτρον φύσεως. καὶ πάλιν πῦρ ἕτερον ἀνωτάτω τὸ περιέχον. πρῶτον δ' εἶναι φύσει τὸ μέσον, περὶ δὲ τοῦτο δέκα σώματα θεῖα χορεύειν, οὐρανόν τε <μετὰ τὴν τῶν ἀπλανῶν σφαῖραν> τοὺς ε′ πλανήτας, μεθ' οὓς ἥλιον, ὑφ' ᾧ σελήνην, ὑφ' ᾗ τὴν γῆν, ὑφ' ᾗ τὴν ἀντίχθονα, μεθ' ἃ σύμπαντα τὸ πῦρ, ἑστίας περὶ τὰ κέντρα τάξιν ἐπέχον.

(Stobaei Ecl. I 22 σελ. 196, 18, Wachsmuth).
('Αέτιος II 7,7, Dox. 336 B 20 - 337 B 10).

(Ὁ Φιλόλαος λέγει, ὅτι εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου, περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ, ὑπάρχει τὸ πῦρ, τὸ ὁποῖον καλεῖ ἑστίαν τοῦ παντὸς καὶ οἶκον τοῦ Διὸς καὶ μητέρα τῶν θεῶν καὶ βωμὸν καὶ συνοχὴν καὶ μέτρον τῆς φύσεως. Καὶ πάλιν ἄλλο πῦρ εἰς τὸ ἀνώτατον μέρος τοῦ κόσμου τὸ περιέχον αὐτόν. Πρῶτον δὲ εἶναι ἐκ φύσεως τὸ μέσον, περὶ τοῦτο δὲ περιστρέφονται δέκα θεῖα σώματα (ὁ οὐρανὸς) μετὰ ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν, οἱ 5 πλανῆται, κατόπιν ὁ ἥλιος, ὑπὸ τὸν ὁποῖον ἡ σελήνη, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίχθων, καὶ κατόπιν ἔρχεται τὸ πῦρ, τὸ ὁποῖον ἐπέχει θέσιν ἑστίας περὶ τὰ κέντρα).

7. Φιλόλαος ὁ Πυθαγόρειος τὸ μὲν πῦρ μέσον, τοῦτο γὰρ εἶναι τοῦ παντὸς ἑστίαν· δευτέραν δὲ τὴν ἀντίχθονα, τρίτην δ' ἣν οἰκοῦμεν γῆν ἐξ ἐναντίας κειμένην τε καὶ συμπεριφερομένην τῇ ἀντίχθονι· παρ' ὃ καὶ μὴ ὁρᾶσθαι ὑπὸ τῶν ἐν τῇδε τοὺς ἐν ἐκείνῃ.

('Αέτιος III 11,3). (Πλούταρχος, Περὶ τῶν ἀρεσκόντων τοῖς Φιλοσόφοις III, ΙΑ′).

(Ὁ Πυθαγόρειος Φιλόλαος, λέγει, ὅτι πρῶτον εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου εἶναι τὸ πῦρ (διότι τοῦτο εἶναι ἡ ἑστία τοῦ σύμπαντος), δευτέρα εἶναι ἡ ἀντίχθων, τρίτη δὲ ἡ οἰκουμένη γῆ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀντίχθονος καὶ συμπεριφερομένη (περὶ τὸ μέσον) μὲ τὴν ἀντίχθονα· δι' αὐτὸ δὲ καὶ δὲν φαίνονται ὑπὸ τῶν κατοίκων τῆς γῆς οἱ ἐκεῖ κατοικοῦντες).

ΠΛΑΤΩΝ

8. Τοῦ μὲν οὖν θείου τὴν πλείστην ἰδέαν ἐκ πυρὸς ἀπηργάζετο, ὅπως ὅτι λαμπρότατον ἰδεῖν τε κάλλιστον εἴη, τῷ δὲ παντὶ προσεικάζων εὔκυκλον ἐποίει, τίθησί τε εἰς τὴν τοῦ κρατίστου φρόνησιν ἐκείνῳ συνεπόμενον, νείμας περὶ πάντα κύκλῳ τὸν οὐρανόν, κόσμον ἀληθινὸν αὐτῷ πεποικιλμένον εἶναι καθ' ὅλον.

Κινήσεις δὲ δύο προσῆψεν ἑκάστῳ, τὴν μὲν ἐν ταὐτῷ κατὰ ταὐτὰ περὶ τῶν αὐτῶν ἀεὶ τὰ αὐτὰ ἑαυτῷ διανοουμένῳ, τὴν δὲ εἰς τὸ πρόσθεν, ὑπὸ τῆς ταὐτοῦ καὶ ὁμοίου περιφορᾶς κρατουμένῳ· τὰς δὲ πέντε κινήσεις ἀκίνητον καὶ ἑστός, ἵνα ὅτι μάλιστα αὐτῶν ἕκαστον γένοιτο ὡς ἄριστον. ἐξ ἧς δὴ τῆς αἰτίας γέγονεν ὅσ' ἀπλανῆ τῶν ἄστρων ζῷα θεῖα ὄντα καὶ ἀΐδια καὶ κατὰ ταὐτὰ ἐν ταὐτῷ στρεφόμενα ἀεὶ μένει· τὰ δὲ τρεπόμενα καὶ πλάνην τοιαύτην ἴσχοντα, καθάπερ ἐν τοῖς πρόσθεν ἐρρήθη, κατ' ἐκεῖνα γέγονεν. γῆν δὲ τροφὸν μὲν ἡμετέραν, ἰλλομένην δὲ περὶ τὸν διὰ παντὸς πόλον τεταμένον, φύλακα καὶ δημιουργὸν νυκτός τε καὶ ἡμέρας ἐμηχανήσατο, πρώτην καὶ πρεσβυτάτην θεῶν ὅσοι ἐντὸς οὐρανοῦ γεγόνασι.

(Πλάτων, Τίμαιος 40 A - C).

(Τὴν μορφὴν τοῦ θείου διεμόρφωνεν (ὁ δημιουργὸς τοῦ κόσμου) κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ πυρός, διὰ νὰ εἶναι, ὅταν τὸ βλέπῃ κανείς, λαμπρότατον καὶ κάλλιστον, προσομοιάζων δὲ τοῦτο πρὸς τὸ σύμπαν τὸ ἔκαμεν εὔκυκλον (δηλ. σφαιροειδὲς) καὶ ἔθεσε τοῦτο εἰς τὴν φρόνησιν τοῦ κρατίστου, ὡς συνοδὸν τούτου, κατανείμας τὴν οὐράνιον σφαῖραν καθ' ὅλα διὰ κύκλου, ὥστε νὰ εἶναι εἰς αὐτὸν (τὸν Θεὸν) κόσμημα ἀληθινὸν πεποικιλμένον καθ' ὅλα. Προσέδωκε δὲ εἰς ἕκαστον ἄστρον, τὸ ὁποῖον εἶναι θεότης δημιουργηθεῖσα ὑπὸ τοῦ θεοῦ, δύο κινήσεις, ἡ μὲν μία νὰ γίνεται εἰς τὸν αὐτὸν τόπον κυκλικῶς καὶ ὁμαλῶς, ὡς δημιούργημα τοιοῦτον (τὸ ἄστρον θεότης), τὸ ὁποῖον διὰ τὰ αὐτὰ πράγματα νὰ σκέπτεται πάντοτε τὰ αὐτά, ἡ ἄλλη κίνησις δὲ νὰ γίνεται κατὰ προχώρησιν, ἡ ὁποία νὰ συγκρατῇ τοῦτο κατὰ τὴν περιφορὰν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ ὁμοίου σύμπαντος· κατὰ τὰς πέντε δὲ διευθύνσεις (ἐκ τῶν ἐν ὅλῳ δυνατῶν ἕξ: ἀνατολαί, δυσμαί, βορρᾶς, νότος, ἄνω, κάτω) νὰ εἶναι τὸ ἄστρον (θεότης) ἀκίνητον καὶ ἠρεμοῦν, ἵνα ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν ἄριστον. Ἐκ τῆς αἰτίας λοιπὸν αὐτῆς συνέβη, ὥστε ὅσα ἀπλανῆ ἐκ τῶν ἄστρων εἶναι ζῷα θεῖα καὶ αἰώνια καὶ περιστρέφονται ὁμαλῶς εἰς τὸν αὐτὸν τόπον νὰ μένουν ἐκεῖ πάντοτε· τὰ δὲ μεταβάλλοντα θέσιν καὶ λαμβάνοντα τοιαύτην περιπλάνησιν, ὅπως ἐλέχθη προηγουμένως, αὐτὰ ὀφείλουν τοῦτο εἰς τὰ προηγούμενα αἴτια. Τὴν δὲ γῆν, ἡ ὁποία εἶναι τροφὸς ἡμῶν, τὴν περιστρεφομένην περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, φύλακα δὲ καὶ δημιουργὸν τῆς νυκτὸς καὶ τῆς ἡμέρας, τὴν ἐδημιούργησεν αὐτὴν πρώτην καὶ πρεσβυτάτην ἐκ τῶν θεῶν, ὅσοι ἔγιναν ἐντὸς τοῦ οὐρανοῦ (ὅσα δηλ. ἄστρα θεοὶ ἔγιναν ἐντὸς τοῦ οὐρανοῦ).

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

9. Λοιπὸν δὲ περὶ τῆς γῆς εἰπεῖν, οὗ τε τυγχάνει κειμένη, καὶ πότερον τῶν ἠρεμούντων ἐστὶν ἢ τῶν κινουμένων, καὶ περὶ τοῦ σχήματος αὐτῆς. περὶ μὲν οὖν τῆς θέσεως οὐ τὴν αὐτὴν ἅπαντες ἔχουσι δόξαν, ἀλλὰ τῶν πλείστων ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαι λεγόντων, ὅσοι τὸν ὅλον οὐρανὸν πεπερασμένον εἶναί φασιν, ἐναντίως οἱ περὶ τὴν Ἰταλίαν, καλούμενοι δὲ Πυθαγόρειοι λέγουσιν· ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ μέσου πῦρ εἶναί φασι, τὴν δὲ γῆν ἓν τῶν ἄστρων οὖσαν, κύκλῳ φερομένην περὶ τὸ μέσον νύκτα τε καὶ ἡμέραν ποιεῖν . . . . πολλοῖς δ᾽ ἂν καὶ ἑτέροις συνδόξειε μὴ δεῖν τῇ γῇ τὴν τοῦ μέσου χώραν ἀποδιδόναι . . . . . τῷ γὰρ τιμιωτάτῳ οἴονται προσήκειν τὴν τιμιωτάτην ὑπάρχειν χώραν, εἶναι δὲ πῦρ μὲν γῆς τιμιώτερον, τὸ δὲ πέρας τῶν μεταξύ, τὸ δ᾽ ἔσχατον καὶ τὸ μέσον πέρας· ὥστ᾽ ἐκ τούτων ἀναλογιζόμενοι οὐκ οἴονται ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαι τῆς σφαίρας αὐτήν, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ πῦρ . . . . ὁμοίως δὲ καὶ περὶ μονῆς καὶ κινήσεως· οὐ γὰρ τὸν αὐτὸν τρόπον ἅπαντες ὑπολαμβάνουσιν, ἀλλ᾽ ὅσοι μὲν μηδ᾽ ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαί φασιν αὐτήν, κινεῖσθαι κύκλῳ περὶ τὸ μέσον, οὐ μόνον δὲ ταύτην, ἀλλὰ καὶ τὴν ἀντίχθονα, καθάπερ εἴπομεν πρότερον . . . . . . ἔνιοι δὲ καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ κέντρου φασὶν αὐτὴν ἴλλεσθαι περὶ τὸν διὰ παντὸς τεταμένον πόλον, ὥσπερ ἐν τῷ Τιμαίῳ γέγραπται.

(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β΄, 13, 293 α 15 - β 32).

(Ὑπολείπεται δὲ νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς γῆς, ποῦ κεῖται, καὶ ποῖον ἐκ τῶν δύο εἶναι ἐκ τῶν ἠρεμούντων ἢ ἐκ τῶν κινουμένων, καὶ περὶ τοῦ σχήματος αὐτῆς. Περὶ μὲν λοιπὸν τῆς θέσεως αὐτῆς δὲν ἔχουν ὅλοι τὴν αὐτὴν γνώμην, ἀλλὰ ἐν ᾧ οἱ περισσότεροι λέγουν, ὅτι αὕτη κεῖται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ἐξ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι θεωροῦν τὸ σύμπαν πεπερασμένον, τὴν ἀντίθετον γνώμην ἐκφράζουν οἱ περὶ τὴν Ἰταλίαν οἰκοῦντες, οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι· διότι, λέγουν, ὅτι εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου εἶναι πῦρ, καὶ ὅτι ἡ γῆ εἶναι ἓν ἄστρον περιφερόμενον κυκλικῶς περὶ τὸ κέντρον τοῦ κόσμου καὶ σχηματίζον τὴν νύκτα καὶ τὴν ἡμέραν . . . . . , ἀλλὰ καὶ ἄλλοι πολλοὶ πρὸς τούτοις ἐκφράζουν τὴν γνώμην, ὅτι δὲν πρέπει νὰ θεωροῦν τὴν γῆν, ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου . . . . . διότι φρονοῦν ὅτι εἰς τὸ τιμιώτατον πρᾶγμα εἶναι προσῆκον νὰ ἀποδίδουν τὴν τιμιωτάτην θέσιν, καὶ ὅτι τὸ πῦρ εἶναι τιμιώτερον τῆς γῆς, τὸ δὲ πέρας εἶναι τιμιώτερον τῶν ἐνδιαμέσων πραγμάτων, τὸ δὲ ἔσχατον καὶ τὸ μέσον εἶναι πέρας· ὥστε ἀναχωροῦντες ἐκ τοιούτων σκέψεων, νομίζουν, ὅτι αὕτη δὲν κεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς οὐρανίου σφαίρας, ἀλλὰ μᾶλλον ἐκεῖ κεῖται τὸ πῦρ . . . . ., ὁμοίως ὑπάρχει ἀσυμφωνία σχετικῶς περὶ τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς κινήσεως αὐτῆς· διότι δὲν ἔχουν περὶ αὐτῶν ὅλοι τὴν αὐτὴν γνώμην, ἀλλ᾽ ὅσοι μὲν φρονοῦν, ὅτι αὕτη δὲν κεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου, λέγουν, ὅτι κινεῖται κυκλικῶς περὶ τὸ μέσον, καὶ ὄχι μόνον αὕτη ἀλλὰ καὶ ἡ ἀντίχθων, ὡς εἴπομεν προηγουμένως).

ΣΙΜΠΛΙΚΙΟΣ

10. Ἐν μὲν τῷ μέσῳ τοῦ παντὸς πῦρ εἶναι φασι, περὶ δὲ τὸ μέσον τὴν ἀντίχθονα φέρεσθαι φασὶ γῆν οὖσαν καὶ αὐτὴν ἀντίχθονα δὲ καλουμένην διὰ τὸ ἐξ ἐναντίας τῇδε τῇ γῇ εἶναι, μετὰ δὲ τὴν ἀντίχθονα ἡ γῆ ἥδε φερομένη καὶ αὐτὴ περὶ τὸ μέσον, μετὰ δὲ τὴν γῆν ἡ σελήνη . . . τὴν δὲ γῆν ὡς ἓν τῶν ἄστρων οὖσαν κινουμένην περὶ τὸ μέσον κατὰ τὴν πρὸς τὸν ἥλιον σχέσιν νύκτα καὶ ἡμέραν ποιεῖν. ἡ δὲ ἀντίχθων κινουμένη περὶ τὸ μέσον καὶ ἑπομένη τῇ γῇ ταύτῃ οὐχ᾽ ὁρᾶται ὑφ᾽ ἡμῶν διὰ τὸ ἐπιπροσθεῖν ἡμῖν ἀεὶ τὸ τῆς γῆς σῶμα . . . . . ἄστρον δὲ τὴν γῆν ἔλεγον ὡς ὄργανον καὶ αὐτὴν χρόνου· ἡμερῶν γάρ ἐστιν αὕτη καὶ νυκτῶν αἰτία· ἡμέραν μὲν γὰρ ποιεῖ τὸ πρὸς τῷ ἡλίῳ μέρος καταλαμπομένη, νύκτα δὲ κατὰ τὸν κῶνον τῆς γενομένης ἀπ᾽ αὐτῆς σκιᾶς.

(Σιμπλίκιος, Σχόλια εἰς τὸ Περὶ οὐρανοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, Heiberg, σελ. 511, 26 - 512 17).

(Λέγουν, ὅτι ἡ γῆ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ σύμπαντος, καὶ ὅτι περὶ τὸ μέσον στρέφεται ἡ ἀντίχθων, ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτὴ γῆ, καλεῖται δὲ ἀντίχθων, διότι εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀπέναντι μέρος αὐτῆς τῆς γῆς, μετὰ δὲ τὴν ἀντίχθονα, ὅτι κεῖται αὐτὴ ἐδῶ ἡ γῆ περιστρεφομένη καὶ αὐτὴ περὶ τὸ μέσον, μετὰ δὲ τὴν γῆν, ὅτι κεῖται ἡ σελήνη·... ὅτι δὲ ἡ γῆ, ἐν ᾧ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ἄστρων περιφερόμενον περὶ τὸ μέσον, σχηματίζει τὴν νύκτα καὶ τὴν ἡμέραν ἀναλόγως τῆς θέσεως πρὸς τὸν ἥλιον. Ἡ δὲ ἀντίχθων κινουμένη περὶ τὸ μέσον καὶ ἀκολουθοῦσα τὴν γῆν αὐτήν, δὲν εἶναι ὁρατὴ ἀπὸ ἡμᾶς, διότι παρεμβάλλεται πάντοτε τὸ σῶμα τῆς γῆς . . . . ., ἔλεγον (οἱ Πυθαγόρειοι) δέ, ὅτι ἡ γῆ εἶναι ἄστρον καὶ ὄργανον τοῦ χρόνου, διότι αὐτὴ εἶναι ἡ αἰτία τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν· διότι ἡμέραν μὲν κάμνει τὸ πρὸς τὸν ἥλιον στρεφόμενον μέρος της, νύκτα δὲ τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸν σκιερὸν κῶνον τὸν σχηματιζόμενον ὑπ᾽ αὐτῆς).

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

11. Κατέχεις δέ, διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστι κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα τᾷ εὐθείᾳ τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς· ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων δείξεσι διάκουσας. Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθεσίων τινῶν ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου· ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανέα τῶν ἄστρων καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν, ὥστε τὸν κύκλον, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν.

(Ἀρχιμήδης, Ψαμμίτης I, 4, Heiberg, Lipsiae 1913, σελ. 218, 7).

(Γνωρίζεις δέ, ὅτι ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρονόμων κόσμος καλεῖται ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας κέντρον μὲν εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς, ἡ δὲ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς· διότι αὐτὰ τὰ ἔχεις πληροφορηθῆ ἀπὸ τὰς συνήθεις διδασκαλίας τῶν ἀστρονόμων. Ὁ Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ἐδημοσίευσε μερικὰς γραφὰς ἐκ τῶν ὑποθέσεων τῶν ὁποίων συνάγει, ὅτι ὁ κόσμος εἶναι πολὺ μεγαλύτερος τοῦ ἤδη λεχθέντος. Διότι ὑποθέτει, ὅτι οἱ μὲν ἀπλανεῖς ἀστέρες καὶ ὁ ἥλιος μένουν ἀκίνητοι, ἡ δὲ γῆ περιφέρεται κατὰ κύκλου περιφέρειαν περὶ τὸν ἥλιον, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τῆς ὑπ' αὐτῆς διαγραφομένης τροχιᾶς, ὅτι δὲ ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον μὲ τὸν ἥλιον, εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον διαγράφει ἡ γῆ κατὰ τὴν περιφοράν της, νὰ ἔχῃ τοιαύτην ἀναλογίαν, πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀπλανῶν, ὁποίαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν).

ΚΙΚΕΡΩΝ

12. Hicetas Syracusius, ut ait Theophrastus caelum solem lunam stellas, supera denique omnia stare censet neque praeter terram rem ullam in mundo moveri; quae cum circum axem se summa celeritate convertat et torqueat, eadem effici omnia quae si stante terra caelum moveretur, atque hoc etiam Platonem in Timaeo dicere quidam arbitrantur, sed paulo obscurius.

(Cicero, Academica priora II, 39, Loeb, σελ. 626).

(Ὁ Ἱκέτας ὁ Συρακούσιος πρεσβεύει, ὡς ἀναφέρει ὁ Θεόφραστος, ὅτι ὁ οὐρανός, ὁ ἥλιος, ἡ σελήνη, τὰ ἄστρα καὶ γενικῶς ὁ κόσμος ὑψηλὰ ἠρεμεῖ καὶ εἰς τὸ σύμπαν τίποτε δὲν κινεῖται ἐκτὸς ἀπὸ τὴν γῆν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γῆ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της μὲ μεγάλην ταχύτητα, διὰ τὸν λόγον αὐτὸν λαμβάνουν χώραν ἀκριβῶς τὰ αὐτὰ οὐράνια φαινόμενα εἰς τὸν οὐρανόν, ὡς ἐὰν ἡ γῆ ἦτο ἀκίνητος καὶ ἐκινεῖτο ὁ οὐρανός. Μερικοὶ πιστεύουν, ὅτι καὶ ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον λέγει τὸ αὐτό, καίτοι ὀλίγον σκοτεινότερον). (Τίμαιος 40 B), (ἴδε 8 καὶ 9).

ΠΛΟΥΤΑΡΧΟΣ

13. Πότερον οὕτως ἐκίνει τὴν γῆν, ὥσπερ ἥλιον καὶ σελήνην καὶ τοὺς πέντε πλάνητας, οὓς ὄργανα χρόνου διὰ τὰς τροπὰς προσηγόρευε καὶ ἔδει τὴν γῆν «ἰλλομένην περὶ τὸν διὰ πάντων πόλον τεταμένον» μὴ μεμηχανῆσθαι συνεχομένην καὶ μένουσαν, ἀλλὰ στρεφομένην καὶ ἀνειλουμένην νοεῖν, ὡς ὕστερον Ἀρίσταρχος καὶ Σέλευκος ἀπεδείκνυσαν, ὁ μὲν ὑποτιθέμενος μόνον ὁ δὲ Σέλευκος καὶ ἀποφαινόμενος; Θεόφραστος δὲ καὶ προσιστορεῖ τῷ Πλάτωνι πρεσβυτέρῳ γενομένῳ μεταμέλειν, ὡς οὐ προσήκουσαν ἀποδόντι τῇ γῇ τὴν μέσην χώραν τοῦ παντός.

(Πλούταρχος, Πλατωνικὰ Ζητήματα Η', 1).

(Ποῖον ἐκ τῶν δύο, ἐθεώρει τὴν γῆν ἀκίνητον ἢ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐκίνει τὴν γῆν, καθὼς ἔλεγεν, ὅτι κινεῖται ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη καὶ οἱ πέντε πλανῆται, τοὺς ὁποίους ἐκάλει ὄργανα τοῦ χρόνου διὰ τὰς τροπὰς καὶ ἔπρεπε τὴν γῆν «περιστρεφομένην περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου» νὰ μὴ τὴν θεωρῇ συνεχομένην (μὲ τὸν ἄξονα) καὶ ἀκινητοῦσαν, ἀλλὰ νὰ τὴν νοῇ ὡς περιστρεφομένην καὶ προχωροῦσαν, ὅπως βραδύτερον ἐπρέσβευον ὁ Ἀρίσταρχος καὶ ὁ Σέλευκος, ὁ μὲν μόνον ὑποθέτων τοῦτο, ὁ δὲ Σέλευκος καὶ ἀποδεικνύων αὐτό; Ὁ Θεόφραστος δὲ διηγεῖται προσέτι, ὅτι ὁ Πλάτων γενόμενος πρεσβύτερος μετενόησε, διότι εἶχεν ἀποδώσει εἰς τὴν γῆν τὴν μὴ προσήκουσαν θέσιν τοῦ κέντρου τοῦ κόσμου).

14. Μόνον ὦ τάν, μὴ κρίσιν ἡμῖν ἀσεβείας ἐπαγγείλῃς, ὥσπερ Ἀρίσταρχον ᾤετο δεῖν Κλεάνθης τὸν Σάμιον ἀσεβείας προσκαλεῖσθαι τοὺς Ἕλληνας, ὡς κινοῦντα τοῦ κόσμου τὴν ἑστίαν, ὅτι τὰ φαινόμενα σῴζειν ἀνὴρ ἐπειρᾶτο, μένειν τὸν οὐρανὸν ὑποτιθέμενος, ἐξελίττεσθαι δὲ κατὰ λοξοῦ κύκλου τὴν γῆν, ἅμα περὶ τὸν αὑτῆς ἄξονα δινουμένην.

(Πλούταρχος, Περὶ τοῦ ἐμφαινομένου προσώπου τῷ κύκλῳ τῆς σελήνης, 922 F).

(Μόνον κύτταξε μήπως ἐμπλέξῃς ἡμᾶς εἰς κατηγορίαν ἐπὶ ἀσεβείᾳ, ὡς ἐνόμιζεν ὅτι ἔπρεπε νὰ κάμῃ ὁ Κλεάνθης διὰ τὸν Ἀρίσταρχον τὸν Σάμιον ἐγκαλῶν αὐτὸν εἰς τοὺς Ἕλληνας ἐπὶ ἀσεβείᾳ, ὡς κινοῦντα τὴν ἑστίαν τοῦ κόσμου (δηλ. τὴν γῆν), διότι προσεπάθει ὁ ἄνθρωπος νὰ σώσῃ τὰ φαινόμενα, ὑποθέτων, ὅτι ἡ οὐράνιος σφαῖρα μένει ἀκίνητος, καὶ ὅτι ἡ γῆ κινουμένη διαγράφει λοξὸν κύκλον (τὴν ἐκλειπτικήν), συγχρόνως δὲ στρέφεται καὶ περὶ τὸν ἄξονά της).

15. Νομᾶς δὲ λέγεται καὶ τὸ τῆς Ἑστίας ἱερὸν ἐγκύκλιον περιβαλέσθαι τῷ ἀσβέστῳ πυρὶ φρουράν, ἀπομιμούμενος οὐ τὸ σχῆμα τῆς γῆς ὡς Ἑστίας οὔσης, ἀλλὰ τοῦ σύμπαντος κόσμου, οὗ μέσον οἱ Πυθαγορικοὶ τὸ πῦρ ἱδρῦσθαι νομίζουσι, καὶ τοῦτο Ἑστίαν καλοῦσι καὶ μονάδα· τὴν δὲ γῆν οὔτε ἀκίνητον οὔτε ἐν μέσῳ τῆς περιφορᾶς οὖσαν, ἀλλὰ κύκλῳ περὶ τὸ πῦρ αἰωρουμένην οὐ τῶν τιμιωτάτων οὐδὲ τῶν πρώτων τοῦ κόσμου μορίων ὑπάρχειν. Ταῦτα δὲ καὶ Πλάτωνά φασι πρεσβύτην γενόμενον διανενοεῖσθαι περὶ τῆς γῆς ὡς ἐν ἑτέρᾳ χώρᾳ καθεστώσης, τὴν δὲ μέσην καὶ κυριωτάτην ἑτέρῳ τινὶ κρείττονι προσήκουσαν.

(Πλούταρχος, Βίοι παράλληλοι, Νομᾶς XI).

