ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ
ΕΝ ΤΗ͂ ΣΧΟΛΗ͂ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

Μητρός τε καὶ πατρὸς καὶ τῶν ἄλλων προγόνων ἁπάντων τιμιώτερόν ἐστιν ἡ πατρὶς καὶ σεμνότερον καὶ ἁγιώτερον καὶ ἐν μείζονι μοίρᾳ καὶ παρὰ θεοῖς καὶ παρ' ἀνθρώποις τοῖς νοῦν ἔχουσιν.

Σωκράτης, (Πλάτωνος Κρίτων)

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ ΚΑΙ ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
1956

Εἰς τὸν φίλτατον Διευθυντὴν Ἀγροτικῆς Ἑταιρείας Ἀξιότιμον Κύριον
Διονύσιον Παπαρούσην
μὲ πολλὴν ἀγάπην ἀντίχαριν.
Σταμάτης
Ἀθ. 7. 11. 56.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ
ΕΝ Τῌ ΣΧΟΛῌ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

Μητρός τε καὶ πατρὸς καὶ τῶν ἄλλων προγόνων ἁπάντων τιμιώτερόν ἐστιν ἡ πατρὶς καὶ σεμνότερον καὶ ἁγιώτερον καὶ ἐν μείζονι μοίρᾳ καὶ παρὰ θεοῖς καὶ παρ' ἀνθρώποις τοῖς νοῦν ἔχουσιν.

Σωκράτης, (Πλάτωνος Κρίτων)

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΙΔΕΡΗ ΚΑΙ ΣΙΑΣ
ΟΔΟΣ ΒΕΡΑΝΖΕΡΟΥ 24
1956

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΟΝ ΙΔΡΥΤΗΝ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΩΣΕΩΣ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

ΣΤΡΑΤΗΓΟΝ

ΣΟΛΩΝΑ ΓΚΙΚΑΝ

ΠΡΩΙΗΝ ΑΡΧΗΓΟΝ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΕΠΙΤΕΛΕΙΟΥ ΣΤΡΑΤΟΥ

῞Οπου γὰρ ἄνδρες θεοὺς μὲν σέβοιντο, τὰ δὲ πολεμικὰ ἀσκοῖεν, πειθαρχεῖν δὲ μελετῷεν, πῶς οὐκ εἰκὸς ἐνταῦθα πάντα μεστὰ ἐλπίδων ἀγαθῶν εἶναι;

Ξενοφῶντ. ῾Ελλην. III, iv. 18

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

῾Η παροῦσα μικρὰ πραγματεία εἶναι περίληψις παραδόσεων, αἵτινες ἐγένοντο ὑπ᾽ ἐμοῦ κατὰ Μάιον 1956 ἐν τῇ Σχολῇ Γενικῆς Μορφώσεως ᾿Ανωτέρων ᾿Αξιωματικῶν τοῦ Γενικοῦ ᾿Επιτελείου Στρατοῦ.

Εἰσαγωγικῶς ἀναφέρεται ἡ συμβολὴ τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν καὶ ἀκολουθεῖ δι᾽ ὀλίγων ἡ ἔκθεσις τῆς συμβολῆς τῶν ῾Ελλήνων, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ δημιουργοὶ καὶ οἱ θεμελιωταὶ τῶν ἐπιστημῶν. ᾿Εν παραρτήματι παρατίθενται εἰκόνες τινὲς ἑλληνικῶν καὶ νεωτέρων γλυπτῶν πρὸς σύγκρισιν, κατάλογος τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Δημοκρίτου καὶ κατάλογος τῶν σπουδαιοτέρων ῾Ελλήνων ἐπιστημόνων τῆς ἀρχαιότητος.

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Σελὶς 20, στίχος 1, ἀντὶ 28 : 4=2 νὰ γραφῇ 28 : 14=2 καὶ τὸ 28 : 2=7 νὰ παραλειφθῇ.

ΠΡΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ὡς ἀρχαιότεραι κοιτίδες πολιτισμοῦ θεωροῦνται ὑπὸ πλείστων ἡ Κίνα, αἱ Ἰνδίαι, ἡ Μεσοποταμία καὶ ἡ Αἴγυπτος. Εἰς ποίαν ἐκ τῶν χωρῶν τούτων ἀνεπτύχθη ὁ πολιτισμὸς τὸ πρῶτον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ. Πιστεύεται ὅμως ὅτι τὰ πρῶτα στοιχεῖα τοῦ πολιτισμοῦ ἀνεπτύχθησαν εἰς τὰς χώρας ταύτας συγχρόνως. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν αἱ ἀρχαιότεραι πηγαί, τὰς ὁποίας ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν, εἶναι αἱ πρὸ ὀλίγων δεκαετηρίδων εὑρεθεῖσαι ἐν Μεσοποταμίᾳ, κατόπιν ἀνασκαφῶν, ἐνεπίγραφοι πλάκες. Κατὰ τοὺς μελετητὰς τῆς παλαιοτάτης ταύτης πολιτιστικῆς περιόδου τῆς ἀνθρωπότητος αἱ πλάκες αὗται ἐχαράχθησαν περὶ τὸ 2.000 π. Χ. Τὸ περιεχόμενον ὅμως αὐτῶν δὲν λογίζεται δημιούργημα τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ἀλλὰ πολὺ παλαιοτέρας, ἀναγομένης κατὰ τοὺς αὐτοὺς μελετητὰς εἰς τὴν τετάρτην χιλιετηρίδα π.Χ.

ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

Ὁ λαὸς ὅστις κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην κατῴκει τὴν περὶ τοὺς ποταμοὺς Τίγρητα καὶ Εὐφράτην περιοχὴν φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα Σουμέριοι. Οἱ Σουμέριοι δὲν θεωροῦνται ἀρίας ἢ σημιτικῆς καταγωγῆς, ἀλλὰ πιθανῶς μογγολικῆς. Αἱ πρόοδοι, τὰς ὁποίας οὗτοι ἐπέτυχον εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ τὴν ἀστρονομίαν, λογίζονται ἴσαι ἢ ἀνώτεραι τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχὴν ἐπιτευχθεισῶν ὑπὸ τῶν Αἰγυπτίων εἰς τοὺς αὐτοὺς ἐπιστημονικοὺς κλάδους προόδων. Ὑποστηρίζεται ὅτι κατὰ τὸ 2.000 π. Χ. οἱ Σουμέριοι ὑποστάντες ἐπίθεσιν λαῶν σημιτικῆς καταγωγῆς (πιθανῶς Φοινίκων ἢ Ἑβραίων) ἀπώλεσαν τὴν ἐλευθερίαν των. Ἐκ τῆς ἐπελθούσης ὅμως ἐπιμειξίας ἐσυνεχίσθη ἡ ἄνθησις τῶν μαθηματικῶν καὶ τῆς ἀστρονομίας.

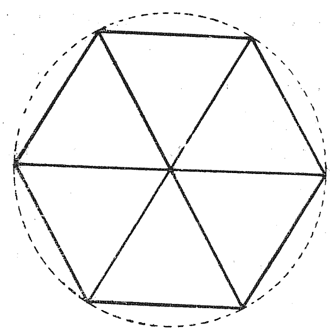
Ἡ εἰς τὰς ἐν τῇ Μεσοποταμίᾳ χώρᾳ εὑρεθείσας πλάκας χρησιμοποιουμένη γραφὴ εἶναι ἡ καλουμένη σφηνοειδὴς γραφή. Ἡ ἀποκρυπτογράφησις καὶ ἀνάγνωσις αὐτῆς δὲν εἶναι εὐχερής. Ἔχει ὅμως ἐν προκειμένῳ σημειωθῇ ἀρκετὴ πρόοδος, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ εἰκάσωμεν μετὰ βεβαιότητός τινος τὸ περιεχόμενον τῶν πλακῶν τούτων. Ὁ ἀριθμὸς τῶν εὑρεθεισῶν πλακῶν ἀνέρχεται εἰς χιλιάδας τινάς. Αἱ μαθηματικοῦ ὅμως περιεχομένου πλάκες φθάνουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν διακοσίων περίπου. Αὗται δὲν ἀποτελοῦσι συστηματικὸν ἐγχειρίδιον μαθηματικῶν, ἀλλὰ περιέχουσι ποικίλα προβλήματα, ἐκ τῆς ἀποκρυπτογραφήσεως τῶν ὁποίων συνάγονται τὰ συναφῆ συμπεράσματα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἀρχαίων λαῶν τῆς Μεσοποταμίας. Εἰς τοὺς λαοὺς τούτους περιλαμβάνονται οἱ Σουμέριοι, οἱ Χαλδαῖοι, οἱ Χεττῖται, οἱ Ἀσσύριοι, οἱ Φοίνικες. Τούτους συνήθως καλοῦσι διὰ τοῦ περιληπτικοῦ ὀνόματος Βαβυλώνιοι. Ἐνταῦθα ἀξίζει νὰ μνημονεύσωμεν τοῦ διακεκριμένου Δανοῦ μαθηματικοῦ κ. Neugebauer, ὅστις ἔχει ἀφιερώσει δεκαετηρίδας ὁλοκλήρους τῆς ζωῆς του εἰς τὴν ἔρευναν τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων. Τὰ πρῶτα πορίσματα τῶν ἐρευνῶν του ἔχει συγκεντρώσει οὗτος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ τὸ φέρον τὸν τίτλον «Προελληνικὰ Μαθηματικὰ» (1). Ὁ κ. Neugebauer συνεχίζει τὰς συναφεῖς ἐρεύνας του ἀπὸ δεκαπενταετίας καὶ πλέον ἐν τῷ Ἱδρύματι Προκεχωρημένων Σπουδῶν τοῦ Princeton N. J. τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν τῆς Ἀμερικῆς. Ὁ ἀκάματος οὗτος ἐργάτης τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης εἶναι λίαν ἀντικειμενικὸς εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἐκ τῶν ἐρευνῶν του συναγομένων πορισμάτων. Εἴς τινα ὅμως σημεῖα τούτων εἶναι, κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, ὑπερβολικός. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι κυρίως τρία. Πρῶτον, ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ἐγνώριζον τὸ πυθαγόρειον θεώρημα (καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ εὑρέσεως τούτου δὲν ἀνήκει εἰς τὸν Πυθαγόραν). Δεύτερον, ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι ἐγνώριζον ὡρισμένον τρόπον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, κατά τινα προσέγγισιν (καὶ συνεπῶς ἡ μέθοδος αὕτη δὲν ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἕλληνας). Τρίτον, ὅτι ἡ ἐπινόησις τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ εἰς τὰ μαθηματικὰ δὲν ἀνήκει εἰς τοὺς Ἕλληνας, ἀλλ' ἀνήκει εἰς τοὺς Βαβυλωνίους. Ἐπὶ τοῦ τρίτου τούτου σημείου γράφει ὁ κ. Neugebauer ἐν τῷ ἀνωτέρω μνημονευθέντι βιβλίῳ του τὰ ἑξῆς: «Συνηθίζουσί τινες νὰ βλέπωσιν ὡς μίαν τῶν ἀποφασιστικῶν διαφορῶν μεταξὺ τῶν Προελληνικῶν καὶ τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν τὴν ἐμφάνισιν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικὰ τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ. Τὰ πράγματα ταῦτα ὅμως ἔχασαν τὴν ἀξίαν των, ἀφ' ἧς γνωρίζομεν τὴν ὕπαρξιν μιᾶς λίαν ἀνεπτυγμένης Βαβυλωνιακῆς Ἀλγέβρας. Ἐάν τις προβάλῃ τοιαῦτα ἐρωτήματα, ὡς τὸ τῆς ἐμφανίσεως τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ εἰς τὰ ἀρχαῖα μαθηματικά, πρέπει προηγουμένως νὰ ἔχῃ καθορίσει τί ἐννοεῖ διὰ τῆς λέξεως ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Νομίζω, ὅτι εἰς ἱστορικὰ ζητήματα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ νοεῖ τις ὅτι δύναται ὡρισμένα μαθηματικὰ συμπεράσματα νὰ συναγάγῃ διὰ συνεχῶν συλλογισμῶν ἐξ ἄλλων μαθηματικῶν συμπερασμάτων, χωρὶς τὰ τελευταῖα ταῦτα συμπεράσματα νὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι ἢ νὰ θεωρῶνται καθ' οἱονδήποτε τρόπον ὡς ἀρχικὰ (σημ. συγγρ. χωρὶς δηλ. νὰ ἔχῃ τις ἀνάγκην τῶν ἀξιωμάτων). Τὴν ὕπαρξιν μιᾶς τοιαύτης διαδικασίας ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ πρέπει ν' ἀποδώσῃ τις ἀναμφισβητήτως εἰς τὴν Ἄλγεβραν τῶν Βαβυλωνίων». Οἱ συλλογισμοὶ οὗτοι τοῦ κ. Neugebauer φρονοῦμεν, ὅτι δὲν εἶναι ὀρθοί. Διότι οὗτος συνάγει τὰ συμπεράσματά του ἐξ εἰκασιῶν καὶ οὐχὶ ἐξ ἀποδείξεων. Μία ἐκ τῶν ἀποδείξεων ὅτι τὰ μαθηματικὰ τῆς βαβυλωνιακῆς ἐποχῆς δὲν δύνανται ν' ἀτενίσωσι τὸ γιγαντιαῖον οἰκοδόμημα τῆς δημιουργίας τῆς καθ' ὅλου μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀποκλειστικῶς ὑπὸ τοῦ Ἑλληνικοῦ καὶ μόνου πνεύματος εἶναι ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι διὰ νὰ ἐκφράσωσι τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐχρησιμοποίουν τὸν ἀριθμὸν 3, ἐνῷ οἱ σύγχρονοί των Ἰνδοὶ καὶ Αἰγύπτιοι ἐχρησιμοποίουν τὸν ἀκριβέ-

1) Vorgriechische Mathematik, Springer Verlag, Berlin, 1934.

στερον ἀριθμὸν 3,16. (Τὸν ἀριθμὸν 3,16 ἐχρησιμοποίουν καὶ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅστις ἀπέδειξε διὰ πρώτην φορὰν ὅτι ἡ καλυτέρα προσέγγισις εἶναι 3,14).

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡ σημερινὴ πεπολιτισμένη ἀνθρωπότης διατηρεῖ ἐκ τῶν μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τῶν Βαβυλωνίων εἶναι ἡ διαίρεσις τοῦ κύκλου εἰς 360 μοίρας καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 24 ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλοῦμεν ὥραν. Πῶς ἀκριβῶς οἱ Βαβυλώνιοι κατέληξαν εἰς τὰς τοιαύτας διαιρέσεις δὲν εἶναι γνωστόν. Ἔκ τινων ὅμως ἐνδείξεων ὑποστηρίζεται ὅτι οὗτοι θὰ ἔφθασαν εἰς τὰς διαιρέσεις ταύτας ὡς ἑξῆς :

Διὰ τριῶν ἴσων ξυλίνων τεμαχίων εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τοιαύτη κατασκευὴ δὲν ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρας γεωμετρικὰς γνώσεις. Ἓξ τοιαῦτα ἰσόπλευρα τρίγωνα τιθέμενα τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο, καλύπτουσιν ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον (π. χ. τοῦ χάρτου ἔνθα τώρα ἀναγιγνώσκομεν), καὶ δὲν ὑπάρχει θέσις δι' ἄλλο τρίγωνον. Αἱ περὶ τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπαφῆς τῶν 6 τριγώνων ἴσαι γωνίαι ἀνέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν 6. Ὅθεν ἡ πρώτη διαίρεσις τοῦ κύκλου (σχ. 1) ἔγινεν εἰς 6 ἴσα μέρη. Ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων, ἐπειδὴ ἦτο μέγα, διηρέθη εἰς 60 ἴσα μέρη, διότι οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον τὸ ἑξηκονταδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως (γινόμενον τῶν 10 δακτύλων ἐπὶ τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν 6). Κατὰ συνέπειαν ὁ ὅλος κύκλος διαιρεῖται εἰς 6×60 ἴσα μέρη ἤτοι 360 μοίρας. Κατ' ἀντιστοιχίαν ἐγένετο ἡ διαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 6 ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Ἡ τοιαύτη ὅμως διαίρεσις δὲν ἔσχε πρακτικὴν ἐφαρμογὴν καὶ ἐγένετο ἡ διαίρεσις τοῦ ἡμερονυκτίου εἰς 12 ἴσα μέρη. Ἀλλὰ καὶ ἕκαστον τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων ἦτο μέγα. Ὅθεν ἀπεφασίσθη νὰ διαιρεθῇ ἡ ἡμέρα εἰς 12 ἴσα μέρη καὶ ἡ νὺξ εἰς ἄλλα 12 ἴσα μέρη, ἀσχέτως πρὸς τὴν μὴ σταθερὰν τιμὴν αὐτῶν, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους. Ἡ διαίρεσις τῆς ὥρας εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἑκάστου πρώτου λεπτοῦ εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ εἶναι ἐπίσης βαβυλωνιακῆς προελεύσεως. Τὴν βαβυλωνιακὴν διαίρεσιν 12 δὲν διατηροῦμεν μόνον εἰς τὰ ὡρολόγιά μας. Εἰς τὴν ἀστρονομίαν ἡ διαίρεσις τοῦ ἔτους εἰς 12 μῆνας εἶναι ἐπίσης βαβυλωνιακῆς προελεύσεως. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς γαλλικῆς ἐπαναστάσεως ἐπεχειρήθη, ἡ ἀντικατάστασις τῆς βαβυλωνιακῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 360 μοίρας διὰ τῆς διαιρέσεως τούτου εἰς 400 βαθμούς. Ἡ τοιαύτη ὅμως διαίρεσις δὲν ἐγένετο δεκτὴ ὑπὸ τοῦ πεπολιτισμένου κόσμου, διότι εἶναι μειονεκτικὴ ἔναντι τῆς βαβυλωνιακῆς διαιρέσεως.



Σχ. 1

ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Τὰς γνώσεις ἡμῶν περὶ τῶν αἰγυπτιακῶν μαθηματικῶν τὰς ὀφείλομεν εἰς δύο κυρίως παπύρους. Ὁ εἷς ἐκ τούτων εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τοῦ Λονδίνου, ἐγράφη περὶ τὸ 1700 π.Χ. ὑπὸ τοῦ Ahmes καὶ φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα Λόρδου τινὸς ὀνομαζομένου Rhind. Αἱ μαθηματικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ πάπυρος οὗτος, ἀνέρχονται εἰς ὀγδοήκοντα καὶ θεωρεῖται ὅτι ἦσαν γνωσταὶ ἀρκετὰ πρὸ τοῦ 1700 π. Χ. Τὸ μῆκος τούτου εἶναι 5 ½ μέτρα καὶ τὸ πλάτος 32 ἑκατοστομέτρων.

