ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ανακοινώσεις εν τη Ακαδημία Αθηνών
1953 – 1971

Παρουσιάσεις βιβλίων

1953 – 1972

1) Αρχιμήδους, Τετραγωνισμός παραβολής. Ο βίος και τα έργα του Αρχιμήδους: αρχαίον κείμενον – μετάφρασις – επεξηγήσεις, 1946

2) Αρχιμήδους, μηχανικά. Πρόλογος – αρχαίον κείμενον – μετάφρασις – επεξηγήσεις, 1946

3) Το δήλιον πρόβλημα και η τριχοτόμησις γωνίας. Εισαγωγή – Μετάφρασις. Σύγχρονος λύσις του προβλήματος διά της αναλυτικής γεωμετρίας, 1949

4) Αρχιμήδους, κύκλου μέτρησις. Εισαγωγή – Αρχαίον κείμενον – μετάφρασις – επεξηγήσεις, 1950

5) Ευκλείδου, Γεωμετρία. 1ος εκ των τεσσάρων τόμων της κατά Heiberg εκδόσεως των Στοιχείων του Ευκλείδου. Εισαγωγή – Αρχαίον κείμενον – μετάφρασις, 1952

• Συμβολή εις την ερμηνείαν γεωμετρικού χωρίου του διαλόγου του Πλάτωνος, Μένων (περ. «Πλάτων», 1951, τεύχος 2)

• Το θυμαρίδειον επάνθημα (περ. «Πλάτων», 1952, τεύχος 1)

5 Φεβρουαρίου 1953, υπό Β. Αιγινήτη

τόμος 28, 43-46 σελ. 134

Ευκλείδου Γεωμετρία – Θεωρία αριθμών. 2ος τόμος, 1953

14 Ιανουαρίου 1954, υπό Β. Αιγινήτη

τόμος 29, 8-9 σελ. 139

Ευκλείδου, Περί ασυμμέτρων. 3ος τόμος, 1956

16 Μαΐου 1957, υπό Μιχ. Στεφανίδη

τόμος 32, 305-306 σελ. 142

Στοιχεία του Ευκλείδου, Στερεομετρία. 4ος τόμος, 1957

16 Ιανουαρίου 1958, υπό Β. Αιγινήτη

τόμος 33, 12-13 σελ. 145

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΕΩΣ ΤΩΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ

ΕΤΟΣ 1953 : ΤΟΜΟΣ 28ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

1954

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.—**Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ,** *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

Ι. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς ἢ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, ἰσχυρότατον ἀποδεικτικὸν μέσον τῆς Ἀνωτέρας μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Τὴν σημασίαν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ἐξαίρει ἰδιαιτέρως ὁ Γάλλος μαθηματικὸς H. Poincaré εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «ἐπιστήμη καὶ ὑπόθεσις» [1]. Μεταξὺ ἄλλων μαθηματικῶν, οἵτινες τονίζουσιν ἰδιαιτέρως τὴν σημασίαν τοῦ συλλογιμοῦ τούτου εἰς τὴν Ἀνωτέραν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν μνημονεύομεν τὸν Γερμανὸν K. Knopp καὶ τὸν Φινλανδὸν E. Lindelöf. Ὡς πρῶτος διατυπώσας τὸν ἀποδεικτικὸν τοῦτον συλλογισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Ἀριστοτέλης, ὡς συνάγεται ἔκ τινος χωρίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀναλυτικὰ Ὕστερα» (73β 32), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς: «Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται». Μία δηλ. μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθ᾽ ὅλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι ἰσχύει εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται. Πέρα τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Ἀριστοτέλους, οὐδεμία μέχρι τοῦ 1910 συγκεκριμένη περίπτωσις ἐφαρμογῆς τοῦ συλλογισμοῦ τούτου εἶχε σημειωθῆ εἰς τὰ σωθέντα μαθηματικὰ ἔργα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Κατὰ τὸ 1910 ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς G. Vacca ἐπέστησε τὴν προσοχὴν τῶν συγχρόνων του ἐπιστημόνων ἐπὶ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἔκτοτε οὐδεμία ἄλλη σχετικὴ ἀνακοίνωσις ἐγένετο ἀφορῶσα εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ συλλογισμοῦ τούτου ὑπὸ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

ΙΙ. Κατὰ τὴν ἐργασίαν ἡμῶν πρὸς ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου διεπιστώσαμεν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀποδεικτικοῦ τούτου συλλογισμοῦ εἰς πολλὰ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Μεταξὺ τούτων μνημονεύομεν τὰ θεωρήματα 3,14,27,35 τοῦ VII βιβλίου, 13 τοῦ VIII καὶ 20 τοῦ IX. Κατωτέρω ἀναφέρομεν τὸ 20ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου εἰς τὸ ὁποῖον, καθ᾽ ἡμᾶς, γίνεται ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου τοῦ ἀποδεικτικοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Κατὰ τὴν συνήθειαν τοῦ Εὐκλείδου οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται δι᾽ εὐθυγράμμων τμημάτων ὀνοματιζομένων, ὁτὲ μὲν δι᾽ ἑνὸς γράμματος, ὁτὲ δὲ διὰ δύο.

---

* **EUAG. STAMATIS, Der Schluss der vollsdändigen Induktion bei Euklid.**

[1] Science et hypothése, C. 1. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ Παν. Σ. Ζερβοῦ, 1912, (ἔκδοσις Φέξη).

[2] *Mangold - Knopp,* Einführung in die höhere Mathematik. I 1944, (Teubner).

[3] *Lindelöf - Ullrich,* Einführung in die höhere Analysis, 1950, (Teubner).

Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν».

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ Α. Β. Γ

Α ——————, Β ——————, Γ ——————.

Λέγω, ὅτι τῶν

Η ——————, Ε —————— Δ —— Ζ

πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,Γ ὑπάρχουσι περισσότεροι πρῶτοι ἀριθμοί. Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ καὶ ἔστω τοῦτο ὁ ἀριθμὸς ΔΕ καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τοῦτον ἡ μονὰς ΔΖ., ὥστε ΕΖ = ΔΕ + ΔΖ. Ὁ ΕΖ ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι.

1. Ἔστω πρότερον ὅτι ΕΖ εἶναι πρῶτος. Τότε εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ΕΖ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων, τῶν Α,Β,Γ ἔγινε Α,Β,Γ,Ε,Ζ ἤτοι εὑρέθησαν περισσότεροι τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν. (ἐνταῦθα ὁ Εὐκλείδης παραλείπει, ὡς αὐτονόητον, τὴν πρότασιν, ὅτι ὁ ΕΖ πρὸς οὐδένα τῶν Α,Β,Γ εἶναι ὁ αὐτὸς).

2. Ἔστω δεύτερον ὅτι ὁ ΕΖ. δὲν εἶναι πρῶτος ἀλλὰ σύνθετος. Τότε οὗτος θὰ μετρῆται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Η (κατὰ τὸ 31ον θεώρημα τοῦ VII βιβλίου τῶν Στοιχείων). Λέγω ὅτι ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α, Β, Γ εἶναι ὁ αὐτός. Διότι, ἔστω ὅτι ὁ Η εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν Α,Β,Γ, οἱ δὲ Α,Β,Γ μετροῦσι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν τὸν ΔΕ. Ἄρα καὶ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΔΕ. Μετρεῖ ὅμως ὁ Η καὶ τὸν ΕΖ. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΕΖ − ΔΕ = ΔΖ. Ὁ ΔΖ ὅμως εἶναι ἡ μονάς, ὅπερ ἄτοπον· διότι ὁ Η ἀριθμὸς ὢν (δηλ. πλῆθος μονάδων) εἶναι ἀδύνατον νὰ μετρῇ τὴν μονάδα. Ἄρα ὁ Η πρὸς οὐδένα τῶν Α,Β,Γ εἶναι ὁ αὐτός. Ἄρα εὑρέθη εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμὸς καὶ τὸ πλῆθος τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,Γ ἔγινε Α,Β,Γ,Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III. Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α,Β,Γ δὲν ἀναφέρονται εἰς τὸ συγκεκριμένον πλῆθος τριῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀλλὰ παριστῶσι τυχὸν πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν διὰ τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀκόμη πρῶτος ἀριθμός. Ἐὰν τὸ τυχὸν τοῦτο πλῆθος τὸ καλέσωμεν ν τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι ὑπάρχουσι ν + 1 πρῶτοι ἀριθμοί.

Ἐὰν τὸ νέον πλῆθος πρώτων ἀριθμῶν τὸ ν + 1 τὸ καλέσωμεν λ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. αὐτῶν· ἔστω Κ καὶ εἰς τὸν Κ προσθέτομεν τὴν μονάδα. Τότε ὁ Κ + 1 ἢ εἶναι πρῶτος ἢ δὲν εἶναι. Ἐὰν ὁ Κ + 1 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμός, ὁ $K+1$, καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων πρώτων ἔγινε $\nu+2$. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ $K+1$ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους $\nu+1=\lambda$. Ἐὰν δὲν εἶναι ὁ $K+1$ πρῶτος, θὰ εἶναι σύνθετος, ὅτε οὗτος μετρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ Λ. Κατὰ τὴν εὐκλείδιον ἀπόδειξιν ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Διότι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν ὁ Λ νὰ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἕνα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ. Ὁ Λ ὡς ὢν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἷς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους λ μετρεῖ τὸ ἐλ.κ.πολλ. αὐτῶν, τὸν K. Μετρεῖ ὅμως ὁ Λ καὶ τὸν $K+1$. Ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $K+1-K=1$· ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Λ εἶναι πλῆθος μονάδων. Ἄρα ὁ Λ δὲν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν τοῦ πλήθους $\lambda=\nu+1$, ἤτοι εὑρέθη ἀκόμη εἷς πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Λ καὶ τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων $\nu+1$, πρώτων ἀριθμῶν ἔγινε $\nu+2$. Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν $\nu+2$ τὸ καλέσωμεν μ, εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ὅτι ὑπάρχουσι $\mu+1=\nu+3$ πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς: αἱ διαδοχικαὶ ὅμως αὗται ἀποδείξεις εἶναι περιτταί, διότι εἶναι ἐπανάληψις τῆς πρώτης ἀποδείξεως. Διὰ τὴν τιμὴν $\nu=1$, εὐνοήτως δὲν γίνεται λόγος κατὰ τὴν εὐκλείδειον ἀπόδειξιν, διότι αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν ἤτοι ἀποκλείεται ἡ θεώρησις τῆς περιπτώσεως $\nu=1$. Τὸ ὀλιγώτερον πρέπει νὰ εἶναι $\nu=2$, ἤτοι τὸ θεώρημα ἔχει ἰσχὺν διὰ $\nu \geqq 2$. Ἡ ἔννοια τῆς ἀναδρομικῆς ἰσχύος τοῦ συλλογισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: ἐθεωρήθησαν γνωστοὶ ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοὶ καὶ εὑρέθησαν $\nu+1$ τὸ πλῆθος πρῶτοι. Ἐὰν θεωρηθῶσι γνωστοὶ $\nu-1$ πρῶτοι ἀριθμοί, θὰ εὑρεθῇ κατὰ τὴν ἀπόδειξιν εἷς ἀκόμη πρῶτος, ἤτοι ν τὸ πλῆθος πρῶτοι ἀριθμοί. Ἐὰν θεωρηθῶσι διαδοχικῶς, δεδομένοι, $\nu-2$, $\nu-3$, $\nu-4$ ...2 πρῶτοι ἀριθμοὶ θὰ εὑρεθῶσιν διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἀντιστοίχως $\nu-1$, $\nu-2$, $\nu-3$ . ...3 πρῶτοι ἀριθμοί. Ἀρκεῖ λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής, ὅταν $\nu=2$, ὁπότε ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως διὰ $\nu=3,4,5$ .....Τοῦτο ὅμως εἶναι μία διατύπωσις ἑρμηνεύουσα τὴν φράσιν «ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς» καὶ καταλήγουσα εἰς τὴν διαπίστωσιν, ὅτι $\nu=2$. Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι «ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς».

Ἀνατρέχομεν εἰς τὴν θεώρησιν τοῦ πλήθους τῶν συναρτήσεων $\nu-1, \nu-2$, $\nu-3$ .....2. Ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον δύο συναρτήσεων, τότε προκειμένου νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰσχὺν αὐτοῦ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων θεωροῦμεν δύο συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν νὰ ἔχωμεν πρὸς ἀπόδειξιν γινόμενον δύο συναρτήσεων διὰ τὸ ὁποῖον ὅμως ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει τὴν πρότασιν. Προκειμένου διὰ γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων, θεωροῦμεν τρεῖς συναρτήσεις ὡς ἕνα παράγοντα καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς γινόμενον δύο συναρτήσεων. Καὶ γενικῶς, ὅταν ἔχωμεν γινόμενον $\nu + 1$ τὸ πλῆθος συναρτήσεων, θεωροῦμεν ὡς ἕνα παράγοντα ν τὸ πλῆθος συναρτήσεις καὶ καταλήγομεν πάλιν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς συνεχείας τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων. Εἶναι φανερὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀκριβολογία καὶ ἡ γενίκευσις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀναδρομικοῦ συλλογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους, καθ' ὃν μαθηματικὴ πρότασις ἔχει καθόλου ἰσχύν, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ εἰς τὴν πρώτην τυχοῦσαν περίπτωσιν εἰς ἣν αὕτη ἀναφέρεται.

Ἡ τυχοῦσα περίπτωσις τοῦ θεωρήματος, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν εἶναι, ὡς ἀνωτέρω μνημονεύεται, ἡ θεώρησις δοθέντων τριῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὁπότε ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει καὶ τέταρτος πρῶτος ἀριθμός, ἤτοι ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις γενικῶς.

ZUSAMMENFASSUNG

G. Vacca machte 1910 aufmerksam auf die Verwendung des Schlusses der Vollständigen Induktion in den Sätzen 8 und 9 des IX. Buches der Elemente von Euklid. E. Stamatis teilt mit, dass Euklid diese Beweismethode auf viele anderen Sätze der Elemente anwendet. Seine Behauptung stützt er, beispielweise, auf den Beweis des 20. Satzes des IX. Buches der Elemente.

ΑΣΤΡΟΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΑ.— **Expression de la radiation solaire en fonction de la longitude du Soleil en 11 stations de l'hémisphère Nord**, *par Jean Xanthakis**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

SUMMARY

«Let us denote by S_i, $i = 1,2 \ldots 6$ the mean values of the solar radiation for the months January, February, ... June and by S_{13-i}, the corresponding values for the months December, November, ... July.

The observations of the solar radiation at 11 stations of the northern hemisphere (see tables I and II) show that:

* ΙΩ. ΞΑΝΘΑΚΗΣ, Ἔκφρασις τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας συναρτήσει τοῦ μήκους τοῦ Ἡλίου εἰς 11 τόπους τοῦ Βορ. ἡμισφαιρίου.

νῶν ἐπὶ βραχὺ χρονικὸν διάστημα, ὥστε ἐπὶ τῇ βάσει τῶν νεωτέρων αὐτῶν ἀντιλήψεων νὰ διδάξωσιν οὗτοι τοὺς ἐλαιοκόμους τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ νέου κλαδεύματος τῆς ἐλαίας.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΕΛΩΝ

Φαιδωνος Κουκουλε, *Ἡ νεοελληνικὴ ἑρμηνεία τῶν ὀνείρων καὶ ἡ ὀνειροκριτικὴ παράδοσις* *.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. — **Παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2 παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις,** *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σταμάτη*** **. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

1. Ὁ σχηματισμὸς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν παρέχεται ὑπὸ τῶν τύπων $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ καὶ $\delta_\nu = 2.\ \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, ἔνθα α παριστᾷ τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διαγώνιον ἑνὸς τετραγώνου. [Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, σ. 42 - 45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰν Πολιτείαν Πλάτωνος, ἔκδ. Kroll. τόμ. II, σ. 24 κ.ἑ.]

Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους, ἐὰν τὸ δοθὲν τετράγωνον θεωρηθῇ ἀπειροελαχίστως μικρόν, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ νὰ ληφθῇ ἴση πρὸς τὴν διαγώνιόν του καὶ ἴση πρὸς τὴν μονάδα, ἡ σειρὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶναι ἡ κάτωθι:

Πλευρικοὶ ἀριθμοί: 1, 2, 5, 12, 29 .... α_ν
Ἀντίστοιχοι διαμετρικοὶ ἀριθμοί: 1, 3, 7, 17, 41 .... δ_ν

ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$ παρέχει κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{2}$.

2. Ἐὰν ἡ $\sqrt{2}$ ὑπολογισθῇ κατὰ τὴν εἰς τὸν Ἀρχύταν ἀποδιδομένην μέθοδον τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων [1) Εὐκλείδου, Κατατομὴ Κανόνος θεώρ. 3, 2), Ἥρωνος, Μετρικά, τόμ. III σ. 18 - 20, 3) Boethius «De institutione arithmetica» III, 11 σ. 285] τότε λαμβάνομεν τὴν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν ταχύτερον ἢ διὰ τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 2 ὡς γινόμενον 2×1 καὶ μὲ πρώτους ἄκρους ὅρους τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 1 σχηματίζομεν ἐν συνεχείᾳ μουσικὰς ἀναλογίας ὡς κάτωθι:

---

* Ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν σειρὰν τῶν Πραγματειῶν τῆς Ἀκαδημίας, τόμ. 20 (1954) ἀρ. 4.

** **EVANG. STAMATIS, Eine Bemerkung auf die Berechnung von $\sqrt{2}$ bei den Alten.**

$$2 : \frac{3}{2} \quad (\text{πρῶτον ἀριθμητικὸν μέσον}) = \frac{4}{3} \quad (\text{πρῶτον ἁρμονικὸν μέσον}) : \quad 1$$

$$\frac{3}{2} : \frac{17}{12} \quad (\ \beta'. \quad » \quad » \ ) = \frac{24}{17} \quad (\ \beta'. \quad » \quad » \ ) : \ \frac{4}{3}$$

$$\frac{17}{12} : \frac{577}{408} \quad (\ \gamma'. \quad » \quad » \ ) = \frac{816}{577} \quad (\ \gamma'. \quad » \quad » \ ) : \ \frac{24}{12}$$

Ἀναγράφομεν κατωτέρω πίνακα ἐμφαίνοντα τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ τὰς δύο μεθόδους.

Α΄. Μέθοδος λόγων, διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμούς.				Β΄. Μέθοδος Ἀρχύτου, ἀριθμητικῶν καὶ ἁρμονικῶν μέσων.
1ος	λόγος	1 : 1		
2ος = 2^1	»	3 : 2	→	πρῶτον ἀριθμ. μέσον τῶν ἀριθ. 1 καὶ 2 = 3 : 2
3ος	»	7 : 5		πρῶτον ἁρμον. μέσον » » 1 » 2 = 4 : 3
4ος = 2^2	»	17 : 12	→	δεύτερον ἀριθμ. μέσον τῶν ἀριθ. $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ = 17 : 12
5ος	»	41 : 29		δεύτερον ἁρμον. » » » $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ = 24 : 17
6ος	»	99 : 70		
7ος	»	239 : 169		
8ος = 2^3	»	577 : 408	→	τρίτον ἀριθμ μέσον τῶν ἀριθμῶν $\frac{17}{12}$, $\frac{24}{17}$ = 577 : 408
9ος	»	1393 : 985		τρίτον ἁρμ. μέσον τῶν ἀριθμῶν $\frac{17}{12}$, $\frac{24}{17}$ = 816 : 577
10ος	»	3363 : 2378		
11ος	»	8119 : 5741		
12ος	»	19601 : 13860		
13ος	»	47321 : 33461		
14ος	»	114243 : 80782		
15ος	»	275807 : 195025		
16ος = 2^4	»	665857 : 470832	→	τέταρτον ἀριθ. μέσον τῶν ἀριθμῶν $\frac{577}{408}$, $\frac{816}{577}$ = = 665857 : 470832.
2^ν λόγος			→	νυοστὸν ἀριθμητικὸν μέσον.

3. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τάξις τῶν κατ' Ἀρχύταν ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι οἱ λογάριθμοι μὲ βάσιν τὸν 2 τῆς τάξεως τῶν λόγων τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμούς.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser teilt eine Bemerkung über die Berechnung von $\sqrt{2}$ bei den Alten mit. Von zwei dies betreffenden Methoden, d. h. der Methode der Verhältnisse der Diametral- zu den Seitenzahlen bzw. der Methode die Archytas zugeschrieben wird, wird bemerkt, dass die Ordnung der von Archytas benutzten arithmetischen Mittel die Logarithmen mit Basis 2 der Ordnung der Verhältnisse der Diametral- zu den Seitenzahlen ist.

ταύτης προκύπτοντα συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν συμβολὴν εἰς τὰς γνώσεις μας τὰς σχετικὰς μὲ τὰς ἠπειρογενετικὰς κινήσεις, αἵτινες ἐγένοντο εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ Νοτίου Αἰγαίου κατὰ τὸ πλειόκαινον καὶ τὸ τεταρτογενές.

Ὁ συγγραφεὺς ἐπιφυλάσσεται νὰ συμπληρώσῃ τὰς μελέτας του καὶ ἐπὶ ἄλλων ἀναβαθμίδων τῆς νήσου Ἰκαρίας.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. D. Voreadis, Les mouvements épeirogéniques dans la région de la Mer Égée pendant le quaternaire (Bull. de la Soc. Géographique Hellén. IIIme Période, Fasc. 1. Athènes 1952. En langue Grecque).
2. C. A. Kténas, Découverte du pliocéne inférieur marin dans l'île de Nikaria (Mer Égée). (C. R. de l'Acad. d. Sc. T. 184, I, p. 756-758).
3. J. K. Trikkalinos, Beiträge zur Erforschung des tektonischen Baues Griechenlands. II. Über den tektonischen Bau der Insel Naxos. Ann. Géol. d. pays helléniques **1**, 1942. Athènes).

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ — **Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου**, *ὑπὸ **Εὐαγγ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

Α. 1 Τὸ 27ον θεώρημα τοῦ VI βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς: «Ἐκ πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἐλλεῖπον».

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 1). Ἐκ τοῦ μέσου ταύτης τοῦ Θ ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΘΗ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν· ἡ ΘΗ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάθετος). Ἐὰν ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀφαιρέσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒΓΗ, τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως πρὸς τοῦτο κείμενον παραλληλόγραμον ΘΒΓΗ.

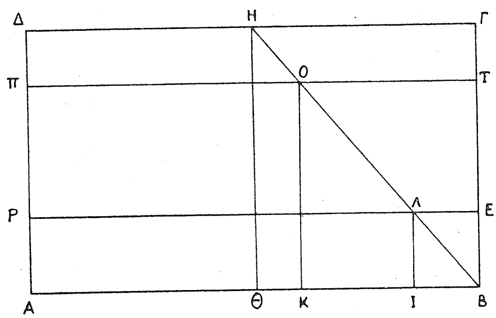
Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΗΒ καὶ λάβωμεν τυχόντα σημεῖα ἐπὶ ταύτης τὰ Ο, Λ, φέρωμεν δὲ ἀπὸ τῶν σημείων τούτων τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς εὐθείας

* **EVAN. STAMATIS, Über den euklidischen Satz über Maximum.**

ΑΒ, ΑΔ, τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν κατὰ τὸ θεώρημα παραβάλει τὰ ἑξῆς παραλληλόγραμμα:

1) ΑΚΟΠ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΟΚΒΤ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒΓΗ, τὸ ὁποῖον ἐπίσης εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ.

2) ΑΙΛΡ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΛΙΒΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ. Ἐκ τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλληλογράμμων ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, ὅτι μέγιστον εἶναι τὸ ΑΘΗΔ.



Σχ. 1.

Α. 2. Τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ ἑπόμενον τούτου πρόβλημα 28 χρησιμοποιοῦνται καὶ εἰς τὸ Χ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ πραγματευόμενον τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων. Ἡ θεωρία αὕτη ἀνεπτύχθη, ὡς γνωστόν, τὰ μέγιστα ἐκ τῶν ἐρευνῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου [1].

Ἐπὶ τοῦ 27ου θεωρήματος ὁ Μ. Cantor [2] γράφει τὰ ἑξῆς: «τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, ὅπερ διατυπούμενον ὡς συνάρτησις λέγει: $X(\alpha - X)$ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν διὰ $X = \frac{\alpha}{2}$.

Εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα 28 καὶ 29 ἀναγνωρίζεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων $X(\alpha - X) = \beta^2$ καὶ $X(\alpha + X) = \beta^2$. Τὸ θεώρημα 27 φαίνεται ἀναμφιβόλως, ἐκ τῆς συνεχείας τῶν 27 καὶ 28 ὅτι ἀποτελεῖ τὸν διορισμὸν (ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην) κατασκευῆς τοῦ τελευταίου, ἤτοι δὲν ἐπιτρέπεται τὸ β^2 νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν [3]».

Β.1. Ἡ ἑρμηνεία τοῦ 27ου θεωρήματος ὑπὸ τοῦ Μ. Cantor εἶναι μερικὴ

[1] *Μιχαὴλ Στεφανίδου,* Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 102, 1938, Ἀθῆναι.

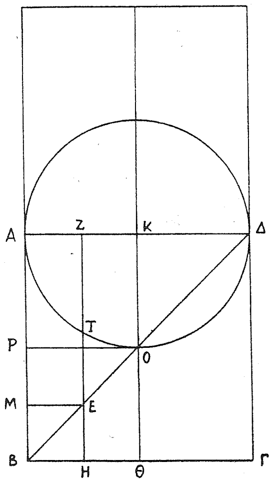
[2] Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, σ. 226 ἐκδ. 1907, (Teubner).

[3] *Matthiessen,* Grundzuege der antiken und modernen Algebra der Litteralen Gleichungen, σ. 926 - 931, (1878, Leipzig).

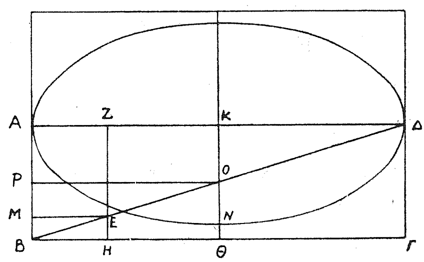
περίπτωσις ἐκείνου τὸ ὁποῖον δηλοῖ τὸ θεώρημα καὶ ἔχει αὕτη ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 2). Ἐκ τοῦ μέσου ταύτης, τοῦ Ρ, ὑψοῦμεν κάθετον ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ τὴν ΡΟ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΘΚ. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΟ καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾿ αὐτῆς τυχὸν σημεῖον Ε ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΚ τὰς ΖΗ, ΜΕ. Τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν κατὰ τὸ θεώρημα παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΜΕΖ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΜΒΗΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλλ. ΑΡΟΚ.

Ἐὰν καλέσωμεν $X = AZ = MB$ καὶ $AB = \alpha$, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν $AMEZ = X(\alpha - X) = \beta^2 = (ZT)^2$. Τὸ β^2 εἶναι μέγιστον, ἐὰν $X = \frac{\alpha}{2}$.

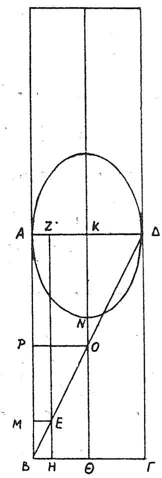
Τὸ μέγιστον τοῦτο εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΡΟΚ. Ἡ παραβολὴ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλληλογράμμων, ὡς ἀνωτέρω, ἀφοῦ ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΟΔ τυχόντα σημεῖα ὁδηγεῖ εἰς τὴν κατασκευὴν κύκλου.



Σχ. 2.



Σχ. 3.



Σχ. 4.

Β.2. Ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος εἶναι γενικωτέρα. Τὸ θεώρημα ἰσχύει, ἐὰν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ κάθετος ἡ ΡΟ εἶναι μικροτέρα, ἴση, ἢ μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ. 1) Ἐὰν $OP < \frac{AB}{2}$, ὁ μέγας ἄξων τῆς κατασκευαζομένης ἐλλείψεως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν σταθερὰν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 4).

2) Ἐὰν $PO = \frac{AB}{2}$, κατασκευάζεται κύκλος (σχ. 2). Ἡ περίπτωσις αὕτη μνημονεύεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ 16ον θεώρημα τοῦ Χ. βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

3) Ἐὰν $PO > \frac{AB}{2}$, τοῦτο εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη κατα-

σκευῆς ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας ἡ μὲν σταθερὰ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ παράμετρος 2/Ρ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΡΘ εἶναι ὁ μέγας ἡμιάξων (σχ. 3).

Εἰς τὴν τρίτην ταύτην περίπτωσιν τὸ μέγιστον παραβαλλόμενον παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΡΟΚ = $(\mathrm{KN})^2$, ὅτε ΚΝ εἶναι ὁ μικρὸς ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως. Εἶναι φανερὰ ἡ ἰσχὺς τοῦ θεωρήματος, ὅταν ἡ ΡΟ, μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς $\frac{AB}{2}$ δὲν εἶναι κάθετος ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, ἀλλὰ πλαγία.

ZUSSAMMENFASSUNG

Nach der von Moritz Cantor gegebenen Erklärung der 27. Satz des VI. Buches der Flemente von *Euklid,* der erste Satz, der in der Geschichte der Mathematik über Maximum vorkommt, als Funktion geschrieben besagen würde: $X(a-X)$ erhält seinen grössten Wert durch $X = \frac{a}{2}$.

E. Stamatis teilt mit, dass der Satz gilt allgemein, d. h. wenn die von der Mitte der gegebenen geraden Linie a gezogene gerade Linie kleiner, gleich oder grösser als $\frac{a}{2}$ ist.

ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ. — **Περὶ μιᾶς βορικούχου καθ' αὐτὸ ἀλκαλικῆς θειοπηγῆς παρὰ τὴν Παλαιοβράχαν Φθιώτιδος,** *ὑπὸ* ***Μιχ. Λ. Περτέση.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Γεωργ. Ἰωακείμογλου.

Εἰς ἀπόστασιν τριῶν περίπου χιλιομέτρων Β.Δ. τοῦ χωρίου Παλαιοβράχα, ἐντὸς τῆς κοιλάδος τοῦ Σπερχειοῦ, ἀναβλύζει ὑπόθερμος μεταλλικὴ πηγὴ χρησιμοποιουμένη ἀπὸ πολλῶν ἐτῶν ὑπὸ τῶν κατοίκων τῶν πέριξ χωρίων πρὸς λουτροθεραπείαν.

Ἡ ἀνάβλυσις γίνεται νῦν ἐκ τοῦ πυθμένος δεξαμενῆς κοινῶν λουτρῶν, διαστάσεων 4×6 μέτρων περίπου. Ἡ κατ' ἐκτίμησιν ὑδροπαροχὴ τῆς πηγῆς ἀνέρχεται εἰς 150 κυβ. μέτρα κατὰ 24ωρον. Τὴν πηγὴν αὐτὴν ἐπεσκέφθημεν τὴν 9ην Ἰουλίου τοῦ 1953 πρὸς ἐκτέλεσιν ἐπιτοπίων προσδιορισμῶν καὶ μετρήσεων ὡς καὶ διὰ τὴν λῆψιν δειγμάτων ὕδατος πρὸς πλήρη χημικὴν ἀνάλυσιν. Διὰ μέσου τοῦ ὕδατος τῆς πηγῆς ἐκλύονται κατὰ πυκνὰ διαστήματα φυσαλλίδες καυσίμων ἀερίων, εἰς τὴν χημικὴν ἀνάλυσιν τῶν ὁποίων θέλομεν προβῇ προσεχῶς.

Ἡ ὅλη περιοχὴ τῆς πηγῆς ἀποτελεῖται ἐκ στρωμάτων φλύσχου, ἤτοι γεωλο-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑι ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΕΩΣ ΤΩΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ

ΕΤΟΣ 1954: ΤΟΜΟΣ 29ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1955

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.— **Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις,** ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

Εἰσαγωγή.

Εἰς τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, δημιουργήσαντες τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἠγνόουν ὅμως τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους θεωροῦσι δημιούργημα τῶν νεωτέρων χρόνων. Ἀντίθετον γνώμην διατυποῖ ὁ ἡμέτερος ἀκαδημαϊκὸς κ. Μιχαὴλ Στεφανίδης γράφων ὅτι ἡ θεωρία «τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν» ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν Εὔδοξον [1]. Ἔρευναν τοῦ προβλήματος τούτου ἐπεχείρησαν πολλοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων μνημονεύομεν τὸν Zeuthen [2], τὸν T. Heath, ὅστις ἡρμήνευσε τὸν 5ον ὁρισμὸν τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸν ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὔδοξον [3], καὶ τοὺς H. Hasse καὶ H. Scholz [4]. Οἱ τελευταῖοι καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι 1) Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, διότι δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς. 2) Δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς, διότι δὲν εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, καὶ 3) Δὲν εἶχον τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, διότι δὲν ἤθελον νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς (σ. 79 τῆς μεταφράσεως εἰς τὴν ἑλληνικήν).

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται, κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς διὰ τῆς παραθέσεως χωρίων ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ἑρμηνείας τινῶν ἐξ αὐτῶν, ὡς καὶ διὰ τῆς ἑρμηνείας τοῦ 35ου θεωρήματος τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

1. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς. Ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν γράφει «πάντα προσήγορα καὶ ρητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν» καὶ «ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν πεμπάδος» Εἰς τοῦτο νοεῖται ἡ $\sqrt{2 . 5^2 - 1} = 7$ ὡς ρητὸς ἀριθμὸς (546, C).

---

* E. STAMATIS, Über die Irrationalenzahlen bei den Alten.

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 103, Ἀθῆναι, 1938.

2. Mathematische Annalen, σ. 222, 1896.

3. The thirteen books of Euclid's Elements καὶ *Ε. Σταμάτη,* Εὐκλείδου Γεωμετρία - θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. II, σ. 20, Ἀθῆναι 1953. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν βιβλίων.

4. Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Charlottenburg 1928. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ τοῦ Φ. Βασιλείου καὶ Χ. Καπνουκάγια, 1934.

Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς προκειμένου τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{720}$ γράφει: «Ἐπεὶ οὖν αἱ ΨΚ (=720) ρητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι ληψόμεθα». Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 720 δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν... κλπ. (Μετρικά, τόμ. III σ. 18—20, Schoene, Teubner, 1903).

II. Ὁ Πλάτων εἰς τὸν Θεαίτητον γράφει:

Θεαίτητος. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος. ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Σωκράτης. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

Θεαίτητος. Ἔμοιγε δοκοῦμεν. σκόπει δὲ καὶ σύ.

Σωκράτης. Λέγε.

Θεαίτητος. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν. τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Σωκράτης. Καὶ εὖ γε.

Θεαίτητος. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

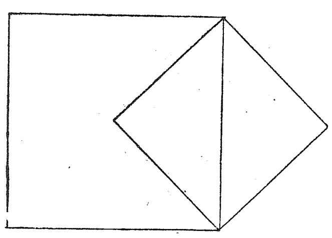
Σωκράτης. Κάλλιστα. Ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Θεαίτητος. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύναται. Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον (147 d — 148 b). Δηλαδή: Ὁ Θεόδωρος ἠσχολήθη μὲ τὰς τετραγωνικὰς ρίζας ἀριθμῶν, καὶ μὲ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ μὲ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδείξας ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 3 καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 5, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπέδειξε τὴν ἀσυμμετρίαν δι' ἑκάστην τῶν ριζῶν $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$... μέχρι τῆς $\sqrt{17}$. ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Δὲν ἔχει νόημα νὰ λέγεται ὅτι ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ μέγεθος $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ μέγεθος 3.

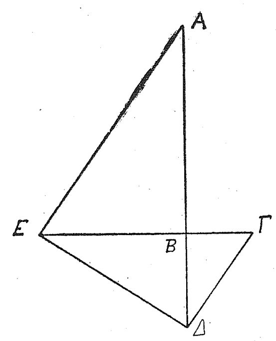
Εἰς δὲ τὴν Ἐπινομίδα:

«Ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής. ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοιοῖ [1], ταύτῃ ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες» (990d — 991α).

Οἱ ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἡ μοῖρα, ἡ τύχη, ἡ ἰδιότης τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι ὅτι οὗτοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ὅμοιος κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt{2}$, ρ). Ἡ γεωμετρία ὅμως ἀποδεικνύει ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1\times1=1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (σχ. 1), ὥστε οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ $1\times1=1$ καὶ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως



Σχ. 1.



Σχ. 2.

ὅμοιοι, νὰ ὑπόκεινται δηλ. εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων δὲν ὁμιλεῖ περὶ «ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν» ὡς ἑρμηνεύεται ὑπό τινων [2].

Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[3]{2}$ δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιος πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt[3]{2}$, ρ). Ἡ στερεομετρία ὅμως ἀποδεικνύει (δήλιον πρόβλημα, σχ. 2) ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1\times1\times1=1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}$, ὥστε οἱ στερεοὶ ἀριθμοὶ $1\times1\times1=1$ καὶ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι, δηλ. νὰ ὑπόκεινται εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων ὁμιλεῖ διὰ τοὺς ὁμοίους κατὰ τὴν στερεὰν φύσιν ἀριθμούς, τοὺς ὄντας γινόμενον τριῶν παραγόντων καὶ οὐχὶ διὰ τοὺς ὁμοίους στερεοὺς ἀριθμούς.

1. Ὁμοίᾳ.

2. E. *Des Places,* Le passage mathématique de l'Epinomis et la théorie des irrationelles. Revue des études grecques, σ. 546, 1935, καὶ *Paul - Henri Michel,* De Pythagore à Euclide, σ. 505, 1950, Paris.

III. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ Ἠθικὰ Νικομάχεια γράφει:

«Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ» (Ε' ΙΙΙ. 8).

Εἰς δὲ τὰ Μετὰ τὰ φυσικά λέγει:

«Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν. ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται» (1021α 4).

Δηλαδὴ ὁ Ἀριστοτέλης ὁμιλεῖ περὶ μὴ συμμέτρων ἀριθμῶν.

IV. Τὸ 35ον θεώρημα τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνῳ. Δηλαδή, νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι μέσον, τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν (δηλ. πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης). Ἢ νὰ κατασκευασθῇ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν θετικῶν ριζῶν αὐτῆς νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν αὐτῆς νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, καὶ τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ριζῶν νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν.

Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Τυχοῦσα εὐθεῖα ρ λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ρητή.

2. Εὐθεῖαι μήκει σύμμετροι ἢ μήκει ἀσύμμετροι λέγονται αἳ ἔχουσαι ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

3. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι ἢ δυνάμει ἀσύμμετροι λέγονται, ἐκεῖναι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα ἔχουσιν ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

4. Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μέσον, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι τῆς μορφῆς ρ, $\rho\sqrt{\alpha}$ ἢ $\rho\sqrt{\alpha}$, $\rho\sqrt{\beta}$, ἔνθα ρ ρητὴ καὶ α, β οὐχὶ τετράγωνοι. Ὅταν δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου περιέχῃ τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἢ ὅταν ἐπίπεδος ἀριθμὸς περιέχῃ τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

5. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον περιέχει τὸν παράγοντα $\rho\sqrt[4]{\alpha}$ (ἢ $\rho\sqrt[4]{\alpha\beta}$) καὶ καλεῖται μέση. Εἶναι φανερὸν ὅτι

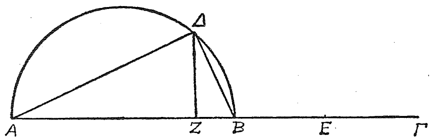
ἡ ρ $\sqrt[4]{\alpha}$ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ, ρ $\sqrt{\alpha}$, ἐξ οὗ καὶ αἰτιολογεῖται ὁ ὅρος μέση καὶ μέσον.

6. Ἐὰν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ>ΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὡς ὀρθογώνιον, ἔχον πλευρὰς ἀσυμμέτρους, τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τοῦτο σημαίνει: νά εὑρεθῶσιν αἱ ἀσύμμετροι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

$$x^2 - AB\,x + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$$

$$\text{αἱ } x_1 = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2} \quad \text{καὶ } x_2 = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν λαμβάνει δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους τὰς ΑΒ> ΒΓ (σχ. 3), ὥστε ΑΒ×ΒΓ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ ἀσύμμετρος πρὸς ΑΒ.



Σχ. 3.

Ἡ εὕρεσις τῶν δύο μέσων.

1. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ γ, δ οὐχὶ τετράγωνοι καὶ εὐθεῖα ρητὴ ἡ Α=ρ Τῶν γ, δ, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\omega = \rho \cdot \frac{\delta}{\gamma}$. Τῶν ρ, ω εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $B = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, (Χ. 6, πόρισμα). Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (Χ. 10).

2. Ἔστωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α^2, β^2, ὥστε $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος καὶ εὐθεῖα ρητὴ Α=ρ. Πρὸς εὕρεσιν τῶν δύο τούτων τετραγώγων ἀριθμῶν λαμβάνομεν δύο ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς ἀρτίους ἢ περιττούς, τοὺς μ, ν, ὁπότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι $\mu=\kappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$ καὶ $\kappa:\xi=\sigma:\tau$ (κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι). Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα τοῦ Χ. 28 εἶναι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἢ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ οὐχὶ τετράγωνος [μν=

$= \alpha^2$ κατὰ τὸ IX. 1, καὶ $\left(\frac{\mu - \nu}{2} - 1\right)^2 = \beta^2$]. Μὲ διάμετρον τὴν εὐθεῖαν ρ γράφομεν ἡμικύκλιον. Τῶν λ, α^2, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\varphi = \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$, καὶ τῶν ρ, φ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ρ, $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (X. 30), (ρ πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$). Ἡ ρ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθεται πλευραὶ εἶναι $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$.

3. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων 1 καὶ 2 εὑρέθησαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ καὶ $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμμετρος πρὸς ρ.

Τῶν ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $AB = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$.

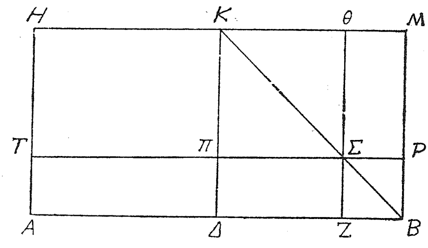
Τῶν $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $B\Gamma =$

$$= \frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Αἱ $AB > B\Gamma$ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$, AB μήκει ἀσύμμετροι (X. 32, δεύτερον μέρος).

Ἐπὶ τῆς AB γράφει ἡμικύκλιον (σχ. 3) καὶ παρὰ τὴν AB παραβάλλει ὡς ὀρθογώνιον τὸ $\frac{B\Gamma^2}{4}$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα. Τοῦτο σημαίνει τὴν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν καὶ ἀνίσων ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $X^2 - ABX + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$.

Ἡ ὕπαρξις τῶν ῥιζῶν τούτων εἶναι ἐξησφαλισμένη ἐκ τῶν 27 καὶ 28 τοῦ VI τῶν Στοιχείων. Αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ παραβαλλομένου ὀρθογωνίου αἱ AZ, ZB (X. 16 λῆμμα). Αὗται εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἐπειδὴ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$, AB εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. (X. 18). [Ἡ εὕρεσις τῶν AZ, ZB γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ (σχ. 4) ὑψοῦμεν κάθετον τὴν $ΔΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΜΗ φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον ΚΒ.



(Σχ. 4)

Τὴν διαφορὰν $\frac{ΑΒ^2}{4} - \frac{ΒΓ^2}{4}$ μετασχηματιζόμενον εἰς τετράγωνον πλευρᾶς $\frac{1}{2}\sqrt{ΑΒ^2 - ΒΑ^2} = ΚΠ$, καὶ τὸ τετράγωνον ΚΠΣΘ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΚΔΒΜ. Ὁ ἀπομένων γνώμων $ΠΔΒΜΘΣ = ΑΖ \times ΖΣ = ΑΖ \times ΖΒ = \frac{ΒΓ^2}{4}$ καὶ ἐλλείπει τὸ τετράγωνον σχῆμα ΖΒΡΣ διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΡΤ][1].

Αἱ ΑΖ, ΖΒ (σχ. 3) ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι

$$ΑΖ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{ΑΒ^2 - ΒΓ^2}$$

$$ΖΒ = \frac{ΑΒ}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ΑΒ^2 - ΒΓ^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ΑΒ, ΒΓ διὰ τῶν τιμῶν των θὰ ἔχωμεν

$$ΑΖ = \frac{ϱ}{2}\left(\frac{δ}{γ}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{α}{β}\right)^2}}\right] = \frac{ϱ}{2}\left(\frac{δ}{γ}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{κξστ}{\left(\frac{κξ-στ}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

1. Μερικὴ περίπτωσις τοῦ 28 τοῦ VI τῶν στοιχείων περὶ ἧς ἡμετέρα ἀνακοίνωσις ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν γενομένη διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 10-12-1953. Ἰδὲ καὶ *Ε. Σταμάτη* «Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. ΙΙ σ. 300. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1953, Ἀθῆναι.

$$ZB = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

δηλαδὴ τὰς ἀσυμμέτρους ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$X^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.\ \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = o.$$

ἢ

$$X^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.\ \frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\kappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2} = o.$$

Ἐκ τοῦ Ζ (σχ. 3) ὑψοῖ τὴν κάθετον ΖΔ καὶ φέρει τὰς ΑΔ, ΔΒ. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι αἱ ζητούμεναι κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσαι τὰς αἰτουμένας ἰδιότητας. Αἱ $ΑΔ = \sqrt{ΑΒ\,.\,ΑΖ}$, $ΔΒ = \sqrt{ΑΒ\,.\,ΖΒ}$ ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν ΑΒ,ΑΖ,ΖΒ θὰ εἶναι

$$ΑΔ = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

$$ΔΒ = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

ἤτοι αἱ θετικαὶ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$X^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0, \quad ἢ$$

$$X^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\kappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2} = 0.$$

Ἡ ἀσυμμετρία τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ ἡ ἀσυμμετρία τοῦ γινομένου τῶν ριζῶν τούτων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν ἐκφράζονται διὰ πράξεων ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις γίνεται γεωμετρικῶς.

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Interpretation einiger Stellen aus Platon und Aristoteles, so wie der genaueren Interpetation des 35. Satzes des X. Buches der Elemente Euklids, teilte E. Stamatis mit, dass die Alten Griechen nicht nur die Irrationalgrössen, sondern auch die Irrationalzahlen kannten.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1955: ΤΟΜΟΣ 30ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1956

L'étude chimique présente une communication préliminaire d'une travail detaillé dont les résultats analytiques seront publiés prochainement.

De plus les semmences et les fleurs de tous les espèces du colchique grec seront l'objet d'une autre communication.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

Α'. Εἰς τὸ τρίτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «κύκλου μέτρησις», ὁ Ἀρχιμήδης διὰ ν' ἀποδείξῃ ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον παντὸς κύκλου εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$, μεγαλύτερος δὲ τοῦ $3\,\frac{10}{71}$, χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ στηρίζεται εἰς τὰς ἀκεραίας λύσεις τῶν δύο διοφαντικῶν ἐξισώσεων $y^2 = 3x^2 - 2$ καὶ $y^2 = 3x^2 + 1$, τὰς ὁποίας ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα ἐπίσης ἄνευ ἀποδείξεως.

Τινὲς ἐκ τῶν ἑρμηνευτῶν τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, φρονοῦσιν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις εἶναι ἐπινόησις τοῦ Συρακοσίου σοφοῦ. Τοῦτο δὲν φαίνεται πιθανόν· διότι ὁ Ἀρχιμήδης, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν σῳζομένων ἔργων του, ὁσάκις χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐρεύνας αὐτοῦ μαθηματικὰς προτάσεις ἀποδειχθείσας ὑπ' ἄλλων χρησιμοποιεῖ αὐτὰς ἄνευ ἀποδείξεως.

Τὸ πιθανώτερον εἶναι ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις ἦσαν γνωσταὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους καὶ δὴ καὶ εἰς τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον. Ἔνδειξίς τις ἀφορῶσα εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον ἰσχυρισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ μαθηματικὸν χωρίον τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος (147D—148B).

Κατὰ τοὺς τελευταίους δύο αἰῶνας ἐγένοντο πολλαὶ προσπάθειαι ἀποδείξεως τῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους χρησιμοποιουμένων ἀναποδείκτως προτάσεων τούτων. Ὁ T. Heath[1], γράφει, δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ἡ ὀρθοτέρα ἑρμηνεία τῶν ἀνωτέρω προτάσεων ἐγένετο ὑπὸ τῶν Hultsch - Hunrath διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως:

$$\alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} > \sqrt{\alpha^2 \pm \beta} > \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha \pm 1},$$

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Geometrischer Beweis der archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$.**

1 Archimedes Werke (Deutsch von F. Kliem, S. 72, Verlag O. Häring, Berlin 1914).

ἔνθα $\alpha^2 \pm \beta$ ἀκέραιος μὴ τετράγωνος καὶ α^2 ὁ ἐγγὺς πρὸς τοῦτον τετράγωνος (ἀναλόγως τῆς ἑκάστοτε περιπτώσεως μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ). Ἐκτὸς τῆς μεθόδου Hultsch-Hunrath μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Heath καὶ αἱ ἑξῆς: De Lagny, Zeuthen, Tannery, Heilermann, Rodet. Ἐπὶ πλέον ἀναφέρονται ἐπίσης ὡς ἑρμηνευταὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ οἱ Hauber, Buzengeiger, Radicke, Pessl, Oppermann, Alexejeff, Schönborn[1].

Κατωτέρω παραθέτομεν ἐν περιλήψει τὴν μέθοδον Heilermann, διότι αὕτη στηριζομένη εἰς τοὺς ἐκ τετραγώνων σχημάτων πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς παρουσιάζει συγγένειάν τινα πρὸς τὴν ἡμετέραν μέθοδον. Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον[2] οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
$S_1 = S_0 + D_0$	$D_1 = 2S_0 + D_0$
$S_2 = S_1 + D_1$	$D_2 = 2S_1 + D_1$
$S_3 = S_2 + D_2$	$D_3 = 2S_2 + D_2$
. . . .	. . . .
$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$	$D_n = 2S_{n-1} + D_{n-1}$

Ἐὰν $S_0 = 1$ καὶ $D_0 = 1$, οἱ λόγοι D_n/S_n ὁδηγοῦσιν εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

Ὁ Heilermann ἀντὶ τοῦ 2 εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις θέτει τυχόντα ἀριθμὸν α (μὴ τετράγωνον) καὶ λαμβάνει τὸ ἑπόμενον σχῆμα:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
$S_1 = S_0 + D_0$	$D_1 = \alpha S_0 + D_0$
$S_2 = S_1 + D_1$	$D_2 = \alpha S_1 + D_1$
$S_3 = S_2 + D_2$	$D_3 = \alpha S_2 + D_2$
. . . .	. . . .
$S_n = S_{n-1} + D_{n-1}$	$D_n = \alpha S_{n-1} + D_{n-1}$

Οἱ λόγοι D_n/S_n ἐκφράζουσι κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{\alpha}$. Οὕτως, ἐὰν θέσωμεν $\alpha = 3$, $S_0 = 1$, $D_0 = 2$, λαμβάνομεν τοὺς λόγους,

---

[1] Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden, Leipzig 1882, von Sigmund Günther.