(Λέγεται δέ, ὅτι ὁ Νομᾶς ἐπρέσβευεν, ὅτι τὸ ἱερὸν τῆς (θεᾶς) Ἑστίας περιβάλλεται ἀπὸ φρουρὰν ἀσβέστου πυρός, ἐννοῶν ὄχι ὅτι τὸ σχῆμα τῆς γῆς εἶναι ἡ Ἑστία, ἀλλὰ τὸ σύμπαν, τοῦ ὁποίου οἱ Πυθαγόρειοι νομίζουν, ὅτι τὸ μέσον ἀποτελεῖται ἀπὸ πῦρ, καὶ τοῦτο καλοῦν ἑστίαν καὶ μονάδα· διὰ δὲ τὴν γῆν πρεσβεύουν, ὅτι οὔτε ἀκίνητος εἶναι οὔτε ὅτι κεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς διαγραφομένης τροχιᾶς, ἀλλ' ὅτι περὶ τὸ (μέσον πῦρ περιφέρεται καὶ ὅτι δὲν εἶναι ἐκ τῶν τιμιωτάτων οὔτε ἐκ τῶν πρώτων μορίων τοῦ κόσμου). Λέγουν δέ, ὅτι ἐπρέσβευεν αὐτὰ καὶ ὁ Πλάτων, ὅταν ἔγινε πρεσβύτης, ὅτι δηλαδὴ ἡ γῆ κεῖται εἰς ἄλλο μέρος (ἐκτὸς τοῦ κέντρου τοῦ κόσμου), ἐπειδὴ ἐθεώρησεν ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κόσμου ὡς κυριώτατον ἁρμόζει εἰς ἄλλο τι καλύτερον).

ΦΙΛΟΛΑΟΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΔΗΣ - ΕΚΦΑΝΤΟΣ

16. Οἱ μὲν ἄλλοι μένειν τὴν γῆν. Φιλόλαος δ' ὁ Πυθαγόρειος κύκλῳ περιφέρεσθαι περὶ τὸ πῦρ κατὰ κύκλον λοξὸν ὁμοιοτρόπως ἡλίῳ καὶ σελήνῃ. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς καὶ Ἔκφαντος ὁ Πυθαγόρειος κινοῦσι μὲν τὴν γῆν, οὐ μήν γε μεταβατικῶς ἀλλὰ τρεπτικῶς τροχοῦ δίκην ἐνηξονισμένην, ἀπὸ δυσμῶν ἐπ' ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον.

(Πλούταρχος, Περὶ τῶν ἀρεσκόντων τοῖς φιλοσόφοις III, ΙΓ', Dox. 378).

(Οἱ μὲν ἄλλοι, λέγουν, ὅτι ἡ γῆ μένει ἀκίνητος. Ὁ Φιλόλαος δὲ ὁ Πυθαγόρειος πρεσβεύει, ὅτι περιφέρεται κατὰ τὴν ἐκλειπτικὴν περὶ τὸ πῦρ, καθ' ὅμοιον τρόπον ὅπως ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη. Ὁ ἐκ Πόντου Ἡρακλείδης καὶ ὁ Πυθαγόρειος

Ἔκφαντος λέγουν, ὅτι ἡ γῆ κινεῖται μέν, ὄχι ὅμως ἀλλάσσουσα θέσιν, ἀλλὰ ὅπως ὁ τροχὸς περὶ τὸν ἄξονά του, ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον).

17. Ἀρίσταρχος τὸν ἥλιον ἵστησι μετὰ τῶν ἀπλανῶν, τὴν δὲ γῆν κινεῖ περὶ τὸν ἡλιακὸν κύκλον καὶ κατὰ τὰς ταύτης ἐγκλίσεις σκιάζεσθαι τὸν δίσκον.

(Πλούταρχος, αὐτόθι II, ΚΔ΄, Dox. 355, 1).

(Ὁ Ἀρίσταρχος πρεσβεύει ὅτι ὁ ἥλιος καὶ οἱ ἀπλανεῖς μένουν ἀκίνητοι, ἡ δὲ γῆ κινεῖται περὶ τὸν ἡλιακὸν κύκλον καὶ ὅτι κατὰ τὰς ἐγκλίσεις αὐτῆς σκιάζεται ὁ δίσκος τοῦ ἡλίου (καὶ γίνεται ἔκλειψις αὐτοῦ).

18. Τῶν μαθηματικῶν τινὲς μὲν ὡς Πλάτων, τινὲς δὲ μέσον πάντων τὸν ἥλιον.

(Πλούταρχος, αὐτόθι II, ΙΕ΄, Dox. 345, 5).

(Μερικοὶ μὲν ἐκ τῶν μαθηματικῶν πρεσβεύουν ὅπως ὁ Πλάτων (Φαίδων 108-109) (ὅτι ἡ γῆ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου), ἄλλοι δὲ ὅτι τὸ μέσον ὅλων (τῶν ἄστρων) εἶναι ὁ ἥλιος).

19. Σέλευκος ὁ μαθηματικός, κινῶν καὶ οὗτος τὴν γῆν, ἀντικόπτειν αὐτῆς τῇ δίνῃ φησὶ καὶ τῇ κινήσει τὴν περιστροφὴν τῆς σελήνης.

(Πλούταρχος, αὐτόθι III, ΙΖ΄, Dox. 383).

(Ὁ μαθηματικὸς Σέλευκος, κινῶν καὶ αὐτὸς τὴν γῆν, λέγει, ὅτι ἕνεκα τῆς περιστροφῆς της καὶ τῆς κινήσεώς της ἐμποδίζει αὕτη τὴν περιστροφὴν τῆς σελήνης).

ΣΕΞΤΟΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΣ

20. Ἕτερον ἄρα ἐστὶν ἡ τοῦ κόσμου κίνησις καὶ ἕτερον ὁ χρόνος. οἵ γε μὴν τὴν τοῦ κόσμου κίνησιν ἀνελόντες, τὴν δὲ γῆν κινεῖσθαι δοξάσαντες, ὡς οἱ περὶ τὸν Ἀρίσταρχον τὸν μαθηματικόν, οὐ κωλύονται νοεῖν χρόνον.

(Σέξτος Ἐμπειρικός, Adv. Mathem. X, 174).

(Εἶναι ἄρα ἄλλο πρᾶγμα ἡ κίνησις τοῦ κόσμου καὶ ἄλλο ὁ χρόνος. Διότι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν παραδέχονται τὴν κίνησιν τοῦ κόσμου, ἀλλὰ νομίζουν ὅτι κινεῖται ἡ γῆ, ὅπως οἱ περὶ τὸν Ἀρίσταρχον τὸν μαθηματικόν, δὲν ἐμποδίζονται νὰ νοοῦν τὴν ὕπαρξιν τοῦ χρόνου).

ΚΟΠΕΡΝΙΚΟΣ

21. Hanc igitur incertitudinem mathematicarum traditionum de colligendis motibus sphaerarum orbis cum diu mecum revolverem, coe-

pit me taedere, quod nulla certior ratio motuum machinae mundi, qui propter nos ab optimo et regularissimo omnium opifice conditus esset, philosophis constaret, qui alioqui rerum minutissimarum respectu eius orbis tam exquisite scutarentur. Quare hanc mihi operam sumpsi, ut omnium philosophorum, quos habere possem, libros religerem indigaturus, an ne ullus unquam opinatus esset, alios esse motus spherarum mundi quam illi ponerent, qui in scholis mathemata profiterentur. Ac reperi quidem apud Ciceronem primum, Nicetam sensisse terram moveri. Postea et apud Plutarchum inyeni quosdam alios in ea fuisse opinione, cuius verba, ut sint omnibus obvia, placuit hic ascribere:

οἱ μὲν ἄλλοι μένειν τὴν γῆν, Φιλόλαος δὲ ὁ Πυθαγόρειος κύκλῳ περιφέρεσθαι περὶ τὸ πῦρ κατὰ κύκλον λοξὸν ὁμοιοτρόπως ἡλίῳ καὶ σελήνῃ. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς καὶ Ἔκφαντος ὁ Πυθαγόρειος κινοῦσι μὲν τὴν γῆν, οὐ μήν γε μεταβατικῶς, ἀλλὰ τρεπτικῶς, τροχοῦ δίκην ἐνηξονισμένην, ἀπὸ δυσμῶν ἐπ᾽ ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον (ἴδε 16).

Inde igitur occasionem nactus, coepi et ego de terrae mobilitate cogitare. Et quamvis absurda opinio videbatur, tamen quia sciebam aliis ante me hanc concessam libertatem, ut quoslibet fingerent circulos ad demonstrandum phaenomena astrorum, existimavi mihi quoque facile permitti, ut experirer, an posito terrae aliquo motu firmiores demonstrationes, quam illorum essent, inveniri in revolutione orbium coelestium posset.

(De revolutionibus orbium coelestium libri VI. Ad Sanctissimum Dominimum Paulum III Pontificem Maximum Nicolai Copernici praefatio in libros revolutionum).

(Ἐπὶ μακρὸν διελογιζόμην διὰ τὴν ἀβεβαιότητα αὐτὴν τῶν μαθηματικῶν παραδόσεων περὶ τῶν κινήσεων τῶν ἀστέρων, ὁπότε μὲ κατέλαβεν ἀντιπάθεια ἐκ τῆς σκέψεως, ὅτι ὑπὸ τῶν φιλοσόφων, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὰ λοιπὰ ἀνασκοποῦν ἐπισταμένως καὶ τὰς ἐλαχίστας λεπτομερείας τὰς ἀφορώσας εἰς τὸν κόσμον μας, οὐδεμία ἐπενοήθη μέθοδος ἑρμηνείας τῶν κινήσεων εἰς τὸ σύμπαν, τὸ ὁποῖον ὁ κάλλιστος καὶ τελειότατος δημιουργὸς ἐδημιούργησε δι᾽ ἡμᾶς. Ὡς ἐκ τούτου προέβην τελευταίως εἰς τὴν ἀνάγνωσιν καὶ ἀναδίφησιν ὅλων τῶν συγγραμμάτων τῶν φιλοσόφων, τὰ ὁποῖα ἠδυνήθην νὰ ἔχω, μὴ τυχὸν κανεὶς ἐξ αὐτῶν ἑρμηνεύει τὴν κίνησιν τῶν ἀστέρων κατ᾽ ἄλλον τρόπον ἐκείνου, καθ᾽ ὃν τὴν ἑρμηνεύουν οἱ ἐξ ἐπαγγέλματος μαθηματικοί. Καὶ πράγματι ἀνεῦρον εἰς τὸν Κικέρωνα, ὅτι ὁ Νικέτας (ἐσφαλμένως ἐγράφη τοῦτο ἀντὶ Ἱκέτας), ἐπρέσβευεν, ὅτι ἡ γῆ κινεῖται . . . Βραδύτερον εὑρῆκα εἰς τὸν Πλούταρχον, ὅτι καὶ μερικοὶ ἄλλοι εἶχον ἐκφράσει τὴν αὐτὴν γνώμην· ἐπιθυμῶ νὰ παραθέσω ἐδῶ τοὺς λόγους του, διὰ νὰ εἶναι προσιτοὶ εἰς ὅλους :

«Οἱ μὲν ἄλλοι λέγουν, ὅτι ἡ γῆ παραμένει ἀκίνητος. Ὁ Φιλόλαος δὲ ὁ Πυθαγόρειος πρεσβεύει, ὅτι περιφέρεται κατὰ τὴν ἐκλειπτικὴν περὶ τὸ πῦρ, καθ' ὅμοιον τρόπον ὅπως ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη. Ὁ ἐκ Πόντου Ἡρακλείδης καὶ ὁ Πυθαγόρειος Ἔκφαντος λέγουν, ὅτι ἡ γῆ κινεῖται μέν, ὄχι ὅμως ἀλλάσσουσα θέσιν, ἀλλὰ ὅπως ὁ τροχὸς περὶ τὸν ἄξονά του ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον» (ἴδε 16).

Ἀφορμηθεὶς λοιπὸν ἐκ τούτων ἤρχισα καὶ ἐγὼ νὰ διαλογίζωμαι διὰ τὸ κινητὸν τῆς γῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἐγνώριζον, ὅτι ἤδη εἰς ἄλλους πρὸ ἐμοῦ εἶχεν ἐπιτραπῆ ἡ ἐλευθερία νὰ δεχθοῦν τυχούσας κυκλικὰς κινήσεις πρὸς ἑρμηνείαν τῶν οὐρανίων φαινομένων, ἐπίστευσα ὅτι καὶ εἰς ἐμὲ ἐπίσης θὰ ἐπετρέπετο, διὰ τῆς παραδοχῆς κινήσεως τῆς γῆς νὰ ἀνεύρω μίαν ἀξιόπιστον ἑρμηνείαν τῶν οὐρανίων κινήσεων, διάφορον ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχον ἄλλοι, καίτοι ἡ ἄποψίς μου παρουσιάζεται παράλογος).

22. Credibile est hisce similibusque causis Philolaum mobilitatem terrae sensisse quod etiam nonnulli Aristarchum Samium ferunt in eadem fuisse sententia.

(Εἶναι πιστευτὸν νὰ λέγωμεν, ὅτι καὶ διὰ παρομοίας αἰτίας ὁ Φιλόλαος εἶχε τὴν γνώμην ὅτι κινεῖται ἡ γῆ, τὸ ὁποῖον μερικοὶ λέγουν ὅτι ἐπρέσβευεν ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος) (De Revol. Orb. Coelest. Ἔκδοσις 1873).

23. Ὁ Κοπέρνικος (1473-1543), γνωρίζων καλῶς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὴν λατινικὴν γλῶσσαν, ἦτο γνώστης τοῦ γεωκεντρικοῦ καὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ὁ ἴδιος ὁμολογεῖ εἰς τὸ βιβλίον του, ὅτι τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος ἐπληροφορήθη παρὰ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τοῦ Κικέρωνος καὶ τοῦ Πλουτάρχου. Τὸ βιβλίον του ὑπὸ τὸν τίτλον De Revolutionibns Orbium Coelestium, Libri VI, ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1543, ἀφοῦ ἔτυχε τῆς ἐγκρίσεως τοῦ Πάπα τῆς Ρώμης. Βραδύτερον τοῦτο ἀφωρίσθη ὑπὸ τῆς Καθολικῆς Ἐκκλησίας, ἡ ὁποία ἀπηγόρευσε τὴν κυκλοφορίαν του μεταξὺ τῶν ὀπαδῶν αὐτῆς. Εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ 1873, σελ. 34, ὑπάρχει ἀκόμη ἡ παράγραφος τοῦ βιβλίου ὅπου ὁ Κοπέρνικος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος εἶχε διατυπώσει τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος (P. Couderc, Les Étapes

de l'Astronomie, Paris 1948, σ. 79). Καὶ εἰς τὰς προηγουμένας ἐκδόσεις καὶ εἰς τὰς μετὰ τὸ 1873 γενομένας ἐκδόσεις τοῦ βιβλίου τοῦ Κοπερνίκου ἡ παράγραφος αὕτη δὲν τίθεται, ἄγνωστον διατί. Τὸ ὑποστηριζόμενον ὑπό τινων νεωτέρων, ὅτι ὁ Κοπέρνικος δὲν ἐγνώριζε τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (Ψαμμίτης, Heiberg, Lipsiae 1913, σ. 218, 7) μνημονευομένην θεωρίαν τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος, διότι δῆθεν τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ἐξεδόθησαν διὰ τοῦ τύπου τῷ 1544, ἐνῷ τὸ βιβλίον τοῦ Κοπερνίκου ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1543, εἶναι πάντη ἀβάσιμον καὶ ἐσφαλμένον. Διότι τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκυκλοφορήθησαν ἐν Εὐρώπῃ ἐν λατινικῇ μεταφράσει ἀπὸ τοῦ 12ου αἰῶνος, κατά τινας δὲ ἀπὸ τοῦ 5ου αἰῶνος (Boëthius). Δὲν ὑπάρχει ὅμως ἀνάγκη νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ, ἀφοῦ ὁ ἴδιος ὁ Κοπέρνικος μνημονεύει εἰς τὸ βιβλίον του, ὅτι ἐγνώριζε τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τὸ ὁποῖον μνημονεύει καὶ ὁ Πλούταρχος. Βεβαιοῖ δὲ ὁ Κοπέρνικος, ὅτι εἶχε μελετήσει τὰ συναφῆ ἔργα τοῦ Πλουτάρχου, εἰς τὰ ὁποῖα μνημονεύεται τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου (Πλούταρχος, ἐνταῦθα (13), Πλατωνικὰ ζητήματα VIII 1).

Σύγκρισις τῆς Μεγάλης Μαθηματικῆς Συντάξεως τοῦ Πτολεμαίου καὶ τοῦ βιβλίου τοῦ Κοπερνίκου, De Revolutionibus Orbium Coelestium, πείθει περὶ τῆς μεγάλης ἐπιδράσεως ἐπὶ τοῦ Κοπερνίκου τοῦ ἔργου τοῦ Πτολεμαίου (The Great Books on the Western World, 16, Ptolemy, Copernicus, Kepler, University of Chicago, by Encyclopaedia Britannica Inc., 1952).

Ἐκτὸς τῆς θεωρίας περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τὴν ὁποίαν υἱοθέτησεν ὁ Κοπέρνικος, εἰς τὸ προηγουμένως μνημονευόμενον βιβλίον του περιλαμβάνει καὶ ἀστρονομικὰς καὶ μετεωρολογικάς τινας θεωρίας τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ὡς ἰδικάς του, ἐφ' ὅσον δὲν ἀναφέρει πόθεν παρέλαβε τὰς θεωρίας αὐτάς. Κατωτέρω ἀναφέρονται ἐνδεικτικῶς μερικαὶ ἐκ τῶν θεωριῶν αὐτῶν περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Κοπερνίκου.

Ἡ μεγάλη συμβολὴ τοῦ Κοπερνίκου εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης τῆς Ἀστρονομίας ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι οὗτος ἐτόλμησε νὰ υἱοθετήσῃ καὶ διακηρύξῃ τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου καὶ νὰ ἐπιτύχῃ διὰ τοῦ θείου του Καθολικοῦ Ἐπισκόπου τὴν ἔγκρισιν τοῦ Πάπα πρὸς δημοσίευσιν τῶν συναφῶν ἀντιλήψεών του.

24. Ἀστρονομικαὶ καὶ μετεωρολογικαί τινες θεωρίαι περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Κοπερνίκου, De Revolutionibus Orbium Coelestium, χωρὶς νὰ μνημονεύεται ὅτι αὗται ἐλήφθησαν ἐξ ἑλληνικῶν συγγραμμάτων.

Copernicus, de Revolutionibus Orbium Coelestium.	**Ἑλληνικὰ συγγράμματα.**
Ὁ κόσμος εἶναι σφαιροειδής. Α 1.	Τὸν κόσμον ἔμψυχον, νοερόν, σφαιροειδῆ (λέγει Πυθαγόρας). (Διογένης Λαέρτιος VIII, 25). Ὅτι ὁ κόσμος σφαῖρα. (Κλεομήδης, Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων, H. Ziegler, κεφ. 8).
Τὸ σφαιρικὸν σχῆμα εἶναι τὸ τελειότερον πάντων. Α 1.	Σφαιροειδὲς . . . πάντων τελεώτατον. (Πλάτων, Τίμαιος 33 Β).
Ἡ σφαῖρα ἀποτελεῖ τὸ πολυχωρητότερον σχῆμα. Α 1.	Πάντων τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν ἴσην ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστη ἐστὶν ἡ σφαῖρα. (Πάππος Ε΄, 350, 24, F. Hultsch). Δεικνύουσι καὶ τὴν σφαῖραν τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων στερεῶν σχημάτων, ἑπομένως μείζονα. (Πρόκλος, Σχόλια εἰς Τίμαιον Πλάτωνος, E. Diehl II, Lipsiae 1904, σελ. 76, 16).
Λέγω, ὅτι ὁ ἥλιος, ἡ σελήνη καὶ οἱ ἀστέρες ἔχουσι τὸ σφαιροειδὲς σχῆμα. Α 1.	Τὸ δὲ σχῆμα τῶν ἄστρων ἑκάστου σφαιροειδές. (Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β΄, 11, 291b 11). Διατὶ ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη σφαιροειδῆ ὄντα. (Ἀριστοτέλης, Προβλήματα ΙΕ΄, 8, 912 a 27).
Εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ γῆ τοιοῦτον σφαιροειδὲς σχῆμα. Α 2.	Σχῆμα δ᾿ ἔχειν σφαιροειδὲς ἀναγκαῖον αὐτήν (τὴν γῆν). (Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β΄, 14, 297 a 8).
Δι᾿ ἐκείνους, οἵτινες ὑφ᾿ οἱουδήποτε σημείου πρὸς ἄρκτον μεταβαίνουσιν, ἡ κορυφὴ αὕτη τῆς ἡμερησίας περιστροφῆς ὑψοῦται . . . καὶ πολλοὶ ἀστέρες φαίνονται μὴ δύοντες πρὸς ἄρκτον, ἐν ᾧ ἄλλοι δὲν ἀνατέλλουσι πρὸς μεσημβρίαν. Α 2.	Γιγνομένης μεταστάσεως ἡμῖν πρὸς μεσημβρίαν καὶ ἄρκτον . . . τὰ ὑπὲρ κεφαλῆς ἄστρα μεγάλην ἔχειν τὴν μεταβολήν, καὶ μὴ ταὐτὰ φαίνεσθαι πρὸς ἄρκτον τε καὶ μεσημβρίαν μεταβαίνουσιν. (Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β΄, 14, 297b 33 - 298 b 3).

Ὁ Κάνωβος δὲν εἶναι ὁρατὸς ἐκ τῆς Ἰταλίας ἀλλὰ φαίνεται ἐκ τῆς Αἰγύπτου. Α 2.

Ὁ Κάνωβος λεγόμενος ἀστήρ, τοῖς βορειοτέροις τῆς Κνίδου μέρεσιν ἀφανὴς ὤν, τοῖς νοτιωτέροις ἤδη φανερὸς γίνεται. (Θέων Σμυρναῖος, Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, Hiller, Lipsiae 1878, σελ. 121, 19).

Δι᾽ ἐκείνους οἵτινες, ἀφ᾽ οἱουδήποτε μέρους βαίνουσι πρὸς βορρᾶν, ὁ βόρειος πόλος τῆς ἡμερησίας κυκλοτεροῦς κινήσεως ὑψοῦται συνεχῶς, ἐν ᾧ ὁ ἄλλος πόλος βυθίζεται κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα. Ἀπεναντίας δὲ δι᾽ ἐκείνους, οἵτινες ταξιδεύουσι πρὸς νότον, ὑψοῦνται οἱ πρὸς νότον ἀστέρες. Ὅπερ δὲν ἀληθεύει περὶ οἱουδήποτε ἄλλου ἢ τοῦ σφαιρικοῦ σχήματος. Α 2.

Ἀπιόντων δὲ ὡς πρὸς ἄρκτον ἀπὸ μεσημβρίας ἀποκρύπτεται τινὰ τῶν ὁρωμένων πρὸς μεσημβρίᾳ ἄστρων, καὶ πρὸς ἄρκτον τινὰ ὁρᾶται τέως ἀφανῆ ὄντα· καὶ εἴ τις ἀπ᾽ ἄρκτον ὡς πρὸς μεσημβρίαν ἴοι, τὸ ἔμπαλιν γίνεται. Ὧν οὐδὲν ἂν συνέβαινε πλατεῖ τῷ σχήματι τῆς γῆς κεχρημένης.

(Κλεομήδης, Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων, H. Ziegler, Lipsiae 1891, 76, 23).

Οἱ κάτοικοι τῶν Ἀνατολῶν δὲν βλέπουσι τὰς ἑσπερινὰς ἐκλείψεις ἡλίου καὶ σελήνης, οἱ τῶν δυσμῶν τὰς πρωϊνάς, ἀλλ᾽ ἐκ τῶν ἀναμεταξὺ οἰκούντων οἱ μὲν βλέπουσιν αὐτὰς ἀργότερον, οἱ δὲ ἐνωρίτερον. Α 2.

Τὰς γὰρ ὑπὸ τὸν αὐτὸν χρόνον ἀποτελουμένας ἐκλειπτικὰς φαντασίας . . . εὑρίσκομεν . . . πάντοτε τὰς παρὰ τοῖς ἀνατολικωτέροις τῶν τηρησάντων ἀναγεγραμμένας ὥρας ὑστεριζούσας τῶν παρὰ τοῖς δυτικωτέροις.

(Πτολεμαῖος, Μαθηματικὴ Σύνταξις, Α 4, Heiberg 152, 2.).

Ὅτι καὶ τὰ ὕδατα ἔχουσι τὸ αὐτὸ (σφαιρικὸν σχῆμα) παρατηρεῖται ἐκ τῶν πλοίων, διότι ἡ γῆ, ἥτις δὲν φαίνεται ἐκ τοῦ πλοίου, φαίνεται ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ ἱστοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν φῶς τι τοποθετηθῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ ἱστοῦ, τότε τοῦτο φαίνεται, τοῦ πλοίου ἀπομακρυνομένου τῆς γῆς, κατερχόμενον διὰ τοὺς μένοντας εἰς τὸν αἰγιαλόν, μέχρις ἐξαφανίσεως. Α 2.

Καὶ νεὼς δὲ ἀπὸ γῆς ἰούσης πρῶτον τὰ σκάφη ἀποκρύπτεται, ἔτι τῶν περὶ τὸν ἱστὸν ὁρωμένων· καὶ ὁπότε ἐκ θαλάσσης γῇ πελάζει, ὁμοίως πρῶτον ὁρᾶται τὰ ἱστία, τὰ δὲ σκάφη ἔτι ἐπιπροσθεῖται ὑπὸ τῆς περὶ τὸ ὕδωρ κυρτότητος.

(Κλεομήδης, Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων, 84, 9).

Ὅτι ἡ γῆ ἔχει τὸ τοιοῦτον (σφαιρικὸν) σχῆμα ἀποδεικνύει ἡ σκιὰ αὐτῆς· διότι αὕτη παράγει ἐπὶ τῆς ἐν ἐκλείψει σελήνης περιφέρειαν τελείου κύκλου. Α 3.

Περὶ δὲ τὰς (σεληνιακὰς) ἐκλείψεις ἀεὶ κυρτὴν ἔχει τὴν ὁρίζουσαν γραμμήν, ὥστ᾽ . . . ἡ τῆς γῆς ἂν εἴη περιφέρεια τοῦ σχήματος αἰτία σφαιροειδὴς οὖσα.
(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β΄, 14, 297 b 19).

Διότι οἱ ὁρίζοντες κύκλοι διχοτομοῦσιν ὅλην τὴν σφαῖραν τοῦ οὐρανοῦ, ὅπερ δὲν ἠδύνατο νὰ γίνῃ, ἐὰν τὸ μέγεθος τῆς γῆς, παραβαλλόμενον τῷ τοῦ οὐρανοῦ, ἦτο σημαντικόν. Α 6.

Ὁρίζοντας διχοτομεῖν πάντοτε τὴν ὅλην σφαῖραν τοῦ οὐρανοῦ, ὅπερ οὐκ ἂν συνέβαινεν, εἰ τὸ μέγεθος τῆς γῆς αἰσθητὸν ἦν πρὸς τὴν τῶν οὐρανίων ἀπόστασιν.
(Πτολεμαῖος, Μαθηματικὴ Σύνταξις Α, 6, Heiberg, σελ. 20, 22).

Ὁ τόσον μέγας ὄγκος τῆς γῆς εἶναι ἀσήμαντος ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ οὐρανοῦ. Α 6.

Ὅτι σημείου λόγον ἔχει πρὸς τὰ οὐράνια ἡ γῆ.
(Πτολεμαῖος, Μαθ. Σύντ. Α, 6, 20, 3).

Τὸ ἄπειρον ἐπ᾽ οὐδενὶ λόγῳ δύναται νὰ κινῆται. Α 8.

