ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Β'

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1973

18/76/9814 (4)-2

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ β΄ τόμου
ἐπεμελήθη
ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Β΄

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1973

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

I. Εἰς τὸν Β′ τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περιλαμβάνονται τὰ ὑπόλοιπα εἰς τὴν ἑλληνικὴν διασωθέντα ἔργα αὐτοῦ, τὰ περιεχόμενα καὶ εἰς τὸν Β′ τόμον τῆς ἐκδόσεως I. L. Heiberg τοῦ 1913.

Τὰ ἔργα ταῦτα εἶναι :

1. Περὶ ἑλίκων
2. Μηχανικὰ α′, β′ (ἢ Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων, βιβλία α′, β′)
3. Ψαμμίτης
4. Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (ἢ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς)
5. Ὀχουμένων α′, β′
6. Στομάχιον
7. Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος (= μέθοδος)
8. Πρόβλημα βοεικόν.

II. Ἀντὶ τοῦ τίτλου Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. τῆς δευτέρας, ὡς ἄνω, πραγματείας, τοῦ ὑπάρχοντος εἰς τὴν ἔκδοσιν Heiberg, ἐθέσαμεν τὸν ἀληθῆ τίτλον, Μηχανικά, τὸν ὁποῖον ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν πραγματείαν του Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἀναφερόμενος ἐκεῖ εἰς τὰ κέντρα τοῦ βάρους τριγώνου (θ. 6 σελ. 228,1) καὶ τραπεζίου (θ. 10, 232,18), λέγων, *«δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς»*. Καὶ τὸ μὲν κέντρον τοῦ βάρους τριγώνου ἀποδεικνύεται εἰς τὰ θεωρήματα 13 καὶ 14 τῆς φερομένης ὑπὸ τὸν τίτλον Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. πραγματείας, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τραπεζίου ἀποδεικνύεται εἰς τὸ θεώρημα 15 τῆς αὐτῆς πραγματείας. Ἐπίσης, εἰς τὸ β′ βιβλίον, (θ. 2 σελ. 298,10) τῆς πραγματείας Ὀχουμένων, λέγει *«δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχανικῶν»* ἀναφερόμενος εἰς τὸ θεώρημα 8 τοῦ α′ βιβλίου τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. φερομένης πραγματείας.

Ὅθεν εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ τίτλος Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν κ.λπ. ἔχει τεθῆ ὑπὸ μεταγενεστέρων.

Εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα 2 τοῦ β′ βιβλίου τῶν Ὀχουμένων (σελ. 298, 4) γράφεται *«δέδεικται γὰρ ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις, ὅτι παντὸς ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος διῃρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ ἄξονος τμᾶμα διπλάσιον εἶμεν τοῦ λοιποῦ»*. Ὅπως φαίνεται ἐκ τούτου, ὑπῆρχε πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τὸν τίτλον *Ἰσορροπίαι*, ἡ ὁποία ἀφεώρα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ κέντρου βάρους στερεῶν ἐκ περιστροφῆς, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, ὀνομάζει κωνοειδῆ (=παραβολοειδῆ καὶ ὑπερβολοειδῆ ἐκ περιστροφῆς). Ἡ πραγματεία αὕτη δὲν διεσώθη.

Εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος (θ. 1 σελ. 394,22), γράφεται διὰ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου *«δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς»*. Ἀλλὰ καὶ ἐνταῦθα εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ λέξις *«Ἰσορροπικοῖς»* ἔχει τεθῆ ὑπὸ μεταγενεστέρων ἀντὶ τοῦ τίτλου Μηχανικά. Εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ ὀνομάζεται μίαν φορὰν *«παραβολή»* (σελ. 392,20). Ἀλλὰ εἰς ὅλον τὸ κείμενον τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον

«Τετραγωνισμὸς παραβολῆς» φερομένης πραγματείας, ἡ παραβολὴ ὀνομάζεται *«ὀρθογωνίου κώνου τομή»*. Εἶναι δὲ γνωστὸν ἐκ τοῦ Πάππου (ΙΙ Ζ′, σελ. 672, 24. F. Hultsch) ὅτι πρῶτος ὁ Ἀπολλώνιος, ὅστις ἔζησε 30 περίπου ἔτη μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη, ὠνόμασε τὴν ὀρθογωνίου κώνου τομήν, παραβολήν.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐθέσαμεν ὡς τίτλον τῆς πραγματείας, Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, τὸν Ἀρχιμήδειον τίτλον *Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς*.

III. Ἐκ τοῦ πρώτου θεωρήματος τοῦ α′ βιβλίου τῶν Ὀχουμένων (Ὑδροστατικῆς) μέρος ἔχει διασωθῆ εἰς τὴν λατινικὴν καὶ ἔχει μεταφρασθῆ εἰς τὰς κυριωτέρας εὐρωπαϊκὰς γλώσσας, ἐκ τῶν ὁποίων μετεγλωττίσαμεν τοῦτο εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν. Τοιαύτη μεταγλώττισις ἔγινε καὶ διὰ τὰ θεωρήματα 4, 5, 6, 9, 10 τοῦ β′ βιβλίου τῶν Ὀχουμένων. Ἐκ τούτων ὅμως τὰ ὑπ' ἀριθμ. 5 καὶ 6 διεσώθησαν ὁλόκληρα μόνον εἰς τὴν λατινικήν. Γενικῶς, αἱ περισωθεῖσαι πραγματεῖαι : Μηχανικά, Ὀχουμένων, Στομάχιον, Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, θεωροῦνται ὅτι ἔφθασαν μέχρις ἡμῶν ἐλλιπεῖς.

Ἡ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον, Λήμματα, περιέχουσα 15 προτάσεις ἐπιπέδου γεωμετρίας, διεσώθη εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ περιλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ Heiberg εἰς τὸν ΙΙ τόμον τῶν ΑΠΑΝΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Liber Assumptorum = Βιβλίον Λημμάτων. Ταύτην, ὡς καὶ τὰς μέχρι τοῦδε περισωθείσας πραγματείας εἰς τὴν ἀραβικήν, περιελάβομεν εἰς τὸν ἀκολουθοῦντα Γ′ τόμον τῶν ΑΠΑΝΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ.

Αἱ εἰς τὴν ἀραβικὴν περισωθεῖσαι, γνωσταὶ μέχρι σήμερον, πραγματεῖαι, αἵτινες περιλαμβάνονται εἰς τὸν ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδόμενον

Γ' τόμον τῶν ΑΠΑΝΤΩΝ, αἱ περισσότεραι τῶν ὁποίων θεωροῦνται ἐλλιπεῖς, εἶναι αἱ ὑπὸ τοὺς τίτλους:

1. Λήμματα
2. Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων
3. Περὶ κύκλων
4. Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου
5. Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων
6. Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ
7. Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας
8. Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου
9. Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους

Εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ Γ' τόμου γίνεται εἰδικωτέρα μνεία περὶ τῶν πραγματειῶν αὐτῶν.

IV. Ὡς ἐπίμετρον παρετέθησαν εἰς τὸν παρόντα τόμον :

1. Ποίημα τοῦ Γερμανοῦ ποιητοῦ Φρειδερίκου φὸν Σίλλερ (Friedrich von Schiller, 1759 - 1805) ὑπὸ τὸν τίτλον «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΚΑΙ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ». Θεωροῦμεν πιθανόν, ὅτι ὁ Σίλλερ ἐνεπνεύσθη τὸ ποίημα ἐκ παρομοίου ποιήματος ἀναφερομένου εἰς τὸν Εὐκλείδην (Euclides I, Elementa I - IV, post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis, BSB B.G. Teubner, Lipsiae 1969, Testimonium 45, p. XVI).

2. Δύο μικραὶ πραγματεῖαι δημοσιευθεῖσαι τὸ πρῶτον εἰς τὸ περιοδικὸν «Πλάτων» ὑπὸ τοὺς τίτλους «Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας παρ' Ἀρχιμήδει» καὶ «Γενίκευσις ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους».

3. Ἐκθέσεις: τοῦ Δανοῦ καθηγητοῦ H. G. Zeuthen (1839-1920), τῆς Ῥωσίδος καθηγητρίας I. G. Bachmakova καὶ τοῦ Γάλλου καθηγητοῦ Charles Mugler, ἔνθα ἀναφέρονται θεωρήματά τινα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ Διαφορικὸν καὶ Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμόν. Δέον νὰ προστεθῇ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ θέμα τοῦτο δὲν ἔχει ἐξαντληθῇ καὶ ὅτι ἡ συναφὴς περαιτέρω ἔρευνα παρουσιάζει πολὺ ἐνδιαφέρον.

4. Προσθήκη μαρτυριῶν περὶ τοῦ Ἀρχιμήδους
5. Προσθήκη βιβλιογραφίας
6. Εὑρετήριον

V. Ὡς πρῶτος ἀνακαλύψας τὰς ἀρχὰς τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ θεωρεῖται ὁ ἐφοπλιστὴς καὶ μαθηματικὸς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 440-430 π.Χ.), εἰς τὸν ὁποῖον ἀποδίδεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου XII, 2, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. [Simplicii in Aristotelis Physicorum I 2 (Arist. p. 185 α14-17)], C.A.G., ed. H. Diels, Berolini 1822, S. 54-69).

Ὁ Εὔδοξος, μαθηματικὸς τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, ἐχρησιμοποίησε τὰς ἀρχὰς αὐτὰς διὰ τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων περὶ κώνου καὶ κυλίνδρου, ὡς μνημονεύει ὁ Ἀρχιμήδης (Ἅπαντα Ἀρχιμήδους, τόμος Α′ μέρος Β′, Ἀθῆναι 1970, σελ. 2-4), ὁ δὲ Ἀρχιμήδης ἀνέπτυξεν αὐτὰς ἔτι περισσότερον.

Μαθηματικοί τινες, φρονοῦντες ὅτι τὸ ἔργον τοῦ Wilhelm Leibniz (1646-1716) καὶ τοῦ Isaac Newton (1643-1727) ὑποτιμᾶται ἐκ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἀρχῶν τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐβάπτισαν τὰς ἀρχὰς αὐτὰς τῶν Ἑλλήνων εἰς «μέθοδον ἐξαντλήσεως» (Exhaustionsverfahren). Τὴν ταυτότητα ὅμως τῆς λεχθείσης μεθόδου ἐξαντλήσεως πρὸς τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμὸν πρῶτος ἐτόνισεν ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς John Wallis (1616-1703) (Max Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909, S. 264-265).

Τὴν γνώμην αὐτὴν τοῦ Wallis ὑπεστήριξαν, μεταξὺ ἄλλων, ἐκ θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους

1) Ὁ Δανὸς καθηγητὴς Hier. Zeuthen, εἰς Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886, σελ. 440-455, ἀνατύπωσις Hildesheim 1965.

2) Ὁ Ὁλλανδὸς καθηγητὴς O. Dijksterhuis, ὅστις εἰς δύο πραγματείας του μὲ λύπην σημειώνει, ὅτι «δυστυχῶς, ἐσφαλμένως ἡ μέθοδος ὁλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους λέγεται ἐξαντλητικὴ μέθοδος» (O. Dijksterhuis, 1) Archimedes und seine Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft, Gesell. für die internat. Wiss. Geschichte, Bremen, Sonderdruck 1952, 1, S. 15, und 2) Die Integrationsmethoden des Archimedes, Nordisk Mathematisk Tidskrift, Band 2, Oslo 1954, S. 5-23) (1. Ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ἡ σπουδαιότης του διὰ τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης, 2. Αἱ μέθοδοι Ὁλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους).