[2] Theonis Smyrnaei, Philosophi Platonici, (ἐκδ. E. Hiller, σ. 43 κ.ἑ., Leipzig 1878) καὶ Ε. ΣΤΑΜΑΤΗ, ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8 κ. ἑ., *Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων*, Ἀθῆναι 1953.

$$\frac{D_0}{S_0}=\frac{2}{1},\ \frac{D_1}{S_1}=\frac{5}{3},\ \frac{D_2}{S_2}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4},\ \frac{D_3}{S_3}=\frac{19}{11},\ \frac{D_4}{S_4}=\frac{52}{30}=\frac{26}{15},\ \frac{D_5}{S_5}=\frac{71}{41},$$

$$\frac{D_6}{S_6}=\frac{194}{112}=\frac{97}{56},\ \frac{D_7}{S_7}=\frac{265}{153},\ \frac{D_8}{S_8}=\frac{362}{209},\ \frac{D_9}{S_9}=\frac{989}{571},\ \frac{D_{10}}{S_{10}}=\frac{1351}{780}\ \text{κλπ.}$$

Οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα, ἐνῷ οἱ ἀρτίας τάξεως ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα. Τοῦτο εἶναι κοινὸν καὶ διὰ τὰς δύο ἀκολουθίας, ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι εἶναι:

$$\frac{2}{1}>\frac{7}{4}>\frac{26}{15}>\frac{97}{56}>\frac{362}{209}>\frac{1351}{780}\cdots>\sqrt{3}\cdots>\frac{989}{571}>\frac{265}{153}>\frac{71}{41}>\frac{19}{11}>\frac{5}{3}.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ὁδηγεῖ, ὡς ἀποδεικνύει ὁ Heilermann, ταχύτερον πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐὰν χρησιμοποιηθῇ οὐ μόνον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{\alpha}$, ἀλλὰ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\beta\sqrt{\alpha}$, ἔνθα ὁ β ἐκλέγεται οὕτω πως, ὥστε τὸ $\beta^2\alpha$ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ α) νὰ κεῖται ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον πρὸς τὴν μονάδα. Ὅθεν ἐὰν θέσωμεν $\alpha=\frac{27}{25}$, ὥστε $\sqrt{\alpha}=\frac{3}{5}\sqrt{3}$ ἔχομεν (ἐὰν τεθῇ $D_0=S_0=1$)

$$S_1=2,\ D_1=\frac{52}{25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\sim\frac{5}{3}\cdot\frac{26}{25}\ \text{ἢ}\ \frac{26}{15}$$

$$S_2=\frac{102}{25},\ D_2=\frac{54+52}{25}=\frac{106}{25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\sim\frac{5}{3}\cdot\frac{106}{25}\ \text{ἢ}\ \frac{265}{153}$$

$$S_3=\frac{208}{25},\ D_3=\frac{102\cdot 27}{25\cdot 25}+\frac{106}{25}=\frac{5404}{25\cdot 25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\sim\frac{5404}{25\cdot 208}\cdot\frac{5}{3}\ \text{ἢ}\ \frac{1351}{780},\ \text{κλπ.}$$

Β'. Ἡ παρ' ἡμῶν ἀνακοινουμένη κατωτέρω μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$ καὶ ἐπιλύσεως τῶν μνημονευθεισῶν δύο διαφαντικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται εἰς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς προκύπτοντας ἐκ τῆς θεωρήσεως ὁμοίων ρόμβων ἐχόντων τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

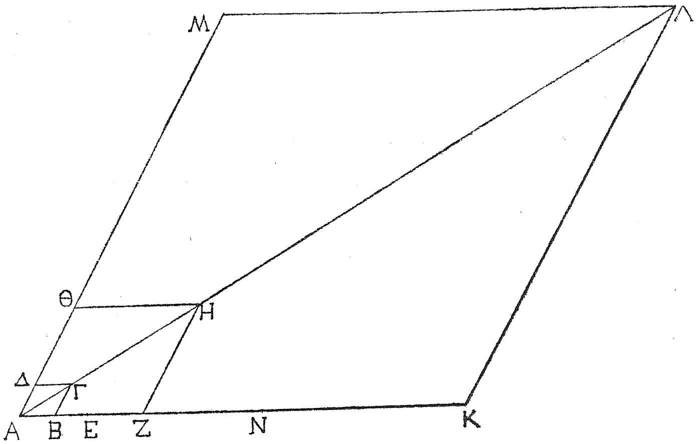
Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ $12^{ον}$ θεώρημα τοῦ II Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $ΑΓ^2=3ΑΒ^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρά, δηλαδὴ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος, τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ.

Συνεπῶς $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}=\sqrt{3}$.

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΕΖ=ΑΓ, ὥστε ΑΖ=2ΑΒ+ΕΖ.

Κατὰ τὸ $10^{ον}$ θεώρημα τοῦ II Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον

17



Σχ. 1.

μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν[1]) θὰ ἔχωμεν :

$$AZ^2 + EZ^2 = 2AB^2 + 2BZ^2.$$

Ἐπειδὴ $$BZ = BE + EZ$$

θὰ εἶναι $$AZ^2 + EZ^2 = 2AB^2 + 2(BE + EZ)^2$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ EZ^2 λαμβάνομεν

$$AZ^2 = 2AB^2 + 2BE^2 + EZ^2 + 4BE \times EZ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $$BE = AB \text{ καὶ } EZ = A\Gamma$$

θὰ ἔχωμεν $$AZ^2 = 4AB^2 + A\Gamma^2 + 4AB \times A\Gamma.$$

Ἄρα καὶ $$3AZ^2 = 12AB^2 + 3A\Gamma^2 + 12AB \times A\Gamma.$$

Ἀλλὰ $$A\Gamma^2 = 3AB^2.$$

Ὅθεν εἶναι $$3AZ^2 = 9AB^2 + 4A\Gamma^2 + 12AB \times A\Gamma = (3AB + 2A\Gamma)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AZ = 2AB + EZ = 2AB + A\Gamma$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AB + 2A\Gamma$ εἶναι διαγώνιος ρόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ρόμβον τοῦτον, τὸν ΑΖΗΘ ἔνθα $AH = 3AB + 2A\Gamma$ καὶ $AH^2 = 3AZ^2$. Ἐὰν καλέσωμεν $AB = \alpha$ καὶ $A\Gamma = \delta$ θὰ ἔχωμεν $AZ = 2\alpha + \delta$, (1) καὶ $AH = 3\alpha + 2\delta$, (2).

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λαμβάνομεν τμῆμα $ZN = AZ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΝ λαμβάνομεν τμῆμα $NK = AH$, ὥστε $AK = 2AZ + NK$.

---

[1] Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 καὶ 393. ὑπὸ Hultsch, ἔκδ. Kroll, *Teubner*. Καὶ Paul - Henri Michel, De Pythagore à Euclid, σ. 438, Paris 1950, *(Soc. d'édition Les Belles Lettres)*.

Πάλιν κατὰ τὸ $10^{ον}$ θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$AK^2 + NK^2 = 2AZ^2 + 2ZK^2.$$

Ἐπειδὴ $ZK = ZN + NK$ θὰ εἶναι

$$AK^2 + NK^2 = 2AZ^2 + 2(ZN + NK)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ NK^2 λαμβάνομεν

$$AK^2 = 2AZ^2 + 2ZN^2 + NK^2 + 4ZN \times NK.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ZN = AZ$ καὶ $NK = AH$, θὰ ἔχωμεν

$$AK^2 = 4AZ^2 + AH^2 + 4AZ \times AH.$$

Ἄρα καὶ $$3AK^2 = 12AZ^2 + 3AH^2 + 12AZ \times AH.$$

Ἀλλὰ $AH^2 = 3AZ^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AK^2 = 9AZ^2 + 4AH^2 + 12AZ \times AH = (3AZ + 2AH)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AK = 2AZ + NK = 2AZ + AH$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AZ + 2AH$ εἶναι διαγώνιος ρόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ρόμβον τοῦτον, τὸν ΑΚΛΜ ἔνθα $A\Lambda = 3AZ + 2AH$ καὶ $A\Lambda^2 = 3AK^2$. Ἐὰν εἰς τὰς ΑΚ καὶ ΑΛ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ΑΖ, ΑΗ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$A\Lambda = 12\alpha + 7\delta \text{ καὶ } AK = 7\alpha + 4\delta.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ρόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων.

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν,

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α	δ
$\alpha_1 = 2\alpha + \delta$	$\delta_1 = 3\alpha + 2\delta$
$\alpha_2 = 7\alpha + 4\delta$	$\delta_2 = 12\alpha + 7\delta$
$\alpha_3 = 26\alpha + 15\delta$	$\delta_3 = 45\alpha + 26\delta$
$\alpha_4 = 97\alpha + 56\delta$	$\delta_4 = 168\alpha + 97\delta$
$\alpha_5 = 362\alpha + 209\delta$	$\delta_5 = 627\alpha + 362\delta$
.	.
.	.
.	.

Ἢ

α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$

$$\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4 \qquad \delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} \qquad \delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{19}{11}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{71}{41}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{265}{153} \quad \text{κλπ.}$$

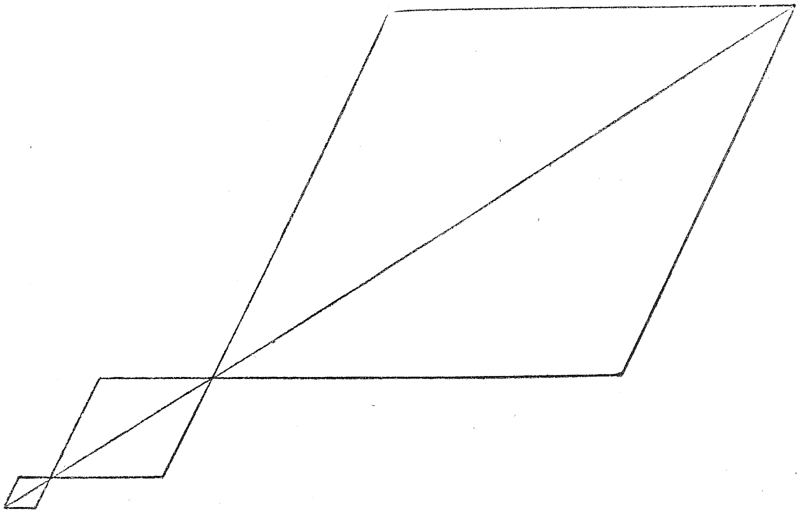
Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{7}{4}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{26}{15}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{97}{56}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{362}{208}, \quad \frac{\delta_6}{\alpha_6} = \frac{1351}{780} \quad \text{κλπ.}$$

Ἤτοι εἶναι

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \cdots \sqrt{3} \cdots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

Αἱ τιμαὶ δ_ν, α_ν, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 2$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 + 1$.



Σχ. 2.

[Σημ. Εἰς τὸ σχ. 2, οἱ ρόμβοι ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως].

ZUSAMMENFASSUNG

Archimedes benutzt in seiner «Kreismessung» ohne eine Erklärung dafür anzugeben, die Beziehungen

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

und $$265^2 = 3.153^2 - 2, \qquad 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

E. Stamatis teilt, auf Grund der Theorie der Seiten-und Diagonalzahlen, wie sie uns von Theon von Smyrna und Proklos überliefert ist, einen geometrischen Beweis dieser Beziehungen mit.

Es sei ein Rhombus ΑΒΓΔ (Fig. 1) gegeben, dessen grösserer Winkel gleich einem äusseren Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist, $AB = \alpha_1$ die Seite, $A\Gamma = \delta_1$ die grössere Diagonale des Rhombus.

Nach Euklid II, 12 ist $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$, und $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. Auf die Verlängerung von AB tragen wir eine Strecke $BE = AB = \alpha_1$ und $EZ = A\Gamma = \delta_1$ ab. Dann ist nach Euklid II, 10 (was Proklos für die Seiten- und Diagonalzahlen erwähnt) $(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2$.

Aus dieser

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2.$$

Es gilt aber auch $3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1^2$, und weil $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$ ist, so haben wir

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (3\alpha_1 + 2\alpha_1)^2.$$

Diese Beziehung drückt die Tatsache aus, dass $(2\alpha_1 + \delta_1)$ die Seite, $(3\alpha_1 + 2\delta_1)$ die grössere Diagonale eines ähnlichen, wie der gegebene Rhombus ΑΒΓΔ ist. Das Verfahren lässt sich unendlich wiederholen.

Folglich ergeben sich die entsprechenden Seiten- und Diagonalzahlen:

	Seitenzahlen	Diagonalzahlen
1. Rhombus	α_1	δ_1
2. »	$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
3. »	$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
4. »	$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
ν. »	$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

1. Setzen wir $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die steigende Folge

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \cdots \sqrt{3},$$

und $$265^2 = 3.153^2 - 2.$$

2. Setzen wir $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die fallende Folge

$$\sqrt{3}\cdots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1},$$

und $1351^2 = 3.780^2 + 1$. Wir haben also, auf Grund der von Theon von Smyrna und Proklos überlieferten Methode, die Beziehungen die Archimedes, ohne Erklärung, als bekannt, angibt.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ.— **Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων,** *ὑπὸ **Εὐαγγ. Σταμάτη*** * Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται κατὰ τὴν παράδοσιν ἡ ἀπόδειξις τοῦ περιφήμου ὁμωνύμου θεωρήματος (Εὐκλείδου Ι, 47), ὡρισμέναι ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$ καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων [1]. Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἐν γένει ἀποδίδεται μεταξὺ ἄλλων τὸ ΙΙ Βιβλίον καὶ τὸ πλεῖστον τῶν ἀριθμητικῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καὶ ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $y^2 = 2x^2 \mp 1$, (1), αἵτινες χρησιμεύουσι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κατὰ προσέγγισιν ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς $\sqrt{2}$. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) ὀνομάζονται, ὡς γνωστόν, πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, διότι οἱ μὲν ἐκ τούτων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς πλευράς, οἱ δὲ εἰς τὰς διαγωνίους τετραγώνων [2].

Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν διεσώθη ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ ἔχει ὡς κάτωθι:

	Πλευρικοὶ ἀριθμοί	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί
1.	1	1
2.	$1 + 1 = 2$	$2 \cdot 2 + 1 = 3$
3.	$2 + 3 = 5$	$2 \cdot 2 + 3 = 7$

---

* **EVANGELOS STAMATIS, A contribution to the investigation of the geometrical algebra of the Pythagoreans.**

[1] ΜΙΧΑΗΛ ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 55-65 καὶ 102-3, Ἀθῆναι 1938.— Πρόκλος εἰς σχόλια Εὐκλείδου Ι, σ. 65 καὶ 438. Ἔκδ. Friedlein, Teubner.— Ἰαμβλίχου V. P. 246, ἔκδ. L. Deubner, Teubner.

[2] Theonis Smyrnaei, Philosophi Platoniki, ἔκδ. E. Hiller, σ. 43, Teubner. Ε. ΣΤΑΜΑΤΗ, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8, (*Ὀργ. Ἐκδ. Σχολικῶν Βιβλίων*, 1953 Ἀθῆναι).— PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclide. p 438, Paris 1950.— (*Soc. d'éd. Les Belles Lettres*). M. CANTOR Vorlesungen über Geschichte der Mathematik u. Theon von Smyrna.— T. HEATH A history of Greek mathematics I, p. 91, Oxford 1921 at the Clarendon Press.— R. MORIS COHEN and J. E. DRABKIN, A source book in Greek science, p. 43, McGraw-Hill book company inc. New York, Toronto, London, 1984.

4.	$5 + 7 = 12$	$2 \cdot 5 + 7 = 17$
5.	$12 + 17 = 29$	$2 \cdot 12 + 17 = 41$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

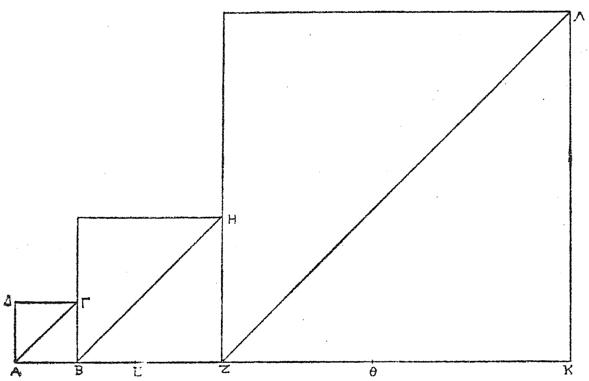
Εἶναι δὲ $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$,

καὶ

$$1^2 = 2 \cdot 1^2 - 1$$
$$3^2 = 2 \cdot 2^2 + 1$$
$$7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$$
$$17^2 = 2 \cdot 12^2 + 1$$
$$41^2 = 2 \cdot 29^2 - 1 \quad \text{κλπ.}$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ νόμου σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Πρόκλου[1] καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω τετράγωνον πλευρᾶς $AB = \alpha_1$ καὶ διαγωνίου $A\Gamma = \delta_1$, (σχ. 1), ὅτε εἶναι



Σχ. 1.

$\delta_1^2 = 2\alpha_1^2$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE = AB = \alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ = A\Gamma = \delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 10 θὰ εἶναι $(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2\,(\alpha_1 + \delta_1)^2$.

Καὶ ἐπειδὴ $\delta_1^2 = 2\alpha_1^2$, θὰ ἔχωμεν δι' ἀφαιρέσεως τούτου κατὰ μέλη ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως, $(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 2(\alpha_1 + \delta_1)^2$. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(\alpha_1 + \delta_1) = BE + EZ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(2\alpha_1 + \delta_1) = AB + BE + EZ$ εἶναι διαγώνιος τετραγώνου, ἡ ΒΗ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΖ λάβωμεν τμῆμα

[1] Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. ΙΙ σ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. ὑπὸ F. HULTSCH, ἔκδ. Kroll, Teubner.

$Z\Theta = BZ$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $\Theta K = BH$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 10, θὰ λάβωμεν νέον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἡ $Z\Theta + \Theta K = 3\alpha_1 + 2\delta_1$, ἡ δὲ διαγώνιος ἡ $Z\Lambda = BK = 2BZ + \Theta K = 4\alpha_1 + 3\delta_1$.

Ὅθεν λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς σχῆμα

Πλευρικοὶ ἀριθμοί	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί
α_1	δ_1
$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$
$\alpha_3 = \alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$
$\alpha_4 = \alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$
.	.
.	.
.	.
.	.
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 1$, λαμβάνομεν τοὺς κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2 = 2x^2 \mp 1$, ἢ $\delta_\nu^2 = 2\alpha_\nu^2 + (-1)^\nu$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ἐκ τῆς Πολιτείας τοῦ Πλάτωνος πληροφορούμεθα ὅτι οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἦσαν γνωστοὶ εἰς αὐτόν. Ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν» (546 c). Ἐνταῦθα ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ δὴ καὶ μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, τὴν $7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ Πρόκλου, ὅστις γράφει «ὅπου δὲ τὸ σύνεγγυς ἀγαπῶμεν, οἷον εὑρόντες ἐν γεωμετρίᾳ τετράγωνον τετραγώνου διπλάσιον, ἐν ἀριθμοῖς δὲ οὐκ ἔχοντες ἑνὸς δέοντος φαμὲν ἄλλον ἄλλου διπλάσιον ὑπάρχειν, ὥσπερ τοῦ ἀπὸ τῆς πεντάδος ὁ ἀπὸ τῆς ἑπτάδος διπλάσιον ἑνὸς δέοντος». Καὶ ἀλλαχοῦ «οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος εἰ μὴ λέγει τις τὸν σύνεγγυς. ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ' τοῦ ἀπὸ τοῦ ε' διπλάσιός ἐστιν ἑνὸς δέοντος[1]. (Εἶναι δηλ. $7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$).

2. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Κύκλου Μέτρησις» χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \text{ καὶ } 265^2 = 3.153^2 - 2, \ 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

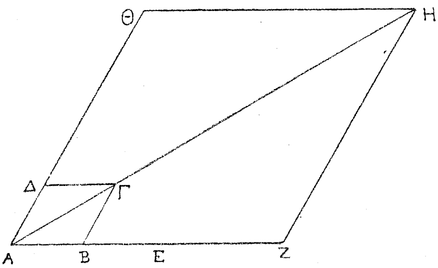
Γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τῶν σχέσεων τούτων ὑπεβάλομεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν[2].

Αὕτη συνδέεται πρὸς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς. Θεωροῦμεν

[1] Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην I, σ. 61 καὶ 427, ἔκδ. G. FRIEDLEIN, Teubner.

[2] Βλ. Πρακτικά, ἀνωτ., σ. 255 κ. ἑξ.

ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ (σχ. 2), τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα γωνία, ἡ ΑΒΓ, νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 12, ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν $ΑΒ = α_1$ καὶ τὴν $ΑΓ = δ_1$, ἥτις βεβαίως εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι $δ_1^2 = 3α_1^2$, καὶ συνεπῶς $δ_1 : α_1 = \sqrt{3}$. Ἐφαρμόζομεν τώρα ἀκριβῶς τὴν ὑπὸ τοῦ Πρόκλου ὑποδεικνυομένην μέθοδον διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἐκ τετραγώνων σχημάτων προκυπτόντων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $ΒΕ = ΑΒ = α_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $ΕΖ = ΑΓ = δ_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 10 θὰ ἔχωμεν,



Σχ. 2.

$$(2α_1 + δ_1)^2 + δ_1^2 = 2α_1^2 + 2\ (α_1 + δ_1)^2,$$

καὶ ἐκ ταύτης

$$(2α_1 + δ_1)^2 = 4α_1^2 + 4α_1\ δ_1 + δ_1^2\ , \qquad (1).$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3(2α_1 + δ_1)^2 = 12α_1^2 + 12α_1δ_1 + 3δ_1^2$. Ἀλλὰ $δ_1^2 = 3α_1^2$. Ἑπομένως

$$3(2α_1 + δ_1)^2 = 9α_1^2 + 12α_1δ_1 + 4δ_1^2 = (3α_1 + 2δ_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2α_1 + δ_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(3α_1 + 2α_1)$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ὁμοίου ρόμβου πρὸς τὸν ΑΒΓΔ τοῦ ΑΖΗΘ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λάβωμεν τμῆμα ἴσον πρὸς ΑΖ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ἴσον πρὸς ΑΗ, τότε ἔχομεν κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον τὴν πλευρὰν καὶ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον νέου ὁμοίου ρόμβου πρὸς τὸν ἀρχικόν, ἤτοι πλευρὰ μὲν εἶναι ἡ $2ΑΖ + ΑΗ$, διαγώνιος δὲ μεγαλυτέρα, ἡ $3ΑΖ + 2ΑΗ$, ἢ $7α_1 + 4δ_1$ καὶ $12α_1 + 7δ_1$ ἀντιστοίχως. Καλοῦντες τὰς τιμὰς τῶν πλευρῶν πλευρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰς τιμὰς τῶν μεγαλυτέρων διαγωνίων, τῶν συνεχῶν κατὰ τὸν ἀνωτέρω νόμον κατασκευαζομένων ρόμβων, διαμετρικοὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
$α_1$	$δ_1$
$α_2 = 2α_1 + δ_1$	$δ_2 = 3α_1 + 2δ_1$
$α_3 = 2α_2 + δ_2$	$δ_3 = 3α_2 + 2δ_2$
$α_4 = 2α_3 + δ_3$	$δ_4 = 3α_3 + 2δ_3$
$α_5 = 2α_4 + δ_4$	$δ_5 = 3α_4 + 2δ_4$
.	.
.	.
.	.
$α_ν = 2α_{ν-1} + δ_{ν-1}$	$δ_ν = 3α_{ν-1} + 2δ_{ν-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha=1$, $\delta=1$ λαμβάνομεν

(A)

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
$\alpha_1=1$	$\delta_1=1$
$\alpha_2=3$	$\delta_2=5$
$\alpha_3=11$	$\delta_3=19$
$\alpha_4=41$	$\delta_4=71$
$\alpha_5=153$	$\delta_5=265$
$\vdots$	$\vdots$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2-2$, ἤτοι εἶναι:

$$1^2=3\cdot1^2-2$$
$$5^2=3\cdot3^2-2$$
$$19^2=3\cdot11^2-2, \quad \text{κλπ.}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$ λαμβάνομεν:

(B)

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$
$\vdots$	$\vdots$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2+1$, ἤτοι εἶναι

$$2^2 = 3\cdot1^2 + 1$$
$$7^2 = 3\cdot4^2 + 1$$
$$26^2 = 3\cdot15^2 + 1, \quad \text{κλπ.}$$

Οἱ λόγοι $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ τῶν (A) καὶ (B) ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ἡ μὲν τῶν (A) εἶναι αὔξουσα, ἡ δὲ τῶν (B) φθίνουσα. Τὸ κοινὸν φράγμα τούτων εἶναι ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι εἶναι

$$1)\ \frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{41}{71}<\frac{265}{153}<\cdots\sqrt{3}\cdots<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1},$$

καὶ 2) $265^2=3\cdot153^2-2$, $1351^2=3\cdot780^2+1$, ὡς χρησιμοποιεῖ ταῦτα ἄνευ ἀποδείξεως, ὡς γνωστά, ὁ Ἀρχιμήδης·

II.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζον καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$\delta_\nu^2 = \lambda \alpha_\nu^2 + (\lambda - 4)^\nu (-1)^\nu$, ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$ καὶ $\lambda \geqq 5$, ἀκέραιος μὴ τετράγωνος), καὶ ὅτι ἡ $\sqrt{\lambda}$ εἶναι τὸ κοινὸν φράγμα δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς αὐξούσης καὶ μιᾶς φθινούσης, διότι ἡ ἀπόδειξις τούτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ πρὸς τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας.

Παρέχομεν τὴν ἀπόδειξιν διὰ τὰς ἐξισώσεις

$$\delta_\nu^2 = 5\alpha_\nu^2 + (5-4)^\nu (-1)^\nu$$
$$\delta_\nu^2 = 6\alpha_\nu^2 + (6-4)^\nu (-1)^\nu$$
$$\delta_\nu^2 = 7\alpha_\nu^2 + (7-4)^\nu (-1)^\nu$$
$$\delta_\nu^2 = 8\alpha_\nu^2 + (8-4)^\nu (-1)^\nu$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu^2 = 17\alpha_\nu^2 + (17-4)^\nu (-1)^\nu,$$

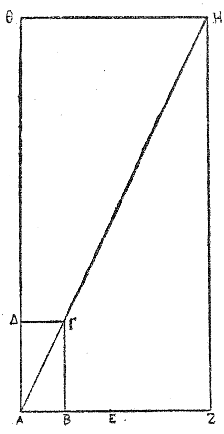
καὶ τὴν $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots \sqrt{17}$. Εἶναι δὲ γνωστὸν ἐκ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος ὅτι ὁ Θεόδωρος[1] (ὁ Κυρηναῖος, ὅστις θεωρεῖται Πυθαγόρειος) ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5} \cdots \sqrt{17}$, (Θεαίτητος 147 D — 148 B).

II. 1. $\delta^2_\nu = 5\alpha^2_\nu + (5-4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{5}$ ·

Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 3), ἔνθα ἔστω $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 2\alpha_1$ καὶ ἡ διαγώνιος $A\Gamma = \delta_1^2$. Εἶναι ἄρα $\delta_1^2 = 5\alpha_1^2$, καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{5}$.

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE = AB = \alpha_1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα $EZ = A\Gamma = \delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 10 θὰ ἔχωμεν.

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2, \text{ καὶ ἐκ ταύτης}$$



Σχ. 3.

[1] 1. PAULY - WISSOWA, Realenzyklopädie unter Theodoros. Dort Literaturangabe: M. CANTOR, E. FRANK, F. HULTSCH, G. JUNGE, H. VOGT, H. G. ZEUTHEN, EVA SACHS, T. BONNESEN, H. HASSE - H. SCHOLZ, T. HEATH. — 2. Und W. L. WAN DER WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer II. Die Theorie des Irrationalen, *Mathem. Annalen*, **120**, 5./6. Heft, 1949, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg. — 3. K. REIDEMEISTER, Die Arithmetik der Griechen, 1940, Leipzig. — 4. J. E. HOFMANN, Geschichte der Mathematik I, S. 26 - 27, Berlin, 1953. (*Sammlung Göschen*, 226. Walter de Gruyter und C°,) 5. ROBERT S. BRUMBAUGH, Plato's Mathematical Imagination, p. 146, *Indiana University Press*, Bloomington, 1954.

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2$$

Εἶναι ἄρα καὶ $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 5\delta_1^2$.

Ἀλλὰ $\delta_1^2 = 5\alpha_1^2$. Ἑπομένως

$$5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1^2 + 5\alpha_1^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (5\alpha_1 + 2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1 + \delta_1) = AZ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(5\alpha_1 + 2\delta_1) = AH$ εἶναι διαγώνιος ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ ΑΖΗΘ. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον τῆς κατασκευῆς ἐν συνεχείᾳ ὁμοίων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν:

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 5\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 5\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 5\alpha_3 + 2\delta_3$
. . . .	. . . .
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_5 = 5\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 4, & \delta_2 &= 9 \\ \alpha_3 &= 17, & \delta_3 &= 38 \\ \alpha_4 &= 72, & \delta_4 &= 161 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{38}{17} < \cdots \sqrt{5} \cdots < \frac{161}{72} < \frac{9}{4}$, καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 5 \cdot 1^2 - 1 \\ 9^2 &= 5 \cdot 4^2 + 1 \\ 38^2 &= 5 \cdot 17^2 - 1 \\ &\vdots \\ \delta_\nu^2 &= 5 \cdot \alpha_\nu^2 + (5-4)^\nu (-1)^\nu. \end{aligned}$$

ΙΙ. 2. $\delta_\nu^2 = 10\alpha_\nu^2 + (10-4)^\nu(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{10}$.

Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα 3 λαμβάνομεν $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 3\alpha_1$, ὁπότε $\delta_1^2 = 10\alpha_1^2$, καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{10}$.

Ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην κατασκευὴν (ΙΙ. 1) λαμβάνομεν

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2$$

Εἶναι ἄρα καὶ $10(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 40\alpha_1^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 10\delta_1^2$

Ἀλλὰ $\delta_1^2 = 10\alpha_1^2$. Ἑπομένως

$$10(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 40\alpha_1^2 + 60\alpha_1^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (10\alpha_1 + 2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1 + \delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(10\alpha_1 + 2\delta_1)$ διαγώνιος ὁμοίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ὁ νόμος τῆς κατασκευῆς τῶν ὁμοίων ἐν συνεχείᾳ παραλληλογράμμων εἶναι προφανής. Ὅθεν θὰ εἶναι

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 10\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 10\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 10\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 10\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\alpha_2 = 4 \qquad \delta_2 = 14$$
$$\alpha_3 = 22 \qquad \delta_3 = 68$$
$$\alpha_4 = 112 \qquad \delta_4 = 356$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{68}{22} < \cdots \sqrt{10} \cdots < \frac{356}{112} < \frac{14}{4}$

καὶ

$$2^2 = 10 \cdot 1^2 - 6$$
$$14^2 = 10 \cdot 4^2 + 6^2$$
$$68^2 = 10 \cdot 22^2 - 6^3$$
$$356^2 = 10 \cdot 112^2 + 6^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu^2 = 10 \cdot \alpha_\nu^2 + (10 - 4)^\nu (-1)^\nu$$

II. 3 $\qquad \delta_\nu^2 = 17\alpha^2 + (17\text{-}4)^\nu\,(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{17}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα 3 λαμβάνομεν $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 4\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$, ὁπότε εἶναι $\delta_1^2 = 17\alpha_1^2$ καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \sqrt{17}$. Ἐφαρμόζομεν πάλιν τὴν κατασκευὴν (II. 1) ὁπότε ἔχομεν $(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2$.

Εἶναι ἄρα καὶ $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+17\delta_1^2$. Ἀλλὰ $\delta_1^2=17\alpha_1^2$. Ἑπομένως $17(2\alpha_1+\delta_1)^2=68\alpha_1^2+221\alpha_1^2+68\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(17\alpha_1+2\delta_1)^2$.

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(17\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος ὁμοίου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν ὁμοίων ὀρθογ. παραλληλογράμμων εἶναι προφανής. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν

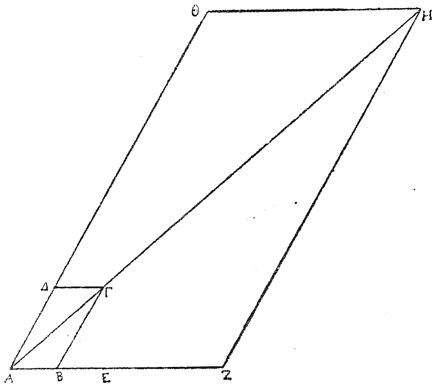
Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 17\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 17\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 17\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 17\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 4 & \delta_2 = 21 \\ \alpha_3 = 29 & \delta_3 = 110 \\ \alpha_4 = 168 & \delta_4 = 713 \end{array}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{110}{29} < \cdots\sqrt{17}\cdots < \frac{713}{168} < \frac{21}{4}$, καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 17\cdot 1^2 - 13 \\ 21^2 &= 17\cdot 4^2 + 13^2 \\ 110^2 &= 17\cdot 29^2 - 13^3 \\ 713^2 &= 17\cdot 168^2 + 13^4 \\ &\vdots \\ \delta_\nu^2 &= 17\cdot\alpha_\nu^2 + (17-4)^\nu(-1)^\nu \end{aligned}$$



Σχ. 4.

ΙΙ. 4.

Θεωροῦμεν τὸ ρομβοειδὲς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 4) ἔνθα γωνία

ΑΒΓ$=120^\circ$, ΑΒ$=\alpha_1$, ΒΓ$=2\alpha_1$

καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ΑΓ$=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 12 θὰ εἶναι $\delta_1^2=7\alpha_1^2$ ὁπότε $\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{7}$. Πάλιν ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν (ΙΙ. 1), ὁπότε λαμβάνοντες ΒΕ$=\alpha_1$, ΕΖ$=\delta_1$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν Εὐκλείδην ΙΙ, 10.

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+\delta_1)^2, \quad \text{ἐξ ἧς}$$

$$(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\alpha_1^2+4\alpha_1\delta_1+\delta_1^2.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $7(2\alpha+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+7\delta_1^2$.

Ἀλλὰ $\delta_1^2=7\alpha_1^2$. Ἑπομένως

$$7(2\alpha_1+\delta_1)^2=28\alpha_1^2+21\alpha_1^2+28\alpha_1\delta_1+4\delta_1^2=(7\alpha_1+2\delta_1)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1+\delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(7\alpha_1+2\delta_1)$ διαγώνιος μεγαλυτέρα ὁμοίου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ρομβοειδοῦς παραλληλογράμμου. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον κατασκευῆς ὁμοίων ρομβοειδῶν παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν:

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 7\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 7\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 7\alpha_3 + 2\delta_3$
.	.
.	.
.	.
.	.
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 7\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$, λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 4 & \delta_2 = 11 \\ \alpha_3 = 19 & \delta_3 = 50 \\ \alpha_4 = 88 & \delta_4 = 233 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{50}{19} < \cdots \sqrt{7} \cdots < \frac{233}{88} < \frac{11}{4}$,

καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 7\cdot1^2 - 3 \\ 11^2 &= 7\cdot4^2 + 3^2 \\ 50^2 &= 7\cdot19^2 - 3^3 \\ 233^2 &= 7\cdot88^2 + 3^4 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \delta_\nu^2 &= 7\cdot\alpha_\nu^2 + (7-4)^\nu(-1)^\nu. \end{aligned}$$

II. 5. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα 4 λαμβάνομεν $AB=\alpha_1$, $B\Gamma=3\alpha_1$, $A\Gamma=\delta_1$. Κατὰ τὸν Εὐκλείδην II, 12 εἶναι $\delta_1^2=13\alpha_1^2$, καὶ $\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\sqrt{13}$. Πάλιν ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὡς καὶ προηγουμένως, ἤτοι λαμβάνομεν $BE = \alpha_1$, $EZ = \delta_1$ ὁπότε κατὰ τὸ II, 10 τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2\,, \quad \text{ἐξ ἧς}$$

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2\,.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $13(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 52\alpha_1^2 + 52\alpha_1\delta_1 + 13\delta_1^2$.

Ἀλλὰ $\delta_1^2 = 13\alpha_1^2$· ἑπομένως

$$13(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 52\alpha_1^2 + 117\alpha_1^2 + 52\alpha_1\delta^2 + 4\delta_1 = (13\alpha_1 + 2\delta_1)^2\,.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μὲν $(2\alpha_1 + \delta_1)$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $(13\alpha_1 + 2\delta_1)$ διαγώνιος μεγαλυτέρα, ὁμοίου ρομβοειδοῦς παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ἀρχικόν. Κατὰ τὸν προφανῆ νόμον κατασκευῆς τῶν ὁμοίων ρομβοειδῶν παραλληλογράμμων θὰ ἔχωμεν

Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί.
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 13\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 13\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 13\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 13\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 = 4 & \delta_2 = 17 \\ \alpha_3 = 25 & \delta_3 = 86 \\ \alpha_4 = 136 & \delta_4 = 497 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Εἶναι δε $\frac{2}{1} < \frac{86}{25} < \cdots \sqrt{13} < \cdots \frac{497}{136} < \frac{17}{4}$, καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 13 \cdot 1^2 - 9 \\ 17^2 &= 13 \cdot 4^2 + 9^2 \\ 86^2 &= 13 \cdot 25^2 - 9^3 \\ 497^2 &= 13 \cdot 136^2 + 9^4 \\ &\vdots \\ \delta_\nu^2 &= 13\alpha_\nu^2 + (13-4)^\nu(-1)^\nu\,. \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν κατασκευῶν καὶ ἀποδείξεων καθίσταται αὐτονόητος ὁ σχηματισμὸς ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν δι' ἀλγεβρικοῦ καθαρῶς ὑπολογισμοῦ καὶ οὐχὶ γεωμετρικοῦ, διὰ τὴν $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\cdots$ καὶ τὰς συναφεῖς ἐξισώσεις.

Οὕτω θὰ εἶναι

II. 6. Διὰ $\quad \delta_\nu^2 = 6\alpha_\nu^2 + (6-4)^\nu(-1)^\nu \quad$ καὶ $\sqrt{6}$.

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 & & \delta_1 & \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & & \delta_2 = 6\alpha_1 + 2\delta_1 & \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & & \delta_3 = 6\alpha_2 + 2\delta_2 & \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & & \delta_4 = 6\alpha_3 + 2\delta_3 & \\
\vdots & & \vdots & \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & & \delta_\nu = 6\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1} &
\end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 10 \\
\alpha_3 = 18 & \delta_3 = 44 \\
\alpha_4 = 80 & \delta_4 = 196
\end{array}$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{44}{18} < \cdots \sqrt{6} \cdots < \frac{196}{80} < \frac{10}{4}$, καὶ

$$\begin{aligned}
2^2 &= 6\cdot 1^2 - 2 \\
10^2 &= 6\cdot 4^2 + 2^2 \\
44^2 &= 6\cdot 18^2 - 2^3 \\
196^2 &= 6\cdot 80^2 + 2^4 \\
&\vdots \\
\delta_\nu^2 &= 6\cdot\alpha_\nu^2 + (6-4)^\nu(-1)^\nu .
\end{aligned}$$

II. 7. Διὰ $\quad \delta_\nu^2 = 8\alpha_\nu^2 + (8-4)^\nu(-1)^\nu$ καὶ $\sqrt{8}$.

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 & & \delta_1 & \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & & \delta_2 = 8\alpha_1 + 2\delta_1 & \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & & \delta_3 = 8\alpha_2 + 2\delta_2 & \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & & \delta_4 = 8\alpha_3 + 2\delta_3 & \\
\vdots & & \vdots & \\
\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & & \delta_\nu = 8\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1} &
\end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\quad \delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 12
\end{array}$$

$$\alpha_3 = 20 \qquad \delta_3 = 56$$
$$\alpha_4 = 96 \qquad \delta_4 = 272$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{56}{20} < \cdots \sqrt{8} \cdots < \frac{272}{96} < \frac{12}{4}$, καὶ

$$2^2 = 8 \cdot 1^2 - 4$$
$$12^2 = 8 \cdot 4^2 + 4^2$$
$$59^2 = 8 \cdot 20^2 - 4^3$$
$$272^2 = 8 \cdot 96^2 + 4^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu^2 = 8 \cdot \alpha_\nu^2 + (8 - 4)^\nu (-1)^\nu .$$

II. 8. Διὰ $\delta_\nu^2 = 11\alpha_\nu^2 + (11 - 4)^\nu (-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{11}$.

$$\alpha_1 \qquad\qquad \delta_1$$
$$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 \qquad \delta_2 = 11\alpha_1 + 2\delta_1$$
$$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 \qquad \delta_3 = 11\alpha_2 + 2\delta_2$$
$$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 \qquad \delta_4 = 11\alpha_3 + 2\delta_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} \qquad \delta_\nu = 11\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$\alpha_2 = 4 \qquad \delta_2 = 15$$
$$\alpha_3 = 23 \qquad \delta_3 = 74$$
$$\alpha_4 = 120 \qquad \delta_4 = 401,$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{74}{23} < \cdots \sqrt{11} \cdots < \frac{401}{120} < \frac{15}{4}$, καὶ

$$2^2 = 11 \cdot 1^2 - 7$$
$$15^2 = 11 \cdot 4^2 + 7^2$$
$$74^2 = 11 \cdot 23^2 - 7^3$$
$$401^2 = 11 \cdot 120^2 + 7^4$$
$$\vdots$$
$$\delta_\nu^2 = 11\alpha_\nu^2 + (11 - 4)^\nu (-1)^\nu .$$

II. 9. Διὰ $\delta_\nu^2 = 12\alpha_\nu^2 + (12-4)^\nu(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{12}$.

$$
\begin{array}{llllll}
\alpha_1 & & & \delta_1 & & \\
\alpha_2 & = 2\alpha_1 + \delta_1 & & \delta_2 & = 12\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 & = 2\alpha_2 + \delta_2 & & \delta_3 & = 12\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 & = 2\alpha_3 + \delta_3 & & \delta_4 & = 12\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\cdot & & & \cdot & \\
\cdot & & & \cdot & \\
\cdot & & & \cdot & \\
\alpha_\nu & = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & & \delta_\nu & = 12\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}.
\end{array}
$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 16 \\
\alpha_3 = 24 & \delta_3 = 80 \\
\alpha_4 = 128 & \delta_4 = 448.
\end{array}
$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{80}{24} < \cdots \sqrt{12} \cdots < \frac{448}{128} < \frac{16}{4}$, καὶ

$$
\begin{array}{rcll}
2^2 & = & 12\cdot 1^2 & - 8 \\
16^2 & = & 12\cdot 4^2 & + 8^2 \\
80^2 & = & 12\cdot 24^2 & - 8^3 \\
448^2 & = & 12\cdot 128^2 & + 8^4 \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\delta_\nu^2 & = & 12\cdot\alpha_\nu^2 & + (12-4)^\nu(-1)^\nu .
\end{array}
$$

II. 10. Διὰ $\delta_\nu^2 = 14\alpha_\nu^2 + (14-4)^\nu(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{14}$.

$$
\begin{array}{llllll}
\alpha_1 & & & \delta_1 & & \\
\alpha_2 & = 2\alpha_1 + \delta_1 & & \delta_2 & = 14\alpha_1 + 2\delta_1 \\
\alpha_3 & = 2\alpha_2 + \delta_2 & & \delta_3 & = 14\alpha_2 + 2\delta_2 \\
\alpha_4 & = 2\alpha_3 + \delta_3 & & \delta_4 & = 14\alpha_3 + 2\delta_3 \\
\cdot & & & \cdot & \\
\cdot & & & \cdot & \\
\cdot & & & \cdot & \\
\alpha_\nu & = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & & \delta_\nu & = 14\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}
\end{array}
$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$ λαμβάνομεν

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_2 = 4 & \delta_2 = 18 \\
\alpha_3 = 26 & \delta_3 = 92 \\
\alpha_4 = 144 & \delta_4 = 548
\end{array}
$$

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{92}{26} < \cdots \sqrt{14} \cdots < \frac{548}{144} < \frac{18}{4}$, καὶ

$$\begin{aligned}
2^2 &= 14\cdot 1^2 - 10\\
18^2 &= 14\cdot 4^2 + 10^2\\
92^2 &= 14\cdot 26^2 - 10^3\\
548^2 &= 14\cdot 144^2 + 10^4\\
&\vdots\\
\delta_\nu^2 &= 14\cdot \alpha_\nu^2 + (14-4)^\nu(-1)^\nu .
\end{aligned}$$

II. 11. Διὰ $\delta_\nu^2 = 15\alpha_\nu^2 + (15-4)(-1)^\nu$, καὶ $\sqrt{15}$.

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 & & \delta_1 & \\
\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 & & \delta_2 = 15\alpha_1 + 2\delta_1 & \\
\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2 & & \delta_3 = 15\alpha_2 + 2\delta_2 & \\
\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3 & & \delta_4 = 15\alpha_3 + 2\delta_3 & \\
\vdots & & \vdots & \\
\alpha^\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} & & \delta_\nu = 15\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1} &
\end{array}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 27$, $\alpha_4 = 152$, $\ldots$ $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 19$, $\delta_3 = 98$, $\delta_4 = 601$ λαμβάνομεν

Εἶναι δὲ $\frac{2}{1} < \frac{98}{27} < \cdots \sqrt{15} \cdots < \frac{601}{152} < \frac{19}{4}$, καὶ

$$\begin{aligned}
2^2 &= 15\cdot 1^2 - 11\\
19^2 &= 15\cdot 4^2 + 11^2\\
98^2 &= 15\cdot 27^2 - 11^3\\
601^2 &= 15\cdot 152^2 + 11^4\\
&\vdots\\
\delta_\nu^2 &= 15\cdot \alpha_\nu^2 + (15-4)^\nu(-1)^\nu .
\end{aligned}$$

III. 1. Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 10 γεωμετρικὴ κατασκευή, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πρόκλος, ἄγει εἰς τὴν ταυτότητα (1), $(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2$, τὴν ἀποδεικνυομένην κατὰ τὸ εὐκλείδειον θεώρημα II, 4. Ἐὰν $\delta_1^2 = \lambda\alpha_1^2$, ἔνθα

$\lambda \geqq 5$, ἀκέραιος μὴ τετράγωνος, θὰ εἶναι καὶ $(\lambda-4)\delta_1{}^2=(\lambda-4)\lambda\alpha_1{}^2$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$\lambda(2\alpha_1+\delta_1)^2=4\lambda\alpha_1{}^2+4\lambda\alpha_1\delta_1+(\lambda-4)\lambda\alpha_1{}^2+4\delta_1{}^2=(\lambda\alpha_1+2\delta_1)^2 .$$

Ἑπομένως θὰ εἶναι

	Πλευρικοὶ ἀριθμοί.	Διαμετρικοὶ ἀριθμοί·
1)	α_1	δ_1
	$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = \lambda\alpha_1 + 2\delta_1$
	$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = \lambda\alpha_2 + 2\delta_2$
	$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = \lambda\alpha_3 + 2\delta_3$
	.	.
	.	.
	.	.
	$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$,

2) $$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \cdots \sqrt{\lambda} \cdots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}, \quad (\alpha_1=1, \delta_1=2).$$

3) $$\delta_\nu{}^2 = \lambda\alpha_\nu{}^2 + (\lambda-4)^\nu(-1)^\nu$$

III. 2.

Εἶναι δυνατὸν ἡ $\sqrt{2}$ νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\alpha_\nu=2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu=\lambda\alpha_{\nu-1}+2\delta_{\nu-1}$, ὅταν $\lambda=2$. Τὴν μέθοδον ταύτην καλοῦμεν γενικὴν πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς μεθόδου τῆς διασωθείσης ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Πρόκλου, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν εἰδικήν.

Πρὸς σύγκρισιν παραθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα καὶ τῶν δύο μεθόδων.

Α΄. Μέθοδος εἰδική, $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}$.

$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 2$	$\delta_2 = 3$
$\alpha_3 = 5$	$\delta_3 = 7$
$\alpha_4 = 12$	$\delta_4 = 17$,
.	
.	
.	

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

$1^2=2\cdot 1^2-1$, $3^2=2\cdot 2^2+1$, $7^2=2\cdot 5^2-1$, $\cdots$ $\delta_\nu{}^2=2\alpha_\nu{}^2+(-1)^\nu$.

[Διὰ $\alpha_1=1$, $\delta_1=2$.

$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 4$
$\alpha_3 = 7$	$\delta_3 = 10$

$$\alpha_4 = 17 \qquad \delta_4 = 24\,.$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} > \frac{\delta_3}{\alpha_3} > \frac{\delta_5}{\alpha_5} > \cdots \sqrt{2} \cdots > \frac{\delta_6}{\alpha_6} > \frac{\delta_4}{\alpha_4} > \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2\cdot 1^2 + 2 \\ 4^2 &= 2\cdot 3^2 - 2\,. \\ 10^2 &= 2\cdot 7^2 + 2 \\ 24^2 &= 2\cdot 17^2 - 2 \\ &\vdots \\ \delta_\nu^{\,2} &= 2\alpha_\nu^{\,2} + (2-4)(-1)^\nu\,]. \end{aligned}$$

Β΄. Μέθοδος γενική, $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Διὰ $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \delta_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 3 & \delta_2 &= 4 \\ \alpha_3 &= 10 & \delta_3 &= 14 \\ \alpha_4 &= 34 & \delta_4 &= 48 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_2}{\alpha_2} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \cdots \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 1^2 &= 2\cdot 1^2 - 1 \\ 4^2 &= 2\cdot 3^2 - 2 \\ 14^2 &= 2\cdot 10^2 - 2^2 \\ 48^2 &= 2\cdot 34^2 - 2^3 \\ &\vdots \\ \delta_\nu^{\,2} &= 2\cdot\alpha_\nu^{\,2} + (2-4)^{\nu-1}.\,(-1)^\nu\,. \end{aligned}$$

Διὰ $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 & \delta_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= 4 & \delta_2 &= 6 \\ \alpha_3 &= 14 & \delta_3 &= 20 \\ \alpha_4 &= 48 & \delta_4 &= 68\,, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{2} \cdots < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_2}{\alpha_2} < \frac{\delta_1}{\alpha_1}\,.$$

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2\cdot 1^2 + 2 \\ 6^2 &= 2\cdot 4^2 + 2^2 \\ 20^2 &= 2\cdot 14^2 + 2^3 \\ 68^2 &= 2\cdot 48^2 + 2^4 \\ &\cdot \\ \delta_\nu{}^2 &= 2\cdot\alpha_\nu{}^2 + (2-4)^\nu.(-1)^\nu . \end{aligned}$$

Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους παρεχομένην τιμὴν τῆς $\sqrt{3}$ θὰ εἴχομεν, διὰ τὴν $\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{1} < \frac{4}{3} < \frac{14}{10} < \frac{48}{34} < \frac{164}{116} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{792}{560} < \frac{232}{164} < \frac{68}{48} < \frac{20}{14} < \frac{6}{4} < \frac{2}{1} .$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι προτιμοτέρα ἡ ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Πρόκλου διασωθεῖσα μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

SUMMARY

I 1. The law of formation of the side- and diameter-(diagonal-) numbers is explained by Theon of Smyrna. According to Proclus the related identity is proved by Euclid book II, proposition 10.

Side numbers $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu{}^2 = 2\alpha_\nu{}^2 \mp 1$. For $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ we have $\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \cdots \sqrt{2} \cdots < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

2. Archimedes for the arithmetical approximation to π starts from a greater and a lesser limit to the value of $\sqrt{3}$, which without remark as known,

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \quad 265^2 = 3\cdot 153^2 - 2, \quad 1351^2 = 3\cdot 780^2 + 1 .$$

We give the following interpretation on the archimedean formula, with pythagorean method of the side—and diagonal—numbers. In the figure 2 is $AB = \alpha_1$ the side, $A\Gamma = \delta_1$ the greater diagonal of the rhomb $AB\Gamma\Delta$, and the greater angle $AB\Gamma = 120°$. Then $\delta_1{}^2 = 3\alpha_1{}^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. According to Euclid II Prop. 10 we have

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1{}^2 = 2\alpha_1{}^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2$$

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1{}^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1{}^2, \qquad (1)$$

It is also $3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1{}^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1{}^2$, and because $\delta_1{}^2 = 3\alpha_1{}^2$

$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1{}^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1{}^2, = (3\alpha_1 + 2\delta_1)^2$. The law of formation of the corresponding side—and diagonal—numbers is evidently. Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

When	$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$	When	$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
	$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 5$		$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
	$\alpha_3 = 11$	$\delta_3 = 19$		$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
	$\alpha_4 = 41$	$\delta_4 = 71$		$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
	$\alpha_5 = 153$	$\delta_5 = 265$		$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
				$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$
and	$\delta_\nu^2 = 3\alpha_\nu^2 - 2$		and	$\delta_\nu^2 = 3\alpha_\nu^2 + 1$.	

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \cdots < \sqrt{3} \cdots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

II. In the following we start from the identity (1).

1. In the figure 3 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 2\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$. Then $\delta_1^2 = 5\alpha_1^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{5}$, and $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 5\delta_1^2$. Because

$\delta_1^2 = 5\alpha_1^2$ is $5(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 20\alpha_1^2 + 5\alpha_1^2 + 20\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (5\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers, $\delta_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2 = 5\alpha_\nu^2 + (5-4)^\nu (-1)^\nu$.