Οὐδ᾽ ὅλως γε τὸ ἄπειρον ἐνδέχεται κινεῖσθαι.
(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Α΄, 7, 274 b 29).

Δυνάμεθα νὰ ὑπολάβωμεν, ὅτι ἡ τάσις αὕτη τῆς ἕλξεως ἔγκειται ἐπίσης καὶ εἰς τὸν ἥλιον καὶ εἰς τὴν σελήνην καὶ εἰς τοὺς ἄλλους πλανήτας. Α 9.

Πλειόνων δὲ κόσμων ὄντων καθ᾽ ἕκαστόν ἐστιν ἴδιον μέσον (ἐφ᾽ οὗ τὰ βάρη ὠθεῖσθαι).
(Πλούταρχος, Περὶ τῶν ἐκλελοιπότων χρηστηρίων, 27).

Ἡ κίνησις αὕτη εἶναι φυσικὴ καὶ οὐδαμῶς βιαία. Α 10.

Ὥσπερ γὰρ κίνησις ὑπάρχει ἢ βίᾳ ἢ φύσει.
(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β΄, 13, 295 a 6).

Ἡ ἐτησία κίνησις τοῦ κέντρου (τῆς γῆς) ἥτις περιγράφει κύκλον περὶ τὸν ἥλιον. Α 11.

Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος . . . ὑποτίθεται . . . τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν.
(Ἀρχιμήδης, Ψαμμίτης, Heiberg, Lipsiae 1913, σελ. 218, 7 - 12).

Αὗται αἱ τροχιαὶ τῶν πλανωμένων ἀστέρων ἔχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν περὶ τὸν ἥλιον. Ε 1.

Εἰσὶ γάρ τοι θεοὶ συγγενεῖς ἡλίῳ καὶ συμφυεῖς, τὴν ἄχραντον οὐσίαν τοῦ θεοῦ κορυφούμενοι, πληθυνόμενοι μὲν ἐν τῷ κόσμῳ, περὶ αὐτὸν δὲ (τὸν ἥλιον) ἑνοειδεῖς ὄντες.

Οἵτε γὰρ πλάνητες εὔδηλον ὅτι περὶ αὐτὸν τὸν ἥλιον χορεύοντες μέτρον ἔχουσι τῆς κινήσεως.

('Ιουλιανὸς αὐτοκράτωρ, λόγος δ', ἐγκώμιον εἰς τὸν αὐτοκράτορα Κωνσταντῖνον, 143 Β, 146 D). (Juliani Imperatoris vol. I, Oratio IV, 143 B, 146 D, Lipsiae 1875).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΙΓΙΝΗΤΗΣ, ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Μαθήματα Ἀστρονομίας, Ἀθῆναι 1929.

ΞΑΝΘΑΚΗΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ: Ἀστρονομία, Τόμος Α', Θεσσαλονίκη 1955.

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ, Α. Σ.: Τὸ Σύμπαν, Ἀθῆναι 1936.

ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ, ΕΥΓΕΝΙΟΣ Μ.: Μεγάλη Ἑλληνικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία, ἄρθρον Κοπέρνικος, Ἀθῆναι 1930.

ΧΑΣΑΠΗΣ, ΚΩΝ/ΤΙΝΟΣ Σ.: Ἡ Ἑλληνικὴ Ἀστρονομία τῆς Β' χιλιετηρίδος π.Χ. κατὰ τοὺς Ὀρφικοὺς Ὕμνους. Διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ, Ἀθῆναι 1967.

COUDERC, P.: Les Étapes de l'Astronomie, Paris 1948.

HEATH, THOMAS: Greek Astronomy, London 1932.

HEATH, THOMAS: Aristarchos of Samos, 1913.

KLAUS, GEORG: Nicolaus Copernicus. Über die Kreisbewegungen der Weltkörper, 1. Buch. Berlin 1959.

TANNERY, PAUL: Recherches sur l'Histoire d'Astronomie ancienne, Paris, 1893.

ZUSAMMENFASSUNG

Einleitend wird die Stelle aus Platons Timaios wiedergegeben, worin gesagt wird, was Solon aus dem Mund des ägyptischen Priesters über die altgriechische Kultur erfährt. Dann wird über die bei den Orphikern des 15. Jahrhunderts vor Chr. herrschende Auffasung von der Bewegung der Erde um die Weltachse berichtet. Anschliessend folgt die Schilderung der pythagoreischen Ansichten über die Bewegung der Himmelskörper nach Platon und Aristoteles, hierauf, was Archimedes, Cicero, Aëtius, und Plutarch über das heliozentrische System

des Aristarch von Samos und die Vertiefung bei Seleukos wissen. In der Einleitung zu den Revolutiones orbium coelestium nimmt Copernicus ausdrücklich auf Aristarch und Seleukos Bezug; dass er sich gegen die Autorität des Ptolemaios für die Übernahme des heliozentrischen Systems entscheidet, führt die grosse Wende in der Entwicklung der abendländischen Astronomie herbei.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Ἰω. Ξανθάκης** κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας εἶπε τὰ κάτωθι:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν μελέτην τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη ὑπὸ τὸν τίτλον:

«Τὸ Ἡλιοκεντρικὸν Σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων».

Ὁ κ. Σταμάτης ἀνατρέχει εἰς τὰς διασωθείσας πηγὰς καὶ παρουσιάζει, κατὰ τρόπον συστηματικὸν καὶ ἀντικειμενικόν, τὰς ἰδέας τῶν ἀρχαίων περὶ τῆς γενέσεως τοῦ κόσμου καὶ τὰς ἀπόψεις των περὶ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ περὶ τὸν Ἥλιον.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἀναφέρεται τὸ χωρίον τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος, ὅπου ἐκτίθεται ἡ ἀφήγησις τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα περὶ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ. Ἐκτὸς τούτου ὑπενθυμίζεται ἡ ὀρφικὴ ἀντίληψις τοῦ 15ου αἰῶνος π.Χ. περὶ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου. Περαιτέρω ἀναφέρονται αἱ ἀντιλήψεις τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ τῶν κινήσεων τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ αἱ θεωρίαι τῶν Πυθαγορείων, ἰδίᾳ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου καὶ τοῦ Σελεύκου περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος, ὡς τοῦτο παρεδόθη εἰς ἡμᾶς διὰ τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Κικέρωνος, τοῦ Ἀετίου καὶ τοῦ Πλουτάρχου.

Μετὰ τὴν ὡς ἄνω ἀνακοίνωσιν ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Ἰω. Θεοδωρακόπουλος** προέβη εἰς τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις:

Μὲ πολλὴν χαρὰν ἤκουσα τὴν ἀνακοίνωσιν τοῦ κ. Σταμάτη. Ὅποιος ἔχει μελετήσει τὴν ἱστορίαν τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς ἐπιστήμης καὶ φιλοσοφίας, γνωρίζει καλῶς, ὅτι τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα ἦτο κατάκτησις τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, ὁ ὁποῖος ἤκμασε κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ τρίτου π. Χ. αἰῶνος καὶ ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ Περιπατητικοῦ φιλοσόφου Στράτωνος ἐκ Λαμψάκου. Τὸ σύστημα τῆς ἡλιοκεντρικῆς κοσμολογίας τοῦ Ἀριστάρχου ἔγινεν ἀντικείμενον συζητήσεως καὶ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Τὸ ἐρώτημα, τὸ ὁποῖον τίθεται, εἶναι πῶς συνέβη ἡ μεγάλη καὶ καταπληκτικὴ αὐτὴ κατάκτησις τοῦ ἑλληνικοῦ ἐπιστημονικοῦ πνεύματος νὰ παραγκωνισθῇ καὶ ν' ἀποσιωπηθῇ κατὰ τὴν περαιτέρω πορείαν τῆς ἱστορίας. Δύο εἶναι οἱ λόγοι: πρῶτον ἡ φιλοσοφικὴ αὐθεντία τοῦ Ἀριστοτέλους, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν κοσμολογικήν του εἰκόνα τοποθετεῖ τὴν γῆν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου. Ἡ κοσμολογικὴ αὐτὴ εἰκὼν δὲν ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν ἄμεσον διὰ τῆς αἰσθήσεως σχηματιζομένην ἐμπειρίαν τοῦ ἀνθρώπου, ἡ ὁποία τοποθετεῖ αὐτομάτως τὴν γῆν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου. Ὁ δεύτερος λόγος, ὁ ὁποῖος συνετέλεσεν εἰς τὴν ἀποσιώπησιν τῆς κατακτήσεως τοῦ Ἀριστάρχου, εἶναι ὅτι ἡ κοσμολογία τοῦ Ἀριστοτέλους ἔγινεν ἀποδεκτὴ ἀπὸ τὸν Χριστιανισμὸν ἢ μᾶλλον ἀπὸ τὴν Ἐκκλησίαν. Ἡ γῆ εἶναι καὶ δι' αὐτὸν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου.

Εἰς τὰς παρατηρήσεις ταύτας ἀπαντᾷ ὁ κ. **Ἰω. Ξανθάκης** ὡς ἀκολούθως:

Εὐχαριστῶ τὸν κ. Θεοδωρακόπουλον διὰ τὴν παρέμβασίν του καὶ τὸν παρακαλῶ, ὅπως δεχθῇ καὶ περιληφθῶσιν εἰς τὰ Πρακτικὰ αἱ παρατηρήσεις του διὰ τὴν ἐργασίαν τοῦ κ. Σταμάτη. Πράγματι ὁ κ. Σταμάτης δὲν ἀσχολεῖται μὲ τὸ πρόβλημα τῆς μὴ ἐπικρατήσεως τῶν ἀπόψεων τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, συμφωνῶ δὲ καὶ ἐγὼ μετὰ τοῦ κ. Θεοδωρακοπούλου, ὅτι ἡ μεγάλη προσωπικότης τοῦ Ἀριστοτέλους ὑπῆρξεν ἡ κυριωτέρα ἀφορμὴ τοῦ παραμερισμοῦ τῶν ἀπόψεων τοῦ Ἀριστάρχου. Ὁ Ἀριστοτέλης, ὡς γνωστόν, ἦτο ἔνθερμος ὑποστηρικτὴς τοῦ γεωκεντρικοῦ συστήματος.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος λέγει καὶ ὁ Πρόεδρος κ. **Σπ. Μαρινᾶτος**:

Εἰς τὰ λεχθέντα ὑπὸ τῶν προλαλησάντων κυρίων συναδέλφων θὰ εἶχον νὰ προσθέσω τὰ ἑξῆς: «Ἅπαξ ἐλευθερωθέντος τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος κατὰ τὴν εὐτυχῆ ἐκείνην ἐποχήν, ἡ φιλοσοφικὴ διάνοια τῶν Ἑλλήνων ἔφθασεν εἰς δυσθεώρητα ὕψη. Ἡ σημερινὴ ἐπιστήμη φθάνει ἐκ νέου εἰς τὰ ὕψη ταῦτα. Γνωρίζετε βεβαίως πάντες, ὅτι σήμερον ἡ Ἐπιστήμη ὁμιλεῖ περὶ πολλῶν κόσμων, περὶ πιθανότητος ὑπάρξεως ζωῆς πολλαχοῦ ἀνὰ τὸ Σύμπαν καὶ περὶ ἀπείρων γαλαξιῶν ἢ νεφελωμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦσι χωριστοὺς γιγαντιαίους κόσμους.

Ἀπὸ ἓν ἀνέκδοτον, τὸ ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι καὶ τοῦτο ἀκόμη, τὸ περὶ κόσμων, ἐδίδασκον συστηματικῶς οἱ φιλόσοφοι. Εἷς τις Ἀνάξαρχος, ἂν καλῶς ἐνθυμοῦμαι, ἐδίδασκε περὶ πολλῶν κόσμων παρουσίᾳ Ἀλεξάνδρου τοῦ Μεγάλου. Οὗτος τότε ἐδάκρυσε, διότι ἐνεθυμήθη, ὅτι ἀπείρων ὄντων τῶν κόσμων, δὲν ἠδυνήθη ἀκόμη νὰ κατακτήσῃ τὸν ἕνα καὶ μόνον, τὸν παρόντα».

(Σημείωσις μεταγενεστέρα τοῦ κ. Σπ. Μαρινάτου: Πρόκειται περὶ τῶν χωρίων Πλουτ. περὶ Εὐθυμίας IV, ἔνθα τὰ πράγματα ἐξελίσσονται σχεδὸν ἀκριβῶς ὡς ἀνωτέρω.)

1821 ΕΚΔΟΣΙΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ "ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ" 1971
ΕΠΙ ΤΗ ΕΚΑΤΟΝΠΕΝΤΗΚΟΝΤΑΕΤΗΡΙΔΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝ. ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΕΩΣ

ΑΙ ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΑΙ

ΑΠΟ ΤΗΣ ΕΠΟΧΗΣ ΤΗΣ ΑΛΩΣΕΩΣ (1453) ΜΕΧΡΙ ΤΗΣ ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΩΣ ΕΚ ΤΗΣ ΤΟΥΡΚΟΚΡΑΤΙΑΣ (1830)

ὑπὸ ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ
Μέλους τῆς Διεθνοῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν

σφραγὶς τῆς Φιλικῆς Ἑταιρείας

Προσφέρεται δωρεὰν

ΑΘΗΝΑΙ 1971

ΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΑΙ ΕΝ ΕΛΛΑΔΙ

1. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ (600π.Χ.—415μ.Χ.)

Αἱ Μαθηματικαί καί Φυσικαί ἐπιστῆμαι κατά τήν ἀρχαιότητα εἶναι ἀποκλειστικόν δημιούργημα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. Ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τά Μαθηματικά, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς τόν ΘΑΛΗΝ τόν Μιλήσιον καί ἡ ἐκτέλεσις πειραμάτων πρός ἀνακάλυψιν φυσικῶν νόμων εἶναι τά κύρια χαρακτηριστικά τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστημονικῆς δραστηριότητος, χαρακτηριστικά, τά ὁποῖα ἀπαντῶμεν μόνον εἰς τούς Ἕλληνας τῆς ἀρχαίας ἐποχῆς. Τό ὑποστηριζόμενον ὑπό τινων, ὅτι οἱ Ἕλληνες ἦσαν ξένοι πρός τό πείραμα καί ἔγιναν ἐμπόδιον εἰς τήν ἀνάπτυξιν τῶν Φυσικῶν ἐπιστημῶν εἶναι ἐντελῶς ἐσφαλμένον. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν ὅτι ὁ Πυθαγόρας διά νά ἀνακαλύψῃ τούς μαθηματικούς νόμους κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος ἔκαμε συστηματικά πειράματα εἰς τό μονόχορδον καί εἰς πήλινα δοχεῖα εἰς τά ὁποῖα ἔθετεν ὕδωρ, διαφόρου ὕψους εἰς ἕκαστον δοχεῖον, καί τά ἔκρουε καταλλήλως διά τήν παραγωγήν ἤχου (Θέων Σμυρναῖος, σελ.56-60, Hiller).

'Ο ΠΛΑΤΩΝ εἶχε κατασκευάσει ὑδραυλικόν ὡρολόγιον ξυπνητήρι, τό ὁποῖον ἔπαιζε εἰς τήν κατάλληλον ὥραν μουσικήν καί τόν ἐξυπνοῦσε ἀπό τόν ὕπνον ('Αθήναιος IY 75). 'Επίσης εἶχε κατασκευάσει πλανητάριον (Θέων Σμυρναῖος σελ. 146, Hiller).

'Ο 'ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ ἀναφέρει ὅτι διά νά ἀνακαλύψουν οἱ προγενέστεροι αὐτοῦ ἐπιστήμονες ἄν ὁ ἀήρ ἔχει βάρος, ἐζύγισαν ἀσκόν ἄνευ ἀέρος καί κατόπιν τόν ἀσκόν μέ ἀέρα, καί παρετήρησαν, ὅτι κατά τήν δευτέραν ζύγισιν τό βάρος τοῦ ἀσκοῦ ἦτο μεγαλύτερον, μέ προφανῆ τήν αἰτιολογίαν, ὅτι τό ἐπί πλέον βάρος ἐκ τῆς ἀρχικῆς ζυγίσεως, ἦτο τό βάρος τοῦ εἰς τόν ἀσκόν περιεχομένου ἀέρος (Φδ 6.213α 26).

Εἰς τόν βίον τοῦ ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ ὁ ΠΛΟΥΤΑΡΧΟΣ πληροφορεῖ ἡμᾶς, ὅτι κατά τήν μάχην τῶν Πλαταιῶν οἱ Σπαρτιᾶται εὑρέθησαν εἰς ἀδυναμίαν νά ἐκπορθήσουν τό ξύλινον τεῖχος τῶν Περσῶν καί ἐκάλεσαν εἰς βοήθειαν τούς 'Αθηναίους, οἱ ὁποῖοι εἶχον πολιορκητικάς μηχανάς καί ἐντός ὀλίγων ὡρῶν ἐξεπόρθησαν τό τεῖχος. Αὐταί αἱ πολιορκητικαί μηχαναί δέν ἔγιναν βέβαια χωρίς προηγουμένως νά γίνουν πειράματα. Κατά τό 439 π.Χ. ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ἵδρυσεν ἐκεῖ τό πρῶτον Κέντρον τοῦ κόσμου Στρατηγικῶν 'Ερευνῶν, εἰς τό ὁποῖον, κατόπιν πειραμάτων βεβαίως, ἐδημιουργήθησαν οἱ καταπέλται καί ἄλλα πολεμικά μηχανήματα. 'Η κατασκευή περιστερᾶς ἱπταμένης ὑπό τοῦ ΑΡΧΥΤΟΥ τοῦ Ταραντίνου, τήν αὐτήν ἐποχήν, ἀποδεικνύει ἐπίσης μεγάλην χρῆσιν πειραμάτων διά τήν ἔρευναν φυσικῶν νόμων.

'Ο θεωρητικός καί ἰδεολόγος ΠΛΑΤΩΝ προτρέπει εἰς τήν ἐκτέλεσιν πειραμάτων, ὡς πληροφορούμεθα ἐκ τοῦ Τιμαίου, μνημονευομένου τοῦ συναφοῦς χωρίου καί ὑπό τοῦ ΘΕΩΝΟΣ τοῦ Σμυρναίου (Περί τῶν κατά τό μαθηματικόν χρησίμων εἰς τήν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν.Εκδ. Hiller, Λειψία 1878 σελ. 146), ὅπου γράφεται " καί γάρ αὐτός φησιν ὁ Πλάτων, ὅτι τό ἄνευ τῶν δι'ὄψεως μιμημάτων τῶν τά τοιαῦτα ἐθέλειν ἐκδιδάσκειν μάταιος πόνος",δηλ. τό νά θέλῃ κανείς νά διδάξῃ ἕνα φυσικόν φαινόμενον χωρίς πείραμα, εἶναι μάταιος κόπος. (Τίμαιος 40 D: τό λέγειν ἄνευ δι' ὄψεως τούτων αὖ τῶν μιμημάτων, μάταιος ἄν εἴη πόνος). Εἰς ὅλους εἶναι γνωστά τά μηχανικά ἐπιτεύγματα τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, ὁ ὁποῖος ὑπῆρξεν ὁ μεγαλύτερος μαθηματικός, μηχανικός καί φυσικός,τόν ὁποῖον ἐγέννησεν ἡ ἀνθρωπότης.'Εκ τῶν προηγουμένων εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι ἐντελῶς ἐσφαλμένη ἡ γνώμη μερικῶν Εὐρωπαίων ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι, ἀφοῦ ἐμορφώθησαν ἐκ τῆς μελέτης τῶν τεχνικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν ἀρχαίων 'Ελλήνων, διατυπώνουν τήν ἀβασάνιστον γνώμην, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δέν ἔκαμαν πειράματα κατά τάς ἐπιστημονικάς των ἐνασχολήσεις καί ἐρεύνας. Βεβαίως εἶναι ἀδικαιολόγητος ὑπερβολή νά ἔχωμεν τήν ἀξίωσιν νά προαγάγουν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες τήν Τεχνικήν εἰς τό σημερινόν ἐπίπεδον. 'Η ἐξέλιξις εἰς τά τεχνικά ἐπιτεύγματα ἀπαιτεῖ μεγάλο χρονικόν διάστημα.

Μετά τόν ΑΡΧΙΜΗΔΗ καί τόν ΚΤΗΣΙΒΙΟΝ, ὁ ὁποῖος ἐπενόησε τό μουσικόν ὄργανον ἁρμόνιον, τό ὁποῖον ἐλειτούργει διά ρέοντος ὕδατος, καί τό ὁποῖον ἐτελειοποίησε κατόπιν ὁ ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ, συνεχίζεται ἡ πειραματική ἔρευνα τῶν 'Ελλήνων ὑπό τοῦ περιφήμου ΠΟΣΕΙΔΩΝΙΟΥ (1ος αἰῶν π.Χ.) ὁ ὁποῖος διηύθυνε τό Πανεπιστήμιον τῆς Ρόδου,καί ὀλίγον ἀργότερον ὑπό τοῦ ΗΡΩΝΟΣ τοῦ 'Αλεξανδρέως, Πρυτάνεως τοῦ Πολυτεχνείου τῆς 'Αλεξανδρείας. 'Ο ΠΟΣΕΙΔΩΝΙΟΣ ἐσκέφθη πρῶτος τήν τυπογραφίαν, ἀνεκοίνωσε τήν σκέψιν του εἰς τόν μαθητήν του ΚΙΚΕΡΩΝΑ, ὁ ὁποῖος τήν ἀναφέρει εἰς πραγματείαν του κατά τόν H.Diels (Antike Technik σελ 119).

Μετά 1500 ἔτη ὁ ΓΟΥΤΕΜΒΕΡΓΙΟΣ ἀναγνώσας τήν πληροφορίαν αὐτήν τοῦ ΚΙΚΕΡΩΝΟΣ προέβη εἰς τήν κατασκευήν τῶν κινουμένων γραμμάτων καί θεωρεῖται ὁ ἀνακαλύψας τήν τυπογραφίαν.

Τό μεγαλειῶδες μαθηματικόν οἰκοδόμημα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, τοῦ ἑλληνικοῦ δηλαδή, θεωρεῖται γενικῶς, ὅτι ἐτερματίσθη μέ τόν ΕΥΚΛΕΙΔΗΝ (350-260 π.Χ.) περίπου) τόν ΑΡΧΙΜΗΔΗ (287-212 π.Χ.), τόν ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΝ (265-170 π.Χ. περίπου) τόν ΗΡΩΝΑ (1^ος αἰ.μ.Χ.) καί τόν ΔΙΟΦΑΝΤΟΝ (ἀκμή περίπου 250μ.Χ) Σύγχρονοι περίπου τοῦ Ἥρωνος καί προγενέστεροι τοῦ Διοφάντου μνημονεύονται ἐπίσης σπουδαῖοι μαθηματικοί, μεταξύ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τόν ΜΕΝΕΛΑΟΝ, τόν ΝΙΚΟΜΗΔΗ, τόν ΚΛΑΥΔΙΟΝ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΝ, ὁ ὁποῖος ἔγινε διάσημος διά τάς ἐργασίας του εἰς τήν Ἀστρονομίαν καί τήν Γεωγραφίαν, τόν ΔΙΟΚΛΗ, τόν ΥΨΙΚΛΗ, εἰς τόν ὁποῖον ἀποδίδονται δύο βιβλία γεωμετρίας, τά ὁποῖα παλαιότερον ἀπεδίδοντο εἰς τόν Εὐκλείδην, ὡς μέρος τῶν Στοιχείων του. Μεγάλη ἀναλαμπή τοῦ ἑλληνικοῦ μαθηματικοῦ πνεύματος εἶναι ὁ ΠΑΠΠΟΣ ὁ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΥΣ, ὁ ὁποῖος ἤκμασε περί τό 300 μ.Χ. καί ἔγραψε σπουδαῖα μαθηματικά συγγράμματα.

Περί τό τέλος τοῦ 4^ου αἰῶνος ἀκμάζει ὁ Πρύτανις τοῦ ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου Ἀλεξανδρείας ΘΕΩΝ ὁ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΥΣ καί ὀλίγον ἀργότερον ἡ κόρη του ΥΠΑΤΙΑ, ἡ ὁποία ἦτο φιλόσοφος καί μαθηματικός, γράψασα καί σχόλια εἰς τά Ἀριθμητικά τοῦ Διοφάντου. Ὅπως εἶναι γνωστόν ἡ Ὑπατία ὑπέστη τόν διά λιθοβολισμοῦ μαρτυρικόν θάνατον κατά τό 415 μ.Χ. ὑπό τοῦ ὄχλου τῆς Ἀλεξανδρείας, κινουμένου ὑπό φοβεροῦ θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ. Ἀπό τῆς ἐποχῆς τῆς Ὑπατίας οἱ Ἕλληνες μαθηματικοί ἀσχολοῦνται μέ τήν σπουδήν τῶν μεγάλων μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν προγόνων των καί τά σχόλια ἐπ'αὐτῶν.

2. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΟΧΗΝ ΤΟΥ ΒΥΖΑΝΤΙΟΥ (415-1453)

Κατά τό ἔτος 518 ὁ περίφημος φυσικοχημικός ΠΡΟΚΛΟΣ, ἐπί Αὐτοκράτορος ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ, ἔκαυσε τόν στόλον τοῦ στασιαστοῦ ΒΙΤΕΛΛΙΑΝΟΥ, χρησιμοποιήσας καυστικά κάτοπτρα, ὡς τά τοῦ Ἀρχιμήδους, πιθανῶς δέ καί ὑγρόν πῦρ. Περί τό 550 γίνεται ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τήν Κωνσταντινούπολιν ὑπό τοῦ μηχανικοῦ καί ἐκ τῶν ἀρχιτεκτόνων τῆς 'Αγίας Σοφίας ΙΣΙΔΩΡΟΥ τοῦ Μιλησίου. Σχόλια εἰς μερικά ἐκ τῶν ἔργων αὐτῶν ἐδημοσιεύθησαν ὑπό τοῦ ΕΥΤΟΚΙΟΥ, μαθητοῦ τοῦ 'Ισιδώρου. Τήν αὐτήν ἐποχήν ἀκμάζει ὁ ἕτερος ἀρχιτέκτων τοῦ Ναοῦ τῆς 'Αγίας Σοφίας ΑΝΘΕΜΙΟΣ, ὁ ὁποῖος ἔγραφε καί πραγματείαν σχετικήν πρός τά καυστικά κάτοπτρα τοῦ 'Αρχιμήδους.

Περί τό 830 ὁ πρώην ἀρχιδιάκονος τῆς 'Αγίας Σοφίας καί κατόπιν Μητροπολίτης Θεσσαλονίκης ΛΕΩΝ, κληθείς ὑπό τοῦ αὐτοκράτορος ΘΕΟΦΙΛΟΥ ἀνέλαβε τήν ἀναδιοργάνωσιν καί τήν διεύθυνσιν τοῦ Πανεπιστημίου Κωνσταντινουπόλεως, εἰς τό ὁποῖον ἐδίδασκε θεολογίαν, φιλοσοφίαν καί μαθηματικά. 'Ο Λέων ἐπενόησε τόν συμβολισμον τῶν ἀριθμῶν διά τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς πληροφορούμεθα παρά τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ ΑΡΕΘΑ, γενομένου κατόπιν Μητροπολίτου Καισαρείας, ὅστις περιέλαβε τήν ἀνακάλυψιν αὐτήν τοῦ Λέοντος εἰς τάς σημειώσεις του ἐκ τῶν παραδόσεων τοῦ Λέοντος περί τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. 'Ανακοίνωσις τοῦ μεγάλου αὐτοῦ μαθηματικοῦ ἐπιτεύγματος τοῦ Λέοντος ἔγινεν εἰς τό XI Διεθνές Βυζαντινολογικόν Συνέδριον τοῦ Μονάχου τοῦ 1958 ὑπό τοῦ Γερμανοῦ καθηγητοῦ καί ἀκαδημαϊκοῦ κ. KURT VOGEL.

