# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

*«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν*
*ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».*
*Πλάτωνος Πολιτεία 450Β*

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ

# ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

*Συλλογή επιστημονικών εργασιών και βιβλιοκριτικών περιοδικού «Πλάτων» 1949-1986*


Συμβολή εις την ερμηνείαν γεωμετρικού χωρίου του διαλόγου του Πλάτωνος "Μένων"
Τεύχος Β (6), σ. 218-227, 1951 σελ. 4

Το θυμαρίδειον επάνθημα
Τεύχος Α (7), σ. 123-142, 1952 σελ. 15

Αριθμοί τέλειοι, πλευρικοί, διαμετρικοί. Η $\sqrt{2}$
Τεύχος Β (8), σ. 289-297, 1952 σελ. 36

Ο αναδρομικός συλλογισμός παρά τω Ευκλείδη
Τεύχος Α (9), σ. 116-119, 1953 σελ. 47

Μια παρατήρησις επί του υπολογισμού της $\sqrt{2}$ παρά τοις αρχαίοις
Τεύχος Β (10), σ. 322-324, 1953 σελ. 52

Περί των ασσυμέτρων αριθμών παρά τοις αρχαίοις
Τεύχος Α (13), σ. 77-84, 1955 σελ. 56

Γεωμετρική απόδειξις του υπό του Αρχιμήδους αριθμητικού υπολογισμού της $\sqrt{3}$
Τεύχος Β (14), σ. 305-311, 1955 σελ. 65

Οι μαθηματικοί της Βασιλείας του 18ου αιώνος
Τεύχος Β (14), σ. 312, 1955 σελ. 72

Συμβολή εις την έρευναν της γεωμετρικής άλγεβρας των Πυθαγορείων
Τεύχος Α/Β (15/16), σ. 144-157, 1956 σελ. 74

Επί του Ευκλειδείου θεωρήματος ότι οι κύκλοι είναι προς αλλήλους ως τα τετράγωνα των διαμέτρων
Τεύχος Α (17), σ. 58-61, 1957 σελ. 91

Επί του μαθηματικού χωρίου του Θεαιτήτου του Πλάτωνος Α'
Τεύχος Α (17), σ. 61-66, 1957 σελ. 94

Επί του μαθηματικού χωρίου του Θεαιτήτου του Πλάτωνος , μέρος ΙΙ
Τεύχος Α (17), σ. 67-68, 1957 σελ. 100

Παρατηρήσεις τινές επί των δι'επαναλήψεως διαδοχικών προσεγγίσεων παρά τοις αρχαίοις
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 321-327, 1958 σελ. 103

On book X of Euclid's elements
Τεύχος Β (22), σ. 371-384, 1959 σελ. 111

Επί του Χ βιβλίου των στοιχείων του Ευκλείδου
Τεύχος Β (22), σ. 385-398, 1959 σελ. 125

Γενίκευσις ενός προβλήματος απροσδιορίστου αναλύσεως του Διοφάντου
Τεύχος Α/Β (23/24), σ. 175-182, 1960 σελ. 140

Περί της θεωρίας των συνόλων παρά Πλάτωνι
Τεύχος Α/Β (23/24), σ. 225-229, 1960 σελ. 148

Ανακατασκευή του αρχαίου κειμένου τεσσάρων ελλειπόντων προβλημάτων των αριθμητικών του Διοφάντου
Τεύχος Α/Β (25/26), σ. 125-137, 1961 σελ. 155

Παρατηρήσεις τινές επί της μεθόδου "παρισότητος αγωγή" του Διοφάντου (Μέθοδος προσεγγίσεως)
Τεύχος Α/Β (25/26), σ. 318-325, 1961 σελ. 168

Επί των ορισμών 17 και 18 του 5ου βιβλίου των στοιχείων του Ευκλείδου και του όρου "δι' ίσου"
Τεύχος Α/Β (27/28), σ. 310-314, 1962 σελ. 178

A contribution to the interpretation of geometric passage of the dialogue Menon, Platos, (86e-87b)
Τεύχος Α/Β (27/28), σ. 315-320, 1962 σελ. 183

Γενίκευσις ενός θεωρήματος του Αρχιμήδους
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 165-168, 1963 σελ. 190

Ανάλυσις ενός προβλήματος των αριθμητικών του Διοφάντου
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 285-289, 1963 σελ. 194

Αι αναλογίαι των αρχαίων Ελλήνων και η σχέσις της αρμονικής αναλογίας προς τον τύπον των κοίλων σφαιρικών κατόπτρων
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 290-293, 1963 σελ. 199

Ανάλυσις προβλημάτων τινών εκ των αριθμητικών του Διοφάντου (IV, 39. V, 10, 11, 12, VI, Λήμματα 1, 2, Πρόβλημα 12)
Τεύχος Α/Β (31/32), σ. 129-142, 1964 σελ. 204

Η οπτική εν τη αρχαία Ελλάδι και το ιστορικόν λεξικόν της οπτικής ορολογίας των Ελλήνων υπό Καρόλου Μούγκλερ
Τεύχος Α/Β (33/34), σ. 13-25, 1965 σελ. 219

Συμβολή εις την ερμηνείαν μουσικού χωρίου του διαλόγου του Πλάτωνος Τιμαίος
Τεύχος Α/Β (35/36), σ. 257-276, 1966 σελ. 233

Δυνάμεις με κλασματικούς εκθέτας παρ' Αρχιμήδει
Τεύχος Α/Β (37/38), σ. 111-117, 1967 σελ. 255

Αρχιμήδεια Ι
Τεύχος Α/Β (37/38), σ. 150-153, 1967 σελ. 262

Περί του αξιώματος της συνεχείας
Τεύχος Α/Β (39/40), σ. 144-147, 1968 σελ. 268

Ανέκδοτα έργα Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων σωζομένα εις την Αραβικήν
Τεύχος 47/48, σ. 102-105, 1972 σελ. 273

Κανονικόν επτάγωνον του Αρχιμήδους
Τεύχος 49/50, σ. 274-277, 1973 σελ. 278

Το άθροισμα των τετραγώνων των αριθμών
Τεύχος 53/54, σ. 103-108, 1975 σελ. 283

Το άθροισμα των κύβων των αριθμών
Τεύχος 53/54, σ. 254-255, 1975 σελ. 289

Τα εις την Αραβικήν ευρεθέντα τέσσαρα νέα βιβλία των αριθμητικών του Διοφάντου
Τεύχος 55/56, σ. 121-133, 1976 σελ. 292

Αβλεπτήματα εις Διογένην Λαέρτιον
Τεύχος 57/58, σ. 85, 1977 σελ. 308

Η ανακάλυψις της ασσυμετρίας υπό του Πυθαγόρου
Τεύχος 57/58, σ. 187-190, 1977 σελ. 309

Αριθμητικοί ορισμοί του Ευκλείδου, η μουσική αναλογία και ο Ιάμβλιχος
Τεύχος 59/60, σ. 69-72, 1978 σελ. 314

Ο ζυγός του Αρχιμήδους
Τεύχος 61/62, σ. 265-267, 1979 σελ. 319

Το πρόβλημα του χώρου
Τεύχος 63/64, σ. 246-249, 1980 σελ. 324

Η ακουστική του αρχαίου Ελληνικού θεάτρου
Τεύχος 67/68, σ. 3-7, 1982 σελ. 329

Περί του μαθηματικού Ευκλείδου
Τεύχος 73/74, σ. 223, 1985 σελ. 335

# *Βιβλιοκριτικαί*

**Ε. Σ. Σταμάτη**, «Το δήλιον πρόβλημα και η τριχοτόμησις γωνίας», σελ. 32, 1949, υπό Κ. Δ. Γεωργούλη
σ. 100-102, 1949 σελ. 337

**Ε. Σ. Σταμάτη**, «Αρχιμήδους Κύκλου μέτρησις. Εισαγωγή, Αρχαίον κείμενον, Μετάφρασις, Επεξηγήσεις», σελ. 30, 1950, υπό Κ. Δ. Γεωργούλη
Τεύχος Α (3), σ. 158-164, 1950 σελ. 341

**Ε. Σ. Σταμάτη**, «Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχείων Βιβλία Ι. ΙΙ. ΙΙΙ. IV. Εισαγωγή – Αρχαίον κείμενον – Μετάφρασις. Τόμος Ι», σελ. 179, 1952, υπό Κ. Δ. Γεωργούλη
Τεύχος Α (9), σ. 174-177, 1953 σελ. 350

**B. L. Van Der Waerden**, «Die Arithmetik der Pythagoreer. II. Die Theorie des Irrationalen», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (9), σ. 179-181, 1953 σελ. 354

**Ιωσήφ Ε. Χόφμαν**, «Ιστορία των μαθηματικών από των αρχών μέχρι της εμφανίσεως του Φερμά και του Καρτεσίου», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Β (10), σ. 331-332, 1953 σελ. 358

**E. J. Dijksterhuis**, «1) Deux traductions de Proclus», «2) Die Integrationsmethoden von Archimedes», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (13), σ. 165, 1955 σελ. 361

**E. J. Dijksterhuis**, « Archimedes», 1956, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (15/16), σ. 261-263, 1956 σελ. 363

**Walter Hohlbrugger**, «Επί της ετυμολογίας των αριθμών 8 και 9», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (17), σ. 170-172, 1957 σελ. 368

**Αλκιβιάδου Π. Ταγκαλάκη**, «Σχήμα και μέγεθος της γης (εισαγωγή εις την ανωτέραν γεωδαισίαν)», σελ. 58, 1956, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (17), σ. 172-173, 1957 σελ. 370

**Ιωάννου Γρ. Αυδή**, «Συμβολή εις την σπουδήν των Στοιχειωδών μαθηματικών», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (17), σ. 173-174, 1957 σελ. 371

**Νικολάου Γ. Φωτεινού**, «Ναυτικά, η συμβολή των Ελλήνων εις την διαμόρφωσιν της θεωρητικής ναυτιλίας», σελ. 172, 1955, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (17), σ. 174-178, 1957 σελ. 372

**Ιωσήφ Χόφμαν**, «Ιστορία των μαθηματικών, 2ον και 3ον μέρος», 1957, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 388-390, 1958 σελ. 378

**Παναγιώτου Ν. Μάγειρα**, «Α'. Αλγεβρικά Θέματα, Σειρά Α'. Έκδ. δευτέρα» σελ. 330, 1958, «Β'. Αλγεβρικά Θέματα, Σειρά Β'.» σελ. 228, 1952, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 390-392, 1958 σελ. 380

**Αντωνίου Χατζόπουλου**, «Παρατηρήσεις επί της αναλύσεως του τριωνύμου Β' βαθμού εις γινόμενον παραγόντων», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 392-393, 1958 σελ. 382

**Χρήστου Β. Γκλάβα**, «Το σύστημα των αριθμών της Άλγεβρας. Θεωρητική σπουδή του συστήματος των αριθμών της Άλγεβρας μετά ιστορικού σημειώματος», σελ. 120, 1957, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 393-394, 1958 σελ. 383

**Ευάγγ. Σ. Σταμάτη**, «Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία 13, τόμοι 4», υπό Κ. Δ. Γεωργούλη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 399-407, 1958 σελ. 385

**Walter Hohlbrugger**, «Επί της ετυμολογίας των αριθμητικών τρεις, τέσσαρες και πέντε», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 407-409, 1958 σελ. 393

**Siegfried Lauffer**, «Οι δούλοι των μεταλλείων του Λαυρείου – Μέρος δεύτερον: Κοινωνικαί σχέσεις, Εξεγέρσεις», 1956, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 415-419, 1958 σελ. 396

**Charles Mugler**, «Ιστορικόν λεξικόν της γεωμετρικής ορολογίας των Ελλήνων. Εισαγωγή. Α-Κ», σελ. 272, 1958, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (19/20), σ. 429-433, 1958 σελ. 401

**Siegfried Heller**, «Η ανακάλυψις της διαιρέσεως ευθείας εις άκρον και μέσον λόγον υπό των Πυθαγορείων», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 237-239, 1959 σελ. 408

**Leonhard Euler**, «Πλήρης εισήγησις εις την Άλγεβραν», σελ. 571, 1959, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 240-241, 1959 σελ. 411

**Δημητρίου Κωτσάκη**, «Αι επιστήμαι κατά τους τρεις τελευταίους αιώνας του Βυζαντίου», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 256-257, 1959 σελ. 413

**Ιωάννου Γ. Αργυράκου**, «Μελέτη του Αστρολαβίου του Συνεσίου Κυρήνης», σελ. 14, 1958, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 258, 1959 σελ. 415

**Σπυρίδωνος Παν. Ζέρβου**, «Γεωμετρία. Χώροι ανυσματικοί επί σώματος μεταθετικού καθ'ολοκληρίαν διατεταγμένου», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 259, 1959 σελ. 416

**Χρήστου Β. Γκλάβα**, «Συμβολή εις την χρήσιν του πολικού συστήματος», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 259-260, 1959 σελ. 416

**Δημητρίου Ν. Κατσή**, «Τα ημερολόγια και ο κανών του Πάσχα», 1959, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α (21), σ. 260-261, 1959 σελ. 417

**Charles Mugler**, «Ιστορικόν λεξικόν της γεωμετρικής ορολογίας των Ελλήνων. Λ-Ω», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (23/24), σ. 315-317, 1960 σελ. 420

**Α. Γ. Γαλανόπουλου**, «Επί του μεγέθους και της γεωγραφικής θέσεως της Ατλαντίδος», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (25/26), σ. 333-335, 1961 σελ. 424

**Νικολάου Σωτ. Μπάρκα**, «Διδακτική των Μαθηματικών και Φυσικών μαθημάτων», σελ. 284, 1962, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (25/26), σ. 335-337, 1961 σελ. 426

**Θεοδ. Ν. Κονταργύρη**, «Το πνεύμα των αρχαίων Ελλήνων», σελ. 53, 1958, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (25/26), σ. 337, 1961 σελ. 428

**Δημητρίου Δ. Κωτσάκη**, 1. «Ηλιακαί εκλάμψεις και τηλεπικοινωνίαι», 1962, 2. «Ήλιος, γεωμαγνητισμός και πολικόν σέλας», 1962, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (27/28), σ. 473-474, 1962 σελ. 430

**Δημητρίου Ν. Κατσή**, «Θεωρία των εκλείψεων του Ηλίου και της Σελήνης», σελ. 88, 1961, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (27/28), σ. 474-476, 1962 σελ. 431

**Ν. Γ. Φωτεινού**, «Περί του Μαρίνου του Τυρίου, μεγάλου Έλληνος γεωγράφου και επινοητού (σχεδιαστού) του σύγχρονου ναυτικού χάρτου», σελ. 143, 1960, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (27/28), σ. 476-478, 1962 σελ. 433

**Κωνσταντίνου Δ. Γεωργούλη**, «Αριστοτέλης ο Σταγιρίτης», μονογραφία, σελ. 440, 1962, υπό Β. Α. Καλογερά
Τεύχος Α/Β (27/28), σ. 478-479, 1962 σελ. 435

**Μαυρικίου Α. Μπρίκα**, «Μαθήματα θεωρίας επιφανειών», Τεύχος ΙΙ, 1963, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 319-320, 1963 σελ. 438

**Θεοδώρου Α. Βουτετάκη**, «Γενική Θεωρία των Συνόλων», σελ. 279, 1963, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 320-321, 1963 σελ. 439

**Παναγιώτου Ν. Μάγειρα**, «Τριγωνομετρικά θέματα μετά σημειώσεων αλγέβρας και αναλύσεως», 1963, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 322, 1963 σελ. 441

**Joseph E. Hofmann**, «Ιστορία των μαθηματικών Ι», 1963, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 323-324, 1963 σελ. 442

**Antonio Maddalena**, «Ιωνικοί φιλόσοφοι, μαρτυρίαι και αποσπάσματα», 1963, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (29/30), σ. 324-325, 1963 σελ. 443

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Διοφάντου Αριθμητικά. Η Άλγεβρα των Αρχαίων Ελλήνων. Αρχαίον κείμενον, μετάφρασις, επεξηγήσεις», σελ. 574, 1963, υπό Κ. Δ. Γεωργούλη
Τεύχος Α/Β (31/32), σ. 351-354, 1964 σελ. 446

**Robert S. Brumbaugh**, «Αρχαία ελληνικά μηχανήματα και μηχαναί», 1966, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (35/36), σ. 375, 1966 σελ. 452

**H. G. Zeuthen**, «Περί των κωνικών τομών κατά την αρχαιότητα, μετά προλόγου και βιβλιογραφίας υπό J. E. Hofmann», σελ. 522, 1966, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (35/36), σ. 375-378, 1966 σελ. 452

**Charles Mugler**, «Ευκλείδης, Επιτομή των Στοιχείων», σελ. 128, 1967, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (37/38), σ. 344-345, 1967 σελ. 457

**Miguel Parra Leon**, «Πυθαγόρας, Ιδρυτής της Μαθηματικής Επιστήμης», σελ. 303, 1966, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (37/38), σ. 345-348, 1967 σελ. 458

**Das Deutsche Museum**, «Δημοσιεύσεις του Ινστιτούτου Ερευνών του Γερμανικού Μουσείου διά την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών και της Τεχνικής», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (37/38), σ. 373-376, 1967 σελ. 462

**Ιωάννου Γ. Αργυράκου**, «Γεωδαιτική Αστρονομία», σελ. 338, 1968, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος Α/Β (39/40), σ. 351-353, 1968 σελ. 467

**Euclides,** «Elementa I-V», Leipzig 1969, «Elementa V-IX», Leipzig 1970, post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B. G. Teubner, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 43/44, σ. 355-356, 1970 σελ. 472

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Αρχιμήδους άπαντα», τόμος Α' μέρος Α' και Β', σελ. XII/382, XVI/538, 1970, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 43/44, σ. 356-358, 1970 σελ. 473

**Charles Mugler**, «Archimède», tome I, II et III, 1970-71, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 45/46, σ. 377-379, 1971 σελ. 478

**Helmuth Gericke**, «Geschichte des Zahlbegriffs», υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 45/46, σ. 379-380, 1971 σελ. 480

**Charles Mugler**, «Archimède», tome IV. Commentaires d'Eutocius. Fragments, 1972, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 47/48, σ. 353, 1972 σελ. 483

**Βίκτωρος Τζαθά**, «Περί εξαγωγής της νυοστής ρίζης παντός ακεραίου αριθμού (προσεγγιστικώς), τη βοηθεία διαδοχικών τετραγωνικών ριζών» , υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 47/48, σ. 353-354, 1972 σελ. 483

**«Δημοσιεύσεις του Ινστιτούτου Ερευνών του Γερμανικού Μουσείου του Μονάχου διά την Ιστορίαν των Φυσικών Επιστημών και της Τεχνικής»**, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 47/48, σ. 354-355, 1972 σελ. 484

**Euclides**, «Elementa X», post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B. G. Teubner, Leipzig 1972, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 47/48, σ. 362-363, 1972 σελ. 486

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Αρχιμήδους άπαντα», τόμος Β', σελ. XIX/586, 1973, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 49/50, σ. 356, 1973 σελ. 489

**Gino Loria**, «Ιστορία των Μαθηματικών», τόμοι 3, μετάφρασις υπό Μιχ. Κ. Κωβαίου, 1971, 1972, 1974, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 51/52, σ. 313-317, 1974 σελ. 491

**Euclides**, «Elementa XI- XIII», post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B. G. Teubner, Leipzig 1973, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 51/52, σ. 322, 1974 σελ. 496

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Αρχιμήδους άπαντα», τόμος Γ', σελ. XLIII/386, 1974, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 51/52, σ. 322-324, 1974 σελ. 496

**Αργύρης Πετρονώτης**, «Zum Problem der Bauzeichnungen bei der Griechen», σελ. 63, 1972, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 51/52, σ. 341-342, 1974 σελ. 499

**J. Hofmann**, «Ετυμολογικόν Λεξικόν της Αρχαίας Ελληνικής», 1974, υπό Θεώνης Χριστοπούλου-Μικρογιαννάκη
Τεύχος 53/54, σ. 352-353, 1975 σελ. 502

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Απολλωνίου Κωνικά», τόμος Α', σελ. XI/389, 1975, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 53/54, σ. 382-384, 1975 σελ. 504

**Euclides**, «Elementa X», post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B. G. Teubner, Leipzig 1972, υπό Ch. Mugler
Τεύχος 57/58, σ. 303, 1977 σελ. 508

**Euclides**, «Elementa XIV, XV, Scholia in libros I-V», post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B. G. Teubner, Leipzig 1977, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 57/58, σ. 303-304, 1977 σελ. 508

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Αρχιμήδους άπαντα», τόμος Ι, μέρη 2, 1970, τόμος ΙΙ, 1973, τόμος ΙΙΙ, 1974, υπό Ι. Γ. Μπασμάκοβα, Μπ. Α. Ρόζενφελτ
Τεύχος 57/58, σ. 304-307, 1977 σελ. 509

**Νικολάου Σ. Πνευματικού**, «Μιγαδικοί Αριθμοί – Θεωρία, ασκήσεις, εφαρμογαί», σελ. 256, 1977, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 57/58, σ. 329, 1977 σελ. 513

**Euclides**, «Scholia in libros VI-XII», post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B. G. Teubner, Leipzig 1977, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 59/60, σ. 300-301, 1978 σελ. 515

**Δημητρίου Δ. Μούκανου**, «Ο τρόπος του είναι των μαθηματικών αντικειμένων κατά τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη», Διατριβή επί διδακτορία, σελ. 127, 1979, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 61/62, σ. 282-284, 1979 σελ. 518

**Ευάγγελου Σ. Σταμάτη**, «Απολλωνίου Κωνικά», τόμος Β', σελ. VIII/277, τόμος Γ', σελ. 355, τόμος Δ', σελ. 388, 1976, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 61/62, σ. 311, 1979 σελ. 521

**Georges J. Kayas**, «Euclide, Les Elements», 2 τόμοι, 1978, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 61/62, σ. 341-342, 1979 σελ. 522

**Arpad Szabo**, «Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών», σελ. 502, 1973, υπό Παν. Κ. Γεωργούντζου
Τεύχος 61/62, σ. 343-347, 1979 σελ. 524

**«Ιστορία και Μεθοδολογία των Φυσικών Επιστημών του Πανεπιστημίου της Μόσχας»**, XX έκδοσις, σελ. 222, 1978, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 61/62, σ. 347-348, 1979 σελ. 528

**Ivor Thomas**, «Greek Mathematical Works I, Thales to Euclid», σελ. 508, 1980, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 63/64, σ. 451, 1980 σελ. 532

**Δημητρίου Μούκανου**, «Οντολογική θεώρησις της αρχής της απροσδιοριστίας του Werner Heisenberg», σελ. 73, υπό Ε. Σταμάτη
Τεύχος 75/76, σ. 242-245, 1986 σελ. 534

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

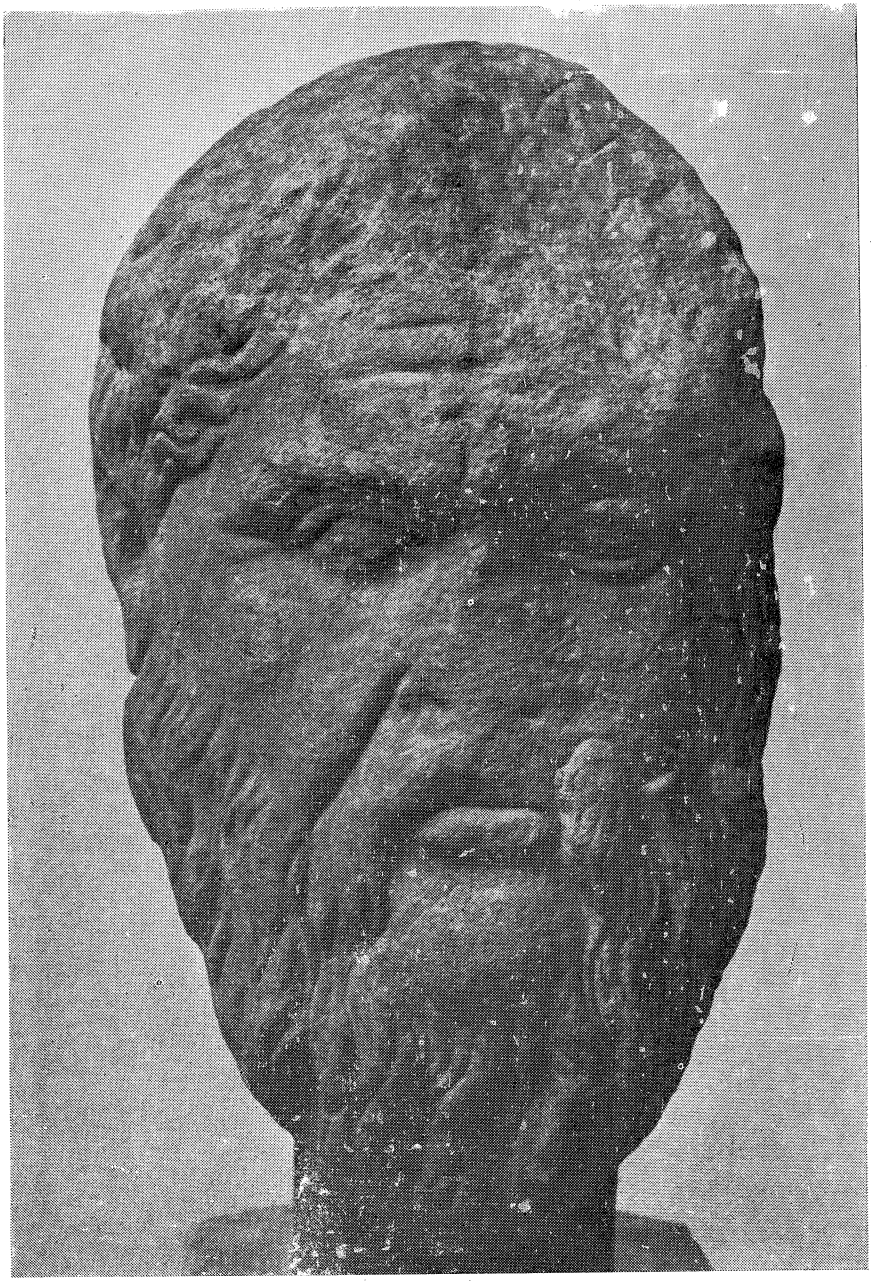
«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Γ' 1951
ΤΕΥΧΟΣ Β'
6

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1951

Universitäts bibliothek * Universitätsbibliothek
Freie
Universität
Berlin

Z 1965.3920



ΠΛΑΤΩΝ

# ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ "ΜΕΝΩΝ„

1. Ὁ διάλογος τοῦ Πλάτωνος «Μένων» ὑποστηρίζεται, ὅτι ἐγράφη μετὰ τὴν ἐπιστροφὴν τοῦ Πλάτωνος εἰς Ἀθήνας, ἐκ τοῦ πρώτου ταξιδίου αὐτοῦ εἰς Σικελίαν. Ὁ H. Leisegang εἰς τὸ περισπούδαστον ἄρθρον αὐτοῦ «Plato» τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν Real Enzyklopaedie, Pauly-Wissowa, 1951 (σελίδες 195) τοποθετεῖ τὸν μὲν «Πρωταγόραν» ὡς τέταρτον διάλογον τοῦ Πλάτωνος, τὸν δὲ «Μένωνα» ὡς δέκατον τέταρτον *. Ἐγράφη δηλ. ὁ «Μένων» πρὶν ἢ ἀκόμη ἡ Ἀκαδημία ἀνοίξῃ τὰς πύλας της καὶ κατ' ἀκολουθίαν πρὶν ἢ ἀκόμη ἴδουν τὸ φῶς αἱ περίφημοι μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τοῦ Εὐδόξου, τοῦ Μεναίχμου, τοῦ Θεαιτήτου κλπ. αἱ ὁποῖαι ἐγένοντο καθ' ὃν χρόνον ἐλειτούργει ἡ Ἀκαδημία.

Εἰς τὸν «Πρωταγόραν» ἔχει θιγῆ, ὡς γνωστόν, τὸ πρόβλημα ἂν ἡ ἀρετὴ εἶναι διδακτὴ ἢ οὔ. Εἰς τὸν «Μένωνα» ὅμως τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ κύριον θέμα τοῦ διαλόγου. Κατὰ τὴν προχώρησιν τοῦ διαλόγου, ὁ Σωκράτης ἐπιθυμῶν ν' ἀποδείξῃ ὅτι πᾶσα μάθησις εἶναι «ἀνάμνησις», ἐπιτυγχάνει τοῦτο καθοδηγῶν διὰ τῆς συζητήσεως ἕνα ἐκ τῶν παρισταμένων δούλων, ἀγνοοῦντα τελείως τὴν γεωμετρίαν, ν' ἀνακαλύψῃ ὅτι «δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α, ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου τετραγώνου εἶναι $\alpha\sqrt{2}$ ».—(81e—85c).

Προϊόντος τοῦ διαλόγου ὁ Σωκράτης λέγει τ' ἀκόλουθα :

«Ἔοικεν οὖν σκεπτέον εἶναι ποιόν τί ἐστιν ὃ μήπω ἴσμεν ὅ,τι ἐστιν. Εἰ μή τι οὖν ἀλλὰ σμικρὸν γέ μοι τῆς ἀρχῆς χάλασον, καὶ συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι, εἴτε διδακτόν ἐστιν εἴτε ὁπωσοῦν. *Λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόν τε εἰς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἴποι ἄν τις, οὔπω οἶδα εἰ ἔστι τοῦτο τοιοῦτον, ἀλλ' ὥσπερ μέν τινα ὑπόθεσιν προὔργου οἶμαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μὲν ἔστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ

* Τὸ ἄρθρον τοῦτο μοὶ παρεχωρήθη εὐγενῶς ὑπὸ τοῦ φίλου, καθηγητοῦ τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν, κ. Κ. Βουρβέρη, πρὸς ὃν ἀπεστάλη κατὰ τὸ τέλος τοῦ 1950 ὑπὸ τοῦ H. Leisegang, μετὰ τὴν πρώτην διόρθωσιν τῶν δοκιμίων, καὶ πρὶν ἀκόμη τοῦτο δημοσιευθῇ.

χωρίφ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατον ἐστιν ταῦτα παθεῖν. Ὑποθέμενος οὖν ἐθέλω εἰπεῖν σοι τὸ συμβαῖνον περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον, εἴτε ἀδύνατον εἴτε μὴ (86e—87b). *Ἑρμην. λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὑπὸ τὴν ἐξῆς ἔννοιαν, ὅπως δηλ. οἱ γεωμέτραι πολλάκις ἐρευνοῦν, ὅταν τις ἐρωτήσῃ αὐτοὺς π.χ. περὶ εὐθυγράμμου τινος ἐπιφανείας, ἐὰν εἶναι δυνατὸν εἰς αὐτὸν ἐδῶ τὸν κύκλον (σχεδιάζει ὁ Σωκράτης μὲ τὴν ράβδον του κύκλον εἰς τὸ χῶμα) αὐτὴ ἐδῶ ἡ εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια (σχεδιάζει εἰς τὸ χῶμα τυχοῦσαν εὐθύγρ. ἐπιφάνειαν) νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον, θ' ἀπεκρίνετο εἷς γεωμέτρης ὅτι, δὲν γνωρίζω ν' ἀπαντήσω ἐκ τῶν προτέρων, ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιδεκτικὴ τοιαύτης ἐγγραφῆς, ἀλλά, νομίζω, ὅτι ἔχω μίαν ἀποτελεσματικὴν ὑπόθεσιν, ἐν σχέσει μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, τὴν ἀκόλουθον· ἐὰν μὲν ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ παραταθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης γραμμῆς αὐτῆς ἐπιφάνεια κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ ἴση πρὸς τὴν παραταθεῖσαν ἐπιφάνεια, θὰ προκύψῃ ἓν ἄλλο ἀποτέλεσμα, καὶ ἄλλο πάλιν ἀποτέλεσμα, ἐὰν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ αὕτη ἡ κατασκευή. Ἐκκινῶν λοιπὸν ἀπὸ ὑποθέσεις, ἔχω τὴν δύναμιν νὰ σοῦ εἴπω τί συμβαίνει σχετικῶς μὲ τὴν ἐγγραφὴν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας εἰς τὸν κύκλον, εἴτε αὕτη εἶναι ἀδύνατος εἴτε μή.

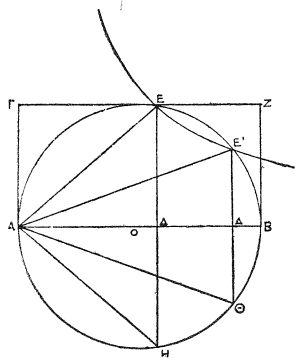
Διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ γεωμετρικοῦ τούτου χωρίου τοῦ «Μένωνος» ἔχουν γραφῆ τόσον πολλαὶ πραγματεῖαι, ὅσαι περίπου εἶναι αἱ γραφεῖσαι διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν γεωμετρικῶν ἀριθμῶν τῶν μνημονευομένων εἰς τὴν «Πολιτείαν». Ὁ B. Blass, εἰς δημοσιευθεῖσαν ἑρμηνείαν του κατὰ τὸ 1861, ἀναφέρει ἄλλας δέκα τρεῖς. Κατὰ τὸν Ἄγγλον T. Heath τὴν ὀρθοτέραν ἑρμηνείαν ἔχει δώσει ὁ S. H. Butcher (Journal of Philology, vol. XVII pp. 219 25; cf. E.S. Thomson's edition of the Meno). Ὁ T. Heath συμπληρώνων τὴν ἑρμηνείαν καὶ περιλαμβάνων αὐτὴν εἰς τὸ περισπούδαστον ἔργον αὐτοῦ A history of Greek mathematics 1921, pp. 299—301, ἀναφέρει, ὅτι τὸν S, H. Butcher προϋκατέλαβε εἰς τὴν ἑρμηνείαν αὐτὴν ὁ E. F. August, ὁ ἐκδότης τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου κατὰ τὸ 1829. Τὸ 1923 ἐδημοσιεύθη ἑτέρα λύσις τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ A.S.L. Farquarson εἰς τὸ περιοδικὸν Classical Quartarly XVII. I (Ἰανουάριος) ἡ ὁποία ὑπὸ πολλῶν θεωρεῖται ὡς λίαν ἐπιτυχής.

Ἐὰν δὲν λάβωμεν, πρὸς στιγμήν, ὑπ' ὄψει τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος, ὁ Σωκράτης θέτει τὸ ἑξῆς πρόβλημα· Ποία εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ ἢ ὄχι, ὡς τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

Ὑπὸ τὴν τοιαύτην τοποθέτησιν τοῦ προβλήματος ἡ λύσις Butcher-Heath δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθή. Ὁ T. Heath, γράφει. ὅτι προσαρμόζει τὴν λύσιν καὶ πρὸς τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος. Ἐπὶ τούτου ὅμως διατυποῦνται ἐπιφυλάξεις τινες τῶν ἑρμηνευτῶν τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ ἡμέτερος φιλόλογος Κων. Γεωργούλης.

## Ἡ λύσις Butcher - Heath

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΕΒ, διαμέτρου ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Α. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον. Συμπληρώνομεν τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΓΕΔ, ΕΔΒΖ. Τότε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΓΕΔΑ ἔχει «παραταθῆ» παρὸ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἐπίσης ὅτι «ἐλλείπει» ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΔΒΖ, ὅμοιον πρὸς τὸ «παραταθὲν» ὀρθογώνιον παραλ., διότι $\text{ΑΔ} : \text{ΔΕ} = \text{ΕΔ} : \text{ΔΒ}$. Ὅθεν, ἐὰν ἡ ΕΔ προεκταθῇ, ὥστε νὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὸ Η, τότε τὸ ΑΕΗ εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διχοτομούμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ συνεπῶς ἴσον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγ. ΑΓΕΔ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο «παραταθῇ» παρὰ τὴν διάμετρον ΑΒ, καθ' ὃν τρόπον ἐξετέθη, καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν, ἡ εὐθύγραμμος αὕτη ἐπιφάνεια ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ὡς τρίγωνον. Ὅθεν, διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθέντα κύκλον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἴσον πρὸς δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου σημεῖον τι Ε τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἡ ΕΔ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον Α, τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ}$ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν (παρατείνειν παρὰ τὴν ΑΒ ἓν ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγρ. ἐπιφάνειαν Χ, καὶ ἐλλείπειν, ὅμοιον πρὸς τὸ παραταθέν, εἶναι ἁπλῶς ἄλλος τρόπος τοῦ νὰ ἐκφρασθῇ τοῦτο). Προφανῶς τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς ὀρθογωνίου ὑπερβολῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἀναφερομένη εἰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ ὡς ἄξονας τῶν συντεταγμένων x, y, εἶναι $x \cdot y = \beta^2$, ὅπου $\beta^2$ ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν. Διὰ νὰ ἔχωμεν πραγματικὴν λύσιν, εἶναι ἀνάγκη, ὥστε τὸ $\beta^2$ νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ δυναμένου νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τουτέστιν οὐχὶ μεγαλύτερον τοῦ $\frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$, ὅπου ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν $\beta^2 = \frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$, τότε ὑπάρχει μία μόνον λύσις (ἡ ὑπερβολὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐφάπτεται τοῦ κύκλου)· ἐὰν $\beta^2$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$, τότε ἔχομεν δύο λύσεις ἀντιστοιχούσας εἰς τὰ δύο σημεῖα Ε, Ε′, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὑπερβολὴ τέμνει τὸν κύκλον. Ἐὰν $\text{ΑΔ} = x$, τότε $\text{ΟΔ} = x - \rho$, $\text{ΔΕ} = \sqrt{2\rho x - x^2}$ καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως




$$x\sqrt{2\rho x - x^2} = \beta^2$$

ἢ

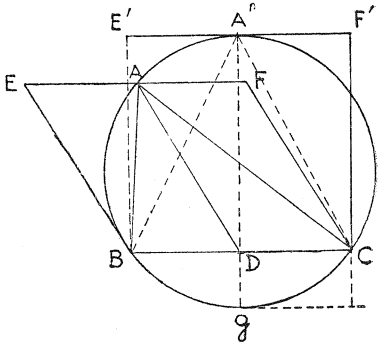
$$x^2(2\rho x - x^2) = \beta^4 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καὶ δύναται νὰ λυθῇ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ὄχι ὅμως μὲ κανόνα καὶ διαβήτην. Ἡ λύσις παρέχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ὑπερβολῆς $x \cdot y = \beta^2$ καὶ τοῦ κύκλου $y^2 = 2\rho x - x^2$ ἢ $x^2 + y^2 = 2\rho x$. Ἀπὸ τοιαύτης ἀπόψεως, συνεπῶς, τὸ πρόβλημα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦ νὰ εὕρωμεν δύο μέσας ἀναλόγους, τὸ ὁποῖον ὁμοίως ἐλύθη, καίτοι οὐχὶ πολὺ βραδύτερον, διὰ κωνικῶν τομῶν (Μέναιχμος)».

## Ἡ λύσις A.S.L. Farquarson

Ὁ A.S.L. Farquarson ἐπιχειρεῖ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ προβλήματος ἄνευ τῶν κωνικῶν τομῶν (διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου) καίτοι ἐπικαλεῖται τὴν εὐκλείδειον διατύπωσιν θεωρήματος θεωρουμένου πυθαγορικῆς προελεύσεως, τὸ ὁποῖον ὅμως παριστᾷ κωνικὴν τομὴν ἐν ἐπιπέδῳ, τὴν ἔλλειψιν, χρησιμοποιῶν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ὅτι τὸ μέγιστον τῶν εἰς κύκλον ἐγγραφομένων τριγώνων εἶναι τὸ ἰσόπλευρον. (Ἴδε καὶ Exersices de geometrie par F.G.M. cinquiéme edition Nº 1705).

«Ἔστω δοθεὶς κύκλος καὶ δοθεῖσα ἐπιφάνεια y. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν κύκλον, ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι τὸ ABC = y. Διχοτομοῦμεν μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἔστω τὴν βάσιν BC εἰς τὸ σημεῖον D. Ἑνοῦμεν τὸ D μὲ τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου A. Ἐκ τῶν σημείων B,C φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν AD καὶ ἐκ τοῦ A παράλληλον πρὸς τὴν BC, τὴν EAF. Αὗται τέμνονται εἰς E, F. Τότε τὸ παραλληλόγραμμον EBDA = μὲ δύο τρίγωνα ABD, καὶ τὸ παραλληλόγραμμαν ADCF = μὲ δύο τρίγωνα ADC. Ἀλλὰ τρίγωνον ABD = τρίγ. ADC. Ὅθεν, παραλληλόγραμμον ED = τρίγ. ABC = παραλληλόγραμμον AC. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ABC = y ἐξ ὑποθέσεως. Ὅθεν, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια y δὲν εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε νὰ δύναται αὕτη νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πρέπει νὰ εἶναι δυνατόν, εἰς ἕκαστον ἥμισυ τυχούσης πλευρᾶς τοῦ ζητουμένου τριγώνου νὰ γράψωμεν δύο παρακείμενα παραλληλόγραμμα, ἕκαστον = y, καὶ νὰ ἔχῃ ἕκαστον μίαν διαγώνιον ὡς χορδὴν τοῦ κύκλου (ἐνταῦθα AB, AC). Αἱ δύο αὗται διαγώνιοι θὰ ἑνοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς ἕκαστον ἄκρον τῆς πλευρᾶς ἡ ὁποία ἐλήφθη ὡς βάσις τοῦ τριγώνου καὶ θὰ εἶναι αἱ διαγώνιοι αὗται αἱ λοιπαὶ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. Εἰς τὴν γεωμετρικὴν γλῶσσαν τῶν Πυθαγορείων εἰς τὴν ὁποίαν ὁ Πλάτων ἐσπούδασε (γλῶσσα ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται ἐπίσης εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου) τοῦτο περιγράφεται ὡς ἑξῆς: «Ἕκαστον τῶν ἀντιπαρατιθεμένων παραλληλογράμμων «ἐλλείπει», ὅταν παρατεθῇ εἰς τήν γραμμὴν εἰς ἣν ἐγγράφεται (δηλ. τὴν BC) κατὰ ἓν παραλληλόγραμ-



μον ἴσον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον, πρὸς τὸ παραταθέν». Τοῦτο εἶναι, ὑποθέτω, ὁ τρόπος καθ' ὃν ὁ γεωμέτρης ἀποδεικνύει τὴν δυνατότητα τῆς κατασκευῆς. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδῃ τις τὴν ἀλήθειαν, ὅτι τὸ δοθὲν σχῆμα δὲν πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ δυναμένου νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον. (Διὰ τὴν εὐκολίαν ἔχω λάβει εἰς τὸ σχῆμα τὴν BC = μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφομένου ἰσοπλεύρου τριγώνου). Τὸ μέγιστον τρίγωνον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ ἐπὶ δοθείσης χορδῆς BC εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς BA′C, κείμενον συμμετρικῶς περὶ τὴν διάμετρον gA′, ἀχθεῖσαν διὰ τοῦ D, καθέτως ἐπὶ τὴν BC.

Μὲ τὸν αὐτὸν συλλογισμόν, τὸ μέγιστον δυνατὸν τρίγωνον ἔχον ὡς βάσιν τὴν A′C, ἢ τὴν A′B καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, πρέπει νὰ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε εἶναι εὔκολον, διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον A′BC εἶναι τὸ μέγιστον τῶν εἰς τὸν κύκλον δυναμένων νὰ ἐγγραφοῦν τριγώνων. Πάλιν, ἐὰν δοθῇ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον νὰ δύναται νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον, τότε πρέπει νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν χορδὴν (ἔστω BC) τοιαύτην, ὥστε ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον A′DCF′, ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν χωρίον, νὰ τοποθετηθῇ οὕτω πῶς, ὥστε ἡ μία διαγώνιος A′C (ἢ GC) νὰ τελειώνῃ εἰς τὸ σημεῖον C καὶ ἡ ἄλλη εἰς τὸ ἄκρον σημεῖον A′ μιᾶς διαμέτρου καθέτου ἐπὶ τὴν BC. Αἱ δύο διαγώνιοι εἶναι αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν τὸ πρόβλημα λύεται ἀφοῦ εὕρωμεν χορδὴν τοῦ κύκλου, ὥστε ἓν παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν χωρίον, ἀναγραφόμενον εἰς τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς καὶ ὂν τοποθετημένον, ὥστε ἑκάστη διαγώνιός του νὰ εἶναι χορδὴ τοῦ κύκλου καὶ νὰ ἔχῃ τὸ ἓν πέρας αὐτῆς εἰς τὸ ἄκρον τῆς οὕτω ληφθείσης χορδῆς καὶ νὰ εἶναι ἴσον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ ἄλλου ἡμίσεος τῆς χορδῆς».

2. Κατὰ τὴν παροῦσαν μελέτην κατεβλήθη προσπάθεια, ἵνα ἡ λύσις τοῦ προβλήματος προσαρμοσθῇ περισσότερον πρὸς τὴν φραστικὴν διατύπωσιν αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος. Διὰ νὰ γίνῃ καταληπτὴ ἡ προτεινομένη λύσις, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἑρμηνεύσωμεν ὡρισμένας φράσεις τοῦ προκειμένου χωρίου τοῦ διαλόγου.

Α′. Τὸ δοθὲν χωρίον, τὸ θεωροῦμεν, ὡς τυχοῦσαν εὐθύγραμμον ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ἰσοδύναμον παραλληλόγραμμον, ὀρθογώνιον ἢ οὔ.

Β′. «εἰ μὲν ἔστιν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, . . .».

1. Εἰς τὴν φράσιν «δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμήν», ἡ λέξις «αὐτοῦ» ἀναφέρεται προφανῶς εἰς τὸ «χωρίον». Τοιαύτην ἑρμηνείαν παρέχει ὁ Κων. Γεωργούλης εἰς ἄρθρον του δημοσιευθὲν εἰς τὸ ἐγκυκλοπαιδικὸν λεξικὸν «Ἥλιος» τόμος «Ἑλλὰς» (σελ. 767-768). Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ἑρμηνεία τοῦ Κων. Γεωργούλη εἶναι φιλολογικῶς ἡ ὀρθή. Εἰς τὴν ἑρμηνείαν ταύτην στηρίζομεν τὴν προτεινομένην λύσιν.

2. Εἰς τὸ προηγούμενον τοῦ παρόντος γεωμετρικὸν χωρίον τοῦ «Μένωνος» ἀπαντῶμεν τὴν λέξιν «γραμμὴν» ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς πλευρᾶς τετραγώνου.

3. Παρατείνειν χωρίον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν καὶ ἐλλείπειν τοιοῦτον χωρίον οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ ἑρμηνεύομεν κατὰ τὰ θεωρήματα 27 καὶ 28 τοῦ VI βιβλ. τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἡ ἑρμηνεία δὲ αὕτη θὰ γίνῃ καταληπτὴ κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς προτεινομένης λύσεως.

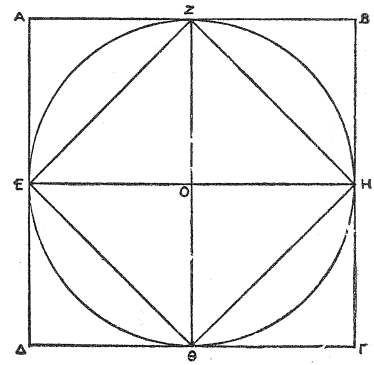
4. Τὴν κατασκευὴν τῆς συναφοῦς ἐλλείψεως, ἡ ὁποία προκύπτει κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ προβλήματος, τὴν λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἐκ τοῦ 13ου θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειωθῇ, ὅτι καὶ τὰ τρία ταῦτα θεωρήματα πιστεύεται ὅτι ἦσαν γνωστά, ὅτε ἐγράφη ὁ «Μένων». Τοῦτο, πλὴν ἄλλων μαρτυριῶν, συνάγεται καὶ ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου εἰς τὸ 44ον θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔνθα οὗτος γράφει· «ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥτε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. Ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολὴν τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων (Procli Diadochi σελ. 419).

## Ἡ προτεινομένη λύσις.

***Ὑπόθεσις 1.*** (σχ. 1)

Ὑποθέτομεν τὸ ὑπάρχον σχῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, τοῦ προηγουμένου γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ Μένωνος, ἤτοι τὸ τετράγωνον ΕΔΘΟ καὶ τὸ διπλάσιον τούτου τὸ τετράγωνον ΕΘΗΖ. Συμπληροῦμεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω ὅτι ἡ δοθεῖσα καὶ μετασχηματισθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸν ὁποῖον γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Ο, εἶναι ἡ ΑΕΗΒ. Τότε παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν τοῦ χωρίου, τὴν ΑΔ (= ΑΒ) ἔχομεν παρατείνει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΕΗΒ ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει, ἴσον ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, τὸ ΕΔΓΗ *. Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα, ὅτι τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΕΗΒ, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, διότι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τετράγωνα, τὰ ΑΕΟΖ, ΖΟΗΒ, τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ διαλόγου εἶναι ἴσα πρὸς



Σχ. 1.

* Τὴν τοιαύτην θεώρησιν στηρίζομεν εἰς τὸ 27ον θεώρ. τοῦ VI τῶν Στοιχείων.

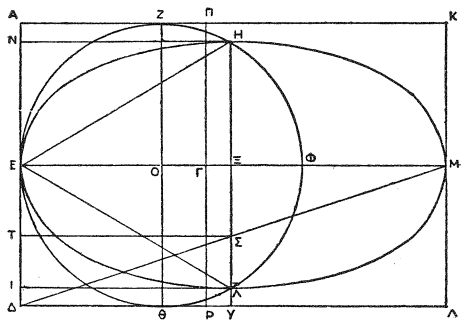
τὸ τετράγωνον ΕΘΗΖ, διὰ τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι τὸ μέγιστον τῶν παραλληλογράμμων, τῶν δυναμένων νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸν κύκλον.

*Ὑπόθεσις 2.* (σχ. 1).

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογ. παραλλ. ΑΕΗΒ, τὸ ἥμισυ τούτου, ἤτοι τὸ τετράγωνον ΖΟΗΒ, ὁπότε παραμένει τὸ τετράγωνον ΑΕΟΖ. Τοῦτο τὸ ἔχομεν παρατείνει παρὰ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν τοῦ χωρίου, τὴν ΑΔ, καὶ ἐλλείπει τοῦ ΑΔΟΖ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΗΒ) τὸ ΕΔΘΟ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παρατεταμένσν ΑΕΟΖ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΕΟΖ ἐγγράφεται ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, τὸ ΕΘΖ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις, ἡ ΘΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (δηλ. τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου). Ὅθεν, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς δοθεῖσαν σταθερὰν πλευρὰν τοῦ χωρίου τὴν μεγίστην πλευρὰν τριγώνου ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον καὶ νὰ προβῶμεν εἰς διαφόρους μετασχηματισμούς. Εἶναι ἐπίσης φανερόν, ὅτι, διατηροῦντες τὴν ΑΕ σταθερὰν καὶ μετακινοῦντες τὴν ΖΟ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΕ, λαμβάνομεν διαδοχικῶς μικροτέρας ἐπιφανείας ἀπὸ τὸ τετράγωνον ΑΕΟΖ, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἐγγράψιμος, ὡς τρίγωνον, εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

*Ὑπόθεσις 3.* (σχ. 2).

Θεωροῦμεν γνωστόν, ὅτε ἐγράφη ὁ Μένων, ὅτι τὸ μέγιστον τῶν τριγώνων τῶν δυναμένων νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸν κύκλον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ $\frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$, ὅπου ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἐὰν λοιπὸν ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τετραγώνου ΑΕΟΖ, τότε ἡ μεγίστη ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, μετασχηματιζομένη εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ σταθερὰν πλευρὰν τὴν ΑΕ, ἤτοι τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θὰ ἔχῃ ὡς ἄλλην πλευρὰν τὴν ΑΠ, ἴσην πρὸς $\frac{3}{4}\rho\sqrt{3}$. [Σημ. Τὴν εὐθεῖαν $\rho\sqrt{3}$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ὡς ἑξῆς· θεωροῦμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, μέ ὀρθὴν γωνίαν τὴν Α καὶ καθέτους ΑΒ = ΑΓ = ρ.



Σχ. 2.

Εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, ἔστω τὸ Β, ὑψοῦμεν κάθετον καὶ λαμβάνομεν τμῆμα, ἔστω ΒΔ = ρ. Ἑνοῦμεν τὸ Δ μὲ τὸ Γ καὶ τότε τοῦ νέου ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, ὅπου Β ἡ ὀρθὴ γωνία, ἡ ὑποτείνουσα ΓΔ εἶναι ἴση μὲ $\rho\sqrt{3}$. Δι' ἁπλῆς δὲ κατασκευῆς λαμβάνομεν τὰ $\frac{3}{4}$ ταύτης]. Ἐκ τοῦ σημείου Π φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ

σημείου Ρ. Τότε ἐπὶ τῆς δοθείσης γραμμῆς τοῦ χωρίου, τῆς ΑΔ, ἔχομεν παρατείνει τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΕΓΠ, ἐλλείπει δὲ τὸ ὀρθογ. παραλληλ. ΕΔΡΓ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΓΠ (καὶ ὅμοιον πρὸς τοῦτο). Τὸ πρόβλημα τώρα τίθεται, φρονοῦμεν, πῶς ἡ ἐπιφάνεια ΑΕΓΠ θὰ ἐγγραφῇ ὡς τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον. Ὑπάρχουν πρὸς τοῦτο ἀρκετοὶ τρόποι. Πρῶτον νὰ ἐγγράψωμεν ἐξάγωνον κανονικὸν εἰς τὸν κύκλον καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἀνὰ δύο τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν του. Δεύτερον νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ὑπερβολὴν $xy = \beta^2 = \frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$ (ὅπου $x = \text{ΑΠ}$, $y = \text{ΑΕ}$ καὶ $\beta^2$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας). Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς φέρωμεν κάθετον καὶ προεκτείνωμεν αὐτὴν μέχρις ὅτου συναντήσῃ αὖτη τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τότε λαμβάνομεν τὴν βάσιν τοῦ ζητουμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἔχοντος κορυφὴν τὸ Ε.

Ἐν προκειμένῳ, ὑποθέτομεν, ἀγόμενοι ἐκ τῆς φράσεως ἐλλείπειν κλπ. καὶ τοῦ 28 θεωρήματος τοῦ VI βιβλ. τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ 13 θεωρ. τοῦ Ι βιβλ. τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ὅτι ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου γίνεται διὰ τῆς ἐλλείψεως.

***Ἀνάλυσις.***

Ἔστω, ὅτι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ὑπάρχει σημεῖον Η (σχ. 2) ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΝΕΞΗ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΓΠ. Τότε εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΗΛ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΝΕΞΗ=ΑΕΓΠ. Εἶναι δὲ $\text{ΕΞ} = \frac{3\rho}{2}$.

***Σύνθεσις.***

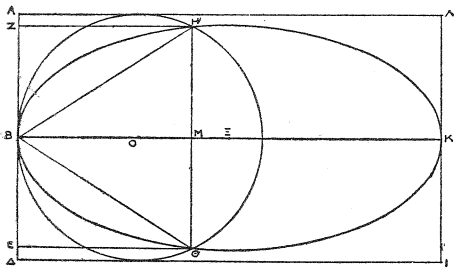
Μὲ ἡμιάξονα τῆς ἐλλείψεως $\alpha = \text{ΕΞ} = \frac{3\rho}{2}$ καὶ παράμετρον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου $\rho = 2p = \text{ΕΔ}$ κατασκευάζομεν τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ 28 τοῦ VI βιβλ. τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸ 13 τοῦ Ι βιβλ. τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὡς ἑξῆς· σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΔΛ΄Μ (σχ. 2),* ὅπου $\text{ΕΜ} = 2\alpha$, ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως, καὶ $\text{ΕΔ} = \rho = 2p$ ἡ παράμετρος τὸς ἐλλείψεως. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΜΔ. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΕΜ, ἔστω τὸ Ξ καὶ ἐκ τούτου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΛ΄, τὴν ΞΥ. Αὕτη τέμνει τὴν διαγώνιον ΜΔ εἰς τι σημεῖον Σ. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΜ, τέμνουσαν τὴν ΕΔ εἰς τι σημεῖον Τ. Τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΔ ἔχομεν παρατείνει τὸ παραλληλόγραμμον ΕΤΣΞ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τὸ ἴσον ΤΔΥΣ τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΔΛ΄Μ καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ τελευταῖον τοῦτο. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΕΤΣΞ εἶναι

* (εἰς τὸ σχῆμα λείπει ὁ τόνος τοῦ Λ).

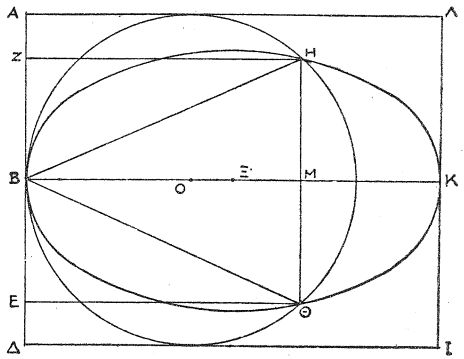
ἰδοδύναμον πρὸς τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ ΞΛ. Τὸ σημεῖον Λ εἶναι σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, Ἐὰν φέρωμεν τὴν συμμετρικὴν διαγώνιον ΜΑ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΜΚ διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς λαμβάνομεν τὸ σημεῖον τῆς ἐλλείψεως Η. Τὰ σημεῖα Η,Λ προσδιορίζουν τὸν ἄξονα β τῆς ἐλλείψεως, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μεγαλυτέρα κάθετος ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὸν μέγαν ἄξονα, συμφώνως καὶ πρὸς τὸν διορισμὸν ὃν παριστᾷ τὸ 27ον θεώρημα τοῦ VI τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Δι' ὁμοίας κατασκευῆς, ἤτοι λαμβάνοντες τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΕΜ καὶ φέροντες τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΔΛ', ἔχομεν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς διαγωνίου ΔΜ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΜ (καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΔ). Τὰ πρὸς τὸ μέρος τοῦ μ. ἄξονος παραλληλόγραμμα (ἀφαιρουμένων τῶν πρὸς τὰ κάτω τῆς ἐκ τῆς διαγωνίου ἀχθείσης παραλλήλου) μετατρεπόμενα εἰς τετράγωνα, μᾶς δίδουν τὰ σημεῖα τῆς ἐλλείψεως. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον, τῶν εἰς τετράγωνον οὕτω πως μετασχηματισθέντων παραληλλογράμμων, εἶναι μικρότερον τοῦ ΕΤΣΞ (κατὰ τὸ 27 θεώρ. τοῦ VI τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου). Ἡ τομὴ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μᾶς δίδει τὰ δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα ἑνούμενα παρέχουν τὴν βάσιν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου τριγώνου, ἔχοντος κορυφὴν τὸ Ε καὶ μεγίστου τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων τριγώνων.

*Ὑπόθεσις 4.*

Ἐὰν ἡ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος πλευρὰ τοῦ εἰς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μετασχηματισθέντος χωρίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας $\frac{3}{4}\rho\sqrt{3}$, τότε τὸ δο-




Σχ. 3.




Σχ. 4.

θὲν χωρίον, ὑπερβάλλει τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ $\rho\cdot\frac{3}{4}\rho\sqrt{3}$ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγράψιμον ὡς τρίγωνον εἰς τὸν κύκλον) καὶ συνεπῶς εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐγγραφῇ τὸ δοθὲν εἰς τὸν κύκλον ὡς τρίγωνον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποδίδομεν τὴν φράσιν τοῦ διαλόγου «εἰ ἀδύνατον ἔστι ταῦτα παθεῖν», δηλ. εἰ ἀδύνατον ἐστιν τὸ «ἐλλείπειν οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ».

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν, ἡ ὑπόθεσις 3 τοῦ προβλήματος, ἐρευνᾶται ἐκ

τῆς ἐξισώσεως τῆς ἐλλείψεως $y^2 = 2Px - \frac{Px^2}{\alpha}$ καὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ κύκλου $y^2 = 2\rho x - x^2$, ὅπου $2P = \rho$, $\alpha =$ μέγας ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς δοθείσης ἐπιφανείας $\beta^2 \leq \frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$.

Εἰς τὸ σχῆμα 3 λαμβάνομεν τὸ ἐγγραφόμενον τρίγωνον $\beta^2 < \frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$ ὅπου $\alpha = \frac{3\rho}{2} + h$, ἐν ᾧ εἰς τὸ σχῆμα 4 λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον $\gamma^2 < \frac{3}{4}\rho^2\sqrt{3}$, ὅπου $\alpha = \frac{3\rho}{2} - h \left(0 < h < \frac{\rho}{2}\right)$ καὶ $2P = \rho$. Ὁ κύκλος καὶ ἡ ἔλλειψις νὰ ἐφάπτωνται τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

---

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

4 =
ΕΤΟΣ Δ΄ 1952
ΤΕΥΧΟΣ Α΄
7

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1952

# ΤΟ ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ

1. Αἱ ἐλάχισται εἰδήσεις, αἱ ὁποῖαι ἐσώθησαν μέχρις ἡμῶν περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Θυμαρίδου ὀφείλονται εἰς τὸν Ἰάμβλιχον (3—4ος αἰὼν μ. Χ.). Κατὰ ταύτας ὁ Θυμαρίδας κατήγετο ἐκ Πάρου καὶ ἦτο ἐκ τῶν μαθητῶν τοῦ Πυθαγόρου. Ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς ἀκμῆς τοῦ Θυμαρίδου εἶχον διατυπωθῆ πρό τινων δεκαετηρίδων ἀμφιβολίαι τινές. Αἱ ἐργασίαι ὅμως τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ P. Tannery ὡδήγησαν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς γνώμης, ὅτι ὁ Θυμαρίδας ἀνήκει εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους καὶ ὅτι οὗτος δέον νὰ θεωρῆται ἐκ τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος, (H. Diels, Fragmente der Vorsokratiker τόμ. I σ. 447, ἔκδ. 1951. Αὐτόθι δέον νὰ διορθωθῆ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγραφομένου τύπου, ὁ n—1, εἰς τὸ ὀρθὸν n—2).

Εἰς τὴν πραγματείαν του «περὶ τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» (H. Pistelli, Teubner, 1894) ὁ Ἰάμβλιχος χρησιμοποιεῖ τοὺς ὅρους «ἔφοδος θυμαριδείου ἐπανθήματος» (σ. 62 κ. ἑ.) καὶ «ἐπανθήματα» (σ. 68). Ἡ λέξις ἐπάνθημα δὲν ἔχει βέβαια σχέσιν τινα πρὸς τὰ μαθηματικά. Θεωρεῖται ὅμως λίαν πιθανόν, ὅτι ὁ ὅρος θυμαρίδειον ἐπάνθημα ἐνέχει καὶ λογοπαίγνιον προελθὸν ἐκ τῆς συνωνυμίας τοῦ Θυμαρίδου καὶ τοῦ φυτοῦ θυμάρι (θύμος). Τοιαύτην γνώμην ἐκφράζουν οἱ ἐκ τῶν κρατίστων τῶν παρ' ἡμῖν φιλολόγων Χ. Χαριτωνίδης, Κ. Γεωργούλης καὶ Σ. Κορρές. Ἡ ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου, φαίνεται, ἔκαμε τόσην ἐντύπωσιν, ὥστε παρωμοιάσθη μὲ τὸ εὔοσμον ἄνθος τοῦ θυμαριοῦ. Βραδύτερον δὲ ἐπεκράτησε νὰ λέγωνται ἀριθμητικὰ ἐπανθήματα, κανόνες ἐπιλύσεως ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς Ἀλγέβρας εἶναι λίαν σημαντικὴ ἡ διάκρισις ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου, τῶν ποσῶν, εἰς «ὡρισμένα» καὶ «ἀόριστα» ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ὅρος «ὡρισμένα» ἀφορᾷ εἰς τοὺς γνωστοὺς συντελεστὰς ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, ὁ δὲ ὅρος «ἀόριστα» εἰς τοὺς ἀγνώστους. Οἱ ὅροι οὗτοι θεωροῦνται πυθαγορικῆς προελεύσεως, ἀπαντοῦν ὅμως τὸ πρῶτον εἰς πραγματείας τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ Διοφάντου.

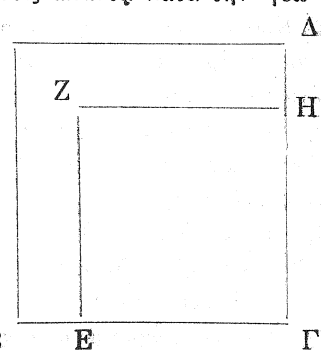
Ἡ κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον «ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος» εἶναι μέθοδος ἐπιλύσεως ὡρισμένης μορφῆς συστήματος ν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους. Ἐκ τῆς ὀνομασίας τῆς μεθόδου θεωρεῖται αὐτονόητον ὅτι αὕτη εἶναι ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου. Ὁ Ἰάμβλιχος χρησιμοποιεῖ τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου καὶ διὰ τὴν λύσιν ν ἐξισώσεων μὲ ν+1 ἀγνώστους, διὰ τὴν λύσιν δηλ. συστήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως (διοφαντικοῦ καλουμένου) πρώτου βαθμοῦ. Αἱ ν ἐξισώσεις μὲ ν+1 ἀγνώστους, ἀνάγονται εἰς ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους, ὁπότε εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ πρὸς λύσιν, τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος, δηλ. τῆς

μεθόδου τοῦ Θυμαρίδου. Δὲν ἀναφέρει ὅμως οὗτος, ὅτι ἡ μέθοδος μετατροπῆς τῶν ν ἐξισώσεων μὲ ν+1 ἀγνώστους, εἰς ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους ὀφείλεται εἰς τὸν Θυμαρίδαν. Δὲν θεωροῦμεν ἐν τούτοις ἀπίθανον τοιαύτην ἐκδοχήν, ὅταν λάβωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι εἰς τὸν Πυθαγόραν τὸν ἴδιον ἀποδίδεται ἡ λύσις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ $x^2+y^2=z^2$ καὶ ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν+1 ἀγνώστους συνδέεται πρὸς τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα. Ὅπωσδήποτε ἡ τοποθέτησις τοῦ Θυμαρίδου εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος ὑπὸ τῆς κριτικῆς τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐγένετο πρὸ ἑξήκοντα περίπου ἐτῶν, ὅτε ἐμελετήθησαν μετὰ μεγαλυτέρας προσοχῆς αἱ μαθηματικαὶ πραγματεῖαι τοῦ Ἰαμβλίχου, αἱ ὁποῖαι ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τὸ ἀφορῶν εἰς τὸν Θυμαρίδαν καὶ τὴν ἄλγεβραν τῶν Πυθαγορείων προεκάλεσαν μεγάλην ἐντύπωσιν.

2. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τοῦ Εὐκλείδου (Στοιχείων VII, VIII, IX) περιέχεται μόνον ὅ,τι κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἐθεωρεῖτο βασικὸν μέρος τῆς θεωρίας. Ἄλλαι ἐκτενέστεραι ἀριθμητικαὶ πραγματεῖαι δὲν σῴζονται, πλὴν τῆς ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς τοῦ Πυθαγορικοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ (ἀρχαὶ 1ου αἰῶνος μ.Χ.), σχολίων εἰς ταύτην τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ ἀριθμητικῆς πραγματείας τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου. Ἐκ τῶν πραγματειῶν τούτων ἐκθέτομεν κατωτέρω στοιχειά τινα τῆς θεωρίας τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ αὕτη συνδέεται πρὸς τὴν ἔφοδον τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος. Ὁ Ἰάμβλιχος ἀναπτύσσων τὴν σχετικὴν περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν θεωρίαν τοῦ Νικομάχου ἐπάγεται· «ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη».

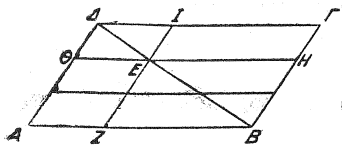
Ὁ ὅρος πολύγωνοι ἀριθμοὶ ἔχει τὴν προέλευσίν του προφανῶς ἐκ τῆς γεωμετρίας. Ὑπὸ τὸν ὅρον τοῦτον νοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ καλούμενοι τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, ἑξάγωνοι κλπ. τῶν ὁποίων τὴν σημασίαν θ' ἀναπτύξωμεν κατωτέρω. Πρὸ τούτου ὅμως θεωροῦμεν ἀναγκαῖον νὰ ἀναφέρωμεν ὀλίγα τινὰ περὶ τῆς σημασίας τοῦ γεωμετρικοῦ ὅρου «γνώμων» ὅστις ἁπανταχοῦ κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

3. Ἡ παράδοσις, ἀναφέρει, ὅτι ὁ γνώμων ἦτο ὀρθὴ γωνία, ἀποτελοῦσα τὸ κύριον μέρος ἡλιακοῦ ὡρολογίου, ἐπινοηθέντος ὑπὸ τοῦ Ἀναξιμάνδρου. «Εὗρε δὲ καὶ γνώμονα (Ἀναξίμανδρος) πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι, καθὰ φησὶ Φαβωρῖνος ἐν Παντοδαπῇ ἱστορίᾳ· (Διογ. Λαέρτ. II 1—2). Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ γνώμονος ἀρκεῖ ἐκ δοθέντος τετραγώνου ν' ἀφαιρέσωμεν μικρότερον τούτου τετράγωνον. Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 1). Ἐὰν ἐκ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον ΕΓΗΖ, τὸ ἀπομένον σχῆμα ΑΒΕΖΗΔ εἶναι γνώμων. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη γνώμων καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον περιτιθέμενον εἰς δοθὲν τετράγωνον δίδει μεγαλύτερον τετράγωνον. Εἰς τὸ σχ. 1 π.χ. ἐὰν μᾶς δοθῇ τὸ τετράγωνον ΕΓΗΖ καὶ περιθέσωμεν σχῆμα, ὥστε νὰ σχηματισθῇ μεγαλύτερον τετράγωνον, τὸ ΑΒΓΔ, τὸ περιτεθὲν σχῆμα, τὸ ΑΒΕΖΗΔ



Σχ. 1

εἶναι γνώμων. Ὁ Εὐκλείδης δίδει γενικώτερον ὁρισμὸν τοῦ γνώμονος τὸν ἑξῆς· Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω· ἑρμην. «Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, ἓν οἱόνδήποτε ἐκ τῶν περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων, μαζὶ μὲ τὰ δύο παραπληρώματα, ἃς ὀνομάζεται γνώμων» (Στοιχείων II ὁρισ. 2). Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 2), διαγώνιος ἔχει ληφθῆ ἡ ΔΒ. Τὰ παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι δύο, τὰ ΘΕΙΔ, ΕΖΒΗ. Ἐὰν λάβωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΘΕΙΔ τότε τὰ παραπληρώματα τούτου εἶναι τὰ ΘΕΖΑ, ΙΕΗΓ καὶ συνεπῶς ὁ γνώμων εἶναι ὁ ΑΔΓΗΕΖ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Εὐκλείδου. Ἐὰν λάβωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΒΗ, τότε τα παραπληρώματα τούτου εἶναι τὰ ΑΖΕΘ, ΙΕΗΓ καὶ συνεπῶς ὁ γνώμων εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ Εὐκλείδου ὁ ΘΑΒΓΙΕ.



Σχ. 2

Ἐκτὸς τῆς γεωμετρικῆς του σημασίας, ὁ ὅρος γνώμων διατηρεῖ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν Ἑλλήνων καὶ τὴν κυριολεκτικήν του σημασίαν· νοεῖται δηλ. τὸ σχῆμα τοῦτο ἢ παρόμοιον τούτου, ὡς κατευθυντήρ, ὁδηγός, ῥυθμιστὴς διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. Τοῦτο θὰ καταφανῇ κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

**4. Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι ἀριθμητικῶς.— *Τρίγωνοι ἀριθμοί.*** Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11.....

Εἰς τὴν ἀκολουθίαν ταύτην πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονάς. Τυχὸν δὲ ὅρος ταύτης σχηματίζεται ἐκ τοῦ προηγουμένου διὰ προσθέσεως εἰς τοῦτον τῆς μονάδος ἢ ἐκ τοῦ ἑπομένου δι' ἀφαιρέσεως ἐκ τούτου τῆς μονάδος. Εἶναι δηλ. ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἡ μονάς. Τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν τὴν ὀνομάζομεν, ὡς γνωστόν, πρόοδον ἀριθμητικήν, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονὰς καὶ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἡ μονάς. (κακῶς ὀνομάζεται ὑπό τινων ἡ διαφορὰ αὕτη «λόγος»). Τούτων δοθέντων, τίθεται τὸ πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς προόδου (ν=1,2,3,4....).

Εἶναι προφανές, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἓξ ἑνὸς μόνου ὅρου εἶναι = 1 = $s_1$
τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων 1+2 = 3 = $s_2$
» » » τριῶν » » 1+2+3 = 6 = $s_3$
» » » τεσσάρων » » 1+2+3+4 =10 = $s_4$
» » » πέντε » » 1+2+3+4+5 =15 = $s_5$
» » » ἕξ » » 1+2+3+4+5+6 =21 = $s_6$

Ἀναγράφομεν κατωτέρω εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς φυσικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (τὴν πρόοδον 1,2,3,4....) καὶ εἰς δευτέραν γραμμὴν κάτωθεν τῆς πρώτης τὰ εὑρεθέντα μερικὰ ἀθροίσματα $s_1, s_2, s_3, s_4$.... :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10....
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55....

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας γραμμῆς ὀνομάζονται τρίγωνοι ἀριθμοί.

Ἡ σημασία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν ἔγκειται εἰς τοῦτο :

Ζητεῖται π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν 9 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 1 2 3 4... Ἀναγινώσκομεν κάτωθεν τοῦ 9 τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 45.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον διατυπώσει κανόνας πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος ν ὅρων μιᾶς προόδου. Οἱ κανόνες οὗτοι, λέγεται, ὅτι εἶχον εὑρεθῆ ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ Πυθαγόρου ἢ τῶν Πυθαγορείων κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

***Τετράγωνοι ἀριθμοί.***

Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος (ἢ ἡ φυσικὴ ἀκολουθία τῶν περιττῶν ἀριθμῶν)

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19....

τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων =2.

Σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, ὅπως καὶ προηγουμένως.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Τὸ ἄθροισμα ἐξ ἑνὸς μόνου ὅρου εἶναι | | | = 1 | $=1^2$ | $=s_1$ |
| » τῶν δύο πρώτων ὅρων | » | 1+3 | = 4 | $=2^2$ | $=s_2$ |
| » » τριῶν | » | » | 1+3+5 | = 9 | $=3^2$ | $=s_3$ |
| » » τεσσάρων | » | » | 1+3+5+7 | =16 | $=4^2$ | $=s_4$ |
| » » πέντε | » | » | 1+3+5+7+9 | =25 | $=5^2$ | $=s_5$ |
| » » ν | » | » | » | | $=\nu^2$ | $=s_\nu$ |

Ἀναγράφομεν τώρα, εἰς μίαν γραμμὴν τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰς δευτέραν γραμμὴν τὴν πρόοδον καὶ εἰς τρίτην γραμμὴν κάτωθεν τῆς δευτέρας τὰ μερικὰ ἀθροίσματα $s_1, s_2, s_3 \ldots$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10.... |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19.... |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100.... |

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς τρίτης γραμμῆς ὀνομάζονται τετράγωνοι ἀριθμοί. Ἡ σημασία τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν ἔγκειται εἰς τοῦτο: Ζητεῖται π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν 7 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 1 3 5.... Ἀναγινώσκομεν κάτωθεν τοῦ ἑβδόμου ὅρου τῆς προόδου, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ 13, καὶ βλέπομεν ὅτι τοῦτο εἶναι 49.

Καθ' ὅμοιον, ὡς ἄνω ἐκτίθεται τρόπον, λαμβάνομεν ἐκ τῆς προόδου 1 4 7 10.... τοὺς πενταγώνους ἀριθμούς, ἐκ τῆς προόδου 1 5 9 13.... τοὺς ἑξαγώνους ἀριθμοὺς κ.ο.κ.ἑ.

Παρατηρήσεις. Εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ τρίγωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 2 3 4....ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 1=(3—2).

Εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ τετράγωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 3 5 7.... ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 2=(4—2).

Εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ πεντάγωνοι ἀριθμοί, τὴν 1 4 7 10.... ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 3=(5—2).

Καὶ γενικῶς, εἰς τὴν πρόοδον ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οἱ ν—γωνοι ἀριθ-

μοί, τὴν 1 ν—1 2ν—3 3ν—5 4ν—7 5ν—9.... ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι ν—2.

Ἡ γενικῶς ἐκφραζομένη διαφορὰ αὕτη, ἡ ν—2, εἶναι ἡ ἔχουσα σχέσιν μὲ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, τοῦ λυομένου κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου. Ὀνομάζεται δὲ αὕτη, γνωμονικὸς ἀριθμός, διότι ὁδηγεῖ ἡμᾶς, ὅταν δοθῇ, εἰς τὸ νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ. Ὅταν π.χ. δοθῇ ὁ γνωμονικὸς ἀριθμὸς 13 (ὁπότε ν=15 καὶ ν—2=13), τότε γνωρίζομεν, ὅτι πρόκειται περὶ τῶν δεκαπενταγώνων ἀριθμῶν καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται οὗτοι εἶναι 13. Θὰ εἶναι δηλ. ἡ πρόοδος :

1 14 27 40 53 66 79 92....

καὶ οἱ ἀντίστοιχοι δεκαπεντάγωνοι ἀριθμοὶ (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα δηλ.)

1 (1+14)=15, (1+14+27)=42, 82, 135, 201, 280, 372....

1ος 2ος 3ος 4ος 5ος 6ος 7ος 8ος....

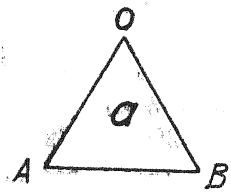
Ἡ ὀνομασία τῆς διαφορᾶς ν—2 (ὅπου ν παριστᾷ τοὺς ν - γώνους ἀριθμοὺς) ὡς γνωμονικοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς γεωμετρίας καὶ τοῦτο θὰ γίνῃ καταληπτὸν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν θεώρησιν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

Κατωτέρω παραθέτομεν πίνακα μερικῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. α=πρῶτος ὅρος τῆς προόδου, δ=διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων προόδου.

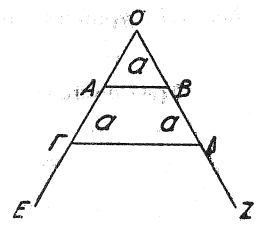
| Αὔξων ἀριθμὸς | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α=1, δ=1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Τρίγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |
| α=1, δ=2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| Τετράγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| α=1, δ=3 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| Πεντάγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 5 | 12 | 22 | 35 | 51 | 70 | 92 | 117 |
| α=1, δ=4 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 |
| Ἑξάγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 6 | 15 | 28 | 45 | 66 | 91 | 120 | 153 |
| α=1, δ=5 | 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 |
| Ἑπτάγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 7 | 18 | 34 | 55 | 81 | 112 | 148 | 189 |
| α=1, δ=6 | 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | 49 |
| Ὀκτάγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 8 | 21 | 40 | 65 | 96 | 133 | 176 | 225 |

**5. Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι γεωμετρικῶς.—*Τρίγωνοι ἀριθμοί.*** Παριστῶμεν, κατὰ τὸν Νικόμαχον τὸν Γερασηνόν, τὴν μονάδα διὰ τοῦ γράμματος ἄλφα (α).

Ὁ ἀριθμὸς ἄλφα παριστᾷ τὸν πρῶτον τῇ τάξει τρίγωνον ἀριθμόν. Ἀλλὰ συγχρόνως οὗτος ὀνομάζεται καὶ ὁ πρῶτος «δυνάμει» τρίγωνος ἀριθμός. Διότι οὗτος, ὁ ἄλφα δηλ. τοποθετούμενος ἐντὸς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου (σχ. 3) ἐνέχει ἐν ἑαυτῷ ἐν λανθανούσῃ καταστάσει τὴν τριάδα, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἐντὸς τοῦ ὁποίου τοποθετεῖται εἶναι μὲν «ἓν τρίγωνον» ἀλλὰ τοῦτο δὲν παύει νὰ ἔχῃ τρεῖς πλευρὰς (καὶ τρεῖς γωνίας)! Θέλομεν τώρα νὰ σχηματίσωμεν γεωμετρικῶς τοὺς λοιποὺς τριγώνους ἀριθμούς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν γωνίαν τοῦ ληφθέντος τριγώνου διὰ τὴν παράστασιν τοῦ πρώτου τριγώνου ἀριθμοῦ, ἔστω τὴν ἐπάνω, τῆς ὁποίας προεκτείνομεν τὰς δύο πλευρὰς ἀπεριορίστως (σχ. 4). Ἀρχόμενοι ἐκ τῶν σημείων Α, Β λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκταθεισῶν πλευρῶν τμήματα ΑΓ=ΒΔ τὰ πέρατα τῶν ὁποίων ἑνοῦμεν δι' εὐθείας γραμμῆς τῆς ΓΔ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ οὕτω σχηματισθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μονάδας μήκους. Ἐντὸς τοῦ νέου τριγώνου ΟΓΔ τοποθετοῦμεν συμμετρικῶς δύο ἄλφα ἀκόμη καὶ ἔχομεν ἐν ὅλῳ τρία ἄλφα. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ περιέχον τὰ τρία ἄλφα, παριστᾷ τὸν δεύτερον κατὰ τὴν τάξιν τρίγωνον ἀριθμόν, καλούμενον πρῶτον ἐνεργείᾳ τρίγωνον ἀριθμόν, διότι διὰ νὰ σχηματισθῇ οὗτος ἐχρειάσθη νὰ γίνουν κινήσεις ἀκολουθοῦσαι ὡρισμένους νόμους. Αἱ κινήσεις αὗται εἶναι ἡ τοποθέτησις δύο ἄλφα, παραλλήλως πρὸς τὸ πρῶτον ἄλφα.



Σχ. 3

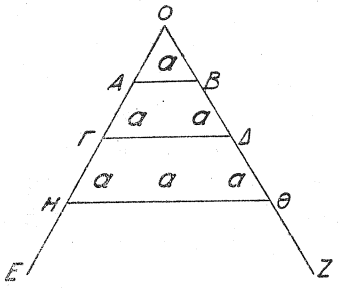


Σχ. 4

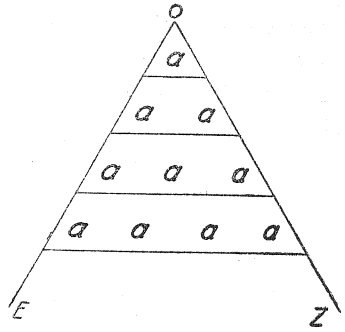
Ἂν ὡς πρῶτον ἀκίνητον ἄλφα θεωρήσωμεν ἀντὶ τοῦ ἄλφα τῆς γωνίας Ο, τὸ ἄλφα τῆς γωνίας Γ, τότε τὰ ἄλλα δύο ἄλφα ἔχουν τεθῇ παραλλήλως πρὸς τοῦτο ἐπὶ γραμμῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΖΟ. Ἂν πάλιν ὡς πρῶτον ἀκίνητον ἄλφα θεωρήσωμεν τὸ ἄλφα τῆς γωνίας Δ, τὰ ἄλφα ἔχουν τεθῇ παραλλήλως πρὸς τοῦτο ἐπὶ γραμμῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΟ. Διὰ νὰ σχηματισθῇ λοιπὸν ὁ δεύτερος τῇ τάξει τρίγωνος ἀριθμός, ὀνομαζόμενος πρῶτος ἐνεργείᾳ, ἐφέρομεν μίαν παράλληλον γραμμὴν πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΓΔ, διατηροῦντες τὴν ἀπόστασιν ταύτης ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς ΑΒ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ο, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ΟΓΔ. Ὁ δεύτερος τρίγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 3.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τώρα τὸν τρίτον τῇ τάξει, ἢ δεύτερον ἐνεργείᾳ τρίγωνον ἀριθμὸν λαμβάνομεν τὸ προηγούμενον σχῆμα καὶ τοποθετοῦμεν εἰς συμμετρικὰς ἀποστάσεις τρία ἄλφα κάτωθεν καὶ παραλλήλως τῶν δύο ἄλφα, ὡς τὸ σχῆμα 5. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλφα μᾶς δίδει τὸν τρίτον τρίγωνον ἀριθμὸν τὸν 6 (ἐνεργείᾳ δεύτερον) ἤτοι 1+2+3=6 ἄλφα. Ὁμοίως λαμβάνομεν τὸν τέταρτον τρίγωνον ἀριθμὸν (ἐνεργείᾳ τρίτον) ὡς τὸ σχῆμα 6, ἤτοι 1+2+3+4=10 ἄλφα κ.ο.κ.ἑ. Ἐκ τοῦ γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ τῶν τριγώνων ἀριθμῶν παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Αἱ δύο πλευραὶ μιᾶς γωνίας διατηροῦνται ἀμετάθετοι καὶ ἑκάστην φορὰν διὰ τὸν σχηματισμὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου προσθέτομεν μίαν γραμμήν, τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου ἐπὶ τῆς ὁποίας τοποθετοῦμεν εἰς συμμετρικὰς ἀποστάσεις τ' ἀνάλογα ἄλφα, δύο τὴν πρώτην φοράν, τρία τὴν δευτέραν, τέσσαρα τὴν τρίτην κ.ὁ.κ.ἑ. Ὅθεν, ὁ κανὼν τοῦ γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ τῶν τριγώνων ἀριθμῶν εἶναι: δοθείσης




Σχ. 5

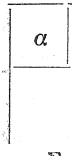



Σχ. 6

γωνίας 60° ἑκάστην φορὰν πρέπει νὰ τοποθετῶμεν τὴν βάσιν πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ τοποθετήσωμεν κατόπιν συμμετρικῶς τ' ἀντίστοιχα ἄλφα. Τοποθετοῦμεν δηλ. ἑκάστοτε μίαν γραμμὴν ἐνῷ αἱ δύο πλευραὶ τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι μόνιμοι. Ἡ γραμμὴ αὕτη εἶναι ἐνταῦθα ὁ τριγωνικὸς γνώμων, ὁ ὁποῖος μᾶς κατευθύνει εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν τριγώνων ἀριθμῶν. Ἑκάστην φορὰν τὰ ἄλφα ἑκάστης γραμμῆς εἶναι περισσότερα τῶν ἄλφα τῆς προηγουμένης γραμμῆς κατὰ ἕν. Οὕτω τὰ τοποθετηθέντα ἐξ ἀρχῆς ἄλφα εἰς γραμμὰς εἶναι 1, 2, 3, 4.... (πρόοδος ἀριθμητική). Οἱ δὲ ἀντίστοιχοι τρίγωνοι ἀριθμοὶ 1, 3, 6, 10....

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς πλευράς, ὁ γνώμων πρὸς σχηματισμὸν τῶν τριγώνων ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἂν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 3 ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονίμων πλευρῶν, τὸν 2. Εἶναι δηλ. ὁ συναφὴς τριγωνικὸς γνώμων (γνωμονικὸς ἀριθμὸς) 3—2=1 γραμμὴ εὐθεῖα.

***Τετράγωνοι ἀριθμοί.*** Ὁ πρῶτος τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς. Τοποθετοῦμεν λοιπὸν ἐντὸς ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν μονάδα ἓν ἄλφα, ὡς τὸ σχῆμα 7. Ἐνταῦθα ἡ μονὰς παριστᾷ τὸν πρῶτον «δυνάμει» τετράγωνον ἀριθμόν, διότι τὸ τετράγωνον εἶναι «ἓν» ἐμπεριεκλείει ὅμως ἐν ἑαυτῇ ἡ μονὰς ἐν λανθανούσῃ καταστάσει, τὸν ἀριθμὸν 4, διότι τὸ τετράγωνον ἔχει τέσσαρας πλευρὰς (καὶ τέσσαρας γωνίας).




Σχ. 7

Διὰ νὰ λάβωμεν τώρα τὸν δεύτερον τετράγωνον ἀριθμὸν θὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸν γνώμονα τοῦ Ἀναξιμάνδρου, δηλ. μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὸ σχ. 7 μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ὡς τὸ σχῆμα 8 καὶ συμμετρικῶς τὰ ἀντίστοιχα ἄλφα. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι τὰ ἄλφα τὰ περιεχόμενα εἰς τὸν γνώμονα εἶναι τρία, ἤτοι δύο περισσότερα τοῦ ἀρχικοῦ. Τὸ ἄθροι-

σμα ὅλων τῶν ἄλφα εἶναι 4. Οὗτος εἶναι ὁ δεύτερος τετράγωνος ἀριθμός. Ἐπειδὴ δὲ ἐχρειάσθη νὰ γίνουν ὡρισμέναι κινήσεις πλευρῶν καὶ ἄλφα, ὁ δεύτερος τετράγωνος ἀριθμός, ὁ 4, ὀνομάζεται ὁ πρῶτος ἐνεργείᾳ τετράγωνος ἀριθμός.

| | |
|---|---|
| α | α |
| α | α |

Σχ. 8

Διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου τῇ τάξει (δευτέρου ἐνεργείᾳ) τετραγώνου ἀριθμοῦ τοποθετοῦμεν εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν, δηλ. γνώμονα τετραγωγικὸν καὶ ἐντὸς ταύτης τὰ ἀντίστοιχα ἄλφα, ὡς τὸ σχῆμα 9. Παρατηροῦμεν πάλιν, ὅτι τὰ προστεθέντα ἄλφα εἶναι περισσότερα κατὰ δύο, τῶν ἄλφα τῶν εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα προστεθέντων. Μὲ ἑκάστην δηλ. προσθήκην γνώμονος (ὀρθῆς γωνίας) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄλφα αὐξάνεται κατὰ δύο περισσότερον ἀπὸ τὰ ἄλφα τοῦ προηγουμένου σχήματος. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἄλφα ἑκάστου σχήματος μᾶς δίδει τοὺς ἀντιστοίχους τετραγώνους ἀριθμούς, οἵτινες κατὰ ταῦτα εἶναι 1 4 9.... Ἡ δὲ συναφὴς πρόοδος εἶναι 1 3 5.... δηλ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄλφα ἑκάστου γνώμονος, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄλφα τοῦ πρώτου τετραγώνου.

| | | |
|---|---|---|
| α | α | α |
| α | α | α |
| α | α | α |

Σχ. 9

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν τέταρτον τῇ τάξει (τρίτον ἐνεργείᾳ) τετράγωνον ἀριθμὸν ὁ γνώμων μας θὰ περιέχῃ δύο ἄλφα, περισσότερα τῶν 5 ἤτοι 7, ὁ δὲ 4ος τετράγωνος ἀριθμὸς θὰ περιέχῃ 16 ἄλφα, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 10 φαίνεται.

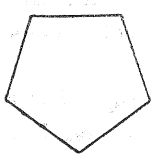
Αἱ δύο πλευραὶ τοῦ πρώτου τετραγώνου τοῦ σχ. 7 ἔχουν ἀπεριόριστον μῆκος καὶ εἶναι μόνιμοι. Κάθε φορὰν ἡ περιτιθεμένη ὀρθὴ γωνία ἔχει δύο πλευράς. Ἡ περίπτωσις ἐνταῦθα εὑρέσεως τοῦ γνώμονος (τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του) εἶναι κοινοτοπία.

Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται, ἐὰν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 4 τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονίμων πλευρῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι δύο. Ἔχει δηλ. ὁ γνώμων ἐνταῦθα πλευρὰς 4—2=2. Πάλιν, ὅπως καὶ εἰς τὸ τρίγωνον, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 2 ἀπὸ τὸν 4, ὅστις δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

| | | | |
|---|---|---|---|
| α | α | α | α |
| α | α | α | α |
| α | α | α | α |
| α | α | α | α |

Σχ. 10

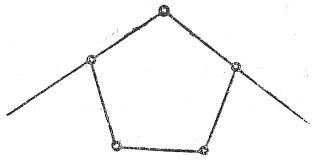
***Πεντάγωνοι ἀριθμοί.*** Ὁ πρῶτος πεντάγωνος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς. Ὅθεν, ἓν πεντάγωνον κανονικὸν παριστᾷ τὸν πρῶτον πεντάγωνον ἀριθμόν. Ἐνταῦθα ἀντὶ τοῦ ἄλφα χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν δήλωσιν τῆς μονάδος μίαν στιγμὴν (ἢ νοοῦμεν ταύτην εἰς τὸ κέντρον, τοῦ πενταγώνου). Ἡ στιγμὴ αὕτη παριστᾷ τὸν πρῶτον δυνάμει πεντάγωνον ἀριθμόν, διότι τὸ πεντάγωνον περιέχει ἐν λαθανούσῃ καταστάσει τὸν ἀριθμὸν πέντε, λόγῳ τῶν 5 πλευρῶν του (καὶ 5 γωνιῶν του).



Σχ. 11

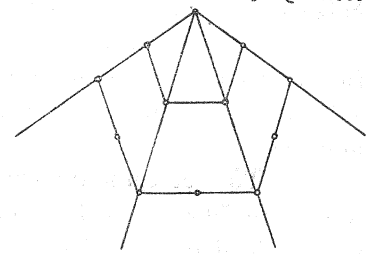
Ὁ δεύτερος πεντάγωνος ἀριθμός, παρίσταται πάλιν δ' ἑνὸς κανονικοῦ πεντα-

γώνου, εἰς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ὁποίου τοποθετοῦμεν στιγμὰς παριστώσας τὴν μονάδα, ὡς τὸ σχῆμα 12. Οὗτος ὀνομάζεται καὶ πρῶτος ἐνεργείᾳ πεντάγωνος ἀριθμός, διότι ἐχρειάσθη νὰ γίνουν κινήσεις μονάδων διὰ νὰ σχηματισθῇ.



Σχ. 12

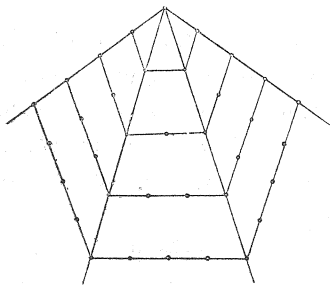
Διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου τῇ τάξει πενταγώνου ἀριθμοῦ (δευτέρου ἐνεργείᾳ) νοοῦμεν δύο πλευρὰς τυχούσης γωνίας τοῦ πενταγώνου προεκτεινομένας ἀπεριορίστως, ὡς τοῦτο δηλοῦται καὶ εἰς τὰ σχήματα 12 καὶ 13. Φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ληφθείσης τυχαίως γωνίας τὰς διαγωνίους τοῦ πενταγώνου σχ. 13 καὶ τὰς προεκτείνομεν ἀπεριορίστως. Περιθέτομεν τώρα εἰς τὸ πεντάγωνον γνώμονα περιέχοντα τρεῖς πλευράς, ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν ἀποστάσεις ἴσας πρὸς τὴν μονάδα, δηλ. τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου καὶ τοποθετοῦμεν συμμετρικῶς στιγμάς, παριστώσας τὴν μονάδα, αἵτινες ἐνταῦθα εἶναι 7 ἤτοι 3 περισσότεραι τῶν προηγουμένων ἀντιστοίχων στιγμῶν τοῦ πενταγώνου. Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν στιγμῶν παριστᾷ τὸν τρίτον πεντάγωνον ἀριθμόν, ὅστις εἶναι ὁ 12 (δηλαδὴ 1+4+7). Ἡ συναφὴς πρόοδος εἶναι ὡς ἐκτίθεται κατωτέρω :



Σχ. 13

| | | |
|---|---|---|
| Ἡ στιγμὴ τῆς κορυφῆς τῆς ληφθείσης γωνίας | = | 1 |
| Αἱ στιγμαὶ τοῦ ἀκολουθοῦντος πρώτου τριπλεύρου γνώμονος | = | 4 |
| » » » » δευτέρου » » | = | 7 |

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ στιγμαὶ τοῦ ἑπομένου γνώμονος θὰ εἶναι 10, τοῦ ἑπομένου τούτου 13 (ὡς τὸ σχῆμα 14) κλπ. καὶ οἱ συναφεῖς πεντάγωνοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι 1, 5 (=1+4), 12 (=1+4+7), 22 (=1+4+7+10), 35 (=1+4+7+10+13).



Σχ. 14

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ἀμετάθετοι, αἱ μόνιμοι πλευραὶ τοῦ πενταγώνου εἶναι δύο. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἑπομένως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ γνώμονος, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, τὸν 5, τὸν ἀριθμὸν τῶν μονίμων πλευρῶν, τὸν 2 καὶ ἔχομεν ὡς γνωμονικὸν ἀριθμὸν 5−2=3. Ἡ διαφορὰ δηλ. τῶν δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα εἶναι 3 καὶ συνεπῶς ἡ πρόοδος εἶναι :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19.... |
| καὶ οἱ συναφεῖς πεντάγωνοι ἀριθμοὶ | 1 | 5 | 12 | 22 | 35 | 51 | 70.... |

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐργαζόμεθα διὰ τὸν γεωμετρικὸν σχηματισμὸν ἐκ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τῶν ἑξαγώνων ἀριθμῶν, ἐκ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου τῶν ἑπταγώνων ἀριθμῶν κλπ.

Ἐὰν παραστήσωμεν γενικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ πολυ-

γώνου διὰ τοῦ ν εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι ὁ γνωμονικὸς ἀριθμός, ὁ ἀριθμὸς δηλ. ὁ δηλῶν τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθ. προόδου μὲ πρῶτον ὅρον πάντοτε τὴν μονάδα, θὰ εἶναι ν—2. Πρέπει δηλ. νὰ ἀφαιρῶμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ καν. πολυγώνου, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀμεταθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς τὰς ὁποίας ἑκάστοτε περιθέτομεν τὸν γνώμονα, καὶ ὅστις ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι πάντοτε ὁ 2. Ἤδη ἔγινε, φρονοῦμεν, καταφανὴς ἡ ὀνομασία τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν ἀφ' ἑνός, καὶ ἡ σημασία τοῦ γνωμονικοῦ ἀριθμοῦ ν—2 ἀφ' ἑτέρου.

Δὲν θεωροῦμεν ἄσκοπον νὰ τονίσωμεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω θεωρίας τὴν ἑρμηνείαν τῶν ὅρων «δυνάμει» καὶ «ἐνεργείᾳ» τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀριστοτέλης πρὸς διάκρισιν τοῦ ἀπείρου εἰς δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἄπειρον.

Ἐκ τοῦ γνωμονικοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ν—2, ὁρμώμενος ὁ Ἰάμβλιχος λέγει, ὡς ἐμνημονεύσαμεν, «ἐντεῦθεν καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη» καὶ παρεμβάλλει εἰς τὰ σχόλια περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν 6 σελίδας καθαρᾶς ἀλγέβρας.

**6. Τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα.**— Τὸ τιθέμενον πρόβλημα ἔχει ὡς ἑξῆς :

Δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων $x+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{\nu-1}=S$

καὶ τὰ ἀθροίσματα ν—1 ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$x+x_1=S_1$$
$$x+x_2=S_2$$
$$x+x_3=S_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x+x_{\nu-1}=S_{\nu-1}$$

ἤτοι ἐν ὅλῳ ν ἐξισώσεις.

Κατὰ τὸν Θυμαρίδαν ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι :

$$x=\frac{(S_1+S_2+S_3+\ldots\ldots+S_{\nu-1})-S}{\nu-2}$$

Ὁ παρονομαστὴς ν—2, εἶναι ὁ γνωστός μας ἤδη γνωμονικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκ πρώτης ὄψεως, φαίνεται, ὅτι δὲν ἔχει σχέσιν μὲ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος. Παρὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην θὰ προσπαθήσωμεν νὰ εἰκάσωμεν τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς θεωρίας τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου. Πρὸ τούτου παραθέτομεν ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἐπιλύσεως συστήματος τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου.

Ἔστω π.χ. ὅτι οἱ ἄγνωστοι εἶναι πέντε (ν=5) καὶ αἱ συνδέουσαι αὐτοὺς πέντε ἐξιώσεις ἔχουν ὡς ἑξῆς :

$$x+y+z+u+t=139=S$$
$$x+y=\ 40=S_1$$
$$x+z=\ 60=S_2$$
$$x+u=\ 70=S_3$$
$$x+t=\ 38=S_4$$

Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ Θυμαρίδου, (ἐφαρμόζοντες δηλ. τὸν ἀνωτέρω τύπον) θὰ ἔχωμεν

$$x=\frac{(40+60+70+38)-139}{5-2}=\frac{208-139}{3}=\frac{69}{3}=23.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐξισώσεις $x+y=40$, $x+z=60$, $x+u=70$, $x+t=38$ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ x εὑρίσκομεν $y=17$, $z=37$, $u=47$, $t=15$.

Π ῶ ς ὁ Θ υ μ α ρ ί δ α ς ἦ χ θ η ε ἰ ς τ ὴ ν ε ὕ ρ ε σ ι ν τ ῆ ς λ ύ σ ε ω ς.

Ὁ Ἰάμβλιχος οὐδὲν ἀναφέρει περὶ τούτου, οὔτε ἄλλος τις συγγραφεύς.

Φρονοῦμεν, ὅτι ἡ ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου προέκυψεν ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν, ὡς κατωτέρω ἐκθέτομεν.

Ἔστω π.χ. ὅτι πρόκεινται οἱ ἀριθμοὶ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10... καὶ δίδεται τὸ ἄθροισμα πλήθους τινος ἐκ τούτων, ἔστω τῶν 6 πρώτων ἀριθμῶν, ἤτοι $(1+2+3+4+5+6)=21$, δίδεται δηλ. ὁ ἕκτος τῇ τάξει τρίγωνος ἀριθμὸς 21, καὶ ὅτι σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τοῦ πρώτου ἐκ τῶν ἓξ ἀριθμῶν μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned}
1+\ 2&=\ 3.....S_1\\
1+\ 3&=\ 4.....S_2\\
1+\ 4&=\ 5.....S_3\\
1+\ 5&=\ 6.....S_4\\
1+\ 6&=\ 7.....S_5\\
\hline
5+20&=25
\end{aligned}$$

Ἐκ τῆς ἄνω διατάξεως καὶ τοῦ ἀθροίσματος $1+2+3+4+5+6=21$ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος, δηλ. ἡ μονάς, περιέχεται εἰς μὲν τὸν τρίγωνον ἀριθμὸν 21 μίαν φοράν, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε μερικῶν ἀθροισμάτων 5 φοράς. Ἐὰν ἑπομένως ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος εἶναι ἄγνωστος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τοῦτον, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος 25 τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων (τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $6-1=5$) τὸ δοθὲν ἄθροισμα 21. Εἰς τὴν προκύπτουσαν διαφοράν, $25-21=4$ θὰ περιλαμβάνεται ὁ πρῶτος ὅρος 4 φοράς. Ὅθεν διαιροῦμεν τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν διὰ τοῦ 4 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὑποτιθέμενον ἄγνωστον, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι $4:4=1$.

Ἡ μέθοδος παραμένει βεβαίως ἡ αὐτή, ὅταν δοθοῦν 1) τυχόντες ἄγνωστοι ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ 2) τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ 3) τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τυχόντος ἐκ τῶν ἀγνώστων, μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ μέθοδος τοῦ Θυμαρίδου.

6. Ι.— ***Γενικωτέρα διατύπωσις τοῦ ὑποτιθεμένου τρόπου εὑρέσεως τοῦ ἐπανθήματος ὑπὸ τοῦ Θυμαρίδου.*** Ἔστω, ὅτι δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων $x+y+z+u+t....=S$, καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀγνώστων μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἤτοι,

$$\begin{aligned}
x+y&=S_1\\
x+z&=S_2\\
x+u&=S_3\\
x+t&=S_4,
\end{aligned}$$

ἤτοι 5 ἐξισώσεις μὲ 5 ἄγνωστους.

Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων καὶ ἔστω =K. Εἰς τὸ K τοῦτο ὁ x περιέχεται τέσσαρας φοράς, ἐν ᾧ εἰς τὸ ἄθροισμα S περιέχεται μίαν φοράν, Ἐὰν ἑπομένως ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα S ἀπὸ τὸ ἄθροισμα K, τότε εἰς τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν ὁ x θὰ περιέχεται 3 φοράς. Ὅθεν διαιροῦμεν τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν K—S διὰ τοῦ 3 καὶ εὑρίσκομεν τὸν x. Ὁ διαιρέτης 3 προκύπτει ἐξ ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων, ἐνταῦθα τοῦ 5. Διὰ δοκιμῶν εἰς διαφόρους περιπτώσεις, γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ διαιρέτης τῆς προκυπτούσης διαφορᾶς, ὡς ἄνω, εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πάντοτε τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος, ἔστω ν. Ἀλλὰ ν—2 εἶναι ὁ γνωστός μας ἤδη γνωμονικὸς ἀριθμός, τὸ δὲ 2 εἰς τὸν γνωμονικὸν ἀριθμὸν παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν ἀμεταθέτων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου κατὰ τὸν σχηματισμὸν γεωμετρικῶς τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ.

6. II. Ἡ δόξα τοῦ Θυμαρίδου δὲν θὰ ἦτο μικρά, ἐὰν αὕτη ὠφείλετο μόνον εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀνωτέρω ὁμωνύμου ἐπανθήματος. Ὁ Ἰάμβλιχος ὅμως, ἐν συνεχείᾳ, ἀναφέρει ἄλλας δύο περιπτώσεις ἐφαρμογῆς τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι λύσεις δύο συστημάτων ἐχόντων ν+1 ἀγνώστους μὲ ν ἐξισώσεις ἕκαστον, ἤτοι λύσεις συστημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ. Καὶ ναὶ μὲν ὁ Ἰάμβλιχος δὲν μνημονεύει, ὅτι ἡ λύσις τῶν συστημάτων αὐτῶν ὀφείλεται εἰς τὸν Θυμαρίδαν, δὲν βλέπομεν ὅμως τὸν λόγον διὰ τὸν ὁποῖον πρέπει ν᾽ ἀποδώσωμεν εἰς ἄλλον τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως. Ἡ γνώμη αὕτη ἐνισχύεται ὡς ἀναφέρομεν ἐν ἀρχῇ ἐκ τῆς ἀποδόσεως εἰς τὸν Πυθαγόραν τῆς λύσεως διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ καὶ ὀλίγον βραδύτερον ἐκ τῆς ἀποδόσεως εἰς τὸν Πλάτωνα τῆς λύσεως κατ᾽ ἄλλον τρόπον τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως τῆς $x^2+y^2=z^2$.

Ἀλλ᾽ ἂς ἐκθέσωμεν τὰ δύο συναφῆ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἀναφέρει ὁ Ἰάμβλιχος.

1ον. «Ὅτι δὲ οὐ παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλὰ καὶ πρὸς θεώρημα ἀριθμητικὸν ἔχει τὴν ἀναφορὰν καὶ ἐφόδου γλαφυρωτάτης πρὸς ἀνεύρεσιν αἴτιον ἡμῖν γίνεται, οὕτως ἂν θεωρήσαιμεν. Προστετάχθω γὰρ ἡμῖν λόγου χάριν ἀριθμοὺς ἐκθέσθαι τέσσαρας ὧν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου διπλάσιος ἔσται τρίτου ἅμα καὶ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου τριπλάσιος δευτέρου ἅμα καὶ τετάρτου, ὁμοίως τε ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δευτέρου ἅμα καὶ τρίτου, σύμπαντες δὲ ἅμα πενταπλάσιοι τῶν αὐτῶν δύο μέσων, ὡς ἂν καὶ τάξει φυσικῇ τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ διπλασίου εἰς πενταπλάσιον ἡ προχώρησις εἴη. ἐφοδευτέον δὴ οὕτως.

Ἐπεὶ ἡμίσους χρεία διὰ τὸν διπλάσιον, λαμβάνω τὸν δύο ἀριθμόν· πρώτιστος γὰρ ἡμίσους παρεκτικὸς καὶ πρῶτος διπλάσιος. ἐπεὶ δὲ καὶ τρίτου διὰ τὸν τριπλάσιον λόγον, τρὶς ποιῶ τὰ δύο. ὁ δὴ γενόμενος ϛ΄ δι᾽ ἀμφοτέρους τοὺς γεννήτορας πρῶτος ἔσται καὶ ἡμίσους καὶ τρίτου ἐπιδεκτικός. πάλιν δὲ ἐπὶ τετάρτου μέρους δεῖ διὰ τὸν τετραπλάσιον λόγον, τετράκις τὰ ϛ΄ ποιῶ, καὶ ἐπεὶ πενταπλασίου χρεία, τὰ κδ΄ πεντάκις, ἅπερ γίνεται ρκ΄ καὶ ἔχω τοῦτον τὸν ἀριθμὸν κοινὸν ὄντα συγκεφαλαίωμα τῶν τεσσάρων ὅρων, ὃ δὴ καὶ θετέον εἶναι μεριστὸν εἰς τοὺς ἀνα-

φανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, οἷς ἐμφανίσονται οἱ προειρημένοι λόγοι, διανεμητέον τὸν ρκ΄ τρόπῳ τούτῳ. ἐπεὶ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ τῶν λοιπῶν δύο διπλάσιοι ἔσονται, ἐστί δὲ διπλασίων πυθμὴν ὡς δύο πρὸς ἕν, ἃ ἐστιν ὁμοῦ τρία, δὶς ποιῶ τὸν ρκ΄, καὶ τὸν σμ΄ μερίζω παρὰ τὸν τρίτον. γίνεται δὴ μέρος ἓν τὰ π΄. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς, οἵπερ διπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δύο, ὄντων δηλονότι καὶ αὐτῶν ἐν τεσσαράκοντα μονάσι. πάλιν, ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος τριπλάσιοι ἔσονται τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὡς τρία πρὸς ἕν, ἃ ἔστιν ὁμοῦ δ΄, ποιῶ τρὶς τὸν αὐτὸν ρκ΄ καὶ γίνεται τξ΄, ἃ μερίζω παρὰ τὸ τέταρτον, ἵν ᾖ τὸ μέρος ϙ΄. φημὶ δὴ τοσούτων εἶναι μονάδων τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον, τοὺς τριπλασίους τῶν λοιπῶν δευτέρου καὶ τετάρτου, ὄντων δηλονότι ἐν μονάσι λ΄. πάλιν, ἐπεὶ ὁ πρῶτος σὺν τῷ τετάρτῳ τετραπλάσιος ἐστὶ τῶν δύο μέσων δευτέρου καὶ τρίτου, ὡς τέσσαρα πρὸς ἕν, ἃ ἐστιν ὁμοῦ πέντε, τετράκις ποιῶ τὰ ρκ΄, γίνεται υπ΄, μερίζω παρὰ τὸν ε΄ καὶ ἔχω μέρος ἓν τὰ ϙς΄. τοσούτων οὖν φημι μονάδων εἶναι τὸν πρῶτον σὺν τῷ τετάρτῳ, οἵπερ τετραπλάσιοι εἰσι τῶν δύο μέσων ἐν μονάσιν ὄντων κδ΄. κατὰ συνδυασμὸν οὖν εὑρημένων τῶν ἀριθμῶν, οὐδέπω δὲ καθ' ἑαυτοὺς διακεκριμένων, ἔφοδον ἡμῖν τῆς διακρίσεως παρέχει ἡ τοῦ Θυμαρίδου ἐπανθήματος γνῶσις.....».

(Ἑρμηνεία : ὅτι δὲ δὲν παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλ' ἀναφέρεται καὶ εἰς ἀριθμητικὸν θεώρημα καὶ γίνεται αἴτιον εἰς ἡμᾶς ν' ἀνεύρωμεν γλαφυρωτάτην μέθοδον, τὸ ἐρευνῶμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον : Ἂς ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τέσσαρας ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλάσιος τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ ὁμοίως ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν νὰ εἶναι πενταπλάσιον τῶν αὐτῶν δύο μέσων δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, ὡς ἐὰν ἡ προχώρησις κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ τοῦ διπλασίου εἰς τὸ πενταπλάσιον ν' ἀκολουθῇ φυσικήν τινα τάξιν. Πρὸς τοῦτο δέον ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον. Ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ ὁ ἥμισυς ἀριθμός, ἐπειδὴ ἐδόθη ὁ διπλάσιος, λαμβάνω τὸν ἀριθμὸν δύο· διότι ἐκ τῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὁ πρῶτος ὁ παρέχων ἡμίση, καὶ ὁ πρῶτος διπλάσιος. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἓν τρίτον, ἐπειδὴ ἐδόθη τὸ τριπλάσιον, τριπλασιάζω τὸν ληφθέντα δύο. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 6 ἕνεκα τῶν παραγόντων αὐτοῦ 2 καὶ 3 εἶναι ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἀριθμῶν ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπιδεκτικὸς εἰς τὸ νὰ δίδῃ ἥμισυ καὶ τρίτον. Πάλιν δέ, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἓν τέταρτον, ἐπειδὴ ἐδόθη τὸ τετραπλάσιον τετραπλασιάζω τὸν 6, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ τὸ πενταπλάσιον, λαμβάνω τὰ 24 πεντάκις, τὰ ὁποῖα δίδουν 120 καὶ ἔχω τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων (ἀγνώστων) ὅρων, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μερίσω εἰς τοὺς ἀναφανησομένους τέσσαρας ἀριθμούς, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἐμφανισθοῦν οἱ προειρημένοι λόγοι. Ὁ 120 δέον νὰ διαμοιρασθῇ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι διπλάσιοι τῶν ἄλλων δύο, ὑπάρχει δὲ πυθμὴν τῶν διπλασίων ὡς τὸ δύο πρὸς ἕν (σημ. Ὁ 2 εἶναι διπλάσιος τοῦ 1. Ὁ 4 εἶναι διπλάσιος τοῦ 2. Ὁ 6 εἶναι διπλά-

σιος τοῦ 3, κλπ. Ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος εἶναι διπλάσιος ἄλλου, τοῦ μικροτάτου, τῆς μονάδος, εἶναι ὁ 2. Οὗτος λέγεται «πυθμὴν» «ἀρχὴ» τῶν διπλασίων), τὰ ὁποῖα ὁμοῦ δίδουν 3, διπλασιάζω τὸν 120 καὶ τὸν 240 διαιρῶ διὰ 3. Καὶ λαμβάνω πηλίκον 80. Λέγω, ὅτι τόσας μονάδας ἔχουν οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι διπλάσιοι τῶν δύο ἄλλων, οἱ ὁποῖοι συνεπῶς ἔχουν ἄθροισμα 40 μονάδας. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι τριπλάσιοι τῶν λοιπῶν, δηλ. τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου, εὑρίσκονται δηλ. τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἰς σχέσιν, ὡς 3 πρὸς 1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 4, τριπλασιάζω τὸν αὐτὸν 120 καὶ λαμβάνω 360 τὸν ὁποῖον διαιρῶ διὰ τοῦ 4, ὅτε τὸ πηλίκον εἶναι 90. Λέγω, ὅτι τόσας μονάδας ἔχουν ὁμοῦ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος, καὶ ὅτι συνεπῶς οὗτοι ἀφοῦ εἶναι τριπλάσιοι τοῦ ἀθροίσματος τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων τούτων θὰ εἶναι 30. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιοι τῶν δύο μέσων, τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου, εὑρίσκονται δηλ. τὰ ἀθροίσματα ταῦτα εἰς σχέσιν 4 πρὸς 1, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα 5, τετραπλασιάζω τὸν 120 καὶ λαμβάνω 480, τὸν ὁποῖον διαιρῶ διὰ 5 καὶ λαμβάνω πηλίκον 96. Τόσας μονάδας ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου μετὰ τοῦ τετάρτου, τὸ ὁποῖον εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μέσων, οἱ ὁποῖοι συνεπῶς θὰ ἔχουν ἄθροισμα 24. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἔχομεν εὕρει ἀθροίσματα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν κατὰ συνδυασμόν, χωρὶς ὅμως νὰ ἔχωμεν εὕρει τοὺς ἀριθμοὺς κεχωρισμένως, κατορθώνομεν νὰ λάβωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν κεχωρισμένως, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν μέθοδον τοῦ Θυμαρίδου....).

Ἡ ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ἀναφερομένη λύσις, εἰς σύντομον πως διατύπωσιν.

(Παριστῶμεν τοὺς ἀγνώστους ὡς x, y, z, u χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὸν ἐκτιθέμενον ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου τρόπον τῆς λύσεως τοῦ συστήματος).

«Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ διπλασίου, τριπλασίου, τετραπλασίου καὶ πενταπλασίου, θέτω τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀγνώστων ἴσον μὲ τὸ γινόμενον 2. 3. 4. 5=120. Ἐπειδὴ τώρα $x+y=2(z+u)$ κατὰ τὸ πρόβλημα, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $2(x+y)$ ὅτε ἔχομεν

$$x+y+2(x+y)=2(z+u)+2(x+y), \quad \text{ἢ}$$
$$3(x+y)=2(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ $x+y+z+u=120$. Ἐπομένως πολ)ζω τὸ 120 ἐπὶ 2 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 3, ὅτε λαμβάνω τὸ $x+y$ ἤτοι $x+y=\frac{2.120}{3}=80$.

Ἐπειδὴ πάλιν $x+z=3(y+u)$ προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $3(x+z)$ καὶ ἔχω

$$x+z+3(x+z)=3(y+u)+3(x+z) \quad \text{ἢ}$$
$$4(x+z)=3(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ τὸ $x+y+z+u=120$ Ἐπομένως πολ)ζω τὸ 120 ἐπὶ 3 καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 4 ἤτοι ἔχω

$$x+y=\frac{3.120}{4}=90$$

Ἐπειδὴ πάλιν $x+u=4(y+z)$, προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $4(x+u)$ καὶ ἔχω

$$x+u+4(x+u)=4(y+z)+4(x+u) \quad \text{ἢ}$$
$$5(x+u)=4(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ τὸ $x+y+z+u=120$. Ἑπομένως πολ)ζω τὸ 120 ἐπὶ 4 καὶ τὸ προπροκύπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 5, ἤτοι ἔχω

$$x+u=\frac{4.120}{5}=96.$$

Εὕρομεν δηλ. μέχρι τῆς στιγμῆς, $x+y+z+u=120$

καὶ $x+y=80$

$x+z=90$

$x+u=96$

Τὸ σύστημα ὅμως τοῦτο εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου τοῦ ὁποίου ἡ μέθοδος (τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα) μᾶς δίδει

$$x=\frac{(80+90+96)-120}{2}=\frac{266-120}{2}=\frac{146}{2}=73.$$

Κατόπιν τούτου εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων

$$y=7,\ z=17,\ u=23.$$

**Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω διοφαντικοῦ συστήματος ὑπὸ τὴν γενικήν του μορφήν.** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, τὸ

$$1.....(x+y)=\alpha(z+u)$$
$$2.....(x+z)=\beta(y+u)$$
$$3.....(x+u)=\gamma(y+z)$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας ἐξισώσεις, ὅτε ἔχομεν

$$4.....\quad 3x+y+z+u=\alpha(z+u)+\beta(y+u)+\gamma(y+z)$$

Προσθέτομεν τὴν (2) καὶ (3) ὁπότε λαμβάνομεν

$$2x+z+u=\beta(y+u)+\gamma(y+z)$$

λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $2x$ ὅτε εἶναι

$$5.....\quad 2x=\beta(y+u)+\gamma(y+z)-(z+u)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀπὸ τὴν (4) ὅτε ἔχομεν

$$x+y+z+u=\alpha(z+u)+(z+u) \quad \text{ἢ}$$
$$6.....\quad x+y+z+u=(\alpha+1)(z+u).$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως λαμβάνομεν

$$7.....\quad x+y+z+u=(\beta+1)(y+u)$$
$$8.....\quad x+y+z+u=(\gamma+1)(y+z)$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τώρα ἀκεραίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων πρέπει τὸ ἄθροισμα $x+y+z+u$ νὰ περιέχῃ ὡς παράγοντας τοὺς συντελεστὰς $(\alpha+1)$, $(\beta+1)$, $(\gamma+1)$. Ἐὰν καλέσωμεν Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τούτων, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x+u+z+u=E$ ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6), (7), (8) λαμ-

βάνομεν

$$E=(\alpha+1)\,(z+u)$$
$$E=(\beta+1)\,(y+u)$$
$$E=(\gamma+1)\,(y+z).$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας, ὡς πρὸς $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ ἔχομεν,

$$z+u=\frac{E}{\alpha+1},\quad y+u=\frac{E}{\beta+1},\quad y+z=\frac{E}{\gamma+1}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὰ ἐξισώσεις (1), (2), (3) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ λαμβάνομεν

$$9.\ldots\ x+y=\frac{\alpha}{\alpha+1}\cdot E$$
$$10.\ldots\ x+z=\frac{\beta}{\beta+1}\cdot E$$
$$11.\ldots\ x+u=\frac{\gamma}{\gamma+1}\cdot E.$$

Ἔχομεν δὲ λάβει

$$12.\ldots\ x+y+z+u=E$$

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων (9), (10), (11), (12) ($\nu=4$) εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου.

Ὅθεν, ἐφαρμόζοντες τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα (δηλ. τὴν μέθοδον λύσεως τοῦ Θυμαρίδου) ἔχομεν

$$x=\frac{E\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)-E}{2}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ x εἶναι μὲν ἀκέραιος, ἀλλ' εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι περιττὸς καὶ συνεπῶς διαιρούμενος διὰ 2 νὰ μὴ δίδῃ ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἀντὶ τοῦ E πρέπει νὰ λάβωμεν 2E.

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω λύσιν εἰς τὸ ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ἀναφερόμενον πρόβλημα :

$$x+y=2\,(z+u)$$
$$x+z=3\,(y+u)$$
$$x+u=4\,(y+z)$$
$$x+y+z+u=5\,(y+z)$$

ἔχομεν

$$\alpha'.\ldots\ x+y=\frac{2}{3}\cdot E$$
$$\beta'.\ldots\ x+z=\frac{3}{4}\cdot E$$
$$\gamma'.\ldots\ x+u=\frac{4}{5}\cdot E$$

Ἐξ οὗ κατὰ τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα εἶναι

$$x=\frac{E\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)-E}{\nu-2}.$$

Ε ὅμως εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν (2+1), (3+1), (4+1), ἤτοι 60 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων $\nu=4$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$x=\frac{\frac{60\cdot 133}{60}-60}{2}=\frac{73}{2}.$$

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς τῆς τιμῆς τοῦ x, ὁ 73, εἶναι περιττὸς διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x λαμβάνομεν $2E = 120$, ὁπότε εἶναι

$$x = \frac{\frac{120 \cdot 133}{60} - 120}{2} = \frac{266 - 120}{2} = 73.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ x, ἐκ τῶν ἐξισώσεων α', β', γ', θέτοντες ἀντὶ τοῦ E τὸ 2E εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς $y = 7$, $z = 17$, $u = 23$.

2ον. Τὸ δεύτερον πρόβλημα τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Ἰάμβλιχος εἶναι ὅπως τὸ πρῶτον μνημονευθὲν σύστημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ συντελεστὰς ὅμως κλασματικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι :

$$1 \ldots\ldots x + y = \frac{3}{2}(z + u).$$

$$2 \ldots\ldots x + z = \frac{4}{3}(y + u).$$

$$3 \ldots\ldots x + u = \frac{5}{4}(y + z).$$

**Ἡ λύσις, κατὰ τὴν ἔκθεσιν τοῦ Ἰαμβλίχου, εἰς σύγχρονον διατύπωσιν, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ τρόπος τῆς λύσεως. Ἡ μόνη μεταβολὴ εἶναι ἡ παράστασις τῶν ἀγνώστων μὲ γράμματα.**

«Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ ἡμιολίου (ἡμιόλιον=ἓν καὶ ἥμισυ τοῦ ὅλου δηλ. $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ = ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου μέλους τῆς α'. ἐξισώσεως) ὁ πρῶτος δὲ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος δύναται νὰ δώσῃ ἥμισυ εἶναι ὁ 2, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{3}{2}$ εἶναι $= 5$, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸ 2 ἐπὶ 5 καὶ ἔχω $= 10$. Ἐπειδὴ ἀκόμη εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτρίτου (ἐπίτριτον = ἓν καὶ ἓν τρίτον δηλ. $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$), τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{4}{3}$ εἶναι $= 7$, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν 10 ἐπὶ τὸ 7 καὶ λαμβάνω $= 70$.

Ἐπειδὴ τέλος εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτετάρτου (ἐπιτέταρτον = ἓν καὶ ἓν τέταρτον, δηλ. $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$) τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{4}$ εἶναι 9, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν 70 ἐπὶ 9 καὶ ἔχω $= 630$. Τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $x + y + z + u$ τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ εὕρωμεν.

Ἐπειδὴ τώρα εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἡμιολίου $\left(= \frac{3}{2}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὸ $\frac{3}{2}(x + y)$ καὶ ἔχομεν

$$x + y + \frac{3}{2}(x + y) = \frac{3}{2}(z + u) + \frac{3}{2}(x + y),$$

ἢ $$\frac{5}{2}(x+y)=\frac{3}{2}(x+y+z+u),$$

ἢ $$5(x+y)=3(x+y+z+u).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $x+y$ λαμβάνομεν

$$x+y=\frac{3\,.\,630}{5}=\frac{1890}{5}=378.$$

Ἐπειδὴ πάλιν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτρίτου $\left(=\frac{4}{3}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) τὸ $\frac{4}{3}(x+z)$ καὶ ἔχομεν

$$x+z+\frac{4}{3}(x+z)=\frac{4}{3}(y+u)+\frac{4}{3}(x+z),$$

ἢ $$\frac{7}{3}(x+z)=\frac{4}{3}(x+y+z+u),$$

ἢ $$7(x+z)=4(x+y+z+u).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $x+z$ ἔχομεν

$$x+z=\frac{4\,.\,630}{7}=\frac{2520}{7}=360.$$

Ἐπειδὴ τέλος εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτετάρτου $\left(=\frac{5}{4}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) τὸ $\frac{5}{4}(x+u)$ καὶ ἔχομεν

$$x+u+\frac{5}{4}(x+u)=\frac{5}{4}(y+z)+\frac{5}{4}(x+u),$$

ἢ $$\frac{9}{4}(x+u)=\frac{5}{4}(x+y+z+u),$$

ἢ $$9(x+u)=5(x+y+z+u).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ὡς πρὸς $x+u$, ἔχομεν

$$x+u=\frac{5\,.\,630}{9}=\frac{3150}{9}=350.$$

Ἤτοι εὕρομεν : 4..... $x+y=378$

5..... $x+z=360$

6..... $x+u=350$

καὶ $x+y+z+u=630.$

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν 4 τούτων ἐξισώσεων εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις κατὰ τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα εἶναι

$$x=\frac{(378+360+350)-630}{2}=229.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐξισώσεις (4), )5), (6) τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ $x$ εὑρίσκομεν $y=149$, $z=131$, $u=121$. Εἶναι λίαν ἐνδιαφέρον νὰ ἑρμηνευθῇ ἡ πυθαγορικὴ ἐπινόησις, διατί, ὅπως π. χ. εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, ὅταν πρόκειται περὶ ἡμιολίου καὶ ὁ πρῶτος παρέχων ἥμισυ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2 καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{3}{2}$ εἶναι $=5$, πολλαπλασιάζομεν τὸ 5

ἐπὶ 2. Εἰς τὴν ἐπινόησιν αὐτὴν κ.ἑ. στηρίζεται ἡ λύσις τοῦ διοφαντικοῦ συστήματος ἡ ὁποία μαρτυρεῖ σαφῶς περὶ μεγίστης ἀνθήσεως ἐν Ἑλλάδι τῆς ἐπιστήμης τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν.

Δὲν εἶναι δὲ ἄδικον, ἂν ἀποδώσωμεν τὴν ἐπινόησιν αὐτὴν εἰς τὸν Θυμαρίδαν, ἐφ' ὅσον ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος γίνεται τελικῶς διὰ τοῦ ὁμωνύμου ἐπανθήματος.

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω διοφαντικοῦ συστήματος.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) τοῦ 2ου προβλήματος καὶ ἔχομεν $4\ldots\ldots 3x+y+z+u=\frac{3}{2}(z+u)+\frac{4}{3}(y+u)+\frac{5}{4}(y+z)$.

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν

$$2x+z+u=\frac{4}{3}(y+u)+\frac{5}{4}(y+z).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $2x$ λαμβάνομεν

$$5\ldots\ldots\quad 2x=\frac{4}{3}(y+u)+\frac{5}{4}(y+z)-(z+u).$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀπὸ τὴν (4) καὶ ἔχομεν

$$x+y+z+u=\frac{3}{2}(z+u)+(z+u),$$

ἢ

$$6\ldots\ldots\quad x+y+z+u=\frac{5}{2}(z+u).$$

Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον λαμβάνομεν

$$7\ldots\ldots\quad x+y+z+u=\frac{7}{3}(y+u)$$

$$8\ldots\ldots\quad x+y+z+u=\frac{9}{4}(y+z).$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6), (7), (8) λαμβάνομεν

$$9\ldots\ldots\ 2(x+y+z+u)=5(z+u)$$
$$10\ldots\ldots\ 3(x+y+z+u)=7(y+u)$$
$$11\ldots\ldots\ 4(x+y+z+u)=9(y+z)$$

Ἐὰν καλέσωμεν E τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν $5, 7, 9 = 315$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἄθροισμα $x+y+z+u=E\ (=315)$, ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9), (10), (11) λαμβάνομεν

$$2E=5(z+u)$$
$$3E=7(y+u)$$
$$4E=9(y+z)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας ὡς πρὸς $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ ἔχομεν

$$z+u=\frac{2E}{5}$$

$$y+u=\frac{3E}{7}$$

$$y+z=\frac{4E}{9}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) ἔχομεν :

$$x+y=\frac{3}{2}\cdot\frac{2E}{5}$$
$$x+z=\frac{4}{3}\cdot\frac{3E}{7}$$
$$x+u=\frac{5}{4}\cdot\frac{4E}{9},$$

ἢ

$$12.\ldots\ x+y=\frac{3E}{5}$$
$$13.\ldots\ x+z=\frac{4E}{7}$$
$$14.\ldots\ x+y=\frac{5E}{9}.$$

Ἔχομεν δὲ λάβει

$$15.\ldots\ x+y+z+u=E\ (=315).$$

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν ἐξισώσεων (12), (13), (14), (15) εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου. Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα λαμβάνομεν

$$x=\frac{E\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\right)-E}{\nu-2}.$$

Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων $\nu=4$ καὶ $E=315$,

$$x=\frac{315\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\right)-315}{2}=\frac{229}{2}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμητὴς 229 εἶναι περιττὸς ἀριθμός, διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $x$ λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ $E$ τὸ $2E=630$, ὁπότε ἔχομεν

$$x=\frac{\frac{630.544}{315}-630}{2}=\frac{1088-630}{2}=\frac{458}{2}=229.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (12), (13), (14) ἀντικαθιστῶντες τὸ $x$ διὰ τοῦ 229 καὶ τὸ $E$ διὰ $2E=630$ εὑρίσκομεν $y=149$, $z=131$, $u=121$.

---

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Δ΄ 1952
ΤΕΥΧΟΣ Β΄
8

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1952

# ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΕΛΕΙΟΙ, ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ, ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ. Η $\sqrt{2}$

1. Οἱ Πυθαγόρειοι διέκρινον τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἐλλιπεῖς, τελείους, ὑπερτελεῖς καὶ φιλίους. Κατὰ τὸν Νικόμαχον (Ἀριθ. Εἰσαγωγὴ R. Hoche, σ. 37 κ. ἑ. Teubner, 1866) ἐλλιπεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ μέρη προστιθέμενα εἶναι μικρότερα τοῦ ὅλου. Π. χ. ὁ 8 εἶναι ἐλλιπής, διότι πάντα τὰ δυνατὰ πηλίκα αὐτοῦ, λαμβανόμενα διὰ πάντων τῶν δυνατῶν διαιρετῶν του (πλὴν τῆς μονάδος βεβαίως) καὶ προστιθέμενα δὲν δίδουν 8. Ὡς 8 : 8=1, 8 : 4=2, 8 : 2=4, ἤτοι 1+2+4=7<8. Ἐπίσης ὁ 14 εἶναι ἐλλιπής. Διότι 14 : 14=1, 14 : 7=2, 14 : 2=7, ἤτοι 1+2+7=10<14. Ὑπερτελεῖς ἀριθμοὶ κατὰ τὸν αὐτὸν συγγραφέα εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ μέρη προστιθέμενα δίδουν ἄθροισμα μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ 12 εἶναι ὑπερτελής, διότι 12 : 12=1, 12 : 6=2, 12 : 4=3, 12 : 3=4, 12 : 2=6, ἤτοι 1+2+3+4+6=16>12.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν του (VII, ὁρ. 23). Π. χ. ὁ 6 εἶναι τέλειος, διότι 6 : 6=1, 6 : 3=2, 6 : 2=3, ἤτοι 1+2+3=6. Ἐπίσης ὁ 28 εἶναι τέλειος διότι, 28 : 28=1, 28 : 14=2, 28 : 7=4, 28 : 4=7, 28 : 2=14 ἤτοι 1+2+4+7+14=28. Καὶ ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς καὶ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, ἐπαναλαμβάνουν τὰ τοῦ Εὐκλείδου περὶ τῶν τελείων ἀριθμῶν, σημειοῦται δέ, ὅτι ὁ πρῶτος τέλειος ὁ 6 ἐκαλεῖτο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ Γάμος.

Τὸ 36ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου διαλαμβάνει 1) τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἱκανῆς καὶ ἀναγκαίας συνθήκης, ἵνα ἀριθμός τις εἶναι τέλειος καὶ 2) τὸν τρόπον τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ τελείου ἀριθμοῦ, ὅταν πληροῦται ἡ ἐν λόγῳ συνθήκη. Κατὰ ταῦτα θεωροῦμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον :

| $1$, | $2^{1}$, | $2^{2}$, | $2^{3}$, | $2^{4}$, | $2^{5}$, | $2^{6}$, | $2^{7}$, | $2^{8}$, | $2^{9}$, | $2^{10}$, | $2^{11}$, | $2^{12}$, | $2^{13}$, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 4, | 8, | 16, | 32, | 64, | 128, | 256, | 512, | 1024, | 2048, | 4096, | 8192, |

τῆς ὁποίας σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα. Ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον τοῦ μερικοῦ τούτου ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος, τῆς τάξεως τῶν προσθετέων λογιζομένης ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Π.χ. :

$\sigma_1 = 1$

$\sigma_2 = 1+2=3$. Ὁ 3 εἶναι πρῶτος· ἄρα $3\times2=6$, τέλειος.

$\sigma_3 = 1+2+4=7$. Ὁ 7 εἶναι πρῶτος· ἄρα $7\times4=28$, τέλειος.

$\sigma_4 = 1+2+4+8=15$. Ὁ 15 δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα δὲν δίδεται τέλειος ἀριθμός.

$\sigma_5 = 1+2+4+8+16=31$. Ὁ 31 εἶναι πρῶτος· ἄρα $31\times16=496$, τέλειος.

$\sigma_6 = 1+2+4+8+16+32=63$. Ὁ 63 δὲν εἶναι πρῶτος· ἄρα δὲν δίδεται τέλειος.

$\sigma_7 = 1+2+4+8+16+32+64=127$. Ὁ 127 εἶναι πρῶτος· ἄρα $127\times64=8128$, τέλειος.

$\sigma_8 = 127+128=255$. Δὲν δίδεται τέλειος ( : 5).

$\sigma_9 = 255+256=511$. Δὲν δίδεται τέλειος ( : 7).

$\sigma_{10} = 511+512=1023$. Δὲν δίδεται τέλειος ( : 3).

$\sigma_{11} = 1023+1024=2047$. Δὲν δίδεται τέλειος ( : 23).

$\sigma_{12} = 2047+2048=4095$. Δὲν δίδεται τέλειος ( : 3, : 5).

$\sigma_{13} = 4095+4096=8191$. Ὁ 8191 εἶναι πρῶτος, ἄρα $8191\times4096=33.550.336$ εἶναι τέλειος. Ὁ γενικὸς τύπος λήψεως τοῦ τελείου ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ ταῦτα $\sigma_v \cdot 2^{v-1}$ ἢ $(2^v-1)\cdot 2^{v-1}$, ὅταν ὁ $\sigma_v$ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς ($v=1, 2, 3\ldots$).

Ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του τὴν ἀναφερομένην εἰς τὴν Ἀριθμ. Εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάγου [1] γράφει, ὅτι ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἷς τέλειος ἀριθμός, ἀπὸ 11—100, 101—1000, 1001—10000 ἀνὰ εἷς. Ἐὰν ἀπὸ βαθμοῦ τινος μυριάδος διαπιστωθῇ τέλειος ἀριθμὸς θὰ εἶναι μόνον εἷς. Ἐὰν δηλ. μεταξὺ $10^4+1$ ἕως $10^8$, $10^8+1$ ἕως $10^{12}$ κλπ. διαπιστωθῇ ὅτι ὑπάρχει τέλειος ἀριθμὸς θὰ εἶναι μόνον εἷς. Ἡ παρατήρησις τοῦ Ἰαμβλίχου εἶναι ἀληθὴς μέχρι τοῦ $10^8$, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ὑπολογίσει καὶ τὸν πέμπτον τέλειον ἀριθμόν. Πλὴν τούτων προσθέτει ὁ Ἰάμβλιχος, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῶν τελείων ἀριθμῶν θὰ λήγῃ εἰς 6 ἢ 8. Τοῦτο εἶναι ἀληθὲς ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν μέχρι σήμερον ὑπολογισθέντων 10 τελείων ἀριθμῶν. Ὁ δέκατος τέλειος ἀριθμὸς ὑπελογίσθη τῷ 1912 ὑπὸ τοῦ R. Powers καὶ εἶναι ὁ $2^{88}(2^{89}-1)$ (Bull. Amer. Math. Soc. 1912, σ. 162) [2]. Φανερώνει ὅμως ἡ τελευταία παρατήρησις τοῦ Ἰαμβλίχου ὅτι θὰ ἐγνώριζον περὶ τούτου κριτήριον οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τὸ ὁποῖον δὲν ἐσώθη.

Ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν (η΄. 546 Β κ. ἑ.) γράφει «Ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δὲ... ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν,...». Πρόταται περὶ τοῦ περιφήμου γεωμετρικοῦ ἀριθμοῦ [3]. Οὗτος δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐνταῦθα. Σημειοῦμεν ὅμως ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ περιλαμβάνων τὴν περίοδον τοῦ θείου γεννητοῦ, ὁ κατὰ Adam 12.960.000, δὲν εἶναι τέλειος, ἐν ᾧ κατὰ τὸν Θέωνα τὸν

---

1) Pistelli, 1894 σ. 33, Teubner.

2) T. Heath, A history of Greek mathematics, I, σελ. 75, Oxford.

3) Κ. Γεωργούλη, Πλάτωνος Πολιτεία σ. 503—515, 1939.

Σμυρναῖον ὁ 3 καὶ 10 δι' εἰδικοὺς λόγους ἐκαλοῦντο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων τέλειοι (E. Hiller 1878, σ. 46, Teubner).

Τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ἑρμηνεύεται ὡς ἑξῆς : νοεῖται τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 5. Κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα ἡ διάμετρος (διαγώνιος) τοῦ τετραγώνου εἶναι ($\delta^2=2\cdot5^2$) ἡ $\delta=\sqrt{50}$. Αὕτη εἶναι ἄρρητος (ἀσύμμετρος). Διὰ νὰ γίνῃ ῥητὴ πρέπει ν' ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς ἀπὸ τὸ 50, ὅτε εἶναι $\delta=\sqrt{50-1}=7$. Ἐὰν ἀφαιρεθοῦν 2 μονάδες ἀπὸ τὸ 50 ἔχομεν $\delta=\sqrt{50-2}=\sqrt{48}$, διάμετρον ἄρρητον. Φρονοῦμεν, παρὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Adam, ὅτι τὸ «ἀρρήτων δὲ δυοῖν», ἐτέθη πρὸς ἀκριβέστερον προσδιορισμὸν τοῦ «ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων». Ὁπωσδήποτε θεωρεῖται βέβαιον ὅτι ὁ Πλάτων ἀρύεται τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν καὶ κυρίως ἐκ τοῦ συναφοῦς πρὸς τούτους τύπου $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2\mp1$, ὅπου α παριστᾷ τὴν πλευρὰν τετραγώνου καὶ δ τὴν διάμετρον (διαγώνιον) αὐτοῦ ($\nu=1, 2, 3\ldots$), ὡς θὰ καταδειχθῇ κατωτέρω.

Ὁ Πρόκλος ὄχι μόνον ῥητῶς ἀναφέρει τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ ὑπεδήλωσε καὶ τὴν συναφῆ γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν, κατὰ τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Πολιτείαν (τόμ. ΙΙ. σ. 24 κ. ἑ. καὶ 393 κ.ἑ. Kroll. Ἀνάπτυξις τῆς προτάσεως ὑπὸ Hultsch). Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τοὺς ὁποίους ἐγνώριζεν ὁ Πλάτων, εἶναι ἡ πρώτη θεμελίωσις τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῶν ὁρίων, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τοῦ σημερινοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, καὶ ἡ πρώτη θεμελίωσις τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ καὶ ἡ σύγχρονος μαθηματικὴ ἐπιστήμη.

Ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου ἢ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καλεῖται παρὰ τοῖς ἀρχαίοις διάμετρος. Φαίνεται δ' ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς θεωρήσεως τετραγώνων ἢ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον. Ἐπεκράτησε δὲ γενικῶς νὰ ὀνομάζεται ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου, διάμετρος. Κατὰ τὴν ὀνομασίαν ταύτην διάμετρος νοεῖται ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Οἱ πλευρικοὶ ἀριθμοὶ ἀφοροῦν εἰς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰς πλευρὰς τετραγώνων, ἐν ᾧ οἱ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀφοροῦν εἰς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰς διαγωνίους τετραγώνων. Κατωτέρω διατηροῦμεν τὸν ὅρον διάμετρος ἀντὶ διαγώνιος τετραγώνου.

2. Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (E. Hiller, σ. 42—45, Teubner, 1878) οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι 1 καὶ ἡ διάμετρος ἐπίσης 1. Τοῦτο ἐκ πρώτης ὄψεως εἶναι ἀκατανόητον, διότι πῶς εἶναι δυνατὸν ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ; Καὶ ἐν τούτοις εἶναι ἀληθὲς, καὶ ἡ μαθηματικὴ αὕτη ἀλήθεια θὰ καταφανῇ κατωτέρω. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν δεύτερον πλευρικὸν ἀριθμόν, προσθέτομεν τοὺς προηγουμένους, πλευρικὸν καὶ διαμετρικὸν ἀριθμούς, ὅτε θὰ εἶναι $1+1=2$. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν δεύτερον διαμετρικὸν ἀριθμὸν λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον τοῦ προηγουμένου πλευρικοῦ ἀριθμοῦ

καὶ εἰς τὸ διπλάσιον τοῦτο προσθέτομεν τὸν προηγούμενον διαμετρικὸν ἀριθμόν, ὅτε θὰ εἶναι $2 \cdot 1+1=3$. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ὁ τρίτος πλευρικὸς ἀριθμὸς εἶναι $2+3=5$, καὶ ὁ τρίτος διαμετρικὸς ἀριθμὸς $2 \cdot 2+3=7$. Ὁ τέταρτος πλευρικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι $5+7=12$ καὶ ὁ τέταρτος διαμετρικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι $2 \cdot 5+7=17$. Ἀναγράφομεν εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα τοὺς κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον σχηματιζομένους πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς.

| Τετράγωνα | Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|---|
| 1ον Τετράγωνον | 1 | 1 |
| 2ον » | $1+1=2$ | $3 \quad (=2 \cdot 1+1)$ |
| 3ον » | $2+3=5$ | $7 \quad (=2 \cdot 2+3)$ |
| 4ον » | $5+7=12$ | $17 \quad (=2 \cdot 5+7)$ |
| 5ον » | $12+17=29$ | $41 \quad (=2 \cdot 12+17)$ |
| 6ον » | $29+41=70$ | $99 \quad (=2 \cdot 29+41)$ |
| 7ον » | $70+99=169$ | $239 \quad (=2 \cdot 70+99)$ |
| 8ον » | $169+239=408$ | $577 \quad (=2 \cdot 169+239)$ |

Πόθεν πηγάζει ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀκόμη ἄγνωστον. Εἶναι προφανές, ὅτι κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον δυνάμεθα νὰ σχηματίζωμεν ἐπ' ἄπειρον πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, νὰ κατασκευάζωμεν δηλ. ἐπ' ἄπειρον τετράγωνα, κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διάμετροι νὰ μετρῶνται (ἢ νὰ παρίστανται) ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Τοῦτο δὲ ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν, διότι ἐνταῦθα πρόκειται περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2 καὶ τῆς ἐνδείξεως ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμός. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὁ λόγος τῆς διαμέτρου (διαγωνίου) τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Ὁ λόγος δὲ αὐτὸς εἶναι ἡ $\sqrt{2}$. Ἐὰν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμετρικῶν καὶ πλευρικῶν ἀριθμῶν θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad = \lambda_1$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000\ldots = \lambda_2$$

$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000\ldots = \lambda_3$$

$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666\ldots = \lambda_4$$

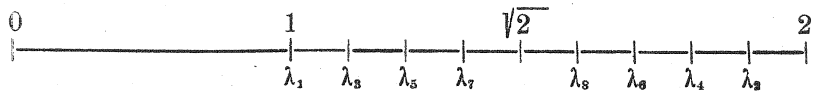
$$\frac{41}{29} = 1{,}4137931\ldots = \lambda_5$$

$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857\ldots = \lambda_6$$

$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011\ldots = \lambda_7$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156\ldots = \lambda_8$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι οἱ λόγοι, πρῶτος, τρίτος, πέμπτος, ἕβδομος... (2ν±1, ν ἀκέραιος) αὐξάνουν συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ λόγοι, δεύτερος, τέταρτος, ἕκτος, ὄγδοος... 2ν, ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ νυοστὸς περιττὸς λόγος καὶ ὁ νυοστὸς ἄρτιος λόγος, ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον θὰ συμπέσουν εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος τὸν ἀριθμὸν 2, ὡς ἐσυνήθιζον νὰ παριστοῦν τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος τούτου λάβωμεν τ' ἀντίστοιχα τμήματα τὰ ὁποῖα παριστοῦν οἱ ἀνωτέρω λόγοι θὰ ἔχωμεν




(ΣΗΜ. Δὲν ἐτηρήθη ἡ κλῖμαξ κατὰ τὴν παράστασιν τῶν λόγων διὰ νὰ εἶναι αὕτη καταφανής).

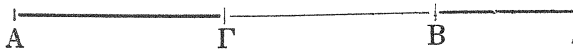
Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς ἐγκιβωτίζεται ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$. Διότι, ἡ πρώτη ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ δευτέρα ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ τὰ φράγματα ταῦτα συμπίπτουν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$, ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ὡμιλοῦν περὶ φραγμάτων ἀκολουθιῶν, οὔτε περὶ ἐγκιβωτισμοῦ (Intervallschachtelung) τῆς $\sqrt{2}$, οὔτε ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμός. Δηλαδὴ δὲν χρησιμοποιοῦν τὴν ὀνοματολογίαν αὐτήν, ἐν ᾧ ὅμως παρέχουν τὴν ἀπόδειξιν καὶ τοῦτο εἶναι τὸ θεμελιῶδες καὶ ὄχι ἡ ὀνοματολογία. Ὁ ἀνωτέρω ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τῆς $\sqrt{2}$ θεωρεῖται εὕρημα τῶν πρώτων πυθαγορείων χρόνων. Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς διέσωσεν θαυμασίαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, μὴ τελείου τετραγώνου, διὰ τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων, ἡ ὁποία ἀποδίδεται βασίμως κατὰ τὰ μέχρι σήμερον γνωστά, εἰς τὸν διάσημον μαθηματικὸν Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον.

Ἡ εὔλογος ἀπορία περὶ τοῦ πῶς εἶναι δυνατὸν ἡ πλευρὰ τετραγώνου καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ νὰ ἰσοῦνται ἑκάστη πρὸς τὴν μονάδα διασκεδάζεται ὑπὸ τοῦ Θέωνος διὰ τῆς αἰτιολογίας ὅτι ἡ μονὰς «ὥσπερ πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνώτατον καὶ σπερματικὸν λόγον ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται». Ἐνέχει δηλ. ἐν ἑαυτῇ ἡ μονὰς δυναμικῶς τὴν ἰδιότητα νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου, ὅπως τὸ σπέρμα οἱουδήποτε φυτικοῦ ἢ ζωϊκοῦ ὀργανισμοῦ ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ μετέπειτα ζῶντος ὀργανισμοῦ. Ὅμως ἐνταῦθα πρόκειται περὶ καθαρᾶς μαθηματικῆς προτάσεως, τὴν ὁποίαν ὁ Θέων παρομοιάζει πρὸς ἕνα βιολογικὸν νόμον, καὶ ἤτις, φρονοῦμεν, εἶναι ἡ πρώτη πυθαγόρειος μαθηματικὴ πρότασις τῆς θεωρίας τῶν ὁρίων. Ἡ τοιαύτη γνώμη ἡμῶν, στηρίζεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ὑποδηλουμένη πρότασις συνδέεται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

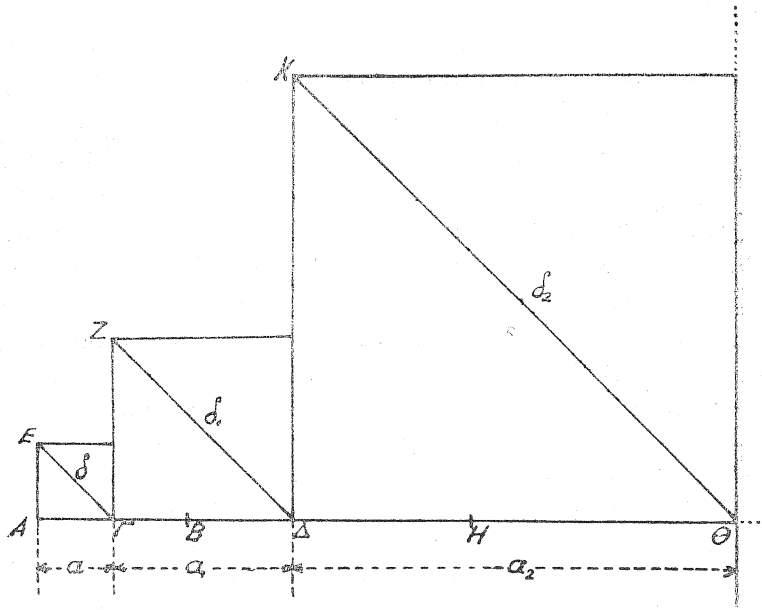
7

## Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν.

3. Κατὰ τὴν ὁμολογίαν τοῦ Πρόκλου, τὴν ὁποίαν μνημονεύομεν ἀνωτέρω, ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου τοῦ σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν στηρίζεται εἰς τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖα τις ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις ἡ ΒΔ, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις




$(\text{ΑΔ})^2+(\text{ΒΔ})^2=2(\text{ΑΓ})^2+2(\text{ΓΔ})^2$ (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν: Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία 1. 2. 3. 4, Ε. Σταμάτη, 1952). Ἔστω λοιπὸν τετράγωνον πλευρᾶς ΑΓ καὶ διαμέτρου ΓΕ (σχ. 1). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν




Σχ. 1.

τμῆμα ΓΒ ἴσον πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ τετραγώνου τὴν ΓΕ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΓΔ κατασκευάζομεν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔστω ΔΖ. Λέγω, ὅτι ἡ διάμετρος ΔΖ ἰσοῦται μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ μνημονευθὲν 10ον θεώρημα τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων εἶναι:

$(\text{ΑΔ})^2+(\text{ΒΔ})^2=2(\text{ΑΓ})^2+2(\text{ΓΔ})^2$ (1). Ἐπειδὴ ἐλήφθη ΒΔ=ΓΕ, εἶναι δὲ ΓΕ ἡ διάμετρος τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΑΓ, ἕπεται κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα ὅτι $(\text{ΓΕ})^2=2(\text{ΑΓ})^2$, καὶ συνεπῶς $(\text{ΒΔ})^2=2(\text{ΑΓ})^2$. Ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέ-

ρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (1) τὰ εὑρεθέντα ἴσα, λαμβάνομεν $(A\Delta)^2=2(\Gamma\Delta)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα ΑΔ=ΔΖ. Ἡ ΑΔ ὅμως ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ. Εἶναι δὲ ΑΓ=ΓΒ καὶ ΒΔ=ΓΕ ἡ διάμετρος τοῦ δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς ΑΓ. Ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν ταύτην α καὶ τὴν διάμετρον ΓΕ=δ θὰ ἔχωμεν :

| | πλευρὰ | διάμετρος |
|---|---|---|
| δοθέντος τετραγώνου | α | δ |
| πρώτου νέου » | $\alpha+\delta=\alpha_1$ | $2\alpha+\delta=\delta_1$ |

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν τοῦ νέου τετραγώνου τὴν ΓΔ κατ' ἴσην ἀπόστασιν πρὸς αὐτήν, τὴν ΔΗ. Προεκτείνομεν τὴν ΔΗ λαμβάνοντες τμῆμα ΗΘ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ νέου τετραγώνου, τὴν ΔΖ. Ἐφαρμόζοντες τώρα πάλιν τὸ 10ον, ὡς ἄνω, θεώρημα ἔχομεν $(\Gamma\Theta)^2+(H\Theta)^2=2(\Gamma\Delta)^2+2(\Delta\Theta)^2$ (2). Ἐπειδὴ ΗΘ=ΔΖ ἐκ κατασκευῆς καὶ $(\Delta Z)^2=2(\Gamma\Delta)^2$, ἄρα $(H\Theta)^2=2(\Gamma\Delta)^2$. Ἀφαιροῦντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (2) τὰ ἴσα λαμβάνομεν $(\Gamma\Theta)^2=2(\Delta\Theta)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα ΓΘ=ΘΚ. Ἡ ΓΘ ὅμως ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ΓΔ+ΔΗ+ΗΘ. Εἶναι δὲ ΓΔ=ΔΗ, ΗΘ=ΔΖ. Καὶ ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $(\alpha+\delta)+(\alpha+\delta)+(2\alpha+\delta)$. Ἐὰν καλέσωμεν $\alpha+\delta=\alpha_1$, $2\alpha+\delta=\delta_1$ καὶ $\Theta K=\delta_2$ θὰ ἔχωμεν $\delta_2=2\alpha_1+\delta_1$. Ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου ἡ ΔΘ=ΔΗ+ΗΘ. Εἶναι δὲ ΔΗ=α+δ καὶ ΗΘ=2α+δ=$\delta_1$, ἤτοι $\Delta\Theta=\alpha_2=\alpha_1+\delta_1$. Ἀναγράφοκατωτέρω ὅλας τὰς εὑρεθείσας σχέσεις.

| | πλευρὰ | διάμετρος |
|---|---|---|
| δοθέντος τετραγώνου | α | δ |
| πρώτου νέου τετραγώνου | $(\alpha+\delta)=\alpha_1$ | $\delta_1\ (=2\,.\,\alpha+\delta)$ |
| δευτέρου » » | $(\alpha_1+\delta_1)=\alpha_2$ | $\delta_2\ (=2\,.\,\alpha_1+\delta_1)$ |
| τρίτου » » | $(\alpha_2+\delta_2)=\alpha_3$ | $\delta_3\ (=2\,.\,\alpha_2+\delta_2)$ |
| νυοστοῦ νέου τετραγώνου | $(\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1})=\alpha_\nu$ | $\delta_\nu\ (=2\,.\,\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1})$ |

Ἐὰν α=1 καὶ δ=1, τότε λαμβάνομεν τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς ὡς μᾶς δίδει τούτους ἀνωτέρω ὁ Θέων.

4. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις εἶναι γενικὴ καὶ ἄσχετος πρὸς τὴν λῆψιν α=1, δ=1. Ἡ εἰδικὴ τιμὴ α=1, δ=1 μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$, ὅταν σχηματισθοῦν οἱ λόγοι $\delta:\alpha$, $\delta_1:\alpha_1$, $\delta_2:\alpha_2$, ..... $\delta_\nu:\alpha_\nu$ καὶ τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ τύπου $\delta_\nu^2=2.\alpha_\nu^2\pm1$ ἐκ τοῦ ὁποίου, ὡς φρονοῦμεν, ὁ Πλάτων ἀρύεται τὴν διατύπωσιν τοῦ συναφοῦς χωρίου τῆς Πολιτείας, τὸ ὁποῖον ἐμνημονεύσαμεν ἐν ἀρχῇ. Καὶ πράγματι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον διαδοχικῶς τὰς τιμὰς $\alpha_\nu$, $\delta_\nu$ ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ Θέωνος λαμβάνομεν

$$1^2=2\,.\,1^1-1=1$$
$$3^2=2\,.\,2^2+1=\ 8+1=9$$

$7^2=2.5^2-1=50-1=49$ (τὸ χωρίον τῆς Πολιτείας)
$17^2=2.12^2+1=288+1=289$
$41^2=2.29^2-1=1682-1=1681$
$99^2=2.70^2+1=9800+1=9801$ κλπ.

Ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τοῦ τύπου $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2\mp1$ ἢ $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2+(-1)^\nu$ δὲν σώζεται, ἀλλ' ἀληθεύει οὗτος διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ὅταν $\alpha=1$ καὶ $\delta=1$ κλπ., ὡς φαίνεται ἀνωτέρω.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ $\alpha_\nu^2$ θὰ ἔχωμεν: $\frac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu^2}=2\mp\frac{1}{\alpha_\nu^2}$. Ἐὰν τὸ $\nu\to\infty$ τότε ὁ λόγος $\frac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu^2}=2$ καὶ συνεπῶς $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}=\sqrt{2}$.

Πῶς οἱ Πυθαγόρειοι ὡδηγήθησαν εἰς ταῦτα παραμένει ἄγνωστον (1).

5. Ἀπομένει νὰ αἰτιολογηθῇ, ἡ διατύπωσις τοῦ Θέωνος ὅτι ἡ μονὰς ἐγκλείει ἐν ἑαυτῇ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι λόγος διαμέτρου πρὸς πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου. Καὶ πράγματι, τοῦτο φαίνεται, ἂν κατασκευάζωμεν ἐπ' ἄπειρον τετράγωνα ἀκολουθοῦντες τὴν ἀντίστροφον πορείαν ἐκείνης τὴν ὁποίαν ὑποδεικνύει ὁ Πρόκλος καὶ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν ἀνωτέρω. Πρὸς τοῦτο, ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον διαμέτρου ΘΚ (σχ. 1). Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ οὕτως, ὥστε ΘΔ+ΔΓ=ΘΚ. (Μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα ΘΚ γράφομεν κύκλον). Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔστω ΔΖ. Εἶναι φανερόν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τοῦ νέου τετραγώνου ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΘΚ=ΘΓ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς δηλ. τὴν πλευρὰν ΘΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΘΔ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ, διότι ἂν ἡ ΘΔ ἦτο ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΘΚ, τότε 2ΘΔ=ΘΚ, δηλ. αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογ. τριγώνου ΘΔΚ θὰ ἦσαν ἴσαι πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου τούτου τὴν ΘΚ, ὅπερ ἄτοπον· διότι κατὰ τὸ 20ον θεώρημα τοῦ Ι τῶν Στοιχείων 2ΘΔ>ΘΚ. Ὥστε ΔΓ<ΘΔ. Προεκτείνομεν τὴν ΔΓ καὶ λαμβάνομεν εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς τμῆμα ΓΑ οὕτως, ὥστε ΔΓ+ΓΑ=ΔΖ (μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΖ γράφομεν κύκλον). Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔστω ΓΕ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἐνταῦθα ἡ πλευρὰ ΓΑ εἶναι μικροτέρα τῆς πλευρᾶς ΔΓ. Συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων, μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ἡ λαμβανομένη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος

---

1) Γεωμετρικὴν κατασκευὴν ἐξ ἧς συνάγεται ὁ τύπος $\delta_\nu^2=2\alpha_\nu^2\mp1$ ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν ὁ μηχανικὸς τῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος κ. Κωνστ. Παπαδάκης, ἀσχολούμενος ἀπὸ ἐτῶν μὲ τοὺς πυθαγορείους ἀριθμούς. Ἐπειδὴ οὗτος συνεχίζει τὴν ἔρευναν, πιθανῶς νὰ δημοσιεύσωμεν τὰ πορίσματα ταῦτα εἰς τὸ προσεχὲς τεῦχος, ἐφ' ὅσον ὁ κ. Παπαδάκης θὰ ἔχῃ καταλήξει εἰς ὁριστικὰ συμπεράσματα.

(εὐθείας) ὁσονδήποτε μικρᾶς. Ὄχι δὲ μόνον τοῦτο, ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου, ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, τείνει πρὸς τὸ μηδὲν ἤτοι $\delta_\nu - \alpha_\nu = 0$ ($\nu \to \infty$). Συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Τότε ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$, καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ἐλαχίστην ἀκεραίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν $\delta_\nu = 1$ καὶ $\alpha_\nu = 1$. Ἰδοὺ λοιπὸν πῶς ἑρμηνεύεται ἡ διατύπωσις τοῦ Θέωνος ὅτι ἡ μονὰς «κατὰ τὸν σπερματικὸν λόγον» δηλ. δυνάμει, ἐγκλείει ἐν ἑαυτῇ τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι λόγος πλευρᾶς καὶ διαμέτρου τετραγώνου.

6. Τὸ συμπέρασμα ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι ὅτι διὰ τῆς γεωμετρίας ὑπολογίζεται ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς $\sqrt{2}$ καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος καὶ ὅτι ὑπάρχει τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον. Ὅθεν δικαίως ὁ Πλάτων γράφει εἰς τὴν Ἐπινομίδα (930 D) ὅτι τὴν ἐπιστήμην αὐτήν, ἥτις κατορθώνει τοιαῦτα ἐπιτεύγματα «καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν (δηλ. μέτρησιν τῆς Γῆς) τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν». Δηλαδὴ ἡ ἐξομοίωσις τῆς $\sqrt{\alpha}$, ὅταν τὸ α δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον (τῶν ἀσυμμέτρων δηλ.), πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, δὲν εἶναι ἀνθρώπινον θαῦμα ἀλλά, δύναται νὰ γίνῃ φανερόν, ὅτι εἶναι γεγονὸς θεῖον, δι' ἐκεῖνον ὅστις δύναται νὰ τὸ ἐννοήσῃ. Ἐκεῖνον δηλ. ὅστις δύναται νὰ ἐννοήσῃ τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται ἡ ἔννοια τῶν ὁρίων καὶ τὰς (ἀπολεσθείσας) ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ τοὺς ὁποίους μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ «Θεαίτητος» (147 d—e), ἰδίως δὲ τὸ θεώρημα τοῦ Ἀρχύτου περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου διὰ τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων (1). Τελευτῶντες σημειοῦμεν συντόμως ἑρμηνείαν τῆς δευτέρας ἀποδείξεως ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (Στοιχείων X, παράρτημα, 27.2). Ἔστω ὅτι ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς πλευρᾶς α καὶ τῆς διαμέτρου δ ἑνὸς τετραγώνου· ὅτι δηλ. ὁ λόγος δ : α εἶναι σύμμετρος ἀριθμός. Καὶ ὅτι τὸ μέτρον τοῦτο ἔστω ἀπειροελαχίστως μικρόν, ὅμως σταθερὸν =ε. Τότε κατασκευάζοντες διαδοχικῶς μικρότερα τετράγωνα, ὡς ἀνωτέρω, θὰ φθάσωμεν εἰς στιγμὴν καθ' ἣν ἡ διάμετρος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου, ὅταν τὸ ν τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ σταθεροῦ μήκους ε καὶ οὗτοι ὡς καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν νὰ μετρῶνται ὑπὸ τούτου. Οἱ μικρότεροι δηλ. ἀριθμοὶ νὰ μετρῶνται ὑπὸ τοῦ μεγαλυτέρου· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ λόγος δ : α = $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

---

1) Ἴδε Εἰσαγωγὴν «Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν», Τόμ. II, Ε. Σταμάτη, 1953 (ὑπὸ ἐκτύπωσιν) καὶ Κ. Βουρβέρη 1) «Ἱστορικαὶ γνώσεις τοῦ Πλάτωνος» μέρ. Α', Βαρβαρικά, 2) Ἄρθρον: Νόμοι Πλάτωνος εἰς λεξικὸν «Ἥλιος».

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

*«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν*
*ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».*
*Πλάτωνος Πολιτεία 450Β*

ΕΤΟΣ Ε' 1953

ΤΕΥΧΟΣ Α'

9

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1953

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Ε΄ 1953
ΤΕΥΧΟΣ Α΄
9

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1953

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

# Ο ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑ ΤΩι ΕΥΚΛΕΙΔΗι (*)


## Περίληψις

*Ὁ Γ. Βάκκα ἐπέστησε κατὰ τὸ 1910 τὴν προσοχήν, ἐπὶ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ Ε. Σταμάτης ἀνακοινοῖ, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐφαρμόζει τὴν ἀποδεικτικὴν ταύτην μέθοδον εἰς πλεῖστα ἄλλα θεωρήματα τῶν Στοιχείων. Τὸν ἰσχυρισμόν του στηρίζει οὗτος, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 20ου θεωρήματος τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων.*

## Zusammenfassung

*G. Vacca machte 1910 aufmerksam auf die Verwendung der Beweismethode des Schlusses der Vollständigen Induktion in den Sätzen 8 und 9 des IX. Buches der Elemente von Euklid. E. Stamatis teilt mit, dass Euklid diese Beweismethode auf vielen anderen Sätze der Elemente anwendet. Seine Behauptung stützt er, beispielsweise, auf den Beweis des 20. Satzes des IX. Buches der Elemente.*


I. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς ἢ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, ἰσχυρότατον ἀποδεικτικὸν μέσον τῆς Ἀνωτέρας μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Τὴν σημασίαν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ἐξαίρει ἰδιαιτέρως ὁ Γάλλος μαθηματικὸς H. Poincaré εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις»(1). Μεταξὺ ἄλλων μαθηματικῶν, οἵτινες τονίζουσιν ἰδιαιτέρως τὴν σημασίαν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου εἰς τὴν Ἀνωτέραν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν μνημονεύομεν τὸν Γερμανὸν K. Knopp (2) καὶ τὸν Φινλανδὸν E. Lindelöf (3). Ὡς πρῶτος διατυπώσας τὸν ἀποδεικτικὸν τοῦτον συλλογισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Ἀριστοτέλης, ὡς

*) Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 11.6.53 ὑπὸ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Β. Αἰγινήτου.

1) Science et hypothése C. 1. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ Παν. Σ. Ζερβοῦ, 1912, ἔκδ. Φέξη.

2) Mangold—Knopp, Einführung in die höhere Mathematik I, 1944, Leipzig, Teubner.

3) Lindelöf—Ullrich, Einführung in die höhere Analysis, 1950, Leipzig, Teubner.

συνάγεται ἔκ τινος χωρίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀναλυτικὰ Ὕστερα» (73 β 32), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς: «Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Μία δηλ. μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθ' ὅλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται. Πέραν τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Ἀριστοτέλους, οὐδεμία μέχρι τοῦ 1910 συγκεκριμένη περίπτωσις ἐφαρμογῆς τοῦ συλλογισμοῦ τούτου εἶχε σημειωθῆ εἰς τὰ σωθέντα μαθηματικὰ ἔργα τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὸ 1910 ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca ἐπέστησε τὴν προσοχὴν τῶν συγχρόνων του ἐπιστημόνων, ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἔκτοτε οὐδεμία ἄλλη σχετικὴ ἀνακοίνωσις ἐγένετο ἀφορῶσα εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ὑπὸ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

II. Κατὰ τὴν ἐργασίαν ἡμῶν πρὸς ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (1) διεπιστώσαμεν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Μεταξὺ τούτων μνημονεύομεν τὰ θεωρήματα 3, 14, 27, 35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 20 τοῦ IX. Κατωτέρω ἀναφέρομεν τὸ 20ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου εἰς τὸ ὁποῖον καθ' ἡμᾶς γίνεται ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Κατὰ τὴν συνήθειαν τοῦ Εὐκλείδου οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων ὀνοματιζομένων, ὁτὲ μὲν δι' ἑνὸς γράμματος ὁτὲ δὲ διὰ δύο. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι «Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν».

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ.

Α——— Β——— Γ———

Λέγω, ὅτι ἐκ τῶν

Η———, Ε———Δ———Ζ

πρώτων ἀριθμῶν Α, Β, Γ ὑπάρχουσι περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοί. Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ καὶ ἔστω τοῦτο ὁ ἀριθμὸς ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τοῦτον ἡ μονὰς ΔΖ, ὥστε ΕΖ=ΔΕ+ΔΖ. Ὁ ΕΖ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι.

1) Ἔστω πρότερον ὅτι ὁ ΕΖ εἶναι πρῶτος. Τότε εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ΕΖ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων τῶν Α, Β, Γ ἔγινε Α, Β, Γ, ΕΖ ἤτοι εὑρέθησαν περισσότεροι τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν. [Ἐνταῦθα ὁ Εὐκλείδης παραλείπει, ὡς αὐτονόητον, τὴν πρότασιν, ὅτι ὁ ΕΖ πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός].

2) Ἔστω δεύτερον ὅτι ὁ ΕΖ δὲν εἶναι πρῶτος, ἀλλὰ σύνθετος. Τότε οὗτος θὰ μετρῆται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Η (κατὰ τὸ 31ον θεώρημα τοῦ

1) Ὁ τόμος οὗτος εὑρίσκεται ὑπὸ ἐκτύπωσιν.

VII βιβλίου τῶν Στοιχείων). Λέγω, ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἔστω ὅτι ὁ Η εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α, Β, Γ. Οἱ δὲ Α, Β, Γ μετροῦσι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν τὸν ΔΕ. Ἄρα καὶ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΔΕ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Η καὶ τὸν ΕΖ. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΕΖ—ΔΕ=ΔΖ. Ὁ ΔΕ ὅμως εἶναι ἡ μονάς· ὅπερ ἄτοπον. Διότι, ὁ Η ἀριθμὸς ὢν (δηλ. πλῆθος μονάδων) εἶναι ἀδύνατον νὰ μετρῇ τὴν μονάδα. Ἄρα ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Ἄρα εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς καὶ τὸ πλῆθος τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α, Β, Γ ἔγινε Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι».

ΙΙΙ. Εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ δὲν ἀναφέρονται εἰς τὸ συγκεκριμένον πλῆθος τριῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀλλὰ παριστῶσι τυχὸν πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν, διὰ τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμός. Ἐὰν τὸ τυχὸν τοῦτο πλῆθος τὸ καλέσωμεν ν τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι ὑπάρχουσι ν+1 πρῶτοι ἀριθμοί.

Ἐὰν τὸ νέον πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν τὸ ν+1 τὸ καλέσωμεν λ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. αὐτῶν, ἔστω Κ καὶ εἰς τὸν Κ προσθέτομεν τὴν μονάδα. Τότε ὁ Κ+1 ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἐὰν ὁ Κ+1 εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς τότε εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Κ+1, καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων ἔγινε ν+2. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ Κ+1 δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους ν+1=λ. Ἐὰν δὲν εἶναι ὁ Κ+1 πρῶτος, θὰ εἶναι σύνθετος, ὁπότε οὗτος μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινος ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Λ. Κατὰ τὴν εὐκλείδειον ἀπόδειξιν ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Διότι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν ὁ Λ νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Ὁ Λ ὡς ὢν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἷς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ μετρεῖ τὸ ἐλ. κ. πολλ. αὐτῶν, τὸν Κ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Λ καὶ τὸν Κ+1. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν Κ+1—Κ=1. Ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Λ εἶναι πλῆθος μονάδων. Ἄρα ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ=ν+1, ἤτοι εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Λ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων ν+1 πρώτων ἀριθμῶν ἔγινε ν+2. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν ν+2 τὸ καλέσωμεν μ, εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ὅτι ὑπάρχουσι μ+1=ν+3 πρῶτοι ἀριθμοί, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς· αἱ διαδοχικαὶ ὅμως αὗται ἀποδείξεις εἶναι περιτταί, διότι εἶναι ἐπανάληψις τῆς πρώτης ἀποδείξεως. Διὰ τὴν τιμὴν ν=1, εὐνοήτως δὲν γίνεται λόγος κατὰ τὴν εὐκλείδειον ἀπόδειξιν, διότι αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου. Δὲν ἔχει δὲ νόημα νὰ ὁμιλῶμεν περὶ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἤτοι ἀποκλείεται ἡ θεώρησις τῆς περιπτώσεως ν=1. Τὸ ὀλιγώτερον πρέπει νὰ εἶναι ν=2, ἤτοι τὸ θεώρημα ἔχει ἰσχὺν διὰ ν ⩾ 2. Ἡ ἔννοια τῆς ἀναδρομικῆς ἰσχύος τοῦ συλλογισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς· ἐθεωρήθησαν γνωστοὶ ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ εὑρέθησαν ν+1 τὸ πλῆθος πρῶτοι. Ἐὰν θεωρηθῶσι γνωστοὶ ν—1 πρῶτοι ἀριθμοί, θὰ εὑρεθῇ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν εἷς ἀκόμη πρῶτος, ἤτοι ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοί. Ἐὰν θεωρηθῶσι διαδοχικῶς δεδομένοι ν—2, ν—3, ν—4... 2 πρῶτοι ἀριθμοί, θὰ

εὑρεθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἀντιστοίχως ν—1, ν—2, ν—3 . . . 3 πρῶτοι ἀριθμοί. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις εἶναι ἀληθὴς ὅταν ν=2, ὁπότε ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως διὰ ν=3, 4, 5 . . . Τοῦτο ὅμως εἶναι μία διατύπωσις ἑρμηνεύουσα τὴν φράσιν «ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς» καὶ καταλήγουσα εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι ν≥2. Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι «ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστος παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς». Ἀνατρέχομεν εἰς τὴν θεώρησιν τοῦ πλήθους τῶν συναρτήσεων ν—1, ν—2, ν—3 . . . 2. Ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον δύο συναρτήσεων, τότε προκειμένου ν' ἀποδείξωμεν τὴν ἰσχὺν αὐτοῦ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων θεωροῦμεν δύο συναρτήσεις, ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν νὰ ἔχωμεν πρὸς ἀπόδειξιν γινόμενον δύο συναρτήσεων, διὰ τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει τὴν πρότασιν. Προκειμένου διὰ γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων θεωροῦμεν τρεῖς συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς γινόμενον δύο συναρτήσεων. Καὶ γενικῶς ὅταν ἔχωμεν γινόμενον ν+1 τὸ πλῆθος συναρτήσεων θεωροῦμεν ὡς ἕνα παράγοντα ν τὸ πλῆθος συναρτήσεις καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεχείας τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων. Εἶναι φανερὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀκριβολογία καὶ ἡ γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καθ' ὃν μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθ' ὅλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται. Ἡ τυχοῦσα περίπτωσις τοῦ θεωρήματος, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν εἶναι, ὡς ἀνωτέρω μνημονεύεται, ἡ θεώρησις δοθέντων τριῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὁπότε ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ τέταρτος πρῶτος ἀριθμός, ἤτοι ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις γενικῶς.

Κονίτ. μη. 60.000

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Ε΄ 1953
ΤΕΥΧΟΣ Β΄
10

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1953

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΜΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ $\sqrt{2}$ ΠΑΡΑ ΤΟΙΣ ΑΡΧΑΙΟΙΣ*

1. Ὁ σχηματισμὸς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν παρέχεται ὑπὸ τῶν τύπων $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2.\ \alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, ἔνθα α ἡ πλευρὰ καὶ δ ἡ διαγώνιος (καλουμένη παρὰ τοῖς ἀρχαίοις διάμετρος) ἑνὸς τετραγώνου. Ἐὰν δοθὲν τετράγωνον θεωρηθῇ ἀπειροελαχίστως μικρόν, ὥστε $\alpha=1$ καὶ $\delta=1$, τότε ἡ σειρὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶναι ἡ κάτωθι (1):

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | | | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ | |
|---|---|---|---|---|---|
| πρώτου τετραγώνου | πλευρὰ | $\alpha_1 = 1$ | διαγώνιος | $\delta_1 = 1$ |
| δευτέρου | » | $\alpha_2 = 1+1 = 2$ | » | $\delta_2 = 2.1+1 = 3$ |
| τρίτου | » | $\alpha_3 = 2+3 = 5$ | » | $\delta_3 = 2.2+3 = 7$ |
| τετάρτου | » | $\alpha_4 = 5+7 = 12$ | » | $\delta_4 = 2.5+7 = 17$ |
| ⋮ | | ⋮ | | ⋮ |
| νυοστοῦ | » | $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$ | » | $\delta_\nu = 2.\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$ |

Ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$ παρέχει τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν.

2. Ἐὰν ἡ $\sqrt{2}$ ὑπολογισθῇ κατὰ τὴν εἰς τὸν Ἀρχύταν ἀποδιδομένην μέθοδον τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων (2), λαμβάνομεν τὴν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν ταχύτερον ἢ διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 2 ὡς γινόμενον $2\times1$ καὶ μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 1 σχηματίζομεν ἐν συνεχείᾳ μουσικὰς ἀναλογίας ὡς κάτωθι:

---

*) Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 19-11-1953 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασιλείου Αἰγινήτου.

1) Θέων Σμυρναῖος, Φιλόσ. Πλατων. σ. 42—45, E. Hiller, Λειψία 1878, Teubner.

2) α') Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως, τόμ. 3, σ. 18—20, Schoene 1903, Teubner. β') P. Tannery, Mémoires scientifiques τόμ. 3, σ. 68 καὶ 244. γ') Paul—Henri Michel «De Pythagore à Euclide, Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes, Budé, s. ed. «Les belles lettres» σ. 426—438—440, Paris 1950.

$$2 : \frac{3}{2} \text{ (πρῶτον ἀριθμ. μέσον)} = \frac{4}{3} \text{ (πρῶτον ἁρμον. μέσον)} : 1$$

$$\frac{3}{2} : \frac{17}{12} \text{ (δεύτερον ἀριθμ. μέσον)} = \frac{24}{17} \text{ (δεύτερον ἁρμον. μέσον)} : \frac{4}{3}$$

$$\frac{17}{12} : \frac{577}{408} \text{ (τρίτον ἀριθμ. μέσον)} = \frac{816}{577} \text{ (τρίτον ἁρμον. μέσον)} : \frac{24}{17}$$

⋮ ⋮

Ἀναγράφομεν κατωτέρω πίνακα ἐμφαίνοντα τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ τὰς δύο μεθόδους.

Α΄. Μέθοδος λόγων διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμούς.

| | | |
|---|---|---|
| 1ος | λόγος | 1 : 1 |
| 2ος=$2^1$ | » | 3 : 2 |
| 3ος | » | 7 : 5 |
| 4ος=$2^2$ | » | 17 : 12 |
| 5ος | » | 41 : 29 |
| 6ος | » | 99 : 70 |
| 7ος | » | 239 : 169 |
| 8ος=$2^3$ | » | 577 : 408 |
| 9ος | » | 1393 : 985 |
| 10ος | » | 3363 : 2378 |
| 11ος | » | 8119 : 5741 |
| 12ος | » | 19601 : 13860 |
| 13ος | » | 47321 : 33461 |
| 14ος | » | 114243 : 80782 |
| 15ος | » | 275807 : 195025 |
| 16ος=$2^4$ | » | 665857 : 470832 |
| $2^\nu$ | » | |

Β΄. Μέθοδος Ἀρχύτου.

↣ α΄ ἀριθμ. μέσον τῶν 1, 2, = 3 : 2

α΄ ἁρμον. » » » = 4 : 3

↣ β΄ ἀριθμ. » » $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, = 17 : 12

» ἁρμον. » » » » = 24 : 17

↣ γ΄ ἀριθ. μέσον τῶν $\frac{17}{12}$, $\frac{24}{17}$, =577 : 408

» ἁρμον. » » » » =816 : 577

↣ δ΄ ἀρ. μέσ. τῶν $\frac{577}{408}$, $\frac{816}{577}$, =665857 : 470832

↣ ν ἀριθμ. μέσον τῶν (ν—1) ἀριθμ. μέσου καὶ (ν—1) ἁρμον. μέσου.

*3. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τάξις τῶν κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι οἱ λογάριθμοι μὲ βάσιν 2 τῆς τάξεως τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς.*

## Zusammenfassung* (Περίληψις)

Auf die Berechnung von $\sqrt{2}$ durch die Verhaeltnisse der Diametral zu den Seiten—Zahlen (1) und der Methode von Archytas (2), E. Stamatis bemerkt, dass die Ordnung der nach der archytassche Methode arithmetischen Mittel die Logarithmen mit Basis 2 der Ordnung der Verhaeltnisse der Diametral zu den Seiten—Zahlen ist.

---

*) Mitteilung in der Akademie der Wissenschaften zu Athen am 19-11-1953 durch Prof Dr. Basil Aeginitis.

1) Theonis Smyrnaei, Phil. Platon. S. 42—45, E, Hiller, Leipzig 1878, Teubner.

2) a) Heronis Alex. B. III. S. 18—20, Schoene, Leipzig 1903, Teubner. b) Paul Tannery, Mémoires scientifiques III. T. 68 u. 244. c) Paul—Henri Michel, De Pythagore à Euclide, Coutribution à l' histoire des mathematiques préeuclidiennes, Budé, Soc. d' édit. Les belles letres, p. 426, 438, 440, Paris 1950.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

7=

ΕΤΟΣ Ζ' 1955
ΤΕΥΧΟΣ Α'
13

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1955

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
## ΠΑΡΑ ΤΟΙΣ ΑΡΧΑΙΟΙΣ (*)

Εἰς τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, δημιουργήσαντες τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἠγνόουν ὅμως τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Τούτους θεωροῦσι δημιούργημα τῶν νεωτέρων χρόνων. Ἀντίθετον γνώμην διατυποῖ ὁ ἡμέτερος ἀκαδημαϊκὸς κ. Μιχαὴλ Στεφανίδης γράφων, ὅτι ἡ θεωρία «τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν» ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν Εὔδοξον (1). Ἔρευναν τοῦ προβλήματος τούτου ἐπεχείρησαν πολλοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων μνημονεύομεν τὸν Zeuthen (2), τὸν T. Heath, ὅστις ἡρμήνευσε τὸν 5ον ὁρισμὸν τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸν ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὔδοξον (3), καὶ τοὺς H Hasse καὶ H. Scholz (4). Οἱ τελευταῖοι καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι : 1) Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, διότι δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς. 2) Δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς, διότι δὲν εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς, καὶ 3) Δὲν εἶχον τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς, διότι δὲν ἤθελον νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς (σελ. 79 τῆς μεταφράσεως εἰς τὴν ἑλληνικήν).

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται, κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς διὰ τῆς παραθέσεως χωρίων ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ἑρμηνείας τινῶν ἐξ αὐτῶν, ὡς καὶ διὰ τῆς ἑρμηνείας τοῦ 35ου θεωρήματος τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

I. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ῥητοὺς ἀριθμούς. Ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν γράφει «πάντα προσήγορα καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα

*) *E. Stamatis*, Über die Irrationalenzahlen bei den Alten. Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 4 - 6 - 1954 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μ. Στεφανίδου.

1) Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 103, Ἀθῆναι, 1938.

2) Mathematische Annalen, p. 222, 1896.

3) The thirteen books of Euclid's Elements καὶ *Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. II, σ. 20, Ἀθῆναι 1953, Ὀργανισμὸς Ἐκδ. Σχολικῶν βιβλίων.

4) Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, Charlottenburg, 1928 (μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ τοῦ Φ. Βασιλείου καὶ Χ. Καπνουκάγια, 1934).

ἀπέφηναν» καὶ «ἕκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος». Εἰς τοῦτο νοεῖται ἡ $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1} = 7$ ὡς ῥητὸς ἀριθμὸς (546, C).

Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς προκειμένου τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{720}$, γράφει: «Ἐπεὶ οὖν αἱ ΨΚ (=720) ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι ληψόμεθα». Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 δὲν εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν... κλπ. (Μετρικά, τόμ. III σ. 18—20, Schoene, Teubner, 1903).

II. Ὁ Πλάτων εἰς τὸν Θεαίτητον γράφει:

*Θεαίτητος*. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος. ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

*Σωκράτης*. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

*Θεαίτητος*. Ἔμοιγε δοκοῦμεν. σκόπει δὲ καὶ σύ.

*Σωκράτης*. Λέγε.

*Θεαίτητος*. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν. τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

*Σωκράτης*. Καὶ εὖ γε.

*Θεαίτητος*. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

*Σωκράτης*. Κάλλιστα. Ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

*Θεαίτητος*. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον» (147 d - 148 b). Δηλαδή: Ὁ Θεόδωρος ἠσχολήθη μὲ τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας ἀριθμῶν, καὶ μὲ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ μὲ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδείξας ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 3 καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 5, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπέδειξε τὴν ἀσυμμετρίαν δι' ἑκάστην τῶν ῥιζῶν $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$...μέχρι τῆς $\sqrt{17}$. Ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Δὲν ἔχει νόημα νὰ λέγεται ὅτι ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ μέγεθος $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ μέγεθος 3.

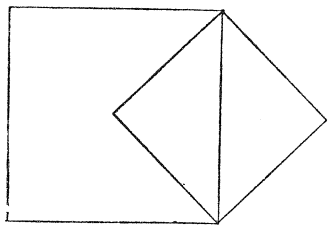
Εἰς δὲ τὴν Ἐπινομίδα:

«Ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής. ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοιοῖ (1), ταύτῃ ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυ-

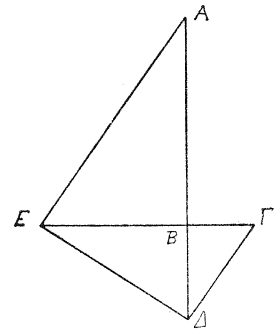
1) Ὁμοίᾳ.

χεῖς αὐτῇ γεγονότες» (990 d — 991 a). Οἱ ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἡ μοῖρα, ἡ τύχη, ἡ ἰδιότης τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι, ὅτι οὗτοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ὅμοιος κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt{2}$, ρ). Ἡ γεωμετρία ὅμως ἀποδεικνύει ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1\times1=1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (σχ. 1), ὥστε οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ $1\times1=1$ καὶ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι, νὰ ὑπόκεινται δηλ. εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων δὲν ὁμιλεῖ περὶ «ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν», ὡς ἑρμηνεύεται ὑπό τινων (1).

Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[3]{2}$ δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιος πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt[3]{2}$, ρ). Ἡ στερεομετρία ὅμως ἀποδεικνύει (δήλιον πρόβλημα, σχ. 2) ὅτι, ὅπως δυνάμεθα



Σχ. 1




Σχ. 2

νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1\times1\times1=1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}$, ὥστε οἱ στερεοὶ ἀριθμοὶ $1\times1\times1=1$ καὶ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι, δηλ. νὰ ὑπόκεινται εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων ὁμιλεῖ διὰ τοὺς ὁμοίους κατὰ τὴν στερεὰν φύσιν ἀριθμούς, τοὺς ὄντας γινόμενον τριῶν παραγόντων καὶ οὐχὶ διὰ τοὺς ὁμοίους στερεοὺς ἀριθμούς.

III. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ Ἠθικὰ Νικομάχεια γράφει :

«Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ» (Ε' III. 8).

Εἰς δὲ τὰ Μετὰ τὰ Φυσικὰ λέγει :

«Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν. ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται» (1021a 4).

Δηλαδὴ ὁ Ἀριστοτέλης ὁμιλεῖ περὶ μὴ συμμέτρων ἀριθμῶν.

---

1) E. *Des Places*, Le passage mathématique de l'Epinomis et la théorie des irrationelles. Revue des études grecques, p. 546, 1935 καὶ *Paul - Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, p. 505, 1950, Paris.

IV. Τὸ 35ον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς :

«Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνῳ». Δηλαδή, νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι μέσον, τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν (δηλ. πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης). Ἢ νὰ κατασκευασθῇ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν θετικῶν ῥιζῶν αὐτῆς νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ῥιζῶν αὐτῆς νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, καὶ τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ῥιζῶν νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ῥιζῶν.

Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Τυχοῦσα εὐθεῖα ρ λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ῥητή.

2. Εὐθεῖαι μήκει σύμμετροι ἢ μήκει ἀσύμμετροι λέγονται αἱ ἔχουσαι ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

3. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι ἢ δυνάμει ἀσύμμετροι λέγονται ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα ἔχουσιν ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

4. Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μέσον, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι τῆς μορφῆς ρ, $\rho\sqrt{\alpha}$ ἢ $\rho\sqrt{\alpha}$, $\rho\sqrt{\beta}$, ἔνθα ρ ῥητὴ καὶ α, β οὐχὶ τετράγωνοι. Ὅταν δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου περιέχῃ τὴν δευτέραν ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἢ ὅταν ἐπίπεδος ἀριθμὸς περιέχῃ τὴν δευτέραν ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

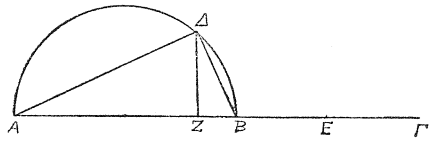
5. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον περιέχει τὸν παράγοντα $\rho\sqrt[4]{\alpha}$ (ἢ $\rho\sqrt[4]{\alpha\beta}$) καὶ καλεῖται μέση. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ $\rho\sqrt[4]{\alpha}$ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ, $\rho\sqrt{\alpha}$, ἐξ οὗ καὶ αἰτιολογεῖται ὁ ὅρος μέση καὶ μέσον.

6. Ἐὰν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ $AB > B\Gamma$ καὶ ζητεῖται νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὡς ὀρθογώνιον, ἔχον πλευρὰς ἀσυμμέτρους, τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τοῦτο σημαίνει : νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀσύμμετροι ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$x^2 - ABx + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$$

αἱ $x_1 = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ καὶ $x_2 = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$

Πρὸς ἀπόδειξιν λαμβάνει δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους τὰς ΑΒ>ΒΓ




Σχ. 3

(σχ. 3), ὥστε ΑΒ×ΒΓ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ ἀσύμμετρος πρὸς ΑΒ.

## Ἡ εὕρεσις τῶν δύο μέσων

1. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ γ, δ οὐχὶ τετράγωνοι καὶ εὐθεῖα ῥητὴ ἡ Α=ρ. Τῶν γ, δ, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\omega = \rho\frac{\delta}{\gamma}$. Τῶν ρ, ω εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $B = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, (X . 6, πόρισμα). Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (X . 10).

2. Ἔστωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $\alpha^2$, $\beta^2$, ὥστε $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος καὶ εὐθεῖα ῥητὴ Α=ρ. Πρὸς εὕρεσιν τῶν δύο τούτων τετραγώνων ἀριθμῶν λαμβάνομεν δύο ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς ἀρτίους ἢ περιττούς, τοὺς μ, ν, ὁπότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι μ=κξ, ν=στ, καὶ κ : ξ=σ : τ (κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι). Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα τοῦ X . 28 εἶναι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἢ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ οὐχὶ τετράγωνος [$\mu\nu=\alpha^2$ κατὰ τὸ IX. 1, καὶ $\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \beta^2$]. Μὲ διάμετρον τὴν εὐθεῖαν ρ γράφομεν ἡμικύκλιον. Τῶν λ, $\alpha^2$, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\varphi = \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ καὶ τῶν ρ, φ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ρ, $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (X. 30), $\left(\rho \text{ πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ } \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Ἡ ρ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$.

3. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων 1 καὶ 2 εὑρέθησαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ καὶ $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς ρ.

6

Τῶν $\rho$, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $AB = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Τῶν $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον

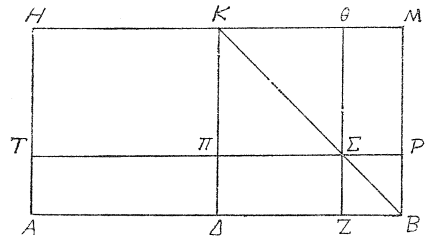
$$B\Gamma = \frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Αἱ $AB > B\Gamma$ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$, AB μήκει ἀσύμμετροι (X. 32, δεύτερον μέρος). Ἐπὶ τῆς AB γράφει ἡμικύκλιον (σχ. 3) καὶ παρὰ τὴν AB παραβάλλει ὡς ὀρθογώνιον τὸ $\frac{B\Gamma^2}{4}$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα. Τοῦτο σημαίνει τὴν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν καὶ ἀνίσων ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - ABx + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$$

Ἡ ὕπαρξις τῶν ῥιζῶν τούτων εἶναι ἐξησφαλισμένη ἐκ τῶν 27 καὶ 28 τοῦ VI τῶν Στοιχείων. Αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ παραβαλλομένου ὀρθογωνίου αἱ AZ, ZB (X. 16 λῆμμα). Αὗται εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἐπειδὴ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$, AB εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (X. 18).

[Ἡ εὕρεσις τῶν AZ, ZB γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς AB (σχ. 4) ὑψοῦμεν κάθετον τὴν $\Delta K = \frac{AB}{2}$ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον AB ΜΗ φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον KB. Τὴν διαφορὰν $\frac{AB^2}{4} - \frac{B\Gamma^2}{4}$ μετασχηματι-




Σχ. 4

ζόμενον εἰς τετράγωνον πλευρᾶς $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - BA^2} = K\Pi$ καὶ τὸ τετράγωνον ΚΠΣΘ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΚΔΒΜ. Ὁ ἀπομένων γνώμων

$$\Pi\Delta BM\Theta\Sigma = AZ \times Z\Sigma = AZ \times ZB = \frac{B\Gamma^2}{4}$$

καὶ ἐλλείπει τὸ τετράγωνον σχῆμα ΖΒΡΣ διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΡΤ] (¹).

Αἱ ΑΖ, ΖΒ (σχ. 3) ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι

$$AZ = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2} \qquad ZB = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ΑΒ, ΒΓ διὰ τῶν τιμῶν των θὰ ἔχωμεν

$$AZ = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

$$ZB = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

δηλαδὴ τὰς ἀσυμμέτρους ῥίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$x^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0,$$

ἤ

$$x^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2} = 0$$

Ἐκ τοῦ Ζ (σχ. 3) ὑψοῖ τὴν κάθετον ΖΔ καὶ φέρει τὰς ΑΔ, ΔΒ. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι αἱ ζητούμεναι κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσαι τὰς αἰτουμένας ἰδιότητας. Αἱ

$$A\Delta = \sqrt{AB \cdot AZ}, \qquad \Delta B = \sqrt{AB \cdot ZB}$$

ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν ΑΒ, ΑΖ, ΖΒ θὰ εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

$$\Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

---

1) Μερικὴ περίπτωσις τοῦ 28 τοῦ VI τῶν στοιχείων, περὶ ἧς ἡμετέρα ἀνακοίνωσις ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν γενομένη διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 10-12-1953. Ἰδὲ καὶ *Ε. Σταμάτη* «Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν», Στοιχ. τόμ. II σ. 300. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1953, Ἀθῆναι.

ἤτοι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$x^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0$$

ἢ

$$x^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varkappa\xi\sigma\tau}{\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2} = 0$$

Ἡ ἀσυμμετρία τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ ἡ ἀσυμμετρία τοῦ γινομένου τῶν ῥιζῶν τούτων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν ἐκφράζονται διὰ πράξεων ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις γίνεται γεωμετρικῶς.

## ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Interpretation einiger Stellen aus Platon und Aristoteles, so wie der genaueren Interpretation des 35. Satzes des X. Buches der Elemente Euklides, teilte E. Stamatis mit, dass die Alten Griechen nicht nur die Irrationalgrössen, sondern auch die Irrationalzahlen kannten.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Ζ' 1955
ΤΕΥΧΟΣ Β'
14

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1955

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ΤΟΥ ΥΠΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ $\sqrt{3}$ (*)

## Α'.

Εἰς τὸ τρίτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον παντὸς κύκλου εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$, μεγαλύτερος δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$

Ἡ σχέσις αὕτη στηρίζεται εἰς τὰς ἀκεραίας λύσεις τῶν δύο διοφαντικῶν ἐξισώσεων $y^2=3x^2-2$ καὶ $y^2=3x^2+1$, τὰς ὁποίας ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα ἐπίσης ἄνευ ἀποδείξεως.

Τινὲς ἐκ τῶν ἑρμηνευτῶν τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους φρονοῦσιν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις εἶναι ἐπινοήσεις τοῦ Συρακοσίου σοφοῦ. Τοῦτο δὲν φαίνεται πιθανόν. Διότι ὁ Ἀρχιμήδης, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν σωζομένων ἔργων του, ὁσάκις χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐρεύνας αὐτοῦ μαθηματικὰς προτάσεις ἀποδειχθείσας ὑπὸ ἄλλων χρησιμοποιεῖ αὐτὰς ἄνευ ἀποδείξεως.

Τὸ πιθανώτερον εἶναι ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις ἦσαν γνωσταὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους καὶ δὴ καὶ εἰς τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον. Ἔνδειξίς τις ἀφορῶσα εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον ἰσχυρισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ μαθηματικὸν χωρίον τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος (147b - 148d). Κατὰ τοὺς δύο τελευταίους αἰῶνας ἐγένοντο πολλαὶ προσπάθειαι ἀποδείξεως τῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους χρησιμοποιουμένων ἀναποδείκτως προτάσεων τούτων.

Ὁ T. Heath (1) γράφει ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι ἡ ὀρθοτέρα ἑρμηνεία τῶν ἀνωτέρω προτάσεων ἐγένετο ὑπὸ τῶν Hultsch - Hunrath διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως

$$\alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} > \sqrt{\alpha^2 \pm \beta} > \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha \pm 1},$$

ἔνθα $\alpha^2 \pm \beta$ ἀκέραιος μὴ τετράγωνος, καὶ $\alpha^2$ ὁ ἐγγὺς πρὸς τοῦτον τετράγωνος

*) Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν τῇ 2-6-1955 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μ. Στεφανίδου.

1) *Archimedes* Werke, (Deutsch von *F. Kliem*, S. 72, Verlag *O. Häring*, Berlin 1914).

(ἀναλόγως τῆς ἑκάστοτε περιπτώσεως μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ). Ἐκτὸς τῆς μεθόδου Hultsch - Hunrath μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ T. Heath καὶ αἱ ἑξῆς: De Lagny, Zeuthen, Tannery, Heilermann, Rodet· ἐπὶ πλέον ἀναφέρονται ἐπίσης ὡς ἑρμηνευταὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ οἱ Moll weide, Hauber, Buzengeiger, Radicke, Pessl, Oppermann, Alexejeff, Schönborn (1).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἐν περιλήψει τὴν μέθοδον Heilermann, διότι αὕτη στηριζομένη εἰς τοὺς ἐκ τετραγώνων σχημάτων πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς παρουσιάζει συγγένειάν τινα πρὸς τὴν ἡμετέραν μέθοδον.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (2) οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι:

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $S_0$ | $D_0$ |
| $S_1 = S_0 + D_0$ | $D_1 = 2S_0 + D_0$ |
| $S_2 = S_1 + D_1$ | $D_2 = 2S_1 + D_1$ |
| $S_3 = S_2 + D_2$ | $D_3 = 2S_2 + D_2$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$ | $D_n = 2S_{n-1} + D_{n-1}$ |

Ἐὰν $S_0=1$ καὶ $D_0=1$, οἱ λόγοι $\frac{D_n}{S_n}$ ὁδηγοῦσιν εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

Ὁ Heilermann ἀντὶ τοῦ 2 εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις θέτει τυχόντα ἀριθμὸν α (μὴ τετράγωνον) καὶ λαμβάνει τὸ ἑπόμενον σχῆμα:

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $S_1 = S_0 + D_0$ | $D_1 = \alpha S^0 + D_0$ |
| $S_2 = S_1 + D_1$ | $D_2 = \alpha S_1 + D_1$ |
| $S_3 = S_2 + D_2$ | $D_2 = \alpha S_2 + D_2$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$ | $D_n = \alpha S_{n-1} + D_{n-1}$ |

Οἱ λόγοι $\frac{D_n}{S_n}$ ἐκφράζουσι κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{\alpha}$.

Οὕτως ἐὰν θέσωμεν $\alpha=3$, $S_0=1$, $D_0=2$, λαμβάνομεν τοὺς λόγους:

$$\frac{D_0}{S_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{D_1}{S_1} = \frac{5}{3}, \quad \frac{D_2}{S_2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}, \quad \frac{D_3}{S_3} = \frac{19}{11},$$

---

1) Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden, Leipzig 1882, von *Sigmund Günther*.

2) *Theonis Smyrnaei*, Philosophi Platonici, *E. Hiller*, σ. 43 κ. ἑ., Leipzig 1878, καὶ *Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8 κ. ἑ., Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953.

$\frac{D_4}{S_4}=\frac{52}{30}=\frac{26}{15}$, $\frac{D_5}{S_5}=\frac{71}{41}$, $\frac{D_6}{S_6}=\frac{194}{112}=\frac{97}{56}$, $\frac{D_7}{S_7}=\frac{265}{153}$,

$\frac{D_8}{S_8}=\frac{362}{209}$, $\frac{D_9}{S_9}=\frac{989}{571}$, $\frac{D_{10}}{S_{10}}=\frac{1351}{780}$, κλπ.

Οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα. Τοῦτο εἶναι κοινὸν καὶ διὰ τὰς δύο ἀκολουθίας, ἤτοι εἶναι :

$$\frac{2}{1}>\frac{7}{4}>\frac{26}{15}>\frac{97}{56}>\frac{362}{209}>\frac{1351}{780}>\ldots\sqrt{3}\ldots>\frac{989}{571}>\frac{265}{153}>\frac{71}{41}>\frac{19}{11}>\frac{5}{3}.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ὁδηγεῖ, ὡς ἀποδεικνύει ὁ Heilermann, ταχύτερον πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐὰν αὕτη χρησιμοποιηθῇ οὐ μόνον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{\alpha}$, ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\beta\sqrt{\alpha}$, ἔνθα ὁ β ἐκλέγεται οὕτω πως, ὥστε τὸ $\beta^2\alpha$ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ α) νὰ κεῖται ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον πρὸς τὴν μονάδα. Ὅθεν ἐὰν θέσωμεν $\alpha=\frac{27}{25}$, ὥστε $\sqrt{\alpha}=\frac{3}{5}\sqrt{3}$ ἔχομεν (ἐὰν τεθῇ $D_0=S_0=1$)

$S_1=2$, $D_1=\frac{52}{25}$, καὶ $\sqrt{3}\backsim\frac{5}{3}\cdot\frac{26}{25}$ ἢ $\frac{26}{15}$

$S_2=\frac{102}{25}$, $D_2=\frac{54+52}{25}=\frac{106}{25}$, καὶ $\sqrt{3}\backsim\frac{5}{3}\cdot\frac{106}{102}$ ἢ $\frac{265}{153}$

$S_3=\frac{208}{25}$, $D_3=\frac{102\,.\,27}{25\,.\,25}+\frac{106}{25}=\frac{5404}{25\,.\,25}$, καὶ $\sqrt{3}\backsim\frac{5404}{25.208}\cdot\frac{5}{3}$ ἢ $\frac{1351}{780}$, κλπ.

## Β'.

Ἡ παρ' ἡμῶν ἀνακοινουμένη κατωτέρω μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$ καὶ ἐπιλύσεως τῶν μνημονευθεισῶν δύο διοφαντικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται εἰς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς προκύπτοντας ἐκ τῆς θεωρήσεως ὁμοίων ῥόμβων ἐχόντων τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ 12ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $\text{ΑΓ}^2=3\text{ΑΒ}^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρά, δηλ. ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, καὶ συνεπῶς $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}=\sqrt{3}$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΕΖ=ΑΓ, ὥστε ΑΖ=2ΑΒ+ΕΖ. Κατὰ τὸν 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ

τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν) (1) θὰ ἔχωμεν :

$$AZ^2+EZ^2=2AB^2+2BZ^2.$$

Ἐπειδὴ $BZ=BE+EZ$, θὰ εἶναι

$$AZ^2+EZ^2=2AB^2+2(BE+EZ)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ $EZ^2$ λαμβάνομεν

$$AZ^2=2AB^2+2BE^2+EZ^2+4BE\times EZ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $BE=AB$ καὶ $EZ=A\Gamma$, θὰ ἔχωμεν

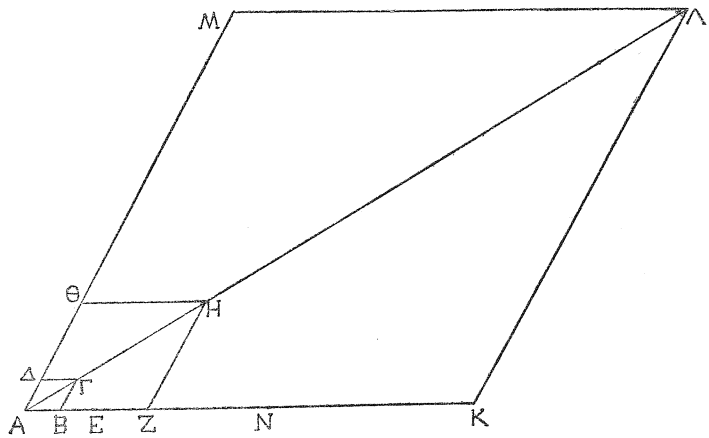
$$AZ^2=4AB^2+A\Gamma^2+4AB\times A\Gamma.$$

Ἄρα καὶ $3AZ^2=12AB^2+3A\Gamma^2+12AB\times A\Gamma$.

Ἀλλὰ $3AB^2=A\Gamma^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AZ^2=9AB^2+4A\Gamma^2+12AB\times A\Gamma=(3AB+2A\Gamma)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AZ=2AB+EZ=2AB+A\Gamma$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AB+2A\Gamma$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν $AZH\Theta$, ἔνθα $AH=3AB+2A\Gamma$ καὶ $AH^2=3AZ^2$.




Σχ. 1

Ἐὰν καλέσωμεν $AB=\alpha$ καὶ $A\Gamma=\delta$, θὰ ἔχωμεν

$$AZ=2\alpha+\delta,\ (1)\ \text{καὶ}\ AH=3\alpha+2\delta,\ (2).$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AZ λαμβάνομεν τμῆμα $ZN=AZ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ZN λαμβάνομεν τμῆμα $NK=AH$, ὥστε $AK=2AZ+NK$. Πάλιν κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$AK^2+NK^2=2AZ^2+2ZK^2.$$

Ἐπειδὴ $ZK=ZN+NK$, θὰ εἶναι

$$AK^2+NK^2=2AZ^2+2(ZN+NK)^2.$$

---

1) Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 κ.ἑ., 393 κ.ἑ. Ἑρμηνεία *Hultsch - Kroll*, Teubner, καὶ *Paul - Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, σ. 438 κ.ἑ. Paris, Soc. d'édition Les Belles Lettres, 1950.

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ $NK^2$ λαμβάνομεν

$$AK^2=2AZ^2+2ZN^2+NK^2+4ZN\times NK.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ZN=AZ$ καὶ $NK=AH$, θὰ ἔχωμεν

$$AK^2=4AZ^2+AH^2+4AZ\times AH.$$

Ἄρα καὶ $3AK^2=12AZ^2+3AH^2+12AZ\times AH.$

Ἀλλὰ εἶναι $AH^2=3AZ^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AK^2=9AZ^2+4AH^2+12AZ\times AH=(3AZ+2AH)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AK=2AZ+NK=2AZ+AH$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AZ+2AH$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν $AK\Lambda M$, ἔνθα $A\Lambda=3AZ+2AH$ καὶ $A\Lambda^2=3AK^2$.

Ἐὰν εἰς τὰς $AK$ καὶ $A\Lambda$ ἀντικαταστήσωμεν τὰς $AZ$, $AH$ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $A\Lambda=12\alpha+7\delta$ καὶ $AK=7\alpha+4\delta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ῥόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων.

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν :

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|---|
| $\alpha$ | | $\delta$ |
| $\alpha_1=2\alpha+\delta$ | | $\delta_1=3\alpha+2\delta$ |
| $\alpha_2=7\alpha+4\delta$ | | $\delta_2=12\alpha+7\delta$ |
| $\alpha_3=26\alpha+15\delta$ | | $\delta_3=45\alpha+26\delta$ |
| $\alpha_4=97\alpha+56\delta$ | | $\delta_4=168\alpha+97\delta$ |
| $\alpha_5=362\alpha+209\delta$ | | $\delta_5=627\alpha+362\delta$ |
| ⋮ | | ⋮ |
| $\alpha_1$ | Ἡ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$ | | $\delta_2=3\alpha_1+2\delta_1$ |
| $\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$ | | $\delta_3=3\alpha_2+2\delta_2$ |
| $\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$ | | $\delta_4=3\alpha_3+2\delta_3$ |
| $\alpha_5=2\alpha_4+\delta_4$ | | $\delta_5=3\alpha_4+2\delta_4$ |
| ⋮ | | ⋮ |
| $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$ | | $\delta_\nu=3\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}.$ |

Ἐὰν ἀνωτέρω θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{\delta_2}{\alpha_2}=\frac{5}{3},\quad \frac{\delta_3}{\alpha_3}=\frac{19}{11},\quad \frac{\delta_4}{\alpha_4}=\frac{71}{41},\quad \frac{\delta_5}{\alpha_5}=\frac{265}{153},\quad \text{κλπ.}$$

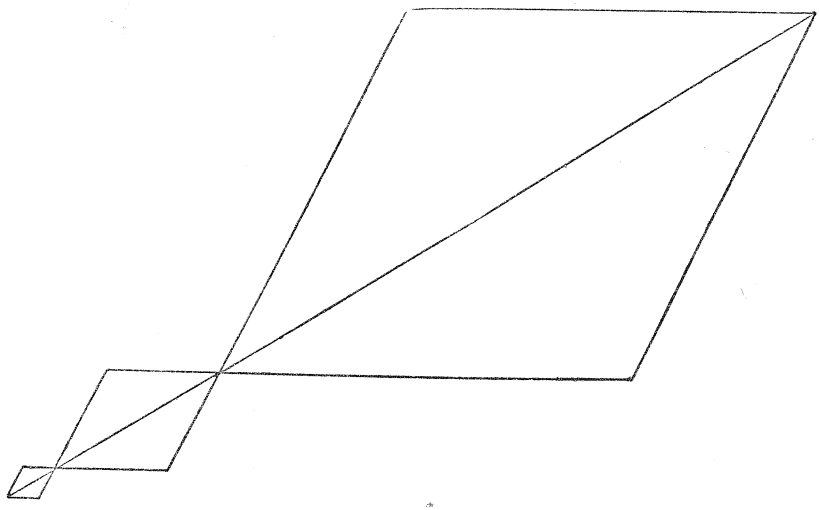
Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\frac{2}{1}$, $\frac{\delta_2}{\alpha_2}=\frac{7}{4}$, $\frac{\delta_3}{\alpha_3}=\frac{26}{15}$, $\frac{\delta_4}{\alpha_4}=\frac{97}{56}$, $\frac{\delta_5}{\alpha_5}=\frac{362}{209}$, $\frac{\delta_6}{\alpha_6}=\frac{1351}{780}$, κλπ.

Ἤτοι εἶναι :

$$\frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\ldots\sqrt{3}\ldots<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1.}$$

Αἱ τιμαὶ $\delta_\nu$, $\alpha_\nu$, ἐὰν τεθῇ $\delta_1=1$, $\alpha_1=1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις



Σχ. 2

τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2-2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1=2$, $\alpha_1=1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2+1$.

[Σημ. Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα οἱ ῥόμβοι ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως].

## Zusammenfassung(*)

Archimedes benutzt in seiner Kreismessung, ohne eine Erklärung dafür anzugeben die Beziehungen $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$ und

$$265^2=3.153^2-2,\quad 1351^2=3.780^2+1.$$

E. Stamatis teilt auf Grund der Theorie der Seiten- und Diagonalzahlen, wie sie uns von Theon von Smyrna und Proklos überliefert ist, einen geometrischen Beweis dieser Beziehungen mit.

*) *E. Stamatis*, Mitteilung in der Akademie der Wissenschaften zu Athen vorgelegt am 2.6.1955.

Es sei ein Rhombus (Fig. 1) gegeben, dessen grösserer Winkel gleich einem äusseren Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist, $AB=\alpha_1$ die Seite, $A\Gamma=\delta_1$ die grössere Diagonale des Rhombus. Nach Euklid II, 12 ist $\delta_1^2=3\alpha_1^2$, und $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{3}$. Auf die Verlängerung von AB tragen wir eine Strecke $BE=AB=\alpha_1$ und $EZ=A\Gamma=\delta_1$ $\alpha b$. Dann ist nach Euklid II, 10 (was Proklos für die Seiten-und Diagonalzahlen erwähnt)

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2 .$$

Aus dieser, $(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2$. Es gilt aber auch $3(2\alpha_1+\delta_1)^2=12\alpha_1^2+12\alpha_1\delta_1+3\delta_1^2$, und weil $\delta_1^2=3\alpha_1^2$, so haben wir

$$3(2\alpha_1+\delta_1)^2=9\alpha_1^2+12\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(3\alpha_1+2\delta_1)^2 .$$

Diese Beziehung drückt die Tatsache aus, dass $(2\alpha_1+\delta_1)$ die Seite, $(3\alpha_1+2\alpha_1)$ die grössere Diagonale eines ähnlichen, wie der gegebene Rhombus $AB\Gamma\Delta$ ist. Das Verfahren lässt sich unendlich wiederholen.

Folglich ergeben sich die entsprechenden Seiten-und Diagonalzahlen :

| | | Seitenzahlen | Diagonalzahlen |
|---|---|---|---|
| 1. | Rhombus | $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| 2. | » | $\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$ | $\delta_2=3\alpha_1+2\delta_1$ |
| 3. | » | $\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$ | $\delta_3=3\alpha_2+2\delta_2$ |
| 4. | » | $\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$ | $\delta_4=3\alpha_3+2\delta_3$ |
| . | | . | |
| . | | . | |
| . | | . | |
| ν. | » | $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu=3\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$. |

1. Setzen wir $\alpha_1=1$, $\delta_1=1$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die steigende Folge

$$\frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\ldots\sqrt{3} ,$$

und $265^2=3.153^2-2$.

2. Setzen wir $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die fallende Folge

$$\sqrt{3}\ldots<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1} ,$$

und $1351^2=3.780^2+1$.

Wir haben also, auf Grund der von Theon von Smyrna und Proklos überlieferten Methode die Beziehungen die Archimedes, ohne Erklärung, als bekannt, angibt.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΑΣ ΤΟΥ 18ου ΑΙΩΝΟΣ

## (DIE BASLER MATHEMATIKER DES ACHTZEHNTEN JAHRHUNDERTS)

Ἡ Βασιλεία τῆς Ἑλβετίας, ἡ ὁποία σήμερον ἀριθμεῖ ὑπὲρ τὰς 200 χιλ. κατοίκων, ἠρίθμει κατὰ τὸ 1700 περὶ τὰς 15 χιλιάδας. Ἡ μικρὰ αὕτη πόλις τοῦ 1700 ἀνέδειξε μέχρι τοῦ 1800 δώδεκα σπουδαίους μαθηματικούς, οἱ τέσσαρες τῶν ὁποίων δύνανται νὰ καταταχθῶσιν εἰς τοὺς κλασσικοὺς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὁ σπουδαιότερος ἐκ τῶν δώδεκα τούτων Ἑλβετῶν μαθηματικῶν εἶναι ὁ Λεονάρδος Ὄϊλερ (Euler), ὁ ὁποῖος δύναται νὰ παραβληθῇ πρὸς τοὺς μεγάλους ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικούς. Αἱ ἐργασίαι τῶν Ἑλβετῶν μαθηματικῶν ἔφερον τὴν μικρὰν Ἑλβετίαν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν κρατῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἀκμάζουσιν αἱ ἐπιστῆμαι καὶ ἰδιαιτέρως ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Τοιοῦτοι πολῖται μιᾶς χώρας ὑποχρεώνουσιν αὐτὴν ἠθικῶς, ὅπως διατηρῇ ζωηρὰν τὴν μνήμην αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο τὸ μόνον ἁρμόζον μέσον εἶναι ἡ ἔκδοσις τῶν ἔργων των. Πρὸ τεσσαράκοντα ἐτῶν ἐγένετο ἔναρξις ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Ὄϊλερ, ἔχουσι δὲ μέχρι σήμερον ἐκδοθῆ 36 τόμοι τῶν 550 σελίδων ἕκαστος, ἐκ τῶν 72 πρὸς ἔκδοσιν προβλεπομένων τόμων. Εἰς τοὺς τόμους τούτους περιλαμβάνεται καὶ ἡ ἀλληλογραφία τοῦ Ὄϊλερ. Διὰ τοὺς λοιποὺς ἕνδεκα μαθηματικοὺς τῆς Ἑλβετίας προβλέπεται ἡ ἔκδοσις 22 τόμων. Τὸ ἔργον τοῦτο ἀνέλαβεν ὁ διακεκριμένος καθηγητὴς τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Βασιλείας κ. Ὄθων Σπὴς (Otto Spiess), ὅστις ἐξέδωκεν ἤδη τὸν πρῶτον τόμον. Οἱ δώδεκα Ἑλβετοὶ μαθηματικοί, τῶν ὁποίων ἡ ἔκδοσις τῶν ἔργων ἐξησφαλίσθη διὰ τῆς ἱδρύσεως εἰδικοῦ Κρατικοῦ Ὀργανισμοῦ, εἶναι οἱ κάτωθι :

Δύο Ὄϊλερ, ὁ Λεονάρδος καὶ ὁ υἱὸς αὐτοῦ· ὀκτὼ Μπερνουϊγί, τῆς δυναστείας Μπερνουϊγὶ (Bernoulli), οἱ ἑξῆς: Ἰάκωβος Ι (1655 - 1705), Ἰωάννης Ι (1667 - 1748), Νικόλαος Ι (1687 - 1759), Νικόλαος ΙΙ (1695 - 1726), Δανιὴλ (1700 - 1782), Ἰωάννης ΙΙ (1710 - 1790), Ἰωάννης ΙΙΙ (1744 - 1807), Ἰάκωβος ΙΙ (1759 - 1789)· δύο μαθηταὶ τῶν Μπερνουϊγί, οἱ Ἰάκωβος Χέρμαν (Hermann), (1673 - 1733) καὶ Νικόλαος Φοὺς (Fuss), (1755 - 1826).

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Η' 1956
ΤΕΥΧΟΣ Α'
15
ΤΕΥΧΟΣ Β'
16

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1956

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ *

# ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ (1)

## Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται κατὰ τὴν παράδοσιν ἡ ἀπόδειξις τοῦ περιφήμου ὁμωνύμου θεωρήματος (Εὐκλείδου Ι, 47), ὡρισμέναι ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2=x^2+y^2$ καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων (2). Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἐν γένει ἀποδίδεται μεταξὺ ἄλλων τὸ ΙΙ Βιβλίον καὶ τὸ πλεῖστον τῶν ἀριθμητικῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $y^2=x^2\mp 1$, (1), αἵτινες χρησιμεύουσι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κατὰ προσέγγισιν ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς $\sqrt{2}$. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) ὀνομάζονται, ὡς γνωστόν, πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, διότι οἱ μὲν ἐκ τούτων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς πλευράς, οἱ δὲ εἰς τὰς διαγωνίους τετραγώνων (3).

Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν διεσώθη ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ ἔχει ὡς κάτωθι :

| | Πλευρικοὶ ἀριθμοί | Διαμετρικοὶ ἀριθμοί |
|---|---|---|
| 1. | 1 | 1 |
| 2. | $1 + 1 = 2$ | $2 \cdot 1 + 1 = 3$ |
| 3. | $2 + 3 = 5$ | $2 \cdot 2 + 3 = 7$ |
| 4. | $5 + 7 = 12$ | $2 \cdot 5 + 7 = 17$ |
| 5. | $12 + 17 = 29$ | $2 \cdot 12 + 17 = 41$ |
| . | . | . |
| . | . | . |

*) *Evangelos Stamatis*, A contribution to the investigation of the geometrical algebra of the Pythagoreans.

1) Ἀνεκοινώθη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 2ας Ἰουνίου 1955 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. *Μιχαὴλ Στεφανίδου*.

2) *Μιχαὴλ Στεφανίδου*, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 55-65 καὶ 102-3, Ἀθῆναι 1938.—*Πρόκλος*, Σχόλια εἰς Εὐκλείδην Ι, σ. 65 καὶ 438, ἔκδ. Friedlein, Teubner.—*Ἰαμβλίχου* V. P. 246, ἔκδ. L Deubner, Teubner.

3) *Theonis Smyrnaei*, Philosophi Platonici, ἔκδ. E. Hiller, σ. 43, Teubner.—*Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. ΙΙ, σ. 8 (Ὀργαν. Ἐκδ. Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953) —*Paul - Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, p. 438, Paris 1950 (Soc. d' éd. Les Belles Lettres).—*M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik unter Theon von Smyrna.—*T. Heath*, A history of Greek mathematics I, p. 91, Oxford 1921, At the Clarendon Press —*R. Moris Cohen - J. E. Drabkin*, A source book in Greek science, p. 43, McGraw - Hill book company inc. New York, Toronto, London, 1948.

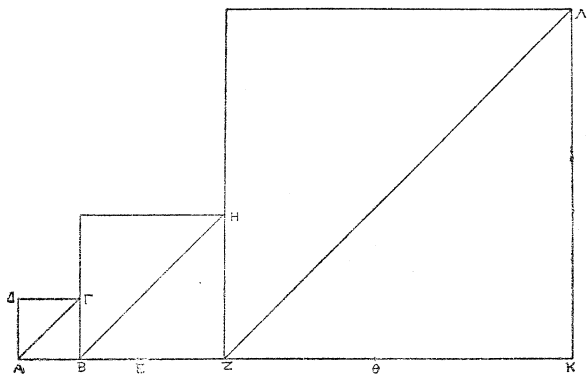
Εἶναι δὲ $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$,

καὶ

$$1^2 = 2 \cdot 1^2 - 1$$
$$3^2 = 2 \cdot 2^2 + 1$$
$$7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$$
$$17^2 = 2 \cdot 12^2 + 1$$
$$41^2 = 2 \cdot 29^2 - 1 \quad \text{κλπ.}$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Πρόκλου (1) καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς :

Ἔστω τετράγωνον πλευρᾶς $AB=\alpha_1$ καὶ διαγωνίου $A\Gamma=\delta_1$, (σχ. 1), ὅτε εἶναι




Σχ. 1

$\delta_1^2=2\alpha_1^2$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB λαμβάνομεν τμῆμα $BE=AB=\alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ=A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10 θὰ εἶναι :

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2\,(\alpha_1 + \delta_1)^2.$$

Καὶ ἐπειδὴ $\delta_1^2=2\alpha_1^2$, θὰ ἔχωμεν δι' ἀφαιρέσεως τούτου κατὰ μέλη ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως, $(2\alpha_1+\delta_1)^2=2(\alpha_1+\delta_1)^2$. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(\alpha_1+\delta_1)=BE+EZ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(2\alpha_1+\delta_1)=AB+BE+EZ$ εἶναι διαγώνιος τετραγώνου, ἡ BH. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BZ λάβωμεν τμῆμα $Z\Theta=BZ$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $\Theta K=BH$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 10 θὰ λάβωμεν νέον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἡ $Z\Theta+\Theta K=3\alpha_1+2\delta_1$, ἡ δὲ διαγώνιος ἡ $Z\Lambda=BK=2BZ+\Theta K=4\alpha_1+3\delta_1$.

Ὅθεν λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς σχῆμα :

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1$ | $\delta_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ |
| $\alpha_3 = \alpha_2 + \delta_2$ | $\delta_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ |
| $\alpha_4 = \alpha_3 + \delta_3$ | $\delta_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ |

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=1$, λαμβάνομεν τοὺς κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρ-

1) Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 κ. ἑ., 393 κ. ἑ. ὑπὸ *F. Hultsch*, ἔκδ. Kroll, Teubner.

ναῖον πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=2x^2\mp1$, ἢ $\delta_\nu{}^2=2\alpha_\nu{}^2+(-1)^\nu$, $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$.

Ἐκ τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος πληροφορούμεθα, ὅτι οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἦσαν γνωστοὶ εἰς αὐτόν. Ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «*ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν*» (546 c). Ἐνταῦθα ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ δὴ καὶ μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, τὴν $7^2=2.5^2-1$. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ Πρόκλου, ὅστις γράφει «*ὅπου δὲ τὸ σύνεγγυς ἀγαπῶμεν, οἷον εὑρόντες ἐν γεωμετρίᾳ τετράγωνον τετραγώνου διπλάσιον, ἐν ἀριθμοῖς δὲ οὐκ ἔχοντες ἑνὸς δέοντος φαμὲν ἄλλον ἄλλου διπλάσιον ὑπάρχειν, ὥσπερ τοῦ ἀπὸ τῆς πεντάδος ὁ ἀπὸ τῆς ἑπτάδος διπλάσιον ἑνὸς δέοντος*». Καὶ ἀλλαχοῦ «*οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος εἰ μὴ λέγει τις τὸν σύνεγγυς. ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ′ τοῦ ἀπὸ τοῦ ε′ διπλάσιός ἐστιν ἑνὸς δέοντος*» (1). (Εἶναι δηλ. $7^2=2.5^2-1$).

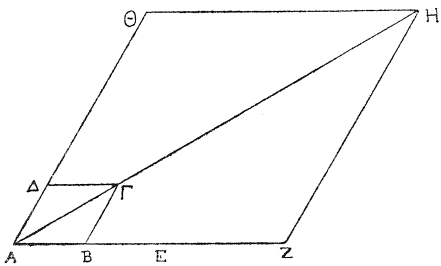
2. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Κύκλου Μέτρησις» χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780},\quad \text{καὶ}\quad 265^2=3.153^2-2,\quad 1351^2=3.780^2+1$$

Γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τῶν σχέσεων τούτων ὑπεβάλομεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (2).

Αὕτη συνδέεται πρὸς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ (σχ. 2), τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα γωνία, ἡ $\angle$ΑΒΓ, νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 12, ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν $AB=\alpha_1$ καὶ τὴν $A\Gamma=\delta_1$, ἤτις βεβαίως εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι $\delta_1{}^2=3\alpha_1{}^2$, καὶ συνεπῶς $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{3}$. Ἐφαρμόζομεν τώρα ἀκριβῶς τὴν ὑπὸ τοῦ Πρόκλου ὑποδεικνυομένην μέθοδον διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἐκ τετραγώνων σχημάτων προκυπτόντων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE=AB=\alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ=A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10 θὰ ἔχωμεν: $(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1{}^2=2\alpha_1{}^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2$, καὶ ἐκ ταύτης:

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1{}^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1{}^2 \qquad (1).$$



Σχ. 2

Εἶναι ἄρα καὶ $3(2\alpha_1+\delta_1)^2=12\alpha_1{}^2+12\alpha_1\delta_1+3\delta_1{}^2$. Ἀλλὰ $\delta_1{}^2=3\alpha_1{}^2$. Ἑπομένως

$$3(2\alpha_1+\delta_1)^2=9\alpha_1{}^2+12\alpha_1\delta_1+4\delta_1{}^2=(3\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(3\alpha_1+2\alpha_1)$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ὁμοίου ῥόμβου πρὸς τὸν ΑΒΓΔ τοῦ ΑΖΗΘ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λάβωμεν τμῆμα ἴσον πρὸς ΑΖ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ἴσον πρὸς ΑΗ, τότε ἔχομεν κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον τὴν πλευρὰν καὶ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον νέου ὁμοίου ῥόμβου πρὸς τὸν ἀρχικόν, ἤτοι πλευρὰ μὲν εἶναι ἡ 2ΑΖ+ΑΗ, διαγώνιος δὲ μεγαλυτέρα ἡ 3ΑΖ+2ΑΗ ἢ $7\alpha_1+4\delta_1$ καὶ $12\alpha_1+7\delta_1$ ἀντιστοίχως. Καλοῦντες τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν πλευρικοὺς ἀρι-

---

1) *Πρόκλος* εἰς Εὐκλείδην I, σ. 61 καὶ 427, ἔκδ. G. Friedlein, Teubner.

2) Βλ. Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, 2.6.1955, σ. 255 κ. ἑξ. καὶ προηγούμενον τεῦχος «Πλάτωνος».

θμοὺς καὶ τὰς τιμὰς τῶν μεγαλυτέρων διαγωνίων, τῶν συνεχῶν κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον κατασκευαζομένων ῥόμβων, διαμετρικοὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν :

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | $\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$ |
| $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | $\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$ |
| $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ | $\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$ |
| $\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4$ | $\delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ |

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha=1$, $\delta=1$, λαμβάνομεν :

| (A) Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $\alpha_1 = 1$ | $\delta_1 = 1$ |
| $\alpha_2 = 3$ | $\delta_2 = 5$ |
| $\alpha_3 = 11$ | $\delta_3 = 19$ |
| $\alpha_4 = 41$ | $\delta_4 = 71$ |
| $\alpha_5 = 153$ | $\delta_5 = 265$ |
| ⋮ | ⋮ |

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2-2$, ἤτοι εἶναι : $1^2=3.1^2-2$, $5^2=3.3^2-2$, $19^2=3.11^2-2$, κλπ.

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$, λαμβάνομεν :

| (B) Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $\alpha_1 = 1$ | $\delta_1 = 2$ |
| $\alpha_2 = 4$ | $\delta_2 = 7$ |
| $\alpha_3 = 15$ | $\delta_3 = 26$ |
| $\alpha_4 = 56$ | $\delta_4 = 97$ |
| $\alpha_5 = 209$ | $\delta_5 = 362$ |
| $\alpha_6 = 780$ | $\delta_6 = 1351$ |
| ⋮ | ⋮ |

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2+1$, ἤτοι εἶναι : $2^2=3.1^2+1$, $7^2=3.4^2+1$, $26^2=3.15^2+1$, κλπ.

Οἱ λόγοι $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ τῶν (A) καὶ (B) ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν τῶν (A) εἶναι αὐξανομένη, ἡ δὲ τῶν (B) φθίνουσα. Τὸ κοινὸν φράγμα τούτων εἶναι ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι εἶναι

1) $$\frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{41}{71}<\frac{265}{153}<\ldots\sqrt{3}\ldots<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1},$$

καὶ 2) $265^2=3.153^2-2$, $1351^2=3\,780^2+1$, ὡς χρησιμοποιεῖ ταῦτα ἄνευ ἀποδείξεως, ὡς γνωστά, ὁ Ἀρχιμήδης.

## II.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζον καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\delta_\nu{}^2 = \lambda\alpha_\nu{}^2+(\lambda-4)^\nu\,(-1)^\nu$$

($\nu=1, 2, 3\ldots$ καὶ $\lambda\geqslant 5$, ἀκέραιος μὴ τετράγωνος), καὶ ὅτι ἡ $\sqrt{\lambda}$ εἶναι τὸ κοινὸν

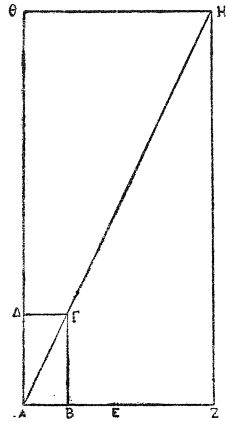
φράγμα δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς αὐξανομένης καὶ μιᾶς φθινούσης, διότι ἡ ἀπόδειξις τούτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας.

Παρέχομεν τὴν ἀπόδειξιν διὰ τὰς ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\delta_{\nu}^{\,2} &= 5\alpha_{\nu}^{\,2} + (5-4)^{\nu}(-1)^{\nu}\\
\delta_{\nu}^{\,2} &= 6\alpha_{\nu}^{\,2} + (6-4)^{\nu}(-1)^{\nu}\\
\delta_{\nu}^{\,2} &= 7\alpha_{\nu}^{\,2} + (7-4)^{\nu}(-1)^{\nu}\\
\delta_{\nu}^{\,2} &= 8\alpha_{\nu}^{\,2} + (8-4)^{\nu}(-1)^{\nu}\\
&\vdots\\
\delta_{\nu}^{\,2} &= 17\alpha_{\nu}^{\,2} + (17-4)^{\nu}(-1)^{\nu}
\end{aligned}$$

καὶ τὴν $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... $\sqrt{17}$. Εἶναι δὲ γνωστὸν ἐκ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, ὅτι ὁ Θεόδωρος (1) (ὁ Κυρηναῖος, ὅστις θεωρεῖται Πυθαγόρειος) ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... $\sqrt{17}$ (Θεαίτητος 147 D—148 B).

II. 1. $\delta_{\nu}^{\,2} = 5\alpha_{\nu}^{\,2} + (5-4)^{\nu}(-1)^{\nu}$ καὶ $\sqrt{5}$. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 3), ἔνθα ἔστω $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=2\alpha_1$ καὶ ἡ διαγώνιος $A\Gamma=\delta_1$. Εἶναι ἄρα



Σχ. 3

$$\delta_1^{\,2}=5\alpha_1^{\,2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{5}.$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE=AB=\alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ=A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10, θὰ ἔχωμεν:

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^{\,2}=2\alpha_1^{\,2}+2(\alpha_1+\delta_1)^2$$

καὶ ἐκ ταύτης $(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^{\,2}+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^{\,2}$

Εἶναι ἄρα καὶ

$$5(2\alpha_1+\delta_1)^2=20\alpha_1^{\,2}+20\alpha_1\delta_1+5\delta_1^{\,2}.$$

Ἀλλὰ $\delta_1^{\,2}=5\alpha_1^{\,2}$. Ἑπομένως

$$5(2\alpha_1+\delta_1)^2=20\alpha_1^{\,2}+5\alpha_1^{\,2}+20\alpha_1\delta_1+4\delta_1^{\,2}=(5\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)=AZ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(5\alpha_1+2\delta_1)=AH$ εἶναι διαγώνιος ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ ΑΖΗΘ. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον τῆς κατασκευῆς ἐν συνεχείᾳ ὁμοίων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν:

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | $\delta_2 = 5\alpha_1 + 2\delta_1$ |
| $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | $\delta_3 = 5\alpha_2 + 2\delta_2$ |
| $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ | $\delta_4 = 5\alpha_3 + 2\delta_3$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ . |

1) *Pauly - Wissowa*, Realenzyklopädie unter Theodoros Dort Literaturangabe: *M. Cantor, E. Frank, F. Hultsch, G. Junge, H. Vogt, H. G. Zeuthen, Eva Sachs, T. Bonnesen, H. Hasse-H. Scholz, T. Heath.* —2. Und *W. L. van der Waerden*, Die Arithmetik der Pythagoreer II. Die Theorie des Irrationalen, Mathem. Annalen, **120**, 5/6 Heft, 1949, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.—3. *K. Reidemeister*, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig, 1940.—4. *J. E. Hofmann*, Geschichte der Mathematik I, S. 26 - 27, Berlin, 1953 (Sammlung Göschen, 226, Walter de Gruyter und Co).—5. *Robert S. Brumbaugh*, Plato's Mathematical Imagination, p. 146, Indiana Univ. Press, Bloomington, 1954.