When $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$, $\frac{2}{1} < \frac{38}{14} < \cdots \sqrt{5} \cdots < \frac{161}{72} < \frac{9}{4}$.

2. In the same figure 3 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 3\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$. Then $\delta_1^2 = 10\alpha_1^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{10}$, and $10(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 40\alpha_1^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 10\delta_1^2$. Because $\delta_1^2 = 10\alpha_1^2$ is $10(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 100\alpha_1^2 + 40\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (10\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, diagonal numbers $\delta_\nu = 10\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$,

$\delta_\nu^2 = 10\alpha_\nu^2 + (10-4)^\nu (-1)^\nu$. When $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$,

$$\frac{2}{1} < \frac{68}{22} < \cdots \sqrt{10} \cdots < \frac{356}{112} < \frac{14}{4}.$$

3. In the same figure 3 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 4\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$ Then $\delta_1^2 = 17\alpha_1^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{17}$, and $17(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 68\alpha_1^2 + 68\alpha_1\delta_1 + 17\delta_1^2$. Because $\delta_1^2 = 17\delta_1^2 = 289\alpha_1^2 + 68\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (17\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

Side numbers $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, D. N. $\delta_\nu = 17\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$,

$$\delta_\nu^2 = 17\alpha_\nu^2 + (17-4)^\nu (-1)^\nu.$$

When $\alpha_1 = 1$ $\delta_1 = 2$, $\frac{2}{1} < \frac{110}{29} < \cdots \sqrt{17} \cdots < \frac{713}{168} < \frac{21}{14}$.

4. In the figure 4 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 2\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$. The angle $AB\Gamma = 120^\circ$. Then $\delta_1^2 = 7\alpha_1^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{7}$, and $7(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 28\alpha_1^2 + 28\alpha_1\delta_1 + 7\delta_1^2$. Because $\delta_1^2 = 7\alpha_1^2$, $7(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 49\alpha_1^2 + 28\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (7\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.

S.N., $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, D.N., $\delta_\nu = 7\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2 = 7\alpha_\nu^2 + (7-4)^\nu (-1)^\nu$.

When $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$, $\frac{2}{1} < \frac{50}{19} < \cdots \sqrt{7} \cdots < \frac{233}{88} < \frac{11}{4}$.

5. Jn the same figure 4 we take $AB = \alpha_1$, $B\Gamma = 3\alpha_1$, $A\Gamma = \delta_1$. Then $\delta_1^2 = 13\alpha_1^2$, $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{13}$, $13(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 52\alpha_1^2 + 52\alpha_1\delta_1 + 13\delta_1^2$.

Because $\delta_1^2 = 13\alpha_1^2$ is $13(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 169\alpha_1^2 + 52\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 \doteq (13\alpha_1 + 2\delta_1)^2$.
S.N., $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, D. N., $\delta_\nu = 13\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$, $\delta_\nu^2 = 13\alpha_1^2 + (13-4)^\nu(-1)^\nu$.

$$\frac{2}{1} < \frac{86}{25} < \cdots \sqrt{13} \cdots < \frac{497}{136} < \frac{17}{4}$$

In the same way we take the side—und the diagonal—numbers for the $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$. (We mention Theaetetus of Plato 147 D).

III. If $\lambda \gtreqless 5$, integer no square number and $\delta_1^2 = \lambda\alpha_1^2$, then $(\lambda-4)\delta_1^2 = (\lambda-4)\lambda\alpha_1^2$, and according to the identity (1)

$$\lambda(2\alpha_1+\delta_1)^2 = 4\lambda\alpha_1^2 + 4\lambda\ \alpha_1\delta_1 + \lambda\delta_1^2,$$
$$= 4\lambda\alpha_1^2 + (\lambda-4)\lambda\alpha_1^2 + 4\lambda\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (\lambda\alpha_1 + 2\delta_1)^2.$$

Side numbers	Diagonal numbers
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = \lambda\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = \lambda\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = \lambda\alpha_3 + 2\delta_3$
.	.
.	.
.	.
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \cdots \sqrt{\lambda} \cdots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}, \quad \text{and}$$

$\delta_\nu^2 = \lambda\alpha_\nu^2 + (\lambda-4)^\nu(-1)^\nu$. We take here always $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$. $\lambda = 2$ and $\lambda = 3$ are special cases.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

PAULY-WISSOWA: *Real Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaft:* unter Arithmetica, Theodoros.

J. E. HOFMANN: Geschichte der Mathematik I, Walter de Gruyter und Co, B. 226, Berlin, 1953.

ΜΙΧΑΗΛ ΣΤΕΦΑΝΙΔΗΣ: Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν φυσικῶν Ἐπιστημῶν. Ἀθῆναι, 1938.

M. R. COHEN-J. E. DRABKIN: A source book in Greek science. Mc Graw-Hill book company, inc. New York, Toronto, London, 1948.

A. REHM-K. VOGEL: Einleitung in die Altertumswissenschaft II, 5; Exakte Naturwissenschaften, Leipzig-Berlin, 1933.

ROBERT S. BRUMBAUGH: Plato's mathematical imagination. Indiana, University Press, Bloomington, 1954.

PAUL-HENRI MICHEL: De Pythagore à Euclide. *Soc. d' édit. Les Belles Lettres*, Paris, 1950.

B. L. van der WAERDEN: Die Arithmetik der Pythagoreer II, Die Theorie des Irrationalen. *Mathem. Annalen* B. **120**, Heft 5/6, 1949, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

K. Reidemeister: Die Arithmetik der Griechen. Leipzig - Berlin, 1940.
O. Neugebauer: The exact sciences in antiquity. Kopenhagen, 1951.
M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 1907, Teubner.
T. Heath: A history of Greek mathematics, I, II. Oxford at the Clarendon Press 1921.
K. Δ. Γεωργουλησ: Ἡ ἑλληνικὴ ἐπιστήμη, Ἐγκ. Λεξικὸν «Ἥλιος», Τόμος: Ἑλλὰς σ.;
W. A. Heidel: The heroic age of science. Baltimore 1933.
F. Enriques - G. Santillana: Storia del pensiero scientifico. Bologna 1932.
G. Loria: Le scienze esatte nell' Antica Grecia. Milano, 1895, 1914.
A. Rey: La science grecque. Paris, 1933.
P. Tannery: Mémoires scientifiques I, II, III. Toulouse, Paris.
H. Hasse - H. Scholz: Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik, Berlin-Charlottenburg 1928.

7. Kraus G., *Abh. Naturf. Ges. Halle,* **16** (1885) 372.
8. Molisch H., Microchemie der Pflanzen, 1913; *Ber. Bot. Ges.* **29** (1911) 487.
9. Nägeli C., *Beitr. Wiss. Bot.*, **2**, 187.
10. Niethammer A., *Biochem. Zeitschr.*, 1930, CCXX, S. 356.
11. Sanio, *Bot. Ztg.* (1857), p. 420.
12. Schenk, *Ebenda,* (1857), p. 497.
13. Trécul, *Bull. Soc. Bot.* (1858), p. 711.
14. Tunmann-Rosenthaler, Pflanzenmicrochemie. 1931.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων,** *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη****.
Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

Α΄. Τὸ β΄ θεώρημα τοῦ XII βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, ἦτο ἤδη γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμάσαντα περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων[1]. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, τὸ ἀπαντῶν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ στηρίζεται εἰς τὸ X, 1 θεώρημα τῶν Στοιχείων, ὅπερ ἐξ ἄλλου στηρίζεται εἰς τὸν ὁρισμὸν V, 4 τῶν Στοιχείων. Τὸ X, 1 θεώρημα εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὀνομαζόμενον «εἰδικὸν κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν $\left(\alpha_\nu \leqq \frac{1}{2}\alpha_{\nu-1}\right)$», ὁ δὲ ὁρισμὸς V, 4 «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν», διατυποῦται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (τετραγωνισμὸς παραβολῆς), «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου». Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ K_1, K_2 ἔχοντες ἀντιστοίχως διαμέτρους τὰς ΒΔ, ΖΘ. Λέγω ὅτι

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}. \tag{1}$$

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über den euklidischen Satz, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern.**

[1] ΕΥΔΗΜΟΥ ΤΟΥ ΡΟΔΙΟΥ καὶ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΤΟΥ ΑΦΡΟΔΙΣΙΕΩΣ μαρτυρίαι, ἀπαντώμεναι εἰς τὰ σχόλια τῶν Φυσικῶν Η΄ τοῦ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ ὑπὸ Σιμπλικίου. Ἔκδοσις τῆς *Πρωσσ. Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου* καὶ ἐν Pauly-Wissowa, *Real-Enzyclopaedie der classischen Altertums-Wissenschaften* (VIII. B, XVI Halbband, Sp. 1787), unter Hippokrates von Chios.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma} \tag{2}$$

ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $\lesseqgtr K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$$

ἔνθα $\Sigma < K_2$, καὶ ἔστω $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, ὅπου ε ἀπείρως μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον K_2 ἐγγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον, ... καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην ἐγγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων τῶν μεταξὺ πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X, 1 τῶν Στοιχείων. [Ἀκολουθεῖ ἡ ἀπόδειξις τούτου]· Ἔστω ὅτι τὸ πολύγωνον, μετὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ ὁποίου τ' ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ ε, εἶναι τὸ Π_2.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma + \varepsilon \tag{3}$$

καὶ ἄθροισμα κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$. (4)

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma. \tag{5}$$

Εἰς τὸν κύκλον K_1 ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} \tag{6}$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 < K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη $\Pi_2 > \Sigma$ Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, (α), ἔνθα Μ ἐπιφάνεια $< K_1$.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ (7)

ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἐκ τῆς (7) ἀνάπαλιν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$ (8)

Τῶν Σ, K_1, K_2 λαμβάνει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἔστω Τ,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \tag{9}$$

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν $\Sigma > K_2$ εἶναι ἄρα καὶ $K_1 > T$, (V, 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$. Ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἰς τὴν (α) ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1. Ὅθεν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\Sigma \lessgtr K_2$. Εἶναι ἄρα $\Sigma = K_2$ καὶ συνεπῶς $\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$.

Β′ Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, ὅπως καὶ τοῦ πρώτου, διὰ συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων ὡς ἑξῆς:

Ὑπετέθη $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $> K_2$, ὥστε $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ὅπου ε ἀπείρως μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον K_2 περιγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην περιγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ κύκλου K_2 ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου τινὸς νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε. [Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ, 1 τῶν Στοιχείων καὶ τὸ ἀνευρίσκομεν ἐφαρμοζόμενον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ α′ θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις» ἔνθα ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶς κύκλος ἰσοῦται πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ἄλλη δὲ πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ].

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon, \tag{1}$$

καὶ διαφορὰ κύκλου K_2 ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου $< \varepsilon$. (2)

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 < \Sigma, \tag{3}$$

ἂν καλέσωμεν Π_2 τὸ τελευταῖον πολύγωνον τὸ περιγραφὲν εἰς τὸν κύκλον K_2.

Εἰς τὸν κύκλον K_1 περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{\Theta Z^2}$. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_1$.

ZUSAMMENFASSUNG

Der euklidische Beweis, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern, lautet wie folgt: Gegeben zwei Kreise K_1, K_2, mit den Durchmessern ΒΔ bzw. ΖΘ. Ich behaupte $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{K_2}$, (1).

Wenn die Beziehung (1) nicht gilt, so muss $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei Σ eine Fläche $\leqslant K_2$ ist.

I. Es sei erstens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (2), $\Sigma < K_2$, und $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, wobei ε unendlich klein ist. Im Kreise K_2 schreiben wir ein Viereck, ein Achteck.... ein n-eck ein, bis der Unterschied zwischen einem Vieleck und dem Kreise K_2 kleiner als ε wird, (X, 1). Es sei dies das Vieleck Π_2. Wir haben also die Beziehungen $$K = \Sigma + \varepsilon, \tag{3}$$
Summe der Kreisabschnitte zwischen dem Kreis K_2 und Vieleck $\Pi_2 < \varepsilon$, (4)

Ziehen wir (4) von (3) ab, so bekommen wir
$$\Pi_2 > \Sigma. \tag{5}$$

Im Kreise K_1 schreiben wir dem Vieleck Π_2 ein ähnliches Vieleck Π_1 ein. Nach Euklid XII, 1 ist $$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}. \tag{6}$$

Aus (2) und (6) haben wir $$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}. \tag{7}$$

Weil $\Pi_1 < K_1$, so ist auch $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Das ist aber wegen (5), unmöglich. Also es gilt nicht $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma < K_1$ ist. Derselbe Beweis, dass $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: eine Fläche kleiner als K_1 nicht gilt. (8)

II. Es sei zweitens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (9), wobei $\Sigma > K_2$ ist.

Aus (9) ist $$\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}. \tag{10}$$

Zwischen Σ, K_1, K_2 finden wir die vierte Proportionale, es sei T,
$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \tag{11}$$

Weil $\Sigma > K_2$, so ist auch $K_1 > T$, (V, 14). Aus (10) und (11) haben wir $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$, $T < K_1$. Das aber ist, wegen (8) unmöglich. Weil die Beziehung $\Sigma \leqslant K_2$ nicht gilt, so ist $\Sigma = K_2$, und die Behauptung bewiesen.

E. Stamatis, gestützt auf das von Archimedes in seiner Kreismessung 1 angewandte Verfahren, teilt folgenden Beweis für den 2. Teil des euklidischen Satzes mit:

Es ist angenommen $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (1), $\Sigma > K_2$, $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, wobei ε unendlich klein ist.

Im Kreise K_2 beschreiben wir stets Vielecke bis der Unterschsied zwischen einem Vieleck und dem Kreise K_2 kleiner als ε wird, (X, 1 und Kreismessung von Archimedes 1). Es sei dies das Vieleck Π_2. Wir haben also die Beziehungen
$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \tag{2}$$

27

Summe der Abschnitte zwischen dem Vieleck Π_2 und dem Kreise $K_2 < \varepsilon$, (3)

Durch Addition von (3) und (2) bekommen wir $\Pi_2 < \Sigma$. (4)

Dem Kreise K_1 umschreiben wir ein dem Vieleck Π_2 ähnliches Vieleck, es sei Π_1. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (5)

Aus (1) und (5) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_2$ ist.

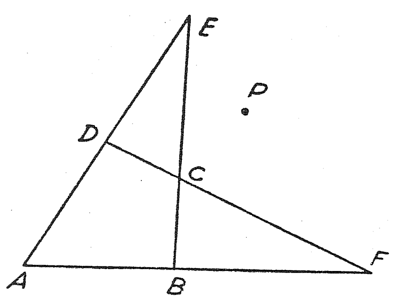
Weil nun $\Pi_1 > K_1$, so ist auch $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Dies ist aber wegen (4) unmöglich. Derselbe Beweis, dass $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_1$, nicht gilt. Es bleibt also $\Sigma = K_2$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—**Περὶ ἑνὸς θεωρήματος τῆς Γεωμετρίας τοῦ Morley-Lebesque,** *ὑπὸ Θ. **Βαροπούλου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Αἱ ἐσωτερικαὶ τριχοτόμοι τῶν γωνιῶν A,B,C *τριγώνου τυχόντος* ABC, *τεμνόμεναι καθορίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον.*

Ἕπεται γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως στηριζομένη εἰς τὰ ἑξῆς γνωστά.

1. *Ἔστω ἓν πλῆρες τετράπλευρον* ABCDEF. *Τὰ τρία ζεύγη εὐθειῶν* PA, PC; PB, PD; PE, PF *ἑνουσῶν τυχὸν σημεῖον* P *μὲ τὰς ἔναντι κορυφὰς εἶναι ἐν ἐνελείξει, δηλαδὴ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας* Px, Py.



Πράγματι αἱ ἐκ τοῦ P ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς κωνικάς, αἵτινες ἐφάπτονται τῶν τεσσάρων εὐθειῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἀποτελοῦν ἐνέλειξιν.

Μεταξὺ τῶν κωνικῶν τούτων εὑρίσκονται τὰ ζεύγη τῶν σημείων

A, C; B, D; E, F.

Ἐὰν αἱ γωνίαι (PA, PC), (PB, PD) ἔχουν τὰς αὐτὰς διχοτόμους Px, Py, τότε τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν γωνίαν (PE, PF), καθ' ὅσον Px, Py εἶναι συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ἑκάστου τῶν δύο ζευγῶν PA, PC; PB, PD.

2. Ἔστω P ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἓν τρίγωνον ABC. Ἡ συμμετρικὴ τῆς PA ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον εἶναι ἡ εὐθεῖα AP′, ἥτις μετὰ τῆς AC σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ἣν καὶ ἡ AP σχηματίζει μετὰ τῆς AB.

---

* **TH. VAROPOULOS, Sur un théorème de la géométrie de Morley-Lebesque.**

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1956: ΤΟΜΟΣ 31ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1956

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.— Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασιλ. Αἰγινήτου.

Α'

Εἰς τὸν ὁμώνυμον πλατωνικὸν διάλογον ὁ Θεαίτητος ἐρωτώμενος ὑπὸ τοῦ Σωκράτους λέγει:

«*Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος, ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο.....* (147d-148b).

Σημειοῦμεν, ὅτι, ὡς συνάγεται ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ χωρίου, ἡ λέξις «δύναμις» σημαίνει ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν: τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ. Π.χ. ἡ $\sqrt{\alpha}$ εἶναι δύναμις τοῦ α, διότι αὕτη πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της, ΔΥΝΑΤΑΙ, τὸ τετράγωνον α.

Κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ ἀνωτέρω ἀναγραφομένου μέρους τοῦ χωρίου προβάλλουσι τὰ ἑξῆς δύο ἐρωτήματα:

Πρῶτον, κατὰ ποῖον τρόπον ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... ἕως καὶ $\sqrt{17}$, καὶ

Δεύτερον, διατί μετὰ τὴν $\sqrt{17}$ ἐσταμάτησεν.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν θ' ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ τὸ δεύτερον ἐρώτημα, ἀφοῦ μνημονεύσωμεν ἐν συνόψει τὰς ἀπαντήσεις ἐπὶ τῶν δύο ἐρωτημάτων ἐνίων ἐκ τῶν νεωτέρων διακεκριμένων ἐρευνητῶν.

Ὁ Zeuthen[1] ὑποθέτει, ὅτι ὁ Θεόδωρος[2] ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... $\sqrt{17}$ διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ ὅτι, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις διὰ τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{18}$ εἶναι εὔκολος, ἐπειδὴ αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $3\sqrt{2}$, γνωστὴν ἤδη πολὺ πρὸ τοῦ Θεοδώρου, τοὐναντίον ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν $\sqrt{19}$ εἶναι λίαν ἐπίπονος, διότι ἡ $\sqrt{19}$ ἔχει ἑξαψήφιον περίοδον. Ὅθεν λόγῳ τοῦ ἐπιπόνου τῆς ἀποδείξεως διὰ τὴν $\sqrt{19}$ ὁ Θεόδωρος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$.

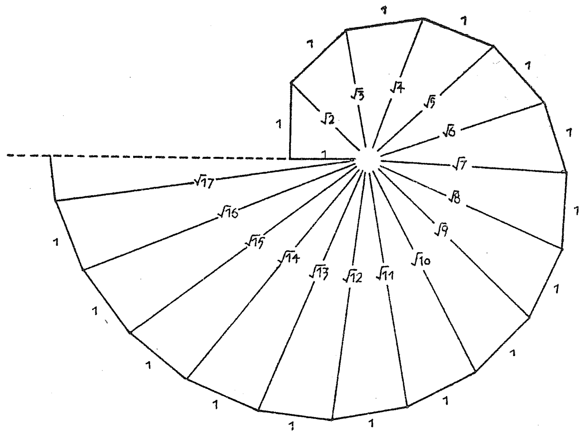
---

* **EVANGELCS STAMATIS, Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon**

1 H. G. Zeuthen, Oversigt Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1915, S. 348 ff. (Ἐκ τῆς μνημονευομένης πραγματείας τοῦ B. L. van der Waerden).

2 Βλ. ἐν Pauly-Wissowa, *R. E.* 5. Band 10. Halbband, Sp. 1812-1825 (unter Theodoros).

Ὁ Σπυρίδων Μωραΐτης[1] ὑποθέτει, ὅτι ὁ Θεόδωρος προέβη εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν: Κατεσκεύασεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα. Ἡ ὑποτείνουσα τούτου εἶναι $\sqrt{2}$. Εἰς τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὕψωσε κάθετον ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἥνωσε τὸ ἐλεύθερον ἄκρον ταύτης μὲ τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης καθέτου (σχ. 1). Ἡ ὑποτείνουσα



Σχ. 1.

Κατὰ Σπυρ. Μωραΐτην. Τὴν γνώμην τούτου ὑποστηρίζει ὁ J. H. Anderhub ἐν 1) Wochenschrift für klassische Philologie, 1918, N° 49-50, p. 598-599 καὶ 2) Joco-Seria aus den Papieren eines reisenden Kaufmanns, Gewidmet den Freunden des Hauses Kalle & Co. A. G. S. 161 f.f. Wiesbaden 1941. Μνημονεύει δὲ μεταξὺ ἄλλων καὶ ὁ Jean Bousquet ἐν Feuilles de Delphes, Tom. II. Le Tresor de Cyréne, p. 102-104, Paris 1952. Ἴδε καὶ J. E. Hofmann: Geschichte der Mathematik I, Samm. Göschen, Bd. 226 S. 26 ff, 1953 καὶ Siegfried Heller: Geometrischer Irrationalitätsbeweis der Alten Griechen.

τοῦ δευτέρου τριγώνου εἶναι $\sqrt{3}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον κατεσκεύασε 16 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ 16ου τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{17}$.

Ὁ B. L. van der Waerden[2] παρέχει λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$, στηριζομένην εἰς τὰ εὐκλείδεια θεωρήματα II, 6 καὶ X, 2 καὶ ἐπάγεται: Ἐὰν ὁ Θεόδωρος δὲν ἤθελε νὰ ἐπεκτείνῃ τὴν διδασκαλίαν του πέρα τοῦ κεκανονισμένου χρόνου ἔπραξε καλῶς νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν $\sqrt{17}$. Ἴσως νὰ ἠμποδίσθη οὗτος νὰ προχωρήσῃ καὶ ἐξ ἐξωτερικοῦ τινος αἰτίου.

[1] ΣΠΥΡ. ΜΩΡΑΪΤΟΥ, Πλάτων: τόμος 3ος Πλάτωνος Θεαίτητος, σελ. 188, Ἀθῆναι 1905.

[2] B. L. VAN DER WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer. II. Die Theorie des Irrationalen. *Mathematische Annalen,* Band, 120. 5./6. (Schluss-) Heft, 1949. Springer-Verlag, Berlin. Goettingen. Heidelberg.

Β'

Θεωροῦμεν λίαν πιθανὸν ὅτι ὁ Θεόδωρος ποιητικῇ ἀδείᾳ τοῦ Πλάτωνος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ καὶ δὲν ἐπροχώρησε πέρα ταύτης. Φαίνεται ὅτι ὁ Πλάτων ἐν προκειμένῳ ὑπαινίσσεται τὴν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ δὴ καὶ τὴν σχέσιν τὴν ὁποίαν ἔχει οὗτος πρὸς τὴν κατασκευὴν τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος, περὶ ἧς γίνεται λόγος εἰς τὸν Τίμαιον κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς συστάσεως ὑπὸ τοῦ Θεοῦ τῆς ψυχῆς τοῦ Κόσμου (Τίμ. 35). Τὴν γνώμην ἡμῶν ταύτην στηρίζομεν εἰς δύο χωρία· τὸ ἓν τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ τὸ ἕτερον τοῦ Πλουτάρχου.

Ι. Εἰς τὰ Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς [1] του ὁ Ἰάμβλιχος ἀναφέρει:

«*Οἱ μὲν γὰρ πρὸ αὐτοῦ (σημ. ἐννοεῖ τὸν 4) τετράγωνοι πλείονας ἔχουσι τὰς περιμέτρους τῶν ἐμβαδῶν, οἱ δὲ μετ' αὐτὸν ἀντικειμένως ἐλάττονας, οὗτος δὲ μονώτατος ἴσας. διὰ τοῦτο φαίνεται καὶ Πλάτων ἐν τῷ Θεαιτήτῳ μέχρις αὐτοῦ προελθὼν παύεσθαί πως ἐν τῇ ἑπτακαιδεκάποδι, πρὸς ἔμφασιν τοῦ κατὰ τὸν ἑπτακαίδεκα ἰδιώματος καὶ ἰσότητός τινος μεθεκτοῦ*».

ΙΙ. Εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος ὁ Πλούταρχος [2] γράφει:

«*Ἑβδόμῃ ἐπὶ δέκα (σημ. δηλαδὴ τὴν 17ην τοῦ μηνὸς) τὴν Ὀσίριδος γενέσθαι τελευτὴν Αἰγύπτιοι μυθολογοῦσιν, ἐν ᾗ μάλιστα γίνεται πληρουμένη κατάδηλος ἡ πανσέληνος. διὸ καὶ τὴν ἡμέραν ταύτην ἀντίφραξιν οἱ Πυθαγόρειοι καλοῦσι, καὶ ὅλως τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἀφοσιοῦνται. τοῦ γὰρ ἑξκαίδεκα τετραγώνου καὶ τοῦ ὀκτωκαίδεκα ἑτερομήκους, οἷς μόνοις ἀριθμῶν ἐπιπέδων συμβέβηκε τὰς περιμέτρους ἴσας ἔχειν τοῖς περιεχομένοις ὑπ' αὐτῶν χωρίοις, μέσος ὁ ἑπτακαίδεκα παρεμπίπτων, ἀντιφράσσει καὶ διαζεύγνυσι ἀπ' ἀλλήλων, καὶ διαιρεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον εἰς ἄνισα διαστήματα τεμνόμενος*».

Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον ὁ Πλάτων ἐσταμάτησεν εἰς τὴν $\sqrt{17}$, διότι ὁ 17 εἶναι ἐγγὺς πρὸς τὸν 16. Μόνον δὲ τοῦ τετραγώνου σχήματος τοῦ ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς 4 τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος [3] ἐκφράζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 16. Εἰς τὴν

---

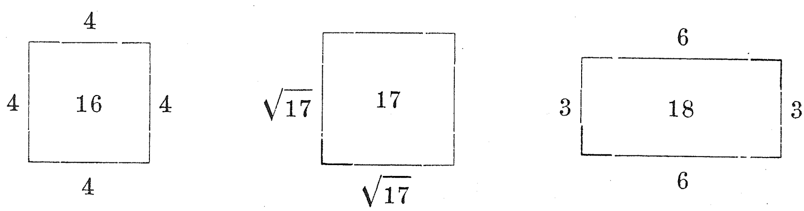
[1] IAMBLICHI, *Theologoumena arithmeticae*, ed. Victorius de Falco, Teubner 1922, 10, σ. 11 (καὶ 29).

[2] Πλουτάρχου, Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος 367. (ἔκδ. G. VERNARDAKIS, vol. II. σ. 514. Teubner).

[3] Ἀνώνυμος σχολιαστὴς τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος τοῦ 2ου αἰῶνος μ. Χ., κατὰ τὸν Anderhub (Joco-Seria κλπ. σ. 183-184), μνημονεύει τοῦ ἀριθμοῦ 16 καὶ τοῦ ἐπογδόου λόγου διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ συναφοῦς χωρίου (Papyrus 9782, bearb. von H. Diels, W. Schubart, Berliner Klassikertexte II, Berlin, 1905, 25, 37).

διατύπωσιν ταύτην τοῦ Ἰαμβλίχου δύναται ν' ἀντιταχθῇ ὅτι καὶ ὁ 15 εἶναι ἐγγὺς πρὸς τὸν 16 ὅσον καὶ ὁ 17 καὶ συνεπῶς ὁ Πλάτων θὰ ἠδύνατο κάλλιστα νὰ σταματήσῃ εἰς τὸν 15. Ἐκ τοῦ χωρίου ὅμως τοῦ Πλουτάρχου φαίνεται, διατὶ ὁ 17 προτιμᾶται τοῦ 15.

Κατὰ τὸν Πλούταρχον οἱ Πυθαγόρειοι θεωροῦσιν ἱερὸν τὸν ἀριθμὸν 17, διότι ἐκ τῶν τετραγώνων σχημάτων μόνον τὸ ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς 4 ἔχει περίμετρον



Σχ. 2.

καὶ ἐμβαδὸν τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 16, ἐν ᾧ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων μόνον τὸ ἔχον διαστάσεις 3×6 ἔχει περίμετρον καὶ ἐμβαδὸν ἐκφραζόμενα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 18. Ὁ ἀριθμὸς 17 εὑρισκόμενος μεταξὺ 16 καὶ 18 ὑπογραμμίζει τὴν ἰσότητα ταύτην καὶ τεμνόμενος εἰς δύο ἄνισα μέρη ἀποτελεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον τῆς μουσικῆς κλίμακος.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον (36 κέ.) εἶναι

$$6 : 8 = 9 : 12$$

ὑπάτη 6, μέση 8 παραμέση 9, νήτη 12

Αὕτη εἶναι ἡ βάσις τῆς κατασκευῆς τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος. Ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀναλογίας ταύτης $\left(8 = \frac{2.6.12}{6+12}\right)$, ἐνῷ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ὅρων τούτων. Τὸ ἄθροισμα τοῦ ἁρμονικοῦ καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς μουσικῆς ταύτης ἀναλογίας εἶναι 17. Ἐὰν πρὸς ἁπλούστευσιν θεωρήσωμεν ὡς ἄκρους ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2 αὕτη θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$$

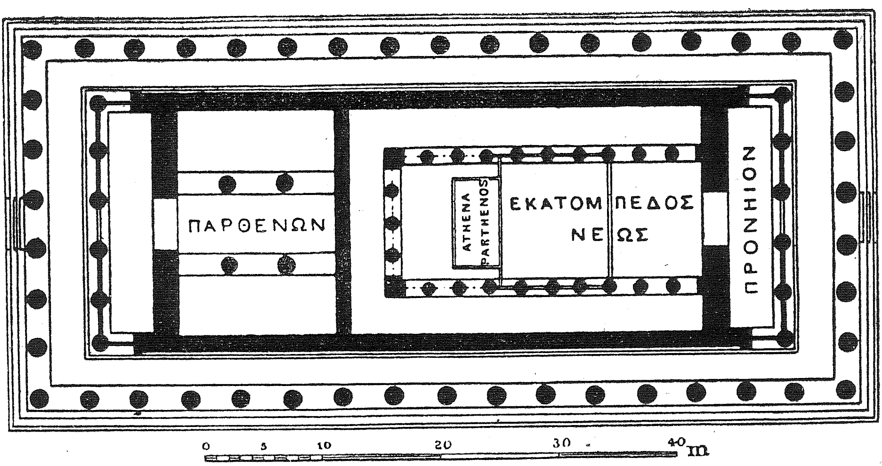
do fa sol do

Ἐὰν λάβωμεν τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ 1 καὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰ $\frac{9}{8}$, κατόπιν δὲ λάβωμεν τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ $\frac{3}{2}$ καὶ τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰ $\frac{9}{8}$, θὰ ἔχωμεν τὴν πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα (Τίμ. 36). Ἀναγράφομεν κατωτέρω τοὺς 8 φθόγγους καὶ τὰ 7 διαστήματα (ἤτοι τὸν λόγον ἑκάστου φθόγγου πρὸς τὸν προηγούμενόν του). Ἄνωθεν ἑκάστου φθόγγου ἀναγράφομεν τὴν ἰταλικὴν ὀνομασίαν.

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}$$

Ὡς γνωστόν, ὁ λόγος $\frac{9}{8}$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, καλεῖται ἐπόγδοος λόγος ὑπὸ τῶν ἀρχαίων. Σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ κύβος, ἓν ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων τῶν ἐγγραφομένων εἰς σφαῖραν, δι' οὗ παρίστατο ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων[1] ἡ Γῆ, ἔχει 6 ἕδρας 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς, ἤτοι τοὺς ἄκρους ὅρους καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῆς μουσικῆς



Σχ. 3. *Σχεδιάγραμμα τῆς κατόψεως τοῦ Παρθενῶνος*
('Εκ τοῦ βιβλίου: *Walther Judeich*, Topographie von Athen, σ. 252. C. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1931).

ἀναλογίας[2] 6 : 8 = 9 : 12. Ὑπομιμνήσκομεν προσέτι ὅτι οἱ κίονες τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 8, δηλαδὴ τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ 6 καὶ 12 καὶ τῆς

[1] ΘΕΟΦΡΑΣΤΟΣ-ΑΕΤΙΟΣ: *Diels*, Frag. d. Vors. I, 44 [32], 15, Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, Berlin-Grunewald, 1951.

[2] ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑΣΗΝΟΥ, 'Αριθμητικὴ Εἰσαγωγή, σ. 135-6. (ἔκδ. R. Hoche, Teubner, 1866).

μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἶναι 17, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8 καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12[1] (σχ. 3).

Μνημονεύομεν τέλος ὅτι 1) εἰς τὸ δακτυλικὸν ἑξάμετρον τῶν ὁμηρικῶν ἐπῶν ἀπαντῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν 17 συλλαβῶν, ὡς π.χ.

Ἄν	δρα	μοι	ἔν	νε	πε	μοῦ	σα	πο	λύ	τρο	πον	ὅς	μά	λα	πολ	λὰ
–	∪	∪	–	∪	∪	–	∪	∪ |	–	∪	∪	–	∪	∪	–	–
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

καὶ 2) εἰς τὰ Πτολεμαίου[2] μουσικὰ ἀναγινώσκομεν: *Ἔστι δὲ ἡ εὕρεσις τῶν τόνων καὶ τῶν ἡμιτονίων καὶ τῶν διέσεων κατὰ τὸν Ἐρατοσθένην*

8 τόνος 9

καὶ ταῦτα δὶς

16 ἡμιτ. 17 ἡμιτ. 18

τόνος

καὶ μεταξὺ εὑρίσκεται ἀριθμὸς ὁ 17.

Ὅθεν θεωροῦμεν λίαν πιθανὸν ὅτι ὁ Πλάτων, γράφων, ὅτι ὁ Θεόδωρος ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ ὑπαινίσσεται τὴν κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ τὴν σημασίαν, ἣν ἔχει ὁ ἐπόγδοος λόγος, $\left(\frac{9}{8}\right)$, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 17, εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Theaetetus (147d) schreibt Platon, der Mathematiker Theodoros habe die Irrationalität für $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... bis $\sqrt{17}$ bewiesen. Platon gibt keine Andeutung, wie der Beweis geführt wurde und warum Theodoros gerade bei $\sqrt{17}$ aufgehört habe. Verschiedene Erklärungen dafür haben unter anderen Zeuthen, Sp. Moraïtis, B. L. van der Waerden gegeben.

E. Stamatis gestützt auf zwei Stellen von Iamblichos und Plutarch teilt auf die Frage, warum Theodoros sich bei $\sqrt{17}$ aufhielt, eine neue Erklärung mit. Er behauptet, dass Platon nur aus poetischer Freiheit den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören liess, wahrscheinlich um die Heiligkeit, die

[1] Εἰς τὸν Σελινοῦντα τῆς Σικελίας, ἔνθα ἡ ἐπιρροὴ τῶν Πυθαγορείων θεωρεῖται ὅτι ἦτο μεγάλη, εἶχεν ἀνεγερθῆ ναός, χρονολογούμενος εἰς τοὺς πρὸ τῆς ἀνεγέρσεως τοῦ περικλείου Παρθενῶνος χρόνους, ἔχων εἰς τὴν μικρὰν πλευρὰν 8 κίονας καὶ εἰς τὴν μεγάλην 17. (WILLIAM B. DINSMOOR, The architecture of ancien Greece, *Chron. list*, ed. B. Batsford Lt l, London - N. York - Toronto - Sydney, 1950.

[2] Scriptores musici Graeci, IX. Excerpta Neapolitana, § 19 .(σ. 416, Teubner, 1895).

für die Pythagoreer die Zahl 17 hat und die Bedeutung, die ihre ungleichen Teile 9 und 8 $\left(\text{d. h. } \frac{9}{8}\right)$ für die Tonleiter haben, anzudeuten.

Nach Iamblichos ist das Quadrat 4×4 das einzige, dessen Umfang und Inhalt sich durch dieselbe Zahl 16 ausdrücken lassen. Die Zahl 17 liegt in der Nähe der Zahl 16, und deshalb scheint es, dass Platon im Theaetetus bei $\sqrt{17}$ aufhörte. Nach Plutarch ist die Zahl 17 für die Pythagoreer heilig und diese Zahl liegt zwischen 16 und 18. Umfang und Inhalt 16 hat nur ein einziges Quadrat, (4×4), und Umfang und Inhalt 18 hat nur ein einziges rechteckiges Parallelogramm (3×6). Ausserdem stammt das Verhältnis $\frac{9}{8}$ (was für die Tonleiter von Bedeutung ist) von den ungleichen Teilen der Zahl 17. Schliesslich bemerkt E. Stamatis, dass die Zahl 17 die Summe des arithmetischen Mittels und des harmonischen Mittels der Zahlen 6 und 12 ist, die die äusseren Glieder der musikalischen Proportion $6 : 8 = 9 : 12$ sind und von Platon im Timaeus erwähnt werden. Darüber hinaus ist die Zahl der Säulen der Schmalseite des Parthenon 8, die der Längsseile 17. Ferner begegnen wir der Zahl 17 im daktylischen Hexameter bei Homer und in den Μουσικά des Ptolemaeus.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. — **Ἐλεύθεραι πλευρικαὶ ταλαντώσεις ἁπλῆς ῥάβδου ὑπὸ πλαστικὴν ἐξαίτησιν**, *ὑπὸ* ***Δ. Γ. Μαγείρου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασιλ.. Αἰγινήτου.

1. Εἰσαγωγή.

α) Τὸ πρόβλημα τῶν ἐλευθέρων πλευρικῶν ταλαντώσεων μιᾶς πραγματικῆς ράβδου εἰς «πλαστικότητα», ὅταν αὕτη εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἄκρα της εἰς ἁπλῆν στήριξιν, ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν λύσεως $u(x,t)$ μιᾶς μὴ γραμμικῆς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους τῆς μορφῆς:

$$\left[f(u'')\right]'' = c\ddot{u}, \tag{1}$$

ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, διάστημα x καὶ χρόνος t, περιορίζωνται εἰς τὸ πεδίον:

$$D: \quad 0 \leq x \leq \pi, \qquad 0 \leq t \leq \tau < \infty, \tag{2}$$

μὲ ὁριακὰς συνθήκας:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u''(0,t) = u''(\pi,t) = 0, \tag{3}$$

καὶ μὲ ἀρχικάς:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u(x,0) = \varphi_2(x). \tag{4}$$

---

* D. G. MAGIROS, Lateral free vibrations of simple prismatic bar in plasticity.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

Α'.

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος x τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω x_0, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2\ldots\ldots$ κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν ξ, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi=\varphi(\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως[1]. Ἀναφέρομεν παραδείγματά τινα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης καὶ κατόπιν θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἦτο γνωστὴ κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου.

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=2$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{2}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\frac{x+2}{x+1}$, (1). Πρὸς ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ x ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως, ἔστω $x_0=1$ καὶ θέτομεν ταύτην εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέλος λαμβάνομεν 1, εἰς δὲ τὸ δεύτερον $\frac{3}{2}$. Τὴν τιμὴν $\frac{3}{2}$ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ α' μέλος ἔχομεν $\frac{3}{2}$ εἰς δὲ τὸ β' $\frac{7}{5}$. Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$
$\frac{x+2}{x+1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$

Εἶναι δὲ $1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

---

* **EVANGELOS STAMATIS, A few remarks of the succeeding approximation by iteratio by the Ancient Greeks.**

[1] R. COURANT, *Vorlesungen ü. Dif.-und Integralrechnung*, σ. 315, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.— R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik für Ingenieure* σ. 22 ff., Springer Verlag, Berlin κλπ. 1953.— G. RUNGE-H. KÖNIG, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Spinger Verlag, Berlin, 1924, unter Iteratio.

Ἡ $\sqrt{2}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, (2). Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς (2) ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἐκ τοῦ α΄ μέλους ἴσης τιμῆς της, τῆς $1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ θὰ ἔχωμεν $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$. Ἐὰν καὶ πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β΄ μέλος ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἴσης τιμῆς της ἐκ τῆς (2), θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὑπολογίζοντες διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ συνεχοῦς ἀπεριορίστου τούτου κλάσματος λαμβάνομεν

$$\sqrt{2}=1,\ \sqrt{2}=\frac{3}{2},\ \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5},$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \text{κλπ.}$$

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=3$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{3}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\frac{x+3}{x+1}$, (3). Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα λαμβάνοντες αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως $x_0=1$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α΄ μέλος 1, εἰς δὲ τὸ β΄ 2. Τὴν τιμὴν 2 θέτομεν εἰς τὴν (3) ἀντὶ τοῦ x, ὁπότε λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α΄ μέλος 2, εἰς δὲ τὸ β΄ $\frac{5}{3}$. Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

x	1	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\frac{989}{571}$
$\frac{x+3}{x+1}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\frac{989}{571}$	$\frac{1351}{780}$

Εἶναι δὲ

$$1<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\frac{989}{571}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<2.$$

Ἡ $\sqrt{3}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$. Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα διὰ τὴν $\sqrt{2}$ λαμβάνομεν τὴν $\sqrt{3}$ ὡς συνεχὲς ἀπεριόριστον κλάσμα.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ldots}}}\ \text{κλπ.}$$

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ κλάσματος τούτου θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{3}=1\,,\quad \sqrt{3}=1+\frac{2}{2}=2\quad \sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}=\frac{5}{3}\,,$$

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}}=\frac{7}{4}\ \text{κλπ.}$$

Β΄.

I. Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος[1] εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τὴν σκοποῦσαν τὴν ἑρμηνείαν τῶν μαθηματικῶν ἐκείνων, ἅτινα εἶναι χρήσιμα εἰς τὴν «Πλάτωνος ἀνάγνωσιν» ἀναπτύσσει δι᾽ ὀλίγων καὶ τὴν θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν Ὁμοίαν διατύπωσιν τῆς θεωρίας ταύτης ἀναγιγνώσκομεν καὶ εἰς τὰ τοῦ Πρόκλου[2] σχόλια εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος. Παραθέτομεν τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Πρόκλου.

«ΚΓ. Ὅτι αἱ ταῖς ἀρρήτοις διαμέτροις παρακείμεναι ῥηταὶ μονάδι μείζους εἰσὶν ἢ ἐλάττους διπλασίου, διὰ τῶν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι δεικνύ|ουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρὰ ἐστιν καὶ διάμετρος. Ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἡ μὲν ὡς πλευρά [ἡ δ]ὲ ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο, ἐπείπερ ἡ ὡς διάμετρος μονάδι ἐλάσσων ἢ διπλασία τῆς ὡς πλευρᾶς. Ἔσται οὖν οὕτως ἡ μὲν δυοῖν μονάδων, ἡ δὲ τριῶν· καὶ τὰ μὲν ἀπὸ τούτων τῆς μὲν τεσσάρων, τῆς δὲ ἐννέα, ὅπερ ἐστὶν μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον. πάλιν προσκείσθω τῇ μὲν δυοῖν μία διάμετρος ἡ

[1] Ἐκδ. E. Hiller, σ. 42 - 55.

[2] Ἐκδ. E. Kroll, II, σ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. (Hultsch). Καὶ PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclide, σ. 427 - 441, *Soc. d'éd. Les Belles Lettres*, Paris 1950. Καὶ ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ, Εὐκλείδου, Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, σ. 8-18, (Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953).

τριῶν, τῇ δὲ τριῶν διαμέτρῳ δὶς ἡ πλευρὰ ταῖν δυοῖν. ἔσται οὖν ἡ μὲν πλευρὰ πέντε τινῶν, ἡ δὲ διάμετρος ἑπτά τινων, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τῆς μὲν κε´, τῆς δὲ μθ´, μονάδι ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον. ἧ καὶ Πλάτων εἶπε τὸν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα ἀριθμὸν εἶναι ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν μὲν πεμπάδος δεομένων ἑνός, ἀρρήτων δὲ δεομένων δυοῖν, ἐπειδὴ διπλάσιον ἡ διάμετρος δύναται τῆς πλευρᾶς. ἐὰν δὲ λάβωμεν ἁπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων, ἔσονται διπλάσιαι ὄντως, ὧν ἑκάστη μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου· οἷον ἡ ἐννέα μετὰ τοῦ μθ´ τῆς τοῦ κε´ καὶ δ´. διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ». (Σημ. ὡς γνωστὸν ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου ἐλέγετο ὑπὸ τῶν Ἀρχαίων διάμετρος).

Κατὰ τὸν Θέωνα καὶ τὸν Πρόκλον κατασκευάζονται ἐν συνεχείᾳ ἀριθμητικῶς τετράγωνα κατὰ νόμον ὅστις φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος.

		Πλευρὰ	Διαγώνιος
πρώτου τετραγώνου		1	1
δευτέρου	»	$1+1=2$	$2.1+1=3$
τρίτου	»	$2+3=5$	$2.2+3=7$
τετάρτου	»	$5+7=12$	$2.5+7=17$
πέμπτου	»	$12+17=29$	$2.12+17=41$
ἕκτου	»	$29+41=70$	$2.29+41=99$
⋮		⋮	⋮
$\nu+1$	»	$\alpha_\nu+\delta_\nu=\alpha_{\nu+1}$	$2.\alpha_\nu+\delta_\nu=\delta_{\nu+1}$, ἐὰν τοῦ

πρώτου τετραγώνου καλέσωμεν τὴν πλευρὰν α_1 καὶ τὴν διαγώνιον δ_1. Εἶναι δὲ

$$1^2=2.1^2-1,\quad 3^2=2.2^2+1,\quad 7^2=2.5^2-1,\quad 17^2=2.12^2+1.$$

Παρέχονται δηλ. διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων $y^2=2\chi^2\mp 1$. Τὴν αὐθαιρεσίαν τῆς θεωρήσεως τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ διαγώνιον ἐπίσης ἴσην πρὸς τὴν μονάδα ὁ Πρόκλος, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, τὴν αἰτιολογεῖ, γράφων, «ἐπεὶ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶ σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρὰ ἔστιν καὶ διάμετρος». ὁ Θέων γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται». Καὶ σήμερον, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) προσεγγίσεων ἡ πρώτη τιμὴ προσεγγίσεως λαμβάνεται αὐθαιρέτως. Κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν ὁ ὑπὸ τοῦ Θέωνος καὶ τοῦ Πρόκλου σωθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως.

$$x_{n+1}=\varphi(x_n,\ y_n)\quad \text{καὶ}\quad y_{n+1}=g(x_n,\ y_n).$$

Ὁ Πρόκλος μνημονεύει καὶ τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου κατασκευῆς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. «Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ στοιχείων γραμμικῶς ἀπ᾽ ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ | εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς [ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ] καὶ τὸ ἀπὸ [ταύ]της [μόνης τετράγωνα δι]πλάσια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισεί[ας καὶ τοῦ ἀπὸ] τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμ[ισείας καὶ τῆς] προσληφθείσης». Οὐδεμία ἀμφιβολία γεννᾶται ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ θεωρήματος II, 10 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τόσον ἐκ τῆς ἀνωτέρω περιγραφῆς τοῦ Πρόκλου, ὅσον καὶ ἐκ τῆς φράσεως «προσλάβῃ δὲ .... *τὸ ἀπὸ τῆς* ...». Ἀποκλείεται νὰ εἶναι τὸ II, 6 τῶν Στοιχείων, διότι ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, *τὸ ὑπὸ τῆς* ...»

Ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ δὲ τριγωνικοὺς καὶ τετραγωνικοὺς καὶ πενταγωνικοὺς καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ σχήματα λόγους ἔχουσι δυνάμει οἱ ἀριθμοὶ οὕτως καὶ πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους εὕροιμεν ἂν ἐμφανιζομένους τοῖς ἀριθμοῖς». Ἐκ τοῦ χωρίου τούτου καὶ τῆς φράσεως «τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται», τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, συνάγεται, ὅτι ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων διαγωνίων πρὸς τὰς πλευράς, ἤτοι οἱ λόγοι

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \text{κλπ.}$$

Ὁ Θέων δὲν μνημονεύει ρητῶς τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}\,.$$

Θεωρεῖται ὅμως ἀναμφισβήτητον ὅτι ἡ θεωρία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἀφεώρα κατὰ πρῶτον λόγον εἰς τὴν σχέσιν ταύτην. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ $3^{ον}$ θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις διατυπώσεως παρομοίας σχέσεως διὰ τὴν $\sqrt{3}$,

τῆς $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, ὡς καὶ τῶν σχέσεων

$$265^2 = 3.153^2 - 2\,,\quad 1351^2 = 3.780^2 + 1\,,\quad (y^2 = 3x^2 - 2\,,\quad y^2 = 3x^2 + 1).$$

Καθ᾽ ἡμετέραν ἀνακοίνωσιν, γενομένην ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν[1] αἱ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους λαμβανόμεναι ἄνευ ἀποδείξεως σχέσεις λαμβάνονται διὰ λόγων διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῆς κατασκευῆς ὁμοίων ρόμβων κατὰ τὸ εὐκλεί-

[1] Βλέπε *Πρακτικὰ Ἀκαδημίας*, **30**, 1955, σ. 255.

δειον θεώρημα II, 10. Ὁπωσδήποτε θεωροῦμεν βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τοὺς λόγους, οἵτινες ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας, τὴν μὲν αὐξανομένην, τὴν δὲ φθίνουσαν καὶ ὅτι μεταξὺ τούτων τῶν ἀκολουθιῶν εὑρίσκεται ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι ἐγνώριζε τὰς σχέσεις

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

II. Ὡς συνάγεται ἐκ τῶν Μετρικῶν τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως[1] ἦτο γνωστὸν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ σχηματισμοῦ διαδοχικῶν μουσικῶν ἀναλογιῶν. Ἐὰν δηλ. A εἶναι ἀριθμὸς μὴ τετράγωνος, λαμβάνεται ὁ ἐγγύτερον πρὸς τοῦτον τετράγωνος μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ A, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἔστω α, καὶ σχηματίζεται τὸ πηλίκον $\frac{A}{\alpha}$. Εἰς τὸ μνημονευόμενον παράδειγμα τοῦ Ἥρωνος εἶναι $\frac{A}{\alpha} < \alpha$. Σχηματίζεται ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α

$\frac{A}{\alpha} : \beta_1 = \gamma_1 : \alpha$, ἔνθα β_1 τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\dfrac{2\frac{A}{\alpha}\cdot\alpha}{\frac{A}{\alpha}+\alpha}$ καὶ γ_1 τὸ ἀριθμητικὸν μέσον $\left(\frac{A}{\alpha}+\alpha\right) : 2$ τῶν $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς β_1, γ_1 σχηματίζεται ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία

$\beta_1 : \beta_2 = \gamma_2 : \gamma_1$ ἔνθα $\beta_2 = \dfrac{2\beta_1\gamma_1}{\beta_1+\gamma_1}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\gamma_2 = \dfrac{\beta_1+\gamma_1}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν β_1, γ_1. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους τοὺς β_2, γ_2 σχηματίζεται ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Εἶναι δὲ

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \sqrt{A} < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον[2].

Κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{2}$ ἔχομεν:

Ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 2 τετράγωνος εἶναι ὁ 1^2, καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 1^2 εἶναι ὁ $\frac{2}{1}$. Ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς 1 (δηλ. τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ 1^2) καὶ $\frac{2}{1}$ εἶναι ἡ

$1 : \dfrac{2\cdot 1\cdot\frac{2}{1}}{1+\frac{2}{1}} = \dfrac{1+\frac{2}{1}}{2} : \dfrac{2}{1}$ ἢ $1 : \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{2} : 2$, ἔνθα $\dfrac{4}{3}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον

---

[1] ΗΡΩΝΟΣ, Μετρικά, (ἔκδ. Schöne, τόμ. III, σ. 18 - 20, Teubner, 1903) καὶ P. TANNERY, Mémoires Scientifiques III, σ. 68 καὶ 244, καὶ PAUL - HENRI MICHEL, Ἔνθ' ἀν., σ. 426.

[2] P. TANNERY, Ἔνθ' ἀν.

καὶ $\frac{3}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ $\frac{2}{1}$. Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$ εἶναι $\frac{4}{3} : \frac{24}{17} = \frac{17}{12} : \frac{3}{2}$, ἔνθα $\frac{24}{17}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{17}{12}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$.

Ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία εἶναι $\frac{24}{17} : \frac{816}{577} = \frac{577}{408} : \frac{17}{12}$, ἔνθα $\frac{816}{577}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{577}{408}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{24}{17}$, $\frac{17}{12}$, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Εἶναι δὲ $1 < \frac{4}{3} < \frac{24}{17} < \frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$.

Κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{3}$ ἔχομεν: ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετράγωνος εἶναι ὁ 2^2 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2^2 εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$. Ἄκροι ὅροι πρὸς σχηματισμὸν τῆς πρώτης μουσικῆς ἀναλογίας εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετραγώνου, ὁ 2. Αὕτη εἶναι

$$\frac{3}{2} : \frac{12}{7} = \frac{7}{4} : 2 .$$

Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία εἶναι

$$\frac{12}{7} : \frac{168}{97} = \frac{97}{56} : \frac{7}{4}, \quad \text{κλπ.}$$

Εἶναι δὲ

$$\frac{3}{2} < \frac{12}{7} < \frac{168}{97} < \sqrt{3} < \frac{97}{56} < \frac{7}{4} < 2 .$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τῶν ἀφορώντων εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

Εὑρίσκεται κατά τινα τρόπον προσέγγισίς τις πρὸς ζητουμένην ἀληθῆ τινα τιμήν. Ἡ προσέγγισις αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως, ἡ νέα προσέγγισις διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται σήμερον μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου, ἐγνώριζον τὴν μέθοδον ταύτην.

SUMMARY

The theory of 'Side'-and diameter-' numbers is developed as it has been saved by Theon of Smyrna and Proklus. It is reminded that

Archimedes knew the law of formation of relations $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{770}$.

The theory of the Pythagoreans Archytas of Tarentum about the formation of succeeding musical proportions is also developed. From all this we come to the conclusion that the Ancient Greeks know the method of succeeding approximations by repeatition (iteratio) for the arithmetical solution of an equation, at least at the time of Plato and Archytas.

ΦΑΡΜΑΚΟΛΟΓΙΑ.—Ἐπίδρασις τῆς θυροξίνης ἐπὶ τῆς ἐπουλώσεως τῶν τραυμάτων, *ὑπὸ* ***Διον. Βαρώνου*** *καὶ* ***Γεωρ. Λογαρᾶ******.** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Γεωργ. Ἰωακείμογλου.

Ἡ ἐπίδρασις τῆς ὁρμόνης τοῦ θυρεοειδοῦς ἀδένος[1] ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἰάσεως τοῦ τραύματος ἐμελετήθη ὑπὸ πολλῶν ἐρευνητῶν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη.

Ἡ ἐπίδρασις τῆς θυροξίνης ἐπὶ τῆς θεραπείας τῶν τραυμάτων ἐμελετήθη μόνη ἢ ἐν σχέσει πρὸς τὴν θυρεοειδοτρόπον ὁρμόνην τοῦ προσθίου λοβοῦ τῆς ὑποφύσεως ἐπὶ πειραματοζῴων (συνήθως ἰνδικῶν χοιριδίων καὶ ἐπιμύων), προηγουμένως θυρεοειδεκτομηθέντων ἢ μή, ὡς καὶ ὑποφυσιεκτομηθέντων ἢ μή.

Τὸ θέμα τῆς ἰάσεως τῶν τραυμάτων ἦτο καὶ εἶναι καθ' ἑαυτὸ ἐνδιαφέρον ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι προσφέρεται ὡς κατάλληλον πεδίον διὰ τὴν μελέτην τῆς δημιουργίας, ἀναπτύξεως καὶ λειτουργίας τοῦ κοκκιώδους ἱστοῦ καὶ ἐν ἀπωτέρᾳ ἀναλύσει τοῦ συνδετικοῦ.

Αἱ κολλαγόνοι ἶνες, στοιχεῖον τοῦ συνδετικοῦ ἱστοῦ, ἔχουν κινήσει κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη τὸ διεθνὲς διαφέρον τῶν ἐρευνητῶν καὶ κάθε οὐσία, ἔχουσα σχέσιν ἢ ὑποτιθεμένη ὅτι δύναται νὰ ἔχῃ σημασίαν τινὰ εἰς τὸν σχηματισμόν των ἢ εἰς τὴν φυσιολογίαν καὶ παθολογίαν των, γεννᾷ νέας περιπτώσεις ἐρεύνης.

Ἐκ τῶν κυριωτέρων παραγόντων οἵτινες ἐμελετήθησαν καὶ μελετῶνται σήμερον εἰς τὸ πλαίσιον τοῦτο τῶν ἐρευνῶν εἶναι αἱ ὁρμόναι. Προσπάθειαι ἐγένοντο, ἵνα καθορισθοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ ὁρμονῶν ἢ ὁρμόνης καὶ δημιουργίας, ἀναπτύξεως καὶ ἐξελίξεως τοῦ κοκκιώδους ἱστοῦ. Ἐκ τῶν ἐρευνῶν τούτων συνεχῶς προστίθενται νέαι γνώσεις, ἐνδιαφέρουσαι τοὺς ἐρευνητάς, οἵτινες προσφέρουν τὰ συμπεράσματά των εἰς τὸν πρακτικὸν ἰατρόν. Ἡ παροῦσα πειραματικὴ ἐργασία ἔχει σκοπὸν τὴν μελέτην τῆς

---

* **D. VARONOS and G. LOGARAS, Effect of Thyroxine on Wound healing.**

[1] Ἐννοοῦμεν μόνον τὴν Θυροξίνην. Διὰ τὴν ἄλλην ὁρμόνην τοῦ θυρεοειδοῦς τὴν τριϊωδοθυρονίνην δὲν ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ παρόντος δεδομένα.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1957: ΤΟΜΟΣ 32ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1957

γενικώτερον μεταξὺ τῶν φυσικῶν Ἐπιστημῶν, ἡ Ἰατρικὴ παρεγνώρισε τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ψυχικοῦ παράγοντος εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν ζωήν. Ἐθεώρει μάλιστα τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πνευματικοῦ παράγοντος ὡς ἀντιεπιστημονικήν. Ἐν τούτοις ἀπὸ τοῦ 1900 καὶ ἰδίως ἀπὸ 30ετίας, ἀνεγνώρισεν ἡ Ἐπιστήμη τὴν ἐπίδρασιν ταύτην ἐπὶ τῶν λειτουργιῶν τῶν ὀργάνων. Ἐν τούτοις ὅμως ἐν τῇ πράξει σήμερον παραβλέπεται ἡ πνευματικὴ αὕτη ἐπισκόπησις.

Εἰς τοῦτο ἀποβλέπει τὸ παρουσιαζόμενον βιβλίον: Παρὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ὅσων ἡ Ἐπιστήμη σήμερον ἀπαιτεῖ, εἶναι ἀνάγκη καὶ τῆς πνευματικῆς προσπελάσεως τοῦ πάσχοντος, ὥστε ὁ ἰατρὸς νὰ δύναται καὶ ἐκ διαισθήσεως νὰ ἀναγνωρίσῃ τὰς σωματικὰς καὶ πνευματικὰς ἀνάγκας τούτου, καθοδηγούμενος ὑπὸ τοῦ συναισθήματος. Περιφανὴς ἰατρὸς τοῦ 16ου αἰῶνος ὁ B. Hehenheim, ὀνομασθεὶς καὶ Παράκελσος, γράφει εἰς ἕνα βιβλίον του ὅτι die beste Arzinei ist die Liebe (τὸ καλύτερον φάρμακον εἶναι ἡ ἀγάπη).

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, μέρος II, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη******. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

Α'. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἐπὶ τοῦ ζητήματος, διατὶ ὁ Θεόδωρος[1] ἐσταμάτησεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 17, ὅπερ ἀπὸ δύο περίπου χιλιάδων ἐτῶν ἀπασχολεῖ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ὑπεστηρίξαμεν διὰ πραγματείας ἡμῶν ἀνακοινωθείσης ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 12.1.1956[2] ὅτι ὁ Πλάτων πιθανῶς νὰ ὑπαινίσσηται τὴν ἱερότητα, ἣν εἶχε διὰ τοὺς Πυθαγορείους ὁ ἀριθμὸς δεκαεπτά. Τὰ προβληθέντα παρ' ἡμῶν συναφῶς ἐπιχειρήματα ἦσαν: 1) χωρίον ἐκ τῶν Θεολογουμένων τῆς ἀριθμητικῆς τοῦ Ἰαμβλίχου[3] 2) χωρίον ἐκ τῆς πραγματείας τοῦ Πλουτάρχου[4] περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίρι-

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon, Teil II.**

[1] «Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο». (147 d - 148 b).

[2] Βλ. *Πρακτ. Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν,* **31** (1956), σελ. 10.

[3] Iamblichi, Theologoumena arithmeticae, ed. V. de Falco, Teubner 1922, σ. 11, 19.

[4] Πλουτάρχου, Περὶ Ἴσιδος καὶ Ὀσίριδος 367 (ἔκδ. G. Vernardakis Vol. II σ. 514, Teubner).

δος 3) Ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι δεκαεπτὰ 4) ὅτι τὸν ἀριθμὸν 17 ἀπαντῶμεν εἰς τὸ δακτυλικὸν ἑξάμετρον τῶν ὁμηρικῶν ἐπῶν ὡς π. χ.

Ἄν	δρα	μοι	ἔν	νε	πε	μοῦ	σα	πο	λύ	τρο	πον	ὃς	μά	λα	πολ	λὰ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

καὶ 5) Ὅτι τὸν ἀριθμὸν 17 ἀπαντῶμεν εἰς τὰ Πτολεμαίου μουσικὰ ἔνθα γράφεται: ἔστι δὲ ἡ εὕρεσις τῶν τόνων καὶ τῶν ἡμιτονίων καὶ τῶν διέσεων κατὰ τὸν Ἐρατοσθένην [1]

8 τόνος 9

καὶ ταῦτα δὶς

16 ἡμιτ. 17 ἡμιτ. 18

|————τόνος————|

καὶ μεταξὺ εὑρίσκεται ἀριθμὸς ὁ 17.

Β΄.

Ἐκ τῶν κατωτέρω παρατιθεμένων ὁμηρικῶν στίχων καταφαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἔχει συμβολικὸν νόημα καὶ εἰς τὸν Ὅμηρον. Φαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἀποτελεῖ παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἀπὸ ἀρχαιοτάτων χρόνων τέλειον χρονικὸν διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου συντελεῖται ἱεροπρεπὴς ἢ ἀξιόλογός τις πρᾶξις. Οὗτος εἶναι συντεθειμένος ἐκ δύο ἐξαιρετικῆς σημασίας ἀριθμῶν· ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν *δέκα* θεωρούμενον τέλειον καὶ ἀπὸ τὸν ἱερὸν ἀριθμὸν *ἑπτά* [2].

Οὕτω κατὰ τὴν ραψῳδίαν η τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσσεύς, ἀφοῦ περιεπλανήθη ἐπὶ ἐννέα ἡμέρας, ἔφθασε τὴν *δεκάτην* ἡμέραν εἰς τὴν νῆσον Ὠγυγίην ἔνθα παρέμεινεν *ἑπτὰ* ἔτη.

Ὀδυσ. η 253 *ἐννῆμαρ φερόμην· δεκάτῃ δέ με νυκτὶ μελαίνῃ*
νῆσον ἐς Ὠγυγίην πέλασαν θεοί, ἔνθα Καλυψώ
Ὀδυσ. η 259 *ἔνθα μὲν ἑπτάετες μένον ἔμπεδον, εἵματα δ᾽ αἰεί.*

Κατὰ τὴν ραψῳδίαν κ τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσσεύς, ἀφοῦ ἔπλεεν ἐννέα νύκτας καὶ ἡμέρας, εἶδε κατὰ τὴν *δεκάτην* τὴν πατρίδα του καὶ μετὰ πλοῦν ἓξ ἡμερῶν ἔφθασεν τὴν *ἑβδόμην* ἡμέραν εἰς τὴν πόλιν τοῦ Λάμου.

Ὀδυσ. κ 28 *ἐννῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ,*
τῇ δεκάτῃ δ᾽ ἤδη ἀνεφαίνετο πατρὶς ἄρουρα,

---

[1] Scriptores musici Graeci, IX Excerpta Neapolitana, § 19 σ. 416, Teubner 1895.

[2] Περὶ τοῦ ἀριθμοῦ *ἑπτὰ* ΜΙΧ. ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ, Ἀστρολογικὸν σημείωμα, *Ἡμερολόγιον Μεγάλης Ἑλλάδος* 192 b σ. 65. ΙΩ. ΚΑΛΙΤΣΟΥΝΑΚΗ, Ἑπταδικαὶ ἔρευναι. Ἀθ. 1922. (Ἀνάτυπον ἐκ τῆς *Ἀθηνᾶς*, τόμ. 33).

Ὀδυσ. κ 80 *ἑξῆμαρ μὲν ὁμῶς πλέομεν νύκτας τε καὶ ἦμαρ·*
ἑβδομάτῃ δ' ἱκόμεσθα Λάμου αἰπὺ πτολίεθρον,

Κατὰ τὴν ραψῳδίαν ε τῆς Ὀδυσσείας, ὁ Ὀδυσσεὺς ἀποπλεύσας ἀπὸ τὴν νῆσον τῆς Καλυψοῦς συνεχίζει τὸν πλοῦν ἐπὶ *δεκαεπτὰ* ἡμέρας.

Ὀδυσ. ε 278 *ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μὲν πλέεν ἤματα ποντοπορεύων,*
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἐφάνη ὄρεα σκιόεντα.

Καὶ εἰς τὸ η τῆς Ὀδυσσείας ἀπαντῶμεν τοὺς αὐτοὺς στίχους·

Ὀδυσ. η 267 *ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μὲν πλέον ἤματα ποντοπορεύων,*
ὀκτωκαιδεκάτῃ δ' ἐφάνη ὄρεα σκιόεντα.

Ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν ραψῳδίαν ω τῆς Ὀδυσσείας καταφαίνεται ἡ ἱερότης τοῦ ἀριθμοῦ δεκαεπτά. Ὁ Ὅμηρος παριστᾷ αὐτόθι διαλεγομένας τὰς ψυχὰς τοῦ Ἀγαμέμνονος καὶ τοῦ Ἀχιλλέως. Ἡ ψυχὴ τοῦ Ἀγαμέμνονος πληροφορεῖ τὴν ψυχὴν τοῦ Ἀχιλλέως περὶ τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας ἀπέδωκαν εἰς τὸν νεκρὸν τοῦ Ἀχιλλέως ἐν Τροίᾳ θρηνήσαντες αὐτὸν ἐπὶ *δεκαεπτὰ* ἡμέρας.

Ὀδυσ. ω 63 *ἑπτὰ δὲ καὶ δέκα μέν σε ὁμῶς νύκτας τε καὶ ἦμαρ*
κλαίομεν ἀθάνατοί τε θεοὶ θνητοί τ' ἄνθρωποι·
ὀκτωκαιδεκάτῃ δὲ δόμεν πυρί, πολλὰ δὲ σ' ἀμφὶ

Ὅθεν ἐνισχύεται ἔτι περισσότερον ἡ ἄποψις ἡμῶν ἡ ἐκτεθεῖσα κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς Ἀκαδημίας τῆς 12 - 1 - 1956[1], καθ' ἣν ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 17 ὑπαινίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

ZUSAMMENFASSUNG

A. Auf die Frage (im Theaetetus 147 d) warum Theodoros, während des Beweises von Irrationalitäten sich bei $\sqrt{17}$ aufhielt, teilte der Verfasser im vorigen Jahr (Prakt. d. Akad. **31** (1956) S. 10) mit, dass er es für wahrscheinlich hält, Platon liess den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören, um die Heiligkeit, die für die Pythagoreer die Zahl 17 hat, anzudeuten. Seine Argumente waren 1) Eine Stelle aus Iamblichos 2) Eine Stelle aus Plutarch 3) Die Zahl der Säulen der Längsseite von Parthenon ist 17 4) Man begegnet der Zahl 17 im daktylischen Hexameter bei Homer und 5) Man begegnet der Zahl 17 in den Μουσικὰ des Ptolemaeus.

B. Aus den unten angeführten homerischen Versen ist ersichtlich, dass die Zahl 17 auch bei Homer einen symbolischen Sinn hat. Allem Anschein nach stellt die Zahl 17 bei den Griechen seit uralten Zeiten einen voll-

[1] *Πρακτικὰ Ἀκαδ. Ἀθ* **31** (1956) 10 ἑξ.

kommenen Zeitabschnitt dar, während dessen sich eine ehrwürdige oder ansehnliche Tat vollzieht. Sie ist aus zwei Zahlen von grosser Bedeutung zusammengesetzt: aus der Zahl zehn, die man als vollkommene Zahl betrachtete und aus der heiligen Zahl sieben.

Einige Beispiele aus der Odyssee.

η 253 *trieb neun Tage herum. In der zehnten der schrecklichen Nächte*
führten die Himmlischen mich gen Ogygia, wo Kalypso.

η 259 *Sieben Jahre blieb ich bei ihr und netzte mit Tränen.*

κ 28 *Schon durchsegelten wir neun Tage und Nächte die Wogen,*
und in der zehnten Nacht erschien uns das heimische Ufer,

κ 80 *Als wir nun sechs Tage und Nächte das Meer durchrundert,*
landeten wir am siebten bei der Festungsstadt von Lamos,

ε 278 *Siebzehn Tage befuhr er die ungeheueren Gewässer,*
am achtzehnten erschienen die fernen, schattigen Berge

η 267 *Siebzehn Tage befuhr ich die ungeheueren Gewässer,*
am achtzehnten erblickt' ich die fernen, schattigen Berge.

Im Gesang ω stellt Homer die Seelen von Agamemnon und Achilleus in Gespräch dar. Die Seele des Agamemnon erzählt der Seele des Achilleus über die Ehrungen, die die Griechen damals dem Toten Achilleus in Troja erwiesen, indem sie um ihn *siebzehn* Tage getrauert haben:

ω 63 *Siebzehn Tage und Nächte beweinten wir unaufhörlich*
deinen Tod, der Unsterblichen Chor und die sterblichen Menschen,
am achtzehnten verbrannten wir dich und schlachteten ringsum.

Infolgedessen wird die Meinung des Verfassers, dass Platon den Theodoros bei $\sqrt{17}$ aufhören liess, um die Heiligkeit der Zahl 17 anzudeuten, noch mehr erhärtet.

ΣΕΙΣΜΟΛΟΓΙΑ.—Τὸ θαλάσσιον σεισμικὸν κῦμα τῆς 9 Ἰουλίου 1956, ὑπὸ ***Ἀγγ. Γ. Γαλανοπούλου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μαξ. Μητσοπούλου.

Ἂν καὶ τὸ θαλάσσιον σεισμικὸν κῦμα εἶναι ἕνα φαινόμενον ὄχι σπάνιον εἰς τὴν σεισμικὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλλάδος, ἡ ἄγνοια ἐκ μέρους τῶν κατοίκων τῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα δύναται ἐνίοτε νὰ ἐπιφέρῃ, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ψύχραιμον παρακολούθησιν καὶ διὰ πρώτην φορὰν φωτογράφησιν ἑνὸς τοιούτου φαινομένου κατὰ τὴν 9ην Ἰουλίου 1956. Οὕτως ἐπετεύχθη συγκέντρωσις ἑνὸς πλουσίου ὑλικοῦ παρατηρήσεων, τὸ ὁποῖον ἐπέτρεψε τὴν ἐξαγωγὴν ὡρισμένων συμπερασμάτων ὡς πρὸς τὸν

* A. G. GALANOPOULOS, The Seismic Sea Wave of July 9, 1956.

κωμῳδίας τοῦ Ἀριστοφάνους, τὰ ἐρωτικὰ μυθιστορήματα τοῦ Ἡλιοδώρου, τοῦ Ἀχιλλέως Τατίου, τοῦ Ξενοφῶντος τοῦ Ἐφεσίου, τοῦ Χαρίτωνος τοῦ Ἀφροδισιέως, τὰ Εἰδύλλια τοῦ Βίωνος καὶ τοῦ Μόσχου, τὰ Ποιμενικὰ τοῦ Λόγγου.

Τὰ στενὰ ὅρια μιᾶς ἀνακοινώσεως δὲν ἐπιτρέπουν τὴν παράθεσιν τοῦ καταλόγου τῶν 140 περίπου συγγραφέων, οἱ ὁποῖοι παρελαύνουν εἰς τοὺς πέντε σωθέντας τόμους τοῦ Κοιναρίου. Ὡς εἶναι φυσικόν, ἡ Θεολογία καταλαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν ἔκτασιν, ἀντιπροσωπευομένη ὑπὸ 65 περίπου συγγραφέων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀρκετοὶ διὰ πολυτόμων ἔργων, ὅπως ὁ Ἰωάννης ὁ Χρυσόστομος διὰ 13 τόμων, ὁ Κύριλλος Ἀλεξανδρείας διὰ 6 τόμων, κλπ. Ἡ Νομικὴ ἐκπροσωπεῖται διὰ τῶν Ἰνστιτούτων Θεοφίλου τοῦ Ἀντικήνσορος, διὰ τοῦ Νομικοῦ Ποιήματος τοῦ Μιχαὴλ Ψελλοῦ, διὰ τοῦ Συντάγματος κατὰ Στοιχεῖον τοῦ Ματθαίου Βλαστάρεως, διὰ τῆς Ἑξαβίβλου τοῦ Ἁρμενοπούλου, κατὰ μετάφρασιν Σπανοῦ, δι' ἑνὸς ἐκτεταμένου λατινικοῦ λεξικοῦ νομικῶν ὅρων. Ἡ Ἱστορία, διὰ τῆς Παλαιᾶς Ἱστορίας τοῦ Ρολλίνου (εἰς 16 τόμους), διὰ τῶν Ἰουδαϊκῶν τοῦ Ἀλεξάνδρου Μαυροκορδάτου, διὰ τῆς Ἐπιτομῆς Δίωνος ὑπὸ Ἰωάννου τοῦ Ξιφιλίνου, διὰ τῆς Ρωμαϊκῆς Ἱστορίας τοῦ Νικηφόρου Γρηγορᾶ, κλπ. Ἡ Ἰατρική, διὰ τῶν ἔργων τοῦ Ἱπποκράτους, τοῦ Διοκλέους τοῦ Καρυστίου, τοῦ ἐκ Βελεσδονίου τῶν Ἀγράφων ἰατροῦ Νικολάου κλπ. Ἡ Φυσική, διὰ τῶν Ἀποριῶν φυσικῶν τοῦ Θεοφυλάκτου Σιμοκάτου, διὰ τοῦ περὶ παλιρροιῶν σχεδιάσματος τοῦ Εὐγενίου, κλπ. Ἡ Φιλοσοφία, διὰ τοῦ Ἐπικτήτου, τοῦ Ἱεροκλέους, τοῦ Μάρκου Ἀντωνίου, τοῦ Εὐναπίου κλπ. Ἡ Γεωγραφία, διὰ τοῦ Ἰωσήπου Μοισιόδακος, τοῦ Γεωργίου Φατσέα, κλπ. Ἡ Ρητορική, δι' ἔργων τοῦ Δημητρίου Φαληρέως, τοῦ Τιβηρίου, τοῦ Βικεντίου Δαμωδοῦ, τοῦ Λογγίνου, τοῦ Ἀμμωνίου, τοῦ Λεσβώνακτος, τοῦ Ἑρμογένους, τοῦ Ἰωάσαφ Κορνηλίου, κλπ. Ἡ Φιλολογία, διὰ τοῦ Πλουτάρχου, τοῦ Ξενοφῶντος, τῶν ἀττικῶν ρητόρων, τοῦ Συνεσίου, τοῦ Ἀρισταινέτου, τοῦ Εὐσταθίου Θεσσαλονίκης, κλπ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Ἐπὶ τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου[1].

Α΄ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. 1. Τὸ Χ ($10^{ον}$) βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐθεωρεῖτο καὶ εἶναι τὸ δυσκολώτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Simon Stevin (1548-1620) τὸ ὠνόμασεν «ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν», ἐνῷ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Jean Montucla (1725-1799) ἀμφιβάλλει, ἐὰν κατὰ τὴν ἐποχήν του θὰ ὑπῆρχε γεωμέτρης, ὅστις θὰ ἐτόλμα νὰ παρακολουθήσῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς

* **EVANGELOS STAMATIS, Über das X. Buch der Elemente Euklids.**

1 Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν Συνεδρίαν τῆς 17 Ἰανουαρίου 1957.

τὸν σκοτεινὸν δαίδαλον τοῦ X βιβλίου[1]. Οἱ περισσότεροι ἐκ τῶν νεωτέρων ἑρμηνευτῶν τοῦ X βιβλίου καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι σκοπὸς τούτου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου διτετραγώνων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων[2]. Ὁ Cl. Taer, φρονεῖ, ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ πλήρης ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ἥτις παρέχει στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων[3].

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἐκ τῶν δώδεκα ἀλόγων εὐθειῶν τοῦ X βιβλίου (τῶν θεωρημάτων 36-41 καὶ 73-78) εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ριζῶν ἰσαρίθμων διτετραγώνων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν θετικῶν ριζῶν τῶν αὐτῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης εἶναι ἀληθὲς ὅτι αἱ ἄλογοι εὐθεῖαι τῶν θεωρημάτων 48-53 καὶ 85-90 εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ριζῶν ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι εἶναι διαφοραὶ τῶν ριζῶν τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἡ παρατήρησις ὅμως αὕτη δὲν ὑποχρεοῖ εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος, καθ' ὃ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων. Διότι εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν Στοιχείων ἐπιτελεῖται ἡ ἐπίλυσις τῶν δυσκολωτέρου τύπου δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων, (VI, 28). Ἡ λύσις τῶν ἐν τῷ X βιβλίῳ ἀπαντωσῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων στηρίζεται κυρίως εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἁπλουστάτου τύπου.

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ XIII βιβλίον τῶν Στοιχείων (θεωρ. 6, 11, 16, 17) ἀποδεικνύεται: 1) Ἐὰν εὐθεῖα ρητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (X, 73). 2) Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ρητή, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 3) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 4) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή (X, 73). Ταῦτα ὅμως ἐπίσης δὲν ὑποχρεοῦσιν εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς παρέχουσα στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, διότι ἐκ τῶν συναφῶν θεωρημάτων τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 6 καὶ 11 εἶναι προπαρασκευαστικὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17. Ἐὰν δὲ ἔλειπε τὸ δεύτερον μέρος τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17 δὲν θὰ ἐπηρεάζετο ἡ θεωρία τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

Α. 2. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται πρὸς τοῦτο αἱ ἁπλούσταται ἄλογοι

---

[1] Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444 κ. ἑ. éd. *Les Belles Lettres*, Paris, 1950.

[2] Thomas Heath, A history of Greek Mathematics I, σ. 402, Oxford, 1921.

[3] Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, σ. 103, Leipzig 1936.

εὐθεῖαι. Ἐκ τῆς ἑρμηνείας, ἣν παρέχομεν κατωτέρω τῶν κυριωτέρων θεωρημάτων τοῦ Χ βιβλίου, φρονοῦμεν, εἶναι καταφανὴς ἡ ὀρθότης τῆς ὑποστηριζομένης ἀπόψεως.

Β′

Β. 1. Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ ἔχοντα κοινὸν μέτρον· ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

2. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν (Χ, θ. 6 καὶ 7).

3. Τυχοῦσα εὐθεῖα λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ρητή.

4. Μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν αὗται θεωρῶνται γραμμικῶς.

5. Δυνάμει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

6. Πᾶσα εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν λέγεται ρητή. Ἔστωσαν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, μὴ τετράγωνοι καὶ ρητή τις εὐθεῖα ϱ. Ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ϱ, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν ϱ καὶ συνεπῶς εἶναι ρητή.

7. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ϱ καὶ $\varrho(\beta/\alpha)$, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ϱ καὶ πρὸς τὴν $\varrho(\beta/\alpha)$. Τὰ τετράγωνα ὅμως ϱ^2 καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ ἢ $\varrho^2(\beta^2/\alpha^2)$ καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι πρὸς ἄλληλα σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι ϱ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\varrho(\beta/\alpha)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

8. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ϱ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ λέγεται μέση [ἢ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\varrho(\beta/\alpha)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{3/4}$]. Μέση ἄρα λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

9. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τῆς μορφῆς $\varrho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\varrho^2(\beta/\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται μέσον. Μέσον ἄρα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μονώνυμον, περιέχον τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ θεωρούμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τετραγώνου εἶναι μέση, τὸ τετράγωνον δὲ τοῦτο εἶναι ἐπίσης μέσον.

10. Εὐθεῖά τις λέγεται ἄλογος, ὅταν τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας ληφθείσης ὡς ρητῆς.

Τὰ κατωτέρω δέκα θεωρήματα ὑπ' ἀριθ. 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 εἶναι προπαρασκευαστικὰ τῆς ὅλης θεωρίας τοῦ X βιβλίου.

10.

Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται εὐθεῖα τις ρητή, ἔστω ϱ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἀκεραίων μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ϱ, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$. Ἡ ϱ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι εὐθεῖαι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι).

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται πάλιν ἡ ϱ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι μέση. Εἶναι δὲ ἡ ϱ καὶ ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ ὄχι μόνον μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ρητόν. Ἡ πρώτη μέση λαμβάνεται κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ θ. 10 καὶ εἶναι ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δευτέρας μέσης κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν $\varrho(\beta/\alpha)$, καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10, τὴν $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τούτων, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{3/4}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση. Τὰ τετράγωνα τῶν μέσων, τὰ $\varrho^2(\beta/\alpha)^{1/2}$ καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)^{3/2}$ εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι ρητόν.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι μέσον. Προκαταρκτικῶς εὑρίσκονται τρεῖς ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λαμβάνονται οἱ μὴ τετράγωνοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ α, β, γ, δ καὶ εὐθεῖά τις ρητή, ἔστω ϱ. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ϱ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ϱ ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθ. τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ϱ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, δ, ϱ ἡ $\varrho(\delta/\gamma)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ϱ, $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης πρώτης μέσης.

Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὡς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὰ $\varrho(=A)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $(=B)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ $\Delta=\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης δευτέρας μέσης.

Τῶν $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ καὶ τῆς $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εὑρίσκει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν $E=\varrho(\delta/\gamma)^{1/2}:(\beta/\alpha)^{1/4}$. Αὕτη εἶναι ἡ δευτέρα μέση.

Λῆμμα $1^{ον}$.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \text{ ἢ } \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2, \tag{1}$$

ἔνθα $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοὶ καὶ $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι. Ὁ $\mu\nu$ εἶναι τετράγωνος (IX, 1). Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$ ὁ $\mu\nu$ δὲν εἶναι τετράγωνος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνομεν $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu$ μὴ τετράγωνος ἢ $\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\varkappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$ μὴ τετράγωνος. Οἱ τύποι (1) παρέχουσιν ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$.

Λῆμμα $2^{ον}$.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda$ ἢ $\varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοί. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος.

29.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ρητὴ εὐθεῖα $AB(=\varrho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ρητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ = \frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$, $ZB = \frac{\varrho\omega}{\varphi}$, $[\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος$]$.

30.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ρητὴ εὐθεῖα $AB(=\varrho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ρητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $BZ = \sqrt{AB^2 - AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ = \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB = \frac{\varrho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, $[\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος$]$.

31.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Δ νὰ εἶναι μέσαι, μόνον Γ^2, Δ^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Γ, Δ μήκει ἀσύμμετροι), τὸ γινόμενον $\Gamma \times \Delta$ νὰ εἶναι ρητὸν καὶ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $\Gamma = \frac{\varrho\vartheta^{1/4}}{\varphi^{1/2}}$, $\Delta = \frac{\varrho\vartheta^{3/4}}{\varphi^{3/2}}$, $[\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος$]$.

31.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

32.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Δ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ E νὰ εἶναι μέσαι, ἀλλὰ μόνον Δ^2, E^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Δ, E μήκει ἀσύμμετροι), τὸ γινόμενον $\Delta \times E$ νὰ εἶναι μέσον καὶ ἡ Δ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος, ἡ $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}, \quad E = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}, \quad [\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta, \gamma, \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

32.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Δ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.
Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}, \quad E = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 = \lambda, \gamma, \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

33.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς AZ, ZB, ὥστε AZ^2, ZB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $AZ^2 + ZB^2$ ρητὸν καὶ $AZ \times ZB$ μέσον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$AZ=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\quad ZB=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\ [\alpha^2+\beta^2=\lambda \text{ μὴ τετράγωνος}].$$

34.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον καὶ $ΑΔ\times ΔΒ$ ρητόν.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$ΑΔ=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\quad ΔΒ=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,$$

$[\alpha^2+\beta^2=\lambda$, μὴ τετράγωνος$]$.

35.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $ΑΔ^2+ΔΒ^2$ μέσον, $ΑΔ\times ΔΒ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΔ^2+ΔΒ^2$. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$ΑΔ=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,\quad ΔΒ=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\,,$$

$[\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ μὴ τετράγωνοι$]$.

Β. 2. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένως ἀποδειχθέντων κατασκευάζονται 12 ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἑκάστη τῶν ἓξ πρώτων εὐθειῶν εἶναι ἄθροισμα δύο μονωνύμων (θεωρ. 36 - 41). Ἑκάστη τῶν ἓξ ἑπομένων εὐθειῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν μονωνύμων (ἀποτομαί, θεμ. 73 - 78). Αἱ εὐθεῖαι αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατασκευὴν δώδεκα ὀρθογωνίων τριγώνων. *Ἁπλούστεραι ἄλογοι εὐθεῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσιν*. Αὗται εἶναι:

1. Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) 36
   Ἀποτομὴ (διαφορὰ) 73

$$\varrho\pm\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Τὰ μονώνυμα λαμβάνονται ἐκ τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10 [Δύναται νὰ εἶναι $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\pm\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$].

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη 37
   Πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74

$$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}\pm\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$$

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38
   Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75

$$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}\pm\frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}.$$

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

4. Μείζων / Ἐλάσσων $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 39 / 76

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33.

5. Ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη / Μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 40 / 77

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34.

6. Δύο μέσα δυναμένη / Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 41 / 78

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι. (Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς τὰ ἀθροίσματα, ἐνῷ οἱ τρίτοι εἰς τὰς διαφοράς).

Θεωρεῖται εὐθεῖα τις ρητὴ ϱ καὶ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα· ἔστω Α καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔστω Β. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β νὰ εἶναι ρηταί, ἀλλὰ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα (δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἔστω ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἡ Γ.

1) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει σύμμετροι διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος $A+B$ καὶ τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) $A-B$, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὒ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν ϱ.

I. Α καὶ $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

1. Ἐὰν Α, ϱ μήκει σύμμετροι (Β, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἄς καλῆται πρώτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἄς καλῆται πρώτη ἀποτομή.
2. Ἐὰν Β, ϱ μήκει σύμμετροι (Α, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἄς καλῆται δευτέρα δυώνυμος
ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἄς καλῆται δευτέρα ἀποτομή.
3. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ϱ,
ἡ δυώνυμος $\Delta=A+B$ ἄς καλῆται τρίτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ $\Delta=A-B$ ἄς καλῆται τρίτη ἀποτομή.

2) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι διακρίνονται ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος $A+B$ καὶ ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) $A-B$, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὒ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητήν.

II. A καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι (A, B μήκει ἀσύμμετροι).

4. Ἐὰν A, ϱ μήκει σύμμετροι (B, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται τετάρτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν B, ϱ μήκει σύμμετροι (A, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),
ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται πέμπτη δυώνυμος,
ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν οὔτε A οὔτε B εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ϱ,
ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται ἕκτη δυώνυμος
ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται ἕκτη ἀποτομή.

Κατασκευὴ τῶν ἓξ δυωνύμων καὶ ἓξ ἀποτομῶν (ἄλλαι 12 ἄλογοι εὐθεῖαι).

			θεώρημα
1.	Πρώτη δυώνυμος Πρώτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$.	48 85
2.	Δευτέρα δυώνυμος Δευτέρα ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}$.	49 86
3.	Τρίτη δυώνυμος Τρίτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \pm \varrho\frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$.	50 87

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

4.	Τετάρτη δυώνυμος Τετάρτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$.	51 88
5.	Πέμπτη δυώνυμος Πέμπτη ἀποτομὴ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \varrho\frac{\delta}{\gamma}$.	52 89
6.	Ἕκτη δυώνυμος Ἕκτη ἀποτομὴ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \varrho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$.	53 90

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν 24 ἀλόγων εὐθειῶν κατασκευάζονται 24 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τὸ κύριον μέρος τοῦ περιεχομένου τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι καταφανὴς ἡ συμμετρία καὶ ἡ ἁρμονία ἥτις ὑπάρχει, ὅταν χρησιμοποιῶνται αἱ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐνταῦθα δύναται νὰ γίνῃ ἡ παρατήρησις, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ γινόμενον 4×6 ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν τετρακτὺν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ 6, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός. Παρέχομεν τὴν κατασκευὴν τῶν 24 ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τοὺς ἑπομένους τέσσαρας πίνακας.

ΠΙΝΑΞ Ι.

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους — α′ τμῆμα ῥητή	β′ τμῆμα ἄλογος	ἑπομένως τὸ ὕψος	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
54	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη δυώνυμος θ. 48.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων (δυωνύμου) τοῦ θεωρήματος	36.
55	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα δυώνυμος 49.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$, τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης	37.
56	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη δυώνυμος 50.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας	38.
57	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη δυώνυμος 51·	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς μείζονος	39.
58	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη δυώνυμος 52.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης	40.
59	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη δυώνυμος 53.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς δύο μέσα δυναμένης	41.

[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος].

ΠΙΝΑΞ II

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ		ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ
	Τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἄλογος	Ἓν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τεμν. ὑπὸ τοῦ ὕψους ρητὴ	Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
60	$\varrho + \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ δυώνυμος τοῦ θεωρήματος 36.	ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης δυωνύμου τοῦ θ. 48.
61	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ ἐκ δύο μέσων πρώτη 37.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας δυωνύμου 49.
62	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38.	ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης δυωνύμου 50.
63	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μείζων 39.	ϱ	$\varrho+\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης δυωνύμου 53.
64	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη 40.	ϱ	$\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\varrho\alpha^{2}}{\lambda}$ τῆς πέμπτης δυωνύμου 52.
65	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ δύο μέσα δυναμένη 41.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης δυωνύμου 53

ΠΙΝΑΞ III.

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους — α' τμῆμα ῥητὴ	β' τμῆμα ἄλογος	ἑπομένως τὸ ὕψος	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
91	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}-\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη ἀποτομὴ θ. 85.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}-\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἀποτομῆς τοῦ θεωρήματος	73.
92	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα ἀποτομὴ 86.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}-\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$, τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης	74.
93	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη ἀπστομὴ 87.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς δευτέρας ἀποτομῆς μέσης	75.
94	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}-\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη ἀποτομὴ 88.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}-\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς ἐλάσσονος	76.
95	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη ἀποτομὴ 89.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}-\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης	77.
96	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη ἀποτομὴ 90.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης.	78.

['Ενταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐκ διαφορᾶς].

ΠΙΝΑΞ IV

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ: Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας — ἄλογος	Ἕν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τεμν. ὑπὸ τοῦ ὕψους — ῥητή	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ: Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
97	$\varrho - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἀποτομὴ τοῦ θεωρήματος 73.	ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης ἀποτομῆς τοῦ θ. 85.
98	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας ἀποτομῆς 86.
99	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75.	ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης ἀποτομῆς 87.
100	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ἐλάσσων 76.	ϱ	$\varrho - \frac{\varrho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης ἀποτομῆς 88.
101	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 77.	ϱ	$\frac{\varrho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\varrho\,\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς 89.
102	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετα μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 78.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης ἀποτομῆς 90.

Β. 3. Τὰ θεωρήματα, τὸ 112 καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου 113, θεωροῦμεν γνήσια· ταῦτα ἀποτελοῦσι συνέχειαν ἄμεσον καὶ συνεπῶς ἀναπόσπαστον τμῆμα τοῦ κυρίου μέρους τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων. Παρέχομεν εἰκόνα τούτων εἰς τοὺς ἑπομένους δύο πίνακας. Εἰς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων τούτων κατασκευάζονται ἓξ ὀρθογώνια τρίγωνα. Γνήσια θεωροῦμεν καὶ τὰ θεωρήματα 114, 115.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ			ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ	
	Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας	Τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς		ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
Θ. 112	ῥητὴ	τῆς πρώτης δυωνύμου	θ. 48	τῆς πρώτης ἀποτομῆς	θ. 85
	»	» δευτέρας δυωνύμου	49	» δευτέρας ἀποτομῆς	86
	»	» τρίτης δυωνύμου	50	» τρίτης ἀποτομῆς	87
	»	» τετάρτης δυωνύμου	51	» τετάρτης ἀποτομῆς	88
	»	» πέμπτης δυωνύμου	52	» πέμπτης ἀποτομῆς	89
	»	» ἕκτης δυωνύμου	53	» ἕκτης ἀποτομῆς	90
Θ. 113	»	τῆς πρώτης ἀποτομῆς	85	τῆς πρώτης δυωνύμου	48
	»	» δευτέρας ἀποτομῆς	86	» δευτέρας δυωνύμου	49
	»	» τρίτης ἀποτομῆς	87	» τρίτης δυωνύμου	50
	»	» τετάρτης ἀποτομῆς	88	» τετάρτης δυωνύμου	51
	»	» πέμπτης ἀποτομῆς	89	» πέμπτης δυωνύμου	52
	»	» ἕκτης ἀποτομῆς	90	» ἕκτης δυωνύμου	53

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser vertritt mit seiner Interpretation des X. Buches der Elemente Euklids die Meinung, der Zweck des X. Buches sei es, die Symmetrie und Harmonie aufzuzeigen die sich ergibt, wenn man bei der konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks die einfachsten irrationalen Grössen verwendet. Nach einigen Vorbemerkungen stellt der Verfasser fest, dass die Sätze 10 und 27-35, den Aufbau der ganzen Theorie des X. Buches der Elemente vorbereiten. In diesen zehn Sätzen werden die einfachsten möglichen Irrationale Grössen konstruiert, während in den folgenden Sätzen 36-41 sechs irrationale Summen von diesen Grössen gebildet werden. Diese sind: 1) Binomiale 2) Erste Bimediale 3) Zweite Bimediale 4) Major 5) Quadriert Rationales plus Medialem Ergebende 6) Quadriert die Summe zweier Medialer Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (zweite Definitions-gruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationalen Summen bildet. Diese sind: 1) Erste Binomiale

2) Zweite Binomiale 3) Dritte Binomiale 4) Vierte Binomiale 5) Fünfte Binomiale 6) Sechste Binomiale (48 - 53). Nun wird der erste entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er ist durch die Tafeln I und II wiedergegeben.

Übersetzung der Titel der Tafeln.

TAFEL I, (und III).

<table>
<tr><th colspan="3">ES IST GEGEBEN:</th><th>ES WIRD BEWIESEN:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die von der Höhe geschnitten wird,</td><td rowspan="2">folglich
die Höhe</td><td rowspan="2">Die Höhe des Dreiecks ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
<tr><td>der 1. Teil
die Rationale</td><td>der 2. Teil
die Irrationale</td></tr>
</table>

TAFEL II, (und IV).

<table>
<tr><th colspan="2">ES IST GEGEBEN:</th><th>ES WIRD BEWIESEN:</th></tr>
<tr><td>Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus
die Irrationale</td><td>Der eine Hypotenusenabschnitt
die Rationale</td><td>Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
</table>

Anstatt der sechs Summen von irrationalen Grössen (Sätze 36 - 41) bildet nun Euklid sechs Differenzen von denselben irrationalen Grössen (Sätze 73 - 78). Diese sind: 1) Apotome 2) Erste Medialapotome 3) Zweite Medialapotome 4) Minor 5) Mit Rationalem mediale Summenfläche Ergebende 6) Mit Medialem mediale Summenfläche Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (dasselbe wie in der 2. Definitionsgruppe, nun 3. Definitionsgruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationale Differenzen bildet. Diese sind: 1) Erste Apotome 2) Zweite Apotome 3) Dritte Apotome 4) Vierte Apotome 5) Fünfte Apotome 6) Sechste Apotome (Sätze 85 - 90). Nun wird der zweite entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er wird durch die Tafeln III und IV wiedergegeben. Die Titel der Tafeln III und IV, sind dieselben wie die der Tafeln I bzw. II.

Satz 112 und seine Umkehrung (S. 113) geben die Konstruktion von 12 rechtwinkligen Dreiecken; die Sätze sind eng mit der ganzen Theorie des X. Buches verbunden.

	ES SIND GEGEBEN:			ES WIRD BEWIESEN:	
	Die Höhe des Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus	Der eine Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer		Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer	
112	eine Rationale	Ersten Binomiale	S. 48	Ersten Apotone	S. 85
	»	Zweiten Binomiale	49	Zweiten Apotome	86
	»	Dritten Binomiale	50	Dritten Apotome	87
	»	Vierten Binomiale	51	Vierten Apotome	88
	»	Fünften Binomiale	52	Fünften Apotome	89
	»	Sechsten Binomiale	53	Sechsten Apotome	90
113	»	Ersten Apotome	85	Ersten Binomiale	48
	»	Zweiten Apotome	86	Zweiten Binomiale	49
	»	Dritten Apotome	87	Dritten Binomiale	50
	»	Vierten Apotome	88	Vierten Binomiale	51
	»	Fünften Apotome	89	Fünften Binomiale	52
	»	Sechsten Apotome	90	Sechsten Binomiale	53

Auch die Sätze 114 und 115 sind eng mit der Theorie des X. Buches verbunden. Infolgedessen darf man sie als echte Sätze betrachten. Die zwölf Irrationallen Linien der Sätze 36 - 41 und 73 - 78, sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs biquadratischen Gleichungen. Die zwölf Irrationalen Linien der Sätze 48 - 53 und 85 - 90 sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs quadratischen Gleichungen. Es wird aber bemerkt, dass Satz VI 28 schwierigere Probleme löst.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1958: ΤΟΜΟΣ 33ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1959

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ἐκ τῆς κατανομῆς τῶν ἀκτίνων τῶν σωματιδίων τῆς ὤχρας συνάγεται ὅτι εἰς τὴν Γαλλικὴν ὤχραν τὰ μέσα σωματίδια εὑρίσκονται εἰς μεγαλυτέραν ἀναλογίαν τῶν ἀντιστοίχων τῆς Ἑλληνικῆς. Εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὅμως ὑπάρχουν περισσότερα μικρὰ καὶ μεγάλα σωματίδια τῶν ἀντιστοίχων τῆς Γαλλικῆς. Εἰς τὰ μέσα διασπορᾶς διαλυμάτων σάπωνος καὶ Levapon ἐκ τῆς κατανομῆς τοῦ μεγέθους τῶν ἀκτίνων φαίνεται ὅτι ἡ αἰωρηματικότης τῆς Ἑλληνικῆς ὤχρας, ἐφ᾽ ὅσον αὕτη ἀπαλλαγῇ τῶν πυριτικῶν καθίσταται ἀνωτέρα τῆς Γαλλικῆς. Ἡ ἀπαλλαγὴ τῆς Ἑλληνικῆς ὤχρας ἐκ τῶν πυριτικῶν αὐτῆς δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς ἀναφερομένης κατεργασίας εἰς τὴν προηγουμένην ἐργασίαν ἡμῶν (1).

(Ἐκ τοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς Χημείας Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης).

RÉSUMÉ

II. OCRE

On étudie la distribution des rayons moyens des particules des suspensions de deux échantillons d'ocre, une ocre de Gascogne et une ocre de la région Nigrita (Macédoine Orientale, Grèce) dans des solutions des substances tensioactives telles que les détergents Levapon, Teepol, Avolan et Savon d'huile de grignons.

On emploie un appareil pour les mesures dont la principale caractéristique est la pesée directe avec une balance analytique de la matière sedimentée les résultats obtenus sont plus exacts que ceux effectués avec les balances à ressort déjà décrites.

Dans l'ocre d'origine gasconne les particules de dimensions moyennes sont notablement plus nombreuses que celles de l'ocre grecque qui présente un plus grand nombre de particules de petite et de grande dimension.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΕΜΜ. ΒΟΓΙΑΤΖΑΚΗΣ, Δ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΥΔΑΚΗΣ, Γ. ΒΑΣΙΛΙΚΙΩΤΗΣ, Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν. Τόμος 33 (1958) σ. 284.
2. HAUSER, Chem. Rev. 287 (1945).
   C. ROSSI, An. Chim. Appl. 37 (1947), 199.
3. L. GREINER - R. VOLD, J. Phys. Coll. Chem. 53 (1949), 67.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Περὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων παρὰ Πλάτωνι, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

Α΄. Ὁ Γεώργιος Κάντορ εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἀρχαὶ μιᾶς γενικῆς θεωρίας τῶν συνόλων, σελ. 43, Λειψία 1883 (Grundlagen einer allgemeinen Mannich-

* EVANGELOS STAMATIS, The theory of sets by Plato.

faltigkeitslehre) γράφει τὰ ἑξῆς: Θεωρῶ ποικιλίαν ἢ σύνολον πᾶν πλῆθος, τὸ ὁποῖον νοεῖται ὡς ἕν, δηλ. πᾶσαν συμπερίληψιν καθωρισμένων στοιχείων, τὰ ὁποῖα δυνάμει ἑνὸς νόμου δύνανται νὰ συνδεθῶσιν εἰς ἓν σύνολον καὶ πιστεύω ὅτι διὰ τούτου ὁρίζω τι, τὸ ὁποῖον εἶναι συγγενὲς πρὸς τὸ Πλατωνικὸν εἶδος ἢ ἰδέαν, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Φίληβος ὀνομάζει μεικτόν.

Β'. Περὶ ἰδεῶν καὶ εἰδῶν ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων εἰς τινας διαλόγους αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Παρμενίδης (129 - 135). Εἰς τὸν Παρμενίδην ὅμως ἀνευρίσκομεν μεταξὺ ἄλλων σπουδαίων μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ γενικάς τινας ἀρχὰς μιᾶς θεωρίας περὶ συνόλων. Ἐκ τῆς θεωρίας ταύτης ἀναφέρομεν ἐνταῦθα μόνον στοιχεῖά τινα, ὡς εἶναι ὁ ὁρισμὸς τοῦ μέρους (στοιχείου) καὶ τοῦ ὅλου (συνόλου):

Τὸ μέρος που μέρος ὅλου ἐστιν. Τὶ δὲ τὸ ὅλον; οὐχὶ οὗ ἂν μέρος μηδὲν ἀπῇ ὅλον ἂν εἴη; (137 c).

— Οὐκ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τὸ μόριον μόριον, ἀλλὰ μιᾶς τινος ἰδέας καὶ ἑνός τινος, ὃ καλοῦμεν ὅλον, ἐξ ἁπάντων ἓν τέλειον γεγονός, τούτου μόριον ἂν τὸ μόριον εἴη (157 d - e).

Ἑρμηνεία. Τὸ μέρος (στοιχεῖον) εἶναι βεβαίως μέρος ἑνὸς συνόλου. Τὶ εἶναι δὲ σύνολον; Δὲν εἶναι σύνολον ἐκεῖνο, ἀπὸ τοῦ ὁποίου οὐδὲν μέρος ἀπουσιάζει;

— Οὐχὶ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τῶν πραγμάτων τὸ μόριον (στοιχεῖον) εἶναι μόριον, ἀλλὰ μιᾶς τινος ἰδέας καὶ ἑνός τινος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν σύνολον καὶ τὸ ὁποῖον ἐξ ὅλων τῶν στοιχείων ἔχει σχηματισθῆ εἰς ἓν τέλειον, τούτου τὸ στοιχεῖον θὰ εἶναι στοιχεῖον.

Λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος περὶ συνόλων ἀνευρίσκομεν εἰς τὰ σχόλια τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Παρμενίδην καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ ἰδίου, ἥτις φέρεται ὑπὸ τὸν τίτλον Πρόκλου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική[1] (Fridericus Creuzer, Francofurti ad Moenum, 1822). Αὕτη περιλαμβάνει 211 προτάσεις. Ἐπισημειωτέον ὅτι ἀναίρεσιν τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως τοῦ Πρόκλου ἐπιχειρεῖ διὰ 198 προτάσεων ὁ Ἐπίσκοπος Μεθώνης Νικόλαος διὰ τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀνάπτυξις τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ» (J. Th. Voemel, Francofurti ad Moenum, 1822). Καὶ ἡ πραγματεία ὅμως αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς Πλατωνικῆς θεωρίας περὶ συνόλων. Κατωτέρω παραθέτομεν τέσσαρας ἐκ τῶν 211 προτάσεων τοῦ Πρόκλου, τὰς ὑπ' ἀριθμ.

[1] Ὁ Gordan χαρακτηρίζει τὴν πρώτην ἀπόδειξιν τοῦ Hilbert διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ πεπερασμένου συστήματος ἀναλλοιώτων ὡς θεολογικήν. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Springer - Verlag, Berlin 1928, σελ. 227.

66, 67, 68, 69 διὰ τῶν ὁποίων θεωροῦμεν, ὅτι ἑρμηνεύεται σημαντικῶς ἡ περὶ συνόλων θεωρία τοῦ Πλάτωνος.

Πρότασις 66.

Πάντα τὰ ὄντα πρὸ ἄλληλα ἢ ὅλα ἐστιν, ἢ μέρη, ἢ ταὐτά, ἢ ἕτερα·

Ἑρμηνεία. Πάντα τὰ ὄντα θεωρούμενα πρὸς ἄλληλα ἢ εἶναι σύνολα ἢ εἶναι στοιχεῖα, ἢ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἢ διάφορα.

Πρότασις 67.

Πᾶσα ὁλότης ἢ πρὸ τῶν μερῶν ἔστιν, ἢ ἐκ τῶν μερῶν, ἢ ἐν τῷ μέρει. ἢ γὰρ ἐν τῇ αἰτίᾳ τὸ ἑκάστου θεωροῦμεν εἶδος, καὶ ὅλον ἐκεῖνο πρὸ τῶν μερῶν λέγομεν, τὸ ἐν τῷ αἰτίῳ ὑποστάν, ἢ ἐν τοῖς μετέχουσιν αὐτοῦ μέρεσι. Καὶ τοῦτο διχῶς. ἢ γὰρ ἐν ἅπασιν ὁμοῦ τοῖς μέρεσι, καὶ ἔστι τοῦτο ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, οὗ καὶ ὁτιοῦν μέρος ἀπὸν ἐλασσοῖ τὸ ὅλον· ἢ ἐν ἑκάστῳ τῶν μερῶν, ὡς καὶ τοῦ μέρους κατὰ μέθεξιν τοῦ ὅλου γεγονότος. ὃ καὶ ποιεῖ τὸ μέρος εἶναι ὅλον μερικῶς. καθ' ὕπαρξιν μὲν οὖν ὅλον τὸ ἐκ τῶν μερῶν· κατ' αἰτίαν δὲ τὸ πρὸ τῶν μερῶν· κατὰ μέθεξιν δὲ τὸ ἐν τῷ μέρει. Καὶ γὰρ τοῦτο κατὰ τὴν ἐσχάτην ὕφεσιν ὅλον, ῇ μιμεῖται τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, ὅταν μὴ τὸ τυχὸν ᾖ μέρος, ἀλλὰ τῷ ὅλῳ δυνάμενον ἀφομοιοῦσθαι, οὗ καὶ τὰ μέρη ὅλα ἐστίν.

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἢ ὑπάρχει πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων του, ἢ ὑπάρχει ἐκ τῶν στοιχείων του, ἢ εἰς ἕκαστον στοιχεῖον του. Διότι ἢ θεωροῦμεν τὴν αἰτίαν [1], δι' ἣν ἐδημιουργήθη τὸ εἶδος ἑκάστου πράγματος (στοιχείου) καὶ τότε τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων τὸ γενόμενον κατ' ἀκολουθίαν τοῦ αἰτίου τῆς δημιουργίας τὸ λέγομεν σύνολον ὑπάρχον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν μερῶν (στοιχείων) ἢ λέγομεν σύνολον κάτι, δυνάμει τῶν μερῶν, ἅτινα μετέχουσιν αὐτοῦ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύνολον ὑπὸ διττὴν ἔννοιαν. 1) Ἢ διότι εἶναι σύνολον ἕνεκα ὅλων τῶν μερῶν αὐτοῦ, καὶ εἶναι τοῦτο σύνολον ἐξ ὅλων τῶν μερῶν του (στοιχείων του), καὶ τὸ ὁποῖον σύνολον ἐλαττοῦται, ὅταν ἀπουσιάζῃ τούτου ὁ,τιδήποτε μέρος. 2) Ἢ διότι ὑπάρχει σύνολον εἰς ἕκαστον τῶν μερῶν του (στοιχείων του) θεωρουμένου τοῦ μέρους ὡς γεγονότος κατὰ μέθεξιν τοῦ συνόλου. Πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον (ἡ μέθεξις) κάμνει τὸ μέρος (στοιχεῖον) νὰ εἶναι μερικὸν σύνολον (ὑποσύνολον). Καθ' ὕπαρξιν μὲν λοιπὸν ὑπάρχει σύνολον ἀπαρτιζόμενον ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ· κατ' αἰτίαν δὲ ὑπάρχει σύνολον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν μερῶν του (στοιχείων του)· κατὰ μέθεξιν δὲ ὑπάρχει σύνολον εἰς ἓν μέρος (στοιχεῖον). Διότι καὶ τοῦτο (τὸ σύνολον ἑνὸς στοιχείου) εἶναι σύνολον κατὰ τὴν ἐσχάτην ὑπόστασιν, καθ' ὅσον τὸ στοιχεῖον σύνολον ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων

[1] Εἰς τὸν Φίληβον, τὸν ὁποῖον μνημονεύει ὁ G. Cantor ἀναφέρονται τέσσαρες ἀρχαὶ τῶν ὄντων: τὸ ἄπειρον, τὸ πέρας ἔχον, τὸ ἐκ τούτων μεικτόν, καὶ ἡ αἰτία τῆς μείξεως τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ πέρας ἔχοντος (23 c . . . 30 a).

ἀποτελουμένου συνόλου, ὅταν τὸ στοιχεῖον τοῦτο δὲν εἶναι τὸ τυχὸν μέρος, ἀλλὰ δύναται νὰ ἀφομοιωθῇ πρὸς τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου καὶ τὰ στοιχεῖα εἶναι σύνολα.

Πρότασις 68.

Πᾶν τὸ ἐν τῷ μέρει ὅλον, μέρος ἐστὶ τοῦ ἐκ τῶν μερῶν ὅλου. Εἰ γὰρ μέρος ἐστίν, ὅλου τινός ἐστι μέρος, καὶ ἤτοι τοῦ ἐν αὐτῷ ὅλου, καθὸ λέγεται ἐν τῷ μέρει ὅλον. ἀλλ' οὕτως αὐτὸ ἑαυτοῦ μέρος, καὶ ἴσον τῷ ὅλῳ τὸ μέρος ἔσται καὶ ταὐτὸν ἑκάτερον· ἢ ἄλλου τινος ὅλου. Καὶ εἰ ἄλλου, ἢ μόνον ἐστὶν ἐκείνου μέρος καὶ οὕτως οὐδὲν ἂν πάλιν τοῦ ὅλου διαφέρει, ἑνὸς ὄντος ἓν ὂν μέρος, ἢ μεθ' ἑτέρου·

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς στοιχείου εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων συνόλου. Διότι, ἐὰν τὸ σύνολον εἶναι ἓν στοιχεῖον, εἶναι στοιχεῖον συνόλου τινός, καὶ ἢ εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἐν τῷ στοιχείῳ αὐτῷ συνόλου, καθόσον λέγεται σύνολον στοιχείου, ἀλλὰ τοιουτοτρόπως αὐτὸ εἶναι μέρος τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ θὰ εἶναι τὸ μέρος ἴσον πρὸς τὸ ὅλον, καὶ ἕκαστον ἐκ τῶν δύο (τὸ στοιχεῖον ὡς στοιχεῖον καὶ τὸ στοιχεῖον ὡς σύνολον) εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· ἢ εἶναι στοιχεῖον ἄλλου τινὸς συνόλου. Καὶ ἐὰν εἶναι στοιχεῖον ἄλλου τινὸς συνόλου (θὰ συμβαίνωσι δύο τινὰ) ἢ θὰ εἶναι τοῦτο τὸ μόνον στοιχεῖον ἐκείνου τοῦ συνόλου, καὶ τοιουτοτρόπως οὐδόλως θὰ διαφέρῃ πάλιν τοῦ συνόλου, διότι ὑπάρχει ἓν μέρος (στοιχεῖον) ὑπάρχοντος ἑνός, ἢ θὰ ἀποτελῇ σύνολον μὲ ἄλλο στοιχεῖον.

Πρότασις 69.

Πᾶν τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον μετέχει τῆς πρὸ τῶν μερῶν ὁλότητος.

[Ἑρμηνεία. Πᾶν τὸ ἐκ τῶν στοιχείων ἀποτελούμενον σύνολον μετέχει τοῦ συνόλου τοῦ ὑπάρχοντος πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων].

SUMMARY

George Cantor, in his treatise «Principles of a general theory of sets»[1], p. 43 (Leipzig 1883), mentions the following: I consider variety or set every multitude which is unterstood as a whole i.e., every summary of determined elements which, on the basis of a certain law, can be connected to a single set, and thus I believe that I define something which is relative to the platonic thing or idea and to that which, in this dialoge Philebus, Plato names as mixed» (μεικτόν).

Plato discusses ideas and things in several of his dialoges. Parmenides is one of them (129 - 135). In this dialoge, among various important mathematical meanings, we find several general principles of a theory of sets. Out of this theory we only quote certain elements, such as the definition of the part (element) and the whole (set):

[1] Crundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.

«The part surely is part of a whole. Yes. And what is the whole? Is not a whole of which no part is wanting?» (137 c).

«Then the part is a part, not of the many nor of all, but of a single form and a single concept which we call a whole, a perfect unity created out of all; this it is of which the part is a part» (157 d-e).

We meet a very interesting development of the platonic theory of sets in Proclus commentaries on Parmenides and in his treatise under the title «Theological Elementalism» [*Πρόκλου Διαδόχου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική*, Fridericus Creuzer, 1822]. It comprizes 211 Propositions. It should be noted that the Bishop of Methoni Nicolaus by his treatise «Development of Theological Elementalism of the Proclus» [*Νικολάου Ἐπισκόπου Μεθώνης*, Ἀνάπτυξις τῆς θεολογικῆς στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ, J. Th. Voemel, 1822], attempts to refute, which 198 Propositions, the theological Elementalism of Proclus. This treatise can be also considered as a contribution to interpretation of the platonic theory of sets.

We quote here 4 out of the 211 propositions of Proclus (66, 67, 68, 69) trough which, we think, that the platonic theory of sets is considerably interpretated.

Proposition 66.

All things are in relation to themselves, either sets or elements· or are the same elements, or other elements.

Proposition 67.

Every set, either it exists prior to the existence of its elements or it exists own elements or it exists in each of its elements. Because we either concider the cause for which the thing of each element was created and then the set of things made in consequence of the cause of the creation is called set existing before the existence of the elements, or we call set someting, due to the elements which participate in it. The last set is under stood under two meanings as under: 1) Either because it is set owing to its all elements and it is set from all of its elements, and which set is being decreated, when any of its elements is wanting. 2) Or because a set exists in each of its elements, the element being considered as fact participating in the set. The participation constitutes the part to be a subset. Therefore a) There exists a set consisting of its own elements b) There exists a set a priori, i. e. before the existence of its elements c) There exists a set by participation of a single element. Because this set of one element is a set in the last substance, so far as the element «set» has the properties of the set being of its elements, when this element is not the accidental part, but it can assimilated to the set, of which the elements are also sets.

Proposition 68.

Every set consisting of a single element is an element of the set which consists of the elements. Because if the set is simply an element it is then an element of a certain set and 1) Either it is an element of the set, being set of one only element, because it is said to be a set of the element, but thus it is element of itself, and the part should be equal to the whole, and each of the two (i. e. the element as an element and the element as a whole) is the same thing. 2) Or it is an element of some other set. And if it is an element of some other set then there will be two cases. First either it will be the only element of that set, and thus it will not differ from the set, because there exists an element of an existing one, or second the element will constitute a set with an other element.

Proposition 69.

Every set which consists of elements participates in the set, which exists before the existence of the elements.

ΠΑΛΑΙΟΝΤΟΛΟΓΙΑ.—Neue Rhinocerotidenfunde aus dem Tertiär und Quartär von Mazedonien (Griechenland)*, *von* ***P. Psarianos.***

Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μαξ. Μητσοπούλου.

In der Sammlung des Geologisch - paläontologischen Institutes der Universität Thessaloniki befinden sich verschiedene Wirbeltierreste aus tertiären und quartären Ablagerungen, die eine Bereicherung unserer Kenntnis bringen und von denen hier die Nashornreste beschrieben und abgebildet seien.

Für die Überlassung des Materiales zur Bearbeitung ist der Verf. Herrn Prof. Dr M. Maravelakis, Geologisch - paläontologisches Institut der Universität Thessaloniki, zu grobem Dank verpflichtet. Die Bearbeitung der Nashornreste erfolgte im Paläontologischen Institut der Universität Wien. Für Überlassung eines Arbeitsplatzes am genannten Institut sowie für Vergleichsmaterial sei auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Othmar Kühn, Vorstand des Paläontologischen Institutes der Universität Wien, sowie der Leitung der Geologisch - paläontologischen Abteilung des Naturhistorischen Museums Wien bestens gedankt. Für Literaturangaben und verschiedene Hinweise ist der Verf. Herrn Prof. Dr. E. Thenius, Paläontologisches Institut der Universität Wien, zu Dank verpflichtet.

* Π. ΨΑΡΙΑΝΟΣ, Νέα εὑρήματα Ρινοκεριδῶν ἐκ τῶν τριτογενῶν καὶ τεταρτογενῶν ἀποθέσεων τῆς Μακεδονίας.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1959: ΤΟΜΟΣ 34ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1960

SUMMARY

The non-fermentable sugars of oranges, mandarines, bitter oranges and lemons have been investigated by paper chromatography. In the system n-propanol, ethyl acetate, water (70 : 20 : 10), seven spots have been observed by developing the chromatogram with aniline oxalate. Dextrose, lactose, galactose, arabinose, xylose have been identified by means of co-chromatography.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Λ. Νιννη καὶ Μ. Νιννη, Μελέτη περὶ τῶν μὴ ζυμωσίμων σακχάρων τῶν σταφυλῶν καὶ τῶν σταφίδων διὰ χρωματογραφίας χάρτου. Πρακτ. Ἀκαδ. Ἀθηνῶν 32 (1957) σελ. 414-421.
2. G. S. Siddapa, C. R. Rao, Indian J. Hort., **12** (1955) 122.

ΦΥΣΙΚΗ.— Περὶ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη**** *.

Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Α΄. Ὁ Ἰσαὰκ Νεύτων εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Philosophiae naturalis principia mathematica διαλαμβάνει ἐν ἀρχῇ τρία ἀξιώματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον, τὸ λεγόμενον ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει ὡς ἑξῆς:

LEX. 1.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare. [Ἑρμηνεία: Πᾶν σῶμα διατηρεῖ τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἐξαναγκάζεται ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἰς μεταβολὴν καταστάσεως].

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ Νεύτων διαχωρίζει τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας εἰς δύο μέρη. Τὸ πρῶτον μέρος ἀφορᾷ εἰς σώματα εὑρισκόμενα ἐν ἠρεμίᾳ, ἐν ᾧ τὸ δεύτερον ἀφορᾷ εἰς σώματα εὑρισκόμενα ἐν εὐθυγράμμῳ ἰσοταχεῖ κινήσει.

Τινὲς τῶν ἐρευνητῶν τῆς ἱστορίας τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, θεωροῦντες, πιθανῶς, ὅτι τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀξιώματος εἶναι τὸ κυριώτερον, παρατηροῦσιν ὅτι τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει διατυπωθῇ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τῆς Φυσικῆς ἀκροάσεως, Δ8 215α, ἔνθα ἀναγράφεται τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀξιώματος, ὅπερ ἔχει ὡς ἑξῆς:

> Ἔτι οὐδεὶς ἂν ἔχοι εἰπεῖν διατὶ κινηθὲν στήσεταί που
> τὶ γὰρ μᾶλλον ἐνταῦθα ἢ ἐνταῦθα; ὥστε ἢ ἠρεμήσει
> ἢ εἰς ἄπειρον ἀνάγκη φέρεσθαι, ἐὰν μή τι ἐμποδίσῃ κρεῖττον.

---

* **EVANG. STAMATIS, On the principle of inertia.**

[Ἑρμηνεία: Προσέτι οὐδεὶς θὰ ἠδύνατο νὰ εἴπῃ διατὶ κινηθὲν σῶμα θὰ σταματήσῃ κάπου· διότι διατὶ νὰ σταματήσῃ ἐδῶ καὶ ὄχι ἐκεῖ; ὥστε ἢ θὰ ἠρεμήσῃ ἢ κατ' ἀνάγκην θὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον, ἐὰν δὲν τὸ ἐμποδίσῃ ἰσχυροτέρα τῆς κινούσης αὐτὸ δύναμις].

Β'. Ἀλλὰ καὶ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἀξιώματος τὸ συναντῶμεν διατετυπωμένον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Περὶ Οὐρανοῦ Β13 295α, ἔνθα ἀναγράφεται·

Εἰ δὲ μὴ ἔστι μήτε φύσει μήτε βίᾳ (κίνησις τῶν σωμάτων),
ὅλως οὐδὲν κινηθήσεται.

[Ἑρμηνεία: Ἐὰν δὲ δὲν ὑπάρχῃ κίνησις τῶν σωμάτων μήτε ἐκ φύσεως[1] μήτε ἐξ ἐπιδράσεως δυνάμεως, οὐδὲν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ κινηθῇ].

Ὅθεν τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ἔχει ἐν τῷ συνόλῳ του διατυπωθῆ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ πρέπει νὰ φέρηται ὑπὸ τὸ ὄνομα τούτου καὶ οὐχὶ τοῦ Νεύτωνος.

SUMMARY

A. Isaac Newton in his treatise Philosophiae naturalis principia mathematica, states thee principles, the first of which, the so called principle of inertia, is as under:

Every body continues in its state of rest or of uniform motion in a straight line, exept in so far as it is compelled by impressed forces to change that state.

It is obvious that Isaac Newton divides the principle of inertia into two parts. The firts part concerns bodies at rest, while the second concerns bodies in uniform motion in a straight line.

Some researchers of the history of Natural Scienes considering, perhaps, that the second part of the principle is the more important note that the principle of inertia has been stated by Aristotle in his treatise Physics D8 215a, where it is written:

Nor (if it did move) could a reason be assigned why the projectile should ever stop - for why here more than these? It must therfore either not move at all, or continue its movement at infinitum, unless some stronger force impedes it

B. Besides, the first part of the principle is stated by Aristotle im his treatise De Celo B 13 295a as follows:

If there is no motion in the bodies due either to nature or to the action of a force none can move.

Hence the principle of inertia has been first in its whole expressed by Aristotle and must bear his name rather than Newtons.

[1] Ὅπως εἶναι ἡ κίνησις συνεπείᾳ τῆς βαρύτητος.

18

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1960: ΤΟΜΟΣ 35ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1960

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Περιγράφεται ἡ παρασκευὴ ὑπὸ τῶν συγγραφέων τῆς μελέτης ταύτης νέων ἀκορέστων κετονῶν καὶ τῶν θειοσεμικαρβαζονῶν αὐτῶν καὶ μελετᾶται in vitro ἡ φυματιοστατικὴ δρᾶσις τῶν τελευταίων.

BIBLIOGRAPHIE

1. Domagk, Behnisch, Mietzsch, Schmidt, Naturwiss., 1946, **33**, 315; Behnisch, Mietzsch, Schmidt, Angewandte Chem., 1948, **60A**, 113.
2. M. Welsch, N. P. Buu-Hoi et F. Binon, Experientia, 1955, XI, 350. Kuhn-Hensel, Ber., 1953, **86**, 13.
3. N. P. Buu-Hoi, N. D. Xuong et N. B. Tien, J. Org. Chem., 1956, **21**, 415.
4. G. Tsatsas, Ann. Pharm. Franç., 1949, **7**, 733. R. Delaby, G. Tsatsas, Mlle M. C. Jendrot, Bull. Soc. Chim., 1956, 1830. E. Profft, Wissenschaftliche Zeitschr. Techn. Hochschule für Chemie Leuna-Merseburg, **1**, (1957-58), p. 23.

ΦΥΣΙΚΗ.— Γενίκευσις ἑνὸς προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ Διοφάντου, ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

A

Ὁ Διόφαντος εἰς τὸ Δ´ Βιβλίον τῶν Ἀριθμητικῶν του λύει τὸ ἑξῆς πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως ὑπ' ἀριθ. 20.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ x, x_1, x_2, x_3. Τὸ πρόβλημα εἶναι $xx_1 + 1 = \alpha^2$, (1), $xx_2 + 1 = \beta^2$, (2), $xx_3 + 1 = \gamma^2$, (3), $x_1x_2 + 1 = \delta^2$, (4), $x_1x_3 + 1 = \varepsilon^2$, (5) $x_2x_3 + 1 = \zeta^2$, (6). Θέτει

$xx_1 + 1 = (\ x + 1)^2 = x(\ x + 2) + 1$. Εἶναι ἄρα $x_1 = x + 2$

$xx_2 + 1 = (2x + 2)^2 = x(4x + 4) + 1$ » » $x_2 = 4x + 4$

$xx_3 + 1 = (3x + 1)^2 = x(9x + 6) + 1$ » » $x_3 = 9x + 6$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν x_1, x_2, x_3 πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα 1, 2, 3, 4, 6. Τὸ ἐπίταγμα (5) εἶναι

$x_1x_3 + 1 = (x + 2)(9x + 6) + 1 = 9x^2 + 24x + 13 =$ τετράγωνος. Καλεῖ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου $(3x - 4)$, ὁπότε λαμβάνει $9x^2 + 24x + 13 = (3x - 4)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{16}$. Κατὰ ταῦτα εἶναι $x = \frac{1}{16}$, $x_1 = \frac{33}{16}$, $x_2 = \frac{68}{16}$, $x_3 = \frac{105}{16}$ καὶ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος πληροῦνται.

---

* **EVANG. STAMATIS, Verallgemeinerung eines Problems unbestimmter Analytik des Diophantos.**

[Σημείωσις. Ἐπὶ τοῦ προβλήματος τούτου ὁ Fermat σημειώνει: «Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 1, 3, 8. Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι $1.3+1=2^2$, $1.8+1=3^2$, $3.8+1=5^2$. Ἐὰν ὁ τέταρτος ἀριθμὸς κληθῇ x πρέπει νὰ εἶναι ἀκόμη $3x+1=$ τετράγωνος, $x+1=$ τετράγωνος, $8x+1=$ τετράγωνος, ἤτοι προκύπτουσι τρεῖς συναληθεύουσαι ἐξισώσεις, αἵτινες ἐπιλύονται κατὰ τὴν ὑπ' ἐμοῦ ἐπινοηθεῖσαν μέθοδον. Ἴδε τὴν παρατήρησίν μου εἰς τὸ 24 πρόβλημα τοῦ VI βιβλίου (τοῦ Διοφάντου)». [G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos von Alexandria, Teubner, 1890, σελ. 145 - 146].

B

1. **Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ προβλήματος 20.**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ὁ Διόφαντος θέτει $9x^2+24x+13=(3x-4)^2$ (1). Ἐκ τούτου γεννᾶται ἡ εὔλογος ἀπορία πόθεν ὁ Διόφαντος ὡρμήθη διὰ νὰ λάβῃ ὡς τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ τετραγώνου τὴν $(3x-4)$. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην τοιαύτη λῆψις προέρχεται ἐξ ἀριθμητικῶν ἐρευνῶν τῶν Πυθαγορείων, αἱ ὁποῖαι δὲν διεσώθησαν. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ὡς μειωτέος τῆς διαφορᾶς $(3x-4)$ ἔχει ληφθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $9x^2$. Τοῦτο γίνεται, ἵνα ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἀναχθῇ εἰς πρωτοβάθμιον. Ἐὰν ὡς δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) ἐλάμβανε $(3x\pm3)^2$ ἢ $(3x+5)^2$ ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ ἦτο ἀρνητική. Ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, καίτοι χρησιμοποιεῖ ὅπου εἶναι ἀνάγκη τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ἐὰν ἐλάμβανε $(3x+4)^2$ θὰ ἦτο $0=3$. Ἐὰν ἐλάμβανε $(3x-5)^2$ ὁ x θὰ ἦτο θετικὸς $=\frac{2}{9}$ καὶ τὸ συναφὲς ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θὰ ἐπληροῦτο διὰ μίαν ἀκόμη θετικὴν τιμὴν τοῦ x. Ὁ ἀφαιρετέος 4 εἰς τὴν διαφορὰν $(3x-4)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅρου τοῦ τριωνύμου τοῦ περιέχοντος τὸν x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ $9x^2$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι προκειμένου ἀλγεβρικὴ παράστασις τῆς μορφῆς $\lambda^2x^2+\lambda\varkappa x+\mu$, (2), νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν λαμβάνεται ὡς τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τετραγώνου τούτου ἡ διαφορὰ $\left(\lambda x-\frac{\varkappa}{2}\right)$, ὅπου $\frac{\varkappa}{2}=(\lambda\varkappa x:2\lambda x)$. Ἀκριβῶς τὸν νόμον τοῦτον χρησιμοποιοῦμεν κατὰ τὴν κατωτέρω ἐκτιθεμένην γενίκευσιν τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς ἐρεύνης τὴν ὁποίαν διενηργήσαμεν κατὰ τὴν γενίκευσιν αὐτὴν διεπιστώσαμεν, ὅτι χωρὶς νὰ θίγηται ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς τριωνύμου τῆς μορφῆς (2) καὶ τὰ ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τούτου λαμβανόμενα ἀποτελέσματα, εἶναι δυνατὸν εἴς τινας περιπτώσεις νὰ λαμβάνηται ὁ ἀφαιρετέος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης μικρότερος τοῦ $\frac{\varkappa}{2}$, πάντοτε ὅμως νὰ εἶναι $\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2>\mu$ διὰ νὰ εἶναι $x>0$. Εἰς τὴν παράστασιν π.χ. $x_1x_5+1=(x+2)\ (25x+10)+1=$

$25x^2+60x+21$, (3), τὴν ὁποίαν θὰ συναντήσωμεν κατωτέρω, θέτομεν τὸ τριώνυμον (3) ἴσον πρὸς $(5x-6)^2$ κατὰ τὸν καθ' ἡμᾶς ὑποτιθέμενον τρόπον σχηματισμοῦ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου θεωρουμένου ὡς τετραγώνου. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ τεθῇ τὸ τριώνυμον (3) καὶ ἴσον πρὸς $(5x-5)^2$ καὶ νὰ πληροῦται τὸ ζητούμενον ἐπίταγμα, ἐφ' ὅσον ὁ $5^2 > 21$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετική.

2. Ἡ γενίκευσις τοῦ προβλήματος 20 τοῦ Διοφάντου.

Νὰ εὑρεθῶσι n τὸ πλῆθος ἀριθμοί, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἐπιλύομεν τὸ πρόβλημα ἐνδεικτικῶς διὰ ἑπτὰ ἀγνώστους καὶ ἀκολούθως διατυποῦμεν τοὺς γενικοὺς νόμους.

Ἔστωσαν οἱ ἄγνωστοι $x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι

1. $xx_1+1=\alpha_1^2$	7. $x_1x_2+1=\beta_1^2$	12. $x_2x_3+1=\gamma_1^2$	16. $x_3x_4+1=\delta_1^2$
2. $xx_2+1=\alpha_2^2$	8. $x_1x_3+1=\beta_2^2$	13. $x_2x_4+1=\gamma_2^2$	17. $x_3v_5+1=\delta_2^2$
3. $xx_3+1=\alpha_3^2$	9. $x_1x_4+1=\beta_3^2$	14. $x_2x_5+1=\gamma_3^2$	18. $x_3x_6+1=\delta_3^2$
4. $xx_4+1=\alpha_4^2$	10. $x_1x_5+1=\beta_4^2$	15. $x_2x_6+1=\gamma_4^2$	
5. $xx_5+1=\alpha_5^2$	11. $x_1x_6+1=\beta_5^2$		
6. $xx_6+1=\alpha_6^2$			

19. $x_4x_5+1=\varepsilon_1^2$, 20. $x_4x_6+1=\varepsilon_2^2$, 21. $x_5x_6+1=\xi_1^2$

Θέτομεν

1. $xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1$. Εἶναι ἄρα $x_1=x+2$
2. $xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1$. » » $x_2=4x+4$
3. $xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1$. » » $x_3=9x+6$
4. $xx_4+1=(4x+1)^2=x(16x+8)+1$. » » $x_4=16x+8$
5. $xx_5+1=(5x+1)^2=x(25x+10)+1$. » » $x_5=25x+10$
6. $xx_6+1=(6x+1)^2=x(36x+12)+1$. » » $x_6=36x+12$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα 1—6. Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὰ ἐπιτάγματα 7—21 λαμβάνομεν

7. $x_1x_2+1=(x+2)(4x+4)+1=(2x+3)^2$
8. $x_1x_3+1=(x+2)(9x+6)+1=9x^2+24x+13=(3x-4)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{16}$
9. $x_1x_4+1=(x+2)(16x+8)+1=16x^2+40x+17=(4x-5)^2$ (κατὰ τὸν προηγουμένως μνημονευθέντα νόμον σχηματισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου). Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως εἶναι $x=\frac{1}{10}$

10. $x_1x_5+1=(x+2)(25x+10)+1=25x^2+60x+21=(5x-6)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{8}$

11. $x_1x_6+1=(x+2)(36x+12)+1=36x^2+84x+25=(6x-7)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{7}$

12. $x_2x_3+1=(4x+4)(9x+6)+1=36x^2+60x+25=(6x+5)^2$,

13. $x_2x_4+1=(4x+4)(16x+8)+1=64x^2+96x+33=(8x-6)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{64}$

14. $x_2x_5+1=(4x+4)(25x+10)+1=100x^2+140x+41=(10x-7)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{35}$

15. $x_2x_6+1=(4x+4)(36x+12)+1=144x^2+192x+49=(12x-8)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{5}{128}$

16. $x_3x_4+1=(9x+6)(16x+8)+1=144x^2+168x+49=(12x+7)^2$,

17. $x_3x_5+1=(9x+6)(25x+10)+1=225x^2+240x+61=(15x-8)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{160}$

18. $x_3x_6+1=(9x+6)(36x+12)+1=324x^2+324x+73=(18x-9)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{81}$

19. $x_4x_5+1=(16x+8)(25x+10)+1=400x^2+360x+81=(20x+9)^2$

20. $x_4x_6+1=(16x+8)(36x+12)+1=576x^5+480x+97=(24x-10)^2$, ἐξ ἧς $x=\frac{1}{320}$

21. $x_5x_6+1=(25x+10)(36x+12)+1=900x^2+660x+121=(30x+11)^2$.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν 21 ἐπιταγμάτων τὰ 11 πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετιβὰς τιμὰς τοῦ x, ἐνῷ τὰ 10 δὲν πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x.

Οἱ γενικοὶ νόμοι ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος.

Καλοῦμεν x ἕνα τῶν n ἀγνώστων ἀριθμῶν, συναρτήσει τοῦ ὁποίου θὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λοιπούς. Εἰς τούτους δίδομεν δείκτας 1, 2, 3,... ν, ὡς $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_\nu$.

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$\begin{array}{lllll}
xx_1+1=\alpha_1^2 & x_1x_2+1=\beta_1^2 & x_2x_3+1=\gamma_1^2 & x_3x_4+1=\delta_1^2 & \ldots x_{\nu-1}x_\nu+1=\xi^2 \\
xx_2+1=\alpha_2^2 & x_1x_3+1=\beta_2^2 & x_2x_4+1=\gamma_2^2 & x_3x_5+1=\delta_2^2 & \\
xx_3+1=\alpha_3^2 & x_1x_4+1=\beta_3^2 & x_2x_5+1=\gamma_3^2 & x_3x_6+1=\delta_3^2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
xx_\nu+1=\alpha^2_\nu & x_1x_\nu+1=\beta^2_{\nu-1} & x_2x_\nu+1=\gamma^2_{\nu-2} & x_3x_\nu+1=\delta^2_{\nu-3}. &
\end{array}$$

Ὡς τετρ. ρίζαν τοῦ τριωνύμου τῆς μορφῆς $\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu$ λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν $\left(\lambda x - \frac{\lambda \varkappa x}{2\lambda x}\right)$ οὕτως, ὥστε

$$\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu = \left(\lambda x - \frac{\varkappa}{2}\right)^2.$$

1. Τὸ πλῆθος τῶν πρὸς πλήρωσιν ἐπιταγμάτων εἶναι $\frac{(n-1)n}{2}$.

2. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων συναρτήσει τοῦ x εἶναι

$$\begin{aligned} x_1 &= x+2, \text{ ἐκ τοῦ } xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1 \\ x_2 &= 4x+4, \quad » \quad » \quad xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1 \\ x_3 &= 9x+6, \quad » \quad » \quad xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1 \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ $xx_\nu + 1 = (\nu x + 1)^2 = x(\nu^2 x + 2\nu) + 1$, $x_\nu = \nu^2 x + 2\nu$. ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$).

3. Τὸ γινόμενον τοῦ x ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$xx_i + 1 = x(i^2x + 2i) + 1 = (ix+1)^2, \ (i = 1, 2, 3 \ldots), \ (1).$$

4. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i x_{i+1} + 1 = (i^2x + 2i)\left[(i+1)^2 x + 2(i+1)\right] + 1 = \left[i(i+1)x + (2i+1)\right]^2, (2)$$

5. Τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i x_{i+\varkappa} + 1 = (i^2x + 2i)\left[(i+\varkappa)^2 x + 2(i+\varkappa)\right] + 1 = \left[i(i+\varkappa) - (2i+\varkappa)\right]^2, \ \varkappa \geqq 2, \ (3).$$

6. Διὰ $n \geqq 3$ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων, τὰ ὁποῖα πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x ἰσοῦται πρὸς $2n-3$, ἐνῷ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων τὰ ὁποῖα δὲν πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς περιλαμβανομένας κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω τύπου (3), ἰσοῦται πρὸς $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

ZUSAMMENFASSUNG

Diophant löst das Problem vier Zahlen von der Art zu finden, dass die Produkte von je zweien Zahlen vermehrt um 1, ein Quadrat ergeben (Arith. IV 20).

Bemerkung: Man setzt als Quadratwurzel eines Trinoms von der Form $\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu$ die Differenz $\left(\lambda x - \frac{\lambda \varkappa x}{2\lambda x}\right)$, so dass

$$\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu = \left(\lambda x - \frac{\varkappa}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Das allgemeine Problem lautet: Es sind n Zahlen, wobei n beliebig gross ist, von der Art zu finden, dass die Produkte von je zweien, vermehrt um 1, ein Quadrat ergeben.

Wir nennen x eine der unbekannten n Zahlen und ordnen die anderen in einer Reihe mit Indizen, wie $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_\nu$.

1. Die Zahl der Forderungen ist gleich $\frac{(n-1)\,n}{2}$.

2. Die Werte der unbekannten Zahlen als Funktionen von x sind

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = x+2 & \text{aus} & xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1 \\
x_2 = 4x+4 & » & xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1 \\
x_3 = 9x+6 & » & xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1 \\
\vdots & & \\
x_\nu = \nu^2 x+2\nu & \text{aus} & xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=x(\nu^2 x+2\nu)+1, \quad (\nu=1, 2, 3\ldots.).
\end{array}
$$

3. Das Produkt von x mit je einer der unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$xx_i + 1 = x\,(i^2 x + 2i) + 1 = (ix + 1)^2, \quad (i = 1, 2, 3\ldots), \quad (1).$$

4. Das Produkt von je zweien sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_i x_{i+1} + 1 = (i^2 x + 2i)\left[(i+1)^2 x + 2\,(i+1)\right] + 1 = \left[i\,(i+1)x + (2i+1)\right]^2, \quad (2).$$

5. Das Produkt von je zweien nicht sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_i x_{i+\varkappa} + 1 = (i^2 x + 2i)\left[(i+\varkappa)^2 x + 2\,(i+\varkappa)\right] + 1 = \left[i\,(i+\varkappa)x - (2i+\varkappa)\right]^2, \ \varkappa \geqq 2, \ (3).$$

6. Für $n \geqq 4$ ist die Zahl der Forderungen, die gemäss der vorigen Formel (3) für positive Werte von x erfüllt sind, gleich $\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1971 : ΤΟΜΟΣ 46ος

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

(ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑΙ)

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

1972

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 11ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1971

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΣΠΥΡ. ΜΑΡΙΝΑΤΟΥ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ.— **Τὸ Ἡλιοκεντρικὸν Σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων**, *ὑπὸ* ***Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη**** . Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἰω. Ξανθάκη.

1. Κατὰ τὴν ἀφήγησιν τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα, γενομένην περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 6ου αἰῶνος π. Χ., «εἰς τὴν Ἑλλάδα εἶχον γίνει πολλοὶ κατακλυσμοί, οἵτινες εἶχον ἐπιφέρει μεγάλας καταστροφάς, ἕνεκα τῶν ὁποίων οἱ Ἕλληνες δὲν ἐγνώριζον τὴν ἱστορίαν των». «Οἱ Αἰγύπτιοι ὅμως εἶχον καταχωρίσει εἰς τὸ Ἀρχεῖόν των ὅλα τὰ συμβάντα, τὰ ὁποῖα συνέβησαν εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον. Κατὰ τὸ Ἀρχεῖον τῶν Αἰγυπτίων οἱ Ἀθηναῖοι εἶχον πολιτισμὸν 9000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Κατὰ τὴν αὐτὴν παλαιὰν ἐποχὴν ἐβυθίσθη ἡ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν Ὠκεανόν, πέραν τοῦ πορθμοῦ τῶν Ἡρακλείων Στηλῶν (τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτὰρ) εὑρισκομένη μεγάλη νῆσος Ἀτλαντίς. Οἱ Αἰγύπτιοι ἔλαβον τὸν πολιτισμόν των παρὰ τῶν Ἀθηναίων 1000 ἔτη βραδύτερον, ἤτοι 8000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς, καθ' ἣν ἐγένετο ἡ συνομιλία τοῦ ἱερέως μετὰ τοῦ Σόλωνος» (Πλάτων, Τίμαιος 23 - 26).

Ἔκτοτε καὶ μέχρι τῆς πρωτομινωικῆς ἐποχῆς, ἡ ὁποία τοποθετεῖται περὶ τὰ 2000 ἔτη π. Χ., δὲν ὑπάρχουν πληροφορίαι περὶ πολιτιστικῶν ἐπιτευγμάτων εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον. Ἡ μεταγενεστέρα παράδοσις ἐκφράζεται μὲ θαυμασμὸν διὰ τὰ πολιτιστικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ ἐκ τῶν Λειβήθρων τῆς Θράκης καταγομένου

* EVANGELOS S. STAMATIS, **Das heliozentrische System der alten Griechen.**

Ὀρφέως, ὁ ὁποῖος διετέλεσε μαθητὴς τοῦ Λίνου τοῦ Θηβαίου καὶ ἔσχε μαθητὴν τὸν Ἀθηναῖον Μουσαῖον (Λεξ. Σου(ΐ)δα). Ἡ ἀκμὴ τοῦ Ὀρφέως ἀνάγεται εἰς τὸν 15ον αἰῶνα π. Χ. Ἡ παλαιοτέρα ἑλληνικὴ θεωρία περὶ γενέσεως τοῦ κόσμου ἀποδίδεται εἰς τὸν Ὀρφέα καὶ ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοφάνους εἰς τοὺς Ὄρνιθας.

693 Χορός. Χάος ἦν καὶ Νὺξ Ἔρεβός τε μέλαν πρῶτον καὶ Τάρταρος εὐρύς,
γῆ δ᾽ οὐδ ἀήρ οὐδ᾽ οὐρανὸς ἦν· Ἐρέβους δ᾽ ἐν ἀπείροσι κόλποις
τίκτει πρώτιστον ὑπηνέμιον Νὺξ ἡ μελανόπτερος ᾠόν,
ἐξ οὗ περιτελλομέναις ὥραις ἔβλαστεν Ἔρως ὁ ποθεινός.
. . . .
πρότερον δ᾽ οὐκ ἦν γένος ἀθανάτων, πρὶν Ἔρως ξυνέμιξεν ἅπαντα·
ξυμμιγνυμένων δ᾽ ἑτέρων ἑτέροις γένετ᾽ οὐρανὸς ὠκεανός τε,
καὶ γῆ, πάντων τε θεῶν μακάρων γένος ἄφθιτον.

(Κατὰ πρῶτον ἦτο χάος καὶ νύχτα καὶ μαῦρο σκοτάδι καὶ εὐρὺς Τάρταρος, δὲν ὑπῆρχε δὲ οὔτε γῆ οὔτε ἀὴρ οὔτε οὐρανός· εἰς τοὺς ἀπείρους δὲ κόλπους τοῦ σκότους ἡ μελανόπτερος νύχτα γεννᾷ χωρὶς σπορὰν πρῶτον ἕνα αὐγό, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἰς τὴν κατάλληλον ὥραν ἐγεννήθη ὁ Ἔρως ὁ ποθεινός . . . ., προηγουμένως δὲ δὲν ὑπῆρχε τὸ γένος τῶν ἀθανάτων, πρὶν ὁ Ἔρως συμμείξῃ ὅλα μεταξύ των· μὲ τὴν ἐπιμειξίαν δὲ τῶν ἀντιθέτων ἔγινεν ὁ οὐρανὸς καὶ ὁ ὠκεανὸς καὶ ἡ γῆ καὶ τὸ ἀθάνατον γένος ὅλων τῶν μακαρίων θεῶν).

2. Γραπτὰ μνημεῖα τῆς διδασκαλίας τοῦ Ὀρφέως καὶ τῶν μαθητῶν του δὲν ἐσώθησαν. Περισωθεῖσαι πληροφορίαι συνελέγησαν καὶ ἐδημοσιεύθησαν ὑπὸ τοὺς τίτλους 1) Ὀρφικὰ καὶ 2) Ἀποσπάσματα Ὀρφικῶν. (1. Orphica, G. Hermann, Lipsiae 1805, 2. Orphicorum Fragmenta, O. Kern, Berolini 1922.) Νεώτεροι ἐρευνηταί, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Willamowitz, ἀνάγουν τὴν πρώτην συλλογὴν καὶ δημοσίευσιν τῶν διεσκορπισμένων αὐτῶν κειμένων εἰς τὸν 2ον αἰῶνα μ. Χ. (Pauly-Wissowa, R. E., Orphische Dicthung, στ. 1332, VIII, 49-59).

Τὰ Ὀρφικὰ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν Ἀργοναυτικῶν, ἐκ τῶν Ὕμνων τῆς ὀρφικῆς λατρείας, ἐκ τῶν Λιθικῶν καὶ ἐκ τῶν Ἀποσπασματίων καὶ Ἐπιγραφῶν. Τὸ περιεχόμενον αὐτῶν, ὡς καὶ τῶν Ὀρφικῶν ἀποσπασμάτων, ἀποδίδεται εἰς τὸν Ὀρφέα καὶ τοὺς μαθητάς του, ἀνάγεται δέ, ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς πρώτης διατυπώσεως, εἰς τὸν 15ον αἰῶνα π. Χ.

Εἰς τὰ Ὀρφικὰ Ἀποσπάσματα ἀπαντῶμεν τὴν πληροφορίαν, ὅτι ἡ οὐράνιος σφαῖρα κινεῖται περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, ὅστις συμπίπτει μετὰ τοῦ ἄξονος τῆς γῆς, ἡ ὁποία κινεῖται περιστροφικῶς περὶ τὸν ἄξονά της, μένοντα εἰς τὸν αὐτὸν τόπον :

> Ἴδρις γὰρ ἔην ἄστροιο πορείης
> καὶ σφαίρης ἥτ' ἀμφὶς ὀχῆος ἀεὶ περιτέλλει,
> κυκλοτερὴς ἴση τε κατὰ σφέτερον κνώδακα.

(Orphicorum frag. O. Kern, Berolini 1922, σελ. 261, 24. Εὐσεβίου, ἐκ συγγραφῆς τοῦ Ἰουδαίου Ἀριστοβούλου). (Aristobul, Ap. Euseb. Praeparat. Evangelic. XIII 12).

(Διότι ἦτο γνώστης τῆς πορείας τοῦ ἄστρου, καὶ τῆς κινήσεως τῆς οὐρανίου σφαίρας περὶ τὴν γῆν, καθὼς αὕτη (ἡ γῆ) στρογγύλη οὖσα περιστρέφεται καὶ μάλιστα εἰς ἴσον χρόνον περὶ τὸν ἰδικόν της ἄξονα).

3. Τὴν πληροφορίαν τῶν Ὀρφικῶν, ὅτι ἡ γῆ περιστρέφεται περὶ τὸν μένοντα ἄξονά της, ὅστις συμπίπτει πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, περὶ τὸν ὁποῖον περιστρέφεται ἡ οὐράνιος σφαῖρα, ἀπαντῶμεν καὶ εἰς τὸν Τίμαιον τοῦ Πλάτωνος καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀριστοτέλους Περὶ οὐρανοῦ, ὡς μνημονεύεται κατωτέρω.

4. Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὀρφέως μέχρι τοῦ 7ου αἰ. π. Χ. αἱ περισωθεῖσαι πληροφορίαι περὶ τῆς γενέσεως τοῦ κόσμου ἀναφέρονται, ἐκ παραδόσεως, κυρίως ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου καὶ τοῦ Ἡσιόδου. Μόλις κατὰ τὸν 7ον - 6ον αἰῶνα ἀρχίζει ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα ἐπὶ τῆς γενέσεως τοῦ κόσμου, εἰς τὴν Σχολὴν τῆς Μιλήτου ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ.
Κατωτέρω ἐκθέτομεν πληροφορίας, ἀναφερομένας εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος τῶν Ἑλλήνων, τὰς διατυπωθείσας ἀπὸ τοῦ 6ου αἰῶνος π. Χ. μέχρι τῶν πρώτων χριστιανικῶν χρόνων, ἀκολούθως δὲ τὰ περὶ τῆς δημοσιεύσεως τοῦ ἀστρονομικοῦ βιβλίου τοῦ Κοπερνίκου.

ΑΝΑΞΙΜΑΝΔΡΟΣ

5. Εὔδημος ἱστορεῖ ἐν ταῖς Ἀστρολογίαις, ὅτι Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὴν τοῦ ζῳδιακοῦ διάζωσιν καὶ τὴν τοῦ μεγάλου ἐνιαυτοῦ περίστασιν· Θαλῆς δὲ ἡλίου ἔκλειψιν καὶ τὴν κατὰ τὰς τροπὰς αὐτοῦ περίοδον, ὡς οὐκ ἴση ἀεὶ συμβαίνει. Ἀναξίμανδρος δὲ ὅτι ἐστὶν ἡ γῆ μετέωρος καὶ κινεῖται περὶ τὸ τοῦ κόσμου μέσον.

(Θέων Σμυρναῖος, Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, E. Hiller, Lipsiae 1878, σελ. 198, 14-19).

(Ὁ Εὔδημος ἱστορεῖ εἰς τὰς Ἀστρολογίας, ὅτι ὁ Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὸν ζῳδιακὸν κύκλον καὶ τὴν διάρκειαν τοῦ μεγάλου ἔτους, ὁ Θαλῆς δὲ τὴν ἔκλειψιν ἡλίου καὶ ὅτι οἱ χρόνοι τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους δὲν εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ὁ Ἀναξίμανδρος δέ, ὅτι ἡ γῆ εἶναι μετέωρος καὶ κινεῖται περὶ τὸ μέσον τοῦ κόσμου).

ΦΙΛΟΛΑΟΣ

6. Φιλόλαος πῦρ ἐν μέσῳ περὶ τὸ κέντρον ὅπερ ἑστίαν τοῦ παντὸς καλεῖ καὶ Διὸς οἶκον καὶ μητέρα θεῶν, βωμόν τε καὶ συνοχὴν καὶ μέτρον φύσεως. καὶ πάλιν πῦρ ἕτερον ἀνωτάτω τὸ περιέχον. πρῶτον δ' εἶναι φύσει τὸ μέσον, περὶ δὲ τοῦτο δέκα σώματα θεῖα χορεύειν, οὐρανόν τε <μετὰ τὴν τῶν ἀπλανῶν σφαῖραν> τοὺς ε΄ πλανήτας, μεθ' οὓς ἥλιον, ὑφ' ᾧ σελήνην, ὑφ' ᾗ τὴν γῆν, ὑφ' ᾗ τὴν ἀντίχθονα, μεθ' ἃ σύμπαντα τὸ πῦρ, ἑστίας περὶ τὰ κέντρα τάξιν ἐπέχον.

(Stobaei Ecl. I 22 σελ. 196, 18, Wachsmuth).
(Ἀέτιος II 7,7, Dox. 336 B 20 - 337 B 10).

(Ὁ Φιλόλαος λέγει, ὅτι εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου, περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ, ὑπάρχει τὸ πῦρ, τὸ ὁποῖον καλεῖ ἑστίαν τοῦ παντὸς καὶ οἶκον τοῦ Διὸς καὶ μητέρα τῶν θεῶν καὶ βωμὸν καὶ συνοχὴν καὶ μέτρον τῆς φύσεως. Καὶ πάλιν ἄλλο πῦρ εἰς τὸ ἀνώτατον μέρος τοῦ κόσμου τὸ περιέχον αὐτόν. Πρῶτον δὲ εἶναι ἐκ φύσεως τὸ μέσον, περὶ τοῦτο δὲ περιστρέφονται δέκα θεῖα σώματα (ὁ οὐρανὸς) μετὰ ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν, οἱ 5 πλανῆται, κατόπιν ὁ ἥλιος, ὑπὸ τὸν ὁποῖον ἡ σελήνη, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίχθων, καὶ κατόπιν ἔρχεται τὸ πῦρ, τὸ ὁποῖον ἐπέχει θέσιν ἑστίας περὶ τὰ κέντρα).

7. Φιλόλαος ὁ Πυθαγόρειος τὸ μὲν πῦρ μέσον, τοῦτο γὰρ εἶναι τοῦ παντὸς ἑστίαν· δευτέραν δὲ τὴν ἀντίχθονα, τρίτην δ' ἣν οἰκοῦμεν γῆν ἐξ ἐναντίας κειμένην τε καὶ συμπεριφερομένην τῇ ἀντίχθονι· παρ' ὃ καὶ μὴ ὁρᾶσθαι ὑπὸ τῶν ἐν τῇδε τοὺς ἐν ἐκείνῃ.

(Ἀέτιος III 11,3). (Πλούταρχος, Περὶ τῶν ἀρεσκόντων τοῖς Φιλοσόφοις III, ΙΑ΄).

(Ὁ Πυθαγόρειος Φιλόλαος, λέγει, ὅτι πρῶτον εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου εἶναι τὸ πῦρ (διότι τοῦτο εἶναι ἡ ἑστία τοῦ σύμπαντος), δευτέρα εἶναι ἡ ἀντίχθων, τρίτη δὲ ἡ οἰκουμένη γῆ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀντίχθονος καὶ συμπεριφερομένη (περὶ τὸ μέσον) μὲ τὴν ἀντίχθονα· δι' αὐτὸ δὲ καὶ δὲν φαίνονται ὑπὸ τῶν κατοίκων τῆς γῆς οἱ ἐκεῖ κατοικοῦντες).

ΠΛΑΤΩΝ

8. Τοῦ μὲν οὖν θείου τὴν πλείστην ἰδέαν ἐκ πυρὸς ἀπηργάζετο, ὅπως ὅτι λαμπρότατον ἰδεῖν τε κάλλιστον εἴη, τῷ δὲ παντὶ προσεικάζων εὔκυκλον ἐποίει, τίθησί τε εἰς τὴν τοῦ κρατίστου φρόνησιν ἐκείνῳ συνεπόμενον, νείμας περὶ πάντα κύκλῳ τὸν οὐρανόν, κόσμον ἀληθινὸν αὐτῷ πεποικιλμένον εἶναι καθ᾽ ὅλον.