Ὁ ἕτερος πάπυρος εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τῆς Μόσχας καὶ ἔχει μῆκος οἷον καὶ ὁ πάπυρος τοῦ Ahmes, ἀλλὰ πλάτος 8 ἑκατοστ. Ἐκτὸς τῶν δύο τούτων παπύρων σῴζονται καὶ μικρά τινα ἀποσπάσματα παπύρων εἰς τὰ Μουσεῖα τοῦ Βερολίνου, τοῦ Καΐρου καὶ τοῦ Λονδίνου. Ὅπως τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων οὕτω καὶ τὰ μαθηματικὰ τῶν Αἰγυπτίων εἶναι καθαρῶς ἐμπειρικῆς μορφῆς. Παρατηρήσεις χιλιάδων ἐτῶν ἐκ τῆς καθημερινῆς ζωῆς ὡδήγησαν τοὺς Βαβυλωνίους, τοὺς Αἰγυπτίους καὶ τοὺς ἄλλους παλαιοὺς πεπολιτισμένους λαοὺς εἰς τὴν εὕρεσιν ἀριθμητικῶν συστημάτων καὶ ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν, ὡς ἐπίσης εἰς τὴν εὕρεσιν στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν γνώσεων. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5 ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς Αἰγυπτίους. Ἀλλὰ καὶ εἰς τοὺς Βαβυλωνίους καὶ τοὺς Ἰνδοὺς ἦτο γνωστὸν τὸ τρίγωνον τοῦτο. Εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐχρησιμοποιεῖτο τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον διὰ τὴν κατασκευὴν ὀρθῆς γωνίας. Πρὸς τοῦτο ἐλάμβανον σχοινίον μήκους 12 μονάδων. Εἰς τὸ τέλος τῆς τρίτης μονάδος καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς ἑβδόμης μονάδος ἐσημείουν γνώρισμά τι. Προκειμένου νὰ κατασκευάσωσιν ὀρθὴν γωνίαν ἐπάκτουν εἰς τὸ ἔδαφος τὰ σημεῖα τοῦ σχοινίου τὰ φέροντα τὰς ὑποδιαιρέσεις 3 καὶ 7 καὶ ἔστρεφον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τεταμένα τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τοῦ σχοινίου πρὸς ἕνωσιν. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ἦτο ὀρθογώνιον ἔχον τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ὑποδιαιρέσεως 3. Ἡ κατασκευὴ ὀρθῆς γωνίας ἦτο ἀπαραίτητος διὰ τοὺς Αἰγυπτίους. Ἐχρειάζετο εἰς αὐτοὺς διὰ τὴν χωροστάθμησιν τῶν ὑπὸ τῶν πλημμυρῶν τοῦ Νείλου κατακλυζομένων ἐκτάσεων. Αἱ ἐκτάσεις αὗται ἀπετέλουν τὰ κτήματα τῶν Αἰγυπτίων. Μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν τοῦ Νείλου τὰ ὅρια τῶν κτημάτων τούτων ἐξηφανίζοντο καὶ ἦτο ἀνάγκη νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ νέου διὰ μετρήσεων. Τόσον τὸ συμφέρον τῶν ἰδιοκτητῶν, ὅσον καὶ τὸ συμφέρον τοῦ Κράτους, τὸ ὁποῖον εἰσέπραττεν φόρους ἀναλόγως τοῦ μεγέθους ἑκάστου κτήματος, ἐπέβαλον τὴν εὕρεσιν τῶν ἀκριβῶν ὁρίων τῶν ὑπὸ τῶν ὑδάτων τοῦ Νείλου κατακεκλυσμένων κτημάτων. Ἡ Αἰγυπτιακὴ πολιτεία εἶχεν ἱδρύσει εἰδικὸν σῶμα πρὸς καταμέτρησιν καὶ διαχωρισμὸν τῶν παρὰ τὸν Νεῖλον κτημάτων. Οἱ ἀνήκοντες εἰς τὸ σῶμα τοῦτο τεχνικοὶ ὠνομάζοντο Ἀρπεδονάπται. Ἡ ὑπηρεσία τῶν Ἀρπεδοναπτῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ πρόδρομος τῆς σημερινῆς Τοπογραφικῆς Ὑπηρεσίας. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ κύριον μέλημα τῶν Ἀρπεδοναπτῶν ἦτο ἡ μέτρησις τῆς Γῆς, εἰς ἣν ὀφείλεται ἡ παραγωγὴ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων τῆς λέξεως Γεωμετρία. Οἱ Αἰγύπτιοι δὲν ἤσκουν τὴν γεωμετρίαν ὡς ἐπιστήμην, ἀλλὰ καθαρῶς ὡς ἐμπειρικὴν τέχνην μετρήσεως τῆς Γῆς. Ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν ἐμπειρικὴν ταύτην τέχνην ἀπητοῦντο συστηματικαὶ παρατηρήσεις μακροχρόνιοι. Τὰ ἀνάκτορα τῆς Βαβυλῶνος, αἱ πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου, τὰ ἀνάκτορα τῆς Κνωσοῦ καὶ τῆς Τίρυνθος, αἱ ἀρχαιότητες τῶν Μυκηνῶν καὶ τοῦ Ὀρχομενοῦ ἀποδεικνύουσιν ὅτι κατὰ τὰς παλαιὰς ἐποχὰς τοῦ πολιτισμοῦ πρέπει νὰ ἦσαν γνωσταὶ ἐμπειρικῶς σπουδαῖαι γνώσεις στατικῆς καὶ μηχανικῆς ἐν γένει, αἱ ὁποῖαι προϋποθέτουσιν ὡς ὑπόβαθρον αὐτῶν ἱκανὰς μαθηματικὰς προτάσεις. Αἱ μαθηματικαὶ ὅμως αὗται προτάσεις δὲν δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἐπιστήμη, ἀλλὰ ὡς ἀποτέλεσμα μακρᾶς παρατηρήσεως καὶ πείρας, εἶναι δηλ. γνώσεις ἐμπειρικαί.

ΕΛΛΗΝΕΣ

Ἂν καὶ ὁ ἀρχαῖος Ἑλληνικὸς πολιτισμὸς κατατάσσεται χρονολογικῶς ὑπὸ τῶν πλείστων μετὰ τὸν βαβυλωνιακὸν καὶ τὸν αἰγυπτιακὸν πολιτισμόν, ἐν τούτοις ὑποστηρίζεται διὰ σοβαρῶν ἐπιχειρημάτων καὶ ἡ γνώμη ὅτι ὁ Ἑλληνικὸς πολιτισμὸς τῆς προμηκυναϊκῆς ἐποχῆς εἶναι πολὺ παλαιότερος τοῦ βαβυλωνιακοῦ καὶ τοῦ αἰγυπτιακοῦ. Τοιαύτην γνώμην ἀναγιγνώσκομεν εἰς τὴν περισπούδαστον πραγματείαν τοῦ στρατηγοῦ ἐ. ἀ. κ. Ξ. Λίβα, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ Αἰγηίς, ἀπὸ παλαιοτάτων χρόνων μέχρι σήμερον, ὡς κοιτὶς τῶν Ἀρίων καὶ τοῦ Ἑλληνισμοῦ», Ἀθῆναι, 1956. Ἐνισχυτικὸν ἐπιχείρημα τῆς ἀπόψεως ταύτης τοῦ κ. Ξ. Λίβα, εἶναι ὅτι ὁ Ὅμηρος, ὅστις ἔζησε κατά τινας περὶ τὸ 1200 π.Χ., πρέπει νὰ εἶναι δημιούργημα πολιτισμοῦ προηγηθέντος αὐτοῦ κατὰ χιλιάδας τινὰς ἐτῶν.

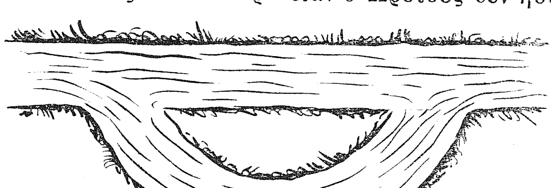
Ὁπωσδήποτε ἡ θεία Πρόνοια ἐπεφύλαξε τὴν τιμὴν τῆς δημιουργίας τῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς φιλοσοφίας εἰς τὸν λαὸν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ποῖος Ἕλλην πρῶτος συνέλαβε τὴν ἰδέαν τῆς ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ εἰς τὰ μαθηματικά, δὲν εἶναι γνωστόν. Εἶναι ὅμως γνωστὸν ἐξ ἱστορικῶν μαρτυριῶν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος Θαλῆς ὁ Μιλήσιος εἶχε πρῶτος ἀποδείξει ὡρισμένα γεωμετρικὰ θεωρήματα. Ὡς ἐκ τούτου ὁ Θαλῆς θεωρεῖται ὑπὸ πολλῶν ὁ θεμελιωτὴς τῶν ἐπιστημῶν. Ἀναμφισβητήτως δὲ ὁ θεμελιωτὴς οὗτος ἦτο Ἕλλην. Ὁ Θαλῆς ἐγεννήθη περὶ τὸ 640 π. Χ. ἐν Μιλήτῳ τῆς Μικρᾶς Ἀσίας. Κατὰ τὸν ἀρχαῖον συγγραφέα Δούριδα ἡ οἰκογένειά του ἀνῆκεν εἰς τὸ εὐγενέστατον γένος τῶν Θηλιδῶν, οἱ ὁποῖοι κατάγονται ἐκ Θηβῶν καὶ εἶναι ἀπόγονοι τοῦ Κάδμου καὶ τοῦ Ἀγήνορος. Κατὰ τὸν χρόνον τῶν σπουδῶν αὐτοῦ ἐπεσκέφθη καὶ τὴν Αἴγυπτον, ἥτις κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἐθεωρεῖτο κέντρον πολιτισμοῦ. Ἐκεῖ ἦλθεν εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὸ αἰγυπτιακὸν ἱερατεῖον, τὸ ὁποῖον κατ' ἀποκλειστικότητα ἐκαλλιέργει τὰς ἀνθρωπίνους γνώσεις, τὰς ὁποίας ἐφύλαττε μυστικάς. Ἱστορικῶς μαρτυρεῖται ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἱερεῖς ἐξεπλάγησαν, ὅταν ὁ Θαλῆς ὑπελόγισε τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος ἐκ τῆς σκιᾶς τῆς ῥάβδου του καὶ τῆς σκιᾶς τῆς πυραμίδος. Ἡ μέτρησις αὕτη ἀποδεικνύει, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι δὲν ἐγνώριζον τὰς γεωμετρικὰς προτάσεις περὶ ὁμοιότητος, τὰς ὁποίας τοὐναντίον ἐγνώριζεν ὁ Θαλῆς.

ΑΙ ΑΝΑΚΑΛΥΨΕΙΣ ΤΟΥ ΘΑΛΟΥ

Ὁ Θαλῆς ἀνεκάλυψε τὸν μαγνητισμὸν καὶ τὸν ἠλεκτρισμόν. Αἱ ἐν τῇ φύσει ὑπάρχουσαι δυνάμεις αὗται δὲν γίνονται εἰς ἡμᾶς γνωσταὶ διὰ τῶν αἰσθητηρίων ἡμῶν ὀργάνων ἀπ' εὐθείας, ἀλλ' ἐμμέσως ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ ἀνακάλυψις αὕτη τοῦ Θαλοῦ θεωρεῖται ἐκ τῶν μεγίστων ἀνακαλύψεων τοῦ ἀνθρώπου. Ἔμεινεν ὅμως ἡ ἀνακάλυψις αὕτη τοῦ Θαλοῦ ἀνερεύνητος ἐπὶ 2000 καὶ πλέον ἔτη. Κατόπιν τῆς ἀνακαλύψεως ταύτης ἔλεγεν ὁ Θαλῆς, ὅτι πάντα τὰ σώματα ἔχουσι ψυχήν, ἐννοῶν, ὡς φαίνεται, μὲ τὸ ὄνομα ψυχὴ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον καλοῦμεν ἐνέργειαν. Ὑποστηρίζεται ὑπό τινων ἡ γνώμη, ὅτι ἡ ἐπίδρασις τοῦ Πλάτωνος ἠμπόδισε τὴν ἔρευναν τῶν νόμων τῆς φύσεως διὰ τοῦ πειράματος. Τοῦτο δὲν εἶναι ἀληθές. Τοὐναντίον ὁ Πλάτων ἐπανειλημμένως προτρέπει τὴν ἔρευναν διὰ τοῦ πειράματος. Φαίνεται, ὅτι ἄλλοι εἶναι οἱ λόγοι, καὶ οὐχὶ ἡ πλατωνικὴ δῆθεν ἀντίδρασις, δι' οὓς ἡ πειραματικὴ ἔρευνα δὲν ἦτο κατὰ τὴν ἀρχαίαν ἐποχὴν τόσον ἐντατικὴ ὅσον εἶναι σήμερον. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐθεράπευον καὶ ἐδημιούργησαν τὰς ἐπιστήμας δι' ἕνα καὶ μόνον σκοπόν. Διὰ νὰ ἀτενίσωσι τὰ προβλήματα, ἅτινα ἔθεσαν εἰς ἑαυτούς: Θεός, ψυχή, ζωή, φύσις. Τὴν ἀπάντησιν ἐπὶ τῶν ἀποριῶν, τὰς ὁποίας θέτουσι τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, ἐπεχείρησαν νὰ δώσωσιν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες κυρίως διὰ τῆς λογικῆς καὶ τῆς σκέψεως. Ὀρθῶς δὲ ἔπραξαν. Διότι κατὰ τί μᾶς ἔφερε πλησιέστερον πρὸς τὴν ἔννοιαν Θεός, ψυχὴ κλπ. ἡ πρόοδος τῆς σημερινῆς τεχνικῆς; Ἡ τεχνικὴ αὕτη εἶναι ἀσκήσεις καὶ προβλήματα τῆς θεωρίας, τὴν ὁποίαν ἐδημιούργησαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες. Καὶ πᾶν ὅ,τι ἐν τῷ μέλλοντι θ' ἀνακαλύπτεται, θὰ εἶναι ἀπόρροια τῶν θεωριῶν καὶ τῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος.

Διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ἡ γενικὴ τάσις τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ ἐτυμολογία τῆς λέξεως θεωρία: ὁρῶ τὸν Θεόν. Αὐτὸν τὸν σκοπὸν εἶχε πᾶσα προσπάθεια τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος: νὰ τείνῃ, νὰ ἀτενίζῃ πρὸς τὸ Θεῖον.

Ὁ Θαλῆς ὑπελόγισε καὶ προέβλεψεν ἔκλειψιν ἡλίου καὶ ἐθαυμάσθη πολὺ διὰ τὴν καταπληκτικὴν διὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην πρόρρησίν του. Ὁ βασιλεὺς τῶν Λυδῶν Κροῖσος, ὅτε κατέλαβε τὴν Μίλητον, προσέλαβε τὸν Θαλῆν ὡς τεχνικὸν αὐτοῦ σύμβουλον. Εἴς τινα ἐκστρατείαν ὁ Κροῖσος δὲν ἠδύνατο νὰ διαβῇ τὸν ποταμὸν Ἅλυν τῆς Μικρᾶς Ἀσίας, λόγῳ τοῦ μεγάλου πλάτους καὶ τῶν πολλῶν αὐτοῦ ὑδάτων. Ὁ Θαλῆς συνοδεύων τὸν Κροῖσον εἰς τὴν ἐκστρατείαν ἐκείνην ἐπενόησε τὸν ἑξῆς τρόπον (σχ. 2) διαβάσεως τοῦ ποταμοῦ. Διήνοιξε διώρυγα ἀναχωροῦσαν ἔκ τινος σημείου τοῦ ποταμοῦ καὶ μετὰ ἑκατοντάδας τινὰς μέτρων καταλήγουσαν εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ ποταμοῦ. Οὕτω τὰ ὕδατα τοῦ ποταμοῦ ἐμοιράσθησαν εἰς δύο βραχίονας καὶ ἡ διῶρυξ καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἔναντι ταύτης τμῆμα τοῦ ποταμοῦ κατέστησαν διαβατά. Ἐκ τῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων μνημονεύονται μεταξὺ ἄλλων ὡς εὑρήματα τοῦ Θαλοῦ: 1) Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. 2) Ἡ γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἡμικυκλίου εἶναι ὀρθὴ καὶ 3) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι. Λέγεται, ὅτι πρῶτος



Σχ. 2

οὗτος ὑπελόγισε τὰς ἡμέρας τοῦ ἔτους εἰς 365 καὶ ὅτι πρῶτος ἐξήγγειλεν, ὅτι αἱ τέσσαρες ἐποχαὶ τοῦ ἔτους δὲν εἶναι ἰσόχρονοι.

Τινὲς ἐκ τῶν νεωτέρων ἐρευνητῶν τῆς ἱστορίας τῶν ἐπιστημῶν διερωτῶνται, ἂν εἶναι ὀρθὸν νὰ παραδεχθῇ τις τὴν ἄποψιν, ὅτι κατὰ θείαν τινὰ εὔνοιαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τὰς ἐπιστήμας καὶ τὸν πολιτισμὸν ἐν γένει. Οὗτοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ ἀνωτέρω μνημονευθεὶς διακεκριμένος Δανὸς ἐπιστήμων κ. Neugebauer, ἀπορρίπτουσι τὴν ἄποψιν ταύτην καὶ δέχονται, ὅτι ὁ Ἑλληνικὸς πολιτισμὸς εἶναι φυσιολογικὴ συνέχεια τῆς ἀναπτύξεως τοῦ πολιτισμοῦ τῶν Βαβυλωνίων καὶ τῶν Αἰγυπτίων. Ἀπάντησις ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω διατυπουμένου ἐρωτήματος δὲν εἶναι εὔκολος. Παραμένει ὅμως τὸ γεγονός, ὅτι οἱ Ἕλληνες κατ᾽ ἀποκλειστικότητα ἐδημιούργησαν τὰς ἐπιστήμας καὶ τὸν πολιτισμὸν καὶ ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον θὰ ὑπάρχωσιν πεπολιτισμένοι ἄνθρωποι ἐπὶ τῆς Γῆς, θὰ ἔχωσιν ὡς ὁδηγὸν κατὰ τὴν ζωήν των τὰ διδάγματα τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Ἐνταῦθα ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν περικοπὴν ἐκ ποιήματος τοῦ Γάλλου ποιητοῦ Ἀνατὸλ Φράνς, ὅστις εἰς ὀλίγους χαρακτηριστικοὺς στίχους ἐκδηλώνει τὸν θαυμασμόν του διὰ τὰ δημιουργήματα τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος. Τὸ ποίημα τοῦτο ἐξεδόθη, ὅτε πρὸ πεντήκοντα περίπου ἐτῶν ἐκυκλοφόρησεν ἐν Γαλλίᾳ ἡ λαϊκὴ Ἀστρονομία τοῦ Φλαμαριών, ἔνθα ἐγράφετο ὅτι μετὰ πάροδον ἑκατομμυρίων ἐτῶν ἡ Γῆ θὰ ψυγῇ καὶ θὰ παύσῃ πᾶσα ζωὴ ἐπ᾽ αὐτῆς. Ἡ πρόρρησις τοῦ Φλαμαριὼν περὶ τῆς ἐλευσομένης ψύξεως τῆς Γῆς καὶ τῆς συνεπείᾳ ταύτης ἐξαφανίσεως πάσης ζωῆς ἐπ᾽ αὐτῆς ὡδήγησε τὴν μοῦσαν τοῦ Γάλλου ποιητοῦ εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἑξῆς στίχων :

« *. . . Καὶ ἡ Γῆ θὰ ἐξακολουθῇ νὰ κυλίεται συμπαρασύρουσα εἰς τὸ σιωπηλὸν διάστημα τὴν τέφραν τῆς ἀνθρωπότητος, τὰ ποιήματα τοῦ Ὁμήρου καὶ τὰ πάνσεμνα συντρίμματα τῶν Ἑλληνικῶν μαρμάρων, ἐνσφηνωμένα ἐντὸς τῶν παγωμένων σπλάχνων της»* (Ἀ. Φράνς, *Ὁ κῆπος τοῦ Ἐπικούρου*).