3) Ἡ Ρωσὶς καθηγήτρια τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Μόσχας Isabella Grigorievna Bachmakova, εἰς «Les méthodes différentielles d' Archimède, Arch. f. Hist. of Exact Sciences 1964, 2 p. 87 - 107» (Springer-Verlag, Berlin· Göttingen· Heidelberg).

4) Ὁ Γάλλος καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Nice, Charles Mugler, εἰς τὴν ἔκδοσίν του τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, ARCHIMÈDE, tom. I, II, III, IV Paris 1970-1972, Les Belles Lettres καὶ ἄλλοι.

VI. Καὶ ἡ ἔκδοσις τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου τόμου τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ ἦτο ἀνέφικτος, ἐὰν δὲν ἐξεδηλοῦτο ἀμέριστον τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ Προέδρου τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος καθηγητοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου κ. Ἀλεξάνδρου Σφήκα. Τόσον πρὸς τὸν Πρόεδρον καθηγητὴν κ. Ἀλέξανδρον Σφήκαν, ὅσον καὶ πρὸς τὴν Διοικοῦσαν Ἐπιτροπὴν τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος ἐκφράζω εὐγνωμόνως τὰς ἀπείρους εὐχαριστίας μου.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατ' Ἰούνιον 1971

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

I. L. Heiberg

Εἰς τὸν τόμον τοῦτον ἔλαβον ὑπ' ὄψιν τοὺς κώδικας :

A = cod. Georgii Vallae (Γεώργιος Βάλλας) ἀποκατασταθεὶς ἐκ τοῦ
D = cod. Laurent. (Κῶδιξ Λαυρεντιανὸς) XXVIII 4 s. XV
E = cod. Marcian. (Μαρκιανὸς) 305 s. XV
G = cod. Paris. (Παρισινὸς) 2360 s. XVI
H = cod. Paris. (Παρισινὸς) 2361 scr. a 1544
B = cod. Ottobon. lat. 1850 s. XIII Guilelmi di Moerbeka B[1] τοῦ κώδικος τούτου μέρος ἐξ ἄλλου ἑλληνικοῦ κώδικος ληφθέν, B[2] τοῦ κώδικος τούτου διορθωτὴς s. XV - XVI.
C = cod. ἀντίγραφον τοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει Μετοχίου, Ἱεροῦ Μνήματος τοῦ μοναστηρίου τῶν Ἱεροσολύμων 355 s. X.
Σπανίως ἐμνημόνευσα τὸν F = cod. Paris. 2359 s. XVI
J = cod. Paris. 2362 s. XVI

Εἰς τὸ βιβλίον τὸ ἐπιγραφόμενον Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, ὅ,τι ἀπὸ τῆς πρώτης ἐκδόσεως τοῦ 1907 εἴτε διαφέρει εἴτε πρὸς αὐτὴν συμφωνεῖ, εἰς νέας μελέτας ὀφείλεται, τὰς ὁποίας κατὰ τὸ ἔτος 1908 εἰς τὸν κώδικα θὰ χρησιμοποιήσω, ἀλλὰ πλέον οἱ ὀφθαλμοί μου δὲν ἐπαρκοῦν διὰ περισσοτέρας ἐρεύνας. Ἐκ τῶν νέων γραφῶν ἐξέδωκα μερικὰς εἰς τὸν τόμον τὸν ἐκδοθέντα πρὸς τιμὴν τοῦ H. G. Zeuthen (Κοπεγχάγη 1909), σελὶς 63 καὶ ἑξῆς. Διὰ τὴν συμπλήρωσιν τῶν κενῶν ἠκολούθησα τὰς *συμβουλὰς τοῦ Ἱερωνύμου Τσόϊτεν (H. G. Zeuthen) καὶ συνεβουλεύθην τὴν μετάφρασιν τοῦ Θεοδώρου Reinach (Archimède, Des théorèmes mécaniques ou de la methode, Paris 1907 = Revue génerale des sciences 1907, 30. Nov. et 15 Dec.). Τὴν γερμανικὴν μετάφρασιν ἔδωκα εἰς Biblioth. ³VII p. 321 καὶ ἑξῆς μετὰ σχολίων τοῦ Ἱερωνύμου Τσόϊτεν (Hieronymi Zeuthen). Ἡ ἀγγλικὴ ἐξεδόθη μετ' εἰσαγωγῆς τοῦ Δαβὶδ Ε. Σμὶθ (Davidi E. Schmith, Chicago 1909 (= The monist XIX p. 202 sqq.) καὶ νεωστὶ ὑπὸ τοῦ Th. L. Heath (The method of Arcimedes, Cambridge 1912).*

Ἐκ τοῦ κώδικος C τώρα πρῶτον ἐξεδόθη τὸ ἑλληνικὸν ἀπόσπασμα τοῦ Στομαχίου, εἰς τὸ ὁποῖον προσέθεσα τὸ ὑπὸ τοῦ Ἐρρίκου Suter ἐκδοθὲν ἐκ δύο ἀραβικῶν κωδίκων (σελ. 420 ὑποσημ.) καὶ τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν βιβλίων περὶ Ὀχουμένων, τὸ ὁποῖον τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἡμετέρου κώδικος βαίνει ὀρθότερον ἐκείνων τῶν περιφήμων βιβλίων, τὰ ὁποῖα ἀπέδωκεν ἡ μετάφρασις τοῦ Γουλιέλμου ντὲ Μέρμπεκε (Guilelmi di Moerbeca). Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ὁμοία πρὸς τὸν ἑλληνικὸν κώδικα, τὰς γραφὰς ταύτης τὰς διαφερούσας τοῦ κώδικος C ἔθεσα εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα καὶ ὁπουδήποτε ἡ ἀνάγνωσις τοῦ κώδικος C εἶναι ἀβεβαία, ταύτην παρέσχον πρὸς βεβαίαν ἀποκατάστασιν, ὅπου ὁ C εἶναι παντελῶς ἐλλιπής, καὶ ἐδέχθην μόνην τὴν μετάφρασιν ἐν τῷ κειμένῳ διὰ κεκλιμένων γραμμάτων, ἀκολουθήσας πιστῶς τὸν κώδικα B, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἤλλαξα ὀρθογραφικά τινα (ἤτοι ἀντι ē ἔθεσα ae). Τὰ σχήματα ἔλαβον ἐκ τοῦ B, ὅταν εἰς τὸν C μόλις ἀνεγνωρίζοντο. Τὰ ἀντίστοιχα γράμματα τούτων ἀποδίδονται εἰς τὰ ἑλληνικὰ ὡς ἑξῆς :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Α	*Β*	*Τ*	*Δ*	*Ε*	*Φ*	*Γ*	*Η*	*Ι*	*Κ*	*Λ*	*Μ*	*Ν*	*Ο*	*Π*	*Χ*	*Ρ*	*Σ*	*Θ*	—	—	*Ξ*	*Υ*	*Ζ*

Πρὸς τούτοις ὁ Γουλιέλμος εἰς τὸν κώδικά του ἔχει τὰ γράμματα Ψ, ω, ς, ϛ, ⋺ πολλάκις παραπεποιημένα (παράβαλε πρὸς τούτοις *σελ. 394, 18. 412, 10 τοῦ κριτικοῦ ὑπομνήματος). Ἐν πρώτοις δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ T εἰς τὰ σχήματα εἶναι Θ, τὸ δὲ C εἶναι τὸ T, τὸ ὁποῖον ἐνίοτε παρέχει δυσκολίας, ὅπως εἰς τὴν σελ. 389, ὑποσημείωσις).*

Τὴν μετάφρασιν τοῦ Γουλιέλμου, τοῦ πρώτου βιβλίου, ἐξέδωκεν ὁ N. Tartalea (Opera Archimedis Syracusani, Venet. 1543). Τούτου τὴν ἔκδοσιν ἐπανέλαβεν ὁ Troianus Curtius (Venet. 1565) προσθέσας δεύτερον βιβλίον.

Καὶ τὰ δύο βιβλία διορθώσας καὶ σχολιάσας ἐξέδωκεν ὁ F. Commandinus (Bonon. 1565). Περὶ τῆς ἀραβικῆς μεταφράσεως ἰδὲ H. Zotenberg, Journal asiatique 1879 σελ. 509 κ.ἑ. καὶ E. Wiedemann Πρακτικὰ τῆς Φυσικο-ιατρικῆς Ἑταιρείας τοῦ Erlangen XXXVIII (1906) σελ. 152 κ.ἑ. Τὴν ἑλληνικὴν ἀποκατάστασιν τοῦ πρώτου βιβλίου ἐπεχείρησεν ὁ Mélanges Graux (Paris 1884) σελ. 689 κ.ἑ. Τὴν ὁμοίαν σύντονον σπουδὴν τοῦ σοφοῦ ἀνδρὸς μὴ περαιωθεῖσαν ἐξέδωκεν ὁ Angelus Mai, Classici auctores I σελ. 427-30. Τὸ ἀπόσπασμα τοῦτο, τὴν προέλευσιν τοῦ ὁποίου πρὸ πολλοῦ εἶχον ὑποπτευθῆ (Oversigt over d. Kgl. danske Vidensk. Selskabs Forhandl. 1884 σελ. 25 κ.ἑ.) εἶναι ὀρθὸν (ἐναντίον τῆς γνώμης τοῦ Φρειδερίκου Χοὺλτς (Fr. Hultsch, Pauly-Wissowa II p. 530), ἔθεσα δὲ κατωτέρω εἰς τὴν θέσιν τοῦ παραρτήματος διὰ νὰ μὴ λείψῃ τίποτε.

Τὰ βοηθήματα τῶν ὁποίων ἔκαμα χρῆσιν εἰς τὰ Ἐπιγράμματα καὶ εἰς τὰ Λήμματα, θὰ ἀναφέρω εἰς τὰ οἰκεῖα χωρία.

Σφάλματα ἀνεῦρον τὰ κάτωθι :

I σελ. 362,3 εἰς τὸ κριτικὸν ὑπόμνημα, ἀντὶ Torellius γραπτέον Basil.

I σελ. 440, 22 ἐγγεγραμμένον ἔχει Basil κ.λπ.

Πρὸς τούτοις εἰς τὸ Περὶ Ὀχουμένων I, 2 προσθετέον : παρά-

βαλε Στράβων I σελ. 54 τὴν 'Αρχιμήδους βεβαιοῖ δόξαν, ὅτι φησὶν ἐκεῖνος ἐν τοῖς περὶ τῶν ὀχουμένων, παντὸς ὑγροῦ καθεστηκότος καὶ μένοντος τὴν ἐπιφάνειαν σφαιρικὴν εἶναι σφαίρας ταὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ γῇ. 'Ο Vitruvius VIII, 6, 3, ὅστις ἴσως ἀνέγνωσε τὰ βιβλία τοῦ 'Αρχιμήδους, λέγει, ὅτι δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ ἀληθὴς ἐκ τοῦ ὕδατος ἰσορροπία (σημ. ἐπίπεδος ἐπιφάνεια), διότι οὗτος νομίζει, ὅτι τὸ ὕδωρ δὲν ἰσορροπεῖ, ἀλλ' ἔχει σχῆμα σφαιροειδὲς καὶ ἔχει τὸ κέντρον ἐκεῖ ὅπου ἀντιστοιχεῖ τὸ κέντρον τῆς γῆς.