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1,$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν
$\alpha_2 = 4,$ $\delta_2 = 9$
$\alpha_3 = 17,$ $\delta_3 = 38$
$\alpha_4 = 72,$ $\delta_4 = 161$
$\vdots$ $\vdots$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{38}{17} < \dots \sqrt{5} \dots < \frac{161}{72} < \frac{9}{4},$ καὶ

$2^2 = 5 . 1^2 - 1$
$9^2 = 5 \ 4^2 + 1$
$38^2 = 5 . 17^2 - 1$
$\vdots \quad \vdots$
$\delta_\nu{}^2 = 5 . \alpha_\nu{}^2 + (5-4)^\nu (-1)^\nu .$

II. 2. $\delta_\nu{}^2 = 10\alpha_\nu{}^2 + (10-4)^\nu (-1)^\nu,$ καὶ $\sqrt{10}.$

Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα 3 λαμβάνομεν $AB=\sigma_1,$ $B\Gamma=3\alpha_1,$ ὁπότε

$$\delta_1{}^2 = 10\alpha_1{}^2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{10}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην κατασκευὴν (II. 1) λαμβάνομεν

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2$$

Εἶναι ἄρα καὶ $10(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 40\alpha_1{}^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 10\delta_1{}^2$

Ἀλλὰ $\delta_1{}^2 = 10\alpha_1{}^2.$ Ἑπομένως

$$10(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 40\alpha_1{}^2 + 60\alpha_1{}^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2 = (10\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(10\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος ὁμοίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ὁ νόμος τῆς κατασκευῆς τῶν ὁμοίων ἐν συνεχείᾳ παραλληλογράμμων εἶναι προφανής.

Ὅθεν θὰ εἶναι

| | Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\alpha_1$ | | $\delta_1$ | |
| | $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | | $\delta_2 = 10\alpha_1 + 2\delta_1$ | |
| | $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | | $\delta_3 = 10\alpha_2 + 2\delta_2$ | |
| | $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ | | $\delta_4 = 10\alpha_3 + 2\delta_3$ | |
| | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| | $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | | $\delta_\nu = 10\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ | |
| Ἐὰν θέσωμεν | $\alpha_1 = 1$ | καὶ | $\delta_1 = 2$ | λαμβάνομεν |
| | $\alpha_2 = 4$ | | $\delta_2 = 14$ | |
| | $\alpha_3 = 22$ | | $\delta_3 = 68$ | |
| | $\alpha_4 = 112$ | | $\delta_4 = 356$ | |
| | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{68}{22} < \dots \sqrt{10} \dots < \frac{356}{112} < \frac{14}{4}$

καὶ

$2^2 = 10 . 1^2 - 6$
$14^2 = 10 . 4^2 + 6^2$
$68^2 = 10 . 22^2 - 6^2$
$356^2 = 10 . 112^2 + 6^4$
$\vdots$
$\delta_\nu{}^2 = 10 . \alpha_\nu{}^2 + (10-4)^\nu (-1)^\nu$

II. 3. $\delta_\nu{}^2 = 17\alpha_1{}^2 + (17-4)^\nu (-1)^\nu,$ καὶ $\sqrt{17}.$

Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα 3 λαμβάνομεν $AB=\alpha_1,$ $B\Gamma=4\alpha_1,$ $A\Gamma=\delta_1,$ ὁπότε εἶναι

$\delta_1^2=17\alpha_1^2$ καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{17}$. Ἐφαρμόζομεν πάλιν τήν κατασκευὴν (II. 1) ὁπότε ἔχομεν

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+17\delta_1^2$. Ἀλλὰ $\delta_1^2=17\alpha_1^2$.

Ἑπομένως $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+221\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(17\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(17\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος ὁμοίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν ὁμοίων ὀρθογ. παραλληλογράμμων εἶναι προφανής.

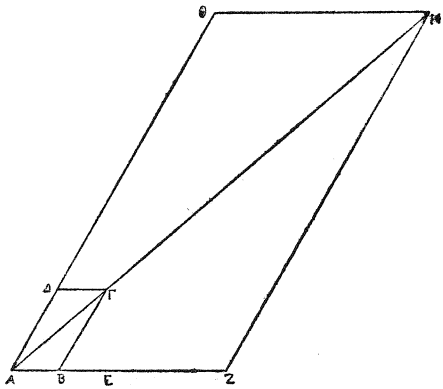
Ὅθεν θὰ ἔχωμεν

| | Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\alpha_1$ | | $\delta_1$ | |
| | $\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$ | | $\delta_2=17\alpha_1+2\delta_1$ | |
| | $\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$ | | $\delta_3=17\alpha_2+2\delta_2$ | |
| | $\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$ | | $\delta_4=17\alpha_3+2\delta_3$ | |
| | ⋮ | | ⋮ | |
| | $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$ | | $\delta_\nu=17\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$ | |
| Ἐὰν θέσωμεν | $\alpha_1=1$ | καὶ | $\delta_1=2$ | λαμβάνομεν |
| | $\alpha_2=4$ | | $\delta_2=21$ | |
| | $\alpha_3=29$ | | $\delta_3=110$ | |
| | $\alpha_4=168$ | | $\delta_4=713$ | |

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1}<\frac{110}{29}<\dots\sqrt{17}\dots<\frac{713}{168}<\frac{21}{4}$, καὶ

$$2^2=17.1^2-13$$
$$21^2=17.4^2+13^2$$
$$110^2=17.29^2-13^3$$
$$713^2=17.168^2+13^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2=17.\alpha_\nu{}^2+(17-4)^\nu(-1)^\nu$$

II. 4. Θεωροῦμεν τὸ ῥομβοειδὲς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 4) ἔνθα γωνία ΑΒΓ=120°, $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=2\alpha_1$ καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος $A\Gamma=\delta_1$.



Σχ. 4

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 12 θὰ εἶναι $\delta_1^2=7\alpha_1^2$ ὁπότε $\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{7}$.

Πάλιν ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν (II. 1), ὁπότε λαμβάνοντες

$$BE=\alpha_1,\quad EZ=\delta_1,$$

θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10:

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2.$$

ἐξ ἧς $(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2$.

Εἶναι ἄρα καὶ

$$7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+7\delta_1^2.$$

Ἀλλὰ $\delta_1^2=7\alpha_1^2$. Ἑπομένως

$$7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+21\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=$$
$$=(7\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(7\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος μεγαλυτέρα ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ῥομβοειδοῦς παραλληλογράμμου. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον κατασκευῆς ὁμοίων ῥομβοειδῶν παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν:

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | | $\delta_2 = 7\alpha_1 + 2\delta_1$ |
| $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | | $\delta_3 = 7\alpha_2 + 2\delta_2$ |
| $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ | | $\delta_4 = 7\alpha_3 + 2\delta_3$ |
| ⋮ | | ⋮ |
| $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | | $\delta_\nu = 7\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ |
| Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ | καὶ | $\delta_1 = 2$, λαμβάνομεν |
| $\alpha_2 = 4$ | | $\delta_2 = 11$ |
| $\alpha_3 = 19$ | | $\delta_3 = 50$ |
| $\alpha_4 = 88$ | | $\delta_4 = 233$ |
| ⋮ | | |

Εἶναι δὲ $$\frac{2}{1} < \frac{50}{19} < \ldots \sqrt{7} \ldots < \frac{233}{88} < \frac{11}{4},$$

καὶ
$$2^2 = 7 \cdot 1^2 - 3$$
$$11^2 = 7 \cdot 4^2 + 3^2$$
$$50^2 = 7 \cdot 19^2 - 3^3$$
$$233^2 = 7 \cdot 88^2 + 3^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 7 \cdot \alpha_\nu{}^2 + (7-4)^\nu (-1)^\nu .$$

II. 5. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα 4 λαμβάνομεν $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 12 εἶναι $\delta_1{}^2 = 13\alpha_1{}^2$, καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{13}$. Πάλιν ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὡς καὶ προηγουμένως, ἤτοι λαμβάνομεν $BE=\alpha_1$, $EZ=\delta_1$ ὁπότε κατὰ τὸ II, 10 τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1{}^2 = 2\alpha_1{}^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2, \quad \text{ἐξ ἧς}$$
$$(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1{}^2.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $13(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 52\alpha_1{}^2+52\alpha_1\delta_1+13\delta_1{}^2$.

Ἀλλὰ $\delta_1{}^2 = 13\alpha_1{}^2$· ἑπομένως

$$13(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 52\alpha_1{}^2+117\alpha_1{}^2+52\alpha_1\delta_1+4\delta_1{}^2 = (13\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει, ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(13\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος μεγαλυτέρα ὁμοίου ῥομβοειδοῦς παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον κατασκευῆς τῶν ὁμοίων ῥομβοειδῶν παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | | $\delta_2 = 13\alpha_1 + 2\delta_1$ |
| $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | | $\delta_3 = 13\alpha_2 + 2\delta_2$ |
| $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ | | $\delta_4 = 13\alpha_3 + 2\delta_3$ |
| ⋮ | | ⋮ |
| $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | | $\delta_\nu = 13\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ |
| Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ | καὶ | $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν |
| $\alpha_2 = 4$ | | $\delta_2 = 17$ |
| $\alpha_3 = 25$ | | $\delta_3 = 86$ |
| $\alpha_4 = 136$ | | $\delta_4 = 497$ |
| ⋮ | | ⋮ |

Εἶναι δὲ $$\frac{2}{1} < \frac{86}{25} < \ldots \sqrt{13} < \ldots \frac{497}{136} < \frac{17}{4},$$ καὶ

$$2^2 = 13.1^2 - 9$$
$$17^2 = 13.4^2 + 9^2$$
$$86^2 = 13.25^2 - 9^3$$
$$497^2 = 13.136^2 + 9^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 13\alpha_\nu{}^2 + (13-4)^\nu (-1)^\nu .$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν κατασκευῶν καὶ ἀποδείξεων καθίσταται αὐτονόητος ὁ σχηματισμὸς ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν δι' ἀλγεβρικοῦ καθαρῶς ὑπολογισμοῦ καὶ οὐχὶ γεωμετρικοῦ, διὰ τὴν $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$,.... καὶ τὰς συναφεῖς ἐξισώσεις.

Οὕτω θὰ εἶναι

II. 6. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 6\alpha_\nu{}^2 + (6-4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{6}$.

$$\alpha_1 \qquad\qquad \delta_1$$
$$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 \qquad \delta_2 = 6\alpha_1 + 2\delta_1$$
$$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 \qquad \delta_3 = 6\alpha_2 + 2\delta_2$$
$$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 \qquad \delta_4 = 6\alpha_3 + 2\delta_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} \qquad \delta_\nu = 6\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\alpha_2 = 4 \qquad \delta_2 = 10$$
$$\alpha_3 = 18 \qquad \delta_3 = 44$$
$$\alpha_4 = 80 \qquad \delta_4 = 196$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{44}{18} < \ldots \sqrt{6} \ldots < \frac{196}{80} < \frac{10}{4}$, καὶ

$$2^2 = 6.1^2 - 2$$
$$10^2 = 6.4^2 + 2^2$$
$$44^2 = 6.18^2 - 2^3$$
$$196^2 = 6.80^2 + 2^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 6.\alpha_\nu{}^2 + (6-4)^\nu (-1)^\nu$$

II. 7. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 8\alpha_\nu{}^2 + (8-4)^\nu (-1)^\nu$ καὶ $\sqrt{8}$.

$$\alpha_1 \qquad\qquad \delta_1$$
$$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 \qquad \delta_2 = 8\alpha_1 + 2\delta_1$$
$$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 \qquad \delta_3 = 8\alpha_2 + 2\delta_2$$
$$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_2 \qquad \delta_4 = 8\alpha_3 + 2\delta_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} \qquad \delta_\nu = 8\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\alpha_2 = 4 \qquad \delta_2 = 12$$
$$\alpha_3 = 20 \qquad \delta_3 = 56$$
$$\alpha_4 = 96 \qquad \delta_4 = 272$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{56}{20} < \ldots \sqrt{8} \ldots < \frac{272}{96} < \frac{12}{4}$, καὶ

$$2^2 = 8.1^2 - 4$$
$$12^2 = 8.4^2 + 4^2$$
$$56^2 = 8.20^2 - 4^3$$
$$272^2 = 8.96^2 + 4^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 8.\alpha_\nu{}^2 + (8-4)^\nu (-1)^\nu .$$

II. 8. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 11\alpha_\nu{}^2 + (11-4)^\nu\,(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{11}$.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 11\alpha_1 + 2\delta_1 \\ \alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_3 = 11\alpha_2 + 2\delta_2 \\ \alpha_4 = 2\sigma_3 + \delta_3 & \delta_4 = 11\alpha_3 + 2\delta_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 11\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1} \end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$ $\delta_2 = 15$

$\alpha_3 = 23$ $\delta_3 = 74$

$\alpha_4 = 120$ $\delta_4 = 401$,

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{74}{23} < \ldots \sqrt{11} \ldots < \frac{401}{120} < \frac{15}{4}$, καὶ

$$\begin{array}{l} 2^2 = 11 \cdot 1^2 - 7 \\ 15^2 = 11 \cdot 4^2 + 7^2 \\ 74^2 = 11 \cdot 23^2 - 7^3 \\ 401^2 = 11 \cdot 120^2 + 7^4 \\ \vdots \\ \delta_\nu{}^2 = 11\alpha_\nu{}^2 + (11-4)^\nu\,(-1)^\nu . \end{array}$$

II. 9. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 12\alpha_\nu{}^2 + (12-4)^\nu\,(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{12}$.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 12\alpha_1 + 2\delta_1 \\ \alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_2 = 12\alpha_2 + 2\delta_2 \\ \alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & \delta_4 = 12\alpha_3 + 2\delta_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 12\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1} \end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$ $\delta_2 = 16$

$\alpha_3 = 24$ $\delta_3 = 80$

$\alpha_4 = 128$ $\delta_4 = 448$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{80}{24} < \ldots \sqrt{12} \ldots < \frac{448}{128} < \frac{16}{4}$, καὶ

$$\begin{array}{l} 2^2 = 12 \cdot 1^2 - 8 \\ 16^2 = 12 \cdot 4^2 + 8^2 \\ 80^2 = 12 \cdot 24^2 - 8^3 \\ 448^2 = 12 \cdot 128^2 + 8^4 \\ \vdots \\ \delta_\nu{}^2 = 12 \cdot \alpha_\nu{}^2 + (12-4)^\nu\,(-1)^\nu \end{array}$$

II. 10 Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 14\alpha_\nu{}^2 + (14-4)^\nu\,(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{14}$.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & \delta_2 = 14\alpha_1 + 2\delta_1 \\ \alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & \delta_3 = 14\alpha_2 + 2\delta_2 \\ \alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & \delta_4 = 14\alpha_3 + 2\delta_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & \delta_\nu = 14\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1} \end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$ $\delta_2 = 18$

$\alpha_3 = 26$ $\delta_3 = 92$

$\alpha_4 = 144$ $\delta_4 = 548$

Είναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{92}{26} < \dots \sqrt{14} \dots < \frac{548}{144} < \frac{18}{4}$, καὶ

$$2^2 = 14 . 1^2 - 10$$
$$18^2 = 14 . 4^2 + 10^2$$
$$92^2 = 14 . 26^2 - 10^3$$
$$548^2 = 14 . 144^2 + 10^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 14 . \alpha_\nu{}^2 + (14-4)^\nu (-1)^\nu .$$

II. 11. Διὰ $\delta_\nu{}^2 = 15\alpha_\nu{}^2 + (15-4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{15}$

| | |
|---|---|
| $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | $\delta_2 = 15\alpha_1 + 2\delta_1$ |
| $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | $\delta_3 = 15\alpha_2 + 2\delta_2$ |
| $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_2$ | $\delta_4 = 15\alpha_3 + 2\delta_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu = 15\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ |

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$\alpha_2 = 4$, $\delta_2 = 19$

$\alpha_3 = 27$, $\delta_3 = 98$

$\alpha_4 = 152$, $\delta_4 = 601$

$\vdots$

Είναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{98}{27} < \dots \sqrt{15} \dots < \frac{601}{152} < \frac{19}{4}$, καὶ

$$2^2 = 15 . 1^2 - 11$$
$$19^2 = 15 . 4^2 + 11^2$$
$$98^2 = 15 . 27^2 - 11^3$$
$$601^2 = 15 . 152 + 11^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 15 . \alpha_\nu{}^2 + (15-4)^\nu (-1)^\nu .$$

III. 1. Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II. 10 γεωμετρικὴ κατασκευή, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πρόκλος, ἄγει εἰς τὴν ταυτότητα, (1), $(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2$,
τὴν ἀποδεικνυομένην κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 4. Ἐὰν $\delta_1{}^2 = \lambda\alpha_1{}^2$, ἔνθα $\lambda \geqslant 5$, ἀκέραιος μὴ τετράγωνος, θὰ εἶναι καὶ $(\lambda-4)\delta_1{}^2 = (\lambda-4)\lambda\alpha_1{}^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\lambda(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\lambda\alpha_1{}^2 + 4\lambda\alpha_1\delta_1 + (\lambda-4)\lambda\alpha_1{}^2 + 4\delta_1{}^2 = (\lambda\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Ἑπομένως θὰ εἶναι,

1)

| Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ | Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ |
|---|---|
| $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$ | $\delta_2 = \lambda\alpha_1 + 2\delta_1$ |
| $\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$ | $\delta_3 = \lambda\alpha_2 + 2\delta_2$ |
| $\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$ | $\delta_4 = \lambda\alpha_3 + 2\delta_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$ |

2) $\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \dots \sqrt{\lambda} \dots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}$, $(\alpha_1=1, \quad \delta_1=2)$.

3) $$\delta_\nu{}^2 = \lambda\alpha_\nu{}^2 + (\lambda-4)^\nu (-1)^\nu$$

III. 2. Εἶναι δυνατὸν ἡ $\sqrt{2}$ νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, ὅταν $\lambda=2$. Τὴν μέθοδον ταύτην καλοῦμεν γενικὴν πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς μεθόδου τῆς διασωθείσης ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Πρόκλου, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν εἰδικήν.

Πρὸς σύγκρισιν παραθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα καὶ τῶν δύο μεθόδων.

Α'. Μέθοδος εἰδική, $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \delta_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 & \delta_2 &= 3 \\ \alpha_3 &= 5 & \delta_3 &= 7 \\ \alpha_4 &= 12 & \delta_4 &= 17 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

$1^2=2.1^2-1$, $3^2=2.2^2+1$, $7^2=2.5^2-1$, $\delta_\nu{}^2 = 2\alpha_\nu{}^2 + (-1)^\nu$.

[Διὰ $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \delta_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= 3 & \delta_2 &= 4 \\ \alpha_3 &= 7 & \delta_3 &= 10 \\ \alpha_4 &= 17 & \delta_4 &= 24 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} > \frac{\delta_3}{\alpha_3} > \frac{\delta_5}{\alpha_5} > \ldots \sqrt{2} \ldots > \frac{\delta_6}{\alpha_6} > \frac{\delta_4}{\alpha_4} > \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2.1^2 + 2 \\ 4^2 &= 2.3^2 - 2 \\ 10^2 &= 2.7^2 + 2 \\ 24^2 &= 2.17^2 - 2 \\ &\vdots \\ \delta_\nu{}^2 &= 2\alpha_\nu{}^2 + (2-4)(-1)^\nu \text{ ].} \end{aligned}$$

Β'. Μέθοδος γενική, $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$.

Διὰ $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \delta_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 3 & \delta_2 &= 4 \\ \alpha_3 &= 10 & \delta_3 &= 14 \\ \alpha_4 &= 34 & \delta_4 &= 48 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_2}{\alpha_2} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \ldots \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 1^2 &= 2.1^2 - 1 \\ 4^2 &= 2.3^2 - 2 \\ 14^2 &= 2.10^2 - 2^2 \\ 48^2 &= 2.34^2 - 2^2 \\ &\vdots \\ \delta_\nu{}^2 &= 2.\alpha_\nu{}^2 + (2-4)^{\nu-1}.(-1)^\nu \end{aligned}$$

Διὰ $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \delta_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= 4 & \delta_2 &= 6 \\ \alpha_3 &= 14 & \delta_3 &= 20 \\ \alpha_4 &= 48 & \delta_4 &= 68, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \ldots < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta^2}{\alpha_2} < \frac{\delta_1}{\alpha_1}.$$

$$2^2 = 2 \cdot 1^2 + 2$$
$$6^2 = 2 \cdot 4^2 + 2^2$$
$$20^2 = 2 \cdot 14^2 + 2^3$$
$$68^2 = 2 \cdot 48^2 + 2^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu{}^2 = 2 \cdot \alpha_\nu{}^2 + (2-4)^\nu \cdot (-1)^\nu .$$

Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους παρεχομένην τιμὴν τῆς $\sqrt{3}$ θὰ εἴχομεν διὰ τὴν $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{1} < \frac{4}{3} < \frac{14}{10} < \frac{48}{34} < \frac{164}{116} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{792}{560} < \frac{232}{164} < \frac{68}{48} < \frac{20}{14} < \frac{6}{4} < \frac{2}{1}.$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι προτιμοτέρα ἡ ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Πρόκλου διασωθεῖσα μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

## SUMMARY

I. 1. The law of formation of the side - and diameter - (diagonal - ) numbers is explained by Theon of Smyrna. According to Proclus the related identity is proved by Euclid book II, proposition 10.

Side numbers $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu{}^2 = 2\alpha_\nu{}^2 \mp 1$. For $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ we have $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

2. Archimedes for the arithmetical approximation to $\pi$ starts from a greater and a lesser limit to the value of $\sqrt{3}$, which without remark as known:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \qquad 265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2, \qquad 1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1.$$

We give the following interpretation on the archimedean formula, with pythagorean method of the side—and diagonal—numbers. In the figure 2 is $AB = \alpha_1$ the side $A\Gamma = \delta_1$ the greater diagonal of the rhomb $AB\Gamma\Delta$, and the greater angle $AB\Gamma = 120^0$. Then $\delta_1{}^2 = 3\alpha_1{}^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. According to Euclid II Prop. 10 we have

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1{}^2 = 2\alpha_1{}^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2, \qquad (2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2. \qquad (1)$$

It is also $3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1{}^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1{}^2$, and because $\delta_1{}^2 = 3\alpha_1{}^2$,

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1{}^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2 = (3\alpha_1 + 2\delta_1)^2.$$

The law of formation of the correspondig side—and diagonal—numbers is evidently. Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

| When | | |
|---|---|---|
| | $\alpha_1 = 1$ | $\delta_1 = 1$ |
| | $\alpha_2 = 3$ | $\delta_2 = 5$ |
| | $\alpha_3 = 11$ | $\delta_3 = 19$ |
| | $\alpha_4 = 41$ | $\delta_4 = 71$ |
| | $\alpha_5 = 153$ | $\delta_5 = 265$ |

and $\delta_\nu{}^2 = 3\alpha_\nu{}^2 - 2$

| When | | |
|---|---|---|
| | $\alpha_1 = 1$ | $\delta_1 = 2$ |
| | $\alpha_2 = 4$ | $\delta_2 = 7$ |
| | $\alpha_3 = 15$ | $\delta_3 = 26$ |
| | $\alpha_4 = 56$ | $\delta_4 = 97$ |
| | $\alpha_5 = 209$ | $\delta_5 = 362$ |
| | $\alpha_6 = 780$ | $\delta_6 = 1351$ |

and $\delta_\nu{}^2 = 3\alpha_\nu{}^2 + 1$.

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \ldots < \sqrt{3} \ldots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

II. In the following we start from the identity (1).

1. In the figure 3 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 2\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$. Then $\delta_1{}^2 = 5\alpha_1{}^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{5}$, and $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1{}^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 5\delta_1{}^2$. Because $\delta_1{}^2 = 5\alpha_1{}^2$, is $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1{}^2 + 5\alpha_1{}^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2 = (5\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$,

$$\delta_\nu{}^2 = 5\alpha_\nu{}^2 + (5-4)^\nu (-1)^\nu .$$

When $\alpha_1=1,\ \delta_1=2,\quad \frac{2}{1}<\frac{38}{14}<\ldots\sqrt{5}\ldots<\frac{161}{72}<\frac{9}{4}.$

2. In the same figure 3 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Then $\delta_1^2=10\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{10}$, and $10(2\alpha_1+\delta_1)^2=40\alpha_1^2+40\alpha_1\delta_1+10\delta_1^2$. Because $\delta_1^2=10\alpha_1^2$, is $10(2\alpha_1+\delta_1)^2=100\alpha_1^2+40\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(10\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu=10\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2=10\alpha_\nu^2+(10-4)^\nu(-1)^\nu$. When $\alpha_1=1,\ \delta_1=2,\ \frac{2}{1}<\frac{68}{22}<\ldots\sqrt{10}\ldots<\frac{356}{112}<\frac{14}{4}$.

3. In the same figure 3 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=4\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Then $\delta_1^2=17\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{17}$, and $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+17\delta_1^2$. Because $\delta_1^2=17\alpha_1^2$, is $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=289\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(17\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, D. N. $\delta_\nu=17\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$,

$\delta_\nu^2=17\alpha_\nu^2+(17-4)^\nu(-1)^\nu$.

When $\alpha_1=1,\ \delta_1=2,\quad \frac{2}{1}<\frac{110}{29}<\ldots\sqrt{17}\ldots<\frac{713}{168}<\frac{21}{14}$.

4. In the figure 4 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=2\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. The angle $AB\Gamma=120^0$. Then $\delta_1^2=7\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{7}$, and $7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+7\delta_1^2$. Because $\delta_1^2=7\alpha_1^2$, $7(2\alpha_1+\delta_1)^2=49\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+\delta_1^2=(7\alpha_1+2\delta_1)^2$.

S. N., $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, D. N., $\delta_\nu=7\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2=7\alpha_\nu^2+(7-4)^\nu(-1)^\nu$.

When $\alpha_1=1,\ \delta_1=2,\quad \frac{2}{1}<\frac{50}{19}<\ldots\sqrt{7}\ldots<\frac{233}{88}<\frac{11}{4}$.

5. In the same figure 4 we take $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$.

Then $\delta_1^2=13\alpha_1^2$, $\delta_1:\alpha_1=\sqrt{13}$, $13(2\alpha_1+\delta_1)^2=52\alpha_1^2+52\alpha_1\delta_1+13\delta_1^2$.

Because $\delta_1^2=13\alpha_1^2$, is $13(2\alpha_1+\delta_1)^2=169\alpha_1^2+52\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(13\alpha_1+2\delta_1)^2$

S.N., $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, D. N., $\delta_\nu=13\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2=13\alpha_1^2+(13-4)^\nu(-1)^\nu$.

When $\alpha_1=1,\ \delta_1=2,\quad \frac{2}{1}<\frac{86}{25}<\ldots\sqrt{13}\ldots<\frac{497}{136}<\frac{17}{4}$.

In the same way we take the side—and the diagonal—numbers for the $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$. (We mention Theaetetus of Plato 147 D).

III. If $\lambda\geqslant 5$, integer no square number and $\delta_1^2=\lambda\alpha_1^2$, then $(\lambda-4)\delta_1^2=(\lambda-4)\lambda\alpha_1^2$, and according to the identity (1) $\lambda(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\lambda\alpha_1^2+4\lambda\alpha_1\delta_1+\lambda\delta_1^2$,

$=4\lambda\alpha_1^2+(\lambda-4)\lambda\alpha_1^2+4\lambda\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(\lambda\alpha_1+2\delta_1)^2$

| Side numbers | Diagonal numbers |
|---|---|
| $\alpha_1$ | $\delta_1$ |
| $\alpha_2=2\alpha_1+\delta_1$ | $\delta_2=\lambda\alpha_1+2\delta_1$ |
| $\alpha_3=2\alpha_2+\delta_2$ | $\delta_3=\lambda\alpha_2+2\delta_2$ |
| $\alpha_4=2\alpha_3+\delta_3$ | $\delta_4=\lambda\alpha_3+2\delta_3$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$ | $\delta_\nu=\lambda\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$ |

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1}<\frac{\delta_3}{\alpha_3}<\frac{\delta_5}{\alpha_5}<\ldots\sqrt{\lambda}\ldots<\frac{\delta_6}{\alpha_6}<\frac{\delta_4}{\alpha_4}<\frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

and $\delta_\nu^2=\lambda\alpha_\nu^2+(\lambda-4)^\nu(-1)^\nu$. We take here always $\alpha_1=1$, $\delta_1-2$. $\lambda=2$ and $\lambda=3$ are special cases.

## Βιβλιοκρισίαι

**Λογοθέτου Κων.** Βιβλιοκρισία εἰς διατριβὰς ἀναφερομένας εἰς προσωκρατικοὺς φιλοσόφους . . Σελ. 241—252
**Ἡλιοπούλου Κων.** Ernout Alfred, Aspects du vocabulaire latin » 252—256
**Τσουλούφου Βασ.** Ἀχιλλέως Τζαρτζάνου Συντακτικὸν τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς Γλώσσης, Μέρος Α', κεφ. Α', § 5 . . . . . » 256—258
**Γεωργούλη Κων.** Ν. Γ. Μιχαλοπούλου Μαθηματικὰ θέματα » 258—261
**Σταμάτη Εὐ.** E. J. Dijksterhuis Archimedes . . . . . » 261—263
**M. D. Petruševski:** Ἡ μεγάλη ἀνακάλυψις τοῦ κ. Βέντρις » 263—264
**Γεωργούλη Κων.** Louis van Haecht Le problème de l' origine du langage . . . . . » 264—268
**Διεθνὲς συνέδριον διὰ τὰ κρητο-μυκηναϊκὰ κείμενα . . » 268—270
Ἡ κίνησις τῆς Ἑταιρείας κατὰ τὸ ἔτος 1956—Δωδεκάτη τακτικὴ Γενικὴ συνέλευσις . . . . . » 271—273
Ἀπὸ τὴν κίνησιν τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως . . . . » 273—274
Ἀπὸ τὴν ζωὴν καὶ τὴν κίνησιν . . . . . » 274—275
**Γεωργούντζου Παν.** Γεώργιος Δ. Σουμελίδης (νεκρολογία). » 275—276
**Ληφθέντα βιβλία καὶ περιοδικά** . . . . . » 276
**Συμπληρωματικὸς πίναξ συνδρομητῶν** . . . . . » 277—278
**Πίναξ κυρίων ὀνομάτων καὶ λέξεων** . . . . . » 279—288
**Πίναξ περιεχομένων ὀγδόου τόμου** . . . . . » 289—290

---

## ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Ἐν σελ. 300 τοῦ προηγουμένου τόμου (ἔτ. 7ον, τεῦχ. Β' 1955), ἐν τῷ στίχῳ 5 τοῦ ἐπιγράμματος ἀντὶ τοῦ «ἔνθα περ θυμόν . . . » γραπτέον «*ἔνθα γε θυμόν . . .*».

Ἐκ τοῦ παρόντος τόμου :

Ἐν σελ. 152 εἰς II 6 ἀντὶ $\alpha_2$=1 γραπτ. $\alpha_1$=*1*.

Ἐν σελ. 157, στ. 2 (ἐκ τῶν κάτω) ἀντὶ δ—2 γραπτ. *δ=2*.

Ἐν σελ. 192, στ. 2 (ἐκ τῶν κάτω) ἀντὶ Συμπ. 199 d γραπτ. *Συμπ. 191 d*.

Ἐν σελ. 201, στ. 3 (ἐκ τῶν κάτω) ἀντὶ χαρακτηριστὰς γραπτ. *χαρακτηριστικάς*.

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

*«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν*
*ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».*
*Πλάτωνος Πολιτεία 450Β*

ΕΤΟΣ Θ' 1957

ΤΕΥΧΟΣ Α'

17

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1957

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Θ' 1957
ΤΕΥΧΟΣ Α'
17

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1957

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ (*)

# ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΟΤΙ ΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΩΣ ΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΤΡΩΝ(1)

Α'. Τὸ β' θεώρημα τοῦ XII βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, ἦτο ἤδη γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμάσαντα περὶ τὸ 430 π.Χ), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων (2). Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, τὸ ἀπαντῶν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ στηρίζεται εἰς τὸ Χ, 1 θεώρημα τῶν Στοιχείων, ὅπερ ἐξ ἄλλου στηρίζεται εἰς τὸν ὁρισμὸν V 4 τῶν Στοιχείων. Τὸ Χ. 1 θεώρημα εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὀνομαζόμενον «εἰδικὸν κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν $\left(\alpha_v \leqslant \frac{1}{2}\alpha_{v-1}\right)$» ὁ δὲ ὁρισμὸς V, 4 «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν», διατυποῦται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (τετραγωνισμὸς παραβολῆς), «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾗ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου». Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ $K_1$, $K_2$ ἔχοντες ἀντιστοίχως διαμέτρους τὰς ΒΔ, ΖΘ. Λέγω ὅτι

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}. \qquad (1)$$

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma} \qquad (2)$$

ἔνθα $\Sigma$ ἐπιφάνεια $\leq K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$$

ἔνθα $\Sigma < K_2$, καὶ ἔστω $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, ὅπου ε ὁσονδήποτε μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον $K_2$ ἐγγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον, ... καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην ἐγγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων τῶν μεταξὺ πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρό-

* *Evangelos Stamatis,* Ueber den euklidischen Satz, Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

1) Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 24 Νοεμβρίου 1955 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

2) *Εὐδήμου* τοῦ *Ῥοδίου* καὶ *Ἀλεξάνδρου* τοῦ *Ἀφροδισιέως* μαρτυρίαι, ἀπαντώμεναι εἰς τὰ σχόλια τῶν Φυσικῶν Η' τοῦ *Ἀριστοτέλους* ὑπὸ *Σιμπλικίου*. Ἔκδοσις τῆς Πρωσσ. Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου καὶ ἐν Pauly-Wissowa, Real-Enzyclopaedie der classidchen Altertums-Wissenschaften (VIII B, XVI Halbband, Sp. 1787), unter Hippokrates von Chios.

τερον τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ, 1 τῶν Στοιχείων. [Ἀκολουθεῖ ἡ ἀπόδειξις τούτου]. Ἔστω ὅτι τὸ πολύγωνον, μετὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ ὁποίου τὰ ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ ε, εἶναι τὸ $\Pi_2$.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma + \varepsilon \qquad (3)$$

καὶ ἄθροισμα κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$. (4)

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma. \qquad (5)$$

Εἰς τὸν κύκλον $K_1$ ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ $\Pi_2$, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $\Pi_1$. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} \qquad (6)$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 < K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη $\Pi_2 > \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, (α), ἔνθα Μ ἐπιφάνεια $< K_1$.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ (7)

ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἐκ τῆς (7) ἀνάπαλιν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$. (8)

Τῶν $\Sigma$, $K_1$, $K_2$ λαμβάνει τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Τ,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \qquad (9)$$

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν $\Sigma > K_2$ εἶναι ἄρα καὶ $K_1 > T$, (V, 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$. Ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἰς τὴν (α) ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$ : ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ $K_1$. Ὅθεν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\Sigma \leqslant K_2$ Εἶναι ἄρα $\Sigma = K_2$ καὶ συνεπῶς $\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta_2}$.

Β' Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, ὅπως καὶ τοῦ πρώτου διὰ συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων ὡς ἑξῆς:

Ὑπετέθη $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma$ ἐπιφάνεια $> K_2$, ὥστε $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ὅπου ε ὁσονδήποτε μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον $K_2$ περιγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην περιγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ κύκλου $K_2$ ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου τινὸς νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε. [Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ, 1 τῶν Στοιχείων καὶ τὸ ἀνευρίσκομεν ἐφαρμοζόμενον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ α' θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις» ἔνθα ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶς κύκλος ἰσοῦται πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ἄλλη δὲ πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ].

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon, \qquad (1)$$

καὶ διαφορὰ κύκλου $K_2$ ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου $< \varepsilon$. (2)

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 < \Sigma, \qquad (3)$$

ἂν καλέσωμεν $\Pi_2$ τὸ τελευταῖον πολύγωνον τὸ περιγραφὲν εἰς τὸν κύκλον $K_2$.

Εἰς τὸν κύκλον $K_1$ περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ $\Pi_2$ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $\Pi_1$. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{\Theta Z^2}$. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_1$.

## ZUSAMMENFASSUNG

Der euklidische Beweis, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern, lautet wie folgt: Gegeben zwei Kreise $K_1$, $K_2$, mit den Durchmessern $B\Delta$ bzw. $Z\Theta$. Ich behaupte $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{K_2}$, (1). Wenn die Beziehung (1) nicht gilt, so muss $\frac{B\Delta^2}{Z\Delta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma$ eine Fläche $\lesseqgtr K_2$ ist.

I. Es sei erstens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (2), $\Sigma < K_2$, und $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, wobei $\varepsilon$ beliebig klein ist. Im Kreise $K_2$ schreiben wir ein Viereck, ein Achteck ... ein n eck ein, bis der Unterschied zwischen einem Vieleck und dem Kreise $K_2$ kleiner als $\varepsilon$ wird, (X, 1). Es sei dies das Vieleck $\Pi_2$. Wir haben also die Beziehungen

$$K_2 = \Sigma + \varepsilon, \tag{3}$$

Summe der Kreisabschnitte zwischen dem Kreis $K_2$ und Vieleck $\Pi_2 < \varepsilon$. (4)

Ziehen wir (4) von (3) ab, so bekommen wir

$$\Pi_2 > \Sigma. \tag{5}$$

Im Kreise $K_1$ schreiben wir dem Vieleck $\Pi_2$ ein ähnliches Vieleck $\Pi_1$ ein. Nach Euklid XII, 1 ist

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}. \tag{6}$$

Aus (2) und (6) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \; \frac{K_1}{\Sigma}$. (7)

Weil $\Pi_1 < K_1$ so ist auch $\Pi_2 < \Sigma$, (V 14). Das ist aber wegen (5), unmöglich. Also es gilt nicht $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma < K_1$ ist. Derselbe Beweis, dass $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$ : eine Fläche kleiner als $K_1$ nicht gilt. (8)

II. Es sei zweitens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (9), wobei $\Sigma > K_2$ ist.

Aus (9) ist $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$. (10).

Zwischen $\Sigma$, $K_1$, $K_2$, finden wir die vierte Proportionale, es sei T,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \tag{11}$$

Weil $\Sigma > K_2$, so ist auch $K_1 > T$, (V, 14) Aus (10) und (11) haben wir $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$, und ist $T < K_1$. Das aber ist, wegen (8) unmöglich. Weil die Beziehung $\Sigma \lesseqgtr K_2$ nicht gilt, so ist $\Sigma = K_2$ und die Behauptung bewiesen.

E. Stamatis, gestützt auf das von Archimedes in seiner Kreismessung 1 angewandte Verfahren, teilt folgenden Beweis für den 2. Teil des euklidischen Satzes mit:

Es ist angenommen $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (1) $\Sigma > K_2$, $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, wobei $\varepsilon$ beliebig klein ist.

Im Kreise $K_2$ umschreiben wir stets Vielecke bis der Unterschied zwischen einem Vieleck und dem Kreise $K_2$ kleiner als $\varepsilon$ wird, (X, 1 und Kreismessung von Archimedes 1). Es sei dies das Vieleck $\Pi_2$. Wir haben also die Beziehungen

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \qquad (2)$$

Summe der Abschnitte zwischen dem Vieleck $\Pi_2$ und dem Kreise $K_2$ $< \varepsilon$, (3)

Durch Addition von (3) und (2) bekommen wir $\Pi_2 < \Sigma$. (4)

Dem Kreise $K_1$ umschreiben wir ein dem Vieleck $\Pi_2$ ähnliches Vieleck, es sei $\Pi_1$. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (5)

Aus (1) un (5) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_2$ ist.

Weil nun $\Pi_1 > K_1$, so ist auch $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Dies ist aber wegen (4) unmöglich. Derselbe Beweis, dass $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_1$ nicht gilt. Es bleibt also $\Sigma = K_2$.

---

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ(*)

# ΕΠΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ (1)

## Α΄

Εἰς τὸν ὁμώνυμον πλατωνικὸν διάλογον ὁ Θεαίτητος ἐρωτώμενος ὑπὸ τοῦ Σωκράτους λέγει :

«*Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο...*» (147d - 148b).

Σημειοῦμεν, ὅτι, ὡς συνάγεται ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ χωρίου, ἡ λέξις «δύναμις» σημαίνει ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν: τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ. Π.χ. ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι δύναμις τοῦ α, διότι αὕτη πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της, ΔΥΝΑΤΑΙ, τὸ τετράγωνον α.

Κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ ἀνωτέρω ἀναγραφομένου μέρους τοῦ χωρίου προβάλλουσι τὰ ἑξῆς δύο ἐρωτήματα :

Πρῶτον, κατὰ ποῖον τρόπον ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... ἕως καὶ $\sqrt{17}$ καὶ

---

* *Evangelos Stamatis*, Ueber die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon.

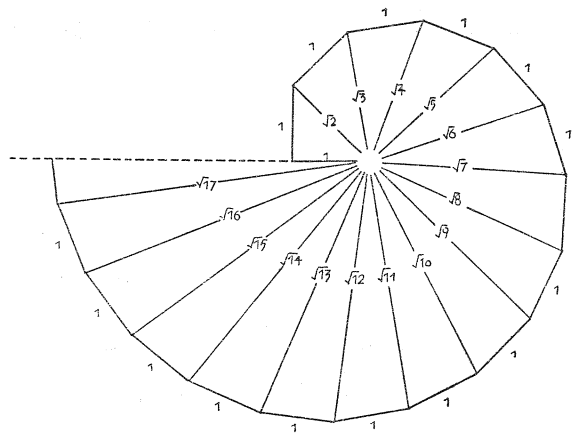
1) Ἀνακοίνωσις γενομένη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 12 Ἰανουαρίου 1956 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασιλ. Αἰγινήτου.

Δεύτερον, διατὶ μετὰ τὴν $\sqrt{17}$ ἐσταμάτησεν.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν θ' ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ τὸ δεύτερον ἐρώτημα, ἀφοῦ μνημονεύσωμεν ἐν συνόψει τὰς ἀπαντήσεις ἐπὶ τῶν δύο ἐρωτημάτων ἐνίων ἐκ τῶν νεωτέρων διακεκριμένων ἐρευνητῶν.

Ὁ Zeuthen [1] ὑποθέτει, ὅτι ὁ Θεόδωρος [2] ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... $\sqrt{17}$ διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ ὅτι, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις διὰ τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{18}$ εἶναι εὔκολος, ἐπειδὴ αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $3\sqrt{2}$, γνωστὴν ἤδη πολὺ πρὸ τοῦ Θεοδώρου, τοὐναντίον ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν $\sqrt{19}$ εἶναι λίαν ἐπίπονος, διότι ἡ $\sqrt{19}$ ἔχει ἐξαψήφιον περίοδον. Ὅθεν λόγῳ τοῦ ἐπιπόνου τῆς ἀποδείξεως διὰ τὴν $\sqrt{19}$ ὁ Θεόδωρος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$.

Ὁ Σπυρίδων Μωραΐτης [3] ὑποθέτει, ὅτι ὁ Θεόδωρος προέβη εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν: Κατεσκεύασεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἑκάστη




Σχ. 1.

Κατὰ Σπ. Μωραΐτην. Τὴν γνώμην τούτου ὑποστηρίζει ὁ J. H. Anderhub ἐν 1) Wochenschrift für klassische Philologie, 1918, No 49-50, p. 598-599 καὶ 2) Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, Gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co. A. G. S. 161 f. Wiesbaden 1941. Μνημονεύει δὲ μεταξὺ ἄλλων καὶ ὁ Jean Bousquet ἐν Feuilles de Delphes, Tom. II. Le Tresor de Cyréne, p. 102 - 104, Paris 1952. Ἴδε καὶ J. E. Hofmann: Geschichte der Mathematik I, Samm. Göschen, Bd. 226 S. 26 ff, 1953 καὶ Siegfried Heller: Geometrischer Irrationalitätsbeweis der Alten Griechen.

τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα. Ἡ ὑποτείνουσα τούτου εἶναι $\sqrt{2}$. Εἰς τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὕψωσε κάθετον ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἤνωσε τὸ ἐλεύθερον ἄκρον ταύτης μὲ τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης καθέτου

---

1) *H. G. Zeuthen*, Oversigt Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1915, S. 348 ff. (Ἐκ τῆς μνημονευομένης πραγματείας τοῦ B. L. van der Waerden).

2) Βλ. ἐν *Pauly - Wissowa*, R. E. 5. Band 10. Halbband, Sp. 1812 - 1825 (unter Theodoros).

3) *Σπυρ. Μωραΐτου*, Πλάτων: τόμος 3ος Πλάτωνος Θεαίτητος, σελ. 188, Ἀθῆναι 1905.

(σχ. 1). Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ δευτέρου τριγώνου εἶναι $\sqrt{3}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κατεσκεύασε 16 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ 16ου τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{17}$.

Ὁ B. L. van der Waerden (1) παρέχει λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ στηριζομένην εἰς τὰ εὐκλείδεια θεωρήματα II, 6 καὶ X, 2 καὶ ἐπάγεται: Ἐὰν ὁ Θεόδωρος δὲν ἤθελε νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν διδασκαλίαν του πέρα τοῦ κεκανονισμένου χρόνου ἔπραξε καλῶς νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν $\sqrt{17}$. Ἴσως νὰ ἠμποδίσθη οὗτος νὰ προχωρήσῃ καὶ ἐξ ἐξωτερικοῦ τινος αἰτίου.

Θεωροῦμεν λίαν πιθανὸν ὅτι ὁ Θεόδωρος ποιητικῇ ἀδείᾳ τοῦ Πλάτωνος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ καὶ δὲν ἐπροχώρησε πέρα ταύτης. Φαίνεται ὅτι ὁ Πλάτων ἐν προκειμένῳ ὑπαινίσσεται τὴν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ δὴ καὶ τὴν σχέσιν τὴν ὁποίαν ἔχει οὗτος πρὸς τὴν κατασκευὴν τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος, περὶ ἧς γίνεται λόγος εἰς τὸν Τίμαιον κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς συστάσεως ὑπὸ τοῦ Θεοῦ τῆς ψυχῆς τοῦ Κόσμου (Τίμ. 35). Τὴν γνώμην ἡμῶν ταύτην στηρίζομεν εἰς δύο χωρία· τὸ ἕν τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ τὸ ἕτερον τοῦ Πλουτάρχου.

I. Εἰς τὰ Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς (2) του ὁ Ἰάμβλιχος ἀναφέρει:

*«Οἱ μὲν γὰρ πρὸ αὐτοῦ (σημ. ἐννοεῖ τὸν 4) τετράγωνοι πλείονας ἔχουσι τὰς περιμέτρους τῶν ἐμβαδῶν, οἱ δὲ μετ' αὐτὸν ἀντικειμένως ἐλάττονας, οὗτος δὲ μονώτατος ἴσας. διὰ τοῦτο φαίνεται καὶ Πλάτων ἐν τῷ Θεαιτήτῳ μέχρι αὐτοῦ προελθὼν παύεσθαί πως ἐν τῇ ἑπτακαιδεκάποδι, πρὸς ἔμφασιν τοῦ κατὰ τὸν ἑπτακαίδεκα ἰδιώματος καὶ ἰσότητος τινος μεθεκτοῦ».*

II. Εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος ὁ Πλούταρχος (3) γράφει:

*«Ἑβδόμῃ ἐπὶ δέκα (σημ. δηλαδὴ τὴν 17ην τοῦ μηνὸς) τὴν Ὀσίριδος γενέσθαι τελευτὴν Αἰγύπτιοι μυθολογοῦσιν, ἐν ᾗ μάλιστα γίνεται πληρουμένη κατάδηλος ἡ πανσέληνος. διὸ καὶ τὴν ἡμέραν ταύτην ἀντίφραξιν οἱ Πυθαγόρειοι καλοῦσι, καὶ ὅλως τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἀφοσιοῦνται. τοῦ γὰρ ἑξκαίδεκα τετραγώνου καὶ τοῦ ὀκτωκαίδεκα ἑτερομήκους, οἷς μόνοις ἀριθμῶν ἐπιπέδων συμβέβηκε τὰς περιμέτρους ἴσας ἔχειν τοῖς περιεχομένοις ὑπ' αὐτῶν χωρίοις, μέσος ὁ ἑπτακαίδεκα παρεμπίπτων, ἀντιφράσσει καὶ διαζεύγνυσι ἀπ' ἀλλήλων, καὶ διαιρεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον εἰς ἄνισα διαστήματα τεμνόμενος».*

Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον ὁ Πλάτων ἐσταμάτησεν εἰς τὴν $\sqrt{17}$, διότι ὁ 17 εἶναι ἐγγὺς πρὸς τὸν 16. Μόνον δὲ τοῦ τετραγώνου σχήματος τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς 4 τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος (4) ἐκφράζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 16. Εἰς τὴν διατύπωσιν ταύτην τοῦ Ἰαμβλίχου δύναται ν' ἀντιταχθῇ ὅτι καὶ ὁ 15 εἶναι ἐγγὺς πρὸς τὸν 16 ὅσον καὶ ὁ 17 καὶ συνεπῶς ὁ Πλάτων θὰ ἠδύνατο κάλλιστα νὰ σταματήσῃ εἰς τὸν 15. Ἐκ τοῦ χωρίου ὅμως τοῦ Πλουτάρχου φαίνεται, διατὶ ὁ 17 προτιμᾶται τοῦ 15.

---

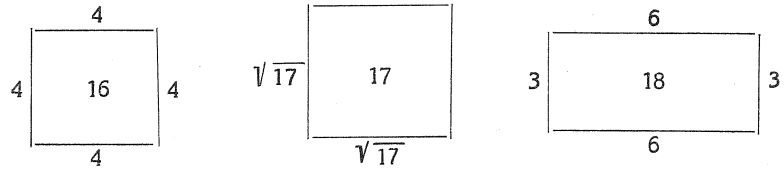
1) *B. L. van der Waerden*, Die Arithmetik der Pythagoreer. II. Die Theorie des Irrationalen. *Mathematische Annalen*, Band, 120. 5./6. (Schluss-) Heft), 1949 Springer-Verlag, Berlin. Goettingen. Heidelberg.

2) *Iamblichi, Theologoumena arithmeticae*, ed. Victorius de Falco, Teubner 1922, 10, σ. 11 (καὶ 29).

3) Πλουτάρχου, Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος 367. (ἔκδ. *G. Vernardakis*, vol. II. σ. 514. Teubner).

4) Ἀνώνυμος σχολιαστὴς τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος τοῦ 2ου αἰῶνος μ. X., κατὰ τὸν Anderhub (Joco-Seria κλπ. σ. 183-184), μνημονεύει τοῦ ἀριθμοῦ 16 καὶ τοῦ ἐπογδόου λόγου διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ συναφοῦς χωρίου (Papyrus 9782, bearb. von H. Diels, W. Schubart, Berliner Klassikertexte II, Berlin, 1905. 25, 37).

Κατὰ τὸν Πλούταρχον οἱ Πυθαγόρειοι θεωροῦσιν ἱερὸν τὸν ἀριθμὸν 17 διότι ἐκ τῶν τετραγώνων σχημάτων μόνον τὸ ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς 4 ἔχει περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 16, ἐνῷ




Σχ. 2.

ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων μόνον τὸ ἔχον διαστάσεις 3×6 ἔχει περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν ἐκφραζόμενα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 18. Ὁ ἀριθμὸς 17 εὑρισκόμενος μεταξὺ 16 καὶ 18 ὑπογραμμίζει τὴν ἰσότητα ταύτην καὶ τεμνόμενος εἰς δύο ἄνισα μέρη ἀποτελεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον τῆς μουσικῆς κλίμακος.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον (36 κἑ.) εἶναι

$$6 : 8 = 9 : 12$$

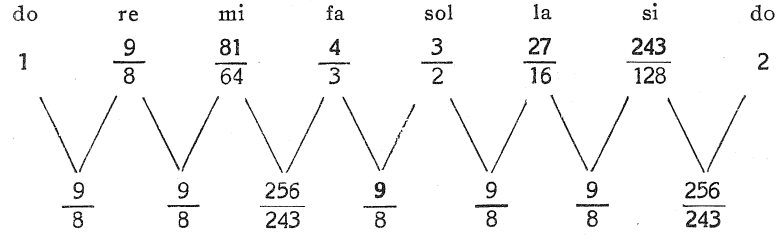
ὑπάτη 6, μέση 8 παραμέση 9, νήτη 12.

Αὕτη εἶναι ἡ βάσις τῆς κατασκευῆς τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος. Ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀναλογίας ταύτης $\left(8 = \frac{2.6.12}{6+12}\right)$, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ὅρων τούτων. Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἁρμονικοῦ καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς μουσικῆς ταύτης ἀναλογίας εἶναι 17. Ἐὰν πρὸς ἁπλούστευσιν θεωρήσωμεν ὡς ἄκρους ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2 αὕτη θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2.$$

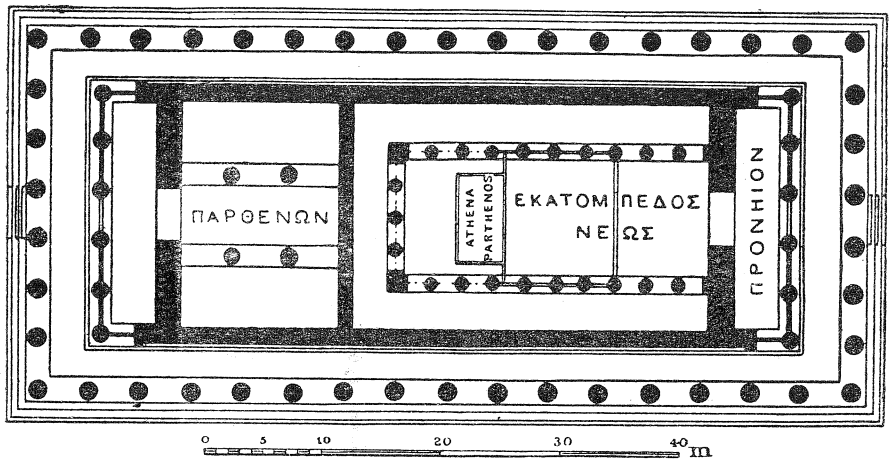
do fa sol do.

Ἐὰν λάβωμεν τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ 1 καὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰ $\frac{9}{8}$, κατόπιν δὲ λάβωμεν τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ $\frac{3}{2}$ καὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰ $\frac{9}{8}$, θὰ ἔχωμεν τὴν πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα (Τίμ. 36). Ἀναγράφομεν κατωτέρω τοὺς 8 φθόγγους καὶ τὰ 7 διαστήματα (ἤτοι τὸν λόγον ἑκάστου φθόγγου πρὸς τὸν προηγούμενόν του). Ἄνωθεν ἑκάστου φθόγγου ἀναγράφωμεν τὴν ἰταλικὴν ὀνομασίαν.




Ὡς γνωστόν, ὁ λόγος $\frac{9}{8}$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, καλεῖται ἐπόγδοος λόγος ὑπὸ τῶν ἀρχαίων. Σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ κύβος, ἓν ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων

τῶν ἐγγραφομένων εἰς σφαῖραν, δι' οὗ παρίστατο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων (1) ἡ Γῆ, ἔχει 6 ἕδρας 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς, ἤτοι τοὺς ἄκρους ὅρους καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (2) 6 : 8=9 : 12. Ὑπομιμνήσκομεν προσέτι ὅτι οἱ




Σχ. 3. *Σχεδιάγραμμα τῆς κατόψεως τοῦ Παρθενῶνος.*
(Ἐκ τοῦ βιβλίου: *Walther Judeich*, Topographie von Athen, σελ. 252 Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1931).

κίονες τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 8, δηλαδὴ τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ 6 καὶ 12 καὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἶναι 17, δηλ. τὸ ἄθροισμα τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8 καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12 (3) (σχ. 3).

Μνημονεύομεν τέλος ὅτι 1) εἰς τὸ δακτυλικὸν ἑξάμετρον τῶν ὁμηρικῶν ἐπῶν ἀπαντῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν 17 συλλαβῶν, ὡς, π.χ.

| Ἄν | δρα | μοι | ἔν | νε | πε | μοῦ | σα | πο | λύ | τρο | πον | δς | μά | λα | πολ | λὰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | ⏑ | ⏑ | — | ⏑ | ⏑ | — | ⏑ | ⏑ | — | ⏑ | ⏑ | — | ⏑ | ⏑ | — | — |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |

καὶ 3) εἰς τὰ Πτολεμαίου (4) μουσικὰ ἀναγιγνώσκομεν: Ἔστι δὲ ἡ εὕρεσις

---

1) *Θεόφραστος - Ἀέτιος* : *Diels* Frag. d. Vors. I, 44 [32], 15, Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, Berlin-Grunewald, 1951.

2) *Νικομάχου Γερασηνοῦ*, Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή, σ. 135-6 (ἔκδ. R. Hoche, Teubner, 1866).

3) Εἰς τὸν Σελινοῦντα τῆς Σικελίας, ἔνθα ἡ ἐπιρροὴ τῶν Πυθαγορείων θεωρεῖται ὅτι ἦτο μεγάλη, εἶχεν ἀνεγερθῆ ναός, χρονολογούμενος εἰς τοὺς πρὸ τῆς ἀνεγέρσεως τοῦ περικλείου Παρθενῶνος χρόνους, ἔχων εἰς τὴν μικρὰν πλευρὰν 8 κίονας καὶ εἰς τὴν μεγάλην 17. *Willian B. Dinsmoor*, The architecture of ancien Greece, Chron. list, ed. B. Batsford Ltd, London - N. York - Toronto - Sydney, 1950.

4) Scriptores musici Graeci, IX. Excerpta Neapolitana, § 19. (σ. 416 Teubner, 1895).

τῶν τόνων καὶ τῶν ἡμιτονίων καὶ τῶν διέσεων κατὰ τὸν Ἐρατοσθένην

8 τόνος 9

καὶ ταῦτα δὶς

16 ἡμιτ. 17 ἡμιτ. 18

τόνος

καὶ μεταξὺ εὑρίσκεται ἀριθμὸς ὁ 17.

Ὅθεν θεωροῦμεν λίαν πιθανὸν ὅτι ὁ Πλάτων, γράφων, ὅτι ὁ Θεόδωρος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ ὑπαινίσσεται τὴν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ τὴν σημασίαν, ἣν ἔχει ὁ ἐπόγδοος λόγος, $\left(\frac{9}{8}\right)$, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 17, εἰς τὴν κατακατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος.

## ZUSAMMENFASSUNG

Im Theaetetus (147d) schreibt Platon, der Mathematiker Theodoros habe die Irrationalität für $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... bis $\sqrt{17}$ bewiesen. Platon gibt keine Andeutung, wie der Beweis geführt wurde und warum Theodoros gerade bei $\sqrt{17}$ aufgehört habe. Verschiedene Erklärungen dafür haben unter anderen Zeuthen, Sp. Moraitis, B. L. van der Waerden gegeben.

E. Stamatis gesüttzt auf zwei Stellen von Iamblichos und Plutarch teilt auf die Frage, warum Theodoros sich bei $\sqrt{17}$ aufhielt, eine neue Erklärung mit. Er behauptet, dass Platon nur aus poetischer Freiheit den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören liess, wahrscheinlich, um die Heiligkeit, die für die Pythagoreer die Zahl 17 hat und die Bedeutung, die ihre ungleichen Teile 9 und 8 $\left(\text{d. h. } \frac{9}{8}\right)$ für die Tonleiter haben, anzudeuten.

Nach Iamblichos ist das Quadrat $4\times4$ das einzige, dessen Umfang und Inhalt sich durch dieselbe Zahl 16 ausdrücken lassen. Die Zahl 17 liegt in der Nähe der Zahl 16, und deshalb scheint es, dass Platon im Theaetetus bei $\sqrt{17}$ aufhörte. Nach Plutarch ist die Zahl 17 für die Pythagoreer heilig und diese Zahl liegt zwischen 16 und 18. Umfang und Inhalt 16 hat nur ein einziges Quadrat, $(4\times4)$, und Umfang und Inhalt 18 hat nur ein einziges rechteckiges Parallelogramm $(3\times6)$. Ausserdem stammt das Verhältnis $\frac{9}{8}$ (was für die Tonleiter von Bedeutung ist) von den ungleichen Teilen der Zahl 17. Schliesslich bemerkt E. Stamatis, dass die Zahl 17 die Summe des arithmetischen Mittels und des harmonischen Mittels der Zahlen 6 und 12 ist, die die äusseren Glieder der musikalishen Proportion $6 : 8 = 9 : 12$ sind und von Platon im Timaeus erwähnt werden. Darüber hinaus ist die Zahl der Säulen der Schmalseite des Parthenon 8, die der Längsseite 17. Ferner begegnen wir der Zahl 17 im daktylischen Hexameter bei Homer und in den Μουσικὰ des Ptolemaeus.

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΕΠΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ, ΜΕΡΟΣ ΙΙ(*)

(Μνημονεύεται ἐν περιλήψει ἡ προηγουμένη ἀνακοίνωσις τῆς 12-1-1956).

Β) Ἐκ τῶν κατωτέρω παρατιθεμένων ὁμηρικῶν στίχων καταφαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμός 17 ἔχει συμβολικὸν νόημα καὶ εἰς τὸν Ὅμηρον. Φαίνεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἀποτελεῖ παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἀπὸ ἀρχαιοτάτων χρόνων τέλειον χρονικὸν διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου συντελεῖται ἱεροπρεπὴς ἢ ἀξιόλογός τις πρᾶξις. Οὗτος εἶναι συντεθειμένος ἐκ δύο ἐξαιρετικῆς σημασίας ἀριθμῶν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ΔΕΚΑ θεωρούμενον τέλειον καὶ ἀπὸ τὸν ἱερὸν ἀριθμὸν ΕΠΤΑ (1). Οὕτω κατὰ τὴν ῥαψῳδίαν η τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσεύς, ἀφοῦ περιεπλανήθη ἐπὶ ἐννέα ἡμέρας ἔφθασε τὴν ΔΕΚΑΤΗΝ ἡμέραν εἰς τὴν νῆσον Ὠγυγίην ἔνθα παρέμεινεν ΕΠΤΑ ἔτη:

η 253 ἐννῆμαρ φερόμην· δεκάτῃ δὲ μοι νυκτὶ μελαίνῃ
νῆσον ἐς Ὠγυγίην πέλασαν θεοί, ἔνθα Καλυψὼ
η 259 ἔνθα μὲν ἑπτάετες μένον ἔμπεδον, εἵματα δ' αἰεί...

Κατὰ τὴν ῥαψῳδίαν κ τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσεύς, ἀφοῦ ἔπλεεν ἐννέα νύκτας καὶ ἡμέρας εἶδε κατὰ τὴν ΔΕΚΑΤΗΝ τὴν πατρίδα του καὶ μετὰ πλοῦν ἓξ ἡμερῶν ἔφθασεν τὴν ΕΒΔΟΜΗΝ ἡμέραν εἰς τὴν πόλιν τοῦ Λάμου.

κ 28 Ἐννῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ,
τῇ δεκάτῃ δ' ἤδη ἀνεφαίνετο πατρὶς ἄρουρα, . . .
κ 80 Ἑξῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ·
ἑβδομάτῃ δ' ἱκόμεσθα Λάμου αἰπὺ πτολίεθρον, . . .

Κατὰ τὴν ῥαψῳδίαν ε τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσσεὺς ἀποπλεύσας ἀπὸ τὴν νῆσον τῆς Καλυψοῦς συνεχίζει τὸν πλοῦν ἐπὶ δεκαεπτὰ ἡμέρας·

ε 278 ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μὲν πλέεν ἤματα ποντοπορεύων,
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἐφάνη ὄρεα σκιόεντα . . .

Καὶ εἰς τὸ η 267 τῆς Ὀδυσσείας ἀπαντῶμεν τοὺς αὐτοὺς στίχους.

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν ῥαψῳδίαν ω τῆς Ὀδυσσείας καταφαίνεται ἡ ἱερότης τοῦ ἀριθμοῦ δεκαεπτά. Ὁ Ὅμηρος παριστᾷ αὐτόθι διαλεγομένας τὰς ψυχὰς τοῦ

---

* Evangelos Stamatis, Ueber die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon, Teil II. Mitteilung in der Akademie der Wissenshaften zu Athen, vorgelegt am 31-1-1957. [Ἀνακοίνωσις ἐν τῇ Ἀκαδ. Ἀθηνῶν γενομένη τῇ 31.1.57 διὰ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου].

1) Περὶ τοῦ ἀριθμοῦ ἑπτὰ ἴδε 1) Μιχ. Στεφανίδου, Ἀστρολογικὸν σημείωμα, Ἡμερολόγιον Μεγάλης Ἑλλάδος 1926, σ. 65. 2) Ἰωάννου Ε. Καλλιτσουνάκι, Ἑπταδικαὶ ἔρευναι. 3) W. H. Roscher, Die Sieben- und neunzahl im Kultus und Mythus der Griechen. Abh. d. Königl. Sächs. Gesel. der Wissens., B. 24, 1—126, 1904.

Ἀγαμέμνονος καὶ τοῦ Ἀχιλλέως. Ἡ ψυχὴ τοῦ Ἀγαμέμνονος πληροφορεῖ τὴν ψυχὴν τοῦ Ἀχιλλέως περὶ τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας ἀπέδωκαν εἰς τὸν νεκρὸν τοῦ Ἀχιλλέως ἐν Τροίᾳ θρηνήσαντες αὐτὸν ἐπὶ ΔΕΚΑΕΠΤΑ ἡμέρας·

ω 63 Ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μέν σε ὁμῶς νύκτας τε καὶ ἦμαρ
κλαίομεν ἀθάνατοί τε θνητοί τ' ἄνθρωποι·
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἔδομεν πυρί, πολλὰ δὲ σ' ἀμφὶ . . .

Ὅθεν ἐνισχύεται ἔτι περισσότερον ἡ ἄποψις ἡμῶν ἡ ἐκτεθεῖσα κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς Ἀκαδημίας τῆς 12-1-1956, καθ' ἣν ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 17 ὑπαινίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

## ZUSAMMENFASSUNG

(Einführend wird die vorige Mitteilung vom 12-1-56 erwähnt).

B'.Aus den unten angeführten homerischen Versen ist ersichtlich, dass die Zahl 17 auch bei Homer einen Symbolischen Sinn hat. Allem Anschein nach stellt die Zahl 17 bei den Griechen seit uralten Zeiten einen vollkommenen Zeitabschnitt dar, während dessen sich eine ehrwürdige oder ansehnliche Tat vollzieht. Sie ist aus zwei Zahlen von grosser Bedeutung zusammengesetzt : aus der Zahl zehn, die man als vollkommene Zahl betrachtete und aus der heiligen Zahl sieben.

Einige Beispiele aus der Odyssee.

Odysseus, nachdem er neun Tage umherschweifte, ist am ZEHNTEN Tag in der Insel Ogygia gekommen, wo er SIEBEN Jahre verweilte.

η 253 trieb neun Tage herum. In der zehnten der schrecklichen Nächte
führten die Himmlischen mich gen Ogygia, wo Kalypso . . .
η 259 Sieben Jahre blieb ich bei ihr und netzte mit Tränen . . .
κ 28 Schon durchsegelten wir neun Tage und Nächte die Wogen ;
und in der zehnten Nacht erschien uns das heimische Ufer, . . .
κ 80 Als wir nun sechs Tage nnd Nächte das Meer durchrundert,
landeten wir am siebten bei der Festungsstadt von Lamos, . . .
ε 278 Siebzehn Tage befuhr er die ungeheueren Gewässer,
am achtzehnten erschienen die fernen, schattigen Berge . . .
η 267 Dieselbe Verse, wie in ε 278.

Im Gesang ω stellt Homer die Seelen von Agamemnon und Achilleus im Gespräch dar. Die Seele des Agamemnon erzählt der Seele des Achilleus über die Ehrungen, die die Griechen damals dem Toten Achilleus in Troja erwiesen, in dem sie um ihn SIEBZEHN Tage getrauert haben :

ω 63 Siebzehn Tage und Nächte beweinten wir unaufhörlich
deinen Tod, der Unsterblichen Chor und die sterblichen Menschen,
am achtzehnten verbrannten wir dich und schlachteten ringsum . . .

Infolgedessen wird die Meinung des Verfassers, dass Platon den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören liess, um die Heiligkeit der Zahl 17 anzudeuten, noch mehr erhärtet.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

16 =

ΕΤΟΣ Ι΄ 1958
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
19/20

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1958

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΙ' ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ ΠΑΡΑ ΤΟΙΣ ΑΡΧΑΙΟΙΣ (*)

## Α'.

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις, καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος $x$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω $x_0$, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2\ldots\ldots$ κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν $x_1$, $x_2$, $x_3\ldots\ldots$ Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν $\xi$, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi=\varphi(\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως (1). Ἀναφέρομεν παραδείγματά τινα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης καὶ κατόπιν θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἦτο γνωστὴ κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου.

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=2$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{2}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\dfrac{x+2}{x+1}$, (1). Πρὸς ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ $x$ ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως, ἔστω $x_0=1$, καὶ θέτομεν ταύτην εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέλος λαμβάνομεν 1, εἰς δὲ τὸ δεύτερον $\frac{3}{2}$. Τὴν τιμὴν $\frac{3}{2}$ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ α' μέλος ἔχομεν $\frac{3}{2}$ εἰς δὲ τὸ β' $\frac{7}{5}$. Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

| $x$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{17}{12}$ | $\frac{41}{29}$ | $\frac{99}{70}$ | $\frac{239}{169}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+2}{x+1}$ | 3/2 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{17}{12}$ | $\frac{41}{29}$ | $\frac{99}{70}$ | $\frac{239}{169}$ | $\frac{577}{408}$ |

* Evangelos Stamatis, A few remarks of the succeeding approximation by iteratio by the Ancient Greeks.

Ἀνακοίνωσις γενομένη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

1) R. Courant, Vorlesungen ü. Dif.-und Integralrechnung, σ. 315, Springer Verlag, Berlin - Döttingen - Heidelberg, 1955. — R. Zurmühl, Praktische Mathematik für Ingenieure σ. 22 ff., Springer Verlag, Berlin κλπ. 1953.—G. Runge-H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Springer Verlag, Berlin, 1924, unter Iteratio.

Εἶναι δὲ $1<\frac{7}{5}<\frac{41}{29}<\frac{239}{169}<\sqrt{2}<\frac{577}{408}<\frac{99}{70}<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}$.

Ἡ $\sqrt{2}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, (2). Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β' μέλος τῆς (2) ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἐκ τοῦ α' μέλους ἴσης τιμῆς της, τῆς $1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, θὰ ἔχωμεν

$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$. Ἐὰν καὶ πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β' μέλος ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἴσης τιμῆς της ἐκ τῆς (2), θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}.$$ Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὑπολογίζοντες διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ συνεχοῦς ἀπεριορίστου τούτου κλάσματος λαμβάνομεν

$$\sqrt{2}=1,\ \sqrt{2}=\frac{3}{2},\ \sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5},$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \text{κλπ.}$$

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=3$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{3}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\frac{x+3}{x+1}$, (3). Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα λαμβάνοντες αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως $x_0=1$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α' μέλος 1, εἰς δὲ τὸ β' 2. Τὴν τιμὴν 2 θέτομεν εἰς τὴν (3) ἀντὶ τοῦ $x$, ὁπότε λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α' μέλος 2, εἰς δὲ τὸ β' $\frac{5}{3}$. Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

| $x$ | 1 | 2 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{19}{11}$ | $\frac{26}{15}$ | $\frac{71}{41}$ | $\frac{97}{56}$ | $\frac{265}{153}$ | $\frac{362}{209}$ | $\frac{989}{571}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+3}{x+1}$ | 2 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{19}{11}$ | $\frac{26}{15}$ | $\frac{71}{41}$ | $\frac{97}{56}$ | $\frac{265}{153}$ | $\frac{362}{209}$ | $\frac{989}{571}$ | $\frac{1351}{780}$ |

Εἶναι δὲ

$$1<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\frac{989}{571}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<2.$$

Ἡ $\sqrt{3}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$.

Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα διὰ τὴν $\sqrt{2}$ λαμβάνομεν τὴν $\sqrt{3}$ ὡς συνεχὲς ἀπεριόριστον κλάσμα.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\frac{2}{2}}}+\ldots\ \text{κλπ.}$$

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ κλάσματος τούτου, θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{3}=1,\quad \sqrt{3}=1+\frac{2}{2}=2\quad \sqrt{3}=1+\frac{2}{2+\frac{2}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2}}}=\frac{7}{4}\ \text{κλπ.}$$

Β'.

1. Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος (1) εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τὴν σκοποῦσαν τὴν ἑρμηνείαν τῶν μαθηματικῶν ἐκείνων, ἅτινα εἶναι χρήσιμα εἰς τὴν «Πλάτωνος ἀνάγνωσιν», ἀναπτύσσει δι' ὀλίγων καὶ τὴν θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ὁμοίαν διατύπωσιν τῆς θεωρίας ταύτης ἀναγιγνώσκομεν καὶ εἰς τὰ τοῦ Πρόκλου (2) σχόλια εἰς τὴν «Πολιτείαν» τοῦ Πλάτωνος. Παραθέτομεν τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Πρόκλου.

«ΚΓ. Ὅτι αἱ ταῖς ἀρρήτοις διαμέτροις παρακείμεναι ῥηταὶ μονάδι μείζους εἰσὶν ἢ ἐλάττους διπλασίου, διὰ τῶν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι δεικνύ|ουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρά ἐστιν καὶ διάμετρος. Ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἡ μὲν ὡς [πλευρὰ [ἡ δ]ὲ ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο, ἐπείπερ ἡ ὡς διάμετρος μονάδι ἐλάσσων ἡ διπλασία τῆς ὡς πλευρᾶς. Ἔσται οὗτος ἡ μὲν δυοῖν μονάδων, ἡ δὲ τριῶν· καὶ τὰ μὲν ἀπὸ τούτων τῆς μὲν τεσσάρων, τῆς δὲ ἐννέα, ὅπερ ἐστὶν μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον. πάλιν προσκείσθω τῇ μὲν δυοῖν μία διάμετρος ἡ τριῶν, τῇ δὲ τριῶν διαμέτρῳ δὶς ἡ πλευρὰ ταῖν δυοῖν. ἔσται οὖν ἡ μὲν πλευρὰ πέντε τινῶν, ἡ δὲ διάμετρος ἑπτά τινων, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τῆς μὲν κε', τῆς δὲ μθ', μονάδι ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον. ᾗ καὶ Πλάτων εἶπε τὸν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα ἀριθμὸν εἶναι ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν μὲν πεμπάδος δεομένων ἑνός, ἀρρήτων δέ δεομένων δυοῖν, ἐπειδὴ διπλάσιον ἡ διάμετρος δύναται τῆς πλευρᾶς. ἐὰν δὲ λάβωμεν ἁπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων, ἔσονται διπλάσιαι ὄντως, ὧν ἑκάστῃ μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου· οἷον ἡ ἐννέα μετὰ τοῦ μθ' τῆς τοῦ κε' καὶ δ'. διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ». (Σημ. Ὡς γνωστὸν ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου ἐλέγετο ὑπὸ τῶν ἀρχαίων διάμετρος).

Κατὰ τὸν Θέωνα καὶ τὸν Πρόκλον κατασκευάζονται ἐν συνεχείᾳ ἀριθμητικῶς τετράγωνα κατὰ νόμον, ὅστις φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος.

| | Πλευρὰ | Διαγώνιος |
|---|---|---|
| πρώτου τετραγώνου | 1 | 1 |
| δευτέρου » | 1+ 1= 2 | 2. 1+ 1= 3 |
| τρίτου » | 2+ 3= 5 | 2. 2+ 3= 7 |
| τετάρτου » | 5+ 7=12 | 2. 5+ 7=17 |
| πέμπτου » | 12+17=29 | 2.12+17=41 |
| ἕκτου » | 29+41=70 | 2.29+41=99 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ν+1 » | $\alpha_\nu+\delta_\nu=\alpha_{\nu+1}$ | $2.\alpha_\nu+\delta_\nu=\delta_{\nu+1}$, ἐὰν τοῦ |

1) Ἔκδ. E. Hiller, σ. 42—55.

2) Ἔκδ. E. Kroll, II σ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. (Hultsch). Καὶ Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 427—441, Soc. d'éd. Les Belles Lettres, Paris 1950. Καὶ Εὐαγγ. Στάμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία Ἀριθμῶν, σ. 8—18, (Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953).

πρώτου τετραγώνου καλέσωμεν τὴν πλευρὰν $\alpha_1$ καὶ τὴν διαγώνιον $\delta_1$. Εἶναι δὲ

$$1^2=2.1^2-1, \quad 3^2=2.2^2+1, \quad 7^2=2.5^2-1, \quad 17^2=2.12^2+1.$$

Παρέχονται δηλ. διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων $y^2=2x^2\mp1$. Τὴν αὐθαιρεσίαν τῆς θεωρήσεως τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ διαγώνιον ἐπίσης ἴσην πρὸς τὴν μονάδα ὁ Πρόκλος, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, τὴν αἰτιολογεῖ, γράφων· «ἐπεὶ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶ σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρά ἐστιν καὶ διάμετρος». Ὁ Θέων γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται». Καὶ σήμερον, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) προσεγγίσεων ἡ πρώτη τιμὴ προσεγγίσεως λαμβάνεται αὐθαιρέτως. Κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν ὁ ὑπὸ τοῦ Θέωνος καὶ τοῦ Πρόκλου σωθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n, y_n) \quad \text{καὶ} \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n).$$

Ὁ Πρόκλος μνημονεύει καὶ τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου κατασκευῆς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. «Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τῆς ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ στοιχείων γραμμικῶς ἀπ' ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ | εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς [ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ] καὶ τὸ ἀπὸ [ταύ]της [μόνης τετράγωνα δι]πλάσια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ] τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμι[σείας καὶ τῆς] προσληφθείσης». Οὐδεμία ἀμφιβολία γεννᾶται, ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ θεωρήματος II, 10 τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου, τόσον ἐκ τῆς ἀνωτέρω περιγραφῆς τοῦ Πρόκλου, ὅσον καὶ ἐκ τῆς φράσεως «προσλάβῃ δὲ . . . *τὸ ἀπὸ τῆς* . . .». Ἀποκλείεται νὰ εἶναι τὸ II, 6 τῶν «Στοιχείων», διότι ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, *τὸ ὑπὸ τῆς* . . .».

Ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ δὲ τριγωνικοὺς καὶ τετραγωνικοὺς καὶ πενταγωνικοὺς καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ σχήματα λόγους ἔχουσι δυνάμει οἱ ἀριθμοὶ οὕτως καὶ πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους εὕροιμεν ἂν ἐμφανιζομένους τοῖς ἀριθμοῖς». Ἐκ τοῦ χωρίου τούτου καὶ τῆς φράσεως «τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται», τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, συνάγεται, ὅτι ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων διαγωνίων πρὸς τὰς πλευράς, ἤτοι οἱ λόγοι

$$\frac{1}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{7}{5}, \ \frac{17}{12}, \ \frac{41}{29}, \ \frac{99}{70} \quad \text{κλπ.}$$

Ὁ Θέων δὲν μνημονεύει ρητῶς τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{1}<\frac{7}{5}<\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{99}{70}<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}.$$

Θεωρεῖται ὅμως ἀναμφισβήτητον, ὅτι ἡ θεωρία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἀφεώρα κατὰ πρῶτον λόγον εἰς τὴν σχέσιν ταύτην. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ 3ον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις» διατυπώσεως παρομοίας σχέσεως διὰ τὴν $\sqrt{3}$, τῆς $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$,

ὡς καὶ τῶν σχέσεων

$$265^2=3.153^2-2, \quad 1351^2=3.780^2+1, \quad (y^2=3x^2-2, \quad y^2=3x^2+1).$$

Καθ' ἡμετέραν ἀνακοίνωσιν, γενομένην ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν (1), αἱ ὑπὸ τοῦ

1) Βλέπε Πρακτικὰ Ἀκαδημίας, 30, 1955, σ. 255.

Ἀρχιμήδους λαμβανόμεναι ἄνευ ἀποδείξεως σχέσεις λαμβάνονται διὰ λόγων διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῆς κατασκευῆς ὁμοίων ῥόμβων κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 10. Ὁπωσδήποτε θεωροῦμεν βέβαιον, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τοὺς λόγους, οἵτινες ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας, τὴν μὲν αὐξανομένην, τὴν δὲ φθίνουσαν καὶ ὅτι μεταξὺ τούτων τῶν ἀκολουθιῶν εὑρίσκεται ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι ἐγνώριζε τὰς σχέσεις

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

II. Ὡς συνάγεται ἐκ τῶν «Μετρικῶν» Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (1), ἦτο γνωστὸν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ σχηματισμοῦ διαδοχικῶν μουσικῶν ἀναλογιῶν. Ἐὰν δηλ. Α εἶναι ἀριθμὸς μὴ τετράγωνος, λαμβάνεται ὁ ἐγγύτερον πρὸς τοῦτον τετράγωνος μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ Α, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἔστω α, καὶ σχηματίζεται τὸ πηλίκον $\frac{A}{\alpha}$. Εἰς τὸ μνημονευόμενον παράδειγμα τοῦ Ἥρωνος εἶναι $\frac{A}{\alpha} < \alpha$. Σχηματίζεται ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α

$\frac{A}{\alpha} : \beta_1 = \gamma_1 : \alpha$, ἔνθα $\beta_1$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\frac{2\frac{A}{\alpha}\cdot\alpha}{\frac{A}{\alpha}+\alpha}$ καὶ $\gamma_1$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον $\left(\frac{A}{\alpha}+\alpha\right):2$ τῶν $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\beta_1$, $\gamma_1$ σχηματίζεται ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία

$\beta_1 : \beta_2 = \gamma_2 : \gamma_1$, ἔνθα $\beta_2 = \frac{2\beta_1\gamma_1}{\beta_1+\gamma_1}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\gamma_2 = \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\beta_1$, $\gamma_1$. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους τοὺς $\beta_2$, $\gamma_2$ σχηματίζεται ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Εἶναι δὲ

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \sqrt{A} < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1 .$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον(2).

Κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{2}$ ἔχομεν:

Ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 2 τετράγωνος εἶναι ὁ $1^2$, καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $1^2$ εἶναι ὁ $\frac{2}{1}$. Ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς 1 (δηλ. τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ $1^2$) καὶ $\frac{2}{1}$ εἶναι ἡ

$1 : \frac{2\cdot 1\cdot\frac{2}{1}}{1+\frac{2}{1}} = \frac{1+\frac{2}{1}}{2} : \frac{2}{1}$ ἢ $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$, ἔνθα $\frac{4}{3}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{3}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ $\frac{2}{1}$. Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$ εἶναι $\frac{4}{3} : \frac{24}{17} = \frac{17}{12} : \frac{3}{2}$, ἔνθα $\frac{24}{17}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{17}{12}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{2}{2}$.

---

1) Ἥρωνος Μετρικά, (ἔκδ. Schöne, τόμ. III, σ. 18 - 20, Teubner, 1903) καὶ P. Tannery Mémoires Scientifiques III, σ. 68 καὶ 214, καὶ Paul-Henri Michel, ἔνθ' ἀν., σ. 426.

2) P. Tannery, ἔνθ' ἀν.

Ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία εἶναι $\frac{24}{17} : \frac{816}{577} = \frac{577}{408} : \frac{17}{12}$, ἔνθα $\frac{816}{577}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{577}{408}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{24}{17}$, $\frac{17}{12}$, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς :

Εἶναι δὲ $1 < \frac{4}{3} < \frac{24}{17} < \frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$.

Κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{3}$ ἔχομεν : ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετράγωνος εἶναι ὁ $2^2$ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $2^2$ εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$. Ἄκροι ὅροι πρὸς σχηματισμὸν τῆς πρώτης μουσικῆς ἀναλογίας εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετραγώνου, ὁ 2. Αὕτη εἶναι $\frac{3}{2} : \frac{12}{7} = \frac{7}{4} : 2$.

Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία εἶναι

$$\frac{12}{7} : \frac{168}{97} = \frac{97}{56} : \frac{7}{4}, \quad \text{κλπ.}$$

Εἶναι δὲ $\frac{3}{2} < \frac{12}{7} < \frac{168}{97} < \sqrt{3} < \frac{97}{56} < \frac{7}{4} < 2$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τῶν ἀφορώντων εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Εὑρίσκεται κατά τινα τρόπον προσέγγισίς τις πρὸς ζητουμένην ἀληθῆ τινα τιμήν. Ἡ προσέγγισις αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως, ἡ νέα προσέγγισις διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται σήμερον μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου, ἐγνώριζον τὴν μέθοδον ταύτην.

## SUMMARY

As it is concluded from the «Metrica» of Ἥρωνος of Alexandria, the Ancient Greeks knew that the square root of a number can also be computed by the method of the formation of succeeding musical proportions, viz., if A is not α square number, we take the nearer square number greater or smaller to A of which the square root, say α, forming the quotient $\frac{A}{\alpha}$. The quotient mantioned in Heron's example is $\frac{A}{\alpha} < \alpha$. The first musical proportion is then formed with extreme terms $\frac{A}{\alpha}$ and α $\frac{A}{\alpha} : \beta_1 = \gamma_1 : \alpha$ where $\beta_1$ is the harmonical mean $\frac{2\frac{A}{\alpha} \cdot \alpha}{\frac{A}{\alpha} + \alpha}$ and $\gamma_1$ the arithmetical mean $\left(\frac{A\alpha}{\alpha} + \alpha\right) : 2$ of $\frac{A}{\alpha}$ and α ($\beta_1 < \gamma_1$). The second musical proportion is formed with extreme terms of $\beta_1$, $\gamma_1$

$\beta_1 : \beta_2 = \gamma_2 : \gamma_1$ where $\beta_2 = \frac{2\beta_1\gamma_1}{\beta_1+\gamma_1}$ the harmonical mean and $\gamma_2 = \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}$ the arithmetical mean of $\beta_1$, $\gamma_1$. ($\beta_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \gamma_1$). The third musical proportiod is formed with extreme terms $\beta_2$, $\gamma_2$ and so on. That is :

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \sqrt{A} < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1 .$$

This method is attributed to the Pythagorean Archytas of Tarentum. According to Archytas' method for $\sqrt{2}$ we have :

The nearer to the 2 square number is the $1^2$, and the quotient of the division of the 2 by the square root of $1^2$ is the $\frac{2}{1}$. The first musical proportion with extreme terms the 1 (viz. the square root of $1^2$) and $\frac{2}{1}$ is the

$$1 : \frac{2 . 1 . \frac{2}{1}}{1 + \frac{2}{1}} = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} : \frac{2}{1} \quad \text{or} \quad 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2,$$

where $\frac{4}{3}$ is the harmonical mean and $\frac{3}{2}$ the arithmetical mean of 1 and $\frac{2}{1}$. The second musical proportion with extreme terms the $\frac{4}{3}$ and $\frac{3}{2}$ is $\frac{4}{3} : \frac{24}{17} = \frac{17}{12} : \frac{3}{2}$, where $\frac{24}{17}$ is the harmonical mean and $\frac{17}{12}$ the arithmetical mean of $\frac{4}{3}$ and $\frac{3}{2}$.

The third musical proportion is $\frac{24}{17} : \frac{816}{577} = \frac{577}{408} : \frac{17}{12}$, where $\frac{816}{577}$ is the harmonical mean and $\frac{577}{408}$ the arithmetical mean of $\frac{24}{17}$, $\frac{17}{12}$, and so on.

$$\text{So} \quad 1 < \frac{4}{3} < \frac{27}{17} < \frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{2}{3} < \frac{2}{1} .$$

According to this method of Archytas, for $\sqrt{3}$ we have : the nearer to 3 square number is $2^2$ and the quotient of the division of 3 by the square root of $2^2$ is the $\frac{3}{2}$. The $\frac{3}{2}$ and the square root of the spuare number nearer to 3, that is the 2, are the extreme terms of the first musical proportion.

This is

$$\frac{3}{2} : \frac{12}{7} = \frac{7}{4} : 2$$

The second musical proportion is :

$$\frac{12}{7} : \frac{168}{97} = \frac{97}{56} : \frac{7}{4}, \text{ etc.}$$

That is :

$$\frac{3}{2} < \frac{12}{7} < \frac{168}{97} < \sqrt{3} < \frac{97}{56} < \frac{7}{4} < 2$$

From the above set forth concerning the ancient Greek Mathematics, we note the following : By some way an approximation to a real value wanted cam there be found. This approximation is used to find a still accurate approximation which is also used to find a more accurate approximation and so forth. This method is today called the method of succeeding approximations by repetition, and can be applied on many intricate problems of mathematical Analysis. Therefore, it has been proved that the Ancient Greeks knew that method, at least from the time of Plato and Archytas.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΑ΄ 1959
ΤΕΥΧΟΣ Β΄
22

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1959

EVANGELOS STAMATIS *

# ON BOOK X OF EYCLID'S ELEMENTS

## A' INTRODUCTION

A1. Book X of Euclid's Elements was regarded and really is the most difficult Book of the Elements. The Dutch mathematician Simon Stevin (1548 - 1620) named it as «the cross of martyrdom of the mathematicians», while the French mathematician Jean Montucla (1725 - 1799) douhts, whether in his epoch would be ang geometrician who would dave to follow Euclid in the dark dedale of his Book X[1]. Most of the modern interpreters arrive at the conclusion that the purpose of this Book is to solve certain type of biquadratic and quadratic equations [2]. Cl. Thaer believes that the purpose of the Book X is the thorough investigation of incommensurable straight lines which gives a solid basis to the theory of regular polyhedrons [3].

It is true that out of the twelve irrational straight lines of Book X (theorems 36 - 41, 73 - 78) the six former are sums of the positive roots of equal in number of biquadratic equations, while the six latter are differences of the positive roots of the same biquatratic equations. It is also true that the irrational straight lines of theorems 48 - 53 and 85 - 90 are the six former sums of the positive roots of six quadratic equations, while the six latter differences of the roots of the same equations. This observation does not necessarily mean that the purpose of book X is to solve certain type of equations. Book VI of Euclid's Elements serves to solve the most difficult type of quadratic equations—the elleptical equations (VI, 28). The solution of the biquadratic equations met in Book X is mainly based on the solution of quadratic equations of a simplest type.

Besides in Book XIII of Elements (th. 6, 11, 16, 17) the following propositions are proved.

---

* Proceedings of the Akademie of Athens 32 (1957), 251 - 266).

[1] Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 444 publ. by Le Belles Lettres, Paris 1930.

[2] Thomas Heath, A History of Greek Mathematics I, p. 402, Oxford 1921.

[3] Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, p. 103, Leipzig 1936.

1. If a commensurable straight line is divided in extreme and mean ratio each of the parts of the straight line is an apotome (X, 73).

2. If the diameter of a circle is rational the side of the inscribed regular pentagon is minor (X, 76).

3. The side of a regular icosahedron is minor (X, 76).

4. The side of a regular dodecahedron is an apotome (X, 73).

Even these do not lead to the conclusion that the purpose of Book X is the investigation of the incommensurable straight lines, granding a basic step to the theory of regular polyhedrons, because out of the relative theo rems the 6th and 11th are preparatory for the proof of the second part of theorems 16 and 17. The theory of regular polyhedrons would not be influenced even if the second part of theorems 16 and 17 missed.

A2. To my opinion the purpose of Bock X of Euclid's Elements is to demonstrate the symmetry which exists in the construction of a right triangle, when the most simple irrational straight lines are used. From the interpretation of the most important theorems of Book X, quoted hereunder, the point of view supported by me is quite right.

B'

We begin with the definition of certain terms.

1. «Commensurable» magnitudes are these having the same measure ; «incommensurable» magnitudes are those having no common measure.

2. Two commensurable magnitudes have to one another the ratio of one number to another. The incommensurable magnitudes do not hane to one another the ratio of one number to another (X, 6. 7).

3. A straight line regarded as measure is rational.

4. Straight lines are «commensurable in length» or «incommensurable in length» when they are considered linearly.

5. Straight lines are «commensurable in square» or «incommensurable insquare» when the squares of them are commensurable or incommensurable.

6. Every straight line commensurable in length to the assigned ra tional is rational. Let a, b be two integers, non square, and $\varrho$ a rational straight line. The fourth proportional of $\alpha$, $\beta$, $\varrho$, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is commensurable in length to the assigned rational $\varrho$ and as a result $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is rational.

7. The mean proportional of $\varrho$ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ is incom-

mensurable in length both to $\varrho$ and to $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. But the squares $\varrho^2$ and $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ or $\varrho^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$ and $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ are commensurable to each other. So the straight lines $\varrho$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ or $\varrho\left(\frac{\beta}{a}\right)$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ are rational, commensurable only in square.

8. The mean proportional of $\varrho$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is called medial. [or the mean proportional of $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$]. Medial is therefore defined as a monomial containing the fourth rout of a factor of a nonsquare number.

9. The rectangle of the shape $\varrho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ or $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ is called medial. Therefore medial rectangle is called the monomial containing the square root of a factor of a nonsquare number. The side of the square equivalent to the regarded rectangle is medial, and this square is also medial.

10. A straight line is called irrational when its square is incommensurable to the square of a straight line assigned as rational.

The following ten theorems numbered 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 are preparatory for the whole theory of Book X.

## 10.

Construction of the first right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height the rational straight line $\varrho$ is taken. As the second part we use the fourth proportional of the nonsquare integers a, b, $\varrho$, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. The $\varrho$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, the height of the triangle, are rational straight lines, commensurable in square only (and incommensurable in length).

Gonstruction of the second triangle. As the first part of fhe hypotenuse the $\varrho$ is again taken. As the second part we use the height of the former triangle, the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. The height of the second triangle, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is medial. The $\varrho$ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ are incommensurable in both length and square, that is their squares are incommensurable.

## 27.

To find two medials commensurable in square only, the product of which should be rational. The first medial is found in the second case of theorem 10, and is $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$. To find the second medial is constructed a right triangle which has as the first part of the hypotenuse intersected by the height the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ and as the second part the height of the triangle of the first case of th. 10, that is $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. The mean proportional of these parts, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ is the requiered second medial. The squares of the medials, the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}$ and the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/2}$ are commensurable. The product of the medials, the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is rational.

## 28.

To find two medials commensurable in square only, the product of which preliminary three rational numbers, commensurable in square only, are found. There is taken the non square integers, the $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ $\delta$ and a rational straight line, the $\varrho$. Construction of the first right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height is taken the $\varrho$ and as a second part the fourth proportional of a, b, $\varrho$ the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. The height of the triangle is the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Construction of the second right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height is taken the $\varrho$ and as the second part the fourth proportional of $\gamma$, $\delta$, $\varrho$, the $\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$. The height of the triangle is the $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. The three straight lines: $\varrho$, $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ are rational, commensurable in square only.

Construction of the required first medial

There is constructed a right triangle which has as parts of the hypotenuse intersected by the height the $\varrho(=A)$ and the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}(=B)$. The height of the triangle $\Delta=\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is the first medial.

Gonstruction of the required second medial.

We find the fourth proportional of the

$$\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \text{ and } \varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \text{ the } E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}:\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}.$$

E is the second medial.

## Lemma 1.

To find two square numbers the sum of which should be a square number. It is proved that these will be of the form :

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \text{ or } \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2 \quad (1),$$

where $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, $\mu, \nu$ even or odd and $\varkappa, \xi, \sigma, \tau$ integers. According to Book IX, th. 1 $\mu\nu$ is square. But if is not $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, then $\mu\nu$ is not a square. In this case we take :

$$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu \text{ non square number, or}$$

$$\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\varkappa\xi\sigma\tau$$

non square number. To simplify we substitute $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$ where $\vartheta$ non square number. The formulas (1) give all the integer solutions of the equation of Diophantus $x^2+y^2=z^2$.

## Lemma 2.

To find two square nunbers the sum of which should not be a square number, It is proved that :

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda \text{ or } \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$$

non square, where $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, $\mu, \nu$ even or odd. To simplify we substitute $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, $\lambda$ non square number.

## 29.

The rational straight line AB($=\varrho$) is given as the hypotenuse of a right triangle. To construct the triangle to have the perpendicular side AZ rational, but only $AB^2$, $AZ^2$ commeusurable (consequently AB, AZ incommensurable in length) and the hypotenuse AB and the other perpendicular side $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ commensurable in length.

His proved that

$$AZ=\frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\varphi},\ ZB=\frac{\varrho\omega}{\varphi},\ [\varphi^2-\omega^2=\vartheta \text{ non square number}].$$

## 30.

The rational straight line AB(=ϱ) is given as the hypotenuse of a right triangle. To construct the triangle to have the perpendicular side AZ rational, but only $AB^2$, $AZ^2$ commensurable (consequently AB, AZ incommensurable in length) and the hypotenuse AB and the other perpendicular side $BZ=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ incommensurable in length. It is proved that $AZ=\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB=\frac{\varrho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ non square number].

## 31. 1.

To construct a right triangle to have the hypotenuse Γ and one perpendicular side Δ medial, but only $\Gamma^2$, $\Delta^2$ commensurable (consequently Γ, Δ incommensurable in length), the product Γ×Δ rational and the hypotenuse Γ and the other perpendicular $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ commensurable in length.

It is proved that

$$\Gamma=\frac{\varrho\vartheta^{1/4}}{\varphi^{1/2}},\quad \Delta=\frac{\varrho\vartheta^{3/4}}{\varphi^{3/2}},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta,\ \text{non square number}].$$

## 31. 2.

As the precedent, but to have the hypotenuse Γ and $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ incommensurable in length.

## 32. 1.

To construct a right triangle to have the hypotenuse Δ and the one perpendicular side E medial, but only $\Delta^2$, $E^2$ commensurable (consequently Δ, E incommensurable in length), the product Δ×E should be medial and Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ should be commensurable in length.

It is proved that

$$\Delta=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta,\ \gamma,\ \delta\ \text{non squares numbers}].$$

## 32. 2.

As the precedent, but to have Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ incommensurable in length. It is proved that:

$$\Delta=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda,\ \gamma,\ \delta\ \text{non squares numbers}].$$

## 33.

To construct a right triangle having perpendicular sides the AZ, ZB so that the $AZ^2$, $ZB^2$ be incommensurable, $AZ^2+ZB^2$ rational and AZ×ZB medial. It is proved that:

$$AZ=\frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad ZB=\frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda \text{ non square number}].$$

## 34.

To construct a right triangle having perpendicular sides the $A\Delta$, $\Delta B$, so that $A\Delta^2$, $\Delta B^2$ be incommensurable, $A\Delta^2+\Delta B^2$ medial and $A\Delta\times\Delta B$ rational. It is proved that:

$$A\Delta=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda, \text{ nonsquare number}].$$

## 35.

To construct a right triangle having perpendicular sides the $A\Delta$, $\Delta B$ so that $A\Delta^2$, $\Delta B^2$ be incommensurable, $A\Delta^2+\Delta B^2$ medial, $A\Delta\times\Delta B$ medial and incommensurable to $A\Delta^2+\Delta B^2$. It is proved that:

$$A\Delta=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda, \gamma, \delta \text{ nonsquare number}].$$

B. 2. On rhe basis of the previous theorems proved there are constructed twelve irrational straight lines. Each of fhe former six straight lines is the sum of two monomials. (th. 36—44). Each of the latter six straight lines is the difference of the same two monomials (apotomes, theor. 73—78). These straight lines are for the construction of twelve right triangles. More simple irrational straight lines is not possible to be constructed. These are:

1. Binomial $\varrho+\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ 36
   Apotome $\varrho-\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ 73
   The monomials are taken from the first case of theorem 10 [It can be $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\pm\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$].

2. First Bimedial $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ 37
   First apotome of a medial $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}-\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ 74
   The monomials are taken from th. 27.

3. Second bimedial $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\varrho\frac{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ 38
   Second apotome of a medial $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}-\varrho\frac{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ 75
   The monomials are taken from th 28.

4. Major $\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 39
Minor 76

The monomials are taken from th. 33.

5. Side of rational plus a medial area $\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 40
That which 'produces' with a rational area a medial whole 77

The monomials are taken from th. 34.

6. Side of the sum of two medial areas $\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm$
That which 'produces' with a medial area a medial area $\pm\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 41 78

The monomials are taken from th. 35.

Second and third definitons. (the second are referred to the sums, while the third to the differences).

Let us consider a rational straight line $\varrho$, and the hypotenuse of a right triangle A and the one perpendicular side B. The straight lines A, B should be rational but only $A^2$, $B^2$ commensurable (commensurable only in sqnare and therefore incommensurable in length). Let $\Gamma$ be the other perpendicular side of the triangle.

1) If the straight lines A, $\Gamma$ are commensurable in length there are distinguished three cases of the construction of the sum A+B and three cases of the construction of the difference (apotome) A—B, characterized by the relation of the symmetry or no symmetry of A and B to the taken rational $\varrho$.

I. A and $\sqrt{A^2-B^2}$ are commensurable in length (A, B incommensurable in length).

1. If A, $\varrho$ are commensurable in length (B, $\varrho$ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta=A+B$ be called first binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called first apotome.
2. If B, $\varrho$ are commensurable in length (A, $\varrho$ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta=A+B$ be called second bionomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called second apotome
3. If neither A nor B are commensurable in length with $\varrho$,
let the binomial $\Delta=A+B$ be called third binomial
let the difference $\Delta=\Delta-B$ be called third apotome

2) If the straight lines A, $\Gamma$ are incommensurable in length there are distinguished another three cases of the construction of the sum A+B and another three cases of the construction of the difference (apotome)

A—B, which are characterized by the relation of symmetry or no sym metry of the A and B to the taken rational ϱ.

II. A and $\sqrt{A^2-B^2}$ are incommensurable in length (A, B incom mensurable in length).

4. If A, ϱ are commensurable in length (B, ϱ incommensurable in length).
let the binomial $\Delta=A+B$ be called fourth binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called fourth apotome.

5. If B, ϱ are commensurable in length (A, ϱ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta=A+B$ be called fifth binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called fifth apotome.

6 If neither A nor B are commensurable in length with ϱ,
let the binomial $\Delta=A+B$ be called sixth binomial
let the binomial $\Delta=A-B$ be called sixth apotome.

constuction of the six binomials and the six apotomes (12 more irrational straight lines).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | First Binomial | $\varrho\frac{\delta}{\gamma}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ | th. | 48 |
| | First Apotome | | | 85 |
| 2. | Second Binomial | $\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ | | 49 |
| | Second Apotome | | | 86 |
| 3. | Third Binomial | $\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\pm\varrho\frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ | | 50 |
| | Third Apotome | | | 87 |

In the three above cases $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$, γ, δ, ε non squares numbers.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4. | Fourth Binomial | $\varrho\frac{\delta}{\gamma}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ | | 51 |
| | Fourth Apotome | | | 88 |
| 5. | Fifth Binomial | $\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ | | 52 |
| | Fifth Apotome | | | 89 |
| 6. | Sixth Binomial | $\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\pm\varrho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ | | 53 |
| | Sixth Apotome | | | 90 |

In the three above cases $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ, ε non squares numbers.

By the 24 irrational straight lines found we construct 24 right triangles. The construction of these triangles is the main object of the contents of Book X of Euclid's Elements. In constructing these triangles, the symmetry and harmony which exists is evident, whenever it is possible to use the simplest irrational straight lines.

There can be noted that the number 24 is the product 4×6 viz. of the number expressing the tetractys of Pythagoras and of six, which is the first perftect number.

We quote the construction of these 24 right triangles in the following four tables:

TABLE I.

| Theorem | GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — first part rational | GIVEN: second part irrational | consequently the height | PROVED: The height is irrational of the form: |
|---|---|---|---|---|
| 54 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\phi}$ first binomial th. 48. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\phi}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\phi}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\phi}\right)}$, i. e. of the binomial of th. 36. |
| 55 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\phi}{\sqrt{\theta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ second binomial 49. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\phi}{\sqrt{\theta}}+1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\phi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\phi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first bimedial 37. |
| 56 | $\rho$ | $\rho\frac{\phi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third binomial 50. | $\rho\sqrt{\frac{\phi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\phi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\phi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second bimedial 38. |
| 57 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth binomial 51. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the major 39. |
| 58 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth binomial 52. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of the side of rational plus a medial area 40. |
| 59 | $\rho$ | $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth binomial 53. | $\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the side of the sum of two medial areas 41. |

[We here note six transformations of double radicals out of sums]

TABLE II

| Theorem | GIVEN: The height of the right triangle, the corresponding to the hypotenuse — irrational | GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height — rational | PROVED: The other part of the hypotenuse has the form |
|---|---|---|---|
| 60 | $\rho+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ binomial of the theorem 36. | $\rho$ | $\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first binomial, th. 48. |
| 61 | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ first bimedial 37. | $\rho$ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second binomial 49. |
| 62 | $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second bimedial 38. | $\rho$ | $\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third binomial 50. |
| 63 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ major 39. | $\rho$ | $\rho+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth binomial 51. |
| 64 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ side of a rational plus a medial area 40. | $\rho$ | $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth binomial 52. |
| 65 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ side of the sum of two medial areas 41. | $\rho$ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth binomial 53. |

TABLE III.

| Theorem | GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — First part rational | GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — second part irrational | GIVEN: consequently the height | PROVED: the height is irrational of the form: |
|---|---|---|---|---|
| 91 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\phi}$ first apotome th. 85. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\theta}}{\phi}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\phi}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\phi}\right)}$, i. e. of the apotome of th. 73. |
| 92 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\phi}{\sqrt{\theta}}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ second apotome 86. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\phi}{\sqrt{\theta}}-1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\phi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\phi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first apotome of a medial 74. |
| 93 | $\rho$ | $\rho\frac{\phi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third apotome 87. | $\rho\sqrt{\frac{\phi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\phi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\phi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second apotome of a medial 75. |
| 94 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth apotome 88. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the minor 76. |
| 95 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth apotome 89. | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of that which 'produces' with a rational area a medial whole 77. |
| 96 | $\rho$ | $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth apotome 90. | $\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of that which 'produces' with a medial area a medial whole 78. |

[We here note six transformations of double radicals aut of differences].

TABLE IV

| Theorem | GIVEN: The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse — irrational | GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height — rational | PROVED: The other part of the hypotenuse has the form: |
|---|---|---|---|
| 97 | $\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ Apotome of th. 73. | $\rho$ | $\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first apotome of th. 85. |
| 98 | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ First apotome of a medial, th. 74. | $\rho$ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second apotome, 86. |
| 99 | $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second apotome of a medial, th. 75. | $\rho$ | $\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/}}\right] - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third apotome 87. |
| 100 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ minor, th. 76. | $\rho$ | $\rho - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth apotome 88. |
| 101 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a rational area a medial whole th. 77. | $\rho$ | $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth apotome 89. |
| 102 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a medial area a medial whole th. 78. | $\rho$ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth apotome 90. |

B3. Theorems 112 and its reciprocal 113 are considered genuine. These constitute direct continuation and are therefore inseparable part of Book X of Elements. We give a picture of these in the following table. In each of these theorems there are constructed six right triangles. We also consider genuine the theorems 114, 115.

| | GIVEN | | PROVED |
|---|---|---|---|
| | The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse | The first part of the hypotenuse intersected by the height is irrational of the form | The other part of the hypotenuse is irrational of the form |
| Th. 112 | rational | of the first binomial th. 48 | of the first apotome th. 85 |
| | » | » » second binomial 49 | » » second apotome 86 |
| | » | » » third binomial 50 | » » third apotome 87 |
| | » | » » fourth binomial 51 | » » fourth apotome 88 |
| | » | » » fifth binomial 52 | » » fifth apotome 89 |
| | » | » » sixth binomial 53 | » » sixth apotome 90 |
| Th. 113 | » | of the first apotome th. 85 | of the first binomial th. 48 |
| | » | » » second apotome 86 | » » second binomial 49 |
| | » | « » third apotome 87 | » » third binomial 50 |
| | » | » » fourth apotome 88 | » » fourth binomial 51 |
| | » | » » fifth apotome 89 | » » fifth binomial 52 |
| | » | » » sixth apotome 90 | » » sixth binomial 53 |

ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ *

# ΕΠΙ ΤΟΥ Χ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

## Α.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. 1. Τὸ Χ (10ον) βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐθεωρεῖτο καὶ εἶναι τὸ δυσκολώτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Simon Stevin (1548—1620) τὸ ὠνόμασεν «ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν», ἐνῷ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Jean Montucla (1725—1799) ἀμφιβάλλει, ἐὰν κατὰ τὴν ἐποχήν του θὰ ὑπῆρχε γεωμέτρης, ὅστις θὰ ἐτόλμα νὰ παρακολουθήσῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὸν σκοτεινὸν δαίδαλον τοῦ Χ βιβλίου [1]. Οἱ περισσότεροι ἐκ τῶν νεωτέρων ἑρμηνευτῶν τοῦ Χ βιβλίου καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι σκοπὸς τούτου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου διτετραγώνων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων [2]. Ὁ Cl. Thaer, φρονεῖ, ὅτι σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου εἶναι ἡ πλήρης ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ἥτις παρέχει στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων [3].

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἐκ τῶν δώδεκα ἀλόγων εὐθειῶν τοῦ Χ βιβλίου (τῶν θεωρημάτων 36 - 41 καὶ 73 - 78) εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ῥιζῶν ἰσαρίθμων διτετραγώνων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν θετικῶν ῥιζῶν τῶν αὐτῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης εἶναι ἀληθὲς ὅτι αἱ ἄλογοι εὐθεῖαι τῶν θεωρημάτων 48 - 53 καὶ 85 - 90 εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ῥιζῶν ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι εἶναι διαφοραὶ τῶν ῥιζῶν τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἡ παρατήρησις ὅμως αὕτη δὲν ὑποχρεοῖ εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος, καθ' ὃ σκοπὸς τοῦ Χ βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων. Διότι εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν Στοιχείων ἐπιτελεῖται ἡ ἐπίλυσις τῶν δυσκολωτέρου τύπου δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων (VI, 28). Ἡ λύσις τῶν ἐν τῷ Χ βιβλίῳ ἀπαντωσῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων στηρίζεται κυρίως εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἁπλουστάτου τύπου.

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ XIII βιβλίον τῶν Στοιχείων (θεωρ. 6, 11, 16, 17) ἀποδεικνύεται: 1) Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομή (X, 73). 2) Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ῥητή, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 3) Ἡ πλευρὰ τοῦ

---

* Evangelos Stamatis Über das X. Buch der Elemente Euklids. Ἀνεκοινώθη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν Συνεδρίαν τῆς 17 Ἰανουαρίου 1957.

[1] Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444 κ. ἑ. éd. *Les Belles Lettres*, Paris 1950.

[2] Thomas Heath, A history of Greek Mathematics I, σ. 402, Oxford, 1921.

[3] Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, σ. 103, Leipzig 1936.

κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 4) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομὴ (X, 73). Ταῦτα ὅμως ἐπίσης δὲν ὑποχρεοῦσιν εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς παρέχουσα στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, διότι ἐκ τῶν συναφῶν θεωρημάτων τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 6 καὶ 11 εἶναι προπαρασκευαστικὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17. Ἐὰν δὲ ἔλειπε τὸ δεύτερον μέρος τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17 δὲν θὰ ἐπηρεάζετο ἡ θεωρία τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

Α. 2. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται πρὸς τοῦτο αἱ ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐκ τῆς ἑρμηνείας, ἣν παρέχομεν κατωτέρω τῶν κυριωτέρων θεωρημάτων τοῦ X βιβλίου, φρονοῦμεν, εἶναι καταφανὴς ἡ ὀρθότης τῆς ὑποστηριζομένης ἀπόψεως.

Β'.

Β. 1. Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ ἔχοντα κοινὸν μέτρον· ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

2. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (X, θ. 6 καὶ 7).

3. Τυχοῦσα εὐθεῖα λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ῥητή.

4. Μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν αὗται θεωρῶνται γραμμικῶς.

5. Δυνάμει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

6. Πᾶσα εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν λέγεται ῥητή. Ἔστωσαν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, μὴ τετράγωνοι καὶ ῥητή τις εὐθεῖα ρ. Ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ρ, ἡ $\rho(\beta/\alpha)$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ καὶ συνεπῶς εἶναι ῥητή.

7. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ καὶ $\rho(\beta/\alpha)$, ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ρ καὶ πρὸς τὴν $\rho(\beta/\alpha)$. Τὰ τετράγωνα ὅμως $\rho^2$ καὶ $\rho^2(\beta/\alpha)$ ἢ $\rho^2(\beta^2/\alpha^2)$ καὶ $\rho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι πρὸς ἄλληλα σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι ρ καὶ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\rho(\beta/\alpha)$ καὶ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

8. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ καὶ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1/4}$ λέγεται μέση [ἢ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\rho(\beta/\alpha)$ καὶ $\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{3/4}$]. Μέση ἄρα λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

9. **Τὸ ὀρθογώνιον** παραλληλόγραμμον τῆς μορφῆς $\rho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\rho^2(\beta/\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται **μέσον**. **Μέσον** ἄρα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μονώνυμον, περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ θεωρούμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τετραγώνου εἶναι μέση, τὸ τετράγωνον δὲ τοῦτο εἶναι ἐπίσης **μέσον**.

10. Εὐθεία τις λέγεται **ἄλογος**, ὅταν τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας ληφθείσης ὡς ῥητῆς.

Τὰ κατωτέρω δέκα θεωρήματα ὑπ' ἀριθ. 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 εἶναι προπαρασκευαστικὰ τῆς ὅλης θεωρίας τοῦ X βιβλίου.

## 10.

Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται εὐθεῖα τις ῥητή, ἔστω ρ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἀκεραίων μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ρ, ἡ ρ(β/α). Ἡ ρ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι εὐθεῖαι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι).

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται πάλιν ἡ ρ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1}/_{4}$ εἶναι μέση. Εἶναι δὲ ἡ ρ καὶ ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1}/_{4}$ ὄχι μόνον μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα.

## 27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ῥητόν. Ἡ πρώτη μέση λαμβάνεται κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ θ. 10 καὶ εἶναι ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{1}/_{4}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δευτέρας μέσης κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν ρ(β/α), καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10, τὴν $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τούτων, ἡ $\rho(\beta/\alpha)^{3}/_{4}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση. Τὰ τετράγωνα τῶν μέσων, τὰ $\rho^{2}(\beta/\alpha)^{1}/_{2}$ καὶ $\rho^{2}(\beta/\alpha)^{3}/_{2}$ εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ $\rho^{2}(\beta/\alpha)$ εἶναι ῥητόν.

## 28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι μέσον. Προκαταρκτικῶς εὑρίσκονται τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λαμβάνονται οἱ μὴ τετράγωνοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ α, β, γ, δ καὶ εὐθεῖά τις ῥητή, ἔστω ρ. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ρ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ρ ἡ ρ(β/α). Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθ. τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ρ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, δ, ρ ἡ ρ(δ/γ). Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης πρώτης μέσης.

Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὡς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὰ ρ(=Α) καὶ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ (=Β). Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ $\Delta=\rho(\beta/\alpha)^{1}/_{4}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης δευτέρας μέσης

Τῶν $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ καὶ τῆς $\rho(\beta/\alpha)^{1}/_{4}$ εὑρίσκει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν $E=\rho(\delta/\gamma)^{1}/_{2}:(\beta/\alpha)^{1}/_{4}$. Αὕτη εἶναι ἡ δευτέρα μέση.

### Λῆμμα 1ον

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \text{ ἢ } \kappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

ἔνθα $\mu=\kappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\kappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοὶ κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι. Ὁ μν εἶναι τετράγωνος (IX, 1). Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι $\kappa:\xi=\sigma:\tau$ ὁ μν δὲν εἶναι τετράγωνος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνομεν $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu$ μὴ τετράγωνος ἢ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\kappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος. Οἱ τύποι (1) παρέχουσιν ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$.

### Λῆμμα 2ον

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda \text{ ἢ } \kappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$$

μὴ τετράγωνος, ἔνθα $\mu=\kappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\kappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοί. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος.

## 29.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ῥητὴ εὐθεῖα AB(=ρ). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ῥητή, ἀλλὰ μόνον $AB^2$, $AZ^2$ σύμμετρα (συνεπῶς AB, BZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ=\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi}$, $ZB=\frac{\rho\omega}{\varphi}$, [$\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος].

## 30.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ῥητὴ εὐθεῖα AB(=ρ). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ῥητή, ἀλλὰ μόνον $AB^2$, $AZ^2$ σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $BZ=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB=\frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος].

## 31.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Δ νὰ εἶναι μέσαι, μόνον $\Gamma^2$, $\Delta^2$ σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Γ, Δ μήκει ἀσύμμετροι). Τὸ γινόμενον $\Gamma\times\Delta$ νὰ εἶναι ῥητὸν καὶ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $\Gamma=\frac{\rho\theta^{1/4}}{\varphi^{1/2}}$, $\Delta=\frac{\rho\theta^{3/4}}{\varphi^{3/2}}$, [$\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος].

## 31.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

## 32.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Δ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Ε νὰ εἶναι μέσαι, ἀλλὰ μόνον $\Delta^2$, $E^2$ σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Δ, Ε, μήκει ἀσύμμετροι) τὸ γινόμενον Δ×Ε νὰ εἶναι μέσον καὶ ἡ Δ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος, ἡ $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi},\quad [\varphi^2-\omega^2=\theta,\ \gamma,\ \delta\ \text{μὴ τετράγωνοι}].$$

## 32.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Δ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda,\ \gamma,\ \delta\ \text{μὴ τετράγωνοι}].$$

## 33.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς AZ, ZB, ὥστε $AZ^2$, $ZB^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $AZ^2+ZB^2$ ῥητὸν καὶ AZ×ZB μέσον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$AZ=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad ZB=\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda\ \text{μὴ τετράγωνος}].$$

## 34.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $A\Delta^2$, $\Delta B^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον καὶ A Δ×Δ Β ῥητόν.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$A\Delta=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},$$

$[\alpha^2+\beta^2=\lambda,\ \text{μὴ τετράγωνος}]$.

## 35.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $A\Delta^2$, $\Delta B^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον, A Δ×Δ Β μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $A\Delta^2+\Delta B^2$. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$A\Delta=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},$$

$[\alpha^2+\beta^2=\lambda,\ \gamma,\ \delta\ \text{μὴ τετράγωνοι}]$.

Β. 2. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένως ἀποδειχθέντων κατασκευάζονται 12 ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἑκάστη τῶν ἐξ πρώτων εὐθειῶν εἶναι ἄθροισμα δύο μονωνύμων (θεωρ. 36—41). Ἑκάστη τῶν ἐξ ἑπομένων εὐθειῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν μονωνύμων (ἀποτομαί, θεώρ. 73—78). Αἱ εὐθεῖαι αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατασκευὴν δώδεκα ὀρθογωνίων τριγώνων. *Ἁπλούστεραι ἄλογοι εὐθεῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσιν.* Αὗται εἶναι :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) | $\rho\pm\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ | 36 |
| | Ἀποτομὴ (διαφορὰ) | | 73 |

Τὰ μονώνυμα λαμβάνονται ἐκ τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ 10 [Δύναται νὰ εἶναι $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\pm\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$].

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη
Πρώτη ἀποτομὴ μέσης
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$$

37
74

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$$

38
75

4. Μείζων
Ἐλάσσων
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33.

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

39
76

5. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34.

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

40
77

6. Δύο μέσα δυναμένη
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35.

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

41
78

*Ὁρισμοὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι.* (Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς τὰ ἀθροίσματα, ἐνῷ οἱ τρίτοι εἰς τὰς διαφοράς).

Θεωρεῖται εὐθεῖα τις ῥητὴ ρ καὶ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα ἔστω Α καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔστω Β. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β νὰ εἶναι ῥηταί, ἀλλὰ μόνον $A^2$, $B^2$ σύμμετρα (δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἔστω ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἡ Γ.

1) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει σύμμετροι διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος Α+Β καὶ τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) Α—Β, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὐ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ.

I. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

1. Ἐὰν Α, ρ μήκει σύμμετροι (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται πρώτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται πρώτη ἀποτομή.

2. Ἐὰν Β, ρ μήκει σύμμετροι (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται δευτέρα δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται δευτέρα ἀποτομή.

3. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται τρίτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται τρίτη ἀποτομή.

2) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι διακρίνονται ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος Α+Β καὶ ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) Α—Β, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὐ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν.

II. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

4 Ἐὰν Α, ρ μήκει σύμμετροι (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται τετάρτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ Δ=Α—Β ἂς καλῆται τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν Β, ρ μήκει σύμμετροι, (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται πέμπτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ Δ=Α−Β ἂς καλῆται πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
ἡ δυώνυμος Δ=Α+Β ἂς καλῆται ἕκτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ Δ=Α−Β ἂς καλῆται ἕκτη ἀποτομή.

*Κατασκευὴ τῶν ἐξ δυωνύμων καὶ ἐξ ἀποτομῶν* (ἄλλαι 12 ἄλογοι εὐθεῖαι).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Πρώτη δυώνυμος<br>Πρώτη ἀποτομὴ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}.$ | θεώρημα | 48<br>85 |
| 2. | Δευτέρα δυώνυμος<br>Δευτέρα ἀποτομὴ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}.$ | | 49<br>86 |
| 3. | Τρίτη δυώνυμος<br>Τρίτη ἀποτομὴ | $\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\pm\rho\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}.$ | | 50<br>87 |

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\varphi^2-\omega^2=\theta$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4. | Τετάρτη δυώνυμος<br>Τετάρτη ἀποτομὴ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$ | | 51<br>88 |
| 5. | Πέμπτη δυώνυμος<br>Πέμπτη ἀποτομὴ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\pm\rho\frac{\delta}{\gamma}.$ | | 52<br>89 |
| 6. | Ἕκτη δυώνυμος<br>Ἕκτη ἀποτομὴ | $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\pm\rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}.$ | | 53<br>90 |

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν 24 ἀλόγων εὐθειῶν κατασκευάζονται 24 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τὸ κύριον μέρος τοῦ περιεχομένου τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι καταφανὴς ἡ συμμετρία καὶ ἡ ἁρμονία ἥτις ὑπάρχει, ὅταν χρησιμοποιῶνται αἱ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐνταῦθα δύναται νὰ γίνῃ ἡ παρατήρησις, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ γινόμενον 4×6 ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν τετρακτὺν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ 6, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός. Παρέχομεν τὴν κατασκευὴν τῶν 24 ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τοὺς ἑπομένους τέσσαρας πίνακας.

## ΠΙΝΑΞ Ι.

| Θεώρημα | ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους — α' τμῆμα ῥητὴ | ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους — β' τμῆμα ἄλογος | ΔΙΔΟΝΤΑΙ: ἑπομένως τὸ ὕψος | ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς |
|---|---|---|---|---|
| 54 | ρ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\phi}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\phi}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\phi}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\phi}\right)}$, δηλ. |
| | | πρώτη δυώνυμος θ. 48. | | τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων (δυωνύμου) τοῦ θεωρήματος 36. |
| 55 | ρ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\phi}{\sqrt{\theta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\phi}{\sqrt{\theta}}+1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\phi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\phi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, |
| | | δευτέρα δυώνυμος 49. | | τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης 37. |
| 56 | ρ | $\rho\frac{\phi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ | $\rho\sqrt{\frac{\phi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\phi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\phi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, |
| | | τρίτη δυώνυμος 50. | | τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας 38. |
| 57 | ρ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, |
| | | τετάρτη δυώνυμος 51. | | τῆς μείζονος 39, |
| 58 | ρ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, |
| | | πέμπτη δυώνυμος 52. | | τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης 40. |
| 59 | ρ | $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ | $\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, |
| | | ἕκτη δυώνυμος 53. | | τῆς δύο μέσα δυναμένης 41. |

[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος]

## ΠΙΝΑΞ ΙΙ

| Θεώρημα | ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας | ἄλογος | Ἐν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης ἀπὸ τοῦ ὕψους | ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | ρητὴ | | |
| 60 | $\rho+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ | δυώνυμος τοῦ θεωρήματος 36. | ρ | $\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ | τῆς πρώτης δυωνύμου τοῦ θ. 48. |
| 61 | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ | ἐκ δύο μέσων πρώτη 37. | ρ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ | τῆς δευτέρας δυωνύμου 49. |
| 62 | $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ | ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38. | ρ | $\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ | τῆς τρίτης δυωνύμου 50. |
| 63 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ | μείζων 39. | ρ | $\rho+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ | τῆς τετάρτης δυωνύμου 51. |
| 64 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ | ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη 40. | ρ | $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ | τῆς πέμπτης δυωνύμου 52. |
| 65 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ | δύο μέσα δυναμένη 41. | ρ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ | τῆς ἕκτης δυωνύμου 53. |

# ΠΙΝΑΞ III.

| Θεώρημα | ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους — α' τμῆμα ῥητὴ | ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους — β' τμῆμα ἄλογος | ἐπομένως τὸ ὕψος | ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς |
|---|---|---|---|---|
| 91 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right.}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. |
| | | πρώτη ἀποτομὴ θ. 85. | | τῆς ἀποτομῆς τοῦ θεωρήματος 73. |
| 92 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, |
| | | δευτέρα ἀποτομὴ 86. | | τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης 74. |
| 93 | $\rho$ | $\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ | $\rho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, |
| | | τρίτη ἀποτομὴ 87. | | τῆς δευτέρας ἀποτομῆς μέσης 75. |
| 94 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, |
| | | τετάρτη ἀποτομὴ 88. | | τῆς ἐλάσσονος 76. |
| 95 | $\rho$ | $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ | $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, |
| | | πέμπτη ἀποτομὴ 89. | | τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης 77. |
| 96 | $\rho$ | $\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ | $\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$ | $=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, |
| | | ἕκτη ἀποτομὴ 90. | | τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης 78. |

[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ριζικῶν ἐκ διαφορᾶς].

## ΠΙΝΑΞ IV

| Θεώρημα | ΔΙΔΟΝΤΑΙ | Σημ. Εάν τμήμα ὑποτεινούσης ἴσον πρὸς ὅλην ὑποτείνουσαν. | ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ |
|---|---|---|---|
| | ἄλογος | ῥητὴ | |
| 97 | $\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ | ρ | $\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ |
| | ἀποτομὴ τοῦ θεωρήματος 73. | | τῆς πρώτης ἀποτομῆς τοῦ θ. 85. |
| 98 | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ | ρ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ |
| | πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74. | | τῆς δευτέρας ἀποτομῆς 86. |
| 99 | $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ | ρ | $\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ |
| | δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75. | | τῆς τρίτης ἀποτομῆς 87. |
| 100 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ | ρ | $\rho - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ |
| | ἐλάσσων 76. | | τῆς τετάρτης ἀποτομῆς 88. |
| 101 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ | ρ | $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ |
| | μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 77. | | τῆς πέμπτης ἀποτομῆς 89. |
| 102 | $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ | ρ | $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ |
| | μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 78. | | τῆς ἕκτης ἀποτομῆς 90. |

Β. 3. Τὰ θεωρήματα, τὸ 112 καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου 113, θεωροῦμεν γνήσια· ταῦτα ἀποτελοῦσι συνέχειαν ἄμεσον καὶ συνεπῶς ἀναπόσπαστον τμῆμα τοῦ κυρίου μέρους τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων. Παρέχομεν εἰκόνα τούτων εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα. Εἰς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων τούτων κατασκευάζονται ἐξ ὀρθογώνια τρίγωνα. Γνήσια θεωροῦμεν καὶ τὰ θεωρήματα 114, 115.

| | ΔΙΔΟΝΤΑΙ | | ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ |
|---|---|---|---|
| | Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας | Τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς | ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς |
| Θ. 112 | ῥητὴ | τῆς πρώτης δυωνύμου θ. 48 | τῆς πρώτης ἀποτομῆς θ. 85 |
| | » | » δευτέρας δυωνύμου 49 | » δευτέρας ἀποτομῆς 86 |
| | » | » τρίτης δυωνύμου 50 | » τρίτης ἀποτομῆς 87 |
| | » | » τετάρτης δυωνύμου 51 | » τετάρτης ἀποτομῆς 88 |
| | » | » πέμπτης δυωνύμου 52 | » πέμπτης ἀποτομῆς 89 |
| | » | » ἕκτης δυωνύμου 53 | » ἕκτης ἀποτομῆς 90 |
| Θ. 113 | » | τῆς πρώτης ἀποτομῆς 85 | τῆς πρώτης δυωνύμου 48 |
| | » | » δευτέρας ἀποτομῆς 86 | » δευτέρας δυωνύμου 49 |
| | » | » τρίτης ἀποτομῆς 87 | » τρίτης δυωνύμου 50 |
| | » | » τετάρτης ἀποτομῆς 88 | » τετάρτης δυωνύμου 51 |
| | » | » πέμπτης ἀποτομῆς 89 | » πέμπτης δυωνύμου 52 |
| | » | » ἕκτης ἀποτομῆς 90 | » ἕκτης δυωνύμου 53 |


## ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser vertritt mit seiner Interpretation des X. Buches der Elemente Euklids die Meinung, der Zweck des X. Buches sei es, die Symmetrie und Harmonie aufzuzeigen die sich ergibt, wenn man bei der konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks die einfachsten irrationalen Grössen verwendet. Nach einigen Vorbemerkungen stellt der Verfasser fest, dass die Sätze 10 und 27 - 35, den Aufbau der ganzen Theorie des X. Buches der Elemente vorbereiten. In diesen zehn Sätzen werden die einfachsten möglichen irrationale Grössen konstruiert, während in den folgenden Sätzen 36 - 41 sechs irrationale Summen von diesen Grössen gebildet werden. Diese sind : 1) Binomiale 2) Erste Bimediale 3) Zweite Bimediale 4) Major 5) Quadriert Rationales plus Medialem Ergebende 6) Quadriert die Summe zweier Medialer Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (zweite Definitions - gruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationalen Summen bildet. Diese sind : 1) Erste Binomiale 2) Zweite Binomiale 3) Dritte Binomiale 4)

Vierte Binomiale 5) Fünfte Binomiale 6) Sechste Binomiale (48 - 53). Nun wird der erste entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er ist durch die Tafeln I und II wiedergegeben.

Uebersetzung der Titel der Tafeln.

TAFEL I, (und III).

| ES IST GEGEBEN : | | | ES WIRD BEWIESEN : |
|---|---|---|---|
| Von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die von der Höhe geschnitten wird, | | | |
| der 1. Teil die Rationale | der 2. Teil die Irrationale | folglich die Höhe | Die Höhe des Dreiecks ist eine Irrationale von der Form |

TAFEL II, (und IV).

| ES IST GEGEBEN : | | ES WIRD BEWIESEN : |
|---|---|---|
| Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus die Irrationale | Der eine Hypotenusenabschnitt die Rationale | Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form |

Anstatt der sechs Summen von irrationalen Grössen (Sätze 36 - 41) bildet nun Euklid sechs Differenzen von denselben irrationalen Grössen (Sätze 73 - 78). Diese sind : 1) Apotome 2) Erste Medialapotome 3) Zweite Medialapotome 4) Minor 5) Mit Rationalem mediale Summenfläche Ergebende 6) Mit Medialem mediale Summenfläche Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (dasselbe wie in der 2. Definitionsgruppe, nun 3. Definitionsgruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationale Differenzen bildet. Diese sind : 1) Erste Apotome 2) Zweite Apotome 3) Dritte Apotome 4) Vierte Apotome 5) Fünfte Apotome 6) Sechste Apotome (Sätze 85 - 90). Nun wird der zweite entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er wird durch die Tafeln III und IV wiedergegeben. Die Titel der Tafeln III und IV, sind dieselben wie die der Tafeln I bzw. II.

Satz 112 und seine Umkehrung (S. 113) geben die Konstruktion von 12 rechtwinkligen Dreiecken; die Sätze sind eng mit der ganzen Theorie des X. Buches verbunden.

| | ES SIND GEGEBEN: | | | ES WIRD BEWIESEN: | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Die Höhe des Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus | Der eine Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer | | Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer | |
| 112 | eine Rationale | Ersten Binomiale | S. 48 | Ersten Apotome | S. 85 |
| | » | Zweiten Binomiale | 49 | Zweiten Apotome | 86 |
| | » | Dritten Binomiale | 50 | Dritten Apotome | 87 |
| | » | Vierten Binomiale | 51 | Vierten Apotome | 88 |
| | » | Fünften Binomiale | 52 | Fünften Apotome | 89 |
| | » | Sechsten Binomiale | 53 | Sechsten Apotome | 90 |
| 113 | » | Ersten Apotome | 85 | Ersten Binomiale | 48 |
| | » | Zweiten Apotome | 86 | Zweiten Binomiale | 49 |
| | » | Dritten Apotome | 87 | Dritten Binomiale | 50 |
| | » | Vierten Apotome | 88 | Vierten Binomiale | 51 |
| | » | Fünften Apotome | 89 | Fünften Binomiale | 52 |
| | « | Sechsten Apotome | 90 | Sechsten Binomiale | 53 |

Auch die Sätze 114 und 115 sind eng mit der Theorie des X. Buches verbunden. Infolgedessen darf man sie als echte Sätze betrachten. Die zwölf irrationallen Linien der Sätze 36 - 41 und 73 - 78, sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs biquadratischen Gleichungen. Die zwölf irrationalen Linien der Sätze 48 - 53 und 85 - 90 sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs quadratischen Gleichungen. Es wird aber bemerkt, dass Satz VI 28 schwierigere Probleme löst.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΒ' 1960
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β'
23/24

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1960

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΥ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

## Α'. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ Διόφαντος ἐπιλύει εἰς τὸ Δ' Βιβλίον τῶν Ἀριθμητικῶν του τὰ ἑξῆς προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως·

Πρόβλημα 19

«Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον.

[Ἑρμηνεία: Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν σχηματίζῃ τετράγωνον].

Ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον σὺν ἓν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τετράγωνον ἔχον πλευρὰν τὸν $x$ μὲ τυχόντα συντελεστὴν (σημ. ἐνταῦθα τὴν μονάδα) σὺν ἕν, καὶ ἔστω ἡ πλευρὰ αὕτη $(x+1)$· αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $x^2+2x+1$· ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα θὰ μείνῃ $x^2+2x$· τοῦτο θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἐὰν ὁ δεύτερος κληθῇ $x$, ὁ πρῶτος ἄρα θὰ εἶναι $x+2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον. Ἂς σχηματισθῇ ὁ τετράγωνος οὗτος ἔχων πλευρὰν τὴν $(3x+1)$, ὁπότε ὁ τετράγωνος θὰ εἶναι $9x^2+6x+1$. Ἐὰν ἄρα ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ $9x^2+6x$. Πρέπει λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι $9x^2+6x$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι $x$. Ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, θὰ εἶναι $9x+6$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον, σὺν ἕν, νὰ εἶναι τετράγωνος, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον, σὺν ἕν, εἶναι $9x^2+24x+13$, ἐξισώνω ταῦτα πρὸς τετράγωνον. Καὶ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ $x^2$ τετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ σταθερὸς ὅρος ἦτο τετράγωνος καὶ τὸ $24x$ ἦτο τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τοῦ $9x^2$ καὶ τοῦ 13, τὰ τρία ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος θὰ ἐπληροῦντο ἀπροσδιορίστως (συναρτήσει τοῦ $x$).

Ἀλλὰ ὁ 13 προέρχεται ἐκ τοῦ $2.6+1$, ἀλλὰ ὁ μὲν 2 προέρχεται ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ $x$ ἐπὶ τὴν μονάδα, ὁ δὲ 6 πάλιν προέρχεται ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ $3x$ ἐπὶ τὴν μονάδα. Θέλω λοιπόν, ὅπως τὸ διπλάσιον ἑνὸς συντελεστοῦ τοῦ $x$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἄλλου συντελεστοῦ τοῦ $x$, σὺν ἕν, νὰ δίδῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ διπλάσιον ἑνὸς συντελεστοῦ τοῦ $x$ ἐπὶ τὸ διπλάσιον ἑνὸς ἄλλου συντελεστοῦ τοῦ $x$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τῶν συντελεστῶν τούτων. Θέλω λοιπόν, ὅπως τὸ τετραπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν σὺν ἕν, σχηματίζῃ τετράγωνον. Ἀλλὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ γινομένου δύο τυχόντων ἀριθμῶν σὺν τῷ τετραγώνῳ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν σχηματίζει τετράγωνον [ἰσχύει δηλ. ἡ ταυτότης $4\mu\nu+(\mu-\nu)^2=(\mu+\nu)^2$]. Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν ἴσον πρὸς ἓν καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ἕν. Πρέπει λοιπὸν νὰ σχηματίζωμεν τὰς

πλευρὰς τῶν τετραγώνων μὲ συντελεστὰς τοῦ x, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ [διότι τότε ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα· ἤτοι ἀφοῦ ἡ πρώτη πλευρὰ ἐλήφθη (1 . x+1), ἡ δευτέρα νὰ ληφθῇ (2 . x+1) καὶ ὄχι (3 . x+1)]. Καὶ θὰ εἶναι (ὡς ἐλέχθη) ὁ μὲν $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ $x^2+2x$. Πρέπει ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς $x^2+2x$. Ἂς τεθῇ ὁ δεύτερος $=x$· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ πρῶτος, θὰ εἶναι $x+2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$, ἐὰν ὁμοίως ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, θὰ μείνῃ $4x^2+4x$· πρέπει λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον νὰ εἶναι $4x^2+4x$, ἐξ ὧν ὁ δεύτερος εἶναι $=x$· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, θὰ εἶναι $(4x+4)$.

Καὶ ἐλύθη τὸ πρόβλημα ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον δύο τυχόντων ἀγνώστων, σὺν ἕν, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον καὶ δίδεται εἰς τὸν x οἱαδήποτε τιμὴ θέλει τις. Διότι τὸ νὰ ζητῇ νὰ λύσῃ τις ἓν πρόβλημα ἀπροσδιορίστως σημαίνει νὰ δίδῃ οἱανδήποτε τιμὴν εἰς τὸν x καὶ ἀφοῦ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος νὰ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα».

[Σημ. Ἡ λύσις εἰς σύγχρονον διατύπωσιν: Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ y, z, ω. Τὸ πρόβλημα εἶναι $yz+1=\alpha^2$, $z\omega+1=\beta^2$, $y\omega+1=\gamma^2$. Θέτει $yz+1=(x+1)^2=x^2+2x+1$. Ἐκ τούτου εἶναι $yz=x^2+2x=x(x+2)$. Καλεῖ $z=x$, ὁπότε $y=x+2$. Θέτει ἀκόμη $z\omega+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$.

Ἐκ τούτου εἶναι $z\omega=4x^2+4x=x(4x+4)$. Καὶ ἐπειδὴ $z=x$ εἶναι ἄρα $\omega=4x+4$. Καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι εἶναι

$yz+1=(x+1)^2$, $z\omega+1=(2x+1)^2$ καὶ $y\omega+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$].

## Πρόβλημα 20

«Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μονάδα μίαν ποιῇ τετράγωνον.

[Ἑρμηνεία: Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν σχηματίζῃ τετράγωνον].

Ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν ἕν, νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφαιρέσω μίαν μονάδα, θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ $(x+1)$, τὸ ὁποῖον εἶναι $x^2+2x+1$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τὴν μονάδα, μένει $x^2+2x$ ὡς γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον. Ἔστω ὁ πρῶτος $x$· ὁ δεύτερος ἄρα θὰ εἶναι $x+2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος, σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ $(2x+1)$, δηλαδὴ μὲ συντελεστὴν τοῦ x τὸν κατὰ μονάδα ηὐξημένον συντελεστὴν τοῦ x τοῦ προηγουμένως ληφθέντος $(x+1)$ συμφώνως πρὸς τὸ προδειχθὲν (εἰς τὸ πρόβλημα 19) καὶ ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος τετραγώνου ἀφαιρῶ τὴν μονάδα καὶ θέτω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον ἴσον πρὸς $4x^2+4x$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι $x$· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τρίτος, εἶναι $(4x+4)$.

Πάλιν, ἐπειδὴ θέλω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον σὺν ἓν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, σχηματίζω τὸ τετράγωνον τοῦ ἑπομένου τοῦ $(2x+1)$, ἤτοι τοῦ $(3x+1$ καὶ ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος τετραγώνου ἀφαιρῶν τὴν μονάδα θὰ ἔχω τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον ἴσον πρὸς $9x^2+6x$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι $x$· ὁ ἄλλος ἄρα, ὁ τέταρτος, θὰ εἶναι $(9x+6)$.

Καὶ ἐπειδὴ συμβαίνει τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸν τέταρτον σὺν ἓν νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τέταρτον σὺν ἓν εἶναι $9x^2+24x+13$, θέτω ταῦτα ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$. Ἐξ ἧς $x=\frac{1}{16}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\frac{1}{16}$, ὁ δὲ δεύτερος $\frac{33}{16}$, ὁ δὲ τρίτος $\frac{68}{16}$, ὁ δὲ τέταρτος $\frac{105}{16}$».

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ἔχει ὡς κάτωθι :

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἄγνωστοι $y$, $z$, $\omega$, $\varphi$. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι :

$$yz+1=\alpha^2 \quad (1)$$
$$y\omega+1=\beta^2 \quad (2)$$
$$y\varphi+1=\gamma^2 \quad (3)$$
$$z\omega+1=\delta^2 \quad (4)$$
$$z\varphi+1=\varepsilon^2 \quad (5)$$
$$\omega\varphi+1=\zeta^2 \quad (6).$$

Θέτει $yz+1=(x+1)^2=x^2+2x+1$, ὁπότε $yz=x^2+2x$. Καλεῖ $y=x$, ὅτε $z=x+2$.

Λαμβάνει $y\omega+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$, ὁπότε $y\omega=4x^2+4x=x(4x+4)$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος εἶναι $x$, ὁ τρίτος $\omega$ θὰ εἶναι $=4x+4$.

Θέτει $y\varphi+1=(3x+1)^2=9x^2+6x+1$, ὁπότε $y\varphi=9x^2+6x=x(9x+6)$ καὶ ἀφοῦ $y=x$, θὰ εἶναι $\varphi=(9x+6)$. Τὰ ἐπιτάγματα (1, 2, 3) πληροῦνται συναρτήσει τοῦ $x$ (δηλ. τοῦ πρώτου τῶν ζητουμένων ἀγνώστων). Ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $z$, $\omega$, $\varphi$ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα (4, 6) διότι εἶναι $z\omega+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$ καὶ $\omega\varphi+1=(4x+4)(9x+6)+1=(6x+5)^2$. Μένει πρὸς πλήρωσιν τὸ ἐπίταγμα (5), ἤτοι $z\varphi+1=$τετράγωνος. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $z$, $\varphi$ εἶναι $(x+2)(9x+6)+1=$τετράγωνος. Λαμβάνει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$, ὁπότε εἶναι

$$9x^2+24x+13=9x^2-24x+16, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=\frac{1}{16}=y, \quad z=x+2=\frac{1}{16}+2=\frac{33}{16},$$

$$\omega=4\cdot\frac{1}{16}+4=\frac{68}{16}, \quad \varphi=9x+6=9\cdot\frac{1}{16}+6=\frac{105}{16}$$

καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι :

$$yz+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{17}{16}\right)^2 \quad (1)$$
$$y\omega+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{18}{16}\right)^2 \quad (2)$$
$$y\varphi+1=\frac{1}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{19}{16}\right)^2 \quad (3)$$
$$z\omega+1=\frac{33}{16}\cdot\frac{68}{16}+1=\left(\frac{50}{16}\right)^2 \quad (4)$$
$$z\varphi+1=\frac{33}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{61}{16}\right)^2 \quad (5)$$
$$\omega\varphi+1=\frac{68}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{86}{16}\right)^2 \quad (6)$$

**Ἱστορικὸν σημείωμα**

Τὰ σημεῖα σὺν (+) καὶ πλὴν (−) ἐμφανίζονται διὰ πρώτην φορὰν εἰς ἓν ἐγχειρίδιον ἀριθμητικῆς τοῦ I. W. Eger, ἐκδοθὲν κατὰ τὸ ἔτος 1489. Ἡ χρῆσις ὅμως τῶν σημείων τούτων γίνεται συνήθης ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως τοῦ ἔργου τοῦ Μιχαὴλ Stiefel : Arithmetica integra authore Mich. Stifelio cum praefatione Phil. Melanchton. Norinbergae, 1544 (Νυρεμβέργη).

Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος (=) εἰσήχθη εἰς τὰ μαθηματικὰ κατὰ τὸ ἔτος 1557 ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου Γεωμέτρου Robert Recorde εἰς ἐγχειρίδιον αὐτοῦ ἀλγέβρας.

Ὑπὸ τοῦ François Viète (1540—1600) εἰσήχθησαν αἱ διὰ γραμμάτων ἀλγεβρικαὶ πράξεις ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν.

Κατωτέρω παρέχομεν συμβολισμούς τινας τοῦ Διοφάντου χρησιμοποιουμένους εἰς τὰ προβλήματα IV, 19, 20.

| | | |
|---|---|---|
| Ἡ μονὰς συμβολίζεται διὰ | | $\overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$ |
| Αἱ δύο μονάδες | » | $\overset{\circ}{M}\ \overline{\beta}$ |
| Ὁ ἄγνωστος x | » | ς |
| Τὸ x+1 | » | ς $\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\alpha}$ |
| Τὸ x+2 | » | ς $\overline{\alpha}$ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\beta}$ |
| Τὸ $4x^2+4x$ | » | $\overline{\Delta^y}$ δ ς $\overline{\delta}$ |
| Τὸ 4x+4 | » | ς $\overline{\delta}$ $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\delta}$ |
| Τὸ 3x—4 | » | ς $\overline{\gamma}$ /\| $\overset{\circ}{M}$ $\overline{\delta}$ |

Τὸ $x^2+18x+81=x^2+25x$ συμβολίζεται διὰ $\Delta^y\ \overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\iota\eta}\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\pi\alpha}$, ἴσ. $\Delta^y\ \overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\kappa\varepsilon}$.

Ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τίθεται δεξιὰ τοῦ $\overset{\circ}{M}$. Εἶναι π.χ. $\overset{\circ}{M}\ \overline{\gamma}$ = Μονάδες 3. Ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου x τίθεται δεξιὰ αὐτοῦ ἀντὶ ἀριστερά, ὡς συνηθίζεται σήμερον. Ἡ τοποθέτησις τῶν διαφόρων ἀριθμῶν (συμβόλων) κατὰ παράταξιν σημαίνει πρόσθεσιν. Εἶναι π. χ.

$$\varsigma\ \overline{\gamma}\ \overset{\circ}{M}\overline{\varepsilon} = x\,.\,3+\text{μονάδες } 5 = 3x+5.$$

Τὸ τετράγωνον τοῦ x ἐκφράζεται διὰ τοῦ $\Delta^y$, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τῆς λέξεως Δύναμις. Τὸ δεύτερον γράμμα τῆς λέξεως ΔΥΝΑΜΙΣ τίθεται ὡς ἐκθέτης τοῦ πρώτου γράμματος Δ. Τὸ σημεῖον «πλὴν» παρίσταται δι' ἑνὸς λάμβδα κεφαλαίου ἔχοντος καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ Λ, ἤτοι /|\. Ἡ ἐξίσωσις $x^2+18x+81=x^2+25x$ παρίσταται $\Delta^y\ \overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\iota\eta}\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\pi\alpha}$, ἴσ. $\Delta^y\ \overline{\alpha}\ \varsigma\ \overline{\kappa\varepsilon}$ δηλ. ἓν τετράγωνον τοῦ $x+x\,.\,18+$μονάδες $81=$ἓν τετράγωνον τοῦ $x+x\,.\,25$.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἐπὶ τοῦ 20 προβλήματος τοῦ IV Βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Fermat, ὅστις εἶναι σπουδαῖος σχολιαστὴς τοῦ Διοφάντου, γράφει τὰ ἑξῆς: «Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ 1, 3, 8, ὁπότε κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ 19 προβλήματος τοῦ IV Βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου θὰ εἶναι $1\,.\,3+1=2^2$, $1\,.\,8+1=3^2$, $3\,.\,8+1=5^2$. Ἐὰν ζητῆται καὶ τέταρτος ἀριθμός καὶ καλέσωμεν αὐτὸν x, θὰ εἶναι ἀκόμη $3x+1=$τετράγωνος, $8x+1=$τετράγωνος, $x+1=$τετράγωνος, ἤτοι προκύπτουσι τρεῖς συναληθεύουσαι ἐξισώσεις, αἵτινες ἐπιλύονται κατὰ τὴν ὑπ' ἐμοῦ ἐπινοηθεῖσαν μέθοδον. Ἴδε τὴν παρατήρησίν μου εἰς τὸ 24 πρόβλημα τοῦ VI Βιβλίου (τοῦ Διοφάντου)». [G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos von Alexandria, Teubner, σ. 145—146].

**Παρατήρησις**

Ὁ Διόφαντος λύει τὸ πρόβλημα: νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος. Ἀκολούθως λύει τὸ πρόβλημα: νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀπροσδιορίστως, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος, ἤτοι λύει τὸ πρόβλημα δι' ἕνα ἀκόμη ἄγνωστον καὶ δὲν προχωρεῖ νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα διὰ πέντε ἀγνώστους, διὰ ἓξ ἀγνώστους κλπ., διότι εἶναι ἀρκετὴ πρὸς τοῦτο ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει. Τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (ἢ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ) ἐγνώριζον οἱ Πυθαγόρειοι, καὶ ὁ Εὐκλείδης, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης εἰς πολλὰ θεωρήματα τῶν Ἀριθμητικῶν Βιβλίων τῶν Στοιχείων αὐτοῦ. Ἴδε Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη: Εὐκλείδου Στερεομετρία, Στοιχείων τόμος IV, σελὶς 271, Ἀθῆναι, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1957.

## Β'. Η ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

**Νὰ εὑρεθῶσι n τὸ πλῆθος ἀριθμοί, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός.**

### Παρατήρησις

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα IV 20 ὁ Διόφαντος θέτει $9x^2+24x+13=(3x-4)^2$. Ἐκ τούτου γεννᾶται εὐλόγως ἡ ἀπορία : πόθεν ὁ Διόφαντος ὡρμήθη, διὰ νὰ λάβῃ ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τριωνύμου τὴν $(3x-4)$; Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην τοιαύτη λῆψις ὀφείλεται εἰς ἀριθμητικὰς ἐρεύνας τῶν Πυθαγορείων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὡς μειωτέος τῆς διαφορᾶς $(3x-4)$ ἔχει ληφθῆ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $9x^2$. Τοῦτο γίνεται, ἵνα ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις ἀναχθῇ εἰς πρωτοβάθμιον. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ $(3x-4)^2$ ἐλάμβανε $(3x\pm3)^2$ ἢ $(3x+5)^2$, ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ ἦτο ἀρνητική. Ὁ Διόφαντος ὅμως, καίτοι χρησιμοποιεῖ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ἀποφεύγει πάντοτε τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν ἐλάμβανεν ἀντὶ τοῦ $(3x-4)^2$ τὸ $(3x+4)^2$, θὰ εἶχε $0=3$. Ἐὰν ἐλάμβανε $(3x-5)^2$, ὁ x θὰ ἦτο θετικὸς $=\frac{2}{9}$ καὶ τὸ συναφὲς ἐπίταγμα θὰ ἐπληροῦτο διὰ μίαν ἀκόμη θετικὴν τιμὴν τοῦ x. Ὁ ἀφαιρετέος 4 εἰς τὴν διαφορὰν $(3x-4)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅρου τοῦ τριωνύμου τοῦ περιέχοντος τὸν x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ $9x^2$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι προκειμένου ἀλγεβρικὴ παράστασις τῆς μορφῆς $\lambda^2x^2+\lambda\kappa x+\mu$, (1), νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, λαμβάνεται (ὑπὸ τοῦ Διοφάντου), κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἡ διαφορὰ $\left(\lambda x-\frac{\kappa}{2}\right)$, ὅπου $\frac{\kappa}{2}=(\lambda\kappa x : 2\lambda x)$. Ἀκριβῶς τὸν νόμον τοῦτον χρησιμοποιοῦμεν κατὰ τὴν κατωτέρω ἐκτιθεμένην γενίκευσιν τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς ἐρεύνης, τὴν ὁποίαν διενηργήσαμεν κατὰ τὴν γενίκευσιν αὐτήν, διεπιστώσαμεν ὅτι, χωρὶς νὰ θίγηται ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἑνὸς τριωνύμου τῆς μορφῆς (1) καὶ τὰ ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τούτου λαμβανόμενα ἀποτελέσματα, εἶναι δυνατὸν εἴς τινας περιπτώσεις ὁ ἀφαιρετέος τῆς τετραγων. ῥίζης νὰ λαμβάνηται μικρότερος τοῦ $\frac{\kappa}{2}$, πάντοτε ὅμως πρέπει νὰ εἶναι $\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2>\mu$ διὰ νὰ εἶναι $x>0$. Εἰς τὴν παράστασιν π.χ. $x_1x_5+1=(x+2)(25x+10)+1=25x^2+60x+21$, (2), τὴν ὁποίαν θὰ συναντήσωμεν κατωτέρω, θέτομεν τὸ τριώνυμον (2) ἴσον πρὸς $(5x-6)^2$, κατὰ τὸν καθ' ἡμᾶς ὑποτιθέμενον τρόπον σχηματισμοῦ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ τριωνύμου θεωρουμένου ὡς τετραγώνου. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ τεθῇ τὸ τριώνυμον καὶ ἴσον πρὸς $(5x-5)^2$ καὶ νὰ πληροῦται τὸ ζητούμενον ἐπίταγμα, ἐφ' ὅσον ὁ $5^2>21$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετική.

### Ἡ γενίκευσις τοῦ προβλήματος

Τὸ πρόβλημα εἶναι .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $xx_1+1=\alpha_1^2$ | $x_1x_2+1=\beta_1^2$ | $x_2x_3+1=\gamma_1^2$ | $x_3x_4+1=\delta_1^2$ | $\ldots x_{\nu-1}x_\nu+1=\xi^2$ |
| $xx_2+1=\alpha_2^2$ | $x_1x_3+1=\beta_2^2$ | $x_2x_4+1=\gamma_1^2$ | $x_3x_5+1=\delta_2^2$ | |
| $xx_3+1=\alpha_3^2$ | $x_1x_4+1=\beta_3^2$ | $x_2x_5+1=\gamma_3^2$ | $x_3x_6+1=\delta_3^2$ | |
| . | . | . | . | |
| . | . | . | . | |
| . | . | . | . | |
| . | . | . | . | |
| $xx_\nu+1=\alpha\nu^2$ | $x_1x_\nu+1=\beta^2\nu-1$ | $x_2x_\nu+1=\gamma^2\nu-2$ | $x_3x_\nu+1=\delta^2\nu-3$ | |

Ἐπιλύομεν τὸ πρόβλημα ἐνδεικτικῶς διὰ ἑπτὰ ἀγνώστους καὶ ἀκολούθως διατυποῦμεν τοὺς γενικοὺς νόμους διὰ n ἀγνώστους, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος.

Καλοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων x καὶ τοὺς ἄλλους ἐξ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι :

1. $xx_1+1=\alpha_1^2$
2. $xx_2+1=\alpha_2^2$
3. $xx_3+1=\alpha_3^2$
4. $xx_4+1=\alpha_4^2$
5. $xx_5+1=\alpha_5^2$
6. $xx_6+1=\alpha_6^2$
7. $x_1x_2+1=\beta_1^2$
8. $x_1x_3+1=\beta_2^2$
9. $x_1x_4+1=\beta_3^2$
10. $x_1x_5+1=\beta_4^2$
11. $x_1x_6+1=\beta_5^2$
12. $x_2x_3+1=\gamma_1^2$
13. $x_2x_4+1=\gamma_2^2$
14. $x_2x_5+1=\gamma_3^2$
15. $x_2x_6+1=\gamma_4^2$
16. $x_3x_4+1=\delta_1^2$
17. $x_3x_5+1=\delta_2^2$
18. $x_3x_6+1=\delta_3^2$

19. $x_4x_5+1=\varepsilon_1^2$, 20. $x_4x_6+1=\varepsilon_2^2$, 21. $x_5x_6+1=\zeta_1^2$.

Θέτομεν 1. $xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1$ Εἶναι ἄρα $x_1=x+2$

2. $xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1$ » » $x_2=4x+4$

3. $xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1$ » » $x_3=9x+6$

4. $xx_4+1=(4x+1)^2=x(16x+8)+1$ » » $x_4=16x+8$

5. $xx_5+1=(5x+1)^2=x(25x+10)+1$ » » $x_5=25x+10$

6. $xx_6+1=(6x+1)^2=x(36x+12)+1$ » » $x_6=36x+12$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $x_1, x_2 \ldots x_6$ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα 1—6 συναρτήσει τοῦ x. Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὰ ἐπιτάγματα 7—21 λαμβάνομεν :

7. $x_1x_2+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$.

8. $x_1x_3+1=(x+2)(9x+6)+1=9x^2+24x+13$. Θέτομεν τοῦτο ἴσον πρὸς $(3x-4)^2$, (ὡς πράττει ὁ Διόφαντος εἰς τὸ πρόβλημα 20), ἐξ ἧς λαμβάνομεν $x=\frac{1}{16}$.

9. $x_1x_4+1=(x+2)(16x+8)+1=16x^2+40x+17=(4x-5)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{10}$.

[Σημ. Ὁ τρόπος σχηματισμοῦ τῆς διαφορᾶς $(4x-5)$ ἐκτίθεται εἰς τὴν προηγουμένην παρατήρησιν. Οὗτος θὰ ἐφαρμοσθῇ κατωτέρω ὀκτὼ φοράς ἀκόμη].

10. $x_1x_5+1=(x+2)(25x+10)+1=25x^2+60x+21=(5x-6)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{8}$

11. $x_1x_6+1=(x+2)(36x+12)+1=36x^2+84x+25=(6x-7)^2$ » $x=\frac{1}{7}$

12. $x_2x_3+1=(4x+4)(9x+6)+1=36x^2+60x+25=(6x+5)^2$

13. $x_2x_4+1=(4x+4)(16x+8)+1=64x^2+96x+33=(8x-6)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{64}$

14. $x_2x_5+1=(4x+4)(25x+10)+1=100x^2+140x+41=(10x-7)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{35}$

15. $x_2x_6+1=(4x+4)(36x+12)+1=144x^2+192x+49=(12x-8)^2$ » $x=\frac{5}{128}$

16. $x_3x_4+1=(9x+6)(16x+8)+1=144x^2+168x+49=(12x+7)^2$

17. $x_3x_5+1=(9x+6)(25x+10)+1=225x^2+240x+61=(15x-8)^2$ » $x=\frac{1}{160}$

18. $x_3x_6+1=(9x+6)(36x+12)+1=324x^2+324x+73=(18x-9)^2$ » $x=\frac{1}{81}$

19. $x_4x_5+1=(16x+8)(25x+10)+1=400x^2+360x+81=(20x+9)^2$

20. $x_4x_6+1=(16x+8)(36x+12)+1=576x^2+480x+97=(24x-10)^2$ ἐξ ἧς $x=\frac{1}{320}$

21. $x_5x_6+1=(25x+10)(36x+12)+1=900x^2+660x+121=(30x+11)^2$.

## Οἱ γενικοὶ νόμοι ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος

Καλοῦμεν $x$ ἕνα τῶν ἀγνώστων n, συναρτήσει τοῦ ὁποίου θὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λοιποὺς (n—1) ἀγνώστους. Τούτους παριστῶμεν ὡς ἑξῆς : $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_\nu$, ὅπου

$$\nu=n-1.$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν 21 ἐπιταγμάτων τὰ 11 πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ $x$, ἐνῷ τὰ 10 δὲν πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ $x$.

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος μὲ ἑπτὰ ἀγνώστους συνάγομεν ἐπαγωγικῶς τοὺς κάτωθι νόμους διὰ n ὁσονδήποτε μεγάλον.

Νόμος 1. Τὸ πλῆθος τῶν ζητουμένων ἐπιταγμάτων εἶναι $\frac{(n-1)n}{2}$.

Νόμος 2. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων $x_\nu$ συναρτήσει τοῦ $x$ εἶναι κατὰ τὴν ἐπαγωγικὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου

| | | |
|---|---|---|
| ἐκ τοῦ | $xx_1+1=(x+1)^2=x^2+2x+1$ | $x_1=x+2$ |
| » » | $xx_2+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$ | $x_2=4x+4$ |
| » » | $xx_3+1=(3x+1)^2=9x^2+6x+1$ | $x_3=9x+6$ |
| » » | $xx_4+1=(4x+1)^2=16x^2+8x+1$ | $x_4=16x+8$ |
| » » | . | . |
| » » | . | . |
| » » | $xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=\nu^2x^2+2\nu x+1$ | $x_\nu=\nu^2x+2\nu$ |

($\nu=1, 2, 3 \ldots .$)

Νόμος 3. Τὸ γινόμενον τοῦ $x$ ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀγνώστων, σὺν ἕν, εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$xx_i+1=(ix+1)^2, \quad (i=1, 2, 3 \ldots), \quad (1)$$

Νόμος 4. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἕν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i\,x_{i+1}+1=[i(i+1)x+(2i+1)]^2, \quad (2)$$

Διὰ $i=10$ π. χ. ἔχομεν $x_{10}=10^2x+20$, $x_{11}=11^2x+22$ καὶ

$$x_{10}x_{11}+1=(10^2x+20)(11^2x+22)+1=[10\,.\,11x+21]^2=(110x+21)^2.$$

Νόμος 5. Τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἕν εἶναι πάντοτε τετράγωνος τῆς μορφῆς

$$x_i\,x_{i+\kappa}+1=(i^2x+2i)[(i+\kappa)^2x+2(i+\kappa)]+1=[i(i+\kappa)x-(2i+\kappa)]^2, \quad \kappa\geqq 2, \quad (3)$$

Διὰ $i=8$, $x=3$ π. χ. ἔχομεν $x_i=x_8=8^2x+16$, $x_{i+\kappa}=x_{11}=11^2x+22$ καὶ

$$x_8x_{11}+1=(64x+16)(121x+22)+1=(88x-19)^2.$$

Νόμος 6. Διὰ $n\geqq 4$ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων, τὰ ὁποῖα πληροῦνται διὰ τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ $x$ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (3) ἰσοῦται πρὸς $(n-2)(n-3) : 2$. Διὰ $n=7$ π. χ. τὰ συναφῆ ἐπιτάγματα εἶναι $(7-2)(7-3) : 2=10$, ὡς βεβαιούμεθα ἐκ τῆς διαπραγματευθείσης ἐνδεικτικῶς περιπτώσεως τοῦ προβλήματος μὲ ἑπτὰ ἀγνώστους.

*Σημείωσις.* Σχετικῶς πρὸς τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἰς τὸ μόλις ἐκδοθὲν Μαθηματικὸν Λεξικόν, ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, ἀναγράφονται εἰς τὴν λέξιν Μαυρόλυκος (Maurolico, Francesco) τὰ ἑξῆς· « . . . Ἐκ τῶν πονηματίων (Opuscula) παρέλαβεν ὁ Pascal τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἡ ὁποία, ἐννοεῖται, εὑρίσκετο ἤδη εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου VII, 27 ».

## Zusammenfassung

Diophant löst das Problem drei bzw. vier Zahlen von der Art zu finden, dass die Produkte von je zweien Zahlen vermehrt um 1, ein Quadrat ergeben (Diophantos' Arithm. IV 19, 20). Es wird das Problem für n Zahlen, wobei n beliebig gross ist, gelöst und die allgemeinen Gesetze aufgestellt.

Bemerkung. Man setzt als Quadratwurzel eines Polynoms von der Form $\lambda^2x^2+\lambda\kappa x+\mu$ die Differenz $\left(\lambda x-\frac{\lambda\kappa x}{2\lambda x}\right)$, so dass $\lambda^2x^2+\lambda\kappa x+\mu=\left(\lambda x-\frac{\kappa}{2}\right)^2$ ist.

Wir nennen $x$ eine der unbekannten Zahlen und ordnen die anderen in einer Reihe mit Indizen, wie $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_\nu$, $(\nu=n-1)$.

1. Die Zahl der Forderungen ist gleich $\frac{(n-1)n}{2}$.

2. Die Werte der unbekannten Zahlen als Funktionen von $x$ sind

$$x_1=x+2 \quad \text{aus} \quad xx_1+1=(x+1)^2=x^2+2x+1=x(x+2)+1$$
$$x_2=4x+4 \quad » \quad xx_2+1=(2x+1)^2=4x^2+4x+1=x(4x+4)+1$$
$$x_3=9x+6 \quad » \quad xx_3+1=(3x+1)^2=9x^2+6x+1=x(9x+6)+1$$
$$\vdots$$
$$x_\nu=\nu^2x+2\nu \quad » \quad xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=\nu^2x^2+2\nu x+1=x(\nu^2x+2\nu)+1$$

3. Das Produkt von $x$ mit je einer der unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$xx_i+1=[ix+1]^2, \quad (i=1, 2, 3 \ldots), \quad (1)$$

4. Das Produkt von je zweien sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_i\, x_{i+1}+1=[i(i+1)x+(2i+1)]^2, \quad (2).$$

5. Das Produkt von je zweien nicht sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_i\, x_{i+\varkappa}+1=[i(i+\varkappa)x-(2i+\varkappa)]^2, \quad \varkappa \geqq 2, \quad (3).$$

6. Für $n \geqq 4$ ist die Zahl der Forderungen, die gemäss der vorigen Formel (3) für positive Werte von $x$ erfüllt sind, gleich $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Anmerkuug. In Bezug auf das Prinzip der vollständigen Induktion, das man nach unserer Auffassung in den Problemen IV, 19, 20 findet, lesen wir im mathematischen Wörterbuch der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1961) im Stichwort M a u r o l i c o folgendes; « . . . . Aus den Opuscula entnahm P a s c a l das Prinzip der vollständigen Induktion, das freilich schon bei E u k l i d, Elemente VII, 27 zu finden gewesen wäre ».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ*

# ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

## ΠΑΡΑ ΠΛΑΤΩΝΙ

Α'. Ὁ Γεώργιος Κάντορ εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἀρχαὶ μιᾶς γενικῆς θεωρίας τῶν συνόλων, σελ. 43, Λειψία 1883 (Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre) γράφει τὰ ἑξῆς: Θεωρῶ ποικιλίαν ἢ σύνολον πᾶν πλῆθος, τὸ ὁποῖον νοεῖται ὡς ἕν, δηλ. πᾶσαν συμπερίληψιν καθωρισμένων στοιχείων, τὰ ὁποῖα δυνάμει ἑνὸς νόμου δύνανται νὰ συνδεθῶσιν εἰς ἓν σύνολον καὶ πιστεύω ὅτι διὰ τούτου ὁρίζω τι, τὸ ὁποῖον εἶναι συγγενὲς πρὸς τὸ Πλατωνικὸν εἶδος ἢ ἰδέαν, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Φίληβος ὀνομάζει μεικτόν.

Β'. Περὶ ἰδεῶν καὶ εἰδῶν ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων εἰς τινας διαλόγους αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Παρμενίδης (129—135). Εἰς τὸν Παρμενίδην ὅμως ἀνευρίσκομεν μεταξὺ ἄλλων σπουδαίων μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ γενικάς τινας ἀρχὰς μιᾶς θεωρίας περὶ συνόλων. Ἐκ τῆς θεωρίας ταύτης ἀναφέρομεν ἐνταῦθα μόνον στοιχεῖά τινα, ὡς εἶναι ὁ ὁρισμὸς τοῦ μέρους (στοιχείου) καὶ τοῦ ὅλου (συνόλου):

*Τὸ μέρος που μέρος ὅλου ἐστιν. Τί δὲ τὸ ὅλον; οὐχὶ οὗ ἂν μέρος μηδὲν ἀπῇ ὅλον ἂν εἴη; (137 d - e).*

*—Οὐκ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τὸ μόριον μόριον, ἀλλὰ μιᾶς τινος ἰδέας καὶ ἑνός τινος, ὃ καλοῦμεν ὅλον, ἐξ ἁπάντων ἓν τέλειον γεγονός, τούτου μόριον ἂν τὸ μόριον εἴη (157 d - e).*

Ἑρμηνεία. Τὸ μέρος (στοιχεῖον) εἶναι βεβαίως μέρος ἑνὸς συνόλου. Τί εἶναι σύνολον; Δὲν εἶναι σύνολον ἐκεῖνο, ἀπὸ τοῦ ὁποίου οὐδὲν μέρος ἀπουσιάζει;

—Οὐχὶ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τῶν πραγμάτων τὸ μόριον (στοιχεῖον) εἶναι μόριον, ἀλλὰ μιᾶς τινος ἰδέας καὶ ἑνός τινος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν σύνολον καὶ τὸ ὁποῖον ἐξ ὅλων τῶν στοιχείων ἔχει σχηματισθῇ εἰς ἓν τέλειον, τούτου τὸ στοιχεῖον θὰ εἶναι στοιχεῖον.

Λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος περὶ συνόλων ἀνευρίσκομεν εἰς τὰ σχόλια τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Παρμενίδην καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ ἰδίου, ἥτις φέρεται ὑπὸ τὸν τίτλον Πρόκλου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική (1)

---

* EVANGELOS STAMATIS, The theory of sets by Plato. Practica Akademie of Athens 16.10.1958.

1 Ὁ Gordan χαρακτηρίζει τὴν πρώτην ἀπόδειξιν τοῦ Hilbert διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ πεπερασμένου συστήματος ἀναλλοιώτων ὡς θεολογικήν. A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, Springer - Verlag, Berlin 1928, σελ. 227.

(Fridericus Creuzer, Francofurti ad Moenum, 1822). Αὕτη περιλαμβάνει 211 προτάσεις. Ἐπισημειωτέον ὅτι ἀναίρεσιν τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως τοῦ Πρόκλου ἐπιχειρεῖ διὰ 198 προτάσεων ὁ Ἐπίσκοπος Μεθώνης Νικόλαος διὰ τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀνάπτυξις τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ» (J. Th, Voemel, Francofurti ad Moenum, 1822). Καὶ ἡ πραγματεία ὅμως αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς Πλατωνικῆς θεωρίας περὶ συνόλων. Κατωτέρω παραθέτομεν τέσσαρας ἐκ τῶν 211 προτάσεων τοῦ Πρόκλου, τάς ὑπ' ἀριθμ. 66, 67, 68, 69 διὰ τῶν ὁποίων θεωροῦμεν, ὅτι ἑρμηνεύεται σημαντικῶς ἡ περὶ συνόλων θεωρία τοῦ Πλάτωνος.

### *Πρόταση 66.*

*Πάντα τὰ ὄντα πρὸ ἄλληλα ἢ ὅλα ἐστιν, ἢ μέρη, ἢ ταὐτά, ἢ ἕτερα·*

Ἑρμηνεία. Πάντα τὰ ὄντα θεωρούμενα πρὸς ἄλληλα ἢ εἶναι σύνολα ἢ εἶναι στοιχεῖα, ἢ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, ἢ διάφορα.

### *Πρόταση 67.*

*Πᾶσα ὁλότης ἢ πρὸ τῶν μερῶν ἔστιν, ἢ ἐκ τῶν μερῶν, ἢ ἐν τῷ μέρει. ἢ γὰρ ἐν τῇ αἰτίᾳ τὸ ἑκάστου θεωροῦμεν εἶδος, καὶ ὅλον ἐκεῖνο πρὸ τῶν μερῶν λέγομεν, τὸ ἐν τῷ αἰτίῳ ὑποστάν, ἢ ἐν τοῖς μετέχουσιν αὐτοῦ μέρεσι. Καὶ τοῦτο διχῶς. ἢ γὰρ ἐν ἅπασιν ὁμοῦ τοῖς μέρεσι, καὶ ἔστι τοῦτο ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, οὗ καὶ ὁτιοῦν μέρος ἀπὸν ἐλασσοῖ τὸ ὅλον· ἢ ἐν ἑκάστῳ τῶν μερῶν, ὡς καὶ τοῦ μέρους κατὰ μέθεξιν τοῦ ὅλου γεγονότος. ὃ καὶ ποιεῖ τὸ μέρος εἶναι ὅλον μερικῶς. καθ' ὕπαρξιν μὲν οὖν ὅλον τὸ ἐκ τῶν μερῶν· κατ' αἰτίαν δὲ τὸ πρὸ τῶν μερῶν· καὶ κατὰ μέθεξιν δὲ τὸ ἐν τῷ μέρει. Καὶ γὰρ τοῦτο κατὰ τὴν ἐσχάτην ὕφεσιν ὅλον, ἢ μιμεῖται τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, ὅταν μὴ τὸ τυχὸν ᾖ μέρος, ἀλλὰ τῷ ὅλῳ δυνάμενον ἀφομοιοῦσθαι, οὗ καὶ τὰ μέρη ὅλα ἐστίν.*

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἢ ὑπάρχει πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων του, ἢ ὑπάρχει ἐκ τῶν στοιχείων του, ἢ εἰς ἕκαστον στοιχεῖον του. Διότι ἢ θεωροῦμεν τὴν αἰτίαν [1], δι' ἣν ἐδημιουργήθη τὸ εἶδος ἑκάστου πράγματος (στοιχείου), καὶ τότε τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων τὸ γενόμενον κατ' ἀκολουθίαν τοῦ αἰτίου τῆς δημιουργίας τὸ λέγομεν σύνολον ὑπάρχον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν μερῶν (στοιχείων), ἢ λέγομεν σύνολον κάτι, δυνάμει τῶν μερῶν, ἅτινα μετέχουσιν αὐτοῦ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύνολον ὑπὸ διττὴν ἔννοιαν. 1) Ἢ διότι εἶναι σύνολον ἕνεκα ὅλων τῶν μερῶν αὐτοῦ, καὶ εἶναι τοῦτο σύνολον ἐξ ὅλων τῶν μερῶν του (στοιχείων του), καὶ τὸ ὁποῖον σύνολον ἐλαττοῦται, ὅταν ἀπουσιάζῃ τούτου ὁ,τιδήποτε μέρος. 2) Ἢ διότι ὑπάρχει σύνολον εἰς ἕκαστον τῶν μερῶν του (στοιχείων του) θεωρουμένου τοῦ μέρους ὡς γεγονότος κατὰ μέθεξιν τοῦ συνόλου. Πρᾶγμα τὸ ὁποῖον (ἡ μέθεξις) κάμνει τὸ μέρος (στοιχεῖον) νὰ εἶναι μερικὸν σύνολον (ὑποσύνολον). Καθ' ὕπαρξιν μὲν λοιπὸν ὑπάρχει σύνολον ἀπαρτιζόμενον ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ· κατ' αἰτίαν δὲ ὑπάρχει σύνολον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν

[1] Εἰς τὸν Φίληβον, τὸν ὁποῖον μνημονεύει ὁ G. Cantor ἀναφέρονται τέσσαρες ἀρχαὶ τῶν ὄντων: τὸ ἄπειρον, τὸ πέρας ἔχον, τὸ ἐκ τούτων μεικτόν, καὶ ἡ αἰτία τῆς μείξεως τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ πέρας ἔχοντος (23 c . . . 30 a).

μερῶν του (στοιχείων του)· κατὰ μέθεξιν δὲ ὑπάρχει σύνολον εἰς ἓν μέρος (στοιχεῖον). Διότι καὶ τοῦτο (τὸ σύνολον ἑνὸς στοιχείου) εἶναι σύνολον κατὰ τὴν ἐσχάτην ὑπόστασιν, καθ' ὅσον τὸ στοιχεῖον σύνολον ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων ἀποτελουμένου συνόλου, ὅταν τὸ στοιχεῖον τοῦτο δὲν εἶναι τὸ τυχὸν μέρος, ἀλλὰ δύναται νὰ ἀφομοιωθῇ πρὸς τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου καὶ τὰ στοιχεῖα εἶναι σύνολα.

*Πρότασις 68.*

*Πᾶν τὸ ἐν τῷ μέρει ὅλον, μέρος ἐστὶ τοῦ ἐκ τῶν μερῶν ὅλου. Εἰ γὰρ μέρος ἐστίν, ὅλου τινός ἐστι μέρος, καὶ ἤτοι τοῦ ἐν αὐτοῦ ὅλου, καθὸ λέγεται ἐν τῷ μέρει ὅλον. ἀλλ' οὕτως αὐτὸ ἑαυτοῦ μέρος, καὶ ἴσον τῷ ὅλῳ τὸ μέρος ἔσται καὶ ταὐτὸν ἑκάτερον· ἢ ἄλλου τινος ὅλου. Καὶ εἰ ἄλλου, ἢ μόνον ἐστὶν ἐκείνου μέρος καὶ οὕτως οὐδὲν ἂν πάλιν τοῦ ὅλου διαφέρει, ἑνὸς ὄντος ἓν ὃν μέρος, ἢ μεθ' ἑτέρου.*

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς στοιχείου εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων συνόλου. Διότι, ἐὰν τὸ σύνολον εἶναι ἓν στοιχεῖον, εἶναι στοιχεῖον συνόλου τινός. καὶ ἢ εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἐν τῷ στοιχείῳ αὐτῷ συνόλου, καθόσον λέγεται σύνολον στοιχείου, ἀλλὰ τοιουτοτρόπως αὐτὸ εἶναι μέρος τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ θὰ εἶναι τὸ μέρος ἴσον πρὸς τὸ ὅλον, καὶ ἕκαστον ἐκ τῶν δύο (τὸ στοιχεῖον ὡς στοιχεῖον καὶ τὸ στοιχεῖον ὡς σύνολον) εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· ἢ εἶναι στοιχεῖον ἄλλου τινὸς συνόλου. Καὶ ἐὰν εἶναι στοιχεῖον ἄλλου τινὸς συνόλου (θὰ συμβαίνωσι δύο τινά), ἢ θὰ εἶναι τοῦτο τὸ μόνον στοιχεῖον ἐκείνου τοῦ συνόλου, καὶ τοιουτοτρόπως οὐδόλως θὰ διαφέρῃ πάλιν τοῦ συνόλου, διότι ὑπάρχει ἓν μέρος (στοιχεῖον) ὑπάρχοντος ἑνός, ἢ θὰ ἀποτελῇ σύνολον μὲ ἄλλο στοιχεῖον.

*Πρότασις 69.*

*Πᾶν τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον μετέχει τῆς πρὸ τῶν μερῶν ὁλότητος.*

Ἑρμηνεία. Πᾶν τὸ ἐκ τῶν στοιχείων ἀποτελούμενον σύνολον μετέχει τοῦ συνόλου τοῦ ὑπάρχοντος πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων.

## SUMMARY

George Cantor, in his treatise «Principles of a general theory of sets» [1], p. 43 (Leipzig 1883), mentions the following : I consider variety or set every multitude which is unterstood as a whole i. e., every summary of determined elements which, on the basis of a certain law, can be connected to a single set, and thus I believe that I define something which is relative to the platonic thing or idea and to that which, in this dialoge Philebus, Plato names as mixed» (μεικτόν).

Plato discusses ideas and things in several of his dialoges. Parmenides is one of them (129 - 135). In this dialoge, among various important mathematical meanings, we find several general principles of a theory of

[1] Crundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.

sets. Out of this theory we only quote certain elements, such as the definition of the part (element) and the whole (set):

«The part surely is part of a whole. Yes. And what is the whole? Is not a whole of which no part is wanting?» (137 c).

«Then the part is a part, not of the many nor of all, but of a single form and a single concept which we call a whole, a perfect unity created out of all; this it is of which the part is a part» (157 d - e).

We meet a very interesting development of the platonic theory of sets in Proclus commentaries on Parmenides and in his treatise under the title «Theological Elementalism» [ *Πρόκλου Διαδόχου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική*, Fridericus Creuzer, 1822 ]. It comprizes 211 Propositions. It should be noted that the Bishop of Methoni Nicolaus by his treatise «Development of Theological Elementalism of the Proclus» [ *Νικολάου Ἐπισκόπου Μεθώνης*, Ἀνάπτυξις τῆς θεολογικῆς στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ, J. Th. Voemel, 1822 ], attempts to refute, which 198 Propositions, the theological Elementalism of Proclus. This treatise can be also considered as a coutribution to interpretation of the platonic theory of sets.

We quote here 4 out of the 211 propositions of Proclus (66, 67, 68, 69) trough which, we think, that the platonic theory of sets is considerably interpretated.

Proposition 66.

All things are in relation to themselves, either sets or elements· or are the same elements, or other elements.

Proposition 67.

Every set, either it exists prior to the existence of its elements or it exists own elements or it exists in each of its elements. Because we either concider the cause for which the thing of each element was created and then the set of things made in consequence of the cause of the creation is called set existing before the existence of the elements, or we call set someting, due to the elements which participate in it. The last set is understood under two meanings as under: 1) Either because it is set owing to its all elements and it is set from all of its elements, and which set is being decreated, when any of its elements is wanting. 2) Or because a set exists in each of its elements, the element being considered as fact paticipating in the set. The participation constitutes the part to be a subset. Therefore a) There exists a set consisting of its own elements b) There exists a set a priori, i. e. before the existence of its elements c) There exists a set by participation of a single element. Because this set of

one elements is a set in the last substance, so far as the element «set» has the properties of the set being of its elements, when this element is not the accidental part, but it can assimilated to the set, of which the elemcnts are also sets.

Proposition 68.

Every set consisting of a single element is an element of the set which consists of the elements. Because if the set is simply an element it is then an element of a certain set and 1) Either it is an element of the set, beig set of one only element, because it is said to be a set of the element, but thus it is element of itself, and the part should be equal to the whole, and each of the two (i. e. the element as an element and the element as a whole) is the same thing. 2) Or it is an element of some other set. And if it is an element of some other set then there will be two cases. First either it will be the only element of that set, and thus it will not differ from the set, because there exists an element of an existing one, or second the element will constitute a set with an other element.

Proposition 69.

Every set which consists of elements participates in the set, which exists before the existence of the elements.

# ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ ΚΑΙ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

σ. 34: τὸ *Ληνόχτισμα*=Ἑλληνόχτισμα, δηλ. ἐρείπια ἀρχ. ἑλλ. κτίσματος.
» 35, στ. 16 ἀντὶ ἁρμοστὸς)ἁρμοστὰς νὰ διορθωθῇ: ἁρμοστὸς)ἁρμαστάς.
» 42 » 22 » χιάτη » » χιότη.
» 45 » 33 » Τελψιχόρη » » Τερψιχόρη.
» 46 » 1 » Πουζουλάκης » » Πουζουκάκης.
» 46 » 25 » Ζαχάπης » » Ζαχάρης.
» 48 » 54 » Μανωλάκη » » Μανωλακάκη.
» 177 $\left(\frac{86}{16}\right)^2$ ἀντὶ $\left(\frac{86}{16}\right)^3$.
» 181, στ. 6 ἐκ τῶν κάτω $u=3$ ἀντὶ $x=3$.
» 206 » 3 ἄνωθεν ἀντὶ *λέξεις* γραπτέον *λέξεων*.
» 208 » 23 » » *ὦας* » *ᾠας*.
» 208 » 3 κάτωθεν » *ὅας* » *ᾠας*.
» 210 » 2 » » *Ἱστ. 74, 4* » *Ἱστ. I 65, 4*.
» 212 » 7 » » *Λιος* » *Δίος*.
» 215 » 2 » » *κρατερὴ δὲ ἑ* » *κρατερὴ δέ ἑ*.
» 216 » 1 καὶ 3 ἄνωθεν » *λάξετο* » *λάζετο*.
» 218 » 12 » » *γενικώτερον μετέχουν* » *γενικώτερον, μετέχουν*.
» 219 » 20 κάτωθεν » *διαιτῶν ἀπολυμαντῆρα* » *δαιτῶν ἀπολυμαντῆρα*.
» 221 » 6 » » *ὑποτίθεται* » *ὑποτίθεται,*
» 224 » 5 ἄνωθεν » *γύφτο* » *Γύφτο*.
» 294 » 11 » » *Jean Doxot* » *Jean Dorat*.

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΓ' 1961
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β'
25/26

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1961

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΕΛΛΕΙΠΟΝΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Τοῦ προβλήματος V, 19 τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου σῴζεται μόνον ἡ ἐκφώνησις, ἐνῷ ἡ ἀπόδειξις ἐλλείπει. Ὁ P. Tannery, ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν (1893, Teubner), σημειοῖ τὴν ἔλλειψιν τῆς ἀποδείξεως διὰ μιᾶς γραμμῆς ἐκ στιγμῶν, παραθέτει δὲ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς ἄλλου προβλήματος, τοῦ ὁποίου ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο σημειοῦμεν κατωτέρω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 19 γ.

Ὁ πρῶτος ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Γάλλος μαθηματικὸς Bachet de Méziriac (1621, Paris) ὁρμηθεὶς ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 καὶ ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος V, 19 γ διατυπώνει τὴν γνώμην ὅτι ἐκτὸς τούτων ἐλλείπουν ἀκόμη πλήρως καὶ ἄλλα δύο προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατωτέρω σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν 19 α καὶ 19 β. Ὁ Bachet παρέχει καὶ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων 19, 19 α, 19 β ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Διοφάντου. [Ἴδε O. Schulz, Diophantus, Berlin 1822].

Τὴν γνώμην τοῦ Bachet συμμερίζονται οἱ ἑξῆς ἐκδόται καὶ σχολιασταὶ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου : O. Schulz, Diophantus, Berlin, 1822. G. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890. T. Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge 1910. P. ver Eecke, Diophant d' Alexandrie, Bruges 1926.

Διὰ νὰ γίνῃ καταληπτὴ ἡ ὀρθότης τῆς παρατηρήσεως τοῦ Bachet παραθέτομεν κατωτέρω 9 προβλήματα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ὁποίων καταφαίνεται ὅτι πρόκειται περὶ τριῶν ὁμάδων, ἐκ τριῶν συγγενῶν προβλημάτων ἑκάστης, ἐκ τῶν ὁποίων ἐλλείπουν 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος 19, 2) πλήρως τὰ προβλήματα 19 α καὶ 19 β, 3) ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος 19 γ.

Ἀκολούθως ἀνακατασκευάζομεν τὰ ἐλλείποντα ἀρχαῖα κείμενα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου καὶ προβαίνομεν, τὸ μὲν εἰς τὴν μετάφρασιν τούτων εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν, τὸ δὲ εἰς τὴν σύγχρονον διατύπωσιν τῶν λύσεων (1).

1) Τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 ἀπεστείλαμεν εἰς Λειψίαν κατ' Ἀπρίλιον 1961 πρὸς δημοσίευσιν εἰς τὸν ἑορταστικὸν τόμον τοῦ οἴκου B. C. Teubner ἐπὶ τῇ συμπληρώσει 150 ἐτῶν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς του (1811—1961).

Τὰ 9 προβλήματα τοῦ V βιβλίου (ἔκδ. Tannery, B. C. Teubner).

15

$y+z+\omega=x$
$x^2+y=\alpha^2$
$x^2+z=\beta^2$
$x^2+\omega=\gamma^2$

16

$y+z+\omega=x$
$x^2-y=\alpha^2$
$x^2-z=\beta^2$
$x^2-\omega=\gamma^2$

17

$y+z+\omega=x$
$y-x^2=\alpha^2$
$z-x^2=\beta^2$
$\omega-x^2=\gamma^2$

18

$y+z+\omega=x^2$
$x^6+y=\alpha^2$
$x^6+z=\beta^2$
$x^6+\omega=\gamma^2$

19

$y+z+\omega=x^2$
$x^6-y=\alpha^2$
$x^6-z=\beta^2$
$x^6-\omega=\gamma^2$

[ ἐλλείπει ἡ ἀπόδειξις
Beweis fehlt ]

19 α

$y+z+\omega=x^2$
$y-x^6=\alpha^2$
$z-x^6=\beta^2$
$\omega-x^6=\gamma^2$

[ ἐλλείπει πλήρως
es fehlt ganz ]

19 β

$y+z+\omega=\delta$
$\delta^2+y=\alpha^2$
$\delta^2+z=\beta^2$
$\delta^2+\omega=\gamma^2$

[ ἐλλείπει πλήρως ]
es fehlt ganz

19 γ

$y+z+\omega=\delta$
$\delta^2-y=\alpha^2$
$\delta^2-z=\beta^2$
$\delta^2-\omega=\gamma^2$

[ ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως
Wortlaut und geringer Teil vom Anfang des Beweises fehlt ]

20

$y+z+\omega=\delta$
$y-\delta^2=\alpha^2$
$z-\delta^2=\beta^2$
$\omega-\delta^2=\gamma^2$

## Ἡ ἀνακατασκευὴ τῶν 4 τελείως ἐλλειπόντων κειμένων

### *V, 19 (Ἀπόδειξις)*

*Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς* $\Delta^Y\alpha$, *καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν* $K^Y K\ \frac{\delta}{\gamma}$, *ὁ δὲ* $K^Y K\ \frac{\vartheta}{\eta}$, *ὁ δὲ* $K^Y K\ \frac{\iota\varsigma}{\iota\varepsilon}$. *καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν* $\square^{ον}$.

*λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι* $\Delta^Y\alpha$. *ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν* $K^Y K\frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$· *ταῦτα ἴσα* $\Delta^Y\alpha$. *καὶ πάντα παρὰ* $\Delta^Y\alpha$· *γίνονται* $\Delta^Y\Delta\ \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ *ἴσ.* $\mathring{M}\ \alpha$.

*καὶ ἔστιν ἡ* $\mathring{M}\ \alpha\ \square^{ος}$ *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ον}$· *ὥστε ἄρα καὶ* $\Delta^Y\Delta\ \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ *δεήσει εἶναι* $\square^{ον}$ *πλευρὰν ἔχοντα* $\square^{ον}$· *εἰ ἦσαν καὶ αἱ* $\mathring{M}\ \frac{\rho\mu\delta}{\tau o\alpha}\ \square^{ος}$ *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ον}$, *λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν* $\Delta^Y\Delta$; *ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς τετραγώνους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν* $M\ \alpha$·

καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ $\overset{\circ}{M}\alpha$, τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ $\square^{ον}$, πλευρὰν ἔχοντα $\square^{ον}$.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι $\overset{\circ}{M}\alpha$· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας $\overset{\circ}{M}\alpha$, πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων $\overset{\circ}{M}\alpha$· ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος $\square^{ος}$, πλευρὰν ἔχων $\square^{ον}$ μείζων εἶναι δυάδος. δεῖ οὖν τὰ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\vartheta}$ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi\kappa\vartheta}$, ὁ δὲ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\mu\vartheta}$, ὁ δὲ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\alpha}$.

ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς $\Delta^{Y}\alpha$, τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν $K^{Y}K\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\iota\varsigma}$, ὃν δὲ $\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\varphi o\varsigma}$, ὃν δὲ $K^{Y}K\frac{\chi\kappa\varepsilon}{\chi\kappa\delta}$· καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}$· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^{Y}K\frac{\chi\kappa\varepsilon}{,\alpha\sigma\iota\varsigma}$· καὶ πάντα παρὰ $\Delta^{Y}\alpha$· γίνονται $\Delta^{Y}\Delta\frac{\chi\kappa\varepsilon}{,\alpha\sigma\iota\varsigma}$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}\alpha$. καὶ γίνεται ὁ $\varsigma\frac{\varsigma}{\varepsilon}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

## *V, 19 α*

*Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον.*

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς $\Delta^{Y}\alpha$, καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $K^{Y}K\beta$, ὁ δὲ $K^{Y}K\varepsilon$, ὁ δὲ $K^{Y}K\iota$. καὶ συμβαίνει ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιεῖν $\square^{ον}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\alpha$. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν $K^{Y}K\iota\zeta$· ταῦτα ἴσα $\Delta^{Y}\alpha$· καὶ πάντα παρὰ $\Delta^{Y}\alpha$· γίνονται $\Delta^{Y}\Delta\iota\zeta$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}\alpha$.

Καὶ ἔστιν ἡ $\overset{\circ}{M}\alpha$ $\square^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{ον}$· εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\overset{\circ}{M}\iota\zeta$ $\square^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{ον}$ λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. Ἔστι δὲ ὁ $\iota\zeta$ τριῶν τετραγώνων τὸ σύνθεμα μετὰ $\overset{\circ}{M}\gamma$· δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ $\overset{\circ}{M}\gamma$ ποιεῖ $\square^{ον}$ πλευρὰν ἔχοντα $\square^{ον}$. ἔστω $\overset{\circ}{M}\iota\varsigma$. δεῖ οὖν $\overset{\circ}{M}\iota\gamma$ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους· ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\vartheta$, ὁ δὲ $\frac{\kappa\varepsilon}{\lambda\varsigma}$, ὁ δὲ $\frac{\kappa\varepsilon}{\xi\delta}$· καὶ ἑκάστῳ τούτων προστίθεμαι $\overset{\circ}{M}\alpha$ καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον $K^{Y}K$ τοσούτων, ὑποτιθεμένων τῶν τριῶν $\Delta^{Y}\alpha$. καὶ γίνονται ὁ μὲν $K^{Y}K\iota$, ὁ δὲ $K^{Y}K\frac{\kappa\varepsilon}{\xi\alpha}$, ὁ δὲ $K^{Y}K\frac{\kappa\varepsilon}{\pi\vartheta}$· καὶ συμβήσεται ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}$ α· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^{Y}$ $K$ ις. καὶ πάντα παρὰ $\Delta^{Y}$ α· γίνονται $\Delta^{Y}$ $\Delta$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α· καὶ γίνεται ὁ ϛ $L'$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

## V, 19 β

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β'.

Καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ β ἀριθμοῦ κύβος $\overset{\circ}{M}$ η. δεῖ οὖν τὸν β διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τούτων προσλαβὼν $\overset{\circ}{M}$ η ποιῇ $\square^{ον}$. δεήσει οὖν τὸν κς διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ η. τάσσω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων $\overset{\circ}{M}$ θ ὃς μείζων ἐστι $\overset{\circ}{M}$ η. ἐὰν οὖν διέλω τὸν ιζ εἰς δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ η λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιζ τὸ $L'$ καὶ γίνεται η $L'$, καὶ ζητῶ τὶ μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overset{\circ}{M}$ η $L'$ καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$· καὶ πάντα τετράκις· ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overset{\circ}{M}$ λδ καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$· ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον $\Delta^{Y\chi}$ α καὶ γίνονται $\overset{\circ}{M}$ λδ $\Delta^{Y\chi}$ α ἴσ. $\square^{\varphi}$.

καὶ πάντα ἐπὶ $\Delta^{Y}$· γίνονται $\Delta^{Y}$ λδ $\overset{\circ}{M}$ α ἴσ. $\square^{\varphi}$· ἔστω τῷ ἀπὸ $\pi^{\lambda}$· $\overset{\circ}{M}$α ⁄|\ ϛ ς καὶ γίνεται ὁ ϛ Mς· $\Delta^{Y}$ ἄρα $\overset{\circ}{M}$λς, τὸ $\Delta^{Y\chi}$ $\overset{\circ}{M}$λς χ. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς λδ προστιθέμενον λς χ· τὸ ἄρα ταῖς $\overset{\circ}{M}$ η $L'$ προστιθέμενον ρμδ χ καὶ ποιεῖ $\square^{ον}$ τὸν ἀπὸ $\pi^{\lambda}$· $\frac{\iota\beta}{\lambda\varepsilon}$.

Δεῖ οὖν τὸν ιζ διαιρούμενον εἰς δύο $\square^{ους}$ κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα $\frac{\iota\beta}{\lambda\varepsilon}$, καὶ ζητῶ τὶ ἡ τετρὰς λείψασα, προσλαβοῦσα μονὰς ποιεῖ τὸν αὐτόν, τουτέστιν $\frac{\iota\beta}{\lambda\varepsilon}$.

τάσσω οὖν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἀπὸ ϛ κγ $\overset{\circ}{M}$ α, τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ $\overset{\circ}{M}$ δ ⁄|\ ϛ ιγ, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν $\square^{ων}$, $\Delta^{Y}$ χϟη $\overset{\circ}{M}$ ιζ ⁄|\ ϛ νη ἴσ. ιζ. καὶ γίνεται ὁ ϛ $\frac{\tau\mu\vartheta}{\kappa\vartheta}$· ἔσται ἄρα τοῦ ἑνὸς τῶν $\square^{ων}$ ἡ $\pi^{\lambda}$· $\frac{\tau\mu\vartheta}{,\alpha\iota\varsigma}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\frac{\tau\mu\vartheta}{,\alpha\iota\vartheta}$· καὶ ἐὰν ἄρω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τριῶν $\square^{ων}$ $\overset{\circ}{M}$ η ἕξω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.

## V, 19 γ.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς,

*ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.*

*ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β.*

(Ἑρμηνεία: ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον δίδῃ τετράγωνον. Ἔστω ὁ δοθεὶς 2). Σημ. Ἡ ἀπόδειξις ὑπάρχει εἰς τὸ κείμενον.

## Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V 19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^2$ καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{3}{4}x^6$, ὁ δὲ $\frac{8}{9}x^6$, ὁ δὲ $\frac{15}{16}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς $x^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $\frac{371}{144}x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς $x^2$. Καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ $x^2$· λαμβάνεται $\frac{371}{144}x^4=1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος ἀριθμός· ὥστε ἄρα θὰ εἶναι ἀνάγκη καὶ ὁ $\frac{371}{144}x^4$ νὰ εἶναι διτετράγωνος ἀριθμός. (Σημ. διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις). Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{371}{144}$ ἦτο διτετράγωνος ἀριθμὸς τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ· πόθεν προῆλθεν ὁ συντελεστὴς τοῦ $x^4$; προῆλθεν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ 3 τοῦ ἀθροίσματος τριῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· καὶ ἀνάγεται οὕτω τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν.

Καὶ ζητοῦμεν ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μικρότερον τῆς μονάδος κατὰ μείζονα λόγον ἕκαστος αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος. Κατὰ συνέπειαν πρέπει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι διτετράγωνος, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2.

Ἂς ταχθῇ ὡς ὑπόλοιπον διτετράγωνος μεγαλύτερος τοῦ 2· ἔστω ὁ $\frac{1296}{625}$· Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ $\frac{579}{625}$ εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ὁ εἷς τῶν ζητουμένων θὰ εἶναι $\frac{529}{625}$, ὁ ἄλλος $\frac{49}{625}$ καὶ ὁ τρίτος $\frac{1}{625}$.

Ἀνατρέχομεν τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^2$, ἐκ δὲ τῶν ζητουμένων τὸν μὲν $\frac{96}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{576}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{624}{625}x^6$. Καὶ θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς $x^2$· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $\frac{1296}{625}x^6$· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ $x^2$ λαμβάνεται $\frac{1296}{625}x^4=1$. Καὶ γίνεται ὁ $x=\frac{5}{6}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

9

## Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=x^2$, (1), $x^6-y=\alpha^2$, (2), $x^6-z=\beta^2$, (3), $x^6-\omega=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $y=\frac{3}{4}x^6$, $z=\frac{8}{9}x^6$, $\omega=\frac{15}{16}x^6$, ὁπότε θὰ εἶναι $x^6-\frac{3}{4}x^6=\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{8}{9}x^6=\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{15}{16}x^6=\left(\frac{1}{4}x^3\right)^2$ ἤτοι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ $x$. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1), εἰς τὴν ὁποίαν δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $\left(\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}\right)x^6=x^2$, ἢ $\frac{371}{144}x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς $\frac{371}{144}$ νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου.

Ὁ $\frac{3}{4}=\left(1-\frac{1}{4}\right)$, ὁ $\frac{8}{9}=\left(1-\frac{1}{9}\right)$, ὁ $\frac{15}{16}=\left(1-\frac{1}{16}\right)$. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ ἦτο $3-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=$διτετράγωνος. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, (καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μικρότερον τῆς μονάδος), τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν. Ἐὰν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους $\kappa^2$, $\lambda^2$, $\mu^2$ καὶ τὸν διτετράγωνον $\xi^4$ θὰ εἶναι $3-\xi^4=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$. Ἔστω $\xi^4=\left(\frac{6}{5}\right)^4=\frac{1296}{625}$ ὁπότε θὰ εἶναι $3-\frac{1296}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$ ἢ $\frac{579}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$. Εἶναι δὲ $2<\frac{1296}{625}<3$ καὶ $\frac{579}{625}<1$. Ὁ $\frac{579}{625}$ ἀναλύεται εἰς τρεῖς τετραγώνους, τοὺς $\kappa^2=\frac{529}{625}$, $\lambda^2=\frac{49}{625}$, $\mu^2=\frac{1}{625}$.

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν

$y+z+\omega=x^2$ καὶ $y=\left(1-\frac{529}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } y=\left(1-\frac{1}{4}\right)x^6\right]$, $z=\left(1-\frac{49}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } z=\left(1-\frac{1}{9}\right)x^6\right]$, $\omega=\left(1-\frac{1}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } \omega=\left(1-\frac{1}{16}\right)x^6\right]$, ἤτοι $y=\frac{96}{625}x^6$, (5), $z=\frac{576}{625}x^6$, (6), $\omega=\frac{624}{625}x^6$, (7). Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ $x$, ἤτοι εἶναι

$$x^6-\frac{96}{625}x^6=\left(\frac{23}{25}x^3\right)^2,\quad x^6-\frac{576}{625}x^6=\left(\frac{7}{25}x^3\right)^2,\quad x^6-\frac{624}{625}x^6=\left(\frac{1}{25}x^3\right)^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) τῶν τιμῶν $y$, $z$, $\omega$ λαμβάνομεν

$$\left(\frac{96}{625}+\frac{576}{624}+\frac{624}{625}\right)x^6=x^2,\ \text{ἐξ ἧς } x=\frac{5}{6}.$$

Ἐκ τῶν (5, 6, 7) εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y=\frac{96}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{2400}{46656},\ x^6-y=\frac{15625}{46656}-\frac{2400}{46656}=\left(\frac{115}{216}\right)^2$$

$$z=\frac{576}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{14400}{46656},\ x^6-z=\frac{15625}{36656}-\frac{14400}{46656}=\left(\frac{35}{216}\right)^2$$

$$\omega=\frac{624}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15600}{46656},\ x^6-\omega=\frac{15625}{46656}-\frac{15600}{46656}=\left(\frac{5}{216}\right)^2$$

$$y+z+\omega=\frac{2400+14400+15600}{46656}-\frac{32400}{46656}=\left(\frac{180}{216}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

## Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V, 19 α

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου δίδῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $x^3$ καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $2x^6$, ὁ δὲ $5x^6$, ὁ δὲ $10x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς $x^2$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $17x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς $x^2$· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ $x^2$ γίνεται $17x^4=1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ 17 ἦτο διτετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ Εἶναι δὲ ὁ 17 τὸ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων σὺν 3. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16. Πρέπει λοιπὸν ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους· θὰ εἶναι ὁ μὲν 9, ὁ δὲ $\frac{36}{25}$, ὁ δὲ $\frac{64}{25}$. Καὶ εἰς ἕκαστον τούτων προσθέτω τὴν μονάδα καὶ ἐπανέρχομαι εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Θέτω ἕκαστον τούτων ὡς συντελεστὴν τοῦ $x^6$, λαμβανομένου τοῦ ἀθροίσματος ἴσου πρὸς $x^2$. Καὶ γίνονται ὁ μὲν $10x^6$ ὁ δὲ $\frac{61}{25}x^6$, ὁ δὲ $\frac{89}{25}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς $x^2$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $16x^6$. Καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ $x^2$ γίνεται $16x^4=1$. καὶ γίνεται ὁ $x=\frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

## Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=x^3$, (1), $y-x^6=\alpha^2$, (2), $z-x^6=\beta^2$, (3), $\omega-x^6=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $y=2x^6$, $z=5x^6$, $\omega=10x^6$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4), συναρτήσει τοῦ $x$. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1). Ἐκ ταύτης δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $y$, $z$, $\omega$ εἶναι $17x^6=x^3$ ἢ $17x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς 17 νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου. Ὁ $17=(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι, ἂν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους $\kappa^2$, $\lambda^2$, $\mu^2$,

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+3=16$ ἢ $\kappa^2+\lambda^2+\mu^2=13$. Ὁ 13 ἀναλύεται εἰς τοὺς τρεῖς τετραγώνους 9, $\frac{36}{25}$, $\frac{64}{25}$. Εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων προσθέτομεν τὴν μονάδα, ὁπότε εἶναι $10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}=16$ καὶ θέτομεν $y=10x^6$, (5), $z=\frac{61}{25}x^6$, (6), $\omega=\frac{89}{25}x^6$, (7). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\left(10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}\right)x^6=x^3 \text{ ἢ } 16x^4=1, \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{1}{2}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (5, 6, 7) λαμβάνομεν

$$y=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{32},\ z=\frac{61}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{61}{1600},\ \omega=\frac{89}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{89}{1600}$$

καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y+z+\omega=\frac{5}{32}+\frac{61}{1600}+\frac{89}{1600}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y-x^6=\frac{5}{32}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{3}{8}\right)^2,\ z-x^6=\frac{61}{1600}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{3}{20}\right)^2$$

$$\omega-x^6=\frac{89}{1600}-\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

## Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V, 19 β.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 2.

Καὶ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 2 ὁ 8. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 2 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 26 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Θέτω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἐὰν λοιπὸν ἀναλύσω τὸν 17 εἰς δύο τετραγώνους λύω τὸ ζητούμενον. Λαμβάνω τοῦ 17 τὸ ἥμισυ, τὸ ὁποῖον εἶναι $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητῶ νὰ εὕρω ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ δίδεται τετράγωνος· πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4· ζητῶ ἄρα νὰ εὕρω τετραγ. κλάσμα, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν 34 νὰ δίδῃ τετράγωνον· ἔστω τὸ τετραγωνικὸν κλάσμα $\frac{1}{x^2}$, ὁπότε εἶναι $34+\frac{1}{x^2}$ = τετράγωνος. Διὰ πολ)σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ $x^2$ λαμβάνομεν $34x^2+1$=τετράγωνος· ἔστω=$(1-6x)^2$, ἐξ ἧς $x=6$· εἶναι ἄρα $x^2=36$, $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{36}$. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ εἰς τὰς μονάδας 34 προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{36}$. τὸ εἰς τὰς μονάδας ἄρα $8\frac{1}{2}$ προστιθέμενον κλάσμα θὰ εἶναι $\frac{1}{144}$ καὶ δίδει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $\frac{35}{12}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσεγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$ καὶ πρὸς τοῦτο ζητῶ νὰ εὕρω τί θὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 4 καὶ τί θὰ προσθέσω εἰς τὸ 1 διὰ νὰ ἔχω τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δηλ. $\frac{35}{12}$.

Θέτω λοιπὸν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἔχοντα πλευρὰν τὴν $(23x+1)$, τὸν δὲ ἄλλον τὴν $(4-13x)$ καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν $598x^2+17-58x=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου $\frac{1016}{349}$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $\frac{1019}{349}$. καὶ ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων 8 θὰ ἔχω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.

## Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=\delta,\ (1),\quad \delta^2+y=\alpha^2,\ (2),\quad \delta^2+z=\beta^2,\ (3),\quad \delta^2+\omega=\gamma^2,\ (4).$$

Ἔστω $\delta=2$, $\delta^2=8$. Πρέπει λοιπὸν ὁ 2 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3, 4) καὶ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν $26=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ἤτοι πρέπει ὁ 26 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἔστω ὁ εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁπότε ὁ $17=(26-9)$ πρέπει νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8 καὶ μικρότερος τοῦ 9. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 17, τὸν $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ λάβωμεν τετράγωνον ἀριθμόν (Σημ. Μέθοδος τοῦ προβλήματος V, 9) ἤτοι νὰ εἶναι $8\frac{1}{2}+\frac{1}{4t^2}=$ τετράγωνος, (5). Διὰ πολ]σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 4 ἔχομεν $34+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, ἢ $34t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(1-6t)^2$, ἐξ ἧς $t=6$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν $\frac{17}{2}+\frac{1}{144}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$. Καὶ εἶναι $8<\frac{1225}{144}<9$. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 πρέπει νὰ εἶναι, κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$. Ἐπειδὴ $17=4^2+1^2$, πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο νέων τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ εἶναι ἡ μὲν μικροτέρα τοῦ 4, ἡ δὲ μεγαλυτέρα τοῦ 1. Πρέπει λοιπὸν ἐκ μὲν τοῦ 4 νὰ ἀφαιρεθῇ κάτι εἰς δὲ τὸ 1 νὰ προστεθῇ κάτι, ὥστε νὰ λαμβάνεται καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις $\frac{35}{12}$, ἤτοι νὰ εἶναι $4-\kappa=\frac{35}{12}$ καὶ $1+\lambda=\frac{35}{12}$. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{13}{12}$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\lambda=\frac{23}{12}$. Σχηματίζομεν τώρα τοὺς δύο ζητουμένους τετραγώνους θέτοντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν $(23x+1)$ καὶ τοῦ ἄλλου $(4-13x)$, ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $(23x+1)^2+(4-13x)^2=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$. Ἑπομένως ὁ δεύτερος τετράγωνος ἐκ τῶν τριῶν εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 26 εἶναι $\left(23\cdot\frac{29}{349}+1\right)^2=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$ καὶ ὁ τρίτος εἶναι $\left(4-13\cdot\frac{29}{349}\right)^2=\left(\frac{1019}{349}\right)^2$, ἐν ᾧ ὁ πρῶτος εἶναι 9. Δι' ἀφαιρέσεως ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων τοῦ 8 (ἐκ τῶν σχέσεων (2, 3, 4)) λαμβάνομεν $y=1$, $z=\frac{57848}{121801}$, $\omega=\frac{63953}{121801}$ καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι $\delta=y+z+\omega=1+\frac{57848}{121801}+\frac{63953}{121801}=2$, καὶ

$$\delta^2+y=8+1=3^2,$$

$$\delta^2+z=8+\frac{57848}{121801}=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$$

$$\delta^2+\omega=8+\frac{63953}{121801}=\left(\frac{1019}{349}\right)^2.$$

Σ η μ. Τὰ ἀνακατασκευασθέντα κείμενα θὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὴν ἡμετέραν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἥτις θὰ γίνῃ κατὰ τὸ προσεχὲς ἔτος 1962 ἐν Ἀθήναις.

# ZUSAMMENFASSUNG

## REKONSTRUKTION DES GRIECHISCHEN TEXTES VON VIER FEHLENDEN AUFGABEN DES V. BUCHES DER ARITHMETIKA DES DIOPHANTOS

Von der Aufgabe V, 19 der Arithmetika des Diophantos fehlt der Beweis. P. Tannery, der Herausgeber der Arithmetika (Teubner 1893) hat dies durch eine Punktreihe angedeutet. Es folgt in derselben 19. Aufgabe fast die ganze Lösung einer anderen Aufgabe, deren Wortlaut verloren ist. Diese Aufgabe wird im folgenden als 19 γ bezeichnet.

Der erste Herausgeber der Arithmetika, der französischer Mathematiker Bachet de Méziriac (Paris, 1621) meinte, dass noch zwei Aufgaben fehlen (die wir im folgenden als 19α und 19β bezeichnen) und gab die Lösungen der Aufgaben 19 19α, 19β im Geiste Diophants wieder. (Siehe : O. Schulz, Diophantus, Berlin 1822).

Der Meinung Bachets stimmen die folgenden Herausgeber und Kommentatoren Diophants überein : O. Schulz. G. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Leipzig, 1890. T. Heath, (Cambridge, 1910 ; P. ver Eecke, Bruges, 1926.

Um die Richtigkeit der Meinung Bachets verständlich zu machen, legen wir 9 Aufgaben vor, aus deren Vergleichung hervorgeht, dass es sich um drei Gruppen von je drei verwandten Aufgaben handelt. Aus diesen Aufgaben fehlen im Text : 1) Der Beweis von 19 ; 2) ganz die Aufgaben 19α und 19β und 3) der Wortlaut und kleinere Teil vom Anfang des Beweises der Aufgabe 19γ. Weiter rekonstruieren wir die fehlenden griechischen Texte auf Grund der diophantischen Ausdrucksweise, übersetzen sie ins Neugriechische und geben noch die gegenwärtige Ausdrucksweise wieder. Unsere Lösung der Aufgabe 19 unterscheidet sich von der Lösung Bachets, indem wir $3-(\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2)=\left(\frac{6}{5}\right)^4$ anstatt $=1$ setzen (1). Diese Änderung unternahmen wir auf Grund der Aufgabe V, 16.

### Übersetzung der rekonstruierten griechischen Texte.

V, 19 (Fehlender Beweis).

Es werde die Summe der drei Zahlen gleich $x^2$ gesetzt, und die drei Zahlen mögen als $\frac{3}{4}x^6$, $\frac{8}{9}x^6$, $\frac{15}{16}x^6$ angesetzt werden. Dann ist ist der Kubus der Summe der drei Zahlen, vermindert um jede einzelne der Zahlen, ein Quadrat. Es erübrigt sich die Summe der drei Zahlen gleich $x^2$ zu setzen.

---

1) Den rekonstruierten Text der Aufgabe 19 übersandten wir im April 1961 für die Teubner · Festschrift (1811—1961) nach Leipzig.

Die Summe ist aber $\frac{371}{144} x^6$. Dies ist gleich $x^3$. Und wenn wir beiderseitig durch $x^3$ dividieren bekommen wir $\frac{371}{144} x^4 = 1$. Wenn $\frac{371}{144}$ ein Biquadrat würde, so wäre die Aufgabe gelöst. Wie ist aber dieser Koeffizient entstanden ? Dadurch, dass wir die Summe von drei Quadraten, von denen jedes kleiner als 1 ist, von 3 subtrahieren.

Es kommt also darauf an, drei Quadrate zu finden, von denen jedes kleiner als 1 ist, und deren Summe, wenn sie von 3 subtrahiert wird, ein Biquadrat als Rest liefert. Wir wollen nämlich, dass jedes Quadrat kleiner als 1 sei ; wenn wir es also so einrichten, dass die drei Quadrate zusammen kleiner als 1 sind, so wird jedes einzelne gewiss kleiner als 1 sein. Es muss dann das (bei der Subtraktion von 3) übrigbleibende Biquadrat grösser als 2 sein. Setzen wir dies übrigbleibende Biquadrat gleich $\left(\frac{6}{5}\right)^4$, so haben wir $\frac{579}{625}$ in drei Quadrate zu zerlegen. Diese sind $\frac{529}{625}$, $\frac{49}{625}$, $\frac{1}{625}$. Jetzt gehen wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen die eine der gesuchten Zahlen $\frac{96}{625} x^6$, die andere $\frac{576}{625} x^6$, die dritte $\frac{624}{625} x^6$ ; und es wird ein Quadrat geben, wenn jede dieser Zahlen vom Kubus ihrer Summe subtrahiert wird.

Es erübrigt sich noch, diese Summe gleich $x^3$ zu setzen. Die Summe aber ist $\frac{1296}{625} x^6$ ; und wenn wir beiderseitig durch $x^3$ dividieren bekommen wir $\frac{1296}{625} x^4 = 1$. Daraus ergibt sich $x = \frac{5}{6}$. Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

## V, 19α

Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass ihre Summe ein Quadrat ist, und dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird ein Quadrat als Rest gibt.

Wir setzen wieder die Summe der drei Zahlen gleich $x^3$ und die eine der gesuchten Zahlen gleich $2x^6$, die zweite $5x^6$ und die dritte $10x^6$. Dann ist schon die Bedingung erfüllt, dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gibt.

Eserübrigt sich, die Summe der drei Zahlen gleich $x^3$ zu setzen. Diese Summe ist aber $17x^6$. Es soll also $17x^6 = x^3$ sein. Wird alles durch $x^3$ dividiert, so folgt $17x^4 = 1$. Und die 1 ist eine Biquadratzahl. Wenn 17 ein Biquadrat wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Die Zahl 17 aber ist die Summe von drei Quadraten plus 3. Wir müssen daher drei Quadratzahlen finden so, dass ihre Summe plus 3 ein Biquadrat ergebe. Die Biquadratzahl sei 16. Wir müssen also 13 in drei Quadrate zerlegen ; das eine ist 9,

das zweite $\frac{36}{25}$ und das dritte $\frac{64}{25}$. Zu jedem dieser Quadrate addiere ich 1 und komme zu den ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Ich setze jede der gesuchten Zahlen entsprechend den obigen Zahlen, mal $x^6$, und die Summe der drei Zahlen wieder gleich $x^3$. Es wird die eine $10x^6$, die zweite $\frac{61}{25}x^6$, die dritte $\frac{89}{25}x^6$ sein. So wird die Bedingung erfüllt, dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gibt.

Es erübrigt sich die Summe der drei Zahlen gleich $x^3$ zu setzen. Diese Summe ist aber $16x^6$. Wird alles durch $x^3$ dividiert, so folgt $16x^4=1$. Daraus ergibt sich $x=\frac{1}{2}$. Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

V, 19 β

Die gegebene Zahl in drei Zahlen zu zerlegen, dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermehrt wird ein Quadrat gibt.

Es sei die Zahl 2 gegeben.

Der Kubus von 2 ist 8. Wir müssen also die Zahl 2 in drei Zahlen zerlegen, so dass jede der Zahlen vermehrt um 8 ein Quadrat gibt. Wir müssen also die Zahl 26 so in drei Quadrate zerlegen, dass jedes von diesen Quadraten grösser als 8 ist. Ich setze das eine Quadrat gleich 9, was grösser als 8 ist. Wenn ich nun die Zahl 17 in zwei Quadrate zerlege, so dass jedes grösser als 8 ist, ist die Aufgabe gelöst. Ich nehme die Hälfte von 17, das ist $8\frac{1}{2}$, und untersuche welcher quadratischer Bruch zu $8\frac{1}{2}$ zu addieren ist, damit ein Quadrat entstehe. Es wird alles mit 4 multipliziert. Ich suche folglich einen quadratischen Bruch zu 34 zu addieren, damit ein Quadrat entsteht. Dieser quadratischer Bruch sei $\frac{1}{t^2}$; es wird $34+\frac{1}{t^2}=$ Quadrat sein. Durch Multiplikation mit $t^2$ bekomme ich $34t^2+1=$ Quadrat. Dies Quadrat sei gleich $(1-6t)^2$. Aus dieser Gleichung ergibt sich $t=6$, $t^2=36$; der zu 34 addierende quadratische Bruch ist folglich $\frac{1}{36}$; der zu $8\frac{1}{2}$ wird $\frac{1}{144}$ sein und es wird $8\frac{1}{2}+\frac{1}{144}=$Quadrat. Die Seite dieses Quadrats ist gleich $\frac{35}{12}$.

Wir müssen also die Zahl 17 so in zwei Quadrate zerlegen, dass die Seite jedes derselben nahezu gleich $\frac{35}{12}$ ist. Zu diesem Zwecke suche ich, um welche Zahl 4 vermindert und 1 vergrössert werden muss, damit man $\frac{35}{12}$ erhält.

Ich bilde also zwei Quadrate, das eine über $23x+1$, das andere über $4-13x$ [ da $\frac{35}{12}=1+\frac{23}{12}=4-\frac{13}{12}$ ist ]. Die Summe dieser beiden Quadrate wird $698x^2+17-58x=17$. Daraus ergibt sich $x=\frac{29}{349}$. Folglich ist die Seite des einen Quadrats $\frac{1016}{349}$ und die des anderen $\frac{1017}{349}$. Wenn ich von jedem der drei Quadrate 8 subtrahiere, so erhalte ich die gesuchten drei Zahlen.

V, 19 γ

Die gegebene Zahl in drei Zahlen zu zerlegen, dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird ein Quadrat ergibt.

**[ Eingegangen am 25 Juli 1961 ].**

**Die rekonstruierten griechischen Texte werden in meiner Diophant–Ausgabe, die im nächsten Jahr 1962 in Athen erscheint, eingeschaltet.**

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ "ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ„ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΣ)

## I

Εἰς τὸ 5ον βιβλίον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου παρουσιάζεται ἡ περίπτωσις νὰ ἀναλυθῇ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα δύο ἴσων περίπου τετραγώνων (V 9) ἢ εἰς ἄθροισμα τριῶν ἴσων περίπου τετραγώνων (V 11). Ἡ χρησιμοποιουμένη πρὸς τοῦτο μέθοδος προσεγγίσεως καλεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου παρισότητος ἀγωγή. Εἰς ἕκαστον τῶν προβλημάτων τούτων ὑπάρχει περιορισμὸς καθορίζων πότε τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ λύσιν. Οὕτω, εἰς τὸ πρόβλημα V 9 ὁ περιορισμὸς εἶναι:

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν (νὰ ἀναλύεται δηλ. ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων) πρέπει ὁ δοθεὶς ἀκέραιος, ἔστω α, νὰ μὴ εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ 2α+1 νὰ μὴ διαιρῆται ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς 4c—1.

Εἰς τὸ πρόβλημα V 11 ὁ περιορισμὸς εἶναι:

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν (νὰ ἀναλύεται δηλ. ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων) πρέπει ὁ δοθεὶς νὰ μὴ εἶναι 2 οὔτε νὰ εἶναι τῆς μορφῆς 8k+2. (Σημ. Ὁ δεύτερος περιορισμὸς εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς συνθήκης, καθ' ἣν ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4^{\lambda}$ (8k+7) δὲν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων). Ἐκ τῶν περιορισμῶν τῶν προβλημάτων τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζε πότε ἀριθμός τις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν τετραγώνων. Ἐξ ἐνδείξεων δὲ ἐξ ἄλλων προβλημάτων τῶν Ἀριθμητικῶν του (IV 29 καὶ 30, καὶ V 14), φαίνεται, ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ἀπόδειξιν τῆς τελευταίας ταύτης προτάσεως ἐπέτυχεν ὁ Lagrange (1).

Ὑπὸ τοὺς ἀνωτέρω περιορισμούς, καθ' οὓς εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν τετραγώνων, ἡ μέθοδος «Παρισότητος ἀγωγὴ» (δηλ. μέθοδος προσεγγίσεως) εὑρίσκει ἐφαρμογὴν εἰς τὰς περιπτώσεις: νὰ ἀναλυθῇ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων (V 9), ἢ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων (V 11).

Ἀναφέρομεν τὰ δύο συναφῆ παραδείγματα τοῦ Διοφάντου:

1ον. Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 13 εἰς ἄθροισμα δύο ἴσων περίπου τετραγώνων.

Λαμβάνει τὸ ἥμισυ τοῦ 13 καὶ προσθέτει εἰς τοῦτο τὸ $\frac{1}{4t^2}$, ὅπου ὁ t πρέπει νὰ προσδιορισθῇ, ὥστε ὁ $\frac{13}{2}+\frac{1}{4t^2}$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, (1).

1) Demonstration d' un théorème d' arithmetique in Nouveaux Memoires de l' Academie Royal des sciences de Berlin, année 1770, Berlin 1772, p. 12—133. Oeuvres de Lagrange, III P. 187—201.

Ἐκ ταύτης εἶναι $26t^2+1$=τετράγωνος, ἔστω=$(1+5t)^2$, ἐξ ἧς $t=10$. Καὶ εἶναι ἐκ τῆς (1), $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$. Ἀλλὰ δύο τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{51}{20}$ ἔχουν ἄθροισμα $13+\frac{1}{200}$, ὅπερ εἶναι>13.

Ὁ $13=3^2+2^2$. Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 2, ἔστω κατὰ λ, ὁπότε διὰ νὰ εἶναι μὲν τὰ δύο τετράγωνα ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμάτων κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς τὸν 13 (ὀλίγον μεγαλύτερον τούτου) πρέπει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι $\frac{51}{20}=3-\kappa$ καὶ τοῦ ἄλλου $\frac{51}{20}=2+\lambda$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{9}{20}$ καὶ $\lambda=\frac{11}{20}$.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι

$$2.\ \left(\frac{51}{20}\right)^2=\left(3-\frac{9}{20}\right)^2+\left(2+\frac{11}{22}\right)^2=13+\frac{1}{200}.$$

Ἐνταῦθα τὰ δύο ζητούμενα τετράγωνα εἶναι ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς 13. Τὸ πρόβλημα θέλει τὰ μὲν δύο τετράγωνα νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τὸ δὲ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 13. Πρὸς τοῦτο ἐκφράζει τὰς πλευρὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου $x$ καὶ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $\left(3-\frac{9}{20}\right)$ καὶ $\left(2+\frac{11}{20}\right)$, ὁπότε λαμβάνει

$$(3-9x)^2+(2+11x)^2=13,\quad (2).$$

(Σημ. Ἡ παράλειψις τῶν παρονομαστῶν γίνεται διὰ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ἀριθμούς. Τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται).

Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{5}{101}$ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων εἶναι

$$\frac{257}{101}\ \text{καὶ}\ \frac{258}{101},\ \text{εἶναι δὲ}\ \left(\frac{257}{101}\right)^2+\left(\frac{258}{101}\right)^2=13.$$

Εἶναι λοιπὸν τὰ κατὰ προσέγγισιν ἴσα τετράγωνα, τὸ μὲν $\frac{66049}{10201}$, τὸ δὲ $\frac{66564}{10201}$ καὶ τὸ ἄθροισμά των εἶναι =13.

2ον. Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν ἴσων κατὰ προσέγγισιν τετραγώνων.

Λαμβάνει $\frac{10}{3}+\frac{1}{9t^2}$ =τετράγωνος, (3), ὅπου ὁ $t$ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ ταύτης εἶναι

$30t^2+1$=τετράγωνος, ἔστω $=(1+5t)^2$, ἐξ ἧς $t=2$ καὶ ἐκ τῆς (3) εἶναι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2.$$

Ἀλλὰ τρία τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{11}{6}$ εἶναι

$$3.\ \frac{121}{36}=\frac{363}{36}=10\ \frac{3}{36}>10.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθοῦν τρία τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τῶν ὁποίων ὅμως τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἀκριβῶς 10.

Ὁ $10=3^2+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$ ἤτοι εἶναι ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως $3,\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5}$.

Διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὰ κλάσματα πολ]ζει ἐπὶ 30 καὶ ἔχῃ ἀντιστοίχως 90, 24, 18 ὡς πλευρὰς τριῶν τετραγώνων καὶ $\frac{11}{6}$. 30=55 ὡς πλευράν, ἐὰν τὰ τρία τετράγωνα εἶναι ἴσα.

Πρέπει λοιπόν, λέγει ὁ Διόφαντος, ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 90, 24, 18 κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς 55. Ἐπειδὴ 90=55+35, 24=55−31, 18=55−37, ἤτοι 55=90−35=24+31=18+37 καὶ

$$\frac{55}{30}=3-\frac{35}{30}=\frac{4}{5}+\frac{31}{30}=\frac{3}{5}+\frac{37}{30} \text{ καὶ εἶναι}$$

$$\left(3-\frac{35}{30}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}\right)^2=\frac{363}{36}>10,$$

πρέπει οἱ δεύτεροι ὅροι ἑκάστου τῶν δυωνύμων τοῦ α'. μέλους νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων νὰ εἶναι ἀκριβῶς 10. Πρὸς τοῦτο σχηματίζει τὴν ἐξίσωσιν

$$(3-35x)^2+\left(\frac{4}{5}+31x\right)^2+\left(\frac{3}{5}+37x\right)^2=10.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{116}{3555}$ καὶ τὰ ζητούμενα τρία τετράγωνα εἶναι

$$\left(\frac{6605}{3555}\right)^2+\left(\frac{6440}{3555}\right)^2+\left(\frac{6425}{3555}\right)^2=10.$$

## II

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τοῦ Διοφάντου καὶ ἐκ τῆς σπουδῆς πολλῶν συναφῶν περιπτώσεων συνάγομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

## II 1

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα, ὥστε τὸ ἀντίστροφον τούτου προστιθέμενον εἰς δοθέντα ἀκέραιον νὰ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀκέραιος α καὶ ὁ ζητούμενος τετράγωνος $t^2$, ὁπότε θὰ εἶναι

$$\alpha+\frac{1}{t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad (1). \quad \text{Ἐκ ταύτης εἶναι } \alpha t^2+1=\text{τετράγωνος}.$$

Τὸν τετράγωνον τοῦτον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $=(1+\varkappa t')^2$ ὅπου $\varkappa^2<\alpha$.

ἢ $=(1-\lambda t)^2$, ὅπου $\lambda^2>\alpha$.

### Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

α) $7+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, (2), ἢ $7t^2+1=$τετράγωνος$=(1+2t)^2$ ἐξ ἧς $t=\frac{4}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

β) $7t^2+1=(1-3t)^2$, ἐξ ἧς $t=3$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $7+\frac{1}{9}=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$.

## II 2

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα ($t^2$), ὥστε ἡ παράστασις

$\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ νὰ εἶναι =τετράγωνος, (1), (α δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ n=2, 3, 4...).

Ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\alpha n t^2+1=\text{τετράγωνος, ἔστω}=(1+\varkappa t)^2, \text{ ὅπου}$$
$$\varkappa^2<\alpha n \quad \text{ἢ} \quad =(1-\lambda t)^2, \quad \text{ὅπου} \quad \lambda^2>\alpha n.$$

## Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

α) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}=$τετράγωνος, (2) ἢ $55t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $\square=(1+7t)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{7}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2$.

β) $55t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(1-8t)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{16}{9}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25.256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2.$$

## II 3.

Ἐφ' ὅσον πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων, πέντε, ἕξ . . . ν τετραγώνων, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ καὶ εἰς ἄθροισμα 4, 5, 6 . . . ν τετραγώνων, κατὰ προσέγγισιν ἴσων, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου προσεγγίσεως τοῦ Διοφάντου, ἀφοῦ καταστήσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν α τετράγωνον δυνάμει τῆς σχέσεως II 2.

## Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 35 εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων.

Κατὰ τὴν σχέσιν II 2 θὰ ἔχωμεν $\frac{35}{4}+\frac{1}{16t^2}=$τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι

$$140t^2+1=\text{τετράγωνος, ἔστω}=(1-12t)^2, \text{ ἐξ ἧς } t=6,$$

καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\,.\,36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2.$$

Ὁ 35 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, τῶν $1^2+3^2+3^2+4^2$. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἴσων τετραγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ ἀναλυθῇ ὁ 35, τὸ πρῶτον θὰ ἔχῃ πλευρὰν μεγαλυτέραν τῆς μονάδος καὶ <3, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν τριῶν πρέπει νὰ εἶναι <3. Ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ κάτι, ἔστω κ, ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν ἐκ τοῦ 3 ἀφαιρεθῇ κάτι, ἔστω λ, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετάρτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν ἐκ τοῦ 4 ἀφαιρεθῇ κάτι, ἔστω μ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν

$$\varkappa=\frac{47}{24}, \quad \lambda=\frac{1}{24}, \quad \mu=\frac{25}{24}.$$

Ἀλλὰ τέσσαρα τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{71}{24}$ ἔχουν ἄθροισμα 4. $\left(\frac{71}{24}\right)^2 = \frac{20164}{576} = 35\frac{4}{576}$, ὅπερ εἶναι $>35$. Διὰ νὰ εἶναι τὰ ζητούμενα τέσσαρα τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 35 ἐκφράζομεν τὰς πλευρὰς τούτων, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου, συναρτήσει ἀγνώστου τινος $x$ καὶ τῶν τιμῶν τῶν κ, λ, μ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

(Σημ. Ἡ ἐξίσωσις ἠδύνατο νὰ εἶναι

$$\left(1+\frac{47}{24}x\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(4-\frac{25}{24}x\right)^2=35.$$

Ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται· λαμβάνονται μόνον μικρότεροι ἀριθμοί).

Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{59}{1418}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν τὰ ζητούμενα 4 τετράγωνα

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

# SUMMARY

A few remarks on the method ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ of Diophantus (Method of approximation to limits).

From studying the problems V 9, 11 of the Arithmetica of Diophantus we conclude the following :

II 1.

We can always define a square $t^2$ so that the converse of that, when additioned to a given whole number, to make that square.

Let a be the given whole number and $t^2$ the square we want to find. Then $a+\frac{1}{t^2}$ =square, (1). From this relation we have $at^2+1$= square. We can write this square$=(1+\varkappa t)^2$, with $\varkappa^2<a$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2>a$.

**Examble**

a) $7+\frac{1}{t^2}$=square, (2), or $7t^2+1$=square, let=$(1+2t)^2$, then $t=\frac{4}{3}$ and from the (2) we have $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

b) $7t^2+1=(1-3t)^2$, then $t=3$ and from the (2) we have

$$7+\frac{1}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

II 2.

We can always define a square $t^2$, so that the representation $\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ to be a square number, (1), (a is the given whole number and

$$n=2, 3, 4 \ldots).$$

From the (1) we have $ant^2+1$=square. Let it be $=(1+\varkappa t)^2$, with $\varkappa^2<an$ or $=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2>an$.

**Examble**

a) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}$ =square. (2) or $55t^2+1$=square.

Let it be=$(1+7t)^2$, then $t=\frac{7}{3}$ and from the (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2.$$

b) $55t^2+1$=square, let it be $=(7-8t)^2$, $t=\frac{16}{9}$ and from (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25.256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2.$$

II 3.

While every whole number is analysed to a sum of four, five, six, . . , $\nu$ squares, is also possible to be analysed to a sum of 4, 5, 6 . . , $\nu$ squares, appoximately equal, by the application of the method of appoximation of Diophantus, after we have made the given number a square according to the relation II 2.

**Examble**

To be analysed the number 35 in four approximately equal squares. With respect to the II 2 we will have $\frac{35}{4} = \frac{1}{16t^2}$ =square, (1). From this relation we have $140t^2+1$=square, let it be=$(1-12t)^2$, then $t=6$, and from the (1) we have

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\cdot 36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2.$$

The number 35 is analysed to a sum of four squares that is of

$$1^2+3^2+3^2+4^2.$$

The number 35 must be analysed to a sum of four squares, each of them has a side about equal to $\frac{71}{24}$. The side of the first of the required squares will be larger of 1 and smaller of 3, the side of other three squares will be smaller of 3 i. e. if the 4 squares are equal we will have as side of each of them the following

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

From the above relations we have

$$\varkappa=\frac{47}{24},\ \lambda=\frac{1}{24},\ \mu=\frac{25}{24}.$$

But four equal squares, each of them has as side $\frac{71}{24}$, have a sum $4\cdot\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{20164}{576}=35\frac{4}{576}$, thus $>35$. In order to be the required squares approximately equal, with their sum exactly equal to 35, we express the sides of them according to the method of Diophantus. Then we have

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35,\quad (2).$$

From this relation we find $x=\frac{59}{1418}$ and by substituting in the (2) we take the required four squares

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

---

# BIBLIOGRAPHY


T. L. Heath, Diophantus of Alexandria (95—98), Cambridge 1910.

T. Nagell, Introduction to Number Theory (John Wiley, New York 1951).

O. Ore, Number Theory and his History (Mc Graw - Hill, New York 1948).

J. V. Uspensky and M. A. Heaslet, Elementary Number Theory (Mc Graw - Hill, New York 1939).

H. Davenport, The Higher Arithmetik, Hutchinson's University Library, London 1952).

E. Cahen, Théorie des nombres, Hermann, Paris 1924.

P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, B. C. Teubner, Leipzig; Vol. I, 1920 Vol. II, 1910.

E. Bessel - Hagen, Zahlentheorie (Pascals Repertorium, Vol. I, Teil 3; B. C. Teubner, Leipzig 1929).

F. T. Poselger, Beiträge zur unbestimmten Analysis, Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1832, Berlin 1834.