Κινήσεις δὲ δύο προσῆψεν ἑκάστῳ, τὴν μὲν ἐν ταὐτῷ κατὰ ταὐτὰ περὶ τῶν αὐτῶν ἀεὶ τὰ αὐτὰ ἑαυτῷ διανοουμένῳ, τὴν δὲ εἰς τὸ πρόσθεν, ὑπὸ τῆς ταὐτοῦ καὶ ὁμοίου περιφορᾶς κρατουμένῳ· τὰς δὲ πέντε κινήσεις ἀκίνητον καὶ ἑστός, ἵνα ὅτι μάλιστα αὐτῶν ἕκαστον γένοιτο ὡς ἄριστον. ἐξ ἧς δὴ τῆς αἰτίας γέγονεν ὅσ᾽ ἀπλανῆ τῶν ἄστρων ζῷα θεῖα ὄντα καὶ ἀΐδια καὶ κατὰ ταὐτὰ ἐν ταὐτῷ στρεφόμενα ἀεὶ μένει· τὰ δὲ τρεπόμενα καὶ πλάνην τοιαύτην ἴσχοντα, καθάπερ ἐν τοῖς πρόσθεν ἐρρήθη, κατ᾽ ἐκεῖνα γέγονεν. γῆν δὲ τροφὸν μὲν ἡμετέραν, ἰλλομένην δὲ περὶ τὸν διὰ παντὸς πόλον τεταμένον, φύλακα καὶ δημιουργὸν νυκτός τε καὶ ἡμέρας ἐμηχανήσατο, πρώτην καὶ πρεσβυτάτην θεῶν ὅσοι ἐντὸς οὐρανοῦ γεγόνασι.

(Πλάτων, Τίμαιος 40 A - C).

(Τὴν μορφὴν τοῦ θείου διεμόρφωνεν (ὁ δημιουργὸς τοῦ κόσμου) κατὰ τὸ πλεῖστον ἐκ πυρός, διὰ νὰ εἶναι, ὅταν τὸ βλέπῃ κανείς, λαμπρότατον καὶ κάλλιστον, προσομοιάζων δὲ τοῦτο πρὸς τὸ σύμπαν τὸ ἔκαμεν εὔκυκλον (δηλ. σφαιροειδὲς) καὶ ἔθεσε τοῦτο εἰς τὴν φρόνησιν τοῦ κρατίστου, ὡς συνοδὸν τούτου, κατανείμας τὴν οὐράνιον σφαῖραν καθ᾽ ὅλα διὰ κύκλου, ὥστε νὰ εἶναι εἰς αὐτὸν (τὸν Θεὸν) κόσμημα ἀληθινὸν πεποικιλμένον καθ᾽ ὅλα. Προσέδωκε δὲ εἰς ἕκαστον ἄστρον, τὸ ὁποῖον εἶναι θεότης δημιουργηθεῖσα ὑπὸ τοῦ θεοῦ, δύο κινήσεις, ἡ μὲν μία νὰ γίνεται εἰς τὸν αὐτὸν τόπον κυκλικῶς καὶ ὁμαλῶς, ὡς δημιούργημα τοιοῦτον (τὸ ἄστρον θεότης), τὸ ὁποῖον διὰ τὰ αὐτὰ πράγματα νὰ σκέπτεται πάντοτε τὰ αὐτά, ἡ ἄλλη κίνησις δὲ νὰ γίνεται κατὰ προχώρησιν, ἡ ὁποία νὰ συγκρατῇ τοῦτο κατὰ τὴν περιφορὰν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ ὁμοίου σύμπαντος· κατὰ τὰς πέντε δὲ διευθύνσεις (ἐκ τῶν ἐν ὅλῳ δυνατῶν ἕξ: ἀνατολαί, δυσμαί, βορρᾶς, νότος, ἄνω, κάτω) νὰ εἶναι τὸ ἄστρον (θεότης) ἀκίνητον καὶ ἠρεμοῦν, ἵνα ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν ἄριστον. Ἐκ τῆς αἰτίας λοιπὸν αὐτῆς συνέβη, ὥστε ὅσα ἀπλανῆ ἐκ τῶν ἄστρων εἶναι ζῷα θεῖα καὶ αἰώνια καὶ περιστρέφονται ὁμαλῶς εἰς τὸν αὐτὸν τόπον νὰ μένουν ἐκεῖ πάντοτε· τὰ δὲ μεταβάλλοντα θέσιν καὶ λαμβάνοντα τοιαύτην περιπλάνησιν, ὅπως ἐλέχθη προηγουμένως, αὐτὰ ὀφείλουν τοῦτο εἰς τὰ προηγούμενα αἴτια. Τὴν δὲ γῆν, ἡ ὁποία εἶναι τροφὸς ἡμῶν, τὴν περιστρεφομένην περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου, φύλακα δὲ καὶ δημιουργὸν τῆς νυκτὸς καὶ τῆς ἡμέρας, τὴν ἐδημιούργησεν αὐτὴν πρώτην καὶ πρεσβυτάτην ἐκ τῶν θεῶν, ὅσοι ἔγιναν ἐντὸς τοῦ οὐρανοῦ (ὅσα δηλ. ἄστρα θεοὶ ἔγιναν ἐντὸς τοῦ οὐρανοῦ).

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

9. Λοιπὸν δὲ περὶ τῆς γῆς εἰπεῖν, οὗ τε τυγχάνει κειμένη, καὶ πότερον τῶν ἠρεμούντων ἐστὶν ἢ τῶν κινουμένων, καὶ περὶ τοῦ σχήματος αὐτῆς. περὶ μὲν οὖν τῆς θέσεως οὐ τὴν αὐτὴν ἅπαντες ἔχουσι δόξαν, ἀλλὰ τῶν πλείστων ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαι λεγόντων, ὅσοι τὸν ὅλον οὐρανὸν πεπερασμένον εἶναί φασιν, ἐναντίως οἱ περὶ τὴν Ἰταλίαν, καλούμενοι δὲ Πυθαγόρειοι λέγουσιν· ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ μέσου πῦρ εἶναί φασι, τὴν δὲ γῆν ἓν τῶν ἄστρων οὖσαν, κύκλῳ φερομένην περὶ τὸ μέσον νύκτα τε καὶ ἡμέραν ποιεῖν . . . . πολλοῖς δ' ἂν καὶ ἑτέροις συνδόξειε μὴ δεῖν τῇ γῇ τὴν τοῦ μέσου χώραν ἀποδιδόναι . . . . . τῷ γὰρ τιμιωτάτῳ οἴονται προσήκειν τὴν τιμιωτάτην ὑπάρχειν χώραν, εἶναι δὲ πῦρ μὲν γῆς τιμιώτερον, τὸ δὲ πέρας τῶν μεταξύ, τὸ δ' ἔσχατον καὶ τὸ μέσον πέρας· ὥστ' ἐκ τούτων ἀναλογιζόμενοι οὐκ οἴονται ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαι τῆς σφαίρας αὐτήν, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ πῦρ . . . . ὁμοίως δὲ καὶ περὶ μονῆς καὶ κινήσεως· οὐ γὰρ τὸν αὐτὸν τρόπον ἅπαντες ὑπολαμβάνουσιν, ἀλλ' ὅσοι μὲν μηδ' ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαί φασιν αὐτήν, κινεῖσθαι κύκλῳ περὶ τὸ μέσον, οὐ μόνον δὲ ταύτην, ἀλλὰ καὶ τὴν ἀντίχθονα, καθάπερ εἴπομεν πρότερον . . . . . . ἔνιοι δὲ καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ κέντρου φασὶν αὐτὴν ἴλλεσθαι περὶ τὸν διὰ παντὸς τεταμένον πόλον, ὥσπερ ἐν τῷ Τιμαίῳ γέγραπται.

('Αριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β', 13, 293 α 15 - β 32).

(Ὑπολείπεται δὲ νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ τῆς γῆς, ποῦ κεῖται, καὶ ποῖον ἐκ τῶν δύο εἶναι ἐκ τῶν ἠρεμούντων ἢ ἐκ τῶν κινουμένων, καὶ περὶ τοῦ σχήματος αὐτῆς. Περὶ μὲν λοιπὸν τῆς θέσεως αὐτῆς δὲν ἔχουν ὅλοι τὴν αὐτὴν γνώμην, ἀλλὰ ἐν ᾧ οἱ περισσότεροι λέγουν, ὅτι αὕτη κεῖται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ἐξ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι θεωροῦν τὸ σύμπαν πεπερασμένον, τὴν ἀντίθετον γνώμην ἐκφράζουν οἱ περὶ τὴν Ἰταλίαν οἰκοῦντες, οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι· διότι, λέγουν, ὅτι εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου εἶναι πῦρ, καὶ ὅτι ἡ γῆ εἶναι ἓν ἄστρον περιφερόμενον κυκλικῶς περὶ τὸ κέντρον τοῦ κόσμου καὶ σχηματίζον τὴν νύκτα καὶ τὴν ἡμέραν . . . . . , ἀλλὰ καὶ ἄλλοι πολλοὶ πρὸς τούτοις ἐκφράζουν τὴν γνώμην, ὅτι δὲν πρέπει νὰ θεωροῦν τὴν γῆν, ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου . . . . . διότι φρονοῦν ὅτι εἰς τὸ τιμιώτατον πρᾶγμα εἶναι προσῆκον νὰ ἀποδίδουν τὴν τιμιωτάτην θέσιν, καὶ ὅτι τὸ πῦρ εἶναι τιμιώτερον τῆς γῆς, τὸ δὲ πέρας εἶναι τιμιώτερον τῶν ἐνδιαμέσων πραγμάτων, τὸ δὲ ἔσχατον καὶ τὸ μέσον εἶναι πέρας· ὥστε ἀναχωροῦντες ἐκ τοιούτων σκέψεων, νομίζουν, ὅτι αὕτη δὲν κεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς οὐρανίου σφαίρας, ἀλλὰ μᾶλλον ἐκεῖ κεῖται τὸ πῦρ . . . . . , ὁμοίως ὑπάρχει ἀσυμφωνία σχετικῶς περὶ τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς κινήσεως αὐτῆς· διότι δὲν ἔχουν περὶ αὐτῶν ὅλοι τὴν αὐτὴν γνώμην, ἀλλ᾽ ὅσοι μὲν φρονοῦν, ὅτι αὕτη δὲν κεῖται εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου, λέγουν, ὅτι κινεῖται κυκλικῶς περὶ τὸ μέσον, καὶ ὄχι μόνον αὕτη ἀλλὰ καὶ ἡ ἀντίχθων, ὡς εἴπομεν προηγουμένως).

ΣΙΜΠΛΙΚΙΟΣ

10. Ἐν μὲν τῷ μέσῳ τοῦ παντὸς πῦρ εἶναι φασι, περὶ δὲ τὸ μέσον τὴν ἀντίχθονα φέρεσθαι φασὶ γῆν οὖσαν καὶ αὐτὴν ἀντίχθονα δὲ καλουμένην διὰ τὸ ἐξ ἐναντίας τῇδε τῇ γῇ εἶναι, μετὰ δὲ τὴν ἀντίχθονα ἡ γῆ ἥδε φερομένη καὶ αὐτὴ περὶ τὸ μέσον, μετὰ δὲ τὴν γῆν ἡ σελήνη . . . τὴν δὲ γῆν ὡς ἓν τῶν ἄστρων οὖσαν κινουμένην περὶ τὸ μέσον κατὰ τὴν πρὸς τὸν ἥλιον σχέσιν νύκτα καὶ ἡμέραν ποιεῖν. ἡ δὲ ἀντίχθων κινουμένη περὶ τὸ μέσον καὶ ἑπομένη τῇ γῇ ταύτῃ οὐχ᾽ ὁρᾶται ὑφ᾽ ἡμῶν διὰ τὸ ἐπιπροσθεῖν ἡμῖν ἀεὶ τὸ τῆς γῆς σῶμα . . . . . ἄστρον δὲ τὴν γῆν ἔλεγον ὡς ὄργανον καὶ αὐτὴν χρόνου· ἡμερῶν γάρ ἐστιν αὕτη καὶ νυκτῶν αἰτία· ἡμέραν μὲν γὰρ ποιεῖ τὸ πρὸς τῷ ἡλίῳ μέρος καταλαμπομένη, νύκτα δὲ κατὰ τὸν κῶνον τῆς γενομένης ἀπ᾽ αὐτῆς σκιᾶς.

(Σιμπλίκιος, Σχόλια εἰς τὸ Περὶ οὐρανοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, Heiberg, σελ. 511, 26 - 512 17).

(Λέγουν, ὅτι ἡ γῆ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ σύμπαντος, καὶ ὅτι περὶ τὸ μέσον στρέφεται ἡ ἀντίχθων, ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτὴ γῆ, καλεῖται δὲ ἀντίχθων, διότι εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀπέναντι μέρος αὐτῆς τῆς γῆς, μετὰ δὲ τὴν ἀντίχθονα, ὅτι κεῖται αὐτὴ ἐδῶ ἡ γῆ περιστρεφομένη καὶ αὐτὴ περὶ τὸ μέσον, μετὰ δὲ τὴν γῆν, ὅτι κεῖται ἡ σελήνη·... ὅτι δὲ ἡ γῆ, ἐν ᾧ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ἄστρων περιφερόμενον περὶ τὸ μέσον, σχηματίζει τὴν νύκτα καὶ τὴν ἡμέραν ἀναλόγως τῆς θέσεως πρὸς τὸν ἥλιον. Ἡ δὲ ἀντίχθων κινουμένη περὶ τὸ μέσον καὶ ἀκολουθοῦσα τὴν γῆν αὐτήν, δὲν εἶναι ὁρατὴ ἀπὸ ἡμᾶς, διότι παρεμβάλλεται πάντοτε τὸ σῶμα τῆς γῆς . . . . . , ἔλεγον (οἱ Πυθαγόρειοι) δέ, ὅτι ἡ γῆ εἶναι ἄστρον καὶ ὄργανον τοῦ χρόνου, διότι αὐτὴ εἶναι ἡ αἰτία τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν νυκτῶν· διότι ἡμέραν μὲν κάμνει τὸ πρὸς τὸν ἥλιον στρεφόμενον μέρος της, νύκτα δὲ τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸν σκιερὸν κῶνον τὸν σχηματιζόμενον ὑπ᾽ αὐτῆς).

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

11. Κατέχεις δέ, διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστι κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα τᾷ εὐθείᾳ τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς· ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων δείξεσι διάκουσας. Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθεσίων τινῶν ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου· ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανέα τῶν ἄστρων καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν, ὥστε τὸν κύκλον, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν.

(Ἀρχιμήδης, Ψαμμίτης I, 4, Heiberg, Lipsiae 1913, σελ. 218, 7).

(Γνωρίζεις δέ, ὅτι ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρονόμων κόσμος καλεῖται ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας κέντρον μὲν εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς, ἡ δὲ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς· διότι αὐτὰ τὰ ἔχεις πληροφορηθῆ ἀπὸ τὰς συνήθεις διδασκαλίας τῶν ἀστρονόμων. Ὁ Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ἐδημοσίευσε μερικὰς γραφὰς ἐκ τῶν ὑποθέσεων τῶν ὁποίων συνάγει, ὅτι ὁ κόσμος εἶναι πολὺ μεγαλύτερος τοῦ ἤδη λεχθέντος. Διότι ὑποθέτει, ὅτι οἱ μὲν ἀπλανεῖς ἀστέρες καὶ ὁ ἥλιος μένουν ἀκίνητοι, ἡ δὲ γῆ περιφέρεται κατὰ κύκλου περιφέρειαν περὶ τὸν ἥλιον, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τῆς ὑπ' αὐτῆς διαγραφομένης τροχιᾶς, ὅτι δὲ ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον μὲ τὸν ἥλιον, εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον διαγράφει ἡ γῆ κατὰ τὴν περιφοράν της, νὰ ἔχῃ τοιαύτην ἀναλογίαν, πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀπλανῶν, ὁποίαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν).

ΚΙΚΕΡΩΝ

12. Hicetas Syracusius, ut ait Theophrastus caelum solem lunam stellas, supera denique omnia stare censet neque praeter terram rem ullam in mundo moveri; quae cum circum axem se summa celeritate convertat et torqueat, eadem effici omnia quae si stante terra caelum moveretur, atque hoc etiam Platonem in Timaeo dicere quidam arbitrantur, sed paulo obscurius.

(Cicero, Academica priora II, 39, Loeb, σελ. 626).

(Ὁ Ἱκέτας ὁ Συρακούσιος πρεσβεύει, ὡς ἀναφέρει ὁ Θεόφραστος, ὅτι ὁ οὐρανός, ὁ ἥλιος, ἡ σελήνη, τὰ ἄστρα καὶ γενικῶς ὁ κόσμος ὑψηλὰ ἠρεμεῖ καὶ εἰς τὸ σύμπαν τίποτε δὲν κινεῖται ἐκτὸς ἀπὸ τὴν γῆν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γῆ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της μὲ μεγάλην ταχύτητα, διὰ τὸν λόγον αὐτὸν λαμβάνουν χώραν ἀκριβῶς τὰ αὐτὰ οὐράνια φαινόμενα εἰς τὸν οὐρανόν, ὡς ἐὰν ἡ γῆ ἦτο ἀκίνητος καὶ ἐκινεῖτο ὁ οὐρανός. Μερικοὶ πιστεύουν, ὅτι καὶ ὁ Πλάτων εἰς τὸν Τίμαιον λέγει τὸ αὐτό, καίτοι ὀλίγον σκοτεινότερον). (Τίμαιος 40 Β), (ἴδε 8 καὶ 9).

ΠΛΟΥΤΑΡΧΟΣ

13. Πότερον οὕτως ἐκίνει τὴν γῆν, ὥσπερ ἥλιον καὶ σελήνην καὶ τοὺς πέντε πλάνητας, οὓς ὄργανα χρόνου διὰ τὰς τροπὰς προσηγόρευε καὶ ἔδει τὴν γῆν «ἰλλομένην περὶ τὸν διὰ πάντων πόλον τεταμένον» μὴ μεμηχανῆσθαι συνεχομένην καὶ μένουσαν, ἀλλὰ στρεφομένην καὶ ἀνειλουμένην νοεῖν, ὡς ὕστερον Ἀρίσταρχος καὶ Σέλευκος ἀπεδείκνυσαν, ὁ μὲν ὑποτιθέμενος μόνον ὁ δὲ Σέλευκος καὶ ἀποφαινόμενος; Θεόφραστος δὲ καὶ προσιστορεῖ τῷ Πλάτωνι πρεσβυτέρῳ γενομένῳ μεταμέλειν, ὡς οὐ προσήκουσαν ἀποδόντι τῇ γῇ τὴν μέσην χώραν τοῦ παντός.

(Πλούταρχος, Πλατωνικὰ Ζητήματα Η', 1).

(Ποῖον ἐκ τῶν δύο, ἐθεώρει τὴν γῆν ἀκίνητον ἢ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ἐκίνει τὴν γῆν, καθὼς ἔλεγεν, ὅτι κινεῖται ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη καὶ οἱ πέντε πλανῆται, τοὺς ὁποίους ἐκάλει ὄργανα τοῦ χρόνου διὰ τὰς τροπὰς καὶ ἔπρεπε τὴν γῆν «περιστρεφομένην περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου» νὰ μὴ τὴν θεωρῇ συνεχομένην (μὲ τὸν ἄξονα) καὶ ἀκινητοῦσαν, ἀλλὰ νὰ τὴν νοῇ ὡς περιστρεφομένην καὶ προχωροῦσαν, ὅπως βραδύτερον ἐπρέσβευον ὁ Ἀρίσταρχος καὶ ὁ Σέλευκος, ὁ μὲν μόνον ὑποθέτων τοῦτο, ὁ δὲ Σέλευκος καὶ ἀποδεικνύων αὐτό; Ὁ Θεόφραστος δὲ διηγεῖται προσέτι, ὅτι ὁ Πλάτων γενόμενος πρεσβύτερος μετενόησε, διότι εἶχεν ἀποδώσει εἰς τὴν γῆν τὴν μὴ προσήκουσαν θέσιν τοῦ κέντρου τοῦ κόσμου).

14. Μόνον ὦ τάν, μὴ κρίσιν ἡμῖν ἀσεβείας ἐπαγγείλῃς, ὥσπερ Ἀρίσταρχον ᾤετο δεῖν Κλεάνθης τὸν Σάμιον ἀσεβείας προσκαλεῖσθαι τοὺς Ἕλληνας, ὡς κινοῦντα τοῦ κόσμου τὴν ἑστίαν, ὅτι τὰ φαινόμενα σῴζειν ἀνὴρ ἐπειρᾶτο, μένειν τὸν οὐρανὸν ὑποτιθέμενος, ἐξελίττεσθαι δὲ κατὰ λοξοῦ κύκλου τὴν γῆν, ἅμα περὶ τὸν αὑτῆς ἄξονα δινουμένην.

(Πλούταρχος, Περὶ τοῦ ἐμφαινομένου προσώπου τῷ κύκλῳ τῆς σελήνης, 922 F).

(Μόνον κύτταξε μήπως ἐμπλέξῃς ἡμᾶς εἰς κατηγορίαν ἐπὶ ἀσεβείᾳ, ὡς ἐνόμιζεν ὅτι ἔπρεπε νὰ κάμῃ ὁ Κλεάνθης διὰ τὸν Ἀρίσταρχον τὸν Σάμιον ἐγκαλῶν αὐτὸν εἰς τοὺς Ἕλληνας ἐπὶ ἀσεβείᾳ, ὡς κινοῦντα τὴν ἑστίαν τοῦ κόσμου (δηλ. τὴν γῆν), διότι προσεπάθει ὁ ἄνθρωπος νὰ σώσῃ τὰ φαινόμενα, ὑποθέτων, ὅτι ἡ οὐράνιος σφαῖρα μένει ἀκίνητος, καὶ ὅτι ἡ γῆ κινουμένη διαγράφει λοξὸν κύκλον (τὴν ἐκλειπτικήν), συγχρόνως δὲ στρέφεται καὶ περὶ τὸν ἄξονά της).

15. Νομᾶς δὲ λέγεται καὶ τὸ τῆς Ἑστίας ἱερὸν ἐγκύκλιον περιβαλέσθαι τῷ ἀσβέστῳ πυρὶ φρουράν, ἀπομιμούμενος οὐ τὸ σχῆμα τῆς γῆς ὡς Ἑστίας οὔσης, ἀλλὰ τοῦ σύμπαντος κόσμου, οὗ μέσον οἱ Πυθαγορικοὶ τὸ πῦρ ἱδρῦσθαι νομίζουσι, καὶ τοῦτο Ἑστίαν καλοῦσι καὶ μονάδα· τὴν δὲ γῆν οὔτε ἀκίνητον οὔτε ἐν μέσῳ τῆς περιφορᾶς οὖσαν, ἀλλὰ κύκλῳ περὶ τὸ πῦρ αἰωρουμένην οὐ τῶν τιμιωτάτων οὐδὲ τῶν πρώτων τοῦ κόσμου μορίων ὑπάρχειν. Ταῦτα δὲ καὶ Πλάτωνά φασι πρεσβύτην γενόμενον διανενοεῖσθαι περὶ τῆς γῆς ὡς ἐν ἑτέρᾳ χώρᾳ καθεστώσης, τὴν δὲ μέσην καὶ κυριωτάτην ἑτέρῳ τινὶ κρείττονι προσήκουσαν.

(Πλούταρχος, Βίοι παράλληλοι, Νομᾶς XI).

(Λέγεται δέ, ὅτι ὁ Νομᾶς ἐπρέσβευεν, ὅτι τὸ ἱερὸν τῆς (θεᾶς) Ἑστίας περιβάλλεται ἀπὸ φρουρὰν ἀσβέστου πυρός, ἐννοῶν ὄχι ὅτι τὸ σχῆμα τῆς γῆς εἶναι ἡ Ἑστία, ἀλλὰ τὸ σύμπαν, τοῦ ὁποίου οἱ Πυθαγόρειοι νομίζουν, ὅτι τὸ μέσον ἀποτελεῖται ἀπὸ πῦρ, καὶ τοῦτο καλοῦν ἑστίαν καὶ μονάδα· διὰ δὲ τὴν γῆν πρεσβεύουν, ὅτι οὔτε ἀκίνητος εἶναι οὔτε ὅτι κεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς διαγραφομένης τροχιᾶς, ἀλλ᾽ ὅτι περὶ τὸ (μέσον πῦρ περιφέρεται καὶ ὅτι δὲν εἶναι ἐκ τῶν τιμιωτάτων οὔτε ἐκ τῶν πρώτων μορίων τοῦ κόσμου). Λέγουν δέ, ὅτι ἐπρέσβευεν αὐτὰ καὶ ὁ Πλάτων, ὅταν ἔγινε πρεσβύτης, ὅτι δηλαδὴ ἡ γῆ κεῖται εἰς ἄλλο μέρος (ἐκτὸς τοῦ κέντρου τοῦ κόσμου), ἐπειδὴ ἐθεώρησεν ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κόσμου ὡς κυριώτατον ἁρμόζει εἰς ἄλλο τι καλύτερον).

ΦΙΛΟΛΑΟΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΔΗΣ - ΕΚΦΑΝΤΟΣ

16. Οἱ μὲν ἄλλοι μένειν τὴν γῆν. Φιλόλαος δ᾽ ὁ Πυθαγόρειος κύκλῳ περιφέρεσθαι περὶ τὸ πῦρ κατὰ κύκλον λοξὸν ὁμοιοτρόπως ἡλίῳ καὶ σελήνῃ. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς καὶ Ἔκφαντος ὁ Πυθαγόρειος κινοῦσι μὲν τὴν γῆν, οὐ μήν γε μεταβατικῶς ἀλλὰ τρεπτικῶς τροχοῦ δίκην ἐνηξονισμένην, ἀπὸ δυσμῶν ἐπ᾽ ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον.

(Πλούταρχος, Περὶ τῶν ἀρεσκόντων τοῖς φιλοσόφοις III, ΙΓ΄, Dox. 378).

(Οἱ μὲν ἄλλοι, λέγουν, ὅτι ἡ γῆ μένει ἀκίνητος. Ὁ Φιλόλαος δὲ ὁ Πυθαγόρειος πρεσβεύει, ὅτι περιφέρεται κατὰ τὴν ἐκλειπτικὴν περὶ τὸ πῦρ, καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ὅπως ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη. Ὁ ἐκ Πόντου Ἡρακλείδης καὶ ὁ Πυθαγόρειος

Ἔκφαντος λέγουν, ὅτι ἡ γῆ κινεῖται μέν, ὄχι ὅμως ἀλλάσσουσα θέσιν, ἀλλὰ ὅπως ὁ τροχὸς περὶ τὸν ἄξονά του, ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον).

17. Ἀρίσταρχος τὸν ἥλιον ἵστησι μετὰ τῶν ἀπλανῶν, τὴν δὲ γῆν κινεῖ περὶ τὸν ἡλιακὸν κύκλον καὶ κατὰ τὰς ταύτης ἐγκλίσεις σκιάζεσθαι τὸν δίσκον.
(Πλούταρχος, αὐτόθι II, ΚΔ', Dox. 355, 1).

(Ὁ Ἀρίσταρχος πρεσβεύει ὅτι ὁ ἥλιος καὶ οἱ ἀπλανεῖς μένουν ἀκίνητοι, ἡ δὲ γῆ κινεῖται περὶ τὸν ἡλιακὸν κύκλον καὶ ὅτι κατὰ τὰς ἐγκλίσεις αὐτῆς σκιάζεται ὁ δίσκος τοῦ ἡλίου (καὶ γίνεται ἔκλειψις αὐτοῦ).

18. Τῶν μαθηματικῶν τινὲς μὲν ὡς Πλάτων, τινὲς δὲ μέσον πάντων τὸν ἥλιον.
(Πλούταρχος, αὐτόθι II, ΙΕ', Dox. 345, 5).

(Μερικοὶ μὲν ἐκ τῶν μαθηματικῶν πρεσβεύουν ὅπως ὁ Πλάτων (Φαίδων 108-109) (ὅτι ἡ γῆ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ κόσμου), ἄλλοι δὲ ὅτι τὸ μέσον ὅλων (τῶν ἄστρων) εἶναι ὁ ἥλιος).

19. Σέλευκος ὁ μαθηματικός, κινῶν καὶ οὗτος τὴν γῆν, ἀντικόπτειν αὐτῆς τῇ δίνῃ φησὶ καὶ τῇ κινήσει τὴν περιστροφὴν τῆς σελήνης.
(Πλούταρχος, αὐτόθι III, ΙΖ', Dox. 383).

(Ὁ μαθηματικὸς Σέλευκος, κινῶν καὶ αὐτὸς τὴν γῆν, λέγει, ὅτι ἕνεκα τῆς περιστροφῆς της καὶ τῆς κινήσεώς της ἐμποδίζει αὕτη τὴν περιστροφὴν τῆς σελήνης).

ΣΕΞΤΟΣ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΣ

20. Ἕτερον ἄρα ἐστὶν ἡ τοῦ κόσμου κίνησις καὶ ἕτερον ὁ χρόνος. οἵ γε μὴν τὴν τοῦ κόσμου κίνησιν ἀνελόντες, τὴν δὲ γῆν κινεῖσθαι δοξάσαντες, ὡς οἱ περὶ τὸν Ἀρίσταρχον τὸν μαθηματικόν, οὐ κωλύονται νοεῖν χρόνον.
(Σέξτος Ἐμπειρικός, Adv. Mathem. X, 174).

(Εἶναι ἄρα ἄλλο πρᾶγμα ἡ κίνησις τοῦ κόσμου καὶ ἄλλο ὁ χρόνος. Διότι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν παραδέχονται τὴν κίνησιν τοῦ κόσμου, ἀλλὰ νομίζουν ὅτι κινεῖται ἡ γῆ, ὅπως οἱ περὶ τὸν Ἀρίσταρχον τὸν μαθηματικόν, δὲν ἐμποδίζονται νὰ νοοῦν τὴν ὕπαρξιν τοῦ χρόνου).

ΚΟΠΕΡΝΙΚΟΣ

21. Hanc igitur incertitudinem mathematicarum traditionum de colligendis motibus sphaerarum orbis cum diu mecum revolverem, coe-

pit me taedere, quod nulla certior ratio motuum machinae mundi, qui propter nos ab optimo et regularissimo omnium opifice conditus esset, philosophis constaret, qui alioqui rerum minutissimarum respectu eius orbis tam exquisite scutarentur. Quare hanc mihi operam sumpsi, ut omnium philosophorum, quos habere possem, libros religerem indigaturus, an ne ullus unquam opinatus esset, alios esse motus spherarum mundi quam illi ponerent, qui in scholis mathemata profiterentur. Ac reperi quidem apud Ciceronem primum, Nicetam sensisse terram moveri. Postea et apud Plutarchum inyeni quosdam alios in ea fuisse opinione, cuius verba, ut sint omnibus obvia, placuit hic ascribere:

οἱ μὲν ἄλλοι μένειν τὴν γῆν, Φιλόλαος δὲ ὁ Πυθαγόρειος κύκλῳ περιφέρεσθαι περὶ τὸ πῦρ κατὰ κύκλον λοξὸν ὁμοιοτρόπως ἡλίῳ καὶ σελήνῃ. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς καὶ Ἔκφαντος ὁ Πυθαγόρειος κινοῦσι μὲν τὴν γῆν, οὐ μήν γε μεταβατικῶς, ἀλλὰ τρεπτικῶς, τροχοῦ δίκην ἐνηξονισμένην, ἀπὸ δυσμῶν ἐπ' ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον (ἴδε 16).

Inde igitur occasionem nactus, coepi et ego de terrae mobilitate cogitare. Et quamvis absurda opinio videbatur, tamen quia sciebam aliis ante me hanc concessam libertatem, ut quoslibet fingerent circulos ad demonstrandum phaenomena astrorum, existimavi mihi quoque facile permitti, ut experirer, an posito terrae aliquo motu firmiores demonstrationes, quam illorum essent, inveniri in revolutione orbium coelestium posset.

(De revolutionibus orbium coelestium libri VI. Ad Sanctissimum Dominimum Paulum III Pontificem Maximum Nicolai Copernici praefatio in libros revolutionum).

(Ἐπὶ μακρὸν διελογιζόμην διὰ τὴν ἀβεβαιότητα αὐτὴν τῶν μαθηματικῶν παραδόσεων περὶ τῶν κινήσεων τῶν ἀστέρων, ὁπότε μὲ κατέλαβεν ἀντιπάθεια ἐκ τῆς σκέψεως, ὅτι ὑπὸ τῶν φιλοσόφων, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὰ λοιπὰ ἀνασκοποῦν ἐπισταμένως καὶ τὰς ἐλαχίστας λεπτομερείας τὰς ἀφορώσας εἰς τὸν κόσμον μας, οὐδεμία ἐπενοήθη μέθοδος ἑρμηνείας τῶν κινήσεων εἰς τὸ σύμπαν, τὸ ὁποῖον ὁ κάλλιστος καὶ τελειότατος δημιουργὸς ἐδημιούργησε δι' ἡμᾶς. Ὡς ἐκ τούτου προέβην τελευταίως εἰς τὴν ἀνάγνωσιν καὶ ἀναδίφησιν ὅλων τῶν συγγραμμάτων τῶν φιλοσόφων, τὰ ὁποῖα ἠδυνήθην νὰ ἔχω, μὴ τυχὸν κανεὶς ἐξ αὐτῶν ἑρμηνεύει τὴν κίνησιν τῶν ἀστέρων κατ' ἄλλον τρόπον ἐκείνου, καθ' ὃν τὴν ἑρμηνεύουν οἱ ἐξ ἐπαγγέλματος μαθηματικοί. Καὶ πράγματι ἀνεῦρον εἰς τὸν Κικέρωνα, ὅτι ὁ Νικέτας (ἐσφαλμένως ἐγράφη τοῦτο ἀντὶ Ἱκέτας), ἐπρέσβευεν, ὅτι ἡ γῆ κινεῖται . . . Βραδύτερον εὑρῆκα εἰς τὸν Πλούταρχον, ὅτι καὶ μερικοὶ ἄλλοι εἶχον ἐκφράσει τὴν αὐτὴν γνώμην· ἐπιθυμῶ νὰ παραθέσω ἐδῶ τοὺς λόγους του, διὰ νὰ εἶναι προσιτοὶ εἰς ὅλους:

«Οἱ μὲν ἄλλοι λέγουν, ὅτι ἡ γῆ παραμένει ἀκίνητος. Ὁ Φιλόλαος δὲ ὁ Πυθαγόρειος πρεσβεύει, ὅτι περιφέρεται κατὰ τὴν ἐκλειπτικὴν περὶ τὸ πῦρ, καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ὅπως ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη. Ὁ ἐκ Πόντου Ἡρακλείδης καὶ ὁ Πυθαγόρειος Ἔκφαντος λέγουν, ὅτι ἡ γῆ κινεῖται μέν, ὄχι ὅμως ἀλλάσσουσα θέσιν, ἀλλὰ ὅπως ὁ τροχὸς περὶ τὸν ἄξονά του ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς περὶ τὸ ἴδιον αὐτῆς κέντρον» (ἴδε 16).

Ἀφορμηθεὶς λοιπὸν ἐκ τούτων ἤρχισα καὶ ἐγὼ νὰ διαλογίζωμαι διὰ τὸ κινητὸν τῆς γῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἐγνώριζον, ὅτι ἤδη εἰς ἄλλους πρὸ ἐμοῦ εἶχεν ἐπιτραπῆ ἡ ἐλευθερία νὰ δεχθοῦν τυχούσας κυκλικὰς κινήσεις πρὸς ἑρμηνείαν τῶν οὐρανίων φαινομένων, ἐπίστευσα ὅτι καὶ εἰς ἐμὲ ἐπίσης θὰ ἐπετρέπετο, διὰ τῆς παραδοχῆς κινήσεως τῆς γῆς νὰ ἀνεύρω μίαν ἀξιόπιστον ἑρμηνείαν τῶν οὐρανίων κινήσεων, διάφορον ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχον ἄλλοι, καίτοι ἡ ἄποψίς μου παρουσιάζεται παράλογος).

22. Credibile est hisce similibusque causis Philolaum mobilitatem terrae sensisse quod etiam nonnulli Aristarchum Samium ferunt in eadem fuisse sententia.

(Εἶναι πιστευτὸν νὰ λέγωμεν, ὅτι καὶ διὰ παρομοίας αἰτίας ὁ Φιλόλαος εἶχε τὴν γνώμην ὅτι κινεῖται ἡ γῆ, τὸ ὁποῖον μερικοὶ λέγουν ὅτι ἐπρέσβευεν ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος) (De Revol. Orb. Coelest. Ἔκδοσις 1873).

23. Ὁ Κοπέρνικος (1473-1543), γνωρίζων καλῶς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὴν λατινικὴν γλῶσσαν, ἦτο γνώστης τοῦ γεωκεντρικοῦ καὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ὁ ἴδιος ὁμολογεῖ εἰς τὸ βιβλίον του, ὅτι τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος ἐπληροφορήθη παρὰ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τοῦ Κικέρωνος καὶ τοῦ Πλουτάρχου. Τὸ βιβλίον του ὑπὸ τὸν τίτλον De Revolutionibns Orbium Coelestium, Libri VI, ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1543, ἀφοῦ ἔτυχε τῆς ἐγκρίσεως τοῦ Πάπα τῆς Ρώμης. Βραδύτερον τοῦτο ἀφωρίσθη ὑπὸ τῆς Καθολικῆς Ἐκκλησίας, ἡ ὁποία ἀπηγόρευσε τὴν κυκλοφορίαν του μεταξὺ τῶν ὀπαδῶν αὐτῆς. Εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ 1873, σελ. 34, ὑπάρχει ἀκόμη ἡ παράγραφος τοῦ βιβλίου ὅπου ὁ Κοπέρνικος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος εἶχε διατυπώσει τὴν θεωρίαν τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος (P. Couderc, Les Étapes

de l'Astronomie, Paris 1948, σ. 79). Καὶ εἰς τὰς προηγουμένας ἐκδόσεις καὶ εἰς τὰς μετὰ τὸ 1873 γενομένας ἐκδόσεις τοῦ βιβλίου τοῦ Κοπερνίκου ἡ παράγραφος αὕτη δὲν τίθεται, ἄγνωστον διατί. Τὸ ὑποστηριζόμενον ὑπό τινων νεωτέρων, ὅτι ὁ Κοπέρνικος δὲν ἐγνώριζε τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (Ψαμμίτης, Heiberg, Lipsiae 1913, σ. 218, 7) μνημονευομένην θεωρίαν τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος, διότι δῆθεν τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ἐξεδόθησαν διὰ τοῦ τύπου τῷ 1544, ἐνῷ τὸ βιβλίον τοῦ Κοπερνίκου ἐδημοσιεύθη κατὰ τὸ 1543, εἶναι πάντη ἀβάσιμον καὶ ἐσφαλμένον. Διότι τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκυκλοφορήθησαν ἐν Εὐρώπῃ ἐν λατινικῇ μεταφράσει ἀπὸ τοῦ 12ου αἰῶνος, κατά τινας δὲ ἀπὸ τοῦ 5ου αἰῶνος (Boëthius). Δὲν ὑπάρχει ὅμως ἀνάγκη νὰ ἐνδιατρίψωμεν ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ, ἀφοῦ ὁ ἴδιος ὁ Κοπέρνικος μνημονεύει εἰς τὸ βιβλίον του, ὅτι ἐγνώριζε τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τὸ ὁποῖον μνημονεύει καὶ ὁ Πλούταρχος. Βεβαιοῖ δὲ ὁ Κοπέρνικος, ὅτι εἶχε μελετήσει τὰ συναφῆ ἔργα τοῦ Πλουτάρχου, εἰς τὰ ὁποῖα μνημονεύεται τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου (Πλούταρχος, ἐνταῦθα (13), Πλατωνικὰ ζητήματα VIII 1).

Σύγκρισις τῆς Μεγάλης Μαθηματικῆς Συντάξεως τοῦ Πτολεμαίου καὶ τοῦ βιβλίου τοῦ Κοπερνίκου, De Revolutionibus Orbium Coelestium, πείθει περὶ τῆς μεγάλης ἐπιδράσεως ἐπὶ τοῦ Κοπερνίκου τοῦ ἔργου τοῦ Πτολεμαίου (The Great Books on the Western World, 16, Ptolemy, Copernicus, Kepler, University of Chicago, by Encyclopaedia Britannica Inc., 1952).

Ἐκτὸς τῆς θεωρίας περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, τὴν ὁποίαν υἱοθέτησεν ὁ Κοπέρνικος, εἰς τὸ προηγουμένως μνημονευόμενον βιβλίον του περιλαμβάνει καὶ ἀστρονομικὰς καὶ μετεωρολογικάς τινας θεωρίας τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ὡς ἰδικάς του, ἐφ' ὅσον δὲν ἀναφέρει πόθεν παρέλαβε τὰς θεωρίας αὐτάς. Κατωτέρω ἀναφέρονται ἐνδεικτικῶς μερικαὶ ἐκ τῶν θεωριῶν αὐτῶν περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Κοπερνίκου.

Ἡ μεγάλη συμβολὴ τοῦ Κοπερνίκου εἰς τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστήμης τῆς Ἀστρονομίας ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι οὗτος ἐτόλμησε νὰ υἱοθετήσῃ καὶ διακηρύξῃ τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου καὶ νὰ ἐπιτύχῃ διὰ τοῦ θείου του Καθολικοῦ Ἐπισκόπου τὴν ἔγκρισιν τοῦ Πάπα πρὸς δημοσίευσιν τῶν συναφῶν ἀντιλήψεών του.

24. Ἀστρονομικαὶ καὶ μετεωρολογικαί τινες θεωρίαι περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Κοπερνίκου, De Revolutionibus Orbium Coelestium, χωρὶς νὰ μνημονεύεται ὅτι αὗται ἐλήφθησαν ἐξ ἑλληνικῶν συγγραμμάτων.

Copernicus, de Revolutionibus Orbium Coelestium.

Ἑλληνικὰ συγγράμματα.

Ὁ κόσμος εἶναι σφαιροειδής. Α 1.

Τὸν κόσμον ἔμψυχον, νοερόν, σφαιροειδῆ (λέγει Πυθαγόρας).
(Διογένης Λαέρτιος VIII, 25).

Ὅτι ὁ κόσμος σφαῖρα.
(Κλεομήδης, Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων, H. Ziegler, κεφ. 8).

Τὸ σφαιρικὸν σχῆμα εἶναι τὸ τελειότερον πάντων. Α 1.

Σφαιροειδὲς . . . πάντων τελεώτατον.
(Πλάτων, Τίμαιος 33 B).

Ἡ σφαῖρα ἀποτελεῖ τὸ πολυχωρητότερον σχῆμα. Α 1.

Πάντων τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν ἴσην ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστη ἐστὶν ἡ σφαῖρα.
(Πάππος Ε', 350, 24, F. Hultsch).

Δεικνύουσι καὶ τὴν σφαῖραν τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων στερεῶν σχημάτων, ἑπομένως μείζονα.
(Πρόκλος, Σχόλια εἰς Τίμαιον Πλάτωνος, E. Diehl II, Lipsiae 1904, σελ. 76, 16).

Λέγω, ὅτι ὁ ἥλιος, ἡ σελήνη καὶ οἱ ἀστέρες ἔχουσι τὸ σφαιροειδὲς σχῆμα. Α 1.

Τὸ δὲ σχῆμα τῶν ἄστρων ἑκάστου σφαιροειδές.
(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β', 11, 291b 11).

Διατὶ ὁ ἥλιος καὶ ἡ σελήνη σφαιροειδῆ ὄντα.
(Ἀριστοτέλης, Προβλήματα ΙΕ', 8, 912 a 27).

Εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ γῆ τοιοῦτον σφαιροειδὲς σχῆμα. Α 2.

Σχῆμα δ' ἔχειν σφαιροειδὲς ἀναγκαῖον αὐτήν (τὴν γῆν).
(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β', 14, 297 a 8).

Δι' ἐκείνους, οἵτινες ὑφ' οἱουδήποτε σημείου πρὸς ἄρκτον μεταβαίνουσιν, ἡ κορυφὴ αὕτη τῆς ἡμερησίας περιστροφῆς ὑψοῦται . . . καὶ πολλοὶ ἀστέρες φαίνονται μὴ δύοντες πρὸς ἄρκτον, ἐν ᾧ ἄλλοι δὲν ἀνατέλλουσι πρὸς μεσημβρίαν. Α 2.

Γιγνομένης μεταστάσεως ἡμῖν πρὸς μεσημβρίαν καὶ ἄρκτον . . . τὰ ὑπὲρ κεφαλῆς ἄστρα μεγάλην ἔχειν τὴν μεταβολήν, καὶ μὴ ταὐτὰ φαίνεσθαι πρὸς ἄρκτον τε καὶ μεσημβρίαν μεταβαίνουσιν.
(Ἀριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β', 14, 297b 33 - 298 b 3).

Ὁ Κάνωβος δὲν εἶναι ὁρατὸς ἐκ τῆς Ἰταλίας ἀλλὰ φαίνεται ἐκ τῆς Αἰγύπτου. Α 2.	Ὁ Κάνωβος λεγόμενος ἀστήρ, τοῖς βορειοτέροις τῆς Κνίδου μέρεσιν ἀφανὴς ὤν, τοῖς νοτιωτέροις ἤδη φανερὸς γίνεται. (Θέων Σμυρναῖος, Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, Hiller, Lipsiae 1878, σελ. 121, 19).
Δι᾿ ἐκείνους οἵτινες, ἀφ᾿ οἱουδήποτε μέρους βαίνουσι πρὸς βορρᾶν, ὁ βόρειος πόλος τῆς ἡμερησίας κυκλοτεροῦς κινήσεως ὑψοῦται συνεχῶς, ἐν ᾧ ὁ ἄλλος πόλος βυθίζεται κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα. Ἀπεναντίας δὲ δι᾿ ἐκείνους, οἵτινες ταξιδεύουσι πρὸς νότον, ὑψοῦνται οἱ πρὸς νότον ἀστέρες. Ὅπερ δὲν ἀληθεύει περὶ οἱουδήποτε ἄλλου ἢ τοῦ σφαιρικοῦ σχήματος. Α 2.	Ἀπιόντων δὲ ὡς πρὸς ἄρκτον ἀπὸ μεσημβρίας ἀποκρύπτεται τινὰ τῶν ὁρωμένων πρὸς μεσημβρίᾳ ἄστρων, καὶ πρὸς ἄρκτον τινὰ ὁρᾶται τέως ἀφανῆ ὄντα· καὶ εἴ τις ἀπ᾿ ἄρκτον ὡς πρὸς μεσημβρίαν ἴοι, τὸ ἔμπαλιν γίνεται. Ὧν οὐδὲν ἂν συνέβαινε πλατεῖ τῷ σχήματι τῆς γῆς κεχρημένης. (Κλεομήδης, Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων, H. Ziegler, Lipsiae 1891, 76, 23).
Οἱ κάτοικοι τῶν Ἀνατολῶν δὲν βλέπουσι τὰς ἑσπερινὰς ἐκλείψεις ἡλίου καὶ σελήνης, οἱ τῶν δυσμῶν τὰς πρωϊνάς, ἀλλ᾿ ἐκ τῶν ἀναμεταξὺ οἰκούντων οἱ μὲν βλέπουσιν αὐτὰς ἀργότερον, οἱ δὲ ἐνωρίτερον. Α 2.	Τὰς γὰρ ὑπὸ τὸν αὐτὸν χρόνον ἀποτελουμένας ἐκλειπτικὰς φαντασίας . . . εὑρίσκομεν . . . πάντοτε τὰς παρὰ τοῖς ἀνατολικωτέροις τῶν τηρησάντων ἀναγεγραμμένας ὥρας ὑστεριζούσας τῶν παρὰ τοῖς δυτικωτέροις. (Πτολεμαῖος, Μαθηματικὴ Σύνταξις, Α 4, Heiberg 152, 2.).
Ὅτι καὶ τὰ ὕδατα ἔχουσι τὸ αὐτὸ (σφαιρικὸν σχῆμα) παρατηρεῖται ἐκ τῶν πλοίων, διότι ἡ γῆ, ἥτις δὲν φαίνεται ἐκ τοῦ πλοίου, φαίνεται ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ ἱστοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν φῶς τι τοποθετηθῇ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ ἱστοῦ, τότε τοῦτο φαίνεται, τοῦ πλοίου ἀπομακρυνομένου τῆς γῆς, κατερχόμενον διὰ τοὺς μένοντας εἰς τὸν αἰγιαλόν, μέχρις ἐξαφανίσεως. Α 2.	Καὶ νεὼς δὲ ἀπὸ γῆς ἰούσης πρῶτον τὰ σκάφη ἀποκρύπτεται, ἔτι τῶν περὶ τὸν ἱστὸν ὁρωμένων· καὶ ὁπότε ἐκ θαλάσσης γῇ πελάζει, ὁμοίως πρῶτον ὁρᾶται τὰ ἱστία, τὰ δὲ σκάφη ἔτι ἐπιπροσθεῖται ὑπὸ τῆς περὶ τὸ ὕδωρ κυρτότητος. (Κλεομήδης, Κυκλικὴ θεωρία μετεώρων, 84, 9).

Ὅτι ἡ γῆ ἔχει τὸ τοιοῦτον (σφαιρικὸν) σχῆμα ἀποδεικνύει ἡ σκιὰ αὐτῆς· διότι αὕτη παράγει ἐπὶ τῆς ἐν ἐκλείψει σελήνης περιφέρειαν τελείου κύκλου. Α 3.

Περὶ δὲ τὰς (σεληνιακὰς) ἐκλείψεις ἀεὶ κυρτὴν ἔχει τὴν ὁρίζουσαν γραμμήν, ὥστ᾽ . . . ἡ τῆς γῆς ἂν εἴη περιφέρεια τοῦ σχήματος αἰτία σφαιροειδὴς οὖσα.
('Αριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β', 14, 297 b 19).

Διότι οἱ ὁρίζοντες κύκλοι διχοτομοῦσιν ὅλην τὴν σφαῖραν τοῦ οὐρανοῦ, ὅπερ δὲν ἠδύνατο νὰ γίνῃ, ἐὰν τὸ μέγεθος τῆς γῆς, παραβαλλόμενον τῷ τοῦ οὐρανοῦ, ἦτο σημαντικόν. Α 6.

Ὁρίζοντας διχοτομεῖν πάντοτε τὴν ὅλην σφαῖραν τοῦ οὐρανοῦ, ὅπερ οὐκ ἂν συνέβαινεν, εἰ τὸ μέγεθος τῆς γῆς αἰσθητὸν ἦν πρὸς τὴν τῶν οὐρανίων ἀπόστασιν.
(Πτολεμαῖος, Μαθηματικὴ Σύνταξις Α, 6, Heiberg, σελ. 20, 22).

Ὁ τόσον μέγας ὄγκος τῆς γῆς εἶναι ἀσήμαντος ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ οὐρανοῦ. Α 6.

Ὅτι σημείου λόγον ἔχει πρὸς τὰ οὐράνια ἡ γῆ.
(Πτολεμαῖος, Μαθ. Σύντ. Α, 6, 20, 3).

Τὸ ἄπειρον ἐπ᾽ οὐδενὶ λόγῳ δύναται νὰ κινῆται. Α 8.

Οὐδ᾽ ὅλως γε τὸ ἄπειρον ἐνδέχεται κινεῖσθαι.
('Αριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Α', 7, 274 b 29).

Δυνάμεθα νὰ ὑπολάβωμεν, ὅτι ἡ τάσις αὕτη τῆς ἕλξεως ἔγκειται ἐπίσης καὶ εἰς τὸν ἥλιον καὶ εἰς τὴν σελήνην καὶ εἰς τοὺς ἄλλους πλανήτας. Α 9.

Πλειόνων δὲ κόσμων ὄντων καθ᾽ ἕκαστόν ἐστιν ἴδιον μέσον (ἐφ᾽ οὗ τὰ βάρη ὠθεῖσθαι).
(Πλούταρχος, Περὶ τῶν ἐκλελοιπότων χρηστηρίων, 27).

Ἡ κίνησις αὕτη εἶναι φυσικὴ καὶ οὐδαμῶς βιαία. Α 10.

Ὥσπερ γὰρ κίνησις ὑπάρχει ἢ βίᾳ ἢ φύσει.
('Αριστοτέλης, Περὶ οὐρανοῦ Β', 13, 295 a 6).