῎Εγραφον ἐν Κοπεγχάγῃ μηνὶ 'Οκτωβρίῳ 1912

I. L. HEIBERG

ΠΙΝΑΞ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Τόμου Β′

Περὶ ἑλίκων

Ὁρισμοὶ	7	
Λαμβανόμενα	1	(ἀξίωμα)
Θεωρήματα	28	
Πορίσματα	5	

Μηχανικὰ α′ (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α′)

Αἰτήματα	7	(ἀξιώματα)
Θεωρήματα	15	
Πορίσματα	2	

Μηχανικὰ β′ (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν β′)

Θεωρήματα	10

Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς

(Τετραγωνισμὸς παραβολῆς)

Λαμβανόμενα	1	(ἀξίωμα)
Θεωρήματα	24	
Πόρισμα	1	

Ὀχουμένων α′

Θεωρήματα	9

Ὀχουμένων β′

Θεωρήματα	10

Στομάχιον

Θεωρήματα	1

Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος

Λήμματα	10
Θεωρήματα	15

Πρόβλημα βοεικὸν

Πρόβλημα	1

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

H 2 ## Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἐπιστέλλω τοι. μὴ θαυμάσῃς δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομες τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν· συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις καὶ μαστεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. πόσα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὰν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι; Κόνων μὲν οὖν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν ἐς τὰν μάστευσιν αὐτῶν χρόνον μετάλλαξεν τὸν βίον· ἦ δῆλα ἐποίησέν κα ταῦτα πάντα εὑρὼν καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρὼν καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγεν γεωμετρίαν· ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν. μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγενημένων οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενέγκασθαι· καὶ γὰρ συμβαίνει, δύο τινὰ τῶν ἐμαυτῷ μήπω πεπερασμένων διὰ τέλους ποτιτεθῆμεν, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδεμίαν ἐκφέροντες,
H 4 ἐλέγχωνται ποθωμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζομες, δοκιμάζομες ἐμφανίξαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν· σφαίρας δοθείσας ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Τῶν πρὸς τὸν Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων περὶ τῶν ὁποίων πάντοτε μὲ παρώτρυνες νὰ γράψω τὰς ἀποδείξεις, τῶν μὲν περισσοτέρων τὰς ἔχεις δημοσιευμένας εἰς ὅσα σοῦ ἀπέστειλα μὲ τὸν Ἡρακλείδη, μερικὰς δὲ ἐξ αὐτῶν γράψας καὶ εἰς αὐτὸ τὸ βιβλίον σοῦ τὰς ἀποστέλλω. Μὴ ἀπορήσῃς δέ, ἐὰν ἐχρειάσθημεν πολὺν χρόνον διὰ νὰ δημοσιεύσωμεν τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν· διότι τοῦτο συνέβη ἐπειδὴ ἤθελον νὰ τὰς δώσω πρότερον εἰς τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὰ μαθηματικὰ καὶ ἐπιθυμοῦντας νὰ τὰς διερευνήσωσι. Διότι πόσα γεωμετρικὰ θεωρήματα φαινόμενα κατ' ἀρχὰς δύσκολα δὲν ἔγιναν διὰ τοῦ χρόνου κατανοητά; Ὁ Κόνων μὲν λοιπὸν μὴ λαβὼν ἱκανὸν χρόνον διὰ τὴν διερεύνησιν αὐτῶν ἀπέθανε· ὁ ὁποῖος ὅλα αὐτὰ θὰ τὰ εἶχεν εὕρει καὶ πολλὰ ἄλλα ἀκόμη, ὥστε νὰ ἀναπτύξῃ πολὺ περισσότερον τὴν γεωμετρίαν· διότι γνωρίζομεν καλῶς, ὅτι ὑπῆρξεν σύνεσις εἰς αὐτὸν οὐχὶ ἡ τυχοῦσα περὶ τὰ μαθηματικὰ καὶ ὅτι εἶχεν ὑπερβάλλουσαν φιλοπονίαν. Μετὰ δὲ τὸν θάνατον τοῦ Κόνωνος, ἀφοῦ παρῆλθον πολλὰ ἔτη, δὲν ἐπληροφορήθημεν, ὅτι ἐπελήφθη κανεὶς κανενὸς ἐκ τῶν προβλημάτων. Ἐπιθυμῶ δὲ νὰ σοῦ ἐξηγήσω ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· καὶ διότι συμβαίνει δύο ἐκ τῶν θεωρημάτων μου νὰ τὰ ἔχω προσθέσει ἐδῶ ἀτελῆ, ἵνα οἱ λέγοντες μέν, ὅτι τὰ εὑρίσκουσιν ὅλα, χωρὶς ὅμως νὰ ἐκφέρωσιν ἀπόδειξίν τινα, ἐλέγχωνται ὅτι εὑρίσκουσιν τὰ ἀδύνατα. Ποῖα δὲ εἶναι τὰ προβλήματα αὐτὰ καὶ ποίων τὰς ἀποδείξεις σοῦ ἔχομεν ἀποστείλει, καὶ ποίων αἱ ἀποδείξεις περιλαμβάνονται εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ σοῦ τὰ ἀποστέλλομεν. Πρῶτον λοιπὸν τῶν προβλημάτων ἦτο· δοθείσης σφαίρας νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδος

τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. ὃ δὴ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερὸν ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὰν σφαῖραν βιβλίου· δειχθέντος γάρ, ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, δῆλον, ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δέ· κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δέ· τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δέ· τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δέ· τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δέ· δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας εἴτε τᾶς αὐτᾶς εἴτε ἄλλας εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὁμοῖον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμαμάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμάματος. ἕβδομον· ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μείζονα τοῦ, ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ δύο. τούτων μὲν οὖν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξιας Ἡρακλείδας ἐκόμιξεν· τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδος ἦν. ἔστι δέ· εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λό-
H 6 γον ἕξει ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι· κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε· εἴ κα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ τᾶς μὲν ἐπιφανείας τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον, τὸ δὲ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ

ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καὶ πρῶτον ἔγινε φανερὸν ἐκδοθέντος τοῦ βιβλίου περὶ σφαίρας· διότι ἀφοῦ ἀπεδείχθη, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια εἶναι τετραπλασία ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἴση πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Δεύτερον δὲ πρόβλημα ἦτο· δοθέντος κώνου ἢ κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ σφαῖρα ἴση πρὸς τὸν κῶνον ἢ πρὸς τὸν κύλινδρον. Τρίτον δὲ ἦτο· ἡ δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα νὰ ἔχωσι τὸν δοθέντα λόγον. Τέταρτον δέ· ἡ δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου, ὥστε τὰ τμήματα τῆς ἐπιφανείας νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὸν δοθέντα λόγον. Πέμπτον δέ· τὸ δοθὲν τμῆμα σφαίρας νὰ γίνῃ ὅμοιον πρὸς δοθὲν τμῆμα σφαίρας. Ἕκτον δέ· δοθέντων δύο τμημάτων σφαίρας, εἴτε τῆς αὐτῆς εἴτε ἄλλης, νὰ εὑρεθῇ τμῆμά τι σφαίρας, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι αὐτὸ μὲν ὅμοιον πρὸς τὸ ἄλλο τῶν τμημάτων, νὰ ἔχῃ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἄλλου τμήματος. Ἕβδομον· ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ ἀποτμηθῇ δι' ἐπιπέδου τμῆμα, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον, νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον μεγαλύτερον τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσι τὰ τρία πρὸς τὰ δύο. Τούτων μὲν λοιπὸν τῶν εἰρημένων προβλημάτων ὅλων σοῦ ἔφερεν τὰς ἀποδείξεις ὁ Ἡρακλείδης· τὸ ἑπόμενον δὲ μετὰ ταῦτα πρόβλημα ἦτο ψευδές. Τοῦτο δὲ ἦτο· ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου εἰς ἄνισα, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανείας πρὸς τὴν μικροτέραν. Ὅτι δὲ τοῦτο εἶναι ψευδές, εἶναι φανερὸν διὰ τῶν προαπεσταλμένων· διότι μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει τὸ ἑξῆς· ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου εἰς ἄνισα καθέτως πρὸς διάμετρόν τινα τῆς σφαίρας, τῆς μὲν ἐπιφανείας τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ μικρότερον, τὸ δὲ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ μικρότερον θὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον τοῦ τετραγώνου τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ μεγαλυτέρα ἐπιφάνεια πρὸς τὴν μικρο-

καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι, εἴ κα σφαίρας τινὸς ἁ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὰν σφαῖραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμαμάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων· δέδεικται γάρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμαμάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε· εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον H 8 *ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δή κα τὸ εἰρημένον σχῆμα ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, δῆλον, ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ. καὶ εἴ κα τοῦ κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, δῆλον, εἴ κα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα, ὅτι δὲ τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ· τούτων δ' αἱ ἀποδείξιες οὔπω τοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα· ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο* τέραν, μεγαλύτερον δὲ τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ λόγου τούτου. Ἦτο δὲ καὶ τὸ τελευταῖον ἀκολουθοῦν πρόβλημα ψευδές, ὅτι, ἐὰν σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμηθῇ, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου τμήματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς ἀφοῦ ἀχθῇ ἐπίπεδον νὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν καθέτως πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς, τὸ τοιοῦτον κατὰ τὸ εἶδος σχῆμα, οἷον εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς σφαίρας, εἶναι τὸ μέγιστον ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων τμημάτων τῶν ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην. Ὅτι δὲ τοῦτο ἦτο ψευδές, εἶναι φανερὸν διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι ἐκ τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσην ἐπιφάνειαν μέγιστον εἶναι τὸ ἡμισφαίριον. Μετὰ δὲ ταῦτα τὰ περὶ τοῦ κώνου προβλήματα εἶναι τὰ ἑξῆς· ἐὰν παραβολή, μενούσης τῆς διαμέτρου ἀκινήτου, περιστραφῇ περὶ αὐτήν, ὥστε νὰ εἶναι ἄξων ἡ διάμετρος, τὸ περιγραφὲν ὑπὸ τῆς παραβολῆς σχῆμα ἂς καλῆται κωνοειδές, καὶ ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτηται τοῦ κωνοειδοῦς σχήματος, ἀχθῇ δὲ ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον καὶ ἀποτέμνῃ τμῆμά τι τοῦ κωνοειδοῦς, τοῦ ἀποτμηθέντος τμήματος βάσις μὲν ἂς καλῆται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται τὸ ἄλλο ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδοῦς. Ἐὰν δὲ τὸ εἰρημένον σχῆμα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ὅτι μὲν ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος, εἶναι φανερόν, ὅτι δὲ τὸ ἀποτμηθὲν τμῆμα θὰ εἶναι τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ. Καὶ ἐὰν δύο τμήματα τοῦ κωνοειδοῦς ἀποτμηθῶσι δι' ἐπιπέδων ἀχθέντων καθ' οἱονδήποτε τρόπον, ὅτι μὲν αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ἐλλείψεις, εἶναι φανερόν, ἐὰν τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα δὲν εἶναι κάθετα πρὸς τὸν ἄξονα, ὅτι δὲ τὰ τμήματα πρὸς ἄλληλα θὰ ἔχωσι τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἀχθῇ ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μέχρι τὰ τέμνοντα ἐπίπεδα παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ. Τούτων αἱ ἀποδείξεις δὲν σοῦ ἀποστέλλονται τώρα. Μετὰ δὲ ταῦτα ἦσαν ἐκτεθειμένα περὶ τῆς ἕλικος τὰ ἑξῆς· ἀποτελοῦσι δὲ αὐτὰ ἄλλο εἶδος προβλημάτων οὐδε-

τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρημένοις· ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμές τοι. ἔστιν δὲ τάδε· εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας, ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος κέντρῳ μὲν τῷ μένοντι σαμείῳ, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ τᾷ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴ κα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον, ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς H 10 *ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος αὐτᾶς, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. καὶ εἴ κα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σαμεῖον τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, φαμὶ τοῦ χωρίου τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος τὸ μὲν ἐν τᾷ τρίτᾳ ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖσθαι, τὸ δὲ ἐν τᾷ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾷ πέμπτᾳ τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖσθαι τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος, τὸ δὲ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ περιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος χωρίου· καὶ εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σαμεῖα λαφθέωντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ* μίαν σχέσιν ἔχον πρὸς τὰ προειρημένα· τὰς ἀποδείξεις δὲ αὐτῶν περιλαμβάνομεν εἰς τοῦτο τὸ βιβλίον. Εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς· ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ εὑρισκομένη εἰς ἐπίπεδον, διατηρουμένου τοῦ ἑνὸς ἄκρου σταθεροῦ, ἀφοῦ περιστραφῇ ἰσοταχῶς, ἀποκατασταθῇ πάλιν ἐκεῖ, ὅπου ἀνεχώρησε, συγχρόνως δὲ ἐν ᾧ περιφέρεται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ κινεῖται σημεῖόν τι ἰσοταχῶς ἐπ' αὐτῆς ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ μένοντος ἄκρου, τὸ σημεῖον θὰ γράψῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕλικα. Λέγω δέ, ὅτι τὸ χωρίον τὸ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς ἕλικος καὶ τῆς ἀποκατασταθείσης εὐθείας, ὁπόθεν ἀνεχώρησε, εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος μὲ κέντρον μὲν τὸ σταθερὸν σημεῖον, ἀκτῖνα δὲ τὴν εὐθεῖαν τὴν διανυσθεῖσαν ὑπὸ τοῦ σημείου κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν τῆς εὐθείας. Καὶ ἐὰν ἐφάπτηται τῆς ἕλικος εὐθεῖά τις εἰς τὸ πέρας τῆς ἕλικος τὸ γραφὲν τελευταῖον, ἄλλη δέ τις εὐθεῖα ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν περιαχθεῖσαν καὶ ἀποκατασταθεῖσαν γραμμήν, εἰς τὸ σταθερὸν παραμεῖναν ἄκρον αὐτῆς, ὥστε νὰ τμήσῃ τὴν ἐφαπτομένην, λέγω, ὅτι ἡ ἀχθεῖσα (κάθετος) εὐθεῖα εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Καὶ ἐὰν ἡ περιαγομένη γραμμὴ καὶ τὸ σημεῖον τὸ φερόμενον ἐπ' αὐτῆς περιστραφῶσι περισσοτέρας φορὰς καὶ ἀποκατασταθῶσι πάλιν, ἐκεῖ ὅπου ἀνεχώρησαν, λέγω, ὅτι τοῦ χωρίου τοῦ περιληφθέντος ὑπὸ τῆς ἕλικος κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, τὸ μὲν περιληφθὲν κατὰ τὴν τρίτην περιφορὰν θὰ εἶναι διπλάσιον, τὸ δὲ κατὰ τὴν τετάρτην τριπλάσιον, τὸ δὲ κατὰ τὴν πέμπτην τετραπλάσιον, καὶ πάντοτε τὰ χωρία τὰ περιλαμβανόμενα κατὰ τὰς ἑπομένας περιφορὰς θὰ εἶναι πολλαπλάσια κατὰ τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς τοῦ περιληφθέντος κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, τὸ δὲ περιληφθὲν κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν χωρίον, εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τοῦ κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν περιληφθέντος χωρίου. Καὶ ἐὰν ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς ἕλικος τῆς γραφείσης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν δύο σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὸ σταθερὸν παραμεῖναν ἄκρον τῆς περιστραφείσης εὐθείας, καὶ γραφῶσι δύο

μεμενακότι σαμείῳ, διαστημάτεσσι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἁ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐπεκβληθῇ, φαμὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζοντος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν τοῦ-
H 12 τον ἕξειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δή μοι καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται, πρόκεινται δέ, ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων, τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λῆμμα τόδε· τᾶν ἀνισᾶν γραμμᾶν καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

α′

Εἴ κα κατά τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας, ὅνπερ οἱ χρόνοι, ἐν οἷς τὸ σαμεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη.

ἐνηνέχθω γάρ τι σαμεῖον κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἔστω δὲ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμὰν τὸ σαμεῖον διεπορεύθη, ὁ ΖΗ, ἐν ᾧ δὲ τὰν ΔΕ, ὁ ΗΘ. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι κύκλοι μὲ κέντρον μὲν τὸ σταθερὸν σημεῖον (ἄκρον), ἀκτῖνας δὲ τὰς ἀχθείσας εὐθείας πρὸς τὸ σταθερὸν ἄκρον, καὶ ἡ μικροτέρα τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν προεκβληθῇ, λέγω, ὅτι τὸ περιληφθὲν χωρίον ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τοῦ κειμένου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἕλικος, μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ τῆς ἕλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς προεκβληθείσης πρὸς τὸ περιληφθὲν χωρίον ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μικροτέρου κύκλου καὶ τῆς αὐτῆς ἕλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ πέρατα, θὰ ἔχῃ αὐτὸν τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τῆς ἀκτῖνος τοῦ μικροτέρου κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὸ ἓν τρίτον τῆς εἰρημένης ὑπεροχῆς. Τῶν προτάσεων τούτων, ὡς καὶ ἄλλων περὶ τῆς ἕλικος, γράφονται αἱ ἀποδείξεις εἰς αὐτὸ ἐδῶ τὸ βιβλίον, προτάσσονται δέ, ὡς καὶ εἰς τὰ ἄλλα θεωρήματα, τὰ χρειαζόμενα διὰ τὰς ἀποδείξεις. Λαμβάνω δὲ καὶ εἰς αὐτὰ τὸ ἑξῆς λῆμμα, τὸ ὁποῖον ἔλαβα καὶ εἰς τὰ προηγουμένως ἐκδεδομένα βιβλία· τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον μέγεθος τοῦ μικροτέρου, λαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς μεγέθους ἐκ τῶν πρὸς ἄλληλα συγκρινομένων ('Αξίωμα τῆς συνεχείας).

1

'Εὰν ἐπί τινος γραμμῆς σημεῖόν τι κινῆται ἰσοταχῶς, καὶ ληφθῶσιν εἰς αὐτὴν δύο γραμμαί, αἱ ληφθεῖσαι γραμμαὶ θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἔχουσιν οἱ χρόνοι, καθ' οὓς τὸ σημεῖον διήνυσε τὰς γραμμάς.

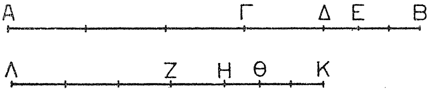
"Ας κινηθῇ λοιπὸν σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ ἰσοταχῶς, καὶ ἂς ληφθῶσιν εἰς αὐτὴν δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, ἔστω δὲ ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΓΔ, ὁ ΖΗ, ὁ χρόνος δέ, καθ' ὃν διήνυσε τὴν ΔΕ, ὁ ΗΘ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γραμμὴ ΓΔ *λόγον ἁ ΓΔ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΔΕ γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ποτὶ τὸν ΗΘ.*

συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τᾶν ΓΔ, ΔΕ γραμμᾶν αἱ ΑΔ, ΔΒ γραμμαὶ καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥστε ὑπερέχειν τὰν ΑΔ τᾶς ΔΒ, καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ ΓΔ γραμμὰ ἐν τᾷ ΑΔ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ἐν τῷ χρόνῳ τῷ ΛΗ, ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ ΔΕ γραμμὰ ἐν τᾷ ΔΒ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ ΘΗ χρόνος ἐν τῷ ΚΗ χρό-
H 14 *νῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σαμεῖον ἰσοταχέως ἐνηνέχθαι κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς, δῆλον, ὡς, ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν ΓΔ ἐνήνεκται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάσταν ἐνήνεκται τᾶν ἰσᾶν τᾷ ΓΔ· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν ΑΔ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ ΛΗ χρόνος, ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε ΓΔ γραμμὰ ἐν τᾷ ΑΔ γραμμᾷ καὶ ὁ ΖΗ χρόνος ἐν τῷ ΛΗ χρόνῳ. διὰ ταὐτὰ δὴ καὶ τὰν ΒΔ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σαμεῖον ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ ΚΗ χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ ΑΔ γραμμὰ τᾶς ΒΔ, δῆλον, ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὰν ΔΑ διαπορεύεται γραμμὰν ἢ τὰν ΒΔ· ὥστε ὁ χρόνος ὁ ΛΗ μείζων ἐστὶ τοῦ ΚΗ χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ΖΗ, ΗΘ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν, ὥστε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν ΓΔ, ΔΕ κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεισᾶν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΖΗ ποτὶ τὸν χρόνον τὸν ΗΘ.*

β'

Εἴ κα δύο σαμείων ἑκατέρου κατά τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτοῦ ἑαυτῷ φερομένου πρὸς τὴν γραμμὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ χρόνος ΖΗ πρὸς τὸν ΗΘ.

Διότι ἂς συντεθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΔΒ ἐκ τῶν γραμμῶν ΓΔ, ΔΕ ἀντιστοίχως καθ' οἱονδήποτε τρόπον οὕτως, ὥστε ἡ ΑΔ νὰ ὑπερέχῃ τῆς ΔΒ, καὶ ὅσας φορὰς ἔχει ληφθῆ ἡ ΓΔ εἰς τὴν ΑΔ, τόσας



φορὰς ἂς ἔχῃ ληφθῆ ὁ χρόνος ΖΗ εἰς τὸν χρόνον ΛΗ, ὅσας δὲ φορὰς ἔχει ληφθῆ ἡ γραμμὴ ΔΕ εἰς τὴν γραμμὴν ΔΒ, τόσας φορὰς ἂς ἔχῃ ληφθῆ ὁ χρόνος ΘΗ εἰς τὸν χρόνον ΚΗ. 'Επειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι τὸ σημεῖον ἐκινήθη ἰσοταχῶς ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, εἶναι φανερόν, ὅτι, εἰς ὅσον χρόνον διήνυσε τὴν ΓΔ, εἰς τόσον διήνυσε καὶ ἑκάστην τῶν ἴσων πρὸς τὴν ΓΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαστημάτων, ἡ ΑΔ γραμμή, θὰ διηνύθη εἰς τόσον χρόνον, ὅσος εἶναι ὁ χρόνος ΛΗ, ἐπειδὴ ὅσας φορὰς περιλαμβάνεται ἡ γραμμὴ ΓΔ εἰς τὴν γραμμὴν ΑΔ, τόσας φορὰς περιλαμβάνεται ὁ χρόνος ΖΗ εἰς τὸν χρόνον ΛΗ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ σημεῖον διήνυσε καὶ τὴν γραμμὴν ΒΔ εἰς τόσον χρόνον, ὅσος εἶναι ὁ χρόνος ΚΗ. 'Επειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΔ γραμμὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΔ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΔΑ εἰς μεγαλύτερον χρόνον ἢ τὴν ΒΔ· ὥστε ὁ χρόνος ΛΗ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ χρόνου ΚΗ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν καθ' οἱονδήποτε τρόπον συντεθῶσιν οἱ χρόνοι ΖΗ, ΗΘ, ὥστε ὁ εἷς χρόνος νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἄλλου, ὅτι, ἐὰν καὶ αἱ γραμμαὶ ΓΔ, ΔΕ συντεθῶσι κατὰ τὸ αὐτὸν τρόπον θὰ ὑπερέχῃ ἡ ὁμόλογος κατὰ τὸν ὑπερέχοντα χρόνον· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν θὰ ἔχῃ ὁ χρόνος ΖΗ πρὸς τὸν χρόνον ΗΘ (Εὐκλ. V, ὁρισ. 5).

