ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Α΄, ΜΕΡΟΣ Β΄

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1970

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Α΄, ΜΕΡΟΣ Β΄

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1970

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τὸ ἀρχαῖον κείμενον τοῦ α' τόμου, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τῆς β' ἐκδόσεως I. L. Heiberg 1910, ἔγιναν, ἐκτὸς τῆς διορθώσεως τυπογραφικῶν τινων παροραμάτων, καὶ μερικαὶ διορθώσεις καὶ συμπληρώσεις τὰς ὁποίας ἐκθέτομεν κατωτέρω. Αἱ παρατηρούμεναι ἐλλείψεις ὀφείλονται εἰς τοὺς κατὰ καιροὺς ἀντιγραφεῖς τοῦ κειμένου. Τὰς ἐλλειπούσας ἐκφωνήσεις τῶν θεωρημάτων 23, 28, 36, 39, 41 τῆς πραγματείας Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α' συνετάξαμεν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν οἰκείων ἀποδείξεων εἰς τὴν κοινὴν ἀττικὴν γλῶσσαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν διασωθῇ τὰ θεωρήματα τῆς πραγματείας αὐτῆς. Εἰς τὰ σχήματα τῶν θεωρημάτων 7 καὶ 39 Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α' ἔγινεν ἡ ἐνδεικνυομένη διόρθωσις.

Ἔκδοσις I. L. Heiberg 1910

Σελὶς	4, 17.	Ἀντὶ *ἀπόφασιν* ἐτέθη *ἀπόφανσιν*
»	6, 1.	Ἀντὶ *ΑΞΙΩΜΑΤΑ* ἐτέθη ⟨*ΟΡΟΙ*⟩
»	8, 9.	Ἀντὶ *καὶ τῆς εὐθείας* ἐτέθη *[καὶ τῆς εὐθείας]*
»	18, 3.	Ἀντὶ *ΝΞΟ* ἐτέθη *ΟΝΞ*
»	24, 9.	Μετὰ τὸ *ΑΒΓ* ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*τρίγωνον*⟩
»	52.	Πρὸ τοῦ 1ου στίχου ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*Πόρισμα*⟩
»	52.	Μετὰ τὸν 12ον στίχον ἐτέθη ἡ λέξις ⟨*Πόρισμα*⟩
»	74, 8.	Ἀντὶ *εἰσίν* ἐτέθη *εἰσὶν* ⟨*ἐκεῖνοι*⟩.
»	90.	Μετὰ τὸν 14ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα

καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ κγ' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς :

⟨*Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας*⟩.

Σελὶς 102, 5. Ἀντὶ *ἴσος* ἐτέθη ⟨*ὃς*⟩ *ἴσος*

» 106. Μετὰ τὸν 10ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ κη' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨*Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας*⟩.

Σελὶς 112, 9. Ἀντὶ *ΧΣ* ἐτέθη *ΧΜ*

» 122, 5. Μετὰ τὴν λέξιν *πλευρὰν* ἐτέθη ⟨*πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου*⟩

Σελὶς 124, 1. Μετὰ τὴν λέξιν *περιγεγραμμένου* ἐτέθη ⟨*πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου*⟩

» 126, 17· Μετὰ τὴν λέξιν *περιγεγραμμένον* ἐτέθη ⟨*πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον*⟩

Σελὶς 126, 24. Μετὰ τὴν λέξιν *ἐναλλὰξ* ἐτέθη ⟨*πολλῷ ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον·*⟩

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σελὶς 134. Μετὰ τὸν 17ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ λς' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨*Ἐὰν ἐν τμήματι μεγίστου κύκλου σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον ἐγγραφῇ χωρὶς τῆς βάσεως, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος*⟩.

Σελὶς 138,9. Μετὰ τὴν λέξιν *τμήματι* ἐτέθη ⟨*τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου*⟩

Σελὶς 142. Μετὰ τὸν 25ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ λθ' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨*Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφανείας*⟩.

Σελὶς 150. Μετὰ τὸν 16ον στίχον ἐτέθη ἡ ἐλλείπουσα καὶ ἀνακατασκευασθεῖσα παρ' ἡμῶν ἐκφώνησις τοῦ μα' θεωρήματος ἔχουσα ὡς ἑξῆς:

⟨*Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ*⟩.

Σελὶς 150, 20. Πρὸ τῆς λέξεως *ἀρτιόγωνον* ἐτέθη ⟨*ἰσόπλευρον καὶ*⟩

Σελὶς 152, 4. Μετὰ τὴν λέξιν *κώνῳ* ἐτέθη ⟨*πρὸς τὸ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ*⟩

Σελὶς 160, 25 καὶ 27 Μετὰ τὴν λέξιν *δύο* ἐτέθη ⟨*εὐθεῖαι*⟩

» 162, 14. Μετὰ τὴν λέξιν *μένου* ἐτέθη ⟨*πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου*⟩

Σελὶς 258. Μετὰ τὸν στίχον 18 ἐτέθη ὡς τίτλος ἡ λέξις ⟨*ΟΡΟΙ*⟩

Σελὶς 260. Μετὰ τὸν στίχον 16 ἐτέθη ὡς τίτλος ἡ λέξις ⟨*ΛΗΜΜΑ*⟩

Σελὶς 266, 2. Ἀντὶ *κα γραμμαὶ* ἐτέθη *κα* ⟨*εὐθεῖαι*⟩ *γραμμαὶ*

» 344, 24. Μετὰ τὴν λέξιν *ἄξονα* ἐτέθη ⟨*τὸν αὐτόν*⟩.

» 350, 15. Ἀντὶ *ΔΙ* ἐτέθη *ΔΒ (*)*.

» 350, 23. Ἀντὶ *ΔΙ* ἐτέθη *ΔΒ (*)*

» 398, 28. Μετὰ τὴν λέξιν *ἀφαιρημένους* ἐτέθη ⟨*γνώμονας*⟩

Σελὶς 414, 24. Μετὰ τὴν λέξιν *τετραγώνῳ* ἐτέθη ⟨*τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΧ*⟩

Οἱ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κειμένου μετὰ τὸ γράμμα Η ἀριθμοὶ δηλοῦν τῶν ἀντιστοίχων σελίδων τῆς ἐκδόσεως Heiberg 1910 τὸν πρῶτον στίχον.

Ἔγγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Σεπτέμβριον 1969

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

* S. Heller, Abh. der Bayrischen Akad. d. Wiss. N. Folge 63,1954.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

τοῦ I. L. Heiberg (Opera I 1910)

Τὴν ἔκδοσίν μου τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία ἔγινε κατὰ τὰ ἔτη 1880 καὶ 1881, εἶχον ἐπὶ μακρὸν τὴν ἐπιθυμίαν νὰ ἐπαναλάβω, τόσον διότι εἶχε προστεθῆ νέον κριτικὸν βοήθημα, ἡ ἑρμηνεία τοῦ Γουλιέλμου Μέρμπεκε (Guilelmi de Moerbeka), ἡ ἀνευρεθεῖσα ὑπὸ τοῦ Βαλεντίνου Ῥόζε (Valentino Rose) (Deutsche Literaturzeitung 1884, σελ. 210 κ. ἑ.), ὅσον καὶ διότι κατὰ ὡριμωτέραν κρίσιν ἐνόμιζον, ὅτι θὰ ἦτο δυνατὸν τοῦ νεανικοῦ μου ἐκείνου ἔργου νὰ ἐπανορθώσω τὰ μειονεκτήματα. Δι' ὃ συναινοῦντος τοῦ ἐκδότου, κατὰ τὰ ἔτη 1903 - 1904 ἐν Ῥώμῃ, Ἑνετίᾳ, Μιλάνῳ, Παρισίοις παρέβαλον καὶ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Γουλιέλμου καὶ εἶχον συλλέξει καὶ ἄλλα, τὰ ὁποῖα θὰ ἦσαν ὠφέλιμα εἰς τὴν ἔκδοσιν, ὁπότε παρωτρύνθην εἰς αὐτὴν ὑπὸ τοῦ Χέρμαν Σιαῖνε (Hermann Schöne), ἐκ τοῦ Ἱεροσολυμιτικοῦ κώδικος, τοῦ φέροντος τὸν ἀριθμὸν 355 (ἴδε Παπαδόπουλος Κεραμεύς, Ἱεροσολυμιτικὴ Βιβλιοθήκη IV σελ. 329). Ὅτε ἀντελήφθην ἐκ τῶν τεμαχιδίων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸν κατάλογον, ὅτι ὁ κῶδιξ περιεῖχε τὸν Ἀρχιμήδη μετέβην κατὰ τὸ θέρος τοῦ 1906 εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν διὰ νὰ τὸν ἐξετάσω.

Ἐκεῖ ἀντελήφθην μετὰ μεγίστης ἐκπλήξεως, ὅτι ὁ κῶδιξ περιεῖχε ὄχι μόνον σημαντικὰ μέρη τῶν βιβλίων Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, Κύκλου μέτρησις, Περὶ ἑλίκων, Περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν, ἀλλὰ ἀκόμη καὶ μερικὰ ἄγνωστα (ἴδε Hermes 42 *σελ. 238) οὕτως, ὥστε ἡ νέα ἔκδοσις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους νὰ παρουσιάζεται ὄχι μόνον εὐκταία ἀλλὰ καὶ καθ' ὁλοκληρίαν ἀναγκαία. Τὰ νέα ἐκεῖνα εὑρήματα θὰ περιληφθῶσιν εἰς τὸν δεύτερον τόμον.*

Κατὰ τὴν προπαρασκευὴν τῆς ἐκδόσεως ἐχρησιμοποίησα τὰ ἑξῆς βοηθήματα :

A=κῶδιξ Γεωργίου Βάλλα (Georgii Vallae), ὁ ὁποῖος βεβαίως ἐξηφανίσθη, ἀλλὰ δύναται ἀρκούντως νὰ ἀποκατασταθῇ ἐκ τῶν κωδίκων DEGH.

B=κῶδιξ Ottobonianus, λατινιστὶ 1850, αὐτόγραφος τοῦ Γουλιέλμου Μέρμπεκε, τοῦ ὁποίου ἀκολουθεῖ ἑρμηνεία ἑλληνικὴ κατὰ λέξιν. Τοῦτον παρέβαλον ἐν Ῥώμῃ κατὰ τὸ 1904.

B^2=τοῦ αὐτοῦ κώδικος διόρθωσις τοῦ 15ου αἰῶνος.

B=τοῦ αὐτοῦ κώδικος μέρος παραληφθὲν ἐξ ἄλλου ἑλληνικοῦ κώδικος.*

C=κῶδιξ τοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει Μετοχίου τοῦ Ἁγίου Τάφου ὑπ' ἀριθμ. 355 τοῦ 10ου αἰῶνος. Τοῦτον παρέβαλον ἐν μέρει ἐν Κωνσταντινουπόλει κατὰ τὸ ἔτος 1906, ἐν μέρει δὲ ἐν Haunia ἐκ φωτοτυπίας. Τὸν αὐτὸν κώδικα ἐξήτασα πάλιν κατὰ τὸ 1908. Τὰ ἀβέβαια γράμματα ἔθεσα ἐντὸς παρενθέσεων. (C) σημαίνει ὅτι ὁ κῶδιξ ὑπῆρχε βεβαίως, ἀλλ' ὅτι δὲν ἠδύνατο νὰ ἀναγνωσθῇ, διότι ἐκεῖ μόνον ἐσημείωσα τοῦτο, ὅπου ὑπῆρχε περίπτωσις ἀμφιβολίας.

D=κῶδιξ Λαυρεντιανὸς XXVIII 4, τοῦ 15ου αἰ. Τοῦτον παρέβαλον ἐν Φλωρεντίᾳ κατὰ τὸ ἔτος 1879 καὶ τὸν ἐξήτασα πάλιν κατὰ τὸ 1903.

E=κῶδιξ Μαρκιανὸς 305, τοῦ 15ου αἰ. Τοῦτον ἐξήτασα κατὰ τὸ ἔτος 1879 καὶ 1903.

F=κῶδιξ Παρισινὸς 2359 τοῦ 16ου αἰ.

G=κῶδιξ Παρισινὸς 2360 τοῦ 16ου αἰ.
H=κῶδιξ Παρισινὸς 2361 γεγραμμένος κατὰ τὸ ἔτος 1544.
J=κῶδιξ Παρισινὸς 2362 τοῦ 16ου αἰ.

Τοὺς Παρισινοὺς κώδικας, περὶ τῶν ὁποίων ἐξέθεσα εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν, ὤφειλον εἰς τὸν Ἐρρῖκον Λεμπὲκ (Henrico Lebègue), ἐξήτασα δὲ ἐν Παρισίοις κατὰ τὸ 1903.

Περὶ τούτων καὶ τῶν λοιπῶν κωδίκων παρέχεται εἰς τὰ προλεγόμενα τοῦ τρίτου τόμου πλουσιωτέρα ἔκθεσις.

Τὰ λοιπὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποίησα εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

Basil.=πρωταρχικὴ ἔκδοσις ἐν Βασιλείᾳ 1544 εἰς φύλλα, μεθ᾽ ἑρμηνείας τοῦ Ἰακώβου ἐκ Κρεμόνας (Jacobi Cremonensis).

Ζητήματα Ἀρχιμήδεια, ἐξέδωκεν ὁ I. L. Heiberg ἐν Κοπεγχάγῃ 1879 (Quaestiones Archimedeae).

ZMP=Περιοδικὸν διὰ Μαθηματικὰ καὶ Φυσικήν, Τμῆμα Ἱστορικοφιλολογικόν.

NJS=Νέαι Ἐπετηρίδες διὰ Φιλολογίαν καὶ Παιδαγωγικά, τόμος συμπληρωματικός.

Ἔργα λογίων ἀνδρῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἤντλησα πρὸς διόρθωσιν εἴτε πρὸς ἑρμηνείαν λέξεων τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

Rivaltus=Ἔργα Ἀρχιμήδους. Παρίσιοι 1615, εἰς φύλλα.

Torellius=Ἔργα Ἀρχιμήδους. Ὀξφόρδη 1792, εἰς φύλλα.

Commandinus=Ἀρχιμήδους ἔργα, ἐκ τῶν ὁποίων μερικὰ λατινιστί. Ἑνετία 1588, εἰς φύλλα.

Wallis=Ἀρχιμήδους Ψαμμίτης καὶ Κύκλου μέτρησις Ὀξφ. 1678.8 καὶ Ἔργα Ἀρχιμήδους, τόμος III σελ. 509 καὶ ἑξῆς.

Sturm=Τοῦ ἀσυγκρίτου Ἀρχιμήδους ἐπιστημονικὰ συγ-

γράμματα μετεφρασμένα καὶ μετ' ἐπεξηγήσεων. Νυρεμβέργη 1670, εἰς φύλλα.

Barrowius="Εργα 'Αρχιμήδους, μέθοδος νέα μετὰ σχημάτων καὶ ἀποδείξεων. Λονδῖνον 1675. 4.

Hauber='Αρχιμήδους Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ Κύκλου μέτρησις, μετάφρασις μετὰ παρατηρήσεων. Tübingen 1798. 8.

Gutenäcker='Αρχιμήδους Κύκλου μέτρησις, ἑλληνιστὶ καὶ γερμανιστί, Βύρτσμπουργκ 1828. 8.

Nizze='Αρχιμήδους σωζόμενα ἔργα, μετὰ μεταφράσεως καὶ ἐπεξηγήσεων. Stralsund 1824. 4.

Censor Ienensis ('Ιένα) = ἀνὴρ λόγιος ἄγνωστος, ὅστις ἔγραψε κριτικὴν περὶ τῆς ἐκδόσεως τοῦ Τορέλλι εἰς τὴν 'Ιεναίαν Φιλολογικὴν 'Εφημερίδα 1795, ἀριθ. 172 - 173 σ. 610 - 623.

Wurm=Τοῦ Φρ. Βοὺρμ κριτικὴ τῆς ἐκδόσεως 'Ιωάννου Γκουτεναῖκερ, 'Επετηρίδες XIV σελ. 175 - 185.

Ahrens=Περὶ τῶν διαλέκτων τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης, II. Göttingen 1843.

Bergk=Πέντε πραγματεῖαι ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς ἑλληνικῆς φιλοσοφίας καὶ ἀστρονομίας. Λειψία 1883 σελ. 141 καὶ ἑξῆς.

Zeuthen='Η θεωρία Περὶ κωνικῶν τομῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. Κοπεγχάγη 1886.

Heath=Τὰ ἔργα τοῦ 'Αρχιμήδους. Καῖμπριτζ 1897.

'Εκτὸς τούτων ἐχρησιμοποίησα πραγματείας τῶν Φρειδερίκου Μπλὰς (Fr. Blass), Θεοδώρου Γκέμπερτς (Th. Goberz) (Συμβολαὶ εἰς τὴν κριτικὴν καὶ ἑρμηνείαν 'Ελλήνων συγγραφέων III σελ. 24), Φρειδερίκου Χούλτς (Fr. Hultsch), τοῦ ὁποίου μερικαὶ διορθώσεις θὰ περιληφθῶσιν εἰς τοὺς οἰκείους τόπους.

Μερικὰς διορθώσεις εἰς τὴν παλαιὰν ἔκδοσιν τῶν 'Αρχιμη-

δείων Ζητημάτων, κεφ. 7 καὶ εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Ψαμμίτου, τὴν προσηρτημένην εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐγκρίνω ἀκόμη, ἐν ᾧ μέρος αὐτῶν τώρα ἀπεδοκίμασα. Εἰς τὸν Εὐτόκιον ἐπεχείρησα νὰ κάμω διορθώσεις τινὰς εἰς τὰς Νέας Ἐπετηρίδας διὰ Φιλολογίαν καὶ Παιδαγωγικά, συμπληρωματικὸς τόμος XI σελ. 375 - 383.

Περὶ τῆς μεταφράσεως (εἰς τὴν λατινικὴν) καὶ περὶ τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιῶ, ἐθεώρησα ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναληφθῶσιν ἐκ τῆς πρώτης ἐκδόσεως τὰ ἀκόλουθα .....

Ἔγραφον ἐν Κοπεγχάγῃ κατ' Ἰανουάριον 1910

I. L. HEIBERG

ΠΙΝΑΞ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Τόμου α΄, μέρους β΄

Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, βιβλίον α΄

Ὁρισμοὶ	6	
Λαμβανόμενα	5	(αἰτήματα - ἀξιώματα)
Θεωρήματα	44	
Πορίσματα	8	
Λήμματα	5	(ἐκφωνήσεις θεωρημάτων XII βιβλίου Στοιχείων Εὐκλείδου)

Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, βιβλίον β΄

Προβλήματα	9
Πόρισμα	1

Κύκλου μέτρησις

Θεωρήματα	3

Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων

Ὁρισμοὶ	2
Λῆμμα	1
Θεωρήματα	32
Πόρισμα	1

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

ΒΙΒΛΙΑ α′, β′

H 2

α´

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ Χαίρειν

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ᾽ ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον· ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. ἔστιν δὲ τάδε· πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος· πρὸς δὲ τούτοις, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμ-
H 4 μένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος, ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία· διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι

1

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Προηγουμένως μὲν σοῦ ἀπέστειλα τὰ ὑπ' ἐμοῦ ἐπινοηθέντα θεωρήματα ἀναγράψας αὐτὰ μετ' ἀποδείξεων, ὅτι πᾶν παραβολικὸν τμῆμα εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τριγώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον· ὕστερον δέ, ὅτε ἀνεκάλυψα ἄξια λόγου θεωρήματα, ἠσχολήθην μὲ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. Εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς· πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς· ἔπειτα δέ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια παντὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ τμήματος· πρὸς τούτοις δέ, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας εἶναι καὶ αὐτὸς τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Αἱ ἰδιότητες δὲ αὗται προϋπῆρχον φυσικῶς εἰς τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοοῦντο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν ἀσχοληθέντων περὶ τὴν γεωμετρίαν, ἐν ᾧ οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶχεν ἐπινοήσει, ὅτι μεταξὺ τῶν σχημάτων τούτων ὑπάρχει συμμετρία· ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου δὲν θὰ ἐδίσταζον ν' ἀντιπαραβάλω τὰ θεωρήματα αὐτὰ καὶ πρὸς τὰ εὑρεθέντα ὑπὸ ἄλλων γεωμετρῶν καὶ πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντα, τὰ θεωρούμενα ὅτι ὑπερέχουσι πολύ, ὅτι δηλ. πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὴν πυραμίδα καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ *καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τούτων προϋπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι. ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα· τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομέν που μάλιστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφανσιν ποιήσασθαι· δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἐρρωμένως.*

Γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

Η 6

⟨ ΟΡΟΙ ⟩

α′. Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

β′. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

γ′. Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸν κῶνον καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι ἐν ᾧ αἱ ἰδιότητες αὗται προϋπῆρχον φυσικῶς εἰς τὰ σχήματα ταῦτα, συνέβαινεν ὥστε νὰ ἀγνοῶνται ὑπὸ πάντων καὶ νὰ μὴ ἐπινοηθῶσιν ὑπ' οὐδενός, ἐν ᾧ πρὸ τοῦ Εὐδόξου ὑπῆρξαν πολλοὶ ἄξιοι λόγου γεωμέτραι. Θ' ἀποφανθῶσι δὲ περὶ πάντων τούτων οἱ δυνάμενοι. Εὐχῆς ἔργον θὰ ἦτο νὰ ἐξεδίδοντο ταῦτα ζῶντος ἔτι τοῦ Κόνωνος· διότι ἐκεῖνον τὸν ἐθεωροῦμεν ἱκανώτατον νὰ κατανοήσῃ ταῦτα καὶ νὰ διατυπώσῃ τὴν ἁρμόζουσαν γνώμην περὶ αὐτῶν· φρονοῦντες δέ, ὅτι ὀρθὸν εἶναι ν' ἀνακοινώσωμεν εἰς τοὺς οἰκείους τὰ θεωρήματα, ἀναγράψαντες σοῦ ἀποστέλλομεν τὰς ἀποδείξεις, περὶ τῶν ὁποίων ἁρμόδιοι ν' ἀποφανθῶσιν εἶναι οἱ ἀσχολούμενοι μὲ τὰ μαθηματικά. Ἐρρωμένως.

Πρῶτον γράφονται καὶ οἱ ὁρισμοὶ καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὑπάρχουσι καμπύλαι τινὲς γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἱ ὁποῖαι ἐν σχέσει πρὸς τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἑνοῦσι τὰ πέρατα αὐτῶν εἶναι ἢ ὅλαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη ἢ οὐδὲν μέρος ἔχουσι πρὸς τὰ ἄλλα μέρη.

2. Πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καλῶ κοίλην ἐκείνην τὴν γραμμήν, εἰς τὴν ὁποίαν, ἀφοῦ ληφθῶσι δύο οἱαδήποτε σημεῖα, ἐὰν αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ὅλαι πίπτουσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς γραμμῆς, ἢ ἄλλαι μὲν πίπτουσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ἄλλαι δὲ ἐπ' αὐτῆς, οὐδεμία δὲ εἰς τὰ ἄλλα μέρη.

3. Ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ πεπερασμέναι τινὲς ἐπιφάνειαι αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἐπίπεδοι, ἔχουσιν ὅμως τὰ πέρατα αὐτῶν ἐν ἐπιπέδῳ, τῶν ὁποίων αἱ γραμμαὶ ἔνθα τὰ πέρατα αὐτῶν ἢ

αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

δʹ. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

εʹ. Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου.

ϛʹ. Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

H 8

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

αʹ. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.

βʹ. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας [καὶ τῆς εὐθείας] τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

γʹ. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον.

εἶναι ὅλαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἢ οὐδὲν μέρος ἔχουσι πρὸς τὰ ἄλλα μέρη.

4. Ἐκείνας δὲ τὰς ἐπιφανείας καλῶ κοίλας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, εἰς τὰς ὁποίας, ἀφοῦ ληφθῶσι δύο σημεῖα, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἢ ὅλαι πίπτουσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας, ἢ ἄλλαι μὲν πρὸς τὰ αὐτά, πρὸς τὰ ἄλλα δὲ μηδεμία.

5. Τομέα δὲ στερεὸν (σφαιρικὸν) καλῶ, ὅταν κῶνος ἔχων τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τέμνῃ αὐτήν, τὸ σχῆμα τὸ ἐμπεριεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἐντὸς τῆς σφαίρας καὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

6. Στερεὸν δὲ ῥόμβον (διπλοῦν κῶνον) καλῶ τὸ ἐκ δύο κώνων στερεὸν σχῆμα τὸ προκῦπτον, ὅταν οἱ δύο κῶνοι ἔχοντες τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχωσι τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐντεῦθεν καὶ ἐκεῖθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα (ὡς ἀξιώματα)·

1. Ἐκ τῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα ἐλαχίστη εἶναι ἡ εὐθεῖα.

2. Ἐκ τῶν ἄλλων δὲ γραμμῶν, ἐὰν εὑρισκόμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον ἔχωσι τὰ αὐτὰ πέρατα, ἄνισοι εἶναι ἐκεῖναι, ὅταν, ἐν ᾧ εἶναι κοῖλαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ἢ ὁλόκληρος ἡ μία περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἄλλης, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα πρὸς αὐτήν, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνηται μέρος δὲ ἔχει κοινόν, καὶ μικροτέρα εἶναι ἡ περιλαμβανομένη.

3. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα, ἐὰν ἔχωσι τὰ πέρατα ἐπὶ ἐπιπέδου, μικροτέρα εἶναι ἡ ἐπίπεδος.

δ'. Τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

ε'. Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

H 10 *Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.*

α'

Ἐὰν περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΒΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΛ περιφερείας διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως δὲ καὶ συναμφότερος μὲν ἡ ΔΓ, ΓΒ

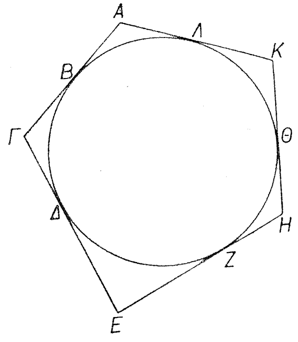
4. Ἐκ τῶν ἄλλων δὲ ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα, ἐὰν τὰ πέρατα εἶναι ἐπὶ ἐπιπέδου, ἄνισοι εἶναι ἐκεῖναι, ὅταν, ἐν ᾧ εἶναι καὶ αἱ δύο πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη κοῖλαι, ἢ ὁλόκληρος ἡ μία περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἄλλης καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τὰ αὐτὰ πέρατα πρὸς αὐτήν, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνηται, μέρος δὲ ἔχῃ κοινόν, καὶ μικροτέρα εἶναι ἡ περιλαμβανομένη.

5. Ἔτι δὲ ἐκ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, ὅτι τὸ μεγαλύτερον ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου κατὰ τοιοῦτον μέγεθος, τὸ ὁποῖον λαμβανόμενον πολλὰς φορὰς εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερέχῃ παντὸς τοῦ ἐκ τῶν δύο δοθέντων μεγεθῶν (ἀξίωμα συνεχείας).

Τούτων δὲ τεθέντων, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ πολύγωνον ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· διότι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ὑπ' αὐτῆς ἀποτεμνομένου τόξου τοῦ κύκλου.

1

Ἐὰν περὶ κύκλον περιγραφῇ πολύγωνον, ἡ περίμετρος τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.



Διότι ἂς περιγραφῇ περὶ κύκλον τὸ ὑποκείμενον πολύγωνον. Λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Διότι ἐπειδὴ ΒΑ + ΑΛ ⟩ τόξου ΒΛ, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ περιλαμβάνει τὸ τόξον ἔχουσα τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ αὐτὸ (ἀξ. 2), ὁμοίως δὲ ΔΓ + ΓΒ⟩

τῆς ΔΒ, συναμφότερος δὲ ἡ ΛΚ, ΚΘ τῆς ΛΘ, συναμφότερος δὲ ἡ ΖΗΘ τῆς ΖΘ, ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

β′

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

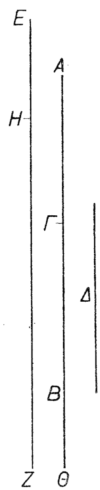
ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Δ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ
H 12 ΑΒ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας.

κείσθω διὰ τὸ β′ τοῦ α′ τῶν Εὐκλείδου τῷ Δ ἴσον τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ· τὸ δὴ ΓΑ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΘ τοῦ ΑΓ, τοσαυταπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΘΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς ΑΘ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστιν τὸ ΑΘ τοῦ Δ, τουτέστι τοῦ ΓΒ, τὸ ἄρα ΓΑ πρὸς τὸ ΑΘ λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΓΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ· ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ· καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ [ἄρα] πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ [διὰ λῆμμα]. ἴσον δὲ τὸ ΒΓ τῷ Δ· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ.

εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ποιοῦσαι τὸ εἰρητόξου ΔΒ, καὶ $\mathrm{\Lambda K + K\Theta} >$ τόξου ΛΘ, καὶ $\mathrm{ZH + H\Theta} >$ τόξου ΖΘ, καὶ ἀκόμη $\mathrm{\Delta E + EZ} >$ τόξου ΔΖ, εἶναι ἄρα ὅλη ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

2.

Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὥστε ἡ μεγαλυτέρα εὐθεῖα πρὸς τὴν μικροτέραν νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον τοῦ λόγου τοῦ μεγαλυτέρου μεγέθους πρὸς τὸ μικρότερον.



Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Δ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΑΒ. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι πληροῦσαι τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα.

Ἂς ληφθῇ κατὰ τὸ β΄ θεώρημα τοῦ α΄ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου $\mathrm{B\Gamma = \Delta}$, καὶ ἂς ληφθῇ τυχοῦσα γραμμὴ ἡ ΖΗ· ὡς γνωστόν, τὸ ΓΑ ἐπαναλαμβανόμενον πολλάκις θὰ ὑπερβῇ τὸ Δ (ἀξ. 5). Ἂς ἐπαναληφθῇ λοιπόν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ, καὶ ὁσαπλάσιον εἶναι τὸ ΑΘ τοῦ ΑΓ, τοσαυταπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ· εἶναι ἄρα ὡς $\mathrm{\Theta A : A\Gamma = ZH : HE}$ (Εὐκλ. V, 15)· καὶ ἀνάπαλιν εἶναι ὡς $\mathrm{EH : HZ = A\Gamma : A\Theta}$ (Εὐκλ. V, 7, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{A\Theta > \Delta}$, τουτέστι τοῦ ΓΒ, εἶναι ἄρα $\mathrm{\Gamma A : A\Theta < \Gamma A : \Gamma B}$ (Εὐκλ. V, 8). Ἀλλὰ $\mathrm{\Gamma A : A\Theta = EH : HZ}$· εἶναι ἄρα $\mathrm{EH : HZ < \Gamma A : \Gamma B}$· καὶ διὰ συνθέσεως [ἄρα] εἶναι $\mathrm{EZ : ZH < AB : B\Gamma}$ [διὰ τὸ λῆμμα]. Εἶναι δὲ $\mathrm{B\Gamma = \Delta}$· εἶναι ἄρα $\mathrm{EZ : ZH < AB : \Delta}$.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι πληροῦσαι τὸ εἰρημένον

μένον ἐπίταγμα [τουτέστιν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον].

γʹ

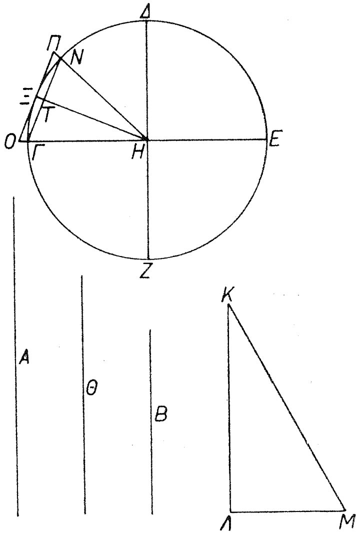
Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον.

H 14 *ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα.*

εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Θ, ΚΛ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Θ, ὥστε τὴν Θ πρὸς τὴν ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΛΚ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ Θ ἴση κατήχθω ἡ ΚΜ [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΕ, ΔΖ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν ΔΗΓ γωνίαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ αἰεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομέν τινα γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΝΗΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΓ· ἡ ἄρα ΝΓ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου [ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΝΗΓ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΔΗΓ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ΝΓ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν ΓΔ τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου· φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο]. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓΗΝ γωνία δίχα τῇ ΗΞ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΗΝΠ, ΗΓΟ· ὥστε καὶ ἡ ΠΟ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἐπίταγμα [τουτέστιν ὁ λόγος τῆς μεγαλυτέρας πρὸς τὴν μικροτέραν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ μεγαλυτέρου μεγέθους πρὸς τὸ μικρότερον].

3

Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων καὶ κύκλου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ πολύγωνον εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλο νὰ περιγραφῇ, ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου μικρότερον ἢ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος πρὸς τὸ μικρότερον.



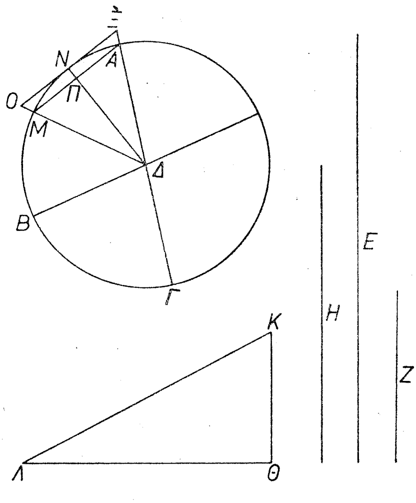
Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. Λέγω λοιπόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ποιηθῇ τὸ ἐπίταγμα.

Διότι ἂς εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ Θ, ΚΛ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ Θ, ὥστε ἡ Θ πρὸς τὴν ΚΛ νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἢ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος πρὸς τὸ μικρότερον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὴν ΛΚ ἡ ΛΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΜ ἴση πρὸς τὴν Θ [διότι τοῦτο εἶναι δυνατόν], καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο διάμετροι τοῦ κύκλου κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΓΕ, ΔΖ. Τέμνοντες λοιπὸν δίχα τὴν γωνίαν ΔΗΓ καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θ' ἀφήσωμεν γωνίαν τινὰ μικροτέραν τῆς 2ΛΚΜ. Ἂς ἀπομείνῃ καὶ ἔστω ἡ ΝΗΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΝΓ·

τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον καὶ ἰσοπλεύρου [φανερόν, ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ΝΓ]. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ΝΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ ΤΗΓ, ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΤΗΓ τῆς
H 16 ὑπὸ ΛΚΜ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Λ, Τ· ἡ ἄρα ΜΚ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΗ τῇ ΗΞ· ὥστε ἡ ΗΞ πρὸς ΗΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ ΠΟ πρὸς ΝΓ, ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· ἔτι δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α πρὸς τὸ Β. καί ἐστιν ἡ μὲν ΠΟ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ ΓΝ τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

δ'

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.



ἔστω γὰρ πάλιν δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ Ε, κύκλος δέ τις ὁ ΑΒΓ κέντρον ἔχων τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τομεὺς συνεστάτω ὁ ΑΔΒ· δεῖ δὴ περιγράψαι καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν εἶναι ἄρα ἡ ΝΓ πλευρὰ πολυγώνου ἰσοπλεύρου [ἐπειδὴ βεβαίως ἡ γωνία ΝΗΓ μετρεῖ τὴν ΔΗΓ, ἡ ὁποία εἶναι ὀρθή, καὶ συνεπῶς τὸ τόξον ΝΓ μετρεῖ τὸ ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τέταρτον κύκλου· ὥστε μετρεῖ καὶ τὸν κύκλον. Εἶναι ἄρα πλευρὰ πολυγώνου ἰσοπλεύρου· διότι τοῦτο εἶναι φανερόν]. Καὶ ἂς τμηθῇ ἡ γωνία ΓΗΝ δίχα διὰ τῆς εὐθείας ΗΞ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἂς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου ἡ ΟΞΠ, καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΗΝΠ, ΗΓΟ· ὥστε καὶ ἡ ΠΟ εἶναι πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου καὶ ἰσοπλεύρου [εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ὁμοίου πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου πλευρὰ εἶναι ἡ ΝΓ]. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΝΗΓ$\langle$2ΛΚΜ, εἶναι δὲ ἡ ΝΗΓ=2ΤΗΓ, εἶναι ἄρα ἡ ΤΗΓ$\langle$ΛΚΜ. Καὶ αἱ ἔχουσαι κορυφὰς τὰ σημεῖα Λ, Τ εἶναι ὀρθαί· εἶναι ἄρα ΜΚ : ΛΚ $\rangle$ ΓΗ : ΗΤ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΞ· ὥστε ΗΞ : ΗΤ, τουτέστιν ἡ ΠΟ : ΝΓ $\langle$ ΜΚ : ΚΛ· ἔτι δὲ εἶναι ΜΚ : ΚΛ $\langle$ Α : Β. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΠΟ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ ΓΝ τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ εὕρωμεν.

4

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων καὶ τομέως εἶναι δυνατὸν νὰ περιγραφῇ περὶ τὸν τομέα πολύγωνον καὶ ἄλλο νὰ ἐγγραφῇ, ὥστε ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου νὰ εἶναι μικρότερος ἢ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος πρὸς τὸ μικρότερον.

Διότι ἔστω πάλιν δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, τῶν ὁποίων ἔστω μεγαλύτερον τὸ Ε, ἔστω δὲ κύκλος τις ὁ ΑΒΓ ἔχων κέντρον τὸ Δ καὶ πρὸς τὸ Δ ἂς κατασκευασθῇ τομεὺς ὁ ΑΔΒ· πρέπει περὶ τὸν τομέα ΑΒΔ νὰ περιγραφῇ καὶ νὰ ἐγγραφῇ πολύγωνον

ΑΒΔ τομέα ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν ΒΔΑ, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα.

εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Η, ΘΚ ἄνισοι καὶ μείζων ἡ Η, ὥστε τὴν Η πρὸς τὴν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ προσβεβλήσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΛ [δυνατὸν γάρ, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Η τῆς ΘΚ]. τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν ΑΔΒ γωνίας δίχα καὶ τῆς ἡμισείας δίχα καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ ΛΚΘ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ ΑΔΜ· ἡ ΑΜ οὖν γίνεται πολυγώνου
Η 18 *πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ ΑΔΜ γωνίαν δίχα τῇ ΔΝ καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ΟΝΞ, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ· καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΑΜ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε μέγεθος πρὸς τὸ Ζ.*

ε′

Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

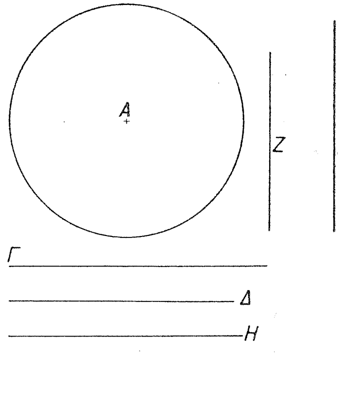
ἐκκείσθω κύκλος ὁ Α καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ καὶ μεῖζον τὸ Ε· δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν.

ἔχον ἴσας τὰς πλευράς, χωρὶς τὰς πλευρὰς ΒΔ, ΔΑ, ἵνα πληρωθῇ τὸ ἐπίταγμα.

Διότι ἂς εὑρεθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ Η, ΘΚ καὶ ἔστω μεγαλυτέρα ἡ Η, ὥστε Η : ΘΚ ⟨ μεγαλύτερον μέγεθος : μικρότερον μέγεθος [διότι τοῦτο εἶναι δυνατόν], καὶ ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον, ἀφοῦ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΘ ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν Η ἴση ἡ ΚΛ [διότι εἶναι δυνατόν, ἐπειδὴ ἡ Η⟩ ΘΚ]. Τεμνομένης λοιπὸν τῆς γωνίας ΑΔΒ δίχα καὶ τῆς ἡμισείας δίχα καὶ ἂν γίνηται τοῦτο πάντοτε θ' ἀπομείνῃ γωνία τις μικροτέρα τῆς 2ΛΚΘ. Ἂς ἀπομείνῃ λοιπὸν ἡ ΑΔΜ· ἡ ΑΜ λοιπὸν γίνεται πλευρὰ πολυγώνου ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. Καὶ ἂν τμήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΔΜ δίχα διὰ τῆς ΔΝ καὶ ἀπὸ τοῦ Ν φέρωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ΟΝΞ, αὕτη θὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ὁμοίου πρὸς τὸ προηγούμενον· καὶ ὁμοίως πρὸς τὰ προαποδειχθέντα εἶναι ΞΟ : ΑΜ ⟨ Ε : Ζ.

5

Δοθέντος κύκλου καὶ δύο ἀνίσων μεγεθῶν νὰ περιγραφῇ περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο νὰ ἐγγραφῇ, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἢ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος πρὸς τὸ μικρότερον.



Ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ Α καὶ δύο ἄνισα μεγέθη τὰ Ε, Ζ καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ Ε· πρέπει λοιπὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο νὰ περιγραφῇ, ἵνα πληρωθῇ τὸ ἐπιταχθέν.

λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς Γ, Δ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Γ, ὥστε τὴν Γ πρὸς τὴν Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Ε πρὸς τὴν Ζ· καὶ τῶν Γ, Δ μέσης ἀνάλογον ληφθείσης τῆς Η μείζων ἄρα καὶ ἡ Γ τῆς Η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Γ πρὸς τὴν Η [καθὼς ἐμάθομεν]· διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν διπλάσιός ἐστι ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον [ὅμοια γάρ], τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Η ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσ-
H 20 σονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

ϛʹ

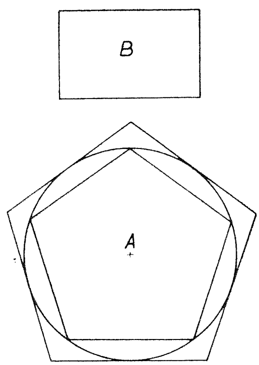
Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστιν περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ

Διότι λαμβάνω δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς Γ, Δ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ Γ, ὥστε Γ : Δ 〈 Ε : Ζ (θ. 2)· καὶ ἀφοῦ ληφθῇ τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογος ἡ Η (Εὐκλ. VI, 13), εἶναι ἄρα καὶ Γ 〉 Η. Ἂς περιγραφῇ λοιπὸν περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἂς ἐγγραφῇ, ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἢ Γ : Η [καθὼς ἐμάθομεν] (θ. 3)· διὰ τοῦτο λοιπὸν καὶ ὁ λόγος εἰς τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου εἰς τὸ τετράγωνον. Καὶ τοῦ μὲν πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν [διότι εἶναι ὅμοια] (Εὐκλ. VI, 20), καὶ Γ : Δ $=$ Γ^2: Η^2 (Εὐκλ. V, ὁρισ. 9, διότι Γ : Η $=$ Η : Δ)· καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἔχει λόγον μικρότερον ἢ ἡ Γ : Δ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ Ε : Ζ.

6

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ τομέως εἶναι δυνατὸν νὰ περιγράψωμεν πολύγωνον περὶ τὸν τομέα καὶ ἄλλο ὅμοιον πρὸς αὐτὸ νὰ ἐγγράψωμεν, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἔχῃ μικρότερον λόγον ἢ τὸ μεγαλύτερον μέγεθος πρὸς τὸ μικρότερον.



Εἶναι δὲ καὶ τοῦτο φανερόν, ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, εἶναι δυνατόν, ἐγγράφοντες εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ὁμοίως πάντοτε, ν' ἀπομείνωσι τμήματά τινα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα *ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδοται.*

Δεικτέον δέ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος ἢ τομέως καὶ χωρίου δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου· ἔσται γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

δεδόσθω κύκλος ὁ Α καὶ χωρίον τι τὸ Β. δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ Β χωρίου· καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ τε χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, H 22 *ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν, οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ Β.*

εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον· ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ Β χωρίου. ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον τοῦ δοθέντος χωρίου· διότι ταῦτα ἔχουσιν ἀποδειχθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα (Εὐκλείδου XII, 2).

Δεικτέον δέ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος ἢ τομέως καὶ χωρίου εἶναι δυνατὸν νὰ περιγραφῆ πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα, ὥστε τ' ἀπομένοντα μετὰ τὴν περιγραφὴν τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ δοθέντος χωρίου· διότι ἀρκεῖ, ἀφοῦ γίνῃ ἡ ἀπόδειξις ἐπὶ τοῦ κύκλου νὰ μεταχθῆ αὐτη καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

Ἂς δοθῆ κύκλος ὁ Α καὶ χωρίον τι τὸ Β. Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τ' ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Β· διότι ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, μεγαλυτέρου μὲν τοῦ ἀθροίσματος τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, μικροτέρου δὲ τοῦ κύκλου, ἂς περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο (ὅμοιον) ἂς ἐγγραφῆ, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἢ τὸ εἰρημένον μεγαλύτερον μέγεθος πρὸς τὸ μικρότερον (θ. 5). Τοῦτο λοιπὸν τὸ περιγραφόμενον πολύγωνον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ κύκλου ἀφίνει τμήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ δοθέντος χωρίου Β.

Διότι ἐὰν τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἔχῃ μικρότερον λόγον ἢ τὸ ἄθροισμα κύκλου καὶ χωρίου πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου εἶναι μεγαλύτερος ὁ κύκλος, κατὰ μείζονα λόγον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ ἄθροισμα κύκλου καὶ χωρίου πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον· καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα τὰ ἀπολείμματα μεταξὺ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ κύκλου ἔχουσι μικρότερον λόγον ἢ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον· εἶναι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου μικρότερα τοῦ χωρίου Β (Εὐκλ. V, 10). Ἢ τοιουτοτρόπως· ἐπειδὴ τὸ περιγραφὲν ἔχει πρὸς τὸν κύκλον μικρότερον *πρὸς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου· ὥστε καὶ ὅλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ Β.*

ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

H 24 *ζʹ*

Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν τὸ ΑΒΓ ⟨τρίγωνον⟩· λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

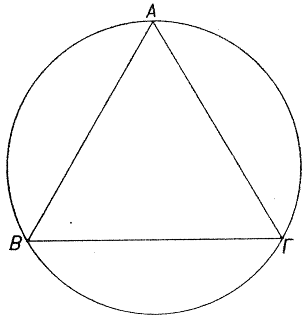
ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὸ εἰρημένον· ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν [τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου].

[σαφέστερον ἄλλως ἡ δεῖξις.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμὶς βάσιν [μὲν] ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΔΒ, λόγον ἢ τὸ ἄθροισμα κύκλου καὶ Β χωρίου πρὸς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο λοιπὸν τὸ περιγραφὲν θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος· ὥστε καὶ ὅλα τ' ἀπομένοντα τμήματα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

7

Ἐὰν εἰς ἰσοσκελῆ κῶνον ἐγγραφῇ πυραμὶς ἔχουσα ἰσόπλευρον βάσιν, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως.



Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν πυραμὶς ἔχουσα ἰσόπλευρον βάσιν τὸ ΑΒΓ ⟨τρίγωνον⟩· λέγω, ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς τὸ εἰρημένον τρίγωνον.

Διότι ἐπειδὴ ὁ κῶνος εἶναι ἰσοσκελής, καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρος, τὰ ὕψη τῶν τριγώνων τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα. Καὶ βάσιν μὲν ἔχουσι τὰ τρίγωνα τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὸ εἰρημένον· ὥστε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν [τουτέστιν εἶναι ἴσα πρὸς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος] (Εὐκλ. VI, 1).

[Σαφέστερον κατ' ἄλλον τρόπον ἡ ἀπόδειξις.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κῶνον πυραμὶς ἔχουσα βάσιν [μὲν] ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, *ΑΔΓ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀγομένη.*

H 26 *ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ· αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἔχον τὴν μὲν ΕΖ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἴσην, τὴν δὲ ΗΘ κάθετον τῇ ΔΛ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΔΛ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ΔΒΓ τριγώνου, ἔστιν δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΚ διπλάσιον τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΓ, ΔΜ διπλάσιον τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τουτέστι τῆς ΕΖ, καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστι τῆς ΗΘ, διπλάσιόν ἐστι τῶν ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ διπλάσιον τοῦ ΕΖΗ τριγώνου· ἴσον ἄρα τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τοῖς ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνοις].*

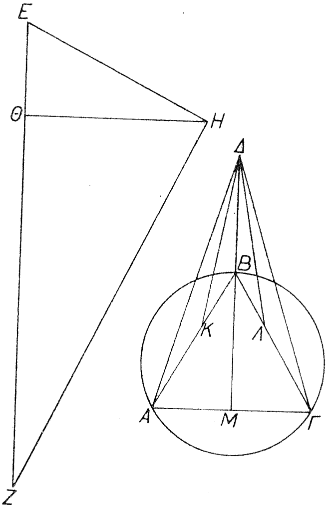
η′

Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελὴ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶν τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

ἔστω κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω, ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι· λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

ἐπεὶ γὰρ [ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν

ΑΔΓ, ΒΔΓ εἶναι ἴσα πρὸς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις μὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ δὲ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ.

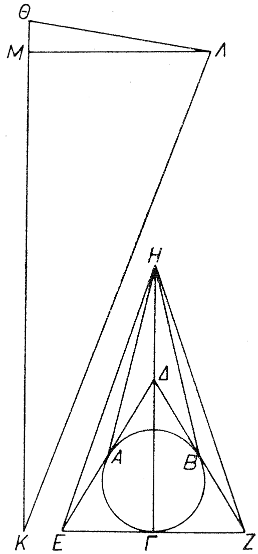


Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ· αὗται ἄρα εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Καὶ ἂς ληφθῇ τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἔχον τὴν μὲν βάσιν ΕΖ ἴσην πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὴν δὲ κάθετον ΗΘ ἴσην πρὸς τὴν ΔΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΒΓ × ΔΛ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, (Εὐκλ. I, 41), εἶναι δὲ καὶ τὸ μὲν ΑΒ × ΔΚ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, τὸ δὲ ΑΓ × ΔΜ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τουτέστι τῆς ΕΖ, καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστι τῆς ΗΘ, εἶναι διπλάσιον τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΕΖ × ΗΘ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΖΗ (Εὐκλ. I, 41)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ].

8

Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ περιγραφῇ πυραμίς, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν περίμετρον τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓ, καὶ *βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ] αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι* H 28 *εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσιν τοῦ κώνου. κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΘΚΛ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον ἴσην τῇ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΔΕ, ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΕΔΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΖ, ΗΒ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΖΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΓΗ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ΕΗΖ τριγώνου,*



ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΘΚ καὶ τῆς ΑΗ, τουτέστι τῆς ΜΛ, διπλάσιον τῶν ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ τριγώνων. ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΛΜ διπλάσιον τοῦ ΛΚΘ τριγώνου· διὰ τοῦτο δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

H 30

θʹ

Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων ἂς περιγραφῇ πυραμίς, ὥστε ἡ βάσις αὐτῆς, τουτέστι τὸ πολύγωνον ΔΕΖ, νὰ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση πρὸς τὸ εἰρημένον τρίγωνον.

Διότι ἐπειδὴ [ὁ ἄξων τοῦ κώνου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, τουτέστιν ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ, καὶ] αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας, θὰ εἶναι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἀγόμεναι εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. Αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἄρα αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· διότι εἶναι πλευραὶ τοῦ κώνου. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΘΚΛ ἔχον τὴν μὲν ΘΚ ἴσην πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, τὴν δὲ κάθετον ΛΜ ἴσην πρὸς τὴν ΗΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ὀρθογώνιον ΔΕ $\times$ ΑΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΔΗ (Εὐκλ. I, 41), τὸ δὲ ΔΖ $\times$ ΗΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΔΖΗ, τὸ δὲ ΕΖ $\times$ ΓΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΗΖ, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΘΚ $\times$ ΑΗ, τουτέστι ΘΚ $\times$ ΜΛ, διπλάσιον τῶν τριγώνων ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΘΚ $\times$ ΛΜ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΛΚΘ (Εὐκλ. I, 41)· διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

9

Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ὅστις εἶναι βάσις ἰσοσκελοῦς τινος κώνου, ἐμπέσῃ εὐθεῖα γραμμή, ἀπὸ δὲ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι γραμμαὶ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ τρίγωνον τὸ αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν.

ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς τῆς μεταξὺ τῶν ΑΔΓ.

τετμήσθω ἡ ΑΒΓ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ· ἔσται δὴ τὰ ΑΒΔ, ΒΓΔ τρίγωνα μείζονα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου. ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἔστω τὸ Θ. τὸ δὴ Θ ἤτοι τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν ἢ οὔ.

ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος καὶ ἡ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ H 32 τοῦ ΓΖΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ Θ χωρίου μείζων ἐστὶ τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ τε ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Θ χωρίον· λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων. τέμνον-περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἀχθεισῶν πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου θὰ εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν πρὸς τὴν κορυφὴν ἀχθεισῶν.

Ἔστω βάσις ἰσοσκελοῦς κώνου ὁ κύκλος ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῇ εἰς αὐτὸν χορδή τις ἡ ΑΓ καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρὸς τὰ σημεῖα Α, Γ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι μικρότερον τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΔΓ.

Ἂς τμηθῇ τὸ τόξον ΑΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Β, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ μεγαλύτερα τοῦ τριγώνου ΑΔΓ. Ὅ,τι λοιπὸν ὑπερέχουσι τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἔστω τὸ Θ. Τὸ Θ λοιπὸν θὰ εἶναι μικρότερον ἢ ὄχι τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ.

Ἔστω πρῶτον ὄχι μικρότερον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο ἐπιφάνειαι καὶ ἡ κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ τμήματος ΑΕΒ καὶ ἡ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ ἔχουσαι τὸ αὐτὸ πέρας τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης (ἀξ. 3)· εἶναι ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ (κυκλ.) τμήματος ΑΕΒ μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τοῦ τμήματος ΓΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν δύο αὐτῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν μετὰ τοῦ χωρίου Θ εἶναι μεγαλύτερον τῶν εἰρημένων τριγώνων. Τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ καὶ τὸ χωρίον Θ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τὸ χωρίον Θ· ἡ λοιπὴ ἄρα κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.

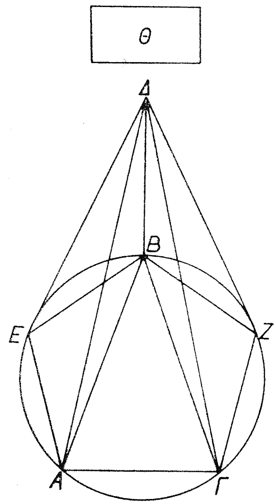
Ἔστω τώρα τὸ Θ μικρότερον τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΒ,

τες δὴ τὰς ΑΒ, ΒΓ περιφερείας δίχα καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΕ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΕ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΕ τριγώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΔΒ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΕΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΕΔΒ τριγώνου· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶν τῶν ΑΔΕ, ΕΒΔ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΒ τρίγωνα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΒΖ, ΖΓ τμημάτων μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μετὰ τῶν
H 34 εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν ΑΒΔ, ΔΒΓ, τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ· ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου· λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

ι′

Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσιν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστιν τῆς

ΒΓ. Τέμνοντες λοιπὸν τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ εἰς τὸ μέσον καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν εἰς τὸ μέσον θ' ἀφήσωμεν τμήματά τινα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Θ. Ἔστω ὅτι ἀπέμειναν τὰ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ ὁριζόμενα κυκλικὰ τμήματα, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ. Πάλιν λοιπὸν κατὰ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΕ μετὰ τοῦ τμήματος ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΑΔΕ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΔΒ μετὰ τοῦ τμήματος ΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΕΔΒ· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν τριγώνων ΑΔΕ, ΕΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΕΔ, ΔΕΒ, εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, καθὼς ἀπεδείχθη, κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΑΔΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τῶν τμημάτων ΒΖ, ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων εἶναι μεγαλυτέρα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΔΒΓ. Ταῦτα δὲ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ καὶ τὸ χωρίον Θ· τῶν ὁποίων τὰ εἰρημένα τμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Θ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.



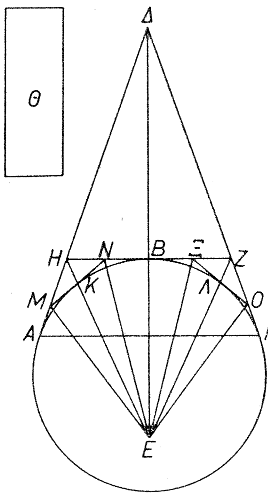
10

Ἐὰν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ κώνου ἐπιφανείας τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν.

ἔστω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου, ὅ ἐστιν κορυφὴ τοῦ κώνου, ἐπὶ τὰ Α, Δ, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΔ, ΕΓ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΓΕ εὐθειῶν καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας.

ἤχθω γὰρ ἡ ΗΒΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ παράλληλος οὖσα τῇ ΑΓ δίχα τμηθείσης τῆς ΑΒΓ περιφερείας κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ζ ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ ΗΔ, ΔΖ τῆς ΗΖ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΓ· ὅλαι ἄρα αἱ ΑΔ, ΔΓ μείζους εἰσὶν τῶν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ πλευραί εἰσιν τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσὶν διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον· ὁ-

H 36 μοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν [ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι] [τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων διπλασιονά ἐστιν τῶν τριγώνων]· μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων [εἰσὶν γὰρ αἱ μὲν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ ἐλάσσους τῶν ΓΔ, ΔΑ, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα] [φανερὸν γάρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτο-



τοῦ κώνου, εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὸν κύκλον καὶ τεμνόμεναι πρὸς ἀλλήλας, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων ἐπαφῆς καὶ τῆς τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὰ σημεῖα τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἀχθεισῶν εὐθειῶν εἶναι μεγαλύτερα τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀπομενούσης κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὸν κύκλον αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι κορυφὴ τοῦ κώνου ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ Α, Δ, Γ αἱ ΕΑ, ΕΔ, ΕΓ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΓΕ καὶ τοῦ τόξου ΑΒΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΗΒΖ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, ἀφοῦ τὸ τόξον ΑΒΓ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ζ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸ Ε αἱ ΗΕ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ $ΗΔ + ΔΖ > ΗΖ$ (Εὐκλ. I, 20), ἂς προστεθῶσιν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αἱ ΗΑ, ΖΓ· τὸ ἄθροισμα ἄρα $ΑΔ + ΔΓ > ΑΗ + ΗΖ + ΖΓ$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ εἶναι πλευραὶ τοῦ κώνου, εἶναι ἴσαι, διότι ὁ κῶνος εἶναι ἰσοσκελής· ὁμοίως δὲ εἶναι καὶ κάθετοι [ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ λῆμμα] [τὰ δὲ ὀρθογώνια ἀποτελοῦνται ἐκ δύο τριγώνων]· εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΕΔ, ΔΕΓ μεγαλύτερα τῶν τριγώνων ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ [διότι αἱ μὲν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ εἶναι μικρότεραι τῶν ΓΔ, ΔΑ, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν εἶναι ἴσα], [διότι εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἀγομένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην]. Ὅ,τι λοιπὸν ὑπερέχουσι τὰ τρίγωνα $ΑΕΔ + ΔΓΕ$ τῶν τριγώνων $ΑΕΗ +$

μένην]. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΓΕ τρίγωνα τῶν ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων, ἔστω τὸ Θ χωρίον. τὸ δὴ Θ χωρίον ἤτοι ἔλαττόν ἐστιν τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ ἀποτμημάτων ἢ οὐκ ἔλαττον.

ἔστω πρότερον μὴ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσιν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ ΗΑΓΖ τραπεζίου κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος, καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου, δῆλον, ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου μείζων ἐστὶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΒΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα· λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. τῶν δὲ ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν H 38 ἐστιν τὸ Θ χωρίον· πολλῷ ἄρα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. ἀλλὰ τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΓΕΖ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα· τὰ ἄρα ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας.

ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων. ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων λείψομέν τινα ἀπολείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου. λελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ Ε. πάλιν δὴ φανερόν, ὅτι τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων ἔσται μεί-

ΗΕΖ + ΖΕΓ, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ χωρίον Θ. Τὸ χωρίον Θ θὰ εἶναι μικρότερον τῶν ἀποτμημάτων ΑΗΒΚ + ΒΖΓΛ ἢ ὄχι μικρότερον.

Ἔστω πρότερον ὄχι μικρότερον (νὰ εἶναι δηλ. ἴσον ἢ μεγαλύτερον). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσιν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, καὶ ἡ τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ τραπέζιον ΗΑΓΖ καὶ κορυφὴν τὸ Ε καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τοῦ τριγώνου ΑΕΓ καὶ τοῦ τμήματος ΑΒΓ, καὶ περατοῦνται αὗται εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος πλὴν τοῦ τριγώνου ΑΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΒΓ (ἀξ. 4). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος τὸ κοινὸν τμῆμα τὸ ΑΒΓ· τὰ ὑπόλοιπα ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τῶν ἀποτμημάτων ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. Τῶν δὲ ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ ἀποτμημάτων δὲν εἶναι μικρότερον τὸ χωρίον Θ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὰ τρίγωνα ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τοῦ Θ θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΗΕ + ΗΕΖ + ΓΕΖ + Θ = τρίγωνα ΑΕΔ + ΔΕΓ· τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΕΔ + ΔΕΓ θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω τώρα τὸ Θ μικρότερον τῶν ἀποτμημάτων. Περιγράφοντες τώρα συνεχῶς πολύγωνα περὶ τὰ κυκλικὰ τμήματα, ἐν ᾧ πάντοτε τέμνομεν εἰς τὸ μέσον τ' ἀπομένοντα τόξα καὶ φέρομεν ἐφαπτομένας θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον ἀποτμήματά τινα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Θ. Ἂς λάβωμεν καὶ ἔστω τὰ ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ ὄντα μικρότερα τοῦ χωρίου Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων εὐθεῖαι πρὸς τὸ Ε· εἶναι πάλιν φανερόν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῶν τριγώνων ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ [διότι

ζονα [αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους καὶ τὸ ὕψος ἴσον]. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ ΑΜΝΞΟΓ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ε, χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα· λοιπὰ ἄρα τὰ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τρίγωνα μετὰ τῶν ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον, τῶν δὲ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ,
H 40 *ΖΕΓ τρίγωνα· πολλῷ ἄρα τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ χωρίου, τουτέστι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα, μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ εὐθειῶν.*

ια´

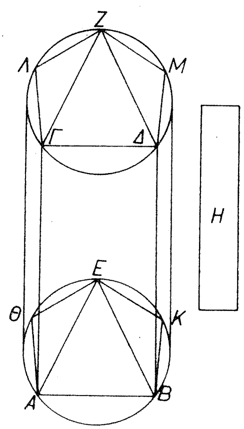
Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν.

ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, ἀπεναντίον δὲ ὁ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ αἱ βάσεις εἶναι μεγαλύτεραι τῶν βάσεων καὶ τὸ ὕψος ἴσον]. Ἀκόμη δὲ καθ' ὅμοιον τρόπον πάλιν ἡ πυραμὶς ἡ ἔχουσα βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΜΝΞΟΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Ε χωρὶς τὸ τρίγωνον ΑΕΓ ἔχει μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν τὴν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ τμήματος ΑΒΓ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τμῆμα τὸ ΑΒΓ· τὰ ὑπόλοιπα ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ μετὰ τῶν ἀποτμημάτων ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. Ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων ἀποτμημάτων εἶναι μεγαλύτερον τὸ χωρίον Θ, τῶν δὲ τριγώνων ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ ἀπεδείχθησαν μεγαλύτερα τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τοῦ χωρίου Θ, τουτέστι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΕΓ.

11

Ἐὰν εἰς ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κυλίνδρου ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν καὶ τῶν ἑνουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν.



Ἔστω ὀρθὸς κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒ ἀπέναντι δὲ αὐτῆς ὁ κύκλος ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΒΔ.

Διότι ἂς τμηθῇ ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒ, ΓΔ εἰς τὸ μέσον *σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ τῆς ΑΒ [διαμέτρου] μείζους εἰσίν, καί ἐστιν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν, μείζονα οὖν ἐστιν τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μείζονά ἐστιν; ἔστω τῷ Η χωρίῳ. τὸ δὴ Η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων ἢ οὐκ ἔλασσον.*

ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ,
H 42 *ΓΖΔ [τρίγωνα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [ἐπίπεδα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαί εἰσιν, μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΕΒ, ΓΖΔ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ τρίγωνα· λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλιν-*

κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΒ (Εὐκλ. Ι, 20), καὶ τὰ ἐπ᾽ αὐτῶν παραλληλόγραμμα εἶναι ἰσοϋψῆ, εἶναι ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, μεγαλύτερα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ (Εὐκλ. VI, 1). Κατὰ τί ἆράγε εἶναι μεγαλύτερα ; Ἔστω κατὰ τὸ χωρίον Η. Τὸ χωρίον λοιπὸν Η θὰ εἶναι ἢ μικρότερον τῶν ἐπιπέδων ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἢ ὄχι μικρότερον.

Ἔστω πρότερον ὄχι μικρότερον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, ΓΖΔ ἔχουσι πέρας τὸ ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΕΒ, ΓΖΔ ἔχουσι πέρας τὸ ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ, καὶ ἡ μία περιλαμβάνει τὴν ἄλλην, καὶ αἱ δύο εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κοῖλαι, εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὰ ἐπίπεδα τμήματα ΑΕΒ, ΓΖΔ τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΓΖΔ (ἀξ. 4). Ἂς ἀφαιρεθῶσι τὰ κοινὰ τρίγωνα τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἡ ἀποτεμνομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ καὶ τὰ ἐπίπεδα τμήματα ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι ἴσα πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ καὶ τὸ χωρίον Η· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἡ ἀποτεμνομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, δρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου.

ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ Η χωρίον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ, H 44 ΓΖ, ΖΔ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ [τῶν δὲ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ τὰ ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ τρίγωνα]. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Η χωρίου. καταλελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθυγράμμων, κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθύγραμμα· λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν H 46 βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις

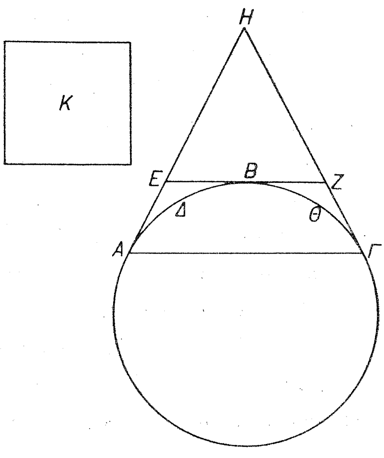
ΒΔ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ χωρίον Η μικρότερον τῶν ἐπιπέδων κυκλικῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἕκαστον τῶν τόξων ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ κατὰ τὰ σημεῖα Θ, Κ, Λ, Μ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ [τῶν ἐπιπέδων ἄρα τμημάτων ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἀφαιρεῖται ὄχι ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ]· ἐὰν λοιπὸν τοῦτο γίνῃ συνεχῶς θ' ἀπομείνωσι τμήματά τινα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Η. Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστω τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὰ ἐπίπεδα τμήματα ΑΕΒ, ΓΖΔ ἔχουσι πέρας τὸ ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν εὐθυγράμμων ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ, ἂς ἀφαιρεθῶσι τὰ κοινὰ εὐθύγραμμα , τὰ ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ· ἡ λοιπὴ ἄρα ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὰ ἐπίπεδα τμήματα ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, εἶναι μεγαλύτερα τῶν παραλληλογράμμων, τῶν *μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ· καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ Η χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ τμήματα τοῦ Η χωρίου ἐλάσσονα, λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου.*

ιβʹ

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσίν τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, οἵ εἰσιν βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι καὶ συμπέσωσιν, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὰ ἐπίπεδα τμήματα ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ εἶναι μεγαλύτερα τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου, εἶναι ἴσα πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ καὶ τὸ χωρίον Η· καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καὶ τὰ ἐπίπεδα τμήματα τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ καὶ τοῦ χωρίου Η. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσι τὰ τμήματα ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Η, ἡ ὑπόλοιπος ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ.

12



Ἐὰν εἰς ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ τινος κυλίνδρου ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναί τινες τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι εἶναι βάσεις τοῦ κυλίνδρου, εὑρισκόμεναι εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων καὶ συμπέσωσιν, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας τοῦ τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου.

ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ
H 48 ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ Α, Γ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου· δεικτέον, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

ἤχθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ σημείων ἤχθωσάν τινες εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου ἕως [τῆς ἐπιφανείας] τῆς ἑτέρας βάσεως· τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΓ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου [ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΗ, ΗΖ τῆς ΕΖ μείζους εἰσίν, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΑΕ, ΖΓ· ὅλαι ἄρα αἱ ΗΑ, ΗΓ μείζους εἰσὶν τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ]. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ Κ χωρίον. τοῦ δὴ Κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ εὐθειῶν καὶ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ περιφερειῶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὴ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τοῦ ΑΕΖΓ τραπεζίου καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλ-
H 50 ληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν ΑΓ. ἔστιν δὲ καὶ τῆς ἐπιφα-

κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ βάσις ὀρθοῦ τινος κυλίνδρου, καὶ ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, τῶν ὁποίων πέρατα εἶναι τὰ Α, Γ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Γ ἂς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ ἂς συμπέσωσι κατὰ τὸ Η, ἂς νοηθῶσι δὲ καὶ εἰς τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ κυλίνδρου εὐθεῖαι ἠγμέναι ἀπὸ τῶν περάτων τῶν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν εὐθειῶν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλύτερα τῆς κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Ζ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαί τινες παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου μέχρι τῆς ἐπιφανείας τῆς ἄλλης βάσεως· ὅθεν τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν (βάσεων) ΑΗ, ΗΓ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου (τοῦ ὕψους), εἶναι μεγαλύτερα τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τοῦ ὕψους τοῦ κυλίνδρου [διότι, ἐπειδὴ αἱ ΕΗ, ΗΖ, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΖ, ἂς προστεθῶσιν εἰς αὐτὰς αἱ ΑΕ, ΖΓ· ὅλαι ἄρα αἱ ΗΑ, ΗΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ]. Ὅ,τι λοιπὸν εἶναι μεγαλύτερα, ἔστω τὸ χωρίον Κ. Τοῦ χωρίου λοιπὸν Κ τὸ ἥμισυ θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ ὄχι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῶν τόξων ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ. Ἔστω πρότερον μεγαλύτερον. Τῆς ἐπιφανείας λοιπὸν τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐχόντων βάσεις τὰς εὐθείας ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τοῦ τραπεζίου ΑΕΖΓ καὶ τοῦ ἀπέναντι αὐτοῦ τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ κυλίνδρου πέρας εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ *νείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος· αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καί τινα μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε ΑΒΓ τμήματος καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῶν σχημάτων τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων ἐπιφάνειαι μετὰ τῶν εἰρημένων σχημάτων ἐλάττους εἰσὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΗΓ [μετὰ γὰρ τοῦ Κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς]· δῆλον οὖν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΓΗ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν.*

εἰ δὲ μή ἐστιν μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ Κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ τμήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσους τοῦ Κ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται.

⟨ Πόρισμα α′ ⟩

H 52 *Τούτων δὴ δεδειγμένων φανερὸν [ἐπὶ μὲν τῶν προειρημέ-*

ἔχοντος βάσιν τὴν ΑΓ. Εἶναι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ καὶ τῶν τμημάτων καὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ τοῦ ἀπέναντι αὐτοῦ πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος· αἱ εἰρημέναι λοιπὸν ἐπιφάνειαι τυγχάνουσι νὰ ἔχωσι τὸ αὐτὸ πέρας, τὸ ὁποῖον εἶναι εἰς ἐπίπεδον, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος κοῖλαι, καὶ μερικὰ τμήματα τῆς μιᾶς περιλαμβάνει ἡ ἄλλη ἐξ αὐτῶν, μερικὰ δὲ ἔχουσι κοινά· εἶναι ἄρα μικροτέρα ἡ περιλαμβανομένη (ἀξ. 4). Ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρεθῶσι τὰ κοινά, καὶ τὸ τμῆμα ΑΒΓ καὶ τὸ ἀπέναντι αὐτοῦ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῶν σχημάτων τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ καὶ τῶν ἀπέναντι αὐτῶν. Αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων μετὰ τῶν εἰρημένων σχημάτων εἶναι μικρότεραι τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΗΓ [διότι μετὰ τοῦ Κ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τῶν σχημάτων, ἦσαν ἴσαι πρὸς αὐτά]· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΓΗ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου (δηλ. τοῦ ὕψους αὐτοῦ) εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ.

Ἐὰν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ χωρίου Κ δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῶν εἰρημένων σχημάτων, θὰ φέρωμεν εὐθείας ἐφαπτομένας τοῦ τμήματος, ὥστε τὰ τμήματα τὰ ἀπομένοντα νὰ γίνωσι μικρότερα τοῦ ἡμίσεος τοῦ Κ, καὶ τὰ ἄλλα ἀποδεικνύονται καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς τὰ προηγούμενα.

Πόρισμα 1

Ἀφοῦ ταῦτα ἀπεδείχθησαν εἶναι φανερὸν [ἐπὶ μὲν τῶν προ-

νων], ὅτι, ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας [ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἔλασσόν ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν· ὥστε καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως [κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ].

⟨ Πόρισμα β′ ⟩

φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε, ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως [ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ᾽ αὑτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

ιγ′

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

H 54 *ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ Α κύκλος, καὶ ἔστω* ειρημένων], ὅτι, ἐὰν εἰς ἰσοσκελῆ κῶνον ἐγγραφῇ πυραμίς, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τὴν βάσιν εἶναι μικροτέρα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας [διότι ἕκαστον τρίγωνον ἐκ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα εἶναι μικρότερον τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (θ. 9)· ὥστε καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τὴν βάσιν εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τὴν βάσιν], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ περιγραφῇ πυραμίς, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τὴν βάσιν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τὴν βάσιν (θ. 10) [ἐν συνεχείᾳ πρὸς ἐκεῖνο].

Πόρισμα 2

Εἶναι δὲ φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων, ὅτι καὶ ἐὰν εἰς ὀρθὸν κύλινδρον ἐγγραφῇ ὀρθὸν πρίσμα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν παραλληλογράμμων εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τὴν βάσιν [διότι ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματος εἶναι μικρότερον τῆς εἰς ἑαυτὸ ἀντιστοιχούσης ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου] (θ. 11), καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν περιγραφῇ ὀρθὸν πρίσμα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν παραλληλογράμμων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τὴν βάσιν.

13

Παντὸς ὀρθοῦ κυλίνδρου ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τὴν βάσιν εἶναι ἴση μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου (τοῦ ὕψους) καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω ὀρθοῦ τινος κυλίνδρου βάσις ὁ κύκλος Α, καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ Α κύκλου ἴση ἡ ΓΔ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΕΖ, ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν ΔΓ, ΕΖ ἡ Η, καὶ κείσθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ Η, ὁ Β· δεικτέον, ὅτι ὁ Β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶ ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ Β κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν Β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα· ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὲ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον ἴση ἡ ΚΔ καὶ τῇ ΚΔ ἴση ἡ ΛΖ, τῆς δὲ ΓΔ ἡμίσεια ἔστω ἡ ΓΤ· ἔσται δὴ τὸ ΚΔΤ τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν Α κύκλον [ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου [ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος]. κείσθω δὴ
H 56 τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΕΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΡΛ τρίγωνον τῷ ΕΛ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον [τὰ εὐθύγραμμα],

πρὸς μὲν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου Α ἴση ἡ ΓΔ, πρὸς δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου ἴση ἡ ΕΖ, ἂς εἶναι δὲ τῶν ΔΓ, ΕΖ μέση ἀνάλογος ἡ Η, καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν Η, ὁ Β· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ κύκλος Β εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσος θὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μικρότερος. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο ἄνισα μεγέθη, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κύκλου Β, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον Β ἰσόπλευρον πολύγωνον καὶ ἄλλο νὰ περιγραφῇ, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν κύκλον Β (θ. 5).

Ἂς νοηθῇ λοιπὸν περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ἂς περιγραφῇ εἰς τὸν κύκλον Α εὐθύγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ εἰς τὸν Β περιγεγραμμένον, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦτο περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύλινδρον. Ἔστω δὲ καὶ πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ περὶ τὸν κύκλον Α εὐθυγράμμου ἴση ἡ ΚΔ καὶ πρὸς τὴν ΚΔ ἴση ἡ ΛΖ, τῆς δὲ ΓΔ ἔστω ἡμίσεια ἡ ΓΤ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΚΔΤ ἴσον πρὸς τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν κύκλον Α [ἐπειδὴ ἔχει βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν περίμετρον, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Α], τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΕΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον [ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς (τοῦ ὕψους) τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης πρὸς τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος]. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν πρὸς τὴν ΕΖ ἴση ἡ ΕΡ· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΡΛ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΛ (Εὐκλ. Ι, 41], ὥστε εἶναι ἴσον καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος. Καὶ ἐπειδὴ τὰ περὶ τοὺς κύκλους Α, Β περιγεγραμμένα εὐθύγραμμα εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἐ-

ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει· ἕξει ἄρα τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον λόγον, ὃν ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει [αἱ γὰρ ΤΔ, Η ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐκ τῶν κέντρων]. ἀλλ᾿ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει [ἡ γὰρ Η τῶν ΤΔ, ΡΖ μέση ἐστὶ ἀνάλογον διὰ τὸ καὶ τῶν ΓΔ, ΕΖ· πῶς δὲ τοῦτο ; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΓ, ἡ δὲ ΡΕ τῇ ΕΖ, διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς ΤΔ, καὶ ἡ ΡΖ τῆς ΡΕ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΔΤ, οὕτως ἡ ΡΖ πρὸς ΖΕ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Η· καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΤΔ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς ΡΖ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ, τὸ ἀπὸ τῆς ΤΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η· ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον]· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΛΖ [ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΚΔ, ΛΖ]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ ΤΚΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΖΛ H 58 *τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΛΡ τρίγωνον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ· ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν Α κύλινδρον περιγεγραμμένου τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Α κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύ-*

κεῖνον, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν αἱ ἀκτῖνες εἰς τὸ τετράγωνον· θὰ ἔχη ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΤΔ πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς τὴν Η, εἰς τὸ τετράγωνον [διότι αἱ ΤΔ, Η εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀκτῖνας]. Ἀλλὰ ὃν λόγον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς τὴν Η, εἰς τὸ τετράγωνον, τοῦτον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς τὴν ΡΖ [διότι ἡ Η εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΤΔ, ΡΖ, διότι εἶναι καὶ τῶν ΓΔ, ΕΖ· πῶς δὲ τοῦτο ; Διότι, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΤ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΤΓ, ἡ δὲ ΡΕ πρὸς τὴν ΕΖ, εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ διπλασία τῆς ΤΔ, καὶ ἡ ΡΖ τῆς ΡΕ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΡΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τῶν ΓΔ, ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΤΔ, ΡΖ. Πρὸς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς Η· εἶναι ἄρα καὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς Η. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΤΔ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς ΡΖ· εἶναι ἄρα, $ΤΔ:ΡΖ=ΤΔ^2:Η^2$· διότι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης σχῆμα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον (Εὐκλ. V, ὁρ. 9)]· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς τὴν ΡΖ, τοῦτον ἔχει τὸ τρίγωνον ΚΤΔ πρὸς τὸ ΡΛΖ [ἐπειδὴ αἱ ΚΔ, ΛΖ εἶναι ἴσαι]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ τρίγωνον ΚΤΔ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τρίγωνον ΤΚΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΖΛ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΛΡ ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Β· ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον Α εἶναι ἴση πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β. Καὶ ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, ὃν ἔχει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου Α πρὸς τὸν κύκλον Β, θὰ ἔχη μικρότερον λόγον καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσμα-

λινδρον περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ· ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου]. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ Β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

ἔστω δή, εἰ δυνατόν, μείζων. πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸν Β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν Α κύκλον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· καὶ πάλιν ἡ ΚΔ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ ἡ ΖΛ ἴση αὐτῇ
H 60 *ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν ΚΤΔ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου [διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ, ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ [διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστιν βάσις τοῦ πρίσματος]· ὥστε καὶ τὸ ΡΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ ΚΤΔ,*

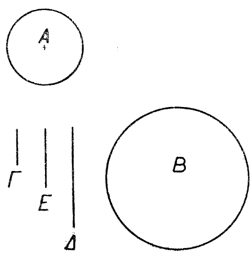
τος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Β ἢ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν κύκλον Β· καὶ ἐναλλάξ· ὅπερ ἀδύνατον [διότι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον ἐδείχθη ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου Β]. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύκλος Β μικρότερος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω τώρα, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερος. Ἂς νοηθῇ πάλιν εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Β, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἢ ὁ κύκλος Β πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου (θ. 5), καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον Α πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Β, καὶ ἂς ἀναγραφῇ πρίσμα ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον· καὶ ἔστω πάλιν ἡ ΚΔ ἴση πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Α, καὶ πρὸς αὐτὴν ἔστω ἴση ἡ ΖΛ. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΚΤΔ μεγαλύτερον τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Α [διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ, ὕψος δὲ μεγαλύτερον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου], τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΕΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν παραλληλογράμμων [διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου (ὕψος) καὶ τῆς ἴσης πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ εὐθυγράμμου, τὸ ὁποῖον εἶναι βάσις τοῦ πρίσματος]· ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΡΛΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος. Καὶ ἐπειδὴ τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τοὺς κύκλους Α, Β εἶναι ὅμοια, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὃν λόγον ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν

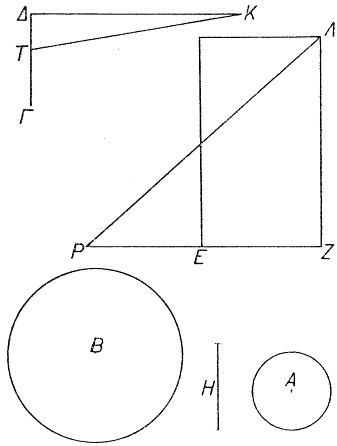
ΖΡΛ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΖΡ τρίγωνον. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΚΤΔ τριγώνου· ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΖΡΛ τριγώνου· ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου· ὅπερ ἀδύνατον [ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐναλλάξ, μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν Β κύκλον τοῦ Β κύκλου, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ Β H 62 *κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου· ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος]. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ Β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· ἴσος ἄρα ἐστίν.*

ιδ′

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κώνου.



ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἡ δὲ ἐκ ἀκτίνων (Εὐκλ. XII, 1). Ἔχουσι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΤΔ, ΖΡΛ πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Α ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν Β, οἷον τὸ τρίγωνον ΚΤΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΖΡ. Εἶναι δὲ μικρότερον τὸ εἰς τὸν κύκλον Α ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ τριγώνου ΚΤΔ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Β μικρότερον τοῦ τριγώνου ΖΡΛ· ὥστε εἶναι μικρότερον καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον· ὅπερ ἀδύνατον [διότι, ἐπειδὴ τὸ περὶ τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει μικρότερον λόγον ἢ ὁ κύκλος Β πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐναλλάξ, εἶναι δὲ μεγαλύτερον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον τοῦ κύκλου Β, εἶναι ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Β μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου· ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος]. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ κύκλος Β τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μικρότερος· εἶναι ἄρα ἴσος.



14

Παντὸς ἰσοσκελοῦς κώνου ἡ ἐπιφάνεια ἄνευ τῆς βάσεως εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος *τοῦ κέντρου ἔστω ἡ Γ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ Δ, τῶν δὲ Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, ὁ δὲ Β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε ἴσην· λέγω, ὅτι ὁ Β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως.*

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ ὁ Β κύκλος, καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου· δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν Α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, H 64 *τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ Γ πρὸς Δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον [ἡ μὲν γὰρ Γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ Δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου· κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον* εἶναι βάσις τοῦ κώνου.

Ἔστω ἰσοσκελὴς κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος Α, ἡ δὲ ἀκτὶς ἔστω ἡ Γ, πρὸς τὴν πλευρὰν δὲ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ Δ, τῶν δὲ Γ, Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε, ὁ δὲ κύκλος Β ἂς ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν Ε· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος Β εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἄνευ τῆς βάσεως.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσος θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἔστω πρότερον μικρότερος. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο μεγέθη ἄνισα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ ὁ κύκλος Β, καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου· εἶναι δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν κύκλον Β νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον πολύγωνον καὶ νὰ περιγραφῇ ἄλλο ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν κύκλον Β (θ. 5). Ἂς νοηθῇ λοιπὸν καὶ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου ἂς ἀνυψωθῇ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ περὶ τοὺς κύκλους Α, Β περιγεγραμμένα πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων, τουτέστιν $\Gamma^2 : E^2 = \Gamma : \Delta$ (Εὐκλ. XII, 1). Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ τοῦτον ἔχει τὸ περὶ τὸν κύκλον Α περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης [διότι ἡ μὲν Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ Δ πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου· κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν κύκλον Α πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β καὶ

καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον· ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσον ἔσται τοῦ Β κύκλου]. οὐκ ἄρα ὁ Β κύκλος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω H 66 *μείζων. πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, καὶ εἰς τὸν Α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾿ αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ μήκει. ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμί-*

αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον ἔχει μικρότερον λόγον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν κύκλον Β, θὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγεγραμμένον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν κύκλον Β· ὅπερ ἀδύνατον [διότι ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ δὲ εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου Β]. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύκλος Β μικρότερος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὐδὲ μεγαλύτερος. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω μεγαλύτερος. Πάλιν λοιπὸν ἂς νοηθῇ εἰς τὸν κύκλον Β πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κύκλος Β πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου (θ. 5), καὶ εἰς τὸν κύκλον Α ἂς νοηθῇ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγεγραμμένον, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ εἰς τοὺς κύκλους Α, Β ἐγγεγραμμένα εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων (Εὐκλ. XII, 1)· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν Δ ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ εἰς τὸν κύκλον Α ἐγγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς

δος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον [ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου]· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τοῦ ἐν τῷ Β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ
H 68 *κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον [τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου]. οὐκ ἄρα οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· ἴσος ἄρα.*

ιε′

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α ἴση ἡ Β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἡ Γ· δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον [διότι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Α πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου]· ἔχει ἄρα τὸ εἰς τὸν κύκλον Α ἐγγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγεγραμμένον πολύγωνον μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος· εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τοῦ εἰς τὸν Β ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ἔχει δὲ τὸ περὶ τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κύκλος Β πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ περὶ τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κύκλος Β πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον [διότι τὸ μὲν περιγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου Β, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου]. Δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μεγαλύτερος ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μικρότερος· εἶναι ἄρα ἴσος.

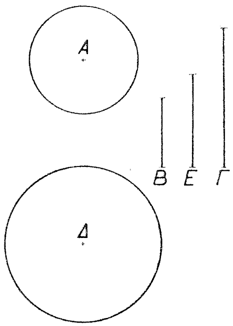
15

Παντὸς ἰσοσκελοῦς κώνου ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

Ἔστω ἰσοσκελὴς κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος Α, ἔστω δὲ ἡ μὲν Β ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ Α, ἡ δὲ Γ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ

τοῦ κώνου πρὸς τὸν *A* κύκλον καὶ ἡ *Γ* πρὸς τὴν *B*.

εἰλήφθω γὰρ τῶν *B*, *Γ* μέση ἀνάλογον ἡ *E*, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ *Δ* ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ *E*· ὁ *Δ* ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου [τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου]. ἐδείχθη δὲ ὁ *Δ* κύκλος πρὸς τὸν *A* κύκλον λόγον ἔχων τὸν αὐτὸν τῷ τῆς *Γ* πρὸς *B* μήκει [ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς *E* πρὸς *B* δυνάμει διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων· εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν αἱ *B*, *E*]. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν *A* κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ *Γ* πρὸς *B* μήκει.



H 70

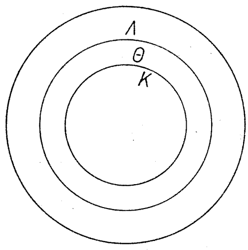
ιϛʹ

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

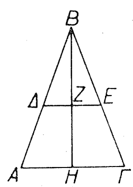
ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ *ΑΒΓ*, καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν *ΔE*, ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω ὁ *BH*, κύκλος δέ κώνου πρὸς τὸν κύκλον Α ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Β.

Διότι ἂς ληφθῇ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογος ἡ Ε, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Δ ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν Ε· ὁ κύκλος ἄρα Δ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου [διότι τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον]. Ἐδείχθη δὲ ὁ κύκλος Δ πρὸς τὸν κύκλον Α ἔχων τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ Γ πρὸς τὴν Β [διότι ἕκαστος λόγος ἰσοῦται πρὸς $E^2 : B^2$, διότι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς εἶναι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (Εὐκλ. XII, 2), ἐπίσης δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων· διότι ἐὰν εἶναι αἱ διάμετροι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἀκτῖνες· πρὸς τὰς ἀκτῖνας δὲ εἶναι ἴσαι αἱ Β, Ε]. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν κύκλον Α ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Β.

16



Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων τῶν εἰς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα.



Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὴν ΔΕ, ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω ὁ ΒΗ, ἂς ληφθῇ δὲ κύκλος τις, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ΑΔ καὶ τοῦ ἀθροίσματος ΔΖ+ΗΑ, τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΗΑ, ἔστω δὲ κύκλος ὁ Θ· λέγω, ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ.

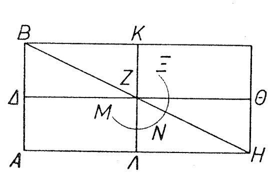
ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Λ, Κ, καὶ τοῦ μὲν Κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΔΖ, τοῦ δὲ Λ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΑΗ· ὁ μὲν ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου, ὁ δὲ Κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΖ τῇ ΑΗ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔ, ΔΖ δύναται ἡ ἐκ τοῦ
H 72 κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Κ, Θ κύκλων· ὥστε καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς Κ, Θ κύκλοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν Λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΓ κώνου, ὁ δὲ Κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου· λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῷ Θ κύκλῳ.

[Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΑΗ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΗ. τετμήσθω ἡ ΒΑ πλευρά, ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἤχθω παράλληλος τῇ ΑΗ ἡ ΔΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΒΑ ἡ ΚΛ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ.

ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΒΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ τὸ ΒΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ἔστω δὲ κύκλος αὐτὸς ὁ Θ· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος Θ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ.

Διότι ἂς ληφθῶσιν οἱ κύκλοι Λ, Κ, καὶ ἔστω ὅτι τὸ τετράγωνον μὲν τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Κ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ ×ΔΖ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Λ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ ×ΑΗ· ὁ μὲν κύκλος ἄρα Λ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΑΒΓ, ὁ δὲ κύκλος Κ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΔΕΒ (θ. 14). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ ×ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς ΒΔ ×ΔΖ+ ΑΔ ×(ΔΖ+ΑΗ), διότι ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὀρθογώνιον ΑΒ× ΑΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Λ, τὸ δὲ ΒΔ ×ΔΖ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Κ, τὸ δὲ ΔΑ ×(ΔΖ+ ΑΗ) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Θ, εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Λ ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων Κ, Θ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος Λ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς κύκλους Κ+Θ. Ἀλλ' ὁ μὲν κύκλος Λ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΒΑΓ, ὁ δὲ Κ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΔΒΕ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΔΕ, ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸν κύκλον Θ.

[Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΑΗ, καὶ διαγώνιος αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΗ. Ἂς τμηθῇ ἡ πλευρὰ ΒΑ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ ἡ ΔΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΑ ἡ ΚΛ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ ×ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΔ ×ΔΖ+ΔΑ ×(ΔΖ+ΑΗ).



Διότι, ἐπειδὴ τὸ μὲν ΒΑ ×ΑΗ εἶναι ὅλον τὸ ΒΗ, τὸ δὲ

ΔΖ, ΑΗ ὁ ΜΝΞ γνώμων· τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΔΑΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ΚΗ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ΚΘ παραπλήρωμα τῷ ΔΛ παραπληρώματι, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ, ΔΖ τῷ ΔΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΗ, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΗ, ΔΖ].

ΛΗΜΜΑΤΑ

α′. Οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσιν· καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν.

H 74 β′. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

γ′. Τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις.

δ′. Καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσίν ⟨ἐκεῖνοι⟩.

ε′. Καὶ οἱ κῶνοι, ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν τοῖς ἄξοσιν [τουτέστιν τοῖς ὕψεσι], πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶν τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀπεδείχθη.

ιζ′

Ἐὰν ὦσιν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι.

ΒΔ ×ΔΖ ὅλον τὸ ΒΖ, τὸ δὲ ΔΑ ×(ΔΖ+ΑΗ) ὁ γνώμων ΜΝΞ· διότι τὸ μὲν ΔΑ ×ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΗ, διότι τὸ παραπλήρωμα ΚΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα ΔΛ, τὸ δὲ ΔΑ × ΔΖ = ΔΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ΒΑ ×ΑΗ, εἶναι ἴσον πρὸς ΒΔ ×ΔΖ+γνώμων ΜΝΞ, ὅστις εἶναι ἴσος πρὸς ΔΑ × (ΑΗ+ΔΖ).

ΛΗΜΜΑΤΑ

α΄. Οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες ὕψος ἴσον ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς βάσεις· καὶ οἱ ἔχοντες ἴσας βάσεις ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ ὕψη.

β΄. Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν εἶναι, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

γ΄. Πρὸς δὲ τοὺς κυλίνδρους εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις (καὶ ὕψη) πρὸς τοὺς κυλίνδρους.

δ΄. Καὶ τῶν ἴσων κώνων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη· καὶ οἱ κῶνοι, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη, εἶναι ἴσοι.

ε΄. Καὶ οἱ κῶνοι, τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς ἄξονας [τουτέστιν πρὸς τὰ ὕψη], εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

Ταῦτα δὲ πάντα ἀπεδείχθησαν ὑπὸ τῶν προηγουμένων (Εὐκλείδου Στερεομετρία, Ε. Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1957).

17

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἰσοσκελεῖς κῶνοι, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, ἡ δὲ κάθετος ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος, οἱ κῶνοι θὰ εἶναι ἴσοι.

ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ τοῦ ΑΒΓ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ, τὸ δὲ ὕψος τὸ ΑΗ ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ Θ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν ΔΕ, καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ ΚΘ· λέγω, ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι.

H 76 ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ [τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον], ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΒΑΓ βάσις πρὸς τὴν τοῦ ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΚ [ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἡ ΔΕ τουτέστι πρὸς ΕΘ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα]. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΒΑΓ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ. τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΑΓ τῷ ΔΕΖ κώνῳ.

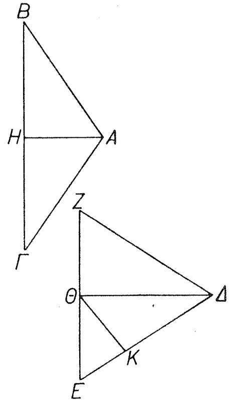
ιη'

Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου.

ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ

Ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ τοῦ ΑΒΓ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΕΖ, τὸ δὲ ὕψος τὸ ΑΗ ἔστω ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ Θ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, ἔστω τὴν ΔΕ, ἀγομένην κάθετον τὴν ΚΘ· λέγω, οἱ κῶνοι εἶναι ἴσοι.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΕΖ [τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον] (Εὐκλ. V, 7), εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις τοῦ ΒΑΓ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΚ [διότι ἀπεδείχθη τοῦτο, ὅτι παντὸς ἰσοσκελοῦς κώνου ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, τουτέστι ἡ ΔΕ πρὸς ΕΘ. Ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· διότι τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια]. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΑΗ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις τοῦ ΒΑΓ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ. Αἱ βάσεις ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη· εἶναι ἄρα ὁ κῶνος ΒΑΓ ἴσος πρὸς τὸν κῶνον ΔΕΖ.



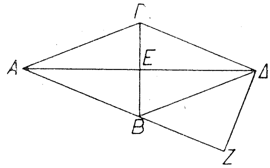
18

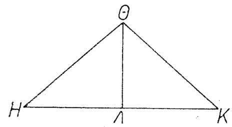
Πρὸς πάντα ῥόμβον συγκείμενον ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων εἶναι ἴσος ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἑνὸς κώνου ἐκ τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑνὸς κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἄλλου κώνου.

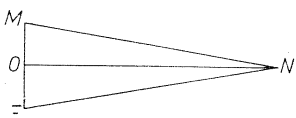
ΑΒΓΔ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΑΔ, ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ΗΘΚ τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ, ἔστω δὲ ἡ ΔΖ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ΘΗΚ κώνου ἔστω
H 78 τὸ ΘΛ· ἴσον δή ἐστιν τὸ ΘΛ τῇ ΔΖ· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ.

ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ ΜΝΞ τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΑΔ, καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ΝΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΟ τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΝΟ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, ὡς δὲ ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον [διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας]· ὡς ἄρα ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΜΝΞ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΗΘΚ, ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ [ἡ γὰρ βάσις τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ]. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΝΟ [ὑπέκειτο γάρ], ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΘΛ· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΝΟ ὕψος πρὸς τὸ ΘΛ. τῶν ΗΘΚ, ΜΝΞ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ

Ἔστω ῥόμβος συγκείμενος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου βάσις ἔστω ὁ κύκλος διαμέτρου ΒΓ, ὕψος δὲ τὸ ΑΔ, ἂς ληφθῇ δὲ ἄλλος τις κῶνος ὁ ΗΘΚ ἔχων τὴν μὲν βάσιν ἴσην πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὴν προέκτασιν αὐτῆς ἀγομένην κάθετον, ἔστω δὲ ἡ ΔΖ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ κώνου ΘΗΚ ἔστω τὸ ΘΛ· εἶναι λοιπὸν ἴσον τὸ ΘΛ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ῥόμβον.





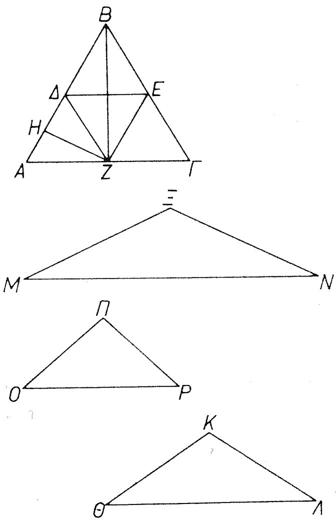


Διότι ἂς ληφθῇ ἄλλος κῶνος ὁ ΜΝΞ ἔχων τὴν μὲν βάσιν ἴσην πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ ἡ ΝΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΝΟ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, εἶναι ἄρα ὡς ΝΟ : ΔΕ = ΑΔ : ΔΕ (Εὐκλ. V, 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ΑΔ : ΔΕ = ῥόμβος ΑΒΓΔ : κῶνον ΒΓΔ, ὡς δὲ ΝΟ : ΔΕ = κῶνος ΜΝΞ : κῶνον ΒΓΔ [διότι αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσαι]· ὡς ἄρα εἶναι ὁ κῶνος ΜΝΞ : κῶνον ΒΓΔ = ὁ ῥόμβος ΑΒΓΔ : κῶνον ΒΓΔ· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος ΜΝΞ πρὸς τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ (Εὐκλ. V, 9). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΗΘΚ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ [διότι ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ]. Ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ (θ. 15), τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ [διότι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια]· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν

H 80 *ὁ ΜΝΞ ἴσος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ· καὶ ὁ ΗΘΚ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ.*

ιθ′

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.



ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ ΑΒΓ καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΔΕ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Ζ· ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ ΒΔΖΕ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ ΚΘΛ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, τὸ δὲ ὕψος, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ τῆς ΖΗ, ἔστω ἴσον τῇ ΖΗ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ ΒΔΖΕ ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ ΘΚΛ κῶνος·

ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, ὥστε τὴν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ. Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΑΔ = ΝΟ [ἐξ ὑποθέσεως], ἡ δὲ ΔΖ = ΘΛ· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ὕψος ΝΟ πρὸς τὸ ΘΛ. Τῶν κώνων ἄρα ΗΘΚ, ΜΝΞ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη· εἶναι ἄρα ἴσοι οἱ κῶνοι. Ἐδείχθη δὲ ὁ ΜΝΞ ἴσος πρὸς τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ· καὶ ὁ κῶνος ἄρα ΗΘΚ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ.

19

Ἐὰν ἰσοσκελὴς κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τοῦ ἀπομένοντος θὰ εἶναι ἴσος ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου.