M. Kraitchic, Théorie des nombres, I, II, Paris 1922, 1926.

# ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ ΚΑΙ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Σελὶς | 135 | στίχ. | 7 | ἐκ τῶν κάτω : | ἀντὶ Eserübrigt γράφε Es erübrigt |
| » | 323 | » | 9 | ἐκ τῶν κάτω : | » $(7-8t)^2$ γράφε $(1-8t)^2$ |
| » | 324 | » | 3 | ἀντὶ $\frac{35}{4} = \frac{1}{16t^2}$ | γράφε $\frac{35}{4} + \frac{1}{16t^2}$ |
| » | 366 | » | 9 | ἀντὶ Νανζιανζηνοῦ | γράφε Ναζιανζηνοῦ |
| » | 367 | » | 2 | » θεάτου | » θεάτρου |
| » | 367 | » | 5 | » guae | » quae |

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΔ΄ 1962 = 14.
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
27/28

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1962

# ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ 17 ΚΑΙ 18 ΤΟΥ 5ου ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΡΟΥ "ΔΙ' ΙΣΟΥ„

Οἱ ὁρισμοὶ 17 καὶ 18 τοῦ 5ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχουσιν ὡς ἑξῆς :

## Ὁρισμὸς 17

Δι' ἴσου λόγος εἶναι, ἐὰν ὑπάρχωσι πολλὰ μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὅταν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ τὸ θεώρημα V, 22, ἐὰν δοθῶσιν αἱ δύο γεωμετρικαὶ ἀκολουθίαι, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκατέρα, τῆς μορφῆς α, αρ, αρλ, αρλμ . . . . καὶ β, βρ, βρλ, βρλμ . . . . ὅπου εἶναι

$$\frac{\alpha}{\alpha\rho} = \frac{\beta}{\beta\rho} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha\rho}{\alpha\rho\lambda} = \frac{\beta\rho}{\beta\rho\lambda} \quad (2)$$

$$\frac{\alpha\rho\lambda}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta\rho\lambda}{\beta\rho\lambda\mu} \quad (3)$$

«δι' ἴσου λόγος» εἶναι ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$, (4), ἡ ὁποία λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων (1, 2, 3) κατὰ μέλη. Εἰς τὸ θεώρημα 22 τοῦ 5ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων γίνεται ἀπόδειξις τῆς σχέσεως (4), διότι ὁ Εὐκλείδης περιλαμβάνει κατ' αὐτὴν καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Εἷς τι χειρόγραφον τῶν Στοιχείων ὁ «δι' ἴσου λόγος» τοῦ ὁρισμοῦ 17 ὀνομάζεται τεταγμένη ἀναλογία (II τόμος τῆς κατὰ I. L. Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων, σελὶς 7). Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη εἶναι γνησία καὶ ὅτι ὁ «δι' ἴσου λόγος» (ἀναλογία) θὰ ἐχαρακτηρίσθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς «τεταγμένη ἀναλογία» πρὸς διάκρισιν τῶν δύο σχέσεων τοῦ ὁρισμοῦ 18, αἵτινες ὀνομάζονται τεταραγμένη ἀναλογία.

## Ὁρισμὸς 18

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία εἶναι, ὅταν, ἐν ᾧ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, γίνηται ὡς μὲν εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως εἰς τὰ δεύτερα ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ τὸ θεώρημα V, 23, ἐὰν δοθῶσιν αἱ ἀκολουθίαι A, B, Γ καὶ Δ, E, Z ὅπου εἶναι

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}\ , \quad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E}\ , \quad (2)$$

αἱ σχέσεις (1, 2) ὀνομάζονται «τεταραγμένη ἀναλογία».

## Ὁ ὅρος «δι' ἴσου»

Τὸν ὅρον «δι' ἴσου» συναντῶμεν εἰς τὰ κάτωθι 17 θεωρήματα τῶν Στοιχείων:

Πέμπτου Βιβλίου : 22, 23, 24 (δίς).
Ἕκτου » : 4, 20 (δίς), 22, 23, 24.
Ἑβδόμου » : 14.
Ὀγδόου » : 1, 5, 6, 8, 13, 21.
Ἐνάτου » : 19, 36 (δίς).

Εἰς τὰ 15 ἐξ αὐτῶν (πλὴν τῶν V, 23. VII, 14), ἀφοῦ δίδονται δύο γεωμετρικαὶ ἀκολουθίαι, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκατέρα, αἱ A, B, Γ, .... καὶ Δ, E, Z, ... ὅπου εἶναι

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E} = \rho \quad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \lambda \quad (2)$$

συνάγεται πάντοτε «δι' ἴσου ἄρα» εἶναι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$.

Εἰς τὸ θεώρημα 23 τοῦ 5ου Βιβλίου δίδονται δύο ἀκολουθίαι ἐκ τριῶν ὅρων ἑκατέρα, αἱ A, B, Γ, καὶ Δ, E, Z, ὅπου εἶναι

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z} = \eta$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E} = \theta$$

καὶ συνάγεται πάλιν ὅτι «καὶ δι' ἴσου» θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}.$$

Πρὸς κατανόησιν τοῦ ὅρου «δι' ἴσου» ἀναγράφομεν κατωτέρω ἐν συντομίᾳ τὰ θεωρήματα 22 καὶ 23 τοῦ 5ου Βιβλίου.

## V, 22

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ A, B, Γ .... καὶ Δ, E, Z .... τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων πρὸς τὰ πρῶτα καὶ

$$\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E} = \alpha \quad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \beta \quad (2).$$

Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἂς ληφθῇ Η=Αρ, Θ=Δρ, Κ=Βλ, Λ=Ελ, Μ=Γμ, Ν=Ζμ, (3).

Ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3) λαμβάνομεν

$$\frac{Αρ}{Βλ}=\frac{Δρ}{Ελ} \quad (4)$$

$$\frac{Βλ}{Γμ}=\frac{Ελ}{Ζμ} \quad (5).$$

Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\frac{Αρ}{Γμ}=\frac{Δρ}{Ζμ}$. Ἐὰν δὲ εἶναι $Αρ \gtreqless Γμ$ καὶ συγχρόνως $Δρ \gtreqless Ζμ$ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ 5ου Βιβλίου καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$:

## V, 23

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία αὐτῶν, καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ, τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{Α}{Β}=\frac{Ε}{Ζ} \quad (1)$$

$$\frac{Β}{Γ}=\frac{Δ}{Ε} \quad (2)$$

ἤτοι ἡ ἀναλογία αὐτῶν νὰ εἶναι τεταραγμένη. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$ (δηλ. οἱ δι' ἴσου λόγοι θὰ εἶναι ἴσοι).

Λαμβάνει Η=Αρ, Θ=Βρ, Λ=Γλ, Κ=Δρ, Μ=Ελ, Ν=Ζλ καὶ ἀποδεικνύει, ὅτι εἶναι

$$\frac{Η}{Θ}=\frac{Μ}{Ν}=α \qquad \frac{Αρ}{Βρ}=\frac{Ελ}{Ζλ}=α$$

ἢ

$$\frac{Θ}{Λ}=\frac{Κ}{Μ}=β \qquad \frac{Βρ}{Γλ}=\frac{Δρ}{Ελ}=β$$

ἐπάγεται δὲ ὅτι «καὶ δι' ἴσου» εἶναι

$$\frac{Αρ}{Γλ}=\frac{Δρ}{Ζλ}.$$

Ἐὰν δὲ εἶναι $Αρ \gtreqless Γλ$ καὶ συγχρόνως $Δρ \gtreqless Ζλ$ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ 5ου Βιβλίου καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$.

Εἰς τὰ θεωρήματα V, 22, 23, VII 14 ἀποδεικνύεται πότε οἱ «δι' ἴσου» λαμβανόμενοι λόγοι εἶναι ἴσοι. Εἰς τὰ λοιπὰ θεωρήματα τῶν Βιβλίων V, VI, VIII, IX, τὰ μνημονευόμενα ἀνωτέρω, γίνεται ἁπλῶς ἐφαρμογὴ τοῦ ὅρου δι' ἴσου. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ συναφὲς μέρος τοῦ 4ου θεωρήματος τοῦ VI Βιβλίου. Εἰς τοῦτο ὁ Εὐκλείδης σχηματίζει τὰς δύο ἀκολουθίας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ ΔΓ, ΓΕ, ΕΔ, ὅπου εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΓ}{ΓΕ}=ρ$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΑ}=\frac{ΓΕ}{ΕΔ}=λ$$

καὶ ἐπάγεται «δι' ἴσου ἄρα» εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΓΑ}=\frac{ΔΓ}{ΕΔ}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων καθίσταται φανερόν, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου» σημαίνει τὸν σχηματισμὸν τῶν λόγων τῶν ἄκρων ὅρων δύο δοθεισῶν ἀκολουθιῶν. Ὡς πρὸς τὰς ἀκολουθίας αὐτὰς διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

1) Ὅταν αὗται εἶναι γεωμετρικαί, ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων καὶ ἔχωσι σχηματισθῆ κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς α, αρ, αρλ, αρλμ . . . . καὶ β, βρ, βρλ, βρλμ . . . . Δι' ἴσου νοοῦνται πάντοτε οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων ἑκατέρας ἀκολουθίας, οἱ $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu}$ , $\frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$. Εἶναι δὲ πάντοτε εἰς τὰς ἀκολουθίας αὐτὰς κατὰ τὸ V, 22 $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$.

Φαίνεται πιθανόν, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου» ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων διὰ παραραλείψεως μεταξὺ τούτων ἴσου πλήθους ὅρων εἰς ἑκατέραν τῶν ἀκολουθιῶν.

2) Ὅταν ἑκατέρα τῶν δοθεισῶν ἀκολουθιῶν ἔχῃ μόνον τρεῖς ὅρους, τοὺς Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ καὶ εἶναι :

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z} = \eta \qquad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E} = \theta \qquad (2)$$

ἤτοι ἡ ἀναλογία (δηλ. αἱ σχέσεις 1, 2) εἶναι τεταραγμένη. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν «δι' ἴσου» νοοῦνται οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων τῶν ἀκολουθιῶν, οἱ $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{\Delta}{Z}$.

Εἶναι δὲ πάντοτε $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$ κατὰ τὸ θεώρημα 23 τοῦ 5ου Βιβλίου.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ 3ου θεωρήματος τοῦ 5ου Βιβλίου, ἐὰν Α=Βρ, (1), Γ=Δρ, (2), ΕΖ=Αλ, (3), ΗΘ=Γλ, (4) «καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» θὰ εἶναι ΕΖ=Βρλ, (5), ΗΘ=Δρλ, (6).

Ἡ ἀπόδειξις ἔχει ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ΕΖ=ΕΚ+ΚΖ+ . . . =Α +Α + . . . =Αλ

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εἶναι ΕΖ= =Βρ+Βρ+ . . . =Βρλ ἡ (5).

Ἔστω ἐπίσης ΗΘ=ΗΛ+ΛΘ+ . . . =Γ +Γ + . . . =Γλ

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) εἶναι ΗΘ= =Δρ+Δρ+ . . . =Δρλ, ἡ (6).

Ὁ ὅρος «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων», δὲν μνημονεύεται διόλου εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ὅμως αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι διὰ τοῦ ὅρου «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» νοεῖται ἡ ἰσότης τῶν πολλαπλασίων ρλ τῶν σχέσεων (5, 6). Ὅθεν ὀρθῶς, φρονοῦμεν, γράφει ὁ J. L. Heiberg, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» δὲν ἔχει σχέσιν πρὸς τὸν «δι' ἴσου λόγον» τοῦ ὁρισμοῦ 17, (Hic non proprie ad definitionem rationis δι' ἴσου (17) respicitur).

# ZUSAMMENFASSUNG

Über die Definitionen 17 und 18 des V. Buches der Elemente Euklids und über den Terminus «durch Gleichheit» (δι' ἴσου, ex aequo).

Es werden die Definitionen 17 und 18 in Zusammenhang mit den Sätzen V, 22, 23, erklärt. Ferner wird der Terminus «durch Gleichheit» folgendermassen erläutert: Es werden zwei Folgen mit je derselben Gliederanzahl gegeben. Die Bildung der Verhältnisse der äusseren Glieder jeder Folge heisst «δι' ἴσου» (ex aequo). Was die Folgen selbst betrifft, so underscheidcn sich zwei Fälle: 1) Die Folgen sind geometrische, haben dieselbe Gliederanzahl und sind von der Form $\alpha$, $\alpha\varrho$, $\alpha\varrho\lambda$, $\alpha\varrho\lambda\mu$ .... und $\beta$, $\beta\varrho$, $\beta\varrho\lambda$, $\beta\varrho\lambda\mu$, ... Bei diesen Folgen werden, «durch Gleichheit» die Verhältnisse der äusseren Glieder $\frac{\alpha}{\alpha\varrho\lambda\mu}$, $\frac{\beta}{\beta\varrho\lambda\mu}$ verstanden. Diese sind immer gleich gemäs dem Satz V, 22. 2) Jede von den zwei gegebenen Folgen hat nur drei Glieder, A, B, Γ und Δ, E, Z, wobei $\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}=\eta$, (1) und $\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}=\vartheta$, (2) ist, d. h. die Proportion (die Beziehungen 1, 2) eine ungeordnete Proportion ist. Auch hier werden «durch Gleichheit» die Verhältnisse $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{\Delta}{Z}$ verstanden. Diese sind immer gleich gemäss dem Satz v, 23.

Dem Terminus «durch Gleichheit» begegnen wir bei den folgenden 17 Sätzen der Elemeute: V, 22, 23, 24 (zweimal). VI, 4, 20 (zweimal), 22, 23, 24. VII, 14. VIII, 1, 5, 6, 8, 13, 21. IX, 19, 36 (zweimal).

Anmerkung. Nach der Verlautbarung des Satzes V, 3, wenn $A=B\varrho$, $\Gamma=\Delta\varrho$, $EZ=A\lambda$, $H\Theta=\Gamma\lambda$ ist, wird «durch Gleichheit der genommenen» (Glieder), $EZ=B\varrho\lambda$, $H\Theta=\Delta\varrho\lambda$.

Der Terminus «durch Gleichheit der genommenen» (Glieder), wird gar nicht im Beweise erwähnt. Wir schliessen, dass mit diesem Terminus die Gleichheit der Vielfache $\varrho\lambda$ verstanden ist.

EVANGELOS S. STAMATIS

# A CONTRIBUTION TO THE INTERPRETATION OF GEOMETRIC PASSAGE OF THE DIALOGUE MENON, PLATOS, (86 e - 87 b) *

Below is published in English the main part of a treatise, which is published in Greek in the «Platon» (Year Γ', part B', p. 218=227, 1951).

It is about the passage where the discovery of the possibility or not of the inscription of plane surface in the form of a triangle in a circle. In the issue of 1951 the two solutions of the problem by 1) Butcher — Heath and 2) A. S. L. Farquarson [1) T. L. Heath, A history of Greek Mathematics I p, 229—301, 1921. 2) Classical Quartarly XVII, 1, Januar 1923] are also mentioned in detail.

The solution of this problem I propose is the following :

**Hypothesis I** (fig. 1)

Suppose that the figure on the ground, in the above passage of the M e n o is the square EDGO and that its doubled square is EGHZ. We fill out the square ABCD ; let AEHB be the given rectilinear area that must be inscribed as a triangle in the given circle with center O.

We extend the rectangle AEHB along the given line AD(=AB), from which the rectangle of equal area EDCH is left **. As is obvious from the figure, the rectangle AEHB cannot be inscribed as a triangle in the given circle, because it consists of two squares, AEOZ and ZOHB ; for these squares, according to the solution of the previous geometric passage of the dialogue (81e—85c), are equal to the square EGHZ, which, as is

* Ἡ παροῦσα μελέτη εἰς τὴν ἀγγλικὴν γλῶσσαν ἀποτελεῖ τὸ κύριον μέρος πραγματείας ἡμῶν δημοσιευθείσης ἑλληνιστὶ εἰς τὸν Πλάτωνα (Ἔτος Γ' τεῦχος Β', σελὶς 218—227, 1951). Πρόκειται περὶ τοῦ χωρίου, ὅπου συζητεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ τῆς ἐγγραφῆς ἐπιπέδου εὐθυγράμμου ἐπιφανείας ὑπὸ μορφὴν τριγώνου εἰς κύκλον.

Εἰς τὸ τὸ τεῦχος τοῦ 1951 ἐκτίθενται λεπτομερῶς καὶ δύο λύσεις τοῦ προβλήματος ὑπὸ 1) Butcher - Heath καὶ 2) A. S. L. Farquarson [1) I. L. Heath, A history of Greek Mathematics, I, pp. 229—301, 1921, 2) A. S. L. Farquarson . . . , Classical Quartarly XVII. I Januar 1923].

** This view is based on the 27th theorem of the vi book of Euclid's E l e m e n t s.

known, is the maximum of the parallelograms that can be inscribed in the circle.

**Hypothesis II** (fig. 1)

We leave out half of the rectangle AEHB, i.e. the square ZOHB. We extend the remaining square AEOZ along the given line AD of the figure. Thus, EDGO, which is equal to the extended AEOZ, is left out from ADGZ, which is equal to AEHB. It is obvious that the square AEOZ can be inscribed in the given circle as a triangle EGZ, the base of which,

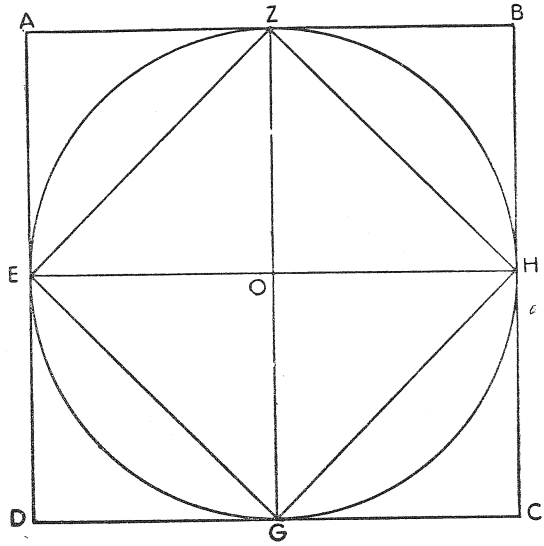



fig. 1.

GZ, is equal to AD (i.e. the diameter of the circle). Therefore, we can consider the longest of the lines of the triangle which is equal to the diameter as the given fixed side of the area and proceed with various transformations. It is also obvious that if we keep AB fixed and move ZO along a line parallel to itself in the direction of AE, we obtain areas progressively smaller than the square AEOZ, each of which can be inscribed in the given circle.

**Hypothesis III** (fig. 2)

We suppose that at the time the M e n o was written it was known that the largest triangle that can be inscribed in a circle is an equilateral the area of which is equal to $\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$, where r is the radius of the circle.

If the given area is larger than the square AEOZ, then the maximum area which can be inscribed as a triangle in the given circle (if transformed to a rectangle with AE, the radius of the circle, as the constant side) will have the side $AB = \frac{3}{4} r\sqrt{3}$ as its other side [Note: We can draw the straight line $r\sqrt{3}$ with a rule and compass as follows: We suppose a right triangle ABC, of which A is the right angle and AB=AC=r its perpendicular side. At one of the ends of the hypotenuse, e.g. B, we draw a perpendicular line and take a part of it so that BD=r. We draw a line from D to C. The hypotenuse CD of the new right triangle BDC (where B is the right angle) equals $r\sqrt{3}$]. From a point B we draw a perpendicular to the diameter of the circle and extend it to a point P. Thus, we have

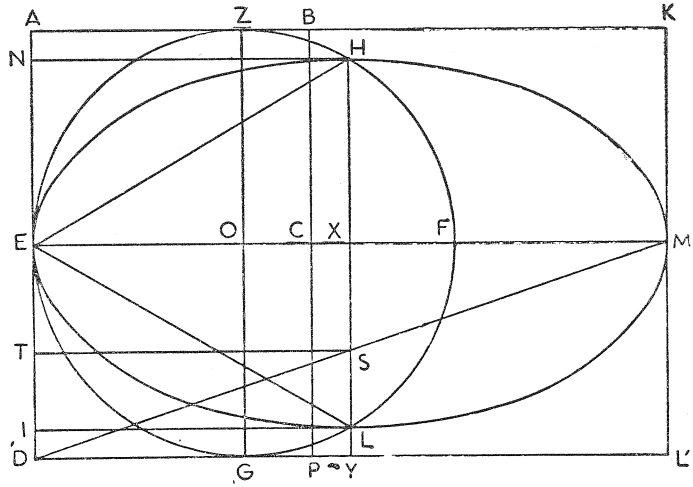



fig. 2

extended the rectangle AECB along the given line AD leaving out the rectangle EDPC, which is equal to AECB.

In our opinion, the problem is now how to inscribe the area AECB in the given circle as a triangle. There are several methods to solve this problem. First, we may inscribe an hexagon in the circle and join every two vertexes together. Second, we may construct the hyperbole

$$xy = b^2 = \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}$$

(where x=AB, y=AE and $b^2$ the area of the given surface). If we draw a perpendicular on the point of contact and prolong the line until it cuts the circumference, we obtain the base of the desired equilateral triangle with vertex point E.

In this case, we suppose that we can obtain the desired equilateral triangle through an ellipsis, on the basis of the words ἐλλείπειν κλπ. of the

text as well as Theorem 28 of book VI of Euclid's E l e m e n t s and Theorem 13 of book I of Apollonius' C o n i c s.

**Analysis.**

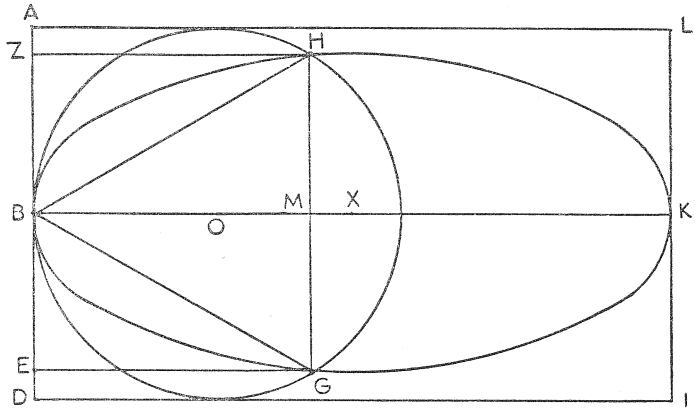
We take a point H in the circumference of a circle (fig. 2) so that the parallelogram NEXH is equivalent to the parallelogram AECB. It is obvious that the triangle EHL is equivalent to the parallelogram NEXH=AECB. $EX=\frac{3r}{2}$.

**Synthesis.**

With $a=EX=\frac{3r}{2}$ as the semiaxis of the ellipsis and with the radius of the circle $r=2p=ED$ we construct an ellipsis, in accordance with Theorem 28 of book VI of Euclid's E l e m e n t s and Theorem 13 of book I of Apollonius' C o n i c s. This construction takes place as follows: We form the rectangle EDL'M (fig. 2), in which the great axis EM=2a and the parameter of the ellipsis ED=r=2p. We draw the diagonal MD. From a point X of the axis EM we draw the line XY perpendicular to DL'. This line sects the diagonal MD at point S. We then prolong the parallelogram ETSX along the line ED. From this the rectangle TDYS is left out, which is equal to ETSX as well as similar to EDL'M and situated similarly to the latter. The area of the parallelogram ETSX is equivalent to a square with side the line XL. The point L is a point of the ellipsis. In the same way, if we draw the symmetrical diagonal MA of the parallelogram AEMK we obtain the point H of the ellipsis. These two points L and H determine the axis b of the ellipsis, which is the longest perpendicular that can be drawn to the great axis according to the definition given in Theor. 27 of book VI of Euclid's E l e m e n t s. With a similar construction, i. e. by drawing perpendiculars from whatever two points of the axis EM to DL', we obtain the points in which they sect the diagonal DM ; from these we draw parallel lines to EM (which are perpendicular to ED). The parallelograms on the side of the small axis (with the exception of those below the parallel drawn from the diagonal) if transformed into squares give the points of the ellipsis. It is clear that each of the parallelograms thus transformed into squares is smaller than ETSX, according to Theor. 27 of book VI of Euclid's E l e m e n t s. The section of the ellipsis and of the circle give the two points on the circumference of the circle which joined together form the basis of the inscribed triangle which has point E as vertex and which is the maximum triangle that can be inscribed in the circle.

**Hypothesis IV.**

If the side of the surface which is transformed into a rectangle is longer than the radius of the circle and indeed longer that $\frac{3}{4}$ r $\sqrt{3}$ then




feg. 3

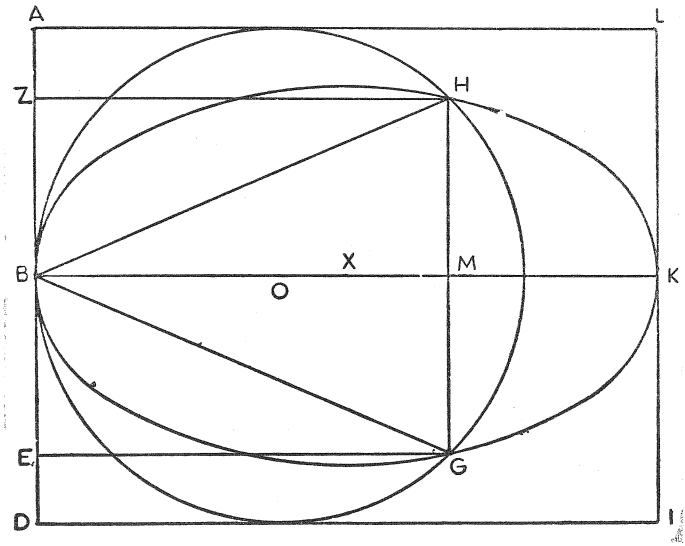



fig 4

the given surface is larger than the maximum rectangle, i.e. r $\frac{3}{4}$ r $\sqrt{3}$ (which can be inscribed in the circle as triangle) and therefore cannot be inscribed in the given circle as triangle. In our opinion this is the case referred to in the dialogue with the words «εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν»

i. e. if it is impossible «τὸ ἐλλείπειν οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ».

In a modern formulation, hypothesis 3 can be solved with the equation $y^2=2px-\frac{px^2}{a}$ and the equation of the circle $y^2=2rx-x^2$, where $2p=r$, $a=$ the great semiaxis and $b^2 \leqq \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}$ is the area of the given surface.

In fig. 3 obtain the inscribed triangle $b^2 < \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$, where $a=\frac{3r}{2}+h$, while in fig. 4 we obtain the triangle $\gamma^2 < \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}$, where $a=\frac{3r}{2}-h$ $\left(o<h<\frac{r}{2}\right)$ and $2p=r$. The ellipsis and the circle ought to be cotangental at the origin of the coordinates.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΕ΄ 1963 = 15
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
29/30

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1963

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 23ον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Τετραγωνισμός παραβολῆς ἀποδεικνύει ὅτι:

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{4}$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{4}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει τὴν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4},$$

ὅπου A εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὅρος καὶ $\frac{A}{4^4}$ ὁ μικρότερος, καὶ ἀποδεικνύει ὅτι

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{4^4} = \frac{4}{3} A,$$

χωρὶς νὰ χρησιμοποιῇ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

Τὸ ἀρχιμήδειον θεώρημα εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ θεώρημα, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \ldots + \frac{A}{4^{\nu-1}} \quad \text{εἶναι} \quad \frac{4}{3} A, \quad \text{ὅταν} \quad \nu \to \infty.$$

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται διὰ τῆς αὐτῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως ὅτι:

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$, $(n=2, 3, 4 \ldots)$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{n-1}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{n}{n-1}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι ἐδόθησαν οἱ ἐν συνεχείᾳ ὅροι τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3}, \quad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Κατὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως θὰ εἶναι

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{n^3} = \frac{nA}{n-1}, \quad \left( = \frac{A}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τοῦτο, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁποίου δὲν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου, εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \ldots + \frac{A}{n^{\nu-1}}, \quad \text{ὅταν} \quad \nu \to \infty.$$

2. Ὅπως εἶναι γνωστόν, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπέφευγον νὰ χρησιμοποιῶσι τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν συγκεκριμένων μαθηματικῶν πράξεων. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν πότε οἱ Ἕλληνες ἐχρησιμοποίησαν διὰ πρώτην φορὰν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὰ μαθηματικά. Ἀνώνυμος σχολιαστὴς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐχρησιμοποίησαν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, διὰ νὰ ἀποδείξωσιν ὅτι πᾶν μέγεθος δύναται νὰ τέμνηται ἐπ' ἄπειρον. (Euclidis Opera omnia V, 416—17, I. L. Heiberg). Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ Παρμενίδου τοῦ Πλάτωνος (127 a) καὶ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου ὑπολογίζεται ὅτι ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἀνέγνωσεν ἐν Ἀθήναις τὰ περίφημα αὐτοῦ γράμματα, ὅπου γίνεται μνεία τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου, περὶ τὸ ἔτος 435 π. Χ. Τέλος ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 430 π. Χ.), διὰ νὰ ἀποδείξῃ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, χρησιμοποιεῖ τὸ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (XII, 2) περιλαμβανόμενον θεώρημα, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων. Εἰς τὸ θεώρημα δὲ τοῦτο γίνεται χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ εὐκλείδειον θεώρημα XII, 2 δὲν εἶναι ἐπινόησις τοῦ Εὐδόξου (408—355 π. Χ.). Εἰς τὸν Εὔδοξον ὅμως ὀφείλεται κατὰ πληροφορίαν τοῦ Ἀρχιμήδους (Opera omnia I, σελ. 2, 1910, I. L. Heiberg) ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸν κῶνον. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν δὲ αὐτὴν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου.

Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (IX, 35) ἀποδεικνύεται ὁ τύπος ὁ παρέχων τὸ ἄθροισμα ν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ὁ $\Sigma=\frac{\alpha\omega^{\nu}-\alpha}{\omega-1}$, (1), ὅπου α ὁ πρῶτος ὅρος, $0<\omega\lessgtr 1$ ὁ λόγος τῆς προόδου καὶ ν=2, 3, 4 . . . . τὸ πλῆθος τῶν ὅρων. Εἰς τὸν τύπον (1) δὲν περιλαμβάνεται ἡ ἀπόδειξις ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι

$$\Sigma=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^{2}+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}=\frac{\alpha}{1-\omega},\quad |\omega|<1,\ \text{διὰ}\ \nu\to\infty.$$

Ὁ Ἀριστοτέλης ὅμως πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$A\omega+A\omega^{2}+\ldots+A\omega^{\nu}\ \text{εἶναι}\ \leqq A,\ \text{διὰ}\ \nu\to\infty,\ |\omega|<1.$$

Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς πραγματείας αὐτοῦ Φυσικῆς ἀκροάσεως (Γ 206 b 7—9), ὅπου κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου γράφεται :

«Ἐν γὰρ τῷ πεπερασμένῳ μεγέθει ἂν λαβών τις ὡρισμένον προσλαμβάνῃ τῷ αὐτῷ λόγῳ μὴ τὸ αὐτό τι μέγεθος τῷ ὅλῳ περιλαμβάνων, οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον»

Ἡ ἔννοια τοῦ χωρίου τούτου εἶναι ὅτι ἂν θεωρήσωμεν τὸ μέγεθος A καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma=\frac{A}{\mu}+\frac{A}{\mu^{2}}+\ldots+\frac{A}{\mu^{\nu}},\quad \nu\to\infty,\ \mu=2,3,4\ldots,\ \text{θὰ εἶναι}\ \Sigma\leqq A,\ (3).$$

Τὸ ἄπειρον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ἐνταῦθα ὁ Ἀριστοτέλης, τὸ ὀνομάζει «δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει» γράφων :

«Ἄλλως μὲν οὖν οὐκ ἔστιν, οὕτως δ' ἔστι τὸ ἄπειρον, δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει». (Γ 206 b 13—14).

Δὲν ἔχει διασωθῆ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (3). Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως προχωρεῖ ἓν βῆμα περισσότερον ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς καὶ ὑπολογίζει τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma=A+\frac{A}{4}+\frac{A}{4^{2}}+\ldots+\frac{A}{4^{\nu-1}},\quad \nu\to\infty.$$

Διότι εἰς τοῦτο καταλήγει ἡ ἀπόδειξις τοῦ 23 θεωρήματος τῆς πραγματείας αὐτοῦ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

Καθ' ὅσον εἶναι γνωστόν, ὁ Ἀρχιμήδης, ὅταν χρησιμοποιῇ εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων του προτάσεις, αἵτινες ἔχουν ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων του μαθηματικῶν, δὲν ἀποδεικνύει αὐτάς. Οὕτω, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν πραγματείαν του Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως αὐτῆς, ἡ ὁποία δὲν σῴζεται, ἔχει γίνει πολὺ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους. Κατὰ συνέπειαν τῶν ἀνωτέρω τὸ θεώρημα 23 τῆς πραγματείας του Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ἀποδεικνύεται διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους.

3. Ἡ γενίκευσις τοῦ ἀρχιμηδείου θεωρήματος.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε . . . . ἀποτελοῦντα ἐν συνεχείᾳ ὅρους φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$ (n=2, 3, 4 . . . . ), ὅπου Α ὁ μέγιστος ὅρος καὶ

$B = \frac{A}{n}$, (1), $\Gamma = \frac{B}{n}$ (2), $\Delta = \frac{\Gamma}{n}$, (3) καὶ $E = \frac{\Delta}{n}$ ὁ μικρότερος ὅρος (4).

Ἔστω δὲ

$$Z = \frac{B}{n-1}, \ (5), \quad H = \frac{\Gamma}{n-1} \ (6), \quad \Theta = \frac{\Delta}{n-1}, \ (7), \quad I = \frac{E}{n-1}, \ (8).$$

Ἐκ τῶν (1 καὶ 5) λαμβάνομεν $B+Z = \frac{A}{n-1}$, (9)

Ἐκ τῶν (2 καὶ 6) » $\Gamma+H = \frac{B}{n-1}$, (10)

Ἐκ τῶν (3 καὶ 7) » $\Delta+\Theta = \frac{\Gamma}{n-1}$, (11)

Ἐκ τῶν (4 καὶ 8) » $E+I = \frac{\Delta}{n-1}$, (12).

Ἀλλὰ ἐκ τῶν (5, 6, 7) εἶναι $Z+H+\Theta = \frac{1}{n-1}(B+\Gamma+\Delta)$, (13).

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (9, 10, 11, 12) λαμβάνομεν

$$B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I = \frac{1}{n-1}(A+B+\Gamma+\Delta), \quad (14).$$

Εἰς ταύτην δι' ἀπαλοιφῆς τῶν ἴσων ἐκ τῆς (13) εἶναι

$$B+\Gamma+\Delta+E+I = \frac{A}{n-1}, \quad (15).$$

Καὶ διὰ προσθέσεως τοῦ Α εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (15) λαμβάνομεν

$$A+B+\Gamma+\Delta+E+I = \frac{nA}{n-1} = \frac{A}{1-\frac{1}{n}} = \frac{A}{1-\omega}, \quad \text{ἐὰν τεθῇ } \frac{1}{n} = \omega.$$

Εἶναι δὲ $I = \frac{E}{n-1}$, (ἐκ τῆς 8), ὅπου Ε εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος τῆς φθινούσης προόδου. Κατὰ συνέπειαν διὰ τῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \ldots . \frac{A}{n^{\nu-1}},$$

ὅταν $\nu \to \infty$, χωρὶς ὅμως νὰ γίνεται κατ' αὐτὴν χρησιμοποίησις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

## Zusammenfassung

Der 23. Lehrsatz der Quadratur der Parabel von Archimedes lautet: In einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ ist die um den dritten Teil des kleinstes Gliedes vermehrte Summe aller Glieder $\frac{4}{3}$ mal so gross wie das gröste. Es wird durch dasselbe archimedische Beweisverfahren bewiesen:

Liegt die abfallende geometrische Reihe $A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}$, vor, $(n=2, 3, 4 \ldots .)$,

$$\text{so ist } A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{A}{n^2}=\frac{nA}{n-1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$S=A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\ldots .\frac{A}{n^{\nu-1}}=\frac{A}{1-\frac{1}{n}},\quad \nu\to\infty,\quad \left(\left|\frac{1}{n}\right|<1\right).$$

Es wird erwähnt, dass Aristoteles den folgenden Lehrsatz wusste:
Die Summe S der Glieder der abfallenden geometrischen Reihe

$$\frac{A}{\mu}+\frac{A}{\mu^2}+\frac{A}{\mu^3}\ldots .+\frac{A}{\mu^\nu},\quad \nu\to\infty,\quad (\mu=2, 3, 4 \ldots .),\quad \measuredangle \text{ Aist,}$$

(Phys. Γ 206 b 7—9).

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὰ πρῶτα δέκα θεωρήματα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχουν τὴν λεγομένην γεωμετρικὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, θεωροῦνται δὲ ὡς δημιουργία τῶν πρώτων Πυθαγορείων, οἱ ὁποῖοι τοποθετοῦνται χρονικῶς περὶ τὸ ἔτος 500 π. Χ. Τὸ περιεχόμενον τῶν δέκα αὐτῶν θεωρημάτων ἀναφέρεται εἰς τὰς θεμελιώδεις ταὐτότητας τῆς ἀλγέβρας. Ἡ ἀπόδειξις εἰς αὐτὰ γίνεται γεωμετρικῶς. Ὁ ὅρος «ἄλγεβρα» εἶναι ὡς γνωστὸν ἀραβικός. Εἰς πολλοὺς ἐπικρατεῖ ἡ ἀντίληψις ὅτι ὁ κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὁ ἐπικαλούμενος ἄλγεβρα εἶναι δημιούργημα τῶν Ἀράβων. Οὐδὲν τούτου ἀναληθέστερον. Πρόκειται περὶ μύθου, ὁ ὁποῖος μεταδιδόμενος ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεὰν κινδυνεύει νὰ μετατραπῇ εἰς ἱστορικὴν ἀλήθειαν. Τὸ ἀληθὲς ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι οἱ Ἄραβες ἀπὸ τοῦ ὀγδόου περίπου αἰῶνος μ. Χ. ἤρχισαν νὰ μεταφράζουν τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ νὰ μελετοῦν αὐτὰ ἐπισταμένως. Ἐπινόησις ἢ ἀνακάλυψις ἔστω καὶ ἑνὸς μόνου μαθηματικοῦ θεωρήματος ὑπὸ τῶν Ἀράβων, εἰς ἡμᾶς τοὐλάχιστον δὲν εἶναι γνωστή, ὅπως δὲν εἶναι γνωστὴ καὶ ἐπινόησις ἢ ἀνακάλυψις θεωρήματός τινος ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων. Ἀρκεταὶ μαθηματικαὶ προτάσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν διεσώθησαν εἰς τὴν ἀραβικήν. Οὕτω ἐκ τῶν 8 βιβλίων τῶν περιφήμων Κωνικῶν τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς ἀρχαιότητος Ἀπολλωνίου, τὰ τέσσαρα πρῶτα ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὰ τρία ἑπόμενα εἰς τὴν ἀραβικήν, ἐν ᾧ τὸ ὄγδοον ἀπωλέσθη.

Οἱ Πυθαγόρειοι δὲν εἶχον δημιουργήσει ἀλγεβρικὸν συμβολισμόν. Καθ' ὅσον εἶναι γνωστὸν μέχρι σήμερον ὁ ἀλγεβρικὸς συμβολισμὸς παρετηρήθη τὸ πρῶτον εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου.

Ὁ Διόφαντος ἤκμασε, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, περὶ τὸ 250 μ. Χ. ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ὅπου ἀπέθανε καὶ ἐτάφη. Ἐκ τῶν ἔργων του ἡ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικὰ ἀπετελεῖτο ἐκ 13 βιβλίων. Ἐκ τούτων ἐσώθησαν μόνον τὰ πρῶτα ἓξ, ἐν ᾧ τὰ ἑπόμενα ἑπτὰ ἀπωλέσθησαν.

Τὸ περιεχόμενον τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων καὶ μάλιστα συστημάτων, ὅπου οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τῶν διδομένων ἐξισώσεων. Ἀλλὰ καὶ μεμονωμέναι ἐξισώσεις περιέχουσαι περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους ὑπάρχουν εἰς τὰ Ἀριθμητικά. Ἐκεῖθεν δὲ καὶ ἡ ὀνομασία τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὡς διοφαντικῶν ἐξισώσεων. Ἐνταῦθα δέον νὰ προστεθῇ ὅτι αἱ διοφαντικαὶ ἐξισώσεις δὲν εἶναι ἐπινόησις τοῦ Διοφάντου. Ὁ Πυθαγόρας μνημονεύεται ὡς πρῶτος ἐπιλύσας τὴν ἐξίσωσιν $z^2=x^2+y^2$, ἥτις εἶναι διοφαντικὴ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, περιέχουσα τρεῖς ἀγνώστους εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἔρευνα τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων γίνεται τὸ πρῶτον περὶ τὸ 540 π. Χ., ὅτε τοποθετεῖται ἡ ἀκμὴ τοῦ Πυθαγόρου.

Εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην αἱ ἀλγεβρικαὶ γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου μετεφέρθησαν τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου καὶ μαθηματι-

κοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης (Fibonazzi) περὶ τὸ ἔτος 1200 μ. Χ. Φαίνεται ὅτι ὁ Fibonazzi μετεῖχε τῶν Σταυροφοριῶν εἴτε ὡς ὁπλίτης εἴτε ὡς ἔμπορος. Εἰς τὴν ἐν Ἰταλίᾳ ἐκδοθεῖσαν ἄλγεβραν τοῦ Fibonazzi ὑπάρχουν πολλὰ προβλήματα ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὡς προβλήματα Fibonazzi. Κατὰ τὸ ἔτος 1572 ὁ καλός, Ἰταλὸς ἐπίσης, μαθηματικὸς Bombelli ἐδημοσίευσε τὴν περίφημον ἄλγεβράν του, ἡ ὁποία περιεῖχε 143 προβλήματα ἐκ τῶν 189 τῶν ἓξ σωθέντων βιβλίων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὡς ἰδικά του. (P. ver Eecke, Diophante d' Alexandrie, σελ. LXII—LXVII).

Τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, μετὰ τοῦ περισωθέντος μικροῦ μέρους (τεσσάρων θεωρημάτων) τῆς πραγματείας του περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν, ἐδημοσιεύθη διὰ τοῦ τύπου τὸ πρῶτον ἐν Παρισίοις τῷ 1621 ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Gaspar Bachet, Sieur de Méziriack ἐκ χειρογράφου εὑρισκομένου ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῶν Παρισίων. Ἡ δευτέρα ἔκδοσις τούτου ἐγένετο πάλιν ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τοῦ Σαμουὴλ Fermat, υἱοῦ τοῦ Πέτρου Fermat, σπουδαίου τούτου μελετητοῦ καὶ σχολιαστοῦ τοῦ Διοφάντου. Ἡ τρίτη ἔκδοσις τῶν Ἀριθμητικῶν ἐγένετο ἐν Λιψίᾳ ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery (B. G. Teubner) εἰς δύο τόμους. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον (1893) περιέχονται τὰ Ἀριθμητικὰ καὶ τὸ Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν (ἀρχαῖον κείμενον καὶ μετάφρασις ἀντίστοιχος εἰς τὴν λατινικήν), ἐν ᾧ εἰς τὸν δεύτερον τόμον (1895) περιέχονται ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα ἐκ τῆς Παλατίνης Ἀνθολογίας καὶ σχόλια εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου. Ἡ τετάρτη ἔκδοσις τοῦ κειμένου τῶν Ἀριθμητικῶν ἐν Εὐρώπῃ ἐγένετο ὑπ' ἐμοῦ περὶ τὸ τέλος τοῦ 1963 (Ἀθῆναι, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων). Αὕτη περιέχει τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἀντίστοιχον μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν Ἑλληνικὴν καὶ ἐπεξηγήσεις ἀναγκαίας πρὸς κατανόησιν τῶν προβλημάτων. Εἰς τὴν ἔκδοσιν ταύτην δὲν περιελήφθησαν τὰ παλαιὰ σχόλια.

Τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀναλύεται κατωτέρω εἶναι τὸ 19ον τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν. Ὁ ἀναγνώστης δὲν θὰ δυσκολευθῇ νὰ ἀντιληφθῇ καὶ νὰ ἐκτιμήσῃ τὸ μεγαλεῖον τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος καὶ εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν. Ὁ χρησιμοποιούμενος κατὰ τὴν ἀνάλυσιν συμβολισμὸς εἶναι ὁ σύγχρονος ἀλγεβρικὸς συμβολισμός. Ὁ Διόφαντος ἀντὶ τοῦ συμβολισμοῦ τούτου χρησιμοποιεῖ φράσεις καὶ λέξεις δηλωτικὰς τῶν πράξεων. Καὶ τοῦτο ἐπιτείνει ἔτι περισσότερον τὸν θαυμασμόν μας διὰ τὴν ἀλγεβρικὴν δημιουργίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Τὸ πρὸς ἀνάλυσιν πρόβλημα:

## Βιβλίον III, πρόβλημα 19ον.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἢ σὺν ἕκαστον ἢ μεῖον ἕκαστον ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἄγνωστοι ἀριθμοὶ $y$, $z$, $\omega$, $\varphi$.

Τὰ τέσσαρα ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος εἶναι:

$(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm y =$ τετράγωνος, (1), $\qquad (y+z+\omega+\varphi)^2 \pm z =$ τετράγωνος, (2),

$(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \omega =$ τετράγωνος, (3), $\qquad (y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \varphi =$ τετράγωνος, (4).

Θεωρεῖ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ τὴν ἐκ ταύτης ταὐτότητα

$$\alpha^2 \pm 2\beta\gamma = \beta^2+\gamma^2 \pm 2\beta\gamma = (\beta \pm \gamma)^2$$

καὶ λέγει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρόβλημα, νὰ εὑρῇ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν καὶ διαφόρους καθέτους πλευράς. Τοῦτο, λέγει, εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ πρόβλημα, δοθεὶς τετράγωνος νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ τέσσαρας διαφόρους τρόπους, «καὶ ἡμεῖς ἐμάθομεν νὰ ἀναλύωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν εἰς δύο τετραγώνους κατ' ἀπείρους τρόπους».

[Ἡ ἀνάλυσις τετραγώνου ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τοῦ 8ου προβλήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὁ πρὸς ἀνάλυσιν τετράγωνος ὁ $y^2$. Καλεῖ τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων $x^2$. Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι τότε $y^2-x^2$, (1). Λαμβάνει τυχὸν πολλαπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ $x^2$, ἔστω τὸ $\mu x$, ἔνθα $\mu \neq 1$ καὶ σχηματίζει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἄλλου τετραγώνου ἀριθμοῦ ἴσην πρὸς $\mu x-y$. Τότε θὰ εἶναι $y^2=x^2+(\mu x-y)^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{2\mu y}{\mu^2+1}$.

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ $x$ εἰς τὴν (1) εὑρίσκεται ὁ δεύτερος ζητούμενος τετράγωνος ἀριθμὸς $=\left[\frac{y(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2$. Ἑπομένως ὁ δοθεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἀνελύθη εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, ἤτοι εἶναι

$$y^2=\left[\frac{2\mu y}{\mu^2+1}\right]^2+\left[\frac{y(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2 \quad (2).$$

Δίδοντες εἰς τὸν $\mu$ τὰς τιμὰς 2, 3, 4 .... ἀναλύομεν τὸν $y^2$ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατ' ἀπείρους τρόπους.

(Σημείωσις. Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν

$$(\mu^2+1)^2=(2\mu)^2+(\mu^2-1)^2, \quad (3).$$

Ἐὰν $\mu=\frac{m}{n}$, ἡ σχέσις (3) γίνεται

$$(m^2+n^2)^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2, \quad (4).$$

Ὁ τύπος (4) παρέχει ὅλας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2=x^2+y^2$, ἤτοι ἁπάσας τὰς τριάδας ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὸν Εὐκλείδειον τύπον X, 28, Λῆμμα 1. Τὴν σχέσιν (4) χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος εἰς τὸ προκείμενον 19ον πρόβλημα τοῦ 3ου βιβλίου)].

Ἀφοῦ λοιπὸν ὑπενθυμίζει ὅτι ἐμάθομεν πῶς δοθεὶς τετράγωνος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ πολλοὺς τρόπους, λαμβάνει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 4, 5 καὶ 5, 12, 13. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λαμβάνονται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀποδιδομένου εἰς τὸν Πυθαγόραν

$$\mu^2+\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu^2+1}{2}\right)^2, \text{ ὅπου } \mu \text{ περιττός,}$$

(ἐνταῦθα πρῶτον 3 καὶ κατόπιν 5).

Πολλαπλασιάζει ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἄλλου τριγώνου, ὁπότε ἔχει 39, 52, 65 καὶ 25, 60, 65 ἤτοι ἔχει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας. Μένει νὰ εὕρῃ ἄλλα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὸν 65 ὡς ὑποτείνουσαν. Ὁ 65, λέγει, ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι εἶναι $65=4^2+7^2$ καὶ $65=8^2+1^2$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπειδὴ $65=5.13$ καὶ εἶναι $5=1^2+2^2$ καὶ $13=2^2+3^2$. —

Σχηματίζει τώρα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀριθμῶν (7, 4), τὸ δὲ ἐκ τῶν ἀριθμῶν (8, 1) χρησιμοποιῶν τὴν ταὐτότητα, τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, τὴν

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2.$$

Τὸ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ 4 λαμβανόμενον κατὰ τὴν ἀνωτέρω ταὐτότητα τρίτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ($m=7$, $n=4$), ἔχει πλευρὰς (33, 56, 65), ἐν ᾧ τὸ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 8 καὶ 1 λαμβανόμενον ὁμοίως τέταρτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει πλευρὰς (16, 63, 65).

Κατὰ συνέπειαν τὰ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν 65 εἶναι (39, 52, 65), (25, 60, 65), (33, 56, 65), (16, 63, 65).

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀγνώστων $(y+z+\omega+\varphi) = 65x$, (5), καὶ ἕκαστον τῶν ζητουμένων ἀγνώστων ἴσον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου ὀρθογωνίου τριγώνου, συναρτήσει τοῦ $x^2$, ἤτοι

$$y = \frac{4 \cdot 39 \cdot 52}{2} x^2 = 4056x^2, \qquad z = \frac{4 \cdot 25 \cdot 60}{2} x^2 = 3000x^2,$$

$$\omega = \frac{4 \cdot 33 \cdot 56}{2} x^2 = 3696x^2, \qquad \varphi = \frac{4 \cdot 16 \cdot 63}{2} x^2 = 2016x^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνει $12768x^2 = 65x$, ἐξ ἧς $x = \frac{65}{12768}$.

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τέλος τῆς τιμῆς τοῦ $x$ εἰς τὰς προηγουμένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων εἶναι

$$y = 17136600 : \xi^2, \qquad z = 12675000 : \xi^2$$

$$\omega = 15615600 : \xi^2, \qquad \varphi = 8517600 : \xi^2$$

ὅπου $\xi^2 = (12768)^2 = 163\ 021\ 824.$

Ἐπαλήθευσις

Καλοῦμεν α,β,γ,δ τὰς τιμὰς τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἀγνώστων καὶ ἀναλύομεν αὐτάς, τὸ ἄθροισμά των, ὡς καὶ τὸν παρονομαστὴν (τὸ $\xi^2$) εἰς γινόμενα παραγόντων, ὁπότε ἔχομεν

$\alpha = 17\ 136\ 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13^4$, $\beta = 12\ 675\ 000 = 2^3\ 3 \cdot 5^5 \cdot 13^2$,

$\gamma = 15\ 615\ 600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13^2$, $\delta = 8\ 517\ 600 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^2$,

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 53\ 944\ 800 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 19$, $\xi^2 = 163\ 021\ 824 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$.

Ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3, 4) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

1) $$\left(\frac{53\ 944\ 800}{163\ 021\ 824}\right)^2 \pm \frac{17\ 136\ 600}{163\ 021\ 824}$$

$$\frac{(2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 19)^2 \pm 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13^4 \cdot 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2}{(163\ 021\ 824)^2}$$

$$\frac{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^4 \cdot 19^2 (5^2 \pm 2^3 \cdot 3)}{(163\ 021\ 824)^2} = \left[\begin{array}{l}\rightarrow \\ \rightarrow\end{array}\right.$$

Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται

$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^4 \cdot 19^2 \cdot 7^2 = (32 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 169 \cdot 19)^2 = (75\ 522\ 720)^2$

καὶ $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^4 \cdot 19^2 = (32 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 169 \cdot 19)^2 = (10\ 788\ 960)^2$.

Ἑπομένως εἶναι

$$= \left[\begin{array}{l}\rightarrow \left(\frac{75\ 522\ 720}{163\ 021\ 824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\frac{10\ 788\ 960}{163\ 021\ 824}\right)^2.\end{array}\right.$$

2) $$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{12\,675\,000}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^8 . 3 . 5^5 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10} . 3^2 . 5^4 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (13^2 \pm 2^8 . 3 . 5)}{(163\,021\,824)^2} = \begin{cases} \to \left(\frac{70\,543\,200}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \to \left(\frac{29\,047\,200}{163\,021\,824}\right)^2 \end{cases}$$

3) $$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{15\,615\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^4 . 3 . 5^2 . 7 . 11 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10} . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (5^2 . 13^2 \pm 2^4 . 3 . 7 . 11)}{(163\,021\,824)^2} = \begin{cases} \to \left(\frac{73\,862\,880}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \to \left(\frac{19\,088\,160}{163\,021\,824}\right)^2 \end{cases}$$

4) $$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{8\,517\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^5 . 3^2 . 5^2 . 7 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$2^{10} . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (5^2 . 13^2 \pm 2^5 . 3^2 . 7) = \begin{cases} \to \left(\frac{65\,563\,680}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \to \left(\frac{39\,006\,240}{163\,021\,824}\right)^2 \end{cases}$$

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# Αἱ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΤΥΠΟΝ ΤΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ

Ὁ Ἰάμβλιχος, νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος τῶν ἀρχῶν τοῦ 4ου αἰῶνος μ.Χ., (ἐκ Χαλκίδος τῆς Συρίας καταγόμενος), εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» (H. Pistelli, σελ. 100) λέγει ὅτι ἐπὶ τῆς παλαιᾶς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου διέκρινον εἰς τὰ μαθηματικὰ τρεῖς μεσότητας (δηλ. ἀναλογίας), τὴν ἀριθμητικήν, τὴν γεωμετρικὴν καὶ τὴν ὑπεναντίαν, ἡ ὁποία μετωνομάσθη ὑπὸ τῶν περὶ τὸν Ἀρχύταν καὶ τὸν Ἵππασον ἁρμονική. Ἀφοῦ δὲ μετεβλήθη τὸ ὄνομα τῆς ὑπεναντίας εἰς ἁρμονικήν, οἱ περὶ τὸν Εὔδοξον μαθηματικοὶ προσανευρόντες ἄλλας τρεῖς ἀναλογίας ἀκόμη ὠνόμασαν ὑπεναντίαν τὴν τετάρτην. Οἱ νεώτεροι δὲ εὗρον ἀκόμη ἄλλας τέσσαρας ἀναλογίας. [Μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα .... Ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν .... οἱ δὲ νεώτεροι τέσσαρας ἄλλας τινὰς προσανεῦρον, ἐκ τῶν ὅρων καὶ τῶν διαστημάτων προστεχνησάμενοι τὴν εὕρεσιν αὐτῶν].

Τὰς δέκα ὡς ἄνω ἀναλογίας ἐκθέτει ὡς ἑξῆς ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ (R. Hoche, σελ. 144) :

«*Ἐπὶ κεφαλαίου τοίνυν οἱ τῶν δέκα ἀναλογιῶν ὅροι ἐκκείσθωσαν ὑφ' ἓν παράδειγμα πρὸς τὸ εὐσύνοπτον*».

| | | | |
|---|---|---|---|
| πρώτης | α, | β, | γ |
| δευτέρας | α, | β, | δ |
| τρίτης | γ, | δ, | ϛ |
| τετάρτης | γ, | ε, | ϛ |
| πέμπτης | β, | δ, | ε |
| ἕκτης | α, | δ, | ϛ |
| ἑβδόμης | ϛ, | η, | ϑ |
| ὀγδόης | ϛ, | ζ, | ϑ |
| ἐνάτης | δ, | ϛ, | ζ |
| δεκάτης | γ, | ε, | η. |

Ἑρμηνεύει δὲ καταλλήλως ὁ Νικόμαχος τὸν σχηματισμὸν ἑκάστης ἀναλογίας χρησιμοποιῶν ὡς παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς.

Κατὰ σημερινὴν διατύπωσιν, ἂν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς a, b, c, ὅπου $a>b>c$. αἱ δέκα ἀναλογίαι εἶναι αἱ κάτωθι :

1. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$, ἢ $a-b=b-c$, $a+c=2b$, ἀριθμητικὴ
2. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$ ἢ $=\frac{b}{c}$, $ac=b^2$, γεωμετρικὴ
3. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$, $b=\frac{2ac}{a+c}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, ἁρμονικὴ
4. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$, $\frac{a^2+c^2}{a+c}=b$
5. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$, $a=b+c-\frac{c^2}{b}$
6. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$, $c=a+b-\frac{a^2}{b}$
7. $\frac{a-c}{b-c}=\frac{a}{c}$, $c^2=2ac-ab$
8. $\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$, $a^2+c^2=a(b+c)$
9. $\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$, $b^2+c^2=c(a+b)$
10. $\frac{a-c}{a-b}=\frac{b}{c}$, $a=b+c$.

[Σημείωσις: Οἱ ἀριθμοὶ τῆς (ἐξ ἀριστερῶν) τρίτης στήλης τῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων τοῦ Νικομάχου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ a τῆς ἀνωτέρω συγρόνου διατυπώσεως, οἱ τῆς δευτέρας στήλης εἰς τὸ b καὶ οἱ τῆς πρώτης εἰς τὸ c].

Ὁ Νικόμαχος γράφει, ὅτι τὴν ὀνομασίαν τῆς τρίτης ἀναλογίας, (τὴν ἁρμονικήν), τινὲς τὴν ἀποδίδουν εἰς τὸν Φιλόλαον (Τινὲς δὲ αὐτὴν ἁρμονικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν ἀκολούθως Φιλολάῳ ἀπὸ τοῦ παρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἁρμονίᾳ . . . ), (R. HOCHE, σελ. 135, 10), ἐν ᾧ ὁ Ἰάμβλιχος, ἀναφέρει, ὅτι ἡ ὀνομασία τῆς τρίτης ἀναλογίας εἰς ἁρμονικὴν ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου καὶ τοῦ Ἱππάσου. Καὶ διὰ μὲν τὸν Ἵππασον δὲν ὑπάρχει ἄλλη συναφὴς ἐπιβεβαιωτικὴ πληροφορία, ἐν ᾧ διὰ τὸν Ἀρχύταν ὑπάρχει ἡ μαρτυρία τοῦ Πορφυρίου (Εἰς Πτολεμαίου Ἁρμονικὰ σ. 82, H. Diels, Fragmente d. Vor. I σελ. 435, 1951) ἔχουσα ὡς ἑξῆς :

«*μέσαι δὲ ἐντι τρῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἂν καλέοντι ἁρμονικάν. ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι*

*τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτᾳ <τᾷ> ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἂν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι <τοῖοι· ᾧ> ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον».*

Ἑρμηνεία: Εἰς δὲ τὴν μουσικὴν ὑπάρχουν τρεῖς ἀναλογίαι, μία μὲν ἀριθμητική, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρική, τρίτη δὲ ἡ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦσιν ἁρμονικήν. Ἡ ἀριθμητικὴ μὲν ὅταν ὑπάρχουν τρεῖς ἐν συνεχείᾳ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ (ἀνὰ δύο, ἐν συνεχείᾳ) ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ὅ,τι δηλ. ὑπερέχει ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, τόσον ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου. Καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν συμβαίνει, ὥστε τὸ (μουσικὸν) διάστημα τῶν μεγαλυτέρων ὅρων (ἀριθμῶν) νὰ εἶναι μικρότερον, τὸ δὲ τῶν μικροτέρων ὅρων νὰ εἶναι μεγαλύτερον. Ἡ γεωμετρικὴ δὲ ὅταν εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. Οἱ μεγαλύτεροι δὲ ἐκ τούτων ἔχουν τὸ αὐτὸ διάστημα, ὅπως καὶ οἱ μικρότεροι Ἡ δὲ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἁρμονικήν, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου κατὰ τόσον ἰδικόν του (τοῦ πρώτου) μέρος, τόσον ἰδικόν του μέρος ὁ μέσος ὑπερέχει τοῦ τρίτου. Γίνεται δὲ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν τὸ διάστημα τῶν μεγαλυτέρων μεγαλύτερον, τὸ δὲ τῶν μικροτέρων μικρότερον.

Ἂν δηλ. ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοὶ $a>b>c$ ὑπάρχει κατὰ τὸν Ἀρχύταν ἁρμονικὴ ἀναλογία ὅταν $a=b+\frac{a}{n}$ (ὁ a ὑπερέχει τοῦ b κατὰ μέρος αὐταύτου, κατὰ κλάσμα τοῦ ἑαυτοῦ του, δηλ. τοῦ a (n=2, 3, 4, . . .) καὶ $b=c+\frac{c}{n}$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $a-b=\frac{a}{n}$ καὶ $b-c=\frac{c}{n}$. Καὶ διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$, ἐκ ταύτης δὲ εἶναι

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, ἢ $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, (1), ἐξ ἧς $b=\frac{2ac}{a+c}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν a, c. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἁρμονικὴν ἀναλογίαν θέσωμεν a=12, c=6 θὰ ἔχωμεν b=8 ὡς ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12. Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι 9. Ἐκ τῶν τεσσάρων ὅμως τούτων ἀριθμῶν 6, 8, 9, 12 σχηματίζεται ἡ μουσικὴ ἀναλογία 6 : 8 = 9 : 12 ἐκ τῆς ὁποίας ὁ Πυθαγόρας κατεσκεύασε τὴν μουσικὴν Πυθαγόρειον κλίμακα.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον

ἀκτῖνος καμπυλότητος b καὶ φωτεινὸν ἀντικείμενον κείμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ κατόπτρου (ἔστω πέρα τοῦ κέντρου καμπυλότητος) εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, ἐν ᾧ τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν c ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ τρία ταῦτα μεγέθη ἐκφράζεται διὰ τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, ἤτοι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου. Δυνάμεθα δηλονότι νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ μαθηματικὸς νόμος καθ' ὃν σχηματίζονται τὰ εἴδωλα τῶν φωτεινῶν ἀντικειμένων εἰς τὸν ὀφθαλμὸν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν νόμον καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ φθόγγοι τῆς μουσικῆς, ἐφ' ὅσον τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι εἷς ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ἐκ τῆς ὁποίας κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

T. Heath, A history of Greek Mathematics.

O. Becker—J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik.

J. E. Hofmann Geschichte der Mathematik, Sammlung Göschen, 1. Teil, 2. Auflage, 1963.

W. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, 1956, Basel—Stuttgart.

Paul—Henri Michel, De Pythagore a Euclide, Paris, 1950.

Πάππου, Συναγωγὴ III σ. 102, Hultsch.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΣΤ' 1964 = 16
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β'
31/32

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1964

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (IV, 39. V, 10, 11, 12, VI, ΛΗΜΜΑΤΑ 1, 2, ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12)

**[Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς ἐκδόσεως παρ' ἡμῶν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου (σελίδες 576), Ἰούλιος 1964, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων Ὑπουργείου Παιδείας δημοσιεύομεν κατωτέρω ἀνάλυσιν προβλημάτων τινων ἐξ αὐτῶν].**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 39ον, IVου βιβλίου

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου, πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ μεσαίου ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου, νὰ ἔχῃ λόγον δεδομένον, προσέτι δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων λαμβανομένων ἀνὰ δύο νὰ σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\omega > z > y$. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\omega - z}{z - y} = \rho, \quad (1), \quad y + z = \alpha^2, \quad (2), \quad z + \omega = \beta^2, \quad (3), \quad y + \omega = \gamma^2, \quad (4).$$

Λαμβάνει $\rho = 3$ καὶ $y + z = \alpha^2 = 4$. Κατὰ συνέπειαν εἶναι $z > 2$, ἀφοῦ $z > y$. Ἔστω $z = x + 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνει ἐκ τῆς (2), $y + x + 2 = 4$, $y = 2 - x$, (5). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\omega - (x + 2) = 3[x + 2 - (2 - x)]$, $\omega = 7x + 2$. Ἐκ τῆς (3) εἶναι $8x + 4 = \beta^2$, (6) καὶ ἐκ τῆς (4), $6x + 4 = \gamma^2$, (7). Αἱ ἐξισώσεις (6, 7), παρατηρεῖ, εἶναι συναληθεύουσαι (διπλοϊσότης). Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνει $2x = \beta^2 - \gamma^2 = (\beta + \gamma)(\beta - \gamma)$. Ἀναλύει τὸν $2x$ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, $2x = \frac{x}{2} \cdot 4$ καὶ καλεῖ $\beta + \gamma = 4$ καὶ $\beta - \gamma = \frac{x}{2}$ (μέθοδος διπλοϊσότητος). Διὰ προσθέσεως καὶ κατόπιν ἀφιαρέσεως τούτων λαμβάνει

$$\beta = \frac{x}{4} + 2, \quad \gamma = 2 - \frac{x}{4}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ $\beta$ ἢ $\gamma$, διὰ τῆς τιμῆς του, εἰς τὴν (6) ἢ (7) ἀντιστοίχως λαμβάνει $x = 112$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνεται $y < o$. Ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Ὅθεν πρέπει νὰ εὑρεθῇ τιμὴ τοῦ $x$, ὥστε $o < x < 2$. Ὅταν τοῦτο συμβαίνῃ εἶναι ἐκ τῆς (7), $6x + 4 = \gamma^2 < 16$, (8), ἐν ᾧ ὅταν $x = 2$ εἶναι $\gamma^2 = 16$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων $6x + 4 = \gamma^2$, $8x + 4 = \beta^2$, $\alpha^2 = 4$ ἔχομεν τρία τετράγωνα μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἡ σχέσις $8x + 4 < 6x + 4 < 4$, ἀφοῦ $o < x < 2$. Ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μεσαίου τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι $2x$. Τοῦ δὲ μεσαίου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου εἶναι $6x$, ἤτοι ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μεσαίου εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ μεσαίου τετραγώνου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρία τετράγωνα πλη-

9

ροῦντα τὰς σχέσεις αὐτάς, τῶν ὁποίων τὸ μικρότερον νὰ εἶναι 4, ἐπὶ πλέον δὲ τὸ μεσαῖον τῶν τετραγώνων τούτων νὰ εἶναι $<16$, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ θετικὴ λύσις. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ $\beta^2 > \gamma^2 > 4$, ὅπου $\gamma^2 < 16$. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀναγωγὴν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι

$$\beta^2 - \gamma^2 = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 4), \quad (9), \quad \text{ὅπου } \gamma^2 < 16, \quad (10).$$

Λαμβάνει $\gamma = t+2$, $\gamma^2 = t^2+4t+4$. Δι' ἀντικατασάσεως εἰς τὴν (9) εἶναι

$$\beta^2 = \frac{4}{3}t^2 + \frac{16}{3}t + 4.$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 9 εἶναι, τετράγωνος $= 12t^2+48t+36$ καὶ διὰ διαιρέσεως διὰ 4 εἶναι, τετράγωνος $= 3t^2+12t+9$, (11). Ἐκ τῆς (10) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ γ εἶναι $(t+2)^2 < 16$, $t+2 < 4$, $t < 2$, (12). Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ t λαμβάνει δοκιμαστικῶς εἰς τὴν σχέσιν (11), $3t^2+12t+9 =$ τετράγωνος, ἔστω $= (3-\mu t)^2$, (13), ὅπου ὁ μ θὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$t = \dfrac{6\mu+12}{\mu^2-3}$. Καὶ ἐκ τῆς (12), $t = \dfrac{6\mu+12}{\mu^2-3} < 2$ ἢ $6\mu+12 < 2\mu^2-6$, $6\mu+18 < 2\mu^2$.

Ἐπιλύοντες τὴν ἀνισότητα ταύτην κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου ἔχομεν

$$\mu^2-3\mu > 9, \quad \left(\mu - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}+9, \quad \mu - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{45}}{2}, \quad \mu > \frac{3+\sqrt{45}}{2}, \quad (14).$$

Ἀλλὰ $6 < \sqrt{45} < 7$. Ἐὰν λάβῃ ἀντὶ τῆς $\sqrt{45}$, τὸν 6, ἡ ἀνισότης (14) ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον καὶ θὰ εἶναι

$$\mu > 4\frac{1}{2}. \quad \text{Ἐὰν λάβῃ } 7 \text{ ἀντὶ } \sqrt{45} \text{ θὰ εἶναι } \mu \geqq 5.$$

Λαμβάνει $\mu = 5$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (13) γίνεται

$$3t^2+12t+9 = (3-5t)^2, \text{ ἐξ ἧς } t = \frac{21}{11} < 2$$

Καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\gamma = t+2$, εἶναι δι' ἀντικαταστάσεως

$$\gamma = \frac{43}{11}, \quad \gamma^2 = \frac{1849}{121}.$$

Τώρα ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει

$$6x+4 = \gamma^2 = \frac{1849}{121}, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{1365}{726} < 2.$$

Θὰ εἶναι ἄρα $y = 2-x = 2-\dfrac{1365}{726} = \dfrac{87}{726}$, $z = x+2 = \dfrac{2817}{726}$, $\omega = 7x+2 = \dfrac{11007}{726}$ ἢ

$$y = \frac{14\frac{1}{2}}{121}, \quad z = \frac{469\frac{1}{2}}{121}, \quad \omega = \frac{1834\frac{1}{2}}{121} \text{ ἢ } y = \frac{58}{484}, \; z = \frac{1878}{484}, \; \omega = \frac{7338}{484},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{\omega - z}{z - y} = \frac{5460}{1820} = 3 \quad \text{καὶ} \quad \omega + z = \left(\frac{96}{22}\right)^2, \quad z + y = \left(\frac{44}{22}\right)^2, \quad \omega + y = \left(\frac{86}{22}\right)^2.$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10ον Νου βιβλίου

Τὸ 10ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ἔχει ὡς ἑξῆς: Νὰ τμηθῇ ἡ μονὰς εἰς δύο κλάσματα καὶ νὰ προστεθῇ εἰς τὸ μὲν δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ εἰς τὸ δέ, ἄλλος δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ἑκάστοτε τετράγωνος.

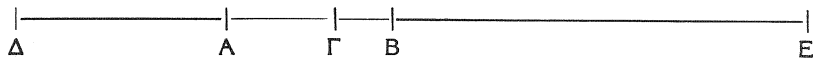
Ἔστωσαν τὰ κλάσματα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ μονὰς y καὶ z καὶ οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$. Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$y+z=1, \quad (1), \quad y+\alpha_1=\beta^2, \quad z+\alpha_2=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\alpha_1=2$ καὶ $\alpha_2=6$ ὁπότε εἶναι

$$y+2=\beta^2, \quad (2) \text{ καὶ } \quad z+6=\gamma^2, \quad (3).$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ μοναδικὸν τῶν 'Αριθμητικῶν ὅπου χρησιμοποιοῦνται εὐθύγραμμα τμήματα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν




Ἔστω $AB=1$, $A\Gamma=y$, $\Gamma B=z$, $A\Delta=2$, $BE=6$, $A\Gamma+\Gamma B=1$.

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων ἔπεται, $\Delta E=9$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $\Delta\Gamma=$τετράγωνος, $\Gamma E=$τετράγωνος, ἤτοι ὁ 9 (=ΔΕ) νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, τοὺς ΓΔ καὶ ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων, ὁ ΓΔ, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $A\Delta=2$ καὶ μικρότερος τοῦ $\Delta B=3$, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 9 εἰς δύο τετραγώνους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2 καὶ μικρότερος τοῦ 3. Ὅταν εὑρεθῇ ὁ τετράγωνος ΓΔ, δι' ἀφαιρέσεως ἀπ' αὐτοῦ, τοῦ ΑΔ, εὑρίσκεται, λέγει, ὁ ΑΓ καὶ δι' ἀφαιρέσεως τούτου ἀπὸ τοῦ AB εὑρίσκεται ὁ ΒΓ.

Ἔστω ὁ εἷς τῶν τετραγώνων ὁ $x^2$, ὁπότε $2<x^2<3$, (4). Ὁ ἄλλος ζητούμενος τετράγωνος θὰ εἶναι $9-x^2$. Οὗτος ὑπολογίζεται κατὰ τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν ('Ιδὲ ΠΛΑΤΩΝ, ἔτος ΙΕ', 1963, τεύχη Α' καὶ Β" 29/30, σελὶς 287). 'Αντὶ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, εἰς τὴν σχέσιν (4), λαμβάνει δύο τετραγώνους ἀριθμούς, τὸν μὲν $\frac{289}{144}>2$, τὸν δὲ $\frac{361}{144}<3$ καὶ λέγει ὅτι ἐὰν κατασκευάσῃ $\frac{289}{144}<x^2<\frac{361}{144}$, θὰ λύσῃ τὸ ζητούμενον.

Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως εἶναι

$$\frac{17}{12}<x<\frac{19}{12}, \quad (5).$$

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ($9-x^2$) νὰ προσδιορισθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη (5). Θέτει κατὰ τὸ II, 8

$$9-x^2=(3-\mu x)^2, \quad (6)$$

ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως εἶναι $x=\frac{6\mu}{\mu^2+1}$, ὁπότε κατὰ τὴν (5) πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{17}{12}<\frac{6\mu}{\mu^2+1}<\frac{19}{12}.$$

Θεωρεῖ τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{17}{12} < \frac{6\mu}{\mu^2+1}$, τὴν ὁποίαν λύει κατὰ τὸν γνωστόν του τρόπον, ἤτοι

$$72\mu > 17\mu^2+17, \qquad 17^2\mu^2-17\cdot 72\mu < -17^2,$$

$$(17\mu-36)^2 < 36^2-17^2, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \mu < \frac{36+\sqrt{1007}}{17}.$$

Ἀλλὰ $31 < \sqrt{1007} < 32$. Θέτει

$$\mu \leqq \frac{36+31}{17} = \frac{67}{17}, \quad \left(\text{λέγων ὅτι ὁ } \mu \text{ δὲν εἶναι } > \frac{67}{17}\right).$$

Ἀκολούθως θεωρεῖ τὴν ἄλλην ἀνισότητα $\frac{6\mu}{\mu^2+1} < \frac{19}{12}$, τὴν ὁποίαν λύει ὁμοίως, ἤτοι

$$19\mu^2+19 > 72\mu, \qquad 19^2\mu^2-19\cdot 72\mu > -19^2,$$

$$(19\mu-36)^2 > 36^2-19^2, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \mu > \frac{36+\sqrt{935}}{19}.$$

Ἀλλὰ $30 < \sqrt{935} < 31$. Θέτει $\mu \geqq \frac{36+30}{19} = \frac{66}{19}$, $\left(\text{λέγων, ὅτι ὁ } \mu \text{ δὲν εἶναι } < \frac{66}{19}\right)$.

Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{66}{19} \leqq \mu \leqq \frac{67}{17}$, λαμβάνει $\mu = 3\frac{1}{2}$ (κατὰ προσέγγισιν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν) καὶ ἀντικαθιστᾷ εἰς τὴν σχέσιν (6) ὁπότε λαμβάνεται

$$9-x^2 = \left(3-3\frac{1}{2}x\right)^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = \frac{84}{53} \quad \text{καὶ} \quad x^2 = \frac{7056}{2809}.$$

Τὰ ζητούμενα ἄρα κλάσματα τῆς μονάδος θὰ εἶναι

$$y = x^2-2, \quad \frac{7056}{2809}-2 = \frac{1438}{2809} \quad \text{καὶ} \quad z = 1-\frac{1438}{2809} = \frac{1371}{2809},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{1438}{2809}+\frac{1371}{2809} = 1.$$

[Σημείωσις: Ἐπειδὴ ὁ μ ἐλήφθη κατὰ προσέγγισιν $3\frac{1}{2}$, δὲν ἐπαληθεύεται ἡ σχέσις (5) ἐκ τῆς τιμῆς $x = \frac{84}{53}$, διότι εἶναι μὲν $\frac{17}{12} < \frac{84}{53}$, ὄχι ὅμως $\frac{84}{53} < \frac{19}{12}$. Τοῦτο δὲν ἐπηρεάζει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος].

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11ον

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὁ αὐτὸς δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ νὰ σχηματίζηται ὑφ' ἑκάστου τετράγωνος.

Περιορισμός: Πρέπει ὅμως ὁ διδόμενος ἀριθμὸς νὰ μὴ εἶναι 2, οὔτε ἄθροισμα τοῦ 2 σὺν πολλαπλάσιον τοῦ 8.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ τμήματα τῆς μονάδος $y$, $z$, $\omega$ καὶ τὸν προστιθέμενον εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν $\delta$ θὰ ἔχωμεν

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta=\alpha^2, \quad z+\delta=\beta^2, \quad \omega+\delta=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta=3$, ὁπότε τὸ πρόβλημα γίνεται

$$y+z+\omega=1, \ (1), \quad y+3=\alpha^2, \ (2), \quad z+3=\beta^2, \ (3), \quad \omega+3=\gamma^2, \ (4).$$

Ἐκ τῶν (2, 3, 4) εἶναι διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη $y+z+\omega+9=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, καὶ ἐκ τῆς (1), $10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Ἑπομένως πρέπει ὁ 10 νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3. Ἐφαρμόζει πρὸς τοῦτο τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἔχει ὀνομάσει «παρισότητος ἀγωγήν», δηλ. μέθοδον προσεγγίσεως καὶ ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει εἰς τὸ 9ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου.

Κατὰ ταύτην, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς τρία τετράγωνα λαμβάνει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ζητεῖ νὰ εὕρῃ ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα θὰ προσθέσῃ εἰς αὐτὸ διὰ νὰ προκύψῃ τετράγωνος ἀριθμός, ἤτοι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{x^2}=\text{τετράγωνος}, \ (5).$$

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου ὅρου δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 θέτει

$$x=3t \quad \text{καὶ} \quad x^2=9t^2, \ (6).$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{9t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{30}{9}+\frac{1}{9t^2}=\text{τετράγωνος},$$

καὶ ἐκ ταύτης $30t^2+1=\text{τετράγωνος}\cdot 9t^2=\text{τετράγωνος}$.

Θέτει τὸν τετράγωνον τοῦτον ἴσον πρὸς $(5t+1)^2$, ὁπότε εἶναι

$$30t^2+1=(5t+1)^2, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad t=2,$$

καὶ ἐκ τῆς (6) εἶναι $x^2=36$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνει

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2.$$

Τρία τετράγωνα ἴσα, πλευρᾶς ἕκαστον $\frac{11}{6}$, εἶναι

$$3\cdot\frac{121}{36}=\frac{363}{36}>10.$$

Ὅθεν πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ γίνῃ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$.

Ὁ 10 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἤτοι εἶναι $10=3^2+1^2$. (Σημείωσις: Ἡ μέθοδος προσεγγίσεως ἐφαρμόζεται μόνον, ὅταν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων). Καὶ εἶναι $1^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$. Θὰ εἶναι ἄρα

$$10=9+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}.$$

Αἱ πλευραὶ τῶν 3 τούτων τετραγώνων εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι $3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{11}{6}$. Τρέπει τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν

$$\left(3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{11}{6}\right)$$

εἰς ὁμώνυμα κλάσματα $\left(\frac{90}{30}, \frac{24}{30}, \frac{18}{30}, \frac{55}{30}\right)$

καὶ παραλείπων τοὺς παρονομαστὰς λέγει ὅτι ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν τριῶν τετραγώνων εἶναι ἴσαι πρὸς 55, πρέπει νὰ εἶναι $55=90-\kappa=24+\lambda=18+\mu$, ὅπου οἱ κ, λ, μ θὰ προσδιορισθοῦν.

Ἐκ τούτων λαμβάνεται $\kappa=35$, $\lambda=31$, $\mu=37$.

Θὰ εἶναι ἄρα

$$3\left(\frac{55}{30}\right)^2=\left(3-\frac{35}{30}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}\right)^2.$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν τριῶν τούτων ἴσων τετραγώνων εἶναι $\frac{363}{36}$, ὅπερ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 10.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 10 ἐκφράζει τὰς πλευρὰς αὐτῶν συναρτήσει τοῦ $x$, (ἄλλος $x$ τώρα), θέτων

$$(3-35x)^2+\left(\frac{4}{5}+31x\right)^2+\left(\frac{3}{5}+37x\right)^2=10.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι

$$3555x^2+10-116x=10, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x=\frac{116}{3555}.$$

Ἑπομένως τὰ τρία ζητούμενα τετράγωνα καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι

$$\alpha^2=\left(3-35\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1745041}{505521}, \quad \alpha=\frac{1321}{711}$$

$$\beta^2=\left(\frac{4}{5}+31\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1658944}{505521}, \quad \beta=\frac{1288}{711}$$

$$\gamma^2=\left(\frac{3}{5}+37\cdot\frac{116}{3555}\right)^2=\frac{1651225}{505521}, \quad \gamma=\frac{1285}{711}$$

Ὅθεν εἶναι :

ἐκ τῆς (2), $\quad y=\alpha^2-3=\frac{228478}{505521}$

ἐκ τῆς (3), $\quad z=\beta^2-3=\frac{142381}{505521}$

ἐκ τῆς (4), $\quad \omega=\gamma^2-3=\frac{134662}{505521}$

Καὶ εἶναι $\quad \frac{228478+142381+134662}{505521}=\frac{505521}{505521}=1.$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον

Νὰ διαιρεθῇ ἡ μονὰς εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἷς δοθείς, διάφορος εἰς ἕκαστον, ἀριθμός, καὶ νὰ σχηματίζῃ ἕκαστος τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ἡ μονάς, οἱ $y$, $z$, $\omega$ καὶ τρεῖς προστιθέμενοι εἰς αὐτοὺς ἀντιστοίχως ἀριθμοί, οἱ $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, ὁπότε κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=1, \quad y+\delta_1=\alpha^2, \quad z+\delta_2=\beta^2, \quad \omega+\delta_3=\gamma^2.$$

Λαμβάνει $\delta_1=2$, $\delta_2=3$, $\delta_3=4$, ὁπότε εἶναι $y+z+\omega=1$, (1), $y+2=\alpha^2$, (2), $z+3=\beta^2$, (3), $\omega+4=\gamma^2$, (4).

Ἐκ τῶν σχέσεων (2, 3, 4, 1) εἶναι $y+z+\omega+2+3+4=10=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἀνάγεται ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερος τοῦ 2 τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Προσθέτει εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων, $\frac{1}{2}$ καὶ λέγει ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$2<\alpha^2<2\tfrac{1}{2}, \quad 3<\beta^2<3\tfrac{1}{2}, \quad 4<\gamma^2<4\tfrac{1}{2}.$$

Κατόπιν τούτων λέγει ὅτι ἀνάγεται πάλιν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ ἀναλυθῇ ὁ $10=1^2+3^2$ εἰς ἄθροισμα ἄλλων δύο τετραγώνων,

$$10=\alpha^2+\lambda^2, \quad \text{ἐξ ὧν} \quad 2<\alpha^2<2\tfrac{1}{2}, \quad \text{ὁπότε} \quad \alpha^2-2=y.$$

Καὶ πάλιν ἀναλύει τὸν $\lambda^2$ εἰς δύο τετραγώνους, τοὺς $\beta^2$, $\gamma^2$, ὥστε νὰ εἶναι

$$3<\beta^2<3\tfrac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad 4<\gamma^2<4\tfrac{1}{2}, \quad \text{ὁπότε} \quad \beta^2-3=z \quad \text{καὶ} \quad \gamma^2-4=\omega.$$

[Σημείωσις: Ὁ Διόφαντος ὑποδεικνύει τὴν λύσιν μέχρις ἐδῶ. Τὴν συνέχειαν τῆς λύσεως διετύπωσε πρῶτος ὁ G. Wertheim εἰς τὴν γερμανιστὶ ἔκδοσίν του τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, σελὶς 218, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890].

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ $\alpha^2$ χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον προσεγγίσεως (παρισότητος ἀγωγὴν) τὴν χρησιμοποιουμένην ὑπὸ τοῦ Διοφάντου εἰς τὸ πρόβλημα 9 τοῦ V βιβλίου.

Θέλομεν νὰ εἶναι $2<\alpha^2<2\frac{1}{2}$. Ἀναζητοῦμεν κλάσμα τῆς μονάδος τετραγωνικόν, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸν $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω $\frac{5}{2}+\frac{1}{x^2}=$τετράγωνος, (5).

Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{10}{4}+\frac{1}{4t^2}=\text{τετράγωνος},$$

$$\text{ἢ} \quad 10t^2+1=\text{τετράγωνος}, \quad \text{ἔστω}=(3t+1)^2.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $t=6$, $t^2=36$, $x^2=4\cdot t^2=4\cdot 36=144$. Δ.' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) ἔχομεν

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{144}=\frac{361}{144}=\left(\frac{19}{12}\right)^2.$$

Ἀφοῦ τὸ ἓν βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς $2\frac{1}{2}$ ἢ κατὰ προσέγγισιν

$$\left(\frac{19}{12}\right)^2 = 2\frac{73}{144} > \frac{5}{2},$$

τὸ ἄλλο θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς $7\frac{1}{2}$. Ἀναζητοῦμεν καὶ ἐδῶ τετραγωνικὸν κλάσμα τῆς μονάδος, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν $7\frac{1}{2}$ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον. Ἔστω $\frac{15}{2} + \frac{1}{x^2} =$τετράγωνος.

Καλοῦμεν $x^2=4t^2$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{15}{2} + \frac{1}{4t^2} =$ τετράγωνος, ἢ $\frac{30}{4} + \frac{1}{4t^2} =$ $=$ τετράγωνος, $30t^2+1 =$ τετράγωνος, ἔστω $=(5t+1)^2$, ἐξ ἧς $t=2$, $t^2=4$, $x^2=4\cdot 4=16$.

Ἑπομένως τὸ δεύτερον βοηθητικὸν τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι $7\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{121}{16} = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7\frac{9}{16} > 7\frac{1}{2}$.

Αἱ πλευραὶ τῶν δύο εὑρεθέντων βοηθητικῶν τετραγώνων εἶναι

$$\frac{19}{12} \text{ καὶ } \frac{11}{4} \text{ ἢ } \frac{19}{12} \text{ καὶ } \frac{33}{12}.$$ Ἐπειδὴ ὅμως

$$\left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2 = \frac{1450}{144} > 10$$

πρέπει αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων τούτων νὰ ἐλαττωθῶσιν, ὥστε τὰ δύο τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10.

Ὁ $10=1^2+3^2$. Εἶναι δὲ ἀκόμη $10 \backsim \left(\frac{19}{12}\right)^2 + \left(\frac{33}{12}\right)^2$.

Συγκρίνομεν τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς δευτέρας ἀναλύσεως τοῦ 10 πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων τῆς πρώτης ἀναλύσεως. Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} \text{ καὶ } \frac{33}{12} = 3 - \frac{3}{12}.$$

Πρέπει λοιπὸν αἱ πλευραὶ τῶν δύο βοηθητικῶν τετραγώνων, αἱ $\left(1+\frac{7}{12}\right)$ καὶ $\left(3-\frac{3}{12}\right)$ νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε νὰ εὑρεθῶσιν ἄλλαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 10. Ἐκφράζομεν τὰς ζητουμένας αὐτὰς πλευρὰς συναρτήσει τοῦ $x$ καὶ τῶν προηγουμένων τιμῶν ὁπότε ἔχομεν $(1+7x)^2 + (3-3x)^2 = 10$.

(Ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν λαμβάνονται μικρότεροι ἀριθμοί). Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως ἔχομεν $x = \frac{2}{29}$.

Ὥστε τὸ πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται ὁ 10 εἶναι

$$\left(1+7\cdot\frac{2}{29}\right)^2 = \left(\frac{43}{29}\right)^2 = \frac{1849}{841}$$

καὶ τὸ δεύτερον εἶναι

$$\left(3-3\cdot\frac{2}{29}\right)^2 = \left(\frac{81}{29}\right)^2 = \frac{6561}{841}.$$

Εἶναι δὲ $2 < \frac{1849}{841} < 2\frac{1}{2}$. Τώρα πρέπει τὸ δεύτερον τετράγωνον $\frac{6561}{641}$ νὰ ἀναλυθῆ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων διὰ νὰ ἔχῃ ἀναλυθῆ ὁ 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν. Καλοῦμεν τὸ ἓν τῶν ζητουμένων τετραγώνων $x^2$, ὁπότε τὸ ἄλλο θὰ εἶναι

$$\frac{6561}{841} - x^2.$$ Θέλομεν ὅμως, ὅπως $3 < x^2 < 3\frac{1}{2}$.

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοιοῦτο τετράγωνον ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τοῦ 10ου προβλήματος τοῦ V βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν. Θέτομεν τὸν $x^2$ μεταξὺ δύο ὁρίων, ἐκλέγοντες δύο τετράγωνα εὑρισκόμενα ἐγγὺς τοῦ 3 καὶ τοῦ 4. Τοιαῦτα τετράγωνα εἶναι τὰ

$$\frac{49}{16} \text{ καὶ } \frac{64}{16}. \quad \text{Ὥστε: } \frac{49}{16} < x^2 < \frac{64}{16} \text{ καὶ } \frac{7}{4} < x < \frac{8}{4}, \quad (5).$$

Ἐξισώνομεν τώρα τὸ τετράγωνον $\frac{6561}{841} - x^2$ πρὸς ἓν τετράγωνον τῆς μορφῆς $\left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2$, ὅπου ὁ μ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. [Ἡ θέσις τοῦ $x^2$ μεταξὺ δύο ὁρίων γίνεται κατὰ τὸ 10ον πρόβλημα τοῦ V βιβλίου. Ἡ ἐξίσωσις πρὸς $\left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2$ γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 8ου προβλήματος τοῦ II βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν]. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{6561}{841} - \mu x^2 = \left(\frac{81}{29} - \mu x\right)^2, \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)}, \quad (6).$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι κατὰ τὴν σχέσιν (5)

$$\frac{7}{4} < \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)} < \frac{8}{4}.$$

Ἐπιλύομεν τὴν πρώτην ἀνισότητα $\frac{7}{4} < \frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)}$ κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου:

$$203(\mu^2+1) < 648\,\mu, \quad \mu^2+1 < \frac{648\,\mu}{203}, \quad \mu^2 - \frac{648\,\mu}{203} < -1, \quad \left(\mu - \frac{324}{203}\right)^2 < -1 + \left(\frac{324}{203}\right)^2,$$

ἐξ ἧς $\mu < 2{,}84$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνισότητος

$$\frac{162\,\mu}{29(\mu^2+1)} < \frac{8}{4} \text{ τὴν τιμὴν } \mu > 2{,}37, \quad \text{ὁπότε ἔχομεν } 2{,}37 < \mu < 2{,}84.$$

Λαμβάνομεν $\mu = 2\frac{1}{2}$, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν τὸν μέσον ὅρον τῶν τιμῶν 2,37 καὶ 2,84, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (6) ἔχομεν

$$x = \frac{1620}{841}, \quad x^2 = \frac{2624400}{707281},$$

ἔχομεν δηλαδὴ τὸν πρῶτον τετράγωνον ἐκ τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ τετράγωνος $\frac{6561}{418}$. Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ $x^2$ εἰς τὴν σχέ-

σιν $\frac{6561}{841}-x^2$ λαμβάνομεν τὸν δεύτερον τετράγωνον ὅστις θὰ εἶναι

$$\frac{6561}{841}-\frac{2624400}{707281}=\frac{2893401}{707281}=\left(\frac{1701}{841}\right)^2.$$

Ὥστε οἱ τρεῖς τετράγωνοι εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 10, πληρουμένων τῶν τριῶν συνθηκῶν

$$2<\alpha^2<2\frac{1}{2},\quad 3<\beta^2<3\frac{1}{2},\quad 4<\gamma^2<4\frac{1}{2}$$

εἶναι $\alpha^2=\frac{1849}{841}$, $\beta^2=\frac{2624400}{707281}$, $\gamma^2=\frac{2893501}{707281}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2, 3, 4)

$$y=\frac{1849\cdot 841}{841\cdot 841}-2=\frac{140447}{707281},\quad z=\frac{2624400}{707281}-3=\frac{502557}{707281}$$

$$\omega=\frac{2893401}{707281}-4=\frac{64277}{707281}.\quad \text{Εἶναι δὲ } y+z+\omega=1.$$

[Σημ. Ὁ $\beta^2$ δὲν εἶναι $<3\frac{1}{2}$, ἀλλὰ εἶναι $\beta^2<4$. Ἔπρεπε νὰ τεθῇ ὁ $x^2$ μεταξὺ τῶν ὁρίων $\frac{49}{16}<x^2<\left(\frac{23}{12}\right)^2$, διότι ὁ τετράγωνος $\frac{529}{144}$ εἶναι ἐγγύτερον πρὸς τὸν $3\frac{1}{2}$ ἢ ὁ τετράγωνος $\frac{64}{16}$. ὁ $\beta^2$ γίνεται $<3\frac{1}{2}$, ἂν τεθῇ $\mu=2\frac{7}{10}$, ἀντὶ $\mu=2\frac{1}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως τῆς ἀλλαγῆς τῆς τιμῆς τοῦ μ θὰ ἐπηρεάζοντο αἱ τιμαὶ τῶν z, ω].

ΛΗΜΜΑ 1ον VIου βιβλίου
χρήσιμον εἰς τὸ 12ον πρόβλημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου.

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος εἶναι τετράγωνος, προσέτι δὲ ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ οὐν τὴν μικροτέραν κάθετον σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστω ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $y>z$. Κατὰ τὸ λῆμμα θὰ εἶναι

$$y-z=\alpha^2,\ (1),\quad y=\beta^2,\ (2),\quad \frac{1}{2}yz+z=\gamma^2,\ (3).$$

Κατασκευάζει ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν μ, ν κατὰ τὴν ταυτότητα

$$(2\mu\nu)^2+(\mu^2-\nu^2)^2=(\mu^2+\nu^2)^2$$

καὶ λαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν κάθετον $y=2\mu\nu$ καὶ τὴν μικροτέραν $z=\mu^2-\nu^2$. Κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $2\mu\nu-(\mu^2-\nu^2)=\alpha^2$.

Τοῦτο λέγει συμβαίνει πάντοτε ἂν ἐκ τῶν λαμβανομένων δύο ἀριθμῶν μ, ν ὁ μεγαλύτερος εἶναι διπλάσιος τοῦ μικροτέρου, ἔστω $\mu=2\nu$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα λαμβάνει

$$4\nu^2-(4\nu^2-\nu^2)=\nu^2,$$

ὁπότε πληροῦται καὶ ἡ συνθήκη (2),

$$y=2\mu\nu=4\nu^2=\beta^2.$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως

$\frac{1}{2} \cdot 4\nu^2 \cdot (4\nu^2-\nu^2)+(4\nu^2-\nu^2)=\nu^2$, ἢ $6\nu^4+3\nu^2=\nu^2$, ἢ $6\nu^2+3=(\nu^2:\nu^2)=$τετράγωνος, (4).

Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα, λέγει, εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἐξαπλάσιον τοῦ τετραγώνου του σὺν 3 νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί, ὁπότε $\nu=1$ καὶ $\mu=2$.

Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ πληροῦσι τὰς συνθήκας (1, 2, 3) κατασκευάζεται ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 1 καὶ 2, ὁπότε θὰ ἔχῃ πλευρὰς (4, 3, 5).

[Σημείωσις

Διὰ τὴν σχέσιν (4) λέγει ὁ Διόφαντος ὅτι αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ τῆς μονάδος ($\nu=1$) καὶ ἄλλων ἀπείρων ἀριθμῶν. «Ἔστι δὲ ἡ μονὰς μία (ἡ ἐπαληθεύουσα) καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί». Οὐδὲν σχόλιον ἐσώθη ἐξ οὗ νὰ φαίνεται πῶς εὑρίσκονται οἱ ἄλλοι ἄπειροι αὐτοὶ ἀριθμοί. Τοῦτο βεβαίως ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Διόφαντον, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἔγραφε περὶ ἄλλων ἀπείρων ἀριθμῶν.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου τρόπους πρὸς εὕρεσιν τῆς μονάδος ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν (4), τὴν ὁποίαν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $6x^2+3=y^2$,

θὰ ἔχωμεν $6x^2+3=(2x\pm1)^2$, ἐξ ἧς $x=\pm1$.

Ὁ δεύτερος ἀκέραιος, ἐκτὸς τῆς μονάδος, ὁ ὁποῖος ἐπαληθεύει τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν εἶναι ὁ 11, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$6x^2+3=(3x\pm6)^2, \text{ ἐξ ἧς εἶναι } x=\pm11 \text{ καὶ } \pm 1.$$

Τὸ πρόβλημα, ὑπὸ τὴν γενικήν του μορφὴν

$$\alpha x^2+\beta=y^2, \quad (5)$$

ἔλυσεν ὁ **Euler** διὰ τεχνάσματος, χρησιμοποιήσας τὴν μέθοδον τῆς διπλοῖσότητος τοῦ Διοφάντου. Ἐν συνεχείᾳ ὁ **Euler** εὑρίσκει καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5).

Ἡ λύσις τοῦ **Euler**

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta=y^2$, ὅπου $\alpha$, $\beta$ ἀκέραιοι εἶναι ἀναποφεύκτως ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν ἢ νὰ μαντεύσωμεν τοὐλάχιστον μίαν λύσιν αὐτῆς· διότι ἄλλως θὰ ἦτο ματαιοπονία νὰ ζητῶμεν τοιούτους ἀριθμούς, ἐπειδὴ ἴσως ἡ παράστασις νὰ μὴ λύεται.

Ὅθεν δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει μία λύσις ἂν θέσωμεν $x=f$, ὁπότε τὸ προκῦπτον τετράγωνον ἔστω $g^2$ καὶ ἡ παράστασις νὰ γίνεται $\alpha f^2+\beta=g^2$, ὅπου $f$ καὶ $g$ εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοί.

Ἐκ τούτου εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ ἴδωμεν πῶς θὰ εὕρωμεν ἀκόμη ἄλλας περιπτώσεις. Ἡ ἔρευνα αὕτη εἶναι τόσον σπουδαιοτέρα, ὅσον περισσοτέρας δυσκολίας ἐμφανίζει, τὰς ὁποίας ὅμως ἡμεῖς θὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ τῶν ἀκολούθων τεχνασμάτων.

Ἐπειδὴ εὑρέθη ἤδη ἡ λύσις $\alpha f+\beta=g$ καὶ ἐκτὸς τούτου δέον ὅπως εἶναι $\alpha x^2+\beta=y^2$, ἀφαιροῦμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἔχομεν

$$\alpha x^2-\alpha f^2=y^2-g^2.$$

Τὴν παράστασιν ταύτην ἀναλύομεν εἰς γινόμενα παραγόντων (σημ. συγγ. μέθοδος διπλοῖσότητος τοῦ Διοφάντου) καὶ ἔχομεν

$$\alpha(x+f)(x-f)=(y+g)(y-g).$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον pq καὶ ἔχομεν

$$\alpha pq\ (x+f)\ (x-f)=pq\ (y+g)\ (y-g).$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν χωρίζομεν εἰς

$$\alpha p\ (x+f)=q\ (y+g) \quad \text{καὶ} \quad q\ (x-f)=p\ (y-g)$$

καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς x καὶ y. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν σχέσεων τούτων διαιρουμένη διὰ q δίδει

$$y+g=\frac{\alpha px+\alpha pf}{q},$$

ἡ δὲ δευτέρα διαιρουμένη διὰ p δίδει $y-g=\frac{qx-qf}{p}$.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν ἐκ τῆς πρώτης θὰ ἔχωμεν

$$2g=\frac{(\alpha p^2-q^2)x+(\alpha p^2+q^2)f}{pq}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ pq λαμβάνομεν $2pqg=(\alpha p^2-q^2)\,x+(\alpha p^2+q^2)f$ καὶ ἐκ ταύτης $x=\frac{2gpq}{\alpha p^2-q^2}-\frac{(\alpha p^2+q^2)f}{\alpha p^2-q^2}$.

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν

$$y=g+\frac{2gq^2}{\alpha p^2-q^2}-\frac{(\alpha p^2+q^2)fq}{(\alpha p^2-q^2)p}-\frac{qf}{p} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{g(\alpha p^2+q^2)-2\alpha fpq}{\alpha p^2-q^2}.$$

Δι' ἄλλου τεχνάσματος εὑρίσκει ὁ **Euler** τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5). [Leonhard **Euler**, Vollständige Anleitung zur Algebra, Reclam, Stuttgart, von Joseph E. Hofmann, 1959, σελ 414) ].

Λ Η Μ Μ Α 2ον. VIου βιβλίου χρήσιμον εἰς τὸ 12ον πρόβλημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου.

Ἐκ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι τετράγωνος, εὑρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι τῶν ὁποίων ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν δοθέντα καὶ προσλαβὼν τὸν ἄλλον σχηματίζει τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ διδόμενοι ἀριθμοὶ α καὶ β, ὥστε $\alpha+\beta=\kappa^2$. Εἶναι δυνατὸν λέγει νὰ εὑρεθοῦν ἄπειροι τετράγωνοι ἀριθμοὶ

$$\lambda^2,\ \mu^2,\ \ldots\ .\ \text{ὥστε νὰ εἶναι}\ \alpha\lambda^2+\beta=\tau^2,\ \beta\mu^2+\alpha=\sigma^2\ \ldots\ .$$

Λαμβάνει $\alpha=3$, $\beta=6$, ὁπότε εἶναι $3+6=3^2$.

Κατὰ τὸ λῆμμα εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθοῦν ἄπειροι τετράγωνοι, $\lambda^2,\ \mu^2,\ \ldots$. ὥστε νὰ εἶναι

$$3\lambda^2+6=\tau^2,\ (1),\quad 6\mu^2+3=\sigma^2,\ (2).$$

Ἔστω $\lambda^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$, ὁπότε κατὰ τὴν (1) εἶναι

$$3(x^2+2x+1)+6=\tau^2,\ \text{ἢ}\ 3x^2+6x+9=\tau^2,\ \text{ἔστω}=(3-3x)^2.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=4$. Θὰ εἶναι ἄρα $\lambda^2=(x+1)^2=(4+1)^2=25$ καὶ εἶναι

$$3{,}25+6=9^2.\ \text{Ἐὰν}\ 3x^2+6x+9=(3-4x)^2\ \text{θὰ εἶναι}$$

$$x=\frac{30}{13}\ \text{καὶ εἶναι}\ 3\left(\frac{30}{13}+1\right)^2+6=3\left(\frac{43}{13}\right)^2+6=\frac{6561}{169}=\left(\frac{81}{13}\right)^2.$$

Κατὰ τὴν (2), ἐὰν θέσωμεν $\mu^2=(x+1)^2$ θὰ ἔχωμεν

$6x^2+12x+9=\sigma^2$, ἔστω $=(3-3x)^2$, ἐξ ἧς $x=10$. Θὰ εἶναι ἄρα

$\mu^2=(x+1)^2=11^2=121$ καὶ εἶναι $6.121+3=27^2$.

Ἐὰν $6x^2+12x+9=(3-5x)^2$, θὰ εἶναι $x=\frac{42}{19}$ καὶ εἶναι $6\left(\frac{42}{19}+1\right)^2+3=\left(\frac{153}{19}\right)^2$.

Ὥστε τὸ πλῆθος τῶν εὑρισκομένων τετραγώνων $\lambda^2$, $\mu^2$, ... εἶναι ὁσονδήποτε μεγάλον.

Γενικῶς δέ, ἐὰν $\alpha+\beta=\kappa^2$, ἡ παράστασις $\alpha y^2+\beta$ δύναται νὰ γίνῃ τετράγωνος, ἐὰν τεθῇ $y=x+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως θὰ εἶναι

$$\alpha(x+1)^2+\beta=\alpha x^2+2\alpha x+\alpha+\beta, = \text{τετράγωνος} \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha x^2+\alpha x+\kappa^2, \text{ ἔστω } =(\kappa-\lambda x)^2, \text{ ἐξ ἧς}$$

$$x=\frac{2(\alpha+\kappa\lambda)}{\lambda^2-\alpha} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\lambda^2+2\kappa\lambda+\alpha}{\lambda^2-\alpha}, \quad (\lambda^2\neq\alpha).$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον τοῦ VIου βιβλίου

Νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ σὺν ἑκατέραν τῶν καθέτων πλευρῶν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ $y$, $z$. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι

$$\frac{1}{2}yz+y=\alpha^2, \quad (1), \quad \frac{1}{2}yz+z=\beta^2, \quad (2).$$

Θέτει τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $(5x, 12x, 13x)$. Κατὰ τὴν (2) εἶναι

$$30x^2+12x=\beta^2, \quad (3), \quad \text{ἔστω } =36x^2, \text{ ἐξ ἧς } x=2,$$

ὁπότε πληροῦται τὸ ἐπίταγμα τοῦτο.

Κατὰ τὴν (1) εἶναι $30x^2+5x=\alpha^2$, (4). Διὰ $x=2$ εἶναι $\alpha^2=130$, ἤτοι ὁ 130 δὲν εἶναι τετράγωνος. Ὅθεν πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\beta^2=36x^2$. Ἔστω $\beta^2=\lambda^2x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) εἶναι $x=\frac{12}{\lambda^2-30}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) ἔχομεν

$$30\left(\frac{12}{\lambda^2-30}\right)^2+\frac{5\cdot 12}{\lambda^2-30}=\alpha^2, \text{ ἢ } \frac{60\lambda^2+2520}{(\lambda^2-30)^2}=\alpha^2, \text{ ἢ } 60\lambda^2+2520=\text{τετράγωνος}, \quad (5).$$

Ἡ σχέσις αὕτη πληροῦται κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ὅταν $60+2520=$τετράγωνος (6). Ἐξετάζει τὴν προέλευσιν τῶν ἀριθμῶν 60 καὶ 2520 Ὁ $60=5\cdot 12$, ἤτοι εἶναι τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν $(5x, 12x)$. Ὁ ἀριθμὸς $2520=12(12-5).30$, ἤτοι εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τῆς μεγαλυτέρας καθέτου (τῆς $12x$) ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν συντελεστῶν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τό, νὰ εὑρεθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν σύν, τὴν μεγαλυτέραν κάθετον, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἐπὶ τὸ ἐμβαδόν, νὰ εἶναι τετράγωνος.

Κατασκευάζει βοηθητικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ εἷς νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου, (ἔστω ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2). Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα ἡ μεγαλυτέρα κάθετος τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι τετράγωνος. Ἐὰν καλέσωμεν τὰς πλευρὰς τοῦ βοηθητικοῦ τούτου τριγώνου $\tau$, $\sigma$ $(\tau>\sigma)$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ

$$E=\frac{1}{2}\tau\sigma$$

θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῆς (5) $\sigma\tau+\tau(\tau-\sigma)E=$ τετράγωνος.

Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ τ θὰ ἔχωμεν $\sigma+(\tau-\sigma)E=$ τετράγωνος, (7).

Ὅταν κατασκευασθῇ τὸ βοηθητικὸν τρίγωνον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2 αἱ πλευραί του θὰ εἶναι 3, 4, 5. Κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων πλευρῶν τετράγωνος, $4-3=1^2$, $4=2^2$ (ἡ μεγαλυτέρα κάθετος) καὶ $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+3=3^2$.

Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα, ἐπειδὴ $\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+3\right)=3^2$ εἶναι δυνατὸν νά εὑρεθῇ μέγα πλῆθος τετραγώνων, ὥστε τὸ γινόμενον ἑνὸς τετραγώνου ἐκ τούτων ἐπὶ ἕνα τῶν ἀριθμῶν (6 ἢ 3) σὺν τὸν ἄλλον νὰ εἶναι τετράγωνος. Εἷς ἐκ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι ἡ μονάς, ὁπότε εἶναι $6\cdot 1^2+3=3^2$, σχέσις ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν (7), ὅπου

$$\tau-\sigma=4-3=1^2,\quad E=6,\quad \sigma=3.$$

Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ βοηθητικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι (3, 4, 5). Κατόπιν τούτου θέτει τὰς πλευρὰς τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου $3x$, $4x$, $5x$ (ἀντὶ τῶν $5x$, $12x$, $13x$).

Κατὰ τὴν (2) εἶναι $6x^2+4x=\beta^2$, ἔστω $=t^2x^2$, (8), καὶ κατὰ τὴν (1) εἶναι $6x^2+3x=\alpha^2$, (9). Ἐκ τῆς (8) λαμβάνει $x=\frac{4}{t^2-6}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) ἔχει

$$\frac{12t^2+24}{t^4+36-12t^2}=\alpha^2,\ \text{ἢ}\ 12t^2+24=\alpha^2(t^2-6)^2,\ \text{ἢ}\ 3t^2+6=\text{τετράγωνος},\ (10).$$

Ἐπειδὴ $3+6=3^2$ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ὁ t κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα. Ἔστω $t=\lambda+1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (10) λαμβάνεται $3(\lambda+1)^2+6=$τετράγωνος,

$$\text{ἔστω}=(3-3\lambda)^2,\ \text{ἐξ ἧς}\ \lambda=4,\ \lambda+1=t=5,\ t^2=25.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) εἶναι $6x^2+4x=25x^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{4}{19}$. Αἱ πλευραὶ ἄρα τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι

$$3\cdot\frac{4}{19}=\frac{12}{19},\quad 4\cdot\frac{4}{19}=\frac{16}{19},\quad 5\cdot\frac{4}{19}=\frac{20}{19},$$

εἶναι δὲ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{16}{19}+\frac{12}{19}=\left(\frac{18}{19}\right)^2\ \text{καὶ}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{16}{19}+\frac{16}{19}=\left(\frac{20}{19}\right)^2.$$

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΖ΄ 1965
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
33/34

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1965

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# Η ΟΠΤΙΚΗ ΕΝ ΤΗ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΙ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΤΟΡΙΚΟΝ ΛΕΞΙΚΟΝ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΟ ΚΑΡΟΛΟΥ ΜΟΥΓΚΛΕΡ

**Παρίσιοι, Βιβλ. C. Klincsieck, σελ. 459, 1964**

# L' OPTIQUE A ANCIEN GRÉCE ET LE DICTIONNAIRE HISTORIQUE DE LA TERMINOLOGIE OPTIQUE DES GRECS, Par CHARLES MUGLER

**PARIS, Libr. C. Klincsieck, p. 459, 1964**

## I.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ποῖαι συγκεκριμένως ἦσαν αἱ γνώσεις εἰς τὴν ὀπτικὴν ἐν τῇ ἀρχαίᾳ Ἑλλάδι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ (περὶ τὸ 600 π. χ.). Θεωρεῖται βέβαιον ὅτι καὶ οἱ Ἕλληνες, ὅπως καὶ οἱ ἄλλοι λαοὶ ἐγνώριζον χιλιάδας ἔτη π. Χ. ὅτι τὸ φῶς μεταδίδεται εὐθυγράμμως καὶ ὅτι τοῦτο προσπίπτον ἐπὶ λείας καὶ στιλπνῆς ἐπιφανείας ἀνακλᾶται. Τὰ μεταλλικὰ κάτοπτρα ἦσαν γνωστὰ ἀπὸ παλαιοτάτης ἐποχῆς (ἐν Ἑλλάδι τῆς Μινωϊκῆς) ὡς συνάγεται ἐκ διαφόρων κτερισμάτων. Ἡ ἀρχαιοτέρα πηγὴ ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὴν πληροφορίαν περὶ συγκεκριμένων τινων γνώσεων τῶν Ἑλλήνων εἰς τὴν ὀπτικήν, ἐκτὸς ἀποσπασμάτων τινῶν τῶν Προσωκρατικῶν, εὑρίσκεται εἰς τὰς Νεφέλας τοῦ Ἀριστοφάνους, (ἐπαίχθησαν κατὰ τὸ 428 π. Χ.), ὅπου ὁ χρεωστῶν πολλὰ εἰς τοὺς δανειστάς του Στρεψιάδης λέγει εἰς τὸν Σωκράτη ὅτι «διὰ τοῦ διαφανοῦς ὑαλίνου φακοῦ διὰ τοῦ ὁποίου ἀνάπτουν τὸ πῦρ, πωλεῖται δὲ εἰς τὰ Φαρμακεῖα, θὰ λυώσω τὰ γράμματα τῆς συναλλαγματικῆς (τὰ ὁποῖα ἦσαν γραμμένα διὰ κηροῦ).

Στρεψιάδης. ἤδη παρὰ τοῖσι φαρμακοπώλαις τὴν λίθον
ταύτην ἑόρακας τὴν καλήν, τὴν διαφανῆ,
ἀφ' ἧς τὸ πῦρ ἅπτουσι; Σωκράτης. τὴν ὕαλον λέγεις;
Στρεψιάδης. ἔγω γε. φέρε τί δῆτ' ἄν, εἰ ταύτην λαβὼν
ὁπότε γράφοιτο τὴν δίκην ὁ γραμματεύς.
ἀπωτέρω στὰς ὧδε πρὸς τὸν ἥλιον
τὰ γράμματ' ἐκτήξαιμι τῆς ἐμῆς δίκης; (767).

Κατὰ τὰς πληροφορίας τὰς ὁποίας παρέχει ὁ Γεμῖνος (1ος αἰ. π. Χ.) οἱ Ἕλληνες διῄρουν τὴν ὀπτικὴν εἰς τοὺς ἑξῆς κλάδους: 1) εἰς τὴν κυρίως ὀπτικήν, ὅπου ἐγίνετο ἡ διαπραγμάτευσις τοῦ φαινομένου τῆς ὁράσεως, 2) εἰς τὴν κατοπτρικήν, ὅπου ἐγίνετο ἡ σπουδὴ τῆς ἀνακλάσεως, 3) εἰς τὴν σκηνογραφικὴν (τὴν σημερινὴν προοπτικήν), 4) εἰς τὴν διοπτρικήν, τουτέστι τὴν μέτρησιν τῶν γω-

νιῶν διὰ τὴς διόπτρας. Διὰ τὴν κυρίως ὀπτικὴν ἔχει σωθῆ μόνον ἓν ἔργον τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τὸν τίτλον Ὀπτικὰ (ἔκδ. J. L. Heiberg, Euclidis opera omnia VII, Lipsiae, B. G. Teubner, 1895). Ὑπὸ τὸν τίτλον Κατοπτρικὰ μνημονεύονται τέσσαρα ἔργα, ἤτοι 1) τοῦ Εὐκλείδου, 2) τοῦ Ἀρχιμήδους, 3) τοῦ Ἥρωνος, 4) τοῦ Πτολεμαίου. Τὸ ὑπὸ τό ὄνομα τοῦ Εὐκλείδου σωζόμενον ἔργον Κατοπτρικὰ δὲν θεωρεῖται ὅτι εἶναι τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ μαθητῶν του (opera omnia VIII, Heiberg, Teubner). Τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Κατοπτρικὰ μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (4ος αἰ. μ. Χ.), εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου 7 (ἀκμὴ περὶ τὰ μέσα τοῦ 2ου αἰ. μ.Χ.). Καὶ ὁ Ὀλυμπιόδωρος (ἀκμὴ περὶ τὸ 550 μ. Χ.) μνημονεύει αὐτὸ εἰς τὰ σχόλιά του εἰς τὰ Μετεωρολογικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους (II, 94), ὡς ἐπίσης ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς Ἀπουλήιος (Apuleius, 2ος αἰ. μ. Χ.), Apologia 15 καὶ 16. Τέλος ὁ Γεώργιος Βάλλας (De expet. et fug. rebus XV, 2) ἐπανειλημμένως ἀναφέρεται εἰς τὰ Κατοπτρικὰ τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ τὸ ἔτος 1492. (Ἐκεῖ φαίνεται ὑπῆρχε περιγραφὴ τῶν κατόπτρων δι' ὧν ἔκαιε τὰ πλοῖα). Ἔκτοτε τὸ βιβλίον αὐτὸ ἐξηφανίσθη, ἐν ᾧ ὀλίγον βραδύτερον ἐσημειώθησαν σημαντικαὶ πρόοδοι ἐν Ἰταλίᾳ εἰς τὰ Κατοπτρικά. Διὰ τὴν Σκηνογραφικὴν (προοπτικὴν) οὐδὲν ἔργον ἔχει σωθῆ εἰ μὴ πληροφορίαι τινες, ἰδίως τοῦ Λατίνου συγγραφέως Βιτρουβίου ὅστις ἀναφέρει, ὅτι ὁ Ἀναξαγόρας (500—428 π. Χ.) εἶχε γράψει Προοπτικὴν (Archit. VII, Pr. 11). Ἰδέαν τῆς Διοπτρικῆς λαμβάνομεν ἐκ τῆς περιγραφῆς τῆς Διόπτρας, τοῦ περιφήμου αὐτοῦ ὀργάνου, εἰς τὴν ὁμώνυμον πραγματείαν (περὶ Διόπτρας) τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ἡ γεωμετρικὴ ὀπτικὴ ἦτο ὁ κλάδος τῆς ὀπτικῆς μὲ τὸν ὁποῖον ἠσχολοῦντο οἱ φυσικομαθηματικοί, ἐν ᾧ τὸ φαινόμενον τῆς ὁράσεως ἀπὸ φυσιολογικῆς γενικῆς ἐπόψεως καὶ ἡ φύσις τοῦ φωτὸς ἀπετέλουν ἀντικείμενον ἐρεύνης τῶν φυσικῶν φιλοσόφων (Ἀναξαγόρας, Ἐμπεδοκλῆς, Λεύκιππος, Δημόκριτος, Πλάτων, Ἀριστοτέλης, κ. ἄ). Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἔργου τοῦ Ἀριστοτέλους Περὶ αἰσθήσεως, Ἀλέξανδρος ὁ Ἀφροδισιεύς, (περὶ τὸ 200 μ. Χ.), ἀναφέρει τὰς ἑξῆς θεωρίας εἰς τὴν ὀπτικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων : Ἡ θεωρία τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων διὰ τὴν ὅρασιν, 2) ἡ στωικὴ θεωρία τῆς ὁράσεως ἐκ τῆς τάσεως τοῦ ἀέρος, 3) ἡ θεωρία τῆς ἀπεικονίσεως τοῦ Ἐπικούρου, 4) ἡ θεωρία τῆς συναυγείας τοῦ Πλάτωνος. Ἐντύπωσιν προκαλεῖ ἡ πληροφορία τοῦ Ἀριστοτέλους ὅτι τὰ τρία μέσα τοῦ ὀφθαλμοῦ τὸ ὑδατῶδες ὑγρὸν (ἢ ὑδατοειδές), ὁ κρυσταλλώδης φακὸς (ἢ κρυσταλοειδὴς) καὶ τὸ πηκτῶδες ὑγρὸν τὸ καλούμενον ὑαλῶδες σῶμα εἶναι διαφανῆ καὶ ὅτι δι' αὐτῶν διερχόμενον τὸ φῶς προσπίπτει κατόπιν εἰς τὸ ὀπτικὸν νεῦρον τὸ ὁποῖον ἐρεθίζει (περὶ αἰσθήσεως 2). Ὁ Charles Mugler καθηγητὴς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Στρασβούργου ἔχει συγκεντρώσει εἰς τὸ ἐν ἀρχῇ μνημονευόμενον Λεξικόν του ὅλας τὰς πηγὰς ἐκ τῶν ὁποίων δύναταί τις νὰ συνθέσῃ μὲ ἀκρίβειαν πραγματείαν περὶ τῆς Ὀπτικῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Εἰς τὴν μικρὰν εἰσαγωγὴν τοῦ Λεξικοῦ, τῆς ὁποίας προτάσσεται τὸ τοῦ Εὐριπίδου

*Τὸ φῶς τόδ' ἀνθρώποισιν ἥδιστον βλέπειν, τὰ νέρθε δ' οὐδέν,*
(Ἰφιγένεια ἐν Αὐλίδι 1250).
ὁ συγγραφεὺς ἀναπτύσσει τὴν προέλευσιν τῆς ὀπτικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων, ἀναφέρων ὅτι τὸ πρῶτον ἑλληνικὸν σύγγραμμα ὀπτικῆς εἶναι τὸ τοῦ Εὐκλείδου (ὀπτικά, Κατοπτρικά, I. L. Heiberg, 1895). Ἀκολούθως γίνεται διαπραγμάτευσις μερικῶν βασικῶν ὅρων τῆς ὀπτικῆς ὁρολογίας, ὅπως εἶναι τὸ φῶς, ὁ ὀφθαλμός, τὸ ὄμμα, ἡ ἀνταύγεια κλπ. καὶ ἀναφέρονται ὅλα τὰ φαινόμενα ἐκεῖνα, κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν ὁποίων, ὑπὸ τῶν διαφόρων συγγραφέων, μνημονεύονται ὀπτικοὶ ὅροι. Τέλος ἀκολουθεῖ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἡ καταχώρησις ὅλων τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων παρὰ τῶν ὁποίων ἐλήφθησαν οἱ ὅροι τῆς ὀπτικῆς. Εἰς ἑκάστην ἑλληνικὴν λέξιν παρατίθεται τὸ ἀντίστοιχον ὄνομα ταύτης εἰς τὴν λατινικήν, τὴν γαλλικήν, τὴν γερμανικὴν καὶ τὴν ἀγγλικὴν γλῶσσαν καὶ κατόπιν ἀκολουθεῖ ἡ ἑρμηνεία αὐτῆς καὶ ἡ παράθεσις τῶν συναφῶν χωρίων τῶν οἰκείων συγγραφέων. Κατωτέρω παραθέτομεν μερικὰ λήμματα κατ' ἐκλογήν.

**ἀκτινογραφία p. 22**

**ἀκτινογραφία.**—Radiorum descriptio, science des trajectoires des rayons, optique géométrique, wissenschaft vom lichtstrahl, science of the rays.

Dans la liste des œuvres de Démocrite que la tradition nous a transmise figure le titre Ἀκτινογραφίη, D. V. 68 A 33 et 68 B 15 b.

**ἀκτίς.**—Radius, rayon, strahl, ray.

1° Rayon de lumière émis par une source lumineuse telle que le soleil, la lune, les astres, l'éclair, le feu. Assez fréquent chez les poétes. **Homère** : οὐδέ ποτ' αὐτοὺς Ἥλιος φαέθων καταδέρκεται ἀκτίνεσσιν. et jamais le Soleil brillant ne les (sc. les Cimmériens) regarde de ses rayons, λ 15 et passim. **Hymnes** : λαμπραὶ δ' ἀκτῖνες ἀπ' αὐτοῦ αἰγλῆεν στίλβουσι. des rayons brillants lancés par le soleil montrent l'éclat de sa claire lumière, A Hélios 10. **Hésiode** : οὐδέ ποτ' αὐτοὺς Ἥλιος φαέθων ἐπιδέρκεται ἀκτίνεσσιν. et jamais le Soleil brillant ne les regarde (sc. le Sommeil et la Mort) de ses rayons, Th. 710. **Pindare** : λαμπραὶ δ' ἦλθον ἀκτῖνες στεροπᾶς ἀπορρηγνύμεναι. les rayons fulgurants de l'éther jaillissent avec violence des nuages, Pyth. IV, 198, et passim. **Eschyle** : αἱ Φορκίδες . . . ἃς οὔθ' ἥλιος προσδέρκεται ἀκτῖσιν οὔθ' ἡ νυκτερὸς μήνη ποτέ. les Phorkides que ni le solell ne regarde de ses rayons ni l'astre de la nuit, la lune, Prom. 793 et passim. **Sophocle** : ἀκτὶς ἀελίου τὸ κάλλιστα ἑπταπύλῳ φανὲν Θήβᾳ τῶν προτέρων φάος. Antig. 100, et passim. **Euripide** ; [ἀλλὰ νῦν πανύστατον ἀκτῖνα κύκλον θ' ἡλίου προσόψεται]. Alc. 207, et passim. **Aristophane** : οὔθ' ἡλίου τηλαυγὲς ἀκτίνων σέλας τοιοῦτον ἐξέλαμψεν. même la clarté pénétrante des rayons du soleil ne fait jaillir un tel éclat, Av. 1711, et passim. **Empé-**

**docle** : φῶς δ' ἔξω διαθρῴσκον, ὅσον ταναώτερον ἦεν, λάμπεσκεν κατὰ βηλὸν ἀτειρέσιν ἀκτίνεσσιν. mais la lumière (sc. de la lanterne) pénètre vers l'extérieur, parce qu'elle est plus fine (sc. que l'air), et luit sous le ciel avec des rayons infatigables, 31 B 84, 5, 6. Texte emprunté au célèbre fragment où Empédocle développe le mécanisme de la vision sous le règne de la Haine. Pendant cette phase cosmique, la perception visuelle s'opère par l'émission, de l'oeil, de rayons de feu fluide identiques aux rayons de lumière émis par les sources lumineuses. Dans la phase cosmique polaire, dominée par l'Amour, la vision est causée par la pénétration des rayons de lumière dans l'œil ; cf. αἰσθητός. **Platon** : τὰς δὲ ἐντὸς τοῦ πυρὸς ἀκτῖνας διαδεδεμένας (sc. τῷ ἀέρι) ἀκολουθεῖν ἐφ' ἑκάτερα ἰόντος τοῦ ἀέρος. les rayons du feu intérieur (sc. au corps), entrelacés avec l'air, le suivent dans ses passages dans les deux sens (sc. à travers les pores du corps), Timée 78 D). Ce texte fait partie d'un passage de la physiologie du Timée, où Platon explique le phénomène de la respiration. **Aristote** : ὅσα μὲν οὖν (sc. ἄστρα) περιορᾶται ὑπ' αὐτοῦ (sc. τοῦ ἡλίου), τούτων μὲν οὐ φαίνεσθαι τὸ φῶς (κωλύεσθαι γὰρ ὑπὸ τῶν τοῦ ἡλίου ἀκτίνων). les astres qui sont exposés à la lumière du soleil n'émettent pas de lumière visible ; les rayons du soleil les en empêchent, Meteor. 345 a 27. Texte emprunté à l'argumentation d' Aristote contre l'explication de la voie lactée proposée par Anaxagore et Démocrite. καίτοι τινὲς λέγουσιν ὡς ἐν τοῖς νέφεσιν ἐγγίγνεται πῦρ· τοῦτο δ' Ἐμπεδοκλῆς μέν φησιν εἶναι τὸ ἐμπεριλαμβανόμενον τῶν τοῦ ἡλίου ἀκτίνων, κτλ. Meteor. 396 b 11 . ὥστε ἦν ὅτε οὔπω ἑωρᾶτο ἀλλ' ἔτ' ἐφέρετο ἡ ἀκτὶς ἐν τῷ μεταξύ. il y avait un moment, où le rayon de lumière n'était pas encore vu, mais se déplaçait dans l'espace intermédiaire (sc. entre le soleil et l' œil). De sensu 446 b 1 . . . . .

## ἀνταύγεια p. 36

ἀνταύγεια.—1° Lux refracta, la clarté transportée par un rayon réfléchi ; in zurückgeworfenen strahlen enthaltenes licht, reflected light.

La lumière réfléchie par des surfaces polies. **Plutarque** : ἑνορᾶσθαι τῇ σελήνῃ τὴν ἔξω θάλασσαν οὐκ ἐφ' ἧς ἐστι χώρας, ἀλλ' ὅθεν ἡ κλάσις ἐποίησε τῇ ὄψει τὴν ἐπαφὴν αὐτῆς καὶ τὴν ἀνταύγειαν. on peut observer dans la lune l'océan, non pas à l'endroit où il se trouve réellement, mais à l'endroit où la réflexion en fait toucher l'image réfléchie aux rayons visuels, De facie in o. lunae 921 A. ἡ δὲ σελήνη πολλὰς ἀνωμαλίας ἔχει καὶ τραχύτητας, ὥστε ... ἀνακλᾶσθαι . . . παντοδαπῶς καὶ περιπλέκεσθαι καὶ συνάπτειν αὐτὴν ἑαυτῇ τὴν ἀνταύγειαν. la lune a (dans sa surface) beaucoup d'irrégularités et d'aspérités, de façon que les rayons réfléchis par elle sont brisés de beaucoup de manières et se touchent et se pénètrent mutuellement, ibid., 930 D ; ἐὰν . . . τραχύτης καταλάβῃ τὸ σημεῖον, ἀφ' οὗ πέφυκεν ἡ ὄψις ἀνακλᾶσθαι, . . .

τὴν . . . ἀνταύγειαν οὐκ ἀποδίδωσιν. si un point (d'un miroir), duquel d'après la nature de ce phénomène le rayon visuel devrait être réfléchi, est occupé par une rugosité, ce point ne renvoie qas les rayons, ibid., 936 F ; ὥσπερ ἐν τοῖς ἐσόπτροις τὰ φαινόμενα κατ' ἀνταύγειαν (sc. ἔνεστιν). De genio Socr. 591 E ; et passim. **Aétius** : Ἐμπεδοκλῆς δύο ἡλίους. τὸν μὲν ἀρχέτυπον, πῦρ ὄν . . . ἀεὶ κατ' ἀντικρὺ τῇ ἀνταυγείᾳ ἑαυτοῦ τεταγμένον, τὸν δὲ φαινόμενον, ἀνταύγειαν, ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ κτλ. pour Empédocle il y a deux soleils dont l'un, le vrai, composé de feu, est toujours placé en face de son image réfléchie, alors que l'autre, le soleil apparent, est l'image réfléchie du premier dans l'hémisphère opposé, Plac. II, 20, 13 ; Diels Dox. p. 350 ; et passim.

2° Collustratio, éclairage, beleuchtung, lighting.

La lumiére rayonnée par un corps incandescent **Cléomède** : κατ' ἀνταύγειαν δεχομένης ἀπὸ τοῦ ἡλίου τὰς ἀκτῖνας (sc. τῆς σελήνης). le lune recevant les rayons du soleil qui lui envoie sa lumière de face, II, 4, 101. **Aétius** : Φιλόλαος . . . ὑαλοειδῆ τὸν ἥλιον, δεχόμενον μὲν τοῦ ἐν τῷ κόσμῳ πυρὸς τὴν ἀνταύγειαν. Philolaos prétend que le soleil est une masse vitreuse qui reçoit sa lumière du feu répandu dans l'univers, Plac. II, 20, 12 ; D. Dox., p. 349.

**ἀνταυγεῖν.**—1° Radiare ad, rayonner en face d'un être ou d'un objet, entgegenstrahlen, to send rays towards.

Expression verbale désignant le rayonnement d'une source lumineuse ou d'un œil. **Empédocle** : ἀνταυγεῖ πρὸς Ὄλυμπον ἀταρβήτοισι προσώποις. Hélios rayonne vers l'Olympe d'un visage non troublé par la crainte, 31 B 44. **Hippocrate de Cos** : τούτῳ γὰρ τῷ διαφανεῖ ἀνταυγεῖ τὸ φῶς καὶ τὰ λαμπρὰ πάντα. τούτῳ οὖν ὁρῇ τῷ ἀνταυγέοντι. c'est au moyen de ces membranes transparentes que la lumière et le rayonnement de toutes les sources lumineuses sont perçus ; c' est donc grâce à ce passage de la lumière que s'opère la perception visuelle, De loc. in hom. 2 ; D. V. 24 A 10. **Euripide** : πέλας γὰρ δεινὸν ἀνταυγεῖ φόνον. Or. 1512.

2° Reflectere, réfléchir, zurückstrahlen, to reflect back.

**Aristote** : ὁ δ' ἐν τῷ Αἰγείῳ (sc. ἀὴρ) κυανοῦς διὰ τὸ μέχρι πόρρω εἶναι καθαρός, ὥστε καὶ ἡ θάλαττα ἀνταυγοῦσα τοιαύτη φαίνεται. l'atmosphère audessus de la mer Egée est bleue du fait qu'lle est pure jusqu'à de . . . .

**εἴδωλον p. 118**

**εἴδωλα**. il est absurde aussi que Démocrite ne se soit jamais heurté à la difficulté soulevée par la question pourquoi seul l'œil voit, et aucun des

2

autres corps dans lesquels les images (sc. les images pellicules de Démocrite) manifestent leur présence, De sensu 438 a 10 ; ὥσπερ λέγει Δημόκριτος εἴδωλα καὶ ἀπορροὰς αἰτιώμενος (sc. τοῦ ὁρᾶν). comme le prétend Démocrite en faisant d'images et d'écoulements la cause de la perception viscuelle, De div. in somniis 464 a 5 ; ἐνίοτε γὰρ τὰ φαινόμενα εἴδωλα καθεύδοντι φωράσει ἐγειρόμενος κινήσεις οὔσας ἐν τοῖς αἰσθητηρίοις. on dépiste parfois, quand on est éveillé, les images qui vous sont apparues dans le sommeil comme des mouvements qui se sont produits dans les organes des sens, ibid. 262 a 11 ; et passim. **Théophraste** : ὅλως δὲ ἀπορροὴν ποιοῦντα τῆς μορφῆς . . . τί δεῖ τὴν ἀποτύπωσιν ποιεῖν ; αὐτὰ γὰρ ἐμφαίνεται τὰ εἴδωλα. d'une façon générale, quelle nécessité, quand on imagine (sc. comme Démocrite) l'hypothèse des écoulements se détachant des corps et transportant avec eux la forme de ces corps, de faire l'hypothèse supplémentaire de la frappe des écoulements, puisque les images (sc. émis par les corps) se manifestent par elles - mêmes, De sensu 51 ; et passim. **Plutarque** : ἐγκαταβυσσοῦσθαι τὰ εἴδωλα διὰ τῶν πόρων εἰς τὰ σώματα καὶ ποιεῖν τὰς κατὰ ὕπνον ὄψεις ἐπαναφερόμενα. les images (sc. émises par les corps d'après Démocrite) pénètrent à travers les pores dans les corps humains et produisent par leur mouvement les visions du sommeil, Quaest. Conv. 735 A ; et passim. **Alexandre** : ἥγεῖται δὲ αὐτός τε (sc. Δημόκριτος) καὶ πρὸ αὐτοῦ Λεύκιππος καὶ ὕστερον δὲ οἱ περὶ τὸν Ἐπίκουρον εἰδωλά τινα ἀπορρέοντα ὁμοιόμορφα τοῖς ἀφ' ὧν ἀπορρεῖ (ταῦτα δέ ἐστι τὰ ὁρατὰ) ἐμπίπτειν τοῖς τῶν ὁρώντων ὀφθαλμοῖς καὶ οὕτω τὸ ὁρᾶν γίνεσθαι. De sensu 24, 18 ; cf. ἀπορρεῖν pour la traduction ; οἱ κατὰ εἰδώλων ἐμπτώσεις τὸ ὁρᾶν γίνεσθαι λέγοντες. ceux qui prétendent que la perception viscuelle se fait par l'entrée d'images (sc. dans les organes de la vue), ibid., 146, 23 ; πῶς δὲ εἰδώλου ὄντος τοῦ ἐν τῷ κατόπτρῳ εἴδωλα πάλιν ἀπορρεῖ τοσαῦτα ; comment se fait - il que tant d'images matérielles sont de nouveau émises par l'image qui se trouve dans le miroir ?, De anima 135, 26 ; οὐ γὰρ δὴ ὅτε ὁρᾷ ὀφθαλμός, τότε ἀπορρεῖ τὰ εἴδωλα. car ce n'est pas à l'instant précis où l'œil voit que les images matérielles se détachent des corps, ibid. 136, 20 ; εἰ τὰ εἴδωλά ἐστιν αὐτὰ τὰ ἐμπίπτοντα καὶ ὁρώμενα. si les images elles - mêmes sont ce qui pénètre dans l'œil et ce qui est vu. ibid. 136, 5 ; et passim. Les derniers passages cités font partie de la polémique de lécole aristotélicienne contre les théories optiques corpusculaires ; cf. ἀπορροή, ἀπόρροια, ἀπορρεῖν. **Théon** : εἰ ἦν κατ' εἰδώλων ἔμπτωσιν τὸ ὁρατικὸν πάθος, καὶ ἀπὸ παντὸς σώματος διηνεκῶς εἴδωλα ἀπέρρεεν, ἃ κινεῖ ἡμῶν τὴν αἴσθησιν, κτλ. si la sensation visuelle était produite par un afflux d'images (sc. dans les organes de la vue) et que de tout corps se détachaient constamment des images affectant notre sens visuel, etc., Rec. 148, 24. **Aétius** : Λεύκιππος Δημόκριτος Ἐπίκουρος κατὰ εἰδώλων εἴσκρισιν οἴονται τὸ ὁρατικὸν συμβαίνειν πάθος. Leucippe, Démocrite et Epicure croient que la sensation

visuelles se produit par une sélection exercée sur les images affluant vers l'œil, IV, 13, 1 ; D. p. 403 ; et passim.

2o. l'image virtuelle, le reflet d'un objet sur une surface réfléchissante. **Platon** : καὶ πρῶτον μὲν τὰς σκιὰς ἂν ῥᾷστα καθορῴη, μετὰ τοῦτο ἐν τοῖς ὕδασι τά τε τῶν ἀνθρώπων καὶ τὰ τῶν ἄλλων εἴδωλα, κτλ. ce que l'homme de la caverne verrait d'abord avec le plus de facilité, ce seraient les ombres des choses, en second lieu les images des hommes et des autres êtres et des objets reflétés par l'eau, Rép. VII, 516 A ; οἷον ἐν κατόπτρῳ δεχομένῳ τύπους καὶ καταδεῖν εἴδωλα παρέχοντι, κτλ. comme dans un miroir qui reçoit des impressions lumineuses et permet de voir des images, Timée 71 B ; et passim. **Théon** : ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις τὰ δεξιὰ ἀριστερὰ φαίνεται καὶ τὰ ἀριστερὰ δεξιὰ καὶ τὸ εἴδωλον ἴσον τῷ ὁρωμένῳ, κτλ. dans les miroirs plans les parties situées à droite dans l'objet apparaissent à gauche et réciproquement, et l'image à la même grandeur que l'objet, Catoptr. 19 : ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις . . . τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου τὸ εἴδωλον ἔλασσον ἔχει. dans les miroirs convexes . . . l'image a une distance au miroir inférieure à celle de l'objet, ibid. 20 ; ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὸ εἴδωλον ἔλασσόν ἐστι τῶν ὁρωμένων. dans les miroirs convexes l'image est inferieure à l'objet. ibid. 21 ; ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὰ εἴδωλα κυρτὰ φαίνεται. dans les miroirs convexes les images apparaissent convexes. ibid. 23 ; et passim. **Proclus** : ἥτε γὰρ εἰκασία τὰ εἴδωλα γιγνώσκει τῶν αἰσθητῶν ἔν τε ὕδασι φανταζόμενα καὶ τοῖς ἄλλοις κατόπτροις . . . εἰδώλων ὄντως εἴδωλα γεγονότα, κτλ. l'opinion fondée sur la probabilité cherche en effet à connaitre les images des objets sensibles telles qu'elles apparaissent dans l'eau et les autres miroirs, vraiment des images d'images, p. 11 ; et passim. **Philoponos** : τὰ ἐν τοῖς κατόπτροις εἴδωλα. les images qu'on voit dans les miroirs. 331, 8 ; et passim.

**εἰδωλοποιία** p. 119

**εἰδωλοποιεῖν.**—Simulacrum facere, faire une image, ein bild gestalten, to produce a simulacrum.

Expression verbale désignant la formation d'une image. **Aristote** : τοῦτο μὲν γὰρ τὸ πάθος ἐφ' ἡμῖν ἐστὶν (sc. ἡ ὑπόληψις), ὅταν βουλώμεθα (πρὸ ὀμμάτων γάρ ἐστι ποιήσασθαι, ὥσπερ οἱ ἐν τοῖς μνημονικοῖς τιθέμενοι καὶ εἰδωλοποιοῦντες), κτλ. cette affection de l'âme, à savoir l'imagination, ne dépend que de nous quand nous voulons y avoir recours ; car il est possible de s'en mettre les objets devant les yeux, à la manière de ceux qui transposent les choses en signes mnémoniques et se créent des images, etc., De anima 427 b 17. **Géminus** : λέγεται ζῴδιον . . . τὸ ἐκ τῶν ἀστέρων εἰδωλοπεποιημένον κατὰ τὴν ὁμοιότητα καὶ τὴν θέσιν τῶν ἀστέρων. on appelle

signe zodiacal . . . l'image composée par les étoiles d'après la ressemblance d'un groupe d'étoiles à un objet et d'après la disposition mutuelle de ces étoiles, Elem. 2, 12.

**εἰδωλοποιία.**—Simulacrorum effectio, réalisation d'une image, gestaltung eines bildes, production of a simulacrum.

1° la formation de l'image d'un objet dans un miroir. **Platon** : τὸ δὲ περὶ τὴν τῶν κατόπτρων εἰδωλοποιίαν, καὶ πάντα ὅσα ἐμφανῆ καὶ λεῖα κατιδεῖν οὐδὲν ἔτι χαλεπόν. quant à la formation des images par les miroirs et à l'aspect que présentent les objets brillants et polis, aucune difficulté après ce que nous venons de voir, Timée 46 A.

2° l'imit ation d'un objet par la peinture. **Platon** : τὴν δὲ τῶν γραφέων εἰδωλοποιίαν περὶ τὰ θειά τε καὶ τὰ ἀνθρώπινα σώματα γιγνομένην κτλ. le reproduction, par l'art des peintres, des traits de personnages tant divins qu'humains, etc., Critias 107 B.

3° l'activité créatrice de l'imagination qui nous fait percevoir des images d'opjets, d'animaux ou d'hommes dans des groupements fortuits de points. **Géminus** : ἀνωτάτω γὰρ πάντων ἐστὶν ἡ λεγομένη τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων σφαῖρα ἡ περιέχουσα τὴν εἰδωλοποιίαν πάντων τῶν κατηστερισμένων ζῳδίων . . . . .

**καταφωτίζειν p. 220**

**Platon** : ἤδη γὰρ ὑπέφαινέ τι ἡμέρας, ὥστε καταφανῆ αὐτὸν γενέσθαι (sc. Ἱπποκράτη). le jour commençait déjà à poindre, de façon qu'Hippocrate fut bien visible, Prot. 312 A. **Aristote** : πόρρωθεν μὲν οὖν οὐ δύναται τῇ αὐγῇ καταμαθεῖν πῶς ἐπιβάλλει ἐπὶ τὸ ὁρατὸν (sc. ὁ μύωψ). ἐγγύθεν δὲ μᾶλλον καταφανής ἐστιν. le myope ne peut pas se rendre compte à distance de la manière dont la lumière frappe les objets ; mais de près il est placé dans de meilleures conditions de visibilité, Probl. 960 a 6.

**καταφωτίζειν.**—Illuminare, éclairer, beleuchten, belichten, to light up.

Expression verbale désignant l'action d'une source de lumière. **Philoponos** : ἀχρόνως ὅλον τὸ ὑπὲρ γῆς ἡμισφαίριον καταπεφώτισται. instantanément (c'est-à dire avec une vitesse infinie) tout l'hémisphère au-dessus de la terre est éclairé (dès le lever du soleil), 327, 3.

**καταφωτισμός.**—Illustratio, éclairage, beleuchtung, belichtung, lighting.

Nom, correspondant à καταφωτίζειν, désignant l'éclairage d'un objet ou d'un milieu par une source de lumière. **Géminus :** ὁποία γὰρ ἡ τῶν ὄψεων πρόπτωσις, τοιοῦτος καὶ ὁ καταφωτισμὸς ὑπὸ τοῦ ἡλίου γίνεται. καὶ τοτὲ μὲν κατ' εὐθείας ἀκλάστους, τοτὲ δὲ κατὰ διαδυομένας ὥσπερ ἐπὶ τῶν ὑέλων κτλ. de la même manière dont s'orère la projection des rayons visuels se réalise aussi l'éclairage des objets par le soleil, à savoir tantôt par des rayons se propageant en ligne droite sans se briser, tantôt par des rayons pénétrant dans certains objets comme les verres, etc., Extr. 26, 19.

**κατοπτεύειν.**—Speculari, observer, beobachten, to observe.

Action d'observer avec attention, de scruter un objet des yeux. **Sophocle :** ὡς . . . μὴ πρὸς ἐχθρῶν του κατοπτευθεὶς πάρος ῥιφθῶ κυσὶν πρόβλητος οἰωνοῖς θ' ἕλωρ. pour que je ne sois pas déeouvert d'abord par un de mes ennemis et jeté en pâture aux chiens et aux oiseaux, Aj. 827 ; ἐγὼ δ' ἄπειμι, μὴ κατοπτευθῶ παρών. moi, je m'éloigne pour que Philoctête ne découvre pas ma présence ici, Phil. 124. **Aristote :** ἐπειδὴ γὰρ οὐχ οἷόν τε ἦν τῷ σώματι εἰς τὸν οὐράνιον ἁφικέσθαι τόπον καὶ τὴν γῆν ἐκλιπόντα τὸν οὐράνιον ἐκεῖνον χῶρον κατοπτεῦσαι, καθάπερ οἱ ἀνόητοί ποτε ἐπενόουν Ἄλωάδαι κτλ. . . . . .

κατοπτρικὸς **p. 221**

**κατοπτρίζειν.**—Reflectere, radiare, réfléchir la lumière, rayonner vers une surface réfléchissante, spiegeln, eine spiegelnde fläche bestrahlen, to reflect, to send light to a mirror.

Expression verbale, dérivée de κάτοπτρον, désignant soit l'action d'un miroir ou d'une surface réfléchissante sur la lumière reçue, soit l'action d'un corps émetteur de rayons sur un miroir. **Géminus :** τὰ δὲ ἐμφαινόμενα ἐν τοῖς κατοπτρίζουσι κατὰ ἀνακλωμένας γωνίας (sc. ὁρᾶσθαι). ce qui apparait dans les surfaces réfléchissantes est vu suivant des lignes brisées, Extr. 24, 4. **Par. Oxyrh. :** ὡς Ἐμπεδοκλῆς ἀπορροὰς φαίη ἂν ἀπιέναι ἀπὸ ἑκάστου τῶν κατοπτριζομένων . . . . .

**κατοπτρικός.**—Ad speculum pertinens, concernant le miroir, den spiegel betreffend, concerning the mirror.

Adjectif correspondant à κάτοπτρον, κατοπτρίζειν, désignant les réalités liées à la réflexion de la lumière ou des rayons visuels par des surfaces polies ; τὰ κατοπτρικὰ ou ἡ κατοπτρικὴ (sc. ἐπιστήμη) signifie la science des miroirs. **Euclide :** ἐπεὶ οὖν προσπέπτωκεν ἀκτὶς ἡ ΓΗ καὶ ἀντανακέκλασται ἡ ΗΑ, πρὸς ἴσας γωνίας ἀνακεκλασμέναι εἰσίν, ὡς ἐν τοῖς Κατοπτρικοῖς λέγεται. puisque le rayon visuel ΓΗ tombe sur le miroir et en est réfléchi suivant ΗΑ, les angles que font ΓΗ et ΗΑ avec le miroir sont égaux, comme

cela est indiqué dans le traité de catoptrique, prop. 19. **Géminus** : κατοπτρικὸν δὲ λέγεται . . . τὸ περὶ τὰς ἀνακλάσεις τὰς ἀπὸ τῶν λείων, οὐ μόνον περὶ ἓν κάτοπτρον, ἔστι δ' ὅτε καὶ περὶ πλείω στρεφόμενον, ἔτι μὴν καὶ περὶ τὰ ἐν ἀέρι δι' ὑγρῶν ἐμφαινόμενα χρώματα, ὁποῖά ἐστι τὰ κατὰ τὰς ἴριδας. on appelle catoptrique la théorie de la réflexion des rayons par des surfaces polies ; cette théorie a pour objet non seulement un miroir unique, mais à l'occasion aussi la combinaison de plusieurs miroirs ; elle étudie, en plus, les phénomènes de couleurs qui apparaissent dans l'air par l'effet de particules humides, comme les phénomènes de l'arc-en-ciel, Extr. 2h, 4. **Damien** : ἀπέδειξε γὰρ ὁ μηχανικὸς Ἥρων ἐν τοῖς αὐτοῦ κατοπτρικοῖς, ὅτι αἱ πρὸς ἴσας γωνίας κλώμεναι εὐθεῖαι ἐλάχισταί εἰσι τῶν μέσων τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς καὶ ὁμοιομεροῦς γραμμῆς πρὸς τὰ αὐτὰ κλωμένων πρὸς ἀνίσους γωνίας. car le constructeur de machines Héron d' Alexandrie a démontré dans ses livres de catoptrique que les droites brisées sous des angles égaux sont plus courtes que celles qui, avec les mêmes extrémités . . . . .

**τηλέπομπος p. 390**

Πρόσωπον τηλαυγές. près des tempes d'Hélios ses joues brillantes encadrent, en descendant de la tête, son charmant visage qui rayonne sa clarté au loin, Hélios 11 ; εἵματα ἑσσαμένη τηλαυγέα, δῖα Σελήνη, κτλ. la brillante lune, s'étant vètue de robes lançant leur clarté au loin Séléné 8. **Théognis** : ἄγγελος ἄφθογγος πόλεμον πολύδακρυν ἐγείρει, Κύρν', ἀπὸ τηλαυγέος φαινόμενος σκοπιῆς. un messager muet fait éclater la guerre accompagnée de larmes abondantes, o Kyrnos, ce fanal qu'on voit luire d'un sommet brillant au loin, 550. **Pindare** : ἀρχομένου δ ἔργου πρόσωπον χρὴ θέμεν τηλαυγές. à l'œuvre commencée il convient de donner une façade qui brille au loin, Ol, VI, 4 ; ἀστέρος οὐρανίου φαμὶ τηλαυγέστερον κείνῳ φάος ἐξικόμαν κε βαθὺν πόντον περάσαις.

**τηλέπομπος.**—Longe emissus, envoyé au loin, in die ferne gesandt, sent forth far away.

Adjectif composé (τῆλε, πέμπειν) exprimant le pouvoir de la lumière d'être rayonnée à de grandes distances ; cf. πέμπειν, ἀποπέμπειν, ἐκπέμπειν. **Eschyle** : φάος δὲ τηλέπομπον οὐκ ἠναίνετο φρουρὰ πλέον καίουσα τῶν εἰρημένων. les gardiens du Cithéron allumèrent avec ardeur une lumière capable de franchir une longue distance, en brûlant plus qu'on leur avait ordonné, Ag. 300.

**τηλέσκοπος, τηλεσκόπος.**—Procul conspicuus, procul perspicax, visible de loin, voyant au loin, von fern sichtbar, fernhin sehend, to be seen from a long dinstance, seeing far in the dinstance.

Adjectif composé (τῆλε, σκοπ·), exprimant.

1o. qu'un objet rayonne de la lumière à une grande distance, est visible de loin ; accentuation τηλέσκοπος. **Hésiode** : ἀλλά μιν ἐξαπάτησεν ἐὺς πάις Ἰαπετοῖο κλέψας ἀκαμάτοιο πυρὸς τηλέσκοπον αὐγὴν ἐν κοίλῳ νάρθηκι. mais le vaillant fils de Japet trompa Zeus ; il déroba, en le cachant dans le creux d'une tige de férule la clarté, brillant au loin, du feu infatigable, Théog. 585 : cf. 569. **Sophocle** : τηλέσκοπον πέμφιγα χρυσέαν ἰδών, κτλ. en voyant le rayonnement aux lueurs d'or visibles de loin, etc., frgt. 319.

2o. qu'un œil perçoit, des objets lointains placés dans la lumière ; accentuation τηλεσκόπος. **Aristophane** : ἀλλ' ἀποσεισάμεναι νέφος ὄμβριον ἀθανάτας ἰδέας, ἐπιδώμεθα τηλεισκόπῳ ὄμματι γαῖαν. mais détournons le nuage lourd de pluie de la contemplation d'objets immortels et regardons, d'un œil capable de voir au loin, la terre, Nuées 287.

**τιθέναι p. 391**

**τηλεφανής, τηλέφαντος.** — Procul manifestus, apparaissant à distance, von fern her sichtbar, visible from a long distance.

Adjectif composé (τῆλε, φαν.) exprimant qu'un objet est visible de loin ou rayonne au loin. **Homère** : ἀμφ' αὐτοῖσι δ' ἔπειτα μέγαν καὶ ἀμύμονα τύμβον χεύαμεν Ἀργείων ἱερὸς στρατὸς αἰχμητάων, ἀκτῇ ἐπὶ προεχούσῃ, ἐπὶ πλατεῖ Ἑλλησπόντῳ. ὥς κεν τηλεφανὴς ἐκ ποντόφιν ἀνδράσιν εἴη τοῖσ' οἳ νῦν γεγάασι, καὶ οἳ μετόπισθεν ἔσονται. autour de vos ossements ensuite, nous, l'armée sacrée des Argiens, nous avons répandu un tombeau, à l'extrémité d'une langue de terre sur le rivage bas de l'Hellespont, pour qu'il fût visible de loin, du côté de la mer, aux hommes de maintenant et à ceux de l'avenir, ω 80. **Pindare** : χαῖρ', ὦ θεοδμάτα, ... ἅν τε βροτοὶ Δᾶλον κικλήσκοισιν, μάκαρες δ' ἐν Ὀλύμπῳ τηλέφαντον κυανέας χθονὸς ἄστρον.

**τηλωπός.** — Procul conspicuus, procul a conspectu visible au loin, loin des yeux, in der ferne sichtbar, dem auge entrückt, to be seen from a long distance, out of sight.

Adjectif composé (τῆλε, ὤψ) exprimant qu'un objet n'est vu que de loin ou qu'il est trop loin de nos regards pour être vu. **Sophocle** : τανῦν τηλωπὸς οἴχνεῖ, δυσμενῶν θήραν ἔχων. mais aujourd'hui Teucer est absent, loin de nos yeux, poursuivant des ennemis, Aj. 563. Comme τηλεφανής, le terme τηλωπός, peut s'appliquer, par métonomase, au son. ὑπ' ἀνάγκας βοᾷ τηλωπὸν ἰωάν, κτλ. tourmenté par une douleur irrésistible, il pousse des cris qu'on entend (exactement : qu'on voit ; cf., quelques vers avant, προυφάνη, κτύπος, x. 201) au loin, Phil 215.

**τιθέναι.** — Ponere, placer, setzen, to set, to place.

Expression verbale par laquelle Aristote caractérise la manière dont les atomistes expliquent la naissance des couleurs dérivées à partir d'un

petit nombre de couleurs fondamentales ou la production des couleurs fondamentales par la juxtaposition d'atomes accusant certaines déterminations spatiales ; cf. θέσις, σχῆμα, τάξις. **Aristote** : ἐνδέχεται μὲν γὰρ παρ' ἄλληλα τιθέμενα τὸ λευκὸν καὶ τὸ μέλαν, ὥσθ' ἑκάτερον μὲν εἶναι ἀόρατον διὰ σμικρότητα, τὸ δ' ἐξ ἀμφοῖν ὁρατὸν οὕτω γίνεσθαι, τοῦτο γὰρ οὔτε λευκὸν οἷόν τε φαίνεσθαι οὔτε μέλαν, ἐπεὶ δ' ἀνάγκη μέν τι ἔχειν χρῶμα, τούτων δ' οὐδέτερον δυνατόν, ἀνάγκη μικτόν τι εἶναι καὶ εἶδός τι χρόας ἕτερον. il est possible d' imaginer juxtaposées....

φ ῶ ς

ils traversent les nuages, qui sont cependant plus denses que la lune II, 105 ; ὁπόταν γὰρ περιπεσῇ τῇ σκιᾷ τῆς γῆς (sc. ἡ σελήνη), στέρεται τοῦ ἡλιακοῦ φωτὸς ὑπὸ τῆς γῆς ἐπισκοτουμένη.

2o le jour et la lumière diffuse du jour. **Homère** : τοῖσι δ' ἀπ' ὀφθαλμῶν νέφος ἀχλύος ὦσεν Ἀθήνη θεσπέσιον μάλα δὲ σφι φόως γένετ' ἀμφοτέρωθεν κτλ. de leurs yeux Athéné ôta le nuage de brume prodigieux, et une lumière pleine se fit pour eux des deux côtés, O 636 ; ἤδη μὲν φάος ἦεν ἐπὶ χθόνα, τοὺς δ' ἄρ' Ἀθήνη νυκτὶ κατακρύψασα θοῶς ἐξῆγε πόληος. déjà la lumière était répendue sur la terre, mais Athéné, enveloppant de nuit Ulysse et ses compagnons, les conduisit rapidement hors de la ville, ψ 371. On rencontre, chez Homère et ailleurs, l' expression ἐν φάει, dans la lumière du jour. ἐν δὲ φάει καὶ ὄλεσσον. ἐπεὶ νύ τοι εὔαδεν οὕτως. dans la lumière fais nous même périr, puisque telle est maintenant ta volonté. P 647 ; νῦν δ' ὥρη καὶ δόρπον Ἀρχαιοῖσιν τετυκέσθαι ἐν φάει, κτλ. l'heure est venue à présent de préparer aussi un repas pour les Achéens à la lumière du jour, φ 428. Les expressions ἄγειν φόωσδε, ἐξάγειν φόωσδε, ἐκφαίνειν φόωσδε, ἰέναι φόωσδε, amener à la lumière, faire apparaitre à la lumière du jour, désignent l'entrée, opérée par une divinité, d'un être dans la vie, δράκων ἐπὶ νῶτα δαφοινός, ... τὸν ῥ' αὐτὸς Ὀλύμπιος ἧκε φόωσδε κτλ. un serpent au dos coloré de rouge, ... que l'Olympien avait lui-même envoyé à la lumière, B 308 ; αὐτὰρ ἐπεὶ δὴ τόν γε μογοστόκος Εἰλείθυια ἐξάγαγε πρὸ φόωσδε καὶ ἠελίου ἴδεν αὐγάς.

φ ῶ ς p. 435

**Pindare** : ἦλθεν δ' ὑπὸ σπλάγχνων . . . Ἴαμος ἐς φάος αὐτίκα. des flancs d'Éuadné Iamos vint à la lumière aussitôt, Ol. VI, 44 ; et passim. **Eschyle** : ἐσθλά σοι πέμπειν τέκνῳ τε γῆς ἔνερθεν ἐς φάος, κτλ. de t'envoyer, de la terre à la lumière du jour, des événements heureux pour toi et ton fils, Perses, 222 ; αὐτὸς δ' ἀέλπτως νόστιμον βλέπω φάος. et moi même, c'est contre tout espoir que je vois le jour du retour, ibid. 261 ; ὦ πάντων αἰθὴρ κοινὸν φάος εἱλίσσων, ἐσορᾷς μ' ὡς ἔκδικα πάσχω ; toi, éther, qui fais tourner autour du monde la lumière commune à tous, vois-tu quelles injustices je souffre ?,

Prom. 1091 ; τῆς νῦν τεκούσης φῶς τόδ' εὐφρόνης λέγω. j'entends la nuit qui vient de nous donner ce jour, Agam. 279 ; et passim. **Sophocle** : ὥστε μήτ' ἄλλον, ὅστις φῶς ὁρᾷ, βλάψαι ποτ' ἄν jamais ni à personne qui voit la lumière, tu ne saurais nuire, OEd. R. 374 ; τὰ δ' αὐτίκ' εἰς τὸ φῶς φανεῖ κακὰ κτλ. ce palais fera bientôt apparaitre à la lumière d'autres malheurs, ibid. 1229 ; ὡς μηκέτ' ὄντα κεῖνον ἐν φάει νόει. sois bien persuadé qu'Ajax n'est plus dans la lumière, Phil. 415 ; et passim. **Euripide** : οὐχ ηὗρε πλὴν γυναικὸς ὅστις ἤθελε θανεῖν πρὸ κείνου μηδ' ἔτ' εἰσορᾶν φάος. Admète ne trouva que sa femme qui voulût mourir pour lui et renoncer à voir la lumière du jour, Alc. 17 ; εἰ φῶς τόδ' ἦν ὄμμασιν δεδορκὼς Φοίβου παῖς, κτλ. si le fils de Phébus voyait encore de ses yeux cette lumière du jour, ibid. 122 ; ἅλιε καὶ φάος ἁμέρας κτλ. o soleil, o lumière du jour. ibid. 244 ; ἐγώ σε πρεσβεύουσα κἀντὶ τῆς ἐμῆς ψυχῆς καταστήσασα φῶς τόδ' εἰσορᾶν θνήσκω . . . .

On peut classer, pour la commodité, dans la câtégorie de la lumière du jour la lumière diffuse, opposée à l'obscurité, des présocratiques et des théoriciens de la lumière. Dans certains systèmes du monde, cette lumière diffuse, considérée comme un élément, a préexisté aux corps célestes qui sont des points de concentration du feu cosmique. **Parménide** : αὐτὰρ ἐπειδὴ πάντα φάος καὶ νὺξ ὠνόμασται . . . , πᾶν πλέον ἐστὶν ὁμοῦ φάεος καὶ νυκτὸς ἀφάντου, ἴσων ἀμφοτέρων, ἐπεὶ οὐδετέρῳ μέτα μηδέν. après que toutes choses ont été appelées lumière et nuit, tout est rempli ensemble . . . . .

***

Ἡ προσπάθεια τοῦ κ. Mugler νὰ ἐκθέσῃ συστηματικῶς τὴν δημιουργίαν καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ πρότυπον καὶ τὸ θεμέλιον τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης, εἶναι ἀξία ἰδιαιτέρας προσοχῆς καὶ προκαλεῖ πράγματι τόν θαυμασμὸν παντὸς ἐρευνητοῦ τῶν πηγῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἀπέρρευσεν ὁ σημερινὸς Δυτικὸς Πολιτισμός. Κάτοχος καὶ βαθὺς γνώστης τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γλώσσης ὁ κ. Μοῦγκλερ διαπραγματεύεται τὰ τῆς ἐκθέσεως τῶν ὅρων τῆς ὀπτικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων μὲ σαφήνειαν καὶ ὀξυδέρκειαν ἀπαράμιλλον. Ἡ πλήρης καὶ ἀκριβὴς γνῶσις τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν ὡς καὶ τῶν ἔργων τῶν Τραγικῶν, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν βαθεῖαν κατανόησιν τῶν πραγματειῶν τοῦ Πλάτωνος τοῦ Ἀριστοτέλους, τῶν ἀποσπασμάτων τῶν Προσωκρατικῶν καὶ ἰδίως τῶν ἀρχαίων ἔργων τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, ἐπέτρεψεν εἰς τὸν κ. Mugler νὰ παρουσιάσῃ ἓν Λεξικὸν τῆς ὀπτικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων, τὸ ὁποῖον εἶναι μοναδικὸν εἰς τὸ εἶδος του καὶ ἀπαραίτητον βοήθημα εἰς πάντα ἐρευνητὴν τῶν πηγῶν τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης ἐπὶ τοῦ φωτός.

**Βιβλιογραφία:**

A source book in Greek Science, Morris R. Cohen, I. E. Drapkin, Mc Graw - Hill Book Comp., Inc. New York - Toronto - London, 1948.

E. Hoppe, Geschichte der Physik, Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1926.

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΙΗ′ 1966
ΤΕΥΧΗ Α′ ΚΑΙ Β′ 35/36

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ**
ΦΥΛΗΣ 32 — ΑΘΗΝΑΙ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑΝ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΛΟΓΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΤΙΜΑΙΟΣ

## Α' ΕΙΣΑΓΩΓΗ

**1.** Εἰς τὰ σχόλια τῶν Ἁρμονικῶν τοῦ Πτολεμαίου ὁ Πορφύριος σημειώνει τὰ ἑξῆς :

Ὁ Ἀρχύτας δὲ λέγων περὶ τῶν μεσοτήτων (ἀναλογιῶν) γράφει ταῦτα· «Μέσαι δὲ ὑπάρχουν εἰς τὴν μουσικὴν τρεῖς, μία μὲν ἡ ἀριθμητική, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρική, τρίτη δὲ ἡ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦν ἁρμονικήν. Ἀριθμητικὴ μὲν εἶναι ὅταν ὑπάρχουν ἐν συνεχείᾳ τρεῖς ὅροι παρουσιάζοντες τὴν αὐτὴν ὑπεροχήν· δηλαδὴ ὅσον ὁ πρῶτος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου, τόσον ὁ δεύτερος ὑπερέχει τοῦ τρίτου. Καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν συμβαίνει, ὥστε ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγον τῶν μικροτέρων ὅρων. Ἡ γεωμετρικὴ δὲ εἶναι, ὅταν (ὑπαρχόντων ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὅρων) ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, οἷον ἔχει ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. Τούτων δὲ ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μικροτέρων. Ἡ δὲ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἁρμονικήν, εἶναι ὅταν οἱ ὅροι ἔχουν ὡς ἑξῆς· ὅσον μέρος τοῦ πρώτου ὑπερέχει ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, τόσον μέρος τοῦ τρίτου ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου. Εἰς τὴν ἀναλογίαν δὲ αὐτὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μικροτέρων ὅρων».

*(Ἀρχύτας δὲ περὶ τῶν μεσοτήτων λέγων γράφει ταῦτα·*

*μέσαι δέ ἐντι τρῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἂν καλέοντι ἁρμονικάν. ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτᾳ ⟨τᾷ⟩ ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτί τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἂν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι ⟨τοῖοι· ᾧ⟩ ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον).* (Porph. in Ptol. harm. p. 42. Diels Fragm. d. Vors. I, B. Fr. 2 p. 435, 1951).

*

Ἐὰν ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοὶ α,β,γ ($\alpha>\beta>\gamma>0$), θὰ εἶναι, κατὰ τὸν Ἀρχύταν :

Ἀριθμητικὴ ἀναλογία, ὅταν $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ (1)

Θὰ εἶναι δὲ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$ (2)

Γεωμετρικὴ ἀναλογία, ὅταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ (3)

Ἁρμονικὴ ἀναλογία, ὅταν $\alpha=\beta+\frac{\alpha}{n}$ $(n\neq 1>0)$

$$\beta=\gamma+\frac{\gamma}{n}.$$

Θὰ εἶναι δὲ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$. (4)

Κατὰ τὸν Νικόμαχον τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\beta=\frac{2.\alpha.\gamma}{\alpha+\gamma}$, (5) (Introd. Arith. Hoche II 26 p. 135, 10).

Ἡ ἀπόδειξις τῶν προηγουμένων σχέσεων (2) καὶ (4) δὲν ἔχει σωθῆ, ἔχει ὅμως ὡς ἑξῆς :

Εἰς τὴν σχέσιν (1), ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος διὰ β καὶ τὸ δεύτερον διὰ γ, ἐπειδὴ $\beta>\gamma$, θὰ λάβωμεν

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta} < \frac{\beta-\gamma}{\gamma}$$

ἢ $$\frac{\alpha}{\beta}-1 < \frac{\beta}{\gamma}-1,$$ ἐξ ἧς ἕπεται

ἡ ἀλήθεια τῆς (2) $$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ἡ σχέσις (5) γράφεται $\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$. (6)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (6) ἐπὶ β καὶ τὸ δεύτερον ἐπὶ α, ἐπειδὴ $\beta<\alpha$, θὰ λάβωμεν

$$\beta\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right) < \alpha\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$$

ἢ $$\frac{\beta}{\gamma}-1 < \frac{\alpha}{\beta}-1,$$ ἐξ ἧς ἕπεται

ἡ ἀλήθεια τῆς (4) $$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}.$$

**2.** Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον, εἰς τὴν τετρακτὺν τῶν Πυθαγορείων 1, 2, 3, 4 ἀπαντῶσιν αἱ θεμελιώδεις συμφωνίαι τῆς μουσικῆς, ἤτοι: ἡ διὰ τεσσάρων συμφωνία ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ (ὁ τέταρτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος συχνότητος $\frac{4}{3}$ ὅταν ὁ πρῶτος φθόγγος ἔχει συχνότητα 1 καὶ ὁ ὄγδοος 2). Ἡ διὰ πέντε συμφωνία ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ $\left(\text{δηλ. } 1\ \frac{1}{2}\right)$, (ὁ πέμπτος φθόγγος τῆς αὐτῆς κλίμακος συχνότητος $\frac{3}{2}$). Ἡ διὰ πασῶν συμφωνία ἐν διπλασίῳ λόγῳ (2 : 1) (ὁ ὄγδοος φθόγγος τῆς αὐτῆς κλίμακος συχνότητος 2). Ἡ δὶς διὰ πασῶν συμφωνία ἐν τετραπλασίῳ λόγῳ (4 : 1) (ἡ διπλῆ ὀκτάβα). (Theon Smyrnaeus, Sectio canonis, E. Hiller p. 93, 17, B. G. Teubner, Leipzig 1878).

**3.** Ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του σημειώνει ὅτι ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἔχει λάβει τὸ ὄνομα ἁρμονική, διότι παρέπεται πάσης γεωμετρικῆς ἁρμονίας. Ὀνομάζουν δέ, προσθέτει, γεωμετρικὴν ἁρμονίαν τὸν κύβον, ἐπειδὴ εἰς πάντα κύβον ἐνοπτρίζεται ἡ μεσότης αὕτη. Διότι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμὰς καὶ οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 12 ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν καὶ ὁ μέσος αὐτῶν ὁ 8, δηλ., τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων 6 καὶ 12, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων $\left(\text{ἤτοι } 8 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12}\right)$. (Nicomachi Introd. Arithm. R. Hoche, II 26 p. 135, 10, B. G. Teubner, Leipzig 1866).

Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ὁ Νικόμαχος ἀναπτύσσει τὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$ ἀποκαλῶν αὐτὴν τελειοτάτην καὶ χρήσιμον εἰς πᾶσαν προκοπὴν εἰς τὴν μουσικὴν καὶ τὴν φυσιολογίαν. Εἰς αὐτήν, τονίζει, ἀπαντᾷ ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία $12 - 9 = 9 - 6$, ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία $12 : 8 = 9 : 6$ καὶ ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 12, ὅπου ὁ μεγαλύτερος ὅρος $12 = 8 + \frac{12}{3}$ καὶ ὁ μέσος ὅρος $8 = 6 + \frac{6}{3}$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας (R. Hoche II 29 p. 144, 20).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ: Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀντλεῖ κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου, σχολιάζων αὐτὴν προσθέτει, παραδόξως, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἔφερε τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος, ἀποκαλῶν αὐτὴν καὶ αὐτός, ὡς ὁ Νικόμαχος, τελειοτάτην. Ἡ πληροφορία τοῦ Ἰαμβλίχου θεωρεῖται ἀνακριβὴς καὶ ὑποτίθεται ὅτι πρόκειται μᾶλλον περὶ μεταγενεστέρας προσθήκης) (Iamblichus in Nicom Arithm. Introd. p. 118, H. Pistelli, B. G. Teubner, Leipzig 1894).

**4.** Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ὁ Ἐμπεδοκλῆς πρῶτος διετύπωσε τὴν θεωρίαν ὅτι ὁ κόσμος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων στοιχείων, πυρὸς — ἀέρος — ὕδατος — γῆς (Aristoteles M. Phys. 985 a 21).

Ὁ Πλάτων ἔχει δεχθῆ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἐμπεδοκλέους (Τίμαιος 32b — c) καὶ συμβολίζει τὴν γῆν διὰ τοῦ κύβου (γῆ μὲν τὸ κυβικὸν εἶδος δῶμεν. Τίμαιος 55 d — e), τὸ πῦρ διὰ τῆς πυραμίδος (τετραέδρου), τὸν ἀέρα διὰ τοῦ ὀκταέδρου καὶ τὸ ὕδωρ διὰ τοῦ εἰκοσαέδρου.

(ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οἱ συμβολισμοὶ αὐτοὶ ἀποδίδονται καὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους. **Diels, Doxog. 334, Frag. d Vors. I p. 403, 1951, Ἰαμβλίχου Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς, de Falco p. 87).**

**5.** Ἡ ἁρμονία μὲ τὴν ὁποίαν ὁ Δημιουργὸς ἔχει κατασκευάσει τὸν κόσμον, κατὰ τὸν Πλάτωνα, σχετίζεται μὲ τὸν συμβολισμὸν τῆς γῆς διὰ τοῦ κύβου καὶ τὴν ἁρμονίαν, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὸν κύβον.

Διότι εἰς τὸν κύβον παρατηροῦνται καὶ οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας οἱ 6 — 8 — 9 — 12, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ θεμελιώδεις φθόγγοι τῆς μουσικῆς κλίμακος, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου 6, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν 12, ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν 8, ὅστις εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν 6 καὶ 12, καὶ ὁ ἀριθμὸς 9, ὅστις εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 6 καὶ 12.

Ἡ ὀνομασία τῶν 4 ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ἔχει ὡς ἑξῆς :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Κατὰ τὸν Φιλόλαον : | ὑπάτη | μέση | τρίτη | νήτη | (Diels. Fr. I [B 62] |
| Μεταγενεστέρως : | ὑπάτη | μέση | παραμέση | νήτη | |
| Σύγχρονος ἰταλικὴ : | do | fa | sol | do | |
| Συχνότης φθόγγων : | 6 | 8 | 9 | 12 | |

**6.** Διὰ τὸ μέγεθος τῆς ἁρμονίας δηλ. τῆς μουσικῆς κλίμακος, ὁ Φιλόλαος γράφει τὰ ἑξῆς :

*ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόῳ. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας, ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσσῳ μέσσας καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἁ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον· οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις, συλλαβὰ δέ, δύ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις. Stob. Eclogae p. 188, Diels Fr. I [62] ).*

(Δηλαδή : Τῆς μουσικῆς κλίμακος τὸ μέγεθος εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς καὶ διάστημα δι' ὀξειῶν· τὸ δὲ διάστημα δι' ὀξειῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαστήματος τῆς συλλαβῆς κατὰ ἓν ἐπόγδοον (κατὰ ἕνα φθόγγον). Διότι ἀπὸ τῆς ὑπάτης μέχρι τῆς μέσης εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς, ἀπὸ δὲ τῆς μέσης μέχρι τῆς νήτης εἶναι διάστημα δι' ὀξειῶν, ἀπὸ δὲ τῆς νήτης μέχρι τῆς τρίτης εἶναι διάστημα μιᾶς συλλαβῆς, ἀπὸ δὲ τῆς τρίτης μέχρι τῆς ὑπάτης εἶναι διάστημα δι'

ὀξειῶν· τὸ διάστημα δὲ μεταξὺ μέσης καὶ τρίτης ἐπόγδοον (δηλ. ἡ συχνότης τῆς τρίτης = sol, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συχνότητος τῆς μέσης = fa κατὰ $\frac{9}{8}$)· ἡ δὲ συχνότης τῆς συλλαβῆς εἶναι ἐπίτριτος $\left(=\frac{4}{3}\right)$, ἡ δὲ συχνότης τῆς δι' ὀξειῶν εἶναι ἡμιόλιος $\left(=\frac{3}{2}\right)$, ἡ συχνότης δὲ τοῦ ὀγδόου φθόγγου (διαπασῶν) εἶναι διπλασία τῆς τοῦ πρώτου φθόγγου. Κατὰ ταῦτα, ἡ μουσικὴ κλῖμαξ (ἡ ὀκτάβα) ἔχει πέντε φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον (ἐν σχέσει πρὸς τὸν πρῶτον φθόγγον τῆς ὀκτάβας) καὶ δύο διέσεις (δύο ἡμιτόνια), τὸ διάστημα δὲ δι' ὀξειῶν ἔχει τρεῖς φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον καὶ μίαν δίεσιν (ἓν ἡμιτόνιον), τὸ διάστημα δὲ μιᾶς συλλαβῆς ἔχει δύο φθόγγους συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστον καὶ μίαν δίεσιν (ἓν ἡμιτόνιον).

**7.** Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων φαίνεται σαφῶς ὅτι ὁ Φιλόλαος διὰ τῆς λέξεως «συλλαβὴ» ἐννοεῖ τέσσαρας φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ τὸν τέταρτον φθόγγον αὐτῆς (τὴν τετάρτην), διὰ τῆς φράσεως δὲ «δι' ὀξειῶν» ἐννοεῖ πέντε φθόγγους τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ τὸν πέμπτον φθόγγον αὐτῆς (τὴν πέμπτην). Ἐκ τοῦ καθορισμοῦ τῶν πλήρων φθόγγων καὶ τῶν διέσεων (ἐνταῦθα ἡμιτονίων) ὑποδεικνύεται ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας).

Ἀναχωρεῖ ὁ Φιλόλαος ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας

$6 : 8 = 9 : 12$, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν πρὸς εὐκολίαν,

$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$ (διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων αὐτῆς διὰ 6) . . . . . (μ)

**8.** Ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος ἔχει κατὰ τὰ προηγούμενα ὡς ἑξῆς (οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζουν συχνότητας):

Πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας (μ) ὁ 1 = ὑπάτη = κάτω do.

Ὁ δεύτερος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ 1, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$ = παρυπάτη = re.

Ὁ τρίτος φθόγγος λαμβάνεται ἐπίσης διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμέ-

νου φθόγγου, τοῦ $\frac{9}{8}$ ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$ = λιχανὸς = mi.

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ $\frac{4}{3}$, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀκραίων ὅρων τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας) τῶν 1 καὶ 2, ὁπότε εἶναι :

$$\text{ἁρμονικὸν μέσον} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3} = \text{μέση} = \text{fa}.$$

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι ὁ τρίτος ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ $\frac{3}{2}$, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς κλίμακος (τῆς ὀκτάβας), τῶν 1 καὶ 2, ὁπότε εἶναι :

$$\text{ἀριθμητικὸν μέσον} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = \text{παραμέση} = \text{sol}.$$

Ὁ ἕκτος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{3}{2}$, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$ = τρίτη = la.

Ὁ ἕβδομος φθόγγος λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ προηγουμένου φθόγγου, τοῦ $\frac{27}{16}$, ἐπὶ $\frac{9}{8}$, ὁπότε εἶναι $\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{128}$ = παρανήτη = si.

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν ἀκραίων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας (μ), ὁ 2 =νήτη, ἄνω do ἔχων διπλασίαν συχνότητα τοῦ πρώτου φθόγγου.

Ἔχει λοιπὸν κατὰ τὸν Φιλόλαον ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ ὡς ἑξῆς :

Ὑπάτη παρυπάτη λιχανὸς μέση παραμέση τρίτη παρανήτη νήτη

| | do | re | mi | fa | sol | la | si | do |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (M) | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | 2. |

Κατὰ τὸν Φιλόλαον πάλιν : Ἀρχίζοντες τὴν ἀρίθμησιν ἐκ τοῦ πρώτου φθόγγου πρὸς τὸν ὄγδοον ἔχομεν

do ——————→ fa

Διάστημα συλλαβῆς=4 ἀνιόντες φθόγγοι, οἱ do, re, mi, fa

fa ——————→ ἄνω do

Διάστημα δι' ὀξειῶν=5 ἀνιόντες φθόγγοι, οἱ fa, sol, la, si, do

Ἀρχίζοντες τὴν ἀρίθμησιν ἐκ τοῦ ὀγδόου φθόγγου πρὸς τὸν πρῶτον ἔχομεν

sol ← do

Διάστημα συλλαβῆς=4 κατιόντες φθόγγοι, οἱ do, si, la, sol

do → sol

Διάστημα δι' ὀξειῶν=5 κατιόντες φθόγγοι, οἱ sol, fa, mi, re, do

Οἱ πλήρεις φθόγγοι (συχνότητος $\frac{9}{8}$ ἕκαστος) εἶναι οἱ ἑξῆς πέντε:

$$\frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128}.$$

Ἕκαστος φθόγγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου του κατὰ $\frac{9}{8}$. Ὁ $\frac{3}{2}$ ἔχει προηγούμενον τὸν $\frac{4}{3}$. Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος δὲν λογίζεται.

Τὸ διάστημα (δηλαδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως) μεταξὺ $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{81}{64}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{9}{8}$ καὶ ὁ Φιλόλαος τὸ ὀνομάζει δίεσιν (σήμερον καλεῖται ἡμιτόνιον). Τὸ διάστημα μεταξὺ 2 καὶ $\frac{243}{128}$ εἶναι ἐπίσης μικρότερον τοῦ $\frac{9}{8}$ καὶ ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον, διότι εἶναι

$$\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$$

καὶ ἑπομένως καὶ αὐτὸ εἶναι μία δίεσις (ἐν ἡμιτόνιον). Ὑπάρχουν λοιπὸν εἰς τὴν ἀνωτέρω μουσικὴν κλίμακα πέντε φθόγγοι πλήρεις καὶ δύο ἡμιτόνια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερὰ ἡ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος ὑπὸ τοῦ Φιλολάου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον.

**9.** Καὶ γενικῶς. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ γ, δ ($\gamma < \delta$), οἵτινες ἐκφράζουν συχνότητας καὶ ζητεῖται ἡ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν γ, δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{2 \cdot \gamma \cdot \delta}{\gamma + \delta}$. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν γ, δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{\gamma + \delta}{2}$.

Κατόπιν σχηματίζομεν τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς γ, δ, ὁπότε εἶναι

$$\gamma \;:\; \frac{2\cdot\gamma\cdot\delta}{\gamma+\delta} \;=\; \frac{\gamma+\delta}{2} \;:\; \delta$$

| ὑπάτη | μέση | παραμέση | νήτη |
|---|---|---|---|
| κάτω do | fa | sol | ἄνω do |

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ γ — ὑπάτη do
(ὁ γ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ δεύτερος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\gamma\cdot\frac{9}{8}$ παρυπάτη re

Ὁ τρίτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\gamma\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}$ λιχανὸς mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{2\cdot\gamma\cdot\delta}{\gamma+\delta}$ μέση fa
(ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}$ παραμέση sol
(ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ ἕκτος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\frac{9}{8}$ τρίτη la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι $\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}$ παρανήτη si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος τῆς κλίμακος εἶναι ὁ δ — νήτη do
(ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

B΄

**10.** Τὸ πρὸς ἑρμηνείαν μουσικὸν χωρίον τοῦ Τιμαίου (35b—36c) ἔχει ὡς ἑξῆς :

*Μίαν ἀφεῖλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῄρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ' ἑπτακαιεικοσαπλασίαν τῆς πρώτης· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπι-*

*τριτα πάντα συνεπληροῦντο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια.*

(Κατὰ πρῶτον ἀφῆρεσεν ἀπὸ τὸ μεῖγμα ἓν μέρος, κατόπιν δὲ ἀφῆρεσε διπλάσιον τούτου, κατὰ τὴν τρίτην δὲ φορὰν ἀφῆρεσε μέρος ἴσον πρὸς 3/2 τοῦ δευτέρου, τριπλάσιον δὲ τοῦ πρώτου, κατὰ τὴν τετάρτην δὲ ἀφῆρεσε μέρος ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου, κατὰ τὴν πέμπτην δὲ μέρος ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τρίτου, κατὰ τὴν ἕκτην δὲ μέρος ὀκταπλάσιον τοῦ πρώτου, κατὰ τὴν ἑβδόμην δὲ εἰκοσιεπταπλάσιον τοῦ πρώτου· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦντο καὶ τὰ διπλάσια καὶ τὰ τριπλάσια διαστήματα, ἐν ᾧ ἐλάμβανε ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ μείγματος μέρη καὶ τὰ ἔθετε εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα νὰ εἶναι δύο μεσότητες, ἡ μὲν μία νὰ ὑπερέχῃ καὶ νὰ ὑπερέχεται κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος τῶν ἄκρων, ἡ δὲ νὰ ὑπερέχῃ τόσον ἀριθμόν, ὅσον νὰ ὑπερέχεται. Ἀφοῦ δὲ ἐκ τῶν δεσμῶν αὐτῶν ἔγιναν διαστάσεις ἡμιόλιοι (3 : 2), ἐπίτριτοι (4 : 3) καὶ ἐπόγδοοι (9 : 8) εἰς τὰς πρώτας διαστάσεις, ὅλα τὰ ἐπίτριτα διαστήματα συνεπληροῦντο διὰ τοῦ ἐπογδόου διαστήματος, ἐν ᾧ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν (τῶν δύο) ἔλειπε μόριον ὥστε νὰ ὑπάρχῃ σχέσις ἴση πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν 256, παρονομαστὴν δὲ τὸν 243).

**11.** Τὸ νόημα τοῦ ἀνωτέρω χωρίου τοῦ Τιμαίου : Τὰ ἀφαιρεθέντα μέρη ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ μείγματος σχηματίζουν δύο γεωμετρικὰς προόδους :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **(α)** | **1** | **2** | **4** | **8** |
| **(β)** | **1** | **3** | **9** | **27** |

Τὰ διπλάσια διαστήματα εἶναι τρία : 1—2, 2—4, 4— 8.
Τὰ τριπλάσια διαστήματα εἶναι ἐπίσης τρία : 1—3, 3—9, 9—27.

Τὰ διαστήματα αὐτὰ τὰ ὀνομάζει εἰς τὸ χωρίον (36α) καὶ διαστάσεις, ἐν ᾧ εἰς τὸ χωρίον (43d) τὰ ὀνομάζει ἀποστάσεις, λέγων εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο «ὥστε τὰς τοῦ διπλασίου καὶ τριπλασίου *τρεῖς ἑκατέρας* ἀποστάσεις . . . », ἐννοῶν τὰς ἀνωτέρω ἓξ διαστάσεις ἢ διαστήματα.

Τὰ ἀνωτέρω 6 διαστήματα συνεπληροῦντο διὰ μεσοτήτων, ὥστε εἰς ἕκαστον διάστημα νὰ εἶναι δύο μεσότητες, μία ἁρμονικὴ καὶ μία ἀριθμητική.

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρόκειται περὶ κατασκευῆς ἓξ (6) μουσικῶν κλιμάκων (6 ὀκτάβαι), ἀφοῦ προηγουμένως κατασκευάζονται αἱ ἀντίστοιχοι ἓξ μουσικαὶ ἀναλογίαι.

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (α) κατασκευάζει τρεῖς μουσικὰς κλίμακας (τρεῖς ὀκτάβας) : Ἡ πρώτη κλῖμαξ ἔχει ἄκρους ὅρους 1 καὶ 2 (1 κάτω do καὶ 2 ἄνω do). Ἡ δευτέρα ἔχει ἄκρους ὅρους 2 καὶ 4 (2 κάτω do καὶ 4 ἄνω do). Ἡ τρίτη ἔχει ἄκρους ὅρους 4 καὶ 8 (4 κάτω do καὶ 8 ἄνω do).

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (β) κατασκευάζει ἐπίσης τρεῖς μουσικὰς κλίμακας (3 ὀκτάβας). Ἡ πρώτη κλῖμαξ ἔχει ἄκρους ὅρους 1 καὶ 3 (1 κάτω do, 3 ἄνω do). Ἡ δευτέρα ἔχει ἄκρους ὅρους 3 καὶ 9 (3 κάτω do, 9 ἄνω do). Ἡ τρίτη ἔχει ἄκρους ὅρους 9 καὶ 27 (9 κάτω do, 27 ἄνω do).

Ἡ κατασκευὴ καὶ τῶν 6 κλιμάκων γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ διαφορά, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν κλιμάκων ἐκ τῶν δύο γεωμετρικῶν προόδων (α) καὶ (β), εἶναι ἡ ἑξῆς :

Αἱ τρεῖς πρῶται μουσικαὶ κλίμακες ἔχουν τὸ ἄνω do μὲ διπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do, ὅπως εἰς τὴν Πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα.

Αἱ ἄλλαι τρεῖς μουσικαὶ κλίμακες ἔχουν τὸ ἄνω do μὲ τριπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do.

Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑκάστης μουσικῆς κλίμακος νοεῖ πρῶτον τὴν κατασκευὴν ἑκάστης μουσικῆς ἀναλογίας, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν δύο μεσότητες : μία ἁρμονικὴ καὶ μία ἀριθμητική.

## 12. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν πρώτων μουσικῶν κλιμάκων.

**Πρῶτον διάστημα.** 1 — 2 (ἡ πρώτη διάστασις ἢ πρώτη ἀπόστασις).

Εὑρίσκεται τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3}.$$

Ἀκολούθως εὑρίσκεται τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ 2, τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ὥστε εἰς τὸ διάστημα 1 — 2 ὑπάρχουν δύο μεσότητες,

$$\text{ἡ ἁρμονικὴ } \frac{4}{3} \quad \text{καὶ ἡ ἀριθμητικὴ } \frac{3}{2},$$

ἤτοι σχηματίζεται ἡ μουσικὴ ἀναλογία

$$1 \ : \ \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \ : \ 2.$$

Ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας νοεῖ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν (§ 8 Μ).

Ἡ πρώτη μουσικὴ κλῖμαξ ἔχει κατὰ ταῦτα ὡς ἑξῆς :

| ὑπάτη | παρυπάτη | λιχανὸς | μέση | παραμέση | τρίτη | παρανήτη | νήτη |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| do | re | mi | fa | sol | la | si | do |
| **1** | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | **2** |

**Δεύτερον διάστημα 2 — 4** (ἡ δευτέρα διάστασις ἢ δευτέρα ἀπόστασις). Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 4 εἶναι :

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{2+4} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

ἐν ᾧ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι $\frac{2+4}{2} = 3$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι :

$$2 : \frac{8}{3} = 3 : 4.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης μουσικὴ κλῖμαξ εὑρίσκεται, ὡς ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ ἐκτίθεται (§ 9). Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

| | |
|---|---|
| Πρῶτος φθόγγος | 2 = κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας) |
| Δεύτερος φθόγγος | $2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ = re |
| Τρίτος φθόγγος | $\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{32}$ = mi |
| Τέταρτος φθόγγος | $\frac{8}{3}$ = fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας) |
| Πέμπτος φθόγγος | 3 = sol (ὁ τρίτος » » » » ») |
| Ἕκτος φθόγγος | $3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$ = la |
| Ἕβδομος φθόγγος | $\frac{27}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{64}$ = si |
| Ὄγδοος φθόγγος | 4 = ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας). |

**Τρίτον διάστημα 4 — 8** (ἡ τρίτη διάστασις ἢ τρίτη ἀπόστασις). Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 8 εἶναι :

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{4+8} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3},$$

ἐν ᾧ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον εἶναι $\frac{4+8}{2} = 6$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$4 : \frac{16}{3} = 6 : 8.$$

Ἡ ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης μουσικὴ κλῖμαξ εὑρίσκεται, ὡς ἐκτίθεται ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ (§ 9). Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

Πρῶτος φθόγγος $4$ = κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Δεύτερος φθόγγος $4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$ = re

Τρίτος φθόγγος $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{16}$ = mi

Τέταρτος φθόγγος $\frac{16}{3}$ = fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Πέμπτος φθόγγος $6$ = sol (ὁ τρίτος » » » » »)

Ἕκτος φθόγγος $6 \cdot \frac{9}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$ = la

Ἕβδομος φθόγγος $\frac{27}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{32}$ = si

Ὄγδοος φθόγγος $8$ = ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς πρώτας μουσικὰς κλίμακας, ἑκάστης κλίμακος ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι ἐπίτριτος $\left(1\frac{1}{3}\right)$ τοῦ πρώτου, ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι ἡμιόλιος $\left(1\frac{1}{2}\right)$ τοῦ πρώτου, ὁ λόγος μεταξὺ τετάρτου καὶ τρίτου φθόγγου εἶναι $\frac{256}{243}$ καὶ ὁ λόγος μεταξὺ ὀγδόου καὶ ἑβδόμου φθόγγου εἶναι ἐπίσης $\frac{256}{243}$. Ὁ πλήρης δὲ φθόγγος εἶναι ἐπόγδοος $\left(\frac{9}{8}\right)$. Ἤτοι εἶναι: [ α) = πρώτη κλῖμαξ, β) = δευτέρα κλῖμαξ, γ) = τρίτη κλῖμαξ].

| | Πρῶτος φθόγγος | Τέταρτος φθόγγος | Πέμπτος φθόγγος | Λόγος 4ου : 3ου | Λόγος 8ου : 7ου |
|---|---|---|---|---|---|
| α) | 1 | $\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right.$ τοῦ πρώτου $\left.\text{ἢ ἐπίτριτον}\right)$ | $\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right.$ τοῦ πρώτου $\left.\text{ἢ ἡμιόλιον}\right)$ | $\frac{256}{343}$ | $\frac{256}{243}$ |
| β) | 2 | $\frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right.$ τοῦ πρώτου $\left.\text{ἢ ἐπίτριτον}\right)$ | $3\left(\frac{3}{2}\right.$ τοῦ πρώτου $\left.\text{ἢ ἡμιόλιον}\right)$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{256}{243}$ |
| γ) | 4 | $\frac{16}{3}\left(\frac{4}{3}\right.$ τοῦ πρώτου $\left.\text{ἢ ἐπίτριτον}\right)$ | $6\left(\frac{3}{2}\right.$ τοῦ πρώτου $\left.\text{ἢ ἡμιόλιον}\right)$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{256}{243}$ |

Τὰς τρεῖς αὐτὰς πρώτας κλίμακας ὑπονοεῖ λέγων «Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν τ α ῖ ς π ρ ό σ θ ε ν δ ι α σ τ ά σ ε σ ι ν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια».

## 13. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν δευτέρων μουσικῶν κλιμάκων

Ἡ κατασκευὴ τῶν τριῶν δευτέρων μουσικῶν κλιμάκων γίνεται ὅπως καὶ τῶν τριῶν πρώτων. Εἰς αὐτὰς ὅμως δὲν ὑπάρχουν ἐπίτριτα διαστήματα, οὔτε ἡμιόλια, οὔτε οἱ λόγοι 256 : 243, ἅτινα ὑπάρχουν εἰς τὰς τρεῖς πρώτας μουσικὰς κλίμακας, τὰς ὁποίας διαχωρίζει διὰ τῆς φράσεως «ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν». Πρόσθεν διαστάσεις εἶναι αἱ τρεῖς πρῶται, ἤτοι :

$$1-2, \quad 2-4, \quad 4-8.$$

**Πρῶτον διάστημα 1—3** (ἡ πρώτη διάστασις ἡ πρώτη ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 3 εἶναι

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{1+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ 3 εἶναι

$$\frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$1 \ : \ \frac{3}{2} = 2 \ : \ 3.$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 1=κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8} =$ re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $1 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64} =$ mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{3}{2} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι $2 =$ sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} =$ la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{32} =$ si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι $3 =$ ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

**Δεύτερον διάστημα 3—9** (ἡ δευτέρα διάστασις ἢ δευτέρα ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9 εἶναι

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 9}{3+9} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2} .$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 3 καὶ 9 εἶναι $\frac{3+9}{2} = 6$.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$3 \ : \ \frac{9}{2} = 6 \ : \ 9$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι 3=κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{8} =$ re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{64} =$ mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{9}{2} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι 6 = sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $6 \cdot \frac{9}{8} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} =$ la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{32} =$ si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι 9 = ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

**Τρίτον διάστημα 9—27** (ἡ τρίτη διάστασις ἢ τρίτη ἀπόστασις).
Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 27 εἶναι

$$\frac{2 \cdot 9 \cdot 27}{9+27} = \frac{486}{36} = \frac{27}{2}.$$

Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 9 καὶ 27 εἶναι

$$\frac{9+27}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι

$$9 \ : \ \frac{27}{2} = 18 \ : \ 27.$$

Ὁ πρῶτος φθόγγος τῆς μουσικῆς κλίμακος εἶναι $9 =$ κάτω do (ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ δεύτερος φθόγγος εἶναι $9 \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{8} =$ re

Ὁ τρίτος φθόγγος εἶναι $\frac{81}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{729}{64} =$ mi

Ὁ τέταρτος φθόγγος εἶναι $\frac{27}{2} =$ fa (ὁ δεύτερος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας)

Ὁ πέμπτος φθόγγος εἶναι $18 =$ sol (ὁ τρίτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

Ὁ ἕκτος φθόγγος εἶναι $18 \cdot \frac{9}{8} = \frac{162}{8} = \frac{81}{4} =$ la

Ὁ ἕβδομος φθόγγος εἶναι $\frac{162}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1458}{64} = \frac{729}{32} =$ si

Ὁ ὄγδοος φθόγγος εἶναι $27 =$ ἄνω do (ὁ τέταρτος ὅρος τῆς προηγουμένης μουσικῆς ἀναλογίας).

**14.** Ἀναγράφομεν κατωτέρω ἐν ἀνακεφαλαιώσει τὰς ἓξ μουσικὰς κλίμακας, τὰς ὁποίας νοεῖ, κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, τὸ χωρίον τοῦ Τιμαίου (35b—36c).

**Πρώτη κλῖμαξ**

| ὑπάτη | παρυπάτη | λιχανὸς | μέση | παραμέση | τρίτη | παρανήτη | νήτη |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| do | re | mi | fa | sol | la | si | do |
| 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | 2 |

**Δευτέρα κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{9}{4}$ | $\frac{81}{32}$ | $\frac{8}{3}$ | 3 | $\frac{27}{8}$ | $\frac{243}{64}$ | 4 |

**Τρίτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $\frac{9}{2}$ | $\frac{81}{16}$ | $\frac{16}{3}$ | 6 | $\frac{27}{4}$ | $\frac{243}{32}$ | 8 |

*

**Τετάρτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{9}{4}$ | $\frac{81}{32}$ | 3 |

**Πέμπτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $\frac{27}{8}$ | $\frac{243}{64}$ | $\frac{9}{2}$ | 6 | $\frac{27}{4}$ | $\frac{243}{32}$ | 9 |

**Ἕκτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | $\frac{81}{8}$ | $\frac{729}{64}$ | $\frac{27}{2}$ | 18 | $\frac{81}{4}$ | $\frac{729}{32}$ | 27 |

*

15. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μετατρέψωμεν τὰς συχνότητας τῶν φθόγγων εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῆς πρώτης κλίμακος (384) καὶ μετατρέπομεν ὅλους τοὺς φθόγγους αὐτῆς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα. Ἀκολούθως μετατρέπομεν τοὺς φθόγγους τῶν λοιπῶν πέντε κλιμάκων εἰς ὁμώνυμα κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὸν 384. Παραλείποντες τοὺς παρονομαστὰς καὶ τῶν ἓξ κλιμάκων, λαμβάνομεν τὰς κάτωθι ἓξ ὀκτάβας, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες τῶν φθόγγων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Κατὰ ταῦτα εἶναι :

**Πρώτη Κλῖμαξ**

| ὑπάτη | παρυπάτη | λιχανὸς | μέση | παραμέση | τρίτη | παρανήτη | νήτη |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| do | re | mi | fa | sol | la | si | do |
| 384 | 432 | 486 | 512 | 576 | 648 | 729 | 768 |

**Λευτέρα κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 768 | 864 | 972 | 1024 | 1152 | 1296 | 1458 | 1536 |

**Τρίτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1536 | 1728 | 1944 | 2048 | 2304 | 2592 | 2916 | 3072 |

*

**Τετάρτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 384 | 432 | 486 | 576 | 768 | 864 | 972 | 1125 |

**Πέμπτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1152 | 1296 | 1458 | 1728 | 2304 | 2592 | 2916 | 3456 |

**Ἕκτη κλῖμαξ**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3456 | 3888 | 4374 | 5184 | 6912 | 7776 | 8748 | 10368 |

Θεωροῦμεν πιθανὸν ὅτι ὁ Πλάτων λαμβάνει ἓξ μουσικὰς κλίμακας, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός, ἤτοι εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὰ μέρη του ($1 + 2 + 3 = 6$).

18

# APERÇU

## Contribution à l'interprétation d'un passage du dialogue Timée de Platon, se rapportant à la musique (35b - 36c).

Par. EVANGELOS S. STAMATIS

### A'

A titre d'introduction est donné un extrait d'Archytas de son traité «**sur la musique**», que nous trouvons dans les commentaires de Porphyre sur les **harmoniques** de Ptolémée et sont démontrées les inégalités des rapports formés avec les termes des médiétés arithmétique et harmonique, dont les preuves ont été perdues (§ 1).

Ensuite sont rapportées les indications données par Nicomaque, Théon de Smyrne et Jamblique au sujet des médiétés arithmétique, géométrique, harmonique et de la proportion musicale (§ 2, 3).

Aussi est donnée la construction de la gamme musicale Pythagoricienne par Philolaos (§ 6, 7, 8, 9).

### B'

Dans les deux progressions géométriques que forme Platon, il est clair qu'il existe en tout six intervalles musicaux, à savoir : trois dans chaque progression géométrique, soit :

1—2, 2—4, 4—8 (trois intervalles doubles)
1—3, 3—9, 9—27 (trois intervalles triples)

Dans chacun de ces six intervalles il forme la proportion musicale, dont le deuxième terme est la moyenne harmonique des termes extrêmes de la proportion et le troisième terme est la moyenne arithmétique de ces mêmes termes extrêmes. De sorte que les six proportions musicales seraient :

a) $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$, b) $2 : \frac{8}{3} = 3 : 4$, c) $4 : \frac{16}{3} = 6 : 8$

d) $1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$, e) $3 : \frac{9}{2} = 6 : 9$, f) $9 : \frac{27}{2} = 18 : 27$ (§ 10,11)

Ensuite, il forme en partant des trois premières proportions musicales, trois gammes musicales pythagoriciennes (§ 12), dans lequelles on trouve les intervalles un plus un demi, un plus un tiers et un plus un huitième. Ce n'est que dans ces trois gammes que

a) $\frac{4}{3} : \frac{51}{64} = 2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$,

b) $\frac{8}{3} : \frac{81}{32} = 4 : \frac{243}{64} = \frac{256}{243}$,

c) $\frac{16}{3} : \frac{81}{16} = 8 : \frac{243}{32} = \frac{254}{243}$.

Est aussi concevable la formation de trois autres gammes musicales (§ 13) en partant des proportions musicales d, e, f, dans lesquelles toutefois ne se trouvent pas les intervalles un plus un demi, et un plus un tiers, pas plus que le rappor $\frac{256}{243}$, mais seulement les intervalles un plus un huitième et

a) $\frac{3}{2} : \frac{81}{64} = 3 : \frac{81}{32} = \frac{32}{27}$,

b) $\frac{9}{2} : \frac{243}{64} = 9 : \frac{243}{32} = \frac{32}{27}$,

c) $\frac{27}{2} : \frac{729}{64} = 27 : \frac{729}{32} = \frac{32}{27}$.

En prenant comme unité le chiffre 384, soit le plus petit commun multiple des dénominateurs des notes de la première gamme musicale, nous convertissons les notes des six gammes musicales en nombres entiers exprimant des fréquences de cordes vibrantes, bien entendu de longueurs différentes (§ 14, 15).

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Ἀριστείδου Κοϊντιλιανοῦ, Περὶ μουσικῆς, I § 8 p. 15, ἔκδ. R. P. Winnington - Ingram, B. G. Teubner, Λειψία 1963 (Aristides Quintilianus, de musica I 8).

Πλουτάρχου Ἠθικὰ VI. 1. Περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ ψυχογονίας, ἔκδ. C. Hubert, B. G. Teubner, Λειψία 1954 (Plutarchi Moralia Vol. VI. 1. 1012).

Πλουτάρχου Ἠθικὰ VI. 3. Περὶ μουσικῆς, ἔκδ. K. Ziegler - M. Pohlenz, B. G. Teubner, Λειψία 1953 (Plutarchi Moralia VI. 3, 1131).

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Πλάτωνος, τόμ. II σ. 211—231, ἔκδ. E. Diehl, B. G. Teubner, Λειψία 1904. (Proclus Diadochus in Platonis Timaeus commentaria).

Ψελλὸς Μιχαήλ. Εἰς ψυχογονίαν Πλάτωνος, Πατρολογία Migne τόμ. 122, στήλη 1078. (Psellos, Michael, Patrologia graeca tom. 122 col. 1078).

Diels Hermann. Fragmente der Vorsokratiker I (Archytas, Philolaos).

Moutsopoulos, Evanghélos. La musique dans l'oeuvres de Platon, Presses Universitaires de France, Paris 1959.

Pauly - Wissowa R. E. Musik.

Rivaud, Albert. Platon oeuvres complètes, tome X, Timée - Critias, p. 42—52, Les Belles Lettres (C. Budé, Paris 1949).

Taylor, A. E. A commentary of Plato's Timaeus, Oxford 1928.

Σελ. 212 στίχ. 19 ἀντὶ ὑποστηρίζει γράφε ὑποστηρίξει
» » » 19 » 1903 γράφε 1908
» » » 21 » teleologiesh γράφε teleologisch
» » » 21 » teleologique γράφε téléologique
» » εἰς τὸν στίχον 3 τῆς ὑποσημ. 1 καὶ μετὰ τὴν λέξιν «καταδεικνύεται» προσθετέα ἡ λέξις «ἐνίοτε».
» » εἰς τὸν στίχον 2 τῆς ὑποσημ. 2: ἀντὶ critigue γράφε critique.
» 213 » 16 ἀντὶ Welff γράφε Wolff
» » » 21 » ἀνωνέρω γράφε ἀνωτέρω
» ὑποσ. 3 στίχ. 2 ἀντὶ Zwechmässigkeitslehre γράφε Zweckmässigkeilslehre
» 268 γραμμὴ α) ὁ παρονομαστὴς 343 νὰ τεθῇ 243
» 269 στίχ. 4 μετὰ τὴν λ. ἡμιόλια νὰ τεθῇ πλὴν ἑνὸς
» 275 γραμμὴ c) ἄνω ὁ ἀριθμητὴς 254 νὰ τεθῇ 256
» 275 εἰς τὸ μέσον μετὰ τὴν λ. demi νὰ τεθῇ excepté un.

The fifth International Congress of Clossical Studies (FIAEC) will take place in Bonn from 1 to 6 September, 1969.

Le cinquième Congrès international des études clossiques (FIAEC) aura lieu à Bonn du 1 au6 September 1969.

Der fünfte internotionale Kongress für Altertumswissenschaft (FIAEC) wird vom 1. bis 6. September 1969 in Bonn stattfinden.

***Τὸ πέμπτον Διεθνὲς Συνέδριον Κλασσικῶν Σπουδῶν*** (FIAEC) ***θὰ λάβῃ χώραν ἐν Βόνῃ ἀπὸ 1 μέχρι 6 Σεπτεμβρίου 1969.***

Διευθύνσεις κατὰ τὸ ἄρθρον 6 § 1 τοῦ Α. Ν. 1092/1938
Ὑπεύθυνος διὰ τὴν σύνταξιν Κ. Δ. Γεωργούλης, κατοικία Περσεπόλεως 10—Ἀθῆναι 621
Τυπογραφεῖον Κ. Νικολάου Φυλῆς 32—Κατοικία Ἁγ. Παρασκευῆς 43—Χαλάνδρι

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΙΘ' **1967**
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β' 37/38

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ**
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

# ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ ΠΑΡ' ΑΡΧΙΜΗΔΕΙ

Καθηγητῆ **ΙΩΣΗΦ Ε. ΧΟΦΜΑΝ**

**Ἐπὶ τῇ 68ῃ ἐπετείῳ τῆς γεννήσεώς του (7.3.1900)**

**1.** **Ὁ Ἀρχιμήδης** εἰς τὸ 8. πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀποδεικνείει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον μὲν τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, εἰς τὴν $\frac{3}{2}$ δύναμιν.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ σφαιρικὰ τμήματα $AB\Gamma > A\Delta\Gamma$ θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα.

$$\frac{\text{σφ. τμ. } AB\Gamma}{\text{σφ. τμ. } A\Delta\Gamma} < \left(\frac{\text{ἐπιφ. } AB\Gamma}{\text{ἐπιφ. } A\Delta\Gamma}\right)^2 \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{\text{σφ. τμ. } AB\Gamma}{\text{σφ. τμ. } A\Delta\Gamma} > \left(\frac{\text{ἐπιφ. } AB\Gamma}{\text{ἐπιφ. } A\Delta\Gamma}\right)^{\frac{3}{2}}$$

**2.** Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἕπεται ὅτι αὗται εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν ἀρχιμηδείων ἔργων συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι αἱ βοηθητικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας οὗτος χρησιμοποιεῖ ἀναποδείκτως εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεών του, ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων αὐτοῦ Μαθηματικῶν. Ἐνδεικτικῶς πρὸς τοῦτο ἀναφέρομεν τὴν ἀναποδείκτως χρησιμοποιουμένην πρότασιν ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3, καθ' ἣν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Τὴν πρότασιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 3. θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης προτάσεως, καίτοι αὕτη ἁπανταχοῦ διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, δὲν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Διότι ὑπάρχουν τεκμήρια τοῦ συγγενοῦς πρὸς τοῦτον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2, τοῦ ἐπιτυγχανομένου διὰ τῶν καλουμένων πλευρικῶν καὶ

διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ὅστις ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους (Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, Leipzig 1878, σελ. 42—45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος II, ἔκδ. Kroll. Leipzig σελ. 24 καὶ 393. Ταῦτα ἀναπτύσσονται εἰς Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλία V—IX, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8 κ.ἑ.).

**3.** Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἴτε ὑπὸ ἀριθμητικὴν εἴτε ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν, ἀνεπτύχθη συγχρόνως πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Ἡ γνώμη αὕτη ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς ἐνδείξεων:

**α΄.** Ἐκ τοῦ Θυμαριδείου Ἐπανθήματος. Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο καλεῖται μέθοδος ἐπιλύσεως προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ν—1 ἐξισώσεων καὶ ν ἀγνώστων, ἤτοι

$$\begin{aligned} x+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{\nu-1} &= S \\ x+x_1 &= S_1 \\ x+x_2 &= S_2 \\ x+x_{\nu-1} &= S_{\nu-1} \end{aligned}$$

Κατὰ τὸν ἐκ Πάρου μαθηματικὸν καὶ μαθητὴν τοῦ Πυθαγόρου **Θυμαρίδαν,** ἀκμάσαντα περὶ τὸ 500 π. Χ., ὅτε ὁ **Πυθαγόρας** ἦτο ἤδη γέρων, ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εἶναι

$$x = \frac{(S_1+S_2+\ldots\ldots+S_{\nu-1})-S}{\nu-2}$$

(Ε. Σταμάτη, Τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, «Πλάτων» ἔτος Δ΄—τεῦχος Α 1952 σελ. 123—142).

Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀναφέρει τὸ πρόβλημα τοῦτο, μνημονεύει καὶ τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως:

**1.** $x+y=2(z+u)$

$x+z=2(y+u)$

$x+u=2(y+z)$

[Ἐνταῦθα ἀναφέρει ἀκόμη $x+y+z+u=5(y+z)$]

καὶ **2.** $x+y=\frac{3}{2}(z+u)$

$x+z=\frac{4}{3}(y+u)$

$x+u=\frac{5}{4}(y+z)$.

Αἱ λύσεις καὶ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μνημονευομένων προβλημάτων ἀναφέρον-

ται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου λεκτικῶς μόνον καὶ ἄνευ συμβολισμοῦ τινος (Ἰάμβλιχος, εἰς Νικομάχου Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν, H. Pistelli, Leipzig 1894, σελ. 62 κ.ἑ.).

**β΄.** Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων VIII καὶ IX τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται θεωρήματα περὶ γεωμετρικῶν προόδων.

**γ΄.** Ἐκ τῶν δέκα πρώτων θεωρημάτων τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου γίνεται ἀπόδειξις ἀλγεβρικῶν ταυτοτήτων.

**δ΄.** Ἐκ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις (α καὶ β) ἡ Ἄλγεβρα σπουδάζεται ἀριθμητικῶς, ἐν ᾧ εἰς τὰς περιπτώσεις γ καὶ δ γεωμετρικῶς.

**4.** Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ἐκφραζομένους ὅμως ἐμμέσως, ἀπαντῶμεν καὶ εἴς τινα θεωρήματα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων ταῦ Εὐκλείδου. Δὲν ἀναφέρεται εἰς αὐτὰ ὅμως σαφῶς ὅτι πρόκειται περὶ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ὅπως τοῦτο γίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ X 27 θεώρημα τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται δύο εὐθεῖαι «μέσαι», αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ῥητόν. Αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$$

κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, ὅπου ρ εἶναι εὐθεῖα ῥητή, καὶ α,β ἀκέραιοι ἀριθμοί. (Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλίον X, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι 1957, σελ. 251).

**5.** **Ὁ Ἀρχιμήδης** κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου προβλήματος καταλήγει εἰς τὰς σχέσεις

$$\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{ZH}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{\Theta B}{BE=BK}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{KZ}{ZH}$$

καὶ συμπεραίνει ἀμέσως, παραλείπων τοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμοὺς ὡς εὐκόλους καὶ γνωστούς, ὅτι

$$\frac{\Theta Z}{ZH} > \left(\frac{KZ}{ZH}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Εἶναι δὲ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ΘZ=σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, ZH=σφαιρικὸν τμῆμα ΑΔΓ, καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος KZ=ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΓ, καὶ ZH=ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΔΓ.

**6.** Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους **Εὐτόκιος** παρέχει τὴν ἑξῆς ἑρμηνείαν τῆς εὑρέσεως τῆς δυνάμεως μὲ τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην:

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ>Γ>Δ καὶ ἂς εἶναι

$$\frac{AB^2}{\Gamma^2} > \frac{\Gamma}{\Delta}. \quad (1). \quad \text{Λέγω, ὅτι} \quad \frac{AB}{\Delta} > \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

8

Διότι, ἂς ληφθῇ τῶν Γ,Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε. [Ὁπότε εἶναι

$$\frac{\Gamma}{E}=\frac{E}{\Delta},\quad \frac{\Gamma^2}{E^2}=\frac{E^2}{\Delta^2}=\frac{\Gamma\times E}{E\times\Delta}=\frac{\Gamma}{\Delta},\quad (2).$$

Ταῦτα θεωρεῖ εὐκόλως ἐννοούμενα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 9 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου]. Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $\frac{AB}{\Gamma}>\frac{\Gamma}{E}$. Λαμβάνει εὐθεῖάν τινα $BZ<AB$, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{BZ}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{E}$ [ὁπότε αἱ εὐθεῖαι BZ,Γ,Ε,Δ ἀποτελοῦν τέσσαρας συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, ἤτοι εἶναι

$$\frac{BZ}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{E}=\frac{E}{\Delta},\quad \frac{BZ^3}{\Gamma^3}=\frac{\Gamma^3}{E^3}=\frac{E^3}{\Delta^3}=\frac{BZ\times\Gamma\times E}{\Gamma\times E\times\Delta}=\frac{BZ}{\Delta}\quad (3).$$

Ταῦτα ἔπονται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου].

Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\frac{BZ}{\Delta}=\frac{\Gamma^3}{E^3}$, (4). Εἶναι δὲ ἐκ τῆς (2) καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Gamma^2}{E^2}$, (5).

Εἶναι ἄρα $\frac{BZ}{\Delta}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$, (6). [Διότι ἐκ τῆς (5) λαμβάνει $\frac{\Gamma}{E}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}$ καὶ κατόπιν $\left(\frac{\Gamma}{E}\right)^3=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$ καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) ἕπεται ἡ (6)].

Ἐπειδὴ δὲ $AB>BZ$, ἕπεται $\frac{AB}{\Delta}>\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$.

**7.** Ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἑρμηνείας τοῦ Εὐτοκίου, ἡ εὕρεσις δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τὴν γενίκευσιν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 γνωρίζει ὁ Εὐκλείδης, ἀλλὰ δὲν τὴν ἀναφέρει, ὡς εὐκόλως νοητήν. Κατωτέρω διαμνημονεύομεν τὴν ἑρμηνείαν τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἀκολούθως δὲ τὴν ἐκ τούτων προκύπτουσαν γενίκευσιν, ἡ ὁποία ἐνθυμίζει εἰς ἡμᾶς τὴν γνωστὴν εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (Vollständige Induktion).

**Εὐκλείδου V** ὁρισμὸς 9. Ἔστωσαν τρεῖς συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου Α, Β, Γ ἤτοι $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν $\frac{A^2}{B^2}=\frac{B^2}{\Gamma^2}=\frac{A\times B}{B\times\Gamma}=\frac{A}{\Gamma}$.

**Εὐκλείδου V** ὁρισμὸς 10. Ἔστωσαν τέσσαρες συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου Α, Β, Γ, Δ ἤτοι $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{\Delta^3} = \frac{A \times B \times \Gamma}{B \times \Gamma \times \Delta} = \frac{A}{\Delta}.$$

**Ἡ γενίκευσις τῶν ἀνωτέρω Εὐκλειδείων ὁρισμῶν**

Ἔστωσαν ν τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου

Α, Β, Γ, Δ, . . . . . , Κ, Λ, Μ ἤτοι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}$, (7).

Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\frac{A^{\nu-1}}{B^{\nu-1}} = \frac{B^{\nu-1}}{\Gamma^{\nu-1}} = \frac{\Gamma^{\nu-1}}{\Delta^{\nu-1}} = \ldots\ldots \frac{K^{\nu-1}}{\Lambda^{\nu-1}} = \frac{\Lambda^{\nu-1}}{M^{\nu-1}} = \frac{A \times B \times \Gamma \times \ldots \times K \times \Lambda}{B \times \Gamma \times \ldots \times \Lambda \times M} = \frac{A}{M}, \quad (8).$$

**Γενίκευσις τῆς εὑρέσεως δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην τῆς μορφῆς**

$$\frac{\nu-1}{\nu-2} \quad (\nu = 4, 5, 6 \ldots).$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ν—1 τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, παραλείποντες τὸν πρῶτον ὅρον Α εἰς τὴν σχέσιν (7), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M},$$

$$\frac{B^{\nu-2}}{\Gamma^{\nu-2}} = \frac{\Gamma^{\nu-2}}{\Delta^{\nu-2}} = \ldots\ldots = \frac{K^{\nu-2}}{\Lambda^{\nu-2}} = \frac{\Lambda^{\nu-2}}{M^{\nu-2}} = \frac{B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K \times \Lambda}{\Gamma \times \Delta \times \ldots\ldots \times \Lambda \times M} = \frac{B}{M}, \quad (9).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν $\frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{1}{\nu-2}}$, (10), καὶ ἐκ ταύτης $\left(\frac{B}{\Gamma}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-2}}$, (11). Ἐκ τῶν (8) καὶ (11) εἶναι

$$\frac{A}{M} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-2}}, \quad (\nu = 4, 5. 6 \ldots.).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων θεωροῦμεν φανερὸν ὅτι δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας τῆς μορφῆς $\frac{\nu-1}{\nu-2}$ $(\nu = 4, 5, 6 \ldots.)$ ἦσαν γνωσταὶ πολὺ πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ πότε διὰ πρώτην φορὰν ἔγινεν ἡ σπουδὴ αὐτῶν. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἀποδίδονται κατὰ μέγα μέρος εἰς τοὺς Πυθαγορείους, καταλήγομεν εἰς τὴν πιθανότητα ὅτι ἡ σπουδὴ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὸν 5ον αἰῶνα π.Χ. ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων.

# SUMMARY

For Prof. Dr. JOSEPH E. HOFMANN

**On his 68th Birthday**

## POWERS WITH FRACTIONAL EXPONENTS BY ARCHIMEDES

Powers with fractional exponents we meet for the first time in the history of Mathematics to the 8th problem of the second book of Archimedes work about sphere and cylinder.

The ancient Greeks developed the algebra contemporarily to tbe arithmetic and geometry. This is concluded from the «bloom» of Thymaridas and from the books II, V, VIII, IX, X of Euclid's Elements.

Powers with fractional exponents, but expressed indirectly and not visibly, we are finding in to the X book of Euclid's Elements, as e.g. to the X 27, where the two medial straight lines are of the form :

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ and } \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

The use of powers with fractional exponents by Archimedes without any proof, means that the study of them has been done long time before of the Archimedes. As it is concluded from the commentaries of Eutokios to the above 8th problem of Archimedes, the study of those powers is supported to the definitions 9 and 10 of the V book of the Euclid's Elements.

Which period for the first time have being showed those definitions, which constitutes theorems of general aspect, is unknown.

We are including these definitions :

**Euclid V** defin. 9. Let it be three continuous terms of geometrical progression, the A, B, Γ, that is $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$.

From these are $\frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{\Gamma^2} = \frac{A \times B}{B \times \Gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

**Euclid V** defin. 10. Let it be four continuous terms of geometrical progression, the A, B, Γ, Δ, that is $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

From these are $\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{\Gamma^3} = \frac{A \times B \times \Gamma}{B \times \Gamma \times \Delta} = \frac{A}{\Delta}$.

## And in general

Let it be the goemetrical progression A, B, Γ, Δ, . . . . , K, Λ, M of continuous terms, that is

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}, \quad (1).$$

From these are

$$\frac{A^{n-1}}{B^{n-1}} = \frac{B^{n-1}}{\Gamma^{n-1}} = \frac{\Gamma^{n-1}}{\Delta^{n-1}} = \ldots\ldots = \frac{K^{n-1}}{\Lambda^{n-1}} = \frac{\Lambda^{n-1}}{M^{n-1}} =$$

$$= \frac{A\times B\times\Gamma\times \ldots\ldots \times K\times\Lambda}{B\times\Gamma\times\Delta\times\ldots\ldots\times K\times\Lambda\times M} = \frac{A}{M}, \quad (2).$$

If to the geometrical progression A, B, Γ, . . . . . , K, Λ, M we are going to omit the first term A, we shall have from the remaining n—1 terms

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}.$$

From these are

$$\frac{B^{n-2}}{\Gamma^{n-2}} = \frac{\Gamma^{n-2}}{\Delta^{n-2}} = \ldots\ldots = \frac{K^{n-2}}{\Lambda^{n-2}} = \frac{\Lambda^{n-2}}{M^{n-2}} = \frac{B\times\Gamma\times\Delta\times\ldots\ldots\times K\times\Lambda}{\Gamma\times\Delta\times\ldots\ldots\times\Lambda\times M} = \frac{B}{M}, \quad (3).$$

From the (3) we get

$$\frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{1}{n-2}}, \quad (4) \text{ and from these we have} \left(\frac{B}{\Gamma}\right)^{n-1} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}, \quad (5).$$

From the (2,5) we get $\frac{A}{M} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$, (n=4, 5, 6 . . . . . ).

We believe very probable that the study of the powers with fractional exponents, has been done by the Pythagoreans during the 5th century b. C.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ Ι

Καθηγητῆ ΠΕΡΙΚΛΕΙ ΣΙΜΩ

**Ἐπὶ τῇ 80ῃ ἐπετείῳ ἀπὸ τῆς γεννήσεώς του**

Ὁ πρῶτος τόμος τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους ἐξεδόθη ὑπὸ τοῦ J. L. Heiberg εἰς δευτέραν ἔκδοσιν ἐν Λειψίᾳ κατὰ τὸ 1910. Κατὰ τὸ 1928 ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca ἐδημοσίευσε περιγραφὴν κώδικος ἀφορῶντος εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Ψαμμίτης (Arenarius), εὑρισκομένου εἰς τὸ Ἀστεροσκοπεῖον Radcliffe τῆς Ὀξφόρδης, τὸν ὁποῖον, κατὰ τὸν Vacca, δὲν κατώρθωσε νὰ ἀνεύρῃ ὁ Heiberg [G. Vacca intorno ad un codice poco noto dell' Arenario di Archimede, nell' Osservatorio Radcliffe di Oxford : Rendiconti della R. Accademia dei Lincei IV 1928 (501—506). L' Année Philologique tom. IV 1930. Description d' un codex d' Archimède que Heiberg n' avait pas reussi à trouver et qui existe réellement à Oxford dans l' Observatoire Radcliffe sous la cote E. a 1.].

Κατὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους, εἰς τὸν ὁποῖον περιλαμβάνεται ἡ πραγματεία Ψαμμίτης, θὰ γράψωμεν περὶ αὐτοῦ τοῦ κώδικος.

Εἰς τὸν πρῶτον τόμον, τὸν ὁποῖον θὰ ἐκδώσωμεν προσεχῶς ἐν Ἀθήναις, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς β' ἐκδόσεως Heiberg, 1910, ἔχομεν ἐπιφέρει μικράς τινας διορθώσεις καὶ συμπληρώσεις ὡς ἑξῆς :

Σελὶς (Heiberg 1910)

6. Ἀντὶ τῆς λέξεως ΑΞΙΩΜΑΤΑ ἐτέθη ⟨ΟΡΟΙ⟩

18,3. Ἀντὶ ΝΞΟ ἐτέθη ΞΝΟ

24,9. Μετὰ τὸ ΑΒΓ ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*τρίγωνον*⟩

40,13. Ἀπηλείφθη ἡ λέξις [διαμέτρου]

52. Ὡς πρῶτος στίχος ἐτέθη ἡ λέξις ⟨ΠΟΡΙΣΜΑ⟩

52. Ὡς δέκατος τρίτος στίχος ἐτέθη ἡ λέξις ⟨ΠΟΡΙΣΜΑ⟩

72. Τὸ ἐντὸς ἀγκυλῶν κείμενον, στίχοι 9—23, ἐτέθη εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὡς παράρτημα, διότι εἶναι ἄσχετον πρὸς τὸ ἀρχιμήδειον κείμενον.

90,15. Τίθεται τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν κείμενον τῆς ἀπολεσθείσης ἐκφωνήσεως τοῦ κγ' θεωρήματος, ὅπερ ἀνακατεσκευάσθη ὡς ἑξῆς :

κγ'

⟨*Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας*⟩.

90,7. Ἀντὶ [ἀρτιόγωνον] ἐγράφη *ἀρτιόγωνον*

106,11. Τίθεται τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν κείμενον τῆς ἀπολεσθείσης ἐκφωνήσεως τοῦ κη' θεωρήματος, ὅπερ ἀνακατεσκευάσθη ὡς ἑξῆς :

κη'

⟨*Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας*⟩.

112,9. Ἀντὶ ΧΣ ἐτέθη ΧΜ

126,17. Μετὰ τὴν λέξιν περιγεγραμμένον ἐτέθη τὸ ἐλλεῖπον ⟨*πολλῷ ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον*⟩·

134,18. Τίθεται τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν κείμενον τῆς ἀπολεσθείσης ἐκφωνήσεως τοῦ λς' θεωρήματος, ὅπερ ἀνακατεσκευάσθη ὡς ἑξῆς :

λς΄

*⟨Ἐὰν ἐν τμήματι μεγίστου κύκλου σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον ἐγγραφῇ χωρὶς τῆς βάσεως, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος⟩.*

138,9. Μετὰ τὴν λέξιν τμήματι ἐτέθησαν αἱ λέξεις ⟨*τῆς σφαίρας*⟩

142,26. Τίθεται τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν κείμενον τῆς ἀπολεσθείσης ἐκφωνήσεως τοῦ λθ΄ θεωρήματος, ὅπερ ἀνακατεσκευάσθη ὡς ἑξῆς :

⟨*Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφανείας*⟩.

150,17. Τίθεται τὸ παρ' ἡμῶν ἀνακατασκευασθὲν κείμενον τῆς ἀπολεσθείσης ἐκφωνήσεως τοῦ μα΄ θεωρήματος, ὅπερ ἀνακατεσκευάσθη ὡς ἑξῆς :

μα΄

*⟨Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ⟩.*

150,20. Ὡς ἀρχὴ τοῦ στίχου 20 ἐτέθη ⟨*ἰσόπλευρον καὶ*⟩

152,4. Μετὰ τὴν λέξιν κῶνον ἐτέθη ⟨*πρὸς τὸ σχῆμα σὺν*⟩

160,25. Μετὰ τὴν λέξιν δύο ἐτέθη ⟨*εὐθεῖαι*⟩

160,27. Μετὰ τὴν λέξιν δύο ἐτέθη ⟨*εὐθεῖαι*⟩

162,14. Μετὰ τὴν λέξιν μένου ἐτέθη ⟨*πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου*⟩

224,2. Ἡ λέξις ματος ἐτέθη *ματος]*.

224,3-4. Ἡ φράσις σημεῖον]· δῆλον δέ, ἐτέθη *σημεῖον, δῆλον*,

258,19. Ὡς στίχος 19 ἐτέθη ἡ λέξις ⟨ΟΡΟΙ⟩

260,17. Ὡς στίχος 17 ἐτέθη ἡ λέξις ⟨ΛΗΜΜΑ⟩

344,24. Μετὰ τὴν λέξιν ἄξονα ἐτέθη ⟨*τὸν αὐτόν*⟩.

358,27. Ἡ λέξις ἔστε ἀπηλείφθη.

396,6. Ἡ λέξις ἔστε ἀπηλείφθη.

398,28. Μετὰ τὴν λέξιν ἀφαιρημένους ἐτέθη ⟨*γνώμονας*⟩

414,24. Μετὰ τὴν λέξιν τετραγώνῳ ἐτέθη ⟨*τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΧ*⟩,

Ἡ γλῶσσα τῆς πραγματείας Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων εἶναι ἡ σικελικὴ δωρικὴ διάλεκτος. Οἱ κατὰ καιροὺς ὅμως ἀντιγραφεῖς ἔχουν ἐπιφέρει μερικὰς μεταβολάς, ὅπως π.χ. εἰς τὰς λέξεις : σημεῖον, ἥμισυς, ἡμικύκλιον, ἡμιόλιον, σχῆμα, αἵτινες ἔπρεπε νὰ γράφωνται : σαμεῖον, ἅμισυς, ἁμικύκλιον, ἁμιόλιον, σχᾶμα. Ἡ γραφὴ σαμεῖον ἀπαντᾷ εἰς τὸ θεώρ. 15 τῆς πραγματείας Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων καὶ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς Περὶ ἑλίκων. Ἡ γραφὴ ἁμίσεον ἀπαντᾷ εἰς τὰ θεωρήματα 27 καὶ 28 τῆς Περὶ κωνοειδέων καί σφαιροειδέων. Ἡ γραφὴ ἁμιόλιος, εἰς τὸ τέλος τοῦ θεωρ. 28 τῆς αὐτῆς πραγματείας, ὡς καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ θεωρ. 8 τῆς πραγματείας Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων II.

## ARCHIMEDEA I SUMMARY

For. Prof. PERIKLES SIMOS

### On his 80th Birthday

It is mentioned the Code reported by G. Vacca, which includes the treatise of Archimedes Arenarius.

The Code will be further discussed in vol. 2 of our forthcoming edition of the opera of Archimedes. Vol. I will soon be publisched in Athens.

Corrections and completions in this article are on vol. I (based on the J. L. Heiberg edition, 1910) and include also the restored text of the pronounciations of the destroyed theorems 23, 28, 36, 39, 41 of the Sphere and Cylinder I.

# ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελὶς 28 ἀντὶ Σοτανᾶς γραπτέον Σατανᾶς
» 29 » Θρᾷκα » Θρᾷκα :
» 30 » Νύσης » Νύσσης
» 31 » ἐπιδόματα » ἐπιδόματα.
» 31 » ὀρθότητες » ὀρθότητος
» 33 » Ζογαβηνοῦ » Ζιγαβηνοῦ
» 33 » δισμένω » δυσμένω
» 35 » ἢ » ἢ
» 35 » συφώνως » συμφώνως
» 37 » Νικηψόρος » Νικηφόρος
» 37 » ὀξυτονοῦται » ὀξυτονοῦνται
» 38 » νεφελοκοκκυγῖα γραπτέον νεφελοκοκκυγυῖα
» 39 » ἦν » ἦν
» 43 » Παρὰ νὰ » Παρὰ τὰ
» 48 » ἑτέρ« » ἑτέραν
» 44 » ἀνήρ : ἀνὴρ » ἀνήρ : ἀνὴρ
» 111 στιχ. 2, ἀντὶ ἀποδεικνείει γραπτέον ἀποδεικνύει
« 211 » 10 ἄνωθεν μεταξὺ τοῦ *μᾶλλον* καὶ τοῦ ἑπομένου *ἤ* παρεμβλητέα ἡ ἐκπεσοῦσα φράσις : *περιβάλλω διὰ μαλλῶν.*
» 211 στίχ. 8 κάτωθεν : ἀντὶ τοῦ ἐρωτηματικοῦ γραπτέα ἄνω καὶ κάτω στιγμή.
» 211 στ. 7 κάτωθεν : ἀντὶ τοῦ *ἐὴν* γραπτέα ἡ μετοχὴ *ἐών.*
» 212 στ. 12 ἀντὶ *μένω* γραπτέον *μώνω*
» 216 ὑποσ. 1 ἀντὶ Rhodos γραπτέον Rhodes
» 217 ἀντὶ Χαϊλδεβέργης » Χαϊδελβέργης
» 221 » *ἐξ* «καλαὶ ἐλπίδες» » *ἔξ* «καλαὶ ἐλπίδες»
» » » explorat, » explorat.
» 228 ὑποσ. 2 ἀντὶ καὶ Ἐρινύας » Ἐρινῦς
» 228 » » (Ἀδράστειαν=) γραπτέον (Ἀδράστειαν—Νέμεσιν=)
» 228 » » Ἔρωτες γραπτέον Ἔρωτας
» 230 » τῶτ Σκίρων » τῶν Σκίρων
» 231 » 1 » κᾶρπῶν » καρπῶν
» 231 » ὑποσ. 3) » ὑποσ. 4)
» 232 » εἰθισται » εἴθισται
» 299 τελευταία σειρὰ ἀντὶ εἰς τὰ ὥριμα εἰς τὰ ὥριμα
» 305 ὑποσημ. 3 ἀντὶ ἀναψύχοντος ἀναψύχοντος
» 307 σειρὰ 30η ἀντὶ θανάσ μος θανάσιμος
» 308 σειρὰ 24η ἀντὶ ἀναφέραμεν ἀνεφέραμεν
» 311 ὑποσημ. 6 ἀντὶ πᾶν τῷ θνητὸν πᾶν τὸ θνητὸν

---

Διευθύνσεις κατὰ τὸ ἄρθρον 6 § 1 τοῦ Α. Ν. 1092/1938
Ὑπεύθυνος διὰ τὴν σύνταξιν Π. Κ. Γεωργούντζος, κατοικία Σεμέλης 30—Ἀθῆναι 615
Τυπογραφεῖον Κ. Νικολάου Φυλῆς 32—Κατοικία Γαρυτοῦ 52—Ἁγία Παρασκευὴ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ Κ΄ 1968
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄ 39/40

ΕΙΣ ΜΝΗΜΗΝ

## ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗ

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

# ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1. Ἡ λέξις συνέχεια δὲν ἀπαντᾷ ὡς ὅρος μαθηματικὸς εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Φυσικῆς ἀκροάσεως» διατυπώνει ὡς ἑξῆς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας μεταξὺ μεγεθῶν:

«Ἐφεξῆς μὲν γάρ ἐστιν, ὧν μηθέν ἐστι μεταξὺ συγγενές, στιγμῶν δ' ἀεὶ τὸ μεταξὺ γραμμή» ἤτοι δύο μεγέθη εἶναι ἐφεξῆς, ὅταν μεταξὺ αὐτῶν δὲν παρεμβάληται ἄλλο συγγενὲς μέγεθος, τὸ διάστημα δὲ μεταξὺ δύο στιγμῶν εἶναι πάντοτε γραμμή (Z1. 231 b 8—9). Ὀλίγον κατωτέρω, εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς διατύπωσις:

«Λέγω δὲ συνεχὲς τὸ διαιρετὸν εἰς ἀεὶ διαιρετά» (Z2. 232 b 24—25).

2. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὸ σήμερον λεγόμενον ἀξίωμα τῆς συνεχείας ἀπαντᾷ ὡς τέταρτος ὁρισμὸς εἰς τὸ V βιβλίον καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς: «Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν» ἤτοι (δύο) μεγέθη λέγεται ὅτι μεταξύ των ἔχουν σχέσιν τινα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα ὑπερέχουν ἀλλήλων. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου δὲν ἀποδίδεται πιστῶς ἐκ τῆς κατὰ λέξιν μεταφράσεως. Εἰς τὸ 8ον ὅμως θεώρημα τοῦ αὐτοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἡ ἀκριβὴς εἶναι ἡ ἑξῆς: ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορὰ τούτων ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς μεγέθους, ὁσονδήποτε μεγάλου.

3. Εἰς τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους μνημονεύεται τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τρεῖς φορὰς ὡς ἑξῆς:

α'. «Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων» (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Α' προλεγόμενα ε', σελ. 8, ἔκδ. Heiberg, Λειψία 1910).