Ἡ ἐτησία κίνησις τοῦ κέντρου (τῆς γῆς) ἥτις περιγράφει κύκλον περὶ τὸν ἥλιον. Α 11.

'Αρίσταρχος ὁ Σάμιος . . . ὑποτίθεται . . . τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν.
('Αρχιμήδης, Ψαμμίτης, Heiberg, Lipsiae 1913, σελ. 218, 7 - 12).

Αὗται αἱ τροχιαὶ τῶν πλανωμένων ἀστέρων ἔχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν περὶ τὸν ἥλιον. Ε 1.	Εἰσὶ γάρ τοι θεοὶ συγγενεῖς ἡλίῳ καὶ συμφυεῖς, τὴν ἄχραντον οὐσίαν τοῦ θεοῦ κορυφούμενοι, πληθυνόμενοι μὲν ἐν τῷ κόσμῳ, περὶ αὐτὸν δὲ (τὸν ἥλιον) ἑνοειδεῖς ὄντες. Οἵτε γὰρ πλάνητες εὔδηλον ὅτι περὶ αὐτὸν τὸν ἥλιον χορεύοντες μέτρον ἔχουσι τῆς κινήσεως. (Ἰουλιανὸς αὐτοκράτωρ, λόγος δ′, ἐγκώμιον εἰς τὸν αὐτοκράτορα Κωνσταντῖνον, 143 Β, 146 D). (Juliani Imperatoris vol. I, Oratio IV, 143 B, 146 D, Lipsiae 1875).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΙΓΙΝΗΤΗΣ, ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Μαθήματα Ἀστρονομίας, Ἀθῆναι 1929.

ΞΑΝΘΑΚΗΣ, ΙΩΑΝΝΗΣ: Ἀστρονομία, Τόμος Α′, Θεσσαλονίκη 1955.

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ, Α. Σ.: Τὸ Σύμπαν, Ἀθῆναι 1936.

ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ, ΕΥΓΕΝΙΟΣ Μ.: Μεγάλη Ἑλληνικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία, ἄρθρον Κοπέρνικος, Ἀθῆναι 1930.

ΧΑΣΑΠΗΣ, ΚΩΝ/ΤΙΝΟΣ Σ.: Ἡ Ἑλληνικὴ Ἀστρονομία τῆς Β′ χιλιετηρίδος π.Χ. κατὰ τοὺς Ὀρφικοὺς Ὕμνους. Διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ, Ἀθῆναι 1967.

COUDERC, P.: Les Étapes de l'Astronomie, Paris 1948.

HEATH, THOMAS: Greek Astronomy, London 1932.

HEATH, THOMAS: Aristarchos of Samos, 1913.

KLAUS, GEORG: Nicolaus Copernicus. Über die Kreisbewegungen der Weltkörper, 1. Buch. Berlin 1959.

TANNERY, PAUL: Recherches sur l'Histoire d'Astronomie ancienne, Paris, 1893.

ZUSAMMENFASSUNG

Einleitend wird die Stelle aus Platons Timaios wiedergegeben, worin gesagt wird, was Solon aus dem Mund des ägyptischen Priesters über die altgriechische Kultur erfährt. Dann wird über die bei den Orphikern des 15. Jahrhunderts vor Chr. herrschende Auffasung von der Bewegung der Erde um die Weltachse berichtet. Anschliessend folgt die Schilderung der pythagoreischen Ansichten über die Bewegung der Himmelskörper nach Platon und Aristoteles, hierauf, was Archimedes, Cicero, Aëtius, und Plutarch über das heliozentrische System

des Aristarch von Samos und die Vertiefung bei Seleukos wissen. In der Einleitung zu den Revolutiones orbium coelestium nimmt Copernicus ausdrücklich auf Aristarch und Seleukos Bezug; dass er sich gegen die Autorität des Ptolemaios für die Übernahme des heliozentrischen Systems entscheidet, führt die grosse Wende in der Entwicklung der abendländischen Astronomie herbei.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Ἰω. Ξανθάκης** κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας εἶπε τὰ κάτωθι:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν μελέτην τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη ὑπὸ τὸν τίτλον:

«Τὸ Ἡλιοκεντρικὸν Σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων».

Ὁ κ. Σταμάτης ἀνατρέχει εἰς τὰς διασωθείσας πηγὰς καὶ παρουσιάζει, κατὰ τρόπον συστηματικὸν καὶ ἀντικειμενικόν, τὰς ἰδέας τῶν ἀρχαίων περὶ τῆς γενέσεως τοῦ κόσμου καὶ τὰς ἀπόψεις των περὶ τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ περὶ τὸν Ἥλιον.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἀναφέρεται τὸ χωρίον τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος, ὅπου ἐκτίθεται ἡ ἀφήγησις τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα περὶ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ. Ἐκτὸς τούτου ὑπενθυμίζεται ἡ ὀρφικὴ ἀντίληψις τοῦ 15ου αἰῶνος π.Χ. περὶ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κόσμου. Περαιτέρω ἀναφέρονται αἱ ἀντιλήψεις τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ τῶν κινήσεων τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ αἱ θεωρίαι τῶν Πυθαγορείων, ἰδίᾳ τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου καὶ τοῦ Σελεύκου περὶ τοῦ ἡλιοκεντρικοῦ συστήματος, ὡς τοῦτο παρεδόθη εἰς ἡμᾶς διὰ τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Κικέρωνος, τοῦ Ἀετίου καὶ τοῦ Πλουτάρχου.

Μετὰ τὴν ὡς ἄνω ἀνακοίνωσιν ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Ἰω. Θεοδωρακόπουλος** προέβη εἰς τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις:

Μὲ πολλὴν χαρὰν ἤκουσα τὴν ἀνακοίνωσιν τοῦ κ. Σταμάτη. Ὅποιος ἔχει μελετήσει τὴν ἱστορίαν τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς ἐπιστήμης καὶ φιλοσοφίας, γνωρίζει καλῶς, ὅτι τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα ἦτο κατάκτησις τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, ὁ ὁποῖος ἤκμασε κατὰ τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ τρίτου π. Χ. αἰῶνος καὶ ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ Περιπατητικοῦ φιλοσόφου Στράτωνος ἐκ Λαμψάκου. Τὸ σύστημα τῆς ἡλιοκεντρικῆς κοσμολογίας τοῦ Ἀριστάρχου ἔγινεν ἀντικείμενον συζητήσεως καὶ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Τὸ ἐρώτημα, τὸ ὁποῖον τίθεται, εἶναι πῶς συνέβη ἡ μεγάλη καὶ καταπληκτικὴ αὐτὴ κατάκτησις τοῦ ἑλληνικοῦ ἐπιστημονικοῦ πνεύματος νὰ παραγκωνισθῇ καὶ ν᾽ ἀποσιωπηθῇ κατὰ τὴν περαιτέρω πορείαν τῆς ἱστορίας. Δύο εἶναι οἱ λόγοι: πρῶτον ἡ φιλοσοφικὴ αὐθεντία τοῦ Ἀριστοτέλους, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν κοσμολογικήν του εἰκόνα τοποθετεῖ τὴν γῆν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου. Ἡ κοσμολογικὴ αὐτὴ εἰκὼν δὲν ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν ἄμεσον διὰ τῆς αἰσθήσεως σχηματιζομένην ἐμπειρίαν τοῦ ἀνθρώπου, ἡ ὁποία τοποθετεῖ αὐτομάτως τὴν γῆν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου. Ὁ δεύτερος λόγος, ὁ ὁποῖος συνετέλεσεν εἰς τὴν ἀποσιώπησιν τῆς κατακτήσεως τοῦ Ἀριστάρχου, εἶναι ὅτι ἡ κοσμολογία τοῦ Ἀριστοτέλους ἔγινεν ἀποδεκτὴ ἀπὸ τὸν Χριστιανισμὸν ἢ μᾶλλον ἀπὸ τὴν Ἐκκλησίαν. Ἡ γῆ εἶναι καὶ δι᾽ αὐτὸν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου.

Εἰς τὰς παρατηρήσεις ταύτας ἀπαντᾷ ὁ κ. **Ἰω. Ξανθάκης** ὡς ἀκολούθως:

Εὐχαριστῶ τὸν κ. Θεοδωρακόπουλον διὰ τὴν παρέμβασίν του καὶ τὸν παρακαλῶ, ὅπως δεχθῇ καὶ περιληφθῶσιν εἰς τὰ Πρακτικὰ αἱ παρατηρήσεις του διὰ τὴν ἐργασίαν τοῦ κ. Σταμάτη. Πράγματι ὁ κ. Σταμάτης δὲν ἀσχολεῖται μὲ τὸ πρόβλημα τῆς μὴ ἐπικρατήσεως τῶν ἀπόψεων τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, συμφωνῶ δὲ καὶ ἐγὼ μετὰ τοῦ κ. Θεοδωρακοπούλου, ὅτι ἡ μεγάλη προσωπικότης τοῦ Ἀριστοτέλους ὑπῆρξεν ἡ κυριωτέρα ἀφορμὴ τοῦ παραμερισμοῦ τῶν ἀπόψεων τοῦ Ἀριστάρχου. Ὁ Ἀριστοτέλης, ὡς γνωστόν, ἦτο ἔνθερμος ὑποστηρικτὴς τοῦ γεωκεντρικοῦ συστήματος.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος λέγει καὶ ὁ Πρόεδρος κ. **Σπ. Μαρινᾶτος**:

Εἰς τὰ λεχθέντα ὑπὸ τῶν προλαλησάντων κυρίων συναδέλφων θὰ εἶχον νὰ προσθέσω τὰ ἑξῆς: Ἅπαξ ἐλευθερωθέντος τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος κατὰ τὴν εὐτυχῆ ἐκείνην ἐποχήν, ἡ φιλοσοφικὴ διάνοια τῶν Ἑλλήνων ἔφθασεν εἰς δυσθεώρητα ὕψη. Ἡ σημερινὴ ἐπιστήμη φθάνει ἐκ νέου εἰς τὰ ὕψη ταῦτα. Γνωρίζετε βεβαίως πάντες, ὅτι σήμερον ἡ Ἐπιστήμη ὁμιλεῖ περὶ πολλῶν κόσμων, περὶ πιθανότητος ὑπάρξεως ζωῆς πολλαχοῦ ἀνὰ τὸ Σύμπαν καὶ περὶ ἀπείρων γαλαξιῶν ἢ νεφελωμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦσι χωριστοὺς γιγαντιαίους κόσμους.

Ἀπὸ ἓν ἀνέκδοτον, τὸ ὁποῖον ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι καὶ τοῦτο ἀκόμη, τὸ περὶ κόσμων, ἐδίδασκον συστηματικῶς οἱ φιλόσοφοι. Εἷς τις Ἀνάξαρχος, ἂν καλῶς ἐνθυμοῦμαι, ἐδίδασκε περὶ πολλῶν κόσμων παρουσίᾳ Ἀλεξάνδρου τοῦ Μεγάλου. Οὗτος τότε ἐδάκρυσε, διότι ἐνεθυμήθη, ὅτι ἀπείρων ὄντων τῶν κόσμων, δὲν ἠδυνήθη ἀκόμη νὰ κατακτήσῃ τὸν ἕνα καὶ μόνον, τὸν παρόντα».

(Σημείωσις μεταγενεστέρα τοῦ κ. Σπ. Μαρινάτου: Πρόκειται περὶ τῶν χωρίων Πλουτ. περὶ Εὐθυμίας IV, ἔνθα τὰ πράγματα ἐξελίσσονται σχεδὸν ἀκριβῶς ὡς ἀνωτέρω.)

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΤΟΥ ΓΡΑΦΕΙΟΥ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ

(Ἀποσπάσματα)

Ἄρθρον 1.

Ἐπιστημονικὰς ἐργασίας ἐνώπιον τῆς Ἀκαδημίας καὶ πασῶν τῶν Τάξεων αὐτῆς δικαιοῦνται νὰ ἀναγινώσκουν, νὰ ἀνακοινώνουν καὶ νὰ παρουσιάζουν τὰ μέλη αὐτῆς, ἰδίας μὲν τὰ ἐπίτιμα, τὰ ἀντεπιστέλλοντα καὶ τὰ πρόσεδρα καὶ οἱ ξένοι ἑταῖροι, ἰδίας δὲ καὶ ξένας μόνα τὰ τακτικὰ μέλη.

. . . .

Ἄρθρον 10.

. . . .

§ 3, α΄.— Αἱ διὰ τὰ «Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν» προοριζόμεναι ἐπιστημονικαὶ ἀνακοινώσεις δέον νὰ εἶναι πρωτότυποι καὶ νὰ μὴ ἔχουν ὑποβληθῆ προηγουμένως πρὸς ἀνακοίνωσιν ἢ δημοσίευσιν εἰς ἄλλα ἐπιστημονικὰ σωματεῖα ἢ περιοδικὰ τῆς Ἑλλάδος ἢ τῆς ἀλλοδαπῆς. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ἀπαγορεύεται ἀπολύτως ἡ δημοσίευσις. Μετὰ τὴν ἀνακοίνωσιν μελέτης τινὸς ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ ἐπιτρέπεται ἡ δημοσίευσις αὐτῆς καὶ εἰς ἄλλα περιοδικά, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως, α΄) ὅτι θὰ δηλοῦται ὅτι πρόκειται περὶ ἀνακοινώσεως γενομένης ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν καὶ β΄) ὅτι πάντως αὕτη θὰ δημοσιεύεται καὶ εἰς τὰ Πρακτικὰ αὐτῆς.

. . . .

ϛ΄.— Αἱ εἰς τὰ «Πρακτικὰ» δημοσιευόμεναι διατριβαὶ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβαίνουν αἱ μὲν τῶν τακτικῶν μελῶν καὶ τῶν ξένων ἑταίρων τὰς 12 σελίδας, αἱ τῶν προσέδρων καὶ ἀντεπιστελλόντων τὰς 9, αἱ δὲ τῶν μὴ μελῶν τὰς 6 σελίδας. Εἰς ἐξαιρετικὰς μόνον περιπτώσεις δύνανται αὗται νὰ καταλάβουν ἓν τὸ πολὺ τυπογραφικὸν φύλλον, τῇ ἐγκρίσει τῆς Ἐπιτροπῆς τῶν Δημοσιευμάτων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκτὸς κειμένου ἐπὶ χάρτου στιλπνοῦ πινάκων τῶν δαπάνῃ τῆς Ἀκαδημίας ἐκτυπουμένων δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τοὺς τέσσαρας μὲν διὰ τὰ τακτικά, τοὺς τρεῖς δὲ διὰ τὰ πρόσεδρα καὶ ἀντεπιστέλλοντα μέλη καὶ τοὺς δύο διὰ τὰ μὴ μέλη. Οἱ πέρα τῶν ἀριθμῶν τούτων πίνακες θὰ ἐκτυποῦνται δαπάνῃ τῶν συγγραφέων.

. . . .

§ 6, ϛ΄.— Τὰ πρὸς διόρθωσιν παραδιδόμενα εἰς τὸν συγγραφέα ἀνακοινώσεως ἢ εἰς τὸν ἀνακοινώσαντα Ἀκαδημαϊκὸν τυπογραφικὰ δοκίμια πρέπει νὰ ἐπιστρέφωνται εἰς τὸ Γραφεῖον Δημοσιευμάτ[illegible] τὸ πολὺ ἡμερῶν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς παραδόσεως αὐτῶν, συνυπολογιζομέ[illegible]στροφῆς αὐτῶν καὶ καθυστερήσεως, κατόπιν ὑπομ[illegible]

ζ΄.— Τὴν ὀρθογ[illegible]ν ἢ τῶν περιλήψεων τῶν ξενογλώσσων ἀνακο[illegible]

. . . .

§ 7, β΄.— Ἡ Ἀκαδημία προσφέρει δωρεὰν εἰς τὸν συγγραφέα ἀνακοινώσεως ἑκατὸν πεντήκοντα (150) ἀνάτυπα, ἐφ᾽ ὅσον οὗτος δηλώσῃ τοῦτο κατὰ τὰ ἐν τῷ προηγουμένῳ ἐδαφίῳ ὁριζόμενα. Ἐκτὸς τῶν ἀνατύπων τούτων, ὁ συγγραφεὺς δύναται νὰ ζητήσῃ ἰδίᾳ δαπάνῃ τὴν χορήγησιν μέχρι πεντακοσίων (500) ἀνατύπων. Διὰ μεγαλύτερον ἀριθμὸν ἀνατύπων ἀπαιτεῖται ἔγκρισις τῆς Συγκλήτου, εἰς ἣν εἰσάγεται τὸ ζήτημα, ἐφ᾽ ὅσον μόνον ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐσημειοῦτο ἤδη ἐπὶ τῶν κατατεθέντων χειρογράφων τῆς ἀνακοινώσεως καὶ δὲν ἐδηλώθη μετὰ τὴν κατάθεσιν αὐτῆς.

. . . .

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΕΩΣ ΤΩΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ

ΕΤΟΣ 1953 : ΤΟΜΟΣ 28ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

1954

ἐγκατεστημένους Ἕλληνας ἀναστροφῆς. Εἰς ἀραιὰ μὲν διαστήματα, ἀλλὰ εὔχαρις πάντοτε καὶ ζωηρός, ἐπεσκέπτετο τὰς Ἀθήνας, ὅπου εἶχε προσωπικοὺς φίλους καὶ ὅπου τὸν εἵλκυε μετὰ τῆς πρὸς τὰ ἀρχαῖα μνημεῖα λατρείας καὶ ἡ πρὸς τὸ ξανθὸν νέκταρ τῆς μεσογείου Ἀττικῆς ἰδιαιτέρα αὐτοῦ προτίμησις καὶ ἀγάπη. Ἡ τελευταία αὐτοῦ ἐπίσκεψις τῶν Ἀθηνῶν ἦτο, ἂν δὲν ἀπατῶμαι, τὸ 1928.

Περαίνων τὴν σύντομον αὐτὴν νεκρολογίαν τοῦ ἐπιφανοῦς ἑταίρου, δὲν χρειάζεται νὰ εὐχηθῶ αἰωνίαν τὴν μνήμην τοῦ ὑπερόχου ἀνδρός. Εἰς τὸν Μιχαὴλ Ροστόφτσεφφ ἐξησφάλισε τὴν αἰωνιότητα τὸ ἔργον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναί τι ἀγώνισμα ἐς τὸ παραχρῆμα, ἀλλὰ πραγματικὸν κτῆμα ἐς ἀεί.

ΕΚΛΟΓΗ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ

Ἐκλέγεται δι' ἀπολύτου πλειοψηφίας ἀντεπιστέλλον μέλος τῆς Ἀκαδημίας ἐν τῇ τάξει τῶν Θετικῶν ἐπιστημῶν ὁ ἐν Παρισίοις ἰατρὸς κ. ***Σωτήριος Μπρίσκας.***

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ὁ ***Γενικὸς Γραμματεὺς*** παρουσιάζει τὰ πρὸς τὴν Ἀκαδημίαν σταλέντα βιβλία καὶ ἐν συνεχείᾳ ὁ ἀκαδημαϊκὸς κ. ***Β. Αἰγινήτης*** εἰσηγεῖται, ὡς κατωτέρω, περὶ τῶν ἐκδοθεισῶν μέχρι τοῦδε πέντε μαθηματικοῦ περιεχομένου μονογραφιῶν τοῦ καθηγητοῦ κ. Σ. Σταμάτη.

—Ὁ καθηγητὴς κ. Εὐάγγ. Σταμάτης, ἀσχολούμενος ἐπιτυχῶς περὶ τὴν μελέτην τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος, ἤρχισεν ἀπὸ τοῦ 1946 τὴν ἔκδοσιν τῶν ἔργων αὐτῶν καὶ ἐξέδωκε μέχρι σήμερον τὰ ἑξῆς:

1) Ἀρχιμήδους, Τετραγωνισμὸς παραβολῆς. Ὁ βίος καὶ τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους: ἀρχαῖον κείμενον — μετάφρασις — ἐπεξηγήσεις, 1946.

2) Ἀρχιμήδους, μηχανικά. Πρόλογος — ἀρχαῖον κείμενον — μετάφρασις — ἐπεξηγήσεις, 1946.

3) Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας. Εἰσαγωγὴ — Μετάφρασις. Σύγχρονος λύσις τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, 1949.

4) Ἀρχιμήδους, κύκλου μέτρησις. Εἰσαγωγὴ — Ἀρχαῖον κείμενον — μετάφρασις — ἐπεξηγήσεις, 1950.

5) Εὐκλείδου, Γεωμετρία. 1ος ἐκ τῶν τεσσάρων τόμων τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Εἰσαγωγὴ—ἀρχαῖον κείμενον—μετάφρασις, 1952.

Πλὴν τῶν ἔργων τούτων ἐδημοσίευσε καὶ τὰς ἑξῆς πρωτοτύπους πραγματείας, συναφεῖς πρὸς τὰ μαθηματικὰ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

1) Συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος, Μένων. (Περ. «Πλάτων» τῆς Ἑταιρείας Ἑλλήνων Φιλολόγων, 1951, τεῦχος 2).

2) Τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα. (Περ. «Πλάτων» τῆς Ἑταιρείας Ἑλλήνων Φιλολόγων, 1952, τεῦχος 1).

Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ἐργασιῶν τοῦ Ε. Σταμάτη ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς :

1) Διὰ τὴν πρώτην φορὰν ἀποκαθίσταται ὁ ἀληθὴς τίτλος ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους «Μηχανικά», τὸ ὁποῖον κατὰ τὸν ἐκδότην τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους Δανὸν J. Heiberg, φέρεται ὑπὸ τὸν τίτλον ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων.

Ἡ ἀποκατάστασις αὕτη στηρίζεται εἰς μαρτυρίαν αὐτοῦ τοῦ Ἀρχιμήδους περιεχομένην εἰς τὰ θεωρήματα 6 καὶ 10 τοῦ ἔργου του Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

2) Διὰ πρώτην φορὰν ἀποκαθίσταται ἡ ἀλήθεια ὡς πρὸς τὸν ἐπινοητὴν τοῦ περιφήμου ἀξιώματος τῶν μαθηματικῶν, τῆς συνεχείας. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐφέρετο πρό τινων δεκαετηρίδων εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν, ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους, ἤδη δὲ ὀνομάζεται ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Ε. Σταμάτης ἀποδεικνύει, ὅτι τὸ ἀξίωμα τοῦτο διετυπώθη διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, ὡς συνάγεται ἐξ ἀποσπασμάτων τοῦ ἔργου του περὶ φύσεως.—Σιμπλίκιος, Φύσ. 155,30. (Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου, σελ. 24-25).

Ἐπὶ τοῦ ζητήματος τῆς συνεχείας παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀρχαῖοι μαθηματικοὶ ἀντελαμβάνοντο τὴν συνέχειαν διὰ τῆς διαισθήσεως. Π. χ. ἡ ὄψις ἑνὸς τμήματος εὐθείας ἔδιδε τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας. Θεωρήσωμεν σύνολον σημείων εὐθείας σχηματιζούσης *γραμμικὸν συνεχές*. Ὑπάρχουν εἰς πᾶν διάστημα, ὁσονδήποτε μικρόν, σημεῖα ἀνήκοντα εἰς τὸ σύνολον αὐτό. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἦτο ἡ χαρακτηρίζουσα τὴν συνέχειαν. Τοῦτο ὅμως δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ εἶναι γραμμικὸν συνεχές· δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ ἡ ἰδιότης αὕτη, ὅταν περιοριζώμεθα εἰς σημεῖα ἀντιστοιχοῦντα εἰς ρητοὺς μόνον ἀριθμούς, ὅτε τὸ σύνολον εἶναι ἁπλῶς *πυκνόν*. Διὰ νὰ εἶναι συνεχές, πρέπει νὰ εἶναι καὶ *κλειστόν*, ἤτοι νὰ εἶναι τέλειον· πρέπει δηλ. νὰ περιέχῃ καὶ τὰ ὁρικά του σημεῖα, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, ὁριζομένους, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἡ πρωτότυπος ἐργασία «Συμβολὴ εἰς τὴν ἑρμηνείαν γεωμετρικοῦ χωρίου τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος, Μένων», παρέχει μίαν λύσιν τοῦ ἐν τῷ διαλόγῳ τούτῳ ἀναφερομένου δευτέρου προβλήματος (Μένων, 86ε-87β), ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς συναφῆ θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἡ λύσις αὕτη ἀνταποκρίνεται καὶ πρὸς τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος, ἡ ὁποία γενικῶς θεωρεῖται σκοτεινή.

4) Ἡ ἑρμηνευτικὴ μελέτη τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος καὶ τῆς συναφοῦς λύσεως συστημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως παρουσιάζει ὑπὸ ἐντονώτερον φῶς τὴν ἄνθησιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης κατὰ τοὺς πρώτους πυθαγορείους χρόνους. Ἐνταῦθα σημειοῦμεν ἰδιαιτέρως ὅτι ἡ φιλολογικὴ ἑρμηνεία τοῦ ὅρου «θυμαρίδειον ἐπάνθημα» γινομένη διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ὀφείλεται κατὰ τὸν κ. Σταμάτην εἰς τὸν διαπρεπῆ συνάδελφον κ. Χαρίτωνα Χαριτωνίδην καὶ τοὺς φιλολόγους Κ. Γεωργούλην καὶ Σ. Κορρέν.

5) Διὰ πρώτην φορὰν ὑποστηρίζεται μετὰ συναφῶν τεκμηρίων, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος (εἰσαγωγὴ εἰς τὸ ἔργον Ἀρχιμήδους, κύκλου μέτρησις).

Πῶς ὁρίζονται οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους ἀνεφέρομεν καὶ προηγουμένως προκειμένου περὶ συνεχείας; Ὁ Dedekind ἐζήτησε νὰ ὁρίσῃ τὸν ἀσύμμετρον ὡς τομὴν δύο συνόλων ῥητῶν, ἤτοι ὁρίζεται πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς (ἰδίᾳ καὶ ὁ ἀσύμμετρος) ἀπὸ τὸν σύνολον τῶν ῥητῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροί του. Τὸ ἀνώτερον πέρας ἀπείρου συνόλου ῥητῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ ἡ τομὴ μεταξὺ τοῦ συνόλου τούτου καὶ τοῦ συνόλου τῶν ῥητῶν τῶν μεγαλυτέρων αὐτοῦ ὁρίζει τὸν ἀριθμόν. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει, στηριζόμεθα εἰς τὸ θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, κατὰ τὸ ὁποῖον πᾶν ἄπειρον σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅλων πεπερασμένων, ἔχει ἀνώτερον πέρας.

Ὁ Weyl παρατηρεῖ ἐπὶ τούτων ὅτι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς ὁρίζεται ὡς τομή, τῆς ὁποίας ἡ ὕπαρξις ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ὑπάρξεως τοῦ ἀνωτέρου πέρατος, ἡ δὲ ὕπαρξις τούτου διὰ τῆς κατασκευῆς τομῆς. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν φαῦλον κύκλον. Δύναταί τις ὅμως νὰ παρατηρήσῃ ὅτι ἐκ τῆς μὴ ἀναγωγῆς τῆς ἐννοίας τοῦ ἀσυμμέτρου εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀκεραίου δὲν ἕπεται ὅτι δὲν δίδεται ἔννοια ἀσυμμέτρου.

Κατὰ τὸν Kronecker πᾶσα μαθηματικὴ ἔννοια πρέπει νὰ δύναται νὰ ἀναχθῇ λογικῶς εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀκεραίου. Ἀλλὰ κατὰ τὸν Conseth τοῦτο εἶναι ἀνακριβὲς καὶ στηρίζεται ἐπὶ ἐσφαλμένης ἐκτιμήσεως τῶν σχέσεων Μαθηματικῆς καὶ Λογικῆς.

Μὲ τὴν ἀντίληψιν τοῦ ἀσυμμέτρου σχετίζεται καὶ τὸ κλασικὸν σόφισμα τοῦ Ζήνωνος, ὅπερ ἔχει ὡς ἑξῆς. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Ἀχιλλεὺς ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διώκων μίαν χελώνην εὑρισκομένην εἰς τὸ Β, ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς εὑρίσκετο εἰς τὸ Α. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς διανύσῃ τὸ ΑΒ, ἡ χελώνη θὰ διανύσῃ διάστημά τι ΒΒ! καθ᾽ ὃν χρόνον ὁ Ἀχιλλεὺς διανύει τὸ ΒΒ′, ἡ χελώνη διανύει τὸ Β′Β″ κ. ο. κ. Τοιουτοτρόπως ὁ Ἀχιλλεὺς οὐδέποτε θὰ συλλάβῃ τὴν χελώνην. Ἡ πλάνη αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὴν διατύπωσιν χρησιμοποιοῦμεν ἐσφαλμένας ἀντιλήψεις ὑπάρξεως συνεχείας. Π. χ. ἡ ἔννοια τοῦ Α, τοῦ Β κλπ. δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ, οὔτε τὸ σημεῖον εἶναί τι πραγματικόν, οὔτε διακεκομμένα διαστήματα δύνανται νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν, διότι ἓν συνεχὲς δὲν δύναται νὰ νοηθῇ κατατετμημένον εἰς μέρη. Ἡ κατάτμησις ἀντίκειται εἰς τὴν φύσιν τοῦ συνεχοῦς, καθ' ὅσον τοῦτο δὲν εἶναι συλλογὴ σημείων καὶ τὰ σημεῖα δὲν εἶναι πραγματικά. Ταῦτα συμφώνως πρὸς τὰς σημερινὰς ἀντιλήψεις περὶ τῆς συνεχείας (βλ. *Π. Ζερβοῦ,* Ἀπειροστικὸς Λογισμός, τ. Ι, σελ. 2, 22 καὶ 29).

Ἡ σημασία τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη, γινομένης διὰ πρώτην φορὰν ἐν Ἑλλάδι ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως διὰ τὴν Ἑλληνικὴν ἐπιστήμην καὶ τὴν ἀγωγὴν τῆς μαθητευούσης νεολαίας, εἶναι προφανής. Ἡ Ἀκαδημία δὲν ἔμεινε ξένη πρὸς τὴν προσπάθειαν αὐτήν. Ἀπὸ τοῦ 1951 δι' ἐγγράφου αὐτῆς πρὸς τὸ Ὑπουργεῖον Παιδείας, τῇ εἰσηγήσει τοῦ ἀειμνήστου Ἀκαδημαϊκοῦ Παναγιώτου Ζερβοῦ, συνέστησεν, ὅπως ὁ Ὀργανισμὸς ἐκδόσεως σχολικῶν βιβλίων ἀναλάβῃ τὴν ἔκδοσιν τῶν συναφῶν ἐργασιῶν τοῦ κ. Σταμάτη. Κατόπιν τῆς ἐνεργείας ταύτης τῆς Ἀκαδημίας ὁ Ὀργανισμὸς ἐκδόσεως σχολικῶν βιβλίων ἀπεφάσισε ν' ἀναλάβῃ τὴν ἔκδοσιν τοῦ δευτέρου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

ΑΘΛΟΘΕΣΙΑ

Γίνεται δεκτὴ ἡ ἐκ 5.000.000 ἀθλοθεσία τοῦ ***Δήμου Ναούσης*** διὰ τὴν προκήρυξιν βραβείου πρὸς συγγραφὴν ἱστορίας τῆς πόλεως Ναούσης.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΑ — **Ἔρευναι ἐπὶ τῶν Μινωϊκῶν λέξεων,** *ὑπὸ* ***Κωνσταντίνου Κτιστοπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Ρωμαίου.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑι ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΕΩΣ ΤΩΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ

ΕΤΟΣ 1954: ΤΟΜΟΣ 29ΟΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1955

αἱ ὁποῖαι ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὰ Πρακτικά. Μεγάλης ἀξίας εἶναι καὶ τὰ ἔργα του: «Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Φιλοσοφίαν», «Λογική», «Ψυχολογία» καὶ ἄλλα.

Ὁ Θεόφιλος Βορέας μεγάλως συνέβαλεν εἰς ἐξύψωσιν τοῦ γοήτρου καὶ τοῦ κύρους τῆς Ἀκαδημίας. Ἡ Ἀκαδημία ἐσαεὶ θὰ τιμᾷ τὴν μνήμην αὐτοῦ.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ὁ ***Γενικὸς Γραμματεὺς*** παρουσιάζει τὰ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν σταλέντα βιβλία.

Ὁ κ. ***Κ. Ἄμαντος*** καταθέτει τὸ σύγγραμμα τοῦ καθηγητοῦ F. Babinger περὶ Μεχμὲτ τοῦ Κατακτητοῦ: *«Mehmed der Eroberer und seine Zeit»*, 1953 καὶ ὁμιλεῖ περὶ τοῦ περιεχομένου αὐτοῦ.

Ὁ κ. ***Γ. Σωτηρίου*** παρουσιάζει τὸ ὑπὸ τῆς Ἑταιρείας Μακεδονικῶν Σπουδῶν ἐκδοθὲν ἔργον τοῦ κ. Στ. Πελεκανίδου: *Καστοριὰ I* (Πίνακες), τὸ ὁποῖον καὶ ἐπαινεῖ.

Ὁ κ. ***Β. Αἰγινήτης*** καταθέτει τὸν ὑπὸ τοῦ κ. Εὐαγγ. Σταμάτη ἐκδοθέντα β' τόμον *«Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν»*, Ἀθῆναι 1953, καὶ λέγει περὶ τοῦ ἔργου τούτου τὰ κάτωθι:

Ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη ἐξεδόθη ὁ δεύτερος τόμος τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου μὲ εἰσαγωγὴν —ἀρχαῖον κείμενον— μετάφρασιν καὶ ἐπεξηγήσεις. Ὁ τόμος οὗτος περιλαμβάνει τὰ βιβλία 5ον, 6ον, 7ον, 8ον καὶ 9ον.

Ὁ πρῶτος τόμος τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιλαμβάνων τὰ βιβλία 1ον, 2ον, 3ον καὶ 4ον ἐξεδόθη ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη κατ' Ἀπρίλιον τοῦ 1952. Κατὰ τὸ ἔτος ἐκεῖνο παρουσιάσαμεν τὸν τόμον τοῦτον εἰς τὴν Ἀκαδημίαν καὶ ἐθεωρήσαμεν ὅτι εὐχῆς ἔργον θὰ ἦτο, ἐὰν ὁ Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων ἀναλάβῃ τὴν συνέχειαν τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως τῆς Κων]πόλεως ἐκδίδονται ἐν Ἑλλάδι τώρα διὰ πρώτην φοράν. Ἡ εὐχὴ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν ἐγένετο ἀποδεκτὴ ὑπὸ τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, ὁ ὁποῖος ἀναλαβὼν σοβαρὰν πρὸς τοῦτο δαπάνην ἐπέτυχεν ἀρτίαν ἔκδοσιν τοῦ παρουσιαζομένου ἐνώπιον ὑμῶν δευτέρου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ ἔργου γίνεται διεξοδικὴ διαπραγμάτευσις τοῦ ζητήματος, ἂν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Περὶ τούτου πολλοὶ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ἀποφαίνονται ἀρνητικῶς. Ὁ κ. Σταμάτης ἐπικαλούμενος χωρία ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους καταλήγει εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον πλήρη συνείδησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους πρῶτοι αὐτοὶ ἀνεκάλυψαν. Ἡ πρώτη μαθηματικὴ διατύπωσις τούτων ἐγένετο ἐν Ἀθήναις ὑπὸ τοῦ διασήμου Κνιδίου μαθηματικοῦ Εὐδόξου, ἑταίρου καὶ συνεργάτου τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν Ἀκαδήμειαν.

Ἀπὸ τοῦ ἔτους 1533, ὅτε ἐγένετο ἐν Βασιλείᾳ τῆς Ἑλβετίας ἡ πρώτη διὰ τοῦ Τύπου ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, οἱ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ συνεχίζουν, μέχρι καὶ τῆς σήμερον, τὴν ἔρευναν καὶ τὴν σπουδὴν τούτων ἐν συνεπαφῇ ἰδίως πρὸς τὰς γενικὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας. Ἀναφέρομεν σχετικῶς τὸν μεγάλον μαθηματικὸν David Hilbert, ἀποθανόντα πρὸ δέκα περίπου ἐτῶν, ὁ ὁποῖος διεμόρφωσε τὸ σύστημα τῶν ἀξιωμάτων τοῦ Εὐκλείδου κατὰ νέαν διατύπωσιν.

Ἡ σπουδὴ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου φέρει διαρκῶς εἰς φῶς προτάσεις καὶ ἀρχὰς μαθηματικάς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶχον τύχει ἰδιαιτέρας προσοχῆς.

Μεταξὺ τούτων εἶναι τρεῖς ἐργασίαι τοῦ κ. Σταμάτη, ἀνακοινωθεῖσαι εἰς τὴν Ἀκαδημίαν μας, ἐξ ὧν ἡ μία περὶ τοῦ συλλογισμοῦ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς ἀρκετὰ θεωρήματα τοῦ δευτέρου τόμου τῶν Στοιχείων. Ἡ δευτέρα ἐργασία τοῦ ἰδίου συγγραφέως ἀφορᾷ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δύο καὶ ἡ τρίτη ἐργασία αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ τοῦ μεγίστου μιᾶς συναρτήσεως δι' ἧς ἀποδεικνύεται ἡ γενίκευσις τοῦ 27ου θεωρήματος τοῦ 6ου βιβλίου τοῦ τόμου τούτου.

Εἰς τὸ τέλος τῆς μεταφράσεως τῶν θεωρημάτων παρατίθεται λεπτομερὴς ἐπεξήγησις τούτων εἰς σύγχρονον διατύπωσιν, ὥστε ταῦτα νὰ εἶναι καταληπτὰ ὑπὸ τῶν μαθητῶν καὶ τῶν σπουδαστῶν τῶν μαθηματικῶν.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΠΕΤΡΟΓΡΑΦΙΑ.— **Περὶ ἑνὸς ἡφαιστείου μεταμορφωμένου τόφφου τοῦ Πηλίου (Θεσσαλία)**, ὑπὸ ***Ἀναστ. Γεωργιάδου*** *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Τρικκαλινοῦ.

Ἐπανερχόμενος εἰς τὴν ἀπὸ 11 Ἰουνίου 1942 ἀνακοίνωσίν μου ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ ὑπὸ τὸν τίτλον: «*Νέα συμβολὴ εἰς τὴν μελέτην τοῦ κρυσταλλοσχιστώδους τοῦ Πηλίου*», ἔρχομαι ἤδη νὰ συμπληρώσω ταύτην διὰ τῆς χημικῆς μελέτης εἰς ἣν προέβην ἔκτοτε τοῦ περιγραφομένου ἐν ταύτῃ ἐκρηξιγενοῦς ἐλαφρῶς δυναμομεταμορφωμένου αὐγητικοῦ τόφφου εὑρεθέντος παρὰ τὴν πλατεῖαν τοῦ χωρίου Μακρυνίτσα τοῦ Πηλίου.

* ANAST. GEORGIADES : Sur un tuff volcanique metamorphisé du Pélion (Théssalie).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1957: ΤΟΜΟΣ 32ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1957

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 16ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1957

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΥ Η. ΠΟΥΛΙΤΣΑ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΑΝΑΡΡΩΤΙΚΑΙ ΑΔΕΙΑΙ

Χορηγεῖται ἄδεια ἀπουσίας ἐπὶ ἓξ μῆνας διὰ λόγους ὑγείας εἰς τὰ τακτικὰ μέλη *Βασ. Κουρεμένον, Στυλ. Λυκούδην* καὶ *Κ. Ζέγγελην*.

ΚΑΤΑΘΕΣΙΣ ΚΕΚΛΕΙΣΜΕΝΩΝ ΦΑΚΕΛΩΝ

Γίνονται δεκταὶ αἱ αἰτήσεις περὶ καταθέσεως ἐν τῷ ἀρχείῳ τῆς Ἀκαδημίας κεκλεισμένων φακέλων ὑπὸ τῶν *Μαργαρίτας Παπαζαχαρίου, Μαρίας Δαφνομήλη-Κωστοβασίλη* καὶ *Δημ. Ἰ. Συμεωνίδου, Παν. Περγαντῆ*.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ὁ ἀκαδημαϊκὸς κ. **Μιχαὴλ Στεφανίδης,** παρουσιάζων τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐαγγέλου Σταμάτη ἔκδοσιν τοῦ ἔργου τοῦ «*Εὐκλείδου, Περὶ ἀσυμμέτρων*» ἐκ τῶν Στοιχείων βιβλ. X, τόμου III, λέγει τὰ ἑξῆς:

Ὁ βίος τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ τῆς Ἀλεξανδρινῆς περιόδου, δὲν εἶναι ἐπαρκῶς γνωστός. Πάντως τὰ ὅρια τῆς ζωῆς του τίθενται εἰς τὰ ἔτη 323-270 π. Χ. Εἶναι δ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου βέβαιον, ὅτι οὗτος διέμεινεν ἐπὶ μακρὸν εἰς τὰς Ἀθήνας, ἐξ Ἀθηνῶν δὲ μετεκλήθη εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ὡς καθηγητὴς τῆς Γεωμετρίας καὶ Ἀριθμητικῆς εἰς τὸ αὐτόθι μέγα πανεπιστήμιον, τὸ περίφημον Μουσεῖον, ἱδρυθὲν ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου Α´ (323-285). Φυσικὸν δ᾽ ἐντεῦθεν ἦτο νὰ διατελέσῃ εἰς τὰς Ἀθήνας ὁ Εὐκλείδης μαθητὴς τῆς Ἀκαδημίας (καταλυθείσης τὸ 250 π. Χ.) ὑπὸ τοὺς μαθητάς, ἐννοεῖται, τοῦ Πλάτωνος (θανόντος τὸ 314 π. Χ.). Ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος ἀναμφιβόλως πρέπει νὰ χαρακτηρίσωμεν ὡς μίαν φιλόσοφον μέν, γνωστὴν δ᾽ ὅμως ὡς μαθηματικὴν κατ᾽ ἀλήθειαν Σχολήν.

Ὁ Εὐκλείδης, κατ᾿ ἐξοχὴν γεωμέτρης, εἶχεν ἐξαιρετικῶς προαγάγει τὰς γεωμετρικὰς σπουδὰς διὰ τῆς δημιουργίας τῆς Συστηματικῆς Γεωμετρίας. Συλλέξας, πρῶτος αὐτός, ὅλα τὰ ἕως τότε γνωστὰ γεωμετρικὰ προβλήματα καὶ θεωρήσεις, διέκρινεν ὅλα τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἰς θεμελιώδη καὶ εἰς δευτερεύοντα, εἰς παράγοντα καὶ παραγόμενα, καὶ δι᾿ ἐπαγωγικῆς συμπαραβολῆς τῶν λογικῶν των ἀξιῶν ἀνῆλθεν εἰς γενικὰς ἀρχάς, εἰς ὁρισμοὺς καὶ εἰς ἀξιώματα, ἁπλοποιήσας οὕτω τὴν διδασκαλίαν καὶ καταστήσας εὐκολωτέραν τὴν ἐκμάθησιν τῆς δυσκόλου Γεωμετρίας. Ὅλοι σχεδὸν οἱ σύγχρονοι τοῦ Εὐκλείδου μαθηματικοὶ ἀνεγνώρισαν τὴν χρησιμότητα τοῦ Εὐκλειδείου συστήματος καὶ ἡ ἀναγνώρισις αὐτὴ διετηρήθη μέχρι σήμερον εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν.

Τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου μετεφράσθησαν κατὰ πρῶτον εἰς τὴν Ἀραβικὴν τὸν 8^{ον} αἰῶνα, ἐκ τῆς ἀραβικῆς δὲ εἰς τὴν λατινικὴν τὸ 12^{ον}. Μόλις δὲ τὸ 1533 ἔγινεν εἰς τὴν Δύσιν ἡ τοῦ ἑλληνικοῦ κειμένου τοῦ Εὐκλείδου ἔκδοσις, τὴν ὁποίαν ἠκολούθησαν ἔπειτα καὶ ἄλλαι. Τῆς νεοελληνικῆς μεταφράσεως τοῦ κ. Σταμάτη ἤρχισεν ἡ δημοσίευσις τὸ 1952 μὲ τὸν I τόμον (τῶν βιβλίων 1, 2, 3, 4), καὶ τὸν II τόμον (τῶν βιβλίων 5, 6, 7, 8, 9) τὸ 1953, εἰς τοὺς ὁποίους προστίθεται ὁ ἤδη παρουσιαζόμενος III τόμος, δημοσιευθείς, τὸ 1956, ὁ περιλαμβάνων τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς τοῦ 10^{ου} βιβλίου τῶν Στοιχείων. Τὸ βιβλίον δὲ τοῦτο εἶναι τὸ δυσκολώτερον· ὅθεν εἰς τὴν Εἰσαγωγήν του ὁ κ. Σταμάτης, ἀναλύων τὸ περιεχόμενον τοῦ βιβλίου, δίδει τούτου μίαν πρωτότυπον ἑρμηνείαν, περὶ τῆς ὁποίας ἔχει κάμει καὶ εἰδικὴν ἀνακοίνωσιν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 17 Ἰανουαρίου. Ὑπολείπεται τώρα πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ὅλου ἔργου ὁ τέταρτος αὐτοῦ τόμος.

Εἶναι πολλῶν ἐπαίνων ἀξία ἡ χρησιμωτάτη αὕτη νεοελληνικὴ μετάφρασις καὶ ἑρμηνεία τοῦ μνημειώδους ἔργου τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ Εὐκλείδου.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΒΙΟΛΟΓΙΑ.—Περὶ τοῦ τρόπου τοῦ σχηματισμοῦ καρωτινοειδῶν εἴς τινα εἴδη ἰχθύων τῶν γλυκέων ὑδάτων, *ὑπὸ* ***Ἰωάνν. Χ. Πολίτου.***

Τὰ καρωτινοειδῆ, ὡς γνωστόν, εἶναι λίαν διαδεδομένα εἰς τὸ φυτικὸν καὶ εἰς τὸ ζωϊκὸν βασίλειον. Εἰς τὸ φυτικὸν βασίλειον αἱ οὐσίαι αὗται εὑρίσκονται μεμειγμέναι μετὰ τῶν χλωροφυλλῶν ἐντὸς τῶν χλωροπλαστῶν, ἐντὸς δὲ τῶν πετάλων πλείστων ἀνθέων καὶ πολλῶν καρπῶν ἐγκλείονται ἐντὸς τῶν χρωματοπλαστῶν παραγόμεναι ὑπὸ τούτων.

Συγγραφεῖς τινες Thudichum (1869), Capranica (1877), εὗρον ἀναλογίας μεταξὺ τῶν κιτρίνων καὶ πορτοκαλλιοχρόων χρωστικῶν τῶν ζῴων καὶ τῶν καρωτι-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1958: ΤΟΜΟΣ 33ΟΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1959

Πέλοπος κτλ). Ἀπὸ τὸ ἑνδέκατον κεφάλαιον ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ ἐπίσκεψις τοῦ Λόρδου Βύρωνος εἰς τὴν Σμύρνην. 36 ἡμέρας ἔμεινεν ὁ Βύρων εἰς τὴν πρωτεύουσαν τῆς Ἰωνίας. Εἰς τὸ προάστιον Βουτζᾶ συνεπληρώθη τὴν 28ην Μαρτίου 1810 τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ποιήματος, «Τσάϊλντ Σάρολδ», τὸ ὁποῖον ὁ Βύρων ἤρχισε νά γράφῃ τὴν 31ην Ὀκτωβρίου 1809 εἰς τὰ Γιάννενα καὶ στὴν Ζίτσα.

Εἰς τὸ δωδέκατον κεφάλαιον παρατίθεται βραχὺ γλωσσάριον τῶν ἰδιωματισμῶν τῆς Σμυρναϊκῆς διαλέκτου.

Αὐτὸ εἶναι ἐν συντομίᾳ τὸ περιεχόμενον τοῦ νέου βιβλίου τοῦ κ. Σολομωνίδη. Ὁ ἀκάματος ἐργάτης τῆς λογοτεχνίας καὶ τῆς ἐπιστήμης ἔγραψε καὶ ἄλλα 5 βιβλία τὰ ὁποῖα εἶχον τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη. Ἡ Ἀκαδημία ἐκτιμῶσα τὴν ἀξίαν των ἀπένειμεν εἰς τὸν συγγραφέα τιμητικὰς διακρίσεις.

Εὐχαρίστως μανθάνομεν ὅτι ὁ κ. Σολομωνίδης ἑτοιμάζει καὶ ἄλλα βιβλία ἀφορῶντα εἰς τὸν Ἑλληνισμὸν τῆς Μικρᾶς Ἀσίας. Εὐχόμεθα νὰ τὰ φέρῃ αἰσίως εἰς πέρας. Ἡμεῖς οἱ συμπολῖται τοῦ συγγραφέως εἴμεθα ἰδιαιτέρως ὑπερήφανοι καὶ εὐγνώμονες διὰ τὴν ἀνεκτίμητον συμβολὴν τοῦ κ. Σολομωνίδη εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἑλληνικῆς Μικρᾶς Ἀσίας.

★

Ὁ κ. **Βασ. Αἰγινήτης** καταθέτων τὸ νέον βιβλίον τοῦ κ. *Εὐαγγ. Σταμάτη* «*Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου*», τόμος 4ος, εἶπε περὶ τούτου τὰ ἑξῆς.

Μὲ ἐξαιρετικὴν εὐχαρίστησιν καὶ ἱκανοποίησιν παρουσιάζω σήμερον τὸν 4ον τόμον τῶν *Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου*, ἄριστον ἔργον τοῦ γνωστοῦ ἀκαμάτου ἐπιστήμονος κ. *Εὐαγγ. Σταμάτη*, ὁ ὁποῖος οὐ μόνον ἐπλήρωσε σπουδαῖον κενὸν τῆς βιβλιογραφίας μας ἀλλὰ καὶ διηυκρίνησεν ἢ ἀπεκάλυψεν ἱστορικὰ μαθηματικὰ ζητήματα σχετικὰ πρὸς τὸ θαυμάσιον ἔργον τοῦ μεγάλου Ἕλληνος μαθηματικοῦ τῆς ἀρχαιότητος. Διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ ῥηθέντος 4ου τόμου ὁλοκληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων, ἡ ἀρξαμένη ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη ἀπὸ τοῦ 1952.

Ὁ νέος καὶ τελευταῖος τόμος περιλαμβάνει τὴν στερεομετρίαν καὶ τὴν κατασκευὴν καὶ ἐγγραφὴν εἰς σφαῖραν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι τοῦ τετραέδρου, τοῦ κύβου, τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τοῦ δωδεκαέδρου. Τὰ πολύεδρα ταῦτα ὀνομάζονται καὶ πλατωνικὰ σχήματα, διότι ἐπιστεύετο κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ὅτι ταῦτα ἀνεκαλύφθησαν τὸ πρῶτον ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ τοῦ Πλάτωνος ὑπὸ τῶν μεγάλων αὐτῆς μαθηματικῶν τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Εὐδόξου. Ἐκτὸς τοῦ ἀρχαίου κειμένου παρατίθεται μετάφρασις τούτου εἰς τὴν Νεοελληνικὴν μετὰ ἐπεξηγήσεων τῶν δυσκολωτέρων θεωρημάτων.

Ἡ τελευταία ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἐγένετο ἐν Ἑλλάδι ὑπὸ τοῦ Αὐτοκράτορος Λέοντος τοῦ σοφοῦ κατὰ τὸ 900 μ.Χ. Ἀφ᾿ ἧς εὑρέθη ἡ τυπογραφία εἶναι ἡ πρώτη φορὰ τώρα καθ᾿ ἣν ταῦτα ἐκτυποῦνται ἐν Ἑλλάδι. Ὅπως εἶναι γνωστὸν τὰ Στοιχεῖα Εὐκλείδου ἀποτελοῦν τὸ θεμέλιον τοῦ σημερινοῦ πολιτισμοῦ.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ.— **Radioactive contamination of dust in Athens, Greece**[1], *by* ***Adr. Melissinos*** *and* ***Th. G. Kouyoumzelis****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Radioactive precipitations and «fallout» are observable at locations extremely distant from the actual nuclear explosion sites (1). Usual monitoring for increased radioactivity is based on measurements of fallout, which can be easily collected on a glued film (2) (3). However it was desired to investigate the activity of samples of ordinary dust which might have been contaminated by previous explosions. The special distribution of this activity over the Athens-Piraeus area (population over one million) was seeked, so that it could be used as a «background standard» in the case of intense fallout.