Ἔστω ἰσοσκελὴς κῶνος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὴν ΔΕ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΔΕ ἂς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ Ζ· θὰ σχηματισθῇ λοιπὸν ῥόμβος ὁ ΒΔΖΕ ἀποτελούμενος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν κῶνος τις ὁ ΚΘΛ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τὴν μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, τὸ δὲ ὕψος, ἀφοῦ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἡ κάθετος ΖΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἔστω ἴσον πρὸς τὴν ΖΗ· λέγω, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κώνου ΑΒΓ νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ ῥόμβος ΒΔΖΕ, πρὸς τὸ ἀπομένον στερεὸν θὰ εἶναι ἴσος ὁ κῶνος ΘΚΛ.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, ὥστε ἡ μὲν

μὲν τοῦ ΜΝΞ βάσιν ἴσην εἶναι τοῦ ΑΒΓ κώνου τῇ ἐπιφα- Η 82 *νείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓ κώνῳ· ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι], τὴν δὲ τοῦ ΟΠΡ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου, ὕψος δὲ τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο καὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΒΔΖΕ ῥόμβῳ· τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη]. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΔΒΕ ἐπιφανείας καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ κώνου, ἡ δὲ τοῦ ΔΒΕ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ βάσει τοῦ ΟΠΡ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα τοῦ ΜΝΞ βάσις ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΘΚΛ, ΟΠΡ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ ΜΝΞ κῶνος τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓ κώνῳ, ὁ δὲ ΠΟΡ τῷ ΒΔΕΖ ῥόμβῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚΛ κῶνος τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.*

κ'

Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλ-

βάσις τοῦ ΜΝΞ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ΖΗ [ὅθεν διὰ τοῦτο ὁ κῶνος ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓ· διότι ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἰσοσκελεῖς κῶνοι, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου, ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ ἑνὸς κώνου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν τούτου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος (τοῦ ἄλλου κώνου), οἱ κῶνοι θὰ εἶναι ἴσοι] (θ. 17), ἡ δὲ βάσις τοῦ κώνου ΟΠΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΔΒΕ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ΖΗ [ὅθεν διὰ τοῦτο εἶναι ἴσος καὶ ὁ κῶνος ΟΠΡ πρὸς τὸν ῥόμβον ΒΔΖΕ· διότι τοῦτο προαπεδείχθη] (θ. 18). Ἐπειδὴ δὲ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΑΒΓ ἀποτελεῖται καὶ ἐκ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ΔΒΕ καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, ἀλλ' ἡ μὲν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ΜΝΞ, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΟΠΡ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΘΚΛ, ἡ βάσις ἄρα τοῦ ΜΝΞ εἶναι ἴση πρὸς τὰς βάσεις τῶν ΘΚΛ, ΟΠΡ. Καὶ εἶναι οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· εἶναι ἄρα ὁ κῶνος ΜΝΞ ἴσος πρὸς τοὺς κώνους ΘΚΛ, ΟΠΡ. Ἀλλ' ὁ μὲν κῶνος ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓ, ὁ δὲ ΠΟΡ πρὸς τὸν ῥόμβον ΒΔΕΖ· ὁ ἀπομένων ἄρα κῶνος ΘΚΛ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἀπομένον στερεόν.

20

Ἐὰν ὁ εἷς κῶνος ῥόμβου ἀποτελουμένου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸν ἄλλον κῶνον, ἀπὸ δὲ ὅλου τοῦ ῥόμβου ἀφαιρεθῇ ὁ γενόμενος ῥόμβος, πρὸς τὸ ἀπομένον στερεὸν θὰ εἶναι ἴσος ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν

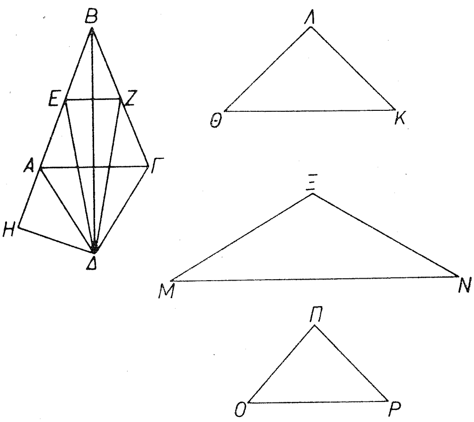
λήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέ-
H 84 ρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ Δ σημεῖον· ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ΕΒΔΖ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ τοῦ ὅλου ῥόμβου, ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ ΘΚΛ τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΕΖ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΒΑ ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· λέγω, ὅτι ὁ ΘΚΛ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι.

ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ ΜΝΞ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ], τοῦ δὲ ΟΠΡ κώνου ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΕΒΖ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ]. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ κώνου σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΕΒΖ καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ, ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ, ἡ δὲ τοῦ ΕΒΖ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΟΡΠ κώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ
H 86 βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ ΜΝΞ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΟΠΡ, ΘΚΛ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ, ὁ δὲ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ ΘΚΛ ἴσος

ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑνὸς κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἄλλου κώνου.

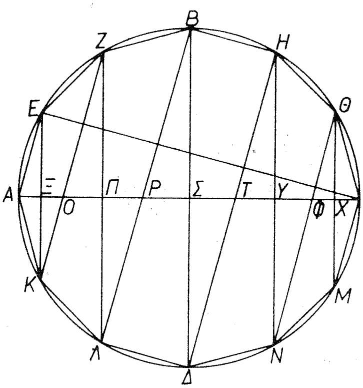
Ἔστω ῥόμβος ἀποτελούμενος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων, ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ εἷς κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὴν ΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΕΖ ἂς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ· ὅθεν θὰ ἔχῃ σχηματισθῇ ὁ ῥόμβος ΕΒΔΖ. Καὶ ἂς νοηθῇ ὅτι οὗτος ἔχει ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ ῥόμβου, ἂς ληφθῇ δὲ κῶνος τις ὁ ΘΚΛ ἔχων τὴν μὲν βάσιν ἴσην πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τὴν μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΕΖ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὴν ΒΑ ἢ τὴν προέκτασιν αὐτῆς· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος ΘΚΛ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ εἰρημένον ὑπόλοιπον στερεόν.



Διότι ἂς ληφθῶσι δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ κώνου ΜΝΞ ἔστω ἴση πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ΔΗ [ὅθεν κατὰ τὰ προδειχθέντα ὁ κῶνος ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ] (θ. 18), τοῦ δὲ κώνου ΟΠΡ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΕΒΖ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ΔΗ [ἐπίσης λοιπὸν ὁ κῶνος ΟΠΡ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ῥόμβον ΕΒΔΖ] (θ. 18). Ἐπειδὴ δὲ ἐπίσης ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΑΒΓ ἀποτελεῖται καὶ ἐκ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ΕΒΖ καὶ ἐκ τῆς μεταξὺ τῶν ΕΖ, ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα΄

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιαοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.



ἔστω κύκλος ὁ *ΑΒΓΔ*, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ *ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΕΚ*, *ΖΛ*, *ΒΔ*, *ΗΝ*, *ΘΜ*· δῆλον δή, ὅτι παράλληλοί εἰσιν τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ· λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν *ΑΓ* τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς *ΓΕ* πρὸς *ΕΑ*.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ *ΖΚ*, *ΛΒ*, *ΗΔ*, *ΘΝ*· παράλληλος ἄρα ἡ μὲν *ΖΚ* τῇ *ΕΑ*, ἡ δὲ *ΒΛ* τῇ *ΖΚ*, καὶ ἔτι ἡ μὲν *ΔΗ* τῇ *ΒΛ*, ἡ δὲ *ΘΝ* τῇ *ΔΗ*, καὶ ἡ *ΓΜ* τῇ *ΘΝ* [καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ *ΕΑ*, *ΚΖ*, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ *ΕΚ*,
H 88 *ΑΟ*]· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ *ΕΞ* πρὸς *ΞΑ*, ἡ *ΚΞ* πρὸς *ΞΟ*. ὡς

ΑΓ, ἀλλὰ ἡ μὲν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΕΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ΟΡΠ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΘΚΛ, ἡ βάσις ἄρα τοῦ ΜΝΞ εἶναι ἴση πρὸς τὰς βάσεις τῶν ΟΠΡ, ΘΚΛ. Καὶ οἱ κῶνοι εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· καὶ ὁ κῶνος ἄρα ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς κώνους ΘΚΛ, ΟΠΡ. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν κῶνος ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ, ὁ δὲ κῶνος ΟΠΡ πρὸς τὸν ῥόμβον ΕΒΔΖ· ὁ ὑπόλοιπος ἄρα κῶνος ὁ ΘΚΛ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἀπομένον στερεόν.

21

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ πολύγωνον ἀρτιόπλευρον καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἀχθῶσι διαγώνιοι, ὥστε αὗται νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς μίαν οἱανδήποτε τῶν ἑνουσῶν δύο κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὃν ἔχει ἡ διαγώνιος ἡ συνδέουσα τὸ ἥμισυ μεῖον μιᾶς τῶν πλευρῶν πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν πολύγωνον τὸ ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ· ὅθεν εἶναι φανερόν, ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν συνδέουσαν δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διαγώνιον· λέγω λοιπόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν ΑΓ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ μὲν ΖΚ πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ δὲ ΒΛ πρὸς τὴν ΖΚ, καὶ ἀκόμη ἡ μὲν ΔΗ πρὸς τὴν ΒΛ, ἡ δὲ ΘΝ πρὸς τὴν ΔΗ, καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΘΝ [καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο παράλληλοι αἱ ΕΑ, ΚΖ, καὶ αἱ ΕΚ, ΑΟ εἶναι διαγώνιοι]· εἶναι ἄρα, ΕΞ : ΞΑ = ΚΞ : ΞΟ. Ὡς *δ' ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ὡς δὲ ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, ὡς δὲ ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἔτι, ὡς ἡ μὲν ΒΣ πρὸς ΣΡ, ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ὡς δὲ ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ἡ ΗΥ πρὸς ΥΤ, καὶ ἔτι, ὡς ἡ μὲν ΗΥ πρὸς ΥΤ, ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ὡς δὲ ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, καὶ ἔτι, ὡς μὲν ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΧ πρὸς ΧΓ [καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστίν, ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]· ὡς ἄρα ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ· ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, οὕτω πᾶσαι αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον.*

κβ'

Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος αἱ τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν.

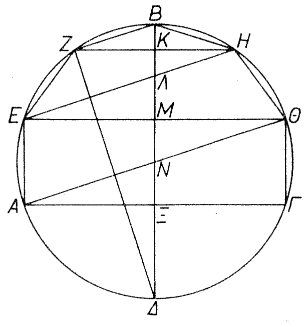
εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα
H 90 *ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΕΘ, αἵ εἰσιν παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος· λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ.*

πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΑΘ· παράλλη-

δὲ ἡ ΚΞ : ΞΟ = ΖΠ : ΠΟ (Εὐκλ. VI, 4), ὡς δὲ ἡ ΖΠ : ΠΟ = ΛΠ : ΠΡ (Εὐκλ. VI, 4), ὡς δὲ ΛΠ : ΠΡ = ΒΣ : ΣΡ (Εὐκλ. VI, 4), καὶ ἀκόμη, ὡς ἡ μὲν ΒΣ : ΣΡ = ΔΣ : ΣΤ, ὡς δὲ ΔΣ : ΣΤ = ΗΥ : ΥΤ, καὶ ἀκόμη, ὡς ἡ μὲν ΗΥ : ΥΤ = ΝΥ : ΥΦ, ὡς δὲ ΝΥ : ΥΦ = ΘΧ : ΧΦ, καὶ ἀκόμη ὡς μὲν ἡ ΘΧ : ΧΦ = ΜΧ : ΧΓ [καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν εἶναι ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]· εἶναι ἄρα ΕΞ : ΞΑ = ΕΚ+ΖΛ+ΒΔ+ΗΝ+ΘΜ: τὴν διάμετρον ΑΓ. Ὡς δὲ ΕΞ : ΞΑ = ΓΕ : ΕΑ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΓΕ : ΕΑ = ΕΚ+ΖΛ+ΒΔ+ΗΝ+ΘΜ : τὴν διάμετρον ΑΓ.

22

Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου ἐγγραφῇ πολύγωνον ἔχον τὰς πλευράς, ἄνευ τῆς βάσεως, ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσι δὲ εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀχθεισῶν καὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως ἔχουσι πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένη πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.



Διότι ἂς ἀχθῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ εὐθεῖα τις ἡ ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ πολύγωνον ἀρτιόπλευρον καὶ ἰσόπλευρον, ἄνευ τῆς βάσεως ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΗ, ΕΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ΖΗ+ΕΘ+ΑΞ : ΒΞ = ΔΖ : ΖΒ.

Διότι πάλιν ἂς ἀχθῶσιν ὁμοίως αἱ ΗΕ, ΑΘ· εἶναι ἄρα παράλ-

λοι ἄρα εἰσὶν τῇ ΒΖ· διὰ δὴ ταὐτά ἐστιν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΚΒ, ἥ τε ΗΚ πρὸς ΚΛ καὶ ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ καὶ ἡ ΜΘ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ ΞΑ πρὸς ΞΝ [καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα]· ὡς ἄρα αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΞΒ.

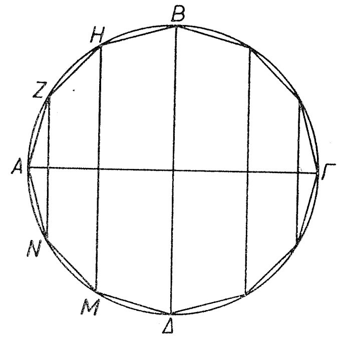
κγʹ

⟨Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας⟩.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, αἱ δὲ ΑΓ, ΔΒ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθῇ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον, ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Α, Γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν ΒΔ οὖσαι. αἱ ληλοι πρὸς τὴν ΒΖ (Εὐκλ. III, 27)· διὰ τοὺς αὐτοὺς λοιπὸν λόγους εἶναι ὡς ΚΖ : ΚΒ = ΗΚ : ΚΛ = ΕΜ : ΜΛ = ΜΘ : ΜΝ = ΞΑ : ΞΝ [καὶ εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα] (θ. 21)· εἶναι ἄρα ΖΗ+ΕΘ+ΑΞ : ΒΞ = ΖΚ : ΚΒ (Εὐκλ. V, 12). Ὡς δὲ ΖΚ : ΚΒ = ΔΖ : ΖΒ (Εὐκλ. VI, 4)· ὡς ἄρα ΔΖ : ΖΒ = ΖΗ+ΕΘ+ΑΞ : ΞΒ.

23

⟨Ἐὰν εἰς μέγιστον κύκλον σφαίρας ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διαιρεῖται διὰ τέσσαρα, περιστραφῇ δὲ περὶ σταθερὰν διάμετρον αὐτοῦ ὁ κύκλος ὁλόκληρον περιστροφὴν ἔχων τὸ πολύγωνον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας⟩.



Ἔστω μέγιστος κύκλος σφαίρας ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν ἰσόπλευρον πολύγωνον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἂς διαιρῆται διὰ τέσσαρα, ἔστωσαν δὲ αἱ ΑΓ, ΔΒ διάμετροι. Ἐὰν λοιπὸν μενούσης ἀκινήτου τῆς ΑΓ περιστραφῇ περὶ αὐτὴν ὁ κύκλος ΑΒΓΔ ἔχων τὸ πολύγωνον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ θὰ γράψῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, αἱ δὲ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου ἐκτὸς τῶν περὶ τὰ σημεῖα Α, Γ θὰ γράψωσι περιφερείας κύκλων ἐφαπτομένας τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καθέτους ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ· διάμετροι δὲ αὐτῶν θὰ εἶναι αἱ ἑνοῦσαι τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ. Αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται, H 92 αἱ μὲν ΑΖ, ΑΝ κατ᾽ ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, αἱ δὲ ΖΗ, ΜΝ κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΜΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΖΗ, ΜΝ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΑΓ, αἱ δὲ ΒΗ, ΜΔ πλευραὶ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΗ, ΔΜ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΓΑ· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον τῶν προειρημένων, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶν τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια H 94 ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας· καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου θὰ γράψωσι κώνους τινάς, αἱ μὲν ΑΖ ΑΝ ἐπιφάνειαν κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, αἱ δὲ ΖΗ, ΜΝ θὰ γράψωσι μέρος κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΜΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἑνοῦνται πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν ΑΓ προεκβαλλόμεναι αἱ ΖΗ, ΜΝ, αἱ δὲ ΒΗ, ΜΔ πλευραὶ θὰ γράψωσι μέρος κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΒΔ κάθετος δὲ ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἑνοῦνται πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν ΓΑ προεκβαλλόμεναι αἱ ΒΗ, ΔΜ· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ἄλλου ἡμικυκλίου θὰ γράψωσιν ἀντιστοίχους πρὸς ταύτας κωνικὰς ἐπιφανείας. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν σχῆμα τι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εἰρημένων κωνικῶν ἐπιφανειῶν, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διότι ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ σφαῖρα ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς ΒΔ διερχομένου ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἄλλου ἡμισφαιρίου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου· διότι πέρας καὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΒΔ, ὅστις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ· καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο κοῖλαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ἡ μία περιλαμβάνεται ὑπὸ τῆς ἄλλης καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τὰ αὐτὰ πέρατα πρὸς αὐτήν. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὸ ἄλλο ἡμισφαίριον σχήματος εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαιρίου· καὶ ὅλη λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (Λῆμμα 4).

κδ′

Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου παραλλήλοις οὔσαις τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὲν σχῆμα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω ὁ Ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος.

ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, καὶ τοῦ μὲν Ο ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Π δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΕΖ, ΗΘ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΗΘ, ΓΔ, ἡ H 96 *δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Σ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΔ, ΚΛ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Τ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΚΛ, ΜΝ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Υ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας*

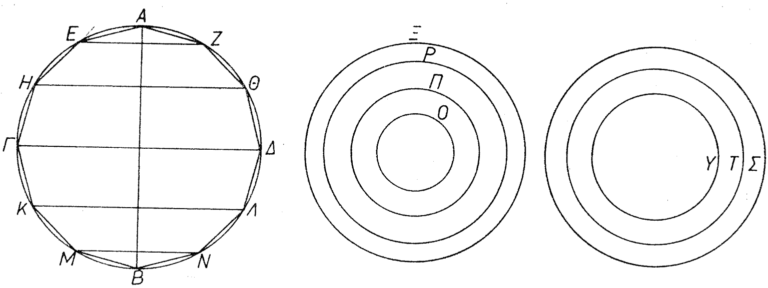
24

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφομένου εἰς σφαῖραν εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ σχήματος ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν δύο συνεχεῖς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.

Ἔστω μέγιστος κύκλος σφαίρας ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν νὰ διαιρῆται διὰ τέσσαρα, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἂς νοηθῇ σχῆμα ἐγγραφὲν εἰς τὴν σφαῖραν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν δύο συνεχεῖς πλευράς, ἂς ληφθῇ δὲ κύκλος τις ὁ Ξ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ ΑΕ καὶ ἡ ἄλλη τὸ ἄθροισμα ΕΖ+ΗΘ+ΓΔ+ΚΛ+ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος.

Διότι ἂς ληφθῶσιν οἱ κύκλοι Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ Ο ἂς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΑ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΕΖ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ Π ἂς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΑ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΕΖ+ΗΘ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ Ρ ἂς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΑ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΗΘ+ΓΔ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖ-

τῆς ΜΝ. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν Ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΕΖ κώνου, ὁ δὲ Π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΗΘ, ὁ δὲ Ρ τῇ μεταξὺ τῶν ΗΘ, ΓΔ, ὁ δὲ Σ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΓ, ΚΛ, καὶ ἔτι ὁ μὲν Τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΚΛ, ΜΝ, ὁ δὲ Υ τῇ τοῦ ΜΒΝ κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν· οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶν τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερόν, ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ δὶς



τῶν ἡμίσεων τῆς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΑΕ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων· καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ Ξ ἴσος ἐστὶ τοῖς Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοις. οἱ δὲ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ· καὶ ὁ Ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

νος τοῦ Σ ἄς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΑ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΓΔ+ΚΛ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ Τ ἄς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΚΛ+ΜΝ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ Υ ἄς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ΜΝ. Συνεπῶς ὁ μὲν κύκλος Ο εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΑΕΖ (θ. 14), ὁ δὲ Π ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΗΘ (θ. 16), ὁ δὲ Ρ ἴσος πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν ΗΘ, ΓΔ, ὁ δὲ Σ ἴσος πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν ΔΓ, ΚΛ, καὶ ἀκόμη ὁ μὲν Τ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν ΚΛ, ΜΝ, ὁ δὲ Υ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΜΒΝ· τὸ ἄθροισμα ἄρα ὅλων τῶν κύκλων εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς ΑΕ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἡμίσεος ἀθροίσματος τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ καὶ ΕΖ+ΗΘ+ΓΔ+ΚΛ+ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ καὶ τοῦ ἀθροίσματος ΕΖ+ΗΘ+ΓΔ+ΚΛ+ΜΝ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ξ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ· εἶναι ἄρα καὶ ὁ κύκλος Ξ ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ. Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κύκλων Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ ἀπεδείχθη ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰρημένου σχήματος· εἶναι ἄρα καὶ ὁ κύκλος Ξ ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος.

H 98

κε'

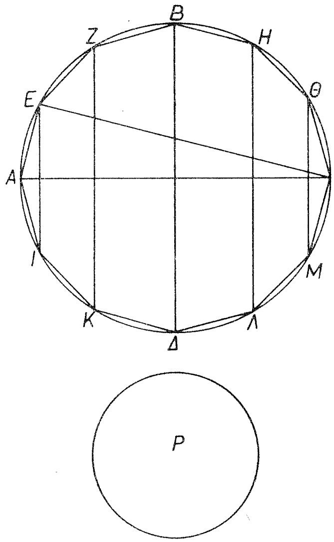
Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον [ἀρτιόγωνον] ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη· λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου αἱ ΕΙ, ΘΜ καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ Ρ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ· διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις καὶ τῆς ΕΑ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΓΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ [ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ Ρ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου,
H 100 καὶ δύο ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου διάμετροι μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ Ρ κύκλου, καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου

25.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένου σχήματος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ τετραπλασίου τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

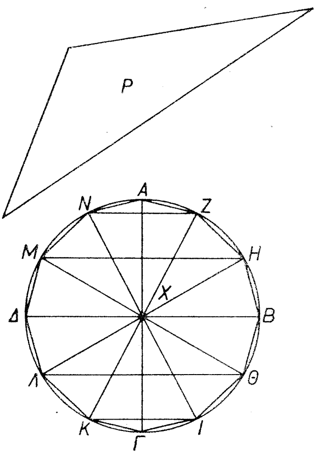


Ἔστω μέγιστος κύκλος σφαίρας ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν πολύγωνον [ἀρτιόγωνον] ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν νὰ διαιρῆται διὰ τέσσαρα, καὶ ἂς νοηθῇ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν· λέγω, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος εἶναι μικροτέρα τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ συνδέουσαι δύο συνεχεῖς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου αἱ ΕΙ, ΘΜ καὶ αἱ πρὸς ταύτας παράλληλοι αἱ ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, ἂς ληφθῇ δὲ κύκλος τις ὁ Ρ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΑ καὶ τῆς ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα ΕΙ+ΖΚ+ΒΔ+ΗΛ+ΘΜ· ὅθεν συμφώνως πρὸς τὰ προαποδειχθέντα (θ. 24) ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰρημένου σχήματος. Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη, ὅτι ὡς ἡ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ΕΙ+ΖΚ+ΒΔ+ΗΛ+ΘΜ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν ΑΓ, οὕτως εἶναι ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ (θ. 21), τὸ ὀρθογώνιον ἄρα πλευρῶν τῆς ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εἰρημένων καὶ τῆς ΕΑ, τουτέστιν τὸ τετράγωνον τῆς τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τουτέστι τῆς ΑΓ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ πρὸς τὸν Ρ κύκλον· τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ μείζους εἰσὶν τοῦ Ρ κύκλου]· ὁ ἄρα κύκλος ὁ Ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ δὲ Ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κϛʹ

Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶν κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.



ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ Ρ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ρ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΓΕ (Εὐκλ. VI, 16). Ἀλλὰ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΓΕ εἶναι μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2$ (Εὐκλ. III, 15)· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ρ μικρότερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ [εἶναι ἄρα μικροτέρα ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ρ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Ρ εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ δύο ἄρα διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Ρ, καὶ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, τουτέστι τῆς ΑΓ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Ρ. Ὡς δὲ $4ΑΓ^2$ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Ρ, οὕτως τέσσαρες κύκλοι ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον Ρ· εἶναι ἄρα τέσσαρες κύκλοι ΑΒΓΔ μεγαλύτεροι τοῦ κύκλου Ρ]· ὁ κύκλος ἄρα Ρ εἶναι μικρότερος τεσσάρων μεγίστων κύκλων. Ὁ δὲ κύκλος Ρ ἐδείχθη ἴσος πρὸς τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ σχήματος εἶναι μικροτέρα τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας.

26

Πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον εἰς τὴν σφαῖραν σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἴσος ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένην κάθετον.

Ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἄλλα ἂς γίνωσιν ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἔστω δὲ ὀρθογώνιος κῶνος ὁ Ρ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· δεικτέον, ὅτι ὁ κῶνος ὁ Ρ ἴσος ἐστὶν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι.

H 102 ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΖΝ, ΗΜ, ΘΛ, ΙΚ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον· ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Χ σημεῖον· ⟨ὃς⟩ ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΝΑΖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΝ, ΗΜ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ τε ΖΝΧ καὶ τοῦ ΗΜΧ ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΜΗ, ΖΝ ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ· δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΜΗΧ κώνου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἴσον τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΒΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ ΧΚΓΙ καὶ τὰ περιλείμματα τῶν
H 104 κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ἴσον ἐστὶν πᾶσιν τοῖς εἰρη-

κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κῶνος Ρ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον σχῆμα.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων αἱ ΖΝ, ΗΜ, ΘΛ, ΙΚ εἶναι διάμετροι, κῶνοι ἔχοντες κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν ῥόμβος στερεὸς ἀποτελούμενος καὶ ἐκ τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ περὶ τὴν ΖΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἐκ τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Χ· ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΝΑΖ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Χ ἠγμένην κάθετον (ἐπὶ τὴν ΑΖ ἢ ΑΝ) (θ. 18). Πάλιν δὲ καὶ τὸ ἀπομένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον καὶ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΝ, ΗΜ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων καὶ τοῦ ΖΝΧ καὶ τοῦ ΗΜΧ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΜΗ, ΖΝ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΖΗ ἠγμένην κάθετον· διότι ταῦτα ἀπεδείχθησαν (θ. 20). Προσέτι δὲ καὶ τὸ ἀπομένον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον καὶ ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ΜΗΧ καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἠγμένην ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΒΗ (θ. 19). Ὁμοίως δὲ καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἡμισφαίριον καὶ ὁ ῥόμβος ὁ ΧΚΓΙ καὶ τὰ ἀπομένοντα ἐκ τῶν κώνων θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τόσους κατὰ τὸ πλῆθος καὶ τὸ μέγεθος κώνους, ὅσοι ἐλέχθησαν καὶ προηγουμένως· εἶναι λοιπὸν φανερόν, μένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶν τῷ Ρ κώνῳ, ἐπειδὴ ὁ Ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων, βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶν τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

κζʹ

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

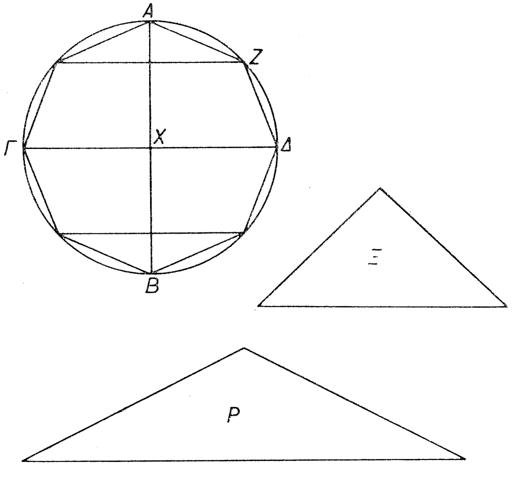
ἔστω γὰρ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ Ρ, ὁ δὲ κῶνος ὁ Ξ ἔστω βάσιν ἔχων ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΑΖ, ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου, ἔσται ἄρα ἡ τοῦ Ρ κώνου
H 106 βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ Ξ κώνου. ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ Ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ Ξ κώνου· ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ Ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον, ὡς καὶ αὐτὸς ὁ Ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ

ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν εἶναι ἴσον πρὸς ὅλους τοὺς εἰρημένους κώνους. Οἱ κῶνοι δὲ οὗτοι εἶναι ἴσοι πρὸς τὸν κῶνον Ρ, ἐπειδὴ ὁ κῶνος Ρ ὕψος μὲν ἔχει ἴσον πρὸς τὸ ὕψος ἑκάστου τῶν εἰρημένων κώνων, βάσιν δὲ ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων αὐτῶν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ληφθέντα κῶνον.

27

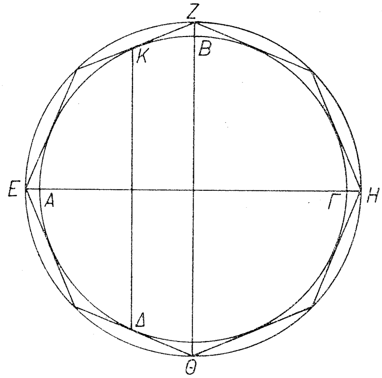
Τὸ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι μικρότερον τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην πρὸς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.



Διότι ἔστω ὅτι γίνεται κῶνος ὁ Ρ ἴσος πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἀγομένην κάθετον (θ. 26), ὁ δὲ κῶνος ὁ Ξ *τετραπλάσιος τοῦ Ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ Ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι· τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ Ξ κώνου.*

κη´

⟨Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας⟩.



Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, περὶ δὲ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ ΑΒΓΔ. μενούσης δὴ τῆς ΕΗ περιενεχθήτω τὸ ΕΖΗΘ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος· δῆλον οὖν, ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ ΑΒΓΔ ἔστω ἔχων βάσιν ἴσην πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κῶνος Ρ ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΑΖ ἀγομένην κάθετον, ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μικροτέρα τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας (θ. 25), θὰ εἶναι ἄρα ἡ βάσις τοῦ κώνου Ρ μικροτέρα τοῦ τετραπλασίου τῆς βάσεως τοῦ κώνου Ξ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ Ρ μικρότερον τοῦ ὕψους τοῦ κώνου Ξ· ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κῶνος Ρ ἔχει τὴν μὲν βάσιν μικροτέραν τοῦ τετραπλασίου τῆς βάσεως τοῦ Ξ, τὸ δὲ ὕψος μικρότερον τοῦ ὕψους, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αὐτὸς ὁ κῶνος Ρ εἶναι μικρότερος τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου Ξ. Ἀλλὰ καὶ ὁ κῶνος Ρ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα· τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου Ξ.

28

⟨Ἐὰν εἰς μέγιστον κύκλον σφαίρας περιγραφῇ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν νὰ διαιρῆται διὰ τέσσαρα, ἐν ᾧ δὲ ἡ διάμετρος μένει σταθερά, ἀφοῦ περιστραφῇ ὁ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν περιγραφομένου σχήματος θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας⟩.

Ἔστω μέγιστος κύκλος εἰς σφαῖραν ὁ ΑΒΓΔ, ἂς περιγραφῇ δὲ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἂς διαιρῆται διὰ τέσσαρα, τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον ἂς τὸ περιλαμβάνῃ κύκλος γινόμενος περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ. Διατηρουμένης τώρα σταθερᾶς τῆς ΕΗ, ἂς περιστραφῇ περὶ αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗΘ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ

κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ΕΖΗΘ κατ' ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται, αἱ δὲ ἁφαί, καθ' ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσιν κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Ε, Η σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν
H 108 *οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου· ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται· ἔστω γὰρ ἡ ΚΔ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ τῶν Κ, Δ σημείων ὄντων, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου. διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερόν, ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιπέδων πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης· ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ*

θὰ γράψῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ θὰ γράψῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἄλλης σφαίρας ἐχούσης τὸ αὐτὸ κέντρον πρὸς τὴν μικροτέραν, τὰ δὲ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν τῶν πλευρῶν μετὰ τοῦ μικροτέρου κύκλου γράφουσι κύκλους καθέτους ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ εἰς τὴν μικροτέραν σφαῖραν, αἱ δὲ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου πλὴν τῶν κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η θὰ γράψωσι περιφερείας κύκλων εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας, καθέτων ἐπὶ τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου θὰ γράψωσι κωνικὰς ἐπιφανείας, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περὶ μὲν τὴν μικροτέραν σφαῖραν περιγεγραμμένον, εἰς δὲ τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον· ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς· διότι ἔστω ἡ ΚΔ διάμετρος κύκλου τινὸς ἐκ τῶν εἰς τὴν μικροτέραν σφαῖραν, ἐν ᾧ τὰ σημεῖα Κ, Δ εἶναι σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ. Διῃρημένης λοιπὸν τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς ΚΔ διερχομένου ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ θὰ διαιρεθῇ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου σχήματος. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα εἰς τὸ ἐπίπεδον· διότι καὶ τῶν δύο ἐπιπέδων πέρας εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΚΔ τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ· καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ἐπιφάνειαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη κοῖλαι, καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνεται ὑπὸ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα (λαμβανόμ. 4)· εἶναι λοιπὸν μικροτέρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τῆς σφαίρας εἶναι *καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.*

H 110

κθ′

Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν.

τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν· τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν· δῆλον οὖν ἐστι τὸ προειρημένον.

λ′

Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

29

Πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν σχήματος εἶναι ἴσος ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἡ ἄλλη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρός τινα διαγώνιον ἑνοῦσαν δύο συνεχεῖς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.

Διότι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν μικροτέραν σφαῖραν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν (θ. 28)· ἐδείχθη δὲ (θ. 24) ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν σχήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἡ ἄλλη πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρός τινα διαγώνιον ἑνοῦσαν δύο συνεχεῖς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προειρημένον.

30

Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας.

Διότι ἔστω καὶ ἡ σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα ἂς γίνωσιν ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, καὶ ὁ κύκλος Λ ἔστω ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ προκειμένου (πολυγώνου) περιγεγραμμένου περὶ *τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.*

ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις, καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν.

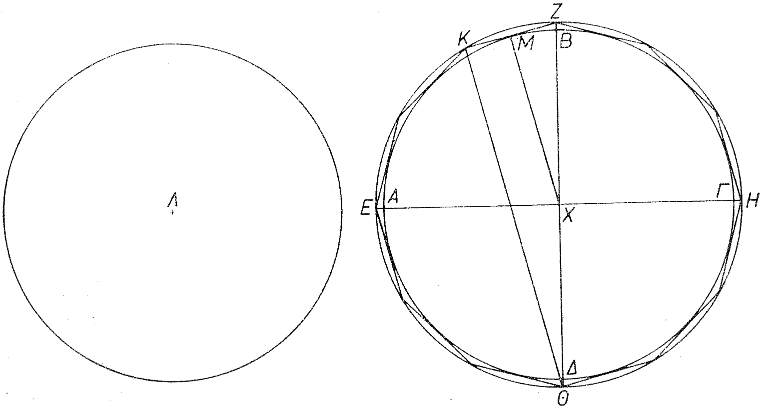
ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πο-
H 112 *λυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΖΘΚ· ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΖΘΚ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου τῆς ΘΚ. ἡ δὲ ΘΚ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου [διπλασία γάρ ἐστιν τῆς ΧΜ οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου]· δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ Λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.*

λα'

Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

τὴν μικροτέραν σφαῖραν.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ ἔχει ἐγγραφῆ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΖΘ ἔχει λόγον πρὸς τὴν ΖΘ, ὃν ἔχει ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΖ (θ. 21)· εἶναι ἄρα τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυ-



γώνου καὶ ὑπὸ τῆς ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου (ὡς προηγουμένως) ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΖΘ ×ΘΚ (Εὐκλ. VI, 16)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Λ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΖΘ ×ΘΚ (θ. 29)· εἶναι ἄρα ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Λ μεγαλυτέρα τῆς ΘΚ. Ἡ δὲ ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ [διότι εἶναι διπλασία τῆς ΧΜ, ἥτις εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ]· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ὁ κύκλος Λ, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν μικροτέραν σφαῖραν περιγεγραμμένου σχήματος, εἶναι μεγαλύτερος τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας (θ. 25).

31

Πρὸς τὸ περὶ τὴν μικροτέραν σφαῖραν περιγεγραμμένον σχῆ-

τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ· τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας· δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν.

H 114

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον [τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστιν] τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, μεῖζον ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ὁ ἴσος αὐτῷ μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου κώνου [βάσιν τε γὰρ μείζονα ἢ τετραπλασίαν ἔχει καὶ ὕψος ἴσον].

μα εἶναι ἴσος κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Διότι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν μικροτέραν σφαῖραν σχῆμα εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν· πρὸς δὲ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἀπεδείχθη ἴσος κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν ἠγμένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας (θ. 26)· αὕτη δὲ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς μικροτέρας σφαίρας· εἶναι λοιπὸν τὸ προτεθὲν φανερόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Εἶναι δὲ ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ περὶ τὴν μικροτέραν σφαῖραν περιγραφόμενον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ σχῆμα αὐτὸ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον [πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τουτέστιν ἴσην] πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς μικροτέρας σφαίρας (θ. 31), εἶναι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, μεγαλυτέρα τεσσάρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας (θ. 30), εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν μεγαλύτερον τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ὁ ἴσος πρὸς αὐτὸ γίνεται μεγαλύτερος τοῦ τετραπλασίου τοῦ εἰρημένου κώνου, [διότι ἔχει βάσιν μεγαλυτέραν τοῦ τετραπλασίου τῆς βάσεως καὶ ὕψος ἴσον].

λβ′

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα [τὸ περιγεγραμμένον] πρὸς τὸ σχῆμα τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

H 116 *ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ἔτι δὲ αἱ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν, αἱ δὲ ΕΗ, ΖΘ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς ΑΓ, ΒΔ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΖΒΔΘ παράλληλοι. μενούσης δὴ τῆς ΕΗ διαμέτρου καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον· δεικτέον οὖν, ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ, τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τρι-*

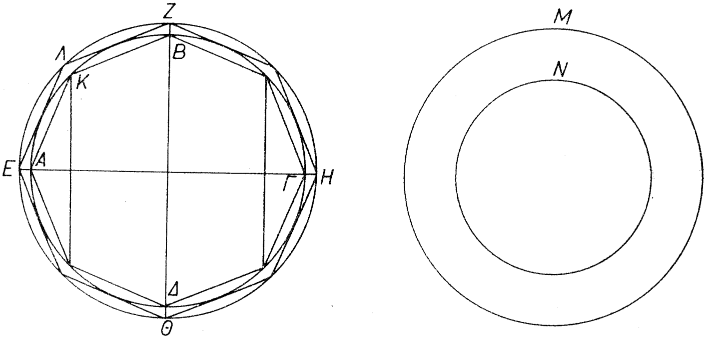
32

Ἐὰν εἰς σφαῖραν ὑπάρχῃ σχῆμα ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον κατεσκευασμένα ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ περὶ τὸν μέγιστον κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, αὐτὸ δὲ [τὸ περιγεγραμμένον] σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν πλευρῶν.

Ἔστω εἰς σφαῖραν (μέγιστος) κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἂς διαιρῆται διὰ τέσσαρα, καὶ ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἂς περιγραφῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, προσέτι δὲ αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου ἂς ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου κατὰ τὰ μέσα τῶν τόξων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, αἱ δὲ διάμετροι ΕΗ, ΖΘ τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ἔστωσαν κάθετοι πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίως κείμεναι πρὸς τὰς διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἂς νοηθῇ ὅτι ἤχθησαν αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι γωνίας τοῦ πολυγώνου παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν ΖΒΔΘ. Διατηρουμένης λοιπὸν σταθερᾶς τῆς διαμέτρου ΕΗ καὶ ἐὰν αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων περιστραφῶσι περὶ αὐτὴν κατὰ μίαν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα θὰ εἶναι εἰς τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον· πρέπει νὰ δειχθῇ λοιπόν, ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔχει λόγον ἴσον πρὸς $ΕΛ^2 : ΑΚ^2$, τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει λόγον ἴσον πρὸς $ΕΛ^3 : ΑΚ^3$.

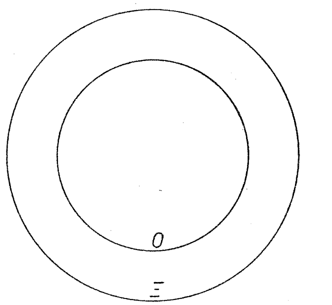
πλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἔστω γὰρ ὁ μὲν Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ



ἐγγεγραμμένου· δύναται ἄρα τοῦ μὲν Μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΛ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν τὸ ὑπὸ τῆς ΑΚ καὶ τῆς ἴσης
H 118 *πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν [τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων, ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καί, ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Μ, Ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει· ὥστε καὶ αἱ τῶν Μ, Ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσιν τῶν διαμέτρων, οἵτινες ἴσοι εἰσὶν ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου]· δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν*

Διότι ἔστω ὁ μὲν κύκλος Μ ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν σχήματος, ὁ δὲ Ν ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου· εἶναι ἄρα τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Μ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΕΛ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου (παραλλήλων κλπ.) (θ. 29), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΑΚ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαγωνίων (τοῦ ἐγγ. πολυγώνου) (παραλλήλων κλπ.) (θ. 24). Καὶ ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι ὅμοια καὶ τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, [τουτέστι τῶν ἀθροισμάτων τῶν διαγωνίων καὶ τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, ὥστε νὰ ἔχωσι ταῦτα πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων. Ἀλλὰ καὶ ὃν λόγον ἔχουσι τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων Μ, Ν· ὥστε καὶ αἱ διάμετροι τῶν Μ, Ν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ πλευραὶ τῶν πολυγώνων. Οἱ δὲ κύκλοι, οἵτινες εἶναι ἴσοι πρὸς τὰς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου (πολυγώνου) ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων]· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἔχει λόγον ἴσον πρὸς $ΕΛ^2 : ΑΚ^2$.



Ἂς ληφθῶσι τώρα δύο κῶνοι οἱ Ο, Ξ, καὶ ἔστω ὁ μὲν κῶνος *πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.*

εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ Ο, Ξ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν Ξ κύκλον ἴσον τῷ Μ, ὁ δὲ Ο βάσιν ἔχων τὸν Ο κύκλον ἴσον τῷ Ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν Ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ Ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἠγμένην· ἴσος ἄρα ὁ μὲν Ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ [δέδεικται οὖν ταῦτα]. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν
Η 120 *ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἀγομένην· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου, ὃν ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ· τῶν ἄρα Ξ, Ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον [ὅμοιοι ἄρα εἰσίν], καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἕξει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.*

λγ′

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφα-

Ξ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον Ξ ἴσον πρὸς τὸν Μ, ὁ δὲ κῶνος Ο ἔχων βάσιν τὸν κύκλον Ο ἴσον πρὸς τὸν Ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν κῶνος Ξ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ὁ δὲ Ο τὴν κάθετον τὴν ἠγμένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ΑΚ· εἶναι ἄρα ὁ μὲν κῶνος Ξ ἴσος πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν (θ 31), ὁ δὲ Ο ἴσος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον (θ. 26), [διότι ταῦτα ἔχουσιν ἀποδειχθῆ]. Καὶ ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΑΚ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ΑΚ ἀγομένην κάθετον· ἔχει ἄρα τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ξ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ο τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου Ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ· ἔχουσιν ἄρα αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τῶν κώνων Ξ, Ο πρὸς τὰ ὕψη τὸν αὐτὸν λόγον [εἶναι ἄρα ὅμοιοι], καὶ διὰ τοῦτο ὁ κῶνος Ξ πρὸς τὸν κῶνον Ο θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ κύβου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Μ πρὸς τὸν κύβον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Ν (Εὐκλ. XII, 12). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει λόγον ἴσον πρὸς $ΕΛ^3 : ΑΚ^3$.

33

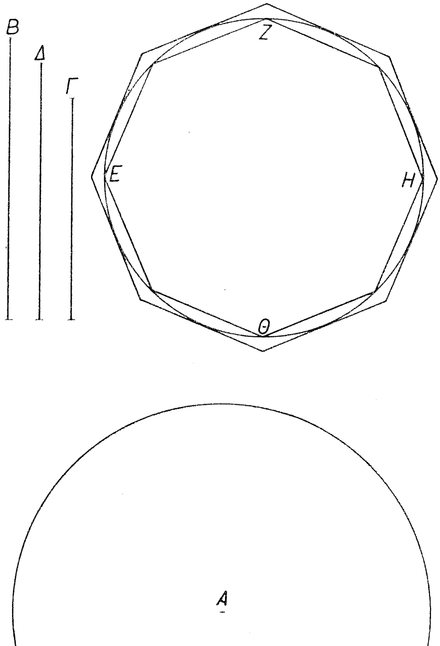
Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς.

Διότι ἔστω σφαῖρά τις, καὶ ἔστω ὁ κύκλος Α τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος Α εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἔστω πρότερον μεγαλυτέρα τοῦ κύκλου, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο μεγέθη ἄνισα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ὁ κύκλος Α· εἶναι ἄρα δυνατὸν νὰ λάβωμεν δύο εὐθείας ἀνίνείᾳ τῆς σφαίρας.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ὁ Α κύκλος· δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ Β, Γ, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ Δ, νοείσθω δὲ
Η 122 καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ⟨πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου⟩ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Β πρὸς Δ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς Β πρὸς Δ διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς Β πρὸς τὴν Γ, τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Α κύκλον· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ Α κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ [δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ τετραπλασία, τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ Α κύκλος]. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου.

σους, ὥστε ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον (θ. 2). Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν αἱ Β, Γ καὶ τῶν Β, Γ ἔστω μέση ἀνάλογος ἡ Δ, ἂς νοηθῇ δὲ ὅτι ἡ σφαῖρα τέμνεται κατὰ τὸν κύκλον ΕΖΗΘ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, ἂς νοηθῇ δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Β πρὸς τὴν Δ (θ. 3), [καὶ ὁ λόγος ἄρα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν (Β, Δ).



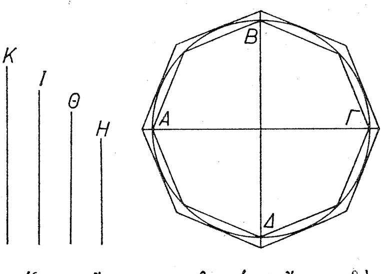
Καὶ εἶναι $Β^2 : Δ^2 = Β : Γ$ (Εὐκλ. V, ὁρισμ. 9), καὶ ἐπιφάνεια περιγεγραμμένου στερεοῦ : ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένου = τετράγωνον πλευρᾶς περιγεγραμμένου : τετράγωνον πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου] (θ. 32)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ Β, Γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ
Η 124 *ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ⟨πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου⟩ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς Β πρὸς Δ [καὶ τὰ διπλάσια ἄρα]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ Β πρὸς Γ. ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου, ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*

οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ Α κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ Α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

λδʹ

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.



ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ τετραπλασία· ἔστω δὲ ὁ περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἔχει μικρότερον λόγον ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον Α· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἶναι μικροτέρα τοῦ κύκλου Α [διότι ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου εἶναι μικροτέρα τοῦ τετραπλασίου τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας (θ. 25), τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου ὁ κύκλος Α εἶναι τετραπλάσιος]. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μεγαλυτέρα τοῦ κύκλου Α.

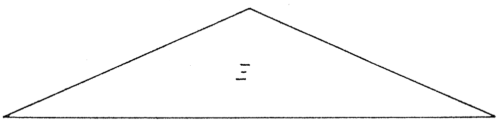
Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ἂς εὑρεθῶσι καθ' ὅμοιον τρόπον αἱ εὐθεῖαι Β, Γ, ὥστε ὁ λόγος τῆς Β πρὸς τὴν Γ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ κύκλου Α πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ ἔστω τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογος ἡ Δ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ καὶ περιγραφῇ πάλιν (πολύγωνον), ὥστε ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τῆς Β πρὸς τὴν Δ [καὶ τὰ διπλάσια ἄρα]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔχει μικρότερον λόγον [τοῦ τῆς Β πρὸς Γ. Ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἔχει μικρότερον λόγον] ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κύκλος Α πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κύκλου Α, ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικροτέρα τοῦ κύκλου Α ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε μεγαλυτέρα εἶναι· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὸν κύκλον Α, τουτέστι πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου.

34

Πᾶσα σφαῖρα εἶναι τετραπλασία κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν

Ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος· δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ
H 126 *Κ, Η, αἱ δὲ Ι, Θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν τὴν Κ τῆς Ι καὶ τὴν Ι τῆς Θ καὶ τὴν Θ τῆς Η, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρότερον, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ,*



ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται σχήματα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς τὴν Ι· ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ⟨πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον⟩ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τριπλασίονα τοῦ Κ πρὸς Ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ Κ πρὸς Η μείζονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν μὲν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Διότι ἔστω σφαῖρά τις καὶ μέγιστος κύκλος εἰς αὐτὴν ὁ ΑΒΓΔ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ σφαῖρα δὲν εἶναι τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω, εἰ δυνατόν, μεγαλυτέρα τοῦ τετραπλασίου· ἔστω δὲ ὁ κῶνος Ξ ἔχων βάσιν μὲν τετραπλασίαν τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· εἶναι λοιπὸν ἡ σφαῖρα μεγαλυτέρα τοῦ κώνου Ξ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο μεγέθη ἄνισα καὶ ἡ σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ λάβωμεν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν κῶνον Ξ (θ. 2). Ἔστωσαν λοιπὸν αἱ Κ, Η, αἱ δὲ Ι, Θ λαμβάνονται, ὥστε $\mathrm{K} - \mathrm{I} = \mathrm{I} - \Theta = \Theta - \mathrm{H}$ (κατασκευάζεται δηλ. $\mathrm{I} = \frac{1}{3}(2\mathrm{K}+\mathrm{H})$ καὶ $\Theta = \frac{1}{3}(2\mathrm{H}+\mathrm{K})$), ἂς νοηθῇ δὲ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν νὰ διαιρῆται διὰ τέσσαρα, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι (θ. 3), καὶ ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ διάμετροι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν λοιπὸν διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς διαμέτρου ΑΓ περιστραφῇ περὶ αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον ἔνθα εἶναι τὰ πολύγωνα, θὰ προκύψωσι σχήματα, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ (θ. 32). Ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι· ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ⟨πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον⟩ ἔχει μικρότερον λό-

ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι [τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων]· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Η. ἡ δὲ Κ πρὸς Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον· καὶ ἐναλλάξ· ⟨πολλῷ ἄρα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον·⟩ ὅπερ ἀδύνατον· τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ Ξ κώνου [διότι ὁ μὲν Ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν Η 128 *ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου ἢ τετραπλάσιον]. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου.*

ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἢ τετραπλασία· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ Κ, Η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν Κ μείζονα εἶναι τῆς Η καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, καὶ αἱ Θ, Ι ἐκκείσθωσαν, καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον· ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι· ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς γον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ $K^3 : I^3$. Εἶναι δὲ $K : H > K^3 : I^3$. [διότι τοῦτο εἶναι φανερὸν διὰ λημμάτων]· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Κ πρὸς Η. Ἡ δὲ Κ πρὸς Η ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν κῶνον Ξ· καὶ ἐναλλάξ· (Εὐκλ. V, 16)· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν κῶνον Ξ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς σφαίρας (θ. 28), τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ξ (θ. 27), [διότι ὁ μὲν κῶνος Ξ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τετραπλασίου τοῦ εἰρημένου κώνου]. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ σφαῖρα μεγαλυτέρα τοῦ τετραπλασίου τοῦ εἰρημένου (κώνου).

Ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ σφαῖρα μικροτέρα τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου· ὥστε ἡ σφαῖρα εἶναι μικροτέρα τοῦ κώνου Ξ. Ἂς ληφθῶσι τώρα αἱ εὐθεῖαι Κ, Η, ὥστε ἡ Κ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Η καὶ ὁ λόγος πρὸς αὐτὴν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κῶνος Ξ πρὸς τὴν σφαῖραν (θ. 2), καὶ αἱ Θ, Ι ἂς ληφθῶσι, ὡς καὶ προηγουμένως, καὶ ἂς νοηθῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι, καὶ τὰ ἄλλα ἂς κατασκευασθῶσιν ὡς καὶ προηγουμένως· θὰ ἔχῃ ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον λόγον ἴσον πρὸς τὸν κύβον, τοῦ λόγου τῆς πλευρᾶς τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου (θ. 32). Ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἔχει μικρό-

τὴν Ι· ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ἡ Κ πρὸς τὴν Η. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ Ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα
H 130 *τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων· τετραπλασία ἄρα.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερόν, ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα· δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως [δῆλον, ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογον ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως], ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως, τουτέστι τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπι-

τερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι· θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον λόγον μικρότερον τοῦ λόγου $K^3 : I^3$. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η ἔχει λόγον μεγαλύτερον τοῦ $K^3 : I^3$· ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ Κ : Η. Ὁ δὲ λόγος Κ : Η εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ κώνου Ξ πρὸς τὴν σφαῖραν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον εἶναι μικρότερον τῆς σφαίρας (θ. 28), τὸ δὲ περιγεγραμμένον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ξ (θ. 31, πόρ.). Δὲν εἶναι ἄρα ἡ σφαῖρα οὔτε μικροτέρα τοῦ τετραπλασίου τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλυτέρα· εἶναι ἄρα τετραπλασία.

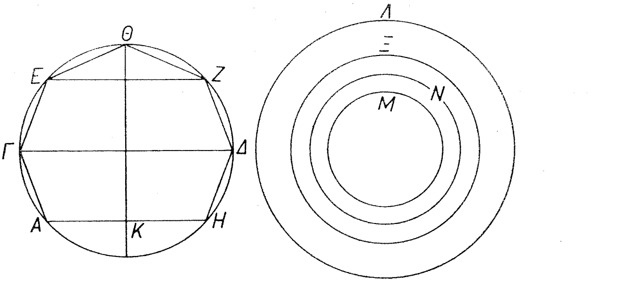
ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἀφοῦ δὲ ἀπεδείχθησαν ταῦτα, εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶς κύλινδρος ἔχων βάσιν μὲν τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Διότι ὁ μὲν προειρημένος κύλινδρος εἶναι ἑξαπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἡ δὲ σφαῖρα ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι τετραπλασία τοῦ αὐτοῦ κώνου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἐδείχθη ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως (θ. 13), τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως [εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μέση ἀνάλογος αὐτῶν γίνεται ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως], ὁ δὲ κύκλος ὁ ἔχων τὴν ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως εἶναι τετραπλάσιος τῆς βάσεως, τουτέστι τοῦ μεγί-

φάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου· ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια Η 132 *τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.*

λε′

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως.



ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΗ κύκλος [ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτό, οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν], καὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΘ καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ ΑΓΕΘΖΔΗ χωρὶς τῆς ΑΗ πλευρᾶς, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΑΓ πλευρᾶς καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ΕΖ, ΓΔ καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς ΑΚ· δεικτέον, ὅτι ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ στου κύκλου τῆς σφαίρας, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου· ἡ ὁλικὴ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι ἑξαπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. Ἡ ὁλικὴ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

35

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ἐγγεγραμμένου σχήματος εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ἄλλην ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος σὺν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τμήματος.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΗ [ἂς ἐγγραφῇ σχῆμα εἰς αὐτό, οἷον ἐλέχθη, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν], καὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΘ καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ ΑΓΕΘΖΔΗ ἄνευ τῆς πλευρᾶς ΑΗ, καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ Λ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον μίαν πλευρὰν τὴν ΑΓ καὶ ἄλλην τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ΕΖ, ΓΔ σὺν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς ΑΚ· δεικτέον ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος.

Διότι ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ Μ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΕΘ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ· γίνεται λοιπὸν ὁ *τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ.*

εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΘ πλευρᾶς καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ· γίνεται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΓ καὶ τῆς ἡμισείας H 134 *συναμφοτέρου τῆς ΕΖ, ΓΔ· ἔσται οὖν οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΕΖ, ΓΔ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ Ξ εἰλήφθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν ΓΔ, ΑΗ· καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΓΔ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΓΔ καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ ΑΚ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ· ὁ ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς Μ, Ν, Ξ κύκλοις· ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.*

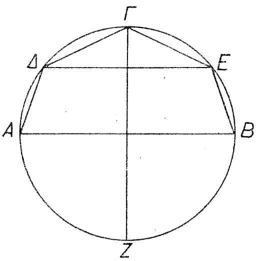
λς′

⟨Ἐὰν ἐν τμήματι μεγίστου κύκλου σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον ἐγγραφῇ χωρὶς τῆς βάσεως, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος.⟩

κύκλος Μ ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ (θ. 14). Ἄς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλος κύκλος ὁ Ν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΓ καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΕΖ, ΓΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν οὗτος ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν εὑρισκομένην μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΕΖ, ΓΔ (τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου ΕΖΔΓ) (θ. 16). Ὁμοίως ἂς ληφθῇ καὶ ἄλλος κύκλος ὁ Ξ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΑΓ καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΔ, ΑΗ· καὶ αὐτὸς λοιπὸν εἶναι ἴσος πρὸς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν τὴν εὑρισκομένην μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΓΔ (τὴν κυρτὴν ἐπιφ. τοῦ κολ. κώνου ΑΗΓΔ) (θ. 16). Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κύκλων θὰ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος (τὴν κυρτὴν ἄνευ τῆς βάσεως, διαμέτρου ΑΗ) καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΑΓ καὶ ἄλλης ἴσης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΕΖ, ΓΔ σὺν τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τῆς ΑΚ. Ἦτο δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Λ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ αὐτὸ χωρίον· ὁ κύκλος ἄρα Λ εἶναι ἴσος πρὸς τοὺς κύκλους Μ, Ν, Ξ· ὥστε εἶναι οὗτος ἴσος καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

36

⟨Ἐὰν εἰς τμῆμα μεγίστου κύκλου σφαίρας ἐγγραφῇ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον, χωρὶς τὴν βάσιν, μὲ ἀκίνητον δὲ τὴν διάμετρον ἀφοῦ περιστραφῇ οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν, ἀπὸ τῆς ὁποίας ἐκινήθη, *Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΖ τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΒ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον, ἐὰν μενούσης τῆς ΓΖ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν Δ, Ε, Α, Β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ ΔΕ, ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον βάσιν* H 136 *μὲν ἔχον κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, κορυφὴν δὲ τὸ Γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος· τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραί εἰσιν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.*



λζʹ

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΕΖ, καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος.⟩

Ἂς τμηθῇ σφαῖρα δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω μέγιστος κύκλος αὐτῆς ὁ ΑΕΖ τέμνων καθέτως τὸ τέμνον τὴν σφαῖραν ἐπίπεδον καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει ἡ βάσις ΑΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα (θ. 23), ἐὰν περιστραφῇ τὸ σχῆμα περὶ τὸν ἀκίνητον ἄξονα ΓΖ, αἱ μὲν κορυφαὶ τῶν γωνιῶν Δ, Ε, Α, Β θὰ γράψωσι κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΔΕ, ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος θὰ γράψωσι κυρτὰς κωνικὰς ἐπιφανείας, καὶ θὰ εἶναι τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἔχον βάσιν μὲν κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Γ. Ὁμοίως πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ γενηθέντος στερεοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ περικλείοντος αὐτὴν σφαιρικοῦ τμήματος· διότι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, εἶναι τὸ αὐτὸ πέρας εὑρισκόμενον εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ τοῦ (γενομένου) σχήματος, καὶ ἀμφότεραι αἱ κοῖλαι ἐπιφάνειαι εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ἡ μία περιλαμβάνεται ὑπὸ τῆς ἄλλης (λαμβανόμενα 4).

37

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς σφαιρικὸν τμῆμα σχήματος εἶναι μικροτέρα τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος.

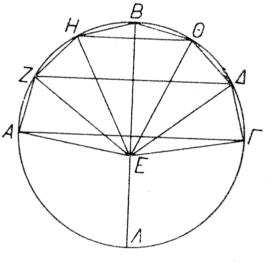
Ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος εἰς αὐτὴν ὁ ΑΒΕΖ, καὶ ἔστω τμῆμα εἰς τὴν σφαῖραν, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος δια-

ΑΒ [καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα, καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον], καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς ΘΛ, ἐπεζευγμένων δὲ τῶν ΛΕ, ΘΑ, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΑΘ· δεικτέον, ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας.

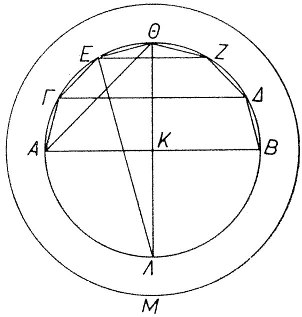
ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΘ καὶ
H 138 τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ περιεχομένῳ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ [καὶ γὰρ τοῦ ΛΘ, ΚΘ]· φανερὸν οὖν, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ· δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος.

λη′

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ⟨τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου⟩ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῶν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.



ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἐγγεμέτρου ΑΒ [καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ ληφθὲν σφαιρικὸν τμῆμα, καὶ εἰς τὸ τμῆμα τοῦ (μεγίστου) κύκλου πολύγωνον], καὶ τὰ λοιπὰ ἂς εἶναι τὰ αὐτά, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας νὰ εἶναι ἡ ΘΛ, καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ ΛΕ, ΘΑ, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Μ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἔστω ἴση πρὸς τὴν ΑΘ· δεικτέον, ὅτι ὁ κύκλος Μ εἶναι μεγαλύτερος τῆς (κυρτῆς) ἐπιφανείας τοῦ (ἐκ περιστροφῆς) σχήματος.

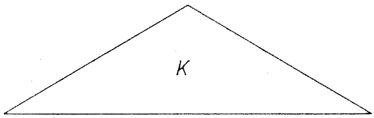


Διότι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἀπεδείχθη (θ. 35) ὅτι εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΕΘ καὶ ἄλλης τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ· τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΕΘ $\times$(ΕΖ$+$ΓΔ$+$ΚΑ) ἀπεδείχθη ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΛ $\times$ΚΘ (θ. 22, Εὐκλ. VI, 16), τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΕΛ $\times$ΚΘ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΘ^2 [διότι τὸ ὀρθ. εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου ΛΘ $\times$ΚΘ]· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Μ· εἶναι φανερὸν ἄρα, ὅτι ὁ κύκλος Μ εἶναι μεγαλύτερος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος (Εὐκλ. XII, 2).

38

Τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ⟨μικρότερον ἡμισφαιρίου⟩ σχῆμα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν σὺν τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ σχῆμα, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυ-

γράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς ΑΓ ὁμοίως τοῖς πρότερον, καὶ μενούσης τῆς ΒΔ περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον, καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ Κ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν
H 140 τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· δεικτέον, ὅτι ὁ Κ κῶνος



ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ ΑΕΓ.

ἀναγεγράφθωσαν δὴ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς ΘΗ, ΔΖ κορυφὴν ἔχοντες τὸ Ε σημεῖον· οὐκοῦν ὁ μὲν ΗΒΘΕ ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΗΒΘ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΗΒ ἀγομένῃ καθέτῳ, τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΖΕΔ, ΗΕΘ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ βάσις μὲν ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΑΕΓ, ΖΕΔ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΑ καθέτῳ ἠγμένῃ·

γώνου.

Διότι ἔστω σφαῖρα καὶ εἰς αὐτὴν μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ πολύγωνον ἀρτιόπλευρον ἄνευ τῆς ΑΓ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, καὶ ἀφοῦ περιστραφῇ ἡ σφαῖρα περὶ τὸν σταθερὸν ἄξονα ΒΛ ἂς γράψῃ σχῆμά τι περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν, καὶ ἂς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων βάσιν τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΓ καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἂς ληφθῇ κῶνος ὁ Κ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ (ἐκ περιστροφῆς) σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου· δεικτέον, ὅτι ὁ κῶνος Κ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ περιεχομένου σχήματος σὺν τὸν κῶνον ΑΕΓ.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσι καὶ κῶνοι ἔχοντες βάσεις τοὺς κύκλους τοὺς ἔχοντας διαμέτρους τὰς ΘΗ, ΔΖ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε· τώρα ὁ μὲν στερεὸς ῥόμβος ΗΒΘΕ εἶναι ἴσος πρὸς κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΗΒΘ, τὸ δὲ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΗΒ ἀγομένην κάθετον (θ. 18), τὸ δὲ ὑπόλοιπον στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἠγμένων διὰ τῶν ΗΘ, ΖΔ καὶ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν τῶν ΖΕΔ, ΗΕΘ εἶναι ἴσον πρὸς κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις μὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἠγμένων διὰ τῶν ΗΘ, ΖΔ, τὸ ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν ΖΗ ἀγομένην κάθετον (θ. 20). Πάλιν τὸ ὑπόλοιπον στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ καὶ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν τῶν ΑΕΓ, ΖΕΔ εἶναι ἴσον πρὸς κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι μετὰ τοῦ H 142 ΑΕΓ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσιν τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΖΗΒΘΔΓ σχήματος· ἔχει δὲ καὶ ὁ Κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ· καὶ ὁ Κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ· ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τοῦ τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ [δέδεικται γὰρ τοῦτο] καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.

λθʹ

⟨Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιτῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΑ· οἱ εἰρημένοι λοιπὸν κῶνοι θὰ εἶναι ἴσοι πρὸς τὸ (ἐκ περιστροφῆς στερεὸν) σχῆμα μετὰ τοῦ κώνου ΑΕΓ. Καὶ ἔχουσιν οἱ κῶνοι ὕψος μὲν τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένην κάθετον, τὰς δὲ βάσεις ἴσας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος ΑΖΗΒΘΔΓ· ἔχει δὲ καὶ ὁ κῶνος Κ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος· εἶναι ἄρα ὁ κῶνος ἴσος πρὸς τοὺς εἰρημένους κώνους. Οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὸν κῶνον ΑΕΓ· καὶ ὁ κῶνος ἄρα Κ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὸν κῶνον ΑΕΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τὸν κῶνον· διότι ὁ προειρημένος κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ κώνου τοῦ ἴσου πρὸς τὸ σχῆμα σὺν τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου (τῆς σφαίρας) ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένην κάθετον· διότι καὶ ἡ βάσις ἐδείχθη μεγαλυτέρα τῆς βάσεως [διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 37)] καὶ τὸ ὕψος μεγαλύτερον τοῦ ὕψους.

39

⟨Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸν τομέα ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ μικροτέρου τμήμα-

φανείας⟩.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου, ὃ ἀποτέμνει ἡ ΑΒ, καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Β ἐπε- H 144 *ζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος· ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΕΚ περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσιν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὖσαι παράλληλοι τῇ ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καὶ ἔσται τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΖΗ κύκλος· ἡ δὴ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος.*

ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΜ, ΒΝ· κατὰ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ΑΜΘΕΛΝΒ μείζονα ἕξει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος [πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τὸ αὐτὸ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλον, καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος]. ἀλλ' ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ΖΜ, ΗΝ ἐπιφάνεια κώνου μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν ΜΑ, τος τῆς σφαίρας〉.

Ἔστω σφαῖρα καὶ εἰς αὐτὴν μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ αὔτη κατὰ κύκλον μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ΑΒ, καὶ ἔστω κέντρον αὐτῆς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Δ ἂς ἀχθῶσιν πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΒ καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα ἂς περιγραφῇ πολύγωνον καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος· οὗτος θὰ ἔχῃ βεβαίως τὸ αὐτὸ κέντρον πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ. Ἐὰν τώρα τὸ πολύγωνον περιστραφῇ πλήρως περὶ τὸν σταθερὸν ἄξονα ΕΚ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν σφαίρας, καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου θὰ γράψωσι κύκλους, τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι ἑνοῦσι τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, οὖσαι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα κατὰ τὰ ὁποῖα ἐφάπτονται τοῦ μικροτέρου κύκλου αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, γράφουσι κύκλους εἰς τὴν μικροτέραν σφαῖραν, τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι θὰ εἶναι αἱ ἑνοῦσαι εὐθεῖαι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς παράλληλοι οὖσαι πρὸς τὴν ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ θὰ γράψωσι κωνικὰς ἐπιφανείας, καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα θὰ περιέχεται ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ εἰρημένου σχήματος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ μικροτέρου τμήματος τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΜ, ΒΝ· αὗται κατὰ τὴν περιστροφὴν θὰ γράψωσι κωνικὰς ἐπιφανείας, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου ΑΜΘΕΛΝΒ θὰ ἔχῃ μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν ἢ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ (λαμ. 4) [διότι αἱ ἐπιφάνειαι αὗται ἔχουσι τὸ αὐτὸ πέρας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΒ, καὶ τὸ σχῆμα περιλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ σχήματος]. Ἀλλὰ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ γραφεῖσα ὑπὸ τῶν ΖΜ, ΗΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς

ΝΒ· ἡ μὲν γὰρ ΖΜ τῆς ΜΑ μείζων ἐστί [ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει], ἡ δὲ ΝΗ τῆς ΝΒ, ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων γί-
H 146 *νεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας [ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασιν]. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.*

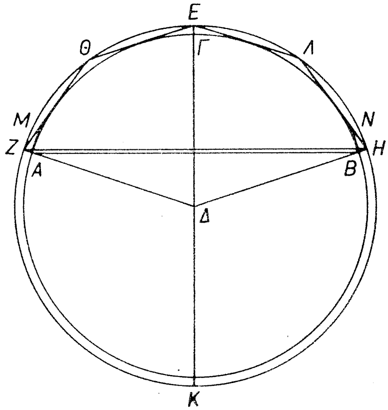
ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου [τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γεγραμμένον σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας] [τοῦτο δὲ δῆλον διὰ τὸ προγεγραμμένον].

μʹ

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ ΑΒΓΔ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ ΛΚΖ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω, καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον, καὶ ἔστω κύκλος γραφείσης ὑπὸ τῶν ΜΑ, ΝΒ· διότι ἡ μὲν ΖΜ 〉 ΜΑ [διότι εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθῆς γωνίας], ἡ δὲ ΝΗ 〉 ΝΒ (Εὐκλ. III, 18, I, 19), ὅταν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ ἡ ἐπιφάνεια γίνεται μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας [διότι ταῦτα ἀπεδείχθησαν εἰς τὰ λήμματα]. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ περιγραφομένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τῆς μικροτέρας σφαίρας.



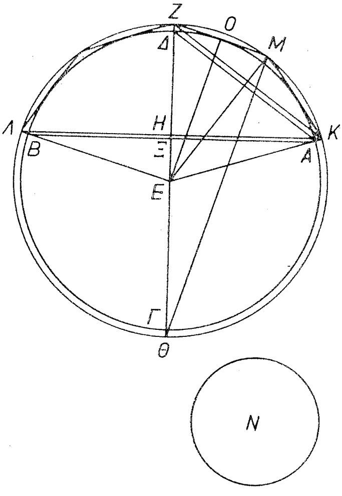
ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ ἄλλης, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου (παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν τοῦ πολυγώνου) σὺν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ πολυγώνου τούτου [διότι τὸ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γραφὲν σχῆμα εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας], [τοῦτο δὲ εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος (θ. 35)].

40

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς σφαιρικὸν τομέα περιγεγραμμένου σχήματος εἶναι μεγαλυτέρα κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος.

ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΚΛ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χω-
H 148 ρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΘ καὶ ΖΗ [ὅ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας· τοῦτο γὰρ προδέδεικται]. τοῦ ἄρα Ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΜΘ, ΗΖ περιεχομένῳ. ἀλλ' ἡ μὲν ΗΖ μείζων ἐστὶ τῆς ΔΞ [ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΚΖ, ἔσται παράλληλος τῇ ΔΑ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ παράλληλος, καὶ κοινὴ ἡ ΖΕ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΖΚΗ τρίγωνον τῷ ΔΑΞ τριγώνῳ. καί ἐστιν μείζων ἡ ΖΚ τῆς ΑΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΔΞ], ἴση δὲ ἡ ΜΘ τῇ διαμέτρῳ τῇ ΓΔ [ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΟ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΜΟ τῇ ΟΖ, ἡ δὲ ΘΕ τῇ ΕΖ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΟ τῇ ΜΘ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῆς ΕΟ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ διπλασία ἐστὶν τῆς ΕΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῇ ΓΔ], τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΞ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ΚΖΛ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· ὁ γὰρ Ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.



Διότι ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος αὐτῆς ὁ ΑΒΓΔ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ τὸν τομέα τὸ πολύγωνον ΛΚΖ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ ἂς γίνῃ (τὸ ἐκ περιστροφῆς) σχῆμα, ὡς προηγουμένως, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Ν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον μίαν πλευρὰν τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ ἄλλην τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων (τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΚΛ) σὺν τὸ ἥμισυ τῆς ΚΛ. Ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΜΘ $\times$ΖΗ (θ. 22, Εὐκλ. VI, 16) [τὸ δὲ ΖΗ εἶναι ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας· διότι τοῦτο προαπεδείχθη]. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΜΘ $\times$ΗΖ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΞ [ἡ ὁποία εἶναι ὕψος τοῦ μικροτέρου τμήματος· διότι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΚΖ, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΑ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΛ, καὶ ἡ ΖΕ κοινή· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΚΗ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΑΞ (Εὐκλ. Ι, 29· VI, 4· V, 16· V, 14). Καὶ εἶναι ΖΚ $\rangle$ ΑΔ· εἶναι ἄρα καὶ ΖΗ $\rangle$ ΔΞ], εἶναι δὲ ἡ ΜΘ ἴση πρὸς τὴν διάμετρον ΓΔ [διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΕΟ, ἐπειδὴ εἶναι ἡ μὲν ΜΟ ἴση πρὸς τὴν ΟΖ, ἡ δὲ ΘΕ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΜΘ (Εὐκλ. VI, 2)· εἶναι ἄρα ἡ ΜΘ διπλασία τῆς ΕΟ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΕΟ· εἶναι ἄρα ΜΘ $=$ ΓΔ], τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΓΔ $\times$ΔΞ $=$ ΑΔ^2· ἡ κυρτὴ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ΚΖΛ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου τοῦ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ· διότι ὁ κύκλος Ν εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περὶ τὸν τομέα περιγεγραμμένου σχήματος (θ. 39, πόρισμα).

ΠΟΡΙΣΜΑ α′

Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέν- H 150 *τρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ [ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό· δῆλον οὖν τὸ λεγόμενόν ἐστιν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου].*

ΠΟΡΙΣΜΑ β′

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

μα′

⟨Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσονι ἡμισφαιρίου περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος διπλασίονα λόγον

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ περὶ τὸν τομέα περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, εἶναι ἴσον πρὸς κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος, τὸ δὲ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν [ἡ ὁποία βεβαίως εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· διότι τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν τομέα σχῆμα εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ αὐτό· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ λεγόμενον ἐκ τοῦ προηγουμένου] (θ. 38).

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς μικροτέρας σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· διότι ὁ ἴσος πρὸς τὸ σχῆμα κῶνος σὺν τὸν κῶνον, θὰ ἔχῃ βάσιν μὲν μεγαλυτέραν τοῦ εἰρημένου κύκλου (θ. 40), τὸ δὲ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς μικροτέρας σφαίρας (θ. 40, πόρ. 1).

41

⟨Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὸ μικρότερον ἡμισφαιρίου τμῆμα τῆς σφαίρας περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον *ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ〉.*

Ἔστω πάλιν σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον 〈ἰσόπλευρον καὶ〉 ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς, καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ΗΒ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα· δεικτέον, ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπι-
H 152 *φάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ 〈πρὸς τὸ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ〉 τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ.*

ἔστω γὰρ ὁ Μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ· ἔσται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ Ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν τοῦ λόγου τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον εἰς τὸν κύβον⟩.

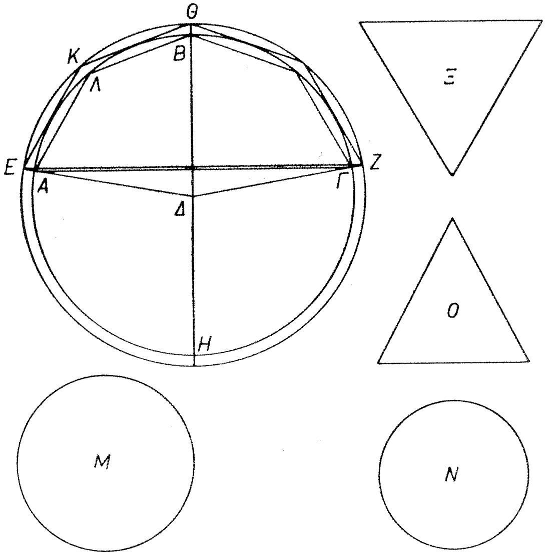
Ἔστω πάλιν σφαῖρα καὶ εἰς αὐτὴν μέγιστος κύκλος καὶ ἔστω τμῆμα μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ εἰς τὸν τομέα ΑΒΓ ἂς ἐγγραφῇ πολύγωνον ⟨ἰσόπλευρον καὶ⟩ ἀρτιόγωνον καὶ ὅμοιον πρὸς τοῦτο ἂς περιγραφῇ, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραὶ παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς, καὶ περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ἂς περιγραφῇ κύκλος, καὶ ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα περὶ τὸν σταθερὸν ἄξονα ΗΒ ἀφοῦ περιστραφῶσιν οἱ κύκλοι ἂς γράψωσι σχήματα περιεχόμενα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν· δεικτέον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἔχει λόγον, οἷον τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ σχῆμα (τὸ περιγεγραμμένον) σὺν τὸν κῶνον ἔχει λόγον ⟨πρὸς τὸ σχῆμα (τὸ ἐγγεγραμμένον) σὺν τὸν κῶνον⟩, οἷον οἱ κύβοι τῶν αὐτῶν πλευρῶν.

Διότι ἔστω ὁ κύκλος Μ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον μίαν πλευράν, τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ἄλλην τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων (τοῦ περιγεγρ. πολυγώνου) τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΕΖ σὺν τὸ ἥμισυ τῆς ΕΖ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κύκλος Μ ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος (θ. 39, πόρ. καὶ θ. 35). Ἂς ληφθῇ λοιπὸν καὶ ὁ κύκλος Ν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον ἔχον μίαν πλευράν, τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ἄλλην τὸ ἄθροι-

ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΓ· ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ πλευρᾶς [καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν Ν κύκλον]· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ [τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον].

Η 154 *ἔστω πάλιν κῶνος ὁ Ξ βάσιν μὲν ἔχων τῷ Μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας· ἴσος δὴ οὗτός ἐστιν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ Ο βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ Ν, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην· ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ κέντρον· ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ [ἐπεί] ἐστιν, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου [τοῦ Δ] ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην, ἐδείχθη δέ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου [καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον]· ἔσται ἄρα, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ο, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου [ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι]. ὁ Ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον· φανερὸν οὖν,* σμα τῶν διαγωνίων (τοῦ ἐγγεγρ. πολυγώνου) τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΑΓ σὺν τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ οὗτος ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος (θ. 35). Ἀλλὰ αἱ εἰρημέναι ἐπιφάνειαι εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΕΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΖ [καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ κύκλος Μ πρὸς τὸν κύκλον Ν] (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἔχει λόγον οἷον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΛ [τὸν αὐτὸν δηλ. οἷον τὰ πολύγωνα]·

Ἔστω πάλιν κῶνος ὁ Ξ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν κύκλον Μ ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς μικροτέρας σφαίρας· εἶναι λοιπὸν ὁ κῶνος οὗτος ἴσος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ Δ (θ. 40, πόρ. 1). Καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ Ο ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν Ν, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΛ ἠγμένην κάθετον· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ οὗτος ἴσος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΓ, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον Δ (θ. 38)· διότι πάντα ταῦτα προαπεδείχθησαν. Καὶ [ἐπειδὴ] εἶναι, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς μικροτέρας σφαίρας, οὕτως, ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου (τοῦ Δ) ἐπὶ τὴν ΑΛ ἠγμένην κάθετον, ἐδείχθη δέ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Μ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ν [καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον]· θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ Ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ Ο, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ξ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ο [εἶναι ἄρα οἱ κῶνοι ὅμοιοι]. Ὁ κῶνος ἄρα Ξ πρὸς τὸν κῶνον Ο ἔχει λόγον, οἷον ὁ κύβος τῆς διαμέτρου *ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς*



τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ.

Η 156 *μβ'*

Παντὸς τμήματος σφαίρας ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας.

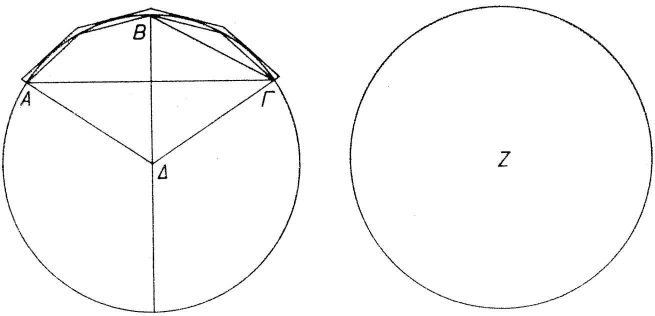
ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΓ κύκλος πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ· δεῖ δὴ δεῖξαι, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος ἴση ἐστὶ τῷ Ζ κύκλῳ.

πρὸς τὸν κύβον τῆς διαμέτρου (λῆμ. 5 μετὰ τὸ θ. 16, καὶ Εὐκλ. XII, 12)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τὸν κῶνον ἔχει λόγον ὡς $EK^3 : A\Lambda^3$.

42

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς τμήματος σφαίρας μικροτέρου ἡμισφαιρίου εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος εἰς αὐτὴν ὁ ΑΒΓ καὶ



σφαιρικὸν τμῆμα εἰς αὐτὴν μικρότερον ἡμισφαιρίου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΓ κάθετος ὢν ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ὁ κύκλος Ζ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸν κύκλον Ζ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ Δ κέντρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν· καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος καὶ τοῦ Ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Ζ κύκλον, περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου, ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔσται, ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον· ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι
H 158 *τοῦ, ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν Ζ κύκλον, μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος· καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ Ζ κύκλου· ὅπερ ἀδύνατον· δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου.*

ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας, καὶ περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα, καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὡς

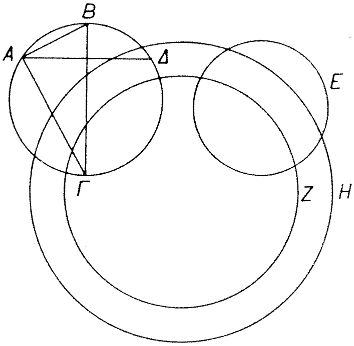
Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ἐπιφάνεια (τοῦ ΑΒΓ τμήματος) τοῦ κύκλου Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον (τῆς σφαίρας) Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὰ Α, Γ καὶ ἂς προεκβληθῶσι· καὶ ἐνῷ ἔχομεν δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος καὶ τὸν κύκλον Ζ, ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν τομέα ΑΒΓ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἂς περιγραφῇ ἄλλο ὅμοιον πρὸς τοῦτο, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος πρὸς τὸν κύκλον Ζ (θ. 6), ἀφοῦ δὲ περιστραφῇ ὁ (μέγιστος) κύκλος, ὡς καὶ πρότερον, θὰ ὑπάρχωσι δύο στερεὰ περιεχόμενα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἓν εἶναι περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο ἐγγεγραμμένον, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου θὰ εἶναι, ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον· διότι ἕκαστος τῶν λόγων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰρημένου (σφαιρικοῦ) τμήματος πρὸς τὸν κύκλον Ζ, εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος (θ. 39) καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κύκλου Ζ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια (τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος) εἶναι μικροτέρα ἑνὸς τοιούτου κύκλου (θ. 37).

Ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μεγαλύτερος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, καὶ ἂς περιγραφῶσι καὶ ἐγγραφῶσιν ὅμοια πολύγωνα, καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἂς ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιοὐδὲ ἐλάσσων· ἴση ἄρα.

μγʹ

Καὶ ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τῷ κατὰ τὴν ΑΔ, καὶ τὸ ΑΒΔ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου, καὶ διάμετρος ἡ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἔστω
H 160 ὁ μὲν Ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὁ δὲ Ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΓ, ὁ δὲ Η κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ· καὶ ὁ Η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς Ε, Ζ. ὁ δὲ Η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας [ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλου], ὁ δὲ Ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΔ τμήματος [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου]· λοιπὸς ἄρα ὁ Ζ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ ΑΓΔ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὃ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου.



μδʹ

Παντὶ τομεῖ σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων φάνειαν τοῦ (σφαιρικοῦ) τμήματος (θ. 6). Δὲν εἶναι ἄρα (καθ' ὁμοίαν ἀπόδειξιν ὡς εἰς προηγούμενα θεωρήματα) μεγαλυτέρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου Ζ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· εἶναι ἄρα ἴση.

43

Καὶ ἂν ὑπάρχῃ τμῆμα μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι ὁμοίως ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ τμήματος.

Διότι ἔστω σφαῖρα καὶ εἰς αὐτὴν μέγιστος κύκλος, καὶ ἂς νοηθῇ ὅτι ἔχει τμηθῇ αὕτη δι' ἐπιπέδου καθέτου διερχομένου διὰ τῆς ΑΔ, καὶ ἔστω τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΔ μικρότερον ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ διάμετρος ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Β, Γ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὸ Α αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἔστω ὁ μὲν κύκλος Ε, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ὁ δὲ κύκλος Ζ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, ὁ δὲ κύκλος Η, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος Η ἴσος πρὸς τοὺς δύο κύκλους Ε, Ζ (Εὐκλ. Ι, 47 καὶ ΧΙΙ, 2). Ὁ δὲ κύκλος Η εἶναι ἴσος πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας [ἐπειδὴ ἑκάστη εἶναι τετραπλασία τοῦ κύκλου διαμέτρου ΒΓ] (θ. 33), ὁ δὲ κύκλος Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΑΒΔ [διότι τοῦτο ἀπεδείχθη ἐπὶ τοῦ μικροτέρου ἡμισφαιρίου] (θ. 42)· ὁ ἄλλος ἄρα κύκλος Ζ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΑΓΔ, τὸ ὁποῖον βεβαίως εἶναι μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου.

44

Πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι ἴσος πρὸς κῶνον, ὅστις ἔχει βάσιν *ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.*

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔ καὶ κέντρον τὸ Γ καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν ΑΒΔ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ΒΓ· δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ ΑΒΓΔ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ.

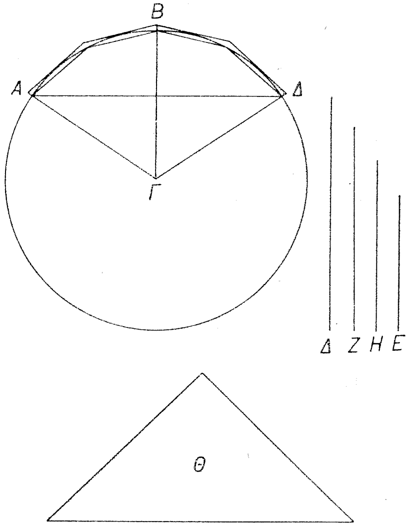
εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου, καὶ κείσθω ὁ Θ κῶνος, οἷος εἴρηται· δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ Θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο ⟨εὐθεῖαι⟩ γραμμαὶ αἱ Δ, Ε, μείζων δὲ ἡ Δ τῆς Ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ Δ πρὸς Ε ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον, καὶ εἰλήφθωσαν
H 162 *δύο ⟨εὐθεῖαι⟩ γραμμαὶ αἱ Ζ, Η, ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ Δ τῆς Ζ καὶ ἡ Ζ τῆς Η καὶ ἡ Η τῆς Ε, καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, ὅπως ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα· τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ Γ σημεῖον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ⟨πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου⟩ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ζ· ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει ἢ τριπλάσιον τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ. ἡ δὲ Δ πρὸς Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ· τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ*

μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ τομεύς, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Ἔστω σφαῖρα καὶ εἰς αὐτὴν μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔ καὶ κέντρον τὸ Γ καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, ὅστις εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΔ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ΒΓ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ τομεὺς ΑΒΓΔ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν εἰρημένον κῶνον.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω μεγαλύτερος ὁ τομεὺς τοῦ κώνου, καὶ ἂς ληφθῇ ὁ κῶνος Θ, ὡς ἐλέχθη· ἐνῷ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο ἄνισα μεγέθη, καὶ ὁ τομεὺς καὶ ὁ κῶνος Θ, ἂς εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ Δ, Ε, μεγαλυτέρα δὲ ἡ Δ τῆς Ε, καὶ ἂς ἔχῃ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον, καὶ ἂς ληφθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ Ζ, Η οὕτως, ὥστε ὅσον ὑπερέχει ἡ Δ τῆς Ζ νὰ ὑπερέχῃ καὶ ἡ Ζ τῆς Η καὶ ἡ Η τῆς Ε, καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου ἂς περιγραφῇ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἂς ἐγγραφῇ ὅμοιον πρὸς τοῦτο οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ (θ. 4), καὶ ὁμοίως πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀφοῦ περιστραφῇ ὁ κύκλος ἂς γραφῶσι δύο στερεὰ περιεχόμενα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν· τὸ περιγεγραμμένον ἄρα σὺν τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τὸν κῶνον ἔχει λόγον, οἷον ὁ κύβος τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγρ. πολυγώνου πρὸς τὸν κύβον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου (θ. 41). Ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ⟨πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου⟩ ἔχει λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· θὰ ἔχῃ ἄρα τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον μικρότερον

πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς E. ἡ δὲ Δ πρὸς E ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον ἢ τὸ περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἐναλλάξ· μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος· καὶ τὸ ἐγγεγραμ-
H 164 μένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ μεῖζόν ἐστι τοῦ Θ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου [τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ Θ· βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας]· οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ Θ κώνου.



ἔστω δὴ πάλιν ὁ Θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ Δ πρὸς τὴν E μείζων αὐτῆς οὖσα ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα, καὶ λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κύβος τῆς Δ πρὸς τὸν κύβον τῆς Ζ. Εἶναι δὲ $\Delta : E > \Delta^3 : Z^3$· τὸ στερεὸν ἄρα σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν τομέα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔχει λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε. Ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἔχει λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον Θ· θὰ ἔχῃ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον Θ μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν τομέα σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. V, 16)· εἶναι δὲ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα μεγαλύτερον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος· καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα εἰς τὸν τομέα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Θ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι προηγουμένως (θ. 38, πόρ.) ἐδείχθη ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τοιούτου κώνου [τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· οὗτος δὲ εἶναι ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ Θ· διότι ἔχει βάσιν κύκλον ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος, τουτέστι πρὸς τὸν εἰρημένον κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας]· δὲν εἶναι ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μεγαλύτερος τοῦ κώνου Θ.

Ἔστω τώρα ὁ κῶνος Θ μεγαλύτερος τοῦ στερεοῦ τομέως. Πάλιν ὁμοίως ἡ Δ οὖσα μεγαλυτέρα τῆς Ε ἂς ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν σφαιρ. τομέα, καὶ ὁμοίως ἂς ληφθῶσιν αἱ Ζ, Η, ὥστε νὰ ὑπάρχωσιν αἱ αὐταὶ διαφοραὶ (ἡ αὐτὴ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ὡς προηγουμένως τῶν Δ, Ζ, Η, Ε), καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα περιγεγραμμένου (κανονικοῦ) ἀρτιογωνίου πολυγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἂς ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ

*ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ Ζ, Η, ὥστε εἶναι τὰς διαφορὰς τὰς
αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα
πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμ-
μένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ [καὶ
γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα].
ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν το-
μέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον
ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Θ κῶνος
πρὸς τὸν τομέα [ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσ-*
H 166 *σονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμή-
ματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον]· μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς
τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος· μείζων ἄρα ὁ Θ
κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον [δέ-
δεικται γὰρ τοῦτο, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ
τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα]· ἴσος ἄρα
ὁ τομεὺς τῷ Θ κώνῳ.*

(θ. 4) [καὶ ἂς γραφῶσι τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα]· ὁμοίως λοιπὸν ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἔχει λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε, καὶ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ κῶνος Θ πρὸς τὸν τομέα [ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν πρὸς τὸ περιγεγραμμένον]. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος· ὁ κῶνος ἄρα Θ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 40, πόρ. 2)· [διότι ἔχει ἀποδειχθῆ τοῦτο, ὅτι ὁ τοιοῦτος κῶνος εἶναι μικρότερος τοῦ περὶ τὸν τομέα περιγεγραμμένου σχήματος]· εἶναι ἄρα ὁ τομεὺς ἴσος πρὸς τὸν κῶνον Θ.

H 168

β′

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Πρότερον μὲν ἐπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι· συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλά σοι τὰς ἀποδείξεις, ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ διότι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ, καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ
H 170 γράψας ἀπέσταλκά σοι, ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι.

Τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστιν δὲ τοῦτο φανερὸν δεδειγμένον ἐκ

2

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Προηγουμένως μὲν μὲ παρεκάλεσες νὰ σοῦ ἀποστείλω τὰς ἀποδείξεις τῶν προβλημάτων, τῶν ὁποίων τὰς ἐκφωνήσεις ἐγὼ ὁ ἴδιος ἀπέστειλα εἰς τὸν Κόνωνα· συμβαίνει δὲ νὰ ἀποδεικνύωνται τὰ πλεῖστα ἐξ αὐτῶν διὰ τῶν θεωρημάτων, τῶν ὁποίων τὰς ἀποδείξεις σοῦ ἀπέστειλα προηγουμένως, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαίρας εἶναι τετραπλασία ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, καὶ ὅτι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν παντὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, καὶ ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἕνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, αὐτὸς εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ὅτι πᾶς σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι ἴσος πρὸς κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὸν κύκλον, ὅστις εἶναι ἴσος πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰς τὸν τομέα σφαιρικοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ὅσα μὲν λοιπὸν ἐκ τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων ἀποδεικνύονται διὰ τῶν θεωρημάτων τούτων, σοῦ τὰ ἀποστέλλω ἀφοῦ τὰ ἔγραψα εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, ὅσα δὲ εὑρίσκονται δι' ἄλλης θεωρίας, ὡς τὰ περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, θὰ προσπαθήσω νὰ σοῦ ἀποστείλω τὸ ταχύτερον.

Τὸ δὲ πρῶτον τῶν προβλημάτων ἦτο τὸ ἑξῆς·
Σφαίρας δοθείσης νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦτο ἀπεδείχθη

τῶν προειρημένων θεωρημάτων· τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

α'

Τὸ δεύτερον ἦν· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην.

ἔστω διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α καὶ τῷ Α ἴση ἡ Β σφαῖρα, καὶ κείσθω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ ΓΖΔ, τῆς δὲ Β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς Β σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ [τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΗΘ [ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, καὶ ὁ Κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ]· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστω τῷ ἀπὸ ΗΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΜΝ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τουτέστιν H 172 *ἡ ΗΘ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ. καί ἐστιν δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΕΖ· δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΗΘ, ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΜΝ.*

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α· δεῖ δὴ τῷ Α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν.

ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων· διότι τὸ τετραπλάσιον ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι ἐπίπεδον ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

1

Τὸ δεύτερον ἦτο· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἴση πρὸς τὸν κῶνον ἢ τὸν κύλινδρον.

Ἔστω δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α καὶ πρὸς τὸν Α ἴση ἡ σφαῖρα Β καὶ ἔστω ὁ κύλινδρος ΓΖΔ ἴσος πρὸς τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου, καὶ ἔστω κύλινδρος ἴσος πρὸς τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας Β, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΗΘ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΚΛ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας Β. εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος Ε ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον Κ [τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν]· ὡς ἄρα εἶναι ὁ κύκλος Ε πρὸς τὸν κύκλον Κ, τουτέστιν ὡς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΓΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου ΗΘ (Εὐκλ. XII, 2), οὕτως εἶναι ΚΛ : ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ $ΚΛ = ΗΘ$ [διότι ὁ κύλινδρος, ὅστις εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας ἔχει ὕψος ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύκλος Κ εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας]· εἶναι ἄρα $ΓΔ^2 : ΗΘ^2 = ΗΘ : ΕΖ$. Ἔστω $ΗΘ^2 = ΓΔ \times ΜΝ$· εἶναι ἄρα $ΓΔ : ΜΝ = ΓΔ^2 : ΗΘ^2$, τουτέστιν $ΗΘ : ΕΖ$, καὶ ἐναλλὰξ ὡς $ΓΔ : ΗΘ = ΗΘ : ΜΝ = ΜΝ : ΕΖ$. Καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΕΖ ἔχει δοθῇ· δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΕΖ αἱ ΗΘ, ΜΝ εἶναι δύο μέσαι ἀνάλογοι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΜΝ εἶναι δοθεῖσα.

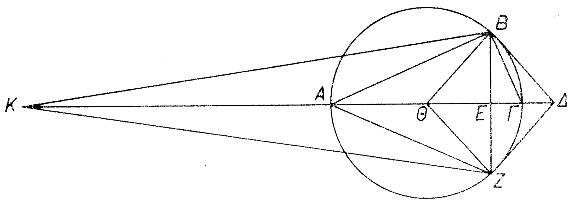
Τὸ πρόβλημα δὲ θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α· πρέπει πρὸς τὸν Α κῶνον ἢ κύλινδρον νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἴση.

ἔστω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ ΗΘ, ΜΝ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, τὴν ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ τὴν ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ ΗΘ διαμέτρῳ· λέγω δή, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ.

καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΗΘ, ἡ ΜΝ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ ΗΘ τῇ ΚΛ [ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον], ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΕΖ [τῶν ἄρα Ε, Κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ἴσος ἄρα ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ Κ κύλινδρος τῆς σφαίρας,
H 174 *ἧς διάμετρος ἡ ΗΘ, ἡμιόλιός ἐστιν· καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα, ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ΗΘ, τουτέστιν ἡ Β, ἴση ἐστὶ τῷ Α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.*

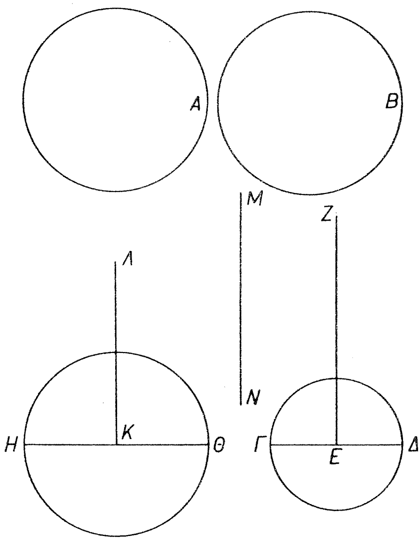
β′

Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν



ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ

Ἔστω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου κύλινδρος ἴσος πρὸς τὰ $\frac{3}{2}$, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΓΔ, ὕψος δὲ τὸ ΕΖ, καὶ ἂς ληφθῶσι τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογοι αἱ ΗΘ, ΜΝ, ὥστε νὰ εἶναι ΓΔ : ΗΘ = ΗΘ : ΜΝ = ΜΝ : ΕΖ, καὶ ἂς νοηθῇ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΗΘ, ὕψος δὲ τὸ ΚΛ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον ΗΘ· λέγω τώρα, ὅτι ὁ κύλινδρος Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον Κ.



Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΓΔ : ΗΘ = ΜΝ : ΕΖ καὶ ἐναλλὰξ [δηλ. καὶ ΓΔ : ΜΝ = ΗΘ : ΕΖ (Εὐκλ. V, 16)], καὶ εἶναι ΗΘ = ΚΛ [εἶναι ἄρα ΓΔ : ΜΝ, τουτέστιν $ΓΔ^2 : ΗΘ^2$ = κύκλος Ε : κύκλον Κ], ὡς ἄρα κύκλος Ε : κύκλον Κ = ΚΛ : ΕΖ [τῶν κυλίνδρων ἄρα Ε, Κ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν]· εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος Ε ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον Κ (Εὐκλ. XII, 15). Ὁ δὲ κύλινδρος Κ εἶναι τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΗΘ· καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘ, τουτέστιν ἡ Β εἶναι ἴση πρὸς τὸν Α κῶνον ἢ κύλινδρον.