(Προσέτι δὲ ὅταν ἔχωμεν ἀνίσους γραμμὰς καὶ ἀνίσους ἐπιφανείας καὶ ἄνισα στερεὰ ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς ἐκ τῶν συγκρινομένων μεγεθῶν).

β'. «Τᾶν ἀνισᾶν γραμμᾶν καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων» (Περὶ ἑλίκων τόμ. II, σελ. 12, 7, Heiberg 1913).

(Τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς τῶν συγκρινομένων μεγεθῶν).

γ'. «Τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου» (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, τόμ. II, σελ. 264, 9)

(Τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα πάσης δοθείσης πεπερασμένης ἐπιφανείας).

Ἀμέσως μετὰ τοῦτο προσθέτει ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι οἱ προηγούμενοι αὐτοῦ γεωμέτραι διὰ τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ ἀπέδειξαν, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (Εὐκλείδου Στοιχεῖα XII 2), ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων (Εὐκλ, XII 18), ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὴν πυραμίδα καὶ ὕψος ἴσον (Εὐκλ. XII 7) καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον (Εὐκλ. XII 10). Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἑκάστης τῶν πραγματειῶν Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, σημειώνει ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι τὰ θεωρήματα : ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον καὶ ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον εἶναι ἀνακαλύψεις τοῦ Εὐδόξου.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ποῖος ἀπέδειξε τὸ θεώρημα ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅμως τοῦ θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων γνωρίζομεν παρὰ τοῦ Σιμπλικίου ὅτι κατὰ τὸν ἱστορικὸν τῆς γεωμετρίας Εὔδημον αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον. (Σιμπλικίου Ι. 2 σχόλια εἰς Φυσικὰ Ἀριστοτέλους 185α 14).

4. Κεκαλυμμένην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας παρέχει εἰς ἡμᾶς ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν (Ἔκδ. Hiller, Lipsiae 1878 σελ. 44—45), ὅπου γίνεται μνεία τῶν λεγομένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Κατὰ ταῦτα θεωρεῖται ἀπειροελαχίστως μικρὸν τετράγωνον ἔχον διάμετρον (δηλ. διαγώνιον) ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ κατασκευάζονται διαδοχικῶς τετράγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διάμετροι (δηλ. διαγώνιοι) λαμβάνουν τὰς ἑξῆς τιμάς :

| | Πλευρὰ | διάμετρος (διαγώνιος) |
|---|---|---|
| 1ον τετράγωνον | 1 | 1 |
| 2ον » | 1 + 1 = 2 | 2 + 1 = 3 |
| 3ον » | 2 + 3 = 5 | 5 + 2 = 7 |
| 4ον » | 5 + 7 = 12 | 12 + 5 = 17 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5ον | » | $12 + 17 = 29$ | $29 + 12 = 41$ |
| 6ον | » | $29 + 41 = 70$ | $70 + 29 = 99$ |
| 7ον | » | $70 + 99 = 169$ | $169 + 70 = 239$ |
| 8ον | | $169 + 239 = 408$ | $408 + 169 = 577$ |
| ⋮ | | | |
| ν | | $\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$ | $2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$ |

Οἱ ἀνωτέρω πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως

$$y^2 = 2x^2 \mp 1$$

τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν (546 c) λέγων «...ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων ἀρρήτων δὲ δυοῖν» ἤτοι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν=5 θὰ ἔχῃ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα διαγώνιον δ, λαμβανομένην ἐκ τοῦ τύπου

$$\delta^2 = 2.5^2, \text{ ὁπότε}$$

$\delta = \sqrt{2 \cdot 5^2}$. Ἡ διαγώνιος αὕτη γίνεται ῥητή, ὅταν ἐκ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, ὁπότε ἔχομεν

$$\delta = \sqrt{2.5^2 - 1} = \sqrt{50 - 1} = \sqrt{49} = 7,$$

ὅπερ ἐννοεῖται ἐκ τῆς ἀνωτέρω φράσεως τοῦ Πλάτωνος, ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ 50 ἀφαιρέσωμεν τὸν 2 θὰ ἔχωμεν

$$\delta = \sqrt{50 - 2} = \sqrt{48}, \text{ διαγώνιον ἄρρητον.}$$

Αὐτὸ τὸ χωρίον τῆς Πολιτείας θέλει νὰ ἑρμηνεύσῃ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος παραθέτων ὀλίγά τινα περὶ πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐξόχως ὅμως σπουδαῖα διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν.

Ἐὰν τῶν ἀνωτέρω πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (δηλ. διαγωνίων) πρὸς τὰς πλευρὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ λόγοι περιττῆς τάξεως ἀποτελοῦν αὔξουσαν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα τὴν $\sqrt{2}$, ἐν ᾧ οἱ λόγοι ἀρτίας τάξεως ἀποτελοῦν ἐλαττουμένην ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα τὸ αὐτὸ ἤτοι

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Ὁ Θέων δὲν ὁμιλεῖ περὶ τῶν φραγμάτων αὐτῶν, καὶ δι' αὐτὸ ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω ὅτι γίνεται κεκαλυμμένη ἐφαρμογὴ τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο σημαίνει τὸ ἑξῆς :

Ἐὰν δοθῇ μία ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀπέχουσα ἐλάχιστα ἐκ τῆς √2, εἴτε ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω βαίνομεν (ἀκολουθία ἀριστερὰ) εἴτε ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω (ἀκολουθία δεξιὰ) εἶναι δυνατὸν νὰ καταστήσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν λόγων τούτων ἀπὸ τῆς √2 ἀκόμη μικροτέραν, σχηματίζοντες τοὺς ἑπομένους πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους, ὡς τοῦτο εἶναι φανερόν. Ἀκριβῶς δὲ αὐτὸ τὸ περιστατικὸν ἐκφράζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας.

5. Ὁ Δαυὶδ Χίλμπερτ ὀνομάζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους (ἐσφαλμένως) καὶ διατυπώνει τοῦτο ὡς ἑξῆς. $V_1$ (Ἀξίωμα μετρήσεως ἢ ἀρχιμήδειον ἀξίωμα) :

Ἐὰν ΑΒ καὶ CD εἶναι δύο τυχόντα εὐθύγραμμα τμήματα, ὑπάρχει ἀριθμός τις n τοιοῦτος, ὥστε ἡ διαδοχικῶς n−φορὰς ἀφαίρεσις τοῦ τμήματος CD ἀπὸ τοῦ ΑΒ θὰ ὁδηγήσῃ πέραν τοῦ σημείου Β. Ἡ διατύπωσις αὕτη θὰ ἦτο ἀληθὴς ὅταν ἐσημειοῦτο AB>CD, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν λέγεται καὶ ζητεῖται τοὐναντίον τὰ τμήματα ΑΒ, CD νὰ εἶναι τυχόντα (David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, ed. Paul Bernays, Stuttgart 1956, σελ. 30).

6) Πρῶτος διατυπώσας τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας θεωρεῖται ὁ ἐκ Κλαζομενῶν τῆς Μ. Ἀσίας καταγόμενος Ἀναξαγόρας (ἀκμὴ περὶ τὸ 450 π. Χ.), ὅστις εἰς τὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Περὶ φύσεως πραγματείαν του, τῆς ὁποίας σώζονται ἐλάχιστα ἀποσπάσματα, γράφει τὰ ἑξῆς :

Οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεὶ (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον. καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ σμικρῷ πλῆθος, πρὸς ἑαυτὸ δὲ ἕκαστόν ἐστι καὶ μέγα καὶ σμικρόν.

(Διότι οὔτε τοῦ μικροῦ ὑπάρχει τὸ ἐλάχιστον, ἀλλὰ πάντοτε ὑπάρχει μικρότερον (διότι τὸ ὑπάρχον εἶναι ἀδύνατον νὰ γίνῃ μὴ ὑπάρχον (διὰ τῆς συνεχοῦς διαιρέσεως)—ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερον. Καὶ εἶναι ἴσον κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ μικρὸν (δηλ. τὸ ὁσονδήποτε μεγάλο ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ μικρά), ὡς πρὸς τὸν ἑαυτόν του ὅμως πᾶν μέγεθος εἶναι καὶ μέγα καὶ μικρόν). (H. Diels, Fragmente der Vorsokratiker II, Berlin 1952, B 3 σελ. 33).

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Pauly — Wissowa R. E, Eukleides § 12.

Paul — Henri Michel. De Pythagore à Euclide, Les Belles Lettres, Paris 1950, p. 438 ff.

Knopp, K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1931, S. 26—27.

Σταμάτης Εὐάγγελος. Εὐκλείδου Γεωμετρία — Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμος ΙΙ, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8—11.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΔ' 1972

ΤΟΜΟΣ **24** ΤΕΥΧΗ **47/48**

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΕΛ. ΚΑΣΤΡΙΝΟΥ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 56 — ΑΘΗΝΑΙ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΑΝΕΚΔΟΤΑ ΕΡΓΑ ΕΛΛΗΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΝΟΜΩΝ ΣΩΖΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ

## I

Περὶ τῶν εἰς τὴν ἑλληνικὴν σῳζομένων πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῆς ἐκδόσεως τριῶν τόμων ἐν Λειψίᾳ, (1910, 1913, 1915) γενομένης παρὰ τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ I. L. HEIBERG. Εἰς τὸν δεύτερον ἐκ τῶν τόμων τούτων περιλαμβάνεται μετάφρασις εἰς τὴν λατινικὴν τῆς εἰς τὴν ἀραβικὴν σῳζομένης πραγματείας ὑπὸ τὸν τίτλον «Βιβλίον λημμάτων» (Liber Assumptorum). Ἐκτὸς ὅμως τῆς πραγματείας αὐτῆς ἀνευρέθησαν κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα καὶ ἄλλαι πραγματεῖαι τοῦ Ἀρχιμήδους σῳζόμεναι εἰς τὴν ἀραβικήν, αἵτινες μετεφράσθησαν καὶ εἰς τὴν γερμανικήν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὴν κατασκευὴν τοῦ περιφήμου ὑδραυλικοῦ ὡρολογίου, λειτουργοῦντος διὰ κυκλοφοροῦντος διὰ σωλήνων ὕδατος καὶ δεικνύοντος τὰς ὥρας τοῦ 24-ώρου. Ἀλλὰ καὶ πέρα τῶν πραγματειῶν αὐτῶν, κατὰ τὸ 1965 ὁ ἐν Μονάχῳ δικηγόρος καὶ ἐρασιτέχνης μαθηματικὸς κ. HEINPICH HERMELINK ἀνεκάλυψεν εἰς τὰς Ἰνδίας (βιβλιοθήκη τῆς πόλεως PATNA) δύο ἀγνώστους πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τοὺς τίτλους «Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων» καὶ «Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας».

Πρὸς τὸν κ. HERMELINK ἦλθον εἰς ἐπαφὴν τῇ μεσολαβήσει τοῦ φίλου καθηγητοῦ τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ γερμανικῷ Πανεπιστημίῳ Tübingen, κ. J. E. HOFMANN κατὰ τὸ 1966. Ἔκτοτε καὶ τῇ φιλόφρονι φροντίδι τοῦ Ὑπουργείου τῶν Ἐξωτερικῶν τῆς Ἑλλάδος (Διεύθυνσις Μορφωτικῶν σχέσεων) καὶ τῆς ἐν Νέῳ Δελχὶ Ἑλληνικῆς Πρεσβείας ἀνεῦρον ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῆς πόλεως PATNA τριάκοντα ὀκτὼ (38) ἄλλας πραγματείας καὶ κατὰ τὸ σύνολον σχεδὸν ἀγνώστους. Φωτοτυπίας τῶν ἐν ὅλῳ 40 πραγματειῶν τούτων, αἵτινες περιέχονται εἰς 633 σελίδας, ἔλαβον ἐξ Ἰνδιῶν ἰδίαις δαπάναις. Αἱ δύο πραγματεῖαι τοῦ Ἀρχιμήδους μετεφράσθησαν ἐν Ἀθήναις ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ὑπὸ τοῦ Ἄραβος ἐκ Λιβάνου καταγομένου πολιτικοῦ μηχανικοῦ κ. Ἀνρὺ Τάντρος, δαπάναις τοῦ ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ καὶ θὰ περιληφθῶσιν εἰς τὸν ἐν Ἀθήναις ἐκτυπούμενον ἤδη (μετὰ τοῦ Β′) Γ′ τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἡ μία ἐκ τῶν ἀνωτέρω πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, «Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων» θὰ ἐκδοθῇ προσεχῶς ἐν Γερμανίᾳ ὑπὸ τοῦ Οἴκου B. G. TEUBNER (STUTTGART), ὑπὸ τῶν DOLD / HERMELINK / SCHRAMM ὡς IV τόμος τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους. Σημειωτέον, ὅτι κατὰ τὸ 1972 ἐξεδόθησαν τῇ ἐπιμελείᾳ μου ἐν STUTTGART καὶ οἱ τρεῖς τόμοι τῶν Ἁπάντων τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, οἱ ἐκδοθέντες κατὰ τὰ ἔτη 1910—1913—1915 ὑπὸ τοῦ I. L. HEIBERG ἐν Λειψίᾳ καὶ θὰ ἐπακολουθήσῃ διὰ πρώτην φορὰν ἡ ἔκδοσις ὑπ' ἐμοῦ ἐν STUTTGART τοῦ

IGDEX BIBLIOGRAPHICUS περιλαμβάνοντος 800 περίπου τίτλους, ὡς V τόμος τῶν Ἁπάντων.

II

Κατωτέρω ἐκθέτομεν τοὺς τίτλους τῶν 40 ἔργων εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ἐκ τῆς ἀραβικῆς, τῆς μεταφράσεως γενομένης δωρεὰν ὑπὸ τοῦ Ἀραβος Πανοσιολογιωτάτου Ἀρχιμανδρίτου κ. Στεφάνου HANTANT, τῇ φιλόφρονι συστάσει τοῦ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Μάρκου Σιώτη.

ΟΙ ΤΙΤΛΟΙ ΤΩΝ 40 ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΑΡΑΒΕΣ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΑΙ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Πραγματεία | ἐν τῇ γεωμετρίᾳ καὶ ἀστρονομία, | ὑπὸ Ibn Qurra (826—901) |
| 2. | » | ἐν τῇ συνθέσει καὶ ἀναλύσει εἰς ἔργα καὶ προβλήματα γεωμετρίας | » |
| 3. | » | περὶ τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν | » |
| 4. | » | περὶ ἀστρολάβου | » |
| 5. | » | περὶ τῶν ἀποστάσεων καὶ περὶ τῶν ἄστρων | al—Gili (966 ;) |
| 6. | » | περὶ τῶν ἀστρονομικῶν κύκλων | al—Buzgani (+998) |
| 7. | » | περὶ τοῦ ἡμερολογίου | Ibn Iraq (1036) |
| 8. | » | περὶ τῆς διορθώσεως τῶν λαθῶν τῆς στάθμης | » |
| 9. | » | περὶ τῆς διορθώσεως ἑνὸς τύπου ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ Μενελάου Περὶ σφαιρῶν | » |
| 10. | » | περὶ προβλήματος μεταξὺ Avouhamet καὶ τῶν ἀστρολόγων | » |
| 11. | » | περὶ τῶν κύκλων τοῦ ἀστρολάβου καὶ τοῦ ἀζιμουθίου | » |
| 12. | » | περὶ τοῦ ἔργου τοῦ Ibn Sabach περὶ τοῦ ἀστρολάβου | » |
| 13. | » | περὶ τῶν ἡμερολογίων καὶ τῶν καταλόγων τῶν λεγομένων λεπτῶν | » |
| 14. | » | περὶ τοῦ ἔργου τοῦ Μωχάμετ περὶ τοῦ ἡλίου | » |
| 15. | » | περὶ ὡραίων κύκλων καὶ τοῦ ἀστρολάβου | » |
| 16. | » | περὶ τοῦ ἔργου τοῦ Havesh περὶ τῶν ἀνατολῶν τοῦ ἀζιμουθίου ἐν τῇ στάθμῃ αὐτοῦ | » |
| 17. | » | περὶ τοῦ οὐρανοῦ | » |
| 18. | » | εἰς ἀπάντησιν περὶ μερικῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων | » |
| 19. | » | περὶ τοῦ σφάλματος τῆς αἱρέσεως τῶν Βατινίων σχετικῶς μὲ τὴν σελήνην | » |
| 20. | » | περὶ λύσεως ἀπορίας εἰς τὸ βιβλίον Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας | » |
| 21. | » | περὶ τῆς σφαιρικότητος τοῦ οὐρανοῦ | » |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22. | » | περὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς ὥρας μεταξὺ λυκαυγοῦς καὶ τῆς ἀνατολῆς τοῦ ἡλίου καθ' ἑκάστην | Ibn Iraq (1036) » |
| 23. | » | περὶ τῆς ἱστορίας καὶ τῶν ἑορτῶν τῶν Ἰουδαίων | » |
| 24. | » | περὶ τῆς ἱστορίας τῶν Ἰουδαίων | » |
| 25. | » | περὶ τῶν κινήσεων τοῦ ἡλίου | Ibn Qurra |
| 26. | » | περὶ τῆς κωνικῆς γραμμῆς παραβολὴ | » |
| 27. | » | περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων (Ἀρχιμήδους) | » |
| 28. | » | περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας (Ἀρχιμήδους) | » |
| 29. | » | περὶ τοῦ καθορισμοῦ τῶν ὡρῶν εἰς ἕκαστον ὡριαῖον ἄτρακτον | an—Nairizi |
| 30. | » | πτρὶ τῶν κοινῶν καὶ διαφόρων ποσῶν | al—Bagdadi |
| 31. | » | περὶ ἀνακαλύψεως πηγῶν ὕδατος | a'—Karagi |
| 32. | » | περὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου | al—Haitam |
| 33. | » | περὶ τῆς παραβολῆς | al—Kuhi |
| 34. | » | περὶ τῶν σκιῶν | al—Biruni |
| 35. | » | περὶ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων | » |
| 36. | » | περὶ τῆς ἀπείρου εὐθείας | » |
| 37. | » | περὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἀστρολάβου | as—Sanani |
| 38. | » | περὶ τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν | as—Singari |
| 39. | » | ὅτι ὅλα τὰ σχήματα προέρχονται ἐκ τῶν κύκλων | Ibn Abdallah |
| 40. | » | περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ | al—Biruni |

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τίτλων δὲν εἶναι φανερὸν ποῖοι εἶναι οἱ Ἕλληνες συγγραφεῖς, πλὴν ἐξαιρέσεων τινῶν. Τὰ ὀνόματα τούτων θὰ γίνωσι γνωστά, ὡς καὶ τὸ περιεχόμενν τῶν πραγματειῶν, ὅταν ἐπιτευχθῇ ἡ μετάφρασις αὐτῶν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔργων ἔχουσιν ἐκδοθῆ εἰς τὴν γερμανικὴν τὰ ὑπ' ἀριθμ. 14 καὶ 40. Περὶ τοῦ ὑπ' ἀριθμ. ὅμως 14 δὲν εἴμεθα βέβαιοι ἂν ἔχῃ ἐκδοθῆ ἐν Γερμανίᾳ.

Ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενον αὐτῶν οἱ 40 τίτλοι κατατάσσονται ὡς ἑξῆς :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ : Οἱ ὑπ' ἀριθ. 1, 2, 3, 9, 18, 20, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40.

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ : Οἱ ὑπ' ἀριθμ. 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 29, 34.

ΠΟΙΚΙΛΑ : Οἱ ὑπ' ἀριθμ. 8, 23, 24, 31.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

HEINRICH SUTER. Die Mathematiker und Astronomen der Araber. Abh. z. Gesch. d. mathem. Wissensch, 10. Heft (1900).

E. WIEDEMANN. Beiträge z Gesch. d. Naturwiss. III, Sitz. Berich. d. phys.—med. Soz. in Erlangen, vol. 37 (1905) p. 237. 247,50. 257.

MARSHAL CLAGETT. ARCHIMEDES in the middle ages, Madison 1954.
THOMAS A. HEATH. A manuel of Greek Mathematics, Dover. N York, 1963,
MORITZ STEINSCHNEIDER. Die arabischen Übersetzungen aus dem griechischen. Graz - Austria, 1960.

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird berichtet über die Erwerbung des Verfassers von 40 Schriften in arabisch erhaltener meist unbekannten Werke griechischer Autoren, derer 2 von Archimedes sind. Von diesen Schriften entfallen je 18 auf Mathematik und Astronomie und 4 auf andere Gebiete. Zwei von diesen letztgennanten Werken tragen díe Titel: Über die Geschichte der Feste der Juden (Nr. 23) und: Über die Geschichte der Juden (Nr. 24). Die Schrifttten Nr. 14 und 40 sind gedruckt. Die Schrift Nr. 27 erscheint demnächst bei B. G. TEUBNER, STUTTGART. Die Schriften Nr. 27 und 28 erscheinen auch demnächst ín Athen, im 3. Band meiner Ausgabe von «Archimedis opera omnia».

# Π Λ Α Τ Ω Ν

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΕ' 1973

ΤΟΜΟΣ **25** (ΤΕΥΧΗ 49/50)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1973

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΕΠΤΑΓΩΝΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

'Ανακατασκευὴ εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ 'Αρχιμήδους τοῦ ἀπολεσθέντος κειμένου τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου», ἡ ὁποία σώζεται εἰς τὴν ἀραβικήν.

Κατὰ τὸ ἔτος 1927 ἐξεδόθη εἰς τὸ 'Αννόβερον ὑπὸ τῶν Julius Ruska καὶ Heinrich Wieleitner ἡ πραγματεία τοῦ Carl Schoy ἡ περιέχουσα μετάφρασιν τοῦ ἔργου τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου al-Biruni (973—1048) ὑπὸ τὸν τίτλον «Μαθήματα Τριγωνομετρίας» [1]. Εἰς τὴν πραγματείαν αὐτὴν τοῦ al-Biruni περιλαμβάνονται καὶ 17 προτάσεις ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου», τοῦ 'Αρχιμήδους, ἐκ μεταφράσεως ἐφθαρμένου ἑλληνικοῦ κειμένου, γενομένης ὑπὸ τοῦ Tabit Ibn Qurra (826—901). 'Εκ τῶν 17 προτάσεων μόνον αἱ ὑπ' ἀριθμ. 16 καὶ 17 ἀφορῶσιν εἰς τὸ ἑπτάγωνον, ἐν ᾧ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 1—13 ἀναφέρονται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 14-15 ἀναφέρονται εἰς κύκλους.

Εἰς τὸν πρόλογον τῆς μεταφράσεως τῆς πραγματείας τοῦ 'Αρχιμήδους ὁ Tabit Ibn Qurra γράφει τὰ ἑξῆς·

«'Εν ὀνόματι τοῦ Θεοῦ, τοῦ εὐσπλάχνου καὶ οἰκτίρμονος!

Τὸ βιβλίον τοῦ 'Αρχιμήδους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου εἰς 7 ἴσα μέρη, μεταφρασθὲν ὑπὸ Abu'l-Hasan Thabit Ibn Qurra al-Harrani. Τὸ ἔργον ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς πραγματείας καὶ 17 σχημάτων.

Καὶ λέγω μετὰ τὸν αἶνον πρὸς τὸν 'Αλλὰχ καὶ τὰς εὐχὰς πρὸς τὸν προφήτην του καὶ τὴν οἰκογένειάν του, ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν ὑπάρχει πλέον εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν τὸ εἶχον εἰς τὴν διάθεσίν μου, ἀλλὰ εἶχον ἐν ἀπόκρυφον κατεστραμμένον χειρόγραφον, ἕνεκα τῆς ἀμαθείας τοῦ ἀντιγραφέως καὶ τῆς ἀγνοίας αὐτοῦ περὶ τοῦ ἀντικειμένου. Καὶ κατέβαλον μεγάλον κόπον διὰ νὰ ἀνεύρω δυνατότητας ἐπαληθεύσεως τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἀποριῶν καὶ ἀνεύρω λύσεις περὶ αὐτῶν καὶ τὴν κανονικὴν διάταξιν τῶν σχημάτων, πρὸς τὸν σκοπὸν εὐκόλου ἐξετάσεως καὶ ἐρεύνης τῶν πηγῶν. Πιθανῶς νὰ χρησιμοποιήσω μερικὰς ἀποδείξεις τῶν μεταγενεστέρων. Πρὸς τούτοις ὁ 'Αλλάχ, ὁ παρέχων βοήθειαν, ἂς δώσῃ διὰ τῆς συμπαραστάσεώς του ἐπιτυχίαν εἰς τὸ ἔργον μου».

Κατωτέρω παρέχομεν τὴν μετάφρασιντῶν δύο θεωρημάτων ὑπ' ἀριθ. 16 καὶ 17 ἐκ τῆς γερμανικῆς καὶ τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολεσθέντος 'Αρχιμηδείου κειμένου εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ 'Αρχιμήδους.

1) Carl Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Biruni, von Julius Ruska-Heinrich Wieleitner, Hannover 1927. Zu Kapitel I und IV. Über die Konstruktion der Seite des dem Kreise einbeschriebenen regulären Siebenecks.

16*

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ΒΑ ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον ἄχθω διάμετρος ἁ ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ διάχθω ἁ ΔΖ, ὥστε τρίγωνον τὸ ΑΖΕ τριγώνῳ τῷ ΓΤΔ ἴσον εἶμεν, ἄχθω δὲ διὰ τοῦ Τ σαμείου ἁ ΚΤΛ παρὰ τὰν ΑΓ. φαμὶ δή, τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΚΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΑΚ τῶ ἀπὸ τᾶς ΚΒ τετραγώνῳ ἴσον καὶ ἔτι ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΖ, ΒΚ τὰς ΑΚ μεῖζον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΤΛ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΑΕ ἴσον ἐστί, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΓΔ, τουτέστι ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΤΛ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνα τὰ ΖΑΕ, ΖΚΤ, ΤΛΔ ὁμοῖα ἐντί, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΤΛ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΛΔ, τουτέστι τὰν ΚΒ, ἔτι δέ, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΚΒ, καὶ ἔτι, ὡς ἁ ΤΛ, τουτέστιν ἁ ΑΚ, ποτὶ τὰν ΚΤ, τουτέστι τὰν ΚΒ, οὕτως ἁ ΛΔ, τουτέστιν ἁ ΚΒ ποτὶ τὰν ΖΚ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΚΒ τῷ ἀπὸ τὰς ΑΖ τετραγώνῳ ἴσον καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΑΚ τῷ ἀπὸ τᾶς ΚΒ τετραγώνῳ ἴσον καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΖ, ΚΒ τᾶς ΑΚ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17

Δεδόσθω δὴ τὸν κύκλον ἑπτὰ ἴσοις μέρεσσι διελεῖν.

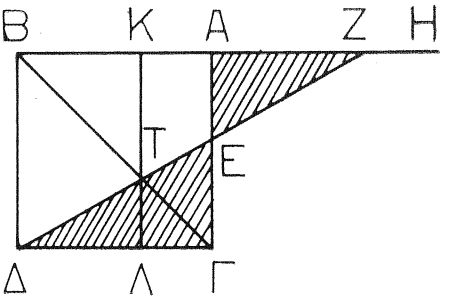
* Ἡ ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους.

16 *

Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 16). Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ εὐθυγράμμως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ Η καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΖ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τρίγωνον ΑΖΕ = τρίγωνον ΓΤΔ (ἰσοδύναμον). Διὰ τοῦ σημείου Τ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΤΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Λέγω, ὅτι

$$AB \cdot KB = AZ^2$$
$$ZK \cdot AK = KB^2$$

καὶ ἀκόμη, ὅτι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΖ, ΒΚ εἶναι $>$ ΑΚ.




Σχ. 16

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΓΔ . ΤΛ = ΑΖ . ΑΕ, θὰ εἶναι $\frac{\Gamma\Delta\,(=AB)}{AZ} = \frac{AE}{T\Lambda}$ (Εὐκλ. 6, 16). Ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΑΕ, ΖΚΤ, ΤΛΔ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις: $\frac{AE}{T\Lambda} = \frac{AZ}{\Lambda\Delta\,(=KB)}$, $\frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{KB}$ καὶ $\frac{T\Lambda\,(=AK)}{KT\,(=KB)} = \frac{\Lambda\Delta\,(=KB)}{ZK}$, (Εὐκλ. 6, 4). Ἐκ τούτων ἕπεται:

$$AB \cdot KB = AZ^2$$
$$ZK \cdot AK = KB^2 \text{ (Εὐκλ. 6, 17),}$$

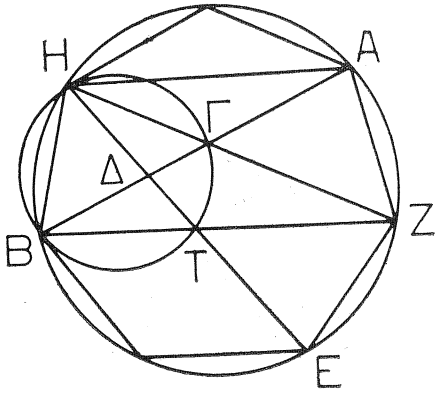
καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν ΑΚ. ΚΒ εἶναι $>$ ΑΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι,

17

Θέλομεν τώρα νὰ χωρίσωμεν τὸν κύκλον εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη. Ἀπόδειξις.

* Ἡ μετάφρασις τῶν 2 θεωρημάτων ἐκ τῆς γερμανικῆς.

Λελάφθω γὰρ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο σαμεῖα τὰ Γ, Δ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον. ἐσσεῖται δὴ ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΓ, ΔΒ τοῦ ΓΔ τμάματος μεῖζον, ὡς ἐν τῷ πρότερον ἐδείχθη. συνεστάτω δὴ ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ τρίγωνον τὸ ΓΗΔ. ἔστι δὲ ἡ ΓΗ τῇ ΑΓ ἴσα, ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΓΔ. περιγεγράφθω οὖν περὶ τῷ τρίγωνον ΑΗΒ κύκλος ὁ ΑΗΒΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθων αἱ ΗΓ, ΗΔ ἐπὶ τὰ Ζ, Ε σαμεῖα τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἀχθεῖσα δὲ ἡ ΒΖ συμβαλλέτω τῇ ΗΕ




Σχ. 17

κατὰ τὸ Τ σαμεῖον καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΤ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΓΗ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΓΗ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΗΓ ἴσα καὶ περιφέρεια ἡ ΑΖ περιφερείᾳ τῇ ΗΒ ἴσα. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον, καὶ τρίγωνον τὸ ΑΗΔ τριγώνῳ τῷ ΓΗΔ ὁμοῖον. ἔστιν ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσα, τουτέστι περιφέρεια ἡ ΖΕ περιφερείᾳ τῇ ΒΗ ἴσα. τρεῖς ἄρα περιφέρειαι αἱ ΒΗ, ΑΖ, ΖΕ ἴσαι ἀλλάλαις εἰντί, [ἅκται δὲ ἡ ΖΒ παρὰ τὰν ΑΗ] καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΗ, ΓΗΔ, ΤΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις εἰντί. τὰ ἄρα τέτταρα σαμεῖα τὰ Β, Η, Γ, Τ ἐπὶ τᾶς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἰντί. ἔστι δὲ ἡ ΗΔ τῇ ΔΒ ἴσα καὶ ἡ ΓΔ

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 17), τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν γνωστήν. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε $ΑΔ \cdot ΓΔ = ΔΒ^2$ καὶ $ΓΒ \cdot ΔΒ = ΑΓ^2$. Πρὸς τούτοις εἶναι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΔΒ > ΓΔ, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Κατασκευάζομεν τώρα ἐκ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ, τὸ τρίγωνον ΓΗΔ (Εὐκλ. 1, 22), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΓΗ = ΑΓ, ΔΗ = ΔΒ καὶ ΓΔ = ΓΔ. Περιγράφομεν τώρα περὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ τὸν κύκλον ΑΗΒΕΖ (Εὐκλ. 4, 5) καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΗΓ καὶ ΗΔ εὐθυγράμμως μέχρις ὅτου συναντήσουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα, ἔστω Ζ καὶ Ε. Αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΗΕ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Τ. Φέρομεν τὴν ΓΤ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος ΑΓ=ΓΗ, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ θὰ εἶναι γων. ΗΑΓ=γων. ΑΗΓ, τόξον ΑΖ=τόξον ΗΒ (Εὐκλ. 1, 5. 3, 26). Εἶναι δὲ $ΑΔ \cdot ΓΔ = ΔΒ^2 = ΔΗ^2$ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΔ. Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΑΗ = πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΔ, δηλαδὴ τὸ τόξον ΖΕ = πρὸς τὸ τόξον ΒΗ. Κατὰ ταῦτα τὰ τρία τόξα ΒΗ, ΑΖ, καὶ ΖΕ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Εἶναι δὲ γων. ΓΑΗ = γων. ΓΗΔ = γων. ΤΒΔ. Ἑπομένως τὰ τέσσαρα σημεῖα Β, Η, Γ, Τ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Καὶ εἶναι ΗΔ = ΔΒ, ΓΔ=ΔΤ, ΤΗ = ΒΓ.

τᾷ ΔΤ καὶ ἔτι ἁ ΤΗ τᾷ ΒΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΤΗ, ΗΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί, ἐντὶ ἄρα τρίγωνα τὰ ΤΗΓ, ΓΗΔ ὁμοῖα. ἔστι δὲ ἁ ΓΒ τᾶ ΤΗ ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΓΗ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΤΓ, τουτέστι διπλασίων γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΗ, ἔτι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΤΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΗ, τουτέστι διπλασίων γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΗ. ἔστιν ἄρα περιφέρεια ἁ ΑΗ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΗ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΕΒ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων, τουτέστιν ἑκατέρα τῶν περιφερειῶν ΑΗ, ΕΒ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων ἐστίν. Διαιρέθη ἄρα κύκλος ὁ ΑΗΒΕΖ ἑπτὰ ἴσοις μέρεσσι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τῆς σχέσεως ΤΗ . ΗΔ = ΗΓ² ἕπεται ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τριγώνων ΤΗΓ, ΓΗΔ. Εἶναι δὲ ΓΒ = ΤΗ καὶ γων. ΔΓΗ = γων. ΗΤΓ = 2 γων. ΓΑΗ, γων. ΓΤΔ = γων. ΔΒΗ = 2. γων. ΓΑΗ,

Κατὰ ταῦτα εἶναι τόξον ΑΗ = 2 τόξον ΗΒ (Εὐκλ. 6, 33). Καὶ ἐπειδὴ γων. ΔΗΒ = γων. ΔΒΗ θὰ εἶναι καὶ τόξον ΕΒ = 2 τόξον ΗΒ, τουτέστιν ἑκάτερον τῶν τόξων ΑΗ καὶ ΕΒ = 2 τόξον ΗΒ, καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος ΑΗΒΕΖ ἐχωρίσθη εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἂς εἶναι αἶνος πρὸς τὸν Θεὸν τὸν ἕνα κλπ.

Καὶ ἐδῶ ἐτελείωσεν ἡ βελτίωσις καὶ ἡ ἐπιμελὴς σύνταξις αὐτοῦ τοῦ περιφήμου ἀντιγράφου, ἐκ τοῦ χειρογράφου τοῦ διορθώσαντος αὐτὸ Φακίρου. Θεέ, πρὸς ὃν αἶνος καὶ ὕμνος ἔστω, εὐλόγησον τὸν προσκυνητὴν τῆς Μέκκας Μουσταφᾶ, τὸν πιστόν μου γενναῖον υἱόν. Ἂς εἶναι ἔλεος ὁ Ἀλλὰχ πρὸς αὐτὸν καὶ ὅλους τοὺς Μουσουλμάνους.

(Σημείωσις. Αἱ παραπομπαὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἔγιναν ὑπ' ἐμοῦ).

## SUMMARY

Reconstruction in the sicilian doric dialect of Archimedes af the lost text of the theorems 16 and 17 of his treatise «About the construction of the side of the inscribed in the circle regular heptagonon» which was preserved in an arabic translation, edided by Julius Ruska and Heinrich Wieleitner, Hannover 1927.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΖ' 1975

ΤΟΜΟΣ **27** (ΤΕΥΧΗ 53/54)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1975

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στοιχεῖα πρακτικῆς ἀριθμητικῆς ἀναμεμιγμένα μὲ θεωρητικὰς γνώσεις ἀπαντοῦν εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, τοῦ Νικομάχου, τοῦ Διοφάντου, τοῦ Πάππου, τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως καὶ τοῦ Εὐτοκίου. Εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ἔργων τούτων ὑπάρχει πληροφορία ἀναφερομένη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τετραγώνων ἀριθμῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως εἰς τὸ 10 θεώρημα τῆς πραγματείας του Περὶ ἑλίκων ἀποδεικνύει τὸν τύπον

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(2\nu+1)(\nu+1)}{6}$$

(Ἀρχιμήδους Ἅπαντα τόμ. Β', Ἀθῆναι 1973, σελὶς 482, ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος). Ἀλλὰ καὶ πολὺ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους οἱ Ἕλληνες εἶχον εὕρει τύπον παρέχοντα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν. Τοῦτο συνάγεται ἀπὸ πινακίδα εὑρεθεῖσαν εἰς τὴν Μεσοποταμίαν, γραφεῖσαν εἰς τὴν γνωστὴν ἤδη βαβυλωνιακὴν σφηνοειδῆ γραφὴν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Σελευκιδῶν, μετὰ τὸν θάνατον δηλ. τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π. Χ.). Ἡ πινακὶς αὕτη πολλὰ μαρτυρεῖ περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ἔφθασαν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Μεσοποταμίας διὰ τῆς ἐκπολιτιστικῆς ἐκστρατείας τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τὰ ὁποῖα ὑπό τινων ἐκλαμβάνονται ὡς βαβυλωνιακὰ ἐπιτεύγματα [1].

Ὁ εἰς τὴν πινακίδα ἀναφερόμενος τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\frac{1}{3}(1+2\nu)(1+2+3+\cdots+\nu)$$

ἀναφερόμενος διὰ λόγων καὶ οὐχὶ διὰ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμητικῶν συμβόλων. Ἡ πινακὶς εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τῶν Παρισίων Louvre, Dép. des Antiquités Orientales, ὑπὸ τὴν ἔνδειξιν AO 6484. Φωτοτυπικὰ ἀντίγραφα ταύτης ἐλάβομεν παρὰ τοῦ ἐν Μονάχῳ φίλου καθηγητοῦ κ. Kurt Vogel καὶ παρὰ τοῦ ἐν Παρισίοις διακεκριμένου Ἕλληνος ἐπιστήμονος κ. Γεωργίου Καγιᾶ, ἐργαζομένου εἰς τὸ Κέντρον Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν τῶν Παρισίων. Ὁ κ. Καγιᾶς ἀπέστειλεν εἰς ἡμᾶς καὶ ἑρμηνείαν τοῦ βαβυλωνιακοῦ κειμένου τῆς πινακίδος. Ὁμοίαν ἑρμηνείαν ἐλάβομεν καὶ παρὰ τοῦ φίλου καθηγητοῦ τοῦ Τεχνικοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Βερολίνου κ. Christoph J. Scriba. Αἱ φωτοτυπίαι προέρχονται ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ κ. O. Neugebauer, Mathematische Keilschrift - Texte II, Berlin 1935, Tafel 1.

Οὐδεμία ἑρμηνεία παρέχεται περὶ τοῦ τρόπου εὑρέσεως τοῦ τύπου. Φαίνεται ὅμως ὅτι οὗτος εἶναι Πυθαγορικῆς προελεύσεως καὶ ὅτι ἔχει εὑρεθῆ ἐμπειρικῶς διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν γνωμόνων, διὰ τῶν ὁποίων οἱ Πυθαγόρειοι ὑπελόγιζον τοὺς τετραγώνους ἀριθμούς.

---

1) Ὅτι πρόκειται περὶ Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν συνάγεται ἐκ τῆς ἀποδείξεως τοῦ συναφοῦς τύπου, ἥτις γίνεται διὰ μεθόδων τῶν Πυθαγορείων. Ἐπὶ πλέον δέ, τὸ πλεῖστον τῶν βαβυλωνιακῶν πινακίδων, αἵτινες περιέχουν μαθηματικὰ προέρχεται ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῆ ὁ τόπος, ὅπου αὗται εὑρέθησαν, πολλῷ δὲ μᾶλλον τὸ ἀρχαιολογικὸν στρῶμα ἐξ οὗ προέρχονται καὶ δι' αὐτοῦ νὰ ὑπολογισθῆ ὁ χρόνος γραφῆς των. (Kurt Vogel, Vorgriechische Mathematik II, Verl. H. Schroedel, Hannover, F. Schöning, Paderborn, 1959 p. 13).

**Ἡ μετάφρασις τοῦ προβλήματος τῆς πινακίδος** (ἡ ὁποία περιέχει καὶ ἄλλα προβλήματα) :

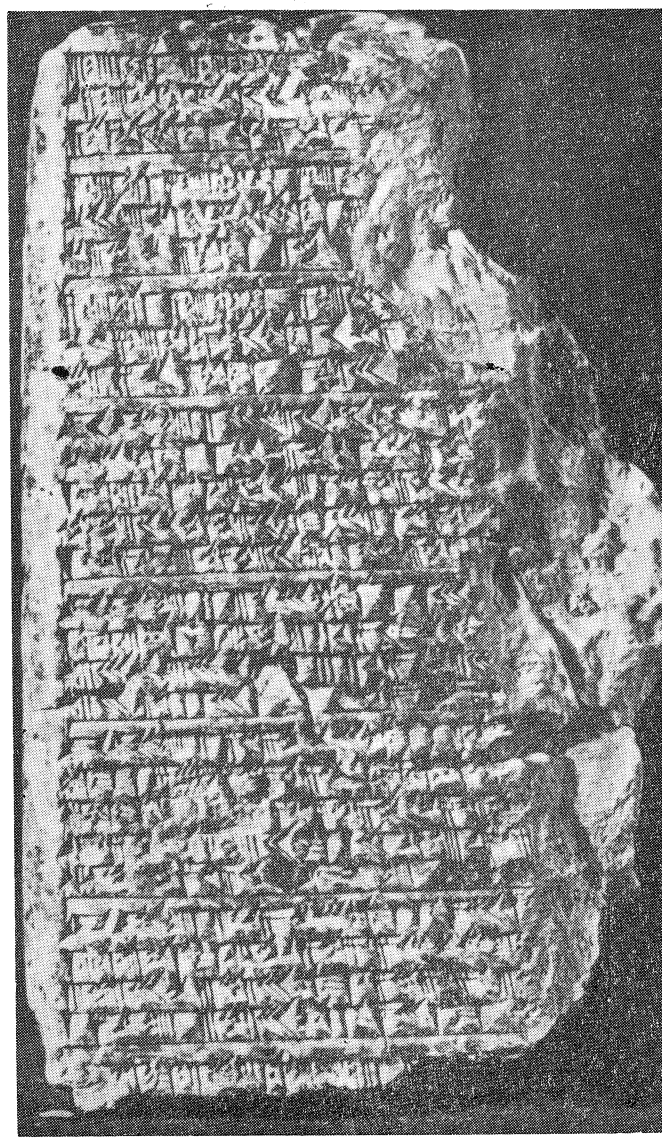
«Ἕν τετράγωνον ἀπὸ 1 ἐπὶ 1 (τοῦτο εἶναι) 1, μέχρι 10 ἐπὶ 10 (τοῦτο εἶναι) 1,40.

**Προσθία ὄψις τῆς Βαβυλωνιακῆς πινακίδος**

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα. 1 ἐπὶ 20 (τοῦτο εἶναι) [1/3]. παλλαπλασίασε· (δίδει) 20, 10 ἐπὶ 40 (τοῦτο εἶναι) δύο τρίτα· πολλαπλασίασε· (δίδει) 6,40. 6,40 σὺν 20 (εἶναι) 7. 7 πολλαπλασίασε ἐπὶ 55· (δίδει) 6,25. 6,25 εἶναι τὸ ἄθροισμα». Μὲ ἄλλους λόγους :

$1\times1=1^2$ μέχρι $10\times10=1,40$ ($1,40=100$, ἐπειδὴ χρησιμοποιεῖται τὸ ἑξηκονταδικὸν σύστημα, δηλ. 1 ἑξηκοντὰς σὺν 40 μονάδες=100). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα, δηλ. τὸ $1^2+2^2+3^2+\ .\ .\ .\ .\ +10^2$.

Πολλαπλασίασε $1\times20=20$ $\left(=\frac{1}{3}\right.$ τοῦ 60.$\left.\right)$, $10\times40$ (ὅπερ 40 εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ



Ὀπισθία ὄψις τῆς Βαβυλωνιακῆς πινακίδος

60) $=400=6,40$ δηλ. 6 ἑξακοντάδες + 40 μονάδες. Σὺν $20=7$ (διότι $400+20=420=7$ ἑξηκοντάδες. $7\times55=6,25$. Τὸ 6,25 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροι-

σμα. Τὸ 55=1+2+3 . . . . +10. Τὸ δὲ 6,25=ἓξ ἑξηκοντάδες σὺν 25 μονάδες=385=$1^2+2^2+3^2+ \ldots +10^2$.

Ὁ ἐκ τῆς φρασεολογίας αὐτῆς συναγόμενος τύπος εἶναι

$$1^2+2^2+3^2+ \ldots . +\nu^2= \frac{1}{3}(1+2\nu).(1+2+3+ \ldots . +\nu).$$

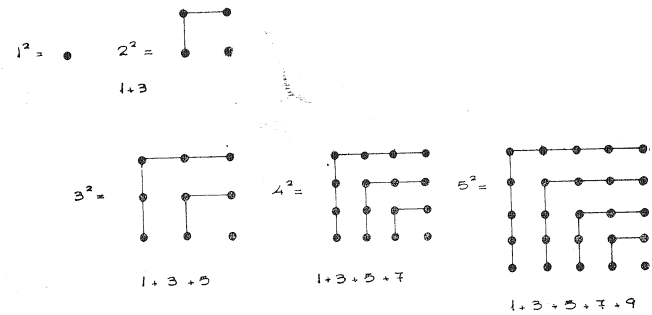
Διὰ ν=10 εἶναι $\frac{1+2\nu}{3}=7$ καὶ 55=1+2+3+ . . . . +10, 7 . 55=385.

Κατὰ τὸν J. F. Hofmann, ἐν Praxis der Mathematik 5, 15-10 1963, παραστατικὴν ἔκφρασιν τοῦ τύπου τῆς πινακίδος ἐπεχείρησαν οἱ : J. Boulliau (Paris 1682), P. Luckey (1930), J. E. Hofmann (1936), O. Becker, διὰ τοῦ J. E. Hofmann (1954), J. Lohne (Νορβηγία 1956).

**Ὁ ὑποτιθέμενος καθ' ἡμᾶς τρόπος εὑρέσεως τοῦ τύπου τῆς πινακίδος ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων.**

Ἐν πρώτοις σχηματίζομεν τοὺς γνώμονας τῶν Πυθαγορείων, διὰ τῶν ὁποίων οὗτοι εὕρισκον τοὺς τετραγώνους ἀριθμούς. Γνώμων, ὡς γνωστόν, καλεῖται γωνία τις ὀρθὴ ἢ μὴ ὀρθή. Τὰς μονάδας τῶν γνωμόνων τὰς παριστῶμεν ἐνταῦθα διὰ πλήρων κύκλων, ἐνῷ οἱ Πυθαγόρειοι παρίστων αὐτὰς διὰ μικρῶν λίθων (ψῆφοι, πετραδάκια). Ὁ γνώμων τοῦ $1^2$ παρίσταται δι' ἑνὸς πλήρους κύκλου, διὰ τὸν ὁποῖον λέγομεν ὅτι ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας δυνάμει, ἐπειδὴ εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν γωνία δὲν φαίνεται.

**Οἱ γνώμονες τῶν Πυθαγορείων**

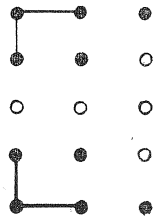



**Σχ. 1**

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

**Ἡ εὕρεσις τοῦ τύπου τῆς πινακίδος**

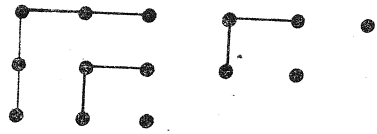
1. Ἀριστερὰ τοῦ γνώμονος διὰ τὸ $1^2$ θέτομεν τοὺς γνώμονας διὰ τὸν ἀριθμὸν 4. Συμπληροῦμεν τὴν κενὴν θέσιν διὰ νὰ ἔχωμεν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, διὰ κενοῦ κύκλου. Κάτωθεν τοῦ σχήματος τούτου θέτομεν ἀντιστοίχως τρεῖς κενοὺς κύκλους καὶ μὲ ἄξονα συμμετρίας τοὺς τρεῖς κενοὺς κύκλους κατασκευάζομεν κάτωθεν τούτων τὸ ὑπὲρ αὐτοὺς σχῆμα συμμετρικῶς καὶ λαμβάνομεν τὸ σχ. 2. Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι 5=(1+2.2) καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι τρεῖς=(1+2). Ὅλαι αἱ μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι) εἶναι 5×3=15.



**Σχ. 2**

Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 15=10 (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 15=5 (οἱ κενοὶ κύκλοι= $=1^2+2^2$)

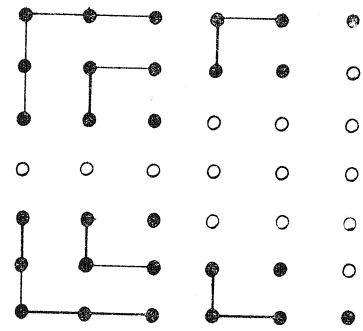
2. Ἀριστερὰ τοῦ γνώμονος διὰ τὸ $1^2$ τοποθετοῦμεν τοὺς γνώμονας διὰ τὸν 4 καὶ ἀριστερὰ τούτων τοποθετοῦμεν τοὺς γνώμονας διὰ τὸν 9 καὶ ἔχομεν τὸ σχῆμα 3. Συμπληροῦμεν τὰς κενὰς θέσεις διὰ κενῶν κύκλων διὰ νὰ λάβωμεν ὀρθογώνιον σχῆμα καὶ ἔχομεν τὸ σχ. 4. Κάτωθεν τοῦ σχήματος τούτου τοποθετοῦμεν



Σχ. 3

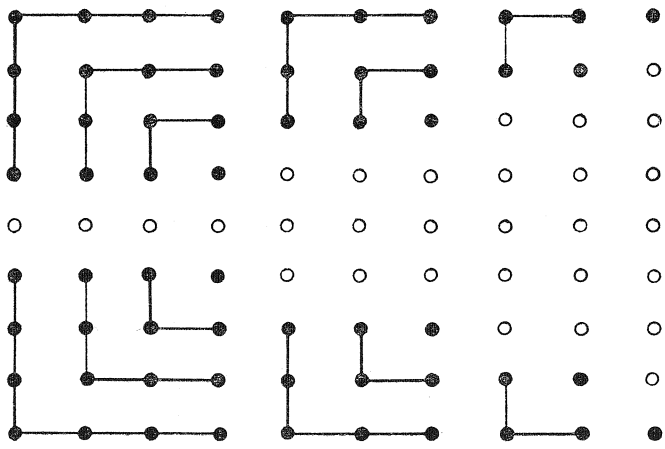
Σχ. 4

ἀντιστοίχως 6 κενοὺς κύκλους καὶ μὲ ἄξονα συμμετρίας τοὺς 6 τούτους κύκλους κατασκευάζομεν κάτωθεν τὸ ὑπὲρ αὐτοὺς σχῆμα συμμετρικῶς καὶ ἔχομεν τὸ σχ. 5. Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $7=(1+2\,.\,3)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $6=(1+2+3)$. Ὅλαι αἱ μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι εἶναι $7\times6=42$). Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 42=28 (οἱ πλήρεις κύκλοι καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 42=14, οἱ κενοὶ κύκλοι=$1^2+2^2+3^2$).



Σχ. 5

3. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν τὸ ἑπόμενον σχῆμα (6). Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $9=(1+2\,.\,4)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $10=(1+2+3+4)$. Ὅλαι αἱ μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι) εἶναι $9\times10=90$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $90=60$ (οἱ πλήρεις



Σχ. 6

κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $90 = 30$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$).

4. Εἰς τὸ ἐν συνεχείᾳ ἑπόμενον σχῆμα αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $11 = (1+2.5)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $15 = (1+2+3+4+5)$. Ὅλαι μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι) εἶναι $11 \times 15 = 165$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $165 = 110$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $165 = 55$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$).

5. Εἰς τὸ ἐν συνεχείᾳ ἑπόμενον σχῆμα αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $13 = (1+2.6)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $21 = (1+2+3+4+5+6)$. Ὅλαι αἱ μονάδες πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι εἶναι $13 \times 21 = 273$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $273 = 182$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $273 = 91$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$).

Ἐκ τῶν προηγουμένων κατασκευῶν συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς :

$$3 \,.\, 1 : 3 = 1^2$$
$$5 \,.\, 3 : 3 = 5 = 1^2 + 2^2$$
$$7 \,.\, 6 : 3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$9 \,.\, 10 : 3 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$
$$11 \,.\, 15 : 3 = 55 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

ἢ

2ος περιττὸς × 1ον τρίγωνον : $3 = 1^2$
3ος περιττὸς × 2ον τρίγωνον : $3 = 5 = 1^2 + 2^2$
4ος περιττὸς × 3ον τρίγωνον : $3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
5ος περιττὸς × 4ον τρίγωνον : $3 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
6ος περιττὸς × 5ον τρίγωνον : $3 = 55 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$\nu + 1$ περιττὸς × ν τρίγωνον : $3 = (1 + 2\nu) \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} : 3 = 1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2$

(ὁ ν περιττὸς $= 2\nu - 1$, ὅπου $\nu = 1, 2, 3 \ldots\ldots$),

ἢ $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots\ldots + \nu^2 = \frac{1}{3}(1 + 2\nu)(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + \nu)$.

(Σημ[1]. Φυσικοὶ ἀριθμοὶ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.....
Τρίγωνοι ἀριθμοὶ : 1, 3, 6, 10, 16, 21, 28.....
Περιττοὶ ἀριθμοὶ : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.....)

1) Τρίγωνοι ἀριθμοὶ καλοῦνται τὰ διαδοχικὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ὅπως 1, $1+2=3$, $3+3=6$, $6+4=10$ κλπ.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΚΥΒΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁ Νικόμαχος εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του (κεφ. 20, σελ. 118, 24 - 119, 18, R. Hoche) ἐξαίρει τὰς ἰδιότητας τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, λέγων, ὅτι ἂν καταγράψωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1 2 3 4 5 6 7 ..... καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰς γεωμετρικὰς ἀκολουθίας 1 2 4 8 16 32 64 ..... 1 3 9 27 81 243 729 ..... οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ἀκολουθιῶν, κατὰ τὴν ἀρίθμησιν αὐτῶν ἀπὸ τῆς μονάδος, κατέχουν πάντοτε θέσιν περιττοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν δὲ καταγράψωμεν, συνεχίζει ὁ Νικόμαχος, τὴν ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 . . . .

παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ μονὰς ἐκφράζει τὸν κύβον αὐτῆς δυνάμει, ἤτοι $1 = 1^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ δύο ὅρων εἶναι $3 + 5 = 2^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὅρων εἶναι $7 + 9 + 11 = 3^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τεσσάρων ὅρων εἶναι $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον

Ἄλλη πληροφορία σχετικὴ δὲν παρέχεται ὑπὸ τοῦ Νικομάχου. Ἐκ τινος ὅμως ἀραβικοῦ χειρογράφου, τοῦ Ἄραβος AL - KARKHI (10–11 αἰών) [1], εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ διὰ τῶν γνωμόνων τρόπος εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3+2^3+3^3$ . . . . . χωρὶς νὰ ἀναφέρεται τὸ ὄνομα τοῦ Ἕλληνος συγγραφέως, εἶναι εὔκολον νὰ συναγάγωμεν τὴν διὰ τῶν γνωμόνων, ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+\nu^3$, ὡς ἀκολούθως.

Ἔστω τὸ τετράγωνον Α, πλευρᾶς 1. Περὶ αὐτὸ γράφομεν ἐν συνεχείᾳ γνώμονας, τῶν ὁποίων ἕκαστος περιβάλλει τὸν προηγούμενόν του, τὸ πλάτος δὲ ἑκάστου γνώμονος εἶναι πάντοτε ἡ μονάς. Εἰς τὸ σχῆμα ἔχομεν περιβάλλει τὸ τετράγωνον Α διὰ 9 γνωμόνων, τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις γίνεται εἰς τὴν κορυφὴν ἑκάστου γνώμονος.

Τὸ τετράγωνον Α ἐκφράζει τὸν κύβον τῆς μονάδος, $1^3$. Ὁ περὶ τὸ τετράγωνον πρῶτος γνώμων ἔχει ἐμβαδὸν $2.1+1.1=3$. Ὁ ἑπόμενος δεύτερος γνώμων ἔχει ἐμβαδὸν $3.1+2.1=5$. Τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου γνώμονος εἶναι $3+5=8=2^3$.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου Α, τὸ ὁποῖον ἔχομεν παραστήσει διὰ $1^3$, θὰ ἔχομεν $1+3+5=1^3+2^3=3^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρίτου γνώμονος εἶναι $4.1+3.1=7$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετάρτου γνώμονος εἶναι $5.1+4.1=9$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πέμπτου γνώμονος εἶναι $6.1+5.1=11$.

1) T. L. Heath, Greek Mathematics I p. 109, Oxford 1921.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων γνωμόνων (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου) εἶναι $7+9+11=27=3^3$.

Ὁ κύβος τῆς μονάδος, ἐκφραζόμενος διὰ τοῦ τετραγώνου Α σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων πρώτου καὶ δευτέρου σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τρίτου καὶ τετάρτου καὶ πέμπτου δίδει $1+(3+5)+(7+9+11)=1^3+2^3+3^3=6^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἕκτου γνώμονος εἶναι $7.1+6.1=13$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑβδόμου γνώμονος εἶναι $8.1+7.1=15$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀγδόου γνώμονος εἶναι $9.1+8.1=17$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐνάτου γνώμονος εἶναι $10.1+9.1=19$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων γνωμόνων (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $13+15+17+19=64=4^3=8^2$. Καὶ τὸ συνολικὸν ἄθροισμα ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου Α $(=1^3)$ καὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν γνωμόνων (πρώτου, δευτέρου), (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου), (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι

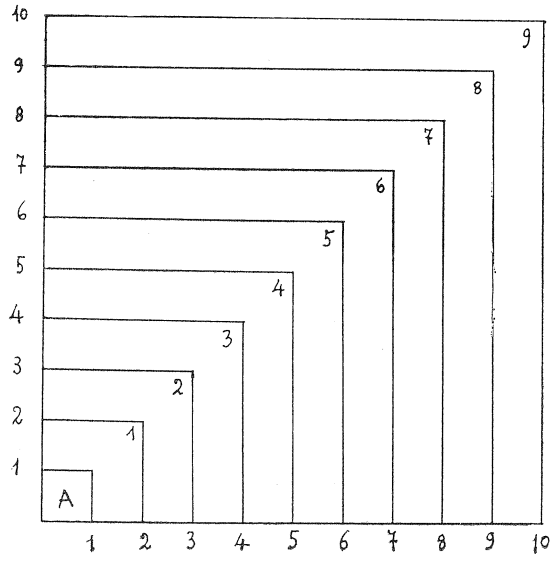
Τὸ πρῶτον μερικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3, 2^3, 3^3, \ldots\ldots \nu^3$ εἶναι $1^3=1^2$

Τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3+2^3=3^2$

Τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3+2^3+3^3=6^2$

Τὸ τέταρτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$

. . . καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 6, 10 . . . εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, εἶναι τὰ ἀπὸ μονάδος διαδοχικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ κανών, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ μονάδος ν κύβων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ νυοστὸς τρίγωνος ἀριθμὸς εἰς τὸ τετράγωνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τρίγωνος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3+2^3+\ldots\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$.



# Π Λ Α Τ Ω Ν

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΚΗ' 1976

ΤΟΜΟΣ 28 (ΤΕΥΧΗ 55/56)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1976

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΤΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ ΕΥΡΕΘΕΝΤΑ ΤΕΣΣΑΡΑ ΝΕΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Εἰς τὴν βιβλιοθήκην Astan - Quds Mashad τοῦ IRAN ἀνευρέθη ἐσχάτως μαθηματικὸν χειρόγραφον εἰς τὴν ἀραβικήν, ὑπ' ἀριθ. 295, περιέχον τέσσαρα ἀπολεσθέντα βιβλία τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, τὰ ὁποῖα φέρονται ὑπὸ τοὺς αὔξοντας ἀριθμοὺς 4, 5, 6, 7. Περίληψιν τῶν βιβλίων τούτων ἐδημοσίευσεν ἐν Παρισίοις ὁ Αἰγύπτιος μαθηματικὸς Roshdi Rashed, εἰς τὴν Revue d' Histoire des Sciences. Καὶ τὸ μὲν βιβλίον 4 ἐδημοσιεύθη εἰς τὸ τεῦχος XXVII/2 τοῦ 1974, τὰ δὲ βιβλία 5, 6, 7 ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὸ τεῦχος XXVIII/1 τοῦ 1975. Ἡ περίληψις συνίσταται εἰς τὴν διὰ τοῦ συγχρόνου συμβολισμοῦ ἐκφώνησιν καὶ λύσιν τῶν προβλημάτων. Ὁλόκληρον τὸ βιβλίον εἰς τὴν ἀραβικὴν (δηλ. καὶ τὰ 4 ἀνευρεθέντα βιβλία) ἐδημοσίευσεν ἐν Παρισίοις (1975) ὁ R. Rashed, ὅστις μοὶ τὸ προσέφερεν εὐγενῶς. Ἐὰν τὸ βιβλίον τοῦτο δημοσιευθῇ εἰς τὴν γαλλικὴν ἢ τὴν γερμανικὴν ἐλπίζομεν νὰ τὸ ἐκδώσωμεν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν καὶ εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Διοφάντου, ὡς ἐπράξαμεν ἤδη διὰ τρία ἀπολεσθέντα τελείως προβλήματα τοῦ 5ου βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, τὰ ὁποῖα δὲν ἐσώθησαν οὔτε εἰς τὴν ἀραβικήν. Ἡ ἀνακατασκευὴ τοῦ κειμένου τῶν 3 προβλημάτων τούτων ἐγένετο ἐκ τῶν προηγουμένων καὶ τῶν ἑπομένων αὐτῶν, προβλημάτων [1].

'Απὸ τοῦ δευτέρου ἡμίσεος τοῦ παρελθόντος αἰῶνος μέχρι σήμερον γίνεται συζήτησις ὑπὸ τῶν εἰδικῶν μαθηματικῶν ἂν τὰ βιβλία τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ὑπ' ἀριθμ. 1, 2, 3, 4, 5, 6 διεσώθησαν, ὡς πρὸς τὴν σειράν, ὅπως εἶχον γραφῆ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου. Τὰ ἀνευρεθέντα νέα τέσσαρα βιβλία δημιουργοῦν νέα προβλήματα, ὡς πρὸς τὴν σειρὰν συγγραφῆς αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Διοφάντου. Τὰ νεωστὶ εὑρεθέντα βιβλία φέρουν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 6, 7. 'Επειδὴ ὅμως εἰς τὰ μέχρι σήμερον γνωστὰ βιβλία ὑπάρχουν τὰ ὑπ' ἀριθ. 4, 5, 6 δημιουργεῖται τὸ ζήτημα ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ σειρὰ τῶν νέων βιβλίων. Πρέπει νὰ τὰ τοποθετήσωμεν ὡς βιβλία ὑπ' ἀριθμ. 7, 8, 9, 10 ἢ ἄλλως πως; 'Επὶ τοῦ παρόντος δὲν φαίνεται νὰ ὑπάρχῃ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου.

'Ο Διόφαντος γράφει εἰς τὸν πρόλογον τῶν 'Αριθμητικῶν, ὅτι ταῦτα ἐκδίδονται εἰς 13 βιβλία. Θεωροῦνται ἑπομένως ἀκόμη ὡς ἀπολεσθέντα ἄλλα τρία βιβλία.

'Ο Roshdi Rashed ἐξετάζων τὸ περιεχόμενον τῶν ἀνευρεθέντων τεσσάρων νέων βιβλίων, τονίζει ὅτι ἐκ τούτου πείθεταί τις, ὅτι ὁ Διόφαντος ἔχει πολὺ μεγαλυτέραν ἀξίαν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν τοῦ ἀπέδιδον μέχρι σήμερον. Ἡμεῖς ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἄλγεβραν τοῦ Οἴλερ (Leonhard Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, J. E. Hofmann, Reclam 1959, Stuttgart) βλέπομεν εἰς αὐτὴν μεθόδους ἐπιλύσεως ἐξισώσεων καὶ συστημάτων, τὰς ὁποίας ἀπαντῶμεν καὶ εἰς τὸν Διόφαντον (250 μ. Χ.), ὁ ὁποῖος ἤκμασε 1500 ἔτη πρὸ τοῦ Euler (1707—1783).

Κατωτέρω παραθέτομεν τὰ 44 προβλήματα τοῦ ἀνευρεθέντος 4ου βιβλίου, ὡς δημοσιεύει αὐτὰ ὁ Rashdi Roshed εἰς τὴν Revue d' Histoire des Sciences 1974 — XXVII/2.

---

1. Ἴδε Διοφάντου 'Αριθμητικὰ βιβλ. 5, προβλ. 19α, 19β, 19γ, ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, 'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων, 'Αθῆναι 1963.

**1**

$$x^3 + y^3 = u^2$$

Θέτομεν $y = nx$, ἔστω $y = 2x$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $9x^3 = u^2$. Θέτομεν $u = 6x$, ὁπότε εἶναι $9x^3 = 36x^2$, ἐξ οὗ $x = 4$, $y = 8$, $u = 24$.

**2**

$$x^3 - y^3 = u^2$$

Θέτομεν $x = ny$, ἔστω $x = 2y$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $7y^3 = u^2$. Θέτομεν $u = 7y$, ὁπότε εἶναι $7y^3 = 49y^2$, ἐξ οὗ $y = 7$, $x = 14$, $u = 49$.

**3**

$$x^2 + y^2 = u^3$$

Θέτομεν $y = 2x$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $5x^2 = u^3$. Θέτομεν $u = nx$, ἔστω $u = x$, ὁπότε θὰ εἶναι $x = 5$, $y = 10$, $u = 5$.

**4**

$$x^2 - y^2 = u^3$$

Θέτομεν $x = ny$, ἔστω $x = 5y$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $24y^2 = u^3$. Θέτομεν $u = ny$, ἔστω $u = 2y$, ὁπότε εἶναι $y = 3$, $x = 15$, $u = 6$.

**5**

$$x^2y^2 = u^3$$

Θέτομεν $y = nx$, ἔστω $y = 2x$, ἐξ οὗ $4x^4 = u^3$. Θέτομεν $u = 2x$, ὁπότε εἶναι $x = 2$, $y = 4$, $u = 4$.

**6**

$$x^2y^3 = u^2$$

Θέτομεν $y = nx$, ἔστω $y = 2x$, ὁπότε ἔχομεν $8x^5 = u^2$. Θέτομεν $u = (nx)^2$, ἔστω $u = 4x^2$, ὁπότε εἶναι $x = 2$, $y = 4$, $u = 16$.

**7**

$$x^2y^3 = u^3$$

Θέτομεν $y = nx$, ἔστω $y = 4x$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $64x^5 = u^3$. Θέτομεν $n = 2x^2$, ὁπότε εἶναι $x = 8$, $y = 32$, $u = 128$.

**8**

$$x^3y^3 = u^2$$

(Σ η μ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ 9 καὶ ἔχει ἀντιγραφῆ ἐσφαλμένως).

Θέτομεν $y = nx$, ἔστω $y = 2x$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $8x^6 = u^2$. Ἐπειδὴ θέλει ῥητὰς λύσεις δὲν δύναται νὰ θέσῃ $u = x$. Ἐρευνᾷ ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα (6), θέτων $y = y_1x$ καὶ $u = u_1x^2$, ὁπότε λαμβάνει $y_1^3 x^6 = x_1^2 y_1^3 x^4$, ἐξ οὗ $x^2 = x_1^2$, ὁπότε $x = 2$, $y = 4$, $u = 16$.

**9**

$$x^3y^3 = u^2$$

Θέτομεν $y = 4x$, ὁπότε εἶναι $64x^6 = u^2$. Θέτομεν $u = 16x^2$, ὁπότε θὰ ἔχομεν $64x^6 = 256x^4$, ἐξ οὗ $x = 2$, $y = 8$, $u = 64$.

**10**

$$x^3 + \alpha x^2 = u^2$$

Θέτομεν $\alpha = 10$, ὁπότε εἶναι $x^3 + 10x^2 = u^2$. Θέτομεν $u^2 > 10x^2$, ἔστω $u = 4x$, ὁπότε εἶναι $x^3 + 10x^2 = 16x^2$, ἐξ οὗ $x = 6$, $u = 24$.

**11**

$$x^3 - \alpha x^2 = u^2$$

Θέτομεν $\alpha = 6$, ὁπότε εἶναι $x^3 - 6x^2 = u^2$. Θέτομεν $u = 2x$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $x^3 - 6x^2 = 4x^2$, ἐξ οὗ $x = 10$, $u = 20$.

**12**

$$x^3 + \alpha x^2 = u^3$$

Θέτομεν $\alpha = 10$, ὁπότε ἔχομεν $x^3 + 10x^2 = u^3$. Θέτομεν $u = 2x$, ὁπότε εἶναι $x^3 + 10x^2 = 8x^3$, ἐξ οὗ $x = \frac{10}{7}$, $u = \frac{20}{7}$.

**13**

$$x^3 - \alpha x^2 = u^3$$

Θέτομεν $\alpha = 7$, ὁπότε ἔχομεν $x^3 - 7x^2 = u^3$. Θέτομεν $u = \frac{1}{2}\,x$, ὁπότε εἶναι $x^3 - 7x^2 = \frac{1}{8}\,x^3$, ἐξ οὗ $x = 8$, $u = 4$. Ἄλλως τὸ αὐτό: Θέτομεν $x = nu$, ἔστω $x = 2u$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $8u^3 - 28u^2 = u3$, ἐξ οὗ $x = 8$, $u = 4$.

**14**

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha x = u^2 \\ bx = v^3 \end{cases}$$

Θέτομεν $\alpha = 5$ καὶ $b = 10$, ὁπότε αἱ σχέσεις (1) γίνονται

$$(1') \qquad \begin{cases} 5x = u^2 \\ 10x = v^3 \end{cases}$$

Θέτομεν $v^2 = \frac{1}{4}\,u^2$, ὁπότε ἔχομεν $v = 8$, $u = 16$, $x = \left(51 + \frac{1}{5}\right)$.

Ἐὰν ἀντὶ τῆς (1′) λάβωμεν

$$(2) \qquad \begin{cases} 5x = v^3 \\ 10x = u^2 \end{cases}$$

καὶ θέσωμεν $u^2 = 4v^2$, θὰ ἔχωμεν $2v^2 = v^3$, ἐξ οὗ $v = 2$, $u = 4$, $x = \left(1 + \frac{3}{5}\right)$.

Ἄλλως τὸ αὐτό. Θέτομεν εἰς τὴν (1′), $v^2 = 4u^2$, ὁπότε ἔχομεν $20x = v^2$. Διὰ ταύτης ἐκ τῆς $10x = v^3$ λαμβάνομεν $v = \frac{1}{2}$, ὁπότε $u = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{80}$.

Ἐὰν εἰς τὴν (2) θέσωμεν $u = \frac{1}{2}\,v$ θὰ ἔχωμεν $v = \frac{1}{8}$, $u = \frac{1}{16}$, $x = \frac{1}{2560}$.

Καὶ ὅταν ἔχωμεν $\alpha x = u^2$, $bx = v^3$

δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{\alpha}{b} v^3 = u^2$ ἢ $\frac{b}{\alpha} u^2 = v^3$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1') θὰ ἔχωμεν $\frac{5}{10} v^3 u^2$. Θέτοντες $u=2v$ θὰ λάβωμεν τὰ προηγούμενα ἀποτελέσματα.

Θὰ ἔχωμεν ἀκολούθως $\frac{10}{5} u^2 = v^3$. Θέτοντες $v=u$ λαμβάνομεν $u=2$, $x = \frac{4}{5}$.

**15**

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x = u^3 \\ b x = u^2 \end{cases}$$

Θέτομεν $\alpha = 10$, $b = 4$. Αἱ σχέσεις (1) γίνονται $\begin{cases} 10x = u^3 \\ 4x = u^2 \end{cases}$, ἐξ οὗ $\frac{u^3}{10} = \frac{u^2}{4}$, $u = \left(2 + \frac{1}{2}\right)$, $x = \frac{25}{16}$.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θέσωμεν $\frac{u^3}{a}$. $b = u^2$, ἔστω $\frac{4u^3}{10} = u^2$.

Θὰ ἔχωμεν τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα.

$$x^2 = \frac{1}{3} y^3.$$

Θέτομεν $x = 3y$ καὶ ζητοῦμεν δύο ἀριθμοὺς $\alpha$,b τοιτούτους, ὥστε

$$\begin{cases} \alpha x = u^3 \\ b x = u^2 \end{cases}$$

**16**

$$\begin{cases} \alpha x = u^3 \\ \alpha y = u. \end{cases}$$

Ἔστω $\alpha = 10$, ὁπότε $\begin{cases} 10x = u^3 \\ 10y = u. \end{cases}$

Θέτομεν $x = ny^2$, ἔστω $x = 300\, y^2$, ὁπότε $y = 3$, $x = 2700$.

**17**

$$\begin{cases} \alpha x^2 = u \\ \alpha y^2 = u^3. \end{cases}$$

Ἐὰν θέσω $y = \alpha x$, πρέπει, λέγει ὁ Διόφαντος, ὁ $\alpha\alpha$ νὰ εἶναι τετράγωνος.

Πράγματι ἔχομεν $\alpha^3 x^6 = \alpha\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 x^4 = \alpha^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha\alpha} \Rightarrow x \in Q_+$ ἐὰν $\alpha\alpha = v^2$.

Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου: Θέτομεν $y = 20x$, $\alpha = 5$, ὁπότε ἔχομεν

$$\begin{cases} 5y^2 = u^3 \\ 5x^2 = u \end{cases}$$

$2000x^2 = u^3$, ἐξ οὗ $5x^2 = u$, ὁπότε $x = 2$, $y = 40$, $u = 20$.

**18**

$$\alpha x^3 = u^2$$
$$\alpha y^3 = u$$

Ἐὰν θέσω $x = y$, πρέπει, λέγει ὁ Διόφαντος, νὰ εἶναι $\alpha = v^3$.

Πράγματι $\alpha a y^3 = \alpha^2 x^6$, $a^3 = \alpha y^3$, $y = \alpha a^{-\frac{1}{3}}$, ἐξ οὗ ἡ συνθήκη.

Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου: Θέτομεν $\alpha = 8$ καὶ $a = 3$, ὁπότε $x^3 = 27y^3$, ἐξ οὗ $216\, y^3 = 64\, y^6$, ἐξ οὗ $y = \left(1 + \frac{1}{2}\right)$, $x = \left(4 + \frac{1}{2}\right)$, $u = 27$.

**19**

$$\alpha x = u^3$$
$$bx = u$$

Πρέπει $ab = v^2$. Πράγματι $b^3 x^3 = \alpha x$, $x = \left(\alpha b^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου: Θέτομεν $\alpha = 20$ καὶ $b = 5$, ὁπότε $u^3 = 20x = (5x)^3$ ἐξ οὗ $u = 2$, $x = \frac{2}{5}$.

**20**

$$\alpha x^3 = u^2$$
$$bx^3 = u$$

Πρέπει, λέγει ὁ Διόφαντος, τὸ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς τῶν δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ἔστω τὸ $b^2$, νὰ μετρῇ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν διά τινος κύβου, δηλαδὴ ὁ $\frac{\alpha}{b^2}$ νὰ εἶναι κύβος.

Πράγματι, ἔχομεν $bx^3 = (\alpha x^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b^2 x^6 = \alpha x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{\alpha}{b^2} \Rightarrow x = \left(\frac{\alpha}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου: Θέτομεν $b = 5$ καὶ $\alpha = 200$, ὁπότε $\frac{u^2}{u} = u = 40$, ἐξ οὗ $5x^3 = 40$, ἐξ οὗ $x = 2$.

**21**

$$\begin{cases} \alpha x^2 = u^3 \\ bx^2 = u. \end{cases}$$

Ὁ Διόφαντος δεικνύει σαφῶς αὐτὴν τὴν φοράν, ὅτι ῥητὴ λύσις τοῦ προβλήματος ὑπάρχει, ὅταν $ab = v^2$, ὡς ὅταν $\frac{u^3}{u} = u^2 = \frac{\alpha}{b}$ καὶ $\frac{\alpha}{b}$ ὀφείλει νὰ εἶναι τετράγωνον. Ἀλλ' ὡς $u = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = bx^2$, πρέπει $\frac{1}{b}\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ νὰ εἶναι τετράγωνον, ὁπότε $\alpha^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}}$ ὀφείλει νὰ εἶναι τετράγωνον. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος:

Θέτομεν $b = 2$ καὶ $\alpha = \left(10 + \frac{1}{2}\right)$, ἐξ οὗ $ab = 81$, ὁπότε $\left(40 + \frac{1}{2}\right) x^2 = u^3 = 8x^6$, ἐξ οὗ $x = \left(1 + \frac{1}{2}\right)$, $u = \left(4 + \frac{1}{2}\right)$.

**22**

$$\alpha x^3 = u^3$$
$$bx^3 = u$$

Ὁ Διόφαντος ἀποδεικνύει, ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ὅταν $\left(\frac{\alpha}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}} = v^3$.

Πράγματι : $\alpha x^3 = u^3$ καὶ $bx^3 = u \Rightarrow \frac{\alpha}{b} = u^2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = u$. ἐξ ἄλλου ὁ $x^3 = \frac{u}{b} \Rightarrow \frac{u}{b}$ εἶναι κύβος, ἐξ οὗ $\left(\frac{\alpha}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ εἶναι κύβος.

Ὁ Διόφαντος ἐργάζεται ὡς ἑξῆς : Θέτομεν $b = 2$. Ζητοῦμεν ὁ $\alpha$ νὰ ἐπαληθεύῃ τὰς προηγουμένας συνθήκας. Ἀναζητεῖ $c = \sqrt{\frac{\alpha}{b}}$, $\frac{1}{b}\, c = v^3$. Ὁ $c = \frac{27}{4}$ ἐπαληθεύει τὴν συνθήκην αὐτήν, καὶ $c^2 = \frac{\alpha}{b} = \frac{729}{16}$, ἐξ οὗ $\alpha = \left(91 + \frac{1}{8}\right)$.

Θέτοντες τέλος $\alpha = \left(91 + \frac{1}{8}\right)$ καὶ $b = 2$, εὑρίσκομεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου τῆς χρησιμοποιηθείσης εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα $x^3 = \left(3 + \frac{3}{8}\right)$ καὶ $\alpha x^3 = \left(307 + \frac{35}{64}\right)$, $bx^3 = \frac{27}{4}$.

**23**

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = u^3$$

Θέτομεν $y^2 = n^2x^2$, ἔστω $y^2 = 4x^2$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $y^4 = 16x^4$ καὶ $17x^4 = u^3$. Θέτομεν $u = 3x$, ὁπότε $u^3 = 27x^3$, ἐξ οὗ $17x^4 = 27x^3$ καὶ ἑπομένως $x = \frac{27}{17}$, $y = \frac{54}{17}$.

**24**

$$(x^2)^2 + (y^3)^2 = u^2$$

Θέτομεν $x^2 = n^2x^2$, ἔστω $x^2 = 4y^2$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $16y^4 + y^6 = u^2$.

Θέτομεν $u = my^2$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $16y^4 + y^6 = m^2y^4$, ἐξ οὗ $y^6 = (m^2 - 16)\, y^4$, ἐξ οὗ $y^2 = (m^2 - 16)$, ἐξ οὗ ἡ συνθήκη ὅτι ὁ $(m^2 - 16)$ πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνον ἤτοι $m^2 - 16 = v^2$. Εὑρίσκομεν $v = 3$, $m = 5$. Θέτομεν $u = 5y^2$, ἐξ οὗ $u = 25y^4$, ὁπότε $y^6 = 9y^4$, ἐξ οὗ $y^2 = 9$ καὶ τέλος $y = 3$, $x = 6$, $x^2 = 36$, $y^3 = 27$.

**(26α)**

$$(y^3)^2 - (x^2)^2 = u^2$$

Θέτομεν $x^2 = 4y^2$, ὁπότε $y^6 = 16y^4 = u^2$. Θέτομεν $u = 3y^2$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $y^6 = 25y^4$, ἐξ οὗ $y^2 = 25$, $y = 5$, $x = 10$.

**(26β)**

$$(x^2)^2 - (y^3)^2 = u^2$$

Θέτομεν $x = 5y$, ὁπότε $625y^4 - y^6 = u^2$. Θέτομεν $u = ny^2$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $625y^4 = y^6 + n^2y^4$, ἐξ οὗ $625 - n^2 = y^2$, ὀφείλει νὰ εἶναι τετράγωνον, καὶ $625 = \alpha^2 + \beta^2 = 400 + 25$. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $n = 15$, ὁπότε $625y^4 = y^6 + 225y^4$, ἐξ οὗ $400 = y^2$, $y = 20$, $x = 100$, $u = 6000$.

**27**

$$(x^3)^2 + by^2 = u^2 \qquad (1)$$

Ἡ (1) γράφεται $x^6 + by^2 = u^2$. Θέτομεν $y = nx^2$, ἔστω $y = 2x^2$ καὶ $b=5$, ὁπότε ἔχομεν $x^6 + 20x^4 = u^2$. Θέτομεν $u = mx^2$, $m^2 - 20 = v^2$, ὁπότε $m^2 - v^2 = 20$, ἐξ οὗ $m^2 = 36$, $v^2 = 16$, $m = 6$. Θέτομεν $u = 6x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $x^6 + 20x^4 = 36x^4$, ἐξ οὗ $x^2 = 16$, $x = 4$, $y^2 = 1024$, $x^3 = 64$.

**28**

$$(x^2)^2 + by^3 = u^2 \qquad (1)$$

Θέτομεν $b = 10$ καὶ ἡ (1) γίνεται $(x^2)^2 + 10y^3 = u^2$. Θέτομεν $x = 2y$, ἐξ οὗ $x^2 = 4y^2$ καὶ ἐκ τῆς (1) $16y^4 + 10^3 y = u^2$. Θέτομεν $u = 6y^2$, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις εἶναι $16y^4 + 10y^3 = 36y^4$, ἐξ οὗ $(2 + 2/3)y^2 + (1 + 2/3)y = 6y^2$, ἐξ οὗ $y = 1/2$, $x = 1$, $x^2 = 1$, $y^3 = 1/8$.

**29**

$$(x^2)^2 + (y^3)^3 = u^2 \qquad (1)$$

Θέτομεν $x = 2y^2$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται $16y^8 + y^9 = u^2$. Θέτομεν $u = 6y^4$, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις εἶναι $16y^8 + y^9 = 36y^8$, ἐξ οὗ $y^9 = 20y^8$, ἐξ οὗ $y = 20$, $y^3 = 8000$, $x = 800$, $x^2 = 640.000$.

**30**

$$(x^3)^3 - (y^2)^2 = u^2 \qquad (1)$$

Θέτομεν $y = 2x^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) εἶναι $(x^3)^3 - 16x^8 = u^2$. Θέτομεν $u = 2x^4$, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται $x^9 - 16x^8 = 4x^8$, ἐξ οὗ $x^9 = 20x^8$, ἐξ οὗ $x = 20$, $x^3 = 8000$, $y^2 = 640\,000$.

(Ὁ Διόφαντος παρατηρεῖ ὅτι εἰς τὰ δύο προηγούμενα προβλήματα εὑρομεν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε $\begin{cases} (x^2)^2 + (y^3)^3 = u^2 \\ (x^3)^3 + (y^2)^2 = v^2). \end{cases}$

**31**

$$(x^2)^2 - (y^3)^3 = u^2 \qquad (1)$$

Θέτομεν $x = 2y^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $16y^8 - y^9 = u^2$. Θέτομεν $u = 2y^4$, ὁπότε $u^2 = 4y^8$ καὶ καθὼς $\frac{n^2}{n} = n$, θὰ ἔχωμεν $\frac{16y^8 - y^9}{2y^4} = 2y^4$, ἐξ οὗ $8y^4 - \frac{1}{2}y^5 = 2y^4$, ἐξ οὗ $y = 12$, $x = 238$.

**32**

$$(x^3)^3 + ax^3 y^2 = u^2 \qquad (1)$$

Θέτομεν $a = 5$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $(x^3)^3 + 5x^3 y^2 = u^2$. Θέτομεν $y = 2x^3$, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται $21x^9 = u^2$. Θέτομεν $u = 7x^4$, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις εἶναι $21x^9 = 49x^8$, ἐξ οὗ $x = \left(2 + \frac{1}{3}\right)$, $y = \frac{686}{27}$.

**33**

$$(x^3)^3 - ax^3 y^2 = u^2 \qquad (1)$$

Θέτομεν $\alpha = 3$, ὁπότε (1) γράφεται $(x^3)^3 - 3x^3 y^2 = u^2$. Θέτομεν $y = \frac{1}{2} x^3$, ὁπότε ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως εἶναι $\frac{1}{4} x^9 = u^2$. Θέτομεν $u = nx^4$, ἔστω $u = x^4$, ὁπότε λαμβάνομεν $\frac{1}{4} x^9 = x^8$, ἐξ οὗ $x = 4$, $y = 32$.

(Ὁ Διόφαντος ὑπενθυμίζει ὅτι ἡ μέθοδος εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὸν τύπον αὐτὸν τῶν προβλημάτων, ὅπως λόγου χάριν :

$(x^2)^2 + \alpha x^2 y^3 = u^2$, $(x^2)^3 + bx^2 y^3 = u^2$, $(x^3)^2 + cx^3 y^2 = u^2$).

**34**

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = u^2 \\ x^3 - y^2 = v^2 \end{cases} \quad (1)$$

Θέτομεν $y^2 = 4x^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $\begin{cases} x^3 + 4x^2 = u^2 \\ x^3 - 4x^2 = v^2 \end{cases}$

ἐξ οὗ $8x^2 = u^2 - v^2$. Θέτομεν $u - v = 2x$, ὁπότε $v = x$ καὶ $x^3 - 4x^2 = x^2$, ἐξ οὗ $x^3 = 5x^2$, $x = 5$ καὶ $u + v = 4x$, ὁπότε $u = 3x$, ἐξ οὗ $x^3 + 4x^2 = 9x^2$, ἐξ οὗ $x^3 = 5x^2$ καὶ $x = 5$, $x^3 = 125$, $y^2 = 100$.

Ἄλλως τὸ αὐτό. Ὄχι διπλοϊσότης.

Θέτομεν $u = px$ καὶ $v = qx$, ὁπότε λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως

$$\begin{cases} x^3 + 4x^2 = p^2x^2 \\ x^3 - 4x^2 = q^2x^2 \end{cases} \text{ ἐξ οὗ } \begin{matrix} x = p^2 - 4 \\ x = q^2 + 4. \end{matrix}$$

Πρέπει νὰ ἔχωμεν $p^2 - 4 = q^2 + 4$, τουτέστιν $p^2 - q^2 = 8$ μὲ $p > 2$, ὁπότε εὑρίσκομεν $p = \frac{q}{2}$ καὶ $q = \frac{7}{2}$, ὁπότε $x = \left(16 + \frac{1}{4}\right)$, $y = \left(32 + \frac{1}{2}\right)$.

**35**

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = u^2 \\ x^2 - y^3 = v^2 \end{cases} \quad (1)$$

Θέτομεν $x^2 = 4y^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\begin{cases} 4y^2 + y^3 = u^2 \\ 4y^2 - y^3 = v^2. \end{cases}$ (2)

Ἐὰν λάβωμεν $u = py$ καὶ $v = qy$ θὰ ἔχωμεν $y^3 = (p^2 - 4)\, y^2$ καὶ $y^3 = (4 - q^2) y^2$, ἐξ οὗ $y\,(p^2 - 4) = (4 - q^2)$. Πρέπει λοιπὸν $p^2 - 4 = 4 - q^2$, τουτέστι $p^2 + q^2 = 8$. Μὲ $p > 2$ καὶ $q < 2$ εὑρίσκομεν $p^2 = \left(7 + \frac{21}{25}\right)$ καὶ $q^2 = \frac{4}{25}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$\begin{cases} 4y^2 + y^3 = \frac{196}{25}\, y^2, \text{ ἐξ οὗ } y = \left(3 + \frac{21}{25}\right), \\ 4y^2 - y^3 = \frac{4}{25}\, y^2, \text{ ἐξ οὗ } y = \left(3 + \frac{21}{25}\right) \end{cases}$$

καὶ τέλος $y = \left(3 + \frac{21}{25}\right)$, $x = \frac{192}{25}$.

**36**

$$\begin{cases} x^3 + ax^2 = u^2 \\ x^3 - bx^2 = v^2 \end{cases} \quad \text{ἔστω} \quad \begin{cases} x^3 + 4x^2 = u^2 \\ x^3 - 5x^2 = v^2 \end{cases} \tag{4}$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $u^2 - v^2 = 9x^2$. Ἀναζητοῦμεν δύο ἀριθμοὺς $v_1$ καὶ $v_2$, ὥστε $u_2^1 - v_1^2 = 9$. Εὑρίσκομεν $u_1^2 = 25$, $u_1 = 5$ καὶ $v_1^2 = 16$, $v_1 = 4$.

Θέτομεν $\begin{cases} x^3 + 4x^2 = 25x^2, & \text{ἐξ οὗ} \quad x = 21 \\ x^3 - 5x^2 = 16x^2, & \text{ἐξ οὗ} \quad x = 21 \end{cases}$

(Ὁ Διόφαντος ὑπενθυμίζει ὅτι δυνάμεθα ἐπίσης νὰ λάβωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x^3 + 5x^2 = u^2 \\ x^3 - 4x^2 = v^2 \end{cases} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x = 20$$

**37**

$$\begin{cases} x^3 + ax^2 = u^2 \\ x^3 + bx^2 = v^2 \end{cases} \quad \text{ἔστω} \quad \begin{cases} x^3 + 5x^2 = u^2 \\ x^3 + 10x^2 = v^2 \end{cases} \tag{2}$$

Ἐὰν θέσωμεν $u^2 = p^2x^2$ καὶ $v^2 = q^2x^2$, θὰ ἔχωμεν $x = p^2 - 5$ καὶ $x = q^2 - 10$ (Ὁ Διόφαντος ὀνομάζει τὰς πράξεις αὐτάς, ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματος).

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχωμεν $p^2 - 5 = q^2 - 10$, τουτέστι $p^2 + 5 = q^2$.

Εὑρίσκομεν $\quad p^2 = \left(53 + \frac{7}{9}\right)$ καὶ $p = \left(7 + \frac{1}{3}\right)$,

$$q^2 = \left(58 + \frac{7}{9}\right) \quad \text{καὶ} \quad q = \left(7 + \frac{2}{3}\right).$$

Θέτομεν $\begin{cases} x^3 + 5x^2 = \left(53 + \frac{7}{9}\right)x^2, & \text{ἐξ οὗ} \quad x = \left(48 + \frac{7}{9}\right) \\ x^3 + 10x^2 = \left(58 + \frac{7}{9}\right)x^2, & \text{ἐξ οὗ} \quad x = \left(48 + \frac{7}{9}\right). \end{cases}$

**38**

$$\begin{cases} x^3 - ax^2 = u^2 \\ x^3 - bx^2 = v^2 \end{cases} \quad \text{ἔστω} \quad \begin{cases} x^3 - 5x^2 = u^2 \\ x^3 - 10x^2 = v^2 \end{cases} \tag{1}$$

Ἐὰν τεθῇ $u = px$ καὶ $v = qx$, πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν οἱ $p$ καὶ $q$ ὥστε $p^2 - q^2 = 5$. Εὑρίσκεται $p^2 = 9$, $q^2 = 4$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 = 9x^2, & \text{ἐξ οὗ} \quad x = 14 \\ x^3 - 10x^2 = 4x^2, & \text{ἐξ οὗ} \quad x = 14. \end{cases}$$

**39**

$$\begin{cases} ax^2 - x^3 = u^2 \\ bx^2 - x^3 = v^2 \end{cases} \quad \text{ἔστω} \quad \begin{cases} 3x^2 - x^3 = u^2 \\ 7x^2 - x^3 = v^2 \end{cases} \tag{1}$$

Θέτοντες $u = px$, $v = qx$ λαμβάνομεν $\begin{cases} 3x^2 - x^3 = p^2x^2 \\ 7x^2 - x^3 = q^2x^2 \end{cases}$

ἐξ οὗ $\begin{cases} 3x^2 = p^2x^2 + x^3 \\ 7x^2 = q^2x^2 + x^3 \end{cases}$ ἐξ οὗ $\begin{cases} (3 - p)^2x^2 = x^3 \\ (7 - q)^2x^2 = x^3. \end{cases}$

9

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει νὰ εὑρεθοῦν οἱ p καὶ q τοιοῦτοι, ὥστε $5-p^2=7-q^2$, δηλαδὴ $q^2=4+p^2$, τοιοῦτοι, ὥστε $q^2<7$ καὶ $p^2<3$, ὁπότε $p^2=\left(2+\frac{1}{4}\right)$, $q^2=\left(6+\frac{1}{4}\right)$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) θὰ ἔχωμεν $x=\frac{3}{4}$.

**40**

$$\begin{cases} (x^2)^2+y^3=u^2 \\ (x^2)^2-y^3=v^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ $x^2=4Z^2$ καὶ $y=4Z$, ἡ (1) γράφεται

$$\begin{cases} 16Z^4+64Z^3=u^2 \\ 16Z^4-64Z^3=v^2 \end{cases}$$

Θέτοντες $u=pZ^2$ καὶ $v=qZ^2$ λαμβάνομεν $\begin{cases} 16Z^4+64Z^3=p^2Z^4 \\ 16Z^4-64Z^3=q^2Z^4 \end{cases}$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $p^2-16=16-q^2$ καὶ $p>4$, $q<4$, ὁπότε εὑρίσκομεν

$p^2=\left(31+\frac{9}{25}\right)$ καὶ $q^2=\frac{16}{25}$ καὶ

$Z=\frac{1600}{384}=\left(4+\frac{1}{6}\right)$, ἐξ οὗ $x=\left(8+\frac{1}{3}\right)$, $y=\left(16+\frac{2}{3}\right)$.

**41**

$$\begin{cases} x^3+(y^2)^2=u^2 \\ x^3-(y^2)^2=v^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{cases} 64Z^3+16Z^4=u^2 \\ 64Z^3-16Z^4=v^2 \end{cases}$$

Θέτοντες $u=pZ^2$ καὶ $u=qZ^2$, ἐξ οὗ ἡ συνθήκη $p^2-q^2=32$, θὰ ἔχωμεν $p^2=36$ καὶ $q^2=4$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν

$Z=\left(3+\frac{1}{5}\right)$, $y=\left(6+\frac{2}{5}\right)$, $x=\left(12+\frac{4}{5}\right)$.

**42**

$$\begin{cases} (x^3)^3+(y^2)^2=u^2 \\ (x^3)^3-(y^2)^2=v^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Θέτοντες

$x=nZ$, ἔστω $x=2Z$, θὰ ἔχωμεν $x^3=8Z^3$, $x^9=512Z^9$
$y=mZ^2$ ἔστω $y=4Z^2$, θὰ ἔχωμεν $y^2=16Z^4$, $y^4=256Z^8$.

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\begin{cases} 512Z^9 + 256Z^8 = u^2 \\ 512Z^9 - 256Z^8 = v^2 \end{cases}$ (2)

ἐξ οὗ $512Z^8 = u^2 - v^2$.

(Ὁ Διόφαντος ὑπενθυμίζει κατὰ γενικώτερον τρόπον ἢ προηγουμένως, τὰς χρησιμοποιηθείσας μεθόδους, αἵτινες ἐφαρμοζόμεναι εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν δίδουν : (1) μέθοδος διπλοϊσότητος :

Θέτοντες $512Z^8 = (\alpha Z^4)\ (bZ^4)$ θὰ ἔχωμεν $u = \dfrac{\alpha Z^4 + bZ^4}{2}$

$v = \dfrac{\alpha Z^4 - bZ^4}{2}$.

Ἀντικαθιστοῦν εἰς τὴν (2) τὰς τιμὰς τοῦ $u^2$ καὶ $v^2$ καὶ λαμβάνουν ἐξ ἑκάστης τῶν δύο παραστάσεων $512Z = \frac{1}{4}(\alpha + b)^2 - 256$ καὶ οὕτω προσδιορίζουν τὸ Z καὶ ἀκολούθως τὸ x καὶ y.

(2) μέθοδος τῆς ἰσότητος :

Θέτομεν $u = pZ^4$, $v = qZ^4$. Ἐκ τῆς (2) θὰ ἔχωμεν $p^2 - q^2 = \gamma^2 = 512$ καὶ προσδιορίζομεν τὸ p καὶ q ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμάς των εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην παράστασιν τῆς (2) καὶ ἀκολούθως προσδιορίζομεν τὸ Z γνωρίζοντες ὅτι

$\dfrac{y^{2n}}{t^{2m}} = \left(\dfrac{y^n}{t^m}\right)^2$ (2′). Ἐξ οὗ $\dfrac{512Z^9 + 256Z^8}{\gamma^2 Z^8} = \dfrac{512}{\gamma^2} Z + \dfrac{256}{\gamma^2} = u_1^2$

καὶ $\dfrac{512Z^9 - 256Z^8}{\gamma^2 Z^8} = \dfrac{512}{\gamma^2} Z - \dfrac{256}{\gamma^2} = v_1^2$.

Θέτοντες $\gamma^2 = 16$ θὰ ἔχωμεν $32Z + 16 = u_1^2$ καὶ $32Z - 16 = v_1^2$ καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ Z, δηλαδὴ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ $u_1$ καὶ $v_1$, ὥστε $u_1^2 - v_1^2 = 32$.

Ἔστω $\begin{cases} (y^2)^2 + (x^3)^3 = u^2 \\ (y^2)^2 - (x^3)^3 = v^2 \end{cases}$ (3)

Ἡ (3) γράφεται $\begin{aligned} 256\,Z^8 + 512\,Z^9 &= u^2 \\ 256\,Z^8 - 512\,Z^9 &= v^2 \end{aligned}$

ἐξ οὗ $512\,Z^8 = u^2 + v^2$.

Ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ p καὶ τὸ q ὥστε

$$p^2Z^8 + q^2Z^8 = 512Z^2, \quad \text{δηλαδὴ} \quad p^2 + q^2 = 512$$

καὶ εὑρίσκομεν $p^2 = \frac{12544}{25}$, $q^2 = \frac{256}{25}$, ἐξ οὗ $Z = \frac{12}{25}$, $x = \frac{24}{25}$, $y = \frac{576}{625}$.

**43**

(1) $\begin{cases} (x^3)^3 + \alpha(y^2)^2 = u^2 \\ (x^3)^3 - b(y^2)^2 = v^2 \end{cases}$ ἔστω $\begin{cases} (x^3)^3 + \frac{5}{4}(y^2)^2 = u^2 \\ (x^3)^3 - \frac{3}{4}(y^2)^2 = v^2 \end{cases}$

Θέτομεν $y = nx^2$, ἔστω $y = 2x^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\begin{cases} x^9 + 20x^8 = u^2 \\ x^9 + 12x^8 = v^2. \end{cases}$$

Θέτομεν $u = px^4$ καὶ $v = qx^4$.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις τοῦ προβλήματος πρέπει $p^2 = q^2 + 32$. Ὁπότε $p^2 = 36$, $q^2 = 4$. (Ὁ Διόφαντος ὑπενθυμίζει ὅτι ἂν ἡ συνθήκη αὕτη ἔχει δοθῇ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, τώρα πρέπει νὰ ἐργασθῶμεν διὰ τῆς συνθέσεως καὶ οὕτω ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς διὰ $p^2$ καὶ $q^2$ καὶ προσδιορίζοντες $x = 16$, $x^3 = 4096$, $y = 262\,144$
λαμβάνομεν τέλος $(x^3)^3 = (y^2)^2$, ἐξ οὗ

$$\begin{cases} (y^2)^2 + \frac{5}{4}(y^2)^2 = \frac{9}{4}(y^2)^2, & \text{ὅπερ εἶναι τετράγωνον} \\ (y^2)^2 - \frac{3}{4}(y^2)^2 = \frac{1}{4}(y^2)^2, & \text{ὅπερ εἶναι τετράγωνον.} \end{cases}$$

## 44

$$(1)\quad \begin{cases} (x^3)^3 + \alpha(y^2)^2 = u_1^2 \\ (x^3)^3 + b(y^2)^2 = v_1^2, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} (x^3)^3 - \alpha(y^2)^2 = u_2^2 \\ (x^3)^3 - b(y^2)^2 = v_2^2 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha(y^2)^2 - (x^3)^3 = u_3^2 \\ b(y^2)^2 - (x^3)^3 = v_3^2 \end{cases}$$

1) Θέτομεν $\alpha = 3$, $b = 8$, $y = 2x^2$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\begin{cases} (x^3)^3 + 48x^8 = u_1^2 \\ (x^3)^3 + 128x^8 = v_1^2 \end{cases} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \begin{matrix} x + 48 = t_1^2 \\ x + 128 = t_2^2 \end{matrix} \qquad (4).$$

Ἀναζητοῦμεν τὸν x, ὅστις ἐπαληθεύει τὴν (4) καὶ εὑρίσκομεν $x = 16$, $x^3 = 4096$, $y^2 = 262\,144$ καὶ $(x^3)^3 = (y^2)^2$, ἐξ οὗ

$$(y^2)^2 + 3(y^2)^2 = 4(y^2)^2, \quad \text{τετράγωνος}$$
$$(y^2)^2 + 8(y^2)^2 = 6(y^2)^2, \quad \text{τετράγωνος}$$

2) Ὅπως προηγουμένως θέτομεν $y_1^2 = 4x_1^4$, ὁπότε ἡ (2) γράφεται

$$\begin{cases} x_1^9 - 48x_1^8 = u_2^2 \\ x_1^9 - 128x_1^8 = v_2^2, \end{cases} \quad \text{ἐξ οὗ}$$

$$\begin{cases} x_1 - 48 = Z_1^2 \\ x_1 - 128 = Z_2^2 \end{cases} \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x_1 = 192 = 12x, \quad \text{ἐξ οὗ}$$

$$\frac{x_1}{x} = 12, \quad \frac{x_1^2}{x^2} = 144, \quad \frac{x_1^3}{x^3} = 1728, \quad \frac{(x_1^3)^3}{(x^3)^3} = (1728)^3$$

καὶ

$$\frac{y^1}{y} = 144, \quad \frac{y_1^2}{y^2} = (144)^2, \quad \frac{(y_1^2)^2}{(y^2)^2} = (144)^2.$$

3) $\begin{cases} 48x^8 - x^9 = u_3^2 \\ 128x^8 - x^3 = v_3^2 \end{cases}$ ἐξ οὗ $\begin{cases} 48 - x = w_1^2 \\ 128 - x = w_2^2 \end{cases}$

Ἀναζητοῦντες τὸν x, ὅστις ἐπαληθεύει τὰς δύο αὐτὰς παραστάσεις, εὑρίσκομεν:

$$x = 47, \quad x^3 = 103\,823, \quad y = 4\,418, \quad y^2 = 19\,518\,724.$$

(Παρατήρησις τοῦ Roshdi Rashed: Ὁ Διόφαντος, πράγματι, λύει τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Δοθέντων δύο ἀκεραίων α καὶ b, νὰ εὑρεθοῦν οἱ x, y, $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, u, v, $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$, τοιοῦτοι, ὥστε:

$$\begin{cases} (x^3)^3 + \alpha\,(y^2)^2 = u^2 \\ (x^3)^3 + b\,(y^2)^2 = v^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_1^3)^3 - \alpha\,(y_1^2)^2 = u_1^2 \\ (x_1^3)^3 - b\,(y_1^2)^2 = v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\,(y_2^2)^2 - (x_2^3)^3 = u_3^2 \\ b\,(y_2^2)^2 - (x_2^3)^3 = v_3^2). \end{cases}$$

«Τέλος τοῦ βιβλίου 4 τοῦ ἔργου τοῦ Διοφάντου: Περὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων καὶ τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 44 προβλήματα».

## Λέσβος

*Πατρὶς Ἀλκαίου ὁσίας τε Σαπφοῦς,*
*ἣν πρὸ πασῶν Ποντογένει' ἐτίμα*
*τῶν ἐν Αἰγαίοις πελάγεσσι χωρῶν,*
*Λέσβος ἀγανή,*

*Σῶν μὲν ἐκ ναπῶν ἔτι νῦν παλαιὰ*
*ἔκ τ' ἐλαιώνων κιθάρα μελῳδεῖ,*
*ὅν τε δελφὶς δεῦρο σέσωκεν, οὐ τέ-*
*θνακεν Ἀρίων.*

*Τίς δὲ τοὺς Μουσῶν Χαρίτων τε βωμοὺς*
*ἀνθινοῖς κοσμεῖ στεφάνοις ἐρήμους;*
*πηνίκ' εὐφρόνων θίασοι κορῶν νε-*
*ῶσιν ἑορτήν;*

W. KUCHENMÜLLER STUTTGART

# ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Σελὶς | 32 | σημ. | 1 | στίχ. | 1 | ἀντὶ | μοὶ γραπτέον | μοι |
| » | 33 | | | » | 12 | » | Wochenschrif | » Wochenschrift |
| » | 33 | » | 8 | » | 1 | » | Nuchlass | » Nachlloi |
| » | 35 | | | » | 16 | » | ἅπαρ | » ἅπερ |
| » | 35 | | | » | 20 | | ἡ λεξις θεμέλια | νὰ διαγραφῇ |
| » | 36 | | | » | 27 | » | ἰδιαιτέρας | » ἰδιαιτέρας |
| » | 35 | | | » | 29 | » | διάλειμα | » διάλειμμα |

Τὸ διακοσμητικὸν τοῦτο πρόγραμμα συνετελέσθη εἰς τὸ κτήριον τοῦ Ἰνστιτούτου μετὰ τῶν ἐν τῷ ἐσωτερικῷ ἐπιγραφῶν

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| » | 44 | στίχ. | 12 | ἀντὶ | Voge)l | γραπτέον | Vogel |
| » | 44 | » | 16 | » | ἐκδ. | » | ἔκδ |
| » | 44 | » | 18 | » | 40,40 | » | 40,11. |
| » | 44 | » | 18 | » | Pistelli | » | De Falco. |
| » | 44 | » | 19 | » | Notvin | » | Norvin. |
| » | 44 | » | 19 | » | Pistelli | » | Pistelli. |
| » | 45 | » | 27 | » | τὸνλοιπὸν | » | τὸν λοιπὸν |
| » | 46 | » | 6 | » | σχέσι$^{\nu}$ | » | σχέσιν |
| » | 49 | » | 21 | » | wehrli | » | wehrli : |
| » | 49 | » | 27 | » | 386) | » | 386) : |
| » | 49 | » | 28 | » | ὑπολαμβάνει | » | ὑπολαμβάνει» |
| » | 50 | » | 47 | » | 1957 | » | 1957, |
| » | 52 | » | 5 | » | προεξένησεν | » | προξένησε. |
| » | 53 | » | 29 | » | ψυχὴν | » | ψυχήν) |
| » | 53 | » | 29 | » | νεκρῶν) ; | » | νεκρῶν ; |
| » | 55 | » | 19 | » | Μουσικῆς | » | μουσικῆς |
| » | 55 | » | 38 | » | 61 A | » | 61 A : |
| » | 55 | » | 39 | » | Festugière | » | Festugière A. J: |
| » | 55 | » | 39 | » | IV | » | IV. |
| » | 55 | » | 48 | » | Fythagorean | » | Pythagorean |
| » | 58 | » | 19 | » | animam | » | animam) |
| » | 58 | » | 19 | » | dixerunt) | » | dixerunt. |

Σελ. 125, προβλ. 21, ἀντὶ $\left(10+\frac{1}{2}\right)$ νὰ τεθῇ $\left(40+\frac{1}{2}\right)$

Σελ. 126. Τὸ πρόβλ. 24 νὰ γίννῃ 25. Εἰς τὸν τελευταῖον στίχον τούτου ἀντὶ u νὰ τεθῇ $u^2$. Τὸ ἐλλεῖπον πρόβλημα 24 εἶναι : $(x^2)^2-(y^2)^2=u^3$. Θέτομεν $x^2=4y^2$, ὁπότε $15y^4=u^3$. Θέτομεν $u=5y$, ὁπότε $3y^3=u^2=25y^2$, ἐξ οὗ $3y=25$ καὶ $y=\left(8+\frac{1}{3}\right)$, $x=\left(16+\frac{2}{3}\right)$, $u=\frac{125}{3}$.

Εἰς τὸ πρόβλ. 31, ἀντὶ $x=238$ νὰ τεθῇ $x=288$. Εἰς τὸ πρόβλ. 34, τελευταῖος στίχος, ἀντὶ $p=\frac{q}{2}$ νὰ τεθῇ $p=\frac{9}{2}$. Εἰς τὸ πρόβλ. 36 δεξιά, ἀντὶ (4) νὰ

τεθῆ (1) καὶ εἰς τὸ πρόβλ. 37 δεξιὰ ἀντὶ (2) τὰ τεθῆ (1). Εἰς τὸ πρόβλ. 39, ἀντὶ $(3-p)^2$ νὰ τεθῆ $(3-p^2)$ καὶ [ἀντὶ $(7-q)^2$ νὰ τεθῆ $(7-q^2)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Σελ. | 129 | στίχ. | 4 | ἀντὶ $v_1$ καὶ $v_2$ | νὰ τεθῆ $u_1$ καὶ $v_1$ |
| » | 129 | » | 5 | » $u_2^1$ | νὰ τεθῆ $\eta_1^2$. |
| » | 132 | » | 3 | » $x^9+12x^8$ | νὰ τεθῆ $x^2-12x^8$. |
| » | 133 | » | 2 | » $128x^8 - x^3$ | νὰ τεθῆ $128x^8-x^9$. |
| » | 225 | » | 15 | » τ'ἀνάπαλιν | γραπτέον τἀνάπαλιν |
| » | 226 | » | 6 | » ψελλὸς | » Ψελλὸς |
| » | 226 | » | 31 | » ὡς ἡ | » ὡς |
| » | 226 | » | 32 | » ὁποία | » ἡ ὁποία |
| » | 232 | » | 8 | κάτωθεν ἀντὶ ἀρότοιά τε | γραπτέον ἀρότοιό τε |
| » | 254 | » | 3 | | ἡ λ. δὲν νὰ διαγραφῆ |
| » | 254 | » | 4 | ἀντὶ πλὴν | γραπτέον μετά, ἤτοι |

Διευθύνσεις κατὰ τὸ ἄρθρον 6 § 1 τοῦ Α. Ν. 1092/1938
Ὑπεύθυνος διὰ τὴν σύνταξιν Π. Κ. Γ ε ω ρ γ ο ῦ ν τ ζ ο ς, κατοικία Σεμέλης 30—Ἀθῆναι 615
Τυπογράφος Εἰρ. Γ. Ξ ά ν θ η Γρ. Αὐξεντίου 3—Ἀθῆναι

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΘ' 1977

ΤΟΜΟΣ **29** (ΤΕΥΧΗ 57/58)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1977

# ΑΒΛΕΠΤΗΜΑΤΑ

## ΕΙΣ ΔΙΟΓΕΝΗΝ ΛΑΕΡΤΙΟΝ

Εἰς τοὺς βίους τῶν φιλοσόφων τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου τὸ κεφάλαιον ΚΡΑΤΗΣ, Ἀσκώνδου Θηβαῖος (VI 85) τελειώνει μὲ τὴν φράσιν «Μαθηταὶ δ' αὐτοῦ». Ἀκολουθεῖ τὸ κεφάλαιον ΜΗΤΡΟΚΛΗΣ καὶ τὸ κεφάλαιον ΙΠΠΑΡΧΙΑ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ κεφαλαίου ΙΠΠΑΡΧΙΑ (VI 98) R. D. Hicks, W. Heinemann, (Loeb), London 1950 καὶ H. S. Long, Oxford 1964, γράφεται : (VI 98) ἀλλὰ καὶ εἰπόντος αὐτῇ, αὕτη ἐστιν ἡ τὰς παρ' ἱστοῖς ἐκλιποῦσα κερκίδας ; «ἐγώ», φησίν, «εἰμὶ Θεόδωρε· ἀλλὰ μὴ κακῶς σοι δοκῶ βεβουλεῦσθαι περὶ αὐτῆς, εἰ, τὸν χρόνον ὃν ἔμελλον ἱστοῖς προσαναλώσειν, τοῦτον εἰς παιδείαν κατεχρησάμην ;» καὶ ταῦτα μὲν καὶ ἄλλα μυρία τῆς φιλοσόφου. (sc. Ἱππαρχίας).

Φέρεται δὲ τοῦ Κράτητος βιβλίον Ἐπιστολαί, ἐν αἷς ἄριστα φιλοσοφεῖ, τὴν λέξιν ἔστιν ὅτε παραπλήσιος Πλάτωνι. γέγραφε καὶ τραγῳδίας ὑψηλότατον ἐχούσας φιλοσοφίας χαρακτῆρα, οἷόν ἐστι κἀκεῖνο·

> οὐχ εἷς πάτρας μοι πύργος, οὐ μία στέγη,
> πάσης δὲ χέρσου καὶ πόλισμα καὶ δόμος
> ἕτοιμος ἡμῖν ἐνδιαιτᾶσθαι πάρα.

Ἐτελεύτησε δὲ γηραιὸς καὶ ἐτάφη ἐν Βοιωτίᾳ.

Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τμῆμα «Φέρεται δὲ τοῦ Κράτητος βιβλίον Ἐπιστολαὶ — ἐτελεύτησε δὲ γηραιὸς καὶ ἐτάφη ἐν Βοιωτίᾳ» ἀνήκει εἰς τὸ κεφάλαιον ΚΡΑΤΗΣ καὶ ὄχι εἰς τὸ κεφάλαιον ΙΠΠΑΡΧΙΑ, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει περιληφθῆ ἐκ παραδρομῆς.

## ERRORS

in Diogenis Laertii, Vitae Philosophorum (R. D. Hics, W. Heinemann (Loeb), London 1950 and H. S. Long, Oxonii 1964).

In both editions, the chapter CRATES (VI 85), ends «Μαθηταὶ δ' αὐτοῦ, we kom now to his pupils». The next chapter is METROLLES and comes HIPPARCHIA (VI 96), which ends as follows : «Φέρεται δὲ τοῦ Κράτητος βιβλίον Ἐπιστολαὶ — ἐτελεύτησε δὲ γηραιὸς καὶ ἐτάφη ἐν Βοιωτίᾳ, «These is current a work of Crates entitled Epistles — He died in oltd age, and was buried in Boeotia».

It is avident, that this section «There is current — in Boeotia» belongs to the chapter Crates and no to the chapter Hipparchia.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΙΣ ΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΟΥ

Κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους ὁ διακεκριμένος Γερμανὸς Ἑλληνιστὴς Kurt von Fritz ἐδημοσίευσε πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας»[1] ἔνθα ὑποστηρίζει, ὅτι τὴν ἀσυμμετρίαν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἀνεκάλυψεν ὁ Πυθαγόρειος Ἵππασος[2]. Πρὸς τοῦτο ἐπικαλεῖται τὰς ἑξῆς τέσσαρας πληροφορίας:

1. Ἀνώνυμον σχόλιον εἰς τὸν Φαίδωνα τοῦ Πλάτωνος, ἀναφερόμενον εἰς ἔργον περὶ μουσικῆς τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Ἀριστοξένου, ὅπου δηλοῦται, ὅτι πρῶτος ὁ Ἵππασος ἐξετέλεξε πείραμα ἀκουστικῆς μὲ μεταλλικοὺς δίσκους τῆς αὐτῆς διαμέτρου,

2. Πληροφορίαν τοῦ Βοηθίου (480—524 μ. Χ.), καθ' ἣν ὁ Ἵππασος ἠσχολήθη μὲ τὴν θεωρίαν κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος,

3. Πληροφορίαν τοῦ Ἰαμβλίχου, καθ' ἣν ὁ Ἵππασος ἠσχολήθη μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ

4. Πληροφορίαν τοῦ Ἰαμβλίχου, καθ' ἣν ὁ Ἵππασος ἦτο ἐπίσης ὁ πρῶτος ὅστις ἐσχεδίασε καὶ κατεσκεύασε τὸ εἰς σφαῖραν ἐγγραφόμενον κανονικὸν δωδεκάεδρον καὶ ὅτι ἐδημοσίευσε τοῦτο παρὰ τὰς ἀπαγορευτικὰς διατάξεις τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς[3].

Ἐν συνεχείᾳ προσθέτει ὁ Kurt von Fritz, ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων πληροφοριῶν ἡ πρώτη καὶ ἡ τετάρτη ἔχουσιν ἰδιαιτέραν σπουδαιότητά τινα μόνον ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν πρώτην.

Καὶ αἱ τέσσαρες ἀνωτέρω πληροφορίαι εἶναι ἐλλιπεῖς. Διότι ἀληθὲς εἶναι ὅτι πρῶτος ὁ Πυθαγόρας ἐξετέλεσε πειράματα μὲ τὰ ἀγγεῖα καὶ τὸ μονόχορδον, ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος[4], ὅστις γράφει:

*«τοὺς δὲ συμφωνοῦντας φθόγγους ἐν λόγοις τοῖς πρὸς ἀλλήλους πρῶτος ἀνευρηκέναι δοκεῖ Πυθαγόρας ..... ταύτας δὲ τὰς συμφωνίας οἱ μὲν ἀπὸ βαρῶν ἠξίουν λαμβάνειν, οἱ δὲ ἀπὸ μεγεθῶν, οἱ δὲ ἀπὸ κινήσεων [καὶ ἀριθμῶν], οἱ δὲ ἀπὸ ἀγγείων [καὶ μεγεθῶν]. Λᾶσος δὲ ὁ Ἑρμιονεύς, ὥς φασι, καὶ οἱ περὶ τὸν Μεταποντῖνον Ἵππασον Πυθαγορικὸν ἄνδρα συνέπεσθαι τῶν κινήσεων τὰ τάχη καὶ τὰς βραδυτῆτας δι' ὧν αἱ συμφωνίαι ....., ἐν ἀριθμοῦ ἡγούμενος* (sc. *Πυθαγόρας*) *λόγους τοιούτους ἐλάμβανεν ἐπ' ἀγγείων».*

Ὁ Kurt von Fritz δὲν ἔλαβεν ὑπ' ὄψει τὸ κείμενον τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, σελ. 56, 9—10 καὶ 59, 11—12, ὅπου ἀναφέρεται, ὅτι πρῶτος ἐξετέλεσε τὰ σχετικὰ πειράματα ὁ Πυθαγόρας καὶ ὄχι ὁ Ἵππασος. Ὅθεν ἡ πρώτη ἐκ τῶν τεσσάρων ἀνωτέρω πληροφοριῶν εἶναι ἐλλιπὴς καὶ κατὰ συνέπειαν ἐξαλείφονται καὶ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 2 καὶ 3 πληροφορίαι, τῶν ὁποίων ἡ ἰσχὺς ἐξαρτᾶται ὑπὸ τοῦ Kurt von Fritz ἐκ τῆς πρώτης πληροφορίας.

---

1. Die Entdeckung der Inkommensurabilität, in O. Becker, Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, S. 271—307.

2. Ἵππασος ὁ Κροτωνιάτης ἢ Μεταποντῖνος ἢ Συβαρίτης. Ἰάμβλιχος Περὶ Πυθαγορικοῦ βίου, p. 47, 3 καὶ 144, 20, Deubner.

3. Διὰ τὰς 4 πληροφορίας ἴδε καὶ H. Diels, Fr. Vorsokr. I 18 [8].

4. Theon Smyrnaeus, Expos. rer. mathem., 56, 9—59, 12, E. Hiller.

Ἀλλὰ καὶ ἡ τετάρτη πληροφορία, ἐκ τῶν ἀνωτέρω, εἶναι ἐλλιπής, διότι ὁ Ἰάμβλιχος[5] λέγει τὰ ἑξῆς :

*«Περὶ δ' Ἱππάσου λέγουσι, ὡς ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων, διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρῶτος σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα πενταγώνων ἀπόλοιτο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δὲ λάβοι ὡς ⟨εὑρών⟩, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι».*

Ὁ Kurt von Fritz δὲν ἔλαβεν ὑπ' ὄψει τὴν ἀνωτέρω φράσιν *«δόξαν δὲ λάβοι ὡς ⟨εὑρών⟩, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι».*

Μαρτυρίαν ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψε τὴν ἀσυμμετρίαν ἔχομεν τοῦ Πρόκλου[6] ὁ ὁποῖος γράφει :

*«ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν».*

Ὅτι εἰς ἓν ἐκ τῶν χειρογράφων ὑπάρχει ἡ φράσις *«τῶν ἀνὰ λόγον»* ἀντὶ τῶν *«ἀλόγων»*, τὴν ὁποίαν H. Diels ἔχει περιλάβει εἰς τοὺς Vorsokratiker I 14 [4] p. 98, τοῦτο δὲν μεταβάλλει τὴν πληροφορίαν τοῦ Πρόκλου, διότι εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ φράσις «τῶν ἀνὰ λόγον», οὐδεμίαν ἔννοιαν ἔχει ἐνταῦθα καὶ εἶναι πταῖσμα τοῦ ἀντιγραφέως. Ὁ αὐτὸς Πρόκλος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας[7], ἐκτὸς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἀνεκάλυψε καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$. Αἱ ἀνακαλύψεις αὐταὶ ὑποδηλοῦσι καὶ τὸ μέγεθος τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων κατὰ τὸν 6ον καὶ 5ον αἰῶνα π. Χ., ἀφοῦ ὁ βίος τοῦ Πυθαγόρου τοποθετεῖται ἀπὸ 580—480 π. Χ. κατὰ τὰς περισσοτέρας μαρτυρίας.

Ὅτι ἄλλαι πληροφορίαι ἀποδίδουσιν εἰς τὸν Θεαίτητον[8] τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἐγγραφὴν εἰς σφαῖραν τοῦ ὀκταέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ τὴν σπουδὴν τῶν ἀσυμμέτρων γενικῶς, τὴν περιεχομένην εἰς τὸ 10 βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τοῦτο δὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς πληροφορίας τοῦ Πρόκλου, ὅτι πρῶτος εὑρὼν τὴν ἀσυμμετρίαν εἶναι ὁ Πυθαγόρας.

Ὁ Πλάτων ἀναφέρει εἰς τὸν Θεαίτητον (147 D 2 — 148 B 2), ὅτι κατ' ἀνακοίνωσιν τοῦ Θεαιτήτου, πρὸς τὸν διαλεγόμενον Σωκράτη, ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἀπεδείκνυε τὴν ἀσυμμετρίαν τῶν παραστάσεων $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ .... $\sqrt{17}$. Τοῦτο ὑποδηλοῖ, ὅτι πολὺ πρὸ τῆς συνομιλίας ἐκείνης, ἡ ὁποία τοποθετεῖται περὶ τὸ 420 π. Χ., εἶχε γίνει ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀσυμμετρίας τῆς $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία προέκυψεν ὡς πρόβλημα μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ τετραγώνου καὶ ὄχι τοῦ πενταγώνου. Τὸ τετράγωνον προηγεῖται τοῦ πενταγώνου, κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν.

Ἐκ τῆς σπουδῆς κατὰ τὴν κατασκευὴν τετραγώνων προέκυψεν ἡ θεωρία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ἀναφέρουσιν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, ὁ Ἰάμβλιχος καὶ ὁ Πρόκλος[9]. Διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἀπο-

---

5. Ἰάμβλ. Περὶ τῆς Κοινῆς Μαθημ. Ἐπιστήμης. De comm. mathem. scient. 216. Festa 77, 18—24.

6. Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην 65, 15—21. Friedlein.

7. Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην 426, 1—9 καὶ 428, 7—21. Friedlein.

8. Εὐκλείδης, Elem. V 654. 1. Heiberg. καὶ V, 2 p. 291, 1—9, Heiberg - Stamatis.

9. Θέων Σμυρναῖος, 42, 10—45, 8, Hiller. Ἰάμβλιχος, Εἰς Νικομ. Ἀριθ. Εἰσ. 128—130, Pistelli 91, 21—93, 7. Πρόκλος, Εἰς Πολιτείαν Πλάτ. II σελ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. Kroll.

δεικνύεται καὶ γεωμετρικῶς [10] ἡ ἀσυμμετρία τῆς $\sqrt{2}$. Δὲν εἶναι γνωστὸν πῶς ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψε τὴν ἀσυμμετρίαν. Ἀριθμητικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀσυμμετρίας τῆς $\sqrt{2}$ μνημονεύεται παρὰ τοῦ Ἀριστοτέλους [11] καὶ τοῦ Εὐκλείδου [12].

Ἐνδιαφέρουσαν πραγματείαν περὶ τοῦ τρόπου τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ἐδημοσίευσεν ὁ H. J. Wasckies [13], ὁ ὁποῖος ἰσχυρίζεται, ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἀνήκει εἰς τὰ πρῶτα ἐπιτεύγματα τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν.

Ὁ Kurt von Fritz στηρίζει τὴν γνώμην του, ὅτι ἡ ἀσυμμετρία ἀπεδείχθη πολὺ βραδύτερον τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου καὶ εἰς ἐπιστολὴν πρὸς αὐτὸν τοῦ O. Neugebauer, ὅστις λέγει, ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας θὰ ἔγινε τὸ ἐνωρίτερον περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 4ου αἰ. π. Χ., διότι τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικὰ κατὰ τὸν 5ον αἰῶνα ἦσαν μηδαμινὰ καὶ εὐτελῆ. Δηλαδή, ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν ὑψίστων ἐπιτευγμάτων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, ἡ γενομένη κατὰ τὸν 6ον αἰῶνα π. Χ., ὅτε μνημονεύονται ἀποδείξεις μαθηματικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ [14], εἶναι κατὰ τὸν O. Neugebauer μηδαμινὴ καὶ εὐτελής. Ὁ Ἐμμανουὴλ Κάντιος [15] ἔχει ἀντίθετον γνώμην. Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ἐν προκειμένῳ τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ O. Neugebauer, ὅτι καὶ οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον εἰς τὰ Μαθηματικά των ἓν εἶδος ἀποδείξεως [16]. Λησμονεῖ ὁ συγγραφεύς, ὅτι ἡ γνώμη του αὕτη ἀντιβαίνει πρὸς τὸν νόμον τῆς Λογικῆς, τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως (Principium exclusi tertii). Οἱ Βαβυλώνιοι ἢ εἶχον ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικά των ἢ δὲν εἶχον. Ἐνδιάμεσος κατάστασις δὲν ὑπάρχει.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τετραγωνισμὸς τῶν μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου, ἡ τετραγωνίζουσα καμπύλη τοῦ Ἱππίου τοῦ Ἠλείου, τὸ θεώρημα, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (El. 12, 2), τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, καὶ ἄλλαι μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τῶν Ἑλλήνων, γενόμεναι κατὰ τὸν 5ον αἰ. π. Χ. δὲν εἶναι ἀνακαλύψεις εὐτελεῖς καὶ μηδαμιναί. Παρομοίας ἀντιλήψεις περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν ἔχει δημοσιεύσει ὁ O. Neugebauer [17] καὶ ἀλλαχοῦ.

---

10. Otto Toeplitz, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I, S. 2—5, Berlin 1949, Springer, Paul - Henri Michel, De Pythagore à Euclid, Paris 1950, p. 438—441. Εὐ. Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμ. II σ. 8—14, Ἀθῆναι 1953.

11. Ἀριστ. Ἀναλυτικὰ Πρότερα 41α 26, Bekker.

12. Εὐκλ. Στοιχείων 10, Παράρτημα 27.

13. Eine neue Hypothese zur Entdeckung der Inkommensurablen Grössen durch die Griechen, Archiv for History of Exact Scienses, vol. 7, Nr. 5, 1971, p. 325—353, Berlin, Springer.

14. Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην, 157, 10. 250, 20. 299, 1. 352, 14. Friedlein.

15. Imm. Kant, Kritik der reinen Vernunft, Vorrede, von R. Schmidt, Leipzig 1944.

16. O. Neugebauer, Vorgriechische Mathematik I, Berlin 1934, S. 35. 168. 203. Springer.

17. O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra [Studien zur Geschichte der antiken Algebra III] in: Quellen und Studien zur Geschichte d. Mathematik, Astronomie, Physik, B 3, Berlin 1936, S. 258 f. Und Ev. S. Stamatis, Über Euklid den Mathematiker, Das Altertum B 9. 1963. Heft 2. Berlin.

# DIE ENTDECKUNG DER INKOMMENSURABILITÄT DURCH PYTHAGORAS

## ZUSAMMENFASSUNG

Der hervorragende Kenner der altgriechischen Literatur Kurt vonFritz behauptet in einem Beitrag (Fussnote 1), dass die Entdeckung der Inkommensurabilität durch den Pythagoreer Hippasos gemacht wurde. Er stützt seine Meinung auf folgende vier Aussagen : 1) Anonymes Scholion in Plat. Phaedon, nachdem Hippasos als erster ein Experiment mit metallscheiben durchgeführt haben soll. 2) Boethius schreibt ihm eine Theorie der Tonleiter zu. 3) Iamblichos sagt, Hippasos habe sich mit der Theorie der Proportionen und Mittel beschäftigt, und. 4) Nach Iamblichos war Hippasos auch der erste, der den aus 12 regelmässigen Fünfecken bestehenden Kugelförmigen Körper zeichnete oder Konstruierte. Von dieser vier Aussagen sind die erste und die vierte besonders wichtig, während die zweite und dritte von einer gewissen Bedeutung in Verbindung mit der ersten sind, schreibt der Verfasser. Alle vier Aussagen sind mangelhaft, weil : der erste, der akustische Experimente mit metallscheiben gemacht hat, war Pythagoras und nicht Hippasos (F. note 4). Folglich verschwinden auch die Aussagen 2 und 3 deren Gültigkeit von der 1. Aussage abhängt. Die vierte Aussage ist auch mangelhaft, weil - wie Iamblichos schreibt - Hippasos auch als erster - der die konstruktion des regelmässigen dodekahedrons entdeckt hat - erscheinen wollte, während jedoch alles damit zusammenhängende jenem Mann zu verdanken ist, denn so redete man den Pythagoras an (F. note 5).

Zeugnis, dass Pythagoras der Entdecker der Inkommensurabilität ist, gibt Proklos (Fn. 6). Dass es in einem Manuskript der satz ἀνὰ λόγον statt ἀλόγων gibt, stört die Aussage des Proklos nicht, weil der Satz ἀνὰ λόγον hier keinen Sinn hat, und somit klar ist, dass es sich um einen Fehler des Abschreibers handelt. Die Untersuchung des Fünfeckes setzt die Untersuchung des Quadrates voraus. Den geometrischen Beweis der Inkomm. von $\sqrt{2}$ entnimmt man durch die seiten - und Diagonalzahlen (F. n. 9 und 10). Es ist nicht bekannt wie Pythagoras den Beweis der Inkommensurabilität geführt hat.

Der Verfasser stützt seine Meinung, dass die Inkomm. zeitlich nach dem Leben des Pythagoras entdect wurde, auch auf einen Brief O. Neugebauer's der schreibt, dass die griechische Mathematik im 5. Jahrhundert trivial war. Die Entdeckung des Beweises in der Mathematik im 6. Jahrhundert, die eine der höchsten Errungenschaften des menschlichen Geistes ist, ist nach O. Neugebauer trivial. Imm. Kant ist der gegenteiligen Meinung (F. n. 15). Thales von Milet hat im 6. Jahrhundert einpaar geometrische Sätze bewiesen (F. n. 14). Bemerkenswert ist das von O. Neugebauer früher geschriebene, dass die Babylonier in ihrer Mathematik eine Art von Beweise kannten. (F. n. 16). Diese Meinung stösst gegen das Gesetz der Logik, Principium exclusi tertii. Die Babylonier entweder kannten einen Beweis oder nicht. Einen intermediären Zustand gibt es nicht. Ähnliche Auffassungen hat O. Neugebauer auch früher veröffentlicht (F. note 17).

Der Satz Kreise verhalten sich wie die Quadrate über den Durchmessern (Elem. 12, 2), die Quatratur der Mödchen des Hippokrates von Chios, die Quadratrix des Hippias von Elis, das Epanthem von Thymaridas, und viele andere im 5. Jahrundert bewiesene Sätze sind nach O. Neugebauer trivial.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ Λ' 1978

ΤΟΜΟΣ **30** (ΤΕΥΧΗ 59/60)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1978

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Η ΜΟΥΣΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΚΑΙ Ο ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ

Ὁ Ἰάμβλιχος κατήγετο ἐκ τῆς Χαλκίδος τῆς Κοίλης Συρίας, ἦτο δηλ. Σύρος, ἤκμασε δὲ κατὰ τὸν 3—4 αἰ. μ. Χ. Ἐσπούδασεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ὅπου εἶχε καθηγητὴν τὸν μαθηματικὸν καὶ φιλόσοφον Ἀνατόλιον, ὁ ὁποῖος κατὰ τὸ 269 ἔγινεν ἐπίσκοπος Λαοδικείας (τῆς Συρίας). Βραδύτερον ἔσχε καθηγητὴν εἰς τὴν Ῥώμην τὸν Πορφύριον καὶ ἀκολούθως ἵδρυσε φιλοσοφικὴν Σχολὴν εἰς τὴν Ἀπάμειαν τῆς Συρίας. Ὑπῆρξε νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος. Ἔγραψε πολλὰ ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν ὀλίγα. Μεταξὺ αὐτῶν καταλέγονται καὶ τὰ ἑξῆς :

1. Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου (L. Deubner, Λειψία 1937).
2. Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς (H. Pistelli, Λειψία 1894).
3. Περὶ τῆς Κοινῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης (N. Festa, Λειψία 1891).
4. Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς (V. de Falco, Λειψία 1922).

Τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Προτρεπτικὸς εἰς ἀποσπάσματα διασωθὲν ἔργον προέρχεται ἐκ τοῦ Προτρεπτικοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, χωρὶς ὅμως ὁ Ἰάμβλιχος νὰ ἀναφέρῃ ὅτι τὸ ἔργον του αὐτὸ προέρχεται ἐκ τοῦ ἀριστοτελικοῦ ἔργου [1]. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἰαμβλίχου Περὶ τῆς Κοινῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ὁλόκληρον τὸ VI κεφάλαιον προέρχεται ἐκ τῶν διαλόγων τοῦ Πλάτωνος, χωρὶς ὁ Ἰάμβλιχος νὰ ἀναφέρῃ τοῦτο [2].

Ὁ Ἰάμβλιχος, φαίνεται, ὅτι εἶχεν ὑποστῆ τὴν ἐπίδρασιν διδασκαλιῶν τοῦ Χριστιανισμοῦ παρὰ τοῦ διδασκάλου του Ἀνατολίου, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς πραγματείας Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου, ὅπου διαβάζομεν τὰ ἀκόλουθα : ἅπαντα μέντοι ὅσα περὶ τοῦ πράττειν ἢ μὴ πράττειν διορίζουσιν ἐστόχασται πρὸς τὸ θεῖον, καὶ ἀρχὴ αὕτη ἐστί, καὶ ὁ βίος ἅπας συντέτακται πρὸς τὸ ἀκολουθεῖν τῷ θεῷ καὶ ὁ λόγος αὐτὸς ταύτης ἐστὶ τῆς φιλοσοφίας [3]. Εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Ἰάμβλιχος ὁμιλεῖ περὶ θείας προνοίας [4]. Βυζαντινὸς δὲ σχολιαστής, ὁ ὁποῖος βέβαια ἦτο Χριστιανός, σχολιάζων τὴν προηγουμένην πραγματείαν τοῦ Ἰαμβλίχου λέγει : «τοῦτο αἰνιττόμενος ὁ θεῖος Ἰάμβλιχος εἶπεν ὅτι τοῦ ἡνωμένου ἐπ' ἄπειρόν ἐστιν ἡ τομή, ..... ἐπεὶ καὶ πάντα τὰ ὄντα εἴτε νοητὰ εἴτε καὶ αἰσθητὰ κατὰ ἀριθμὸν ὑπὸ τοῦ δημιουργοῦ νοῦ καὶ τῆς ἀρρήτου τούτου σοφίας καὶ τοῦ παναγίου καὶ ζωοποιοῦ αὐτοῦ πνεύματος ἐκτίσθησαν [5]».

Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν του Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Ἰάμβλιχος ἔχει διασώσει σπουδαίας πληροφορίας διὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τὰς ὁποίας δὲν ἀπαντῶμεν εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα [6]. Εἰς μερικὰ

1. Κ. Δ. Γεωργούλη, Ἀριστοτέλης ὁ Σταγιρίτης, Θεσσαλονίκη 1962, σ. 76.

2. Ἐπινομὶς 991 B - D, 986 C - D. Πολιτεία 537 C - D, 527 D - E, 521 C - D, 523 A, 532 D κλπ. (Festa σ. 6, 20 — 27 ὑποσ.).

3. Περὶ Πυθ. βίου 86—88 καὶ τὸ αὐτὸ 137—138, Deubner σελ. 50, 17 καὶ 77, 16.

4. Iamblichus in Nicomachi Arithm. Introd. H. Pistelli, Lipsiae 1894.

5. Pistelli 126 — 127.

6. Ε. Σ. Σταμάτη, Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθημαικῶν, Ἀθῆναι 1976, σελ. 84. Pistelli 62, 18.

ὅμως σημεῖα τῶν συγγραφῶν του ὁ Ἰάμβλιχος παρουσιάζεται ἀνακριβὴς καὶ τὰ σχόλιά του εἶναι ἐσφαλμένα. Ἡ Eva Sachs ὀνομάζει αὐτὸν ἀναξιόπιστον καὶ ἀναληθῆ [7].

Μνημονεύομεν ἀμέσως κατωτέρω σχόλια τοῦ Ἰαμβλίχου εἰς τινας ὁρισμοὺς τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων τοῦ Εὐκλείδου :

«Τοῦ γὰρ ἀρτίου καθ' ὑποδιαίρεσιν τὸ μέν ἐστιν ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ δ' ἀντίζυγον τούτῳ ἀρτιοπέρισσον, ὡσανεὶ ἀκρότητες· μέσον δ' αὐτῶν καὶ οἷον κοινὸν ἀμφοτέρων περισσάρτιον. ὅπερ ἀγνοοῦντες οἱ περὶ τὸν Εὐκλείδην συγκεχυμένως τὸν αὐτὸν οἴονται περισσάρτιόν τε καὶ ἀρτιοπέρισσον εἶναι ..... ὥστε καὶ ἐνθάδε ἡμαρτημένως πάλιν Εὐκλείδης ἀφορίζεται λέγων· «ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπ' ἀρτίου μετρούμενος ἀρτιάκις»..... Ἐπειδὴ δὲ ἐνταῦθα προδηλότερον ἁμάρτημα παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἐστὶ τὸ μὴ διακρίνειν ἀρτιοπέρισσον περισσαρτίου.... λέγει γὰρ οὕτως : «ἀρτιοπέρισσος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος περισσάκις». ὁ δὲ αὐτὸς καὶ περισσάρτιός ἐστι· καὶ γὰρ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρεῖται ἀρτιάκις, οἷον λόγου χάριν ὁ ς'· ἐὰν μὲν γὰρ δὶς τρία λέγομεν, ἀρτιοπέρισσος, ἐὰν δὲ τρὶς δύο περισσάρτιος· πάνυ εὐήθως. Ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν ἀριθμητικῶν τοὺς τρεῖς εἰς ἕνα συγχέει, δουλεύων δηλονότι τῇ τοῦ ὀνόματος ἐμφάσει [8]».

Ἑρμηνεία : «Διότι κατὰ τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ ἀρτίου τὸ μὲν εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ ἀντίστοιχον δὲ τούτου εἶναι ἀρτιοπέρισσον, ὡς ἐὰν εἶναι ἀκρότητες. μέσον δὲ αὐτῶν καὶ ὡς κοινὸν καὶ τῶν δύο εἶναι τὸ περισσάρτιον. Τὸ ὁποῖον ἀγνοοῦντες οἱ περὶ τὸν Εὐκλείδην νομίζουν ὅτι εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς περισσάρτιος καὶ ἀρτιοπέρισσος ..... ὥστε καὶ ἐδῶ ἐσφαλμένως πάλιν ὁ Εὐκλείδης ἀποφαίνεται εἰς τοὺς ὁρισμοὺς λέγων· ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος ἀρτιάκις..... Ἐπειδὴ δὲ ἐδῶ τὸ σφάλμα τοῦ Εὐκλείδου εἶναι φανερώτερον, τὸ νὰ μὴ διακρίνῃ δηλαδὴ τὸν ἀρτιοπέρισσον τοῦ περισσαρτίου .... διότι λέγει τὰ ἑξῆς : ἀρτιοπέρισσος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος περισσάκις. Ὁ αὐτὸς δὲ ἀριθμὸς εἶναι καὶ περισσάρτιος· διότι καὶ ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μετρεῖται ἀρτιάκις, ὅπως λόγου χάριν ὁ 6· διότι ἐὰν μὲν λέγωμεν δύο ἐπὶ τρία εἶναι ἀρτιοπέρισσος, ἐὰν δὲ τρία ἐπὶ δύο εἶναι περισσάρτιος· πάρα πολὺ ἀνοήτως. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ τρίτον τῶν Ἀριθμητικῶν συγχέει ὁ Εὐκλείδης τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς εἰς ἕνα, χρησιμοποιῶν δηλονότι τὴν ἔμφασιν τοῦ ὀνόματος».

Θεωρεῖται πολὺ τολμηρόν, ὅτι ὁ Ἰάμβλιχος ὀνομάζει τὸν Εὐκλείδην ἀνόητον.

Διὰ νὰ γίνῃ φανερὰ ἡ πλάνη τοῦ Ἰαμβλίχου παραθέτομεν τοὺς συναφεῖς ὁρισμοὺς τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Εὐκλείδου, ὡς καὶ τὰ δύο θεωρήματα τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν, δηλαδὴ τοῦ ἑνάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ὑπαινίσσεται ὁ Ἰάμβλιχος.

## ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλίον 7.

Ὁρισμὸς 8. «Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν».

Παράδειγμα. $8 : 4 = 2$. Ὁ 8 εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός, διότι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ 4 κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμὸν 2.

Ὁρισμὸς 9. «Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν».

Παράδειγμα. $20 : 4 = 5$. Ὁ 20 εἶναι ἀρτιάκις περισσὸς ἀριθμός, διότι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ 4 κατὰ τὸν περιττὸν ἀριθμὸν 5.

---

7. Eva Sachs, Die fünf platonischen körper, Berlin 1917, S. 38, (von dem unzuverlässigen und unwahren Iamblichos stammt).

8. Pistelli, 20, 7. 20, 21. 23, 18 ἕως 24, 6.

[Ὁρισμὸς 10. «Περισσάκις ἄρτιός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.»]

Παράδειγμα. 20 : 5 = 4. Ὁ 20 ἐδῶ εἶναι περισσάρτιος ἀριθμός, διότι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ 5 κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμὸν 4.

Ὁρισμὸς 11. «Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν».

Παράδειγμα. 33 : 3 = 11. Ὁ 33 εἶναι περισσάκις περιττός, διότι μετρεῖται (περιττὸς ὤν) ὑπὸ τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ 3 κατὰ τὸν περιττὸν ἀριθμὸν 11.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ βιβλίον 9, Θεώρημα 33.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περιττόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.
Παράδειγμα. 10 : 2 = 5. Ὁ 10 εἶναι ἀρτιάκις περιττὸς μόνον.

ΣΤΟΙΧΕΩΝ βιβλίον 9, Θεώρημα 34.

Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἢ μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός. κ

Παράδειγμα. Ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $2(2\nu+1)$, ὅπου $\kappa \geqslant 2$ καὶ $\nu = 1, 2, 3 \ldots$. Ἐὰν $\kappa = 2$ ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι $2.2\ (2\nu+1)$, ὁπότε $2.2\ (2\nu+1) : 2 = 2\ (2\nu+1)$ καὶ ὁ $2.2\ (2\nu+1)$ εἶναι ἀρτιάκις ἄρτιος, ἢ $2.2\ (2\nu+1) : 2.2 = (2\nu+1)$, ὁπότε οὗτος εἶναι ἀρτιάκις περιττός.

Ἄλλην ἀνακρίβειαν τοῦ Ἰαμβλίχου παρατηροῦμεν εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ περὶ τῶν τελείων ἀριθμῶν, ὅπου γράφει ὅτι μεθ' ἑκάστην δεκάδα ἢ μυριάδα ἀπαντᾷ εἷς τέλειος ἀριθμός [9]. Λόγου χάριν :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ἀπὸ | 1 — 10 | ἀπαντᾷ | εἷς | τέλειος | ἀριθμός, | ὁ 6. |
| » | 11 — 100 | » | » | » | » | ὁ 28. |
| » | 101 — 1000 | » | » | » | » | ὁ 496. |
| » | 1001 — 10.000 | » | » | » | » | ὁ 8128. |

Πέραν ὅμως τοῦ ἀριθμοῦ 10.000 δὲν ἰσχύει ὁ νόμος αὐτός.

Ἀλλὰ καὶ ἡ πληροφορία τοῦ Ἰαμβλίχου διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$ φαίνεται, ὅτι δὲν εἶναι ἀκριβής· διότι γράφει : «Τὰ νῦν δὲ περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας ῥητέον ἐν τέτταρσιν ὅροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης ..... εὕρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἕλληνας ἐλθεῖν [10]. (Τώρα δὲ θὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας τῆς ὀνομασθείσης μουσικῆς .... λέγουν δὲ ὅτι αὕτη εἶναι ἀνακάλυψις τῶν Βαβυλωνίων καὶ διὰ τοῦ Πυθαγόρου πρώτου μετεφέρθη εἰς τοὺς Ἕλληνας). Ὅτι ἡ πληροφορία αὕτη δὲν εἶναι ἀκριβὴς τὸ συνάγομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου, τὴν ὁποίαν σχολιάζει ὁ Ἰάμβλιχος. Ὁ Νικόμαχος, ἀφοῦ τελειώνει τὴν ἔκθεσίν του περὶ τῶν δέκα ἀναλογιῶν, γράφει σχετικῶς : «29. Λοιπὸν καὶ περὶ τῆς τελειοτάτης καὶ τριχῇ διαστατῆς πασῶν τε περιεκτι-

9. Pistelli 33, 15.
10. Pistell 118 19.

κῆς ἐν βραχεῖ διαρθρώσω μεσότητος χρησιμωτάτης οὔσης εἰς πᾶσαν τὴν ἐν τῇ μουσικῇ καὶ φυσιολογίᾳ προκοπὴν .... ὑπόδειγμα αὐτῆς ἔστω τοιοῦτον» [11].

ς η θ ιβ

(Ἀκολούθως θὰ ὁμιλήσω περὶ τῆς τελειοτάτης καὶ ἐχούσης τρεῖς διαστάσεις καὶ περιεκτικῆς ὅλων ἀναλογίας (τῆς ἐχούσης δηλ. τέσσαρας ὅρους), ἡ ὁποία εἶναι χρησιμωτάτη εἰς πᾶσαν ἔρευναν εἰς τὴν μουσικὴν καὶ τὴν φυσιολογίαν .... παράδειγμα δ' αὐτῆς ἔστω τὸ ἑξῆς : 6 : 8 = 9 : 12).

Ὁ Νικόμαχος δὲν ἀναφέρει τίποτε περὶ τῆς προελεύσεως τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας. Εἶναι δὲ γνωστόν, κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἐξετέλεσε πρῶτον πειράματα καὶ κατόπιν ἀνεκάλυψε τοὺς νόμους κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μουσικῆς ἀναλογίας [12]. Οὐδεμίαν δὲ μαρτυρίαν ἔχομεν περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων. Διὰ τὰς 10 δὲ ἀναλογίας, ὅτι εἶναι εὑρήματα τῶν Ἑλλήνων, ἔχομεν πληροφορίας ἀπὸ τὸν Νικόμαχον καὶ τὸν Πάππον [13].

## ZUSAMMENFASSUNG

Unter der erhaltenen Schriften des Syrers Jamblichos sind folgende : 1) Vita Pythagorica, (Deubner). 2) In Nicomachi Arithm. Introd., (Pistelli). 3) De communi mathem. scientia, (Festa). 4) Theologoumena arithm., (de Falco). Der Protrepticos ist aus der nämlichen Schrift des Aristoteles entnommen, ohne es von Iamblichos erwähnt zu werden (Fussnote 1). Auch das VI. Kapitel der Schrift De communi mathem. scientia ist aus Dialogen Platons entnommen (Fussnote 2), ohne Erwähnung Platons. Vieles mathematische, was man in den Elementen Euklids nicht findet ist von ihm bewahrt. Manchmal sind in seinen Schriften einpaar Fälschungen unterlaufen und zwar in seiner kritik über Euklid, den er als unsinnigen bezeichet (Fussnote 8) ! Sowohl die arithmetischen Definitionen Euklids (Elementa VII), wie auch die Lehrsätze IX 33 und 34 hat Iamblichos nicht verstanden. Nicht richtig ist seine Auffassung, dass es nach jede Dekade oder Myriade eine vollkommene Zahl gibt. Die Ausweise, dass die musikalische Proportion 6 : 8 = 9 : 12 durch Pythagoras aus Babylonien nach Griechenland eingeführt wurde, wird nicht gestützt. Nicomachos erwähnt diese Propotion, schreibt aber über ihre Herkunft nichts (Fussnoten 11. 12. 13).

11. Νικομ. Ἀριθμ. Εἰσαγωγὴ 144, 20 — 146, 4. Hoche.

12. Ἰαμβλίχου, Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμ. Εἰσαγωγῆς, σελὶς 121—125, Pistelli.

13. Νικομ. Ἀριθμ. Εἰσαγωγὴ 140, 14, Hoche. Πάππος, Συναγωγὴ I 70 — 104 F. Hultsch.

# Π Λ Α Τ Ω Ν

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΛΑ' 1979

ΤΟΜΟΣ **31** (ΤΕΥΧΗ 61/62)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1979

# Ο ΖΥΓΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Ὁ Ἀρχιμήδης ἀνεκάλυψεν, ὡς γνωστόν, τὴν ὁμώνυμον Ἀρχὴν εἰς τὴν Φυσικὴν κατόπιν ἐντολῆς τοῦ Ἱέρωνος, ὅπως ἀνεύρῃ τυχὸν νοθείαν στεφάνου κατεσκευασμένου ἐκ χρυσοῦ. Τὴν πληροφορίαν αὐτὴν μνημονεύει ὁ Ῥωμαῖος Βιτρούβιος [1]. Κατόπιν τῆς ἀνακαλύψεως αὐτῆς ὁ Ἀρχιμήδης κατεσκεύασε καὶ ἐβαθμολόγησε ζυγὸν διὰ τοῦ ὁποίου ἠδύνατο νὰ ἀνευρίσκῃ ἀμέσως πόσον χρυσὸν περιέχει ἓν κρᾶμα χρυσοῦ καὶ ἀργύρου. Διὰ τὴν βαθμολογίαν τοῦ ζυγοῦ αὐτοῦ εἶχε γράψει πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον Περὶ Ζυγῶν, ἡ ὁποία ἀπωλέσθη, μνημονεύεται ὅμως ὑπὸ τοῦ Πάππου [2]. Ἡ βαθμολογία τοῦ ζυγοῦ, ἔχοντος κινητὸν ἱππέα ἐπὶ τοῦ μοχλοβραχίονος, πρὸς τὸ μέρος τοῦ ὁποίου τίθεται ὁ ἄργυρος γίνεται κατ' ἐφαρμογὴν τῶν θεωρημάτων 6 καὶ 7 τῆς πραγματείας Μηχανικὰ Ι ἢ Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν Ι. Ἡ ἀνωτέρω πραγματεία Περὶ Ζυγῶν περιλαμβάνεται εἰς Ἀραβικὸν βιβλίον ἔχον τὸν τίτλον: Abdul Rahman al Khazini ὑπὸ τὴν προστασίαν τοῦ Abil Hassan Ibn el Khazin, ἔτος Ἐγίρας 515. Νέα ἐκτύπωσις τοῦ βιβλίου ἐγένετο ἐν Hyderabad, ἔτος Ἐγίρας 1359.

Τὸ ἀνωτέρω βιβλίον ἐστάλη εἰς ἡμᾶς φιλοφρόνως ὑπὸ τοῦ Ἰνδοῦ V. N. Rao, S. R. H. Idpl Colony, Hyderabad, 500037, India, τῇ εὐγενεῖ μερίμνῃ τοῦ ἐν Ἰνδίᾳ σπουδάσαντος κ. Θεοδώρου Μπήτου, Διδάκτορος τῆς Φιλοσοφίας.

Τὴν κατωτέρω μετάφρασιν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν τοῦ παρατιθεμένου Ἀραβικοῦ κειμένου ἐνήργησε φιλοφρόνως ὁ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν καθηγητὴς τῆς Ἀραβικῆς κ. Ἀλῆ Νούρ.

## Η ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

### Τὸ τέταρτον δοκίμιον

Περὶ Ζυγῶν ὕδατος κατὰ τοὺς ἀρχαίους καὶ μεταγενεστέρους σοφούς. Τὸ δοκίμιον περιλαμβάνει πέντε κεφάλαια.

### Κεφάλαιον πρῶτον

### Ο ΖΥΓΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΑΙ Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΙΣ ΑΥΤΟΥ

Τοῦτο γίνεται, ὅταν οἱ δύο δίσκοι τοῦ Ζυγοῦ εἶναι ἐντὸς τοῦ ὕδατος. (Κατὰ τὸν Μενέλαον λέγεται ὁ ἐλεύθερος σημειωμένος μὲ ἱππέα Ζυγός).

Ὁ Ἀρχιμήδης λέγει: Χρησιμοποιοῦμεν πολὺ εὐαίσθητον Ζυγόν. Λαμβάνομεν ἴσον βάρος χρυσοῦ καὶ ἀργύρου καὶ τὰ τοποθετοῦμεν εἰς τοὺς δύο δίσκους, ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ὅταν ὁ Ζυγὸς κλίνῃ πρὸς τὸ μέρος τοῦ χρυσοῦ (ἕνεκα τῆς μεγαλυτέρας βαρύτητος τοῦ χρυσοῦ) ἰσορροποῦμεν τὸν Ζυγὸν διὰ τῆς μετακινήσεως τοῦ ἱππέως, μέχρις ὅτου ἡ φάλαγξ τοῦ Ζυγοῦ λάβῃ θέσιν ὁριζοντίαν, ἐνῷ εἰς τὸν μοχλοβραχίονα (τὸν πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἀργύρου) σημειοῦμεν τὴν θέσιν τοῦ ἱππέως. Τὸ πείραμα αὐτὸ νὰ γίνῃ δύο, τρεῖς καὶ τέσσαρας φοράς, εἰς τὸν ἀέρα καὶ εἰς τὸ ὕδωρ. Ἂς μὴ λησμονηθῇ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἱππέως ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου διαφέρουν ἀναλόγως τοῦ βάρους τοῦ ἱππέως.

Ὅταν ὅμως ἀναμίξωμεν χρυσὸν καὶ ἄργυρον καὶ θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν τὴν ποσότητα ἑνὸς ἑκάστου, τότε πρέπει νὰ λάβωμεν τόσον βάρος καθαροῦ ἀργύρου, ὅσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ κράματος εἰς τὸν ἀέρα.

Ἐν συνεχείᾳ τοποθετοῦμεν τοὺς δύο δίσκους ἐντὸς τοῦ ὕδατος διὰ νὰ ἐξακριβώσωμεν ὅτι εἶναι ἴσοι. Πρέπει ἐπίσης τὸ ὑλικὸν τῶν δύο δίσκων νὰ εἶναι τὸ ἴδιον καὶ ἐκ φύσεως νὰ βυθίζεται εἰς τὸ ὕδωρ (ὅπως τοῦτο συμβαίνει μὲ τὸν

1. Vitruvius, De Archit. IX Pref. 215 9 καὶ Εὐ. Σ. Σταμάτη, Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, μέρος Α', Ἀθῆναι 1970, σ. 266, μαρτυρία 249.

2. Pappus Allexandrinus, ed. F. Hultsch, vol. 3, p. 1068, 19, ²1965, Hakkert καὶ Εὐ. Σ. Σταμάτη, Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμ. Γ', Ἀθῆναι 1977, σελ. XLII.

χαλκὸν καὶ τὸν ἄργυρον). Τότε, ἐὰν ἡ κλίσις εἶναι πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κράματος (χρυσοῦ - ἀργύρου) ἰσορροποῦμεν τὸν Ζυγὸν μετακινοῦντες τὸν ἱππέα, μέχρις ὅτου ἡ φάλαγξ τοῦ Ζυγοῦ γίνῃ ὁριζοντία. Κατόπιν παρατηροῦμεν εἰς ποῖον σημεῖον εὑρίσκεται ὁ ἱππεὺς καὶ τότε θὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο τοῦ μοχλοβραχίονος δεικνύει τὸ ποσοστὸν τοῦ χρυσοῦ εἰς τὸ κρᾶμα.

Αὐτὴ εἶναι ἡ γραφὴ τοῦ ἀνδρὸς κατὰ λέξιν μετεφρασμένη.

**Τὸ Ἀραβικὸν κείμενον**

# المقالة الرابعة

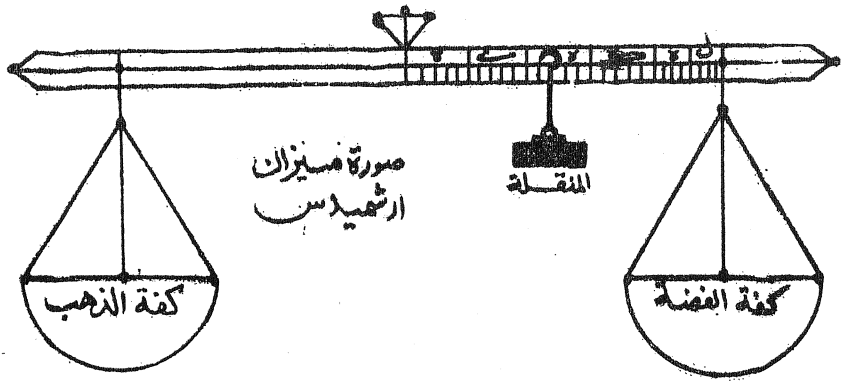
## فى ذكر موازين الماء التى ذكرها الحكماء المتقدمون والمتأخرون وهى تشتمل على خمسة ابواب .

# الباب الاول

## فى ذكر ميزان ارشميدس والعمل به

اذا كانت الكفتان كلتاهما فى الماء على ما حكى ما نالاؤس عنه وهو الميزان المطلق ذو العلامات والمثقلة قال ارشميدس نتخذ ميزانا على اكثر مايمكن من الاحكام والاستقصاء ونأخذ من الذهب والفضة وزنا واحدا ونصيرهما فى كفتى الميزان حتى يعتدلا فى الهواء ثم نضع الكفتين فى ماء واحد فاذا صار ميل الميزان فى الماء الى الكفة التى فيها الذهب لثقل الذهب نقوم الميزان بالمثقلة حتى يصير موازيا للافق ونعلم على العمود على الموضع الذى تقع عليه المثقلة ونفعل مثل ذلك ايضا فى ذهبين وثلاثة واربعة وننقلها كما نعمل فيما يوزن فى الهواء وهذه الابعاد من اللسان تختلف باختلاف وزن المثقلة فاذا خلطنا ذهبا ونضة واردنا ان نعلم كمية كل واحد منهما فينبغى ان نأخذ من الفضة الخالصة (١) بوزن الجرم الممتزج على وزنه فى الهواء ثم نجعل كفتى الميزان فى الماء ولتكن الكفتان متساويتين باستقصاء وليكن جرمهما من جوهر واحد فى طبيعته ان يغوص فى الماء كالنحاس او الفضة فاذا صار الميل الى الكفة التى فيها الجرم المختلط من ذهب وفضة نقوم الميزان بان ننقل المثقلة حتى يصير الميزان موازيا للافق وننظر على اى علامة تقع المثقلة عند اعتدال الميزان(١) .

فنقول ان فى ذلك الجرم من الذهب بقدر كتاب (٢) العلامة التى وضعت المثقلة عليها — هذه حكاية الفاظ الرجل حرفا حرفا وهذه الحيلة هى حق ولكن




الشكل الثامن والعشرون صفحة ٧٩

Ζυγὸς Ἀρχιμήδους

Ἱππεὺς

Δίσκος χρυσοῦ

Δίσκος ἀργύρου

(ἢ κράματος χρυσοῦ—ἀργύρου)

Σχῆμα 28 σελίδος 79.

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΛΒ' 1980 & ΛΓ' 1981

ΤΟΜΟΣ **32** & **33** (ΤΕΥΧΗ 63/66)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1981

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΛΒ' 1980

ΤΟΜΟΣ **32** (ΤΕΥΧΗ 63/64)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1980

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

1. Ἡ λέξις χῶρος ἀπαντᾷ τὸ πρῶτον εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Γραμματείαν εἰς τοὺς Ὀρφικοὺς Ὕμνους, ὅπου διαβάζομεν :

«*πρὸς σὸν χῶρον ἄνασσα καὶ εὐδύνατον Πλούτωνα*»

(δηλ. εἰς τὸν χῶρον σου ἄνασσα καὶ τὸν ἰσχυρὸν Πλούτωνα). (Ὀρφικά, Ὕμνοι 28. 20. G. Hermannus). Ἡ δὲ λέξις τόπος ἀπαντᾷ τὸ πρῶτον εἰς τὰ ἀποσπάσματα τῶν Ὀρφικῶν : «*εἰς δὲ Κρόνου Πυρόεις τόπον αἴσιός ἐστιν ἀμείβων*» (δηλ. ὁ δὲ ἀγαθὸς Ἄρης ἐρχόμενος εἰς τὸν τόπον τοῦ Κρόνου) (Ἀποσ. Ὀρφ. 287, O. Kern).

Εἰς τὰ Ὁμηρικὰ Ἔπη ἡ λέξις χῶρος ἀπαντᾷ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ τόπου : Γ 315, Δ 496, ξ 2. Ἡ λέξις τόπος δὲν ἀπαντᾷ εἰς τὰ Ὁμηρικὰ Ἔπη.

Εἰς τὴν Ὀρφικὴν Κοσμογονίαν ὑπὸ τὴν λέξιν χάος νοεῖται ὁ χῶρος, ὡς συμπεραίνεται ἐκ τοῦ Ἀριστοφάνους : *Χάος ἦν καὶ Νὺξ Ἔρεβός τε μέλαν καὶ Τάρταρος Εὐρύς*. (Ὄρνιθες 693). Ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν χρησιμοποιεῖ τὴν λέξιν Χάος καὶ ὁ Ἡσίοδος : *ἤτοι μὲν πρώτιστα Χάος γένετ'*. (Θεογονία 116).

Ἰδιαιτέρα ἔρευνα τῆς ἐννοίας τοῦ χώρου δὲν ἀναφέρεται κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. Συνδέεται ὅμως ὁ χῶρος πρὸς τὸ Σύμπαν. Καὶ ἄλλοι μὲν θεωροῦν τὸ Σύμπαν σφαιροειδὲς καὶ πεπερασμένον, ὅπως ὁ Ξενοφάνης, ὁ Ἵππασος, ὁ Ἡράκλειτος (D. G. = Δοξογράφοι Γκραῖκι, σελὶς 338, 475, 482, 5)4. Diels), ἄλλοι δὲ θεωροῦν τοῦτο ἄπειρον, ὅπως ὁ Λεύκιππος, ὁ Δημόκριτος, ὁ Μητρόδωρος, ὁ Ἐπίκουρος, οἱ Στωϊκοὶ (D. G. 316, 581). Ὁ Μέλισσος, ὁ Διογένης ὁ Ἀπολλωνιάτης καὶ ὁ Σέλευκος ἔλεγον ὅτι τὸ μὲν Σύμπαν εἶναι ἄπειρον, ὁ δὲ Κόσμος εἶναι πεπερασμένος (D. G. 328). Ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἐπρέσβευεν, ὅτι χῶρος δὲν ὑπάρχει. Διότι ἂν ὑπῆρχε ἔπρεπε νὰ ἐπάρχῃ εἰς κάποιον ἄλλον χῶρον, αὐτὸς ὁ χῶρος εἰς κάποιον ἄλλον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον, (fr. Vorsokr. I 253. 24. Diels).

Ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος ἐπρέσβευεν ὅτι τὸ Σύμπαν εἶναι ἄπειρον μὲ τὸ ἑξῆς ἐπιχείρημα : ἐὰν τὸ Σύμπαν ἦτο σφαιροειδὲς καὶ πεπερασμένον καὶ ἔφθανα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας αὐτῆς, ἐρωτῶ, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἁπλώσω τὴν χεῖρα μου ἔξω τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἢ ὄχι ; Ἐὰν ὄχι, τοῦτο εἶναι ἄτοπον· ἑπομένως δὲν ὑπάρχει πέρας τοῦ Σύμπαντος (fr. Vorsokr. I 430. 24).

Ἐκ τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος δὲν φαίνεται σαφῶς ποία εἶναι ἡ γνώμη αὐτοῦ διὰ τὸ Σύμπαν. Κατὰ τὸν Διογένη ὅμως τὸν Λαέρτιον, ὁ Πλάτων ἐπρέσβευεν ὅτι ὁ Κόσμος εἶναι σφαιροειδὴς καὶ πεπερασμένος (Δ. Λ. 3. 72). Τὴν αὐτὴν γνώμην πρὸς τὸν Πλάτωνα ἔχει καὶ ὁ Ἀριστοτέλης (Περὶ Κόσμου πρὸς Ἀλέξανδρον 391. 2), ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὸν τόπον (χῶρον) ὡς ἑξῆς : «τὸ πέρας τοῦ περιέχοντος σώματος», καὶ δὲν δέχεται τὴν ὕπαρξιν τοῦ κενοῦ χώρου (Φυσ. Δ. 212 α 6 καὶ α 20, καὶ 213 - 215). Ὁ Δημόκριτος ἀντιθέτως, ἐπρέσβευεν ὅτι ὁ Κόσμος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ὕλην (τὰ ἄτομα) καὶ τὸ κενὸν (fr. Vorsokr. II 93. 37).

Ὁ Ἀρχιμήδης (287—212 π.Χ.) πρεσβεύει ὅτι ὁ Κόσμος εἶναι σφαιροειδὴς καὶ πεπερασμένος, ὑπολογίζει δὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ εἰς πέντε δισεκατομμύρια στάδια (κοινὸν Αἰγινητικὸν—Ἀττικὸν Στάδιον=164 μέτρα). (Ψαμμίτης 2).

Ὁ Ἰσαὰκ Νεύτων (1643—1727) δὲν ἀναφέρει σαφῶς ἂν θεωρῇ τὸ Σύμπαν ἄπειρον ἢ πεπερασμένον. Θεωρεῖ τὸ κενὸν ἄνευ ὕλης ὡς χῶρον καὶ ὀνομάζει τοῦτο ἀπόλυτον χῶρον (Principiá, γερμ. ἔκδ. Wolfers, σ. 25 27). Πρὸς τὴν γνώμην τοῦ Νεύτωνος τάσσεται καὶ ὁ Κάντ (1724 1804) (Gesam. Werke, Akad. Ausg. Bd II S. 378).

Ὁ Ἀλβέρτος Ἀϊνστάϊν (1879—1955, βραβεῖον Νόμπελ 1921) ἀπορρίπτει τὸν

ἀπόλυτον χῶρον τοῦ Νεύτωνος καὶ παραθέτει εἰς τὰς τρεῖς διαστάσεις ἑνὸς στερεοῦ καὶ τετάρτην διάστασιν, τὴν διάστασιν τοῦ χρόνου, εἰσάγει δηλ. τὴν ἔννοιαν τοῦ χωροχρόνου.

2. Ἡ Ἑλληνικὴ Γεωμετρία χωρὶς νὰ κατονομάζῃ τὸν χῶρον ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ, χρησιμοποιοῦσα ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἔννοιαν «σημεῖον», τὸ ὁποῖον καθορίζει ὡς ἑξῆς :
«*σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν*». (Εὐκλείδου El. I, ὁρισμὸς 1, ed. E. S. Stamatis, Leipzig 1969, B. G. Teubner). Ἀμέσως γεννᾶται τὸ ἐρώτημα τί εἶναι μέρος, δηλ. διάστασις, τὸ ὁποῖον μένει ἀναπάντητον.

Κατὰ τὰ μέσα τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἀνεκαλύφθησαν αἱ λεγόμεναι Μὴ Εὐκλείδειοι Γεωμετρίαι, αἱ ὁποῖαι ἐκ τῶν δεκατεσσάρων ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου λαμβάνουν τὰ δέκα τρία, τὰ ὁποῖα βαπτίζουν εἰς ἀπόλυτον Γεωμετρίαν, καὶ ἀντικαθιστοῦν τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων τοῦ Εὐκλείδου δι' ἄλλου ἀξιώματος. Εἶναι φανερὸν ὅτι αὗται δὲν ἔπρεπε νὰ ὀνομάζωνται Μὴ Εὐκλείδειοι Γεωμετρίαι, ἀλλὰ ἀσκήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς Γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου. Ἀναλόγως τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων αἱ Γεωμετρίαι ἐχαρακτηρίσθησαν ὡς ἑξῆς :

1) Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἄγεται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μία καὶ μόνη παράλληλος. Εὐκλείδειος ἢ παραβολικὴ Γεωμετρία.

2) Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἄγονται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πολλαὶ παράλληλοι. Μὴ Εὐκλείδειος, ὑπερβολικὴ Γεωμετρία.

3) Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου οὐδεμία εὐθεῖα παράλληλος ἄγεται πρὸς αὐτήν. Μὴ Εὐκλείδειος, ἐλλειπτικὴ Γεωμετρία.

Ἐπισημειωτέον ὅτι ὁ Οὔγγρος μαθηματικὸς Imre Toth ἀπέδειξεν ὅτι ἅπαντα τὰ λεγόμενα περὶ Μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν περιέχονται εἰς τὰ συγγράμματα τοῦ Ἀριστοτέλους (Das Parallelenproblem in Corpus Aristotelicum, Archiv for History of exact Sciences 3, 249–422, (1967)).

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. Εἰς τὴν ὑπερβολικὴν Γεωμετρίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου, λέγεται, ὅτι εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Εἰς τὴν Ἐλλειπτικὴν Γεωμετρίαν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου, λέγεται, ὅτι εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν. Προστίθεται δὲ ὅτι αἱ Μὴ Εὐκλείδειοι Γεωμετρίαι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα

Ὁ C. F. Gauss (1777—1855) ἐμέτρησε τὰς γωνίας ἑνὸς μεγάλου τριγώνου ἔχοντος πλευρὰς 69, 85, καὶ 107 χιλιομέτρων καὶ παρὰ τὸ μέγεθος τοῦ τριγώνου εὗρε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ὡς διδάσκει ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου. Δὲν ἐδημοσίευσε δὲ τίποτε σχετικὸν μὲ Μὴ Εὐκλειδείους Γεωμετρίας, φοβούμενος τὰς κραυγὰς τῶν Βοιωτῶν, ἐπειδὴ δηλ. εἶχεν ἀμφιβολίας, ὡς πρὸς τὴν ὀρθότητα τῶν συναφῶν παρατηρήσεών του. Κατὰ τὸ 1817 ἔγραψε πρὸς τὸν H. W. M. Olbers : «Πάντοτε καταλήγω εἰς τὴν πεποίθησιν, ὅτι ἡ ἀναγκαιότης τῆς Γεωμετρίας μας (ἐννοεῖ τὴν Εὐκλείδειον) δὲν δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, τοὐλάχιστον ἀπὸ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα, ἀλλ' οὔτε καὶ διὰ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα. Πιθανῶς, ὅταν ἔλθωμεν εἰς ἄλλην ζωήν, νὰ ἔχωμεν ἄλλας ἀντιλήψεις διὰ τὴν οὐσίαν τοῦ χώρου, αἱ ὁποῖαι σήμερον εἶναι δι' ἡμᾶς ἀνέφικτοι». (Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Villeicht kommen wir in einem anderen Leben zu anderen Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind). Königl. Gesel. d. Wiss. zu Göttingen, Leipzig 1863—1903, Bd VIII, S. 177).

Ὁ H. Poincarè (1854—1912) ἀποδέχεται τὰς λεγομένας μὴ Εὐκλειδείους Γεωμετρίας, σημειώνει ὅμως, ὅτι προτιμῶμεν τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου, διότι αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατυπώνωμεν τοὺς φυσικοὺς νόμους κατὰ τὸν ἁπλούστερον τρόπον (Ἐπιστήμη καὶ Ὑπόθεσις, μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Παναγιώτου Σ. Ζερβοῦ, Ἀθῆναι 1912). Ἐπὶ τῆς γνώμης αὐτῆς τοῦ Πουανκαρὲ ὁ Max Jammer εἰς τὸ βιβλίον του Das Problem des Raumes, σελὶς 183, (1960), (μετάφρασις ἐκ τοῦ Ἀμερικανικοῦ Concept of Space, Harvard Univ. Press. Cambridge U.S.A., 1954), λέγει, ὅτι «ὁ Πουανκαρὲ ἐπλανήθη, ὡς ἀπέδειξεν ἡ Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητος, καὶ προσθέτει, ἐπλανήθη ἀκόμη διὰ τὴν λογικὴν ἁπλότητα τῆς Γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου. Ὡς νεώτεραι ἔρευναι ἔδειξαν (λέγει) ἐλλείπει ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου ἡ λογικὴ ἁπλότης τῆς Ὑπερβολικῆς Γεωμετρίας, ἡ ὁποία Γεωμετρία εἶναι ἡ μόνη, ἥτις ἐξ ὀλίγων ἁπλῶν ὑποθέσεων, περὶ συνδέσεως, τομῆς καὶ συνεχείας δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ». Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γνώμη αὕτη τοῦ Max Jammer εἶναι ἐξεζητημένη καὶ πάντῃ ἐσφαλμένη.

Κατὰ τὰς Μὴ Εὐκλειδείους Γεωμετρίας δὲν ὑπάρχουν ὅμοια σχήματα! Περίεργα τῷ ὄντι πράγματα, ὁμοιάζοντα πρὸς τὰ διδασκόμενα εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Συνόλων εἰς ὅλα τὰ Πανεπιστήμια τοῦ Κόσμου, ἐπὶ πεντήκοντα καὶ πλέον ἔτη, ὅτι τὸ μέρος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὅλου, πρὸς ἔκπληξιν καὶ καγχασμὸν τοῦ Εὐκλείδου, ὁ ὁποῖος διδάσκει ὅτι τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους. (El. I Κοιναὶ ἔννοιαι 8). Ἐὰν ὁ Θαλῆς, ὅταν ἐπεσκέφθη τὴν Αἴγυπτον περὶ τὸ 580 π. Χ., ἐγνώριζε μόνον τὰς Μὴ Εὐκλειδείους Γεωμετρίας καὶ ἤθελε νὰ μετρήσῃ τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτῆς καὶ τῆς σκιᾶς τῆς ῥάβδου του (ὡς ἔπραξε τοῦτο, fr. Vorsokr. I σελ. 68. 27), θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐπιχειρήσῃ τὴν μέτρησιν, διότι δὲν θὰ ἐγνώριζε τὰ περὶ ὁμοιότητος θεωρήματα τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας.

3. Παρ' ὅλον ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν νεωτέρων ἐπιστημόνων συμφωνοῦν μὲ τὰ συμπεράσματα καὶ τὰς παρατηρήσεις τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος τοῦ Ἀλβέρτου Ἀϊνστάϊν, ἐν τούτοις ὑπάρχουν ἀρκετοὶ ἐπιστήμονες, οἱ ὁποῖοι διατηροῦν ἐπιφυλάξεις διὰ τὴν θεωρίαν αὐτήν. Ἐκεῖνο τὸ μέρος τῆς θεωρίας,, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται βέβαιον εἶναι ἡ σχέσις μετατροπῆς τῆς μάζης ἑνὸς σώματος εἰς ἐνέργειαν καὶ ταὐτάπαλιν, ἡ ὁποία ἐκφράζεται διὰ τοῦ μαθηματικοῦ τύπου $E = mc^2$, ὅπου E εἶναι ἡ ἐνέργεια, m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός. Τὴν πρώτην ὅμως ἰδέαν τῆς μετατροπῆς τῆς μάζης εἰς ἐνέργειαν ἐξέφρασε πρῶτος ὁ Ἀναξίμανδρος (610—546 π. Χ. περίπου), ὡς πληροφορούμεθα ἀπὸ τὸν Ἀλεξανδρινὸν φιλόσοφον Ἀέτιον (Α' αἰών), ὁ ὁποῖος γράφει «*ἀμαρτάνει δὲ οὗτος μὴ λέγων τί ἐστι τὸ ἄπειρον, πότερον ἀήρ ἐστιν ἢ ὕδωρ ἢ γῆ ἢ ἄλλα τινὰ σώματα· ἁμαρτάνει οὖν τὴν μὲν ὕλην ἀποφαινόμενος τὸ δὲ ποιοῦν αἴτιον ἀναιρῶν· τὸ γὰρ ἄπειρον οὐδὲν ἄλλο ἢ ὕλη ἐστιν· οὐ δύναται δ' ἡ ὕλη εἶναι ἐνέργεια, ἂν μὴ τὸ ποιοῦν ὑποκέηται*» (D. G. 277, ἐκ Πλουτ. Ἀρεσκ. φιλοσ. 1. 3 – Στοβαίου Ἐκλ. I 10 2. 12) (σφάλλεται δὲ αὐτὸς μὴ λέγων τί εἶναι τὸ ἄπειρον, ποῖον ἐξ ὅλων, εἶναι ἀὴρ ἢ ὕδωρ ἢ γῆ ἢ ἄλλα τινὰ σώματα. Σφάλλεται λοιπόν, ἐνῷ ὁμιλεῖ διὰ τὴν ὕλην ἀναιρεῖ ὅμως τὸ ποιοῦν αἴτιον· διότι τὸ ἄπειρον δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ὕλη· δὲν δύναται δὲ ἡ ὕλη νὰ εἶναι ἐνέργεια, ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ὁ δημιουργός).

Τὴν λησμονημένην αὐτὴν θεωρίαν τοῦ Ἀναξιμάνδρου διετύπωσεν ἐκ νέου ὁ Γερμανὸς Φυσικὸς Hasenöhrl κατὰ τὸ 1904, ἤτοι ἓν ἔτος πρὶν ὁ Ἀλβέρτος Ἀϊνστάϊν δημοσιεύσει τὴν Θεωρίαν τῆς Σχετικότητος. Ὁ Hasenöhrl εἶχε διατυπώσει καὶ τὸν συναφῆ μαθηματικὸν τύπον $E = \frac{8}{3} mc^2$, τὸν ὁποῖον ὁ Ἀϊνστάϊν διώρθωσεν εἰς $E = mc^2$, χωρὶς δηλ. τὸν ἀριθμητικὸν συντελεστήν, ὡς σημειώνει ὁ W. Riezler εἰς τὸ βιβλίον του «Πυρηνικὴ Φυσική», Μόναχον 1959, σελ. 26.

Ἐκεῖ ὅμως ὅπου ὑπάρχουν μεγάλαι διαφωνίαι μερικῶν ἐπιστημόνων εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ τετραδιαστάτου χώρου τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος, τοῦ καλουμένου χωροχρόνου. Ὁ ὑπέρμαχος τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος Γερμανὸς Φυσικὸς Max von Laue (1879—1960), βραβεῖον Νόμπελ 1914), εἰς τὸ βιβλίον του, Θεωρία τῆς Σχετικότητος (τόμος Β', 1953 σελ. 4) γράφει ὅτι: «πρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν μίαν Μὴ Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν διὰ τέσσαρας διαστάσεις». Κατὰ τὸν Λάουε οὔτε ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ὑπόβαθρον τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος τοῦ Ἀϊνστάϊν οὔτε αἱ ἄλλαι Γεωμετρίαι, αἱ καλούμεναι Μὴ Εὐκλείδειοι Γεωμετρίαι, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐπινοηθῇ μία νέα Γεωμετρία διὰ νὰ ἱκανοποιήσῃ τὰς ἀπαιτήσεις τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος. Ὁ ἴδιος ὁ Λάουε εἰς τὸν πρόλογον τοῦ πρώτου τόμου, τοῦ ἀνωτέρω σημειωθέντος βιβλίου του (1952, σελ. V), λέγει, ὅτι ἡ Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητος δὲν ἔκλεισεν ἀκόμη. Φαίνεται λοιπόν, ὅτι ὅλα τὰ περὶ χωροχρόνου εὑρίσκονται ὑπὸ ἔρευναν, διότι δὲν γνωρίζομεν τί εἶναι ὁ χῶρος, οὔτε δυνάμεθα μέχρι τῆς στιγμῆς νὰ τὸν ὁρίσωμεν. Εὐστόχως δὲ ὁ Max Jammer εἰς τοὺς τελευταίους δύο στίχους τοῦ ἀνωτέρω μνημονευθέντος βιβλίου του, ἀποφαίνεται ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ χώρου παραμένει ἄλυτον.

Φαίνεται πιθανόν, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ χώρου εἶναι ὑπερβατικὴ καὶ ἀπροσπέλαστος εἰς τὴν νοητικὴν ἱκανότητα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος.

4. Τὸ μὴ ἱκανοποιητικὸν σημεῖον τῆς Ἑλληνικῆς Γεωμετρίας, τῆς ἀσχολουμένης μὲ τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, εἶναι ὁ ὁρισμὸς τοῦ σημείου, ὁ καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου υἱοθετηθείς, (Eucl. Elem. I def. 1), καὶ ἡ ἐκ τούτου γένεσις τῶν γραμμῶν, τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν. Τοῦτο εἶχεν ἐπισύρει τὴν προσοχὴν τοῦ Πλάτωνος, ὁ ὁποῖος ἠρνεῖτο τὴν παραδοχὴν τῆς Γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης, ἀφοῦ αὕτη οἰκοδομῇ ἐπὶ τῆς ἀκαθορίστου ἐννοίας «σημεῖον» καὶ συμπεραίνει:

«Διότι, ὅταν μία ἐπιστήμη λαμβάνει ὡς ἀρχὴν κάτι, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει (δηλ. τὴν ἔννοιαν σημεῖον) τὰ τελικὰ δὲ συμπεράσματα καὶ τὰ ἐνδιάμεσα συναρμολογοῦνται ἐξ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει, ποία ἐπινόησις εἶναι δυνατὸν ποτὲ τὴν τοιαύτην παραδοχὴν νὰ τὴν θεωρήσῃ ὡς ἐπιστήμην; οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος».

*(ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν δ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; οὐδεμία ἦδ' ὅς).* (Πολιτεία 533 c).

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου παρατηροῦμεν μίαν ἀσάφειαν κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας «σημεῖον», εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Ῥῆμαν, ἡ ὁποία ἐρείδεται ἐπὶ τῆς ἐννοίας «γραμμικὸν στοιχεῖον» (Linienelement der Form $u\sqrt{\Sigma dx^2}$) ἔχομεν μίαν ἀσάφειαν εἰς τὸ τετράγωνον. Ἡ πεῖρα δὲ ἀπέδειξεν ὅτι ἁπλούστερος τρόπος ἐρεύνης τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου καὶ τῶν φυσικῶν φαινομένων ἐν αὐτῷ δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου, ὡς ὀρθῶς ἔχει τονίσει ὁ Πουανκαρέ.

## ZUSAMMENFASSUNG

### Das Problem des Raumes

Einleitend wird berichtet was die Alten und die neuren über den Raum und die Welt meinten. Weil der Raum mit der Geometrie verbunden ist werden die verschiedenen Arten der Geometrie erläutert und einpaar Sätze der Relativitätstheorie ervähnt. Unter diesen letzten sind: die Umwandlung der Masse in Energie (Anaximander, Hasenöhrl, Einstein) und das Raum-Zeit Kontinuum.

Bis heute ist das Problem des Raumes ungelöst.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΛΔ΄ / ΛΕ΄ 1982 – 1983

ΤΟΜΟΣ 34 & 35 (ΤΕΥΧΗ 67/70)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

1983

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

# Η ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΘΕΑΤΡΟΥ

Ὁ Ῥωμαῖος ἀρχιτέκτων Βιτρούβιος (Α΄ αἰ. π.Χ.) εἰς τὸ βιβλίον του «Περὶ Ἀρχιτεκτονικῆς» παρέχει πολλὰς πληροφορίας διὰ τὴν οἰκοδομὴν οἰκιῶν, μνημείων καὶ ἄλλων δημοσίων οἰκημάτων, ἰδίως τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐκφραζόμενος μὲ θαυμασμὸν διὰ τοὺς μεγάλους Ἕλληνας ἐπιστήμονας καὶ τεχνικούς, Ἀρίσταρχον τὸν Σάμιον, Φιλόλαον, Ἀρχύταν, Ἀπολλώνιον τὸν Περγαῖον, Ἐρατοσθένη τὸν Κυρηναῖον καὶ τοὺς Συρακουσίους Ἀρχιμήδην καὶ Σκοπίναν (Ι, 10). Εἰς τὰς πληροφορίας αὐτὰς ἔχει παρεμβάλει καὶ γνώσεις σχετικὰς μὲ τὴν ἵδρυσιν καὶ τὴν ἀκουστικὴν τοῦ θεάτρου γενικῶς καὶ ἰδίως τοῦ Ἑλληνικοῦ θεάτρου. Διὰ τὴν ἵδρυσιν τοῦ θεάτρου, λέγει, ὅτι πρέπει νὰ ἐκλέγεται ἡ κατάλληλος θέσις, ἡ ὁποία νὰ εὐνοῇ τὴν ἀκουστικὴν τοῦ θεάτρου (5, 56).

Ἡ εἴσοδος τοῦ θεάτρου δὲν πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ νότιον μέρος τοῦ Κοίλου τοῦ θεάτρου, διότι, ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ ἐμποδίζεται πολὺ ἡ καλὴ ἀκουστικὴ τοῦ θεάτρου. Ἡ πληροφορία αὐτὴ ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν μὲ τὴν τοποθεσίαν τοῦ θεάτρου τοῦ Διονύσου, τοῦ κειμένου εἰς τὰς νοτίους παρυφὰς τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστόν, ἂν τὸ θέατρον τοῦτο εἶχε κατασκευασθῇ εἰς ἐποχὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἴσχυον αἱ σχετικαὶ παρατηρήσεις τοῦ Βιτρουβίου. Θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι τὸ θέατρον τοῦ Διονύσου θὰ ἱδρύθη πολὺ πρὸ τοῦ πέμπτου αἰῶνος π.Χ., ὁπότε δὲν θὰ εἶχον ἐπιτευχθῇ αἱ κατάλληλοι γνώσεις διὰ τὴν ἀκουστικὴν ἑνὸς θεάτρου. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ δέον νὰ ἀναφέρωμεν, ὅτι τὸ θέατρον τοῦ Διονύσου ὑπέστη κατὰ τὴν Ῥωμαϊκὴν κατοχὴν τῆς Ἑλλάδος πολλὰς μεταβολάς, τοιαύτας ὥστε τὰ ἀρχικὰ σχέδια νὰ ἔχουν παραμορφωθῇ. Τὴν παρατήρησιν αὐτὴν διατυπώνει ἡ ἀρχαιολόγος Charlotte Fiechter, κόρη τοῦ Γερμανοῦ ἀρχιτέκτονος καὶ ἀρχαιολόγου E. Fiechter, εἰς τὴν πραγματείαν της «Τὸ θέατρον τοῦ Διονύσου, Στουτγάρδη 1950». Ὁ E. Fiechter (Φῆχτερ) ἀφιέρωσε τὸ μεγαλύτερο μέρος τῆς ζωῆς του εἰς τὴν μελέτην τῆς ἱδρύσεως τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ θεάτρου.

Μεταξὺ τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἐξετασθέντων θεάτρων ἀναφέρονται τὰ ἑξῆς θέατρα: 1) Τὸ θέατρον τῆς πόλεως τῶν Οἰνιαδῶν (=Ἀμπελοκήπων), κείμενον παρὰ τὰς ἐκβολὰς τοῦ ποταμοῦ Ἀχελώου. 2) Τὸ θέατρον τῆς πόλεως Πλευρῶν, παρὰ τὸν ποταμὸν Εὔηνον, εἴκοσι περίπου χιλιόμετρα Ἀνατολικῶς τῶν Οἰνιαδῶν. 3) Τὸ θέατρον τῆς Μεγαλοπόλεως, τὸ μεγαλύτερον τῆς Ἑλλάδος, καὶ τὰ θέατρα: τοῦ Διονύσου ἐν Ἀθήναις, τὸ θέατρον τοῦ Πειραιῶς, παρὰ τὸν λιμένα τῆς Ζέας, τοῦ Ὠρωποῦ, τῶν Δελφῶν, τῆς Σπάρτης, τῆς Τεγέας, τῆς Δήλου, τῆς Ἠλείας καὶ τῆς Θήρας. Δι' ἕκαστον ἐκ τῶν θεάτρων αὐτῶν ἐξέδωκεν ἰδιαίτερον βιβλίον, πλὴν τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου. Τὰ βιβλία αὐτὰ δύναταί τις νὰ εὕρῃ εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς ἐν Ἀθήναις Ἀρχαιολογικῆς Ἑταιρείας.

Ὁ Φῆχτερ διεπίστωσεν ὅτι ὅλα τὰ ἐξετασθέντα Ἑλληνικὰ θέατρα ἔχουν ἱδρυθῇ ἐπὶ τῇ βάσει γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ γεωμετρικῶν κανόνων. Εἰς τὰ σχέδια τῆς κατόψεως ὑπάρχει συνδυασμὸς κύκλου, τριγώνου, τετραγώνου κλπ. Τὸ Κοῖλον ἑκάστου θεάτρου, ἡ Ὀρχήστρα, τὸ Προσκήνιον καὶ ἡ Σκηνὴ ἔχουν ἱδρυθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κα-

τόψεως τοῦ θεάτρου, τῆς ἀκολουθούσης τὸν ἀνωτέρω ἀναφερόμενον γεωμετρικὸν σχεδιασμόν.

Οἱ νεώτεροι ἑρμηνευταὶ τῆς ἱδρύσεως τοῦ Ἑλληνικοῦ θεάτρου, διερωτῶνται διὰ ποῖον λόγον ὑπάρχει αὐτὴ ἡ γεωμετρικὴ σχεδίασις, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁποίας ἱδρύονται τὰ ἀρχαῖα θέατρα. Πολλοὶ ἀποδίδουν τὴν κατασκευὴν αὐτὴν εἰς λόγους ἀκουστικῆς, ἀλλὰ τοῦτο, καίτοι θεωρεῖται βέβαιον, δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ. Εἶναι δὲ γνωστόν, ὅτι οὐδεὶς ἔχει ἐπιληφθῆ τοῦ προβλήματος τούτου.

Τὸ μόνον θέατρον, τὸ ὁποῖον δὲν ἐμελέτησεν ὁ Φῆχτερ, καὶ μετὰ τὸν θάνατόν του ἡ κόρη του (ἡ ὁποία ἐξέδωκεν εἰς δευτέραν ἔκδοσιν τὸ θέατρον τοῦ Διονύσου), εἶναι τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου, τὸ κάλλιστον τῶν Ἑλληνικῶν θεάτρων κατὰ τὸν Παυσανίαν (ΙΙ 27), ἔργον τοῦ περιφήμου ἀρχιτέκτονος Πολυκλείτου, συγχρόνου περίπου τοῦ Φειδίου καὶ τοῦ Μύρωνος. Μελέτην τοῦ θεάτρου τούτου ἐξέδωκαν πολὺ βραδύτερον οἱ Γερμανοὶ ἀρχαιολόγοι καὶ ἀρχιτέκτονες Armin von Gerkan καὶ Wolfgang Müller-Wiener εἰς τὴν Στουτγάρδην, 1961, οἱ ὁποῖοι διαφωνοῦν μὲ τὸν Φῆχτερ εἰς τὸ πρόβλημα τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν θεάτρων.

Τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου ἐπανῆλθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ τὰ ἔτη 1881-82 κατόπιν ἀνασκαφῶν, τὰς ὁποίας διενήργησεν ὁ περίφημος ἀρχαιολόγος Π. Καββαδίας, δαπάναις τῆς ἐν Ἀθήναις Ἀρχαιολογικῆς Ἑταιρείας. Τὰ πρῶτα χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν ὁ Καββαδίας διὰ τὰς ἀνασκαφὰς αὐτὰς ἦσαν 800 δραχμαὶ (κατὰ τὸ 1881), καὶ τὰ δεύτερα ἦσαν ἄλλα τόσα. Μὲ τὰ χρήματα αὐτὰ ἐκαλύφθησαν ὅλα τὰ ἔξοδα τῶν ἀνασκαφῶν τῆς Ἐπιδαύρου, ὡς γράφει ὁ Π. Καββαδίας εἰς τὸ περίφημον βιβλίον του «Τὸ Ἱερὸν τοῦ Ἀσκληπιοῦ ἐν Ἐπιδαύρῳ, Ἀθήνησι 1900».

Τὸ θέατρον διεσώθη σχεδὸν ὁλόκληρον, ὅπως τὸ βλέπομεν σήμερον, πλὴν τῆς σκηνῆς, χάρις εἰς τὰ χώματα, τὰ ὁποῖα τὸ κατεκάλυψαν ἐκ τοῦ παρακειμένου γηλόφου, πιθανῶς κατόπιν σεισμῶν.

Τοῦτο χωρεῖ ἀνέτως 14.000 θεατάς. Τὸ κάλλος καὶ ἡ θέα τοῦ θεάτρου εἶναι ἀπαράμιλλα. Ἀλλὰ δὲν εἶναι μόνον τὰ προσόντα αὐτά, τὰ ὁποῖα διακρίνουν τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου. Σχίσιμον ἐφημερίδος, γινόμενον εἰς τὸ μέσον τῆς Ὀρχήστρας, ἀκούεται εὐκρινῶς ὑπὸ τῶν θεατῶν τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰ ἀνώτατα ἑδώλια. Νόμισμα μεταλλικόν, ἀφιέμενον νὰ πέσῃ ἐξ ὕψους ἑνὸς περίπου μέτρου, εἰς τὸ μέσον τῆς ὀρχήστρας, προκαλεῖ ἦχον ἀκουόμενον ἐπίσης εἰς τὰ ἀνώτατα ἑδώλια τοῦ θεάτρου. Φαινόμενα ἀκουστικῆς καταπληκτικά. Τὰ φαινόμενα ταῦτα ὀφείλονται εἰς τὸν τρόπον κατασκευῆς τοῦ θεάτρου, ὡς τονίζει καὶ ὁ Βιτρούβιος καὶ πιστεύεται καὶ ὑπὸ τῶν συγχρόνων μελετητῶν. Τοῦτο ὅμως δὲν ἔχει ἀκόμη ἀποδειχθῆ καὶ ἐπομένως οἱ σχετικοὶ νόμοι τῆς ἀκουστικῆς τοῦ θεάτρου παραμένουν ἄγνωστοι.

Κατὰ τὰς πληροφορίας του Βιτρουβίου, ὅλα τὰ Ἑλληνικὰ θέατρα εἶχον ἀκουστικὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας δὲν εἶχον τὰ θέατρα τῆς Ῥώμης. Ὁ ἴδιος συγγραφεὺς παρέχει ἀκόμη τὰς ἑξῆς πληροφορίας (5,5): Ὅτε κατὰ τὸ 146 π.Χ. ὁ Ῥωμαῖος Ὕπατος Μόμμιος ἐνίκησεν εἰς τὴν μάχην τῆς Κορίνθου, μετέφερεν εἰς τὴν Ῥώμην σωρείαν Ἑλληνικῶν ἀγαλμάτων καὶ ὅλα τὰ ἠχεῖα τοῦ θεάτρου τῆς Κορίνθου, τὰ ὁποῖα ἐθεώρησε πολεμικὰ λάφυρα, ἐκλαβὼν αὐτὰ ὡς ὅπλα! Διηγοῦνται μάλιστα καὶ τὸ νόστιμον περιστατικόν, ὅτι ὁ Μόμμιος εἶχε διατάξει τοὺς στρατιώτας του, τοὺς μεταφέροντας τὰ ἀγάλματα εἰς τὰ πλοῖα, νὰ προσέξουν μήπως θραύσουν κανένα ἄγαλμα, διότι θὰ ὑποχρεωθοῦν νὰ τὸ κατασκευάσουν ἐκ νέου! Αὐτὴ ἦτο ἡ μόρφωσις τοῦ ἀγροίκου Ῥωμαίου Ὑπάτου.

Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς ἀναγραφῆς τῆς μεταφορᾶς εἰς τὴν Ῥώμην τῶν ἠχείων τοῦ θεάτρου τῆς Κορίνθου, ὁ Βιτρούβιος ἀναπολεῖ τὸ ἔξοχον, ὡς λέγει, σύγγραμμα περὶ Μουσικῆς, τοῦ ἐκ Τάραντος τῆς Μεγάλης Ἑλλάδος καταγομένου Ἕλληνος φιλοσόφου Ἀριστοξένου, μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ ὁποίου ἐσώθησαν πολὺ ὀλίγα ἀποσπάσματα. Προσθέτει δὲ ὁ Βιτρούβιος (5,5), ὅτι εἰς τὰ Ἑλληνικὰ θέατρα, πρὸς ἐνίσχυσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου, εἶχον τοποθετήσει ὑπὸ τοὺς πόδας τῶν θεατῶν ἀγγεῖα ἀνοικτὰ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον (πιθανῶς σχήματος πίθου), τὰ ὁποῖα ἐκαλοῦντο ἠχεῖα. Αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν ἠχείων εἶχον ἐκλεγῆ κατὰ τοὺς κανόνας κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος, τοὺς ὁποίους περιγράφει ὁ Βιτρούβιος. Ὁ μουσικὸς τοῦ Γυμνασίου Ῥόδου κ. Γεώργιος Καραμηνᾶς ἀσχολεῖται μὲ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀπὸ καιροῦ, ἀλλὰ δὲν ἔχει ἀκόμη δημοσιεύσει τὰ πορίσματα τῶν ἐρευνῶν του. Θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι ὁ Βιτρούβιος ἔχει δίκαιον μὲ τὰς περιγραφάς του περὶ τῶν ἠχείων τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν θεάτρων. Σήμερον ὅμως παρὰ τὴν ἔλλειψιν τῶν ἠχείων καὶ τὴν ἔλλειψιν τοῦ Προσκηνίου καὶ τῆς Σκηνῆς τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου, λαμβανομένου ὡς προτύπου κατασκευῆς τοῦ Ἑλληνικοῦ θεάτρου, ὁ ἦχος ἀπὸ τὸ σχίσιμον ἐφημερίδος καὶ ὁ παραγόμενος ἦχος πίπτοντος εἰς τὴν ὀρχήστραν νομίσματος ἀκούονται εὐκρινῶς εἰς τὰ ἀνώτατα ἑδώλια. Συμπεραίνεται λοιπόν, ὅτι τὰ ἠχεῖα ἐνίσχυον μελωδικῶς τοὺς ἤχους τοὺς προερχομένους ἐκ τῆς Ὀρχήστρας, τοῦ Προσκηνίου καὶ τῆς Σκηνῆς, ἀλλὰ ταῦτα δὲν ἦσαν τὰ κύρια μέσα ἐνισχύσεως τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου. Οἱ νεώτεροι μελετηταὶ συμφωνοῦν εἰς αὐτὸ καὶ λέγουν ὅτι ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τοῦ θεάτρου καθιστᾷ δυνατὴν τὴν μεγάλην ἐνίσχυσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου. Ἀνάλυσις ὅμως τῆς κατασκευῆς αὐτῆς, ἀπὸ ἀπόψεως ἠχητικῆς ἀποδόσεως δὲν ἐπετεύχθη μέχρι σήμερον.

Τὸ πρόβλημα τῆς ἀκουστικῆς τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου δὲν ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς εἰδικοὺς ἐπιστήμονας τοῦ Ἐξωτερικοῦ πρὸ τοῦ Β΄ παγκοσμίου πολέμου (1939-1945). Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς Γερμανικῆς κατοχῆς τῆς Ἑλλάδος (1941-1944) Ἀποστολὴ εἰδικῶν Γερμανῶν ἐμελέτησεν ἐπὶ τόπου τοὺς κανόνας κατασκευῆς τῶν μνημείων τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν. Τὰ πορίσματα τῶν ἐρευνῶν αὐτῶν θὰ ἔχουν καταχωθῆ εἰς Γερμανικὰ Ἀρχεῖα. Τὸ μόνον γνωσθὲν εἶναι ὅτι ἡ Ἀποστολὴ αὐτὴ ἀνεκάλυψε κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ Παρθενῶνος ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τῆς χρυσῆς τομῆς τῆς Γεωμετρίας. Ἐλάχιστα ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν αὐτῶν περιελθόντα εἰς χεῖρας μου παρέδωκα ἐν καιρῷ εἰς τὸν φίλτατον ἀείμνηστον καθηγητὴν Ἀναστάσιον Ὀρλάνδον. Μελέτη τῆς ἀκουστικῆς τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου δὲν ἐγνώσθη ἂν ἔγινεν ὑπὸ τῆς Ἀποστολῆς αὐτῆς.

Κατόπιν παρακλήσεως Ἕλληνος καθηγητοῦ, ὁ ἐν Βερολίνῳ καθηγητὴς Max von Laue (1879-1960, βραβεῖον Νόμπελ Φυσικῆς 1914) ἐπρόκειτο μὲ ἐπιτελεῖον εἰδικῶν ἐπιστημόνων νὰ κατέλθῃ κατὰ τὸ 1960 εἰς τὴν Ἑλλάδα πρὸς μελέτην τῆς ἀκουστικῆς τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου. Δυστυχῶς ὁ Laue ἐφονεύθη εἰς αὐτοκινητικὸν δυστύχημα ἐν Βερολίνῳ κατὰ τὸ ἔτος ἐκεῖνο. Κατὰ τὸ 1947 ἐπεχειρήθη συστηματικὴ μελέτη τῆς ἀκουστικῆς τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου ὑπὸ τοῦ πολιτικοῦ μηχανικοῦ καὶ κατόπιν καθηγητοῦ τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου ἀειμνήστου Βασιλείου Παπαθανασοπούλου. Παρὰ τὴν ἀρτίαν πράγματι μελέτην αὐτὴν τὸ πρόβλημα παρέμεινεν ἄλυτον. Δὲν εὑρέθησαν δηλαδὴ κανόνες κατασκευῆς θεάτρων, παρέχοντες τὴν ἀκουστικὴν τοῦ θεάτρου τῆς Ἐπιδαύρου. Κατὰ τὸ 1966 ἐπεχειρήθη μέτρησις τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου ὑπὸ τοῦ ἀειμνήστου καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονί-

κης Γεωργίου Γιαννούλη († 1980) καὶ τοῦ Ὑφηγητοῦ τοῦ αὐτοῦ Πανεπιστημίου Ἀλεξάνδρου Κουσουλάκου, οἵτινες διέθεσαν διὰ τὰς μετρήσεις αὐτὰς λεπτότατον ὄργανον μετρήσεως τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου. Τὰ ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων τούτων δὲν εἶχον καλὴν ἀπόδοσιν, ἕνεκα τῶν κακῶν καιρικῶν συνθηκῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπεκράτουν κατὰ τὸν χρόνον τῶν μετρήσεων.

Ἄλλη προσπάθεια μετρήσεως τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου ἔγινε κατὰ τὸ 1976 ὑπὸ τοῦ μηχανολόγου Ἰωάννου Σακᾶ, τοῦ ὁποίου τὰ πειράματα διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς καύσεως τῶν Ῥωμαϊκῶν πλοίων διὰ κατόπτρων, ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐπέτυχον τόσον καλά. Μέχρι τῆς στιγμῆς ὅμως δὲν ἐγνώσθησαν τὰ ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων αὐτῶν (1980). Καὶ τὸ μυστικὸν τῆς αὐξήσεως τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸ θέατρον τῆς Ἐπιδαύρου παραμένει τὸ Μέγα μυστικόν. Οὐδεμία ἔρευνα γίνεται πρὸς ἀποκάλυψιν τοῦ μυστικοῦ αὐτοῦ, διότι οἱ νεώτεροι ἐρευνηταὶ ἀρκοῦνται εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῶν μεγαφώνων!

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἀπὸ ἀπόψεως ἀκουστικῆς καὶ τὸ θέατρον τοῦ Ἄργους, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ἑδώλια εἶναι σκαλισμένα εἰς βράχον καὶ σώζονται σήμερον μὲ πολλὰς ζημίας. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ Κοίλου τοῦ θεάτρου τούτου ὑπάρχουν δύο φρεάτια. Ὑποτίθεται ὅτι ταῦτα εἶχον σκοπὸν τὴν ἐνίσχυσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἤχου. Οὐδὲν ὅμως στοιχεῖον ὑπάρχει σχετικὸν μὲ τὴν ἀκουστικὴν τοῦ θεάτρου τούτου, τὸ ὁποῖον ἀναμένει τοὺς εἰδικοὺς ἐρευνητὰς πρὸς μελέτην.

Ὑπάρχει ἀκόμη ἓν μυστικὸν τῆς ἀκουστικῆς ἄγνωστον εἰς τὴν σημερινὴν Ἐπιστήμην. Τοῦτο εἶναι τὸ μυστικὸν τῆς πολλαπλῆς ἀντηχήσεως ἢ πολλαπλῆς ἀντανακλάσεως, κατὰ Πλούταρχον. Εἰς τὴν μεγάλην αἴθουσαν τοῦ μνημείου τῆς Λειψίας (Leipzig), τὸ ὁποῖον ἱδρύθη πρὸς ἀνάμνησιν τῆς μάχης τῶν Ἐθνῶν κατὰ τοῦ Ναπολέοντος (1813) καὶ τὰ ἐγκαίνια αὐτοῦ ἔγιναν κατὰ τὸ 1913, φωνὴ ὁμιλοῦντος ἐκεῖ ἐπαναλαμβάνεται πολλὰς φοράς. Οἱ ἀρχιτέκτονες τοῦ μνημείου ἐξεπλάγησαν μὲ τὸ φαινόμενον αὐτό, τὸ ὁποῖον δὲν προεκλήθη ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχιτεκτονικῶν των σχεδίων, ἀλλ' ἔγινεν ὅλως τυχαίως. Οἱ κανόνες δὲ τῆς Ἀρχιτεκτονικῆς διὰ τὸ προκαλούμενον ἀκουστικὸν φαινόμενον παραμένουν ἄγνωστοι.

Τὸ ἴδιον φαινόμενον συνέβαινε καὶ εἰς τὸν ἱερὸν ναὸν τοῦ Ἁγίου Δημητρίου Θεσσαλονίκης, ὅπου ὡς διεπιστώσαμεν προσωπικῶς κατὰ τὸ 1929, ὁ προκαλούμενος ἦχος ὑπὸ κλειδίου, ἀφινομένου νὰ πέσῃ ἔκ τινος μικροῦ ὕψους εἰς τὸ μέσον τοῦ ναοῦ ἠκούετο διαδοχικῶς δώδεκα φοράς. Δυστυχῶς τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐξηφανίσθη πρὸ ὀλίγων ἐτῶν, ὅταν ἔγιναν μεταβολαὶ καὶ διορθώσεις τινες εἰς τὴν ἐσωτερικὴν δομὴν τοῦ ναοῦ. Καὶ ἐδῶ παραμένουν ἄγνωστοι οἱ κανόνες τῆς πολλαπλῆς ἀντηχήσεως ἢ πολλαπλῆς ἀντανακλάσεως, ὡς ἔλεγον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες.

Κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τὸ φαινόμενον τῆς πολλαπλῆς ἀντηχήσεως ἦτο γνωστόν, ὡς πληροφορούμεθα ἀπὸ τὸν Πλούταρχον, ὁ ὁποῖος λέγει, ὅτι εἰς τὴν Ὀλυμπίαν ὑπῆρχε στοά, εἰς τὴν ὁποίαν ἀπὸ μιᾶς φωνῆς ἠκούοντο ἑπτὰ διαδοχικαὶ φωναί: «Τὴν μὲν γὰρ ἐν Ὀλυμπίᾳ στοὰν ἀπὸ μιᾶς φωνῆς πολλὰς ἀντανακλάσεις ποιοῦσαν ἑπτάφωνον καλοῦσι» (Πλούταρχος, Περὶ ἀδολεσχίας, Ἠθ. 502D). Ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν Πυραμίδων τῆς Αἰγύπτου, ὅταν κανεὶς ὡμιλοῦσε, ἡ φωνὴ ἀκούετο τέσσαρας ἢ πέντε φοράς, ὡς πληροφορούμεθα ἀπὸ τὸν Ψευδο-Πλούταρχον, ὅστις γράφει:

Ἐν γοῦν ταῖς κατ' Αἴγυπτον πυραμίσιν ἔνδον μία φωνὴ ῥηγνυμένη τέσσαρας ἢ καὶ πέντε ἤχους ἀπεργάζεται. (Περὶ τῶν ἀρεσκόντων φιλοσόφοις φυσικῶν δογμάτων (Εἰς Ἠθικὰ Πλουτάρχου 903 Α).

## Zusammenfassung

Einleitend wird erwähnt was von Vitruvius und den neueren, E. Fiechter und seiner Tochter Charlotte über das griechische Theater geschrieben ist. Die Verstärkung des Schalles im Theater von Epidaurus ist noch heute, trotz aller Schäden, grossartig. Bei dieser Gelegenheit wird erwähnt: Der Nachhall im Völkerschlachtdenkmal, Leipzig, in Olympia, den Ägyptishen Pyramiden und in der Kirche Saint Demetrius (Thessaloniki). (Plutarch Moralia 502 D, 903 A).

Τὸ πνεῦμα τῆς Ἀρχαιότητος εἶναι μία τόσον μεγάλη θεότης, ποὺ δὲν γίνεται ναὸς ἱκανὸς νὰ τὴν σκεπάσῃ.

Εἶναι τὸ ἴδιο τὸ πνεῦμα μας, εἶναι αὐτὸ ποὺ ἔχει διαμορφώσει τὸν Εὐρωπαϊκὸν νοῦν.

Εἶναι ἕνα θεμέλιον τῆς Ἐκκλησίας, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἡ παγκόσμιος θρησκεία τοῦ Χριστοῦ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀποσπασθῇ. Χωρὶς Πλάτωνα καὶ Ἀριστοτέλη δὲν θὰ ὑπῆρχαν Χριστιανοὶ Πατέρες.

Εἶναι ἡ γλῶσσα τῆς Πολιτικῆς, τὸ πνευματικόν της στοιχεῖον, μὲ τὸ ὁποῖον ἠμποροῦν νὰ εἰσέρχωνται εἰς τὴν πνευματικήν μας ζωὴν αἱ ἐξελισσόμεναι καὶ διαρκῶς ἐπανερχόμεναι πολιτικαί της μορφαί.

Εἶναι ὁ μῦθος τῆς Εὐρωπαϊκῆς μας ὑπάρξεως, ἡ δημιουργία τοῦ πνευματικοῦ μας κόσμου, ἡ ἐπιβολὴ τοῦ κόσμου ἔναντι τοῦ χάους, ἡ τάξις καὶ ἡ ἀλλαγή, τὸ μέτρον καὶ ἡ εὐλογία.

Δὲν ἀποτελεῖ σωρευμένην προμήθειαν, ἀλλὰ ἕναν κόσμον πνευμάτων φορτισμένον μὲ ζωὴν μέσα μας. Ἕνα φανερὸ ἀκατάλυτο μυστικό.

Εἶναι μία θαυμασία ὁλότης. Ἕνα δυνατὸ ποτάμι καὶ συγχρόνως μία πηγὴ παρθενική, ποὺ ἀναβλύζει διαρκῶς ἀγνή.

Εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ πνεύματος τῆς Ἀρχαιότητος τίποτε δὲν εἶναι τόσον παλαιόν, ποὺ νὰ μὴ δύναται αὔριον νὰ προβάλῃ ὡς Νέον καὶ νὰ λάμπῃ ἀπὸ νεότητα

*Hugo von Hoffmannstahl: Vermächtnis der Antike*

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**

ΕΤΟΣ ΛΖ΄ – 1985

ΤΟΜΟΣ 37 (ΤΕΥΧΗ 73/74)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

1985

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

## Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ Εὐκλείδου

Δὲν εἶναι γνωστὸν ποῦ καὶ πότε ἐγεννήθη ὁ μαθηματικὸς Εὐκλείδης καὶ πότε ἀπέθανε. Ὅτι ἔζησε εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ὅπου ἐξέδωκε τὸ περίφημον ἔργον του ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ εἶναι γενικῶς παραδεκτόν. Ἄγνωστον παραμένει ποῦ ἐσπούδασεν ὁ Εὐκλείδης. Αἱ ὑπάρχουσαι ἐνδείξεις εἶναι ὅτι ἐσπούδασεν εἰς τὰς Ἀθήνας πρὸ τοῦ ἔτους 323 π.Χ., ὅπου ἔπρεπε νὰ ἔχῃ διακριθῆ ὡς μαθηματικὸς καὶ ὅτι ἐκ τῶν Ἀθηνῶν ἐκλήθη εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ὑπὸ τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου τοῦ Α΄, ὅστις ἐβασίλευσεν εἰς τὴν Αἴγυπτον ἀπὸ τοῦ 323-285 π.Χ. Ὁ βασιλεὺς οὗτος εἶναι ὁ ἱδρυτὴς τοῦ Μουσείου τῆς Ἀλεξανδρείας διὰ τὴν ἐπάνδρωσιν τοῦ ὁποίου ἐκάλεσεν ἐξέχοντας διανοουμένους τοῦ Ἑλληνικοῦ Κόσμου. Μαρτυρία περὶ τούτου ὑπάρχει ἡ πρόσκλησις τοῦ Μενάνδρου καὶ Φιλήμονος. (Ἐπιστολὴ Μενάνδρου πρὸς Γλυκέραν, A.S. Schepers, Teubner 1905, p. 142). Καὶ οἱ ἑπόμενοι Πτολεμαῖοι συνέχισαν τὰς προσκλήσεις τοῦ Α΄ Πτολεμαίου (Διογένης Λαέρτιος, Χρύσιππος VII 185). Ἐνδείξεις ὅτι τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου προέρχονται ἐκ τῆς Πυθαγορείου διδασκαλίας καὶ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ἀποτελοῦν δύο σχόλια τῶν Στοιχείων:

1) Scholia in librum X der Elemente (Heiberg - Stamatis, El. V2, p. 81-98, Leipzig 1977 καὶ

2) Scholium des Abou Othman (Paul-Henri Michel, de Pythagore à Euclide p. 109 et 457, Paris 1950, et Mémoire prés. à l'Academie des Sciences, Paris 1856 p. 691, et Stamatis Εὐκλείδου Περὶ Ἀσυμμέτρων, Στοιχείων X, p. 15 vol. 3, Ἀθῆναι 1957.

Ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπέδρασαν εἰς τὰς συγγραφὰς τοῦ Ἀριστοτέλους παραμένει ἀναπόδεικτος.


## Zusammenfassung

### Über Euklid den Mathematiker

Es ist nicht bekannt wo und wann Euklid geboren und gestorben ist und wo er studiert hat. Nach wenigen Anzeichen wird behauptet, Euklid studierte in Athen bei Pythagoreern und der platonischen Academie vor 323 v. Chr. und ist vom König Ptolemaeus I, der von 323-285 regierte, für das Museum nach Alexandrien eingeladen, wie es für die Dichter Menander und Philemon geschehen ist.

Beeinflussung des Corpus Aristotelicum von dem Elenenten Euklids und umgekehrt ist unbeweisbar. (Heiberg und Vogt in Josef Zürcher, Aristoteles Werk und Geist p. 60, V. Schöningh, Paderborn 1952).

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Α' 1949

= 1.

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1949

τῶν πτηνῶν καὶ τῶν ἰχθύων. Παρατίθενται πάντοτε τὰ σχετικὰ χωρία, ἐνισχυόμενα καὶ ὑπὸ μαρτυριῶν λατίνων συγγραφέων. Μετὰ τὴν λημματογράφησιν τῶν παραδεδομένων τύπων ἑκάστου ὀνόματος, προστίθεται, ὅπου τοῦτο εἶναι γνωστόν, τὸ νεοελληνικὸν ὄνομα τοῦ πτηνοῦ ἢ τοῦ ἰχθύος. Εὐχῆς ἔργον θὰ ἦτο ἂν τὰ ἀνωτέρω δύο λεξικὰ ἐγένοντο κτῆμα τῶν Ἑλλήνων φιλολόγων καὶ φυσικῶν, οἵτινες σὺν τοῖς ἄλλοις θὰ ἠδύναντο βάσει αὐτῶν νὰ συμπληρώσωσι τὰ νεοελληνικὰ ὀνόματα τῶν πτηνῶν καὶ τῶν ἰχθύων, μετὰ τῶν κατὰ διαλέκτους ποικιλιῶν αὐτῶν. Ἡ παράδοσις τῶν ὀνομάτων αὐτῶν εἶναι λίαν συντηρητικὴ καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοιαύτης ἐρεύνης θὰ ἀπεδείκνυε τὴν ἐν συνεχείᾳ παράδοσιν πολυτίμου τμήματος τοῦ γλωσσικοῦ ἡμῶν θησαυροῦ. Καὶ ἡ λαογραφία θὰ εἶχε πολλὰ νὰ ὠφεληθῇ, διότι θὰ ἀπεδεικνύετο ἡ ἐπιβίωσις πολλῶν παραδόσεων περὶ τῶν πτηνῶν καὶ τῶν ἰχθύων, ἐκ τοῦ πλήθους ἐκείνων ἃς παρατίθησιν ὁ συγγραφεύς, ἐκ πηγῶν ἐν πολλοῖς δυσπροσίτων εἰς τὸν ἐκπαιδευτικόν μας κόσμον.

## ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΣΙΑΙ

**Ε. Σ. Σταμάτη**, καθηγητοῦ. Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας: Ἀθῆναι 1949 σελ. 32.

Ὁ κ. Ε. Σ. Σταμάτης ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν ἔχει ἐπιληφθῆ τῆς μελέτης τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν. Μέχρι τοῦδε ἔχει παρουσιάσει δύο ἐργασίας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἀναφέρεται εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τῆς παραβολῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν μηχανικῶν τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως. Ἀμφότεραι αἱ μνημονευθεῖσαι ἐκδόσεις περιέχουν τὸ ἀρχαῖον κείμενον τοῦ Ἀρχιμήδους, μετάφρασιν αὐτοῦ καὶ γεωμετρικὰ διαγράμματα. Ὁ κ. Σταμάτης κατώρθωσε καὶ εἰς τὰς δύο μελέτας νὰ ἀποδώσῃ μὲ ἀκριβολογίαν καὶ ὑποδειγματικὴν ἐπιστημονικότητα τὸ ἀρχαῖον κείμενον, καὶ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν νέων μαθηματικῶν συμβόλων νὰ καταστήσῃ προσιτὴν τὴν σκέψιν τοῦ μεγαλοφυοῦς Ἕλληνος μαθηματικοῦ. Εἰς τὴν νέαν του ἐργασίαν ἐπιλαμβάνεται τῆς ἐξετάσεως δύο ἐκ τῶν σοβαρωτέρων προβλημάτων τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν. Τὸ ἓν εἶναι τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ τὸ ἄλλο ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας. Εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τῶν μνημονευθέντων προβλημάτων τὸ ζητούμενον εἶναι, δοθέντος ὡρισμένου κύβου νὰ κατασκευασθῇ ἕτερος διπλάσιος πρὸς αὐτόν. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος μᾶς διέσωσεν ἐπιστολὴν τοῦ Ἐρατοσθένους πρὸς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀναφέρονται στίχοι τραγικοῦ ποιητοῦ, εἰς τοὺς ὁποίους γίνεται λόγος περὶ τοῦ προβλήματος τούτου. Κατὰ τὸν Ἐρατοσθένη ὁ τραγικὸς ποιητὴς παρίστανε τὸν Μίνωα διατάσσοντα τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κατασκευασθέντος διὰ τὸν υἱόν του Γλαῦκον κυβικοῦ τάφου :

Μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου
διπλάσιος ἔστω, τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλεὶς
δίπλαζ' ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου.

Οἱ στίχοι οὗτοι ἐθεωρήθησαν ὑπὸ τοῦ Ὁλλανδοῦ φιλολόγου Βάλκεναρ ὡς

προερχόμενοι ἀπὸ δρᾶμα τοῦ Εὐριπίδου ὅπερ ἔφερε τὸν τίτλον Πολύϊδος (ἢ Πολύειδος), ὁ Nauck ὅμως κατέταξε τούτους εἰς τὰ ἀδέσποτα ἀποσπάσματα. Κατ' ἄλλην παράδοσιν οἱ Δήλιοι διαταχθέντες ὑπὸ χρησμοῦ τοῦ Ἀπόλλωνος νὰ διπλασιάσουν βωμόν τινα, προσέκρουσαν εἰς τὴν αὐτὴν δυσκολίαν καὶ ἐζήτησαν ἀπὸ τοὺς ἐν τῇ πλατωνικῇ Ἀκαδημείᾳ γεωμέτρας τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου. Κατὰ τὸν Εὐτόκιον κατὰ τὴν ἀρχαιότητα εἶχον ἐπινοηθῇ διὰ τὸ δήλιον πρόβλημα δώδεκα λύσεις. Ὁ κ. Σταμάτης ἐκθέτει τὸ ἱστορικὸν τοῦ προβλήματος παραθέτων τὰ παραδεδομένα κείμενα καὶ παρέχων καὶ τὴν ἐξήγησιν αὐτῶν. Μᾶς δίδει ἀκριβεστάτην μετάφρασιν τῆς πρὸς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον μνημονευθείσης ἐπιστολῆς τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν προσηρτημένου ἐπιγράμματος. Ἐκ δὲ τῶν γνωστῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα δώδεκα λύσεων ὁ κ. Σταμάτης ἀναπτύσσει τὰς πέντε λύσεις, ἤτοι τὴν φερομένην ἐπ' ὀνόματι τοῦ Πλάτωνος, τὴν λύσιν τοῦ Μεναίχμου, τοῦ Διοκλέους, τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Νικομήδους. Εἰς τὴν λύσιν τὴν ἀποδιδομένην εἰς τὸν Πλάτωνα τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς εὑρέσεως τῶν δύο μέσων ἀναλόγων δοθεισῶν δύο εὐθειῶν. Πρόκειται περὶ τῆς ἀναγωγῆς τοῦ προβλήματος, ἣν εἶχεν ἐπινοήσει ὁ ἐκ Χίου μέγας μαθηματικὸς Ἱπποκράτης. Ὁ Μέναιχμος ἐπέτυχε τὴν λύσιν διὰ δύο μεθόδων, ἤτοι διὰ τῆς τομῆς ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς καὶ διὰ τῆς τομῆς δύο παραβολῶν. Ὁ Διοκλῆς διὰ νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἤχθη εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς κισσοειδοῦς γραμμῆς, ὁ δὲ Νικομήδης εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς. Ὁ Ἐρατοσθένης ἔλυσε τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἐπινοήσεως εἰδικοῦ ὀργάνου ὅπερ ὠνομάσθη μεσολάβιον. Τὰς λύσεις ταύτας ἀναπτύσσει ὁ κ. Σταμάτης στηριζόμενος κυρίως εἰς τὰς μαρτυρίας τοῦ Εὐτοκίου, τὰς ἐκφράζει δὲ διὰ τῶν ἐν συνήθει χρήσει μαθηματικῶν συμβόλων καὶ διὰ γεωμετρικῶν διαγραμμάτων διὰ τῶν ὁποίων καθίστανται ἐποπτικῶς φανεραί. Λίαν ἐπιτυχὴς τυγχάνει καὶ ἡ ἀναπαράστασις τῆς συσκευῆς ἣν ἐπενόησεν ὁ Νικομήδης διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς. Ταύτην δὲν περιωρίσθη νὰ περιγράψῃ μόνον εἰς τὴν μελέτην του ὁ κ. Σταμάτης ἀλλὰ προέβη καὶ εἰς κατασκευήν της, ἐκθέσας ταύτην εἰς τὸ βιβλιοπωλεῖον Δ. Ἀλεξίου (Πεσμαζόγλου 5). Ἡ ὅλη περὶ τοῦ δηλίου προβλήματος πραγματεία τερματίζεται διὰ τῆς σπουδῆς τοῦ αὐτοῦ ζητήματος ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ὁποίας μᾶς παρέχει ὁ συγγραφεὺς τὴν ἐξίσωσιν τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς.

Τὸ εἰς τὴν τριχοτόμησιν τῆς ὀξείας γωνίας ἀναφερόμενον πρόβλημα ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον μέρος τῆς μελέτης τοῦ κ. Σταμάτη. Εἰς τοῦτο ἐκτίθενται τρεῖς τρόποι λύσεως, οἵτινες εἶχον ἐπινοηθῇ ὑπὸ τῶν παλαιῶν μαθηματικῶν. Ὁ πρῶτος εἶναι ἡ διὰ τῆς κογχοειδοῦς γραμμῆς τοῦ Νικομήδους, ὁ δεύτερος ὁ τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κανόνος καὶ διαβήτου κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς κινητικῆς γεωμετρίας, καὶ ὁ τρίτος ὁ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν. Καὶ εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς μελέτης του ὁ συγγραφεὺς ἀκολουθεῖ τὰς αὐτὰς μεθοδολογικὰς ἀρχὰς καὶ ἀναπτύσσει τὰ πράγματα μετὰ σαφηνείας καὶ ἐποπτικότητος.

Εἰς τὸ βιβλίον του ὁ κ. Σταμάτης περιωρίσθη νὰ παράσχῃ σαφῆ καὶ ἀκριβῆ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπαρχουσῶν μαρτυριῶν ἔκθεσιν τῶν ζητημάτων. Δὲν εἰσέρχεται εἰς τὴν διερεύνησιν τῶν ἱστορικῶν προβλημάτων ὡς πρὸς τὴν προτεραιότητα καὶ

τὴν πατρότητα τῶν ἐκτιθεμένων λύσεων. Θὰ ἦτο λίαν ἐνδιαφέρον νὰ ἐπεκτείνῃ καὶ εἰς τὸ πεδίον τοῦτο τὴν ἔρευνάν του καὶ ἰδίᾳ ὡς πρὸς τὴν ἐπ᾽ ὀνόματι τοῦ Πλάτωνος φερομένην λύσιν τοῦ δηλίου προβλήματος. Ἐλπίζομεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς εἰς ἄλλο ἔργον του θὰ προχωρήσῃ καὶ εἰς τὴν διερεύνησιν τῶν ἱστορικῶν συναφειῶν, διὰ νὰ λυθῇ ἓν ἐκ τῶν δυσκολωτέρων προβλημάτων τῆς ἱστορίας τῆς ἀρχαίας ἐπιστήμης. Μία τοιαύτη ἔρευνα ὅμως δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ συμπεριληφθῇ εἰς τὴν ἐκδοθεῖσαν μελέτην, ἥτις ἔχει χαρακτῆρα οὐχὶ ἱστορικῆς διερευνήσεως ἀλλὰ συστηματικῆς ἐκθέσεως. Ὅθεν κρινομένη ἡ ἀπασχολοῦσα ἡμᾶς μελέτη ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς λίαν ἐπιτυχής.

Ὁ κ. Σταμάτης εἶναι ἐκ τῶν ἐλαχίστων ἐρευνητῶν τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην. Διὰ τοῦτο αἱ ἐργασίαι του εἶναι πολύτιμοι. Τὰ ἀρχαῖα μαθηματικὰ ἐνέχουν ἐν ἑαυτοῖς ὑψίστην μορφωτικὴν καὶ παδαγωγικὴν ἀξίαν, τὴν ὁποίαν, ὡς γνωστόν, ἐξῆρεν ὁ Πλάτων. Δυστυχῶς παρ᾽ ἡμῖν ἐλαχίστη ἐργασία γίνεται περὶ τὰ ἀρχαῖα μαθηματικά. Πολλοὶ ἐκ τῶν λεγομένων «μορφωμένων» ἀγνοοῦν ὅτι τὸ σύστημα τῆς γεωμετρίας εἶναι αὐτούσιον ὅπως τὸ ἐσχεδίασεν ὁ Εὐκλείδης. Πολλοὶ δὲ ἐκ τῶν φωνασκούντων κατὰ τῶν κλασσικῶν σπουδῶν «προοδοπλήκτων» λησμονοῦν ὅτι ἅπαντες οἱ μεγάλοι Ἕλληνες φιλόσοφοι εἶναι συγχρόνως καὶ μεγάλοι θεμελιωταὶ τῆς μαθηματικῆς καὶ φυσικῆς ἐπιστήμης. Ὁ κ. Σταμάτης ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν δὲν φείδεται μόχθων διὰ νὰ καταστήσῃ προσιτὰ εἰς τὴν σπουδάζουσαν νεολαίαν τὰ συγγράμματα τῶν μεγαλοφυῶν μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος. Διὰ τοῦτο χαιρετίζομεν μὲ ἐνθουσιασμὸν τὴν ἔκδοσιν τῆς νέας του μελέτης εὐχόμενοι νὰ προχωρήσῃ ὁ συγγραφεύς της εἰς τὴν πρὸ πολλοῦ παρασκευαζομένην ἔκδοσιν καὶ ἑρμηνείαν τῶν ἀθανάτων συγγραμμάτων, ἅτινα μᾶς ἀφῆκεν ὁ Εὐκλείδης.

Κ, Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Β' 1950

= 2[1]

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1950

# ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΣΙΑΙ

**Ε. Σ. Σταμάτη.** Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις. Εἰσαγωγή, Ἀρχαῖον κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις. Σελ. 30. Ἀθῆναι 1950.

Εἰς τὸ πρῶτον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος» ἔσχομεν τὴν εὐτυχίαν νὰ κρίνωμεν τὸ ὑπὸ τοῦ κ. Ε. Σταμάτη ἐκδοθὲν ἔργον «Τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας».

Σήμερον εἴμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ἐπιληφθῶμεν τῆς κριτικῆς ἀναλύσεως νέου ἔργου τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως ὑπὸ τὸν ἀνωτέρω σημειούμενον τίτλον.

1. Τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις», ὅπως τοῦτο σῴζεται (ἔκδοσ. I. Heiberg, Λειψία), περιλαμβάνει ἐν ὅλῳ μόνον τρία θεωρήματα. Εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τούτων ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι πᾶς κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ἄλλη μὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ. Εἰς τὸ δεύτερον θεώρημα ἀποδεικνύει, ὅτι, ἐὰν εἰς κύκλον περιγραφῇ τετράγωνον, τότε ὁ λόγος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνον εἶναι 11 : 14. Εἰς τὸ τρίτον ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι ὀλίγον μικροτέρα μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου, ὀλίγον μεγαλυτέρα δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ αὐτῆς.

2. Καὶ τὰ τρία ὡς ἄνω θεωρήματα ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Μετρικὰ» (τόμ. III, Α΄ σελ. 66). Τὸ ἔργον τοῦτο τοῦ Ἥρωνος ἀνευρέθη πρὸ πεντήκοντα περίπου ἐτῶν ἐν Κων]πόλει, περιεχόμενον εἰς κώδικα, ὅστις διετηρεῖτο πολὺ ἐφθαρμένος. Ἡ σειρά, καθ' ἣν μνημονεύονται τὰ τρία θεωρήματα ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν σειρὰν καθ' ἣν ἀναγράφονται εἰς τὸ ὑπὸ τοῦ Heiberg ἐκδοθὲν ἔργον. Τὸ δεύτερον θεώρημα μνημονεύεται ὡς πρῶτον, τὸ τρίτον ὡς δεύτερον καὶ τὸ πρῶτον ὡς τρίτον. Ἐπὶ πλέον ὁ Ἥρων λέγει, ὅτι τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον θεώρημα (τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τοῦ ἔργου) περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις», ἐν ᾧ διὰ τὸ τρίτον λέγει, ὅτι περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι». Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἔργον ἔχει ἀπολεσθῆ.

Ἄλλας πληροφορίας, συναφεῖς πρὸς τὸ ὑπ' ὄψιν ἔργον τοῦτο τοῦ Ἀρχιμήδους, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Διρφάντου. Ἐκ τούτων ὁ μὲν Πάπ-

πος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Συναγωγὴ» (V, 312, 12) ἀναφέρει τὸ πρῶτον θεώρημα, ὡς περιεχόμενον εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «περὶ κύκλου περιφερείας» (ἀπολεσθέν), ὁ δὲ Διόφαντος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Ἐπιπεδομετρικὰ» (II, σελ. 22, 16) λέγει, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι 30 ἰσόπλευρα τρίγωνα ἰσοῦνται μὲ 13 τετράγωνα (ἐγγεγρ. εἰς κύκλον). Ἐκ τῶν ὡς ἄνω σχετικῶν χωρίων τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Διοφάντου συνάγεται κατὰ μεγίστην πιθανότητα, ὅτι τὸ σωζόμενον, ἐκ τριῶν μόνον θεωρημάτων, ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι ἐλάχιστον μέρος πολὺ μεγαλυτέρου ἔργου του, ἀναφερομένου εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου. Ἡ ἄποψις αὕτη ἐνισχύεται πολὺ ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι εἰς τὴν «Μέτρησιν τοῦ κύκλου» δὲν ὑπάρχει προσφώνησις πρός τινα μαθηματικὸν φίλον τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ θεωρούμενα ὡς σωζόμενα πλήρη.

3. Ὅτι μεταξὺ περιφερείας κύκλου καὶ διαμέτρου αὐτοῦ ὑπάρχει σταθερὰ σχέσις, ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς Κινέζους, Ἰνδούς, Βαβυλωνίους, Αἰγυπτίους καὶ Ἕλληνας. Ὡς ἀκριβεστέρα τοιαύτη σχέσις ἐθεωρεῖτο ὁ ἀριθμὸς 3,16. Διὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὅμως οὐδέν, μέχρι σήμερον τουλάχιστον, ὑπάρχει τεκμήριον, ὅτι ἦτο προϊὸν γεωμετρικῆς τινος ἀποδείξεως. Τοὐναντίον, θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι οἱ ἀνωτέρω πολιτισμένοι λαοὶ εἶχον καταλήξει εἰς αὐτὸν διὰ μετρήσεων διὰ νήματος τῆς περιφερείας καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Ἡ γνώμη αὐτὴ τῶν συγχρόνων κριτικῶν τῆς γεωμετρίας ἐνισχύεται ἐκ τοῦ ὅτι διὰ τοιούτων γεωμετρικῶν πειραμάτων, ὡς θὰ ἐλέγομεν, ὁ Δημόκριτος εἶχεν ὑπολογίσει, ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ ἓν τρίτον πρίσματος καὶ ὁ κῶνος τὸ ἓν τρίτον κυλίνδρου, ὅταν ἡ πυραμὶς καὶ ὁ κῶνος ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἀντιστοίχως πρὸς τὸ πρῖσμα καὶ τὸν κύλινδρον. Περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ δὲ τούτου τοῦ Δημοκρίτου μᾶς πληροφορεῖ σαφῶς ὁ Ἀρχιμήδης, λέγων, ὅτι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις τῶν ἰσχυρισμῶν τοῦ Δημοκρίτου, εὗρεν ὁ Εὔδοξος (Ἀρχιμήδους, περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, προσφώνησις).