The samples consisted of thin layers of dust which had settled on horizontal surfaces over long periods of time (estimated over 6 monts); the dust was carefully brushed off and quantities ranging from 4 to 20 grams were collected from areas approximately 10 sq. feet large. The samples were obtained mainly from indoor places, but also from sheltered outdoor locations. Between the 24th and 31st of January 1955 samples from 50 different areas were obtained; for all of them the activity was less than 0,1 mr/hour and could not be detected by survey meters.

The samples were counted for beta activity in a liquid type G.M. counter (20th Century Electronics M6) with a 98% efficiency for beta rays. The useful cathode length of the counter was 6 cm. and the effective area 45 cm^2; the geometry was 2π (half of the emitted particles passed through

* **ΑΔΡ. Κ. ΜΕΛΙΣΣΗΝΟΥ καὶ ΘΕΟΔ. Γ. ΚΟΥΓΙΟΥΜΤΖΕΛΗ, Ραδιενεργὸς ρύπανσις τοῦ κονιορτοῦ Ἀθηνῶν - Πειραιῶς.**

[1] This work has been supported by the Greek National A.E.C.— Ἡ ἐργασία ἐξετελέσθη ἐν τῷ Α΄ Ἐργαστηρίῳ Φυσικῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν καὶ συνεχίζεται νῦν εἰς τὰ ἐργαστήρια τῆς Ἑλλ. Ἐπιτρ. Ἀτομ. Ἐνεργείας χρηματοδοτούσης τὰς σχετικὰς ἐρεύνας.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1965: ΤΟΜΟΣ 40ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1966

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 28ΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1965

ΠΡΟΕΔΡΙΑ Γ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗ ΝΟΒΑ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΑΓΓΕΛΙΑ ΘΑΝΑΤΟΥ

Ὁ **Πρόεδρος,** ἅμα τῇ ἐνάρξει τῆς συνεδρίας, ἀγγέλλει ἐπισήμως τὸν ἐπισυμβάντα τὴν 26ην Ἰανουαρίου θάνατον τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ Γεωργ. Σωτηρίου καὶ ἐξαίρει διὰ βραχέων τὴν προσωπικότητα καὶ τὸ ἐπιστημονικὸν ἔργον τοῦ ἐκλιπόντος τακτικοῦ μέλους τῆς Ἀκαδημίας.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κων. Παπαϊωάννου** παρουσιάζων τὸ βιβλίον τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη «*Διοφάντου Ἀριθμητικά, Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, Ἀρχαῖον Κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις*», εἶπε περὶ τοῦ περιεχομένου του τὰ ἑξῆς:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν τὸ βιβλίον τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη ὑπὸ τὸν τίτλον «*Διοφάντου Ἀριθμητικά, Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, Ἀρχαῖον Κείμενον, Μετάφρασις, Ἐπεξηγήσεις*».

Τὸ ἔργον τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη εἶναι γνωστὸν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ἀπὸ τὰς ἐπιστημονικὰς ἀνακοινώσεις του καὶ ἀπὸ τὰς προηγουμένας παρουσιάσεις βιβλίων του εἰς τὴν Ἀκαδημίαν. Ὁ κ. Εὐάγγελος Σταμάτης ἔθεσεν ὡς ἐπιστημονικὸν σκοπὸν τῆς ζωῆς του τὴν συστηματικὴν μετάφρασιν εἰς τὰ Νεοελληνικὰ τῶν ἀθανάτων ἔργων τῶν μεγάλων Ἑλλήνων Μαθηματικῶν τῆς Ἀρχαιότητος, ὡς καὶ τὴν ἐξαντλητικὴν μελέτην τῶν ἔργων αὐτῶν. Ἐργαζόμενος ἀδιαλείπτως ἐπὶ εἰκοσαετίαν ὁ κ. Σταμάτης ἐπετέλεσεν ἔργον ὀγκῶδες καὶ σημαντικὸν τόσον ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιστημονικῆς ὅσον καὶ παιδευτικῆς καὶ Ἐθνικῆς. Εἰς ἓν τόσον ἐκτεταμένον ἔργον εἶναι φυσικὸν νὰ δύνανται νὰ γίνουν καὶ παρατηρήσεις, τοῦτο ὅμως ἐπ' οὐδενὶ μειώνει τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς προσφορᾶς. Ἀποτελεῖ μάλιστα ὁ κ. Εὐάγγελος Σταμάτης παράδειγμα μεθοδικῆς καὶ ἐπιμόνου ἐπιστημονικῆς ἐργασίας διὰ τοὺς νέους Ἕλληνας ἐπιστήμονας. Διὰ τὸ σημαντικώτατον τοῦτο ἔργον του ἡ Ἀκαδημία Ἀθηνῶν ἀπένειμεν εἰς τὸν κ. Σταμάτην ἔπαινον τῇ 27η Δεκεμβρίου 1962.

Πολύτιμος εἶναι ἡ παροῦσα νέα συμβολὴ τοῦ κ. Σταμάτη, ἡ συνισταμένη εἰς τὴν σχολιασμένην μετάφρασιν εἰς τὰ Νεοελληνικὰ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου. Εἰς τοὺς μὴ εἰδικοὺς ἐπικρατεῖ, ἴσως, ἡ ἐντύπωσις, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες Μαθηματικοὶ διέπρεψαν πρὸ παντὸς εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ ὅτι ἡ συμβολή των εἰς ἄλλους κλάδους τῶν Μαθηματικῶν, ὡς ἐπὶ παραδείγματι εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἦτο δευτερεύουσα ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν συμβολήν των εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ἡ ἄποψις αὐτὴ εἶναι ἐσφαλμένη, διότι ἡ πρόοδος τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων ὑπῆρξεν ἐξ ἴσου λαμπρά, ὅσον καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν σημερινῶν Μαθηματικῶν· μάλιστα δὲ εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἀριθμητικήν, τὴν καλουμένην σήμερον «Θεωρίαν Ἀριθμῶν» καὶ εἰς τὴν Λογικήν. Διὰ τῆς ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη προσφορᾶς τοῦ ἔργου τοῦ μεγάλου Διοφάντου εἰς τὸ εὐρὺ Ἑλληνικὸν ἀναγνωστικὸν κοινὸν καθίσταται δυνατόν, ὅπως ὅλοι ἀντιληφθοῦν τὴν ἔννοιαν καὶ τὴν ἀξίαν τῶν ἀριθμητικῶν ἀνακαλύψεων τῶν Ἀρχαίων. Ἑπομένως, ἡ προσφορὰ τοῦ κ. Σταμάτη εἶναι καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς πολύτιμος.

Σημειώνω, ἐπιπροσθέτως, ὅτι εἷς ἐκ τῶν νεωτάτων καὶ πλέον ἀκμαζόντων ἀλλὰ καὶ δυσχερῶν κλάδων τῆς σημερινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης εἶναι ἡ «Διοφαντικὴ Ἀνάλυσις», τῆς ὁποίας αἱ βάσεις ἐτέθησαν ἀπὸ τὸν μέγαν Διόφαντον.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1970: ΤΟΜΟΣ 45ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

1971

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΒΙΒΛΙΟΥ *

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Φιλ. Βασιλείου** παρουσιάζων τὸ βιβλίον τοῦ κ. Εὐαγγ. Σταμάτη, ὑπὸ τὸν τίτλον «Εὐκλείδου Στοιχεῖα, βιβλ. I - IV καὶ V - IX», εἶπε τὰ ἑξῆς :

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν τοὺς δύο πρώτους τόμους τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου ἐκδοθέντας ὑπὸ τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη καὶ περιλαμβάνοντας τὰ βιβλία I - IV καὶ V - IX. Ἡ πλήρης ἔκδοσις θέλει ἀποτελεσθῆ ἐκ πέντε τόμων, οἵτινες πλὴν τῶν XIII βιβλίων τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου θέλουν περιλάβει καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν σχόλια.

Ἡ Γερμανικὴ Ἀκαδημία τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάγεται καὶ ἡ διεύθυνσις ἐκδόσεως τῆς συλλογῆς Bibliotheca Teubneriana, ἐν τῇ ἐπιθυμίᾳ της ὅπως ἀντικαταστήσῃ τὰς παλαιοτέρας ἐκδόσεις τῆς συλλογῆς αὐτῆς μὲ νέας συγχρονισμένας τοιαύτας, περιέλαβεν ἐκ τῶν πρώτων εἰς τὸ πρόγραμμά της τὴν ἐπανέκδοσιν τῆς ὑπὸ τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ I. L. Heiberg γενομένης τὸ 1883 - 1888 δημοσιεύσεως, εἰς πέντε τόμους, τῶν «Στοιχείων». Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἀπηυθύνθη, ἤδη ἀπὸ τοῦ Αὐγούστου τοῦ 1960, εἰς τὸν Ἕλληνα ἐρευνητὴν τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος κ. Εὐάγγελον Σταμάτην, μὲ τὴν παράκλησιν ὅπως ἀναλάβῃ οὗτος τὴν λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἐργασίαν ταύτην εὑρισκομένην εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ πεδίου τοῦ ἰδίου αὐτοῦ ἐρευνητικοῦ ἔργου.

Καρπὸν τῆς ἐκ μέρους τοῦ κ. Σταμάτη ἀποδοχῆς τῆς τόσον τιμητικῆς ἀναθέσεως εἰς αὐτὸν τῆς ἐπανεκδόσεως τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου ἀποτελεῖ ἡ σήμερον εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν γινομένη παρουσίασις τῶν μέχρι τοῦδε ἐκδοθέντων ἐννέα ἐκ τῶν δεκατριῶν βιβλίων τοῦ Εὐκλείδου.

Ὅπως εἶναι ἤδη γνωστόν, τὰ «Στοιχεῖα» δὲν ἀποτελοῦν μόνον, ὡς ἐνομίζετο ἄλλοτε, συλλογὴν καὶ συστηματικὴν ἔκθεσιν τῶν μέχρι περίπου τοῦ ἔτους

---

* Συνεδρία τῆς 5ης Νοεμβρίου 1970.

350 π. Χ., ἐποχὴν τοῦ θανάτου τοῦ μεγαλοφυοῦς μαθηματικοῦ Εὐδόξου, γνωστῶν γεωμετρικῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, δίδουσαι, τρόπον τινα, ἰδέαν τῆς στάθμης τῶν Μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος· χαρακτηριζόμενα ἀπὸ μίαν ἄνευ προηγουμένου λογικὴν ἑνότητα καὶ συνέπειαν καὶ συντεταγμένα διαλεκτικῶς κατὰ τὴν Πλατωνικὴν μέθοδον, «τὰ Στοιχεῖα» ἀπέβλεπον κυρίως εἰς τὴν φιλοσοφικὴν προπαιδείαν τοῦ ἀναγνώστου ἀκολουθοῦντα καθ' ὁλοκληρίαν τὴν διδασκαλίαν τοῦ Πλάτωνος. Δι' αὐτὸ καὶ ἡ βαθυτέρα σημασία τοῦ περιεχομένου αὐτῶν δύναται νὰ κατανοηθῇ μόνον μέσα εἰς τὸ πλαίσιον τῶν φιλοσοφικῶν θεωριῶν, θὰ ἐλέγαμεν, τῶν κοσμοθεωριῶν τῆς ἐποχῆς των. Ἄλλωστε ὁ ἴδιος ὁ Πλάτων, εἰς τὴν «Πολιτείαν» του, λέγει ὅτι προπαρασκευὴν διὰ τὴν Φιλοσοφίαν ἀποτελεῖ ἡ γνῶσις τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Γεωμετρίας, τῆς θεωρίας τῶν μουσικῶν Ἁρμονιῶν καὶ τῆς Ἀστρονομίας. Ἀκριβῶς δὲ αἱ δύο πρῶται τούτων εὑρίσκονται εἰς τὰ «Στοιχεῖα», ἐνῷ ἡ θεωρία τῶν Ἁρμονιῶν ἐκτίθεται εἰς τὴν «Κατανομὴν τοῦ κανόνος», ἡ δὲ Ἀστρονομία εἰς τὰ «Φαινόμενα», ἔργα ἐπίσης τοῦ Εὐκλείδου καὶ μάλιστα ἐκ τῶν διασωθέντων. Ἂς μὴ λησμονῶμεν ἀκόμη ὅτι τὰ ἐπιτεύγματα δύο τῶν σπουδαιοτέρων καὶ βαθυτέρων εἰς ἰδέας βιβλίων τῶν «Στοιχείων», τοῦ V καὶ τοῦ X, ὀφείλονται εἰς δύο προσφιλεῖς μαθητὰς τοῦ Πλάτωνος, τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Θεαίτητον.

Ἕτερον στοιχεῖον, ἐνισχῦον τὴν θέσιν τῆς στενῆς σχέσεως τοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου πρὸς τὴν διδασκαλίαν τοῦ Πλάτωνος, ἀποτελεῖ καὶ ἡ εἰς τὸ XIII βιβλίον ἔρευνα περὶ τῶν κανονικῶν σωμάτων καὶ τῶν δι' αὐτῶν ὁριζομένων ἀσυμμετριῶν, ἔρευνα ὀφειλομένη ἐπίσης εἰς τὸν Θεαίτητον, ἰδιαίτερα μάλιστα ἡ ἀπὸ τὰς δώδεκα ἀκμὰς κύβου κατασκευὴ κανονικοῦ δωδεκαέδρου. Σημειωτέον ὅτι ἡ κατασκευὴ τῶν πέντε κανονικῶν σωμάτων, τῶν καλουμένων καὶ σχημάτων τοῦ Πλάτωνος, ἀποτελεῖ τὴν κορωνίδα τοῦ ὅλου ἔργου τῶν «Στοιχείων».

Ἡ εἰς τὸν διάλογον τοῦ Πλάτωνος «Φαίδων» γινομένη περιγραφὴ τῆς Γῆς, ἡ ὁποία ἐξ ἄλλου ὑπῆρξε σημαντικὴ διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῆς μετέπειτα περὶ τοῦ Κόσμου εἰκόνος, καθὼς καὶ ἡ κατ' αὐτήν, κατ' ἀνάλογον τρόπον πρὸς τὴν κατασκευὴν τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου, γινομένη ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος διαίρεσις τῆς γηίνης ἐπιφανείας, τὸ πρῶτον ὑπ' αὐτοῦ μνημονευομένης ὡς σφαιρικῆς, καθιστοῦν ἔκδηλον τὴν σχέσιν περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν καὶ διαγράφουν τὸν ἀπώτερον σκοπὸν τῆς ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου συγγραφῆς τῶν «Στοιχείων».

Κατόπιν τώρα τῆς εἰς τὴν ἐποχήν μας παρατηρουμένης ροπῆς τοῦ περιορισμοῦ ἢ καὶ τῆς παντελοῦς ἐγκαταλείψεως τῶν κλασσικῶν ἑλληνικῶν γραμμάτων, τῆς ἐπικρατήσεως δὲ τοῦ τεχνικοῦ πνεύματος εἰς τὴν σύγχρονον παιδείαν, ροπῆς τῆς ὁποίας τὸν κίνδυνον ἔθεσεν ἐνώπιόν μας ὁ Γενικὸς Γραμματεὺς κ. Ἰ. Θεοδωρακόπουλος, εἶναι λίαν παρήγορον τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ Ἀκαδημία Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου προβαίνει εἰς τὴν ἐπανέκδοσιν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ Λατίνων συγγραφέων. Ὡς ἕνα σημαντικὸν βῆμα πρὸς τὴν προσπάθειαν ἀνακοπῆς τῆς ροπῆς ἐκείνης χαιρετίζομεν τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου. Σήμερον, ὁπότε τὰ Μαθηματικὰ — ἡ κατ' ἐξοχὴν Ἐπιστήμη — γνωρίζουν μίαν ἄνευ προηγουμένου ἄνθησιν, ἡ ὑπὸ τὴν αἰγίδα τῆς ἐν λόγῳ Ἀκαδημίας ἐπάνοδος εἰς τὰ ἀρχαῖα κείμενα τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν, ἐνέχοντα ἀναμφισβήτητον πηγὴν ἀνθρωπιστικῆς παιδείας, ἀποτελεῖ πράγματι εὐπρόσδεκτον ἐνέργειαν ὑποδηλώνουσα μὲ τὴν δέουσαν ἔμφασιν τὴν ἀναλλοίωτον ἀξίαν τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ἐξ ἄλλου, πολὺ εὔστοχα, ὁ συνάδελφος κ. Κ. Τσάτσος δὲν παραλείπει ἑκάστοτε νὰ τονίζῃ τὴν ἰδιαιτέραν σημασίαν τῆς λογικῆς καὶ μαθηματικῆς σκέψεως εἰς τὴν καθόλου κλασσικὴν παιδείαν, προσθέτων ὅτι «κανένας ἄλλος δρόμος δὲν εἶναι πιὸ εὐθὺς καὶ πρόσφορος, πιὸ ἀποτελεσματικός, ἀπὸ τὴν κλασσικὴ παιδεία γιὰ νὰ ξεπεράσουμε τὴν κρίσι τῆς ἐποχῆς μας, κρίσι ποὺ ὀφείλεται στὴν ὑπέρμετρη ἀπόστασι ποὺ ἡ πραγματικὴ πορεία τοῦ ἀνθρώπου βρίσκεται ἀπὸ τὸν δρόμο ποὺ θὰ ἔπρεπε νὰ ἀκολουθήσῃ».

Ἡ ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη παρουσιαζομένη σήμερον ἐπανέκδοσις τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου βασίζεται εἰς τὴν ἀναφερθεῖσαν προηγουμένην αὐτῶν ἔκδοσιν τοῦ I. L. Heiberg, γενομένην εἰς Λειψίαν ὑπὸ τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου Teubner. Ἡ ἔκδοσις Heiberg περιεῖχεν εἰς ἕκαστον τόμον πρόλογον τοῦ ἰδίου, τὸ ἀρχαῖον κείμενον, λατινικὴν μετάφρασιν καθὼς καί, εἰς ἑκάστην σελίδα, κριτικὸν ὑπόμνημα.

Σύμφωνα μὲ σχετικὴν πρότασιν τοῦ κ. Σταμάτη, κατὰ τὴν ἐπανέκδοσιν παρελείφθη ἡ λατινικὴ μετάφρασις.

Ἡ συμβολὴ τώρα τοῦ κ. Σταμάτη συνίσταται εἰς τὰ ἑξῆς :

Γενικῶς μὲν εἰς τὴν ἔρευναν κωδίκων μὴ ἐξετασθέντων ὑπὸ τοῦ Heiberg. (Ὁ κ. Σταμάτης ἔκαμε σύγκρισιν χειρογράφων ἀπὸ τὰς βιβλιοθήκας Βηρυτοῦ, Ἁγίου Ὄρους καὶ Μαδρίτης.)

Εἰδικῶς δὲ ὅτι, εἰς μὲν τὸν πρῶτον τόμον :

1. Παρέθεσε, διὰ πρώτην φοράν, πίνακα ἐμφαίνοντα τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁρισμῶν, τῶν αἰτημάτων, τῶν κοινῶν ἐννοιῶν καὶ τῶν προτάσεων τῶν XIII βιβλίων τῶν «Στοιχείων» (σελὶς XXXI).

2. Παρέθεσε, διὰ πρώτην φορὰν ἐπίσης, πίνακα ἐμφαίνοντα τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁρισμῶν, τῶν αἰτημάτων, τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, τῶν θεωρημάτων, τῶν προ-

βλημάτων καὶ τῶν πορισμάτων τῶν τεσσάρων πρώτων βιβλίων τῶν «Στοιχείων» (σελὶς XXXII) ὡς καὶ πίνακα ἀριθμητικὸν εἰς τὸν ὁποῖον ἀναγράφονται αἱ προτάσεις ὅπου χρησιμοποιοῦνται αἰτήματα καὶ κοιναὶ ἔννοιαι (σελὶς XXXIII).

3. Ἀνέπτυξε, τὸ πρῶτον, τὸ περιεχόμενον τῶν τεσσάρων πρώτων βιβλίων (σελὶς XXXIV).

4. Διεμνημόνευσε, διὰ πρώτην φοράν, α) τὰς τέσσαρας μεθόδους ἀποδείξεως τὰς χρησιμοποιουμένας εἰς τὰ «Στοιχεῖα», μεταξὺ τῶν ὁποίων, ὡς λέγει, καὶ τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἀναφέρων καὶ τὰ θεωρήματα, ὅπου ἡ τελευταία τούτων χρησιμοποιεῖται κατ' αὐτόν (σελὶς XXXV), β) τὰς κυριωτέρας ἐκδόσεις τῶν «Στοιχείων» ἀπὸ τοῦ 370 π.Χ. (σελ. XXXVI), γ) πραγματείας ἐπὶ τῶν «Στοιχείων», τὰς κυριωτέρας ἀπὸ τοῦ 1909 (σελίδες XXXVII - XXXIX), δ) συντμήσεις ὀνομάτων (σελίδες XL - XLI), ε) σημειώσεις κωδίκων καὶ συμβολισμῶν (σελὶς XLII).

5. Μεταξὺ τοῦ ἀρχαίου κειμένου καὶ τοῦ κριτικοῦ ὑπομνήματος τοῦ Heiberg, παρέθεσεν, εἰς ἑκάστην σελίδα, ἰδικόν του ὑπόμνημα περιλαμβάνον, ὅπου τοῦτο ἐθεώρησεν ἀναγκαῖον, τοὺς ὁρισμούς, τὰ αἰτήματα, τὰς κοινὰς ἐννοίας ὡς καὶ τὰ προηγούμενα θεωρήματα εἰς τὰ ὁποῖα στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις ἑκάστου ἐξεταζομένου θεωρήματος.

6. Διώρθωσε τυπογραφικὰ σφάλματα.

7. Παρέθεσεν ἀποσπάσματα τριῶν, ἀγνώστων εἰς τὸν Heiberg, παπύρων (σελίδες 187, 188, 189).

Εἰς δὲ τὸν δεύτερον τόμον :

8. Μεταξὺ τοῦ ἀρχαίου κειμένου καὶ τοῦ κριτικοῦ ὑπομνήματος τοῦ Heiberg παρέθεσεν, εἰς ἑκάστην σελίδα, ἰδικόν του ὑπόμνημα, ὅπως καὶ εἰς τὸν πρῶτον τόμον.

9. Διώρθωσε τυπογραφικὰ σφάλματα καὶ τοιαῦτα ἐπὶ τῶν σχημάτων.

Παρουσιάζοντες τὴν ἀξιόλογον ἐργασίαν ταύτην τοῦ κ. Σταμάτη, δὲν παραλείπομεν νὰ τονίσωμεν τὴν μεγάλην τιμήν, τὴν ὁποίαν περιποιεῖ εἰς τὴν χώραν μας ἡ εἰς Ἕλληνα ἐπιστήμονα ἀνάθεσις τοῦ ἔργου τῆς ἐπανεκδόσεως τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου.

Ἐλπίζομεν, ὅπως προσεχῶς εὑρεθῶμεν εἰς τὴν εὐχάριστον θέσιν νὰ παρουσιάσωμεν εἰς τὴν ἡμετέραν Ἀκαδημίαν καὶ τήν, δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους γενομένην ἐπίσης ὑπὸ τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΤΗΣ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1972: ΤΟΜΟΣ 47ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1973

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ ΒΙΒΛΙΩΝ *

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Φ. Βασιλείου,** παρουσιάζων τὸ κατωτέρω δηλούμενον ἔργον τοῦ κ. Ἐ. Σταμάτη, λέγει τὰ ἑξῆς :

«Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν τὰ δύο μέρη τοῦ πρώτου τόμου τῶν «Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους», ἐκδιδομένων, δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, ὑπὸ τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη. Ὁ δεύτερος τόμος τῶν Ἁπάντων εὑρίσκεται ὑπὸ ἔκδοσιν, συντόμως δὲ θέλει ἀκολουθήσῃ καὶ τρίτος τόμος.

Ἐπίσης ἔχω νὰ ἀναφέρω ὅτι, εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον B. G. Teubner, εἶναι ἕτοιμα πρὸς ἐπανέκδοσιν τὰ «Ἅπαντα τοῦ Ἀρχιμήδους» εἰς τρεῖς τόμους ὑπὸ J. L. Heiberg μὲ διορθώσεις τοῦ κ. Εὐαγγέλου Σταμάτη. Τῆς ἐπανεκδόσεως ταύτης τὰ τελικὰ δοκίμια εὑρίσκονται ἤδη εἰς χεῖρας μας.

Ὁ Ἀρχιμήδης, συνδυάζων μὲ τὴν μαθηματικήν του μεγαλοφυΐαν θαυμαστὴν διόρασιν τοῦ φυσικοῦ κόσμου, ὄχι μόνον καταλέγεται μεταξὺ τῶν μεγίστων μαθηματικῶν ἀλλὰ καὶ θεωρεῖται ὡς θεμελιωτὴς τῆς μαθηματικῆς Φυσικῆς.

Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρῃ κανείς, εἰς ὁλόκληρον τὴν Γεωμετρίαν τῶν Ἀρχαίων, πλέον δύσκολα καὶ πολύπλοκα προβλήματα, συγχρόνως δὲ πλέον ἁπλᾶς καὶ διαυγεῖς δι' αὐτὰ λύσεις, ἀπὸ τὰς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους δοθείσας (Πλούταρχος).

Κατὰ τὸν σύγχρονον ἱστορικὸν τῶν Μαθηματικῶν Ἄγγλον συγγραφέα T. L. Heath, χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐντυπωσιάζον ἰδιαίτερα τοὺς νεωτέρους μαθηματικούς, ἐξοικειωμένους εἰς τὴν ταχύτητα καὶ ἀμεσότητα τὰς ὁποίας ἐξασφαλίζει ἡ γενικότης τῶν συγχρόνων μεθόδων, εἶναι ἡ περίσκεψις μὲ τὴν ὁποίαν οὗτος προσεγγίζει τὴν λύσιν οἱουδήποτε τῶν δυσκόλων αὐτοῦ προβλημάτων. Τὸ γνώρισμα αὐτό, λέγει ὁ Heath, ἠμπορεῖ νὰ παραλληλισθῇ μὲ τὴν τακτικὴν ἑνὸς μεγάλου στρατηγοῦ ὁ ὁποῖος, ἐπιζητῶν νὰ προβλέψῃ κατὰ τὴν μάχην τὰ πάντα, δρᾷ μετὰ προσοχῆς καταφέρων αἰφνιδιαστικῶς τὸ τελικὸν κτύπημα. Οὕτω καὶ εἰς τὸν Ἀρχιμήδην συναντᾷ κανεὶς προτάσεις κατόπιν προτάσεων, ἡ σημασία τῶν ὁποίων δὲν καταφαίνεται ἀμέσως, τὰς ὁποίας ὅμως εὑρίσκει ἀπαραιτήτους διὰ τὰ ἑπόμενα, διὰ τῶν ἁπλῶν δὲ αὐτῶν βημάτων ὁδηγεῖται ἀπροσδοκήτως εἰς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ εἰς τὴν ἀρχὴν τεθέντος προβλήματος.

Ὅμως, ἂν καὶ κάθε βῆμα εἶναι χρήσιμον καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ προηγούμενα, ἦτο πρό τινος τελείως ἀδύνατον νὰ διίδῃ κανεὶς τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης ἤγετο ἑκάστοτε εἰς τὰς ἐν λόγῳ ἐνδιαμέσους προτάσεις. Ἐφαίνετο

---

* Συνεδρία τῆς 9ης Μαρτίου 1972.

οὕτω νὰ ἀληθεύῃ ἡ ὑπὸ τοῦ John Wallis γενομένη, τὸν 17ον αἰῶνα, παρατήρησις κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Ἀρχιμήδης ἐκ προθέσεως ἐκάλυπτε τὰ ἴχνη τῆς ἐρευνητικῆς του πορείας, κρατῶν ζηλοτύπως ἀπὸ τοὺς μεταγενεστέρους τὸ μυστικὸν τῆς μεθόδου του.

Τὸ ἔτος 1906 κατὰ τήν, κατόπιν ὑποδείξεως, πραγματοποιηθεῖσαν μετάβασιν τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ J. L. Heiberg εἰς Κωνσταντινούπολιν πρὸς ἐξέτασιν χειρογράφων εὑρισκομένων εἰς ἐκεῖ βιβλιοθήκην, ἀνεκαλύπτετο, μεταξὺ ἄλλων, ἡ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος». Μὲ τὴν πραγματείαν αὐτήν, τῆς ὁποίας τὸ κείμενον κατώρθωσεν ὁ Heiberg κατόπιν πολλῶν παλαιογραφικῶν δυσκολιῶν νὰ ἀποκαταστήσῃ, ἤρθη ἐν πολλοῖς ὁ πέπλος μυστηρίου ἀναφορικὰ μὲ τὸν δρόμον ὅστις πολλάκις ὡδήγησε τὸν Ἀρχιμήδην εἰς τὰς μεγαλοφυεῖς αὐτοῦ μαθηματικὰς καινοτομίας. Ἰδιαίτερα ἰσχύει αὐτὸ διὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀκολουθηθεῖσαν μέθοδον ἐξαντλήσεως, ἥτις εἰς τὴν οὐσίαν συνίσταται εἰς τήν, κατὰ τὴν σημερινὴν ὁρολογίαν, εὕρεσιν τῶν ὁριακῶν τιμῶν καταλλήλων ἀθροισμάτων, μέθοδον ὁδηγήσασαν εἰς τὴν ἐπινόησιν τοῦ σήμερον καλουμένου Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ. Ἀπὸ τὴν ὡς ἄνω πραγματείαν μανθάνομεν ἰδιαίτερα ὅτι διὰ τὴν μέθοδόν του αὐτὴν ὁ Ἀρχιμήδης ἐχρησιμοποίησεν ἀρχικὰ παρατηρήσεις ἀπὸ τὴν Μηχανικήν.

Ὡς πρὸς τὴν ἔκδοσιν τώρα τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς: Δὲν εἶναι γνωστὸν ἄν, κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, εἶχον ταῦτα δοθῆ εἰς δημοσιότητα εἰς τὸ σύνολόν των. Ἡ πρώτη συλλογικὴ ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους μνημονεύεται ὡς γενομένη, τὸν ἕκτον αἰῶνα, ὑπὸ τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ ἀρχιτέκτονος τοῦ ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας. Δυστυχῶς, τῆς ἐκδόσεως αὐτῆς οὐδὲν χειρόγραφον περιεσώθη. Νέα περισυλλογὴ καὶ ἔκδοσις τῶν ἔργων ἔγινε περὶ τὸ 830 μ.Χ. ἀπὸ τὸν μαθηματικῆς κατευθύνσεως φιλόσοφον Λέοντα. Εἶναι ὁ πρῶτος χρησιμοποιήσας τὴν διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου συμβολικὴν παράστασιν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων, παράστασιν τὴν ὁποίαν, μετὰ πάροδον 750 ἐτῶν, ἐπανευρίσκομεν εἰς τὸν Γάλλον νομικὸν καὶ μαθηματικὸν Franois Viéte (1540 - 1603).

Ἀριθμὸς ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐκ τῆς ἐκδόσεως τοῦ Λέοντος, ἔφθασεν εἰς τὴν Ἰταλίαν διὰ τῶν Σταυροφόρων καὶ ἀπὸ ἐκεῖ εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς γερμανικῆς πόλεως Nuerenberg, ὅπου καὶ σήμερον εὑρίσκονται ταῦτα. Ἐπίσης, περὶ τὸ τέλος τοῦ ἐνάτου αἰῶνος ἐμφανίζεται ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν ἀραβικήν, ὑπὸ Ἀράβων μεταφραστῶν.

Ὑπὸ τοῦ Φλαμανδοῦ Wilhelm Van Moerbeke, διατελέσαντος μητροπολίτου Κορίνθου ἐπὶ Φραγκοκρατίας, μετεφράσθησαν περὶ τὸ 1270 εἰς τὴν Λατινικὴν ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἰς τὸν ἀξιόλογον αὐτὸν μεταφραστὴν ὀφείλεται ὅτι τὸ ἔργον ὑδροστατικῆς τοῦ Ἀρχιμήδους «περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ τῶν ὀχουμένων» ἦτο ἤδη κατὰ τὸν Μεσαίωνα γνωστόν. Ἀξιοσημείωτον εἶναι, ὅτι συγγράμματα γνωστῶν μεταγενεστέρων μαθηματικῶν δὲν εἶναι τί ἄλλο εἰμὴ ἁπλαῖ παραλλαγαὶ ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, κατὰ τὰς μεταφράσεις Moerbeke, σωζομένας σήμερον εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς πόλεως Viterbo.

Λατινικὴ μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους ἔγινεν ἐπίσης, περὶ τὸ 1450, εἰς Ἰταλίαν ὑπό τινος Ἰακώβου ἀπὸ τὴν Cremona ἀκολούθως δὲ ὑπὸ τοῦ Regiomontanus (1436 - 1476). Ἔκδοσις τοῦ ἑλληνικοῦ κειμένου μὲ λατινικὴν μετάφρασιν ἔγινεν εἰς τὴν Βασιλείαν τῆς Ἑλβετίας, τὸ 1544, ὑπὸ τοῦ Gechauff.

Κατὰ τὰ ἔτη 1880 - 1881, ὁ καθηγητὴς τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς γλώσσης εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Κοπεγχάγης I. L. Heiberg, περὶ τοῦ ὁποίου ἤδη καὶ ἀνωτέρω ἔγινε λόγος, ἐξέδωκε, μὲ πολλὰς διορθώσεις ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως Gechauff, τὸ ἀρχαῖον κείμενον μὲ λατινικὴν μετάφρασιν εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον B. G. Teubner τῆς Λειψίας. Ὁ ἴδιος συγγραφεὺς ἐξέδωκεν εἰς Λειψίαν κατὰ τὰ ἔτη 1910, 1912, 1915, εἰς τρεῖς τόμους τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους συμπληρωμένα μὲ τὰ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν ἀνευρεθέντα νέα χειρόγραφα. Ἡ ἔκδοσις περιέχει ἀρχαῖον κείμενον μὲ λατινικὴν μετάφρασιν, ἔγινεν δὲ ὡσαύτως εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον Teubner.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς δευτέρας αὐτῆς ἐκδόσεως τοῦ Heiberg, ὁ κ. Εὐάγγελος Σταμάτης ἐκδίδει, εἰς τρεῖς τόμους, τὰ «Ἅπαντα τοῦ Ἀρχιμήδους», τῶν ὁποίων ὁ σήμερον παρουσιαζόμενος πρῶτος τόμος ἐξ 960 σελίδων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος περιλαμβάνονται αἱ μαρτυρίαι περὶ Ἀρχιμήδους τῶν μεταγενεστέρων αὐτοῦ Ἑλλήνων καὶ Λατίνων συγγραφέων, ἀπὸ τοῦ πρώτου π.Χ. αἰῶνος μέχρι τοῦ 1350 μ Χ. Τὸ πλῆθος τῶν μαρτυριῶν ἀνέρχεται εἰς 273, δημοσιεύονται δὲ αὗται τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη, ἀποτελοῦσαι σημαντικὴν συμβολὴν διὰ τὴν κατανόησιν τῶν μαθηματικῶν, μηχανικῶν καὶ λοιπῶν φυσικῶν ἐπινοήσεων τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἀπὸ τὴν σχετικὴν ἔρευναν τοῦ κ. Σταμάτη, μνημονευομένην εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ πρώτου μέρους, πληροφορούμεθα, διὰ πρώτην φοράν, ὅτι τὰ περισωθέντα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους ἀνέρχονται εἰς δέκα καὶ ἕξ. Τούτων τὰ 12 περιέχονται εἰς τὴν ἔκδοσιν Heiberg τῶν ἐτῶν 1910 - 1915. Ἐκ τῶν ὑπολοίπων τεσσάρων, τὸ πρῶτον, «Κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένου κανονικοῦ ἑπταγώνου» σώζεται εἰς τὴν Ἀραβικὴν μετεφράσθη δὲ εἰς τὴν Γερμανικὴν ὑπὸ τοῦ Carl Schoy, περιληφθὲν εἰς τὸ βιβλίον του «Die Trigonometrischen lehren des Persischen Astronomen al Biruni» καὶ ἐκδοθὲν ὑπὸ τῶν Julius Raska καὶ Heinrich Wiel Eitner τὸ 1927 εἰς Ἀννόβερον. Μετάφρασιν τούτου εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ἐδημοσίευσεν ὁ κ. Σταμάτης εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρίας. Τὸ δεύτερον ἔργον «Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους» σώζεται ἐπίσης εἰς τὴν Ἀραβικὴν μετεφράσθη, δὲ εἰς τὴν Γερμανικὴν ὑπὸ τῶν E. Wiedemann καὶ F. Hauser καὶ ἐξεδόθη ὑπὸ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν τῆς πόλεως Halle / Saale, τὸ 1918. Τὸ τρίτον «Περὶ κύκλων ἐφαπτομένων ἀλλήλων» σώζεται εἰς τὴν Ἀραβικὴν καὶ εἶναι ἀνέκδοτον. Τέλος τὸ τέταρτον ἔργον «Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας - Ἁπλᾶ Γεωμετρικὰ Θεωρήματα» σώζεται ὁμοίως εἰς τὴν Ἀραβικὴν καὶ εἶναι ὡσαύτως ἀνέκδοτον. Τὰ δύο τελευταῖα ἔργα θέλουν δημοσιευθῆ τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη εἰς τὸν τρίτον τόμον τῆς παρούσης ἐκδόσεως.

Ἐξ ἄλλου, τὰ χειρόγραφα τῶν δύο τελευταίων τούτων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρίσκονται εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς ἰνδικῆς πόλεως Patna. Περὶ τῆς ὑπάρξεως αὐτῶν, ὁ κ. Σταμάτης ἔλαβε γνῶσιν μέσῳ τοῦ ἐν Μονάχῳ δικηγόρου καὶ ἐρασιτέχνου τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν, Heinrich Hermelink. Ἀπὸ τὴν πληροφορίαν αὐτὴν ὁρμώμενος ὁ κ. Σταμάτης ἐζήτησε, διὰ τοῦ ἡμετέρου Ὑπουργείου τῶν Ἐξωτερικῶν, ὅπως διὰ τῆς εἰς Νέον Δελχὶ Ἑλληνικῆς Πρεσβείας γίνῃ ἔρευνα εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Patna πρὸς ἀνεύρεσιν καὶ ἄλλων τυχὸν εὑρισκομένων ἐκεῖ ἀνεκδότων ἑλληνικῶν ἔργων. Ἡ σχετικὴ ἔρευνα ἀπέδωκεν εὐχάριστα ἀποτελέσματα διότι, ἐκτὸς τῶν δύο ἀνωτέρω μνημονευομένων ἀνεκδότων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀνευρέθησαν καὶ ἄλλα 39 ἀνέκδοτα ἔργα ἀστρονομικοῦ καὶ μαθηματικοῦ περιεχομένου διαφόρων συγγραφέων, συντεταγμένα εἰς τὴν Ἀραβικήν, ἓν τῶν ὁποίων εἶναι τοῦ μαθηματικοῦ Μενελάου.

Φωτοτυπίας τῶν ἔργων αὐτῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἔκτασις ἀνέρχεται εἰς 600 περίπου σελίδας, ὁ κ. Σταμάτης ἔλαβε μέσῳ τῆς ἐν Δελχὶ Ἑλληνικῆς Πρεσβείας, ἰδίαις αὐτοῦ δαπάναις. Ἐκ περαιτέρω ἐρεύνης διεπίστωσεν ὁ ἴδιος, ὡς ἰσχυρίζεται, ἐξ ἑλληνικῶν καὶ ἀραβικῶν πηγῶν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους πρέπει νὰ ἀνέρχεται εἰς εἴκοσι καὶ πέντε.

Αἱ εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ πρώτου τόμου τοῦ παρουσιαζομένου σήμερον βιβλίου, μαρτυρίαι, κατέχουν ἔκτασιν 253 σελίδων. Ἐν συνεχείᾳ ἐκτίθενται, εἰς εἰδικὰ κεφάλαια, αἱ μαρτυρίαι ἐν περιλήψει, κατὰ συγγραφεῖς καὶ κατ᾽ εἶδος. Ἕπεται χρονολογικὸς πίναξ τῶν συγγραφέων, ἐξ ὧν ἐλήφθησαν αἱ μαρτυρίαι, καὶ ἡ συναφὴς πρὸς τὸν Ἀρχιμήδην βιβλιογραφία ἀπὸ τοῦ 1500 μέχρι καὶ τοῦ 1968, περιλαμβάνουσα ὑπὲρ τοὺς 700 τίτλους, τὸ πλεῖστον τῶν ὁποίων ὁ κ. Σταμάτης ἔλαβεν ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων. Εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἐκτίθενται ὅλαι αἱ σωζόμεναι εἰκόνες τοῦ Ἀρχιμήδους, μερικαὶ τῶν ὁποίων ἀνάγονται εἰς τὸν πρῶτον μ.Χ. αἰῶνα, ἄλλαι δέ, εἰς τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως. Ὡς ἐπίμετρον παρατίθενται σχέδια τινὰ μηχανικῶν κατασκευῶν τοῦ Ἀρχιμήδους μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ ὑ δ ρ ό μ ε τ ρ ο ν, ἀνάλογον τῶν σημερινῶν ταξιμέτρων καὶ τὸ πρῶτον δι' ἀ τ μ ο ῦ τ η λ ε β ό λ ο ν.

Εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ πρώτου τόμου ἐκτίθενται αἱ διορθώσεις τοῦ κειμένου καὶ ἡ ἀνακατασκευὴ τῶν ἀπολεσθεισῶν ἐκφωνήσεων θεωρημάτων τινῶν. Ἡ εὔστοχος αὐτὴ ἀνακατασκευὴ ἀνεγνωρίσθη διεθνῶς, περιληφθεῖσα εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, τὴν γενομένην ὑπὸ τοῦ Γάλλου καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Στρασβούργου Charles Muger καὶ εἰς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον Budé (1970).

Περαίνοντες πρέπει νὰ τονίσωμεν τὴν μεγάλην σημασίαν τοῦ ὑπὸ τοῦ κ. Σταμάτη ἀναληφθέντος ἔργου τῆς ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἡ κατὰ τὰς ἀκαμάτους αὐτοῦ προσπαθείας, μεταξὺ ἄλλων, προσφυγὴ εἰς βιβλιοθήκας τῆς Ἐγγὺς Ἀνατολῆς καὶ τῶν Ἰνδιῶν, ἀπεκάλυψε τὴν ὕπαρξιν ἱκανοῦ ἀριθμοῦ χειρογράφων περιλαμβανόντων ἀραβικὰς μεταφράσεις ἔργων Ἑλλήνων συγγραφέων. Τῶν συγγραφέων αὐτῶν τὰ ὀνόματα δὲν ἀναγράφονται συνήθως εἰς τοὺς τίτλους, παρὰ μόνον τῶν Ἀράβων μεταφραστῶν, ἐνῷ ἡ πατρότης τῶν μεταφράσεων αὐτῶν καταφαίνεται μόνον ἀπὸ τὸ κείμενον. Τὰ πλεῖστα τῶν χειρογράφων αὐτῶν δὲν ἔχουν κἂν καταχωρισθῆ ἀκόμη εἰς καταλόγους, εἰς τρόπον, ὥστε εἶναι ἀδύνατον εἰσέτι νὰ εἰκάσῃ κανεὶς τὸ μέγεθος τοῦ εἰς αὐτὰ κρυπτομένου θησαυροῦ. Ὡς ἤδη ἀνεφέραμεν, ἡ εἰς τὰ ἐν λόγῳ χειρόγραφα σχετικὴ ἔρευνα τοῦ κ. Σταμάτη διὰ τὴν ἀνεύρεσιν καὶ ἄλλων ἀνεκδότων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀπέδωκε θετικὰ ἀποτελέσματα.

Εἶναι, νομίζομεν, ἀξία κάθε ἐξάρσεως ἡ συμβολὴ τοῦ κ. Σταμάτη διὰ τὴν ἀναβίωσιν μεγαλυτέρου μέρους τοῦ ἔργου μιᾶς τῶν πλέον ἐξεχουσῶν ἡρωικῶν μορφῶν τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ὄχι μόνον μεταξὺ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν ὅλων τῶν αἰώνων».

★

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1962: ΤΟΜΟΣ 37ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1962

Ἐκ τῶν ὑπὸ τὴν διεύθυνσιν καὶ καθοδήγησιν τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἀν. **Ὀρλάνδου** τελούντων δύο συνεργείων: *Συντάξεως Λεξικοῦ τῶν ἀρχαίων ἀρχιτεκτονικῶν ὅρων* καὶ *Βιβλιογραφίας τῶν Μονῶν τῆς Ἑλλάδος*, τὸ μὲν πρῶτον ἐπεράτωσε τὴν ἐπεξεργασίαν τοῦ στοιχείου Α, ὅπερ θέλει ἀποσταλῆ συντόμως πρὸς ἐκτύπωσιν, τὸ δὲ δεύτερον συνέχισε τὴν ἀποδελτίωσιν κειμένων συγκεντρῶσαν μέχρι τοῦδε περὶ τὰς 5.000 δελτίων.

Πλὴν τοῦ καθαρῶς ἐπιστημονικοῦ αὐτῆς ἔργου ἡ Ἀκαδημία ἐνισχύουσα πᾶσαν προσπάθειαν πρὸς προαγωγὴν τῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς τέχνης ἀπονέμει καὶ ἐφέτος τὰς ἑξῆς τιμητικὰς διακρίσεις:

Α'. Μετὰ γνώμην τῆς *Τάξεως τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν* καὶ ἀπόφασιν τῆς *Ὁλομελείας* ἀπονέμεται:

Ἔπαινος εἰς τὸν καθηγητὴν κ. **Εὐάγγελον Σταμάτην** διὰ τὸ μέχρι τοῦδε συγγραφικὸν καὶ μεταφραστικὸν ἔργον αὐτοῦ εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας. Ὁ κ. Σταμάτης εἰς τὴν μακρὰν καὶ εὐδόκιμον αὐτοῦ ὑπηρεσίαν παρὰ τῇ δημοσίᾳ μέσῃ Ἐκπαιδεύσει προσέθεσε μεταπολεμικῶς τὸ ὡραῖον ἔργον τῆς μεταφράσεως καὶ σπουδῆς τῶν μεγάλων Ἑλλήνων μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος.

Εἰς τὸ ὀγκῶδες μεταφραστικὸν ἔργον τοῦ κ. Σταμάτη πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ ἡ πρωτότυπος συμβολὴ αὐτοῦ εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἱστορίας τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν.

Ἔπαινος ἀπονέμεται εἰς τὸν ἔκτακτον καθηγητὴν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. **Τρύφωνα Ἀνδριανάκον** διὰ τὴν μακροχρόνιον καὶ ἀνιδιοτελῆ ἐν τῇ ἰατρικῇ ἐπιστήμῃ διακονίαν αὐτοῦ, διδάξαντος καὶ συγγράψαντος ἀξιόλογα ἰατρικὰ ἔργα.

Ἔπαινος ἀπονέμεται εἰς τὸ ἐν Θεσσαλονίκῃ ἀπὸ ἔτους 1924 ἐκδιδόμενον μηνιαῖον περιοδικόν, ὑπὸ τὸν τίτλον «**Ἑλληνικὴ Ἰατρική**», ὅπερ, λόγῳ τοῦ καθαρῶς ἐπιστημονικοῦ χαρακτῆρος αὐτοῦ, ἀνταποκρίνεται πλήρως πρὸς τὰς ἀνάγκας τῆς ἑλληνικῆς πραγματικότητος καὶ συμβάλλει εἰς τὴν πρόοδον τῆς παρ' ἡμῖν ἰατρικῆς ἐπιστήμης.

Β'. Μετὰ γνώμην τῆς *Τάξεως τῶν Γραμμάτων καὶ Καλῶν Τεχνῶν* καὶ ἀπόφασιν τῆς *Ὁλομελείας* ἀπονέμεται:

Ἔπαινος μετὰ χρηματικοῦ ἐπάθλου δρχ. 20.000, εἰς τὸν κ. **Κωνσταντῖνον Κονόμον** διὰ τὸ καθόλου συγγραφικὸν αὐτοῦ ἔργον, τὸ ἀφιερωμένον εἰς τὴν δημοσίευσιν σπουδαίων ἀνεκδότων ἑπτανησιακῶν χειρογράφων καὶ ἄλλων κειμένων, σχετικῶν πρὸς τὸν ἀπελευθερωτικὸν ἀγῶνα,

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

ΤΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΤΟΣ 1970: ΤΟΜΟΣ 45ος

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΓΡΑΦΕΙΟΝ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ
1971

προσδιορισμοῦ μοριακοῦ βάρους καὶ ὑδρογονάνθρακες εἰς κατάστασιν ἀνωτέρας ἐνεργειακῆς στάθμης, συνέβαλε κατ᾽ ἀξιόλογον βαθμὸν εἰς τὸν κύκλον τῶν Φυσικοχημικῶν Ἐρευνῶν.

δ) *Βραβεῖον* τῶν Ἰατρικῶν Ἐπιστημῶν εἰς τὸν Ὑφηγητὴν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. **Ἱπποκράτην Γιατζίδην,** διότι διὰ σοβαρῶν ἐπιστημονικῶν ἐκδόσεων καὶ ἐρευνῶν του εἰς τὸν τομέα τῆς παθολογίας, ὡς λ.χ. ἡ χρησιμοποίησις κοκκώδους ἄνθρακος εἰς τὸν τεχνητὸν νεφρὸν πρὸς δέσμευσιν τῶν οὐραιμικῶν οὐσιῶν καὶ θεραπείαν τῆς νεφρικῆς ἀνεπαρκείας, προήγαγε μεγάλως τὴν ἐπιστήμην καὶ προσήνεγκεν ὑπηρεσίας εἰς τὸν ἄνθρωπον καὶ

ε) *Βραβεῖον* τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν εἰς τὸν κ. **Εὐάγγελον Σταμάτην,** διὰ τὴν συμβολὴν αὐτοῦ εἰς τὴν προαγωγὴν τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν δι᾽ ἔργου ἐκτιμηθέντος τόσον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὅσον καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικόν. Τὸ κύριον ἔργον τοῦ κ. Σταμάτη, διὰ τὸ ὁποῖον καὶ τοῦ ἀπονέμεται τὸ βραβεῖον, ἀποτελοῦν αἱ ἐκδόσεις ὑπ᾽ αὐτοῦ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων Μαθηματικῶν καὶ συγκεκριμένως τὰ *«Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου»*, *«Τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου»* καὶ τὰ *«Ἅπαντα τοῦ Ἀρχιμήδους»*. Αἱ ἐκδόσεις αὗται εἶναι ἔργον πολυετοῦς καὶ ἀκαμάτου ἐρεύνης τῶν ἀρχαίων κειμένων. Ἂς σημειωθῇ ὅτι τὰ *«Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου»* ἐξεδόθησαν ἀπὸ τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον Teubner.

3) Τὸ *Βραβεῖον Θεοδώρου Ἀρεταίου,* ἐκ δραχμῶν 25.000, ἀπονέμεται εἰς τὸν διδάκτορα τῆς κτηνιατρικῆς κ. **Παντελῆν Δραγώναν,** ὅστις διεξεδίκησε τὸ βραβεῖον τοῦτο δι᾽ ἐργασίας του ἀναφερομένης εἰς τὰς μεθόδους καταπολεμήσεως τῆς λύσσης, ὑποβληθείσης ἀνωνύμως εἰς τὴν Ἀκαδημίαν ὑπὸ τὴν ἔνδειξιν: «Morbos non eloquentia sed remediis curari». Ὁ συγγραφεὺς τῆς ἐργασίας ταύτης ἠσχολήθη κατὰ τρόπον ἐμπεριστατωμένον μὲ τὸ πρόβλημα τῆς λύσσης ἐν Ἑλλάδι καὶ παραθέτει στατιστικὰ στοιχεῖα σχετικὰ μὲ τὴν συχνότητα τῆς νόσου, ὡς καὶ τὰ ἐν ἰσχύι νομοθετικὰ μέτρα διὰ τὴν πρόληψιν ταύτην εἰς τὴν χώραν μας.

Μετὰ γνώμην τῆς *Τάξεως τῶν Γραμμάτων καὶ τῶν*