2

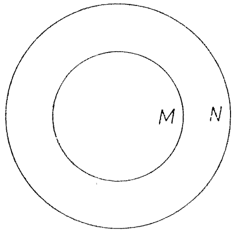
Πᾶν σφαιρικὸν τμῆμα ἰσοῦται πρὸς κῶνον, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν μὲ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ *ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.*

ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα τῷ διὰ τῆς ΒΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΓΕ, καὶ πάλιν πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΓ, ΓΕ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κορυφὰς ἔχοντες τὰ Κ, Δ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΔΖ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΒΚΖ τῷ κατὰ τὸ Α σημεῖον.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΘ, ΘΖ, καὶ νοείσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἔστω κῶνος ὁ Μ βάσιν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΓΖ τμήματος τῆς σφαίρας, τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἔσται δὴ ὁ Μ κῶνος ἴσος τῷ
H 176 *ΒΓΘΖ στερεῷ τομεῖ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς ΑΕ, διελόντι ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστιν ἡ ΓΘ πρὸς ΑΕ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ ἐστιν, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΘΔ πρὸς ΘΓ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΓΘ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΓΒ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου, ἡ δὲ ΒΕ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλου· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ, ὁ Μ κύκλος πρὸς*

ὕψος τοῦ τμήματος ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ ἄθροισμα, τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἄλλου τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἄλλου τμήματος.

Ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος αὐτῆς ἔχων διάμετρον τὴν ΑΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ σφαῖρα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ΒΖ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἔστω κέντρον αὐτῆς τὸ Θ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς $(\Theta A + AE) : AE = \Delta E : \Gamma E$, καὶ πάλιν ἂς γίνῃ ὡς $(\Theta\Gamma + \Gamma E) : \Gamma E = KE : EA$, καὶ ἂς ἀναγραφῶσι κῶνοι ἔχοντες βάσιν τὸν κύκλον διαμέτρου ΒΖ καὶ κορυφὰς τὰ σημεῖα Κ, Δ· λέγω, ὅτι ὁ μὲν κῶνος ΒΔΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ κατὰ τὸ Γ σφαιρικὸν τμῆμα, ὁ δὲ κῶνος ΒΚΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ κατὰ τὸ Α σφαιρικὸν τμῆμα.



Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΘ, ΘΖ καὶ ἂς νοηθῇ κῶνος ἔχων βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΒΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἔστω κῶνος ὁ Μ ἔχων βάσιν κύκλον ἴσον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΒΓΖ, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τοῦ ὁποίου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κῶνος Μ ἴσος πρὸς τὸν στερεὸν (σφαιρικὸν) τομέα ΒΓΘΖ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον (θ. 44). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\Delta E : E\Gamma = (\Theta A + AE) : AE$, διὰ διαιρέσεως θὰ εἶναι, (Εὐκλ. V, 17) $\Gamma\Delta : \Gamma E = \Theta A : AE$, τουτέστιν ἡ $\Gamma\Theta : AE$, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. V, 16), ὡς ἡ $\Delta\Gamma : \Gamma\Theta = \Gamma E : EA$, καὶ διὰ συνθέσεως, (Εὐκλ. V, 18), ὡς ἡ $\Theta\Delta : \Theta\Gamma = \Gamma A : AE$, τουτέστιν $\Gamma B^2 : BE^2$· ὡς ἄρα ἡ $\Delta\Theta : \Gamma\Theta = \Gamma B^2 : BE^2$. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Μ, ἡ δὲ ΒΕ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΒΖ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Delta\Theta : \Theta\Gamma =$ ὁ κύκλος Μ : κύκλον ἔχοντα διά-

τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον. καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΓ τῷ ἄξονι τοῦ Μ κώνου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ Μ κώνου, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον· ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν Μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ [τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως· ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Μ κώνου, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ· ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ, ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ]· ἀλλ' ὁ Μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΓΖΘ στερεῷ τομεῖ· καὶ ὁ ΒΓΖΘ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ H 178 *ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ, λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΔΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΖΓ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ ΒΚΖ κῶνος ἴσος τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΓΕ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, διελόντι ἄρα, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΘΑ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ Ν ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΒ· ἴσος ἄρα ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΖ τμήματος. καὶ νοείσθω [ὁ] κῶνος ὁ Ν ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ ΒΘΖΑ στερεῷ τομεῖ· τοῦτο γὰρ* μετρον τὴν ΒΖ. Καὶ εἶναι ἴση ἡ ΘΓ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου Μ, οὕτως ὁ κύκλος Μ πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΒΖ· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον Μ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, πρὸς τὸν στερεὸν ῥόμβον ΒΔΖΘ· [Διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ λήμματα τοῦ πρώτου βιβλίου. Ἢ καὶ τοιουτοτρόπως· ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Μ, οὕτως ὁ κύκλος Μ πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΒΖ, εἶναι ἄρα ὁ κῶνος Μ ἴσος πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ὁ ἔχων διάμετρον τὴν ΒΖ, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ· διότι αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη. Ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΒΖ, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν στερεὸν ῥόμβον ΒΔΖΘ]. Ἀλλ' ὁ κῶνος Μ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν στερεὸν (σφαιρ.) τομέα ΒΓΖΘ· καὶ ὁ στερεὸς τομεὺς ἄρα ΒΓΖΘ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν στερεὸν ῥόμβον ΒΔΖΘ (διπλοῦν κῶνον). Ἐὰν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ἰσότητος ἀφαιρεθῇ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ὁ ἔχων διάμετρον τὴν ΒΖ, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ, εἶναι ἄρα ὁ ἀπομένων κῶνος ΒΔΖ ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΖΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ κῶνος ΒΚΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΑΖ. Διότι ἐπειδὴ εἶναι ὡς (ΘΓ + ΓΕ) : ΓΕ = ΚΕ : ΕΑ, διὰ διαιρέσεως ἄρα (Εὐκλ. V, 17) εἶναι, ὡς ΚΑ : ΑΕ = ΘΓ : ΓΕ. Εἶναι δὲ ΘΓ = ΘΑ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ΚΑ : ΑΘ = ΑΕ : ΕΓ (Εὐκλ. V, 16)· ὥστε καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς ΚΘ : ΘΑ = ΑΓ : ΓΕ (Εὐκλ. V, 18), τουτέστι = ΒΑ^2 : ΒΕ^2. Ἂς ληφθῇ πάλιν κύκλος ὁ Ν ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΑΒ· εἶναι ἄρα οὗτος ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΒΑΖ. Καὶ ἂς νοηθῇ [ὁ] κῶνος ὁ Ν ἔχων ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· εἶναι ἄρα οὗτος ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλου, τουτέστιν ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ἴση δὲ ἡ ΑΘ τῷ ὕψει τοῦ Ν κώνου, ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου, οὕτως ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ὁ ΒΘΖΑ τομεύς, τῷ ΒΘΖΚ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΖ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΖΚ κώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

H 180

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ φανερόν, ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος· ὡς γὰρ ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ὁ ΔΖΒ κῶνος, τουτέστι τὸ ΒΓΖ τμῆμα, πρὸς τὸν ΒΓΖ κῶνον.

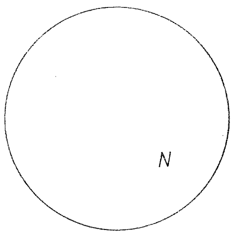
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὅτι καὶ ὁ ΚΒΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ Ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων [τὴν] ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ [ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος, ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως καὶ ἡ ἐπιφάἴσος πρὸς τὸν στερεὸν (σφαιρ.) τομέα ΒΘΖΑ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον (θ. 44). Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς ΚΘ : ΘΑ $=$ ΑΒ^2 : ΒΕ^2, τουτέστι τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ν πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος διάμετρον τὴν ΒΖ, τουτέστιν ὁ κύκλος Ν πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου ΒΖ, εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ν, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ν, οὕτως ὁ κύκλος Ν πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΒΖ· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος Ν, τουτέστιν ὁ σφαιρ. τομεὺς ΒΘΖΑ πρὸς τὸ σχῆμα ΒΘΖΚ. Ἄς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ὁ ἔχων διάμετρον τὴν ΒΖ, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ· ὅλον ἄρα τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον ΒΖΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι ὁ ὄγκος ἐν γένει σφαιρικοῦ τμήματος πρὸς τὸν ὄγκον κώνου ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον γίνεται ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας καὶ τῆς καθέτου (ὕψους) τοῦ ἄλλου τμήματος πρὸς τὴν κάθετον (ὕψος) τοῦ ἄλλου τμήματος· διότι ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ὁ κῶνος ΔΖΒ, τουτέστι τὸ τμῆμα ΒΓΖ (θ. 2) πρὸς τὸν κῶνον ΒΓΖ (Ι, μετὰ τὸ θ. 16, λῆμμα 1).

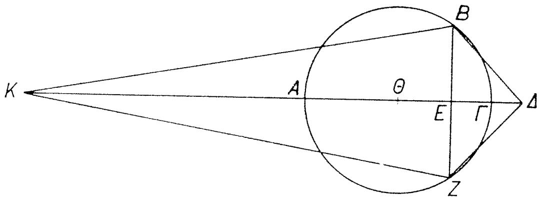
Ὑπὸ τὰς αὐτὰς προϋποθέσεις, ὅτι δηλ. ὁ κῶνος ΚΒΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΑΖ. Διότι ἔστω ὁ κῶνος Ν ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· εἶναι ἄρα ὁ κῶνος ἴσος πρὸς τὴν σφαῖραν [διότι ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν μέγιστον κύκλον καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καὶ ὁ κῶνος Ν εἶναι τετραπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου, ἐπειδὴ καὶ ἡ βάσις εἶναι τετραπλασία τῆς βάσεως καὶ ἡ

νεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ]. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς ΑΕ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, συναμφότερος ἡ ΘΓΕ πρὸς ΓΕ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΓΘ, τουτέστι πρὸς ΘΑ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ. καὶ συνθέντι· ἴση δὲ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ ἐστιν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΔΓ, τουτέ-
H 182 *στιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΘΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΘΚ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΓΔ, ἐναλλάξ· ὡς δὲ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἐδείχθη ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΘΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΚΘΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΚΔ, ΑΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΔ, ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΓ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τουτέστιν ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, τῷ ΒΔΖΚ στερεῷ ῥόμβῳ [ἢ οὕτως· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος,*



ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας]. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ἄθροισμα ΘΑ+ΑΕ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, διὰ διαιρέσεως καὶ ἐναλλὰξ θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, οὕτως τὸ ἄθροισμα ΘΓ + ΓΕ πρὸς ΓΕ, διὰ διαιρέσεως καὶ ἐναλλὰξ θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΓΘ, τουτέστι πρὸς ΘΑ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ. καὶ διὰ συνθέσεως· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, οὕτως εἶναι ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ εἶναι, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΔΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ· εἶναι ἄρα ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΚ, ΘΑ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΘΚ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΓΔ, ἐναλλάξ· ὡς δὲ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἐδείχθη ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΚΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΘ × ΘΔ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ × ΕΓ. Τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΚΘ × ΘΔ ἐδείχθη ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΔ × ΑΘ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΔ ×ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ × ΕΓ, τουτέστι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ. Καὶ εἶναι ἴση ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ν· εἶναι ἄρα ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Ν πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ, τουτέστιν ὁ κύκλος Ν πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ν· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος Ν, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, πρὸς τὸν στερεὸν ῥόμβον ΒΔΖΚ [ἢ οὕτως· εἶναι ἄρα, ὡς ὁ κύκλος Ν πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου ΒΖ, οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου Ν· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος Ν πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΒΖ, ὕψος δὲ ἡ ΔΚ·

ὕψος δὲ ἡ ΔΚ· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΚΖΔ στερεῷ ῥόμβῳ· καὶ ὁ Ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, ἴση ἐστὶ



τῷ ΒΖΚΔ στερεῷ ῥόμβῳ]. ὧν ὁ ΒΔΖ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ ΒΓΖ τμήματι τῆς σφαίρας· λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΚΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας.

H 184

γ′

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε· τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

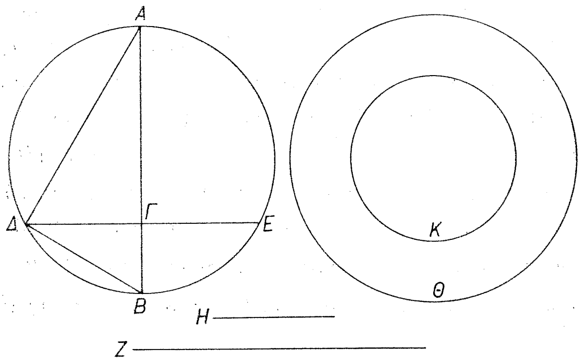
γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ ΑΔΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν, καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ ΑΔΒΕ κύκλῳ τομὴν τὴν ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΔ.

ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος, ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔ, τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ τμήματος ἴσος διότι αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη. Ἀλλ' ὁ κῶνος οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ στερεὸν ῥόμβον ΒΚΖΔ· καὶ ὁ κῶνος ἄρα Ν, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, εἶναι ἴση πρὸς τὸν στερεὸν ῥόμβον ΒΖΚΔ]. Τῶν ὁποίων ὁ κῶνος ΒΔΖ ἐδείχθη ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΓΖ· ὁ ἀπομένων ἄρα κῶνος ΒΚΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΑΖ.

3

Τρίτον πρόβλημα ἦτο τὸ ἑξῆς· ἡ δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου, ὅπως αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τμημάτων ἔχωσι λόγον τὸν αὐτὸν πρὸς τὸν δοθέντα.

Ἔστω ὅτι ἔγινεν ἡ ζητουμένη κατασκευὴ καὶ ἔστω μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας ὁ ΑΔΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ, καὶ



ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἐπίπεδον καὶ ἂς σχηματίσῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΔΒΕ τομὴν τὴν ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΒΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχει δοθῇ ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΔΑΕ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΒΕ, ἀλλὰ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΑΕ εἶναι ἴσος ὁ κύκλος, *ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΔΒ, ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθείς· ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Γ σημεῖον. καί ἐστι τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ ἐπίπεδον.*

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔΕ καὶ διάμετρος ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Ζ πρὸς Η, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΓ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὴν Ζ πρὸς Η, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ
H 186 *ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ Θ, Κ, ὁ μὲν Θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΔ, ὁ δὲ Κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ ΔΒ· ἔστιν ἄρα ὁ μὲν Θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος, ὁ δὲ Κ τοῦ ΔΒΕ τμήματος· τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ καὶ κάθετος ἡ ΓΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, τουτέστιν ἡ Ζ πρὸς Η, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τουτέστιν ὁ Θ κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος τῆς σφαίρας.*

δʹ

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (Ι, 43), πρὸς δὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΒΕ εἶναι ἴσος ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ (Ι, 42), ὡς δὲ εἶναι οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ (Εὐκλ. XII, 2) , τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, ἕπεται ὅτι ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ εἶναι δοθείς· ὥστε τὸ σημεῖον Γ εἶναι δοθέν. Καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἶναι ἄρα ὡς πρὸς τὴν θέσιν δοθὲν καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΔΕ.

Ἡ σύνθεσις δὲ θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς· ἔστω σφαῖρα τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΔΕ καὶ διάμετρος ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Ζ πρὸς Η, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ : ΒΓ = Ζ : Η καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς τμηθῇ ἡ σφαῖρα δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῶσι δύο κύκλοι οἱ Θ, Κ, ὁ μὲν Θ ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΑΔ, ὁ δὲ Κ ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ· εἶναι ἄρα ὁ μὲν κύκλος Θ ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΑΕ (Ι, 43), ὁ δὲ Κ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΒΕ (Ι, 42)· διότι τοῦτο ἔχει προαποδειχθῇ εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθὴ (Εὐκλ. III, 31), καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος (ἐπὶ τὴν ΑΒ) εἶναι ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, τουτέστιν ἡ Ζ πρὸς Η, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ, τουτέστι τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Θ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου Κ, τουτέστιν ὁ κύκλος Θ πρὸς τὸν κύκλον Κ (Εὐκλ. XII, 2), τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΔΑΕ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΔΒΕ.

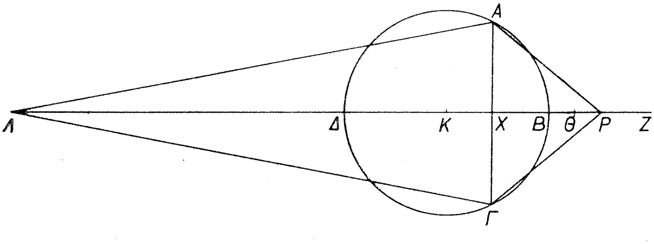
4

Ἡ δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα.

τετμήσθω διὰ τῆς ΑΓ ἐπιπέδῳ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΔΓ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ καὶ διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΚΔΧ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν ΑΛΓ κῶνος τῷ ΑΔΓ H 188 τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΑΡΓ τῷ ΑΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΛΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΡΓ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ [ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλον]· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΧ πρὸς ΧΡ δοθείς. καὶ διὰ ταὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΚΔ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ καὶ ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΡΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΚΔ πρὸς ΛΔ, συνθέντι, ὡς ἡ ΡΚ πρὸς ΚΒ, τουτέστι πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ὅλην τὴν ΚΛ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ. ὡς ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. καί ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, οὕτως ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ, ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ [καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΧ πρὸς ΔΧ, συναμφότερος ἡ ΚΒ, ΒΧ πρὸς ΒΧ, διελόντι, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΧ]. καὶ κείσθω τῇ ΚΒ ἴση ἡ ΒΖ· ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ Ρ ρας νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν πρὸς δοθέντα.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ ΑΒΓΔ· πρέπει νὰ τμηθῇ αὕτη δι' ἐπιπέδου, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας νὰ ἔχωσι λόγον πρὸς ἄλληλα τὸν δοθέντα.

Ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ΑΓ· ὁ λόγος ἄρα τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΔΓ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ εἶναι δοθείς. Ἂς τμηθῇ δὲ ἡ σφαῖρα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ καὶ διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς μὲν (ΚΔ + ΔΧ) : ΔΧ = ΡΧ : ΧΒ, ὡς δὲ (ΚΒ + ΒΧ) : ΒΧ = ΛΧ : ΧΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· εἶναι ἄρα ὁ μὲν κῶνος ΑΛΓ ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΔΓ, ὁ δὲ κῶνος ΑΡΓ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ· εἶναι ἄρα ὁ λόγος καὶ τοῦ κώνου ΑΛΓ πρὸς τὸν κῶνον ΑΡΓ δοθείς. Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς



τὸν κῶνον, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ [ἐπειδὴ βεβαίως ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν, τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΓ]· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος τῆς ΛΧ πρὸς ΧΡ δοθείς. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὡς ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς εἶναι ΛΔ : ΚΔ = ΚΒ : ΒΡ = ΔΧ : ΧΒ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΡΒ : ΒΚ = ΚΔ : ΛΔ [Εὐκλ. V, 7 πόρ.], διὰ συνθέσεως εἶναι ΡΚ : ΚΒ τουτέστι ΡΚ : ΚΔ = ΚΛ : ΛΔ [Εὐκλ. V, 18]· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ὅλην τὴν ΚΛ εἶναι, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ [Εὐκλ. V, 12]· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΡΛ ×ΛΔ=

H 190 *πεσεῖται, δῆλον [καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΧ· ὥστε καί, ὡς ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ]. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς ΔΛ πρὸς ΛΧ δοθείς, καὶ τῆς ΡΛ ἄρα πρὸς ΛΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, ὡς δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, ὁ ἄρα τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. πεποιήσθω δέ, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ· λόγος δὲ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΒ πρὸς ΖΘ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΘ. καὶ ὁ τῆς ΒΖ ἄρα λόγος πρὸς ΖΘ συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. ἀλλ᾽ ὁ ΒΖ πρὸς ΖΘ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ καὶ τοῦ τῆς ΖΧ πρὸς ΖΘ [κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ]· λοιπὸν ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τουτέστι δοθέν, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, οὕτως ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς δοθέν. καί ἐστιν δοθεῖσα ἡ ΖΔ εὐθεῖα· εὐθεῖαν ἄρα δοθεῖσαν τὴν ΔΖ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς δοθεῖσαν [τὴν ΖΘ], οὕτως τὸ δοθὲν [τὸ ἀπὸ ΒΔ] πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν, προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων [τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ μείζονα τῆς ΖΘ τὴν ΖΒ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν] οὐκ ἔχει διορισμόν·*
H 192 *καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον· δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΔ, ΒΖ καὶ διπλασίας οὔσης τῆς ΒΔ τῆς ΒΖ καὶ σημείου ἐπὶ τῆς ΒΖ τοῦ Θ τεμεῖν τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν,*

$ΛΚ^2$ [Εὐκλ. VI, 17]. Ὡς ἄρα $ΡΛ : ΛΔ = ΚΛ^2 : ΛΔ^2$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς $ΛΔ : ΔΚ = ΔΧ : ΧΒ$, θὰ εἶναι ἀνάπαλιν [Εὐκλ. V, 7 πόρ.] καὶ διὰ συνθέσεως [Εὐκλ. V, 18] ὡς ἡ $ΚΛ : ΛΔ = ΒΔ : ΔΧ$ [καὶ ὡς ἄρα $ΚΛ^2 : ΛΔ^2 = ΒΔ^2 : ΔΧ^2$. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ $ΛΧ : ΔΧ = (ΚΒ+ΒΧ) : ΒΧ$, διὰ διαιρέσεως θὰ εἶναι, ὡς ἡ $ΛΔ : ΔΧ = ΚΒ : ΒΧ$]. Καὶ ἂς ληφθῇ $ΒΖ = ΚΒ$· διότι ὅτι θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ Ρ, εἶναι φανερὸν [καὶ θὰ εἶναι, ὡς ἡ $ΛΔ : ΔΧ = ΖΒ : ΒΧ$· ὥστε καί, ὡς ἡ $ΔΛ : ΛΧ = ΒΖ : ΖΧ$]. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $ΔΛ : ΛΧ$ εἶναι δοθείς, εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος $ΡΛ : ΛΧ$ δοθείς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ λόγος $ΡΛ : ΛΧ$ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου $ΡΛ : ΛΔ$, καὶ $ΔΛ : ΛΧ$, ἀλλὰ ὡς μὲν $ΡΛ : ΛΔ = ΔΒ^2 : ΔΧ^2$, ὡς δὲ $ΔΛ : ΛΧ =$ ἡ $ΒΖ : ΖΧ$, ὁ λόγος ἄρα ΡΛ πρὸς ΛΧ σύγκειται καὶ ἐκ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ $ΒΔ^2 : ΔΧ^2$, καὶ ἡ $ΒΖ : ΖΧ$. Ἂς γίνῃ δέ, ὡς ἡ $ΡΛ : ΛΧ =$ ἡ $ΒΖ : ΖΘ$· εἶναι δὲ ὁ λόγος τῆς $ΡΛ : ΛΧ$ δοθείς· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος τῆς $ΖΒ : ΖΘ$ δοθείς. Εἶναι δὲ δοθεῖσα ἡ ΒΖ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας· εἶναι ἄρα δοθεῖσα ἡ ΖΘ. Καὶ ὁ λόγος ἄρα $ΒΖ : ΖΘ$ σύγκειται καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $ΒΔ^2 : ΔΧ^2$, καὶ ἡ $ΒΖ : ΖΧ$. Ἀλλ' ὁ λόγος $ΒΖ : ΖΘ$ σύγκειται καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς $ΒΖ : ΖΧ$ καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς $ΖΧ : ΖΘ$ [ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ κοινὸς λόγος $ΒΖ : ΖΧ$]· εἶναι ἄρα τὸ ὑπόλοιπον, ὡς τὸ $ΒΔ^2$, τουτέστι δοθέν, πρὸς τὸ $ΔΧ^2 =$ ἡ $ΧΖ : ΖΘ$, τουτέστι πρὸς δοθέν. Καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΔ εἶναι δοθεῖσα· δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΔΖ πρέπει νὰ τμήσωμεν κατὰ τὸ σημεῖον Χ καὶ νὰ κάμωμεν, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς δοθεῖσαν [τὴν ΖΘ], οὕτως τὸ δοθὲν [τὸ $ΒΔ^2$] πρὸς τὸ $ΔΧ^2$. Τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει περιορισμόν, προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ὑπαρχόντων ἐνταῦθα [τουτέστι τοῦ νὰ εἶναι διπλασία ἡ ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ μεγαλυτέρα ἡ ΖΘ τῆς ΖΒ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ἐλέχθη] δὲν ἔχει περιορισμόν· καὶ θὰ εἶναι τὸ πρόβλημα *ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τὴν ΧΖ πρὸς ΖΘ· ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.*

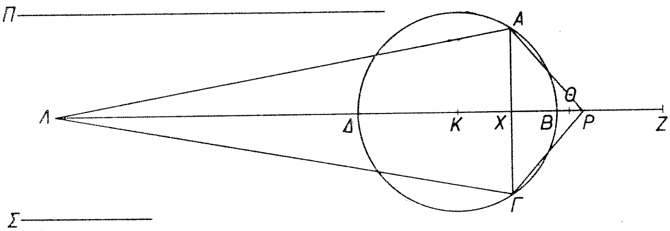
συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Π πρὸς Σ μείζονος πρὸς ἐλάσσονα, καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ τῇ ΚΒ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Θ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΖ πρὸς ΘΒ, τὴν Π πρὸς Σ, καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Χ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς ΘΖ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ διὰ τοῦ Χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τεμεῖ τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι, ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν Π πρὸς Σ.

πεποιήσθω γάρ, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΔΧ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΚΔΧ πρὸς ΧΔ, ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευήν, ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ, καὶ ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ· ὥστε καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΡΛΔ
H 194 *τῷ ἀπὸ ΛΚ ἐστιν ἴσον [ἔστιν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ], ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τουτέστιν ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΒΖ, ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΖΧ πρὸς ΧΒ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΧΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΧΛ πρὸς ΛΔ· ὥστε καί, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ,*

τοιοῦτον· δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΔ, ΒΖ καὶ διπλασίας οὔσης τῆς ΒΔ τῆς ΒΖ καὶ σημείου ἐπὶ τῆς ΒΖ τοῦ Θ, νὰ τμηθῇ ἡ ΔΒ κατὰ τὸ Χ καὶ νὰ γίνῃ, ὡς τὸ $ΒΔ^2 : ΔΧ^2 =$ τὴν ΧΖ : ΖΘ· καὶ τὰ δύο δὲ αὐτὰ εἰς τὸ τέλος θὰ ἀναλυθῶσι καὶ θὰ συντεθῶσι.

Τὸ δὲ πρόβλημα θὰ συντεθῇ ὡς ἑξῆς· ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ Π : Σ ὅπου Π>Σ, καὶ ἂς δοθῇ σφαῖρά τις καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τομὴ ὁ κύκλος, ΑΒΓΔ, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΖ = ΚΒ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΖ κατὰ τὸ σημεῖον Θ, ὥστε νὰ εἶναι, ὡς ἡ ΘΖ : ΘΒ = Π : Σ, καὶ ἀκόμη ἂς τμηθῇ ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Χ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἡ ΧΖ : ΘΖ = τὸ $ΒΔ^2 : ΔΧ^2$, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Χ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θὰ τμήσῃ τὴν σφαῖραν, ὥστε νὰ εἶναι, ὡς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον, οὕτως ἡ Π πρὸς τὴν Σ.

Διότι ἂς γίνῃ, ὡς μὲν (ΚΒ+ΒΧ) : ΒΧ = ΛΧ : ΔΧ, ὡς δὲ (ΚΔ+ΔΧ) : ΧΔ = ΡΧ : ΧΒ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἐδείξαμεν κατὰ



τὴν ἀνάλυσιν, τὸ ὀρθογώνιον $ΡΛ \times ΛΔ = ΛΚ^2$, καὶ ὡς ἡ ΚΛ : ΛΔ = ΒΔ : ΔΧ· ὥστε καί, ὡς τὸ $ΚΛ^2 : ΛΔ^2 = ΒΔ^2 : ΔΧ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $ΡΛ \times ΛΔ = ΛΚ^2$ [εἶναι, ὡς ἡ ΡΛ : ΛΔ = $ΛΚ^2 : ΛΔ^2$], θὰ εἶναι ἄρα καί, ὡς ἡ ΡΛ : ΛΔ = $ΒΔ^2 : ΔΧ^2$, τουτέστιν ἡ ΧΖ : ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ἄθροισμα (ΚΒ+ΒΧ) : ΒΧ = ΛΧ : ΧΔ, εἶναι δὲ ἴση ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΖ, *οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ. ὡς δὲ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ Π πρὸς Σ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ, τουτέστιν ὁ ΑΓΛ κῶνος πρὸς τὸν ΑΡΓ κῶνον, τουτέστι τὸ ΑΔΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ Π πρὸς Σ.*

ε'

Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τοῦ δὲ ΕΖΗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον· δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ ΕΖΗ ὅμοιον.

εὑρήσθω καὶ ἔστω τὸ ΘΚΛ, καὶ ἔστω αὐτοῦ βάσις μὲν
H 196 *ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον· ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ, ΕΟΖΗ, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν τῶν τμημάτων αἱ ΓΝ, ΛΞ, ΗΟ, καὶ ἔστω κέντρα τὰ Π, Ρ, Σ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΠΝ, ΝΤ πρὸς τὴν ΝΤ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς ΤΓ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΡΞ, ΞΥ πρὸς ΞΥ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΥΛ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΣΟ, ΟΦ πρὸς ΟΦ, οὕτως ἡ ΩΦ πρὸς ΦΗ, καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ Χ, Ψ, Ω σημεῖα· ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΒΧ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ*

θὰ εἶναι ἄρα καί, ὡς ἡ ΖΧ : ΧΒ = ΛΧ : ΧΔ. Δι' ἀναστροφῆς δὲ εἶναι, ὡς ἡ ΧΖ : ΖΒ = ΧΛ : ΛΔ· ὥστε εἶναι καί, ὡς ἡ ΛΔ : ΛΧ = ΒΖ : ΖΧ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΡΛ : ΛΔ = ΧΖ : ΖΘ, ὡς δὲ ΔΛ : ΛΧ = ΒΖ : ΖΧ, θὰ εἶναι καὶ δι' ἴσου εἰς τὴν τεταραγμένην ἀναλογίαν, ὡς ΡΛ : ΛΧ = ΒΖ : ΖΘ [Εὐκλ. V, 21]· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ : ΧΡ = ἡ ΖΘ : ΘΒ. Ὡς δὲ ἡ ΖΘ : ΘΒ = Π : Σ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ : ΧΡ, τουτέστιν ὁ κῶνος ΑΓΛ πρὸς τὸν κῶνον ΑΡΓ, τουτέστι τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΔΓ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, οὕτως ἡ Π πρὸς τὸ Σ.

5

Νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τμῆμα ὅμοιον πρὸς δοθὲν σφαιρικὸν τμῆμα καὶ ἴσον πρὸς ἄλλο δοθέν.

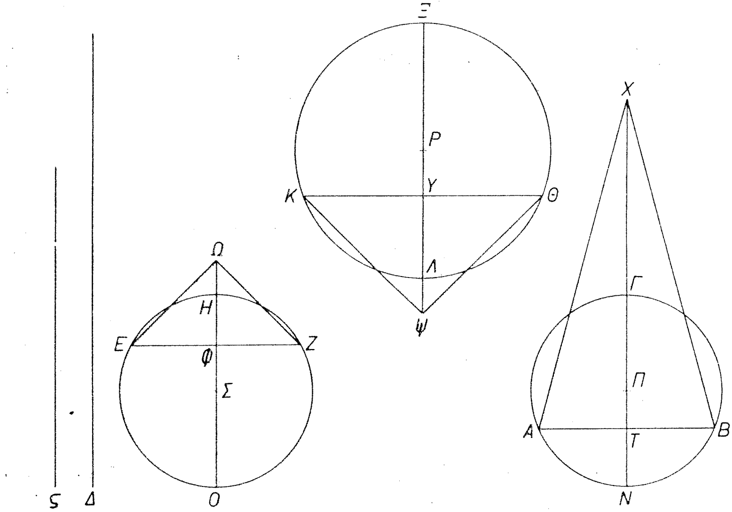
Ἔστω τὰ δύο δοθέντα σφαιρικὰ τμήματα τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν τμήματος ΑΒΓ βάσις ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, τοῦ δὲ τμήματος ΕΖΗ βάσις ὁ κύκλος διαμέτρου ΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Η· πρέπει νὰ εὑρεθῇ σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἴσον μὲν πρὸς τὸ σφ. τμῆμα ΑΒΓ, ὅμοιον δὲ πρὸς τὸ ΕΖΗ.

Ἔστω ὅτι εὑρέθη τὸ ΘΚΛ, καὶ ἔστω βάσις μὲν αὐτοῦ ὁ κύκλος διαμέτρου ΘΚ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ· ἔστωσαν δὲ καὶ κύκλοι εἰς τὰς σφαίρας οἱ ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ, ΕΟΖΗ, διάμετροι δὲ αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις τῶν τμημάτων αἱ ΓΝ, ΛΞ, ΗΟ, καὶ ἔστω κέντρα τὰ Π, Ρ, Σ καὶ ἂς γίνῃ ὡς μὲν τὸ ἄθροισμα (ΠΝ+ΝΤ) : ΝΤ = ΧΤ : ΤΓ, ὡς δὲ τὸ ἄθροισμα (ΡΞ+ΞΥ) : ΞΥ = ΨΥ : ΥΛ, ὡς δὲ τὸ ἄθροισμα (ΣΟ+ΟΦ) : ΟΦ = ΩΦ : ΦΗ, καὶ ἂς νοηθῶσι κῶνοι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι οἱ ἔχοντες διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Χ, Ψ, Ω· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ μὲν κῶνος ΑΒΧ ἴσος πρὸς τὸ

ΨΘΚ τῷ ΘΚΛ, ὁ δὲ ΕΩΖ τῷ ΕΗΖ· τοῦτο γὰρ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ ΘΚΛ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΧΒ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ [τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΖΗ τμῆμα τῷ ΘΚΛ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ΕΖΩ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ [τοῦτο γὰρ δειχθήσεται]· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΘΚ. λόγος δὲ τῆς ΩΦ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΨΥ πρὸς τὴν ΘΚ δοθείς. ὁ αὐτὸς ἔστω
H 198 ὁ τῆς ΧΤ πρὸς Δ· καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΧΤ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς Δ, κείσθω τῷ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΒ, ϛ· ἔσται ἄρα καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ϛ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς Δ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ϛ πρὸς Δ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ϛ [διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΘΚ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ϛ]· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ϛ καὶ ἡ ϛ πρὸς Δ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΘΚ, ϛ.

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ὅμοιον, τὸ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ ΑΒΓΝ, ΕΗΖΟ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΝ, ΗΟ καὶ κέντρα τὰ Π, Σ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΠΝ, ΝΤ πρὸς ΝΤ, σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, ὁ δὲ ΨΘΚ πρὸς τὸ ΘΚΛ, ὁ δὲ ΕΩΖ πρὸς τὸ ΕΗΖ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 2). Καὶ ἐπειδὴ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σφ. τμῆμα ΘΚΛ, εἶναι ἄρα καὶ ὁ κῶνος ΑΧΒ ἴσος πρὸς τὸν κῶνον ΨΘΚ [τῶν δὲ ἴσων κώνων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη]· εἶναι ἄρα, ὡς ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. Ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ $AB^2 : \Theta K^2$ [Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι ἄρα ὡς τὸ $AB^2 : \Theta K^2 = \Psi\Upsilon : XT$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΕΖΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΘΚΛ, εἶναι ἄρα καὶ ὁ κῶνος ΕΖΩ ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΨΘΚ [διότι τοῦτο θὰ ἀποδειχθῆ]· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $\Omega\Phi : EZ = \Psi\Upsilon : \Theta K$· ὁ δὲ λόγος τῆς $\Omega\Phi : EZ$ εἶναι δοθείς· καὶ ὁ λόγος ἄρα τῆς $\Psi\Upsilon : \Theta K$ εἶναι δοθείς. Ἔστω ὁ αὐτὸς πρὸς τοῦτον ὁ τῆς $XT : \Delta$· καὶ ἡ ΧΤ εἶναι δοθεῖσα· δοθεῖσα ἄρα εἶναι καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ $\Psi\Upsilon : XT$, τουτέστι τὸ $AB^2 : \Theta K^2$, οὕτως ἡ $\Theta K : \Delta$, ἂς ληφθῇ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times \varsigma = \Theta K^2$· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὡς τὸ $AB^2 : \Theta K^2 = AB : \varsigma$. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ $AB^2 : \Theta K^2 = \Theta K : \Delta$, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ $AB : \Theta K = \varsigma : \Delta$. Ὡς δὲ ἡ $AB : \Theta K = \Theta K : \varsigma$ [διότι εἶναι $\Theta K^2 = AB \times \varsigma$]· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $AB : \Theta K = \Theta K : \varsigma = \varsigma : \Delta$. Δύο ἄρα εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἶναι αἱ ΘΚ, ς.

Ἡ σύνθεσις δὲ τοῦ προβλήματος θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς· ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον νὰ κατασκευασθῇ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν σφαιρ. τμῆμα, τὸ ΑΒΓ, τὸ ὅμοιον δὲ πρὸς τὸ δοθὲν τὸ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ ΑΒΓΝ, ΕΗΖΟ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΝ, ΗΟ καὶ κέντρα τὰ Π, Σ, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς μὲν τὸ ἄθροισμα $(\Pi N + NT) : NT = XT : T\Gamma$, ὡς δὲ τὸ ἄθροισμα $(\Sigma O + O\Phi) : O\Phi = \Omega\Phi : \Phi H$· εἶναι ἄρα ὁ μὲν κῶνος ΧΑΒ ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΓΒ, ὁ δὲ ΖΩΕ πρὸς τὸ ΕΗΖ (ΙΙ. 2). Ἂς γίνῃ, *οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς ΤΓ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΣΟΦ πρὸς ΟΦ, ἡ ΩΦ πρὸς ΦΗ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν ΧΑΒ κῶνος τῷ ΑΓΒ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΖΩΕ τῷ ΕΗΖ. πεποιήσθω, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς Δ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι ἀνάλογον εἰλήφθωσαν αἱ ΘΚ, ς, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως τὴν ΚΘ πρὸς ς καὶ τὴν ς πρὸς Δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΘΚ κύκλου τμῆμα ἐπεστάσθω* [H 200] *τὸ ΘΚΛ ὅμοιον τῷ ΕΖΗ κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος, καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ ΛΞ, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΛΘΞΚ, κέντρον δὲ τὸ Ρ, καὶ διὰ τῆς ΘΚ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΛΞ· ἔσται δὴ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ ὅμοιον τῷ ΕΗΖ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια. λέγω δέ, ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΡΞ, ΞΥ πρὸς τὴν ΞΥ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΥΛ· ἴσος ἄρα ὁ ΨΘΚ κῶνος τῷ ΘΚΛ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΨΘΚ κῶνος τῷ ΖΩΕ κώνῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΧΤ πρὸς Δ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΘΚ· καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν· ὡς ἄρα ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ, ἡ ΘΚ πρὸς Δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΚΘ, ς, Δ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, ἡ ΘΚ πρὸς Δ. ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς Δ, ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλον, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς τὴν ΧΤ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΑΒ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ ΑΓΒ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ* ὡς ἡ ΩΦ : ΕΖ = ΧΤ : Δ, καὶ ἀφοῦ δοθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Δ, νὰ ληφθῶσι δύο μέσαι ἀνάλογοι αἱ ΘΚ, ς, ὥστε νὰ εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ : ΘΚ = ΚΘ : ς = ς : Δ, καὶ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΘΚ ἂς κατασκευασθῇ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΘΚΛ ὅμοιον πρὸς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΖΗ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 33 καὶ ΙΙΙ, ὁρ. 11), καὶ ἂς συμπληρωθῇ ὁ κύκλος, καὶ ἔστω διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΛΞ, καὶ ἂς νοηθῇ σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΛΘΞΚ, κέντρον δὲ τὸ Ρ,



καὶ διὰ τῆς ΘΚ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΛΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα τὸ πρὸς τὸ σημεῖον Λ (δηλ. τὸ ΘΚΛ) ὅμοιον πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΕΗΖ, ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦσαν ὅμοια. Λέγω δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἴσον (τὸ ΕΗΖ) πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ. Διότι ἂς κατασκευασθῇ, ὡς τὸ ἄθροισμα (ΡΞ+ΞΥ) : ΞΥ = ΨΥ : ΥΛ· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος ΨΘΚ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΘΚΛ (θ. 2). Καὶ ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΨΘΚ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΖΩΕ, εἶναι ἄρα, ὡς ἡ

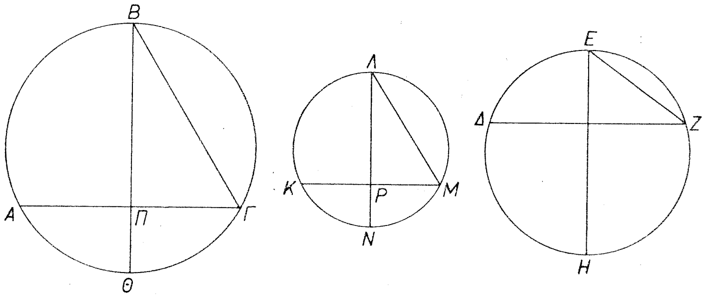
ΕΖΗ τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΘΚΛ.

H 202

ϛʹ

Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων εἴτε τῆς αὐτῆς εἴτε μὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ.

ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ κατὰ τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ περιφερείας, καὶ ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν, τὸ



κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν, οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ κατὰ τὴν ΔΕΖ.

καὶ γεγενήσθω, καὶ ἔστω τὸ ΚΛΜ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις, καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ μέγιστοι κύκλοι, ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων αἱ ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ εὐθεῖαι, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς ΚΜ, ΑΓ, ΩΦ : ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΧΤ : Δ = ΨΥ : ΘΚ· καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΨΥ : ΧΤ = ΘΚ : Δ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΚΘ, ς, Δ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ, εἶναι, ὡς τὸ ΑΒ² : ΘΚ² = ΘΚ : Δ. Ὡς δὲ ΘΚ : Δ = ΨΥ : ΧΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ² : ΚΘ², τουτέστιν ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ : ΧΤ· εἶναι ἄρα ὁ κῶνος ΧΑΒ ἴσος πρὸς τὸν κῶνον ΨΘΚ· ὥστε καὶ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σφ. τμῆμα ΘΚΛ. Πρὸς τὸ δοθὲν ἄρα σφαιρικὸν τμῆμα τὸ ΑΓΒ κατεσκευάσθη ἴσον τὸ ΘΚΛ καὶ ὅμοιον πρὸς ἄλλο δοθὲν τὸ ΕΖΗ.

6

Δοθέντων δύο σφαιρικῶν τμημάτων εἴτε τῆς αὐτῆς σφαίρας εἴτε μή, νὰ εὑρεθῇ σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι πρὸς ἓν μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, ἡ ἐπιφάνειά του δὲ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἄλλου τμήματος.

Ἔστω τὰ δοθέντα σφαιρικὰ τμήματα κατὰ τὰ τόξα ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ἐκεῖνο πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὅμοιον τὸ κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ, ἐκεῖνο δὲ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, τὸ κατὰ τὸ τόξον ΔΕΖ.

(Ἀνάλυσις). Καὶ ἔστω ὅτι ἔχει γίνει ἡ κατασκευή, καὶ ἔστω τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΚΛΜ ὅμοιον μὲν πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ἂς ἔχῃ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΕΖ, καὶ ἂς νοηθῶσι τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὰς βάσεις τῶν τμημάτων, καὶ ἔστωσαν εἰς μὲν τὰς σφαίρας τομαὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ, εἰς δὲ τὰς βάσεις τῶν τμημάτων αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν κάθετοι πρὸς τὰς ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ

ΔΖ ἔστωσαν αἱ ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΕΖ [αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις]· ὥστε καὶ ἡ ΜΛ τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΛΜ τῷ
H 204 ΑΒΓ τμήματι, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΡ πρὸς ΡΝ, ἡ ΒΠ πρὸς ΠΘ. καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ. ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΒΠ πρὸς ΓΒ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]· ὡς ἄρα ἡ ΝΛ πρὸς ΛΜ, τουτέστι πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ. καὶ ἐναλλάξ· λόγος δὲ τῆς ΕΖ πρὸς ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΝ πρὸς ΒΘ δοθείς. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΝ· ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστιν.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ μὲν ΑΒΓ, ᾧ δεῖ ὅμοιον, τὸ δὲ ΔΕΖ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως, καὶ πεποιήσθω, ὡς [μὲν] ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΛΝ, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ΛΝ κύκλος γεγράφθω, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ ΛΚΝΜ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΛ κατὰ τὸ Ρ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΠ πρὸς ΠΒ, τὴν ΝΡ πρὸς ΡΛ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν ΛΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν τὰ ἐπὶ τῶν ΚΜ, ΑΓ εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα· ὥστε καὶ τὰ ἔστωσαν αἱ ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΚΛΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΕΖ, εἶναι ἄρα ἴσος καὶ ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΜ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ [διότι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐδείχθησαν ἴσαι πρὸς κύκλους, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις], (Ι, 42 - 43)· ὥστε καὶ ἡ ΜΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ (Εὐκλ. XII, 2). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΚΛΜ τμῆμα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, εἶναι ὡς ἡ ΛΡ : ΡΝ = ΒΠ : ΠΘ· καὶ ἀνάπαλιν καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς ἡ ΝΛ : ΛΡ = ΘΒ : ΒΠ, (Εὐκλ. V, 7 πόρ. καὶ V, 18). Ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΡΛ : ΛΜ = ΒΠ : ΓΒ [διότι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια]· ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΝΛ : ΛΜ, τουτέστι ΝΛ : ΕΖ οὕτως εἶναι ἡ ΘΒ : ΒΓ (Εὐκλ. V, 22). Καὶ ἐναλλάξ (Εὐκλ. V, 16)· εἶναι δὲ δοθεὶς ὁ λόγος ΕΖ : ΒΓ (Εὐκλ. Δεδομένα 1)· εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος ΛΝ : ΒΘ δοθείς. Καὶ εἶναι δοθεῖσα ἡ ΒΘ· εἶναι ἄρα δοθεῖσα καὶ ἡ ΛΝ (Εὐκλ. Δεδομένα 2)· ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα εἶναι δοθεῖσα (Εὐκλ. Δεδομ. ὁρισμ. 5).

Ἡ δὲ σύνθεσις θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς· ἔστω τὰ δύο σφαιρικὰ τμήματα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ μὲν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον τὸ ζητούμενον πρέπει νὰ εἶναι ὅμοιον, τὸ δὲ ΔΕΖ πρὸς τοῦ ὁποίου τὴν ἐπιφάνειαν ἡ ἐπιφάνεια (τοῦ ζητουμένου) νὰ εἶναι ἴση, καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὅπως καὶ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, καὶ ἂς γίνῃ ὡς [μὲν] ἡ ΒΓ : ΕΖ = ΒΘ : ΛΝ, καὶ ἂς γραφῇ κύκλος περὶ τὴν διάμετρον τὴν ΛΝ, καὶ ἂς νοηθῇ σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ ΛΚΝΜ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΝΛ κατὰ τὸ σημεῖον Ρ, ὥστε νὰ εἶναι, ὡς ΘΠ : ΠΒ = ΝΡ : ΡΛ, (Εὐκλ. VI, 10) καὶ διὰ τοῦ Ρ ἂς τμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια διὰ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστιν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ· καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαί- H 206 ρεσιν· ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΝΛ, ἡ ΒΓ πρὸς ΛΜ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΛΝ, ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΛΜ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΕΖ, ἴσος ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν ΕΖ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΚΛΜ τμήματος· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος τῆς σφαίρας. καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ.

ζʹ

Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν.

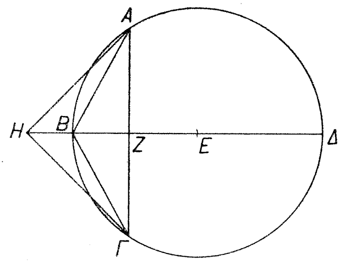
ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΔ· δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς ΑΓ, ὅπως τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

γεγονέτω, καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Ε, καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ. H 208 ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓΗ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον δοθείς· λόγος ἄρα

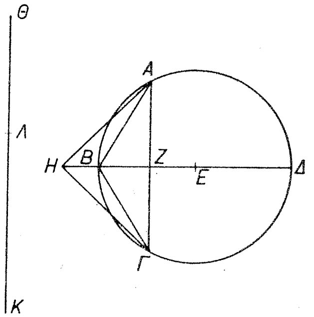
ΛΝ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΜ· εἶναι ἄρα ὅμοια τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΚΜ, ΑΓ κυκλικὰ τμήματα· ὥστε καὶ τὰ σφαιρικὰ τμήματα εἶναι ὅμοια. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΘΒ : ΒΠ = ΝΛ : ΛΡ· διότι οὕτω λαμβάνεται διὰ διαιρέσεως· ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΠΒ : ΒΓ = ΡΛ : ΛΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ : ΝΛ = ΒΓ : ΛΜ (Εὐκλ. V, 9). Ἦτο δὲ καί, ὡς ἡ ΘΒ : ΛΝ = ΒΓ : ΕΖ· εἶναι ἄρα ἴση ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΛΜ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ ΕΖ, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΜ. Καὶ ὁ μὲν κύκλος ἀκτῖνος ΕΖ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΔΕΖ, ὁ δὲ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΜ, εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος ΚΛΜ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον (Ι, 42 - 43)· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος ΚΛΜ ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΔΕΖ. Καὶ εἶναι ὅμοιον τὸ ΚΛΜ πρὸς τὸ ΑΒΓ.

7

Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ τμηθῇ δι᾿ ἐπιπέδου τμῆμα, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον νὰ ἔχῃ τὸν δοθέντα λόγον.



Ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΔ· πρέπει ἡ σφαῖρα νὰ τμηθῇ δι᾿ ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου *τῆς ΗΖ πρὸς ΖΒ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ· λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΔΖ δοθεὶς [ὥστε καὶ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΖ]· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ, καί ἐστιν συναμφότερος μὲν ἡ ΕΔΒ τρὶς ἡ ΕΔ, ἡ δὲ ΒΔ δὶς ἡ ΕΔ, συναμφότερος ἄρα ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καί ἐστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΖΔ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι· δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι τοῦ, ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.*



συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζων τοῦ, ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δέ, ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ· διελόντι ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ. καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΖΓ, καὶ διὰ τῆς ΓΑ ἤχθω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ [ἀπὸ] ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ ΘΚ πρὸς ΚΛ.

H 210 *πεποιήσθω γάρ, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑΗ κῶνος τῷ ΑΒΓ* διὰ τῆς ΑΓ, ὅπως τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ἔχῃ λόγον τὸν αὐτὸν πρὸς τὸν δοθέντα.

(᾿Ανάλυσις). Ἔστω ὅτι ἔγινε, καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Ε καὶ ἂς εἶναι ὡς τὸ ἄθροισμα (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ = ΗΖ : ΖΒ· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος ΑΓΗ πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒΓ (ΙΙ, 2). Εἶναι ἄρα δοθεὶς ὁ λόγος τοῦ κώνου ΑΗΓ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓ· εἶναι ἄρα δοθεὶς ὁ λόγος τῆς ΗΖ : ΖΒ. Ὡς δὲ εἶναι ἡ ΗΖ : ΖΒ = (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ· ὁ λόγος ἄρα (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ εἶναι δοθεὶς [ὥστε δοθεὶς εἶναι καὶ ὁ λόγος ΕΔ : ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΖ]· ὥστε εἶναι δοθεῖσα καὶ ἡ ΑΓ. Καὶ ἐπειδὴ (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ ⟩ (ΕΔ+ΔΒ) : ΔΒ, καὶ εἶναι (ΕΔ+ΔΒ) = 3ΕΔ, ἡ δὲ ΒΔ = 2ΕΔ, εἶναι ἄρα (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ ⟩ 3 : 2. Καὶ εἶναι ὁ λόγος (ΕΔ+ΔΖ) : ΖΔ ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν δοθέντα· πρέπει ἄρα κατὰ τὴν σύνθεσιν ὁ διδόμενος λόγος νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 : 2.

Ἡ σύνθεσις δὲ θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς· ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ ΘΚ : ΚΛ ⟩ 3 : 2. Εἶναι δὲ 3 : 2 = (ΕΔ+ΔΒ) : ΔΒ· καὶ ἄρα ἡ ΘΚ : ΚΛ ⟩ (ΕΔ+ΔΒ) : ΔΒ· διὰ διαιρέσεως ἄρα ἡ ΘΛ : ΛΚ ⟩ ΕΔ : ΔΒ. Καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ἡ ΘΛ : ΛΚ = ΕΔ : ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΑΖΓ, καὶ διὰ τῆς ΓΑ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἔχει ἡ ΘΚ : ΚΛ.

Διότι ἂς γίνῃ, ὡς (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ = ΗΖ : ΖΒ· εἶναι ἄρα ἴσος ὁ κῶνος ΓΑΗ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ (ΙΙ, 2). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΘΚ : ΚΛ = (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ, τουτέστι ΘΚ : ΚΛ = ΗΖ : ΖΒ, τουτέστιν ὁ κῶνος ΑΗΓ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓ, εἶναι δὲ ἴσος ὁ κῶνος ΑΗΓ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ τμῆμα ΑΒΓ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓ, τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, τουτέστιν ὁ ΑΗΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον, ἴσος δὲ ὁ ΑΗΓ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ.

η´

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ διάμετρος ἡ ΒΔ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς ΑΓ ὀρθῷ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑΔ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Ε, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, καὶ νοείσθωσαν κῶνοι βάσιν ⟨μὲν⟩ ἔχοντες
H 212 τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ Θ, Η σημεῖα· ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΘΓ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΑΓΗ τῷ ΑΔΓ, καί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος· τοῦτο γὰρ προγέγραπται [δεικτέον, ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας

οὕτως ἡ ΘΚ : ΚΛ.

8

Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι᾽ ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον μὲν τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς (κυρτῆς) ἐπιφανείας τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐπιφανείας τοῦ μικροτέρου τμήματος, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος ὑψωμένη εἰς τὴν 3 : 2 δύναμιν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος ὑψωμένην εἰς τὴν 3: 2 δύναμιν.

Ἔστω σφαῖρα καὶ εἰς αὐτὴν μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ διάμετρος ἡ ΒΔ, καὶ ἂς τμηθῇ δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, διερχομένου διὰ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒΓ πρὸς τὸ τμῆμα ΑΔΓ ἔχει μικρότερον μὲν λόγον τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τούτων εἰς τὴν τρία δεύτερα δύναμιν.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Ε, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς μὲν τὸ ἄθροισμα (ΕΔ+ΔΖ) : ΔΖ = ΘΖ : ΖΒ, ὡς δὲ τὸ ἄθροισμα (ΕΒ+ΒΖ) : ΒΖ = ΗΖ : ΖΔ, καὶ ἂς νοηθῶσι κῶνοι ἔχοντες βάσιν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Θ, Η· θὰ εἶναι ἑπομένως ὁ μὲν κῶνος ΑΘΓ ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, ὁ δὲ κῶνος ΑΓΗ πρὸς τὸ ΑΔΓ, καὶ εἶναι, ὡς τὸ ΒΑ^2: ΑΔ^2 = ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος ΑΒΓ : ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος ΑΔΓ· διότι τοῦτο προαπεδείχθη (Ι, 42 -

πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος]. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς [μὲν] συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ [ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΔ], ἔσται καί, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ [τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται]. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, ἔστω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΚ· δῆλον γάρ, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΘΒ τῆς ΒΕ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΔ· καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΖΔ, ἐδείχθη ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΚΒ· ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ἐδείχθη ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ· ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ [τουτέστιν
H 214 ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ] ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ [τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ]· ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ [ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ]· τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ· ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ· ἔλασσον

43) [πρέπει τώρα νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μικρότερον λόγον τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον]. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ κῶνος ΑΘΓ πρὸς τὸν κῶνον ΑΗΓ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ, ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ $\mathrm{BA}^2 : \mathrm{A\Delta}^2$, τουτέστιν ἡ ΒΖ : ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς [μὲν] τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{E\Delta}+\mathrm{\Delta Z}) : \mathrm{\Delta Z} = \mathrm{\Theta Z} : \mathrm{ZB}$ [ὡς δὲ τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{EB}+\mathrm{BZ}) : \mathrm{BZ} = \mathrm{ZH} : \mathrm{Z\Delta}$], θὰ εἶναι καί, ὡς ἡ $\mathrm{BZ} : \mathrm{Z\Delta} = \mathrm{\Theta B} : \mathrm{BE}$· διότι εἶναι $\mathrm{BE} = \mathrm{\Delta E}$ [διότι τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα]. Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{EB}+\mathrm{BZ}) : \mathrm{BZ} = \mathrm{HZ} : \mathrm{Z\Delta}$, ἔστω $\mathrm{BE} = \mathrm{BK}$· διότι εἶναι φανερόν, ὅτι $\mathrm{\Theta B} > \mathrm{BE}$, ἐπειδὴ καὶ $\mathrm{BZ} > \mathrm{Z\Delta}$· καὶ θὰ εἶναι, ὡς ἡ $\mathrm{KZ} : \mathrm{ZB} = \mathrm{HZ} : \mathrm{Z\Delta}$. Ὡς δὲ ἡ ΖΒ : ΖΔ, ἐδείχθη ἡ ΘΒ : ΒΕ, εἶναι δὲ ἡ $\mathrm{BE} = \mathrm{KB}$· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $\mathrm{\Theta B} : \mathrm{BK} = \mathrm{KZ} : \mathrm{ZH}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ἐδείχθη ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΚ ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ· εἶναι ἄρα μικρότερον τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{\Theta Z} \times \mathrm{ZH}$ τοῦ ZK^2. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $\mathrm{\Theta Z} \times \mathrm{ZH}$ πρὸς τὸ ZH^2 [τουτέστιν ἡ ΖΘ : ΖΗ] ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $\mathrm{KZ}^2 : \mathrm{ZH}^2$ [τὸ δὲ $\mathrm{KZ}^2 : \mathrm{ZH}^2 = (\mathrm{KZ} : \mathrm{ZH})^2$]· ἡ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $\mathrm{KZ}^2 : \mathrm{ZH}^2$ [ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $\mathrm{BZ}^2 : \mathrm{Z\Delta}^2$]· τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{BZ} \times \mathrm{Z\Delta}$ μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου $\mathrm{BE} \times \mathrm{E\Delta}$· ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ· εἶναι ἄρα μικρότερον τὸ ZB^2 τοῦ ὀρθογωνίου $\mathrm{\Theta B} \times \mathrm{BE}$, τουτέστι τοῦ ὀρθο-

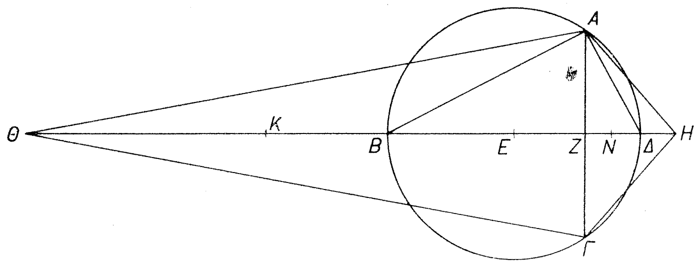
ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΕ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΚ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΝ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ [καὶ τὸ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ]· ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ [τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει]. καί ἐστιν, ὡς μὲν ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ κῶνον, τουτέστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμῆμα, ὡς δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος· ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

H 216

ΑΛΛΩΣ

Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΔΑΒ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ· ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς γωνίου $\Theta B \times BK$. Ἔστω τὸ $BN^2 = \Theta B \times BK$· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $\Theta B : BK = \Theta N^2 : NK^2$. Τὸ δὲ ΘZ^2 πρὸς τὸ ZK^2 ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ $\Theta N^2 : NK^2$ [καὶ ἄρα τὸ $\Theta Z^2 : ZK^2$ ἔχει μεγαλύτερον λόγον τοῦ $\Theta B : BK$, τουτέστι τοῦ λόγου τῆς $\Theta B : BE$, τουτέστι τῆς $KZ : ZH$]· ἡ $\Theta Z : ZH$ ἄρα ἔχει λόγον μεγαλύτερον τοῦ λόγου τῆς $KZ : ZH$ εἰς τὴν δύναμιν τρία δεύτερα [τοῦτο θὰ τὸ ἀναπτύξωμεν εἰς τὸ τέλος]. Καὶ εἶναι, ὡς μὲν ἡ ΘZ πρὸς



ZH, οὕτως ὁ κῶνος $A\Theta\Gamma$ πρὸς τὸν κῶνον $AH\Gamma$, τουτέστι τὸ τμῆμα $AB\Gamma$ πρὸς τὸ τμῆμα $A\Delta\Gamma$, ὡς δὲ ἡ KZ πρὸς ZH, οὕτως ἡ BZ πρὸς $Z\Delta$, τουτέστι τὸ $BA^2 : A\Delta^2$, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος $AB\Gamma$ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος $A\Delta\Gamma$· ὥστε τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, εἰς τὴν τρία δεύτερα δύναμιν.

ΑΛΛΗ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ἔστω σφαῖρα, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι μέγιστος κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$ διάμετρος δὲ ἡ $A\Gamma$, κέντρον δὲ τὸ E, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς $B\Delta$, καθέτου πρὸς τὴν $A\Gamma$· λέγω, ὅτι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΔAB πρὸς τὸ μικρότερον τὸ $B\Gamma\Delta$ ἔχει λόγον

τὴν ἐπιφάνειαν λόγος ὁ τοῦ κύκλου ἐστίν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΒ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΒΓ, τουτέστιν ὁ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΘΓ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΓΗ. ὁ δὴ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ [ἡ] βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος λόγος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον ὁ τῆς ΗΘ ἐστι πρὸς ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ΒΓΔ ὁ τῆς ΑΘ ἐστι πρὸς ΘΖ· ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ καὶ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ
H 218 ὑπὸ ΗΘ, ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘ, ΘΑ ἐστιν ἐπὶ τὴν ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἐστι ἐπὶ τὴν ΘΗ· ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίου [τοῦ δὲ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ]. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΘΖ τῆς ΘΗ.

φημὶ δή, ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας λόγου. ἀλλ' ὁ μικρότερον τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΑΒΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ αὐτοῦ λόγου εἰς τὴν τρία δεύτερα δύναμιν.

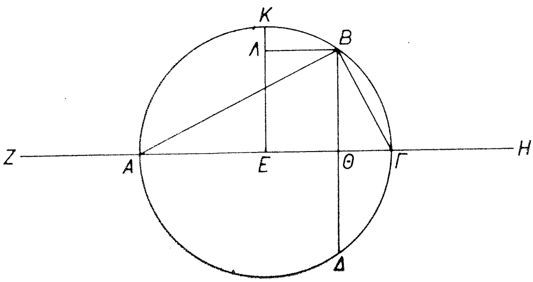
Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ· ὁ δὲ λόγος τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν εἶναι ὁ λόγος τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΑΒ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΒΓ (Ι, 42 - 43), τουτέστιν ὁ τῆς $A\Theta : \Theta\Gamma$. Ἂς ληφθῶσιν ἴσαι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων ἀντιστοίχως αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΓΗ. Ὁ λόγος δὲ τοῦ τμήματος ΒΑΔ πρὸς τὸ ΒΓΔ σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τμῆμα ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ τμῆμα ΒΓΔ. Ἀλλ᾽ ὁ μὲν λόγος τοῦ τμήματος ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον ΒΑΔ εἶναι ὁ λόγος $H\Theta : \Theta\Gamma$ (ΙΙ, 2 πόρ.), ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον εἶναι ὁ τῆς $A\Theta : \Theta\Gamma$, ὁ δὲ τοῦ κώνου ΒΓΔ πρὸς τὸ τμῆμα ΒΓΔ εἶναι ὁ τῆς $A\Theta : \Theta Z$ (ΙΙ, 2, πόρ., Εὐκλ. V, 7 πόρ.)· ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τοῦ λόγου τῆς $H\Theta : \Theta\Gamma$ καὶ τῆς $A\Theta : \Theta\Gamma$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $H\Theta \times \Theta A : \Theta\Gamma^2$, ὁ δὲ $H\Theta \times \Theta A : \Theta\Gamma^2$ μετὰ τοῦ λόγου τῆς $A\Theta : \Theta Z$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $(H\Theta \times \Theta A) \times \Theta A : \Theta\Gamma^2 \times \Theta Z$, ὁ δὲ λόγος τοῦ $(H\Theta \times \Theta A) \times \Theta A$ (πρὸς $\Theta\Gamma^2 \times \Theta Z$) εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\Theta A^2 \times \Theta H$ (πρὸς $\Theta\Gamma^2 \times \Theta Z$)· ὅτι συνεπῶς τὸ $\Theta A^2 \times \Theta H : \Gamma\Theta^2 \times \Theta Z < (A\Theta : \Theta\Gamma)^2$ [τοῦ δὲ λόγου $A\Theta : \Theta\Gamma$ τὸ τετράγωνον εἶναι $(A\Theta : \Theta\Gamma)^2$]. Ὅτι ἄρα, εἶναι $A\Theta^2 \times \Theta H : \Theta\Gamma^2 \times \Theta Z < A\Theta^2 \times \Theta H : \Gamma\Theta^2 \times \Theta H$. Ὅτι ἄρα τὸ $\Gamma\Theta^2 \times Z\Theta > \Gamma\Theta^2 \times \Theta H$. Ὅτι ἄρα ἡ $\Theta Z > \Theta H$.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν αἱ ἐπι-

μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ, τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον· φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον, τουτέστιν] ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον, τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ
H 220 *δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΘΒ· ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστιν ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ· φημὶ δή, ὅτι [ἄρα] τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τουτέστι] τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΗΘ· ὃ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ [δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ].*

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΛ· ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΘ, ΚΕ· δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφότερον τὴν ΘΑ, ΚΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΗ τῆς ΓΘ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ τῆς ΕΛ ἴσης τῇ ΒΘ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ ΓΗ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν ΑΘ, ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, του-

φάνειαί των εἰς τὴν τρία δεύτερα δύναμιν. Ἀλλ' ὁ μὲν λόγος τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $ΑΘ^2 \times ΘΗ : ΘΓ^2 \times ΘΖ$, τοῦ δὲ λόγου τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τρία δεύτερα ὁ λόγος τοῦ $ΑΒ^3 : ΒΓ^3$· λέγω τώρα, ὅτι ὁ λόγος $ΑΘ^2 \times ΘΗ : ΓΘ^2 \times ΘΖ > ΑΒ^3 : ΒΓ^3$, τουτέστιν $ΑΘ^3 : ΘΒ^3$, τουτέστιν ὁ $(ΑΘ^2 : ΒΘ^2) \times (ΑΘ : ΘΒ)$. Ὁ δὲ λόγος $ΑΘ^2 : ΘΒ^2$ προσλαβὼν τὸν λόγον $ΑΘ : ΘΒ$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $ΑΘ^2 : ΓΘ \times ΘΒ$· ὁ δὲ λόγος τοῦ $ΑΘ^2 : ΒΘ \times ΘΓ$ εἶναι ὁ τοῦ $ΑΘ^2 \times ΘΗ : (ΒΘ \times ΘΓ) \times$



$ΘΗ$· λέγω τώρα, ὅτι [ἄρα] $ΑΘ^2 \times ΘΗ : ΓΘ^2 \times ΘΖ > ΑΘ^2 : ΒΘ \times ΘΓ$, τουτέστι τὸ $ΑΘ^2 \times ΘΗ : (ΒΘ \times ΘΓ) \times ΘΗ$. Πρέπει νὰ δειχθῇ λοιπόν, ὅτι $ΘΓ^2 \times ΘΖ < (ΒΘ \times ΘΓ) \times ΗΘ$· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $ΓΘ^2 : ΒΘ \times ΘΓ < ΗΘ : ΘΖ$ [πρέπει ἄρα νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ $ΗΘ : ΘΖ > ΓΘ : ΘΒ$].

Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν ΕΓ κάθετος ἡ ΕΚ καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΛ· ὑπολείπεται εἰς ἡμᾶς ὅτι πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΗΘ : ΘΖ > ΓΘ : ΘΒ$. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΘΖ πρὸς τὸ ἄθροισμα $(ΑΘ+ΚΕ)$· πρέπει ἄρα νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $ΗΘ : (ΘΑ+ΚΕ) > ΓΘ : ΘΒ$· καὶ ἄρα ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΘΗ ἡ ΓΘ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ ἡ ΕΛ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΘ, θὰ πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν $(ΑΘ+ΚΛ)$ ἔχει μεγαλύτερον λόγον τῆς ΓΘ πρὸς

τέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν ἡ ΛΕ πρὸς ΘΑ, καὶ ἐναλ-
H 222 *λάξ, ὅτι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΘΑ πρὸς ΘΑ, καὶ διελόντι ἡ ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΛ πρὸς ΘΑ. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΕ τῆς ΘΑ.*

θʹ

Τῶν τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον.

ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, καὶ ἄλλη σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς ΑΓ, ΕΗ διαμέτρους, καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς ΔΒ, ΖΘ γραμμάς· ἔστιν δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ΖΕΘ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον [τῶν δὲ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τομῶν ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ ⊳ σημεῖον, μεῖζον ἡμισφαιρίου, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου], ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι· λέγω οὖν, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ΖΕΘ περιφέρειαν ἡμισφαίριον τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τμήματος.

ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερόν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΕΖ εὐθείᾳ [δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος
H 224 *εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος]. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεος κύκλου*

ΘΒ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν ἡ ΛΕ πρὸς ΘΑ, καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ΚΕ : ΕΛ $\rangle$ (ΚΛ+ΘΑ) : ΘΑ, καὶ διὰ διαιρέσεως ἡ ΚΛ : ΛΕ $\rangle$ ΚΛ : ΘΑ. Διότι εἶναι ΛΕ $\langle$ ΘΑ (Εὐκλ. V, 10).

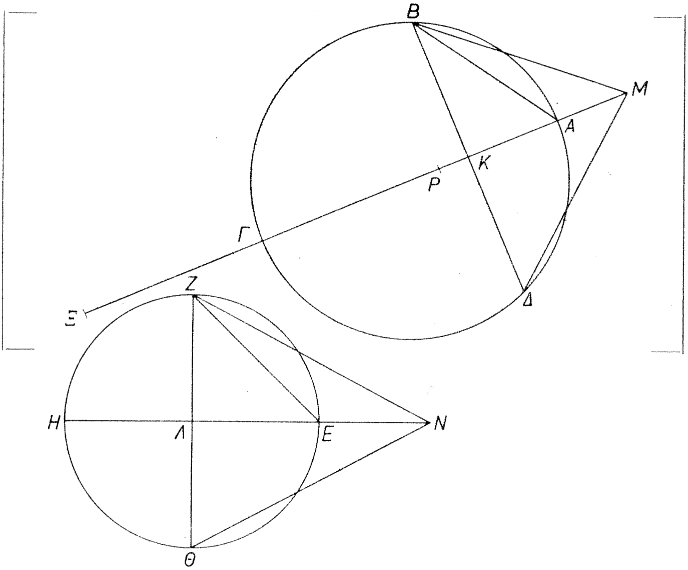
9

Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσην ἐπιφάνειαν μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἡμισφαίριον.

Ἔστω μέγιστος κύκλος σφαίρας ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, καὶ ἄλλη σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΕΖΗΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΗ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ μὲν μία σφαῖρα δι᾽ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ἡ δὲ ἄλλη δι᾽ ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου της, ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὰς διαμέτρους ΑΓ, ΕΗ, καὶ ἂς τμηθῶσι κατὰ τὰς γραμμὰς ΔΒ, ΖΘ· εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν σφαιρικὸν τμῆμα κατὰ τὸ τόξον ΖΕΘ ἡμισφαίριον [τῶν δὲ τομῶν κατὰ τὸ τόξον ΒΑΔ (σημ. θεωρεῖ τὰ δύο σχήματα) εἰς μὲν τὸ ἓν σχῆμα πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ σημεῖον ⊳, νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου, εἰς δὲ τὸ ἄλλο σχῆμα μικρότερον ἡμισφαιρίου], ἔστωσαν δὲ ἴσαι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων· λέγω λοιπόν, ὅτι τὸ κατὰ τὸ τόξον ΖΕΘ ἡμισφαίριον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΒΑΔ σφαιρικοῦ τμήματος.

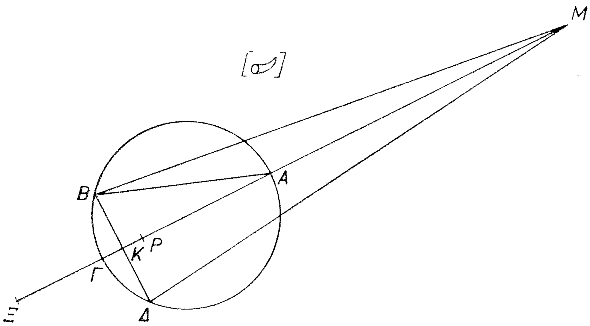
Διότι ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων εἶναι ἴσαι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ [διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου σφ. τμήματος εἶναι ἴση πρὸς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ τμήματος] (Ι, 42 - 43 καὶ Εὐκλ. XII, 2). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΑΔ εἶναι μεγαλύτερον ἡμι-

ἡ ΒΑΔ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ ⊳ σημεῖον, δῆλον, ὅτι ἡ ΒΑ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς ΑΚ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὴ ἡ ΒΑ τῆς ΑΡ διπλασία δυνάμει, ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΔ κύκλου ἴση ἡ ΓΞ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΓΚ, τοῦτον ἐχέτω, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ,



ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κῶνος ἔστω
H 226 *κορυφὴν ἔχων τὸ Μ σημεῖον· ἴσος δή ἐστιν οὗτος τῷ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ΕΛ ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ Ν σημεῖον· ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν ΘΕΖ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΡΓ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΚΓ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσ-*

κυκλίου εἰς τὸ ἄλλο σχῆμα, πρὸς τὸ μέρος τοῦ σημείου ⊳, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τετραγώνου τῆς ΑΚ, καὶ μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Ἔστω λοιπὸν ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ΑΡ, ἔστω δὲ καὶ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΒΔ ἴση ἡ ΓΞ, καὶ ὃν



λόγον ἔχει ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΓΚ, τοῦτον ἂς ἔχῃ ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ ἔστω κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Μ· εἶναι δὲ οὗτος ἴσος πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΑΔ. Ἔστω καὶ πρὸς τὴν ΕΛ ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ τὴν διάμετρον ΘΖ ἔστω κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Ν· εἶναι δὲ καὶ ὁ κῶνος οὗτος ἴσος πρὸς τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΘΕΖ. Τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΡ, ΡΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΚ, ΚΓ, διότι τὴν μικροτέραν πλευράν του τὸ ἓν τὴν ἔχει μεγαλυτέραν τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τοῦ ἄλλου, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΑΡ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΓΞ· διότι τοῦτο εἶναι ἥμισυ

σονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΡ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΓΞ· ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου [τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑΡ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ]. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ [ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΡ τοῦ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ]· ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς [τὴν] ΚΓ ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΑΡ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς [τὴν] ΓΚ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ· δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΡ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΡ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ΛΝ· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἢ ἡ ΜΚ
H 228 πρὸς [τὴν] ΝΛ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ, κορυφὴν δὲ τὸ Μ σημεῖον· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν ΕΖΘ περιφέρειαν μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν.

τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ· εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερον καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀθροίσματος [εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΓΑ, ΑΡ μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΞΚ, ΚΑ]. Πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΚ, ΚΑ εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΜΚ, ΚΓ [ὥστε τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΓΑ, ΑΡ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΜΚ, ΚΓ]· ὥστε ἡ ΓΑ πρὸς [τὴν] ΚΓ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΑΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς [τὴν] ΓΚ, τοῦτον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΡ ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΡ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΝ· ἔχει ἄρα μεγαλύτερον λόγον καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΖΘ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΝΛ. Ὥστε ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΖΘ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Ν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Μ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὸ τόξον ΕΖΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΒΑΔ.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

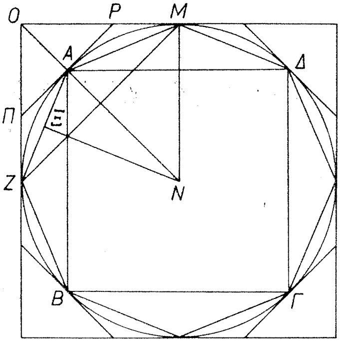
H 232

α′

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστίν.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα,



καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ
H 234 *ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.*

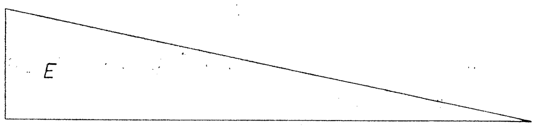
ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ

1

Πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ δὲ περιφέρεια εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Ἂς ἔχῃ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ τρίγωνον Ε τὰς ῥηθείσας σχέσεις· λέγω, ὅτι εἶναι ἴσος.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ κύκλος μεγαλύτερος τοῦ τριγώνου καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν τὸ τετράγωνον ΑΓ, καὶ ἂς



ληφθῶσι τὰ μέσα τῶν τόξων, καὶ ἔστω ὅτι τὰ κυκλικὰ τμήματα εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα πολύγωνον εἶναι ἀκόμη μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου. Ἂς ληφθῇ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν καὶ ἂς ἀχθῇ τὸ ἀπόστημα ΝΞ· εἶναι ἄρα ἡ ΝΞ μικροτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου (τῆς ληφθείσης ἴσης πρὸς τὴν ἀκτῖνα). Εἶναι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ (ἐγγεγραμμένου) πολυγώνου μικροτέρα τῆς ἄλλης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (Περὶ σφ. καὶ κυλ. Ι, 1)· εἶναι ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον μικρότερον τοῦ τριγώνου Ε· ὅπερ ἄτοπον.

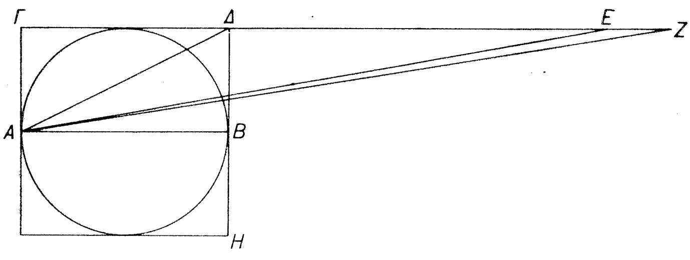
Ἔστω τώρα ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, μικρότερος τοῦ τριγώνου Ε, καὶ ἂς περιγραφῇ εἰς αὐτὸν τὸ τετράγωνον, καὶ ἂς διχοτομη-

περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστιν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστιν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.

β′

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια′ πρὸς ιδ′.

ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ, καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἕβδομον δὲ ἡ



ΕΖ τῆς ΓΔ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν κα′ πρὸς ζ′, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστιν, ὡς κβ′ πρὸς ζ′. ἀλλὰ
H 236 *τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ*

θῶσι τὰ τόξα, καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων διχοτομήσεως ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου· εἶναι ἄρα ὀρθὴ ἡ γωνία ΟΑΡ (Εὐκλ. III, 18). Ἡ ΟΡ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΜΡ· διότι ἡ ΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΑ· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα ΡΟΠ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σχήματος ΟΖΑΜ. Ἂς ὑπολειφθῶσι τὰ ὅμοια πρὸς τὸ τμῆμα ΠΖΑ τμήματα οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τρίγωνον Ε τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου Ε· ὅπερ ἄτοπον· διότι εἶναι μεγαλύτερον, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΝΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου (τῆς ληφθείσης ἴσης πρὸς τὴν περιφέρειαν). Εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον Ε.

2

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου του ἔχει λόγον, ὃν 11 πρὸς 14.

Ἔστω κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς περιγραφῇ τὸ τετράγωνον ΓΗ, καὶ ἔστω ἡ ΔΕ διπλασία τῆς ΓΔ, ἓν ἕβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχει λόγον, ὃν 21 πρὸς 7, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΔ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἔχει λόγον, ὃν 7 πρὸς 1, τὸ τρίγωνον ΑΓΖ ἔχει λόγον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς ὁ 22 πρὸς 7. Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ τὸ τετράγωνον ΓΗ εἶναι τετραπλάσιον, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΔΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κύκλον ΑΒ [ἐπειδὴ ἡ μὲν κάθετος πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ δὲ βάσις θὰ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ′ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται]· ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια′ πρὸς ιδ′.

γ′

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τϛ′ πρὸς ρνγ′, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε′ πρὸς ρνγ′. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μεί-
H 238 ζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα′ πρὸς ρνγ′. ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν′ πρὸς $\overset{\beta}{M}$,γυθ′· μήκει ἄρα, ὃν φϙα′ η′ πρὸς ρνγ′. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αρξβ′ η′ πρὸς ρνγ′· ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αροβ′ η′ πρὸς ρνγ′. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ′ δ′ πρὸς ρνγ′· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ,βτλθ′ δ′ πρὸς ρνγ′. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ,δχογ′ ∠′ πρὸς ρνγ′. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη′. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ′. καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ

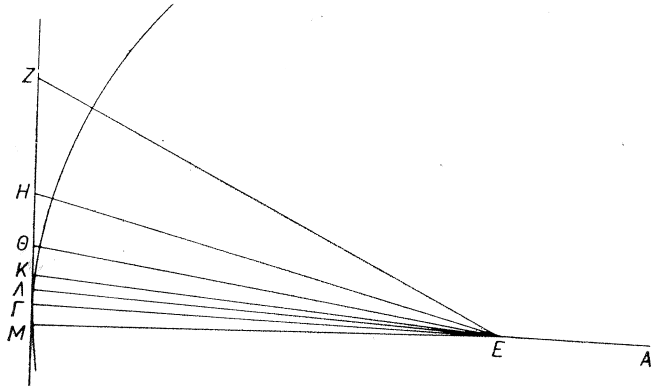
ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ὀλίγον μικροτέρα τοῦ τρία καὶ ἓν ἕβδομον τῆς διαμέτρου]· ὁ κύκλος λοιπὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον ΓΗ, ὃν ἔχει ὁ 11 πρὸς τὸν 14.

3

Παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι ὀλίγον μικροτέρα μὲν τοῦ τρία καὶ ἓν ἕβδομον τῆς διαμέτρου, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ τρία καὶ δέκα ἑβδομηκοστὰ πρῶτα αὐτῆς.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ γωνία ΖΕΓ ἴση πρὸς τὸ ἓν τρίτον ὀρθῆς· εἶναι ἄρα ΕΖ : ΖΓ $=$ 306 : 153 καὶ ΕΓ : ΓΖ $=$ 265 : 153. Ἂς διχοτομηθῇ τώρα ἡ γωνία ΖΕΓ διὰ τῆς ΕΗ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΖΕ : ΕΓ $=$ ΖΗ : ΗΓ [καὶ δι' ἐναλλαγῆς καὶ συνθέσεως]. Ὡς ἄρα τὸ ἄθροισμα (ΖΕ$+$ΕΓ) : ΖΓ $=$ ΕΓ : ΓΗ· ὥστε ὁ λόγος ΓΕ : ΓΗ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου 571 : 153. Θὰ εἶναι ἄρα ΕΗ^2 : ΗΓ^2 $=$ 349450 : 23409. Καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ἄρα ῥίζαι τούτων θὰ εἶναι ὡς ΕΗ : ΗΓ $= 591\frac{1}{8}$: 153. Ἂς διχοτομηθῇ πάλιν ἡ γωνία ΗΕΓ διὰ τῆς ΕΘ· διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν ὁ λόγος ΕΓ : ΓΘ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $1162\frac{1}{8}$: 153. Θὰ εἶναι ἄρα ΘΕ : ΘΓ $\rangle\ 1172\frac{1}{8}$: 153. Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΘΕΓ διὰ τῆς ΕΚ· θὰ εἶναι ἄρα ΕΓ : ΓΚ $\rangle\ 2334\frac{1}{4}$: 153· θὰ εἶναι ἄρα ΕΚ : ΓΚ $\rangle\ 2339\frac{1}{4}$: 153. Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΚΕΓ διὰ τῆς ΛΕ· θὰ εἶναι ἄρα ΕΓ : ΛΓ $\rangle\ 4673\frac{1}{2}$: 153. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΖΕΓ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἓν τρίτον ὀρθῆς ἐδιχοτομήθη τετράκις, ἡ γωνία ΛΕΓ θὰ εἶναι τὸ ἓν τεσσαρακοστὸν ὄγδοον ὀρθῆς. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ἡ γωνία ΓΕΜ $=$ ΛΕΓ· ἡ γωνία ἄρα ΛΕΜ εἶναι τὸ ἓν εἰκοστὸν τέταρτον ὀρθῆς· καὶ ἡ εὐθεῖα ἄρα ΛΜ εἶναι πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ἔχοντος

H 240 τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϟϛʹ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ, ‚δχογʹ L′ πρὸς ρνγʹ, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ

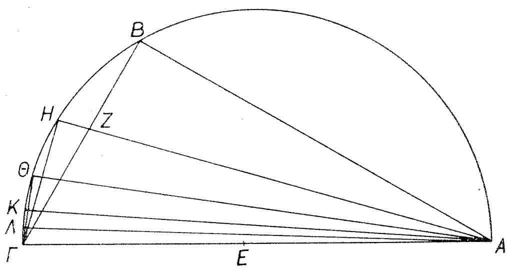


ϟϛʹγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ‚δχογʹ L′ πρὸς $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$ ‚δχπηʹ. καί ἐστιν τριπλάσια, καὶ ὑπερέχουσιν χξζʹ L′, ἅπερ τῶν ‚δχογʹ L′ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ‚ατναʹ πρὸς ψπʹ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ‚αφξʹ πρὸς ψπʹ]. δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ

96 πλευράς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι ΕΓ : ΓΛ $\rangle$ 4673 $\frac{1}{2}$: 153, ἀλλὰ ΑΓ = 2ΕΓ καὶ ΛΜ = 2ΓΛ, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ 96γώνου μεγαλύτερος τοῦ λόγου 4673 $\frac{1}{2}$: 14688. Καὶ εἶναι τριπλάσια, καὶ ὑπερέχουν 667 $\frac{1}{2}$, τὰ ὁποῖα τῶν 4673 $\frac{1}{2}$ εἶναι μικρότερα ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον (ἡ περίμετρος αὐτοῦ) εἶναι τριπλάσιον καὶ ὑπερέχον προσέτι κατὰ διάστημα μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑβδόμου τῆς διαμέτρου· καὶ ἡ περιφέρεια ἄρα τοῦ κύκλου κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικροτέρα ἢ τριπλασία καὶ ὑπερέχουσα ἐπὶ πλέον κατὰ τὸ ἕβδομον μέρος (θὰ εἶναι δηλ. κατὰ μείζονα λόγον μικροτέρα τοῦ $3\frac{1}{7}$).

Ἔστω τώρα κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΓ ἔστω ἓν τρίτον ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὴν ΒΓ μικρότερον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 1351 πρὸς τὸν ἀριθμὸν 780 [ἡ δὲ ΑΓ : ΓΒ = 1560 : 780]. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΒΑΓ διὰ τῆς ΑΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΓΒ καὶ πρὸς τὴν ΗΑΓ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΗΓΒ



εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΑΓ. Καὶ ἡ κοινὴ γωνία ΑΗΓ (καὶ διὰ τὸ τρίγωνον ΓΗΖ) εἶναι ὀρθή· καὶ ἡ τρίτη ἄρα γωνία ἡ ΗΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τρίτην γωνίαν τὴν ΑΓΗ. Εἶναι ἄρα τὸ τρί-

τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια' πρὸς ψπ', ἡ δὲ ΑΓ H 242 *πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ͵γιγ' L' δ' πρὸς ψπ'. δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵εϡκδ' L' δ' πρὸς ψπ' ἢ ὃν ͵αωκγ' πρὸς σμ'· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ' ιγ'· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ͵αωλη' θ' ια' πρὸς σμ'. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αζ' πρὸς ξϛ'· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια' μ'. ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ͵αθ' ϛ' πρὸς ξϛ'. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ͵βιϛ' ϛ' πρὸς ξϛ', ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ͵βιζ' δ' πρὸς ξϛ'. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ϛτλϛ' πρὸς ͵βιζ' δ', ἅπερ τῶν ͵βιζ' δ' μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα'· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛ'γώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι' οα'· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι' οα'.*

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι' οα' μείζων.

γωνον ΑΗΓ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΖ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ : ΗΓ = ΓΗ : ΗΖ = ΑΓ : ΓΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ : ΓΖ = (ΓΑ+ΑΒ) : ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα (ΒΑ+ΑΓ) : ΒΓ = ΑΗ : ΗΓ. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ ΑΗ : ΗΓ 〈 2911 : 780, ἡ δὲ ΑΓ: ΓΗ 〈 3013 $\frac{3}{4}$: 780· ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΓΑΗ διὰ τῆς ΑΘ· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΑΘ : ΘΓ 〈 5924 $\frac{3}{4}$: 780 ἢ ΑΘ : ΘΓ 〈 1823 : 240· διότι οἱ ἀριθμοὶ 1823 καὶ 240 εἶναι τὰ $\frac{4}{13}$ ἀντιστοίχως τῶν ἀριθμῶν 5924 $\frac{3}{4}$ καὶ 780· ὥστε ΑΓ : ΓΘ 〈 1838 $\frac{9}{11}$: 240· ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΘΑΓ διὰ τῆς ΚΑ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΚ : ΚΓ 〈 1007 : 66· διότι οἱ ἀριθμοὶ 1007 καὶ 66 εἶναι τὰ $\frac{11}{40}$ ἀντιστοίχως τῶν ἀριθμῶν 3661 $\frac{9}{11}$ καὶ 240· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΓ : ΚΓ 〈 1009 $\frac{1}{6}$: 66. Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία ΚΑΓ διὰ τῆς ΛΑ· θὰ εἶναι ἄρα ΑΛ : ΛΓ 〈 2016 $\frac{1}{6}$: 66, καὶ ΑΓ : ΓΛ 〈 2017 $\frac{1}{4}$: 66. Καὶ δι' ἀντιστροφῆς τῶν ἀνισοτήτων συνάγεται ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἔχει λόγον μεγαλύτερον τοῦ λόγου 6336 : 2017 $\frac{1}{4}$, ὅστις λόγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 $\frac{10}{71}$· καὶ ὁ λόγος ἄρα τῆς περιμέτρου τοῦ 96γώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἀκόμη περισσότερον εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$.

Ἡ περιφέρεια ἄρα τοῦ κύκλου εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$.

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

H 246 ## Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν

Ἀποστέλλω τοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύσκολον ἔχειν τι φανείσας μοι τᾶς εὑρέσιος αὐτῶν ἀπόρησα· διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντι ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω.

περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος ὑπέκειτο τάδε· εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον καλεῖσθαι, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας· καὶ εἴ
H 248 κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ,

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν

Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο σοῦ ἀποστέλλω τὰς ἀποδείξεις μου καὶ τῶν ὑπολοίπων θεωρημάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν περιελαμβάνοντο εἰς τὰ προηγουμένως ἀποσταλέντα εἰς σὲ θεωρήματα καὶ τὰς ἀποδείξεις ἄλλων, αἱ ὁποῖαι εὑρέθησαν ὕστερον, τὰς ὁποίας προηγουμένως πολλάκις ἐπεχείρησα νὰ εὕρω, ἀλλ' ἐπειδὴ μοῦ ἐφάνη τὸ πρᾶγμα δύσκολον ἔπαυσα νὰ τὰς ἀναζητῶ· δι' αὐτὸ δὲν ἐδημοσίευσα τὰ θεωρήματα αὐτὰ ὁμοῦ μὲ τὰ ἄλλα. Ὕστερον δὲ ἐξετάσας αὐτὰ ἐπιμελέστερον ἀνεῦρον τὰ ἀπορούμενα. Ἦσαν δὲ τὰ μὲν ὑπόλοιπα ἐκ τῶν προηγουμένων θεωρημάτων τὰ ἀφορῶντα εἰς τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς (παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς), ἐκ τῶν νεωτέρως δὲ εὑρεθέντων τὰ ἀφορῶντα εἰς τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς (ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς) καὶ περὶ σφαιροειδῶν σχημάτων (ἐλλειψοειδῶν ἐκ περιστροφῆς), ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλα μὲν καλῶ παραμήκη, ἄλλα δὲ ἐπιπλατῆ.

Περὶ μὲν λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς (παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς), εἶχον καθορισθῆ τὰ ἑξῆς· ἐὰν ὀρθογωνίου κώνου τομὴ (παραβολὴ) περιενεχθῇ περὶ σταθερὰν διάμετρον διαγράφουσα ὁλόκληρον περιστροφήν, τὸ διαγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολῆς) ἂς καλῆται ὀρθογώνιον κωνοειδές, καὶ ἄξων μὲν αὐτοῦ ἂς καλῆται ἡ σταθερὰ διάμετρος περὶ τὴν ὁποίαν ἐγράφη, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται ὁ ἄξων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδοῦς· καὶ ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς σχήματος, ἄλλο δὲ ἐπίπεδον ἀχθὲν παραλλήλως πρὸς τοῦτο ἀποτέμνῃ τμῆμά τι τοῦ κωνοειδοῦς, νὰ καλῆται βάσις μὲν τοῦ ἀποτμηθέντος τμήματος *κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος.*

προεβάλλετο δὲ τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· καὶ διὰ τί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἄλλαλα τῶν ἀξόνων.

περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε· εἴ κα ἐν ἐπιπέδῳ ἔωντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ καὶ ἁ διάμετρος αὐτᾶς καὶ αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελέα περιλαψοῦνται, οὗ κορυφὰ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτοντι, ἄξων δὲ ἁ μεμενάκουσα διάμετρος· τὸ δὲ ὑπὸ τᾶς
H 250 *τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθὲν ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος· τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι, τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι*

τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ κωνοειδοῦς εἰς τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον ἐφάπτεται τοῦ κωνοειδοῦς, ἄξων δὲ ἂς καλῆται ἡ ἐναπολειφθεῖσα εὐθεῖα εἰς τὸ τμῆμα ἐκ τῆς ἀχθείσης διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδοῦς εὐθείας.

Προεβάλλοντο δὲ πρὸς θεώρησιν τὰ ἑξῆς· διατί, ἐὰν ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς τμήματος ἀποτμηθῇ τμῆμα δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμηθὲν τμῆμα θὰ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· καὶ διατί, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτμηθῶσι δύο τμήματα διὰ ἐπιπέδων ἠγμένων καθ' οἱονδήποτε τρόπον, τὰ ἀποτμηθέντα τμήματα ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν τὰ τετράγωνα τῶν ἀξόνων.

Περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδοῦς ὑπεθέσαμεν μὲν τὰ ἑξῆς· ἐὰν ἔχωμεν εἰς ἐπίπεδον τομὴν ἀμβλυγωνίου κώνου (ὑπερβολὴν) καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς (ὁ ἄξων) καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου, μενούσης τῆς διαμέτρου σταθερᾶς, ἀφοῦ περιενεχθῇ τὸ ἐπίπεδον, ὅπου ὑπάρχουσιν αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ἐξεκίνησεν (ἐκτελέσῃ ὁλόκληρον περιστροφήν), αἱ μὲν ἀσύμπτωτοι τῆς τομῆς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ διαγράψωσιν ἰσοσκελῆ κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ ἀσύμπτωτοι συμπίπτουσι, ἄξων δὲ ἡ παραμένουσα σταθερὰ διάμετρος· τὸ δὲ διαγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου (τῆς ὑπερβολῆς) ἂς καλῆται ἀμβλυγώνιον κωνοειδές, ἄξων δὲ αὐτοῦ ἂς καλῆται ἡ μένουσα σταθερὰ διάμετρος περιστροφῆς, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται ὁ ἄξων, τῆς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδοῦς· ὁ δὲ κῶνος ὁ διαγραφόμενος ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς (ὑπερβολῆς) ἂς καλῆται ὁ περι-

καλεῖσθαι· καὶ εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾿ ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ τὰν μεταξὺ τᾶν εἰρημενᾶν κορυφᾶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι.

τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα ὁμοῖά ἐντι, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὁμοῖα καλείσθω, ὧν κα οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὁμοῖοι ἔωντι. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, H 252 *ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι· καὶ διὰ τί, εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.*

βάλλων τὸ κωνοειδές, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς κορυφῆς τοῦ κωνοειδοῦς καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιβάλλοντος τὸ κωνοειδὲς ἂς καλῆται ἡ προσκειμένη πρὸς τὸν ἄξονα· καὶ ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδοῦς, ἀχθῇ δὲ παραλλήλως πρὸς τοῦτο ἄλλο ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀποτέμνῃ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς, ἂς καλῆται βάσις μὲν τοῦ ἀποτμηθέντος τμήματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ κωνοειδοῦς καὶ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κωνοειδοῦς, ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ἡ ἀποληφθεῖσα εἰς τὸ τμῆμα ἀπὸ τῆς ἀχθείσης διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιβάλλοντος τὸ κωνοειδές, καὶ ἡ μεταξὺ δὲ τῶν εἰρημένων κορυφῶν εὐθεῖα ἂς καλῆται προσκειμένη πρὸς τὸν ἄξονα.

Τὰ μὲν λοιπὸν ὀρθογώνια κωνοειδῆ (παραβολοειδῆ ἐκ περιστροφῆς) εἶναι ὅλα ὅμοια, ἐκ τῶν ἀμβλυγωνίων δὲ κωνοειδῶν (ὑπερβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς) ἂς καλῶνται ὅμοια, ἐκεῖνα τῶν ὁποίων οἱ κῶνοι οἱ περιβάλλοντες τὰ κωνοειδῆ εἶναι ὅμοιοι. Προβάλλεται δὲ νὰ γίνῃ ἡ θεώρησις τῶν ἑξῆς· διατί, ἐὰν ἀμβλυγωνίου κωνοειδοῦς ἀποτμηθῇ τμῆμά τι δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμηθὲν τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα, ἐκ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ τριπλασίου τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα, πρὸς τὸ ἄθροισμα, ἐκ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ διπλασίου τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα· καὶ διατί, ἐὰν ἀποτμηθῇ τμῆμα ἐκ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδοῦς δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμηθὲν τμῆμα πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπό-

περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε· εἴ κα ὀξυγωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παράμακες σφαιροειδὲς καλεῖσθαι· εἰ δέ κα τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς καλεῖσθαι· ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος, κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι· καὶ εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύωντι μὴ τέμνοντα,
H 254 *παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ τέμνον τὸ σφαιροειδές, τῶν γενομένων τμαμάτων βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰς δὲ τὰ σαμεῖα, καθ᾽ ἃ ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα, ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας· ὅτι δὲ τά τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ᾽ ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμες· ὁμοῖα δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὧν κα οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι. τμάματα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὁμοῖα καλείσθω, εἴ κα ἀφ᾽ ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι*

τμημα κώνου, θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα, ἐκ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ τριπλασίου τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα, πρὸς τὸ ἄθροισμα, ἐκ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ διπλασίου τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα.