Μετά 700 ἔτη προέβη εἰς τήν αὐτήν ἀνακάλυψιν καί ὁ Γάλλος δικηγόρος καί ἐρασιτέχνης μαθηματικός VIÈTE. Μαθηταί τοῦ Λέοντος ὑπῆρξαν ὁ γεωμέτρης ΘΕΟΔΩΡΟΣ καί ὁ ἀστρονόμος ΘΕΟΔΗΓΙΟΣ. Κατά τόν 11ον αἰῶνα διακρίνεται εἰς τό Βυζάντιον διά τάς μαθηματικάς του μελέτας ὁ ΜΙΧΑΗΛ ΨΕΛΛΟΣ (1018-1096), ὁ ὁποῖος εἶχε γράφει σχόλια καί εἰς τά 'Αριθμητικά τοῦ Διοφάντου, ἐν ᾧ κατά τόν 12ον αἰῶνα μνημονεύεται ὡς ἀσχοληθείς μέ τά μαθηματικά καί ὁ ΘΕΟΔΩΡΟΣ ὁ ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ. Κατά τούς δύο τελευταίους αἰῶνας τῆς Βυζαντινῆς αὐτοκρατορίας διακρίνονται εἰς τάς μαθηματικάς σπουδάς ὁ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΧΥΜΕΡΗΣ (1242-1310), ὁ ΜΑΞΙΜΟΣ ΠΛΑΝΟΥΔΗΣ (1260-1310), 'Ο ΜΙΧΑΗΛ ΒΡΥΕΝΝΙΟΣ, 'Ο ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΓΡΗΓΟΡΑΣ, 'Ο ΕΜΜ. ΜΟΣΧΟΠΟΥΛΟΣ, 'Ο ΝΙΚ. ΡΑΒΔΑΣ ,ὁ μοναχός ΒΑΡΛΑΑΜ, 'Ο ΙΩΑΝΝΗΣ ΠΕΔΙΑΣΙΜΟΣ, 'Ο ΙΣΑΑΚ ΑΡΓΥΡΟΣ, ὁ ΠΛΗΘΩΝ ὁ ΓΕΜΙΣΤΟΣ καί ὁ Μητροπολίτης καί κατόπιν Καρδινά - λιος, ὁ προσχωρήσας είς τόν Παπισμόν, ΒΗΣΣΑΡΙΩΝ, ὁ ὁποῖος ἐδώρησε τήν Βιβλιοθήκην του είς τό Βατικανόν, περιέχουσαν 400 καί πλέον συγγράμματα τῆς ἀρχαίας 'Ελληνικῆς Γραμματείας, ἐκ τῆς μεταφράσεως τῶν ὁποίων τά μέγιστα ὠφελήθη ὁ ἐκ τούτων ἀφυπνισθείς πρός σπουδήν τῶν ἑλληνικῶν γραμμάτων, Δυτικός Κόσμος.

3. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΟΧΗΝ ΤΗΣ ΤΟΥΡΚΟΚΡΑΤΙΑΣ 1453-1830

'Από τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπό τῶν Τούρκων, ἡ μαθηματική καί φυσική ἔρευνα τῶν 'Ελλήνων ἐσημείωσε κάμψιν, χωρίς ὅμως νά σβεσθῆ. 'Ο πρῶτος Πατριάρχης ἀπό τῆς ἁλώσεως ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΡΤΕΣΙΟΣ ἤ ΓΕΝΝΑΔΙΟΣ ΣΧΟΛΑΡΙΟΣ ἐκτός τῶν φιλοσοφικῶν καί θεολογικῶν συγγραφῶν του ἐξέδωκε καί σύνοψιν τῶν Φυσικῶν τοῦ 'Αριστοτέλους μετά σχολίων τοῦ Σιμπλικίου. 'Ο κατακτητής μή διαθέτων ἐπιστημονικόν δυναμικόν, ἠναγκάσθη νά ἐπιτρέψη τήν λειτουργίαν ἑλληνικῶν ἐκπαιδευτικῶν 'Ιδρυμάτων, ἰδίως Γυμνασίων καί Θεολογικῶν Σχολῶν, εἰς τάς ὁποίας συνεχίζεται ἀκάματος ἡ σπουδή καί ἐπιστημονική διδασκαλία. Αὕτη ὅμως περιωρίζετο ὑπό τοῦ βαρβάρου κατακτητοῦ εἰς ὡρισμένα πλαίσια.

Οἱ κυριώτεροι ἐκπρόσωποι τοῦ 'Ελληνικοῦ πνεύματος, οἱ ἀσχοληθέντες καί μέ τάς μαθηματικάς καί φυσικάς ἐπιστήμας κατά τήν ἐποχήν τῆς τουρκοκρατίας, τόσον εἰς τήν ὑπόδουλον 'Ελλάδα, ὅσον καί εἰς τό ἐξωτερικόν εἶναι οἱ ἑξῆς: (σημ. Μερικά βιογραφικά στοιχεῖα δέν κατέστη δυνατόν νά ἐξακριβωθοῦν)

1) ΙΩΑΝΝΗΣ ΒΗΣΣΑΡΙΩΝ

Μητροπολίτης καί Καρδινάλιος, γεννηθείς εἰς τήν Τραπεζοῦντα καί ἀποθανών ἐν 'Ιταλίᾳ (1395-1472). Οὗτος ἔγραφε πραγματείαν περί ἀπείρου ἐξετάζων τάς συναφεῖς περί ἀπείρου δοξασίας τῶν προσωκρατικῶν φιλοσόφων ΞΕΝΟΦΑΝΟΥΣ, ΜΕΛΙΣΣΟΥ καί

ΠΑΡΜΕΝΙΔΟΥ, ὡς καί τοῦ σοφιστοῦ ΓΟΡΓΙΟΥ, συγχρόνου τοῦ ΣΩΚΡΑΤΟΥΣ.

2) ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΤΡΑΠΕΖΟΥΝΤΙΟΣ

'Εγεννήθη εἰς τά Χανιά τῆς Κρήτης (1396-1485). Οὗτος ἐξέδωκε τήν ἐκ 13 βιβλίων ἀποτελουμένην Μαθηματικήν Σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, τήν καλουμένην ὑπό τῶν 'Αράβων 'Αλμαγέστην. 'Επίσης ἐξέδωκε συνοπτικόν ὑπόμνημα εἰς τήν περί οὐρανοῦ (κοσμογραφίαν, ὡς θά ἐλέγομεν) πραγματείαν τοῦ 'Αριστοτέλους καί προλεγόμενα εἰς τό περί ψυχῆς βιβλίον τοῦ ἰδίου.

3) ΙΩΑΝΝΗΣ ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ

(1400-1486 ἤ 1490). 'Εγεννήθη εἰς τήν Κωνσταντινούπολιν καί διετέλεσε καθηγητής τῶν ἑλληνικῶν καί τῆς φιλοσοφίας εἰς τήν Φλωρεντίαν, ὅπου καί ἀπέθανε. Αἱ ἐκδόσεις του εἶναι αἱ ἑξῆς:

'Αποσπάσματα ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ 'Αριστοτέλους περί οὐρανοῦ. Τά Φυσικά τοῦ 'Αριστοτέλους ἐξ ὀκτώ βιβλίων. Τά αὐτά συγγράμματα τά ἐξέδωκεν καί λατινιστί.

4) ΛΕΟΝΙΚΟΣ ΘΩΜΑΙΟΣ.

(1456-1531). Οἱ γονεῖς του ἦσαν 'Ηπειρωτικῆς καταγωγῆς, αὐτός δέ ἐγεννήθη εἰς τήν 'Ενετίαν. Ἔγραφε σχόλια εἰς τάς ἑξῆς πραγματείας τοῦ 'Αριστοτέλους.

Περί ζῴων ἱστορίας, Περί ζῴων μορίων, Περί ζῴων κινήσεως, Περί ἀναπνοῆς, Φυσιογνωμικά, Περί θαυμασίων ἀκουσμάτων, Περί ἀτόμων, καί σχόλια εἰς τήν πραγματείαν τοῦ Θεοφράστου, μαθητοῦ τοῦ 'Αριστοτέλους, Περί ἰχθύων. 'Επίσης ἐξέδωκε ὅλα τά σῳζόμενα ἔργα τοῦ 'Αριστοτέλους εἰς τό πρωτότυπον μέ παράπλευρον λατινικήν μετάφρασιν.

5) ΑΡΣΕΝΙΟΣ ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ Ἤ ΑΡΙΣΤΟΒΟΥΛΟΣ

Ἐγεννήθη εἰς τήν Κρήτην, χωρίς νά εἶναι γνωστή ἡ πόλις καί ὁ χρόνος τῆς γεννήσεως. Ἐξέδωκε τήν εἰς τόν ΨΕΛΛΟΝ ἀποδιδομένην πραγματείαν, Σύνταγμα εἰς τάς τέσσαρας μαθηματικάς ἐπιστήμας κατά τό 1532. Οὗτος διετέλεσεν Ἀρχιεπίσκοπος Μονεμβασίας.(+ 1535) .

6) ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΣ ΜΑΥΡΟΛΥΚΟΣ

Ὁ πατήρ του ἦτο ἰατρός ἐν Κωνσταντινουπόλει, ἀλλά μή δυνάμενος νά ὑποφέρῃ τόν τουρκικόν ζυγόν κατέφυγεν εἰς τήν Σικελίαν. Εἰς τήν Μεσσήνην τῆς Σικελίας ἐγεννήθη ὁ Φραγκῖσκος τῷ 1494. Εἰς τήν αὐτήν πόλιν ἀπέθανε κατά τό 1575. Ἕνεκα οἰκονομικῶν δυσκολιῶν ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος ἠναγκάσθη νά ἀσπασθῇ τόν Καθολικισμόν καί νά γίνῃ μοναχός. Ἐξέδωκε πραγματείαν ὑπό τόν τίτλον Ἀριθμητικά, εἰς τήν ὁποίαν ἐφαρμόζει καί τήν ἀποδεικτικήν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, τήν ὁποίαν εἶχε διδαχθῆ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἄλλαι σπουδαῖαι δημοσιεύσεις τοῦ Μαυρολύκου εἶναι ἡ εἰς τήν λατινικήν ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, Θεωρήματα ὀπτικῆς καί προοπτικῆς, Κοσμογραφία, Περί σφαίρας,Τά φαινόμενα τοῦ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ καί Μαθηματική σύνοψις. Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη ὀφείλει πολλά εἰς τόν Μαυρόλυκον, διότι καί αὐτός κατέστησε προσιτά εἰς τούς δυτικούς Εὐρωπαίους τά μαθηματικά καί φυσικά συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐκ τῶν ὁποίων οὗτοι κατώρθωσαν πολύ νά ὠφεληθοῦν καί νά διανοίξουν τούς δρόμους τῆς νεωτέρας ἐρεύνης τῶν Φυσικομαθηματικῶν Ἐπιστημῶν.

7) ΔΑΝΙΗΛ ΦΟΥΡΛΑΝΟΣ

Ἐκ Ῥεθύμνου τῆς Κρήτης. Ἐσπούδασε εἰς τήν Πάδουαν τῆς Ἰταλίας καί ἐδίδαξε φιλοσοφίαν εἰς τήν Ἑνετίαν, ὅπου ἀπέθανε κατά τό 1596. Ὁ χρόνος τῆς γεννήσεως εἶναι ἄγνωστος. Ἐξέδωκε τά ἔργα τοῦ Θεοφράστου εἰς τήν ἑλληνικήν μέ παράλληρον μετάφρασιν εἰς τήν λατινικήν. (+ 1596).

8) ΔΟΜΗΝΙΚΟΣ ΘΕΟΤΟΚΟΠΟΥΛΟΣ

(1541-1614). Ὁ περίφημος ζωγράφος ἐκ Κρήτης, μαθητής τοῦ Τισιανοῦ, ἔδρασε καί ἀπέθανεν εἰς τήν Ἱσπανίαν. Ἔγραφε περί ζωγραφικῆς, γλυπτικῆς καί ἀρχιτεκτονικῆς.

9) ΜΙΧΑΗΛ ὁ ΕΦΕΣΙΟΣ

Ἔγραφε σχόλια (δημοσιευθέντα τῷ 1427) εἰς τήν πραγματείαν τοῦ Ἀριστοτέλους, Περί ζῴων κινήσεως, Περί ἀναπνοῆς.

10) ΘΕΟΦΙΛΟΣ ΚΟΡΥΔΑΛΕΥΣ

Ἐγεννήθη ἐν Ἀθήναις τῷ 1570. Δέν εἶναι βέβαιον ποῦ ἐσπούδασε. Φαίνεται ὅμως ὅτι κατά τά ἔτη 1593-1594 ἐφοίτησεν εἰς Λύκειον τῆς Ῥώμης. Ἔγραφε σχόλια εἰς τά Φυσικά τοῦ ἈΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, εἰς τό περί Οὐρανοῦ καί ἄλλα.

11) ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΤΟΥΝΙΟΣ

(1577-1658). Ἐγεννήθη εἰς τήν Βέροιαν καί ἐσπούδασεν εἰς τό ἑλληνικόν Γυμνάσιον τῆς Ῥώμης, κατόπιν δέ ἰατρικήν.

Εἰς ἡλικίαν 30 ἐτῶν ἔγινε καθηγητής τῆς φιλοσοφίας εἰς τό Πανεπιστήμιον τῆς Βολωνίας. Ὀλίγον πρό τοῦ θανάτου του, κατά τό 1637, ἀφῆκε τήν περιουσίαν του εἰς τό Πανεπιστήμιον τῆς Παδούης, ὅπου ἵδρυσε τό " Κουτούνειον Ἑλληνομουσεῖον", (Γυμνάσιον). Ἔγραφε Φυσικά, Περί οὐρανοῦ καί τοῦ κόσμου, Περί μετεώρων.

12) ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

(1607-1685). Ἐγεννήθη εἰς τό Ἡράκλειον τῆς Κρήτης καί ἐσπούδασεν εἰς τήν Ἰταλίαν. Ἐδίδαξεν, ὡς καθηγητής, ἀρχαῖα ἑλληνικά καί θετικάς ἐπιστήμας εἰς τήν Ἑνετίαν, ὅπου καί ἀπέθανε. Ἔγραφε παραφράσεις καί σχόλια εἰς τά ὀκτώ βιβλία τῆς Φυσικῆς ἀκροάσεως τοῦ Ἀριστοτέλους καί εἰς τά δύο βιβλία τῶν

Μετεωρολογικῶν. Διετέλεσε Μητροπολίτης Φιλαδελφείας, ὑπέρτιμος καί ἔξαρχος τοῦ Οἰκουμενικοῦ Πατριαρχείου.
Ἅπαντα τά συγγράμματά του ἐξεδόθησαν κατά τό 1683.

13) ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΟΥΡΣΟΥΛΑΣ

Ὁ χρόνος τῆς γεννήσεως καί τοῦ θανάτου δέν εἶναι γνωστός. Ἡ ἀκμή τοι τοποθετεῖται περί τό 1630. Ἔδρασεν εἰς τήν Κέρκυραν. Ἔγραφεν ὑπομνήματα καί ζητήματα εἰς τό Ἀριστοτέλους Περί οὐρανοῦ καί εἰς τήν Ἀριστοτέλους Φυσικήν πραγματείαν.

14) ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΠΑΠΑΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ

Ἐγεννήθη εἰς τά Ἰωάννινα καί ἐσπούδασεν εἰς τήν Κωνσταντινούπολιν καί τήν Ἰταλίαν, φιλοσοφίαν καί θεολογίαν. Ἤκμασε περί τά μέσα τοῦ 17ου αἰῶνος.

Ἐδίδαξεν εἰς τά Ἰωάννινα, εἰς τάς Σέρρας, εἰς τόν Τύρναβον καί ἀλλοῦ.

Ἔγραφε πραγματείαν ὑπό τόν τίτλον Εἰσαγωγή Μαθηματικῆς. Ὁ χρόνος καί ὁ τόπος τοῦ θανάτου αὐτοῦ δέν εἶναι γνωστά.

15) ΙΑΚΩΒΟΣ ΠΥΛΑΡΙΝΟΣ

Ἐκ Κεφαλληνίας (1659-1716). Ἔγραφε πραγματείαν Περί ἰατρικῆς.

16) ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΔΟΞΑΡΑΣ

Ἐκ Μάνης, ἀποθανών ἐν Κερκύρᾳ κατά τό 1729, ἔγραφε πραγματείαν ὑπό τόν τίτλον Τέχνη ζωγραφίας, δημοσιευθεῖσαν κατά τό 1708 καί Περί ζωγραφικῆς.

17) ΜΕΘΟΔΙΟΣ ΑΝΘΡΑΚΙΤΗΣ

Ἐγεννήθη εἰς τό χωρίον Καμνιά τῆς Ἠπείρου περί τό 1670 καί ἀπέθανε πρό τοῦ 1749. Ἐσπούδασεν εἰς διάφορα Πανεπιστήμια τῆς Ἰταλίας, μαθηματικά, μηχανικήν, ἀστρονομίαν καί φιλοσοφίαν. Ἔγινε διευθυντής τῆς ἐν Ἰωαννίνοις Σχολῆς.

'Ο Εὐγένιος Βούλγαρις ἐσπούδασεν ἐπ' ἀρκετόν χρόνον πλησίον τοῦ 'Ανθρακίτου καί κατόπιν ποιεῖται εὐσεβεστάτης μνείας τοῦ διδασκάλου του. Κατηγορηθείς ὁ 'Ανθρακίτης ὑπό ἱερομονάχου τινός ὡς εἰσάγων καινά δαιμόνια εἰς τήν ὀρθοδοξίαν ἐδικάσθη ὑπό τῆς 'Ιεράς Συνόδου τοῦ Πατριαρχείου Κων/πόλεως καί ἠθωώθη. 'Υπεχρεώθη ὅμως νά καύσῃ ὅλα τά βιβλία του, τά ὁποῖα εἶχον συσσωρευθῆ ἐκεῖ

Ἔγραφε Βιβλίον ὑπό τόν τίτλον: 'Οδός μαθηματικῶν, καί μετέφρασε μαθηματικόν βιβλίον τοῦ Καρτεσίου.

18) ΧΡΥΣΑΝΘΟΣ ΝΟΤΑΡΑΣ

Ἄγνωστον ποῦ ἐγεννήθη καί ποῦ ἀπέθανε. 'Εσπούδασεν εἰς τήν 'Ιταλίαν καί τούς Παρισίους ἀστρονομίαν. Διετέλεσεν πρεσβύτερος καί ἀρχιμανδρίτης τοῦ ἁγιωτάτου καί ἀποστολικοῦ θρόνου τῶν 'Ιεροσολύμων καί ἔγραφε εἰσαγωγήν εἰς τά γεωγραφικά καί σφαιρικά δημοσιευθέντα ἐν Παρισίοις κατά τό 1716.(+1731)

19) ΒΙΚΕΝΤΙΟΣ ΔΑΜΩΔΟΣ

'Εκ Κεφαλληνίας (1670-1752). 'Εσπούδασεν εἰς τό 'Ελληνομουσεῖον τῆς 'Ενετίας. Ἔσχε μαθητάς τόν Εὐγένιον Βούλγαριν, τόν Μιχαήλ Μοσχόπουλον, τόν 'Αγάπιον Λοβέρδον. Ἔγραφε μεταξύ ἄλλων Φυσικήν, Φυσιολογίαν εἰς τήν κοινήν διάλεκτον, σχολαστικήν 'Αριστοτελικήν καί νεωτεριστικήν.

20) ΜΙΧΑΗΛ ΠΕΡΔΙΚΑΡΗΣ

'Εκ τῆς Μονεμβασίας, ἀγνώστων βιογραφικῶν στοιχείων. Ἔγραφε κατά τόν 18ον αἰῶνα, 'Εγχειρίδιον περί ἰατρικῆς καί Βίβλος χημική τῆς φαρμακοποιίας ἁπλῆ τῇ φράσει.

21) ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΝΗΣ

'Εκ Ζακύνθου (1723-1761). 'Εσπούδασεν ἰατρικήν εἰς τήν Πάδουαν. Ἔγραφε ἀστρονομίαν.

22) ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΖΕΡΤΖΟΥΛΗΣ

Γεννηθείς είς τό Μέτσοβον καί άποθανών κατά τό 1773. Έγραφε Μέρος τών κατά Νεύτωνα Στοιχείων.

23) ΑΝΤΩΝΙΟΣ ΜΟΣΧΟΠΟΥΛΟΣ

Έκ Κεφαλληνίας (1713-1788). Έσπούδασεν είς τήν Βιένvην. Έγραφεν: Έπιτομή τής μεταφυσικής είς μέρη τέσσαρα: όντολογία, κοσμολογία, φυσική καί θεολογία.

24) ΜΠΑΛΑΝΟΣ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ

Γεννηθείς καί άποθανών έν Ίωαννίνοις (+1765). Έδημοσίευσε:

"Όδός μαθηματικής, ήτοι σειρά βαθμηδόν προϊούσα περιεκτική τών κατ'είδος κυριωτέρων τής μαθήσεως πραγματειών οίον τών Στοιχείων τού Εύκλείδου. Σφαιρικών κατά ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ. Γεωμετρίας θεωρητικής καί πρακτικής τριγωνομετρίας· τού περί σφαίρας κατά ΠΡΟΚΛΟΝ, τού περί χρήσεως σφαιρών. Άστρολαβίου Γεωγραφίας καί όπτικής. Πρότερον μέν παρά τού αίδεσιμωτάτου καί έπιστημονικωτάτου κυρίου ΜΕΘΟΔΙΟΥ ΑΝΘΡΑΚΙΤΟΥ έξ Ίωαννίνων έκ τής λατινίδος είς τήν έλληνίδα μετεχθείσα τε φωνήν καί έρμηνευθείσα λίαν μέντοι συνεπτυγμένως καί άμυδρώς ύστερον δέ παρά τού αίδεσιμωτάτου τού έκεί νύν σεμνυνομένου έπί ταύτη πρός ταίς άλλαις έπιστήμαις Άρχιγυμνασίου κυρίου Μπαλάνου Βασιλοπούλου άναπτυχθείσα τε καί καλλυνθείσα τή τε φράσει τής λέξεως καί τή σαφηνεία τών νοημάτων, πλατυνθείσα καί πλουτισθείσα τή προσθέσει ούκ όλίγων θεωρημάτων καί προβλημάτων, πάνυ χρησίμων όντων άπανθισμάτων, τών μέν συλλεχθέντων έκ διαφόρων έπισήμων συγγραφέων παλαιοτέρων τε καί νεωτέρων, τών δέ παρ'αύτού εύρεθέντων...... διαιρείται δέ είς τόμους τρείς· προστιθεμένου έπί τούτοις καί τετάρτου, τού τής άριθμητικής. Ένετίησιν έτει σωτηρίω ,αψμθ', έν τή τυπογραφία Άντωνίου τού Βόρτολι". Έπίσης έδημοσίευσε σχόλια είς τά βιβλία ίατρικής τοῦ Γαληνοῦ καί ἑρμηνείαν τῶν ἀφορισμῶν τοῦ Ἱπποκράτους.

25) ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ

Ἐγεννήθη εἰς τά Ἰωάννινα. Ἐσπούδασεν εἰς τήν Κωνσταντινούπολιν καί τήν Πίζαν τῆς Ἰταλίας. Ἔγραψε περί τῆς Ἱπποκρατείου τέχνης. Ἤκμασε κατά τόν 18ον αἰῶνα.

26) ΕΥΓΕΝΙΟΣ ΒΟΥΛΓΑΡΙΣ (1716-1806).

Ἐγεννήθη ἐν Κερκύρᾳ καί ἐσπούδασε εἰς τήν Πάδουαν τῆς Ἰταλίας. Διηύθυνε τήν Σχολήν τῶν Ἰωαννίνων καί κατά τό 1750 τήν Σχολήν τῆς Κοζάνης ἀκολούθως δέ κατά τό 1753 διηύθυνε τήν Σχολήν τοῦ Ἁγίου Ὄρους, τήν καλουμένην Ἀθωνιάδα Ἀκαδημίαν. Κατά τό 1761 ἐδίδαξεν εἰς τήν Μεγάλην τοῦ Γένους Σχολήν (ἐν Κων/πόλει). Κατά τό 1787 ἔγινε μέλος τῆς Ἀκαδημίας τῆς Πετρουπόλεως. Ἀπέθανεν ἐν Ῥωσία. Ἐδημοσίευσεν μεταξύ ἄλλων, Στοιχεῖα γεωμετρίας.

Τό ἐξώφυλλον τοῦ βιβλίου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Α. ΤΑΚΟΥΕΤΙΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΥΙΣΤΩΝΟΣ

ἐξελληνισθέντα μὲν ἐκ τῆς Λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τοῦ

ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ

ΕΥΓΕΝΙΟΥ τοῦ ΒΟΥΛΓΑΡΕΩΣ

Ἱεροδιακόνου ἔτι ὄντος, καὶ σχολαρχοῦντος ἔντε Ἰωαννίνοις, καὶ ἐν τῇ Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ, καὶ ἐν Κωνσταντινουπόλει, πρὸς ἀκρόασιν τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιόντων.

Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς Αὐταδελφότητος τῶν

ΖΩΣΙΜΑΔΩΝ

Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.

ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων Νεανίσκοις.

Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας.
ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδώτη.
1805.

Τό βιβλίον ἀποτελεῖται ἐκ 397 σελίδων κειμένου. Εἰς τό τέλος τοῦ βιβλίου ἔχουν προσαρτηθῆ 56 φύλλα, ὅπου ἔχουν σχεδιασθῆ τά γεωμετρικά σχήματα. Εἰς τό πρῶτον ἐκ τῶν φύλλων τούτων σημειοῦται, εἰς τό κάτω μέρος, "ἐχαράχθη ὑπό Κ. Σχινδελμάϋερ ἐν Βιέννῃ".

Εἰς τήν πρό τῆς εἰσαγωγῆς σελίδα ὑπάρχει τό ἑξῆς ἐπίγραμμα:

Γεωμετρήσων εἰσίτω· οὐ κωλύω.
Τῷ μή θέλοντι, συζυγώσω τάς θύρας.