Εἰς διάστημα δηλαδὴ τριῶν δισεκατομμυρίων ἐτῶν, ἅτινα θὰ ἔχωσι παρέλθει, ἀφ᾽ ἧς ἐδημιουργήθη ἡ Γῆ μέχρι τῆς ψύξεως αὐτῆς, τὸ μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ δημιουργηθῆ ὑπὸ τῆς ἀνθρωπότητος κατὰ τὸν Ἀνατὸλ Φράνς, θὰ εἶναι ὁ ἀρχαῖος Ἑλληνικὸς πολιτισμός.

Ἐπισημειωτέοι ἀκόμη ἐνταῦθα καὶ χαρακτηρισμοί τινες, τοὺς ὁποίους κάμνουσι διάφοροι λαοὶ διὰ τὸν ἑαυτόν των συναφῶς πρὸς τὴν συμβολήν των εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ πολιτισμοῦ. Οἱ Ἑβραῖοι παραδείγματος χάριν ἐθεώρουν καὶ θεωροῦσιν ἑαυτοὺς ὡς τὸν περιούσιον λαὸν τοῦ Θεοῦ ἐπὶ τῆς Γῆς. Οἱ Ἄγγλοι ἐτυμολογοῦσι τὴν λέξιν Ἄγγλοι ἐκ τῆς λέξεως Ἄγγελοι, (ὡς γράφουσι καὶ σήμερον εἰς τὰ σχολικὰ αὐτῶν βιβλία). Οἱ Γερμανοὶ ἐθεώρουν ἑαυτοὺς ὡς λαὸν Κυρίων, προωρισμένον νὰ κυβερνᾷ ἄλλους λαούς. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον ἐπίγνωσιν τῆς ἀξίας των καὶ διὰ τοῦτο διεχώριζον ἑαυτοὺς ἀπὸ τοὺς ἄλλους λαούς, τοὺς ὁποίους ὠνόμαζον συλλήβδην *βαρβάρους*. Ἡ ὀνομασία αὕτη δὲν προῆλθε κατὰ τὴν κλασσικὴν ἐποχὴν (5ος αἰὼν π.Χ.), ἀλλὰ εἶναι προομηρικῆς ἐποχῆς. Διότι ὁ Ὅμηρος ὀνομάζει τοὺς κατὰ τὸν Τρωικὸν πόλεμον συμμάχους τῶν Τρώων τοὺς ὁμιλοῦντας βάρβαρον φωνήν, ἄλλην δηλαδὴ γλῶσσαν πλὴν τῆς Ἑλληνικῆς, βαρ-

βαροφώνους (Ἰλ. Β 867 : *Νάστης αὖ Καρῶν ἡγήσατο βαρβαροφώνων, οἳ Μίλητον ἔχον κλπ.*) Ἐκ τοῦ ὁμηρικοῦ τούτου στίχου συνάγεται τὸ λογικὸν συμπέρασμα, ὅτι οἱ Τρῶες καὶ οἱ σύμμαχοι αὐτῶν τῆς Μακεδονίας, Θράκης καὶ Μικρᾶς Ἀσίας ὡμίλουν τὴν Ἑλληνικὴν καὶ συνεπῶς ἦσαν Ἑλληνικὰ φῦλα. Ἀλλὰ δὲν εἶναι μόνον τὸ ὁμηρικὸν τοῦτο χωρίον, τὸ ὁποῖον συνηγορεῖ ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως ὅτι οἱ Τρῶες καὶ οἱ σύμμαχοί των, πλὴν τῶν Καρῶν, ἦσαν Ἑλληνικὰ φῦλα. Τὰ ὀνόματα τῶν Τρώων : Πρίαμος, Ἕκτωρ, Ἀνδρομάχη, Αἰνείας, Ἀλέξανδρος καὶ ἄλλα, μνημονευόμενα ὑπὸ τοῦ Ὁμήρου εἶναι ὀνόματα Ἑλληνικά. Ἂν οἱ Τρῶες ἦσαν βάρβαροι καὶ ὄχι Ἑλληνικῆς καταγωγῆς, δὲν θὰ εἶχον ὀνόματα Ἑλληνικά. Ἀλλὰ καὶ οἱ θεοὶ τῶν Τρώων εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς θεοὺς τῶν Ἑλλήνων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς θεοὺς τῶν βαρβάρων.

Ἐπιγραμματικὸς εἶναι καὶ ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν Ἑλλήνων ὑπὸ τοῦ Ἰσοκράτους, ὅστις γράφει «*καὶ μᾶλλον Ἕλληνας καλεῖσθαι τοὺς τῆς παιδεύσεως τῆς ἡμετέρας ἢ τοὺς τῆς κοινῆς φύσεως μετέχοντας* (Πανηγυρικὸς 50e) [ἑρμηνεία : καὶ ὅτι Ἕλληνες καλοῦνται μᾶλλον οἱ τυχόντες τῆς ἡμετέρας παιδεύσεως ἢ οἱ μετέχοντες τῆς αὐτῆς καταγωγῆς]. Τὴν ἰσοκράτειον ταύτην ῥῆσιν ἀναγιγνώσκομεν σήμερον εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς ἐν Ἀθήναις Γενναδείου Βιβλιοθήκης τῆς Ἀμερικανικῆς Σχολῆς Κλασσικῶν Σπουδῶν ὡς ἑξῆς : Ἕλληνες καλοῦνται οἱ τῆς παιδεύσεως τῆς ἡμετέρας μετέχοντες.

Τὸ ἔργον τοῦ Θαλοῦ ἐσυνεχίσθη ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Ἀναξιμάνδρου, ὅστις πρῶτος εἶπεν, ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαιρικὴ καὶ αἰωρεῖται, τοῦ Ἀναξιμένους καὶ τοῦ Ἡρακλείτου ἐν τῇ Ἰωνίᾳ, ἐν ᾧ εἰς τὸν Κρότωνα τῆς κάτω Ἰταλίας ὁ Πυθαγόρας ἵδρυσε τὴν περίφημον αὐτοῦ σχολήν, ἡ ὁποία θεωρεῖται τὸ πρῶτον ἱδρυθὲν Πανεπιστήμιον ἐν τῷ κόσμῳ. Εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦτο τὰ μαθηματικὰ ἔλαβον μεγάλην ἀνάπτυξιν. Δὲν ἔχομεν στοιχεῖα διὰ νὰ κρίνωμεν περὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἀθήναις κατὰ τὸν ἕκτον αἰῶνα πρὸ Χριστοῦ. Παρὰ τοῦ Ἡροδότου ὅμως πληροφορούμεθα, ὅτι κατὰ τὴν ἐν Πλαταιαῖς μάχην (479 π.Χ.) οἱ Σπαρτιᾶται δὲν κατώρθουν νὰ ἐκπορθήσωσι τὸ παρὰ τὸν Ἀσωπὸν ποταμὸν περιχαρακωμένον στρατόπεδον τῶν Περσῶν καὶ ἐκάλεσαν εἰς βοήθειαν τοὺς Ἀθηναίους, οἱ ὁποῖοι ἐπέτυχον κατόπιν κρατεροῦ ἀγῶνος τὴν ἅλωσιν τούτου (IX, 70). Φαίνεται, ὅτι οἱ Ἀθηναῖοι διέθετον τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἀνώτερον τεχνικὸν ἐξοπλισμὸν ἢ οἱ ἄλλοι Ἕλληνες, καὶ δὴ καὶ πολιορκητικὰς μηχανάς. Τοιαῦτα ὅμως τεχνικὰ μέσα προϋποθέτουσιν ὑψηλὴν στάθμην τεχνικῆς ἀναπτύξεως καὶ συνεπῶς ἄνθησιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ἔπρεπε νὰ ἔχῃ προηγηθῆ τῆς τεχνικῆς ἀναπτύξεως. Ἀλλὰ καὶ τό περίφημον ἔργον ἐν Σάμῳ τοῦ ἐκ Μεγάρων διασήμου μηχανικοῦ Εὐπαλίνου μαρτυρεῖ περὶ τῆς ἀναπτύξεως κατὰ τὸν 6ον αἰῶνα π.Χ. τῆς τεχνικῆς ἐν Ἑλλάδι καὶ ἑπομένως καὶ τῶν μαθηματικῶν. Ὡς γνωστόν, ὁ Εὐπαλῖνος κατ' ἐντολὴν τοῦ τυράννου τῆς Σάμου Πολυκράτους διήνοιξε σήραγγα (ὑδραγωγεῖον) μήκους 1000 μέτρων εἰς λόφον, ἔχοντα ὕψος 300 μέτρων περίπου. Τὸ ὕψος καὶ τὸ πλάτος τῆς σήραγγος ἦσαν 2 μέτρων. Οἱ ἐργάται εἰργάζοντο καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἀντιθέτους πλευρὰς τοῦ λόφου συγχρόνως καὶ ὅταν ἔφθασαν περὶ τὸ μέσον τῶν 1000 μέτρων ἀπεῖχον ἀλλήλων περὶ τὰ 10 μέτρα ἀπὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἥτις ἥνωνε τὰ δύο ἄκρα τῆς σήραγγος. Τοιοῦτον τεχνικὸν ἔργον προϋποθέτει ἀσφαλῶς γνώσεις τινας τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὅτι εἰς τὰς Ἀθήνας θὰ ὑπῆρχε μεγάλη ἄνθησις τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὸν 6ον πρὸ Χριστοῦ αἰῶνα, καθ' ἣν ἐποχὴν δηλαδὴ ἤκμαζεν ἐν Κρότωνι τῆς Μεγάλης Ἑλλάδος τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Πυθαγόρου, συνάγεται ἀπὸ τὸ περιστατικόν, καθ' ὃ ὁ Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος, κατὰ τὸ 450 π.Χ., διαμένων ἐν Ἀθήναις καὶ εὑρισκόμενος ἐν τῇ φυλακῇ ἠσχολεῖτο μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἦτο γνωστὸν καὶ εἰς τὸ εὐρὺ ἀθηναϊκὸν κοινόν, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀριστοφάνους Ὄρνιθες, ἔνθα τοῦτο μνημονεύεται (στίχ. 1004 - 1005). Διὰ νὰ γίνεται λόγος περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἔχωσι προηγουμένως λυθῆ πολλὰ ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα. Ὁ Ἀναξαγόρας ἐδίδασκεν ὅτι *«νοῦς ἐστιν ὁ διακοσμῶν καὶ πάντων αἴτιος»* (*Πλάτωνος* Φαίδων 97 b), ἀλλὰ καὶ ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι διάπυρος μύδρος (καὶ ὄχι θεότης). Διὰ τὴν τελευταίαν ταύτην διδασκαλίαν κατεδικάσθη οὗτος ὑπὸ τῶν Ἀθηναίων εἰς θάνατον, ἐπὶ ἀσεβείᾳ καὶ ἀθεΐᾳ, ἀλλ' ἐσώθη ὑπὸ τοῦ Περικλέους (Διογ. Λαέρτ. II, 6 - 15). Συγκεκριμένας γεωμετρικὰς προτάσεις ἀποδειχθείσας ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου δὲν γνωρίζομεν. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι οὗτος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις διετύπωσε τὸ περίφημον ἀξίωμα τῆς συνεχείας, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ βάθρον τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν, ἅτινα ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων καλοῦνται ἀνώτερα, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν, ἅτινα οὗτοι καλοῦσι κατώτερα ἢ στοιχειώδη. Τὸ ἐν λόγῳ ἀξίωμα ἔχει ὡς ἑξῆς: Εἰς τὸν κόσμον δὲν ὑπάρχει τὸ ἀπολύτως μικρὸν καὶ τὸ ἀπολύτως μέγα, ἀλλὰ τοῦ μικροῦ ὑπάρχει μικρότερον καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει μεγαλύτερον. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο περιλαμβάνεται ὡς τέταρτος ὁρισμὸς εἰς τὸ V Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ Ἀρχιμήδης κάμνει χρῆσιν τοῦ ἀξιώματος τούτου κατὰ τὰς περιφήμους αὐτοῦ μαθηματικὰς ἐρεύνας καὶ ἀποδείξεις.

Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς ἀναπτύξεως αὐτῆς εὗρεν ἡ Ἑλληνικὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Ἐκεῖ οἱ διάσημοι ἐπιστήμονες Εὔδοξος, Θεαίτητος, Μέναιχμος, Δεινόστρατος, Ἀριστοτέλης καὶ ἄλλοι συνέβαλον τὰ μέγιστα εἰς τὴν πρόοδον τῶν μαθηματικῶν. Ὁ Πλάτων αὐτὸς δὲν ἦτο εἰδικὸς μαθηματικός. Ἡ συμβολή του ὅμως εἰς τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν καὶ τὴν θεμελίωσιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὑπῆρξε μεγίστη. Ἀλλὰ ὁ Πλάτων ὑπῆρξεν ἐπὶ ὀκτὼ ἔτη μαθητὴς τοῦ Σωκράτους. Παρὰ τοῦ Σωκράτους ἔμαθε τὴν διαλεκτικὴν καὶ τὸ λογικῶς σκέπτεσθαι. Κατὰ συνέπειαν πατὴρ τοῦ οἰκοδομήματος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης διὰ τῆς θεμελιώσεως αὐτῆς εἰς τὴν Λογικὴν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Σωκράτης. Τὴν Σωκράτειον καὶ Πλατωνικὴν Λογικὴν ἀνέπτυξε τελείως καὶ ἀπαραμίλλως ὁ Ἀριστοτέλης, ὅστις ἐπὶ εἴκοσιν ἔτη διετέλεσε μαθητὴς καὶ συνεργάτης τοῦ Πλάτωνος. Ὅθεν δικαίως τὰ τρία ἐκεῖνα μεγάλα πνεύματα, Σωκράτης, Πλάτων, Ἀριστοτέλης θεωροῦνται, καὶ θὰ παραμένωσιν, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουσιν ἄνθρωποι ἐπὶ τῆς Γῆς, οἱ πνευματικοὶ ἡγέται τῆς ἀνθρωπότητος.

Αἱ πηγαὶ περὶ τῆς δημιουργίας τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν εἶναι πτωχόταται. Ὁ πρῶτος, ὅστις ἔγραψεν ἐγχειρίδιον τῶν μαθηματικῶν, εἶναι κατὰ τὴν ἱστορικὴν παράδοσιν ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ ὁποῖος ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν μηνίσκων. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπεδείχθη, ὅτι ἐπιφάνειαι περικλειόμεναι ὑπὸ τόξων κύκλων εἶναι ἰσοδύναμοι κατὰ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς τρίγωνον ὀρθογώνιον, δηλαδὴ ἐτετραγωνίσθησαν. Ἀλλὰ ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἔγραψε πρῶτος κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Εὔδημος ὁ Ρόδιος. Τὸ ἔργον ὅμως τοῦτο ἀπωλέσθη. Ἄλλος συγγραφεὺς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν μνημονεύεται ὁ Γεμῖνος, ὅστις ἤκμασε περίπου κατὰ τὸν πρῶτον προχριστιανικὸν αἰῶνα. Ἀλλὰ καὶ τούτου τὸ ἔργον ἀπωλέσθη. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ πέμπτου αἰῶνος μ.Χ. ὁ Πρόκλος, ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον σχολιάζει τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, περιλαμβάνει στοιχεῖά τινα ἐκ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα τοῦ Πρόκλου εἶναι σπουδαία πηγὴ διὰ τὴν σπουδὴν τῆς ἱστορίας τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Ἐνῷ ὅμως αἱ σωθεῖσαι ἱστορικαὶ πηγαὶ τῶν Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν εἶναι πενιχρόταται, αὐτῶν τούτων τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων διεσώθη ἱκανὸν μέρος. Εἰς τὰς σωθείσας πραγματείας περιλαμβάνονται τὰ 13 βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ πλεῖστον τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸ πλεῖστον τῶν ἔργων τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, ἡ Σύνταξις τοῦ Κλ. Πτολεμαίου, ἡ Συναγωγὴ τοῦ Πάππου καὶ τὸ πλεῖστον τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τοῦ Διοφάντου. Ἐκ τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων ἀναφέρομεν: Ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Εὐδόξου, ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Δημοκρίτου, τὰ ὁποῖα ἀφεώρων εἰς ὅλας τὰς ἀνθρωπίνους γνώσεις, ὅλα τὰ ἔργα τῶν Πυθαγορικῶν Φιλολάου, Θυμαρίδου καὶ Ἀρχύτου, τὸ πλεῖστον τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, πολλὰ τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, ὅλα τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστάρχου τοῦ Σαμίου, ὅστις πρῶτος ἐδίδαξεν, ὅτι ἡ Γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της καὶ περὶ τὸν Ἥλιον, τὰ περίφημα ἔργα περὶ Μουσικῆς τοῦ Ἀριστοξένου, πολλὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Διοφάντου καὶ ἄλλων. Ὡς γνωστόν, κατὰ τὴν ἀλεξανδρινὴν ἐποχὴν εἶχον συστηματικῶς συγκεντρωθῆ εἰς τὰς βιβλιοθήκας τῆς Ἀλεξανδρείας ἀνάτυπα ὅλων τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων. Ταῦτα ἐφυλάσσοντο εἰς δύο βιβλιοθήκας, εἰς τὴν περίφημον βιβλιοθήκην, τὴν κειμένην εἰς τὴν ἀριστοκρατικὴν παραλιακὴν συνοικίαν τῆς Ἀλεξανδρείας Βρύχειον, καὶ εἰς τὴν βιβλιοθήκην τὴν καλουμένην Σαραπεῖον. Εἰς τὸ Σαραπεῖον ἐφυλάσσοντο ἐπίσης τὰ ἔργα τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων τὰ συγκεντρωθέντα εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Περγάμου ὑπὸ τοῦ βασιλέως αὐτῆς Ἀττάλου τοῦ τρίτου. Τὴν βιβλιοθήκην ταύτην εἶχε δωρήσει ὁ βασιλεὺς οὗτος κατὰ τὸ 133 π.Χ. εἰς τὴν ρωμαϊκὴν Γερουσίαν. Βραδύτερον ὁ Ρωμαῖος ὕπατος Ἀντώνιος ἐδώρησε ταύτην εἰς τὴν βασίλισσαν τῆς Αἰγύπτου Κλεοπάτραν, τελευταίαν ἀπόγονον τῆς δυναστείας τῶν Πτολεμαίων. Ἡ πρώτη βιβλιοθήκη ἡ εὑρισκομένη εἰς τὸ Βρύχειον ἐκάη κατὰ τὸ 47 π.Χ., ὅτε ὁ Ἰούλιος Καῖσαρ κατέλαβε τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ἡ δευτέρα βιβλιοθήκη, τὸ Σαραπεῖον, ἐκάη κατὰ τὸ 415 μ.Χ. ὑπὸ μοναχῶν τινων ἀγομένων ὑπὸ θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην διηγέρθη ὁ λαὸς τῆς Ἀλεξανδρείας κατὰ τῆς Ἑλληνίδος ἐπιστήμονος, μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου Ὑπατίας, θυγατρὸς τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως. Αὕτη ὑπέστη τὸν διὰ λιθοβολισμοῦ ὑπὸ τοῦ ὄχλου θάνατον, οἱ δὲ ἐξωργισμένοι μοναχοὶ ἐπυρπόλησαν ἐν κατακλεῖδι τὸ Σαραπεῖον (1). Τὸ λεγόμενον ὅτι ὁ Ἄραψ χαλίφης Ὀμάρ, ὅστις κατέλαβε τὴν Ἀλεξάνδρειαν περὶ τὸ 600 μ.Χ., ἔκαυσε τὸ Σαραπεῖον, δὲν εἶναι ἀληθές. Ὅ,τι διεσώθη ἐκ τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων συγγραφέων εὑρέθη εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν καὶ εἰς ἰδιωτικὰς συλλογὰς τῆς Ἀνατολῆς καὶ τῆς Αἰγύπτου. Μέρος τούτων μετεφέρθη διὰ τῶν Ἀράβων εἰς τὴν Εὐρώπην, διὰ τῶν παραλίων τῆς Ἀφρικῆς καὶ τῆς Ἱσπανίας καὶ ἄλλο μέρος κατεκλάπη εἰς τὴν Ἀνατολὴν ὑπὸ τῶν περιπύστων σταυροφόρων καὶ μετεφέρθη εἰς τὴν δυτικὴν Εὐρώπην. Τὸ πνεῦμα ὅμως τὸ Ἑλληνικὸν εἶχε διεισδύσει εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην διὰ τῶν μεταφράσεων τοῦ Ῥωμαίου συγγραφέως Βοηθίου (480-524). Οὗτος εἶχε μεταφράσει εἰς τὴν λατινικὴν πολλὰ ἔργα τοῦ Πλάτωνος, τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Πτολεμαίου. Διὰ τῶν ἔργων τούτων ἐτέθησαν αἱ βάσεις τοῦ λεγομένου Δυτικοῦ πολιτισμοῦ. Ἡ ἐντατικὴ σπουδὴ τῶν ἔργων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων ὡδήγησεν εἰς τὴν σημερινὴν ἀνάπτυξιν τοῦ εὐρωπαϊκοῦ πολιτισμοῦ καὶ εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς χριστιανικῆς θρησκείας. Οἱ τρεῖς μεγάλοι Ἱεράρχαι τοῦ χριστιανισμοῦ, Βασίλειος ὁ μέγας, Γρηγόριος ὁ θεολόγος καὶ Ἰωάννης ὁ χρυσόστομος ἦσαν βαθύτατα ἐμπεποτισμένοι ὑπὸ τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος.

Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως, ὅτε ἤρχισεν μεγάλη ἀνάπτυξις τῶν ἐπιστημῶν ἐν Εὐρώπῃ, ὑπῆρχον ἔργα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τὰ ὁποῖα κατόπιν ἐξηφανίσθησαν. «Ἀναφέρομεν, γράφει ὁ ἱστορικὸς τῶν φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν ἐπιστημῶν Γερμανὸς καθηγητὴς Χόππε, τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Κατοπτρικά, τὸ ὁποῖον μνημονεύουσιν ὁ Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς, ὁ Ὀλυμπιόδωρος, ὁ Ἀπούλιος. Ὁ Γεώργιος Βάλλα ἀναφέρει τοῦτο ἐπανειλημμένως κατὰ τὸ 1492. Ἔκτοτε τὸ ἔργον τοῦτο ἐξηφανίσθη» (2). Ἀλλὰ καὶ ὁ διαφορικὸς καὶ ὁλοκληρωτικὸς λογισμός, καλούμενα ἀνωτέρα ἀνάλυσις καὶ ἀνώτερα μαθηματικὰ πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῶν Ἑλληνικῶν, ἅτινα καλοῦνται κατώτερα, ὡς μνημονεύομεν καὶ ἀνωτέρω, εἶναι εὑρήματα Ἑλληνικά. Πολλοὶ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ὠνόμαζον τὸν ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους ἐφαρμοζόμενον διαφορικὸν λογισμὸν μέθοδον ἐξαντλήσεως. Ἀφ' ἧς ὅμως (1907) ἀνευρέθη ἐν Κωνσταντινουπόλει τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος», ἤρχισε νὰ ἀναγράφεται ἡ ἀλήθεια ἐν προκειμένῳ. Διότι αὕτη δὲν μειώνει τὸ ἔργον τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τοῦ 17ου καὶ τοῦ 18ου αἰῶνος. Ἀλλὰ ἂς ἀφήσωμεν νὰ ὁμιλήσῃ ἐπὶ τούτου ὁ Γερμανὸς ἱστορικὸς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης Μὰξ Σίμων. Ἰδοὺ τί γράφει οὗτος εἰς τὸ ἔργον του «Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν κατὰ τὴν Ἀρχαιότητα» (3).

«Τὰς ἀποδείξεις εἰς τὸ ἔργον του περὶ ἑλίκων εὗρεν ὁ Ἀρχιμήδης μὲ τὴν

---

1) *E. Gerland*, Geschichte der Physik, München und Berlin, 1913, σελ. 129 - 131, Verlag R. Oldenburg.

2) *Edmund Hoppe*, Geschichte der Physik, σελ. 239 - 240, Verlag F. Vieweg, 1926, Braunschweig.

3) *Max Simon*, Geschichte der Mathematik im Altertum, σελ. 263 - 265. Verlag B. Cassirer, Berlin 1909.

βοήθειαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπειροστοῦ, ἐνῷ ἡ κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἕλικα στηρίζεται ἐπὶ διαφορικοῦ λογισμοῦ καὶ ὁ ὑπολογισμὸς ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων στηρίζεται ἐπὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ... Πόσον σαφῶς ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν ἀντιληφθῆ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου καὶ τῆς ὁλοκληρώσεως ἀπεδείχθη τώρα διὰ τῆς εὑρέσεως τῆς μέχρι τοῦ 1907 ὡς ἀπολεσθείσης θεωρουμένης πραγματείας του «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος». Ἡ στέψις τῆς ἐργασίας τοῦ Heiberg, τοῦ εὑρόντος τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους, διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλληνικῆς ἐπιστήμης ἐγένετο διὰ τῆς ἀποκαταστάσεως τοῦ ἀνευρεθέντος ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους (παλιμψήστου)... Εἰς διάλεξιν, τὴν ὁποίαν ἔκαμα εἰς τὴν Φραγκφούρτην τῷ 1893, εἶπον, ὅτι ὁ Γαλιλαῖος εἶναι τόσον ἀκριβῶς προσκεκολλημένος εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, ὡς ἐὰν ἦτο μαθητής του. Ἡ ἀνευρεθεῖσα πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος» ἀποδεικνύει, ὅτι ἀκόμη ἡ μορφὴ τῶν ἔργων τοῦ Γαλιλαίου, καὶ ἀκόμη περισσότερον τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Καβαλιέρι, παραδόξως συμφωνοῦν μὲ τὸν Ἀρχιμήδην. Ἡ Ἀναγέννησις ἀσφαλῶς κατεῖχε ἀρκετὰ πρωτότυπα ἔργα τῶν Ἀρχαίων, τὰ ὁποῖα ἐν τῷ μεταξὺ ἐξηφανίσθησαν. Τοῦτο συνάγεται ἀπὸ τὸν κατάλογον τοῦ Regiomontanus καὶ ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ ὀχουμένων, τοῦ ὁποίου μέγα μέρος εὑρέθη εἰς τὸν παλίμψηστον τὸν περιέχοντα τὴν πραγματείαν «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος» καὶ θεωρῶ πιθανόν, ὅτι ὁ Γαλιλαῖος καὶ ὁ Καβαλιέρι εἶχον ἀντίγραφον τοῦ ἔργου τούτου τοῦ Ἀρχιμήδους (τὸ ὁποῖον κατόπιν ἐχάθη). Οὕτως ὁ τεχνικὸς ὅρος διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα «omnia», τὸν ὁποῖον ὁ Leibnitz τὸ πρῶτον παρὰ τοῦ Καβαλιέρι παρέλαβε, εἶναι μετάφρασις τοῦ Ἑλληνικοῦ ὅρου «πάντα» τοῦ ἀπαντῶντος εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν τῷ 1907 πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος»... Ἡ ταυτότης τῆς ἐξαντλητικῆς μεθόδου πρὸς τὸν διαφορικὸν λογισμὸν ἐτονίσθη ἤδη δεόντως ὑπὸ τοῦ Wallis». Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ἀναφέρομεν, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν ἀξιωμάτων τῆς δυναμικῆς τοῦ Νεύτωνος τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας διετυπώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ οὐχὶ ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος. Ἰδοὺ ἡ διατύπωσις τοῦ Νεύτωνος: Πᾶν σῶμα διατηρεῖ τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἐξαναγκάζεται ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἰς μεταβολὴν καταστάσεως (1).

Ἰδοὺ ἡ διατύπωσις τοῦ Ἀριστοτέλους: «*Ἔτι οὐδεὶς ἂν ἔχοι εἰπεῖν διατί κινηθὲν στήσεταί που· τί γὰρ μᾶλλον ἐνταῦθα ἢ ἐνταῦθα; ὥστε ἢ ἠρεμήσει ἢ εἰς ἄπειρον ἀνάγκη φέρεσθαι, ἐάν μή τι ἐμποδίσῃ κρεῖττον*» (Φυσικῆς Ἀκροάσεως Δ (8), 215α 19-22), [ἑρμ. Οὐδεὶς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ὑποστηρίξῃ, διατί κινηθὲν σῶμα θὰ σταματήσῃ κάπου· διότι, διατὶ νὰ σταματήσῃ ἐδῶ καὶ ὄχι ἐκεῖ; ὥστε ἢ θὰ ἠρεμήσῃ ἢ εἶναι ἀνάγκη νὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον, ἐὰν δὲν εὕρῃ ἐμπόδιον μεγαλύτερον τῆς κινούσης δυνάμεως]. Ὅθεν δίκαιον εἶναι νὰ διδάσκεται εἰς ὅλα τὰ Σχολεῖα, ὅτι τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ὄχι ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος.

Τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικὰ διαιροῦνται εἰς δύο κλάδους. Τὴν θεωρίαν τῶν

---

1) *Κ. Παλαιολόγου - Σ. Περιστεράκη:* **Στοιχεῖα Φυσικῆς**, τόμ. Ι., σελ. 74, ἔκδοσις τετάρτη, 1954.

ἀριθμῶν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Τρία βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ VII, VIII, IX, ἔχουσιν ἀφιερωθῆ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Προτάσεις τινές, μὴ θεωρηθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου στοιχειώδεις, ἐσώθησαν διὰ τῶν ἔργων τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, οἵτινες ἤκμασαν αἰῶνάς τινας μετὰ τὸν Εὐκλείδην. Ἡ ἄλγεβρα ἐκαλλιεργεῖτο διὰ τῆς γεωμετρίας. Τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἄλγεβρα ἀναπτυχθεῖσα γεωμετρικῶς (τὰ πρῶτα 10 θεωρήματα ἐκ τῶν 14 τοῦ βιβλίου τούτου). Τὰ σωθέντα ἔργα τοῦ Διοφάντου (4ος αἰὼν) εἶναι κατὰ πρῶτον λόγον ἄλγεβρα καὶ κατὰ δεύτερον λόγον θεωρία τῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὴν σωθεῖσαν πραγματείαν του *Ἀριθμητικά*, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος κυρίως ἀσχολεῖται μὲ τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ἀπαντῶμεν τὸ πρῶτον διατυπουμένην τὴν ἀλγεβρικὴν θεωρίαν ὅτι : πλὴν ἐπὶ πλὴν=σὺν καὶ πλὴν ἐπὶ σὺν=πλὴν (*Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν ποιεῖ ὕπαρξιν καὶ λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν*). Ἡ προβολικὴ γεωμετρία εἶχεν ἀρκετὰ ἀναπτυχθῆ, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν σχημάτων τῆς στερεομετρίας τοῦ Εὐκλείδου (XI, XII, XIII βιβλία τῶν Στοιχείων), ἐπίσης δὲ καὶ ἡ προοπτική, ὀνομαζομένη σκηνογραφική, διότι ἐχρησιμοποιεῖτο εἰς τὰ θέατρα. Οἱ κλάδοι οὗτοι ὅμως τῶν μαθηματικῶν δὲν ἐθεωροῦντο ἐπιστήμη, ἀλλὰ ἐφαρμογαὶ μαθηματικῶν, καὶ διὰ τοῦτο φαίνεται, ὅτι δὲν περιελήφθησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὰ Στοιχεῖα αὐτοῦ. Εἰς τὴν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου σωθεῖσαν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν περιλαμβάνονται τὰ Στοιχεῖα ἐκεῖνα, διὰ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ περαιτέρω ἔρευνα. Τοὺς ἀριθμοὺς (τοὺς ἀκεραίους μόνον ἐκάλουν ἀριθμοὺς) τοὺς διέκρινον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες (πρῶτοι οἱ Πυθαγόρειοι) εἰς ἐλλιπεῖς, ὑπερτελεῖς, φιλίους καὶ τελείους. Ἐλλιπὴς ἀριθμὸς καλεῖται ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ (εἰς τοὺς διαιρέτας περιλαμβάνεται καὶ ὁ ἀριθμός, ὄχι ὅμως ἡ μονάς). Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 15 εἶναι ἐλλιπής, διότι $15:15=1$, $15:5=3$ καὶ $15:3=5$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+3+5=9$, μικρότερον τοῦ 15. Ὑπερτελὴς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς π. χ. 12 εἶναι ὑπερτελής, διότι $12:12=1$, $12:6=2$, $12:4=3$, $12:3=4$, $12:2=6$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+3+4+6=16$, μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ 12. Δύο ἀριθμοὶ π.χ. Α καὶ Β λέγονται φίλιοι, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν τοῦ Α ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν τοῦ Β ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν Α. Τοιοῦτοι φίλιοι ἀριθμοὶ εἶναι π.χ. οἱ 220 καὶ 284. Διότι $220:220=1$, $220:110=2$, $220:55=4$, $220:44=5$, $220:22=10$, $220:20=11$, $220:11=20$, $220:10=22$, $220:5=44$, $220:4=55$, $220:2=110$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$. Ἐπίσης εἶναι $284:284=1$, $284:142=2$, $284:71=4$, $284:4=71$, $284:2=142$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+4+71+142=220$.

Τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων διὰ τῶν δυνατῶν διαιρετῶν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν. Ὁ 6 π.χ. εἶναι τέλειος, διότι $6:6=1$, $6:3=2$, $6:2=3$. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1+2+3=6$. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 28 εἶναι τέλειος. Διότι 28 : 28=1, 28 : 4=2, 28 : 7=4, 28 : 2=7, 28 : 2=14. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων 1+2+4+7+14=28. Ἀπὸ 1—10 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 6, ἀπὸ 11—100 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 28, ἀπὸ 101—1000 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 496, ἀπὸ 1001—10000 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος, ὁ 8128. Ἀπὸ 10001—100.000.000 ὑπάρχει εἷς μόνος τέλειος, ὁ 33.550.336. Οὗτοι ἦσαν γνωστοὶ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους εὑρέθησαν ἀκόμη 7 τέλειοι ἀριθμοί. Ὁ δωδέκατος εὑρέθη τὸ 1914. Οὗτος εἶναι ἴσος μὲ $2^{126}(2^{127}-1)$. Ὁ κανὼν εὑρέσεως τῶν τελείων ἀριθμῶν περιλαμβάνεται εἰς τὸ 36ον θεώρημα τοῦ IX βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Σημειωτέον ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι οἱ τέλειοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄρτιοι καὶ ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν θὰ εἶναι ἢ 6 ἢ 8.

Ἓν ἐκ τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ εὕρεσις τύπου παρέχοντος τοὺς πρώτους ἀριθμούς. Ὁ Ἐρατοσθένης (ἀκμάζει περὶ τὸ 250 π. Χ. ἐν Ἀλεξανδρείᾳ) εἶχε διατυπώσει τρόπον εὑρέσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τὸν λεγόμενον «κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους». Ὁ τρόπος ὅμως οὗτος δὲν εἶναι ἐπαρκὴς καὶ εὔχρηστος διὰ τὴν εὕρεσιν μεγάλων πρώτων ἀριθμῶν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον λέγομεν σήμερον εἶναι ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς (ἐξαιρουμένου τοῦ 2) εἶναι τῆς μορφῆς $4c \pm 1$, ἔνθα τὸ c δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 1, 2, 3,... Παραδείγματος χάριν διὰ c=1 εἶναι 4.1—1=3 καὶ 4.1+1=5. Διὰ c=2, εἶναι 4.2—1=7 καὶ 4.2+1=9. Ὁ 9 ὅμως δὲν εἶναι πρῶτος. Ὁ 11 εἶναι 4.3—1, ὁ 13 εἶναι 4.3+1, ὁ 17 εἶναι 4.4+1, ὁ 19 εἶναι 4.5—1. Ὁ 25 εἶναι 4.6+1. Οὗτος ὅμως δὲν εἶναι πρῶτος. Ὁ 27 εἶναι 4.7—1. Καὶ οὗτος δὲν εἶναι πρῶτος. Εἶναι δηλαδὴ βέβαιον, ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $4c \pm 1$, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει· δὲν ἀληθεύει δηλ., ὅτι πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4c \pm 1$ εἶναι πρῶτος. Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων περιλαμβάνεται καὶ τὸ πρόβλημα τῆς λύσεως ἐξισώσεως, ὅταν αὕτη ἔχῃ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους. Κατὰ τὴν παράδοσιν, ὁ ἴδιος ὁ Πυθαγόρας εὗρε τὸν τύπον τὸν παρέχοντα τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἀληθεύοντας τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=z^2$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λέγεται διοφαντικὴ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ. Εἶναι μία ἐξίσωσις περιέχουσα τρεῖς ἀγνώστους, ἕκαστον εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Ἡ λύσις τοῦ Πυθαγόρου ἀφορᾷ εἰς τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς. Οἱ τύποι τοῦ Πυθαγόρου οἱ παρέχοντες τὰς λύσεις, ὅταν ὁ μ λαμβάνῃ περιττὰς τιμὰς 3, 5, 7, 9, . . . εἶναι

$$\mu, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \quad \frac{\mu^2+1}{2}.$$

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν, ἐὰν διαδοχικῶς δώσωμεν εἰς τὸν μ τιμὰς περιττάς :

$$\mu, \quad \frac{\mu^2-1}{2}, \qquad \frac{\mu^2+1}{2} \qquad\qquad x^2+y^2=z^2$$

$$3, \quad \frac{3^2-1}{2}=4, \quad \frac{3^2+1}{2}=5 \quad \text{καὶ} \quad 3^2+4^2=5^2$$

$$5, \quad \frac{5^2-1}{2}=12, \quad \frac{5^2+1}{2}=13 \quad \text{»} \quad 5^2+12^2=13^2$$

$$7, \quad \frac{7^2-1}{2}=24, \quad \frac{7^2+1}{2}=25 \quad \text{καὶ} \quad 7^2+24^2=25^2$$

$$9, \quad \frac{9^2-1}{2}=40, \quad \frac{9^2+1}{2}=41 \quad » \quad 9^2+40^2=41^2 \quad \text{κλπ.}$$

Γεννᾶται τὸ ζήτημα πῶς ὁ Πυθαγόρας ἔφθασεν εἰς τὴν περίφημον ταύτην λύσιν (1). Οὗτος, φαίνεται, ἐγνώριζε τὸ θεώρημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, ὅταν οὗτοι λαμβάνωνται κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν, εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι $1^2=1$, τότε τὸ εἰς τὸν Πυθαγόραν γνωστὸν θεώρημα διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}
1^2&=1\\
2^2&=1+3\\
3^2&=1+3+5\\
4^2&=1+3+5+7\\
5^2&=1+3+5+7+9\\
6^2&=1+3+5+7+9+11\\
7^2&=1+3+5+7+9+11+13, \text{ κλπ.}
\end{aligned}$$

Ἐὰν δηλ. ἀναγράψωμεν τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μονάδος, κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν, ὁ ἑκάστοτε ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος τούτων ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ θεωρουμένου πλήθους ἀριθμῶν. Κατόπιν τούτου ὑποτίθεται, ὅτι ὁ Πυθαγόρας θὰ εἰργάσθη ὡς ἑξῆς: Ἀνέγραψεν εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς πέντε πρώτους περιττοὺς ἀριθμοὺς ὡς προσθετέους, (ἄνωθεν τῶν προσθετέων γράφομεν τὸν αὐξανόμενον ἀριθμὸν τούτων), 1, 2, 3, 4, 5
καὶ προσέθεσεν, 1+3+5+7+9.