2

'Εὰν ἐν ᾧ δύο σημεῖα κινῶνται ἐπί τινος γραμμῆς, μὴ τῆς αὐτῆς, ἰσοταχῶς, ληφθῶσιν εἰς ἑκατέραν τῶν γραμμῶν δύο γραμμαί, ἐκ *λαφθέωντι ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαί, ἅν αἵ τε πρῶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὸ τῶν σαμείων διαννέσθων καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί.*

ἔστω κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ καὶ ἄλλο κατὰ τᾶς ΚΛ, λελάφθωσαν
H 16 *δὲ ἐν τᾷ ΑΒ δύο αἱ ΓΔ, ΔΕ γραμμαί, καὶ ἐν τᾷ ΚΛ αἱ ΖΗ, ΗΘ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν ΓΔ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον κατὰ τᾶς ΚΛ ἐνηνεγμένον τὰν ΖΗ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰν ΔΕ γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν ΗΘ. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἁ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ.*

ἔστω δὴ ὁ χρόνος, ἐν ᾧ τὰν ΓΔ γραμμὰν διεπορεύετο τὸ σαμεῖον, ὁ ΜΝ· ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ΖΗ. πάλιν δὴ καί, ἐν ᾧ τὰν ΔΕ γραμμὰν διεπορεύετο τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ ΝΞ χρόνος· ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ΗΘ· τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἑξοῦντι ἅ τε ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ, καὶ ἁ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ, ὃν ὁ χρόνος ὁ ΜΝ ποτὶ τὸν ΝΞ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, ὃν ἁ ΖΗ ποτὶ τὰν ΗΘ.

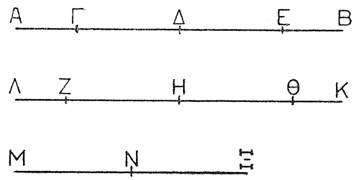
γ′

Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου δῆλον, ὡς ἁ ἐκ πασᾶν συγκειμένα τᾶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἐσσεῖται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

τῶν ὁποίων καὶ αἱ πρῶται νὰ ἔχωσι διανυθῆ ὑπὸ τῶν σημείων εἰς ἴσους χρόνους καὶ αἱ δεύτεραι, αἱ ληφθεῖσαι γραμμαὶ θὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ὅτι ἐκινήθη ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ σημεῖόν τι ἰσοταχῶς καὶ ἄλλο ἐπὶ τῆς ΚΛ, ἂς ληφθῶσι δὲ εἰς τὴν ΑΒ δύο γραμμαὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ εἰς τὴν ΚΛ αἱ ΖΗ, ΗΘ, εἰς ἴσον δὲ χρόνον τὸ σημεῖον τὸ διανύσαν τὴν ΓΔ γραμμὴν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ἐκινήθη, ὅσος εἶναι ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον διήνυσε τὴν ΖΗ ἐπὶ τῆς ΚΛ τὸ ἄλλο σημεῖον, ὁμοίως δὲ ἂς ἔχῃ διανύσει τὸ πρῶτον σημεῖον τὴν γραμμὴν ΔΕ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ἄλλο διήνυσε τὴν ΗΘ. Πρέπει νὰ δειχθῆ, ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ.



Ἔστω λοιπὸν ὁ χρόνος, καθ' ὃν τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΓΔ, ὁ ΜΝ· εἰς τὸν αὐτὸν δὲ χρόνον τὸ ἄλλο σημεῖον διανύει τὴν ΖΗ. Πάλιν δὲ ἔστω ὁ χρόνος ΝΞ, καθ' ὃν τὸ σημεῖον διήνυσε τὴν γραμμὴν ΔΕ· εἰς τὸν αὐτὸν δὲ χρόνον καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον διανύει τὴν ΗΘ· τὸν αὐτὸν λοιπὸν λόγον θὰ ἔχωσι καὶ ἡ γραμμὴ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ὃν ὁ χρόνος ΜΝ πρὸς τὸν ΝΞ, καὶ ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ, ὃν ἔχει ὁ χρόνος ΜΝ πρὸς τὸν ΝΞ (θ. 1). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ.

3

Ἐὰν δοθῶσι κύκλοι ὁσοιδήποτε κατὰ τὸ πλῆθος εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων.

Διότι ἐὰν περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων περιγραφῆ πολύγωνον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων.

δ′

Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνισᾶν, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα.

H 18 *ὁσάκις γὰρ ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας τὸ ἓν τμᾶμα ἔλασσον ἐσσεῖται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν κα ᾖ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμάματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων· εἰ δέ κα ἐλάσσων, ἑνὸς τμάματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν περιφέρειαν ὁμοίως τᾶς μὲν ἐλάσσονος μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων· καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.*

ε′

Κύκλου δοθέντος καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἀφᾶς καὶ τᾶς διαχθείσας ποτὶ τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν.

δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ΔΖ κατὰ τὸ Β, δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν· δυνατὸν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινα εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ Ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας· ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Κ
H 20 *κέντρου παρὰ τὰν ΔΖ ἁ ΑΗ, καὶ κείσθω ἁ ΗΘ ἴσα τᾷ Ε*

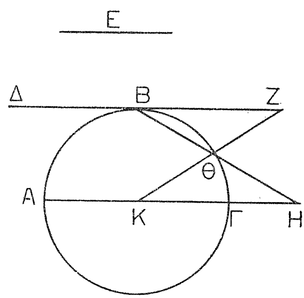
4

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι γραμμαί, εὐθεῖα καὶ τόξον κύκλου, εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν μικροτέραν μὲν τῆς μεγαλυτέρας τῶν δοθεισῶν γραμμῶν, μεγαλυτέραν δὲ τῆς μικροτέρας.

Διότι ἐὰν ὅσας φορὰς ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ἡ μεγαλυτέρα γραμμὴ ὑπερέχει τῆς μικροτέρας ἐπαναληφθῇ, ὥστε νὰ ὑπερέχῃ τῆς εὐθείας (τῆς μικροτέρας), εἰς τόσα ἴσα μέρη διαιρεθῇ αὕτη, τὸ ἓν τμῆμα θὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ τόξον εἶναι μεγαλύτερον τῆς εὐθείας, καὶ προστεθῇ εἰς τὴν εὐθεῖαν ἓν τμῆμα, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι ἡ προκύπτουσα εὐθεῖα μεγαλυτέρα τῆς μικροτέρας τῶν δοθεισῶν, τῆς δὲ μεγαλυτέρας θὰ εἶναι μικροτέρα· ἐὰν δὲ εἶναι μικρότερον, ἀφοῦ προστεθῇ ἓν τμῆμα εἰς τὸ τόξον, ὁμοίως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μικροτέρας, τῆς δὲ μεγαλυτέρας μικροτέρα· διότι ἡ προστιθεμένη εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπεροχῆς.

5

Ἐὰν δοθῇ κύκλος καὶ εὐθεῖα ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖα πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου νὰ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἢ τὸ τόξον τοῦ κύκλου τὸ μεταξὺ τῆς ἐπαφῆς καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀχθείσης πρὸς τὸ δοθὲν τυχὸν τόξον κύκλου.



Ἂς δοθῇ ὁ κύκλος ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου ἡ ΔΖ κατὰ τὸ Β, ἂς δοθῇ δὲ καὶ τυχὸν τόξον κύκλου· εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ληφθῇ εὐθεῖά τις μεγαλυτέρα τοῦ δοθέντος τόξου (θ. 3) καὶ ἔστω ἡ εὐθεῖα Ε μεγαλυτέρα τοῦ δοθέντος τόξου· ἂς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ ἡ ΑΗ, καὶ ἂς ληφθῇ νεύουσα ἐπὶ τὸ Β. ἀπὸ δὴ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΚ, ὃν ἁ ΒΘ ποτὶ τὰν ΘΗ. ἁ ἄρα ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἁ ΒΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν, διότι ἁ μὲν ΒΘ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΒΘ περιφερείας, ἁ δὲ ΘΗ μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἢ ἁ ΒΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

ϛ′

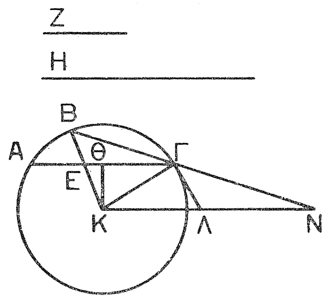
Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσούσας τοῦ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὸ ἕτερον πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.

δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΓΑ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ Η, ἐλάσσων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ
H 22 τὰν ΚΘ, καθέτου ἐούσας τᾶς ΚΘ, ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΚΝ καὶ τᾷ ΚΓ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΓΛ· ὁμοῖα δή ἐστι τὰ ΓΘΚ, ΓΚΛ τρίγωνα. ἔστιν οὖν, ὡς ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ, οὕτως ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η ἢ ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΚΓ ποτὶ μείζονα τᾶς ΓΛ.

ἡ ΗΘ ἴση πρὸς τὴν Ε διευθυνομένη πρὸς τὸ Β. Ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ εὐθεῖα πρὸς τὸ Θ ἂς προεκβληθῇ· τὸν αὐτὸν λοιπὸν λόγον ἔχει ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΘΚ, ὃν ἔχει ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΗ. Ἡ ΖΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΚ ἔχει μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τόξον ΒΘ πρὸς τὸ δοθὲν τόξον, διότι ἡ μὲν εὐθεῖα ΒΘ εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΒΘ, ἡ δὲ ΘΗ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ δοθέντος τόξου· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον καὶ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἢ τὸ τόξον ΒΘ πρὸς τὸ δοθὲν τόξον.

6

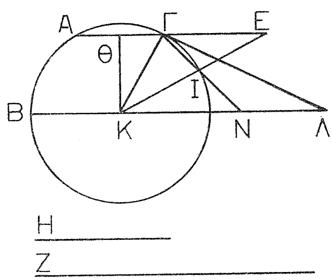
Ἐὰν δοθῇ κύκλος καὶ εἰς τὸν κύκλον χορδὴ μικροτέρα τῆς διαμέτρου εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖα τέμνουσα τὴν εἰς τὸν κύκλον δεδομένην χορδήν, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς λαμβανομένης εὐθείας μεταξὺ τῆς περιφερείας (τοῦ τόξου) καὶ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς (ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν) ἀχθείσης εὐθείας μέχρι τοῦ ἑνὸς πέρατος τῆς χορδῆς νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἐπ' αὐτῆς ἀχθεῖσαν κάθετον.