Εἶναι φανερόν ὅτι τό ἐπίγραμμα τοῦτο εἶναι κατ' ἀπομίμησιν τοῦ ὑπό τοῦ Βυζαντινοῦ 'Ιωάννου Τζέτζη (12ος αἰών) εἰς τήν πραγματείαν του Χιλιάδες ἀναφερομένου ἐπιγράμματος,

Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τήν στέγην (Χιλιάδες VIII 973). Κατά τήν παράδοσιν τό ἐπίγραμμα τοῦτο εὑρίσκετο εἰς τό ὑπέρθυρον τῆς 'Ακαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Ἡ εἰσαγωγή τοῦ Εὐγενίου τοῦ Βουλγάρεως εἰς τό μεταφρασθέν βιβλίον τῆς Γεωμετρίας φέρει τόν τίτλον

'Αφήγησις Ἱστορική
περί ἀρχῆς καί προόδου
Τῶν Μαθηματικῶν 'Επιστημῶν,

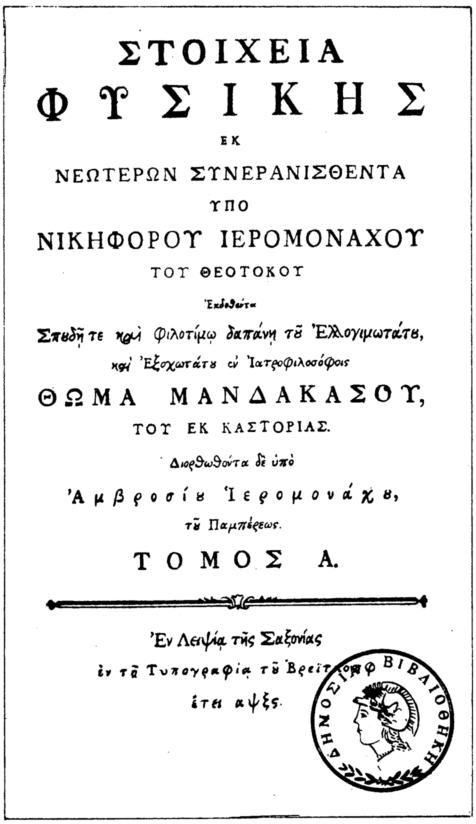
καταλαμβάνει 11 σελίδας καί περιέχει σύντομον ἱστορίαν τῶν ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν στηριζομένην εἰς πληροφορίας τοῦ Πρόκλου, τοῦ Λαερτίου, τοῦ Βιτρουβίου, τοῦ Γκέλλιους, τοῦ Πολυβίου, τοῦ Τζέτζη καί ἄλλων.

Τό κείμενον τῶν 324 σελίδων περιέχει διασκευήν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐν ᾧ ἀπό τῆς σελίδος 325 μέχρι τῆς σελίδος 397, ἤτοι τοῦ τέλους τοῦ βιβλίου, περιλαμβάνονται θεωρήματα ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ 'Αρχιμήδους Περί σφαίρας καί κυλίνδρου, Κύκλου μέτρησις καί Ψαμμίτης.

27) ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΘΕΟΤΟΚΗΣ

'Εγεννήθη ἐν Κερκύρᾳ τῷ 1736 καί ἀπέθανεν ἐν Ῥωσίᾳ τῷ

1800. 'Εσπούδασε μαθηματικά καί φιλοσοφίαν εἰς διάφορα Πανεπιστήμια τῆς 'Ιταλίας, ἐχειροτομήθη δέ τῷ 1762 μοναχός ἐν Κερκύρᾳ, ὅπου διεκρίθη ὡς ἐκκλησιαστικός ῥήτωρ καί ὡς διδάσκαλος τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γλώσσης καί τῶν μαθηματικῶν. 'Εγένετο σχολάρχης τῆς 'Ελληνικῆς Σχολῆς 'Ιασίου τῷ 1765 καί ἀπό τοῦ 1779 'Αρχιεπίσκοπος Α Σ Τ Ρ Α Χ Α Ν Ι Ο Υ, ἐν 'Ρωσίᾳ, διαδεχθείς τόν φίλον του Εὐγένιον Βούλγαριν. Ἔγραψε: Στοιχεῖα Μαθηματικῶν εἰς δύο τόμους, Στοιχεῖα Γεωγραφίας, 'Αριθμητικήν, Περί τῆς ἠλεκτρικῆς δυνάμεως, Στοιχεῖα Φυσικῆς εἰς δύο τόμους. Τό ἐξώφυλλον τοῦ πρώτου τόμου τῆς Φυσικῆς ἔχει ὡς ἑξῆς:



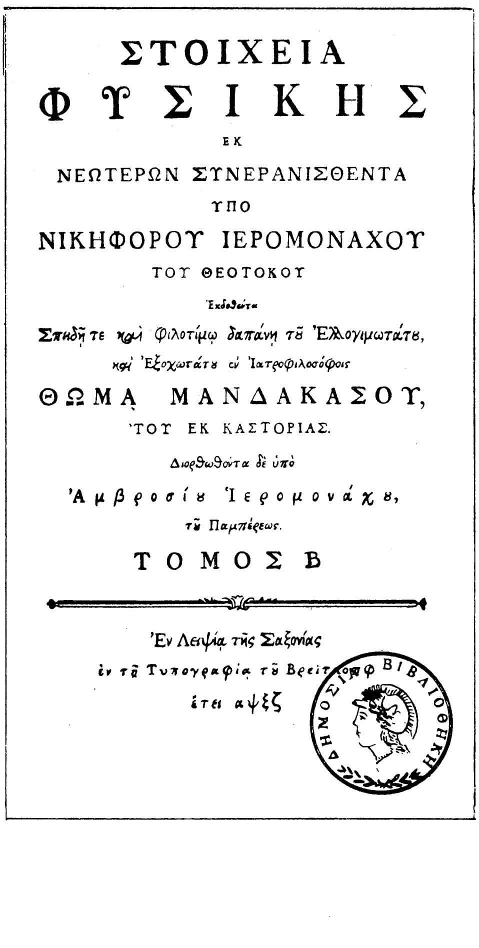
ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΚ
ΝΕΩΤΕΡΩΝ ΣΥΝΕΡΑΝΙΣΘΕΝΤΑ
ΥΠΟ
ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ ΙΕΡΟΜΟΝΑΧΟΥ
ΤΟΥ ΘΕΟΤΟΚΟΥ
Ἐκδοθέντα
Σπουδῇ τε καὶ Φιλοτίμῳ δαπάνῃ τοῦ Ἐλλογιμωτάτου,
καὶ Ἐξοχωτάτου ἐν Ἰατροφιλοσόφοις
ΘΩΜΑ ΜΑΝΔΑΚΑΣΟΥ,
ΤΟΥ ΕΚ ΚΑΣΤΟΡΙΑΣ.
Διορθωθέντα δὲ ὑπὸ
Ἀμβροσίου Ἱερομονάχου,
τοῦ Παμπέρεως.
ΤΟΜΟΣ Α.

Ἐν Λειψίᾳ τῆς Σαξονίας
ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τοῦ Βρεϊτκοπφ
ἔτει αψξς.

Τό βιβλίον ἀφιεροῦται εἰς τόν Ἰωάννην - Γρηγόριον Ἀλεξάνδρου Γκίκα Βοεβόδα, τῷ μεγαλοπρεπεστάτῳ ἡγεμόνι πάσης Μολδοβλαχίας.

Εἰς τόν α΄ τόμον ἐκτίθενται ἐν ἀρχῇ αἱ γενικαί ἰδιότητες τῶν σωμάτων, τά περί κινήσεως, περί μοχλοῦ, περί ἐκκρεμοῦς, περί μηχανῶν, περί ῥευστῶν ἐν στάσει καί ῥοῇ.

Εἰς τόν δεύτερον τόμον τῆς Φυσικῆς, ἐκδοθέντα ἕν ἔτος βραδύτερον (1767) πάλιν ἐν Λειψίᾳ καί δαπάναις τοῦ αὐτοῦ χορηγοῦ Θωμᾶ Μανδακάσου, ἐκ Καστορίας, καθηγητοῦ τῆς Ἰατρικῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Λειψίας, περιέχονται τά Κεφάλαια περί ὀπτικῆς, περί θερμότητος, περί ἀτμοσφαίρας καί ἀντλίας πνευματικῆς, περί ἀκουστικῆς, περί ὕδατος καί ἐκ τοῦ ἐξ ὕδατος κρυστάλλου, περί μαγνήτιδος, περί ἠλεκτρικῶν σωμάτων. Τό ἐξώφυλλον τοῦ δευτέρου τόμου τῆς Φυσικῆς


ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΚ
ΝΕΩΤΕΡΩΝ ΣΥΝΕΡΑΝΙΣΘΕΝΤΑ
ΥΠΟ
ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ ΙΕΡΟΜΟΝΑΧΟΥ
ΤΟΥ ΘΕΟΤΟΚΟΥ
Ἐκδοθέντα
Σπουδῇ τε καὶ Φιλοτίμῳ δαπάνῃ τοῦ Ἐλλογιμωτάτου,
καὶ Ἐξοχωτάτου ἐν Ἰατροφιλοσόφοις
ΘΩΜΑ ΜΑΝΔΑΚΑΣΟΥ,
ΤΟΥ ΕΚ ΚΑΣΤΟΡΙΑΣ.
Διορθωθέντα δὲ ὑπὸ
Ἀμβροσίου Ἱερομονάχου,
τοῦ Παμπέρεως.
ΤΟΜΟΣ Β
Ἐν Λειψίᾳ τῆς Σαξονίας
ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τοῦ Βρειτκόπφ
ἔτει αψξζ

Τά ἐξώφυλλα τῶν μαθηματικῶν τόμων.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚ

ΠΑΛΑΙΩΝ ϗ ΝΕΩΤΕΡΩΝ

Συνερανισθέντων

ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ

ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,

Ὅπως δωρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς Ἑλληνομουσείοις φοιτῶσιν,

ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ ϗ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ

ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

ΖΩΣΙΜΑ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ,

περιέχων

ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

καὶ

ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ.

ΕΝ ΜΟΣΧΑι

Ἐν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφείῳ παρὰ Ῥηδηγέρῳ ϗ Κλαυδίῳ.

Ἔτει 1798.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚ
ΠΑΛΑΙΩΝ ϗ ΝΕΩΤΕΡΩΝ
Συνερανισθέντων
ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ
ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ
ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ
ΚΥΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,
Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων,
Ὅπως δωρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς
Ἑλληνομουσείοις φοιτῶσιν,
ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ ϗ ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ
ΖΩΣΙΜΑ
ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ,
περιέχων
ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ,
ΤΗΝ
ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ,
ΚΑΙ
ΤΑΣ ΤΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΑΣ.

ΕΝ ΜΟΣΧΑι
Ἐν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφείῳ παρὰ
Ῥηδηγέρῳ ϗ Κλαυδίῳ.
Ἔτει 1799.

Εἰς τήν πρώτην σελίδα τοῦ α΄τόμου τῶν Μαθηματικῶν μετά τό ἐξώφυλλον παρατίθεται ἡ ἑξῆς προτροπή

"Ἄκουσόν μου, τέκνον, καί μάθε ἐπιστήμην, καί ἐπί τῶν λόγων μου πρόσεχε τῇ καρδίᾳ σου. Σειρ. 16. 24

Εἰς τήν ἑπομένην σελίδα ἐκτίθεται ἡ ἀφιέρωσις

ΤΟΙΣ ΚΑΤΑ ΠΑΣΑΝ ΤΗΝ
ΕΛΛΑΔΑ ΕΛΛΗΝΟΜΟΥΣΕΙΟΙΣ,
ΕΞΟΧΩΣ
ΤΩ ΕΝ ΤΗ
Π Ε Ρ Ι Β Λ Ε Π Τ Ω
Τ Ω Ν
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΜΗΤΡΟΠΟΛΕΙ,
ΚΛΕΙΝΟΙΣ, ΕΥΕΡΓΕΤΙΚΟΙΣ,
ΚΟΙΝΩΦΕΛΕΣΙΝ

Ὁ πρόλογος τοῦ α΄τόμου ἀρχίζει ὡς ἑξῆς:

Ὑμῖν, ὦ Πιερίδων καί Ἑλικωνιάδων Μουσῶν δώματα· ὑμῖν γάρ ὡς ἐμψύχοις καί λογικοῖς προσφωνεῖν συνωθεῖ ἡμᾶς τό τοῦ γένους φίλτρον· τιμήν, ἔπαινον, εὐχαριστίαν προσοφείλουσιν ἅπαντες οἱ τῶν Ἑλλήνων ἀπόγονοι. Ὑμεῖς γάρ μετά τόν παντελῆ σχεδόν τοῦ γένους κατακλυσμόν, οὐ μόνον τῆς τῶν προγόνων περιπύστου διαλέκτου, καί τῆς ἐγκυκλίου καλουμένης μαθήσεως, ἀλλά καί διαφόρων ἐπιστημῶν τά ζώπυρα θαυμασίως,καί,ἵν οὕτωςεἴπω, ὑπερφυῶς διεσώσατε. Ὑμᾶς οὖν κοινούς ἀναγράφοντες εὐεργέτας, εὐγνωμόνως τῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εὐκλείας ἀριδηλότατα προσαγορεύομεν ὑπομνήματα καί φωτα δέ τοῦ τῆς ἀμαθίας σκότους ἀπαλλάτοντα ...

Οἱ ἐκ τῶν Ζωσιμαδῶν Αὐτάδελφοι Α.Ν.Ζ.Μ

Ἡ εἰσαγωγή, τῆς ὁποίας ὁ τίτλος εἶναι

Τοῖς ἀναγινώσκουσι, ἀρχίζει ὡς ἑξῆς:

Μάτην ἄραγε ὁ μέν Πλάτων ταῖς τῆς Ἀκαδημίας θύραις ἐπεγράφατο τό, Οὐδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω· ὁ δέ Ξενοκράτης, παντί ἀγεωμετρήτῳ, τῷ χάριν παιδείας αὐτῷ προσιόντι, Πορεύου, ἔλεγε, λαβάς γάρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας;

.... οὐδέ γάρ ἀντιστῆναι ἐδυνήθημεν τῇ ἰσχύϊ τοῦ ζήλου, ὅν ὑπέρ τούτου ἔδειξαν οἱ ἐκ τοῦ Ζωσιμᾶ τιμιώματοι καί φιλογενεῖς αὐτάδελφοι, δωρεάν τάς τυπωθησομένας βίβλους διανέμειν αἱρεθέντες τοῖς ἐν τοῖς Ἑλληνομουσείοις τά Μαθηματικά διδασκομένοις. Ἐπευχόμεθα οὖν νῦν, ὅπως ἄν καί διά τῆσδε τῆς βίβλου οἱ Ἑλλήνων παῖδες τόν νοῦν καταυγασθέντες, ἄξιοι τοῦ τῶν προγόνων αὐτῶν ἀναφανῶσι κλέους.

ὁ Α.Ν.

Εἰς τό πρῶτον μέρος τοῦ βιβλίου ἐκ 258 σελίδων περιέχονται τά Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, (τῆς γεωμετρίας) μέ μικράς μεταβολάς ἤ συντμήσεις. Τό δεύτερον μέρος ἀπό τῆς σελίδος 258-334 (τέλους αὐτοῦ) περιέχει ἀριθμητικήν, καί σύντομον θεωρίαν τῶν λογαρίθμων. Ὁ δεύτερος τόμος τοῦ ἔργου, ὁ ὁποῖος ἐξεδόθη ἕν ἔτος βραδύτερον ἤτοι κατά τό 1799 περιέχει Ἀρχιμήδεια θεωρήματα, ἐπίπεδον τριγωνομετρίαν καί τάς κωνικάς τομάς τοῦ Ἀπολλωνίου μέ σημειώσεις ἐπί τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν.

28) ΡΗΓΑΣ ΦΕΡΑΙΟΣ, ὁ ἐθνικός κῆρυξ

(1757-1798). Ἐσπούδασεν εἰς τήν Ζαγοράν καί τό Βουκουρέστιον. Ἔγραψεν: Ἀπάνθισμα φυσικῆς διά τούς ἀγχίνους καί φιλομαθεῖς Ἕλληνας ἐκ τῆς γαλλικῆς καί γερμανικῆς διαλέκτου ἐρανισθέν. Ἐδημοσιεύθη ἐν Βιέννῃ κατά τό 1790.

29) ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΑΡΔΑΡΗΣ

(1757-1823). Ἐγεννήθη καί ἀπέθανεν ἐν Βιέννῃ. Οἱ γονεῖς του κατήγοντο ἐκ Κλεισούρας τῆς Μακεδονίας. Ἔγραψε: Ἐπιτομήν φυσικῆς δημοσιευθεῖσαν ἐν Βιέννῃ κατά τό ἔτος 1812.

30) ΑΓΓΕΛΟΣ ΔΕΛΛΑΔΕΤΖΙΜΑΣ

Γεννηθείς ἐν Κεφαλληνίᾳ τῷ 1752. Ἐσπούδασε φιλοσοφίαν εἰς τήν Πάδουαν, θετικάς ἐπιστήμας (φυσικομαθ.) καί ἰατρικήν, γενόμενος καθηγητής τῆς ἰατρικῆς εἰς τό Πανεπιστήμιον τῆς Παδούης. Ἔγραφε:

1. Λύσις τοῦ μαθηματικοῦ ζητήματος τῶν τριῶν σωμάτων.
2. Περί κωνικῶν τομῶν.
3. Περί τῶν φαινομένων τῆς κινήσεως πολλῶν σωμάτων.
4. Πραγματεία περί ἰατρικῆς ὕλης.
5. Λόγος περί φυσικῆς ἱστορίας.
6. Διαλέξεις γενικῆς παθολογίας.

31) ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΒΑΡΚΟΣΗΣ

Ἐγεννήθη ἐν Ἰωαννίνοις περί τά μέσα τοῦ 18ου αἰῶνος. Ἐσπούδασε φιλοσοφίαν εἰς τήν Γερμανίαν. Ἔγραφε: Φρειδερίκου Χριστιάνου Βαουμαϊστέρου, λογική, ξυνυφανθεῖσα μέν ὑπ' αὐτοῦ, μεθόδῳ μαθηματικῇ κατά Βόλφιον, μεταφρασθεῖσα δέ ἀπό λατινίδος εἰς τήν Ἑλλάδα φωνήν παρά τοῦ σοφολογιωτάτου Διδασκάλου Κυρίου Νικολάου Βάρκοση τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων. Τύποις ἐκδοθεῖσα ἀναλώμασιν Ἀθανασίου Γεωργίου Μανούση τοῦ ἐκ Σιατίστης. Ἐν Βιέννῃ, 1795. Ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδώτου.

32) ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ Μ. ΗΛΙΑΔΗΣ

Ἐγεννήθη περί τό 1760 . Ἔγραφε: Χημική φιλοσοφία, ἤ στοιχειώδης ἀλήθεια τῆς νεωτέρας Χημικῆς, νεωτέρᾳ τινι μεθόδῳ τεταγμένη ὑπό Α.Φ Φουρκρουά Ἰατροῦ καί Διδασκάλου τῆς Χημικῆς ἐν Παρισίοις. Ἐκγραικισθεῖσα μετά προσθήκης καί τινων σημειωμάτων ὑπό Θεοδοσίου Μ. Ἠλιάδου. Ἐπιδιορθωθεῖσα καί τύποις ἐκδοθεῖσα ὑπό Ἀνθίμου Γαζῆ Ἀρχιμανδρίτου τοῦ ἀπό Μηλιῶν τοῦ Πηλίου ὄρους καί μέλους τῆς ἐν Ἰένῃ Ἑταιρείας τῶν ὀρυκτολόγων, χάριν τῶν φιλολόγων. Ἐν Βιέννῃ τῆς Ἀουστρίας 1802. Τύποις Φ.Α. Σχραίμβλ.

33) ΚΗΡΥΚΟΣ ΧΑΙΡΕΤΗΣ

Ἐκ Κρήτης, ἀποθανών κατά τό 1830. Ἐσπούδασεν εἰς τήν Ἑνετίαν ἰατρικήν καί εἰς τήν Πάδουαν φιλοσοφίαν. Ἔγραφε: Ἐγχειρίδιον τῆς τῶν ζῴων οἰκονομίας ἤ περί ἀνθρώπους καί περί τά ἄλογα ζῷα αἴτια τοῦ ζῆν.

34) ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΟΥΜΑΣ

(1777-1836). Ἐγεννήθη εἰς τήν Λάρισαν. Ἐσπούδασε Μαθηματικά εἰς τό Πανεπιστήμιον τῆς Βιέννης. Ἱδρυτής τοῦ κλασσικοῦ Γυμνασίου τῆς Σμύρνης, ὅπου ἐδίδαξε μαθηματικά, φυσικήν πειραματικήν καί φιλοσοφίαν. Ὑπῆρξε μέλος τῆς ἐν Βερολίνῳ Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν καί τῆς ἐν Μονάχῳ Ἀκαδημίας. Ἀπέθανεν εἰς τήν Τεργέστην. Ἔγραφε:

Σύνταγμα φιλοσοφίας ὑπό Κ.Μ. Κούμα, σχολάρχου τοῦ τῆς Σμύρνης φιλολογικοῦ Σχολείου καί διδασκάλου τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν καί τῆς φιλοσοφίας εἰς χρῆσιν τῶν ἑαυτοῦ μαθητῶν.

Σύνοψις ἐπιστημῶν διά τούς πρωτοπείρους, περιέχουσα Ἀριθμητικήν, Γεωμετρίαν, Νέαν Γεωγραφίαν, Ἀστρονομίαν, Λογικήν καί Ἠθικήν. Ἐν Βιέννῃ τῆς Ἀουστρίας, 1818 (σελίδες η΄ + 433).

35) ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΒΑΡΔΑΛΑΧΟΣ

(1775-1830). Ἐγεννήθη εἰς τό Κάϊρον, ἐκ γονέων καταγομένων ἐκ Χίου. Ἐσπούδασεν ἰατρικήν εἰς τό Πανεπιστήμιον τῆς Παδούης. Ἔγραφε: Φυσική πειραματική περιεκτική τῶν νεωτέρων ἐφευρέσεων. Συγγραφεῖσα καί ἐκδοθεῖσα ἑλληνιστί χάριν τῶν ἀρχαρίων ὑπό τοῦ ἐν Βουκουρεστίῳ ἀρχιδιδασκάλου Κωνσταντίνου Βαρδαλάχου τοῦ Αἰγυπτίου. Ἐν Βιέννῃ τῆς Ἀουστρίας κατά τό τυπογραφεῖον Λεοπόλδου τοῦ Γρούνδ, 1818.

36) ΘΕΟΔΩΡΟΣ ῬΑΚΟΣ

Ἤκμασε κατά τόν 18ον αἰῶνα. Ἔγραφε: Σύνοψις ὅλων τῶν ἐπιστημῶν πρός χρῆσιν τῶν παίδων μεταφρασθεῖσα ἐκ τοῦ γαλλικοῦ, ὑπό Θεοδώρου Ῥάκου, ἔκδ. 2α, ἐν Νεαπόλει, 1815.

37) ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΚΑΡΑΧΙΟΥΛΑΦΗΣ

Ἤκμασε κατά τόν 18ον αἰῶνα. Ἐκ Καισαρείας. Ἔγραφε: Ἀριστοτέλους Φυσιογνωμικά μεταφρασθέντα ἀπό τοῦ ἑλληνικοῦ εἰς τήν καθ' ἡμᾶς ὁμιλουμένην ἁπλῆν φράσιν. Ἔτι δέ εἰς τήν τουρκικήν ἁπλῆν, μεθερμηνευθέντα καί σύν τῷ πρωτοτύπῳ ἐκδοθέντα παρά Ἀναστασίου Χ.Γρ.Καραχιουλάφη Καισαρέως, ἤδη πρῶτον τύποις ἐκδίδονται ἐν Κωνσταντινουπόλει 1819.

38) ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ

Ἤκμασε περί τό 1800. Ἔγραφε: Ἰατροφιλοσοφική ἀνθρωπολογία μετενεχθεῖσα ἐκ τῆς γερμανικῆς εἰς τήν ἑλληνίδα φωνήν ὑπό Ἀναστασίου Γεωργιάδου Φιλιππουπολίτου, ἰατροῦ καί χειρούργου, ἐν Βιέννῃ 1840.

Αἱ ἐκδόσεις βιβλίων μαθηματικῶν καί φυσικῆς, τάς ὁποίας ἐμνημονεύσαμεν ἐγίνοντο κυρίως εἰς τό Ἐξωτερικόν ἐκ τοῦ ὁποίου εἰσήγοντο εἰς τήν ὑπόδουλον Ἑλλάδα. Κατά τούς πρώτους χρόνους τῆς τουρκοκρατίας Σχολεῖα δέν ἐλειτούργουν. Ἡ ζωή ὅμως δέν ἔπαυσε. Ἡ ἀνάγκη τῶν ἐμπορικῶν συναλλαγῶν συνέβαλεν εἰς τήν δημοσίευσιν ἐγχειριδίων ἀριθμητικῆς χρησίμων εἰς τά εὐρύτερα λαϊκά στρώματα, ἰδίως τῶν μεγαλυτέρων πόλεων. Τά Ἀρχεῖα τοῦ τουρκικοῦ κράτους δέν ἔχουν ἀκόμη ἐρευνηθῆ διά νά πληροφορηθῶμεν τά σχετικά πρός τήν πολιτιστικήν κίνησιν τοῦ ὑποδούλου ἔθνους. Κατά τάς ὑπαρχούσας πληροφορίας τεράστιοι ὄγκοι ἑλληνικῶν βιβλίων ἀπόκεινται εἰς τά δωμάτια τῶν ανακτόρων καί τά ὑπόγεια τῶν βιβλιοθηκῶν τῆς Κωνσταντινουπόλεως καί ἀναμένουν τήν ἐξέτασιν καί τήν καταγραφήν των. Ὅτι ἡ πληροφορία αὕτη εἶναι ἀκριβής πειθόμεθα ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ὁ πρεσβευτής τῆς Αὐστρίας ἐν Κωνσταντινουπόλει Augerius von Busbeck (πρεσβευτής ἀπό 1555-1562) ἐπί Σουλτάνου Σουλεϊμάν τοῦ 2ου ἀπέκτησεν ὑπέρ τά 100 ἑλληνικά χειρόγραφα βιβλία τά ὁποῖα προσέφερεν εἰς τόν αὐτοκράτορα τῆς Αὐστρίας Φερδινάνδον τόν 1ον, ὁ ὁποῖος τά ἐδώρησεν εἰς τήν ἐν Βιέννη Ἐθνικήν Βιβλιοθήκην τῆς Αὐστρίας. Μερικά ἐκ τῶν χειρογράφων αὐτῶν βιβλίων εἶναι βιβλία πρακτικῆς ἀριθμητικῆς. Ἐκ τούτων ἐλήφθησαν ἑκατόν (100) προβλήματα καί ἐδημοσιεύθησαν μέ παράλληλον μετάφρασιν εἰς τήν γερμανικήν κατά τό 1963 ἐν Βιέννῃ ὑπό τοῦ Γενικοῦ Γραμματέως τῆς Αὐστριακῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν καί Βυζαντινολόγου καθηγητοῦ κ. Herbert Hunger καί τοῦ καθηγητοῦ τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Μονάχου καί ἀκαδημαϊκοῦ κ. Kurt Vogel ὑπό τόν τίτλον Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts (ἕν βυζαντινόν βιβλίον τοῦ 15ου αἰῶνος).

Ὁ χρόνος συγγραφῆς τοῦ βιβλίου τοποθετεῖται μέ μεγάλην πιθανότητα ἀπό τοῦ 1430, ὅτε κατελήφθη ἡ ὑπό τῶν Ἑνετῶν κατεχομένη Θεσσαλονίκη ὑπό τῶν Τούρκων, μέχρι τοῦ 1550.

Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν κατωτέρω μερικά ἀπό τά δημοσιευθέντα 100 προβλήματα ἀριθμητικῆς:

Πρόβλημα 13

Ἄσπρα εἰσίν εἰς πουγγί· ἐξ ὧν λαβών α/γ καί α/δ, τά ἐγκαταλειφθέντα εἰσίν εζ΄· θέλεις τοῦ εὑρεῖν τήν ὁλότην, ποίησον οὕτως· τά ὑπό τῶν γραμμῶν γ΄καί δ΄πολλαπλασιάσας αβ΄γίνονται ὧν τά τρίτα καί τέταρτα λαβών ε΄μένουσιν· εἶτα διά τῆς τῶν τριῶν μεθόδου λέγε ὅτι, ἐάν τά ε΄γίνουνται αβ΄τά εζ΄τί θέλουν γένει; καί εὑρίσκονται εἶναι.