Περὶ δὲ τῶν σφαιροειδῶν τμημάτων ὑποθέτομεν τὰ ἑξῆς· ἐὰν ὀξυγωνίου κώνου τομὴ (ἔλλειψις) διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς μεγαλυτέρας διαμέτρου (ἄξονος) περιστραφῇ καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, ὅθεν ἐξεκίνησε, τὸ διαγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου ἂς καλῆται παράμηκες σφαιροειδές· ἐὰν δὲ διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς μικροτέρας διαμέτρου (ἄξονος) περιστραφῇ ἡ ὀξυγωνίου κώνου τομὴ καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, ὅθεν ἐξεκίνησε, τὸ διαγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς ἂς καλῆται ἐπιπλατὺ σφαιροειδές· ἑκάστου δὲ τῶν σφαιροειδῶν ἂς καλῆται ἄξων μὲν ἡ μένουσα σταθερὰ διάμετρος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται ὁ ἄξων, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδοῦς, κέντρον δὲ ἂς καλῆται τὸ μέσον τοῦ ἄξονος καὶ διάμετρος ἡ διὰ τοῦ κέντρου καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα ἀγομένη εὐθεῖα· καὶ ἐὰν εἰς οἱονδήποτε τῶν σφαιροειδῶν τμημάτων ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα ἐφαπτόμενα, μὴ τέμνοντα, ἀχθῇ δὲ πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον τέμνον τὸ σφαιροειδές, τῶν γενομένων τμημάτων νὰ καλῆται βάσις μὲν τὸ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ σφαιροειδοῦς εἰς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ ἐφάπτονται τοῦ σφαιροειδοῦς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα, ἄξονες δὲ αἱ ἐναποληφθεῖσαι εὐθεῖαι εἰς τὰ τμήματα ἀπὸ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς κορυφὰς αὐτῶν· ὅτι δὲ καὶ τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδοῦς καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἐφάπτονται τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἡ τὰς ἐπαφὰς ἑνοῦσα εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδοῦς, θὰ τὸ ἀποδείξωμεν· ἐκ τῶν σφαιροειδῶν δὲ σχημάτων ἂς καλῶνται ὅμοια καὶ τάς τε βάσιας ὁμοίας ἔχωντι, καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βασίων ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βασίων τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ποτ᾽ ἀλλάλους ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βασίων.

προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κά τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, εἰ δέ κα ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δέ, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ
H 256 τὸν κῶνον τὸν τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος· καὶ διὰ τί, εἴ κα τῶν σφαιροειδέων τι ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου· εἰ δέ κα μήτε διὰ τοῦ κέντρου μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν

ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς διαμέτρους. Τμήματα δὲ τῶν σφαιροειδῶν καὶ κωνοειδῶν σχημάτων ἃς καλῶνται ὅμοια, ἐὰν ἔχωσιν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ὁμοίων σχημάτων καὶ ἔχωσι τὰς βάσεις ὁμοίας, καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν εἶναι ἢ κάθετοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων ἢ σχηματίζοντες γωνίας ἴσας πρὸς τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βάσεων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τῶν βάσεων.

Προβάλλονται δὲ πρὸς θεώρησιν περὶ τῶν σφαιροειδῶν τὰ ἑξῆς· διατί, ἐάν τι τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἑκάτερον τῶν γενομένων τμημάτων θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐὰν δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου μὲν πρὸς τὸν ἄξονα, μὴ διερχομένου ὅμως διὰ τοῦ κέντρου, τῶν γενομένων τμημάτων τὸ μὲν μεγαλύτερον, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον θὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα τῆς ἡμισείας εὐθείας, ἥτις εἶναι ἄξων τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μικροτέρου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μικροτέρου τμήματος, τὸ δὲ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον θὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα τῆς ἡμισείας εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ σφαιροειδοῦς, καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος· καὶ διατί, ἐὰν σφαιροειδές τι τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου μὴ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἑκάτερον τῶν γενομένων τμημάτων θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ σχήματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· γίνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμημα κώνου· ἐὰν δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μήτε διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου μήτε καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τῶν γενομένων τμημάτων τὸ μὲν μεγαλύτερον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἔχον

ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος· γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου.

H 258 *ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα, οἷον καὶ τόδε· ὅτι τὰ ὁμοῖα σφαιροειδέα καὶ τὰ ὁμοῖα τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἴσων σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, καὶ εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθωντι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα· πρόβλημα δέ, οἷον καὶ τόδε· ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος σχήματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον ἀγμένῳ, εἶμεν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ.*

προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν μετὰ ταῦτα γραψοῦμές τοι τὰ προκείμενα. εὐτύχει.

⟨ ΟΡΟΙ ⟩

Εἴ κα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον θὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα τῆς ἡμισείας εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μικροτέρου τμήματος, πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μικροτέρου τμήματος, τὸ δὲ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον θὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα τῆς ἡμισείας εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος, πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος· γίνεται δὲ καὶ εἰς ταῦτα τὸ σχῆμα ἀπότμημα κώνου.

Ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων εὑρίσκονται διὰ τούτων καὶ θεωρήματα πολλὰ καὶ προβλήματα, ὅπως καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα· ὅτι τὰ ὅμοια σφαιροειδῆ καὶ τὰ ὅμοια τμήματα καὶ τῶν σφαιροειδῶν τμημάτων καὶ τῶν κωνοειδῶν ἔχουσι λόγον, τὸν λόγον τῶν ἀξόνων αὐτῶν εἰς τὸν κύβον, καὶ ὅτι τῶν ἴσων σφαιροειδῶν σχημάτων τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἄξονας, καὶ ὅτι ἐὰν τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἄξονας, τὰ σφαιροειδῆ εἶναι ἴσα· πρόβλημα δὲ ὅπως καὶ τὸ ἑξῆς· ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδοῦς σχήματος ἢ κωνοειδοῦς νὰ ἀποτμηθῇ τμῆμα δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἀποτμηθὲν τμῆμα, λέγομεν, ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα κῶνον ἢ κύλινδρον ἢ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν.

Προγράψαντες λοιπὸν καὶ τὰ θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ ἀπαιτούμενα διὰ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, μετὰ ταῦτα ἀναπτύσσομεν τὰ προκείμενα θεωρήματα. Εὐτύχει.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου συναντῶντος ὅλας τὰς (γε-

τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον, ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ᾿ αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ κῶνος ἐσσεῖται· εἰ δέ κα ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω, τοῦ δὲ ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, H 260 *ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά, ἄξων δὲ ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα.*

καὶ εἴ κα κύλινδρος δυοῖς ἐπιπέδοις παραλλήλοις τμαθῇ συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ἤτοι κύκλοι ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις. εἰ μὲν οὖν κα αἱ τομαὶ κύκλοι γένωνται, δῆλον, ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται· εἰ δέ κα αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω, τοῦ δὲ τόμου βάσις μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν, ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν· ἐσσεῖται δὲ αὕτα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου.

⟨ ΛΗΜΜΑ ⟩

Εἴ κα ἔωντι μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα νετείρας) πλευρὰς τοῦ κώνου, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἢ κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομὴ (ἔλλειψις). Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ τομὴ εἶναι κύκλος, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἀποληφθὲν ἀπ᾽ αὐτοῦ (τοῦ κώνου) τμῆμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς ὃ ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου, θὰ εἶναι κῶνος· ἐὰν δὲ ἡ τομὴ εἶναι ὀξυγωνίου κώνου τομή, τὸ ἀποληφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς ὃ ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου ἂς καλῆται ἀπότμημα κώνου, τοῦ δὲ ἀποτμήματος βάσις μὲν ἂς καλῆται τὸ ἐπίπεδον τὸ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς τομῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι κορυφὴ καὶ τοῦ κώνου, ἄξων δὲ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου πρὸς τὸ κέντρον τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς ἀχθεῖσα εὐθεῖα.

Καὶ ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων, τὰ ὁποῖα νὰ συναντῶσιν ὅλας τὰς πλευρὰς (γενετείρας) τοῦ κυλίνδρου, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἢ κύκλοι ἢ τομαὶ ὀξυγωνίων κώνων (ἐλλείψεις) καὶ ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ τομαὶ γίνωσι κύκλοι, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων θὰ εἶναι κύλινδρος· ἐὰν δὲ καὶ αἱ τομαὶ γίνωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ (ἐλλείψεις), τὸ ἀποληφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἂς καλῆται τόμος κυλίνδρου, τοῦ δὲ τόμου βάσις μὲν ἂς καλῶνται τὰ ἐπίπεδα τὰ περιληφθέντα ὑπὸ τῶν τομῶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων (ἐλλείψεων), ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα τῶν τομῶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων (ἐλλείψεων)· θὰ εἶναι δὲ αὕτη ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

⟨ΛΗΜΜΑ⟩

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, εἶναι δὲ ἡ διαφορὰ ἴση πρὸς τὸν μικρότερον ὅρον καὶ ὑπάρχωσι καὶ ἄλλα μεγέθη τοῦ αὐτοῦ πλήθους πρὸς τοὺς ὅρους τῆς προόδου, *τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ διπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά.*

α′

Εἴ κα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι τὰ ὁμοίως H 262 *τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτ' ἄλλα μεγέθεα ἢ πάντα ἤ τινα αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται.*

ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καὶ ἐχέτω τὸ μὲν Α ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Θ, τὸ δὲ Β ποτὶ τὸ Γ, ὃν τὸ Θ ποτὶ τὸ Ι, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις, λεγέσθω δὲ τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μεγέθεα ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, τὰ δὲ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτ' ἄλλα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ Α ποτὶ τὸ Ν, τὸ Η ἐχέτω ποτὶ τὸ Τ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Β ποτὶ τὸ Ξ, τὸ Θ ἐχέτω ποτὶ τὸ Υ, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις· δεικτέον, ὅτι πάντα

Σημ. Μέγεθος «λέγεται» πρὸς ἄλλο μέγεθος, σημαίνει ὅτι τὸ μέγεθος σχηματίζει πρὸς τὸ ἄλλο μέγεθος λόγον. Τὸ μέγεθος «δὲν λέγεται» πρὸς ἄλλο μέγεθος, σημαίνει ὅτι δὲν σχηματίζει λόγον πρὸς αὐτό.

νὰ εἶναι δὲ ἕκαστον τούτων ἴσον πρὸς τὸν μεγαλύτερον ὅρον τῆς προόδου, τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν μέγιστον ὅρον τῆς προόδου, θὰ εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ διπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, μεγαλύτερον δὲ τοῦ διπλασίου τῶν ὅρων τούτων ἄνευ τοῦ μεγίστου. Ἡ ἀπόδειξις δὲ τούτου εἶναι φανερά.

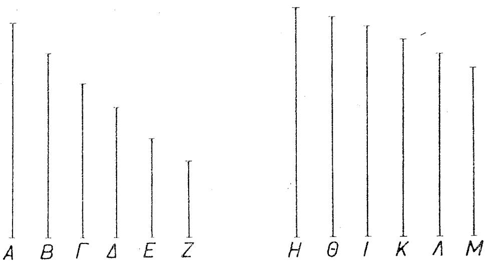
1

Ἐὰν ὑπάρχωσι μεγέθη ὁσαδήποτε κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ἄλλα τοῦ αὐτοῦ πλήθους καὶ ἀνὰ δύο μεγέθη τῆς μιᾶς σειρᾶς ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν ἀντιστοίχως ἀνὰ δύο μεγέθη τῆς ἄλλης σειρᾶς καὶ ληφθῶσι πρὸς τὰ μεγέθη τῆς πρώτης σειρᾶς ἢ πρὸς ὅλα ἢ πρὸς μερικὰ ἄλλα μεγέθη εἰς τυχόντας λόγους, ἐπίσης δὲ καὶ πρὸς τὰ μεγέθη τῆς δευτέρας σειρᾶς ἢ πρὸς ὅλα ἢ πρὸς μερικὰ ἄλλα μεγέθη εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀντιστοίχως, τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν τῆς πρώτης σειρᾶς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων πρὸς αὐτὴν ἀντιστοίχως, θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων πρὸς αὐτὴν ἀντιστοίχως.

Ἔστω μεγέθη τινὰ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πρὸς ἄλλα μεγέθη ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ἔχοντα ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἂς ἔχῃ τὸ Α πρὸς τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Θ, τὸ δὲ Β πρὸς τὸ Γ, ὃν ἔχει τὸ Θ πρὸς τὸ Ι καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἂς εὑρίσκωνται δὲ εἰς λόγους τὰ μὲν μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ οἱουσδήποτε, τὰ δὲ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ πρὸς ἄλλα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω ἀντιστοίχως εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Ν, νὰ ἔχῃ τὸ Η πρὸς τὸ Τ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Β πρὸς τὸ Ξ, νὰ ἔχῃ τὸ Θ πρὸς τὸ Υ, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως πρὸς ταῦτα·

τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.

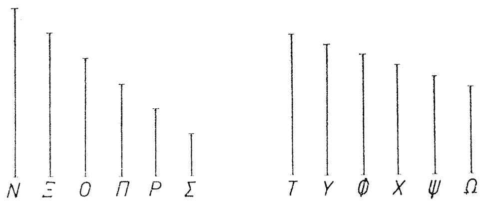
ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν Ν ποτὶ τὸ Α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ Τ ποτὶ τὸ Η, τὸ δὲ Α ποτὶ τὸ Β, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Θ, τὸ δὲ Β ποτὶ τὸ Ξ, ὃν τὸ Θ ποτὶ τὸ Υ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ Ν ποτὶ τὸ Ξ, ὃν τὸ Τ ποτὶ τὸ Υ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ξ ποτὶ
H 264 *τὸ Ο, ὃν τὸ Υ ποτὶ τὸ Φ, καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὴ τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάντα ποτὶ τὸ Α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ πάντα ποτὶ τὸ Η,*



τὸ δὲ Α ποτὶ τὸ Ν, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Τ, τὸ δὲ Ν ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Τ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω· δῆλον οὖν, ὅτι πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.

φανερὸν δέ, ὅτι καί, εἴ κα τῶν τε Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μεγεθέων τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε λέγωνται ποτὶ τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, τὸ δὲ Ζ μηδὲ ποθ' ἓν λέγηται, καὶ τῶν Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ τὰ μὲν Η, Θ, Ι, Κ, Λ, λέγωνται ποτὶ τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, τὰ ὁμοῖα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ Μ μηδὲ ποθ' πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα (Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ζ) πρὸς τὸ ἄθροισμα (Ν+Ξ+Ο+Π+Ρ+Σ) ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἄθροισμα (Η+Θ+Ι+Κ+Λ+Μ) πρὸς τὸ ἄθροισμα (Τ+Υ+Φ+Χ+Ψ+Ω).

Διότι, ἐπειδὴ τὸ μὲν Ν πρὸς τὸ Α ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ Τ πρὸς τὸ Η, τὸ δὲ Α πρὸς τὸ Β, ὃν ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Θ, τὸ δὲ Β πρὸς τὸ Ξ, ὃν ἔχει τὸ Θ πρὸς τὸ Υ, τὸν αὐτὸν θὰ ἔχῃ λόγον τὸ Ν πρὸς τὸ Ξ, ὃν ἔχει τὸ Τ πρὸς τὸ Υ· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ Ο θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Υ πρὸς τὸ Φ, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως πρὸς ταῦτα. Ἔχει δὲ τὸ ἄθροι-



σμα (Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ζ) πρὸς τὸ Α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα (Η+Θ+Ι+Κ+Λ+Μ) πρὸς τὸ Η, τὸ δὲ Α πρὸς τὸ Ν, ὃν ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Τ, τὸ δὲ Ν πρὸς τὸ ἄθροισμα (Ν+Ξ+Ο+Π+Ρ+Σ) ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Τ πρὸς τὸ ἄθροισμα (Τ+Υ+Φ+Χ+Ψ+Ω)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα (Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ζ) πρὸς τὸ ἄθροισμα (Ν+Ξ+Ο+Π+Ρ+Σ) ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα (Η+Θ+Ι+Κ+Λ+Μ) πρὸς τὸ ἄθροισμα (Τ+Υ+Φ+Χ+Ψ+Ω).

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καί, ἐὰν ἐκ τῶν μεγεθῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ληφθῶσι μὲν οἱ λόγοι τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε πρὸς τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ ἀντιστοίχως, τοῦ δὲ Ζ δὲν ληφθῇ ὁ λόγος πρὸς κανέν, καὶ τῶν μεγεθῶν Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ λαμβάνωνται οἱ λόγοι ἀντιστοίχως τῶν Η, Θ, Ι, Κ, Λ πρὸς τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, τοῦ δὲ Μ δὲν λαμβά-

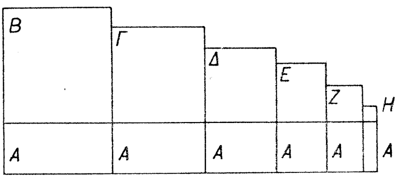
ἓν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ.

H 266

β′

Εἴ κα ⟨εὐθεῖαι⟩ γραμμαὶ ἴσαι ἀλλάλαις ἔωντι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει, καὶ παρ᾿ ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἔωντι δὲ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾷ καὶ μιᾷ τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς καὶ τᾷ ἡμισέᾳ μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἔστωσαν γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει, ἐφ᾿ ἂν τὰ Α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ᾿ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἔστων δὲ τῶν ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι,



καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ Β, ἐλαχίστα δὲ ἁ Η· ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐφ᾿ ὧν ἕκαστον τῶν Θ, Ι, Κ, Λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τού-

νηται ὁ λόγος πρὸς κανέν, θὰ ἔχῃ ὁμοίως τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}+\mathrm{Z})$ πρὸς τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{N}+\Xi+\mathrm{O}+\Pi+\mathrm{P})$ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{H}+\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda+\mathrm{M})$ πρὸς τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{T}+\Upsilon+\Phi+\mathrm{X}+\Psi)$.

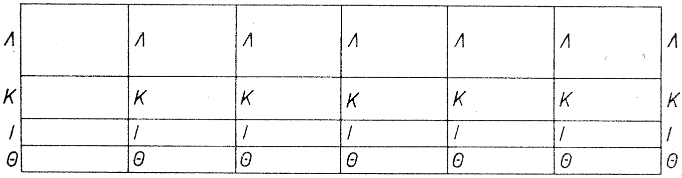
2

Ἐὰν ὑπάρχωσι ὁσαιδήποτε κατὰ τὸ πλῆθος ⟨εὐθεῖαι⟩ γραμμαὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ παρ' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν παραβληθῇ χωρίον ὑπερβάλλον κατὰ τετράγωνον σχῆμα, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ὑπερέχωσιν ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἡ ὑπεροχὴ δὲ αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐλαχίστου ὑπερβληθέντος τετραγώνου, ὑπάρχωσι δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταῦτα, κατὰ τὸ μέγεθος δὲ ἕκαστον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον, τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων τούτων θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων χωρίων μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος σὺν μιᾷ ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ τρίτου μέρους τῆς πλευρᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος καὶ τοῦ ἡμίσεος μιᾶς ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν, ὅμως πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν χωρίων ἄνευ τοῦ μεγίστου, θὰ ἔχῃ λόγον μεγαλύτερον ἐκείνου.

Διότι ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι ὁσαιδήποτε κατὰ τὸ πλῆθος, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχει τοποθετηθῇ τὸ γράμμα Α, καὶ ἂς παραβληθῇ εἰς ἑκάστην αὐτῶν χωρίον ὑπερβάλλον κατὰ τετράγωνον σχῆμα, ἔστω δὲ τῶν ὑπερβλημάτων αὐτῶν πλευραὶ αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η ἴσον ἀλλήλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἔστω ἴση πρὸς τὴν ἐλαχίστην, καὶ μεγίστη μὲν ἔστω ἡ Β, ἐλαχίστη δὲ ἡ Η· ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχουσι τοποθετηθῇ τὰ γράμματα Θ, Ι, Κ, Λ, ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταῦτα, κατὰ τὸ μέγεθος

τοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν AB παρακειμένῳ, ἔστω δὲ ἁ μὲν ΘI γραμμὰ ἴσα τᾷ A, ἁ δὲ $K\Lambda$ ἴσα τᾷ B, καὶ τᾶν μὲν ΘI γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς I, τᾶν δὲ $K\Lambda$ ἑκάστα τριπλασία τᾶς K· δει-
H 268 κτέον, ὅτι τὰ χωρία πάντα, ἐν οἷς τὰ Θ, I, K, Λ, ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ AB, $A\Gamma$, $A\Delta$, AE, AZ, AH ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἁ $\Theta IK\Lambda$ εὐθεῖα ποτὶ τὰν IK, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ AB μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἔστι γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ A, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ [ἐπεί τε τὰ παρα-



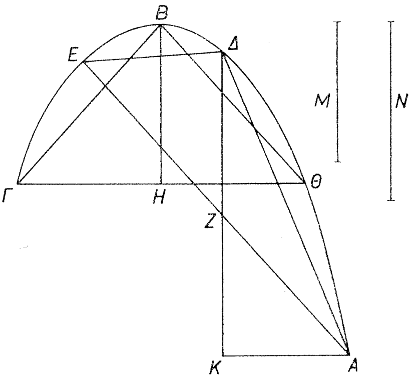
βλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν], καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, I, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ· σύμπαντα οὖν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, I, πάντων μὲν τῶν, ἐν οἷς τὰ A, ἐλάσσονά ἐντι ἢ διπλασίονα, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ I, πάντων μὲν τῶν, ἐν οἷς τὰ A, ἐλάσσονά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα. πάλιν ἐντὶ γραμμαί τινες, αἱ B, Γ, Δ, E, Z, H τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ᾽ ἃν τὰ K, Λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ· τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ δὲ ἔστω ἕκαστον ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον τὸ παραβεβλημένον πρὸς τὴν ΑΒ, ἔστω δὲ ἡ μὲν γραμμὴ ΘΙ ἴση πρὸς τὴν Α, ἡ δὲ ΚΛ ἴση πρὸς τὴν Β, καὶ τῶν μὲν ΘΙ γραμμῶν ἑκάστη ἔστω διπλασία τῆς Ι, τῶν δὲ ΚΛ ἑκάστη ἔστω τριπλασία τῆς Κ· πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι πάντα τὰ χωρία, ὅπου τὰ γράμματα Θ, Ι, Κ, Λ, πρὸς πάντα μὲν τὰ ἄλλα χωρία τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ ἔχουσι μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ εὐθεῖα ΘΙΚΛ πρὸς τὴν ΙΚ, ὅμως πρὸς τὰ ἄλλα, ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ ΑΒ, θὰ ἔχωσι μεγαλύτερον λόγον τοῦ προηγουμένου.

Διότι ὑπάρχουσιν ἐδῶ χωρία τινά, ὅπου τὰ γράμματα Α, ὑπερέχοντα ἀλλήλων ἴσον, καὶ ἡ ὑπεροχὴ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἐλάχιστον [ἐπειδὴ τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη ὑπερέχουσιν ἴσον], καὶ ἄλλα χωρία, ὅπου τὰ γράμματα Θ, Ι, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ταῦτα, κατὰ τὸ μέγεθος δὲ ἕκαστον ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν χωρίων, ὅπου εἶναι τὰ γράμματα Θ, Ι, εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τῶν Α, τῶν δὲ λοιπῶν χωρίων χωρὶς τὸ μέγιστον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου (Λῆμμα). Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν χωρίων Ι εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, τῶν ἄλλων δὲ χωρὶς τὸ μέγιστον εἶναι μεγαλύτερον. Πάλιν ὑπάρχουσι γραμμαί τινες αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η ἔχουσαι μεταξύ των ἴσην ὑπεροχήν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὔτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐλαχίστην γραμμήν, καὶ ἄλλαι γραμμαί, αἱ δηλούμεναι διὰ τῶν γραμμάτων Κ, Λ, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς ταύτας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ὅλων, εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν μὲ τὰς ἴσας ὑπεροχάς, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων, χωρὶς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μεγίστην γραμμήν, διότι τοῦτο ἔχει

ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα
H 270 *ἢ τριπλάσια· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ Κ, πάντων μὲν τῶν χωρίων, ἐν οἷς τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, ἐλάσσονά ἐστιν, αὐτῶν δὲ τῶν, ἐν οἷς τὰ Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, μείζονα· ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Ι, Κ, πάντων μὲν τῶν, ἐν οἷς τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐλάσσονά ἐστι, τῶν δέ, ἐν οἷς τὰ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ μείζονα. δῆλον οὖν, ὅτι πάντα τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, Κ, Λ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΘΛ ποτὶ τὰν ΙΚ, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρὶς τοῦ, ἐν ᾧ τὸ ΑΒ, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.*

γ′

Εἴ κα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι ἐπιψαύωντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν· ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τᾶς παραλλήλου αὐτῷ. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.



ἀποδειχθῇ εἰς τὰ ἐκδεδομένα ἤδη θεωρήματα περὶ ἑλίκων (θ. 10). Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν χωρίων Κ, τοῦ ἀθροίσματος τῶν χωρίων Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η εἶναι μικρότερον, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η εἶναι μεγαλύτερον· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Ι, Κ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Θ, Ι, Κ, Λ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ ἔχει μικρότερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΙΚ, πρὸς τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν λοιπῶν, ἄνευ τοῦ ΑΒ, ἔχει λόγον μεγαλύτερον τοῦ αὐτοῦ λόγου.

3

Ἐὰν εὐθεῖαι ἠγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφάπτωνται οἱασδήποτε κωνικῆς τομῆς, ὑπάρχωσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι εἰς τὴν κωνικὴν τομὴν παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας καὶ τέμνουσαι ἀλλήλας, τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων θὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν ἐφαπτομένων· τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης γραμμῆς, θὰ εἶναι ὁμόλογον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτήν. Τοῦτο δὲ ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ κωνικὰ στοιχεῖα (Εὐκλείδου).

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (παραβολῆς) ἀποτμηθῶσι δύο τμήματα καθ' οἱονδήποτε τρόπον, ἔχοντα ἴσας τὰς διαμέτρους, καὶ τὰ τμήματα αὐτὰ θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά, τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάμα-
H 272 τα ἀποτμαθέωντι ὁπωσοῦν ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτὰ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι καὶ ὕψος τὸ αὐτό· διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας.

ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, καὶ ἀποτετμήσθω ἀπ᾽ αὐτᾶς δύο τμάματα τό τε ΑΔΕ καὶ τὸ ΘΒΓ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν ΑΔΕ τμάματος διάμετρος ἁ ΔΖ, τοῦ δὲ ΘΒΓ ἁ ΒΗ, καὶ ἔστων ἴσαι αἱ ΔΖ, ΒΗ· δεικτέον, ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ τὰ ΑΔΕ, ΘΒΓ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς.

ἔστω δὴ πρῶτον ἁ ἀποτέμνουσα τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ ΘΓ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, λελάφθω δὲ παρ᾽ ἃν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς, ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, καὶ ἔστω, ἐφ᾽ ᾇ τὸ Μ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΔΖ ἁ ΑΚ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐντι ἁ ΔΖ τοῦ τμάματος, ἅ τε ΑΕ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἁ ΔΖ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστι τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς· οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν ΑΕ ἀγομένας. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΚ, τοῦτον ἐχέτω ἁ Ν ποτὶ τὰν Μ· αἱ δὴ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΔΖ ἀγόμεναι παρὰ
H 274 τὰν ΑΕ δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ Ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὐταὶ ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς ΔΖ ποτὶ τὸ Δ πέρας· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς· δύναται οὖν καὶ ἁ ΑΖ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς Ν καὶ τᾶς ΔΖ. δύναται δὲ καὶ ἁ ΘΗ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Μ καὶ τᾶς ΒΗ, ἐπεὶ κάθετός ἐστιν ἁ ΘΗ ἐπὶ τὰν διάμετρον·

τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτό· διάμετρον δὲ παντὸς τμήματος καλῶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διχοτομεῖ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.

Ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀποτμηθῶσιν ἀπ᾽ αὐτῆς δύο τμήματα καὶ τὸ ΑΔΕ καὶ τὸ ΘΒΓ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν τμήματος ΑΔΕ διάμετρος ἡ ΔΖ, τοῦ δὲ ΘΒΓ ἡ ΒΗ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΔΖ, ΒΗ· πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα ΑΔΕ, ΘΒΓ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον εἰς αὐτά.

Ἔστω λοιπὸν πρῶτον ἡ ἀποτέμνουσα τὸ ἓν τμῆμα ἡ ΘΓ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολῆς), ἂς ληφθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα, ἀπὸ τῆς ὁποίας τὰ ὀρθογώνια εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τομῶν (τεταγμένων), ἡ διπλασία τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος, καὶ ἔστω ἡ δηλουμένη διὰ τοῦ σημείου Μ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ ἡ ΑΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι διάμετρος τοῦ τμήματος καὶ ἡ ΑΕ διχοτομεῖται κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου (παραβολῆς)· διότι οὕτω διχοτομεῖ ὅλας τὰς ἀγομένας παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΕ. Ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΚ τοῦτον ἂς ἔχῃ ἡ Ν πρὸς τὴν Μ· διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς παραβολῆς πρὸς τὴν ΔΖ παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΕ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ παραβαλλόμενα παρὰ γραμμὴν ἴσην πρὸς τὴν Ν καὶ ἔχοντα πλάτος ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὐταὶ ἀποτέμνουν ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ πέρας Δ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ κωνικὰ (τοῦ Εὐκλείδου). Εἶναι λοιπὸν καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Ν καὶ ΔΖ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Μ καὶ ΒΗ, ἐπειδὴ ἡ ΘΗ εἶναι κά-

ἔχει οὖν κα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ν ποτὶ τὰν Μ, ἐπεὶ ἴσαι ὑπέκειντο αἱ ΔΖ, ΒΗ. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΚ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ν ποτὶ τὰν Μ· ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ ΘΗ, ΑΚ. ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ΒΗ, ΔΖ· ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΗ, ΒΗ περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΔΖ. ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ΘΗΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΖ τριγώνῳ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἔστι δὲ τοῦ μὲν ΑΔΕ τριγώνου ἐπίτριτον τὸ ΑΔΕ τμᾶμα, τοῦ δὲ ΘΒΓ τριγώνου ἐπίτριτον τὸ ΘΒΓ τμᾶμα· δῆλον οὖν, ὅτι τά τε τμάματά ἐστιν ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά.

εἰ δὲ μηδετέρα τᾶν τὰ τμάματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ᾽ ὀρθάς ἐντι τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾷ διαμέτρῳ τᾷ τοῦ ἑνὸς τμάματος καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθείσας τᾷ διαμέτρῳ, τὸ γενόμενον τμᾶμα ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν.

H 276 *δ′*

Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα τὰν διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει θετος ἐπὶ τὴν διάμετρον· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Ν πρὸς τὴν Μ, ἐπειδὴ αἱ ΔΖ, ΒΗ ἐλήφθησαν ἴσαι. Ἔχει δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΚ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ Ν πρὸς τὴν Μ· εἶναι ἄρα ἴσαι αἱ ΘΗ, ΑΚ. Εἶναι δὲ ἴσαι καὶ αἱ ΒΗ, ΔΖ· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΗ, ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΔΖ. Εἶναι ἄρα ἴσον καὶ τὸ τρίγωνον ΘΗΒ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΑΖ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν εἶναι ἴσα. Εἶναι δὲ τοῦ μὲν τριγώνου ΑΔΕ τὸ τμῆμα ΑΔΕ ἴσον πρὸς τὰ τέσσαρα τρίτα, τοῦ δὲ τριγώνου ΘΒΓ τὸ τμῆμα ΘΒΓ ἴσον πρὸς τὰ τέσσαρα τρίτα· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὰ τμήματα εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά.

Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποτέμνουσι τὰ τμήματα εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (παραβολῆς), ἐὰν ληφθῇ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς παραβολῆς εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἑνὸς τμήματος καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ληφθείσης ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον, τὸ γενόμενον τμῆμα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς ἑκάτερον τῶν τμημάτων. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

4

Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς (ἐλλείψεως) πρὸς τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσην πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα τῆς ὀξυγωνίου κώνου τομῆς ἔχει τὸν αὐτὸν λό-

λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω ἢ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον.

ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ' ἇς τὰ Α, Γ, ἁ δὲ ἐλάσσων, ἐφ' ἇς τὰ Β, Δ, ἔστω δὲ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· δεικτέον, ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΓΑ, τουτέστι τὰν ΕΖ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸν ΑΕΓΖ κύκλον· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ψ κύκλος τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος ὁ Ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν Ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον μεῖζον τοῦ ΑΒΓΔ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΕΓΖ κύκλον εὐθύγραμμον ὁμοῖον τῷ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ καθέτοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν ΑΓ διάμετρον, ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα, καθ' ἃ τέμνοντι
H 278 *αἱ καθέτοι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· ἐσσεῖται δή τι ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον, καὶ ἕξει αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ΑΕΓΖ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΘ, ΚΛ καθέτοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ Μ, Β, δῆλον, ὅτι τὸ ΛΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΘΜ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΘΕ ποτὶ τὰν ΒΘ. διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ' ἕκαστον τῶν τραπε-*

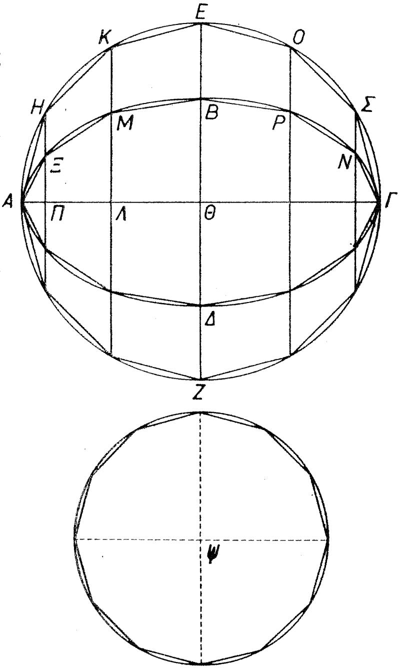
γον, ὃν ἔχει ὁ μικρὸς ἄξων αὐτῆς πρὸς τὸν μέγαν ἢ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

Διότι ἔστω ὀξυγωνίου κώνου τομὴ (ἔλλειψις), ὅπου τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, μέγας δὲ ἄξων αὐτῆς ἔστω ἡ εὐθεῖα, ὅπου τὰ σημεῖα Α, Γ, μικρὸς δὲ ὅπου τὰ σημεῖα Β, Δ, ἔστω δὲ κύκλος περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον (ἐμβαδὸν) τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸν κύκλον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστι τὴν ΕΖ. Ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΕΖ, τοῦτον ἂς ἔχῃ ὁ κύκλος, ὅπου τὸ γράμμα Ψ πρὸς τὸν κύκλον ΑΕΓΖ· λέγω, ὅτι ὁ Ψ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἔλλειψιν.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἴσος ὁ κύκλος Ψ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μεγαλύτερος. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἀρτιογώνιον μεγαλύτερον τοῦ χωρίου (ἐμβαδοῦ) ΑΒΓΔ. Ἂς νοηθῇ πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, ἂς ἐγγραφῇ δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΕΓΖ εὐθύγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ψ, καὶ ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἐπὶ τὰ σημεῖα δὲ καθ' ἃ αἱ κάθετοι τέμνουσι τὴν ἔλλειψιν, ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι· θὰ σχηματισθῇ λοιπὸν εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένον τι εὐθύγραμμον, καὶ θὰ ἔχῃ αὐτὸ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΕΓΖ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΕΖ. Διότι, ἐπειδὴ αἱ κάθετοι ΕΘ, ΚΛ ἔχουσι τμηθῇ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Β, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τραπέζιον ΛΕ πρὸς τὸ ΘΜ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΒΘ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους καὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων τραπεζίων τῶν εἰς τὸν κύκλον πρὸς ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν εἰς τὴν ἔλλειψιν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΘ ποτὶ τὰν ΒΘ. ἔχοντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς Α, Γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ ποτὶ τὰ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον· ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ΑΕΓΖ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΒΔ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον εἶχον τὸν λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ· ὅπερ ἀδύνατον· μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς.

ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. πάλιν δὴ δυνατὸν εἰς H 280 τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ Ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ καθέτοι ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν ΑΓ ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν· πάλιν οὖν ἐσσεῖταί τι ἐν τῷ ΑΕ κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὸ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΒΔ. ἐγγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν Ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Ψ κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν ΑΕΓΖ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ.

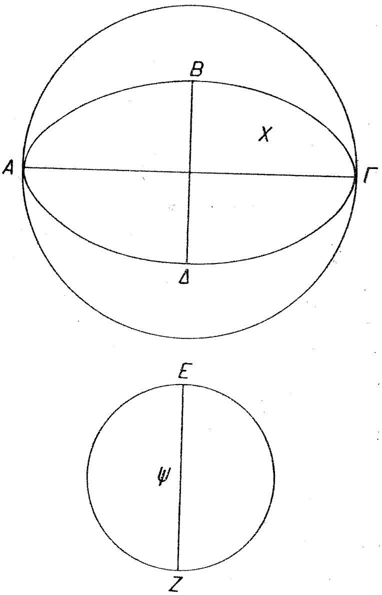
ΒΘ. Ἔχουσι δὲ τοῦτον τὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα τὰ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Γ τὰ εἰς τὸν κύκλον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν ἔλλειψιν· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΕΓΖ πρὸς ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν εὐθύγραμμον τὸν αὐτὸν λόγον, ὅν ἔχει ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΔ. Ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον καὶ πρὸς τὸ εἰς τὸν κύκλον Ψ ἐγγεγραμμένον τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι εἶχον τοῦτον τὸν λόγον (Εὐκλ. V, 16)· εἶναι ἄρα ἴσον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ψ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν (Εὐκλ. V, 9)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἦτο μεγαλύτερον ὁλοκλήρου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐλλείψεως.



Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, μικρότερος. Πάλιν ὅμως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν ἔλλειψιν πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεγαλύτερον τοῦ κύκλου Ψ. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπόν, καὶ ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἀφοῦ ἀχθῶσι κάθετοι ἂς προεκβληθῶσι πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου· πάλιν λοιπὸν θὰ ἔχῃ σχηματισθῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΕ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΔ. Ἀφοῦ δὲ ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον Ψ ὅμοιον

ε´

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον.



ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ Χ, διαμέτροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ ΑΓ, ΒΔ, μείζων δὲ ἁ ΑΓ, καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ Ψ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ΕΖ· δεικτέον, ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον.

H 282 περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· τὸ δὴ Χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον· δέδεικται γὰρ ἔχον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΑΓ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ ΕΖ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ· δῆλον οὖν, πρὸς αὐτὸ θὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ εἰς τὸν κύκλον Ψ ἐγγεγραμμένον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι λοιπὸν οὔτε μικρότερος ὁ κύκλος Ψ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐλλείψεως. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ εἰρημένον ἐμβαδὸν πρὸς τὸν κύκλον ΑΕΓΖ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΕΖ.

5

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ἐλλείψεως πρὸς πάντα κύκλον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Διότι ἔστω χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ἐλλείψεως, ὅπου τὸ γράμμα Χ, διάμετροι δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΑΓ, καὶ ἔστω κύκλος, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΕΖ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ χωρίον Χ πρὸς τὸν κύκλον Ψ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΓ, ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

Ἂς περιγραφῇ λοιπὸν κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ· τὸ χωρίον λοιπὸν Χ πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΓ, ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· διότι ἔχει δειχθῇ, ἔχον τὸν λόγον τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 4). Ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ, τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ χωρίον Χ πρὸς τὸν κύκλον Ψ *ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον.*

ϛ′

Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ᾽ ἄλλαλα.

ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν οἷς τὰ Α, Β, ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΔ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ Α χωρίον, τὸ δὲ ΕΖ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς· δεικτέον, ὅτι τὸ Α χωρίον ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΕΖ.

λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ ΚΛ. ἔχει δὴ τὸ μὲν Α χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΚΛ, H 284 *ὁ δὲ Ψ κύκλος ποτὶ τὸ Β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ΚΛ ποτὶ τὸ ΕΖ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ Α χωρίον ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΕΖ.*

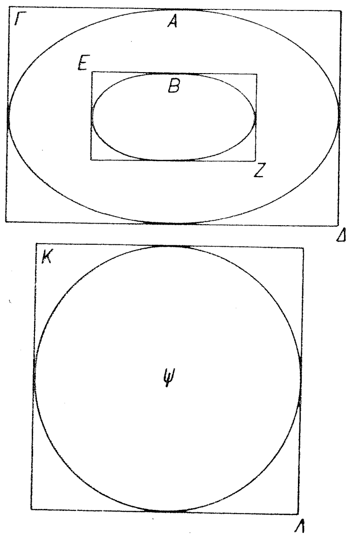
ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι ποτ᾽

ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΓ, ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ.

6

Τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐλλείψεων ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων τῶν ἐλλείψεων πρὸς ἄλληλα.



Ἔστωσαν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐλλείψεων, ὅπου τὰ γράμματα Α, Β, ἔστω δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΓΔ τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι αἱ διάμετροι τῆς ἐλλείψεως, ὅπου τὸ γράμμα Α, τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΕΖ τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι αἱ διάμετροι τῆς ἄλλης ἐλλείψεως· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ χωρίον Α πρὸς τὸ χωρίον Β ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ.

Ἂς ληφθῇ κύκλος τις, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ἔστω τὸ ΚΛ. Ἔχει λοιπὸν τὸ χωρίον Α πρὸς τὸν κύκλον Ψ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΚΛ, ὁ δὲ κύκλος Ψ πρὸς τὸ χωρίον Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΕΖ (θεώρ. 5 καὶ Εὐκλ. V, 16)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ χωρίον Α πρὸς τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ (Εὐκλ. V, 22).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἐμβαδὰ ὁμοίων ἐλλείψεων *ἄλλαλα, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ᾽ ἀλλάλας αἱ ὁμολόγοι διαμέτροι τᾶν τομᾶν.*

ζ′

Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

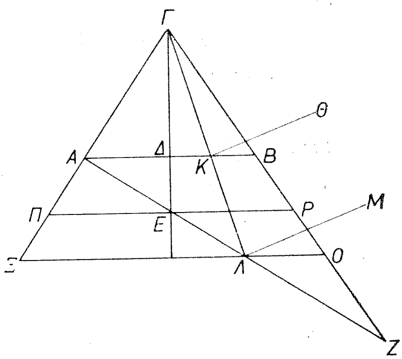
δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστάκουσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδόν τι ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ AB, τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Δ, ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα ὀρθὰ ἁ $\Gamma\Delta$, πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ Γ, ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ H 286 *διάμετρον τὰν AB γεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν $\Gamma\Delta$· δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.*

ἀπὸ δὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ A, B εὐθεῖαι ἀχθεῖσαι ἐκβεβλήσθων, καὶ ἀπὸ τοῦ A διάχθω ἁ AZ, ὥστε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν AE, EZ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς $E\Gamma$ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ $\Delta\Gamma$ τετράγωνον· δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς $\Delta\Gamma$ τετράγωνον·

ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αὐτῶν.

7

Δοθείσης ἐλλείψεως καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς γραμμῆς καθέτου ὑψωθείσης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κῶνος, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ κορυφὴν τὸ πέρας τῆς ὑψωθείσης εὐθείας, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις.



Ἂς δοθῇ ἔλλειψίς τις, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς ἂς ὑψωθῇ κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως, διὰ δὲ τῆς ὑψωθείσης εὐθείας καὶ τῆς μικροτέρας διαμέτρου ἂς ἐκβληθῇ ἐπίπεδόν τι, καὶ ἔστω εἰς αὐτὸ ἡ μὲν μικροτέρα διάμετρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ κέντρον τῆς ἐλλείψεως τὸ Δ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ὑψωθεῖσα κάθετος ἡ ΓΔ, πέρας δὲ αὐτῆς τὸ Γ, ἂς νοηθῇ δὲ ἡ ἔλλειψις γεγραμμένη περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ εἰς ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν ΓΔ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις.

Ἀφοῦ ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ σημεῖα Α, Β ἂς προεκβληθῶσιν αὗται, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΖ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ, ΕΖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς μεγαλυτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ· τοῦτο δὲ εἶναι δυνατόν, ἐπειδὴ εἶναι μεγαλύτερος ὁ λόγος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ πρὸς τὸ τε-ἀπὸ δὲ τᾶς ΑΖ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΑΖ, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ Γ σαμεῖον· ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τούτου δειχθήσεται ἐοῦσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον, εἶμέν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἁ ΘΚ ἐπὶ τὰν ΑΒ· ἐσσεῖται δὴ αὔτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τό, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΓΖ· ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· συμπιπτέτω δὴ αὔτα τᾷ ΑΖ
H 288 κατὰ τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΑ ἁ ΛΜ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ΑΖ, τὸ δὲ Μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ, ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν ΑΒ διὰ μὲν τοῦ Λ ἁ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ε ἁ ΠΡ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ΕΑ, ΕΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΕΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΠ, ΕΡ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΕ, ΕΡ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ. ἔστιν δέ, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΠ, ΕΡ, οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΛΞ, ΛΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν

τράγωνον τῆς ΔΓ· ἀπὸ δὲ τῆς ΑΖ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι αἱ ΑΓ, ΑΖ, εἰς τὸ ἐπίπεδον δὲ τοῦτο ἂς γραφῇ κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ἔστω κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ· εἰς τὴν ἐπιφάνειαν λοιπὸν τοῦ κώνου τούτου θὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἡ ἔλλειψις.

Διότι, ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ σημεῖόν τι τῆς ἐλλείψεως, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ἂς νοηθῇ λοιπὸν σημεῖόν τι ληφθὲν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τὸ Θ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· θὰ εἶναι δὲ αὕτη κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ ΑΓ, ΓΖ (Εὐκλ. XI, ὁρισ. 4)· ἀπὸ δὲ τοῦ Γ, ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ Κ ἂς προεκβληθῇ· ἂς συναντήσῃ δὲ αὕτη τὴν ΑΖ κατὰ τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν ΖΑ ἡ ΛΜ εἰς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν ΑΖ, τὸ δὲ Μ ἂς νοηθῇ μετέωρον ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἂς ἀχθῇ δὲ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ διὰ μὲν τοῦ Λ ἡ ΞΟ διὰ δὲ τοῦ Ε ἡ ΠΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΑ, ΕΖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς μεγαλυτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΠ, ΕΡ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΕ, ΕΡ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς μεγαλυτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ (Εὐκλ. V, 22). Εἶναι δέ, ὡς μὲν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΠ, ΕΡ, οὕτω τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΛ, ΛΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΛΞ, ΛΟ, ὡς δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς μεγαλυτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν

ΑΚ, ΚΒ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΛ, ΛΟ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΛ, ΛΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΛ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ τετράγωνον· ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΛ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ. τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ H 290 *τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον· ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν ΑΖ κάθετος ἄχθη ἁ ΛΜ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΓ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ· ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν τὰ Γ, Θ, Μ σαμεῖα. ἁ δὲ ΓΜ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ Θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν τοῦ αὐτοῦ κώνου.*

η′

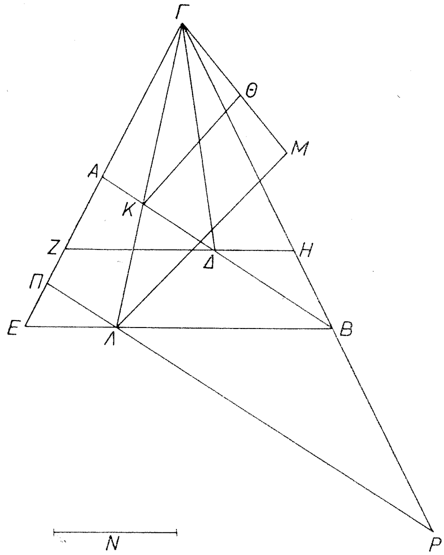
Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ὀρθὸν ἀνεστακὸς διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖ-

ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ (Ἀπολλωνίου Ι, 21)· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΛ, ΛΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΛ, ΛΟ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΛ, ΛΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΛ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΓ· ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΛ, ΛΖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΛ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΓ (Εὐκλ. V, 22). Πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΛ, ΛΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ· διότι εἰς τὸ ἡμικύκλιον τοῦ περὶ τὴν ΑΖ κύκλου ἤχθη κάθετος ἡ ΛΜ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΛΓ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΓ· ὥστε τὰ σημεῖα Γ, Θ, Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἡ δὲ ΓΜ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον Θ θὰ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ὑπετέθη δὲ ὅτι δὲν ἔκειτο· δὲν ὑπάρχει ἄρα οὐδὲν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ προειρημένου κώνου. Ὅλη λοιπὸν ἡ ἔλλειψις κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αὐτοῦ κώνου.

8

Δοθείσης ἐλλείψεως καὶ γραμμῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ὑψωθείσης μὴ καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, κειμένης δὲ εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὑψοῦται διὰ τῆς ἄλλης διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως, εἶναι ται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

ἔστω δὴ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ ἁ ΔΓ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα, ὡς εἴρηται, ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ· δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.



Η 292 οὐ δή ἐντι ἴσαι αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἐπεὶ ἁ ΓΔ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω οὖν ἴσα ἁ ΕΓ τᾷ ΓΒ, ἁ δὲ Ν εὐθεῖα ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ᾇ ἐστι συζυγὴς ἁ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἄχθω ἁ ΖΗ παρὰ τὰν ΕΒ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΕΒ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΕΒ, εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ, κύκλος, εἰ δὲ μή ἐστιν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΒ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ πέρας τῆς ὑψωθείσης εὐθείας, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ κεῖται ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις.

Ἔστω λοιπὸν διάμετρος μὲν τῆς ἐλλείψεως ἡ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ ἡ ΔΓ ἀπὸ τοῦ κέντρου ὑψωθεῖσα, ὡς ἐλέχθη, ἡ δὲ ἔλλειψις ἂς νοηθῇ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κειμένη εἰς ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου κεῖνται αἱ ΑΒ, ΓΔ· πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ, εἰς τοῦ ὁποίου τὴν ἐπιφάνειαν θὰ κεῖται ἡ ἔλλειψις.

Βεβαίως δὲν θὰ εἶναι ἴσαι αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου κεῖται ἡ ἔλλειψις. Ἔστω λοιπὸν ἴση ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΒ, ἡ δὲ εὐθεῖα Ν ἔστω ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαμέτρου, πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι συζυγὴς ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΒ, ἀπὸ δὲ τῆς ΕΒ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου κεῖνται αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἂς γραφῇ περὶ διάμετρον τὴν ΕΒ, ἐὰν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς Ν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΗ, κύκλος, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἴσον, ἂς γραφῇ ἔλλειψις τοιαύτη, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης διαμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς Ν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΗ· ἂς ληφθῇ δὲ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ Γ σημεῖον, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ὁ κύκλος ἢ ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ· εἶναι δὲ τοῦτο δυνατόν, ἐπειδὴ ἀπὸ τοῦ Γ, ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ μέσον τῆς ΕΒ εἶναι αὕτη κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ· εἰς τὴν ἐπιφάνειαν λοιπὸν ταύτην κεῖται καὶ ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ.

Διότι ἐὰν δὲν κεῖται, θὰ ὑπάρχῃ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ἐλλείτὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ· κῶνος δὲ λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ H 294 διάμετρον τὰν ΕΒ· δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ μέσαν τὰν ΕΒ ἀχθεῖσα ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΕΒ· ἐν ταύτᾳ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἐσσεῖται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἁ ΘΚ ἐπὶ τὰν ΑΒ, ἁ δὲ ΓΚ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ ΕΒ κατὰ τὸ Λ, διὰ δὲ τοῦ Λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΕΒ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΕΒ ἁ ΛΜ, τὸ δὲ Μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ τὰν ΑΒ ἁ ΠΡ· ἔστιν δή, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΛ, ΛΒ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΛ, ΛΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ· ἐσσεῖται οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ. ἔχει δέ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ καθέτοι ἐντὶ ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν ΑΒ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ. ἔχει δὲ καὶ τὸ H 296 ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΛ τετράγωνον τὸν ψεως, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἄς νοηθῇ, ὅτι ἔχει ληφθῆ σημεῖόν τι τὸ Θ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΘΚ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΓΚ ἂς προεκβληθῇ καὶ ἂς συναντήσῃ τὴν ΕΒ κατὰ τὸ Λ, διὰ δὲ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ κατὰ τὴν ΕΒ κάθετον ἐπίπεδον, ἡ ΛΜ κάθετος πρὸς τὴν ΕΒ, τὸ δὲ Μ ἂς νοηθῇ μετέωρον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΠΡ· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς Ν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΗ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΛ, ΛΒ, ὡς δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΗ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΛ, ΛΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΛ, ΛΡ· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς Ν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΠΛ, ΛΡ (Εὐκλ. V, 22). Ἔχει δέ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς Ν πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ, ἐπειδὴ εἰς τὴν αὐτὴν ἔλλειψιν ὑπάρχουσι κάθετοι ἠγμέναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ (Ἀπολλ. Ι, 21)· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΛ, ΛΡ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΛ, ΛΡ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΛ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΓ· τὸν αὐτὸν λοιπὸν λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΛΓ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΓ· ὥστε τὰ σημεῖα Γ, Θ, Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἡ δὲ ΓΜ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου (Ἀπολλ. Ι, 1)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον Θ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ὑπετέθη δὲ ὅτι *αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ· τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΓ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ· ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντὶ τὰ Γ, Θ, Μ σαμεῖα. ἁ δὲ ΓΜ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ Θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· φανερὸν οὖν ἐστιν, ὃ ἔδει δεῖξαι.*

θʹ

Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ ἑτέρα διάμετρος ἁ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, ἁ δὲ ΓΔ γραμμὰ ἔστω ἀνεστάκουσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται, ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τό, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ· δεῖ δὴ κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ΓΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

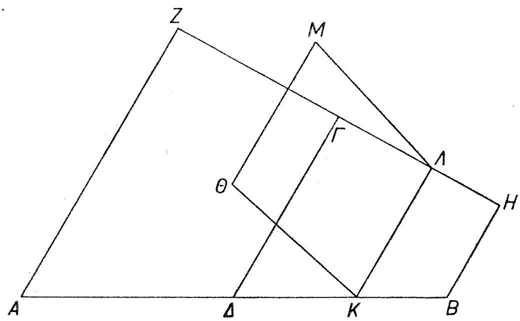
ἀπὸ δὴ τῶν Α, Β σαμείων ἄχθων παρὰ τὰν ΓΔ αἱ ΑΖ,
H 298 *ΒΗ· ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τᾶν ΑΖ, ΒΗ ἢ μείζων ἢ ἐλάσ-*

δὲν κεῖται· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθῇ.

9

Δοθείσης ἐλλείψεως καὶ γραμμῆς ὑψωθείσης ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδόν της, καὶ κειμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑψωθῇ ἀπὸ τῆς ἄλλης διαμέτρου κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι ἡ ἔλλειψις, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κύλινδρος ἔχων τὸν ἄξονα αὐτοῦ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὴν ὑψωθεῖσαν γραμμήν, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις.

Ἔστω ἡ ἄλλη διάμετρος τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, ἡ δὲ γραμμὴ ΓΔ ἔστω ὑψωθεῖσα ἀπὸ τοῦ κέντρου,



ὡς ἐλέχθη, ἡ δὲ ἔλλειψις ἂς νοηθῇ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ κειμένη εἰς ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ κύλινδρος ἔχων τὸν ἄξονα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ κεῖται ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις.

Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΔ αἱ ΑΖ, ΒΗ· ἡ ἄλλη διάμετρος τῆς ἐλλείψεως ἢ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ΑΖ, ΒΗ ἢ μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα. Ἔστω λοιπὸν πρότερον ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΖΗ ἔστω κάθετος σων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ΖΗ, ἁ δὲ ΖΗ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΓΔ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΖΗ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν ΓΔ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΓΔ· ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἁ ΘΚ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΒ· ἐσσεῖται δὲ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ· ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ἄχθω παρὰ τὰν ΓΔ ἁ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἀνεστακέτω ἁ ΛΜ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΗ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ΖΗ, τὸ δὲ Μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ· τὸν αὐτὸν δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ καθέτου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ περιεχόμενον καὶ τὸ ἀπὸ ΖΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον, ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΖΗ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΛ, ΛΗ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΒ περιεχόμενον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ· ἴσον οὖν ἐντι τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΛ, ΛΗ περιεχόμενον τῷ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετραγώνῳ. ἔστιν δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΛΜ· ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ ΘΚ, ΜΛ καθέτοι. H 300 παραλλήλοι οὖν ἐντι αἱ ΛΚ, ΜΘ· ὥστε καὶ αἱ ΔΓ, ΜΘ παραλλήλοι ἐσσοῦνται. καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ ΘΜ, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἆκται παρὰ τὸν ἄξονα· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ Θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· φανερὸν οὖν πρὸς τὴν ΓΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΖΗ ἂς ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔστω κύκλος περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ἔστω κύλινδρος ἔχων ἄξονα τὴν ΓΔ· εἰς τὴν ἐπιφάνειαν λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου τούτου κεῖται ἡ ἔλλειψις.

Διότι, ἐὰν δὲν κεῖται, θὰ ὑπάρχῃ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, τὸ ὁποῖον δὲν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἂς νοηθῇ λοιπὸν σημεῖόν τι ληφθὲν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τὸ Θ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· θὰ εἶναι δὲ αὕτη κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ (Εὐκλ. XI, ὁρ. 4)· ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΛΜ κάθετος πρὸς τὴν ΖΗ εἰς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν ΖΗ, τὸ δὲ Μ ἂς νοηθῇ μετέωρον εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ ἡμικυκλίου (κεῖται δηλ. εἰς τὸ τόξον τοῦ ἡμικυκλίου) τοῦ περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ· τὸν αὐτὸν λοιπὸν ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΔ, ΔΒ, ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον. Ἔχει δὲ λόγον καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΛ, ΛΗ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· εἶναι λοιπὸν ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΛ, ΛΗ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΚ. Εἶναι δὲ ἴσον καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ· εἶναι ἄρα ἴσαι αἱ κάθετοι ΘΚ, ΜΛ. Ὅθεν αἱ ΛΚ, ΜΘ εἶναι παράλληλοι (Εὐκλ. I, 33)· ὥστε καὶ αἱ ΔΓ, ΜΘ θὰ εἶναι παράλληλοι (Εὐκλ. XI, 9). Κεῖται ἄρα καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἡ ΘΜ, ἐπειδὴ ἀπὸ τοῦ Μ κειμένου εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ Θ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Ὑπετέθη δὲ ὅτι δὲν κεῖται· εἶναι ἐστιν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

δῆλον δή, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων ὀρθὸς ἐσσεῖται, εἴ κα ᾖ ἁ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμενᾶν παρὰ τὰν ἀνεστάκουσαν εὐθεῖαν.

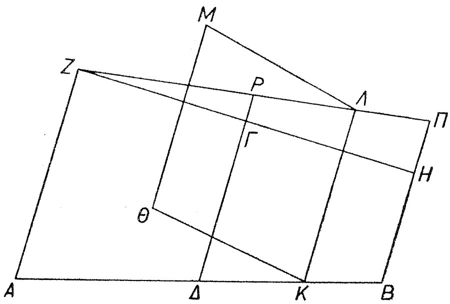
ἔστω πάλιν ἁ ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ΖΗ, καὶ ἴσα ἔστω ἁ ΠΖ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΠΖ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τό, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ΠΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΔΡ· ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ἐοῦσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ΖΗ. ᾧ δὴ μεῖζον δύναται ἁ ΖΓ τᾶς ἡμισείας τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΞ τετράγωνον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἁ ΞΝ, τὸ δὲ Ν νοείσθω μετέωρον·
H 302 ἁ οὖν ΓΝ ἴσα ἐντὶ τᾷ ΓΖ. ἐν δὴ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΖΗ, ΓΝ, κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ· ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ Ν· καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΓΔ· ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δή τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς τὸ Θ, καὶ ἁ ΘΚ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ παρὰ τὰν ΓΔ ἔστω ἁ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΗ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ ἁ ΛΜ, νοείσθω δὲ τὸ Μ ἐπὶ τᾶς περιφερείας τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἄχθω φανερὸν λοιπόν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθῇ.

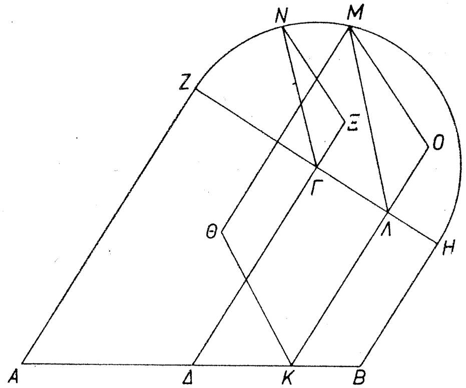
Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιέχων τὴν ἔλλειψιν θὰ εἶναι ὀρθός, ἐφ' ὅσον ἡ ἄλλη διάμετρος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τὴν ἠγμένην ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἄλλης διαμέτρου παραλλήλως πρὸς τὴν ὑψωθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω πάλιν ἡ ἄλλη διάμετρος μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ, καὶ ἔστω ἡ ΠΖ ἴση πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον, ἀπὸ δὲ τῆς ΠΖ ἂς ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔστω κύκλος περὶ τὴν διάμετρον ΠΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου ἔστω κύλινδρος ἔχων ἄξονα τὴν ΔΡ· εἰς τὴν ἐπιφάνειαν λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου τούτου διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν ἀποδεικνύεται ὅτι κεῖται ἡ ἔλλειψις.



Ἀλλ' ἔστω μικροτέρα τῆς ΖΗ ἡ ἄλλη διάμετρος. Ἔστω δὲ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς ἄλλης διαμέτρου κατὰ τὸ τετράγωνον ΓΞ καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἂς ὑψωθῇ εὐθεῖα γραμμὴ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαμέτρου κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ ΞΝ, τὸ δὲ Ν ἂς νοηθῇ μετέωρον· ἡ ΓΝ λοιπὸν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΖ. Ἂς γραφῇ δὲ εἰς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου κεῖνται αἱ ΖΗ, ΓΝ, κύκλος περὶ τὴν διάμετρον ΖΗ· θὰ διέλθῃ δὲ οὗτος διὰ τοῦ Ν· καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου ἔστω κύλινδρος ἔχων ἄξονα τὴν ΓΔ· εἰς τὴν ἐπιφάνειαν λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου τούτου κεῖται ἡ ἔλλειψις.

Διότι, ἐὰν δὲν κεῖται, θὰ ὑπάρχῃ σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς, τὸ *ἐπὶ τὰν ΚΛ ἐκβληθεῖσαν ἁ ΜΟ· ἐσσεῖται δὲ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπεὶ ποτ᾽ ὀρθάς ἐντι ἁ ΚΛ τᾷ ΖΗ· ἔστιν δή, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΓ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ, ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς ΜΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΛΖ, ΛΗ περιεχομένῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΓΝ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΝ*



ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τετράγωνον
Η 304 *ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ, ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΞΝ τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου· δῆλον οὖν, ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ ΜΟ, ΘΚ καθέτοι· ὥστε παραλλήλοι αἱ ΚΟ, ΘΜ. ἐπεὶ δὲ ἁ ΜΘ παρὰ τὸν ἄξονά ἐντι τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ Μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον, καὶ τὰν ΜΘ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ Θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ· δῆλον οὖν, ὅτι ἀναγκαῖόν ἐστι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.*

ὁποῖον δὲν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἔστω παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν ΖΗ εἰς τὸ ἡμικύκλιον τὸ περὶ τὴν διάμετρον τὴν ΖΗ ἡ ΛΜ, ἂς νοηθῇ δὲ τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὴν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ προεκβληθεῖσαν ἡ ΜΟ· θὰ εἶναι δὲ αὕτη κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΖΗ· εἶναι λοιπόν, ὡς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΜΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΜΛ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΞΝ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΝΓ, ὡς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΓΝ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ, ἐπειδὴ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ΜΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΛΖ, ΛΗ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΓΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΖ· εἶναι ἄρα, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΜΟ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς ΞΝ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ. (Εὐκλ. V, 22). Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΚ, ΚΒ, ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΞΝ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ, ἐπειδὴ ἡ ΞΝ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαμέτρου· (Ἀπολλ. Ι, 21)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αἱ κάθετοι ΜΟ, ΘΚ εἶναι ἴσαι· ὥστε αἱ ΚΟ, ΘΜ εἶναι παράλληλοι. (Εὐκλ. Ι, 33). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΜΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ σημεῖον Μ εἶναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, εἶναι ἀναγκαῖον καὶ ἡ ΜΘ νὰ εἶναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ Θ εἶναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Δὲν ἦτο δέ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι ἀναγκαῖον ἡ ἔλλειψις νὰ κεῖται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.

ι′

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων, ἀποδείκνυται ὑπὸ τῶν πρότερον, ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξίς ἐντι καί, διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων.

καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ καὶ ὕψος ἴσον.

H 306

ια′

Εἴ κα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ αὐτὰ τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ σχῆμα, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον.

εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ

10

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος πρὸς ἄλλον κῶνον ἔχει λόγον τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῶν βάσεων ἐπὶ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν, ἔχει ἀποδειχθῇ ὑπὸ τῶν προηγουμένων μας, ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ὅτι πᾶν ἀπότμημα κώνου πρὸς ἀπότμημα κώνου ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῶν βάσεων ἐπὶ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν.

Καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου (κύλινδρος ἔχων βάσεις ἐλλείψεις παραλλήλους) εἶναι τριπλάσιος ἀποτμήματος κώνου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸν τόμον καὶ ὕψος ἴσον, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις, ἡ ὁποία καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ ὕψος ἴσον.

11

Ἐὰν παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ παραβολὴ πρὸς τὴν περιλαμβάνουσαν τὸ σχῆμα, διάμετρος δὲ αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Ἐὰν δὲ τὸ παραβολοειδὲς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ *κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.*

Εἴ κα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἢ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, εἰ μέν κα διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ αὐτὰ τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ σχῆμα, εἰ δέ κα παρὰ τὸν ἄξονα, ὁμοία αὐτᾷ, εἰ δέ κα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

εἰ δέ κα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, εἰ μὲν κα διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δέ κα παρὰ τὸν ἄξονα, ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν
H 308 *ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.*

εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Εἴ κα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἐόντων καθέτοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς.

τούτων δὲ πάντων φανεραί ἐντι αἱ ἀποδείξιες.

ἄξονος.

Καὶ ἐὰν ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα ἢ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ ὑπερβολοειδές, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ὑπερβολή, ἐὰν μὲν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ αὐτὴ ἡ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, ἐὰν δὲ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτήν, ἐὰν δὲ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ ὑπερβολοειδές, δὲν θὰ εἶναι ὁμοία, διάμετρος δὲ τῆς τομῆς θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Ἐὰν δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Καὶ ἐὰν οἱονδήποτε ἐλλειψοειδὲς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, ἐὰν μὲν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὴ ἡ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, ἐὰν δὲ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτήν, διάμετρος δὲ τῆς τομῆς θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Ἐὰν δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Καὶ ἐὰν οἱονδήποτε ἐκ τῶν εἰρημένων σχημάτων τμηθῇ διὰ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείων εὑρισκομένων εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος μὴ κειμένων ὅμως ἐπὶ τῆς τομῆς θὰ πέσωσιν ἐντὸς τῆς τομῆς τοῦ σχήματος.

Ὅλων δὲ τούτων αἱ ἀποδείξεις εἶναι φανεραί.

ιβʹ

Εἴ κα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παρὰ τὸν ἄξονα μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τῶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου.

τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ· δεικτέον, ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπι-
H 310 *πέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ ΑΓ, ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τᾷ ΛΑ τᾶς μὲν ΓΛ παρὰ τὰν ΒΔ ἐούσας, τᾶς δὲ ΑΛ καθέτου ἐπὶ τὰν ΓΛ.*

νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΓΑ ἁ ΚΘ· ἐσσεῖται οὖν ἁ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τό, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΑΓΒ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν

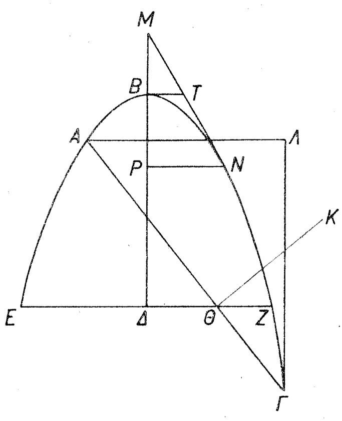
ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

12

Ἐὰν παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μήτε διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα, μήτε καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, ἡ μεγαλυτέρα δὲ διάμετρος αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ ἐναπολειφθεῖσα εἰς τὸ παραβολοειδὲς ἀπὸ τῆς γενομένης τομῆς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἡ δὲ μικροτέρα διάμετρος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα ἀπὸ τῶν περάτων τῆς μεγαλυτέρας διαμέτρου.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ παραβολοειδὲς δι' ἐπιπέδου, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἔστω τοῦ μὲν παραβολοειδοῦς τομὴ ἡ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἡ εὐθεῖα ΓΑ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ παραβολοειδοῦς καὶ διάμετρος τῆς τομῆς (τῆς προκυπτούσης παραβολῆς) ἡ ΒΔ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ τοῦ παραβολοειδοῦς ἡ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΑΓ εἶναι ἔλλειψις, καὶ μεγαλυτέρα διάμετρος αὐτῆς εἶναι ἡ ΑΓ, ἡ δὲ μικροτέρα διάμετρος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΑ, ἐν ᾧ ἡ ΓΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ δὲ ΑΛ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΓΛ.

Ἂς νοηθῇ ὅτι ἔχει ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ ἡ ΚΘ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ παραβολὴ ΑΓΒ, διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἁ ΕΖ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν ΒΔ, καὶ διὰ τᾶν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν ΒΔ· τετμήσεται δὴ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα· ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ· ἁ ἄρα ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ΖΘ, ΘΕ [ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τῆς ΕΖ, καὶ ἁ ΚΘ κάθετος οὖσα μέση γίνεται ἀνάλογον τῷ ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ περιεχομένῳ]. ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁ μὲν ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Ν, ἁ δὲ ΒΤ παρὰ τὰν ΕΖ· τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΤ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ· δέδεικται γὰρ τοῦτο. τᾷ δὲ ΝΤ ἴσα ἐντὶ ἁ ΤΜ, διότι καὶ ἁ ΒΡ τᾷ ΒΜ· ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΜ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΒ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν H 312 ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΜ. ἐπεὶ οὖν ὁμοῖά ἐντι τὰ ΓΑΛ, ΤΜΒ τρίγωνα, τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΛ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον. ὁμοίως δειχθή-



αὐτὸ ἐπίπεδον (Εὐκλ. XI, ὁρ. 4)· διὰ δὲ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΚΘ ἂς ἐκβληθῇ ἐπίπεδον· θὰ εἶναι δὲ τοῦτο κάθετον πρὸς τὴν ΒΔ· θὰ τμηθῇ λοιπὸν τὸ παραβολοειδὲς σχῆμα δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα· ὥστε ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ (θεώρ. 11 α)· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΚΘ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΘ, ΘΕ [διότι τὸ ἐπὶ τῆς ΕΖ εἶναι ἡμικύκλιον, καὶ ἡ ΚΘ οὖσα κάθετος γίνεται μέση ἀνάλογος τῶν πλευρῶν ΕΘ, ΘΖ]. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς τοῦ κώνου (τῆς παραβολῆς) ἡ μὲν ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, νὰ ἐφάπτηται δὲ κατὰ τὸ Ν, ἡ δὲ ΒΤ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν πλευρῶν ΑΘ, ΘΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΘ, ΘΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΝΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θεώρ. 3). Πρὸς δὲ τὴν ΝΤ εἶναι ἴση ἡ ΤΜ, διότι καὶ ἡ ΒΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΜ· ἔχει λοιπὸν καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΤΜ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΤΒ· ὥστε καὶ τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΤΜ (Εὐκλ. V, 7 πόρ.). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΑΛ, ΤΜΒ εἶναι ὅμοια, τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ΘΚ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΛ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ (Εὐκλ. VI, 4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἄλλων καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς ΑΓ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΛ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις, διάμετροι δὲ αὐτῆς εἶναι ἡ *σονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν καθέτων τετράγωνα τᾶν ἀγομενᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς ΑΓ τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΛ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ· δῆλον οὖν, ὅτι ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διαμέτροι δὲ αὐτᾶς ἐντι ἁ μὲν μείζων ἁ ΑΓ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ ΑΛ.*

ιγ′

Εἴ κα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

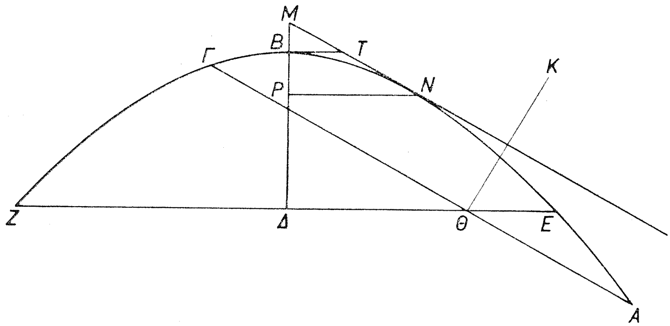
τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος καὶ διάμε-
H 314 *τρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΓ ἁ ΚΘ· ἐσσεῖται δὴ αὔτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τό, ἐν ᾧ ἐντι ἁ ΑΒΓ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἁ ΕΖ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ΒΔ, καὶ διὰ τᾶν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω τέμνον τὸ κωνοειδές· τετμήσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ*

μὲν μεγαλυτέρα, ἡ ΑΓ, ἡ δὲ μικροτέρα, ἴση πρὸς τὴν ΑΛ.

13

Ἐὰν ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον συναντᾷ ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ ὑπερβολοειδὲς οὐχὶ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, ἡ μεγαλυτέρα δὲ αὐτῆς διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ἐναποληφθεῖσα εἰς τὸ ὑπερβολοειδὲς ἐκ τῆς γενομένης τομῆς τῶν ἐπιπέδων καὶ τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς δι' ἐπιπέδου, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου



διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἔστω δὲ τοῦ μὲν ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τομὴ ἡ ὑπερβολὴ ΑΒΓ, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἄξων δὲ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΒΔ. Ἂς νοηθῇ τώρα τὸ σημεῖον Κ ληφθὲν ἐπὶ τῆς τομῆς, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘ· θὰ εἶναι λοιπὸν αὕτη κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἡ κωνικὴ τομὴ ΑΒΓ (Εὐκλ. XI, ορισ. 4). Διὰ δὲ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ

τὸν ἄξονα· ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ· ἁ ἄρα κάθετος ἁ ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ. ἄχθω δὴ πάλιν ἁ μὲν ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Ν, ἁ δὲ ΒΤ παρὰ τὰν ΕΖ· τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ΕΘ, ΘΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ· ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. ὁμοίως οὖν δειχθησοῦντι καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομενᾶν ἐπὶ τὰν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς ΑΓ, ὧν αἱ καθέτοι ποιοῦντι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. καί ἐστιν ἐλάσσων ἁ ΒΤ τᾶς ΤΝ, διότι καὶ ἁ ΜΤ ἐλάσσων ἐστὶν τᾶς ΤΝ· καὶ γὰρ ἁ ΜΒ ἐλάσσων τᾶς ΒΡ· τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς σύμπτωμα· δῆλον οὖν, ὅτι ἁ τομὰ
H 316 *ὀξυγωνίου κώνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ ΑΓ [ὁμοίως καθέτου οὔσης τᾶς ΝΡ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ ΓΛ].*

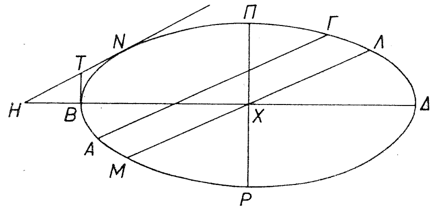
ιδ'

Εἴ κα τὸ παράμακες σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

διὰ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΚΘ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον τὸ ὑπερβολοειδές· τοῦτο θὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα· ὥστε ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΚΘ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΕΘ, ΘΖ. Ἂς ἀχθῇ πάλιν ἡ μὲν ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς τοῦ κώνου κατὰ τὸ Ν, ἡ δὲ ΒΤ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν πλευρῶν ΕΘ, ΘΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΤΝ (θεώρ. 3)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ΚΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΤΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἄλλων καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς ΑΓ, τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τῶν ἀγομένων καθέτων, θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΤΝ. Καὶ εἶναι μικροτέρα ἡ ΒΤ τῆς ΤΝ, διότι καὶ ἡ ΜΤ εἶναι μικροτέρα τῆς ΤΝ· καὶ διότι ἡ ΜΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΡ· διότι τοῦτο εἶναι ἴδιον τῶν ὑπερβολῶν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις καὶ μεγαλυτέρα αὐτῆς διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ [ὁμοίως δὲ ἐν ᾧ ἡ ΝΡ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ὑπερβολὴν μεγαλυτέρα αὐτῆς διάμετρος εἶναι ἡ ΓΛ].

14

Ἐὰν ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς περὶ τὸν μέγαν ἄξονα ἐλλείψεως τμηθῇ δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, μεγαλυτέρα δὲ αὐτῆς διάμετρος θὰ εἶναι *εἰ μὲν οὖν κα τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, δῆλον· τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ μὲν σφαιροειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου ἁ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ σφαιροειδέος καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ ἐλάσσων διάμετρος ἔστω ἁ ΠΡ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν ΒΤ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΔ, ἁ δὲ ΗΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπι-* H 318 *ψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Ν, ἄχθω δὲ καὶ ἁ ΜΛ διὰ τοῦ Χ παρὰ τὰν ΑΓ· ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων τᾶν*



ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγμενᾶν ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς ΑΓ τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ ΓΑ, δῆλον· ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ΠΧ, ΧΡ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΜΧ, ΧΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΤ, ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ ΠΡ, ΜΛ. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΧ, ΧΡ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΜΧ, ΧΛ, ἐπεὶ καὶ ἁ ΧΠ τᾶς ΧΛ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΤΝ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν ἐλάσσονά ἡ ἐναποληφθεῖσα εἰς τὸ ἐλλειψοειδὲς ἀπὸ τῆς γενομένης τομῆς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

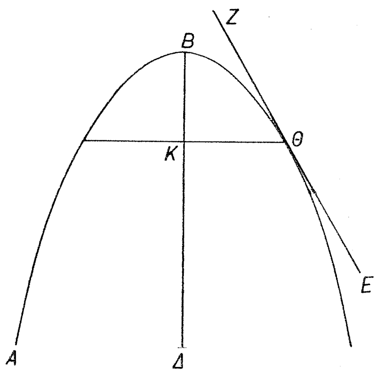
Ἐὰν μὲν λοιπὸν τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα, εἶναι τοῦτο φανερὸν (θεώρ. 11)· ἂς τμηθῇ δὲ δι' ἄλλου ἐπιπέδου, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ ἀκόμη δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν ἐλλειψοειδοῦς τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου ἡ εὐθεῖα ΓΑ, ἄξων δὲ τοῦ μὲν ἐλλειψοειδοῦς καὶ διάμετρος τῆς ἐλλείψεως ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ μικροτέρα διάμετρος ἔστω ἡ ΠΡ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ μὲν ΒΤ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ δὲ ΗΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὸ Ν, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΜΛ διὰ τοῦ Χ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· ὁμοίως, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων τῶν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς ΑΓ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΤΝ. Ὅτι μὲν λοιπὸν ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΓΑ, εἶναι φανερὸν (Ἀπολλ. I, 21)· ὅτι δὲ αὕτη εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ. Διότι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΧ, ΧΡ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΜΧ, ΧΛ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΝΤ, ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΠΡ, ΜΛ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας (θεώρ. 3). Εἶναι δὲ μικρότερον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΧ, ΧΡ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΜΧ, ΧΛ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΧΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΧΛ· εἶναι ἄρα μικρότερον καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΤ τοῦ τετραγώνου τῆς ΤΝ· ὥστε καὶ τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ εἶναι μικρότερα τῶν ὀρθογωνίων, ἅτινα ἔχουσι ἐντι τῶν ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς *ΑΓ* περιεχομένων. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ *ΓΑ*.

Εἴ κα τὸ ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται, τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ.

Ἐξ αὐτῶν δὲ φανερὸν ἐν πάντεσσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι, εἴ κα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται· τὰ γὰρ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.

H 320 ιε′

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτουοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος τᾶν ἀγομενᾶν εὐθειᾶν παρὰ τὸν ἄξονα αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.



ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ᾽ οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος· ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομενᾶν παρὰ τὰν διάμετρον εὐθειᾶν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς ΑΓ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διάμετρος.

Ἐὰν τὸ ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τῆς ἐλλείψεως περὶ τὸν μικρὸν ἄξονα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου, τὰ μὲν ἄλλα θὰ εἶναι τὰ αὐτά, ἡ μικροτέρα δὲ τῶν διαμέτρων θὰ εἶναι ἡ ἐναποληφθεῖσα εἰς τὸ ἐλλειψοειδές.

Ἐξ αὐτῶν δὲ εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς ὅλα τὰ σχήματα, ἐὰν τμηθῶσι διὰ παραλλήλων ἐπιπέδων, αἱ τομαὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ὅμοιαι· διότι τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πρὸς τὰ ὀρθογώνια τῶν τμημάτων θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς λόγους.

15

Εἰς τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τυχόντος σημείου κειμένου εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραβολοειδοῦς παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἀγόμεναι πρὸς τὰ κυρτὰ μέρη αὐτοῦ θὰ πέσωσιν ἐκτὸς τοῦ παραβολοειδοῦς, αἱ δὲ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἄλλα θὰ πέσωσιν ἐντός.

Διότι ἀφοῦ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος καὶ διὰ τοῦ σημείου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι παραβολή, διάμετρος δὲ αὐτῆς θὰ εἶναι ὁ ἄξων τοῦ παραβολοειδοῦς· εἰς δὲ τὴν παραβολὴν ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται παραλλήλως πρὸς τὴν διάμετρον, αἱ μὲν ἀγόμεναι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τὰ ὁποῖα τὰ κυρτὰ αὐτῆς πίπτουσιν ἐκτός, αἱ δὲ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἄλλα πίπτουσιν ἐντὸς (Ἀπολλ. I, 26)· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

αὐτᾶς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός· δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

Ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τᾶν ἀγομενᾶν εὐθειᾶν παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς καὶ διὰ τοῦ σαμείου, ἀφ᾽ οὗ ἄγεται ἁ ἐς αὐτό, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα· ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς
H 322 *σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς τᾶν ἀγομενᾶν εὐθειᾶν παρὰ τὰν οὕτως ἀγμέναν γραμμὰν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐστιν αὐτᾶς τὰ κυρτά, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.*

Εἴ κα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ᾽ ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον.

ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὴ δύο σαμείων, καθ᾽ ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν ἀπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον· ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, ἐπεὶ ἔν τε τᾷ ἐπι-

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

Εἰς τὸ ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχόντος σημείου κειμένου εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ παραλλήλως πρός τινα εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ ὑπερβολοειδές, αἱ μὲν ἀγόμεναι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, θὰ πέσωσιν ἐκτὸς τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, αἱ δὲ ἄλλαι θὰ πέσωσιν ἐντός.

Διότι ἀφοῦ ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ ὑπερβολοειδὲς καὶ διὰ τοῦ σημείου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ συναντῶσα τὸ ὑπερβολοειδές, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ὑπερβολή, διάμετρος δὲ αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ὑπερβολοειδὲς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου· εἰς δὲ τὴν ὑπερβολὴν ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ παντὸς σημείου εὑρισκομένου εἰς τὴν ὑπερβολὴν παραλλήλως πρὸς τὴν γραμμὴν τὴν ἀχθεῖσαν οὕτω πως, αἱ μὲν ἀγόμεναι πρὸς τὰ μέρη, ὅπου κεῖνται τὰ κυρτὰ αὐτῆς θὰ πέσωσιν ἐκτός, αἱ δὲ πρὸς τὰ ἄλλα μέρη θὰ πέσωσιν ἐντός.

Ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηταί τινος τῶν κωνοειδῶν σχημάτων μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, θὰ ἐφάπτηται εἰς ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ἄξονος διερχόμενον ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

Διότι ἂς ἐφάπτηται, εἰ δυνατόν, εἰς περισσότερα σημεῖα.. Ἐὰν ληφθῶσι, ἔστω, δύο σημεῖα, καθ' ἃ ἐφάπτεται τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐξ ἑκατέρου τούτων ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα εὐθεῖαι, τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῶν παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα ἀχθεισῶν εὐθειῶν ἢ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἄξονος ἢ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτόν· ὥστε θὰ σχηματίσῃ κωνικὴν τομήν, καὶ τὰ σημεῖα θὰ κεῖνται εἰς τὴν *φανείᾳ ἐντὶ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς· ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστιν δὲ ἁ εὐθεῖα αὕτα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα· τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον.*

ὅτι δὲ καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον, εἰ μὲν κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐφάπτεται, δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαὶ διάμετρον ἔχουσαι τὸν ἄξονα, τοῦ δὲ
H 324 *ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου. αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον· ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον· ὥστε καὶ ποτὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος, καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ κώνου τομά, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομὰ ἔστω ἁ ΕΘΖ εὐθεῖα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ Θ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΒΔ ἁ ΘΚ, καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· ποιήσει δὴ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ Κ. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου· ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ*

κωνικὴν τομὴν ἐπειδὴ κεῖνται καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κωνοειδοῦς καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ἡ μεταξὺ τῶν σημείων λοιπὸν εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς κωνικῆς τομῆς· ὥστε θὰ κεῖται καὶ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδοῦς. Κεῖται δὲ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, διότι εἰς αὐτὸ κεῖνται καὶ τὰ σημεῖα· τοῦ ἐφαπτομένου ἄρα ἐπιπέδου μέρος τι θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ κωνοειδοῦς· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ὑπετέθη ὅτι δὲν τὸ τέμνει. Θὰ ἐφάπτηται ἄρα εἰς ἓν μόνον σημεῖον.

Ὅτι δὲ τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, ἐὰν μὲν ἐφάπτηται εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κωνοειδοῦς εἶναι φανερόν. Διότι ἐὰν ἀχθῶσι διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κωνοειδοῦς δύο ἐπίπεδα αἱ τομαὶ θὰ εἶναι κωνικαὶ τομαὶ ἔχουσαι διάμετρον τὸν ἄξονα, τοῦ δὲ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ἐφάπτονται τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου. Αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κωνικῶν τομῶν κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς διαμέτρους· θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον δύο εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς τὸν ἄξονα. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα· ὥστε θὰ εἶναι κάθετον καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον ἐπίπεδον. Ἀλλ' ἔστω τώρα τὸ ἐπίπεδον μὴ ἐφαπτόμενον κατὰ τὴν κορυφὴν τοῦ κωνοειδοῦς. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ἄξονος, καὶ τοῦ μὲν κωνοειδοῦς τομὴ ἔστω ἡ κωνικὴ τομὴ ΑΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΔ, τοῦ δὲ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΕΘΖ ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς τομῆς κατὰ τὸ Θ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἡ ΘΚ, καὶ ἂς ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο τὴν τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ Κ. Ἡ τομὴ δὲ τοῦ ἐπιπέδου τούτου *τὰν ΘΚ· ὥστ᾽ ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τό, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΚΘ, ΒΔ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.*

ιϛ′

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ᾽ ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον.

H 326 *ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὴ τῶν σαμείων, καθ᾽ ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν καὶ διὰ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς· ὥστε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστιν δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα· τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστιν δέ· ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν, ὅτι καθ᾽ ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως τοῖς περὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων.*

Εἴ κα τῶν κωνοειδέων ἢ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς.

καὶ τοῦ ἐφαπτομένου θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου· θὰ εἶναι ἄρα κάθετος πρὸς τὴν ΘΚ· ὥστε θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ ΚΘ, ΒΔ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπειδὴ καὶ αἱ εἰς αὐτὸ κείμεναι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι.

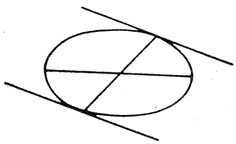
16

Ἐὰν εἰς οἱονδήποτε τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων ἐφάπτηται ἐπίπεδον μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, θὰ ἐφάπτηται εἰς ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

Διότι ἂς ἐφάπτηται κατὰ περισσότερα σημεῖα. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῶσι τὰ σημεῖα, καθ' ἃ τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα καὶ ἐὰν διὰ τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν ἐκβληθῇ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, καὶ τὰ σημεῖα θὰ κεῖνται εἰς τὴν κωνικὴν τομήν. Ἡ μεταξὺ λοιπὸν τῶν σημείων εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς κωνικῆς τομῆς (Ἀπολλ. Ι, 10)· ὥστε θὰ κεῖται καὶ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδοῦς. Κεῖται δὲ ἡ εὐθεῖα εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, διότι εἰς αὐτὸ κεῖνται καὶ τὰ σημεῖα· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν μέρος τι τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἐντὸς τοῦ σφαιροειδοῦς. Δὲν ὑπάρχει ὅμως· διότι ὑπετέθη ὅτι δὲν τὸ τέμνει. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ἐφάπτηται εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Ὅτι δὲ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ἄξονος θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅπως καὶ εἰς τὰ κωνοειδῆ σχήματα.

οὐ γὰρ ἅψεται κατ᾽ ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μή, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου κάθετος ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐκτὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς· ἐπὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται, ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ᾽ ἄλλαλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι ἐντὸς πεσεῖται.

H 328 *Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύωντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται.*



εἰ μὲν οὖν κα ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἔωντι, δῆλον· ἀλλ᾽ ἔστω μὴ ποτ᾽ ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ· ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον τὸ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ἑκατερᾶν τᾶν ἁφᾶν ἀγμένον. εἰ δὲ μή, ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον· ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαί, καὶ τετμακὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυόντων ἐπιπέδων τομαὶ παραλλήλοι ἐσσοῦνται καὶ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων· εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπι-

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

Ἐάν τι ἐκ τῶν κωνοειδῶν ἢ σφαιροειδῶν σχημάτων οἱονδήποτε τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἐφαπτομένη τῆς γενομένης τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἐφαπτομένης ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ τέμνον, θὰ ἐφάπτηται τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ καὶ ἡ εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς τοῦ κώνου.

Διότι δὲν θὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ κατ' ἄλλο σημεῖον. Ἄλλως, ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς τοῦ κώνου· διότι θὰ πέσῃ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, διότι τὰ ἐπίπεδα εἶναι μεταξὺ των κάθετα· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι θὰ πέσῃ ἐντός.

Ἐάν τινος τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων ἐφάπτωνται δύο ἐπίπεδα παράλληλα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ἐπαφῶν θὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδοῦς.

Διότι, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς τὸν ἄξονα, τοῦτο εἶναι φανερόν· ἀλλ' ἔστω ὅτι δὲν εἶναι κάθετα. Ὅμως τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον· ὥστε θὰ εἶναι κάθετον καὶ πρὸς τὸ παράλληλον πρὸς αὐτό. Εἶναι ἄρα ἀναγκαῖον νὰ εἶναι τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ἑκατέρας τῶν ἐπαφῶν. Εἰ δὲ μή, θὰ ὑπάρχωσι δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἔχοντα ἀχθῆ διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἡ ὁποία δὲν εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον· διότι ὑπετέθη, ὅτι ὁ ἄξων δὲν εἶναι κάθετος πρὸς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα· θὰ εἶναι ἄρα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ ὁ ἄξων καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῶν, καὶ τὸ σφαιροειδὲς θὰ ἔχῃ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος. Ἡ τομὴ λοιπὸν θὰ εἶναι ἔλλειψις, αἱ δὲ τομαὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὰ σημεῖα ἐπαφῶν τῶν ἐπιπέδων· ἐὰν δὲ αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως ψαύωντι παραλλήλοι ἐοῦσαι, τό τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἐσσοῦνται.

ιζ′

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δέ τι ἐπίπεδον διὰ
H 330 τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι εὐθεῖαι παρὰ τὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος.

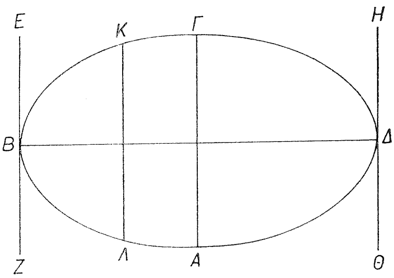
ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς, διὰ δὲ τοῦ γενομένου σαμείου καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω· τεμεῖ δὴ τοῦτο τό τε σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ σφαιροειδέος τομὰ ἁ ΑΒΓΔ [ὀξυγωνίου κώνου τομά], αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ψαυόντων τομαὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι, τὸ δὲ λαφθὲν σαμεῖον τὸ Α, ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ ΒΔ· πεσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου· ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ ΓΑ· ἐσσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ ΑΒΓΔ ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΗΘ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἆκται παράλληλος αὐταῖς ἁ ΑΓ, δῆλον, ὡς αἱ ἀπὸ τῶν Α, Γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν ΒΔ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς καὶ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος.

εἰ δέ κα τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαυόντεσσι μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον ᾖ, ὡς τὸ ΚΛ, δῆλον, ὡς τᾶν ἀπὸ τᾶς εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῶν θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

17

Ἐὰν ἀχθῶσι δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα οἱουδήποτε τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων, ἀχθῇ δὲ ἐπίπεδόν τι διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδοῦς παράλληλον πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα, αἱ διὰ τῆς γενομένης τομῆς ἀγόμεναι εὐθεῖαι παραλλήλως πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν θὰ πέσωσιν ἐκτὸς τοῦ σφαιροειδοῦς.

Ἔστωσαν τὰ εἰρημένα, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς γενομένης τομῆς, διὰ δὲ τοῦ γενομένου σημείου καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ τμήσῃ καὶ τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. Ἔστω λοιπὸν ἡ μὲν τομὴ τοῦ σφαιροειδοῦς ἡ ΑΒΓΔ (ἔλλειψις), αἱ δὲ τομαὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ, τὸ δὲ ληφθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἔστω ἡ ΒΔ· θὰ διέλθῃ δὲ αὕτη διὰ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τομὴ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων διὰ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου ἔστω ἡ ΓΑ· θὰ διέρχηται δὲ αὕτη διὰ τοῦ κέντρου, ἐπειδὴ διέρχεται δι' αὐτοῦ καὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒΓΔ εἶναι ἢ κύκλος ἢ ἔλλειψις καὶ ἐφάπτονται αὐτῶν δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΗΘ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς αὐτὰς ἡ ΑΓ, εἶναι



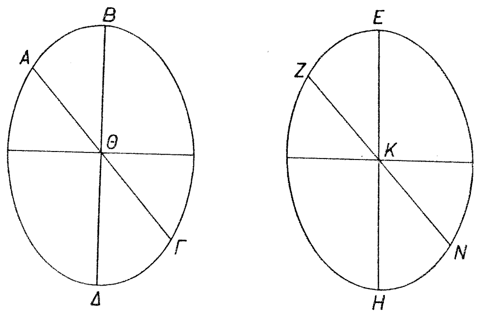
τομᾶς ἀγομενᾶν εὐθειᾶν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γενόμεναι τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

H 332

ιη'

Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου· ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμαμένον ἢ ποτ' ὀρθὰς ἢ μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον, ὡς δίχα τέμνεταί



τε αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· φανερὸν γάρ, ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρους ἐπὶ τὰν τοῦ ἑτέρου.

ἀλλ' ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμαμένον μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΒΔ καὶ κέντρον φανερόν, ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ ἀγόμεναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ θὰ ἐφάπτωνται τῶν τομῶν καὶ θὰ πέσωσιν ἐκτὸς τοῦ σφαιροειδοῦς.

Ἐὰν δὲ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὰ ἐφαπτόμενα δὲν διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου, ὡς τὸ ΚΛ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν τομῶν αἱ μὲν πρὸς τὸ μέρος τοῦ μικροτέρου τμήματος θὰ πέσωσιν ἐκτὸς τοῦ σφαιροειδοῦς, αἱ δὲ ἄλλαι θὰ πέσωσιν ἐντός.

18

Πᾶν σφαιροειδὲς σχῆμα τμηθὲν δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τέμνεται δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ αὐτὸ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ σφαιροειδὲς δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου· τοῦτο θὰ τέμνηται εἴτε διὰ τοῦ ἄξονος εἴτε καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα εἴτε οὐχὶ καθέτως πρὸς αὐτόν. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τέμνηται διὰ τοῦ ἄξονος ἢ καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, εἶναι φανερόν, ὅτι διχοτομεῖται καὶ αὐτὸ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· διότι εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ ἐφαρμόζει εἰς τὸ ἄλλο καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς ἐφαρμόζει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἄλλου.

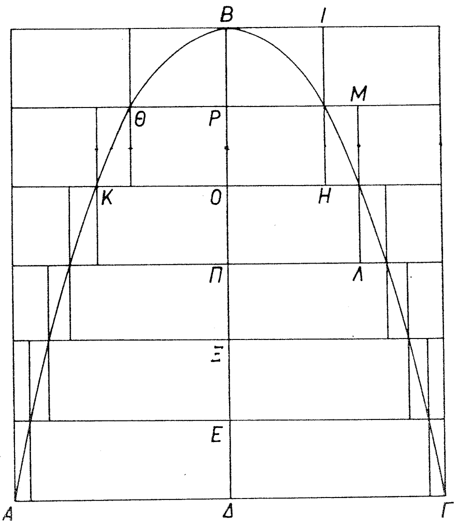
Ἀλλ' ἔστω ὅτι τέμνεται δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος μήτε καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα. Διότι, ἀφοῦ τμηθῇ τὸ σφαιροειδὲς δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδοῦς

τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμακότος διὰ τοῦ κέντρου τὸ σφαιροειδὲς ἔστω τομὰ ἁ ΑΓ εὐθεῖα. λελάφθω δή τι καὶ ἄλλο σφαιροειδὲς ἴσον καὶ ὁμοῖον τούτῳ, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομὰ ἔστω ἁ ΕΖΗΝ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΕΗ καὶ κέντρον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἄχθω ἁ ΖΝ γωνίαν ποιοῦσα τὰν Κ ἴσαν τᾷ Θ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΖΝ ἐπίπεδον
H 334 ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΕΖΗΝ τομά· ἐντὶ δὴ δύο ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΝ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις· ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ᾽ ἀλλάλας τεθείσας τᾶς ΕΗ ἐπὶ τὰν ΒΔ καὶ τᾶς ΖΝ ἐπὶ τὰν ΑΓ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ὀρθά ἐντι· ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν ΝΖ ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Ε τῷ ἑτέρῳ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β καὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπὸν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς ΕΗ ἐπὶ τὰν ΒΔ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Ε κατὰ τὸ Δ κεῖσθαι, τὸ δὲ Η κατὰ τὸ Β, τὰν δὲ μεταξὺ τῶν Ν, Ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν Α, Γ σαμείων, δῆλον, ὡς αἵ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμοξοῦντι ἐπ᾽ ἀλλάλας, καὶ τὸ μὲν Ζ ἐπὶ τὸ Γ πεσεῖται, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τὸ Α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΝΖ τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ

ἡ ΒΔ καὶ κέντρον τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τμήσει τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ κέντρου ἔστω τομὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ. Ἄς ληφθῇ λοιπὸν καὶ ἄλλο σφαιροειδὲς ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τοῦτο, καὶ ἀφοῦ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, ἔστω τομὴ ἡ ΕΖΗΝ ἔλλειψις, διάμετρος δὲ αὐτῆς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδοῦς ἡ ΕΗ καὶ κέντρον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΝ σχηματίζουσα τὴν γωνίαν Κ ἴσην πρὸς τὴν Θ, ἀπὸ δὲ τῆς ΖΝ ἔστω ὑψωμένον ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἡ τομὴ ΕΖΗΝ· ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο ἐλλείψεις αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΝ ἴσαι καὶ ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας· θὰ ἐφαρμόσωσι λοιπὸν ἀφοῦ τεθῶσιν ἐπ' ἀλλήλας ἡ ΕΗ ἐπὶ τῆς ΒΔ καὶ ἡ ΖΝ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΝΖ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ τὰ δύο εἶναι κάθετα· ἐφαρμόζει λοιπὸν καὶ τὸ τμῆμα τὸ ἀποτεμνόμενον ἀπὸ τοῦ σφαιροειδοῦς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ΝΖ, τὸ κείμενον πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τὸ Ε, πρὸς τὸ ἄλλο τμῆμα τὸ ἀποτεμνόμενον ἀπὸ τοῦ ἄλλου σφαιροειδοῦς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ΑΓ τοῦ κειμένου πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τὸ Β καὶ τὸ λοιπὸν τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τμημάτων ἐφαρμόζουσι πρὸς τὰς ἐπιφανείας. Πάλιν δὲ καὶ ἀφοῦ τεθῇ ἡ ΕΗ ἐπὶ τῆς ΒΔ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Ε νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Δ, τὸ δὲ Η ἐπὶ τοῦ Β, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν σημείων Ν, Ζ γραμμὴ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεταξὺ τῶν Α, Γ, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αἱ ἐλλείψεις θὰ ἐφαρμόσωσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὸ μὲν σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τοῦ Α. Ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΝΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ΑΓ, καὶ ἐκ τῶν τμημάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ΝΖ, τῷ B, τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ E τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἐφ' ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον, ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα· διὰ ταῦτὰ δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

Η 336 ιθ'

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσους τοῦ σφαιροειδέος ὁμοίως ἀποτεμνομένου δυνατόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.