Τὸ πλῆθος τῶν περιττῶν τούτων ἀριθμῶν τῶν ἀναγεγραμμένων κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν εἶναι 5. Εἶναι συνεπῶς τὸ ἄθροισμά των ἴσον μὲ 5^2, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα. Ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ὁ 9 εἶναι τετράγωνος$=3^2$. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων προσθετέων τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος, ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὸ πλῆθος εἶναι 4, ἰσοῦται πρὸς 4^2.

Ἑπομένως εἶναι :

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 1+ & 3+ & 5+ & 7+ & 9 \end{array}$$

$$5^2= \quad 4^2 \quad +3^2.$$

Περαιτέρω εἶναι (ἀναγράφομεν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τὸν αὐξανόμενον ἀριθμὸν)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25.

Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι 13. Τὸ ἄθροισμα ἄρα αὐτῶν εἶναι κατὰ τὸ

1) Ἐπὶ τούτου καὶ περὶ τῶν Πυθαγορείων ἀριθμῶν ἀσχολεῖται λαμπρῶς ἀπὸ ἐτῶν ὁ ἀρχιτέκτων κ. Κωνσταντῖνος Παπαδάκης.

ἀνωτέρω θεώρημα 13^2. Ὁ τελευταῖος ὅρος 25 εἶναι τετράγωνος $=5^2$. Τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων 12 ὅρων εἶναι κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα $=12^2$. Ἑπομένως θὰ εἶναι :

$$\overbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12}^{}\ \ 13$$

$$13^2 = \underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23}_{12^2}+25 = 12^2 + 5^2,$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ Πυθαγόρου εἶναι ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν εἰς μίαν γραμμὴν κατὰ τὴν φυσικὴν ἀκολουθίαν αὐτῶν τοὺς περιττοὺς ἀριθμούς, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τελειώνει ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν εἰς τετράγωνον ἀριθμόν, τότε ἔχομεν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον σχηματισμοῦ, τριάδα ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουσι τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=z^2$.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουσι καὶ ἄρτιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι παρέχουσιν ἀκεραίους ἀριθμοὺς (τὰς ἀκεραίας λύσεις ὡς λέγονται), οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν. Ἡ εὕρεσις τούτων ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\beta, \qquad \frac{\beta^2}{4}-1, \qquad \frac{\beta^2}{4}+1,$$

ἔνθα ὁ β λαμβάνει πάσας τὰς ἀρτίας τιμὰς ἀπὸ τοῦ 4 καὶ ἄνω. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{lllll}
\beta, & \frac{\beta^2}{4}-1, & \frac{\beta^2}{4}+1 & & x^2+y^2=z^2 \\
4, & \frac{4^2}{4}-1=3, & \frac{4^2}{4}+1=5 & \text{καὶ} & 4^2+3^2=5^2 \\
6, & \frac{6^2}{4}-1=8, & \frac{6^2}{4}+1=10 & » & 6^2+8^2=10^2 \\
8, & \frac{8^2}{4}-1=15, & \frac{8^2}{4}+1=17 & » & 8^2+15^2=17^2 \\
10, & \frac{10^2}{4}-1=24, & \frac{10^2}{4}+1=26 & » & 10^2+24^2=26^2, \text{κλπ.}
\end{array}$$

Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ ἄλλοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουσι τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν, χωρὶς νὰ λαμβάνωνται διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος. Ὅλους ἀνεξαιρέτως τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἐπαληθεύοντας τὴν ἀνωτέρω διοφαντικὴν ἐξίσωσιν τοὺς παρέχει τύπος περιλαμβανόμενος εἰς τὸ Χ Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (λῆμμα εἰς τὸ 28ον θεώρημα). Τινὲς ἐκ τῶν νεωτέρων φρονοῦσιν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας δὲν ἐσκέφθη ν' ἀσχοληθῇ μὲ τὴν ἐξίσωσιν $x^\nu + y^\nu = z^\nu$, ἔνθα $\nu \geqslant 3$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ὀνομάζουσιν οὗτοι «Τὸ Μέγα θεώρημα τοῦ Fermat». Ἄλλοι ὅμως ἐκ τῶν νεωτέρων παρατηροῦσιν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀσφαλῶς θὰ τὸ ἐσκέφθησαν, ἀλλὰ οὗτοι δὲν ἠσχολοῦντο ν' ἀποδείξωσι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον δὲν γίνεται, ἀλλ' ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον γίνεται, ἐλάμβανον δηλ. θέσιν ἐπὶ τῶν διαφόρων ζητημάτων καὶ δὲν ἀπετέλουν ἄρνησιν.

Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου εἶναι τὸ τελειότερον μαθηματικὸν σύγγραμμα, τὸ ὁποῖον ἐγράφη ποτε εἰς τὸν κόσμον. Πολλοὶ νεώτεροι, ὄχι ἐκ τῶν ἡμετέρων βεβαίως, προσπαθοῦσι νὰ συμπληρώσωσι τοῦτο καὶ νὰ τὸ βελτιώσωσι. Πάντοτε ὅμως αἱ συμπληρώσεις καὶ αἱ προσθῆκαι των ἀποδεικνύονται οὐχὶ ὀρθαί. Ἐν τέλει ἀνεκαλύφθη ὅτι ὑπάρχουσι καὶ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι. Οἱ ἔχοντες τὸν κοινὸν νοῦν ἀντιλαμβάνονται διὰ τοῦ ὅρου *μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία*, μίαν νέαν μαθηματικὴν ἐπιστήμην, μίαν νέαν γεωμετρίαν, ἡ ὁποία δὲν ἔχει καμμίαν σχέσιν μὲ τὴν γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου. Τοῦτο σημαίνει ὁ ὅρος *μὴ εὐκλείδειος γεωμετρία*.

Τὸ πρᾶγμα ὅμως δὲν ἔχει οὕτω. Παραλαμβάνουσιν μερικοὶ νεώτεροι ὅλα τὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου, ἀντικαθιστῶσιν ἕν, καὶ τὸ νέον δημιούργημα τὸ ὀνο μάζουσι μὴ εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου οὐδὲν εἶναι γνωστόν. Φαίνεται ὅμως λίαν πιθανόν, ὅτι οὗτος εἶχε φοιτήσει εἰς τὴν Πλατωνικὴν Ἀκαδημίαν καὶ ὅτι εἶχε μαθητεύσει πλησίον τοῦ Ἀριστοτέλους. Τὰ θεωρήματα τῶν Στοιχείων δὲν εἶναι εὑρήματα τοῦ Εὐκλείδου. Ταῦτα εἶναι καρπὸς τριῶν αἰώνων περίπου Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Ὁ Εὐκλείδης τὰ συνέταξε, τὰ κατέταξε καὶ τὰ διετύπωσε κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ταῦτα νὰ εἶναι ἀνέλεγκτα. Ὀρθῶς λέγεται ὑπό τινων, ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶναι ὁ Φειδίας, ὁ καλλιτέχνης τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Ἡ διατύπωσις τῶν θεωρημάτων ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἀποτελεῖ πράγματι ὕψιστον καλλιτεχνικὸν δημιούργημα. Εἰς τὴν Ἀμερικὴν καὶ τὴν Ἀγγλίαν διδάσκονται τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου αὐτούσια κατὰ πιστὴν μετάφρασιν ἐκ τοῦ Ἑλληνικοῦ κειμένου. Τελευταίως καταβάλλεται προσπάθεια ὅπως καὶ ἐν Ἑλλάδι διδάσκωνται τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ἤδη τῇ συνδρομῇ τῶν Ὑπουργείων Παιδείας καὶ Οἰκονομικῶν καὶ τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων πλησιάζει ἡ ἀποπεράτωσις τῆς ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὅ,τι παρατηροῦμεν ἀπὸ ἀπόψεως τελειότητος εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὸ βλέπομεν καὶ εἰς τὴν Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους. Καὶ τὸ ἔργον τοῦτο δὲν ἔχει τὸ ὅμοιόν του. Καὶ αὐτὸ προσεπάθησαν οἱ νεώτεροι νὰ τὸ βελτιώσωσι καὶ τὸ συμπληρώσωσι, ἀλλ' ἀπέτυχον.

Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΙΣ ΚΑΙ ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὴν Ὀρφικὴν παράδοσιν πρὸ τῆς δημιουργίας ὑπὸ τοῦ Θεοῦ τοῦ Οὐρανοῦ καὶ τῆς Γῆς ὑπῆρχε τὸ χάος. Κατὰ δὲ τὴν Πυθαγόρειον παράδοσιν ὁ κόσμος προῆλθεν ἐκ τοῦ χάους, ἀφοῦ ὁ Δημιουργὸς ἐχρησιμοποίησε τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέτρον.

Τὰ ἁπλούστερα τῶν ἐν τῇ φύσει ὑπαρχόντων σχημάτων εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ ὁ κύκλος. Ταῦτα ἐξέλεξεν ὁ Δημιουργὸς διὰ νὰ δώσῃ μορφὴν εἰς τὸν ἐκ τοῦ χάους δημιουργηθέντα κόσμον. Ὅθεν ἡ σπουδὴ τῶν σχημάτων τούτων εἶναι ἔρευνα πρὸς ἐνατένισιν τοῦ δημιουργήσαντος καὶ κυβερνῶντος τὸν κόσμον θείου πνεύματος. Τὸ τρίγωνον ἀποτελεῖται ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν. Αἱ γραμμαὶ αὗται δὲν ἔχουσιν ὡρισμένον μῆκος, ἀλλὰ τὸ μῆκος των ποικίλλει ἀναλόγως τοῦ μεγέθους τοῦ τριγώνου. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν γραμμὴ δὲν ἀποτελεῖ ἐν τῷ κόσμῳ σταθερόν τι μέγεθος. Ἐγκλείει αὕτη ἐν ἑαυτῇ τὴν ἰδέαν τοῦ γεννωμένου καὶ τοῦ φθειρομένου. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα γραμμὴ ἔχει ἀρχήν, μέσον καὶ τέλος, παρωμοιάσθη αὕτη πρὸς τὴν ζωὴν τοῦ ἀνθρώπου, ἔνθα παρατηροῦμεν γέννησιν, ζωὴν καὶ θάνατον. Ἐκ τούτου καὶ ἡ ἱερότης τοῦ ἀριθμοῦ τρία διὰ τοὺς Πυθαγορείους. Εἰς τὸν κύκλον τοὐναντίον δὲν παρατηροῦμεν ἀρχὴν καὶ τέλος. Ὅθεν ὁ κύκλος συμβολίζει τὸν Θεόν. Εὐθείας γραμμὰς εἶναι δυνατὸν νὰ σύρωμεν χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο τὸν κανόνα, ἐνῷ κύκλους εἶναι δυνατὸν νὰ γράψωμεν χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο τὸν διαβήτην. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ κόσμῳ ὁ ἄνθρωπος παρατηρεῖ ἢ διαισθάνεται δύο τινα, πρῶτον τὸν Θεῖον Δημιουργὸν καὶ δεύτερον τὸ δημιούργημα τούτου, τὸν κόσμον, ἐκεῖνα τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα θεωροῦνται ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι παραδεκτὴν λύσιν, ὅταν πρὸς λύσιν τούτων χρησιμοποιῶνται ὁ κύκλος, τὸ σύμβολον τοῦ Θείου, καὶ ὁ κανών, τὸ σύμβολον τοῦ γεννωμένου καὶ φθειρομένου, τοῦ δημιουργουμένου καὶ καταστρεφομένου. Πάντα τὰ προβλήματα τὰ γεωμετρικὰ τὰ μὴ λυόμενα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κανόνος ἢ διαβήτου ἢ καὶ τῶν δύο τούτων ὀργάνων θεωροῦνται ἄλυτα. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὰ τρία περίφημα προβλήματα τῆς ἀρχαιότητος ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας καὶ ὁ διπλασιασμός, τοῦ κύβου, τὸ λεγόμενον δήλιον πρόβλημα, ἐθεωροῦντο προβλήματα ἄλυτα. Ταῦτα ὅμως ἐλύθησαν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων δι᾽ εὐθειῶν γραμμῶν καὶ καμπύλων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἦσαν τόξα κύκλου ἢ κύκλοι.

Πρῶτος ὁ Ἀρχιμήδης ἐπέτυχε τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου χρησιμοποιήσας εὐθεῖαν γραμμήν, κύκλον καὶ τὴν ἕλικα, ἥτις λέγεται ὑπὸ τῶν μεταγενεστέρων ἕλιξ τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὴν γραμμὴν ταύτην ἐρευνᾷ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς συναφῆ πραγματείαν του, ἥτις περιλαμβάνει 28 θεωρήματα. Τὸ κυκλοτρόνιον, τὸ λεπτότατον ὄργανον, τὸ ὁποῖον μέχρι τοῦδε κατεσκευάσθη ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον, ἀποτελούμενον ἐκ 2000 περίπου τεμαχίων καὶ χρησιμοποιούμενον εἰς πειράματα κατὰ τὴν διάσπασιν τοῦ ἀτόμου, ἔχει ὡς βάσιν τῆς λειτουργίας του τὴν ἕλικα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπερβολή, γραμμὴ χρησιμοποιουμένη διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μάζης τοῦ ἠλεκτρονίου, εἶναι μία ἐκ τῶν τριῶν κωνικῶν λεγομένων γραμμῶν (αἱ ἄλλαι εἶναι ἡ ἔλλειψις καὶ ἡ παραβολή), αἱ ὁποῖαι ἐμελετήθησαν ὑπὸ τῶν πρώτων Πυθαγορείων κατὰ τὸ 500 π.Χ. Ἔκτοτε δὲ ἐσπουδάσθησαν αὗται τελείως κατὰ τὴν ἀρχαιότητα καὶ εὐτυχῶς αἱ ἀθάνατοι συναφεῖς ἐργασίαι τοῦ Ἀπολλωνίου ἐσώθησαν κατὰ τὸ πλεῖστον μέρος. Σημειωτέον ὅτι αἱ τροχιαὶ τῶν κομητῶν εἶναι παραβολαὶ καὶ αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐλλείψεις. Ἡ ἔρευνα τῶν σχημάτων τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ Θείου Δημιουργοῦ κατὰ τὴν διαμόρφωσιν τοῦ κόσμου ἀπαιτεῖ καὶ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ μέτρου, τὴν σπουδὴν δηλαδὴ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. Διότι εἰς τὰ σχήματα παρατηροῦνται σχέσεις αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται δι᾽ ἀριθμῶν. Ἀλλὰ πλὴν τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μέτρου ὁ ἄνθρωπος, οἱ Ἕλληνες δηλαδή, παρετήρησαν ὅτι καὶ ἄλλαι ἀρχαὶ ὑπάρχουσιν ἢ ἐφαρμόζονται ἐν τῷ κόσμῳ. Αἱ ἀρχαὶ αὗται εἶναι τὸ πεπερασμένον καὶ τὸ ἄπειρον, τὸ συνεχὲς καὶ τὸ ἀσυνεχές, τὸ σύμμετρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον. Πρωτίστως ὅμως τὸ Ἑλληνικὸν πνεῦμα ἀπησχόλησαν τρεῖς σπουδαῖαι ἔννοιαι. Αἱ ἔννοιαι χῶρος, χρόνος, κίνησις. Καὶ αἱ τρεῖς αὗται ἔννοιαι, ἐμελετήθησαν συστηματικῶς ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Διὰ τὸν χρόνον λέγεται συνήθως, ὅτι ἔχομεν ἔννοιαν τούτου ἐκ τῆς κινήσεως. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ κίνησις, δὲν ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ χρόνου. Ἡ κίνησις ὅμως, λέγομεν, εἶναι μεταβολὴ τῆς θέσεως ἐν τῷ χώρῳ ἀντικειμένου τινος. Ὥστε τὸ βασικὸν πρόβλημα εἶναι νὰ ἑρμηνευθῇ ἡ ἔννοια χῶρος. Ἔννοιαν τοῦ χώρου ἔχομεν διὰ τῆς ἐνοράσεως καὶ τῆς ἐποπτείας. Εἰς τὸν χῶρον ἀποδίδομεν τρεῖς διαστάσεις, νοοῦντες τὴν διάστασιν ὡς γραμμὴν εὐθεῖαν, τὴν δὲ εὐθεῖαν γραμμὴν τὴν νοοῦμεν ἀποτελουμένην ἐκ σημείων. Σημεῖον δὲ εἶναι, κατὰ τὸν Εὐκλείδην, πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος. Ἡ γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ἐρευνῶσα τὰς ἰδιότητας τοῦ χώρου. Περὶ τοῦ χώρου ὅμως οὐδὲν γνωρίζομεν. Λέγομεν ὅτι ὁ χῶρος ἀποτελεῖται ἐκ σημείων, τῶν ὁποίων δὲν γνωρίζομεν τὴν ὑπόστασιν. Ἀλλὰ πῶς εἶναι δυνατὸν τὰ σημεῖα νὰ εἶναι ὑπαρκτὰ ἀντικείμενα καὶ νὰ μὴ ἔχωσι μέρος οὐδέν ; Τὸ ὅλον λοιπὸν ἐπιστημονικὸν οἰκοδόμημα τῆς γεωμετρίας στηρίζεται εἰς μίαν ἔννοιαν, εἰς τὴν ἔννοιαν *σημεῖον*, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἱκανοποιητικῶς. Ὅθεν δικαίως ὁ Πλάτων, ὁ θιασώτης καὶ ὁ ὑμνητὴς τῶν μαθηματικῶν, γράφει εἰς τὴν Πολιτείαν : «*Ὧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι ; οὐδεμία, ἦ δ' ὅς*» [533 c.] (ἑρμην. Διότι ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ κάτι ἄγνωστον, διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ τούτου συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ τῶν ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῇ ποτε τοιαύτην συναρμολόγησιν ὡς ἐπιστήμην ; Οὐδεμία, ἀπήντησεν ἐκεῖνος). Κατὰ τὸν Πλάτωνα, πᾶσα ἀνθρωπίνη γνῶσις εἶναι σχετική. Διὰ νὰ ἱδρύσωμεν τὰς ἐπιστήμας, κάμνομεν ὑποθέσεις τινὰς βασικὰς καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων τούτων προχωροῦμεν εἰς τὴν ἔρευναν. Αἱ ὑποθέσεις μας ὅμως αὗται ἔχουσι σχετικὴν ἀξίαν καὶ ὄχι ἀπόλυτον. Ἓν μόνον πρᾶγμα εἶναι ἄνευ ὑποθέσεων, ἀνυπόθετον, ὡς ἔλεγεν ὁ Πλάτων, ὁ Θεός. Περὶ Αὐτοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ὑπόθεσίν τινα. Δὲν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν Θεὸν ὡς ἀντικείμενον, νὰ τοποθετήσωμεν ἡμᾶς ἔξω Τούτου, καὶ νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἔρευναν Αὐτοῦ. Τὸ δημιούργημα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κάμῃ σκέψεις περὶ τοῦ Δημιουργοῦ αὐτοῦ.

ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΝ ΚΑΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟΝ

Κατά τινα τρόπον ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ πεπερασμένου. Εἶναι δύσκολον ὅμως νὰ συλλάβωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου. Ἡ σημερινὴ ἐπιστήμη δέχεται τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, ὡς διετύπωσε ταύτην ὁ Ἀριστοτέλης. Ὁ Ἀριστοτέλης διακρίνει τὸ ἄπειρον εἰς δύο εἴδη. Εἰς ἄπειρον δυνάμει καὶ εἰς ἄπειρον ἐνεργείᾳ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5 . . ., παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τέλος αὐτῶν. Ἡ ἀρίθμησις προχωρεῖ ἐπ' ἄπειρον. Τὸ ἄπειρον τοῦτο εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τὸ ἐνεργείᾳ ἄπειρον καὶ δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἄλλως ὅμως ἔχει τὸ πρᾶγμα μὲ τὸ δυνάμει ἄπειρον.

Τοῦτο ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἐὰν π.χ. θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΒ ἔχουσαν μῆκος δύο μέτρων καὶ λάβωμεν πρῶτον

Γ Δ Ε

Α |————————————|——————|———|———| Β

τὸ ἥμισυ ταύτης, τὸ τμῆμα ΑΓ, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου, δηλ. τὸ τμῆμα ΓΔ, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου, δηλ. τὸ τμῆμα ΔΕ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ, δὲν θὰ ἐξέλθωμεν ποτὲ πέραν τοῦ σημείου Β, ἀλλὰ μετὰ τὰς ἀπείρους λήψεις, κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐν τέλει θὰ ἔχωμεν λάβει ὁλόκληρον τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν ΑΒ τῶν 2 μέτρων. Μαθηματικῶς τὸ πρόβλημα τοῦτο διατυποῦται ὡς ἑξῆς: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμ. προόδου $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, ἰσοῦται μὲ 2. Ἐάν, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης, λαμβάνῃ τις μέρη, ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἐ π' ἄ π ε ι ρ ο ν, ΟΥ ΔΙΕΞΕΙΣΙ ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΝ (δὲν θὰ ἐξέλθῃ τοῦ πεπερασμένου) (Φυσικῆς Ἀκροάσεως Γ' 206 b).

ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΑΣΥΝΕΧΕΣ

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἐννοίας συνεχὲς καὶ ἀσυνεχές, ὁ Λεύκιππος καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Δημόκριτος δέχονται τὴν ὕπαρξιν τῆς ἀσυνεχείας ἐν τῷ Κόσμῳ, ἐν ᾧ ὁ Ἀριστοτέλης ὑποστηρίζει τὴν ὕπαρξιν τῆς συνεχείας. Ἡ θεωρία τοῦ Λευκίππου καὶ Δημοκρίτου, ἡ ἀτομικὴ θεωρία αὐτῶν, εὑρίσκει θιασώτας τοὺς ἐκπροσώπους τῆς σημερινῆς φυσικῆς. Εἰς τὰ μαθηματικὰ ὅμως ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας ἀποτελεῖ βασικὴν ἔννοιαν. Φαίνεται, ὅτι εἰς τὸν κόσμον καὶ αἱ δύο ἔννοιαι αὗται ἔχουσιν ἰσχύν.

ΤΟ ΣΥΜΜΕΤΡΟΝ ΚΑΙ ΤΟ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΝ

Ἐν ᾧ ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τοῦ κύκλου ἐδόθησαν εἰς τὸν ἄνθρωπον ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεως αὐτοῦ ἐπὶ τῆς Γῆς ἐκ τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων καὶ ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ Ἡλίου καὶ τῆς Πανσελήνου, ἡ ἔννοια τοῦ μέτρου ἐγεννήθη, ὅταν ὁ ἄνθρωπος ᾐσθάνθη τὴν ἀνάγκην τῆς συγκρίσεως δύο μεγεθῶν. Τὰ μεγέθη ταῦτα ἦσαν βεβαίως πραγματικὰ ὁμοειδῆ ἀντικείμενα. Διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ὅμως, οἱ Ἕλληνες ἀνήγαγον τὴν ἔννοιαν ταύτην εἰς σπουδαιοτάτην μαθηματικὴν ἔννοιαν. Τὰς ἐννοίας σύμμετρον καὶ ἀσύμμετρον εὑρίσκομεν διατυπουμένας εἰς τὸ Χ Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ὅταν ὑπάρχωσι δύο ἄνισα μεγέθη πρὸς σύγκρισιν καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ, τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου μεγέθους, τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἐὰν μὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπόν τι ἴσον μὲ μηδέν, τὰ μεγέθη λέγονται σύμμετρα, ἐὰν ὅμως οὐδέποτε εὑρίσκεται ὑπόλοιπον μηδέν, ἀλλὰ πάντοτε εὑρίσκεται ὑπόλοιπόν τι, τότε τὰ μεγέθη λέγονται ἀσύμμετρα. Ἔστωσαν π.χ. δύο μεγέθη τὸ Α μεγαλύτερον, τοῦ Β. Ἀφαιρῶ τὸ Β ἀπὸ τοῦ Α ἔστω 3 φοράς. Ἐὰν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, τὰ μεγέθη Α καὶ Β εἶναι σύμμετρα καὶ ἡ σχέσις μεταξὺ αὐτῶν εἶναι 3 : 1. Ἔστω ὅμως ὅτι ἀφοῦ ἀφαιρέσω τὸ Β ἀπὸ τοῦ Α τρεῖς φορὰς μένει ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον βεβαίως εἶναι μικρότερον τοῦ Β. Ἀφαιρῶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἀπὸ τοῦ Β ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν. Ἔστω ὅτι τὸ ἀφαιρῶ 7 φορὰς καὶ κατὰ τὴν ἑβδόμην φορὰν δὲν μένει ὑπόλοιπον. Τότε πάλιν τὰ μεγέθη Α καὶ Β εἶναι σύμμετρα. Ἡ σχέσις ἡ ὁποία ὑπάρχει τώρα μεταξὺ τῶν μεγεθῶν Α καὶ Β εἶναι $3\frac{1}{7}$ πρὸς 1 ἢ $\frac{22}{7} : \frac{7}{7}$.

Ὑπάρχει δηλαδὴ μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ Β κοινόν τι μέτρον τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ Β.

Ἐὰν ὅμως κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας οὐδέποτε μένῃ ὑπόλοιπον, τότε τὰ μεγέθη λέγονται ἀσύμμετρα. Πρῶτος ὅστις ἀνεκάλυψε τοῦτο, πρῶτος ὅστις ἀνεκάλυψε τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, δηλαδὴ τὴν ὕπαρξιν ἐν τῷ κόσμῳ καὶ τῆς ἀσυμμετρίας εἶναι ὁ Πυθαγόρας. Λέγεται ὅτι οὗτος παρετήρησεν ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς διαγωνίου τετραγώνου τινος ἀφαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπόν τι μικρότερον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἔχον διαγώνιον τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ νέου τετραγώνου, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον μικρότερον τῆς πλευρᾶς ταύτης. Τοιαύτη κατασκευὴ δύναται νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον. Τὰ μεγέθη ἄρα διαγώνιος τετραγώνου καὶ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα. Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ Πυθαγόρου κατετάραξε τοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς καὶ πρὸ παντὸς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν καὶ τοὺς μαθητὰς αὐτοῦ. Διότι ὁ Πυθαγόρας ἐδίδασκεν ὅτι ὁ κόσμος εἶναι ἁρμονία, ὅτι παντοῦ ὑπὸ τοῦ Δημιουργοῦ ὑπάρχει τὸ μέτρον καὶ ἡ ἀναλογία. Πρῶτος, ὅστις ἐξήγαγε τοὺς Ἕλληνας μαθηματικοὺς ἐκ τοῦ ἀδιεξόδου, εἰς ὃ περιέπεσαν μετὰ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ Πυθαγόρου, εἶναι ὁ διάσημος ἐκ Κνίδου τῆς Μ. Ἀσίας (ἔναντι τῆς νήσου Κῶ) μαθηματικὸς Εὔδοξος, καθηγητὴς εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος. Τόσον μεγάλη ἦτο ἡ φήμη διὰ τὴν μεγαλοφυΐαν τοῦ μαθηματικοῦ τούτου, ὥστε οὗτος ὠνομάζετο Ἔνδοξος ἀντὶ Εὔδοξος. Δυστυχῶς οὐδὲν ἔργον του ἐσώθη. Ἀναφέρεται ὅμως ὑπὸ σχολιαστοῦ τινος, ὅτι ὁλόκληρον τὸ 5ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι εὕρημα τοῦ Εὐδόξου.

Ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων μαθηματικῶν τῶν τελευταίων δύο αἰώνων ὑποστηρίζεται, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον μὲν ἀνακαλύψει τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὄχι ὅμως τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι κατάκτησις τῶν νεωτέρων. Τοῦτο δὲν εἶναι ἀληθές. Διότι ἡ ἔννοια μέγεθος ἐν πρώτοις εἶναι εὐρυτέρα τῆς ἐννοίας ἀριθμός. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὠνόμαζον ἀριθμοὺς μόνον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ὅταν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἔλεγον μέγεθος ἐνόουν καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν ἀσύμμετροι ἀριθμοί. Μία ἀπόδειξις τοῦ ἰσχυρισμοῦ ἡμῶν τούτου ἔστω ἡ κάτωθι :

Ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Θεαίτητος γράφει τὰ ἑξῆς : «Ὁ παρευρισκόμενος ἐδῶ Θεόδωρος (ὁ Κυρηναῖος μαθηματικὸς) μᾶς ἐδίδασκε περὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν, καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3 καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5, ἀποδεικνύων ὅτι αὗται δὲν εἶναι σύμμετροι πρὸς τὰς ὑπορρίζους ποσότητας καὶ ἐσυνέχισεν οὕτω τὰς ἀποδείξεις μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ

17. Εἰς αὐτὴν δὲ ἐσταμάτησε. *[Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο]* (147 d). Οἱ μνημονευθέντες ἀνωτέρω μαθηματικοὶ ἑρμηνεύουσι τὸ ἀνωτέρω χωρίον ὡς ἑξῆς: «Ὁ παρευρισκόμενος ἐδῶ Θεόδωρος μᾶς ἐδίδασκε περὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3 καὶ περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 5 ἀποδεικνύων ὅτι τὸ μέγεθος $\sqrt{3}$ καὶ τὸ μέγεθος $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μεγέθη 3 καὶ 5 ἀντιστοίχως καὶ ἐσυνέχισεν οὕτω τὰς ἀποδείξεις μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ μεγέθους 17. Εἰς αὐτὴν δὲ ἐσταμάτησε». Ἀντιλαμβάνεταί τις εὐκόλως ὅτι ἡ ἑρμηνεία των αὕτη δὲν εἶναι ὀρθή. Τὸ νὰ τονισθῇ ὅτι ἡμεῖς σήμερον ἔχομεν ἄλλην, διάφορον ἐν πολλοῖς μαθηματικὴν ὁρολογίαν ἢ οἱ ἀρχαῖοι καὶ διάφορον μαθηματικὸν συμβολισμόν, εἶναι ὀρθόν. Ἡ θεωρία ὅμως τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ὑπάρχει καὶ δὲν εἶναι κατάκτησις τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία βεβαίως ἔχει σημειώσει ἀρκετὰς προόδους εἰς ἄλλους τομεῖς. Ἀνεφέρθη ἀνωτέρω, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον νὰ εὑρίσκωσι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ Εἰς τὴν πρόοδον αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου. Εἰς ὅλα τὰ βιβλία τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἀπαντᾶται ἡ πρόοδος αὕτη ὡς τὸ πρῶτον παράδειγμα. Ἀλλὰ καὶ ἄλλα πράγματα ἐγνώριζον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τὰ ὁποῖα οἱ νεώτεροι θεωροῦσιν ὡς σύγχρονον κατάκτησιν. Ἐγνώριζον παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ ἀποτελεῖ τὸ φράγμα δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς φθινούσης καὶ μιᾶς αὐξανομένης. Τυχαίως ὅλως πληροφορούμεθα περὶ αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου (2ος αἰὼν) καὶ τοῦ Πρόκλου (5ος αἰών), οἱ ὁποῖοι τὰ μνημονεύουσι εἰς τὰ σχόλια αὐτῶν εἰς στρυφνὴν μαθηματικὴν πρότασιν περιεχομένην εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος. Ἰδοὺ λοιπὸν ἐν συντομίᾳ ὁ τρόπος ἐγκιβωτισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν δύο ἀκολουθιῶν. Σχηματίζομεν δύο στήλας ἀριθμῶν, τὴν μίαν ἀριστερὰ καὶ τὴν ἄλλην δεξιά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ διὰ τὰς δύο στήλας. Οὕτως ἔχομεν εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 1. Ἀθροίζοντες τοὺς δύο αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἔχομεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῆς πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης ἴσον μὲ 2. Διπλασιάζοντες ὅμως τὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀριθμὸν (τὸν 1) καὶ προσθέτοντες εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὸν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμὸν (τὸν 1) λαμβάνομεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν:

1.	1	1
2.	$1+1=2$	$2\cdot 1+1=3$
3.	$2+3=5$	$2\cdot 2+3=7$
4.	$5+7=12$	$2\cdot 5+7=17$
5.	$12+17=29$	$2\cdot 12+17=41$
6.	$29+41=70$	$2\cdot 29+41=99$
7.	$70+99=169$	$2\cdot 70+99=239$
8.	$169+239=408$	$2\cdot 169+239=577$, κλπ.

Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀριθμῶν τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς τῆς πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης, θὰ εἶναι :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\ldots. \\ \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169}, & \frac{577}{408}\ldots. \end{array}$$

Ἐκ τῶν λόγων τούτων οἱ περιττῆς τάξεως (δηλ. οἱ 1, 3, 5, 7 . . .) βαίνουσιν αὐξανόμενοι καὶ οὐδέποτε εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερβῶσι τὴν $\sqrt{2}$, ἐνῷ οἱ λόγοι ἀρτίας τάξεως βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἀλλ᾽ οὐδέποτε εἶναι δυνατὸν νὰ κατέλθωσι κάτω τῆς $\sqrt{2}$, ἤτοι εἶναι

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$$

Καταπληκτικὴ εἶναι ἡ εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον ἀποδιδομένη ἀνακάλυψις, καθ᾽ ἣν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἀπείρων μουσικῶν ἀναλογιῶν, ἤτοι διὰ τοῦ σχηματισμοῦ δύο ἀκολουθιῶν μιᾶς φθινούσης, τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, καὶ μιᾶς αὐξανομένης, τῶν ἁρμονικῶν μέσων [1]. Ἀλλά, φαίνεται, διὰ τὸν Ἀρχύταν δὲν ἦτο δύσκολον νὰ εὑρεθῇ τὸ πρᾶγμα τοῦτο, ἀφοῦ ὁ Ἀρχύτας εἶχε κατασκευάσει περιστεράν, ἡ ὁποία ἵπτατο. Δυστυχῶς οὐδὲν ἄλλο γνωρίζομεν περὶ τῆς περιστερᾶς αὐτῆς. Καὶ ἐπειδὴ ἐγένετο προηγουμένως λόγος περὶ μουσικῶν ἀναλογιῶν δὲν θεωροῦμεν περιττὸν ν᾽ ἀναφέρωμεν ἐνταῦθα, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος καθωρίσθη ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6:8=9:12$, ἐκ τῆς ὁποίας κατασκευάζεται ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ. Εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς γνώμης αὐτῆς κατελήξαμεν ἐκ τῆς σπουδῆς τοῦ μνημονευθέντος ἀνωτέρω χωρίου τοῦ Πλατωνικοῦ διαλόγου Θεαίτητος.

Τόμοι ὁλόκληροι ἔχουσι γραφῇ κατὰ τὰ τελευταῖα περίπου 1600 ἔτη διὰ νὰ δειχθῇ πῶς ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . $\sqrt{17}$ εἶναι ἀσύμμετροι καὶ διατὶ ὁ Πλάτων ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 17. Τὸ θέμα τοῦτο ἀπὸ τοῦ 1945 κατέστη καὶ πάλιν ἐπίκαιρον διὰ τοὺς μεγάλους Εὐρωπαίους μαθηματικοὺς τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν ἱστορίαν τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Συναφὴς ἐργασία κατὰ τὸ 1949 τοῦ διαπρεποῦς καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ζυρίχης καὶ μεγάλου συγχρόνου ἀλγεβριστοῦ κ. B. L. van der Waerden, ἀποσταλεῖσα εἰς ἡμᾶς, κατέστη ἀφορμὴ ὅπως καὶ ἡμεῖς ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ θέμα τοῦτο τοῦ Πλατωνικοῦ διαλόγου. Σχετικὴ ἀνακοίνωσις ἐπὶ τούτου ἐγένετο εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 12 Ἰανουαρίου 1956. Τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνακοινώσεως ἡμῶν ταύτης εἶναι, ὅτι ὁ Πλάτων ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$, διότι θέλει οὕτω νὰ ὑποδηλώσῃ τὴν ἱερότητα, ἣν εἶχε διὰ τοὺς Πυθαγορείους ὁ ἀριθμὸς 17. Εἰς τὴν

---

1) Ἴδε *Ε. Σταμάτη*, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. II, Εἰσαγωγή, Ἔκδ. Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι, 1953.

ἀνωτέρω μουσικὴν ἀναλογίαν $6:8=9:12$, ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι διπλάσιος τοῦ 6, (τὸ ἄνω do τῆς μουσικῆς κλίμακος προέρχεται ἐκ διπλασίου ἀριθμοῦ παλμικῶν κινήσεων ἢ τὸ κάτω do) ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ 6 καὶ 12 $\left(\text{ἤτοι } 8=\dfrac{2\,.\,6\,.\,12}{6+12}\right)$ καὶ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12 $\left(\text{ἤτοι } 9=\dfrac{6+12}{2}\right)$. Ὁ λόγος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 διὰ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8 ἤτοι τὸ κλάσμα $\dfrac{9}{8}$ ἀποτελεῖ τὸν τόνον τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 9 εἶναι 17, ὁ ἀριθμὸς δηλ. εἰς τὸν ὁποῖον ὁ Πλάτων ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ. Κατωτέρω παραθέτομεν ἁπλοῦν τρόπον κατασκευῆς τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος. Ἐν πρώτοις διαιροῦμεν τοὺς ὅρους τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6:8=9:12$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6 (ἁπλοποιοῦμεν δηλ. ταύτην), ὁπότε λαμβάνομεν $1:\dfrac{4}{3}=\dfrac{3}{2}:2$.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν 1 ἐπὶ $\dfrac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $=\dfrac{9}{8}$.

Τὸ $\dfrac{9}{8}$ τοῦτο τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\dfrac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $=\dfrac{81}{64}$.

Τὸ $\dfrac{3}{2}$ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\dfrac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $=\dfrac{27}{16}$.

Τὸ $\dfrac{27}{16}$ τοῦτο τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\dfrac{9}{8}$ καὶ λαμβάνομεν $=\dfrac{243}{128}$.