4. Περὶ τοῦ ὅτι καὶ κατὰ τὴν ἀκμὴν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς Ἐπιστήμης ὁ ὑπολογισμὸς τῆς σχέσεως περιφερείας πρὸς διάμετρον κύκλου (ὁ π) δὲν εἶχεν ὑπολογισθῆ γεωμετρικῶς, πληροφορούμεθα καὶ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὰ ὁποῖα οὐδεὶς τοιοῦτος ὑπολογισμὸς ὑπάρχει, ἐν ᾧ τοὐναντίον ὑπάρχει ἀπόδειξις, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο κύκλων εἶναι, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν· ἀπόδειξις εἰς τὴν ὁποίαν δὲν χρειάζεται ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ π. Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξε γεωμετρικῶς τὴν σχέσιν περιφερείας κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ἡ ἀπόδειξις αὕτη ἐγένετο ἀντικείμενον σφοδρᾶς κριτικῆς μεταγενεστέρων μαθηματικῶν ἰδίως τοῦ Σπόρου, κριτικῆς ὅμως ἡ ὁποία ἀπεκρούσθη ὑπὸ τῶν συγχρόνων τοῦ Σπόρου καὶ ἀποκρούεται καὶ σήμερον ὑφ' ὅλων τῶν μαθηματικῶν. Τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Σπόρου ἀνάγονται μᾶλλον εἰς προβλήματα γνωσιολογικά, τὰ ὁποῖα ἐξέρχονται τῶν ὁρίων, τῶν παραδεδεγμένων ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας. Ἡ ἀσκηθεῖσα κριτικὴ ὑπὸ τοῦ Σπόρου στηρίζεται ἰδίως εἰς ἐπιχείρημα διατυπωθὲν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, καθ' ὃ ἀποκλείεται νὰ ὑπάρχῃ εὐθεῖα γραμμὴ ἴση πρὸς τόξον, ὁσονδήποτε καὶ ἂν

ταῦτα λαμβάνωνται ἀπειροελαχίστως μικρά. Ἡ ὅλη δὲ κριτικὴ τοῦ Σπόρου ἀφορᾷ εἰς τὸ τρίτον θεώρημα, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς τὸ σπουδαιότατον καὶ φαίνεται, ὅτι αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ ἀπείρου. Διότι, ἀρνητικὴν ἀπάντησιν ἐπὶ τοῦ ζητήματος, ἂν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ εὐθείας γραμμῆς καὶ τόξου κύκλου, φαίνεται, ὅτι εἶχε δώσει ὁ Ἀριστοτέλης (Φυσ. 1. 2, 185α 14—17) λαμβάνων ἀφορμὴν ἐκ τῶν ἐπιχειρημάτων τοῦ Ἀντιφῶντος, ἀποπειραθέντος τὸ πρῶτον νὰ τετραγωνίσῃ τὸν κύκλον διὰ τῆς ἐγγραφῆς εἰς τοῦτον πολυγώνων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διπλασιάζεται συνεχῶς, ἐπ' ἄπειρον. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, δὲν δυνάμεθα νὰ πράττωμεν τοῦτο, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὸ μέγεθος τοῦ ἀπείρως μικροῦ εὐθυγράμμου τμήματος πολυγωνικῆς πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον θὰ ἐφαρμόσῃ εἰς κυκλικὸν τμῆμα.

Καὶ ὁ μὲν καθορισμὸς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ὡς δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἀποτελεῖ τὸ θεμέλιον τῆς νεωτέρας μαθηματικῆς ἀναλύσεως, οὐχ ἧττον ὅμως τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἀπαιτοῦντος ὕπαρξιν κοινοῦ εὐθυγράμμου μέτρου μεταξὺ εὐθυγράμμου καὶ καμπυλογράμμου τμήματος, παρέμεινεν ἄλυτον μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ γερμανὸς μαθηματικὸς M. Cantor δὲν συμφωνεῖ μὲ τὴν ἄποψιν τοῦ Σπόρου, ἀντικρούων τὰς ἀντιρρήσεις του μὲ τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει ὁπωσδήποτε μῆκος καὶ κατὰ συνέπειαν δύναται νὰ μετρηθῇ ὑπὸ εὐθυγράμμου μέτρου.

Ὁ M. Cantor ὅμως, ὡς καὶ οἱ μεταγενέστεροι καὶ σύγχρονοι τούτου γεωμέτραι, καίτοι θέτουν ὀρθῶς τὸ ζήτημα, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει μῆκος καὶ συνεπῶς δύναται νὰ μετρηθῇ ὑπὸ εὐθυγράμμου τμήματος, δὲν προχωροῦν περαιτέρω, διὰ νὰ συναγάγουν τὰ ἀναγκαῖα συμπεράσματα ἐκ τῆς τοιαύτης γνώμης των. Καὶ τὰ συμπεράσματα ταῦτα εἶναι κατὰ τὸν Ε. Σταμάτην, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης δὲν παραδέχεται μόνον σιωπηρῶς, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει μῆκος. Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει κατὰ τοῦτον διὰ τοῦ γ' θεωρήματος, ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός· δηλ. ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Ἡ ἄποψις, τὴν ὁποίαν ὑποστηρίζει ὁ Ε. Σταμ., διατυποῦται διὰ πρώτην φοράν.

Οἱ περισσότεροι Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ τῶν τελευταίων 100 ἐτῶν προεξάρχοντος τοῦ M. Cantor, παραδέχονται μέν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀνεκάλυψαν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου, δὲν παραδέχονται ὅμως, ὅτι οὗτοι εἶχον συνείδησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Περιορίζουν τὴν ἀνακάλυψιν τῶν Πυθαγορείων εἰς ἀνακάλυψιν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ ὄχι ἀριθμῶν. Ἡ ἄποψις αὕτη στηρίζεται μεταξὺ ἄλλων καὶ εἰς χωρία τοῦ Ἥρωνος, καθ' ὃν γίνεται διάκρισις μεταξὺ ἀλόγων (ἀσυμμέτρων) μεγεθῶν καὶ διαπίστωσις, ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἄλογοι (ἀσύμμετροι) ἀριθμοί. Εἰς τοὺς μὴ μαθηματικούς, τοὺς ὑποστηρίζοντας, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν εἶχον συλλάβει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, συγκαταλέγεται καὶ ὁ γερμανὸς φιλόσοφος Spengler, ὁ ὁποῖος ὁμιλεῖ περὶ τούτου εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Der Untergang des Abendlandes» (Ἡ καταστροφὴ τῆς Ἑσπερίας).

Τὸ πέμπτον βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ἀσχολούμενον περὶ τὰς ἀναλογίας,

περιέχει τὴν θαυμασίαν θεωρίαν περὶ ἀσυμμέτρων. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὔδοξον ἐξ ὁλοκλήρου. Οἱ νεώτεροι παραδέχονται μὲν τὸ ἀδιάσειστον τῆς θεωρίας, περιορίζουν ὅμως ταύτην, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἀναφέρεται, εἰς θεωρίαν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ ὄχι ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς T. Heath λέγει ἐν προκειμένῳ, ὅτι ἡ θεωρία αὕτη τοῦ Εὐδόξου, ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἰς τὴν νεωστὶ παραδεδεγμένην θεωρίαν περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν τοῦ Dedekind καὶ ὅτι ὁ Weierstrass ὁ θεμελιωτὴς τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ χρησιμοποιεῖ αὐτὴν κατὰ λέξιν πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἴσων ἀριθμῶν.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ὑπὸ κρίσιν ἔργου, ὁ Ε. Σταμ. ἰσχυρίζεται ὅτι ἀποδεικνύει, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τοῦ γ'. θεωρήματος δὲν ἤθελεν ἁπλῶς νὰ εὕρῃ προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π. Πολὺ πέρα τούτου, ἰσχυρίζεται ὁ Ε. Σταμ., ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμὸς (ἀσύμμετρος).

Τὰ προτεινόμενα ἐπιχειρήματα πρὸς ἀπόδειξιν τούτου εἶναι τὰ ἑξῆς :

1) Ἐὰν ὁ Ἀρχιμήδης ἤθελε νὰ εὕρῃ μεγάλην προσέγγισιν τοῦ ἀριθμοῦ π, ἠδύνατο διὰ τῆς περιγραφῆς καὶ ἐγγραφῆς κανονικῶν πολυγώνων εἰς κύκλον νὰ φθάσῃ εἰς ὅσην θὰ ἤθελε προσέγγισιν, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐγνώριζεν οὗτος νὰ ὑπολογίζῃ τὴν πλευρὰν τοιούτων περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ὁ Ε. Σταμ. παραθέτει τοιοῦτον ὑπολογισμόν, στηριζόμενον εἰς τὸ γ'. θεώρημα τοῦ μνημονευθέντος ἔργου. Ὅθεν ἀποκλείεται ὁ σκοπὸς τοῦ γ'. θεωρήματος νὰ εἶναι ἐπιθυμία τοῦ Ἀρχιμήδους πρὸς εὕρεσιν ἀριθμητικῆς τινος τιμῆς τοῦ π κατὰ προσέγγισιν.

2) Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἠδύνατο νὰ καταλήξῃ ὁ Ἀρχιμήδης, ἐὰν δὲν περιωρίζετο εἰς τὴν περιγραφὴν καὶ ἐγγραφὴν πολυγώνων μέχρις 96 πλευρῶν, ἀλλὰ συνεχίζων τὴν εἰς τὸ γ'. θεώρημα ἐφαρμοζομένην μέθοδον, ἐχρησιμοποίει πολύγωνα μὲ πολλαπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν τοῦ ἀριθμοῦ 96. Ὅθεν καὶ πάλιν ἀποκλείεται νὰ ἦτο πρόθεσις τοῦ Ἀρχιμήδους ὁ ὑπολογισμὸς κατὰ προσέγγισιν τῆς τιμῆς τοῦ π.

3) Ἐφ' ὅσον, διὰ μιᾶς τῶν ἀνωτέρω μεθόδων ἦτο δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ μεγάλη προσέγγισις τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π, δὲν ἔχει νόημα προσπάθεια τοῦ Ἀρχιμήδους νὰ εὕρῃ τοιαύτην προσέγγισιν εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι», ὅπου εὑρίσκεται μεγαλυτέρα προσέγγισις τῆς διὰ τοῦ γ'. θεωρήματος.

4) Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, δὲν ἔχουν νόημα αἱ ἀποδείξεις τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τοῦ Πτολεμαίου, καθ' ἃς εὑρίσκεται μεγαλυτέρα προσέγγισις τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π, ἢ ἡ μεταξὺ τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{16}{71}$ τοῦ γ'. θεωρήματος, ὡς μᾶς πληροφορεῖ ὁ Εὐτόκιος (τὸ συναφὲς ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου «Ὠκυτόκιον» ἔχει ἀπολεσθῇ).

5) Ὅθεν ἀπομένει κατὰ τὸν Ε. Σταμ., τὸ λογικὸν συμπέρασμα, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τοῦ γ'. θεωρήματος ἤθελε ν' ἀποδείξῃ ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός. Ὑπὸ τὴν ἔποψιν ταύτην ἔχει νόημα ἡ περαιτέρω ἐπιτυχὴς προσπάθεια τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι» καὶ αἱ ἐπιτυχεῖς ὡσαύτως προσπάθειαι τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τοῦ Πτολεμαίου.

Κατὰ τὸν Ε. Σταμ., ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ γ'. θεωρήματος, ὁ Ἀρχιμήδης κλείει τὸν π μεταξὺ δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξίν του, ὡς ἀκριβῶς πράττουσιν οἱ σύγχρονοι πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο, ὁ Ἀρχιμήδης στηρίζεται εἰς τὸ περίφημον ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου, τὸ θεμέλιον τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν, καθ' ὃ παντὸς μεγέθους (ἢ ἀριθμοῦ) ὑπάρχει μικρότερον ἢ μεγαλύτερον.

Ὁ Ε. Σταμάτης ἐπεκτείνει τὸν ἰσχυρισμόν του, καὶ διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν, καθ' οὓς τοποθετεῖται τὸ πρόβλημα εἰς τὴν φυσικὴν αὐτοῦ θέσιν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς τότε μαθηματικῆς ἐξελίξεως.

Τὸ βασικὸν πρόβλημα τῆς τότε ἐποχῆς ἦτο ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου. Πρὸς τοῦτο ἔπρεπε νὰ λυθῇ πρῶτον τὸ πρόβλημα, ἂν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον εὐθυγράμμου καὶ καμπυλογράμμου τμήματος. Ὁ Ε. Σταμάτης δὲν παραδέχεται τὸν ἰσχυρισμὸν τοῦ Cantor ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης θὰ ἀνεχώρει πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὴν ἁπλῆν σκέψιν, ὅτι ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος, ἄρα δύναται νὰ μετρηθῇ. Τοῦτο ἀποτελεῖ ὀρθὸν συλλογισμόν, ἀλλ' ὄχι πλήρη. Ἔπρεπε νὰ δεχθῇ ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός.

Καὶ ὡς ἀπόδειξιν, αὐτῆς μόνον τῆς θέσεως θεωρεῖ ὁ Ε. Σταμ. τὸ γ'. θεώρημα τοῦ ῥηθέντος ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐν συνεχείᾳ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου, ἰσχυρίζεται ὁ Ε. Σταμάτης, ὅτι μόνον τότε πρέπει νὰ ἐπακολουθήσῃ τὸ α'. θεώρημα τοῦ ἐν λόγῳ ἔργου, ἀφοῦ ἔχει ἐξασφαλισθῇ ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὁ π εἶναι ἀριθμός. Τὰ γ'. καὶ α'. θεωρήματα, ἀποτελοῦν κατὰ τὸν Ε. Σταμ. τὸ πρῶτον μέρος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Τὸ δεύτερον μέρος τούτου εἶναι νὰ εὑρεθῇ γεωμετρικὴ κατασκευὴ καθ' ἣν νὰ μετατρέπεται τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἰς εὐθύγραμμον τμῆμα. Τοῦτο ἐπιτυγχάνει ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τοῦ 18ου θεωρήματος τοῦ ἔργου αὐτοῦ «Περὶ ἑλίκων» καὶ οὕτω ὁλοκληροῦται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς γεωμετρίας ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. (ὄχι διὰ κανόνος ἢ διαβήτου, διότι διὰ τούτων εἶναι ἄλυτον, ὡς ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζεν).

Τὰ ἀνωτέρω ἐπιχειρήματα εἶναι καὶ μία πρόσθετος ἀπόδειξις ἀδιάσειστος, ὅτι τὸ προκείμενον ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι ἐλάχιστον μέρος μεγαλυτέρου ἔργου του, ἀφορῶντος εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου.

Ἐν ἀνακεφαλαιώσει : ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει εἰς τὸ γ'. θεώρημα, γεωμετρικῶς, ὅτι ὁ π εἶναι μεταξὺ τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$ ἢ μεταξὺ 3,14085... — 3,142857... Εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι» ἀποδεικνύεται, ὅτι οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ στενωτέρων ὁρίων, μεταξὺ δηλ. τῶν ἀριθμῶν 3,141495... — 3,141697... Ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος εὑρίσκουν ἀκόμη στενώτερα ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων ἐγκλείεται ὁ π. Ἰδοὺ τώρα καὶ ὁ σύγχρονος ὁρισμὸς τῶν ἀσυμμέτρων κατὰ τὸν K. Knopp (Theorie und Anwendung der uniedlichen Reihen), Springer Verlag, Berlin, 1931 σελ. 27.

«Ὁρισμός: Δι' ἕκαστον ἐγκιβωτισμὸν (κλείσιμον μεταξὺ συμμέτρων ἀριθμῶν) θὰ λέγωμεν, ὅτι οὗτος παριστᾷ ἕνα ἀριθμόν. Θὰ σημειοῦμεν δὲ τοιοῦτον ἐγκιβωτισμὸν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος σ».

Διὰ τί λοιπὸν θὰ ἀρνηθῶμεν τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, ἐφ' ὅσον οὗτος ἀποτελεῖ ἀντιγραφὴν τῆς ἀποδείξεώς του καὶ τῆς ἰδέας του, πρὸς χαρακτηρισμὸν τοῦ π; Τὸ τυχὸν ἐπιχείρημα, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης δὲν μᾶς ὁμιλεῖ περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, δὲν εὐσταθεῖ, διότι τοῦτο μᾶς τὸ λέγει ἡ ἀπόδειξις κτλ.

Ἀλλὰ γενικῶς παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ λύσις τοῦ τιθεμένου προβλήματος εἶναι δύσκολος διὰ τὴν ἔλλειψιν συναφῶν εἰδήσεων. Αἱ πληροφορίαι ἃς μᾶς παρέχει ὁ Ἥρων τυγχάνουν μεταγενέστεραι, ὡς πρὸς δὲ τὴν γνησιότητα τοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἐπιπεδομετρικὰ» ἀποδιδομένου εἰς τὸν Διόφαντον ἔργου ὑπάρχουν σοβαρώταται ὑπόνοιαι.

Τὸ ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη τιθέμενον πρόβλημα εἶναι λίαν σημαντικόν. Μέχρι πρό τινος οὐδεμίαν ἐδέχοντο οἱ ἁρμόδιοι κύκλοι συζήτησιν ὡς πρὸς τὸ ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον προχωρήσει πέρα τῆς ἰδέας τῶν φυσικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Οἱ ἐρευνηταὶ τῆς ἱστορίας τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν διετέλουν ὑπὸ τὸ κράτος προκαταλήψεων, τῶν ὁποίων κλασσικὴν διατύπωσιν εἶχε παράσχει ὁ Spengler ἰσχυρισθεὶς ὅτι ὁ ἄνθρωπος εἶναι δοῦλος τοῦ πνεύματος τῆς ἐποχῆς ἐν τῇ ὁποίᾳ ζῇ. Ὅθεν ἐκ προκαταλήψεως οὐδεὶς τῶν ἐρευνητῶν ἤθελεν ἔστω καὶ νὰ συζητήσῃ τὸ ὅτι ἦτο δυνατὸν οἱ παλαιοὶ Ἕλληνες μαθηματικοὶ νὰ εἶχον συλλάβει τὴν ὑπόνοιαν, ὅτι ὑπάρχουν καὶ ἄλλα εἴδη ἀριθμῶν ἐκτὸς τῶν φυσικῶν ἀκεραίων. Τοιαύτη δὲ ἦτο ἡ ἰσχὺς τῆς ἐν λόγῳ προκαταλήψεως, ὥστε παρεβλέποντο ῥηταὶ μαρτυρίαι ἀναμφισβητήτου κύρους.

Παρεβλέπετο τὸ εἰς τὰ «Μετὰ τὰ φυσικὰ» 1021 α 3 χωρίον τοῦ Ἀριστοτέλους, ἔνθα ἐπ' εὐκαιρίᾳ τοῦ καθορισμοῦ τῆς σχέσεως τοῦ ὑπερέχοντος καὶ τοῦ ὑπερεχομένου χρησιμοποιεῖται ἡ συνεκφορὰ «μὴ σύμμετρος» ὡς πρὸς τὸν ἀριθμόν. Ὁ Ἀριστοτέλης γράφει εἰς τὸ μνημονευθὲν χωρίον «τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται», δηλ. ἡ σχέσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον εἶναι ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως ἐξ ὁλοκλήρου ἀόριστος· ἀλλ' ἡ ἐκφώνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ ὑπερέχοντος καὶ ὑπερεχομένου προϋπουθέτει οὐχὶ σύμμετρον (δηλ. ἀσύμμετρον) ἀριθμόν. Ἡ ἔκφρασις «μὴ σύμμετρος» ἐθεωρήθη ὑπὸ τῶν ἑρμηνευτῶν τόσον ἀπροσδόκητος καὶ ἀπαράδεκτος, ὥστε ποικίλαι ταύτης προετάθησαν διορθώσεις. Οὕτω ὁ Ἄγγλος W. D. Ross εἰσήγαγεν εἰς τὸ κείμενον τῆς ὑπ' αὐτοῦ γενομένης ἐκδόσεως τῶν «Μετὰ τὰ φυσικὰ» τὴν γραφὴν «κατὰ μὴ συμμέτρου δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται» δηλ. ὁ ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ ἀποτελέσῃ προσδιοριστικὸν χαρακτηριστικὸν μὴ συμμέτρου μεγέθους. Ὁ Γερμανὸς φιλόλογος Apelt γράφει «κατὰ μὴ συμμέτρων δὲ ἀριθμοὶ οὐ λέγονται», εἰς μὴ σύμμετρα μεγέθη δὲν ἀποδίδονται ὡς προσδιοριστικὸν χαρακτηριστικὸν οἱ ἀριθμοί. Ὁ Zeller δὲ προτείνει «κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμῷ λέγεται», ἀποδίδεται ἡ σχέσις τοῦ ὑπερέχοντος καὶ ὑπερεχομένου εἰς μέγεθος, τὸ ὁποῖον ἀπὸ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως δὲν εἶναι σύμμετρον. Μόνον ὁ Christ διατηρεῖ τὴν παραδεδομένην γραφὴν προτιμῶν νὰ γράψῃ ἀντὶ «λέγεται» «λέγονται», ἀκολουθῶν ὡς πρός τοῦτο τὰς γραφὰς δύο χειρογράφων. Σημειοῦ δὲ ἐν σχέσει πρὸς τὴν σημασίαν ὑπὸ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ νοήσωμεν τὴν λέξιν «ἀριθμὸν» intellege rationem, νόει σχέσιν. Πᾶ-

σαι αὗται αἱ διορθωτικαὶ προσπάθειαι προῆλθον ἐκ τῆς ἐρριζωμένης προλήψεως, ὅτι ἡ ἀρχαία ἑλληνικὴ μαθηματικὴ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν ἀντίληψιν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ ἀριθμὸς «μὴ σύμμετρος». Ἀλλ' ἐφ' ὅσον ὁ Ἀριστοτέλης χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκφρασιν ταύτην προκειμένου περὶ ἀνισοτήτων, μὲ σχέσιν μὴ δυναμένην νὰ προσδιορισθῇ, οὐδόλως εἶναι δικαιολογημένον νὰ σκανδαλισθοῦν τόσον πολὺ οἱ ἑρμηνευταί.

Ἀλλὰ καὶ ἕτερον χωρίον τοῦ Ἀριστοτέλους (Ἠθικὰ Νικομάχ. 1131 α 30) εἶναι λίαν διαφωτιστικὸν ὡς πρὸς τὸ ἀπασχολοῦν ἡμᾶς πρόβλημα. Ὁμιλῶν ὁ Σταγιρίτης περὶ τῆς ἀναλογικῆς σχέσεως (τὸ ἀνάλογον) λέγει, ὅτι αὕτη δὲν ἰσχύει μόνον ὡς πρὸς τὸν ἐκ (συμμέτρων πρὸς ἀλλήλους) μονάδων ἀπαρτιζόμενον ἀριθμόν, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τὸν εἰς γενικευμένην ἔννοιαν νοούμενον ἀριθμόν, «τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον, ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ». Ἡ ἀντιπαραβολὴ μεταξὺ «τοῦ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ» ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ «ὅλως ἀριθμοῦ» ἀφ' ἑτέρου ἀποτελεῖ ἀκαταμάχητον τεκμήριον ἔναντι τοῦ ὁποίου οὐδεμία ἐγχωρεῖ ἀμφιβολία. Δὲν πρέπει προσέτι νὰ λησμονοῦμεν, ὅτι ὁ Πλάτων εἶχε φθάσει εἰς τὴν ἀντίληψιν τῶν «εἰδητικῶν» ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰς μονάδας ὁ Ἀριστοτέλης ἐχαρακτήριζεν ὡς «ἀσυμβλήτους», ἤτοι μονάδας ἐφ' ὧν δὲν δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ συνήθεις λογιστικαὶ πράξεις. Πάντα τὰ ἀνωτέρω στοιχεῖα ἀποτελοῦν σοβαρωτάτην συνηγορίαν ὑπὲρ τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν ὑποστηρίζει ὁ κ. Σταμάτης εἰς τὴν ὑπὸ συζήτησιν πραγματείαν του.

Ἡ ἐργασία τοῦ κ. Σταμάτη εἶναι καὶ ἀπὸ ἄλλης ἀπόψεως λίαν διδακτική. Καθιστᾷ ὀφθαλμοφανῆ τὴν τεραστίαν συμβολὴν τὴν ὁποίαν προσέφεραν οἱ Ἀλεξανδρινοὶ χρόνοι διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιστήμης. Δυστυχῶς εἰς τὴν χώραν μας ἐπικρατεῖ εἰς πολλοὺς ἡ ἐσφαλμένη ἀντίληψις, ὅτι ἡ ἐποχὴ ἐκείνη ὑπῆρξε περίοδος παρακμῆς καὶ πνευματικῆς στειρότητος. Λησμονεῖται ἡ τεραστία συμβολὴ τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, ὡς καὶ τὸ κατόρθωμα τῆς θεμελιώσεως τῶν πνευματικῶν ἐπιστημῶν καὶ ἰδίᾳ τῆς φιλολογίας ὑπὸ τῶν μεγάλων φιλολόγων τῆς Ἀλεξανδρείας. Αἱ ἐργασίαι τὰς ὁποίας μᾶς ἔδωκεν ὁ κ. Σταμάτης διὰ τῆς μεταφράσεως ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ συντελέσουν κατὰ πολὺ νὰ διασκεδασθῇ ἡ ἀχλὺς πολλῶν πλανῶν. Ἡ νεαρὰ ἑλληνικὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη θὰ εἶχε πολλὰ νὰ ὠφεληθῇ. Ἡ χαρά μας δὲ εἶναι ὅλως ἐξαιρετική, διότι ἐσχάτως ὁ φίλος Ἐκπαιδευτικὸς Σύμβουλος κ. Ν. Μιχαλόπουλος εἰς πολύτιμον συγγραφήν του ἀναφερομένην εἰς τὴν μέθοδον τῆς διδασκαλίας τῆς Στερεομετρίας συνέστησε θερμῶς εἰς τοὺς καθηγητὰς τοὺς διδάσκοντας τὰ μαθηματικὰ εἰς τὰ Σχολεῖα τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως τὴν μελέτην τῶν συγγραμμάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

*«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν*
*ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».*
*Πλάτωνος Πολιτεία 450Β*

ΕΤΟΣ Ε' 1953

ΤΕΥΧΟΣ Α'

9

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1953

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Ε΄ 1953
ΤΕΥΧΟΣ Α΄
9

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1953

# ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΣΙΑ

**Ε. Σ. Σταμάτη**, Εὐκλείδου Γεωμετρία. Στοιχείων Βιβλία I. II. III. IV. Εἰσαγωγὴ — Ἀρχαῖον κείμενον·Μετάφρασις. Τόμος I. Ἀθῆναι 1952 Σελ. 179.—Ὁ κ. Σταμάτης εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ «Πλάτωνος» ὄχι μόνον ἐκ τῶν εἰς τὰ προηγούμενα τεύχη δημοσιευμένων ἐπιστημονικῶν διατριβῶν του ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν προγενεστέρων αὐτοτελῶν ἐργασιῶν του. Ὡς θέμα τῶν ἐρευνῶν του ἔχει ἐκλέξει τὴν ἐπιστημονικὴν κληρονομίαν τὴν ὁποίαν ἔχουν κληροδοτήσει εἰς τὴν ἀνθρωπότητα οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί. Ἤδη ἀπὸ τοῦ 1946 ἔκαμεν ἔναρξιν τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐξέδωκε τὸ κείμενον μετὰ μεταφράσεως τριῶν πραγματειῶν τοῦ μεγαλοφυοῦς μαθηματικοῦ τῆς ἀρχαιότητος, αἵτινες φέρουν τὸν τίτλον «Τετραγωνισμὸς παραβολῆς», «Μηχανικὰ I», «Κύκλου μέτρησις». Δι' αὐτῶν διὰ πρώτην φορὰν οἱ ἐν Ἑλλάδι σπουδασταὶ τῶν μαθηματικῶν ἦλθον εἰς γνησίαν καὶ ἄμεσον ἐπικοινωνίαν μὲ τὴν σκέψιν τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον διακρίνει καὶ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἐκδόσεις, καθὼς καὶ τὴν ὅλην ἐργασίαν τοῦ κ. Σταμάτη εἶναι ὅτι δὲν περιορίζονται εἰς τὴν παροχὴν μιᾶς κατὰ λέξιν ἑρμηνείας. Παρέχουν τὴν διὰ σχημάτων ἐποπτικοποίησιν τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ ἐκφράζουν αὐτὰς διὰ τῶν ἐνδείξεων τῆς συγχρόνου ὁρολογίας, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ καθίστανται ἀμέσως προσιταὶ εἰς τὴν κατανόησιν. Ἐκτὸς τούτου ὁ κ. Σταμάτης ἐξετάζει πάντοτε καὶ καταδεικνύει τὴν αἰωνίαν ἐπικαιρότητα τὴν ὁποίαν ἔχουν αἱ ἐργασίαι τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν, τὴν θεμελιωτικήν των σημασίαν καὶ τὴν ἀξίαν των ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς παιδευτικῆς των ἐπιδράσεως.

Τὰ αὐτὰ προτερήματα ἐμφανίζει καὶ ἡ ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, τὴν ὁποίαν ἐγκαινιάζει ὁ κ. Σταμάτης μὲ τὴν ἔκδοσιν τοῦ πρώτου τόμου τῶν «Στοιχείων» εἰς τὸν ὁποῖον περιλαμβάνονται τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία. Ἀπετέλει αἰσθητὴν ἔλλειψιν τῆς συγχρόνου ἑλληνικῆς μαθηματικῆς φιλολογίας τὸ ὅτι οὐδεμία εἶχε γίνει ἀπὸ μακροῦ χρόνου ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου. Ἐνῷ κατὰ τὴν περίλαμπρον ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως τῶν Κομνηνῶν καὶ Παλαιολόγων ἐκυκλοφόρουν πλεῖστοι χειρόγραφοι κώδικες τῶν «Στοιχείων», μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Κωνσταντινουπόλεως καὶ τὴν φυγάδευσιν τῶν ἑλλήνων σοφῶν εἰς τὴν Δύσιν οὐδεμία ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ μεγάλου Στοιχειωτοῦ ἐγένετο ἐν Ἑλλάδι. Τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἐμελετῶντο ἐν τῇ ὑποδούλῳ Ἑλλάδι ἐκ λατινικῶν μεταφράσεων μεταγλωττιζομένων εἰς τὴν ἑλληνικήν. Τὸν τίτλον μιᾶς τοιαύτης ἐκ τοῦ λατινικοῦ

μεταφράσεως, τὴν ὁποίαν εἶχε φιλοπονήσει ὁ μέγας τοῦ Γένους Διδάσκαλος Εὐγένιος ὁ Βούλγαρις παραθέτει ὁ κ. Σταμάτης εἰς τὸν πρόλογόν του σελ. 8. Εἶχε μεταγλωττισθῆ ἐκ τῆς λατινιστὶ συντεταγμένης ὑπὸ Α. Τακουεντίου συγγραφῆς, ἥτις ἔφερε τὸν τίτλον «Στοιχεῖα Γεωμετρίας». Κατὰ ταῦτα ὀφείλομεν νὰ χαιρετίσωμεν τὴν ἔναρξιν τῆς ἐκδόσεως τῶν «Στοιχείων» ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη καὶ νὰ ἐξάρωμεν τὴν σημασίαν της.

Ὁ κ. Σταμάτης ὡς πρὸς τὸ κείμενον ἀκολουθεῖ τὴν ὑπὸ τοῦ Δανοῦ I. L. Heiberg τῇ συνεργασίᾳ τοῦ γερμανοῦ H. Menge γενομένην κατὰ τὸ 1882—1888 ἔκδοσιν τὴν συμπεριλαμβανομένην εἰς τὰς ἐκδόσεις τοῦ οἴκου Teubner. Ἐν ἀντιπαραβολῇ πρὸς τὸ κείμενον παρέχει τὴν μετάφρασιν, παραθέτει δὲ καὶ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα. Ἡ ἐκτύπωσις τοῦ κειμένου ἐγένετο μετὰ πολλῆς ἐπιμελείας, ἡ δὲ μετάφρασις χρησιμοποιεῖ ὅρους τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ὁρολογίας, κατὰ τρόπον ὥστε αὕτη νὰ καθίσταται ἀβιάστως προσιτὴ εἰς τὸν ἀναγνώστην. Πρὸ τοῦ κειμένου προτάσσεται εἰσαγωγὴ ἐκ 35 σελίδων, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ κ. Σταμάτης δὲν περιορίζεται εἰς μόνην τὴν παροχὴν ἱστορικῶν εἰδήσεων σχετικῶν μὲ τὸ ἐκδιδόμενον βιβλίον καὶ γενικώτερον μὲ τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου. Εἰσέρχεται εἰς τὴν ἐξέτασιν εὐρυτέρων προβλημάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς γεωμετρικῆς ἐπιστήμης καὶ εἰς τὴν ἀξίαν της ἐν ἀντιπαραβολῇ πρὸς τὰς νέας (μὴ εὐκλειδείους) γεωμετρίας. Τὸ τμῆμα τοῦτο τοῦ βιβλίου τοῦ κ. Σταμάτη θίγει σπουδαιότατα ζητήματα καὶ παρέχει ἀφορμὴν εἰς τὸν συγγραφέα νὰ προβῇ εἰς ἀνακοινώσεις τῶν πορισμάτων τῶν ἐρευνῶν του τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς εἰσαγωγῆς του ὁ κ. Σταμάτης ἐξαίρει τὴν σημασίαν τὴν ὁποίαν ἔσχε διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ἐπιστημονικοῦ πνεύματος γενικῶς ἡ ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ θεμελίωσις τῆς θεωρητικῆς γεωμετρίας. Ὁ κ. Σταμάτης παραθέτει τὸ σχετικὸν χωρίον ἐκ τῆς «Κριτικῆς τοῦ καθαροῦ λόγου» τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν φιλοσόφων τῆς νεωτέρας ἐποχῆς Kant, εἰς τὸ ὁποῖον οὗτος γράφει : «Τὰ μαθηματικὰ ὡς ἐπιστήμη εὗρον τὸν ἀσφαλῆ δρόμον των εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων... Ὁ πρῶτος ὅστις ἀπέδειξε τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου—εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως—ἔσχε μίαν ἀναλαμπήν..) Παρακολουθεῖται ἐν τῇ εἰσαγωγῇ ἡ περαιτέρω διὰ τῶν Πυθαγορείων ἀνάπτυξις τῶν μαθηματικῶν καὶ ἡ ἀπελευθέρωσίς των ἀπὸ τὴν μυστηριακὴν διάθεσιν, ἥτις ἐπετεύχθη διὰ μεγαλοφυῶν ἐρευνητῶν ὁποῖοι ὑπῆρξαν ὁ Ἀναξαγόρας, ὁ Ἀντιφῶν, ὁ Ἱπποκράτης, ὁ Χῖος, ὁ Θεόδωρος, ὁ Κυρηναῖος κτλ. Ἡ κατὰ τρόπον ἀπολύτως ἀκριβολογικὸν θεμελίωσις τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης κατὰ τὸν κ. Σταμάτην συνετελέσθη εἰς τοὺς κύκλους τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος διὰ τῆς συνεργασίας τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Εὐδόξου. Ἀλλὰ καὶ ἡ συμβολὴ τοῦ Ζήνωνος σημειώνει ὁ κ. Σταμάτης ὑπῆρξε σημαντική, διότι διὰ τῆς ὀξυδερκοῦς κριτικῆς του ἔθεσε προβλήματα ἐν σχέσει μὲ τὰς θεμελιώδεις ἐννοίας τοῦ σημείου, τοῦ συνεχοῦς καὶ τῆς σχετικότητος τῆς κινήσεως, τὰ ὁποῖα ἀκόμη καὶ σήμερον συζητοῦνται ὑπὸ τῶν μαθηματικῶν. Ὅλην αὐτὴν τὴν κολοσσιαίαν ἐργασίαν, διὰ τὴν συστηματοποίησιν τῆς ὁποίας ἐβοήθησε διὰ τῶν λογικῶν του ἐρευνῶν καὶ ὁ Ἀρι-

στοτέλης, κατώρθωσε νὰ συμπεριλάβῃ εἰς ἓν ἁρμονικῶς καὶ ἐπὶ ἀπαρασαλεύτω βάσεων οἰκοδομημένον μεγαλοπρεπὲς καὶ μνημειῶδες διανοητικὸν οἰκοδόμημα ὁ Εὐκλείδης κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 3ου π. Χ. αἰῶνος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς βασιλείας τοῦ Πτολεμαίου τοῦ πρώτου. Περὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἔργου του ὑπάρχει ἡ ὁμόθυμος μαρτυρία τῶν αἰώνων. Ὁ κ. Σταμάτης παραθέτει τὴν κατὰ τὸ 1902 ἀνακοίνωσιν τοῦ περιφήμου Οὔγγρου μαθηματικοῦ Bolyai, ἑνὸς ἐκ τῶν ἱδρυτῶν τῆς ὑπερβολικῆς γεωμετρίας. Οὗτος εἶχε διαπιστώσει ὅτι εἰς διάστημα 1900 ἐτῶν εἶχον γίνει εἰς πολλὰς γλώσσας τοῦ κόσμου 1700 ἐκδόσεις τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἶναι ἀναμφισβήτητον γεγονὸς ὅτι δύο ἐπιστημονικαὶ μαθήσεις διέρχονται διὰ μέσου τῶν αἰώνων χωρὶς νὰ ἐπισκιάζωνται ἀπὸ τὰ πορίσματα τῶν νεωτέρων ἐρευνῶν. Αὗται εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους ἱδρυθεῖσα ἐπιστήμη τῆς Λογικῆς (Ἀναλυτικῆς) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία τῶν «Στοιχείων». Ἡ νεωτέρα σκέψις παρωθουμένη ἀπὸ εὐγενῆ φιλοδοξίαν πολλάκις ἔχει ἐφορμήσει κατὰ τῶν δύο τούτων αἰωνοβίων δημιουργημάτων, μὲ τὴν πρόθεσιν νὰ καταδείξῃ τὴν ὕπαρξιν ἀτελειῶν εἰς αὐτὰ καὶ νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ μὲ νεωτερικὰς μαθήσεις. Ὁ κ. Σταμάτης εἰς τὴν εἰσαγωγήν του, ἀφοῦ κατ' ἀρχὰς ἐκθέτει τὰς βάσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία, προχωρεῖ εἶτα εἰς τὴν ἀντιπαραβολὴν αὐτῆς πρὸς τὰ συστήματα τῶν νεωτέρων «μὴ εὐκλειδείων» γεωμετριῶν (σελ. εἰσαγωγῆς 30 κ.ἑ.). Ἰδίως ἐνδιατρίβει ἐπὶ τοῦ τρόπου τῆς ὑπὸ τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ Hilbert ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως τῆς γεωμετρίας. Ὁ κ. Σταμάτης ὑπογραμμίζει τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ βαθυτέρα ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας «προσκρούει πάντοτε εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου». Ἤδη ὁ Ἀριστοτέλης ἔχει ἀποδείξει, γράφει ὁ κ. Σταμάτης, ὅτι ἡ ὕπαρξις τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων δὲν εἶναι ἀπόλυτος. Ἐκ τῆς διαπιστώσεως ταύτης προκύπτει τὸ συμπέρασμα ὅτι αἱ σύγχρονοι προσπάθειαι τῆς ἀπὸ ὀντολογικῆς ἀπόψεως ἑρμηνείας τοῦ κόσμου διὰ μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ συμβόλων θὰ ὁδηγῇ πάντοτε εἰς σχετικοῦ κύρους πορίσματα. Τοῦτο ἐπιμαρτυρεῖται καὶ ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μὴ Εὐκλείδειος γεωμετρία καθὼς καὶ ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος δὲν ἐπιβεβαιοῦνται ὑπὸ τῆς πραγματικότητος. Διατηροῦν ἐν πάσῃ περιπτώσει τὴν ἀξίαν των ὡς ἐπινοήσεις καὶ κατακτήσεις τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, δὲν ἱκανοποιοῦν ὅμως τὰ ὑπὸ τῆς ἀνθρωπίνης νοήσεως τιθέμενα προβλήματα ἰδίᾳ ὡς πρὸς τὸν διασαφηνισμὸν τῶν ἐννοιῶν τῆς μονάδος καὶ τοῦ σημείου. Εἰς ὅσα γράφει ἐν σχέσει μὲ τὰς μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας ὁ κ. Σταμάτης θὰ ἠδύνατό τις νὰ προσθέσῃ, ὅτι αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος ὁδηγοῦν εἰς τὴν διατύπωσιν σκέψεων, συμφώνως πρὸς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὸ σύμπαν ἔλαβεν ὑπόστασιν ἐκ τοῦ μηδενός. Ἀλλὰ μία σειρὰ τοιούτων σκέψεων δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ τὸ ὀλιγώτερον ὡς τολμηρά. Οὐδεὶς ἀμφισβητεῖ ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ Russel καὶ Hilbert συντελουμένη διὰ μαθηματικῶν συμβόλων διατύπωσις λογικῶν ἀποφάνσεων καὶ μαθηματικῶν σχέσεων ἀποτελεῖ ἐπινόησιν, ἥτις ἀξίζει νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς εὐφυής. Δὲν ἀποτελεῖ ὅμως βῆμα προχωροῦν εἰς περιοχὴν κειμένην ἐπέκεινα τῆς εὐκλειδείου γεωμε-

τρίας. Ἡ ἰδέα τῆς συντάξεως εἰς συστηματικὴν καὶ ἀπηλλαγμένην ἀντιφάσεων συμπερίληψιν τῶν σχετικῶν μὲ τὸν χῶρον προσδιορισμῶν διετυπώθη ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων καὶ ὑποδειγματικὴ πραγμάτωσις αὐτῆς ὑπῆρξεν τὸ ὑπὸ τοῦ μεγάλου Στοιχειωτοῦ συντελεσθὲν ἔργον.

Διὰ τὴν σπουδάζουσαν εἰς τὰ σχολεῖα τῆς Μέσης καὶ Ἀνωτάτης Ἐκπαιδεύσεως νεότητα ἡ ἀρξαμένη ἔκδοσις τῶν «Στοιχείων» τυγχάνει ἀπὸ πολλαπλῆς ἀπόψεως σημαντική. Θὰ ἐμφανίσῃ πρὸ τοῦ στοχασμοῦ των τὴν ἀρχιτεκτονικὴν διάταξιν τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων καὶ θὰ παράσχῃ τὴν ἱκανότητα τῆς διακρίσεως τῶν διαφόρων εἰδῶν τῆς γεωμετρικῆς ἀποδείξεως.

Θὰ γίνῃ ἀφορμὴ νὰ χαροῦν οἱ σπουδασταὶ τὸ κάλλος καὶ τὴν κομψότητα τῶν Εὐκλειδείων ἀποδεικτικῶν συλλογισμῶν. Θὰ ὑψωθῇ πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν τῆς ψυχῆς ἐκείνων, οἵτινες θὰ θελήσουν νὰ ἐμβαθύνουν εἰς τὴν ἀρχιτεκτονικὴν τῶν ἀποδείξεων, ὁ Εὐκλείδης ὡς μία καλλιτεχνικὴ μορφὴ ἐφάμιλλος πρὸς τὸν Φειδίαν.

Κατὰ μίαν παλαιὰν παράδοσιν ὁ Πλάτων εἶχε γράψει εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς Ἀκαδημίας του «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». Ἡ ἐπιγραφὴ αὕτη ἀποκαλύπτει ὅτι ὁ Ἀθηναῖος φιλόσοφος ἀπέδιδεν ὑψίστην παιδευτικὴν σημασίαν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας. Αἱ γεωμετρικαὶ ἔρευναι κατεῖχον κεντρικὴν θέσιν μεταξὺ τῶν μαθημάτων, τὰ ὁποῖα ἐδιδάσκοντο εἰς τὴν Πλατωνικὴν Ἀκαδημίαν. Συμφώνως δὲ πρὸς μαρτυρίαν, τὴν ὁποίαν μᾶς παρέχει ὁ Πρόκλος, ὁ Εὐκλείδης ἤθελε νὰ θεωρῆται ὀπαδὸς τοῦ Πλάτωνος «τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος». Ἡ ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη ἔκδοσις τῶν «Στοιχείων» θὰ δώσῃ εἰς τὰς χεῖρας τῶν Ἑλλήνων μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν ἄριστον βοήθημα διὰ τὰς σπουδάς των καὶ ὑψηλὸν πρότυπον διὰ μελέτην καὶ περαιτέρω δημιουργίαν. Ὁ Εὐκλείδης διὰ τῶν «Στοιχείων» του ἀπέβη εἷς ἐκ τῶν μεγαλυτέρων παιδευτῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Ἐδίδαξε τοὺς μελετητάς του τὴν ὀρθὴν καὶ μεθοδικὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἀνθρωπίνων λογικῶν δυνάμεων. Τὰ «Στοιχεῖα» ἀπετέλεσαν ἰδεῶδες πρότυπον πρὸς μίμησιν διὰ πάσας τὰς ἐπιστήμας. Ὁ μέγας φιλόσοφος τῶν νεωτέρων χρόνων Spinosa γράφων τὴν Ἠθικήν του καὶ χαρακτηρίζων αὐτὴν ὡς «modo geometrico demonstratam» εἶχεν ὡς πρότυπόν του τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου. Αἱ σκέψεις αὗται μᾶς παρακινοῦν νὰ εὐχηθῶμεν, ἵνα ἀχθῇ εἰς αἴσιον πέρας ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐκδόσεως τοῦ ὅλου σώματος τῶν «Στοιχείων». Οἱ εἰς τὰ Γυμνάσια διδάσκοντες τὰ μαθηματικὰ Ἕλληνες καθηγηταὶ ἐλπίζομεν ὅτι θὰ χρησιμοποιήσουν τὸ ὑψίστης σημασίας παιδευτικὸν ὄργανον τὸ παρεχόμενον εἰς αὐτοὺς διὰ τῆς ἐκδόσεως τῶν «Στοιχείων». Θὰ ἀποδειχθῇ διὰ μίαν ἀκόμη φορὰν ὅτι ἡ ἀσχολία μὲ τὰ ἀρχαῖα γράμματα δὲν ἐξυπηρετεῖ μόνον λογοτεχνικοὺς σκοπούς. Εἶναι ἐξ ἴσου ἐποικοδομητικὴ διὰ τὴν προπαίδευσιν τῶν μαθητῶν εἰς τὰς ἐπιστήμας τῶν μαθηματικῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ὁλόκληρον τὸ οἰκοδόμημα τοῦ συγχρόνου τεχνικοῦ πολιτισμοῦ.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

Μανῆ πρέπει νὰ ἐφελκύσῃ τὴν προσοχὴν τῶν διδασκόντων τὰ Λατινικὰ εἰς τὰ Γυμνάσια καὶ νὰ ἀποτελέσῃ τὴν ἀφετηρίαν διὰ τὴν ἔκδοσιν καὶ τῶν λοιπῶν εἰς τὰ Γυμνάσια διδασκομένων κειμένων.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

## B. L. VAN DER WAERDEN

### Die Arithmetik der Pythagoreer. II. Die Theorie des Irrationalen. [Ἡ ἀριθμητικὴ τῶν Πυθαγορείων. II. Ἡ θεωρία τοῦ ἀσυμμέτρου].

Εἰς πολλοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ζυρίχης κ. B. L. van der Waerden εἶναι γνωστὸς ἀπὸ τὸ περισπούδαστον δίτομον ἔργον του «Moderne Algebra». Τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι μοναδικὸν εἰς τὸ εἶδος του καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ κλασσικὸν καὶ ὡς ἡ φυσικὴ συνέχεια καὶ ἐξέλιξις, τῆς Ἀλγέβρας Weber καὶ Fricke. Ὀλίγοι ὅμως Ἕλληνες γνωρίζουσιν ὅτι ὁ B. L. van der Waerden ἀσχολεῖται καὶ μὲ τὰ μαθηματικὰ καὶ τὴν ἀστρονομίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῶν ὁποίων ἡ συμβολή του θεωρεῖται λίαν σημαντική.

Ἔχομεν ὑπ' ὄψει ἐργασίας του τῶν τελευταίων ἐτῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὰς ἑξῆς : 1) Ἡ ἀστρονομία τοῦ Ἡρακλείδου τοῦ Ποντικοῦ. 2) Ἡ ἀριθμητικὴ τῶν Πυθαγορείων II, ἡ θεωρία τοῦ ἀσυμμέτρου. 3) Τὸ Ὄρυγμα τῆς Σάμου καὶ ἡ Διόπτρα τοῦ Ἥρωνος. 4) Ἡ κίνησις τοῦ Ἡλίου κατ' ἑλληνικὰς καὶ ἰνδικὰς ἐπιγραφάς. [1) Die Astronomie des Herakleides von Pontos. 2) Die Arithmetik der Phytagoreer II. Die Theorie des Irrationalen. 3) De tunnel op Samos en de Dioptra van Heron. 4) Die Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln]. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἐργασιῶν τούτων ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας τῆς Σαξωνίας τῇ 15-5-1944, ἡ δευτέρα εἰς τὰ Μαθηματικὰ Χρονικά, τόμ. 120, τεῦχος 5]6 τοῦ 1949, εἰσαχθεῖσα τῷ 1945, ἡ τρίτη εἰς τὰ πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας τῆς Ὁλλανδίας τῷ 1950 καὶ ἡ τετάρτη εἰς τὰ πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας τῆς Βαυαρίας τῇ 7-11-1952.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐργασιῶν ἐξετάζομεν τὴν δευτέραν, ἐπιφυλασσόμενοι ὅπως ἐξετάσωμεν τὰς λοιπὰς εἰς τὸ προσεχὲς μέλλον. Ἐπὶ τούτοις σημειοῦμεν ὅτι ἡ δευτέρα ὡς ἄνω πραγματεία, τοῦ B. L. van der Waerden ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον μέρος πραγματείας του, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέρος ἀναφέρεται εἰς τὴν μαθηματικὴν μουσικὴν τῶν Πυθαγορείων. Τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος προῆλθεν, ὡς τονίζει οὗτος, ἐκ διεξοδικῆς συζητήσεως τούτου μετὰ τοῦ K. Reidemeister. Εἰς τὴν πραγματείαν του Arithmetik der Griechen, Leipzig 1940 (Ἀριθμητικὴ τῶν Ἑλλήνων, Λειψία 1940) τονίζει ὁ K. Reidemeister, ὅτι ἡ θεωρία τῶν «δυνάμει συμμέτρων εὐθειῶν» τῆς ὁποίας ἀποσπάσματα ἐσώθησαν εἰς τὸν διάλογον τοῦ Πλάτωνος, Θεαίτητος, καὶ εἰς τὸ X. βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἶναι ἡ ἄμεσος συνέχεια τῆς ἀριθμητικῆς τῶν γεωμετρικῶν προόδων

τῶν βιβλίων VIII καὶ IX τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ ὅτι αἱ θεωρίαι αὗται ἀπετέλουν ἀρχικῶς ἓν σύνολον.

Ὁ B. L. van der Waerden ὑποστηρίζει ὅτι ἡ θεωρία τῶν δυνάμει συμμέτρων εὐθειῶν συνδέεται στενῶς οὐ μόνον πρὸς τὸν διάλογον τοῦ Πλάτωνος, Θεαίτητος, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸ κύριον μέρος τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων.

Τὸ νέον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον προσθέτει ἡ ἔρευνα τοῦ B. L. van der Waerden εἶναι ὅτι δὲν ὑπῆρχε μία θεωρία τῶν «δυνάμει συμμέτρων εὐθειῶν», ἀλλὰ δύο. Τὴν μίαν ἐκ τούτων ὀνομάζει ὁ συγγραφεὺς θεωρίαν τοῦ Ἀρχύτου (Αρ) ἐν' ᾧ τὴν ἄλλην ὀνομάζει θεωρίαν τοῦ Θεαιτήτου (Θε). Τὰ κύρια συμπεράσματα καὶ τῶν δύο θεωριῶν εἶναι τὰ αὐτά, παραδέχεται ὁ συγγραφεύς. Αἱ ἀποδείξεις τῆς θεωρίας τοῦ Θεαιτήτου στηρίζονται κατὰ τὸν συγγραφέα εἰς τὴν προευδόξειον θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, ἐν ᾧ αἱ ἀποδείξεις τῆς θεωρίας τοῦ Ἀρχύτου στηρίζονται κυρίως εἰς τὸ VIII βιβλίον τῶν Στοιχείων (εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συμμετοχὴ τοῦ Ἀρχύτου θεωρεῖται σημαντική), τοῦ ὁποίου προηγεῖται, ὡς γνωστόν, ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου.

Ἡ προευδόξειος θεωρία τῶν ἀναλογιῶν συνάγεται κατὰ τὸν συγγραφέα ἐκ τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων τοῦ Ἀριστοτέλους (I 5, p. 74α, 17-25) καὶ συναφῶν σχολίων τοῦ Ἀλεξάνδρου τοῦ Ἀφροδισιέως, ὅστις ἐπάγεται ὅτι «Μεγέθη εὑρίσκονται πρὸς ἄλληλα ἐν ἀναλογίᾳ, ἐὰν παρουσιάζωσι τὴν αὐτὴν ἀνθυφαίρεσιν (ἢ κατ' Ἀριστοτέλη ἀνταναίρεσιν). Τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀναλογίας (τεσσάρων) μεγεθῶν, τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τοῦ VII βιβλίου τῶν Στοιχείων (τὸν ἀλγόριθμον τοῦ Εὐκλείδου, πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν) ἀναπτύσσει ὁ B. L. van der Waerden θαυμάσια ἀναφερόμενος εἰς τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι ὁ λόγος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου εἶναι ἀξία ἰδιαιτέρας ἐξάρσεως ἡ συμβολὴ τοῦ B. L. van der Waerden διὰ τὴν σπουδὴν τῆς προευδοξείου θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Τὴν συναφῆ γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως ἀπαντῶμεν διὰ πρώτην φοράν, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, καὶ φρονοῦμεν ὅτι εἶναι ἐξαιρετικῆς σημασίας.

Διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως θεωρεῖ ὁ B. L. van der Waerden ὡς πρῶτον βῆμα τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίτσου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

Ὡς δεύτερον βῆμα διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς μεθόδου ταύτης θεωρεῖ ὁ συγγραφεὺς τὴν μηχανικὴν μεταφορὰν ταύτης ἐκ τῶν ἀριθμῶν εἰς ἄλλα μεγέθη, ὡς τὰ τμήματα εὐθειῶν καὶ τὰ μουσικὰ διαστήματα. Ὡς τρίτον βῆμα θεωρεῖ ὁ συγγραφεὺς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τοῦ λόγου τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς σχέσεως ταύτης ἔχει ἐκπηγάσει τὸ 2 θεώρημα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ θεωρούμενον ὡς κριτήριον ἀποδείξεως τοῦ ἀσυμμέτρου (ἢ κριτήριον συγκλίσεως φθινούσης ἀκολουθίας). Τέλος ὡς τέταρτον βῆμα θεωρεῖ ὁ συγγραφεὺς τὸν ἀριθμὸν τῶν πηλίκων $q_1, q_2, \ldots$ τὰ ὁποῖα δηλοῦσι πό-

σας φοράς τὸ μικρότερον ἐκ δύο μεγεθῶν ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ ἐπίσης πόσας φοράς τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρεῖται ἐκ τοῦ μικροτέρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συμμέτρου δύναταί τις ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πηλίκων εἶναι γνωστός, νά εἴπῃ ἀκριβῶς πόσας φοράς τὸ κοινὸν μέτρον εἰσέρχεται εἰς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, τὸ προτελευταῖον κλπ. ὡς καὶ εἰς τὰ δύο δοθέντα μεγέθη, ἤτοι ὅτι ὁ λόγος τῶν δοθέντων μεγεθῶν εἶναι μονοτίμως καθωρισμένος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πηλίκων $q_1, q_2, \ldots$. Ἀντιστρόφως, ἐξαρτῶνται οἱ ἀριθμοὶ τῶν πηλίκων (καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀσυμμετρίας) προφανῶς ἐκ τοῦ λόγου τῶν δοθέντων μεγεθῶν: Ἀνάλογα μεγέθη ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πηλίκων. Διὰ τῶν σκέψεων τούτων ἄγεταί τις εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἰσότης τῶν πηλίκων ἐν γένει δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ἀναλογίας.

Καὶ τὰ τέσσαρα βήματα ἢ ἐξελικτικαὶ βαθμίδες τῆς ἱστορίας τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως ἐπιβεβαιοῦνται ἐκ παλαιῶν καλῶν πηγῶν: Διὰ τὸ πρῶτον βῆμα ἀναφέρεται τὸ VII βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, διὰ τὸ δεύτερον τὸ 3ον θεώρημα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ ἀπόσπασμα τοῦ Φιλολάου, διὰ τὸ τρίτον τὸ 2ον θεώρημα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ διὰ τὸ τέταρτον τὸ 1ον θεώρημα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ πραγματεία τοῦ Ἀριστοτέλους.

Ἡ τοιαύτη ἄποψις ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς ἀνθυφαιρέσεως ἐπιτρέπει εἰς ἡμᾶς νὰ σχηματίσωμεν σαφῆ εἰκόνα περὶ τῆς θεωρίας (Θε), ὡς αὕτη ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν Πλάτωνα ὡς καὶ περὶ τοῦ ἱδρυτοῦ της.

Κατὰ τὸν συγγραφέα οὐδεμία γεννᾶται ἀμφιβολία ὅτι ὁ συγγραφεὺς τῆς θεωρίας (Θε) εἶναι ὁ Θεαίτητος, οὗτινος ἡ θεωρία εὑρίσκεται εἰς στενωτάτην ἐπαφὴν πρὸς τὸ κύριον μέρος τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων.

Τέλος ὁ συγγραφεὺς ἐκθέτει πῶς κατὰ τὴν γνώμην του ὁ μαθηματικὸς Θεόδωρος θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἶχε ἀποδείξῃ τὸ ἀσύμμετρον τῶν ἀριθμῶν, $\sqrt{3}, \sqrt{5} \ldots \sqrt{17}$, συμφώνως πρὸς τὴν πληροφορίαν τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Θεαίτητος.

Ἡ πραγματεία τοῦ B. L. van der Waerden ἀποτελεῖ σπουδαιοτάτην συμβολὴν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὅτι ἀποτελεῖ τὸ θαυμάσιον οἰκοδόμημα περὶ ἀσυμμέτρων τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου, εὑρίσκει διά τινας ἀπόψεις ἐν τῷ προσώπῳ τοῦ B. L. van der Waerden ἕνα ἀντάξιον ἑρμηνευτήν. Εὐχόμεθα ὅπως προσεχῶς εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν ν' ἀναφέρωμεν νέας ἐργασίας τοῦ B. L. van der Waerden ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Κονίτ. μη. 60.000

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Ε΄ 1953
ΤΕΥΧΟΣ Β΄
10

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1953

## ΙΩΣΗΦ Ε. ΧΟΦΜΑΝ: Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν μέχρι τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Φερμὰ καὶ τοῦ Καρτεσίου. [Geschichte der Mathematik von den Anfaengen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes, Walter de Gruyter und Co, Bd. 226, Berlin 1953, S. 200].

Ὁ ἐπίτιμος καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Tübingen κ. Ἰωσὴφ Ε. Χόφμαν ἔχει ἀφιερώσει ὑπὲρ τὰ πεντήκοντα ἔτη τῆς ζωῆς του εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ ἰδιαιτέρως εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Αἱ συναφεῖς ἀνακοινώσεις του εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου κατατάσσουσι τοῦτον εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγάλων ἱστορικῶν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, οἷοι εἶναι ὁ P. Tannery, ὁ Hankel, ὁ Zeuthen, ὁ M. Cantor καὶ ὁ sir Thomas Heath. Ὁ ὑπὸ κρίσιν τόμος ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τῆς δημιουργίας τῆς ἐπιστήμης ταύτης μέχρι τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Φερμὰ καὶ τοῦ Καρτεσίου. Ὁ συγγραφεὺς κατορθώνει εἰς τὴν πραγματείαν ταύτην μὲ ἰδιάζον σύστημα καὶ λαμπρὰν μέθοδον νὰ παράσχῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν δυνατότητα νὰ ἔχῃ πλήρη εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τῶν μαθηματικῶν ἐντὸς βραχυτάτου χρόνου. Οἱ ἀνωτέρω μημονευόμενοι ἱστορικοὶ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἔχουσι ρίψει ὅλον τὸ βάρος τῶν ἐρευνῶν των εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ὡς ἐπιστήμη εἶναι ἀποκλειστικὴ δημιουργία τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. Ὁ κ. Ἰ. Ε. Χόφμαν προχωρεῖ ἔτι περαιτέρω καὶ ἐπιτυγχάνει νὰ ἐκθέσῃ σαφῶς τοὺς δεσμούς, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν ἑλληνικῶν καὶ τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν. Μὲ θαυμαστὴν ἁπλότητα καὶ σαφήνειαν παρουσιάζει τὴν ἐξέλιξιν τῶν μαθηματικῶν διὰ μέσου τῶν αἰώνων ὑπὸ σύγχρονον συμβολισμόν, ὥστε ὁ ἀναγνώστης νὰ εἶναι ἀμέσως εἰς θέσιν νὰ συγκρίνῃ τὰ ἐπιτεύγματα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης διὰ μέσου τῶν αἰώνων τοῦ ἀνθρωπίνου πολιτισμοῦ. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ κ. Ἰ. Ε. Χόφμαν εἶναι ἀνυπέρβλητος, ἡ δὲ ὑπηρεσία, τὴν ὁποίαν προσφέρει εἰς τὴν ἱστορικὴν ἔρευναν τῶν μαθηματικῶν, εἶναι μεγάλη. Διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἐκτίθεται σαφῶς, ὅτι ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία, ἡ ὁποία διεμορφώθη ἀποφασιστικῶς ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου, εἶναι δημιούργημα τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ δὴ καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἰδιαιτέρως πρέπει νὰ σημειώσωμεν τὴν προσπάθειαν, τὴν ὁποίαν κατέβαλεν ὁ κ. Ἰ. Ε. Χόφμαν, ὅπως παρουσιάσῃ τὴν ἐπίδρασιν, τὴν ὁποίαν ἔσχον εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῶν μαθηματικῶν αἱ ἑκάστοτε ἐπικρατοῦσαι κοινωνικαὶ καὶ θρησκευτικαὶ ἀντιλήψεις. Καίτοι τὸ ζήτημα τοῦτο θίγεται ἀκροθιγῶς, ἐν τούτοις παρέχεται εἰς τὸν ἀναγνώστην ἡ εὐκαιρία νὰ ἐκτιμήσῃ δεόντως τὸν παράγοντα τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ ἀνθρωπίνου πολιτισμοῦ. Καὶ ἀπὸ τοιαύτης ἐπόψεως ἐξεταζομένη ἡ πραγματεία τοῦ κ. Ἰ. Ε. Χόφμαν ἀποκτᾷ ἰδιάζουσαν σημασίαν. Ὁ ἀναγνώστης δὲν παρακολουθεῖ μόνον τὴν ξηρὰν ἐξέλιξιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἀλλ' αἰσθάνεται τὴν ἐξέλιξιν αὐτὴν ὡς ἓν σύγχρονον βίωμα, ὡς ein Erlebnis, ὅπως λέγεται εἰς τὴν μητρικὴν γλῶσσαν τοῦ συγγραφέως. Ἡ κατανομὴ τῆς ὑπὸ διαπραγμάτευσιν

ὕλης εἰς πέντε μεγάλα τμήματα μετὰ συναφῶν εἰς ἕκαστον τμῆμα ὑποδιαιρέσεων καὶ παροχῆς πλήρους βιβλιογραφίας δι' ἕκαστον τμῆμα διευκολύνει πολὺ τὴν εὐχάριστον σπουδὴν τῆς πραγματείας τοῦ κ. Ἰ. Ε. Χόφμαν.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Γ. ΚΟΡΡΕ (Ἀρχαῖοι Ἕλληνες Λυρικοί) Εἰσαγωγὴ—Βίος—Ἔργα καὶ ἐκδόσεις—Μιμήσεις καὶ ἐπιδράσεις—Ἰδέαι—Κείμενον καὶ σχόλια) Τόμος Α΄ ΘΕΟΓΝΙΣ.**

Ἡ πρὸ ὀλίγου χρόνου γενομένη ἔκδοσις τῶν ἐλεγειῶν τοῦ Θεόγνιδος ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Στυλιανοῦ Κορρὲ ὡς πρώτου ἔργου εἰς τὴν ἀγγελλομένην σειρὰν ἐκδόσεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων λυρικῶν τιμᾷ ἀναμφισβητήτως τὴν Ἑλληνικὴν φιλολογικὴν ἐπιστήμην καὶ παρέχει τὴν ἀγαθὴν ἐλπίδα συντονωτέρας ἐν τῷ μέλλοντι καὶ ἐπιμελεστέρας θεραπείας τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς φιλολογίας προοιωνιζομένη οὕτω νέαν ἄνθησιν τῶν Ἑλληνικῶν γραμμάτων καὶ τὴν διὰ συστηματικῆς ἐργασίας προώθησιν τῶν κλασσικῶν σπουδῶν ἐν Ἑλλάδι εἰς ἐπίπεδον ὑψηλόν, παράλληλον πρὸς ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον προήγαγον αὐτὰς παλαιοὶ εὐκλεεῖς φιλόλογοι, ὡς ὁ Δημήτριος Βερναρδάκης, ὁ Γεώργιος Μιστριώτης, ὁ Πέτρος Παπαγεωργίου καὶ ἄλλοι. Διότι ἡ ἔκδοσις τῶν ἐλεγειῶν τοῦ Θεόγνιδος ὑπὸ τοῦ κ. Κορρὲ φαίνεται ἔργον ἄρτιον, κατ' οὐδὲν ὑστεροῦν παρομοίων ἐκδόσεων ὑπὸ ξένων φιλολόγων, καὶ εἶναι προϊὸν βαθείας μελέτης καὶ τοῦ κειμένου τῶν ἐλεγειῶν τοῦ Θεόγνιδος καὶ τῶν ἄλλων ποιητῶν καὶ συγγραφέων, εἰς τοὺς ὁποίους πολλάκις ἀναφέρεται ἑκάστοτε ὁ κ. Κορρὲς ἐν τῇ ἐκδόσει αὐτοῦ.

Προσβλέπων ἤδη εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Θεόγνιδος ὑπὸ τοῦ κ. Κορρὲ καὶ ἐντρυφῶν εἰς τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ ἔργου τούτου κυριαρχοῦμαι ἢ μᾶλλον καταπραΰνομαι ὑπὸ ἀπολύτου ψυχικῆς ἠρεμίας ἀναγινώσκων ἕνα ἀρχαῖον Ἕλληνα ποιητήν, ἀναμφιβόλως μέγαν, ὁ ὁποῖος, ἂν καὶ ὑπέστη, ὡς γνωστόν, κατὰ τὸν βίον αὐτοῦ πολλὰς ταραχώδεις περιπετείας, δὲν κατώρθωσε ἢ δὲν ἠθέλησε νὰ παράσχῃ εἰς ζωηροὺς καὶ κινητικοὺς χρωματισμοὺς τὸ πάθος τῆς ψυχῆς αὐτοῦ καὶ τὴν ἀγριότητα τῶν καταστάσεων, τὰς ὁποίας διῆλθεν, ἀλλὰ τοὐναντίον ἐπεχείρησε νὰ διασπείρῃ εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ ἀτμόσφαιραν ἤρεμον καὶ ἡπίαν, εἰς δὲ τὸν ἀναγνώστην, αἰσθανόμενον ἑαυτὸν μετὰ τοῦ ποιητοῦ ὅτι κινεῖται εἰς περιβάλλον κατεχόμενον ὑπὸ παθῶν καὶ κυριαρχούμενον ὑπὸ ἐπαναστατικοῦ μένους, ἐπέτυχε νὰ ὑποβάλῃ τὴν χριστιανικὴν ἐκείνην διάθεσιν, τὴν ὁποίαν ὁ Ναζωραῖος, καίπερ βασανιζόμενος καὶ περιυβριζόμενος ὑπὸ τῶν διωκτῶν αὐτοῦ, ἀπέδωκε διὰ τῆς φράσεως «ἄφες αὐτοῖς, οὐ γὰρ οἴδασι τί ποιοῦσι». Καὶ εὑρίσκω, γνωρίζων τὴν ἠπιότητα καὶ τὴν ψυχικὴν ἰδιοσυστασίαν αὐτοῦ, ὅτι ὁ κ. Κορρὲς ἀνέλαβεν ἔργον οἰκεῖον καὶ πρόσφορον εἰς αὐτόν.

Ἡ ἔκδοσις τῶν ἐλεγειῶν τοῦ Θεόγνιδος ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Κορρὲ δύναται

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

7=

ΕΤΟΣ Ζ' 1955
ΤΕΥΧΟΣ Α'
13

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1955

**E. J. DIJKSTERHUIS, Bilthoven, Ὁλλανδία. 1) Deux traductions de Proclus. 2) Die Integrationsmethoden von Archimedes.**

Ὁ καθηγητὴς ἐν ὁλλανδικῷ Πανεπιστημίῳ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν κ. Ε. Ι. Ντιγκστέρουης ἔχει ἀφιερώσει ὁλόκληρον τὴν ζωήν του εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Κάτοχος τῆς ἀρχαίας καὶ νέας ἑλληνικῆς γλώσσης ἔχει κατορθώσει νὰ ἐμβαθύνῃ εἰς τὸ ἀρχαῖον ἑλληνικὸν πνεῦμα ὅσον ὀλίγοι ἐκ τῶν συγχρόνων ἐρευνητῶν τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὅλαι αἱ μέχρι σήμερον δημοσιευθεῖσαι πραγματεῖαι του ἀναφέρονται πάντοτε εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην. Τὰ μαθηματικὰ παρὰ Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει καὶ αἱ συγγραφαὶ τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου εἶναι τὸ πεδίον τῶν ἐρευνῶν τοῦ κ. Ε. Ι. Ντιγκστέρουης. Ἐσχάτως ἐδημοσιεύθησαν δύο μικραὶ πραγματεῖαί του, αἱ ὁποῖαι συμβάλλουσι πολὺ εἰς τὴν ἔρευναν καὶ σπουδὴν τοῦ εὐκλειδείου καὶ ἀρχιμηδείου πνεύματος. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τῶν πραγματειῶν τούτων ὑποβάλλει εἰς κριτικὸν ἔλεγχον δύο μεταφράσεις τοῦ Πρόκλου, γενομένας τὴν μὲν μίαν εἰς τὴν γαλλικὴν γλῶσσαν, τὴν δὲ ἄλλην εἰς τὴν γερμανικήν. Ὡς γνωστόν, ὁ Πρόκλος, ἐκ τῶν τελευταίων Διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, ἐδημοσίευσε σχόλια εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσι τὴν πλέον ἔγκυρον ἱστορικὴν πηγὴν διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Τὰ σχόλια ταῦτα ἀνεδημοσιεύθησαν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ἀναγεννήσεως.

Ἡ τελειοτέρα ὅμως ἔκδοσις τούτων ἐγένετο ὑπὸ τοῦ G Friedlein, Teubner 1873. Διὰ πρώτην φορὰν δημοσιεύεται μετάφρασις τῆς πραγματείας ταύτης τοῦ Πρόκλου εἰς τὴν γαλλικὴν καὶ τὴν γερμανικήν. Ὁ κ. Ε. Ι. Ντιγκστέρουης ἐπιφέρει κριτικὰς διορθώσεις καὶ εἰς τὰς δύο μεταφράσεις, προτάσσων τῆς πραγματείας του, ἐν ὑποτίτλῳ, τὸ τοῦ Πλάτωνος «ἀλλ᾽ οὐ γὰρ πρό γε τῆς ἀληθείας τιμητέος ἀνήρ, ἀλλ᾽ ὃ λέγω, ῥητέον» (Πολιτείας 595 C).

Εἰς τὴν δευτέραν πραγματείαν του ὁ κ. Ε. Ι. Ντιγκστέρουης ἑρμηνεύει λίαν ἐπιτυχῶς τὰς μεθόδους ὁλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Η' 1956
ΤΕΥΧΟΣ Α'
15
ΤΕΥΧΟΣ Β'
16

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1956

καὶ εὐρύτητα τοῦ ἐπιστημονικοῦ του στοχασμοῦ. Ἡ συγγραφὴ τῆς ὁποίας ἠθελήσαμεν νὰ παράσχωμεν συνοπτικὴν ἐπισκόπησιν ἐμφανίζει ὅλας αὐτὰς τὰς πνευματικάς του ἀρετάς. Δι' αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται ἡ σύνδεσις εἰς ἐνιαῖον σύνολον σπουδαιοτάτων κλάδων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, κατὰ τρόπον παρέχοντα εἰς τὸν μελετητὴν τὴν δυνατότητα νὰ ἀντικρύζῃ, ἀποδεσμευόμενος ἀπὸ τὰς δευτερευούσης φύσεως λεπτομερείας, τὰ μαθηματικὰ προβλήματα καὶ ἀπὸ τῆς φιλοσοφικῆς αὐτῶν ἀπόψεως. Μία τοιαύτη θεώρησις εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὸν μαθηματικὸν λειτουργὸν τὸν διδάσκοντα εἰς τὰ ἑλληνικὰ Γυμνάσια. Εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ὁ κ. Μιχαλόπουλος θὰ ἐρευνήσῃ τὰ θέματά του εἰς μελλοντικὰς συγγραφὰς καὶ ἀπὸ ἱστορικῆς ἀπόψεως. Ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ πεδίου τῆς ἱστορικῆς ἐπισκοπήσεως πολλὰ προβλήματα ἀμέσου διαφέροντος καὶ διὰ τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν ἐπιστήμην καὶ διὰ τὴν ἑλληνικὴν ἀρχαιογνωσίαν. Περιοριοριζόμεθα νὰ ἀναφέρωμεν ἐκ τούτων τὸ περιλάλητον ζήτημα τὸ θέτον τὸ ἐρώτημα ἂν ἡ ἀρχαία μαθηματικὴ σκέψις εἶχε φθάσει εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Δὲν χρειάζεται νὰ ὑπομνήσωμεν τὰ σφαλερὰ συμπεράσματα, εἰς ἃ κατέληξεν ὁ Spengler ἀφορμηθεὶς ἀπὸ ἀτελῆ ἐξέτασιν τοῦ ἐν λόγῳ ζητήματος. Ἐκτὸς τούτου ἀξίζει τὸν κόπον νὰ ἐξετασθοῦν αἱ ἀριθμολογικαὶ ἔρευναι τοῦ Πλάτωνος αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἀόριστον δυάδα τοῦ μεγάλου καὶ μικροῦ καθὼς καὶ εἰς τοὺς εἰδητικοὺς ἀριθμοὺς ἐν ἀντιβολῇ πρὸς τὴν τομὴν τοῦ Dedekind καὶ τὴν ὑπὸ τοῦ G. Cantor θεμελιωθεῖσαν θεωρίαν τῶν συνόλων.

Τὸ σύγγραμμα τοῦ κ. Μιχαλοπούλου θὰ ἐπιδράσῃ λίαν εὐεργετικῶς διὰ τὴν ἐξύψωσιν τῆς διδασκαλίας εἰς τὰ ἑλληνικὰ Γυμνάσια καὶ καταδεικνύει τὸ διαφέρον τὸ ὑπάρχον εἰς τοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς διὰ τὴν προώθησιν τῶν μαθηματικῶν σπουδῶν. Δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀπὸ πάσης ἀπόψεως εὐτύχημα ὅτι τὸ ἑλληνικὸν Γυμνάσιον περιέβαλε πάντοτε μὲ μεγάλην στοργὴν τὸ μάθημα τῶν μαθηματικῶν. Καὶ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ συμβῇ ἄλλο τι εἰς τὴν χώραν ὅπου ἐγεννήθη καὶ ἐξετράφη ἡ μαθηματικὴ σκέψις. Ὑποστηρίζεται ὑπό τινων ἡ ἀντίληψις ὅτι ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν πρέπει νὰ κολοβωθῇ εἰς τὰ λεγόμενα «*Κλασσικὰ Γυμνάσια*». Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι ἡ ὀνομασία «*Κλασσικὸν Γυμνάσιον*» δύναται νὰ χρησιμοποιῆται εἰς ξένας χώρας οὐχὶ ὅμως εἰς τὴν Ἑλλάδα. Δι' ἡμᾶς τοὺς Ἕλληνας τὰ λεγόμενα «*κλασσικὰ μαθήματα*» εἶναι «*ἑλληνικὰ μαθήματα*» καὶ ἀποτελοῦν ἀπαραίτητον θεμέλιον τῆς μορφώσεως καὶ τοῦ φρονηματισμοῦ τῆς νεολαίας μας. Εἰς τὴν λεγομένην κλασσικὴν αὐτὴν ὕλην περιλαμβάνεται ὡς ἀπαραίτητον στοιχεῖον ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ θεωρίαι τοῦ μεγαλοφυοῦς στοιχειωτοῦ. Οἱ κλάδοι οὗτοι τῶν μαθηματικῶν εἶναι δι' ἡμᾶς τοὺς Ἕλληνας ἀπαραμίλλου ἀποδοτικότητος μορφωτικὸν μέσον. Δι' ὅλους τοὺς ἀνωτέρω ἐκτεθέντας λόγους ἡ ἔκδοσις τοῦ βιβλίου τοῦ κ. Μιχαλοπούλου θὰ χαιρετισθῇ μὲ εἰλικρινῆ χαρὰν ὄχι μόνον ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς καὶ φυσικοὺς ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τοὺς Ἕλληνας φιλολόγους.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

**E. J. DIJKSTERHUIS Archimedes** (ἔκδ. Ejnar Munksgaard, Copenhagen, 1956). [Acta historica scientiarum naturalium et medicinalium, Editi Bibliotheca Universitatis Hauniensis Vol. 12].

Ὁ καθηγητὴς Πανεπιστημίου ἐν Ὁλλανδίᾳ κ. E. J. Dijksterhuis εἶναι ἐκ τῶν κορυφαίων Εὐρωπαίων ἐρευνητῶν τῆς ἱστορίας τῶν ἐπιστημῶν. Τὸν περισσότερον χρόνον τῆς ἐπιστημονικῆς του δραστηριότητος ἔχει ἀφιερώσει εἰς τὴν ἔρευναν τῶν μαθηματικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὸ 1929 ἐξέδωκεν ἐν Ὁλλανδίᾳ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (De Elementen van Euclides, Groningen 1929, 1931), μετὰ πολ-

λῶν κριτικῶν σημειώσεων καὶ διασαφήσεων, αἵτινες καθιστῶσι τὰ Στοιχεῖα εἰς τὸν ἀναγνώστην τὸν ἔχοντα συνηθίσει εἰς τὸν σύγχρονον μαθηματικὸν συμβολισμὸν εὐκόλως κατανοητά. Ἤδη παρουσιάζει εἰς ἕνα τόμον, ὑπὸ τὸν τίτλον «Archimedes», ὅλας τὰς σῳζομένας πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν ἀγγλικὴν γλῶσσαν. Δὲν πρόκειται ὅμως εἰς τὴν ἔκδοσιν ταύτην περὶ ἀκριβοῦς μεταφράσεως τοῦ ἑλληνικοῦ κειμένου. Μόνον αἱ ἐκφωνήσεις τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προτάσεων ἐν γένει ἔχουσι μετσφρασθῆ κατὰ λέξιν. Τὸ περιεχόμενον τῶν ἀποδείξεων ἔχει συντμηθῆ καὶ ἔχει προσαρμοσθῆ εἰς τὸν σύγχρονον μαθηματικὸν συμβολισμὸν κατὰ ἰδιαίτερον τρόπον ἐπινοηθέντα ὑπὸ τοῦ κ. Dijksterhuis. Αἱ σπουδαιότεραι ἐκδόσεις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους αἱ γενόμεναι κατὰ τὸ διαρρεῦσαν μέρος τοῦ διανυομένου αἰῶνος, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἑλληνικῶν πρωτοτύπων ἔργων τῶν ἐκδοθέντων ὑπὸ τοῦ Heiberg ἐν Λειψίᾳ, εἶναι ἡ ἔκδοσις T. Heath εἰς τὴν ἀγγλικήν, ἡ ἔκδοσις P. ver Elcke εἰς τὴν γαλλικὴν καὶ ἡ ἔκδοσις Art. Czwalina - Allenstein (Ostwald's Klassiker) εἰς τὴν γερμανικήν. Εἰς τὴν ῥωσσικὴν γλῶσσαν ἐξεδόθησαν ἔργα τινὰ τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ τὸ 1823, τὸ 1824 καὶ τὸ 1909. Κατὰ τὸ 1932 ἐξεδόθη ἐν Μόσχᾳ τὸ ἔργον Περὶ ὀχουμένων, τοῦ ὁποίου δευτέρα ἔκδοσις ἐγένετο τὸ 1933. Ἐπίσης κατὰ τὸ 1932 ἐξεδόθησαν ἐν Μόσχᾳ - Λένινγκραδ τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου Μέτρησις καὶ Ψαμμίτης. Κατὰ τὸ 1951 ἐξεδόθη ἐν Μόσχᾳ μικρὰ πραγματεία τοῦ καθηγητοῦ W. Kagan (σελ. 42), περιέχουσα μικρὸν βιογραφικὸν σημείωμα περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ περίληψιν γενικὴν τοῦ ἔργου τοῦ Συρακοσίου σοφοῦ. Τῆς πραγματείας ταύτης γερμανικὴ μετάφρασις ἐξεδόθη κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος 1955. Εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν γλῶσσαν ἐξεδόθησαν ὑπὸ τοῦ γράφοντος αἱ πραγματεῖαι τοῦ Ἀρχιμήδους Τετραγωνισμὸς παραβολῆς 1945, Μηχανικὰ 1946, Κύκλου μέτρησις 1950. Εἰς ὅλας τὰς μνημονευθείσας ἀνωτέρω ἐκδόσεις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους γίνεται ἀκριβὴς μετάφρασις ἐκ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γλώσσης τῶν πρωτοτύπων. Ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος τούτου παρατηροῦμεν εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ T. Heath. Οὗτος ἔχει συντάμει τὰς ἀποδείξεις καὶ ἔχει προσαρμόσει αὐτὰς εἰς τὸν σύγχρονον μαθηματικὸν συμβολισμόν, οὕτως ὥστε αὗται νὰ εἶναι προσιταὶ εἰς τὸν ἀναγνώστην ἄνευ ἰδιαιτέρας τινὸς προσπαθείας, ἡ ὁποία ἄλλως πως θὰ ἦτο ἀναγκαία, ἐπειδὴ εἶναι δύσκολον νὰ παρακολουθῇ τις τὴν ἀλληλουχίαν τῶν συλλογισμῶν τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν ὑπ' αὐτοῦ τῶν γεωμετρικῶν ἢ ἄλλων προτάσεων. Κατὰ τὴν γνώμην τοῦ κ. Dijksterhuis τόσον ἡ ἀκριβὴς μετάφρασις τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅσον καὶ ὁ τρόπος ἐκδόσεως τούτων ὑπὸ τοῦ Heath παρουσιάζουσι πλεονεκτήματα καὶ μειονεκτήματα διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀποδείξεων. Ὁ κ Dijksterhuis, ὡς μνημονεύομεν ἀνωτέρω, ἐπενόησεν ἴδιον τρόπον ἐκθέσεως τῶν ἀποδείξεων τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅστις κατὰ τὴν γνώμην αὐτοῦ ἔχει τὰ πλεονεκτήματα καὶ ἀποφεύγει τὰ μειονεκτήματα τῶν ἀνωτέρω μνημονευθεισῶν μεθόδων ἐκδόσεως. Ὁ ἴδιος ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρει ἐν προλόγῳ περίπου τὰ ἑξῆς:

Ἡ μέθοδος ἡ χρησιμοποιουμένη εἰς τὸ παρὸν βιβλίον ἀκολουθεῖ τὸ ἑλληνικὸν κείμενον μόνον εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν προτάσεων. Αἱ ἀποδείξεις ἀναφέρονται διὰ συμβολισμοῦ εὑρεθέντος ὑπ' ἐμοῦ εἰδικῶς διὰ τὸν σκοπὸν τῆς κατανοήσεως τῶν ἑλληνικῶν ἀποδείξεων. Τὴν μέθοδον ταύτην ἐχρησιμοποίησα καὶ κατὰ τὴν ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (1929, 1931). Πέρα τούτου προσεπάθησα νὰ ἀπομακρύνω τὰς δυσκολίας, αἱ ὁποῖαι τυχὸν ἀπομένουσιν ἀκόμη, μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου μου διὰ τὴν κατανόησιν τῶν Ἑλλήνων συγγραφέων. Διὰ νὰ καταστήσω σαφῆ τὴν γενικὴν κατεύθυνσιν τῶν ἀποδείξεων ἔχω συλλέξει εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον (τὸ III) ὅλα ἐκεῖνα τὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν πυρῆνα τῆς πραγματείας ἔχουσι τὰς ἰδιότητας τῶν Στοι-

χείων. Οὕτως ἡ ἀπόδειξις βάσει τοῦ κεφαλαίου τούτου δύναται νὰ γραφῇ περιληπτικώτερον.

Δὲν δύναταί τις εὐκόλως νὰ λάβῃ σαφῆ θέσιν ἐπὶ τοῦ τρόπου τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν εἰς τὰς νεωτέρας γλώσσας. Διὰ νὰ ἀποφανθῇ τις ἐπὶ τούτου πρέπει νὰ λάβῃ ὑπ' ὄψει τοὺς σκοπούς, τοὺς ὁποίους ἐπιδιώκει ἡ τοιαύτη ἔκδοσις. Κατὰ τὴν γνώμην πολλῶν οἱ σκοποὶ οὗτοι εἶναι οἱ ἑξῆς:

Πρῶτος· ἡ ἔκθεσις τῶν ἀποδείξεων· δεύτερος· ἡ ἀκολουθουμένη μέθοδος κατὰ τὰς ἀποδείξεις· τρίτος· ἡ παρουσίασις εἰς τὸν ἀναγνώστην τοῦ τρόπου σκέψεως τοῦ συγγραφέως καὶ ἡ συναγωγὴ τῶν συναφῶν συμπερασμάτων. Ἐὰν ἐνδιαφέρεταί τις ἁπλῶς νὰ κατανοήσῃ εὐκόλως καὶ ταχέως τὰς ἀποδείξεις, τότε καὶ ὁ τρόπος δι' οὗ ὁ Heath ἐκθέτει ταύτας, εἶναι ἀκόμη πιθανώτατα πρόσφορος, ὁ ἐντελῶς ὅμως διάφορος τρόπος ἐκθέσεως τοῦ κ. Dijksterhuis εἶναι ἴσως ὁ ἐνδεδειγμένος. Τὸ μέγα πλῆθος τῶν ἀναγνωστῶν τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους ἐνδιαφέρεται πρωτίστως νὰ κατανοήσῃ τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεών του ταχέως καὶ εὐκόλως. Εἶναι ὅμως πιθανὸν νὰ ὑπάρχωσι καὶ ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι ἐνδιαφέρονται διὰ τὴν ἐκμάθησιν περισσοτέρων πραγμάτων. Ἀσφαλῶς ὅμως οἱ ἄλλοι οὗτοι εἶναι οἱ «σφόδρα ὀλίγοι», κατὰ τὸν ἐν Φιλήβῳ Πλάτωνα. Ὁπωσδήποτε ἡ προσπάθεια τοῦ διακεκριμένου Ὁλλανδοῦ ἐπιστήμονος εἶναι ἀξία πάσης ἐξάρσεως. Ἡ συμβολὴ τοῦ κ. Dijksterhuis εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν κατατάσσει αὐτὸν εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγάλων ἐρευνητῶν τῆς ἱστορίας τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ κ. Dijksterhuis εἶναι κάτοχος ὄχι μόνον τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γλώσσης, ἀλλὰ καὶ τῆς ἐπισήμου νέας ἑλληνικῆς.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

## M. D. Petruševski: Ἡ μεγάλη ἀνακάλυψις τοῦ κ. Βέντρις.

Εἰς τὸ περιοδικὸν «Ziva Antika» (V, τόμ. 2, 1955) ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ τοῦ ἐν Σκοπίοις Πανεπιστημίου κ. M. D. Petruševski ἐνδιαφέρον ἄρθρον σχετικὸν μὲ τὴν ἀνάγνωσιν τῆς κρητο-μυκηναϊκῆς γλώσσης. Ὁ συγγραφεὺς συνοψίζει τὰ ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα καὶ προτείνει νέας τινὰς ἑρμηνείας διαφόρων λέξεων.

Οὕτω π.χ., ὡς πρὸς τὴν λέξιν etedomo παρατηρεῖ ὅτι, ἐὰν τὸ δεύτερον συνθετικὸν αὐτῆς σχετισθῇ πρὸς τὸ ρῆμα δέμω, δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ρῆμα τοῦτο χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν ἑλληνικὴν μόνον διὰ τὰς λέξεις οἰκία, ναός, πόλις, τεῖχος, ὁδός, οὐδέποτε δὲ διὰ λέξεις σημαινούσας ὅπλα, ἐργαλεῖα· δι' ὃ ὁ σ. προτείνει διὰ τὴν λέξιν etedomo τὴν ἑρμηνείαν **ἐτε(Ϝο)δμώς* (ἀντὶ *ἐντεσδόμος*). Ἐπίσης διὰ τὴν λέξιν naudomo ἔχει τὴν γνώμην ὅτι, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ἑλληνικὸς τεχνικὸς ὅρος διὰ τὴν κατασκευὴν πλοίων εἶναι τὸ ρῆμα πήγνυμι (ναυπηγός), αὕτη θὰ ἠδύνατο νὰ ἑρμηνευθῇ *να(Ϝο)δόμοι* (ἀντὶ *ναυδόμοι*), τῆς λέξεως να(Ϝ)ὸς ἐκλαμβανομένης ἴσως μὲ τὴν ἀρχικὴν σημασίαν «οἰκία».

Διὰ τὴν λέξιν sitopoqo ὁ σ. φρονεῖ ὅτι θὰ ἠδύνατο νὰ ἑρμηνευθῇ *σιτοπομπός*, παρατηρῶν ὅτι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ προσεποριζόμεθα ἓν στοιχεῖον διὰ τὴν ἐτυμολογίαν τῆς λέξεως πέμπω, ἥτις μέχρι τοῦδε θεωρεῖται ἀβεβαία, ἐνῷ ἐξ ἄλλου θὰ εἴχομεν καλυτέραν ἑρμηνείαν τῆς λέξεως rawopoqo ὡς σημαινούσης **Λα.Ϝόπομπος* (ἀντὶ **ΛαΞοφόβος*)

Ὁ σ. προτείνει περαιτέρω τὴν ἑρμηνείαν **ἀρδε(σ)τῆρες* (=ἀρδευταί) διὰ τὴν λέξιν adetere· ὡς πρὸς τὰς λέξεις δὲ esareu, esarewe φρονεῖ ὅτι ἴσως πρόκειται περὶ προελληνικῆς (;) λέξεως συγγενοῦς πρὸς τὴν ἑλληνικὴν *ἱερεὺς* (ἱρός, ἱερός, ἰαρὸς ⟨*isaro· ἐκ τῆς ἰνδοευρωπ. ρίζης *ais-/*is-· πρβλ. ὀσκ. aisusis, ἐτρουσκ. aesar),

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

*«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν*
*ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».*
*Πλάτωνος Πολιτεία 450Β*

ΕΤΟΣ Θ' 1957

ΤΕΥΧΟΣ Α'

17

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1957

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ Θ' 1957
ΤΕΥΧΟΣ Α'
17

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1957

Ἐκ τῆς γενομένης συντόμου ἐπισημάνσεως τῶν κυριωτέρων σημείων καὶ ἀπόψεων τῆς ὑπὸ κρίσιν διατριβῆς καταφαίνεται ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ ἐργασίαν διακρινομένην διὰ τὴν πρωτοτυπίαν της, τὴν ὀργανικότητα τῆς διαρθρώσεώς της καὶ τὴν ἄκραν ἐπιστημονικότητά της. Καταδεικνύει ὅτι τὰ πλατωνικὰ κείμενα ἀποτελοῦν πλουσίαν πηγὴν μορφώσεως διὰ τοὺς Ἕλληνας διδασκάλους. Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἔχει ἐκδοθῆ πληθὺς παιδαγωγικῶν συγγραμμάτων καὶ ὑπὸ ξένων καὶ ὑπὸ Ἑλλήνων συγγραφέων, τὰ ὁποῖα προβάλλουν καὶ διαφημίζουν ὡς νέας, παιδαγωγικὰς ἀρχάς, αἵτινες κατὰ τρόπον πολὺ σαφέστερον καὶ ἁπλούστερον ἔχουν διατυπωθῆ καὶ ἀναπτυχθῆ εἰς τοὺς πλατωνικοὺς διαλόγους. Ὁ κ. Βασιλάκης διὰ τῆς διατριβῆς του παρέσχε ἀξιολογωτάτην συμβολὴν εἰς τὴν παιδαγωγικήν μας φιλολογίαν, ἥτις συνάμα εἶναι καὶ παρότρυνσις πρὸς τοὺς Ἕλληνας διδασκάλους νὰ γνωρίσουν τὰς παιδαγωγικὰς καὶ διδακτικὰς ἀρχὰς ἀπὸ τὰς πρώτας πηγὰς εἰς τὴν ἀρχικήν των καθαρότητα καὶ σαφήνειαν.

Ὑπεγραμμίσαμεν μόνον τὰς κεφαλαιωδεστέρας γραμμὰς τῆς ἐργασίας του καὶ ἐπιφυλασσόμεθα νὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὴν λεπτομερεστέραν ἀνάπτυξιν τῶν εὑρημάτων της διὰ συστηματικοῦ ἄρθρου. Δὲν δυνάμεθα ὅμως ἐπὶ τοῦ παρόντος νὰ μὴ ἐξάρωμεν τὴν σπουδαιότητά της καὶ ἀπὸ μιᾶς ἄλλης ἀπόψεως, ἥτις εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

Ἀποτελεῖ θέμα μεγάλων συζητήσεων, ἂν τοῦ Πλάτωνος ἡ σκέψις καὶ ἡ φιλοσοφικὴ ἀσχολία εἶχε στραφῆ ἀποκλειστικῶς πρὸς τὸν ὑπεραισθητὸν κόσμον τῶν ἰδεῶν καὶ εἶχε παραμελήσει τὴν μελέτην τῆς αἰσθητῆς καὶ συγκεκριμένης πραγματικότητος. Κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τὸν Πλάτωνα ὁ Ἀριστοτέλης ἐθεωρεῖτο ὡς ἐρευνητής, οὗτινος τὸ βλέμμα εἶχε στραφῆ πρὸς τὴν περιοχὴν τοῦ συγκεκριμένου αἰσθητοῦ κόσμου. Ἐκράτει δὲ εἰδικώτερον ἡ ἀντίληψις ὅτι καὶ ὁ Ἀριστοτέλης κατὰ τὴν πρώιμον ἐποχὴν τῆς ἐξελίξεώς του εἶχεν ἐπηρεασθῆ ἀπὸ τὸν διδάσκαλόν του καὶ εἶχε στρέψει τὸ βλέμμα του πρὸς τὸν ἰδεατὸν μεταφυσικὸν κόσμον. Ὑπὸ τὸ κράτος τῆς ῥηθείσης ἀντιλήψεως ἐγένετο λόγος περὶ τῆς πλατωνιζούσης νεανικῆς περιόδου τῆς σκέψεως καὶ τῆς φιλοσοφίας τοῦ Σταγιρίτου ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν στροφὴν πρὸς τὸν αἰσθητὸν ἐμπειρικὸν κόσμον κατὰ τὴν ὑστερωτέραν περίοδον τῆς διανοητικῆς του ἀπασχολήσεως. Ἡ διατριβὴ τοῦ κ. Βασιλάκη, ἥτις ἀποδεικνύει ὅτι ὁ Πλάτων οὐδέποτε εἶχε καταφρονήσει τὴν κατ' αἴσθησιν ἐποπτείαν, ἔρχεται νὰ μᾶς δώσῃ νέα στοιχεῖα διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἐξελικτικὴν ἀνάπτυξιν τῆς σκέψεως ὄχι μόνον τοῦ Πλάτωνος ἀλλὰ καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ κρινομένη διατριβὴ ἐνέχει γενικωτέραν σημασίαν καὶ ἀποτελεῖ συμβολὴν ὄχι μόνον διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῶν διδακτικῶν ἀρχῶν ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς φιλοσοφίας.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

## Dr. WALTER HOHLBRUGGER Ἐπὶ τῆς ἐτυμολογίας τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 9.

Εἰς τὴν ἐπετηρίδα 1955—1956 τοῦ ἐν Innsbruck τῆς Αὐστρίας Γυμνασίου Bundes—Gymnasium und—Realgymnasium δημοσιεύεται περισπούδαστος πραγματεία τοῦ καθηγητοῦ καὶ συμβούλου τοῦ Γυμνασίου τούτου καὶ ἐντεταλμένου τὴν διδασκαλίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Innsbruck κ. Βάλτερ Χὼλ-μπροῦγγερ ἀφορῶσα εἰς τὴν ἐτυμολογίαν τῶν ἀριθμῶν ὀκτὼ καὶ ἐννέα.

Ἐν ἀρχῇ τῆς πραγματείας ὁ διακεκριμένος οὗτος φιλόλογος μνημονεύει τῶν ἱστορικῶν δυσκολιῶν, τὰς ὁποίας ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα ἀπαντᾷ κατὰ τὴν

προσπάθειαν αὐτῆς, ὅπως ἀνεύρῃ τὴν ἐτυμολογίαν τῶν λέξεων, αἵτινες ἐκφράζουσιν ἀριθμούς. Ἡ πάροδος τῶν χιλιετηρίδων, τονίζει ὁ συγγραφεὺς πολὺ ὀρθῶς, ἔχει ἐξαφανίσει τὰ ἴχνη τῆς ἐτυμολογίας τοῦ συνόλου σχεδὸν τῶν ἀριθμητικῶν λέξεων. Βεβαίαν ἐξαίρεσιν τοῦ κανόνος τούτου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖ ἡ ἑρμηνεία ἡ παρεχομένη κατὰ τὴν ἐτυμολογίαν τῆς λέξεως δέκα. Ἡ λέξις αὕτη φαίνεται ὅτι προῆλθεν ἀσφαλῶς ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν δακτύλων πρὸς ἀρίθμησιν (δάκτυλοι—δέχομαι—δέκα—digiti—Zehe—Zehn). Ἡ ἄποψις αὕτη τοῦ συγγραφέως εἶναι καθ' ἡμᾶς λίαν εὔλογος. Ἡ ἐτυμολογία τῆς λέξεως δικαιοσύνη (δύο—δὶς—δίχα—δίκη—δικαιοσύνη) εἶναι ἐνισχυτικὴ τοῦ ἐπιχειρήματος τοῦ συγγραφέως διὰ τὴν ἐτυμολογίαν τοῦ ἀριθμοῦ δέκα.

Ἐν ἀρχῇ τῆς πραγματείας ἀναφέρονται ἐν γενικαῖς γραμμαῖς τὰ τῆς ἐτυμολογίας τῆς λέξεως *ὀκτώ*, ὡς ταῦτα ἀναγράφονται εἰς τὴν ἑλληνικὴν γραμματικὴν τοῦ E. Schwyzer, 2α ἔκδ. 1953, σ. 590 κ.ἑ. καὶ εἰς τὸ ἐτυμολογικὸν λατινικὸν λεξικὸν II τοῦ A. Walde, 1954. Κατὰ ταῦτα θεωρεῖται πιθανὸν ὅτι τὸ ὀκτὼ=δύο τετράδες προέρχεται ἐκ παλαιᾶς τινος ἀριθμήσεως, ἥτις ὡς μονάδα σχηματισμοῦ μεγάλων ἀριθμῶν εἶχε τὴν τετράδα ἀντὶ τῆς δεκάδος. Κατὰ τὸν Walter Hohlbrugger εἶναι ὀρθὸν κατὰ τὴν ἐτυμολογικὴν ἔρευναν τῆς λέξεως ὀκτὼ νὰ ἀναχωρῶμεν ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ἡ λέξις δέκα εὑρέθη ἐνωρίτερον τῆς λέξεως ὀκτώ. Διότι εἶναι προφανές, ὅτι παλαιότατα ἡ ἀρίθμησις ἐγίνετο διὰ τῶν δακτύλων καὶ κατ' ἀκολουθίαν, πρὶν ἡ ἐκφρασθῇ λεκτικῶς ὁ ἀριθμὸς 4 ἢ ὁ ἀριθμὸς 8, ἐξεφράσθη πρῶτον λεκτικῶς ὁ ἀριθμὸς 10. Ἐὰν λοιπὸν ἀναχωρήσῃ τις ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 10 δύναται δι' ἀφαιρέσεως ἀπὸ τούτου τοῦ 2=τὼ νὰ εὕρῃ λεκτικῶς τὸν ἀριθμὸν 8. Ἡ πλήρης ἔκφρασις διὰ τὸν ἀριθμὸν 8 θὰ ἦτο κατὰ τὸν συγγραφέα ἡ ἑξῆς· δέκα ἐκ τὼ ([νέϝω]) δακτύλω=10 μεῖον οἱ δύο (ἄκροι) δάκτυλοι. Ἡ λέξις τὼ εἶναι αἰτιατικὴ δυϊκοῦ. Κατὰ τὴν ἄποψιν τοῦ συγγραφέως σὺν τῷ χρόνῳ ἐξέλιπον ἐκ τῆς φράσεως «δέκα ἐκ τὼ νέϝω δακτύλω» αἱ λέξεις «δέκα νέϝω δακτύλω», ὡς εὐκόλως ἐννοούμεναι, καὶ ἔμειναν αἱ δύο λέξεις, ἐκ τὼ=ἐκτὼ=ὀκτώ. Τὸ ἀνωτέρω ἐπιχείρημα τοῦ συγγραφέως προϋποθέτει, ὅτι τῆς λεκτικῆς ἐκφράσεως τοῦ ἀριθμοῦ 8 προηγήθη ἡ λεκτικὴ ἔκφρασις τοῦ ἀριθμοῦ 2 Τοῦτο εἶναι λογικόν. Πρὸς ἐνίσχυσιν τῆς ἀπόψεώς του ἐπικαλεῖται ὁ συγγραφεὺς περαιτέρω τὸν σχηματισμὸν τῶν λέξεων διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 18 καὶ 28: Εἴκοσι δυοῖν δεόντοιν καὶ τριάκοντα δυοῖν δεόντοιν. Μνημονεύει δὲ ἐνταῦθα καὶ τῆς ἐκφράσεως 48 ἔτη =πεντήκοντα δυοῖν δέοντα ἔτη (Θουκ. II 2), ἵνα σημειώσῃ τὸν λεκτικὸν σχηματισμὸν ἀριθμητικῶν δι' ἀφαιρέσεως μονάδων ἐκ τινος δεκάδος.

Διὰ τὴν ἐτυμολογίαν τοῦ ἀριθμοῦ 9 ὁ συγγραφεὺς λέγει, ὅτι ἀδιστάκτως δύναταί τις νὰ κάμῃ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμούς, ὡς καὶ διὰ τὸν ἀριθμὸν 8. Καὶ ἐνταῦθα δέον νὰ ἀναχωρήσωμεν ἐκ τοῦ δέκα καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἕν. Παλαιότατα ἡ λεκτικὴ ἔκφρασις διὰ τὸν 9 θὰ ἦτο: δέκα ἐκ νέϝα, δηλ. δέκα μεῖον ἕν. Σὺν τῷ χρόνῳ ἐξέλιπεν ἐκ τῆς φράσεως δέκα ἐκ νέϝα ὡς αὐτονόητον τὸ δέκα καὶ ἔμεινε διὰ τὸν ἀριθμὸν 9 ἡ λέξις, ἐκ νέϝα=ἐννέϝα=ἐννέα. Νέϝα εἶναι αἰτιατικὴ τοῦ ἐνικοῦ τῆς ῥίζης νέϝ, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ τύπου νέος, νέατος, νεάτη=νήτη. [Σημ. νήτη ὀνομάζεται ἡ ἀκροτάτη χορδὴ ἐκ τῶν 4 τοῦ τετραχόρδου, αἵτινες εἶναι: ὑπάτη, μέση παραμέση νήτη· οἱ ἀντίστοιχοι μουσικοὶ φθόγγοι, ἔχοντες τὰ αὐτὰ ὀνόματα πρὸς τὰς χορδάς, εἶναι οἱ ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6 : 8 = 9 : 12, (Πλάτωνος Τίμ. 36 κ.ἑ.) ἢ do, fa, sol, do]. Ἡ ῥίζα
ὑπάτη μέση παραμέση νήτη
λοιπὸν νέϝ σημαίνει τὸ ἀκρότατον, τὸ ἐλάχιστον, τὸ ἕν.

Οἱ συλλογισμοὶ τοῦ συγγραφέως περὶ τῆς ἐτυμολογίας τῶν λέξεων 8 καὶ 9 εἶναι λίαν εὐσταθεῖς καὶ θεωροῦμεν τὴν ἐτυμολογίαν του ὡς τὴν καλυτέραν ἐτυμολογίαν τῶν δοθεισῶν μέχρι σήμερον διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. Τοὐλάχιστον

εἰς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶσσαν οἱ ἐγγὺς πρὸς τὰς δεκάδας ἀριθμοὶ ἢ οἱ ἐγγὺς πρὸς τοὺς στρογγύλους μεγάλους ἀριθμοὺς σχηματίζονται δι' ἀφαιρέσεως. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκούμεθα νὰ μνημονεύσωμεν: 1) τῆς ἐν τῇ Πολιτείᾳ τοῦ Πλάτωνος (546 c) λεκτικῆς ἐκφράσεως διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 48 καὶ 49, ἔνθα ἀναγιγνώσκομεν: Ἔστι δὲ θείῳ μὲν γεννητῷ περίοδος, ἣν ἀριθμὸς περιλαμβάνει τέλειος, ἀνθρωπείῳ δέ... ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, ΔΕΟΜΕΝΩΝ ΕΝΟΣ ἑκάστων, ($\sqrt{50-1} = \sqrt{49} = 7$), ἀρρήτων δὲ ΔΥΟΙΝ ($\sqrt{50-2} = \sqrt{48}$) καὶ 2) τὴν ἀριθμητικὴν ἔκφρασιν τοῦ πλήθους τῶν Ἑλλήνων στρατιωτῶν κατὰ τὴν ἐν Πλαταιαῖς μάχην ὑπὸ τοῦ Ἡροδότου: ...τοῦ δὲ σύμπαντος Ἑλληνικοῦ τοῦ συνελθόντος ἐς Πλαταιὰς σύν τε ὁπλίτῃσι καὶ ψιλοῖσι τοῖσι μαχίμοισι ἔνδεκα μυριάδες ἦσαν, μιῆς χιλιάδος, πρὸς δὲ ὀκτακοσίων ἀνδρῶν καταδέουσαι (IX 30).

Θὰ εἴμεθα λίαν εὐτυχεῖς, ἐὰν εἰς τὸ προσεχὲς μέλλον ἀναγνώσωμεν πραγματείαν τοῦ κ. Walter Hohlbrugger ἀφορῶσαν εἰς τὴν ἐτυμολογίαν καὶ ἄλλων ἀριθμῶν.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΑΛΚΙΒΙΑΔΟΥ Π. ΤΑΓΚΑΛΑΚΗ Σχῆμα καὶ μέγεθος τῆς γῆς** (εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀνωτέραν γεωδαισίαν) σχ. 8ον, σελ. 58, Πάτραι—Ἀθῆναι 1956.

Σκοπὸς τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας εἶναι κατὰ τὸν συγγραφέα ἡ παροχὴ εἰς τοὺς φοιτητὰς τῶν Πανεπιστημίων μας, τοὺς σπουδαστὰς τοῦ Πολυτεχνείου καὶ τοὺς ἀξιωματικοὺς τῆς γεωγραφικῆς καὶ τῆς ὑδρογραφικῆς ὑπηρεσίας τῶν ἐνόπλων δυνάμεων τῆς χώρας μας ἑνὸς συγγράμματος ἀνωτέρας γεωδαισίας. Τοιοῦτο σύγγραμμα δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶσσαν. Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον ὁ συγγραφεὺς κατορθώνει εἰς ὀλίγας σελίδας νὰ παράσχῃ σαφῆ εἰκόνα τῶν περὶ γεωδαισίας ἀντιλήψεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ εἰδικώτερον τῶν γνώσεων αὐτῶν περὶ τοῦ σφαιρικοῦ σχήματος καὶ τοῦ μεγέθους τῆς γῆς παραθέτων τὰς συναφεῖς μετρήσεις τοῦ Δικαιάρχου, τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ποσειδωνίου. Ἀξίζει νὰ τονισθῇ ἰδιαιτέρως ἡ παράθεσις ἀρκετῶν χωρίων ἐκ τῶν πραγματειῶν παλαιῶν συγγραφέων, δι' ὧν ἐνισχύονται αἱ ἐκτιθέμεναι ἀπόψεις ἐπὶ τῶν ἀντιλήψεων περὶ τῆς γῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὰς ἀντιλήψεις τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς ἐπιστήμης τὸ σχῆμα τῆς γῆς εἶναι σφαιρικόν. Κατὰ τὰς ἀντιλήψεις τοῦ 17ου αἰῶνος (Newton) τὸ σχῆμα τῆς γῆς εἶναι ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς. Τὴν τοιαύτην θεωρίαν ἀνέπτυξεν ἐπίσης καὶ ἐνίσχυσεν ὁ Γάλλος μαθηματικὸς καὶ φυσικὸς Clairaut διὰ πραγματείας αὐτοῦ, δημοσιευθείσης κατὰ τὸ 1743. Ἔκτοτε ἐγένοντο περισσότεραι μετρήσεις καὶ ἐξετέθησαν καὶ ἄλλαι θεωρίαι περὶ τοῦ σχήματος τῆς γῆς, αἵτινες καθορίζουσι τοῦτο ὡς γεωειδές. Περαιτέρω ἀναφέρεται ὁ τριγωνισμὸς ὡς μέσον μετρήσεως τοῦ μήκους ἑνὸς τόξου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς καὶ μνημονεύεται ἡ μέτρησις τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος εἰς τοὺς διαφόρους τόπους τῆς γῆς πρὸς καθορισμὸν τοῦ σχήματος αὐτῆς. Ὡς συμπέρασμα τῶν τοιούτων μετρήσεων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι τὸ σχῆμα τῆς γῆς εἶναι ἐλλειψοειδὲς τριαξονικόν. Περὶ τοῦ συμπεράσματος ὅμως τούτου δὲν ὑπάρχει ὁμοφωνία τῶν εἰδικῶν ἐπιστημόνων. Ἐν συνεχείᾳ ἐξετάζονται διὰ τὸν καλύτερον προσδιορισμὸν τοῦ σχήματος τῆς γῆς αἱ καλούμεναι συνιστῶσαι τῆς ἀποκλίσεως τῆς κατακορύφου, ἐκτίθεται ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀστρονομικῶν συντεταγμένων σημείων, ὁ ὑπολογισμὸς τῶν γεωδαιτικῶν συντεταγμένων τῶν σημείων τριγωνισμοῦ, παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν τιμῶν τῶν ἀποκλίσεων τῆς κατακορύφου καὶ τέλος διορθώσεις τῶν παραμέτρων τοῦ γηΐνου ἐλλειψοειδοῦς διὰ τῶν

ἀποκλίσεων τῆς κατακορύφου. Ἐν παραρτήματι ἐκτίθενται αἱ ἐν Ἑλλάδι μετρήσεις τόξου μεσημβρινοῦ καὶ παρατίθεται πίναξ διεθνῶν συμβόλων τῆς γεωδαισίας καὶ τῆς γεωφυσικῆς, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν.

Διὰ τῆς πραγματείας του περὶ τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μεγέθους τῆς ὁ γῆς κ. Ταγκαλάκης παρέχει σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀνωτέρας γεωδαισίας ἐν Ἑλλάδι. Ἐντὸς μικροῦ σχετικῶς χώρου κατορθώνει ὁ συγγραφεὺς νὰ παράσχῃ πλήρη εἰκόνα τῶν ἐπιστημονικῶν ἀντιλήψεων ἐπὶ τοῦ ὑπὸ διαπραγμάτευσιν θέματος χωρὶς βλάβην τῆς σαφηνείας καὶ τῆς ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας. Θὰ εἴμεθα λίαν εὐτυχεῖς, ἐὰν καὶ εἰς τὸ προσεχὲς μέλλον εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ κρίνωμεν πραγματείας τοῦ ἐκ τῶν ἀρίστων γυμνασιαρχῶν τῆς Ἑλλάδος κ. Ταγκαλάκη, ὁ ὁποῖος παρὰ τὸν φόρτον τῆς διευθύνσεως τοῦ Γυμνασίου Ἀμαλιάδος εὑρίσκει τὸν χρόνον νὰ θεραπεύῃ τόσον ἐπιτυχῶς καὶ τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΙΩΑΝΝΟΥ ΓΡ. ΑΥΔΗ Συμβολὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν Στοιχειωδῶν μαθηματικῶν.**

1) Θεωρητικὴ ἀριθμητικὴ Ι, σελίδες 79 (Τεῦχος Α'), Ἀθῆναι 1955. Ὁ συγγραφεὺς προαναγγέλλει τὴν ἔκδοσιν σειρᾶς τευχῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιδιώκεται ὅπως παρασχεθῇ βοήθεια εἰς τοὺς μαθητὰς καὶ σπουδαστὰς πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς σπουδῆς τῶν κατωτέρων μαθηματικῶν. Ἡ θεωρητικὴ ἀριθμητικὴ Ι ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον τεῦχος τῆς σειρᾶς ταύτης.

Ἐν ἀρχῇ τῆς πραγματείας ἀναπτύσσεται τὸ κεφάλαιον τῆς διαιρετότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὸ κεφάλαιον περὶ πρώτων ἀριθμῶν καὶ τὰ συναφῆ πρὸς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν. Ἀκολουθεῖ ἡ ἀνάπτυξις τοῦ κεφαλαίου τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων καὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Ἐν παραρτήματι ἀναπτύσσεται σύστημά τι πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ τὸ βοεικὸν καλούμενον πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους διατετυπωμένον, ὡς γνωστόν, εἰς στίχους, μὲ παράθεσιν τοῦ ἀρχαίου κειμένου, μετάφρασιν τούτου ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Γεωργούλη, ὡς αὕτη δημοσιεύεται ἐν τῷ ἐγκυκλοπαιδικῷ λεξικῷ «Ἥλιος» (τόμ. Γ', σελ. 719) καὶ ἔμμετρον ἀπόδοσιν ὑπὸ τοῦ κ. Ὁμήρου Μπεκέ. Πλῆθος ἀσκήσεων περιέχεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου κεφαλαίου. Διὰ τῆς πραγματείας ταύτης ὁ συγγραφεὺς προσφέρει ὑψίστην ὑπηρεσίαν εἰς τὴν σπουδάζουσαν νεολαίαν. Τὰ περὶ τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων ἀναπτύσσονται λίαν ἐπαγωγικῶς, ἐνῷ τὰ περὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων διὰ πρώτην φορὰν ἐν Ἑλλάδι παρέχονται τοσοῦτον κατανοητῶς εἰς τοὺς σπουδαστὰς τῶν κατωτέρων μαθηματικῶν. Ὁ πόθος τοῦ συγγραφέως εἶναι νὰ αἰσθανθῇ ὁ ἀναγνώστης τὴν δύναμιν καὶ τὴν ὠφέλειαν τῶν ἀριθμῶν, διὰ τὴν ὁποίαν, ὡς οὗτος γράφει, ὁ Πλάτων λέγει «πρός τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρὸς τὰς ἄλλας τέχνας πάσας ἓν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παίδειον μάθημα μεγάλην, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή· τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται, παρὰ τὴν αὐτοῦ φύσιν ἐπιδιδόντα θείᾳ τέχνῃ» (Νόμοι 747 b).

2) Στοιχειώδης ἄλγεβρα Ι, σελίδες 80. (Τεῦχος Β'), Ἀθῆναι 1955. Εἰς τὸ τεῦχος τοῦτο τὸ ἀφορῶν εἰς τὴν ἄλγεβραν ὁ συγγραφεὺς προσπαθεῖ νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν διαμόρφωσιν παρὰ τοῖς μαθηταῖς καὶ σπουδασταῖς τῆς μαθηματικῆς συνειδήσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἀπαραίτητος προϋπόθεσις τῆς παρακολουθήσεως τῶν ἀνωτέρων ἐκείνων σπουδῶν, αἵτινες ἐρείδονται ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν. Ἡ πραγματεία εἶναι ἀφιερωμένη εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἀπολύτων τιμῶν, αἵτινες ἐρευνῶνται

λεπτομερῶς καὶ λίαν μεθοδικῶς. Ἡ πληθὺς τῶν παρατιθεμένων ἀσκήσεων ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα τῆς ἐκτιθεμένης θεωρίας τῶν ἀπολύτων τιμῶν.

Θὰ εἶναι εὐχῆς ἔργον ὅπως ὁ συγγραφεὺς συνεχίσῃ τὴν προσπάθειάν του, ἥτις θὰ ἔχῃ λίαν εὐεργετικὰ ἀποτελέσματα διὰ τὴν σπουδὴν καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἑλλάδι. Ἡ ἀρίστη ἐπιστημονικὴ κατάρτισις τοῦ συγγραφέως καὶ ἡ πολυετὴς αὐτοῦ διδακτικὴ πεῖρα ἀποτελοῦσι λαμπρὸν οἰωνὸν καὶ ἐγγύησιν, ὅτι ἡ ἀναληφθεῖσα ὑπ' αὐτοῦ πρωτοβουλία θὰ ἀποβῇ λίαν ὠφέλιμος διὰ τὴν σπουδάζουσαν Ἑλληνικὴν νεολαίαν.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΝΙΚΟΛΑΟΥ Γ ΦΩΤΕΙΝΟΥ «Ναυτικά», ἡ συμβολὴ τῶν Ἑλλήνων εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς θεωρητικῆς ναυτιλίας, ἔκδ. Ν Βαφειαδάκη – Ε. Γραββάνη, σχ. 8ον, σ 172, Ἀθῆναι 1955.**

Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν ὁ συγγραφεὺς ἐξετάζει τὰς ναυτιλιακὰς γνώσεις τῶν Ἑλλήνων καὶ τὴν συμβολὴν αὐτῶν εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς θεωρητικῆς ναυτιλίας ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἱππάρχου (2ος αἰὼν π.Χ.) μέχρι τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου (2ος αἰὼν μ.Χ.). Ὁ χρονικὸς οὗτος περιορισμὸς τῆς ἐρεύνης τῆς συμβολῆς τῶν Ἑλλήνων εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ναυτιλίας δὲν σημαίνει, κατὰ παρατήρησιν τοῦ συγγραφέως, ὅτι πρὸ τῆς ἐποχῆς ταύτης δὲν ὑπῆρχον ἀξιόλογοι ναυτιλιακαὶ γνώσεις, οὔτε ὅτι μετὰ τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον αἱ γνώσεις αὗται ἀπόλλυνται. Τοὐναντίον ὑπάρχουσι καὶ πρὸ τῆς ἐξεταζομένης ἐποχῆς θαυμαστὰ δείγματα Ἑλληνικῶν ἐπιτευγμάτων εἰς τὴν ναυτιλιακὴν ἐπιστήμην καὶ τὰ ἐπιτεύγματα ταῦτα ἀναπτύσσονται βραδύτερον ἔτι περισσότερον καὶ ἐπιζῶσι μέχρι τῶν ἡμερῶν μας.

Ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς πραγματείας αὐτοῦ ὁ συγγραφεὺς ἐκθέτει δι' ὀλίγων τὰ ἐπιτεύγματα τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὴν ναυπηγικήν, τὴν μηχανικήν, τὴν ἀστρονομίαν, τὴν χαρτογραφίαν καὶ τὴν γενικὴν γεωγραφίαν. Ἀκολούθως ἀναπτύσσει μετὰ θαυμαστῆς σαφηνείας καὶ γλωσσικῆς καλλιεπείας τὰς γνώσεις τῶν Ἑλλήνων περὶ τῆς γῆς καὶ εἰδικώτερον τὰς θεωρίας αὐτῶν περὶ τοῦ σχήματος, τοῦ μεγέθους καὶ τῶν κινήσεων αὐτῆς. Λίαν ἐπιτυχῶς μνημονεύει ὁ συγγραφεὺς τὴν ἀναμέτρησιν τῆς γῆς ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ποσειδωνίου. Ἡ ἀναμέτρησις αὕτη ἀποτελεῖ σπουδαῖον καὶ πειστικὸν ἐπιχείρημα περὶ τοῦ ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐπρέσβευον καὶ ἐδίδασκον, ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαιρική. Τὴν θεωρίαν περὶ τῆς σφαιρικότητος τῆς γῆς εἶχον προσέτι διατυπώσει ἐκτὸς τῶν Πυθαγορείων, τοῦ Ἡρακλείδου τοῦ Ποντικοῦ, τοῦ Ἀριστάρχου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ οἱ μεταγενέστεροι τούτων Κλεομήδης, Πτολεμαῖος, Στράβων, Μαρῖνος ὁ Τύριος. Εἰς τὴν σωθεῖσαν μικρὰν πραγματείαν τοῦ Κλεομήδους Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων (βιβλ. Α', κεφ. 8) ἀναγιγνώσκομεν «ὅτι ὁ κόσμος σφαῖρα» καὶ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου «ὅτι ἡ γῆ σφαιροειδὴς ἐστι πρὸς αἴσθησιν ὡς καθόλα μέρη» (Βιβλ. Α', κεφ. Δ'). Ὁ Κλεομήδης ἐκτὸς τῆς θεωρίας, ὅτι ὁ κόσμος ὁλόκληρος εἶναι σφαῖρα, θεωρίαν, ἣν εἶχον διατυπώσει οἱ Προσωκρατικοὶ καὶ αὐτὸς ὁ Σωκράτης, γράφει εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευόμενον κεφάλαιον τῆς πραγματείας αὐτοῦ καὶ τὰ ἑξῆς· «οἱ δὲ ἡμέτεροι καὶ ἀπὸ μαθημάτων πάντες καὶ οἱ πλείους τῶν ἀπὸ τοῦ σωκρατικοῦ διδασκαλείου σφαιρικὸν εἶναι τὸ σχῆμα τῆς γῆς διεβεβαιώσαντο». Θαυμαστὴ εἶναι τῷ ὄντι ἡ ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους ἐπινόησις πρὸς μέτρησιν τῆς περιμέτρου τῆς γῆς καὶ κατόπιν ταύτης ἡ καταμέτρησις τοῦ μεσημβρινοῦ τόξου Συήνης—Ἀλεξανδρείας ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες πρὸς τὴν κατα

κόρυφον τῆς Ἀλεξανδρείας. Ἐκ τῶν μετρήσεων τούτων ὁ Ἐρατοσθένης συνήγαγε τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γῆς εἶναι 39.690.000 μέτρα, κατὰ τὴν σύγχρονον αὐτοῦ μετρικὴν ἔκφρασιν (252.000 στάδια μὲ 157,5 μ. τὸ στάδιον).

Ἐάν τις λάβῃ ὑπ' ὄψει, ὅτι αἱ σημεριναὶ μετρήσεις τῆς περιμέτρου τῆς γῆς ἀναβιβάζουσι τὴν περίμετρον εἰς 40.000.000 περίπου μέτρα, δύναται νὰ ἐκτιμήσῃ καλύτερον τὸ μέγα ἐπίτευγμα τοῦ Ἐρατοσθένους. Ἀλλὰ καὶ ὁ Ποσειδώνιος προέβη εἰς ὑπολογισμὸν τῆς περιμέτρου τῆς γῆς μετρήσας τὸ μεσημβρινὸν τόξον ἀπὸ Ῥόδου εἰς Ἀλεξάνδρειαν. Οὗτος εὗρε τὴν περίμετρον τῆς γῆς μικροτέραν ἐκείνης, ἣν εὗρεν ὁ Ἐρατοσθένης. Ἡ διαφορὰ αὕτη θὰ ὀφείλεται ἀσφαλῶς εἰς τὴν δυσχέρειαν τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀποστάσεως Ῥόδου—Ἀλεξανδρείας.

Διὰ τῆς διαμνημονεύσεως τῶν α΄. καὶ β΄. βιβλίων τῆς Γεωγραφικῆς Ὑφηγήσεως τοῦ Πτολεμαίου ὁ συγγραφεὺς καταδεικνύει, ὅτι : 1) Οἱ Ἕλληνες, ὅταν ἐμέτρουν μεγάλας ἀποστάσεις, ἐφρόντιζον νὰ εὑρίσκωσι τὴν συνδέουσαν τὰ ἄκρα τῶν πρὸς μέτρησιν ἀποστάσεων ὀρθοδρομίαν, τουτέστι τὴν ἰθυτένειαν. Ἐγνώριζον δὲ καλῶς, ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τὴν ἰθυτένειαν ἀπετέλει τὸ ἔλασσον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς, τοῦ διερχομένου διὰ τῶν δοθέντων σημείων. 2) Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἰθυτενείας, ἂν μὲν ἐπρόκειτο περὶ ὁδοιπορίας, δηλ. ἀποστάσεως διανυθείσης εἰς τὴν ξηράν, ἀφῄρουν ἐκ τῆς γινομένης μετρήσεως τὰς παρεκκλίσεις ἀπὸ τῆς ὀρθοδρομικῆς πορείας, ἂν ὅμως ἐπρόκειτο περὶ πλεύσεως, τότε πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν συναφῶν παρεκκλίσεων ἀφῄρουν καὶ ἀριθμόν τινα σταδίων καὶ ἀπὸ αὐτὰς ἀκόμη τὰς ἰθυτενείας, διότι παρεδέχοντο, ὅτι οἱ ἄνεμοι διὰ πολλοὺς λόγους δὲν ἔπνεον συνεχῶς μετὰ τῆς αὐτῆς ἐντάσεως. Τὸ ποσὸν τῶν οὕτω πως ἀφαιρουμένων σταδίων ἀνήρχετο, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς Γεωγραφικῆς Ὑφηγήσεως τοῦ Πτολεμαίου, εἰς τὸ τρίτον τῆς διανυθείσης ἐν πλῷ ἀποστάσεως (τῆς καλουμένης δίαρμα).

Διὰ τῆς παραθέσεως χωρίων ἀρχαίων κειμένων ὁ συγγραφεὺς καταδεικνύει, ὅτι ὁ ἰσημερινός, οἱ κύριοι παράλληλοι κύκλοι, οἱ πόλοι καὶ ὁ ἄξων τῆς γῆς, ὁ φαινόμενος καὶ ὁ αἰσθητὸς ὁρίζων καὶ αἱ ζῶναι τῆς γῆς ἔχουσιν ἀκριβῶς καθορισθῆ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Εὐστόχως μνημονεύεται χωρίον ἐκ τῆς πραγματείας τοῦ Ἀριστοτέλους Περὶ κόσμου, ἔχον οὕτω: «τοῦ δὲ σύμπαντος οὐρανοῦ τε καὶ κόσμου σφαιροειδοῦς ὄντος καὶ κινουμένου ἐνδελεχῶς, καὶ δύο ἀκίνητα ἐξ ἀνάγκης ἐστὶ σημεῖα καταντικρὺ ἀλλήλων, καθάπερ τῆς ἐν τόρνῳ κυκλοφορουμένης σφαίρας, στερεὰ μένοντα καὶ συνέχοντα τὴν σφαῖραν, περὶ ἃ πᾶς ὁ κόσμος κινεῖται ἐν κύκλῳ περιστρεφόμενος· καλοῦνται δ' οὗτοι πόλοι, δι' ὧν εἰ νοήσαιμεν ἐπεζευγμένην εὐθεῖαν, ἣν τινες ἄξονα καλοῦσι, διάμετρος ἔσται τοῦ κόσμου, μέσην μὲν ἔχουσαν τὴν γῆν, τοὺς δὲ πόλους πέρατα. τῶν δὲ ἀκινήτων πόλων τούτων ὁ μὲν ἀεὶ φανερός ἐστιν, ὑπὲρ κορυφὴν ὤν, κατὰ τὸ βόρειον κλίμα, ἀρκτικὸς καλούμενος· ὁ δὲ ὑπὸ γῆν ἀεὶ κατακέκρυπται κατὰ τὸ νότιον, ἀνταρκτικὸς καλούμενος».

Εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον τῆς πραγματείας αὐτοῦ ὁ συγγραφεὺς διαπραγματεύεται τὸ πρόβλημα τῶν ἀντιλήψεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων περὶ τῶν κατοικουμένων μερῶν τῆς γῆς, δηλ. περὶ τῆς οἰκουμένης. Οἱ Ἕλληνες ἀφοῦ κατενόησαν ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαιροειδής, καθώρισαν καὶ τὸ κατῳκημένον μέρος αὐτῆς, τὸ γνωστὸν εἰς αὐτούς. Ὡς τοιοῦτο καθορίσθη τὸ ἥμισυ τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου, ἔχον κατὰ τὸν διάσημον μαθηματικὸν καὶ ἀστρονόμον Εὔδοξον μῆκος διπλάσιον τοῦ πλάτους. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γνωστὴ εἰς τοὺς Ἕλληνας οἰκουμένη ἦτο μικρὰ εἰς τὴν ἔκτασιν ἐν σχέσει πρὸς τὸ μέγεθος τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, καθώρισαν οὗτοι, ὅτι ὑπάρχουσιν ἀκόμη ἄλλαι τρεῖς κατοικούμεναι περιοχαί, ὅπως καὶ πράγματι συνέβαινεν. Ὁ καθορισμὸς τῶν ὁρίων τῆς οἰκουμένης ἐγένετο ὑπὸ τοῦ μεγάλου γεωγράφου Μαρίνου τοῦ Τυρίου, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς Γεω-

γραφικῆς Ὑφηγήσεως τοῦ Πτολεμαίου, ἥτις κατὰ τὸν συγγραφέα δέον νὰ θεωρῆται ὡς μία ἐκ τῶν γεωγραφικῶν ἐκδόσεων τοῦ Μαρίνου. Ἀλλὰ καὶ ὁ περίφημος γεωγράφος Στράβων παρέχει σπουδαίας πληροφορίας περὶ τῶν ὁρίων τῆς οἰκουμένης. Κατὰ δὲ τὸν Πτολεμαῖον οἱ παλαιότεροι τούτου γεωγράφοι ἐθεώρουν ὅτι ἡ Ἀφρικὴ (Λιβύη) περιβάλλεται ἀπὸ νότου ὑπὸ θαλάσσης. Ἡ οἰκουμένη ἐχωρίζετο κατὰ μὲν τὸν Μαρῖνον εἰς 15, κατὰ δὲ τὸν Πτολεμαῖον εἰς 12 ὡριαίας ἀτράκτους. Ὡς πρῶτος μεσημβρινὸς ἐλαμβάνετο ὁ διερχόμενος διὰ τῶν νήσων τῶν Μακάρων (Καναρίων), ἐνῷ ὡς τελευταῖος μεσημβρινὸς τῆς οἰκουμένης γῆς ἐθεωρεῖτο ὁ διερχόμενος ἐκ τοῦ ὅρμου τῶν Καττιγάρων (τῆς Κίνας). Τὸ γεωγραφικὸν μῆκος ἐμετρεῖτο ἐπὶ τοῦ διὰ τῆς Ῥόδου διερχομένου παραλλήλου, διότι ὁ ἰσημερινὸς ἦτο ἀπρόσιτος. Τὸν διὰ τῆς Ῥόδου διερχόμενον παράλληλον χρησιμοποιεῖ καὶ ὁ ἐκ Μεσσήνης τῆς Σικελίας μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Δικαίαρχος, ὅστις διὰ τούτου χωρίζει τὴν οἰκουμένην εἰς δύο μέρη, τὸ βόρειον καὶ τὸ νότιον, καὶ ὀνομάζει τὸν παράλληλον τοῦτον διάφραγμα. Περὶ τοῦ παραλλήλου τούτου καὶ τῆς χρησιμοποιήσεως αὐτοῦ ὡς κύκλου μετρήσεως τοῦ γεωγραφικοῦ μήκους ὁ συγγραφεὺς προέβη εἰς ἀνακοίνωσιν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν 12-6-1947, εἰς ἣν δύναται νὰ προστρέξῃ πᾶς ἐνδιαφερόμενος διὰ περισσοτέρας ἐν προκειμένῳ πληροφορίας.

Εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον τῆς πραγματείας ἐρευνᾶται ἡ χαρτογραφία τῶν Ἑλλήνων. Ἱστορικῶς μαρτυρεῖται ὁ Ἀναξίμανδρος ὡς ὁ πρῶτος σχεδιαστὴς γεωγραφικοῦ χάρτου, «Ἀναξίμανδρος ὁ Μιλήσιος, ἀκουστὴς Θάλεω, πρῶτος ἐτόλμησε τὴν οἰκουμένην ἐν πίνακι καταγράψαι. μεθ' ὃν Ἑκαταῖος ὁ Μιλήσιος, ἀνὴρ πολυπλανὴς διηκρίβωσεν, ὥστε θαυμασθῆναι τὸ πρᾶγμα» (Ἀγαθήμερος Α΄ α΄) Ὁ Ἀναξίμανδρος παρεδέχετο τὴν μὲν γῆν ὡς κύλινδρον αἰωρούμενον εἰς τὸ κέντρον τοῦ οὐρανίου θόλου, τὴν δὲ οἰκουμένην γῆν ὡς κατέχουσαν τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Τὸ σχῆμα τῆς οἰκουμένης ἦτο κατὰ τὸν Ἀναξίμανδρον δισκοειδές· αὕτη περιερρέετο ὑπὸ τοῦ ποταμοῦ τοῦ καλουμένου ὠκεανοῦ. Ἀλλὰ καὶ ὁ Ἑκαταῖος εἶχε σχεδιάσει εἰς χάρτην τὴν γῆν δισκοειδῆ. Ἐκτὸς ὅμως τῶν δύο μνημονευομένων προηγουμένως χαρτῶν, ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρει καὶ χάρτην τοῦ Δικαιάρχου, ὅστις ἀποτελεῖ τὸν πρῶτον ἐπιστημονικῶς συντεταγμένον χάρτην, ἔνθα παρατηροῦμεν γένεσιν καὶ ἐφαρμογὴν τῆς κυλινδρικῆς προβολῆς, καλῶς ὑποβοηθούσης τὰς ἀνάγκας τῆς τότε ναυτιλίας. Ἐπισημειοῖ ὅμως ὁ συγγραφεύς, ὅτι ἡ ὕπαρξις τοῦ χάρτου τοῦ Δικαιάρχου ἐκ παραδόσεως εἶναι γνωστὴ καὶ δὲν ἐπιμαρτυρεῖται δι' ἱστορικῶν ἀποδείξεων.

Πάντες οἱ μετὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Δικαιάρχου σχεδιάσαντες χάρτην τῆς οἰκουμένης ἐστήριξαν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ παραλλήλου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς Ῥόδου. Κατὰ τὸν Στράβωνα (Γεωγραφικὰ Β΄ 10) δυνάμεθα τοὺς ἐπὶ τῆς γῆς συννεύοντας μεσημβρινοὺς νὰ παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου δι' εὐθειῶν γραμμῶν καθέτων ἐπὶ τοὺς παραλλήλους, οἵτινες ἐπίσης εἰκονίζονται δι' εὐθειῶν γραμμῶν παραλλήλων πρὸς ἀλλήλας. Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἐπίσης ἀρχῆς ἐστηρίχθη κατὰ τὸν συγγραφέα καὶ ὁ Μαρῖνος ὁ Τύριος διὰ τὴν κατασκευὴν χάρτου. Ὁ Μαρῖνος ὅμως ἐτελειοποίησε τὴν ἀρχὴν ταύτην, ὡς μνημονεύει ὁ Πτολεμαῖος, ὅστις γράφει, ὅτι οὗτος τὴν μέθοδον τῆς ἐν ἐπιπέδῳ σχεδιάσεως σφαίρας «ἀνήγαγεν εἰς ἐπίστασιν οὐ τὴν τυχοῦσαν» (Γεωγραφικῆς Ὑφηγήσεως Α΄, κ΄.). Κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Μαρίνου προβολὴν τῆς σφαίρας εἰς ἐπίπεδον οἱ μὲν μεσημβρινοὶ παρίστανται ὡς εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας καὶ κάθετοι ἐπὶ τοὺς παραλλήλους τοῦ πλάτους καὶ τὸν ἰσημερινόν, ὁ δὲ ἰσημερινὸς καὶ οἱ παράλληλοι τοῦ πλάτους ὡς εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας (Γεωγραφικῆς Ὑφηγ ἔνθ' ἀνωτ.). Ὁ χάρτης οὗτος τοῦ Μαρίνου εἶναι ὁ μέχρι σήμερον ἰσχύων ναυτικὸς χάρτης, ὅστις κάκιστα φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Μερκάτορος. Τὰ ἐπιχειρήματα

τοῦ συγγραφέως τὰ ἀποδεικνύοντα, ὅτι ὁ χάρτης τοῦ Μαρίνου, ὁ κάκιστα σήμερον φερόμενος ὡς χάρτης τοῦ Φλαμανδοῦ Μερκάτορος (ὅστις τὸ πρῶτον ἐξέδωκε τοῦτον κατὰ τὸ 1569) εἶναι ἀδιάσειστα· τυγχάνει δὲ ἀπορίας ἄξιον, πῶς ἀκόμη, τοὐλάχιστον ἐν Ἑλλάδι, δὲν ἐγένετο ἡ ἀποκατάστασις τῆς ἀληθείας. Ὁ συγγραφεὺς προσφέρει μεγίστην ἐθνικὴν ὑπηρεσίαν ἀποκαθιστῶν ἐν προκειμένῳ τὴν ἀλήθειαν. Ἀναγράφομεν κατωτέρω ἑνίας ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χάρτου τοῦ Μαρίνου.

1) Τηρεῖ τὴν ὁμοιότητα τῶν σχημάτων καὶ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἐφ' ὅλης τῆς περιοχῆς τῆς Μεσογείου. 2) Δίδει δι' ὁλόκληρον τὴν θάλασσαν ταύτην τὴν διάστασιν τῶν μεσημβρινῶν ἐπὶ τοῦ μέσου παραλλήλου αὐτῆς. 3) Δίδει δι' ὁλόκληρον τὴν περιοχὴν τῆς Μεσογείου τὴν λοξοδρομικὴν πλεῦσιν, ἥτις ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ τούτου συστήματος τοῦ Μαρίνου τέμνει ἅπαντας τοὺς ἐνδιαμέσους μεσημβρινοὺς ὑπὸ τὴν αὐτὴν πάντοτε γωνίαν. 4) Δίδει δι' ὁλόκληρον τὴν Μεσόγειον τὰς ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων θέσεων μὲ μεγίστην προσέγγισιν κλπ.

Εἰς τὸ Ε'. κεφάλαιον τὸ ἀφορῶν εἰς τὸν συνεχῆ δρόμον καὶ τὴν νεῦσιν (λοξοδρομία καὶ λοξοδρομικὴ γωνία πλεύσεως) ὁ συγγραφεὺς ὑποστηρίζει, ὅτι ἡ λοξοδρομικὴ καμπύλη ἦτο κατὰ πᾶσαν πιθανότητα διηρευνημένη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐνῷ εἰς τὸ ΣΤ' κεφάλαιον ἀναπτύσσονται λίαν ἐπιτυχῶς τὰ τῶν ναυτικῶν ὀργάνων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐκ τῶν ὁποίων μνημονεύομεν ἐνταῦθα τὸ ὁδόμετρον τοῦ Ἥρωνος, τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, χρησιμοποιεῖται σήμερον πρὸς καταμέτρησιν τῶν ὑπὸ τῶν αὐτοκινήτων καὶ λοιπῶν τροχοφόρων διανυομένων ἀποστάσεων. Τὰ παρατιθέμενα σχήματα τῶν ἀνεμολογίων παρέχουσι σαφῆ εἰκόνα τῆς προόδου, ἣν εἶχον σημειώσει οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες καὶ εἰς τὸν ναυτιλιακὸν τοῦτον τομέα. Ἡ παράθεσις πλείστων χωρίων ἐκ πραγματειῶν ἀρχαίων συγγραφέων ἀποδεικνύει τὴν σοβαρότητα, μεθ' ἧς ὁ συγγραφεὺς ἐπελήφθη τῆς σπουδῆς καὶ τῆς ἐρεύνης τῶν ναυτιλιακῶν γνώσεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἀναγράφομεν ἐκ τῶν παρατιθεμένων χωρίων τὸ τοῦ Ἡσιόδου, τὸ ἀφορῶν εἰς τὴν γένεσιν τῶν ἀνέμων:

*Ἀστραίῳ δ' Ἠὼς ἀνέμους τέκε καρτεροθύμους,*
*Ἀργέστην Ζέφυρον Βορέην τ' αἰψηροκέλευθον*
*καὶ Νότον, ἐν φιλότητι θεὰ θεῷ εὐνηθεῖσα·*
*τοὺς δὲ μετ' ἀστέρα τίκτεν Ἑωσφόρον Ἠριγένεια*
*ἄστρα τε λαμπετόωντα, τά τ' οὐρανὸς ἐστεφάνωται.*

(Θεογονία 378—382).

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς πραγματείας του ὁ συγγραφεὺς ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἀστρονομικὴν ναυτιλίαν καὶ παρέχει συνοπτικὴν μέν, ἀλλὰ σαφεστάτην εἰκόνα τῶν προόδων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ εἰς τὸν τομέα τοῦτον. Ἅπαντα τὰ συναφῆ πρὸς ὑποστήριξιν τῶν ἀπόψεών του ἐπιχειρήματα βασίζει ὁ συγγραφεὺς εἰς χωρία τῶν ἀρχαίων συγγραφέων. Λίαν ἐπιτυχὴς εἶναι ἡ ἑρμηνεία τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας τοῦ Πτολεμαίου. Αὕτη, ὡς γνωστόν, ἔχει τὰς ἀρχάς της εἰς τὸν περίφημον Σάμιον ἀστρονόμον καὶ μαθηματικὸν Ἀρίσταρχον καὶ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Πολὺ εὐστόχως παρατηρεῖται ἐν προκειμένῳ ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, ὅτι οἱ ἱδρυταὶ οὗτοι τῆς τριγωνομετρίας χρησιμοποιοῦσιν ἀλλοίαν τῆς σημερινῆς ὁρολογίαν.

Ἐπισφράγισιν τῆς ὅλης πραγματείας ἀποτελεῖ τὸ τρίτον μέρος αὐτῆς, ἔνθα γίνεται διαπραγμάτευσις τῆς ὠκεανοπλοΐας τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Μνημονεύεται τὸ ὠκεανοπλοϊκὸν ταξίδιον τοῦ Πυθέου (ἀκμὴ περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὁ πλοῦς τοῦ Νεάρχου, ὁ διενεργηθεὶς κατὰ διαταγὴν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, καὶ

12

ἐξαίρεται ἰδιαιτέρως ἡ ὠκεανογραφικὴ ἔρευνα τοῦ ναυτικοῦ Ἱππάλου πρὸς τὴν περιοχὴν τῶν Ἰνδιῶν.

Εἶναι ἡ πρώτη φορά, ἀφ' ἧς ἀπηλευθερώθη ἡ Ἑλλάς, καθ' ἣν γίνεται συστηματικὴ προσπάθεια καταδείξεως τοῦ συνόλου τῶν ναυτιλιακῶν γνώσεων καὶ τῶν ναυτιλιακῶν ἐπιτευγμάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, βασιζομένη ἐπὶ τῶν σωθεισῶν συναφῶν πραγματειῶν. Ὁ συγγραφεὺς κατώρθωσε νὰ παραστήσῃ ἀνάγλυφον τὴν εἰκόνα τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς ναυτιλίας καὶ νὰ παράσχῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν δυνατότητα ὅπως καὶ εἰς τὸν τομέα τοῦτον τῆς ἀνθρωπίνης δραστηριότητος θαυμάσῃ τὸ ἀνυπέρβλητον Ἑλληνικὸν πνεῦμα. Προσέφερεν οὕτω μεγάλην ἐθνικὴν ὑπηρεσίαν, ἡ ἀναγνώρισις τῆς ὁποίας ἐγένετο καὶ ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἥτις ἐβράβευσε τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν κατὰ τὸ ἔτος 1955.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

---

## ΝΕΚΡΟΛΟΓΙΑΙ

# CARL DARLING BUCK (1866 - 1955)

Εἰς τὴν ἐκπληκτικῶς ταχεῖαν ἀνάπτυξιν τῆς γλωσσολογικῆς ἐπιστήμης κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος μικρός τις σχετικῶς ἀριθμὸς Εὐρωπαίων ἐπιστημόνων κατέχει πρωτεύουσαν θέσιν. Μεταξὺ αὐτῶν πρέπει ἀναμφισβητήτως νὰ συμπεριληφθῇ (ἐφ' ὅσον ἡ Ἀμερικὴ ἀποτελεῖ συστατικὸν τμῆμα τοῦ εὐρωπαϊκοῦ πολιτισμοῦ) καὶ ὁ Ἀμερικανὸς Carl Darling Buck. Εἰς τὴν Ἀμερικὴν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῶν ἐτῶν τῆς ὡριμότητός του ὁ Buck ἦτο ἡ μεγάλη μορφὴ ἐν τῇ γλωσσολογικῇ ἐπιστήμῃ. Τὴν πνευματικὴν ὡριμότητα ἔφθασεν ἐνωρίς, ἔζησε δὲ βίον μακρὸν καὶ παραγωγικόν. Τόσον εἰς τοὺς ἐπιστημονικοὺς κύκλους, ὅσον καὶ εἰς τὸν πανεπιστημιακὸν κόσμον τοῦ Σικάγου ὁ Buck ἦτο σύμβολον ἀπολύτου ἀληθείας καὶ σταθερότητος. Ἡ πρὸς τοὺς συνανθρώπους σχέσις του διετηρήθη κατὰ πάντα τρόπον εὐθεῖα. Ἔζησε μετὰ καταπληκτικῆς ἁπλότητος, διὸ ἁρμόζει ἐξ ἴσου ἁπλῶς νὰ ἐκτεθοῦν καὶ τὰ κύρια γεγονότα τῆς ζωῆς του.

Ὁ Carl Darling Buck ἐγεννήθη εἰς Orland τῆς πολιτείας Maine, τὸ πλέον βορειοανατολικὸν τμῆμα τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν, τὴν 2αν Ὀκτωβρίου 1866. Τὴν πρώτην ἐκπαίδευσιν ἔλαβεν εἰς Bucksport, Maine, τῷ δὲ 1882 μετέβη εἰς τὸ Yale College πρὸς συνέχισιν τῶν σπουδῶν του. Ἐκεῖ ἐμελέτησε κυρίως κλασσικὴν (ἑλληνικὴν καὶ λατινικὴν) φιλολογίαν, κατὰ δὲ τὸ τελευταῖον ἔτος (τῶν κατωτέρων αὐτοῦ σπουδῶν) σανσκριτικὰ μετὰ τοῦ Whitney. Τῷ 1886 ἤρχισε τὰς ἀνωτέρας πανεπιστημιακὰς σπουδάς, καθ' ἃς ἐπεδόθη εἰς τὴν μελέτην τῆς ἑλληνικῆς, σανσκριτικῆς, ἀρχαίας γαλλικῆς καὶ ἀρχαίας ἀγγλικῆς. Τῷ 1887—8 ἐξηκολούθησε τὰς σπουδάς του εἰς Ἰταλίαν καὶ Ἑλλάδα παρὰ τῇ Ἀμερικανικῇ Σχολῇ Κλασσικῶν Σπουδῶν. Μετὰ ταῦτα ἐπέστρεψεν εἰς Yale, ἔνθα τῷ 1889 ἀνηγορεύθη διδάκτωρ τῆς Φιλοσοφίας διὰ τῆς διατριβῆς αὐτοῦ «*The Choregia in Athens and at Ikaria*».

Μετὰ τοιοῦτον πλήρη ἐξοπλισμὸν ἐπιστήμων τις κατώτερος θὰ ἠδύνατο νὰ σταματήσῃ πρὸς ἀνάπαυσιν. Ὁ Buck ὅμως τῷ 1889, μετὰ τὸν γάμον του, μετέβη εἰς Λιψίαν καὶ Βερολῖνον, ἵνα συνεχίσῃ τὰς σπουδάς του πλησίον διδασκάλων οἷοι οἱ Geldner, Brugmann, Leskien, Windisch, Joh. Schmidt, Bartholomae κ. ἄ.

Κατὰ τὴν διάρκειαν αὐτῆς ἀκριβῶς τῆς περιόδου ἐνεφανίσθησαν τὰ πρῶτα

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

16 =

ΕΤΟΣ Ι΄ 1958
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
19/20

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1958

ἄλλου διαπιστοῦται ἐπιμέλεια περὶ τὴν ἀπόδοσιν ἰδιαζόντων τύπων· οὕτως ἀναγινώσκεται ἄ λ λ η κ τ ο ς (σ. 65), ὁ ποιητικὸς τύπος ἀντὶ ἄ λ η κ τ ο ς, ἑ ώ ρ α (σ. 38) ὁ παρὰ Σοφοκλεῖ (Οἰδ. τ. 1264) ἀντὶ α ἰ ώ ρ α.

Κλείων τὸ βιβλίον ὁ ἀναγνώστης αἰσθάνεται τὴν ἀνάγκην νὰ εὐχηθῇ, ὅπως ἀνάλογοι ἐργασίαι περὶ ἄλλων συγγραφέων ἴδωσι ταχέως τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος, ἡ εὐχὴ δὲ αὕτη εἶναι ἴσως ὁ οὐχ ἧττον καλὸς ἔπαινος.

Θ. Σ. ΤΖΑΝΝΕΤΑΤΟΣ

***

**ΙΩΣΗΦ ΧΟΦΜΑΝ.**—Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν, 2ον καὶ 3ον μέρος (Συλλογὴ Γκαίσιεν, τόμ. 875 καὶ 882, Βερολῖνον, 1957).

Prof. Dr. JOSEPH HOFMANN Geschichte der Mathematik, 2. und 3. Teil (Sammlung Göschen, B. 875 und 882, Berlin, 1957, Verlag W a l t e r de G r u y t e r und Co).

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν τοῦ κ. Ἰωσὴφ Χόφμαν (τόμ. 226) ἐξεδόθη κατὰ τὸ 1953, διαπραγματεύεται δὲ τὴν ὕλην ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν προελληνικῶν μαθηματικῶν μέχρι τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Φερμὰ καὶ τοῦ Καρτεσίου. Κριτικὴ τοῦ τόμου τούτου ἐδημοσιεύθη εἰς προηγούμενον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος».

Α'. Τὸ δεύτερον μέρος, τόμ. 875, ἐξετάζει τὴν μαθηματικὴν δημιουργίαν ἀπὸ τοῦ Φερμὰ καὶ τοῦ Καρτεσίου μέχρι τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Εἰς ὀλίγας σελίδας παρουσιάζεται μετὰ σαφηνείας τὸ ἔργον τοῦ Καρτεσίου καὶ τοῦ Φερμά. Ὁ Φερμὰ προσπαθεῖ νὰ ἀναπτύξῃ τὰς ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος διατυπωθείσας καὶ ἐφαρμοσθείσας μαθηματικὰς μεθόδους. Ἐκ τοῦ Ἀλεξανδρινοῦ Πάππου προῆλθεν ἡ παρόρμησις τοῦ Φερμὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κανόνος περὶ τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως. Μετὰ σαφηνείας ἐκτίθεται ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πρόοδον τῶν μαθηματικῶν τοῦ Mersenne, τοῦ Roberval, τοῦ Torricelli, τοῦ Ricci, τοῦ Sluse καὶ τοῦ St. Degli Angeli. Ὑπὸ τοῦ Desargues ἐπιτελεῖται ἐπεξεργασία καὶ ἐμβάθυνσις τῶν ἐπιτευχθέντων ἀποτελεσμάτων ἀπὸ τοῦ 1625—1648. Οὗτος ἀσχολεῖται διεξοδικῶς μὲ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Ὁ Blaise Pascal εἶναι βαθὺς μελετητὴς τοῦ Εὐκλείδου καὶ συνέγραψε ἐκτεταμένον σύγγραμμα περὶ κωνικῶν τομῶν, ὅπου συνδέει ὀργανικῶς τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τοῦ Desargues. Εἰς τὴν πραγματείαν ταύτην περιλαμβάνεται καὶ τὸ περίφημον θεώρημα τοῦ Pascal περὶ κωνικῶν. Ἐξαίρεται ἡ ἀποδεικτικὴ ἱκανότης τοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἢ τελείας ἐπαγωγῆς. Ἐν τῷ μεταξὺ ἔχει ὡριμάσει ὁ Ὁλλανδὸς Chr. Huygens, ὅστις ἀπέκτησε πολλὰς μαθηματικὰς γνώσεις ἐν ἰδιωτικῇ διδασκαλίᾳ παρὰ τῷ συμπολίτῃ αὐτοῦ Schotten, ὅστις κατέστησεν εἰς αὐτὸν προσιτὰ τὰ μαθηματικὰ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν τοῦ Viète, τοῦ Fermat καὶ τοῦ Torricelli. Ἀκολούθως ἐκτίθενται τὰ πορίσματα τῶν μαθηματικῶν ἐρευνῶν τοῦ Ἄγγλου J. Wallis καὶ ἡ ἀντίθεσις τούτου πρὸς τὸν Fermat. Εἰς δημοσιευθεῖσαν ἐπιστολήν του ὁ Fermat λέγει, ὅτι ὁ Wallis ἀπέτυχε κατὰ τὰς ἐρεύνας του εἰς ὅλα τὰ θεμελιώδη προβλήματα. Οὗτος εἶναι δύσθυμος κατὰ τοῦ Wallis, διότι δὲν τὸν ἐμνημόνευσεν εἰς τὴν πραγματείαν του περὶ τετραγωνισμοῦ παραβολῶν ἀνωτέρας τάξεως. Ἐξαίρονται τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν τοῦ Ὁλλανδοῦ J. Hudde καὶ τοῦ Ἰταλοῦ Borelli. Οὗτος ἐξέδωκε τὰ κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου, τὰ ὁποῖα ἀνεῦρε κατὰ τὸ 1658 ἐν τῇ Βιβλιοθήκῃ τῆς Φλωρεντίας, γεγραμμένα εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν. Καὶ αἱ λοιπαὶ ἐκδόσεις, μεταφράσεις, ἀποκαταστάσεις καὶ ἐπεξεργασίαι τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν, αἱ γενόμεναι κατὰ τὴν ἐποχὴν ἀπὸ 1625—1665, ἀξίζουσι πλήρους ἀναγνωρίσεως. Αἱ νέαι ὅμως μαθηματικαὶ γνώσεις περιορίζονται εἰς στενὸν κύκλον ἐπαϊόντων. Δὲν προκαλεῖ ἀπορίαν ὅτι οἱ μεμυημένοι εἰς ταύτας μετὰ δυσκολίας προβαίνουσιν εἰς λεπτομερεῖς ἀνα-

κοινώσεις τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐρευνῶν αὐτῶν, διότι ἡ ὑπεξαίρεσις καὶ οἰκειοποίησις ἀλλοτρίων μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων εὑρίσκεται εἰς τὴν ἡμερησίαν διάταξιν.

Κατὰ τὴν τελευταίαν περίοδον τοῦ Barock (περίπου 1665—1730) γίνεται ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἐκθετικῶν σειρῶν (Gregory, Brounker, Collins, Barrow, Newton). Κατὰ τὸ 1667 δημοσιεύει ὁ Gregory τὰς πρώτας αὐτοῦ ἀνακαλύψεις, ἤτοι τὸν τετραγωνισμὸν ἐλλειπτικοῦ ἢ ὑπερβολικοῦ τομέως, ἐγγράφων καὶ περιγράφων εἰς τοῦτον πολύγωνα, κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἰς τὴν συγχρόνως ἐκδοθεῖσαν Geometriae pars universalis ἔχομεν τὴν πρώτην περίληψιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν εὑρεθέντων ὑπὸ τῶν Ἰταλῶν καὶ Ἄγγλων μαθηματικῶν ἐπὶ προβλημάτων ὁλοκληρώσεως, ἔνθα τὰ πάντα ἀποδεικνύονται κατὰ τὴν αὐστηρὰν ἔμμεσον μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὀλίγον μεταγενέστερος τοῦ Gregory εἶναι ὁ Ἰσαὰκ Νεύτων (Icaac Newton, 1643—1727). Οὗτος κατὰ τὸ 1661 σπουδάζει εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge φιλοσοφίαν καὶ ἀπὸ τοῦ 1664 μαθηματικά, ὑπὸ τὴν ἄμεσον καθοδήγησιν τοῦ κηδεμόνος καὶ καθηγητοῦ του Barrow, ὅστις γνωρίζει ἄριστα τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικοὺς καὶ ἔχει ἐκδώσει ἐν περιλήψει τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὴν λατινικὴν (1655). Ὁ Νεύτων ἐπεξεργάζεται τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν τοῦ Oughtred, τοῦ Schotten, τοῦ Viète, τοῦ Wallis καὶ τῆς γεωμετρίας τοῦ Descartes. Κατὰ τὸ 1711 ἐκδίδει τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Analysis. Ἡ θεωρία του περὶ χρωμάτων τὸν φέρει εἰς σφοδρὰν ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς ἀντίθετα φρονοῦντας, τόσον ἐν Ἀγγλία ὅσον καὶ ἐν τῷ ἐξωτερικῷ.

Ἡ σπουδαιοτέρα ἀνακάλυψις κατὰ τὸ τέλος τῆς περιόδου Barock εἶναι ἡ τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Κατὰ τὸν κ. Χόφμαν αὕτη ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὸν G. W. Leibnitz (Λάϊμπνιτς, 1646—1716). Οὗτος σπουδάζει φιλοσοφίαν καὶ μαθηματικὰ ἐν Λειψίᾳ, ἔνθα ὑποστὰς τὴν διδακτορικὴν ἐξέτασιν ἀπορρίπτεται. Ταύτην ὑπέστη βραδύτερον ἐπιτυχῶς εἰς Altdorf. Εἰς σοβαρὰς μαθηματικὰς ἐρεύνας ἐπιδίδεται ὁ Leibnitz, ὅταν εὑρέθη ἐν Παρισίοις. Κατὰ τὸ 1675 ἀνεκάλυψεν ὁ Leibnitz τὸν διαφορικὸν λογισμόν. Τὴν προτεραιότητα τῆς ἀνακαλύψεως ἀμφισβητεῖ ὁ Νεύτων καὶ ἀρχίζει μεταξὺ τούτων μεγάλη διαμάχη. Διὰ τῆς παραθέσεως τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων τοῦ L' Hospital καὶ τῶν ἀδελφῶν Bernoulli κλείει ὁ δεύτερος τόμος τῆς «Ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν» τοῦ κ. I. Χόφμαν.

Β'. Εἰς τὸν τρίτον τόμον ἐκτίθεται διεξοδικῶς ἡ διαμάχη περὶ τῆς προτεραιότητος τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ καὶ ἐξαίρονται αἱ μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τοῦ Taylor, τοῦ Stirling, τοῦ G. Fagnano, τοῦ J. Riccati, τοῦ P. Varignon, τοῦ Tschirnhaus, τοῦ Rolle, τοῦ Maclaurin, τοῦ Stone καὶ ἄλλων. Κατὰ τὸ διάστημα 1665—1730 γίνονται καὶ αἱ πρῶται δημοσιεύσεις ἐπὶ τῆς Ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου ἐν Ἀγγλίᾳ ὑπὸ τοῦ Gregory (1703) εἶναι ἀνυπέρλητος, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ αὐτόθι γενομένη ὑπὸ τοῦ Halley (1706) ἔκδοσις τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μόνον τῶν ἐν ἀραβικῇ μεταφράσει διατηρουμένων κειμένων. Κατὰ τὸ 1758 ὁ Halley ἐξέδωκε τὰς σῳζομένας πραγματείας τοῦ Μενελάου, ἐπίσης ἐξ ἀραβικῶν μεταφράσεων. Αἱ ἐν Ὀξφόρδῃ ἐκδόσεις τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν ὀφείλονται κυρίως εἰς τὰς προσπαθείας τοῦ Κόμητος Shaftesbury (1671—1713), ὅστις ὑπῆρξεν ὁ ἐνθουσιώδης ἱδρυτὴς τῆς Νεοανθρωπιστικῆς Σχολῆς (Neohumanismns). Ἡ προσπάθεια τοῦ Barrow διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν καὶ κατανόησιν τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν συνετέλεσε πολὺ εἰς τὴν ὕψωσιν τῆς στάθμης τῶν μαθηματικῶν καθ' ὅλην τὴν Εὐρώπην.

Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Διαφωτίσεως (1700—1790) διαμορφοῦται ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ Σχολεῖα. Κυριαρχοῦσα μορφὴ τῆς ἐποχῆς ταύτης εἶναι ὁ Euler (Ὄϊλερ) (1707-1783), ὅστις ἐγεννήθη καὶ ἐσπούδασεν ἐν Ἑλβετίᾳ. Εἰς ἡλικίαν 23 ἐτῶν ἐγένετο καθηγητὴς τοῦ ἐν Πετρουπόλει Πανεπιστημίου. Μεταξὺ τῶν σπουδαίων ἀνακαλύψεων τοῦ Euler μνημονεύεται ἡ ἀπόδειξις, ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4n+1$ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ ὁ προσδιορισμὸς ζευγῶν ἀκεραίων ἀρι-

θμῶν, οἵτινες εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2-py^2=1$. (Σημ. Οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζον τοιαύτας λύσεις διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^2-2y^2=\mp 1$). Τέλος ἐξαίρονται αἱ μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τῶν Clairaut, Lambert, Lagrange, D' Alembert, Monge, Laplace, Legendre, Wariny. Κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχὴν καταβάλλονται ἐν Ἀγγλίᾳ σοβαραὶ προσπάθειαι διὰ τὴν ἀποκατάστασιν ἀπολεσθεισῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ὑπὸ τῶν Horsley (1770), Lawson (1771), Wales (1772), Simson (1776), καὶ Barrow (1779). Εἰς τοὺς Ἄγγλους ὀφείλεται ἐπισης ἡ θαυμασία ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκ τῶν εὑρεθέντων καταλοίπων τοῦ Torelli (1792).

Ὁ κ. Χόφμαν κατορθώνει διὰ τῶν τριῶν τόμων τῆς Συλλογῆς Γκαίσιεν νὰ παράσχῃ ἀνάγλυφον τὴν εἰκόνα τῆς δημιουργίας καὶ ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τῆς παλαιοτάτης ἐποχῆς μέχρι πέρατος τοῦ 18ου αἰῶνος μετ' ἀντικειμενικότητος καὶ ἐξαιρετικῆς σαφηνείας. Παρὰ τὴν μικρὰν ἔκτασιν, τὴν ὁποίαν καταλαμβάνει τὸ ἔργον, παρέχεται εἰς τοῦτο πλῆθος λεπτομερειῶν, τὰς ὁποίας δὲν συναντᾷ τις οὔτε εἰς πολὺ ἐκτενέστερα ἔργα.

Διὰ τοῦ ἔργου τοῦ κ. Χόφμαν ὁ ἀναγνώστης εἶναι εἰς θέσιν ἐντὸς βραχυτάτου χρονικοῦ διαστήματος νὰ ἔχῃ ἐνώπιόν του πλήρη καὶ ζωηροτάτην εἰκόνα τῆς δημιουργίας καὶ ἐξελίξεως τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Μεθ' ἕκαστον κεφάλαιον παρατίθεται λεπτομερὴς βιβλιογραφία καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τόμου λεπτομερὴς κατάλογος τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν πραγματειῶν αὐτῶν.

Ἡ σπουδάζουσα νεολαία θὰ ὠφεληθῇ τὰ μέγιστα ἐκ τῆς «Ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν» τοῦ κ. Ι. Χόφμαν. Θὰ ἦτο δὲ εὐτύχημα, ἐὰν παρείχετο εἰς αὐτὴν διὰ τῆς χειρὸς τοῦ κ. Χόφμαν εἰς τέταρτον τόμον καὶ ἡ Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ 19ου αἰῶνος μέχρι τῶν ἡμερῶν μας.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ Ν. ΜΑΓΕΙΡΑ** — Α'. Ἀλγεβρικὰ Θέματα, Σειρὰ Α'. Ἔκδ. δευτέρα, σελ. 330, Ἀθῆναι 1958. Β'. Ἀλγεβρικὰ Θέματα, Σειρὰ Β'. σελ. 228, Ἀθῆναι 1952.

Ἡ μαθηματικὴ βιβλιογραφία ἐν Ἑλλάδι δὲν εἶναι πλουσία καὶ ἀνάλογος πρὸς τὴν σημειουμένην συνεχῶς ἀνάπτυξιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου πᾶσα ἔκδοσις μαθηματικῆς πραγματείας γίνεται δεκτὴ μετὰ πολλοῦ ἐνδιαφέροντος. Εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐκδόσεις τῶν τελευταίων ἐτῶν κατέχουσι λαμπρὰν θέσιν αἱ ἀνωτέρω πραγματεῖαι τοῦ κ. Π. Μάγειρα.

Α'. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον (Σειρὰ Α') γίνεται διαπραγμάτευσις τῶν ἑξῆς θεμάτων: 1) Μαθηματικὴ ἐπαγωγή. 2) Ἀπόλυτος τιμὴ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. 3) Ἀκέραιον μέρος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. 4) Μιγαδικοὶ ἀριθμοί. 5) Γενικὰ περὶ ἀκολουθιῶν καὶ σειρῶν. 6) Γενικὰ περὶ ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως.

Λίαν εὐστόχως ὁ κ. Μάγειρας προτάσσει τοῦ κεφαλαίου μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς τὰ ἐκ τῆς λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους λαμβανόμενα τρία εἴδη κρίσεων, ἤτοι τὰς ἀτομικάς, τὰς μερικὰς καὶ τὰς γενικὰς κρίσεις καὶ παραθέτει ἀνάλογα μαθηματικὰ παραδείγματα, ὥστε ὁ ἀναγνώστης ν' ἀντιλαμβάνηται εὐκόλως τὰς μεταξὺ τῶν κρίσεων τούτων διαφοράς. Κατόπιν τῆς εἰσαγωγῆς ταύτης ἡ διαπραγμάτευσις τοῦ θέματος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς καθίσταται εὐκολωτέρα. Διεξοδικῶς καὶ πολὺ ἐπιτυχῶς γίνεται ἡ διαπραγμάτευσις τοῦ θέματος τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, κατέχουσα εἰς ἔκτασιν τὸ ἓν τρίτον περίπου τοῦ πρώτου τόμου (Σειρᾶς Α'). Ἀφοῦ δίδονται οἱ συναφεῖς ὁρισμοί, ἐκτίθενται μετὰ πολλῶν παραδειγμάτων αἱ τέσσαρες πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ ἀναλύονται αἱ ἔννοιαι τῶν συζυγῶν, ἀντισυζυγῶν καὶ ἐναλλασσόντων μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀκολούθως ἀναπτύσσεται ἡ παράστασις τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν σημείων ἐπιπέδου, ὁ πολ-

λαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις τούτων ὑπὸ τὴν τριγωνομετρικήν των μορφὴν καὶ παρέχονται συναφῆ παραδείγματα καθιστῶντα προσιτὴν καὶ κατανοητὴν τὴν διαπραγματευθεῖσαν ὕλην. Ἡ ἐπίλυσις ἐξισώσεων πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν οἱ συντελεσταὶ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί, καὶ ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, μετὰ πολλῶν παραδειγμάτων καὶ ἐφαρμογῶν, συμπληροῦσι τὸ ὅλον θέμα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ὁ κ. Μάγειρας ἔχει διαπραγματευθῆ μετ' ἐξόχου ἐπιστημονικῆς, ἀλλὰ καὶ παιδαγωγικῆς ἱκανότητος.

Ἀναλυτικῶς ἐπίσης καὶ εὐστόχως ἐκτίθενται τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς ἀκολουθίας, παρεχομένων πολλῶν παραδειγμάτων καὶ συναφῶν ἀσκήσεων, δι' ὧν καθίσταται προσιτὴ ἡ κατανόησις καὶ ἡ ἐμπέδωσις τῆς διαπραγματευθείσης ὕλης.

Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ θέματος τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων (ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως) καίτοι εἶναι συνοπτική, ἐν τούτοις περιλαμβάνει ὅλα τὰ οὐσιώδη σημεῖα τῶν ἐξισώσεων τούτων. Ἐνταῦθα μνημονεύεται καὶ ἡ μερικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$, ἡ μ, $(\mu^2-1):2$, $(\mu^2+1):2$, ὅπου μ περιττός, διάφορος τῆς μονάδος, ἡ ἀποδιδομένη, ὡς γνωστόν, εἰς τὸν Πυθαγόραν. [Σημ. ἡ λύσις β, $(\beta^2:4)-1$, $(\beta^2:4)+1$, ὅπου $\beta=4, 6, 8\ldots$ ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα, ἡ δὲ γενικὴ λύσις τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως περιλαμβάνεται εἰς τὸ α' λῆμμα τοῦ 28 θεωρήματος τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου].

Β'. Εἰς τὸν δεύτερον τόμον (Σειρὰ Β') τῶν ἀλγεβρικῶν θεμάτων τοῦ κ. Μάγειρα περιλαμβάνονται τὰ ἑξῆς θέματα:

1) Γενικὰ περὶ συνόλων. 2) Γενικὰ περὶ ἀπεικονίσεων. 3) Φυσικοὶ ἀριθμοί. 4) Ῥητοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. 5) Ῥητοὶ ἀριθμοί. 6) Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha:\nu^{u}$, ὅπου α ἀκέραιος καὶ ν, u ἀκέραιοι θετικοί.

Καίτοι τὰ στοιχεῖα τῶν ἀρχῶν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ἐκτίθενται εἰς ἁδρὰς γραμμάς, παρέχεται ἐν τούτοις εἰς τὸν ἀναγνώστην σαφὴς ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου καὶ τοῦ ὑποσυνόλου κλπ., ἥτις ἔχει τὴν ἀφετηρίαν αὐτῆς εἰς τὸν Παρμενίδην τοῦ Πλάτωνος, τὰ ἐπ' αὐτοῦ σχόλια τοῦ Πρόκλου καὶ τὴν πραγματείαν αὐτοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον Πρόκλου Στοιχείωσις Θεολογική (1). Ἡ ἔννοια τῶν ἀπεικονίσεων ἐκτίθεται δι' ὀλίγων, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως, ἀκολουθεῖ δὲ ἡ διαπραγμάτευσις τῶν φυσικῶν, ῥητῶν, ἀσυμμέτρων κλπ. ἀριθμῶν, ἥτις γίνεται μετὰ σαφηνείας καὶ ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας.

Ἡ ὕλη ἡ ἀναπτυσσομένη καὶ εἰς τοὺς δύο τόμους ὑπερβαίνει κατὰ πολὺ τὰ ὅρια μιᾶς γυμνασιακῆς διδασκαλίας. Αὕτη εἶναι ἐξαιρετικῶς κατάλληλος δι' ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι σκέπτονται σοβαρῶς νὰ ἀκολουθήσωσι θετικὰς ἐπιστήμας καὶ δὲν εἶναι ὑπερβολή, ἐὰν λεχθῇ, ὅτι αἱ ἀνωτέρω πραγματεῖαι τοῦ κ. Μάγειρα ἀποτελοῦσι λαμπρὸν βοήθημα μορφώσεως τῶν πρωτοετῶν καὶ δευτεροετῶν φοιτητῶν τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν σπουδαστῶν μηχανικῶν. Ὑπὸ τὸν μετριόφρονα τίτλον «Ἀλγεβρικὰ θέματα», τὸν ὁποῖον ὁ κ. Μάγειρας ἔδωκεν εἰς τὰς ἀνωτέρω πραγματείας του, κρύπτεται εἰς ταύτας σοβαρωτάτη μαθηματικὴ ἐργασία προϋποθέτουσα μαθηματικὴν μόρφωσιν οὐχὶ τὴν συνήθη. Ὀρθότερος τίτλος θὰ ἦτο ἴσως «Ἀλγεβρικὰ θέματα καὶ στοιχειώδης θεωρία τῶν ἀριθμῶν», διότι ὁ κ. Μάγειρας κατώρθωσε νὰ συμπεριλάβῃ εἰς τὰς ἀνωτέρω πραγματείας του πολλὰ καὶ ἀξιόλογα ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Ἡ διάταξις τῆς ὕλης ἔχει γίνει κατὰ τρόπον λίαν μεθοδικόν, ἡ δὲ ἀνάπτυξις αὐτῆς ἀκολουθεῖ τὰς ἀρχὰς τῆς παιδαγωγικῆς. Πλῆθος ἀσκήσεων καὶ παραδειγμάτων παρατιθεμένων μεθ' ἕκαστον κεφάλαιον καθιστῶσι τὰς πραγματείας τοῦ κ. Μάγειρα ἀπαραίτητον βοήθημα ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐπιθυμοῦσι νὰ ἀσχοληθῶσι μὲ τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν. Ἐν συμπεράσματι: Αἱ πραγματεῖαι τοῦ κ. Μάγειρα ἀποτελοῦσι σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ πρόοδον τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἑλλάδι καὶ θὰ εἶναι εὐχῆς ἔργον, ἐὰν ἡ ἑλληνικὴ βιβλιογραφία πλου-

---

1) Ἴδε συναφῆ ἀνακοίνωσιν Ε. Σταμάτη ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν, γενομένην τὴν 16.10.1958.

τισθῆ συντόμως καὶ δι' ἑτέρων μαθηματικῶν πραγματειῶν ὑπὸ τοῦ διακεκριμένου τούτου Ἕλληνος μαθηματικοῦ.

Ὡς πρὸς τὸν συλλογισμὸν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (ἢ ἀναδρομικὸν συλλογισμόν), τοῦ ὁποίου ἡ διαπραγμάτευσις γίνεται ἐν ἀρχῇ τοῦ πρώτου τόμου, ἐπικρατεῖ συνήθως ἡ γνώμη, ὅτι οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸν Γάλλον μαθηματικὸν Blaise Pascal, ὅστις ἐνδέχεται νὰ εἶχε γνωρίσει τοῦτον εἰς τὸ ἔργον «Ἀριθμητικὰ» τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ Φραγκίσκου Μαυρολύκου (1494—1575). Οὗτος εἰς τὸν πρόλογον τοῦ ἀνωτέρω βιβλίου γράφει, ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς παρέχει μίαν ἀρχὴν προόδου, τὴν ὁποίαν ἡ λογικὴ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων δυσκόλως θὰ ἠδύνατο νὰ ἀνεχθῇ. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος, υἱὸς Ἕλληνος ἰατροῦ καταφυγόντος εἰς τὴν Σικελίαν ἐκ Κωνσταντινουπόλεως, μετὰ τὴν ἅλωσιν αὐτῆς ὑπὸ τῶν Τούρκων, ἐγνώριζεν ἄριστα τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου, εἰς πολλὰ θεωρήματα τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς [1]. Εἶναι ἑπομένως ἀπορίας ἄξιον πῶς ὁ Μαυρόλυκος γράφει, ὅτι εἰσάγει ἀρχὴν προόδου, τὴν ὁποίαν οὗτος ἐδιδάχθη παρὰ τοῦ Εὐκλείδου. Ἐπισημειωτέον δ' ὅτι ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἐγένετο καθολικὸς μοναχὸς τυχὼν λαμπροτάτης ὑποδοχῆς καὶ ὑποστηρίξεως ὑπὸ τῆς Καθολικῆς Ἐκκλησίας.

Ὁ συλλογισμὸς τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἦτο γνωστὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Θεωρητικὴν θεμελίωσιν τούτου ἀπαντῶμεν εἰς τὰ «Ἀναλυτικὰ Ὕστερα» τοῦ Ἀριστοτέλους (73 b 32), ἔνθα γράφεται: «Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Ἡ παρατήρησις ὅτι ὁ συλλογισμὸς τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἀπαντᾷ εἰς θεώρημά τι τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου ἐγένετο κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ διανυομένου αἰῶνος.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΥ**:—(Πυθαγορείου Γυμνασίου Σάμου). Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου Β' βαθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων (πρὸς ἐκτύπωσιν).

Εἰς τὴν ὑπὸ ἐκτύπωσιν πραγματείαν ὁ κ. Ἀ. Χατζόπουλος διαπραγματεύεται τὸ πρόβλημα τῆς δημιουργίας τριωνύμων δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $ax^2+\beta x+\gamma$, τοιούτων ὥστε $\alpha \neq 1$, θετικὸς καὶ ἀκέραιος καὶ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ νὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰ τριώνυμα νὰ ἀναλύωνται εἰς γινόμενα παραγόντων. Πρὸς τοῦτο λαμβάνει δύο τυχόντας ἀριθμοὺς (τοὺς ὁποίους ἐκλέγει πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐρεύνης του συνθέτους καὶ πρώτους πρὸς ἀλλήλους). Ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὁρίζει ὡς τὸν α τοῦ τριωνύμου καὶ τὸν ἄλλον ὡς τὸν γ αὐτοῦ. Ἀκολούθως εὑρίσκει τοῦ γινομένου αγ τοὺς πρώτους παράγοντας. Τούτους θέτει χάριν συμμετρίας κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου καὶ προσπαθεῖ νὰ ἀνεύρῃ πάντα τὰ δυνατὰ ζεύγη ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ γινόμενον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀρχικῶν ἀριθμῶν καὶ διάφορον ἄθροισμα. Εἰς ἕκαστον τοιοῦτον ζεῦγος θὰ ἀντιστοιχῇ κατὰ τὴν συναφῆ ἀνάπτυξιν τοῦ κ. Χατζοπούλου καὶ ἰδιαίτερον τριώνυμον, τοῦ ὁποίου β θὰ εἶναι τὸ ἰδιαίτερον ἄθροισμα τοῦ ζεύγους. Ἡ εὕρεσις τῶν ἀναγκαίων ζευγῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται δι' ἁπλῆς ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν. Διὰ νὰ καταστήσῃ σαφῆ τὴν θεωρίαν του ὁ κ. Χατζόπουλος παραθέτει 6 παραδείγματα.

Ἡ ἐργασία τοῦ κ. Χατζοπούλου εἶναι λίαν ἐνδιαφέρουσα, διότι διαπραγματεύεται

---

1) Ἴδε Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. II, Πρόλογος, καὶ Εὐκλείδου Στερεομετρία τόμ. IV σελ. 271, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1953 καὶ 1957, ἐν Ἀθήναις.

ἓν πρόβλημα, περὶ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου δὲν ἔχομεν ἄλλας συναφεῖς ἀποδείξεις, καθ' ὅσον τοὐλάχιστον γνωρίζομεν. Θὰ εἶναι δὲ εὐχῆς ἔργον, ἐὰν ὁ κ. Χατζόπουλος παρουσιάσῃ συντόμως καὶ ἄλλας μαθηματικὰς ἐργασίας πρὸς πλουτισμὸν τῆς πενιχρᾶς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς βιβλιογραφίας.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΧΡΙΣΤΟΥ Β. ΓΚΛΑΒΑ**.—Τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας. Θεωρητικὴ σπουδὴ τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας μετὰ ἱστορικοῦ σημειώματος. Σελ. 120, Ἀθῆναι 1957, ἔκδ. Κ. Παπαδημητροπούλου.

Ἡ ἐν λόγῳ πραγματεία χωρίζεται εἰς 6 κεφάλαια. Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον παρέχονται προκαταρκτικαί τινες ἔννοιαι, ἀφορῶσαι εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀπολύτων ἀκεραίων, εἰς τὰ συστήματα ἀριθμῶν, εἰς τοὺς πέντε θεμελιώδεις νόμους (πέντε βασικὰ θεωρήματα) κλπ. Εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον δίδεται ὁ ὁρισμὸς τῶν ἀκεραίων καὶ ἡ παράστασις τούτων, ἡ ἔννοια τοῦ μηδενὸς καὶ τῆς μονάδος, ἡ ἔννοια τοῦ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου κλπ. Ἡ διαπραγμάτευσις τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν γίνεται εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον. Εἰς τοῦτο, ἀφοῦ δίδεται ὁ ὁρισμὸς τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν, ἀκολουθεῖ ἡ διατύπωσις τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ῥητῶν καὶ ἐκτίθεται ἡ ἔννοια τοῦ ἰσομορφισμοῦ. Εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον παρέχεται ἡ θεωρία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐνῷ εἰς τὸ πέμπτον περιλαμβάνεται ἡ ἔρευνα τῶν συνθετικῶν. Πρόκειται περὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ὁ συγγραφεὺς ὀνομάζει συνθετικούς, θεωρῶν τὸν ἐπικρατοῦντα ὅρον «μιγαδικοὶ» ὡς κακόηχον. Ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῆς παραδεδεγμένης ὁρολογίας, ἐπιθυμοῦμεν νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ἀρκετοὶ Ἕλληνες συγγραφεῖς ἀποφεύγουσι τὴν διάπλασιν τῶν ὅρων.

Τέλος εἰς τὸ ἕκτον κεφάλαιον ἐκτίθεται ἡ ἱστορικὴ ἐξέλιξις τῆς Ἀλγέβρας ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων μέχρι τῆς σημερινῆς ἐποχῆς.

Ὁ συγγραφεὺς προσπαθεῖ διὰ τῆς πραγματείας ταύτης νὰ παρουσιάσῃ ὑπὸ ἐνιαίαν ἐξέτασιν τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας θεμελιώνων τὴν προσπάθειάν του ἐπὶ τῆς μεθόδου κατασκευῆς, ὡς γράφει, τῶν καλουμένων ἀπολύτων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἡ ἁπλότης τῆς ἐκφράσεως καὶ ἡ σαφήνεια τῆς διατυπώσεως τῶν ἐννοιῶν ἐν τῇ πραγματείᾳ ταύτῃ ὑποβοηθοῦσι πολὺ τὸν ἀναγνώστην εἰς τὴν κατανόησιν τῶν λεπτῶν ἀλγεβρικῶν ἐννοιῶν. Δὲν εἶναι πολλαὶ εἰς τὴν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν αἱ πραγματεῖαι, ἐν αἷς γίνεται διαπραγμάτευσις τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ πραγματεία τοῦ κ. Χρ. Γκλαβᾶ εἶναι λίαν εὐπρόσδεκτος ὑπὸ τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὴν νεωτέραν Ἄλγεβραν καὶ θὰ ἀποβῇ πολὺ ὠφέλιμος εἰς αὐτούς. Λίαν ἐνδιαφέρον εἶναι τὸ ἱστορικὸν σημείωμα τὸ ἀποτελοῦν τὸ ἕκτον κεφάλαιον τῆς πραγματείας. Μετὰ πολλῆς ἱκανοποιήσεως σημειοῦμεν ὅτι ὁ κ. Χρ. Γκλαβᾶς παραδέχεται ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ ὄχι ἁπλῶς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὡς ἀκόμη γράφουσιν ἱστορικοί τινες τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἐνταῦθα θὰ ἠδύνατο νὰ προστεθῇ ὅτι ὁ Διόφαντος εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν «Ἀριθμητικῶν» του περιέχει τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, γράφων: «Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν (πλὴν ἐπὶ πλὴν=σὺν) καὶ λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν (πλὴν ἐπὶ σὺν=πλήν)». Τὸ σημεῖον πλὴν τὸ παριστᾷ διὰ ἀνεστραμμένου λάμβδα μετὰ γραμμῆς ἀναχωρούσης ἐκ τῆς κορυφῆς καὶ χωριζούσης αὐτὸ εἰς δύο μέρη, ὡς ⩘. Αἱ πράξεις διὰ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνήθεις παρὰ τῷ Διοφάντῳ. Εἰς τὸ II 12 θεώρημα π. χ. γράφει $21-(9-x^2)=x^2+12$. Ἐπίσης θὰ ἠδύνατο νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ VI 28 θεώρημα τῶν «Στοιχείων» του εὑρίσκει τὴν ἀρνητικὴν ῥίζαν τῆς ἐλλειπτικῆς ἐξισώσεως $\frac{Px^2}{\alpha}-2px+\Gamma=0$. Τὸν ὁρισμὸν

τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ ἔχει δώσει ὁ Εὔδοξος εἰς τὸν πέμπτον ὁρισμὸν τοῦ V βιβλίου τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου [T. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements καὶ Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, I 1 σ. 50]. Οἱ συναφεῖς ὁρισμοὶ τοῦ Dedekind καὶ Cantor ἀποτελοῦσιν ἀλλοίαν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Εὐδόξου.

Ἡ ὑπὸ κρίσιν πραγματεία τοῦ κ. Χρ. Γκλαβᾶ εἶναι ἡ δευτέρα πραγματεία αὐτοῦ καθ' ὅσον γνωρίζομεν, μετὰ τὴν διδακτορικὴν διατριβήν του τὴν γενομένην ἐν τῷ Διδασκαλείῳ (Teachers Kollege) τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ν. Ὑόρκης Columbia, ὑπὸ τὸν τίτλον «Συστήματα ἐπιπέδων συντεταγμένων εἰς τὰς μαθηματικὰς σπουδάς».

Θεωροῦμεν λίαν εὐχάριστον ὅτι νέοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀφιερώνονται εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ κατορθώνουσι νὰ παρουσιάζωσι πραγματείας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι σοβαρὰν συμβολὴν εἰς τὴν ἔρευναν καὶ πρόοδον τῶν μαθηματικῶν.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΕΡΡ. ΣΚΑΣΣΗ.**—Περὶ τῆς λέξεως «βομβόχυλον» παρὰ τῷ Διοσκορίδῃ 4, 7, 11 W. Ἀνακοίνωσις κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 30. Μαΐου 1957 τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν (δημοσιευθεῖσα εἰς «Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθην.», Τόμ. 32.

Ὁ καθηγητὴς τῆς Λατινικῆς φιλολογίας ἐν τῷ Ἀθήνησι Πανεπιστημίῳ καὶ Ἀκαδημαϊκὸς Ἑρρ. Σκάσσης ἀνήκει εἰς τὴν περίλαμπρον φιλολογικὴν γενεάν, ἥτις ἀνεδείχθη φορεὺς ἐνδόξου καὶ γονίμου πνευματικῆς παραδόσεως. Διακριθεὶς λίαν ἐνωρὶς διὰ τὴν εὐδοκίμησίν του περὶ τὰς φιλολογικὰς σπουδὰς εἶχεν ἐφελκύσει ἀπὸ τῶν φοιτητικῶν του χρόνων τὴν προσοχὴν τοῦ διασήμου Λατινιστοῦ Σπυρ. Βάση, ὃν καὶ ἐβοήθησε κατὰ τὴν ἔκδοσιν τῆς μνημειώδους «Ῥωμαίων Πολιτείας» του. Ἐπιδοθεὶς εἰς τὴν σπουδὴν τῆς Λατινικῆς γλώσσης καὶ φιλολογίας, πάντοτε ἐν τῷ πλαισίῳ τῆς γενικῆς ἀρχαιογνωστικῆς φιλολογίας, ἐγένετο ἄξιος συνεχιστὴς τῆς λαμπρᾶς παραδόσεως, ἣν εἶχον δημιουργήσει οἱ προκάτοχοί του καθηγηταὶ καὶ ἰδίᾳ ὁ Σπ. Βάσης. Ὁ γράφων τὰς γραμμὰς ταύτας ἐνθυμεῖται ὅτι μὲ ἐνθουσιασμὸν καὶ εὐγνωμοσύνην ἡ γενεὰ τῶν φιλολόγων, οἵτινες κατὰ τὴν δευτέραν δεκαετίαν τοῦ αἰῶνος μας εἶχον ἐμπλακῆ εἰς τὰς περιπετείας τοῦ πρώτου παγκοσμίου πολέμου, ἐμελέτησε τὰ κατὰ τὸ 1915 ἐκδοθέντα Ἑρμηνευτικὰ Ὑπομνήματα εἰς τὸ Somnium Scipionis τοῦ Κικέρωνος, ἅτινα εἶχεν ὁ Ἑρρῖκος Σκάσσης δημοσιεύσει ὑπηρετῶν ὡς καθηγητὴς εἰς τὴν Πρότυπον Βαρβάκειον Σχολήν.

Ἀπὸ τοῦ 1901 ὁ Ἑρρ. Σκάσσης ἐσυνέχισεν ἀδιαλείπτως γόνιμον συγγραφικὴν καὶ διδακτικὴν δραστηριότητα καὶ ὡς γυμνασιακὸς κατ' ἀρχὰς καὶ ὡς πανεπιστημιακὸς ἐν τέλει καθηγητής. Ἔγραψε πλείστας διατριβὰς εἰς τὴν Λατινικὴν καὶ ἐδημοσίευσεν ἐρευνητικὰς μελέτας ἀναφερομένας εἰς θέματα οὐ μόνον τῆς Λατινικῆς, ἀλλὰ καὶ τῆς Ἑλληνικῆς κλασσικῆς φιλολογίας. Ἀξιολογωτάτη τυγχάνει καὶ ἡ συμβολή του εἰς τὴν Λατινικὴν λεξικογραφίαν. Οἱ ἀναγνῶσται τοῦ «Πλάτωνος», εἰς τὰ τεύχη τοῦ ὁποίου ἐπανειλημμένως ἐδημοσιεύθησαν διατριβαὶ ὑπὸ τὸν τίτλον «In Thesaurum Linguae Latinae addenda et corrigenda» ὡς καὶ δείγματα ἐκ τοῦ ἐκδοθησομένου Λατινοελληνικοῦ του Λεξικοῦ, ἔσχον τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐκτιμήσουν ἐκ προσωπικῆς αὐτοψίας τὴν ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου συμβολήν του.

Κινούμενοι ἀπὸ τὴν πρόθεσιν νὰ ἐνημερώσωμεν τὴν γενεὰν τῶν νεαρῶν μας φιλολόγων εἰς τὴν τεχνικὴν τῆς αὐστηρῶς νοουμένης, ἀλλὰ τόσον σήμερον ἀμελουμένης, ἐπιστημονικῆς φιλολογικῆς ἐρεύνης, ἐκρίναμεν σκόπιμον νὰ παρουσιάσωμεν ἀπὸ τῶν στηλῶν τοῦ «Πλάτωνος» ἀνάλυσιν τῆς λίαν ἐνδεικτικῆς διὰ τὸν τρόπον τοῦ χειρισμοῦ τῆς φιλολογικῆς μεθοδικῆς ἀνακοινώσεως τοῦ Ἑρρ. Σκάσση τῆς καταχωρισθείσης ὑπὸ

μενον ἐκ τοῦ «Ἑλένης ἐγκωμίου» τοῦ σοφιστοῦ Γοργίου (Βλ. Diels Vorsokratiker II σελ. 291, 1), εἶχε καταστῆ συνήθης τυπικὴ συνεκφορά. Εἶναι δὲ πιθανὸν ὁ Θουκυδίδης, ὅστις φέρεται ὡς ἐπηρεασθεὶς κατὰ τὸ ὕφος ὑπὸ τοῦ Γοργίου, νὰ παρέλαβε τὴν φράσιν ταύτην κατὰ Γοργίειον ζῆλον.

Αἱ ἀνωτέρω διατυπωθεῖσαι παρατηρήσεις οὐδόλως σκοποῦν νὰ μειώσουν τὴν ἀξίαν τῆς ὑπὸ συζήτησιν συγγραφῆς. Παρετέθησαν μόνον ἐν πνεύματι συνεργασίας καὶ συμβολῆς. Ἡ ἐργασία, ἣν θέτει εἰς τὴν διάθεσιν τῶν φιλολόγων ὁ Ν. Βασιλόπουλος, δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς τελειοτέρα πάσης πρὸ αὐτῆς ἐκδοθείσης παρ' ἡμῖν. Εἴμεθα δὲ βέβαιοι ὅτι θὰ τύχῃ προσοχῆς καὶ ἀξιοποιήσεως ἐκ μέρους τῶν Ἑλλήνων καὶ ξένων φιλολόγων.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

***

**ΕΥΑΓΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ.** ***Εὐκλείδου Γεωμετρία. Στοιχείων βιβλία 13, τόμοι 4.*** Τόμος Ι: Στοιχείων βιβλία Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, ΙV. Εἰσαγωγή, Ἀρχαῖον κείμενον, Μετάφρασις. Ἀθῆναι 1952, σελ. 179.—Τόμος ΙΙ: Γεωμετρία, Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλία V, VI, VII. VIII, IX. Εἰσαγωγή, Ἀρχαῖον κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις. Ἀθῆναι 1953. Ἔκδ. Ὀργαν. Ἐκδόσ. Σχολ. Βιβλ. σελ. 369.—Τόμ. ΙΙΙ: Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλίον Χ. Εἰσαγωγή, Ἀρχαῖον κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις. Ἀθῆναι 1957. Ἔκδ. Ἐθν. Τυπογρ. σελ. 315.—Τόμ. ΙV: Στερεομετρία. Στοιχείων βιβλία XI, XII, XIII Ἀρχαῖον κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις. Ἀθῆναι 1957. Ἔκδ. Ὀργαν. Ἐκδόσ. Σχολ. Βιβλ. σελ. 280.

Εἰς τὸ ἕνατον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος» τὸ ἐκδοθὲν κατὰ τὸ ἔτος 1953 εἴχομεν χαιρετίσει δι' εἰδικοῦ βιβλιογραφικοῦ σημειώματος (σελ. 174—177 τοῦ ρηθέντος τεύχους) τὴν ἔκδοσιν ὑπὸ τοῦ Εὐαγγ. Σταμάτη τοῦ πρώτου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Νῦν ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐκδόσεως τοῦ συνόλου τῶν Στοιχείων μᾶς παρέχει τὴν εὐχάριστον εὐκαιρίαν νὰ ἐξάρωμεν τὰς μεγάλας καὶ πολλὰς ἀρετὰς τῆς συντελεσθείσης ὑπὸ τοῦ ἀκαμάτου τούτου ἐρευνητοῦ τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν ἀρίστης ἐκδοτικῆς, μεταφραστικῆς καὶ ἐπεξηγηματικῆς ἐργασίας. Οἱ τέσσαρες ἐκδοθέντες τόμοι ἀποτελοῦν ὀγκώδες συγγραφικὸν σύνολον συμποσούμενον εἰς 1143 σελίδας. Ὅπως εἰς τὸν πρῶτον τόμον, οὕτω καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς τέσσαρας, ἠκολουθήθη τὸ κείμενον, ὅπως ἔχει ἀποκαταστήσει τοῦτο ὁ Δανὸς I. L. Heiberg μὲ συνεργάτην τὸν γερμανὸν H. Menge εἰς τὴν γενομένην μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1882—1889 ἔκδοσιν τὴν δημοσιευθεῖσαν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἐκδόσεων τῆς βιβλιοθήκης Teubner. Προκειμένου περὶ τῆς μεταφραστικῆς ἀποδόσεως καὶ τῶν ἐπεξηγήσεων ἔχει λάβει ὁ Εὐ. Σταμάτης ὑπ' ὄψιν ἁπάσας τὰς ἑρμηνευτικὰς ἐρεύνας τὰς γενομένας μέχρι σήμερον. Διὰ δὲ τῶν προτασσομένων εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν τόμων εἰσαγωγῶν καὶ τῶν ἐπιτασσομένων ἐπεξηγήσεων ἐπισημαίνει τὴν ἐπικαιρότητα τὴν ὁποίαν διατηρεῖ εἰσέτι τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων ἐν σχέσει πρὸς θέματα, ἅτινα ἀπασχολοῦν ἐντατικῶς τοὺς συγχρόνους μας ἐρευνητάς. Διὰ νὰ καταδείξωμεν τοῦτο ἀρκεῖ νὰ σημειώσωμεν τὴν παρεχομένην εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ δευτέρου τόμου ἐρευνητικὴν μελέτην ἐπὶ τοῦ προκαλοῦντος ἀμέριστον τὸ διαφέρον τῆς συγχρόνου ἐρεύνης θέματος τοῦ ἀναφερομένου εἰς τὸ ἐρώτημα ἂν ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους μαθηματικοὺς ἡ ἔννοια τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ἐξ ἴσου διαφέρουσα εἶναι καὶ ἡ εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου τόμου ἐπισυνημμένη ἀνακοίνωσις περὶ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ. Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κατὰ τὴν ἀπόδοσιν καὶ εἰς τὰς ἐπεξηγήσεις τῆς νέας μαθηματικῆς ὁρολογίας ἔχει καταστῆ τὸ κείμενον ἀβιάστως προσιτὸν εἰς τὸν νεώτερον μελετητήν. Εἰς τὸν Εὐ. Σταμάτην ἀνήκει ἀναμφισβητήτως ἡ τιμὴ ὅτι ἐχάρισεν εἰς τὸ ἔργον τοῦ μεγάλου Στοιχειωτοῦ μίαν νέαν ἀναβίωσιν. Μᾶς ἐπαρουσίασε τὴν

μαθηματικὴν σκέψιν τοῦ Εὐκλείδου εἰς ὅλην της τὴν λαμπρότητα καὶ τὴν ῥωμαλεότητα. Ἀνεστήλωσε καὶ ἔστησε πρὸ τῶν ὀφθαλμῶν μας τὸ ἀρχιτεκτονικὸν μεγαλούργημα τοῦ μεγαλοφυοῦς Ἕλληνος γεωμέτρου καὶ μᾶς ἔδωκε τὴν δυνατότητα νὰ κατανοήσωμεν διατί παρέμεινε καὶ θὰ παραμένῃ ἀπαρασάλευτον διὰ μέσου τῶν αἰώνων.

Ὡς πρὸς τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐκδοθέντα κατὰ τὸ 1952 ἔσχομεν τὴν εὐκαιρίαν εἰς τὸ ἀνωτέρω σημειωθὲν βιβλιογραφικὸν σημείωμα νὰ ἐξάρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς δι' αὐτοῦ ἐπιτελεσθείσης ἐκδοτικῆς καὶ ἑρμηνευτικῆς ἐργασίας, ὡς καὶ τοῦ περιεχομένου τῆς προτασσομένης εἰσαγωγῆς. Εἰς τὸ σημείωμά μας ἐκεῖνο ὑπεγραμμίσαμεν καὶ τὴν ὅλως ἐξαιρετικὴν σημασίαν, ἣν ἐνέχει τὸ γεγονὸς ὅτι θὰ δοθοῦν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὰς χεῖρας τῆς Ἑλληνικῆς σπουδαζούσης νεότητος. Ἀπετέλει ἀσυγχώρητον καθυστέρησιν διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν ζωὴν τῆς χώρας μας ἡ ἀπουσία μεταξὺ τῶν 1700 ἐκδόσεων τῶν Στοιχείων, τῶν γενομένων μέχρι τοῦ ἔτους 1902 εἰς ἄλλας χώρας, ἔστω καὶ μιᾶς ἑλληνικῆς. Εὐτύχημα τιμητικὸν διὰ τὴν νεαρὰν νεοελληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην δέον νὰ θεωρηθῇ ὅτι ὁ Εὐ. Σταμάτης κατέβαλε τεράστιον μόχθον διὰ νὰ φέρῃ εἰς πέραν δι' ἀόκνου ἐργασίας πέντε ἐτῶν καὶ τὴν ἔκδοσιν τῶν ὑπολοίπων τριῶν τόμων, δι' ὧν ὡλοκληρώθη ἡ δημοσίευσις καὶ τῶν δέκα καὶ τριῶν βιβλίων.

Καὶ κατὰ τὴν δημοσίευσιν καὶ τῶν II—IV τόμων ἠκολουθήθη ἡ αὐτὴ μεθοδικὴ πορεία. Ἐδόθη τὸ ἀρχαῖον κείμενον καὶ παραπλεύρως αὐτοῦ ἡ μεταφραστικὴ ἀπόδοσις. Εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου τόμου προετάχθη εἰσαγωγὴ καὶ ἐπισυνήφθησαν ἐπεξηγήσεις. Ἡ εἰς τέσσαρας τόμους ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἀνταποκρίνεται εἰς τὰ κεφαλαιώδη θέματα, ἅτινα ἐξετάζονται εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.

Ὁ I τόμος περιλαμβάνων τὰ βιβλία I—IV ἀποτελεῖ τὴν περὶ τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας διδασκαλίαν τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὸν II τόμον, συναπαρτιζόμενον ἀπὸ τὰ βιβλία V—IX, ἀναπτύσσονται οὐ μόνον θέματα γεωμετρικὰ (βιβλ. V καὶ VI) ἀλλὰ καὶ ἡ περὶ ἀριθμῶν θεωρία (βιβλ. VII—IX) Ὁ III τόμος, ἀποτελούμενος ἀπὸ τὸ X βιβλίον, εἶναι πραγματεία περὶ τῶν ἀσυμμέτρων. Εἰς τὸν IV τόμον, περιλαμβάνοντα τὰ XI—XIII βιβλία, μᾶς δίδει ὁ Εὐκλείδης τὴν ἔκθεσιν τῆς περὶ στερεομετρίας διδασκαλίας του.

Εἰδικώτερον ἐπισκοπῶν τὸν II τόμον ὁ Εὐ Σταμάτης σημειώνει ὅτι τὸ V βιβλίον περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, ἥτις ἀναγνωρίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁμοφώνου γνώμης τῶν παλαιῶν Σχολιαστῶν ὡς εὕρημα τοῦ Κνιδίου μαθηματικοῦ Εὐδόξου, ὅστις ὑπῆρξε φίλος καὶ συνεργάτης τοῦ Πλάτωνος ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ. Ἐπειδὴ δὲ λόγῳ τοῦ θέματος, ὅπερ ἀναπτύσσεται εἰς τὰ 25 θεωρήματα τοῦ βιβλίου τούτου, ἀνακύπτουν δυσχέρειαι περὶ τὴν κατανόησίν του, παρέχεται ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ἐπεξήγησις αὐτῶν (σελ. 281—295) διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ὁρολογίας. Τὸ VI βιβλίον χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν Εὐ. Σταμάτην ὡς καθαρῶς γεωμετρικόν, διότι ἐν αὐτῷ σπουδάζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν, τῆς εὐρεθείσης ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, ἡ ὁμοιότης τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἐξαίρων τὴν σπουδαιότητα καὶ γονιμότητα τοῦ περιεχομένου τοῦ V καὶ VI βιβλίου ὑπομιμνήσκει ὁ Εὐ. Σταμάτης ὅτι ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν τῆς ἀναπτυσσομένης εἰς τὸ V βιβλίον καὶ τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς, εἰς ἃς προβαίνει ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ VI βιβλίον, στηρίζονται καὶ τὰ νεώτερα θεωρήματα περὶ πόλων καὶ πολικῶν, ριζικῶν ἀξόνων, συμμετρίας καὶ ὁμοιοθεσίας. Σημειώνεται προσέτι καὶ τὸ ὅτι εἰς τὰ Ἀγγλικὰ Γυμνάσια ἡ Γεωμετρία διδάσκεται καθ' ὃν τρόπον ἐγράφη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου μὲ προσθήκην εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν περὶ ἁρμονικῆς διαιρέσεως εὐθείας, πόλων καὶ πολικῶν, ριζικῶν ἀξόνων, συμμετρίας καὶ ὁμοιοθεσίας· Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται διατὶ τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὰ διαρρυθμισθέντα διὰ διδακτικοὺς σκοποὺς ὑπὸ τῶν H. S. Hall καὶ F. H. Stevens, London, McMillan and Co ἔσχον ἀπὸ τοῦ 1888 μέχρι τοῦ 1950 31 ἐκδόσεις.

Τὰ βιβλία VII, VIII καὶ IX περιέχουν τὴν περὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν διδασκαλίαν τοῦ Εὐκλείδου. Καὶ εἰς τὰ βιβλία ταῦτα, καθὼς καὶ εἰς τὰ δύο προηγούμενα αὐτῶν, δεσπόζουσαι ἀποδεικτικαὶ μέθοδοι εἶναι ἡ συνθετικὴ καὶ ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή. Κατὰ

τὸν Εὐ. Σταμάτην αἱ ἀποδείξεις αἱ χρησιμοποιούμεναι διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ὑπ' ἀριθ. 8 καὶ 18 θεωρημάτων τοῦ V βιβλίου δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς πρότυπον τῶν ἀποδείξεων τῆς ἀνωτέρας μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Σημειοῦται προσέτι καὶ ἡ χρῆσις τῆς μεθόδου τῆς λεγομένης τελείας ἐπαγωγῆς ἡ χρησιμοποιουμένη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου πρὸς ἀπόδειξιν τῶν ὑπ' ἀριθ. 3, 14, 27 καὶ 35 θεωρημάτων τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 8, 9, 20 τοῦ IX. Μνημονεύεται δὲ ὡς παρατηρήσας κατὰ τὸ 1910 τὴν χρησιμοποίησιν τῆς ῥηθείσης μεθόδου προκειμένου περὶ τῆς ἀποδείξεως τῶν 8 καὶ 9 θεωρημάτων τοῦ IX βιβλίου ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca, γεννηθεὶς κατὰ τὸ 1872. Θεωρημάτων τινῶν τῶν VI—IX βιβλίων, ὧν ἡ κατανόησις τυγχάνει δυσχερής, παρέχεται ἐπεξήγησις εἰς τὸ τέλος τοῦ II τόμου (σελ. 295—369).

Εἰς τὴν προτασσομένην τοῦ II τόμου Εἰσαγωγὴν (σελ. 7—22) ἐξετάζεται τὸ περιλάλητον θέμα τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἐκ μέρους τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν γνῶσιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ἑρμηνεύων ὁ Εὐ. Σταμάτης τὰς περὶ διαμετρικῶν καὶ πλευρικῶν ἀριθμῶν διδασκαλίας τοῦ Θέωνος καὶ τοῦ Πρόκλου τὰς σχετικὰς πρὸς τὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ ὡς καὶ τὴν μέθοδον τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτα πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου, καταδεικνύει ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ δὲν εἶχε διαφύγει τὴν προσοχὴν τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν. Τὴν γνώμην του ταύτην ἐνισχύει, διὰ τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους («Μετὰ τὰ φυσ.» 1021a 4) χρησιμοποιουμένης ἐκφράσεως «κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται» καὶ διὰ τοῦ περιφήμου χωρίου τῆς «Ἐπινομίδος» 990 D—991 A, ἔνθα μεταξὺ τῶν ἄλλων ἀναγράφεται· «τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν».

Εἰς τὸν III τόμον παρέχεται τὸ ἀρχαῖον κείμενον τοῦ X βιβλίου μετὰ μεταφράσεως καὶ ἐπεξηγήσεως, ἐν τέλει δὲ (σελ. 309—314) ἐπισυνάπτεται ἐκτενὴς κατάλογος τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς βιβλιογραφίας. Εἰς τὴν «Εἰσαγωγὴν» (σελ. 7—17) προτάσσονται διασαφηνίσεις ἀφορῶσαι εἰς τὸ περιεχόμενον καὶ τὴν ἀξίαν τοῦ X βιβλίου, ὅπερ ἀναγνωρίζεται ὡς τὸ ἀριστούργημα τῆς μεγαλοφυΐας τοῦ μεγάλου Στοιχειωτοῦ. Τὸ θέμα ὅπερ σπουδάζεται εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων ἀναπτυσσομένη εἰς 115 θεωρήματα. Ἕνεκα τούτου εἰς τὸν ἐν λόγῳ τόμον ἔδωκεν ὁ Εὐ. Σταμάτης ὡς ὑπότιτλον τὴν ἔνδειξιν «Περὶ ἀσυμμέτρων». Ὡς συμβολὴ διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς σπουδῆς τῶν ἀσυμμέτρων παρατίθεται πρὸ τοῦ κειμένου εἰσαγωγικῶς ἐκ τοῦ «Θεαιτήτου» τοῦ Πλάτωνος τὸ κείμενον καὶ ἡ ἑρμηνεία τοῦ περιφήμου χωρίου (147 D—148 B), ἔνθα γίνεται λόγος περὶ τῶν ἐρευνῶν τοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου, τῶν σχετικῶν μὲ τὸ ῥηθὲν θέμα. Ἀναλύεται ἐν συνεχείᾳ κεφαλαιωδῶς εἰς τὰς σελ. 9—15 τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου, ἐν τέλει δὲ (σελ. 15—17) ἐξαίρεται ἡ ἀξία του. Παρατίθεται σχετικὸν μὲ τὸν καθορισμὸν τοῦ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου διὰ τοῦ X βιβλίου ἐπιδιωκομένου σκοποῦ σημείωμα τοῦ ἀνωνύμου παλαιοῦ σχολιαστοῦ τῶν Στοιχείων, ὅστις λέγει ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐσκόπει «διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων». Λίαν διαφωτιστικὸν τυγχάνει καὶ ἕτερον ἐν συνεχείᾳ παρατιθέμενον σχόλιον περὶ τοῦ αὐτοῦ ἀντικειμένου, προερχόμενον ἀπὸ τὸν Ἄραβα Aboû Othman, ὅπερ ἀνευρεθὲν ὑπὸ τοῦ Woepke μετεφράσθη ἐκ τῆς ἀραβικῆς καὶ ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1855. Κατὰ τὸν Ἄραβα σχολιαστήν, ὅστις ἔχει ὡς πηγήν του τὰς πραγματείας τοῦ Πάππου, ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρων ἔχει μὲν τὴν ἀρχήν της εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου, ἀνεπτύχθη ὅμως σπουδαίως ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου «ἐπιδείξαντος καὶ εἰς τὸν κλάδον τοῦτον ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν τοιαύτην ὀξύνοιαν, ὥστε νὰ προκαλῇ τὸν θαυμασμόν». Λαμβάνων δὲ ὁ Εὐ. Σταμάτης ὑπ' ὄψιν τὴν μαρτυρίαν τοῦ Πρόκλου, καθ' ἣν ὁ Εὐκλείδης ἦτο οἰκεῖος πρὸς τὰ Πλατωνικὰ δόγματα τὰ ἐκτιθέμενα εἰς τοὺς πλατωνικοὺς διαλόγους «Φίληβον» καὶ «Τίμαιον», διατυπώνει ἰδίαν γνώμην ὡς πρὸς τὸν ἐπιδιωκόμενον ὑπὸ τοῦ X βιβλίου σκοπόν. Διὰ τοῦ βιβλίου τούτου ἤθελεν ὁ Εὐκλείδης νὰ καταδείξῃ τὴν συμμετρίαν, ἥτις ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶν-

ται τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα ἀλόγων γραμμῶν. Εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀποδίδεται κατὰ τὸν Εὐ. Σταμάτην ὑπὸ τοῦ Χ βιβλίου ἐξαιρετικὴ σημασία, διότι εἰς αὐτὴν ἀνευρίσκομεν τὰς δύο ἀρχάς, τὰς ὁποίας κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Σύμπαν, δηλαδὴ τὸ μέτρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον.

Ὁ IV τόμος περιλαμβάνει τὰ XI, XII καὶ XIII βιβλία τῶν Στοιχείων, ἅτινα συναπαρτίζουν τὴν περὶ Στερεομετρίας διδασκαλίαν τοῦ Εὐκλείδου. Τὴν κορωνίδα τοῦ ὅλου ἔργου τῶν Στοιχείων ἀποτελεῖ ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ ἐγγραφὴ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ κύβου, τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τοῦ δωδεκαέδρου εἰς τὴν σφαῖραν. Καὶ εἰς τὸν τόμον τοῦτον παρέχεται τὸ ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις αὐτοῦ καὶ ἐπεξηγήσεις. Εἰς τὸ τέλος τοῦ αὐτοῦ τόμου ἐπιτάσσεται περιληπτικὴ ἔκθεσις περὶ τῶν γενομένων ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη διὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν ἀνακοινώσεων ἐπὶ θεμάτων συναφῶν μὲ τὴν μελέτην τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν. Ἐξαιρετικῆς σπουδαιότητος εἶναι καὶ ἡ περὶ τῆς ἱστορίας τοῦ λεγομένου ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ ἀνακοίνωσις, περὶ ἧς θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω. Σημειοῦμεν προσέτι καὶ τὴν ὑπ' ἀριθ. 7 ἀνακοίνωσιν ἀφορῶσαν εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 2 θεώρημα τοῦ XII βιβλίου, δι' οὗ ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων. Τὸ θεώρημα τοῦτο, ὅπερ ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον, ἀκμάσαντα περὶ τὸ 430 π. Χ., χαρακτηρίζεται ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ὡς θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

Λίαν ἀξία προσοχῆς τυγχάνει ἡ περίσκεψις, μὲ τὴν ὁποίαν προχωρεῖ ὁ Εὐ. Σταμάτης εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν πορισμάτων τῶν μελετῶν του. Οὕτω π. χ. ἐν σχέσει μὲ τὸ θεώρημα τὸ ἀποδεικνύον ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ κυκλικοῦ πολυέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο, θεωρεῖ μὲν πιθανὴν τὴν γνώμην τοῦ Baltzer ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζεν αὐτό. Ἐν τούτοις λόγῳ ἐλλείψεως μαρτυριῶν δὲν καταλήγει εἰς ὁριστικὸν βεβαιωτικὸν συμπέρασμα, ἐν ἀναμονῇ νεωτέρων ἐρευνῶν.

Ὁ προσεκτικὸς μελετητὴς τοῦ συνόλου τοῦ ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ἐπιτελεσθέντος διὰ τῆς ἐκδόσεως, μεταφράσεως καὶ ἐπεξηγήσεως τῶν Στοιχείων ἔργου δὲν πρέπει νὰ ἀντιπαρέλθῃ δύο μεγάλας ἀρετὰς τῆς συντελεσθείσης ἐργασίας. Ἡ πρώτη ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ἡ μεταφραστικὴ ἀπόδοσις καὶ αἱ ἐπεξηγηματικαὶ σημειώσεις διασαφηνίζουν πλήρως τὸ ἀρχαῖον κείμενον καὶ προσαρμόζουν τὸ περιεχόμενόν του πρὸς τὴν σύγχρονον ἐκφραστικὴν ὁρολογίαν τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, χωρὶς καὶ νὰ τὸ παραποιοῦν δι' ἀκαίρων καὶ φλυάρων παραφράσεων. Ἡ φιλοδοξία τῆς ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη γενομένης μεταφραστικῆς ἀποδόσεως δὲν εἶναι νὰ ἀντικαταστήσῃ τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἀλλὰ νὰ τὸ καταστήσῃ προσιτὸν εἰς τὸν σύγχρονον ἀναγνώστην. Ἡ μεταφραστικὴ ἀπόδοσις ἀποκτᾷ πλήρες νόημα μόνον ἐν ἀντιβολῇ πρὸς τὸ ἀρχαῖον κείμενον. Ἡ δευτέρα ἀρετὴ τοῦ ἔργου ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ὁ Εὐ. Σταμάτης δὲν περιώρισε τὴν ἀποστολὴν τῆς ἐργασίας του εἰς τὰ ὅρια τῆς στενῶς νοουμένης ἀρχαιογνωσίας. Δὲν ἐξήντλησε τὴν προσπάθειάν του εἰς τὸ νὰ μᾶς παρουσιάσῃ διὰ τῆς μεταφραστικῆς ἀποδόσεως τὸ περιεχόμενον τῶν Στοιχείων. Ἠθέλησε νὰ ἀνατοποθετήσῃ ταῦτα ἐντὸς τῆς ὅλης συναφείας τῶν μαθηματικῶν ἰδεῶν, νὰ καταδείξῃ τὴν θεμελιωτικήν των σημασίαν καὶ νὰ ἐπισημάνῃ τὰ σημεῖα ἐκεῖνα τῆς εὐκλειδείου διδαχῆς, ἅτινα σχετίζονται μὲ ζωτικὰ διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ἐρεύνης καὶ σκέψεως προβλήματα. Διὰ νὰ πεισθῇ περὶ τούτου πᾶς ἀμερόληπτος μελετητής, θὰ παρακολουθήσωμεν τὸν συγγραφέα μας κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν δύο θεμάτων, ἅτινα σήμερον ζωηρῶς συζητοῦνται ὑπὸ τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ἐρεύνης.

Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν δύο τούτων θεμάτων εἶναι τὸ ἐξετάζον ἂν οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ ἦσαν γνωστοὶ εἰς τοὺς ἀρχαίους μαθηματικούς. Ἡ συνήθως ἐπικρατοῦσα ἀντίληψις ἰδίως εἰς μαθηματικοὺς κύκλους, οἵτινες δὲν γνωρίζουν τὰ ἀρχαῖα μαθηματικὰ ἀπὸ τὰ κείμενα, εἶναι ὅτι οἱ μαθηματικοὶ τῆς ἑλληνικῆς ἀρχαιότητος ἐγνώριζον μὲν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη ἤδη ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν πρώτων Πυθαγορείων, δὲν εἶχον ὅμως

φθάσει εἰς τήν σύλληψιν τῆς ἐννοίας τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ὁ Εὐ. Σταμάτης κατόπιν ἐπιμελοῦς καὶ ὀξυδερκοῦς μελέτης τῶν κειμένων ὑποστηρίζει ὅτι ἡ ἀνωτέρω λίαν διαδεδομένη γνώμη τυγχάνει ἐσφαλμένη. Ἐπιχειρήματα ἀποδεικνύοντα ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ δὲν εἶχε διαφύγει τὴν προσοχὴν τῶν μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος παρέχει ὁ Εὐ. Σταμάτης εἰς τὸ εἰσαγωγικὸν σημείωμα τοῦ δευτέρου τόμου, περὶ οὗ ἐγένετο λόγος ἀνωτέρω, καθὼς καὶ εἰς πραγματείαν του ἐκδοθεῖσαν ἐν Ἀθήναις κατὰ τὸ 1950 ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀρχιμήδους κύκλου μέτρησις. Εἰσαγωγή, Ἀρχαῖον κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις». Παραπέμποντες εἰς ἐκτενῆ βιβλιοκρισίαν ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω πραγματείας δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸν δεύτερον τόμον τοῦ «Πλάτωνος» (σελ. 158—164) ὑπομιμνήσκομεν τὴν κυρίαν σκέψιν τοῦ Εὐ. Σταμάτη ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου, ἔχουσαν ὡς ἀκολούθως. Ἐκ τοῦ γ΄ θεωρήματος τῆς μνημονευθείσης πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους ἀπορρέει τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ μέγας οὗτος μαθηματικὸς προετίθετο νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον (π) εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Τὸ αὐτὸ ἐπιχείρημα εὑρίσκομεν καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰσαγωγικοῦ σημειώματος (τόμος ΙΙ τῶν Στοιχ. σελ. 92), ἔνθα ἀναγράφεται· «ὁ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κύκλου εἶναι μεταξὺ τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$. Μεγαλυτέραν προσέγγισιν τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης τιμῆς εὗρεν ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος. Θὰ εἶναι δὲ οὐχὶ λογικὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἐννοοῦν τὸν π ὡς μέγεθος καὶ οὐχὶ ὡς ἀριθμόν». Εἰς τὸ ῥηθὲν εἰσαγωγικὸν σημείωμα τοῦ ΙΙ τόμου ἐνισχύει τὴν ὑπ' αὐτοῦ ὑποστηριζομένην ἀντίληψιν ὁ Εὐ. Σταμάτης διὰ παρατηρήσεων ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις καὶ ἐπὶ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν (Βλ. σχετικὴν πραγματείαν του «Ἀριθμοὶ τέλειοι, πλευρικοί, διαμετρικοί. Ἡ $\sqrt{2}$» δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ 7ον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος» σελ. 289—297). Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι σχηματίζουν μίαν ἄπειρον σειρὰν τιμῶν μὲ αὔξουσαν προσέγγισιν πρὸς τὴν $\sqrt{2}$. Παραθέτει προσέτι ὁ Εὐ. Σταμάτης καὶ τὸ περίφημον μαθηματικὸν χωρίον τῆς «Ἐπινομίδος» (990 D—991 E) «ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής· ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. Μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοίᾳ ταύτῃ, ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες»(1). Τὴν βεβαίωσιν περὶ παραδοχῆς τῶν ἀσυμμέτρων ὡς ἰδιαιτέρου γένους ἀριθμῶν βλέπει ὁ Εὐ. Σταμάτης εἰς δύο σημεῖα, ἤτοι: 1ον εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς γεωμετρίας, περὶ ἧς λέγεται ὅτι εἶναι προφανὴς «τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους (δηλ. τῶν ἀσυμμέτρων) ἐξομοίωσις πρὸς τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν (δηλ. τῶν συμμέτρων)»· «τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν» (Εἰσαγ. σελ. 18). 2ον εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τοῦ περιεχομένου τῆς στερεομετρίας, ἡ διδασκαλία τῆς ὁποίας θὰ κάμῃ τὸν μαθητὴν νὰ μάθῃ «τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνο-

---

1) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ χειρόγραφος παράδοσις τοῦ χωρίου τούτου παρουσιάζει εἴς τινα σημεῖα σημαντικὰς παραλλαγάς. Οὕτω εἰς τὸν τελευταῖον στίχον, εἰς ὃν ὁ Εὐ. Σταμάτης ἀκολουθῶν τὴν ἔκδοσιν τοῦ C. Hermann γράφει «ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοίᾳ ταύτῃ», ὁ Παρισινὸς κῶδιξ καὶ ὁ Βατικανὸς παρέχουν «ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοιοῖ ταύτῃ». Τὴν δοτικὴν «ὁμοίᾳ» ἀντὶ τοῦ «ὁμοιοῖ» παρέχουν ὁ Λαυρεντιανὸς καὶ ὁ δεύτερος Βατικανὸς κῶδιξ. Ἀντὶ τῆς αἰτιατικῆς «στερεομετρίαν», ἣν παρέχει τὸ κείμενον τοῦ Θέωνος καὶ ὁ Λαυρεντιανὸς κῶδιξ, ὁ Παρισινὸς καὶ ὁ Βατικανὸς δίδει «γεωμετρίαν». Ἡ ἐν τῇ σελ. 18 στίχ. 14 γραφὴ «τρεῖς» ἀντὶ «τρὶς» εἶναι τυπογραφικὸν παρόραμα.

μοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοίᾳ ταύτῃ, ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες» δηλ. νὰ μάθῃ τοὺς εἰς τὴν τρίτην δύναμιν καὶ ὁμοίους κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τοὺς στερεοὺς ἀριθμούς, τοὺς δὲ ἀνομοίους πάλιν προκύπτοντας δι' ἄλλου τρόπου ὁμοίου πρὸς τοῦτον (τὸν ὑπολογισμὸν δηλαδὴ τοῦ ἀσυμμέτρου $\sqrt{\alpha}$), τὸν ὁποῖον ὠνόμασαν οἱ εἰδικοὶ στερεομετρίαν (Εἰσαγ. αὐτόθι). Διὰ τῆς παρεχομένης ἑρμηνείας γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ συγγραφεὺς τῆς «Ἐπινομίδος», εἴτε ὁ Πλάτων εἶναι εἴτε ὁ Φίλιππος ὁ Ὀποῦντιος, ἔχων ὑπ' ὄψει τὰς γενομένας πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ ἐργασίας, ὡς καὶ τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις τοῦ Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου περὶ τῆς $\sqrt{3} \ldots \sqrt{17}$, δέχεται ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναχθῇ ἡ γεωμετρία εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ νὰ κατασκευασθῇ μία ἀριθμητικὴ σειρὰ τομῶν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἠδύναντο νὰ εὕρουν θέσιν καὶ οἱ ἀσύμμετροι ὡς ὅρια, πρὸς ἃ συγκλίνουν συνεχῆ κλάσματα.

Πρὸς ἐπίρρωσιν τῶν γνωμῶν του προσάγει ὁ Εὐ Σταμάτης καὶ ἐκ τοῦ Ἀριστοτέλους («Μετὰ τὰ φυσικὰ» 1021) τὸ χωρίον «τὸ δὲ ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται» (1). Ἠδύνατο προσέτι νὰ ἐπικαλεσθῇ καὶ τὴν γνώμην τοῦ διασήμου Ἄγγλου πλατωνιστοῦ A. E. Taylor, ὅστις εἰς τὸ ἔργον του «Plato, the man and his work» σελ. 501 καὶ 504 τῆς πέμπτης ἐκδόσεως (1948) ὑποστηρίζει τὴν γνώμην ὅτι τὸ παρατεθὲν χωρίον τῆς «Ἐπινομίδος», ὅπερ κρίνεται παρ' αὐτοῦ ὡς «τὸ σπουδαιότατον ἐξ ὅλου τοῦ σώματος τῶν πλατωνικῶν συγγραφῶν μαθηματικὸν χωρίον», διατυπώνει τὸ ἐπαναστατικὸν αἴτημα οἱ τετραγωνικοὶ καὶ κυβικοὶ ἀσύμμετροι νὰ ἀναγνωρισθοῦν ὡς ἀριθμοί, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν παραδεδομένην ἀντίληψιν ὅτι ὑπάρχουν μόνον ἀσύμμετρα μεγέθη (μήκη, ἐμβαδὰ καὶ ὄγκοι) ὄχι ὅμως καὶ ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Ὁ Taylor ἔχει ῥητῶς προσχωρήσει εἰς τὴν ἀντίληψιν ὅτι ὁ Πλάτων ἠθέλησε νὰ ἐπιζεύξῃ τὸ χάσμα μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν καὶ μεγεθῶν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς «ἀορίστου δυάδος», τὴν ὁποίαν ἐνόει, καθ' ὃν ἀκριβῶς τρόπον νοεῖ ἡ νεωτέρα μαθηματικὴ τὴν ὑπὸ τοῦ G. Cantor κατασκευὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἡ ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ὑποστηριζομένη ἀντίληψις, ἣν ἔχει ὑποστηρίξει οὐ μόνον ὁ Taylor, ἀλλὰ καὶ ὁ M. Zacharias «Elementargeometrie der Ebene und des Raumes», δὲν ἔχει γίνει γενικῶς εἰσέτι ἀποδεκτὴ ἐκ μέρους τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν. Αἰτία τῆς μὴ ἀποδοχῆς εἶναι ἡ ἔλλειψις ἀκριβοῦς γνώσεως τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν μαθηματικῶν καὶ αἱ δημώδεις περὶ τοῦ συζητουμένου θέματος ἀντιλήψεις, αἱ προπαγανδισθεῖσαι ἀπὸ τὸν Γερμανὸν ἱστορικοφιλόσοφον Oswald Spengler διὰ τοῦ συγγράμματός του «Der Untergang des Abendlandes» (Ἡ καταστροφὴ τῆς Ἑσπερίας). Βασικὴ θέσις, ἣν πειρᾶται ὁ Γερμανὸς οὗτος φιλόσοφος νὰ ἀποδείξῃ, εἶναι ὅτι ἕκαστος πολιτισμὸς ἀποτελεῖ βιολογικὸν προϊὸν μὲ ἰδικήν του ψυχὴν καὶ ἰδικόν του πνεῦμα, μὴ συμπῖπτον μὲ τὸ πνεῦμα καὶ τὴν ψυχὴν τῶν λοιπῶν πολιτισμῶν. Διὰ νὰ δικαιολογήσῃ δὲ τὴν θεμελιώδη ταύτην διὰ τὸ σύστημά του θεωρίαν, ὑπεστήριξεν ὅτι εἰς τὸ πεδίον τῆς μαθηματικῆς σκέψεως ὑφίσταται ἔκδηλος διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ καὶ νεωτέρου εὐρωπαϊκοῦ πολιτισμοῦ. Ὡς ἀποδεικτικὰ τεκμήρια πιστοποιοῦντα τὴν διαφορὰν ἠθέλησε νὰ προσαγάγῃ ὁ Spengler δύο ἰσχυρισμούς. Ὑπεστήριξε 1ον Ὅτι οἱ Ἕλληνες μαθηματικοὶ δὲν εἶχον λόγῳ τῆς προσιδιαζούσης εἰς τὸν πολιτισμόν των νοοτροπίας φθάσει νὰ συλλάβουν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ. 2ον Ὅτι ἡ νοοτροπία τοῦ ἀρχαίου κόσμου ἀπεχθάνεται τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν τοῦ νεωτέρου κόσμου. Κατ' ἀρχὰς αἱ ὑποστηριχθεῖσαι ὑπὸ τοῦ ῥηθέντος φιλοσόφου θέσεις ἐνεποίησαν ἐντύπωσιν, ἰδίως εἰς τοὺς μὴ ἐπιστημονικοὺς κύκλους. Μὲ τὴν πάροδον τοῦ καιροῦ ὅμως ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα ἔδειξεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ ἰσχυρισμοί του ἦσαν ἀντιλήψεις διατυπωθεῖσαι ἐκ τῶν προτέρων καὶ οὐχὶ συμπεράσματα προκύπτοντα ἀπὸ τὴν βαθεῖαν μελέτην τῶν πραγμάτων. Ἀρκεῖ νὰ ὑπομνησθῇ ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου ἴσταται εἰς τὸ κατώφλιον τῆς ἑλληνικῆς φιλοσοφίας προβληθεῖσα ἀπὸ τὸν Ἀναξίμανδρον.

---

1) Περὶ τοῦ ἐν λόγῳ χωρίου βλέπε «Πλάτωνα», Τόμ. Β' (1950), σελ. 103.