Ἂς δοθῇ ὁ κύκλος ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ εἰς αὐτὸν ἂς δοθῇ εὐθεῖα (χορδὴ) μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἡ ΓΑ, καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΚΘ, ἡ ὁποία ΚΘ εἶναι κάθετος, ἂς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΚΝ καὶ πρὸς τὴν ΚΓ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΓΛ· εἶναι λοιπὸν ὅμοια τὰ τρίγωνα ΓΘΚ, ΓΚΛ. Εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ (Εὐκλ. VI, 4)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ Ζ πρὸς τὴν Η ἢ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ. Ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει ἡ Ζ πρὸς ἐχέτω ποτὶ τὰν ΒΝ, κείσθω δὲ ἁ ΒΝ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ Γ· δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν· καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν τᾶς ΓΛ. ἐπεὶ οὖν ἁ ΚΒ ποτὶ ΒΝ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η, καὶ ἁ ΕΒ ποτὶ ΒΓ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η.

ζʹ

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἐναπολαφθείσας ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἐκβεβλημένας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.



δεδόσθω τὰ αὐτά, καὶ ἔστω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η, μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ· μείζων οὖν ἐσσεῖται
H 24 καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΚΓ ποτὶ ΓΛ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ Ζ ποτὶ Η, τοῦτον ἕξει ἁ ΚΓ ποτὶ ἐλάσσονα τᾶς ΓΛ. ἐχέτω ποτὶ ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Γ· δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν· καὶ πεσεῖται ἐντὸς τᾶς ΓΛ, ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΓΛ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΚΓ ποτὶ ΙΝ, ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η, καὶ ἁ ΕΙ ποτὶ ΙΓ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η.

ηʹ

Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τὴν Η, τοῦτον ἂς ἔχῃ ἡ ΚΓ πρὸς μεγαλυτέραν τῆς ΓΛ. Ἂς ἔχῃ αὐτὸν τὸν λόγον πρὸς τὴν ΒΝ, ἂς κῆται δὲ ἡ ΒΝ μεταξὺ τοῦ τόξου (ΑΓ) καὶ τῆς διὰ τοῦ Γ εὐθείας· εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ γίνῃ αὐτὴ ἡ τομή· καὶ θὰ πέσῃ ἐκτὸς ἐπειδὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΛ (Εὐκλ. V, 10). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΚΒ πρὸς ΒΝ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η (Εὐκλ. VI, 2).

7

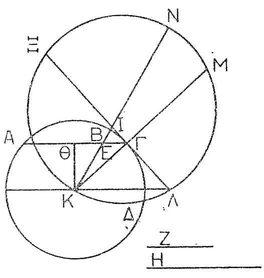
Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ ἐὰν ἡ δοθεῖσα χορδὴ τοῦ κύκλου προεκβληθῇ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀκτὶς καὶ νὰ προεκταθῇ μέχρι τῆς προεκβληθείσης, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας τὸ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς προεκβληθείσης πρὸς τὴν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἀκτῖνος μέχρι τοῦ πέρατος τῆς χορδῆς, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αὕτη προεξεβλήθη, νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀχθεῖσαν ἐπ' αὐτήν.

Ἂς εἶναι δεδομένα τὰ αὐτὰ καὶ ἔστω ἡ χορδὴ τοῦ κύκλου προεκβεβλημένη, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ· θὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερος καὶ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΚΓ πρὸς ΓΛ. Ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, τοῦτον θὰ ἔχῃ ἡ ΚΓ πρὸς μικροτέραν τῆς ΓΛ (Εὐκλ. V, 10). Ἂς ἔχῃ πρὸς τὴν (μικροτέραν) ΙΝ διευθυνομένην πρὸς τὸ Γ· εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ γίνῃ ἡ τομὴ αὐτή· καὶ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς ΓΛ, ἐπειδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΚΓ πρὸς ΙΝ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ΕΙ πρὸς ΙΓ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η.

8

Κύκλου δοθέντος καὶ εἰς τὸν κύκλον γραμμῆς μικροτέρας τῆς *τᾶς διαμέτρου καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.*

ἔστω κύκλος δεδομένος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΓΑ, καὶ ἁ ΞΛ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Γ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ Η, ἐλάσσων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ ΘΚ· ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΓΚ ποτὶ ΓΛ, εἴ κα παράλληλος ἀχθῇ ἁ ΚΛ τᾷ ΘΓ. ἐχέτω δὴ ἁ ΚΓ ποτὶ ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ Η· μείζων δή ἐστιν ἁ ΞΓ τᾶς ΓΛ. γεγράφθω κύκλου περιφέρεια περὶ τὰ Κ, Λ, Ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστι μείζων ἁ ΞΓ τᾶς ΓΛ, καὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἀλλάλαις αἱ ΚΓ, ΞΛ, δυνατόν ἐστι τᾷ ΜΓ ἴσαν ἄλλαν θέμεν τὰν ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Κ. H 26 *τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΙΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΕ, ΙΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙ, ΓΛ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΙΝ ποτὶ ΓΛ· ὥστε καὶ ἁ ΙΝ ποτὶ ΓΛ ἐστιν, ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ· ὥστε καὶ ἁ ΓΜ ποτὶ ΓΛ καὶ ἁ ΞΓ ποτὶ ΚΓ καὶ ποτὶ ΚΒ ἐστιν, ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, καὶ λοιπὰ ἁ ΙΓ ποτὶ ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΞΓ ποτὶ τὰν ΓΚ, καὶ ὃν ἁ Η ποτὶ Ζ. πέπτωκεν οὖν ἁ ΚΝ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ ΒΕ ποτὶ τὰν ἀπο-*



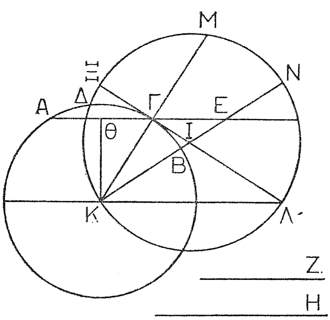
διαμέτρου καὶ ἄλλης ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὸ πέρας τῆς εἰς τὸν κύκλον δεδομένης εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὥστε ἡ ἀποληφθεῖσα ἀπ' αὐτῆς μεταξὺ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς εἰς τὸν κύκλον δεδομένης γραμμῆς πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς εἰς τὸν κύκλον δεδομένης πρὸς τὴν ἀχθεῖσαν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Ἔστω δεδομένος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἔχῃ δοθῇ εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα (χορδὴ) μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἡ ΓΑ, καὶ ἡ ΞΛ ἂς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Γ, καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, ἂς εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ· θὰ εἶναι λοιπὸν μικρότερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΓΛ, ἐὰν ἡ ΚΛ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΓ. Ἂς ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η· εἶναι λοιπὸν μεγαλυτέρα ἡ ΞΓ τῆς ΓΛ (Εὐκλ. V, 10). Ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Κ, Λ, Ξ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΞΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΛ, καὶ αἱ ΚΓ, ΞΛ εἶναι μεταξύ των κάθετοι, εἶναι δυνατὸν νὰ θέσωμεν πρὸς τὴν ΜΓ ἄλλην ἴσην τὴν ΙΝ διευθυνομένην πρὸς τὸ Κ. Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν πλευρῶν ΞΙ, ΙΛ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΕ, ΙΛ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΞΙ πρὸς τὴν ΚΕ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΙΝ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΓΛ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΙΝ πρὸς τὴν ΓΛ· ὥστε καὶ ἡ ΙΝ πρὸς τὴν ΓΛ εἶναι, ὡς ἡ ΞΙ πρὸς ΚΕ· ὥστε καὶ ἡ ΓΜ πρὸς ΓΛ καὶ ἡ ΞΓ πρὸς ΚΓ καὶ πρὸς ΚΒ εἶναι, ὡς ἡ ΞΙ πρὸς ΚΕ, καὶ ἡ ὑπόλοιπος ΙΓ πρὸς ΒΕ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΞΓ πρὸς τὴν ΓΚ, καὶ ὃν ἔχει ἡ Η πρὸς Ζ. Τέμνει λοιπὸν ἡ ΚΝ τὴν ἐφαπτομένην, καὶ ἔχει ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας (χορδῆς) ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ἐφαπτομέ-

λαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η.

θ′

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγομέναν.



δεδόσθω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΓΛ διάχθω, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύ-
H 28 *κλου ἁ ΞΓ κατὰ τὸ Γ, καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η, μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΚ· ἐσσεῖται δὴ μείζων καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΛ. ἐχέτω οὖν ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτα τᾶς ΓΛ. πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν Ξ, Κ, Λ σαμείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΞΓ τᾶς ΓΛ, καὶ ποτ᾽ ὀρθάς ἐντι ἀλλάλαις αἱ ΚΜ, ΞΓ, δυνατὸν τᾷ ΓΜ ἴσαν θέμεν τὰν ΙΝ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΙΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΛΙ, ΚΕ ἐστιν, ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ΞΙΛ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙΝ, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ΛΙ, ΚΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙ, ΓΛ διὰ τὸ εἶμεν, ὡς τὰν ΚΕ ποτὶ ΙΚ, οὕτως τὰν ΛΓ ποτὶ ΛΙ, καὶ ὡς ἄρα ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙΝ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΚΙ, ΓΛ, τουτέστιν ὡς ἁ ΝΙ ποτὶ ΓΛ, τουτέστιν ἁ ΓΜ ποτὶ ΓΛ. ἔστιν*

νης τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η.

9

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ εἰς τὸν κύκλον δεδομένη γραμμὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖα πρὸς τὴν ἐκβληθεῖσαν, ὥστε ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἐκβληθείσης πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης μέχρι τοῦ σημείου ἐπαφῆς νὰ ἔχῃ τὸν ταχθέντα λόγον, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης χορδῆς τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσαν κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Ἄς δοθῇ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα (χορδὴ) εἰς τὸν κύκλον μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἡ ΓΑ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τοῦ κύκλου ἡ ΞΓ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, ἂς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ· θὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ. Ἄς ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΞ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η· εἶναι ἄρα αὕτη (ἡ ΓΞ) μικροτέρα τῆς ΓΛ (Εὐκλ. V, 10). Πάλιν τώρα ἂς γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν σημείων Ξ, Κ, Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι μικροτέρα, ἡ ΞΓ τῆς ΓΛ, καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των αἱ ΚΜ, ΞΓ, εἶναι δυνατὸν νὰ θέσωμεν πρὸς τὴν ΓΜ ἴσην τὴν ΙΝ διευθυνομένην πρὸς τὸ Κ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΙ, ΙΛ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΛΙ, ΚΕ, εἶναι ὡς ἡ ΞΙ πρὸς ΚΕ, ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΞΙ, ΙΛ εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΙΝ (Εὐκλ. III, 35), πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΛΙ, ΚΕ εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΓΛ, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΙΚ, οὕτως ἡ ΛΓ πρὸς ΛΙ, καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΞΙ πρὸς ΚΕ, οὕτως εἶναι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΙΝ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΚΙ, ΓΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΝΙ πρὸς ΓΛ, τουτέστιν ἡ ΓΜ πρὸς ΓΛ. Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΜ πρὸς *δὲ καί, ὡς ἁ ΓΜ ποτὶ ΓΛ, ἁ ΞΓ ποτὶ ΚΓ, τουτέστι ποτὶ ΚΒ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΞΙ ποτὶ ΚΕ, ἁ ΞΓ ποτὶ ΚΒ, καὶ λοιπὰ ἁ ΙΓ ποτὶ λοιπὰν τὰν ΒΕ ἐστιν, ὡς ἁ ΞΓ ποτὶ ΓΚ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΞΓ ποτὶ ΓΚ, τοῦτον ἔχει ἁ Η ποτὶ Ζ· ποτιπέπτωκεν δὴ ἁ ΚΕ ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερείας ἁ ΒΕ ποτὶ τὰν ΓΙ τὰν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ Ζ ποτὶ τὰν Η.*

H 30 *ι'*

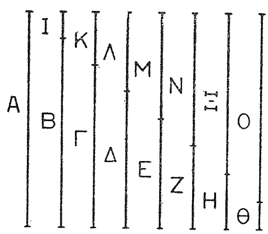
Εἴ κα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχούσαις τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν.