Δηλ. Εἰς πορτοφόλι ὑπάρχουν ἄσπρα ἐκ τῶν ὁποίων, ἀφοῦ λάβῃς τό 1/3 καί τό 1/4 θά μείνουν 57· ἐάν θέλῃς νά εὕρῃς πόσα ἦσαν ὅλα τά χρήματα κάνε ὡς ἑξῆς· τούς κάτωθι τῶν γραμμῶν ἀριθμούς 3 καί 4, ἀφοῦ τούς πολλαπλασιάσῃς θά λάβῃς 12· ἐκ τῶν ὁποίων, ἀφοῦ ἀφαιρέσῃς τά 3 καί τά 4 θά μείνουν 5· κατόπιν μέ τήν μέθοδον τῶν τριῶν λέγε, ὅτι, ἐάν τά 5 γίνωνται 12, τά 57 πόσα θά εἶναι, καί θά τό εὕρῃς.

$$\left(X - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)X = 57\right)$$

32

Ἄσπρα ε΄τά ροο δίδουν κουμέρκι. ἔχει γοῦν τις πραγματευτής ἄσπρα, αγεζε· τί ὀφείλει κουμέρκι; τά αὐτά ἄσπρα πολλαπλασιάσας μέ τά ε΄καί ἐκ τήν ὁμάδα κόψον τά δύο ἔμπροσθεν ψηφιά· τό ὄπισθεν δέ ἐστιν τό κουμέρκι. (σημ. κουμέρκι = τελωνειακός δασμός. αγεζε΄= 13575. Κόψον τά δύο ἔμπροσθεν ψηφιά = ἀφαίρεσε τά δύο πρός τά δεξιά μηδενικά).

46

Εἰς ἕνα λιβάδι ἐχόρευαν κοράσια, καί ἐπέρασεν εἷς ἄνθρωπος καί ἐχαιρέτισεν καί εἶπεν· καλῶς χορεύετε ροο΄κοράσια. καί ἀποκρίθη μία ἀπό κεῖνες καί εἶπεν· ἐμεῖς δέν εἴμεθεν ροο΄ ἀμή ἄν εἴμεθεν ἄλλες τόσες, ὅσες εἴμεθεν, καί οἱ μισές καί αἱ τέταρται καί μετ' ἐσέναν, ἠθέλαμεν εἶσθαι ροο΄ ζητῶ νά μάθω, πόσαι ἦταν.

$\left(2X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + 1 = 100\right)$, ('Απόκρισις 36), (ροο΄=100)

66

Ἦταν εἷς χαμάμτζης καί εἶπε τόν δοῦλον του οὕτως ὅτι , νά παίρνη εἰς τόν λουτρόν εἰς τόν Τοῦρκον μέν τουρέσια β΄, καί εἰς τόν Ἑβραῖον τουρέσια ς΄καί εἰς τόν Χριστιανόν α/β (ἄσπρα), καί νά ἐβγαίνη καθ' ἡμέρα ἄσπρα $μ_o'$. Χριστιανοί $μ_o'$ ἄσπρα $β_o'$. Τοῦρκοι νγ΄ἄσπρα αγ΄τουρέσια β΄. Ἑβραῖοι θ΄ ἄσπρα ς΄τουρέσια ς΄.

Δηλ. ἕνας χαμαμτζῆς (ἔχων λουτρά χαμάμ) εἶπε εἰς τόν ὑπάλληλόν του, ὅτι διά κάθε λουτρόν ὁ Τοῦρκος πληρώνη 2 τουρέσια, ὁ Ἑβραῖος πληρώνη 6 τουρέσια καί ὁ Χριστιανός πληρώνη 1/2 ἄσπρον καί ὅτι εἰσπράττωνται καθημερινῶς 40 ἄσπρα. Πόσοι ἦσαν οἱ λουόμενοι ἐξ ἑκάστης ἐθνότητος; (σημ. 1 φλουρί = 2 ἀργυρᾶ νομίσματα = 50 ἄσπρα = 400 τουρέσια).

Τό πρόβλημα εἶναι ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως μέ ἐξίσωσιν $2X + 6Ψ + 4Z = 40 .8$. Διά $Z = 40$, γίνεται $X = 80 - 3Ψ$.

Ἡ ἀπάντησις εἶναι: 40 Χριστιανοί μέ ἔσοδον 20 ἄσπρα, 53 Τοῦρκοι μέ ἔσοδον 13 ἄσπρα καί 2 τουρέσια, 9 Ἑβραῖοι μέ ἔσοδον 6 ἄσπρα καί 6 τουρέσια. (σημ. Δίδεται μία μόνον λύσις).

77

Ἕνας πύργος ἦτον τό ὕψος όργυιές ροο΄ καί ἕνας ποντικός ἀνέβαινεν τήν νύκταν ἕνα ὄκτατον τοῦ πύργου καί πρός τό ξημέρωμα ἐκατέβαινεν κάτω ἕνα δέκατον, καί ἔμπαινε καί ἐκρυβεν τόν εἰς μερικές τρύπες, ὁποῦ εἶχεν ὁ πύργος. ζητῶ, διά πόσα ἡμερόνυκτα νά τόν ἀνέβη τόν πύργον ὅλον ὁ ποντικός. καί λέγει ἡ τέχνη, ὅτι ἤθελεν τόν ἀνέβη διά ἡμερόνυκτα μο΄ καί εἰ μέν θέλεις, νά ποιήσης τόν τοιοῦτον λογαριασμόν, ὄφειλον τό ἕνα δέκατον τοῦ πύργου ἀπό τό α/η καί ἀπομένουν δύο ὄγδοα $β/η^o$. βάλε τα δέ εἰς τήν ῥέγουλαν τῶν τριῶν.

(σημ. ροο΄= 100, ἕνα ὄκτατον = $\frac{1}{8}$, μο΄= 40, ἀφαίρεσε τό $\frac{1}{10}$ ἀπό τό $\frac{1}{8} \cdot \frac{β'}{η^o} = \frac{2}{80}$, ῥέγουλα τῶν τριῶν = μέθοδος τῶν τριῶν).

81

Ἕνας σκύλος διώχτει ἕναν λαγόν καί ὁ λαγός ἕναι ἐμπρός ἀπέ τόν σκύλον πηδήματα ροο΄, καί πᾶσα ὀκτώ πηδήματα τοῦ λαγοῦ τά κάμνει ὁ σκύλος ζ. ἐρωτῶ σε εἰς πόσα πηδήματα τοῦ λαγοῦ καί εἰς πόσα τοῦ σκύλου νά φτάση ὁ σκύλος τόν λαγόν;καί λέγει ἡ τέχνη ὅτι, εἰς ρνς΄τοῦ λαγοῦ καί εἰς αγς΄ L΄΄ τοῦ σκύλου ἤθελεν φτάσει ὁ σκύλος τόν λαγόν· καί εἰ μέν θέλεις νά ποιήσης τόν τοιοῦτον λογαριασμόν, βάλε τά η΄ πηδήματα τοῦ λαγοῦ ἄνωθεν καί τά ζ΄πηδήματα τοῦ σκύλου κάτωθεν καί πολλαπλασίασον τά ζ΄μέ τά η΄και γίνονται νς΄ βάλε καί τά ροο΄,ὁποῦ ἦταν ὁ λαγός ἔμπροσθεν, καί γίνουνται ρνς΄ καί εἰς τόσα τοῦ λαγοῦ τόν ἔφτανεν ὁ σκύλος. τώρα θέλεις, νά εὕρης καί τοῦ σκύλου· βάλε τα εἰς τήν ῥέγουλαν τῶν τριῶν καί εἰπέ·ἐάν τά η΄γίνουνται ζ΄, τά αες΄πόσα ἤθελαν γένει; καί ἤθελαν γένει ργς΄α/β, καί τόσα ἤθελεν κάμει ὁ σκύλος νά φτάση τόν λαγόν καί σημείωσαι τά κάτωθεν.(σημ. ροο΄ = 100, ρνς΄= 156, αγς΄L΄΄= 136 $\frac{1}{2}$, νς΄= 56 , αες΄ = 156, ργς΄ α/β = 136 $\frac{1}{2}$)

Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη ἀδυνατεῖ νά εὕρη τά αἴτια εἰς τά ὁποῖα ὀφείλεται ἡ δημιουργία τῶν ἐπιστημῶν ὑπό τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Διά τόν λόγον αὐτόν ἀρκεῖται εἰς τήν διατύπωσιν μερικῶν ὑποθέσεων. Τά κράτη ἐνδιαφέρονται νά χρησιμοποιοῦν τά πορίσματα τῶν ἐπιστημονικῶν ἐπιτευγμάτων, πρός αὔξησιν τῆς ἰσχύος των. Ἡ ἔφεσις πρός ἀνακάλυψιν φυσικῶν νόμων καί πρός φιλοσοφικάς καί θεολογικάς ἀναζητήσεις ὀφείλονται εἰς ἄγνωστα αἴτια. Ἡ στρατιωτικῶς καί πολιτικῶς ἰσχυρά Σπάρτη τῆς ἀρχαιότητος δέν ἔχει νά παρουσιάση πολιτιστικά ἐπιτεύγματα εἰς τά μαθηματικά και τήν τεχνολογίαν. Ἡ αὐτή παρατήρησις ἰσχύει καί διά τούς Ῥωμαίους, οἱ ὁποῖοι ἐπί 500 ἔτη ἦσαν κοσμοκράτορες. Οὐδέν θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς ἤ τῆς γεωμετρίας ὀφείλεται εἰς ἐπινόησιν Ῥωμαίου ἐπιστήμονος. Τόσον οἱ Σπαρτιᾶται, ὅσον καί οἱ Ῥωμαῖοι ἐνδιεφέροντο καί ἠρκοῦντο εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς τῶν ἐπιστημονικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν ἄλλων. Ὑπό τό πρίσμα τοιούτων σκέψεων δέον νά ἐξετασθῇ ἡ πολιτική ἰσχύς τῶν κρατῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης, τά ὁποῖα εἰς τήν Δύσιν διεδέχθησαν τήν ῥωμαϊκήν αὐτοκρατορίαν, ἐν συνδυασμῷ πρός τήν ἐκ τῆς νέας, τῆς χριστιανικῆς θρησκείας, ἀσκηθεῖσαν πολιτικήν ἐπιρροήν. 'Από τῆς ἐποχῆς τῶν Σταυροφοριῶν χειρόγραφα ἔργων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐπιστημόνων ἔφθασαν εἰς τήν 'Ιταλίαν καί τήν Δυτικήν εὐρώπην γενικῶς καί ἀπό τότε ἀρχίζει ἡ ἀναγέννησις τῶν ἐπιστημῶν. 'Επίσης διά τῶν 'Αράβων τῆς Ἱσπανίας ἔφθασαν χειρόγραφα ἑλλήνων συγγραφέων εἰς τόν Δύσιν. Οἱ Γερμανοί βασιλεῖς, οἱ ὁποῖοι εἶχον συγγένειαν μέ τήν βασιλικήν Αὐλήν τοῦ Βυζαντίου εἶχον κατά τόν 10^{ον} αἰῶνα πράκτορας εἰς τά ἀνάκτορα τοῦ Βυζαντίου διά νά κλέπτουν χειρόγραφα ἑλληνικῶν ἔργων. Κατά τόν 12^{ον} αἰῶνα ὁ Σταυροφόρος, Λεονάρδος τῆς Πίζης (Eibonacci) ἐταξίδευσεν εἰς τήν Ἐγγύς 'Ανατολήν καί ἀκολούθως εἰσήγαγεν εἰς τήν 'Ιταλίαν τάς ἀλγεβρικάς μεθόδους τοῦ Διοφάντου. Μετά τήν ἅλωσιν τῆς Κων/πόλεως ὁ Ἕλλην λόγιος 'Ανδρέας Λάσκαρης (ἀποθανών εἰς τήν Ρώμην τῷ 1535) ἀπεστάλη ὑπό τοῦ Lorenzo τῶν Μεδίκκων εἰς τήν 'Ανατολήν πρός ἀγοράν ἑλληνικῶν κωδίκων, ἀκολούθως δέ κατά τό 1513 ὁ Πάπας Λέων ὁ 10^{ος} τοῦ ἤνοιξεν ἑλληνικόν τυπογραφεῖον ἐν Ῥώμῃ. 'Ολίγα ἔτη βραδύτερον ἐκλήθη οὗτος εἰς Παρισίους ὑπό τοῦ βασιλέως Φραγκίσκου τοῦ 1^{ου} καί ἵδρυσε τήν βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων, ἐπιστρέψας εἰς τήν Ῥώμην κατά τό 1518, μετακληθείς ἐκεῖ ὑπό τοῦ Πάπα Παύλου τοῦ 3^{ου}. Κατά τό 1572 ὁ καλός 'Ιταλός μαθηματικός Bombelli ἐδημοσίευσε τήν περίφημον διά τήν ἐποχήν ἐκείνην ἄλγεβράν του, εἰς τήν ὁποίαν περιέλαβε ἐκ τῶν 189 ἐν ὅλῳ προβλημάτων τῶν 'Αριθμητικῶν(δηλ τῆς ἀλγέβρας) τοῦ Διοφάντου, μόνον τά 143 ὡς ἰδικά του!! (Ἴδε: Ε.Σ. Σταμάτη, Διοφάντου 'Αριθμητικά, ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, 'Αθῆναι 1963, 'Οργανισμός 'Εκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων, σελίς 18).

Ἡ ἀναγέννησις τῶν ἐπιστημῶν εἰς τήν Δυτικήν Εὐρώπην ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τήν σπουδήν τῶν ἑλληνικῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καί τήν συμβολήν, τήν ὁποίαν παρέσχον διά τήν διδασκαλίαν αὐτῶν οἱ ἐκ τοῦ Βυζαντίου εἰς τήν 'Ιταλίαν καταφυγόντες "Ελληνες λόγιοι. Τό σκότος τῆς δουλείας 377 ἐτῶν, ὑπό τόν τουρκικόν ζυγόν, ἔσβεσεν εἰς τήν 'Ελλάδα τό λάλον ὕδωρ τῶν ἐπιστημῶν. Δέν ὑπῆρχε πλέον εἰς τόν ἀτυχῆ τόπον παγά λαλέουσα. Τά τέκνα ὅμως τοῦ εὐσεβοῦς αὐτοῦ λαοῦ,τά διεσκορπισμένα εἰς τά τέσσαρα σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος συνέχιζον τήν μελέτην καί τήν σπουδήν τῶν ἐπιστημῶν. Τό ἔργον των ἐσκιαγραφήθη ἀνωτέρω εἰς ὀλίγας γραμμάς. 'Η σκυτάλη τῶν ἐπιστημῶν τήν ὁποίαν παρέδοσαν εἰς τό ἐλευθερωθέν ἔθνος τῆς ἐποχῆς τοῦ 1830 συνεχίζει τόν καρποφόρον δρόμον της. Τά τέσσαρα Πανεπιστήμια καί τά δύο Πολυτεχνεῖα τῆς ἐλευθέρας 'Ελλάδος ἀποτελοῦν τώρα ἀπόδειξιν, ὅτι τό λάλον ὕδωρ τῶν ἐπιστημῶν δέν ἔσβεσε. Τρέχει μέ ὁρμήν καί προσπαθεῖ νά ἀναπληρώσῃ τό κενόν τῆς μακραίωνος δουλείας. Εἴθε ἡ σπουδάζουσα νεολαία τοῦ ἑλληνικοῦ ἔθνους νά συνεχίσῃ τό βαρύ ἔργον, τό ὁποῖον ἐκληρονόμησεν ἀπό τούς μεγάλους προγόνους μας.-

* * *

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. PAULY - WISSOWA, REAL- ENCYCLOPÄDIE DER classischen Altertumswissenschaften, STUTTGART.

2. HERBERT HUNGER und KURT UOGEL, Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts , Wien 1963

3. KURT UOGEL, Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts, Wien 1968.

4. ΣΑΘΑΣ, Κ.Ν., Μεσαιωνική Βιβλιοθήκη.

5. VOUMVLINOPOULOS, G.E., Bibliographie critique de la philosophie grecque depuis la chute de Constantinople a nos jours, 1453 - 1953 ATHÈNES 1966 .

EVCLIDIS
ELEMENTA

VOL. III

LIBER X CVM APPENDICE

POST

I. L. HEIBERG

EDIDIT

E. S. STAMATIS

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1972

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
ZENTRALINSTITUT
FÜR ALTE GESCHICHTE UND ARCHÄOLOGIE

BIBLIOTHECA
SCRIPTORVM GRAECORVM ET ROMANORVM
TEVBNERIANA

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1972

PRAEFATIO

Praeter codices solitos PBFVb, quos ipse contuli, nisi quod cod. Bodl. B ab initio usque ad finem definitionum alt. p. 77, 11 benevolenter conferendum suscepit G. A. Stewart, v. d. Oxoniensis, in hoc libro X uti mihi licuit palimpsesto cod. Musei Britannici Add. 17211 (L), de quo cf. quae scripsi in Philologo 44, 1885, 353–366; continet

X prop. 15 p. 25, 1 *μετρήσει* ad finem prop.
X prop. 16 p. 25, 13 (*μέγε*)*θος* – p. 25, 19 *ὅτι*
p. 26, 4 (*με*)*τρεῖ* ad finem prop.
X, 16 lemma p. 26, 9. 10 -*μον ἐλλεῖπον* ad finem.
X prop. 31 p. 52, 1 (*μέ*)*σαι* ad finem prop.
X prop. 32 totam.
X prop. 32 lemma ab initio ad p. 54, 9 *ὅλῳ*.
X prop. 80 p. 136, 5 *δυνατόν* ad finem prop.
X prop. 81 ab initio ad p. 138, 8 *ὑπό*.
X prop. 112 p. 203, 17 *ΒΔ* ad finem prop.
X prop. 113 ab initio ad p. 206, 6 *οὕτως*.

In appendicem hic, ut semper, ea sola recepi, quae in uno saltem meorum codicum in textu legebantur; quare in mea editione quaedam eorum, quae Augustus in app. V habet, frustra quaeras; sunt enim scholia marginalia, quae in vol. V suo ordine edentur. prolegomena critica quominus vel huic vel quarto volumini praemitterem, sicuti constitueram, prohibuit ratio scholiorum, quae quinto volumine comprehendentur. nam cum inde non pauca subsidia ad codices aestimandos peti posse viderem, statui iis demum editis ad prolegomena illa accedere.

Scrib. Hauniae mense Novembri MDCCCLXXXV

I. L. Heiberg

ADDITAMENTVM PRAEFATIONIS

Euclidem decimum librum Elementorum scripsisse censet scholiasta quidam, ut et de magnitudinibus commensurabilibus atque incommensurabilibus et de magnitudinibus rationalibus atque irrationalibus doceret. paulo fusius de eadem re loquitur Abu Othman, qui vixit saeculo X et e fontibus Graecis, videlicet Pappi commentariis, hausisse videtur. utrumque locum in testimonia recepi.

Multi homines docti, inter quos nominandi sunt Simon Stevin, Jean Montucla, G. H. F. Nesselmann, M. G. Zeuthen, Moritz Cantor, Thomas Heath, Paul-Henri Michel, explanare conati sunt, quo consilio Euclides decimum librum conscripserit.

Mea quidem sententia Euclides sibi proposuit, ut demonstraret quae fieret congruentia consensusque, cum in construendo triangulo rectangulo magnitudines irrationales simplicissimae adhiberentur. in propositionibus 10 et 27–35, in quibus magnitudines irrationales simplicissimae construuntur, theoriae fundamenta iaciuntur. in propositionibus 36–41 sex summae irrationales harum magnitudinum efficiuntur:

1. ex duobus nominibus	prop. 36
2. ex duobus mediis prima	prop. 37
3. ex duobus mediis secunda	prop. 38

4. maior	prop. 39
5. spatio rationali et medio aequalis quadrata	prop. 40
6. duobus spatiis mediis aequalis quadrata	prop. 41

Tum Euclides trianguli rectanguli auxilio usus (de quo vide definitiones alteras) alteras sex summas irrationales efficit:

1. ex duobus nominibus primam	prop. 48
2. ex duobus nominibus secundam	prop. 49
3. ex duobus nominibus tertiam	prop. 50
4. ex duobus nominibus quartam	prop. 51
5. ex duobus nominibus quintam	prop. 52
6. ex duobus nominibus sextam	prop. 53

Tum primum theoriae caput demonstratur, quod in tabulis I et II reddidi. Euclides cum in propositionibus 36–41 sex summas magnitudinum irrationalium constitueret, in propositionibus 73–78 sex differentias earundem magnitudinum irrationalium efficit. sunt autem hae:

1. apotome	prop. 73
2. prima apotome mediae	prop. 74
3. mediae apotome secunda	prop. 75
4. minor	prop. 76
5. recta cum rationali totum medium efficiens	prop. 77
6. recta cum medio totum medium efficiens	prop. 78

Tum iterum trianguli rectanguli auxilio usus (de quo vide definitiones tertias) alteras sex differentias irrationales efficit:

1. apotome prima	prop. 85
2. apotome secunda	prop. 86
3. apotome tertia	prop. 87
4. apotome quarta	prop. 88
5. apotome quinta	prop. 89
6. apotome sexta	prop. 90

Tum alterum theoriae caput demonstratur, quod in tabulis III et IV reddidi.

Propositionum 112 et 113 ope duodecim triangula rectangula construuntur (cf. tabulam V). quae propositiones cum artissime cum totius libri ratione coniunctae sint, haud dubitandum est quin ipsius Euclidis sint. idem dici potest de propositionibus 114 et 115.

Quinque tabulis id quod liber decimus Elementorum continet more loquendi mathematico quo nunc uti solemus reddidi. quae quo facilius a mathematicarum artium peritis intelligerentur, sermone usus sum Anglorum, non Latino. ceterum cf. quae scripsi in ephemeride Platon 11, 1959, 371–398.

Scr. Athenis mense Decembri MCMLXIX

E. S. Stamatis

TABVLA I

Theorem	GIVEN: of the hypotenuse of the right triangle intersected by the height — first part rational	second part irrational	consequently the height	PROVED: The height is irrational of the form:	
54	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ first binomial th. 48.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, i. e. of the binomial of th.	36.
55	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ second binomial 49.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first bimedial	37.
56	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\varrho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third binomial 50.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second bimedial	38.
57	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth binomial 51.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the major	39.
58	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth binomial 52.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of the side of rational plus a medial area	40.
59	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}+\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$ sixth binomial 53.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the side of the sum of two medial areas	41.

[We here note six transformations of double radicals out of sums]

PRAEFATIO

TABVLA II

Theorem	GIVEN: The height of the right triangle, the corresponding to the hypotenuse — irrational		GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height — rational	PROVED: The other part of the hypotenuse has the form	
60	$\varrho + \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$		ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$	
	binomial of the theorem	36.		of the first binomial, th.	48.
61	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} + \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$		ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\varrho\frac{\delta}{\gamma}$	
	first bimedial	37.		of the second binomial	49.
62	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} + \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$		ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] + 2\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$	
	second bimedial	38.		of the third binomial	50.
63	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$		ϱ	$\varrho + \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$	
	major	39.		of the fourth binomial	51.
64	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$		ϱ	$\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\varrho\alpha^2}{\lambda}$	
	side of a rational plus a medial area	40.		of the fifth binomial	52.
65	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$		ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} + \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$	
	side of the sum of two medial areas	41.		of the sixth binomial	53.

TABVLA III

	GIVEN			PROVED
Theorem	of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height: first part rational	second part irrational	consequently the height	the height is irrational of the form:
91	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ first apotome th. 85.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$= \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, i. e. of the apotome of th. 73.
92	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}$ second apotome 86.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-1\right)}$	$= \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first apotome of a medial 74.
93	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\varrho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third apotome 87.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$= \varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second apotome of a medial 75.
94	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth apotome 88.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$= \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the minor 76.
95	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth apotome 89.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$\varrho = \sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of that which ‘produces’ with a rational area a medial whole 77.
96	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth apotome 90.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$= \varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of that which ‘produces’ with a medial area a medial whole 78.

[We here note six transformations of double radicals out of differences].

PRAEFATIO

TABVLA IV

Theorem	GIVEN: The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse — irrational	GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height — rational	PROVED: The other part of the hypotenuse has the form:
97	$\varrho - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ Apotome of th. 73.	ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first apotome of th. 85.
98	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ First apotome of a medial, th. 74.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second apotome 86.
99	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second apotome of a medial, th. 75.	ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third apotome 87.
100	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ minor, th. 76.	ϱ	$\varrho - \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth apotome 88.
101	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a rational area a medial whole, th. 77.	ϱ	$\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\varrho\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth apotome 89.
102	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a medial area a medial whole, th. 78.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth apotome 90.

For the tables I, II, III, IV: ϱ = rational number as definition 3.

$\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ integers, non squares numbers.

PRAEFATIO

TABVLA V

	GIVEN		PROVED
	The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse	The first part of the hypotenuse intersected by the height is irrational of the form	The other part of the hypotenuse is irrational of the form
Th. 112	rational	of the first binomial th. 48	of the first apotome th. 85
	rational	of the second binomial 49	of the second apotome 86
	rational	of the third binomial 50	of the third apotome 87
	rational	of the fourth binomial 51	of the fourth apotome 88
	rational	of the fifth binomial 52	of the fifth apotome 89
	rational	of the sixth binomial 53	of the sixth apotome 90
Th. 113	rational	of the first apotome th. 85	of the first binomial th. 48
	rational	of the second apotome 86	of the second binomial 49
	rational	of the third apotome 87	of the third binomial 50
	rational	of the fourth apotome 88	of the fourth binomial 51
	rational	of the fifth apotome 89	of the fifth binomial 52
	rational	of the sixth apotome 90	of the sixth binomial 53

TESTIMONIA

1. Plato, Theaetetus 147 D – 148 C:

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

ΘΕΑΙ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

ΣΩ. Λέγε.

ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

ΘΕΑΙ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

2. Plato, Leges 817 E – 820 D:

ΑΘΗΝΑΙΟΣ ΞΕΝΟΣ. Ἔτι δὴ τοίνυν τοῖς ἐλευθέροις ἔστιν τρία μαθήματα, λογισμοὶ μὲν καὶ τὰ περὶ ἀριθμοὺς ἓν μάθημα, μετρητικὴ δὲ μήκους καὶ ἐπιπέδου καὶ βάθους ὡς ἓν αὖ δεύτερον, τρίτον δὲ τῆς τῶν ἄστρων περιόδου πρὸς ἄλληλα ὡς πέφυκεν πορεύεσθαι. ταῦτα δὲ σύμπαντα οὐχ ὡς ἀκριβείας ἐχόμενα δεῖ διαπονεῖν τοὺς πολλοὺς ἀλλά τινας ὀλίγους – οὓς δέ, προϊόντες ἐπὶ τῷ τέλει φράσομεν· οὕτω γὰρ πρέπον ἂν εἴη – τῷ πλήθει δέ, ὅσα αὐτῶν ἀναγκαῖα καί πως ὀρθότατα λέγεται μὴ ἐπίστασθαι μὲν τοῖς πολλοῖς αἰσχρόν, δι᾽ ἀκριβείας δὲ ζητεῖν πάντα οὔτε ῥᾴδιον οὔτε τὸ παράπαν δυνατόν . . .