Διὰ τῆς ἐργασίας ἡμῶν ταύτης παρενεβάλομεν μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ $\dfrac{4}{3}$ δύο μουσικοὺς φθόγγους καὶ μεταξὺ τοῦ $\dfrac{3}{2}$ καὶ τοῦ 2 ἄλλους δύο. Οὕτω δὲ ἔχομεν τὴν Πυθαγόρειον μουσικὴν κλίμακα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6:8=9:12$ καὶ τοῦ κλάσματος $\dfrac{9}{8}$, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι 17. Αὕτη εἶναι ἡ ἑξῆς: (τοὺς φθόγγους ὀνομάζομεν διὰ τῶν ἰταλικῶν ὀνομάτων).

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\dfrac{9}{8}$	$\dfrac{81}{64}$	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{27}{16}$	$\dfrac{243}{128}$	2.

Ὡς γνωστόν, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐκφράζουσι τὰς σχέσεις τῶν παλμικῶν κινήσεων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἕκαστον φθόγγον. Τὸ ἄνω do π.χ. ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν παλμικῶν κινήσεων ἢ τὸ κάτω do καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμικῶν κινήσεων διὰ τὸν φθόγγον re ἰσοῦται μὲ τὰ $\dfrac{9}{8}$ τῶν παλμικῶν κινήσεων τοῦ κάτω do.

Φρονοῦμεν ὅτι εἶναι λίαν πειστικὴ ἡ παρατήρησις ἡμῶν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος ἐλήφθη ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$, διότι τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τῆς μεγάλης πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 17 ἤτοι εἶναι τοῦτο τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 9 καὶ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου 8, τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας (δηλ. τοῦ 6 καὶ τοῦ 12), ἐνῷ τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τῆς μικρᾶς πλευρᾶς τοῦ Παρθενῶνος εἶναι 8, ἤτοι εἶναι τοῦτο τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων (τῶν 6 καὶ 12) τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας. Εἶναι δὲ $\frac{9}{8}$ (ἐξ οὗ $9+8=17$) ὁ μουσικὸς τόνος, δι᾿ οὗ κατασκευάζεται ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ. Ἄξιον σημειώσεως εἶναι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν συλλαβῶν τοῦ πρώτου στίχου τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου εἶναι 17,

ἄν	δρα	μοι	ἔν	νε	πε	μοῦ	σα	πο	λύ	τρο	πον	ὃς	μά	λα	πολ	λὰ
—	◡	◡	—	◡	◡	—	◡	◡	—	◡	◡	—	◡	◡	—	—
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
									1	2	3	4	5	6	7	8

9=ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12 | 8=ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12.

ΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Ἐκτὸς ἀναγκαίων τινῶν ὁρισμῶν, ὅπως π. χ. διὰ τὴν γεωμετρίαν εἶναι ὁ ὁρισμὸς τοῦ σημείου, τῆς γραμμῆς, τῆς εὐθείας γραμμῆς, τῆς γωνίας, τῆς ἐπιφανείας, τοῦ στερεοῦ κλπ., διὰ τὴν ἵδρυσιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες καθώρισαν προτάσεις τινὰς ἁπλᾶς, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουσιν ἀνάγκην ἀποδείξεως. Δὲν εὑρίσκονται ὅμως εἰς ἀντίθεσιν αἱ προτάσεις αὗται πρὸς τὴν ἐποπτείαν, τὴν ἐνόρασιν καὶ τὴν λογικήν. Τὰς προτάσεις ταύτας ἀκριβῶς λόγῳ τῆς ἁπλότητος αὐτῶν τὰς ὀνομάζουσι κοινὰς ἐννοίας. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ Ι Βιβλίον τῶν Στοιχείων ἀναφέρει ἐννέα τοιαύτας κοινὰς ἐννοίας, τὰς ἑξῆς:

1) Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ ἴσα εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα.
2) Ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα.
3) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα.
4) Ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἴσα, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἄνισα.
5) Τὰ διπλάσια τοῦ αὐτοῦ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.
6) Τὰ ἡμίση τοῦ αὐτοῦ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.
7) Τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾿ ἄλληλα σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.
8) Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους.
9) Δύο εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσαι ἐπ᾿ ἀλλήλας δὲν περιέχουσιν ἐπιφάνειαν.

Εἶναι φανερὸν ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι αἱ ὑπ᾿ ἀριθ. 7 καὶ 9 κοιναὶ ἔννοιαι ἀφορῶσιν εἰδικῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ ὄχι καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διάταξις τῶν 9 κοινῶν ἐννοιῶν, ὡς αὕτη σῴζεται, δὲν εἶναι ὅπως θὰ τὴν εἶχε διατυπώσει ὁ Εὐκλείδης.

Εἰς τὴν γεωμετρίαν ἐπίσης ἀφορῶσιν πέντε ἄλλαι προτάσεις περιεχόμεναι εἰς τὸ Ι Βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται αἰτήματα. Ταῦτα εἶναι :

1) Ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν γραμμήν.

2) Πεπερασμένην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ προεκτείνωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εὐθυγράμμως καὶ ἐπ' ἄπειρον.

3) Μὲ πᾶν κέντρον καὶ πᾶσαν ἀκτῖνα γράφεται κύκλος.

4) Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ὀλλήλας.

5) Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, αἱ δύο εὐθεῖαι προεκτεινόμεναι ἐπ' ἄπειρον συναντῶνται πρὸς ἃ μέρη εἶναι αἱ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν γωνίαι.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀριστοτέλους αἱ ἁπλούσταται τῶν προτάσεων αἱ χρησιμοποιούμεναι διὰ τὴν θεμελίωσιν μιᾶς ἐπιστήμης ὀνομάζονται ἀξιώματα. Μὲ τὸν ἀριστοτέλειον τοῦτον ὅρον οἱ νεώτεροι ὀνομάζουσιν ἀξιώματα τὰς κοινὰς ἐννοίας καὶ τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου.

ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΝ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Εἰς τὸ πρῶτον Βιβλίον ἐξετάζεται τὸ τρίγωνον.

Εἰς τὸ δεύτερον Βιβλίον περιέχονται τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας καὶ συμπληρώσεις εἰς τὸ τρίγωνον. Ἐνταῦθα περιλαμβάνεται καὶ τὸ περίφημον θεώρημα: δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον οὕτως, ὥστε τὸ γινόμενον τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ μικρότερον μέρος αὐτῆς νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μέρους. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος τούτου ἔχουσι κατασκευασθῆ ὅλα τὰ ἀρχαῖα θέατρα τῆς Ἑλλάδος. Κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται θεώρημα τῆς χρυσῆς τομῆς καὶ ἀποδίδεται εἰς τοῦτο μεγάλη μυστικιστικὴ δύναμις.

Εἰς τὸ τρίτον Βιβλίον ἐξετάζεται ὁ κύκλος,

Εἰς τὸ τέταρτον Βιβλίον ἐξετάζεται ἡ ἐγγραφὴ καὶ περιγραφὴ εἰς κύκλον τῶν κανονικῶν πολυγώνων.

Εἰς τὸ πέμπτον Βιβλίον περιέχεται ἡ περίφημος θεωρία τῶν ἀναλογιῶν ἡ ἀποδιδομένη εἰς τὸν Εὔδοξον, ἡ ὁποία ἀφορᾷ κυρίως εἰς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Εἰς τὸ ἕκτον Βιβλίον σπουδάζεται ἡ ὁμοιότης τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ λύονται γεωμετρικῶς αἱ ἐξισώσεις παραβολῆς, ἐλλείψεως καὶ ὑπερβολῆς.

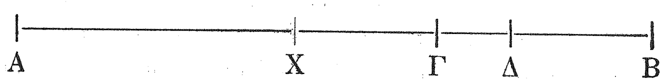
Τὰ Βιβλία 7, 8, 9 περιέχουσι τὰ Στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ δέκατον Βιβλίον περιλαμβάνει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ παρουσιάζει συμμετρίας σχηματιζομένας ἐξ ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Τὸ Βιβλίον τοῦτο εἶναι τὸ τελειότερον, ἀλλὰ καὶ τὸ δυσκολώτερον ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τόσον δύσκολον εἶναι, ὥστε Εὐρωπαῖοί τινες μαθηματικοὶ τοῦ 18ου αἰῶνος τὸ ὠνόμαζον «*Ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν*».

Τὰ Βιβλία 11, 12, 13 περιέχουσι τὴν Στερεομετρίαν. Ἐπιστέγασμα τῶν 13 Βιβλίων τῶν Στοιχείων εἶναι ὅτι εἰς τὴν σφαῖραν μόνον τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῶσι: τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, τὸ εἰκοσάεδρον, ὁ κῦβος, τὸ δωδεκάεδρον καὶ μόνον αὐτά. Κατὰ τοὺς Πυθαγορείους (ἴδε καὶ Πλάτωνος Τίμαιος 53 c), τὸ τετράεδρον συμβολίζει τὸ πῦρ, τὸ ὀκτάεδρον τὸν ἀέρα, τὸ εἰκοσάεδρον τὸ ὕδωρ, ὁ κῦβος τὴν γῆν. Κατὰ τοὺς μεταγενεστέρους Πυθαγορείους τὸ δωδεκάεδρον συμβολίζει τὸν Δημιουργόν. Σημειωτέον ὅτι κατὰ τὸν Ἐμπεδοκλέα τὸ Σύμπαν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων στοιχείων : πυρός, ἀέρος, ὕδατος, γῆς, (πιθανῶς ἐννοεῖ τὴν ἐνέργειαν καὶ τὰς τρεῖς καταστάσεις τῶν σωμάτων δηλ. τὴν στερεάν, τὴν ὑγρὰν καὶ τὴν ἀερίαν).

Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΩΝ ΑΡΧΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὰ τέλη τοῦ 5ου αἰῶνος π.Χ. ὁ μαθητὴς τοῦ Παρμενίδου Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἤσκησε δριμυτάτην κριτικὴν τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Δυστυχῶς ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ἐσώθησαν. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὸ περιστατικὸν τοῦ Ἀχιλλέως καὶ τῆς Χελώνης, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ Ζήνων θέλει νὰ δείξῃ ὅτι δὲν ὑπάρχει κίνησις ἢ νὰ ἐλέγξῃ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦσιν οἱ μαθηματικοί.



Εἰς τὴν θέσιν Α εὑρίσκεται ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ εἰς τὴν θέσιν Χ εὑρίσκεται ἡ Χελώνη. Ἀναχωροῦσι καὶ οἱ δύο συγχρόνως. Ἔστω ἡ ἀπόστασις ΑΧ ἴση μὲ ἓν στάδιον καὶ ἡ ταχύτης τοῦ Ἀχιλλέως δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τῆς Χελώνης. Ὁ Ζήνων λέγει, ὅτι ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς εἶναι ἀδύνατον νὰ φθάσῃ τὴν χελώνην. Διότι, ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Χ ἡ χελώνη θὰ εἶναι εἰς τὴν θέσιν Γ, ἐνῷ $\mathrm{X\Gamma} = \frac{1}{12}$ τοῦ ΑΧ. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Γ, ἡ χελώνη θὰ ἔχῃ φθάσει εἰς τὴν θέσιν Δ καὶ θὰ εἶναι $\Gamma\Delta = \frac{1}{12}$ τοῦ ΧΓ, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Πάντοτε ἡ χελώνη θά προηγῆται τοῦ Ἀχιλλέως. Ὁ Ἀριστοτέλης ἀπαντᾷ : «*Ζήνων δὲ παραλογίζεται*». Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Ἀχιλλέως τὸ πρόβλημα ἀπαιτεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ὅπερ ἦτο τότε γνωστόν.

Οἱ νεώτεροι λέγουσιν, ὅτι ὁ Ζήνων ἐγνώριζε τὰ τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἀλλὰ τὸ πρόβλημά του δὲν εἶναι πότε ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, ἀλλὰ π ῶ ς θ ὰ τ ὴ ν φ θ ά σ ῃ, ἀφοῦ θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἔννοια ἄπειρον.

Ἄλλο παράδειγμα κριτικῆς τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀπαντῶμεν εἰς πραγματείαν τοῦ Σέξτου τοῦ Ἐμπειρικοῦ (2ος αἰὼν μ.Χ.). Ὁ Σέξτος γράφει τὰ ἑξῆς :

Ἔστω εἷς κύκλος καὶ διάμετρός τις αὐτοῦ χωρίζουσα τοῦτον εἰς δύο ἡμικύκλια. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἓν καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον, εἰς ποῖον ἡμικύκλιον ἀνήκει ; Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο τότε, τὸ σημεῖον διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐνῷ δὲν ἔχει μέρος κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σημείου. Ἐὰν εἰς οὐδέν, τότε ὁ κύκλος δὲν ἔχει κέντρον, ὅπερ ἄτοπον. Διότι ὁ κύκλος ἔχει κέντρον καὶ κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ κύκλου τοῦτο πρέπει κάπου νὰ μετέβη.

Ἐκτὸς ὅμως τῆς κριτικῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων διὰ τὴν γεωμετρίαν των καὶ ἰδίως τῆς κριτικῆς τοῦ Ζήνωνος, διὰ τῆς ὁποίας οὗτος, ὡς φαίνεται, θέλει νὰ τονίσῃ ὅτι ἡ νοητικὴ ἱκανότης τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος εἶναι πεπερασμένη, ὑπάρχει καὶ νεωτέρα τις κριτικὴ τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας διατυπωθεῖσα ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ κοινωνιολόγου Oswald Spengler. Οὗτος, ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ πρώτου παγκοσμίου πολέμου, εἰς τὸ δίτομον ἔργον αὐτοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ καταστροφὴ τῆς Δύσεως» ἐκδοθὲν κατὰ τὸ 1918 - 1922, εὑρίσκει τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐπιτεθῇ καὶ κατὰ τοῦ Εὐκλείδου. Δὲν θὰ ἐμνημονεύομεν τῆς ἐκδόσεως ταύτης, διότι ἤδη αὕτη ἐν Εὐρώπῃ εἶναι δυσεύρετος. Κατὰ τὸ προπαρελθὸν ὅμως ἔτος ἐξεδόθη τὸ ἔργον τοῦτο ἐν Ἀμερικῇ, καὶ θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ σημειώσωμεν τὰ περὶ τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τοῦ Spengler γραφόμενα, ἅτινα ἔχουσιν ὡς ἑξῆς (σελὶς 118): «Μέχρι τοῦ 18 αἰῶνος λαϊκαὶ εὐκλείδειοι προλήψεις ἐπεσκότισαν τὴν ἔννοιαν τοῦ διαφορικοῦ ἀξιώματος. Μὲ ὁσηνδήποτε προφύλαξιν καὶ ἂν χρησιμοποιήσῃ τις τὴν κατ' ἀρχὰς εὐνόητον ἔννοιαν τοῦ ἀπείρως μικροῦ, αὕτη διατηρεῖ ἴχνη τινὰ τῆς κατὰ τοὺς ἀρχαίους σταθερᾶς ... Τὸ πρῶτον, τὸ βῆμα ἀπὸ τοῦ «ἀπείρως μικροῦ μεγέθους» εἰς τὸ κατώτερον ὅριον παντὸς «πεπερασμένου μεγέθους», ἄγει εἰς τὴν σύλληψιν ἑνὸς μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος κινεῖται κάτωθι παντὸς πεπερασμένου διαφόρου τοῦ μηδενὸς μεγέθους, δὲν ἔχει ἄρα καθ' ἑαυτὸν τὴν παραμικροτέραν χροιὰν μεγέθους». Εἰς τοὺς ἐπαΐοντας τὸ χωρίον τοῦτο τοῦ Spengler προκαλεῖ τὸν γέλωτα. Ἐὰν ὅμως ἔζων ὁ Spengler καὶ ὁ Ὀδυσσεύς, ὁ τελευταῖος οὗτος θὰ προεκάλει διὰ τοῦ χρυσοῦ σκήπτρου του εἰς τὸν Spengler, διὰ τὰς ἀμετροεπείας του, ὡς ἄλλοτε εἰς τὸν Θερσίτην (1), σμώδιγγα αἱματόεσσαν [=αἱματηρὰν μελανιάν, (Ἰλιάδ. Β 267)].

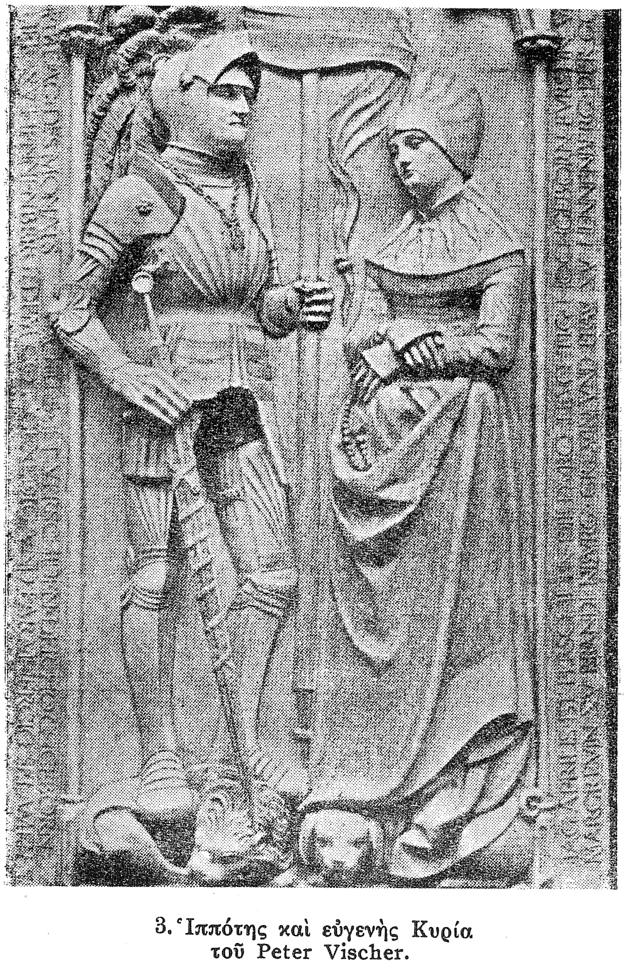
1) Δημαγωγὸς Ἕλλην μετασχὼν τοῦ ἐκστρατευτικοῦ σώματος κατὰ τῆς Τροίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

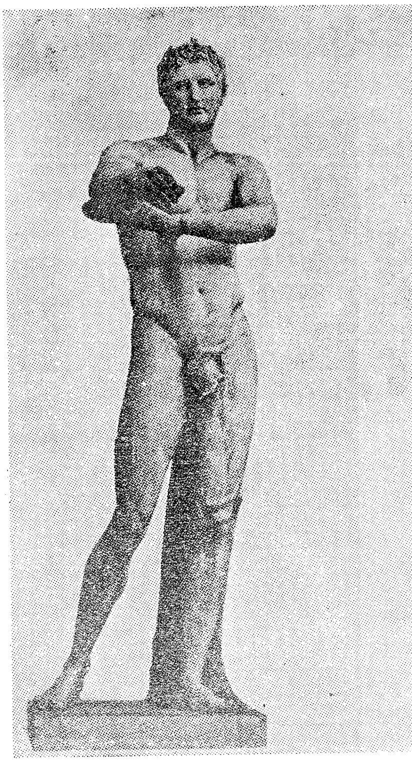
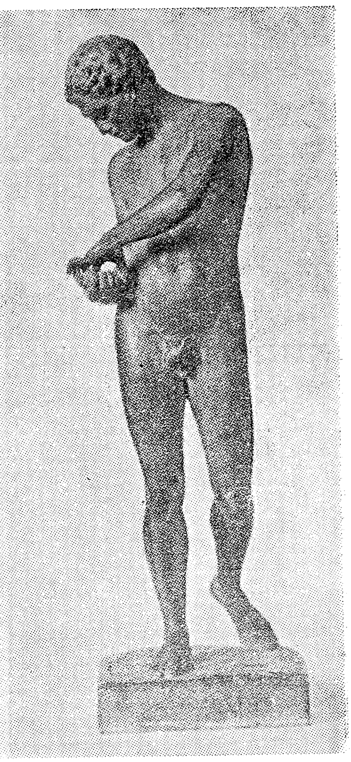
Δὲν εἶναι ὑπερβολὴ ἐὰν λεχθῇ ὅτι τὰ δημιουργήματα τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς ὅλα τὰ πεδία τοῦ ἐπιστητοῦ καὶ συνεπῶς καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἀποδείξεις διαφέρουσιν ἀπὸ ἀπόψεως κάλλους τῶν ἀντιστοίχων δημιουργημάτων τῶν νεωτέρων χρόνων, ὅσον καὶ ἡ Ἑλληνικὴ γλυπτικὴ διαφέρει τῆς νεωτέρας γλυπτικῆς. Κατωτέρω παραθέτομεν εἰκόνας τινὰς ἔργων τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς ἐποχῆς καὶ τῆς τῶν νεωτέρων χρόνων πρὸς σύγκρισιν.