δεδόσθω τμᾶμα, οἷόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ $AB\Gamma$ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ $A\Gamma$ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ $B\Delta$. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ΓA. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω τὸ μὲν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Η θὰ ἐφαρμόσῃ πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτεμνόμενον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ΑΓ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Β, τὸ δὲ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Ε θὰ ἐφαρμόσῃ πρὸς τὸ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Δ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ τμῆμα ἐφαρμόζει εἰς ἑκάτερον τῶν τμημάτων, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ τμήματα εἶναι ἴσα· διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους καὶ αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι.

19

Δοθέντος τμήματος οἱουδήποτε ἐκ τῶν κωνοειδῶν ἀποτετμημένου δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα ἢ οἱουδήποτε τμήματος ἐκ τῶν σφαιροειδῶν μὴ μεγαλυτέρου τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς ὁμοίως ἀποτεμνομένου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ στερεὸν σχῆμα καὶ ἄλλο νὰ περιγραφῇ, ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ἴσον ὕψος, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος στερεοῦ μεγέθους (ὁσονδήποτε μικροῦ).

Ἂς δοθῇ τμῆμα, ὡς τὸ ΑΒΓ, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν τμήματος τομὴ ἔστω ἡ κωνικὴ τομὴ ΑΒΓ (θ. 11), τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ τμῆμα τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ εἶναι κύκλος, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΓΑ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου ἔστω κύλινδρος ἔχων ἄξονα τὸν ΒΔ· θὰ πέσῃ δὲ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμήματος, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἢ κωνοειδὲς ἢ σφαιροειδὲς μὴ

ἄξονα ἔχων τὸν ΒΔ· πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος, ἐπεί ἐστιν ἤτοι κωνοειδὲς ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐσσεῖταί ποτε τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος· ἔστω δὴ τὸ καταλελειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΕΔ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διαιρήσθω δὴ ἁ ΒΔ ἐς τὰς ἴσας τᾷ ΕΔ κατὰ τὰ Ρ, Ο, Π, Ξ, καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστε
H 338 *ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν ΒΔ· ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς ΒΔ. ἀφ' ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κυλίνδροι ἀναγεγράφθων ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τᾷ ΕΔ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κύκλου, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Β· ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Δ, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον συγκείμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἃ τὸ Β ἐστιν. λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ὡς ὁ μὲν ΘΗ τῷ ΘΙ, ὁ δὲ ΚΛ τῷ ΚΜ, καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως· καὶ πάντες δὴ οἱ κυλίνδροι πάντεσσιν ἴσοι ἐντί. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν*

μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς (θ. 15 καὶ 17). Τοῦ κυλίνδρου λοιπὸν τούτου τεμνομένου συνεχῶς δίχα δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα θὰ μείνῃ κάποτε ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ προτεθέντος (δοθέντος) στερεοῦ μεγέθους· ἔστω λοιπὸν τὸ ἀπομεῖναν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον τὴν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΕΔ, μικρότερος τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Ἂς διαιρεθῇ λοιπὸν ἡ ΒΔ εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὴν ΕΔ εὐθείας διὰ τῶν σημείων Ρ, Ο, Π, Ξ, καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσεων ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ μέχρι τῆς κωνικῆς τομῆς, ἀπὸ δὲ τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν ἂς ὑψωθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα πρὸς τὴν ΒΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ τομαὶ κύκλοι ἔχοντες τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς ΒΔ. Ἀφ' ἑκάστου λοιπὸν τῶν κύκλων ἂς ἀναγραφῶσι δύο κύλινδροι ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον πρὸς τὸν ΕΔ, ὁ μὲν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κύκλου, πρὸς τὰ ὁποῖα κεῖται τὸ Δ, ὁ δὲ πρὸς τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ ὁποῖα κεῖται τὸ Β· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἀποτελούμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἀναγραφομένων πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, πρὸς τὰ ὁποῖα κεῖται τὸ Δ, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ἀποτελούμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἀναγραφέντων πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, πρὸς τὰ ὁποῖα κεῖται τὸ Β· Ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου μικρότερον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Ἕκαστος λοιπὸν τῶν κυλίνδρων ἐκ τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν ἀναγραφόμενον ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Β, ὡς μὲν ὁ ΘΗ πρὸς τὸν ΘΙ, ὡς δὲ ὁ ΚΛ πρὸς τὸν ΚΜ, καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως· καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κυλίνδρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κυλίνδρων. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπερέχει τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον

ΕΔ· οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

H 340 *κʹ*

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ὁμοίως ἀποτετμαμένου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφομένου ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

δεδόσθω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, τμαθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ΑΓ. ἔστω δὴ παράλληλος τᾳ ΑΓ ἁ ΦΥ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τᾶς ΦΥ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύσει δὲ τοῦτο τοῦ σχήματος κατὰ τὸ Β· καὶ εἰ μέν ἐστι τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ Β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ ΒΔ, εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ Β ἐκβεβλήσθω ἁ ΒΔ, εἰ δὲ σφαιροειδέος, ἐπὶ τὸ Β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολελάφθω ἁ ΒΔ· δῆλον δέ, ὅτι τέμνει ἁ ΒΔ δίχα

ΑΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΕΔ· οὗτος δὲ εἶναι μικρότερος τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους.

20

Δοθέντος τμήματος οἱουδήποτε τῶν κωνοειδῶν ἀποτετμημένου δι' ἐπιπέδου μὴ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα ἢ οἱουδήποτε τῶν σφαιροειδῶν μὴ μεγαλυτέρου τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς ὁμοίως ἀποτετμημένου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο νὰ περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων τόμων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφομένου ὀλιγώτερον παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους.

Ἂς δοθῇ τμῆμα, οἷον ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ τὸ σχῆμα δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει τμήσει τὸ δοθὲν τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ κωνικὴ τομὴ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τμήσει τὸ τμῆμα τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει τμήσει τὸ τμῆμα δὲν εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΓ. Ἔστω λοιπὸν παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΦΥ ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς τομῆς, ἂς ἐφάπτηται δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῆς ΦΥ ἂς ὑψωθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ· θὰ ἐφάπτηται δὲ τοῦτο τοῦ σχήματος κατὰ τὸ Β· καὶ ἐὰν μὲν τὸ τμῆμα εἶναι ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς (παραβολοειδοῦς), ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ἡ ΒΔ, ἐὰν δὲ εἶναι ὑπερβολοειδοῦς, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ Β ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΔ, ἐὰν δὲ εἶναι σφαιροειδοῦς (ἐλλειψοειδοῦς), ἀφοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ Β ἂς ἀποληφθῇ ἡ ΒΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ

H 342 τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ ΒΔ εὐθεῖα ἄξων. ἔστιν δή τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, καὶ γραμμὰ ἁ ΒΔ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου· δυνατὸν οὖν ἐστιν κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος, ἐπεί ἐστιν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα καὶ οὐ μεῖζόν ἐστιν ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. ἐσσεῖται δή τις κυλίνδρου τόμος βάσιας μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· τοῦ οὖν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ ΔΒ ἐς τὰς ἴσας τᾷ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακόντων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ· τέμνοντι δὴ ταῦτα H 344 τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὁμοῖαι τᾷ περὶ τὰν ΑΓ διάμετρον, ἐπεὶ παράλληλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα. ἀφ᾽ ἑκάστας δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθων κυλίνδρου τόμοι δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τῷ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ ΔΕ· ἐσσοῦνται δή τινα σχήματα στερεά, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον

ΒΔ τέμνει δίχα τὴν ΑΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν Β κορυφὴ τοῦ τμήματος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΔ θὰ εἶναι ἄξων. Ὑπάρχει λοιπὸν ἔλλειψίς τις περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ, καὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΒΔ ὑψωθεῖσα ἀπὸ τοῦ κέντρου εὑρισκομένη εἰς κάθετον ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εὑρίσκεται ἡ ἔλλειψις, ἐν ᾧ τὸ προηγούμενον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῆς ἄλλης διαμέτρου· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κύλινδρος ἔχων ἄξονα τὴν ΒΔ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ (θ. 9)· θὰ πέσῃ δὲ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμήματος, ἐπειδὴ τὸ τμῆμα εἶναι κωνοειδοῦς ἢ σφαιροειδοῦς καὶ οὐχὶ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν τόμος τις κυλίνδρου ἔχων βάσιν μὲν τὴν ἔλλειψιν τὴν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ· τοῦ κυλινδρικοῦ λοιπὸν τόμου, ὁ ὁποῖος τέμνεται δίχα δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ θὰ εἶναι τὸ καταλειπόμενον μικρότερον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους (Εὐκλ. Χ, 1). Ἔστω κυλινδρικὸς τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἔλλειψιν τὴν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΕΔ, μικρότερος τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Ἂς διαιρεθῇ λοιπὸν ἡ ΔΒ εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων διαιρέσεως ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ μέχρι τῆς κωνικῆς τομῆς, ἀπὸ δὲ τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν ἂς ὑψωθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ· θὰ τέμνωσι λοιπὸν ταῦτα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος, καὶ θὰ ὑπάρχωσιν ὅμοιαι ἐλλείψεις πρὸς τὴν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ ἔλλειψιν, ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα. Ἀφ' ἑκάστης λοιπὸν τῶν ἐλλείψεων ἂς ἀναγραφῶσι δύο κυλινδρικοὶ τόμοι, ὁ μὲν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ Δ, ὁ δὲ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τὸ Β, ἔχοντες ἄξονα ἴσον πρὸς τὸ ΔΕ· θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν στερεά τινα σχήματα, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, ἀποτε-

ἐν τῷ τμάματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ προτέρῳ, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ· οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

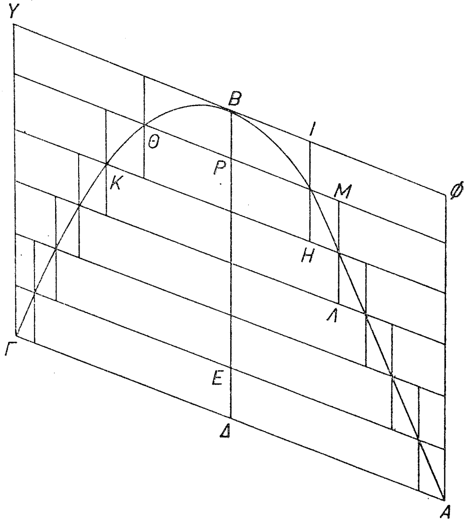
κα΄

Τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων.

Πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα ⟨τὸν αὐτόν⟩.

H 346 *ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, οὗ κορυφὰ τὸ Β. δεικτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώ-*

λούμενα ἐκ κυλινδρικῶν τόμων, ἐχόντων ὕψος ἴσον. Ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Θὰ ἀποδειχθῇ δὲ ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου κατὰ τὸν κυλινδρικὸν τόμον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν ἔλλειψιν τὴν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΕΔ· οὗτος δὲ εἶναι μικρότερος τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους.



21

Τούτων προεκτεθέντων ἀποδεικνύομεν κατωτέρω τὰ προλεχθέντα περὶ τῶν σχημάτων.

Πᾶν τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα ⟨τὸν αὐτόν⟩.

Διότι ἔστω τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἀφοῦ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, τῆς μὲν ἐπιφανείας τομὴ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀπονου τούτου.

ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ Ψ ἡμιόλιος ἐὼν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται οὖν ὁ Ψ κῶνος ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου [ἐπείπερ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου]· λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ Ψ κώνῳ.

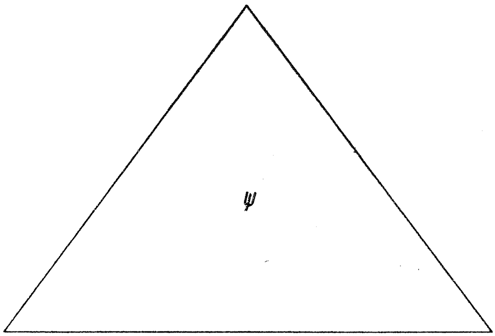
εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐντι ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν
H 348 περὶ διάμετρον τὰν ΣΤ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΙ, τῶν δὲ κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΣΤ, ἄξονα δὲ τὰν ΘΙ, ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμέ-

τέμνοντος τὸ τμῆμα ἔστω τομὴ ἡ εὐθεῖα ΓΑ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἡ ΒΔ, ἔστω δὲ κῶνος ἔχων τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τούτου.

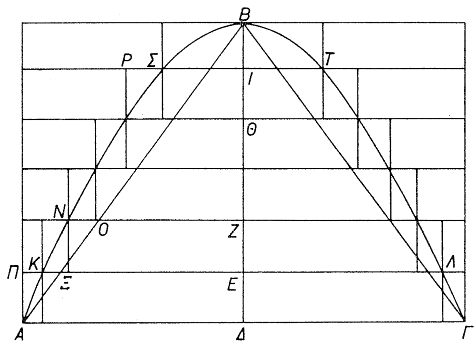
Διότι ἂς ληφθῇ ὁ κῶνος Ψ, ὢν τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ κύκλος, ἄξων δὲ ἡ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κῶνος Ψ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου [ἐπειδὴ βεβαίως ὁ κῶνος Ψ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ αὐτοῦ κώνου]· λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον Ψ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω λοιπὸν πρότερον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ κωνοειδὲς τμῆμα τοῦ κώνου Ψ, καὶ ἔστω ἐκ τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΕΔ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΣΤ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΙ, ἐκ τῶν κυλίνδρων δέ, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΕ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΣΤ, ἄξονα δὲ τὴν ΘΙ, ἂς ἐκβληθῶσι δὲ τὰ ἐπίπεδα ὅλων τῶν κυλίνδρων πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους κατὰ μὲν τὸ

νου σχήματος ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν
H 350 *ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ τῷ, ὃν ἔχει ἁ*



ΔΑ ποτὶ τὰν ΕΞ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὸν ΕΖ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΠΕ, τουτέστιν ἁ ΔΑ, ποτὶ τὰν ΖΟ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἕξει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ πλῆθος ἴσους πρὸς τοὺς κυλίνδρους τοὺς εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσους πρὸς τὸν μέγιστον ἐξ αὐτῶν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμῆμα ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κώνου, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸ τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Ὁ πρῶτος λοιπὸν κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΔΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ· ὁ λόγος δὲ οὗτος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΕΞ. Καθ' ὅμοιον



τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὸν ΕΖ πρὸς τὸν δεύτερον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΠΕ, τουτέστιν ἡ ΔΑ, πρὸς τὴν ΖΟ, καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἄξονα τὸν αὐτὸν θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἀπομένει ἀπὸ τῆς διαμέτρου μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΔ· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κυλίνδρων,

*τᾶν ΑΒ, ΒΔ εὐθειᾶν· καὶ πάντες οὖν οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξων δέ [ἐστιν] ἁ ⟨ΔΒ⟩ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵ ἐντι βάσιες τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπ' αὐτᾶν μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶς ΑΔ μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· ὥστε καὶ οἱ κυλίνδροι πάντες οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ὁ ⟨ΔΒ⟩, μείζονές ἐντι ἢ διπλασίοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· πολλῷ ἄρα
H 352 καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ἄξων ἁ ΔΒ, μείζων ἐντὶ ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ Ψ κώνου ἦν διπλασίων· ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ Ψ κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον· πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν [ἕκαστον] ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ κωνοειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, δῆλον, ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ*

οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξων δὲ [εἶναι] ἡ εὐθεῖα ⟨ΔΒ⟩, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι εἶναι βάσεις τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπομένουν ἀπ' αὐτῆς μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΒΔ. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τῶν εἰρημένων χωρὶς τὴν ΑΔ· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποίου ἄξων εἶναι ὁ ⟨ΔΒ⟩, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἄξων εἶναι ἡ ΒΔ, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Ἦτο δὲ διπλάσιος καὶ τοῦ κώνου Ψ· εἶναι ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μικρότερον τοῦ κώνου Ψ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἀπεδείχθη μεγαλύτερον. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον τὸ κωνοειδὲς τοῦ κώνου Ψ. Ὁμοίως δὲ δὲν εἶναι μικρότερον· διότι πάλιν ἂς ἐγγράψωμεν τὸ σχῆμα καὶ ἂς περιγράψωμεν ἄλλο κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ὑπερέχῃ [ἕκαστον] ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει ὁ κῶνος Ψ τοῦ κωνοειδοῦς, καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς προηγουμένως. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν ὑπολείπεται τοῦ περιγραφέντος ὀλιγώτερον ἢ τὸ τμῆμα τοῦ κώνου Ψ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τὴν ΕΔ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ αὐτό, ὁ δὲ δεύ-

ἔχων ἄξονα τὰν ΕΖ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ τῷ, ὃν ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΕΞ· καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτόν, ἕξει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν H 354 *ἀπολελαμμέναν ἀπ᾽ αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ εὐθειᾶν· καὶ πάντες οὖν οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ἐστὶν ἁ ΒΔ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἳ βάσιές ἐντι τῶν κυλίνδρων, τᾶν εὐθειᾶν πασᾶν τᾶν ἀπολελαμμενᾶν ἀπ᾽ αὐτᾶν σὺν τᾷ ΑΔ ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ οἱ κυλίνδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλασίοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος· τοῦ γὰρ Ψ κώνου διπλασίων ἐστί, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.*

τερος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΕΖ πρὸς τὸν δεύτερον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΔΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ· οὗτος δὲ ὁ λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΕΞ· καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον τῶν ἐχόντων ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τῶν ἐχόντων ἄξονα τὸν αὐτόν, θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν ἀπομένουσαν ἀπ' αὐτῆς εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΔ· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, τοῦ ὁποίου ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΔ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν εὐθειῶν. Τὸ δὲ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι εἶναι βάσεις τῶν κυλίνδρων εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπομένουσιν ἀπὸ αὐτὰς σὺν τῇ ΑΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τῶν κυλίνδρων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ, εἶναι μικρότερος τοῦ διπλασίου τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Δὲν εἶναι δέ, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου· διότι εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ κώνου Ψ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἀπεδείχθη μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικρότερον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν

κβ′

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον, ὡς
H 356 *εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΑΓ εὐθεῖα, παρὰ δὲ τὰν ΑΓ ἁ ΦΥ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Β, καὶ ἁ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα· τεμεῖ δὴ αὕτα δίχα τὰν ΑΓ· ἀπὸ δὲ τᾶς ΦΥ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΔ· ἐπιψαύσει δὴ τοῦτο τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ Β, καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΑΓ οὐ ποτ᾽ ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τετμάκει τὸ κωνοειδές, ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ ΑΓ. ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΓΑ καὶ γραμμᾶς τᾶς ΒΔ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστάκουσα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυ-*
H 358 *νατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά· δυνατὸν δέ ἐστι καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα*

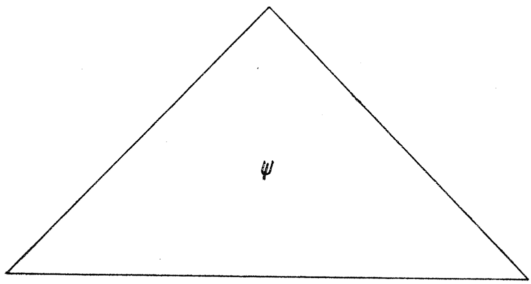
εἶναι οὔτε μεγαλύτερον· εἶναι ἄρα τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

22

Καὶ ἀκόμη ἐὰν τὸ τμῆμα ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ὁμοίως θὰ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Ἔστω τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἀφοῦ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔταμε τὸ τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ἀπέταμε τὸ τμῆμα ἡ εὐθεῖα ΑΓ, παράλληλος δὲ τῆς ΑΓ ἡ ΦΥ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα· θὰ τμήσῃ βεβαίως αὕτη δίχα τὴν ΑΓ· ἀπὸ δὲ τῆς ΦΥ ἂς ὑψωθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΔ· θὰ ἐφάπτηται δὲ τοῦτο τοῦ κωνοειδοῦς κατὰ τὸ Β, καὶ θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Β κορυφὴ τοῦ τμήματος, ἄξων δὲ ἡ ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ ἔταμε τὸ κωνοειδὲς χωρὶς νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις, ἡ μεγαλυτέρα δὲ διάμετρος αὐτῆς εἶναι ἡ ΑΓ. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχει ἔλλειψις περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ καὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΒΔ, ἡ ὁποία ἔχει ὑψωθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως εἰς ἐπίπεδον ὑψωθὲν ἀπὸ τῆς διαμέτρου καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἡ ἔλλειψις, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κύλινδρος ἔχων τὸν ἄξονα ἐπὶ τῆς ΒΔ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις (θ. 9). εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ κεῖται ἡ ἔλλειψις (θ. 8)· ὥστε θὰ ὑπάρχῃ κυλινδρικός τις τόμος (πλάγιος κύλινδρος), *τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται· ὥστε ἐσσεῖται τόμος κυλίνδρου τις βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ, καὶ ἀπότμαμα κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον, ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἡμιόλιόν ἐστι τούτου τοῦ κώνου.*

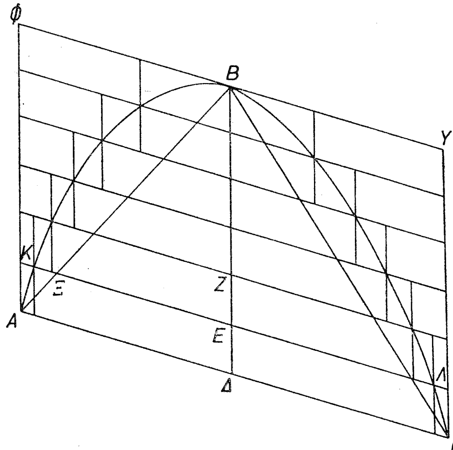
ἔστω δὴ ὁ Ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμάματος τούτου· ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν διπλάσιος τοῦ Ψ κώνου·



οὗτος γὰρ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δή ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει βάσιν ἔχων τὴν ἔλλειψιν τὴν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ, καὶ ἀπότμημα κώνου ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ πρὸς τὸν κυλινδρικὸν τόμον καὶ πρὸς τὸ τμῆμα, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. Πρέπει τώρα νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τούτου.

Ἔστω λοιπὸν ὁ κῶνος Ψ τὰ τρία δεύτερα τοῦ ἀποτμήματος τούτου (τοῦ ἐγγ. κώνου ΑΒΓ)· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κυλινδρικὸς τόμος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν διπλάσιος τοῦ κώνου Ψ. διότι οὗτος εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸ δὲ εἰρημένον ἀπότμημα τοῦ κώνου εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ κυλινδρικοῦ τόμου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς (παραβολοειδοῦς) νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον Ψ.



Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω λοιπὸν πρότερον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ , συγκείμενα ἐκ κυλινδρικῶν τόμων ἐχόντων ἴσον ὕψος, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου

τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ διάχθω τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.
H 360 πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν, αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν, ἐπεὶ ὁμοῖαί ἐντι ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμολόγοι διαμέτροι αὐτᾶν δυνάμει, ἡμίσειαι δέ ἐντι τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αἱ ΑΔ, ΚΕ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ μάκει, ἐπεὶ ἁ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΞ· ἕξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΞ· καὶ τῶν ἄλλων τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἐχόντων τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν τόμων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶν βασίων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ. δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν μείζων ἐὼν ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὥστε καὶ τοῦ Ψ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλασίων.
H 362 οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλασίων. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ

Ψ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλινδρικῶν τόμων μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλινδρικοῦ τόμου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Πάλιν λοιπὸν ὁ πρῶτος κυλινδρικὸς τόμος ἐκ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὸν ὅλον κυλινδρικὸν τόμον, ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κυλινδρικὸν τόμον ἐκ τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ· διότι οἱ κυλινδρικοὶ τόμοι οἱ ἔχοντες ἴσον ὕψος ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν, ἐπειδὴ εἶναι ὅμοιαι ἐλλείψεις, ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αὐτῶν, εἶναι δὲ τὸ ἥμισυ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αἱ ΑΔ, ΚΕ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ, τοῦτον ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΕ, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ Β· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΕ, τοῦτον ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΞ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ὁ πρῶτος κυλινδρικὸς τόμος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κυλινδρικὸν τόμον πρὸς τὸν πρῶτον τόμον ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΞ· καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν ἄλλων κυλινδρικῶν τόμων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κυλινδρικὸν τόμον τῶν ἐχόντων ἴσον ἄξονα πρὸς τὴν ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν τόμων τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ πρὸς τὴν ἀπομένουσαν ἀπ' αὐτῆς μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΒΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ, ὁ δὲ κυλινδρικὸς τόμος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου τοῦ ἐγγε-

κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσόν ἐστιν· δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

κγ'

Εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῷ, ἔωντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα.

ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος [καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα] τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ΒΔ, τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ ΑΖ, ΕΓ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ ΕΓ, τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ΖΑ, ἄξονες δὲ ἔστων τῶν τμαμάτων αἱ ΒΘ, ΚΛ ἴσαι ἀλλάλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ Β, Λ· δεικτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ Β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Λ.

ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματά ἐντι ἀφῃρημένα τό τε ΑΛΖ καὶ τὸ ΕΒΓ, καί ἐντι αὐτῶν αἱ διαμέτροι ἴσαι αἱ ΚΛ, ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον
H 364 *τὸ ΑΛΚ τῷ ΕΘΒ· δέδεικται γάρ, ὅτι τὸ ΑΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. ἄχθω δὴ ἁ ΑΧ κάθετος ἐπὶ τὰν ΚΛ ἐκβληθεῖσαν. καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΒΘ, ΚΛ, ἴσαι καὶ αἱ ΕΘ, ΑΧ. ἔστω δὴ ἐν τῷ τμάματι, οὗ κορυφὰ τὸ Β, κω-*

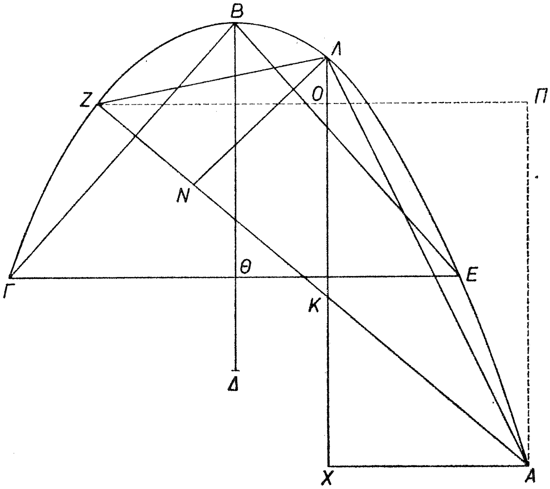
γραμμένου σχήματος· ὥστε θὰ εἶναι μεγαλύτερος καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι δέ, ἀλλὰ μόνον διπλάσιος. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ συλλογισμῶν ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι ἴσον. Εἶναι ἄρα τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τὰ τρία δεύτερα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

23

Ἐὰν παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτμηθῶσι δι' ἐπιπέδων δύο τμήματα, τὸ μὲν ἓν δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἄλλο οὐχὶ διὰ καθέτου, εἶναι δὲ οἱ ἄξονες τῶν τμημάτων ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τμήματα.

Διότι ἂς ἀποτμηθῶσι παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς δύο τμήματα, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ τὸ παραβολοειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος [καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα] τοῦ μὲν παραβολοειδοῦς ἔστω τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΔ (θ. 11), τῶν δὲ ἐπιπέδων τομαὶ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΕΓ, τοῦ μὲν καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα ἡ ΕΓ, τοῦ δὲ μὴ καθέτου ἡ ΖΑ, ἄξονες δὲ ἔστωσαν τῶν τμημάτων αἱ ΒΘ, ΚΛ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Β, Λ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ.

Διότι ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς αὐτῆς παραβολῆς εἶναι ἀφῃρημένα δύο τμήματα καὶ τὸ ΑΛΖ καὶ τὸ ΕΒΓ, καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν ΚΛ, ΒΘ εἶναι ἴσαι, εἶναι ἴσον τὸ τρίγωνον ΑΛΚ πρὸς τὸ ΕΘΒ· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΛΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ (θ. 3). Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ΑΧ κάθετος πρὸς τὴν *νος ἐγγεγραμμένος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐν δὲ τῷ τμάματι, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὰν ΑΖ ἁ ΛΝ· ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὕψος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, καὶ ὁ κῶνος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων· τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΓ, καὶ ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΝΛ ποτὶ τὰν ΒΘ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ [ἔχει καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΚΑ ποτὶ τὰν ΕΘ, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΝΛ ποτὶ τὰν ΒΘ· ἁ μὲν γὰρ ΚΑ ἡμισέα ἐντὶ τᾶς διαμέτρου H 366 τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἁ δὲ ΕΘ ἡμισέα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου, αἱ δὲ ΛΝ, ΒΘ ὑψεά ἐντι αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν ΚΛ, ἐπεὶ ἁ ΒΘ ἴση ἐστὶ τᾷ ΚΛ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΚΛ, ὃν ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΚ]· ἔχει οὖν κα καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΑΧ· ἴσα γάρ ἐστιν ἁ ΑΧ τᾷ ΕΘ· καὶ ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ. ὁ δὲ [ἐκ] τῶν εἰρημένων λόγων, ὁ τᾶς ΑΚ ποτὶ ΑΧ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς ΛΚ ποτὶ ΛΝ· τὸ* προεκβληθεῖσαν ΚΛ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΒΘ, ΚΛ εἶναι ἴσαι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ΕΘ, ΑΧ. Ἔστω λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, κῶνος ἐγγεγραμμένος ἔχων τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, εἰς δὲ τὸ τμῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ, ἀπότμημα κώνου ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἂς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ Λ ἡ ΛΝ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ· θὰ εἶναι λοιπὸν αὕτη ὕψος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ. Τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ, καὶ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, ἔχουσι λόγον τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῶν βάσεων ἐπὶ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν· ἔχουσι δηλαδὴ λόγον ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως τῆς περὶ τὴν διάμετρον ΑΖ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΕΓ, ἐπὶ τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΒΘ. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς διαμέτρους πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ [ἔχει καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, λόγον τὸ γινόμενον τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΕΘ, ἐπὶ τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΒΘ· διότι ἡ μὲν ΚΑ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ, ἡ δὲ ΕΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, αἱ δὲ ΛΝ, ΒΘ εἶναι τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἔχει δὲ ἡ ΛΝ πρὸς τὴν ΒΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει καὶ πρὸς τὴν ΚΛ, ἐπειδὴ ἡ ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ ΛΝ πρὸς τὴν ΚΛ λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΚ]· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον λόγον, τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΑΧ· διότι εἶναι ἴση ἡ ΑΧ πρὸς τὴν ΕΘ· ἐπὶ τὸν λόγον τῆς ΛΝ πρὸς τὴν ΒΘ. Ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα ἀπότμαμα ποτὶ τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΛΝ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ. ἴσα δὲ ἁ ΒΘ τᾷ ΚΛ· δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ



κορυφὰ τὸ Λ, τῷ κώνῳ, οὗ κορυφὰ τὸ Β. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντί, ἐπεὶ τὸ μὲν ἕτερον αὐτῶν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων.

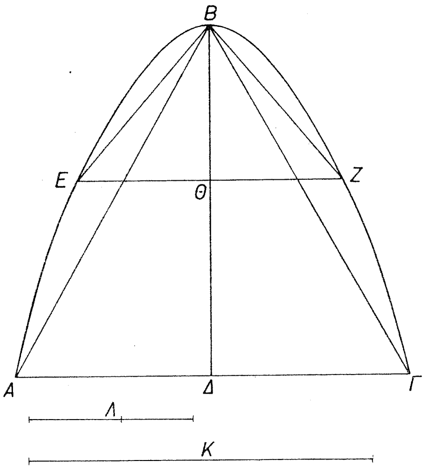
κδʹ

Εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτῶν.

Η 368 ἀποτετμάσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάλόγων, ὁ τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΑΧ, εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῆς ΛΚ πρὸς τὴν ΛΝ· τὸ ἀπότμημα ἄρα πρὸς τὸν κῶνον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΛΝ, καὶ ὃν ἔχει ἡ ΛΝ πρὸς τὴν ΒΘ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΚΛ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι ἴσον τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Λ, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὰ τμήματα εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ τὸ μὲν ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν προηγούμενον κῶνον.

24

Ἐὰν παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτμηθῶσι δύο τμήματα δι' ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀχθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὰ τμή-



ματα θὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀξόνων των.

Διότι ἂς ἀποτμηθῶσι τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ματα, ὡς ἔτυχεν, ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ Κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ Λ· δεικτέον, ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Λ τετραγώνοις.

τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΒΔ τᾷ Κ ἴσα, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· τὸ δὴ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ Κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ Κ ἴσα ἐστὶ τᾷ Λ, φανερόν, ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις· ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν ἴσον τῷ αὐτῷ· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν Κ, Λ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ Λ τᾷ Κ, ἔστω ἁ Λ ἴσα τᾷ ΒΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· τὸ δὴ τμᾶμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τᾷ Λ. ἐγγεγράφθωσαν δὴ κῶνοι βάσιας μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΕΖ, κορυφὰν δὲ τὸ Β σαμεῖον· ὁ δὴ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα
H 370 ἄξονα τὰν ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, καὶ ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει· ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ· οὗτος δέ ἐστιν

δύο τμήματα, ὡς ἔτυχεν, ἔστω δὲ ἡ εὐθεῖα Κ ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ἑνὸς τμήματος, ἡ δὲ Λ ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ἄλλου· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τμήματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἄλληλα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν Κ, Λ.

Διότι ἀφοῦ τμηθῇ τὸ κωνοειδὲς δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ἔστω τομὴ τοῦ τμήματος ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, ἄξων δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν Κ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα· τὸ τμῆμα λοιπὸν τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον τὴν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν Κ (θ. 23). Ἐὰν μὲν λοιπὸν καὶ ἡ Κ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Λ, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὰ τμήματα θὰ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· διότι ἑκάτερον αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ αὐτό· καὶ τὰ τετράγωνα τῶν Κ, Λ εἶναι ἴσα· ὥστε τὰ τμήματα θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀξόνων. Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἴση ἡ Λ πρὸς τὴν Κ, ἔστω ἡ Λ ἴση πρὸς τὴν ΒΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα· τὸ τμῆμα λοιπὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΘ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν Λ. Ἂς ἐγγραφῶσι λοιπὸν κῶνοι ἔχοντες βάσεις μὲν τοὺς κύκλους τοὺς περὶ τὰς διαμέτρους ΑΓ, ΕΖ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Β· ὁ κῶνος λοιπὸν ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΒΔ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΒΘ ἔχει λόγον τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῆς ΑΔ εἰς τὸ τετράγωνον πρὸς ΘΕ εἰς τὸ τετράγωνον ἐπὶ τὸν λόγον τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΒΘ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΔΑ εἰς τὸ τετράγωνον πρὸς τὴν ΘΕ εἰς τὸ τετράγωνον, τοῦτον ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΘ· ὁ κῶνος ἄρα ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΒΔ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΒΘ ἔχει λόγον τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΘΒ, ἐπὶ τὸν λόγον τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΘΒ· ὁ λόγος δὲ οὗτος εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ὁ ἄξονα ἔχων τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΘΒ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν ΔΒ ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν ΘΒ [ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστιν]. καί ἐστιν τῷ μὲν τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν ΒΔ ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Κ, τῷ δὲ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν ΘΒ ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Λ, καὶ τᾷ μὲν ΒΔ ἴσα ἁ Κ, τᾷ δὲ ΘΒ ἴσα ἁ Λ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Κ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Λ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Λ.

κε′

Πᾶν τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον,
H 372 ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.

ἔστω τι τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΒ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΒΔ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΘΒ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἔχον ἄξονα τὴν ΔΒ πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄξονα τὴν ΘΒ [διότι ἑκάτερον εἶναι τὰ τρία δεύτερα]. Καὶ εἶναι πρὸς μὲν τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄξονα τὴν ΒΔ ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἔχον ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν Κ, πρὸς δὲ τὸ τμῆμα τὸ ἔχον ἄξονα τὴν ΘΒ εἶναι ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἔχον ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν Λ, καὶ πρὸς μὲν τὴν ΒΔ εἶναι ἴση ἡ Κ, πρὸς δὲ τὴν ΘΒ εἶναι ἴση ἡ Λ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἔχον ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν Κ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τὸ ἔχον ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν Λ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς Κ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Λ.

25

Πᾶν τμῆμα ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ τριπλασίου τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθείας πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ διπλασίου τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθείας (σημ.: ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθεῖα νοεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἀσυμπτώτων ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς).

Ἔστω τμῆμά τι ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἀφοῦ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος ἡ τομὴ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδοῦς ἡ ὑπερβολὴ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθεῖα ἔστω ἡ ΒΘ καὶ πρὸς τὴν ΒΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΘ καὶ ἡ ΖΗ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα πέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΒΔ, ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ ΒΘ καὶ τᾷ ΒΘ ἴσα ἁ ΖΘ καὶ ἁ ΖΗ. δεικτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΖΔ.

ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ΦΑ, ΓΥ, ἔστω δὲ καὶ κῶνός τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὰν ΒΔ τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ· φαμὶ δὴ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσόν ἐστιν. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, διάχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα
H 374 πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διηρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ ἁ ΒΡ· ἐσσεῖται

πρὸς τὸν κῶνον, τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΖΔ.

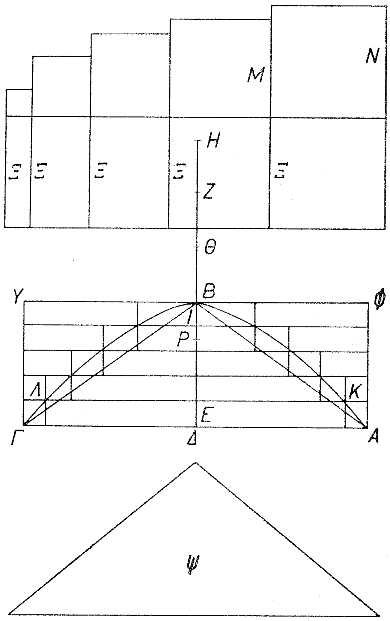
Ἔστω λοιπὸν κύλινδρος ἔχων τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ΦΑ, ΓΥ, ἔστω δὲ καὶ κῶνός τις, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, καὶ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὴν ΒΔ ἂς ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω λοιπόν, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον Ψ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου κατὰ τὸ ὁποῖον ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ, ἂς προεκταθῶσι δὲ τὰ ἐπίπεδα ὅλων τῶν κυλίνδρων μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσους πρὸς τοὺς κυλίνδρους τοὺς εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσους πρὸς τὸν μέγιστον ἐξ αὐτῶν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον ἐκείνου καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κώνου Ψ, καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τμήματος, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ ΒΡ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ΒΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΗΔ τριπλασία τῆς ΘΡ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΔ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν

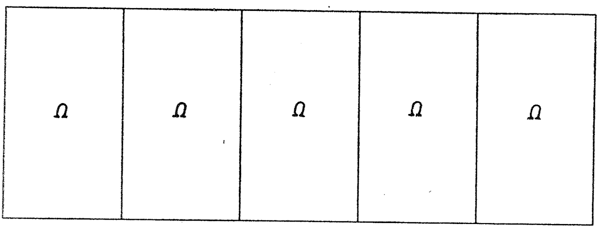
οὖν ἁ ΗΔ τριπλασία τᾶς ΘΡ. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΘΡ, ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον, ὃν ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΗΔ, ἕξει ἄρα μεγεθέων τριῶν ἀνομοίως τῶν
H 376 λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον, ὃν ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. ἔστωσαν δὲ γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ᾽ ἃν τὰ Ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσιν τοῖς ἐν τᾷ ΒΔ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ΖΒ, καὶ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΔΒ, τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΙΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχόντων [καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐταῖς αἱ ἐπὶ τᾶς ΒΔ εὐθείας τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσιν], καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ᾽ ἇς τὸ Ν, ἴσα τᾷ ΒΔ, ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ ΒΙ, ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ· ὁ δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτός τῷ, ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΒΔ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΒΕ· ἐν πάσᾳ γὰρ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει [ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτεούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά]. καί ἐστι τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΒΔ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ΞΝ χω-

καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΘΡ, ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸν κῶνον Ψ λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΔ, θὰ ἔχῃ ἄρα ἀφοῦ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν (Εὐκλ. V, ορισ. 18) τὸν αὐτὸν λόγον ὁ εἰρημένος κύλινδρος πρὸς τὸν κῶνον Ψ, ὃν ἔχει ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΘΡ (Εὐκλ. V, 23). Ἔστωσαν δὲ εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι τὰ γράμματα Ξ, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΔ, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, καὶ παρ' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἂς παραβληθῇ χωρίον ὑπερβάλλον τὸ δοθὲν κατὰ σχῆμα τετράγωνον (Εὐκλ. VI, 29), καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἐξ αὐτῶν ἔστω ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΒ, τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΙ, ΙΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ὑπερέχουσιν ἴσον ἀλλήλων [διότι αἱ ἐπὶ τῆς ΒΔ εὐθεῖαι ὑπερέχουσιν ἴσον ἀλλήλων], καὶ ἔστω ἡ μὲν πλευρὰ τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα Ν, ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴση πρὸς τὴν ΒΙ, ἔστωσαν δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐκεῖνα ὅπου ὑπάρχει τὸ γράμμα Ω, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ταῦτα, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἕκαστον ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον τὸ πλευρῶν ΖΔ, ΔΒ· ὁ κύλινδρος λοιπὸν ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ εἰς τὸ τετράγωνον πρὸς τὴν ΚΕ εἰς τὸ τετράγωνον (Εὐκλ. XII, 2 καὶ 11)· οὗτος δὲ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΒΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΒΕ· διότι τοῦτο συμβαίνει εἰς πᾶσαν ὑπερβολὴν [διότι ἡ διπλασία τῆς ληφθείσης ἀποστάσεως τομῆς τῶν ἀσυμπτώτων ἀπὸ κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς, τουτέστι τῆς ἐκ τοῦ κέν-

ρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΜ· ἁ γὰρ Ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΖΒ, ἁ δὲ Μ τᾷ ΒΕ, ἁ δὲ Ν τᾷ ΒΔ· ὁ ἄρα κύλινδρος H 378 *ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΜ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων τετραγώνῳ. ἔστιν δή τινα μεγέθεα, οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ ΔΕ, καὶ ἄλλα μεγέθεα,*



τὰ χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἐπεὶ οἵ τε κυλίνδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις καὶ τὰ Ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις, λέγονται δὲ τῶν τε κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους τρου εἶναι ὁ πλάγιος ἄξων τῆς ὑπερβολῆς]. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΒΔ ἴσον πρὸς τὸ χωρίον ΞΝ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΒΕ ἴσον πρὸς τὸ ΞΜ· διότι ἡ Ξ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, ἡ δὲ Μ πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ δὲ Ν πρὸς τὴν ΒΔ· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΕ, θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ χωρίον Ω πρὸς τὸ ΞΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, ἔχων ἄξονα τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν



ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ χωρίον Ω πρὸς τὸ ὁμόλογον χωρίον ἐκ τῶν παραβληθέντων παρὰ τὴν Ξ, τὰ ὁποῖα ὑπερβάλλουσι τὸ δοθὲν κατὰ σχῆμα τετράγωνον. Ὑπάρχουσι λοιπὸν μεγέθη τινά, οἱ κύλινδροι οἱ εὑρισκόμενοι εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἄλλα μεγέθη, τὰ χωρία, μεταξὺ τῶν ὁποίων τὸ Ω, ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταῦτα, ἔχοντα ἀνὰ δύο μεγέθη τὸν αὐτὸν λόγον, ἐπειδὴ καὶ οἱ κύλινδροι εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους καὶ τὰ χωρία Ω εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, συγκρίνονται δὲ μερικοὶ ἐκ τῶν κυλίνδρων πρὸς ἄλλους κυλίνδρους ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ὁ δὲ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν δὲν συγκρίνεται πρὸς οὐδὲν σχῆμα, καὶ ἐκ τῶν χωρίων, μεταξὺ τῶν ὁποίων τὰ Ω μερικὰ

τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, καὶ τῶν χωρίων, ἐν οἷς τὰ Ω, ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ [δὲ] ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. δέδεικται δέ, ὅτι πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι,
H 380 ἢ ὃν ἁ ΝΞ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ· ὃν ὁ ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου.

οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ ὁ Ψ κῶνος συγκρίνονται πρὸς ἄλλα χωρία τὰ παραβληθέντα παρὰ τὴν Ξ καὶ ὑπερβάλλοντα τὸ δοθὲν κατὰ σχῆμα τετράγωνον, τὰ ὁμόλογα κατὰ σειρὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ δὲ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν δὲν συγκρίνεται πρὸς οὐδέν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Ω πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραβλημάτων χωρὶς τὸ μέγιστον (θ. 1). Ἀπεδείχθη δέ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Ω πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραβλημάτων χωρὶς τὸ μέγιστον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΝΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς Ξ καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς Ν (θ. 2)· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔχει μεγαλύτερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΘΡ· ὅστις ἐδείχθη ὅτι εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον ὅλου τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ἔχει λοιπὸν ὁ ὅλος κύλινδρος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεγαλύτερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον οὗτος ἔχει πρὸς τὸν κῶνον Ψ. ὥστε ὁ κῶνος Ψ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 8)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ· Δὲν εἶναι ἄρα τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ.

Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, μικρότερον. Πάλιν λοιπὸν ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ, ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου καθ' ὃ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμήματος, καὶ κατὰ τὰ ἄλλα ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς προηγουμένως). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι τοῦ τμάματος, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. πάλιν δὴ ὅ τε κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΝ [ἴσον γὰρ ἑκάτερον], καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν H 382 τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου ἴσον εἶμεν ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ· ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλημάτεσσιν. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἢ ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. ἀλλ᾽ ὡς ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ Ψ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἔλαττον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσόν ἐστιν, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

μικρότερον τοῦ τμήματος, καὶ τὸ περιγεγραμμένον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον ἢ ὁ κῶνος Ψ τοῦ τμήματος, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Πάλιν λοιπὸν καὶ ὁ πρῶτος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ χωρίον Ω πρὸς τὸ ΞΝ [διότι ἑκάτερον εἶναι ἴσον], καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον τῶν ἐχόντων ἄξονα τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔχοντα τὴν αὐτὴν θέσιν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ χωρίον Ω πρὸς τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὴν Ξ παραβλημάτων σὺν τὸ ὑπέρβλημα, διότι ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τὸ μέγιστον εἶναι ἴσον πρὸς ἕκαστον τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τὸ μέγιστον· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Ω πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραβλημάτων σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπερβλημάτων (θ. 1). Ἔχει δὲ ἐξ ἄλλου ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Ω πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὴν ἴσην ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἡμίσεος τῆς Ξ καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς Ν (θ. 2)· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα θὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΘΡ. Ἀλλὰ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΘΡ εἶναι ὁ ὅλος κύλινδρος πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον ὁ αὐτὸς κύλινδρος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ πρὸς τὸν Ψ. Ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ (Εὐκλ. V, 8)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι

κϛʹ

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας
H 384 *τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.*

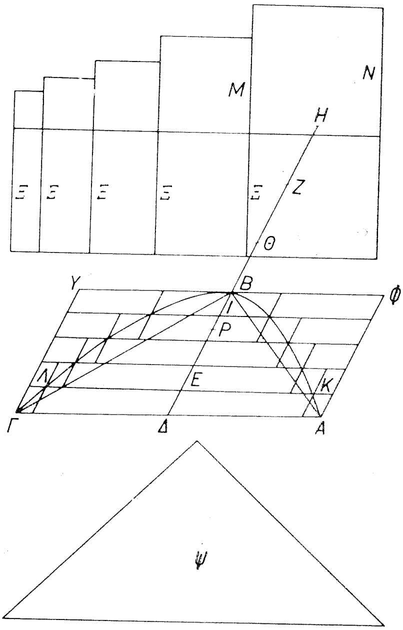
ἔστω γὰρ τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος, ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἄχθω διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁ ΦΥ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ αὔτα δίχα τὰν ΑΓ, καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ ΒΘ· τᾷ δὲ ΒΘ ἴσα ἔστω ἅ τε ΘΖ καὶ ἁ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΦΥ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύσει δὴ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ Β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΑΓ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τετμάκει τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ ΓΑ· ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ καὶ τᾶς ΒΔ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἄρα μικρότερον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ. Ἐπειδὴ δὲ οὔτε μεγαλύτερον οὔτε μικρότερον εἶναι, ἀπεδείχθη τὸ ζητηθέν.

26

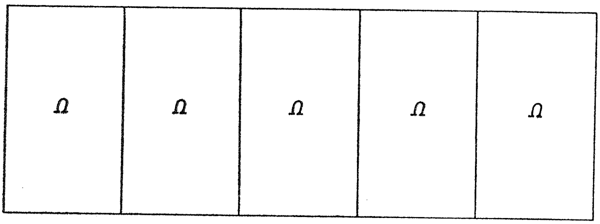
Καὶ ἂν ἀκόμη τὸ τμῆμα τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἀποτμηθῇ δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ τριπλασίου τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθείας πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ διπλασίου τῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθείας.

Διότι ἔστω τμῆμα ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ τὸ σχῆμα δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀποτμήσει τὸ τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ὑπερβολὴ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος ἀποτμήσει τὸ τμῆμα ἡ εὐθεῖα ΓΑ, κορυφὴ δὲ τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς (ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς) ἔστω τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς τοῦ κώνου ἡ ΦΥ, ἂς ἐφάπτεται δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὸ Β ἂς προεκβληθῇ· θὰ τμήσῃ λοιπὸν αὕτη δίχα τὴν ΑΓ καὶ θὰ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον Β, ἄξων δὲ ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ ἄξονος εὐθεῖα ἡ ΒΘ (δηλ. ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς μέχρι τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἀσυμπτώτων)· πρὸς δὲ τὴν ΒΘ ἔστω ἴση ἡ ΘΖ καὶ ἡ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ΦΥ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδόν τι παράλληλον πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ· θὰ ἐφάπτεται δὲ τοῦτο τοῦ κωνοειδοῦς κατὰ τὸ Β. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ δὲν ἔχει τμήσει τὸ κωνοειδὲς καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ θὰ εἶναι ἔλλειψις, μεγαλυτέρα δὲ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΓΑ·

ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ $B\Delta$, οὗ ἐν
H 386 τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν $A\Gamma$. εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖταί τις κυλίνδρου τόμος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΦY. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι κορυφὰν ἔχοντα τὸ B σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν $A\Gamma$. εὑρεθέντος οὖν καὶ ἀπότμαμά τι ἐσσεῖται κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· δεικτέον, ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ $H\Delta$ ποτὶ τὰν ΔZ.



ὃν γὰρ ἔχει λόγον ἁ $H\Delta$ ποτὶ τὰν ΔZ, τοῦτον ἐχέτω ὁ Ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τῷ κώνῳ τῷ Ψ, ἔστω, εἰ δυνατόν ἐστιν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχει ἔλλειψις περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΔ ἔχει ὑψωθῇ εἰς ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς διαμέτρου καὶ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι ἡ ἔλλειψις, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κύλινδρος ἔχων τὸν ἄξονα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΔ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ (θεώρ. 9). Ἀφοῦ οὗτος εὑρεθῇ θὰ ὑπάρχῃ κυλινδρικός τις τόμος (πλάγιος κύλινδρος), ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἡ δὲ ἄλλη βάσις αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΦΥ. Ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διά-



μετρον ΑΓ (θ. 8). Ἀφοῦ λοιπὸν εὑρεθῇ οὗτος θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἀπότμημά τι κώνου ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ πρὸς τὸν κυλινδρικὸν τόμον καὶ πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ.

Διότι ὃν λόγον ἔχει ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ, τοῦτον ἂς ἔχῃ ὁ κῶνος Ψ πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου. Ἐὰν λοιπὸν τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον Ψ, ἔστω, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυ-

σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τό-
μων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν
σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ᾗ ἁλίκῳ ὑπερ-
H 388 έχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ
περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμάματος ἐλάσσονι
ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ
κώνου, δῆλον, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ
Ψ κώνου. διάχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμ-
μένων ἐν τῷ τμάματι πάντων ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ
τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα
τὸν αὐτόν, καὶ ἅ τε ΒΡ τρίτον μέρος ἔστω τᾶς ΒΔ, καὶ
τἆλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. πάλιν δὴ ὁ
πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ
ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι
τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ
τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· οἱ γὰρ τόμοι οἱ
ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους,
ὅνπερ αἱ βάσιες αὐτῶν, αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν, ἐπὶ ὁμοῖαί ἐντι
ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸν αὐτὸν [οὖν] λόγον ἔχοντι ποτ'
ἀλλάλας, ὃν αἱ ὁμολόγοι διαμέτροι αὐτᾶν δυνάμει. ὃν δὲ
λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς
ΚΕ, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ περιεχόμενον ποτὶ τὸ
ὑπὸ τᾶν ΖΕΒ, ἐπεί ἐστιν ἁ μὲν ΖΔ ἀγμένα διὰ τοῦ Θ, καθ'
ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτοντι, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ παρὰ τὰν κατὰ
τὸ Β ἐπιψαύουσαν· ἔστιν δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ περιεχό-
μενον ἴσον τῷ Ω χωρίῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΖΕΒ τῷ ΞΜ· ἔχει
οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν
H 390 ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχή-
ματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Ω

λινδρικῶν τόμων ἐχόντων ἴσον ὕψος, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεγαλύτερον ὂν τοῦ τμήματος ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κώνου Ψ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Ἂς προεκβληθῶσι λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ὅλων τῶν κυλινδρικῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τμῆμα μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλινδρικοῦ τόμου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, καὶ ἡ ΒΡ ἔστω τὸ ἓν τρίτον τῆς ΒΔ, καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἃς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Πάλιν λοιπὸν ὁ πρῶτος κυλινδρικὸς τόμος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κυλινδρ. τόμον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κυλινδρ. τόμον ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ· διότι οἱ κυλινδρικοὶ τόμοι οἱ ἔχοντες ἴσον ὕψος ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις αὐτῶν, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν, ἐπειδὴ εἶναι ὅμοιαι ἐλλείψεις (θ. 14, πόρ.), ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον , ὃν ἔχουσιν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτῶν εἰς τὸ τετράγωνον (θ. 6, πόρ.). Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ, τοῦτον ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΒ, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΖΔ ἔχει ἀχθῆ διὰ τοῦ Θ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ ἀσύμπτωτοι, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ Β· εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΔ, ΔΒ ἴσον πρὸς τὸ χωρίον Ω, τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΒ ἴσον πρὸς τὸ ΞΜ· ἔχει λοιπὸν ὁ πρῶτος κυλινδρικὸς τόμος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κυλινδρ. τόμον, ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν

χωρίον ποτὶ τὸ ΞΜ· καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα, οἱ τόμοι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα, τὰ χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα αὐτοῖς, λέγονται δὲ οἱ τόμοι ποτ᾽ ἄλλους τόμους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθ᾽ ἓν λέγεται, τὰ δὲ Ω χωρία ποτ᾽ ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ᾽ ἓν λέγεται· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ
H 392 κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἔστιν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου.

εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμᾶμα σχήματος στερεοῦ καὶ ἄλλου πρῶτον κυλινδρ. τόμον τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΔΕ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ χωρίον Ω πρὸς τὸ ΞΜ· καὶ ἕκαστος δὲ τῶν ἄλλων κυλινδρ. τόμων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κυλινδρ. τόμον τῶν ἐχόντων ἄξονα τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν κυλινδρ. τόμον τὸν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εὑρισκόμενον κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν καὶ ἔχοντα ἄξονα τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ χωρίον Ω πρὸς τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὴν εὐθεῖαν Ξ παραβεβλημένων, τὰ ὁποῖα ὑπερβάλλουσι δοθὲν χωρίον κατὰ τετράγωνον σχῆμα. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσι μεγέθη τινά, οἱ κυλινδρικοὶ τόμοι οἱ εἰς τὸν ὅλον κυλινδρ. τόμον, καὶ ἄλλα μεγέθη, τὰ χωρία, ὅπου εἶναι τὸ γράμμα Ω, ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τοὺς κυλινδρ. τόμους καὶ ἔχοντα ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, συγκρίνονται δὲ οἱ κυλινδρ. τόμοι πρὸς ἄλλους κυλινδρ. τόμους τοὺς εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ὁ δὲ τελευταῖος κυλινδρ. τόμος οὐδὲ πρὸς ἓν συγκρίνεται, τὰ δὲ χωρία Ω συγκρίνονται πρὸς ἄλλα χωρία τὰ παραβεβλημένα παρὰ τὴν εὐθεῖαν Ξ καὶ τὰ ὑπερβλήματα αὐτῶν εἶναι σχήματα τετράγωνα, τὰ ὁμόλογα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ δὲ τελευταῖον αὐτῶν οὐδὲ πρὸς ἓν συγκρίνεται· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κυλινδρικῶν τόμων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυλινδρ. τόμων θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων Ω πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραβλημάτων χωρὶς τὸ μέγιστον (θ. 1). Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν χωρίων Ω πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραβλημάτων χωρὶς τὸ μέγιστον ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς Ξ καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς Ν (θ. 2)· ἔχει λοιπὸν μεγαλύτερον λόγον ὁ ὅλος κυλινδρικὸς τόμος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς Ξ καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς Ν· ὥστε ἔχει μεγαλύτερον λόγον καὶ τοῦ *περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκειμένου, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδ' ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.*

κζ'

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμαμένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ· διοίσει δὲ οὐδέν, εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ ΒΔ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς εἴτε ἁ ἐλάσσων· τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα
H 394 *τομὰ ἔστω ἁ ΓΑ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δὴ αὕτα διὰ τοῦ Θ καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν ΒΔ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τε ἄχθαι καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν*

λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΘΡ. Ἔχει λοιπὸν μεγαλύτερον λόγον ὁ ὅλος κυλινδρικὸς τόμος πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ.

Ἐὰν δὲ εἶναι μικρότερον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ, ἀφοῦ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα καὶ ἄλλο περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλινδρικῶν τόμων ἐχόντων ἴσον ὕψος, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει τοῦ τμήματος ὁ κῶνος Ψ, πάλιν ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ καὶ ὅτι ὁ κυλινδρικὸς τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔχει μικρότερον λόγον ἢ πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον· δὲν εἶναι λοιπὸν οὔτε μικρότερον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδοῦς τοῦ κώνου Ψ. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

27

Παντὸς σφαιροειδοῦς σχήματος τμηθέντος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα τετμημένον δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδοῦς ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ· δὲν θὰ διαφέρῃ δὲ καθόλου εἴτε ληφθῇ ἡ μεγαλυτέρα διάμετρος τῆς ἐλλείψεως ἡ ΒΔ εἴτε ληφθῇ ἡ μικροτέρα· τοῦ δὲ τμήσαντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἄξονα. δεικτέον, ὅτι τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν $ΑΓ$, κορυφὰν δὲ τὸ $Β$ σαμεῖον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

ἔστω γὰρ κῶνός τις, ἐν ᾧ τὸ $Ψ$, διπλασίων τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τὰν $ΘΒ$· φαμὶ δὴ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ $Ψ$ κώνῳ.

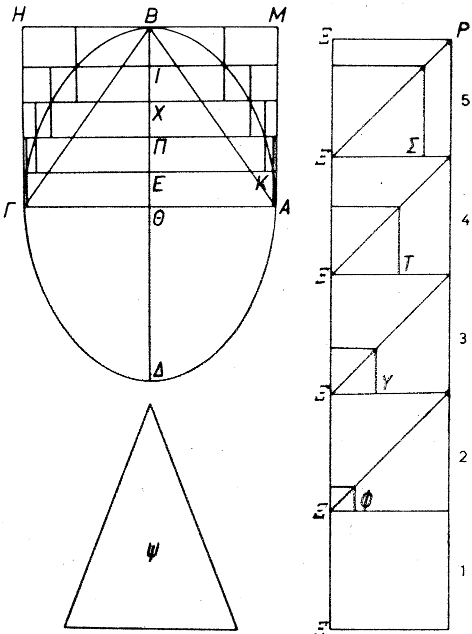
εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ $Ψ$ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ᾗ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ $Ψ$ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ $Ψ$ κώνου, δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι τῷ ἁμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ $Ψ$ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν $ΑΓ$, ἄξονα δὲ τὰν $ΒΘ$. ἐπεὶ
H 396 οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ $Ψ$ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον, ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ $Ψ$ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ

ἔστω τομὴ ἡ εὐθεῖα ΓΑ· θὰ διέρχηται λοιπὸν αὕτη διὰ τοῦ Θ καὶ θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ἐλήφθη ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα (Εὐκλ. XI ὁρισ. 4 καὶ XI θ. 18). Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς τμῆμα τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Β, εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Διότι ἔστω κῶνός τις, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, διπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τὴν ΘΒ· λέγω, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κῶνον Ψ.

Ἐὰν λοιπὸν δὲν εἶναι ἴσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον Ψ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς, στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς τοῦ κώνου Ψ (θεώρ. 19). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεγαλύτερον ὂν τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ὀλιγώτερον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ὑπερέχει τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς τοῦ κώνου Ψ, εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Ἔστω λοιπὸν κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἄξονα δὲ τὴν ΒΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος οὗτος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν (Εὐκλ. XII, 10), ὁ δὲ κῶνος Ψ εἶναι διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου, εἶναι

μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστων [δὴ] οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ᾽ ἃν τὰ Ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς τᾶς ΒΘ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστα τᾷ ΒΘ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω, ἀφαιρήσθω δὲ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΙ· ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΙ, ΙΔ· ἀπὸ δὲ τοῦ παρ᾽ αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς ΒΙ· ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΧ, ΧΔ· καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω, οὗ πλάτος ἑνὶ τμάματι μεῖζον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἀφαιρημένου
H 398 γνώμονος· ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς ΒΔ τμαμάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμᾶμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ [ἀπὸ] τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον



φανερόν, ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου Ψ. Ἂς προεκβληθῶσι λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ὅλων τῶν κυλίνδρων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσους πρὸς τοὺς κυλίνδρους τοὺς εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσους πρὸς τὸν μέγιστον ἐξ αὐτῶν. Ἔστωσαν λοιπὸν εὐθεῖαι γραμμαί, ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι τὰ γράμματα Ξ, ἴσαι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ τμήματα τῆς εὐθείας ΒΘ, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν ΒΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ ἑκάστης τετράγωνον, ἂς ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπὸ μὲν τοῦ τελευταίου τετραγώνου γνώμων ἔχων πλάτος ἴσον πρὸς τὴν ΒΙ· θὰ εἶναι λοιπὸν οὗτος ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΙ, ΙΔ· ἀπὸ δὲ τοῦ πλησίον αὐτοῦ τετραγώνου ἂς ἀφαιρεθῇ γνώμων ἔχων πλάτος διπλάσιον τῆς ΒΙ· θὰ εἶναι λοιπὸν οὗτος ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΧ, ΧΔ· καὶ πάντοτε ἀπὸ τοῦ ἑπομένου τετραγώνου ἂς ἀφαιρῆται γνώμων, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος νὰ εἶναι κατὰ τμῆμά τι μεγαλύτερον τοῦ πλάτους τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἀφαιρεθέντος γνώμονος· θὰ εἶναι λοιπὸν ἕκαστος αὐτῶν ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΒΔ, τῶν ὁποίων τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλάτος τοῦ γνώμονος. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ τοῦ δευτέρου τετραγώνου τὸ ὑπόλοιπον τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν ΘΕ. Ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΘΕ, πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸ ἔχον τὸν αὐτὸν ἄξονα τὴν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ (Εὐκλ. XII, 2 καὶ 11)· ὥστε ἔχει λόγον καὶ ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΘΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ,

τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΘΕ. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΘ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· ὥστε καί, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ περιεχόμενον· ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα, οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΞΞ, ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα, λέγονται δὲ οἱ κυλίνδροι ποτ' ἄλλα μεγέθεα, τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, καὶ τὰ τετράγωνα ποτ' ἄλλα μεγέθεα, τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρημένους ⟨γνώμονας⟩, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον
H 400 οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται· πάντες οὖν οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαι-

ΕΔ· ἔχει λοιπὸν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἔχει τὸ πρῶτον τετράγωνον πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἀφῃρημένον ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου. Ὁμοίως δὲ καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐχόντων ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΘΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ὁμοίως τεταγμένον πρὸς αὐτόν, πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἀφῃρημένον ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτοῦ τετραγώνου. Ὑπάρχουσι λοιπὸν μεγέθη τινά, οἱ κύλινδροι οἱ εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, καὶ ἄλλα, τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν ΞΞ, ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τοὺς κυλίνδρους καὶ ἔχοντα ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον, συγκρίνονται δὲ οἱ κύλινδροι πρὸς ἄλλα μεγέθη, τοὺς κυλίνδρους τοὺς εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ὁ δὲ τελευταῖος κύλινδρος δὲν συγκρίνεται πρὸς κανέν, καὶ τὰ τετράγωνα πρὸς ἄλλα μεγέθη, τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφῃρημένους ⟨γνώμονας⟩, τὰ ὁμόλογα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ δὲ τελευταῖον τετράγωνον δὲν συγκρίνεται πρὸς κανέν· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κυλίνδρων τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων κυλίνδρων θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τῶν ἀφῃρημένων ἐξ αὐτῶν· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τῶν ἀφῃρημένων ἐξ αὐτῶν. Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ ἀθροίσματος τῶν γνωμόνων τῶν ἀφῃρημένων ἐξ αὐτῶν· διότι ὑπάρχουσι γραμμαί τινες εὐθεῖαι αἱ ΞΡ, ΞΣ, ΞΤ, ΞΥ, ΞΦ [ΞΨ, ΞΩ] ὑπερέχουσαι ἴσον πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ὅπου εἶναι τὰ δύο γράμματα Ξ,Ξ, ρημένους ἀπ᾿ αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ᾿ αὐτῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια· ἐντὶ γάρ τινες γραμμαὶ κείμεναι αἱ ΞΡ, ΞΣ, ΞΤ, ΞΥ, ΞΦ [ΞΨ, ΞΩ] τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ᾿ ἇν τὰ δύο Ξ, Ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ· τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν, ἇν ἐστιν ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσῶν ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα ἢ τριπλάσια· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἅ ἐντι ἀφαιρημένα ἀπ᾿ αὐτῶν, δῆλον, ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια· τῶν οὖν γνωμόνων μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· τοῦ γὰρ Ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου.

H 402 οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς ταύτας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην· τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων λοιπὸν ὅλων τῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων τετραγώνων ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὴν πραγματείαν περὶ ἑλίκων (θεώρ. 10, πόρ). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου τῶν ἄλλων τετραγώνων, τὰ ὁποῖα ἀφηρέθησαν ἐξ αὐτῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι μεγαλύτερα κατὰ τὰ τρία δεύτερα τῶν ὑπολοίπων· εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερα τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ ἀθροίσματος τῶν γνωμόνων. Ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου Ψ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἀπεδείχθη μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι ἄρα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ.

Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερον. Ἂς ἐγγραφῇ πάλιν εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ ὀλιγώτερον ἐκείνου, κατὰ τὸ ὁποῖον ὑπερέχει ὁ κῶνος Ψ τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς, καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἄλλα ὅπως προηγουμένως. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Πάλιν λοιπὸν ὁ πρῶτος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΘΕ, πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον

τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΘΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ᾽ αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΕΠ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΠ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δεύτερον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον· καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾷ ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον· καὶ πάντες οὖν οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετρά-
H 404 γωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσιν τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονά ἐντι ἢ τριπλάσια· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· τοῦ γὰρ Ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

σχῆμα, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ πρῶτον τετράγωνον πρὸς ἑαυτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΕΠ πρὸς τὸν δεύτερον κύλινδρον ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΕΠ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ δεύτερον τετράγωνον πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἀφῃρημένον ἐξ αὐτοῦ· ἕκαστος δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον τῶν ἐχόντων ἄξονα τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΘΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔχοντα τὴν αὐτὴν θέσιν καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὁμοίως πρὸς αὐτὸν κείμενον τετράγωνον, πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἀφῃρημένον ἐξ αὐτοῦ· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν κυλίνδρων τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου τετραγώνου σὺν τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφῃρημένους ἐκ τῶν λοιπῶν τετραγώνων (θεώρ. 1). Καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τετραγώνων εἶναι μικρότερον τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ πρώτου τετραγώνου σὺν τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφῃρημένους ἐκ τῶν λοιπῶν τετραγώνων, διότι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον, ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι μικρότερος τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου Ψ· τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐδείχθη μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικρότερον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς, τοῦ κώνου Ψ. Ἐπειδὴ δὲ οὔτε μεγαλύτερον εἶναι οὔτε μικρότερον, εἶναι ἄρα ἴσον.

κη'

Καὶ τοίνυν εἴ κα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

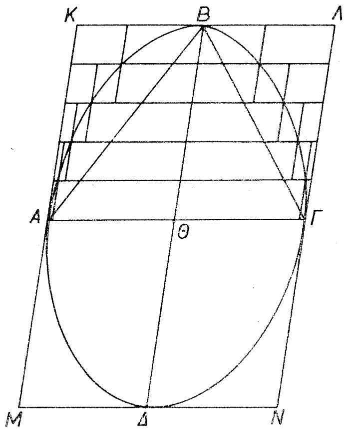
τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδές, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ Θ, τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ ΑΓ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δ' αὕτα διὰ τοῦ Θ ἀγομένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπέκειτο διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν
H 406 *ΑΓ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτέμνον ὑπέκειτο οὐ ποτ' ὀρθὰς εἶμεν τῷ ἄξονι ἀγμένον. ἄχθων δή τινες αἱ ΚΛ, ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ Β, Δ, ἀπὸ δὲ τᾶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύοντι δὴ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἁ ΒΔ ἐπιζευχθεῖσα πεσεῖται διὰ τοῦ Θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμαμάτων κορυφαὶ μὲν τὰ Β, Δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ ΒΘ, ΘΔ. δυνατὸν δή ἐστιν κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΘ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖταί τις κυλίνδρου τόμος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου*

28

Καὶ ἂν τὸ σφαιροειδὲς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ὁμοίως τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Διότι ἂς τμηθῇ σφαιροειδὲς τμῆμα, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου ἄλλου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἔστω τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἡ ἔλλειψις ΑΒΓΔ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Θ, ἡ δὲ τομὴ τοῦ τμήσαντος ἐπιπέδου ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ· θὰ διέρχεται δὲ αὕτη διὰ τοῦ Θ, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν ἔλλειψίς τις περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ, ἐπειδὴ τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὑπετέθη ὅτι δὲν εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα. Ἂς ἀχθῶσι τώρα εὐθεῖαί τινες αἱ ΚΛ, ΜΝ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὰ Β, Δ (θ. 16, β), ἀπὸ δὲ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἂς ὑψωθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ· θὰ ἐφάπτωνται λοιπὸν ταῦτα τοῦ σφαιροειδοῦς κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΔ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Θ (θ. 16, γ), καὶ θὰ εἶναι κορυφαὶ μὲν τῶν τμημάτων τὰ σημεῖα Β, Δ, ἄξονες δὲ αἱ ΒΔ, ΘΔ. Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ κύλινδρος ἔχων ἄξονα τὴν ΒΘ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἀφοῦ δὲ εὑρεθῇ ὁ κύλινδρος οὗτος θὰ ὑπάρξῃ κυλινδρικός τις τόμος ἔχων τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· πάλιν δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἡ ἔλλειψις ἡ ἀπὸ διαμέτρου τῆς ΑΓ. Ἀφοῦ δὲ εὑρεθῇ οὗτος θὰ ὑπάρξῃ ἀπότμημά τι κώνου ἔχον τὴν *κώνου τομὰ ἁ ἀπὸ διαμέτρου τᾶς ΑΓ. εὑρεθέντος δὴ ἐσσεῖταί τι ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· λέγω δή, ὅτι τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἡμίσεον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου.*

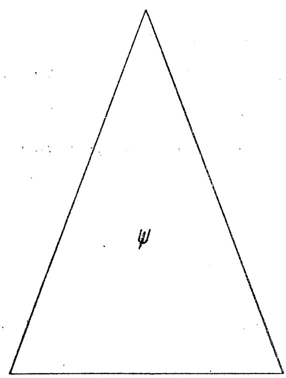
ἔστω δὴ ὁ Ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ Ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐνέγραψα δή τι εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο



περιέγραψα ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκεί-
H 408 *μενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν Ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖ-*

αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· λέγω λοιπόν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τούτου.

Ἔστω λοιπὸν ὁ κῶνος Ψ διπλάσιος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου. Ἐὰν λοιπὸν δὲν εἶναι ἴσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον Ψ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἐγγράφω λοιπὸν εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς στερεὸν σχῆμα καὶ ἄλλο περιγράφω ἀποτελούμενον ἐκ κυλινδρικῶν τόμων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς τοῦ κώνου Ψ.



Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ καὶ ὁ κυλινδρικὸς τόμος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν κώνου Ψ εἶναι τὰ τρία δεύτερα, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ.

Ἐὰν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι μικρότερον τοῦ ται οὖν μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου.

εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ᾗ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν Ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἁμιόλιος· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

H 410 κθ'

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἔλαττον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ἡμίσεον τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος.

ἔστω γάρ τι τμᾶμα σφαιροειδέος σχήματος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἔστω ἁ ΒΖ, κένκώνου Ψ, ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς στερεὸν σχῆμα, καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλινδρικῶν τόμων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον ἐκείνου, καθ' ὃ ὑπερέχει ὁ κῶνος Ψ τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς. Πάλιν λοιπόν, καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ καὶ ὁ κυλινδρικὸς τόμος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν κώνου Ψ εἶναι τὰ τρία δεύτερα, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος εἶναι μικρότερον τῶν τριῶν δευτέρων· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ εἶναι λοιπὸν οὔτε μικρότερον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς τοῦ κώνου Ψ. Ἐπειδὴ δὲ οὔτε μεγαλύτερον εἶναι οὔτε μικρότερον, εἶναι ἴσον. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθῇ.

29

Παντὸς σφαιροειδοῦς τμήματος τμηθέντος δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδοῦς σὺν τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Διότι ἔστω τμῆμα σφαιροειδοῦς σχήματος ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓ, διάμετρος δὲ τῆς τομῆς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδοῦς ἔστω ἡ ΒΖ, κέντρον δὲ τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα *τρον δὲ τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα τομὰ ἔστω ἁ ΑΓ εὐθεῖα· ποιήσει δὲ αὔτα ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν ΒΖ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπέκειτο· ἔστω δὲ τὸ τμᾶμα τὸ ἀποτετμαμένον, οὗ κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ ΒΘ ἴσα ἔστω ἁ ΖΗ. δεικτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ.*

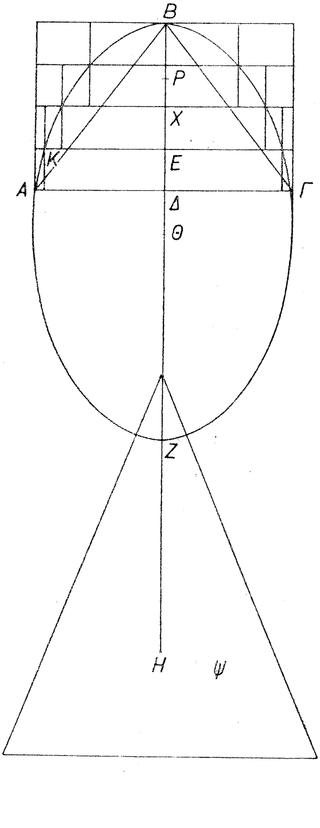
ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ
H 412 *Ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ· φαμὶ δὴ τὸν Ψ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ Β σαμεῖον.*

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. ἐνέγραψα δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον, ὅτι μεῖζόν ἐστι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ ἁ ΒΡ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΒΗ τριπλασία ἐστὶν τᾶς ΒΘ, ἁ δὲ ΒΔ τᾶς ΒΡ, δῆλον, ὅτι τριπλασία ἐστὶν ἁ ΔΗ τᾶς ΘΡ· ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΘΡ. ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον τὸν αὐτὸν τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ· θὰ εἶναι δὲ αὕτη κάθετος πρὸς τὴν ΒΖ, διότι ὑπετέθη, ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα (Εὐκλ. Χ 1, ὁρισ. 4. XI, 18)· ἔστω δὲ τὸ ἀποτετμημένον τμῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Β, μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς σχήματος, καὶ πρὸς τὴν ΒΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΗ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Β, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ.

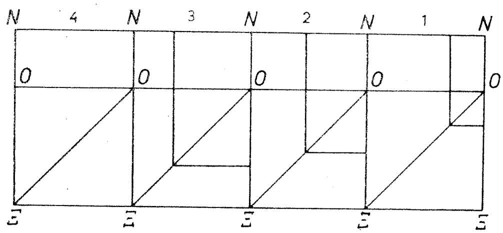
Ἔστω λοιπὸν κύλινδρος ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος Ψ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἔχον κορυφὴν τὸ σημεῖον Β.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσος ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μικρότερος. Ἐγγράφω λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα καὶ ἄλλο περιγράφω ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος μικρότερον ἐκείνου, καθ' ὃ τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ (θ. 19). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μεγαλύτερον ὂν τοῦ τμήματος, ὑπερέχει ὀλιγώτερον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ ὅσον ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ κώνου, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Ἔστω λοιπόν, ἡ ΒΡ ἴση πρὸς τὸ ἓν τρίτον τῆς ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΒΗ εἶναι τριπλασία τῆς ΒΘ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι τριπλασία τῆς ΒΡ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι τριπλασία τῆς ΘΡ· ἔχει λοιπὸν ὁ μὲν κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν ΒΔ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΗ πρὸς τὴν

H 414 *λόγον ἔχει, ὃν ἁ $ΔZ$ ποτὶ τὰν $ΔH$· ἕξει οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸν $Ψ$ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ $ΔZ$ ποτὶ τὰν $ΘP$. ἔστων δὴ γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ᾽ ἅν τὰ $Ξ$, N, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσιν τοῖς τᾶς $BΔ$, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ $ZΔ$, ἔστω δὲ καὶ τᾶν $ΞO$ ἑκάστα ἴσα τᾷ $BΔ$· τᾶν οὖν NO ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς $ΘΔ$. παραπεπτωκέτω δὴ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ $BΔ$, ὥστε εἶμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον. ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ BE, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ BX, καὶ ἀφ᾽ ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἷς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος ἔχων ἑνὶ τμάματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου· ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν BE, EZ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρα-*



ΘΡ (Εὐκλ. XII, 10). Ὁ δὲ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸν κῶνον Ψ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΗ· θὰ ἔχῃ λοιπόν, ἀφοῦ οἱ λόγοι ἀποτελοῦσι τεταραγμένην ἀναλογίαν (Εὐκλ. V, ὁρ. 18), ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν πρὸς τὸν κῶνον Ψ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΘΡ (Εὐκλ. V, 23). Ἔστωσαν λοιπὸν εὐθεῖαι γραμμαί, ὅπου τὰ γράμματα Ξ, Ν, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῆς ΒΔ, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστω δὲ καὶ ἑκάστη τῶν ΞΟ ἴση πρὸς τὴν ΒΔ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἑκάστη τῶν ΝΟ διπλασία τῆς ΘΔ. Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρ' ἑκάστην αὐτῶν χωρίον τι ἔχον πλάτος ἴσον πρὸς τὴν ΒΔ, ὥστε



ἕκαστον χωρίον ὅπου σημειοῦται διαγώνιος νὰ εἶναι τετράγωνον. Ἂς ἀφαιρεθῇ λοιπὸν ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων ἔχων πλάτος ἴσον πρὸς τὴν ΒΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου γνώμων ἔχων πλάτος ἴσον πρὸς τὴν ΒΧ, καὶ ἀφ' ἑκάστου καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ ἀφαιρεθῇ εἷς γνώμων ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου ἔχων πλάτος κατὰ ἓν τμῆμα μικρότερον τοῦ πλάτους τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἀφῃρημένου γνώμονος· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου ἀφῃρημένος γνώμων ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΖ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον χωρίον θὰ εἶναι παραβεβλημένον παρὰ τὴν ΝΟ ὑπερβάλλον κατὰ τετράγωνον σχῆμα, ⟨ἔχον τὴν πλευρὰν τοῦ ὑπερβλήματος ἴσην πρὸς τὴν ΔΧ,⟩ ὁ δὲ γνώμων ὁ ἀφῃρημένος ἀπὸ τοῦ δευ-

πεπτωκὸς παρὰ τὰν ΝΟ ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΕ, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΧ, ΧΒ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν ΝΟ παραπεπτωκὸς ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ⟨τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΧ,⟩ καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως H 416 *τούτοις ἑξοῦντι. διάχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι, ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΖ· ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον· ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κατ᾽ αὐτὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ οὖν μεγέθεά τινα οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ ΒΔ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις καὶ κατὰ* τέρου χωρίου θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΧ, ΧΒ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον χωρίον θὰ εἶναι παραβεβλημένον παρὰ τὴν ΝΟ ὑπερβάλλον κατὰ τετράγωνον σχῆμα, καὶ τὰ ἄλλα θὰ εἶναι ὁμοίως πρὸς ταῦτα. Ἂς προεκταθῶσι λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ὅλων τῶν κυλίνδρων, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸ τμῆμα, μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ ὅλος κύλινδρος διηρημένος εἰς κυλίνδρους κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσους πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσους πρὸς τὸν μέγιστον ἐξ αὐτῶν. Ὁ πρῶτος λοιπὸν κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὴν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΕ. Οὗτος δὲ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΔ, ΔΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΖ· ἔχει λοιπὸν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ πρῶτον χωρίον πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἀφηρημένον ἐξ αὐτοῦ· ὁμοίως δὲ καὶ ἕκαστος ἐκ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ἔχων ἄξονα τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀντίστοιχον κύλινδρον τὸν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτόν, θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸν τάξεως χωρίον, πρὸς τὸν ἐξ αὐτοῦ ἀφηρημένον γνώμονα. Θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν μεγέθη τινά, οἱ κύλινδροι οἱ εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον, καὶ ἄλλα μεγέθη τὰ χωρία τὰ παραβληθέντα παρὰ τὴν ΞΝ ἔχοντα πλάτος τὴν ἴσην πρὸς τὴν ΒΔ, κατὰ τὸ πλῆθος δὲ ἴσα πρὸς τοὺς κυλίνδρους καὶ ἔχοντα ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον, συγκρίνονται δὲ καὶ οἱ κύλινδροι πρὸς ἄλλους κυλίνδρους τοὺς εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ὁ δὲ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν δὲν σύγ-

δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, λέγονται δὲ οἵ τε κυλίνδροι ποτ' ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, καὶ τὰ χωρία ποτ' ἄλλα H 418 *χωρία, τοὺς ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρημένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κυλίνδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεὶ ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι, ἐφ' ἃν τὰ Ν, Ο, καὶ παρ' ἑκάσταν παραπέπτωκέν τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα, πλάτος δὲ ἔχοντα τὰς ἴσας τᾷ ΒΔ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσω λόγον ἔχοντι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ΞΟ. φανερὸν οὖν, ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ΞΟ· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ΞΟ. ἔστιν δὲ τᾷ μὲν ΞΝ ἴσα ἁ ΔΖ, τᾷ δὲ* κρίνεται πρὸς κανένα, καὶ τὰ χωρία πρὸς ἄλλα χωρία, τοὺς ἐξ αὐτῶν ἀφῃρημένους γνώμονας, τὰ ὁμόλογα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, τὸ δὲ τελευταῖον χωρίον δὲν συγκρίνεται πρὸς κανέν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων κυλίνδρων (τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα) θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων (θ. 1)· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι γραμμαί τινες ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι, αἱ ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι τὰ γράμματα Ν, Ο καὶ παρ' ἑκάστην ἔχει παραβληθῇ χωρίον τι ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα τετράγωνον, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον, θεωρούμεναι ἐν συνεχείᾳ, καὶ ἡ ὑπεροχὴ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐλαχίστην καὶ ὑπάρχουσιν ἄλλα χωρία παραβεβλημένα παρὰ τὴν ΞΝ, ἔχοντα πλάτος τὰς εὐθείας τὰς ἴσας πρὸς τὴν ΒΔ, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσα πρὸς ταῦτα, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἕκαστον ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων χωρίων ἔχουσιν λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα, τοῦ ἡμίσεος τῆς ΝΟ καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς ΞΟ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων θὰ ἔχωσι λόγον μεγαλύτερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΝΟ καὶ τῶν δύο τρίτων τῆς ΞΟ· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΝΟ καὶ τῶν δύο τρίτων τῆς ΞΟ. Εἶναι δὲ πρὸς

H 420 ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ ἁ ΔΘ, τὰ δὲ δύο τριταμόρια τᾶς ΞΟ ἁ ΔΡ· ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ἔχει ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου.

ἀλλ᾽ ἔστω, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μείζων ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν ἢ ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότων πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ ΒΔ ποτ᾽ αὐτό· ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν· ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν
H 422 ΞΝ παραπεπτωκότων πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ ΒΔ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ᾽ αὐτοῦ, καὶ τῶν ἄλλων

μὲν τὴν ΞΝ ἴση ἡ ΔΖ, πρὸς δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΝΟ ἴση ἡ ΔΘ, τὰ δὲ δύο τρίτα τῆς ΞΟ εἶναι ἡ ΔΡ· ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΘΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΘΡ, τοῦτον ἐδείχθη ὅτι ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος πρὸς τὸν κῶνον Ψ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς τοῦ κώνου Ψ.

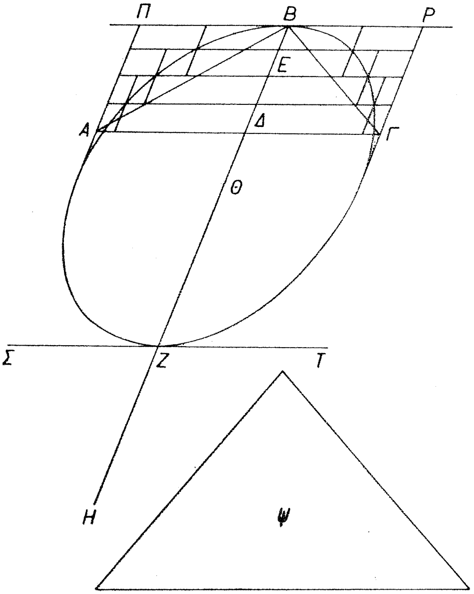
Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, μικρότερον. Πάλιν λοιπὸν ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα στερεὸν σχῆμα καὶ ἄλλο ἂς περιγραφῇ ἀποτελούμενον ἐκ κυλίνδρων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον εἶναι μεγαλύτερος ὁ κῶνος Ψ τοῦ τμήματος (θ. 19), καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὡς προηγουμένως. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος, καὶ τὸ περιγραφὲν ὑπερέχει τοῦ τμήματος ὀλιγώτερον ἢ ὁ κῶνος Ψ, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Πάλιν λοιπὸν ὁ πρῶτος κύλινδρος ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ὁ ἔχων ἄξονα τὴν ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τελευταῖον χωρίον ἐκ τῶν παραβεβλημένων παρὰ τὴν ΞΝ, πλάτος ἐχόντων ἴσον πρὸς τὴν ΒΔ, πρὸς τὸν ἑαυτόν του· διότι ἑκάτερα εἶναι ἴσα· ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον ἔχων ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν κύλινδρον τὸν ἀντίστοιχον ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ πρῶτον χωρίον ἐκ τῶν παρὰ τὴν ΞΝ παραβεβλημένων, ἐχόντων

δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότων ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον πρώτου λεγομένου τοῦ ἐσχάτου· καὶ πάντες οὖν οἱ κυλίνδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα ποτὶ τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ΝΟ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ΞΟ, δῆλον, ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπά, ἅ ἐντι ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρουμένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ΞΟ· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ, τοῦτον
H 424 *ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε*

πλάτος ἴσον πρὸς τὴν ΒΔ, πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἀφῃρημένον ἐξ αὐτοῦ, καὶ ἕκαστος δὲ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἐκ τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον τῶν ἐχόντων ἄξονα τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀντίστοιχον κύλινδρον τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὁμόλογον πρὸς αὐτὸν χωρίον, ἐκ τῶν παραβεβλημένων παρὰ τὴν ΞΝ, πρὸς τὸν γνώμονα τὸν ἐξ αὐτοῦ ἀφῃρημένον, πρώτου συγκρινομένου τοῦ τελευταίου· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κυλίνδρων τῶν εἰς τὸν ὅλον κύλινδρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυλίνδρων τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων τῶν παραβεβλημένων παρὰ τὴν ΞΝ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ τελευταίως κειμένου χωρίου σὺν τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφῃρημένους ἐκ τῶν ἄλλων (χωρίων) διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς καὶ προηγουμένως λόγους· Ἐπειδὴ λοιπὸν ἀπεδείχθη, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων τῶν παραβεβλημένων παρὰ τὴν ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων τῶν παραβεβλημένων παρὰ τὴν ΝΟ, τὰ ὁποῖα ὑπερβάλλουσι κατὰ τετράγωνον σχῆμα, χωρὶς τὸ μέγιστον ἔχουσι μεγαλύτερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΝΟ καὶ τοῦ τρίτου μέρους τῆς ΞΟ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία πρὸς τὰ λοιπά, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ κείμενον τελευταῖον χωρίον σὺν τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρουμένους ἐκ τῶν λοιπῶν, ἔχουσιν μικρότερον λόγον ἐκείνου, ὃν ἔχει ἡ ΞΝ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΝΟ καὶ τῶν δύο τρίτων τῆς ΞΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΘΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΘΡ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος πρὸς τὸν κῶνον Ψ· μικρότερον ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ πρὸς ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

λ΄

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς μηδὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος.



τετμάσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδές, ὡς εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, καὶ παρὰ τὰν ΑΓ ἄχθων αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀνεστακέτω ἀπ᾽ αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Ζ, καὶ ἐσσοῦντὸν κῶνον Ψ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ. Δὲν εἶναι ἄρα μικρότερον τοῦ κώνου. Ἐπειδὴ δὲ οὔτε μεγαλύτερον οὔτε μικρότερον εἶναι, εἶναι ἄρα ἴσον.

30

Καὶ τώρα ἐὰν τὸ σφαιροειδὲς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου οὐχὶ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, οὐδὲ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτοῦ πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον θὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς ἑνούσης τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμημάτων σὺν τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος, πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Διότι ἂς τμηθῇ σχῆμά τι σφαιροειδές, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἀφοῦ αὐτὸ τμηθῇ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓ, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΑ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐφαπτόμεναι τῆς τομῆς τοῦ κώνου κατὰ τὰ σημεῖα Β, Ζ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπ' αὐτῶν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ· θὰ ἐφάπτωνται δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδοῦς κατὰ τὰ Β, Ζ (θ. 16, β), καὶ θὰ εἶναι κορυφαὶ τῶν τμημάτων τὰ σημεῖα Β, Ζ. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ἑνοῦσα τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων εὐθεῖα καὶ ἔστω ἡ ΒΖ· θὰ διέλθῃ δὲ αὕτη διὰ τοῦ κέντρου (θ. 16)· καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τῆς ἐλλεί-

ται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ *Β*, *Ζ*. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυ-
H 426 φὰς τῶν τμαμάτων ἐπιζευγνύουσα καὶ ἔστω ἁ *ΒΖ*· πεσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου· καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ *Θ*. ἐπεὶ οὖν ὑπέκειτο μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ *ΓΑ*. λελάφθω οὖν ὅ τε κύλινδρος ὁ ἄξονα ἔχων ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ *ΒΔ*, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν *ΑΓ*, καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ *Β* σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν *ΑΓ*· ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν καὶ ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος οὗ κορυφὰ τὸ *Β*, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ *ΔΗ* ποτὶ τὰν *ΔΖ*· ἴσα δὲ ἔστω ἁ *ΖΗ* τᾷ *ΘΖ*.

λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ *Ψ*, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ *ΔΗ* ποτὶ τὰν *ΔΖ*. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ *Ψ* κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐνέγραψα δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περι-
H 428 έγραψα ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ *Ψ* κώνου. ὁμοίως δὴ τῷ προτέρῳ δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ *Ψ* κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυ-

ψεως τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι τὸ σχῆμα ἐτμήθη δι' ἐπιπέδου μὴ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ τομὴ εἶναι ἔλλειψις καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΓΑ (θ. 14). Ἂς ληφθῇ λοιπὸν καὶ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων ἄξονα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΔ, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ κεῖται ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, καὶ ὁ κῶνος ὁ ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Β, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁποίου θὰ κεῖται ἡ ἔλλειψις ἡ περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ· θὰ ὑπάρξῃ λοιπὸν κυλινδρικός τις τόμος ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν καὶ ἀπότμημα κώνου ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἔστω δὲ ἴση ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΘΖ.

Ἂς ληφθῇ λοιπὸν κῶνός τις, ὅπου τὸ γράμμα Ψ, πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἔχων τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ. Ἐὰν λοιπὸν δὲν εἶναι ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον Ψ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον. Ἐγγράφω λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς στερεὸν σχῆμα καὶ ἄλλο περιγράφω ἀποτελούμενον ἐκ κυλινδρικῶν τόμων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς τοῦ κώνου Ψ (θ. 20). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς προηγουμένως, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κώνου Ψ καὶ ὁ κυλινδρικὸς τόμος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Δὲν θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς μεγα-

λίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου μεῖζον.

ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν δὴ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

λα'

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις
H 430 *τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα.*

τετμάσθω τι σφαιροειδές, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ ΒΔ, λύτερον τοῦ κώνου Ψ.

Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, μικρότερον. Ἄς ἐγγραφῇ λοιπὸν πάλιν εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο ἃς περιγραφῇ, ἀποτελούμενα ἐκ κυλινδρικῶν τόμων ἐχόντων ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ὑπερέχει ὁ κῶνος Ψ τοῦ τμήματος. Πάλιν λοιπὸν ἀποδεικνύεται διὰ τῶν αὐτῶν συλλογισμῶν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κώνου Ψ καὶ ὁ κυλινδρικὸς τόμος ὁ ἔχων βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔχει μικρότερον λόγον ἢ πρὸς τὸν κῶνον Ψ· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Δὲν θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τμῆμα οὔτε μικρότερον τοῦ κώνου. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθῇ.

31

Παντὸς σφαιροειδοῦς σχήματος τμηθέντος δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μικροτέρου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μικροτέρου τμήματος.

Ἄς τμηθῇ σφαιροειδές τι, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δέ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἔστω ἡ ΒΔ, ἡ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ· θὰ εἶναι δὲ αὐτὴ τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ ΓΑ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δὲ αὕτα ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ΒΔ· ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων, οὗ κορυφὰ τὸ Β, καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ Θ. ποτικείσθω δὴ ἁ ΔΗ τᾷ ΔΘ ἴσα καὶ ἁ ΒΖ τᾷ αὐτᾷ ἴσα· δεικτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

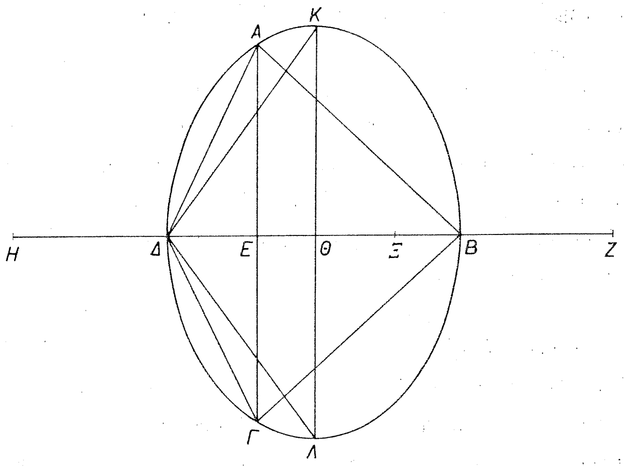
τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ Δ σαμεῖον· ἔστιν δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμάματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· δέδεικται γὰρ ταῦτα· τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὲ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν
H 432 βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΕΔ, καὶ ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ· ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΘΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΕΔ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΞΔ ποτὶ τὰν ΘΔ· ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ, ὃν ἁ ΔΘ ποτὶ τὰν ΔΕ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΞΔ, ΘΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΒΘΔ, καὶ ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ, ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ· ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων

κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ· ἔστω δὲ μεγαλύτερον τῶν τμημάτων ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδοῦς τὸ Θ. Ἂς πρόσκειται λοιπὸν ἡ ΔΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΘ καὶ ἡ ΒΖ ἴση πρὸς τὴν αὐτήν· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ.

Ἂς τμηθῇ λοιπὸν τὸ σφαιροειδὲς δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου κύκλου (θ. 11, γ) ἔστω κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ· εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμήματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ (θ. 18), τὸ δὲ εἰρημένον τμῆμα εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν (θ. 27)· διότι αὐτὰ ἀπεδείχθησαν· τὸ ὅλον λοιπὸν σφαιροειδὲς εἶναι τετραπλάσιον τοῦ εἰρημένου κώνου. Ὁ δὲ κῶνος οὗτος πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῆς ΘΔ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ΚΘ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ (Εὐκλ. XII, 2 καὶ θ. 11, γ)· ὁ δὲ λόγος, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΚΘ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ, εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΘΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ ('Απολλ. Ι, 21). Ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΕΔ, τοῦτον ἂς ἔχῃ ἡ ΞΔ πρὸς τὴν ΘΔ (Εὐκλ. VI, 11)· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΘΔ λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΔΕ. Ὁ λόγος δὲ ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ λόγου τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΞΔ, ΘΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΘΔ, ἐπὶ τὸν

τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ΖΕ, ΕΔ [τουτέστιν ἁ ΒΕ ποτὶ ΕΖ· τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι H 434 *καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος, οὗτος δέ ἐστιν, ὃν ἔχει ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ]· ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΞΔ [τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον], ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ, ἔχει κα καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕΔ· ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον* λόγον τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΒΘ, ΘΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ, εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον , ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ· ἔχει λοιπὸν ὁ μὲν κῶνος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ. Ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ, πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς αὐτὸ καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ [τουτέστιν ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διότι τὸ μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἀπεδείχθη, ὅτι ἔχει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδοῦς σὺν τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος, πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος, οὗτος δὲ εἶναι ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΒΕ]· ὁ κῶνος ἄρα ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς τὸ μικρότερον τοῦ ἡμίσεος, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ (Εὐκλ. V, 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς πρὸς τὸν κῶνον τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΞΔ [διότι ἑκάτερον εἶναι τετραπλάσιον], ὁ δὲ κῶνος ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς τμῆμα, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον

τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕΔ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ περιεχομένῳ καὶ τῷ ὑπὸ
H 436 *τᾶν ΖΕ, ΞΕ· ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα*



τὰν αὐτὰν αὐτῷ καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕΔ [τὸν γὰρ αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ], ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμάματι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν· ἔχει οὖν κα τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ, καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτοῦ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ (Εὐκλ. V, 22)· ὥστε καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ (Εὐκλ. V, 17)· Ὑπερέχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ, κατὰ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΕΗ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΞΕ· ἔχει ἄρα τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ μικρότερον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων, τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΞΔ, ΕΗ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΞΕ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ. Τὸ δὲ μικρότερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς αὐτὸ καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ [διότι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον , ὃν ἔχει ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΒΕ], ὁ δὲ κῶνος ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ· διότι οἱ κῶνοι ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ὑψῶν, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν (Εὐκλ. XII, 14)· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸ λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων, τοῦ ἑνὸς πλευρῶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τοῦ ἄλλου πλευρῶν ΖΕ, ΞΕ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ (Εὐκλ. V, 22). Οὗτος δὲ ὁ λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν *κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ. οὗτος δὲ ὁ αὐτός ἐστι τῷ, ὃν ἔχει ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ· τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΕ, ΖΕ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ· ἁ γὰρ ΞΕ ποτὶ τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ διὰ τὸ ἀνάλογόν τε εἶμεν τὰς ΞΔ, ΘΔ, ΔΕ, καὶ τὰν ΘΔ ἴσαν εἶμεν τᾷ ΗΔ· καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις τῷ τε ὑπὸ* H 438 *τᾶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΕΒ τετράγωνον ἴσον ἐντὶ ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς ΒΘ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ περιεχομένῳ, ἁ δὲ ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ, ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΒΘ, ΒΖ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.*

λβʹ

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς μηδὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα

ΕΔ· διότι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΕΗ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΕΔ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΕ, ΖΕ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΘΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ· διότι ἡ ΞΕ πρὸς τὴν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ, διότι αἱ ΞΔ, ΘΔ, ΔΕ εἶναι ἀνάλογοι καὶ ἡ ΘΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο ὀρθογωνίων, τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ΞΔ, ΕΗ καὶ τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ΖΕ, ΞΕ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων, τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ΞΔ, ΕΔ καὶ τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ΖΕ, ΘΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ. Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΕΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων, τοῦ ἑνὸς πλευρῶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τοῦ ἄλλου πλευρῶν ΖΕ, ΘΕ· διότι τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΕΔ, ἡ δὲ ὑπεροχή, καθ' ἣν τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΘ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΘΕ, ἐπειδὴ αἱ ΒΘ, ΒΖ εἶναι ἴσαι· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ.