ΑΘ. Τοσάδε τοίνυν ἑκάστων χρὴ φάναι μανθάνειν δεῖν τοὺς ἐλευθέρους, ὅσα καὶ πάμπολυς ἐν Αἰγύπτῳ παίδων ὄχλος ἅμα γράμμασι μανθάνει. πρῶτον μὲν γὰρ περὶ λογισμοὺς ἀτεχνῶς παισὶν ἐξηυρημένα μαθήματα μετὰ παιδιᾶς τε καὶ ἡδονῆς μανθάνειν, μήλων τέ τινων διανομαὶ καὶ στεφάνων πλείοσιν ἅμα καὶ ἐλάττοσιν ἁρμοττόντων ἀριθμῶν τῶν αὐτῶν, καὶ πυκτῶν καὶ παλαιστῶν ἐφεδρείας τε καὶ συλλήξεως ἐν μέρει καὶ ἐφεξῆς καὶ ὡς πεφύκασι γίγνεσθαι. καὶ δὴ καὶ παίζοντες, φιάλας ἅμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ καὶ ἀργύρου καὶ τοιούτων τινῶν ἄλλων κεραννύντες, οἱ δὲ καὶ ὅλας πως διαδιδόντες, ὅπερ εἶπον, εἰς παιδιὰν ἐναρμόττοντες τὰς τῶν ἀναγκαίων ἀριθμῶν χρήσεις, ὠφελοῦσι τοὺς μανθάνοντας εἴς τε τὰς τῶν στρατοπέδων τάξεις καὶ ἀγωγὰς καὶ στρατείας καὶ εἰς οἰκονομίας αὖ, καὶ πάντως χρησιμωτέρους αὐτοὺς αὐτοῖς καὶ ἐγρηγορότας μᾶλλον τοὺς ἀνθρώπους ἀπεργάζονται· μετὰ δὲ ταῦτα ἐν ταῖς μετρήσεσιν, ὅσα ἔχει μήκη καὶ πλάτη καὶ βάθη, περὶ ἅπαντα ταῦτα ἐνοῦσάν τινα φύσει γελοίαν τε καὶ αἰσχρὰν ἄγνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσιν, ταύτης ἀπαλλάττουσιν.

ΚΛΕΙΝΙΑΣ. Ποίαν δὴ καὶ τίνα λέγεις ταύτην;

ΑΘ. Ὦ φίλε Κλεινία, παντάπασί γε μὴν καὶ αὐτὸς ἀκούσας ὀψέ ποτε τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα, *καὶ ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ ὑηνῶν τινων εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων, ᾐσχύνθην τε οὐχ ὑπὲρ ἐμαυτοῦ μόνον, ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ ἁπάντων τῶν Ἑλλήνων.*

ΚΛ. Τοῦ πέρι; λέγ' ὅτι καὶ φῄς, ὦ ξένε.

ΑΘ. Λέγω δή· μᾶλλον δὲ ἐρωτῶν σοι δείξω. καί μοι σμικρὸν ἀπόκριναι· γιγνώσκεις που μῆκος;

ΚΛ. Τί μήν;

ΑΘ. Τί δέ; πλάτος;

ΚΛ. Πάντως.

ΑΘ. Ἦ καὶ ταῦτα ὅτι δύ' ἐστόν, καὶ τρίτον τούτων βάθος;

ΚΛ. Πῶς γὰρ οὔ;

ΑΘ. Ἆρ' οὖν οὐ δοκεῖ σοι ταῦτα εἶναι πάντα μετρητὰ πρὸς ἄλληλα;

ΚΛ. Ναί.

ΑΘ. Μῆκός τε οἶμαι πρὸς μῆκος, καὶ πλάτος πρὸς πλάτος, καὶ βάθος ὡσαύτως δυνατὸν εἶναι μετρεῖν φύσει.

ΚΛ. Σφόδρα γε.

ΑΘ. Εἰ δ' ἔστι μήτε σφόδρα μήτε ἠρέμα δυνατὰ ἔνια, ἀλλὰ τὰ μέν, τὰ δὲ μή, σὺ δὲ πάντα ἡγῇ, πῶς οἴει πρὸς ταῦτα διακεῖσθαι;

ΚΛ. Δῆλον ὅτι φαύλως.

ΑΘ. Τί δ' αὖ μῆκός τε καὶ πλάτος πρὸς βάθος, ἢ πλάτος τε καὶ μῆκος πρὸς ἄλληλα; [ὥστε πῶς] ἆρ' οὐ διανοούμεθα περὶ ταῦτα οὕτως Ἕλληνες πάντες, ὡς δυνατά ἐστι μετρεῖσθαι πρὸς ἄλληλα ἁμῶς γέ πως;

ΚΛ. Παντάπασι μὲν οὖν.

ΑΘ. Εἰ δ' ἔστιν αὖ μηδαμῶς μηδαμῇ δυνατά, πάντες δ', ὅπερ εἶπον, Ἕλληνες διανοούμεθα ὡς δυνατά, μῶν οὐκ ἄξιον ὑπὲρ πάντων αἰσχυνθέντα εἰπεῖν πρὸς αὐτούς· Ὦ βέλτιστοι τῶν Ἑλλήνων, ἓν ἐκείνων τοῦτ' ἐστὶν ὧν ἔφαμεν αἰσχρὸν μὲν γεγονέναι τὸ μὴ ἐπίστασθαι, τὸ δ' ἐπίστασθαι τἀναγκαῖα οὐδὲν πάνυ καλόν;

ΚΛ. Πῶς δ' οὔ;

ΑΘ. Καὶ πρὸς τούτοις γε ἄλλα ἔστιν τούτων συγγενῆ, ἐν οἷς αὖ πολλὰ ἁμαρτήματα ἐκείνων ἀδελφὰ ἡμῖν ἐγγίγνεται τῶν ἁμαρτημάτων.

XVIII

ΚΛ. Ποῖα δή;

ΑΘ. Τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἄλληλα ἥτινι φύσει γέγονεν. ταῦτα γὰρ δὴ σκοποῦντα διαγιγνώσκειν ἀναγκαῖον ἢ παντάπασιν εἶναι φαῦλον, προβάλλοντά τε ἀλλήλοις ἀεί, διατριβὴν τῆς πεττείας πολὺ χαριεστέραν πρεσβυτῶν διατρίβοντα, φιλονικεῖν ἐν ταῖς τούτων ἀξίαισι σχολαῖς.

ΚΛ. Ἴσως· ἔοικεν γοῦν ἥ τε πεττεία καὶ ταῦτα ἀλλήλων τὰ μαθήματα οὐ πάμπολυ κεχωρίσθαι.

3. Isocrates, Panathenaicus 238 B – D:

Τῆς μὲν οὖν παιδείας τῆς ὑπὸ τῶν προγόνων καταλειφθείσης τοσούτου δέω καταφρονεῖν, ὥστε καὶ τὴν ἐφ' ἡμῶν κατασταθεῖσαν ἐπαινῶ, λέγω δὲ τήν τε γεωμετρίαν καὶ τὴν ἀστρολογίαν καὶ τοὺς διαλόγους τοὺς ἐριστικοὺς καλουμένους, οἷς οἱ μὲν νεώτεροι μᾶλλον χαίρουσι τοῦ δέοντος, τῶν δὲ πρεσβυτέρων οὐδεὶς ἔστιν, ὅστις ἂν ἀνεκτοὺς αὐτοὺς εἶναι φήσειεν.

Ἀλλ' ὅμως ἐγὼ τοῖς ὡρμημένοις ἐπὶ ταῦτα παρακελεύομαι πονεῖν καὶ προσέχειν τὸν νοῦν ἅπασι τούτοις, λέγων, ὡς εἰ καὶ μηδὲν ἄλλο δύναται τὰ μαθήματα ταῦτα ποιεῖν ἀγαθόν, ἀλλ' οὖν ἀποτρέπει γε τοὺς νεωτέρους πολλῶν ἄλλων ἁμαρτημάτων. τοῖς μὲν οὖν τηλικούτοις οὐδέποτ' ἂν εὑρεθῆναι νομίζω διατριβὰς ὠφελιμωτέρας τούτων οὐδὲ μᾶλλον πρεπούσας· τοῖς δὲ πρεσβυτέροις καὶ τοῖς εἰς ἄνδρας δεδοκιμασμένοις οὐκέτι φημὶ τὰς μελέτας ταύτας ἁρμόττειν. ὁρῶ γὰρ ἐνίους τῶν ἐπὶ τοῖς μαθήμασι τούτοις οὕτως ἀπηκριβωμένων ὥστε καὶ τοὺς ἄλλους διδάσκειν, οὔτ' εὐκαίρως ταῖς ἐπιστήμαις αἷς ἔχουσι χρωμένους, ἔν τε ταῖς ἄλλαις πραγματείαις ταῖς περὶ τὸν βίον ἀφρονεστέρους ὄντας τῶν μαθητῶν· ὀκνῶ γὰρ εἰπεῖν τῶν οἰκετῶν.

4. Ps.-Aristoteles, De lin. insecab. 968 b 4–14 (→ Xenocrates?):

ἔτι καὶ ἐξ ὧν αὐτοὶ οἱ ἐν τοῖς μαθήμασι λέγουσιν, εἴη ἄν τις ἄτομος γραμμή, ὥς φασιν, εἰ σύμμετροί εἰσιν αἱ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμεναι, ὅσαι δ' εἰσὶ μετρούμεναι, πᾶσαί εἰσι σύμμετροι (cod. N: ... *σύμμετροι, πᾶσαί εἰσι μετρούμεναι* codd. cett.)· *εἴη γὰρ ἄν τι μῆκος, ᾧ πᾶσαι μετρηθήσονται· τοῦτο δ' ἀνάγκη ἀδιαίρετον εἶναι. εἰ γὰρ διαιρετόν, καὶ τὰ μέρη μέτρου τινὸς ἔσται (σύμμετρα γὰρ τῷ ὅλῳ)· ὥστε ⟨μέτρον⟩ μέρους τινὸς εἶναι διπλασίου τὴν ἡμίσειαν. ἐπεὶ δὲ τοῦτ' ἀδύνατον, ⟨ἀδιαίρετον⟩ ἂν εἴη μέτρον.* (*ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ μετρούμεναι ἅπαξ ὑπ' αὐτοῦ, ὥσπερ πᾶσαι αἱ ἐκ τοῦ μέτρου σύνθετοι γραμμαί, ἐξ ἀμερῶν σύγκεινται*).

5. Aristoteles, *Aα*, 41 a 23–34:

Πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ' ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν. τοῦτο γὰρ ἦν τὸ διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίσασθαι, τὸ δεῖξαί τι ἀδύνατον διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν. ὥστ' ἐπὶ τοῦ ψεύδους γίνεται συλλογισμὸς δεικτικὸς ἐν τοῖς εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγομένοις, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δείκνυται.

6. Aristoteles, *ψβ* 2, 413 a 19:

ὁ δὲ λέγων ὅτι ἐστὶν ὁ τετραγωνισμὸς μέσης εὕρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον.

7. Aristoteles, *ατ*, 968 b 15–21

πάντα γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ῥητῶν γραμμῶν σύμμετρα ἀλλήλοις, ὥστε ἔσται τὸ μέτρον αὐτῶν ἀμερές. ἀλλὰ μὴν *εἴ τι τμηθήσεται μέτρον τινὰ τεταγμένην καὶ ὡρισμένην γραμμήν, οὐκ ἔσται οὔτε ῥητὴ οὔτ᾽ ἄλογος οὔτε τῶν ἄλλων οὐδεμία ὧν νῦν δὴ εἴρηται, οἷον ἀποτομὴ ἐκ δυοῖν ὀνομάτοιν· ἀλλὰ καθ᾽ αὑτὰς μὲν οὐδέ τινας ἕξουσι φύσεις, πρὸς ἀλλήλας δὲ ἔσονται ῥηταὶ καὶ ἄλογοι.*

8. Aristoteles, *ατ*, 969 b 33–970 a 4:

ἔπειτα πᾶσαι αἱ γραμμαὶ σύμμετροι ἔσονται· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῶν ἀτόμων μετρηθήσονται, αἵ τε μήκει σύμμετροι καὶ αἱ δυνάμει, αἱ δὲ ἄτομοι σύμμετροι πᾶσαι μήκει· ἴσαι γάρ· ὥστε καὶ δυνάμει.

9. Aristoteles, *ΜΑ*2, 983 a 12–20:

ἄρχονται μὲν γὰρ ὥσπερ εἴπομεν ἀπὸ τοῦ θαυμάζειν πάντες εἰ οὕτως ἔχει, καθάπερ τῶν θαυμάτων ταὐτόματα τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν, ἢ περὶ τὰς τοῦ ἡλίου τροπὰς ἢ τὴν τῆς διαμέτρου ἀσυμμετρίαν . . . οὐθὲν γὰρ ἂν οὕτω θαυμάσειεν ἀνὴρ γεωμετρικὸς ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή.

10. Aristoteles, *Μδ* 15, 1021 a 3:

τὸ δ᾽ ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ᾽ ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται.

11. Aristoteles, *Μκ* 3, 1061 a 28–b 3:

καθάπερ δ᾽ ὁ μαθηματικὸς περὶ τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν θεωρίαν ποιεῖται (περιελὼν γὰρ πάντα τὰ αἰσθητὰ θεωρεῖ, οἷον βάρος καὶ κουφότητα καὶ σκληρότητα καὶ τοὐναντίον, ἔτι δὲ καὶ θερμότητα καὶ ψυχρότητα καὶ τὰς ἄλλας τὰς αἰσθητὰς ἐναντιώσεις, μόνον δὲ καταλείπει τὸ ποσὸν καὶ συνεχές, τῶν μὲν ἐφ᾽ ἓν τῶν δ᾽ ἐπὶ δύο τῶν δ᾽ ἐπὶ τρία, καὶ τὰ πάθη τὰ τούτων ᾗ ποσά ἐστι καὶ συνεχῆ, καὶ οὐ καθ᾽ ἕτερόν τι θεωρεῖ, καὶ τῶν μὲν τὰς πρὸς ἄλληλα θέσεις σκοπεῖ καὶ τὰ ταύταις ὑπάρχοντα, *τῶν δὲ τὰς συμμετρίας καὶ ἀσυμμετρίας, τῶν δὲ τοὺς λόγους, ἀλλ' ὅμως μίαν πάντων καὶ τὴν αὐτὴν τίθεμεν ἐπιστήμην τὴν γεωμετρικήν)* . . .

12. Aristoteles, *Ηγ* 5, 1112 a 21–23:

Περὶ δὲ τῶν ἀϊδίων οὐδεὶς βουλεύεται, οἷον περὶ τοῦ κόσμου ἢ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς, ὅτι ἀσύμμετροι.

13. Hero Alexandrinus (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1912) Def. IV p. 84, 16–86, 9:

ρκη'. [Περὶ μεγεθῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων.]
Τίνες μὲν ἄλογοι καὶ ἀσύμμετροι, καὶ τίνες ῥηταὶ καὶ σύμμετροι, ἐν τοῖς πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως εἴρηται· νυνὶ δὲ Εὐκλείδῃ τῷ στοιχειωτῇ ἑπόμενοι περὶ τῶν μεγεθῶν φαμεν, ὅτι σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ ὑπὸ τῶν αὐτῶν μέτρων μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γίνεσθαι.

14. Hero Alexandrinus

ρκθ'. [Περὶ εὐθειῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων.]
Εὐθεῖαι δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται κοινὸν μέτρον χωρίον γενέσθαι. τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ σύμμετροί εἰσί τινες εὐθεῖαι ἄπειροι. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητὴ καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι ῥηταὶ καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, τὰ δὲ ἀπ' αὐτῆς σύμμετρα καὶ τὰ τούτων σύμμετρα ῥητά.

15. Hero Alexandrinus, p. 116, 12–22:

Ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητὸν λέγει ὁ Εὐκλείδης. προτεθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται, ἥτις ἀρχὴ μέτρων καὶ οἱονεὶ κανὼν εἰς ἐκμέτρησιν ἡμῖν μηκῶν καθ' *ὑπόθεσιν εἴληπται· οἷον, εἴ τις προτείνοι, πόσον εἴη τὸ μεταξὺ διάστημα ὑποκειμένων τινῶν σημείων, οὐδὲν ἂν ἔχοιμεν λέγειν, εἰ δὲ οὕτως πυνθάνοιτο, πόσων ἐστὶ ποδῶν ἢ πηχῶν, ἀναγκαίως ἂν δέοι πήχεως καὶ ποδὸς αἰτεῖν ἡμᾶς παρὰ τοῦ παρέχοντος πηλικότητα καὶ ἐκείνῃ χρωμένους τῇ προτεθείσῃ καὶ ῥητῇ εὐθείᾳ τὸ προτεθὲν διάστημα ἐξετάζειν, εἰ ἔστιν ὅλως ῥητῷ σύμμετρον.*

16. Hero Alexandrinus, p. 136, 7–140, 17:

[*Ῥητὰ μεγέθη λέγεται, ὅσα ἐστὶν ἀλλήλοις σύμμετρα, ὅσα δὲ ἀσύμμετρα, ἄλογά εἰσι μὴ ἔχοντα λόγον πρὸς ἄλληλα.*]

Τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον μέγεθος ἑκάτερον οὐκ ἔστι τῶν καθ' ἑαυτὰ νοουμένων, ἀλλὰ πρὸς ἕτερον συγκρινομένων· ὅσα γὰρ ἀλλήλοις σύμμετρα, ταῦτα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα λέγεται, ὅσα δὲ ἀλλήλοις ἀσύμμετρα, ταῦτα ἄλογα πρὸς ἄλληλα λέγεται. οἱ μὲν ἀριθμοὶ σύμμετροι τυγχάνουσιν, ἐπείπερ ἕκαστος αὐτῶν ὑπό τινος ἐλαχίστου μέτρου μετρεῖται. ὁμοίως δὲ πῆχυς καὶ παλαιστὴς συμμετρίας ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους· ἑκάτερος γὰρ ὑπὸ ἐλαχίστου μέτρου καταμετρεῖται ὑπὸ δακτύλου θέσει τῶν μέτρων ὄντων μονάδος θέσιν ἔχοντος αὐτοῦ. ἀπείρου δὲ τῆς ἐν τοῖς μεγέθεσιν ὑπαρχούσης τομῆς καὶ μηδενὸς ὑφεστηκότος ἐλαχίστου μέτρου δῆλον, ὅτι τοῦ ῥητοῦ μεγέθους οὐχ ἕν τι καὶ ὡρισμένον, ὡς ὁ δάκτυλος, ἐλάχιστον μέτρον, ἀλλ' ἐφ' ἡμῖν ἔστιν, ὁπηλίκον ἂν θέλωμεν, ἐλάχιστον ὑποθέσθαι μέτρον γνώριμον, ἐν ᾧ ἡ μονάς· πᾶν γὰρ καθ' ἑαυτὸ μέγεθος, ὡς ἐλέχθη, οὔτε ῥητὸν οὔτε ἄλογον, ὅτι καὶ πᾶσα εὐθεῖα καθ' ἑαυτὴν οὔτε ῥητὴ οὔτε ἄλογός ἐστιν, συγκρινομένη δὲ πρὸς ὑποτεθεῖσαν ἐν θέσει μονάδα ῥητὴ ἢ ἄλογος εὑρίσκεται. οὕτως οὖν τῆς τετραγώνου πλευρᾶς ὑποτεθείσης ῥητῆς ἡ διάμετρος δυνάμει ῥητὴ εὑρίσκεται· μήκει γὰρ ἄλογος εὑρίσκεται· καὶ πάλιν αὖ τῆς διαμέτρου ῥητῆς ὑπαρχούσης ἡ πλευρὰ δυνάμει ῥητὴ ἑκατέρας αὐτῶν καθ' αὑτὴν οὔτε ῥητῆς οὔτε ἀρρήτου, τουτέστιν *ἀλόγου, ὑπαρχούσης. οὕτως οὖν τῶν εὐθειῶν ἐλάχιστόν τι μέτρον ὑποθέμενοι εὐθεῖαν μονάδα οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων ῥητὴν ὠνόμαζον καὶ τὰς αὐτῇ συμμέτρους ῥητάς· ὁμοίως καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον ῥητὸν καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα χωρία ῥητὰ ἐκάλεσαν καὶ ῥητὸν ὁμοίως τὸν ἀπ᾽ αὐτῆς κύβον καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα στερεά. ἄρρητον δ᾽ ἀκουστέον, τουτέστιν ἄλογον, στερεὸν μὲν τὸ ἀσύμμετρον τῷ ἀπὸ ῥητῆς κύβῳ, ἐπίπεδον δὲ τὸ ἀσύμμετρον τῷ ἀπὸ ῥητῆς τετραγώνῳ, μῆκος δέ, τουτέστιν εὐθεῖαν, τὸ ῥητῇ ἀσύμμετρον. ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν διττῆς νοουμένης τῆς ἀσυμμετρίας, μιᾶς μέν, ὅταν αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀσύμμετροι ὦσι, τὰ δὲ ἀπ᾽ αὐτῶν χωρία σύμμετρα ἀλλήλοις, ἑτέρας δέ, ὅταν καὶ τὰ αὐτὰ χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις ᾖ, διττὴ καὶ ἡ πρὸς τὴν ῥητὴν διαφορὰ κατὰ τοὺς παλαιοὺς ὑπῆρχεν· αἱ μὲν γὰρ λέγονται δυνάμει ῥηταὶ καὶ ἄλογοι, αἱ δὲ λοιπαὶ μήκει. δυνάμει μέν εἰσι ῥηταί, ὡς προείπομεν, ὅσαι μέν εἰσιν αὐταὶ ἀσύμμετροι τῇ ῥητῇ, τὰ δ᾽ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα τῷ ἀπὸ ῥητῆς τετραγώνῳ, μήκει δέ, ὅταν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ᾖ ἐν τετραγώνοις ἀριθμοῖς ᾖ ἢ τὰς πλευρὰς ἔχῃ συμμέτρους τῇ ῥητῇ μήκει. καὶ καθόλου καλεῖται ἡ τῇ ῥητῇ σύμμετρος ῥητὴ εἴτε μήκει εἴτε δυνάμει μόνον.*

Ὁρίζονται δὲ τὴν ῥητὴν καὶ οὕτως· ῥητή ἐστιν ἡ δι᾽ ἀριθμῶν γνωρίμη. οὐκ ἔστι δὲ ῥητῆς ὅρος οὗτος, ἀλλὰ συμβεβηκὸς αὐτῇ. ὅταν γὰρ λόγου χάριν ἐκτεθῶσι ῥηταὶ τῶν ἀπὸ τῆς πηχυαίας ῥητῆς, οἴδαμεν ἑκάστην, πόσων ἐστὶ παλαιστῶν ἢ δακτύλων· ὅθεν ἐκ τῶν συμβεβηκότων λέγομεν ῥητὴν δι᾽ ἀριθμῶν γνωρίμην. διαφέρει δὲ ῥητὴ δοθείσης τῷ τὴν μὲν ῥητὴν δοθεῖσαν εἶναι πάντως, τὴν δοθεῖσαν δὲ οὐκ ἐξ ἀνάγκης ῥητήν· ἡ μὲν ῥητὴ καὶ πηλικότητι καὶ ποιότητι γνωρίμη ἐστίν, ἡ δὲ δοθεῖσα πηλικότητι καὶ μεγέθει μόνον· καὶ γάρ εἰσί τινες ἄλογοι δεδομέναι.

XXIV

17. Pappus (Abū ʻOthmān al-Damashkī),
In decimum Euclidis Elem. libr. comment. I 9. 13,
p. 71sq. 76sq. Thomson-Junge
(→ Posidonius/Geminus?, → Aristoteles?):

(§ 9) But since irrationality comes to pass in three ways, either by proportion, or addition, or subtraction, it seems to me to be a matter worthy of our wonder (or contemplation), how, in the first place, the all-comprehending power of the Triad distinguishes and determines the irrational nature, not to mention any other, and reaches to the very last of things, the limit (or bound) derived from it appearing in all things; and in the second place, how each one of these three kinds [of irrationals] is necessarily distinguished by one of the means, the geometric distinguishing one, the arithmetical another, and the harmonic the third.

The substance of the Soul, moreover, seems to comprehend the infinity of irrationals; for it is moved directly concerning the nature of continuous quantities according as the ideas (or the forms) of the means which are in it demand, and distinguishes and determines everything which is undefined and indeterminate in the continuous quantities, and shapes them in every respect.

These three [means] are thus bonds by virtue of which not one even of the very last of things, not to mention any other, suffers loss (or change) with respect to the ratios (or relations) which exist in it. On the contrary, whenever it becomes remote from anyone of these ratios (or relations) naturally, it makes a complete revolution and possesses the image of the psychic ratios (or relations). Accordingly whatsoever irrational power there is in the whole (or in the universe), or whatsoever combination there is, constituted of many things added together indefinitely, or whatsoever Non-being there is, such as cannot be described (or conceived) by that method which separates forms, they are all comprehended by the ratios (or relations) which arise in the Soul.

(Apotome) Consequently incommensurability is joined and united (i. e., to the whole) by the harmonic mean, when it appears in the whole as a result of the division (or separa-(Binomiale) tion) of forms; and addition that is undefined by the units (or terms) of the concrete numbers is distinguished by the arithmetical mean; and medial irrationals of every kind that arise in the case of irrational powers, are made equal by reason of the geometric mean.

(§ 13) . . . Now these (i. e. the commensurable and the incommensurable) cover everything which by nature possesses the quality of being divided, and comprehend the union (combination) and separation (division) which is controlled by the God who encircles the world. For inasmuch as divine number precedes the existence of the substances of these things, they are all commensurable conformably to that cause, God measuring all things better than one measures the numbers; but inasmuch as the incommensurability of matter is necessary for the coming into existence of these things, the potentiality (or power) of incommensurability is found in them. It is, moreover, apparent that limit is most fit to control in the case of the commensurables, since it originates from the divine power, but that matter should prevail in the case of those magnitudes which are named incommensurables . . .

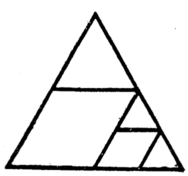
. . . Hence numbers are simple and free by nature from this incommensurability, even if they do not precede the incorporeal life; whereas the limits (or bounds) which come thence into the imagination and to a new existence in this representative (or imaginative) activity, become filled with irrationality and share in incommensurability, their nature, in short, consisting of the corporeal accidents.