1. Ο Ηνίοχος τῶν Δελφῶν.

2. Ἡ Ἄρτεμις τῶν Γαβίων, πόλεως τῆς Ἰταλίας. Θεωρεῖται ἀντίγραφον τοῦ ἐπὶ τῆς Ἀκροπόλεως ἔργου τοῦ Πραξιτέλους.

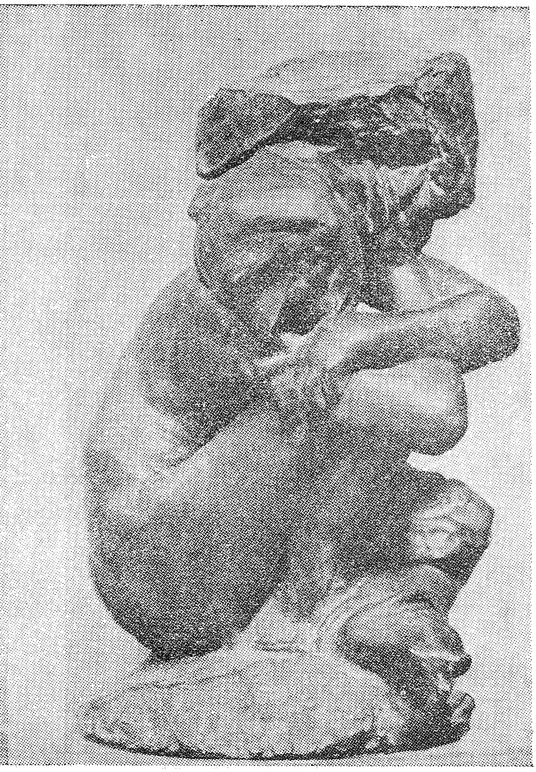


3. Ἱππότης καὶ εὐγενὴς Κυρία
τοῦ Peter Vischer.

4. Ἀθλητὴς ἀποξυόμενος
τοῦ Λυσίππου.

5. Ἀθλητὴς
τοῦ Tait McKenzie.



6. Καρυᾶτις τοῦ Ἐρεχθείου

7. Καρυᾶτις τοῦ Rodin

8. Δημοσθένης
τοῦ Πολυεύκτου

9. Ἀβραὰμ Λίνκολν
τοῦ Barnard

Αἱ εἰκόνες ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ βιβλίου «The Legacy of Greece» (Ἡ κληρονομία τῆς Ἑλλάδος) τοῦ *R. W. Livingstone,* Oxford at the Clarendon Press, 1937.

ΑΠΟΛΕΣΘΕΝΤΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΥ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΟΙ ΤΙΤΛΟΙ ΜΟΝΟΝ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΟΙ

ΗΘΙΚΑ

Πυθαγόρης. Περὶ τῆς τοῦ σοφοῦ διαθέσεως. Περὶ τῶν ἐν Ἅδου. Τριτογένεια (βουλεύεσθαι καλῶς, λέγειν ἀναμαρτήτως, πράττειν ἃ δεῖ). Περὶ ἀνδραγαθίας ἢ περὶ ἀρετῆς. Ἀμαλθείης κέρας. Περὶ εὐθυμίης ἢ εὐεστὼ (περὶ εὐαρέστου συναισθήματος).

ΦΥΣΙΚΑ

Μικρὸς διάκοσμος (Κοσμολογία, ζῳογονία, ἱστορία τοῦ πολιτισμοῦ). Κοσμογραφία. Περὶ τῶν πλανητῶν. Περὶ φύσεως Α'. Περὶ φύσεως Β'. Περὶ νοῦ ἢ περὶ ψυχῆς. Περὶ αἰσθήσεων. Περὶ χυμῶν (περὶ ὑγρῶν). Περὶ χροῶν (περὶ χρωμάτων). Περὶ τῶν διαφερόντων ῥυσμῶν (περὶ διαφόρων ἐκκρίσεων ἢ ῥοῶν). Περὶ ἀμειψιρυσμιῶν [ἀμειψιρυσμεῖν=ἀλλάσσειν τὴν σύγκρισιν (ἕνωσιν ἐξ ἐκκρίσεως) ἢ μεταμορφοῦσθαι] Κρατυντήρια (περὶ δυνάμεων). Περὶ εἰδώλων ἢ περὶ προνοίας (γεωμετρικὴ ὀπτική). Περὶ λογικῶν ἢ Κανὼν Α, Β, Γ. Ἀπορημάτων (Α, Β...).

ΑΣΥΝΤΑΚΤΑ

Αἰτίαι οὐράνιοι (ἀστρονομία). Αἰτίαι ἀέριοι (ἀεροστατικὴ—ἀεροδυναμική). Αἰτίαι ἐπίπεδοι (ἐπιπεδομετρία ;). Αἰτίαι περὶ πυρὸς καὶ τῶν ἐν πυρὶ (θερμότης—θερμοδυναμική). Αἰτίαι περὶ φωνῶν (ἀκουστική). Αἰτίαι περὶ σπερμάτων καὶ φυτῶν καὶ καρπῶν (βιολογία—φυτολογία). Αἰτίαι περὶ ζῴων (ζῳολογία). Αἰτίαι σύμμεικτοι. Περὶ τῆς λίθου (ὀρυκτολογία—πετρογραφία).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης (περὶ ἐπαφῆς κύκλου καὶ σφαίρας). Περὶ γεωμετρίας. Ἀριθμοὶ (θεωρία ἀριθμῶν). Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν (περὶ ἀσυμμέτρων γραμμῶν καὶ στερεῶν Α, Β). Ἐκπετάσματα (προβολὴ σφαίρας εἰς ἐπίπεδον, Diels, Fr. II, σ. 141 τοῦ 1952). Μέγας ἐνιαυτὸς ἢ ἀστρονομίη. Παράπηγμα. (Τὸ ἔτος τοῦτο τοῦ Δημοκρίτου ἀποτελεῖται ἐξ 82 συνήθων ἐτῶν μὲ 28 παρεμβαλλομένους μῆνας. Παράπηγμα=ἀστρονομικὸν ὄργανον). Ἅμιλλα κλεψύδραι (πιθανῶς μελέτη τῆς ἐκροῆς τοῦ ὕδατος). Οὐρανογραφίη (περὶ οὐρανοῦ). Γεωγραφίη. Πολογραφίη. Ἀκτινογραφίη.

ΜΟΥΣΙΚΑ

Περὶ ῥυθμῶν καὶ ἁρμονίας. Περὶ ποιήσιος (ποιήσεως). Περὶ καλλοσύνης ἐπέων (περὶ κάλλους τοῦ λόγου). Περὶ εὐφώνων καὶ δυσφώνων γραμμάτων. Περὶ Ὁμήρου ἢ ὀρθοεπείης καὶ γλώσσεων. Περὶ ἀοιδῆς (ᾄσματος). Περὶ ῥημάτων (ἀπαγγελίας). Ὀνομαστικῶν (γλωσσολογία—ἐτυμολογία).

ΤΕΧΝΙΚΑ

Πρόγνωσις (πιθανῶς μετεωρολογικόν). Περὶ διαίτης ἢ διαιτητικόν. Ἰητρικὴ γνώμη (ἰατρικαὶ συμβουλαί). Αἰτίαι περὶ ἀκαιριῶν καὶ ἐπικαιριῶν (δυναμικὴ μετεωρολογία). Περὶ γεωργίης ἢ γεωργικὸν (γεωργικά). Περὶ ζωγραφικῆς. Τακτικὸν (περὶ τακτικῆς ἐν πολέμῳ). Ὁπλομαχικόν.

ΕΡΓΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Η ΓΝΗΣΙΟΤΗΣ ΑΜΦΙΣΒΗΤΕΙΤΑΙ

Περὶ τῶν ἐν Βαβυλῶνι ἱερῶν γραμμάτων. Περὶ τῶν ἐν Μερόῃ. Ὠκεανοῦ περίπλους. Περὶ ἱστορίης. Χαλδαϊκὸς λόγος. Φρύγιος λόγος. Περὶ πυρετοῦ καὶ τῶν ἀπὸ νόσου βησσόντων (φυματιολογία). Νομικὰ αἴτια. Χερνικὰ ἢ προβλήματα.

[Ἐκ τοῦ Βιβλίου : *H. Diels,* Fragmente der Vorsokratiker, τόμ. II, Berlin, 1952].

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ
ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΙΔΡΥΤΩΝ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΤΩΝ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΟΥΣΙΚΗΣ

Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (ἐγεν. 640 π. Χ.). Μαμέρτιος, ἀδελφὸς τοῦ ποιητοῦ Στησιχόρου. Ἀναξίμανδρος ὁ Μιλήσιος. Ἀναξιμένης ὁ Μιλήσιος. Πυθαγόρας ὁ Σάμιος (καὶ μουσικῆς). Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος. Ἵππασος ὁ Μεταποντῖνος. Θυμαρίδας ὁ ἐκ Πάρου. Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος. Ἀντιφῶν. Βρύσων. Ἀρχέλαος. Δημόκριτος. Σωκράτης. Οἰνοπίδης ὁ Χῖος. Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος. Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος. Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης. Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος. Φιλόλαος. Τίμαιος. Πλάτων. Λεωδάμας ὁ Θάσιος. Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος. Κλεινίας ὁ Ταραντῖνος. Μέτων ὁ Ἀθηναῖος. Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος. Νεοκλείδης. Βούθερος ὁ Κυζικηνός. Κάλλιππος ὁ Κυζικηνός. Λέων. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος. Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης. Ξενοκράτης. Μέναιχμος καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος (ἐκ Πριγκηποννήσου). Περσεύς. Θεύδιος ὁ Μάγνης. Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνός. Ἑλικὼν ὁ Κυζικηνός. Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος. Ἀμφίνομος. Φίλιππος ὁ Μενδαῖος (ἢ Ὀπούντιος). Σπεύσιππος. Ἀριστοτέλης. Θεόφραστος. Στράτων. Εὔδημος ὁ Ῥόδιος. Δικαίαρχος ὁ Μεσσήνιος. Αὐτόλυκος ἐκ Πιτάνης. Βίων ὁ Ἀβδηρίτης. Ἀριστόθερος.

Εὐκλείδης. Ἄνδρων. Ποσειδώνιος. Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος. Ἀρχιμήδης. Ἐρατοσθένης. Ἡρακλείδης ὁ Ποντικὸς (ἐκ Πόντου). Ἀπολλώνιος. Ἵππαρχος. Κτησίβιος. Ἥρων. Φίλων. Νικόμαχος. Νικομήδης. Διοκλῆς. Ζηνόδωρος. Ὑψικλῆς. Γεμῖνος. Θέων ὁ Σμυρναῖος. Μενέλαος. Κλαύδιος Πτολεμαῖος. Νικομήδης. Διοκλῆς. Πάππος. Διόφαντος. Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς. Ὑπατία (θυγάτηρ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως) † 415 μ. Χ.

ΜΟΥΣΙΚΗΣ

Ὀρφεὺς ἐκ Λειβήθρων Θράκης, περὶ τὸ 1500 π Χ.
Ὄλυμπος (738—695 π.Χ.). Τέρπανδρος 700 π. Χ.
Κράτης. Ἱέραξ ὁ Ἀργεῖος
Θαλήτας ἐκ τῆς Γόρτυνος Κρήτης.
Καλλῖνος ὁ Ἐφέσιος (περὶ τὸ 700 π. Χ.). Ἀρχίλοχος ὁ Πάριος (650 π. Χ.).
Ἀριστόνικος (650 π. Χ.). Ἄσιος ὁ Σάμιος (625 π. Χ.).
Τυρταῖος ὁ Μιλήσιος. Ἀρίων (622—585 π. Χ.).
Ξενόδαμος ἐκ Κυθήρων (620 π. Χ.).
Ξενόκριτος ἐκ Λοκρίδος (620 π. Χ.).
Πολύμναστος ὁ Κολοφώνιος.
Σακάδας ὁ Ἀργεῖος (600 π. Χ.). Σαπφώ. Ἀλκαῖος.
Ἀλκμάν. Φρύνιχος. Πρατίνας ἐκ Φλειοῦντος.
Στησίχορος. Πίνδαρος ἐκ Θηβῶν (522—448 π. Χ.).
Ἀνακρέων. Σιμωνίδης. Πυθοκλῆς (520 π. Χ.). Λᾶσος ὁ Ἑρμιονεύς. Ἀγαθοκλῆς. Μίδας. Σίμος ὁ Ποσειδώνιος. Λαμπροκλῆς (διδάσκαλος Σοφοκλέους). Δράκων (διδάσκαλος Πλάτωνος). Πρόνομος ἐκ Θηβῶν (διδάσκαλος Ἀλκιβιάδου). Μέτελλος ἐξ Ἀκράγαντος (δεύτερος διδάσκαλος Πλάτωνος). Ἀριστόξενος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἀναστασιάδης Ἰωάννης, Μαθήματα Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, τόμ. Ι, Θεσσαλονίκη, 1955.

Βαρόπουλος Θεόδωρος, Γενικὰ Μαθηματικά, Ἀθῆναι, 1949.

Βαρόπουλος Θεόδωρος, Ἀνωτέρα Μαθηματικὴ Ἀνάλυσις, τόμ. Ι, Ἀθῆναι, 1949.

Βαρόπουλος Θεόδωρος, Θεωρία τῶν ἀριθμῶν.

Βασιλείου Φίλων, Μαθήματα ἀνωτέρων μαθηματικῶν, τόμ. Ι, Ἀθῆναι, 1953.

Γεωργούλης Κωνσταντῖνος, Ἡ Ἑλληνικὴ ἐπιστήμη, Ἐγκυκλ. Λεξ. Ἥλιος, Τόμος Ἑλλάς.

Ζερβὸς Παναγιώτης, Ἀπειροστικὸς Λογισμός, τόμ. Ι, Ἀθῆναι, 1949.

Κάππος Δημήτριος, Διαφορικαὶ ἐξισώσεις, Ἀθῆναι, 1956.

Κριτικὸς Νικόλαος, Στοιχεῖα ἀνωτέρων μαθηματικῶν, τόμ. Ι, Ἀθῆναι, 1953.

Μιχαλόπουλος Νικόλαος, Τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς ἴσα μέρη, Ἀθῆναι, 1950.

Μιχαλόπουλος Νικόλαος, Συμβολὴ εἰς τὴν μεθοδικὴν τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν, Ἀθῆναι 1950.

Μιχαλόπουλος Νικόλαος, Μαθηματικὰ θέματα, τόμοι Α—Β, ἔκδ. Σωτηρ. Δ. Σπυροπούλου, Ἀθῆναι, 1956.

Michel, Paul - Henri, De Pythagore à Euclide. Paris, 1950.

Μπρίκας Μαυρίκιος, Γενικὰ Μαθηματικά.

Μπρίκας Μαυρίκιος, Στατιστική.

Μπρίκας Μαυρίκιος, Λογισμὸς Πιθανοτήτων.

Ξανθάκης Ἰωάννης, Ἀστρονομία, τόμ. Ι, Θεσσαλονίκη, 1955.

Ξανθάκης Ἰωάννης, Ἀστρονομία, ΙΙ (Οὐράνιος Μηχανική).

Ξανθάκης Ἰωάννης, Ἀστρονομία, ΙΙΙα (Γῆ, Σελήνη, Ἥλιος).

Ξανθάκης Ἰωάννης, Ἀστρονομία, IV, (Ἀστρικὴ Ἀστρονομία).

Ξανθάκης Ἰωάννης, Λογισμὸς Πιθανοτήτων.

Ξανθάκης Ἰωάννης, Μαθήματα Γενικῶν Μαθηματικῶν

Παπαϊωάννου Κωνσταντῖνος, Μηχανική, τόμ., Ι.

Παπαϊωάννου Κωνσταντῖνος, Μηχανική, Τόμ. ΙΙ. Ἀθῆναι, 1954.

Παπαναστασίου Χρῖστος, Μεθοδολογία τῶν μαθηματικῶν καὶ φυσικῶν ἐπιστημῶν, Ἀθῆναι, 1947·

Πλακίδης Σταῦρος, Ὁ Γαλαξίας καὶ ἡ σχέσις αὐτοῦ πρὸς τὸ Σύμπαν.

Πυλαρινὸς Ὄθων, Διαφορικὴ Γεωμετρία.

Πυλαρινὸς Ὄθων, Θεωρία Ἐπιφανειῶν.

Σαραντόπουλος Σπυρίδων, Διαφορικὸς Λογισμός, Ἀθῆναι, 1956.

Simon M., Geschichte der Mathematik im Altertum, 1909, Berlin.

Στεφανίδης Μιχαήλ, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, Ἀθῆναι, 1938.

Στεφανίδης Μιχαήλ, Τὰ μαθηματικὰ τῶν Βυζαντινῶν, 1923, Περιοδικὸν «Ἀθηνᾶ».

Φουσιάνης Χρῖστος, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι, 1954.

Σταμάτης Εὐάγγελος, Ἀρχιμήδους τετραγωνισμὸς παραβολῆς, Ἀθῆναι, 1946.

» Ἀρχιμήδους Μηχανικά, Ἀθῆναι, 1946.

» Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, Ἀθῆναι, 1949.

» Ἀρχιμήδους, Κύκλου μέτρησις, Ἀθῆναι, 1950.

» Εὐκλείδου, Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλ. Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, IV. Τόμ. Ι, Ἀθῆναι, 1952, ἔκδ. Νικ. Σάκκουλα.

» Εὐκλείδου, Γεωμετρία—Θεωρία Ἀριθμῶν, Στοιχείων Βιβλ. V, VI, VII, VIII, IX, Τόμ. ΙΙ, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων (Ὑπουργείου Παιδείας), Ἀθῆναι, 1953.

» Εὐκλείδου, Περὶ Ἀσυμμέτρων, Στοιχείων Βιβλ. Χ, Τόμ. ΙΙΙ, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι, 1956.

» Εὐκλείδου, Στερεομετρία, Στοιχείων Βιβλ. XI, XII, XIII. Τόμ. IV, Ὑπὸ ἐκτύπωσιν, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων (Ὑπουρ. Παιδείας).

῾Ο χάρτης ἐκτυπώσεως τοῦ βιβλίου ἐλήφθη ἐκ τῆς ΑΘΗΝΑΪΚΗΣ ΧΑΡΤΟΠΟΙΪΑΣ, Γ. Α. Γιαννουλᾶτος, Κ. Γ. Κεφάλας καὶ Σια, ᾿Αθῆναι, ὁδὸς Θησέως 10.