ἔστων γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ Α, Β ,Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ἁ δὲ Θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν Β ἴσα τᾷ Θ ἁ Ι, ποτὶ δὲ τὰν Γ ἁ Κ ἴσα τᾷ Η, ποτὶ δὲ τὰν Δ ἁ Λ ἴσα τᾷ Ζ, ποτὶ δὲ τὰν Ε ἁ Μ ἴσα τᾷ Ε, ποτὶ δὲ τὰν Ζ ἁ Ν ἴσα τᾷ Δ, ποτὶ δὲ τὰν Η ἁ Ξ ἴσα τᾷ Γ, ποτὶ δὲ τὰν Θ ἁ Ο ἴσα τᾷ Β· ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶς τε Α καὶ τᾶν γενομενᾶν ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων

ΓΛ, ἡ ΞΓ πρὸς ΚΓ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 35), τουτέστι πρὸς ΚΒ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΞΙ πρὸς ΚΕ, ἡ ΞΓ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΙΓ πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν ΒΕ εἶναι, ὡς ἡ ΞΓ πρὸς ΓΚ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΞΓ πρὸς ΓΚ, τοῦτον ἔχει ἡ Η πρὸς Ζ· διότι συναντᾷ ἡ ΚΕ τὴν ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἡ μεταξὺ τῆς ἐκβληθείσης καὶ τῆς περιφερείας ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΓΙ, ἡ ὁποία εἶναι ἀποληφθεῖσα ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ Ζ πρὸς τὴν Η.

10

Ἐὰν ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε γραμμαὶ ὑπερέχουσαι ἴσον πρὸς ἀλλήλας, εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ ἴση πρὸς τὴν ἐλαχίστην, καὶ ληφθῶσιν ἄλλαι γραμμαὶ ἴσαι κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς ταύτας, κατὰ τὸ μέγεθος δὲ ἑκάστη νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν μεγίστην σὺν τὸ τετράγωνον τῆς μεγίστης σὺν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ἐλαχίστην καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσον ὑπερεχουσῶν πρὸς ἀλλήλας θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας.



Ἔστωσαν γραμμαὶ ὁσαιδήποτε ὑπερέχουσαι διαδοχικῶς ἴσον ἀλλήλων αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ἡ δὲ Θ ἔστω ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἂς προστεθῇ δὲ εἰς τὴν Β ἴση πρὸς τὴν Θ ἡ Ι, εἰς τὴν Γ δὲ ἡ Κ ἴση πρὸς τὴν Η, εἰς δὲ τὴν Δ ἡ Λ ἴση πρὸς τὴν Ζ, εἰς δὲ τὴν Ε ἡ Μ ἴση πρὸς τὴν Ε, εἰς δὲ τὴν Ζ ἡ Ν ἴση πρὸς τὴν Δ, εἰς δὲ τὴν Η ἡ Ξ ἴση πρὸς τὴν Γ, εἰς δὲ τὴν Θ ἡ Ο ἴση πρὸς τὴν Β· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ προκύψασαι εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων, καὶ τοῦ τῆς Α καὶ τοῦ τετραγώνου ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς Α, σὺν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Θ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τριπλάσιον *πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.*

ἔστιν δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς ΒΙ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τᾶν Ι, Β τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τᾶν Β, Ι περιεχομένοις,
Η 32 *τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΚΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Γ τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τᾶν Κ, Γ περιεχομένοις· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἰσᾶν τᾷ Α τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις καὶ δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετραγώνων· λοιπὸν δὲ ἐπιδειξοῦμες, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἐν ἑκάστᾳ γραμμᾷ τᾶν ἰσᾶν τᾷ Α ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ Β, Ι περιεχόμενα ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τᾶν Β, Θ περιεχομένοις, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν Κ, Γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς Γ διὰ τὸ τὰν Κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς Θ, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν Δ, Λ ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶς Θ καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς Δ διὰ τὸ τὰν Λ τριπλασίαν εἶμεν τᾶς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς, τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ*
Η 34 *τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ ἀεὶ τᾷ [περισσᾷ] κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον ἴσον τῷ*

τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

Εἶναι δὲ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς Β σὺν Ι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τοῦ Β καὶ τοῦ Ι σὺν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον πλευρῶν Β καὶ Ι, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Κ σὺν Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τοῦ Κ καὶ τοῦ Γ σὺν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον πλευρῶν Κ καὶ Γ· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἴσων πρὸς τὴν Α εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ πρὸς δύο ὀρθογώνια τῶν ὁποίων πλευραὶ εἶναι τὰ τμήματα. Τὰ μὲν λοιπὸν τετράγωνα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο προσλαβόντα τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· ὑπολείπεται δὲ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ διπλάσια ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ ἐν ἑκάστῃ γραμμῇ τμήματα τὰ ἴσα πρὸς τὴν Α προσλαβόντα τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν Θ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπειδὴ δύο μὲν ὀρθογώνια πλευρῶν Β καὶ Ι εἶναι ἴσα πρὸς δύο ὀρθογώνια πλευρῶν Β καὶ Θ, δύο δὲ πλευρῶν Κ καὶ Γ εἶναι ἴσα πρὸς ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τετραπλασίας τῆς Γ, ἐπειδὴ ἡ Κ εἶναι διπλασία τῆς Θ, δύο δὲ ὀρθογώνια πλευρῶν Δ καὶ Λ εἶναι ἴσα πρὸς ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τῆς ἑξαπλασίας τῆς Δ, ἐπειδὴ ἡ Λ εἶναι τριπλασία τῆς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰ τμήματα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὸ πολλαπλάσιον πάντοτε τῆς ἑπομένης γραμμῆς κατὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ ἀρτίαν ἀρίθμησιν, τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τετραγώνων προσλαβὸν τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς Θ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῆς Α καὶ τοῦ τριπλασίου τῆς Β καὶ τοῦ πενταπλασίου τῆς Γ καὶ πάντοτε τοῦ περιττοῦ, κατὰ τοὺς ἐν συνεχείᾳ περιττοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασίου τῆς ἑπομένης γραμμῆς. Εἶναι δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς αὐτὰς γραμμάς. Διότι τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Θ καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς ἴσης πρὸς περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας [πάσαις] τᾷ τε Α καὶ τᾷ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ἂν ἑκάστα ἴσα τᾷ Α· ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε Θ τὰν Α καὶ ἁ Α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας σὺν τᾷ Α· ὥστε ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ Α καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ Α πᾶσαι χωρὶς τᾶς Α διπλάσιαί ἐντι τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς Β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε Β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς Γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε Γ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ τᾷ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου οὖν φανερόν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ
H 36 τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐστιν ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα εἴδεα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ, τὰ εἴδεα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχου-

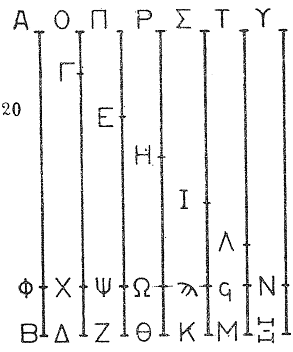
τὴν Α καὶ τῆς ἴσης πρὸς τὰς λοιπάς, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α· διότι ἰσάκις μετρεῖ καὶ ἡ Θ τὴν Α καὶ ἡ Α τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πρὸς αὐτὴν σὺν τὴν Α· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὴν Α καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πρὸς τὴν Α χωρὶς τὴν Α εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὴν Β καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν τὸ τετράγωνον τῆς Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς τὴν Γ καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ἄλλων εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἔχοντα πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὴν ἴσην πρὸς αὐτὴν καὶ τὴν διπλασίαν τῶν λοιπῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν Θ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἴσων πρὸς τὴν Α ὅλων σὺν τὸ τριπλάσιον τῆς Β, σὺν τὸ πενταπλάσιον τῆς Γ, σὺν τὴν ἑπομένην ἑκάστην φοράν, πολλαπλάσιον οὖσαν κατὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ περιττὴν ἀρίθμησιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μεγίστην, τοῦ μὲν ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν τὴν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερέχουσαν, εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου, ἐπειδὴ (τὰ πρῶτα) προσλαβόντα τινὰ γίνονται τριπλάσια, τῶν ἄλλων δὲ ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου, ἐπειδὴ τὰ προσληφθέντα εἶναι μικρότερα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν μεγίστην. Καὶ συνεπῶς, ἐὰν ὅμοια σχήματα ἀναγραφῶσιν ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν, καὶ ἐξ ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον καὶ ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην, τὰ σχήματα τὰ ἀναγραφέντα ἐκ τῶν σᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος μείζονα ἢ τριπλάσια· τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

ια΄

Εἴ κα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ
H 38 δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.



ἔστωσαν γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν ΑΒ τᾶς ΓΔ, ἁ δὲ ΓΔ τᾶς ΕΖ, ἁ δὲ ΕΖ τᾶς ΗΘ, ἁ δὲ ΗΘ τᾶς ΙΚ, ἁ δὲ ΙΚ τᾶς ΛΜ, ἁ δὲ ΛΜ τᾶς ΝΞ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ μὲν τὰν ΓΔ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ ΓΟ, ποτὶ δὲ τὰν ΕΖ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς ἁ ΕΠ, ποτὶ δὲ τὰν ΗΘ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ ΗΡ, καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον· ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γενομενᾶν τετράγωνα ποτὶ μὲν πάντα τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην θὰ εἶναι τῶν μὲν ἀναγραφέντων ἐκ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν μικρότερα τοῦ τριπλασίου, τῶν ἄλλων δὲ ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τετραγώνου θὰ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τριπλασίου· διότι τὰ ὅμοια σχήματα θὰ ἔχωσι πρὸς τὰ τετράγωνα τὸν αὐτὸν λόγον (Εὐκλ. VI, 20).