XXVI

18. Scholia in elementorum librum X (ed. I. L. Heiberg, vol. V, Lipsiae 1888), p. 414–417:

1. *Ὁ σκοπὸς τοῦ ι' βιβλίου τῷ Εὐκλείδῃ διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων· οὐ γὰρ ταὐτὸν ἀσύμμετρα καὶ ἄλογα, διότι τὰ μὲν φύσει ἔστιν, τὰ δὲ ἄλογα καὶ ῥητὰ θέσει. εἰ γὰρ καὶ τὴν τοῦ τετραγώνου διάμετρον φύσις ἀσύμμετρον ποιεῖ πρὸς τὴν πλευράν, ἀλλὰ κατὰ τοὺς ἐν ἑαυτῇ ἐκείνου λόγους ποιεῖ καὶ οὐ κατὰ τὸ ἐπιτυχόν· ὥστε οὐδὲν τῶν ἀσυμμέτρων τῇ φύσει εἴη ἄλογον, ἀσύμμετρον δέ. καὶ γὰρ ἡ φύσις αὐτὸ ποιεῖ κατὰ πᾶν μέτρον ἀκοινώνητον τῷδέ τινι. ἐν μὲν οὖν τοῖς πρώτοις περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων διαλαμβάνει πρὸς τὴν φύσιν αὐτῶν αὐτὰ ἐξετάζων, ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων οὐ πασῶν· τινὲς γὰρ αὐτῷ ὡς ἐνιστάμενοι ἐγκαλοῦσιν· ἀλλὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει. ἐπιστήμης δὲ τὰ αἴτια καὶ ἀρχηγικὰ καὶ ἁπλᾶ ἐπισκέπτεσθαι, οὐ τὰ καθ' ἕκαστα καὶ ἄπειρα. ἐκτίθεται δ' οὖν τῶν ἀλόγων ἁπλᾶ εἴδη ιγ̅ εὑρεθέντα κατὰ τρόπους τρεῖς, παρ' ἃ οὐχ εὑρεθήσεται ἄλλα ἁπλᾶ. εἰσὶ δὲ οἱ τρόποι ὅ τε κατὰ ἀναλογίαν, δι' οὗ μίαν εὑρίσκει, καὶ ὁ κατὰ σύνθεσιν, δι' οὗ ἕξ, καὶ ὁ κατὰ διαίρεσιν, δι' οὗ τὰς λοιπὰς ἕξ. ἦλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μὲν καὶ ὁποιονοῦν ἀριθμὸν καθ' ὁποιασοῦν τομὰς διαιρούμενον μόριόν τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, πᾶν δὲ μέγεθος ἐπ' ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόριον, ὃ διὰ τὸ εἶναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέξεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ' ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μόρια, ὧν ἕκαστον ἐπ' ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἁπλῶς τὸ μὲν μέγεθος κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι μετέχειν τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δὲ ἀριθμὸν κατὰ μὲν*

τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου. ἐπεὶ οὖν τὰ μέτρα τῶν μετρουμένων ἐλάττονα εἶναι προσήκει, μετρεῖται δὲ πᾶς ἀριθμός, ἀνάγκη πάντων ἔλαττόν τι εἶναι τὸ μέτρον. ὥστε καὶ τῶν μεγεθῶν, εἰ πάντα μετρεῖται κοινῷ μέτρῳ, ἀνάγκη εἶναί τι ἐλάχιστον. ἀλλ᾽ ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν ἔστιν· πεπέρασται γάρ, ὡς προείρηται· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν οὐκέτι. οὐκ ἄρα κοινὸν πάντων τι μεγεθῶν μέτρον. τοῦτο οὖν καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνωκότες συμμετρίαν ὡς ἦν τοῖς μεγέθεσι δυνατὸν ἐξεῦρον. πάντα γὰρ τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ μέτρον μεγέθη σύμμετρα ὠνόμασαν, τὰ δὲ οὐχ ὑποπίπτοντα τῷ αὐτῷ μέτρῳ ἀσύμμετρα, καὶ τούτων πάλιν, ὅσα μὲν ἄλλῳ τινὶ κοινῷ μετρεῖται μέτρῳ, ἀλλήλοις σύμμετρα, ὅσα δὲ μή, ἀσύμμετρα ἐκείνοις. καὶ οὕτω θέσει λαμβανομένων τῶν μέτρων πάντα εἰς συμμετρίας ἀνήγαγον διαφόρους, εἰ δὲ εἰς διαφόρους, καὶ ὡς πρός τινα οὐ πάντα σύμμετρα εἶναι δύναται. ῥητὰ δὲ πάντα καὶ πάντα ἄλογα δυνατὸν εἶναι ὡς πρός τι· διὸ τὸ μὲν σύμμετρον φύσει ἂν εἴη αὐτοῖς καὶ τὸ ἀσύμμετρον, τὸ δὲ ῥητὸν καὶ ἄλογον θέσει. εὑρίσκεται δὲ τὰ σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα τριχῶς κατὰ τὰς τρεῖς διαστάσεις· καὶ γὰρ γραμμαὶ καὶ ἐπιφάνειαι καὶ στερεά, ὡς ὁ Θέων δείκνυσι καί τινες ἄλλοι. ὅτι δὲ ἐπ᾽ ἄπειρον τὸ μέγεθος διαιρετόν, τοιούτῳ θεωρήματι κέχρηνται. ἰσόπλευρον λαβόντες τρίγωνον τέμνουσι τὴν βάσιν δίχα καὶ ἑνὶ τῶν τμημάτων ἴσον ἀποθέμενοι ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν



ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη παράλληλον ἄγουσι δι᾽ ἐκείνου, καὶ ἔσται πάλιν ἰσόπλευρον τὸ ἀπολαμβανόμενον τρίγωνον, οὗ πάλιν τὴν βάσιν κατὰ τὰ αὐτὰ τέμνοντες ὡσαύτως ποιοῦσι καὶ οὐδέποτε καταλήγουσι πρὸς τῇ τοῦ τριγώνου κορυφῇ. εἰ γὰρ καταλήξουσιν, τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τότε ἰσοπλεύρου τριγώνου ἑκατέρᾳ τῶν πλευρῶν ἴσον ἔσται. ὥστε καὶ αἱ δύο τῇ λοιπῇ· ὅπερ ἄτοπον.

ὅτι δὲ χρήσιμος ἡ τούτων θεωρία, μὴ καὶ περιττὸν λέγειν. τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ *τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν, καὶ ἴσως ᾐνίττοντο, ὅτι πᾶν τὸ ἄλογον ἐν τῷ παντὶ καὶ ἄλογον καὶ ἀνείδεον κρύπτεσθαι φιλεῖ, καὶ εἴ τις ἂν ψυχὴ ἐπιδράμοι τῷ τοιούτῳ εἴδει τῆς ζωῆς πρόχειρον καὶ φανερὸν τοῦτο ποιήσηται, εἰς τὸν τῆς γενέσεως ὑποφέρεται πόντον καὶ τοῖς ἀστάτοις ταύτης κλύζεται ῥεύμασιν. τοιοῦτον σέβας καὶ οὗτοι εἶχον οἱ ἄνδρες περὶ τὴν τῶν ἀλόγων θεωρίαν.*

19. Scholia in elementorum librum X

Ad prop. I

26. *Ὅτι οὐκ ἔστιν ἐλάχιστον μέγεθος, ὥς οἱ Δημοκρίτειοί φασιν, καὶ διὰ τούτου τοῦ θεωρήματος δείκνυται, εἴ γε παντὸς τοῦ ἐκκειμένου μεγέθους δυνατὸν ἔλαττον λαβεῖν.*

20. Scholia in elementorum librum X

Ad prop. IX

62. *Τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ᾽ ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου· ἐκεῖ γὰρ τὰ τετράγωνα τὰ ὑπὸ τετραγώνων ἀριθμῶν μετρούμενα συμμέτρους ἔχειν καὶ τὰς πλευράς φησιν. μερικὴ δὲ αὕτη ἡ πρότασις· οὐ γὰρ πάντα τὰ σύμμετρα χωρία, ὧν καὶ αἱ πλευραὶ εἰσι σύμμετροι, περιλαμβάνει.*

INDICES

VOL. III (LIBER X)

Definitiones	a	4				
Definitiones	b	6				(post theorema 47)
Definitiones	c	6				(post theorema 84)
Theoremata			115			(1–115)
Porismata				7		(in prop. 3, 4, 6, 9, 23, 111, 114)
Lemmata					11	(in prop. 9, 13, 16, 18, 21, 28, 28, 32, 41, 53, 59)

ORDO RERVM MATHEMATICARVM QVAE ELEMENTORVM LIBRO X CONTINENTVR

Propositiones decimi libri ad simplices incommensurabiles rectas construendas atque ad simplices incommensurabiles summas et differentias per eas construendas et ad simplices transformationes rectilineorum segmentorum (sc. ad transformationes duplicum radicalium formarum algebraicarum in simplicia) spectant.

Propositionibus CXII et CXIII duo rectangula per simplicissimas incommensurabiles summas et differentias construuntur.

Propositione CXIV de algebraicis quibusdam proprietatibus agitur, quae a summa in differentiam multiplicata producuntur. quia summae simplicissimarum incommensurabilium rectarum sex sunt, similiter et differentiae simplicissimarum incommensurabilium rectarum sex sunt. propositione CXIV multiplicatio primae summae in primam differentiam (rectae ex duobus nominibus in apotomen) exploratur. constructio rectae ex duobus nominibus theoremate XLVIII efficitur, apotomes autem theoremate LXXXV. valde probabile videtur quinque ex octo theorematibus, quae decimo libro exciderunt, ad multiplicationes reliquarum incommensurabilium summarum (quae ad theoremata XLIX, L, LI, LII, LIII referuntur) in reliquas incommensurabiles differentias (quae ad theoremata LXXXVI, LXXXVII, LXXXVIII, LXXXIX, XC referuntur) pertinuisse.

CONSPECTVS SIGLORVM

P	cod. Vatican. Gr. 190, s. X
B	cod. Bodleian. Dorvillian. 10, 1, s. IX
F, φ	cod. Florentin. Laurentian. 28, 3, s. X
V	cod. Vindobon. Gr. 103, s. XI–XII
b	cod. biblioth. comm. Bononiensis 18–19, s. XI
L	cod. Mus. Brit., Add. 17211, s. VII/VIII

ΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟΝ ΠΝΕΥΜΑ

Περιοδικὸν ΦΥΣΙΚΟΣ ΚΟΣΜΟΣ ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1972

Η ΕΞΕΛΙΞΙΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

Καθηγητοῦ

Μέλους τῆς Διεθνοῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων

Η ΑΦΕΤΗΡΙΑ τῆς δημιουργίας τῶν πρώτων στοιχείων τῆς Τεχνικῆς, ἀνάγεται εἰς τοὺς πρώτους χρόνους τῆς ἐμφανίσεως τοῦ ἀνθρώπου ἐπὶ τῆς Γῆς. Γεννᾶται, ὅμως, ἀμέσως τὸ ἐρώτημα, πότε ἐνεφανίσθη ὁ ἄνθρωπος εἰς τὸν πλανήτην μας. Οἱ περισσότεροι βιολόγοι παραδέχονται τὴν θεωρίαν τῆς ἐξελίξεως τῶν εἰδῶν, τὴν ὁποίαν διετύπωσε πρῶτος ὁ Ἀναξίμανδρος περὶ τὸ 550 π.Χ., ὅπως πληροφορούμεθα ἀπὸ τὴν συγγραφὴν τοῦ Πλουτάρχου «Στρωματεῖς», καὶ μετὰ 2400 περίπου ἔτη διετύπωσε καὶ ὁ Ἄγγλος φυσιοδίφης Δαρβῖνος (1731-1802).

Κατὰ τὴν γνώμην, λοιπόν, τῆς πλειονοψηφίας τῶν βιολόγων, ὁ ἄνθρωπος προῆλθεν ἐκ τῆς ἐξελίξεως τοῦ πιθήκου, περίπου ἓν ἑκατομμ. ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς μας. Ἄλλοι φυσιοδίφαι, ὅμως, ἔχουν ἀντίθετον γνώμην. Ἡ ἀνάγκη ἀμύνης ἐναντίον τῶν ἀγρίων ζώων ἔκαμε τὸν ἄνθρωπον νὰ ἐπινοήσῃ τὰ πρῶτα στοιχειώδη ὅπλα καὶ ὄργανα ἐκ λίθων. Ἡ ἐποχή, κατὰ τὴν ὁ ποίαν ἔγινεν αὐτὸ συστηματικῶς, ὀνομάζεται Παλαιολιθικὴ ἐποχή, τοποθετεῖται δὲ ὑπὸ μερικῶν ἀνθρωπολόγων 100 χιλ. ἔτη περίπου πρὸ τῆς ἐποχῆς μας.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ χρονολογία αὐτὴ ἔρχεται εἰς κάποιαν σύγκρουσιν πρὸς τὴν χρονολογίαν τῆς ἐμφανίσεως τοῦ ἀνθρώπου ἐπὶ τῆς Γῆς· μᾶς δίδει, ὅμως, τὴν εὐκαιρίαν νὰ εἰκάσωμεν τὰς δυσκολίας, τὰς ὁποίας συναντοῦν οἱ ἐπιστήμονες, προκειμένου νὰ προβοῦν εἰς κάποιαν τοποθέτησιν τῶν χρονικῶν διαστημάτων, κατὰ τὰ ὁποῖα ἀνεπτύχθη ἡ Τεχνικὴ ἰδίως κατὰ τὰς πρώτας φάσεις τῆς ἀναπτύξεως της.

Ἀπὸ τὴν Παλαιολιθικὴν ἐποχὴν φθάνομεν εἰς τὴν Νεολιθικὴν ἐποχήν, ἡ ὁποία τοποθετεῖται περὶ τὸ 15-5 χιλ. π.Χ., καὶ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τελειότερα λίθινα ὄργανα καὶ ὅπλα, ὅπως βλέπομεν εἰς τὰ λίθινα ἀντικείμενα τῶν μουσείων τῆς Χαιρωνείας καὶ τῆς Παλαιᾶς Κορίνθου. Αἱ διὰ λιθίνων ἐργαλείων χαράξεις εἰς τὰ τειχώματα τῶν σπηλαίων εἰκόνων ζώων, τοποθετοῦνται ἀπὸ ἄλλους μὲν εἰς τὴν Παλαιολιθικὴν ἐποχήν, ἀπὸ ἄλλους δὲ εἰς τὴν Νεολιθικήν. Τοιαῦτα σπήλαια ὑπάρχουν, ὡς γνωστόν, εἰς τὴν Θεσσαλίαν (εἰς τὸ Πήλιον), εἰς τὴν νότιον Γαλλίαν καὶ τὴν Ἱσπανίαν.

Μετὰ τὴν Λιθικὴν ἐποχήν, ἀκολουθεῖ ἡ ἐποχὴ τῶν μετάλλων, τῆς ὁποίας τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῆς πυρᾶς. Ἡ χρησιμοποίησις τῆς πυρᾶς εἰς τὴν Τεχνικήν, ἥτις θεωρεῖται μία ἀπὸ τὰς μεγαλειτέρας ἀνακαλύψεις τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, τοποθετεῖται περὶ τὰ 10-8 χιλ. ἔτη π.Χ. Τὰ πρῶτα ληφθέντα καθαρὰ μέταλλα ἀπὸ τὰ ὀρυκτά των, διὰ θερμάνσεως αὐτῶν, ἦσαν ὁ κασσίτερος (σημεῖον τήξεως 232 βαθμοὶ Κελσίου), ὁ μόλυβδος (σημεῖον τήξεως 327 βαθμοὶ Κελσίου), καὶ ὁ ψευδάργυρος (σημεῖον τήξεως 420 βαθμοὶ Κελσίου). Περὶ τὴν πέμπτην χιλιετίαν π.Χ. κατεσκευάσθησαν ἀνθεκτικὰ ἐργαλεῖα καὶ ὅπλα ἀπὸ ὀρειχαλκον (κοινῶς μπροῦντζον), ὁ ὁποῖος εἶναι κρᾶμα κασσιτέρου καὶ χαλκοῦ. Τὰ ἐκ σιδήρου ἐργαλεῖα καὶ ὅπλα κατεσκευάσθησαν βραδύτερον, ὅταν ὁ ἄνθρωπος κατώρθωσε νὰ ἐπιτύχῃ μεγάλας θερμοκρασίας. Ὁ Ὅμηρος μᾶς πληροφορεῖ, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Τρωικοῦ πολέμου (1200 π.Χ. περίπου) ἡ μεταλλουργία τοῦ σιδήρου ἦτο ἤδη ἀνεπτυγμένη.

Ἡ πρόοδος τῆς συγχρόνου Τεχνικῆς προϋποθέτει γνῶσιν τῶν νόμων τῆς Φύσεως, κατὰ τοὺς ὁποίους λαμβάνουν χώραν τὰ φυσικὰ φαινόμενα, ἐνῷ ἡ παλαιοτέρα Τεχνικὴ ἀνεπτύχθη ἁπλῶς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς πείρας. Αἱ πρῶται ἔρευναι διὰ τὴν ἀνακάλυψιν νόμων φυσικῶν ἀποδίδονται εἰς τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον, ὅστις περὶ τὸ 600 π.Χ. ἀνεκάλυψε τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν. Αἱ ἀνακαλύψεις αὐταὶ ἦσαν τόσον σπουδαῖαι, ὥστε δὲν ἔγιναν κατανοηταὶ ὑπὸ τῶν συγχρόνων τοῦ Θαλοῦ, ἀλλ' οὔτε καὶ ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων του! Διὰ νὰ ἐκτιμηθῇ ἡ σημασία τῶν ἀνακαλύψεων τοῦ Θαλοῦ, ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι δὲν ὑπάρχουν: ἠλεκτρικὸν φῶς, ἠλεκτρικὴ κίνησις, ραδιόφωνον, τηλοψία, ἠλεκτρικὰ πλυντήρια, τηλέφωνον, τηλέγραφος καὶ χίλια δυὸ ἄλλα πράγματα, στηριζόμενα εἰς τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν. Τὸ περίεργον ἐν προκειμένῳ εἶναι, ὅτι ἐνῷ ἡ σύγχρονος Τεχνικὴ διέπεται ἀπὸ τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν, ἡ σύγχρονος Ἐπιστήμη εὑρίσκεται εἰς ἀδυναμίαν νὰ ὁρίσῃ τί εἶναι μαγνητισμὸς καὶ τί εἶναι ἠλεκτρισμός, καὶ περιορίζεται, ἁπλῶς, νὰ προβαίνῃ εἰς ἐφαρμογάς των.

Οἱ μεταγενέστεροι τοῦ Θαλοῦ Ἕλληνες ἐπιστήμονες, ἀνεκάλυψαν τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ ἀτμὸς τοῦ ἐξατμιζομένου ὕδατος διὰ τὴν κίνησιν. Ὡς πρῶτος ἐπιστήμων χρησιμοποιήσας τὴν δύναμιν αὐτὴν ἀναφέρεται ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ ὁποῖος εἶχε κατασκευάσει τηλεβόλον λειτουργοῦν διὰ τῆς τάσεως τοῦ ἀτμοῦ. Λίθινον βλῆμα ἢ χάλκινον, βάρους 36 χιλιογράμμων (ἑνὸς ταλάντου βάρους), ἐβάλλετο εἰς ἀπόστασιν 1 000 μέτρων περίπου (6 σταδίων), καὶ κατέστρεφε τὰ πλοῖα τῶν Ρωμαίων, οἱ ὁποῖοι ἐπολιόρκουν τὴν πατρίδα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰς Συρακούσας τῆς Σικελίας (215-212 π.Χ.). Μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη, ἀναφέρεται χρησιμοποίησις τοῦ ἀτμοῦ ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, πρυτάνεως τοῦ Ἑλληνικοῦ Πολυτεχνείου τῆς Ἀλεξανδρείας (περὶ τὸν 1ον αἰ. μ.Χ.), ὁ ὁποῖος ἐχρησιμοποίησε τὴν τάσιν τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὴν λειτουργίαν αὐτομάτων μηχανημάτων, σχετιζομένων μὲ τὴν ψυχαγωγίαν τῶν πολιτῶν καὶ ἰδίως τῶν παιδιῶν. Μεταξὺ ἄλλων, ὁ Ἥρων εἶχε κατασκευάσει αὐτόματον μηχάνημα, διὰ τοῦ ὁποίου ἠνοίγοντο αὐτομάτως αἱ θύραι ναοῦ τῆς Ἀλεξανδρείας, ὅταν οἱ εὐλαβεῖς προσκυνηταὶ ἐθυσίαζον ἕνα πρόβατον πρὸς τιμὴν τοῦ λατρευομένου θεοῦ των, τὸ ὁποῖον ἔκαιον ἐπὶ εἰδικοῦ βωμοῦ πρὸ τῆς εἰσόδου τοῦ ναοῦ.

Ἡ σύγχρονος Τεχνικὴ ἔχει τὴν ἀφετηρίαν της εἰς τὸν 16ον αἰῶνα. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ αἰῶνος αὐτοῦ, ὁ Ἄγγλος Τζίλμπερτ (1544-1603), ἰατρὸς τῆς βασιλίσσης Ἐλισάβετ τῆς Ἀγγλίας, ἐνεθυμήθη τὰς ἀνακαλύψεις τοῦ Θαλοῦ καί, κατὰ τὰς ὥρας τῆς σχολῆς του, ἤρχισε νὰ κάμνῃ πειράματα ἠλεκτρισμοῦ καὶ μαγνητισμοῦ. Τὸ ὄνομα «ἠλεκτρισμός», διὰ τὰ ἠλεκτρικὰ φαινόμενα, ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Τζίλμπερτ, ὁ ὁποῖος ἔλαβεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ ἤλεκτρον (κεχριμπάρι), εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Θαλῆς εἶχε παρατηρήσει τὴν ἕλξιν, ὑπ' αὐτοῦ, μικρῶν καὶ ἐλαφρῶν ὑλικῶν σωμάτων. Τὸ δὲ ὄνομα «μαγνητισμὸς» ἐλήφθη πάλιν ἀπὸ τὸν Θαλῆν, ὅστις εἶχε παρατηρήσει ἕλξιν μικρῶν σιδηρῶν ἀντικειμένων ἀπὸ ὀρυκτὸν ἐξαγόμενον εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Ἑλληνικῆς πόλεως τῆς Μικρᾶς Ἀσίας, ἥτις ὠνομάζετο Μαγνησία — ὅπως ὀνομάζεται καὶ σήμερον.

Κατὰ τὸ τέλος τοῦ 18ου αἰῶνος, ὁ Ἄγγλος φυσικὸς καὶ μηχανικὸς Βὰτ κατεσκεύασε τὴν πρώτην μηχανήν, ἡ ὁποία ἐχρησιμοποίησεν ὡς κινητήριον δύναμιν τὸν ἀτμόν. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ εἴδη Τεχνικῆς, τὰ ὁποῖα ἀνεπτύχθησαν χωρὶς τὰς δυνάμεις τοῦ ἠλεκτρισμοῦ, τοῦ μαγνητισμοῦ καὶ τοῦ ἀτμοῦ, ὅπως λ.χ. εἶναι ἡ τεχνικὴ τῆς τυπογραφίας, κατὰ τοὺς πρώτους χρόνους μετὰ τὴν ἀνακάλυψιν αὐτῆς (περὶ τὸ 1450).

Ἡ ἐξέλιξις τῆς Τεχνικῆς στηρίζεται εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν Μαθηματικῶν, τῆς Μηχανικῆς, τῆς Φυσικῆς καὶ τῆς Χημείας. Αἱ συναφεῖς ἐπιστημονικαὶ ἔρευναι συνεχίζονται ἀπὸ τῆς Κλασσικῆς ἐποχῆς· τὰ ἀποτελέσματα ὅμως τῶν ἐρευνῶν αὐτῶν ἀναφαίνονται μὲ βραδὺν ρυθμόν. Ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ ἀτομικὴ θεωρία τοῦ Λευκίππου καὶ τοῦ Δημοκρίτου, ἡ ὁποία εἶχε περιπέσει εἰς λήθην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεσύρθη κατὰ τὸ τέλος τοῦ 19ου αἰῶνος. Κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχήν, περίπου, ἀνεκαλύφθησαν αἱ ἀκτῖνες Ραΐντγκεν, τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ σημασία εἰς τὴν Ἰατρικὴν ἐπιστήμην. Ἡ σπουδὴ τῶν ραδιενεργῶν στοιχείων ἀνοίγει νέους δρόμους εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ὕλης, ἐνῷ ἡ σπουδὴ τοῦ ἀτόμου (τῆς ὕλης) προσελκύει, κατὰ τὸν τρέχοντα αἰῶνα, τὴν προσοχὴν σπουδαίων ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι μὲ τὰς ἐρεύνας των προσφέρουν μεγάλας ὑπηρεσίας εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Τεχνικῆς. Τὸ μέγα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀπασχολεῖ τοὺς ἐπιστήμονας τοῦ διανυομένου αἰῶνος εἶναι ἡ σχέσις ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ ὕλης καὶ ἐνεργείας, κυρίως, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς. Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον προκαλεῖ ἡ προσπάθεια σταδιακῆς μετατροπῆς τοῦ ὑδρογόνου εἰς κινητήριον δύναμιν. Ἡ ἔκρηξις μιᾶς βόμβας ὑδρογόνου, χαρακτηρίζεται ἀπὸ στιγμιαίαν μετατροπὴν ὕλης (τοῦ ὑδρογόνου) εἰς ἐνέργειαν. Ἐὰν ἀνακαλυφθῇ τρόπος βαθμιαίας μετατροπῆς τῆς δυνάμεως τοῦ ὑδρογόνου εἰς ἐνέργειαν, ὑπολογίζεται ὅτι ἡ Τεχνικὴ θὰ λάβῃ τεραστίαν ἀνάπτυξιν. Ὑποτίθεται δέ, ὅτι μὲ ἕνα τοιοῦτον βραδὺν ρυθμὸν λειτουργοῦν καὶ αἱ ἑκατοντάδες δισεκατομμυρίων ἡλίων τοῦ σύμπαντος κόσμου, οἱ ὁποῖοι ἀδιακόπως διαχέουν εἰς τὸ σύμπαν ἐνέργειαν, προερχομένην ἐκ βαθμιαίας μετατροπῆς τοῦ ὑδρογόνου εἰς ἐνέργειαν (θερμικὴν ἐνέργειαν κλπ.).

ΕΚΔΟΣΕΙΣ*

1. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΑ Ι. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1946.
2. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1946.
3. ΤΟ ΔΗΛΙΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΙΣ ΓΩΝΙΑΣ. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1949.
4. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆν. 1950.
5. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Στοιχείων βιβλία 1 - 4. Εἰσαγωγή, ἀρχαῖον κείμενον - μετάφρασις. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1952.
6. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ — ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλία V - IX. Εἰσαγωγή, ἀρχαῖον κείμενον - μετάφρασις, ἐπεξηγήσεις. Ἔκδοσις Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων. Ἀθῆναι 1953.
7. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλίον X. Εἰσαγωγή, ἀρχαῖον κείμενον - μετάφρασις, ἐπεξηγήσεις. Ἔκδοσις Ἐθνικοῦ Τυπογραφείου. Ἀθῆναι 1956.
8. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλία XI - XIII. Ἔκδοσις Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων. Ἀθῆναι 1957.
9. ΑΝΘΟΛΟΓΙΑ ΑΡΧΑΙΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ. Μαθηματικὰ - Ἀστρονομία - Φυσικὴ - Μηχανικὴ - Γεωγραφία. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1960.
10. ΑΝΘΟΛΟΓΙΑ ΑΡΧΑΙΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ. (Μετάφρασις προηγουμένου, ἐκτὸς Φυσικῆς Γεωγραφίας). Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1961.
11. ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ. Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ. Εἰσαγωγή, ἀρχαῖον κείμενον - μετάφρασις, ἐπεξηγήσεις. Ἔκδοσις Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων. Ἀθῆναι 1963.
12. ΠΡΟΣΩΚΡΑΤΙΚΟΙ ΦΙΛΟΣΟΦΟΙ. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1966.
13. Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ. Ἰδίαις δαπάναις. Ἀθῆναι 1968.
14. EUCLIDES I, ELEMENTA I - IV. Post I. L. Heiberg edidit E.S. Stamatis. BSB B. G. Teubner, Leipzig 1969.
15. EUCLIDES II, ELEMENTA V - IX. Post I. L. Heiberg, edidit E.S. Stamatis. BSB B. G. Teubner, Leipzig 1970.
16. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, τόμος Α', μέρη Α' καὶ Β'. Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος. Ἀθῆναι 1970.
17. ARCHIMEDIS OPERA OMNIA, CUM COMMENTARIIS EUTOCII. Iterim edidit IOHAN LUDWIG HEIBERG, corrigenta adiecit Evangelos S. Stamatis, vol. I, II, III, Studgardiae in aedibus B. G. Teubner, MCMLXXII (Στουτγάρδη, Δυτικῆς Γερμανίας, 1972).
18. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, τόμος Β'. Εἰσαγωγή, ἀρχαῖον κείμενον - μετάφρασις, σχόλια κ.λπ. Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος. Ἀθῆναι 1973.

* Αἱ ὑπ' ἀριθμ. 1 - 4 περιλαμβάνονται καὶ εἰς τὸν Α' τόμον.

ΤΟΜΟΣ Β'

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ ΕΡΓΑΣΙΑΙ ΑΡΘΡΑ

ΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