32

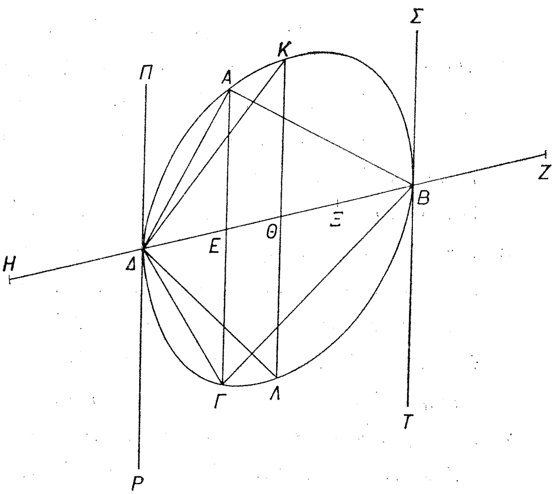
Καὶ τώρα, ἐὰν τὸ σφαιροειδὲς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος οὔτε διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτοῦ πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμημάτων, σὺν τὸν ἄξονα τοῦ μικροτέρου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μικροτέρου τμήματος.

αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος.

τετμάσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ ΓΑ
H 440 εὐθεῖα, παρὰ δὲ τὰν ΑΓ ἄχθωσαν αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἀνεστακέτω ἀπ᾽ αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ Β, Δ. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γενομένων τμαμάτων ἁ ΒΔ· πεσεῖται δ᾽ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου· καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, μεῖζον δὲ ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τὸ τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτικείσθω δὲ ἁ ΔΗ ἴσα τᾷ ΔΘ καὶ ἁ ΒΖ τᾷ αὐτᾷ. δεικτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παραλλήλῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμαμα κώνου κορυφὰν ἔχον τὸ Δ σαμεῖον, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ΔΘ ποτὶ τὰν ΕΔ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΞΔ ποτὶ τὰν ΘΔ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον

Ἂς τμηθῇ τὸ σφαιροειδὲς δι' ἐπιπέδου, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὴ ἔστω ἡ ἔλλειψις ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΑ, παράλληλοι δὲ πρὸς τὴν ΑΓ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ καὶ ἂς ὑψωθῶσιν ἀπ' αὐτῶν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΓ· θὰ ἐφάπτωνται δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδοῦς κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ καὶ θὰ εἶναι κορυφαὶ τῶν τμημάτων τὰ Β, Δ. Ἂς ἀχθῇ τώρα ἡ συνδέουσα τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων εὐθεῖα ἡ ΒΔ· θὰ διέλθῃ δὲ αὕτη διὰ τοῦ κέντρου· καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, τὸ



δὲ τμῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ Β, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδοῦς, ἂς πρόσκειται δὲ ἡ ΔΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΘ καὶ ἡ ΒΖ ἴση πρὸς τὴν αὐτήν. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς τὸ μεγαλύτερον πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ σφαιροειδὲς δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου παραλλήλου πρὸς τὸ διὰ τῆς ΑΓ διερχόμενον *δειχθήσεται τό τε ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ* H 412 *κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ, καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ τμᾶμα τό, ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ· ἕξει οὖν τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΞΔ· τετραπλάσιον γὰρ ἑκατέρου ἑκάτερον· τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ· ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ [τοῦ σφαιροειδέος] τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ· αὐτὸ δὲ τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον* H 444 *τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ [δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ]· τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ* ἐπίπεδον, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς ἀπότμημα κώνου ἔχον κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ, καὶ ὃν λόγον ἔχει ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΔ, τοῦτον ἂς ἔχῃ ἡ ΞΔ πρὸς τὴν ΘΔ. Ὁμοίως, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον, ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εὑρισκόμενον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ, καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ἐγγραφῆ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ (Εὐκλ. V, 22). Θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΞΔ· διότι ἑκάτερον εἶναι τετραπλάσιον ἑκατέρου· τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΔ, ΒΘ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτοῦ [τοῦ σφαιροειδοῦς] τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ (Εὐκλ. V, 22)· αὐτὸ δὲ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ (Εὐκλ. V, 17).

ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ μείζονι τμάματι ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· τὰ γὰρ ἀποτμάματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τὸν τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν· τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τῷ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΒ· ἔχει οὖν καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΗΖ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕΔ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· ὁ δὲ λόγος οὗτος ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθείη κα ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ, ὃν ἔχει ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

Τὸ δὲ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτό, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ [διότι ἀπεδείχθη, ὅτι ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΒΕ]· τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΕ, ΕΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ· διότι τὰ εἰρημένα ἀποτμήματα τῶν κώνων ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ὑψῶν, ἐπειδὴ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΒ· ἔχει λοιπὸν καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τοῦ σφαιροειδοῦς πρὸς τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΗΖ, ΞΔ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΖΕ, ΕΔ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΕ (Εὐκλ. V, 22)· ὁ λόγος δὲ οὗτος, ὁμοίως ὡς προηγουμένως, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΔ.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

2

Ἔστω τὰ ὁμοειδῆ μεγέθη $ΑΒ > Δ = ΒΓ$, τυχοῦσα εὐθεῖα ΖΗ καὶ $ΑΒ - ΒΓ = ΑΓ$. Εὑρίσκει ἀριθμὸν ν, ὥστε (1) $νΑΓ = ΑΘ > Δ$ καὶ (2) $νΕΗ = ΖΗ$, $(ΕΗ + ΗΖ = ΕΖ)$. Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $\frac{ΑΘ}{ΑΓ} = \frac{ΖΗ}{ΕΗ}$, καὶ δι᾽ ἀντιστροφῆς $\frac{ΕΗ}{ΗΖ} = \frac{ΑΓ}{ΑΘ}$, (3). Ἐπειδὴ $ΑΘ > Δ = ΒΓ$ λαμβάνομεν $\frac{ΑΓ}{ΑΘ} < \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$, (4).
Ἐκ τῶν (3, 4) ἔχομεν $\frac{ΕΗ}{ΗΖ} < \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ καὶ διὰ συνθέσεως
$\frac{ΕΗ + ΗΖ}{ΗΖ} < \frac{ΑΓ + ΒΓ}{ΒΓ}$ ἢ $\frac{ΕΖ}{ΗΖ} < \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τοῦ θεωρήματος ἔχει ὡς ἑξῆς· Δίδεται ὁ λόγος $\frac{α}{β}$, ὅπου $α > β$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ λόγος μικρότερος τοῦ δοθέντος. Ὁ λόγος οὗτος θὰ εἶναι $\frac{α + 1}{β + 1} < \frac{α}{β}$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Κατὰ τὸ ἀξίωμα (5) (τῆς συνεχείας) εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῆ ἀριθμός τις ν, ὥστε $(α - β)ν > β$. Ἔστω $(α - β)ν = ρ$, (1). Λαμβάνει τυχόντα ἀκέραιον λ καὶ σχηματίζει τὸ ν πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ἔστω $λν = κ$, (2). Ἐκ τῶν (1, 2) λαμβάνει $\frac{ρ}{α - β} = \frac{κ}{λ}$ ἢ $\frac{(α - β)ν}{α - β} = \frac{λν}{λ}$, (3). Καὶ δι᾽ ἀντιστροφῆς εἶναι $\frac{α - β}{(α - β)ν} = \frac{λ}{λν}$, (4). Ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (4) λαμβάνεται $\frac{α - β}{(α - β)ν} < \frac{α - β}{(ν - 1)\ (α - β)}$, (5). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) εἶναι $\frac{λ}{λν} < \frac{1}{ν - 1}$ καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης εἶναι $\frac{λ + λν}{λν} < \frac{1 + ν - 1}{ν - 1}$ ἢ $\frac{ν + 1}{ν} < \frac{ν}{ν - 1}$.

3

Ἐὰν ἡ γωνία ΤΗΓ ἦτο ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΛΚΜ τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΤΗΚ, ΛΚΜ θὰ ἦσαν ὅμοια. Ἐπὶ τῆς ΛΜ ἔστω σημεῖόν τι Ν (ΛΝ$<$ΛΜ) πρὸς ὃ ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΚΝ, ὥστε ἡ γωνία ΛΚΝ = γωνίαν ΤΗΓ, ὁπότε λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΛΚΝ, ΤΗΓ θὰ εἶναι $\frac{\text{ΚΝ}}{\text{ΛΚ}}=\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΤΗ}}$, Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πλευρὰ ΚΜ $>$ ΚΝ, ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος λαμβάνεται $\frac{\text{ΚΜ}}{\text{ΛΚ}}>\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΤΗ}}$.

Ἐφαρμόζοντες τὸ προηγούμενον θεώρημα πρῶτον εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\frac{\lambda\nu+1}{\lambda\nu}<\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπου λ τυχὼν ἀκέραιος $>$ ο καὶ ν ὁσονδήποτε μεγάλος. (σημ.: Ὁ λόγος $\frac{\lambda\nu+1}{\lambda\nu}$, δυνατὸν νὰ εἶναι ὁσονδήποτε μικρός, πρόκειται περὶ ἀπειροστικῆς σχέσεως). Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον τὴν λν καὶ ὑποτείνουσαν τὴν λν+1. Ὑποδιαιροῦμεν τὴν ὀρθὴν ἐπίκεντρον γωνίαν τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς $\frac{1}{2^{\nu}}$ μέρη (ν = 1, 2, 3 . . . .) λαμβάνοντες τὸ ν τόσον μεγάλο, ὥστε νὰ λάβωμεν γωνίαν μικροτέραν τοῦ διπλασίου τῆς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν λν, λν + 1 σχηματισθείσης, κλπ.

4

Διχοτομεῖται μὴ ὀρθὴ γωνία καὶ ὄχι ὀρθή, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα.

5

Ἔστω τὰ μεγέθη Ε $>$ Ζ καὶ δύο εὐθεῖαι Γ $>$ Δ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Gamma}{\Delta}<\frac{\text{Ε}}{\text{Ζ}}$, (1). Τῶν εὐθειῶν Γ, Δ λαμβάνει μέσην ἀνάλογον, τὴν Η, ὁπότε

$\frac{\Gamma}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{H}}{\Delta}$, (2), καὶ $\Gamma > \mathrm{H}$ (διότι ἐκ τῆς (2) εἶναι $\Gamma.\Delta = \mathrm{H}^2$ καὶ ἐπειδὴ $\Gamma > \Delta$ εἶναι $\Gamma^2 > \mathrm{H}^2$, $\Gamma > \mathrm{H}$). Περιγράφει εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον Π, πλευρᾶς α, καὶ ἐγγράφει ὅμοιον πολύγωνον Ε, πλευρᾶς β, ὥστε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\Gamma}{\mathrm{H}}$ (κατὰ τὸ θ. 3). Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{\Gamma^2}{\mathrm{H}^2}$, (3). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\Pi}{\mathrm{E}}$, (4). Ἐκ τῆς (2) διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ $\frac{\Gamma}{\mathrm{H}}$ λαμβάνεται $\frac{\Gamma^2}{\mathrm{H}^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (5) (Εὐκλ. V ὁρισ. 9). Ἐκ τῶν (3, 4, 5) ἕπεται $\frac{\Pi}{\mathrm{E}} < \frac{\Gamma}{\Delta}$. Καὶ κατὰ μείζονα λόγον ἐκ τῆς (1) ἕπεται $\frac{\Pi}{\mathrm{E}} < \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}$.

6

Δεδόσθω . . . Ἔστω κύκλος ὁ Α καὶ χωρίον τὸ Β, ὁπότε εἶναι $\mathrm{A}+\mathrm{B}>\mathrm{A}$. Περιγράφει εἰς τὸν κύκλον πολύγωνα (Π) καὶ ἐγγράφει ὅμοια (Ε), ὥστε νὰ ἔλθῃ στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν $\frac{\Pi}{\mathrm{E}} < \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, (1). Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὰ προηγούμενα. Ἐπειδὴ $\mathrm{E} < \mathrm{A}$, ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον ἐκ τῆς (1), $\frac{\Pi}{\mathrm{A}} < \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, (2). Καὶ ἐκ τούτου (Εὐκλ. V, ὁρισμ. 15) θὰ εἶναι $\frac{\Pi - \mathrm{A}}{\mathrm{A}} < \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ ἢ $\Pi - \mathrm{A} < \mathrm{B}$, ἤτοι τὰ μεταξὺ κύκλου καὶ περιγραφέντος πολυγώνου ἀπομένοντα τμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Β. Ἢ καὶ ἄλλως. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $\Pi < \mathrm{A} + \mathrm{B}$. Ἐὰν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἀφαιρεθῇ ὁ κύκλος Α θὰ ἔχωμεν : Ἀπομένοντα τμήματα μεταξὺ κύκλου καὶ περιγραφέντος πολυγώνου $<$ χωρίου Β.

9

Τρίγ. ΑΒΔ + τρίγ. ΒΔΓ $>$ τριγ. ΑΔΓ.

Ἔστω τρίγ. ΑΒΔ + τρίγ. ΒΔΓ — τρίγ. ΑΔΓ = Θ, (1). Ἔστω πρῶτον Θ = πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΕΒ + ΒΖΓ, (2). Ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ΑΔΒ + κυκλ. τμ. ΑΕΒ ⟩ τριγ. ΑΔΒ (ἀξ. 3). Ἐπίσης κων. ἐπιφ. ΒΔΓ + κυκλ. τμ. ΒΖΓ ⟩ τριγ. ΒΔΓ. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν κων. ἐπιφ. ΑΔΒ + κων. ἐπιφ. ΒΔΓ + κυκλ. τμ. ΑΕΒ + κυκλ. τμ. ΒΖΓ ⟩ τριγ. ΑΔΒ + τριγ. ΒΔΓ, (3). Ἀντικαθιστῶντες τὸ β′ μέλος ταύτης ἐκ τῆς (1) καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν κων. ἐπιφ. ΑΔΒ + κων. ἐπιφ. ΒΔΓ + Θ ⟩ τρίγ. ΑΔΓ+Θ ἢ κων. ἐπιφ. ΑΔΒ + κων. ἐπιφ. ΒΔΓ ⟩ τριγ. ΑΔΓ.

Ἔστω δεύτερον Θ ⟨ κυκλ. τμημ. ΑΒ + ΒΓ. Διὰ συνεχοῦς διχοτομίας τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ λαμβάνομεν Θ ⟩ κυκλ. τμημ. ΑΕ + ΕΒ + ΒΖ + ΖΓ, (4). Ἡ κων. ἐπιφ. ΑΔΕ + κυκλ. τμ. ΑΕ ⟩ τριγ. ΑΔΕ (κατὰ τὸ προηγούμενον), καὶ κων. ἐπιφ. ΕΔΒ + κυκλ. τμ. ΕΒ ⟩ τριγ. ΕΔΒ. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν κων. ἐπιφ. ΑΔΕ + ΕΔΒ + κυκλ. τμ. ΑΕ + ΕΒ ⟩ τριγ. ΑΔΕ + ΕΔΒ. Ἐπειδὴ δὲ τρίγ. ΑΔΕ + ΕΔΒ ⟩ τριγ. ΑΒΔ, θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον κων. ἐπιφ. ΑΔΒ + κυκλ. τμ. ΑΕ + ΕΒ ⟩ τριγ. ΑΒΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι κων. ἐπιφ. ΒΔΓ + κυκλ. τμ. ΒΖ + ΖΓ ⟩ τριγ. ΒΔΓ. Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν, κων. ἐπιφ. ΑΔΓ + κυκλ. τμ. ΑΕ + ΕΒ + ΒΖ + ΖΓ ⟩ τριγ. ΑΒΔ + τριγ. ΒΔΓ. Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνισότητος ταύτης ἐκ τῆς (1) ἔχομεν κων. ἐπιφ. ΑΔΓ + κυκλ. τμ. ΑΕ + ΕΒ + ΒΖ + ΖΓ ⟩ τριγ. ΑΔΓ + Θ. Κατὰ μείζονα λόγον εἶναι ἐκ τῆς (4), κων. ἐπιφ. ΑΔΓ + κυκλ. τμ. ΑΕ + ΕΒ + ΒΓ + ΖΓ ⟩ τριγ. ΑΔΓ + κυκλ. τμ. ΑΕ + ΕΒ + ΒΖ + ΖΓ. Ἑπομένως εἶναι κων. ἐπιφ. ΑΔΓ ⟩ τριγ. ΑΔΓ.

13

Ἔστω κύκλος Α βάσις ὀρθοῦ κυλίνδρου, διάμετρος κύκλου Α = ΓΔ καὶ ὕψος κυλίνδρου = ΕΖ. Τῶν ΓΔ, ΕΖ λαμβάνει μέσην ἀνάλογον Η, ὥστε ΓΔ : Η = Η : ΕΖ, (1), καὶ ἔστω κύκλος Β, ἀκτῖνος Η. Πρέπει νὰ δειχθῇ Β = κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου. Ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι Β μικρότερος ἢ μεγαλύτερος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

1. Ἔστω πρῶτον μικρότερος. Ἐγγράφει εἰς τὸν κύκλον Β κανονικὸν πολύγωνον Ε καὶ περιγράφει ὅμοιον Π, ὥστε

$\frac{\Pi}{\mathrm{E}} < \frac{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κυλίνδρου}}{\text{κύκλος Β}}$, (2).

Εἰς τὴν βάσιν Α τοῦ κυλίνδρου περιγράφει πολύγωνον Σ ὅμοιον πρὸς τὸ εἰς τὸν Β περιγεγραμμένον καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τούτου ἀναγράφει περὶ τὸν κύλινδρον πρίσμα. Ἔστω ΚΔ = ΛΖ = περίμετρος τοῦ περὶ τὸν κύκλον Α πολυγώνου Σ καὶ $\Gamma\mathrm{T} = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$, (3). Εἶναι ἑπομένως, τρίγωνον ΚΔΤ = πολύγωνον περὶ Α, (4). Τὸ παραλληλόγραμμον ΕΛ = παράπλ. ἐπιφ. πρίσματος περὶ τὸν κύλινδρον, καὶ ἔστω ΕΡ = ΕΖ. Ἑπομένως παραλ. ΕΛ = τρίγ. ΖΡΛ = παράπλ. ἐπιφ. πρίσματος περὶ τὸν κύλινδρον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν περὶ τοὺς κύκλους Α, Β πολυγώνων τῶν Σ, Π εἶναι $\frac{\Sigma}{\Pi} = \frac{\mathrm{T}\Delta^2}{\mathrm{H}^2}$ (ΤΔ = ἀκτὶς κύκλου Α, Η ἀκτὶς κύκλου Β). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) εἶναι $\frac{\text{τρίγ. ΚΔΤ}}{\Pi} = \frac{\mathrm{T}\Delta^2}{\mathrm{H}^2}$, (5). Ἀλλὰ $\frac{\mathrm{T}\Delta^2}{\mathrm{H}^2} = \frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{PZ}}$, (6), (διότι ἐκ τῶν σχέσεων $\Gamma\Delta = 2\mathrm{T}\Delta$ καὶ $\mathrm{PZ} = 2\mathrm{EZ}$ ἕπεται $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{T}\Delta} = \frac{\mathrm{PZ}}{\mathrm{EZ}}$, $\Gamma\Delta \times \mathrm{EZ} = \mathrm{T}\Delta \times \mathrm{PZ}$, (7). Ἐκ τῶν (1, 7) ἔχομεν $\mathrm{T}\Delta \times \mathrm{PZ} = \mathrm{H}^2$, ἤτοι $\frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{PZ}}$. Διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης ἐπὶ $\frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{H}}$ λαμβάνει $\frac{\mathrm{T}\Delta^2}{\mathrm{H}^2} = \frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{PZ}}$, ἤτοι τὴν (6)) Ἀλλὰ $\frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{PZ}} = \frac{\text{τρίγ. ΚΔΤ}}{\text{τρίγ. ΡΛΖ}}$ (ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ εἶναι ὡς τὰ ὕψη), (8). Ἐκ τῶν (5, 6, 8) λαμβάνει $\frac{\text{τρίγ. ΚΔΤ}}{\Pi} = \frac{\text{τρίγ. ΚΔΤ}}{\text{τρίγ. ΡΛΖ}}$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται Π = τρίγ. ΡΛΖ, ἤτοι τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Β πολύγωνον = παράπλευρος ἐπιφάνεια πρίσματος περὶ τὸν κύλινδρον. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνει

$$\frac{\text{παράπλ. ἐπιφ. πρίσματος}}{\mathrm{E}} < \frac{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κυλίνδρου}}{\text{κύκλος Β}},$$

καὶ ἐναλλὰξ $\frac{\text{παράπλ. ἐπιφ. πρίσματος}}{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κυλίνδρου}} < \frac{\mathrm{E}}{\text{κύκλος Β}}$,

ὅπερ ἀδύνατον, διότι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν παράπλ. ἐπιφ. πρίσματος > κυρτὴ ἐπιφ. κυλίνδρου καὶ Ε < κύκλου Β. Ἀποκλείεται λοιπὸν νὰ εἶναι Β < κυρτῆ. ἐπιφ. κυλίνδρου.

2. Ἔστω δεύτερον ὁ κύκλος Β $\rangle$ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐγγράφει εἰς τὸν κύκλον Β πολύγωνον κανονικὸν Ε καὶ περιγράφει ὅμοιον Π. Εἰς τὸν κύκλον Α τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐγγράφει πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Ε, ἔστω τὸ Μ, καὶ ἐκ τοῦ Μ ἀναγράφει πρίσμα ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον. Ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν Π καὶ Ε πολυγώνων λαμβάνεται τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\text{Π}}{\text{Ε}} \langle \frac{\text{Β κύκλος}}{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κυλίνδρου}}$, (1). Ἡ περίμετρος τοῦ Μ ἔστω πάλιν ΚΔ = ΖΛ. Ἑπομένως θὰ εἶναι ΚΤΔ $\rangle$ Μ, (2), ἐπειδὴ εἰς τὸ Μ τὸ ἀπόστημα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος. ΕΖ = ΕΡ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐγγεγρ. πρίσματος. Τὸ παραλληλόγραμμον ΕΛ = παράπλευρος ἐπιφ. ἐγγεγρ. πρίσματος = ΡΛΖ, (3). Ἐπειδὴ τὰ εἰς τοὺς κύκλους Α, Β ἐγγεγρ. πολύγωνα Μ, Ε εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $\frac{\text{Μ}}{\text{Ε}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\text{ΓΔ}\right)^2}{\text{Η}^2} = \frac{\text{ΤΔ}^2}{\text{Η}^2}$, (4). Ἀλλὰ $\frac{\text{ΚΤΔ}}{\text{ΖΡΛ}} = \frac{\text{ΤΔ}^2}{\text{Η}^2}$, (5), [ἐκ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως (1) σχέσεις (8, 6)].

Ἐκ τῶν (4, 5) λαμβάνει $\frac{\text{Μ}}{\text{Ε}} = \frac{\text{ΚΤΔ}}{\text{ΖΡΛ}}$. Εἶναι δὲ Μ $\langle$ ΚΤΔ (ἐκ τῆς (2)). Θὰ εἶναι ἄρα καὶ Ε $\langle$ ΖΡΛ. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) θὰ εἶναι Ε $\langle$ παράπλ. ἐπιφ. ἐγγεγρ. πρίσματος (6). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ἐκ τῆς σχέσεως (1) καὶ τῆς ὑποθέσεως κύκλος Β $\rangle$ κυρ. ἐπιφ. κυλίνδρου εἶναι Π $\rangle$ Β $\rangle$ Ε $\rangle$ κυρτὴ ἐπιφ. κυλίνδρου. Εἶναι δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου $\rangle$ παράπλ. ἐπιφ. ἐγγεγρ. εἰς αὐτὸν πρίσματος. Ἑπομένως κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι Π $\rangle$ Β $\rangle$ Ε $\rangle$ παράπλ. ἐπιφάν. ἐγγεγρ. πρίσματος καὶ ἡ (6) εἶναι ἄτοπος.

14

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ἔχων βάσιν κύκλον Α ἀκτῖνος Γ, γενέτειρα τοῦ κώνου ἡ Δ καὶ $\frac{\text{Γ}}{\text{Ε}} = \frac{\text{Ε}}{\text{Δ}}$, (1) καὶ κύκλος Β ἀκτῖνος Ε.

Ἐὰν ὁ κύκλος Β δὲν εἶναι ἴσος πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου θὰ εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος.

1. Ἔστω πρῶτον μικρότερος. Εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγράφει κανονικὸν

πολύγωνον Π_1 καὶ περιγράφει ὅμοιον Π_2, ὥστε $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} < \frac{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κώνου}}{\text{κύκλος B}}$, (2). Ἂς νοηθῇ περὶ τὸν κύκλον Α ὅμοιον πρὸς τὸ εἰς τὸν κύκλον Β περιγεγραμμένον πολύγωνον Μ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἂς ἀνυψωθῇ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν μὲ τὸν κῶνον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων Μ καὶ Π_2 εἶναι $\frac{M}{\Pi_2} = \frac{\Gamma^2}{E^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (3) (διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (1) ἐπὶ $\frac{\Gamma}{E}$). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγρ. πολυγώνου Μ, ἂν ἡ πλευρά του εἶναι β καὶ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν n, εἶναι $M = \frac{\beta.\Gamma.n.}{2}$, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς περιγεγραμμένης πυραμίδος, βάσεως Μ, ὕψους ἑνὸς τριγώνου αὐτῆς Δ (γεν. κώνου) εἶναι $= \frac{\beta.\,\Delta.\,n.}{2}$. Διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνει $\frac{M}{\text{παράπλ. ἐπιφ. πυραμίδος}} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (4). Ἐκ τῶν (3, 4) λαμβάνει $\frac{M}{\Pi_2} = \frac{M}{\text{παράπλ. ἐπιφ. περ. πυραμίδος}}$, (5), ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται Π_2 = παράπλ. ἐπιφ. περιγ. πυραμίδος, (6). Ἐκ τῶν (2, 6) λαμβάνει $\frac{\text{παράπλ. ἐπιφ. περ. πυραμίδος}}{\Pi_1} < \frac{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κώνου}}{\text{κύκλος B}}$, ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἡ παράπλ. ἐπιφ. περιγ. πυραμίδος > κυρτῆς ἐπιφ. κώνου, τὸ δὲ εἰς τὸν κύκλον Β ἐγγεγραμμ. πολύγωνον Π_1 < Β. Ὥστε δὲν εἶναι μικρότερος ὁ κύκλος Β τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

2. Ἔστω τώρα μεγαλύτερος. Ἐγγράφει εἰς τὸν κύκλον Β πολύγωνον κανονικὸν Π_1 καὶ περιγράφει ὅμοιον Π_2, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Pi_2}{\Pi_1} < \frac{\text{B κύκλος}}{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κώνου}}$, (1). Εἰς τὸν κύκλον Α (βάσεως τοῦ κώνου) ἐγγράφει ὅμοιον πολύγωνον M_1, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀναγράφει πυραμίδα ἐγγεγραμμένην εἰς τὸν κῶνον. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν M_1, Π_1 λαμβάνει $\frac{M_1}{\Pi_1} = \frac{\Gamma^2}{E^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (2) [ὡς εἰς προηγουμένην περίπτωσιν 1, (3)]. Εἶναι δὲ $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{M_1}{\text{παράπλ. ἐπιφ. ἐγγεγρ. πυραμίδος}}$, (3). Διότι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγ.

πολυγ. M_1, ἀποστήματος σ, θὰ εἶναι $M_1 =$ περίμετρος πολυγ. $M_1 . \frac{1}{2}$ ἀποστήματος σ, καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον πυραμίδος, βάσεως M_1 καὶ ἀποστήματος τ θὰ εἶναι = περίμετρος πολυγ. $M_1 . \frac{1}{2}$ ἀποστήματος τ. Ἑπομένως εἶναι $\frac{M_1}{\text{παράπλ. ἐπιφ. ἐγγεγρ. πυραμίδος}} = \frac{\text{ἀπόστημα } \sigma}{\text{ἀπόστημα } \tau}$, (4).

Ἀλλὰ $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\text{ἀπόστημα } \sigma}{\text{ἀπόστημα } \tau}$, (5). Ἐκ τῶν (4, 5) λαμβάνεται ἡ (3).

(Ἐὰν καλέσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγρ. πολυγώνου 2λ θὰ ἔχωμεν ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τῆς βάσεως $\Gamma^2 = \sigma^2 + \lambda^2$ καὶ ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τῆς παραπλ. ἐπιφ. τῆς ἐγγ. πυραμίδος $\Delta^2 = \tau^2 + \lambda^2$. Διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνεται $\frac{\Gamma^2}{\Delta^2} = \frac{\sigma^2+\lambda^2}{\tau^2+\lambda^2}$. Ἐκ ταύτης ἕπεται $\frac{\Gamma^2}{\Delta^2} > \frac{\sigma^2}{\tau^2}$ καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\sigma}{\tau}$, ἡ (5). Ὑποτίθεται $\Gamma < \Delta$).

Ἐκ τῶν (2, 3) λαμβάνει $\frac{M_1}{\Pi_1} > \frac{M_1}{\text{παράπλ. ἐπιφ. ἐγγεγρ. πυραμίδος}}$. Ἐκ ταύτης ἕπεται παράπλ. ἐπιφ. ἐγγεγρ. πυραμίδος $> \Pi_1$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν σχέσιν (1) ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον ἡ ἀνισότης $\frac{\Pi_2}{\text{παράπλ. ἐπιφ. ἐγγ. πυραμίδος}} < \frac{B}{\text{κυρτὴ ἐπιφ. κώνου}}$. Ὅπερ ἀδύνατον· διότι τὸ μὲν περιγεγραμμένον πολύγωνον $\Pi_2 > B$, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος εἶναι < τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ κύκλος B τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἀφοῦ δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος, εἶναι ἄρα ἴσος.

15

Βάσις τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἔστω ὁ κύκλος A ἀκτῖνος B καὶ γενέτειρα τοῦ κώνου ἡ Γ. Λαμβάνει τῶν Γ, B μέσην ἀνάλογον τὴν E, $\frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{B}$, (1). Κύκλος Δ ἀκτῖνος E εἶναι κατὰ τὸ προηγ. θεώρ. (14) ἴσος πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Εἶναι δὲ $\frac{\Delta}{A} = \frac{E^2}{B^2}$, (2). Ἐκ τῆς (1), διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ $\frac{Ε}{Β}$, λαμβάνεται $\frac{Ε^2}{Β^2} = \frac{Γ}{Β}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνει $\frac{Δ}{Α} = \frac{Γ}{Β}$.

16

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κολούρου κώνου ἰσοῦται μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς πλευρᾶς τοῦ κολούρου κώνου καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων. Ἔστω $α_1$ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ πρὸς τὸν ὁποῖον ἰσοῦται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΒΔΕ, καὶ $α_2$ ἡ ἀκτὶς κύκλου Λ πρὸς τὸν ὁποῖον ἰσοῦται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΒΑΓ. Κατὰ τὸ θ. 14 εἶναι $\frac{ΒΔ}{α_1} = \frac{α_1}{ΔΖ}$ ἢ $α_1{}^2 = ΒΔ \times ΔΖ$ καὶ $\frac{ΒΑ}{α_2} = \frac{α_2}{ΑΗ}$ ἢ $α_2{}^2 = ΒΑ \times ΑΗ$ (1). Τὸ ὀρθογώνιον $ΒΑ \times ΑΗ = (ΒΔ + ΑΔ) \times ΑΗ = ΒΔ \times ΑΗ + ΑΔ \times ΑΗ$, (2). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΑΗ, ΒΔΖ ἔχομεν $ΒΑ : ΒΔ = ΑΗ : ΔΖ$ ἢ $ΒΑ \times ΔΖ = ΒΔ \times ΑΗ$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $ΒΑ \times ΑΗ = ΒΑ \times ΔΖ + ΑΔ \times ΑΗ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΒΑ = ΒΔ + ΑΔ$ θὰ ἔχωμεν $ΒΑ \times ΑΗ = (ΒΔ + ΑΔ)ΔΖ + ΑΔ \times ΑΗ = ΒΔ \times ΔΖ + ΑΔ \times ΔΖ + ΑΔ \times ΑΗ = ΒΔ \times ΔΖ + ΑΔ(ΔΖ + ΑΗ)$.

17

Ἐπειδὴ βάσις κώνου ΑΒΓ = κυρ. ἐπιφ. κώνου ΔΕΖ, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\text{βάσις κών. ΑΒΓ}}{\text{βάσις κών. ΔΕΖ}} = \frac{\text{κυρ. ἐπιφ. κών. ΔΕΖ}}{\text{βάσις κών. ΔΕΖ}}, \quad (1).$$

Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου ἰσοδυνάμου πρὸς τὴν κυρ. ἐπιφ. κών. ΔΕΖ, θὰ εἶναι κατὰ τὸ 14 θ., $ΕΔ : α = α : ΕΘ$, $α^2 = ΕΔ \times ΕΘ$, (2). Ἑπομένως κυρ. ἐπιφ. κών. $ΔΕΖ = π \times ΕΔ \times ΕΘ$, (3). Ἡ βάσις τοῦ κώνου ΔΕΘ εἶναι $= π \times ΕΘ^2$. Διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη καὶ ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν (1) λαμβάνομεν $\frac{\text{βάσις κών. ΑΒΓ}}{\text{βάσις κών. ΔΕΖ}} = \frac{ΕΔ}{ΕΘ} = \frac{ΔΘ}{ΘΚ}$, (4) (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΔΘΕ, ΔΘΚ). Ἀλλὰ ΔΘ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κώνου ΔΕΖ καὶ ΘΚ = ΑΗ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ βάσεις τῶν κώνων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν οἱ κῶνοι εἶναι ἴσοι (Λῆμμα 4, καὶ Εὐκλ. XII, 15).

19

Οἱ τρεῖς κῶνοι ΜΝΞ, ΟΠΡ, ΘΚΛ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΖΗ. Ἐπειδὴ κυρτὴ ἐπιφ. κώνου ΑΒΓ = βάσις κώνου ΜΝΞ καὶ ὕψος τούτου ἡ ΖΗ, θὰ εἶναι κῶνος ΜΝΞ = κῶνος ΑΒΓ, (θ. 17), (1). Ἐπειδὴ κ. ἐπιφ. κώνου ΔΒΕ = βάσις κώνου ΟΠΡ καὶ ὕψος τούτου ἡ ΖΗ, θὰ εἶναι κῶνος ΟΠΡ = ρόμβος ΔΒΖΕ, (θ. 18), (2).
Κυρτὴ ἐπιφ. κών. ΑΒΓ = κυρ. ἐπιφ. κώνου ΔΒΕ + κυρ. ἐπιφ. κολούρου κώνου ΔΕΓΑ, (3). Ἀλλὰ κυρ. ἐπιφ. κών. ΑΒΓ = βάσις κώνου ΜΝΞ, κυρ. ἐπιφ. κών. ΔΒΕ = βάσις κώνου ΟΠΡ, κυρ. ἐπιφ. κολούρου κώνου ΔΕΓΑ = βάσις κώνου ΘΚΛ. Δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) ἔχομεν, βάσις κών. ΜΝΞ = βάσις κών. ΟΠΡ + βάσις κών. ΘΚΛ. Ἐπειδὴ οἱ κῶνοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος θὰ εἶναι κῶνος ΜΝΞ = κῶνος ΟΠΡ + κῶνος ΘΚΛ. Ἐκ τῶν (1, 2) λαμβάνεται κῶνος ΑΒΓ — ρόμβος ΔΒΖΕ = κῶνος ΘΚΛ.

30

Ἡ ΚΘ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας ἀκτῖνος ΧΜ, εἰς τὴν ὁποίαν περιγράφεται τὸ κανονικὸν πολύγωνον πλευρᾶς ΚΖ. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΘΚΖ, ΧΜΖ λαμβάνομεν $\frac{\Theta K}{XM} = \frac{\Theta Z}{XZ} = \frac{2XZ}{XZ} = 2$, ἐξ οὗ ΘΚ = 2ΧΜ = διάμετρος τῆς σφαίρας.

33

Ἔστω σφαῖρα ἐπιφανείας = Ε καὶ τέσσαρες μέγιστοι κύκλοι αὐτῆς = Α. Δέον ν᾽ ἀποδειχθῇ Ε = Α. Ἐὰν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, θὰ εἶναι $E \lessgtr A$.
Ἔστω πρῶτον $A < E$. Κατὰ τὸ θ. (2) εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθοῦν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι $B > \Gamma$, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{E}{A} > \frac{B}{\Gamma}$, (1). Τῶν Β, Γ λαμβάνει τὴν Δ

μέσην ἀνάλογον, $\frac{B}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Gamma}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B}{\Gamma}$, (2) (διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἐπὶ $\frac{B}{\Delta}$ Εὐκλ, V, ὁρισμ. 9). Εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας περιγράφει κανονικὸν πολύγωνον (ἀρτιόπλευρον) Π_1, πλευρᾶς λ_1, καὶ ἐγγράφει ὅμοιον πολύγωνον Π_2, πλευρᾶς λ_2, τοσούτου πλήθους πλευρῶν ἕκαστον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{B}{\Delta}$, (3). Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} < \frac{B^2}{\Delta^2}$, (4). Εἶναι δὲ $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, (5), ὁπότε ἐκ τῆς (4) εἶναι $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} < \frac{B^2}{\Delta^2}$, καὶ ἐκ τῆς (2) λαμβάνεται $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} < \frac{B}{\Gamma}$, (6). Ἐὰν κληθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου στερεοῦ (ἐκ μιᾶς περιστροφῆς τοῦ περιγ. εἰς τὸν μέγιστον κύκλον πολυγώνου πλευρᾶς λ_1) διὰ P_1 καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν στερεοῦ (πλευρᾶς τοῦ ἐγγ. πολυγ. εἰς τὸν αὐτὸν μέγ. κύκλον λ_2) διὰ P_2 θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις (κατὰ τὸ θ. 32) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, (7). Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (5, 6) λαμβάνεται $\frac{P_1}{P_2} < \frac{B}{\Gamma}$. Κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι ἐκ τῆς (1), $\frac{P_1}{P_2} < \frac{E}{A}$· ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἶναι $P_1 > E$ καὶ $P_2 < A$ (κατὰ τὸ θ. 25).

Ἔστω δεύτερον $A > E$. Λαμβάνει πάλιν δύο ἀνίσους εὐθείας $B > \Gamma$, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{A}{E} > \frac{B}{\Gamma}$, (1) καὶ τὴν Δ μέσην ἀνάλογον τῶν Β, Γ, ὥστε $B : \Delta = \Delta : \Gamma$, $\frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B}{\Gamma}$, (2). Περιγράφει κανονικὸν πολύγωνον Π_1, πλευρᾶς λ_1 εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, καὶ ἐγγράφει ὅμοιον Π_2, πλευρᾶς λ_2, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{B}{\Delta}$, (3). Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} < \frac{B^2}{\Delta^2}$, (4). Εἶναι δὲ $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, (5), ὁπότε ἐκ τῆς (4) εἶναι $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} < \frac{B^2}{\Delta^2}$, καὶ ἐκ τῆς (2), $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} < \frac{B}{\Gamma}$, (6). Ἐὰν πάλιν κληθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένου στερεοῦ P_1 καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου P_2, θὰ ἔχωμεν (κατὰ τὸ θ. 32), $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}$, (7). Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (5, 6) λαμβάνεται $\frac{P_1}{P_2} < \frac{B}{\Gamma}$. Κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι ἐκ τῆς (1) $\frac{P_1}{P_2} < \frac{A}{E}$· ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἶναι $P_1 > A$ καὶ $P_2 < E$. Ὥστε εἶναι $E = A$.

34

1. Ἔστω πρῶτον ἡ σφαῖρα $\Sigma > 4$ κῶνοι, τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς. Ἔστω δὲ κῶνος Ξ ἔχων βάσιν τετραπλασίαν τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς (ἴσος δηλ. πρὸς τοὺς 4 προηγουμένους κώνους). Εἶναι ἄρα $\Sigma > \Xi$, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. Λαμβάνει δύο εὐθείας $K > H$, ὥστε $\frac{\Sigma}{\Xi} > \frac{K}{H}$, (1). Μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Κ, Η παρεμβάλλει δύο εὐθείας Ι, Θ, ὥστε νὰ σχηματίζηται ἀριθμητικὴ πρόοδος Κ, Ι, Θ, Η (κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ κειμένου φθίνουσα ἀριθμ. πρόοδος, $K - I = I - \Theta = \Theta - H$). Εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας περιγράφει κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν νὰ διαιρῆται διὰ τέσσαρα, πλευρᾶς λ_1, καὶ ἐγγράφει ἄλλο ὅμοιον πλευρᾶς λ_2, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{K}{I}$, (2). Διὰ μιᾶς περιστροφῆς τοῦ ἐπιπέδου, ὅπου τὰ πολύγωνα, γράφεται ἡ σφαῖρα καὶ περιγεγραμμένον περὶ αὐτὴν στερεόν, ἔστω T_1, καὶ ἐγγεγραμμένον, ἔστω T_2, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3}$, (3). Ἐκ ταύτης συναρτήσει τῆς (2) εἶναι $\frac{T_1}{T_2} < \frac{K^3}{I^3}$, (4). Εἶναι δὲ $\frac{K}{H} > \frac{K^3}{I^3}$, (5).

[Τῆς σχέσεως (5) τὴν ἀπόδειξιν, ἥτις δὲν ἔχει σωθῆ, παρέχει ὁ Εὐτόκιος εἰς τὰ σχόλια τοῦ θεωρήματος τούτου, στηριζόμενος εἰς τοὺς ὁρισμοὺς 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Προτάσσομεν τὴν ἑρμηνείαν τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν τοῦ Εὐκλείδου. Ἔστωσαν τρεῖς συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου α, β, γ, ὁπότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, (1). Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 9 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\gamma}$, (2). Ἐὰν οἱ συνεχεῖς ὅροι εἶναι τέσσαρες, α, β, γ, δ ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, (3) θὰ εἶναι κατὰ τὸν 10ον ὁρισμὸν τοῦ αὐτοῦ βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου $\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\alpha}{\delta}$, (4). Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ γενικὸς κανὼν διὰ ν τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \eta, \theta, \iota, \varkappa$, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\eta}{\theta} = \frac{\theta}{\iota} = \frac{\iota}{\varkappa}$, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{\alpha^{\nu-\iota}}{\beta^{\nu-\iota}} = \frac{\alpha}{\varkappa}$, ὅπου $\varkappa$ ὁ νυοστὸς ὅρος τῆς προόδου. Ἡ σχέσις (2), τὴν ὁποίαν ἔχει ἤδη χρησιμοποιήσει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς προηγούμενα θεωρήματα, λαμβάνεται ἂν πολ/σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἢ ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1), $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2}$, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν β^2 τοῦ δευτέρου μέλους ταύτης διὰ τοῦ ἴσου του $\alpha\gamma$ λαμβανομένου ἐκ τῆς (1). Ἡ σχέσις (4) λαμβάνεται ἐκ τῆς (3), ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\beta^3}{\gamma^3}$. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (3) εἶναι $\beta^2 = \alpha\gamma$ καὶ $\gamma^2 = \beta\delta$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἔχομεν $\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\beta.\alpha\gamma}{\gamma.\beta\delta} = \frac{\alpha}{\delta}$, τὴν (4).

Ἐκ τῶν πέντε συνεχῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$ θὰ εἶναι $\frac{\alpha^4}{\beta^4} = \frac{\alpha}{\varepsilon}$. Διότι ἔχομεν $\alpha\gamma = \beta^2$, $\beta\delta = \gamma^2$, $\gamma\varepsilon = \delta^2$, καὶ $\frac{\alpha^4}{\beta^4} = \frac{\beta^4}{\gamma^4}$. Τὸ δεύτερον μέλος ταύτης γράφεται ἐκ τῶν προηγουμένων σχέσεων $= \frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^2\delta^2} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma^2}{\gamma\varepsilon} = \frac{\alpha}{\varepsilon}$, ἐπειδὴ ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ $\delta^2 = \gamma\varepsilon$.

Γενικῶς δὲ ἂν οἱ συνεχεῖς ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \varkappa \ldots$ θὰ εἶναι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha.\beta}{\beta.\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{\beta.\gamma.\delta} = \frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\alpha^4}{\beta^4} = \frac{\alpha.\beta.\gamma.\delta}{\beta.\gamma.\delta.\varepsilon} = \frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\alpha^5}{\beta^5} = \frac{\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon}{\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta} = \frac{\alpha}{\zeta}$ κλπ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Εὐτοκίου

Ἔστωσαν τέσσαρες συνεχεῖς ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου (εὐθεῖαι) $K > I > \Theta > H$, ὁπότε $K - I = I - \Theta = \Theta - H$, (1). Τῶν Κ, Ι λαμβάνει τρίτην ἀνάλογον εὐθεῖαν ἔστω Λ, ὅτε εἶναι $\frac{K}{I} = \frac{I}{\Lambda}$, (2). Ἐπειδὴ Κ $\rangle$ Ι θὰ εἶναι καὶ Ι $\rangle$ Λ. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνεται $\frac{K-I}{K} = \frac{I-\Lambda}{I}$, (3). Ἐπειδὴ Κ $\rangle$ Ι θὰ εἶναι καὶ Κ—Ι $\rangle$ Ι — Λ, (4). Ἐκ τῆς (1) ὅμως εἶναι Κ—Ι=Ι—Θ. Ὅθεν λαμβάνεται ἐκ τῆς (4), Ι—Θ $\rangle$ Ι—Λ, (5) ἐξ ἧς ἕπεται Λ $\rangle$ Θ, (6).

Τῶν Ι, Λ λαμβάνει τρίτην ἀνάλογον εὐθεῖαν, ἔστω Μ, ὅτε εἶναι $\frac{I}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}$, (7). Ἐκ ταύτης λαμβάνεται $\frac{I-\Lambda}{I} = \frac{\Lambda-M}{\Lambda}$, (8). Ἐπειδὴ Ι $\rangle$ Λ, θὰ εἶναι καὶ Ι — Λ $\rangle$ Λ — Μ, (9). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (5) λαμβάνεται Ι — Θ $\rangle$ Λ — Μ. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) εἶναι Ι — Θ = Θ — Η. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ Ι — Θ εἰς τὴν προηγουμένην σχέσιν ἔχομεν Θ — Η $\rangle$ Λ — Μ, (10). Ἐπειδὴ εἶναι ἐκ τῆς (6) Λ $\rangle$ Θ θὰ εἶναι Μ $\rangle$ Η, (11). Ἀλλὰ αἱ Λ, Μ ἐλήφθησαν ὥστε νὰ σχηματίζηται γεωμετρικὴ πρόοδος ἐκ τεσσάρων διαδοχικῶν ὅρων Κ, Ι, Λ, Μ. Εἰς τὴν πρόοδον ὅμως αὐτὴν κατὰ τὴν προηγουμένην ἀνάλυσιν τῶν ὁρισμῶν 9, 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $\frac{K^3}{I^3} = \frac{K}{M}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν (11) ἀπεδείχθη Μ $\rangle$ Η, ἕπεται ἐνταῦθα $\frac{K^3}{I^3} \langle \frac{K}{H}$, ὡς τὸ χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἄνευ ἀποδείξεως, διότι θὰ ἦτο γνωστὸν πρὸ αὐτοῦ].

Ἐκ τῶν (4, 5) ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον $\frac{T_1}{T_2} \langle \frac{K}{H}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) λαμβάνεται ἐπίσης κατὰ μείζονα λόγον $\frac{T_1}{T_2} \langle \frac{\Sigma}{\Xi}$, ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἶναι T_1 $\rangle$ τῆς σφαίρας Σ καὶ T_2 $\langle$ τοῦ κώνου Ξ. Ὥστε δὲν εἶναι Σ $\rangle$ 4 κῶνοι.

2. Ἔστω δεύτερον ἡ σφαῖρα Σ $\langle$ 4 κῶνοι (= Ξ κῶνος). Λαμβάνει δύο εὐθείας Κ $\rangle$ Η, ὥστε $\frac{K}{H} \langle \frac{\Xi}{\Sigma}$, (1), καὶ τὰς εὐθείας Θ, Ι, ὥστε νὰ σχηματίζηται, ὡς πρότερον, ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος Κ — Ι = Ι — Θ = Θ — Η. Εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας περιγράφει πολύγωνον κανονικόν, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν καὶ ἐγγράφει ὅμοιον, μὲ ἀντιστοίχους πλευρὰς λ_1 καὶ λ_2, ὥστε $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \langle \frac{K}{I}$, (2). Λαμβάνονται τὰ ἐκ μιᾶς περιστροφῆς

τοῦ ἐπιπέδου, ὅπου εἶναι τὰ πολύγωνα, σχηματιζόμενα στερεά.

Ἔστω $Τ_1$, τὸ περιγεγραμμένον καὶ $Τ_2$ τὸ ἐγγεγραμμένον. Θὰ εἶναι δὲ $\frac{Τ_1}{Τ_2} = \frac{λ_1^3}{λ_2^3}$, (3). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) λαμβάνεται $\frac{Τ_1}{Τ_2} < \frac{Κ^3}{Ι^3}$, (4). Εἶναι δὲ $\frac{Κ}{Η} > \frac{Κ^3}{Ι^3}$, (5), κατὰ τὰ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (ἐντὸς ἀγκυλῶν) ἐκτεθέντα. Ἐκ τῶν (4, 5) ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον $\frac{Τ_1}{Τ_2} < \frac{Κ}{Η}$, καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) λαμβάνεται ἐπίσης κατὰ μείζονα λόγον $\frac{Τ_1}{Τ_2} < \frac{Ξ}{Σ}$, ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν στερεὸν $Τ_1 >$ κώνου Ξ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον $Τ_2 <$ τῆς σφαίρας Σ. Ὥστε δὲν εἶναι οὔτε $Σ < Ξ$. Εἶναι ἄρα $Σ = Ξ =$ τέσσαρες κῶνοι βάσεως ἕκαστος ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας καὶ ὕψους ἴσου μὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

37

Ὀρθογώνιον $ΕΛ \times ΚΘ < ΑΘ^2$, διότι $ΕΛ \times ΚΘ < ΛΘ \times ΚΘ = ΑΘ^2$, ἐπειδὴ ἡ ΕΛ εἶναι χορδὴ καὶ ἡ ΛΘ διάμετρος τοῦ κύκλου.

40

Ἔστω ἡ ἀκτὶς α τοῦ κύκλου Ν καὶ $α^2 = (ΠΜ + ΛΗ) \times ΖΜ$, (1). Κατὰ τὸ θ. 22 εἶναι $\frac{ΠΜ + ΛΗ}{ΖΗ} = \frac{ΜΘ}{ΖΜ}$ ἢ $(ΠΜ + ΛΗ)\ ΖΜ = ΜΘ \times ΖΗ$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται $α^2 = ΜΘ \times ΖΗ$, (2). Ἀλλὰ $ΗΖ > ΔΞ$ καὶ $ΜΘ = ΓΔ$ καὶ $ΓΔ \times ΔΞ = ΑΔ^2$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) ἕπεται $α^2 > ΑΔ^2$.

44

1. Ἔστω ὁ σφαιρικὸς τομεὺς $>$ τοῦ κώνου Θ. Εὑρίσκει δύο εὐθείας $Δ > Ε$, ὥστε $\frac{Δ}{Ε} < \frac{\text{σφ. τομεύς}}{\text{κῶν. } Θ}$, (1). Σχηματίζει τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $Δ - Ζ = Ζ - Η = Η - Ε$ καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα περιγράφει καὶ

ἐγγράφει ὅμοιον κανονικὸν ἀρτιόπλευρον πολύγωνον πλευρᾶς λ_1 καὶ λ_2 ἀντιστοίχως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\Delta}{Z}$, $\frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} < \frac{\Delta^3}{Z^3}$, (2). Ἐκ μιᾶς περιστροφῆς τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ΒΓ περιγράφεται καὶ ἐγγράφεται (εἰς τὸν σφαιρικὸν τομέα) στερεὸν σχῆμα. Εἶναι ἄρα

$\frac{\text{περιγ. στερεὸν} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγεγ. στερεὸν} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3}$, (3) (θ. 41, δεύτερον μέρος). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) ἕπεται $\frac{\text{περιγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγεγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} < \frac{\Delta^3}{Z^3}$, (4). Ἀλλὰ $\frac{\Delta}{E} > \frac{\Delta^3}{Z^3}$ (ἰδὲ ἐπεξηγήσεις θ. 34). Εἶναι ἄρα κατὰ μείζονα λόγον

$\frac{\Delta}{E} > \frac{\text{περιγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγεγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εἶναι

$$\frac{\text{περ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} < \frac{\Delta}{E} < \frac{\text{σφαιρ. τομεύς}}{\text{κῶνος } Θ}.$$

Ὥστε $\frac{\text{περιγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγεγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} < \frac{\text{σφ. τομεύς}}{\text{κῶνος } Θ}$.

Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι

$\frac{\text{περιγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{σφαιρ. τομεύς}} < \frac{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{κῶνος } Θ}$, ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ περιγ. στερεὸν + κῶνος ΑΓΔ $>$ σφαιρ. τομέως καὶ κατὰ συνέπειαν λαμβάνεται ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνισότητος κῶνος Θ $<$ ἐγγεγρ. στερ. + κῶνος ΑΓΔ, ὅπερ ἄτοπον, (θ. 42, 43 καὶ ἐκ θ. 38 ὁ κῶνος Θ $>$ ἐγγ. στερ. + κῶνος).

2. Ἔστω κῶνος Θ $>$ σφαιρ. τομέως. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς προηγουμένως· $\frac{\Delta}{E} < \frac{\text{κῶνος } Θ}{\text{σφ. τομεύς}}$, (1). $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\Delta}{Z}$, $\frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} < \frac{\Delta^3}{Z^3}$, (2),

$\frac{\text{περιγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3}$, (3),

$\frac{\text{περ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} < \frac{\Delta^3}{Z^3}$, (4).

$\frac{\Delta}{E} > \frac{\Delta^3}{Z^3}$ καὶ συνεπῶς $\frac{\Delta}{E} > \frac{\text{περ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εἶναι $\frac{\text{περ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} < \frac{\Delta}{E} < \frac{\text{κῶνος } Θ}{\text{σφαιρ. τομεύς}}$, ὥστε

$$\frac{\text{περ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ} < \frac{\text{κῶνος } Θ}{\text{σφαιρ. τομεύς}}.$$

Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι

$$\frac{\text{περ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{κῶνος } Θ} < \frac{\text{ἐγγ. στερ.} + \text{κῶνος } ΑΓΔ}{\text{σφαιρ. τομεύς}}.$$ Ἀλλὰ σφαιρ. τομεύς $>$ ἐγγ. στερ.$+$κῶνος ΑΓΔ. Ὥστε κῶνος Θ $>$ περιγ. στερ.$+$κῶνος ΑΓΔ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Θ κῶνος $<$ περιγ. στερ.$+$κῶνος ΑΓΔ, (θ. 40 πόρ. 2).

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΙ

1

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς. Ἔστω διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος Α = σφαῖρα Β. Λαμβάνει $\frac{3}{2}$ τοῦ δοθέντος κώνου ἢ κυλίνδρου = κύλινδρος ΓΖΔ, καὶ $\frac{3}{2}$ σφαίρας Β = κύλινδρος ΗΛΘ, ὁπότε ΗΘ = ΚΛ (πόρισμα Ι, 34), ἑπομένως εἶναι Ε κύλινδρος = Κ κύλινδρος· εἶναι ἄρα

$$\frac{\text{Ε κύκλος}}{\text{Κ κύκλος}} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΗΘ}^2} = \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΕΖ}}, \ (1), \text{ ἀφοῦ } \text{ΚΛ} = \text{ΗΘ}.$$

Ἔστω $\text{ΗΘ}^2 = \text{ΓΔ} \times \text{ΜΝ}$, ὁπότε $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΗΘ}} = \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΜΝ}}$, (2), καὶ διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης ἐπὶ $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΗΘ}}$ λαμβάνει $\frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΗΘ}^2} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΜΝ}}$, (3). Ἐκ τῆς (1 καὶ 3) λαμβάνει $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΜΝ}} = \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΕΖ}}$ καὶ ἐναλλὰξ $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΗΘ}} = \frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΕΖ}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) εἶναι $\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΗΘ}} = \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΜΝ}} = \frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΕΖ}}$. Ἤτοι ἂν δοθῇ κῶνος ἢ κύλινδρος Α εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ α′ βιβλίου ὅτι ὑπάρχει (κῶνος ἢ) κύλινδρος $= \frac{3}{2}$ τοῦ δοθέντος (κώνου ἢ) κυλίνδρου Α, ὁ ΓΖΔ. Τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου τούτου, τῆς ΓΔ καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, τοῦ ΕΖ λαμβάνει δύο μέσας ἀναλόγους, τὴν ΗΘ καὶ τὴν ΜΝ. Ἡ ΗΘ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς ζητουμένης σφαίρας. Ἀνήγαγε δηλ. τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὁ Ἀρχιμήδης εἰς λύσιν προβλήματος ὁμοίου πρὸς τὸ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου (δηλίου προβλήματος). Ὁ Εὐτόκιος σχολιάζων τὸ πρόβλημα τοῦτο λέγει ὅτι δὲν ἀνεῦρε τὴν σύνθεσιν αὐτοῦ (ἡ ὁποία ἐσώθη καὶ ἐκτίθεται μετὰ τὴν ἀνάλυσιν) καὶ παραθέτει δώδεκα λύσεις τοῦ δηλίου προβλήματος, τουτέστι δύο δοθεισῶν εὐθειῶν $\beta > \alpha$, νὰ εὑρεθοῦν δύο μέσαι ἀνάλογοι αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὥστε νὰ εἶναι $\beta : \psi = \psi : \chi = \chi : \alpha$. Ἐὰν α εἶναι πλευρὰ κύβου καὶ $\beta = 2\alpha$, ἡ χ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου.

2

1. Μ κῶνος (ἔχων βάσιν κύκλον ἀκτῖνος ΒΓ καὶ ὕψος ΘΔ) = σφαιρικὸς τομεὺς ΒΓΘΖ, (1) (θ. Ι, 44). Ἂς γίνῃ $\frac{\Theta\mathrm{A}+\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}}$, (2) καὶ $\frac{\Theta\Gamma+\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{AE}}$, (3). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνεται

$\frac{\Delta\mathrm{E}-\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\Theta\mathrm{A}+\mathrm{AE}-\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}}$ ἢ $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\Theta\mathrm{A}}{\mathrm{AE}}$ ἢ $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\Gamma\Theta}{\mathrm{AE}}$, (4)

ἐπειδὴ ΘΑ = ΓΘ. Ἐκ τῆς (4) εἶναι $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{AE}}$ καὶ διὰ συνθέσεως

$\frac{\Delta\Gamma+\Gamma\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{E}+\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}}$ ἢ $\frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{A}}{\mathrm{AE}}$.

Διὰ πολ/σμοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ β′ μέλους ταύτης ἐπὶ ΓΕ λαμβάνεται $\frac{\Theta\Delta}{\Theta\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{A}\times\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{AE}\times\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma^2}{\mathrm{BE}^2}$, (5). Ἀλλὰ ΒΓ = ἀκτὶς κύκλου Μ καὶ ΒΕ = ἀκτὶς κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἡ ΒΖ. Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (5), $\frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\text{κύκλος } \mathrm{M}}{\text{κύκλ. διαμ. } \mathrm{BZ}}$, (6). Εἶναι δὲ ΘΓ ὕψος κώνου Μ. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ΔΘ εἶναι ὕψος κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΒΖ, ἐκ τῆς σχέσεως (6) ἔχομεν δύο κώνους (τὸν κῶνον Μ τὸν ἔχοντα βάσιν τὸν κύκλον Μ καὶ ὕψος τὴν ΘΓ, καὶ τὸν ἔχοντα βάσιν κύκλον διαμέτρου ΒΖ καὶ ὕψος ΔΘ), τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν. Εἶναι ἄρα οἱ κῶνοι οὗτοι ἴσοι (Εὐκλ. XII, 15). Εἶναι δὲ ΔΘ = ΘΕ + ΕΔ. Ἑπομένως, κῶνος ἔχων ὕψος ΔΘ καὶ βάσιν κύκλον διαμέτρου Β = κῶνος ἔχων ὕψος ΘΕ καὶ βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ + κῶνος ἔχων ὕψος ΕΔ καὶ βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ. Οἱ δύο ὅμως οὗτοι κῶνοι ἰσοῦνται πρὸς τὸν στερεὸν ῥόμβον ΒΔΖΘ. Εἶναι ἄρα ὁ κῶνος Μ = στερεὸς ῥόμβος ΒΔΖΘ. Δι᾽ ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ κοινοῦ κώνου ΒΖΘ, μένει κῶνος ΒΔΖ = σφαιρ. τμῆμα ΒΓΖ.

2. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (3, περίπτ. 1), $\frac{\Theta\Gamma+\Gamma\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{EA}}$. Ἐκ ταύ-

της έχομεν $\frac{\text{ΚΕ} - \text{ΕΑ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΘΓ} + \text{ΓΕ} - \text{ΓΕ}}{\text{ΓΕ}}$, $\frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΘΓ}}{\text{ΓΕ}}$. Καὶ εἶναι ΘΓ= ΘΑ. Ἐπομένως $\frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΘΑ}}{\text{ΓΕ}}$ καὶ ἐναλλὰξ $\frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΘΑ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΓΕ}}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\text{ΚΑ} + \text{ΘΑ}}{\text{ΘΑ}} = \frac{\text{ΕΑ} + \text{ΓΕ}}{\text{ΓΕ}}$ ἢ $\frac{\text{ΚΘ}}{\text{ΘΑ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΕ}}$. Διὰ πολ/σμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ β′ μέλους ἐπὶ ΕΑ λαμβάνομεν

$\frac{\text{ΚΘ}}{\text{ΘΑ}} = \frac{\text{ΑΓ} \times \text{ΕΑ}}{\text{ΓΕ} \times \text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΑΒ}^2}{\text{ΕΒ}^2}$, (1).

Ἔστω κύκλος Ν ἔχων ἀκτῖνα ΑΒ, ὁπότε οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρ. τμήματος ΒΑΖ καὶ κῶνος Ν (μὲ βάσιν τὸν κύκλον Ν) ἔχων ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ὁπότε οὗτος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν σφαιρικὸν τομέα ΒΘΖΑ. [Τὸ συμπέρασμα τοῦτο, ἐπειδὴ ὁ σφαιρ. τομεὺς ΒΘΖΑ ἀνήκει εἰς μέρος σφαίρας μεγαλύτερον τοῦ ἡμισφαιρίου, λαμβάνεται κατὰ τὸν P. ver Eecke (Les oeuvres complétes d'Archiméde, τόμ. I σελ. 96, Liège 1960) ὡς ἑξῆς : Ἔστω κῶνος Σ ἔχων βάσιν ἴσην μὲ ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς. Κατὰ τὸ θ. I, 42 ἡ βάσις τοῦ κώνου Μ = ἐπιφ. σφαιρ. τμήματος ΒΓΖ καὶ κατὰ τὸ θ. I, 43, ἡ βάσις τοῦ κώνου Ν = ἐπιφ. σφαιρ. τμήματος ΒΑΖ. Ἐπομένως βάσις κώνου Σ = βάσις κώνου Μ+βάσις κώνου Ν. Καὶ οἱ τρεῖς οὗτοι κῶνοι ἔχουν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ἐπομένως εἶναι : κῶνος Σ = κῶνος Μ + κῶνος Ν, ἐξ οὗ κῶνος Ν = κῶνος Σ — κῶνος Μ. Κῶνος $\Sigma = \frac{1}{3}\,\Theta\Gamma \times 4\pi\Theta\Gamma^2 = \frac{4}{3}\,\pi\Theta\Gamma^3$ = σφαῖρα, κῶνος Μ = σφαιρ. τομεὺς ΒΓΘΖ. Εἶναι ἄρα κῶνος Ν = σφαῖρα — σφαιρ. τομεὺς ΒΓΘΖ = σφαιρικὸς τομεὺς ΒΘΖΑ, (2)].

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται $\frac{\text{ΚΘ}}{\text{ΘΑ}} = \frac{\text{κύκλος Ν}}{\text{κύκλος διαμ. ΒΖ}}$, ὅπου ΘΑ εἶναι τὸ ὕψος κώνου Ν, βάσεως κύκλου Ν. Ἔστω κῶνος ἔχων βάσιν κύκλον διαμέτρου ΒΖ καὶ ὕψος ΚΘ, ὁπότε εἶναι κῶνος Ν = κῶνος ἔχων βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ καὶ ὕψος ΚΘ, ἐπειδὴ αἱ βάσεις τῶν κώνων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν. Ἐκ τῆς (2) ὅμως εἶναι, κῶνος Ν = σφαιρ. τομεὺς ΒΘΖΑ = στερεὸν σχῆμα ΒΘΖΚ, (3). Διότι, ἐπειδὴ ΚΘ = ΚΕ - ΘΕ καὶ κῶνοι τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν, θὰ εἶναι, κῶνος ἔχων βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ καὶ ὕψος ΚΘ = κῶνος ἔχων βάσιν κύκλ. διαμ. ΒΖ καὶ ὕψος ΚΕ—

κῶνος ἔχων βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ καὶ ὕψος ΘΕ = στερεὸν σχῆμα ΒΘΖΚ. Ἐὰν εἰς τὰ μέλη τῆς (3) προστεθῇ ὁ κῶνος ὁ ἔχων βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ καὶ ὕψος ΕΘ, λαμβάνεται, σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΖ = κῶνος ΒΖΚ.

Πόρισμα

1. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἶναι φανερὸν ὅτι $\frac{\text{σφαιρ. τμῆμα ΒΓΖ}}{\text{κῶνος ΒΓΖ}} = \frac{ΘΑ + ΑΕ}{ΑΕ}$, (λ), (ΘΑ = ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ΑΕ ὕψος τοῦ ἄλλου τμήματος), διότι $\frac{\text{κῶνος ΒΔΖ}}{\text{κῶνος ΒΓΖ}} = \frac{ΔΕ}{ΓΕ}$, (1). Ἐκ τῆς (2) ὅμως, τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, (1), εἶναι $\frac{ΔΕ}{ΓΕ} = \frac{ΘΑ + ΑΕ}{ΑΕ}$, (2), καὶ ἀπεδείχθη εἰς τὴν ἀναφερομένην περίπτωσιν, κῶνος ΒΔΖ = σφαιρ. τμῆμα ΒΓΖ. Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (1, 2) ἕπεται ἡ σχέσις (λ).

2. Ἔστω κῶνος Ν ἔχων βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς, ὁπότε κῶνος Ν = σφαῖρα. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρ. 2 [περίπτ. 1 σχέσις (2)] ἐλήφθη

$\frac{ΘΑ + ΑΕ}{ΑΕ} = \frac{ΔΕ}{ΓΕ}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{ΘΑ + ΑΕ - ΑΕ}{ΑΕ} = \frac{ΔΕ - ΓΕ}{ΓΕ}$ ἢ $\frac{ΘΑ}{ΑΕ} = \frac{ΓΔ}{ΓΕ}$, καὶ ἐπειδὴ ΘΑ = ΘΓ θὰ εἶναι $\frac{ΘΓ}{ΑΕ} = \frac{ΓΔ}{ΓΕ}$ ἢ $\frac{ΘΓ}{ΓΔ} = \frac{ΑΕ}{ΓΕ}$, (1).

Ἐκ τῆς $\frac{ΘΓ + ΓΕ}{ΓΕ} = \frac{ΚΕ}{ΑΕ}$, [προηγ. θ. 2, περίπτ. 1 (3)] ἔχομεν $\frac{ΘΓ + ΓΕ - ΓΕ}{ΓΕ} = \frac{ΚΕ - ΕΑ}{ΑΕ}$ ἢ $\frac{ΘΓ}{ΓΕ} = \frac{ΚΑ}{ΑΕ}$ ἢ $\frac{ΚΑ}{ΘΓ} = \frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ἢ $\frac{ΚΑ}{ΘΑ} = \frac{ΑΕ}{ΓΕ}$, (2), (ΘΓ = ΘΑ).

Ἐκ τῶν (2, 1) εἶναι $\frac{ΚΑ}{ΘΑ} = \frac{ΘΓ}{ΓΔ}$ ἐξ ἧς $\frac{ΚΑ + ΘΑ}{ΘΑ} = \frac{ΘΓ + ΓΔ}{ΓΔ}$ ἢ $\frac{ΚΘ}{ΘΑ} = \frac{ΘΔ}{ΓΔ}$ ἢ $\frac{ΚΘ}{ΘΓ} = \frac{ΘΔ}{ΓΔ}$, (3), (ΘΑ = ΘΓ), ἢ $\frac{ΚΘ}{ΘΔ} = \frac{ΘΓ}{ΓΔ}$, ἐξ ἧς $\frac{ΚΘ + ΘΔ}{ΘΔ} = \frac{ΘΓ + ΓΔ}{ΓΔ}$ ἢ $\frac{ΚΔ}{ΘΔ} = \frac{ΘΔ}{ΓΔ}$, καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3),

$\frac{K\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta\Gamma}$, (4).

Ἐκ ταύτης εἶναι $K\Delta \times \Theta A = K\Theta \times \Theta\Delta$, (5), $(\Theta\Gamma = \Theta A)$.

Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\frac{\Theta\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{K\Theta}{\Theta\Delta}$, (6). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) λαμβάνεται $\frac{K\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{AE}{\Gamma E}$, (7), ἐξ ἧς $\frac{K\Theta + \Theta\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{AE + \Gamma E}{\Gamma E}$ ἢ $\frac{K\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{K\Delta^2}{\Theta\Delta^2} = \frac{A\Gamma^2}{E\Gamma^2}$, (8). Ἡ (7) γράφεται $\frac{K\Theta \times \Theta\Delta}{\Theta\Delta^2} = \frac{AE \times \Gamma E}{\Gamma E^2}$, (9)

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (8, 9) λαμβάνομεν

$\frac{K\Delta^2}{K\Theta \times \Theta\Delta} = \frac{A\Gamma^2}{AE \times E\Gamma}$, (10). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (5) ἔχομεν

$\frac{K\Delta^2}{K\Delta \times \Theta A} = \frac{A\Gamma^2}{AE \times E\Gamma}$. Καὶ ἐπειδὴ $AE \times E\Gamma = EB^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος) εἶναι $\frac{K\Delta^2}{K\Delta \times \Theta A} = \frac{A\Gamma^2}{EB^2}$ ἢ $\frac{K\Delta}{\Theta A} = \frac{A\Gamma^2}{EB^2}$, (11). Ὁ κύκλος $N = 4\ \pi\alpha^2 = \pi(2\alpha)^2$, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι α. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου N εἶναι ΑΓ. Ἐκ τῆς (11) ἄρα εἶναι $\frac{\text{κύκλος } N}{\text{κύκλ. διαμ. } BZ} = \frac{K\Delta}{\Theta A}$

δηλ. $= \frac{K\Delta}{\text{ὕψος κώνου } N}$, (12). Ἐὰν ἡ ΚΔ θεωρηθῇ ὕψος κώνου, τότε ὁ κῶνος Ν, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον Ν, δηλ. ἡ σφαῖρα = κῶνος ἔχων βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ, διότι αἱ βάσεις τῶν κώνων εἶναι (12) ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν. Ἀλλά, κῶνος ἔχων βάσιν κύκλον διαμ. ΒΖ καὶ ὕψος ΚΔ = στερεὸς ῥόμβος ΒΚΖΔ. Ἀλλὰ ὁ κῶνος ΒΔΖ ἐδείχθη ἴσος πρὸς τὸ σφαιρ. τμῆμα ΒΓΖ. Ὁ ἀπομένων ἄρα κῶνος ΒΚΖ = σφαιρ. τμῆμα ΒΑΖ.

4

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς. Ἂς γίνῃ $\frac{K\Delta + \Delta X}{\Delta X} = \frac{PX}{XB}$, (1) καὶ $\frac{KB + BX}{BX} = \frac{\Lambda X}{X\Delta}$, (2).

Εἶναι ἄρα, κῶνος ΑΛΓ = σφ. τμ. ΑΔΓ, καὶ κῶνος ΑΡΓ = σφ. τμ. ΑΒΓ καὶ ἐπομένως ὁ λόγος $\frac{\text{κῶνος } A\Lambda\Gamma}{\text{κῶνος } AP\Gamma}$ εἶναι δοθεὶς (θεώρ. 2).

'Αλλὰ $\frac{\text{κῶνος ΑΛΓ}}{\text{κῶνος ΑΡΓ}} = \frac{ΛΧ}{ΧΡ}$, (3), ἤτοι λόγος δοθείς. 'Εκ τῆς (1) εἶναι $\frac{ΚΔ + ΔΧ - ΔΧ}{ΔΧ} = \frac{ΡΧ - ΧΒ}{ΧΒ}$, $\frac{ΚΔ}{ΔΧ} = \frac{ΒΡ}{ΧΒ}$ καὶ ἐπειδὴ ΚΔ = ΚΒ ἔχομεν $\frac{ΚΒ}{ΔΧ} = \frac{ΒΡ}{ΧΒ}$ καὶ ἐναλλὰξ $\frac{ΚΒ}{ΒΡ} = \frac{ΔΧ}{ΧΒ}$, (4). 'Εκ τῆς (2) ἐπίσης εἶναι $\frac{ΚΒ + ΒΧ - ΒΧ}{ΒΧ} = \frac{ΛΧ - ΧΔ}{ΧΔ}$, $\frac{ΚΒ}{ΒΧ} = \frac{ΛΔ}{ΧΔ}$ καὶ ἐπειδὴ ΚΔ = ΚΒ ἔχομεν $\frac{ΚΔ}{ΒΧ} = \frac{ΛΔ}{ΧΔ}$, καὶ ἐναλλὰξ $\frac{ΛΔ}{ΚΔ} = \frac{ΧΔ}{ΒΧ}$, (5). 'Εκ τῶν (4, 5) εἶναι $\frac{ΛΔ}{ΚΔ} = \frac{ΚΒ}{ΒΡ} = \frac{ΔΧ}{ΧΒ}$, (6).

'Εκ τῆς (6) λαμβάνεται $\frac{ΡΒ}{ΒΚ} = \frac{ΚΔ}{ΛΔ}$, $\frac{ΡΒ+ΒΚ}{ΒΚ} = \frac{ΚΔ+ΛΔ}{ΛΔ}$, $\frac{ΡΚ}{ΒΚ} = \frac{ΚΛ}{ΛΔ}$ καὶ ἐπειδὴ ΒΚ = ΚΔ, $\frac{ΡΚ}{ΚΔ} = \frac{ΚΛ}{ΛΔ}$. 'Εκ ταύτης εἶναι $\frac{ΚΔ}{ΛΔ} = \frac{ΡΚ}{ΚΛ}$, $\frac{ΚΔ+ΛΔ}{ΛΔ} = \frac{ΡΚ+ΚΛ}{ΚΛ}$, $\frac{ΚΛ}{ΛΔ} = \frac{ΡΛ}{ΚΛ}$, (7), ἐξ ἧς $ΡΛ \times ΛΔ = ΚΛ^2$, (8). Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ $ΛΔ^2$ λαμβάνομεν $\frac{ΡΛ}{ΛΔ} = \frac{ΚΛ^2}{ΛΔ^2}$, (9). 'Εκ τῶν ἀκραίων μελῶν τῆς (6) ἔχομεν $\frac{ΔΚ}{ΛΔ} = \frac{ΧΒ}{ΔΧ}$, $\frac{ΔΚ+ΛΔ}{ΛΔ} = \frac{ΧΒ+ΔΧ}{ΔΧ}$, $\frac{ΚΛ}{ΛΔ} = \frac{ΒΔ}{ΔΧ}$, (10) καὶ $\frac{ΚΛ^2}{ΛΔ^2} = \frac{ΒΔ^2}{ΔΧ^2}$, (11).

Ἔστω ΚΒ = ΒΖ, (12). Εἰς τὸ τρίτον μέλος τῆς (6) εἶναι ΔΧ > ΧΒ. Θὰ εἶναι ἄρα εἰς τὸ δεύτερον μέλος ΚΒ > ΒΡ. Καὶ ἐκ τῆς (12) λαμβάνεται ΒΖ > ΒΡ ἤτοι τὸ Ζ θὰ πέσῃ πέραν τοῦ Ρ.

'Εκ τῆς (2) εἶναι $\frac{ΖΧ}{ΒΧ} = \frac{ΛΧ}{ΧΔ}$, (ΚΒ = ΒΖ), $\frac{ΖΧ}{ΖΧ - ΒΧ} = \frac{ΛΧ}{ΛΧ - ΧΔ}$, $\frac{ΖΧ}{ΖΒ} = \frac{ΛΧ}{ΛΔ}$, (13). 'Εκ τοῦ λόγου (2) ἕπεται δοθεὶς ὁ (13).

'Εκ τῆς (3) εἶναι $\frac{ΧΡ}{ΛΧ} = \frac{\text{κῶνος ΑΡΓ}}{\text{κῶνος ΑΛΓ}}$, $\frac{ΧΡ+ΛΧ}{ΛΧ} = \frac{\text{κῶνος ΑΡΓ} + \text{κῶνος ΑΛΓ}}{\text{κῶνος ΑΛΓ}}$, $\frac{ΡΛ}{ΛΧ} = \frac{\text{στερ. ρόμβος ΑΛΓΡ}}{\text{κῶνος ΑΛΓ}}$, ὅθεν ὁ λόγος $\frac{ΡΛ}{ΛΧ}$ εἶναι δοθείς. Ὁ λόγος $\frac{ΡΛ}{ΛΧ}$ γράφεται, $\frac{ΡΛ}{ΛΧ} = \frac{ΡΛ}{ΛΔ} \times \frac{ΛΔ}{ΛΧ}$, (14). 'Εκ ταύτης καὶ τῶν (9, 11, 13) λαμβάνεται $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΧ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΧ}^2} \times \frac{\text{ΖΒ}}{\text{ΖΧ}}$, (15). Ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΧ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΘ}}$, (16). Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΧ}}$ εἶναι δοθεὶς θὰ εἶναι καὶ ὁ $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΘ}}$ δοθείς. Ἐκ τῶν (15, 16) λαμβάνεται $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΧ}^2} \times \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΧ}}$, (17). Ὁ λόγος $\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΘ}}$ γράφεται $= \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΧ}} \times \frac{\text{ΖΧ}}{\text{ΖΘ}}$, (18). Ἐκ τῶν (17, 18) λαμβάνεται $\frac{\text{ΖΧ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΧ}^2}$, (19). Ἐκ τῆς (16) ἡ ΖΘ εἶναι δοθεῖσα. Ἐπίσης τὸ ΒΔ^2 εἶναι δοθὲν καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΔ δοθεῖσα.

Συνάγεται λοιπὸν ἐκ τῆς (19) τὸ ἑξῆς: δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΖΔ νὰ τμηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Χ καὶ νὰ εἶναι ὅπως ἡ ΧΖ πρὸς δοθεῖσαν (τὴν ΖΘ), οὕτως τὸ δοθὲν ΒΔ^2 πρὸς τὸ ΔΧ^2. Τὸ εἰδικὸν τοῦτο πρόβλημα, ὅπως τίθεται γενικῶς, ὑπόκειται εἰς περιορισμόν. Ἐὰν ὅμως ληφθοῦν ὑπ' ὄψει τὰ προλεχθέντα, ἤτοι ὅτι $\text{ΔΒ} = 2\text{ΒΖ}$ καὶ ὅτι $\text{ΖΒ} > \text{ΖΘ}$, τότε δὲν ὑπάρχει περιορισμός. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ εἰδικὸν τοῦτο πρόβλημα, τὸ ἑξῆς: Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ΒΔ, ΒΖ, ὅπου $\text{ΒΔ} = 2\text{ΒΖ}$ καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς ΒΖ σημείου τινὸς Θ, νὰ τμηθῇ ἡ ΒΔ κατά τι σημεῖον Χ, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΧ}^2} = \frac{\text{ΧΖ}}{\text{ΖΘ}}$. Ταῦτα θ' ἀποδειχθοῦν δι' ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως (λέγει ὁ Ἀρχιμήδης) εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος προβλήματος (4). [Σημείωσις. Ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις τοῦ εἰδικοῦ αὐτοῦ προβλήματος δὲν ἐσώθη. Ὁ Εὐτόκιος εἰς τὰ σχόλιά του παρέχει δύο λύσεις. Ἡ μία εἶναι τοῦ Διοκλέους καὶ ἡ ἄλλη τοῦ Διονυσοδώρου. Ἡ ἀκμὴ καὶ τῶν δύο τοποθετεῖται μετά τινος πιθανότητος περὶ τὸ 100 π. Χ].

Σύνθεσις. Ἔστω $\text{ΖΘ} : \text{ΘΒ} = \text{Π} : \Sigma$, $(\text{Π} > \Sigma)$. Ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΚΒ} + \text{ΒΧ}}{\text{ΒΧ}} = \frac{\text{ΛΧ}}{\text{ΧΔ}}$, (1) (ἡ 2 τῆς ἀναλύσεως) καὶ $\frac{\text{ΚΔ} + \text{ΔΧ}}{\text{ΧΔ}} = \frac{\text{ΡΧ}}{\text{ΧΒ}}$ (ἡ 1 τῆς ἀναλύσεως). Τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΡΛ} \times \text{ΛΔ} = \text{ΛΚ}^2$ (ἡ 8 τῆς ἀναλύσεως) καὶ $\text{ΚΛ} : \text{ΛΔ} = \text{ΒΔ} : \text{ΔΧ}$ (ἡ 10 τῆς ἀναλύσεως). Ὥστε καὶ $\text{ΚΛ}^2 : \text{ΛΔ}^2 = \text{ΒΔ}^2 : \text{ΔΧ}^2$ (ἡ 11 τῆς ἀναλύσεως). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΔ}} = \frac{\text{ΚΛ}^2}{\text{ΛΔ}^2}$ (9 τῆς ἀναλύσεως) λαμβάνεται $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΔ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΧ}^2}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\frac{\text{ΖΧ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΧ}^2}$ (19 τῆς ἀναλύσεως) λαμβάνεται $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΔ}} = \frac{\text{ΧΖ}}{\text{ΖΘ}}$, (2).

Ἐπειδὴ $\frac{KB+BX}{BX}=\frac{ΛX}{XΔ}$, (ἡ 1), καὶ KB = BZ θὰ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς KB + BX = BZ + BX = ZX, ὥστε $\frac{ZX}{BX}=\frac{ΛX}{XΔ}$. Καὶ δι᾽ ἀναστροφῆς $\frac{ZX}{ZX-BX}=\frac{ΛX}{ΛX-XΔ}$, $\frac{ZX}{BZ}=\frac{ΛX}{ΛΔ}$, $\frac{ΛΔ}{ΛX}=\frac{BZ}{ZX}$, (3). Διὰ πολ/σμοῦ τῶν (2, 3) κατὰ μέλη (τεταραγμένη ἀναλογία Εὐκλ. V ὁρ. 18), λαμβάνεται $\frac{PΛ}{ΛX}=\frac{BZ}{ZΘ}$, (4). Ἐκ ταύτης εἶναι

$$\frac{PΛ}{PΛ-ΛX}=\frac{BZ}{BZ-ZΘ},\quad \frac{PΛ}{XP}=\frac{BZ}{ΘB},\quad \frac{PΛ}{BZ}=\frac{XP}{ΘB},\ (5).$$

Ἡ (4) γράφεται $\frac{PΛ}{BZ}=\frac{ΛX}{ZΘ}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (5) λαμβάνεται $\frac{ΛX}{ZΘ}=\frac{XP}{ΘB}$, $\frac{ΛX}{XP}=\frac{ZΘ}{ΘB}$, (6). Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\frac{ZΘ}{ΘB}=\frac{Π}{Σ}$, (7). Ἐπειδὴ ΛX, XP εἶναι τὰ ὕψη δύο κώνων λαμβάνεται ἐκ τῶν (6, 7),

$$\frac{\text{κῶνος } ΑΓΛ}{\text{κῶνος } ΑΡΓ}=\frac{\text{σφ. τμ. } ΑΔΓ}{\text{σφ. τμ. } ΑΒΓ}=\frac{Π}{Σ}.$$

5

Ἀνάλυσις. Ἔστω ὅτι εὑρέθη τὸ σφ. τμῆμα ΘΚΛ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, (1) καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΖΗ, (2). Ἄς γίνῃ $\frac{ΠN+NT}{NT}=\frac{XT}{TΓ}$, (3), $\frac{PΞ+ΞΥ}{ΞΥ}=\frac{ΨΥ}{ΥΛ}$, (4), $\frac{ΣO+OΦ}{OΦ}=\frac{ΩΦ}{ΦH}$, (5). Ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι κῶνος ΑΒΧ = σφ. τμ. ΑΒΓ, κῶνος ΨΘΚ = σφ. τμ. ΘΚΛ, κῶνος ΕΩΖ = σφ. τμ. ΕΗΖ (θ. 2). Ἐκ τῆς (1) ἕπεται κῶνος Α×Β = κῶνος ΨΘΚ καὶ ἐκ τούτου κύκλος διαμ. ΑΒ : κύκλ. διαμ. ΘΚ = ΨΥ : ΧΤ. Ἑπομένως $\frac{\text{κύκλ. διαμ. } AB}{\text{κύκλ. διαμ. } ΘK}=\frac{AB^2}{ΘK^2}=\frac{ΨΥ}{XT}$, (6). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν κώνων ΕΖΩ, ΨΘΚ εἶναι $\frac{ΩΦ}{EZ}=\frac{ΨΥ}{ΘK}$, ἔστω $=\frac{XT}{Δ}$, (7). Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{ΨΥ}{XT}=\frac{ΘK}{Δ}$, (8), καὶ ἐκ τῆς (6) $\frac{AB^2}{ΘK^2}=\frac{ΘK}{Δ}$, (9). Ἔστω $ΘK^2=AB\times σ$, (10). Ἡ σχέσις $\frac{AB^2}{ΘK^2}=\frac{AB^2}{ΘK^2}$, δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ β' μέλους γίνεται $\frac{AB^2}{\Theta K^2} = \frac{AB}{\sigma}$, (11). Ἐκ τῶν (9, 11) ἔχομεν $\frac{\Theta K}{\Delta} = \frac{AB}{\sigma}$, $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\sigma}{\Delta}$, (12). Ἐκ τῆς (10) λαμβάνομεν $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\Theta K}{\sigma}$, (13). Ἐκ τῶν (12, 13) εἶναι $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\Theta K}{\sigma} = \frac{\sigma}{\Delta}$, ἤτοι τῶν δοθεισῶν δύο εὐθειῶν AB, Δ εὑρέθησαν δύο μέσαι ἀνάλογοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ ΘΚ, σ.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἂς γίνῃ $\frac{\Pi N + NT}{NT} = \frac{XT}{T\Gamma}$, $\frac{\Sigma O + O\Phi}{O\Phi} = \frac{\Omega\Phi}{\Phi H}$. Εἶναι ἄρα κῶνος ΧΑΒ = τμ. σφ. ΑΓΒ, κῶνος ΖΩΕ = κῶνος ΕΗΖ. Ἂς γίνῃ $\frac{\Omega\Phi}{EZ} = \frac{XT}{\Delta}$, (1) καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB, Δ ἂς εὑρεθοῦν δύο μέσαι ἀνάλογοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ ΘΚ, σ, ἤτοι νὰ εἶναι $\frac{AB}{\Theta K} = \frac{\Theta K}{\sigma} = \frac{\sigma}{\Delta}$, (2) καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΚ, ὡς χορδῆς, ἂς γραφῇ τμῆμα κύκλου τὸ ΘΚΛ ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα κύκλου ΕΖΗ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ λοιπὴ κατασκευή. Τὸ σφ. τμ. ΚΛΘ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ σφ. τμ. ΕΗΖ καὶ ἴσον πρὸς τὸ σφ. τμ. ΑΒΓ. Διότι, ἂς γίνῃ $\frac{P\Xi + \Xi\Upsilon}{\Xi\Upsilon} = \frac{\Psi\Upsilon}{\Upsilon\Lambda}$.

Εἶναι ἄρα ὁ κῶνος ΨΘΚ = σφ. τμ. ΘΚΛ (θ. 2). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν κώνων ΨΘΚ, ΖΩΕ ἕπεται $\frac{\Omega\Phi}{EZ} = \frac{\Psi\Upsilon}{\Theta K}$ καὶ ἐκ τῆς (1) $\frac{XT}{\Delta} = \frac{\Psi\Upsilon}{\Theta K}$, $\frac{\Psi\Upsilon}{XT} = \frac{\Theta K}{\Delta}$, (3). Ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{AB^2}{\Theta K^2} = \frac{\Theta K^2}{\sigma^2}$, (4) καὶ $\sigma^2 = \Theta K \times \Delta$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4) λαμβάνεται $\frac{AB^2}{\Theta K^2} = \frac{\Theta K}{\Delta}$, (5). Ἐκ τῶν (3,5) εἶναι $\frac{AB^2}{\Theta K^2} = \frac{\Psi\Upsilon}{XT}$, ἤτοι $\frac{\text{κύκλος διαμ. } AB}{\text{κύκλος διαμ. } \Theta K} = \frac{\Psi\Upsilon}{XT}$ καὶ ἑπομένως κῶνος ΧΑΒ = κῶνος ΨΘΚ καὶ συνεπῶς σφ. τμῆμα ΑΒΓ = σφ. τμ. ΘΚΛ.

6

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν σφαιρικῶν τμημάτων ΚΛΜ, ΑΒΓ εἶναι $\frac{\Lambda P}{PN} = \frac{B\Pi}{\Pi\Theta}$, $\frac{PN}{\Lambda P} = \frac{\Pi\Theta}{B\Pi}$ (ἀνάπαλιν), $\frac{PN + \Lambda P}{\Lambda P} = \frac{\Pi\Theta + B\Pi}{B\Pi}$,

$\frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΛΡ}} = \frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΒΠ}}$, (1). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων εἶναι $\frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΛΜ}} = \frac{\text{ΒΠ}}{\text{ΓΒ}}$ (2). Διὰ πολ/σμοῦ τῶν (1, 2) κατὰ μέλη ἔχομεν (καὶ ἐπειδὴ $\text{ΛΜ} = \text{ΕΖ}$), $\frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΒΓ}}$, $\frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΘΒ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΒΓ}}$, (3).

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΛΝ}}$, (1) καὶ $\frac{\text{ΘΠ}}{\text{ΠΒ}} = \frac{\text{ΝΡ}}{\text{ΡΛ}}$, (2). Τὰ κυκλικὰ τμήματα τῶν βάσεων ΚΜ, ΑΓ εἶναι ὅμοια, διότι $\frac{\text{ΡΜ}^2}{\text{ΠΓ}^2} = \frac{\text{ΡΛ}\times\text{ΝΡ}}{\text{ΠΒ}\times\text{ΘΠ}}$. Ἀντικαθιστῶντες ἐκ τῆς (2) ὅπου $\frac{\text{ΝΡ}}{\text{ΘΠ}} = \frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΠΒ}}$, ἔχομεν $\frac{\text{ΡΜ}^2}{\text{ΠΓ}^2} = \frac{\text{ΡΛ}^2}{\text{ΠΒ}^2}$, $\frac{\text{ΡΜ}}{\text{ΠΓ}} = \frac{\text{ΡΛ}}{\text{ΠΒ}}$, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΛΡΜ, ΒΠΓ εἶναι ὅμοια, ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ὁμοιότης τῶν κυκλικῶν καὶ τῶν σφαιρικῶν τμημάτων.

Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΒΠ}} = \frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΛΡ}}$, (3), (διότι ἐξ αὐτῆς φθάνομεν διὰ τῆς λεγομένης μεθόδου τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν (2), $\frac{\text{ΘΒ—ΒΠ}}{\text{ΒΠ}} = \frac{\text{ΝΛ—ΛΡ}}{\text{ΛΡ}}$, $\frac{\text{ΘΠ}}{\text{ΒΠ}} = \frac{\text{ΝΡ}}{\text{ΛΡ}}$) καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΡΛΜ, ΠΒΓ εἶναι $\frac{\text{ΠΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΛΡ}}{\text{ΛΜ}}$, (4), λαμβάνεται διὰ πολ/σμοῦ τῶν (3, 4) κατὰ μέλη, $\frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΛΜ}}$, $\frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΝΛ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΛΜ}}$, (5). Ἐκ τῶν (1, 5) λαμβάνεται $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΛΜ}}$, ἤτοι $\text{ΕΖ} = \text{ΛΜ}$, κλπ.

7

Εἰς τὴν σύνθεσιν. $\frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΕΔ}+\text{ΔΒ}}{\text{ΔΒ}}$, $\frac{\text{ΘΚ—ΚΛ}}{\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΕΔ}+\text{ΔΒ—ΔΒ}}{\text{ΔΒ}}$, $\frac{\text{ΘΛ}}{\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΔΒ}}$ Ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΘΛ}}{\text{ΛΚ}} = \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΔΖ}}$, ὁπότε $\frac{\text{ΘΛ}+\text{ΛΚ}}{\text{ΛΚ}} = \frac{\text{ΕΔ}+\text{ΔΖ}}{\text{ΔΖ}}$, $\frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΛΚ}} = \frac{\text{ΕΔ}+\text{ΔΖ}}{\text{ΔΖ}}$, (1). Ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΕΔ}+\text{ΔΖ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΒ}}$, (2). Ἀλλὰ $\frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{κῶνος ΑΗΓ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}}$ (3), καὶ κῶνος ΑΗΓ = σφ. τμ. ΑΒΓ, (4). Ἕπεται ἐκ τῶν (1, 2, 3, 4) $\frac{\text{σφ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΘΚ}}{\text{ΚΛ}}$.

8

$$\frac{\text{σφαιρ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφαιρ. τμ. ΑΔΓ}} < \left(\frac{\text{σφαιρ. ἐπιφάν. ΑΒΓ}}{\text{σφαιρ. ἐπιφάν. ΑΔΓ}}\right)^2, \text{ σφ. τμ. ΑΒΓ} > \text{σφ. τμ. ΑΔΓ.}$$

$$\frac{\text{σφαιρ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφαιρ. τμ. ΑΔΓ}} > \left(\frac{\text{σφαιρ. ἐπιφάν. ΑΒΓ}}{\text{σφαιρ. ἐπιφάν. ΑΔΓ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ἂς γίνῃ $\frac{ΕΔ+ΔΖ}{ΔΖ} = \frac{ΘΖ}{ΖΒ}$, (1), $\frac{ΕΒ+ΒΖ}{ΒΖ} = \frac{ΗΖ}{ΖΔ}$, (2).

Κῶνος ΑΘΓ = σφ. τμ. ΑΒΓ καὶ κῶνος ΑΓΗ = σφ. τμ. ΑΔΓ (θ 2), καὶ εἶναι $\frac{ΒΑ^2}{ΑΔ^2} = \frac{\text{σφ. ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. ἐπιφ. ΑΔΓ}}$ (3). Λέγω ὅτι

$$\frac{\text{κῶνος ΑΘΓ}}{\text{κῶνος ΑΗΓ}} = \frac{ΖΘ}{ΖΗ} < \left(\frac{ΒΑ^2}{ΑΔ^2}\right)^2 = \left(\frac{ΒΖ}{ΖΔ}\right)^2, \ (4).$$

Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\frac{ΕΔ+ΔΖ-ΔΖ}{ΔΖ} = \frac{ΘΖ-ΖΒ}{ΖΒ}$, $\frac{ΕΔ}{ΔΖ} = \frac{ΘΒ}{ΖΒ}$, (5)

καὶ ἐπειδὴ ΕΔ = ΒΕ, $\frac{ΒΕ}{ΔΖ} = \frac{ΘΒ}{ΖΒ}$, $\frac{ΒΖ}{ΔΖ} = \frac{ΘΒ}{ΒΕ}$, (6).

Ἔστω ΒΚ = ΒΕ.

Ἐπειδὴ ΒΖ > ΖΔ θὰ εἶναι καὶ ΘΒ > ΒΕ ἢ ΘΒ > ΒΚ (α), ἐκ τῆς (5), ἤτοι τὸ σημεῖον Κ θὰ πέσῃ μεταξὺ Θ καὶ Β. Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ΒΕ διὰ τοῦ ἴσου του ΒΚ, $\frac{ΚΖ}{ΒΖ} = \frac{ΗΖ}{ΖΔ}$,

$\frac{ΒΖ}{ΖΔ} = \frac{ΚΖ}{ΗΖ}$, (7). Ἐκ τῶν (6, 7) εἶναι

$\frac{ΘΒ}{ΒΚ} = \frac{ΚΖ}{ΗΖ}$, (ΒΚ = ΒΕ), (8).

Ἐπειδὴ $\frac{ΘΖ}{ΖΚ} < \frac{ΘΒ}{ΒΚ}$, (9), $\Big($διότι $\frac{ΘΖ}{ΖΚ} = \frac{2ΒΕ+ΕΖ+ΘΚ}{2ΒΕ+ΕΖ}$ καὶ

$\frac{ΘΒ}{ΒΚ} = \frac{ΒΕ+ΘΚ}{ΒΕ}$, $1 + \frac{ΘΚ}{2ΒΕ+ΕΖ} < 1 + \frac{ΘΚ}{ΒΕ}\Big)$ ἔπεται ἐκ τῶν (7, 8)

$\frac{ΘΖ}{ΖΚ} < \frac{ΚΖ}{ΖΗ}$, $ΘΖ \times ΖΗ < (ΚΖ)^2$, (10). Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ

$(ZH)^2$ ἔχομεν $\frac{\Theta Z}{ZH} < \frac{(KZ)^2}{(ZH)^2}$, (11). Καὶ ἐπειδὴ $BE = E\Delta$, $BZ + ZA = 2BE$, $BZ > \Delta Z$, θὰ εἶναι $BZ \times \Delta Z < BE \times E\Delta$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ $\Delta Z \times BE$ ἔχομεν $\frac{BZ}{BE} < \frac{E\Delta}{\Delta Z}$, (12). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (5) ἔχομεν $\frac{BZ}{BE} < \frac{\Theta B}{ZB}$, (13), $(BZ)^2 < \Theta B \times BE$, (14), $(BZ)^2 < \Theta B \times BK$, $(BK = BE)$.