Τὸ δεύτερον ἐκ τῶν λίαν ἐπικαίρων διὰ τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν ἔρευναν θεμάτων, εἰς τὴν μελέτην τοῦ ὁποίου ἔχει ἐγκύψει ὁ Εὐ. Σταμάτης, εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ (Raisonnement par recurrence κατὰ H. Poincaré, βλ. ἑλληνικὴν μετάφρασιν ὑπὸ Π. Ζερβοῦ τοῦ ἔργου του «La science et l'hypothèse» σελ. 14) ἢ τῆς μαθηματικῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς. Εἰς τὸ 9ον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος» (σελ. 116—119), ὅπερ ἐξεδόθη κατὰ τὸ πρῶτον ἑξάμηνον τοῦ ἔτους 1953, ἐδημοσίευσεν ὁ Εὐ. Σταμάτης πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ». Εἰς τὴν ἐργασίαν του ταύτην ἀνεκοίνωσε παρατήρησίν του, τὴν ὁποίαν εἶχε κάμει λαβὼν ἀφορμὴν ἀπὸ δημοσίευμα γενόμενον κατὰ τὸ 1910 ὑπὸ τοῦ G. Vacca ἐν σχέσει μὲ τὰ 8 καὶ 9 θεωρήματα τοῦ IX βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὴν ῥηθεῖσαν πραγματείαν του ἀνέφερεν ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐφαρμόζει τὴν μέθοδον τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ καὶ εἰς πλεῖστα ἄλλα θεωρήματα τῶν Στοιχείων, τὸν ἰσχυρισμόν του δὲ τοῦτον ἀπεδείκνυε προσάγων τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 20 θεωρήματος τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων. Εἰς τὸν πρόλογον δὲ τοῦ ἐκδοθέντος II τόμου τῶν Στοιχείων προσέθεσεν ὅτι «ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἐχρησιμοποιήθη εἰς θεωρήματα τῶν ἀναλογιῶν καὶ εἰς τὰ θεωρήματα 3, 14, 27 καὶ 35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 8, 9, καὶ 20 τοῦ IX». Συνεπέραινε δὲ ὅτι «εἶναι ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως, ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ αὕτη μέθοδος εἶναι ἑλληνικὴ καὶ δὴ καὶ Πυθαγορικῆς προελεύσεως, ἐφ' ὅσον τὰ συναφῆ θεωρήματα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἔνθα κυρίως αὕτη χρησιμοποιεῖται, θεωροῦνται εὑρήματα τῶν Πυθαγορείων καὶ τοῦ Θεαιτήτου. Ἄλλο τεκμήριον ὅτι ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ εἶναι ἑλληνική, εἶναι χωρίον τι τῶν «Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων» τοῦ Ἀριστοτέλους, ἔνθα οὗτος γράφει· «τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Μία δηλαδὴ μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν αὕτη ἀναφέρεται (73 b 32)». Ἡ παρατήρησις αὕτη, ἥτις ἀνεκοινώθη καὶ διὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 11-6-53 προεκάλεσεν ἔκπληξιν εἰς τοὺς παρ' ἡμῖν κύκλους, οἵτινες ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μὴ ἐξηκριβωμένου ἰσχυρισμοῦ τοῦ G. Vacca πιστεύουν ὅτι ὁ τὸ πρῶτον χρησιμοποιήσας τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἰς τὰ μαθηματικὰ ἦτο ὁ Francesco Maurolico. Πράγματι ὁ G. Vacca οὐχὶ ἐμβριθῶς ἐξετάσας τὰ πράγματα ἔχει ἰσχυρισθῇ ὅτι ὁ Maurolico ἐνσυνειδήτως ἐχρησιμοποίησε τὴν περὶ ἧς πρόκειται μέθοδον καὶ ὅτι τὴν ἐχαρακτήρισεν ὡς νέαν μέθοδον. Τὴν παρατήρησιν ὅμως τοῦ Εὐ. Σταμάτη ἦλθε νὰ ἐπιβεβαιώσῃ ἡ ληφθεῖσα εἰς Ἀθήνας μετὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τοῦ Εὐ. Σταμάτη πραγματεία τοῦ Ὁλλανδοῦ μαθηματικοῦ Hans Freudenthal «Zur Geschichte der vollständigen Induction» (Ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς). Εἰς ταύτην παρέχεται πλήρης ἐξιστόρησις ἐν σχέσει μὲ τὴν ὑπὸ συζήτησιν μέθοδον καὶ ἐπανορθοῦνται ἀνακρίβειαι, εἰς ἃς εἶχεν ὑποπέσει ὁ G. Vacca. Κατὰ τὸν H. Freudenthal δὲν εἶναι ὁ Maurolico ὁ πρῶτος χρησιμοποιήσας τὴν ἐν λόγῳ μέθοδον. Ἀνευρίσκει παρ' αὐτῷ ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς δύο γνησίας καὶ μίαν ἀμφισβητήσιμον περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως τελείας ἐπαγωγῆς. Διαπιστώνει ὅμως ὅτι καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις πρόκειται περὶ λίαν στοιχειώδους χρησιμοποιήσεως τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου (σελ. 28). Ἐπίσης καταδεικνύει δι' ἀναδρομῆς εἰς τὸ κείμενον τοῦ Maurolico ὅτι οὗτος δὲν ὁμιλεῖ περὶ νέας μεθόδου ἀλλὰ περὶ εὐκολωτέρας ἀποδεικτικῆς ὁδοῦ (faciliori via) καὶ ὅτι ἐκφράζει τὴν πρόθεσιν ὄχι νὰ ἀναμορφώσῃ τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν, ἀλλὰ νὰ συμπληρώσῃ παραλείψεις αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν διερεύνησιν τῶν τριγώνων, πενταγώνων, ἑξαγώνων καὶ ἑπταγώνων ἀριθμῶν. Ἀνατρέχων εἰς τὴν ἀρχαιότητα ὁ H. Freudenthal πιστοποιεῖ τὴν χρῆσιν τῆς ὑπὸ συζήτησιν μεθόδου εἴς τινα θεωρήματα τοῦ IX βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, ὅπως εἰς τὸ 8 καὶ 20. Δὲν πρόκειται βεβαίως περὶ συστηματικῆς χρησιμοποιήσεως καὶ διατυπώσεως τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου. Ἡ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ὅμως χρησιμοποίησίς της εἶναι κατὰ τὸν Ὁλλανδὸν μαθηματικὸν ὀλιγώτερον στοιχειώδης ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐκ μέρους τοῦ Maurolico χρῆσιν. Ἀνατρέχων

ἔτι παλαιότερον ἀναφέρει ὁ H. Freudenthal, ἀκολουθῶν ὑπόδειξιν τοῦ B. L. v. d. Waerden, ὡς παράδειγμα τελείας ἐπαγωγῆς τὴν ἀκόλουθον σειρὰν συλλογισμῶν τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου, ἣν μᾶς διέσωσεν ὁ σχολιαστὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Σιμπλίκιος εἰς τὰ εἰς τὴν «Φυσικὴν ἀκρόασιν» σχόλιά του 140, 3: «Προδείξας γὰρ ὅτι εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη, ἐπάγει, εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. Καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. Ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν». (Δηλ. ἀφοῦ προηγουμένως ἀπέδειξεν ὅτι ἐὰν τὸ ὂν δὲν ἔχῃ μέγεθος, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ὕπαρξιν, προχωρεῖ εἰς τοὺς ἀκολούθους συλλογισμούς: ἐὰν ὅμως ἔχῃ ὕπαρξιν, εἶναι ἀνάγκη ἕκαστον μέρος αὐτοῦ νὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πάχος καὶ ἀπόστασιν τὸ ἓν μέρος ἀπὸ τὸ ἄλλο. Καὶ περὶ τοῦ προηγουμένως κειμένου μέρους ἰσχύει τὸ αὐτό· διότι καὶ ἐκεῖνο θὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πρὸ αὐτοῦ θὰ κεῖται ἄλλο· διότι τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τὸ εἴπῃ τις μίαν μόνην φορὰν καὶ νὰ ἰσχύῃ γενικῶς). Ὡς παράδειγμα δὲ ἀρίστης μορφῆς, «optimae formae», χρησιμοποιοῦν τὴν δι' ἐπαγωγῆς μέθοδον, χαρακτηρίζει ὁ H. Freudenthal ἀποδείξεις σχετικὰς μὲ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς προσαγομένας ὑπὸ τοῦ Θέωνος, τοῦ Πρόκλου καὶ Ἰαμβλίχου, αἵτινες ἔχουν τὴν πηγήν των εἰς τὰς περὶ ἀριθμῶν διδασκαλίας τῶν Πυθαγορείων. Ἐφ' ὅσον κατὰ ταῦτα κατέχομεν τεκμήρια πιστοποιοῦντα ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου ἀνάγεται εἰς τοὺς χρόνους τῶν Προσωκρατικῶν, δὲν εἶναι εὔλογον νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης ἠγνόει τὴν χρησιμοποίησίν της. Ἐν προκειμένῳ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης εἰς χωρία τινὰ τῶν συγγραμμάτων του χρησιμοποιεῖ τὰς ἐκφράσεις «πολλάκις ἢ ἀπειράκις» 407 a 4, «πολλάκις μᾶλλον δ' ἀπειράκις» 1329 b 27, «οὐχ ἅπαξ οὐδὲ δὶς ἀλλ' ἀπειράκις» 270 b 19, 339 b 29, ὅταν πρόκειται νὰ δηλωθῇ ἰδιότης ἀποδιδομένη ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξαιρέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν ὑπ' αὐτὴν δυναμένων νὰ ὑπαχθοῦν περιπτώσεων. Ὅθεν ὀρθῶς ὁ Εὐ. Σταμάτης συνεσχέτισε τὸ ἀνωτέρω παρατεθὲν χωρίον τῶν «Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων» (73 b, 32) πρὸς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Νοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ ὅτι δὲν πρέπει νὰ σκεφθῶμεν ὅτι τὸ ῥηθὲν ἀριστοτελικὸν χωρίον περιέχει ἐν ἑαυτῷ τὴν λεκτικὴν διατύπωσιν τῆς μεθόδου τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ. Μία ἑρμηνεία, ἥτις θὰ ἤθελε νὰ ἰσχυρισθῇ ὅτι ὁ ἀριστοτελικὸς ὁρισμὸς συσχετίζει μίαν ἐπὶ ἑνὸς «πρώτου» δεδομένου ἀπόδειξιν πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ἐπὶ ἑνὸς ἄλλου «τυχόντος», καὶ βεβιασμένη θὰ ἦτο καὶ θὰ ἀπετέλει διαστροφὴν τῆς σημασίας, ὑφ' ἣν δέον νὰ νοηθῇ ἡ γενικὴ «πρώτου». Ἡ σημασία, εἰς ἣν λαμβάνεται τὸ ἐπίθετον τοῦτο ἐνταῦθα, διασαφηνίζεται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους δι' ἐπεξηγήσεων, ἃς ἐν συνεχείᾳ παραθέτει. Ἐὰν λάβωμεν, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης, τὴν ἰδιότητα ὅτι τὸ τρίγωνον ἔχει δύο ὀρθάς, δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι πρωταρχικῶς ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης αὕτη ἐπὶ τῆς ἐννοίας (ἐνδ. τάξεως) τοῦ σχήματος γενικῶς ἢ ἐπὶ τῆς ἐννοίας (ἐνδ. τάξεως) τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Εἰς πρωταρχικὴν σημασίαν ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης αὕτη μόνον ἐπὶ τῆς γενικῶς λαμβανομένης ἐννοίας (τάξεως) τοῦ τριγώνου. Τὴν ἰδιότητα ταύτην δὲν ἔχει κατὰ πρωταρχικότητα ἡ ἔννοια (τάξις) τοῦ ἰσοσκελοῦς, ἀλλὰ ἡ ἔννοια (τάξις) τοῦ τριγώνου λαμβανομένη ἄνευ ἐπιδιορισμοῦ. Διὰ τοῦτο, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι 73 b 39 «ὃ τοίνυν τὸ τυχὸν πρῶτον δείκνυται δύο ὀρθὰς ἔχον τούτῳ πρώτῳ ὑπάρχει καθόλου» (δηλ. ὅταν ἀποδεικνύεται ὡς πρὸς οἱανδήποτε τυχαίως λαμβανομένην περίπτωσιν, ὅτι προσιδιάζει πρωταρχικῶς εἰς ταύτην ἡ ἰδιότης νὰ ἔχῃ τὰς γωνίας της ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς, τότε πρόκειται περὶ πρωταρχικῶς ἀποδεικνυομένης καθολικῆς ἰδιότητος). Ἁπλούστερον ἐκφράζοντες τὰ πράγματα δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ περιεχόμενον τῆς ἀριστοτελικῆς ἀποφάνσεως ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰδιότης τις ἀποδεικνύεται διὰ μίαν τυχαίως ληφθεῖσαν περίπτωσιν τάξεώς τινος, εἰς ἣν κατὰ πρωταρχικὴν σχέσιν ἡ ληφθεῖσα περίπτωσις ὑπάγεται, τότε αὕτη δύναται νὰ ἀποδειχθῇ διὰ πᾶσαν περίπτωσιν ἀνήκουσαν εἰς τὴν τάξιν αὐτήν.

Εἶναι ἀφ' ἑαυτοῦ φανερὸν ὅτι ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμός, καθ' ὃν βαδίζομεν ἀπὸ τὸ n πρὸς τὸ n+1, εὑρίσκεται εἰς σχέσιν πορίσματος πρὸς τὴν ἀριστοτελικὴν ἀπόφανσιν, συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν ὁρμώμενοι ἀπὸ τυχοῦσαν περίπτωσιν ἀναγόμεθα εἰς οἱανδήποτε καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις. Ὅπως καὶ προκειμένου περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δὲν δυνάμεθα νὰ ἀπαιτῶμεν ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους μαθηματικοὺς ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας των, οὕτω δὲν πρέπει νὰ ἀναζητῶμεν εἰς τὴν ἀρχαιότητα ἀπηκριβωμένην διατύπωσιν τῆς ὑπὸ συζήτησιν μεθόδου, ἀλλὰ μόνον τὴν χρῆσίν της. Μία τοιαύτη συνειδητοποιημένη διατύπωσις δὲν ἀπαντᾶται οὔτε εἰς τοὺς παλαιοὺς οὔτε εἰς τὸν Lewi Ben Gerson (1288—1344) οὔτε εἰς τὸν Maurolico (1). Ὅπως ἔδειξεν ὁ H. Freudenthal, μόνον ὁ A. G. Kästner περὶ τὰ τέλη τοῦ 18ου αἰῶνος ἐπροχώρησεν εἰς μίαν τοιαύτην συνειδητοποίησιν.

Ἐκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω σχετικῶς μὲ τὴν μελέτην ἐκ μέρους τοῦ Εὐ. Σταμάτη τῶν δύο σημειωθέντων ζητημάτων, καταφαίνεται ὅτι ἡ ἀσχολία του μὲ τὰ ἀρχαῖα μαθηματικὰ ὑπερβαίνει τὰ ἀρχαιογνωστικὰ πλαίσια καὶ τυγχάνει λίαν σημαντικὴ διὰ τὴν διευκρίνησιν θεμάτων ἀμέσως ἐνδιαφερόντων τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν σκέψιν. Οἱ ἀναγνῶσται τοῦ «Πλάτωνος», ἔνθα ἔχουν ἐπανειλημμένως δημοσιευθῆ ἐργασίαι του, ἔλαβον πολλάκις τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐκτιμήσουν ἐξ ἰδίας μελέτης τὴν ἀξίαν των. Εὐχαρίστως διαπιστοῦμεν ὅτι λίαν εὐμενοῦς ὑποδοχῆς ἔτυχον αἱ ἐργασίαι του καὶ εἰς τοὺς κύκλους τῶν γερμανῶν μαθηματικῶν. Εἰς τὸ 6ον τεῦχος τοῦ Ἰουνίου τοῦ 1958 τῆς «Deutsche Literaturzeitung» τῆς ἐκδιδομένης κατὰ παραγγελίαν τῶν Ἀκαδημιῶν τῶν Ἐπιστημῶν ἐδημοσίευσεν ὁ Joseph E. Hofmann λίαν εὐμενῆ βιβλιοκρισίαν διὰ τοὺς τέσσαρας τόμους τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ τέλος τῆς ὁποίας ἀναγράφονται τὰ ἀκόλουθα: «Εἰς τὴν ἔξοχον ἀπόδοσιν τοῦ κειμένου ἔχουν προστεθῆ αὐτοτελεῖς συμπληρώσεις τοῦ συγγραφέως, οὕτως ὥστε νὰ περιμένωμεν μὲ προσοχὴν καὶ ἄλλας ἐκ μέρους τοῦ συγγραφέως συμβολὰς εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν». Εἴμεθα βέβαιοι ὅτι καὶ εἰς τὴν χώραν μας ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων καὶ αἱ λοιπαὶ πρωτότυποι ἐργασίαι τοῦ κ. Σταμάτη θὰ τύχουν ἀναλόγου ὑποδοχῆς καὶ θὰ συντελέσουν διὰ νὰ ἀνασυνδεθῆ καὶ ἡ νεωτέρα ἑλληνικὴ μαθηματικὴ σκέψις μὲ τὴν ἀρχαίαν παράδοσιν. Ἐπίσης ἐλπίζομεν ὅτι θὰ συνεχίσῃ τὴν διὰ τὴν ἔκδοσιν τῶν συγγραμμάτων τῶν λοιπῶν μεγάλων Ἑλλήνων μαθηματικῶν ἀπὸ ἐτῶν ἀρξαμένην ἐργασίαν του. Ὡς ἄμεσον συμπλήρωμα τῆς ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων θὰ ἔπρεπε νὰ ἐκδοθοῦν τὰ εἰς αὐτὰ Σχόλια τοῦ Πρόκλου, τῶν ὁποίων τὸ κείμενον, ἐκδοθὲν κατὰ τὸ 1873 ὑπὸ τοῦ G. Friedlein, οὐδένα σήμερον ἱκανοποιεῖ.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

***

**ΒΑΛΤΕΡ ΧΩΛΜΠΡΟΥΓΓΕΡ.**—Ἐπὶ τῆς ἐτυμολογίας τῶν ἀριθμητικῶν τρεῖς, τέσσαρες καὶ πέντε. Ἐπετηρὶς τοῦ ἐν Ἰνσμπρουκ Γυμνασίου 1957]58. [WALTER HOHLBRUGGER, Zur Etymologie der Zahlwörter drei, vier und fünf. Jahresbericht 1957—58, Bundesgymnasium . . . in Innsbruck].

Εἰς προηγούμενον τεῦχος τοῦ Πλάτωνος [Ἔτ. Θ' (1957), τ. 17] εἴχομεν τὴν εὐκαιρίαν, ὅπως κρίνωμεν πραγματείαν τοῦ καθηγητοῦ κ. Χώλμπροῦγγερ ἐπὶ τῆς ἐτυμολογίας τῶν

1) Ὅπως σημειώνει ὁ Εὐ. Σταμάτης (Τομ. IV σελ. 273) ὑπὸ τὸ ἐξιταλισμένον ὄνομα Maurolico ὑποκρύπτεται τὸ ἑλληνικὸν Μαυρόλυκος. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἐγεννήθη ἐν Μεσσήνῃ τῆς Ἰταλίας τῷ 1494 ἐκ γονέων Ἑλλήνων καταφυγόντων ἐκεῖ ἐκ Κωνσταντινουπόλεως. Ἠσπάσθη τὸν καθολικισμὸν καὶ ἐγένετο κληρικός. Ἀπέθανε κατὰ τὸ 1575. Τὸ ἔργον του «Arithmeticorum libri duo» ἐγράφη κατὰ τὸ ἔτος 1557, ἐδημοσιεύθη δὲ ἐν Βενετίᾳ κατὰ τὸ ἔτος 1575 καὶ περιελήφθη εἰς τὰ «Opuscula mathematica».

ἀριθμητικῶν ὁκτὼ καὶ ἐννέα, δημοσιευθεῖσαν ἐν τῇ Ἐπετηρίδι τοῦ 1955—56 τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω Γυμνασίου. Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν αὐτοῦ ὁ κ. Χώλμπροὺγγερ συνεχίζων τὴν προσπάθειάν του προβαίνει εἰς τὴν ἐτυμολογίαν τῶν ἀριθμητικῶν τρεῖς, τέσσαρες καὶ πέντε. Ἡ θεμελιώδης σκέψις, ἐφ' ἧς στηρίζεται ὁ συγγραφεύς, εἶναι ὅτι πρωτόγονοι λαοὶ σχηματίζουσι νέα ἀριθμητικὰ διὰ προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως ἢ διὰ τῆς κατὰ σειρὰν παραθέσεως λέξεων, αἱ ὁποῖαι δηλοῦσι μικροὺς ἀριθμούς. Ἐὰν δεχθῶμεν, γράφει ὁ συγγραφεύς, ὅτι ὁ σχηματισμὸς τοῦ ἀριθμητικοῦ δύο προηγήθη τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ τρεῖς, πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ λέξις τρεῖς προέκυψεν ἐκ τῆς προσθέσεως τῆς λέξεως εἷς, εἰς τὴν λέξιν δύο. Κατὰ ταῦτα, ἡ ἀρχικὴ προέλευσις τῆς λέξεως τρεῖς προέκυψεν ἐκ τῆς ἀριθμήσεως τῶν δακτύλων ὡς ἑξῆς :

(δύω)—τε—σφρ—εἷς=(δύω) καὶ—ἀκόμη—εἷς.

Ὁ συγγραφεὺς ὑπογραμμίζει ὅτι τὸ συμπλεκτικὸν μόριον τε ἀπαντᾷ εἰς τὴν σανσκριτικὴν ὡς kue, ἐνῷ εἰς τὴν λατινικὴν ἀπαντᾷ τοῦτο ὡς que ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ καί, δηλαδὴ τῆς προσθέσεως. Τὸ φωνητικὸν μόριον σφρ εἶναι παλαιότατον καὶ ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ ἤχου—ψόφου ῥέοντος ὕδατος. Τὸ σῖγμα τοῦ μορίου τούτου ὑποδηλοῖ ψόφον, ψίθυρον, ἐνῷ τὸ φρ ὑποδηλοῖ τὴν ῥοὴν καὶ δὴ καὶ τὴν συνάφειαν καὶ συνέχειαν τοῦ ῥέοντος ὕδατος, δηλ. συνεχῆ πρόσθεσιν. Ἐκ τῶν ἐννοιῶν τούτων συνάγεται ἡ προσθετικὴ ἔννοια τοῦ σφρ.

Πρὸς ἑρμηνείαν τῆς ἐννοίας ταύτης τοῦ σφρ ἐπικαλεῖται προσέτι ὁ συγ. τὴν σημασίαν τῶν λέξεων ἄρα, ἀραρίσκειν=προσθέτειν, ἀροῦν=κατὰ σειρὰν θέτειν καὶ τὴν ἐτυμολογίαν τῆς λέξεως ἀριθμεῖν [ἄρα--θεμ. (θέμις, τίθημι)].

Ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ σχηματισμοῦ τῆς λέξεως τε—σφρ—εἷς προῆλθον σὺν τῷ χρόνῳ αἱ λέξεις τεσ f ρεῖς—τερρεῖς—τρεῖς.

Ἀφοῦ κατὰ τὸν προσθετικὸν τρόπον ἐσχηματίσθη ἡ λέξις τρεῖς, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ ἔχῃ σχηματισθῇ καὶ ἡ λέξις τέσσαρες διὰ προσθέσεως τοῦ εἷς εἰς τὴν λέξιν τρεῖς. Θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα ἡ ἀρχικὴ διαδοχὴ τῶν συλλαβῶν ἡ ἑξῆς :

[δύω]—τε—σφρ—εἷς—τέ—τε—σφρ—εἷς—τε.

Τὸ παρ' Ὁμήρῳ ἁπάντων αἰολικὸν πέ—συρες (πίσυρες) ἀφίνει κατὰ τὸν συγ. νὰ διαφανῇ ἡ ἀρχικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητικοῦ τούτου (τοῦ 4).

Ἡ λέξις διὰ τὸ ἀριθμητικὸν πέντε προῆλθε κατὰ τὸν κ. Χώλμπροὺγγερ ἐκ τῆς ἐπιδείξεως ὅλων τῶν δακτύλων τῆς χειρός· προϋποτίθεται ὅτι, ἀφοῦ ἡ ἀρίθμησις ἐγίνετο ἀρχικῶς διὰ τῶν δακτύλων καὶ ἐκ τῆς ἐπιδείξεως τούτων διεμορφώθησαν τὰ ἀριθμητικὰ ἕν, δύο, τρεῖς, τέσσαρες, διὰ νὰ διαπλασθῇ ἡ λέξις ἡ δηλοῦσα ἀριθμὸν κατὰ μίαν μονάδα ἀνώτερον τοῦ τέσσαρα, ἐπεδεικνύετο ὁλόκληρος ἡ παλάμη· ἐκ τούτου ἐνοοῦντο πάντες οἱ δάκτυλοι τῆς χειρός, πᾶν τὸ ἐν τῇ χειρί. Τὸ α τῆς λέξεως πᾶν ἦτο ἀρχικῶς βραχύ, ὡς δύναται νὰ εἰκασθῇ ἐκ τῶν διαφόρων ἑλληνικῶν διαλέκτων [Πίνδαρος fr. 140d Sn., Πίνδαρος O. II 85, Σαπφώ, Oxy. 1787, fr. 311, 5, τὸ πάν].

Διὰ προσθέσεως τοῦ συμπλεκτικοῦ τε εἰς τὴν λέξιν πᾶν ἐγένετο ἡ λέξις πᾶν—τε καὶ διὰ μετατροπῆς τοῦ ἀρχικῶς βραχέος α, τοῦ πᾶν, ἐγένετο ἡ λέξις πέν—τε, δηλοῦσα ὅλους τοὺς δακτύλους τῆς χειρός. Ἐπισημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι τὸ πέντε εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἰνδικὴν ἐλέγετο pan - ca (Γ. Χατζηδάκις). Εἶναι προφανής, φρονοῦμεν, ἡ ὁμοιότης τοῦ πέντε καὶ τοῦ pan - ca.

Εἰς τὸ τέλος τῆς πραγματείας παρατίθεται πλουσία βιβλιογραφία, ἥτις θὰ εἶναι λίαν εὐπρόσδεκτος εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ ἀσχοληθῶσι περὶ τὴν ἐτυμολογίαν τῶν ἀριθμητικῶν τρεῖς, τέσσαρες καὶ πέντε.

Ἡ πραγματεία τοῦ κ. Χώλμπροὺγγερ παρέχει πολὺ ἐνδιαφέροντα στοιχεῖα ἐπὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν τρεῖς, τέσσαρες, πέντε. Ὑπομιμνήσκομεν ἐνταῦθα παλαιὰν ἐτυμολογίαν ἀναγραφομένην εἰς τὸ Etymologicum Magnum (1273) Oxonii, καθ' ἣν :

«Τρεῖς : Πᾶς ἀριθμὸς ἐντὸς τῶν χιλίων θέλει ἔχειν στοιχεῖον, εἴτε φωνῆεν, εἴτε

σύμφωνον, ἐκ τῶν ἐντὸς τῆς δεκάδος· οἷον τὸ εἷς ἔχει τὸ ε, τὸ δύο ἔχει τὸ δ, τὸ πεντήκοντα ἔχει τὸ ε, α, η. Τὸ ὀκτὼ δοκεῖ ἀντικεῖσθαι, ὅμως ὀγδοὰς λέγουσι γὰρ οἱ φιλόσοφοι ἀγωδύοὰς=ἄγω δύο τετράδας».

Ἡ σκέψις τοῦ συγγραφέως ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν δύο ἐσχηματίσθη πρὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ τρεῖς καὶ ἡ λέξις τρεῖς ἐσχηματίσθη πρὸ τῆς λέξεως τέσσαρες ἐνισχύεται καὶ ἐκ χωρίου, τὸ ὁποῖον ἀπαντῶμεν εἰς τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (Theonis Smyrnaei, Philosophi Platonici, ed. E. Hiller, p. 100), ἔνθα ἀναγιγνώσκομεν:

πρώτη δὲ αὔξη καὶ μεταβολὴ ἐκ μονάδος
εἰς δυάδα κατὰ διπλασιασμὸν τῆς μονάδος . . .
ἡ δὲ δυὰς συνελθοῦσα τῇ μονάδι γίνεται τριάς . . .

Καίτοι ἡ ἐτυμολογία τῶν ἀριθμητικῶν λέξεων εἶναι δυσκολωτάτη καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ καταλήξωμεν εἰς βέβαια ἐν σχέσει πρὸς αὐτὴν συμπεράσματα, ἐν τούτοις, φρονοῦμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς παρέχει ἀξίας νὰ συζητηθοῦν ἀπόψεις διὰ τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας αὐτοῦ καὶ εὐχόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὸ μέλλον εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ἀναγνώσωμεν καὶ ἄλλας πραγματείας ἐκ τῆς χειρὸς τοῦ κ. Χώλμπροῦγερ.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**Ι. ΘΩΜΟΠΟΥΛΟΥ**.—Τὰ τοπωνύμιά μας, ἡ ἀξία τους καὶ τὰ προβλήματά τους, σελ. 80, Θεσσαλονίκη 1958.

Διὰ βραχείας ἀλλ' εὐστόχου ἐπισκοπήσεως καθορίζει τὰς σχέσεις τῆς Ὀνοματολογίας πρὸς τὰς συγγενεῖς ἐπιστήμας καὶ ἀδρομερῶς ἐκθέτει τὰς πολυτίμους ὑπηρεσίας, τὰς ὁποίας προσφέρει ἡ ἐπιστήμη αὕτη εἰς τὰς συγγενεῖς μαθήσεις. Μετὰ σύντομον ἀλλὰ λίαν κατατοπιστικὴν θεώρησιν τῶν ἐν τῇ περιοχῇ τῆς ἐπιστήμης ταύτης προσπαθειῶν καὶ τῶν ἀνὰ τὰς διαφόρους χώρας τῆς Εὐρώπης καὶ Ἀμερικῆς ἐπιτευγμάτων ἐπιχειρεῖ ἐνδιαφέρουσαν ἀναδρομὴν εἰς τὰς διὰ τῆς Ἑλληνικῆς γραμματείας παραδοθείσας ὀνοματολογικὰς ἀναζητήσεις. Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφ. μεθοδικῶς ἀναλύεται ἡ σημασία τῶν τοπωνυμίων διὰ τὴν μελέτην ἰδίως τῆς Ἱστορίας καὶ Λαογραφίας καὶ καθορίζονται οἱ τοπωνυμικοὶ παράγοντες. Ἐν κεφ. ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἱστορικὰ καὶ γλωσσικὰ στρώματα τῶν τοπωνυμίων μας» (σ. 34—43) ὁ συγγραφεὺς διὰ χαρακτηριστικῶν παραδειγμάτων καὶ ἐπιτυχεστάτων παρατηρήσεων ἐξετάζει τὰ τῆς προελεύσεως καὶ ἡλικίας τῶν ἑλληνικῶν τοπωνυμίων προβαίνων εἰς τολμηρὰς ἴσως, ἀλλὰ γονίμους εἰκασίας περὶ τῶν καταλήξεων τῶν προϊστορικῶν τοπωνυμίων καὶ τῶν ποικίλων μετασχηματισμῶν τῶν ὀφειλομένων εἰς τὴν ἐπίδρασιν διαφόρων παραγόντων. Εἰς τὰ ἑπόμενα μικρότερα κεφ. (σ. 50—58) καθορίζει τὰ εἴδη τῶν τοπωνυμίων καὶ χαρακτηριστικὰς παρέχει περιπτώσεις τῶν ποικίλων μορφολογικῶν μεταλλαγῶν, εἰς ἃς ὑπόκεινται τὰ τοπωνύμια. Εἶτα ὁ συγγραφεὺς (σ. 59—64) ἀναφέρεται εἰς τὸ πολυθρύλητον ζήτημα τῶν ἐν Ἑλλάδι ξένων τοπωνυμίων, ἀναλύων δὲ τὸν ὅρον «ξένον τοπωνύμιον» δι' εὐστόχων παρατηρήσεων, προβαίνει (σ. 60) εἰς τὴν διατύπωσιν τοπωνυμικοῦ νόμου, ὃν ἀναμφιβόλως χαρακτηρίζει σαφήνεια καὶ ἀκρίβεια. Εἰς τὰ ἑπόμενα κεφ. (σ. 65—75) ἐκτίθενται διάφοροι πληροφορίαι περὶ μετονομασιῶν τῶν τοπωνυμίων καὶ ἐνδιαφέρουσαι ἀπόψεις τοῦ συγγραφέως ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῆς γεωγραφικῆς Ὀνοματολογίας.

Ἐπιφυλάξεις τινὰς διατηροῦμεν ἐπὶ τῶν κάτωθι σημείων. Εἰς τὴν σ. 8 παρατηροῦμεν *αἰγιαλισκάριον, ἀλλ' εἰς ἔγγραφον τοῦ 1082, ἐν Act. et Diplom. 6, 37 φέρεται «καὶ ἀπὸ τῶν ἐκεῖσε κρατεῖ τὸν αἰγιαλὸν αἰγιαλὸν πρὸς ἀνατολὰς καὶ διέρχεται τοῦ Ἐπισκόπου τὸ αἰγιαλιτοκάριον καὶ ἔρχεται εἰς τὸ λεπτὸν ἀκρωτήριον τοῦ Δραμύνθου». Τὸ αἰγιαλιτοκάριον πρῶτος ὁ Ἐμμ. Πεζόπουλος ἀνέγνωσεν Αἰγιαλισκάριον (Ἀθηνᾶς 23, 133), ἀκολούθως δὲ ὁ Κουκουλὲς (Ἀθηνᾶς 41, 194) ἔγραψεν ὀρθῶς αἰγιαλισκάριον.

γακόπουλος ὡς κυρίους ὁδηγούς του χρησιμοποιεῖ τὴν ἑρμηνείαν τῶν ἀρχαιοτέρων Πατέρων τῆς Ἀνατολικῆς Ἐκκλησίας. Καθοδηγεῖται δὲ κατὰ τὴν διαμόρφωσιν τῶν συμπερασμάτων του ἀπὸ τὰς ἐν τῇ Ὀρθοδόξῳ Ἐκκλησίᾳ ἐκνικησάσας δογματικὰς ἀρχάς. Διὰ νὰ προσαγάγωμεν ἓν παράδειγμα ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρωμεν ὅτι ἑρμηνεύων τὸν ὅρον ὁ «Παλαιὸς τῶν ἡμερῶν» δὲν ἐδέχθη τὴν ἐξήγησιν τὴν προταθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Ἱππολύτου καὶ Εἰρηναίου, ἀλλὰ τὴν ἐξήγησιν τὴν ἐγκριθεῖσαν τελικῶς ὑπὸ τῆς Ὀρθοδόξου Ἐκκλησίας. Ὅθεν ἔχοντες ὑπ' ὄψει ἐκτὸς τῆς χρησιμοποιουμένης μεθόδου καὶ τῶν συναχθέντων συμπερασμάτων, τὴν τοποθέτησιν τοῦ συγγραφέως καὶ τὸν τρόπον τῆς διατυπώσεως, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ πραγματεία τοῦ Α. Παπαγεωργακοπούλου ἐνέχει ἀξίαν ὄχι μόνον ὡς ἐρευνητικὴ συγγραφή, ἀλλὰ καὶ καθ' ἑαυτὴν λαμβανομένη ὡς θρησκευτικὸν κείμενον.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

***

**Δρ. ΖΗΚΦΡΗΓ ΛΑΟΥΦΦΕΡ.**—***Οἱ δοῦλοι τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου.***—Μέρος δεύτερον: Κοινωνικαὶ σχέσεις, Ἐξεγέρσεις. Ἀκαδημία τῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῶν Γραμμάτων ἐν Μάϊντς. Πρακτικὰ τῆς Τάξεως τῶν Πνευματικῶν καὶ Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν, σελ. 885—1018. Ἔτος 1956, Ἀριθ. 11.

Dr. SIEGFRIEFD LAUFFER.—Die Bergwerkssclaven von Laureion. Zweiter Teil: Gesellschaftliche Verhältnisse, Aufstände. Akademie der Wissenschaften und der Literatur in Mainz, Abhandlungen der Geistes— und Sozialwissenschaftlichen Klasse, S. 885—1018.—Jahrgang 1956 NR. 11].

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας τοῦ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Μονάχου καθηγητοῦ Ζ. Λάουφφερ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἐργατικαὶ καὶ Ἐπιχειρηματικαὶ σχέσεις, Νομικὴ θέσις» (Πρακτικὰ τῆς ἐν Μάϊντς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῶν Γραμμάτων, τῆς Τάξεως τῶν Πνευματικῶν καὶ Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν 1955, 12) [Die Bergwarkssklaven von Laureion 1. Teil: Arbeits—und Betriebsverhältnisse, Rechtstellung, Abhandlungen Akademie der Wissenschaften und der Literatur Mainz, Geistes—und Sozialwissenschaftliche Klasse 1955, 12] ἐξητάσθησαν οἱ δοῦλοι τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ἀπὸ τῆς ἐπόψεως τῆς ἐργασίας ἔναντι τῶν ἐργοδοτῶν. Ἐκ τῆς σπουδῆς ταύτης προέκυψε τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἀπόδοσις τῶν ἐργατῶν τούτων, οἵτινες εἰργάσθησαν ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ἐργασίας, τόσον κατὰ τὰς βαρείας ἐργασίας ὀρύξεως, ὅσον καὶ κατὰ τὴν πολύπλοκον μεταλλουργικὴν ἐπεξεργασίαν, ἦτο πολὺ καλή. Ἡ ποιότης τῆς μεταλλευτικῆς ἐργασίας των ἀπεδείχθη ἐκ τῆς ταχύτητος, τῆς ἀκριβείας καὶ τῆς ἐπιμελείας τῶν μεταλλευτικῶν ἐκεῖ ἐργασιῶν, ἀποτέλεσμα τῶν ὁποίων ἦτο ἡ ἀνεγνωρισμένη καλὴ ποιότης τοῦ ἀττικοῦ ἀργύρου καὶ τῶν ὑποπροϊόντων αὐτοῦ. Διεπιστώθη περαιτέρω ὅτι τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα ἦσαν δυνατὰ μόνον ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς σταθερᾶς ἐπιχειρηματικῆς ὀργανώσεως, ὑπὸ αὐστηρὰν καὶ συνεχῆ τήρησιν τῶν διατάξεων τοῦ Νόμου περὶ ἀσφαλείας κατὰ τὴν διεξαγωγὴν τῆς ἐργασίας. Οἱ δοῦλοι—ἐργάται εἴτε ἀνῆκον εἰς τοὺς ἐπιχειρηματίας τῶν μεταλλείων εἴτε ἐμισθοῦντο παρ' ἄλλων κυρίων—ἰδιοκτητῶν δούλων. Ἡ μεταχείρισις ἑπομένως τούτων, διὰ νὰ ἔχωσι τόσον καλὴν ἀπόδοσιν, προϋποθέτει λαμπρὰν διοικητικὴν καὶ ἐπιχειρηματικὴν ὀργάνωσιν ὑποβοηθουμένην καὶ κατευθυνομένην ὑπὸ τοῦ ἀθηναϊκοῦ νόμου.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς πραγματείας του ὁ Ζ. Λάουφφερ ἐρευνᾷ τὴν θέσιν τῶν ἐργατῶν—δούλων τοῦ Λαυρείου ἀπὸ τῆς ἀνθρωπιστικῆς καὶ κοινωνικῆς ἐπόψεως. Αἱ δύο βασικαὶ ἐργασίαι περὶ τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου τοῦ Α. Boeckh καὶ τοῦ Ε.

Ardaillon (1) ἠσχολήθησαν κυρίως περὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δούλων τοῦ Λαυρείου καὶ τὰς κατὰ καιροὺς ἐξεγέρσεις αὐτῶν, χωρὶς νὰ θίξωσι τὸ πρόβλημα τῆς διαβιώσεως αὐτῶν. Τὴν παράλειψιν ταύτην παρατηρεῖ ὁ συγγραφεὺς καὶ εἰς τὴν νεωτέραν ἐργασίαν τοῦ W. L. Westermann (2). Μόνον ὁ H. Wilsdorf εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Bergleute und Hüttenmänner im Altertum bis zum Ausgang der Römischen Republik (Berlin 1952) ἐξετάζει τὸ πρόβλημα τῆς διαβιώσεων τῶν δούλων τοῦ Λαυρείου. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἔρευνα αὕτη ἄπτεται ἀκροθιγῶς τοῦ θέματος τούτου. Ὁ Z. Λάουφφερ διὰ νὰ προσεγγίσῃ εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ παρ' αὐτοῦ τεθέντος προβλήματος, θεωρεῖ σκόπιμον, ὅπως ἐν πρώτοις ἀσχοληθῇ περὶ τὰ πρόσωπα τῶν δούλων, ἅτινα διέσωσεν ἡμῖν ἡ παράδοσις τῶν ἀρχαίων συγγραφέων. Εἰς ἅπαντα τὰ διασωθέντα ἔργα τῶν ἀρχαίων συγγραφέων μνημονεύονται μόνον δύο ὀνόματα δούλων τοῦ Λαυρείου: Τοῦ Σωσίου καὶ τοῦ Ἀντιγένους. Ὁ Σωσίας κατήγετο ἐκ Θράκης καὶ ἠγοράσθη ὑπὸ τοῦ στρατηγοῦ καὶ ἐπιχειρηματίου ἐν Λαυρείῳ Νικίου τοῦ Νικηράτου κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ Πελοποννησιακοῦ πολέμου ἀντὶ ἑνὸς ταλάντου (6000 ἀττικ. δραχμῶν), διορισθεὶς ὑπ' αὐτοῦ ἐπιστάτης τῶν ἐν Λαυρείῳ μεταλλείων του (Ξενοφ. II V2).

Φαίνεται ὅτι ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς τοῦ Σωσίου προεκάλεσε μεγάλην ἐντύπωσιν κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, ὅτε ἡ μέση τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἑνὸς εἰδικευμένου περὶ τὰς μεταλλευτικὰς ἐργασίας δούλου ἐκυμαίνετο μεταξὺ 150—200 ἀττ. δραχμῶν, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔτυχε τῆς τιμῆς νὰ μνημονευθῇ ὑπὸ τοῦ Ξενοφῶντος. Εἶχε δὲ ὑπὸ τὴν ἐπιστασίαν του ὁ Σωσίας 1000 δούλους. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ Σωσίας οὗτος ἐκέκτητο ἐξαιρετικὰς διοικητικὰς καὶ τεχνικὰς ἱκανότητας. Τὸ ὄνομα τοῦ Ἀντιγένους, ὑπὸ τὸν ὁποῖον εἰργάζοντο ἐν Λαυρείῳ 30 δοῦλοι, μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Δημοσθένους Πρὸς Πανταίν. 4. 22. 25 κέ. Ὁ Ἀντιγένης ἀνῆκεν εἰς τὸν Νικόβουλον καὶ εἶχεν ἐκμισθωθῇ παρ' αὐτοῦ εἰς τὸν ἐπιχειρηματίαν Πανταίνετον.

Μεγαλύτερός πως ἀριθμὸς ὀνομάτων δούλων, οἵτινες εἰργάζοντο ἐν Λαυρείῳ, κατέστη εἰς ἡμᾶς γνωστὸς ἐκ διαφόρων ἐπιγραφῶν. Εἰς παρατιθέμενον πίνακα ἀναφέρονται 53 ὀνόματα δούλων τοῦ Λαυρείου, ὁ τόπος τῆς καταγωγῆς των, ὁ χρόνος καθ' ὃν εἰργάζοντο καὶ ἡ πηγὴ τῶν πληροφοριῶν. Ἐκ τῶν δούλων τούτων ἐξ προήρχοντο ἐκ τῆς Παφλαγονίας καὶ 10 ἐκ τῆς Φρυγίας, οἱ ἄλλοι δὲ κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ τῆς λοιπῆς Μικρᾶς Ἀσίας. Δύο κατήγοντο ἐκ τῆς νήσου Θάσου, εἷς ἦτο Σημίτης, εἷς Αἰθίοψ, εἷς Σῦρος, εἷς Πέρσης καὶ δύο ἐκ Θράκης, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ Ξενοφῶντος μνημονευόμενος Σωσίας, ὁ δοῦλος (ἐπιστάτης) Νικίου τοῦ Νικηράτου. Ὁ Σωσίας εἰργάζετο ἐν Λαυρείῳ περὶ τὸ 420 π. Χ. Ἐκ τῶν 53 μνημονευομένων ἐν ταῖς ἐπιγραφαῖς δούλων οἱ περισσότεροι εἰργάσθησαν ἐν Λαυρείῳ κατὰ τὸν 4. αἰῶνα π. Χ., ἀρκετοὶ δὲ κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ῥωμαιοκρατίας. Μνημονεύομεν ἐνδεικτικῶς δύο ἐπιγραφὰς εὑρεθείσας τὴν μὲν ἐν Καμαρίζῃ, ἥτις ἔκειτο εἰς τὸ κέντρον τῆς μεταλλευτικῆς περιοχῆς τοῦ Λαυρείου, τὴν δὲ ἐν Ἀγριλέζῃ, ἥτις εὑρίσκεται νοτιοανατολικῶς τῆς Καμαρίζης. Πρόκειται περὶ ἀναθημάτων εἰς τὴν Ἀρτέμιδα:

1. Μάνης Ἀρτ[έ]μιδι | εὐξάμενος | ἀν⟨έ⟩θηκεν.
2. Νουμήνιος Ἀρτέμιδι ἀνέθηκε.

Ἐκ παρατιθεμένου προσέτι δευτέρου καταλόγου δούλων ἐκ 51 ὀνομάτων, προερχομένων εἴτε ἐξ ἀναθημάτων εἴτε ἐξ ἐπιταφίων ἐπιγραφῶν συνάγει ὁ συγγραφεὺς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν Ἑλληνικῆς καταγωγῆς δούλων τοῦ Λαυρείου ἦτο περίπου ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ξένης ἐθνικότητος.

---

1) A. Boeckh, Über die Laurischen Silberbergwerke in Attika, Abhandl. Preuss. Akad. d. Wiss. Hist.—Philol. Kl. 1815—Gesammelte Kl. Schr. V (Leipzig 1871) 1 κέ.
E. Ardaillon, Les mines du Laurion dans l' antiquité, Biblioth. d. Écoles Franç. d' Athénes et de Rome 77, Paris 1897.

2) W. L. Westermann, Sklaverei, RE Sppl. VI (1935) 894 ff. (Neufassung: The Slave Systems of Greek and Roman Antiquity, Philadelphia 1955) κλπ.

Μετὰ τὴν ἔρευναν τῶν ἐκ παραδόσεως καὶ ἐξ ἐπιγραφῶν ὀνομάτων τῶν δούλων—ἐργατῶν τοῦ Λαυρείου, τὴν προσωπογραφίαν τοῦ Λαυρείου, ὡς λίαν προφυῶς ὀνομάζει ταύτην ὁ Ζ. Λάουφφερ, στρέφει οὗτος τὸ ἐρευνητικὸν αὐτοῦ βλέμμα πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν κατὰ καιροὺς ἐν τοῖς μεταλλείοις τοῦ Λαυρείου ἐργασθέντων δούλων. Ἀναχωρεῖ, ὡς καὶ προηγούμενοι τούτου ἐρευνηταί, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν 20.000 δούλων, τοὺς ὁποίους μνημονεύει ὁ Θουκυδίδης (VII 27, 5) ὡς αὐτομολήσαντας πρὸς τοὺς Λακεδαιμονίους, ὅτε οὗτοι κατέλαβον τὴν Δεκέλειαν (413 π. Χ.). Πολὺ εὐστόχως παρατηρεῖ ὁ Ζ. Λάουφφερ, ὅτι οἱ δοῦλοι οὗτοι δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ προέρχωνται ὅλοι ἐκ τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου καὶ τὸ πιθανώτερον εἶναι ὅτι οἱ περισσότεροι τῶν αὐτομολησάντων ἦσαν δοῦλοι ἐργαζόμενοι εἰς τὰ ἐν Ἀττικῇ ἀγροκτήματα τῶν Ἀθηναίων. Διὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ 360—350 π. Χ. ὑπολογίζει ὁ συγγραφεὺς τοὺς δούλους τοῦ Λαυρείου εἰς 20.000—30.000. Ἕτερον στοιχεῖον δηλωτικὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δούλων μνημονεύει ὁ συγγραφεὺς ἐξ ἀποσπάσματος τοῦ ῥήτορος Ὑπερείδου, καθ' ὃ οἱ δοῦλοι τοῦ Λαυρείου καὶ τῆς λοιπῆς Ἀττικῆς ἦσαν 150.000 [μυριάδας πλείους ἢ ιε' τοὺς ἐκ τῶν ἔργων τῶν Ἀργυρείων καὶ τοὺς κατὰ τὴν ἄλλην χώραν]. Πρόκειται περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δούλων, οἱ ὁποῖοι ἠδύναντο νὰ φέρωσιν ὅπλα (ὁ λόγος τοῦ Ὑπερείδου ἀναφέρεται μετὰ τὴν ἐν Χαιρωνείᾳ μάχην). Τὸ σύνολον τῶν ἐν Ἀττικῇ δούλων μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ χρονικογράφου Κτησικλέους (FGrH II 245 F1), ὅστις ἀναβιβάζει τούτους εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν 400.000. Πολλοὶ μελετηταὶ συνδυάζοντες τὰς δύο ταύτας πληροφορίας καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δούλων τοῦ Λαυρείου κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἐκυμαίνετο μεταξὺ 25.000—30.000. Ὁ Ζ. Λάουφφερ λίαν ὀξυδερκῶς δὲν συμφωνεῖ πρὸς τὴν ἄποψιν ταύτην καὶ ὑπολογίζει τὸν ἀριθμὸν τούτων εἰς 10.000—15.000. Ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῶν εἰσαγομένων εἰς Ἀττικὴν καὶ καταναλισκομένων δημητριακῶν ὑπολογίζει ὁ συγγραφεὺς ὡς κάτωθι τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ἐλευθέρων κατοίκων τῆς Ἀττικῆς καὶ τῶν δούλων:

| | | |
|---|---|---|
| Ἐτησία εἰσαγωγὴ δημητριακῶν περὶ τὸ 355 π.Χ. (Δημ. Πρὸς Λεπτ. 32) | 800.000 | μέδιμνοι (1) |
| Ἐτησία παραγωγὴ δημητριακῶν Ἀττικῆς (περίπου) | 500.000—600.000 | » |
| Μεῖον 70.000 μέδιμνοι διὰ σποράν, Σύνολον | 1.300.000 | » |
| Ἡμερησία κατανάλωσις δημητριακῶν ἑνὸς ἀνδρὸς =1 χοῖνιξ (=1,1 χιλιόγρ.) | | |
| Ἐτησία κατανάλωσις ἑνὸς ἀνδρὸς | 7,5 | μέδιμνοι |
| Μέσος ὅρος ἐτησίας καταναλώσεως ἑνὸς προσώπου (λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν γυναικῶν καὶ τῶν παιδίων) | 6 | μέδιμνοι |

Ἑπομένως ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἀττικῆς ἦτο 1.300.000 : 6 = 210.000 πρόσωπα. Ἀφαιρουμένου τοῦ ἐλευθέρου πληθυσμοῦ ἐξ 120.000, ὑπολογίζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν δούλων τῆς Ἀττικῆς εἰς 90.000.

Ἐκ τῶν εὑρεθέντων ἐσχάτως ἐν τῇ Ἀγορᾷ ἐνοικιαστηρίων τῶν μεταλλείων (Marg. Crosby, The Leases of the Laureion Mines, Hesperia 19, 1950, 189 κέ.) ἐπιχειρεῖ ὁ συγγραφεὺς νὰ συναγάγῃ συμπεράσματα ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δούλων τοῦ Λαυρείου κατὰ τὸν 4. π. Χ. αἰῶνα, εἰς ὃν ἀνάγονται τὰ συναφῆ ἀρχαιολογικὰ εὑρήματα. Εἰς τὸν παρατιθέμενον πίνακα ὑπ' ἀριθ. 10 τῶν δούλων τοῦ Λαυρείου κατὰ τὸν 4. αἰῶνα π.Χ. μνημονεύεται καὶ ἡ πληροφορία τοῦ Ξενοφῶντος (Πόροι 4, 17 κέ.), καθ' ἣν ἡ μεγίστη χωρητικότης δούλων—ἐργατῶν τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου ἀνήρχετο εἰς 80.000—100.000.

Ἀκολούθως ἐξετάζεται ἡ οἰκογενειακὴ ζωὴ τῶν ἐν Λαυρείῳ δούλων καὶ προστίθεται ὅτι οὗτοι εἶχον τὸ δικαίωμα εἰς τὰς ἐπιταφίους πλάκας νὰ θέτωσιν ἐπιγραφὰς καὶ νὰ χαράσσωσιν ἐπ' αὐτῶν τὰς εἰκόνας τῶν θανόντων. Ἰδιαιτέρως ἐρευνᾶται ὁ τρόπος καθ' ὃν ἐλάτρευον τὸ θεῖον οἱ ἐν τοῖς μεταλλείοις δοῦλοι. Ἡ λατρεία τῆς Ἀρτέμιδος, τῆς ὁποίας ὑπῆρχον ἐκεῖ ἱερά, καὶ τοῦ θεοῦ Μηνός, λατρευομένου ἐν Μικρᾷ Ἀσίᾳ (οὐχὶ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων), καὶ τὰ ἀφιερώματα εἰς τὰς θεότητας ταύτας μετὰ τῶν συναφῶν

1) Εἷς μέδιμνος = 52,5 χιλιόγραμμα.

ἐπιγραφῶν ἀποδεικνύουσι τὸ μὲν τὸ βαθὺ θρησκευτικὸν συναίσθημα τῶν δούλων, τὸ δὲ τὴν οἰκονομικὴν εὐχέρειαν αὐτῶν, ὅπως προσκτῶνται οἰκονομικὰ ἀγαθὰ ἐκ τῆς ἐργασίας των, πέρα τῶν ἀναγκαίων διὰ τὴν ζωὴν αὐτῶν καὶ τῶν οἰκογενειῶν των. Ἀλλὰ καὶ ἡ αὐτοσυνειδησία τῶν δούλων ἐξετάζεται ὑπὸ τοῦ Ζ. Λάουφφερ, ὁ ὁποῖος προσπαθεῖ οὕτω νὰ διεισδύσῃ βαθύτερον εἰς τὸν συναισθηματικὸν καὶ ψυχικὸν ἐν γένει κόσμον αὐτῶν. Μνημονεύεται συναφῶς τὸ ἐπὶ ἐπιταφίου πλακὸς ἐπίγραμμα, τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὸν μεταλλέα (μεταλλουργὸν) Ἀτώταν, καταγόμενον ἐκ τῆς ἐν Πόντῳ Παφλαγονίας, ἔχον οὕτω :

Ἀτώτας μεταλλεύς.
Πόντου ἀπ' Εὐξείνου Παφλαγὼν μεγάθυμος Ἀτώτας
ἧς γαίας τηλοῦ σῶμ' ἀνέπαυσε πόνων.
τέχνῃ δ' οὔτις ἔριζε· Πυλαιμένεος δ' ἀπὸ ῥίζης
εἶμ', ὃς Ἀχιλλῆος χειρὶ δαμεὶς ἔθανεν.

Ἐν πρώτοις προκαλεῖ ἐντύπωσιν ὅτι ὁ ποιητὴς τοῦ ἐπιγράμματος θέτει τὸ ὄνομα τοῦ Ἀχιλλέως ἀντὶ τοῦ Μενελάου, ὅστις κατὰ τὸν Ὅμηρον ἐφόνευσε πρὸ τῆς Τροίας τὸν σύμμαχον τοῦ Πριάμου Παφλαγόνα βασιλέα Πυλαιμένην (Ἰλ. Ε 576). Τοῦτο δὲν πρέπει νὰ ξενίσῃ ἡμᾶς, διότι πολλοὶ λιθοξόοι τῆς ἀρχαιότητος, ὡς καὶ τῆς σήμερον, δὲν διεκρίνοντο διὰ τὰς γραμματικὰς καὶ φιλολογικὰς αὐτῶν γνώσεις. Τὸ σπουδαῖον ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι ὁ μεταλλουργὸς Ἀτώτας ἢ οἱ συγγενεῖς αὐτοῦ, οἱ ὑπαγορεύσαντες ἢ δεχθέντες τὸ ἀνωτέρω ἐπιτάφιον ἐπίγραμμα, διακηρύσσουσιν ὅτι διὰ τοῦ θανάτου ὁ μεταλλεὺς Ἀτώτας ἀπηλλάγη τῶν πόνων τῆς ζωῆς, ὅτι οὐδεὶς ἠμφεσβήτει τὴν μεταλλουργικὴν δεξιοτεχνίαν αὐτοῦ καὶ ὅτι εἶλκεν οὗτος τὴν καταγωγὴν ἐκ τοῦ βασιλέως Πυλαιμένους τῆς Παφλαγονίας.

Ἡ ἰδιοκτησία τῶν δούλων, ὁ τρόπος διαθέσεως τοῦ ἐλευθέρου μετὰ τὴν ἐργασίαν χρόνου, αἱ κατὰ καιροὺς ἐξεγέρσεις αὐτῶν, αἱ ἀπελευθερώσεις αἱ γενόμεναι λόγῳ ἐξαιρετικῆς ἀποδόσεως καὶ συμπεριφορᾶς, αἱ δραπετεύσεις, οἱ πόλεμοι πρὸς ἀπόκτησιν τῆς ἐλευθερίας (κατὰ τοὺς ῥωμαϊκοὺς χρόνους) καὶ τὸ πρόβλημα τῆς ἀνθρωπιστικῆς μεταχειρίσεως τῶν δούλων εἶναι τὰ λοιπὰ θέματα τῆς πραγματείας τοῦ Ζ. Λάουφφερ, τὰ ὁποῖα οὗτος διαπραγματεύεται μετὰ σαφηνείας καὶ βαθυτάτης γνώσεως τῶν πραγμάτων.

Διὰ τὴν ἔναντι τῶν δούλων ἐπιδειχθεῖσαν τυχὸν φιλανθρωπίαν κατὰ τοὺς 5., 4., 3. αἰῶνας π. Χ. δὲν ὑπάρχουσι σχετικὰ τεκμήρια. Μεταξὺ τῶν ἐλευθέρων καὶ τῶν δούλων ὑπῆρχε κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην κοινωνικὸς φραγμός. Φαίνεται ὅμως ὅτι ἐναντίον τοῦ φραγμοῦ τούτου ἐξηγέρθησαν τότε μεμονωμένοι σοφισταὶ καὶ ὀπαδοὶ τῆς σωκρατικῆς φιλοσοφίας, οἵτινες διέσεισαν τὰ θεμέλια αὐτοῦ καὶ ἐπέβαλον τὴν ἀνθρωπιστικὴν μεταχείρισιν τῶν δούλων. Ἡ διδασκαλία τῶν Στωϊκῶν, καθ' ἣν ὅλοι οἱ ἄνθρωποι εἶναι ἴσοι ἔναντι τοῦ παγκοσμίου νόμου, ἔσχεν ἀσφαλῶς ἐπίδρασιν καὶ ἐπὶ τῆς μεταχειρίσεως τῶν δούλων τοῦ Λαυρείου. Δὲν δύναταί τις ὅμως νὰ ἰσχυρισθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν ἐποχὴν τῆς ῥωμαιοκρατίας, ὅτε μεταχειρίζοντο τοὺς δούλους τελείως ὡς ἀνδράποδα.

Συγγραφεῖς τινες τῆς ἐποχῆς τῆς ῥωμαϊκῆς ἀκμῆς, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Πλούταρχος (Σύγκρ. Νικίου καὶ Κράσσου), ὑποθέτουσιν ὅτι καὶ κατὰ τὸν 4. αἰῶνα π. Χ. οἱ δοῦλοι τοῦ Λαυρείου διῆγον ὡς καὶ οἱ δοῦλοι τῶν μεταλλείων κατὰ τοὺς ῥωμαϊκοὺς χρόνους. Ἡ γνώμη ὅμως ἁπάντων τῶν συγγραφέων τούτων ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν πρὸς ὅσα λίαν διεξοδικῶς μνημονεύει περὶ τῆς ζωῆς τῶν ἐν Λαυρείῳ δούλων ὁ συγγραφεύς.

Παρ' ὅλον ὅτι μέχρι σήμερον ἔχουσι δημοσιευθῇ σπουδαῖαι πραγματεῖαι ἀφορῶσαι εἰς τοὺς δούλους τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου, ἐν τούτοις εἰς οὐδεμίαν ἐξ αὐτῶν παρατηρεῖται ἡ πληρότης, τὴν ὁποίαν ἁπαντᾷ τις εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ζ. Λάουφφερ. Διὰ ταύτης ἀνοίγονται νέοι δρόμοι εἰς τὴν μελέτην τῆς ζωῆς τῶν δούλων. Ἀρκούμεθα νὰ ἀναφέρωμεν μόνον ὅτι οὐδεμία περίπτωσις ὑπάρχει κατὰ τὴν κυριαρχίαν τῶν Περσῶν ἢ τῆς Ῥώμης, καθ' ἣν νὰ τεκμαίρηται ὅτι οἱ δοῦλοι εἶχον ἰδιοκτησίαν καὶ οἰκο-

γενειακὴν ζωὴν ἢ ὅτι ἐλάτρευον τὸ θεῖον, ὡς καὶ οἱ ἐλεύθεροι. Ὁ Ζ. Λάουφφερ ἀνατέμνων τὴν ζωὴν τῶν δούλων τῶν μεταλλείων τοῦ Λαυρείου ῥίπτει νέον φῶς εἰς τὴν σπουδὴν καὶ τὴν κατανόησιν τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ καὶ ὑποδεικνύει νέους δρόμους πρὸς ἔρευναν αὐτοῦ, τοὺς ὁποίους οὐδεὶς εἶχε σκεφθῆ μέχρι σήμερον.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΚΩΝΣΤ. Ι. ΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ**, Ὑφηγητοῦ τῆς Φιλοσοφίας ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν, Ἐπόπτου τῶν Σχολείων τῆς Φιλεκπαιδευτικῆς Ἑταιρείας. ***Φιλοσοφία τῆς Ἱστορίας***. Ἀθῆναι 1957, σελ. 374.

Τὸ ἀνωτέρω σημειούμενον σύγγραμμα ἔρχεται νὰ πληρώσῃ ἓν λίαν αἰσθητὸν εἰς τὴν φιλοσοφικὴν φιλολογίαν τῆς χώρας μας κενόν. Καίτοι τὰ θέματα τὰ ἐξεταζόμενα ἀπὸ τὴν Φιλοσοφίαν τῆς Ἱστορίας ἵστανται σήμερον εἰς τὸ κέντρον τῶν διαφερόντων τοῦ ἀνθρώπου τῆς ἐποχῆς μας, παρ' ἡμῖν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη οὐδεμία συστηματικὴ συγγραφὴ ἔχει ἐκδοθῆ, πραγματευομένη τὰ σχετικὰ πρὸς αὐτὰ προβλήματα. Ἐκτὸς μεταφρασμάτων ῥωσικῶν τινων ἔργων προσκειμένων πρὸς τὸν μαρξισμόν, πᾶν ὅ,τι ἔχει ἐκδοθῆ καὶ γραφῆ εἰς τὴν Ἑλληνικὴν πρὸ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ σημειωθέντος συγγράμματος τοῦ Κ. Δημητροπούλου, ἂν ἐξαιρεθῇ τὸ κατὰ τὸ 1841 ἐκθοθὲν «Δοκίμιον ἐπὶ τῆς Φιλοσοφίας τῆς Ἱστορίας» τοῦ Μ. Ῥενιέρη, ἔχει χαρακτῆρα ἀποσπασματικὸν καὶ ἄκρως περιληπτικόν. Τὰ πλεῖστα τῶν ἐν λόγῳ δημοσιευμάτων ἔχουν διατυπωθῆ ὑπὸ τὸν τύπον σχολίων ἐπὶ τῶν πολυκρότων θεωριῶν, ἃς ἐπαρουσίασαν ἐσχάτως ὁ γερμανὸς Spengler, ὁ ἄγγλος Toynbee, ὁ ἱσπανὸς Ortega y Gasset, ὁ φιλόσοφος τῆς ῥωσικῆς διασπορᾶς Ν. Μπερντιάεφ καὶ ἄλλοι. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ ἔργον τοῦ Κ. Δημητροπούλου ἀποτελεῖ πολύτιμον πνευματικὴν συμβολήν.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ Φιλοσοφία τῆς Ἱστορίας ἀνεπτύχθη εἰς αὐτοτελῆ φιλοσοφικὸν κλάδον, ἀφ' ὅτου ὁ Βολταῖρος ἐχρησιμοποίησε τὴν ὀνομασίαν της εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1756—1767 ἐκδοθὲν ἔργον του «Essai sur les moeurs et l' esprit des Nations». Ἡ κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα σημειωθεῖσα λαμπρὰ ἀνάπτυξις τῶν ἱστορικῶν ἐπιστημῶν ἐγένετο αἰτία νὰ προωθηθοῦν καὶ αἱ εἰς τὸν νεαρὸν τοῦτον κλάδον τῆς Φιλοσοφίας ἀναφερόμεναι ἔρευναι. Ἀνεζητήθησαν αἱ γνωσιολογικαὶ βάσεις, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἱστορικὴ ἔρευνα, πέρα δὲ τούτου ἡ ἐμφάνισις τῆς θεωρίας τοῦ ἱστορικοῦ ὑλισμοῦ ἤρχισε νὰ προσδίδῃ εἰς τὴν μελέτην τῶν προβλημάτων καὶ πρακτικὴν σημασίαν. Κατὰ τὸν 20ὸν αἰῶνα τὰ κοσμοϊστορικὰ γεγονότα, εἰς ἃ ἐνεπλάκη ἡ ἀνθρωπότης ἰδίᾳ ἀπὸ τοῦ πρώτου παγκοσμίου πολέμου, κατέστησαν ἐμφανῆ τὴν σημασίαν, ἣν ἐνέχει ἡ ἱστορικότης, ὄχι μόνον ὡς ἔννοια ἐπιστημονική, ἀλλ' ὡς φιλοσοφικὴ κατηγορία ἀναφερομένη εἰς τὴν μελέτην τοῦ νοήματος καὶ τῆς μοίρας τῆς συγκεκριμένης ἀνθρωπίνης ὑπάρξεως. Ἰδίως ἡ ἔμφασις, μεθ' ἧς ἀνεζητήθη τὸ νοηματικὸν περιεχόμενον τῆς ἱστορικότητος ἐκ μέρους τῶν προσκειμένων πρὸς τὸν Ὑπαρξισμὸν στοχαστῶν (Heidegger, Jaspers), κατέστησεν ἀναγκαίαν τὴν συστηματικὴν πλέον διερεύνησιν τῶν συναφῶν προβλημάτων.

Τὸ σύγγραμμα τοῦ Κ. Δημητροπούλου συμμεριζόμενον τὴν ἀνησυχίαν διὰ τὰ τιθέμενα πρὸς λύσιν μεγάλα προβλήματα προβαίνει μετὰ μεθοδικότητος καὶ πλήρους γνώσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν γενομένων μέχρι τοῦδε ἐρευνῶν εἰς τὴν συστηματικὴν αὐτῶν διαπραγμάτευσιν. Ὅπως καταδεικνύεται ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου, ἦτο ὁ συγγραφεύς του τελείως ὥριμος διὰ νὰ ἀναλάβῃ τὸ βαρὺ τοῦτο ἔργον. Εἶχε τὴν εὐκαιρίαν κατὰ τὸ μεσοπολεμικὸν διάστημα νὰ ἔλθῃ εἰς προσωπικὴν ἐπαφὴν μὲ τοὺς κορυφαίους ἐν Γερμανίᾳ φορεῖς τῆς φιλοσοφικῆς κινήσεως. Ἡ πλουσία δὲ συγγραφικὴ ἐργασία του ἀπὸ τοῦ 1938 καὶ ἑξῆς πιστοποιεῖ τὴν βαθεῖαν καὶ ἐνδελεχῆ ἀπασχόλησίν

Σημαντικὸν εἶναι ὅτι οἱ ἀπόγονοι τοῦ Καλογήρου ἐκ τοῦ υἱοῦ του Παπαντώνη, μᾶλλον ἐκ τῆς θυγατρὸς τοῦ υἱοῦ του Ἑλένης, νυμφευθείσης τὸν ἐκ Πιτσιλλιᾶς Εὐαγγέλην Ἰωάννου Ζωγράφον, ἔδωκαν ἀξιόλογα ἔργα λαϊκῆς ζωγραφικῆς καὶ κατέχουν οἱ ἐπιζῶντες νῦν σημαντικὴν συλλογὴν χειρογράφων καὶ ζωγραφικῶν ἔργων τῶν ὡς ἄνω ἀπογόνων, ἐνῷ ἕτερος κλάδος περιῆλθεν εἰς πλήρη ἀπαιδευσίαν καὶ νῦν ἀσχολεῖται μὲ τὴν βοσκήν. Ὁ ἡρωισμὸς ὅμως οὐδέποτ' ἐγκατέλειψε τὴν οἰκογένειαν καὶ τὸ χωρίον, ὅπου ἡ ἀκτινοβολία καὶ ἡ ἐπίδρασις τοῦ Καλογήρου μέχρι τοῦ νῦν ἐξικνοῦνται ἰσχυραί.

ιζ') Διὰ τὰς ἐπὶ Ἀγγλικῆς κατοχῆς ἀντιστασιακὰς δραστηριότητας τῶν Κυπρίων ἀρκετὰ γράφει ὁ κ. Βαγενᾶς, ἀλλὰ ἐλλιπέστατα, βεβαίως, ὡς εἶναι φυσικὸν ἐκ τῆς ἐλλείψεως σχετικῶν ἐπὶ μέρους, ἐν Κύπρῳ πρωτίστως, συστηματικῶν ἐρευνῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι καιρὸς ν' ἀναληφθοῦν ὑφ' ἡμῶν κατὰ πρῶτον λόγον. Πάντως καὶ αἱ πηγαὶ δὲν εἶναι ὅλαι ἀνοικταὶ εἰς κοινὴν χρῆσιν ἀκόμη, οὔτε εἰς χρῆσιν τῶν ἑρμηνευτῶν, λόγῳ τῆς μὴ παρελεύσεως εἰσέτι τοῦ ἀπαραιτήτου χρόνου. Πάντως οἱ ἐφημερίδες τῆς Κύπρου εἶναι σπουδαία πηγή, ἥτις πρέπει ἐκτενῶς νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ἐξαντληθῇ, ἰδίως αἱ παλαιαὶ ἐφημερίδες. Ἂς ἐλπίσωμεν ὅτι ὁ κ. Ἀντ. Κ. Ἰντιάνος θὰ θελήσῃ συντόμως νὰ μᾶς δώσῃ τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀπὸ καιροῦ ἑτοιμαζομένην βιβλιογραφίαν τῶν κυπριακῶν ἐντύπων καὶ δὴ τῶν ἐφημερίδων, δηλ. βιβλιογραφικὴν ἀποδελτίωσιν μὲ σύντομον περίληψιν τῶν περιεχομένων των, ἥτις θὰ βοηθήσῃ τοὺς ἐρευνητὰς νὰ εὑρίσκουν ὅ,τι ζητοῦν, χωρὶς ὑπερβολικὸν μόχθον, εἰς τὰς παλαιὰς ἐφημερίδας. Ἐπίσης ὁ κ. Βαγενᾶς δὲν βλέπω ν' ἀναφέρῃ τὸ βιβλίον τοῦ Τ. Λέκκα, Κύπρος, ἡ κατεχομένη Ἑλλὰς (1952), περιέχον ἀρκετὸν ὑλικὸν ἐνδιαφέρον καὶ Α. Χ. Γαβριηλίδη, Τὰ Ἐθναρχικὰ Δικαιώματα καὶ τὸ Ἑνωτικὸν Δημοψήφισμα (1950), πρωτοτυπωτάτην συμβολήν.

Ταῦτα ἐν συντόμῳ εἴχομεν νὰ παρατηρήσωμεν διὰ τὸ βιβλίον τοῦ κ. Βαγενᾶ, ἐλπίζοντες ὅτι θὰ τὸν βοηθήσωμεν εἰς ἀρτιωτέραν ἐμφάνισιν τυχὸν β' ἐκδόσεώς του.

Ἀμμόχωστος 10)7)1957

ΚΩΣΤΑΣ Π. ΚΥΡΡΗΣ

***

**ΚΑΡΟΛΟΥ ΜΟΥΓΛΕΡ.**—Ἱστορικὸν λεξικὸν τῆς γεωμετρικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων. Εἰσαγωγή. Α—Κ. σελ. 272. (Ἔργον δημοσιευθὲν τῇ ἀρωγῇ τοῦ Ἐθνικοῦ Κέντρου Ἐπιστημονικῆς Ἐρεύνης. Ἔκδ. Γκωτὲ—Βιλλάρ, Παρίσιοι 1958).

CHARLES MOUGLER.—Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs. Introduction. A—K. (Ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. Édit. Gauthier—Villars, Paris 1958).

Ἡ σπουδὴ τῆς ἐπιστημονικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν ἐνεκαινιάσθη κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους ὑπὸ τοῦ C. Dasypodius (1) (Conrad Rauchfuss), ὅστις κατὰ τὸ 1579 ἐξέδωκεν ἐν Στρασβούργῳ Λεξικὸν μαθηματικῶν ὅρων, ὑπὸ τὸν τίτλον Oratio Cunradi Dasypodii de Disciplinis mathematicis ; eiusdem Heronis Alexandrini nomenclature vocabulorum geometricorum translatio. Οὗτος εἶχε περιορισθῇ νὰ μεταφράσῃ εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν τοὺς ὁρισμοὺς τῶν κυριωτέρων σχημάτων, οἵτινες ἀπαντῶσιν εἰς τὰ ἔργα κυρίως τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Κατ' ἀνάγκην τὸ πρῶτον τοῦτο δοκίμιον τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρικῆς

1) J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik I, Sammlung Göschen B. 226, Verlag Walter de Gruyter und Co, Berlin 1953.

λεξικογραφίας ἦτο ἀτελές. Κατὰ τοὺς μετέπειτα χρόνους ἐγένετο συμπληρωματικὴ ἐργασία ὑπὸ πολλῶν μαθηματικῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸν J. G. Neide διὰ τοὺς ἐπιστημονικοὺς ὅρους τῶν βιβλίων I—VI, XI καὶ XII τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (1825), τὸν G. Friedlein διὰ τοὺς ὅρους τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου εἰς τὸ I βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (1873), τὸν F. Hultsch διὰ τοὺς ὅρους τῆς Πάππου Συναγωγῆς (1878) καὶ τῆς σῳζομένης πραγματείας τοῦ Αὐτολύκου ἐκ Πιτάνης (1885), τὸν C. Manitius διὰ τὰ Στοιχεῖα Ἀστρονομίας τοῦ Γεμίνου (1893), τὸν F. Rudio διὰ τὰ ἀποσπάσματα τοῦ Σιμπλικίου τὰ συναφῆ πρὸς τετραγωνισμοὺς (1908), τὸν J. L. Heiberg διὰ τὰς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὰ εἰς αὐτὰς σχόλια τοῦ Εὐτοκίου (1913).

Παρὰ τὸ πλῆθος τῶν συγγραφέων, οἵτινες ἠσχολήθησαν πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ὁρολογίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἡ συντελεσθεῖσα ἐργασία παρέμεινεν ἀσυμπλήρωτος, διότι αὕτη εἶχε περιορισθῆ εἰς ὡρισμένας γεωμετρικὰς πραγματείας. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔλειπε κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ F. Hultsch εἶναι ἡ συνολικὴ θεώρησις τῆς γλώσσης τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν καὶ ἡ ἐξέλιξις αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν προσωκρατικῶν φιλοσόφων τοῦ 6. αἰῶνος μέχρι τῆς ἐποχῆς ἡμῶν. Τὴν ἔλλειψιν ταύτην ἀναπληροῖ τὸ ὑπὸ κρίσιν Λεξικὸν τοῦ κ. Μοῦγλερ. Ὁ συγγραφεὺς ἐχρησιμοποίησε κατὰ τὴν σύνταξιν τοῦ Λεξικοῦ τὰς πραγματείας τοῦ Πλάτωνος, τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ Αὐτολύκου, τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, τοῦ Πάππου, τοῦ Πτολεμαίου, τοῦ Σειρήνου, τοῦ Πρόκλου, τοῦ Εὐτοκίου κλπ., ὡς καὶ σῳζόμενα ἀποσπάσματα ἀπολεσθεισῶν πραγματειῶν τοῦ Ἐμπεδοκλέους, τοῦ Δημοκρίτου, τοῦ Ἀρχύτου κλπ. Ἡ ἐντύπωσις τὴν ὁποίαν ἀποκομίζει τις, ὅταν ἀναγινώσκῃ τὰς πραγματείας τῶν μεγάλων κλασσικῶν τῆς γεωμετρίας, ἐκ τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, εἶναι ἡ αὐτὴ οἵα καὶ ἡ ἐντύπωσις ἐκ τῆς τελειότητος καὶ τοῦ κάλλους αὐτῶν τούτων τῶν προτάσεων. Τὸ ἀπέριττον καὶ ἡ κομψότης τῆς γεωμετρικῆς γλώσσης μετὰ τῆς ἀπαραμίλλου λεκτικῆς ἀκριβολογίας, ἥτις διακρίνει αὐτήν, ὁμοιάζει κατὰ τὸν κ. Μοῦγλερ πρὸς τὴν καλλιέπειαν καὶ τὴν ῥυθμικὴν τῶν ὁμηρικῶν ἐπῶν. Ὁ Εὐκλείδης, ὅστις θεωρεῖται ὁ κύριος συντάκτης τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, ἐπετέλεσεν ἐπιστημονικὸν ἆθλον ἄνευ προηγουμένου. Τοῦτον ἀκολουθοῦσι γλωσσικῶς καὶ μιμοῦνται ἅπαντες οἱ μεταγενέστεροι αὐτοῦ. Ὁ Πρόκλος καὶ ὁ Εὐτόκιος γράφουσι κατ' ἀπομίμησιν τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὰς περισσοτέρας συγχρόνους εὐρωπαϊκὰς γλώσσας, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ γαλλική, ἡ γερμανικὴ καὶ ἡ ἀγγλική, ἡ ὁρολογία τῶν ὁρισμῶν, τῶν προτάσεων περὶ τῶν σχημάτων καὶ τῶν ἀποδείξεων εἶναι διατετυπωμένη κατὰ τὸ ἑλληνικὸν πρότυπον. Δέν πρέπει ὅμως νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ἡ γεωμετρικὴ ὁρολογία, ὡς ἁπαντᾷ αὕτη εἰς τὰ Στοιχεῖα, ἐδημιουργήθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ σχηματισμὸς ταύτης ἤρξατο ἀπὸ τοῦ 6. αἰῶνος π.Χ. καὶ ὑπέστη τὴν ἐπίδρασιν τῆς Ἰωνικῆς Σχολῆς, τῆς Σχολῆς τῶν Πυθαγορείων, τῆς Σχολῆς τῶν Ἀτομιστῶν, ὡς καὶ τὴν ἐπίδρασιν τῶν Σοφιστῶν. Τὸ ἀποκορύφωμα τοῦ σχηματισμοῦ τῆς γεωμετρικῆς ὁρολογίας ἀπαντῶμεν βεβαίως εἰς τὸν Εὐκλείδην, ὅστις κατώρθωσε νὰ παράσχῃ κάλλος ἀνέκφραστον εἰς αὐτὴν καὶ εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων. Ἡ εὐκλείδειος γεωμετρικὴ ὁρολογία φέρει βεβαίως τὴν σφραγῖδα τοῦ μεγάλου τούτου καλλιτέχνου τῶν μαθηματικῶν, ἀποτελεῖ ὅμως καὶ τὸ ἀπαύγασμα τριακοσίων ἐτῶν (600 - 300 π.Χ.) γιγαντιαίας προσπαθείας Ἀλλὰ καὶ κατὰ μικρὰ χρονικὰ διαστήματα, ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἐντεῦθεν, ὑφίστατο ἡ διαμόρφωσις τῆς γεωμετρικῆς ὁρολογίας διαρκῆ ἐξέλιξιν. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὴν ἐγγραφὴν εἰς κύκλον ἐπιπέδου γεωμετρικοῦ σχήματος, ὡς μνημονεύει ταύτην ὁ Πλάτων εἰς τὸν Μένωνα (86 e - 87 c) καὶ ὡς περιλαμβάνει ταύτην ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖά του (VI 27, 28, 29).

Ὁ Πλάτων γράφει:

... «ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόν τε εἰς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι, ... εἰ

μὲν ἔστιν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ...».

Ὁ Εὐκλείδης γράφει:

«Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσων παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν...» (VI 29). Τὸ «ἐντείνειν» τοῦ Πλάτωνος ἔχει διαμορφωθῆ εἰς «παραβάλλειν» ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου.

Ὁ κ. Μοῦγγλερ ἀναφέρει τρία μέρη τοῦ γεωμετρικοῦ λόγου, τὸ οὐσιαστικὸν ὄνομα, τὸ ἐπίθετον καὶ τὸ ῥῆμα, ἅτινα ὑπέστησαν σημαντικὴν ἐξέλιξιν, τινὰ τῶν ὁποίων συναντῶνται ἤδη πρὸ τοῦ Εὐκλείδου. Ἐκ τῶν οὐσιαστικῶν σημειοῦμεν τὰ ἑξῆς:

1) Οὐσιαστικά: «ἀναλογία, ἀναστροφή, ἀπότμημα, ἀποτομή, ἀφή, δεῖξις, διαίρεσις, διάστημα, διχοτομία, δύναμις, ἔλλειμμα, ἐπαφή, ἐπιφάνεια, ἡμικύκλιον, θέσις, καταγραφή, κλίσις, λῆψις, λόγος, μέγεθος κλπ.».

2) Ἐπίθετα: «ἀδύνατος, ἄλογος, ἀμβλυγώνιος, ἀνάλογον, ἄνισος, ἄπειρος, ἀπεναντίος, ἁπλατής, ἀρτιόπλευρος, ἀσύμμετρος, ἄτμητος, ἄτοπος, δεκάγωνος, διαγώνιος, δωδεκάεδρος, εἰκοσάεδρος, ἑξάγωνος, εὐθύγραμμος, ἰσογώνιος κλπ.».

3) Ῥήματα: «ἄγειν, αἰτεῖσθαι, ἀναπληροῦν, ἀναστρέφειν, ἀνθυφαιρεῖν, ἀνιστάναι, ἀντιπεπονθέναι, ἀπέχειν, ἀποκαθιστάναι, ἀπολαμβάνειν, ἀφαιρεῖν, διάγειν, δύνασθαι, ἐγγράφειν, ἐκτιθέναι, ἐλλείπειν, ἐμπεριέχειν, ἐναρμόζειν, ἐφαρμόζειν, ἐφιστάναι, ἡγεῖσθαι κλπ.».

Τὸ παλαιότερον μέρος τῆς γεωμετρικῆς ὁρολογίας διεμορφώθη πρὸς δήλωσιν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, τῶν γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων καὶ τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Εἶναι ἄγνωστον ποῖοι γεωμέτραι πρῶτοι διεμόρφωσαν τοὺς πρώτους γεωμετρικοὺς ὅρους. Οἱ περισσότεροι τῶν παλαιῶν τούτων ὅρων προῆλθον ἐξ ὀνομάτων ἁπαντώντων εἰς τὴν Βοτανικήν, τὴν Ἀρχιτεκτονικήν, τὴν Ἀνατομίαν. Οὕτω ἁπαντῶμεν τοὺς ἑξῆς παλαιοὺς γεωμετρικοὺς ὅρους:

Οὐσιαστικά: ἄξων, βάθος, βάσις, γραμμή, γνώμων, γωνία, εἶδος, κέντρον, κορυφή, κύβος, κύλινδρος, κύκλος, κῶνος, μῆκος, μηνίσκος, ὄνομα, ὅρος, πέρας, πλάτος, πλευρά, πόλος, πρίσμα, πυραμίς, ῥόμβος, στιγμή, σφαῖρα, σχῆμα, σῶμα, τμῆμα, τιμή, τραπέζιον, χωρίον κλπ.

Ἐπίθετα: ἀμβλύς, ἄκρος, ἐπίπεδος, εὐθύς, ἴσος, ἰσοσκελής, καμπύλος, κοῖλος, κοινός, κυρτός, λοιπός, μέσος, ὅλος, ὅμοιος, ὀρθός, σκαληνός, στερεός, στρογγύλος κλπ.

Ῥήματα: ἅπτεσθαι, ἁρμόζειν, βαίνειν, γράφειν, δαπανᾶν, δέχεσθαι, διαιρεῖν, ἐκβάλλειν, ἐμπίπτειν, ἐντείνειν, ἐπιζευγνύναι, κλᾶν, νεύειν, στρέφειν, συμβάλλειν, συμπληροῦν, τέμνειν, ὑποτείνειν, ψαύειν κλπ.

Ὁ παλαιὸς οὗτος γεωμετρικὸς λεκτικὸς πλοῦτος ἐπλουτίσθη βαθμιαίως δι' οὐσιαστικῶν, ἐπιθέτων καὶ ῥημάτων, δημιουργηθέντων ὅμως εἰδικῶς διὰ τὴν γεωμετρίαν. Αἱ κωνικαὶ τομαὶ ἐπὶ παραδείγματι, τῶν ὁποίων ἡ ἀρχικὴ σπουδὴ ἀνάγεται εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους, ὠνομάζοντο μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀπολλωνίου «ὀρθογωνίου, ὀξυγωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαί». Ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου ὅμως ἐδόθησαν νέα ὀνόματα εἰς ταύτας: «παραβολή, ἔλλειψις, ὑπερβολή», ἅτινα ἐπεκράτησαν εἰς τὴν γεωμετρικὴν ὁρολογίαν καὶ διατηροῦνται μέχρι σήμερον. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν ἐνταῦθα τὸν ὅρον «ὁλότης», τὸν ὁποῖον ἐδημιούργησεν ὁ Πρόκλος, ἵνα δηλώσῃ τὸ «ὅλον» τῆς ἐν τῷ «Παρμενίδῃ» πλατωνικῆς περὶ συνόλων θεωρίας (1).

Ἐν τῷ προλόγῳ τοῦ Λεξικοῦ ἀναφέρεται ὁ τρόπος τῆς συντάξεως τῶν προθέσεων ἀπό, ἀνά, διὰ κλπ. καὶ τῆς σημασίας αὐτῶν διὰ τὴν κατανόησιν τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων. Παρέχομεν ἐνταῦθα τὴν ἑρμηνείαν, ἣν δίδει ὁ συγγραφεὺς διὰ τὴν πρόθεσιν διά: «αὕτη μετὰ γενικῆς ἁπαντᾷ εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις·»

---

1) Ε. Σταμάτη, Περὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων παρὰ Πλάτωνι, Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν. Συνεδρία τῆς 16]10]58.

1. Ἡ πρόθεσις δ ι ὰ ἐκφράζει ὅτι ἓν σχῆμα διέρχεται διά τινος γεωμετρικοῦ στοιχείου ἔχοντος δύο ἢ μίαν τοὐλάχιστον διάστασιν, ὡς π.χ. μία γραμμὴ διέρχεται δι' ἑνὸς σημείου, μία ἐπιφάνεια διέρχεται διὰ μιᾶς γραμμῆς ἢ δι' ἑνὸς σημείου· ἡ σημασία τῆς προθέσεως ταύτης ἐνταῦθα εἶναι ὡς εἰς τὰς ἐκφράσεις διέρχεσθαι, διαπορεύεσθαι κλπ.

2. Ἡ πρόθεσις δ ι ὰ δεικνύει τὴν λογικὴν μιᾶς ἰδιότητος εἴς τινα συλλογισμὸν ἢ τὸ μέσον διὰ τοῦ ὁποίου ἓν σχῆμα κατασκευάζεται· π.χ. διὰ τῶν ὁμοίων ἀποδείξεων, διὰ τοῦ εὑρεθέντος λόγου, διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου κλπ. Ὁ Πάππος χρησιμοποιεῖ τὴν πρόθεσιν δ ι ὰ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην εἰς συντετμημένας ἐκφράσεις, ὡς· διὰ τῆς παραβολῆς, διὰ τῆς ἕλικος κλπ. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν ἀπαντῶμεν τὴν χρησιμοποίησιν τῆς προθέσεως δ ι ὰ εἰς τὴν τυπικὴν ἔκφρασιν «δι' ἴσου». Ὁ συγγραφεὺς παραπέμπει κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῆς λέξεως «ἴσος», λίαν ἐπιτυχῶς, εἰς τὴν θεωρίαν ταύτην (Στοιχεῖα V, ὁρισμὸς 17 κλπ.). Ἐάν, λέγει, εἶναι $\frac{\alpha}{b}=\frac{A}{B}$, $\frac{b}{c}=\frac{B}{C}$, ... $\frac{\iota}{u}=\frac{C}{K}$, τότε ὁ δι᾽ ἴσου λόγος τῶν ληφθέντων (μεγεθῶν) εἶναι $\frac{\alpha}{u}=\frac{A}{C}$.

Ἡ σημερινὴ ἔκφρασις τοῦ «δι' ἴσου λόγου τῶν ληφθέντων», τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν συχνάκις εἰς τὸ V βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον κατά τινα ἀνώνυμον Σχολιαστὴν (1) θεωρεῖται δημιουργία τοῦ Εὐδόξου, εἶναι ὅτι ἐὰν ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{b}=\frac{A}{B}$$
$$\frac{b}{c}=\frac{B}{C}$$
$$\frac{\iota}{u}=\frac{C}{K} \quad \text{κλπ.,}$$

πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{\iota}{u}=\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{K}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha}{u}=\frac{A}{K}.$$

Ἐν συνεχείᾳ παρατίθεται σύνοψις γεωμετρικῶν ὅρων, οἵτινες κατατάσσονται ἀναλόγως τῆς γενικωτέρας σημασίας αὐτῶν. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τοὺς κάτωθι ὅρους·

1. Εἰς τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας: αἴτημα, αἰτεῖσθαι, ἀξίωμα, ἀρχή ἀρχικός.

2. Εἰς τοὺς ὁρισμούς: διορίζειν, διορισμός, ὁρίζειν, ὁρισμός, ὅρος.

3. Εἰς τοὺς συλλογισμούς: ἀγωγή, ἀδύνατος, αἰτία. ἀκόλουθος, ἄμα, ἀνάπαλιν, ἀναστρέφειν, ἀναστροφή, ἀντιστρέφειν, ἀντιστροφή, ἀπάγειν, ἀπαγωγή, ἀποδεικνύναι, ἄπτωτος, ἄτοπος, δεῖξις, ἔπεσθαι, θεώρημα, λαμβάνειν, λῆψις, λῆμμα, μάθημα κλπ.

4. Εἰς τὰς πράξεις: ἄγειν, ἀεί, ἀνάγειν, ἀναγράφειν, ἀνθυφαιρεῖν, ἀνιστάναι, ἀνταναίρεσις, ἀπολείπειν, ἀποπληροῦν, γράφειν, διάγειν, διαιρεῖν, διαίρεσις, διχοτομεῖν, διχοτομία, ἐγγράφειν, ἐκβάλλειν, ἐκτιθέναι, ἐμβάλλειν, ἐναρμόζειν, ἔντασις, ἐντείνειν, ἐπεκβάλλειν, ἐπιζευγνύναι, ἐφαρμόζειν κλπ.

5. Εἰς τὰς διαστάσεις: αὔξη, βάθος, διάστασις, διάστημα, μῆκος, πλάτος.

6. Εἰς τὰς τομάς: ἀποτέμνειν, ἀπότμημα, ἐμπίπτειν, συμβάλλειν, συμβολή, συμπίπτειν, σύμπτωσις, τέμνειν, τομή, ψαύειν.

7. Εἰς τὰς γωνίας: ἀμβλύς, ἀμβλυγώνιος, βαίνειν, γωνία, δέχεσθαι, κορυφή, ὀξύς, ὀξυγώνιος, ὀξύτης, ὀρθός, ὀρθότης, ὀρθογώνιος, ὑπό, ὑποτείνειν.

8. Εἰς τὰ πολύγωνα: ἀρτιόπλευρος, ἄτακτος, διαγώνιος, δωδεκάγωνον, ἑνδεκάγωνον, ἐννάγωνον, ἑξάγωνον, ἑπτάγωνον, ἰσογώνιος, ἰσοπερίμετρος, ἰσόπλευρος, ὀκτά-

1) Euclidis Elementa, V, Heiberg, Bib. V. σ. 280.

γωνον, ὁποσάγωνον, πεντάγωνον, πεντάπλευρον, πεντεκαιδεκάγωνον, πολύγωνον, πολύπλευρον, τετράπλευρον, χιλιάγωνον κλπ.

Αἱ λέξεις μεταφράζονται εἰς τέσσαρας γλώσσας, ἤτοι λατινιστί, γαλλιστί, γερμανιστὶ καὶ ἀγγλιστί. Ἀναφέρομεν τινὰς ἐκ τούτων:

ἀποτομή.—Sectio, section, Schnitt, section.

ἀφαιρεῖν.—Subtrahere, soustraire, abziehen, to cut off.

διαστολή.—Distributio, arrangement dans le plan, Anordnung, ordering.

ἐλάσσων.—Minor, inferieur, kleiner, less.

ἰσοπληθής.—Eodem numero, de même nombre, von gleicher auzahl, of equal numbers.

κινεῖν.—Movere, mouvoir, bewegen, to move. κλπ.

Ἡ Ἑλληνικὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη ὀφείλει χάριτας εἰς τὸν κ. Μοΰγγλερ διὰ τὸ Λεξικὸν τῶν γεωμετρικῶν ὅρων, τὸ ὁποῖον ἐχάρισεν οὗτος εἰς αὐτήν. Πᾶς ἐρευνητὴς τῆς ἱστορίας τῆς ἐπιστήμης ταύτης θὰ ἔχῃ τοῦ λοιποῦ εἰς τὴν διάθεσιν αὐτοῦ ἓν πρώτης τάξεως βοήθημα, ἀλλὰ καὶ ἕνα πρώτης τάξεως ὁδηγὸν καὶ συμπαραστάτην εἰς τὴν προσπάθειαν πρὸς κατανόησιν ἐν τῷ συνόλῳ των τῶν γεωμετρικῶν Ἑλληνικῶν ὅρων. Δὲν ὑπάρχει τίποτε πλέον τὸ κενὸν εἰς τὴν παρακολούθησιν τῆς ἐξελίξεως τῶν γεωμετρικῶν ὅρων κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. Ὁ κ. Μοΰγγλερ συμπληρώσας, ἐπεκτείνας καὶ τελειοποιήσας τὸ εἰς διάστημα τετρακοσίων ἐτῶν συντελεσθὲν ἔργον τῶν προκατόχων αὐτοῦ, ἐπετέλεσε πράγματι ἕνα ἆθλον. Ἡ ἐπιστήμη, ὄχι μόνον ἡ μαθηματική, ἀλλὰ καὶ ἡ φιλολογία, θὰ εἶναι εὐγνώμονες πρὸς αὐτόν.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΠΡΟΣΘΗΚΑΙ ΚΑΙ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ

Εἰς τὴν ὑπὸ τὴν ἐπιγραφὴν «*Ξενισμοὶ καὶ ἀκυρολογίαι*» πραγματείαν (σελ. 231 - 239) τοῦ Κωνστ. Λογοθέτου προσθετέα καὶ τὰ ἑξῆς· Λέγεται καὶ γράφεται ἐνίοτε τὸ «ἐξοπλισμός»· π. χ. ὁ δεῖνα ἔχει ἐπιστημονικόν, ἠθικὸν κτλ. ἐξοπλισμὸν (κατὰ τὸ armature) ἀντὶ τοῦ *ἐφόδιον, ἐφόδια, προπαρασκευή*.

Ἐν τῇ νεωτέρᾳ ἡμῶν γλώσσῃ φέρεται συχνὸν τὸ «ἐκτελῶ, - οῦμαι» ἐπὶ διττῆς ἐννοίας· σημαίνει 1) ποιῶ, πράττω, ἐκτελῶ· π. χ. ἐκτελεῖ εὐόρκως τὸ καθῆκόν του, ἐξετέλεσε λαμπρῶς τὸ ἔργον του· 2) ἀποκτείνω, θανατῶ, φονεύω· π. χ. χθὲς ἐξετέλεσαν τοὺς καταδίκους, οἱ ὅμηροι ἐξετελέσθησαν. Καὶ ταῦτα πάντα κατὰ πιστὴν μετάφρασιν ξένων λέξεων (γαλλ. exécuter, ἀγγλ. execute), ἐχουσῶν ἀμφοτέρας τὰς σημασίας. Ἕνεκα τῆς πιστῆς καὶ τυφλῆς μεταφράσεως φέρει ἐφ' ἑαυτῆς ἡ νεότευκτος λέξις τὸ βάρος δύο ἁμαρτιῶν· ἔχει ἀλλοεθνῆ μὲν περιβολὴν ἀλλοεθνῆ δὲ σημασίαν. Λέγεται δηλαδὴ πλημμελῶς *ἐκτελῶ* ἀντὶ τοῦ *ἐπιτελῶ* κατὰ τὸ *exécuter* κτλ. (πβλ. καὶ *ἐνθαρρύνω* ἀντὶ τοῦ *ἐπι-* (ἢ *παρα-*) *θαρρύνω* κατὰ τὸ *encourager*), προσέλαβε δε κακῶς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀποκτείνειν ἐκ τῆς κακῆς μεταφράσεως, δι' ἧς μετηνέχθη εἰς τὴν ἑλληνικὴν λέξιν σημασία ξένων ὀνομάτων.

Ὀρθῶς ἡμεῖς θὰ λέγωμεν, ὅτι *ἐπιτελοῦμεν* τὸ καθῆκον καὶ ὅτι τόσοι ὅμηροι (ἀλλοίμονον, ὑπὸ λεγομένων Ἑλλήνων,) *ἐθανατώθησαν*.

Εἰς σελ. 114 (πραγματεία Καλλιόπης Γιαννουλίδου σελ. 109 - 114) ἡ συγγραφεὺς προσθέτει τὰ ἑξῆς·

Ἡ παραδοθεῖσα ἀπὸ τοῦ 1956 πρὸς δημοσίευσιν καὶ κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 1957 ἐμφανισθεῖσα μελέτη μου ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἴάλιον Ἑαλοῦ Γαλανθὶς» εἰς γενομένην μνείαν σχετικὴν πρὸς τὴν ἐπιγραφήν, σελὶς 22 ὑποσημ. 25, δὲν ἔχει παραπομπὰς εἰς τὴν μνημειώδη ἔκδοσιν τῶν Documents in Mycenaean Greek ὑπὸ Ventris-Chadwick, Cambridge 1956.

«Γραφικὴν» ἄποψιν τοῦ ζητήματος μετὰ πλήρους ἐνημερώσεως καὶ ἀντιστοίχων παραδειγμάτων ἴδ. ἐν τῷ κυκλοφορήσαντι προσφάτως τόμῳ, πρὸς τιμὴν τοῦ διαπρεποῦς Φιλλανδοῦ λογίου J. Sundwall, ὑπὸ τὸν τίτλον MINOICA, Berlin 1958: N. Platon, Inscribed libation vessel from a Minoan house at Praissa, σ. 311, εἰκ. 2, 312 - 3 ὑποσ. 21.

Ἐν σελ. 133, στ. 19 διαγραπτέα ἡ λέξις *ἕνεκα*.

» » 260, στ. 18 ἀντὶ ἐκεῖνος πρὸς κοινοῦ γραπτ. σκῆνος τουτὶ πρὸς κακοῦ.
» » 262, στ. 4 » εἰπεῖν γραπτ. ὑπῆν.
» » 262, στ. 15 » ζεφύρα » ζεφύροιο.
» » 262, στ. 32 » μελέαν » μελέων.
» » 268, στ. 15 » παραγγελλόμεναι γραπτ. ἀπαγγελλόμεναι.
» » 269, στ. 30 » ἐνωτίσθη » ἐνωκίσθη.
» » 269. στ. 33 » ἐπωπῷ » ἐπωπᾷ.
» » 272, ὑπ. 128 » Manuab. B ib » Μακκαβ. Β. ΙΒ'.
» » 353, στ. 14 » τροπῇ τοῦ λ εἰς ρ » τοῦ ρ εἰς λ.
» » 356, στ. 20 » μεταλειφθείσης » καταλειφθείσης.
» » 358, στ. 3 » ἐγένετο » ἐλέγετο.
» » 358, στ, 24 » ἔν τινι ποιήμασι » ἔν τισι ποιήμασι.
» » 361, στ. 32 » εἰρηνικῶς » εἰρωνικῶς.
» » 385, στ. 13 » δευτέρῳ » πρώτῳ.
» » 386, στ. 13 (ἐκ τῶν κάτω) ἀντὶ τῷ Concordance γραπτ. τῇ . . .
» » 387, στ. 14 (ἐκ τῶν κάτω) » σημειοῦνται τινὲς γραπτ. σημειοῦνταί τινες.
» » 415, στ. 16 ἀντὶ SIEGFRIEFD γραπτ. SIEGFRIED.
» » 402, στ. 22 » κυκλικοῦ » κυρτοῦ.

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΑ΄ 1959
ΤΕΥΧΟΣ Α΄
21

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1959

Καὶ τὸ ὅτι μὲν οἱ Πανσλαβισταὶ ὑπὸ οἱονδήποτε πολιτικὸν ἢ καὶ κοινωνικὸν καθεστὼς θέλουν νὰ ἰδιοποιηθοῦν τὴν Μακεδονίαν, εἶναι δι' ἡμᾶς εὐνόητον, ἀλλὰ τὸ νὰ παρασύρωνται ξένοι ἐπιστήμονες εἰς παρομοίαν πλάνην, διὰ νὰ μὴ εἴπωμεν αὐθαιρεσίαν, ἀποτελεῖ κάτι τὸ ἀπορίας ἄξιον. Καὶ αὐτὰ μὲν προκειμένου περὶ ξένων, Σλάβων καὶ μή. Τί νὰ εἴπωμεν ὅμως προκειμένου περὶ μερικῶν Ἑλλήνων, οἱ ὁποῖοι εἴτε ἀπὸ πολιτικοκοινωνικὴν τοποθέτησιν εἴτε καὶ ἀπὸ ἐπιπολαιότητα χρησιμοποιοῦν τὰ μακεδονικὴ γλῶσσα ἢ ἰδίωμα ἢ ἀκόμη καὶ Μακεδονία μὲ τὸ αὐτό, ὁποῖον καὶ οἱ πανσλαβισταί, περιεχόμενον;

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Τ. ΚΟΛΙΑΣ
τέως καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

***

**ΖΗΚΦΡΙΝΤ ΧΕΛΛΕΡ. Ἡ ἀνακάλυψις τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων.**

(Πρακτικὰ τῆς Γερμανικῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, Τάξις διὰ μαθηματικά, φυσικὴν καὶ τεχνικήν, 1958, Ἀριθ. 6).

**SIEGFRIED HELLER. Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer.**

(Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik, Jahrgang 1958, Nr 6).

Διὰ τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας του, ἀνακοινωθείσης ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, ἐρευνᾷ ὁ κ. Χέλλερ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἡ διαίρεσις αὕτη ὀνομάζεται, ὡς γνωστόν, ἀπὸ τοῦ Μεσαιῶνος, «θεώρημα τῆς χρυσῆς τομῆς». Εἶναι δὲ ἐπίσης γνωστὸν ὅτι τὰ πλεῖστα ἀρχαῖα Ἑλληνικὰ θέατρα ἔχουσι κατασκευασθῆ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἐν εἰσαγωγῇ ὁ συγγραφεὺς γράφει ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ διαπιστωθῇ μετὰ βεβαιότητος, ποῖος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις κατεσκεύασε διὰ κανόνος καὶ διαβήτου τὸ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ ἐν συναρτήσει πρὸς τὴν κατασκευὴν ταύτην ἀνεκάλυψε τὴν διαίρεσιν εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον (ἤ, ὡς ἄλλως λέγεται, τὴν συνεχῆ διαίρεσιν εὐθείας).

Τὸ θεώρημα τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον λέγει: δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ διαιρεθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς δύο μέρη, ὥστε ὁ λόγος τῆς δοθείσης εὐθείας πρὸς τὸ ἓν μέρος νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ μέρους τούτου πρὸς τὸ ἄλλο μέρος ἢ δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἄνισα μέρη, ὥστε τὸ γινόμενον τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ μικρότερον μέρος νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μέρους.

Ὁ συγγραφεὺς ὑποστηρίζει ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῆς συνεχοῦς διαιρέσεως εὐθείας ὀφείλεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἵππασον, ὅστις εἴτε εὗρε ταύτην ἀνεξαρτήτως τῶν ἄλλων ἐρευνῶν του, εἴτε παρακινηθεὶς ἐκ τῆς ὑπ' αὐτοῦ ἀνακαλύψεως τοῦ ἀσυμμέτρου εἰς τὰς ἐρεύνας του ἐπὶ τῆς σχέσεως τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου. Κατὰ τὸν συγγραφέα, ὁ Ἵππασος ἐργαζόμενος ἐπὶ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου ἀνεκάλυψεν ὅτι ὑπάρχουσι μεγέθη, μεταξὺ τῶν ὁποίων δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον (ἀσύμμετρα). Μετὰ τὴν ἀνακάλυψιν ὑπὸ τοῦ Ἱππάσου τοῦ ἀσυμμέτρου, εἰς τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ πλευρᾶς καὶ διαγωνίου τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἐπηκολούθησεν ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου καὶ ἐν συνδυασμῷ πρὸς ταύτην ἡ ἀνακάλυψις τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἀναχωροῦντες οἱ Πυθαγόρειοι ἐξ ἑνὸς ἀπειροελαχίστου τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ σμι-

κρότης ἐπέτρεψε νὰ θεωρηθῇ ἡ διαγώνιος ἴση πρὸς τὴν πλευράν, κατεσκεύασαν σειρὰν ὁλονὲν μεγαλυτέρων τετραγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος ΙΙ 10 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς περὶ τούτου ὁ Πρόκλος εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος (ἔκδ. KROLL, Λειψία 1901, ΙΙ σελὶς 24 κ. ἑ.). Οἱ Πυθαγόρειοι παρεκινήθησαν εἰς τὰς ὑποθέσεις των ταύτας (νὰ θεωρήσωσι τὴν πλευρὰν μικροῦ τετραγώνου ἴσην πρὸς τὴν διαγώνιον αὐτοῦ) τὸ μὲν ἐκ μαθηματικῶν σκέψεων, τὸ δὲ ἐκ μυστικιστικῶν παραστάσεων περὶ τοῦ εἴδους καὶ τῆς οὐσίας τῆς μονάδος.

Ὁ νόμος κατασκευῆς ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων, (συνεχῶς μεγαλυτέρων) εἶναι $S_n = S_{n-1} + d_{n-1}$ καὶ $d_n = S_n + S_{n-1}$. Ἐὰν ἔκ τινος τετραγώνου κατασκευάζωμεν διαδοχικῶς μικρότερα τετράγωνα, ὁ νόμος κατασκευῆς των εἶναι $S_{n-1} = d_n - S_n$ καὶ $d_{n-1} = S_n - S_{n-1}$. $S_n$ καὶ $d_n$ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος νυοστοῦ τινος τετραγώνου. Ἀφοῦ εὑρέθησαν οἱ νόμοι κατασκευῆς τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων (ἴδε Ε. Σταμάτη: Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. ΙΙ, Εἰσαγωγὴ σελ. 8) ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ΙΙ 10, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἀνακάλυψις τῶν Πυθαγορείων, ἐδόθη εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ μικροτάτου τετραγώνου ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ 1 καὶ εἰς τὴν διαγώνιον τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ 1. Τὸ ἀμέσως ἑπόμενον τετράγωνον θὰ ἔχῃ πλευρὰν 2 καὶ διαγώνιον 3, τὸ ἑπόμενον τετράγωνον θὰ ἔχῃ πλευρὰν 5 καὶ διαγώνιον 7 καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ νομου $S_n = S_{n-1} + d_{n-1}$ καὶ $d_n = S_n + S_{n-1}$· αἱ λοιπαὶ τιμαὶ τῶν ἀκολουθούντων τετραγώνων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως 12, 17 καὶ 29, 41 καὶ 70, 90. Οἱ ἀντίστοιχοι λόγοι τῶν διαγωνίων πρὸς τὰς πλευρὰς παρέχουσι τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{2}$ τὴν ὁποίαν κλείουσι μεταξὺ δύο φραγμάτων, ἤτοι εἶναι $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{90}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$. Αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν διαγωνίων τῶν διαδοχικῶς κατασκευαζομένων τετραγώνων (ἐκ μικροῦ τινος πρὸς τὰ μεγαλύτερα συνεχῶς) ἐπιλύουσι καὶ τὴν ἑξῆς διοφαντικὴν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας μνημονεύει ὁ Πλάτων σαφῶς ἐν τῇ Πολιτείᾳ: $7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$, (546 C).

Ὁ κ. Χέλλερ ὑπομιμνήσκει ὅτι ὁ Ἵππασος καὶ οἱ ὀπαδοί του τὰς μεθόδους ἐρεύνης ἐπὶ τοῦ τετραγώνου, αἱ ὁποῖοι ὡδήγησαν εἰς νέα ἀποτελέσματα, πιθανῶς νὰ ἐφήρμοσαν καὶ εἰς τὸ πεντάγωνον. Ὁ Ἵππασος μετὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακάλυψιν τοῦ ἀσυμμέτρου ἐφήρμοσε, κατὰ τὸν συγγραφέα, τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως (τὴν μέθοδον τῶν συνεχῶν διαιρέσεων πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, κατὰ τὸν Εὐκλείδην) ἐπὶ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ διεπίστωσεν ὅτι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον παρέχουσι πάλιν τὴν διαγώνιον καὶ τὴν πλευρὰν ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου καὶ ὅτι παρόμοιον ἰσχύει διὰ τὰ ἐπακολουθοῦντα ὑπόλοιπα. Ἡ σκέψις πλέον ἦτο εὔκολος, ὅτι ὅπως καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν μικροτέρων τετραγώνων οὕτω καὶ ἐνταῦθα εὑρίσκοντο συνεχῶς μικρότερα κανονικὰ πεντάγωνα, ὅπου ἡ διαφορὰ διαγωνίου καὶ πλευρᾶς ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου παρεῖχε τὴν πλευρὰν τοῦ ἀμέσως μικροτέρου καν. πενταγώνου, μὲ τὴν διαφορὰν τώρα, ὅτι ἄλλως ἢ κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τετραγώνων, ἡ διαγώνιος τοῦ ἀμέσως μικροτέρου πενταγώνου ἦτο ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ προηγουμένου καν. πενταγώνου. Κατὰ ταῦτα ἰσχύουσιν αἱ ἐξισώσεις $S_{n-1} = d_n - S_n$ καὶ $d_{n-1} = S_n$, ἔνθα $S_n$ καὶ $d_n$ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ νυοστοῦ κανονικοῦ πενταγώνου. Ἀντιστρόφως θὰ ἠδύνατο, κατὰ τὸν συγγραφέα, ὁ Ἵππασος νὰ κατασκευάσῃ συνεχῶς μεγαλύτερα καν. πεντάγωνα ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐξισώσεων $S_n = d_{n-1}$ καὶ $d_n = S_n + S_{n-1}$.

Τώρα, ὡς κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων ὑπελογίσθησαν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν κανονικῶν πενταγώνων (ἐκ τῶν μικροτέρων πρὸς τὰ μεγαλύτερα). Ὁ Ἵππασος θὰ ἐσκέφθη νὰ θεωρήσῃ πεντάγωνον, ὅπερ νὰ διαχωρίζηται διὰ τῶν δύο διαγωνίων του εἰς τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἐὰν ἔδιδεν εἰς ἑκάστην τῶν πλευρῶν καὶ τῶν διαγωνίων τούτων τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 1, θὰ ἐλάμβανεν ἓν ἑξηλ-

λαγμένον τετράπλευρον. Κατὰ τὴν ἑπομένην κατασκευὴν μὲ $S=1$ καὶ $d=2$ ἔλαβεν ἓν τρίγωνον καὶ μόλις κατὰ τὴν ἀκολουθοῦσαν κατασκευὴν μὲ $S_1=2$ καὶ $d_1=3$ ἔλαβεν ἓν χρησιμοποιήσιμον πεντάγωνον. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων $S_n=d_{n-1}$ καὶ $d_n=S_n+S_{n-1}$ προκύπτουσιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ εἰς τὸ κανονικὸν πεντάγωνον.

Ὁ συγγραφεὺς μετὰ τὰ ἀνωτέρω σημειοῖ ἓν σχόλιον ἐπὶ τοῦ εὐκλειδείου θεωρήματος II, 11, τὸ ὁποῖον παρέχει τὴν κατασκευὴν τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Εἰς τὸ σχόλιον τοῦτο ἑρμηνεύεται γεωμετρικῶς τὸ κλάσμα $S_8 : d_8=5 : 8$ ἀπὸ ἐπόψεως προσεγγίσεως κατὰ τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου καὶ διαπιστοῦται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον διαστάσεις 8 καὶ 8—5=3 ἰσοῦται μὲ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν 5 μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν τομῆς τῆς εὐθείας 8 ἡ σχέσις αὕτη θὰ ἰσχύῃ, ὅταν προστίθηται ἡ ἀφαιρῆται ἡ μονάς, ἤτοι θὰ εἶναι :

$$d_n \cdot r_n - S^2_n = \pm 1 \quad \text{διὰ} \quad n = \frac{\text{ἄρτιον}}{\text{περιττόν}}.$$

Διὰ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον θὰ εἶναι π. χ.

| Πλευρικοὶ ἀριθμοί. | | | Διαμετρικοὶ ἀριθμοί. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Πλευρὰ πρώτου | καν. πενταγώνου | $S_1=1$ | Διαγώνιος πρώτου | καν. πενταγ. | $=1$ |
| » δευτέρου | » » | $S_2=d_1=1$ | » δευτέρου | » » | $S_1+d_1=1+1=2$ |
| » τρίτου | » » | $S_3=d_2=2$ | » τρίτου | » » | $S_2+d_2=1+2=3$ |
| » τετάρτου | » » | $S_4=d_3=3$ | » τετάρτου | » » | $S_3+d_3=2+3=5$ |
| » πέμπτου | » » | $S_5=d_4=5$ | » πέμπτου | » » | $S_4+d_4=3+5=8$ |

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δεικνύει ἔκδηλον ὁμοιότητα πρὸς τὰς εὑρεθείσας διὰ τὸ τετράγωνον διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχέσεις. Ἐὰν εἰς τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν

$$2\,S^2_n - d^2_n = \pm 1 \quad \text{διὰ} \quad n = \frac{\text{ἄρτιον}}{\text{περιττὸν}}$$

(τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν κατασκευὴν διαδοχικῶν τετραγώνων) τεθῇ τὸ δεύτερον μέλος ἴσον μὲ μηδέν, λαμβάνομεν τὴν γεωμετρικὴν σχέσιν τὴν ὑπάρχουσαν μεταξὺ διαγωνίου καὶ δύο πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου, ἤτοι $d^2_n=2\,S^2_n$. Παρομοία σκέψις θὰ ὡδήγησε τοὺς Πυθαγορείους μαθηματικοὺς νὰ θεωρήσωσι τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως $d_n \cdot r_n - S^2_n = \pm 1$ ἴσον πρὸς μηδέν, ὁπότε θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ διετύπωσαν οὗτοι τὴν πρότασιν : Ἐὰν κανονικοῦ πενταγώνου ἡ πλευρὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς διαγωνίου, ἡ διαγώνιος ἔχει τμηθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον μῆκος τὴν διαγώνιον καὶ πλάτος τὴν διαφορὰν τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τῆς διαγωνίου νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς. Τὰ περαιτέρω εὑρίσκονται εἰς τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 11. Τέλος θὰ ἠδυνήθησαν οὗτοι νὰ ἀποδείξωσιν ὅτι ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὴν $d.r=S^2$ τοῦ κανονικοῦ πεταγώνου

(d=διαγώνιος, S=πλευρὰ καν. πενταγ. καὶ r=d—S).

Ἐπὶ τῆς λίαν ἐνδιαφερούσης ταύτης πραγματείας τοῦ κ. Σ. Χέλλερ ἐπιθυμοῦμεν νὰ προσθέσωμεν ὅτι ὁ Πρόκλος (FRIEDL. σελ. 65) παρέχει τὴν πληροφορίαν ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἀνεῦρε τὴν κατασκευὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων (πέντε κανονικῶν πολυέδρων) ὁ δὲ Εὐκλείδης εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου (Στοιχεῖα IV, 10, 11) προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἡ ὑπόθεσις τοῦ κ. Χέλλερ ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τοῦ ἀσυμμέτρου ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Ἱππάσου ἔχει μεγάλην πιθανότητα ἀληθείας.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΛΕΟΝΑΡΔΟΥ Ο·Ι·ΛΕΡ. Πλήρης εἰσήγησις εἰς τὴν Ἄλγεβραν. Τῇ συνεργασίᾳ τοῦ Ἰωάν. Νήσνερ. Ἀναθεωρηθεῖσα νέα ἔκδοσις ὑπὸ Ἰωσὴφ Ε. Χόφμαν.** ἐκδοσις Reclam. Στουττγὰρτ 1959 (σελ. 571)

**LEONHARD EULER, Vollständige Anleitung zur Algebra.** Unter Mitwirkung von **Ioh. Niessner**, In revidierter Fassung neu herausgegeben von **Jos. E. Hofmann**. Reclam—Verlag Stuttgart (1959).

Ἡ πλήρης εἰσήγησις εἰς τὴν Ἄλγεβραν τοῦ Ὄιλερ εἶναι ἓν βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐκδοθῆ πλειστάκις ἐκτὸς τῆς γερμανικῆς καὶ εἰς πολλὰς ἄλλας γλώσσας. Τὸ βιβλίον συνετάχθη ἐν Πετρουπόλει, καθ' ὑπαγόρευσιν, ὅτε ὁ Ὄιλερ ἦτο σχεδὸν τυφλός, καὶ ἐξεδόθη τὸ πρῶτον εἰς τὴν γερμανικὴν κατὰ τὸ 1770. Κατὰ τὰς ἑπομένας πολλὰς ἐκδόσεις ἐγένοντο πολλαὶ γλωσσικαὶ βελτιώσεις τῆς διατυπώσεως τοῦ βιβλίου. Αἱ περισσότεραι ἐν Γερμανίᾳ ἐκδόσεις ἔχουσιν ὡς ὑπόβαθρον τὴν ὑπὸ τοῦ ἱκανοῦ μαθηματικοῦ L. NATANI (περὶ τὸ 1870) γενομένην ἔκδοσιν, ἥτις ὑπὸ τούτου εἶχε συγχρονισθῆ καὶ προσαρμοσθῆ εἰς τὴν χρησιμοποιουμένην τότε μαθηματικὴν ὁρολογίαν. Ὁ κ. Ἰωσ. Χόφμαν, χωρὶς νὰ ἀποστῇ τῆς πρωτοτύπου διατυπώσεως τοῦ ἔργου ὑπὸ τοῦ Ὄιλερ, προσήρμοσε τοῦτο εἰς τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν ὁρολογίαν. Κατὰ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ ἔργου παρατηρεῖ τις ὅτι τοῦτο ἔχει ὑπαγορευθῆ ὑπὸ σχεδὸν τυφλοῦ τινος καὶ ἔχει καταγραφῆ ὑπό τινος γραφέως ἀπείρου κατὰ τὴν γλωσσικὴν μόρφωσιν. Εἰς τινας περιπτώσεις ὑπάρχουσι προτάσεις μὴ ἀληθεῖς, ὅπως π.χ. εἰς τὴν σελίδα 96 (πρότασις 175), ἔνθα ὑποστηρίζεται ὅτι $0^0=1$. Ὁ κανὼν τῶν σημείων τοῦ Καρτεσίου (Descartes, Géométrie 1637) περὶ τοῦ πλήθους τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἀναφέρεται ἄνευ ἀποδείξεως (πρότασις 163 σελ. 323), οὔτε δὲ καὶ μνημονεύεται τὸ ὄνομα τοῦ Καρτεσίου. Ὁ Ὄιλερ δὲν φαίνεται πλήρως κατατοπισμένος ἐπὶ τῶν ἐπιτευγμάτων τῶν προκατόχων του. Οὕτω, μνημονεύονται ὁ G. Cardano (1501—1576) καὶ ὁ Sc. del Ferro (1425;—1526) ὡς ἀνακαλύψαντες τὴν λύσιν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως (σελ. 330) καὶ παρασιωπᾶται πλήρως ὁ N. Tartaglia (1500;—1557). Ὁ R. Bombelli (περὶ τὸ 1550) μνημονεύεται ἀντὶ τοῦ L. Ferrari (1522—1565) ὡς ἀνακαλύψας τὴν λύσιν τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως καὶ ὁ J. Pell (1611—1685), ὅστις οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει πρὸς τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $m^2=an^2+1$, ἀναφέρεται ὡς ἀνακαλύψας τὴν μέθοδον ταύτην, ἀντὶ τοῦ W. Brouncker (1620;—1684).

Ἡ αὐθεντία τοῦ Ὄιλερ συνετέλεσεν, ὥστε εἰς τὴν ἀκολουθήσασαν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις νὰ ὀνομάζηται ἐξίσωσις τοῦ Pell.

Αἱ ἀναπτύξεις εἰς σειρὰς (προτάσεις 292 καὶ 298, σελ. 140—143) τῶν παραστάσεων $1:(1\pm\alpha)$ ἐπιτρέπονται βεβαίως μόνον ὅταν $-1<\alpha<+1$ καὶ οὐδέποτε ὅταν $\alpha=1$ ἢ 2. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὴν εἰς σειρὰν ἀνάπτυξιν τῆς παραστάσεως $1:(1-\alpha+\alpha^2)$ (πρότασις 304, σελ. 146). Καθ' ὁλοκληρίαν ἀνεπίτρεπτος ἐπίσης εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἐκθέτου $\infty$ εἰς τὴν πρότασιν 239 (σελ. 365). Τὰ περισσότερα ἀριθμητικὰ παραδείγματα καὶ αἱ περισσότεραι ἀσκήσεις ἔχουσι παραληφθῆ ἐκ παλαιοτέρων διδακτικῶν βιβλίων. Θὰ ἠδύνατό τις μάλιστα ἐκ τῆς ἐπιμελοῦς ἐξετάσεως τούτων νὰ ἀνεύρῃ ἐκ ποίων διδακτικῶν βιβλίων ὁ Ὄιλερ ἤντλησεν. Λίαν ἀξιοπερίεργος εἶναι ἡ ἱστορία τῆς ἐξελίξεως τῶν προβλημάτων τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, τὰ ὁποῖα ὁ Ὄιλερ παρέχει εἰς τὸ δεύτερον τμῆμα τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ βιβλίου. Πολλὰ ἐκ τούτων ἀνάγονται μέχρι τοῦ Διοφάντου καὶ τοῦ Fermat. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ Ὄιλερ εἶχεν ὑπ' ὄψει ἐν Πετρουπόλει τὴν ἐπιμελείᾳ τοῦ Fermat γενομένην δευτέραν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὑπὸ τοῦ G. Cl. Bachet du Méziriac (1581—1638), ἥτις ἦτο πλήρης σημειώσεων καὶ παρατηρήσεων τοῦ Fermat. Ὁ Ὄιλερ δὲν εἶχε καλὴν ἐντύπωσιν περὶ τοῦ Fermat, διότι ἐπίστευεν ὅτι ὁ Fermat εἶχεν ἐργασθῆ ἀποκλειστικῶς διὰ μὴ ἐπι-

τρεπομένων ἐπαγωγικῶν συλλογισμῶν. Οὕτω ἑρμηνεύεται, διατὶ ὁ Ὄιλερ δὲν ἐμνημόνευεν εὐχαρίστως τὸ ὄνομα τοῦ Fermat.

Ὅ,τι ὁ Ὄιλερ παρέχει εἰς τὸ 8ον καὶ 9ον κεφάλαιον (σελ. 435]55) εἶναι κατὰ βάσιν περίληψις καὶ ἀνάπτυξις ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ὁ J. de Billy (1602—1679) ἔχει γράψει ὡς εἰσαγωγὴν εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τοῦ 1670 τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου ἐξ ἐπιστολῶν τοῦ Fermat. Τὸ καλούμενον πρόβλημα τῶν 6 τετραγώνων (πρότασις 235 σελ. 526) προέρχεται ἐκ τοῦ J. Ozanam (1640—1717), μαθητοῦ τοῦ Billy. Ἐπίσης τὸ πρόβλημα τῶν τριῶν τετραγώνων (πρότ. 238 σελ. 534) ἐτέθη καὶ ἐλύθη προηγουμένως ὑπὸ τοῦ Ozanam.

Τὸ πρόβλημα τῶν τεσσάρων κύβων (πρότ. 245 σελ. 547 καὶ ἑξῆς) προέρχεται ἐκ τοῦ Διοφάντου. Εἰς τὴν πρότασιν 140 (σελ. 312]13) ὁ Ὄιλερ ἐκφράζει τὴν γνώμην ὅτι θεωρεῖ τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμοὺς οὐχὶ ἰσοτίμους πρὸς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Εἰς τὴν πρότασιν 182 (σελ. 477) ἰσχυρίζεται οὗτος ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἡ παράστασις $x^2+cy^2=(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, τετράγωνον, πρέπει νὰ εἶναι

$x\pm y\sqrt{-c}=m\,(p\pm q\sqrt{-c})^2$, ἔνθα m, p, q νοοῦνται ἀκέραιοι. (Τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν διατυποῦται πολὺ σαφῶς). Ὁ ἰσχυρισμὸς οὗτος δὲν ἀληθεύει.

Παρὰ τὰς ἀνωτέρω παρατηρήσεις, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψει τὸ πλῆθος τῶν παρεχομένων προτάσεων, θὰ ἴδωμεν ἐκ τῆς μελέτης τοῦ βιβλίου ὅτι πολλὰ ὀφείλομεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ ἐμπέδωσιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Ὄιλερ. Δὲν πρέπει νὰ διαφύγῃ τῆς προσοχῆς τῶν νεωτέρων, ὅτι κρίσις τοῦ βιβλίου τούτου τοῦ Ὄιλερ θὰ ἦτο ἄδικος, ἐὰν ἐγίνετο ὑπὸ τὸ πρίσμα τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ δὲν ἐλαμβάνετο ἀκόμη ὑπ' ὄψει ὅτι τοῦτο ἐγράφη δι' ἀρχαρίους. Ἰδιαιτέραν παρόρμησιν πρὸς ἔρευναν παρέχουσιν αἱ γενικαὶ καὶ ἐνδιαφέρουσαι παρατηρήσεις τοῦ τμήματος τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ἥτις κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Ὄιλερ ἀπετέλει τὸ ἐπίκεντρον τοῦ ἐπιστημονικοῦ ἐνδιαφέροντος. Ὁ ἴδιος ὁ Ὄιλερ ἀνέπτυξε περαιτέρω εἰς ἐπακολουθησάσας ἐργασίας του τὰς μεθόδους, τὰς ὁποίας χρησιμοποιεῖ οὗτος εἰς τὸ ὑπὸ κρίσιν βιβλίον.

Ὁ Euler καὶ ὁ Lagrange (1736—1812) εἶναι οἱ δύο πρωτεύοντες καὶ ἀνυπέρβλητοι μαθηματικοὶ ἐπὶ τῆς περιοχῆς τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ὅταν αὕτη χρησιμοποιῇ κατὰ τὰς ἐργασίας της στοιχειώδεις μεθόδους ἐρεύνης. Ἡ βραδύτερον γενομένη ἀνάπτυξις καὶ ἐπέκτασις τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ἥτις γενικώτερον σήμερον ὀνομάζεται θεωρία τῶν ἀριθμῶν, ἐνεκαινιάσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ A. M. Legendre (1752—1833), τοῦ C. Fr. Gauss (1777—1855) καὶ P. G. Lejeune—Dirichlet (1805—1859). Ἔκτοτε ἡ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις περιῆλθεν εἰς στασιμότητα, διότι αὕτη ἀσχολεῖται μόνον μὲ εἰδικὰ προβλήματα καὶ ὄχι τοιαῦτα γενικῆς φύσεως.

Τὸ βιβλίον διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Τὸ πρῶτον μέρος ὑποδιαιρεῖται εἰς τρία τμήματα, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέρος ὑποδιαιρεῖται εἰς δύο τμήματα. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ βιβλίου ἀναπτύσσεται ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς μετὰ πολλῶν παραδειγμάτων καὶ ἀριστοτεχνικῆς ἱκανότητος. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος γίνεται ἡ διαπραγμάτευσις τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων καὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως μετ' ἀπαραμίλλου σαφηνείας καὶ ἁπλότητος.

Ὁ κ. Χόφμαν εἶναι ἄξιος συγχαρητηρίων, διότι κατώρθωσε νὰ συγχρονίσῃ τὸ βιβλίον, ὥστε τοῦτο νὰ ἀναγιγνώσκηται εὐχαρίστως ὑπὸ τῶν νεωτέρων σπουδαστῶν, χωρὶς ὅμως καὶ νὰ μεταβάλῃ τὸ παράπαν τὰ νοήματα τοῦ Ὄιλερ. Οἱ ἀρχάριοι σπουδασταὶ τῆς ἀλγέβρας θὰ ὠφεληθῶσι τὰ μέγιστα ἐκ τῆς μελέτης τοῦ βιβλίου τούτου τοῦ Ὄιλερ.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

δικαίωμα νὰ ἀπευθύνωμεν θερμὴν σύστασιν πρὸς ἅπαντας τοὺς μελετητὰς τῆς νεοελληνικῆς γλώσσης καὶ τοῦ νεοελληνικοῦ πολιτισμοῦ νὰ ἀσχοληθοῦν μὲ τὴν μελέτην καὶ ἀξιοποίησιν τοῦ ἐκδοθέντος ὑπὸ τοῦ Π. Ι. Ζέπου κειμένου. Διὰ τούτου ἀνεκλήθη ἀπὸ τὴν λήθην μία μεγάλη, ἀλλὰ τελείως ὅμως ἠγνοημένη πνευματικὴ προσωπικότης τῆς προεπαναστατικῆς περιόδου τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἔθνους καὶ ἐπεχύθη φῶς εἰς μίαν ἀπὸ τὰς σπουδαιοτέρας περιόδους τῆς ἐθνικῆς μας ἱστορίας.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

* * *

**ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΚΩΤΣΑΚΗ. Αἱ ἐπιστῆμαι κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας τοῦ Βυζαντίου.** (Πρακτικὰ τοῦ Α' Συνεδρίου Ἑλληνοχριστιανικοῦ Πολιτισμοῦ, σελ. 23, μετὰ περιλήψεως εἰς τὴν γερμανικὴν γλῶσσαν, 1956).

Ὁ Ὑφηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου καὶ τοῦ Πολυτεχνείου Ἀθηνῶν κ. Δημ. Κωτσάκης ἔχει δημοσιεύσει μέχρι σήμερον πολλὰς μελέτας ἀφορώσας εἰς τὴν ἀστρονομίαν. Ἀλλὰ τὰ διαφέροντα τοῦ κ. Δημ. Κωτσάκη δὲν περιορίζονται μόνον εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀστρονομίας, τῆς ὁποίας οὗτος εἶναι ἐκλεκτὸς λειτουργὸς καὶ θεράπων· ταῦτα ἐκτείνονται καὶ εἰς εὐρυτέρους καὶ γενικωτέρους ἐπιστημονικοὺς καὶ κοινωνικοὺς σκοπούς, τοὺς ὁποίους οὗτος ἐξυπηρετεῖ διὰ διαλέξεων καὶ ποικίλων δημοσιευμάτων. Μεταξὺ τῶν δημοσιευμάτων τούτων ἀνήκει καὶ ἡ ὑπὸ κρίσιν πραγματεία, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ σοβαρὰν συμβολὴν εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἐπιστημονικῆς κινήσεως τοῦ Βυζαντίου κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας τῆς ζωῆς του. Ἐν εἰσαγωγῇ ὁ κ. Δημ. Κωτσάκης σημειώνει τὴν ῥῆσιν τοῦ Ἄγγλου W. C. Dampier ὅτι «τὸ Βυζάντιον διετήρησε τὸ θεμέλιον τοῦ πολιτισμοῦ διὰ μέσου τῶν χειρίστων χρόνων τοῦ βαρβαρισμοῦ τῆς δυτικῆς Εὐρώπης» καὶ τονίζει ὅτι ἡ πνευματικὴ δραστηριότης τοῦ Βυζαντίου κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας τῆς ζωῆς του ἐκδηλοῦται πρῶτον μεν «ὡς στροφὴ πρὸς τὴν παιδείαν μὲ τὸν Νικ. Βλεμμύδην καὶ τὴν φιλολογίαν καὶ τὰς ἐπιστήμας μὲ τὸν Μετοχίτην καὶ τὸν Παχυμέρην», δεύτερον ὡς στροφὴ πρὸς τὸν ἀνθρωπισμὸν καὶ τρίτον ὡς ζωηρὸν ἐνδιαφέρον ἐπὶ τοῦ θεολογικοῦ καὶ θρησκευτικοῦ πεδίου. (Κ. Δ. Γεωργούλη: Ἡ Ἑλληνικὴ Φιλοσοφία εἰς Ἐγκ. Λεξ. Ἥλιος, τόμ. 7 σ. 718). Μεταξὺ τῶν ἐξεχόντων λογίων τοῦ Βυζαντίου κατὰ τὸν 12ον καὶ 13ον αἰῶνα εἶναι ὁ Νικηφόρος Βλεμμύδης (1197—1272) καὶ οἱ μαθηταί του Γεώργιος Παχυμέρης (1242—1310) καὶ Θεόδωρος Β' Λάσκαρις (1222—1258). Μεταξὺ τῶν περισπουδάστων πραγματειῶν τοῦ Ν. Βλεμμύδου ὁ κ. Δημ, Κωτσάκης ἀναφέρει τὴν Ἐπιτομὴν τῆς Φυσικῆς, ἔνθα μεταξὺ ἄλλων γράφεται «Πάντως δὲ καὶ ἀκινήτως καὶ κυρία αἰτία τῶν ἁπάντων καὶ αὐτῆς τῆς φύσεως ὁ Θεός . . . Ὅθεν εἰκότως ὀργανικὸν αἴτιον ὁ Πλάτων ταύτην φησίν». Εἰς τὴν περιοχὴν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν καὶ ἰδίᾳ τῶν μαθηματικῶν ὁ μαθητής του Ν. Βλεμμύδου, ὁ μοναχὸς Γεώργιος Παχυμέρης, ὑπερέβη τὸν διδάσκαλον. Οὗτος ὑπῆρξε πολυγραφώτατος. Περισπούδαστον θεωρεῖται τὸ ἔργον του «Τὸ σύνταγμα τῶν τεσσάρων μαθημάτων, ἀριθμητικῆς, μουσικῆς, γεωμετρίας καὶ ἀστρονομίας» εἰς τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται μετὰ πολλῆς εὐχερείας τὰ πορίσματα τῶν ἀρχαίων συγγραφέων εἰς τοὺς τέσσαρας μνημονευομένους ἐπιστημονικοὺς κλάδους. Ἀλλὰ καὶ ὁ Θεόδωρος ὁ Β' Λάσκαρις, ὅστις ἐγένετο καὶ Αὐτοκράτωρ Νικαίας (1254—1258) προήγαγε τὰς θετικὰς ἐπιστήμας διὰ τοῦ ἔργου του «Τῆς φυσικῆς κοινωνίας λόγοι ἕξ», τὸ ὁποῖον εἶναι φιλοσοφικὸν καὶ ἐν ταὐτῷ μαθηματικόν. Πολὺ ὀρθῶς ὁ κ. Δημ. Κωτσάκης γράφει ὅτι δὲν εἶναι ὀρθαὶ αἱ ἀντιλήψεις τινῶν, ὅτι οἱ ἀραβικοὶ ἀριθμοὶ εἰσήχθησαν εἰς τὸ Βυζάντιον διὰ τοῦ Μαξίμου Πλανούδη (1260—1310) κατὰ τὸν 13ον αἰῶνα, ἐν ᾧ εἰς τὴν δυτικὴν Εὐρώπην εἰσήχθησαν οὗτοι 200 ἔτη ἐνωρίτερον. Τὴν γνώ-

μην του ταύτην στηρίζει ὁ κ. Δ. Κωτσάκης εἰς τὰς ἐρεύνας καὶ τὰ συμπεράσματα τοῦ P. Tannery (Mem. scient. IV). Ἀσχέτως πρὸς τοῦτο ἡ μαθηματικὴ πραγματεία τοῦ Πλανούδη «Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη» συνετέλεσε πολὺ εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀριθμητικῆς κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους τοῦ Βυζαντίου.

Ὁ Μανουὴλ Βρυέννιος, ὁ Θεόδωρος Μετοχίτης καὶ ὁ Θεόδωρος Μελιτηνιώτης ἀπετέλεσαν ἐξαιρετικὰς ἐπιστημονικὰς προσωπικότητας, αἱ ὁποῖαι ἐθεράπευον τὴν φιλοσοφίαν καὶ τὰ μαθηματικὰ καὶ ἰδιαιτέρως τὴν ἀστρονομίαν. Τὸ τρίτομον βιβλίον τοῦ Θ. Μελιτηνιώτου ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀστρονομικὴ τρίβιβλος» ἀποτελεῖ κλασσικὸν ἔργον καὶ πλουσιωτάτην πηγὴν ἀστρονομικῆς γνώσεως. Ἐξαιρετικὴν φυσιογνωμίαν διὰ τὴν ἐπιστήμην τοῦ Βυζαντίου καὶ γενικώτερον τῆς Δύσεως ἀποτελεῖ κατὰ τὸν 14ον αἰῶνα ὁ Νικηφόρος Γρηγορᾶς (1295—1360), τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀστρονομίας ὑπῆρξε μεγάλη. Εἰς δὲ τὴν Ἀκαδημίαν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν τῆς Τραπεζοῦντος διακρίνονται διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν αὐτῶν δρᾶσιν ὀνομαστοὶ ἐπιστήμονες ὅπως ὁ Γρηγόριος Χιονιάδης, ὁ κληρικὸς Μανουὴλ καὶ ὁ Κωνσταντῖνος Λουκίτης, οἱ ὁποῖοι ἐπιδίδονται ἰδιαιτέρως εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἀστρονομίας. Τέλος ὁ κ. Δημ. Κωτσάκης ἐξαίρει τὴν ἐπιστημονικὴν δρᾶσιν τοῦ Ἰσαὰκ Ἀργυροῦ, τοῦ Νικολάου Ραβδᾶ, τοῦ Μανουὴλ Μοσχοπούλου, τοῦ Νικολάου Καβάσιλα, τοῦ Γεωργίου Γεμιστοῦ ἢ Πλήθωνος, τοῦ Βησσαρίωνος. Καὶ οἱ σοφοὶ οὗτοι τοῦ Βυζαντίου ἀποτελοῦσι κόσμημα διὰ τὴν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Ὁ Γεώργιος Γεμιστὸς ἢ Πλήθων ἔδρασε καὶ ἐν Ἰταλίᾳ, ὅπου ἐγένετο ἀφορμὴ ἵνα ὁ ἡγεμὼν τῶν Μεδίκων Cosimo ἱδρύσῃ ἐν Φλωρεντίᾳ Πλατωνικὴν Ἀκαδημίαν. Περίφημος θεωρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πραγματεία τοῦ Ραβδᾶ τὴν ὁποίαν σχολιάζει ὁ P. Tannery (Mem. Scient. IV). Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ὁ ὑπὸ τοῦ Ραβδᾶ ἀναπτυσσόμενος τρόπος ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου. Ἐπισημειοῦμεν ὅτι ὁ τίτλος τοῦ ἀριθμητικοῦ βιβλίου τοῦ Ραβδᾶ (ἐπιστολῆς πρὸς τὸν Θεόδωρον Τζαβούχην) εἶχεν ὡς ἑξῆς:

«Τῷ λίαν ἐκθύμως φιλουμένῳ τῷ Κλαζομενεῖ Τζαβούχῃ Θεοδώρῳ, ὁ Νικόλαος Ἀρτάβασδος Σμυρνόθεν ἐκ Βυζαντίδος ὁ Ραβδᾶς γράφει τόδε.

Τὴν δήλωσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ζητημάτων, λαμπρότατέ μοι Τζαβούχιε γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν . . . ».

Ὁ κ. Δημ. Κωτσάκης μνημονεύει ἀκόμη τὴν πραγματείαν τοῦ Μ. Μοσχοπούλου περὶ τῶν μαγικῶν τετραγώνων, ἥτις ἔφερε τὸν τίτλον «Παράδοσις εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν» καὶ τὰ σχόλια τὰ ὁποῖα ἔγραψεν ὁ Νικ. Καβάσιλας εἰς τὸν Πτολεμαῖον καὶ ἐπάγεται ὅτι τὸ Βυζάντιον ἐξέπνευσε μὲν μετὰ χιλιετῆ ἀκτινοβολίαν, ἡ ἑλληνοχριστιανικὴ ὅμως παραδοσις συνεχίζεται.

Εἰς τὴν ἐν προκειμένῳ πραγματείαν του κατώρθωσεν ὁ κ. Δημ. Κωτσάκης εἰς ὀλίγας σελίδας νὰ παράσχῃ σαφῆ εἰκόνα τῶν σπουδαιοτέρων ἐπιστημονικῶν προσωπικοτήτων τοῦ Βυζαντίου κατὰ τοὺς τελευταίους τρεῖς αἰῶνας τῆς ζωῆς του καὶ νὰ ἐξάρῃ τὴν συμβολὴν αὐτῶν εἰς τὴν ἀναγέννησιν τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἐπιστημῶν εἰς τὴν δυτικὴν Εὐρώπην. Ὁ κ. Δημ. Κωτσάκης ἐπέτυχε πρὸς τούτοις νὰ ἐπισημάνῃ εἰς ἁδρὰς γραμμὰς ὅλα ἐκεῖνα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιστημονικῆς κινήσεως τῶν τελευταίων ἑκατονταετηρίδων τοῦ Βυζαντίου, ὥστε τὸ μὲν νὰ ῥίψῃ νέον φῶς εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν δρᾶσιν τοῦ Βυζαντίου, τὸ δὲ νὰ διευκολύνῃ κατὰ πολὺ τοὺς νεωτέρους ἐρευνητὰς τῶν Βυζαντινῶν σπουδῶν, παρέχων οὕτω εἰς αὐτοὺς σοβαρὰς καὶ θετικὰς ὑποδείξεις καὶ παρορμήσεις εἰς τὸ ἔργον των.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΙΩΑΝΝΟΥ Γ. ΑΡΓΥΡΑΚΟΥ. Μελέτη τοῦ Ἀστρολαβίου τοῦ Συνεσίου Κυρήνης.** Ἀθῆναι 1958, σελ. 14.

Σκοπὸς τῆς μελέτης τοῦ κ. Ἰω. Ἀργυράκου εἶναι ὅπως ἐρευνηθῇ τὸ ζήτημα τῶν βελτιώσεων καὶ συμπληρώσεων τοῦ ἀστρονομικοῦ ἐκείνου ὀργάνου, τὸ ὁποῖον ἐπὶ δύο χιλιάδας ἔτη ἐξυπηρέτησε τὰς πρακτικὰς καὶ ἐπιστημονικὰς ἀνάγκας τῆς ἀνθρωπότητος εἰς τὸν τομέα τῆς ἀστρονομίας, τῆς γεωδαισίας καὶ τῆς ναυτιλίας. Τὸ ἐν λόγῳ ἀστρονομικὸν ὄργανον εἶναι τὸ ἀστρολάβιον. Ὑπὸ τὸ ὄνομα ἀστρολάβιον νοεῖται ἀστρονομικὸν ὄργανον, ἡ κατασκευὴ τοῦ ὁποίου βασίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς στερεογραφικῆς προβολῆς, τῆς ἀπεικονίσεως δηλαδὴ τῆς οὐρανίου σφαίρας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δὲ τούτου ἀπεικονίζονται τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας προβαλλόμενα ἔκ τινος σημείου, π.χ. τοῦ νοτίου πόλου. Καλεῖται δὲ τὸ ὄργανον τοῦτο εἰδικώτερον, ἐπίπεδον ἀστρολάβιον ἢ ἐπιπεδόσφαιρον. Τὸ ἐπιπεδόσφαιρον κατεσκευάσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἱππάρχου, συνεπληρώθη ὅμως βραδύτερον ὑπὸ τοῦ Κλ. Πτολεμαίου, ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ ἐκ Κυρήνης Συνέσιος εἰς εἰδικὴν πραγματείαν του περὶ ἀστρολαβίου. Ὁ Συνέσιος (370—413 μ. Χ.) διετέλεσεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἐπὶ τριετίαν μαθητὴς τῆς τελευταίας νεοπλατωνικῆς φιλοσόφου Ὑπατίας ἥτις, ὡς γνωστόν, ἐλιθοβολήθη ὑπὸ τοῦ φανατικοῦ καὶ θρησκολήπτου ὄχλου τῆς Ἀλεξανδρείας τῆς ἐποχῆς ἐκείνης.

Ὁ Συνέσιος πλησίον τῆς Ὑπατίας, τὴν ὁποίαν ἀπεκάλει θειοτάτην, δέσποιναν μακαρίαν κλπ., ἠγάπησε τὰς φυσικομαθηματικὰς ἐπιστήμας καὶ ἰδιαιτέρως τὴν ἀστρονομίαν. Κατὰ τὸ 399 ὁ Συνέσιος κατεσκεύασεν ἀργυροῦν ἀστρολάβιον, τὸ ὁποῖον ἐδώρησεν εἰς τὸν ἐν Κωνσταντινουπόλει τὰ μέγιστα ἰσχύοντα φίλον του Παιόνιον, [Συνεσίου τοῦ Κυρηναίου, πρὸς Παιόνιον ὑπὲρ Δώρου Ἀστρολαβίου λόγος, Πατρολογία Migne (1859), Vol. LXVI, σελ. 1578 κ. ἑ.]. Ὁ κύριος σκοπὸς τῆς συγγραφῆς τοῦ πρὸς Παιόνιον λόγου τοῦ Συνεσίου ἦτο ἡ περιγραφὴ τοῦ ἀστρολαβίου καὶ ἡ θεωρητικὴ ἀνάπτυξις τῶν βάσεων καὶ τῶν ἀρχῶν, ἐφ' ὧν τοῦτο στηρίζεται. Ὁ ἴδιος ὁ Συνέσιος, ἀφοῦ γράφει ὅτι πρῶτος ἐπενόησεν τὸ ἀστρολάβιον ὁ Ἵππαρχος καὶ βραδύτερον συνεπλήρωσεν αὐτὸ ὁ Πτολεμαῖος, προσθέτει «ἡμεῖς δέ, (εἰ μὴ μεῖζον ἢ καθ' ἡμᾶς εἰπεῖν) ἐξυφήναμέν τε ἄχρι τῶν κρασπέδων αὐτὸ καὶ ἐτελειώσαμεν». Τέλος ὁ Συνέσιος δίδει ὁδηγίας περὶ τῆς χρήσεως τοῦ ἀστρολαβίου καὶ κλείει τὸν λόγον του δι' ἑνὸς ὀκταστίχου ἐκ τοῦ ὁποίου παραθέτομεν τοὺς δύο τελευταίους στίχους, ἔχοντας ὡς ἑξῆς:

Δέξο ζωδιακοῦ λοξώσιας· οὐδὲ σὲ λήσει
Κλεινὰ μεσημβρινῆς κέντρα συνηλύσεως.

Ὁ κ. Ἰ. Ἀργυράκος ἀφοῦ ἐρευνᾷ εὐστόχως τὰς βελτιώσεις καὶ συμπληρώσεις τοῦ ἀστρολαβίου ἀναλύει συντόμως τὸν πρὸς Παιόνιον λόγον τοῦ Συνεσίου μετὰ μεγάλης σαφηνείας καὶ ἀκριβείας. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης διαφαίνεται πλήρης, κατὰ τὸ δυνατόν, εἰκὼν τῶν ἐπιστημονικῶν συναφῶν ἐξελίξεων, αἵτινες ἔλαβον χώραν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς Βυζαντινῆς περιόδου ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ὡς καὶ ἡ συμβολὴ τοῦ Συνεσίου εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ προαγωγὴν τῆς πρακτικῆς ἀστρονομίας.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ ΠΑΝ. ΖΕΡΒΟΥ. Γεωμετρία. Χῶροι ἀνυσματικοὶ ἐπὶ σώματος μεταθετικοῦ καθ' ὁλοκληρίαν διατεταγμένου. Ἐφαρμογαί.** Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας τῶν ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων, συνεδρία τῆς 23 Μαρτίου 1959.

**SPYROS PAN. ZERVOS. Géometrie. Espaces vectoriels sur un corps commutatif totalement ordonnée ;** Applications. (Comptes rendus des séances de l' Académie des Sciences, séance du 23 Mars 1959).

Εἰς δύο προηγουμένας πραγματείας του, αἱ ὁποῖαι ἀνεκοινώθησαν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τῶν Ἐπιστημῶν τῶν Παρισίων (Comptes rendus des séances de l' Académie des Sciences, séance du 22 Juillet 1957 καὶ 5 août 1957) ὁ κ. Σπύρος Ζερβὸς ἀσχολεῖται μὲ προβλήματα τῆς συγχρόνου Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τούτων ἐκτίθεται ὅτι, ἐν ᾧ ὑπάρχουσι πολλὰ θεωρήματα ἐπὶ τῆς μειώσεως (minoration) τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ῥιζῶν τῶν μιγαδικῶν πολυωνύμων, ὁ κ. Σπ. Π. Ζερβὸς ἀναπληροῖ ὡρισμένα ἐκ τούτων διὰ μιᾶς ἐνιαίας μεθόδου, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει νὰ γενικεύσῃ τις αὐτὰ διὰ τὰς σειρὰς τοῦ Taylor καὶ ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται ἐπίσης εἰς ὡρισμένας γενικωτέρας τάξεις συναρτήσεων· ἡ μέθοδος αὕτη δίδει νέα ἀποτελέσματα.

Εἰς τὴν δευτέραν ἀνακοίνωσιν ὁ κ. Σπ. Π. Ζερβὸς ἐκθέτει ἐφαρμογὰς καὶ γενικεύσεις τῆς μεθόδου αὐτοῦ τῆς ἐκτεθείσης κατὰ τὴν πρώτην ἀνακοίνωσιν.

Εἰς τὴν ὑπ' ὄψει τρίτην πραγματείαν αὐτοῦ ὁ κ. Σπ. Π. Ζερβὸς ἀσχολεῖται μὲ πρόβλημα τῆς συγχρόνου γεωμετρίας. Διὰ τῆς προκειμένης θεωρίας τοῦ κ. Σπ. Ζερβοῦ ἐπιβεβαιοῦται ὅτι μέρος τῆς θεωρίας τῶν ἀνυσματικῶν τοπολογικῶν χώρων (des espaces vectoriels topologiques) ἀφορώσης εἰς τὸ σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς χώρους ἐπὶ οἱουδήποτε μεταθετικοῦ σώματος ἐξ ὁλοκλήρου διατεταγμένου. Λίαν ἀγαθὴν ἐντύπωσιν ἀφίνει ἡ χρησιμοποίησις ὑπὸ τοῦ κ. Σπ. Ζερβοῦ τοῦ γεωμετρικοῦ ὅρου Πυθαγορικὸν σῶμα, δι' οὗ δηλοῦται σῶμα εἰς τὸ ὁποῖον πᾶν ὡρισμένον ἄθροισμα τετραγώνων εἶναι τετράγωνον. Ἀλλὰ καὶ τὸν ὅρον Ὑποπυθαγορικὸν σῶμα συναντῶμεν εἰς τὴν προκειμένην πραγματείαν του, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνακοινοῦνται ὑπὸ τοῦ κ. Σπ. Ζερβοῦ τρία νέα γεωμετρικὰ θεωρήματα μετά τινων ἐφαρμογῶν.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΧΡΙΣΤΟΥ Β. ΓΚΛΑΒΑ, Συμβολὴ εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ πολικοῦ συστήματος.**

Εἰς τὸ προηγούμενον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος» (1958) ἔσχομεν τὴν εὐκαιρίαν νὰ κρίνωμεν τὴν πραγματείαν τοῦ κ. Χρ. Γκλαβᾶ «Τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας». Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ νέαν πραγματείαν τοῦ κ. Χρ. Γκλαβᾶ, ὑπὸ τὸν τίτλον «Συμβολὴ εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ πολικοῦ συστήματος» (συντεταγμένων). Ἡ πραγματεία αὕτη ἀνεκοινώθη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν, κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 6 Νοεμβρίου 1958.

Ὅπως εἶναι γνωστόν, αἱ πρῶται ἔννοιαι τῶν συντεταγμένων διετυπώθησαν ὑπὸ τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς ἀρχαιότητος Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου (γεννηθέντος περὶ τὸ 262 π. Χ.), ὅστις χρησιμοποιεῖ τὰς συντεταγμένας εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ κωνικά. Τὴν ὁρολογίαν τοῦ Ἀπολλωνίου ἀνέσυρεν ἐκ τῆς λήθης ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Καρτέ-

σιος (Descartes), ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὁ θεμελιωτὴς τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἐκ τοῦ ὀνόματος δὲ τούτου δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως ἢ πλαγίως δυνάμεναι νὰ ληφθῶσιν ὡς ἄξονες συντεταγμένων καλοῦνται καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι. Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν ὁ κ. Χρ. Γκλαβᾶς ἀναφέρει ὅτι ὁ Νεύτων (Newton) καὶ ὁ Ἰάκ. Μπερνοῦλλι (Jacq. Bernoulli) εἰσήγαγον μὲν νέα συστήματα συντεταγμένων διάφορα τοῦ καρτεσιανοῦ, ἀλλὰ τὰ συστήματα ταῦτα διαφέρουσι τοῦ ἐν χρήσει πολικοῦ συστήματος. Ὡς ἀνακαλύψας τὸ πολικὸν σύστημα σεντεταγμένων θεωρεῖται ὁ Ὄϊλερ (Euler). Εἰς ἓν πολικὸν σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιοῦνται, ὡς γνωστόν, δύο ἀριθμοὶ (ρ, θ) διὰ τὸν προσδιορισμὸν σημείου τινος Μ τοῦ ἐπιπέδου, ἔνθα ρ ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ΟΜ (radius vector) καὶ θ ἡ γωνία τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ΟΜ πρός τινα εὐθεῖαν ΟΧ (πολικὸν ἄξονα). Διὰ τοῦ περιορισμοῦ δὲ $\rho<0$ καὶ $0\leqslant\theta<2\pi$ ἐπιτυγχάνεται ἡ μοναδικότης τῆς παραστάσεως τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου εἰς πολικὰς συντεταγμένας. Τὸ πολικὸν σύστημα συντεταγμένων παρουσιάζει κατὰ τὸν συγγραφέα ἀνωμαλίας τινάς, πρὸς ἄρσιν τῶν ὁποίων προτείνεται ὑπ' αὐτοῦ ὅπως δοθέντος σημείου Μ λαμβάνεται ὡς θ ἡ συνήθης πολικὴ γωνία, ὡς ρ ὅμως λαμβάνεται τὸ εὐθύγραμμον ἐκεῖνο τμῆμα μήκους ρ ἐπὶ τοῦ πολικοῦ ἄξονος (τὴν ἀνωτέρω εὐθεῖαν ΟΧ), τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται διὰ «προβολῆς» τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τοῦ ἐν λόγῳ ἄξονος διὰ τοῦ βραχυτέρου δυνατοῦ τόξου κύκλου ἀκτῖνος ρ. Τὸ σημεῖον τοῦ ρ ὁρίζεται θετικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀρνητικὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ἀρχῆς. Ὁ τοιοῦτος καθορισμὸς τοῦ πολικοῦ συστήματος συντεταγμένων ἔχει, κατὰ τὸν συγγραφέα, σημαντικάς τινας συνεπείας ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν (συνθετικῶν) ἀριθμῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Τῆς ἐργασίας ταύτης τοῦ κ. Χρ. Γκλαβᾶ προηγήθησαν δύο ἄλλαι, αἵτινες ἀνεκοινώθησαν ἐπίσης ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν: «Ἡ ἀρχὴ τῆς γεωμετρικῆς ἰσοδυναμίας καί τινες τῶν συνεπειῶν αὐτῆς εἰς τὴν θεωρίαν τῶν καμπύλων» (συνεδρίασις τῆς Ἀκαδημίας τῆς 28—2—1957) καὶ Μέγιστα ἢ ἐλάχιστα ὁμάδος ἐπιπέδων καμπύλων (συνεδρίασις τῆς Ἀκαδημίας τῆς 5—12—1957).

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι κατὰ τὸ 1958 ὁ κ. Χρ. Γκλαβᾶς ἐξέδωκε καὶ περισπούδαστον πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον «Θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς μαθηματικῆς», θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς διάστημα ὀλίγων μόνον ἐτῶν ὁ κ. Χρ. Γκλαβᾶς προσέφερε σημαντικὴν συμβολὴν εἰς τὴν ἔρευναν καὶ τὴν σπουδὴν ἐν Ἑλλάδι τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Ν. ΚΑΤΣΗ. Τὰ ἡμερολόγια καὶ ὁ κανὼν τοῦ Πάσχα.** Ἀθῆναι 1959.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς νέας πραγματείας αὐτοῦ ὁ κ. Δ. Κατσῆς ὑπομιμνῄσκει τὴν διάκρισιν τῶν ἡμερολογίων εἰς σεληνιακά, ἡλιακὰ καὶ σεληνοηλιακά. Τὰ σεληνιακὰ ποιοῦνται χρῆσιν τοῦ σεληνιακοῦ μηνὸς διαρκείας 29 ἢ 30 ἡμερῶν, ἐν ᾧ τὰ ἡλιακὰ ἀναφέρονται εἰς τὴν φαινομένην ἐτησίαν κίνησιν τοῦ ἡλίου ἐπὶ τῆς οὐρανίου σφαίρας. Τὰ σεληνοηλιακὰ ἡμερολόγια ἀποτελοῦσι σύνθεσιν σεληνιακοῦ καὶ ἡλιακοῦ ἡμερολογίου. Ἀκολούθως ἐκτίθεται κατὰ τρόπον εὔληπτον καὶ σαφῆ ἡ μαθηματικὴ κατασκευὴ τῶν ἡλιακῶν ἡμερολογίων, ἥτις δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ ἐμπειρικῶς. Εἰς ἁδρὰς γραμμὰς ἀναπτύσσεται ἡ βάσις κατασκευῆς τοῦ Ἰουλιανοῦ καὶ τοῦ Γρηγοριανοῦ ἡμερολογίου καὶ ἀναφέρεται ἡ ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου ἔναντι τοῦ πρώτου. Ζωηρὸν ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ ἀνακοίνωσις τοῦ κ. Δημ. Κατσῆ ὅτι ἡ πρώτη ἰδέα τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ Ἰουλιανοῦ ἡμερολογίου ὑπὸ ἄλλου τελειοτέρου εἶναι καθαρῶς Ἑλληνική. Οἱ μετασχόντες τῆς πρώτης Οἰκουμενικῆς Συνόδου εἶχον ἐπίγνωσιν τῶν ἀτελειῶν τοῦ Ἰουλιανοῦ ἡμερολογίου καὶ ἀνέθεσαν εἰς τὸν Πατριάρχην Ἀλεξαν-

δρείας, πόλεως εἰς τὴν ὁποίαν ἤκμαζε τότε ἡ ἀστρονομία, ὅπως ἐπιμελῆται τοῦ καθορισμοῦ τῆς ἡμερομηνίας τοῦ Πάσχα. Βραδύτερον ὁ Νικηφόρος Γρηγορᾶς (1324), ὅστις ἦτο ἐκ τῶν ἐπιφανῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων ἐπεσήμανε τὸ σφάλμα τοῦ ἰσχύοντος Ἰουλιανοῦ ἡμερολογίου, ἐν ᾧ ἔγραφε «πρὸς γὰρ τοὺς τριακοσίους ἑξήκοντα πέντε νυχθημέρους τίθεμεν καὶ ὁλόκληρον τέταρτον νυχθημέρου ἑνός, οὐκ ὀφείλοντες οὕτω» (1) προέτεινε δὲ εἰς τὸν βασιλέα Ἀνδρόνικον καὶ ἰδίαν διόρθωσιν, ἡ ὁποία ὅμως δὲν ἐγένετο δεκτὴ διὰ τὸν φόβον συγχύσεως τῶν ἀμαθῶν καὶ μερισμοῦ τῆς Ἐκκλησίας. Ὁ Ἀνδρόνικος «προσήκατο καὶ ἤσθη τῇ ἀποδείξει τάχα δ' ἂν καὶ ἐμελέτησε τὴν διόρθωσιν αὐτίκα ἐπενεγκεῖν· ἀλλ' ἵνα μὴ τοῦτο σύγχυσις μᾶλλον τοῖς ἀμαθέσι φανῇ καὶ μερισμὸν τῇ Ἐκκλησίᾳ ἐπαγάγῃ σεσιγημένον ἀφῆκε τὸ πρᾶγμα καὶ ὅλως ἀνεπιχείρητον» (2).

Κατὰ τὸν 15ον αἰῶνα ὁ Γεώργιος Γεμιστὸς ἢ Πλήθων (περὶ τὸ 1430) συνέταξεν ἡμερολόγιον ἰδίας ἐπινοήσεως, διὰ τὸ ὁποῖον εἶπεν ὁ Γάλλος ἀκαδημαϊκὸς M. C. Alexandre, ἐκδότης τῶν νόμων τοῦ Πλήθωνος «ἂν ἐφηρμόζετο τότε τὸ ἡμερολόγιον τοῦ Πλήθωνος δὲν θὰ ὑπῆρχεν ἡ ἀνάγκη τῆς γρηγοριανῆς μεταρρυθμίσεως» (3).

Ἐν συνεχείᾳ ὁ κ. Δημ. Κατσῆς ἀναφέρει τὰ τῆς ἡμερολογιακῆς μεταρρυθμίσεως ἐν Ἑλλάδι καὶ σχέδια ἑνὸς παγκοσμίου ἡμερολογίου. Τὰ στοιχεῖα λεγόμενα τοῦ ἔτους, ἀναπτύσσονται λεπτομερῶς καὶ μετὰ πολλῆς σαφηνείας. Ταῦτα εἶναι 1) ὁ ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς m. Οὗτος δηλοῖ τὴν τάξιν τοῦ ἔτους ἐντὸς τῆς χριστιανικῆς χρονολογίας (ἢ Διονυσιακῆς καλουμένης). Ὡς ἀφετηρία τῆς χρονολογίας ταύτης ἐλήφθη τὸ ἔτος 753 ἀπὸ κτίσεως Ῥώμης, διότι εἰς αὐτὸ ὁ Διονύσιος ἐτοποθέτησε τὴν γέννησιν τοῦ Χριστοῦ. 2) Ὁ χρυσοῦς ἀριθμός. Οὕτω καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐμφαίνει τὴν τάξιν τοῦ ἔτους ἐντὸς περιόδου 19 ἐτῶν, ἤτοι ἐντὸς τοῦ κύκλου τοῦ (Ἀθηναίου ἀστρονόμου) Μέτωνος. 3) Ὁ κύκλος τοῦ ἡλίου. Οὕτω καλεῖται ὁ ἀριθμός. ὅστις ἐμφαίνει τὴν τάξιν τοῦ ἔτους ἐντὸς περιόδου 28 ἐτῶν. 4) Ἰνδικτίων. Οὕτω καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐμφαίνει τὴν τάξιν τοῦ ἔτους ἐντὸς κύκλου 15 ἐτῶν. 5) Τὸ κυριακὸν γράμμα λ. Ἐὰν τοποθετήσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς 365 ἡμέρας ἑνὸς κοινοῦ ἔτους κάτωθι τῶν ἑπτὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΣΤ, Ζ, ἑκάστη ἡμερομηνία θὰ ἔχῃ τὸ ἀντίστοιχον γράμμα αὐτῆς. Ἐκεῖνο τὸ γράμμα ὑπὸ τὸ ὁποῖον πίπτουσιν αἱ Κυριακαὶ τοῦ ἔτους καλεῖται κυριακὸν γράμμα λ.

Ἐν συνεχείᾳ ἀναπτύσσονται διάφορα σεληνιακὰ ἡμερολόγια μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸ Ἀττικὸν (ὅπερ ἦτο σεληνοηλιακόν), τὸ ἡμερολόγιον τοῦ Νουμᾶ, τὸ Μουσουλμανικόν, τὸ Ἑβραϊκὸν κλπ. Ὁ περίφημος κύκλος τοῦ Μέτωνος, τῶν 19 ἐτῶν, ἀναπτύσσεται δι' ὀλίγων ἀλλὰ μετὰ σαφηνείας καὶ ἁπλότητος καὶ ἐπακολουθεῖ ἡ ἀνάπτυξις τῆς καλουμένης προσπτώσεως ἢ ἐξισώσεως τῆς σελήνης, ὡς ἐπίσης τῆς καλουμένης ἐπακτῆς τῆς σελήνης (ἢ θεμελίου σελήνης). Ἐν συμπεράσματι ὁ κ. Δημ. Κατσῆς ἀναπτύσσει τὰ τοῦ καθορισμοῦ τῆς ἡμερομηνίας τοῦ Πάσχα μνημονεύων καὶ τὸν συναφῆ τύπον τοῦ F. Gauss, ὃν θεωρεῖ ὡς τὸν τελειότερον. Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου παρεντίθενται πολλοὶ πίνακες, οἵτινες ἐξυπηρετοῦσι σημαντικώτατα τὴν σπουδὴν τοῦ βιβλίου.

Ἀνασκοποῦντες τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν τοῦ κ. Δημ. Κατσῆ, ἥτις ἀποτελεῖ τὴν ἕκτην κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν ἐπιστημονικῶν αὐτοῦ πραγματειῶν, εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι αὕτη ἐγράφη μὲ ἐπιστημονικὴν ἀκριβολογίαν, μὲ ἁπλότητα καὶ μὲ σαφήνειαν. Τὰ Ἡμερολόγια καὶ ὁ Κανὼν τοῦ Πάσχα τοῦ κ. Δημ. Κατσῆ εἶναι μία πραγματεία, ἥτις ἔλειπεν ἐκ τῆς ἑλληνικῆς ἀστρονομικῆς βιβλιογραφίας. Θὰ εἴμεθα δὲ εὐτυχεῖς, ἐὰν καὶ εἰς τὸ προσεχὲς μέλλον εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ἀναγνώσωμεν νέας ἀστρονομικὰς πραγματείας τοῦ κ. Δημ. Κατσῆ.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

---

1) Νικηφόρου Γρηγορᾶ, Βυζαντινὴ Ἱστορία, Ἐκδ. Bonn. βιβ. 7, 13.

2) Νικηφόρου Γρηγορᾶ, ἔνθ' ἀνωτ. σ. 364—365.

3) Plethon. Traité des lois . . . . par M. C. Alexandre, Paris 1859 σ. 73.

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΒ' 1960
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β'
23/24

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1960

αὐταπαρνήσεως ἀσκητικῆς, ἧς τὸ μέγεθος δεόντως θὰ ἐκτιμήση πᾶς, ὅστις περὶ τοιαύτας σπουδὰς καὶ ἐρεύνας ἐρασιτεχνικῶς ἢ ἐξ ἐπαγγέλματος ἀσχολεῖται. Παρὰ ταῦτα ὁμολογῶ εἰλικρινῶς, ὅτι ἐπὶ τῆς περιοχῆς τῶν ἀναμνήσεων ὁ πᾶς μόχθος θὰ ἀναλάβῃ τὴν ὡραίαν καὶ ἐπιτερπῆ χροιὰν παλαιᾶς τινος πνευματικῆς τρυφῆς, ἂν ἡ εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν κατὰ διασκευὴν μετάφρασις τῆς ἐν λόγῳ ἐργασίας τοῦ Weinreich ταχέως δημοσιευθῇ διὰ τῆς μερίμνης καὶ συνδρομῆς τῶν Ἑλλήνων φιλολόγων καὶ παράσχῃ παρ' ἡμῖν ὥθησίν τινα πρὸς εὐρυτέρας ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἐπιστημονικοῦ κλάδου ἐρεύνας. Οὕτω, κληρονόμοι ἡμεῖς τῶν πολυτιμοτάτων θησαυρῶν τῆς ἑλληνικῆς ἀρχαιότητος, εὐτόλμως ἑκάστοτε θὰ διεκδικῶμεν ἐν τῷ σταδίῳ τῶν διεθνῶν ἀγώνων τῆς πνευματικῆς ἀλκῆς καὶ τῶν μεγάλων ἔργων τὴν ὀφειλομένην ἡμῖν ἕδραν εὐγενοῦς τιμῆς καὶ πρωτείας.

ΚΩΝΣΤ. ΙΩ. ΜΕΡΕΝΤΙΤΗΣ

***

**CHARLES MUGLER, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs,** édit. Gauthier - Villars, librairie Klincksieck Paris, 2 vol. (Publié avec le concours du Centre Nationale de la Recherche Scientifique).

Εἰς προηγούμενον τεῦχος τοῦ «Πλάτωνος» (1958 B) ἔσχομεν τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ περιεχόμενον τοῦ πρώτου τόμου τοῦ ἀνωτέρω Λεξικοῦ τοῦ κ. Mugler καὶ νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι διὰ πρώτην φορὰν δημοσιεύεται μὲ τοιαύτην πληρότητα ἔργον ἀφορῶν εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς ὅρους τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἤδη ἔχομεν πρὸ ἡμῶν τὸν δεύτερον τόμον τοῦ Λεξικοῦ τούτου (Λ—Ω)· κρίνομεν δὲ σκόπιμον, ὅπως παραθέσωμεν ἀποσπάσματα ἄρθρων τινῶν, ἵνα δυνηθῇ ὁ ἀναγνώστης νὰ σχηματίσῃ σαφῆ εἰκόνα τὸ μὲν τοῦ περιεχομένου τοῦ Λεξικοῦ, τὸ δὲ τῆς καταβληθείσης προσπαθείας ὑπὸ τοῦ συγγραφέως. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι πᾶσα λέξις (ὅρος) ἑλληνικὴ ἀποδίδεται εἰς τὴν λατινικήν, τὴν γαλλικήν, τὴν γερμανικὴν καὶ τὴν ἀγγλικὴν γλῶσσαν. Τὸ ἑρμηνευτικὸν μέρος ἑκάστου γεωμετρικοῦ ὅρου διατυποῦται εἰς τὴν γαλλικὴν γλῶσσαν μὲ παράθεσιν χωρίων ἀρχαίων κειμένων.

ἀδιόριστος.—Indeterminatus, indéterminé, unbestimmt, undefined.

Adj. qualifiant des problèmes de construction dont les conditions de possibilité ne son pas précisées ; opp. à διωρισμένος, cp. διορίζειν, διορισμός. Pappus : παντὸς γὰρ τοῦ προτεθέντος μεγέθους μείζονα γίνεται καὶ πάλιν ἐλάττονα πάντα τὰ ἐπὶ τῶν ἀδιορίστων προβλημάτων γινόμενα. (ἀκολουθεῖ μετάφρασις τούτου γαλλιστί). VI 58; δεδομένων τριῶν εὐθειῶν τῶν ΘΔ, ΔΚ, Λ τεμεῖν τὴν ΔΚ κατὰ τὸ Η, καὶ ποιεῖν λογον τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ, ΗΔ ἴσου πρὸς ἴσον. Τοῦτο δὲ φανερόν, καὶ ἔστιν ἀδιόριτον. VII, 142. Proclus : ἐστίν οὖν τὸ πρόβλημα (sc. τὸ ἐκ τριῶν εὐθειῶν . . . τρίγωνον συστήσασθαι) τῶν διωρισμένων, ἀλλ' οὐ τῶν ἀδιορίστων. καὶ τῶν ἀδιορίστων καὶ διωρισμένων προβλημάτων τὴν διαφορὰν ἐνδειξάμενος. p. 432.

ἀδύνατος.—Impossibilis, impossible, unmöglich, imposible.

Adj. caractérisant une opération ou une conclusion absurde, c'est - à - dire en contradiction soit avec les axiomes et les postulats, soit avec une proposition antérieure ; fréquent dans la formule ὅπερ ἀδύνατον à la fin d'une réduction à l'absurde. Ces demonstrations indirectes, ἀπαγωγαὶ εἰς ἀδύνατον, qui servent le plus souvent à établir la reciproque d'une proposition, consistent à nier la proposition qu'on veut démontrer et à montrer par une suite de syllogismes que cette négation conduit à une absurdité. La négation initiale est en général introduite par εἰ γὰρ μή, εἰ γὰρ δυνατόν. la fin du raisonnement est marquée par ὅπερ ἀδύνατον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον . . .

EUCLIDE : εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις

ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν . . . ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. I, 7. ARCHIMÈDE: εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστι ἢ ἐλάσσων . . . καὶ ἐναλλάξ· ὅπερ ἀδύνατον Sph. I 13. Apollonius: εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ . . . ἴση ἄρα ἡ ΖΘ τῇ ΘΚ· ὅπερ ἀδύνατον, II, 29. Proclus: τρίτη δὲ ἡ διὰ τῆς ἀδυνάτου ἀπαγωγῆς οὐκ αὐτὸ δεικνῦσα τὸ ζητούμενον αὐτόθεν, ἀλλὰ τὸ ἀντικείμενον ἐλέγχουσα p. 212 . . .

ἅπτεσθαι (avec le gén.).—1° Tangere, rencontrer, treffen, to meet.

Se dit de la rencontre de seux courbes, de deux surfaces ou d' une courbe et d' une surface, que cette rencontre prenne la forme d' une intersection ou d' un contact. Ce sens, très général, est rare. EUCLIDE: εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λεγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον. III, def. 2;

2° Secare, couper, schneiden, to cut.

Dans ce sens ἅπτεσθαι désigne l' intersection des courbes et des surfaces par d' autres courbes et d' autres surfaces. L' expression est donc ici synonyme de συμπίπτειν et de συμβάλλεσθαι, cp. ces mots; cp. aussi προσπίπτειν. EUCLIDE: ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὥσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι κτλ. XI, 15.

3° Contigere, toucher, berühren, to touch.

Dans ce sens ἅπτεσθαι désigue le contact des courbes antre elles, des surfaces entre elles, des courbes et des surfaces; l' expression est donc ici synonyme de ἐφάπτεσθαι et de ἐπιψαύειν, cp, ces mots. EUCLIDE: κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κ'κλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφηται ἅπτηται IV, def. 5. ARCHIMÈDE: σημείων καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου Sph. I 28 . . .

4° Venire per, passer par, hindurchgehen, to pass through.

EUCLIDE: σχῆμα . . . περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται IV def. 2.

5° Situm esse in, être situé sur, liegen, to be upon.

EUCLIDE: σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται IV Def. 1.

εἰκοσάγωνον.—Icosagonum, icosagone, zwanzigeck, icosagonon.

Nom par lequel les Pythagoriciens, d' après Iamblique, désignaient le dodécaèdre, qui a en effet vingts sommets. τὴν τοῦ εἰκοσαγώνου σύστασιν, τοῦτο δ' ἦν δωδεκάεδρον, ἓν τῶν πέντε λεγομένων στερεῶν σχημάτων, Iambl. V, P. 247.

ἑτερομήκης.—Oblongus, oblong, ungleich in länge und breite, oblong.

Adj. exprimant l' inégalité des dimensions de longueur et de largeur. En particulier, σχῆμα ἑτερόμηκες, ou simplement ἑτερόμηκες,=rectangle. EUCLIDE: τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων . . . ἑτερόμηκες . . . ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, κτλ. I Def. 22 . . .

ἔφοδος.—Methodus, méthode, methode, method.

Nom désignant l' ensemble des procédés orientés vers la solution d' un problème de mathématiques. ARCHIMÈDE: Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος . . .

λῆμμα.—Lemma, proposition auxiliaire, hilfssatz, lemma.

Théorème auxiliaire, auquel on a recours (εἴληπται, cp. λαμβάνειν) dans une démonstration. ARCHIMÈDE: λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λῆμμα τόδε. Spir. introd.

ὁμογενής.—Eiusdem generis, du même genre, gleichartig, of the same kind.

Adj. exprimant que deux grandeurs géometriques sont de même nature, c' est-a-dire qu'elles sont à la fois soit des lignes. des surfaces ou des corps solides. EUCLIDE:

λόγος ἐστί δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις. V, Def. 3.

πολύεδρος.—Polyedrum, polyèdre, vielflach, polyhedron.

Adj. le plus souvent substantivé désignant un corps solide limité par des figures planes. EUCLIDE: δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. XII, 17. ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, κτλ. XII, 17 coroll . . .

στοιχειωτής.—Elementorum scriptor, auteur des Éléments, Verfasser der Elemente, the writer ol Elements.

Nom donné à Euclide par des auteurs tardifs. Pappus: γέγραπται δὲ (sc. ἡ ἀναλυτικὴ ὕλη) ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ Ἀπολλωνίου . . . καὶ Ἀριστταίου, κτλ. VII, 1; τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, κτλ. Proclus: διὸ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐντεῦθεν ἤρξατο. p. 162.

χιλιάγωνον.—Polygonum mille laterum, polygone rég. de 1.000 côtés, tausendeck, polygon with 1.000 sides.

Expr. formée par Archimède d'après τρίγωνον, τετράγωνον etc. pour désigner un polygon régulier de milles côtés. ARCHIMÈDE: τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Aren. I, 10; μείζων ἐστιν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς. Aren. I, 22: ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. Aren. II, 2.

Οἱ ἐρευνηταὶ τῆς δημιουργίας τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης θὰ εὕρωσιν εἰς τὸ λεξικὸν τοῦ κ. Mugler ἕνα βοηθὸν ἀνεκτίμητον. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ τονίσωμεν ἰδιαιτέρως τὴν ἐν τῇ Εἰσαγωγῇ ἐπιτυχῆ προσπάθειαν τοῦ συγγραφέως, ὅπως ἀνεύρῃ τὴν γένεσιν καὶ τὴν δημιουργίαν τῶν γεωμετρικῶν ὅρων ἐκ τῆς γλώσσης καὶ τῶν ἀναγκῶν τῆς καθημερινῆς ζωῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Τὸ λεξικὸν τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον οὐ μόνον διὰ τὴν βιβλιοθήκην παντὸς ἱδρύματος (ἰνστιτούτου), σκοπὸν ἔχοντος τὴν ἔρευναν τῶν ἀρχῶν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ ἰδιαιτέρως τῆς γεωμετρίας, ἀλλὰ καὶ διὰ πᾶσαν Ἑλληνικὴν Σχολικὴν Βιβλιοθήκην.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΚΟΥΤΕΡΟΠΟΥΛΟΥ**, τέως Προέδρου τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου. ***Ἡ Διδακτικὴ τοῦ γλωσσικοῦ μαθήματος.*** Ἀθῆναι 1959, σελ. 557.

Ὁ Ἰ. Σκουτερόπουλος συγκαταλέγεται εἰς τὴν τάξιν τῶν ὀλίγων ἐκείνων ἐκπαιδευτικῶν, οἵτινες κατώρθωσαν νὰ συνδυάσουν τὴν θεωρητικὴν τῶν προβλημάτων μελέτην μὲ τὴν ἔμπρακτον εἰς τὴν περιοχὴν τῆς σχολικῆς πράξεως ἐφαρμογήν, τὴν συστηματικὴν θεώρησιν καὶ τὴν δημιουργικὴν ἔρευναν. Ἡ προσωπικότης του εἶναι ἡ ἐνσάρκωσις τοῦ ἀληθινοῦ παιδαγωγικοῦ ἤθους, διὰ τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχει χωρισμὸς μεταξὺ θεωρίας καὶ πράξεως, συστήματος καὶ ἐρεύνης. Ἔχει νὰ ἐπιδείξῃ λαμπροτάτην σταδιοδρομίαν διὰ μέσου ὅλων τῶν βαθμίδων τῆς στρατευομένης ἐκπαιδεύσεως. Ἔχει ἐπίσης νὰ ἐπιδείξῃ καὶ πλουσιώτατον εἰς γονιμότητα καὶ ἐπίδρασιν συγγραφικὸν ἐρευνητικὸν ἔργον. Τὰ χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα τὰ προσιδιάζοντα εἰς τὰς συγγραφάς του εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἀσφαλὴς αὐτῶν ἐπιστημονικὴ θεμελίωσις καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ πλήρης αὐτῶν ἀνταπόκρισις πρὸς τὰ προβλήματα τῆς παιδαγωγικῆς πράξεως.

Ἀμφότερα τὰ σημειωθέντα χαρακτηριστικὰ ἀνευρίσκει ὁ μελετητὴς καὶ εἰς τὸ ἐσχάτως ὑπ' αὐτοῦ ἐκδοθὲν ἔργον «Ἡ Διδακτικὴ τοῦ γλωσσικοῦ μαθήματος». Ὁ προσεκτικὸς μελετητὴς θὰ διακρίνῃ κα' εἰς τὴν συγγραφὴν ταύτην ὄχι μόνον τὸν βαθὺν

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΓ' 1961
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β'
25/26

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1961

πουλος, εἶναι παροῦσα ἡ Μονὴ Φιλοσόφου ἢ αὐτοπρόσωπος ἢ διὰ τῶν προσώπων τῶν μεγάλων κληρικῶν, τοὺς ὁποίους ἐδωρήσατο εἰς τὸ Γένος. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δικαιούμεθα νὰ χαρακτηρίσωμεν τὸ προκείμενον ἔργον ὡς ἀρτίαν ἐκ πάσης ἐπόψεως ἱστορικὴν σύνθεσιν. Ὁ προσεκτικὸς ἀναγνώστης δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἐκτιμήσῃ τὴν εὔστοχον καὶ μετὰ περισκέψεως προβαίνουσαν κριτικὴν διερεύνησιν τῶν μαρτυριῶν καὶ τὴν ἐπιτυχῆ αὐτῶν ἑρμηνείαν καὶ ἀξιοποίησιν. Ἕτερον σημαντικώτατον προσὸν τῆς προκειμένης συγγραφῆς εἶναι καὶ ἡ ἐκφραστικὴ αὐτῆς ἀρτιότης. Προικισμένος μὲ τὸ χάρισμα ὁ Τ. Γριτσόπουλος τῆς λιτῆς ἀλλ' εἰς ἄκρον κομψῆς καὶ κυριολεκτούσης ἐκφράσεως ἐπενδύει πάντοτε τὰ ἱστορούμενα μὲ τὴν προσήκουσαν ἐκφραστικὴν μορφήν. Ὅταν περιγράφῃ τὰ φυσικὰ τοπία καὶ ὅταν παρέχῃ αἰσθητικὴν ἀλλὰ συγχρόνως καὶ πραγματολογικὴν ἀνάλυσιν τῶν ζωγραφημάτων καὶ τῶν ἀρχιτεκτονικῶν μορφῶν, τὸ ὕφος του ὑψοῦται εἰς ὄργανον γνησίας καὶ θελκτικῆς καλλιτεχνικῆς ἐκφράσεως.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

***

Α. Γ. ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΥ, *Ἐπὶ τοῦ μεγέθους καὶ τῆς γεωγραφικῆς θέσεως τῆς Ἀτλαντίδος*. (Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, τόμος 35 (401—418), 1960).

Ὁ κ. Ἄγγελος Γ. Γαλανόπουλος, καθηγητὴς τῆς σεισμολογίας ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν, ἀνεκοίνωσε κατὰ τὴν ἐν Ἑλσίνκι XII Γενικὴν Συνέλευσιν τῆς Διεθνοῦς Γεωδαιτικῆς καὶ Γεωφυσικῆς Ἑνώσεως (1), ὅτι ὁ κατακλυσμὸς τοῦ Δευκαλίωνος καὶ ὁ μῦθος τῆς Ἀτλαντίδος ἔχουν τὴν προέλευσίν των εἰς τὰς βαγδαίας βροχὰς καὶ τὰ θαλάσσια κύματα, τὰ ὁποῖα ἠκολούθησαν τὴν μεγάλην ἡφαιστειακὴν ἔκρηξιν τῆς ἄλλοτε νήσου Στρογγύλης (2) κατὰ τὸ 1500 π. Χ. καὶ εἰς τὴν κατάρρευσιν τοῦ κεντρικοῦ μέρους τῆς νήσου, ὅπου εὑρίσκετο ὁ ἡφαιστειακὸς κῶνος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶχε κτισθῇ ἡ ἀκρόπολις τῆς Μητροπόλεως τοῦ περιφήμου κράτους τῆς Ἀτλαντίδος.

Ὡς σαφῶς προκύπτει ἐκ τοῦ κειμένου τῶν δύο διαλόγων τοῦ Πλάτωνος «Τιμαίου» καὶ «Κριτίου», ἡ Ἀτλαντὶς δὲν ἦτο ἐνιαία νῆσος, ἀλλὰ «βασίλειον δύο νήσων, τῆς μείζονος καὶ τῆς ἐλάσσονος», τὸ ὁποῖον ἐδέσποζε πολλῶν ἄλλων νήσων καὶ μερῶν τῆς ἠπείρου, ἡ δὲ κυριαρχία τούτου ἐξετείνετο ἀπὸ τῆς Λιβύης μὲν μέχρι τῆς Αἰγύπτου καὶ ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς Εὐρώπης τοῦ μέχρι τῆς Τυρρηνίας.

«Ἐν δὲ δὴ τῇ Ἀτλαντίδι νήσῳ ταύτῃ μεγάλη συνέστη καὶ θαυμαστὴ δύναμις βασιλέων, κρατοῦσα μὲν ἁπάσης τῆς νήσου, πολλῶν δὲ ἄλλων νήσων καὶ μερῶν τῆς ἠπείρου· πρὸς δὲ τούτοις ἔτι τῶν ἐντὸς τῇδε Λιβύης μὲν ἦρχον μέχρι πρὸς Αἴγυπτον, τῆς δὲ Εὐρώπης μέχρι Τυρρηνίας» (Τίμ. 25 Α—Β).

Τὸ κράτος τοῦτο τῆς Ἀτλαντίδος ἀπετελεῖτο ἐκ δέκα πολιτειῶν. Ἐκ τούτων ὁ Πλάτων περιγράφει εἰς τὸν Κριτίαν μόνον δύο, τὴν «Μητρόπολιν» καὶ τὴν «Βασιλικὴν Πολιτείαν». Ἡ Πλατωνικὴ περιγραφὴ τῆς «Μητροπόλεως» ὑποδηλοῖ σαφῶς, κατὰ τὸν συγγραφέα, μικρὰν ἡφαιστειογενῆ νῆσον μετὰ μακρὰν περίοδον ἠρεμίας. Ἐκ δὲ τῆς περιγραφῆς τῆς μορφολογίας καὶ τοῦ σχήματος τῆς «Μητροπόλεως» φαίνεται, ἐπίσης σαφῶς, ὅτι αὕτη ἦτο ἡ ἄλλοτε νῆσος Στρογγύλη. Ἡ ἀκρόπολις τῆς «Μητροπόλεως» εὑρίσκετο ἐπὶ μικροῦ «γηλόφου» τοῦ κεντρικοῦ κώνου τοῦ ἡφαιστείου τῆς σημερινῆς

---

1) A. Galanopoulos, Tsunamis Observed on the Coasts of Greece from Antiquity to present time, in: «Ann. di Geof.», vol. XIII, No 3—4, 1960, σ. 369—386.

2) Sp. Marinatos, Amnisos, die Hafenstadt des Minos, Forsch. u. Fortschr. Vol. 10, Nr. 28, 1934, 341—343.

νήσου Θήρας. Τὰ ἴχνη τῶν λιμένων καὶ τῆς διώρυχος, ἡ ὁποία συνέδεε τούτους μετὰ τῆς θαλάσσης, διακρίνονται καὶ σήμερον ἀκόμη εἰς τὸν πυθμένα τῆς Καλδέρας τῆς Θήρας (Σημ. Ἡ λέξις Καλδέρα εἶναι λατινικῆς προελεύσεως γεωλογικὸς ὅρος καὶ σημαίνει ἡφαιστειακὴν λεβητοειδῆ κοιλότητα). Ἐκ τῆς περιγραφῆς καὶ τοῦ σχήματος τοῦ χώρου, τὸν ὁποῖον κατελάμβανεν ἡ «Βασιλικὴ Πολιτεία», εἶναι ἐμφανὲς ὅτι ὁ χῶρος οὗτος εἶχεν ἀκριβῶς τὰ αὐτὰ χαρακτηριστικὰ τῆς νεογενοῦς λεκάνης τῆς Κεντρικῆς Κρήτης. Ἐνῷ ὅμως αἱ διαστάσεις τῆς Μητροπόλεως, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς παραβολῆς τούτων πρὸς τὰς διαστάσεις τῆς νήσου Στρογγύλης, εἶναι ἀπολύτως σύμφωνοι πρὸς ἐκείνας, τὰς ὁποίας ἀναφέρει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Κριτίαν, αἱ διαστάσεις τῆς «Βασιλικῆς Πολιτείας» εἶναι ἐμφανῶς ἐσφαλμέναι, τονίζει ὁ κ. Γαλανόπουλος, κατὰ τὸν παράγοντα δέκα. Κατὰ τὸν αὐτὸν παράγοντα εἶναι ἐσφαλμένη καὶ ἡ χρονολογία τῆς καταβυθίσεως τῆς Ἀτλαντίδος, ἡ ὁποία ἔλαβε χώραν, κατὰ τὸν Πλάτωνα, 9000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος (639—559 π. Χ.). Ἐφ' ὅσον ὅμως, ὡς πολὺ ὀρθῶς σημειοῖ ὁ κ. Γαλανόπουλος, οἱ κάτοικοι τῆς Ἀτλαντίδος ἐγνώριζον τὸν χαλκόν, τὸν κασσίτερον καὶ τὸν ὀρείχαλκον καὶ ἔκαμον εὐρεῖαν χρῆσιν τοῦ ὀρειχάλκου, εἶναι ἀδύνατον ἡ Ἀτλαντὶς νὰ κατεστράφη πρὸ τῆς ὀρειχαλκίνης ἐποχῆς. Εἶναι δὲ σήμερον παραδεκτὸν ὅτι ἡ ὀρειχαλκίνη ἐποχὴ δέον νὰ τοποθετηθῇ περὶ τὸ 2100—1200 π. Χ. Ἐξ ἄλλου ἡ ἔκρηξις εἰς τὸ κεντρικὸν μέρος τῆς ἄλλοτε νήσου Στρογγύλης συνέβη περὶ τὸ 1500 π. Χ. Τοῦτο διεπιστώθη ἐξ ἀρχαιολογικῶν εὑρημάτων καὶ ἐκ μετρήσεων τοῦ ραδιενεργοῦ ἄνθρακος ἀπηνθρακωμένων τεμαχίων πεύκης, εὑρεθέντων εἰς τὸν πυθμένα τοῦ πρώτου ροδοχρόου στρώματος τῆς θηραϊκῆς γῆς, ἡ ὁποία ἐκάλυψε τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἄλλοτε νήσου Στρογγύλης.

Ἡ «Βασιλικὴ Πολιτεία» ἦτο, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ Κριτίου, τὸ 1]10 τῆς Ἀτλαντίδος. «Καὶ τὴν νῆσον τὴν Ἀτλαντίδα πᾶσαν δέκα μέρη κατανείμας τῶν μὲν πρεσβυτάτων τῷ προτέρῳ γενομένῳ τήν τε μητρῴαν οἴκησιν καὶ τὴν κύκλῳ λῆξιν, πλείστην καὶ ἀρίστην οὖσαν, ἀπένειμε, βασιλέα τε τῶν ἄλλων κατέστησε, τοὺς δὲ ἄλλους ἄρχοντας, ἑκάστῳ δὲ ἀρχὴν πολλῶν ἀνθρώπων καὶ τόπον πολλῆς χώρας ἔδωκεν» (Κριτ. 114 Α). Ἀλλὰ τὸ δεκαπλάσιον τῆς «Βασιλικῆς Πολιτείας» ἔχει μέγεθος ὅσον τὸ τῆς Μικρᾶς Ἀσίας. Κατὰ συνέπειαν ἦτο ἀδύνατον ὁ Πλάτων νὰ τοποθετήσῃ τὴν Ἀτλαντίδα ἐντὸς τῆς Μεσογείου, καίτοι ὑπέθετε τὴν ὕπαρξιν σφάλματος εἰς τὰ χειρόγραφα τοῦ Σόλωνος, ὅπου ἀνεγράφοντο αἱ αἰγυπτιακαὶ πληροφορίαι περὶ τῶν διαστάσεων τῆς Ἀτλαντίδος. Τοῦτο συνάγεται πάλιν ἐκ τοῦ Κριτίου, ὅπου σημειοῦται: «τὸ δὲ βάθος καὶ πλάτος, τό τε μῆκος αὐτῆς ἄπιστον μὲν λεχθέν, ὡς χειροποίητον ἔργον, πρὸς τοῖς ἄλλοις διαπονήμασι τοσοῦτον εἶναι, ῥητέον δὲ ὅ γε ἠκούσαμεν» (Κριτ. 118 C).

Ἡ ὑπόθεσις περὶ τῆς καταβυθισθείσης μεγάλης νήσου Ἀτλαντίδος ἔχει προκαλέσει ζωηρότατον ἐνδιαφέρον ἀπὸ τῆς ἀρχαίας ἀκόμη ἐποχῆς. Τὸ ἐνδιαφέρον τοῦτο συνεχίζεται ἔκτοτε· αἱ συναφεῖς πρὸς τὴν Ἀτλαντίδα ἐργασίαι ἀνέρχονται εἰς πολὺ μεγάλον ἀριθμόν. Ἄλλοι ἐρευνηταὶ τοποθετοῦν τὴν Ἀτλαντίδα εἰς τὴν Ἀνατολικὴν Μεσόγειον, ἄλλοι παρὰ τὰς Σύρτεις, ἄλλοι εἰς τὴν Δυτικὴν Μεσόγειον, ἄλλοι εὐθὺς μετὰ τὸν πορθμὸν τοῦ Γιβραλτὰρ (ὡς ὁ Πλάτων) καὶ ἄλλοι τέλος κατὰ τὴν ἀνατολικὴν θάλασσαν τῆς Ἀγγλίας (Pauly - Wissowa R. E., Art. Atlantis). Τὸ πρόβλημα τῆς Ἀτλαντίδος ἀπαρτίζεται ἐκ τριῶν μερικωτέρων προβλημάτων. Τὸ ἓν ἐκ τούτων εἶναι τὸ μέγεθος αὐτῆς, τὸ ἄλλο ὁ χρόνος τῆς καταβυθίσεως καὶ τὸ τρίτον ὁ χῶρος, ἔνθα ἔκειτο ἡ νῆσος. Αἱ εἰς τὸν Κριτίαν καὶ τὸν Τίμαιον ἐκτιθέμεναι πληροφορίαι τοῦ Πλάτωνος ἀφίνουν πολλὰς ἀπορίας. Ἐὰν ἡ Ἀτλαντὶς ἔκειτο ἔξω τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτάρ, δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ προκαλέσῃ κατὰ τὴν καταβύθισιν αὐτῆς στείρευσιν πηγῆς τῶν Ἀθηνῶν· οὔτε ἦτο δυνατὸν νὰ εὑρίσκετο ἐκεῖ, τόσον μακράν, στρατὸς τῶν Ἀθηναίων. Ὁ χρόνος τῆς καταβυθίσεως, τοποθετούμενος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος κατὰ τὸ 9000 πρὸ τοῦ Σόλωνος ἔτος, δὲν συμφωνεῖ πρὸς τὴν πληροφορίαν ὅτι οἱ κάτοικοι τῆς Ἀτλαντίδος ἐγνώριζον τὸν ὀρείχαλκον. Καὶ δύναταί τις βεβαίως νὰ ἰσχυρι-

σθῆ ὅτι δὲν εἶναι γνωστόν, ἂν ὁ ὀρείχαλκος τῆς ἀρχαίας ἐποχῆς εἶναι τῆς αὐτῆς συνθέσεως ὡς ὁ σημερινός, ἐν τούτοις ὅμως ἡ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος διαμνημόνευσις τοῦ ὀρειχάλκου καὶ ὄχι τοῦ χαλκοῦ σημαίνει ὅτι ἡ καταβύθισις τῆς Ἀτλαντίδος ἔλαβε χώραν μετὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ χαλκοῦ, εἰς ἐποχὴν δηλ. πλησιάζουσαν ἀσφαλῶς πολὺ πρὸς ἐκείνην, καθ' ἣν ὁ κ. Γαλανόπουλος τοποθετεῖ τὴν καταβύθισιν τῆς νήσου.

Ὁ κ. Γαλανόπουλος ἀπαντᾷ καὶ εἰς τὰ τρία προβλήματα τῆς Ἀτλαντίδος λίαν ἱκανοποιητικῶς. Τὸν χρόνον τῆς καταβυθίσεως ὁρίζει περὶ τὸ 1500 π. Χ., ὁπότε ἐγένετο ἡ ἠφαιστειακὴ ἔκρηξις τῆς ἄλλοτε νήσου Στρογγύλης. Τὸ μέγεθος τῆς Ἀτλαντίδος παραδέχεται ὡς μέγεθος σχετικῶς μεγάλης νήσου, ὡς τόπον δὲ αὐτῆς τῆς νήσου δέχεται τὸ κέντρον τῆς Ἀν. Μεσογείου. Τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ κ. Γαλανοπούλου εἶναι πολὺ πειστικὰ καὶ τοῦτο διότι ὁ κ. Γαλανόπουλος χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐρεύνας του, ἐκτὸς ἄλλων, καὶ τὰ πορίσματα τῆς συγχρόνου φυσικῆς. Αἱ βυθομετρήσεις τῆς περὶ τὴν νῆσον Θήραν περιοχῆς, αἱ γενόμεναι κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ὑπὸ τοῦ Ἀγγλικοῦ Ναυαρχείου, ἡ καταμέτρησις τῆς ραδιενεργείας ἄνθρακος ἀπηνθρακωμένων τεμαχίων πεύκης εὑρεθέντων εἰς τὸν πυθμένα τοῦ πρώτου ροδοχρόου στρώματος τῆς θηραϊκῆς γῆς καὶ ἡ ἀνάγλυφος παράστασις τοῦ πυθμένος, ὅπου ἐβυθίσθη, κατὰ τὸν συγγραφέα, ἡ «Μητρόπολις» τῆς Ἀτλαντίδος, ἡ γενομένη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰ. Τρικκαλινοῦ (εὑρισκομένη εἰς τὸ Γεωλογικὸν Μουσεῖον τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν), συνηγοροῦσι περὶ τῆς ὀρθότητος τῶν ἀντιλήψεων τοῦ κ. Γαλανοπούλου περὶ Ἀτλαντίδος. Κατὰ ταῦτα δὲν εἶναι, φρονοῦμεν, ὑπερβολικόν, ἐὰν σημειώσωμεν ὅτι ὁ κ. Γαλανόπουλος ἐν προκειμένῳ ἔθεσε τὸν δάκτυλον αὐτοῦ εἰς τὸν τύπον τῶν ἥλων. Αἱ θεωρίαι του περὶ Ἀτλαντίδος, ἐντελῶς πρωτότυποι, στηριζόμεναι ἐπὶ τῶν πορισμάτων τῆς νεωτέρας φυσικῆς, ἀποτελοῦν τὴν καλυτέραν μέχρι σήμερον διατυπωθεῖσαν ἀπάντησιν εἰς τὸ μέγα ἐρωτηματικὸν περὶ Ἀτλαντίδος. Καὶ εἶναι ἰδιαιτέρως εὐχάριστον ὅτι ἡ ἀπάντησις αὕτη ἐδόθη ὑπὸ ἑνὸς Ἕλληνος ἐρευνητοῦ.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΣΩΤ. ΜΠΑΡΚΑ, ***Διδακτικὴ τῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν μαθημάτων***. Ἀθῆναι 1962, σελ. 284, Τυπογραφεῖον Κωνστ. Π. Σερμπίνη.

Ὁ κ. Μπάρκας, Ὑποδιευθυντὴς τοῦ Διδασκαλείου Μέσης Ἐκπαιδεύσεως ἀπὸ τοῦ 1958, εἶναι ἤδη γνωστὸς εἰς τὸ εὐρύτερον ἐκπαιδευτικὸν κοινὸν τῆς χώρας μας ἐκ τῶν τριῶν ἄρθρων του, τὰ ὁποῖα ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὸ «Δελτίον τῆς Ὁμοσπονδίας Λειτουργῶν Μέσης Ἐκπαιδεύσεως» (Ἀριθμ. φύλ. 161 τοῦ 1959 καὶ 166, 175 τοῦ 1960). Εἰς τὰ ἄρθρα αὐτὰ ὁ κ. Μπάρκας διαπραγματεύεται μὲ πολλὴν ἐπιτυχίαν τὰ θέματα «Ἀνάγκη ἐκσυγχρονισμοῦ τοῦ προγράμματος τῶν μαθηματικῶν», «Ἡ σκέψις καὶ ὁ κανὼν κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν» καὶ «Ἡ ἐργαστηριακὴ μέθοδος διδασκαλίας εἰς τὰ μαθηματικά». Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν ὁ κ. Μπάρκας ἐκθέτει τὴν διδακτικὴν τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν μαθημάτων τὴν συνταχθεῖσαν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν παραδόσεών του ἐν τῷ Διδασκαλείῳ Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἐκ δύο κεφαλαίων. Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον τοῦ πρώτου μέρους γίνεται ἐξέτασις τῶν προβλημάτων τῆς ἀγωγῆς ἐν σχέσει πρὸς τὴν διδασκαλίαν. Ἐκ τῆς ἐξετάσεως ταύτης καὶ ἀκόμη ἕνεκα τῆς σοβαρότητος καὶ τῆς μεγάλης σημασίας τῶν προκυπτόντων προβλημάτων ἀναφαίνεται ἡ ἀνάγκη τῆς ὀργανώσεως τῆς διδασκαλίας. Εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον τοῦ ἰδίου μέρους γίνεται θεμελίωσις τῆς ὀργανώσεως τῆς διδασκαλίας ἐπὶ ἐπιστημονικῶν βάσεων, ἤτοι τῶν πορισμάτων τῆς ψυχολογίας τῆς μαθήσεως, καὶ συνάγονται τὰ γενικὰ συμπεράσματα συνοπτικώτερον μὲν διὰ τὸ σχολεῖον καὶ τὸν

μαθητήν, ἐκτενέστερον δὲ διὰ τὸν διδάσκαλον. Γενικῶς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ βιβλίου τούτου δύναται, κατὰ τὸν συγγραφέα, νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς μία σύντομος εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Γενικὴν Διδακτικήν, ὥστε τοῦτο νὰ παρέχῃ τὴν γενικὴν κατευθυντήριον γραμμὴν διὰ πάντα διδάσκαλον ἀνεξαρτήτως τῆς εἰδικότητός του.

Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ βιβλίου ἐξετάζονται αἱ ἐπιστῆμαι γενικώτερον μὲ εἰδικωτέραν ἐξέτασιν τῶν φυσικομαθηματικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς παιδευτικῆς σημασίας αὐτῶν, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον τοῦ ἰδίου μέρους ἐξετάζεται ἡ μεθοδολογία τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν μαθημάτων, ἤτοι ἐρευνῶνται τὰ ἐπὶ μέρους προβλήματα τῶν ἐπιστημονικῶν μεθόδων, τῶν μορφῶν τῆς διδασκαλίας καὶ τῆς πορείας αὐτῆς.

Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον τοῦ τρίτου μέρους ἐξετάζονται τὰ μαθηματικὰ ἐκτενέστερον μὲ τὰ ἰδιαίτερά των γνωρίσματα, τὸν σκοπὸν τῆς διδασκαλίας αὐτῶν εἰς τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα, τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα καὶ αἱ ἀρχαὶ τῆς διδασκαλίας τούτων, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον τοῦ ἰδίου μέρους ἐξετάζονται λεπτομερέστερον τὰ τῆς διδασκαλίας τῆς ἀριθμητικῆς, τῆς ἀλγέβρας καὶ τῆς γεωμετρίας.

Τέλος εἰς τὰ δύο κεφάλαια τοῦ τετάρτου μέρους ἐξετάζονται θέματα ὅμοια πρὸς τὰ τοῦ τρίτου μέρους, ἀφορῶντα ὅμως εἰς τὴν φυσικήν, τὴν βιολογίαν καὶ τὴν γεωγραφίαν, καίτοι ἡ γεωγραφία, ὡς πολὺ ὀρθῶς παρατηρεῖ ὁ συγγραφεύς, δὲν περιλαμβάνεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας.

Ἡ διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου γίνεται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως μὲ λεπτολόγον παρατηρητικότητα, μὲ ἐπιστημονικὴν ἐμβρίθειαν καὶ μὲ μεγάλην σαφήνειαν. Ὁ κ. Μπάρκας εἶναι κάτοχος ὅλων τῶν μεγάλων προβλημάτων τῆς συγχρόνου Διδακτικῆς καὶ εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἀπόψεών του κυριαρχεῖ ἡ συνολικὴ θεώρησις παντὸς παιδαγωγικοῦ προβλήματος. Δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τῶν μονομερῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα χωρὶς νὰ παραμελῇ ἐντάσσει μὲ ἀξιοζήλευτον δεξιοτεχνίαν εἰς μίαν γενικευμένην διερεύνησιν καὶ ἐξέτασιν.

Τὰ πορίσματα τῶν νεωτάτων ψυχολογικῶν ἐρευνῶν, ἰδίως τῆς Ἀμερικῆς, ὅπου ἰδιαιτέρως ἀνθεῖ ἡ ἐπιστήμη τῆς Ψυχολογίας, ἔχουν πολὺ ἐμφανῆ τὰ ἴχνη των εἰς τὴν Διδακτικὴν τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν μαθημάτων τοῦ κ. Μπάρκα. Ἐὰν εἰς ταῦτα προσθέσωμεν καὶ τὴν γονιμωτάτην τετραετῆ πεῖραν, τὴν ὁποίαν ἀπέκτησεν ὁ συγγραφεὺς ἐκ τῆς διδασκαλίας τῆς Εἰδικῆς Διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν ἐν τῷ Διδασκαλείῳ Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, θὰ κατορθώσωμεν νὰ λάβωμεν μίαν εἰκόνα τῆς σοβαρότητος τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον οὗτος ἐχάρισεν εἰς τὴν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν.

Ἐπιθυμοῦμεν νὰ τονίσωμεν ἰδιαιτέρως ὅτι ὁ συγγραφεὺς κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῶν ἰδεῶν του ἐν τῇ ὑπὸ κρίσιν πραγματείᾳ αὐτοῦ οὐδέποτε ἀπομακρύνεται ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος ὅτι ἡ ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετική. Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι ὁ κ. Μπάρκας διατυποῖ τὰς περὶ τῶν μαθηματικῶν ἀξιωμάτων ἰδέας του μὲ ἁπλότητα καὶ ἐνάργειαν ἀξιοζήλευτον. Μὲ οὐχὶ μικροτέραν ἐνάργειαν καὶ μὲ λεπτολόγον ἀκριβολογίαν ἐκθέτει ὁ συγγραφεὺς τὰς γνώμας του περὶ τῶν σημερινῶν τάσεων τῆς Μεθοδολογίας εἰς τὴν Διδακτικήν. Οὕτω κατορθώνει οὗτος νὰ συνδέσῃ λίαν ἐπιτυχῶς τὴν ἐκ τῆς ἱστορικῆς παραδόσεως πεῖραν πρὸς τὰ πορίσματα τῆς συγχρόνου ἐφηρμοσμένης ψυχολογίας, εἰς τὴν ὁποίαν ἄλλωστε ἀνάγεται ἀρκετὸν μέρος τῶν ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Ἀμερικῆς εὐρυτέρων παιδαγωγικῶν σπουδῶν του.

Ἡ βαθεῖα ἀνάλυσις τῶν γενικῶν ἀρχῶν τῆς Διδακτικῆς καὶ τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ παιδαγωγικῆς ἐπόψεως, ἐπέτρεψεν εἰς τὸν συγγραφέα νὰ συγκεντρώσῃ μὲ δεξιοτεχνίαν εἰς ἀνάλογον χῶρον τοῦ βιβλίου ὅλα τὰ παιδαγωγικὰ προβλήματα τῶν διαφόρων κλάδων τῆς φυσικῆς καὶ τῆς γεωγραφίας. Αἱ παρατηρήσεις του διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς φυσικῆς πειραματικῆς, τῆς χημείας, τῆς βιολογίας καὶ τῆς γεωγραφίας εἶναι διατυπωμέναι μὲ σαφήνειαν καὶ μὲ γλαφυρότητα καὶ ἀποδεικνύουν ὅτι ὁ συγγραφεὺς εἶναι γνώστης ὅλων τῶν νεωτάτων πορισμάτων τῆς ψυχολογικῆς ἐρεύνης ἐπὶ

τῆς διδακτικῆς τῶν μαθημάτων τούτων. Ἡ ἐργασία τοῦ κ. Νικ. Σ. Μπάρκα πληροῖ μέγα κενὸν τῆς ἐν Ἑλλάδι βιβλιογραφίας τῆς Διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν μαθημάτων, εὐχόμεθα δὲ ὅπως καὶ εἰς τὸ προσεχὲς μέλλον εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ κρίνωμεν καὶ ἄλλας ἐπιστημονικὰς πραγματείας του.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

ΘΕΟΔ. Ν. ΚΟΝΤΑΡΓΥΡΗ, καθηγητοῦ φυσικῶν, πρώην Γενικοῦ Γραμματέως Ὑπουργείου Προνοίας. *Τὸ πνεῦμα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων*. Ἔκδ. 2α, Βάρκιζα 1958 σελ. 53.

Ἡ ὑπὸ κρίσιν πραγματεία τοῦ κ. Κονταργύρη εἶναι ὁλοκλήρωσις καὶ ἐπέκτασις μιᾶς ὁμιλίας του, γενομένης ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Ἀμερικῆς πρὸ μεγάλης συγκεντρώσεως ὁμογενῶν ἐξεχόντων ἐν τῇ Ἀμερικανικῇ Πολιτείᾳ. Ἐν ἀρχῇ τῆς πραγματείας του ὁ κ. Κονταργύρης ἀναφέρεται εἰς τὴν θεμελίωσιν καὶ ἀνάπτυξιν τῶν ἐπιστημῶν ἐν τῇ ἀρχαίᾳ Ἑλλάδι. Ἡ ἀνθρωπότης, χάρις εἰς τὴν σοφίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, κατώρθωσε νὰ ἐξαρθῇ πέρα πάσης ὑλιστικῆς ἀντιλήψεως καὶ νὰ δημιουργήσῃ ὄχι μόνον τὸν σημερινὸν τεχνικὸν πολιτισμόν, ἀλλὰ καὶ νὰ ἐδραιώσῃ τὸν πνευματικὸν πολιτισμόν. Πρὸς ἐπίρρωσιν τῶν ἀντιλήψεών του τούτων ὁ κ. Κονταργύρης παραθέτει τὰς γνώμας παλαιῶν σοφῶν ἀνδρῶν, τινὰς τῶν ὁποίων κρίνομεν σκόπιμον, ὅπως μεταφέρωμεν ἐνταῦθα.

Ἰσοκράτους : Τοσοῦτον δ' ἀπολέλοιπεν ἡ πόλις ἡμῶν περὶ τὸ φρονεῖν καὶ λέγειν τοὺς ἄλλους ἀνθρώπους, ὥσθ' οἱ ταύτης μαθηταὶ τῶν ἄλλων διδάσκαλοι γεγόνασι καὶ τὸ τῶν Ἑλλήνων ὄνομα πεποίηκε μηκέτι τοῦ γένους, ἀλλὰ τῆς διανοίας δοκεῖν τεκμήριον εἶναι· καὶ μᾶλλον Ἕλληνας καλεῖσθαι τοὺς τῆς παιδεύσεως τῆς ἡμετέρας ἢ τοὺς τῆς κοινῆς φύσεως μετέχοντας. (Πανηγυρ. 50 e).

Γκαῖτε (Goethe) : Ὅ,τι εἶναι ὁ νοῦς καὶ ἡ καρδία διὰ τὸν ἄνθρωπον, τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ αἱ Ἀθῆναι διὰ τὴν Ἑλλάδα καὶ ἡ Ἑλλὰς διὰ τὴν ἀνθρωπότητα.

Χέρντερ (Herder) : Ὅπως τὰ ἄνθη στολίσουν τὴν γῆν καὶ τὰ ἄστρα τὸν οὐρανόν, οὕτω καὶ αἱ Ἀθῆναι στολίζουν τὴν Ἑλλάδα καὶ ἡ Ἑλλὰς ὁλόκληρον τὴν οἰκουμένην.

Περαιτέρω ὁ συγγραφεὺς ἀναλύει ἐν ἁδραῖς γραμμαῖς τὸ ἔργον καὶ τὰς σοφὰς ῥήσεις τῶν τραγικῶν ποιητῶν τῆς ἀρχαιότητος, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ φιλοσοφικὸν ἔργον τῶν τριῶν μεγάλων Ἱεραρχῶν τοῦ Χριστιανισμοῦ, Βασιλείου τοῦ Μεγάλου, Γρηγορίου τοῦ Θεολόγου καὶ Ἰωάννου τοῦ Χρυσοστόμου. Τὰ αἴτια τῆς ἀναπτύξεως τοῦ πνεύματος τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ὁ κ. Κονταργύρης ἀποδίδει εἰς τοὺς κάτωθι λόγους : 1) Εἰς τὸ γεωγραφικὸν πλάτος, ὅπου εὑρίσκεται ἡ Ἑλλάς. 2) Εἰς τὴν μορφολογίαν τοῦ ἐδάφους καὶ τὸν πολυσχιδῆ καὶ πολύμορφον ὁριζόντιον καὶ κάθετον διαμελισμὸν τῆς χώρας ἡμῶν. 3) Εἰς τὴν βαθεῖαν πίστιν τῶν Ἑλλήνων πρὸς τὸν Θεόν. 4) Εἰς τὴν δημιουργίαν καὶ ἀνάπτυξιν τοῦ δημοκρατικοῦ πνεύματος καὶ 5) Εἰς λόγους βιολογικούς, τοὺς ὁποίους ὅμως ἀκόμη ἡ ἐπιστήμη δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ καθορίσῃ ἐπακριβῶς.

Ἡ ὅλη πραγματεία τοῦ κ. Κονταργύρη διέπεται ὑπὸ βαθυτάτης γνώσεως τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς γραμματείας καὶ ὑπὸ ἀπεριορίστου ἀγάπης πρὸς τὴν Ἑλληνικὴν πατρίδα. Ὅθεν ὀρθῶς τερματίζει ταύτην ὁ συγγραφεὺς διὰ τῆς ῥήσεως τοῦ Εὐριπίδου :

Εἰκὸς δὲ παντὶ καὶ λόγῳ καὶ μηχανῇ,
Πατρίδος ἐρῶντι ἐκπονεῖν σωτηρίαν.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

22

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΔ΄ 1962 = 14.
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
27/28

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1962

**Δημητρίου Δ. Κωτσάκη**, ὑφηγητοῦ Ἀστρονομίας ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ καὶ τῷ Πολυτεχνείῳ Ἀθηνῶν. *1. Ἡλιακαὶ ἐκλάμψεις καὶ τηλεπικοινωνίαι*, Ἀθῆναι 1962. *2. Ἥλιος, γεωμαγνητισμὸς καὶ πολικὸν σέλας*, Ἀθῆναι 1962.

## 1

Τὸ φαινόμενον τῶν ἐκλάμψεων τοῦ Ἡλίου παρουσιάζει ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον, ὄχι μόνον διὰ τοὺς ἀστρονόμους καὶ τοὺς γεωφυσικούς, ἀλλὰ καὶ διὰ τοὺς ἀσχολουμένους πρὸς τὰς παντὸς εἴδους τηλεπικοινωνίας, τὸ ραδιόφωνον καὶ τὴν τηλεόρασιν. Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἀνεκαλύφθη ὅτι πολλὰ φαινόμενα τῆς ἡλιακῆς δραστηριότητος καὶ ἰδιαιτέρως αἱ ἐκλάμψεις, ἐπιδροῦν ἐντόνως ἐπὶ γηΐνων φαινομένων, ὥστε νὰ συμβαίνουν ἀνωμαλίαι καὶ διακοπαὶ τῶν τηλεπικοινωνιῶν. Ἡ ἀνακάλυψις αὕτη ἔστρεψε τὴν προσοχὴν πολλῶν ἐπιστημόνων εἰς τὴν συστηματικωτέραν ἔρευναν τῶν λαμβανόντων χώραν εἰς τὸν Ἥλιον μεταβολῶν. Σκοπὸς τῆς ἐρεύνης αὐτῆς εἶναι τὸ μὲν ἡ ἐξακρίβωσις τῶν αἰτίων, ἅτινα προκαλοῦσι τὰς ἐκλάμψεις, τὸ δὲ ἡ πρόβλεψις τῶν συναφῶν ἡλιακῶν διαταράξεων καὶ ἐπομένως ἡ ἀντιμετώπισις τῶν ἐκ τούτων ἐπιβλαβῶν εἰς τὰς τηλεπικοινωνίας ἐπιδράσεων.

Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν ὁ κ. Κωτσάκης παρέχει προεισαγωγικῶς μερικὰ στοιχεῖα σχετιζόμενα πρὸς τὸν Ἥλιον καὶ τὸν τρόπον λειτουργίας αὐτοῦ. Μεταξὺ τῶν στοιχείων τούτων εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ Ἡλίου, αἱ κινήσεις αὐτοῦ, ἡ πυκνότης αὐτοῦ κλπ. Ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ἐκτίθενται ἐπίσης τὰ περὶ πυρῆνος τοῦ Ἡλίου, τὰ περὶ φωτοσφαίρας καὶ χρωμοσφαίρας αὐτοῦ, τὰ περὶ στέμματος καὶ περιοδικότητος τῶν κηλίδων του.

Ἡλιακαὶ ἐκλάμψεις ὀνομάζονται κατὰ τὸν κ. Κωτσάκην φωτειναὶ σχηματισμοί, οἵτινες παρατηροῦνται αἰφνιδίως κατ' ἀραιὰ χρονικὰ διαστήματα ἐγγὺς ὁμάδων κηλίδων ἡλιακῶν. Ἡ διάρκεια τῶν φωτεινῶν τούτων σχηματισμῶν κυμαίνεται μεταξὺ 10 λεπτῶν μέχρι ὡρῶν τινων. Καλυτέρα παρατήρησις τούτων γίνεται διὰ τοῦ μονοχρωμάτορος Lyot, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς τοῦ ὑδρογόνου. Αἱ ἐκλάμψεις τοῦ Ἡλίου συνδέονται στενώτατα πρὸς τὸ γενικὸν μαγνητικὸν πεδίον αὐτοῦ καὶ ἀσκοῦν ἐπίδρασιν εἰς τὸ μαγνητικὸν πεδίον τῆς Γῆς καὶ τὴν ἰοντόσφαιραν αὐτῆς. Εἰς τὴν φωτοσφαῖραν παρατηροῦνται φωτειναὶ λωρίδες ὑδρογόνου, αἱ ὁποῖαι συχνὰ ἑνοῦνται καὶ σχηματίζουν περὶ τὰς κηλίδας φωτεινὰς ἐκτάσεις. Εἰς τὰς φωτεινὰς αὐτὰς ἐκτάσεις ἐμφανίζονται αἱ ἐκλάμψεις. Αἱ ἐκλάμψεις, ἔχει παρατηρηθῆ, ὅτι λαμβάνουν χώραν κυρίως εἰς τὴν κεντρικὴν περιοχὴν τῶν ὁμάδων κηλίδων ἢ εἰς τὸ σκιόφως. Ἡ λαμπρότης τῶν ἐκλάμψεων δὲν εἶναι σταθερά, τὸ δὲ μέγεθος αὐτῶν εἶναι ποικίλον. Πλήρης θεωρία πρὸς ἑρμηνείαν τῶν ἐκλάμψεων τοῦ Ἡλίου δὲν κατέστη ἀκόμη δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ. Νεώτεραι παρατηρήσεις καταλήγουν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι πρόκειται περὶ αἰφνιδίας ἀπελευθερώσεως μαγνητικῆς ἐνεργείας, ἥτις μεταβάλλεται ἀκολούθως εἰς ὁρατὸν φῶς, ραδιοκύματα καὶ ρεύματα σωματίων.

Ἀκολούθως ὁ κ. Κωτσάκης ἐκθέτει τὰ περὶ ἰοντοσφαίρας καὶ τῆς σημασίας, τὴν ὁποίαν ἔχει αὕτη διὰ τὴν διάδοσιν ἢ ἀνάκλασιν τῶν ραδιοφωνικῶν κυμάτων. Ἐκ τῶν ἡλιακῶν ἐκλάμψεων ἐκπέμπεται ἔντονος ὑπεριώδης ἀκτινοβολία, ἥτις προκαλεῖ, ὁσάκις εἶναι ἔντονος, αἰφνιδίας διαταράξεις τῆς ἰοντοσφαίρας. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν παρατηρεῖται κατασίγασις ἢ διακοπὴ τῶν τηλεπικοινωνιῶν διαρκείας λεπτῶν τινων ἢ καὶ ὡρῶν ἀκόμη. Αἱ συναφεῖς διαταράξεις τῆς ἰοντοσφαίρας τῆς γῆς λαμβάνουν χώραν εἰς ὁλόκληρον τὸ ὑπὸ τοῦ Ἡλίου φωτιζόμενον ἡμισφαίριον αὐτῆς. Ἀφοῦ ἔχει διαπιστωθῆ ὅτι αἱ ἡλιακαὶ ἐκλάμψεις ἐπηρεάζουν πολὺ τὰς ἐν τῇ Γῇ τηλεπικοινωνίας τίθεται τὸ ἐρώτημα πῶς θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξουδετερωθῇ ἢ νὰ μειωθῇ ἡ ἐπίδρασις αὐτῶν ἐπὶ τῆς ἰοντοσφαίρας. Ἐπειδὴ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν αἱ προσπάθειαι τῶν εἰδικῶν ἐπιστημόνων κατατείνουν εἰς τὴν εὕρεσιν μεθόδων καὶ τρόπων πρὸς πρόβλεψιν

τοῦ χρόνου τῆς ἐμφανίσεως τῶν ἐκλάμψεων, ὡς καὶ τῆς διαρκείας καὶ τοῦ μεγέθους αὐτων. Ἡ τοιαύτη σπουδὴ τῶν ἡλιακῶν ἐκλάμψεων ὑπολογίζεται ὅτι θὰ ὁδηγήσῃ βραδύτερον εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῆς ἐπιδράσεως αὐτῶν ἐπὶ τῶν ἐν τῇ Γῇ τηλεπικοινωνιῶν.

## 2

Εἰς τὴν δευτέραν πραγματείαν τοῦ κ. Κωτσάκη, ὑπὸ τὸν τίτλον Ἥλιος, γεωμαγνητισμὸς καὶ πολικὸν σέλας, ἐκτίθενται ἐν ἀρχῇ, ἐν συντομίᾳ μὲν ἀλλὰ μὲ θαυμαστὴν σαφήνειαν, τὰ περὶ τῆς ἡλιακῆς δραστηριότητος μνημονευομένης καὶ τῆς θεωρίας τῶν Bethe - Weizsaecker περὶ τοῦ ἐν τῷ Ἡλίῳ λεγομένου κύκλου τοῦ ἄνθρακος. Ἀκολούθως γίνεται διαπραγμάτευσις τοῦ γεωμαγνητισμοῦ καὶ τοῦ πολικοῦ σέλαος ἀναφερομένων ὅλων τῶν νεωτέρων παρατηρήσεων καὶ ἰδίως ἐπὶ τῶν ἡλιακῶν ἐκλάμψεων, τῶν ὁποίων ἡ ἐπίδρασις ἐπὶ τὰς γεωμαγνητικὰς καταιγίδας εἶναι μεγάλη. Τὸ πολικὸν σέλας ἐμφανίζεται συγχρόνως πρὸς τὰς γεωμαγνητικὰς καταιγίδας. Πολικὸν σέλας καὶ γεωμαγνητικαὶ καταιγίδες εἶναι κατὰ τὸν κ. Κωτσάκην δύο παράλληλα φαινόμενα, δύο ἀπόψεις ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου φαινομένου. Πρόκειται, κατὰ τὸν συγγραφέα, περὶ ἐκρήξεων ἐν τῷ Ἡλίῳ καὶ ἐκσφενδονίσεως σωματίων, κατὰ τὴν ὁποίαν βομβαρδίζεται ἡ ἀτμόσφαιρα τοῦ πλανήτου μας προκαλουμένων οὕτω τῶν φαινομένων τοῦ πολικοῦ σέλαος καὶ τῶν γεωμαγνητικῶν καταιγίδων. Τὰ γεωμαγνητικὰ φαινόμενα σχετίζονται, κατὰ τὸν κ. Κωτσάκην, πρὸς τὰς λεγομένας ζώνας van Allen, αἱ ὁποῖαι περιβάλλουν τὴν γῆν εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς 40.000 χιλιομέτρων περίπου.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω δύο νέων πραγματειῶν του, ὁ κ. Κωτσάκης προσφέρει σοβαρὰν συμβολὴν εἰς τὴν κατατόπισιν τῶν νέων μας ἐπιστημόνων ἐπὶ τῶν συγχρόνων προβλημάτων τῶν ἀφορώντων εἰς τὴν δραστηριότητα τοῦ Ἡλίου. Ἡ σαφήνεια κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῆς ὕλης, ἥτις χαρακτηρίζει τὰς πραγματείας τοῦ κ. Κωτσάκη προσδίδει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον εἰς αὐτάς. Διὰ τῶν συνεχῶν προσπαθειῶν του ὁ κ. Κωτσάκης κατορθώνει μὲ ἐπιτυχίαν νὰ καθιστᾷ γνωστὰς καὶ εἰς τὸ εὐρύτερον ἀκόμη κοινὸν τὰς νεωτέρας ἀστρονομικὰς ἐρεύνας, αἱ ὁποῖαι τόσον πολὺ συνδέονται καὶ πρὸς τὰς πρακτικὰς ἀνάγκας τοῦ ἀνθρώπου, ὡς εἶναι αἱ τηλεπικοινωνίαι.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**Δημητρίου Ν. Κατσῆ**, *Θεωρία τῶν ἐκλείψεων τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς Σελήνης*, Ἀθῆναι 1961, σελίδες 88.

Ὁ ἀστρονόμος, διδάκτωρ τῶν μαθηματικῶν κ. Δημήτριος Κατσῆς εἶναι ἤδη γνωστὸς εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ἐκ δημοσιευθείσης κριτικῆς τῆς ἐργασίας του «Τὰ ἡμερολόγια καὶ ὁ κανὼν τοῦ Πάσχα» (Ἀθῆναι 1959, σελίδες 80).

Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ἔχωμεν πρὸ ἡμῶν τὴν νέαν ἐργασίαν τοῦ κ. Κατσῆ περὶ τῶν ἐκλείψεων τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς Σελήνης. Ἡ ἐργασία αὕτη εἶναι ἡ ἑβδόμη κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν ἐπιστημονικῶν δημοσιεύσεων τοῦ συγγραφέως.

Τὰ φαινόμενα τῆς ἐκλείψεως τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἡλίου τὰ ὁποῖα διαπραγματεύεται ὁ κ. Κατσῆς εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν του εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν ἐκ τῶν θαυμασιωτέρων φαινομένων τῆς φύσεως καὶ ἀνέκαθεν προεκάλουν τὸν θαυμασμὸν καὶ τὴν ἔκπληξιν τοῦ ἀνθρώπου. Ὅθεν εἶναι εὐνόητον ὅτι λίαν ἐνωρὶς διήγειρον ζωηρὸν τὸ ἐνδιαφέρον διὰ τὴν παρακολούθησιν καὶ τὴν σπουδὴν αὐτῶν. Ἡ μελέτη τῶν ἐκλείψεων περιορίζεται κατ' ἀρχάς, κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Χαλδαίων, εἰς ἁπλῆν χρονολογικὴν καταγραφήν. Βραδύτερον ὅμως, κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἀκμῆς τῆς ἑλ-

ληνικῆς ἐπιστήμης, ἰδίως ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐδόξου, ἡ μελέτη αὕτη προωθεῖται σημαντικῶς καὶ προχωρεῖ πρὸς τὴν ἔρευναν τῆς αἰτίας καὶ τοῦ μηχανισμοῦ τῶν ἐκλείψεων.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ σπουδὴ τῶν ἐκλείψεων ἔφθασεν εἰς ἐπίζηλον βαθμὸν τελειότητος κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς νεωτέρας ἀστρονομίας, κατόπιν τῆς ἀνακαλύψεως τῶν νόμων τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον καὶ τῆς μεγάλης ἀναπτύξεως τῆς οὐρανίου Μηχανικῆς.

Σήμερον ἡ μαθηματικὴ θεωρία τῶν ἐκλείψεων κατορθώνει δι' ἁπλῶν ὑπολογισμῶν νὰ δίδῃ εἰς ἡμᾶς μετὰ θαυμαστῆς ἀκριβείας ὁλόκληρον τὴν εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως καὶ τῆς διαδρομῆς αὐτῶν τῶν φαινομένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς. Ἡ ἀκρίβεια δὲ αὕτη. τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἐκλείψεων ὑπῆρξε πολύτιμος εἰς τὰ πρῶτα βήματα τῆς νεωτέρας. ἐπιστήμης. Διότι ἐστερέωσε τὴν πεποίθησιν τοῦ ἀνθρώπου τὸ μὲν ἐπὶ τὴν ἀξίαν τῶν Μαθηματικῶν, τὸ δὲ ἐπὶ τὴν ἀξίαν τῶν νόμων τῆς Ἀστρονομίας. Ἀκόμη γενικώτερον, ἐστερέωσε τὴν πίστιν τῆς Κοινωνίας εἰς τὸ ἐπιστημονικῶς σκέπτεσθαι καὶ τὸ ἐπιστημονικῶς ἐργάζεσθαι.

Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου ἐκτίθεται εἰς 4 κεφάλαια. Ὁ κ. Κατσῆς ἐπιχειρεῖ μετὰ πάσης δυνατῆς συντομίας καὶ ἁπλουστεύσεως νὰ ἐκθέσῃ τὴν μαθηματικὴν θεωρίαν τῶν ἐκλείψεων καὶ τῆς Σελήνης εἰς τὰ δυὸ πρῶτα κεφάλαια. Ἀπευθύνεται εἰς τὸν ἀναγνώστην ἐκεῖνον, ὅστις ἔχει ποίαν τινα μαθηματικὴν κατάρτισιν καὶ παρέχει εἰς αὐτὸν τὴν δυνατότητα ὄχι μόνον νὰ γνωρίσῃ τὸν τρόπον τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν φάσεων μιᾶς ἐκλείψεως, ἀλλὰ καὶ τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἀπολαύσῃ ὁ ἴδιος ἕνα τοιοῦτον ὑπολογισμόν. Μετὰ ταῦτα παρέχει εἰς αὐτὸν τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐφαρμόσῃ ὁ ἴδιος τὸν ὑπολογισμὸν αὐτόν, ἀκολουθῶν τὰ ἀριθμητικὰ παραδείγματα τοῦ βιβλίου, ἐπὶ μιᾶς οἱασδήποτε μελλοντικῆς ἐκλείψεως, μὲ μόνον του ἐφόδιον μερικὰ στοιχεῖα βασικά, τὰ ὁποῖα δύναται νὰ λάβῃ ἐκ τῆς οἰκείας ἀστρονομικῆς ἐφημερίδος (π. χ. The Astronomical Ephemeris, London—Washington. Connaissance des Temps, Paris, κλπ.).

Εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον τοῦ βιβλίου ἐκτίθενται αἱ βασικαὶ γραμμαὶ τῆς θεωρίας ἑνὸς πολὺ συχνοῦ καὶ καθημερινοῦ φαινομένου, ἀναλόγου πρὸς τὰς ἐκλείψεις τοῦ Ἡλίου, τοῦ φαινομένου τῶν ἐπιπροσθήσεων τῶν ἀπλανῶν ὑπὸ τῆς Σελήνης. Ἡ Σελήνη κατὰ τὰς ἐπιπροσθήσεις διέρχεται πρὸ τοῦ σώματος τῶν ἀπλανῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι μεμακρυσμένοι Ἥλιοι, προκαλοῦσα διὰ τῆς παρεμβάσεώς της ἀπόκρυψιν αὐτῶν ἐπί τι χρονικὸν διάστημα. Ἀνάλογον πρὸς τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ φαινόμενον τῆς ἀποκρύψεως ἄστρων ὑπὸ τῶν τεχνητῶν δορυφόρων τῆς ἐποχῆς μας.

Τέλος εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον ἐκτίθεται συντόμως ἡ θεωρία τοῦ λίαν σπανίου, ἀλλ' ἐξαιρετικῶς ὡραίου φαινομένου τῆς διαβάσεως πλανητῶν πρὸ τοῦ δίσκου τοῦ Ἡλίου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἀντὶ τῆς Σελήνης, ὁ εἷς τῶν ἐσωτερικῶν πλανητῶν, ὁ Ἑρμῆς ἢ ἡ Ἀφροδίτη διέρχεται πρὸ τοῦ λαμπροῦ δίσκου τοῦ ἄστρου τῆς ἡμέρας, ἐπὶ τοῦ ὁποίου φαίνεται ὡς μελανὴ κηλίς. Ὁ πλανήτης δὲν κατορθώνει βεβαίως νὰ καλύψῃ τὸν Ἥλιον ὅπως ἡ Σελήνη, ἀλλ' ὁ μηχανισμὸς τοῦ φαινομένου εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ὁ ἴδιος πρὸς τὸν μηχανισμὸν τῶν ἐκλείψεων τοῦ Ἡλίου.

Ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου γίνεται μὲ ἐξαιρετικὴν σαφήνειαν καὶ ἐνάργειαν. Ὁ κ. Κατσῆς κατορθώνει μὲ δεξιοτεχνίαν νὰ καθιστᾷ ἁπλᾶς πολλὰς δυσκόλους ἐννοίας. Χάρις εἰς το προσὸν τοῦτο τοῦ συγγραφέως ὁ ἀναγνώστης τοῦ βιβλίου θὰ αἰσθανθῇ ἐξ αὐτοῦ πραγματικὴν ἀπόλαυσιν. Ἡ ἑλληνικὴ βιβλιογραφία πλουτίζεται μὲ τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν τοῦ κ. Κατσῆ, μὲ ἓν νέον βιβλίον, λίαν ἀπαραίτητον διὰ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ ἀστρονομικὰ προβλήματα. Ἡ ἀνάγνωσις τοῦ βιβλίου θὰ συντελέσῃ εἰς τὴν βαθυτέραν κατανόησιν ἐκτάκτως ὡραίων φαινομένων τῆς φύσεως, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ παρατηρήσῃ τις ὑπὸ τὸν διαυγῆ οὐρανὸν τῆς Ἑλλάδος. Ἡ λεπτομερὴς μαθηματικὴ διαπραγμάτευσις τοῦ φαινομένου τῶν ἐκλείψεων προσδίδει ἰδιαιτέραν ἀξίαν εἰς τὴν νέαν πραγματείαν τοῦ κ. Κατσῆ. Οἱ φοιτηταὶ ἰδίως τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσι-

κῶν ἐπιστημῶν θὰ εὕρωσι εἰς τὸ νέον βιβλίον τοῦ κ. Κατσῆ ἕνα πολύτιμον σύμβουλον καὶ βοηθὸν πρὸς τὸν ὁποῖον θὰ ἀποβλέπουν μὲ μεγάλην ἐμπιστοσύνην.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**N. C. Photinos, Marin De Tyr** *Grand géographe Cree et dessinateur de la karte marine actuelle.* P 143, 1960, Athènes. [**Ν. Γ. Φωτεινοῦ**, *περὶ τοῦ Μαρίνου τοῦ Τυρίου*, μεγάλου Ἕλληνος γεωγράφου καὶ ἐπινοητοῦ (σχεδιαστοῦ) τοῦ συγχρόνου ναυτικοῦ χάρτου Σελ. 143, 1960, Ἀθῆναι].

Ὁ διαπρεπὴς δημοσιογράφος καὶ μέλος τῆς Ἑλλην. Γεωγραφικῆς Ἑταιρείας κ. Νικόλαος Γ. Φωτεινὸς εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ «Πλάτωνος» ἐκ τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ναυτικὰ» περὶ τῆς ὁποίας ἐδημοσιεύθη κριτικὴ εἰς τὸ τεῦχος Α' τοῦ 1957.

Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ἔχωμεν πρὸ ἡμῶν τὴν νέαν πραγματείαν τοῦ κ. Φωτεινοῦ, τὴν ἐκδοθεῖσαν γαλλιστὶ ἐν Ἀθήναις καὶ ἀφορῶσαν εἰς τὸ ἔργον τοῦ μεγάλου Ἕλληνος γεωγράφου Μαρίνου τοῦ Τυρίου. Ὁ Μαρῖνος ὁ Τύριος ἔζησεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου καὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ δευτέρου αἰῶνος μ. Χ. Στερούμεθα ὅμως παντελῶς βιογραφικῶν στοιχείων περὶ αὐτοῦ, ὅπως ἐπίσης στερούμεθα αὐτουσίων ἔργων τοῦ μεγάλου τούτου Ἕλληνος γεωνράφου. Ὁ κ. Φωτεινὸς ὑποστηρίζει, ὅτι ἡ Γεωγραφικὴ Ὑφήγησις τοῦ Πτολεμαίου εἶναι ἔργον τοῦ Μαρίνου ἐκδοθὲν ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου, ὅστις ἦτο ὀλίγον νεώτερος τοῦ Μαρίνου.

Τὴν γνώμην του αὐτὴν ὁ κ. Φωτεινὸς συνάγει ἐκ διαφόρων χωρίων τῆς Γεωγραφικῆς Ὑφηγήσεως τοῦ Πτολεμαίου, ὅπου γίνεται μνεία τῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ Μαρίνου ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ κάτωθι χωρίον: «Τὸ δ' ἐπιπέδῳ (σχεδίασ.ς χάρτου ἐπὶ ἐπιπέδου) τούτων μὲν παντάπασιν ἀπήλλακται μέθοδον δ' ἐπιζητεῖ τινα πρὸς ὁμοιότητα τῆς σφαιρικῆς εἰκόνος . . . ὅπερ Μαρῖνος εἰς ἐπίστασιν οὐ τὴν τυχοῦσαν ἀγαγών, καὶ πάσαις ἁπαξαπλῶς μεμφάμενος ταῖς μεθόδοις τῶν ἐπιπέδων καταγραφῶν (κεφ. κ'. παράγ. 2, 3).

Ὁ Μαρῖνος ἐξέδωκε, κατὰ τὸν κ. Φωτεινόν, πολλὰ ἔργα, ἐν τῶν ὁποίων εἶναι καὶ ἡ Γεωγραφικὴ Ὑφήγησις, ἥτις φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο περιλαμβάνονται α) αἱ γνώσεις καὶ αἱ θεωρίαι ὅλων τῶν πρὸ αὐτοῦ ἀσχοληθέντων μὲ τὴν Γεωγραφίαν. β) Ὅλαι αἱ προσωπικαί του γνώσεις καὶ θεωρίαι, αἱ κτηθεῖσαι ἐξ ἰδίας προσωπικῆς ἐρεύνης. γ) Ἄφθονον γεωγραφικὸν ὑλικόν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει πόλε.ς, ὄρη, ποταμούς, λίμνας κλπ. ὁλοκλήρου τῆς τότε γνωστῆς οἰκουμένης γῆς. Εἰς τὸ ὑλικὸν τοῦτο περιλαμβάνονται ἐπίσης τὰ περὶ διευθύνσεων καὶ ἀποστάσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων τόπων, τὰ περὶ στιγμάτων διὰ τὰς παραλίους θέσεις κλπ. δ) Ἡ ἱστορία καὶ αἱ μέθοδοι τῆς χαρτογραφήσεως τῶν πρὸ αὐτοῦ, κριτικὴ καὶ ἀπόρριψις αὐτῶν, παρουσίασις δὲ καὶ ἀνάλυσις τοῦ ἰδικοῦ του προβολικοῦ συστήματος.