Ἔστω $(BN)^2 = \Theta B \times BK$, (15). Θὰ εἶναι ἄρα $\frac{\Theta B}{BK} = \frac{(\Theta N)^2}{(NK)^2}$, (16) (Διότι ἐκ τῆς (15) εἶναι $\frac{\Theta B}{BN} = \frac{BN}{BK}$, $\frac{BN + BK}{BK} = \frac{\Theta B + BN}{BN}$, $\frac{KN}{BK} = \frac{\Theta N}{BN}$, $\frac{BN}{BK} = \frac{\Theta N}{KN}$, $\frac{(BN)^2}{(BK)^2} = \frac{(\Theta N)^2}{(KN)^2}$ (17). Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (15) διὰ $(BK)^2$ λαμβάνομεν $\frac{(BN)^2}{(BK)^2} = \frac{\Theta B}{BK}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (17) ἕπεται ἡ (16)). Εἶναι δὲ $\frac{(\Theta Z)^2}{(ZK)^2} > \frac{(\Theta N)^2}{(NK)^2}$, (18). (Διότι ἐκ τῆς (α), $\Theta B > BK$ λαμβάνεται $\Theta B + BZ > BK + BZ$, $\Theta Z > ZK$, ἐξ οὗ $\frac{\Theta Z}{ZN} > \frac{ZK}{ZN}$, $\frac{\Theta Z}{\Theta Z + ZN} > \frac{ZK}{ZK + ZN}$, $\frac{\Theta Z}{\Theta N} > \frac{ZK}{NK}$
ἢ $\frac{\Theta Z}{ZK} > \frac{\Theta N}{NK}$, $\frac{(\Theta Z)^2}{(ZK)^2} > \frac{(\Theta N)^2}{(NK)^2}$).

Ἐκ τῶν (16, 18) λαμβάνεται

$\frac{(\Theta Z)^2}{(ZK)^2} > \frac{\Theta B}{BE}$, (19) $(BK = BE)$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (8) εἶναι

$\frac{(\Theta Z)^2}{(ZK)^2} > \frac{KZ}{ZH}$, (20). Εἶναι ἄρα $\frac{\Theta Z}{ZH} > \left(\frac{KZ}{ZH}\right)^{\frac{3}{2}}$, (21). [Διότι κατὰ τὸν Εὐτόκιον παρεμβάλλοντες μεταξὺ KZ, ZH (β′ μέλους τῆς (20)) μέσην ἀνάλογον, ἔστω M, θὰ ἔχωμεν $\frac{KZ}{M} = \frac{M}{ZH}$, (β), ἐξ οὗ $\frac{(KZ)^2}{M^2} = \frac{M^2}{(ZH)^2} = \frac{KZ}{ZH}$, (γ). (Διότι, ὅταν εἶναι $KZ : M = M : ZH$ εἶναι $(KZ : M)^2 = KZ : ZH$, Εὐκλ. V, ὁρ. 9). Ἀντικαθιστῶντες ἐκ τῆς (γ) εἰς τὴν (20) λαμβάνομεν $\frac{(\Theta Z)^2}{(ZK)^2} > \frac{(KZ)^2}{M^2}$, ἐξ οὗ $\frac{\Theta Z}{ZK} > \frac{KZ}{M}$.

Ἄς ληφθῇ Τ $<$ ΘΖ καὶ ἡ ΚΖ ἄς παρεμβληθῇ μεταξὺ Τ καὶ Μ, ὥστε $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{KZ}} = \frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{M}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (β) εἶναι $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{KZ}} = \frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{ZH}}$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν γεωμ. προόδων εἶναι $\frac{(\mathrm{KZ})^3}{\mathrm{M}^3} = \frac{\mathrm{T} \times \mathrm{KZ} \times \mathrm{M}}{\mathrm{KZ} \times \mathrm{M} \times \mathrm{ZH}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{ZH}}$, (δ). Ἐκ τῆς (γ) εἶναι

$\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{M}} = \frac{(\mathrm{KZ})^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{ZH})^{\frac{1}{2}}}$, ἐξ οὗ $\frac{(\mathrm{KZ})^3}{\mathrm{M}^3} = \frac{(\mathrm{KZ})^{\frac{3}{2}}}{(\mathrm{ZH})^{\frac{3}{2}}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (δ) εἶναι

$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{ZH}} = \frac{(\mathrm{KZ})^{\frac{3}{2}}}{(\mathrm{ZH})^{\frac{3}{2}}}$. Ἐπειδὴ δὲ Τ $<$ ΘΖ, θὰ εἶναι $\frac{\Theta\mathrm{Z}}{\mathrm{ZH}} > \frac{(\mathrm{KZ})^{\frac{3}{2}}}{(\mathrm{ZH})^{\frac{3}{2}}}$, (ἡ 21)].

Καὶ εἶναι $\frac{\Theta\mathrm{Z}}{\mathrm{ZH}} = \frac{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Theta\Gamma}{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Delta\Gamma} = \frac{\text{σφ. τμ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. τμ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$,

$\frac{(\mathrm{AB})^2}{(\mathrm{A}\Delta)^2} = \frac{\mathrm{B}\Delta \times \mathrm{BZ}}{\mathrm{B}\Delta \times \mathrm{Z}\Delta} = \frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{Z}\Delta} = \frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{HZ}}$ (ἐκ τῆς 7) $=$
$\frac{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma}$ (ἐκ τῆς 3), $\frac{(\mathrm{KZ})^2}{(\mathrm{HZ})^2} = \left(\frac{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma}\right)^2$.

Ἐκ τούτων δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (11) εἶναι
$\frac{\text{σφ. τμ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. τμ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma} < \left(\frac{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma}\right)^2$, τὸ πρῶτον μέρος τοῦ προβλήματος,

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (21)

$\frac{\text{σφ. τμ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. τμ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma} > \left(\frac{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{A}\Delta\Gamma}\right)^{\frac{3}{2}}$, τὸ δεύτερον μέρος τοῦ προβλήματος.

Ἄλλη ἀπόδειξις.

1. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\text{σφ. τμ. } \Delta\mathrm{AB}}{\text{σφ. τμ. } \mathrm{B}\Gamma\Delta} < \left(\frac{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{AB}\Delta}{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{B}\Gamma\Delta}\right)^2$.

$$\frac{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{AB}\Delta}{\text{σφ. ἐπιφ. } \mathrm{B}\Gamma\Delta} = \frac{\text{κύκλος ἀκτῖνος } \mathrm{AB}}{\text{κύκλος ἀκτῖνος } \mathrm{B}\Gamma} = \frac{(\mathrm{AB})^2}{(\mathrm{B}\Gamma)^2} = \frac{\mathrm{A}\Gamma \times \mathrm{A}\Theta}{\mathrm{A}\Gamma \times \Theta\Gamma} = \frac{\mathrm{A}\Theta}{\Theta\Gamma}, \quad (1).$$

Ὁ λόγος τῶν σφαιρικῶν τμημάτων γράφεται

$$\frac{\text{σφ. τμ. } \mathrm{BA}\Delta}{\text{σφ. τμ. } \mathrm{B}\Gamma\Delta} = \frac{\text{σφ. τμ. } \mathrm{BA}\Delta}{\text{κῶνος } \mathrm{AB}\Delta} \times \frac{\text{κῶνος } \mathrm{AB}\Delta}{\text{κῶνος } \mathrm{B}\Gamma\Delta} \times \frac{\text{κῶνος } \mathrm{B}\Gamma\Delta}{\text{σφ. τμ. } \mathrm{B}\Gamma\Delta}, \quad (2).$$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ἔστω ΖΑ = ΑΕ = ΓΗ.

$$\frac{\text{σφ. τμ. ΒΑΔ}}{\text{κῶνος ΒΑΔ}} = \frac{\Gamma E + \Theta\Gamma}{\Theta\Gamma} = \frac{H\Theta}{\Theta\Gamma}, \ (3), \ (\text{θ. 2, πόρισμα}).$$

$$\frac{\text{κῶνος ΒΑΔ}}{\text{κῶνος ΒΓΔ}} = \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}, \ (4).$$

$$\frac{\text{κῶνος ΒΓΔ}}{\text{σφ. τμ. ΒΓΔ}} = \frac{A\Theta}{AE + A\Theta} = \frac{A\Theta}{\Theta Z}, \ (5), \ (\text{θ. 2, πόρ.}).$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνεται

$$\frac{\text{σφ. τμ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. τμ. ΒΓΔ}} = \frac{H\Theta}{\Theta\Gamma} \times \frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} \times \frac{A\Theta}{\Theta Z} = \frac{H\Theta \times \Theta A}{(\Theta\Gamma)^2} \times \frac{\Theta A}{\Theta Z} =$$

$$\frac{(H\Theta \times \Theta A) \times \Theta A}{(\Theta\Gamma)^2 \times \Theta Z} \ (\text{κατὰ τὸ κείμενον}) = \frac{(\Theta A)^2 \times \Theta H}{(\Theta\Gamma)^2 \times \Theta Z}, \ (6).$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{(\Theta A)^2 \times \Theta H}{(\Theta\Gamma)^2 \times \Theta Z} < \left(\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}\right)^2 \ \text{ἢ} \ \frac{(\Theta A)^2 \times \Theta H}{(\Theta\Gamma)^2 \times \Theta Z} < \left(\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma}\right)^2 \times \frac{\Theta H}{\Theta H}$$

ὅτι δηλ. $(\Theta\Gamma)^2 \times \Theta Z > (\Theta\Gamma)^2 \times \Theta H$, ἤτοι $\Theta Z > \Theta H$, ὅπερ εἶναι προφανὲς διότι $ZA = \Gamma H$, $A\Theta > \Theta\Gamma$, ἐξ οὗ $ZA + A\Theta > \Gamma H + \Theta\Gamma$ ἢ $\Theta Z > \Theta H$.

2. Πρέπει νὰ δειχθῇ $\dfrac{\text{σφ. τμ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. τμ. ΒΓΔ}} > \left(\dfrac{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΓΔ}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Ἐκ τῆς (6) τῆς προηγουμένης περιπτώσεως εἶναι $\dfrac{\text{σφ. τμ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. τμ. ΒΓΔ}} = \dfrac{\Theta A^2 \times \Theta H}{\Theta\Gamma^2 \times \Theta Z}$, (1).

Εἶναι δὲ $\dfrac{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΓΔ}} = \dfrac{AB^2}{B\Gamma^2}$, (2) ἐξ ἧς $\left(\dfrac{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΓΔ}}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{AB}{B\Gamma}$, (3). Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\left(\dfrac{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΑΔ}}{\text{σφ. ἐπιφ. ΒΓΔ}}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{AB^3}{B\Gamma^3}$, (4).

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ὅτι $\dfrac{A\Theta^2 \times \Theta H}{\Gamma\Theta^2 \times \Theta Z} > \dfrac{AB^3}{B\Gamma^3} = \dfrac{A\Theta^3}{\Theta B^3} = \dfrac{A\Theta^2}{\Theta B^2} \times \dfrac{A\Theta}{\Theta B}$, (5). (Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΘ, ΒΘΓ εἶναι $AB : B\Gamma = A\Theta : \Theta B$, (6)). Ἀλλὰ $\dfrac{A\Theta^2}{\Theta B^2} \times \dfrac{A\Theta}{\Theta B} = \dfrac{A\Theta^2}{\Theta B \times \Theta\Gamma}$. Διότι ἐκ τοῦ σχήματος εἶναι $\dfrac{AB^2}{B\Gamma^2} = \dfrac{A\Gamma \times A\Theta}{A\Gamma \times \Theta\Gamma} = \dfrac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (6), διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη εἶναι $\dfrac{AB^2}{B\Gamma^2} \times \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A\Theta}{\Theta B} \times \dfrac{A\Theta}{\Theta\Gamma}$ ἢ $\dfrac{AB^3}{B\Gamma^3} =$

$\frac{\text{ΑΘ}^2}{\text{ΘΒ}\times\text{ΘΓ}}$, (7). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (5) ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\text{ΑΘ}^2\times\text{ΘΗ}}{\text{ΓΘ}^2\times\text{ΘΖ}} > \frac{\text{ΑΘ}^2}{\text{ΘΒ}\times\text{ΘΓ}}$ ἢ $\frac{\text{ΑΘ}^2\times\text{ΘΗ}}{\text{ΓΘ}^2\times\text{ΘΖ}} > \frac{\text{ΑΘ}^2\times\text{ΘΗ}}{\text{ΘΒ}\times\text{ΘΓ}\times\text{ΘΗ}}$. Ἑπομένως πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι $\text{ΓΘ}^2\times\text{ΘΖ} < \text{ΘΒ}\times\text{ΘΓ}\times\text{ΘΗ}$ ἢ $\frac{\text{ΓΘ}^2}{\text{ΘΒ}\times\text{ΘΓ}} < \frac{\text{ΘΗ}}{\text{ΘΖ}}$ ἢ $\frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΒ}} < \frac{\text{ΘΗ}}{\text{ΘΖ}}$.

Ἔστω $\text{ΘΒ} = \text{ΛΕ}$. Ἡ $\text{ΘΖ}=\text{ΑΘ}+\text{ΚΕ}$, $(\text{ΚΕ}=\text{ΑΖ})$. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\text{ΘΗ}}{\text{ΑΘ}+\text{ΚΕ}} > \frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΒ}}$ ἢ $\frac{\text{ΘΗ}-\text{ΓΘ}}{\text{ΑΘ}+\text{ΚΕ}-\text{ΘΒ}} > \frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΒ}}$ ἢ $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΑΘ}+\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΒ}}$, (8). Ἀλλὰ $\text{ΘΒ}^2 = \text{ΑΘ}\times\text{ΓΘ}$, $\frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΒ}} = \frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΑΘ}}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) ἔχομεν $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΑΘ}+\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΘΒ}}{\text{ΑΘ}}$ ἢ $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{ΑΘ}+\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΛΕ}}{\text{ΑΘ}}$, $(\text{ΘΒ} = \text{ΛΕ})$. Ἐπειδὴ $\text{ΓΗ} = \text{ΚΕ}$, ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται $\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΑΘ}+\text{ΚΛ}} > \frac{\text{ΛΕ}}{\text{ΑΘ}}$ ἢ $\frac{\text{ΚΕ}}{\text{ΛΕ}} > \frac{\text{ΑΘ}+\text{ΚΛ}}{\text{ΑΘ}}$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\frac{\text{ΚΕ}-\text{ΛΕ}}{\text{ΛΕ}} > \frac{\text{ΑΘ}+\text{ΚΛ}-\text{ΑΘ}}{\text{ΑΘ}}$ ἢ $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΛΕ}} > \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΑΘ}}$, ἤτοι πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι $\text{ΛΕ} < \text{ΑΘ}$, ὅπερ εἶναι προφανὲς ἐκ τοῦ σχήματος.

9

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφ. τμημάτων ΒΑΔ, ΖΕΘ ἕπεται $\text{ΒΑ} = \text{ΕΖ}$, (1). Εἶναι φανερὸν ὅτι $\text{ΒΑ}^2 < 2\text{ΑΚ}^2$, (2) καὶ $\text{ΒΑ}^2 > 2$ τετράγωνα τῆς ἀκτῖνος, (3). (Πρόκειται περὶ τοῦ σχήματος ὅπου τὸ σφαιρ. τμῆμα ΒΑΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμισφαιρίου. Διὰ τὴν σχέσιν (2), ἐπειδὴ τόξ. $\text{ΒΑΔ} > \frac{1}{2}$ περιφερείας, ἡ $\text{ΑΚ} >$ τῆς ἀκτῖνος $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$, ἐξ ἧς $2\text{ΑΚ} > \text{ΑΓ}$. Εἶναι δὲ $\text{ΒΑ}^2 = \text{ΑΓ}\times\text{ΑΚ}$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς ταύτην τῆς τιμῆς ΑΓ ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως ἕπεται $\text{ΒΑ}^2 < 2\text{ΑΚ}^2$. Διὰ τὴν σχέσιν (3), ἐπειδὴ $2\text{ΑΚ} >$ τῆς διαμέτρου ΑΓ, ἕπεται $\text{ΑΚ} >$ τῆς ἀκτῖνος $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$. Ἑπομένως ἐκ τῆς σχέσεως $\text{ΒΑ}^2 = \text{ΑΓ}\times\text{ΑΚ}$ συνάγεται δι' ἀντικαταστάσεως τῆς ΑΚ ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως, $\text{ΒΑ}^2 > 2$ τετράγωνα τῆς ἀκτῖνος). Ἔστω $\text{ΒΑ}^2 = 2\text{ΑΡ}^2$ καὶ ΓΞ = ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΒΔ καὶ ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΓΞ}}{\text{ΓΚ}} = \frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΑΚ}}$, (4). Ὁ κῶνος ΒΔΜ=

σφ. τμ. ΒΑΔ. Διότι ἐκ τῆς (4) εἶναι $\frac{\Gamma\Xi+\Gamma K}{\Gamma K}=\frac{MA+AK}{AK}$, $\frac{\Xi K}{\Gamma K}=\frac{MK}{AK}$, (5), σχέσις ἡ ὁποία κατὰ τὸ θεώρημα 2 δίδει τὴν ἰσότητα τοῦ κώνου ΒΔΜ πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΒΑΔ, (λ). Ἔστω καὶ ΕΛ = ΕΝ. Ὁ κῶνος ΖΘΝ= σφαιρ. τμ. ΘΕΖ, διότι $\frac{\Lambda N}{\Lambda E}=\frac{2H\Lambda}{H\Lambda}$, σχέσις ἡ ὁποία ἐπίσης κατὰ τὸ (θ. 2) δίδει τὴν ἰσότητα τοῦ κώνου ΖΘΝ πρὸς τὸ σφαιρ. τμῆμα ΘΕΖ, (μ). Τὸ ὀρθογώνιον $AP\times P\Gamma >$ τοῦ ὀρθογωνίου $AK\times K\Gamma$, (6). [Διότι ἡ διάμετρος ΑΓ μίαν φορὰν τέμνεται εἰς τὰ τμήματα $AP < P\Gamma$ καὶ $AK < K\Gamma$ (εἰς τὸν μεγάλον κύκλον) καὶ εἶναι $AP > AK$. Τὴν ἄλλην φορὰν τέμνεται εἰς τὰ τμήματα $AP > P\Gamma$ καὶ $AK > K\Gamma$ (εἰς τὸν μικρὸν κύκλον) καὶ εἶναι $P\Gamma > K\Gamma$. Ἐνταῦθα ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ τὸ γνωστὸν πρὸ αὐτοῦ θεώρημα Περὶ μεγίστου: Ἐὰν $\alpha+\beta=\varepsilon$ $(\alpha>\beta)$ καὶ $\gamma+\delta=\varepsilon$ $(\gamma>\delta$ καὶ $\beta>\delta)$ τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta>\gamma\times\delta$. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ (ΙΙ θ. 5) τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καθ' ὃ ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ($=\varepsilon$) τμηθῇ εἰς τὸ μέσον Γ καὶ εἰς τὰ ἄνισα τμήματα $A\Delta>\Delta B$ (διὰ τοῦ σημείου Δ), θὰ εἶναι $A\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^2=A\Gamma^2$. Ἐὰν ἡ αὐτὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς τὸ μέσον Γ καὶ εἰς τὰ ἄνισα τμήματα $AE > EB$ (διὰ τοῦ σημείου Ε) θὰ εἶναι πάλιν $AE\times EB+\Gamma E^2=A\Gamma^2$. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων ἰσοτήτων ἕπεται $A\Delta\times\Delta B+\Gamma\Delta^2=AE\times EB+\Gamma E^2$. Ἐὰν $\Gamma\Delta < \Gamma E$ ἕπεται $A\Delta\times\Delta B > AE\times EB$ καὶ εἶναι $A\Delta > \Delta B$, $AE > EB$, $\Delta B > EB$. Ἄλλην ἀπόδειξιν παρέχει ὁ P. ver Eecke: $BK^2=AK\times K\Gamma$. Τὸ τετράγωνον τῆς χορδῆς, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Ρ καὶ καταλήγει παρὰ τὸ Β, $=AP\times P\Gamma$. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ αὕτη εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΚ ἕπεται ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτῆς $>$ BK^2 ἤτοι $AP\times P\Gamma>AK\times K\Gamma$]. Εἶναι δὲ $AP^2=AK\times\Gamma\Xi$, (7), (διότι ἐλήφθη ἀνωτέρω $AB^2=2AP^2$ καὶ εἶναι $AB^2=A\Gamma\times AK$. Εἶναι ἑπομένως $\frac{1}{2}AB^2=AP^2=AK\times\frac{A\Gamma}{2}=\frac{AK\times 2\Gamma\Xi}{2}=AK\times\Gamma\Xi$, ἐπειδὴ ἐλήφθη $\Gamma\Xi=$ ἀκτὶς σφαίρας).

Διὰ προσθέσεως τῶν (6, 7) κατὰ μέλη ἔχομεν $AP\times P\Gamma+AP^2 > AK\times K\Gamma+AK\times\Gamma\Xi$. Ἡ σχέσις αὕτη γράφεται $AP(AP+P\Gamma) > AK(K\Gamma+\Gamma\Xi)$ ἢ (ἐκ τοῦ σχήματος) $\Gamma A\times AP > \Xi K\times KA$, (8). Ἐκ τῆς (5) ὅμως εἶναι $\Xi K\times AK=\Gamma K\times MK$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) λαμβάνεται $\Gamma A\times AP > \Gamma K\times MK$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\Gamma A}{\Gamma K} > \frac{MK}{AP}$, (9). Ἀλλὰ $\frac{\Gamma A}{\Gamma K}=\frac{AB^2}{BK^2}$ (10), (διότι $AB^2 = ΓA \times AK$ καὶ $BK^2 = AK \times ΓK$ καὶ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη). Ἐκ τῶν (9, 10) ἕπεται $\frac{AB^2}{BK^2} > \frac{MK}{AP}$ ἢ $\frac{\frac{1}{2} AB^2}{BK^2} > \frac{MK}{2AP}$ (11). Ἔχει ληφθῆ $AB^2 = 2AP^2$, $\frac{AB^2}{2} = AP^2$ καὶ εἶναι $AB = EZ$. Ἑπομένως $AB^2 = EZ^2 = 2ΛE^2$ (ἐκ τοῦ σχήματος) $= 2AP^2$. Ἐκ ταύτης εἶναι $ΛE = AP$ καὶ $2ΛE = ΛN = 2AP$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (11) λαμβάνεται $\frac{AP^2}{BK^2} > \frac{MK}{ΛN}$. Καὶ εἶναι $ΛE = ΛZ = AP$. Ἡ προηγουμένη ἀνισότης γράφεται $\frac{ΛZ^2}{BK^2} > \frac{MK}{ΛN}$, (12). Ἐκ ταύτης ἕπεται $\frac{\text{κύκλος διαμέτρου } ZΘ}{\text{κύκλος διαμέτρου } BΔ} = \frac{ΛZ^2}{BK^2}$, (13). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (12) λαμβάνεται $\frac{\text{κύκλος διαμέτρου } ZΘ}{\text{κύκλος διαμέτρου } BΔ} > \frac{MK}{ΛN}$. Ἀλλὰ MK, ΛN εἶναι τὰ ὕψη κώνων καὶ οἱ κύκλοι διαμέτρων ZΘ, BΔ εἶναι βάσεις τῶν κώνων αὐτῶν ἀντιστρόφως.

Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως εἶναι : κύκλος διαμέτρου $ZΘ \times ΛN >$ κύκλος διαμέτρου $BΔ \times MK$ ἤτοι κῶνος $ZΘN >$ κώνου BΔM. Ἐκ τῶν σχέσεων (μ, λ.) εἶναι ἄρα σφαιρ. τμῆμα $ΘEZ >$ σφαιρ. τμήματος BAΔ.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

1

1. Ἔστω κύκλος Κ, περιφέρεια αὐτοῦ Π, ἀκτὶς ρ καὶ τρίγωνον Ε. Ἐὰν δὲν εἶναι $K = E$ θὰ εἶναι $K \gtrless E$. Ἔστω πρῶτον $K > E$ καὶ $K - E = \delta$, (1). Ἐγγράφει εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κλπ. μέχρις ὅτου ἡ διαφορὰ τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἀπὸ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ δ. Ἔστω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τελευταίως ἐγγραφέντος πολυγώνου Z_1 καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ T_1, ὁπότε θὰ εἶναι $K - Z_1 < \delta$, (2). Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (1) ἀπὸ τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνεται $Z_1 > E$, (3).

Ἔστω τώρα ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡ ΝΞ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου $Z_1 = \frac{1}{2} T_1 . \text{ΝΞ}$, (4). Ἐπειδὴ $\text{ΝΞ} < \rho$ καὶ $T_1 < \Pi$, θὰ εἶναι $\frac{1}{2} T_1 . \text{ΝΞ} < \frac{1}{2} \Pi . \rho$, (5). Εἶναι δὲ καθ' ὑπόθεσιν $\frac{1}{2} \Pi . \rho = E$, (6). Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (5), $Z_1 < E$, ὅπερ ἄτοπον ἕνεκα τῆς (3). Ὥστε δὲν εἶναι $K > E$.

2. Ἔστω τώρα $K < E$ καὶ $E - K = \delta$, (1). Περιγράφομεν εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ εἰς τὰ τόξα τοῦ κύκλου τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς ἑκάστην γωνίαν τοῦ τετραγώνου, ἀφοῦ τὰ διχοτομήσωμεν, φέρομεν εἰς τὰ σημεῖα διχοτομήσεως ἐφαπτομένας, ὁπότε ἔχομεν εἰς τὸν κύκλον περιγράψει ὀκτάγωνον. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν δεκαεξάγωνον κλπ. Φέρομεν τὴν ΝΑΟ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΡ ἡ ΟΡ εἶναι ὑποτείνουσα καὶ ἑπομένως μεγαλυτέρα τῆς $\text{ΑΡ} = \text{ΡΜ}$. Τὸ τρίγωνον ἄρα $\text{ΟΑΡ} >$ τριγ. ΑΡΜ. Διὰ τῆς προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως ταύτης τοῦ τριγώνου $\text{ΠΑΟ} = \text{ΟΑΡ}$, λαμβάνομεν τρίγωνον $\text{ΟΠΡ} >$ τριγ. ΟΑΡ + τριγ. ΑΡΜ. Κατὰ μείζονα λόγον εἶναι τρίγωνον $\text{ΟΠΡ} >$ σχήματος, ΟΜ + τόξ. ΜΑ + τόξ. ΑΖ + ΖΟ. Ἤτοι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τοῦ ὀκταγώνου, τότε ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγέθους, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τοῦ κύκλου. Διὰ τῆς συνεχοῦς περιγραφῆς τοιούτων πολυγώνων (διὰ τῆς διχοτομήσεως τῶν τόξων)

φθάνομεν εἴς τινα στιγμήν, καθ' ἣν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τελευταίως περιγραφέντος πολυγώνου καὶ κύκλου εἶναι μικροτέρα τοῦ δ (Εὐκλείδου Χ1). Ἄς κληθῇ ἡ προκύψασα μικροτέρα διαφορὰ δ', ὁπότε κατὰ τὴν (1) θὰ εἶναι $E - K > \delta'$, (2). Ἔστω τὸ τελευταίως περιγραφὲν πολύγωνον Z_2 καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ T_2. Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $E > K + \delta'$ καὶ εἶναι $Z_2 = K + \delta'$, ἤτοι $E > Z_2$, (3). Εἶναι δὲ $Z_2 = \frac{1}{2} \cdot T_2 \cdot \rho$ καὶ ἐξ ὑποθέσεως $E = \frac{1}{2} \Pi \cdot \rho$. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων, ἐπειδὴ $T_2 > \Pi$, ἕπεται $Z_2 > E$, ὅπερ ἄτοπον, ἐκ τῆς (3). Ὥστε δὲν εἶναι $K < E$. Εἶναι ἄρα $K = E$.

2

Κατὰ τὸ θεώρημα ὁ λόγος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι $\frac{11}{14}$ κατὰ προσέγγισιν. Τοῦτο ὅμως δὲν γράφεται. Φαίνεται, τὸ θεώρημα ἔχει περισωθῇ ἀτελῶς. Οὔτε ἡ θέσις του εἶναι ἡ πρέπουσα· ἔπρεπε τοῦτο νὰ ἀκολουθῇ τὸ θεώρημα 3.

3

(Προεισαγωγικά)

Τὸ θεώρημα χωρίζεται εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἀποδεικνύει ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$. Εἰς τὸ δεύτερον ὅτι ὁ λόγος οὗτος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου μέρους τοῦ θεωρήματος περιγράφει εἰς τὸν κύκλον διαδοχικῶς, ἑξάγωνον, δωδεκάγωνον, . . . ἕως 96άγωνον. Δὲν προχωρεῖ εἰς περιγραφὴν πολυγώνων ἐχόντων περισσοτέρας τῶν 96 πλευρῶν, διότι ἐν ᾧ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ 48γώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου (= 3,1461 . . .) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ (= 3,142857 . . .), ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου (3,14271...)

εἶναι ὁ πρῶτος λαμβανόμενος μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ ἀρκῶν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τοῦ θεωρήματος.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος ἐγγράφει εἰς τὸν κύκλον διαδοχικῶς, ἑξάγωνον, δωδεκάγωνον ... ἕως 96άγωνον. Δὲν προχωρεῖ εἰς τὴν ἐγγραφὴν πολυγώνων ἐχόντων περισσοτέρας τῶν 96 πλευράς, διότι, ἐν ᾧ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου 48γώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου $(= 3{,}1393\ldots)$ εἶναι μικρότερος τοῦ $3\,\frac{10}{71}$ $(= 3{,}1408\ldots)$, ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου $(= 3{,}14103\ldots)$ εἶναι ὁ πρῶτος λαμβανόμενος μεγαλύτερος τοῦ $3\,\frac{10}{71}$ καὶ ἀρκῶν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τοῦ θεωρήματος.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος χρησιμοποιεῖ τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέρος τὴν σχέσιν $\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.

Τὰς σχέσεις $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεωςς ὅπερ σημαίνει, ὅτι αὗται εἶχον ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων μαθηματικῶν. Ὑποθέτομεν ὅτι αὗται εἶχον εὑρεθῆ ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων. Μετὰ τὸ τέλος τῶν ἐπεξηγήσεων τοῦ θεωρήματος τούτου θὰ παραθέσωμεν διαφόρους ἀποδείξεις τῶν νεωτέρων δι' ὧν εὑρίσκονται αἱ ἀνωτέρω σχέσεις.

*

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου μέρους τοῦ θεωρήματος, ἀφοῦ περιγράψῃ ἑξάγωνον εἰς τὸν κύκλον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΕΓ, ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ ἑνὸς ἐκ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων τοῦ ἑξαγώνου (σχ. 1 τρίτου θεωρήματος). Ἡ γωνία $\text{ΖΕΓ} = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς καὶ ἑπομένως ἡ ὑποτείνουσα $\text{ΖΕ} = 2\text{ΓΖ}$. Ἐκ τῆς σχέσεως $\text{ΓΕ}^2 = 4\text{ΓΖ}^2 - \text{ΓΖ}^2$ λαμβάνεται $\text{ΓΕ} = \text{ΓΖ}\sqrt{3}$ ἢ $\text{ΓΕ} : \text{ΓΖ} = \sqrt{3} : 1$, (1). Ἡ σχέσις αὕτη δηλοῖ τὸν λόγον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου, δηλαδὴ τὸν λόγον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγρ. ἑξαγώνου. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν χρειάζεται τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν διάμετρον, ἵνα σχηματίσῃ τὸν λόγον τῆς περιμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τοῦτο πρέπει νὰ δώσῃ τοιαύτας ἀριθμητικὰς τιμὰς εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς σχέσεως (1), ὥστε ὁ λόγος ΓΕ : ΓΖ νὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3.

Δίδει εἰς τὴν πλευρὰν ΓΖ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 153. Ἐκ τῆς σχέσεως $ΓΕ^2 = 3ΓΖ^2$ θὰ ἔχωμεν $ΓΕ^2 = 3.153^2 = 70227$ καὶ ἐκ ταύτης $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = 3.153^2 : 153^2$ ἢ $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = 70227 : 23409$, (2). Ὁ ἀριθμὸς 70227 εἶναι ὀλίγον μεγαλύτερος ἑνὸς τελείου τετραγώνου, ἤτοι εἶναι $70227 = 265^2 + 2$. Ἡ σχέσις (2) εἶναι $ΓΕ^2 : ΓΖ^2 = (265^2 + 2) : 153^2$, ἐξ ἧς $ΓΕ : ΓΖ = \sqrt{265^2+2} : 153 = \sqrt{3} : 1$. Ἐὰν εἰς τὴν ὑπόρριζον ποσότητα παραλείψωμεν τὸν προσθετέον 2 θὰ λάβωμεν

$\sqrt{3} : 1 = ΓΕ : ΓΖ > 265 : 153$ ($\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ καὶ $265 : 153 = 1{,}73202\ldots$).

Ἡ εὑρεθεῖσα ἀνισότης παριστᾷ σχέσιν ἀκτῖνος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου ἢ σχέσιν διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγρ. ἑξαγώνου. Εἶναι δὲ ἡ σχέσις αὕτη μεγαλυτέρα ἀριθμητικῆς τιμῆς μικροτέρας τῆς $\sqrt{3}$ ἤτοι τῆς 265 : 153.

Ἀκολούθως λαμβάνει τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου 12γώνου, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου, κατόπιν λαμβάνει τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγρ. 24γώνου, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου κλπ. Λαμβάνει οὕτω ἐν ὅλῳ πέντε λόγους τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἑπόμενος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου. Κατόπιν θεωρεῖ πέντε λόγους τῆς διαμέτρου πρὸς τὰς ἀντιστοίχους περιμέτρους τοῦ 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου, καὶ τέλος ἐκ τούτων λαμβάνει τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον (ἕκαστος λόγος τώρα εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου, διότι αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται). Ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγρ. 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον, ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$. Δὲν ἔχει εὑρεθῆ πόθεν ὁ Ἀρχιμήδης ὁρμηθεὶς ἔδωκεν εἰς τὴν πλευρὰν ΓΖ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 153.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

*

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος λαμβάνει εἰς τὸν κύκλον κέντρου Ε καὶ διαμέτρου ΑΓ (σχ. 2 τρίτου θεωρήματος) τὴν γωνίαν $ΒΑΓ = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς, ὁπότε ἡ ΒΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Διὰ τετραπλῆς συνεχοῦς διχοτομήσεως τῆς γωνίας ΒΑΓ λαμβάνει τὴν ΗΓ πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 12γώνου, τὴν ΘΓ πλευρὰν τοῦ ἐγγεγρ. 24γώνου, τὴν ΚΓ πλευρὰν τοῦ ἐγγεγρ. 48γώνου, καὶ τὴν ΛΓ πλευρὰν τοῦ ἐγγεγρ. 96γώνου.

Ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΑΓ πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου ΒΓ εἶναι 2 : 1. Ἀκολούθως ἐκφράζει ἀριθμητικῶς τοὺς λόγους τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ 12γώνου, τοῦ 24γώνου, τοῦ 48γώνου, τοῦ 96γώνου. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζει πρῶτον τὴν πλευρὰν ΑΒ ἐκ τῆς σχέσεως
$ΑΒ^2 = 4ΒΓ^2 - ΒΓ^2 = 3ΒΓ^2$, ἐξ ἧς $ΑΒ = ΒΓ\sqrt{3}$ ἢ $ΑΒ : ΒΓ = \sqrt{3} : 1$, (1).

Τώρα θέλει νὰ ἔχῃ ἀνισότητα τοιαύτην, ὥστε ὁ λόγος ΑΒ : ΒΓ νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου $\sqrt{3} : 1$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνει τὴν $\sqrt{3}$ καθ' ὑπεροχήν. Δίδει εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 780. Ἐκ τῆς σχέσεως $ΑΒ^2 = 3ΒΓ^2$ λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως

$$ΑΒ^2 = 3.780^2 = 1825200$$

καὶ συνεπῶς $ΑΒ^2 : ΒΓ^2 = 3.780^2 : 780^2 = 1825200 : 608400$. Ὁ ἀριθμὸς 1825200 εἶναι ὀλίγον μικρότερος ἑνὸς τελείου τετραγώνου, ἤτοι εἶναι

$1825200 = 1351^2 - 1$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $ΑΒ^2 : ΒΓ^2 = 1351^2 - 1 : 780^2$ καὶ ἐκ τούτου καὶ τῆς (1) $ΑΒ : ΒΓ = \sqrt{1351^2 - 1} : 780 = \sqrt{3} : 1$.

Ἐὰν εἰς τὴν ὑπόρριζον ποσότητα τῆς προηγουμένης σχέσεως προσθέσωμεν τὴν μονάδα θὰ λάβωμεν $ΑΒ : ΒΓ < 1351 : 780$ ($\sqrt{3} = 1{,}732050 \ldots$ καὶ $1351 : 780 = 1{,}732051 \ldots$).

Ἡ σχέσις $ΑΒ : ΒΓ < 1351 : 780$ παριστᾷ τὸν λόγον τῆς μεγαλυτέρας τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν μικροτέραν κάθετον πλευράν· διὰ νὰ ληφθῇ δὲ ὁ λόγος ΑΒ : ΒΓ μικρότερος τοῦ λόγου 1351 : 780 ἐλήφθη ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς $\sqrt{3}$ καθ' ὑπεροχήν.

Διχοτομεῖ τετράκις τὴν γωνίαν ΒΑΓ καὶ λαμβάνει ἀκόμη τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ὑπολογίζει τοὺς λόγους ἑκάστης μεγαλυτέρας καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀντίστοιχον μικροτέραν κάθετον. Τῇ βοηθείᾳ τῶν λόγων τούτων σχηματίζει πλὴν τῆς πρώτης ἰσότητος (τῆς ΑΓ : ΒΓ = 1560 : 780) τέσσαρας ἀνισότητας, αἵτινες ἐκφράζουν τοὺς λόγους τῆς διαμέτρου πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων, οἱ ὁποῖοι βαίνουν ἐλαττούμενοι. Κατόπιν θεωρεῖ τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον, οἵτινες βαίνουν αὐξανόμενοι (αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται). Ὁ λόγος τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγρ. 96γώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον, ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$. Δὲν ἔχει εὑρεθῆ πόθεν ὁ Ἀρχιμήδης ὁρμηθεὶς ἔδωκεν εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 780.

*

Ἀνάπτυξις τοῦ πρώτου μέρους τοῦ θεωρήματος

(σχ. 1 τρίτου θεωρήματος)

Ἔστω διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΑΓ, κέντρον αὐτοῦ τὸ Ε, ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἡ γωνία ΖΕΓ $= \frac{1}{3}$ ὀρθῆς, ὁπότε

$$ZE = 2\Gamma Z \text{ ἢ } ZE : \Gamma Z = 2 : 1.$$

Δίδει εἰς τὴν ΓΖ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 153, ὅτε εἶναι $ZE : \Gamma Z = 306 : 153$, καὶ ἐκ ταύτης $ZE^2 : \Gamma Z^2 = 306^2 : 153^2$, (1). Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ΓΕ ἐφαρμόζει γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν. Ἐκ τῆς προηγουμένης σχέσεως εἶναι $(ZE^2 - \Gamma Z^2) : \Gamma Z^2 = (93636 - 23409) : 23409$. Καὶ ἐπειδὴ $ZE^2 - \Gamma Z^2 = \Gamma E^2$, θὰ ἔχωμεν $\Gamma E^2 : \Gamma Z^2 = 70227 : 23409$, ἢ

$$\Gamma E^2 : \Gamma Z^2 = (70225 + 2) : 23409$$

καὶ ἐκ ταύτης $\Gamma E : \Gamma Z = \sqrt{70225 + 2} : 23409$, ἢ

$$\Gamma E : \Gamma Z = \sqrt{265^2 + 2} : 153^2.$$

Παραλείπων εἰς τὴν ὑπόρριζον ποσότητα τὸν προσθετέον 2 λαμβάνει

$$\Gamma E : \Gamma Z > 265 : 153 \qquad (1).$$

Προηγουμένως εἴχομεν $\qquad ZE : \Gamma Z = 306 : 153$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $(\Gamma E + ZE) : \Gamma Z > 571 : 153 \qquad (2).$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΕΗ τῆς γωνίας ΖΕΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (Εὐκλ. VI 3) $ZE : \Gamma E = ZH : \Gamma H$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης

ἔχομεν $(ZE+\Gamma E) : \Gamma E = (ZH+\Gamma H) : \Gamma H$

ἐξ ἧς $(ZE+\Gamma E) : (ZH+\Gamma H) = \Gamma E : \Gamma H$

Ἀλλὰ $ZH+\Gamma H = \Gamma Z$

καὶ συνεπῶς $(ZE+\Gamma E) : \Gamma Z = \Gamma E : \Gamma H$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) λαμβάνομεν $\Gamma E : \Gamma H > 571 : 153$ (3).

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $\Gamma E^2 : \Gamma H^2 > 326041 : 23409$

καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας ταύτης

$$(\Gamma E^2 + \Gamma H^2) : \Gamma H^2 > (326041 + 23409) : 23409.$$

Ἀλλὰ $\Gamma E^2+\Gamma H^2=HE^2$. Εἶναι ἄρα $HE^2 : \Gamma H^2 > 349450 : 23409.$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $HE : \Gamma H > 591\frac{1}{8} : 153$

$\left[\text{διότι} \left((591\frac{1}{8}\right)^2 = 349428\frac{49}{64}\right.$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ 349450 καὶ κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ τελευταία ἀνισότης].

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα καὶ τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν $(HE+\Gamma E) : \Gamma H > 1162\frac{1}{8} : 153$ (4).

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΕΘ τῆς γωνίας ΗΕΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $HE : \Gamma E = H\Theta : \Gamma\Theta$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(HE+\Gamma E) : \Gamma E = (H\Theta+\Gamma\Theta) : \Gamma\Theta$

ἐξ ἧς $(HE+\Gamma E) : (H\Theta+\Gamma\Theta) = \Gamma E : \Gamma\Theta$

Ἀλλὰ $H\Theta+\Gamma\Theta = \Gamma H$ καὶ συνεπῶς $(HE+\Gamma E) : \Gamma H = \Gamma E : \Gamma\Theta$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) λαμβάνομεν $\Gamma E : \Gamma\Theta > 1162\frac{1}{8} : 153$ (5).

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $\Gamma E^2 : \Gamma\Theta^2 > 1350534\frac{33}{64} : 23409$

καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας ταύτης

$$(\Gamma E^2+\Gamma\Theta^2) : \Gamma\Theta^2 > (1350534\frac{33}{64} + 23409) : 23409$$

$$\text{ἢ} \quad (\Gamma E^2+\Gamma\Theta^2) : \Gamma\Theta^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409$$

Ἀλλὰ $ΓΕ^2+ΓΘ^2 = ΘΕ^2$.

Εἶναι ἄρα $ΘΕ^2 : ΓΘ^2 > 1373943\frac{33}{64} : 23409$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $ΘΕ : ΓΘ > 1172\frac{1}{8} : 153$

[διότι $\left(1172\ \frac{1}{8}\right)^2 = 1373877\frac{1}{64}$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ $1373943\frac{33}{64}$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ τελευταία ἀνισότης].

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα καὶ τὴν σχέσιν (5) λαμβάνομεν $(ΘΕ+ΓΕ) : ΓΘ > 2334\frac{1}{4} : 153$ (6).

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΕΚ τῆς γωνίας ΘΕΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $ΘΕ : ΓΕ = ΘΚ : ΓΚ$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(ΘΕ+ΓΕ) : ΓΕ = (ΘΚ+ΚΓ) : ΓΚ$

ἐξ ἧς $(ΘΕ+ΓΕ) : (ΘΚ+ΚΓ) = ΓΕ : ΓΚ$

Ἀλλὰ $ΘΚ+ΓΚ = ΓΘ$ καὶ συνεπῶς

$$(ΘΕ+ΓΕ) : ΓΘ = ΓΕ : ΓΚ.$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (6) λαμβάνομεν $ΓΕ : ΓΚ > 2334\frac{1}{4} : 153$ (7).

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $ΓΕ^2 : ΓΚ^2 > 5448723\frac{1}{16} : 23409$

καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας ταύτης

$$(ΓΕ^2+ΓΚ^2) : ΓΚ^2 > \left(5448723\frac{1}{16} + 23409\right) : 23409$$

$$\text{ἢ} \quad (ΓΕ^2 + ΓΚ^2) : ΓΚ^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409.$$

Ἀλλὰ $ΓΕ^2+ΓΚ^2 = ΚΕ^2$.

Εἶναι ἄρα $ΚΕ^2 : ΓΚ^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $ΚΕ : ΓΚ > 2339\frac{1}{4} : 153$

[διότι $\left(2339\frac{1}{4}\right)^2 = 5472090\frac{9}{16}$, ὅπερ εἶναι μικρότερον τοῦ $5472132\frac{1}{16}$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον ἰσχύει ἡ τελευταία ἀνισότης].

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν τελευταίαν ταύτην ἀνισότητα καὶ τὴν σχέσιν (7) λαμβάνομεν $(ΚΕ+ΓΕ) : ΓΚ > 4673\frac{1}{2} : 153 \qquad (8).$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΛΕ τῆς γωνίας ΓΕΚ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ΚΕ : ΓΕ = ΚΛ : ΓΛ$$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $(ΚΕ+ΓΕ) : ΓΕ = (ΚΛ+ΓΛ) : ΓΛ$

ἐξ ἧς $(ΚΕ+ΓΕ) : (ΚΛ+ΓΛ) = ΓΕ : ΓΛ.$

Ἀλλὰ ΚΛ+ΓΛ=ΓΚ καὶ συνεπῶς $(ΚΕ+ΓΕ) : ΓΚ = ΓΕ : ΓΛ.$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (8) λαμβάνομεν $ΓΕ : ΓΛ > 4673\frac{1}{2} : 153 \qquad (9).$

Αἱ εὑρεθεῖσαι ἀνισότητες (1), (3), (5), (7), (9) παριστοῦν τὸν λόγον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου.

Ἀναγράφομεν ταύτας ὁμοῦ :

$$\begin{aligned} ΓΕ &: ΓΖ > 265 : 153 \\ ΓΕ &: ΓΗ > 571 : 153 \\ ΓΕ &: ΓΘ > 1162\tfrac{1}{8} : 153 \\ ΓΕ &: ΓΚ > 2334\tfrac{1}{4} : 153 \\ ΓΕ &: ΓΛ > 4673\tfrac{1}{2} : 153. \end{aligned}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων ἐπὶ 2 λαμβάνομεν τοὺς λόγους τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν περιγεγραμμένων 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου, ὁπότε αἱ ἀνωτέρω σχέσεις, ἂν καλέσωμεν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου 2ΓΕ = δ, γράφονται :

$$\begin{aligned} δ &: 2ΓΖ > 265 : 153 \\ δ &: 2ΓΗ > 571 : 153 \\ δ &: 2ΓΘ > 1162\tfrac{1}{8} : 153 \\ δ &: 2ΓΚ > 2334\tfrac{1}{4} : 153 \\ δ &: 2ΓΛ > 4673\tfrac{1}{2} : 153 \end{aligned}$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἀντὶ τῶν πλευρῶν τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων τὰς περιμέτρους αὐτῶν καὶ καλέσωμεν αὐτὰς ἀντιστοίχως $Π_6$, $Π_{12}$,

Π_{24}, Π_{48}, Π_{96} θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned}
\delta : \Pi_6 &> 265 : 153.6\\
\delta : \Pi_{12} &> 571 : 153.12\\
\delta : \Pi_{24} &> 1162\frac{1}{8} : 153.24\\
\delta : \Pi_{48} &> 2334\frac{1}{4} : 153.48\\
\delta : \Pi_{96} &> 4673\frac{1}{2} : 153.96
\end{aligned}$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων πρὸς τὴν διάμετρον θὰ ἔχωμεν (αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται)

$$\begin{aligned}
\Pi_6 : \delta &< 918 : 265 = 3{,}464150\ldots\\
\Pi_{12} : \delta &< 1836 : 571 = 3{,}215411\ldots\\
\Pi_{24} : \delta &< 3672 : 1162\frac{1}{8} = 3{,}159728\ldots\\
\Pi_{48} : \delta &< 7344 : 2334\frac{1}{4} = 3{,}146192\ldots\\
\Pi_{96} : \delta &< 14688 : 4673\frac{1}{2} = 3{,}142826\ldots
\end{aligned}$$

Τὸ πηλίκον $14688 : 4673\frac{1}{2} = 3\,\dfrac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\,\dfrac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}$

[$4672\frac{1}{2} : 667\frac{1}{2} = 7$. Ἑπομένως εἶναι κατὰ μείζονα λόγον

$\Pi_{96} : \delta < 3\frac{1}{7}$].

Ἐπειδὴ δὲ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγρ. πολυγώνου Π_{96}, ἕπεται κατὰ μείζονα ἀκόμη λόγον, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ εἶναι $< 3\frac{1}{7}$, ἤτοι ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος.

Εἶναι ἄξιον θαυμασμοῦ πῶς ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι θὰ καταλήξῃ εἰς τὴν σχέσιν $3\,\dfrac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\,\dfrac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}$, διότι δὲν ἔφθασεν ἐδῶ τυχαίως.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

*

Ἀνάπτυξις τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος

(σχ. 2 τρίτου θεωρήματος)

Εἰς κύκλον κέντρου Ε καὶ διαμέτρου ΑΓ ἔστω ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ΒΑΓ $= \frac{1}{3}$ ὀρθῆς, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται ΑΒ : ΒΓ = 1560 : 780.

Τότε εἶναι

$$ΑΓ = 2ΒΓ \text{ ἢ } ΑΓ : ΒΓ = 2 : 1 \qquad (1).$$

Δίδει εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 780, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται

$$ΑΓ : ΒΓ = 1560 : 780 \qquad (2).$$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον τοὺς ὅρους τῆς ἀναλογίας ταύτης λαμβάνομεν

$$ΑΓ^2 : ΒΓ^2 = 1560^2 : 780^2$$

Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν

$$(ΑΓ^2—ΒΓ^2) : ΒΓ^2 = (1560^2—780^2) : 780^2$$

$$\text{ἢ} \quad ΑΒ^2 : ΒΓ^2 = 1825200 : 608400 \quad (= 3).$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$ΑΒ : ΒΓ = \sqrt{1825200} : 780, \text{ ἐξ ἧς } ΑΒ : ΒΓ < 1351 : 780$$

$$[\text{διότι } 1351^2 = 1825201].$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὴν ἀνισότητα ταύτην καὶ τὴν ἰσότητα (2) λαμβάνομεν

$$ΑΒ + ΑΓ : ΒΓ < 2911 : 780 \qquad (3).$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΗ τῆς γωνίας ΒΑΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$ΑΒ : ΑΓ = ΒΖ : ΓΖ$$

καὶ διὰ συνθέσεως ταύτης $\quad (ΑΒ+ΑΓ) : ΑΓ = (ΒΖ+ΓΖ) : ΓΖ$

ἐξ ἧς $\quad (ΑΒ+ΑΓ) : (ΒΖ+ΓΖ) = ΑΓ : ΓΖ.$

Ἀλλὰ ΒΖ+ΓΖ=ΒΓ καὶ συνεπῶς $\quad (ΑΒ+ΑΓ) : ΒΓ = ΑΓ : ΓΖ. \qquad (4).$

Τὰ τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΓΗΖ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι γωνία ΑΗΓ κοινὴ (ὀρθὴ) καὶ ΒΑΗ = ΗΓΒ = ΗΑΓ καὶ συνεπῶς καὶ ΗΖΓ = ΑΓΗ. Ἑπομένως ἔχομεν

$$ΑΓ : ΓΖ = ΑΗ : ΗΓ$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$ΑΗ : ΗΓ < 2911 : 780 \qquad (5).$$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $AH^2 : H\Gamma^2 < 8473921 : 608400$

καὶ διὰ συνθέσεως

$$(AH^2 + H\Gamma^2) : H\Gamma^2 < (8473921 + 608400) : 608400.$$

Ἀλλὰ $AH^2 + H\Gamma^2 = A\Gamma^2$.

Εἶναι ἄρα $A\Gamma^2 : H\Gamma^2 < 9082321 : 608400$.

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$A\Gamma : H\Gamma < 3013\frac{3}{4} : 780 \qquad (6).$$

(δηλ. σχέσιν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 12γώνου). [Ἡ προηγουμένη ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον, διότι

$$\left(3013\frac{3}{4}\right)^2 = 9082689\frac{1}{16} > 9082321 \;].$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν

$$(AH + A\Gamma) : H\Gamma < 5924\frac{3}{4} : 780$$

καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν δύο τελευταίων μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης διὰ $\frac{13}{4}$ ἔχομεν

$$(AH + A\Gamma) : H\Gamma < 1823 : 240 \qquad (7).$$

(Z_1 = τομὴ τῶν εὐθειῶν $A\Theta$, $H\Gamma$. Z_2 = τομὴ τῶν εὐθειῶν AK, $\Theta\Gamma$. Z_3 = τομὴ τῶν εὐθειῶν $A\Lambda$, $K\Gamma$.).

Φέρομεν τὴν διχοτόμον $A\Theta$ τῆς γωνίας, $HA\Gamma$ ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $AH : A\Gamma = HZ_1 : \Gamma Z_1$

καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας ταύτης

$$(AH + A\Gamma) : A\Gamma = (HZ_1 + \Gamma Z_1) : \Gamma Z_1$$

ἐξ ἧς $(AH + A\Gamma) : (HZ_1 + \Gamma Z_1) = A\Gamma : \Gamma Z_1$.

Ἀλλὰ $HZ_1 + \Gamma Z_1 = H\Gamma$. Εἶναι ἄρα

$$(AH + A\Gamma) : H\Gamma = A\Gamma : \Gamma Z_1 \qquad (8).$$

Τὰ τρίγωνα $A\Theta\Gamma$ καὶ $\Gamma\Theta Z_1$ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι γωνία $A\Theta\Gamma$ κοινὴ καὶ γων. $HA\Theta = \Theta A\Gamma = \Theta\Gamma H$.

Ἑπομένως ἔχομεν $A\Gamma : \Gamma Z_1 = A\Theta : \Theta\Gamma$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν

$$A\Theta : \Theta\Gamma < 1823 : 240 \qquad (9).$$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $$ΑΘ^2 : ΘΓ^2 < 3323329 : 57600$$
καὶ διὰ συνθέσεως
$$(ΑΘ^2+ΘΓ^2) : ΘΓ^2 < (3323329+57600) : 57600.$$
Ἀλλὰ $$ΑΘ^2+ΘΓ^2 = ΑΓ^2.$$
Εἶναι ἄρα $$ΑΓ^2 : ΘΓ^2 < 3380929 : 57600.$$
Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν
$$ΑΓ : ΘΓ < 1838\frac{9}{11} : 240 \qquad (10),$$
(δηλ. σχέσιν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 24γώνου).

[Ἡ προηγουμένη ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον, διότι
$\left(1838\frac{9}{11}\right)^2 = 3381252\frac{37}{121} > 3380929$].

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (9) καὶ (10) λαμβάνομεν
$$(ΑΓ+ΑΘ) : ΘΓ < 3661\frac{9}{11} : 240$$
καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν δύο τελευταίων μελῶν τῆς ἀνισότητος ταύτης διὰ $\frac{40}{11}$ ἔχομεν $$(ΑΓ+ΑΘ) : ΘΓ < 1007 : 66 \qquad (11).$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΚ τῆς γωνίας ΘΑΓ ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $$ΑΘ : ΑΓ = ΘZ_2 : ΓZ_2$$
καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας ταύτης
$$(ΑΘ+ΑΓ) : ΑΓ = (ΘZ_2+ΓZ_2) : ΓZ_2$$
ἐξ ἧς $$(ΑΘ+ΑΓ) : (ΘZ_2+ΓZ_2) = ΑΓ : ΓZ_2.$$
Ἀλλὰ $ΘZ_2+ΓZ_2 = ΘΓ$. Εἶναι ἄρα $(ΑΘ+ΑΓ) : ΘΓ = ΑΓ : ΓZ_2$ (12).

Τὰ τρίγωνα ΑΚΓ καὶ $ΓΚZ_2$ εἶναι ὅμοια (ὡς εἰς τὰς προηγουμένας δύο περιπτώσεις).

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν $ΑΓ : ΓZ_2 = ΑΚ : ΚΓ$.
Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (11) καὶ (12) λαμβάνομεν $ΑΚ : ΚΓ < 1007 : 66$ (13).

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $$ΑΚ^2 : ΚΓ^2 < 1014049 : 4356$$
καὶ διὰ συνθέσεως $(ΑΚ^2+ΚΓ^2) : ΚΓ^2 < (1014049+4356) : 4356.$
Ἀλλὰ $(ΑΚ^2+ΚΓ^2) = ΑΓ^2$. Εἶναι ἄρα
$$ΑΓ^2 : ΚΓ^2 < 1018405 : 4356.$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$\mathrm{A\Gamma : K\Gamma} < 1009\frac{1}{6} : 66 \qquad (14)$$

(δηλ. σχέσιν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 48γώνου).

[Ἡ προηγουμένη ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον διότι

$\left(1009\frac{1}{6}\right)^2 = 1018417\frac{13}{36} > 1018405$].

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (13) καὶ (14) λαμβάνομεν

$$(\mathrm{A\Gamma+AK}) : \mathrm{K\Gamma} < 2016\frac{1}{6} : 66 \qquad (15).$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΛ τῆς γωνίας ΚΑΓ, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\mathrm{AK : A\Gamma = KZ_3 : \Gamma Z_3}$

καὶ διὰ συνθέσεως τῆς ἀναλογίας ταύτης

$$(\mathrm{AK+A\Gamma}) : \mathrm{A\Gamma} = (\mathrm{KZ_3+\Gamma Z_3}) : \mathrm{\Gamma Z_3}$$

ἐξ ἧς $(\mathrm{AK+A\Gamma}) : (\mathrm{KZ_3+\Gamma Z_3}) = \mathrm{A\Gamma : \Gamma Z_3}$.

Ἀλλὰ $\mathrm{KZ_3+\Gamma Z_3 = K\Gamma}$. Εἶναι ἄρα $(\mathrm{AK+A\Gamma}) : \mathrm{K\Gamma = A\Gamma : \Gamma Z_3}$ (16).

Τὰ τρίγωνα ΑΛΓ καὶ $\mathrm{\Gamma\Lambda Z_3}$ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἔχομεν $\mathrm{A\Gamma : \Gamma Z_3 = A\Lambda : \Lambda\Gamma}$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (15) καὶ (16) λαμβάνομεν

$$\mathrm{A\Lambda : \Lambda\Gamma} < 2016\frac{1}{6} : 66 \qquad (17).$$

Ὑψώνοντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης λαμβάνομεν $\mathrm{A\Lambda^2 : \Lambda\Gamma^2} < 4064928\frac{1}{36} : 4356$

καὶ διὰ συνθέσεως

$$(\mathrm{A\Lambda^2+\Lambda\Gamma^2}) : \mathrm{\Lambda\Gamma^2} < \left(4064928\,\frac{1}{36} + 4356\right) : 4356.$$

Ἀλλὰ $\mathrm{A\Lambda^2+\Lambda\Gamma^2 = A\Gamma^2}$. Εἶναι ἄρα

$$\mathrm{A\Gamma^2 : \Lambda\Gamma^2} < 4069284\frac{1}{36} : 4356.$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$\mathrm{A\Gamma : \Lambda\Gamma} < 2017\frac{1}{4} : 66 \qquad (18).$$

(δηλ. σχέσιν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 96γώνου).

[Ἡ προηγουμένη ἀνισότης ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον, διότι

$$\left(2017\frac{1}{4}\right)^2 = 4069297\frac{9}{16} > 4069284\frac{1}{36}\Big].$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰς εὑρεθείσας σχέσεις τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου ἔχομεν·

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{B\Gamma} = 1560 \; : 780 = 2$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{H\Gamma} < 3013\frac{3}{4} : 780$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \Theta\Gamma < 1838\frac{9}{11} : 240$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{K\Gamma} < 1009\frac{1}{6} : \; 66$$

$$\mathrm{A\Gamma} : \Lambda\Gamma < 2017\frac{1}{4} : \; 66$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, ἣν καλοῦμεν δ, πρὸς τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων 6γώνου, 12γώνου, 24γώνου, 48γώνου, 96γώνου θὰ ἔχωμεν

$$\delta : 6\mathrm{B\Gamma} = 1560 : 6.780$$

$$\delta : 12\mathrm{H\Gamma} < 3013\frac{3}{4} : 12.780$$

$$\delta : 24\Theta\Gamma < 1838\frac{9}{11} : 24.240$$

$$\delta : 48\mathrm{K\Gamma} < 1009\frac{1}{6} : 48.\ 66$$

$$\delta : 96\Lambda\Gamma < 2017\frac{1}{4} : 96.\ 66.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς περιμέτρους τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων ἀντιστοίχως Π_6, Π_{12}, Π_{24}, Π_{48}, Π_{96} καὶ θεωρήσωμεν τοὺς λόγους τῶν περιμέτρων πρὸς τὴν διάμετρον (αἱ ἀνισότητες ἀντιστρέφονται) θὰ ἔχωμεν

$$\Pi_6 \; : \delta = 4680 : 1560 = 3$$

$$\Pi_{12} : \delta > 9360 : 3013\frac{3}{4}$$

$$\Pi_{24} : \delta > 5760 : 1838\frac{9}{11}$$

$$\Pi_{48} : \delta > 3168 : 1009\frac{1}{16} = 3{,}139\ldots$$

$$\Pi_{96} : \delta > 6336 : 2017\frac{1}{4} = 3{,}1409\ldots$$

Ὁ λόγος 6336 : 2017 $\frac{1}{4}$ = 3,1409 . . . , ἐν ᾧ 3 $\frac{10}{71}$ = 3,1408 . . . Ἑπομένως ἰσχύει κατὰ μείζονα λόγον ἡ ἀνισότης $\Pi_{96} > 3\frac{10}{71}$. Εἶναι ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου (μεγαλυτέρα οὖσα τῆς περιμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμ. 96γώνου) μεγαλυτέρα τοῦ $3\frac{10}{71}$.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς $\sqrt{3}$

Εἰς τὸ τρίτον θεώρημα τῆς πραγματείας Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης τὴν σχέσιν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Ἡ μὴ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης σχέσεως ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους σημαίνει ὅτι αὕτη εἶχε γίνει ὑπὸ προγενεστέρων τοῦ Ἀρχιμήδους γεωμετρῶν.

Ὁ Ἄγγλος Th. Heath περιλαμβάνει εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (1897) τὴν ἀκόλουθον πιθανὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω τύπου, γενομένην ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ Fr. Hultsch : «Ἀνάλυσις. Πρὸς σύγκρισιν τῶν κλασμάτων $\frac{265}{153}$ καὶ $\frac{1351}{780}$ ἀναλύομεν τοὺς παρονομαστὰς εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων καὶ ἔχομεν

$$780 = 2.2.3.5.13$$
$$153 = 3.3.17$$

Παρατηροῦμεν ὅτι 2.2.13 = 52 καὶ 3.17 = 51 καὶ ἑπομένως

$$780 = 3.5.52$$
$$153 = 3.51$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{265}{153}$ ἐπὶ 5 ἔχομεν $\frac{1325}{15.51}$, ἐν ᾧ τὸ μεγαλύτερον κλάσμα εἶναι $\frac{1351}{15.52}$.

Ὅθεν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν σχέσιν τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{1351}{52} > 15\sqrt{3} > \frac{1325}{51}$$

ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι ἰσότιμος πρὸς τὴν

$$26-\frac{1}{52} > 15\sqrt{3} > 26-\frac{1}{51},$$

Εἶναι ὅμως $26-\frac{1}{52}=\sqrt{26^2-1+\left(\frac{1}{52}\right)^2}$ καὶ ἡ παράστασις αὕτη εἶναι μία προσέγγισις διὰ τὴν τιμὴν $\sqrt{26^2-1}$.

Θὰ ἔχωμεν κατὰ ταῦτα $$26-\frac{1}{52} > \sqrt{26^2-1}\,.$$

Ἐπειδὴ $26-\frac{1}{52}$ ἔχει συγκριθῆ πρὸς $15.\sqrt{3}$ καὶ ἡμεῖς ζητοῦμεν προσέγγισιν διὰ τὴν $\sqrt{3}$, διαιροῦμεν διὰ 15 καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right) > \frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}\,.$$

Εἶναι ὅμως $\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}=\sqrt{\frac{676-1}{225}}=\sqrt{\frac{675}{225}}=\sqrt{3}$

καὶ ἑπομένως $$\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{52}\right) > \sqrt{3}\,.$$

Τὸ κατώτερον ὅριον διὰ τὴν $\sqrt{3}$ ἐδόθη διὰ τῆς παραστάσεως

$$\sqrt{3} > \frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{51}\right)$$

καὶ φαίνεται ἀμέσως ὅτι τοῦτο λαμβάνεται ὅταν ἁπλούστατα ἀντὶ 52 τεθῇ $(52-1)$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος πρότασις : Ἐὰν $\alpha^2 \pm \beta$ εἶναι ἀκέραιος οὐχὶ τετράγωνος ἀριθμός, καὶ α^2 εἶναι ὁ πλησιέστερος τετράγωνος (ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ),

θὰ εἶναι $$\alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} > \sqrt{\alpha^2 \pm \beta} > \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha \pm 1}.$$

Πολλαὶ προσεγγιστικαὶ τιμαὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν παρεχόμεναι ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος ἀποδεικνύουν ὅτι οὗτος ἐγνώριζε τὸν τύπον

$$\sqrt{\alpha^2 \pm \beta} \sim \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha}$$

(τὸ σημεῖον $\sim$ σημαίνει περίπου ἴσον)

Παραδείγματος χάριν, δίδει ὁ Ἥρων

$$\sqrt{50} \sim 7 + \frac{1}{14}$$

$$\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{75} \sim 8 + \frac{11}{16}$$

Ὁ τύπος $\sqrt{\alpha^2 + \beta} \sim \alpha + \frac{\beta}{2\alpha + 1}$ χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Ἄραβος Ἀλκαρκχί, ὅστις ἐχρησιμοποίει ἑλληνικὰς πηγὰς (M. Cantor, I, σελ. 763 κ.ἑ.)

Ὡς ἐκ τούτου δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ὁ τύπος

$$\alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} \rangle \sqrt{\alpha^2 \pm \beta} \rangle \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha \pm 1}$$

παρέχει τὰς προσεγγιστικὰς τιμὰς διὰ τὴν $\sqrt{3}$.

Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν νὰ προβῶμεν εἰς τὴν σύνθεσιν ὡς ἀκολούθως. Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῆς $\sqrt{3}$ ὡς καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν λαμβάνομεν $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ καὶ ὡς πρώτην προσέγγισιν $2 - \frac{1}{4} \rangle \sqrt{3}$.

Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον μας δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς $\sqrt{3} \rangle 2 - \frac{1}{4-1}$ ἢ $2 - \frac{1}{3}$.

Ὁ Ἀρχιμήδης θὰ ἔχῃ λάβῃ $\frac{5}{3}$ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\frac{25}{9}$, τὰ ὁποῖα συνέκρινε μὲ τὸν 3 ἢ τὸ κλάσμα $\frac{27}{9}$, ἔθεσε δηλαδὴ $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{25+2}{9}}$ καὶ ἔλαβε $\frac{1}{3}\left(5 + \frac{1}{5}\right) \rangle \sqrt{3}$, ἤτοι $\frac{26}{15} \rangle \sqrt{3}$.

Διὰ νὰ εὕρῃ ἀκριβεστέραν προσέγγισιν προὐχώρησε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ συνέκρινε τὸ $\left(\frac{26}{15}\right)^2$ ἢ $\frac{676}{225}$ πρὸς τὸν 3 ἢ $\frac{675}{225}$, ὁπότε ἔλαβε

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{26^2 - 1}{225}}$$

καὶ ἐκ τούτου $\frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52}\right) \rangle \sqrt{3}$, δηλ. $\frac{1351}{780} \rangle \sqrt{3}$.

῾Η ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου ἔδωσε τότε

$$\sqrt{3} > \frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52-1}\right),$$

δηλ.
$$\sqrt{3} > \frac{1326-1}{15.51} \text{ ἢ } \frac{265}{153}.$$

Τὸ πλῆρες ἀποτέλεσμα ἑπομένως ἦτο

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \text{ »}.$$

Ἄλλαι ὑποθέσεις σχετικαὶ πρὸς τὰς προσεγγιστικὰς τιμὰς διὰ τὴν $\sqrt{3}$.

᾿Ανάλυσιν τῶν σχετικῶν τιμῶν παρέχει ὁ Sigmund Günther εἰς τὸ βιβλίον του Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden, Leipzig 1882 (Αἱ τετραγωνικαὶ ἀσυμμετρίαι (ῥίζαι) τῶν ἀρχαίων καὶ αἱ μέθοδοι ἀναπτύξεως τούτων, Λειψία, 1882).

῾Ο Günther κατατάσσει τὰς διαφόρους ὑποθέσεις ἐπὶ τῇ βάσει τριῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν :

1. Εἰς τοιαύτας ὅπου κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον διαφαίνεται χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου τῶν συνεχῶν διαδοχικῶν κλασμάτων. Εἰς αὐτὰς ἀναφέρονται αἱ μέθοδοι τῶν De Lagny, Mollweide, Hauber, Buzengeiger, Zeuthen, Heilermann, Tannery α΄.

2. Εἰς τοιαύτας, ὅπου αἱ προσεγγίσεις δίδονται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\alpha + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \dots$$

Μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβάνονται αἱ μέθοδοι τῶν Radicke, Pessl, Rodet, Tannery β΄.

3. Εἰς τοιαύτας, ὅπου αἱ προσεγγιστικαὶ τιμαὶ περιλαμβάνονται μεταξὺ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου. Μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβάνονται αἱ μέθοδοι τῶν Oppermann, Alexejeff, Schönborn, Hunrath.

Κατωτέρω ἀναπτύσσομεν δύο ἐκ τῶν μεθόδων αἵτινες διετυπώθησαν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη πρὸς ἑρμηνείαν τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$ ὑπὸ τοῦ ᾿Αρχιμήδους.

Ι Μέθοδος J. E. Hofmann (Deutsche Mathematik 3, S. 455, 1938).

Ἀναχωροῦμεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ἄνω ἡμικύκλιον κύκλου ἀκτῖνος ΑΔ $= 2\alpha$, μὲ κέντρον τὸ Δ. Ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ἔστω ὅτι συναντᾷ αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Ε (δεξιὰ τοῦ κέντρου) ἡ δὲ ἐκ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου, παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον, (κάτω ἡμικύκλιον) ἔστω ὅτι συναντᾷ αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἡ εὐθεῖα ΓΖ διχοτομεῖ τὰς γωνίας ΑΓΒ, ΔΓΕ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΖ συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Η θὰ ἔχωμεν

(1) $\mathrm{AH}^2 : \mathrm{HB}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 : \mathrm{\Gamma B}^2 = \mathrm{AE.AB} : \mathrm{EB.AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EB}$.

Ἐὰν θέσωμεν τὸ τμῆμα ΔΕ $= 2\mathrm{x}$ τότε θὰ ἔχωμεν

(2) $\mathrm{AE} = 2\ (\alpha+\mathrm{x}),\ \mathrm{EB} = 2\ (\alpha-\mathrm{x})$.

(3) $\mathrm{AH}^2 : \mathrm{HB}^2 = (\alpha+\mathrm{x}) : (\alpha-\mathrm{x})$.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΕ θὰ εἶναι

(4) $\mathrm{A\Theta} = 2\alpha+\mathrm{x} < \mathrm{AH}$ καὶ $\mathrm{\Theta B} = 2\alpha-\mathrm{x} > \mathrm{HB}$.

Θὰ εἶναι ἑπομένως

(5) $(\alpha+\mathrm{x}) : (\alpha-\mathrm{x}) > (2\alpha+\mathrm{x})^2 : (2\alpha-\mathrm{x})^2$ ἢ

(6) $\sqrt{\dfrac{\alpha-\mathrm{x}}{\alpha+\mathrm{x}}} < \dfrac{2\alpha-\mathrm{x}}{2\alpha+\mathrm{x}}$, ἐὰν $0 < \mathrm{x} < \alpha$. Διὰ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν καλλίστας προσεγγίσεις διὰ τετραγωνικὰς ῥίζας.

Τὴν ἀνωτέρω ὑποδειχθεῖσαν μέθοδον ἐφαρμόζομεν ὡς ἀκολούθως: Ἐν πρώτοις θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 6. Τότε διὰ τὸ ὕψος h τοῦ τριγώνου θὰ ἔχωμεν $\mathrm{h}^2 = 6^2 - 3^2 = 27 > 25$

$$\text{ἤτοι } \frac{3\sqrt{3}}{5} = \sqrt{\frac{27}{25}} = \sqrt{\frac{26+1}{26-1}} > \frac{52+1}{52-1} = \frac{53}{51}$$

ἤτοι $\sqrt{3} > \dfrac{53.5}{51.3} = \dfrac{265}{153}$.

Ἀκολούθως θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 8. Διὰ τὸ ὕψος h τοῦ τριγώνου θὰ ἔχωμεν $\mathrm{h}^2 = 8^2 - 4^2 = 48 < 7^2$,

$$\text{ἤτοι } \frac{4\sqrt{3}}{7} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \sqrt{\frac{97-1}{97+1}} < \frac{194-1}{194+1} = \frac{193}{195}$$

$$\text{ἤτοι } \sqrt{3} < \frac{7.193}{4.195} = \frac{1351}{780}.$$

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΙΙ. Μέθοδος Ε. Σ. Σταμάτη (ἀνακοινωθεῖσα ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν τὴν 2 - 6 - 1955). Ἡ σχέσις $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ δύναται νὰ ληφθῇ ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες προκύπτουν ἐκ τῆς καθ' ὡρισμένον νόμον κατασκευῆς διαδοχικῶν ῥόμβων. Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου κλάσματος τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 3x^2 + 1$. Καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ γ' θεώρημα τῆς πραγματείας του Κύκλου μέτρησις.

Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ οἱ προκύπτοντες ἐκ τῆς καθ' ὡρισμένον νόμον κατασκευῆς διαδοχικῶν τετραγώνων μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου. Κατὰ τοῦτον θεωρεῖται πρῶτον ἀπειροελάχιστον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου λόγῳ τῆς σμικρότητος λαμβάνεται ἡ μὲν πλευρὰ $= 1$ καὶ ἡ διάμετρος $= 1$ (διάμετρος = διαγώνιος).

Ὁ νόμος κατασκευῆς τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων φαίνεται κατωτέρω

	Πλευρὰ $= \alpha$	Διάμετρος $= \delta$
Πρῶτον τετράγωνον	1	1
Δεύτερον τετράγωνον	$1+1 = 2$	$2.1 + 1 = 3$
Τρίτον τετράγωνον	$2+3 = 5$	$2.2 + 3 = 7$
Τέταρτον τετράγωνον	$5+7 = 12$	$2.5 + 7 = 17$
Πέμπτον τετράγωνον	$12+17 = 29$	$2.12 + 17 = 41$
Ἕκτον τετράγωνον	$29+41 = 70$	$2.29 + 41 = 99$
Νυοστὸν τετράγωνον	$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$

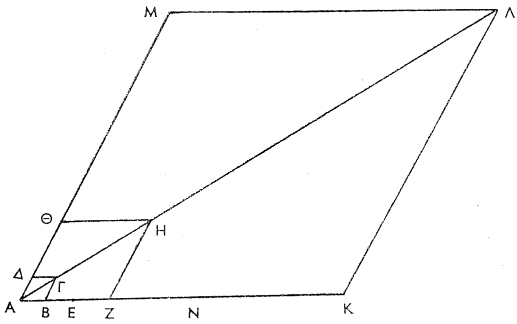
Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν διαμέτρων πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς θὰ ἔχωμεν

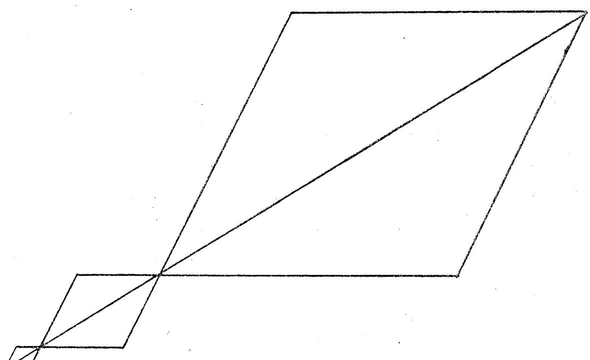
$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{99}{70} < \frac{17}{2} < \frac{3}{2}$$

Οἱ εὑρεθέντες ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 2x^2 \mp 1$, ὅπου x οἱ πλευρικοὶ καὶ y οἱ διαμετρικοὶ ἀριθμοί. (Ἰδὲ ἀνάπτυξιν τούτων εἰς Ε. Σ. Σταμάτη, ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμος 2ος, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8 - 14).

Ἀντὶ νὰ κατασκευάσωμεν διαδοχικῶς τετράγωνα καθ' ὡρισμένον νόμον καὶ διὰ τῆς λήψεως τῶν λόγων τῶν διαμέτρων (δηλ. διαγωνίων) πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς νὰ εὕρωμεν κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{2}$, κατασκευάζομεν διαδοχικῶς ρόμβους καθ' ὡρισμένον νόμον, ὅπου ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἑκάστου ρόμβου νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου





[σημ.: Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα οἱ ἐν συνεχείᾳ κατασκευαζόμενοι ρόμβοι ΑΒΓΔ, ΑΖΗΘ, ΑΚΛΜ τοῦ πρώτου σχήματος ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως].

ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ 12ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $ΑΓ^2 = 3ΑΒ^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρά,

δηλ. ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, καὶ συνεπῶς $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \sqrt{3}.$
Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $\text{ΒΕ} = \text{ΑΒ}$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα $\text{ΕΖ} = \text{ΑΓ}$, ὥστε $\text{ΑΖ} = 2\text{ΑΒ}+\text{ΕΖ}$. Κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν) [1] θὰ ἔχωμεν :

$$\text{ΑΖ}^2+\text{ΕΖ}^2 = 2\text{ΑΒ}^2+2\text{ΒΖ}^2.$$

Ἐπειδὴ $\text{ΒΖ} = \text{ΒΕ}+\text{ΕΖ}$, θὰ εἶναι

$$\text{ΑΖ}^2+\text{ΕΖ}^2 = 2\text{ΑΒ}^2+2(\text{ΒΕ}+\text{ΕΖ})^2.$$

Δι᾽ ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ ΕΖ^2 λαμβάνομεν

$$\text{ΑΖ}^2 = 2\text{ΑΒ}^2+2\text{ΒΕ}^2+\text{ΕΖ}^2+4\text{ΒΕ}\times\text{ΕΖ}.$$

Καὶ ἐπειδὴ $\text{ΒΕ} = \text{ΑΒ}$ καὶ $\text{ΕΖ} = \text{ΑΓ}$, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΑΖ}^2 = 4\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2+4\text{ΑΒ}\times\text{ΑΓ}.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3\text{ΑΖ}^2 = 12\text{ΑΒ}^2+3\text{ΑΓ}^2+12\text{ΑΒ}\times\text{ΑΓ}.$

Ἀλλὰ $3\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3\text{ΑΖ}^2 = 9\text{ΑΒ}^2+4\text{ΑΓ}^2+12\text{ΑΒ}\,\text{Χ}\text{ΑΓ} = (3\text{ΑΒ}+2\text{ΑΓ})^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $\text{ΑΖ} = 2\text{ΑΒ}+\text{ΕΖ} = 2\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3\text{ΑΒ}+2\text{ΑΓ}$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΖΗΘ,
ἔνθα $\text{ΑΗ} = 3\text{ΑΒ}+2\text{ΑΓ}$ καὶ $\text{ΑΗ}^2 = 3\text{ΑΖ}^2$.

Ἐὰν καλέσωμεν $\text{ΑΒ} = \alpha$ καὶ $\text{ΑΓ} = \delta$, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΑΖ} = 2\alpha+\delta, \qquad (1)$$

καὶ

$$\text{ΑΗ} = 3\alpha+2\delta, \qquad (2)$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λαμβάνομεν τμῆμα $\text{ΖΝ}=\text{ΑΖ}$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΝ λαμβάνομεν τμῆμα $\text{ΝΚ} = \text{ΑΗ}$, ὥστε $\text{ΑΚ} = 2\text{ΑΖ}+\text{ΝΚ}$. Πάλιν κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΑΚ}^2+\text{ΝΚ}^2 = 2\text{ΑΖ}^2+2\text{ΖΚ}^2.$$

Ἐπειδὴ $\text{ΖΚ} = \text{ΖΝ}+\text{ΝΚ}$, θὰ εἶναι

$$\text{ΑΚ}^2+\text{ΝΚ}^2 = 2\text{ΑΖ}^2+2(\text{ΖΝ}+\text{ΝΚ})^2.$$

Δι᾽ ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ ΝΚ^2 λαμβάνομεν

$$\text{ΑΚ}^2 = 2\text{ΑΖ}^2+2\text{ΖΝ}^2+\text{ΝΚ}^2+4\text{ΖΝ}\times\text{ΝΚ}.$$

1) Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος ΙΙ σελ. 23 καὶ 393, ed. Hultsch - Kroll.

Καὶ ἐπειδὴ $ZN = AZ$ καὶ $NK = AH$, θὰ ἔχωμεν

$$AK^2 = 4AZ^2 + AH^2 + 4AZ \times AH.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $$3AK^2 = 12AZ^2 + 3AH^2 + 12AZ \times AH.$$

Ἀλλὰ εἶναι $AH^2 = 3AZ^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AK^2 = 9AZ^2 + 4AH^2 + 12AZ \times AH = (3AZ + 2AH)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AK = 2AZ + NK = 2AZ + AH$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AZ + 2AH$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΚΛΜ, ἔνθα $A\Lambda = 3AZ + 2AH$ καὶ $A\Lambda^2 = 3AK^2$.

Ἐὰν εἰς τὰς εὐθείας ΑΚ καὶ ΑΛ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ΑΖ, ΑΗ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $A\Lambda = 12\alpha + 7\delta$ καὶ $AK = 7\alpha + 4\delta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ῥόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων.

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α = πλευρὰ ῥόμβου	δ = διαγώνιος ῥόμβου
$\alpha_1 = 2\alpha + \delta$	$\delta_1 = 3\alpha + 2\delta$
$\alpha_2 = 7\alpha + 4\delta$	$\delta_2 = 12\alpha + 7\delta$
$\alpha_3 = 26\alpha + 15\delta$	$\delta_3 = 45\alpha + 26\delta$
$\alpha_4 = 97\alpha + 56\delta$	$\delta_4 = 168\alpha + 97\delta$
$\alpha_5 = 362\alpha + 209\delta$	$\delta_5 = 627\alpha + 362\delta$
$\vdots$	$\vdots$

ἢ

α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
$\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4$	$\delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ἐὰν ἀνωτέρω θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{19}{11}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{71}{41}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{265}{153}, \quad \text{κλπ.}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{7}{4}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{26}{15}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{97}{56}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{362}{209}, \quad \frac{\delta_6}{\alpha_6} = \frac{1351}{780},$$

κλπ.

Ἤτοι εἶναι :

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \ldots\sqrt{3}\ldots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

Αἱ τιμαὶ δ_ν, α_ν, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 2$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 + 1$.

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

(Κωνοειδῆ = παραβολοειδῆ καὶ ὑπερβολοειδῆ ἐκ περιστροφῆς. Σφαιροειδῆ = ἐλλειψοειδῆ ἐκ περιστροφῆς).

Λῆμμα

Εἰς πᾶσαν αὔξουσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον ν ὅρων, τῆς ὁποίας ἡ διαφορὰ δύο συνεχῶν ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου, τὸ ἄθροισμα ν ὅρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ τὸν μεγαλύτερον ὅρον, εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς προόδου, μεγαλύτερον δὲ τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τῶν ὅρων αὐτῆς μεῖον τοῦ διπλασίου τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου αὐτῆς.

Ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha+2\alpha+3\alpha+\ldots+(\nu-2)\alpha+(\nu-1)\alpha+\nu\alpha$ (1)

Λέγει ὅτι εἶναι $\nu.\nu\alpha < 2(\alpha+2\alpha+\ldots+(\nu-1)\alpha+\nu\alpha)$ (2)

$\nu.\nu\alpha > 2(\alpha+2\alpha+\ldots+(\nu-1)\alpha)$ (3)

Ἡ ἀπόδειξις παρεμβάλλεται εἰς τὸ 11ον θεώρημα τῆς πραγματείας Περὶ ἑλίκων καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς, εἰς σύγχρονον διατύπωσιν.

Ἐκ τῆς (1) $\Sigma_\nu = \alpha+2\alpha+3\alpha+\ldots+(\nu-2)\alpha+(\nu-1)\alpha+\nu\alpha,$ (4)

εἶναι καὶ $\Sigma_\nu = \nu\alpha+(\nu-1)\alpha+(\nu-2)\alpha+\ldots+3\alpha+2\alpha+\alpha,$ (5)

Εἶναι δὲ $\alpha+(\nu-1)\alpha = 2\alpha+(\nu-2)\,\alpha = 3\alpha+(\nu-3\alpha) = \ldots = \nu\alpha$ (6)

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (4, 5) καὶ συναφῶν ἀντικαταστάσεων δυνάμει τῆς (6) ἔχομεν $2\Sigma_\nu = (\nu+1)\nu\alpha$ (7)

Ἐκ ταύτης ἕπεται $\nu.\nu\alpha < 2\Sigma_\nu$

καὶ $\nu.\nu\alpha > 2\Sigma_\nu - 1$

1

Ἔστωσαν τὰ μεγέθη (αἱ ἀκολουθίαι τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκάστη),

Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ... καὶ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ...

καὶ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ ... Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω ...

νὰ εἶναι δὲ $\frac{A}{B} = \frac{H}{\Theta}$, (1), $\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Theta}{I}$, (2), $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{I}{K}$, (3), $\frac{\Delta}{E} = \frac{K}{\Lambda}$, (4), $\frac{E}{Z} = \frac{\Lambda}{M}$, (5) καὶ $\frac{A}{N} = \frac{H}{T}$, (6), $\frac{B}{\Xi} = \frac{\Theta}{\Upsilon}$, (7), $\frac{\Gamma}{O} = \frac{I}{\Phi}$, (8), $\frac{\Delta}{\Pi} = \frac{K}{X}$, (9), $\frac{E}{\Pi} = \frac{\Lambda}{\Psi}$, (10), $\frac{Z}{\Sigma} = \frac{M}{\Omega}$, (11).

Ἐκ τῶν (1 καὶ 6) εἶναι $\frac{A}{H} = \frac{B}{\Theta} = \frac{N}{T}$, (12). Ἐκ τῆς (7) εἶναι $\frac{B}{\Theta} = \frac{\Xi}{\Upsilon}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (12) εἶναι $\frac{N}{\Xi} = \frac{T}{\Upsilon}$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι $\frac{\Xi}{O} = \frac{\Upsilon}{\Phi}$, $\frac{O}{\Pi} = \frac{\Phi}{X}$, $\frac{\Pi}{P} = \frac{X}{\Psi}$, $\frac{P}{\Sigma} = \frac{\Psi}{\Omega}$. Ἐκ τῶν προηγουμένων σχέσεων (1 ἕως 5) λαμβάνεται

$$\frac{A}{H} = \frac{B}{\Theta} = \frac{\Gamma}{I} = \frac{\Delta}{K} = \frac{E}{\Lambda} = \frac{Z}{M} \text{ καὶ ἐκ τούτων}$$

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{H+\Theta+I+K+\Lambda+M} = \frac{A}{H} = \ldots \text{ ἢ}$$

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{A} = \frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{H}, \qquad (13).$$

Ὁμοίως ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{N}{\Xi} = \frac{T}{\Upsilon}$, $\frac{\Xi}{O} = \frac{\Upsilon}{\Phi} = \ldots$ λαμβάνεται

$$\frac{N}{T} = \frac{\Xi}{\Upsilon} = \frac{O}{\Phi} = \frac{\Pi}{X} = \frac{P}{\Psi} = \frac{\Sigma}{\Omega} \text{ καὶ ἐκ τούτων}$$

$$\frac{N}{T} = \frac{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega} \text{ ἢ}$$

$$\frac{N}{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma} = \frac{T}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega}, \qquad (14).$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (13 καὶ 14) καὶ ἁπλοποιήσεως δυνάμει τῆς (6) λαμβάνεται $(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z) : (N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma) = (H+\Theta+I+K+\Lambda+M) : (T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega)$.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι καὶ $(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z) : (N+\Xi+O+\Pi+P) = (H+\Theta+I+K+\Lambda+M) : (T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi)$.

Τὸ θεώρημα κατ' ἄλλην διατύπωσιν.

Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ... καὶ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ... τοῦ αὐτοῦ πλήθους

$$\text{καὶ } \frac{A}{B} = \frac{H}{\Theta}, \ \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Theta}{I}, \ \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{I}{K}, \ \frac{\Delta}{E} = \frac{K}{\Lambda}, \ \frac{E}{Z} = \frac{\Lambda}{M}, \qquad (1).$$

Ἔστω ἀκόμη

$$\frac{A}{N}=\frac{H}{T},\ \frac{B}{\Xi}=\frac{\Theta}{\Upsilon},\ \frac{\Gamma}{O}=\frac{I}{\Phi},\ \frac{\Delta}{\Pi}=\frac{K}{X},\ \frac{E}{P}=\frac{\Lambda}{\Psi},\ \frac{Z}{\Sigma}=\frac{M}{\Omega},\qquad (2).$$

Λέγω ὅτι

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega},\qquad (\alpha)$$

καὶ

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{N+\Xi+O+\Pi+P}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi},\qquad (\beta)$$

καὶ

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{N+\Xi+O+\Pi}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{T+\Upsilon+\Phi+X}\ \text{κλπ.}\qquad (\gamma)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$\frac{A}{H}=\frac{B}{\Theta},\ \frac{B}{\Theta}=\frac{\Gamma}{I},\ \frac{\Gamma}{I}=\frac{\Delta}{K},\ \frac{\Delta}{K}=\frac{E}{\Lambda},\ \frac{E}{\Lambda}=\frac{Z}{M},\qquad (3)$$

ἤτοι $\frac{A}{H}=\frac{B}{\Theta}=\frac{\Gamma}{I}=\frac{\Delta}{K}=\frac{E}{\Lambda}=\frac{Z}{M},$ (4)

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν

$$\frac{A}{H}=\frac{N}{T},\ \frac{B}{\Theta}=\frac{\Xi}{\Upsilon},\ \frac{\Gamma}{I}=\frac{O}{\Phi},\ \frac{\Delta}{K}=\frac{\Pi}{X},\ \frac{E}{\Lambda}=\frac{P}{\Psi},\ \frac{Z}{M}=\frac{\Sigma}{\Omega},\qquad (5),$$

Ἐκ τῶν (5) καὶ (4) εἶναι

$$\frac{N}{T}=\frac{\Xi}{\Upsilon}=\frac{O}{\Phi}=\frac{\Pi}{X}=\frac{P}{\Psi}=\frac{\Sigma}{\Omega},\ \left(=\frac{A}{H}\right).\qquad (6)$$

Ἐκ τῶν (4, 6) λαμβάνομεν

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}=\frac{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega}$$

ἐξ ἧς $\frac{A+B+\Gamma+\Delta+E+Z}{N+\Xi+O+\Pi+P+\Sigma}=\frac{H+\Theta+I+K+\Lambda+M}{T+\Upsilon+\Phi+X+\Psi+\Omega},$ ἢ (α).

Ἐὰν ἡ (6) δὲν ἔχῃ ἕνα λόγον π. χ. τὸν ἕκτον τὸν $\frac{\Sigma}{\Omega}$ λαμβάνεται ἡ (β). Ἐὰν δὲν ἔχῃ δύο λόγους, π. χ. τὸν ἕκτον καὶ πέμπτον $\frac{\Sigma}{\Omega}$, $\frac{P}{\Psi}$ λαμβάνεται ἡ (γ) κλπ.

Ἢ καὶ ἄλλως

Ἔστωσαν τὰ μεγέθη τοῦ αὐτοῦ πλήθους (ἀκολουθίαι)

$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1 \ldots \iota_1\ \varkappa_1\ \lambda_1$ καὶ $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2 \ldots \iota_2\ \varkappa_2\ \lambda_2$ καὶ $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3\ \delta_3 \ldots \iota_3\ \varkappa_3\ \lambda_3$ καὶ $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4\ \delta_4 \ldots \iota_4\ \varkappa_4\ \lambda_4$

νὰ εἶναι δὲ $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2} \qquad \frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{\beta_2}{\beta_4}$$

καὶ $$\frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_3} = \frac{\gamma_2}{\gamma_4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1} = \frac{\varkappa_2}{\lambda_2} \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_4}$$

Τότε θὰ εἶναι $$\frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots+\lambda_1}{(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3+\ldots+\lambda_3)} = \frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\ldots+\lambda_2}{(\alpha_4+\beta_4+\gamma_4+\ldots+\lambda_4)} \qquad (\alpha)$$

καὶ $$\frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots+\lambda_1}{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3+\ldots+\varkappa_3} = \frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\ldots+\lambda_2}{\alpha_4+\beta_4+\gamma_4+\ldots+\varkappa_4} \qquad (\beta)$$

καὶ $$\frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots+\lambda_1}{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3+\ldots+\iota_3} = \frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\ldots+\lambda_2}{\alpha_4+\beta_4+\gamma_4+\ldots\iota_4}, \qquad (\gamma)$$

κλπ.

2

Ἔστωσαν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι Α, Α . . . Α καὶ ἂς παραβληθῇ εἰς τὴν προέκτασιν ἑκάστης αὐτῶν τετράγωνον, ὥστε νὰ σχηματίζηται ὀρθογώνιον, ἑκάστου δὲ τετραγώνου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι Η, 2Η, 3Η . . . (ν—1)Η, νΗ (ἢ Η, Ζ, Ε . . . Γ, Β). Ἔστωσαν ἀκόμη τὰ ὀρθογώνια, ὅπου τὰ γράμματα Θ, Ι, Κ, Λ, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ν, ἕκαστον δὲ τούτων νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μέγιστον τῶν προηγουμένων ὀρθογωνίων ἤτοι τὸ ἔχον πλευρὰς (Α+Β), Β, (ἢ εὐθεῖαι (Θ+Ι+Κ+Λ), Β), νὰ εἶναι δὲ 2Θ = 2Ι = Α, Λ = 2Κ, Κ+Λ = Β = 3Κ.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, ὅπου τὰ γράμματα Θ, Ι, Κ, Λ πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, ὅπου τὰ γράμματα ΑΗ, ΑΖ, . . . ΑΒ, ἤτοι

$$\frac{\text{ὀρθογώνια } (\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+\ldots+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}}{\text{ὀρθογώνια } (\mathrm{A}+\mathrm{H})\mathrm{H}+(\mathrm{A}+2\mathrm{H})2\mathrm{H}+\ldots+(\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu\mathrm{H}} <$$

$$\frac{\text{εὐθεῖαι } \Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda}{\text{εὐθεῖαι } \frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\mathrm{B}}{3}} \qquad (\alpha)$$

$$\text{καὶ}\ \frac{\text{ὀρθογ. } (\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+\ldots+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}}{\text{ὀρθογ. } (\mathrm{A}+\mathrm{H})\mathrm{H}+(\mathrm{A}+2\mathrm{H})\,2\,\mathrm{H}+\ldots+[(\alpha+(\nu-1)\,\mathrm{H})\;(\nu-1)\,\mathrm{H}]} > \frac{\text{εὐθεῖαι } \Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda}{\text{εὐθεῖαι } \dfrac{\mathrm{A}}{2}+\dfrac{\mathrm{B}}{3}} \qquad (\beta)$$

Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουν τὰ ὀρθογώνια Α.Η, Α.2Η, . . . Α.νΗ (εὐθεῖα νΗ = εὐθεῖα Β) καὶ τὰ ὀρθογώνια τοῦ αὐτοῦ πλήθους ν, τὰ (Θ+Ι)Β, (Θ+Ι)Β, . . . (Θ+Ι)Β θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ προταχθὲν λῆμμα

$$(\Theta+\mathrm{I})\mathrm{B}+(\Theta+\mathrm{I})\mathrm{B}+\ldots+(\Theta+\mathrm{I})\mathrm{B} < 2[\mathrm{A.H}+\mathrm{A.2H}+\ldots+\mathrm{A.}\,\nu\mathrm{H}], \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad > 2[\mathrm{A.H}+\mathrm{A.2H}+\ldots+\mathrm{A}(\nu-1)\mathrm{H}], \quad (2)$$

Καὶ ἐπειδὴ Θ = Ι, ἁπλοποιοῦντες διὰ 2 ἔχομεν

$$\mathrm{I.B}+\mathrm{I.B}+\ldots+\mathrm{I.B} < \mathrm{A.H}+\mathrm{A.2H}+\ldots+\mathrm{A.}\nu\mathrm{H}, \quad (3)$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad > \mathrm{A.H}+\mathrm{A.2H}+\ldots+\mathrm{A}(\nu-1)\mathrm{H}. \quad (4)$$

Πάλιν, ἐπειδὴ ὑπάρχουν αἱ ἀκολουθίαι

Η, 2Η, 3Η, . . . νΗ (ἢ Η, Ζ, Ε . . . Γ, Β)

καὶ (Κ+Λ), (Κ+Λ), . . . (Κ+Λ), τοῦ αὐτοῦ πλήθους ν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ἑλίκων (θεώρημα 10)

$$(\mathrm{K}+\Lambda)^2+(\mathrm{K}+\Lambda)^2+\ldots+(\mathrm{K}+\Lambda)^2 < 3[\mathrm{H}^2+(2\mathrm{H})^2+\ldots+(\nu\mathrm{H})^2] \quad (5)$$

$$\text{καὶ} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad > 3[\mathrm{H}^2+(2\mathrm{H})^2+\ldots+[(\nu-1)\mathrm{H}]^2] \quad (6)$$

Ἐπειδὴ δὲ Λ = 2Κ, διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν (5 καὶ 6) διὰ 3 λαμβάνομεν

$$\mathrm{K}(\mathrm{K}+\Lambda)+\mathrm{K}(\mathrm{K}+\Lambda)+\ldots+\mathrm{K}(\mathrm{K}+\Lambda) < \mathrm{H}^2+(2\mathrm{H})^2+\ldots+(\nu\mathrm{H})^2 \quad (7)$$

$$\text{καὶ} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad > \mathrm{H}^2+(2\mathrm{H})^2+\ldots+[(\nu-1)\mathrm{H}]^2. \quad (8)$$

Ἐπειδὴ Κ+Λ = Β, αἱ προηγούμεναι σχέσεις γίνονται

$$\mathrm{K.B}+\mathrm{K.B}+\ldots+\mathrm{K.B} < \mathrm{H}^2+(2\mathrm{H})^2+\ldots+(\nu\mathrm{H})^2 \quad (9)$$

$$\text{καὶ} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad > \mathrm{H}^2+(2\mathrm{H})^2+\ldots+[(\nu-1)\mathrm{H}]^2. \quad (10)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (3 καὶ 9) καὶ (4 καὶ 10) λαμβάνεται

$$(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}+(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}+\ldots+(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B} < (\mathrm{A.H}+\mathrm{H}^2)+[\mathrm{A.2H}+(2\mathrm{H})^2]+\ldots+[\mathrm{A.}\nu\mathrm{H}+(\nu\mathrm{H})^2] \quad (11)$$

$$(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}+(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}+\ldots+(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B} > (\mathrm{A.H}+\mathrm{H}^2)+[\mathrm{A.2H}+(2\mathrm{H})^2]+\ldots+[\mathrm{A.}\nu\mathrm{H}+[(\nu-1)\mathrm{H}]^2]. \quad (12)$$

Ὅλα τὰ ὀρθογώνια (Θ+Ι+Κ+Λ)Β . . . καὶ (Ι+Κ)Β . . . εἶναι ὡς τὰ ὕψη, ἀφοῦ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν Β. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ὀρθογώνια } (\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+\ldots+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}}{\text{ὀρθογώνια } (\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}+(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}+\ldots+(\mathrm{I}+\mathrm{K})\mathrm{B}}=\frac{\text{εὐθεῖαι } \Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda}{\text{εὐθεῖαι } \mathrm{I}+\mathrm{K}}.$$

Εἰς τὴν σχέσιν ταύτην ἀντικαθιστῶντες τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου μέλους πρῶτον ἐκ τῆς σχέσεως (11) καὶ κατόπιν ἐκ τῆς (12) λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ὀρθογώνια } (\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+\ldots+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}}{\text{ὀρθογώνια } (\mathrm{A.H}+\mathrm{H}^2)+[\mathrm{A.2H}+(2\mathrm{H})^2]+\ldots+[\mathrm{A.\nu H}+(\nu\mathrm{H})^2]}<\frac{\text{εὐθεῖαι } \Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda}{\text{εὐθεῖαι } \mathrm{I}+\mathrm{K}=\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\mathrm{B}}{3}}$$

καὶ

$$\frac{\text{ὀρθογώνια } (\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}+\ldots+(\Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda)\mathrm{B}}{\text{ὀρθογώνια } (\mathrm{A.H}+\mathrm{H}^2)+[\mathrm{A.2H}+(2\mathrm{H})^2]+\ldots+[\mathrm{A}(\nu-1)\mathrm{H}+[(\nu-1)\mathrm{H}]^2]}>\frac{\text{εὐθεῖαι } \Theta+\mathrm{I}+\mathrm{K}+\Lambda}{\text{εὐθεῖαι } \mathrm{I}+\mathrm{K}=\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\mathrm{B}}{3}}$$

ἤτοι τὰς ζητουμένας σχέσεις (α) καὶ (β).

Σύγχρονος διατύπωσις τοῦ θεωρήματος

Ἔστω ἡ αὔξουσα ἀριθμητικὴ ἀκολουθία $\mathrm{H}, 2\mathrm{H}, 3\mathrm{H} \ldots \nu\mathrm{H}$ (1)
καὶ τὰ ἀντίστοιχα εἰς ἕκαστον ὅρον αὐτῆς ὀρθογώνια

$$(\mathrm{A}+\mathrm{H})\mathrm{H},\ (\mathrm{A}+2\mathrm{H})2\mathrm{H},\ (\mathrm{A}+3\mathrm{H})3\mathrm{H},\ \ldots\ (\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu\mathrm{H} \qquad (2).$$

Τὸ ἄθροισμα ν ὀρθογωνίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται μὲ τὸ μεγαλύτερον ὀρθογώνιον τῆς (2), τὸ $(\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu\mathrm{H}$, εἶναι $(\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu^2\mathrm{H}$.

Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι

$$\frac{(\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu^2\mathrm{H}}{(\mathrm{A}+\mathrm{H})\mathrm{H}+(\mathrm{A}+2\mathrm{H})2\mathrm{H}+\ldots+(\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu\mathrm{H}}<\frac{\mathrm{A}+\nu\mathrm{H}}{\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\nu\mathrm{H}}{3}} \text{ καὶ}$$

$$\frac{(\mathrm{A}+\nu\mathrm{H})\nu^2\mathrm{H}}{(\mathrm{A}+\mathrm{H})\mathrm{H}+(\mathrm{A}+2\mathrm{H})2\mathrm{H}+\ldots+[\mathrm{A}+(\nu-1)\mathrm{H}](\nu-1)\mathrm{H}}>\frac{\mathrm{A}+\nu\mathrm{H}}{\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\nu\mathrm{H}}{3}}$$

(σημ.: Τὸ Α εἶναι παράμετρος ὑπερβολῆς. Ἰδὲ ἡμετέραν ἔκδοσιν Στοιχείων Εὐκλείδου, τόμος 2 σελ. 303.29).

3

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο θεωρημάτων. Διὰ τὸ ἓν λέγει ὅτι ἀπεδείχθη εἰς τὰ Κωνικὰ Στοιχεῖα (τοῦ Εὐκλείδου), τὰ ὁποῖα δὲν ἐσώθησαν.

Διὰ τὸ ἄλλο εἶναι ΓΘ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς ΒΗ, ΓΗ = ΗΘ, ΕΖ = ΖΑ καὶ πᾶσα παράλληλος πρὸς τὴν ΕΑ τέμνεται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΔΚ, καθ' ὁρισμὸν τῆς διαμέτρου. Λαμβάνει ΔΖ = ΒΗ. Εἰς τὸ I, 44 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου δίδεται κεκαλυμμένως ἡ κατασκευὴ τῆς παραβολῆς. Εἰς τὸ ἄκρον Β, εὐθείας ΒΗ (θὰ εἶναι ὁ ἄξων τῆς παραβολῆς) φέρομεν κάθετον (ἐνταῦθα τὴν Μ) τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν σταθερὰν (ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς 2p). Πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς σταθερᾶς εὐθείας ἐπὶ τυχὸν μῆκος κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς ἔστω ἐπὶ τὸ μῆκος ΒΗ. Εἰς τὸ ἄκρον Η τοῦ τμήματος ΒΗ φέρομεν κάθετον, καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα, ἔστω τὸ ΗΘ, ὥστε $ΗΘ^2 = Μ \times ΒΗ$. Τοῦτο σημαίνει ἡ φράσις «λελάφθω δὲ παρ' ἂν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς, ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος» = ἂς ληφθῇ δὲ ἀπὸ τῆς παραβολῆς μέχρι τοῦ ἄξονος εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὴν παράμετρον τῆς παραβολῆς (Μ = 2p) ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ τῆς ἑκάστοτε καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς. ['Ιδὲ Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου, Γεωμετρία - θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλ. V - IX, τόμος 2, 'Αθῆναι 1953, σελ. 296 (I, 44)].

Ἔστω κάθετος εἰς τὸ σημεῖον Β, τῆς εὐθείας ΗΒ, ἡ σταθερὰ εὐθεῖα Μ καὶ ἡ ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ. Ἔστω $\dfrac{ΑΖ^2}{ΑΚ^2} = \dfrac{Ν}{Μ}$ (1). Ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Κωνικὰ Στοιχεῖα (τοῦ Εὐκλείδου), λέγει, ὅτι τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς εὐθείας Ν, ἐπὶ τὰς ἀποστάσεις ΔΖ, ΔΚ κλπ. δίδει ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ μέχρι τῆς παραβολῆς, παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ, κατόπιν ἡ ΚΑ κλπ. ('Η αὐτὴ ὡς ἀνωτέρω μέθοδος κατασκευῆς τῆς αὐτῆς παραβολῆς, ὅταν ληφθῇ ὡς διάμετρος εὐθεῖα ἡ ΔΖ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς ΒΗ). Θὰ εἶναι ἑπομένως $ΑΖ^2 = ΔΖ \times Ν$, (2). Εἶναι δὲ καὶ $ΘΗ^2 = ΒΗ \times Μ$, (3). Διαιροῦντες τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ΔΖ = ΒΗ, λαμβάνομεν $ΑΖ^2 : ΘΗ^2 = Ν : Μ$, (4). 'Εκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἔχομεν $ΑΖ^2 : ΑΚ^2 = ΑΖ^2 : ΘΗ^2$, ἐξ ἧς ἕπεται ΘΗ = ΑΚ. Εἶναι καὶ ΒΗ = ΔΖ. Διὰ πολ/σμοῦ τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\Theta H \times BH = AK \times \Delta Z$. Εἶναι ἄρα τρίγωνον $\Theta HB =$ τρίγ. ΔAZ καὶ τὰ διπλάσια τούτων ἤτοι τρίγ. $\Theta B\Gamma =$ τρίγ. $A\Delta E$. Καὶ ἐπειδὴ ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὴν πραγματείαν Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ὅτι τὸ τρίγωνον $\Theta B\Gamma = \frac{4}{3}$ παραβολικοῦ τμήματος $\Theta B\Gamma$ καὶ τρίγ. $A\Delta E = \frac{4}{3}$ παραβ. τμ. $A\Delta E$, ἕπεται παραβ. τμ. $\Theta B\Gamma =$ παραβ. τμ. $A\Delta E$.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ὅταν ἡ $\Theta\Gamma$ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς.

4

1. Ἔστω ὁ κύκλος $\psi > $ τῆς ἐλλείψεως $AB\Gamma\Delta$ ἣν καλοῦμεν E καὶ ἔστω $\Psi - E = \delta$, (1). Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον κανονικὸν ἀρτιόπλευρον Π, διπλασιάζοντες διαρκῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν $\Psi - \Pi = \delta'$, (2), ὅπου $\delta' < \delta$, (3). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εἶναι $E + \delta = \Pi + \delta'$ καὶ δυνάμει τῆς (3) εἶναι $\Pi > E$, (4).

Ἐπειδὴ $\frac{\Lambda K}{\Lambda M} = \frac{\Theta E}{\Theta B}$, θὰ εἶναι $\frac{\Lambda K}{\Theta E} = \frac{\Lambda M}{\Theta B}$ καὶ διὰ συνθέσεως

$\frac{\Lambda K + \Theta E}{\Theta E} = \frac{\Lambda M + \Theta B}{\Theta B}$ ἢ $\frac{\Lambda K + \Theta E}{\Lambda M + \Theta B} = \frac{\Theta E}{\Theta B}$, ὅπου ΛK, ΘE καὶ ΛM, ΘB εἶναι αἱ βάσεις τῶν τραπεζίων ΛE καὶ ΘM ἀντιστοίχως, ἅτινα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος $\Lambda\Theta$. Εἶναι ἑπομένως $\frac{\text{τραπέζιον } \Lambda E}{\text{τραπέζιον } \Theta M} = \frac{\Theta E}{\Theta B}$

Τὰ τρίγωνα $A\Pi H$ καὶ $A\Pi\Xi$ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν $A\Pi$ εἶναι ὡς τὰ ὕψη ΠH, $\Pi\Xi$, καὶ εἶναι $\frac{\Pi H}{\Pi \Xi} = \frac{\Theta E}{\Theta B}$. Θὰ εἶναι ἑπομένως

$$\frac{\text{ἐγγεγ. πολύγ. εἰς κύκλον } AE\Gamma Z}{\text{ἐγγεγ. πολύγ. εἰς ἔλλειψιν } AB\Gamma\Delta} = \frac{EZ}{B\Delta}.$$

Εἶναι δὲ (ἐκ τῆς ὁμοιότητος)

$\frac{\text{ἐγγεγρ. πολύγ. εἰς κύκλον } AE\Gamma Z}{\text{ἐγγεγρ. πολύγ. εἰς κύκλον } \Psi} = \frac{EZ}{B\Delta}$, διότι καὶ οἱ κύκλοι ἐξ ὑποθέσεως τοῦτον τὸν λόγον εἶχον. Εἶναι συνεπῶς τὸ εἰς τὸν κύκλον Ψ ἐγγεγρ. πολύγωνον = πρὸς τὸ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ἐκ τῆς (4) ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ εἰς τὸν κύκλον Ψ ἐγγεγρ.

πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐλλείψεως καὶ συνεπῶς ἔτι μεγαλύτερον τοῦ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγρ. πολυγώνου.

2. Ἔστω ὁ κύκλος $\Psi < $ τῆς ἐλλείψεως Ε καὶ ἔστω $E - \Psi = \delta$, (1). Ἐγγράφομεν εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀρτιόπλευρον κανονικὸν πολύγωνον Π μεγάλου ἀριθμοῦ πλευρῶν, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν $E - \Pi = \delta'$, (2), ὅπου $\delta' < \delta$, (3). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εἶναι $\Psi + \delta = \Pi + \delta'$ καὶ δυνάμει τῆς (3) εἶναι ἐκ ταύτης $\Pi > \Psi$, (4). Ἐκτελοῦντες τὴν προηγουμένην κατασκευὴν καὶ ἀπόδειξιν (τῆς περιπτώσεως 1) καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ εἰς τὸν κύκλον Ψ ἐγγραφόμενον ἀρτιόπλευρον καν. πολύγωνον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγραφόμενον πολύγωνον. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ἐκ τῆς (4) ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ πολύγωνον Π εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου Ψ καὶ συνεπῶς ἔτι μεγαλύτερον τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ὥστε ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἄξων ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ μεγάλου ἄξονος τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα.

5

Ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΓ ἔστω Κ. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα 4 ἀπεδείχθη ὅτι $\frac{X}{K} = \frac{B\Delta}{A\Gamma}$. Διὰ πολ/σμοῦ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους ἐπὶ ΑΓ ἔχομεν $\frac{X}{K} = \frac{B\Delta . A\Gamma}{A\Gamma^2}$ (1). Εἶναι δὲ καὶ $\frac{\Psi}{K} = \frac{EZ^2}{A\Gamma^2}$, (2). Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{X}{\Psi} = \frac{B\Delta . A\Gamma}{EZ^2}$.

7

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον

$$\frac{AE \times EZ}{E\Gamma^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\ \text{μεγ. ἄξονος ἐλλ.}\right)^2}{\Delta\Gamma^2}, \qquad (1).$$

Τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι $\frac{AE \times EZ}{E\Gamma^2} > \frac{A\Delta \times \Delta B}{\Delta\Gamma^2}$, (2). [Ἡ ἀνισότης ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΓ, ΠΕΓ καὶ ΒΔΓ, ΡΕΓ ἔχομεν $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΠΕ}}{\text{ΕΓ}}$, $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΡΕ}}{\text{ΕΓ}}$. Διὰ πολ/σμοῦ τῶν ἰσοτήτων τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{\text{ΠΕ}\times\text{ΡΕ}}{\text{ΕΓ}^2} = \frac{\text{ΑΔ}\times\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}^2}$. (3).

Ἐὰν ἡ γωνία Ζ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΠΕ, τὰ τρίγωνα ΑΠΕ, ΡΖΕ θὰ εἶναι ὅμοια καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΠ}} = \frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΕΖ}}$, (4). Ἡ γωνία ὅμως Ζ = γων. ΑΒΓ — γων. ΒΑΖ = γων. ΒΑΓ — γων. ΒΑΖ. Ἐπομένως εἶναι γων. Ζ $<$ γων. ΒΑΓ ἢ γων. Ζ $<$ γων. ΑΠΕ. Κατὰ συνέπειαν ΕΑ $>$ ΕΡ, ὁπότε ἐκ τῆς σχέσεως (4) ἔχομεν $\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΠ}} > \frac{\text{ΕΡ}}{\text{ΕΖ}}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\text{ΕΑ}\times\text{ΕΖ} > \text{ΕΡ}\times\text{ΕΠ}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΔ}\times\text{ΔΒ}}{\text{ΔΓ}^2} < \frac{\text{ΕΑ}+\text{ΕΖ}}{\text{ΕΓ}^2}$, δηλ. τὴν σχέσιν (2). Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ = ΔΒ = τὸ ἥμισυ τοῦ μικροῦ ἄξονος τῆς ἐλλείψεως καὶ εἶναι

$\left(\frac{1}{2}\ \text{μικρ. ἄξονος}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\ \text{μεγ. ἄξονος}\right)^2$ εἶναι δυνατὴ ἡ σχέσις (1). Ταῦτα ὁ Ἀρχιμήδης τὰ θεωρεῖ ὡς γνωστά].

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς προηγουμένας σχέσεις (1) καὶ (3) λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΕ}\times\text{ΕΖ}}{\text{ΠΕ}\times\text{ΡΕ}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\ \text{μεγ. ἄξονος ἐλλ.}\right)^2}{\text{ΑΔ}\times\text{ΒΔ}}$, (5). Εἶναι δὲ

$\frac{\text{ΑΕ}\times\text{ΕΖ}}{\text{ΠΕ}\times\text{ΡΕ}} = \frac{\text{ΑΛ}\times\text{ΛΖ}}{\text{ΛΞ}\times\text{ΛΟ}}$, (6). [Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΠ, ΑΛΞ ἔχομεν $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΠΕ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΛΞ}}$, καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγ. ΛΟΖ, ΕΡΛ ἔχομεν $\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΡΕ}} = \frac{\text{ΛΖ}}{\text{ΛΟ}}$. Διὰ πολ/σμοῦ τῶν ἰσοτήτων τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΕ}\times\text{ΕΖ}}{\text{ΠΕ}\times\text{ΡΕ}} = \frac{\text{ΑΛ}\times\text{ΛΖ}}{\text{ΛΞ}\times\text{ΛΟ}}$], καὶ

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\ \text{μεγ. ἄξ. ἐλλ.}\right)^2}{\text{ΑΔ}\times\text{ΔΒ}\left(=\frac{1}{2}\ \text{μικρ. ἄξ. ἐλλ.}\right)^2} = \frac{\text{ΘΚ}^2}{\text{ΑΚ}\times\text{ΚΒ}},\ (7).$$

[Τὴν σχέσιν ταύτην τὴν ὁποίαν ὁ Ἀρχιμήδης θεωρεῖ γνωστήν, ὡς ἀποδεδειγμένην ὑπὸ προγενεστέρων, ὁ Ἀπολλώνιος ἀποδεικνύει γενικῶς ἰσχύουσαν εἰς τὸν κύκλον, τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολὴν εἰς τὸ I βιβλίον τῶν Κωνικῶν του, θεώρ. 21.

Ἐὰν καλέσωμεν α, β τὸν μέγαν καὶ τὸν μικρὸν ἄξονα τῆς ἐλλείψεως ἀντιστοίχως, τεμνομένους εἰς τὴν ἀρχὴν ὀρθογωνίων συντεταγμένων, x τὴν ἀπόστασιν σημείου τινὸς τῆς ἐλλείψεως ἀπὸ τοῦ μικροῦ ἄξονος καὶ $(\beta+\psi)$, $(\beta-\psi)$ τὰ τμήματα τοῦ μικροῦ ἄξονος εἰς τὰ ὁποῖα οὗτος χωρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας x, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ Κωνικὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα διασώζονται εἰς τὸ I, 21 τοῦ Ἀπολλωνίου, $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{x^2}{(\beta+\psi)\ (\beta-\psi)}$ ἢ $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$. Ἐνταῦθα εἶναι $\Theta K^2 = x^2$, $AK \times KB = (\beta+\psi)(\beta-\psi)$].

Ἐκ τῶν σχέσεων (4, 6, 7) ἕπεται $\frac{A\Lambda \times \Lambda Z}{\Xi\Lambda \times \Lambda O} = \frac{\Theta K^2}{AK \times KB}$, (8). Εἶναι δὲ $\frac{\Xi\Lambda \times \Lambda O}{\Gamma\Lambda^2} = \frac{AK \times KB}{K\Gamma^2}$, (9). [Διότι $\frac{\Xi\Lambda}{\Gamma\Lambda} = \frac{AK}{K\Gamma}$ καὶ $\frac{\Lambda O}{\Gamma\Lambda} = \frac{KB}{K\Gamma}$. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ μέλη ἕπεται ἡ (9)].

Ἐκ τῶν (8 καὶ 9) λαμβάνομεν $\frac{A\Lambda \times \Lambda Z}{\Gamma\Lambda^2} = \frac{\Theta K^2}{K\Gamma^2}$, (10). Εἶναι δὲ $A\Lambda \times \Lambda Z = \Lambda M^2$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (10) ἕπεται $\frac{\Lambda M^2}{\Gamma\Lambda^2} = \frac{\Theta K^2}{K\Gamma^2}$, $\frac{\Lambda M}{\Gamma\Lambda} = \frac{\Theta K}{K\Gamma}$ ἤτοι ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Θ, Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἡ δὲ ΓΜ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου κλπ.

8

. . . Ἐὰν $N^2 = Z\Delta \times \Delta H$ ἂς γραφῇ περὶ τὴν ΕΒ, ὡς διάμετρον, κύκλος, ἄλλως ἔλλειψις, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἄλλης διαμέτρου : $EB^2 = N^2 : Z\Delta \times \Delta H$.

Εἶναι λοιπὸν $\frac{N^2}{Z\Delta \times \Delta H} = \frac{\Lambda M^2}{E\Lambda \times \Lambda B}$, (1). Ἀλλὰ

$$\frac{Z\Delta \times \Delta H}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{E\Lambda \times \Lambda B}{\Pi\Lambda \times \Lambda P}, \quad (2).$$

Διὰ πολ/σμοῦ τῶν (1), (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{N^2}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{\Lambda M^2}{\Pi\Lambda \times \Lambda P}, \quad (3).$$

Εἶναι δὲ $\frac{N^2}{A\Delta \times \Delta B} = \frac{\Theta K^2}{AK \times KB}$, (4). (Ἀπολλωνίου I, 21). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda M^2}{\Pi\Lambda \times \Lambda P} = \frac{\Theta K^2}{AK \times KB}$, (5).

Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\Lambda M^2}{\Theta K^2} = \frac{\Pi\Lambda \times \Lambda P}{AK \times KB}$, (6).

Εἶναι δὲ
$\frac{\Pi\Lambda \times \Lambda P}{\Gamma\Lambda^2} + \frac{AK \times KB}{K\Gamma^2}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{\Gamma\Lambda^2}{K\Gamma^2} = \frac{\Pi\Lambda \times \Lambda P}{AK \times KB}$, (7).

Ἐκ τῶν (6), (7) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda M^2}{\Theta K^2} = \frac{\Gamma\Lambda^2}{K\Gamma^2}$ ἢ $\frac{\Lambda M^2}{\Gamma\Lambda^2} = \frac{\Theta K^2}{K\Gamma^2}$, ἐξ ἧς $\frac{\Lambda M}{K\Gamma} = \frac{\Theta K}{K\Gamma}$, ὅπερ σημαίνει τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΚΓΘ, ΛΓΜ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Θ, Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἐν ᾧ ἡ εὐθεῖα ΓΜ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου· ἐπομένως καὶ τὸ σημεῖον Θ κεῖται ἐπ' αὐτῆς.

12

$K\Theta^2 = Z\Theta \times \Theta E$, (1). Ἡ σχέσις $BP = BM$ ἀναφέρεται εἰς τὴν πραγματείαν Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, θεώρ. 2, ἄνευ ἀποδείξεως, ὡς γνωστὴ ἐκ τῶν Κωνικῶν Στοιχείων (τοῦ Εὐκλείδου, ἅτινα δὲν ἐσώθησαν).
$\frac{A\Theta \times \Theta\Gamma}{E\Theta \times \Theta Z} = \frac{NT^2 = TM^2}{BT^2}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται
$\frac{\Theta K^2}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{BT^2}{TM^2}$. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΓΑΛ, ΤΜΒ λαμβάνεται $\frac{\Theta K^2}{A\Theta \times \Theta\Gamma} = \frac{A\Lambda^2}{A\Gamma^2}$. Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη παριστᾷ ἐξίσωσιν ἐλλείψεως τῆς μορφῆς $\frac{\psi^2}{(\alpha+x)(\alpha-x)} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ἢ $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$. (Ἐκ τοῦ Α καὶ Γ ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΒΔ. Ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων τούτων, ἡ ΑΛ εἶναι ὁ μικρὸς ἄξων τῆς ἐλλείψεως, ἐν ᾧ ὁ μεγάλος εἶναι ἡ ΑΓ).

21

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ κώνου ΑΒΓ.

Ἂς ληφθῇ ὁ κῶνος $Ψ = \frac{3}{2}$ κώνου ΑΒΓ, (1) καὶ ἂς περιβάλῃ τὸν ὀρθὸν κῶνον ΑΒΓ ὀρθὸς κύλινδρος ΑΒΓ, ἔχων τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΔ. Ἐπειδὴ κῶνος ΑΒΓ $= \frac{1}{3}$ κύλινδρ. ΑΒΓ λαμβάνεται ἐκ τῆς (1) $Ψ = \frac{\text{κύλινδρ. ΑΒΓ}}{2}$ ἢ $2Ψ =$ κύλινδρ. ΑΒΓ, (2).

Ἐὰν τὸ παραβολοειδὲς δὲν εἶναι ἴσον πρὸς Ψ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τούτου ἢ μικρότερον.

Ἔ σ τ ω π ρ ῶ τ ο ν παραβολ. $>$ Ψ καὶ παραβ.—Ψ=δ, (3). Ἂς γίνῃ ἡ εἰς τὸ θεώρημα ἀναφερομένη κατασκευή, καὶ περιγεγραμ. σχῆμα — ἐγγεγρ. = δ′, ὥστε δ′ $<$ δ. Ἔστω περιγεγ. σχῆμα = παραβολ.+κ, ὁπότε παραβολ.+κ — ἐγγεγρ. = δ′, (4). Ἀφαιροῦντες τὴν (4) ἀπὸ τῆς (3) ἔχομεν—κ+Ε—Ψ= δ—δ′ ἤτοι ἐγγεγρ. = Ψ+κ+ (δ—δ′) ἐξ ἧς ἕπεται ἐγγεγρ. $>$ Ψ, (5).

Περὶ τὸ παραβολοειδὲς ἔχομεν περιγράψει ὀρθὸν κύλινδρον μὲ διάμετρον τῆς βάσεως τὴν ΑΓ, καὶ ἔχομεν διαιρέσει τὸν ἄξονα ΒΔ εἰς ν ἴσα μέρη, ὅπου τὸ ν ὁσονδήποτε μεγάλος ἀριθμός. Διὰ τῶν σημείων διαιρέσεως τοῦ ἄξονος τῶν Ε, Ζ, . . . Θ, Ι φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ διὰ τῆς ΑΓ διερχόμενον, κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα ΒΔ, ὁπότε ἔχομεν διαιρέσει τὸν περιγραφέντα κύλινδρον εἰς ν κυλίνδρους ἴσους. Εἰς τὸ παραβολοειδὲς περιγράφομεν καὶ ἐγγράφομεν κυλίνδρους, ὡς τοῦτο καθορίζεται εἰς τὸ κείμενον. Οἱ ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι εἶναι ν—1 κατὰ τὸ πλῆθος. Συγκρίνει τώρα τοὺς ἴσους κυλίνδρους εἰς τοὺς ὁποίους ἔχει διαιρεθῆ ὁ περιγεγραμμένος κύλινδρος ὕψους ΔΙ πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους ἐγγεγραμμένους κυλίνδρους, ἀρχίζων ἐκ τῶν κάτω. Καλοῦμεν τοὺς ἴσους πρὸς τὸν ΠΑΓ = ΑΕΓ περιγεγραμμένους κυλίνδρους $K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = K_{ν-1} = K_ν$ καὶ τοὺς ἀντιστοίχους ἐγγεγραμμένους κυλίνδρους ΚΔΛ . . . ΣΘΤ διὰ E_1, E_2, E_3,. . . $E_{ν-1}$. Ὁ πρῶτος περιγεγραμμένος κύλινδρος πρὸς τὸν πρῶτον ἐγγεγραμμένον θὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων (ἀφοῦ ὅλοι οἱ περιγ. καὶ ἐγγ. κύλινδροι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΔΕ=ΕΖ=. . . = ΘΙ = ΙΒ), ἤτοι $\frac{K_1}{E_1} = \frac{ΔΑ^2}{ΚΕ^2}$. Ἀλλὰ $ΔΑ^2 = ΒΔ.ΒΗ$ καὶ $ΚΕ^2 = ΒΕ.ΒΗ$, ἐὰν ΒΗ καλέσωμεν τὴν παράμετρον τῆς παραβολῆς ΑΒΓ (Ἰδὲ Ε. Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμος ΙΙ, Ἀθῆναι 1953 σελ. 296 (Ι. 44). (Σημ. Ἡ κατασκευὴ τῆς παραβολῆς γίνεται ὡς ἑξῆς : Ἔστω ἡ ΒΔ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ (σχ. 21 θ.) καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ Β, παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς εἰς τὸ Β παραλλήλου τῆς ΑΓ λαμβάνομεν σταθερὸν τμῆμά τι, ἔστω ΒΗ, (τὴν παράμετρον τῆς παραβολῆς). Τὸ ὀρθογώνιον ΒΗ, ΒΔ μετασχηματίζομεν εἰς τετράγωνον ἔστω $ΔΑ^2$. Εἰς τὸ σημεῖον Δ τῆς ΒΔ φέρομεν κάθετον τὴν ΔΑ. Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἓν σημεῖον τῆς παραβολῆς. Ὁμοίως, τὸ ὀρθογώνιον ΒΗ.ΒΕ μετασχηματίζομεν εἰς τετράγωνον $ΕΚ^2$. Τὸ σημεῖον Κ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς. Τὸ ὀρθογώνιον ΒΗ.ΒΖ μετασχηματίζομεν εἰς τετράγωνον $ΖΝ^2$. Τὸ σημεῖον Ν εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς. Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος τοῦ Β ὁπότε τὸ ὀρθογώνιον $ΗΒ.ΒΔ = ΔΓ^2$ καὶ τὸ σημεῖον Γ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς κλπ.). Ἐπομένως θὰ εἶναι $\frac{K_1}{E_1} = \frac{ΒΔ}{ΒΕ}$, (6). Ὁμοίως θὰ εἶναι $\frac{K_2}{E_2} = \frac{ΔΑ^2}{ΝΖ^2} = \frac{ΒΔ}{ΒΖ}$ κλπ. Ἐὰν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας ΑΒ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΚΕ, ΝΖ . . . εἶναι Ξ, Ο . . . θὰ εἶναι ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν συναφῶν τριγώνων $\frac{ΒΔ}{ΒΕ} = \frac{ΔΑ}{ΕΞ}$ ἤτοι ἐκ τῆς (6) $\frac{K_1}{E_1} = \frac{ΔΑ}{ΕΞ}$.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ εἶναι $\frac{K_2}{E_2} = \frac{ΔΑ}{ΖΟ}$, $\frac{K_3}{E_3} =$ καὶ

$$\frac{K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{ν-1}}{E_1+E_2+E_3+\ldots+E_{ν-1}} = \frac{ΔΑ+ΔΑ+ΔΑ+\ldots+ΔΑ}{ΕΞ+ΖΟ+\ldots+\overline{}} \quad (7).$$

Τὸ πλῆθος τῶν ΔΑ τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ν - 1 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τοῦ παρονομαστοῦ (τοῦ δευτέρου κλάσματος) εἶναι ἐπίσης ν - 1. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, ΞΒΕ, ΟΒΖ . . .εἶναι ἴσα ἡ διαφορὰ δύο συνεχῶν κατὰ τὴν ἀρίθμησιν βάσεων εἶναι ἴση καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν μικροτέραν βάσιν. Ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι ΔΑ, ΕΞ, ΖΟ, . . . ἀποτελοῦν φθίνουσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον (ὅλοι οἱ ὅροι θετικοὶ) τῆς ὁποίας ὁ μικρότερος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν δύο συνεχῶν ὅρων.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου κλάσματος τῆς (7) προσθέσωμεν ἕνα κύλινδρον ἴσον πρὸς τὸν ΑΕΓ (τὸν τελευταῖον, τὸν ἔχοντα ὕψος ΒΙ) καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου κλάσματος προσθέσωμεν τὸν ὅρον ΔΑ ἡ ἰσότης (7) δὲν μεταβάλλεται καὶ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{K_1+K_2+K_3+\ldots+K_{ν-1}+K_ν}{E_1+E_2+E_3+\ldots+E_{ν-1}} = \frac{ΔΑ+ΔΑ+ΔΑ+ΔΑ+\ldots+ΔΑ}{ΕΞ+ΖΟ+\ldots+\overline{}} \quad ἤ$$

$$\frac{\text{Περιγεγρ. εἰς τὸ παραβολ. κύλινδρος}}{\text{Ἐγγεγραμμ. σχῆμα}} = \frac{ν.ΔΑ}{ΕΞ+ΖΟ+\ldots+} \quad (8)$$

(σημ.: Ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ προηγουμένου παρονομαστοῦ εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος τῆς φθινούσης προόδου πλήθους ν — 1 ὅρων, ἴσος πρὸς τὴν διαφορὰν δύο συνεχῶν ὅρων, ὁ δὲ μεγαλύτερος πρὸ τοῦ ΕΞ ὅρος θὰ ἦτο ὁ ΔΑ. Ἡ πρόσθεσις εἰς τοὺς ἀριθμητὰς τοῦ ΑΕΓ = Κν καὶ τοῦ ΔΑ ἀντιστοίχως στηρίζεται εἰς τὴν β′ περίπτωσιν τοῦ α′ θεωρήματος. Ἐνταῦθα οἱ προσθετέοι ἑκάστου ἀριθμητοῦ εἶναι μεταξύ των ἴσοι. Τοῦτο δὲν μεταβάλλει τὴν ἰσχὺν τοῦ θεωρήματος).

Εἰς τὴν (8) ἔχομεν ἐφαρμογὴν τῆς περιπτώσεως (2) τοῦ λήμματος τοῦ προτασσομένου τοῦ πρώτου θεωρήματος καθ' ὅ, ὅταν δοθῇ ἡ πρόοδος

α, 2α, 3α, . . . (ν — 1) α, να θὰ εἶναι

1) ν.να < 2 (α+2α+3α+ . . . . +να)

καὶ 2) ν.να > 2 (α+2α+3α+ . . . + (ν—1)α).

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου κλάσματος τῆς (8) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τοῦ παρονομαστοῦ, θὰ εἶναι καὶ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου κλάσματος τῆς (8) μεγαλύτερος τοῦ διπλασίου ἀθροίσματος τοῦ παρονομαστοῦ, ἤτοι κύλινδρος ΑΒΓ > 2 ἐγγεγρ. σχῆμα, (9). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) λαμβάνομεν Ψ > ἐγγεγρ. σχῆμα, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (5).

Ἔστω δεύτερον παραβολοειδὲς < Ψ, καὶ Ψ—παραβολοειδὲς=δ, (1).

Ἂς γίνῃ ἡ αὐτή, ὡς καὶ εἰς τὸ πρῶτον μέρος περιγραφὴ καὶ ἐγγραφὴ κυλίνδρων, ὥστε περιγεγρ. σχῆμα—ἐγγ. σχῆμα = δ′, (2), ὥστε δ′ < δ. Ἔστω τὸ παραβολοειδὲς = ἐγγεγρ. σχῆμα +κ. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς ταύτης εἰς τὴν (1) καὶ ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν Ψ = περιγεγρ. σχῆμα+κ+ρ ἂν κληθῇ (δ—δ′) = ρ. Ἐκ ταύτης ἕπεται Ψ > περιγεγρ. σχῆμα, (3).

Εἶναι δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος ἐκ τοῦ ὅλου κυλίνδρου ὁ ἔχων ὕψος ΔΕ πρὸς τὸν πρῶτον περιγραφέντα κύλινδρον ὕψους ΔΕ, ὡς $ΑΔ^2 : ΑΔ^2$. Ὁ δεύτερος κύλινδρος ἐκ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ὁ ἔχων ὕψος ΕΖ πρὸς τὸν δεύτερον περιγραφόμενον κύλινδρον τοῦ αὐτοῦ ὕψους $ΕΖ = ΔΑ^2 : ΚΕ^2 = ΒΔ : ΒΕ = ΔΑ : ΕΞ$ (ὡς καὶ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν).

Καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων κυλίνδρων, τοῦ ὅλου κυλίνδρου (ΑΒΓ), τῶν ἐχόντων ὕψος ἴσον πρὸς ΔΕ, πρὸς ἕκαστον τῶν περιγραφομένων διαδοχικῶς κυλίνδρων ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ (τῆς ΑΔ) πρὸς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τῶν εὐθειῶν

ΑΒ, ΒΔ (δηλ. τῶν ΞΕ, ΟΖ ...). Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν κυλίνδρων τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ὕψους ΒΔ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν περιγεγραμμένων κυλίνδρων $=$ ΑΔ$+$ΑΔ$+ \dots +$ΑΔ : ΑΔ$+$ΞΕ$+$ΟΖ$+ \dots$, (4).

Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τοῦ μνημονευθέντος λήμματος ἔχομεν ἄθροισμα εὐθειῶν ΑΔ $<$ 2(ΑΔ$+$ΞΕ$+$ΟΖ$+ \dots$), (5).

Δυνάμει τῆς (5) λαμβάνομεν ἐκ τῆς (4) ἄθροισμα κυλίνδρων τοῦ ὅλου κυλίνδρου $<$ 2 (ἄθροισμα περιγραφέντων κυλίνδρων) (6)· Τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν κυλίνδρων τοῦ ὅλου κυλίνδρου (δηλ. ὁ κύλινδρος ΑΒΓ) εἶναι κατὰ τὴν σχέσιν (2) τῆς πρώτης περιπτώσεως $= 2Ψ$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (6) λαμβάνομεν

$2Ψ < 2$ (ἄθρ. περιγρ. κυλίνδρων) ἢ

$Ψ <$ ἄθροισμα περιγραφέντων κυλίνδρων, ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (3). Ὥστε δὲν εἶναι παραβολ. $< Ψ$, ὡς ὑπετέθη. Ἀπεδείχθη δὲ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ὅτι δὲν εἶναι παραβολ. $> Ψ$. Εἶναι ἄρα παραβολ. $= Ψ = \frac{3}{2}$ κώνου ΑΒΓ.

Σημείωσις

Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τούτου ὁ S. Heller παρατηρεῖ ὅτι ἐκ τυπογραφικοῦ λάθους κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἰς τὸ α′ μέρος τοῦ θεωρήματος (ἔκδοσις Heiberg σελ. 350, 15 καὶ 23) ἐγράφη ΔΙ. (Ein Fehler in einer Archimedes-Ausgabe, Abhandlungen der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, Neue Folge, Heft 63, München 1954 p. 12, 5).

23

ΓΘ $=$ ΘΕ, ΖΚ $=$ ΚΑ (ἡ ἀπόδειξις μνημονεύεται εἰς τὸ α′ θεώρ. τῆς πραγματείας Τετραγωνισμὸς παραβολῆς). ΒΘ $=$ ΚΛ ἐξ ὑποθέσεως. ΕΘ $=$ ΑΧ, (1), [διότι τὰ τρίγωνα ΕΘΒ, ΑΛΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων τριγώνων ΓΒΕ, ΑΖΛ (θ. 3). Ἔχοντα δὲ ἴσας βάσεις ΒΘ, ΛΚ εἶναι ὡς τὰ ὕψη, ἤτοι $\frac{ΕΘΒ}{ΑΛΚ} = 1 = \frac{ΕΘ}{ΑΧ}$].

$$\frac{\text{πλάγιος κῶνος ΑΖΛ}}{\text{ὀρθὸς κῶνος ΓΒΕ}} = \frac{\text{βάσις κώνου ΑΖΛ}}{\text{βάσις κώνου ΓΒΕ}} \times \frac{\text{ὕψος κώνου ΑΖΛ}}{\text{ὕψος κώνου ΓΒΕ}} \qquad (2).$$

$$\frac{\text{πλάγιος κῶνος ΑΖΛ}}{\text{ὀρθὸς κῶνος ΓΒΕ}} = \frac{\text{ἐμβαδὸν ἐλλείψεως μεγ. ἄξ. ΑΖ}}{\text{ἐμβ. κύκλου διαμ. ΓΕ}} \times \frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΒΘ}} \qquad (3).$$

(Λόγος συγκείμενος ἐκ τοῦ λόγου τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν σημαίνει τὸ γινόμενον τοῦ λόγου τῶν βάσεων ἐπὶ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν).

Ὁ μικρὸς ἄξων τῆς ἐλλείψεως εἶναι ὁ ΖΠ (κατὰ τὸ θεώρ. 12). Ἐπομένως ἡ σχέσις (3) γίνεται $\frac{\text{πλάγιος κῶνος ΑΖΛ}}{\text{ὀρθὸς κῶνος ΓΒΕ}} = \frac{\text{ΑΖ} \times \text{ΖΠ}}{\text{ΓΕ}^2} \times \frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΒΘ}}$, (4).

$$\frac{\text{πλάγιος κῶνος ΑΖΛ}}{\text{ὀρθὸς κῶνος ΓΒΕ}} = \frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΑΧ}} \times \frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΒΘ}}, \qquad (5).$$

[Διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΖΟΚ, ΖΠΑ ἔχομεν $\frac{\text{ΖΟ}}{\text{ΖΚ}} = \frac{\text{ΖΠ}}{\text{ΖΑ}}$. Ἀλλὰ ΖΚ = ΚΑ, ἐξ οὗ ΖΟ = ΟΠ = ΑΧ καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς (1) εἶναι ΕΘ = ΑΧ λαμβάνομεν ΖΟ = ΕΘ, ἐξ οὗ 2ΖΟ = 2ΕΘ, ΖΠ = ΓΕ. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (4) ἔχομεν $= \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΓΕ}} \times \frac{\text{ΝΛ}}{\text{ΒΘ}}$, καὶ ἐπειδὴ ΑΖ = 2ΑΚ, ΓΕ = 2ΘΕ = 2ΑΧ λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως τὸ δεύτερον μέλος τῆς σχέσεως (5)].

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΚΝΛ, ΑΚΧ λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΑΧ}} = \frac{\text{ΛΚ}}{\text{ΛΝ}}$, καὶ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ΒΘ = ΛΚ. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν $\frac{\text{πλάγιος κῶνος ΑΖΛ}}{\text{ὀρθὸς κῶνος ΓΒΕ}} = \frac{\text{ΛΚ}}{\text{ΛΝ}} \times \frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΛΚ}} = 1$, ἐξ οὗ πλάγ. κῶνος ΑΖΛ = ὀρθ. κῶνος ΓΒΕ.

Ἀλλὰ $\frac{3}{2}$ πλαγίου παραβολοειδοῦς ΑΖΛ = πλάγιος κῶνος ΑΖΛ (θ. 22) καὶ $\frac{3}{2}$ ὀρθοῦ παραβολοειδοῦς ΓΒΕ = ὀρθὸς κῶνος ΓΒΕ (θ. 21) καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

24

Ἂν καλέσωμεν β_1, β_2, υ_1, υ_2 τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη τῶν κώνων ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓ}}{\text{κῶνος ΕΒΖ}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \times \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΕΘ}^2} \times \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΘ}}$. Ἀλλὰ $\frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΕΘ}^2} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΘ}}$ (κατὰ τὸ 3 θ. τῆς πραγματείας Τετραγωνισμὸς παραβολῆς).

Εἶναι ἄρα, δι' ἀντικαταστάσεως, $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓ}}{\text{κῶνος ΕΒΖ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΒΘ}^2}$.

25

Ἔστω ἡ ΒΔ ἄξων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς, ἡ ΒΘ ἔστω ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἀσυμπτώτων μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς καὶ ΒΘ = ΖΘ = ΖΗ. Δεικτέον $\frac{\text{ὑπερβολοειδὲς ΑΒΓ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}+3\text{ΒΘ}}{\text{ΒΔ}+2\text{ΒΘ}} = \frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΖΔ}}$, (1).

Ἔστω κύλινδρος περιβάλλων τὸ ὑπερβολοειδὲς ὁ ΑΦΥΓ καὶ κῶνος Ψ καὶ ἂς εἶναι $\frac{\text{κῶνος Ψ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΔΖ}}$, (2). Λέγω, ὅτι ὑπερβολοειδὲς ΑΒΓ = κῶνος Ψ.

Α. Ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον, ἔστω πρῶτον ὑπερβολοειδὲς > κῶνος Ψ καὶ ὑπερβολοειδὲς — κῶνος Ψ = δ. Ἂς περιγραφοῦν καὶ ἐγγραφοῦν εἰς τὸ ὑπερβολοειδὲς κύλινδροι ἔχοντες τὸ αὐτὸ ὕψος, ὥστε περιγραφὲν σχῆμα — ἐγγραφὲν σχῆμα = δ′

Ἔστω ὑπερβολοειδὲς = περιγρ. — κ, ὁπότε περιγρ. — κ — κῶνος Ψ = δ καὶ περιγρ. — ἐγγρ. = δ′ (ὅπου δ′ < δ).

Δι' ἀφαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν ἐγγρ. = κῶνος Ψ + κ + ρ, ἐὰν καλέσωμεν δ — δ′ = ρ, ὁπότε ἕπεται ἐγγρ. σχῆμα > κῶνος Ψ, (3).

Ἔστω $\text{ΒΡ} = \frac{1}{3}\,\text{ΒΔ}$ καὶ εἶναι $\text{ΒΘ} = \frac{1}{3}\,\text{ΗΒ}$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\text{ΒΡ}+\text{ΒΘ} = \text{ΘΡ} = \frac{1}{3}\,(\text{ΒΔ}+\text{ΗΒ}) = \frac{1}{3}\,\text{ΗΔ},\ \text{ΗΔ} = 3\text{ΘΡ}.$$

Ἐπειδὴ $\frac{\text{κύλινδρος ΑΦΥΓ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΘΡ}}$ καὶ $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓ}}{\text{κῶνος Ψ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΗΔ}}$, διὰ πολ/σμοῦ τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{κῶνος Ψ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΘΡ}}$, (4).

[σημ.: Ἡ ἔκφρασις πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη, ἔλειπε κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. Ὁ Ἀρχιμήδης πρὸς λῆψιν τῆς (4) στηρίζεται εἰς τὸν 18 ὁρισμὸν τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου γίνεται λόγος περὶ τεταραγμένης ἀναλογίας, λέγων «μεγεθῶν τριῶν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων». Τοῦτο σημαίνει τὰ ἑξῆς: Ἔστωσαν τὰ μεγέθη, κύλινδρος ΑΦΥΓ, κῶνος ΑΒΓ, κῶνος Ψ, εὐθεῖα ΔΖ, εὐθεῖα ΗΔ, εὐθεῖα ΘΡ. Τρία μεγέθη (στερεῶν) καὶ τρία μεγέθη (εὐθειῶν). Ἐκ τῶν λόγων $\frac{\text{πρῶτον}}{\text{δεύτερον}} = \frac{\text{πέμπτον}}{\text{ἕκτον}}$ καὶ $\frac{\text{δεύτερον}}{\text{τρίτον}} = \frac{\text{τέταρτον}}{\text{πέμπτον}}$, λαμβάνεται ἡ τεταραγμένη ἀναλογία. Ἐκ τῶν λόγων $\frac{\text{πρῶτον}}{\text{δεύτερον}} = \frac{\text{τέταρτον}}{\text{πέμπτον}}$ καὶ $\frac{\text{δεύτερον}}{\text{τρίτον}} = \frac{\text{πέμπτον}}{\text{ἕκτον}}$ λαμβάνεται ὁ «δι' ἴσου λόγος», (ἢ τεταγμένη ἀναλογία) (17 ὁρισμὸς τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων). Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ τελικὴ ἀναλογία λαμβάνεται διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν δύο ἀναλογιῶν ἀντιστοίχως, χωρὶς τοῦτο νὰ λέγεται. Νοεῖται ἐκ τῶν ὁρισμῶν].

Ἔστωσαν εὐθεῖαι Ξ τόσαι τὸ πλῆθος, ὅσα εἶναι τὰ ἴσα τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει διαιρεθῇ ὁ ἄξων ΒΔ, κατὰ τὸ μέγεθος δὲ νὰ εἶναι Ξ = ΖΒ, καὶ παρ' ἑκάστην εὐθεῖαν Ξ (= παράμετρος ὑπερβολῆς) ἂς παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον τοῦ εἰς τὸ Ξ παραβαλλομένου παραλληλογράμμου, κατὰ τετράγωνον σχῆμα (ἐξ αὐτοῦ ὠνομάσθη τὸ προκῦπτον σχῆμα ὑπερβολὴ) καὶ ἔστω τὸ μὲν μέγιστον παραλληλόγραμμον ἂς ἔχῃ πλευρὰς ΖΔ, ΔΒ (= παραλληλόγραμμον Ξ+τετράγωνον Ν). Τοῦ παραλληλογράμμου τούτου ΞΝ ἡ μία πλευρὰ ἔστω Ν = ΒΔ καὶ ἡ ἄλλη Ξ = ΖΒ, τὸ δὲ ἐλάχιστον παραλληλόγραμμον ἂς ἔχῃ πλευρὰς ΖΙ, ΙΒ. Ἔστωσαν καὶ ἄλλα παραλληλόγραμμα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ προηγούμενα, ἴσα μεταξύ των, ὅπου τὸ γράμμα Ω, πλευρῶν ΖΔ, ΔΒ (ὡς ἔχει καὶ τὸ μέγιστον τῶν προηγουμένων). Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\text{κύλινδρος βάσεως διαμ. ΑΓ, ὕψους ΔΕ}}{\text{κύλινδρος βάσεως διαμ. ΚΛ, ὕψους ΔΕ}} = \frac{ΔΑ^2}{ΚΕ^2} = \frac{ΖΔ \times ΒΔ}{ΖΕ \times ΒΕ}, \qquad (5).$$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσότητος τῶν δύο τελευταίων λόγων τῆς ἰσότητος (5) ὑπῆρχεν εἰς τὰ Κωνικὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (ἀπολεσθέντα). Ἤδη σώζεται εἰς τὸ XXI θεώρημα τοῦ α' βιβλίου τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

(Τὸ τετράγωνον τῆς τεταγμένης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ τετμημένη τέμνεται ὑπ' αὐτῆς).

Καὶ εἶναι $Z\Delta \times B\Delta = \Omega =$ παραλληλόγραμμον ΞΝ, καὶ $ZE + BE =$ παραλληλόγραμμον ΞΜ, διότι ἡ εὐθεῖα $\Xi = ZB$, ἡ $M = BE$, ἡ δὲ $N = B\Delta$.

(Αἱ πλευραὶ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἀπὸ τοῦ μεγίστου πρὸς τὸ ἐλάχιστον εἶναι ΖΔ, ΒΔ, (τοῦ ΞΝ), κατόπιν ΖΕ, ΒΕ (τοῦ ΞΜ) . . . , καὶ τοῦ ἐλαχίστου ΖΙ, ΒΙ). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν

$$\frac{\text{κύλινδ. βάσεως διαμ. ΑΓ, ὕψους ΔΕ}}{\text{κύλινδ. βάσεως διαμ. ΚΛ, ὕψους ΔΕ}} = \frac{\Omega}{\Xi M}, \qquad (6).$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ σταθερὸς κύλινδρος ΑΓΕ πρὸς τὸν ἑκάστοτε ἐλαττούμενον ἐγγεγραμμένον κύλινδρον, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ σταθερὸν μέγεθος Ω πρὸς τὸ ἑκάστοτε ἐλαττούμενον ἀντίστοιχον μέγεθος. Εἶναι δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων κυλίνδρων ΑΓΕ, εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ὁ κύλινδρος ΑΦΥΓ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραλληλογράμμων Ω. Ὁ τελευταῖος τῶν ἴσων κυλίνδρων ΑΓΕ τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τῆς ἄνω βάσεως εἶναι ἡ ΦΥ δὲν ἔχει ἄλλον ἀντίστοιχον ἐγγεγραμμένον κύλινδρον διὰ νὰ σχηματίσῃ μετ' αὐτοῦ λόγον (δὲν λέγεται κατὰ τὸ κείμενον). Κατὰ συνέπειαν δὲν ὑπάρχει καὶ διὰ τὸ τελευταῖον μέγεθος Ω ἄλλο ἀντίστοιχον μέγεθος διὰ νὰ σχηματίσῃ τοῦτο μετ' αὐτοῦ λόγον. Παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν κυλίνδρους ΑΓΕ τὸ πλῆθος ν, καὶ ἐγγεγραμμένους εἰς τὸ ὑπερβολοειδὲς κυλίνδρους, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐλαττοῦται διαρκῶς, τὸ πλῆθος (ν—1). Ἐπίσης ἔχομεν Ω παραλληλόγραμμα τὸ πλῆθος ν, καὶ παραλληλόγραμμα ἐλαττούμενα διαρκῶς, τὸ πλῆθος (ν—1) (τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ εἶναι πάντοτε Ξ). Ἑπομένως ἔχει ἐνταῦθα ἐφαρμογὴν τὸ θεώρημα (1). Εἰς τοῦτο ἡ ἄλλη διατύπωσις, τῶν ἐπεξηγήσεων, περίπτωσις (β)], ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ἄθροισμα ν κυλίνδρων ΑΓΕ}}{\text{ἄθροισμα ἐγγεγρ. κυλίνδρων ὧν τὸ πλῆθος εἶναι } (\nu-1)} =$$

$$\frac{\text{ἄθροισμα ν παραλληλογράμμων } \Omega}{\text{ἄθροισμα ἐλαττουμ. παραλλ. ὧν τὸ πλῆθος } (\nu-1) - \Omega \ (\Omega = \Xi N)}, \qquad (7).$$

Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρ. (2) λαμβάνομεν [περίπτωσις (β)]

$$\frac{\text{ἄθρ. ν παραλλ.} - \Omega}{\text{ἄθρ. } (\nu-1) \text{ ἐλαττ. παραλ.} - \Omega} > \frac{\text{εὐθεῖα } \Xi + N}{\text{εὐθεῖα } \frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N}, \qquad (8).$$

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Xi = ZB$, $\frac{1}{2}\,\Xi = \Theta B$, $N = B\Delta$, $\frac{1}{3}\,N = \frac{1}{3}B\Delta =$

ΒΡ. Ἐπομένως $\Xi + \text{N} = \text{ZB} + \text{B}\Delta = \text{Z}\Delta$, $\frac{1}{2}\,\Xi + \frac{1}{3}\text{N} = \Theta\text{B} + \text{BP} = \Theta\text{P}$.

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (8) καὶ ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν (7) ὅπου ἄθρ. ν κυλίνδ. ΑΓΕ = κύλινδ. ΑΦΥΓ καὶ ἄθρ. ἐγγ. κυλίνδ.=ἐγγεγρ. σχῆμα εἰς τὸ ὑπερβολοειδές, λαμβάνομεν $\frac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{ἐγγεγρ. σχῆμα}} > \frac{\text{Z}\Delta}{\Theta\text{P}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) λαμβάνομεν $\frac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{ἐγγεγρ. σχῆμα}} > \frac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{κῶνος } \Psi}$, ἤτοι ἐγγεγρ. σχῆμα < κῶνος Ψ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν (3). Δὲν εἶναι ἄρα ὑπερβολοειδὲς > κῶνος Ψ.

Β. Ἔστω δεύτερον ὑπερβολοειδὲς < κῶνος Ψ καὶ κῶνος Ψ—ὑπερβολ. = δ, (1). Ἄς γίνῃ ἡ προηγουμένη ἐγγραφὴ καὶ περιγραφὴ στερεῶν, ὥστε περιγεγρ. — ἐγγεγρ. = δ', (2) καὶ δ'<δ. Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1), ἀφοῦ προηγουμένως θέσωμεν εἰς τὴν (1), ὑπερβολοειδὲς = ἐγγεγρ. +κ, λαμβάνομεν κῶνος Ψ>περιγεγρ. (3).

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πλῆθος τῶν ἴσων κυλίνδρων ὕψους ἑκάστου ΔΕ καὶ βάσεως κύκλου διαμέτρου ΑΓ ἦτο μεγαλύτερον κατὰ ἕν, τοῦ πλήθους τῶν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων τοῦ αὐτοῦ ὕψους. (διότι εἰς τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἐξωτερικὸν κύλινδρον δὲν ὑπῆρχε πρὸς σύγκρισιν ἐγγεγραμμένος κύλινδρος). Δι' αὐτὸ εἴχομεν ἐφαρμογὴν τῆς περιπτώσεως (β) τοῦ α' θεωρήματος. Τώρα ἡ σύγκρισις τῶν ἴσων κυλίνδρων ὕψους ἑκάστου ΔΕ καὶ βάσεως κύκλου διαμ. ΑΓ γίνεται πρὸς τοὺς περιγεγραμμένους κυλίνδρους τοῦ αὐτοῦ ὕψους, οἱ ὁποῖοι εἶναι τοῦ αὐτοῦ πλήθους, ὁπότε ἔχει ἐφαρμογὴν ἡ περίπτωσις (α) τοῦ πρώτου θεωρήματος.

Ὁ πρῶτος κύλινδρος ἐκ τῶν ἴσων κυλίνδρων (ὁ ΑΕΓ), εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν πρῶτον περιγεγραμμένον καὶ ἐπομένως ὁ λόγος των εἶναι = 1. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει μὲ τὰς ἐπιφανείας Ω καὶ ὀρθογ. παραλ. ΞΝ, αἵτινες ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσαι.

Ὁ δεύτερος ἐκ τῶν ἴσων κυλίνδρων ΑΒΓ πρὸς τὸν δεύτερον (ἐκ τῶν κάτω) περιγεγραμμένον κύλινδρον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ὡς ἐπιφάνεια Ω : ἐπιφάνεια ΞΜ (ἀποτελουμένη ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου $\Xi \times \text{M} + \text{M}^2$). Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἤτοι ἕκαστος κύλινδρος ΑΒΓ : τοῦ ἑπομένου περιγεγρ. κυλίνδρου = ἑκάστη ἐπιφ. Ω : τῆς ἑπομένης (μετὰ τὴν ΞΜ) ἐπιφανείας . . . Θὰ εἶναι λοιπὸν κατὰ τὸ θ. 1

$$\frac{\text{κύλινδρος ΑΦΥΓ } (=\text{ἄθροισμα κυλ. ΑΒΓ})}{\text{περιγ. σχῆμα } (=\text{ἄθρ. περιγ. κυλίνδρων})} = \frac{\text{ἄθροισμα ἐπιφ. } \Omega}{\text{ἄθροισμα παραλληλογράμμων}} \quad (4)$$

(τὰ παραλληλόγραμμα εἶναι ΞΝ, ΞΜ . . .).

Κατὰ τὸ θ. 2 περίπτωσις 1 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ἄθρ. ἐπιφ. } \Omega}{\text{ἄθρ. παραλλ.}} < \frac{\text{εὐθεῖαι } \Xi + \mathrm{N}}{\text{εὐθεῖαι} \frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}\mathrm{N}}, \quad (5).$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) ἕπεται $\dfrac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{περιγ. σχῆμα}} < \dfrac{\mathrm{Z\Delta}}{\Theta\mathrm{P}}$, (6).

Ἐκ τῆς (4) ὅμως τῆς Α΄ περιπτώσεως (διότι ἔχει γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευὴ) εἶναι $\dfrac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{κῶνος } \Psi} = \dfrac{\mathrm{Z\Delta}}{\Theta\mathrm{P}}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (6) λαμβάνεται $\dfrac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{περιγ. σχῆμα}} < \dfrac{\text{κύλινδ. ΑΦΥΓ}}{\text{κῶνος } \Psi}$, ἐξ ἧς ἕπεται κῶνος Ψ < περιγ. σχῆμα, ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (3).

27

1. Ἔστω πρῶτον $\frac{1}{2}$ ἐλλειψοειδοῦς > κῶνος Ψ (= 2 κῶνος ΑΒΓ) καὶ $\frac{1}{2}$ ἐλλειψ. — κῶνος Ψ = δ, (1), περιγεγρ. σχῆμα — ἐγγεγρ. σχῆμα = δ΄, (2), ὅπου δ΄ < δ. Ἔστω $\frac{1}{2}$ἐλλειψ. = περιγεγρ. σχ.+κ. Δι' ἀντικαταστάσεως τούτου εἰς τὴν (1) καὶ ἀφαιρέσεως ἀπ' αὐτῆς τῆς (2) λαμβάνομεν, ἐγγεγραμμ. σχῆμα = ψ+κ + ρ, (ρ= δ—δ΄), ἐξ ἧς ἕπεται, ἐγγεγρ. σχ. > κῶνος Ψ, (3). Κύλινδρος ΑΒΓ = 3 κῶνοι ΑΒΓ, κῶνος Ψ = 2 κῶνοι ΑΒΓ. Διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν κύλινδρος ΑΒΓ= $\frac{3}{2}$κῶνος Ψ, (4).

Ἐὰν εἰς τετράγωνον (καὶ γενικῶς εἰς παραλληλόγραμμον) ἀχθῇ μία διαγώνιος καὶ ἔκ τινος σημείου αὐτῆς ἀχθοῦν εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εἰς τὸ τετράγωνον μέχρι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν σχηματίζονται ἐντὸς τοῦ δοθέντος τετραγώνου δύο τετράγωνα. Ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ἓν ἐκ τούτων τὸ ἀπομένον σχῆμα λέγεται γνώμων. Ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου κληθῇ α καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος β, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γνώμονος εἶναι $α^2—β^2 = (α+β)(α—β)$. Ἐνταῦθα διὰ τὸν γνώμονα (5) εἶναι $α = Ξ = ΒΘ$, $β = ΙΘ$ καὶ $α+β = ΒΘ+ΙΘ = ΙΔ$, $α—β = ΒΘ—ΙΘ = ΒΙ$ καὶ ἑπομένως $α^2—β^2 = ΒΙ.ΙΔ$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο λαμβάνεται ἐκ τοῦ θεωρήματος ΙΙ, 5 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καθ' ὅ, ἂν εὐθεῖα τις, ἔστω ἡ ΒΔ, διαιρεθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Θ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ι, τὸ γινόμενον τῶν ἀνίσων μερῶν σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μεταξὺ τῶν τομῶν εὐθεῖαν θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας. Ἐνταῦθα ἡ εὐθεῖα ΒΔ διαιρεῖται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Θ εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ι καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα $ΒΙ.ΙΔ+ΙΘ^2 = ΒΘ^2$, ἐξ ἧς $ΒΙ.ΙΔ = ΒΘ^2—ΙΘ^2 = (ΒΘ+ΙΘ)(ΒΘ—ΙΘ)$. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑπομένων γνωμόνων, διαιρουμένης διαδοχικῶς τῆς εὐθείας ΒΔ εἰς ἄνισα κατὰ τὰ σημεῖα Χ, Π, . . . καὶ εἰς ἴσα κατὰ τὸ Θ πάντοτε θὰ εἶναι $ΒΧ.ΧΔ = ΒΘ^2—ΧΘ^2$, $ΒΠ.ΠΔ = ΒΘ^2—ΠΘ^2$ κλπ.

Ἀπὸ τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου (τοῦ πέμπτου) ἀφαιρεῖται ὁ γνώμων ἐμβαδοῦ ΒΙ.ΙΔ. Ἀπὸ τοῦ (ν—1) τετραγώνου (τοῦ τετάρτου) ἀφαιρεῖται ὁ γνώμων ἐμβαδοῦ ΒΧ.ΧΔ . . . Ὅταν φθάσωμεν ἀφαιροῦντες, εἰς τὸ δεύτερον τετράγωνον, ἔχομεν ἀφαιρέσει τὸν μεγαλύτερον γνώμονα καὶ ἔχει ἀπομείνει τὸ μικρότερον τετράγωνον πλευρᾶς ΘΕ (= ΒΙ). Ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἴσων κυλίνδρων εἰς τοὺς ὁποίους διαιρεῖται ὁ κύλινδρος ΑΒΓ, ὁ ΑΕΓ : πρῶτος ἐγγεγρ. κύλινδρος τοῦ αὐτοῦ ὕψους $ΘΕ = ΑΘ^2 : ΕΚ^2$. Τὸ τετράγωνον ὅμως μιᾶς τεταγμένης τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη διαιρεῖ τὴν τετμημένην (Ἀπολλωνίου Κωνικὰ Ι, 21). Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{κύλινδ. ΑΕΓ}}{\text{α}'. \text{ ἐγεγγρ. κύλινδ.}} = \frac{ΒΘ.ΘΔ}{ΒΕ.ΕΔ}$, (5).

Ἀλλὰ $ΒΘ.ΘΔ = Ξ^2$ καὶ ΒΕ.ΕΔ = ὁ μεγαλύτερος ἀφαιρούμενος γνώμων ἐκ τοῦ δευτέρου τετραγώνου τοῦ ἴσου πρὸς $Ξ^2$.

Θὰ εἶναι ἑπομένως

$$\frac{\text{κύλινδ. ΑΕΓ}}{\text{α}' \text{ ἐγγεγ. κύλινδ.}} = \frac{\text{πρῶτον τετράγωνον, } Ξ^2}{\text{γνώμων ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ β}'. \text{ τετράγ. } Ξ^2}, \qquad (6),$$

$$\frac{\text{κύλινδ. ΑΕΓ}}{\text{β}' \text{ ἐγγεγ. κύλινδ.}} = \frac{\text{πρῶτον τετράγωνον } Ξ^2}{\text{γνώμων ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ γ}'. \text{ τετράγ. } Ξ^2}, \qquad (7).$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἔχομεν τοὺς ἴσους κυλίνδρους, οἵτινες ἀποτελοῦν τὸν κύλινδρον ΑΒΓ καὶ τὰ τετράγωνα $Ξ^2$, ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τοὺς ἴσους κυλίνδρους, καὶ τοὺς ἐγγεγρ. κυλίνδρους καὶ τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων Ξ^2 ἀφαιρουμένους γνώμονας. Ὁ τελευταῖος κύλινδρος ΗΜΙ δὲν ἔχει ἀντίστοιχον ἐγγεγραμμμένον διὰ νὰ συγκριθῇ. Ἐπίσης τὸ ἔσχατον τετράγωνον Ξ^2 (τὸ πρῶτον) δὲν ἔχει γνώμονα πρὸς τὸν ὁποῖον νὰ συγκριθῇ. Θὰ εἶναι ἑπομένως κατὰ τὴν περίπτωσιν β΄ τοῦ α΄ θεωρ.

$$\frac{\text{ἄθροισμα κυλίνδ. ΑΕΓ πλήθους } \nu}{\text{ἄθρ. ἐγγεγραμ. κυλίνδρ. πλήθους } (\nu-1)} = \frac{\text{ἄρθροισμα } \Xi^2 \text{ πλήθους } \nu}{\text{ἄθρ. ἀφαιρ. γνωμόνων πλήθους } (\nu-1)}, \quad (8).$$

Εἶναι ἄρα $\dfrac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{ἐγγεγ. σχῆμα}} = \dfrac{\text{ἄθρ. } \Xi^2 \text{ πλήθους } \nu}{\text{ἄθρ. ἀφαιρ. γνωμόνων πλήθους } (\nu-1)}$, (9).

Ἀλλὰ ἄθρ. $\Xi^2 > \frac{3}{2}$ ἄθρ. ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν τετραγώνων γνωμόνων, (10).

[Διότι ὅταν ὑπάρχουν γραμμαί τινες ΞΦ, ΞΥ, ΞΤ, ΞΣ, ΞΡ ἢ ΒΙ, 2ΒΙ, 3ΒΙ, ... $(\nu-1)$ΒΙ, νΒΙ, ἢ α, 2α, 3α ... $(\nu-1)\alpha$, $\nu\alpha$, καὶ ἴσου πλήθους γραμμαὶ Ξ ($=\nu\alpha$), Ξ ... Ξ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τούτων θὰ εἶναι

$$\nu(\nu\alpha)^2 < 3\,[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + (3\alpha)^2 + \ldots + (\nu\alpha)^2] \quad (11)$$

καὶ $$\nu(\nu\alpha)^2 > 3\,[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + (3\alpha)^2 + \ldots + [(\nu-1).\alpha]^2] \quad (12)$$

(Κατὰ τὸ θ. 10 περὶ Ἑλίκων).

Ἐκ τῆς (11) λαμβάνομεν

$$\nu(\nu\alpha)^2 < 3\alpha^2[1+4+9+\ldots\nu^2] = 3\alpha^2 \,.\, \frac{\nu(\nu+1)\ (2\nu+1)}{6}$$

ἢ $2\nu^2 < (\nu+1)\ (2\nu+1)$ ἢ $2\nu^2 < 2\nu^2+3\nu+1$ καὶ ἐκ τῆς (12),

$2\nu^2 > (\nu-1)\ (2\nu-1)$ ἢ $2\nu^2 > 2\nu^2-3\nu+1$, ἐξ ὧν ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῶν (11) καὶ (12).

Θέτοντες εἰς τὰς (11) καὶ (12) ἀντὶ α τὸ ἴσον του ΒΙ καὶ ἀντὶ $(\nu\alpha)^2 = \Xi^2$ θὰ ἔχωμεν

ἄθροισμα τετραγώνων $\Xi^2 < 3\,[\text{ΒΙ}^2 + (2\text{ΒΙ})^2 + \ldots + (\nu\text{ΒΙ})^2]$, (13)

καὶ » » $> 3\,[\text{ΒΙ}^2 + (2\text{ΒΙ})^2 + \ldots + [(\nu-1).\text{ΒΙ}]^2]$, (14).

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (13) τὸ 2 ἄθρ. τετραγ. Ξ^2 λαμβάνομεν

3 ἄθρ. τετρ. $\Xi^2 <$ 2 ἄθρ. τετρ. $\Xi^2 + 3[\text{ΒΙ}^2 + (2\text{ΒΙ})^2 + \ldots + (\nu\text{ΒΙ})^2]$, (15),
ἐξ ἧς 2 ἄθρ. τετρ. $\Xi^2 >$ 3 ἄθρ. τετρ. $\Xi^2 - 3[\text{ΒΙ}^2 + (2\text{ΒΙ})^2 + \ldots + (\nu\text{ΒΙ})^2]$, (16)
ἢ 2 ἄθρ. τετραγώνων $\Xi^2 > 3\,[$ἄθρ. τετρ. $\Xi^2 - [\text{ΒΙ}^2 + (2\text{ΒΙ})^2 + \ldots + (\nu\text{ΒΙ})^2]]$ (17).

Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ τοῦ β′ μέλους τῆς (17) ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρουμένων ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Ξ^2.
Ἑπομένως ἡ (17) γίνεται
2 ἄθρ. τετραγ. $\Xi^2 > 3$ ἄθροισμα γνωμόνων, ἐξ ἧς λαμβάνομεν

ἄθρ. τετραγ. $\Xi^2 > \frac{3}{2}$ ἄθρ. γνωμόνων, ἤτοι τὴν (10)].

Ἐκ τῆς (10) εἶναι $\dfrac{\text{ἄθρ. τετρ. } \Xi^2}{\text{ἄθρ. γνωμόνων}} > \dfrac{3}{2}$, (18).

Ἐκ τῆς (18) καὶ (9) λαμβάνομεν $\dfrac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{ἐγγεγρ. σχῆμα}} > \dfrac{3}{2}$

ἢ κύλινδρος ΑΒΓ $> \frac{3}{2}$ ἐγγεγρ. σχήματος.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) λαμβάνομεν $\frac{3}{2}$κῶνος Ψ $> \frac{3}{2}$ ἐγγεγ. σχήμ. ἢ κῶνος Ψ > Ἐγγεγ. σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (3).

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{1}{2}$ ἐλλειψ. < κῶνος Ψ, κῶνος Ψ — $\frac{1}{2}$ ἐλλειψ. = δ, (1), περιγ. σχῆμα—ἐγγεγ. σχῆμα = δ′, (2), ὅπου δ′ < δ. Ἔστω $\frac{1}{2}$ ἐλλειψ. = ἐγγεγ. σχῆμα+κ. Δι' ἀντικαταστάσεως τούτου εἰς τὴν (1) καὶ ἀφαιρέσεως ἀπ' αὐτῆς τῆς (2) λαμβάνομεν Ψ = περιγ.+κ+ρ (δ — δ′ = ρ), ἐξ ἧς ἕπεται κῶνος Ψ > περιγ. σχήματος, (3). Ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς προηγουμένως ἔχομεν :

$$\frac{\text{α′ κύλινδρος ΑΕΓ}}{\text{α′ περιγ. κύλινδρος}} = \frac{\text{α′ τετρ. } \Xi^2}{\text{α′ τετρ. } \Xi^2} = 1$$

$$\frac{\text{β′ κύλινδρος ΑΕΓ}}{\text{β′ περιγ. κύλινδ.}} = \frac{\text{β′ τετρ. } \Xi^2}{\text{γνώμων ἀφαιρ. ἀπὸ β′ τετρ. } \Xi^2}$$

$$\frac{\text{ἄθρ. ἴσων κυλίνδ. ΑΕΓ = κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{ἄθρ. περιγρ. κυλίνδ. = περιγρ. σχῆμα}} = \frac{\text{ἄθρ. τετραγ. } \Xi^2}{\text{α′ τετρ. } \Xi^2 + \text{ἄθρ. γνωμόνων, ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν } (\nu-1) \text{ τετρ. } \Xi^2}$$

(κατὰ τὴν περίπτωσιν (1) τοῦ α′ θεωρήματος).

Ἀλλὰ ἄθρ. τετρ. $\Xi^2 < \frac{3}{2}$ (α′ τετραγ. Ξ^2+ἄθρ. γνωμόνων), (5).

[Διότι, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (14) τῆς προηγουμένης περιπτώσεως τὸ 2 ἄθρ. τετραγ. $Ξ^2$ λαμβάνομεν

$$3 \text{ ἄθρ. τετρ. } Ξ^2 > 2 \text{ ἄθρ. τετραγ. } Ξ^2 + 3\left[ΒΙ^2 + (2ΒΙ)^2 + \ldots + [(ν-1)ΒΙ]^2\right]$$

(6) ἐξ ἧς

$$\text{ἄθρ. τετρ. } Ξ^2 < \frac{3}{2}\left[\text{ἄθρ. τετρ. } Ξ^2 - [ΒΙ^2 + (2ΒΙ)^2 + \ldots + [(ν-1)ΒΙ]^2]\right] (7).$$

Ἀλλὰ ἄθρ. $(ν-1)$ τετρ. $Ξ^2 - \left[ΒΙ^2 + (2ΒΙ)^2 + \ldots + [(ν-1)ΒΙ]^2\right] =$ ἄθροισμα ἀφαιρεθέντων γνωμόνων. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (7) ἔχομεν ἄθρ. τετρ. $Ξ^2 < \frac{3}{2}\Big[$ πρῶτον τετρ. Ξ (ἢ $1Ξ^2$) + ἄθροισμα γνωμόνων $\Big]$ ἤτοι τὴν (5) $\Big]$. Ἐκ τῆς (5) ἔχομεν $\dfrac{\text{ἄθρ. τετραγ. } Ξ^2}{α' \text{ τετρ. } Ξ^2 + \text{ἄθρ. γνωμόνων}} < \dfrac{3}{2}$, (8).

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) λαμβάνομεν $\dfrac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{περιγρ. σχῆμα}} < \dfrac{3}{2}$, ἐξ ἧς κύλινδρος ΑΒΓ $< \frac{3}{2}$ περιγραφὲν εἰς ἐλλειψοειδὲς σχῆμα, (9).

Ἐκ τῆς (4) τῆς πρώτης περιπτώσεως ἔχομεν κύλινδ. ΑΒΓ $= \frac{3}{2}$ κῶνος Ψ. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) λαμβάνομεν κῶνος Ψ < περιγρ. σχῆμα, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (3).

29.

Δεικτέον ἐλλειψ. $= \dfrac{\text{κῶνος Ψ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}} = \dfrac{ΔΗ}{ΔΖ}$, (1).

1. Ἔστω κῶνος Ψ < ἐλλειψοειδοῦς. Ἐλλειψ. — κῶνος Ψ $= δ$, (2). Περιγεγρ. σχῆμα — ἐγγεγρ. σχῆμα $= δ'$, (3), ὅπου $δ' < δ$. Περιγεγ. σχῆμα = ἐλλειψ. + κ. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) καὶ ἀφαιρέσεως ταύτης ἀπὸ τῆς (2) ἔχομεν ἐγγεγρ. σχῆμα — κῶνος Ψ $= δ - δ'$, $(δ - δ' = ρ)$, ἐγγεγρ. σχῆμα = κῶνος Ψ + ρ + κ. Εἶναι ἄρα ἐγγεγρ. σχῆμα > κῶνος Ψ, (4).

Ἔστω ΒΡ $= \frac{1}{3}$ ΒΔ, ὅτε ΔΡ $= \frac{2}{3}$ ΒΔ. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΒΗ = 3ΒΘ. Δι' ἀφαιρέσεως ἐκ ταύτης τῆς ΒΔ = 3ΒΡ λαμβάνομεν ΔΗ = 3ΘΡ·

Εἶναι λοιπὸν $\frac{\text{κύλινδρος ΑΒΓ}}{\text{κῶνος ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΘΡ}}$, (5),

καὶ ἐκ τῆς (1) $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓ}}{\text{κῶνος Ψ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΔΗ}}$, (6).

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μεγέθη, κύλ. ΑΒΓ, κῶνος ΑΒΓ, κῶνος Ψ, ΔΖ, ΔΗ, ΘΡ εὑρίσκονται εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν (= ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων) (Εὐκλ. V ὁρισ. 18) ἤτοι πρῶτον : δεύτερον = πέμπτον πρὸς ἕκτον, δεύτερον : τρίτον = τέταρτον πρὸς πέμπτον. Εἶναι ἄρα

$\frac{\text{κύλινδρος ΑΒΓ}}{\text{κῶνος Ψ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΘΡ}}$, (7), (δηλ. πολ/μεν τὰς (5) καὶ (6) κατὰ μέλη).

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ΞΝ, τὸ πλῆθος ν, ὅσα τὰ ἴσα τμήματα τῆς ΒΔ, καὶ ΞΝ = ΖΔ (τὸ μεγαλύτερον μέρος τοῦ ἄξονος) καὶ ΞΟ = ΒΔ (τὸ μικρότερον μέρος τοῦ ἄξονος).

Ἡ $\text{ΝΟ} = \text{ΞΝ} - \text{ΞΟ} = \text{ΖΔ} - \text{ΒΔ} = (\text{ΖΘ}+\text{ΘΔ}) - (\text{ΒΘ} - \text{ΘΔ}) = 2\text{ΘΔ}$

Παρ' ἑκάστην εὐθεῖαν ΞΝ ἂς παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἔχον τὴν ἄλλην πλευρὰν (πλάτος) = ΒΔ = ΞΟ, ὥστε ἕκαστον τῶν σχημάτων, ὅπου ὑπάρχει διαγώνιος, νὰ εἶναι τετράγωνον. Ἂς ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου γνώμων ἔχων πλάτος = ΒΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου γνώμων ἔχων πλάτος ΒΧ, . . . ὥστε ἕκαστος ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ὀρθογωνίου ἀφαιρούμενος γνώμων νὰ ἔχῃ πλάτος κατὰ ἓν τμῆμα (ΔΕ) μικρότερον τοῦ πλάτους τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου ἀφαιρεθέντος γνώμονος $\text{ΒΕ}\times\text{ΕΖ}$ καὶ θὰ ἔχῃ μείνῃ ἀπὸ τοῦ μεγάλου ὀρθογωνίου ἓν μικρὸν ὀρθογώνιον (σημ. οἱ γνώμονες ἐνταῦθα εἶναι ἀνισοσκελεῖς).

[Διότι, ὁ πρῶτος γνώμων $= \text{ΖΔ}\times\text{ΒΔ} - \text{ΕΔ}\times\text{ΖΔ}+\text{ΕΔ}\times\text{ΒΕ} = \text{ΖΔ}(\text{ΒΔ}-\text{ΕΔ})+\text{ΕΔ}\times\text{ΒΕ} = \text{ΖΔ}\times\text{ΒΕ}+\text{ΕΔ}\times\text{ΒΕ} = \text{ΒΕ}(\text{ΖΔ}+\text{ΕΔ}) = \text{ΒΕ}\times \text{ΕΖ}$]. Ὁ δεύτερος γνώμων θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\text{ΧΖ}\times\text{ΒΧ}$ κλπ.

Παρατηροῦμεν ὅτι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἑκάστου γνώμονος τὸ παραμένον σχῆμα ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς μικροτέρου ὀρθογωνίου καὶ ἑνὸς τετραγώνου. Αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸ μεγαλύτερον εἶναι ΔΕ, 2ΔΕ, 3ΔΕ . . . Ὁ κύλινδρος ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς τοὺς ἴσους πρὸς τὸν ΑΕΓ κυλίνδρους, κατὰ τὸ πλῆθος ἴσους πρὸς τοὺς περιγεγραμμένους.

Ὁ $\frac{\text{α' κύλ. ΑΕΓ, ὕψους ΔΕ}}{\text{α' κύλ. ἐγγεγρ. ὕψους ΑΕ}} = \frac{\text{ΔΓ}^2}{\text{ΚΕ}^2} = \frac{\text{ΒΔ}\times\text{ΔΖ}}{\text{ΒΕ}\times\text{ΕΖ}}$, (8). (Τὸ τετράγωνον τῆς τεταγμένης = τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη διαιρεῖ τὴν τετμημένην. Ἀπολλωνίου Ι, 21).

᾿Αλλὰ $\mathrm{B\Delta \times \Delta Z}$ = ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγάλου ὀρθογωνίου (ΝΝΞΞ) καὶ ἐδείχθη προηγουμένως $\mathrm{BE \times EZ}$ = ἐμβαδὸν πρώτου γνώμονος. Ἡ (8) ἐπομένως γίνεται

$$\frac{\alpha'\ \text{κύλ. ΑΕΓ ὕψους ΔΕ}}{\alpha'\ \text{κύλ. ἐγγεγρ. ὕψους ΔΕ}} = \frac{\text{πρῶτον ὀρθογώνιον}}{\text{πρῶτος γνώμων}} \qquad (9)$$

ὁμοίως

$$\frac{\beta'\ \text{κύλ.} = \text{ΑΕΓ}}{\beta'\ \text{κύλ. ἐγγεγρ.}} = \frac{\text{δεύτερον ὀρθογώνιον}}{\text{δεύτερος γνώμων}} \qquad (10)$$

Ὑπάρχουν λοιπὸν κύλινδροι ΑΕΓ, ν τὸ πλῆθος καὶ ὀρθογώνια $\mathrm{N\Xi \times O\Xi}$ τοῦ αὐτοῦ πλήθους καὶ ἔχοντα ἀνὰ δύο ἴσους λόγους, συγκρίνονται δὲ οἱ κύλινδροι ΑΕΓ πρὸς τοὺς ἐγγεγρ. κυλίνδρους, ἐν ᾧ δὲν ὑπάρχει διὰ τὸν τελευταῖον κύλινδρον ΑΕΓ ἐγγεγρ. κύλινδρος πρὸς σύγκρισιν καὶ ὀρθογώνια ἴσα ν τὸ πλῆθος συγκρινόμενα πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους γνώμονας, ἐν ᾧ διὰ τὸ τελευταῖον ὀρθογώνιον δὲν ὑπάρχει γνώμων πρὸς σύγκρισιν. Θὰ εἶναι λοιπὸν κατὰ τὸ θ. 1 (Σ=ἄθροισμα)

$$\frac{\Sigma\ \text{ΑΕΓ, πλήθους ν}}{\Sigma\ \text{ἐγγεγ. κύλ., πλήθους (ν—1)}} = \frac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{ἐγγεγρ. σχῆμα}} =$$

$$\frac{\Sigma\ \text{ὀρθογώνια}\ \mathrm{N\Xi \times O\Xi}\ \text{πλήθους ν}}{\Sigma\ \text{γνώμονες, πλήθους (ν—1)}}, \qquad (11).$$

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουν ἴσαι γραμμαὶ αἱ ΝΟ, ΝΟ, ΝΟ, ... καὶ παρ' ἑκάστην αὐτῶν ἔχει παραβληθῇ ὀρθογώνιον καὶ ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων ἔχει ἀκόμη ἓν τετράγωνον (ὑπέρβλημα), αἱ πλευραὶ δὲ τῶν τετραγώνων αὐτῶν (τῶν ὑπερβλημάτων) εἶναι ΔΕ, 2ΔΕ, 3ΔΕ . . . (ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σχήματος), ὑπάρχουν δὲ καὶ ἄλλα ὀρθογώνια ἴσα μεταξύ των τὰ $\mathrm{\Xi N \times O\Xi}$, $\mathrm{\Xi N \times O\Xi}$ . . . (ἢ $\mathrm{Z\Delta \times B\Delta}$, $\mathrm{Z\Delta \times B\Delta}$,. . .) ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ προηγούμενα εἶναι φανερὸν ὅτι (κατὰ τὸ θ. 2, α' περίπτωσις) θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma\ \text{ὀρθογωνίων}\ \mathrm{\Xi N \times O\Xi}\ \text{πλήθους ν}}{\Sigma\ \text{τῶν αὐτῶν ὀρθογωνίων} - \Sigma\ \text{γνωμόνων πλ.}\ (\nu - 1)} <$$

$$\frac{\text{εὐθεῖα}\ \mathrm{\Xi N = NO + \Xi O}}{\text{εὐθεῖα}\ \frac{1}{2}\ \mathrm{NO} + \frac{1}{3}\ \mathrm{\Xi O}} \qquad (12).$$

Καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων $\left(\text{ἐὰν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\text{, ἀναστροφὴ εἶναι } \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma}{\gamma-\delta}\right)$

θὰ εἶναι $\dfrac{\Sigma \text{ ὀρθογ. } \Xi N \times O\Xi \text{ πλήθους } \nu}{\Sigma \text{ ὀρθ. } \Xi N \times O\Xi - [\text{ τὰ αὐτὰ ὀρθ.} - \Sigma \text{ γνώμονες πληθ. } (\nu - 1)]} \rangle$

$$\frac{\text{εὐθ. } \Xi N}{\text{εὐθ. } \left(\Xi N - \frac{1}{2} NO - \frac{1}{3} \Xi O \right)} \text{ ἢ}$$

$$\frac{\Sigma \text{ ὀρθογ. } \Xi N \times O\Xi}{\Sigma \text{ γνώμονες}} \rangle \frac{\text{εὐθ. } \Xi N}{\text{εὐθ. } \frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} \Xi O}, \ (\Xi N = NO + \Xi O) \qquad (13).$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (11) λαμβάνομεν

$$\frac{\text{κύλινδ. } AB\Gamma}{\text{ἐγγεγραμμ. σχῆμα}} \rangle \frac{\text{εὐθ. } \Xi N}{\text{εὐθ. } \frac{1}{2} NO + \frac{2}{3} \Xi O} \qquad (14).$$

Προηγουμένως ὅμως εἴχομεν $\Delta P = \frac{2}{3} B\Delta$ (μετὰ τὴν 4), $\Xi N = \Delta Z$, $NO = 2\Theta\Delta$ (μετὰ τὴν 7). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (14) λαμβάνομεν

$$\frac{\text{κύλινδ. } AB\Gamma}{\text{ἐγγεγρ. σχῆμα}} \rangle \frac{\Delta Z}{\Theta P \ (= \Delta\Theta + \Delta P)} \qquad (15).$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (7) ἔχομεν $\dfrac{\text{κύλινδ. } AB\Gamma}{\text{ἐγγεγρ. σχῆμα}} \rangle \dfrac{\text{κύλινδ. } AB\Gamma}{\text{κῶνος } \Psi}$, ἐξ ἧς ἕπεται κῶνος Ψ ⟩ ἐγγεγρ. σχῆμα, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (4).

2. Ἔστω δεύτερον ἐλλειψοειδὲς ⟨ κῶνος Ψ.

Κῶνος ψ—ἐλλειψ. = δ, (1), περιγεγρ. σχῆμα—ἐγγεγρ. σχῆμα = δ′, (2), ὅπου δ′ ⟨ δ. Ἔστω ἐλλειψοειδὲς=ἐγγεγρ. σχῆμα+κ. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) καὶ ἀφαιρέσεως ἀπὸ ταύτης τῆς (2) λαμβάνομεν κῶνος ψ ⟩ περιγεγρ. σχήματος, (3).

Ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή :

$$\frac{\alpha' \text{ κύλινδ.} = AE\Gamma}{\alpha' \text{ περιγ. κύλινδ.}} = \frac{\text{ὀρθογ. } 4}{\text{ὀρθογ. } 4} = 1$$

$$\frac{\beta' \text{ κύλινδ.} = AE\Gamma}{\beta' \text{ περιγ. κύλινδ.}} = \frac{\text{ὀρθογ. } 1}{\text{γνώμων } 1 \text{ (ἀφαιρ. ἀπὸ ὀρθ. } 1)}$$

(σημ.: ὁ δεύτερος περιγεγ. κύλινδρος = πρῶτος ἐγγεγραμμένος καὶ ἐπομένως ἐρχόμεθα εἰς τὴν σχέσιν (9) τῆς πρώτης περιπτώσεως)

$$\frac{\gamma' \text{ κύλινδ.} = AE\Gamma}{\gamma' \text{ περιγ. κύλινδ.}} = \frac{\text{ὀρθογ. } 2}{\text{γνώμων } 2}$$

. . . . (Σ = ἄθροισμα)

$$\frac{\Sigma\ \text{κύλινδ. ΑΕΓ} = \text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\Sigma\ \text{περιγ. κύλινδ.} = \text{περιγ. σχῆμα}} = \frac{\Sigma\ \text{ὀρθογ. ΝΞΞΝ} = \Sigma\ \text{ὀρθ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ}}{1\ \text{ὀρθογώνιον ΝΞΞΝ} + \Sigma\ \text{γνώμονες}}, \quad (4).$$

Τώρα ἐφαρμόζομεν τὴν β′ περίπτωσιν τοῦ θ. 2. Ἔχομεν πολλὰς εὐθ. γραμμὰς ΝΟ καὶ παρ' ἑκάστην αὐτῶν παραβάλλεται ὀρθογώνιον ὑπερβάλλον κατὰ τετράγωνον πρῶτον τὸ μικρὸν ὀρθογ. τοῦ 1 + τὸ μικρὸν τετράγωνον, κατόπιν τὸ ἀντίστοιχον ὀρθογ. τοῦ 2 + ἀντίστ. τετράγωνον κλπ.). Αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον, τῆς ὁποίας ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ α′ τετραγώνου. Ἔχομεν δὲ καὶ ὀρθογώνια ΞΝ × ΞΟ ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰς γραμμὰς ΝΟ, ἕκαστον δὲ τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ μέγιστον τῶν παραβαλλομένων παρὰ τὴν ΝΟ (δηλ. τὸ ΞΝ × ΞΟ). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Sigma\ \text{ὀρθ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ}}{\Sigma\ \text{ὀρθ. παραβαλ. παρὰ τὴν ΝΟ, χωρὶς τὸ ΞΝ} \times \text{ΞΟ (χωρὶς τὸ 4)}} > \frac{\text{ΞΝ} = \text{ΝΟ} + \text{ΞΟ}}{\frac{1}{2}\text{ΝΟ} + \frac{1}{3}\text{ΞΟ}} \quad (5).$$

Ἐκ ταύτης δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων λαμβάνομεν

$$\frac{\Sigma\ \text{ὀρθογ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ}}{\Sigma\ \text{ὀρθογ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ} - \Sigma\ \text{ὀρθ. παρὰ ΝΟ, χωρὶς τὸ 4}} < \frac{\text{ΞΝ}}{\text{ΝΟ} + \text{ΞΟ} - \frac{1}{2}\text{ΝΟ} - \frac{1}{3}\text{ΞΟ} = \frac{1}{2}\text{ΝΟ} + \frac{2}{3}\text{ΞΟ}} \quad (6).$$

Σ ὀρθογ. ΞΝ × ΞΟ εἶναι ν τὸ πλῆθος. Ἐκ τῶν (ν—1) ὀρθογωνίων ΞΝ × ΞΟ ἀφαιροῦμεν, τὰ παρὰ τὰς εὐθ. γραμμὰς ΝΟ, (ν—1) τὸ πλῆθος, παραβληθέντα ὀρθογώνια + τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα. Τὸ ὑπόλοιπον ἑπομένως θὰ εἶναι 1 ὀρθογ. ΞΝ × ΞΟ (τὸ νυοστὸν) καὶ Σ(ν—1) γνωμόνων, δηλ. ὅλοι οἱ γνώμονες. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ α′ μέλους τῆς ἀνισότητος (6) λαμβάνομεν

$$\frac{\Sigma\ \text{ὀρθογ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ}}{1\ \text{ὀρθ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ} + \Sigma\ \text{γνώμονες}} < \frac{\text{ΞΝ}}{\frac{1}{2}\text{ΝΟ} + \frac{2}{3}\text{ΞΟ}} \quad (7).$$

Εἶναι ὅμως (ἐκ τῆς πρώτης περιπτώσεως) ΞΝ = ΖΔ, ΝΟ = 2ΘΔ, $\frac{1}{2}$ ΝΟ = ΘΔ, ΔΡ = $\frac{2}{3}$ ΒΔ = $\frac{2}{3}$ ΞΟ καὶ (ἐκ τοῦ σχήματος) ΘΔ + ΔΡ = ΘΡ. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ β′ μέλος τῆς (7) λαμβάνομεν

$$\frac{\Sigma\ \text{ὀρθογ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ}}{1\ \text{ὀρθ. ΞΝ} \times \text{ΞΟ} + \Sigma\ \text{γνώμονες}} < \frac{\text{ΖΔ}}{\text{ΘΡ}} \quad (8)$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (4) ἔχομεν $\frac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{περιγεγρ. σχῆμα}} < \frac{\text{ΖΔ}}{\text{ΘΡ}}$ (9)

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (7) τῆς πρώτης περιπτώσεως λαμβάνομεν $\frac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{περιγεγρ. σχῆμα}} < \frac{\text{κύλινδ. ΑΒΓ}}{\text{κῶνος Ψ}}$, ἐξ ἧς ἕπεται κῶνος Ψ < περιγεγρ. σχῆμα, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν (3).

31

Ὅλον ἐλλειψοειδὲς = 4 κῶνος ΚΛΔ (θ. 27). Ἔστω ΔΗ = ΔΘ = ΒΖ, ΖΗ = 4ΒΘ, $\frac{\text{κῶνος ΚΛΔ}}{\text{κῶνος ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΘΔ}}{\text{ΕΔ}} \times \frac{\text{ΚΘ}^2}{\text{ΕΑ}^2}$, (1). Ἀλλὰ $\frac{\text{ΚΘ}^2}{\text{ΕΑ}^2} = \frac{\text{ΒΘ} \times \text{ΘΔ}}{\text{ΒΕ} \times \text{ΕΔ}}$, (2) (Ἀπολλωνίου Ι, 21). Ἂς γίνῃ $\frac{\text{ΘΔ}}{\text{ΕΔ}} = \frac{\text{ΞΔ}}{\text{ΘΔ}}$ καὶ κατόπιν $= \frac{\text{ΞΔ}}{\text{ΘΔ}} \times \frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΒΘ}}$, (3).

Δι' ἀντικαταστάσεως ἐκ τῶν (2), (3) εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\frac{\text{κῶνος ΚΛΔ}}{\text{κῶνος ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΞΔ} \times \text{ΒΘ}}{\text{ΒΕ} \times \text{ΕΔ}}$, (4). Εἶναι δὲ $\frac{\text{κῶνος ΑΓΔ}}{\text{ἐλλειψ. ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΒΕ} \times \text{ΕΔ}}{\text{ΖΕ} \times \text{ΕΔ}}$, (5), (θ. 29).

Διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (4), (5) λαμβάνομεν

$$\frac{\text{κῶνος ΚΛΔ}}{\text{ἐλλειψ. ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΞΔ} \times \text{ΒΘ}}{\text{ΖΕ} \times \text{ΕΔ}} \qquad (6).$$

Ἐξ ὑποθέσεως ΖΗ = 4ΒΘ, καὶ ἐπομένως ΖΗ × ΞΔ = 4ΒΘ × ΞΔ, $\frac{\text{ΖΗ} \times \text{ΞΔ}}{\text{ΒΘ} \times \text{ΞΔ}} = \frac{4}{1}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς ἐν ἀρχῇ σχέσεως, ὅλον ἐλλειψ. = 4 κῶνος ΚΛΔ, λαμβάνομεν $\frac{\text{ὅλον ἐλλειψοειδὲς}}{\text{κῶνος ΚΛΔ}} = \frac{\text{ΖΗ} \times \text{ΞΔ}}{\text{ΒΘ} \times \text{ΞΔ}}$ (7).

Διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (6), (7) ἔχομεν

$$\frac{\text{ὅλον ἐλλειψ.}}{\text{ἐλλειψ. ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΖΗ} \times \text{ΞΔ}}{\text{ΖΕ} \times \text{ΕΔ}} \qquad (8).$$

Ἐκ ταύτης (διὰ διαιρέσεως τοῦ λόγου, Εὐκλ. V ὁρ. 15) λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ὅλον ἐλλειψ.} - \text{ἐλλειψ. ΑΓΔ} = \text{ἐλλειψ. ΑΒΓ}}{\text{ἐλλειψ. ΑΓΔ}} = \frac{\text{ΖΗ} \times \text{ΞΔ} - \text{ΖΕ} \times \text{ΕΔ}}{\text{ΖΕ} \times \text{ΕΔ}}, \qquad (9).$$

Ἀλλὰ ΖΗ × ΞΔ − ΖΕ × ΕΔ = ΞΔ × ΕΗ + ΖΕ × ΞΕ, (10), (διότι ΖΗ = ΕΗ + ΕΖ. Ὅθεν ΖΗ × ΞΔ = ΕΗ × ΞΔ + ΕΖ × ΞΔ).

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (9) λαμβάνομεν $\frac{\text{ἐλλειψ. ΑΒΓ}}{\text{ἐλλειψ. ΑΓΔ}} =$

$\frac{\Xi\Delta \times \mathrm{EH} + \mathrm{ZE} \times \Xi\mathrm{E}}{\mathrm{ZE} \times \mathrm{E}\Delta}$, (11). Εἶναι δὲ $\frac{\text{ἐλλειψ. } \mathrm{A}\Gamma\Delta}{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{ZE} \times \mathrm{E}\Delta}{\mathrm{BE} \times \mathrm{E}\Delta}$, (12).

(Διότι $\frac{\text{ἐλλειψ. } \mathrm{A}\Gamma\Delta}{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{B}\Theta + \mathrm{BE}}{\mathrm{BE}}$, (θ. 29), $\mathrm{B}\Theta + \mathrm{BE} = \mathrm{ZE}$). Ἐπίσης εἶναι

$\frac{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Gamma\Delta}{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Gamma\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{BE} \times \mathrm{E}\Delta}{\mathrm{BE}^2}$, (13). (Διότι οἱ κῶνοι εἶναι ὡς τὰ ὕψη ΕΔ, ΒΕ, τὰ ὁποῖα πολ/μεν ἐπὶ ΒΕ).

Διὰ πολ/σμοῦ τῶν (11, 12) κατὰ μέλη ἔχομεν

$\frac{\text{ἐλλειψ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Gamma\Delta} = \frac{\Xi\Delta \times \mathrm{EH} + \mathrm{ZE} \times \Xi\mathrm{E}}{\mathrm{BE} \times \mathrm{E}\Delta}$, (14). Διὰ πολ/σμοῦ ταύτης πρὸς τὴν (13) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ἐλλειψ. } \mathrm{AB}\Gamma}{\text{κῶνος } \mathrm{A}\Gamma\mathrm{B}} = \frac{\Xi\Delta \times \mathrm{EH} + \mathrm{ZE} \times \Xi\mathrm{E}}{\mathrm{BE}^2} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E}\Delta} \qquad (15).$$

Διότι $\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E}\Delta} = \frac{\mathrm{EH} \times \Xi\Delta}{\mathrm{E}\Delta \times \Xi\Delta}$, (16). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $\frac{\Xi\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta}{\mathrm{E}\Delta}$ (μετὰ τὴν 2).Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν (διὰ διαιρέσεως τοῦ λόγου, Εὐκλ. V, ὁρισμ. 15)

$\frac{\Xi\Delta - \Theta\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta - \mathrm{E}\Delta}{\mathrm{E}\Delta}$, ἐξ ἧς (ἐκ τοῦ σχήματος) $\frac{\Xi\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\mathrm{E}}{\mathrm{E}\Delta}$, καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. V ὁρισμ. 12) ἔχομεν $\frac{\Xi\Theta}{\Theta\mathrm{E}} = \frac{\Theta\Delta}{\mathrm{E}\Delta}$. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Theta\Delta = \Delta\mathrm{H}$.

Ὅθεν ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται $\frac{\Xi\Theta}{\Theta\mathrm{E}} = \frac{\Delta\mathrm{H}}{\mathrm{E}\Delta}$, ἐξ ἧς (διὰ συνθέσεως, Εὐκλ. V ὁρισμ. 14) $\frac{\Xi\Theta + \Theta\mathrm{E}}{\Theta\mathrm{E}} = \frac{\Delta\mathrm{H} + \mathrm{E}\Delta}{\mathrm{E}\Delta}$ ἢ (ἐκ τοῦ σχήματος)

$\frac{\Xi\mathrm{E}}{\Theta\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E}\Delta}$ ἢ $\frac{\Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}{\Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E}\Delta}$, (17). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (16) λαμβάνομεν $\frac{\mathrm{EH} \times \Xi\Delta}{\mathrm{E}\Delta \times \Xi\Delta} = \frac{\Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}{\Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}$ ἢ $\frac{\mathrm{EH} \times \Xi\Delta}{\Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}} = \frac{\mathrm{E}\Delta \times \Xi\Delta}{\Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}$, ἢ

$\frac{\mathrm{EH} \times \Xi\Delta + \Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}{\Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}} = \frac{\mathrm{E}\Delta \times \Xi\Delta + \Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}{\Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}$ ἢ $\frac{\mathrm{EH} \times \Xi\Delta + \Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}{\mathrm{E}\Delta \times \Xi\Delta + \Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}} =$

$\frac{\Xi\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}}{\Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E}\Delta}$ (ἐκ τῆς 17). Μένει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ προηγ. κλάσμ. ὁ $\mathrm{E}\Delta \times \Xi\Delta + \Theta\mathrm{E} \times \mathrm{ZE}$ ἰσοῦται πρὸς BE^2 διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν (15). Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\frac{\Xi\Delta}{\Theta\Delta} = \frac{\Theta\Delta}{\mathrm{E}\Delta}$ καὶ $\Theta\mathrm{B} = \Theta\Delta$, ὁπότε ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται $\Theta B^2 = E\Delta \times \Xi\Delta$. Εἶναι δὲ $BE = \Theta E + \Theta B$. Ἐκ τούτου λαμβάνομεν $BE^2 = \Theta E^2 + \Theta B^2 + 2\Theta E \times \Theta B = \Theta B^2 + \Theta E(\Theta E + 2\Theta B)$. Ἐπειδὴ $\Theta B = BZ$ ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται $BE^2 - \Theta B^2 = \Theta E(\Theta E + \Theta B + BZ) = \Theta E \times ZE$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ΘB^2 ἔχομεν $BE^2 = E\Delta \times \Xi\Delta + \Theta E \times ZE$.

Ἡ $EH = \frac{1}{2} B\Delta + \Delta E$, ὁπότε ἡ σχέσις (15) γίνεται

$$\frac{\text{ἐλλειψοειδὲς } AB\Gamma}{\text{κῶνος } A\Gamma B} = \frac{\frac{1}{2} B\Delta + \Delta E}{\Delta E}.$$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ Α΄, Β΄, ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

Α

Β

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Γ

Δ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ε

Ζ

Η

Θ

Ι

Κ

Λ

Μ

Ν

Ο

Π

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ρ

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

Ω

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

Α

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Β

Γ

Δ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ε

Η

Ι

Κ

Λ

Μ

N

O

Π

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

Ω

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ α´ καὶ β´ μέρους

τοῦ α´ τόμου, ἐπεμελήθη

ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ «ΠΑΤΡΙΣ» ΑΕ
ΑΘΗΝΑΙ, ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ 58
ΤΗΛΕΦ. 365.347 — 368.216
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΠΑΝ. ΡΑΥΤΟΠΟΥΛΟΣ
ΑΣΤΡΟΥΣ 142, ΚΟΛΩΝΟΣ

Ε.Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΑΠΑΝΤΑ

ΤΟΜΟΣ Α΄