Κατὰ τὸν κ. Φωτεινὸν ὁ Μαρῖνος εἶναι ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος ἐχρησιμοποίησεν τὴν ἀπὸ τοῦ Ἱπποκράτους γνωστὴν ἤδη εἰς τοὺς Ἕλληνας βιογεωγραφικὴν θεωρίαν, περὶ τῆς ἀνάγκης διαβιώσεως τῶν αὐτῶν ζώων καὶ φυτῶν ὑπὸ τὰς αὐτὰς κλιματολογικὰς συνθήκας, καὶ καθ' ὅλας τὰς ἐνδείξεις εἶναι ὁ πρῶτος διατυπώσας τὴν ὀρθοτέραν θεωρίαν περὶ κυκλοφορίας τῶν ἀνέμων. Ὁ Μαρῖνος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐχρησιμοποίησεν ὡς πρῶτον μεσημβρινόν, τὸν διερχόμενον διὰ τὸν Μακάρων νήσων (Καναρίων), αἵτινες ἀπετέλουν τὸ δυτικὸν πέρας τοῦ τότε γνωστοῦ κόσμου, μεταθέσας τὴν ἀρχὴν τῶν μετρήσεων τοῦ μήκους εἰς τὴν τότε φυσικὴν αὐτῆς θέσιν. Διὰ τῆς μεταθέσεως ταύτης ὅλα τὰ γεωγραφικὰ μήκη κατέστησαν ἀνατολικά. Ὁ διὰ τῶν Μακάρων μεσημβρινὸς ἐξακολου-

θεῖ ἀκόμη νὰ θεωρῆται ὡς εἷς ἐκ τῶν πρώτων, παρὰ τὴν ἀναγνώρισιν διεθνῶς ὡς πρώτου μεσημβρινοῦ τοῦ διεόχομένου διὰ τοῦ Ἀστεροσκοπείου τοῦ Γκρήνουϊτς. Πρῶτος ὁ Μαρῖνος καὶ μὲ πλήρη συνείδησιν ἐχώρισε κατὰ τὸ μῆκος τὴν τότε γνωστὴν οἰκουμένην Γῆν εἰς δεκαπέντε «ὡριαῖα ἰσημερινὰ διαστήματα», ὡρικοὺς δηλαδὴ ἀτράκτους, διαίρεσιν, ἥτις μόνον ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας ἐνεφανίσθη ἐκ νέου. Ὡς πρὸς τὸ πλάτος, ἐχώρισε τὴν οἰκουμένην Γῆν, εἰς ἑπτὰ «κλίματα» ἀκολουθῶν τὴν παλαιὰν διαίρεσιν.

Ὁ Μαρῖνος ἐξέδωκεν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἰδίου προβολικοῦ συστήματος, ἀποτελοῦντος μορφὴν κυλινδρικῆς προβολῆς, ναυτικὸν χάρτην παραμείναντα, ὡς πρὸς τὸ προβολικὸν σύστημα, ἐν ἰσχύϊ μέχρι σήμερον. Τὸν χάρτην καὶ τὴν προβολὴν τοῦ Μαρίνου ἐσφετερίσθη κατὰ τὸν κ. Φωτεινὸν τῷ 1569 ὁ Φλαμανδὸς Γεωγράφος Γεράρδος Κρέμερ, γνωστὸς ὑπὸ τὸ ἐκλατινισμένον ὄνομά του, ὡς Γεράρδος Μερκάτωρ. Ἔκτοτε δὲ ἡ προβολὴ τοῦ Μαρίνου φέρεται ὡς προβολὴ τοῦ Μερκάτορος. Ὡς σημαντικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Μαρίνου δύνανται νὰ θεωρηθοῦν καὶ τὰ ἀκόλουθα :

1) Κατενόησε τὴν εἰδικὴν διὰ τοὺς ναυτικοὺς σημασίαν τοῦ παραλλήλου τῆς Ῥόδου, ἐκφράζοντος τὸ μέσον γεωγραφικὸν πλάτος τῆς Μεσογείου ἐφ' οὗ «καὶ τῶν κατὰ μῆκος διαστάσεων αἱ πλεῖσται γεγόνασιν ἐξετάσεις» καὶ ἐμέτρει ἐπ' αὐτοῦ τὴν «διάστασιν ἢ ἀποχὴν» τῶν μεσημβρινῶν, τὴν κακῶς ἀποκαλουμένην σήμερον «ἀποχώρησιν». Τὸ στοιχεῖον τοῦτο χρησιμοποιεῖται μέχρι σήμερον εἰς τὴν κατασκευὴν ναυτικῶν χαρτῶν καὶ τὴν ἐπίλυσιν τῶν «λοξοδρομικῶν τριγώνων».

2) Ἐγνώρισε τὰ λοξοδρομικὰ τρίγωνα, τῶν ὁποίων ἔδωκε λύσεις, αἵτινες διεσώθησαν, ἀναδειχθεὶς μέγας διδάσκαλος τοῦ κατὰ τοὺς κανόνας τῆς τέχνης ναυτίλλεσθαι.

3) Εἶναι ὁ εἰσαγαγὼν τὰ «αὐξομερῆ πλάτη» εἰς τὴν ναυτιλίαν καὶ ὁ πρῶτος, ὅστις διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι ὁ Ἰνδικὸς ὠκεανὸς κλείεται πρὸς νότον ὑπὸ ξηρᾶς, ἀγνώστου Γῆς (τῆς Ἀνταρκτικῆς).

4) Διὰ τὸν ἔλεγχον τῶν ἐντὸς τῆς οἰκουμένης Γῆς ἀποστάσεων ἠκολούθει τριπλῆν μέθοδον : Πρῶτον ἐθεώρει τὰ ἐξαγόμενα τῶν ὁδοιποριῶν· δεύτερον ἤλεγχε ταῦτα διὰ τῶν ναυτιλιῶν καὶ τρίτον ἤλεγχε διὰ τῶν ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων τὰ πορίσματα τῶν δύο προηγουμένων ἐξετάσεων. Κατὰ ταῦτα ὁ Μαρῖνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἤσκει εἶδος τι γεωδαιτικοῦ τριπλευρισμοῦ.

Ἡ βιβλιογραφία περὶ τοῦ Μαρίνου τοῦ Τυρίου εἶναι πενιχρά. Τὰ γεωγραφικά του ἐπιτεύγματα ἦσαν ῥηξικέλευθα. Ὁ Μαρῖνος προέτρεξε πολὺ τῆς ἐποχῆς του καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτόν, οἱ σύγχρονοί του δὲν κατενόησαν τὰς θεωρίας του, ἰδίως τὰς προβολικάς. Αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον τὰ ἔργα τοῦ Μαρίνου δὲν ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν. Ὅ,τι συνέβη μὲ σπουδαῖα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ὁποῖα δὲν ἐσώθησαν διότι δὲν ἦσαν πολὺ κατανοητὰ κατὰ τὴν τότε ἐποχήν, τὸ αὐτὸ ἔγινε καὶ μὲ τὰ ἔργα τοῦ Μαρίνου. Εἶναι ἐπομένως ἄξιος θαυμασμοῦ ὁ κ. Φωτεινός, ὁ ὁποῖος κατορθώνει νὰ μᾶς παρουσιάζῃ τὸ ἔργον τοῦ Μαρίνου ἀπομακρύνων τὸν πέπλον τοῦ σκότους, ὁ ὁποῖος τὸ περιβάλλει. Ἡ ἄγνοια διὰ τὸ ἔργον τοῦ Μαρίνου προέρχεται ἀκόμη καὶ ἀπὸ τὸν σφετερισμὸν τοῦ ἔργου του ὑπὸ τοῦ Μερκάτορος, ὡς ὑποστηρίζει μὲ ἀξιόλογα ἐπιχειρήματα ὁ κ. Φωτεινός. Ἡ ἐμβριθὴς ἐργασία τοῦ κ. Φωτεινοῦ καθιστᾷ λίαν πειστικὸν τὸν ἰσχυρισμόν, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ἐπινοήσεως τοῦ ναυτικοῦ χάρτου ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὸν Μαρῖνον τὸν Τύριον. Δὲν εἶναι δὲ μοναδικὸν τὸ φαινόμενον μερικῶν νεωτέρων, οἱ ὁποῖοι οἰκειοποιοῦνται ἐπιστημονικὰς ἀνακαλύψεις ὀφειλομένας εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας σοφούς. Μεταξὺ αὐτῶν ἀναφέρομεν 1) τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας, ὀφειλομένην ἀποκλειστικῶς εἰς τὸν Ἀριστοτέλη καὶ ἀποδιδομένην ὑπὸ τῶν νεωτέρων εἰς τὸν Νεύτωνα (1). 2) Τὴν ἱπποπέδην καμπύλην τοῦ Εὐδόξου (2) (λημνίσκος) τὴν

---

1) Εὐάγγ. Σταμάτης, περὶ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας. Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἔτος 1959, τόμος 34ος σελ. 272—273.

2) Tomas Heath, A history of Greek Mathematics I σ. 332—333 (1921).

ἀποδιδομένην μέχρι τινος εἰς τοὺς νεωτέρους τοῦ 17ου αἰῶνος, διότι ἡ ἔρευνα περὶ Εὐδόξου δὲν εἶχεν ἀνακαλύψει ἀκόμη τὰ ἐπιτεύγματα αὐτοῦ. 3) Τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου ἀκανονίστων στερεῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀποδιδόμενον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα εἰς τὸν Ἰταλὸν Καβαλιέρι Ὁ μῦθος ὅμως περὶ τῆς τοιαύτης ἀνακαλύψεως τοῦ Καβαλιέρι διελύθη, ὅταν κατὰ τὸ 1907 ἀνεκαλύφθη ἐν Κων)πόλει τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Πρὸς Ἐρατοσθένην Ἔφοδος ὅπου μνημονεύεται ἡ συναφὴς μέθοδος (3).

4) Τὰ τῆς εὑρέσεως τῶν νόμων τῆς διαθλάσεως τοῦ φωτὸς ὑπὸ τοῦ Ὁλλανδοῦ Snellius (1591—1626), ἐν ᾧ σῴζονται ἤδη 27 πειράματα τοῦ Πτολεμαίου κατὰ τὰ ὁποῖα εὑρέθησαν οἱ νόμοι τῆς διαθλάσεως τοῦ φωτός (4).

5) Τὰ περὶ ἀνακαλύψεως τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος ὑπὸ τοῦ Κοπερνίκου, ἐν ᾧ ἐκ τῶν ἀρχαίων συγγραμμάτων ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι τὸ πρῶτον γενικῶς καὶ ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος τὸ δεύτερον εἰδικώτερον, εἶχον διατυπώσει τὴν θεωρίαν περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος (5).

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω γίνεται, φρονοῦμεν, ἀντιληπτὴ ἡ σημασία τῆς πραγματείας τοῦ κ. Φωτεινοῦ, ὁ ὁποῖος οὕτω ἀποκαθιστᾷ διὰ τῶν ἐρευνῶν του τὴν ἱστορικὴν ἀλήθειαν. Εὐχόμεθα ὅπως ὁ κ. Φωτεινὸς ἐκδώσῃ τὴν πραγματείαν του καὶ εἰς τὴν Ἑλληνικὴν γλῶσσαν, ὥστε περίληψις τῶν ἐρευνῶν του νὰ καθίσταται προσιτή, ἵνα περιληφθῇ εἰς τὰ σχολικὰ βιβλία νὰ διαπραγματευόμενα τὰ τῆς κατασκευῆς τῶν γεωγραφικῶν χαρτῶν.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**Κωνσταντίνου Δ. Γεωργούλη,** *Ἀριστοτέλης ὁ Σταγιρίτης (μονογραφία)*, Θεσσαλονίκη 1962, σχ. 8 σ. 440.

Ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν ἔλειπε μία συστηματικὴ καὶ ὑπεύθυνος ἐπιστημονικὴ ἐργασία διὰ τὸν μεγάλον Σταγιρίτην σοφὸν καὶ διὰ τὸ καταπληκτικὸν εἰς ἔκτασιν καὶ βάθος καὶ πρωτοτυπίαν ἐπιστημονικὸν καὶ φιλοσοφικὸν ἔργον του. Τὸ κενὸν αὐτὸ ἐσκέφθη νὰ τὸ πληρώσῃ ἡ Ἱστορικὴ καὶ Λαογραφικὴ Ἑταιρεία Χαλκιδικῆς μὲ μίαν ἐξαίρετον ἐπιστημονικὴν μονογραφίαν 440 σελίδων τοῦ διακεκριμένου ἐπιστήμονος κ. Κωνστ. Γεωργούλη.

Ὁ κ. Γεωργούλης ἀσχολεῖται μὲ τὸν Ἀριστοτέλη καὶ τὰ Ἀριστοτελικὰ θέματα ἐπὶ 45 ἔτη. Ἀπὸ τὰ φοιτητικὰ ἑδώλια ἀκόμη ζῇ τὰ προβλήματα αὐτά, τὰ ἐπεξεργάζεται καὶ τὰ προάγει καὶ δι' αὐτὸ ἡ ἐργασία του δὲν περιορίζεται εἰς τὴν παράθεσιν τῶν γνωστῶν περὶ Ἀριστοτέλους δεδομένων, ἀλλὰ διατυπώνει ἰδικάς του πρωτοτύπους καὶ βαθείας παρατηρήσεις: π. χ. ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης ὑπῆρξεν ἐξαίρετος μαθηματικὸς καὶ πρόδρομος τοῦ Εὐκλείδου, θεμελιώσας τὸ θεωρητικὸν μέρος τῶν Μαθηματικῶν, ὁ ρ ι σ μ ο ύ ς, ἀ ξ ι ώ μ α τ α, τὸ ὁποῖον κυρίως τὸν ἐνδιέφερε (σ. 290—292), καὶ ὅτι χωρὶς τὸν Ἀριστοτέλη θὰ ἦτο δύσκολον νὰ διατυπωθῇ ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία. Ὅτι τὸ cogito, ergo sum, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον ὁ Descartes θεμελιώνει τὴν φιλοσοφίαν του, ἔχει τὰς ῥίζας

---

3) Max Simon, Geschichte der Mathematik, 1909, σελὶς 264.

4) M. Cohen, I Drabkin, A source book in Greek science σ. 274 καὶ ἑξῆς.

5) Ἀρχιμήδους, Ψαμμίτης (14). Πλουτάρχου, Περὶ τοῦ ἐν τῇ Σελήνῃ φαινομένου προσώπου, κεφ. 6, σελ. 923 Α.

του εἰς τὸν Ἀριστοτέλη καὶ εἰς τὸν Αὐγουστῖνον (σ. 247). Ὅτι ἡ ἰσχύουσα σήμερον θεωρία τοῦ «συνεχοῦς ἀπείρου» εἶναι τοῦ Ἀριστοτέλους. Ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος συστηματικὸς συνταγματολόγος κλπ. κλπ. Τὴν ἐργασίαν ἐπίσης τὴν χαρακτηρίζει αὐστηρὰ ἐπιστημονικὴ μέθοδος, συστηματοποίησις, πλήρης βιβλιογραφικὴ ἐνημέρωσις καὶ γενικῶς βαθεῖα ἐπιστημονικὴ ἔρευνα καὶ θεμελίωσις τῶν προβλημάτων. Τονίζεται ὅτι ὁ μέγας Σταγιρίτης σοφὸς ὑπῆρξεν ὁ θεμελιωτὴς τῶν περισσοτέρων ἐπιστημῶν, τῶν Μαθηματικῶν, τῆς Φυσικῆς, τῆς Βιολογίας, τῆς Πολιτικῆς, τῆς Ἠθικῆς, τῆς Ψυχολογίας, τῆς Ποιητικῆς, τῆς Λογικῆς, τῆς Ῥητορικῆς, τῆς Ἱστορίας, τῆς Λαογραφίας κ.ἄ. καὶ μαζὶ μὲ τὸν Πλάτωνα καὶ τῆς συστηματικῆς Φιλοσοφίας. Ἡ σειρὰ τῆς ὀντολογικῆς ἑρμηνείας τῶν ὄντων προχωρεῖ ἀπὸ τὴν ὕλην εἰς τὸ εἶδος, ποὺ συνιστᾷ τὴν οὐσίαν τῶν ὄντων, τὸ ὁποῖον εἶδος διέπεται ἀπὸ σκοπούς. Εἰς τὴν ὑψηλοτέραν βαθμίδα τῆς πυραμίδος τῶν εἰδῶν εἶναι τὸ καθαρὸν ἄϋλον εἶδος, τὸ ὁποῖον συμπίπτει μὲ τὸ θεῖον, ποὺ εἶναι ἡ ἐφέλκουσα δύναμις καὶ ἡ ἐξομοιοῦσα πρὸς αὐτὴν τὰ εἴδη, εἶναι ὁ μέγας μαγνήτης, «τὸ ἐρώμενον». Εἰς τὸ εἶδος ὑπάρχει τὸ «δυνάμει», τὸ ὁποῖον γίνεται «ἐνεργείᾳ» καὶ τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσει καὶ ὁλοκληρώνει τὸν ἑαυτόν του εἰς τὴν «ἐντελέχειαν», ἡ ὑψίστη δὲ ἐντελέχεια εἶναι ἡ καθαρὰ νόησις, τὸ καθαρὸν εἶδος, αὐτὸ τὸ θεῖον. Ἡ ἐντελέχεια προχωρεῖ ἀπὸ μερικωτέρους εἰς γενικωτέρους σκοπούς, ἔσχατος δὲ σκοπὸς εἶναι τὸ «ἀγαθόν», τὸ ὁποῖον εἶναι αἱρετὸν καὶ προτιμητέον. Ἡ εὐδαιμονία, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν βαθυτέραν ἐπιθυμίαν καὶ ἐπιδίωξιν τοῦ ἀνθρώπου, ὑπάρχει εἰς τὴν κατ' ἀρετὴν καὶ κατὰ λόγον ἐνέργειαν. Εἰς τὴν πυραμίδα τῆς γνώσεως ἵσταται ἡ θεολογία, ἡ γνῶσις τοῦ θείου. Ὁ Θεὸς εἶναι νοήσεως νόησις, εἶναι ζῷον (δηλ. ζῶσα ὕπαρξις) ἄϊδιον, ἄριστον, τὸ πρῶτον κινοῦν ἀκίνητον. Τὸ μικρὸν βιβλίον τοῦ Ἀριστοτέλους Περὶ Ποιητικῆς, ἀπὸ ἀπόψεως ἀξίας τῶν αἰσθητικῶν γνωμῶν, αἱ ὁποῖαι ἐκεῖ διατυπώνονται, βαρύνει περισσότερον ἀπὸ πολλοὺς τόμους αἰσθητικῆς. «Ὁ Ἀριστοτέλης ἠρεύνησε ὅλως νέα προβλήματα καὶ ὑπέδειξε λύσεις, αἵτινες μέχρι σήμερον παραμένουν σεβασταὶ καὶ ἀξιοπρόσεκτοι» (σ. 5). «Ἡ ἐνημέρωσις μὲ τὴν προσωπικὴν δρᾶσιν καὶ τὸ περιεχόμενον τῆς διδασκαλίας τοῦ Σταγιρίτου, ἣν προτίθεται νὰ ἐξυπηρετήσῃ ἡ παροῦσα συγγραφή, θὰ ἀσκήσῃ εὐεργετικὴν ἐπίδρασιν διὰ τὴν ἐν γένει πνευματικὴν καὶ ἠθικὴν ζωὴν τῆς χώρας» (σ. 5).

Διὰ τὴν μεγάλην ἀξίαν καὶ πολύτιμον συμβολὴν τοῦ συγγράμματος τοῦ κ. Κων. Γεωργούλη «Ἀριστοτέλης ὁ Σταγιρίτης» δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ λεχθοῦν ἔπαινοι, σημειώνομεν μόνον χαρακτηριστικῶς, ὅτι ἐζητήθη νὰ μεταφρασθῇ τοῦτο εἰς τὴν Ἀγγλικὴν καὶ ὅτι ὁ συγγραφεύς του ἤδη ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἑτοιμασίαν ἰδιαιτέρας διὰ κάθε Ἀριστοτελικὸν σύγγραμμα συστηματικῆς μελέτης, ἡ ὁποία, ὁμοῦ μὲ τὸν «Ἀριστοτέλη», τιμᾷ ὄντως τὴν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην.

Β. Α. ΚΑΛΟΓΕΡΑΣ

***

**Paul Delbouille,** *Poésie et sonorités,* la critique contemporaine devant le pouvoir suggestif des sons, Bibliothèque de la Faculté de la Philosophie et Lettres de l'Université de Liège, fasc. CLXIII, 1961, Société d' édition «Les Belles Lettres» Paris, σχ. 8ον σελ. 267.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ποιήσεως ἀπὸ τὰ τέλη τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἤδη ἐζητήθη νὰ χαραχθῇ νέος δρόμος ἀντίθετος πρὸς τὸν δρόμον τῆς πνευματικῆς καὶ ποιητικῆς παραδόσεως, ἥτις ἤρχισε μὲ τὸν Ὅμηρον, καὶ ἐναντίον τῆς ὁποίας κατὰ καιροὺς ἠκούοντο ἀντιθέσεις ὀφειλόμεναι εἰς λόγους ἐθνικούς, θρησκευτικούς, ἠθικούς, αἰσθητικούς, ἢ ὠφελιμιστικούς. Ὁ Mallarmé διεκήρυξε τὸ 1898 ὅτι «ἀπὸ τὴν ἐπο-

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΕ΄ 1963 = 15
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄
29/30

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1963

# ΒΙΒΛΙΟΚΡΙΣΙΑΙ

**ΜΑΥΡΙΚΙΟΥ Α. ΜΠΡΙΚΑ**, *Μαθήματα Θεωρίας ἐπιφανειῶν*, Τεῦχος ΙΙ, Ἀθῆναι 1963.

Διὰ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ δευτέρου τεύχους τῶν μαθημάτων τῆς Θεωρίας τῶν Ἐπιφανειῶν ὁ διακεκριμένος καθηγητὴς τῆς Γεωμετρίας τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Μπρίκας ἐπιζητεῖ ὅπως ἐπιτύχῃ τὴν ἐξοικείωσιν τοῦ ἀναγνώστου μὲ τὰ βασικώτερα καὶ κλασσικὰ καταστάντα πλέον προβλήματα τῆς θεωρίας ταύτης, τὰ ὁποῖα ἀπησχόλησαν ἐπὶ ἑκατὸν καὶ πλέον ἔτη τοὺς μεγάλους μαθηματικοὺς τοῦ παρελθόντος, κυρίως, αἰῶνος. Εἰς τὸ τεῦχος αὐτὸ ἐξετάζονται ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένης ταξινομήσεως αἱ πλέον σημαντικαὶ κατηγορίαι ἐπιφανειῶν καὶ δίδονται, ὑπὸ μορφὴν πινάκων, παραδείγματα 100 περίπου ἐπιφανειῶν διαφόρων κατηγοριῶν καὶ πλῆθος ἄλλο ἀσκήσεων ἐπὶ διαφόρων καμπύλων ἐπὶ ἐπιφανειῶν, ὡς καὶ 40 ἀκόμη ἀσκήσεις ἐπὶ διαφόρων ἀπεικονίσεων ἐπιφανειῶν.

Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου ἐκτίθεται εἰς 557 σελίδας ὀγδόου σχήματος αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ταξινομοῦνται εἰς τὰς κάτωθι πέντε κατηγορίας, ἡ διάκρισις τῶν ὁποίων γίνεται ἀπὸ τῆς ἐπόψεως :

1ον τοπολογικῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν,
2ον τρόπου γενέσεως αὐτῶν,
3ον ἀναλυτικῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως αὐτῶν,
4ον ὑπάρξεως σχέσεως μεταξὺ ὀργανικῶν στοιχείων αὐτῶν,
5ον ὑπάρξεως σχέσεως μεταξὺ ὀργανικῆς ἢ ἁπλῶς χαρακτηριστικῆς σχέσεως μετὰ δοθείσης ἐπιφανείας.

Ἐντὸς τῶν πέντε ὡς ἄνω κατηγοριῶν διακρίνονται:

1 Α: Ἐπιφάνειαι μιᾶς καὶ δύο ὄψεων,
1 Β: Ἐπιφάνειαι ἁπλῆς καὶ πολλαπλῆς συνοχῆς,
2 Α: Εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι,
2 Β: Ἑλικοειδεῖς καὶ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνειαι,
2 Γ: Σπειροειδεῖς ἐπιφάνειαι,
2 Δ: Μεταφορικαὶ ἐπιφάνειαι,
2 Ε: Περιβάλλουσαι οἰκογενείας ἐπιφανειῶν,
2 ΣΤ: Περιβάλλουσαι οἰκογενείας ἐπιπέδων,
2 Ζ: Κυκλογενεῖς ἐπιφάνειαι τοῦ DUPIN,
3 Α: Ἀλγεβρικαὶ ἐπιφάνειαι βαθμοῦ n,
3 Β: Ἀλγεβρικαὶ ἐπιφάνειαι τρίτου βαθμοῦ,
3 Γ: Ἀλγεβρικαὶ ἐπιφάνειαι τετάρτου βαθμοῦ,
3 Δ: Ἐπιφάνειαι τετραεδρικῆς συμμετρίας καὶ γενικεύσεις αὐτῶν,
4 Α: Ἐπιφάνειαι τοῦ WEINGARTEN,
4 Β: Ἐπιφάνειαι σταθεροῦ μέτρου καμπυλότητος καὶ ἐπιφάνειαι σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος,
4 Γ: Ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως,
4 Δ: Ἐπιφάνειαι χαρακτηριζόμεναι ὑπὸ εἰδικῶν ἰδιοτήτων τῶν ὀργανικῶν αὐτῶν καμπύλων,
5 Α: Ἐνειλιγμέναι δοθείσης ἐπιφανείας,
5 Β: Παράλληλοι δοθείσης ἐπιφανείας,
5 Γ: Ἐπιφάνειαι προκύπτουσαι ἐκ μετασχηματισμοῦ ἑτέρας,
5 Δ: Τρισορθογώνια συστήματα ἐπιφανειῶν.

Ἡ ἔκθεσις τῆς ὕλης γίνεται μὲ τὴν ἁπλότητα καὶ τὴν σαφήνειαν, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς ὅλας τὰς ἐπιστημονικὰς πραγματείας τοῦ κ. Μπρίκα. Ὁ ἀναγνώστης ὄχι μόνον δὲν δυσκολεύεται νὰ κατανοήσῃ τὰ ἐκτιθέμενα προβλήματα τῆς θεωρίας τῶν ἐπιφανειῶν, ἀλλὰ τοὐναντίον ἐκ τῆς σπουδῆς αὐτῶν αἰσθάνεται πραγματικὴν ἀπόλαυσιν. Διότι ἀκριβῶς ὁ κ. Μπρίκας μὲ τὴν χαρακτηρίζουσαν αὐτὸν σαφήνειαν καὶ ἀκριβολογίαν καθιστᾷ αὐτὰ εὐκόλως κατανοητά. Ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης, πρὸ παντὸς ὅμως οἱ φοιτηταὶ τῶν Πανεπιστημίων μας, θὰ εὕρουν εἰς τὸ βιβλίον τοῦ κ. Μπρίκα, Μαθήματα Θεωρίας Ἐπιφανειῶν, ἕνα πολύτιμον σύντροφον καὶ ὁδηγόν. Ὁ κ. Μπρίκας διὰ τοῦ ὑπὸ κρίσιν Δευτέρου Τεύχους προσφέρει ὑψίστην ὑπηρεσίαν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Μαθηματικὴν Βιβλιογραφίαν καὶ Ἐπιστήμην, τὴν ὁποίαν τόσον πλουσίως ἔχει ἐνισχύσει διὰ τῶν ἐπιστημονικῶν του δημοσιεύσεων, καθιστάμενος οὕτω συνεχιστὴς τοῦ ἔργου καὶ τῶν παραδόσεων τῶν διαπρεπῶν μαθηματικῶν τῆς νεωτέρας Ἑλλάδος οἵοι ἦσαν, οἱ ἀείμνηστοι καθηγηταὶ Νικόλαος Χ. Νικολαΐδης, Ἰωάννης Χατζιδάκης, Κυπάρισσος Στέφανος, Γεώργιος Ῥεμοῦνδος, Νικόλαος Ἰ. Χατζιδάκης, Παναγιώτης Σπ. Ζερβός.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ΘΕΟΔΩΡΟΥ Α. ΒΟΥΤΕΤΑΚΗ**, *Γενικὴ Θεωρία τῶν Συνόλων*, Ἀθῆναι 1963, σελ. 279, σχ. 8ον.

Ἀφ' ὅτου ἀπὸ τοῦ 1873 ὁ G. Cantor ἤρχισε νὰ κάμνῃ λόγον περὶ τῆς ἐπικληθείσης «Mengenlehre», δηλ. θεωρίας περὶ πληθῶν, ἡ ὁποία παρ' ἡμῖν μετεφράσθη διὰ τοῦ ὅρου θεωρία συνόλων, ἐσημειώθη ἀρκετὴ κίνησις ὀπαδῶν καὶ ζηλωτῶν, ὅπως συμβαίνει μὲ πᾶσαν καινοτομίαν. Ἡ κατὰ τὸν 20ον αἰῶνα μεγάλη στροφὴ τῆς ψυχολογικῆς καὶ παιδαγωγικῆς ἐπιστήμης πρὸς τὰς μεθόδους τῆς ἐποπτείας καὶ τὴν ἰδέαν τῆς ὁλότητος (Holismus) ἠνόησε κατὰ πολὺ καὶ τὴν διάδοσιν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης οὐ μόνον τῆς ἐποπτείας ἀλλὰ καὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Ἀπὸ τοῦ 1900 ὁ Felix Klein, ὅστις ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ ἐπιστημονικοῦ του σταδίου εἶχεν ἐνθουσιασθῆ μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ὁμάδων (Gruppentheorie) κατέβαλε μεγάλην δραστηριότητα διὰ νὰ εἰσαχθοῦν καὶ εἰς τὰ γυμνασιακὰ προγράμματα αἱ νέαι μαθηματικαὶ θεωρίαι καὶ νὰ συνδεθοῦν διὰ μέσου ἐποπτικῶν ἁπλουστεύσεων τὰ γυμνασιακὰ μαθηματικὰ μὲ τὰς θεωρίας τὰς διδασκομένας εἰς τὰς ἀνωτέρας σχολάς. Φιλότιμοι πρὸς τοῦτο καταβάλλονται προσπάθειαι, ἀλλὰ καὶ πολλὰ ἐμπόδια ἐπιπροσθοῦν. Πολλαὶ ἐκ τῶν ἐμφανισθεισῶν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη νεωτέρων θεωριῶν εὑρίσκονται εἰσέτι ὑπὸ συζήτησιν καὶ ἀμφισβήτησιν, ὡς πρὸς τὰς θεμελιωτικάς των βάσεις. Ἐκ παραλλήλου ἡ προσπάθεια χρησιμοποιήσεως ἐποπτικῶν μέσων παραστάσεως ὑπάρχει φόβος νὰ ἐπιφέρῃ ἀναστολὴν εἰς τὴν περαιτέρω πρόοδον ἐγκλείουσα τὴν μαθηματικὴν σκέψιν εἰς μορφὰς ἐκφράσεως δεσμευούσας τὴν προχώρησιν τοῦ πνεύματος. Διὰ τοῦτο αἱ νέαι θεωρίαι πρέπει νὰ ἐξετάζωνται μετὰ μεγάλης βεβαίως στοργῆς, ἀλλὰ καὶ προσοχῆς, ὡς ἀποκλειστικὴ δὲ δικλεὶς ἐπαληθεύσεως πρέπει νὰ χρησιμοποιῆται ἡ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν μαθηματικῶν ἀπαρτισθεῖσα μαθηματικὴ θεωρία, τῆς ὁποίας τὴν ὑπερχρονικὴν ἀξίαν ἔχει βεβαιώσει ἡ θριαμβευτική της καὶ γόνιμος διὰ μέσου τῶν αἰώνων ἐπιβίωσις. Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω σκέψεις εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ κρίνωμεν τὸ νέον βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον Γενικὴ Θεωρία τῶν Συνόλων, τὸ ὁποῖον ἐξέδωκεν ὁ διακεκριμένος μαθηματικὸς Θεόδωρος Α. Βουτετάκης. Ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου του ὁ συγγραφεὺς ἐκθέτει δι' ὀλίγων τὰ τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου καὶ προσθέτει ὅτι ὁ διακαὴς πόθος νὰ συμβάλῃ εἰς τὸν ἐκσυγχρονισμὸν τῆς Παιδείας τῆς Πατρίδος μας

ὡδήγησεν αὐτὸν εἰς τὴν συγγραφὴν τοῦ ὑπὸ κρίσιν βιβλίου, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ εἰσαγωγὴν εἰς τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν συνόλων. Προσθέτει δὲ ὅτι μερικὰ θεωρήματα καὶ προτάσεις μεγάλης σημασίας, ὅπως π. χ. τὸ θεώρημα τῆς καλῆς διατάξεως (Wohlordungssatz), τὸ θεώρημα τῆς ἐπιλογῆς καὶ αἱ ἐφαρμογαί του, αἱ ὁμάδες εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων, διμελῆ σύνολα κλπ. μὲ εἰσαγωγὴν εἰς τὴν Γενικὴν Τοπολογίαν περιέχονται εἰς τὸν δεύτερον τόμον τοῦ παρόντος ἔργου.

Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου κατανέμεται εἰς τὰ ἑξῆς XI κεφάλαια :

I. Πεπερασμένα σύνολα
II. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας διὰ πεπερασμένων συνόλων
III. Ἀπειροσύνολα
IV. Ἀριθμήσιμα καὶ μὴ σύνολα
V. Ὕπαρξις ἀπειρίας πληθαριθμῶν
VI. Πράξεις μὲ τοὺς πληθαριθμούς
VII. Αἱ συναρτήσεις. Τὸ σύνολον $\Psi^{x}$. Δυνάμεις
VIII. Περὶ τῶν διατεταγμένων συνόλων
IX. Περὶ τῶν γραμμικῶν σημειοσυνόλων
X. Κυκλικαὶ διατάξεις
XI. Μερικὰ εἴδη γενικῶν συνόλων.

Ἡ διάταξις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου εἶναι συμμετρική, ἡ δὲ ἔκθεσις αὐτῆς γίνεται κατὰ λίαν ἐπαγωγικὸν τρόπον, ὥστε ὁ ἀναγνώστης νὰ μὴ συναντᾷ δυσκολίαν τινα εἰς τὴν κατανόησιν τῶν διαφόρων ἐννοιῶν καὶ τῶν θεωρημάτων. Ὁ κ. Θεόδωρος Βουτετάκης καίτοι εἶναι νέος ἐπιστήμων καὶ νέος συγγραφεύς, ἐν τούτοις παρουσιάζει τὸ μέγα προσὸν νὰ εἶναι σαφής. Κατέχει τελείως τὴν ὑπὸ διαπραγμάτευσιν ὕλην καὶ εἶναι εἰς θέσιν νὰ καθιστᾷ κατανοητὰ καὶ τὰ δυσκολώτερα τῶν ἐκτιθεμένων θεωρημάτων καὶ τὰς δυσκολωτέρας μαθηματικὰς ἐννοίας ἐκ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Καθ' ὅσον τοὐλάχιστον δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν ἐκ τῶν γνωστῶν εἰς ἡμᾶς βιβλίων, τὸ βιβλίον τοῦ κ. Βουτετάκη εἶναι τὸ πληρέστερον εἰς τὸ εἶδος του. Δὲν εἶναι δὲ καθ' ὅλου ὑπερβολὴ ἐὰν σημειώσωμεν ὅτι ἡ ὑπὸ κρίσιν Γενικὴ Θεωρία τῶν Συνόλων εἶναι ἐφάμιλλος τῆς θεωρίας τῶν συνόλων τοῦ διαπρεποῦς Γερμανοῦ καθηγητοῦ Abraham Fraenkel. Εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι ὁ κ. Fraenkel ἔχει ἀφιερώσει ὁλόκληρον τὴν ζωήν του εἰς τὴν ὑποστήριξιν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Ἀλλὰ καὶ πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων τοῦ Ῥώσσου καθηγητοῦ R. S. Alexandroff (μετάφ. εἰς τὴν Γερμανικὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der Reellen Funktionen, 1956, Berlin), συγκρινομένη ἡ θεωρία τῶν συνόλων τοῦ κ. Βουτετάκη παρουσιάζεται ἐπίσης ἐφάμιλλος. Ἄνευ δισταγμοῦ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ συγγραφεὺς κατώρθωσε διὰ τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας νὰ παρουσιάσῃ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων μὲ σαφήνειαν καὶ ἁπλότητα. Τὸ πλῆθος τῶν συναφῶν ἀσκήσεων καὶ παραδειγμάτων, ἅτινα ἔχουν ἐκλεγῆ μὲ πολλὴν δεξιοτεχνίαν, καθιστοῦν τὸ βιβλίον χρήσιμον, ὄχι μόνον εἰς τοὺς μαθηματικοὺς ἀλλὰ καὶ εἰς ὅλους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἀσχολοῦνται μὲ τὰς θετικὰς ἐπιστήμας γενικῶς. Τὸ βιβλίον τοῦ κ. Βουτετάκη ἀποτελεῖ ἀξιόλογον ἐπιστημονικὴν ἐργασίαν, ἂν μάλιστα ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν τὰ κεφάλαια περὶ συναρτήσεων, περὶ διατάξεων κλπ. εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πρωτότυπος ἐπιστημονικὴ δημιουργία του εἶναι ἐμφανής. Ὁ συγγραφεὺς διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ ὑπὸ κρίσιν βιβλίου προσέφερε μεγάλην συνδρομὴν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Μαθηματικὴν Ἐπιστήμην. Λίαν εὐστόχως ὁ κ. Βουτετάκης ἔχει ἀφιερώσει τὸ βιβλίον του, ἐκτὸς τῆς σεβαστῆς Μητρός του καὶ εἰς τὴν σεβαστὴν Ἀθηναίαν Δέσποιναν Χαρίκλειαν Παναγιώτου Ζερβοῦ, τὴν σύζυγον τοῦ ἀειμνήστου καθηγητοῦ, ὅστις πρῶτος ὡμίλησε καὶ ἔγραψεν ἐν Ἑλλάδι περὶ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων πρὸ τεσσαράκοντα περίπου ἐτῶν.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ Ν. ΜΑΓΕΙΡΑ**, *Τριγωνομετρικὰ Θέματα μετὰ σημειώσεων ἀλγέβρας καὶ ἀναλύσεως*. Ἀθῆναι 1963.

Καὶ ἄλλοτε ἐδόθη εἰς ἡμᾶς ἡ εὐκαιρία ὅπως ὁμιλήσωμεν ἀπὸ τῶν στηλῶν τοῦ «ΠΛΑΤΩΝΟΣ» περὶ τοῦ συγγραφικοῦ ἔργου τοῦ διακεκριμένου Ἕλληνος μαθηματικοῦ κ. Παναγιώτου Ν. Μάγειρα. Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ κρίνωμεν τὴν νέαν δημιουργίαν τοῦ κ. Μάγειρα τὴν ἐκδοθεῖσαν ἐν Ἀθήναις περὶ τὸ τέλος τοῦ 1963 ὑπὸ τὸν τίτλον Τριγωνομετρικὰ Θέματα. Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου ἐκτίθεται εἰς 458 σελίδας καὶ κατανέμεται ὡς ἑξῆς:

Σημειώματα ἐπὶ ἐννοιῶν καὶ συμβόλων.—Κυκλομετρικαὶ συναρτήσεις.—Τριγωνομετρικαὶ σειραί.—Τριγωνομετρικαὶ ἀνισότητες.—Γεωμετρικαὶ ἐφαρμογαί.—Τοπογραφικαὶ ἐφαρμογαί.—Ἐφαρμογαὶ τῆς θεωρίας τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.—Ἐφαρμογαὶ τοῦ θεωρήματος τῶν προβολῶν. Ὑπὸ συνθήκας γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τριγωνομετρικῶν τύπων.—Ἀπόδειξις τριγωνομετρικῶν ταὐτοτήτων τῇ βοηθείᾳ ἀλγεβρικῶν ταὐτοτήτων.—Ἐφαρμογαὶ τῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.—Ἐφαρμογαὶ τῶν παραγώγων. —Ἀσκήσεις ἐφ' ὅλης τῆς ὕλης. —Παραδείγματα. —Ἀσκήσεις.

Ἡ κατανομὴ τῆς ὕλης κατὰ κεφάλαια εἶναι συμμετρική, ἡ δὲ ἔκθεσις αὐτῆς γίνεται καθ' ὅλους τοὺς κανόνας τῆς παιδαγωγικῆς. Προτάσσονται πάντοτε αἱ εὔκολοι προτάσεις καὶ ἀκολουθοῦν κατόπιν αἱ δυσκολώτεραι. Ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐκλεγῇ μὲ μέθοδον καὶ παραδείγματα ἐκτιθέμενα ἀναλυτικῶς συντελοῦν εἰς τὴν ἐμπέδωσιν τῆς προσφερομένης ὕλης. Ὁ κ. Μάγειρας κατορθώνει νὰ καθιστᾷ εὐκόλως κατανοητὰ καὶ τὰ δυσκολώτερα προβλήματα τῆς Τριγωνομετρίας γενικῶς ὡς καὶ τὰ προβλήματα τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς. Ὁ γενικὸς τίτλος τοῦ βιβλίου «ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ» ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πρόθεσιν τοῦ συγγραφέως. Ὁ κ. Μάγειρας δὲν προτίθεται διὰ τοῦ ὑπὸ κρίσιν βιβλίου νὰ παράσχῃ εἰς τοὺς ἐνδιαφερομένους ἓν ἐγχειρίδιον μεθοδικῆς Τριγωνομετρίας. Ὁ σκοπός του εἶναι ἔτι εὐρύτερος. Ἐπιθυμεῖ νὰ ἐρευνήσῃ βαθύτερον τὸ πεδίον μὲ τὸ ὁποῖον ἀσχολεῖται ἡ Τριγωνομετρία ἐν γένει. Καὶ τὸν σκοπὸν αὐτὸν φρονοῦμεν ὅτι τὸν ἐπέτυχε πλήρως. Ἔχομεν ὑπ' ὄψει παρομοίαν προσπάθειαν τοῦ περιφήμου Γάλλου μαθηματικοῦ J. A. SERRET, TRAITE de TRIGONOMETRIE (ἕκτη ἔκδοσις, Παρίσιοι, 1880), ὁ ὁποῖος πραγματεύεται τὰ τριγωνομετρικὰ θέματα ὑπὸ τὸ εὐρύτερον πνεῦμα τῆς ἐποχῆς του.

Ὁ SERRET ἔχει ρίψει τὸ βάρος τῆς συγγραφῆς του μόνον εἰς τὸ καθαρῶς ἐπιστημονικὸν μέρος τῆς Τριγωνομετρίας, ἐν ᾧ ὁ κ. Μάγειρας ἐπεκτείνει τὸ ἐνδιαφέρον του καὶ εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς αὐτῆς καὶ ἔχει προσαρμόσῃ τὴν ὕλην τοῦ βιβλίου πρὸς τὰς προόδους τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης. Καὶ ἀπὸ τῆς ἐπόψεως αὐτῆς ἀκόμη θεωρουμένη ἡ προσπάθεια τοῦ διακεκριμένου συγγραφέως ἀποτελεῖ μεγάλην συμβολὴν εἰς τὴν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Εὐχόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὸ μέλλον εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ κρίνωμεν ἐπιστημονικὰς συγγραφὰς τοῦ κ. Μάγειρα.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

**JOSEPH E. HOFMANN, Geschichte der Mathematik I,** von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Sammlung Göschen. **Walter de Gruyter und CO.** Berlin, 1963. Band 226)226a. **ΙΩΣΗΦ ΧΟΦΜΑΝ,** ***Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν I.***

Ἐπανειλημμένως ἔχει δοθῆ εἰς ἡμᾶς ἡ εὐχάριστος εὐκαιρία νὰ ὁμιλήσωμεν ἀπὸ τῶν στηλῶν τοῦ «Πλάτωνος» περὶ διαφόρων δημοσιευμάτων τοῦ Γερμανοῦ καθηγητοῦ κ. Ι. Ε. Χόφμαν. Ὁ κ. Χόφμαν ἀσχολεῖται ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν μὲ τὴν ἔρευναν εἰς τὸν κλάδον τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν, αἱ δὲ ἐργασίαι του εἰς τὸν τομέα αὐτὸν τὸν φέρουσιν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν συγχρόνων ἱστορικῶν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Ἤδη ἔχομεν πρὸ ἡμῶν τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τοῦ πρώτου τόμου τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν τοῦ κ. Χόφμαν τὴν ὁποίαν ὁ μέγας Ἐκδοτικὸς Οἶκος τοῦ Δυτικοῦ Βερολίνου Walter de Gruyter und Co εἶχεν ἐκδώσει ἀπὸ τοῦ 1953 εἰς τρεῖς τόμους. Θὰ ἐπακολουθήσῃ βεβαίως ἐν καιρῷ καὶ ἡ ἐπανέκδοσις τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου τόμου, ὥστε τὸ ὅλον ἔργον νὰ εἶναι ἐντελῶς συγχρονισμένον.

Ὁ ὑπὸ κρίσιν πρῶτος τόμος τῆς δευτέρας ἐκδόσεως παρουσιάζει ἀρκετὰς διαφορὰς ἀπὸ τοῦ πρώτου τόμου τῆς πρώτης ἐκδόσεως. Τὰ κεφάλαια τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων, τῶν Ἀράβων, τῶν Κινέζων καὶ εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἔχουσι προσαρμοσθῆ πρὸς τὰ ἀποτελέσματα τῶν τελευταίων ἐπιστημονικῶν ἐρευνῶν. Ἐκτὸς τούτου ὑπάρχουσι πολλαὶ προσθῆκαι, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸ κεφάλαιον περὶ τῶν Βυζαντινῶν μαθηματικῶν.

Ἡ πραγματεία ἔχει διαιρεθῆ εἰς πέντε τμήματα.

Εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα γίνεται ἡ διαπραγμάτευσις τῶν Προελληνικῶν μαθηματικῶν, ἤτοι τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων, τῶν Αἰγυπτίων, τῶν Ἰνδῶν, τῶν Κινέζων καὶ τῶν Μάγυα τῆς Ἀμερικῆς.

Εἰς τὸ δεύτερον τμῆμα ἐξετάζονται τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τοῦ 800 π. Χ. περίπου, μέχρι τοῦ 600 μ. Χ ἤτοι ἡ μαθηματικὴ δημιουργία τῶν Ἑλλήνων εἰς χρονικὸν διάστημα 1400 ἐτῶν. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ τμήματος τούτου τονίζεται ὅτι οὐδὲν σχεδὸν εἶναι γνωστὸν περὶ τῶν πρώτων μαθηματικῶν γνώσεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ ἐξαίρεται ἀκολούθως ἡ ἀποκλειστικὴ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων δημιουργία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὁ κ. Χόφμαν τονίζει ἰδιαιτέρως τὴν συμβολὴν τοῦ Ἀναξαγόρου εἰς τὴν θεμελίωσιν τῶν μαθηματικῶν διὰ τῆς διαπιστώσεώς του ὅτι τοῦ μικροῦ ὑπάρχει μικρότερον καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει μεγαλύτερον μέγεθος, (διὰ τῆς πρώτης διατυπώσεως δηλαδὴ τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας). Ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων ὀφειλομένη εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἔδωκε μεγάλην ὥθησιν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν, ἐν ᾧ ἡ ἀπαίτησις τοῦ Πλάτωνος διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς στερεομετρίας καὶ τὴν διατύπωσιν αὐστηρῶν καὶ ἀκριβολόγων ἀποδείξεων τῶν μαθηματικῶν προτάσεων κατέστησαν τὴν Πλατωνικὴν Ἀκαδημίαν κέντρον τῶν μαθηματικῶν ἐρευνῶν. Ὁ Δημόκριτος, ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ Ἱππίας ἐξ Ἠλείας, ὁ Εὔδοξος, ὁ Ἀριστοτέλης, ὁ Μέναιχμος, ὁ Ἀρχύτας εἶναι μερικὰ ὀνόματα τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, τὰ ὁποῖα ἐθεμελίωσαν καὶ ἀνέπτυξαν τὰ μαθηματικά. Ἀκολουθοῦν οἱ τρεῖς μεγάλοι μαθηματικοὶ Εὐκλείδης, Ἀρχιμήδης καὶ Ἀπολλώνιος οἱ ὁποῖοι ἀνύψωσαν ἀκόμη περισσότερον τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην.

Καὶ μεταξὺ τῶν Νεοπυθαγορείων καὶ τῶν Νεοπλατωνικῶν παρατηρεῖται δραστηριότης περὶ τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν. Ὁ Ὑψικλῆς, ὁ Νικομήδης, ὁ Μενέλαος, ὁ Διόφαντος, ὁ Πάππος, ἡ Ὑπατία εἶναι ἐκ τῶν τελευταίων μαθηματικῶν τῆς ἑλληνικῆς ἀρχαιότητος. Τούτους ἀκολουθοῦν οἱ σχολιασταὶ καὶ οἱ μελετηταὶ τῆς μαθηματικῆς δημιουργίας τοῦ παρελθόντος.

Εἰς τὸ τρίτον τμῆμα ἐξετάζονται τὰ μαθηματικὰ τῶν Ἰνδῶν, τῶν Ἀράβων, τῶν Κινέζων καὶ τῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης καὶ τονίζεται ἡ ἐκ τῶν μεταφράσεων τῶν ἔργων

τῶν μεγάλων Ἑλλήνων μαθηματικῶν πρόοδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἐξαίρεται ἡ συμβολὴ τῶν Βυζαντινῶν μαθηματικῶν καὶ ἰδίως τοῦ φιλοσόφου—μαθηματικοῦ Λέοντος, ὁ ὁποῖος ἐμερίμνησε διὰ τὴν περισυλλογὴν ἀρχαίων μαθηματικῶν συγγραμμάτων καὶ τὴν ἀντιγραφὴν αὐτῶν. Χάρις εἰς τὸ ἔργον αὐτὸ τοῦ Λέοντος ἐσώθησαν πολλαὶ πραγματεῖαι τοῦ Ἀρχιμήδους.

Τέλος εἰς τὸ τέταρτον καὶ πέμπτον τμῆμα ἐκτίθεται ἡ ἐξέλιξις τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἐποχὴν ἰδίως τῆς Ἀναγεννήσεως καὶ τοῦ Barock.

Καίτοι ἡ ἔκτασις τοῦ βιβλίου δὲν εἶναι πολὺ μεγάλη, ἐν τούτοις ὁ κ. Χόφμαν ἔχει κατορθώσει εἰς χῶρον 251 σελίδων νὰ παράσχῃ ἀκριβῆ καὶ σαφῆ ἀπεικόνισιν τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν εἰς διάστημα 2500 περίπου ἐτῶν (800 π. Χ. ἕως 1700 μ. Χ.). Ἡ κατανομὴ τῆς ὕλης ἔχει γίνει κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ δύναται εὐκόλως ὁ ἀναγνώστης νὰ κατατοπίζεται πλήρως. Μεθ' ἕκαστον κεφάλαιον παρατίθεται πλουσία βιβλιογραφία. Ὀφείλομεν νὰ ἐξάρωμεν ἰδιαιτέρως τὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου περιεχόμενον πίνακα πραγμάτων καὶ ὀνομάτων κατέχοντα 60 ὁλοκλήρους σελίδας. Διὰ τῆς ἐργασίας του αὐτῆς ὁ κ. Χόφμαν παρέχει μεγάλην ἐξυπηρέτησιν εἰς τοὺς ἐρευνητὰς τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν, εἰς τοὺς ὁποίους τὸ βιβλίον αὐτὸ θὰ εἶναι ἀνεκτίμητος βοηθὸς καὶ σύμβουλος.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**ANTONIO MADDALENA, Ionici, testimonianze E. Frammenti, la Nuova Italia, editrice Firenze,** 15 Novembre 1963. **ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΜΑΝΤΑΛΕΝΑ,** Ἰωνικοὶ φιλόσοφοι, μαρτυρίαι καὶ ἀποσπάσματα.

Τὸ τμῆμα τῆς ΑΡΧΑΙΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ, τῆς Βιβλιοθήκης Ἀνωτέρων Σπουδῶν τῆς Ἰταλίας, διευθυνόμενον ὑπὸ τοῦ ὁμοτίμου καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βολωνίας RODOLFO MONDOLFO καὶ τοῦ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Μιλάνου MARIO UNTERSTEINER ἐξέδωκεν ὡς 42ον τόμον τῆς σειρᾶς τῶν ἐκδόσεών του, (ἐκ τῶν 50 ἐν ὅλῳ) τὸ ὑπὸ τὸν ἀνωτέρω τίτλον βιβλίον διὰ τοῦ Ἐκδοτικοῦ Οἴκου «LA NUOVA ITALIA» EDITRICE FIRENZE. Τὴν ἔκδοσιν ἐνήργησεν ὁ διαπρεπὴς καθηγητὴς τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Τουρίνου κ. Antonio Maddalena (Ἀντώνιος Μανταλένα). Ὁ κομψός, μικρὸς κατὰ τὸ μέγεθος τόμος περιλαμβάνει 307 σελίδας, ἐκτὸς τοῦ πίνακος περιεχομένων καὶ τῆς σειρᾶς τῶν ἐκδόσεων τῆς Βιβλιοθήκης Ἀνωτέρων Σπουδῶν.

Ὡς ἀντιλαμβάνεται ὁ ἀναγνώστης πρόκειται περὶ συστηματικῆς ἐκδόσεως τῶν Προσωκρατικῶν φιλοσόφων. Εἰς παλαιοτέραν ἐποχήν, ὡς εἶναι γνωστόν, τὰ ἀποσπάσματα τῶν Προσωκρατικῶν εἶχον ἐκδοθῆ ἐν Γερμανίᾳ ὑπὸ τοῦ Mullach. Κατὰ τὸ 1903 ὅμως ἐξεδόθησαν τὰ ἀποσπάσματα αὐτὰ ἐν Γερμανίᾳ ὑπὸ τοῦ Hermann Diels καὶ ἔκτοτε ἐπηκολούθησαν ἀρκεταὶ ἐκδόσεις εἰς τὰς ὁποίας λαμβάνεται πάντοτε ὑπ' ὄψει ἡ συναφὴς ἐπιστημονικὴ ἔρευνα.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὁ σκοπὸς τῶν ἐκδόσεων τοῦ Φιλοσοφικοῦ τμήματος τῆς Βιβλιοθήκης Ἀνωτέρων Σπουδῶν, ὡς καὶ τοῦ καθηγητοῦ Antonio Maddalena, δὲν περιορίζεται εἰς τὸ νὰ μεταφρασθῇ ἁπλῶς εἰς τὴν ἰταλικὴν γλῶσσαν ὅ,τι ἔχει ἐκδοθῆ εἰς τὴν γερμανικὴν διὰ τοὺς Προσωκρατικοὺς ὑπὸ τοῦ H. Diels. Συμπληρώσεις τῶν ἀποσπασμάτων καὶ ἑρμηνεία τούτων ἔχουν γίνει μὲ πολλὴν ἐπιμέλειαν ὑπὸ τοῦ κ. Madda-

lena. Εἰς τὸν ὑπὸ κρίσιν τόμον προτάσσεται πλουσία βιβλιογραφία καὶ παρατίθενται τὰ ἀποσπάσματα τῶν ἑξῆς πέντε Ἰωνικῶν φιλοσόφων: 1) Θαλοῦ, 2) Ἀναξιμάνδρου, 3) Ἀναξιμένους, 4) Ἵππωνος, 5) Διογένους τοῦ Ἀπολλωνιάτου. Ὁ κ. Maddalena προτάσσει δι' ἕκαστον φιλόσοφον διεξοδικὸν εἰσαγωγικὸν σημείωμα, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ ἀναγνώστης κατατοπίζεται πλήρως ἐπὶ τῶν θεωριῶν τοῦ φιλοσόφου.

Ἀκολούθως παρατίθενται τὰ ἀποσπάσματα εἰς ἑκάστην σελίδα πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀπέναντι δὲ ταύτης παρέχεται μετάφρασις αὐτῶν εἰς τὴν Ἰταλικὴν γλῶσσαν. Εἰς ἑκάστην σελίδα, τὸ ἥμισυ σχεδὸν τοῦ χώρου, ἐνίοτε καὶ περισσότερον, διατίθεται ὑπὸ τοῦ κ. Maddalena διὰ τὴν ἑρμηνείαν θεμελιωδῶν ἐννοιῶν τῶν ἀποσπασμάτων. Διὰ τοῦ τρόπου τόπου κατορθώνεται, ὥστε καὶ εἷς μὴ εἰδικὸς ἀναγνώστης νὰ παρακολουθῇ καὶ νὰ κατανοῇ τὰς διὰ τῶν ἀποσπασμάτων ἐκτιθεμένας θεωρίας τοῦ ἐξεταζομένου φιλοσόφου. Καὶ ἀπὸ τῆς ἐπόψεως αὐτῆς ὁ κ. Maddalena παρέχει σπουδαῖον συμπλήρωμα τῆς ἐκδόσεως τῶν ἀποσπασμάτων τοῦ H. Diels. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ τρόπος ἐκδόσεως τῶν ἀποσπασμάτων τῶν Προσωκρατικῶν ὑπὸ τοῦ κ. Maddalena εἶναι ἐξόχως ἄριστος, διότι οὕτω πως ἔχομεν ἀνὰ χεῖρας μίαν ἱστορίαν τῆς φιλοσοφίας ἔχουσαν παραπλεύρως ὅλας τὰς συναφεῖς πηγὰς καὶ μαρτυρίας. Τοῦτο εἶναι ἡ πρωτότυπος δημιουργικὴ συμβολὴ τοῦ κ. Maddalena. Ἐπὶ πλέον ὅμως πρέπει νὰ τονίσωμεν ὅτι εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἔχουν προστεθῇ ἀρκετὰ ἀποσπάσματα τῶν Προσωκρατικῶν, μὴ περιεχόμενα εἰς ἄλλας ἐκδόσεις. Δι' ἕκαστον φιλόσοφον παρατίθενται πρῶτον τὰ ἀποσπάσματα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὸν βίον του καὶ ἀκολουθοῦν τὰ ἀποσπάσματα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὸ ἔργον του. Ἡ διαπραγμάτευσις τῶν ἀποσπασμάτων γίνεται μὲ ὅλην τὴν ἐπιστημονικὴν ἐμβρίθειαν, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τὰς ἐκδόσεις τοῦ κ. Maddalena, ἡ δὲ ἑρμηνεία τῶν θεωριῶν ἑκάστου τῶν ἐξεταζομένων φιλοσόφων ἐπιτελεῖται μὲ ὅλην τὴν ἐπιβαλλομένην σαφήνειαν καὶ ἀκρίβειαν, ὥστε ὁ ἀναγνώστης νὰ μὴ εὑρίσκεται πρὸ ἀμφιβολιῶν. Κατωτέρω παραθέτομεν μερικὰς ἐκ τῶν 50 ἐκδόσεων τῆς Βιβλιοθήκης Ἀνωτέρων Σπουδῶν (BIBLIOTECA DI STUDI SUPEPIORI), αἱ ὁποῖαι πιθανὸν νὰ ἐνδιαφέρουν τοὺς ἀναγνώστας τοῦ «Πλάτωνος».

## BIBLIOTECA DI STUDI SUPERIORI

3. L. ANNAEI SENECAE Divi Claudii Ἀποκολοκύντωσις a cusa di Carlo Ferdinando Russo, 3a ed. riveduta.

4. 5. 6. 7. SOFISTI, Testimonianze e Frammenti a cura di Mario Untersteiner, vol. I, II, III, IV.

9. Hesiodi Scutum a cura di Carlo Ferdinando Russo.

10. Herondae Mimiambi a cura di Giulio Puccioni.

15. 18. THUCYDIDIS Historiarum, liber Primus a cura di Antonio Maddalena, vol. I, II.

28. 41. PITAGORICI, Testimonianze e frammenti a cura di Maria Timpanaro Cardini, vol. I, II.

49. EUDOSSO, Testimonianze e frammenti a cura di Alda Barbieri (Filosofia antica).

50. MELISSO, Testimonianze e frammenti a cura di Mario Untersteiner (Filosofia antica).

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450Β

ΕΤΟΣ ΙΣΤ' 1964 = 16
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β'
31/32

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1964

Ἡ πραγματεία τοῦ Λ. Μπενάκι μαρτυρεῖ ἐνδελεχῆ προσωπικὴν ἐνασχόλησιν μὲ τὰς πηγάς, κριτικὴν παρακολούθησιν τῆς ἐρεύνης καὶ κατὰ πάντα ὀρθὸν χειρισμὸν τῆς ἐπιστημονικῆς μεθόδου. Κατεδείχθησαν πλήρως τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα προσεγγίζει ὁ μεσαιωνικὸς πολυΐστωρ πρὸς τὰς ἀριστοτελικὰς περὶ φύσεως καὶ ὑλομορφισμοῦ ἀριστοτελικὰς δοξασίας καὶ τὰ σημεῖα, εἰς ἃ ἀφίσταται ἀπ' αὐτῶν. Λίαν ὀρθῶς ὡς αἰτία ἤτις ἀναγκάζει αὐτὸν πρὸς ἀπομάκρυνσιν ἀπὸ τὰς δοξασίας τοῦ Σταγιρίτου ἀνεγνωρίσθη ἡ Χριστιανικὴ Δογματικὴ Διδασκαλία. Ἡ αὐτὴ αἰτία αἰτιολογεῖ διατί ὁ Μ. Ψελλὸς δὲν ἀναγνωρίζει τὴν ὕλην ὡς κακόν. Συμφώνως πρὸς τὸ ἐπ' ὀνόματι Διονυσίου τοῦ Ἀρεοπαγίτου φερόμενον σύγγραμμα «Περὶ θείων ὀνομάτων» κεφ. 4 § 23 κέ. τὸ κακὸν δὲν ὑπάρχει οὔτε εἰς τὸ σῶμα οὔτε εἰς τὴν ὕλην. Ἐφ' ὅσον ἡ ὕλη «καθ' ἑαυτὴν ἄποιός ἐστι καὶ ἀνείδεος» εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδοθῇ εἰς αὐτὴν οἱαδήποτε ἰδιότης, ἐπομένως οὐδὲ εἶναι δυνατὸν νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς κακὸν (Ἑλλ. Πατρ. Migne III 729). Ἀλλὰ οὐδὲ εἰς τοὺς δαίμονας ὑπάρχει πρωταρχικῶς τὸ κακόν. Ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς αὐτοὺς «ὅ εἰσι, καὶ ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ εἰσι καὶ ἀγαθοί» (Ἑλλ. Πατρ. Migne III, 725). Ὡς πρὸς τὴν διάκρισιν τῶν εἰς «Τὰ μετὰ τὰ φυσικὰ» Ζ 3 καὶ «Φυσ. ἀκρ.» Α 7 καθορισμῶν, δὲν πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν ἀξίωσιν ἀπὸ τὸν Μ. Ψελλὸν καὶ τοὺς Σχολαστικοὺς τοῦ Μεσαίωνος νὰ προχωροῦν εἰς τόσον λεπτὰς διακρίσεις. Ὁ ἴδιος ὁ Μ. Ψελλὸς μαρτυρεῖ περὶ τῆς ἀδυναμίας του ταύτης γράφων περὶ τοῦ Σταγιρίτου «πολὺ τοῦ Πρωτέως ἐμοὶ πέφυκε ποικιλώτερος· μεταβάλλεται γὰρ θᾶττον ἢ λόγος» ἐξήγ. εἰς ῥητὸν «Σαδουκαῖοι οὐδ' εἶναι» Παρὰ Σάθᾳ Βιβλ. IV, LI. Ἡ διάγνωσις τῶν ἀνωτέρω σημειωθεισῶν διακρίσεων ἦτο δυσχερής, διότι εἰς τὴν μίαν ἐκ τῶν περιπτώσεων ἡ προοπτικὴ τῆς θεωρήσεως εἶναι ὀντολογική, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ὀντική.

Ὑπάρχουν εἰς τὴν ὑπὸ ἐπισκόπησιν πραγματείαν καὶ σημεῖα, περὶ ὧν θὰ ἠδύνατό τις νὰ ἀξιώσῃ πλείονας διασαφηνίσεις, ὡς π.χ. ἡ ἱεραρχικὴ τάξις Θεός, νοῦς, ψυχή, φύσις, αἱ πηγαὶ τῶν ἀντιλήψεων εἰς ἃς καταλήγει ὁ Μ. Ψελλός, ὁ βαθμὸς ἐξαρτήσεώς του ἀπὸ τοὺς Νεοπλατωνικοὺς καὶ ἀπὸ τοὺς Στωικοὺς ὡς πρὸς τοὺς «σπερματικοὺς λόγους», δι' οὓς καὶ ὡς Στωϊκίζων κατεκρίθη. Οἱ προτεθέντες ὅμως ὑπὸ τοῦ συγγραφέως τῆς ὑπὸ συζήτησιν πραγματείας σκοποὶ δὲν ἐπέτρεπον τὴν ἐπέκτασιν τῆς ἐρεύνης πρὸς τὰ ἐνδειχθέντα ζητήματα. Ἐκτὸς τούτου καὶ ἡ κατάστασις τῶν σχετικῶν μὲ τὸ ἔργον τοῦ μεγάλου τούτου πολυΐστορος ἐρευνῶν δὲν παρέχει τὴν εὐχέρειαν διατυπώσεως ὁριστικῶν συμπερασμάτων. Ὁ Μ. Ψελλὸς εἶχεν ἐπεκτείνει τὰς σπουδάς του καὶ τὰς μελέτας του εἰς πᾶν εἶδος τοῦ ἐπιστητοῦ. Ἠσχολήθη καὶ μὲ τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν τοῦ Διαφάντου καὶ εἶναι λίαν πιθανὸν ὅτι ἐκεῖθεν ὁρμηθεὶς ἠθέλησε νὰ μεταφέρῃ τὸν συμβολισμὸν καὶ εἰς τὴν συλλογιστικήν. Μόνον μετὰ τὴν ὁλοκληρωτικὴν ἔκδοσιν τῶν ἔργων του θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ ἀποφανθῇ ἡ ἔρευνα περὶ πολλῶν συναφῶν μὲ τὰς δοξασίας του προβλημάτων, ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα ἐνίοτε παρέχονται πρόωροι καὶ βεβιασμέναι λύσεις. Εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ Λ. Μπενάκι ἑτοιμαζομένη ἔκδοσις τοῦ εἰς τὴν «Φυσικὴν ἀκρόασιν» ὑπομνήματός του θὰ εὐκολύνῃ πολὺ τὴν περαιτέρω ἔρευναν.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

***

**ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ Διοφάντου Ἀριθμητικά. Ἡ Ἄλγεβρα τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις, ἐπεξηγήσεις.** Ὀργανισμὸς ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων ἐν Ἀθήναις 1963 σελ. 574.

Ὁ κ. Εὐ. Σταμάτης, πολύτιμος συνεργάτης τοῦ «Πλάτωνος», εἶναι ὁ μόνος ἐν Ἑλλάδι ἐπιστήμων ὅστις ἀφιέρωσε ὁλόκληρον τὴν δραστηριότητα τῆς ζωῆς του εἰς

τὴν μελέτην καὶ τὴν ἀναζωπύρησιν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς γνώσεως. Ἔφερεν εἰς πέρας δι' ἀόκνου ἐργασίας μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1952—1957 τὴν πρώτην πλήρη ἑλληνικὴν ἔκδοσιν τῶν «Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου» εἰς τέσσαρας τόμους. Ἔθεσεν εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ ἑλληνικοῦ ἐπιστημονικοῦ κοινοῦ ὄχι μόνον τὸ κείμενον τοῦ ἀθανάτου ἔργου τοῦ μεγάλου Ἕλληνος στοιχειωτοῦ ἀλλὰ συνώδευσε τοῦτο μὲ παράπλευρον ἑρμηνείαν, παραθέτων συνάμα τὰ γεωμετρικὰ σχήματα καὶ τὰς ἀναγκαιούσας ἐπεξηγηματικὰς εἰσαγωγὰς καὶ σημειώσεις. Πρὸ τῆς ἐκδόσεως τῶν «Στοιχείων» εἶχε δημοσιεύσει τὸ κείμενον καὶ τὴν ἑρμηνείαν σημαντικωτάτων πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ παραλλήλου λίαν καρποφόρον ὑπῆρξε τὸ ἔργον του τὸ σχετικὸν μὲ τὴν μελέτην θεωρητικῶν προβλημάτων τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἅτινα ἔχουν προωθηθῆ σήμερον εἰς τὸ κέντρον τοῦ συγχρόνου ἐπιστημονικοῦ διαφέροντος. Διὰ πραγματειῶν δημοσιευθεισῶν κυρίως εἰς τὸν «Πλάτωνα» καὶ εἰς ἄλλα περιοδικὰ («Altertum» ἐκδιδόμενον μερίμνη τῆς ἐν Βερολίνῳ Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν) προσέφερε πρωτότυπον συμβολὴν διὰ τὴν διαφώτισιν θεμάτων, οἷα τὸ περὶ μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικούς, περὶ μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν καὶ περὶ τῆς θεωρίας τῶν λεγομένων συνόλων. Αἱ ἐργασίαι του ἔτυχον διεθνοῦς ἐκτιμήσεως ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ οἶκος Teubner ἀνέθεσεν εἰς αὐτὸν τὴν νέαν ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Διὰ τῆς ἀνωτέρω σημειουμένης ἐκδόσεως τῶν «Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου» προσφέρει μίαν εἰσέτι πολύτιμον εὐεργεσίαν ὄχι μόνον εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς μαθηματικὰς μελέτας ἀλλὰ καὶ γενικώτερον εἰς τὰ ἑλληνικὰ γράμματα. Ὁ Εὐ. Σταμάτης εἶναι ὁ μόνος Ἕλλην ὅστις ἔρχεται νὰ λάβῃ εἰς τὰς χεῖρας του καὶ νὰ ἑρμηνεύσῃ τὸ κείμενον τοῦ Διοφάντου ἔπειτα ἀπὸ τὸν Μιχαὴλ Ψελλὸν (11ον αἰών) τὸν Γεώργιον Παχυμέρην καὶ Μάξιμον Πλανούδην (13ον αἰών).

Τὸ ὅλον ὑπὸ ἐξέτασιν ἔργον παρουσιάζει τὴν ἀκόλουθον διάρθρωσιν.

Ἐν ἀρχῇ προτάσσεται εἰς ἑλληνικὴν μετάφρασιν ὁ ὑπὸ τοῦ γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery λατινικὸς πρόλογος (Praefatio) ὅστις ἔχει προταχθῆ εἰς τὸν πρῶτον τόμον τῆς ὑπ' αὐτοῦ γενομένης ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Διοφάντου παρὰ τῷ ἐκδοτικῷ οἴκῳ Teubner ἐν Λιψίᾳ κατὰ τὸ ἔτος 1893. Εἰς τὸν πρόλογον τοῦτον καταλαμβάνοντα τὰς σελίδας 7—9 γίνεται ὑπὸ τοῦ P. Tannery συνοπτικὸς λόγος περὶ τῆς χειρογράφου παραδόσεως καὶ περὶ τῆς χρήσεως τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων.

Ἀκολουθεῖ μετὰ ταῦτα ἡ ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη προτασσομένη Εἰσαγωγὴ (σελ. 11—20). Εἰς ταύτην παρέχονται πληροφορίαι ὑπὸ τοῦ συγγραφέως καὶ περὶ τῆς ὅλης τοῦ συγγράμματός του κατασκευῆς. Ἐν συνεχείᾳ εἰς μίαν σύντομον παράγραφον γίνεται λόγος περὶ τοῦ βίου τοῦ Διοφάντου.

Ὁ Εὐ. Σταμάτης δέχεται ὅτι ἦτο Ἀλεξανδρεύς, ὡς χρόνον δὲ τῆς ἀκμῆς του τὸ ἔτος 250 μ. Χ. Τὰ ἔργα τοῦ Διοφάντου ἦσαν κατὰ τὸν Εὐ. Σταμάτην ἀκολουθοῦντα τὴν ὁμόφωνον παράδοσιν: 1ον «Τὰ Ἀριθμητικὰ» ἐκ 13 βιβλίων. 2ον Πραγματεία «Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν». 3ον Πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον «Πορίσματα». 4ον Πραγματεία ἐπιγραφομένη «Μοριαστικὰ» ἤτοι περὶ μορίων, ὡς ἐκάλουν οἱ παλαιοὶ τὰ κλάσματα.

Κατὰ τὸν Εὐ. Σταμάτην συνώψισεν εἰς 13 βιβλία τὰ «Ἀριθμητικά» του ὁ Διόφαντος κατὰ μίμησιν τῶν ἐκ 13 βιβλίων συναπαρτιζομένων «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου. Εἰκάζει ὁ Εὐ. Σταμάτης ὅτι τὰ ἐκ τῶν «Ἀριθμητικῶν» περισωθέντα 6 πρῶτα βιβλία ἀπετέλουν τὴν συνήθη εἰς τὰς Ἀνωτάτας Σχολὰς τῆς τότε ἐποχῆς διδασκομένην ὕλην καὶ διὰ τοῦτο ὡς εὑρισκόμενα εἰς συνεχῆ χρῆσιν περιεσώθησαν. Ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενον τῶν 7 ἀπολεσθέντων βιβλίων ἐκφέρει ὁ συγγραφεὺς τῆς ὑπὸ ἐπισκόπησιν συγγραφῆς τὴν γνώμην ὅτι τὸ θέμα των ἦτο ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ ῥητῶν εὐθειῶν. Ἡ σπουδὴ τῆς γλωσσικῆς τοῦ κειμένου τῶν περισωθέντων 6 βιβλίων διατυπώσεως ἀποδεικνύει κατὰ τὸν Εὐ. Σταμάτην, ὅτι τὰ 6 βιβλία δὲν περιεσώθησαν εἰς τὴν μορφήν, εἰς ἣν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ Διοφάντου ἐγράφησαν. Εἰς τὰς σελίδας 14—16

γίνεται λόγος περὶ τοῦ ἀλγεβρικοῦ συμβολισμοῦ, ὃν χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος. Εἶναι τὰ «Ἀριθμητικὰ» τὸ ἀρχαιότερον ἑλληνικὸν βιβλίον, εἰς τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται ἐξισώσεις. Παρέχονται ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη πληροφορίαι περὶ τῶν συμβόλων, ἅτινα χρησιμοποιοῦνται κατὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὑπολογισμούς. Ὁ Διόφαντος γνωρίζει τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ὁ θετικὸς ἀριθμὸς καλεῖται «ὕπαρξις», ὁ δὲ ἀρνητικὸς «λεῖψις». Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν «Ἀριθμητικῶν» διατυποῦται ὁ κανὼν ὅτι λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν ποιεῖ ὕπαρξιν, δηλ. πλὴν ἐπὶ πλὴν=σὺν καὶ ὅτι λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν, δηλ. πλὴν ἐπὶ σὺν=πλήν. Ἀποφεύγει, σημειοῖ ὁ Εὐ. Σταμάτης, ὁ Διόφαντος τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων καὶ διὰ τοῦτο θέτει εἰς τινα προβλήματα περιορισμοὺς διὰ νὰ ἔχῃ θετικὰς λύσεις. Ἐπίσης ἀποφεύγει τὰς ἀσυμμέτρους (ἀρρήτους) τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Εἰς ἰδιαιτέραν παράγραφον ἐξετάζονται αἱ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου χρησιμοποιούμεναι ἀλγεβρικαὶ μέθοδοι. Τὰ εἰς τὰ «Ἀριθμητικὰ» περιεχόμενα προβλήματα εἶναι συνήθως προβλήματα λυόμενα δι' ἁπλῶν ἐξισώσεων ἢ δι' ἀλγεβρικῶν συστημάτων. Αἱ χρησιμοποιούμεναι ἐξισώσεις εἶναι εἴτε πρώτου εἴτε δευτέρου βαθμοῦ εἴτε ἀνάμεικτοι. Μέγας ἀριθμὸς προβλημάτων εἶναι ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, εἴτε πρώτου εἴτε δευτέρου βαθμοῦ. Ὡς ἔνδειξιν καταδεικνύουσαν τὴν περὶ τὰς ἀλγεβρικὰς λύσεις δεινότητα τοῦ Διοφάντου ἀναφέρει ὁ Εὐ. Σταμάτης κρίσιν τοῦ Ἄγγλου ἱστορικοῦ τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν μαθηματικῶν Thomas Heath, ὅστις προκειμένου περὶ λύσεως τῶν ἐν «Ἀριθμ.» II 8 καὶ 9 προβλημάτων γράφει τὰ ἑξῆς. «Ἡ λύσις τοῦ Διοφάντου εἶναι οὐσιαστικῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ Euler». Μεγάλης ἀξίας εἶναι καὶ ἡ μέθοδος κατασκευῆς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου διὰ ῥητῶν ἀριθμῶν. Σημαντικὴ εἶναι καὶ ἡ παρατήρησις ὅτι ὁ Διόφαντος χρησιμοποιεῖ συχνάκις ἀλγεβρικὰς γνώσεις ἄνευ ἀποδείξεως. Τοῦτο σημαίνει κατὰ τὸν Εὐ. Σταμάτην, ὅτι μέγας ἀριθμὸς ἀλγεβρικῶν γνώσεων κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Διοφάντου εἶχε καταστῆ κοινὸν καὶ ἀμέσως προσιτὸν κτῆμα τῶν ἀσχολουμένων μὲ τὰς μαθηματικὰς σπουδάς.

Εἰς τὰς σελίδας 17—19 γίνεται λόγος περὶ τῶν Σχολίων, ἅτινα ἐγράφησαν ἐπὶ τῶν Διοφαντικῶν συγγραμμάτων. Τὰ ὑπὸ τῆς Ὑπατίας γραφέντα σχόλια ἀπωλέσθησαν, περιεσώθησαν ὅμως τὰ γραφέντα ἀπὸ τὸν Μιχ. Ψελλόν, τὸν Γεώργ. Παχυμέρην καὶ Μάξιμον Πλανούδην. Σχόλια ἔγραψαν καὶ οἱ κατακτήσαντες τὴν Αἴγυπτον Ἄραβες κατὰ τὸν 8ον αἰῶνα. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην εἰσήχθη ἡ χρῆσις ἐξ Ἰνδίας τοῦ συμβολισμοῦ τῶν ἀριθμῶν 1 . . . 9. Ἡ διὰ τοῦ 0 παράστασις τοῦ μηδενὸς ἀποδίδεται ὑπὸ τῆς νεωτέρας ἐρεύνης εἰς τὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον. Οἱ Ἄραβες, ἐκ τῆς γλώσσης τῶν ὁποίων ἔχει τὴν προέλευσίν του ὁ ὅρος «ἄλγεβρα», ἠσχολήθησαν ἐντατικῶς μὲ τὸ περιεχόμενον τῆς νέας αὐτῆς ἐπιστήμης, χωρὶς ὅμως νὰ φθάσουν εἰς δημιουργικὰς ἀνακαλύψεις. Εἰς τὴν Ἑσπερίαν εἰσήχθη ἡ ἀλγεβρικὴ ἐπιστήμη καὶ ἐκ δυσμῶν διὰ τῶν Ἀράβων καὶ ἐξ ἀνατολῶν ἐκ τοῦ Βυζαντίου διὰ τῶν Σταυροφόρων. Μνημονεύονται ἐπίσης ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη αἱ γενόμεναι ἐν Εὐρώπῃ κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους τρεῖς μέχρι τοῦδε ἐκδόσεις τοῦ Διοφάντου (Bombelli 1572, F καὶ S. Fermat 1670 Tannery 1893), εἰς ἃς προστίθεται ἡ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ὡς τετάρτη ἐν Εὐρώπῃ καὶ πρώτη ἐν Ἑλλάδι. Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὰς σελίδας 21—45 παρέχεται τὸ περιεχόμενον τῶν «Ἀριθμητικῶν» καὶ τῶν περισωθέντων θεωρημάτων περὶ πολυγωνικῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιουμένου τοῦ κατὰ τὴν ἐποχήν μας καθιερωμένου συμβολισμοῦ, εἰς τρόπον ὥστε τοῦτο νὰ καθίσταται εὐκόλως προσιτόν.

Τὸ ἀρχαῖον κείμενον τῶν περισωθέντων 6 βιβλίων τῶν «Ἀριθμητικῶν» παρατίθεται εἰς τὰς σελίδας 46—354 ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐκδόσεως Tannery. Ἀποτελεῖ τοῦτο τὸ κύριον τῆς ὑπὸ ἐπισκόπησιν συγγραφῆς τμῆμα. Εἰς ἑκάστην ἀντίστοιχον πρὸς τὴν δεξιὰν ἀριστερὰν σελίδα ὑπάρχει ἡ μετάφρασις. Ἔχει αὕτη διατυπωθῆ μετὰ μεγάλης ἀκριβείας ἀλλὰ καὶ σαφηνείας, καλύπτει δὲ πλήρως τὸ κείμενον. Εἰς τὸ 5ον βιβλίον παρενεβλήθη ὑπὸ τοῦ Εὐ. Σταμάτη λίαν ἐπιτυχὴς ἀνακατασκευή, διατυπωμένη εἰς τὴν γλωσ-

σικὴν μορφὴν ἣν χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος, τῶν ὑπ' ἀριθ. 19, 19α, 19β, 19γ ἐλλειπόντων προβλημάτων. Τὰς λεπτομερείας τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν ῥηθεῖσαν ἀνακατασκευὴν ἔχει ἐκθέσει ὁ Εὐ. Σταμάτης εἰς ἄρθρον του ὅπερ ἔχει δημοσιευθῆ εἰς τὸν «Πλάτωνα» ΙΓ'— 1963 σελ. 125—127.

Διὰ νὰ καταστῆ τὸ κείμενον τῶν «Ἀριθμητικῶν» ἐκ καθαρῶς μαθηματικῆς ἐπόψεως προσιτὸν εἰς τοὺς σπουδαστὰς καὶ λοιποὺς μελετητάς, προέβη ὁ Εὐ. Σταμάτης καὶ εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἐκφωνήσεων τῶν προβλημάτων, καθ' ὃν τρόπον συνηθίζουν νὰ διατυπώνουν αὐτὰς οἱ μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς μας. Αἱ ἐκφωνήσεις αὗται καταλαμβάνουν τὰς σελ. 356—380, περιλαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὰς ἐν σελ. 380 καὶ αἱ ἐκφωνήσεις τῶν περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν θεωρημάτων. Τὰς σελ. 382—403 καταλαμβάνει τὸ κείμενον καὶ ἡ μετάφρασις χαριεστάτων ἀριθμητικῶν ἐπιγραμμάτων, ἅτινα διέσωσεν ἡ Ἑλληνικὴ Ἀνθολογία. Ταῦτα βεβαίως δὲν προέρχονται ἐκ τοῦ Διοφάντου, εἶναι ἐνδεικτικὰ ὅμως διὰ τὴν γενικότητα τοῦ περὶ τὰ μαθηματικὰ διαφέροντος τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Εἰς ταῦτα ἡ κομψότης τῆς ἐκφράσεως ἁμιλλᾶται μὲ τὴν πυκνότητα τῶν νοημάτων καὶ τὴν ὑποβλητικὴν διατύπωσιν τοῦ πρὸς λύσιν προτεινομένου προβλήματος.

Τὸ τελευταῖον μέρος τῆς ὑπὸ ἐπισκόπησιν συγγραφῆς ἀποτελοῦν αἱ ἐπεξηγήσεις, δι' ὧν παρέχεται πλήρης ἐκσυγχρονισμὸς τοῦ περιεχομένου καὶ τῶν λύσεων τῶν προβλημάτων. Αἱ σελ. 404—559 περιέχουν τὰς ἐπεξηγήσεις τὰς ἀναφερομένας εἰς τὰ «Ἀριθμητικά», αἱ δὲ 560—570 εἰς τὰ θεωρήματα περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν. Εἰς τὸ τέλος τῆς ὅλης συγγραφῆς παρατίθεται ἀλφαβητικὸν εὑρετήριον περιέχον τὰ κύρια ὀνόματα καὶ τοὺς ἐπιστημονικοὺς ὅρους, σελ. 571—573.

Ἡ εἰς συνοπτικὰς γραμμὰς παρουσιαζομένη διὰ τῆς πρὸ ὀφθαλμῶν συντόμου ἀναλύσεως συγγραφὴ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ἀδιστάκτως πρέπει νὰ χαρακτηρισθῆ ὡς πολύτιμον ἀπόκτημα διὰ τὴν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην. Φέρει πάλιν εἰς πνευματικὴν ἐπικοινωνίαν τὸν Ἕλληνα πατέρα τοῦ εὐρωπαϊκοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ μὲ τὰς νεωτέρας ἑλληνικὰς γενεάς. Δὲν ἐφείσθη ὁ συγγραφεὺς τῆς ὑπὸ ἐπισκόπησιν συγγραφῆς οὐδενὸς κόπου, προκειμένου νὰ καταστήσῃ τὸ κείμενον καὶ ὡς λεκτικὴν μορφὴν καὶ ὡς μαθηματικὸν περιεχόμενον προσιτὸν εἰς τὸν σύγχρονον μελετητήν. Ἐχρησιμοποίησε κατὰ τὴν μεταφραστικὴν ἀπόδοσιν τὸν καθιερωθέντα γλωσσικὸν τύπον τοῦ ἐπιστημονικοῦ γραπτοῦ λόγου, ὅστις ἔχει τὸ προσὸν τῆς σαφηνείας καὶ τῆς ὁριστικότητος. Ἀπέφυγε νὰ μεταποιήσῃ τοὺς καθιερωμένους ἐπιστημονικοὺς ὅρους καὶ ἐκ σεβασμοῦ πρὸς τὴν παράδοσιν ἀλλὰ καὶ πρὸς ἀποφυγὴν τῆς γελοιότητος, ἥτις ὡς ἀπεδείχθη ἐπ' ἐσχάτων προκύπτει ἀπὸ τὰς τοιαύτας φαιδρὰς ἀποπείρας. Ἀξία προσοχῆς καὶ ἐπαίνου τυγχάνει ἡ παρεμβαλλομένη εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον ἀνακατασκευὴ τεσσάρων ἐκπεσόντων ἐκ τοῦ ἀρχαίου κειμένου προβλημάτων. Αὕτη καταδεικνύει ὅτι ὁ Εὐ. Σταμάτης ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ κινῆται δημιουργικῶς εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Ἡ ὑπὸ ἐπισκόπησιν συγγραφὴ εἱμεθα βέβαιοι ὅτι θὰ προαγάγῃ τὴν παρ' ἡμῖν μαθηματικὴν σκέψιν. Θὰ γίνῃ ἀφορμὴ ἵνα καὶ ἄλλοι Ἕλληνες ἐρευνηταὶ στρέψουν τὴν δραστηριότητά των εἰς τὴν σπουδὴν τῆς πατρίου εἰς τὰ μαθηματικὰ κληρονομίας, εἰς τὴν ὁποίαν σήμερον ἐκλεκτοὶ ξένοι ἐρευνηταὶ μετὰ ζήλου ἀπασχολοῦνται. Ἡ συγγραφὴ τοῦ Εὐ. Σταμάτη πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῆ καὶ ὡς βιβλίον ἐργασίας καὶ σπουδῆς καὶ εἰς τὰ ἑλληνικὰ Λύκεια—ἀπὸ τὰ Γυμνάσια δυστυχῶς ἐξωστρακίσθη ἡ παλαιὰ γλῶσσα—καὶ εἰς τὰ Ἑλληνικὰ Πανεπιστήμια. Ἀξίζει δὲ νὰ ἀποδοθῆ δίκαιος ἔπαινος εἰς τὸν Ὀργανισμὸν Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, διότι παρέσχε τὰ μέσα νὰ ἴδῃ τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος τὸ βιβλίον τοῦ Εὐ. Σταμάτη. Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μυηθοῦν εἰς τὴν αὐτενεργὸν ἐργασίαν οἱ σπουδασταὶ μὲ τὰ λεγόμενα «ἐγχειρίδια», ἅτινα ἐθίζουν αὐτοὺς εἰς τὴν μηχανικὴν ἀπομνημόνευσιν. Διὰ νὰ προαχθῆ ἡ σκέψις των, πρέπει νὰ δοθοῦν εἰς χεῖράς των βιβλία ἀνάλογα πρὸς τὴν συγγραφὴν τοῦ Εὐ. Σταμάτη.

Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

*«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν*
*ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».*
*Πλάτωνος Πολιτεία 450Β*

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΙΗ′ 1966
ΤΕΥΧΗ Α′ ΚΑΙ Β′ 35/36

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ**
ΦΥΛΗΣ 32 — ΑΘΗΝΑΙ

ROBERT S. BRUMBAUGH, **Ancient Greek Gandgets and Machines.**

ΡΟΒΕΡΤΟΣ Σ. ΜΠΡΟΥΜΠΑΟΥ, ***Ἀρχαῖα ἑλληνικὰ μηχανήματα καὶ μηχαναί***, New York, Thomas Y. Crowell Company, 1966.

Ὁ κ. Rrumbaugh εἶναι ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν καθηγητὴς τῆς Ἱστορίας τῆς φιλοσοφίας ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Yale (Γαίηλ) τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν τῆς Ἀμερικῆς. Πρὸς τούτοις ἔχει εἰδικευθῆ εἰς τὰ πλατωνικὰ καὶ τὰ ἀριστοτελικὰ ζητήματα τὰ σχέσιν ἔχοντα πρὸς τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴν Τεχνικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἔχει δημοσιεύσει, ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω, ἄλλας τρεῖς περισπουδάστους πραγματείας : 1) Τὰ μαθηματικὰ παρὰ Πλάτωνι. Εἰς αὐτὴν ἐρευνῶνται κατ' ἐντελῶς πρωτότυπον τρόπον αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις τοῦ Πλάτωνος, αἵτινες εἶναι διεσκορπισμέναι εἰς τοὺς διαλόγους του. 2) Ὁ Πλάτων περὶ τοῦ ὄντος. Εἰς αὐτὴν ἐξετάζεται ἡ ὀντολογία τοῦ Πλάτωνος, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸν διάλογον Παρμενίδης. 3) Οἱ φιλόσοφοι τῆς Ἑλλάδος. Ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Ἀριστοτέλους. (1) Plato's Mathematical Imagination. 2) Plato on the One. 3) The Philosophers of Greece).

Εἰς τὴν νέαν πραγματείαν του τὴν ἀφορῶσαν εἰς τὰ μηχανήματα καὶ τὰς μηχανὰς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ὁ κ. Brumbaugh ἐκθέτει μὲ ἀξιοζήλευτον τρόπον τὴν ἐξέλιξιν τῆς τεχνικῆς τῶν Ἑλλήνων ἀρχόμενος ἀπὸ τῆς μυθολογικῆς παραδόσεως περὶ Δαιδάλου. Τὰ μηχανήματα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἥρωνος καταλαμβάνουν τὴν μεγαλυτέραν ἔκτασιν τοῦ βιβλίου, τοῦ ὁποίου ἡ ὕλη κατανέμεται εἰς δέκα κεφάλαια. Ἡ ἐμφάνισις τοῦ βιβλίου εἶναι ἐξαίρετος. Ἡ ἐκτιθεμένη ὕλη ἑρμηνεύεται ἄριστα ἐκ τῶν θαυμασίων σχημάτων, ἅτινα διακοσμοῦν τὸ βιβλίον. Ὁ τρόπος διατυπώσεως ὑπὸ τοῦ συγγραφέως τῆς σκέψεως τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐπὶ τῶν προβλημάτων τῆς τεχνικῆς καθιστᾷ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ βιβλίου λίαν εὐχάριστον καὶ ὑπενθυμίζει εἰς ἡμᾶς ὅτι ἡ ἀφετηρία τῶν σημερινῶν αὐτομάτων μηχανημάτων, ἅτινα πράγματι προκαλοῦν τὸν θαυμασμόν, εὑρίσκεται εἰς τὰ αὐτόματα μηχανήματα τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Κτησιβίου, τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Φίλωνος.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

H. G. ZEUTHEN, **Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, mit einem Vorwort und Register** von **J. E. HOFMANN.** GEORG OLMS Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1966 Seiten 522.

H. G. ΤΣΟΪΤΕΝ, ***Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, μετὰ προλόγου καὶ βιβλιογραφίας*** ὑπὸ I. E. ΧΟΦΜΑΝ. Ἐκδοτικὸν βιβλιοπωλεῖον ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΟΛΜΣ, Χιλντεσχάϊμ 1966, σελίδες 522.

Ὁ Δανὸς Ἱερώνυμος Γεώργιος Τσόϊτεν (1839—1920) συγκαταλέγεται με-

ταξὺ μιᾶς μικρᾶς ὁμάδος μαθηματικῶν τοῦ 19ου αἰῶνος, οἱ ὁποῖοι ἐκτὸς τῆς ἐρεύνης ἐπὶ τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν εἶχον ἀφιερωθῆ καὶ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἱστορίας τῆς ἐπιστήμης των. Εἶχε τὸ εὐτύχημα νὰ σπουδάσῃ μαθηματικὰ ἐν Παρισίοις παρὰ τῷ διαπρεπεῖ μαθηματικῷ MICHEL CHASLES (1793—1880), ὁ ὁποῖος, ἐκτὸς ἄλλων σπουδαίων ἐργασιῶν, εἶχεν ἐπιτυχῶς ἀνασκευάσει τὸ ἀπολεσθὲν σημαντικὸν ἔργον τοῦ Εὐκλείδου, ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ, στηριζόμενος εἰς πληροφορίας συναφεῖς τοῦ Πάππου. Ἀφοσιωθεὶς εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τοῦ Πάππου, ὁ Τσόϊτεν ἐξέδωκεν ἐν Κοπεγχάγῃ, τὸ ἀνωτέρω σύγγραμμα κατὰ τὸ 1886, εἰς τὴν γερμανικήν, τῇ φροντίδι τοῦ R. v. FISCHER — BENZON, τὸ ὁποῖον ἤδη ἀνετυπώθη.

Αἱ πρῶται ἔρευναι ἐπὶ τῶν κωνικῶν ἐγένοντο, ὡς πιστεύεται, ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων, εἰς τοὺς ὁποίους ἀποδίδονται τὰ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου περιεχόμενα θεωρήματα I 44 διὰ τὴν παραβολήν, VI 28 διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ VI 29 διὰ τὴν ὑπερβολήν. Εἰς τὰς προτάσεις ὅμως αὐτὰς εἶναι κεκαλυμμένη ἡ ἔρευνα τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν, ἡ σπουδὴ καὶ ἡ ὀνομασία τῶν ὁποίων ἀποδίδεται εἰς τὸν Μέναιχμον, μαθητὴν τοῦ Εὐδόξου εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ ἐπιγράμματος τοῦ Ἐρατοσθένους, τοῦ ἀφιερωμένου εἰς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον ὅπου γράφεται: «Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας». (Ε. Σ. Σταμάτη, Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας σελ. 9, Ἀθῆναι 1945). Πρῶτος ὅστις ἔγραψε πραγματείαν περὶ κωνικῶν τομῶν θεωρεῖται ὁ Ἀριστταῖος, ὀλίγον πρεσβύτερος τοῦ Εὐκλείδου, κατόπιν ὁ Εὐκλείδης εἰς 4 βιβλία καὶ ἀκολούθως ὁ Ἀπολλώνιος εἰς 8 βιβλία. Ἐκ τούτων τὰ τέσσαρα ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὰ τρία ἑπόμενα εἰς τὴν ἀραβικήν, ἐν ᾧ τὸ ὄγδοον ἀπωλέσθη. Μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀπολλωνίου, ὅστις ἐγεννήθη περὶ τὸ 262 π. Χ. ἤτοι 25 ἔτη βραδύτερον τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ κωνικαὶ τομαὶ ὠνομάζοντο: ὀρθογωνίου κώνου τομή, ὀξυγωνίου κώνου τομή, ἀμβλυγωνίου κώνου τομή. Ὁ Ἀπολλώνιος ἔδωκε τὰς ὀνομασίας: παραβολή, ἔλειψις, ὑπερβολὴ ἀντιστοίχως.

Εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν πραγματείαν του ὁ Zeuthen τονίζει ἐν προλόγῳ τὰ ἑξῆς: «Ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν Ἑλλήνων, παρὰ τὴν μεγάλην ἀνάπτυξιν τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν κατορθώνει πάντοτε νὰ διατηρῇ τὴν σπουδαιότητά της ἀποδεικνύει ὄχι μόνον τὸ μέγεθος τῆς ἀξίας τοῦ περιεχομένου της ἀλλὰ προσέτι καὶ τὸ μέγεθος τῶν ἐμποδίων, τὰ ὁποῖα ἀντετάσσοντο εἰς τὴν διάδοσίν της. Τὰ ἐμπόδια αὐτὰ δὲν συνίστανται μόνον ἐκ τῆς ἀπωλείας σπουδαίων μαθηματικῶν συγγραφῶν τῶν Ἑλλήνων, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ τρόπου τῆς διατυπώσεως τῶν σωζομένων συγγραφῶν αἱ ὁποῖαι δὲν διαθέτουν τὸν μαθηματικὸν συμβολισμὸν τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν . . . Ἡ ἔρευνα τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ἔγινε μὲ μεγάλην πληρότητα. Διὰ τὴν κατανόησιν ὅμως τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐρεύνης αὐτῆς δὲν εἶναι ἀρκετὴ μία ἱστορικὴ ἀνασκόπησις. Ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου προσεπάθησα εἰς τὴν πραγματείαν μου νὰ δώσω μίαν κατανοητὴν ἀπόδοσιν τοῦ περιεχομένου καὶ νὰ αἰτιολογήσω τὴν ἀναμεταξύ των συνάρτησιν τῶν προτάσεων περὶ κωνικῶν τομῶν.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ προσπάθειά μου ἔπρεπε νὰ στηριχθῇ εἰς τὰς συναφεῖς

ἐργασίας τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ πρὸ παντὸς εἰς τὰ σωζόμενα ἑπτὰ βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὰς πραγματείας τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Πρόκλου καὶ τοῦ Εὐτοκίου».

Ἡ ὅλη πραγματεία τοῦ Zeuthen ὑποδιαιρεῖται εἰς 22 κεφάλαια. Εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τούτων ἐκτίθενται αἱ προϋποθέσεις καὶ τὰ βοηθητικὰ μέσα τῆς σπουδῆς κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τῶν κωνικῶν τομῶν ἤτοι ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν καὶ ἡ γεωμετρικὴ ἄλγεβρα τῶν Πυθαγορείων. Εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον γίνεται ὁ ὁρισμὸς τῶν κωνικῶν τομῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἡ μορφὴ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ παρὰ τῷ Ἀρχιμήδει. Εἰς τὰ κεφάλαια 3—6 ἐξετάζονται τὰ τρία πρῶτα βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ὁ μετασχηματισμὸς τῶν ἐξισώσεων τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ ὁ μετασχηματισμὸς συντεταγμένων. Τόσον αἱ ἐξισώσεις, ὅσον καὶ αἱ συντεταγμέναι ἐξεφράζοντο περιγραφικῶς καὶ ὄχι συμβολικῶς καὶ διὰ σχημάτων, ὡς γίνεται σήμερον. Εἰς τὰ κεφάλοια 7—8 ἐξετάζονται οἱ λεγόμενοι γεωμετρικοὶ στερεοὶ τόποι ἐκ τοῦ τρίτου βιβλίου τοῦ Ἀπολλωνίου. Εἰς τὰ κεφάλαια 9—14 ἐξετάζεται ὁ προσδιορισμὸς τῶν κωνικῶν τομῶν διὰ πέντε σημείων καὶ τὰ περὶ νεύσεων ὡς καὶ τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἐπίσης γίνεται ἐξέτασις περὶ μιᾶς ἀπολεσθείσης πραγματείας τοῦ Ἐρατοσθένους.

Εἰς τὰ κεφάλαια 15—18 ἐξετάζεται ἡ γένεσις τῶν κωνικῶν τομῶν ἐκ κινουμένης εὐθείας, ἰδιότητες τῶν ἑστιῶν καὶ γίνεται λόγος περὶ τοῦ ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀπολλωνίου Περὶ ἐπαφῶν, ὅσον τοῦτο ἐπιτρέπουν συναφεῖς εἰδήσεις ἐκ τοῦ Πάππου (Πάππου Συναγωγῆς).

Εἰς τὰ κεφάλαια 19—22 ἐξετάζονται ὅμοιαι κωνικαὶ τομαί, καὶ τὰ βιβλία τοῦ Ἀπολλωνίου 6—8 (Διὰ τὸ ἀπολεσθὲν ὄγδοον βιβλίον λαμβάνονται στοιχεῖα ἐξ ἄλλων παραπομπῶν). Ἐν παραρτήματι παρατίθενται 1) ὁ γενικὸς πρόλογος τοῦ Ἀπολλωνίου εἰς τὰ Κωνικά του, (τὸ ἀρχαῖον κείμενον καὶ μετάφρασις τούτου εἰς τὴν λατινικήν), 2) οἱ πρόλογοι εἰς τὸ δεύτερον καὶ τρίτον βιβλίον ἐκτιθέμενοι κατὰ τὸν αὐτόν, ὡς προηγουμένως ἀναφέρεται τρόπον, 3) οἱ πρόλογοι τῶν βιβλίων 5, 6, 7 εἰς τὴν γερμανικὴν ἐκ μεταφράσεως αὐτῶν ἐκ τῆς ἀραβικῆς. Εἰς δεύτερον παράρτημα παρατίθενται εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὴν γερμανικὴν πληροφορίαι τοῦ Πάππου περὶ τῶν 8 βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ὡς καὶ εὑρετήριον ὀνομάτων καὶ λεπτομερὴς συναφὴς βιβλιογραφία.

Δὲν εἶναι ὑπερβολὴ ἂν τὸ ἔργον τοῦ Zeuthen «Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα» χαρακτηρισθῇ ὡς μνημειῶδες. Ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη ὅπως μετὰ πάροδον 90 ἐτῶν ἀπὸ τῆς πρώτης ἐκδόσεως ἀκολευθήσῃ δευτέρα ἔκδοσις. Ἡ κατανόησις τῶν κωνικῶν τομῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐκ τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἰδίως τοῦ Ἀπολλωνίου εἶναι δυσκολωτάτη. Ὁ Zeuthen κατώρθωσε νὰ προσαρμόσῃ τὴν ἔκφρασιν αὐτῶν διὰ τῆς συγχρόνου ὁρολογίας καὶ τοῦ συγχρόνου συμβολισμοῦ. Διὰ τῆς προσαρμογῆς αὐτῆς βλέπει κανεὶς τὰς ἐξισώσεις τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τὰ περὶ συντεταγμένων μὲ σαφήνειαν καὶ ἁπλότητα καὶ ἀντιλαμβάνεται πόσον μεγάλη ἦτο ἡ

συμβολὴ τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας καὶ τὴν περαιτέρω ἐν γένει γεωμετρικὴν ἔρευναν.

Μέγας ἔπαινος ἁρμόζει εἰς τὸν γεραρὸν διὰ τὰς ἐκδόσεις ἀρχαίων συγγραφέων Οἶκον GEORG OLMS, HILDESHEIM, ὁ ὁποῖος κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη, ἐκτὸς ἄλλων, ἐξέδωκε τὰς πραγματείας τοῦ Ἰωάννου Τζέτζη καὶ εἰς 6 τόμους τοὺς Grammatici Latini.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**Science, Philosophy and our Educational Tasks. Papers for a Symposium held at the annual meeting of the American Association, Western Division, Milwaukel, Wisconsin, April 20, 1964. Edided by john. P. Antony and George Kimball Plochmann. A continuation of the University of Buffalo Studies, p. 67.**

Ὁμὰς καθηγητῶν διδασκόντων τὴν φιλοσοφίαν εἰς τὰ Πανεπιστήμια τῶν ΗΠΑ ὠργάνωσε κατ' Ἀπρίλιον τοῦ 1964 Συμπόσιον, εἰς τὸ ὁποῖον συνεζητήθη τὸ θέμα «Ἡ φιλοσοφία κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἐπιστημῶν καὶ ἡ ἐπιστήμη κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς φιλοσοφίας». Αἱ συνεδριάσεις τοῦ Συμποσίου ἐπραγματοποιήθησαν ἐν Milwaukel, διὰ τῆς μερίμνης τῆς «Δυτικῆς Διασκέψεως περὶ τῆς διδασκαλίας τῆς φιλοσοφίας», ἥτις εἶναι κλάδος τῆς «Ἀμερικανικῆς Φιλοσοφικῆς Ἑταιρείας». Εἰς τὸ ἀνωτέρω σημειούμενον τεῦχος ἐδημοσιεύθησαν πέντε ἐκ τῶν γενομένων εἰσηγήσεων ἐκ μέρους τῶν κάτωθι ἀναγραφομένων καθηγητῶν ἐπὶ τῶν ἔναντι τοῦ ὀνόματος ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σημειουμένων θεμάτων.

1ον John Antony, καθηγητὴς τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Νέας Ὑόρκης—Buffalo. Ἐπιστήμη, πολιτισμὸς καὶ διδασκαλία τῆς φιλοσοφίας.

2ον Hippokrates G. Apostle, καθηγητὴς τοῦ Μαθηματικοῦ τμήματος τοῦ Κολλεγίου Grinell. Ἡ σχέσις τῆς φιλοσοφίας πρὸς τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν.

3ον William Earle, καθηγητὴς τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Northwestern. Ἐπιστήμη καὶ φιλοσοφία.

4ον Alden L. Fisher, καθηγητὴς τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Saint Louis. Φιλοσοφία καὶ Ἐπιστήμη εἰς τὴν ψυχολογίαν.

5ον Carl C. Lindegren, ὁμότιμος καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Southern Illinois καὶ Διευθυντὴς εἰς τὸ βιολογικὸν ἐργαστήριον ἐρευνῶν τοῦ αὐτοῦ Πανεπιστημίου. Ἡ ἀποστολὴ τῆς φιλοσοφίας κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν ἐπιστημῶν.

6ον Georg Kimball Plochmann, καθηγητὴς τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸ Πανεπι-

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΙΘ' **1967**
ΤΕΥΧΗ Α' ΚΑΙ Β' 37/38

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ**
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

CHARLES MUGLER, **Euclide, Extraits des Éléments** Grands classiques des sciences et des techniques, p. 128 Gauthier - Villars, éditeur Paris 1967.

ΚΑΡΟΛΟΥ ΜΟΥΓΚΛΕΡ, **Εὐκλείδης, Ἐπιτομὴ τῶν Στοιχείων,** Μεγάλοι κλασσικοὶ τῶν ἐπιστημῶν καὶ τῶν τεχνῶν, σελ. 128. Ἐκδότης Γκοτιὲ - Βιλλάρ, Παρίσιοι 1967.

Ὁ καθηγητὴς τῶν Πανεπιστημίων τῆς Nice καὶ τοῦ Strasburg κ. Κάρολος Μοῦγκλερ εἶναι γνωστὸς εἰς τὸ ἀναγνωστικὸν κοινὸν τοῦ «Πλάτωνος» ἐκ τῶν δύο μεγάλων ἔργων του : 1) τοῦ λεξικοῦ τῶν γεωμετρικῶν ὅρων τῶν Ἑλλήνων καὶ 2) τοῦ λεξικοῦ τῶν ὀπτικῶν ὅρων τῶν Ἑλλήνων, τῶν ὁποίων ἔχουν ἤδη δημοσιευθῆ κριτικαὶ εἰς προηγούμενα τεύχη τοῦ «Πλάτωνος». Ἤδη εὑρισκόμεθα εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ κρίνωμεν τὸ ὑπὸ τὸν ἀνωτέρω τίτλον βιβλίον του, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸν ἐπίλογον τῶν πολυετῶν καὶ πολυμόχθων προσπαθειῶν του ἐπὶ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ βιβλίου ὁ κ. Μοῦγκλερ τονίζει τὸν καθαρῶς θεωρητικὸν χαρακτῆρα τῶν Στοιχείων, ἐκ τῶν ὁποίων ἐλλείπει πᾶς πρακτικὸς ἢ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμός. Χαρακτηριστικῶς σημειοῦται ὅτι χωρὶς νὰ ἔχῃ γίνει μνεία ὑπολογισμοῦ ἐμβαδοῦ ἢ ὄγκου ἀποδεικνύονται τὰ θεωρήματα : παραλληλόγραμμα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα, καὶ τὰ παραλληλεπίπεδα ὡσαύτως. Ἐν ᾧ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ἀνακαλύπτονται τοὐλάχιστον πεντήκοντα ἔτη βραδύτερον τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων, ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐν τούτοις εἰς τὰ Στοιχεῖα περιέχονται θεωρήματα σπουδαῖα περὶ σφαίρας, ὅπως π.χ. τὸ θεώρημα, ὅτι δύο σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Τὰ Στοιχεῖα, σημειοῖ ὁ κ. Μοῦγκλερ, δὲν ἀποτελοῦν ἁπλῶς συλλογὴν μαθηματικῶν γνώσεων. Ἐκ τῆς μεγάλης δημιουργίας τῶν Ἑλλήνων ὁ Εὐκλείδης ἔχει ἐκλέξει καὶ συμπεριλάβει εἰς τὰ Στοιχεῖα πᾶν ὅ,τι εἶναι ἐποικοδομητικὸν διὰ τὴν ὅλην μαθηματικὴν ἐπιστήμην. Ὁ Εὐκλείδης δὲν σκοπεύει νὰ συγγράψῃ ἓν ἐγχειρίδιον πρακτικῆς γεωμετρίας. Ἐπιθυμεῖ νὰ συγκεντρώσῃ ὅλα τὰ μαθηματικὰ ἐκεῖνα στοιχεῖα τὰ συναπαρτίζοντα τὸ θεμέλιον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ τοῦτο τὸ ἐπιτυγχάνει κατὰ τρόπον λίαν ἐπιδέξιον καὶ μοναδικόν. Εἶναι φανερὰ παντοῦ εἰς τὰ Στοιχεῖα ἡ ἐπίδρασις τῶν Πλατωνικῶν ἰδεῶν εἰς τὸν Εὐκλείδην, διὰ τὸν ὁποῖον οἱ μεταγενέστεροι συγγραφεῖς λέγουν ὅτι ὡς τελικὸν σκοπὸν τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων εἶχε θέσει τὴν ἀπόδειξιν τῶν θεωρημάτων τῶν Πλατωνικῶν καλουμένων σχημάτων, δηλαδὴ τὴν ἐγγραφὴν εἰς σφαῖραν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων. Ἀφοῦ γίνεται λόγος περὶ τῆς γλώσσης καὶ τοῦ ὕφους τῶν Στοιχείων ἀκολουθεῖ εἰς τὸ κύριον μέρος τοῦ βιβλίου ἡ μετὰ δεξιοτεχνίας ἑρμηνεία τῶν ὁρισμῶν καὶ τῶν ἀξιωμάτων τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, τῆς στερεομετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς. Τὸ βιβλίον X ἐξετάζεται καὶ ἀπὸ ἐπόψεως γεωμετρικῆς καὶ ἀπὸ ἐπόψεως ἀριθμητικῆς. Εἰς τὸν πίνακα τῆς σελίδος 24 παρέχεται ἀνάλυσις τοῦ περιεχομένου τῶν Στοιχείων.

Διὰ νὰ γίνῃ σαφῶς κατανοητὴ ἡ ἐξαιρετικὴ συμβολὴ τοῦ κ. Mugler εἰς τὴν ἑρμηνείαν τοῦ περιεχομένου τῶν Στοιχείων ἐν τῷ συνόλῳ αὐτῶν ἀναφέρομεν ἐνδεικτικῶς τὴν ἑρμηνείαν τοῦ εὐκλειδείου ὁρισμοῦ τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν δυσκολωτέρων προβλημάτων τῶν Στοιχείων. «*Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*» λέγει ὁ Εὐκλείδης, ἤτοι εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰ ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖα. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τῆς εὐθείας γραμμῆς, ὡς ἔχει διασωθῇ, εἶναι σκοτεινός. Ὁ κ. Mugler παρέχει πέντε ἑρμηνείας τοῦ ὁρισμοῦ ἐξετάζων τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ἀπὸ ἐπόψεως 1) κινήσεως, 2) στατικῆς, 3) ὀπτικῆς, 4) μακρὰν πάσης ἀφῆς καὶ ὄψεως, ἐντελῶς νοητικῆς, 5) ἀπὸ ἐπόψεως γεωδαιτικῆς. Εἶναι ἡ πρώτη φορὰ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, καθ' ἣν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐξετάζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον.

Ὑπὸ τὸ αὐτὸ πνεῦμα γίνεται ἡ ἐπιλογὴ καὶ ἀνάλυσις τῶν σπουδαιοτέρων χαρακτηριστικῶν θεωρημάτων τῶν Στοιχείων, ἐν ᾧ ἔχει καταβληθῇ προσπάθεια ἐπιτυχής, ὅπως τὸ σύνολον τοῦ εὐκλειδείου οἰκοδομήματος παρασταθῇ ὑπὸ ζωντανήν, ἀνάγλυφον θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, μορφήν. Εἰς τὸ μικρὸν βιβλίον τοῦ κ. Mugler διακρίνεται ἡ μεγάλη καὶ εὔστοχος προσπάθεια νὰ παρουσιασθοῦν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ ἐντελῶς πρωτότυπον τρόπον. Τρόπον ὄχι μόνον ἐπιστημονικὸν καὶ ἀνέλεγκτον, ὡς τονίζει ὁ Πρόκλος εἰς τὰ σχόλια τοῦ α' βιβλίου τῶν Στοιχείων, ἀλλὰ καὶ λίαν διδακτικὸν καὶ εὐχάριστον.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

MIGUEL PARRA LEON, **Pitagoras,** Fundador de las ciencias matematicas Caracas 1966.

ΜΙΧΑΗΛ ΠΑΡΡΑ ΛΕΩΝ, **Πυθαγόρας,** Ἱδρυτὴς τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, Καρακὰς Βενεζουέλας 1966, σελίδες 303.

Τὸ ὑπὸ τὸν ἀνωτέρω τίτλον βιβλίον τοῦ Προέδρου τῆς Ἀκαδημίας τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Φυσιογνωστικῶν, τῆς πρωτευούσης τῆς Βενεζουέλας Καρακὰς κ. Miguel Parra Leon, εἶναι τὸ πρῶτον νέας σειρᾶς ἐπιστημονικῶν ἐκδόσεων ἐν Βενεζουέλᾳ, ἱδρυθείσης τῆς σειρᾶς αὐτῆς δυνάμει ἀποφάσεως τῆς αὐτόθι Ἀκαδημίας, ἥτις ἐλήφθη κατὰ τὴν πανηγυρικὴν αὐτῆς συνεδρίαν τῆς 29 Σεπτεμβρίου 1965. (Τὸ δεύτερον βιβλίον τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι τοῦ F. J. Duarte, Bibliografia, Euclides, Arquimedes, Newton, 1967).

Τὴν προσωπικότητα τοῦ κ. Miguel Parra Leon περιγράφει ἐν ἀρχῇ τοῦ βι-

βλίου ὁ κ. Ramon J. Velásquez, ὅστις τονίζει ὅτι ὁ κ. Parra Leon ἐκτὸς τῆς ἐξόχου διακρίσεως ἐν τῇ φιλοσοφίᾳ ἔχει διακριθῆ καὶ εἰς τὰς ἐφημερομσμένας ἐπιστήμας καὶ ἰδίως τὴν ναυτιλίαν καὶ τὴν συγκοινωνίαν ἐν γένει.

Τὸ βιβλίον προλογίζει ὁ Πρόεδρος τῆς 'Εθνικῆς 'Ακαδημίας τῆς 'Ιατρικῆς τοῦ Καρακὰς καὶ 'Αντιπρόεδρος τῆς 'Ακαδημίας τῶν Φυσικῶν 'Επιστημῶν, τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Φυσιογνωστικῶν κ. Marcel Granier - Doyeux.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἐπὶ τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου ὁ κ. Parra Leon, σκιαγραφεῖ τὰ τοῦ βίου τοῦ Πυθαγόρου ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας παρέχει ὁ Πλούταρχος, ὁ 'Ιώσηπος, ὁ 'Ιάμβλιχος καὶ ὁ Διογένης ὁ Λαέρτιος. 'Αλλὰ καὶ αἱ πληροφορίαι παλαιοτέρων συγγραφέων, τὰς ὁποίας συναντῶμεν εἰς τὰ ἀποσπάσματα τῶν Προσωκρατικῶν τοῦ H. Diels χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης ὑπὸ τοῦ κ. Parra Leon.

Τὸ βιβλίον διαιρεῖται εἰς δύο κυρίως μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον καὶ κυριώτερον ἐκ τούτων (σελίδες 23—217) γίνεται ἡ διαπραγμάτευσις τῶν ἑξῆς κεφαλαίων: Ποικίλα δεδομένα. 'Η παράδοσις. 'Η μεταφυσικὴ ἑνότης. 'Ο ἀνώτατος θεός. 'Ο νόμος τῆς ἁρμονίας. 'Η θεωρία τῶν ἰδεῶν του, (τοῦ Πυθαγόρου). 'Η ἀριθμολογία του. Αἱ ἀντιθέσεις. 'Η ψυχὴ τοῦ κόσμου. Τὸ περὶ τὸ κέντρον πῦρ. 'Η μέθοδος ἐρεύνης. 'Η ἑνότης τοῦ σύμπαντος. 'Ο κόσμος. Αἱ ἀρχαὶ τῆς δημιουργίας. 'Η ἀνθρωπίνη ψυχή. 'Η ζωή. 'Η σκέψις. 'Αντικείμενον τῆς Πυθαγορικῆς 'Εταιρείας. 'Η ἠθική. 'Η πολιτική. 'Η θρησκεία. 'Η ἐπιστήμη.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος (σελ. 211—296) ἐκτίθενται εἰς 18 μικρὰ τμήματα τοῦ βιβλίου σύγχρονοι φιλοσοφικαὶ καὶ ἐπιστημονικαὶ θεωρίαι ἐν ἀντιπαραβολῇ πρὸς τὴν Πυθαγορικὴν διδασκαλίαν.

'Η ἀνάλυσις τῶν προηγουμένως ἀναφερθέντων κεφαλαίων γίνεται μὲ βαθεῖαν γνῶσιν παντὸς ὅ,τι ἔχει γραφῆ περὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν Πυθαγορείων ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων συγγραφέων. Εἰς πᾶσαν εὐκαιρίαν ὁ κ. Parra Leon συγκρίνει μὲ ἐξαιρετικὴν ὀξύνοιαν τὰς πυθαγορικὰς δοξασίας μὲ τὰς σημερινὰς ἀντιλήψεις τῆς φιλοσοφίας καὶ τῆς ἐπιστήμης καὶ συνάγει εὐστόχως τὰ συναφῆ συμπεράσματα. Διὰ τὴν ὕλην τῶν περισσοτέρων κεφαλαίων (σελ. 23—170) ὁ κ. Parra Leon προβαίνει εἰς ἐμπεριστατωμένην ἀνασκόπησιν διὰ τῆς ἐν περιλήψει ἐκθέσεως τοῦ περιεχομένου αὐτῶν (Resumen σελ. 171—172). Κατὰ ταύτην αἱ δοξασίαι τοῦ Πυθαγόρου ἐκτίθενται ὡς ἑξῆς:

1. 'Υπάρχει ἐν τῷ σύμπαντι ἀνώτατος θεός, τοῦ ὁποίου τὴν φύσιν εἶναι ἀδύνατον νὰ συλλάβῃ ἡ ἀνθρωπίνη φαντασία καὶ σκέψις.

2. Τὸ σύμπαν ἐδημιουργήθη ὑπὸ τοῦ ἀνωτάτου θεοῦ, κατὰ τὴν ἀρετήν του, τέλειον καὶ διὰ μιᾶς καὶ μοναδικῆς πράξεως.

3. Τὸ σύμπαν εἶναι πεπερασμένον καὶ ἀμετάβλητον ἐν τῷ συνόλῳ του.

4. 'Ο θεῖος δημιουργὸς ἐδημιούργησε τὸ σύμπαν ἀθάνατον χωρὶς τοῦτο νὰ ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου.

5. Τὸ σύμπαν ἀνελίσσεται κατὰ μίαν παγκόσμιον διαδικασίαν κλπ.

'Ακολούθως ἐξαίρεται ἡ θρησκευτικότης τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς καὶ ἡ ἐπίδρασις τῶν θρησκευτικῶν διδασκαλιῶν του εἰς τὴν ἐξέλι-

ξιν καὶ διαμόρφωσιν τῆς φιλοσοφίας καὶ τῆς θεολογίας τῶν Ἑλλήνων καὶ ἰδίως ἡ ἐπίδρασις αὐτῶν εἰς τὰς συναφεῖς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος. Ἰδιαιτέρως τονίζεται ἡ θεωρία τοῦ Πυθαγόρου περὶ μετεμψυχώσεως.

Ἐπικαλούμενος καὶ τὴν γνώμην τοῦ Bertrand Russel ὁ κ. Parra Leon σημειώνει ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἔδωκε μεγάλην ἀνάπτυξιν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Κατὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Fernando Höfer (1811—1878), σημειοῦται ἐν συνεχείᾳ ὑπὸ τοῦ συγγραφέως, ὁ Πυθαγόρας ἐθεμελίωσεν εἰδικώτερον τὴν θεωρίαν τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν. Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ὀφείλεται ἡ πρώτη σκέψις περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος. Ὁ Πυθαγόρειος Φιλόλαος ὁμιλεῖ ἤδη (περὶ τὸ 420 π.Χ.) περὶ τῆς ἐτησίας περιφορᾶς τῆς γῆς περὶ τὸ κεντρικὸν πῦρ τοῦ κόσμου. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ταύτῃ διαμνημονεύονται καὶ αἱ συζητήσεις τοῦ ἐν τῷ Φαίδωνι Σωκράτους μετὰ τῶν Θηβαίων Κέβητος καὶ Σιμμίου, οἵτινες ἔσχον ἐν Θήβαις διδάσκαλον τὸν Φιλόλαον, διαφυγόντα τὸν ἐμπρησμὸν τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς τῆς Κρότωνος, τὸν γενόμενον ὑπὸ τοῦ Κύλωνος, ὡς ἀναφέρει ὁ σχολιαστὴς τοῦ διαλόγου Φαίδων (61 Ε) τοῦ Πλάτωνος, ὅστις γράφει : Οὗτος ὁ Φιλόλαος Πυθαγόρειος ἦν ἐξ Ἰταλίας πεφευγὼς διὰ τὸν ἐμπρησμὸν τὸν τότε ὑπὸ Κύλωνος γεγονότα διὰ τὸ ἀνεπιτήδειον αὐτὸν πρὸς φιλοσοφίαν ὄντα ἀπελαθῆναι τοῦ Ὁμακοΐου· ὃς καὶ δι' αἰνιγμάτων ἐδίδασκε καθάπερ ἦν ἔθος αὐτοῖς. Ἦλθεν οὖν οὗτος εἰς Θήβας τεθνεῶτι τῷ διδασκάλῳ Λύσιδι χοὰς ποιήσων ἐκεῖ τεθαμμένῳ. Ἄρχιππος δὲ καὶ Φιλόλαος μόνοι τῆς εἰρημένης συμφορᾶς τῶν Πυθαγορείων διεσώθησαν (Diels, Fragmente der Vorsokratiker I 44 [32], Berlin 1951, p. 398, 22).

Ἡ ἔννοια τῆς ὑπερβατικότητος παρὰ Πυθαγόρᾳ ἐξετάζεται ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰ Μετὰ τὰ φυσικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους, πρὸς τὰς θεωρίας τοῦ Καντίου (Kant) καὶ πρὸς τὰς χριστιανικὰς θεωρίας τοῦ Αὐγουστίνου. Ἡ ἔννοια τοῦ εἶναι, τῆς συνειδήσεως, τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου, τῆς ἐνεργείας, τῆς ἐντροπίας, τῆς διατάσεως τῶν ἀερίων, τῆς θερμικῆς ἐνεργείας, τοῦ κύκλου τοῦ Carnot, οἱ νόμοι τοῦ Mayer καὶ τοῦ Joule, ἡ ἀδιαβατικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀερίων τῆς συγχρόνου ἐπιστήμης ἐξετάζονται μὲ ἐξαιρετικὴν ἀγχίνοιαν ἐν συσχετίσει μὲ τὰς πυθαγορικὰς δοξασίας.

Τέλος παρέχονται ἐνδιαφέροντα στοιχεῖα περὶ τῆς δράσεως τῶν Πυθαγορείων Φιλολάου, Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου, Ἀλκμαίωνος τοῦ Κροτωνιάτου καὶ τοῦ Ἐμπεδοκλέους. Ἐν κατακλεῖδι ἀναφέρονται αἱ φιλοσοφικαὶ δοξασίαι τοῦ Ἡρακλείτου καὶ παρατίθενται εἰς τὴν ἱσπανικὴν γλῶσσαν τὰ «χρυσᾶ ἔπη» τοῦ Πυθαγόρου κατὰ μετάφρασιν τοῦ Nemesio Fernandez Cuesta.

Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν ὁ κ. Miguel Parra Leon κατορθώνει νὰ παρουσιάσῃ τὸ ἔργον τοῦ Πυθαγόρου εἰς μικρὸν σχετικῶς χῶρον μὲ δεξιοτεχνίαν ἀπαράμιλλον καὶ βαθυστόχαστον ἐρευνητικὴν ἐπισκόπησιν. Τὸ ἐντελῶς πρωτότυπον εἰς αὐτὴν ἔγκειται εἰς τὴν θεώρησιν τῶν Πυθαγορικῶν δοξασιῶν ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰ πορίσματα τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης, ἥτις ἔχει τὴν ἀφετηρίαν της εἰς τὴν Πυθαγορικὴν διδασκαλίαν. Καὶ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἰδιαιτέρως ὁ κ. Miguel Parra Leon ἀνεδείχθη εἷς ῥηξικέλευθος ἐρευνητής. Φρονοῦμεν δὲ ὅτι εὐχῆς ἔργον

θὰ ἦτο ἐὰν ἡ περισπούδαστος πραγματεία του μετεφράζετο καὶ εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν γλῶσσαν. Οἱ φιλομαθεῖς νέοι τῆς χώρας μας θὰ εἶχον πολλὰ νὰ διδαχθοῦν περὶ τοῦ Πυθαγόρου ἐκ τῆς θαυμαστῆς πραγματείας τοῦ κ. Miguel Parra Leon.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

ΧΡΙΣΤΟΥ ΠΑΠΑ, **Αἱ δυσχέρειαι τῆς συγχρόνου ἀγωγῆς**, Παιδαγωγικὴ καὶ ψυχολογικὴ μελέτη, Θεσσαλονίκη 1965, σχ. 8ον, σελ. 104.

Ὁ συγγραφεὺς ἐξετάζων τὸν ἄνθρωπον τῆς συγχρόνου ἐποχῆς εὑρίσκει ὡς γενικὸν χαρακτηριστικὸν τὴν ἐξωστρέφειαν αὐτοῦ, λόγῳ τῆς ὁποίας οὗτος ζητεῖ ἔξω διαρκῶς στηρίγματα διὰ τὸν προσανατολισμόν του. Ἐπίσης παρατηρεῖ ὅτι ὁ σημερινὸς ἄνθρωπος οὐδὲν ἀναγνωρίζει ὡς ἔχον ἀξίαν πλὴν τοῦ παρέχοντος ὑλικὴν δύναμιν. Τὸ ἄτομον στερούμενον ἐσωτερικοῦ περιεχομένου ἔχει κλονισθῆ εἰς τὴν ψυχικήν του καὶ τὴν πνευματικήν του ὑγείαν. Ἀναλύων τὴν σύγχρονον κοινωνικὴν κατάστασιν ἐπισημαίνει ὡς αἴτια τῆς κρίσεως τὴν σύγχυσιν τοῦ ἀνθρώπου τὴν προκαλουμένην ἐκ τοῦ ρυθμοῦ τῆς μηχανοποιημένης ζωῆς καὶ ἐκ τοῦ αὐτοματισμοῦ τοῦ χρόνου, οὗτινος ὁ ἄνθρωπος ἔχει μεταβληθῆ εἰς ἐξάρτημα ἁπλοῦν. Λόγῳ τῶν νέων συνθηκῶν τοῦ βίου ὁ σύγχρονος ἄνθρωπος ἔπαυσε νὰ ἀναπτύσσεται εἰς προσωπικότητα ἔχουσαν τὸ αἴσθημα τῆς εὐθύνης, ἔχασε τὴν ἐσωτερικὴν φωνὴν τῆς συνειδήσεώς του καὶ ἔγινε τύπος ἀγελαῖος, ἁπλοῦν μόριον μαζοποιημένης κοινωνίας.

Ἐνώπιον τῆς πραγματικότητος ταύτης τὸ ἔργον τῆς ἀγωγῆς εἶναι δυσχερές, ἀφοῦ ἀντιμετωπίζει μεταβολὴν τοῦ ψυχικοῦ κόσμου τῶν νέων τῆς παρούσης ἐποχῆς. Ἡ παλαιὰ ἀγωγὴ τοῦ ἀνθρώπου πρὸς οἰκείωσιν τοῦ κόσμου τῶν ἀξιῶν, τοῦ ἀγαθοῦ, τοῦ ἀληθοῦς, τοῦ ὡραίου, δὲν ἐξαρκεῖ. Ὁ νέος πρέπει νὰ ἔχῃ βοήθειαν πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν ἀντιφατικῶν συνθηκῶν τῆς ζωῆς καὶ πρὸς ὑπερνίκησιν τῶν ἐναντιοτήτων τοῦ περιβάλλοντός του.

Εἰς δεύτερον μέρος τοῦ βιβλίου ὁ συγγραφεὺς ἐξετάζει τὰς ἐκ τῆς συγχρόνου ἐποχῆς προκαλουμένας ψυχονευρωτικὰς περιπτώσεις, ἐξ ὧν ὁ ἄνθρωπος ἄγεται εἰς ἄγχος καὶ ἀδιέξοδον, ἅτινα εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφευχθοῦν διὰ τῆς πίστεως πρὸς τὸν θεὸν καὶ βίου χριστιανικοῦ. Διὰ τοῦτο ἡ ἀγωγὴ ἀντιμετωπίζουσα τὰς δυσχερείας τῶν σημερινῶν περιστάσεων ὀφείλει νὰ ἀποβλέπῃ εἰς στενὴν συνεργασίαν σχολείου, οἰκογενείας καὶ ἐκκλησίας, ἵνα οἰκοδομήσῃ τὸν νέον ἄνθρωπον, ἱκανὸν νὰ ἐναρμονίζῃ τὰς σχέσεις του καὶ ἀντιμετωπίζῃ εὐχερῶς τὰς βιοτικὰς δυσχερείας.

Εἰς τρίτον μέρος τοῦ βιβλίου ἀναλύεται τὸ σύγχρονον φαινόμενον τῶν εὐρωπαϊκῶν μεγαλουπόλεων τὸ καλούμενον Τετυμποϊσμὸς ἀπὸ παιδαγωγικῆς σκοπιᾶς

Ὁ κ. Κανάκης κατὰ τὴν καθιερωθεῖσαν εἰς τὰς ἐκδόσεις του τακτικὴν παραθέτει εἰς τὸ ἀρχαῖον κείμενον δύο μεταφράσεις, τὴν πρώτην εἰς πεζὸν καὶ εἰς γλῶσσαν σχολικὴν καὶ τὴν δευτέραν εἰς δεκαπεντασυλλάβους καὶ εἰς γλωσσικὸν ὕφος ποιητικόν. Πέραν ὅμως τῶν μεταφράσεων παραθέτει πλουσιώτατα σχόλια ἑρμηνευτικὰ καὶ πραγματολογικὰ διαλευκαίνων πλήρως τὸ ἀρχαῖον κείμενον. Ἡ ὅλη ἐργασία προδίδει τὸν δεινὸν φιλόλογον, τὸν ἐντριβέστατον εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς Ἀρχαιογνωσίας.

Ἡ προσφορὰ τοῦ κ. Κανάκη διὰ τῶν ἀλλεπαλλήλων ἐκδόσεών του ἀποτελεῖ ὄντως ἔργον ἐθνικόν. Οὐδεὶς δὲ δύναται νὰ ἀμφισβητήσῃ ὅτι εἶναι καὶ ἔργον δημιουργικόν, συμβάλλον τοὐλάχιστον ἐξ ἴσου πρὸς τὰ ἄριστα πρωτότυπα ἔργα τῆς συγχρόνου δημιουργικῆς λογοτεχνίας εἰς τὴν ἐξύψωσιν τῆς πνευματικῆς στάθμης τοῦ λαοῦ μας. Νομίζω ὅτι τὸ Κράτος ὀφείλει νὰ ἐνισχύσῃ τὴν προσπάθειάν του ἀπονέμον εἰς αὐτὸν βραβεῖον καὶ διανέμον τὰ ἔργα του εἰς τὰς βιβλιοθήκας τοῦ Κράτους. Νομίζω δὲ ὅτι καὶ ἡ Ἀκαδημία Ἀθηνῶν ὀφείλει νὰ ἐνθαρρύνῃ τὴν προσπάθειαν τοῦ κ. Κανάκη.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

***

DAS DEUTSCHE MUSEUM, **Δημοσιεύσεις τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐρευνῶν τοῦ Γερμανικοῦ Μουσείου διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς.**

**(Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik).**

Κατὰ τὸ 1903 ὁ ἠλεκτρολόγος μηχανικὸς Oskar von Miller (1855 - 1934) ἵδρυσεν ἐν Μονάχῳ τὸ περίφημον καταστὰν Γερμανικὸν Μουσεῖον τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς, τὸ ὁποῖον σκοπὸν ἔχει νὰ καταστήσῃ ἐποπτικὴν τὴν δημιουργίαν καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς καὶ τῆς Βιομηχανίας. Κατὰ τὸ 1925 ἐγένετο ἐπέκτασις τοῦ χώρου τοῦ Μουσείου, ὥστε ἡ ἔκτασις τούτου νὰ ἀνέρχεται σήμερον εἰς 36.000 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἡ βιβλιοθήκη τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνολογίας περιλαμβάνει 490.000 τόμους καὶ συμπληροῦται διαρκῶς. Τὸ Μουσεῖον τοῦτο τοῦ Μονάχου εἶναι τὸ μοναδικὸν κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν πληρότητα Τεχνικὸν Μουσεῖον τοῦ κόσμου.

Αἱ δημοσιεύσεις τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐρευνῶν τοῦ Μουσείου διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς, ὅπερ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν τῶν διακεκριμένων καθηγητῶν J. O. Fleckenstein, H. Gericke, F. Klemm,

καθάπτονται ὅλων τῶν κλάδων τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς, ἀπὸ ἱστορικῆς ἐπόψεως καὶ περιλαμβάνουν πλῆθος μονογραφιῶν, αἵτινες ἀποτελοῦν σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς. Αὗται κατατάσσονται εἰς τὰς σειρὰς A, B, C ἀναλόγως τοῦ ἀντικειμένου, τὸ ὁποῖον πραγματεύονται ὡς ἑξῆς :

Σειρὰ A Μικραὶ ἀνακοινώσεις, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀνάτυποι.

Σειρὰ B Πραγματεῖαι.

Σειρὰ Γ Κείμενα πηγῶν καὶ μεταφράσεις.

Εἰς τὴν **σειρὰν A** ἐξεδόθησαν μέχρι τοῦδε τὰ ἑπόμενα ἄρθρα :

Klemm, F. : Ἡ νέα ἐπιστήμη.

Fleckenstein, J, O. : Ὁ Γαλιλαῖος καὶ ἡ κοπερνικανικὴ μεταρρύθμισις.

Gerlach, W. : Ἐπὶ τῆς Ἱστορίας τοῦ πνεύματος κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Γαλιλαίου.

Klemm, F. : Αἱ Φυσικαὶ Ἐπιστῆμαι ἐν Μανχάϊμ κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Καρόλου Θεοδώρου.

Hermann, A. : Ἐξέλιξις τῆς ἀτομικῆς θεωρίας μέχρι τοῦ Νῆλς Βώρ.

Συνδιαλέξεις θερινοῦ ἐξαμήνου 1964 καὶ χειμερινοῦ ἐξαμήνου 1964/5 Fleckenstein/Gericke : Ἀπὸ τοῦ Καρτεσίου μέχρι τοῦ Λάϊπντιτς.

Ἡ ἐξέλιξις θεμελιωδῶν φυσικῶν ἐννοιῶν παρὰ τοῖς Ἕλλησι.

Klemm, F. : Ἡ ἀρχαία τεχνικὴ βιβλιογραφία ὡς πηγὴ τῆς Ἱστορίας τῆς Τεχνικῆς.

Fleckenstein, J, O. : «De la Scienza Nuova» du rinascimento à la Methode Nouvelle du Baroque.

Fleckenstein, J, O. : Φυσικαὶ Ἐπιστῆμαι καὶ Πολιτική.

Hermann, A. : Ὁ A. E. Haas καὶ τὸ πρῶτον θεώρημα τῶν Κβάντων διὰ τὸ ἄτομον.

Klemm, F. : Ἡ σημασία τῆς Τεχνικῆς κατὰ τὴν Ἰταλικὴν Ἀναγέννησιν.

Fleckenstein, J, O. : Ἡ ἑνότης τῆς Τεχνικῆς, τῆς Ἐρεύνης καὶ τῆς Φιλοσοφίας εἰς τὸ ἐπιστημονικὸν ἰδεῶδες τῆς ἐποχῆς Βαρόκ.

v. Fritz / Gericke / Vogel : Λεξικὸν τοῦ ἀρχαίου κόσμου (Ἀπόσπασμα).

Klemm, F. : Ἡ σημασία τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν Τεχνικὴν τοῦ 19 αἰῶνος.

Klemm, F. : Ἀπὸ τοῦ ἀεικινήτου μέχρι τῆς ἀρχῆς τῆς ἐνεργείας.

Sachtleben : Βενζόλιον, ἡ ἱστορία του καὶ ἡ σημασία του.

Sachtleben : Ἐκ τῆς ἱστορίας τῆς κρυσταλλώσεως.

Hermann, A. : Ἀ. Ἀϊνστάϊν καὶ Ἰ. Στάρκ, ἀλληλογραφία καὶ σχέσις τῶν δύο τιμηθέντων διὰ τοῦ βραβείου Νόμπελ.

Nobis, A. : Ἡ σημασία τῆς Γραφῆς τοῦ Λάϊπνιτς «De Ipsa Natura».

Hermann, A. : Αἱ ἀρχαὶ τῆς πανεπιστημιακῆς Φυσικῆς εἰς τὸ Μόναχον.

Gerlach, W. : Τὸ κενὸν εἰς τὴν Ἱστορίαν τοῦ Πνεύματος, τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς.

Hermann, A. : A. E. Haas—Μία βιογραφία.

Hoppe, B. : Ἡ Βοτανικὴ τοῦ Ἱέρωνος. Bock ὡς πηγὴ τῆς ἱστορίας τῆς Βοτανικῆς καὶ τῆς Φαρμακολογίας.

Hermann, A. : H. A. Λόρεντς. Ἀλληλογραφία.

Hermann, A. : Ἐπὶ τῇ 100ῇ ἐπετείῳ τοῦ θανάτου τοῦ M. Faraday.

Hermann, A. : Ἡ πρώτη συζήτησις μεταξὺ Sommerfeld καὶ Stark διὰ τὴν ὑπόθεσιν τῶν Κβάντα (I).

Hoppe, B. : Πόλωσις, Κλιμάκωσις καὶ μεταμόρφωσις εἰς τὴν θεωρητικὴν Βιολογίαν τοῦ Ῥομαντισμοῦ.

Koch, E.—E. : Τὸ Τμῆμα Συντηρήσεων καὶ ἡ Φυσικομαθηματικὴ συλλογὴ τῆς Βαυαρικῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν.

Εἰς τὴν **σειρὰν Β** δὲν ἔγιναν ἀκόμη ἐκδόσεις.

**Σειρὰ Γ.** Flierl, K. : Daniel Bernoulli Ὑδροδυναμική, μετάφρασις μετὰ σημειώσεων τοῦ Karl Flierl. Διὰ τῆς μεταφράσεως καὶ σχολιάσεως τοῦ κυρίου ἔργου τοῦ D. Bernulli διευκολύνεται ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης σημαντικῶς εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἱστορικῆς ἀφετηρίας τῆς ὑδροδυναμικῆς ἐπιστήμης.

Εἰδικαὶ ἐκδόσεις ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν.

Borghi, P. : Ἀριθμητικὴ (1484). Τὸ βιβλίον αὐτὸ εἶναι μία πανομοιότυπος ἔκδοσις τοῦ σπουδαίου ἰταλικοῦ βιβλίου Ἀριθμητικῆς τοῦ τέλους τοῦ 15. αἰῶνος, τὸ ὁποῖον ἐχρησίμευσεν ὡς πρότυπον διὰ τὰ βιβλία τῆς Ἀριθμητικῆς τῆς Δύσεως, τοῦ 16ου αἰῶνος. Τὸ βιβλίον περιέχει, ἐκτὸς μιᾶς μικρᾶς εἰσαγωγῆς, λεπτομερῆ βιβλιογραφίαν. Ἐκδοτικὸς Οἶκος Graphos, Μόναχον Gericke / Vogel : De Thiende, Simon Stevin. Μεταφρασθὲν καὶ σχολιασθὲν ὑπο H. Gericke καὶ K. Vogel.

Τὸ βιβλίον αὐτὸ τοῦ Ὁλλανδοῦ μαθηματικοῦ καὶ φυσικοῦ Simon Stevin πραγματεύεται τὰ περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (α' ἔκδοσις 1585). Ἐκτὸς τοῦ καθαροῦ κειμένου περιέχει τὸ βιβλίον Παράρτημα περὶ τοῦ βίου καὶ τοῦ ἔργου τοῦ Simon Stevin συνταχθὲν ὑπὸ τοῦ Helmuth Gericke καὶ ἱστορίαν τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνταχθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Kurt Vogel. Κατάλογοι τῶν ἐκδόσεων τοῦ «Thiende» καὶ τῶν χρησιμοποιηθέντων μέτρων καὶ σταθμῶν, ὡς ἐπίσης τῆς εἰδικῆς ὁρολογίας συμπληρώνουν τὸ ἔργον.

Klemm / Hermann : Ἐπιστολαὶ ἑνὸς ῥομαντικοῦ φυσικοῦ (ὁ Johann Wilhelm Ritter πρὸς τοὺς Gotthilf Heinrich Schubert καὶ Karl von Hardenberg).

**Σειρὰ C.** Παραστάσεις πρωτοτύπων τῆς Μοριακῆς Χημείας τοῦ 19ου αἰῶνος (Modellvorstellnngen der Molekularchemie des 19. Jahrhunderts) ὑπὸ τῆς Walburg Eder, διπλωματούχου φυσικοῦ. Ἐγκριθεῖσα ὑπὸ τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Μονάχου διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ.

Αἱ δημοσιεύσεις τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐρευνῶν τοῦ Γερμανικοῦ Μουσείου τοῦ Μονάχου ἀποτελοῦν σπουδαιοτάτην συμβολὴν εἰς τὴν ἔρευναν τῆς Ἱστορίας τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς καὶ λαμπρὰν βοήθειαν καὶ παρόρμησιν πρὸς ἐπιτέλεσιν νέων ἀνακαλύψεων καὶ ἐφευρέσεων. Ὁ νέος ἐρευνητὴς γνωρίζων τὸν τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι καὶ ἐρευνᾶν τῶν προγενεστέρων σπουδαίων ἐπιστημό-

νων διευκολύνεται πολὺ εἰς τὸ ἔργον του. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ταύτῃ ἐπιθυμοῦμεν νὰ σημειώσωμεν ἰδιαιτέρως τὰ πρότυπα τῶν τεχνικῶν δημιουργημάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τὰ ὁποῖα θαυμασίως ἔχουν καταταχθῆ εἰς τὰς λαμπρὰς αἰθούσας τοῦ Μουσείου. Ἡ συλλογὴ τῶν οἰκοδομησίμων ὑλῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ τῶν ἄλλων πολιτισμένων παλαιῶν λαῶν, ὁ τρόπος τῶν πειραμάτων τῶν ἀλχημιστῶν καὶ ἰδίως τοῦ Ἕλληνος Ζωσίμου τοῦ Πανοπολίτου ἐν Αἰγύπτῳ, αἱ πειραματικαὶ συσκευαὶ τοῦ Κτησιβίου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, εἰς θαυμάσια πρότυπα, ἀποτελοῦν πραγματικὸν ἱστορικὸν θησαυρὸν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς. Ἡ παράλληλος, πρὸς τὰ ἐκτιθέμενα πρότυπα θεωρητικὴ σπουδὴ τῶν πειραμάτων ἀποτελεῖ σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν φυσικῶν νόμων ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ καθιστᾷ ἐμφανῆ τὴν κοπιώδη πορείαν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς τεχνολογίας. *Ἡ ἔμπνευσις τοῦ* Oskar von Miller *νὰ ἱδρύσῃ τὸ μοναδικὸν εἰς τὸν κόσμον Τεχνικὸν Μουσεῖον τοῦ Μονάχου ἀποδεικνύει τὴν ἀξίαν τοῦ γερμανικοῦ πνεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἐπιστημῶν γενικῶς εὑρίσκεται εἰς τὴν πρώτην γραμμήν.*

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ Κ΄ 1968
ΤΕΥΧΗ Α΄ ΚΑΙ Β΄ 39/40

ΕΙΣ ΜΝΗΜΗΝ

## ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛΗ

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΦΥΛΗΣ 32—ΑΘΗΝΑΙ

φιλοσοφικῆς σκέψεως κατὰ τὴν σκοτεινὴν περίοδον τῆς τουρκικῆς κατοχῆς ὁπαδοῦ καὶ ἑρμηνευτοῦ τῆς Φιλοσοφίας τοῦ Ἀριστοτέλους ἀναλύονται ἐν ἐκτάσει κατανοουμένης οὕτω καλλίτερον τῆς ἑνότητος καὶ συνεχείας τῆς ἑλληνικῆς παιδείας καὶ φιλοσοφίας εἰς τὴν μεταβατικὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ μὲν τὴν νεοελληνικὴν ἀναγέννησιν ἐπαγγελλόμενος νεοπλατωνικὸς οὐτοπισμὸς τοῦ Πλήθωνος εἶχεν πλέον ὁδηγήσει εἰς ἀδιέξοδον, τὸ δὲ ἔθνος συνετηρεῖτο ἁπλῶς ἐν ζωῇ πρὶν ἢ ἀνανεώσῃ ἑαυτὸ διὰ τῆς προσφυγῆς μετὰ ταῦτα εἰς τὸ κίνημα τοῦ καλουμένου «εὐρωπαϊκοῦ διαφωτισμοῦ».

Δ. ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ

***

ΙΩΑΝΝΟΥ Γ. ΑΡΓΥΡΑΚΟΥ, **Γεωδαιτικὴ Ἀστρονομία**, Ἀθῆναι, 1968, σελ. 338.

Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ἀναξίμανδρος θεωροῦνται οἱ πρῶτοι ἐπιστήμονες, οἵτινες ἠσχολήθησαν μὲ τὴν Ἀστρονομίαν. Μέγιστον ἐπίτευγμα τοῦ Θαλοῦ θεωρεῖται ἡ πρόβλεψις αὐτοῦ περὶ τῆς ἐκλείψεως τοῦ ἡλίου τῆς 28 Μαΐου τοῦ 585 π.Χ. Ἡ πρόβλεψις αὕτη ἔγινε ἀρκετοὺς μῆνας πρὶν ἡ ἔκλειψις λάβῃ χώραν. Αἱ διασωθεῖσαι πληροφορίαι περὶ τῶν δύο αὐτῶν φυσικῶν φιλοσόφων δὲν εἶναι ἀρκεταί, ὥστε νὰ συναγάγῃ τις τὸ συμπέρασμα, ὅτι οὗτοι ἠσχολήθησαν καὶ μὲ προβλήματα Γεωδαιτικῆς Ἀστρονομίας. Πιθανώτερον φαίνεται ὅτι μὲ τοιαύτης φύσεως προβλήματα ἠσχολήθη ὁ Εὔδοξος περὶ τὸν 4ον αἰ. π.Χ. καὶ βραδύτερον ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος, ὁ Ἐρατοσθένης καὶ ἰδίως ὁ Ποσειδώνιος. Ἐὰν αἱ νέαι θεωρίαι τοῦ Ταξιάρχου κ. Θεοφάνους Μανιᾶ ἐπαληθευθοῦν, θὰ ἀποτελέσουν ἀπόδειξιν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ἀσχοληθῆ μέ τὴν Γεωδαιτικὴν Ἀστρονομίαν χιλιάδας τινὰς ἐτῶν π.Χ.

Αἱ μέχρι σήμερον κρατοῦσαι ἀντιλήψεις παρουσιάζουν τὴν Γεωδαιτικὴν Ἀστρονομίαν ὡς ἐπιστήμην δημιουργηθεῖσαν κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους. Ὑπὸ τὸν ὅρον Γεωδαιτικὴ Ἀστρονομία νοοῦνται μετρήσεις ἐπὶ τῆς γῆς μὲ τὴν βοήθειαν ἀστρονομικῶν δεδομένων καὶ παρατηρήσεων. Εἶναι δὲ ἡ Γεωδαιτικὴ Ἀστρονομία ὁ κλάδος ἐκεῖνος τῆς Γεωδαισίας, ὅστις χρησιμοποιεῖ τὰ ἐκ τῆς Ἀστρονομίας γενικὰ δεδομένα, τὰ ἀπαραίτητα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν γεωγραφικῶν συντεταγμένων ἑνὸς τόπου καὶ τοῦ ἀζιμουθίου μιᾶς διευθύνσεως.

Εἰς τὸν πρόλογον τοῦ βιβλίου του ὁ κ. Ἀργυρᾶκος, ὅστις τυγχάνει καθηγητὴς τῆς Ἀστρονομίας ἐν τῷ Ἐθνικῷ Μετσοβίῳ Πολυτεχνείῳ, τονίζει ὅτι εἰδικώτερον αἱ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ Γεωδαισία καταφεύγει εἰς ἀστρονομικοὺς προσδιορισμοὺς δύνανται νὰ καταταχθοῦν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τούτων δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἀπόκλισις τῆς κατακορύφου, ὑπάγονται δὲ εἰς αὐτὴν οἱ προσδιορισμοὶ σημείων μὲ σκοπὸν τὴν κατασκευὴν ἑνὸς

προκαταρκτικοῦ χάρτου περιοχῶν, αἵτινες στεροῦνται τριγωνομετρικοῦ δικτύου, ὡς καὶ ὁ προσδιορισμὸς ἀστρονομικῶν ἀζιμουθίων διευθύνσεων μὲ σκοπὸν τὴν ἔνταξιν αὐτῶν εἰς ὑπάρχον τριγωνομετρικὸν δίκτυον χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ ἐξίσωσις τοῦ LAPLACE. Εἰς τοὺς προσδιορισμοὺς τῆς κατηγορίας ταύτης, ἀκρίβεια τῆς τάξεως τοῦ τόξου ἑνὸς δευτερολέπτου εἶναι ἱκανοποιητική.

Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν λαμβάνεται ὑπ' ὄψει ἡ ἀπόκλισις τῆς κατακορύφου, ὑπάγονται δὲ εἰς αὐτήν: Πρῶτον, ὁ ἀστρονομικὸς προσδιορισμὸς τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ ἀζιμουθίου τοῦ θεμελιώδους σημείου τοῦ τριγωνομετρικοῦ δικτύου. Δεύτερον, ὁ ἀστρονομικὸς προσδιορισμὸς τοῦ μήκους καὶ τοῦ ἀζιμουθίου εἰς ὡρισμένας κορυφὰς τοῦ τριγωνομετρικοῦ δικτύου, μὲ σκοπὸν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐξισώσεως τοῦ LAPLACE, κατὰ τὴν συνόρθωσιν αὐτοῦ. Τρίτον ὁ ἀστρονομικὸς προσδιορισμὸς τῶν συντεταγμένων σημείων, τῶν ὁποίων εἶναι γνωσταὶ αἱ γεωδαιτικαὶ συντεταγμέναι μὲ σκοπὸν τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σχήματος τοῦ γεωειδοῦς καὶ τῆς σχέσεως αὐτοῦ πρὸς τὸ ἐλλειψοειδὲς ἀναφορᾶς, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τριγωνισμοῦ.

Σκοπὸς τοῦ βιβλίου εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν μεθόδων καὶ τῶν ὀργάνων διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ὁ δι' ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων προσδιορισμὸς τῶν συντεταγμένων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς καὶ τοῦ ἀζιμουθίου μιᾶς διευθύνσεως.

Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου κατανέμεται εἰς 6 κεφάλαια. Εἰς τὸ πρῶτον ἐκ τούτων (σελίδες 49), παρέχονται λεπτομερῶς βασικαὶ ἔννοιαι ἐπὶ τῶν συστημάτων συντεταγμένων, τῶν διορθώσεων καὶ τῶν ἀναγωγῶν αὐτῶν. Εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον (σελίδες 51—126) γίνεται διαπραγμάτευσις τοῦ προβλήματος τοῦ χρόνου, ἐν ᾧ ἀναπτύσσονται τὰ περὶ ἀστρικοῦ καὶ ἡλιακοῦ χρόνου, τὰ περὶ χρονομέτρου, λήψεως τῆς ὥρας, ἀληθοῦς ἡλιακοῦ χρόνου κλπ. Εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον (σελ. 129—152) σπουδάζεται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ἀζιμουθίου ἐκ τῆς ὡριαίας γωνίας ἀστέρος, ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ ἀστέρος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα καὶ ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ ἡλίου, παρέχονται δὲ πίνακες ἀζιμουθίου τοῦ πολικοῦ καὶ ἐξετάζεται ὁ προσανατολισμὸς τοῦ τηλεσκοπίου.

Εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον (σελ. 157—198) ἐρευνᾶται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ πλάτους διὰ παραμεσημβρινῶν ὑψῶν, διὰ τοῦ πολικοῦ, διὰ παρατηρήσεως ἀστέρος ἢ τοῦ ἡλίου εἰς τυχοῦσαν θέσιν, διὰ ζενιθίων ἀποστάσεων ἀστέρων παρατηρουμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου κλπ.

Εἰς τὸ πέμπτον κεφάλαιον (σελ. 205—274) σημειοῦται προεισαγωγικῶς, ὅτι, ἐὰν μετρηθοῦν αἱ ζενιθίαι ἀποστάσεις δύο ἀστέρων εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῶν γεωγραφικῶν συντεταγμένων τοῦ σταθμοῦ παρατηρήσεως, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῶν ἀντιστοίχων περιφερειῶν τῶν κύκλων ὕψους, τὴν πλησιεστέραν πρὸς τὴν κατὰ προσέγγισιν θέσιν του. Ἀκολούθως ἀναφέρονται τὰ περὶ εὐθειῶν ὕψους, τὰ τῆς γραφικῆς παραστάσεως αὐτῶν, τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν στοιχείων πρὸς χάραξιν τῆς εὐθείας ὕψους, ἡ εὕρεσις τοῦ στίγματος ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως, τὰ περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν σκοπεύσεων, παρατηρή-

σεις διὰ τῶν θεοδολίχων, τοῦ ἀστρολάβου καὶ τῆς ἀεροστάθμης, σύνταξις καταλόγου, ὑπολογισμὸς τῶν παρατηρήσεων διὰ διαφόρων μεθόδων κλπ.

Τέλος εἰς τὸ ἕκτον κεφάλαιον (σελ. 283—328) γίνεται λεπτομερὴς σπουδὴ τῶν ἀστρονομικῶν ὀργάνων: τοῦ θεοδολίχου, τοῦ πρισματικοῦ ἀστρολάβου καὶ τοῦ ἑξάντος.

***

Καὶ ἄλλοτε εὑρέθημεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὸν «Πλάτωνα» διὰ μικροτέραν τῆς παρούσης πραγματείαν τοῦ καθηγητοῦ κ. Ἰ. Ἀργυράκου, ἥτις ἔφερε τὸν τίτλον Ἀστρολάβος. Ἡ ὑπὸ κρίσιν πραγματεία εἶναι τὸ ἐκτενέστερον ἐκ τῶν ὑπ' αὐτοῦ μέχρι σήμερον δημοσιευθέντων ἔργων καὶ πληροῖ μίαν ἐπιστημονικὴν ἀνάγκην τοῦ τόπου μας. Καθ' ὅσον γνωρίζομεν, οὐδὲν τοιαύτης ἐκτάσεως ἑλληνικὸν ἔργον, ἀφορῶν εἰς τὴν Γεωδαιτικὴν Ἀστρονομίαν, ἔχει ἐκδοθῆ ἐν Ἑλλάδι παρ' ἄλλου τινος ἐπιστήμονος μέχρι σήμερον. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ ἔκδοσις τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας ἀποτελεῖ τὴν πλήρωσιν μεγάλου κενοῦ εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἐπιστημονικὴν βιβλιογραφίαν. Ὁ κ. Ἀργυρᾶκος μὲ τὴν διακρίνουσαν αὐτὸν σαφήνειαν εἰς τὴν ἔκθεσιν δυσκολωτάτων προβλημάτων, μὲ τὴν βαθεῖαν γνῶσιν τῆς ὑπὸ διαπραγμάτευσιν ὕλης, καὶ μὲ τὴν ἀρτιωτάτην διάρθρωσιν αὐτῆς ἀπὸ παιδαγωγικῆς καὶ ἐπιστημονικῆς ἐπόψεως κατώρθωσε νὰ παρουσιάσῃ ἓν ἐπιστημονικὸν ἔργον ὡλοκληρωμένον καὶ λίαν ὠφέλιμον διὰ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν Γεωδαισίαν καὶ εἰδικώτερον μὲ τὴν Γεωδαιτικὴν Ἀστρονομίαν. Νομίζομεν ὅτι δὲν εἶναι ὑπερβολὴ ἐὰν σημειώσωμεν, ὅτι ὁ κ. Ἀργυρᾶκος συνεχίζει μὲ ἀκατάβλητον ζῆλον τὸ ἔργον τῶν ἀθανάτων ἡμῶν προγόνων εἰς τὴν Γεωδαιτικὴν Ἀστρονομίαν καὶ ἰδίως τὸ ἔργον τοῦ Ποσειδωνίου.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

Δρος Ἰ. Ν. ΔΑΜΠΑΣΗ, **Ἱστορικαί, Ἰατρικαὶ μελέται,** Σειρὰ Δευτέρα, Ἔκδοσις Ἑταιρείας Κυκλαδικῶν Μελετῶν, Ἀθῆναι 1968, Σχ. 8Μ, σελ. 268.

Δύο ἔτη μετὰ τὴν κυκλοφόρησιν τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν μελετημάτων του ἐπὶ τῶν ἰατρῶν καὶ τῆς ἰατρικῆς τοῦ παρελθόντος μᾶς παρουσιάζει ἤδη καὶ τὴν δευτέραν σειρὰν αὐτῶν ὁ ἔγκριτος ἰατρικὸς ἱστορικὸς μελετητὴς κ. Δάμπασης. Ὡς καὶ εἰς τὴν πρώτην σειράν, περὶ ἧς ἐδημοσιεύθη κρίσις εἰς τὸν ΠΛΑΤΩΝΑ τόμ. ΙΗ΄ (1966) σελ. 361 ἑξ., οὕτω καὶ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ σειρᾶς αὐτοτελῶν μελετῶν δημοσιευθεισῶν εἰς ἰατρικὰ καὶ ἐπιστημονικὰ περιοδικὰ κατὰ τὰ ἔτη 1965—1967. Αὗται συμπληρούμεναι νῦν εἰς ἑνότητας ἐφοδιάζονται διὰ σημειωμάτων εἰσαγωγικῶν, δι' ὧν ὑποβοηθεῖται ἡ ἐνιαία θεώρησις τῶν ἰατρικῶν ἀντιλήψεων ἐν τῷ πλαισίῳ τῶν φιλοσοφικῶν ῥευμάτων τῆς ἐποχῆς των καὶ ἡ παρακολούθη-

23

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΒ' 1970

ΤΟΜΟΣ 22 ΤΕΥΧΗ 43/44

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΕΛ. ΚΑΣΤΡΙΝΟΥ
ΜΕΝΑΝΔΡΟΥ 21 — ΑΘΗΝΑΙ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΒ' 1970
ΤΟΜΟΣ 22 ΤΕΥΧΗ 43/44

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
Δ. ΣΠΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΦΥΛΗΣ 24—ΑΘΗΝΑΙ

EUCLIDES Post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, **Elementa I—V,** Leipsig 1969, **Elementa V—IX,** Leipsig 1970, BSB B. G. Teubner (Bibliotheca Scriptorum et Romanorum Teubneriana). ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ **Στοιχεῖα, ἐκδότης Ε. Σ. Σταμάτης.**

Ἀποτελεῖ ἰδιαιτέραν τιμὴν διὰ τὴν Ἑλληνικὴν Ἐπιστήμην ὅτι ὁ ἡμέτερος διακεκριμένος ἐκπαιδευτικὸς Εὐάγγελος Σταμάτης ἐξελέγη ὑπὸ τοῦ οἴκου Teubner νὰ ἀναλάβῃ τὴν νέαν ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τοιαύτη τιμὴ εἶχε γίνει παλαιότερον εἰς τὸν Γρηγ. Βερναρδάκην πρὸς ἔκδοσιν τῶν Ἠθικῶν τοῦ Πλουτάρχου καὶ εἰς τὸν Πέτρον Παπαγεώργιον πρὸς ἔκδοσιν τῶν Σχολίων τοῦ Σοφοκλέους ἐκ τοῦ Λαυρεντιακοῦ κώδικος, βραδύτερον δὲ εἰς τὸν Ἰω. Συκουτρῆν πρὸς ἔκδοσιν τοῦ Δημοσθένους.

Ὁ Σταμάτης ἦτο ἐνδεδειγμένος διὰ τὸ ἔργον τῆς ἐκδόσεως τοῦ Εὐκλείδου ὑπὲρ πάντα ἄλλον ἡμέτερον καὶ ξένον, διότι ἤδη ἔχει δώσει ἀποδείξεις τῆς βαθυτάτης γνώσεως τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὰ συχνάκις κατὰ τρόπον παρεφθαρμένον καὶ χασματώδη παραδοθέντα χειρόγραφα τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν, τῶν ἀρχαίων σχολιαστῶν αὐτῶν καὶ τῶν ὑπομνηματιστῶν. Οὗτος ἔχει ἤδη ἐκδόσει ὁλόκληρον τὸ ἔργον τοῦ Εὐκλείδου εἰς τέσσαρας τόμους ἀπὸ 1952—1957 μὲ ἐμβριθεῖς εἰσαγωγάς, ἀποκατάστασιν τοῦ κειμένου, μετάφρασιν εἰς νεοελληνικὴν γλῶσσαν καὶ πλουσίας ἐπεξηγήσεις, καὶ ἔχει ἀποδείξει διὰ πλείστων μελετῶν καὶ ἀνακοινώσεων εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν τὴν στενοτάτην οἰκειότητα αὐτοῦ πρὸς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Ἑλληνικῆς Ἀρχαιότητος. Ἡ ἔκδοσις τοῦ 1952—1957 εἶχε χαιρετισθῆ διεθνῶς μὲ πολλὴν εὐμένειαν, εἰς δὲ τὴν μεγάλου κύρους Deutsche Literaturzeitung τόμ. 79 (1958) τ. 6 ὁ ἐκ τῶν εἰδικῶν μαθηματικὸς J. Hofmann ἐπῄνεσε τὰ νέα στοιχεῖα τῆς ἐκδόσεως Σταμάτη καὶ ἰδιαιτέρως «τὴν ἐξαίρετον ἀπόδοσιν τοῦ κειμένου μὲ τὰς πολυτίμους ἀνεξαρτήτους ὁλοκληρώσεις αὐτοῦ».

Εἰς τὴν νέαν ἔκδοσιν τῶν δύο πρώτων μέχρι τῆς στιγμῆς τόμων τοῦ Εὐκλείδου παρὰ τῷ Teubner ὁ Σταμάτης ἐδικαίωσε τὰς ἐπ' αὐτὸν στηριχθείσας προσδοκίας. Εἰσηγήσει του παρελείφθη ἡ εἰς λατινικὴν μετάφρασις, ὁ ἴδιος δὲ ἔναντι τῆς παλαιοτέρας ἐκδόσεως τοῦ Heiberg τοῦ 1833 ἐπέφερε βελτιώσεις εἰς τὰ ἀκόλουθα σημεῖα: Συνέγραψεν ἰδικόν του πρόλογον εἰς λατινικὴν—διότι τὰ πάντα ἐκτὸς τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὰς ἐκδόσεις Teubner γράφονται λατινιστὶ —καὶ προσέθηκεν ἀνάλυσιν τοῦ περιεχομένου ἑκάστου τῶν βιβλίων εἰς ἀμφοτέρους τοὺς τόμους. Προσέθηκε περαιτέρω σημείωμα ἐκθέτον τὰς τέσσαρας μεθόδους ἀποδείξεως τὰς χρησιμοποιουμένας εἰς τὰ Στοιχεῖα—συνθετικήν, ἀπαγωγὴν εἰς ἄτοπον, ἀναλυτικὴν καὶ πλήρη ἐπαγωγὴν—μνημονεύων καὶ τὰ θεωρήματα εἰς ἃ χρησιμοποιεῖται ἡ τελευταία μέθοδος. Προσέθηκε κατάλογον τῶν ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος κυριωτέρων ἐκδόσεων τῶν Στοιχείων καὶ κατάλογον τῶν σπουδαιοτέρων περὶ τούτων πραγματειῶν ἀπὸ τοῦ 1909 μέχρι σήμερον. Κατάλογον συντμήσεων ὀνομάτων τῶν συγγραμμάτων καὶ κατάλογον κωδίκων καὶ συμβόλων. Διώρθωσε τὰ τυπογραφικὰ σφάλματα καὶ τὰ σφάλματα τῶν σχημάτων τῆς προη-

γουμένης ἐκδόσεως. Παρέθεσε τρία παπυρικὰ ἀποσπάσματα ἐκ τοῦ Β′, Γ′ καὶ Γ′/Δ′ αἰ. ἀναφερόμενα εἰς τοὺς ὅρους τὸ ἓν καὶ εἰς τὰ βιβλία 1 στοιχ. λθ′ καὶ 2 στοιχ. ε′ τὰ ἄλλα δύο. Προσέθηκεν ἴδιον κριτικὸν ὑπόμνημα μεταξὺ τοῦ κειμένου καὶ ὑπομνήματος τοῦ Heiberg, εἰς τὸ ὁποῖον ἐν ἑκάστῃ σελίδι ἐνδεικνύει εἰς ποῖον ὁρισμὸν ἢ αἴτημα ἢ κοινὴν ἔννοιαν ἢ εἰς ποῖον προηγούμενον θεώρημα στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἐξεταζομένου θεωρήματος. Τὸ πληροφοριακὸν τοῦτο ὑπόμνημα διευκολύνει σπουδαίως τὸν μελετητήν.

Λίαν σημαντικὴ εἶναι ὡσαύτως καὶ ἡ προσθήκη τριῶν μετὰ μόχθου συνταχθέντων στατιστικῶν πινάκων, διὰ πρώτην φορὰν προστιθεμένων εἰς τὴν ἔκδοσιν. Ὁ πρῶτος πίναξ ἐμφαίνει πόσους ὁρισμούς, αἰτήματα, κοινὰς ἐννοίας καὶ προτάσεις περιέχει ἕκαστον τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων πρὸς δὲ καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν σχολίων καὶ ἑτέρων ἀποδείξεων ἀναφερομένων εἰς τὰ Παραρτήματα τῶν βιβλίων τούτων. Ὁ δεύτερος πίναξ ἐμφαίνει ἀναλυτικώτερον τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁρισμῶν, αἰτημάτων, κοινῶν ἐννοιῶν, θεωρημάτων, προβλημάτων καὶ πορισμάτων εἰς ἕκαστον βιβλίον τῶν στοιχείων. Καὶ ὁ τρίτος πίναξ ἐμφαίνει ἀριθμητικῶς τὰς καθ' ἕκαστα προτάσεις ἑκάστου βιβλίου, εἰς ἃς χρησιμοποιοῦνται α′) τὰ καθ' ἕκαστον αἰτήματα καὶ β′) αἱ καθ' ἕκαστα κοιναὶ ἔννοιαι.

Διὰ τῶν προσθηκῶν τούτων καὶ τῶν βελτιώσεων τοῦ κειμένου, στηριχθεισῶν εἰς τὴν μελέτην καὶ νεωτέρων χειρογράφων, ἡ νέα ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου παρουσιάζει ἐμφανῆ βελτίωσιν ἔναντι τῆς προηγουμένης καὶ διευκολύνει σημαντικῶς τοὺς μελετητάς.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

***

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ, **Ἀρχιμήδους ἅπαντα**, τόμος Α′ μέρος Α′: Μαρτυρίαι Ἑλληνικαὶ—Λατινικαί, τόμος Α′ μέρος Β′: Κείμενον, μετάφρασις, σχόλια. Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1970, σχ. 8μ (κειμένων Λειψίας) σελ. XII/382, XVI/538.

Ὁ Εὐάγγελος Σταμάτης, γνωστὸς εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ «Πλάτωνος» ἐκ τῶν ὑπερτριάκοντα πραγματειῶν καὶ βιβλιοκρισιῶν αὐτοῦ δημοσιευθεισῶν ἐν αὐτῷ καὶ ἐκ τῶν ποικίλων ἐργασιῶν καὶ ἀνακοινώσεων αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἀρχαίων μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν ἐκδόσεων αὐτοῦ ἀπὸ μὲν τοῦ 1952—1957 τῶν τεσσάρων τόμων τοῦ Εὐκλείδου, τῷ δὲ 1963 τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, προβαίνει νῦν χορηγίᾳ τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὴν βάσιν τῆς ἐκδόσεως ταύτης κεῖται τὸ κείμενον τῆς τριτόμου β′ ἐκδόσεως Heiberg παρὰ τῷ Teubner τῶν ἐτῶν 1910, 1913, 1915. Τοῦ Α′ τόμου τῆς ἐκδόσεως Heiberg 1910 τὸ κείμενον περιέχεται εἰς τὸν Α′ τόμον, Β′ μέρος

τῆς ἐκδόσεως Σταμάτη, ἐν ᾧ ὁ Α′ τόμος Α′ μέρος τῆς ἐκδόσεως ταύτης εἶναι προσθήκη νέα τοῦ Ἕλληνος ἐκδότου.

Τὴν ἀπὸ μακροῦ προετοιμαζομένην ἔκδοσιν τοῦ Ἀρχιμήδους εἶχε προαναγγείλει ὁ σ. εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ἐν τῷ τόμῳ ΙΘ′ (1967) σελ. 150—153, ἔνθα προέβαινεν εἰς διορθώσεις καὶ προσθήκας ἐπὶ τῆς β′ ἐκδ. τοῦ Heiberg καὶ ἀνεκοίνου τὸ πρῶτον τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἀνακατασκευὴν τῶν ἐλλειπουσῶν ἐκφωνήσεων πέντε θεωρημάτων τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α′. Ἡ ἀνακατασκευὴ ἐγένετο εἰς γλῶσσαν Ἀττικὴν ἀνάλογον πρὸς τὰς λοιπὰς ἐκφωνήσεις, στηριχθεῖσαν εἰς τὰ στοιχεῖα τῶν οἰκείων ἀποδείξεων. Ἡ ἀνασύνθεσις αὕτη ἐκρίθη εὔστοχος, διὸ καὶ ὁ καθηγητὴς τῆς Νικαίας Mugler περιέλαβε τὸ κείμενον τοῦτο τοῦ Σταμάτη εἰς τὸν Α′ τόμον τῆς ὑπ' αὐτοῦ ἐκδόσεως τοῦ Ἀρχιμήδους.

Εἰς τὸ Α′ μέρος τοῦ Α′ τόμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἔργον ἀποκλειστικὸν τοῦ συγγραφέως, μετὰ βραχὺν πρόλογον ἕπεται ἡ εἰσαγωγὴ περὶ τοῦ βίου, τῆς δράσεως, τῶν ῥήσεων, τῶν μηχανικῶν ἀνακαλύψεων καὶ τῶν συγγραμμάτων τοῦ Ἀρχιμήδους, περὶ τῆς γλώσσης αὐτῶν καὶ τοῦ περιεχομένου, συνοπτικῶς ἀναλυομένου, περὶ τῶν ἐκδόσεων τῶν διασωθέντων ἔργων καὶ περὶ τῶν ἀπολεσθέντων. Ἀκολουθοῦν αἱ μαρτυρίαι (testimonia) τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους συλλεγεῖσαι ἐξ ἀναριθμήτων συγγραφέων Ἑλλήνων καὶ Λατίνων τῆς Ἑλληνιστικῆς, Ρωμαϊκῆς καὶ Μεσαιωνικῆς περιόδου καὶ ἐκ διαφόρων παλαιῶν συλλογῶν καὶ ἀποσπασμάτων ἀρχαίων συγγραφέων καὶ ἀρχαίων σχολιαστῶν. Αἱ παρατιθέμεναι μαρτυρίαι ἐρανισθεῖσαι μετὰ μόχθου ἀνέρχονται εἰς 273, ὧν 56 Λατίνων συγγραφέων, αἱ δὲ λοιπαὶ Ἑλλήνων. Τῶν μαρτυριῶν τούτων τὸ κείμενον φέρεται εἰς τὰς ἀριστερὰς σελίδας τοῦ βιβλίου, ἡ δὲ μετάφρασις εἰς τὰς δεξιάς.

Ὁ ἡμίτομος οὗτος περιέχει ἐπίσης πλῆθος πινάκων: 1) τῶν μαρτυριῶν ἐν περιλήψει κατὰ τὰ ὀνόματα τῶν μνημονευόντων αὐτὰς συγγραφέων ἀλφαβητικῶς διατεταγμένα 2) τῶν σπουδαιοτέρων μαρτυριῶν διατεταγμένων κατ' εἶδος ἀλφαβητικῶς 3) τῶν Ἀρχιμηδείων ῥήσεων μετ' ἐνδείξεως τοῦ ἀριθμοῦ τῆς μαρτυρίας των ἐν τῷ βιβλίῳ καὶ 4) τῶν συγγραφέων τῶν μαρτυριῶν μετ' ἐνδείξεως τοῦ χρόνου τῆς ἀκμῆς των. Ἐπίσης παρατίθεται καὶ βιβλιογραφία πλουσία ἐκ 44 σελίδων ἀπὸ τοῦ ἔτους 1500—1968, συνταχθεῖσα—ἐκτὸς 40 τίτλων—ὑπὸ Γ. Καγιᾶ, πίναξ ὀνομάτων καὶ λέξεων καὶ εἰκόνες ἀρχαίων σχεδιασμάτων τεχνικῶν τινων ἐφευρέσεων τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ὁ ἡμίτομος οὗτος ὀφειλόμενος εἰς τὴν φιλοπονίαν καὶ τὴν ἐπιστημοσύνην τοῦ Σταμάτη ὁλοκληρώνει τὴν ἀξίαν τῆς νέας ἐκδόσεως τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ τῆς ἑλληνιστικῆς ἀρχαιότητος.

Ὁ τόμος Α′, μέρος Β′ περιέχει τὸ κείμενον τοῦ Α′ τόμου τῆς ἐκδόσεως Heiberg μὲ τὰς ἑξῆς διαφοράς: 1) Ἀντὶ τῆς Λατινικῆς μεταφράσεως περιέχει νῦν τὴν Νεοελληνικὴν τοῦ Σταμάτη 2) τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ κειμένου διωρθώθησαν τυπογραφικά τινα παροράματα 3) δύο σχημάτων ἐγένετο διόρθωσις, ἤτοι τῶν θεωρημάτων 7 καὶ 39 τοῦ βιβλίου Α περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου 4) ἐγένοντο διορθώσεις καὶ συμπληρώσεις τοῦ κειμένου (ἐπὶ λαθῶν προερχομένων ἐκ τῶν ἀρχαίων ἀντιγραφέων) εἰς ἀριθμὸν δεκάδων τινῶν καὶ 5) ἐγένετο ἡ ἀνακα-

τασκευὴ τῆς ἐλλειπούσης ἐκφωνήσεως πέντε θεωρημάτων, ὡς ἐξετέθη ἀνωτέρω.

Ἐπίσης προσετέθη βραχὺς πρόλογος τοῦ Σταμάτη, πίναξ τῶν ἐν τῷ I τόμῳ τοῦ Heiberg (=Αβ' Σταμάτη) προτάσεων, σχόλια ἑκατὸν περίπου σελίδων πρὸς ἐπεξήγησιν τῶν δυσκολωτέρων προτάσεων τοῦ κειμένου καὶ πλούσιον εὑρετήριον τῶν λέξεων—ὅρων α') τῶν τριῶν πρώτων βιβλίων καὶ β') τοῦ τετάρτου, περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων.

Δεδομένου ὅτι τὸ κείμενον τοῦ Heiberg δίδεται ἐδῶ βελτιωμένον, ἡ δὲ ἔκδοσις ἡ νέα τοῦ Ἀρχιμήδους ἐπλουτίσθη μὲ μαρτυρίας δυσευρέτους, μὲ μετάφρασιν Νεοελληνικήν, μὲ πλουσίας ἐπεξηγήσεις καὶ μὲ παντοειδεῖς πίνακας, δύναταί τις νὰ εἴπῃ ὅτι διὰ τῆς παρούσης ἐκδόσεως ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα σημειοῖ ἀξιόλογον προώθησιν, ἡ δὲ ἑλληνικὴ συμβολή, εὗρεν εὐπρόσωπον τὴν ἐκδήλωσίν της εἰς τὴν Ἀρχιμήδειον ἔρευναν μετὰ σιγὴν πολλῶν αἰώνων χάρις εἰς τὸν ἀκάματον ἐργάτην τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήτης Εὐάγγελον Σταμάτην.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

***

Γ. Π. ΣΑΒΒΑΝΤΙΔΗ, **Ἀπὸ τὴν χειρόγραφη παράδοση τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος**, Ἰωάννινα 1970, σχ. 8μ. σελ. 43.

Ἡ πραγματεία αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐργασίας. Πρῶτον ἀπὸ μίαν παλαιογραφικὴν ἔρευναν ἐπὶ τῆς σχέσεως τοῦ κώδικος Τ πρὸς τὸν Α τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος καὶ δεύτερον ἀπὸ μίαν φιλολογικὴν διόρθωσιν εἰς τὸ χωρίον τῆς Πλάτ. Πολ. **6**. 20 (509 D).

Εἰς τὴν πρώτην ἐργασίαν του ὁ συγγραφεὺς παραθέτει κατ' ἀρχὰς πίνακα τῶν κωδίκων τοῦ Πλατωνικοῦ κειμένου. Ἔπειτα ἐκθέτει βραχέως τὸν τρόπον τῆς κατὰ παράδοσιν ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Πλάτωνος καὶ παρουσιάζει εἰδικώτερον τὸν κώδικα Τ, τὸ περιεχόμενόν του, τὴν σχέσιν του πρὸς τὸν Α καὶ τὴν περὶ αὐτοῦ ἐκτίμησιν τῶν νεωτέρων ἐκδοτῶν. Ἀκολούθως διερευνᾷ τὴν συγγένειαν, τὰς διαφορὰς καὶ τὰς ἀποκλίσεις μεταξὺ τῶν Α καὶ Τ πρὸς δὲ καὶ τὰ κοινὰ καὶ διάφορα σημεῖα τούτων ἔναντι τοῦ Μ. Οὕτω ὁ σ. καταλήγει εἰς ὡρισμένας διαπιστώσεις, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων συνεξεταζομένων καὶ τῶν μέχρι σήμερον ἐκφρασθεισῶν γνωμῶν καταλήγει εἰς σχῆμα καταγωγῆς τῶν ΑΤΜ ἐξ ὡρισμένου ὑπαρχετύπου μέσῳ διαφόρων δι' ἕκαστον τῶν τριῶν τούτων κωδίκων ἐνδιαμέσων ἀντιγράφων. Ὡς εἰδικώτερον συμπέρασμα τοῦ σ. προκύπτει ὅτι ὁ κῶδιξ Τ περιέχει γραφὰς καλυτέρας τοῦ Α καὶ πρέπει νὰ δίδεται εἰς τὸ κείμενον αὐτοῦ περισσοτέρα προσοχή, ἐν τῇ συνεξετάσει πάντοτε καὶ τῶν λοιπῶν χφφ. τῆς παραδόσεως.

Τὴν ἐπιμέλειαν τῆς ἐρεύνης τοῦ σ. προδίδουν οἱ παρατιθέμενοι πίνακες, ἐν οἷς ἐμφαίνονται τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς ὅλων τῶν κωδίκων στοιχεῖα, ἅτινα καταδεικνύουν κοινὰς παραλείψεις, κοινὰς γραφὰς καὶ ἀποκλινούσας γραφὰς με-

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΓ' 1971

ΤΟΜΟΣ **23** ΤΕΥΧΗ **45/46**

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΕΛ. ΚΑΣΤΡΙΝΟΥ
ΜΕΝΑΝΔΡΟΥ 21 — ΑΘΗΝΑΙ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΓ' 1971

ΤΟΜΟΣ **23** ΤΕΥΧΗ 45/46

## ΤΟΜΟΣ ΑΝΑΜΝΗΣΤΙΚΟΣ ΤΗΣ 150/ΕΤΗΡΙΔΟΣ ΤΗΣ ΕΘΝΕΓΕΡΣΙΑΣ ΤΟΥ 1821

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΣΑ. ΚΑΣΤΡΙΝΟΥ
ΜΕΝΑΝΔΡΟΥ 21 — ΑΘΗΝΑΙ

ἐκείνης ἀντιθέσεως καὶ πάλης μεταξὺ τοῦτο μὲν τῆς ἀξιώσεως καὶ τοῦ σκοποῦ πρὸς δήλωσιν καὶ βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας, τοῦτο δὲ τῆς ἀτελοῦς καὶ ἀνεπαρκοῦς ἐν τούτῳ δυνατότητος. Διὰ τῆς ὁμολογίας τοῦ ἱστορικοῦ, ὅτι ἀποδίδει τὰ λεγόμενα : relata refero, ἀναλαμβάνει παρ' αὐτῷ ἡ πλασματικὴ ἐξεύρεσις καὶ δημιουργία παντοειδῶν πηγῶν φυσικήν τινα καὶ ἀναγκαίαν δικαίωσιν καὶ ἀπολογίαν.

Ἐν τῷ τετάρτῳ τέλος κεφαλαίῳ τῆς ἐργασίας αὐτοῦ ποιεῖται λόγον ὁ συγγραφεὺς περὶ τῶν τυπικῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς χρήσεως αὐτῶν παρ' Ἡροδότῳ.

Ἐν τέλει τῆς ἐργασίας αὐτοῦ ποιεῖται λόγον ὁ συγγραφεὺς περὶ τῶν ἐκδημιῶν τοῦ Ἡροδότου, περὶ τῆς κοινωνικῆς θέσεως αὐτοῦ, περὶ τῆς ἀξιοπιστίας αὐτοῦ, περὶ τῶν πραγματικῶν καὶ ἀληθῶν πηγῶν αὐτοῦ, περὶ τῆς γενέσεως καὶ συστάσεως τοῦ ἔργου αὐτοῦ, περὶ τῆς ἐντάξεως αὐτοῦ ἐν τῇ ἱστορίᾳ τῆς ἐπιστήμης καὶ περὶ τῆς ἐπιβιώσεως αὐτοῦ.

Ἀκολουθοῦσι περίληψις τοῦ περιεχομένου, βιβλιογραφία καὶ τέλος δύο πίνακες, πίναξ ὀνομάτων κλασσικῶν συγγραφέων μετ' ἀναγραφῆς τῶν οἰκείων χωρίων αὐτῶν καὶ πίναξ πραγμάτων ἀναλυθέντων καὶ διασαφηθέντων ἐν τῇ ἐργασίᾳ.

Τὸ θέμα αὐτοῦ ἀναπτύσσει καὶ ἑρμηνεύει ὁ κ. Fehling μετ' ἀκριβείας καὶ εὐσυνειδησίας ἀξίας παντὸς ἐπαίνου· κατόπιν ἐμβριθοῦς τῶν πραγμάτων ἐλέγχου παρέχει ἡμῖν ὁ συγγραφεύς, ἄριστος γνώστης τοῦ Ἡροδότου, πρωτότυπα ἱστορικὰ καὶ φιλολογικὰ πορίσματα, δι' ὧν σπουδαίως πλουτίζει καὶ προάγει τὴν ἡροδότειον γραμματείαν καὶ εὐστόχως διασαφεῖ παντοειδῆ ἐν αὐτῇ προβλήματα κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον δύσλυτα καὶ δυσχερῆ. Τὴν δικαιοτέραν καταξίωσιν τῆς λαμπρᾶς ταύτης ἐργασίας ἀποτελεῖ ἡ σύστασις καὶ προτροπὴ πρὸς ἀνάγνωσιν αὐτῆς ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους. Ἀγαθὸν ἔργον θὰ ἐπετελεῖτο παρ' ἡμῖν, εἴ τις τῶν νεαρῶν ἡμῶν φιλολόγων, οἵτινες ἐσπούδασαν ἢ σπουδάζουσιν ἐν Γερμανίᾳ, ἀνελάμβανε τὸν εὐχάριτα μόχθον τῆς μεταφράσεως τῆς ἐργασίας ταύτης εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν.

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΙΩ. ΜΕΡΕΝΤΙΤΗΣ,

τακτικὸς καθηγητὴς τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς φιλολογίας
ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν.

***

CHARLES MUGLER, **Archimède**, tome I, 1970, tome II et III, 1971, Paris Société d' Édition «Les Belles Lettres», sous le patronage de l'Association Guillaume Budé.

Ὁ καθηγητὴς τοῦ γαλλικοῦ Πανεπιστημίου τῆς Nice, Charles Mugler, εἶναι γνωστὸς εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ Πλάτωνος ἐκ κριτικῶν, αἵτινες ἐδημοσιεύθησαν διὰ τὰ δύο περίφημα ἔργα του :

1. Ἱστορικὸν λεξικὸν τῆς γεωμετρικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων (Πλάτων Ι', τεύχη Α'—Β', 1958, σελ. 430—433) καὶ

2. Ἡ Ὀπτικὴ ἐν τῇ ἀρχαίᾳ Ἑλλάδι καὶ τὸ Ἱστορικὸν Λεξικὸν τῆς ὀπτικῆς ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων, (Πλάτων ΙΖ', τεύχη 33/34, 1965, σελ. 13—25).

Ἤδη ὁ κ. Mugler, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ τὴν πλέον αὐθεντικὴν προσωπικότητα ἐν Γαλλίᾳ, ἐπὶ τῶν Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐξέδωκεν εἰς τρεῖς τόμους τὰ Ἅπαντα τοῦ Ἀρχιμήδους. Καθ' ὅσον γνωρίζομεν εἶναι ἡ πρώτη φορά, καθ' ἣν ἐν Γαλλίᾳ ἐκδίδεται τὸ ἀρχαῖον ἑλληνικὸν κείμενον τῶν σωζομένων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους μὲ παράπλευρον γαλλικὴν μετάφρασιν. Καὶ τὸ δυσχερὲς τοῦτο ἔργον ἀνέλαβε καὶ ἔφερεν εἰς αἴσιον πέρας ὁ κ. Mugler. Ἡ ἔκδοσις στηρίζεται κατ' ἀρχὴν εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τοῦ I. L. Heiberg τὴν γενομένην ἐν Λειψίᾳ κατὰ τὰ ἔτη 1910, 1913, 1915. Ὁ συγγραφεὺς ὅμως ἠρεύνησε καὶ συνέκρινεν ἐκ νέου τοὺς συναφεῖς κώδικας, πολλοὶ τῶν ὁποίων φυλάσσονται εἰς τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων.—Κατόπιν λεπτομεροῦς εἰσαγωγῆς, ἥτις περιλαμβάνεται εἰς 30 σελίδας, ἀκολουθοῦν τὰ ἐξῆς ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸν Ι τόμον: Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, Κύκλου μέτρησις, Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων. Εἰς τὸν ΙΙ τόμον περιλαμβάνονται τὰ ἔργα: Περὶ ἑλίκων, Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν, Ψαμμίτης, Τετραγωνισμὸς παραβολῆς. Ὁ τρίτος τόμος περιλαμβάνει τὰ ἔργα: Ὀχουμένων, Στομάχιον, Ἡ μέθοδος (περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος), Βιβλίον λημμάτων, Πρόβλημα βοεικόν.

Εἰς τὰς προτασσομένας σημειώσεις, εἰς τὸ βιβλίον Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων (δηλ. παραβολοειδῶν—ὑπερβολοειδῶν καὶ ἐλλειψοειδῶν ἐκ περιστροφῆς), ὁ συγγραφεὺς τονίζει εὐστόχως τὴν χρησιμοποίησιν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους Ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Τὴν αὐτὴν παρατήρησιν προτάσσει εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ἑλίκων. Ἑρμηνευτικαὶ ὑποσημειώσεις τίθενται εἰς τὰς περισσοτέρας προτάσεις, συνοδευόμεναι ἐνίοτε καὶ μὲ τὰς ἀναγκαίας παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ κειμένου.

Εἰς τὰς συμπληρωματικὰς σημειώσεις τοῦ πρώτου τόμου ὁ κ. Mugler παραθέτει καὶ τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῶν ἐκφωνήσεων 5 θεωρημάτων τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, βιβλίου α, αἵτινες ἀπωλέσθησαν, παραλαβὼν αὐτάς, ὡς σημειοῖ, ἐξ ἑλληνικῆς πραγματείας δημοσιευθείσης εἰς τὸν «Πλάτωνα» ὑπὸ τὸν τίτλον ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ, τόμος 19, 1967, σελ. 151.

Εἰς τὸν τρίτον τόμον, ἡ εἰς τὴν ἀραβικὴν διασωθεῖσα πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον «Βιβλίον λημμάτων» παρατίθεται εἰς τὴν γαλλικήν, εἰς τὴν λατινικήν, προσέτι δὲ καὶ εἰς τὴν ἀρχαίαν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον. Εἰς τὴν διάλεκτον ταύτην ἡ πραγματεία αὕτη ἐδημοσιεύθη τὸ πρῶτον εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (Νέα Σειρά, τόμος 6 ΙΙ, τεῦχος 2, 1965, σελ. 265—297), ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ συγγραφέως, τοῦ δημοσιεύσαντος εἰς τὸν «Πλάτωνα» καὶ τὴν πραγματείαν «ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ». Ἡ μετάφρασις ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τῆς πραγματείας αὐτῆς ἐγένετο τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ I. Gravius ἡ δὲ δημοσίευσις ἐν Λονδίνῳ κατὰ τὸ ἔτος 1659. Βραδύτερον αὕτη μετεφράσθη ἐκ νέου ὑπὸ τοῦ Abraham Ecchellensis καὶ ἐξεδόθη ἐν Φλωρεντίᾳ, τῷ 1661 μετὰ τῶν βιβλίων τοῦ Ἀπολλωνίου V—VII ὑπὸ τοῦ I. A. Borellus.

Αἱ ὀλίγαι ἀλλὰ λεπτολόγοι διορθώσεις τοῦ κειμένου ἀποδεικνύουν τὴν ἐξονυχιστικὴν ἔρευναν τοῦ συγγραφέως, ὅστις ἔτυχεν ἐπὶ τούτοις τῆς φιλόφρονος συμπαραστάσεως, ὡς εὐγνωμόνως σημειοῦται εἰς τὸν πρόλογον τοῦ δευτέρου τόμου, τῶν παπυρολόγων καθηγητῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῶν Παρισίων κ. κ. J. Irigoin καὶ E. Delebecque. Ὁ ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν τῆς Ἑταιρείας (Association) Guillaume Budé λαμπρὸς παρισινὸς Ἐκδοτικὸς Οἶκος «Les Belles Lettres» ἀνταπεκρίθη εἰς ὅλας τὰς τεχνικὰς καὶ καλλιτεχνικὰς ἀπαιτήσεις τοῦ συγγραφέως. Τὸ ἀρχαῖον κείμενον ἐτέθη εἰς τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ σελίδας, ἐν ᾧ ἡ γαλλικὴ μετάφρασις ἐτέθη εἰς τὰς πρὸς τὰ ἀριστερά, ὡς τοῦτο γίνεται εἰς τὰς ἐκδόσεις «Les Belles Lettres» τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ Λατίνων συγγραφέων. Αἱ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τόμου τεθεῖσαι σημειώσεις ὑποβοηθοῦσι πολὺ τὸν ἀναγνώστην εἰς τὴν κατανόησιν δυσκόλων τινῶν Ἀρχιμηδείων προτάσεων. Ἄξια ἐξάρσεως τυγχάνει καὶ ἡ ἐπιτυχὴς σκέψις τοῦ κ. Mugler, ὅπως τὰ σχήματα τοῦ κειμένου τεθῶσιν αὐτούσια (μὲ τὰ ἑλληνικὰ γράμματα) καὶ εἰς τὸ γαλλικὸν κείμενον.

Θὰ ἦτο παράλειψις ἐὰν δὲν ἐσημειοῦμεν, ὅτι ὁ κ. Mugler διέθεσεν 30 συναπτὰ ἔτη τῆς ζωῆς του (ἀπὸ τοῦ 1940) διὰ τὴν ἔκδοσιν τριῶν ἑλληνικῶν ἔργων: 1) τοῦ Λεξικοῦ τῆς Γεωμετρικῆς Ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων, 2) τοῦ Λεξικοῦ τῆς Ὀπτικῆς Ὁρολογίας τῶν Ἑλλήνων καὶ 3) τῶν 3 τόμων τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἡ Διεθνὴς Ἐπιστήμη, καὶ ἰδιαιτέρως ἡ Ἑλληνική, εἶναι εὐγνώμων πρὸς τὸν ἀκαταπόνητον καὶ ἔνθερμον ἐργάτην καθηγητὴν κ. Charles Mugler, τοῦ ὁποίου τὸ λαμπρὸν ἔργον καθιστᾷ ἐπίκαιρα τὰ μεγάλα μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πνεύματος.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

HELMUTH GERICKE, **Geschichte des Zahlbegriffs,** Bibliographisches Institut, Manheim - Wien - Zürich, (Hochschultaschenbücher 172/172a. Forschungsinstitut des Deutschen Museums, Reihe D, 1970).

Κατὰ τὸν συγγραφέα, καθηγητὴν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Μονάχου καὶ διευθυντὴν τοῦ Τμήματος Ἐρευνῶν διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς τοῦ ἐν Μονάχῳ Γερμανικοῦ Μουσείου (τῆς Τεχνικῆς) οἱ Ἕλληνες δὲν ἔκαμαν ἁπλῶς πράξεις μὲ τοὺς ἀριθμούς, ἀλλ' ἐθεώρουν αὐτοὺς ὡς ἀντικείμενα, διὰ τὰς ἰδιότητας τῶν ὁποίων ἠδύνατο κανεὶς νὰ ἐκφέρῃ διαφόρους ὑποθέσεις. Ἐκ τῶν ὑποθέσεων τούτων προέκυψαν διάφοροι ὁρισμοὶ τῶν ἀριθμῶν. Οὗτοι περιελάμβανον μόνον τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Ὁρισμοὶ διὰ τὰ κλάσματα ὑπάρχουν εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ 7ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐν ᾧ διὰ τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς δὲν ὑπάρχουν ὁρισμοί, διότι ἡ σχετικὴ θεωρία ἀναφέρεται εἰς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, περὶ τῶν ὁποίων ἐκτενῶς πραγματεύεται ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ 10ον βιβλίον τῶν Στοιχείων του.

Ἀπὸ τοῦ δεκάτου ἕκτου αἰῶνος ἤρχισε νὰ διευρύνεται ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, ὁπότε ἡ ἔννοια τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἔλαβε συγκεκριμένην μορφήν. Ἡ ἀνάγκη ἑνὸς νέου καθορισμοῦ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐγένετο καταφανὴς κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς, καθ' ὃ μία συνάρτησις συνεχὴς εἰς ἓν διάστημα, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἔχουν διάφορα πρόσημα, πρέπει νὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον μίαν μηδενικὴν τιμὴν (ρίζαν), ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ὅτι μία ἀκολουθία πληροῦσα τὴν συνθήκην συγκλίσεως τοῦ Cauchy ἔχει ἓν ὅριον. Ἀξιωματικοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἀριθμῶν ἐπεχείρησε πρῶτος ὁ Δαβὶδ Χίλμπερτ περὶ τὸ 1900. Διὰ τῶν ὁρισμῶν τούτων, οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ ἀνήχθησαν εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, οἱ πραγματικοὶ εἰς τοὺς ῥητοὺς καὶ οἱ ῥητοὶ εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

Τὸ βιβλίον διαιρεῖται εἰς 5 κεφάλαια μὲ πολλὰς ὑποδιαιρέσεις ἑκάστου κεφαλαίου. Διὰ τῆς ἀνωτέρω πραγματείας του ὁ κ. Gericke προσφέρει σπουδαιοτάτην συμβολὴν εἰς τὴν παρακολούθησιν τῆς ἐξελίξεως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων μέχρι σήμερον. Ἡ σαφήνεια, ἀλλὰ καὶ ἡ ἀκρίβεια τῆς διατυπώσεως κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῆς ἱστορικῆς ἐξελίξεως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καθιστᾷ τὸ βιβλίον ἐξόχως ὠφέλιμον.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

*
* *

GEORGIOS CH. KOUMAKIS, **Platons Parmenides**. Zum Problem seiner Interpretation (=Abhandlungen zur Pbilosophie, Psychologie und Pädagogik, τόμ. 74) Bouvier Verlag Bonn 1971 σσ. 240.

Ἡ ἀνωτέρω ἐργασία ἀντικείμενον ἔχουσα τὸν «Παρμενίδην» τοῦ Πλάτωνος ἀποτελεῖ ἐπὶ διδακτορίᾳ διατριβὴν ἐν τῇ φιλοσοφικῇ Σχολῇ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βόννης καὶ σκοπεῖ τὴν ἑρμηνείαν καὶ ἔρευναν τοῦ προβλήματος τοῦ πλατωνικοῦ Παρμενίδου. Βεβαίως τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πρόβλημα εἶναι πολὺ παλαιόν· πλῆθος ἱστορικῶν τῆς φιλοσοφίας καὶ κλασσικῶν φιλολόγων ἐπεχείρησαν κατὰ καιροὺς τὴν ὄντως δύσκολον διείσδυσιν ἐν τῷ πλατωνικῷ «Παρμενίδῃ», ὅστις τυγχάνει ἓν ἐκ τῶν πλέον δυσκόλων ἔργων τῆς πλατωνικῆς φιλολογίας.

Ὁ πλατωνικὸς Παρμενίδης ἀναφέρεται εἰς τὴν περὶ ἰδεῶν θεωρίαν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὡς βάσις ταύτης εἶναι ἡ διαλεκτικὴ ἀναίρεσις τῶν ὑποθέσεων· ὄντως δύο τυγχάνουσιν αἱ βασικαὶ θέσεις, περὶ τῶν ὁποίων θὰ περιστραφῶσι καθ' ἡμᾶς αἱ ἐννέα ὑποθέσεις ἤτοι «εἰ ἓν ἔστιν» καὶ «εἰ ἓν μὴ ἔστιν». ἐπὶ τῶν δύο ἀνωτέρω προτάσεων θὰ κατανεμηθῶσι αἱ 1 καὶ 2 καὶ 4 καὶ 5 ὑποθέσεις δηλαδὴ 137C—142 A, 142 A—155 E, 157 B—159 B, 159 B—160 B (Σημ. ἡ τρίτη ὑπόθεσις εἶναι συγκερασμὸς τῶν δύο πρώτων ὑποθέσεων 137C—142A καὶ 142A—155E) ἐν συνεχείᾳ δὲ αἱ 6 καὶ 7 καὶ 8 καὶ 9 ἤτοι 160B—163B, 163B—164B, 164B—165E καὶ 165E—166 C.

Ἓν κατακλεῖδι ἕπεται τὸ συμπέρασμα: «Ἕν εἴτ' ἔστιν εἴτε μὴ ἔστιν, αὐτό

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΔ' 1972

ΤΟΜΟΣ **24** ΤΕΥΧΗ **47/48**

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ
ΕΛ. ΚΑΣΤΡΙΝΟΥ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 56 — ΑΘΗΝΑΙ

CHARLBS MUGLER, **Archimède**, tome IV. Commentaires d' Eutocius. Fragments société d'édition «Les Belles Lettres» Paris, 1972.—(**Ἀρχιμήδης**, τόμος 4ος. Σχόλια τοῦ Εὐτοκίου. Ἀποσπάσματα. Ἑταιρεία ἐκδόσεων «Les Belles Lettres». Παρίσιοι, 1972).

Εἰς τὸν προηγούμενον 23ον τόμον τοῦ «Πλάτωνος», Τεύχη 45/46, 1971, ἔσχομεν τὴν εὐχάριστον εὐκαιρίαν νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς ἐκδόσεως ἐν Παρισίοις τριῶν τόμων τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τοῦ διακεκριμένου Γάλλου καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Nice κ. Charles Mugler. Μὲ τὴν αὐτὴν ἐξ ἴσου εὐχαρίστησιν σημειοῦμεν ἤδη καὶ τὴν ἔκδοσιν τοῦ τετάρτου τόμου, ἥτις ἐπισφραγίζει τὴν ἔκδοσιν τῶν Ἁπάντων.

Ὁ κ. Mugler ἐκφράζει ἐν προλόγῳ τὰς εὐχαριστίας αὐτοῦ πρὸς τὸν διακεκριμένον κ. Edouard Delebeque, ἐποπτεύσοντα ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν τεσσάρων τόμων τῶν Ἁπάντων καὶ πρὸς τὸν διακεκριμένον παπυρολόγον τῆς Σορβόνης καθηγητὴν κ. Jean Irigoin διὰ τὴν κριτικὴν ἐξέτασιν τοῦ χρησιμοποιηθέντος κειμένου.

Μετ' ἐμπεριστατωμένην Εἰσαγωγὴν παραθέτει τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὰς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους: Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, Κύκλου μέτρησις, Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν. Εἰς τὰ σχόλια αὐτὰ περιλαμβάνονται δώδεκα λύσεις τοῦ δηλίου προβλήματος συναφεῖς πρὸς τὸ α΄ πρόβλημα τοῦ Β΄ βιβλίου, περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Αἱ λύσεις αὗται εἶναι: Πλάτωνος, Ἥρωνος, Φίλωνος Βυζαντίου, Ἀπολλωνίου, Διοκλέους, Πάππου, Σπόρου, Μεναίχμου (δύο λύσεις), Ἀρχύτου, Ἐρατοσθένους, Νικομήδους. Εἰς τὴν πραγματείαν, Κύκλου μέτρησις, ὁ Εὐτόκιος ἔχει διασώσει ἀριθμητικὰς πράξεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων πολυτίμους διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, τὰς ὁποίας ὁ κ. Mugler ἀποδίδει λίαν ἐπιτυχῶς διὰ τοῦ συγχρόνου συμβολισμοῦ. Ὁ τόμος ἐπισφραγίζεται διὰ τῆς παραθέσεως μαρτυρίων τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἐπὶ τῶν ἡμικανονικῶν πολυέδρων, καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως ἐπὶ τῶν Κατοπτρικῶν τοῦ Ἀρχιμήδους. Καὶ εἰς τὸν τέταρτον τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τίθεται εἰς τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ σελίδας τοῦ βιβλίου, ἐν ᾧ ἡ ἀντίστοιχος γαλλικὴ μετάφρασις τίθεται εἰς τὰς πρὸς τὰ ἀριστερὰ σελίδας.

Καὶ ἡ ἔκδοσις τοῦ τετάρτου τόμου τῶν Ἁπάντων εἶναι ἄψογος ἀπὸ πάσης ἀπόψεως, ὡς καὶ τῶν προηγουμένων τριῶν τόμων. Θερμότατος ἔπαινος ἀξίζει εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον «LES BELLES LETRES», ὁ ὁποῖος ἀνταπεκρίθη πλήρως εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ διακεκριμένου συγγραφέως.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

ΒΙΚΤΩΡΟΣ ΤΖΑΘΑ, μαθηματικοῦ. **Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς νυοστῆς ῥίζης παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (προσεγγιστικῶς), τῇ βοηθείᾳ διαδοχικῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν.**

Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς νυοστῆς ῥίζης παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐπιτυγχάνεται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων. Ἐκτὸς ὅμως τῆς μεθόδου ταύτης ὁ ὑπολογισμὸς δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων. Τὴν τελευταίαν ταύτην μέθοδον εἶχον ἀνακαλύψει οἱ Πυθαγόρειοι. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ Θέω-

23

νος τοῦ Σμυρναίου[1] καὶ τοῦ Πρόκλου[2] εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος. Οἱ Πυθαγόρειοι διὰ τῆς ἀνακαλυφθείσης ὑπ' αὐτῶν μεθόδου κατέληγον εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εὑρίσκεται μεταξὺ ἑνὸς ἀνωτέρου καὶ ἑνὸς κατωτέρου φράγματος τιμῶν, ὡς ἑξῆς·

$$1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} \ldots < \sqrt{2} \ldots < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Τὴν αὐτὴν μέθοδον, συνάγομεν, ὅτι ἐχρησιμοποίησεν καὶ ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{3}$, ἡ ὁποία τίθεται μεταξὺ δύο φραγμάτων τιμῶν ὡς ἑξῆς:

$$1 < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} \ldots < \sqrt{3} \ldots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{2} < 2.$$

Ὁ κ. Τζάθας διὰ λαμπρῶν συλλογισμῶν ἐπεκτείνει τὴν μέθοδον τῶν Πυθαγορείων πρὸς ὑπολογισμὸν ὄχι μόνον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης προσεγγιστικῶς, ἀλλὰ καὶ τῆς νυοστῆς ῥίζης, ὅπου ὁ ν εἶναι ἀκέραιος οἱοσδήποτε. Ἐνδεικνικῶς ἀναφέρομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα τοῦ κ. Τζάθα:

$$\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[16]{8} \cdot \sqrt[64]{8} \cdot \sqrt[256]{8} \ldots < \sqrt[3]{8} \ldots < \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[8]{8} \cdot \sqrt[32]{8} \cdot \sqrt[128]{8} \ldots}$$

Αἱ ἔρευναι τοῦ κ. Τζάθα εἶναι ἐντελῶς πρωτότυποι καὶ ἀποτελοῦν σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν σπουδὴν ὡρισμένων ἀλγεβρικῶν καὶ ἀριθμητικῶν προβλημάτων.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

***

**Veröffentlichungen des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik.—Δημοσιεύσεις τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐρευνῶν τοῦ Γερμανικοῦ Μουσείου τοῦ Μονάχου διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς.**

Καὶ ἄλλοτε ἐδόθη ἡ εὐκαιρία, ὅπως εἰς τὰς στήλας τοῦ «Πλάτωνος» ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ ἔργον τοῦ Γερμανικοῦ Μουσείου τοῦ Μονάχου διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς. Αἱ ἐκδόσεις τοῦ Ἰνστιτούτου Ἐρευνῶν τοῦ Μουσείου τούτου διαχωρίζονται εἰς σειρὰς A, B, C, D, ἀναλόγως τῆς ὕλης, ἡ ὁποία πρόκειται νὰ δημοσιευθῇ.—Κατωτέρω δημοσιεύομεν ἐπιλογήν τινα τῶν δημοσιεύσεων: Σειρὰ A. 1970. (Reihe A 1970) Ἀριθμ. 59. Nelly Tsouyopoulos. Ἡ δημιουργία φυσικῆς ὁρολογίας ἐκ τῆς Νεοπλατωνικῆς Μεταφυσικῆς (Die Entstehung physikalischer Terminologie aus der Neuplatonischen Metaphysik). Τῆς πραγματείας προτάσσεται χωρίον τοῦ Σιμπλικίου σχολιάζοντος τὰ Φυσικὰ

1) Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν. Ἔκδ. E Hiller, σελ. 42—55.

2) Ἔκδ. E. Kroll, II σ. 24 κ ἑ. 393 κ ἑ. Ἴδε κ. Ε, Σταμάτη, Εὐκλείδου Στοιχ. II, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν: Ὀργ. Ἐκδ. Διδ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8—18.

τοῦ Ἀριστοτέλους: «Ἀλλὰ ταῦτα μὲν διὰ τὴν κρατοῦσαν περὶ τῆς ὕλης ἔννοιαν οὐκ ἀρεστὴν ἐμοὶ ἐπὶ πλέον μηκῦναι προήχθην». (Simplicius, in Phys. Arist. (Diels) 233,2. Ἀριθ. 73. Piero Delsedime. L'infini numérique dans l'Arenaire d'Archimède. (Τὸ ἀριθμητικὸν ἄπειρον εἰς τὸν Ψαμμίτην τοῦ Ἀρχιμήδους).

Ἡ μελέτη τοῦ P. DELSEDIME εἶναι πράγματι ἀξιόλογος ἰδίως κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἀναφέρονται συναφεῖς εἰδήσεις περὶ ἀπείρου τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Κατὰ παράδοξον τρόπον ὅμως ὁ συγγραφεὺς παραδέχεται τὴν ὕπαρξιν «στοιχείων φιλοσοφίας εἰς τὸν Ψαμμίτην τοῦ Ἀρχιμήδους» (σελ. 350 § 3). Ἀφορμᾶται δὲ εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς γνώμης του αὐτῆς ἐκ τῆς γνώμης τοῦ ἱστορικοῦ τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης GEORGE SARTON, ὅστις ἰσχυρίζεται, ὅτι ἡ πραγματεία Ψαμμίτης τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι «φιλοσοφικοῦ παρὰ μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ ὅτι αὕτη ὑπενθυμίζει βουδδιστικὰς κοσμολογικὰς θεωρίας περὶ ἀπείρου» (σελ. 349,10). Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ SARTON δὲν κατώρθωσε νὰ ἀντιληφθῇ τὸ περιεχόμενον καὶ τὴν σπουδαιότητα τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, λόγῳ τῶν δυσκολιῶν της. Οὐδὲν στοιχεῖον ἐκ τῶν διασωθέντων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους πείθει, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν ἀσχοληθῇ ἀμέσως ἢ ἐμμέσως μὲ φιλοσοφικὰ προβλήματα. Εἶναι συνεπῶς ἡ ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου γνώμη τοῦ SARTON καὶ τοῦ DELSEDIME πάντῃ πεπλανημένη καὶ ἀπορριπτέα, ὡς ἀβάσιμος.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

* * *

KAREL JANÁCEK, **Sextus Empiricus Sceptical Methods**, Acta Universitatis Carolinae philologica, Monographia XXXVIII, Praha 1972, σχ. 8 σελ. 136.

Τὸ σκεπτικὸν φιλοσοφικὸν σύστημα ἀποτελεῖ ἀξιόλογον τμῆμα τῆς Ἱστορίας τῆς Ἑλληνικῆς φιλοσοφίας, τὸ δὲ ἔργον τοῦ Σέξτου Ἐμπειρικοῦ ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων βοηθημάτων διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου καὶ τῆς μεθόδου τῆς σκεπτικῆς φιλοσοφίας. Ἐν τούτοις οἱ ὅροι τῆς σκεπτικῆς αἱρέσεως καὶ ἰδίᾳ οἱ παρὰ τῷ Σέξτῳ Ἐμπειρικῷ ἀπαντώμενοι δὲν εἶναι τελείως σαφεῖς, παρίσταται δὲ ἀνάγκη νὰ γίνῃ διὰ φιλολογικῆς ἀναλύσεως ἡ ἀποσαφήνισις τοῦ ἀκριβοῦς αὐτῶν ἐννοιολογικοῦ περιεχομένου, ἵνα οὕτω διευκολυνθῇ ἡ πληρεστέρα ἑρμηνεία τοῦ σκεπτικοῦ συστήματος.

Διὰ τὴν φιλολογικὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἔργου τοῦ Σέξτου ἓν ἐκ τῶν πλέον ἐνδεδειγμένων προσώπων τυγχάνει ὁ καθηγητὴς Karel Janácek, ὁ ὁποῖος ἀπὸ 25ετίας καὶ πλέον ἀσχολεῖται ἐντατικῶς μὲ τὴν Σκεπτικὴν φιλοσοφίαν καὶ ἰδιαιτέρως μὲ τὸν Σ. Ε. Ἤδη τῷ 1948 ἐξέδωκε τὰ «Προλεγόμενα εἰς Σέξτον Ἐμπειρικόν», τῷ 1962 τοὺς Indices Verborum καὶ Nominum τοῦ Σ. Ε. εἰς δευτέραν ἔκδοσιν βελτιωμένην ἐν τῇ σειρᾷ τῆς Βιβλιοθήκης Teubner τῆς Λειψίας, ἐπὶ πλέον δὲ ἔχει δημοσιεύσει πλῆθος μελετῶν περὶ Σέξτου καὶ τῆς ἐμπειρικῆς φιλοσοφίας.

Ὁ J. ἀνέλαβε τὸ ἔργον τῆς φιλολογικῆς ἀναλύσεως τῶν ἔργων τοῦ Σ. Ε., εἰς τὸ ὁποῖον ἀπησχολήθη ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν, καρπὸς δὲ τῆς προσπαθείας του ταύτης εἶναι ἡ ἔκδοσις τοῦ ἐν ἐπικεφαλίδι βιβλίου.

Ὡς ἤδη προηγουμένως ὁ J. εἶχε συμπεράνει, χρονολογικῶς τὰ συγγράμματα τοῦ Σέξτου ἔχουν γραφῇ κατὰ τὴν ἀκόλουθον σειράν: 1) αἱ Πυρρώνειοι Ὑποτυπώσεις (PH) βιβλία τρία. 2) Πρὸς Μαθηματικοὺς βιβλία 7ον–11ον (M VII—XI),

EUCLIDES, **Elementa,** post I. L. Heiberg edidit **E. S. Stamatis,** BSR B. G. Teubner (Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana) Vol. III, Liber X, 2. βελτιωμένη ἔκδοσις, σελ. XXXII/236 μετὰ 146 σχημάτων, σχ. 8 μ, λινόδ. Μάρκα 33,—.

Μετὰ τὴν ἔκδοσιν τῶν τόμων I καὶ II τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τῷ 1969 καὶ 1970 ἐν τῇ σειρᾷ τῆς Λειψίας ὑπὸ τοῦ Ε. Σ. Σταμάτη ἰδοὺ νῦν καὶ ὁ τρίτος τόμος τῶν στοιχείων ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς δευτέραν ἔκδοσιν βελτιωμένην. Τὸ κείμενον καὶ τὰ σχήματα μένουν ὡς τὰ τῆς πρώτης ἐκδόσεως Heiberg τοῦ 1885, αἱ προσθῆκαι ὅμως τοῦ Σταμάτη εἶναι ἀξιόλογοι.

Ὡς γνωστὸν τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἀπετέλουν αὐτούσια τὸ διδακτικὸν βιβλίον τῆς Γεωμετρίας εἰς τὰ σχολεῖα τῆς Δύσεως, ἐξακολουθεῖ δὲ ἀκόμη καὶ σήμερον εἰς τὴν Ἀγγλίαν νὰ διδάσκεται τὸ ἐγχειρίδιον «Εὐκλείδης». Ἐν τούτοις τὸ X βιβλίον εἶναι τόσον δυσπρόσιτον καὶ στρυφνόν, ὥστε ὁ μὲν Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς S. Stevin ἤδη πρὸ 400 ἐτῶν τὸ ὠνόμασε «σταυρὸν τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν», ὁ δὲ Γάλλος J. Montucla πρὸ 200 ἐτῶν διετύπωσεν ἀμφιβολίαν, ἐὰν κατὰ τὴν ἐποχήν του θὰ ὑπῆρχε γεωμέτρης τολμῶν νὰ παρακολουθήσῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὸν σκοτεινὸν δαίδαλον τοῦ X βιβλίου.

Παρὰ ταῦτα εὑρέθη ὁ δήλιος κολυμβητής, ὁ ὁποῖος εἰσέδυσεν εἰς τὰ ἄδυτα τῆς λαβυρινθώδους Εὐκλειδείου σκέψεως καὶ συνέλαβε τὸν μῖτον καὶ τὴν κλεῖδα τῶν διανοητικῶν συνθέσεων τοῦ X βιβλίου του. Ὁ Ε. Σ. Σταμάτης ἀπὸ δεκαετιῶν ἐντρυφῶν εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικοὺς ἐγένετο οἰκεῖος πρὸς τὴν σκέψιν των καὶ κατώρθωσε νὰ ἐκδώσῃ πολλὰ ἔργα των, ὡς ὅλα τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου εἰς τέσσαρας τόμους μετὰ μεταφράσεως εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικὴν (1952—1957) τὸν Διόφαντον μετὰ μεταφράσεως εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικὴν ἐπίσης (1963), τὸν Ἀρχιμήδη μετὰ μεταφράσεως εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικὴν εἰς δύο τόμους (1970) καὶ νῦν συμπληροῖ τὴν ἐν τῇ Λειψιανῇ βιβλιοθήκῃ ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἧς ὁ τέταρτος τόμος (βιβλία 11—13) προβλέπεται νὰ κυκλοφορήσῃ κατὰ τὸ προσεχὲς ἔτος.

Ἀκόμη καὶ ὡς πρὸς τὸν σκοπόν, ὃν ἔθεσεν ὁ Εὐκλείδης γράφων τὸ X βιβλίον, ὑπῆρχον ἀντιγνωμίαι ἀρχαιόθεν. Τόσον ὁ ἀρχαῖος σχολιαστής, ὅσον καὶ ὁ ἐκ τῶν ἀρχαίων καὶ τοῦ Πάππου ἀρυόμενος τὴν γνώμην του Ἀμποῦ Ὀτμὰν κατὰ τὸν X αἰῶνα, ἀλλὰ καὶ οἱ ἀπὸ τῆς Ἀναγεννήσεως καὶ κατόπιν ἐξέχοντες μαθηματικοί, ἄλλος ἄλλην πρόθεσιν ἀποδίδει εἰς τὸν Εὐκλείδη. Ὁ Σταμάτης ὅμως διεπίστωσεν ὅτι πρόθεσις τοῦ Εὐκλείδου ἦτο νὰ καταδείξῃ διὰ τοῦ X βιβλίου ἁπλῶς τὴν ὑπάρχουσαν συμμετρίαν εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται πρὸς τοῦτο αἱ ἁπλούσταται ἄλογοι (ἀσύμμετροι) εὐθεῖαι. Ἡ ὅλη θεωρία ἐκτίθεται κατὰ τὸν Σταμάτην εἰς τὰ θεωρήματα 10 καὶ 27—35, ἔνθα ἡ κατασκευὴ τῶν ἁπλουστάτων ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τούτων τῶν θεωρημάτων ἀνευρίσκονται 24 ἄλογοι εὐθεῖαι, δι' ὧν κατασκευάζονται ἰσάριθμα ὀρθογώνια τρίγωνα (θεωρήματα 36—41, 48—53, 73—78, 85—90). Τὴν θεωρίαν ταύτην ἐκθέτει ὁ Στ. εἰς τὸ Additamentum praefationis, μεταφέρει δὲ εἰς σύγχρονα σύμβολα καὶ εἰς γλῶσσαν ἀγγλικὴν (ὄχι Λατινικὴν) διὰ τὴν εὐχερεστέραν παρακολούθησιν ὑπὸ τῶν συγχρόνων ἐπιστημόνων εἰς τέσσαρας πίνακας τοὺς τύπους τῆς κατασκευῆς τῶν τεσσάρων ἑξάδων τῶν οὕτω κατασκευαζομένων ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἐκτὸς τοῦ βαρυσημάντου τούτου Συμπληρώματος τοῦ προλόγου καὶ τῶν τεσσάρων ἐπεξηγηματικῶν πινάκων, ἐξ ὧν ἀποδεικνύεται ἡ συνέπεια τῆς μεθόδου του, ὁ Στ. παραθέτει ἀξιόλογον συλλογὴν εἴκοσι μαρτυρίων ἀρχαίων (testimonia) σχετιζομένων πρὸς τὰ σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα μεγέθη καὶ πρὸς τὸ

περιεχόμενον τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ταῦτα ἔχουν συλλεγῆ ἐκ τῶν ἔργων τοῦ Πλάτωνος, Ἰσοκράτους, Ἀριστοτέλους, Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, τοῦ Πάππου καὶ ἀρχαίων σχολιαστῶν.

Πέρα τούτων ὁ Στ. προσέθηκε Πίνακας τῆς θέσεως ἔνθα ἀνευρίσκονται κατακεχωρισμένοι ἐν τῷ βιβλίῳ οἱ ὅροι, τὰ πορίσματα καὶ τὰ λήμματα. Ἐπίσης καὶ ἀνάλυσιν (λατινιστὶ) τῆς τάξεως καθ' ἣν ἀναφέρονται αἱ ὕλαι τοῦ βιβλίου εἰς διάφορα θεωρήματα τοῦ X βιβλίου. Καὶ τέλος μεταξὺ τοῦ κατὰ σελίδα κειμένου καὶ τοῦ κριτικοῦ ὑποσημειώματος τοῦ Heiberg παραθέτει ὁ Στ. νέα κατὰ σελίδα σημειώματα, ἐν οἷς γίνονται συσχετίσεις τοῦ περιεχομένου τῶν θεωρημάτων πρὸς ὁρισμοὺς ἢ ἄλλα θεωρήματα ἢ πορίσματα ἢ λήμματα, δι' ὧν διευκολύνεται ὁ ἀναγνώστης εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ κειμένου.

Ἑπομένως ἡ δευτέρα ἔκδοσις τοῦ III τόμου τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου φέρει νέα στοιχεῖα πολύτιμα, δι' ὧν διευκολύνεται ἡ κατανόησις τοῦ X βιβλίου, τοῦ μέχρι τοῦδε δυσπροσίτου, χάρις εἰς τὴν προσφορὰν τοῦ σοφοῦ μαθηματικοῦ Σταμάτη.

Π. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

*
* *

CHOMSKY **by John Lyons, published in Fontana modern masters,** Fontana | Collins, 1970 (editor : Frank Kermode), pp. 120.

Τὸ βιβλίον τοῦτο τοῦ John Lyons φέρον τὸν τίτλον Chomsky ἔχει ἐκδοθῆ εἰς τὴν σειρὰν τῆς Fontana, εἰς τὴν ὁποίαν ἐκδίδονται οἱ σύγχρονοι μύσται τῶν ἐπιστημῶν.

Ἡ διάρθρωσις τοῦ ὡς ἄνω βιβλίου κατὰ κεφάλαια ἔχει ὡς ἑξῆς : Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν (σσ. 9—15), ὁ Lyons ἀναγνωρίζει τὴν ὑπεροχὴν τῆς Γλωσσολογικῆς θεωρίας τοῦ περιφήμου Ἀμερικανοῦ Γλωσσολόγου Noam Chomsky ἔναντι τῶν ἄλλων σήμερον ὑπαρχουσῶν Γλωσσολογικῶν θεωριῶν. Τὸ βιβλίον Syntactic structures (The Hague : Mouton, 1957) ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον ἐπαναστατικὸν καὶ νέους Γλωσσολογικοὺς ὁρίζοντας ἀνοῖγον ἔργον τοῦ Noam Chomsky. Ἀποτελεῖ τὴν πρώτην ἐπίσημον ἐμφάνισιν τῆς λεγομένης μετασχηματιστικῆς Γραμματικῆς (: transformational Grammar).

Εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον (σσ. 16—26), παρουσιάζονται ἐν γενικαῖς γραμμαῖς οἱ στόχοι καὶ αἱ τάσεις τῆς συγχρόνου Γλωσσολογίας καὶ τονίζονται αἱ ὑπάρχουσαι διαφοραὶ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς παραδοσιακῆς Γραμματικῆς.

Εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον (σσ. 27—35), ἀναφέρονται ἐν περιλήψει αἱ βασικώτεραι Γλωσσολογικαὶ ἀρχαὶ καὶ μέθοδοι τῶν πρὸ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Noam Chomsky Ἀμερικανῶν Γλωσσολόγων (π. χ. Franz Boas, Edward Sapir, Leonard Bloomfield, Zellig Harris) καὶ ὑπογραμμίζεται ἰδιαιτέρως ἡ περὶ τὴν γλῶσσαν θέσις τοῦ σπουδαιοτέρου τούτων Leonard Bloomfield, πρὸς τὰς ἀπόψεις τοῦ ὁποίου ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν ὁ ἱδρυτὴς τῆς μετασχηματιστικῆς Γραμματικῆς Noam Chomsky.

Εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον (σσ. 36—46), διατυποῦνται γενικῶς αἱ πρῶται μεθοδολογικαὶ ἀρχαὶ καὶ οἱ σκοποὶ τῆς Γλωσσολογικῆς θεωρίας τοῦ Noam Chomsky.

Εἰς τὸ πέμπτον κεφάλαιον (σσ. 47 - 55), τονίζεται ἡ ἀνεπάρκεια καὶ ἡ ἀδυναμία τοῦ πρώτου ἁπλοῦ προτύπου τῆς γενετικῆς Γραμματικῆς (: Generative Grammar), τῶν finite state Grammars, δηλ. τῶν Γραμματικῶν (: θεωριῶν) αἵτινες εἶναι ἱκαναὶ πρὸς παραγωγὴν πεπερασμένου μόνον ἀριθμοῦ προτάσεων.

Εἰς τὸ ἕκτον κεφάλαιον (σσ. 56—65), ἐξετάζεται διὰ βραχέων τὸ δεύτερον πρότυπον (: model) περιγραφῆς τῆς γλώσσης, δηλ. ἡ Γραμματικὴ τῆς δομῆς τῆς

# Π Λ Α Τ Ω Ν

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΕ' 1973

ΤΟΜΟΣ **25** (ΤΕΥΧΗ 49/50)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1973

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ, **Ἀρχιμήδους Ἅπαντα**, Ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις, σχόλια, Τόμος Β', Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1973, σελ. XIX/586.

Τὸ Τεχνικὸν Ἐπιμελητήριον τῆς Ἑλλάδος εἶναι ἄξιον τιμῆς, διότι ἀνέλαβε τὴν ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ μεγάλου Ἀρχιμήδους καὶ ἀνέθεσε τὸ ἔργον τοῦτο εἰς τὸν εἰδικώτερον πρὸς τοῦτο ἐπιστήμονα, τὸν θαυμάσιον Σταμάτην, οὗ τὸ ἔργον ἐπὶ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων Μαθηματικῶν ἔχει προκαλέσει τήν τε ἑλληνικὴν καὶ τὴν διεθνῆ ἀναγνώρισιν. Ὁ Α' τόμος ἐξεδόθη ἤδη τῷ 1970, ὁ Γ' εὑρίσκεται ὑπὸ ἐπεξεργασίαν καὶ ὁ Β' βλέπει νῦν τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος.

Εἰς τὸν Β' τόμον περιέχονται τὰ ἑξῆς· Πρόλογος τοῦ Σταμάτη. Πρόλογος τοῦ I. L. Heiberg ἀπὸ τὴν ἔκδοσιν 1913 παρὰ Teubner, ἐκ τῆς ὁποίας ἐλήφθη τὸ κείμενον τῶν Ἀρχιμηδείων προτάσεων τοῦ Β' τόμου. Πίναξ τῶν προτάσεων τοῦ Β' τόμου. Τὸ κείμενον τῶν προτάσεων τούτων (Περὶ ἑλίκων, Μηχανικὰ α', β', Ψαμμίτης, Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, Ὀχουμένων α', β', Στομάχιον, Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, Πρόβλημα βοεικὸν μετ' ἀρχαίου σχολίου). Ἐπεξηγήσεις (ἐπί τινων δυσκόλων σημείων τῶν Ἀρχιμηδείων κειμένων ὑπὸ τοῦ Σταμάτη). Ἐπίμετρον. Προσθήκη βιβλιογραφίας. Εὑρετήριον (πίναξ ὅρων καὶ κυρίων ὀνομάτων).

Εἰδικώτερον θὰ εἶχε νὰ σημειώσῃ τις τὴν συμβολὴν τοῦ Σταμάτη εἰς τὰ ἑξῆς σημεῖα· Ἀποκατέστησεν εἰς τὸ ὀρθὸν τοὺς τίτλους Μηχανικὰ ἀντὶ τοῦ ὑπὸ μεταγενεστέρων τεθέντος τίτλου Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων· καὶ Τετραγωνισμὸς Ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἀντὶ παραβολῆς ἐπίσης ὑπὸ μεταγενεστέρων τεθέντος. Ἡ ἀποκατάστασις ἐστηρίχθη εἰς τὰ Ἀρχιμήδεια κείμενα. Τὸ κείμενον τῶν προτάσεων τοῦ Ἀρχιμήδους τιθέμενον εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τὸ μεταφέρει εἰς τὴν νεοελληνικὴν εἰς τὴν δεξιὰν σελίδα κατ' ἀπόδοσιν ἁπλῆν, ἀναλυτικὴν καὶ σαφῆ. Σημειωτέον ὅτι μερικῶν τεμαχίων τὸ ἀρχικὸν ἑλληνικὸν κείμενον ἔχει ἀπολεσθῆ καὶ ἔχει ἀντικατασταθῆ εἰς τὸ κείμενον Heiberg ὑπὸ κειμένου εἰς τὴν Λατινικὴν ἢ ἐκ τῆς Ἀραβικῆς εἰς τὴν Γερμανικήν, ἅτινα ὁ Σταμάτης μεταφέρει εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικήν. Αἱ ἐπεξηγήσεις τοῦ Σταμάτη ἐξ 28 σελίδων ἐπὶ δυσκόλων τινῶν προτάσεων τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι πολύτιμοι. Εἰς τὸ Ἐπίμετρον ἐκ 48 σελίδων παρατίθενται σημεῖά τινα τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους γενικωτέρας σημασίας, ἅτινα ἐβοήθησαν τοὺς νεωτέρους μαθηματικοὺς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιστήμης, ἐνῷ ἀπεφεύγετο ἡ ἀναγνώρισις αὕτη μέχρι σήμερον τῆς ἀρχαίας συμβολῆς (ἄλγεβρα τῶν Ἑλλήνων, εὕρεσις δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ἄθροισμα ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, χρησιμοποίησις τῶν ἀρχῶν τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ). Ἐδῶ ὁ Σταμάτης παραθέτει γνώμας σπουδαίων ξένων μαθηματικῶν, δι' ὧν ἀποδεικνύεται ἠτιολογημένως πόσον εἶχε προοδεύσει ἡ ἀρχαία μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Ἐπίσης εἰς τὰ Testimonia προστίθενται νῦν ἕτεραι πέντε μαρτυρίαι, προστίθενται δὲ ἐπίσης ἀξιόλογος βιβλιογραφία ὀκτὼ σελίδων καὶ πλούσιος πίναξ ὅρων καὶ ὀνομάτων πεντασέλιδος. Διὰ τοῦ ἔργου τούτου οἱ Ἕλληνες ἀποκτοῦν ἐξαίρετον βοήθημα διὰ τὴν μελέτην τοῦ μεγαλοφυεστέρου μαθηματικοῦ τῆς Ἀρχαιότητος.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚϚ' 1974

ΤΟΜΟΣ **26** (ΤΕΥΧΗ 51/52)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1974

GINO LORIA, **Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν,** τόμοι 3, μετάφρασις ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ πρωτοτύπου ὑπὸ ΜΙΧΑΗΛ Κ. ΚΩΒΑΙΟΥ, ἔκδοσις Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (Ἐκδόσεις Παπαζήση), Ἀθῆναι 1971, 1972, 1974.

Εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ Α΄ τόμου ἐκτίθενται τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν Ἀσσυρίων - Βαβυλωνίων καὶ Αἰγυπτίων. Τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν Βαβυλωνίων παρουσιάζονται ἀνώτερα τῶν μαθηματικῶν τῶν Αἰγυπτίων. Ὑποτίθεται ὅμως ὑπὸ τῶν νεωτέρων ἐρευνητῶν, ὅτι τὰ Βαβυλωνιακὰ μαθηματικὰ δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν ἐποχὴν 3500–1500 π. Χ., ἀλλὰ εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, εἶναι δηλ. Ἑλληνικῆς προελεύσεως. (Kurt Vogel, Vorgriechische Mathematik II, Hannover - Paderborn, 1959, σελ. 13). Ὁ Vogel σημειώνει, ὅτι τὸ πλεῖστον τῶν Βαβυλωνιακῶν πινακίδων, ὅπου ἐκτίθενται τὰ Βαβυλωνιακὰ μαθηματικά, προέρχονται ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας καὶ ἐπομένως εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορισθῇ χρονικῶς τὸ γεωλογικὸν στρῶμα ἐξ οὗ αὗται προέρχονται.

Διὰ τὰ μαθηματικὰ τῶν Αἰγυπτίων ἀναφέρεται, ὅτι αἱ γνώσεις μας δι' αὐτὰ προέρχονται ἐκ δύο παπύρων ἀναφερομένων εἰς τὴν δεκάτην ἑβδόμην ἑκατονταετίαν π. Χ., ὧν εἷς εὑρίσκεται εἰς τὸ Βρεταννικὸν Μουσεῖον, οἱ ἄλλοι δέ, εἰς Μουσεῖοντῆς Μόσχας. Αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις, τὰς ὁποίας περιλαμβάνουν καὶ οἱ δύο αὐτοὶ πάπυροι, ἀφοροῦν εἰς τὴν πρακτικὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν πρακτικὴν Γεωμετρίαν.

Περαίνων τὴν ἔκθεσίν του περὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων ὁ συγγραφεὺς προσθέτει (σελ. 36) : «Ἀλλὰ τόσον οἱ Βαβυλώνιοι, ὅσον καὶ οἱ Αἰγύπτιοι δὲν κατώρθωσαν νὰ δώσουν ζωὴν εἰς κάποιαν μαθηματικὴν θεωρίαν οὔτε ἀκόμη νὰ γράψουν ἓν κεφάλαιον Ἀριθμητικῆς ἢ Γεωμετρίας. Ὁ λόγος τῆς ἀδυναμίας αὐτῆς πρέπει νὰ ἀναζητηθῇ εἰς τὴν γενικὴν τάσιν τῶν ἐρευνῶν των, νὰ μὴ ἀποβλέπουν εἰς τὴν ἀποκατάστασιν ἀληθειῶν θεωρητικοῦ χαρακτῆρος, ἀλλὰ μόνον εἰς τὴν ἐξυπηρέτησιν πρακτικῶν ἀναγκῶν τοῦ ἀστρολόγου καὶ τοῦ μηχανικοῦ». «Εἰς τὸν λαόν, τοῦ ὁποίου τὰ ἐπιτεύγματα πρόκειται ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐξετάσωμεν (τοὺς Ἕλληνας) ἐπεφυλάσσετο ἡ ἄφθιτος δόξα νὰ καταστήσῃ τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν, καὶ ἰδιαιτέρως τὴν μαθηματικήν, σκοπὸν κύριον τῆς διανοήσεως καὶ ν' ἀποδείξῃ, ὅτι μόνον οὕτω δύναται ἡ ἔρευνα νὰ φθάσῃ εἰς τὰ ὑπέρτατα ὕψη, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀνθρωπίνη διάνοια εἶναι προωρισμένη».

Εἰς τὰς σελίδας 36—167 ὁ συγγραφεὺς ἐκθέτει τὴν μαθηματικὴν δημιουργίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ (640—548 π. Χ.) καὶ ἐκθέτων αὐτὴν ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς φιλοσοφίας ἐν Ἑλλάδι. Ἡ ὅλη ἔκθεσις ἀποτελεῖ ὕμνον πρὸς τὸ ἀρχαῖον Ἑλληνικὸν πνεῦμα. Εὐστόχως προστίθεται, σχετικῶς πρὸς τυχὸν ἐπίδρασιν τῶν Βαβυλωνίων - Αἰγυπτίων εἰς τὴν δημιουργίαν τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, : «ὅ,τι γνωρίζομεν σχετικῶς πρὸς τὸ ἐπιστημονικὸν ἔργον τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος ἀποδεικνύει ὅτι ἀκόμη καὶ ἂν οἱ Ἕλληνες ἐκτὸς τῆς μητρὸς Πατρίδος ἔλαβον στοιχεῖα τῆς γνώσεως, οὗτοι μετεσχημάτισαν αὐτὰ τόσον βαθέως καὶ τὰ ἀνέπτυξαν περαιτέρω κατὰ τρόπον τόσον πρωτότυπον, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀρνηθῶμεν ὅτι ὁλόκληρος ἡ ἐπιστημονικὴ των δημιουργία ἀποτελεῖ ἀποκλειστικὸν καὶ ἀπαλλοτρίωτον πνευματικὴν ἰδιοκτησίαν των, τοσούτῳ μᾶλλον καθ' ὅσον δὲν ὑπάρχει εἰς τὸ Ἑλληνικὸν πνεῦμα κανὲν ἰδιαίτερον γνώρισμα, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εὑρίσκεται εἰς πλήρη συμφωνίαν πρὸς ὅ,τι ἄλλο γνωρίζομεν περὶ τῆς ἰδιοφυΐας αὐτῆς τῆς προνομιούχου φυλῆς τῆς φύσεως (σελὶς 38). Ἐδῶ ὁ συγγραφεὺς ὑπενθυμίζει εἰς ἡμᾶς τὸν Πλάτωνα, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν Ἐπινομίδα (987 d 9) γράφει : «λάβωμεν δὲ ὡς ὅ,τι περ ἂν Ἕλληνες βαρβάρων παραλάβωσι, κάλλιον τοῦτο εἰς τέλος ἀπεργάζονται».

Ὑπὸ τὸν τίτλον οἱ Νομοθέται τῆς Γεωμετρίας ἐκτίθεται ἡ συμβολὴ εἰς τὴν ἐπιστήμην τῶν μαθηματικῶν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῶν Πυθαγορείων, τῶν Προσω-

κρατικῶν φιλοσόφων καὶ σοφιστῶν, τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Εὐδόξου, συνοπτικῶς μέν, ἀλλὰ μετὰ πάσης σκφηνείας καὶ ἀκριβολογίας. Ἀκολουθεῖ ἡ ἔκθεσις τῆς συμβολῆς τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τῶν ἐπιγόνων τῶν μεγάλων τούτων μαθηματικῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων κατακλέγονται ὁ Ὑψικλῆς, ὁ Νικομήδης, ὁ Διοκλῆς, ὁ Περσεύς, ὁ Ζηνόδωρος, ὁ Διόφαντος, ὁ Πάτπος, ὁ Σερῆνος, ὁ Μενέλαος καὶ ἄλλοι. Ἰδιαιτέρα μνεία γίνεται τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τῶν Ἑλλήνων ἀστρονόμων καὶ γεωδαιτῶν καὶ τονίζεται ἰδιαιτέρως ἡ ἀνακάλυψις τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος ὑπὸ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, προσέτι δὲ ἡ μαθηματικὴ καὶ ἀστρονομικὴ δημιουργία, παρὰ τὴν ὑποστήριξιν τοῦ γεωκεντρικοῦ συστήματος, τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου.

Κατὰ τὴν ἀξιολόγησιν τοῦ ἔργου τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (1ος αἰὼν μ.Χ.), ὁ συγγραφεὺς τονίζει ἰδιαιτέρως τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, φερόμενον ὡς τοῦ Ἥρωνος. Ἡ ἀνωτέρω πληροφορία δὲν εἶναι ὀρθή, διότι ὁ τύπος ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀπεδείχθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τῶν Ἀράβων σχολιαστῶν. Πρῶτος μεταφράσας τὴν σχετικὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν ἑλληνικὴν (τὸ Ἑλληνικὸν κείμενον ἀπωλέσθη) εἶναι ὁ Γερμανὸς Heinrich Suter, ἐν Ζυρίχῃ, ὅστις κατὰ τὸ 1910—11 ἐδημοσίευσε μετάφρασιν ἀραβικοῦ βιβλίου τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου al Biruni, ὑπὸ τὸν τίτλον, Βιβλίον περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ῥητῶς, ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ἀνακάλυψις τοῦ Ἀρχιμήδους, παρεχομένης καὶ τῆς συναφοῦς ἀποδείξεως (H. Suter, Buch von der Auffindung der Sehnen im Kreise. 3. Folge, vol. 2, 1910—11). Ἡ δημοσίευσις τοῦ Suter ἦτο λησμονημένη καὶ κατακεχωσμένη εἰς τὰ Ἀρχεῖα Γερμανικῶν Ἀκαδημιῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἐλάβομεν φιλοφρόνως φωτοτυπικὸν ἀντίγραφον καὶ ἐδημοσιεύσαμεν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν εἰς τὸν Γ′ τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους (Εὐ. Σ. Σταμάτη, Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Γ′, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1974, σελὶς 159—170).

Ἀναφερόμενος ὁ συγγραφεὺς εἰς τὰ τρία ἀριθμητικὰ βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου γράφει τὰ ἀκόλουθα σχετικῶς μὲ τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Εὐκλείδης : «Ὑπάρχουν περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας δὲν εἶναι δύσκολον νὰ διακρίνῃ κανεὶς τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἰς τὴν πρώτην φάσιν τῆς ἐξελίξεώς της, (σελ. 66)». Ἡ ἐπιφύλαξις τοῦ συγγραφέως διὰ τῆς φράσεως «εἰς τὴν πρώτην φάσιν» ὀφείλεται κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν εἰς τὸ γεγονός, ὅτι πολλοὶ Εὐρωπαῖοι κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα ἐκαυχῶντο ἰδιαιτέρως διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου αὐτῆς, νομίζοντες ὅτι εἶναι κατάκτησις τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν. Κλασσικὸν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἀπαντᾶται εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν (Στοιχείων 9, 20).

Εἰς τὸ IX κεφάλαιον γίνεται μνεία τῶν παλαιῶν Κινεζικῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Κινεζικῆς Ἀστρονομίας. Ἀλγεβρικαὶ γνώσεις τῶν Κινέζων παρατηροῦνται κατὰ τοὺς πρώτους μ.Χ. αἰῶνας καὶ εὐλόγως ὁ συγγραφεὺς σημειώνει ὅτι πιθανὸν αἱ γνώσεις αὗται νὰ μετεφέρθησαν ἐκεῖ ἐκ τῶν Ἰνδιῶν. Τοῦτο φαίνεται ἀληθές, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ ἐπίδρασις τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὰς Ἰνδίας μετὰ τὴν ἐκστρατείαν τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ἐν προκειμένῳ εἰς ἐπίρρωσιν τῆς γνώμης τοῦ συγγραφέως, ὅτι κατὰ τοὺς πρώτους αἰῶνας μ.Χ. ὑπῆρχον βιβλία εἰς τὴν Κίναν πρὸς χρῆσιν τῶν περιηγητῶν ἀναγράφοντα τὰς ἀποστάσεις τῶν μεγάλων Κιζενικῶν πόλεων, μεταξύ των εἰς Ἑλληνικὰ στάδια (Wörterbuch der Antike, λέξις Κίνα, Kröner Verlag). Αἱ αὐταὶ παρατηρή-

σεις ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ Μαθηματικὰ τῶν Ἰνδῶν περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὸ Χ κεφάλαιον. Εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον γίνεται μνεία τῶν ἀραβικῶν Μαθηματικῶν ὑπὸ τὸν τίτλον «Τὸ ἀραβικὸν θαῦμα». Φρονοῦμεν, ὅτι πρόκειται περὶ ὑπερβολῆς. Κατὰ τὸ 529 μ.Χ. ὁ Ἰουστινιανὸς ἔκλεισε, ἕνεκα τοῦ θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, τῆς ὁποίας οἱ καθηγηταὶ κατέφυγον εἰς τὴν Περσίαν καὶ τὴν Ἀραβίαν, ὅπου ἵδρυσαν Σχολάς. Κατὰ δὲ τὸ ἔτος 823 μ.Χ. ὁ Ἄραψ Χαλίφης al Mamun νικήσας ἐν Μ. Ἀσίᾳ τὸν αὐτοκράτορα τοῦ Βυζαντίου Μιχαὴλ τὸν Β' ἔθεσεν ὡς ἕνα ἐκ τῶν ὅρων τῆς εἰρήνης τὴν παράδοσιν εἰς αὐτὸν χειρογράφων Ἑλληνικῶν ἔργων, ὅρον, τὸν ὁποῖον ὁ Μιχαὴλ ἀπεδέχθη (Εὐ. Σ. Σταμάτη, Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Γ', Ἀθῆναι 1974, σελ. XXXII). Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ἰδίως ταύτης ἀρχίζει ἡ ὑπὸ τῶν Ἀράβων σπουδὴ τῶν μαθηματικῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων, πολλὰ τῶν ὁποίων παρουσιάζονται ὑπὸ τῶν Ἀράβων ὡς ἰδικά των ἐπιτεύγματα. Μερικαὶ ἀποδείξεις περὶ τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου ὑπάρχουν εἰς τὸν Γ' τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸν μνημονευθέντα προηγουμένως (σελ. 159, 165, 167–169, 222–223). Ὅπωσδήποτε ὅμως οἱ Ἄραβες ἀπὸ τοῦ 600–1200 μ.Χ. εἶναι ἄξιοι συγχαρητηρίων, διότι ἐκθύμως συνέχισαν τὴν μελέτην τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων Μαθηματικῶν καὶ διέσωσαν πρὸς τούτοις ἀρκετὰς Ἑλληνικὰς μαθηματικὰς πραγματείας.

Εἰς τὸ XII κεφάλαιον μνημονεύονται τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα εἰς τὴν Ἰταλίαν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης ἢ Λεονάρδου Φιμπονάτσ .

Εἰς τὸν Β' τόμον περιλαμβάνονται τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα δύο αἰώνων, τοῦ δεκάτου ἕκτου καὶ τοῦ δεκάτου ἑβδόμου, τὰ ὁποῖα ἐκτίθενται εἰς τριάκοντα κεφάλαια. Ὁ τόμος αὐτὸς ἀρχίζει μὲ τὰ σπουδαῖα μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα ἐν Ἰταλίᾳ τοῦ Tartaglia, τοῦ Cardano καὶ τοῦ Ferrari καὶ κλείει μὲ τὰ ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ Γερμανίᾳ ἐπιτεύγματα τοῦ Newton καὶ τοῦ Leibniz καὶ τῶν συναφῶν ἐρίδων ἐπὶ τῆς προτεραιότητος ὡρισμένων μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων.

Βασικὴ μαθηματικὴ πρόοδος κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα θεωροῦνται τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Viète, ὁ ὁποῖος, ἐκτὸς ἄλλων, ἐπενόησε τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ οὕτω διηυκόλυνε τὰ μέγιστα τὴν σπουδὴν τῆς Ἀλγέβρας. Παραμένει δὲ ἄφθιτος ἡ δόξα τοῦ Viète καὶ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, παρὰ τὸ ὅτι οὗτος δὲν ἐγνώριζεν, ὅτι ἀπὸ τοῦ 820 ἤδη μ.Χ. ὁ Πρύτανις τοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει Πανεπιστημίου Λέων ὁ μαθηματικὸς ἐχρησιμοποίει τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων, ὡς ἀνεκοίνωσεν ὁ Γερμανὸς καθηγητὴς Kurt Vogel κατὰ τὸ 1958 εἰς τὸ ἐν Μονάχῳ συνελθὸν 11ον Διεθνὲς Βυζαντινολογικὸν Συνέδριον (Kurt Vogel, Akten des 11. Internationalen Byzantinischen Kongresses 1958, München 1960, S. 660–664).

«Ἡ κομψότης τῶν ἐφαρμοζομένων τεχνασμάτων τοῦ Viète, σημειώνει ὁ συγγραφεὺς (σελ. 88—89), ἀποτελεῖ τεκμήριον ἀσφαλές, ὅτι ὁ Γάλλος μαθηματικὸς εἶχε μελετήσει κατὰ βάθος τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου ... Τὰ ἑπόμενα προβλήματα εἶναι ὑψηλοτέρας στάθμης καὶ ἔχουν λυθῆ ἀπὸ τὸν Διόφαντον. ...Ἐξ ὅλων τούτων συνάγεται, ὅτι τὰ Ζητητικὰ (βιβλία τοῦ Viète) ἀποτελοῦν μᾶλλον μίαν ἐμπνευσμένην μεταμόρφωσιν τοῦ ἔργου τοῦ Διοφάντου, παρὰ ἓν βῆμα πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἐπὶ τῆς ὁδοῦ, τὴν ὁποίαν ἐκεῖνος (ὁ Διόφαντος) διήνοιξε καὶ διέστρωσεν».

Ἰδιαίτερον κεφάλαιον τοῦ Β' τόμου (τὸ 18) ἀφιερώνει ὁ συγγραφεὺς εἰς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἀνθρωπισμοῦ ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν σπουδῶν, ἀναφέρων καὶ τὰς πρώτας ἐκδόσεις τῶν Ἑλλήνων Κλασσικῶν (Μαθηματικῶν).

Γόνιμος ὑπῆρξε καὶ ἡ ἀνάπτυξις τῆς Τριγωνομετρίας καὶ τῆς Ἀστρονομίας κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα, κατόπιν τῶν ἐρευνῶν τοῦ Βέρνερ, τοῦ Κοπερνίκου, τοῦ Μπραέ, τοῦ Βιέτ, τοῦ Στέβιν καὶ ἄλλων.

Ὁ δέκατος ἕβδομος αἰὼν ὀνομάζεται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως ἔνδοξος αἰὼν διὰ τὰ Μαθηματικά. Εἶναι γνωστὰ τὰ ὀνόματα ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἐχάραξαν τοὺς δρόμους τῶν Νεωτέρων Μαθηματικῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων συγκαταλέγονται ὁ Ναπιὲ ἢ Νέπερ μὲ τὴν ἐφεύρεσιν τῆς συντομίας ἐκτελέσεως ἀριθμητικῶν πράξεων (λογάριθμοι), ὁ Γαλιλαῖος (Μηχανική, Φυσική, Ἀστρονομία), ὁ Κέπλερ μὲ τοὺς περιφήμους νόμους του εἰς τὴν Ἀστρονομίαν καὶ ἄλλοι. Ἅπαντες οὗτοι εἶχον, κατὰ τὸν συγγραφέα, βαθεῖαν γνῶσιν τῶν μεθόδων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Διοφάντου. Ὁ Γαλιλαῖος ἔσχε σπουδαίους μαθητάς, οἱ ὁποῖοι συνέχισαν τὸ ἔργον τοῦ διδασκάλου των, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρονται ὁ Τορικέλλι, ὁ Καβαλιέρι καὶ ὁ Βιβιάνι. Μερικὰ ὅμως θεωρήματα καὶ ἀσκήσεις ἐπιπεδομετρίας φερόμενα ἀπὸ τοῦ 17ου αἰῶνος μέχρι σήμερον, ὡς ἐφευρέσεις τοῦ Βιβιάνι, ἀπεκαλύφθη ἤδη ὅτι εἶναι ἐφευρέσεις τοῦ Ἀρχιμήδους, κατόπιν μεταφράσεως ἀγνώστων μέχρι τοῦδε ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκ τῆς ἀραβικῆς (εἰς τὴν ὁποίαν σώζονται) εἰς τὴν ἑλληνικὴν (Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, Τόμος Γ΄, ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1974, σελὶς 195). Ὁπωσδήποτε ὅμως ἡ Ἰταλικὴ Σχολὴ τοῦ 17ου αἰῶνος συνέβαλεν ἀποφασιστικῶς εἰς τὴν ἐξέλιξιν τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν ἐν γένει.

Σύγχρονος τοῦ Καρτεσίου εἶναι ὁ ἐπίσης Γάλλος Hérigone διὰ τὸν ὁποῖον ὁ συγγραφεὺς γράφει ὅτι ὑπῆρξε μακρινὸς πρόδρομος ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα ἐδημιούργησαν τὴν ἀξιωματικὴν θεμελίωσιν τῶν Μαθηματικῶν (σελ. 223). Ἐνταῦθα ἂς ἐπιτραπῇ νὰ σημειώσωμεν, ὅτι πρῶτος δημιουργὸς τῆς ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως τῶν Μαθηματικῶν εἶναι ὁ Θαλῆς καὶ ὅτι πᾶσα ἀντίθετος γνώμη δὲν συμφωνεῖ μὲ τὰ πράγματα, ὡς πειθόμεθα ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου συναντῶμεν τὴν ἀξιωματικὴν θεμελίωσιν τῶν Μαθηματικῶν.

Ἄλλη μεγάλη μαθηματικὴ φυσιογνωμία τῆς αὐτῆς ἐποχῆς εἶναι ὁ Γάλλος Fermat, τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν πρόοδον τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς Ἀλγέβρας ὑπῆρξεν ἀποφασιστική. Μὲ τοὺς Γάλλους ἐπίσης Desargues καὶ Pascal, οἵτινες εἶχον ἐπισταμένως μελετήσει τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Ἀρχιμήδη, ἡ Γεωμετρία λαμβάνει μεγάλην ἄνθησιν. Ἡ ἀριθμομηχανὴ τοῦ Pascal ἔκαμε μεγάλην ἐντύπωσιν τὴν ἐποχὴν ἐκείνην.

Εἰς τοὺς προδρόμους τοῦ ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ ἀναφέρονται ὁ Vincent, ὁ Tacquet, ὁ Roberval, ὁ Barrow, ὁ Mercator, ὁ Gregory, ὁ Huygens. Ὡς κατακλεὶς τοῦ ἔργου τοῦ Barrow, σημειώνει ὁ συγγραφεύς, ἀπαντᾶται μία προσπάθεια ἀναπαραγωγῆς διὰ τῆς μαντικῆς φαντασίας τῆς ὁδοῦ, τὴν ὁποίαν ἠκολούθησεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὰ συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἐκτίθενται εἰς τὰ ἔργα του Κύκλου μέτρησις καὶ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Διὰ τὸν (Βέλγον) Tacquet ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι εἶχεν ἐκδώσει καὶ ἐγχειρίδιον Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον μετέφρασεν ἐκ τῆς λατινικῆς εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὁ Ἀρχιεπίσκοπος Εὐγένιος Βούλγαρις καὶ ἐξετύπωσεν ἐν Βιέννῃ κατὰ τὸ 1805, δαπάναις τῆς Ἀδελφότητος τῶν Ζωσιμαδῶν «ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων νεανίσκοις».

Ὡς δορυφόρους τοῦ Newton καὶ τοῦ Leibniz ὀνομάζει ὁ συγγραφεὺς τὸν Edmund Halley, ὁ ὁποῖος ἔκαμεν ἐν Λονδίνῳ τὴν περίφημον ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸν Huygens, τὸν Tschirnhausen, τοὺς ἀδελφοὺς Bernoulli, τὸν L' Hospital. Εἰς τὸ τέλος τοῦ Β΄ τόμου ἐκτίθεται λεπτομερῶς ἡ μεγάλη διένεξις μεταξὺ Leibniz - Newton διὰ τὴν προτεραιότητα τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, διὰ τὸν ὁποῖον ὁ Wallis λέγει, ὅτι εἶναι ταυτόσημος πρὸς τὴν λεχθεῖσαν ἐξαντλητικὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους (Max Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909, σελ. 264—265).

Εἰς τὸν Γ΄ τόμον ἀναπτύσσονται μὲ τὴν αὐτὴν σαφήνειαν, ὡς καὶ εἰς τοὺς προηγουμένους δύο τόμους, τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν μεγάλων Μαθηματι-

κῶν Maclaurin, Stirling, Taylor, Stone, Riccati, Lagny, Rolle, Clairaut, Moivre, Simson, Euler, d' Alambert, Vandermonde, Lambert, Cramer, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Lacroix, Gauss καὶ ἄλλων.

Ἀξιοσημείωτος τυγχάνει καὶ ἡ ἔρευνα τοῦ Abel ἐπὶ τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων, ὡς καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος περὶ τοῦ ἀδυνάτου τῆς γενικῆς λύσεως ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ τετάρτου. Μὲ τὴν δρᾶσιν τοῦ Jacobi δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἐπιτελεῖται σπουδαῖον βῆμα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως.

Εἰς τὸ 41ον κεφάλαιον γίνεται μνεία τῆς γενέσεως τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς. Ὁ Klein εἶναι ἐνθουσιασμένος ἐκ τῆς θεωρίας τῶν Ὁμάδων καὶ τῆς Προβολικῆς Γεωμετρίας καὶ ἰσχυρίζεται, ὅτι δύναται νὰ θεμελιώσῃ τὴν μὴ Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν στηριζόμενος ἁπλῶς εἰς τὴν Προβολικὴν καὶ ὄχι τὴν Εὐκλείδειον. Μετὰ πολλὰ ἔτη ἀπὸ τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου παρέχεται ἡ ἀπάντησις, ὅτι καὶ ἡ Προβολικὴ Γεωμετρία στηρίζεται εἰς τὴν Εὐκλείδειον (Hans Freudenthal, Math. Phys. Semesterberichte IX, 1962, σελ. 115).

Εἰς τὸ κεφάλαιον 43 ἀναπτύσσονται τὰ διάφορα εἴδη τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν καὶ τῆς Γεωμετρίας τῶν περισσοτέρων διαστάσεων καὶ γενικῶς ἡ θεωρία τοῦ χώρου. Ἀκολουθεῖ ἡ συμβολὴ εἰς τὴν Ἀνάλυσιν τῶν Poincarè, Sturm, Serret, Bertrand, Appell, Dirichlet, Dedekind, Minkowski, Cébyceff καὶ ἄλλων.

Ὁ τρίτος τόμος κλείει μὲ τὴν διαμνημόνευσιν τῶν Ἱστορικῶν τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης: Montucla, Kästner, Peyrard, Halma, M. Cantor, Günther, Hankel, Tannery, Zeuthen, Gurtze, Heiberg, Suter, καὶ ἄλλων.— Ἐν παραρτήματι ἐκτίθενται τὰ Μαθηματικὰ εἰς τὴν Ἄπω Ἀνατολήν.

Ὁ Loria ἀναγράφων τὰ ἐπιτεύγματα τῶν μεγάλων Μαθηματικῶν τῶν τελευταίων αἰώνων (1590–1900) δὲν παραλείπει εὐκαιρίαν διὰ νὰ ἀναφέρῃ, ὅτι ὅλοι οἱ σκαπανεῖς αὐτοὶ τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν εἶχον βαθύτατα μελετήσει τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Διοφάντου, τοῦ Πάππου κλπ. Ὁ συγγραφεὺς ἀποτελεῖ μοναδικὸν φαινόμενον εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο συγκρινόμενος πρὸς ἄλλους συγγραφεῖς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν.

Ὁ ἐνεργήσας τὴν μετάφρασιν ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ πρωτοτύπου εἰς τὴν ἑλληνικὴν διακεκριμένος καθηγητὴς τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Ναυτικῶν Δοκίμων καὶ διπλωματοῦχος πολιτικὸς μηχανικὸς κ. Μιχαὴλ Κωβαῖος κατώρθωσε ν' ἀποδώσῃ ἐξόχως ἄριστα τὰς σκέψεις τοῦ Loria. Ἀλλὰ δὲν εἶναι τοῦτο τὸ μοναδικὸν ἐπίτευγμα τοῦ κ. Κωβαίου. Γνωρίζων οὗτος ἄριστα τὴν ἰταλικὴν γλῶσσαν καὶ τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν συνεπλήρωσε, μὲ ἔξοχον ἐπιτυχίαν, εἰς πλεῖστα σημεῖα τὸ ἔργον τοῦ διαπρεποῦς Ἰταλοῦ ἐπιστήμονος δι' εὐστόχων κριτικῶν παρατηρήσεων.

Ἂς ἐπιτραπῇ νὰ σημειώσωμεν ὀλίγας λέξεις ἀπὸ τὸν πρόλογον τοῦ κ. Κωβαίου εἰς τὸν Α' τόμον.

«Ὁ συγγραφεὺς ἀποδεικνύει καὶ διασαλπίζει χωρὶς περιστροφὰς τὴν ἀλήθειαν, ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη ἀποτελεῖ εἰς τὴν βάσιν της ἀκατάλυτον καὶ ἀναφαίρετον τρόπαιον τοῦ δαιμονίου πνεύματος μιᾶς προνομιούχου φυλῆς τῆς φύσεως». Ἡ ἀπόφασις τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, ὅπως προβῇ εἰς μετάφρασιν καὶ ἔκδοσιν μιᾶς πλήρους Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν, ὅπως εἶναι ἡ προκειμένη ἐργασία τοῦ διακεκριμένου Ἱστορικοῦ τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης GINO LORIA, δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ νὰ εὕρῃ τὴν εὐνοϊκωτέραν ἀπήχησιν εἰς τοὺς ἐκπαιδευτικοὺς κύκλους τῆς Μέσης καὶ τῆς Ἀνωτάτης Παιδείας».

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

EUCLIDES, Post I. L. Heiberg edidit **E. S. Stamatis**, IV, Elementa XI-XIII, BSB B. G. Teubner, Leipsig, 1973, σελ. XXXI/238.

Διὰ τοῦ παρόντος 4ου τόμου ὁλοκληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ οἴκου Teubner, ἣν οὗτος ἐνεπιστεύθη εἰς τὴν πεῖραν, τὴν ἐπιμέλειαν καὶ τὴν σοφίαν τοῦ Ἕλληνος Σταμάτη. Τὰ γενικὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ἐκδόσεως Σταμάτη καὶ αἱ βελτιώσεις, ἃς οὗτος ἐπήνεγκεν ἐν σχέσει πρὸς τὴν προηγουμένην ἔκδοσιν τοῦ Heiberg, ἐξετέθησαν ἤδη ἐν τῇ παρουσιάσει τοῦ 1ου καὶ 2ου τόμου τοῦ ἔργου τούτου ἐν ΠΛΑΤΩΝΙ τόμ. 22 (1970) σελ. 355.

Νῦν εἰς τὸν 4ον τόμον περιλαμβάνεται ἡ σπουδὴ τῆς Στερεομετρίας, ἐν ᾗ ἐξέχει ἡ διαπραγμάτευσις τῶν πέντε Πλατωνικῶν καλουμένων σχημάτων, ἤτοι τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, κύβου - πυραμίδος - 12έδρου - 8έδρου - 20έδρου, ὧν τὰ τρία πρῶτα θεωροῦνται ἀνακαλύψεις τῶν Πυθαγορείων, τὰ δ' ἕτερα δύο τοῦ μαθηματικοῦ Θεαιτήτου, γνωστοῦ ἐκ τοῦ ὁμωνύμου Πλατωνικοῦ διαλόγου.

Ἐκ τῶν βελτιώσεων τῆς ἐκδόσεως Σταμάτη μνημονευτέαι εἶναι ἡ προσθήκη 16 νέων μαρτυριῶν (testimonia), ὁ πίναξ τῶν κατὰ βιβλίον ὁρισμῶν, θεωρημάτων, προβλημάτων, πορισμάτων καὶ λημμάτων, ὁ πίναξ τῶν ἀρχῶν καὶ ἡ προσθήκη δευτέρου κριτικοῦ ὑπομνήματος, διὰ τῆς βοηθείας τοῦ ὁποίου ὁ μελετητὴς κάθε προτάσεως ἀνευρίσκει ὅλα τὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ πρότασις. Ἡ σύνταξις τοῦ ὑπομνήματος τούτου προϋποθέτει κυριαρχίαν τοῦ Εὐκλειδείου ὑλικοῦ καὶ μόχθον πολὺν διὰ τὴν συσχέτισιν τῶν θεωρημάτων.

Ἡ νέα Σταμάτειος ἔκδοσις τοῦ Εὐκλείδου παρὰ Teubner ἀποτελεῖ οὐσιώδη βελτίωσιν τῆς πρώτης, εἶναι ἄκρως ἐπιμελημένη καὶ προσφέρει εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἐπιστήμην πολύτιμον βοήθημα. Ὁ οἶκος Teubner, ἔχων πεῖραν πλέον τοῦ ἡμιολίου αἰῶνος καὶ ἐπιλέγων μετὰ πολλῆς προσοχῆς τοὺς συγγραφεῖς τῶν ἐκδόσεών του, δὲν θὰ ἐπέλεγε τὸν Σταμάτην, ἐὰν δὲν εἶχε τὰ ἐχέγγυα τῆς ἐπιτυχοῦς ἀποδόσεως· καὶ τὰ ἐχέγγυα τὰ εἶχε παράσχει ὁ Σταμάτης ἐκδοὺς προηγουμένως τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἀπὸ 1952—1957 μὲ εἰσαγωγήν, πλουσίας ἐπεξηγήσεις καὶ νεοελληνικὴν μετάφρασιν παραλλήλως πρὸς τὴν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ, **Ἀρχιμήδους Ἅπαντα,** ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις, σχόλια, Τόμος Γ'. Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1974, XLIII/386.

Διὰ τοῦ Γ' τόμου συμπληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος τῇ ἐπιμελείᾳ τοῦ Ε. Σ. Σταμάτη. Ἡ προηγουμένη ὑπὸ Ἕλληνος ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνέρχεται εἰς τὸ ἔτος 830 μ. Χ., ἐξεπονήθη δὲ ἐκείνη ὑπὸ τοῦ Λέοντος τοῦ Μαθηματικοῦ, ἱεροδιακόνου τῆς Ἁγ. Σοφίας καὶ Καθηγητοῦ τοῦ Πανδιδακτηρίου τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Τῶν προεκδοθέντων τόμων Α' καὶ Β' τῆς παρούσης ἐκδόσεως Σταμάτη ἐγένετο παρουσίασις ἐν ΠΛΑΤΩΝΙ, τόμ. 22 (1970) σελ. 356—358 καὶ τόμ. 25 (1973) σελ. 356 ἀντιστοίχως. Εἰς τὸν παρόντα Γ' τόμον περιλαμβάνονται ἔργα τινὰ τοῦ Ἀρχιμήδους διασωθέντα μόνον εἰς Ἀραβικὴν γλῶσσαν. Ἃς σημειωθῇ

γενικῶς ὅτι ἐκ τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους 28 μὲν ἐχάθησαν, 11 ἐσώθησαν εἰς Ἑλληνικὴν γλῶσσαν καὶ 9 εἰς Ἀραβικήν, τὰ νῦν ἐκδιδόμενα ἐν τῷ Γ΄ τόμῳ τῆς παρούσης ἐκδόσεως. Τὰ ἐννέα ταῦτα ἔργα εἶναι τὰ ἀκόλουθα: 1. Λήμματα. 2. Περὶ ὀρθογωνίων τρ.γώνων. 3. Περὶ κύκλων 4. Περὶ κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου. 5. Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων κύκλων. 6. Εὕρεσις ὕψους καὶ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. 7. Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας. 8. Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14έδρου καὶ 9. Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐκ τῶν ἐννέα τούτων ἔργων τὸ ὑπ' ἀριθ. 1 μετεφράσθη κατὰ τὸν Μεσαίωνα ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν Λατινικὴν καὶ εἶτα εἰς Γαλλικήν, Ἀγγλικὴν καὶ Γερμανικήν. Τὰ ὑπ' ἀρ. 2, 3, 4, 6, 8 καὶ 9 ἔχουν μεταφρασθῆ ἐκ τῆς Ἀραβικῆς εἰς τὴν Γερμανικήν. Τὰ δὲ ὑπ' ἀριθ. 5 καὶ 7 ἄγνωστα μέχρι τοῦδε εἰς τοὺς Εὐρωπαίους μετεφράσθησαν νῦν τὸ πρῶτον ἐκ τῆς Ἀραβικῆς εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικήν. Ταῦτα ἐπιμελείᾳ τοῦ Σταμάτη ἐκομίσθησαν ἐν φωτοτυπίᾳ ἐκ τῆς Βιβλιοθήκης τῆς Ἰνδικῆς πόλεως Patna εἰς τὰς Ἀθήνας καὶ μετεφράσθησαν ἐδῶ δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος.

Ἐκδίδων τὰ ἔργα ταῦτα νῦν ὁ Σταμάτης τὰ ὑποβάλλει εἰς λεπτομερῆ φυλοκρίνησιν ὡς βλέπομεν εἰς τὰς δι' ἕκαστον τούτων εἰσαγωγάς. Γνωρίζων πλήρως τὰ σωζόμενα Ἀρχιμήδεια ἔργα καὶ τὰ ἐκφραστικά των χαρκτηριστικά, συγκρίνει τὸ περιεχόμενον, τὰ σχήματα καὶ τὴν διατύπωσιν τῶν Ἀραβικῶν διὰ τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως ἐκδόσεων καὶ καταλήγει εἰς συμπεράσματα τί ἐκ τούτων εἶναι αὐθεντικὸν Ἀρχιμήδειον καὶ τί εἶναι προσθήκη (ὡς διασάφησις ἢ σχόλιον ἢ ἁπλοποίησις διὰ τοὺς ἀρχαίους), ἤτοι μεταβολαὶ γενόμεναι εἴτε ἤδη ὑπὸ Βυζαντινῶν μαθηματικῶν εἴτε ὑπὸ τῶν Ἀράβων, οἵτινες τὰ παρέλαβον ἐκ βυζαντινῶν κωδίκων συμφώνως πρὸς τὰς ἱστορικὰς μαρτυρίας. Οὕτω ὁ Σταμάτης προέβη καὶ εἰς εἶδός τι ἐκκαθαρίσεως τῶν ὑπὸ τῶν Ἀράβων διασωθέντων Ἀρχιμηδείων Ἔργων.

Καὶ τὰ μὲν ὑπ' ἀριθ. 1—7 ἔργα ὁ Στ. ἐκ τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως ὄχι μόνον τὰ ἀποδίδει εἰς τὴν Νεοελληνικὴν γλῶσσαν (σελὶς δεξιά), ἀλλὰ καὶ τὰ ἀνακατασκευάζει εἰς τὴν Ἀρχιμήδειον Σικελοδωρικὴν διάλεκτον (σελὶς ἀριστερά), ἔχων ὡς βάσιν τὸ λεκτικὸν τοῦ Ἀρχιμήδους τὸ χρησιμοποιούμενον εἰς τὰς διασωθέντα ἔργα. Καὶ οὐ μόνον τοῦτο, ἀλλὰ ἀνακατασκευάζει καὶ τὰς ἐλλειπούσας ἀπὸ τὸ μεταφρασμένον ἀραβικὸν κείμενον ἐνιαχοῦ προτάσεις τῶν θεωρημάτων, ὑπολογίζων κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἔκαμνε τὴν διατύπωσιν ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης. Τὰ ὑπ' ἀρ. 8 καὶ 9 ἔργα ἀποδίδονται ἐκ τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως ἁπλῶς εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικὴν χωρὶς ἀνακατασκευὴν εἰς τὸ Δωρικὸν Ἀρχιμήδειον λεκτικόν, δεδομένου ὅτι διὰ τὰ τεχνικῆς φύσεως ταῦτα ἔργα δὲν ὑπάρχουν ἀντίστοιχοι ὅροι εἰς τὰ διασωθέντα Ἑλληνικὰ κείμενα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἡ ἔκδοσις τῶν εἰς τὴν Ἀραβικὴν διασωθέντων ἔργων τοῦ μεγάλου Ἕλληνος μαθηματικοῦ τῶν Ἑλληνιστικῶν χρόνων, μὲ τὰς θαυμασίας εἰσαγωγὰς καὶ ἐπεξηγήσεις, τὴν ἑρμηνείαν εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικὴν καὶ τὴν εἰς τὸ πρωτότυπον ἀρχαῖον δωρικὸν λεκτικὸν ἀνακατασκευὴν ἀποτελεῖ ἐπίτευγμα σπάνιον καὶ θαυμαστόν, προδίδον τὴν βαθυτάτην γνῶσιν τῶν ἀρχαίων Μαθηματικῶν συγγραφέων ἐκ μέρους τοῦ Συγγραφέως. Πέρα τῶν 9 ἔργων ὁ τόμος περιέχει καὶ περιγραφὴν τοῦ ἐπιτυχοῦς πειράματος ἐν Ὑμηττῷ καὶ Σκαραμαγκᾷ τῷ 1973 πρὸς ἐπαλήθευσιν τῆς καύσεως τοῦ Ρωμ. στόλου ἐν Συρακούσαις τῇ 215—212 π. Χ. ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ φωτοτυπίας τῶν ἀραβικῶν κειμένων τῶν ἔργων ὑπ' ἀριθ. 5, 7 καὶ 9.

Διὰ τὴν τρίτομον ἔκδοσιν τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους ἔπαινος μὲν ὀφείλεται εἰς τὸ Τεχνικὸν Ἐπιμελητήριον τῆς Ἑλλάδος, διὰ τὴν γενναιοφρόνως ἐκδηλωθεῖσαν ἐθνικὴν φιλοτιμίαν πρὸς παρουσίασιν τῆς πατρογονικῆς πνευματικῆς κληρονομίας· τιμὴ δὲ εἰς τὸν ἀκάματον Ε. Σταμάτην, τὸν ὁλόκληρον τὸν βίον ἀφιερώσαντα μετὰ τοσαύτης ἐπιτυχίας εἰς τὴν μελέτην καὶ παρουσίασιν τῆς προσφο-

ρᾶς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων εἰς τὸ πεδίον τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν, ἐλαυνόμενον ἁπλῶς ἐκ ζήλου ἱεροῦ. Οὐδένα ἄλλον ἐκ τῶν ζώντων Ἑλλήνων γνωρίζω τόσον πολλὰ καὶ ἐπὶ τόσον μακρὸν χρόνον προσενεγκόντα εἰς τὴν θεραπείαν τῆς Ἱστορίας τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν, ἔργῳ δὲ κεκτημένον καὶ τὴν διεθνῆ ἀναγνώρισιν.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

R. D. DAWE, **Studies on the Text of Sophocles,** Vol. I The Manuscripts and the Text (viii + 274) — Vol. II The Collations (viii + 152), E. J. Brill, Leiden 1973. Τιμὴ Gld. 175.

1. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ κείμενον τοῦ Σοφοκλέους, ὡς καὶ τὸ κείμενον τῶν ἄλλων μεγάλων συγγραφέων τῆς ἀρχαιότητος, ἐπέσπασε τὸ ἀδιάπτωτον ἐνδιαφέρον τῆς φιλολογικῆς κριτικῆς τῶν δύο τελευταίων αἰώνων. Πᾶσα λέξις καὶ πᾶσα φράσις τοῦ διασωθέντος, διὰ τῆς ἀμέσου ἢ ἐμμέσου παραδόσεως, κειμένου τοῦ ποιητοῦ ὑπέστη τὸν ἐξονυχιστικὸν ἔλεγχον τῆς κριτικῆς, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν συρροὴν ἀπειρίας εἰκασιῶν καὶ διορθώσεων διεσπαρμένων εἰς τὰ ὑπομνήματα καὶ τὰς σημειώσεις τῶν πάσης φύσεως ἐκδόσεων τοῦ ποιητοῦ, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ εἰς πολυαρίθμους διατριβὰς καὶ μελέτας, αἱ πλεῖσται τῶν ὁποίων κεῖνται ἐγκαταλελειμμέναι καὶ δυσεύρετοι, ὑπὸ παχέα στρώματα κόνεως, εἰς τὰς βιβλιοθήκας τῆς γηραιᾶς ἠπείρου. Κύριον γνώρισμα τῶν περισσοτέρων ἐξ αὐτῶν τῶν ἐργασιῶν ἦτο ἡ ἐλλιπὴς γνῶσις τῆς χειρογράφου παραδόσεως τοῦ ποιητοῦ, ἀφ' ἑνὸς μὲν λόγῳ τῆς ὑπαρχούσης, ἄλλοτε, δυσχερείας τῶν λογίων νὰ ἐπισκεφθοῦν τὰς διαφόρους, βιβλιοθήκας καὶ νὰ μελετήσουν αὐτοπροσώπως τὰς συλλογὰς τῶν χειρογράφων, ἀφ' ἑτέρου δὲ λόγῳ προκαταλήψεων ἀφορωσῶν εἰς τὴν ἀξίαν ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἐν λόγῳ χειρογράφων. Οὕτω, λοιπόν, παρὰ τὸ ὅτι, ἤδη ἀπὸ τοῦ 1786, ὁ Ριχάρδος Brunck εἶχε λάβει ὡς βάσιν τῆς ἐκδόσεώς του τὸν Παρισινὸν κώδ. 2712 ($A_{o}$-παρὰ τὸ ὅτι, ἤδη ἀπὸ τοῦ 1825, ὁ Γουλιέλμος Dindorf, εἰς τὴν ἰδικήν του ἔκδ$_{\text{nv.}}$σιν τῆς Λειψίας, εἶχεν ὑποδείξει τὴν σπουδαιότητα τοῦ Λαυρεντιανοῦ κώδ. Co Soppr. 152 (G) τῆς Φλωρεντίας, ἐν τούτοις, τῷ 1847, ὁ πολὺς Κάρολος Γαβριὴλ Cobet, διδάσκαλος τοῦ Κωνσταντίνου Κόντου, διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ του λόγου *De Arte Interpretandi* (σελ. 103) ὑπεστήριξε τὴν ἀπόλυτον ὑπεροχὴν τοῦ Λαυρεντιανοῦ κώδ. 32.9 τῆς Φλωρεντίας (L) ἔναντι πάντων τῶν λοιπῶν χειρογράφων, διὰ τοῦ ἀκολούθου ἀφορισμοῦ: Satis mihi constat Aeschyli et Sophoclis fabulas, quas habemus, in unico codice, qui nunc in Laurentiana bibliotheca servatur, ad nos pervenisse : ex quo vetustissimo codice decimo fere p. Chr. sæculo pulcherrime in membranis scripto profluxit, quidquid codicum manu scriptorum ubique invenitur. Τὴν γνώμην τοῦ Cobet ἀπεδέχθησαν πλεῖστοι φιλόλογοι, ἐν οἷς ὁ Γουλ. Dindorf, ὁ Μαυρίκιος Seyffert καὶ ὁ Ἐδουάρδος Tournier εἰς τὰς ἐκδόσεις των τοῦ Σοφοκλέους, ὑπεστήριξε δ' ἐν ἐκτάσει, διὰ τῆς ἐναισίμου διατριβῆς του *De Sophoclis Codicibus* (Halis Saxonum 1891), ὁ Κάρολος Meifert. Ἀντιθέτως ὅμως, καὶ προεξάρχοντος τοῦ Φρειδ. Γουλ. Schneidewin (τὸ πρῶτον ἐν τοῖς *Neue Jahrbücher für Philologie und Paedagogik* τοῦ Jahn, τόμ. 67 τοῦ 1853 σσ. 497—8, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς βιβλιοκρισίας του εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν Σοφοκλείων σχολίων ὑπὸ τοῦ Dindorf), ὑπεστηρίχθη ὅτι δὲν ἦτο δυνατὴ ἡ προέλευ-

πραγματεῖαι ἐταξινομήθησαν ἐν αὐτῷ κατὰ τὴν σειρὰν ἣν ἔχει τὸ πρῶτον γράμμα τοῦ ὀνόματος τοῦ συγγραφέως εἰς τὸ ἀλφάβητον. Οὕτω μετὰ τὸν Πρόλογον καὶ τὸ βιβλιογραφικὸν σημείωμα ἐξ ὀκτὼ σελίδων, ἐν αἷς ἀναγράφονται οἱ τίτλοι τῶν βιβλίων καὶ μελετῶν του, ἀκολουθεῖ ἡ μελέτη τοῦ Andrewes, ἐπιτάσσεται δὲ τοῦ τόμου ἐκείνη τοῦ Wycherly.

Μὲ τὴν ὅλην φροντίδα τῆς δημοσιεύσεως εἶχον ἐπιφορτισθῆ οἱ καθηγηταὶ Donald Bradeen, τοῦ Πανεπιστημίου Cincinnati καὶ Malcolm Mc Gregor, τοῦ Πανεπιστημίου British Columbia τοῦ Καναδᾶ. Ὁ πρῶτος τούτων, νέος ἀκόμη καὶ ἐκ τῶν καλυτέρων Ἐπιγραφικῶν, ἀπεβίωσεν ἐν τῷ μεταξύ.

Ὁ τόμος εἰς ἀγγλικὴν γλῶσσαν, πλὴν τριῶν μελετῶν, ἀπετελέσθη ἐκ τῶν πραγματειῶν 26 ἐπιστημόνων, κατὰ τὸ πλεῖστον Πανεπιστημιακῶν διδασκάλων, ἀσχολουμένων περὶ τὴν Ἑλληνικὴν Ἀρχαιογνωσίαν, ὡς τῶν: *A. Andrewes,* the Survival of Solon's Axones: *G. Daux,* Notes d' Epigraphie Attique: *D. Geagan,* Ordo Areopagitarum Atheniensium: *M. Guarducci,* L'Offerta di Xenokrateia nel santuario di Cefiso al Falero: *M. Jameson,* A Treasury of Athena in the Argolid: *M. Mitsos,* Some Lists of Athenial Ephebes: *W. Peek,* Epigramme von der Agora: *D. Peppa-Delmousou,* Three Inscriptions from the Epigraphical Museum: *A. Raubitschek,* Kolieis: *E. Vanderpool,* The Date of the Pre-Persian City-Wall of Athens: *A. G. Woodhead,* West's Panel of Ship-Payers κ.λ.π.

ΜΑΡΚΕΛΛΟΣ Θ. ΜΙΤΣΟΣ

* * *

ARG. PETRONOTIS, **Zum Problem der Bauzeichnungen bei der Griechen,** Athen 1972, S. 63.

Ὁ Ἀργύρης Πετρονώτης ἀρχιτέκτων ἐγένετο διδάκτωρ τῆς Ἀρχιτεκτονικῆς ἐν τῷ Τεχνικῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Μονάχου κατὰ τὸ 1968 ὑποβαλὼν τὴν ὑπὸ τὸν τίτλον «Χαράξεις κατασκευῶν εἰς τὴν θεμελίωσιν Ἑλληνικῶν οἰκοδομημάτων κατὰ τὴν ἀρχαϊκὴν καὶ κλασσικὴν ἐποχὴν» πραγματείαν. Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν, συντεταγμένην εἰς τὴν γερμανικὴν διευρύνει τὸ θέμα τῆς διδακτορικῆς διατριβῆς ἐξετάζων γενικώτερον τὰς κατὰ τὴν ἀρχαιότητα σχεδιάσεις οἰκοδομημάτων. Ὡς προμετωπίδα τῆς πραγματείας τοποθετεῖ ὁ συγγραφεὺς τὴν ῥῆσιν τοῦ Πλάτωνος (ἐν γερμανικῇ μεταφράσει): λάβωμεν δὲ ὡς ὅ,τι περ ἂν Ἕλληνες βαρβάρων παραλάβωσι, κάλλιον τοῦτο εἰς τέλος ἀπεργάζονται (Ἐπινομὶς 987 e).

Διὰ τὰ Βαβυλωνιακὰ οἰκοδομήματα, τῆς ἐποχῆς 2000 ἐτῶν π. Χ. περίπου, ἀναφέρει ὁ συγγραφεὺς τὴν ὕπαρξιν σχεδιάσεων ἐπὶ πλίνθων, ἐν ᾧ διὰ τὰ Αἰγυπτιακὰ οἰκοδομήματα δὲν διεσώθησαν στοιχεῖα σχεδιάσεως αὐτῶν. Ὁ Wolf ὑποστηρίζει (Anm. 28) ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι περὶ τὸ 2660—2590 π. Χ. προσδιώριζον κατὰ τὰς σχεδιάσεις των σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῆς γεωμετρίας τῶν συντεταγμένων. Φρονοῦμεν ὅτι ἡ ἀντίληψις αὕτη εἶναι ὑπερβολική, ἀφοῦ ἡ γεωμετρία τῶν συντεταγμένων ἀνεκαλύφθη περὶ τὸ 1580 μ. Χ. Συνήθως ἀκούομεν, λέγει ὁ συγγραφεύς, νὰ γίνεται λόγος περὶ «ὑπογραφῶν» οἰκοδομημάτων Ἑλληνικῶν. Ὁ ὅρος οὗτος σημαίνει σχεδίασιν, ὡς εἰκάζεται ἐκ τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος (504 d), ὅπου γράφεται: «καὶ αὐτῶν τούτων οὐχ' ὑπογραφὴν δεῖ ὥσπερ νῦν θεάσασθαι ἀλλὰ τὴν τελεωτάτην ἀπεργασίαν μὴ παριέναι». Εἰς ἐπίρρωσιν τῆς ἀντιλήψεως αὐτῆς ἂς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν καὶ συναφῆ ῥῆσιν τοῦ Αἰσχύλου (Χοηφόροι 209): «πτέρναι τενόντων θ' ὑπογραφαὶ μετρούμεναι εἰς ταὐτὸ συμβαίνουσι τοῖς ἐμοῖς στί-

βοις». Περισσότεραι πληροφορίαι διὰ τὰς σχεδιάσεις Ἑλληνικῶν οἰκοδομημάτων περιέχονται ὑπὸ τοῦ Ῥωμαίου ἀρχιτέκτονος Βιτρουβίου. Ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ ὅρου «παράδειγμα» νοεῖται ἐνίοτε ἡ σχεδίασις ἑνὸς οἰκοδομήματος. Ἀκολούθως ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρει τὰ ὑλικά, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποίουν οἱ Ἕλληνες ἀρχιτέκτονες διὰ τὰς σχεδιάσεις, ὡς καὶ τὰ ὄργανα τῆς σχεδιάσεως.

Εἰς τὸν ἐπίλογον μνημονεύονται οἱ Σάμιοι ἀρχιτέκτονες Ῥοῖκος καὶ Θεόδωρος κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν ὁποίων οἰκοδομοῦνται αἱ τρεῖς δίπτεροι ναοὶ (μὲ διπλᾶς σειρὰς κιόνων) εἰς τὴν Σάμον, τὴν Ἔφεσον καὶ τὰ Δίδυμα (κείμενα ὀλίγον νοτίως τῆς Μιλήτου). Ὁ συγγραφεὺς ὑποθέτει ὅτι ὁ Ῥοῖκος εἶχεν ἐπισκεφθῆ δι' ἐπιστημονικοὺς σκοποὺς τὴν παρὰ τὴν ἐκβολὴν ἑνὸς βραχίονος τοῦ Νείλου, οὐχὶ μακρὰν τῆς θαλάσσης κειμένην Αἰγυπτιακὴν πόλιν Ναύκρατιν. Ἡ ἐπίσκεψις αὕτη πιθανὸν νὰ ἔγινε, ὄχι ὅμως δι' ἐπιστημονικοὺς σκοπούς, διότι ἡ Ναύκρατις ἦτο ἀποικία τῆς Μιλήτου καὶ δὲν εἶναι γνωστὸν ἂν εἶχε δημιουργήσει αὕτη πολιτισμὸν ἀνώτερον τῆς Μητροπόλεως (Pappe - Benseler, Griechische Eigennamen, Fr. Vieweg, Braunschweig, 1911, Nachdruck Graz 1959).

Τὰ σημειούμενα εἰς τὴν παραπομπὴν 294, ὅτι τὰ μαθηματικὰ τοῦ Θαλοῦ εἶναι διατυπώσεις Βαβυλωνιακῶν καὶ Αἰγυπτικῶν μαθηματιακῶν καὶ ὅτι ὁ Πυθαγόρας παρέλαβε τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἐκ τῶν Βαβυλωνίων εἶναι ἀνακριβῆ. Διότι ὁ μὲν Θαλῆς ἀνεκάλυψε τὴν ἀπόδειξιν εἰς τὰ μαθηματικά, τὴν ὁποίαν οὐδεὶς ἄλλος λαὸς κατὰ τὴν ἀρχαιότητα διενοήθη, τὸ Πυθαγόρειον δὲ θεώρημα τὸ ἀνεκάλυψεν ὁ Πυθαγόρας. Ὁ H. Diels, τὸν ὁποῖον ἐπικαλεῖται ὁ συγγραφεὺς (Antike Technik S. 3 Anm. 3) ἀναφέρεται μόνον εἰς τὴν ἔκλειψιν ἡλίου τῆς 28 Μαΐου 585 π. Χ. καὶ λέγει ὅτι ὁ Θαλῆς ἔμαθε τὴν περίοδον Σάρος, δυνάμει τῆς ὁποίας ἔκαμε τὴν πρόβλεψιν τῆς ἐκλείψεως, παρὰ τῶν Βαβυλωνίων, χωρὶς καμμίαν τεκμηρίωσιν τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς. Ὁ μῦθος δὲ ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ἐγνώριζον τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχει δημιουργηθῆ παρὰ τοῦ Μισέλληνος Αὐστροεβραίου ἱστορικοῦ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης O. Neugebauer (Vorgriechische Mathematik I, Berlin 1935). Ὁ συγγ. οὗτος λέγει ἀκόμη ὅτι καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικὰ δὲν ὀφείλεται εἰς τὸν Θαλῆν, διότι καὶ οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον «ἓν εἶδος ἀποδείξεως»!!. Ὁ ἴδιος προσθέτει ἀκόμη ὅτι καὶ τὴν ἔκλειψιν ἡλίου ἐδιδάχθη ὁ Θαλῆς παρὰ τῶν Βαβυλωνίων. Πειστικὴν ἀναίρεσιν τῶν ἐπιχειρημάτων τοῦ Neugebauer παρέχει ὁ L. Blanche «L' éclipse de Thalès et ses problèmes» ἐν Revue Philosophique 2, Avril - Juin 1968, Paris.

Ὁ συγγραφεὺς ἔχει ὑποστῆ τὴν ἐπίδρασιν μέρους σημαντικοῦ τῆς διεθνοῦς βιβλιογραφίας, καθ' ἣν τὰ πρῶτα στοιχεῖα τοῦ πολιτισμοῦ παρουσιάζονται εἰς τὴν Μεσοποταμίαν καὶ τὴν Αἴγυπτον περὶ τὴν 4ην χιλιετίαν π. Χ., ἡ ὁποία βιβλιογραφία παρασιωπᾷ τὰ ἐν τῷ Τιμαίῳ τοῦ Πλάτωνος ἀναφερόμενα, ὅτι οἱ Ἀθηναῖοι εἶχον μέγαν πολιτισμὸν περὶ τὸ ἔτος 10 χιλ. π. Χ. (Τίμαιος 23 b—25 a) καὶ ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι παρέλαβον τὸν πολιτισμόν των παρὰ τῶν Ἀθηναίων.

Ὁ Πετρονώτης εἶναι ἀπολύτως κάτοχος τοῦ διαπραγματευομένου θέματος. Αἱ λεπτομέρειαι τὰς ὁποίας ἀναφέρει εἰς ἕκαστον κεφάλαιον δὲν στηρίζονται ἁπλῶς εἰς τὴν συναφῆ βιβλιογραφίαν, ἀλλὰ εἶναι προϊόντα ἐμβριθοῦς σπουδῆς καὶ ἀποτελέσματα βαθυτάτης ἐπισκοπήσεως τοῦ θέματος. Ἡ προσπάθεια αὐτοῦ δύναται νὰ χαρακτηρισθῆ ὡς ἀξιόλογος συμβολὴ εἰς τὴν προαγωγὴν τοῦ ἐπιστημονικοῦ καὶ καλλιτεχνικοῦ πνεύματος ἐν Ἑλλάδι, ἀφαιρουμένης τῆς ἀνωτέρω σημειουμένης παραπομπῆς ὑπ' ἀριθ. 294.

ΕΥ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΖ' 1975

ΤΟΜΟΣ **27** (ΤΕΥΧΗ 53/54)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1975

των ἐκ μέρους ὁμοϊδεατῶν των καὶ λόγῳ τοῦ ρόλου των εἰς αὐτήν[1], ὁ L. (*passim*, ἰδίᾳ σσ. 63 κ.ἑ., 75, 87 κ.ἑ., 97 κ.ἑ.) χειρίζεται τὸ θέμα περισσότερον ἀπὸ τὴν ἀντίθετον σκοπιάν, τονίζει δηλ. περισσότερον τὸν ρόλον τῶν φυγάδων ὡς ἐνεργῶν συμμετόχων εἰς συνωμοσίας «πεμπτοφαλαγγιτῶν».

Γενικῶς εἰπεῖν, τὸ βιβλίον τοῦ L., παρὰ τὸ ὅτι εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἡ θεώρησις τῶν πραγμάτων θὰ ἠδύνατο νὰ εἶναι διαφορετική, προσφέρει μίαν ἐμπεριστατωμένην μελέτην ἑνὸς συνήθους πολιτικοστρατιωτικοῦ φαινομένου τοῦ Πελοποννησιακοῦ Πολέμου ἐξαιρετικοῦ ἐνδιαφέροντος. Τὸ ἔργον αὐτὸ ὡς καὶ ἡ ἔρευνα τοῦ θέματος τῶν ὑπηρεσιῶν πληροφοριῶν καὶ ἀσφαλείας τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, τὴν ὁποίαν ὁ L. προαναγγέλλει, θὰ ἀποτελέσουν θετικὰς συμβολὰς εἰς τὴν δ ερεύνησιν ἐξόχως ἐνδιαφερόντων καὶ πρωτοτύπων θεμάτων τῆς ἑλληνικῆς ἀρχαιότητος.

Δύναται νὰ λεχθῇ ἀπεριφράστως ὅτι τὸ βιβλίον τοῦ D. εἶναι: ἐνδιαφέρον διὰ τὸν ἁπλοῦν ἀρχαιόφιλον ἀναγνώστην, χρήσιμον διὰ τὸν κατ' ἐπάγγελμα ἀρχαιογνώστην (διδάσκοντα καὶ / ἢ συγγραφέα) καὶ ἀπαραίτητον διὰ τὸν εἰδικὸν ἐρευνητήν.

ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ, δ. φ.

***

J. B. HOFMANN, **Ἐτυμολογικὸν Λεξικὸν τῆς Ἀρχαίας Ἑλληνικῆς** (ἐξελληνισθὲν ὑπὸ Ἀντωνίου Δ. Παπανικολάου, ἐν Ἀθήναις 1974, σσ. α' - κδ' + 542).

Προκειμένου νὰ ἐρευνήσωμεν μεθοδικῶς καὶ ἐπιστημονικῶς μίαν γλῶσσαν θὰ πρέπῃ νὰ διακρίνωμεν:

1) τὸν λεξιλογικὸν θησαυρὸν αὐτῆς, ἤτοι τὸ σύνολον τῶν λέξεων αἱ ὁποῖαι ἐλαλήθησαν ἢ ἐγράφησαν

2) τὸ κλιτικόν της σύστημα, ἤτοι τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον μεταβάλλονται αἱ κλιταὶ ἐκ τῶν λέξεων τοῦ θησαυροῦ της καὶ

3) τὴν σύνταξιν αὐτῆς, ἤτοι τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ λέξεις κλιταὶ καὶ μὴ συμπλέκονται πρὸς σχηματισμὸν λόγου.

Διὰ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως παρέχεται ἡ δυνατότης ἀντιστοίχου μερισμοῦ τῆς ὅλης γλωσσικῆς ἐπιστήμης. Ἀναφορικῶς πρὸς τὸν θησαυρὸν τῆς γλώσσης εἶναι ἀνάγκη νὰ εὑρεθῇ (καὶ νὰ καταταχθῇ κατά τινα τρόπον) τὸ πλῆθος τῶν λέξεων καὶ νὰ σημειωθοῦν αἱ διάφοροι σημασίαι των. Μεγαλυτέραν ὅμως σπουδαιότητα ἔχει ἡ ἐξέτασις αὐτῶν τῶν μερῶν ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται μία λέξις. Δὲν ἐννοοῦμεν βεβαίως τὸν χωρισμὸν εἰς φθόγγους (τοὺς ὁποίους ἄλλωστε ἐξετάζει ἄλλος κλάδος τῆς γλωσσικῆς ἐπιστήμης), οὔτε εἰς συλλαβάς, ἀλλὰ κυρίως τὴν ἀνατομίαν, θὰ ἐλέγομεν, τῆς λέξεως, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εὕρωμεν τὸν βασικὸν πυρῆνά της, ὁ ὁποῖος καὶ ὑπόκειται εἰς ὁλόκληρον σειρὰν ἐτυμολογικῶς συγγενῶν λέξεων. Εἰς ὅλην αὐτὴν τὴν σειρὰν ὑπάρχει τι σταθερόν πως, ἡ ρίζα. Πρὸ αὐτῆς εἶναι δυ-

1. Οἱ ἀρχαῖοι συγγραφεῖς δὲν ἐδίσταζον νὰ ὀνομάσουν προδοσίαν τὸν ρόλον αὐτὸν (π.χ. Θουκ. II. 5. 7 «οἱ προδιδόντες», Ξεν. *Ἑλλην.* II. 2. 1 «οἱ προδόντες»), προφανῶς ἐπειδὴ ἡ κομματικὴ ἀλληλεγγύη δὲν εὑρισκεν εἰς αὐτοὺς καμμίαν δικαίωσιν, καὶ μάλιστα συγκρινομένη καὶ συγκρουομένη πρὸς τὴν προάσπισιν τῆς πατρίδος.

νατὸν νὰ τεθοῦν προθέσεις, προθήματα, αὔξησις καὶ ἀναδιπλασιασμός, μετὰ δὲ τὴν ρίζαν εἶναι δυνατὸν νὰ τεθοῦν προσφύματα καὶ ποικίλαι παραγωγικαὶ καταλήξεις.

Ἀλλ' ἡ ρίζα δὲν εἶναί τι ἀναλλοίωτον. Εἰς τὴν ὅλην σειρὰν τῶν ἐτυμολογικῶς συγγενῶν λέξεων παρουσιάζει διαφόρους βαθμίδας. Ἡ μετάπτωσις, ὡς λέγεται τὸ φαινόμενον τῶν ἀλλοιώσεων τῆς ρίζης, παρουσιάζει κανονικότητά τινα δυναμένην νὰ παρομοιασθῇ πρὸς τὴν κλίσιν τοῦ ὀνόματος καὶ τοῦ ρήματος.

Πάντα ταῦτα προσδίδουν ἰδιαίτερον θέλγητρον εἰς τὴν ἐνασχόλησιν μὲ τὴν γλῶσσαν, ἰδίᾳ δὲ μὲ τὴν ἐτυμολογίαν. Εἶναι σπουδὴ συστηματική, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἡ βαθυτέρα κατανόησις τῆς σημασίας ἑκάστης λέξεως διὰ συσχετισμοῦ αὐτῆς πρὸς ἄλλας ὁμορρίζους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία θεωρεῖται ἡ πρωτότυπος (μητρική).

Δι' ἐκεῖνον τὸν μελετητήν, ἰδίως τὸν φιλόλογον, ὁ ὁποῖος θέλει συντόμως νὰ κατατοπισθῇ περὶ τοῦ ἐτύμου μιᾶς λέξεως, ὑπάρχουν σχετικὰ λεξικά, εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ καταφύγῃ καὶ νὰ πληροφορηθῇ ἀκόπως.

Εἰς τὰς μεγάλας εὐρωπαϊκὰς γλώσσας κυκλοφοροῦνται ὀγκώδη Ἐτυμολογικὰ λεξικὰ τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης, τὰ ὁποῖα καλύπτουν τὸ πρὸς ἐτυμολόγησιν προσφερόμενον μέρος τοῦ γλωσσικοῦ θησαυροῦ. Εἰς τὴν ἑλληνικὴν δυστυχῶς δὲν ὑπῆρχε μέχρι πρό τινος ἀντίστοιχον λεξικόν, ἱκανὸν νὰ καλύψῃ πάσας τὰς σχετικὰς ἀνάγκας.

Ὁ κ. Ἀντ. Παπανικολάου, μόνιμος ἐπικουρικὸς καθηγητὴς τῆς Ἀρχαίας Ἑλληνικῆς Φιλολογίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, εἰργάσθη ἐπὶ μακρὸν καὶ μετήνεγκεν εἰς τὴν Νεοελληνικὴν τὸ ἐξαίρετον καὶ εὐφήμως μνημονευόμενον, ὑπὸ τῶν εἰδικῶν δὲ ἐπαινεθὲν ἐτυμολογικὸν Λεξικὸν τοῦ Hofmann, τὸ ὁποῖον ἐξεδόθη (γερμανιστὶ) τὸ 1950.

Τὸ Λεξικὸν τοῦτο εἶναι ἐν σχέσει πρὸς ἄλλα συναφῆ σύντομον καὶ περιεκτικόν. Διὰ τῆς μεταγλωττίσεώς του καλύπτεται σημαντικὸν κενὸν εἰς τὴν σχετικὴν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν.

Ἀλλ' ὁ κ. Παπανικολάου δὲν ἠρκέσθη εἰς ἁπλῆν μετάφρασιν. Προέθηκε σύντομον Πρόλογον (ἀπαραίτητον καὶ αὐτὸν δι' ἔλλειψιν σχετικῶν συντόμων καὶ κατατοπιστικῶν βοηθημάτων παρ' ἡμῖν), εἰς τὸν ὁποῖον ἐξέθηκε τὰ περὶ τῆς σημασίας τοῦ ὅρου Ἐτυμολογία, περὶ τῶν Ἐτυμολογικῶν λεξικῶν τῶν συντεταγμένων κατὰ τοὺς ἀρχαίους καὶ τοὺς νεωτέρους χρόνους καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Ἐτυμολογίας εἰς ἴδιον κλάδον τῆς Γλωσσικῆς ἐπιστήμης. Τὸ ἔργον πλουτίζεται δι' ἐκτενοῦς βιβλιογραφίας.

Διὰ νὰ εἶναι μάλιστα τὸ ἔργον εὐχρηστότερον, παρέχονται ὑπὸ τοῦ μεταφραστοῦ ὁδηγίαι πρὸς χρῆσιν τοῦ Λεξικοῦ καὶ λεπτομερὴς πίναξ συντομογραφιῶν. Μεγάλης σημασίας πρέπει νὰ θεωρηθῇ ἡ ὑπὸ τοῦ κ. Παπανικολάου παράθεσις ἐν τέλει τοῦ ἔργου λέξεων, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μὲν εἰς τὸ Λεξικὸν ὄχι ὅμως κατακεχωρισμέναι ὡς ἴδια λήμματα ἀλλ' ἐντὸς αὐτῶν. Πρὸς τούτοις ὁ κ. Παπανικολάου προσέθηκε εἰς τὰ ὑπάρχοντα ἀρχῆθεν ἑρμηνεύματα τοῦ πρωτοτύπου καὶ ἄλλα, τὰ ὁποῖα ἔκρινεν ἀπαραίτητα, ὡς καὶ πρόσθετα παράγωγα καί τινας ἐπεξηγήσεις.

Τὸ ἔργον τοῦτο θ' ἀποτελέσῃ, πιστεύομεν, ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ πάντας τοὺς καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἀσχολουμένους περὶ τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν γραμματείαν καὶ γλῶσσαν.

ΘΕΩΝΗ ΧΡΙΣΤΟΠΟΥΛΟΥ — ΜΙΚΡΟΓΙΑΝΝΑΚΗ

ΧΡΥΣΟΥΛΑΣ ΤΣΙΚΡΙΤΣΗ – ΚΑΤΣΑΝΑΚΗ, **Συμβολὴ στὴ μελέτη τῶν τοπωνυμίων τῆς Κρήτης,** Τοπωνύμια ἀπὸ οἰκογενειακὰ ὀνόματα, Ἀνάτ. περιοδ. «Ἀμάλθεια», τευχ. 22—23, Ἄγ. Νικόλαος Κρήτης 1975, σελ. 25—98.

Ἡ συγγραφεὺς ἔχει ἀσχοληθῆ ἰδιαιτέρως μὲ τὰ τοπωνύμια καὶ τὰ ὀνόματα γενικῶς τῆς Κρήτης, μελέται δὲ τῆς σ. ἔχουν παρουσιασθῆ ἤδη παλαιότερον ἀπὸ τῶν σελίδων τοῦ ΠΛΑΤΩΝΟΣ. Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀναφέρεται εἰς τὴν προσπάθειαν ἑρμηνείας τῆς προελεύσεως τῶν ὀνομάτων μιᾶς μακρᾶς σειρᾶς τοπωνυμίων τῆς Κρήτης ἀλφαβητικῶς ἐξεταζομένων εἰς τὰς σελίδας 34—89.

Τῆς κυρίας ἐργασίας ταύτης προτάσσεται γενικὴ ἀνάλυσις τῆς προελεύσεως τῶν τοπωνυμίων, λ. χ. ἐξ ὀνομάτων φυτῶν, ἐξ ἰδιομορφιῶν τοῦ ἐδάφους, ἐξ ὀνομάτων γυναικῶν, ἐκ πατριδωνυμικῶν κλπ. Εἶτα ἐξετάζεται πόθεν προέρχεται γραμματικῶς ἡ κατάληξις τῶν τοπωνυμίων καὶ καθορίζονται αἱ πτώσεις ἐξ ὧν σχηματίζονται καὶ αἱ ἐπερχόμεναι κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν τοπωνυμίων γλωσσικαὶ μεταβολαί. Ἐπίσης ἀντιμετωπίζονται ὡρισμέναι κατηγορίαι λέξεων χρησιμευουσῶν ὡς β′ συνθετικὸν (λ. χ. -χώρι), καθὼς καὶ αἱ καταλήξεις τῶν ἀνδρωνυμικῶν (λ. χ. -αινα, -ίνα). Ἐπισημαίνεται ἐπίσης τὸ δυσερμήνευτον ὡρισμένων περιπτώσεων, διατυποῦνται εἰκασίαι περί τινων καὶ ἀναφέρονται αἱ μεταβολαὶ κατὰ τὸν σχηματισμόν των ἐκ μεταθέσεως τοῦ τόνου. Πολλῶν σκοτεινῶν περιπτώσεων ἡ προέλευσις εἰκάζεται ἐκ σχέσεως πρὸς οἰκογενειακὰ ὀνόματα.

Ἡ διαπραγμάτευσις τῆς προελεύσεως τῶν εἰς τὸν κατάλογον τῶν σελ. 34—89 παρατιθεμένῳ τοπωνυμίῳ γίνεται μετ' ἐπιμελείας καὶ ἀναφορᾶς εἰς προηγουμένας περὶ αὐτῶν ἑρμηνείας ἐρευνητῶν. Ἡ σοβαρότης τῆς μελέτης προδίδεται καὶ ἐκ τῶν 843 παραπομπῶν εἰς 142 ἔργα—λεξικά, μελέτας καὶ συλλογάς. Αἱ προτεινόμεναι ὑπὸ τῆς συγγραφέως ὡς πιθαναὶ προελεύσεις τῶν τοπωνυμίων παρουσιάζουν πειστικότητα, ἀποτελοῦν δὲ θετικὴν συμβολὴν εἰς τὴν ἔρευναν τοῦ θέματος γενικώτερον.

Π. Κ. Γ.

***

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΤΑΜΑΤΗ, **Ἀπολλωνίου Κωνικά**, Ἀρχαῖον κείμενον—μετάφρασις, τόμ. Α′ Μαρτυρίαι Ἑλληνικαὶ—Λατινικαί, Βιβλίον Α′, Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1975 σχ. 8 σελ. XI/389.

Ὁ διακεκριμένος ἐρευνητὴς τῶν ἀρχαίων Μαθηματικῶν Σταμάτης εἶναι παγκοσμίως γνωστὸς διὰ τὴν ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου διὰ τοῦ οἴκου Teubner, τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος καὶ τοῦ Διοφάντου. Τώρα διὰ τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου πάλιν παρουσιάζει τὸν Α′ τόμον τῶν Κωνικῶν Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, περιλαμβάνοντος τὰ Testimonia καὶ τὸ Ι βιβλίον τῶν Κωνικῶν, θὰ ἐπακολουθήσουν δὲ ἄλλοι δύο τόμοι περιλαμβάνοντες τὰ βιβλία ΙΙ - VII καὶ τὰ σχετιζόμενα πρὸς αὐτὰ λήμματα τοῦ Πάππου καὶ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου.

Μετὰ τὸν Εὐτόκιον, πρῶτον ἐκδότην τῶν Κωνικῶν ἐν Κωνσταντινουπόλει τὸ 530 μ. Χ., ὁ Σταμάτης εἶναι τώρα ὁ δεύτερος Ἕλλην ἐκδότης τοῦ Ἀπολλωνίου. Τὸ ἐκδιδόμενον καὶ ἐκδοθησόμενον κείμενον τὸ παραλαμβάνει ὁ σ. διὰ μὲν τὰ βιβλία Ι—IV, ἅτινα ἔχουν παραδοθῆ ἀρχῆθεν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν καθὼς καὶ διὰ

τὰ λήμματα τοῦ Πάππου καὶ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου, ἐκ τῆς διτόμου ἐκδόσεως I. L. Heiberg τῆς Λειψίας 1891 καὶ 1893 μὲ 15 φραστικὰς προσθήκας ἢ διορθώσεις.

Τὸ δὲ κείμενον τῶν βιβλίων V - VII, ἅτινα παρεδόθησαν ἀραβιστί, τὸ παραλαμβάνει ὁ συγγραφεὺς μεταφράζων αὐτὸ ἐκ τῆς γαλλιστὶ ἐκδόσεως τοῦ Paul ver Eecke, Les coniques d' Apollonius de Perge, Paris 1959, τοῦ παραλαβόντος πάλιν τὸ κείμενον ἐκ τῆς εἰς τὴν Λατινικὴν ἐκ τῆς Ἀραβικῆς μεταφράσεως τοῦ Edm. Halley, Λονδῖνον 1710.

Ὁ νῦν ἐκδιδόμενος Α' τόμος τῶν Κωνικῶν περιλαμβάνει τὴν ἀκόλουθον ὕλην· Εἰσαγωγήν, σελ. 3 – 41, ἐν ᾗ ὁ σ. διαπραγματεύεται περὶ τῆς καταγωγῆς τοῦ βίου καὶ τῶν ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου, ὅστις μετὰ τὸν Εὐκλείδην καὶ ἀμέσως μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη ζήσας καὶ παιδευθεὶς εἰς τὸ Μουσεῖον τῆς Ἀλεξανδρείας ἐθεωρεῖτο ὑπὸ τῶν συγχρόνων του μέγας γεωμέτρης κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Εὐτοκίου. Ἐπίσης ἐκτίθεται ἐν συνεχείᾳ ἡ ἱστορία τῆς ἐρεύνης τῶν κωνικῶν τομῶν, εἰς τὰς ὁποίας ὁ Ἀπολλώνιος εἶναι ὁ πρῶτος συστηματικὸς ἐρευνητὴς εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλονται καὶ οἱ ὅροι, *παραβολή*, *ἔλλειψις*, *ὑπερβολή*. Ἀναλύεται περαιτέρω τὸ περιεχόμενον ἑκάστου θεωρήματος καὶ τὸ περιεχόμενον τῶν ἀναγομένων εἰς τὰ Κωνικὰ σχολίων τοῦ Πάππου, τοῦ Εὐτοκίου, τοῦ Σερήνου, τῆς Ὑπατίας καὶ τοῦ Ἄραβος Chiraz. Μετὰ ταῦτα ὁ σ. παρακολουθεῖ τὰς γνωστὰς καὶ πιθανὰς ἐκδόσεις τῶν Κωνικῶν ὑπὸ τῶν Βυζαντινῶν, τῶν Ἀράβων ἐν Ἱσπανίᾳ, τῶν λογίων τῆς Ἀναγεννήσεως ἐν Ἰταλίᾳ καὶ τῶν νεωτέρων λογίων ἐν Ὀξφόρδῃ καὶ Λειψίᾳ. Δίδεται πληροφορία ἐπίσης διὰ τὴν σύνθεσιν τοῦ κειμένου τοῦ Heiberg τῇ χρήσει ὡρισμένων κωδίκων καὶ ἐκδόσεων καὶ διὰ τὴν σύνθεσιν τοῦ Γαλλικοῦ κειμένου τοῦ P. ver Eecke. Ἐξετάζονται περαιτέρω αἱ ἄλλαι σωζόμεναι ἐκτὸς τῶν Κωνικῶν πραγματεῖαι τοῦ Ἀπολλωνίου καθὼς καὶ αἱ ἀπολεσθεῖσαι ἕτεραι 18, περὶ ὧν ὁ σ. δίδει πληροφορίας στηριζομένας εἰς τὰς εἰδήσεις τοῦ Πάππου.

Ἐν τέλει τῆς Εἰσαγωγῆς του ὁ Στ. διὰ νὰ διευκολύνῃ τὴν σπουδὴν τοῦ περιεχομένου τῶν Κωνικῶν δίδει πληροφορίας τινὰς ἐκ τοῦ ε' βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, παραθέτει ἀνάλυσιν ὡρισμένων προβλημάτων ἐκ τῶν Εὐκλειδείων Στοιχείων, ἐξ ὧν ὡρμήθη ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὰς ἐρεύνας του, καὶ παρέχει ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν τῶν Κωνικῶν. Ἡ εἰσαγωγὴ κατακλείεται διὰ καταλόγου διασωθέντων καὶ ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ δύο πινάκων ἐμφαινόντων τὸ εἶδος καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προτάσεων τῶν 7 βιβλίων τῶν Κωνικῶν.

Εἰς τὰς σελ. 44—169 παρατίθενται αἱ Μαρτυρίαι (testimonia), προερχόμεναι ἐξ ἀρχαίων συγγραφέων (Ἀνθέμιος, Εὐτόκιος, Ἀρχαῖα Σχόλια εἰς Ἀρχιμήδην, Ἥρων, Ἱππόλυτος, Ἰω. Φιλόπονος, Πάππος, Σερῆνος, Σουΐδας κλπ.). Αἱ μαρτυρίαι, 71 τὸν ἀριθμόν, παρατίθενται ἐν πρωτοτύπῳ μὲν εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα (εἰς Ἑλληνικήν, Λατινικήν, Γαλλικὴν) καὶ ἐν μεταφράσει εἰς τὴν Νεοελληνικὴν εἰς τὴν δεξιὰν σελίδα.

Εἰς τὰς σελ. 171—192 παρατίθεται ἡ περὶ Ἀπολλωνίου βιβλιογραφία, συνταχθεῖσα καὶ πεμφθεῖσα φιλικῶς εἰς τὸν συγγραφέα μετ' ἐπιστολῆς ἐπεξηγηματικῆς ὑπὸ τοῦ ἐν Παρισίοις καθηγητοῦ τῆς Ecole Polytechnique Γ. Καγιᾶ. Τέλος δὲ εἰς τὰς σελ. 194—373 παρατίθεται τὸ κείμενον τοῦ Α' βιβλίου τῶν κωνικῶν περιέχοντος 60 θεωρήματα. Τὸ κείμενον παρατίθεται εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα, ἐν ᾧ εἰς τὴν δεξιὰν παρατίθεται ἡ νεοελληνικὴ μετάφρασις μὲ τὰ ἀντίστοιχα γεωμετρικὰ σχήματα. Φυσικὰ ἡ μετάφρασις γίνεται μὲ ἀπόλυτον σαφήνειαν χάρις εἰς τὴν ἀπόλυτον γνῶσιν τῆς ἀρχαίας ὁρολογίας καὶ τὴν κατοχὴν τῆς ἀρχαίας μαθηματικῆς σκέψεως ὑπὸ τοῦ Σταμάτη, ὁ ὁποῖος εἶναι εἰς θέσιν καὶ νὰ ἀναπροσαμόσῃ εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Ἀπολλωνίου τὰ διὰ τῆς Ἀραβικῆς εἰς Λατινικὴν καὶ ἐκ ταύτης εἰς τὴν Γαλλικὴν παραδεδομένα θεωρήματα. Ἐπιτάσσεται εὑρετήριον ὀνομάτων καὶ λέξεων.

Ἡ ἔκδοσις τῶν μνημείων τῆς ἐπιστημονικῆς δημιουργίας τῶν μεγάλων πατέρων μας, δημιουργῶν τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης καὶ θεμελιωτῶν τῆς σημερινῆς τεχνικῆς προόδου, ἀποτελεῖ καθῆκον ἐθνικόν, εἰς τὸ ὁποῖον εὐχαρίστως βλέπομεν ὅτι φιλοτίμως ἀνταποκρίνεται τὸ Τεχνικὸν Ἐπιμελητήριον τῆς Ἑλλάδος.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

***

ΗΛ. ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ, **Πλάτωνος Πρωταγόρας**, Εἰσαγωγή, Κείμενο, Μετάφραση, Ἑρμηνευτικὰ σχόλια, Ἔκδ. Ἰνστιτούτου Νεοελληνικῶν Σπουδῶν Θεσσαλονίκη 1975, σχ. 8 μ. σελ. 206.

Ἀξίζει νὰ χαιρετισθῇ ἡ προσπάθεια τοῦ Ι. Ν. Σ. διὰ νὰ παράσχῃ εἰς τὸ Ἑλληνικὸν κοινὸν τὰ ἀριστουργήματα τῆς ἀρχαίας σοφίας ἐφωδιασμένα μὲ μετάφρασιν, σχόλια καὶ εἰσαγωγήν. Ὅσαι ἐκδόσεις καὶ ἂν γίνουν τῶν ἀρχαίων κειμένων, εἶναι ὀλίγαι, διότι ἡ σημερινὴ μορφωμένη γενεὰ πρέπει νὰ ἔχῃ πρόχειρα τὰ βοηθήματα διὰ τὴν σπουδὴν τῶν παλαιῶν ἀριστουργημάτων.

Τὸ κείμενον τῆς ἐκδόσεως τοῦ Πρωταγόρου ἔχει ληφθῆ ἀπὸ τὴν Γαλλικὴν ἔκδοσιν τῶν Belles Lettres, ἡ ὁποία θεωρεῖται ἐκ τῶν καλυτέρων. Καὶ ἡ Γερμανικὴ ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Πλάτωνος τῆς Wissenschaftliche Buchgesellschaft παραλαμβάνει τὸ Ἑλληνικὸν κείμενον ἀπὸ τὰς ἐκδόσεις τῶν Belles Lettres. Ἡ μετάφρασις, ἡ εἰσαγωγὴ καὶ ὁ σχολιασμὸς γίνονται ἀπὸ τὸν Ἠλ. Σπυρόπουλον, δ. φ., μετεκπαιδευθέντα εἰς Γαλλίαν. Ἡ ἐργασία του δύναται νὰ λεχθῇ γενικῶς ὅτι φέρει τὰ σημεῖα τῆς ἐπιμελείας.

Εἰδικώτερον δύναται νὰ παρατηρηθῇ ὅτι ὀρθῶς κατὰ τὸ Γαλλικὸν πρότυπον παρατίθενται εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἑνοτήτων τῆς μεταφράσεως περιλήψεις εἰσάγουσαι τὸν μελετητὴν εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ περιεχομένου ἑκάστης. Ἐφ' ὅσον ὁ σκοπὸς τῆς ἐκδόσεως εἶναι ἡ ὑποβοήθησις τῆς σπουδῆς τοῦ διαλόγου, θὰ ἦτο προτιμότερον νὰ παρετίθετο καὶ τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα τοῦ κειμένου, πρᾶγμα ποὺ κάμνει ἡ προμνημονευθεῖσα Γερμανικὴ ἔκδοσις ἡ ἔχουσα καὶ ἐκείνη ἐπίσης σκοπὸν ὑποβοηθήσεως τῆς σπουδῆς. Ἄστοχον κρίνω ἐξ ἄλλου τὴν παράλειψιν τῆς ἐνδείξεως τῆς ἁρμοδίας παραπομπῆς εἰς περιπτώσεις ποὺ ἀναφέρεται ῥῆσις ἀρχαίου συγγραφέως, ὡς λ. χ. ἐν 309 b 6 ἡ μνεία γνώμης τοῦ Ὁμήρου. Τόσον αἱ γαλλικαὶ ἐκδόσεις ὅσον καὶ αἱ γερμανικαὶ προβαίνουν εἰς παραπομπὰς εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, ἀφοῦ αἱ ἐκδόσεις ἀποσκοποῦν νὰ ὑποβοηθήσουν τὴν σπουδὴν καὶ τὸν συσχετισμὸν τῶν ἰδεῶν.

Ὁ σχολιασμὸς τῶν κειμένων δὲν γίνεται εἰς ὑποσημειώσεις τῶν σελίδων τοῦ κειμένου καὶ τῆς μεταφράσεως, ἀλλὰ μεταφέρεται εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὑπὸ διπλῆν μορφήν. Πρῶτον εἰς τὸ τμῆμα «Ἑρμηνευτικὰ σχόλια», ἔνθα γίνεται σχολιασμὸς τῶν ἐκφράσεων μετὰ πραγματολογικῶν πληροφοριῶν καὶ δεύτερον εἰς τὸ τμῆμα «Πίνακας προσώπων καὶ πραγμάτων», ἔνθα γίνεται διασάφησις τῶν κυρίων ὀνομάτων.

Τῶν κυρίων ὀνομάτων αἱ ἐπεξηγήσεις δὲν φαίνεται νὰ γίνωνται ὅλαι μετὰ τῆς δεούσης προσοχῆς, τοῦ συγγραφέως παρέχοντος ἐξ ὑπογυίου ἐνίοτε πληροφορίας ἀνακριβεῖς. Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ταυτότης τοῦ *Παράλου*. Περὶ τούτου λέγει ὁ συγγραφεὺς εἰς τὸν Πίνακα: «Γιὸς τοῦ Περικλῆ καὶ τῆς Ἀσπασίας· πέθανε κατὰ τὸ λοιμὸ τοῦ 429». Εἰς τὸ κείμενον ὅμως ὁ Πλάτων ἐν 314 b e 6 ἀναφέρει:

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β

ΕΤΟΣ ΚΘ' 1977

ΤΟΜΟΣ **29** (ΤΕΥΧΗ 57/58)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1977

EUCLIDIS ELEMENTA, vol. III, Liber X cum appendice, post I. L. Heibert edidit **E. S. Stamatis**. Leipzig, Teubner, 1972 ; in-8°, XXXII-236 p., relié.

La maison Teubner, Leipzig, continue à rééditer les textes des géomètres grecs dont les éditions antérieures commençaient à s'épuiser. Dans cette entreprise méritoire, elle a confié la nouvelle édition des *Éléments* d'Euclide à M. Evangelos Stamatis, dont on connaît l'infatigable sollicitude pour la conservation du patrimoine scientifique de la Grèce ancienne et la haute qualification pour l'analyse des textes mathématiques et la reconstitution, dans l'esprit des anciens, de raisonnements tronqués ou faussés par une tradition défectueuse. Éditeur d'un *Euclide* et d'un *Diophante* avec traduction en grec moderne, M. Stamatis poursuit, parallèlement à ce nouvel *Euclide*, une édition d'*Archimède*.

Le présent t. III contient le livre X des *Éléments*, couronnement des livres arithmétiques. Prenant, comme dans les deux tomes précédents, pour base de son enquête critique le texte établi par I. L. Heiberg, Teubner, 1885, M. Stamatis présente un texte très sûr, revu avec une acribie exemplaire. Dans la Préface, placée à suite de celle de Heiberg, il donne une explication originale, et très convaincante, de la composition du livre X en montrant que toutes les irrationnelles composées, présentées par Euclide, dérivent de relations métriques dans des triangles rectangles construits au moyen des irrationnelles les plus simples. Dans une suite de cinq tables, M. Stamatis nous démontre, en transcription algébrique et en se référant aux propositions du livre X, la naissance des différentes catégories d' irrationnelles à partir des données métriques de ces triangles rectangles. L'historien des sciences saura gré à M. Stamatis d'avoir fait précéder le texte d' Euclide d'une collection de *Testimonia* contenant, en plus des fameuses pages du *Théétète* de Platon — attestation la plus ancienne de la part qu'eût le jeune géomètre Théétète au classement des irrationnelles — des extraits d'Isocrate, d'Aristote, d'Héron d'Alexandrie, de Pappus et des Scholies au livre X.

Cette savante édition, présentée sous une forme maniable et élégante, sera appréciée, comme un instrument de travail indispensable, par les chercheurs s'intéressant aux théories des irrationnelles et des incommensurables dans la Grèce du IV^e^ siècle avant J.-C. Philologues et historiens de la langue y trouveront des renseignements précieux sur la formation d'une terminologie très technique.

Ch. MUGLER

***

EUCLIDES, V, 1 Elementa XIV, XV Scholia in libros I - V, Post I. L. Heibert edidit **E. S. Stamatis**, Teubner 1977 Leipzig, σχ. 8μ. σελ. LXXXIX/243.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ἐκδοθέντα διὰ τοῦ Οἴκου Teubner ὑπὸ τοῦ Heiberg πρὸ 100 σχεδὸν ἐτῶν, ἔχρηζον ἐπανεκδόσεως. Ταύτης τὴν ἐπιμέλειαν ὁ ἐκδοτικὸς οἶκος τῆς Λειψίας τὴν ἀνέθεσεν εἰς τὸν Ἕλληνα καθηγητὴν Ε. Σ. Σταμάτην. Ἤδη ἐξεδόθησαν (εἰς τόμους τέσσαρας τὰ 13 βιβλία τῶν Στοιχείων, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ γνήσια βιβλία τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ πέμπτος τόμος περιλαμβάνει δύο ἡμιτόμους, τὸν V,1 ἐπιμελείᾳ τοῦ καθ. Σταμάτη. Ὁ ἡμίτομος οὗτος περιλαμβάνει

τὰ βιβλία τῶν Στοιχείων XIV καὶ XV καὶ τὰ σχόλια τῶν βιβλίων I - V, ὁ μέλλων δὲ νὰ ἐκδοθῇ ἡμίτομος V,2 θὰ περιλαμβάνῃ τὰ σχόλια τῶν βιβλίων VI—XIII.

Τὰ ἐν τῷ ἡμιτόμῳ βιβλία τῶν στοιχείων XIV καὶ XV συνεκδίδονται μὲν μὲ τὰ λοιπὰ βιβλία τῶν Στοιχείων, ἀλλὰ δὲν ἔχουν γραφῆ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ XIV ἔχει γραφῆ ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ τῆς Ἀλεξανδρείας Ὑψικλέους περὶ τὸ 150 μ. Χ. Ὁ ἐκδότης τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὸ 350 μαθηματικὸς Θέων, πατὴρ τῆς φιλοσόφου Ὑπατίας, δὲν περιέλαβε τὸ βιβλίον τοῦ Ὑψικλέους εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ βιβλίον XV τῶν Στοιχείων εἶναι μεταγενέστερον, τοῦ 550 περίπου μ. Χ., ἅτε γραφὲν ὑπὸ μαθητοῦ τινος τοῦ μαθηματικοῦ καὶ μηχανικοῦ Ἰσιδώρου τοῦ Μιλησίου, μαγίστρου τῶν Σχολῶν τῆς Κωνσταντινουπόλεως. Ὁ μαθητὴς οὗτος εἰκάζεται ὅτι εἶναι ὁ Εὐτόκιος, ὁ γράψας καὶ τὰ Σχόλια εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Τὰ μὴ Εὐκλείδεια βιβλία XIV καὶ XV προσεκολλήθησαν εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου πιθανῶς κατὰ τὴν βυζαντινὴν Ἀναγέννησιν τῶν Γραμμάτων τὸν Θ′ αἰῶνα.

Τὰ Σχόλια τῶν Εὐκλειδείων στοιχείων ἔχει περισυλλέξει ὁ Heiberg ἐκ τῶν διαφόρων κωδίκων δι' ἐργασίας σκληροτάτης. Προέρχονται ἐξ ἐπισημειώσεων ἐπεξηγηματικῶν εἰς τὰ περιθώρια τῶν χειρογράφων. Ὅσαι ἔχουν γραφῆ ὑπὸ τῆς αὐτῆς χειρὸς τῆς γραψάσης τὸ κείμενον, φανερώνουν ὅτι ὁ γράψας ὁ ἴδιος, ὡς εἰδικὸς ἔγραψε καὶ τὰς ἐπεξηγήσεις, ἢ τὰς ἀντέγραψεν εὑρὼν ἤδη ταύτας σημειωμένας εἰς τὸ βιβλίον ἐξ οὗ ἔκαμνε τὴν ἀντιγραφήν. Ἀλλὰ αἱ πλεῖσται ἔχουν γραφῆ ὑπὸ ἑτέρας χειρός, διότι τὰ σχόλια τοῦ Εὐκλείδου προέρχονται ἀπὸ 52 διαφόρους χεῖρας γραφέων. Εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα σημειοῦται ἀπὸ ποῖον γραφέα τίνος κώδικος προέρχεται τὸ κάθε σχόλιον.

Τὸ ἔργον τῆς ἐπανεκδόσεως μὲ τὴν μέριμναν τοῦ περιορισμοῦ ἢ μᾶλλον τοῦ ἀποκλεισμοῦ παντὸς ἀβλεπτήματος εἶναι ἐπίπονον, ὁ Καθ. Σταμάτης ὅμως ἐκδώσας πληθὺν μαθηματικῶν ἔργων τῆς ἀρχαιότητος δι' ἐκδοτικῶν οἴκων ἡμετέρων καὶ ξένων παρουσιάζει καὶ εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ παρόντος V,1 τόμου διὰ τοῦ Οἴκου Teubner τῆς Λειψίας ἕνα βιβλίον καθαρὸν καὶ σύγχρονον ποὺ θὰ εἶναι πολύτιμον βοήθημα εἰς τοὺς μελετητὰς τῆς Γεωμετρίας καὶ τοῦ Εὐκλείδου.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, **ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις καὶ σχόλια** ὑπὸ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι. Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιλητηρίου τῆς Ἑλλάδος, τόμος I, μέρη 2, 1970, τόμος II 1973, τόμος III 1974.

Τὰ Ἅπαντα ταῦτα τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ ἀρχαῖον πρωτότυπον καὶ μὲ μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν εἶναι ἡ πλέον πλήρης ἔκδοσις τοῦ ἔργου τοῦ μεγάλου ἀρχαίου ἐπιστήμονος. Τὸ πρῶτον μέρος τοῦ πρώτου τόμου ἀρχίζει μὲ τὴν εἰκονογράφησιν τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τὴν ἀπόδοσιν ἐννέα εἰκόνων, μωσαϊκῶν, μεταλλίων καὶ ἄλλων παραστάσεων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐν συνεχείᾳ ἀκολουθεῖ ἐκτεταμένη εἰσαγωγὴ τοῦ Εὐ. Σταμάτη, ἡ ὁποία περιέχει πληροφορίας περὶ τῶν διασωθέντων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (σελὶς 1 - 34). Σημαντικὸν τμῆμα εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ α′ τόμου περιλαμβάνει τὰς Μαρτυρίας (σελ. 35 - 289), εἰς τὰς ὁποίας συγκεντροῦνται ὅλαι αἱ ἀναφοραὶ εἰς τὸν Ἀρχιμήδην καὶ τὰ

ἔργα του τῶν ἀρχαίων καὶ Βυζαντινῶν συγγραφέων, εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν καὶ τὴν λατινικὴν γλῶσσαν, μὲ μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν.

Τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ πολὺ πλήρη πίνακα περιεχομένων (σελ. 291—307) καὶ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἀναφέρεται ἐκτεταμένη βιβλιογραφία ὅλων τῶν ἐκδόσεων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ 1500 (σελ. 309—332). Ἐν εἴδει παραρτημάτων προστίθενται παραστάσεις μηχανημάτων, τὰ ὁποῖα ἐφεῦρεν ὁ Ἀρχιμήδης (κατὰ Ἥρωνα, Λεονάρδον Ντα Βίντσι καὶ ἄλλας πηγάς). Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ πρώτου τόμου περιλαμβάνονται τὸ κείμενον καὶ ἡ μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους: «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου» (σελὶς 1 - 215), «Κύκλου μέτρησις» (σελ. 217—227), «Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων» (σελ. 229—415), μὲ λεπτομερῆ σχόλια τοῦ Εὐ. Σταμάτη.

Εἰς τὸν δεύτερον τόμον περιλαμβάνονται τὸ κείμενον καὶ ἡ μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, «Περὶ ἑλίκων», (σελ. 1 - 105), «Περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν» (σελ. 107—176), ««Ψαμμίτης» (σελ. 179—215), «Τετραγωνισμὸς παραβολῆς» (σελ. 217—265), «Περὶ ὀχουμένων» (σελ. 267—368), «Στομάχιον» (σελ. 369—381), «Πρὸς Ἐρατοσθένην περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων ἔφοδος» (σελ. 383—465), «Πρόβλημα βοεικὸν» (σελ. 467—477). Ἐν συνεχείᾳ ἀκολουθοῦν σχόλια τῶν ἔργων τούτων καὶ ἐν εἴδει παραρτήματος παρατίθεται ἀπόσπασμα ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ I. Zeuthen «Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα» (Κοπεγχάη 1886, Hildesheim 1966), ἄρθρον τῆς Ἑλλάδος Γρ. Μπασμάκοβα «Διαφορικὸς λογισμὸς τοῦ Ἀρχιμήδους», (Ἀρχεῖον τῆς ἱστορίας τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, 1964) καὶ ἀπόσπασμα τῶν σχολίων τοῦ Charles Mugler ἐπὶ τῆς πραγματείας Περὶ ἑλίκων (Παρίσι 1971). Εἰς τὸ τέλος τοῦ τόμου παρατίθεται συμπλήρωσις τῶν μαρτυριῶν καὶ τῆς βιβλιογραφίας.

Εἰς τὸν τρίτον τόμον περιέχονται τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ μὴ διασωθέντα εἰς τὸ πρωτότυπον. Εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν ὁ Εὐ. Σταμάτης ἀναλύει τὰς ἀραβικὰς πηγὰς καὶ ἀναφέρει ὅτι εἰς τὸν κατάλογον Φίριστ τοῦ Ἴμπ - αν - Ναντὶμ μνημονεύονται οἱ τίτλοι τῶν ἀκολούθων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους: Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, Κύκλου μέτρησις, Τετραγωνισμὸς κύκλου, Περὶ ἐφαπτομένων κύκλων, Περὶ τριγώνων, Περὶ παραλλήλων γραμμῶν, Λήμματα, Ὑποθέσεις, Περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν τετραγώνων, Περὶ ὑδραυλικοῦ ὡρολογίου. Μὲ ἰδιαιτέραν λεπτομέρειαν ἐξετάζεται τὸ χειρόγραφον τῆς βιβλιοθήκης Μπανκιπὸρ (Patna, Ἰνδίαι) Nr. 2468, τὸ ὁποῖον περιέχει δύο πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰς 1) Περὶ ἐφαπτομένων κύκλων καὶ 2) Περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, εἰς ἀραβικὴν μετάφρασιν ὑπὸ Σαμπὶτ Ἴμπν Κουρᾶ, ἐκδοθείσας εἰς τὸ βιβλίον τούτου «Ρασαὴλ» (Χαϊντεραμπὰντ 1940). Ὁ Εὐ. Σταμάτης ἀναφέρει καὶ τοὺς τίτλους καὶ τῶν 40 πραγματειῶν τῆς συλλογῆς, εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ τὴν ἑλληνικὴν καὶ ἐκθέτει τὴν ἀλληλογραφίαν του ἐν σχέσει πρὸς τὸ χειρόγραφον τοῦτο μετὰ τοῦ κ. H. Hermelink (Μόναχον) καὶ τὸ Ἰνστιτοῦτον τῆς Ἱστορίας Φυσιογνωσίας καὶ Τεχνικῆς τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῆς Ε.Σ.Σ.Δ., ἐν Μόσχᾳ. Ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ὁποῖα διεσώθησαν εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν, παρατίθενται ἐν μεταφράσει εἰς τὴν δωρικὴν διάλεκτον, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποίει ὁ Ἀρχιμήδης καὶ εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν. Ἐνταῦθα περιέχονται τὰ Λήμματα (σελὶς 1 - 43, ἐκ λατινικῆς μεταφράσεως, ἐκ τῆς ἀραβικῆς), «Περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων» (σελ. 45 69), «Περὶ κύκλων (σελ. 71—75), «Περὶ τῆς κατασκευῆς τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου» (σελ. 77—101). Αἱ τρεῖς αὗται πραγματεῖαι μετεφράσθησαν ἐκ τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως τοῦ χειρογράφου τοῦ Καΐρου, τὸ ὁποῖον τιτλοφορεῖται «Βιβλίον περὶ κατασκευῆς κύκλου διῃρημένου εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη», τὴν ὁποίαν ἐπραγματοποίησε ὁ K. Schoy. Περαιτέρω περιλαμβάνονται αἱ πραγματεῖαι «Περὶ ἐφαπτομένων κύκλων» (σελ. 103—157), εἰς μετάφρασιν ἐκ τῆς ἀραβικῆς ἐκδόσεως τοῦ

20

Ἴμπν Κουρᾶ, «Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ» (σελ. 159—176), μετάφρασις τῆς πραγματείας «Περὶ τοῦ προσδιορισμοῦ χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ἀλ-Μπιρουνί, ἐκδοθεῖσα εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ τοῦ G. Sutter (Ζυρίχη 1911).

Αἱ μεταφράσεις ὅλων τῶν ἀνωτέρω πραγματειῶν ὑπάρχουν ἐπίσης εἰς τὴν ρωσικὴν ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (Ἀρχιμήδους Ἔργα, μετάφρασις ἐκ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς ὑπὸ I. N. Βεσελόφσκη, μεταφράσεις ἐκ τῆς ἀραβικῆς ὑπὸ B. A. Ρόζενφελτ, Μόσχα 1962). Ὁ Εὐ. Σταμάτης περιλαμβάνει περαιτέρω τὴν πραγματείαν «Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας (σελ. 177—217), μετεφρασμένην ἐκ τῆς ἀραβικῆς ἐκδόσεως τοῦ Ἴμπν Κουρᾶ, ἡ ὁποία δὲν ἔχει περιληφθῆ εἰς τὴν ρωσικὴν ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, διότι οἱ συντάκται τῆς ἐκδόσεως αὐτῆς ἐθεώρουν ὡς συγγραφέα ὄχι τὸν Ἀρχιμήδην ἀλλὰ τὸν Ἴμπν Κουρᾶ.

Ἀκολουθοῦν αἱ πραγματεῖαι «Περὶ ἐγγραφῆς ἐν σφαίρᾳ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου (σελ. 219—228), μετάφρασις ἐκ τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως τῶν E. Μπέσσελ-Χάγκεν καὶ O. Σπίς, τοῦ ἀραβικοῦ χειρογράφου, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται «Πραγματεία τοῦ Ἀμπούλ-Χασὰν Σαμπὶτ Ἴμπν Κουρᾶ «Περὶ κατασκευῆς ἐν σφαίρᾳ σώματος μὲ 14 ἕδρας» (πρβλ. σελ. 387—390 τῆς ρωσικῆς ἐκδόσεως) καὶ «Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους» (σελ. 229—308), μετάφρασις ἐκ τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως τῶν E. Wiedemann καὶ F. Hauser τοῦ ἀραβικοῦ χειρογράφου, τὸ ὁποῖον φυλάσσεται εἰς τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων. Εἰς παραρτήματα τοῦ τόμου τούτου προστίθενται περιγραφαὶ πειράματος, τὸ ὁποῖον πρωτοβουλίᾳ τοῦ Εὐ. Σταμάτη ἐπραγματοποίησεν ὁ Ἕλλην μηχανολόγος Ἰωάννης Σακκᾶς, μὲ σκοπὸν τὴν ἀπόδειξιν τῆς δυνατότητος τῆς πυρπολήσεως πλοίων τῇ βοηθείᾳ τῶν ἡλιακῶν ἀκτίνων διὰ τῶν καυστικῶν κατόπτρων. Τὸ πείραμα ἐγένετο τὸν Ἰούνιον καὶ κατόπιν ἐπανελήφθη τὸν Σεπτέμβριον τοῦ 1973, ἐπεβεβαίωσε δὲ τὴν δυνατότητα τοιαύτης πυρπολήσεως. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ σημειωθῇ ὅτι, οὔτε οἱ σύγχρονοι τοῦ Ἀρχιμήδους οὔτε συγγραφεῖς τῶν πλησιεστέρων μετ' αὐτὸν αἰώνων, ἀναφέρουν τι περὶ πυρπολήσεως ῥωμαϊκῶν πλοίων. Ἡ πρώτη ἀφήγησις περὶ τούτου εὑρίσκεται εἰς τὸν Λουκιανὸν (Β΄ αἰὼν μ. Χ.) καὶ περισσότερον λεπτομερὴς περιγραφὴ εἰς τὸν Ἀνθέμιον (ΣΤ΄ αἰὼν μ. Χ.). Ὡς ἐκ τούτου τὰ πειράματα μᾶλλον ῥίπτουν φῶς εἰς τὰ θέματα μὲ τὰ ὁποῖα ἠσχολεῖτο ὁ Ἀρχιμήδης, εἰς τὴν μὴ διασωθεῖσαν μέχοις ἡμῶν πραγματείαν του «Κατοπτρικά», παρὰ εἰς τὰ πραγματικὰ γεγονότα τῆς ἀρχαίας ἱστορίας.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ τόμου περιελήφθησαν φωτοτυπίαι τῶν χειρογαάφων τοῦ Μπάνκιπόρ, δύο πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους (σωζομένων εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ Ἴμπν Κουρᾶ) καὶ τοῦ χειρογράφου τῶν Παρισίων τῆς πραγματείας «Περὶ ὑδραυλικοῦ ὡρολογίου». Ἐκ τοῦ συνόλου τῶν πραγματειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται εἰς τὸν Ἀρχιμήδην καὶ διεσώθησαν ἐν ἀραβικῇ μεταφράσει, εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Εὐ. Σταμάτη δὲν περιλαμβάνεται μόνον ἡ πραγματεία «Περὶ παραλλήλων γραμμῶν, τῆς ὁποίας ἐπεξεργασίαν ἀποτελεῖ ἡ πραγματεία τοῦ Ἴμπν Κουρᾶ «Βιβλίον περὶ τοῦ ὅτι δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουσαι πρὸς τὸ ἓν μέρος γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, προεκτεινόμεναι συναντῶνται (ρωσικὴ μετάφρασις, Ἱστορικομαθηματικαὶ ἔρευναι, ἔκδοσις XV, Μόσχα 1963, σελ. 363—380). (Σημείωσις μεταφραστοῦ: Πρόκειται περὶ τοῦ ε΄ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου καὶ ὄχι τοῦ Ἀρχιμήδους). Νομίζομεν ὅτι δὲν θὰ ἦτο ὀλιγώτερον νόμιμον, ἀπὸ ἄλλας πραγματείας, αἱ ὁποῖαι ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν, ἐξ ἐπεξεργασίας τοῦ Ἴμπν Κουρᾶ, νὰ περιληφθῇ καὶ ἡ πραγματεία αὕτη, ἡ ὁποία πλησιάζει πρὸς τὰς ἰδέας τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἰς αὐτὴν τὸ ε΄ αἴτημα ἀποδεικνύεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κινηματικῆς, τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ ὕπαρξις ἐν ἴσῃ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσει εὐθειῶν ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ὡς γνωστὸν εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ Ἀρχιμήδους

αἱ μετρικαὶ σχέσεις ἔπαιζον μεγαλύτερον ρόλον παρὰ εἰς τὸν Εὐκλείδην, καὶ ἐκτὸς τούτου ὁ Ἀρχιμήδης συστηματικῶς ἐφήρμοζεν εἰς τὴν γεωμετρίαν τὴν κίνησιν καὶ τὴν μηχανικήν.

Ἐν συμπεράσματι δέον νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ ἔκδοσις Σταμάτη εἶναι ἐξαιρετικῶς πολύτιμος, διότι εἶναι ἡ περισσότερον πλήρης ὅλων τῶν ὑπαρχουσῶν ἐκδόσεων τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι ἐφωδιασμένη μὲ λεπτομερῆ σχόλια καὶ περιλαμβάνει συλλεγὲν ὑπὸ τοῦ ἐκδότου πλουσιώτατον ὑλικὸν περὶ τῆς ζωῆς καὶ τῆς δράσεως τοῦ μεγάλου ἐπιστήμονος.

[Κατὰ μετάφρασιν ἐκ τῆς Ρωσικῆς ἐκ τοῦ Δελτίου τῆς Ἀκαδημίας Ἐπιστημῶν τῆς Ε.Σ.Σ.Δ., (Ἰνστιτοῦτον, Ἱστορία Φυσιογνωσίας καὶ Τεχνικῆς. Θέματα Ἱστορίας Φυσιογνωσίας καὶ τεχνικῆς), τεῦχος 4 (53), Μόσχα 1976].

Ι. Γ. ΜΠΑΣΜΑΚΟΒΑ, ΜΠ. Α. ΡΟΖΕΝΦΕΛΤ

***

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Δ. ΧΑΡΩΝΗ, Γενικοῦ Ἐπιθεωρητοῦ Μ. Ε., Παιδαγωγοῦ, πτυχιούχου Ψυχολογικῶν καὶ Παιδαγωγικῶν σπουδῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Lyon, **Ψυχολογία καὶ Ἀγωγὴ τῶν Ἐφήβων**, Ἀθῆναι 1976, σελίδες 204.

Τὸ ἀνωτέρω βιβλίον τοῦ κ. Β. Χαρώνη ἀποτελεῖ προσφορὰν τόσον εἰς τὴν Παιδαγωγικὴν ἐπιστήμην ὅσον καὶ εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν οἰκογένειαν. Ὁ συγγραφεὺς κατώρθωσε νὰ συνδυάσῃ τὰ ἐπιστημονικὰ δεδομένα, τὰ ὁποῖα γνωρίζει ὡς σπουδάσας καὶ εἰς τὸ Ἐξωτερικόν, μὲ τὴν παιδαγωγικὴν πρᾶξιν, τὴν ὁποίαν ἐβίωσε κατὰ τὴν μακρὰν θητείαν του εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν.

Ἡ μελέτη τοῦ Β. Χαρώνη εἰσάγει τὸν ἀναγνώστην κατὰ τρόπον συστηματικὸν εἰς τὸ ἄδυτον τῆς ἐφηβικῆς ψυχῆς καὶ ὑποδεικνύει συγκεκριμένους τρόπους ἀντιμετωπίσεως τῶν ἐφηβικῶν ἀντιδράσεων καὶ τῶν ἐφηβικῶν προβλημάτων. Διὰ τοῦτο καὶ ἀποτελεῖ ἕνα πολύτιμον ὁδηγὸν τόσον διὰ τοὺς γονεῖς καὶ τοὺς ἐκπαιδευτικοὺς ὅσον καὶ διὰ τοὺς ἰδίους τοὺς νέους.

Ἡ ἐν λόγῳ ἐργασία διαιρεῖται εἰς τὰ ἑξῆς μέρη: Α') ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΦΗΒΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ. Β') ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΩΝ ΨΥΧΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΤΩΝ ΕΦΗΒΩΝ. Γ') Η ΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΕΦΗΒΩΝ.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος γίνεται λόγος διὰ τὰ στάδια τῆς ἐξελίξεως καὶ τὰς χαρακτηριστικὰς ψυχικὰς ἐκδηλώσεις τοῦ ἐφήβου (ἀνακάλυψις τοῦ ἐγώ, κρίσις τῆς πρωτοτυπίας καὶ τῆς ἀντιθέσεως, πόθος τῆς ἀνεξαρτησίας, τάσις πρὸς μόνωσιν, μνήμη, φαντασία, συναίσθημα, γενετήσιος ὁρμὴ κ.λ.π.).

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος ἐξετάζονται οἱ οἰκογενειακοί, σχολικοί, κοινωνικοί, βιολογικοί, ἐξελικτικοὶ κ.λ.π. παράγοντες τῶν ψυχικῶν διαταραχῶν τῶν ἐφήβων. Γίνεται λόγος διὰ τὰ αἴτια τῶν συγκρούσεων τῶν ἐφήβων μὲ τοὺς παιδαγωγούς των, διὰ τὰς ἐπιδράσεις τοῦ ἀνθρωπίνου περιβάλλοντος ἐπὶ τῆς ψυχῆς τῶν νέων, διὰ τὴν κληρονομικότητα, τὸν χαρακτῆρα τοῦ ἀτόμου (χαρακτηριστικὸς παράγων) κ.λ.π.

Τὸ τρίτον μέρος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐπιγραφῇ *παιδαγωγικὴ τῆς ἐφηβείας*, εἶναι τὸ πλέον ἐνδιαφέρον, διότι εἰς αὐτὸ ὑποδεικνύονται τὰ μέσα ἀντιμετωπίσεως τῆς ἐπαναστατικότητος τῶν ἐφήβων. Ὡς τοιαῦτα θεωροῦνται ἀπὸ τὸν συγγραφέα τὰ ἑξῆς: ἡ ψυχικὴ ἐπαφὴ μὲ τοὺς ἐφήβους, ἡ ἀνάπτυξις τῆς πρωτοβουλίας των καὶ τοῦ αἰσθήματος εὐθύνης, ὁ καθορισμὸς σκοπῶν καὶ ἰδανικῶν, ἡ ὀργάνωσις τῆς

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Σ. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΥ, Γενικοῦ Ἐπιθεωρητοῦ Μαθηματικῶν, **Μιγαδικοὶ Ἀριθμοὶ** (Θεωρία – ἀσκήσεις – ἐφαρμογαί), Ἀθῆναι 1977, σελ. 256.

Ἡ θεωρία τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι κατάκτησις τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀρχίζουσα ἀπὸ τοῦ 16. αἰῶνος καὶ θεμελιουμένη κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα. Πρόκειται περὶ τῆς ἐκφράσεως καὶ συναφῶν πράξεων ἐκ τῆς παραστάσεως $\sqrt{-1}$, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ὡρισμένων ἐξισώσεων δευτέρου καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ. Κατὰ τὸν 19. αἰῶνα οἱ μαθηματικοὶ d' Alembert, Euler καὶ Gauss χρησιμοποιοῦν τὴν γραφὴν i ἀντὶ τῆς $\sqrt{-1}$. Διὰ τὴν θεμελίωσιν τοῦ συνόλου C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦνται διάφοροι μέθοδοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ ἔννοια μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν τετραγωνικῶν μητρῶν δευτέρας τάξεως μὲ πραγματικοὺς ὅρους. Κατὰ τὸν κ. Πνευματικόν, πολλοὶ μελετηταὶ χρησιμοποιοῦν κατ' εὐθεῖαν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν διὰ τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου C.

«Καλοῦμεν μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα z τῆς μορφῆς $x + iy$, ὅπου x, y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $i = \sqrt{-1}$.» Ὁ συγγραφεὺς κατανέμει τὴν ὑπὸ διαπραγμάτευσιν ὕλην εἰς 7 κεφάλαια. Εἰς τὸ πρῶτον κεφάλαιον γίνεται γενικὴ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ ἐκτενέστερον ὅλων, ἐκτίθεται λεπτομερῶς ἡ γενικὴ θεωρία τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον ἐκτίθεται ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῶν μιγαδικῶν καὶ ἡ τριγωνομετρικὴ ἔκφρασις αὐτῶν. Εἰς τὸ τέταρτον καὶ πέμπτον κεφάλαια μνημονεύεται ὁ τύπος τοῦ Euler καὶ ἐφαρμογαὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν τριγωνομετρίαν. Τέλος, εἰς τὰ κεφάλαια ὑπ' ἀριθμ. 6 καὶ 7 ἐκτίθεται ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν ἄλγεβραν καὶ τὴν γεωμετρίαν.

Ἐκτὸς τοῦ πρώτου κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἶναι εἰσαγωγικὸν εἰς τὴν θεωρίαν, εἰς ὅλα τὰ ἑπόμενα κεφάλαια παρατίθεται πλῆθος ἐκλεκτῶν ἀσκήσεων μὲ τὰς λύσεις αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι συντελοῦν εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς διαπραγματευθείσης ὕλης, ἡ γνῶσις τῆς ὁποίας εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὴν περαιτέρω σπουδὴν τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἰδιαιτέρως τῆς ἀλγέβρας καὶ τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων. Ἰδιαίτερον χαρακτηριστικὸν τοῦ συγγραφέως εἶναι ἡ σαφήνεια, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὴν διαπραγματευομένην ὕλην. Ὁ ἀναγνώστης δὲν συναντᾷ δυσκολίας εἰς τὴν κατανόησιν τῆς θεωρίας τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπως αὕτη ἐκτίθεται ὑπὸ τοῦ συγγραφέως.

Διὰ τῆς ὑπὸ κρίσιν πραγματείας ὁ κ. Πνευματικὸς προσφέρει σπουδαίαν συμβολὴν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐν Ἑλλάδι, τὴν ὁποίαν ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν θεραπεύει λίαν σημαντικῶς, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν πολυπληθῶν μαθηματικῶν ἐκδόσεων αὐτοῦ, τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν ἄλγεβραν, τὴν γεωμετρίαν, τὴν τριγωνομετρίαν, τὴν ἀνάλυσιν κλπ.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

* * *

ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ ΘΕΜΕΛΗ, Μητροπολίτου Μεσσηνίας, **Ἡ ἐν Ἀθήναις καὶ ἐν ἔτει 1896 ἔκδοσις τῶν Μηναίων**, Ἀθῆναι 1976, Ἀνάτυπον «Θεολογίας», σχ. 8 σελ. 69.

Ἡ παροῦσα μελέτη ἀναφερομένη εἰς ἔκδοσιν βιβλίου ἐκκλησιαστικοῦ περιεχο-

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ Λ' 1978

ΤΟΜΟΣ **30** (ΤΕΥΧΗ 59/60)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1978

θέσιν τοῦ Διός. Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἀνωτέρω ὁ συγγραφεὺς δὲν παραλείπει νὰ ἀναφερθῇ καὶ εἰς τὴν θρησκευτικὴν πραγματικότητα τῆς σημερινῆς ἐποχῆς ὑπενθυμίζων κοινὰς ἐκφράσεις.

Εἰς τὸ *συμπέρασμα* ὁ συγγραφεὺς τονίζει πολὺ ὀρθῶς, ὅτι αἱ θρησκευτικαὶ ἀντιλήψεις τοῦ Ὁμήρου γενικῶς εἶναι ἀπηλλαγμέναι πρωτογόνων καὶ μαγικῶν στοιχείων· εἶναι μᾶλλον ποιητικαί, ἰδεαλιστικαί, ἀποτέλεσμα συνειδητῆς προσπαθείας τοῦ ποιητοῦ νὰ λογικοποιήσῃ καὶ ἀποκαθάρῃ τὴν ἑλληνικὴν θρησκείαν. Παρὰ τκῦτα εἶναι λίαν εὐδιάκριτος ὁ λαϊκὸς χαρακτὴρ τῶν ἀντιλήψεων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐδράζονται ἐπὶ πραγματικῆς λατρείας. Αἱ θρησκευτικαὶ βάσεις τοῦ ὁμηρικοῦ ἀνθρώπου στηρίζονται ἐπὶ τῶν λατρευτικῶν ἀντιλήψεων τῆς ἐποχῆς του, ὅπως ὁ κόσμος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἔζησε καὶ ἀπέθανεν. Ὁ Ὅμηρος καίτοι δὲν ἀπέβλεπεν ἐνσυνειδήτως νὰ παρουσιάσῃ θεολογικὸν σύστημα, ἀποτελεῖ πηγὴν καὶ διὰ τὸν μελετητὴν τῆς θρησκείας. Ὡς πρὸς τὸ ἀρχικόν του ἐρώτημα : πόσον πραγματικὴ ἀληθῶς εἶναι ἡ ὁμηρικὴ θρησκεία, ὁ συγγραφεὺς ὁμολογεῖ, ὅτι δὲν δύναται νὰ δώσῃ ἀδιστάκτως καταφατικὴν ἀπόκρισιν. Εἶναι, λέγει, πραγματικὴ ἀπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι βασικὰ στοιχεῖα αὐτῆς σχετίζονται πρὸς τὰς θρησκευτικὰς ἀντιλήψεις τῶν κοινῶν πιστῶν.

Διὰ τῆς ἐμπεριστατωμένης ταύτης ἐργασίας ὁ συγγραφεὺς ἐπέτυχε νὰ καθορίσῃ τὰς κυρίας θρησκευτικὰς ἀντιλήψεις τοῦ ὁμηρικοῦ ἀνθρώπου καὶ νὰ ἀποκαλύψῃ τὴν λαϊκὴν βάσιν αὐτῶν. Εἶναι καρπὸς ἀγάπης τοῦ συγγραφέως πρὸς τὸν ἀρχηγέτην τῆς ποιήσεως, μαρτυρεῖ δὲ βαθεῖαν γνωριμίαν καὶ οἰκείωσιν τοῦ ὁμηρικοῦ κειμένου καὶ τῆς σχετικῆς βιβλιογραφίας, εἰς τὰ ὁποῖα πλειστάκις ἀναφέρεται ὁ συγγραφεὺς πρὸς τεκμηρίωσιν.

Γενικῶς φρονοῦμεν, ὅτι πρόκειται περὶ ἀξιολόγου ἐργασίας εἰς τὸν χῶρον τοῦτον τῆς ὁμηρικῆς θεογονίας καὶ ἀποτελεῖ θετικὴν συμβολὴν εἰς αὐτήν, εἶναι δὲ πολὺ χρήσιμος ὄχι μόνον διὰ τοὺς κλασσικοὺς φιλολόγους, ἀλλὰ καὶ διὰ τοὺς θρησκειολόγους καὶ τοὺς λοιποὺς μελετητὰς τῆς ἀρχαιότητος.

ΑΝΤΩΝΙΟΣ Ν. ΧΑΡΟΚΟΠΟΣ, Δ. Φ.

* * *

EUCLIDES **V, 2, Scholia in libros VI—XII** post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, B. G. Teubner, Leipsig 1977, σελ. 362.

Μὲ τὸ παρὸν δεύτερον μέρος τοῦ πέμπτου τόμου συνεπληρώθη ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ Οἴκου Teubner τῇ ἐπιμελείᾳ Ε. Σ. Σταμάτη. Εἶναι τοῦτο ἕνα κατόρθωμα. Ἡ προηγουμένη ἔκδοσις τῶν Εὐκλειδείων Στοιχείων ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ οἴκου εἶχε γίνει ἐπιμελείᾳ τοῦ I. L. Heiberg τῷ 1883—1884, λόγῳ ὅμως τῆς παρόδου μακροῦ χρόνου ἐκρίθη ὑπὸ τῆς Γερμανικῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου ἀναγκαία ἡ ἐπανέκδοσις τοῦ ἔργου, ἐπρότεινε δὲ αὕτη τῷ 1960 εἰς τὸν Καθηγητὴν Εὐ. Σταμάτην νὰ ἀναλάβῃ τὴν ἐπιμέλειαν τῆς ἐκδόσεως.

Ὁ Σταμάτης, γνωστὸς διεθνῶς διὰ τὴν οἰκειότητά του μὲ τὰ ἀρχαῖα Μαθηματικὰ ἀπὸ πλῆθος ἐργασιῶν του, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὰς ἐκδόσεις τοῦ Διοφάντου, τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀνέλαβε προθύμως τὴν ἀνατεθεῖσαν αὐτῷ τιμητικὴν ἐντολὴν καὶ ἐργασθεὶς ἐπὶ 17 ἔτη βλέπει τώρα μὲ τὴν ἔκδοσιν τοῦ ἀνωτέρω τελευταίου τμήματος νὰ συμπληροῦται ἡ ἀνανεωμένη ἐμφάνισις τῶν Στοιχείων. Τὸ ἔργον ἀνελήφθη τῷ 1961. Μὲ ἀρκετὰς προσθήκας καὶ συμπληρώσεις εἰς τὴν γενικῶς λαμπρὰν προηγουμένην ἔκδοσιν τοῦ Heiberg ὁ Σταμάτης σκληρῶς ἐργα-

σθεὶς ἐξέδωκε τὸ ἔργον τμηματικῶς ὡς ἐξῆς. Τὸν I τόμον τὸ 1964, τὸ II τὸ 1970, τὸν III τὸ 1972, τὸν IV τὸ 1973, τὸν V, 1 τὸ 1977 καὶ τὸ V, 2, τὸ 1977.

Περὶ τῶν τμηματικῶς ἐκδοθέντων τόμων ἔχουν δημοσιευθῆ ἤδη εἰς τὸν «Πλάτωνα» βιβλιογραφικὰ σημειώματα. Εἰς τὸν τελευταῖον ἐκδοθέντα ἡμίτομον V, 2, δι' οὗ ἐπιστέφεται ἡ ἔκδοσις τοῦ πλήρους ἔργου, περιέχονται τὰ σχόλια τῶν βιβλίων τοῦ Εὐκλείδου 6—13, πρὸς δὲ καὶ τέσσαρα παραρτήματα τῶν Σχολίων τούτων, ἅτινα ἔχουν συλλεγῆ ἀπὸ τὰς προσγραφὰς διαφόρων ἐγκρίτων μελετητῶν ἀρχαίων εἰς τὰ διάστιχα καὶ τὰς ὤας τῶν κωδίκων. Τὸ τέταρτον παράρτημα ἔχει γραφῆ ὑπὸ Βαρλαὰμ μοναχοῦ.

Ἡ ὅλη ἔκδοσις τώρα τῶν Στοιχείων, φέρουσα τὴν σφραγῖδα τῆς ἀρτιότητος, ἀποτελεῖ ἄριστον ὄργανον μελέτης εἰς τοὺς ἐρευνητὰς τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, παρέχει ὅμως ἰδιαιτέρως καὶ εἰς τοὺς Ἕλληνας ἐπιστήμονας τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἀπονείμωμεν τὸν δέοντα ἔπαινον εἰς τὸν Καθηγητὴν Σταμάτην, τὸν ἐπὶ δεκαετηρίδας ὑπηρετοῦντα τόσον εὐδοκίμως τὴν Μαθηματικὴν Ἐπιστήμην καὶ διερμηνεύοντα τὴν εἰς τὸν πολιτισμὸν πνευματικὴν προσφορὰν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐργατῶν τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

CONSTANTINE CAVARNOS, **Orthodox Iconography**, Institute for Byzantine and Modern Studies. Belmont Mass. U. S. A. 1977, σελ. XII/76.

Μὲ τὸ βιβλίον τοῦτο ὁ συγγραφεύς, ἔγκυρος φιλόσοφος καὶ αἰσθητικὸς καὶ ἐκδότης πολλῶν ἔργων σχετικῶν πρὸς τὴν ἀρχαίαν αἰσθητικὴν καὶ τὴν βυζαντινὴν σκέψιν, μουσικήν, τέχνην καὶ θρησκείαν, δίδει μίαν εἰκόνα ἀπηρτισμένην τῆς εἰκονογραφίας τοῦ Βυζαντίου ἀπὸ πολλῶν ἐπόψεων: τῆς ἐννοίας τῶν εἰκόνων καὶ τῆς θεωρητικῆς θεμελιώσεως τῆς σημασίας των, τῶν εἰδῶν τῆς εἰκονογραφίας καὶ τῆς θέσεως τῶν εἰκόνων εἰς τὸν ναὸν καθὼς καὶ τῆς τεχνικῆς τῶν ζωγράφων καθ' ἕκαστον εἶδος.

Τὸ βιβλίον ἀποτελεῖ σύνθεσιν Α') Τεσσάρων νῦν ἀναθεωρημένων, ἀλλὰ ἐν μέρει προδημοσιευμένων ἤδη εἰς διάφορα εἰδικὰ περιοδικά, μελετημάτων, ὧν περιεχόμενα εἶναι: 1) Βραχεῖα ἱστορία τῆς ὀρθοδόξου εἰκονογραφίας ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ χριστιανισμοῦ μέχρι σήμερον. 2) Ἔκθεσις περὶ τῆς θέσεως τῶν εἰκόνων εἰς τὸ τέμπλον καὶ τὰ διάφορα μέρη τῶν τοίχων καὶ τῶν ἄλλων ἐπιφανειῶν καὶ περὶ τῶν λόγων ποὺ ἐπιβάλλουν τὴν διευθέτησιν ταύτην. 3) Ἀνάλυσις τῶν ἑπτὰ κυρίων σκοπῶν, πνευματικῶν, ἠθικῶν καὶ αἰσθητικῶν, τοὺς ὁποίους ἐξυπηρετοῦν αἱ ἐν τῷ ναῷ εἰκόνες. 4) Ἐκτενὴς ἀνάλυσις τῆς αἰσθητικῆς τῶν βυζαντινῶν εἰκόνων καὶ τῆς σημασίας των ἐν τῇ ἐννοίᾳ ὅτι δι' αὐτῶν ἐκφράζεται τὸ Ὀρθόδοξον χριστιανικὸν ἰδεῶδες, ὡς τὸ διετύπωσαν οἱ μεγάλοι Πατέρες τῆς Ἐκκλησίας. Β') Δύο πρωτοχριστιανικῶν κειμένων ἐπιλεγέντων ὑπὸ τοῦ συγγραφέως καὶ ἀναφερομένων εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς προσκυνήσεως τῶν εἰκόνων (ἐν ὄψει τῶν ἀντιρρήσεων τῶν εἰκονοκλαστῶν). Ταῦτα ἐλήφθησαν 1) Ἐκ τῆς Ἐκθέσεως Ὀρθοδόξου πίστεως τοῦ Ἁγίου Ἰωάννου τοῦ Δαμασκηνοῦ καὶ 2) Ἐξ ἀποσπασμάτων πράξεων τῆς Ζ' Οἰκ. Συνόδου. Γ') Δύο κειμένων περὶ τῶν μέσων καὶ τῆς τεχνικῆς τῆς Ὀρθοδόξου εἰκονογραφίας, ἐρανισμένων ἐκ μελετημάτων τοῦ ζωγράφου Φ. Κόντογλου 1) Περὶ τῶν τοιχογραφιῶν καὶ 2) περὶ τῶν φορητῶν εἰκόνων Δ') Δύο περιλήψεων ρωσικῶν βιβλίων σχετικῶν πρὸς τὰς εἰκόνας, ἤτοι 1) τοῦ τοῦ Εὐγ. Τουμπέτσκοϊ (ΙΘ' αἰ.), περὶ τῆς ἐννοίας καὶ τῆς ἐκφράσεως τῶν εἰκό-

# Π Λ Α Τ Ω Ν

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΛΑ' 1979

ΤΟΜΟΣ **31** (ΤΕΥΧΗ 61/62)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1979

σις ἐσημειώθη, ἀφοῦ οἱ δι' αὐτὴν κανόνες ἦσαν κατάλληλοι δι' ὅλα τὰ εἴδη τῆς συγκινήσεως.

Εἰς τὴν κωμῳδίαν ἡ ἀρχὴ τῆς κινήσεως διατηρεῖται ἐκ τοῦ ἀγῶνος τοῦ θετικοῦ κατὰ τοῦ ἀρνητικοῦ πρὸς δημιουργίαν ἑνὸς καλυτέρου κόσμου, ἐντὸς δὲ τῆς ἀρχῆς ταύτης κεῖνται καὶ αἱ παραβάσεις καὶ τὰ παραβατικὰ χορικὰ ἄσματα. Εἰς τὴν τραγῳδίαν ἐπιβάλλεται ἡ δύναμις τῶν θεῶν. Εἰς τὴν κωμῳδίαν δεικνύεται ἡ δύναμις καὶ ὁ θρίαμβος τοῦ ἀνθρώπου, ἐνῷ τῶν θεῶν ἡ δύναμις ἀμβλύνεται μὲ τὴν Παρατραγῳδίαν. Ἡ κωμῳδία ἤσκησε τὴν ἐπιρροήν της ἐντὸς τοῦ Ε΄ αἰ. ὡς μέσον δημοσίας κριτικῆς, ἡ ἐπιρροὴ δὲ αὕτη ἦτο εὐρυτάτη λαμβάνουσα δικαίωσιν ἐκ τῆς τάσεώς της πρὸς δημιουργίαν καλυτέρου κόσμου. Μὲ τὴν ἐκμηδένισιν τῆς πολιτικῆς ἐλευθερίας καὶ τοῦ ἐνεργοῦ πολιτικοῦ βίου ἡ κωμῳδία ἔχασε τὴν βάσιν τῆς ὑπάρξεώς της. Ὁ κωμικὸς ποιητὴς δὲν ἦτο πλέον ἐλεύθερος, διὰ τοῦτο καὶ ὁ χαρακτὴρ τῆς κωμῳδίας ἀλλάζει. Ἡ τύχη παραλύει τὴν δύναμιν. Ὁ οἰκιακὸς βίος θὰ παρέχῃ τὰ μέσα διακοσμήσεως τῆς δραματικῆς δράσεως.

Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο τοῦ Landfester ἡ ἀνάλυσις εἶναι συστηματική, ἡ διερεύνησις τῆς φιλολογικῆς ἐρεύνης πλήρης, ἡ κρίσις θεμελιωμένη καὶ τὰ συμπεράσματα ἀποχρώντως ἠτιολογημένα καὶ πειστικά. Ἡ μελέτη ἐφώτισε λαμπρῶς τὴν ἔρευναν τῆς Παλαιᾶς κωμῳδίας.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Δ. ΜΟΥΚΑΝΟΥ, **Ὁ τρόπος τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη.** Διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ, Ἀθῆναι 1979, σελίδες 127.

Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου κατανέμεται εἰς τρία μέρη. Ἕκαστον τῶν δύο πρώτων μερῶν περιλαμβάνει πέντε κεφάλαια, ἐνῷ τὸ τρίτον μέρος περιέχει τὴν μετάφρασιν τοῦ βιβλίου Μ 1—3 τῶν μετὰ τὰ φυσικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους. Εἰσαγωγικῶς ὁ συγγραφεὺς τονίζει, ὅτι τὸ γενικώτερον πλαίσιον ἐντὸς τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ συναφὴς ἔρευνα εἶναι ὁ ὀντολογικὸς χαρακτὴρ τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων (δηλ. τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων). Κατόπιν ἀναφέρεται ἡ μέθοδος ἐρεύνης, ἥτις ἀκολουθεῖται, ὁ σκοπὸς καὶ ἡ θέσις αὐτῆς καὶ περιλαμβάνονται σκέψεις καὶ γνῶμαι σχετικαὶ πρὸς τοὺς εἰδητικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Πλάτωνος, περὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν γνῶσιν ἀπὸ ἀριστοτελικὰ χωρία. Ἐκτίθενται πρὸς τούτοις καὶ αἱ συναφεῖς ἀντιλήψεις διαφόρων προηγουμένων ἐπιστημόνων [1]. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος μνημονεύεται ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου (ἢ κατά τινας ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων) καὶ ἀκολουθεῖ ἡ ἀνάπτυξις τῆς πλατωνικῆς ἀντιλήψεως περὶ τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων ὡς ἰδεῶν, καὶ γίνεται εἰδικώτερον ἀναγωγὴ πρὸς τοῦτο εἰς τὰ συναφῆ χωρία τῆς Πολιτείας (510 c — 511 a). Ἐπιτυχῶς ἀναφέρεται ἐνταῦθα ὑπὸ τοῦ συγγραφέως ἡ διάκρισις τῆς ἐννοίας τῶν ὑποθέσεων εἰς τὰ Μαθηματικὰ κατὰ Πλάτωνα καὶ τοὺς συγχρόνους πρὸς ἡμᾶς ἐρευνητὰς τῶν ἀρχῶν τῶν Μαθηματικῶν. Ὡς ὑποθέσεις εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὁ Πλάτων ἐννοεῖ τὰς ἀναποδείκτους ἀρχὰς τούτων, δηλαδὴ τὰ ἀξιώματα, ὡς ὠνόμασεν

1. L. Robin, J. Stenzel, E. Frank, H. Cherniss, O. Becker, Th. Heath, A. Wedberg, Ch. Mugler, van der Waerden, A. Szabó.

αὐτὰς βραδύτερον ὁ Ἀριστοτέλης (Ἀναλ. ὕστ. Α 10, 76 a, 31—34). Ὁ Πλάτων προσπαθεῖ νὰ δείξῃ ὅτι ὁ διαλεκτικὸς τρόπος σκέψεως ὁδηγεῖ ὅπως καὶ ὁ μαθηματικὸς τρόπος εἰς τὴν γνῶσιν τοῦ νοητοῦ εἴδους. Οἱ μαθηματικοὶ δύνανται νὰ ἀνεύρουν τὰ ὄντα, ἀλλὰ δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ χρησιμοποιήσουν περαιτέρω ὀρθῶς αὐτὴν τὴν ἀνεύρεσιν καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν παραδίδουν τὰ πορίσματα τῶν ἐρευνῶν των εἰς τοὺς διαλεκτικοὺς πρὸς περαιτέρω ἔρευναν. Καταλήγουν δηλ. οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὴν ἔρευναν τοῦ Ἀνυποθέτου, τὸ ὁποῖον ἁρμοδία νὰ ἐρευνήσῃ εἶναι ἡ φιλοσοφία (σελίδες 40—47).

Ἀκολούθως ὁ συγγρ. ὁμιλεῖ περὶ τῆς ὀντολογικῆς «μεταξὺ - παρεμβολῆς» τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ Πλάτωνα καὶ σημειώνει, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ ς΄ βιβλίου τῆς Πολιτείας τὰ εἴδη παίζουν ἕνα ἰδιόρρυθμον διπλοῦν ρόλον κατὰ τὴν διαίρεσιν τῆς περιοχῆς τοῦ νοητοῦ (σελ. 48), τὴν ὁποίαν δὲν διεσαφήνισεν ὁ Πλάτων, ὅταν ἔγραφε τὸ βιβλίον τοῦτο τῆς Πολιτείας. Συναφῶς πρὸς ταῦτα ἐκτίθενται μετὰ κριτικῶν παρατηρήσεων καὶ ἀντιλήψεις τῶν D. Ross (σελ. 50—54), H. Cherniss καὶ τῆς Σχολῆς τῆς Τυβίγγης, H. Krämer, K. Gaiser (σελ. 55–62).

Εἰς τὸ τελευταῖον κεφάλαιον V τοῦ πρώτου μέρους τῆς πραγματείας ὁ συγγραφεὺς σημειώνει δύο βασικὰς συνεπείας τῆς ὀντολογικῆς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος περὶ τῶν Μαθηματικῶν, καθ' ἃς παρεσχέθη ἀφορμὴ εἰς τὸν Ἀριστοτέλη νὰ μετασχηματίσῃ τὸν τρόπον τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ἡ ἐνέργεια ὅμως αὕτη τοῦ Ἀριστοτέλους στρέφεται ὄχι μόνον πρὸς τὰς ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος διατυπωθείσας σχετικὰς θεωρίας, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὰς θεωρίας τῶν δ.αδόχων τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν Ἀκαδημίαν, ἤτοι τοῦ Σπευσίππου καὶ τοῦ Ξενοκράτους.

Τὸ κεντρικὸν πρόβλημα κατὰ τὸν Δ. Μούκανον, κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ τρόπου τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων μεταξὺ Πλάτωνος καὶ Ἀριστοτέλους, εἶναι, ὅτι ἐνῷ κατὰ τὸν Πλάτωνα τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα θεωροῦνται ὡς ἰδέαι χρήσιμοι διὰ τὴν θεμελίωσιν τῆς Φυσικῆς, κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ τοιαύτη ἄποψις εἶναι ὑπερβολικὴ καὶ ἐκ τῆς ἀντιλήψεως αὐτῆς εἶναι κατανοητὴ ἡ ἀντίθεσις τοῦ Ἀριστοτέλους πρὸς τοὺς εἰδητικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Πλάτωνος, καίτοι περὶ τούτων δὲν ἔχομεν τεκμήρια ἐκ τῶν Πλατωνικῶν Διαλόγων.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς πραγματείας ὁ συγγρ. τονίζει ὀρθῶς, ὅτι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα δὲν ἀποτελοῦν οὐσίας καὶ ὅτι ταῦτα πρέπει νὰ ἐξετάζωνται αὐτὰ καθ' ἑαυτά, χωρὶς νὰ συνδέωνται πρὸς τὴν γνώμην, ὅτι ταῦτα εἶναι ἰδέαι ἢ ἀρχαὶ καὶ οὐσίαι τῶν ὄντων. Πρὸς τούτοις δὲν ἀποκρύπτει τὰς δυσκολίας, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται κατὰ τὴν θεώρησιν τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος, τῶν Πυθαγορείων καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ὡς χωρισταὶ καὶ αὐθυπόστατοι φύσεις (Μετὰ τὰ φυσ. 10/6 b 12).

Ὁ Πλάτων, κατὰ τὸν συγγραφέα, ἀποκτᾷ ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν ἔρευναν τῶν ἀρχῶν τῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν καὶ τὴν ἔρευναν τῆς θεωρίας τῶν Ἰδεῶν τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, ἐνῷ ὁ Ἀριστοτέλης δὲν ἐπεκτείνει τὰς ἐρεύνας του εἰς τὰ πεδία αὐτά. Τὸ σημεῖον ἀναφορᾶς τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι ἡ φιλοσοφικὴ θεματοποίησις τῆς εἰδικῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν, ἐνῷ τὸ σημεῖον ἀναφορᾶς τοῦ Πλάτωνος εἶναι ἡ φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν (σελ. 102). Τέλος τονίζεται, ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ τοῦ τρόπου τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων «εἶναι μία συνέπεια τῆς διαφερομένης πρὸς τὸν Πλάτωνα ὀντολογικῆς του θεωρίας καὶ τῆς πραγματεύσεώς του μιᾶς τελολογικῆς Φυσικῆς» (σελ. 104 - 105).

Προσεκτικὴ ἐξέτασις τῶν ἀντιλήψεων τοῦ συγγραφέως σχετικῶς μὲ τὸν τρόπον θεωρήσεως τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ Πλάτωνα καὶ Ἀριστοτέλη πείθει περὶ τῆς ὀρθότητος αὐτῶν τῶν ἀντιλήψεων. Δὲν θεωροῦμεν ὑπερ-

βολὴν νὰ προσθέσωμεν, ὅτι τὰ συμπεράσματα τοῦ Δ. Μούκανου εἶναι ἐμμέσως σύμφωνα πρὸς τὴν περίφημον θεωρίαν τοῦ Kurt Gödel Περὶ τυπικῶς μὴ δυναμένων ν' ἀποφασισθῶσι προτάσεων τῶν ἀρχῶν τῶν Μαθηματικῶν καὶ συγγενῶν συστημάτων (Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, ἥτις ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1931.

Ὅπως εἶναι γνωστὸν ὁ Gödel διὰ τῆς θεωρίας του αὐτῆς κατέρριψεν ὡς ἀβασίμους τὰς θεωρίας τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert), τὰς δημοσιευθείσας περὶ τὸ 1900, διὰ τῶν ὁποίων κατηργεῖτο μετὰ 2200 ἔτη ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου, καὶ ἀποκατέστησε τὴν ἰσχὺν τῆς Γεωμετρίας αὐτῆς καὶ γενικῶς τὴν ἀπαρασάλευτον ἰσχὺν τῶν ἀρχῶν τῶν Μαθηματικῶν, ὡς ταύτας διετύπωσαν ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἀριστοτέλης.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

* * *

DIONYSIACA, **Nine Studies in Greek Poetry by former pupils presented to Sir Denys Page on his seventieth Birthday,** Cambridge University Library 1978, σελ. 203.

Εἶναι πολὺ εὔστοχος ὁ τίτλος *Διονυσιακὰ* διὰ τὸν πνευματικὸν ἔρανον τῶν ἐννέα καθηγητῶν ἐξ Ἀγγλίας, Σκωτίας, Ἀμερικῆς καὶ Αὐστραλίας, τὸν προσφερόμενον τιμητικῶς εἰς τὸν διδάσκαλόν των *Διονύσιον* (Denys) Page, τὸν διακεκριμένον ἑλληνιστήν, ἐπὶ τῇ ἑβδομηκοστῇ ἐπετείῳ τῆς γεννήσεώς του. Πρόκειται περὶ ἐννέα μελετῶν, ὧν δύο ἀναφέρονται εἰς τὴν ποίησιν τοῦ Πινδάρου, τέσσαρες εἰς τὰ ἔργα τοῦ Αἰσχύλου, μία εἰς τὸν Σοφοκλέα καὶ δύο εἰς τὸν Εὐριπίδην. Τῶν μελετῶν τούτων προτάσσεται ὁ κατάλογος τῶν ἀπειραρίθμων ἔργων καὶ βιβλιοκρισιῶν τοῦ τιμωμένου καθηγητοῦ κατὰ χρονολογικὴν σειρὰν δημοσιεύσεώς των ἀπὸ 1934—1978, αἱ δὲ μελέται εἶναι αἱ ἀκόλουθοι.

1. W. S. Barrett. The Oligaithidae and their victories (Pindar, Olympian 13; SLG 339, 3:0). Ὁ συγγραφεὺς τῆς μελέτης ἐπιθυμῶν νὰ διαλευκάνῃ τὰς ἐν Ὀλ. 13 μνημονευομένας νίκας τῆς πολυνίκου Κορινθιακῆς οἰκογενείας τῶν Ὀλιγαιθιδῶν διερευνᾷ συστηματικῶς τὸ κείμενον τῆς Ὠδῆς, περιέχον ὑπαινιγμοὺς διὰ τοὺς νικητάς, καθὼς καὶ τὸ ἐπεξηγηματικὸν σχόλιον 58 b-c, τὸ ὁποῖον ὅμως ἐμφανίζει συγκεχυμένην συσχέτισιν τῶν μνημονευομένων καὶ ὑπονοουμένων προσώπων. Ἡ προσπάθεια τοῦ σ. ἀποβλέπει εἰς τὸ καθορίσῃ χρονολογικῶς τὰς σχέσεις συγγενείας τῶν μνημονευομένων ἐν τῇ Ὀλ. 13 νικητῶν καὶ νὰ διορθώσῃ τὰς συγκεχυμένας πληροφορίας τοῦ Σχολ. 58. Οὐσιώδη νέα στοιχεῖα ἀνευρίσκει εἰς τὸν ὑπὸ τοῦ Lobel τὸ 1967 δημοσιευθέντα POxy. 32. 263. Ἐκ τῶν 70 μικρῶν ῥακῶν τοῦ παπύρου τούτου δύο, τὰ fr. 21α καὶ 22 περιέχουν ἴχνη ᾠδῆς εἰκαζομένης ὡς ἀνηκούσης εἰς τὸν Σιμωνίδην καὶ περιεχούσης ὕμνον νίκης τῆς οἰκογενείας τῶν Ὀλιγαιθιδῶν. Δι' εὐφυῶν εἰκασιῶν ὁ σ. ὁλοκληρώνει τὰς συσχετίσεις καὶ διὰ τολμηρᾶς πως, οὐχὶ ὅμως ἀπιθάνου συμπληρώσεως τῆς φράσεως τοῦ σχολίου διὰ προσθέτου λέξεως ἀποκαθιστᾷ πλήρως τὸ δένδρον τῆς πολυνίκου οἰκογενείας τῶν Ὀλιγαιθιδῶν ἐπὶ τρεῖς γενεὰς μὲ τὰ ὀνόματα τῶν νικητῶν.

2. C. Carey. Pindarica Εἰς τὴν μελέτην ὁ συγγραφεὺς ἐξετάζει τέσσαρα θέματα. Εἰς τὸ α', ἀναφερόμενον εἰς τὸν Πυθ. 1. στ. 50 ἑξ., ἀναζητεῖ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐν στίχ. 50 ἑξ. φράσεως *νῦν γε μὰν τὴν Φιλοκτήταο δίκαν ἐφέπων ἐστρατεύθη*. . Μετ' ἔρευναν τῶν γνωμῶν τῶν νεωτέρων κριτικῶν καὶ τῶν Σχολίων ἀναζητεῖ τὴν λύσιν

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, **Κωνικά,** ἀρχαῖον κείμενον - μετάφρασις ὑπὸ Ε. Σ. Σταμάτη, τόμος Β΄ βιβλία β΄ καὶ γ΄, σελ. VIII/277, τόμος Γ΄ βιβλία δ΄, ε΄ καὶ ς΄, σελ. 355, τόμος Δ΄ βιβλίον ζ΄, ἀποσπάσματα, λήμματα Πάππου, σχόλια Εὐτοκίου, σελ. 388, Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1946.

Οἱ τρεῖς ὀγκώδεις οὗτοι τόμοι τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ἀποτελοῦν συνέχειαν καὶ τέλος τοῦ Α΄ τόμου δημοσιευθέντος τὸ 1975 καὶ κριθέντος εἰς τὸν «Πλάτωνα» τόμ. 27 (1975), σελ. 382—384. Προκαλεῖ ἀπορίαν διατὶ τὸ Τεχνικὸν Ἐπιμελητήριον ἐνῷ οἱ τόμοι οὗτοι ἐξετυπώθησαν τὸ 1976 τοὺς παρέδωκεν εἰς τὴν κυκλοφορίαν καὶ εἰς τὸν συγγραφέα τὸ ἔτος 1979.

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὁ Σταμάτης εἰς τὸν ἐκδοθέντα Α΄ τόμον τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου περιέλαβε τὸ α΄ βιβλίου τοῦ ἔργου τοῦ ἀρχαίου σοφοῦ, διασήμου γεωμέτρου, σπουδάσαντος εἰς τὸ Μουσεῖον τῆς Ἀλεξανδρείας εὐθὺς μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη.

Εἰς τὸν Β΄ τόμον ἐκδίδει ὁ Στ. τὰ βιβλία β΄ καὶ γ΄ στηριζόμενος εἰς τὸ κείμενον τὸ ἐκδοθὲν ὑπὸ I. L. Heiberg, Lipiae 1891, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπιφέρει 11 διορθώσεις φραστικὰς καὶ συμπληρώσεις, προσθέτων κατὰ σελίδα κειμένου καὶ ἀντίστοιχον μεταφράσεως εἰς Νέαν Ἑλληνικήν. Εἰς τὰς σελ. 2 269 περιέχεται τὸ κείμενον καὶ ἡ μετάφρασις, εἰς δὲ τὰς σελ. 271—277 τὸ εὑρετήριον τῶν ὅρων καὶ τῶν κυρίων ὀνομάτων.

Εἰς τὸν Γ΄ τόμον περιελήφθησαν τὰ βιβλία δ΄, ε΄ καὶ ς΄. Τοῦ δ΄ τὸ ἀρχαῖον κείμενον ἐλήφθη ἐκ τῆς ἐκδόσεως I. L. Heiberg 1891, τῶν δὲ βιβλίων ε΄ καὶ ς΄ τὸ ἀρχαῖον κείμενον δὲν ὑπάρχει. Ἐκ τῆς γαλλιστὶ ἐκδόσεως τοῦ Paul ver Eecke, Paris 1922 καὶ 1959, μετεφράσθησαν τὰ βιβλία ὑπὸ τοῦ Σταμάτη εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικήν. Τοῦτο ἔγινε διότι τὸ κείμενον τῶν βιβλίων ε΄ ἕως ζ΄ δὲν ἐσώθη εἰς τὸ πρωτότυπον, ἀλλὰ μόνον εἰς τὴν ἀραβικήν, ἐξ ἧς μετεφράσθη εἰς τὴν Λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Edm. Halley, London 1710, ἐξ ἧς τὸ μετέφρασεν εἰς τὴν Γαλλικὴν ὁ P. ver Eecke. Εἰς τὴν Ἑλληνικὴν μετάφρασιν τοῦ κειμένου τῶν βιβλίων ε΄ καὶ ς΄ ὁ Σταμάτης ἐπιφέρει 18 φραστικὰς προσθήκας καὶ συμπληρώσεις. Τῶν βιβλίων ε΄ καὶ ς΄ προτάσσονται αἱ ἀφιερωτικαὶ ἐπιστολαὶ τοῦ συγγραφέως Ἀπολλωνίου πρὸς τὸν βασιλέα Ἄτταλον, εἰς τὸ τέλος δὲ ἐν σελ. 351—355 παρατίθεται τὸ εὑρετήριον ὅρων καὶ κυρίων ὀνομάτων.

Εἰς τὸν Δ΄ τόμον, εἰς τὰς σελ. 1—109 παρατίθεται ἡ μετάφρασις τοῦ ζ΄ βιβλίου ἐκ τῆς Γαλλικῆς εἰς τὴν Ἑλληνικὴν μετὰ 9 προσθηκῶν καὶ συμπληρώσεων τοῦ κειμένου καὶ τῆς ἀφιερωτικῆς ἐπιστολῆς πρὸς τὸν βασιλέα Ἄτταλον. Ἀκολούθως εἰς τὰς σελ. 113—118 παρατίθενται τὰ ἐκ τῆς ἐκδόσεως Heiberg ἀποσπάσματα μετὰ τῶν τίτλων καὶ τῶν σχημάτων των. Εἰς τὰς ἀκολούθους σελίδας τὰ ἐκ τῆς ἐκδόσεως Heiberg 1893 κείμενα Πάππου Λήμματα εἰς τὰ Κωνικὰ καὶ Εὐτοκίου Σχόλια εἰς τὰ Κωνικά, μετὰ μεταφράσεως εἰς τὴν Νέαν Ἑλληνικήν. Τέλος εἰς τὰς σελ. 385—388 παρατίθεται εὑρετήριον ὅρων καὶ κυρίων ὀνομάτων.

Οὕτως ὁ Σταμάτης μετὰ τὸν Εὐτόκιον, τὸν πρῶτον ἐκδότην τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ἐν Κωνσταντινουπόλει τὸ 530 μ. Χ., εἶναι ὁ πρῶτος Νεοέλλην συγγραφεύς, ὁ ὁποῖος παραδίδει καὶ πάλιν τὰ σωζόμενα βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ εἰς τὸ Ἑλληνικὸν κοινόν.

Π. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

Αἱ τελευταῖαι παρατηρήσεις, ποὺ γράφονται δι' ὅλους τοὺς μεταφραστὰς τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν ἔργων, διότι ὅλοι κάμνουν «ἀγάμους γάμους» πολὺ περισσότερον ἐπιτηδευμένους καὶ ἐξεζητημένους — εἶναι δὲ ἄλλως τε παρατηρήσεις ἑνὸς παλαιοῦ διδασκάλου — δὲν μειώνουν τὴν πραγματικῶς ἐπιστημονικήν, ἐπιμελεστάτην καὶ γενικῶς ἱκανοποιητικὴν ἐργασίαν τοῦ κ. Μαρκαντωνάτου, ἡ ὁποία ἐκτυπωμένη καλαισθήτως ὑπὸ τοῦ οἴκου Gutenberg τῶν Ἀθηνῶν ἀποτελεῖ μίαν λαμπρὰν προσφορὰν εἰς τὴν ὑπὸ εὐρυτέρων στρωμάτων τῆς Κοινωνίας μας μελέτην τῶν ἀθανάτων δημιουργημάτων τῆς πατρογονικῆς μας σοφίας.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

GEORGES J. ΚΑΥΑS, **Euclide, Les Elements. Εὐκλείδου Στοιχεῖα**, τόμοι 2. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1978. Ἐκδόσεις τοῦ Ἐθνικοῦ Κέντρου Ἐπιστημονικῆς Ἐρεύνης (τῆς Γαλλίας).

Ὁ ἐν Παρισίοις ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν ἐργαζόμενος εἰς τὸ Ἐργαστήριον τῆς Πυρηνικῆς Φυσικῆς τοῦ Πολυτεχνείου τῶν Παρισίων, διακεκριμένος Ἕλλην ἐπιστήμων κ. Γεώργιος Καγιᾶς ἀσχολεῖται παραλλήλως λίαν ἐπιτυχῶς καὶ μὲ προβλήματα ἀφορῶνται εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Πρὸ ὀλίγων ἐτῶν ἐδημοσίευσε πραγματείαν ἀφορῶσαν εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς ἢ νυμφικοὺς ἀριθμοὺς τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος (546 Β). Ἤδη ἐξέδωκεν εἰς δύο μεγάλους τόμους τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν περιλαμβάνεται τὸ ἀρχαῖον Ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κωδίκων οἱ ὁποῖοι ἐχρησιμοποιήθησαν εἰς τὴν Λειψίαν πλαιότερον (I. Heiberg 1883–85). Κατὰ τὴν νεωτέραν ἔκδοσιν τῆς Λειψίας (I. Heiberg – E. S. Stamatis, 1969 — 1973) ἐχρησιμοποιήθησαν οἱ αὐτοὶ κώδικες. Εἰς ἑκάστην ἀριστερὰν σελίδα τῆς ἐκδόσεως τοῦ κ. Καγιᾶ παρατίθεται τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἐν ᾧ εἰς ἑκάστην δεξιὰν σελίδα παρατίθεται ἐλευθέρα μετάφρασις εἰς τὴν Γαλλικὴν γλῶσσαν. Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου περιλαμβανόμενα εἰς δεκατρία βιβλία, ἐκδίδονται κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας εἰς τέσσαρας τόμους. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον περιέχεται ἡ ἐπίπεδος Γεωμετρία. Εἰς τὸν δεύτερον τόμον περιέχεται ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν, συνέχεια τῆς ἐπιπέδου Γεωμετρίας καὶ τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία ὑπ' ἀριθμ. 7, 8, 9. Εἰς τὸν τρίτον τόμον περιέχεται τὸ δέκατον βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων. Τέλος εἰς τὸν τέταρτον τόμον περιέχονται τὰ βιβλία 11, 12, 13, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν τὴν ὕλην τῆς Στερεομετρίας. Ὁ κ. Καγιᾶς, διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐπρωτοτύπησε. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον περιέλαβε τὴν Ἐπιπεδομετρίαν καὶ τὴν Στερεομετρίαν (σελίδες 258, σχ. 8), ἐνῷ εἰς τὸν δεύτερον περιέλαβε τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία (7, 8, 9) καὶ τὸ δέκατον βιβλίον, περὶ ἀσυμμέτρων (σελ. 186).

Ἀκολούθως ὁ κ. Καγιᾶς ἀσχολεῖται μὲ τὸν καθορισμὸν τῶν βιογραφικῶν στοιχείων τοῦ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἀκμάσαντος συγγραφέως τῶν Στοιχείων καὶ συμφωνεῖ πρὸς τὴν γνώμην, ὅτι ταῦτα ἐγράφησαν περὶ τὸ 320 π. Χ., ἐν ᾧ μερικοὶ τῶν Ἱστορικῶν τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης τοποθετοῦν τὴν συγγραφὴν αὐτὴν περὶ τὸ 300 π. Χ. Διὰ τὴν ἀπήχησιν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, κατὰ

τοὺς Ἀλεξανδρινοὺς καὶ τοὺς μεταγενεστέρους χρόνους, ὁ συγγραφεὺς ἀναφέρεται εἰς τὸν Πρόκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει σχολιάσει τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν Στοιχείων καὶ διαμνημονεύει Στοιχεῖα τῆς Ἱστορίας τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν. Ὁ Πρόκλος, ὡς γνωστὸν εἶναι ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος (410–485 μ. Χ.). Κατόπιν τούτων ὁ κ. Καγιᾶς προβαίνει εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου, ἀναφερόμενος καὶ εἰς τὰ ἀπολεσθέντα ἔργα αὐτοῦ, ὅπως εἶναι τὰ Κωνικὰ καὶ τὰ Μηχανικά, τὸ Περὶ Κούφων καὶ Βαρέων καὶ τὸ Περὶ Ζυγοῦ. Τὰ δύο τελευταῖα ἐκ τούτων σώζονται εἰς τὴν ἀραβικήν, δὲν ἔχουν ὅμως ἀκόμη μεταφρασθῆ εἰς ἄλλην γλῶσσαν καὶ δὲν δύναται ἐπὶ τοῦ παρόντος νὰ γίνῃ λόγος περὶ τῆς γνησιότητος αὐτῶν. Λεπτομερὴς ἐπισκόπησις τῆς Ἱστορίας τῶν Στοιχείων ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ Μεσαιῶνος, εἰς τὴν Βυζαντινὴν ἐποχήν, εἰς τὴν Ἀραβικὴν παράδοσιν, εἰς τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως καὶ εἰς τὴν σύγχρονον ἐποχήν. Πολὺ ἐνδιαφέρον παρουσιάζει σχεδιάγραμμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμφαίνεται ἡ ἐκδοτικὴ διαδρομὴ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἰς χρονικὸν διάστημα 2000 ἐτῶν. Ἐνδιαφέροντα σχόλια καὶ συναφὴς βιβλιογραφία παρατίθενται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τόμου.

Ὁ κ. Καγιᾶς διὰ τῆς ἐκδόσεως αὐτῆς ἀπετέλεσε πραγματικὸν ἆθλον, ὅστις εἶναι προϊὸν μακροχρονίου καὶ ἐπιμελοῦς ἐργασίας. Εἶναι δὲ πολὺ εὐχάριστον, ὅτι τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν ἀνέλαβε τὸ Ἐθνικὸν Κέντρον Ἐπιστημονικῆς Ἐρεύνης τῆς Γαλλίας (Centre National de la Recherche Scientifique).

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

* * *

TESTI NEOGRECI DI CALABRIA. **Indice Lessicale**. A cura di Girolamo Caracausi. Παλέρμο, 1979, Σελ. XVI — 367

Τὸ Σικελικὸν Ἰνστιτοῦτον Βυζαντινῶν καὶ Νεοελληνικῶν Μελετῶν τοῦ Παλέρμου εἶχεν ἐκδώσει, κατὰ τὸ ἔτος 1959, εἰς τὴν σειρὰν τῶν Testi αὐτοῦ καὶ ὑπ' ἀριθ. 3, τῇ φροντίδι τῶν Giuseppe Rossi Taibbi καὶ Girolamo Caracausi τόμον ὑπὸ τὸν τίτλον Testi Neogreci di Calabria (Νεοελληνικὰ κείμενα τῆς Καλαβρίας). Ὡς γνωστόν, εἰς τὸ νότιον ἄκρον τῆς χερσονήσου τῆς Καλαβρίας ὑπάρχουν ἓξ χωρία μὲ ἑλληνόφωνον πληθυσμόν. Τὰ κείμενα, τὰ ὁποῖα δημοσιεύονται εἰς τὸν ἀνωτέρω τόμον, γεγραμμένα διὰ τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου ἐνισχυμένου μέ τινα ἐπὶ πλέον φθογγόσημα καὶ διακριτικὰ σημεῖα (φωνητικὴ μεταγραφή), προέρχονται ἀπὸ τὰ χωρία ταῦτα: Ροκαφόρτε, Ροχούδι, Χωρίο ντὶ Ροχούδι, Κοντοφούρι, Γκαλιτσανὸ καὶ Μπόβα. Πάντα συνοδεύονται ἀπὸ ἰταλικὴν μετάφρασιν. Τὴν εἰσαγωγὴν καὶ τὰ προλεγόμενα τοῦ τόμου (συνολικῶς 87 σελίδες) ἔγραψεν ὁ G. Rossi Taibbi, ὅστις ἐξέδωκε καὶ τὰ ἐκ τοῦ χωρίου Ροκαφόρτε κείμενα (σσ. 3—266) τοῦ τόμου), ἐνῷ ὁ ἕτερος τῶν ἐπιμελητῶν τῆς ἐκδόσεως, G. Caracausi, ἐξέδωκε τὰ κείμενα τῶν χωρίων Κοντοφούρι, Ραχούδι καὶ Μπόβα, συνέταξε δὲ καὶ τὸν πίνακα συγγραφέων, ἤτοι εἶναι ὁ ὑπεύθυνος διὰ τὰς σσ. 269—491 τοῦ τόμου. Εἰς τὰ προλεγόμενά του ὁ Rossi Taibbi προβαίνει εἰς ποικίλας γραμματικὰς παρατηρήσεις κ. ἄ. σχόλια ἐπὶ τῆς γλώσσης τῶν κειμένων.

Ἡ σπουδαιότης τοῦ τόμου εἶναι πρόδηλος, ἀλλὰ δὲν πρόκειται νὰ ἀσχοληθῶμεν ἐνταῦθα μὲ τὴν ἔκδοσιν ταύτην, ἥτις ἐγένετο πρὸ εἰκοσαετίας ὅλης. Οἱ ἐκδό-

ται διεπίστωσαν προφανῶς ἔκτοτε τὴν σοβαρὰν ἔλλειψιν τοῦ ἔργου, ἤτοι τὴν ἀπουσίαν πίνακος τῶν λέξεων τῶν κειμένων. Τὴν κάλυψιν τοῦ κενοῦ ἀνέλαβεν ὁ ἐπιζῶν τῶν συνεργατῶν τοῦ τόμου τῶν Testi, καθηγητὴς G. Caracausi, καὶ οὕτω, πρὸ ὀλίγων μηνῶν, εἶδε τὸ φῶς ὁ Πίναξ Λέξεων (Indice Lessicale) τῶν κειμένων τῆς Καλαβρίας.

Εἰς τὴν ἐνδιαφέρουσαν εἰσαγωγήν του ὁ συνθέτης τοῦ Πίνακος μᾶς πληροφορεῖ περὶ τῆς ἐνεστώσης καταστάσεως τῆς ἑλληνικῆς διαλέκτου τῆς Καλαβρίας γράφων ὅτι μόνον εἰς τὸ χωρίον Γκαλιτσανὸ ὁμιλοῦν ταύτην σήμερον ἀκόμη καὶ τὰ παιδία, ἐνῷ εἰς τὰ ἄλλα χωρία τῆς ἑλληνοφώνου νησῖδος ἡ ἑλληνικὴ γλῶσσα ἔχει, διὰ τοὺς λόγους ποὺ ἀναπτύσσει ὁ συγγραφεύς, σχεδὸν πλήρως ἐξαφανισθῇ. Ὁ κ. Caracausi ὁμιλεῖ διὰ τὴν πρόσφατον προσπάθειαν διασώσεως τοῦ ἰδιώματος καὶ διὰ τὴν προσπάθειαν «ἐξελληνισμοῦ» του μὲ βάσιν τὴν σύγχρονον κοινὴν νεοελληνικήν. Ἡ τυχὸν ὅμως ἐπιτυχία τῆς δευτέρας ταύτης προσπαθείας θὰ ἀφαιρέσῃ, κατὰ τὸν κ. καθηγητήν, τὴν ἐπιστημονικὴν ἀξίαν τῆς διαλέκτου τῶν Ἑλληνο-Καλαβρῶν.

Ὁ Λεξιλογικὸς Πίναξ κατηρτίσθη δι' ἠλεκτρονικῆς ἀποδελτιώσεως τῶν κειμένων τοῦ τόμου τῶν Testi. Διετηρήθη ἡ γραφὴ τῶν λέξεων, ὑπὸ τὴν ὁποίαν παρέχονται αὗται εἰς τὸν τόμον ἐκεῖνον. Ὡς λήμματα εἰς τὸν Πίνακα ἐλήφθησαν οἱ διαλεκτικοὶ τύποι τῆς Μπόβα καὶ ἐλλείψει τοιούτων οἱ τύποι τοῦ χωρίου Ροκαφόρτε (πλὴν ἐξαιρέσεων). Μετὰ τὸ λῆμμα παρέχονται οἱ διάφοροι τύποι τῆς λέξεως, ὡς οὗτοι συναντῶνται εἰς τὰ κείμενα, ἡ ἑρμηνεία των εἰς τὴν ἰταλικὴν καὶ αἱ παραπομπαὶ εἰς τὴν σελίδα τῶν Testi. Διάφοροι ὁδηγίαι χρήσεως τοῦ Indice παρέχονται εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ τόμου καὶ ἀκολουθεῖ πίναξ τῶν φωνητικῶν συμβόλων ἀποδόσεως τῶν ἰδιωματικῶν λέξεων.

Μετὰ τὸν ἀλφαβητικὸν πίνακα τῶν ἑλληνοκαλαβριακῶν λέξεων - λημμάτων (σελ. 3—336) τοῦ τόμου), ὑπάρχει «ἀντίστροφον», ἤτοι ἰταλο-μποβέζικον γλωσσάριον (Repertorio Italiano - Bovese), εἰς τὰς σελ. 337—366, τοῦ ὁποίου ἡ χρησιμότης εἶναι προφανὴς καὶ ποικίλη. Πρέπει νὰ τονισθῇ, ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ, τὸ κενὸν ποὺ ὑπάρχει εἰς ἑλληνικὰ διαλεκτικὰ γλωσσάρια ἐκ τῆς ἐλλείψεως παρομοίων λεξικολογικῶν πινάκων μὲ λήμματα εἰς τὴν κοινὴν νεοελληνικὴν καὶ ἀπόδοσιν (μετάφρασιν) εἰς τὴν διάλεκτον ἢ τὸ ἰδίωμα τοῦ τόπου προελεύσεως τοῦ διαλεκτικοῦ ὑλικοῦ. Τοιούτου εἴδους γλωσσάρια θὰ ἦσαν πολὺ χρήσιμα εἰς τοὺς εἰδικοὺς κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν διαλεκτικῶν συνωνύμων μιᾶς λέξεως.

ΝΙΚ. Γ. ΚΟΝΤΟΣΟΠΟΥΛΟΣ, δ. Φ.

* * *

ÁRPÁD SZABÓ, **Ἀπαρχαὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν,** Ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1973, σελ. 502.

Τὸ παρὸν ἐκτεταμένον ἔργον τοῦ Szabó, Οὐγγρου πανεπιστημιακοῦ καθηγητοῦ καὶ Ἀκαδημαϊκοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον συνοψίζονται καὶ ὁλοκληροῦνται ἀντιλήψεις ἐκτεθεῖσαι εἰς πλῆθος προηγουμένων μεμονωμένων ἐρευνῶν του, δὲν θεωρεῖται ὑπ' αὐτοῦ εἰ μὴ συμβολὴ εἰς τὴν πλήρη ἀποσαφήνισιν τοῦ θέματος, διὰ τὸ ὁποῖον ὑπολείπεται πολλὴ ἐρευνητικὴ ἐργασία ἀκόμη πρὸς διαλεύκανσιν ἐκκρεμῶν ἐρωτημάτων καὶ πρὸς διάλυσιν «ἐπισημοποιημένων μύθων», ὡς τονίζει καὶ ὁ ἱστορικὸς τῶν Μαθηματικῶν v. d. Waerden. Αἱ ἐσφαλμέναι αὐταὶ ἀντιλήψεις προέρχονται

ἐξ αἰτίας τῆς μελέτης τῶν πηγῶν ὄχι ἐκ τοῦ πρωτοτύπου, ἀλλ' ἐκ μεταφράσεων, αἱ ὁποῖαι ὅσον καλαὶ καὶ ἂν εἶναι, δὲν δίδουν πάντοτε τὴν ἀκριβῆ ἔννοιαν τῶν ὅρων. Ὁ Szabó, ὁ ὁποῖος εἶναι κλασσικὸς φιλόλογος, βλέπων τὰς πλάνας, τῶν ὁποίων δίδει πειστικώτατον παράδειγμα, ἠθέλησε νὰ ἐξακριβώσῃ ἐκ τῶν πηγῶν κατ' εὐθεῖαν τὴν ἱστορίαν τῆς δημιουργίας τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν καὶ τὴν σχέσιν αὐτῶν πρὸς τὰ προελληνικὰ Μαθηματικὰ καὶ τοῦτο διὰ τὸν ἑξῆς λόγον. Μέχρι πρό τινων δεκαετιῶν ὑπῆρχε γενικὴ πίστις ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ὡς συστηματικὴ - παραγωγικὴ Ἐπιστήμη ἦτο δημιούργημα τῶν Ἑλλήνων καὶ ὅτι αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἀνατολικῶν λαῶν ἦσαν μόνον πρακτικῆς - ἐμπειρικῆς φύσεως. Ὅμως μετὰ τὴν μετάφρασιν τῶν εἰς σφηνοειδῆ γραφὴν μαθηματικῶν Βαβυλωνιακῶν ἔργων ἀναγομένων εἰς χίλια ἔτη πρὸ τῶν Ἑλλήνων πρώτων μαθηματικῶν ὁ μεταφραστὴς αὐτῶν O. Neugebauer τὸ 1936 διεκήρυξεν, ὅτι τὸ ὑλικὸν ἐφ' οὗ ἐθεμελιώθη τὸ Ἑλληνικὸν μαθηματικὸν οἰκοδόμημα, εὑρίσκεται συγκεντρωμένον εἰς τὰ βαβυλωνιακὰ μαθηματικά, εἰς τὰ ὁποῖα ἦτο γνωστὸν καὶ τὸ θέμα τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος. Συνεπῶς οἱ Ἕλληνες δὲν εἶναι δημιουργοί, ἀλλὰ συνεχισταὶ τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τῶν Βαβυλωνίων.

Εἰς τὰς ἀντιλήψεις αὐτὰς ἀντέδρασαν ἀρκετοὶ ἱστορικοὶ τῶν Μαθηματικῶν, K. v. Pritz, O. Becker, v. d. Waerden, ὁ ἡμέτερος Ε. Σταμάτης κ. ἄ., οἱ ὁποῖοι ἀναγνωρίζουν μὲν ὅτι οἱ Ἕλληνες παρέλαβον πολλὰς γνώσεις Ἀνατολικάς, ἐν τούτοις τονίζουν ὅτι προσέδωσαν εἰς αὐτὰς Ἑλληνικὸν χαρακτῆρα, οὐσιωδῶς διάφορον, νέον. Ὁ Szabó πιστεύει ὅτι δέον νὰ ἐρευνηθῇ τί ἀκριβῶς παρέλαβον οἱ Ἕλληνες ἔξωθεν καὶ κατὰ πόσον ἡ ἰδική των δημιουργία εἶναι ἐντελῶς νέα, δι' αὐτὸ καὶ ἐπεδόθη μετὰ ζήλου εἰς τὴν διερεύνησιν τοῦ ζητήματος μὲ τὴν μελέτην τῶν πηγῶν ἀπὸ τὰ ἀναφερόμενα ὑπὸ τῶν ἀρχαίων καὶ τῶν ἑρμηνευτῶν καὶ σχολιαστῶν σχετικὰ ἔργα, δεδομένου ὅτι ἡ μαθηματικὴ γλῶσσα ἔχει ἰδιορρυθμίας.

Τὸ βιβλίον εἶναι διηρθρωμένον ἀπὸ Εἰσαγωγὴν σ. 23—49 καὶ τρία μέρη, Α' 50—141, Β' 143—252 καὶ Γ'' 253—457, εἰς ταῦτα δὲ προστίθεται Ἐπίμετρον καὶ παράρτημα.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἐκθέτει ὁ σ. πῶς ἐκ τῆς διερευνήσεως τῆς γλώσσης τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἄλλων δεδομένων ἤχθη εἰς τὴν διάγνωσιν, ὅτι οἱ εἰδικοὶ ὅροι προῆλθον ἀπὸ τὴν Μουσικὴν ὁρολογίαν (λ. χ. ἡ ἀναλογία σημαίνει ἰσότητα σχέσεων πλευρῶν) καὶ εἶναι τοῦτο φυσικὸν δεδομένου ὅτι Μουσικὴ καὶ Γεωμετρία εἶναι ἐπιστῆμαι Πυθαγόρειοι. Ἐκθέτων τὰς ἐρεύνας τοῦ O. Becker διὰ τὰς παρ' Ἕλλησι ἀρχὰς τῶν ἀρτίων καὶ περιττῶν, τὴν ἀνακάλυψιν τῆς ἀσυμμετρίας καὶ τὸν καθορισμὸν τῶν 4 βαθμίδων τῆς ἐξελίξεώς των ἀπὸ τοῦ Πυθαγόρου μέχρι Εὐκλείδου, τὰς ἐλέγχει δι' ἀνεπάρκειαν, ἀφοῦ 1) ἀφίνει ἐκτὸς ἐρεύνης τὸν γεωμέτρην Ἱπποκράτην τὸν Χῖον τοῦ Ε' αἰ. καὶ 2) δὲν προσέχει τὸ θέμα τῆς θεμελιώσεως καὶ τῆς περαιτέρω οἰκοδομήσεως τῶν Μαθηματικῶν ἱστορικῶς δι' ὁρισμῶν καὶ ἀξιωμάτων. Ὁ S. ἐκ τῆς ἐρεύνης του εὑρίσκει ὅτι ἡ ἀρχαιοτάτη προσπάθεια τῆς θεωρητικῆς θεμελιώσεως τῆς Ἀριθμητικῆς ἀνάγεται περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ Ε' αἰ., ἐκπροσωπεῖται δὲ ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῶν Μουσικῶν ἀναλογιῶν μὲ τὸ Μονόχορδον εἰς τὴν α' περίοδον, καὶ τὸν Κανόνα διηρημένον εἰς 12 τμήματα κατὰ τὴν β'. Ἐντεῦθεν αἱ ἐκφράσεις τῶν ἀναλογιῶν: διάστημα διπλάσιον, ἡμιόλιον, ἐπίτριτον, ἀνταναίρεσις, λόγος, ἀναλογίαι τῶν ἀκεραίων, συμβολισμὸς τῶν ἀριθμῶν μὲ εὐθείας (τμήματα χορδῆς). Μόνον ἡ θεωρητικὴ θεμελίωσις τῆς Γεωμετρίας ἔρχεται κάπως μεταγενεστέρα περὶ τὰ μέσα τοῦ Ε' αἰ. (Οἰνοπίδης 440) μὲ ἐφαρμογὴν τῶν ἀναλογιῶν ἐπ' αὐτῆς, ἀφοῦ αὗται εἶχον ἤδη ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν (ὁμοιότης εὐθυγράμμων σχημάτων, ἀναλογία τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν, κατασκευὴ τῆς μέσης ἀναλόγου, γραμμικὴ ἀσυμμετρία τῶν εὐθειῶν). Ὡς πρὸς τὴν προϊστορίαν τῶν Μαθηματικῶν οὐδὲν δύναται νὰ λεχθῇ ἀφοῦ καὶ ἡ ἀκριβὴς ἱστορικὴ των διαδρομὴ εἰς τὴν

Ἑλλάδα εἶναι θολή. Παράδειγμα ἀδυναμίας εἶναι ἡ λεχθεῖσα «Γεωμετρικὴ Ἄλγεβρα τῶν Ἑλλήνων». Παρετήρησε δηλαδὴ ὁ Zeuthen ὅτι γεωμετρικαί τινες προτάσεις τοῦ Εὐκλείδου ἀναφέρονται καὶ ὡς ἀλγεβρικοὶ τύποι. Τοῦτο ὁ Neugebauer, ὁ ἀνακαλύψας ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ἐχρησιμοποίουν τὴν Ἄλγεβραν, τὸ παρέλαβεν ὡς ἐπιχείρημα διὰ νὰ συμπεράνῃ ὅτι ἡ γεωμετρικὴ ἄλγεβρα τοῦ Εὐκλείδου ἐλήφθη ἀπὸ τὴν Βαβυλωνιακὴν Ἐπιστήμην. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο εἶναι βεβιασμένον καὶ ἀνεξέλεγκτον. Ὁ S. ἐξετάζων λεπτομερῶς εἰς τὸ Παράρτημα τοῦ βιβλίου τὸ θέμα τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας, ὅπερ ὑπεκίνησε πρῶτος ὁ Tannery, καὶ εἰδικῶς τὰς σχετικὰς προτάσεις τοῦ Εὐκλείδου ἀποφαίνεται ὅτι οὐδαμοῦ κατεδείχθη οἱαδήποτε σχέσις πρὸς τὴν «Βαβυλωνιακὴν Ἐπιστήμην» καὶ ὅτι ἡ Ἐπιπεδομετρία τῶν Ἑλλήνων ἐξοστρακίζουσα τὸ πρόβλημα τῶν ἀσυμμέτρων καὶ ἀποφεύγουσα τὴν χρῆσιν τῶν ἀναλογιῶν ὑπῆρξεν ἕνα καθαρῶς Ἑλληνικὸν δημιούργημα.

Εἰς τὸ Α′ μέρος ὁ S. ἐξετάζει τὴν ἀρχαιοτέραν ἱστορίαν τῆς θεωρίας τοῦ ἀρρήτου (ἀσυμμέτρου) ἀριθμοῦ ἀνατρέχων εἰς τὰ ἀναφερόμενα περὶ τῶν ἀρχαίων Πυθαγορείων καὶ μὴ μαθηματικῶν, εἰκάζων τοὺς σταθμοὺς τῆς ἐξελίξεως τῆς θεωρίας μὲ τὴν ἔρευναν τῆς χρήσεως καὶ χρονολογήσεως τῶν σχετικῶν ὅρων (δύναμις, τετραγωνισμός, μέση ἀνάλογος), οὓς ἀνάγει εἰς τοὺς χρόνους Ἱπποκράτους τοῦ Χίου (430 π. Χ.) καὶ συμπεραίνει ἐκ τῆς ἐρεύνης τῶν μαρτυριῶν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ τετραγώνου καὶ τὸ τῆς μέσης ἀναλόγου μεταξὺ ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ διπλασίου του θὰ ὑπῆρξεν ἡ ἀφορμὴ διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς ἀσυμμετρίας καὶ ὅτι διὰ τοὺς Ἕλληνας τὸ πρόβλημα τοῦ ἀρρήτου ἦτο ἀρχῆθεν πρόβλημα διδασκαλίας περὶ τῆς ἀναλογίας.

Εἰς τὸ Β′ Μέρος ὁ S. πραγματεύεται διεξοδικώτερον τὴν Προευκλείδειον διδασκαλίαν περὶ τῆς ἀναλογίας, μὲ ἐμπεριστατωμένην ἀνάλυσιν τῶν σπουδαιοτέρων εἰδικῶν ἐκφράσεων εἰς τὸ κείμενον, τῆς θεωρίας τῆς Μουσικῆς μετὰ τῶν ὅρων της, τῆς Εὐκλειδείου μεθόδου, τοῦ εἰς 12 τμήματα διηρημένου κανόνος διὰ τὰ πειράματα ἐπὶ τοῦ Μονοχόρδου καὶ τῶν ἐπὶ τοῦ κανόνος ἀριθμητικῶν πράξεων, τῆς ἀλληλουχίας τῶν μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν ἐκφράσεων, τῆς λέξεως λόγος ὡς μαθηματικοῦ ὅρου κλπ. Τὸ συμπέρασμα τῆς διεισδυτικῆς αὐτῆς ἐρεύνης εἶναι ὅτι ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ἀναλογίας τυχοῦσα ἐπεξεργασίας κατὰ τὴν Πυθαγόρειον θεωρίαν τῆς Μουσικῆς θὰ ὡδήγησε μέσῳ τῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τὸ πρόβλημα τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος καὶ δι' αὐτοῦ εἰς τὸ πρόβλημμα τῆς γραμμικῆς ἀσυμμετρίας. Ἐπίσης τονίζει ὅτι ἡ ἀσυμμετρία δὲν δύναται νὰ γνωσθῇ μὲ ἐμπειρικὸν τρόπον, ἀλλὰ ἀποτελεῖ τὸ συναγόμενον σκέψεως βάσει τῶν νόμων τῆς Λογικῆς. Ἐν ὄψει τοῦ γεγονότος, ὅτι ἡ Βαβυλωνιακὴ παράδοσις ἐμπρομήθευσε τὸ ὑλικὸν διὰ νὰ οἰκοδομήσουν οἱ Πυθαγόρειοι τὰ Μαθηματικά των, ὁ συγγραφεὺς θέτει τὸ πρόβλημα, ἂν οἱ Ἕλληνες συνέχισαν τὰς Ἀνατολικὰς γνώσεις ἢ ἐδημιούργησαν κάτι ἰδικόν των, νέον. ἀνεξάρτητον. Λέγει: εἰς τὴν διεξαχθεῖσαν ἀνωτέρω ἔρευναν εἴδομεν σειρὰν μαθηματικῶν ὅρων: *διάστημα, ὅροι, λόγος, ἀνάλογον, ἀναλογία, σύνθετος σχέσις, τομὴ τοῦ κανόνος, μέση ἀνάλογος, γεωμετρικὴ ὁμοιότης ὡς ἰσότης γωνιῶν καὶ ἀναλογία τῶν πλευρῶν, δύναμις, σύμμετρος, μήκει ἀσύμμετρος, δυνάμει σύμμετρος* κ. ἄ., οἱ ὁποῖοι δεικνύουν τὴν θεωρητικὴν καὶ λογικὴν δομὴν τῆς ἱστορίας τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης τῶν Ἑλλήνων, ἀσχέτου πρὸς τὴν ἐμπειρίαν, ποὺ εἶναι πρωτότυποι ἑλληνικαὶ δημιουργίαι. Καὶ ἐρωτᾷ: εἶχον καὶ οἱ Ἀνατολικοὶ λαοὶ ὁμοίους ὅρους; Ἐὰν ἀποδείξῃ κανεὶς ὅτι εἶχον καὶ αὐτοί, τότε μόνον θὰ δικαιοῦται νὰ εἴπῃ ὅτι οἱ Ἕλληνες δὲν ἔκαμαν ἰδικήν των νέαν δημιουργίαν, ἀλλὰ ἠκολούθησαν τοὺς δημιουργοὺς τῆς Ἀνατολῆς.

Εἰς τὸ Γ′ μέρος ὁ S. ἀσχολεῖται νὰ διασαφήσῃ πῶς τὰ Μαθηματικά, ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα γνώσεων πρακτικῶν ἐκ τῆς ἐμπειρίας συνεκροτήθησαν εἰς μίαν θεωρητικὴν συστηματικὴν - παραγωγικὴν Ἐπιστήμην. Ὄντως χίλια ἔτη πρὸ τῶν Ἑλ-

λήνων οἱ Βαβυλώνιοι ἐγνώριζον τὴν λύσιν πολυπλόκων προβλημάτων καὶ ἔδιδον συνταγὰς λύσεων καὶ παραδείγματα αὐτῶν, οἱ δὲ Ἕλληνες πολλὰ ἐδιδάχθησαν παρὰ τούτων. Ὅμως οὐδεμία ἔνδειξις ὑπάρχει ὅτι κατώρθωσαν νὰ παραγάγουν τὰς μαθηματικὰς προτάσεις μὲ αὐστηρὰν λογικὴν ἀπὸ τὰς πρώτας ἀρχὰς (ἀξιώματα, ὁρισμούς, αἰτήματα), τὰ ὁποῖα μόνον οἱ Ἕλληνες ἐδημιούργησαν, προτάσεις ἀποδεικνυομένας μὲ ἀποδείξεις τελείας, ὑποδειγματικάς! Αὐτὸ τὸ πῶς ἔγινεν ἡ μετάβασις, ἡ ἀλλαγὴ τοῦ τρόπου ἀντιμετωπίσεως ἐξετάζει ὁ S. μετὰ πολλῆς ἐπιμελείας καὶ ἀγχινοίας διὰ τῆς ἐμβαθύνσεως εἰς τὰς γνησίως ἑρμηνευομένας ἐνδείξεις τῶν σχετικῶν πρὸς τὰ μαθηματικὰ θέματα κειμένων.

Ἐξετάζει καὶ ἀναλύει ὅλας τὰς σημασίας τοῦ δεικνύναι, τὸ ὁποῖον ὁ Εὐκλείδης ἐπιτάσσει εἰς κάθε πρότασίν του σταθερῶς, «ὅπερ ἔδει δεῖξαι». Ἐξαίρει τὸ γνώρισμα τῆς Ἑλλ. σκέψεως νὰ μεταβαίνῃ ἀπὸ τὴν παράστασιν εἰς τὸ ἰδεατόν, νὰ ἀντικαθιστᾷ τὴν δεῖξιν διὰ τῆς λογικῆς σκέψεως. Οἱ ἀριθμοὶ ὡς νοερὰ σημεῖα πρέπει νὰ νοοῦνται εἰς τὰς σχέσεις των εἰς τὸ πεδίον τῆς καθαρᾶς νοήσεως. Ἡ διαφορὰ ἔγκειται λοιπὸν εἰς τὸ ὅτι οἱ Ἕλληνες ἐθεώρησαν ἀπαραίτητον νὰ παρουσιάσουν ἀπόδειξιν τῶν μαθηματικῶν προτάσεων, ἐνῷ εἰς τοὺς Ἀνατολικοὺς οὐδεὶς λόγος περὶ ἀποδείξεως γίνεται, οὔτε προσπάθεια πρὸς σχηματισμὸν γενικῶν προτάσεων. Ὡς παλαιοτάτην μαθηματικὴν ἀπόδειξιν ἐπὶ συγκεκριμένης ἐποπτικῆς παραστάσεως εἶναι τὸ ἐν Πλάτ. Μέν. 82 B - 05 E παράδειγμα, ὅπου καταφαίνεται ἡ μετάβασις ἀπὸ τὸ παραστατικὸν εἰς τὸ ἰδεατὸν (Reidemeister). Κυρίως γίνεται ἀπομάκρυνσις ἀπὸ τὴν παράστασιν (τὸ προδήλως ὁρατὸν) ἐνσυνείδητος, ὄχι τί ἰσχύει εἰς μίαν μεμονωμένην περίπτωσιν, ἀλλὰ τί ἰσχύει ἐπὶ ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, τι ἔχει γενικὴν ἰσχύν. Εἰς τὰς Βαβυλωνιακὰς καὶ Αἰγυπτιακὰς «ὑποδείξεις» ἢ «συνταγὰς» οὐδεμία ἐξέλιξις γίνεται πρὸς γενικωτέρου κύρους προτάσεις. Μὲ τὴν ἀντιεμπειρικὴν καὶ ἀντιπαραστατικὴν τάσιν τῶν Ἑλλήνων εὑρέθη ἡ νέα τεχνικὴ ἀποδείξεως, ἤτοι ἡ ἔμμεσος ἀπόδειξις, ἡ εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή. Ἡ μέθοδος αὕτη προῆλθεν ἀπὸ τὴν ἀνακάλυψιν τῆς γραμμικῆς ἀσυμμετρίας, προελθούσης ἀπὸ τὴν μουσικὴν διδασκαλίαν μέσῳ τῆς ἀνθυφαιρέσεως, ἥτις μόνον νοερῶς καὶ οὐχὶ πρακτικῶς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ, ἀφοῦ ὁ ἐμπειρισμὸς ἀντιτίθεται εἰς τὴν δυνατότητα τῆς ἀσυμμετρίας. Ὁ ἀντιεμπειρισμὸς αὐτὸς τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν προῆλθεν ἀπὸ τὴν Ἐλεατικὴν Φιλοσοφίαν (Παρμενίδην, Ζήνωνα), ἀποκρούουσαν διαρρήδην τὴν κατ' αἴσθησιν ἀντίληψιν καὶ δεχομένην μόνον τὰ διανοητικὰ δεδομένα. Ἐκ τῶν Ἐλεατῶν ἐπηρεασμένος καὶ ὁ Πλάτων διαιρεῖ τὸν κόσμον εἰς ὁρατὸν καὶ νοητόν, δέχεται δὲ τὴν ἀλήθειαν κειμένην μόνον εἰς τὸν νοητόν. Ὁ S. δεικνύει διὰ μακρᾶς ἀναλύσεως περαιτέρω ὅτι οἱ Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπὸ τοὺς Ἐλεάτας οὐ μόνον παρέλαβον τὴν ἀντιεμπειρικὴν τοποθέτησιν καὶ τὴν μέθοδον τῆς ἐμμέσου ἀποδεικτικῆς διαδικασίας, ἀλλὰ καὶ παρεκινήθησαν εἰς τὴν συστηματοποίησιν τῶν μαθηματικῶν των γνώσεων ἐπὶ τῇ βάσει γενικῶν ἀρχῶν μὲ κατάληξιν τὴν συστηματικὴν συγκρότησιν τῆς Ἐπιστήμης εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου μὲ βάσιν τοὺς ὅρους, τὰ αἰτήματα καὶ τὰς κοινὰς ἐννοίας. Ἡ διαδικασία αὕτη ἤρχισε δύο αἰῶνας πρὸ τοῦ Εὐκλείδου μὲ ἀφετηρίαν τὴν Διαλεκτικὴν τῶν Ἐλεατῶν, αἱ ἀπαρχαὶ δὲ αὗται παρακολουθοῦνται ὑπὸ τοῦ S. ἐν πάσῃ λεπτομερείᾳ γενετικῶς μὲ ἀνάλυσιν τῶν Ἐλεατικῶν διδασκαλιῶν, τὴν διαλεκτικήν των ὁρολογίαν, τὴν ἐπίδρασίν των εἰς τοὺς παλαιοτέρους μαθηματικούς, τὰς βασικὰς ἀρχὰς καὶ τὴν πορείαν τῆς ἐπιστημονικῆς ἐργασίας, ἰδίᾳ τὸν ρόλον τῆς ὑποθέσεως εἰς τὴν Διαλεκτικὴν καὶ τὴν ἐφαρμογήν της εἰς τὰ μαθηματικά, πρῶτον τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ εἶτα τὴν Γεωμετρίαν μὲ ἀναθεώρησιν τῆς περὶ χώρου ἀντιλήψεως τῶν Ἐλεατῶν. Οὕτω ὁ S. ἔδωκε πλήρη ἑρμηνείαν τῆς δημιουργίας τῶν συστηματικῶν παραγωγικῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Εὐκλειδείου ἀξιωματικῆς δημιουργίας.

Ἡ μεγάλη αὕτη αὕτη καὶ στστηματικὴ ἔρευνα τοῦ Οὔγγρου σοφοῦ μὲ τὴν πληρότητα τῆς ἐρεύνης τῶν πηγῶν, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ ἐπιστέγασμα ἐρευνητικοῦ μόχθου δεκαετηρίδων, μὲ τὴν ἱστορικὴν γλωσσικὴν διερεύνησιν ἑκάστου ὅρου, μὲ τὴν σπανίαν διεισδυτικότητα εἰς τὴν διὰ ἰδιορρύθμων μαθηματικῶν ὅρων καλυπτομένην σκέψιν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τὴν ὁποίαν βοηθοῦν νὰ γίνῃ καταληπτὴ οἱ ἀρχαῖοι ἑρμηνευταὶ καὶ σχολιασταὶ ποὺ εἶχον ἀφθονώτερα βοηθήματα, κατώρθωσε μὲ τὴν ἀγχίνουν ἑρμηνείαν τῶν πληροφοριῶν νὰ ἰχνηλατήσῃ τὴν πορείαν τῶν ἀρχῶν τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν κατὰ τρόπον σαφῆ καὶ νὰ καταδείξῃ ὅτι αὐτὰ ἀποτελοῦν καθαρῶς Ἑλληνικὴν δημιουργίαν, τελείως νέαν καὶ διάφορον πάσης ὁμοίας προσπαθείας τῶν Ἀνατολικῶν λαῶν μὲ ἐκκίνησιν αὐτῶν ἐκ τῆς Ἐλεατικῆς Φιλοσοφίας καὶ τῆς Διαλεκτικῆς καὶ συνέχισιν αὐτῶν ὑπὸ τὰς ἐπινεύσεις τῆς Πλατωνικῆς, ἧς ὀπαδὸς ἦτο καὶ ὁ Εὐκλείδης ὁ τελικὸς συστηματικὸς δημιουργὸς τῆς συστηματοποιήσεως διὰ τῶν Στοιχείων, τῶν στηριχθέντων εἰς τὰς ἀρχάς, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων προῆλθον αἱ γενικοῦ κύρους μαθηματικαὶ προτάσεις. Τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀποτελεῖ σταθμόν, διότι μὲ τὴν συστηματικότητα τῆς διερευνήσεώς του δὲν ἄφησεν ἀνεξέλεγκτον καμμίαν ἀντίθετον ἀντίληψιν τῶν νεωτέρων ἐρευνητῶν. Οὕτω αἱ γνῶμαί του ἔχουν τὸ κῦρος καὶ τῆς ἐκ τῆς ἀμέσου ἐρεύνης ἀποδείξεως καὶ τῆς ἐμμέσου ἐκ τοῦ ἐλέγχου τῶν ἀβασίμων ἀντιρρήσεων.

Ὁ συγγραφεὺς διερωτᾶται ποῦ, μὴ τυχὸν παρασυρόμενος ἐκ τῆς ἰδιότητός του ὡς φιλολόγου κλασσικοῦ καὶ ἀνθρωπιστοῦ ἐμπεφορημένου μὲ ἐνθουσιασμὸν ὑπὲρ τῆς δημιουργίας τῶν Ἑλλήνων εἶπέ τι μὴ ἀνταποκρινόμενον πρὸς τὴν ἀλήθειαν. Ἂς ἔχῃ ἤρεμον τὴν συνείδησιν ὁ σοφὸς Οὔγγρος. Ἔχει ῥιφθῇ ἀρκετὸν φῶς τελευταίως εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν καὶ ἔχει γίνει κοινὴ συνείδησις ὅτι οἱ θεοκρατούμενοι Ἀνατολικοὶ λαοὶ ἔμειναν εἰς κατώτερον ἐπίπεδον ἐρεύνης, ἐνῶ οἱ Ἕλληνες πρωτοστατούντων τῶν Ἑλλήνων τῆς Ἰωνίας ἀπεδέσμευσαν τὸν ἄνθρωπον διὰ τοῦ Ὁμήρου ἀπὸ τὴν δεισιδαιμονίαν καὶ ἤνοιξαν τὸν δρόμον διὰ τὴν δημιουργίαν τῆς Φιλοσοφίας καὶ τὴν ἐπιστημονικὴν αὐτόνομον ἔρευναν διὰ τοῦ λόγου.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

* * *

ΕΥΑΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ, **Ἱστορία καὶ Μεθοδολογία τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Μόσχας.** Σελίδες 222.

Ἡ XX ἔκδοσις τῆς Ἱστορίας καὶ Μεθοδολογίας τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΜΗΧΑΝΙΚΗ, τοῦ 1978 τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Μόσχας περιλαμβάνει 26 λίαν ἐνδιαφερούσας μονογραφίας. Μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβάνονται 4 μονογραφίαι ἀπτόμεναι τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν καὶ ἄξιαι ἰδιαιτέρας διαμνημονεύσεως. Εἰς τὸ τέλος ἑκάστης παρατίθεται σύντομος περίληψις εἰς τὴν Ἀγγλικήν. Αὗται εἶναι: 1) Isabella Gr. Bashmakova. 2) I. N. Vasselovsky, 3) A. P. Kauchycas. 4) C. Ch. Baimisheva.

Ἡ καθηγήτρια τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Μόσχας κ. Isab. Gr. Bashmakova εἶναι γνωστὴ εἰς τοὺς Ἕλληνας Μαθηματικοὺς ἀπὸ τὴν περίφημον πραγματείαν της, ὑπὸ τὸν τίτλον «Αἱ μέθοδοι διαφορίσεως τοῦ Ἀρχιμήδους» τὴν δημοσιευθεῖσαν εἰς τὰ «Ἀρχιμήδους Ἅπαντα» ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, τόμος Β', Ἀθῆναι 1973, σελ. 530—554. Ἤδη, ἡ κ. Bashmokova ἀσχολεῖται μὲ τὸ «Liber Quadratorum» τοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης (ἢ Fibonacci, 1180—1250 περίπου) καὶ ἀναλύει τὰς Διοφαντικὰς ἐξισώσεις τὰς περιεχομένας εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ τοῦ Λεονάρδου. Πρὸς

τούτοις σημειώνεται ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ ἐπέδρασε σημαντικῶς εἰς τὰς ἐρεύνας τῶν Γάλλων Μαθηματικῶν Viète (1540–1603) καὶ Fermat (1601–1665).

Ὁ I. N. Vesselovsky ἀναφέρει, ὅτι εἰς τὸν πάπυρον Rind καὶ τὸν πάπυρον τῆς Μόσχας εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρῃ τις λείψανα ὁμοιάζοντα πρὸς τὰς μεθόδους τοῦ Διοφάντου τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἀκμάσαντος, ὡς γνωστόν, περὶ τὸ ἔτος 250. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ, ὅτι οἱ καθηγηταὶ I. N. Vesselovsky καὶ B. Rosenfeld εἶναι ἐμβριθεῖς γνῶσται τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν καὶ ἤδη ἀσχολοῦνται μὲ τὴν ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

Ὁ A. P. Kauchycas ἐπισκοπεῖ τὰς Διοφαντικὰς ἐξισώσεις τοῦ Ἰταλοῦ Μαθηματικοῦ R. Bombelli (16ος αἰών), τὰς μὴ περιλαμβανομένας εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου, καὶ προβαίνει εἰς συγκριτικὴν ἀνάλυσιν τούτων, ἐν σχέσει πρὸς ἄλλας προσπαθείας Ἱστορικῶν τῶν Μαθηματικῶν.

Τέλος ἡ κ. C. Ch. Baimisheva ἀσχολεῖται μὲ τὰς πρώτας ἀρχὰς τῆς Ὑδροστατικῆς καὶ μνημονεύει τὰς συναφεῖς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰς σχετικὰς πρὸς τὴν ἰσορροπίαν τῶν στερεῶν τῶν εὑρισκομένων ἐντὸς ὑγροῦ τινος, καὶ τὸν τρίτον σχετικὸν νόμον τοῦ Ἰσαὰκ Νεύτωνος.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

* * *

LILIANE BODSON, **Ἱερὰ Ζῷα. Contribution à l' étude de la place de l' animal dans la religion grecque ancienne.** Bruxelles, Palais des Académies, pp. XVII + 210, pl. 10 (Académie royale de Belgique, Mémoires de la Classe des Lettres, Collection in — 8ο — 2e série, t. LXIII – Fascicule 2 — 1978).

Τὸ ἀνωτέρω σύγγραμμα ἐκδοθὲν ὑπὸ τῆς Βασιλικῆς Ἀκαδημίας τοῦ Βελγίου ἀποτελεῖ περαιτέρω ἐπεξεργασίαν καὶ ἐπέκτασιν τῆς διδακτορικῆς διατριβῆς τῆς συγγραφέως ἐχούσης τίτλον «Les animaux dans la religion grecque ancienne. Zoolâtrie et zoomorphisme».

Ἡ συγγραφεύς, καθηγήτρια τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς φιλολογίας καὶ ἱστορίας εἰς τὴν Λιέγην, ἤδη δὲ assistante εἰς τὸ ἐκεῖ Πανεπιστήμιον, ἀσχολεῖται ἰδιαιτέρως εἰς τὸν κόσμον τῶν ζῴων καὶ δὴ καὶ εἰς τὰς σχέσεις τοῦ ἀρχαίου ἀνθρώπου πρὸς αὐτά, ὡς καὶ εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς θρησκευτικῆς σκέψεως τῶν Ἑλλήνων. Συνδυασμὸν τῶν εἰδικωτέρων τούτων ἐπιστημονικῶν μελετῶν τῆς σ. ἀποτελεῖ ἡ παροῦσα διατριβή, ἐν ᾗ ἐξετάζεται ἡ θέσις τῶν ζῴων ἐν τῇ ἀρχαίᾳ ἑλληνικῇ θρησκείᾳ.

Τὸ σύγγραμμα περιλαμβάνει εἰσαγωγήν, βιβλιογραφίαν καὶ τὸ κυρίως ἔργον ὑποδιαιρούμενον εἰς τὰ κάτωθι βασικὰ κεφάλαια, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐξέτασις τῶν ζῴων ἀκολουθεῖ τὴν γενικῶς παραδεκτὴν ἐπιστημονικὴν μέθοδον χωροῦσα ἀπὸ τῶν ἀτελεστέρων ἐπὶ τὰ τελειότερα: I. Les insectes, II. Les poissons et la faune marine, III. Les reptiles et les animaux apparentés au domaine chthonien, IV. Les oiseaux, V. Les Mammifères.

Ἕπεται τὸ συμπέρασμα τοῦ ὅλου ἔργου, ὡς καὶ ἀναλυτικοὶ πίνακες περιλαμβάνοντες ὀνόματα ζῴων, ὀνόματα θεοτήτων, ἡρώων καὶ μυθικῶν προσώπων, ἑορτῶν, κυριωτέρων θεμάτων, γεωγραφικῶν ὅρων, παρατεθέντων κειμένων, λεξικὸν γαλλο-ἑλληνικὸν τῶν ὀνομάτων ζῴων.

Πέραν τῆς σημασίας τῶν ζῴων εἰς τὴν πρακτικὴν ζωήν, ταῦτα ἤσκησαν ἐπί-

# ΠΛΑΤΩΝ

## ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΛΒ' 1980 & ΛΓ' 1981

ΤΟΜΟΣ **32** & **33** (ΤΕΥΧΗ 63/66)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1981

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

**«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν**
**ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».**
**Πλάτωνος Πολιτεία 450 Β**

ΕΤΟΣ ΛΒ' 1980

ΤΟΜΟΣ **32** (ΤΕΥΧΗ 63/64)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1980

διδομένη ἐντύπωσις ἐκ τοῦ ἔργου συνίσταται εἰς τὴν εὐχάριστον διαπίστωσιν ὅτι δίδεται ἱκανοποιητικὴ εἰκὼν πιθανὴ τόσον τῶν μεταπλασμῶν τῶν μύθων εἰς τὰ Εὐριπίδεια δράματα, ὅσον καὶ τῶν λόγων εἰς οὓς ὀφείλονται αἱ ἀλλαγαὶ αὗται.

ΠΑΝ. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ

***

IVOR THOMAS, **Greek Mathematical Works I, Thales to Euclid.** Loeb Classical Library, Kabridge, Mass, Harvard Univers. Press, London Will. Heinemann, 1980, p. 508.

Εἰς τὸν πρόλογον τοῦ βιβλίου τούτου, τὸ ὁποῖον ἐξεδόθη διὰ πρώτην φορὰν κατὰ τὸ 1939, ὁ καθηγητὴς κ. Ivor Thomas ἀναπτύσσει τοὺς λόγους ἕνεκα τῶν ὁποίων παρωρμήθη εἰς τὴν μετάφρασιν καὶ δημοσίευσιν τοῦ ἔργου. Κατὰ τὸ 1921 εἶχεν ἐκδοθῆ ἐν Ἀγγλίᾳ τὸ περίφημον βιβλίον τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, εἰς δύο τόμους, ὑπὸ τοῦ Thomas Heath. Διὰ τοὺς μαθηματικοὺς γενικῶς τὸ βιβλίον τοῦ Heath ἀπετέλει σπουδαῖον βοήθημα διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν. Ἡ φιλοδοξία ὅμως τοῦ Ivor Thomas ἐξετείνετο πέραν τοῦ κύκλου τῶν εἰδικῶν ἐπιστημόνων τῶν Μαθηματικῶν. Ὁ συγγραφεὺς ἐσκέφθη νὰ καταστήσῃ προσιτὰς εἰς τὸ εὐρὺ Κοινὸν τὰς ἀρχὰς τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ὡς αὕτη ἐδημιουργήθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Πρὸς τοῦτο ἐνήργησεν ἐπιλογὴν τῶν σπουδαιοτέρων μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν Ἑλλήνων, τὰ ὁποῖα διεχώρισεν εἰς δύο τόμους· εἰς τὸν πρῶτον τόμον περιλαμβάνονται τὰ Μαθηματικὰ ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ (600 π. Χ.) μέχρι τοῦ Εὐκλείδου (300 π. Χ.), ἐν ᾧ εἰς τὸν δεύτερον τόμον περιλαμβάνονται τὰ Μαθηματικὰ ἀπὸ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου (300 π. Χ.) μέχρι τοῦ Πάππου (300 μ. Χ.).

Εἰς τὸν πρῶτον ἐκδοθέντα ἤδη τόμον, μετὰ τὸν πρόλογον τοῦ συγγραφέως καὶ τὸν πίνακα τῶν περιεχομένων, ἀκολουθεῖ πολυσέλιδος σχετικὴ βιβλιογραφία καὶ εἰσαγωγὴ εἰς τὰ ἀρχαῖα Μαθηματικὰ ἐν συνδυασμῷ μὲ φιλοσοφικὴν θεώρησιν τοῦ Πυθαγόρου, τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Τὸ κύριον θέμα τοῦ βιβλίου ἀρχίζει μὲ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν τῶν Πυθαγορείων καὶ συμπληροῦται μὲ γνώμας τοῦ Δημοκρίτου καὶ ἔργα τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου καὶ μὲ τὰ περίφημα εἰδικὰ προβλήματα τὰ μὴ λυόμενα διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ἀλλὰ λυόμενα μὲ ἄλλας γραμμάς, ὅπως εἶναι ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, τὸ Δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας. Ἀκολουθοῦν αἱ ἔρευναι τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου, αἱ γνῶμαι τοῦ Πλάτωνος, αἱ ἔρευναι τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου καὶ αἱ ἔρευναι τοῦ Ἀριστοτέλους. Τέλος ἐκτίθεται ἡ συμβολὴ τοῦ Εὐκλείδου ἡ περιλαμβανομένη εἰς τὸ κύριον αὐτοῦ ἔργον ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα καὶ εἰς μερικὰ ἄλλα σωζόμενα ἔργα του. Διὰ τὰ ἀπολεσθέντα ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἐκτίθενται πληροφορίαι περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον Πάππου Συναγωγή.

Ἡ ἐπιλογὴ τῆς ὕλης τοῦ ὑπὸ κρίσιν πρώτου τόμου, ἔγινεν ὑπὸ τοῦ Ivor Thomas μετὰ μεγάλης δεξιοτεχνίας. Τὸ συναφὲς ἀρχαῖον κείμενον ἐκτίθεται εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ βιβλίου, ἐν ᾧ ἡ ἀγγλικὴ μετάφρασις, γενομένη μετ' ἐξαιρετικῆς ἐπιτυχίας ὑπὸ τοῦ Ivor Thomas, ἐκτίθεται εἰς τὴν δεξιὰν σελίδα. Ὁ κ. Thomas διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ ἔργου τούτου προσφέρει ὑψίστην ὑπηρεσίαν εἰς τὴν Διεθνῆ Μαθηματικὴν ἐπιστήμην, διότι κατορθώνει νὰ εἰσαγάγῃ τὸν ἀναγνώστην εἰς τὴν κατανόησιν τῆς ἀρχαίας Μαθηματικῆς δημιουργίας τῶν Ἑλλήνων. Αἱ ἐκδόσεις τοῦ πρώτου τόμου ἔγιναν κατὰ τὰ ἔτη 1939, 1951, 1957, 1967, 1980 ἐνῷ αἱ ἐκδόσεις τοῦ δευτέρου τόμου ἔγιναν κατὰ τὰ ἔτη 1941, 1951, 1957.

ΕΥΑΓΓ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

# ΠΛΑΤΩΝ

ΔΕΛΤΙΟΝ ΤΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΙΛΟΛΟΓΩΝ

«Μέτρον τοιούτων λόγων ἀκούειν
ὅλος ὁ βίος νοῦν ἔχουσιν».

ΕΤΟΣ ΛΗ΄ - 1986
ΤΟΜΟΣ 38 (ΤΕΥΧΗ 75/76)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1986

δας π.χ. ἀφιερώνει διὰ τὸ ρῆμα «γένομαι» (γίνομαι), δύο σελίδας διὰ τὸ οὐσιαστικὸν «δάφτυλο» (δάκτυλον), τρεῖς σελίδας διὰ τὸ ἐπίρρημα «ἔσσου» (ἔσω), δύο σελίδας διὰ τὴν ἀντωνυμίαν «ἐγὼ» κ.τ.λ.

Τὰ δωρικὰ καὶ προβυζαντινὰ στοιχεῖα ποὺ παραθέτει ὁ κ. Καραναστάσης ἐπιβεβαιώνουν τὴν ἄποψιν ὅτι τὸ γλωσσικὸν ἰδίωμα τῶν ἑλληνοφώνων τῆς Κάτω Ἰταλίας κατάγεται ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὴν γλῶσσαν τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀποίκων τῆς Μεγάλης Ἑλλάδος.

Πολὺ χρήσιμοι εἶναι καὶ οἱ πίνακες τῶν λέξεων, εἰς τὰς ὁποίους ἀνάγονται τὰ λήμματα, καθὼς καὶ οἱ πίνακες τῶν ἰδιωματικῶν τύπων ποὺ παρατίθενται εἰς τὸ τέλος κάθε τόμου.

Ὅλη αὐτὴ ἡ ἐργασία, ἡ συγκέντρωσις τόσον πλουσίου καὶ τόσον ἰδιορρύθμου γλωσσικοῦ ὑλικοῦ, ἡ ἔνταξις ἑπτὰ χιλιάδων περίπου λέξεων, ἡ ἀναγωγή των εἰς τοὺς ἀρχικοὺς τύπους, ἡ παράθεσις τόσων διαλεκτικῶν στοιχείων, ἡ παρουσίασις τῆς φωνητικῆς ἐξελίξεως τόσων ἰδιωματικῶν τύπων ἀπαιτεῖ τρομερὸν μόχθον καὶ ἀρτίαν γλωσσολογικὴν συγκρότησιν. Ὁ κ. Καραναστάσης εἰργάσθη ἐπιπόνως, μὲ πλήρη συναίσθησιν τῶν εὐθυνῶν του, μὲ ἐπιστημονικὴν εὐσυνειδησίαν καὶ κατώρθωσε νὰ παρακάμψῃ ὅλας τὰς δυσκολίας καὶ νὰ συντάξῃ ἕνα μνημειῶδες ἔργον.

Τὸ πόσον σημαντικὸν εἶναι τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ τὸ ὅτι ὁ ἐκδοτικὸς οἶκος τῆς Ἀπουλίας CONGEDO, ἐνδιαφέρεται ἤδη νὰ μεταφράσῃ τὸ Λεξικὸν τοῦ κ. Καραναστάση εἰς τὴν Ἰταλικήν.

Μὲ τὸ Ἱστορικὸν αὐτὸ Λεξικὸν ὁ συγγραφεὺς προσφέρει πράγματι ἐξαιρετικὴν συμβολὴν εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ πολύτιμον ὑπηρεσίαν εἰς τὸ Ἔθνος.

Δὲν ἀπομένει παρὰ νὰ τοῦ εὐχηθῶμεν ὑγείαν καὶ δύναμιν, ὥστε συντόμως νὰ ἐκδώσῃ καὶ τοὺς ὑπολοίπους τόμους.

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Σ. ΚΙΑΠΟΚΑΣ
ΛΥΚΕΙΑΡΧΗΣ

**Δημητρίου Μούκανου**, *Ὀντολογικὴ θεώρησις τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπροσδιοριατίας τοῦ Werner Heisenberg*, σελ. 73.

Εἰς τὸν πρόλογον ὁ συγγραφεὺς αἰτιολογεῖ τὸ ἐνδιαφέρον του διὰ τὴν Ὀντολογίαν τὸ ὁποῖον ἔχει ἐκδηλωθῇ καὶ παλαιότερα εἰς δύο προηγουμένας ἐργασίας του: 1) Πλάτων, Ἀριστοτέλης καὶ σύγχρονος Φυσική, 1968 καὶ 2) Τὸ πρόβλημα τοῦ Ὄντος ὑπὸ τὸ φῶς τῶν νεωτέρων ἐπιστημονικῶν φιλοσοφικῶν θεωριῶν, 1969. Εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν πραγματείαν ὁ συγγραφεὺς προσπαθεῖ νὰ δείξῃ μίαν συστηματικὴν ὀντολογικὴν θεώρησιν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπροσδιοριστίας τοῦ W. Heisenberg, σημειώνων, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἀπροσδιορίστου ὀντολογίας δὲν ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὴν Φυσικήν. Κατὰ τὸν συγγραφέα, ἡ ἔννοια τῆς ἀπροσδιορίστου Ὀντολογίας δικαιώνει τὸ πνεῦμα τῆς κριτικῆς φιλοσοφίας τοῦ Kant.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ὁ συγγραφεὺς μνημονεύει ὡς γνωστὰς τὰς ἀρχὰς τῆς Φυσικῆς Ἐπιστήμης τοῦ 19ου αἰῶνος, αἱ ὁποῖαι ἦσαν τρεῖς, ἤτοι ἡ συνέχεια, ἡ ἀντικειμενικότης καὶ ἡ αἰτιοκρατία. Ἰδιαιτέρως τονίζεται ἐν προκειμένῳ τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, τὸ ὁποῖον πρῶτος διετύπωσεν ὁ Ἀναξαγόρας (5 αἰ. π.Χ.)

ὡς ἑξῆς: τοῦ Μεγάλου ὑπάρχει μεγαλύτερον καὶ τοῦ μικροῦ ὑπάρχει μικρότερον. Ὁ Ἀριστοτέλης ἔδωκε λεπτομερέστερον θεωρίαν διὰ τὸ συνεχὲς καὶ τὸν χρόνον, ἐν ᾧ ὁ Ἰσαάκ Νεύτων (I. Newton) διεμόρφωσε τὰς ἀρχὰς τῆς φυσικῆς φιλοσοφίας τοῦ 19ου αἰῶνος. Σπουδαία ἦτο ἡ συμβολὴ εἰς τὴν Φιλοσοφίαν, τὴν Φυσικὴν καὶ τὰ Μαθηματικά, τοῦ Γαλιλαίου (1564-1642), τοῦ Καρτεσίου (1596-1650), τοῦ Λάϊπνιτς (1646-1716) καὶ τοῦ Νεύτωνος.

Ἡ ὅλη πραγματεία κατανέμεται εἰς τέσσαρα μέρη.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος γίνεται διαπραγμάτευσις τῶν ἐννοιῶν τῆς ἀσυνεχείας τῆς ὕλης καὶ τῆς ἐνεργείας. Ἀναφέρεται ἡ ἀτομικὴ θεωρία τοῦ Λευκίππου καὶ τοῦ Δημοκρίτου καὶ ἡ ἐργασία τοῦ John Dalton (1768-1844), ὅστις ὑποστηρίζει τὴν ἀτομικὴν θεωρίαν τοῦ Δημοκρίτου, διὰ τὴν συγκρότησιν τῆς ὕλης. Ἡ ἐξέλιξις τῆς Ἐπιστήμης, ὡδήγησεν εἰς τὴν θεωρίαν, ὅτι τὸ ἄτομον δὲν ἀποτελεῖ τὸ ἔσχατον ὅριον τοῦ διαιρετοῦ τῆς ὕλης, ἀλλ' ὅτι εἶναι συντεθειμένον ἀπὸ μικότερα σωματίδια. Ἡ νέα αὐτὴ εἰκὼν διὰ τὴν δομὴν τῆς ὕλης ἐξηκριβώθη κατὰ τὰς ἐρευνητικὰς ἐργασίας τοῦ Ἄγγλου φυσικοῦ Rutherfod (1871-1937). Ὁ Rutherford ὑπῆρξεν ὁ ἐπιστήμων, ὁ ὁποῖος ἤνοιξε τὴν ἐποχὴν τοῦ ἀτόμου καὶ προσέφερε πολλὰ εἰς τὴν ἀτομικὴν Φυσικήν. Τὴν θεωρίαν τούτου συνεπλήρωσε κατὰ τὸ ἔτος 1913 ὁ Δανὸς φυσικὸς N. Bohr (1885-1962). Κατὰ τὸν N. Bohr τὸ ἄτομον εἶναι εἶδος πλανητικοῦ συστήματος. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἀτομικῆς ὑφῆς τῆς ἐνεργείας, ἡ θεωρία, ἡ ὁποία ἔδωσε μεγάλην ὤθησιν εἰς τὴν Φυσικὴν τοῦ αἰῶνός μας εἶναι ἡ θεωρία τῶν κβάντα τοῦ Γερμανοῦ φυσικοῦ M. Planck (1858-1947). Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Planck, ὅταν ἡ ὕλη ἐκπέμπῃ ἢ ἀπορροφεῖ ἀκτινοβολίαν συχνότητος V, ἡ ἐκπομπὴ ἢ ἀπορρόφησις γίνεται πάντοτε κατὰ στοιχειώδη ποσὰ ἐνεργείας (κβάντα). Τὸ στοιχειῶδες ποσὸν ἐνεργείας ἔχει τὴν τιμὴν E=h·ν, ὅπου E εἶναι ἡ ἐνέργεια, h ἡ σταθερὰ τοῦ Planck καὶ ν ἡ συχνότης. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Planck, ὅπως ἡ ὕλη ἔχει ἀτομικὴν ὑφὴν καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ πρωτόνια καὶ ἠλεκτρόνια, οὕτω καὶ ἡ ἐνέργεια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀπείρως μικρὰ στοιχεῖα ἐνεργείας (κβάντα). Τὴν θεωρίαν τοῦ Planck ἀπεδέχθη κατὰ τὸ 1917 καὶ ὁ Ἀλβέρτος Ἀϊνστάϊν, ὑποστηρίξας, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖ ἐπαναστατικὴν ἀσυνέχειαν.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς πραγματείας του ὁ κ. Μούκανος ἀναπτύσσει τὰ τῆς θεωρίας τῆς ἀπροσδιοριστίας, ἢ ἀρχὴν τῆς ἀβεβαιότητος τοῦ Heisenberg, τονίζων, ὅτι ὁ Heisenberg ὑπεστήριξε καὶ ἐπηλήθευσε πειραματικῶς, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ γνωρίσωμεν τὴν φυσικὴν πραγματικότητα μὲ τρόπον πλήρη, εἰς μίαν δεδομένην στιγμήν, ἐπειδὴ καὶ ἡ ἰδία ἡ παρατήρησις τροποποιεῖ αὐτὴν τὴν πραγματικότητα. Συγκεκριμένως ὑπεστήριξεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορίσωμεν μὲ τὴν μεγίστην δυνατὴν ἀκρίβειαν τὴν θέσιν καὶ συγχρόνως καὶ τὴν ταχύτητα ἑνὸς μικροσωματιδίου, διότι δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν μόνον τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ὄψιν. Κάθε τι, τὸ ὁποῖον φωτίζει περισσότερον τὴν θέσιν ἑνὸς σωματιδίου, συσκοτίζει περισσότερον τὴν ταχύτητα τοῦ σωματιδίου. Ἡ κβαντικὴ Φυσικὴ δὲν δύναται νὰ μᾶς προσδιορίσῃ τὴν θέσιν καὶ τὴν ταχύτητα ἑνὸς ἠλεκτρονίου εἰς κάθε στιγμήν, δύναται ὅμως νὰ μᾶς ὁμιλήσῃ διὰ τὴν πιθανότητα, ἡ ὁποία ὑπάρχει νὰ συναντήσωμεν τὸ ἠλεκτρόνιον εἰς μίαν οἱανδήποτε θέσιν ἢ ποῦ ὑπάρχει ἡ μεγαλυτέρα πιθανότης νὰ συναντήσωμεν ἓν ἠλεκτρόνιον. Ὁ Ἀϊνστάϊν καὶ ὁ Infeld ἔδειξαν, ὅτι ἡ κβαντικὴ Φυσικὴ δὲν περιγράφει ἰδιότητας, ἀλλὰ πιθανότητας. Ἡ πιθανοκρατία, ἡ ὁποία ἀπεδείχθη ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἀπροσδιοριστίας καὶ συγχρόνως εἰς τὰς κβαντικὰς περιγραφὰς ὡς πρὸς τὸν ταὐτόχρονον προσδιορισμὸν τῆς θέσεως καὶ τῆς κινήσεως ἑνὸς μικροσωματιδίου ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν γνωρίζομεν ἀκριβῶς, ἂν τὸ μικροσωματίδιον εἶναι κυματικῆς φύσεως ἢ εἶναι σωματίδιον ἢ καὶ τὰ δύο ταυτοχρόνως.

Τὴν σχετικὴν θεωρίαν ἀναπτύσει ἡ κυματομηχανική, ἡ ὁποία ἀνεπτύχθη ὑπὸ τοῦ de Broglie καὶ τοῦ Schrödinger.

Εἰς τὸ τρίτον μέρος τῆς πραγματείας του, ὁ κ. Μούκανος ἀσχολεῖται μὲ τὰς φιλοσοφικὰς ἐπιπτώσεις τῆς θεωρίας τῆς ἀπροσδιοριστίας εἰς τὴν Γνωσιολογίαν καὶ τὴν Ὀντολογίαν.

Ἡ φυσικὴ ἐπιστήμη, μέχρι τῆς διατυπώσεως τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπροσδιοριστίας ἡρμήνευε αἰτιοκρατικῶς τὰ φαινόμενα τοῦ κόσμου. Οἱ φυσικοὶ ἐχωρίσθησαν εἰς δύο παρατάξεις, εἰς τοὺς Ντετερμινιστὰς καὶ τοὺς Ἰντετερμινιστάς. Οἱ πρῶτοι ἐκ τούτων δέχονται τὴν αἰτιοκρατίαν, ἐνῷ οἱ δεύτεροι ἀρνοῦνται αὐτήν. Εἰς τὸν χῶρον τῆς φιλοσοφικῆς διαμάχης ὁ Einstein ἐτάχθη μὲ τὸ μέρος τῶν ντετερμινιστῶν. Οὗτος πιστεύει εἰς τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ἀντικειμενικῆς ἀληθείας, τὴν ὁποίαν ὁ ἀνθρώπινος νοῦς ὅλο καὶ τὴν πλησιάζει. Ἡ πίστις καὶ ἡ εὐχὴ τοῦ Einstein ἦτο, ὅτι θὰ ἀποκατασταθῇ τὸ ἐνιαῖον τοῦ φυσικοῦ κόσμου ἐπὶ τῆς αὐστηρᾶς αἰτιοκρατίας. Οἱ ἰντερτεμινισταὶ δέχονται ὅτι ἡ θεωρία τῆς ἀπροσδιοριστίας ἔφερεν εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν καὶ φιλοσοφικήν μας εἰκόνα διὰ τὸν κόσμον νέας ἀντιλήψεις καὶ ἡρμήνευσε τὴν πραγματικότητα ὑπὸ εὐρυτέραν σκοπιάν.

Ἡ νέα ἀντίληψις τὴν ὁποίαν ἀνέπτυξεν ἡ θεωρία τῆς ἀπροσδιοριστίας ἦτο μία νέα συνείδησις τῶν ὁρίων τῆς γνώσεώς μας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συνδέεται ἀμεσώτατα μὲ τὴν Γνωσιολογίαν καὶ τὴν Ὀντολογίαν. Ἀφοῦ ὁ συγγραφεὺς ἐξετάζει τὴν ἀρχὴν τῆς ταυτότητος (σελ. 44), σημειώνει ποία εἶναι ἡ ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη καὶ ἡ ἀρχὴ τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλίσεως εἰς τὸν χῶρον τῆς Μικροφυσικῆς. Μερικοὶ ἐκ τῶν νεωτέρων ἀποδίδουν εἰς τὸν Heisenberg τὴν πατρότητα τῆς ἀρχῆς τῆς ἀνυπαρξίας τῶν μικρομεγεθῶν καὶ τῶν μικροσυμβάντων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν παρατηρηθῇ, Ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου ὁ συγγραφεὺς ἑρμηνεύει τὰς ἀντιλήψεις τῆς σχολῆς τῆς Κοπεγχάγης, ὅπως αὗται διατυποῦνται ὑπὸ τοῦ Weizsäcker. Κατὰ τὰς ἀντιλήψεις αὐτάς, ὅ,τι ἔχει παρατηρηθῇ δύναται νὰ λεχθῇ μετὰ βεβαιότητος ὅτι ὑπάρχει ἐν σχέσει μὲ αὐτό, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει παρατηρηθῇ.

Εἰς τὴν παρατήρησιν ὡρισμένων ἐρευνητῶν, ὅτι ἡ Σχολὴ τῆς Κοπεγχάγης ἔφθασε νὰ θέσῃ ὑπὸ ἀμφισβήτησιν τὴν ἴδια τὴν πραγματικότητα τῶν μικροσωματίων, πρέπει νὰ προσθέσωμεν, τονίζει ὁ κ. Μούκανος, ὅτι ὑπὸ τὸν ὅρον θετικιστικὸν ἀξίωμα δὲν πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ νοηθῇ ἡ φιλοσοφία τοῦ θετικισμοῦ καὶ εἰδικώτερον ὁ νεοθετικισμὸς τοῦ κύκλου τῆς Βιέννης, ἀλλὰ θὰ πρέπει νὰ νοηθῇ εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὁ Καντιανισμὸς καὶ ὁ Νεοκαντινισμός. Μία ἄλλη ἑρμηνεία ὑποστηρίζει, ὅτι ἡ ἀπροσδιοριστία ὀφείλεται εἰς τὴν ἴδια τὴν φύσιν τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ γενικῶς εἰς τὴν εὐαίσθητον φύσιν τῶν στοιχειωδῶν σωματιδίων τοῦ μικροκόσμου.

Ἐνταῦθα ὁ κ. Μούκανος σημειώνει πῶς τίθεται τὸ πρόβλημα τῆς Μικροφυσικῆς μετὰ τὰ συμπεράσματα τῆς θεωρίας τῆς ἀπροσδιοριστίας καὶ τὸ συμπέρασμα εἰς τὸ ὁποῖον κατέληξε εἶναι ὅτι τὸ Εἶναι ὑπάρχει ἀνεξαρτήτως ἀπὸ τὴν συνείδησιν τοῦ παρατηρητοῦ καὶ ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν τὴν οὐσίαν αὐτοῦ τοῦ Εἶναι καθόσον αὐτὸ εἶναι ἀπροσδιόριστον ἀπὸ τὴν γνῶσίν μας.

Μία ἄλλη ἑρμηνεία ὑποστηρίζει ὅτι τὰ σωματίδια-κύματα, τῆς ὕλης τοῦ μικροκόσμου ἀναζητοῦνται μεταξὺ μὴ ὄντος καὶ ὄντος, καὶ ὅτι ἡ κυματοδέσμη ὀντολογικὰ ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀριστοτελικοῦ «δυνάμει». Αὐτὸ σημαίνει ὅτι εἰς τὸν μικρόκοσμον λειτουργεῖ ἡ δομὴ δυνατότης-πραγματικότης, δηλ. τὸ δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ τῆς ἀριστοτελικῆς φιλοσοφίας. Ὑφίσταται ἓν κῦμα πιθανοτήτων, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς δυνατότητος καὶ τῆς πραγματικότητος. Πιθανότης δὲ εἶναι ἡ τάσις νὰ πραγματοποιηθῇ κάτι. Καὶ ἡ ἑρμηνεία αὐτή, κατὰ τὸν κ. Μούκανον, καθιστᾷ φανερόν, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἀσφαλῆ καὶ σα-

φῆ γνῶσιν τῆς ἑκάστοτε μικροφυσικῆς πραγματικότητος. Διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν κάποιου νόμου δυνάμεθα, κατὰ τὸν κ. Μούκανον, νὰ ὁμιλῶμεν μόνον μὲ πιθανότητας, διότι αὐτὸ ποὺ δύναται νὰ εὑρεθῆ εἰς τὴν μικροφυσικὴν πραγματικότητα εἶναι εἷς κατάλογος διαφόρων πιθανῶν ἀποτελεσμάτων. Οὕτω ἡ Μικροφυσικὴ γίνεται κατὰ τὴν ἑρμηνείαν αὐτὴν ἐπιστήμη πιθανοκρατική.

Ἡ φύσις ὑπερβαίνει τὰς ἀνθρωπίνους ἱκανότητας. Εἶναι ἀδύνατον ὁ ἄνθρωπος νὰ τὴν κατακτήσῃ πανταχοῦ. Τὴν ἔννοιαν αὐτὴν τῆς ἀπροσδιορίστου Ὀντολογίας ἀποδέχεται εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην καὶ ὁ κ. Μούκανης (σελ. 53).

Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἀναφαίνεται μετὰ τὰς ἀναπτύξεις τὰς ὁποίας ἔκαμε, τονίζει ὁ κ. Μούκανος, ἔχει μεγάλο φιλοσοφικὸν ἐνδιαφέρον καὶ ἐρωτᾶται ἂν ἡ ἀπροσδιοριστία ὡς ἄρνησις τῆς αὐστηρᾶς ἀκολουθίας αἰτίου καὶ ἀποτελέσματος εἰς τὸν Μικρόκοσμον εἶναι, ἐπὶ τοῦ παρόντος, τυχαία (δηλ. κατὰ συμβεβηκός), ὁπότε μελλοντικῶς θὰ ἐξαφανισθῆ ἢ θὰ φανῆ ὅτι εἶναι οὐσιώδης ἰδιότης τῶν μικροσωματιδίων. Οἱ ἐρευνηταὶ de Broglie καὶ Schrödinger καὶ ἄλλοι ἀκόμη δέχονται μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς ἀπροσδιοριστίας διστάζουν ὅμως νὰ ὁμιλήσουν περὶ ἐλευθερίας βουλήσεως τῶν μικροσωματίων, ἐπειδὴ εἰς τὰ μικροφαινόμενα τῆς ἀβίου ὕλης δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῆ ἡ ἔννοια τῆς ἐλευθερίας, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὸν χῶρον τῶν πράξεων τοῦ ἀνθρώπου. Καὶ ἐρωτᾷ τελικῶς ὁ κ. Μούκανος, ποῖα εἶναι τὰ φιλοσοφικὰ συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ κερδηθοῦν ἔπειτα ἀπὸ τὰς ἀναπτύξεις καὶ τοὺς προβληματισμοὺς τῆς παρούσης μελέτης καὶ ἀποφαίνεται ὡς ἑξῆς:

1) Δὲν δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι ὑφίστανται ἀσύλληπτοι οὐσιώδεις σχέσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι σχέσεις αὐστηρᾶς ἀναγκαιότητος καὶ τὰς ὁποίας δὲν δύναται νὰ συλλάβῃ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα, λόγῳ ἀτελείας τῶν ὀργάνων παρατηρήσεως. Ἡ ἄποψις τοῦ συγγραφέως εἶναι ὅτι ὑφίσταται μία ἀπροσδιόριστος πραγματικότης ἐπέκεινα τῆς συνειδήσεως τοῦ παρατηρητοῦ. Ἡ ἀρχὴ τῆς ἀπροσδιοριστίας ἔκαμε συνειδητὴν εἰς τὸν χῶρον τῆς Γνωσιολογίας, καὶ τὴν ἀρχὴν τῆς σχετικότητος τῆς γνώσεως, ἀμφισβητεῖται δὲ ἡ ἀντικειμενικότης τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως εἰς τὸ πεδίον τῆς Μικροφυσικῆς.

2) Ἔγινε φανερὸν ἀπὸ τὰς ἀναπτύξεις του, τονίζει ὁ κ. Μούκανος, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς αἰτίας καὶ ὁ νόμος τῆς αἰτιότητος εἶναι συνυφασμένα μὲ τὸ γνωστικὸν ὄργανον τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἀναπόσπαστα ἀπὸ αὐτό. Συγχρόνως ἔγινε φανερὸν ὅτι ἡ ἀρχὴ τῆς ἀπροσδιοριστίας ἀναγνωρίζει εἰς τὸν μικρόκοσμον τῶν στοιχειωδῶν σωματίων τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς ἄλλου πράγματος ἔξω ἀπὸ τὸν ἐπιστημονικὸν παρατηρητήν, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ κατὰ τὸν Einstein μίαν ἔννοιαν κοσμικῆς θρησκευτικότητος. Ὁ ἐπιστημονικὸς παρατηρητής-φιλόσοφος εἰσέρχεται ὄχι μόνον εἰς τὸ ἱερὸν τῆς Φυσικῆς Ἐπιστήμης καὶ τῆς φιλοσοφίας, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ ἱερὸν τῆς φύσεως.

3) Ἡ φύσις θὰ ἐπιτρέψῃ ἴσως εἰς τὸν ἄνθρωπον νὰ ἀνακαλύψῃ εἰς τὸ μέλλον καὶ ἄλλα μυστικά της. Ἀλλὰ πρέπει προηγουμένως νὰ μάθωμεν νὰ ἐρωτῶμεν τὴν φύσιν. Ἴσως θὰ πρέπει ἡ ἀνθρωπότης εἰς τοὺς νέους ὁρίζοντας τῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς ζωῆς νὰ ἀναπτύξῃ τὴν ἠθικήν της συνείδησιν. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῆ τοῦτο χρειάζεται εἷς νέος βαθύτερος ἀνθρωπισμὸς καὶ ἓν νέον βαθύτερον καὶ προοδευτικώτερον ἦθος καὶ ὕφος τῶν ἐπιστημόνων καὶ ὅλων τῶν ἀνθρώπων.

Ὁ κ. Μούκανος εἶναι ἄξιος συγχαρητηρίων, διότι κατώρθωσε νὰ ἐμβαθύνῃ ἀπὸ φιλοσοφικῆς ἀπόψεως εἰς τὰ προβλήματα τῆς Μακροφυσικῆς καὶ τῆς Μικροφυσικῆς. Ἡ ἱκανότης του νὰ παρακολουθῆ ἐπιτυχῶς τὴν σχετικὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν προκαλεῖ τὸν θαυμασμὸν τοῦ ἀναγνώστου.

ΕΥ. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