11

Ἐὰν ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε γραμμαὶ ἐν συνεχείᾳ, ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος νὰ εἶναι κατὰ μίαν μικρότερον τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν, ἑκάστη δὲ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μεγίστην, πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἴσον ἀλλήλων ὑπερεχουσῶν ἄνευ τῶν τετραγώνου τῆς ἐλαχίστης ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην, καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῆς ἐλαχίστης, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῶν ἴσον ἀλλήλων ὑπερεχουσῶν ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης, μεγαλύτερον τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Διότι ἔστωσαν ἐν συνεχείᾳ ὁσαιδήποτε γραμμαὶ ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΓΔ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΕΖ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΗΘ, ἡ δὲ ΗΘ τῆς ΙΚ, ἡ δὲ ΙΚ τῆς ΛΜ, ἡ δὲ ΛΜ τῆς ΝΞ, ἂς προστεθῇ δὲ εἰς μὲν τὴν ΓΔ ἴση γραμμὴ πρὸς μίαν ὑπεροχὴν ἡ ΓΟ, πρὸς δὲ τὴν ΕΖ ἴση γραμμὴ πρὸς δύο ὑπεροχὰς ἡ ΕΠ, πρὸς δὲ τὴν ΗΘ ἴση πρὸς τρεῖς ὑπεροχὰς ἡ ΗΡ, καὶ πρὸς τὰς ἄλλας ἂς γίνηται πρόσθεσις γραμμῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· θὰ εἶναι λοιπὸν αἱ προκύπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν ἑκάστην προκύψασαν ὡς ἄνω εὐθεῖαν πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἴσον ἀλλήλων ὑπερεχουσῶν, τᾶς ΝΞ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΝΞ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΝΥ τετραγώνου, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

ἀπολελάφθω ἀφ' ἑκάστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ· ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΦ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τό τε ἀπὸ τᾶς ΟΔ τετράγωνον ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΟΔ, ΔΧ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΧΟ τετραγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΠΖ, ΨΖ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΨΠ τετραγώνου καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία· καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν
H 40 τᾶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ ποτί τε πάντα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΦΑ τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρεα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ ἐλάττονα, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν.

ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρεα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς ΝΞ, ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ, ΝΞ, καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΝΥ, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν πλευρῶν ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ, ἔχει μεγαλύτερον λόγον τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἂς ληφθῇ ἐξ ἑκάστης ἐκ τῶν εὐθειῶν τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν ὑπεροχήν· ὃν λόγον λοιπὸν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ, ΦΒ καὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΦ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΟΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΟΔ, ΔΧ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΧΟ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΠΖ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΠΖ, ΨΖ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΨΠ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίως λαμβανομένων χωρίων· καὶ τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν τὴν ΝΞ καὶ ἑκάστην ὅλων τῶν εἰρημένων γραμμῶν σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΒ, ΦΒ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΦΑ (Εὐκλ. V, 12). Ἐὰν λοιπὸν δειχθῇ, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΝΞ καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ, τὸ ζητούμενον θὰ ἔχῃ ἀποδειχθῇ.

Εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν ὀρθογώνιον τὸ ἔχον μίαν πλευρὰν τὴν ΝΞ καὶ ἄλλην τὸ ἄθροισμα τῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ,

ἴσα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ, τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ τετραγώνοις καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ,
H 42 Λϛ. κοινὰ μὲν οὖν ἐντι ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ ΝΞ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ϡΣ, ϛΤ, ΥΝ ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν μείζονας, καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρεος τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω· ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.

λοιπὸν δὲ δειξοῦμες, ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. πάλιν δὴ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ. καί ἐστι κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, Μϛ, ΝΞ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ, ἐντὶ δὲ καὶ τὰ

Τϛ, ΥΝ ἴσα πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ, ΝΞ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΞ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρᾶς ΒΦ καὶ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ (Εὐκλ. II, 4). Διότι καὶ τῶν δύο ἰσοτήτων εἶναι κοινὰ τὰ τετράγωνα τῶν ἴσων πρὸς τὴν ΝΞ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΝΞ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ϡΣ, ϛΤ, ΥΝ εἶναι μικρότερον τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΒΦ καὶ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τώρα εἰρημένων γραμμῶν πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ εἶναι ἴσον, πρὸς τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ἄλλων εἶναι μεγαλύτερον, καὶ τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τετραγώνων τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα (θ. 10 πόρ.)· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων χωρίων μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.

Ὑπολείπεται δὲ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων χωρίων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. Πάλιν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϛΜ, ΝΞ σὺν τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ΝΞ καὶ τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϛ. Καὶ εἶναι κοινὸν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, Μϛ, ΝΞ, μεγαλύτερον δὲ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον μιᾶς πλευρᾶς ΝΞ καὶ ἄλλης τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϛ, ΥΝ τοῦ ὀρθογωνίου μιᾶς πλευρᾶς ΝΞ καὶ ἄλλης *τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ϡΣ, ϛΤ, ΥΝ τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Γϡ, Λϛ μείζονα ἢ τριπλάσια· δέ-* H 44 *δεικται γὰρ καὶ τοῦτο· μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα, πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου· τὸν αὐτὸν γὰρ ἑξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

ΟΡΟΙ

α΄. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β΄. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἕλικος.

γ΄. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ᾽ ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα πε-

ἴσης πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, Λϛ, εἶναι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ϠΣ, ϛΤ, ΥΝ μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, Λϛ· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10, πόρισ.)· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ῥηθέντων χωρίων μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου λοιπὸν (ἕπεται), ἐὰν ἀναγραφῶσιν ὅμοια σχήματα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, καὶ ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἴσον ἀλλήλων καὶ ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς τὴν μεγίστην, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀναγραφέντων ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀναγραφέντων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης σχήματος θὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς μεγίστης πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῆς ἐλαχίστης, πρὸς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν γραμμῶν ἀναγραφόμενα σχήματα ἄνευ τοῦ τετραγώνου τῆς μεγίστης θὰ ἔχῃ λόγον μεγαλύτερον τοῦ αὐτοῦ λόγου· διότι θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ὅμοια σχήματα πρὸς τὰ τετράγωνα (Εὐκλ. VI, 20).

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἐν ᾧ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς μένει ἀκίνητον, ἀφοῦ περιστραφῇ αὕτη ἰσοταχῶς ἀποκατασταθῇ πάλιν, ἐκεῖ ὅπου ἐξεκίνησεν, συγχρόνως δὲ πρὸς τὴν περιστρεφομένην γραμμὴν κινῆται σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς ἰσοταχῶς ἀρχίσαν τὴν κίνησιν ἀπὸ τοῦ ἀκινήτου ἄκρου, τὸ σημεῖον θὰ γράψῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἕλικα.

2. Ἂς καλῆται λοιπὸν τὸ μένον κατὰ τὴν περιφορὰν τῆς εὐθείας ἀκίνητον ἄκρον αὐτῆς ἀρχὴ τῆς ἕλικος.

3. Ἡ δὲ θέσις τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἀφ' ἧς ἤρχισε νὰ περιστρέ-

ριφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

H 46 δ'. εὐθεῖα, ἃν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω, ἃν δ' ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

ε'. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω.

ϛ'. καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἅ κα ἁ περιφορὰ γένηται, προαγούμενα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα.

ζ'. ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τᾷ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

ιβ'

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁποιᾳοῦν γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος εὐθεῖαι ἐμπεσῶντι ὁποσαιοῦν ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλαλᾶν.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. δεικτέον, ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ ΑΓ τᾶς ΑΒ καὶ ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

H 48 ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς ΑΒ ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ φεται ἡ εὐθεῖα, ἂς καλῆται ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς.

4. Ἡ εὐθεῖα γραμμή, τὴν ὁποίαν διανύει τὸ σημεῖον τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἂς καλῆται πρώτη, ἐκείνη δὲ τὴν ὁποίαν θὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν ἂς καλῆται δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ἂς καλῶνται ὁμωνύμως πρὸς τὰς περιφοράς.

5. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γραφείσης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι πρώτη, ἂς καλῆται πρῶτον, τὸ δὲ περιληφθὲν ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γραφείσης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας ἂς καλῆται δεύτερον καὶ τὰ ἄλλα ἐν συνεχείᾳ ἂς καλῶνται οὕτω (ὁμωνύμως).

6. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἀχθῇ εὐθεῖά τις γραμμή, τὰ μέρη τὰ κείμενα πρὸς ἐκεῖνα καθ' ἃ γίνεται καὶ ἡ περιφορὰ ἂς καλῶνται προηγούμενα, τὰ δὲ κείμενα πρὸς τὰ ἄλλα ἂς καλῶνται ἑπόμενα.

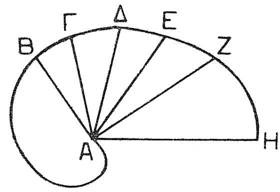
7. Καὶ ὁ γραφεὶς κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἀκτῖνα δὲ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτη, ἂς καλῆται πρῶτος, ὁ δὲ γραφεὶς μὲ κέντρον μὲν τὸ αὐτό, ἀκτῖνα δὲ τὴν διπλασίαν εὐθεῖαν ἂς καλῆται δεύτερος, καὶ οἱ ἄλλοι κύκλοι ἐν συνεχείᾳ ἂς καλῶνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

12

Ἐὰν εἰς ἕλικα γεγραμμένην κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν ἀχθῶσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι σχηματίζουσαι ἴσας γωνίας πρὸς ἀλλήλας, αἱ εὐθεῖαι ὑπερέχουσιν ἀλλήλων ἴσον.

Ἔστω ἕλιξ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, σχηματίζουσαι μεταξύ των γωνίας ἴσας. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ὑπερέχει ἴσον ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

Διότι εἰς ὃν χρόνον ἡ περιφερομένη γραμμὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ φθάνει εἰς τὴν ΑΓ, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ σημεῖον τὸ κινούμενον ἐπὶ τῆς τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΓΑ τᾶς ΑΒ, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὰν ΑΔ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς ΑΒ ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀφικνεῖται καὶ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὰν ΑΔ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΓΑ τᾶς ΑΒ, καὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε ΑΓ τᾶς ΑΒ καὶ ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ, καὶ αἱ λοιπαί.



ιγ'

Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Α σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ΖΕ. φαμὶ δὴ καθ' ἓν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς.

ἐπιψαυέτω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σαμεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἁ γωνία δίχα τετμάσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΑΓ, καθ' ὃ δὲ σαμεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ Θ. τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε ΑΗ τᾶς ΑΘ καὶ ἁ ΑΘ τᾶς ΑΓ, ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ποτ' ἀλλάλας· ὥστε διπλάσιαί ἐντι
H 50 αἱ ΑΗ, ΑΓ τᾶς ΑΘ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ [τᾶς ΑΘ] δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δῆλον οὖν, ὅτι, καθ' ὃ συμπίπτει σαμεῖον τᾷ ΓΗ εὐθείᾳ ἁ ΑΘ, μεταξὺ τῶν Θ, Α ἐντι σαμείων· τέμνει ἄρα ἁ ΕΖ τὰν ἕλικα, ἐπειδή

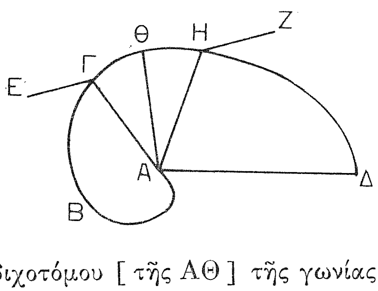
εὐθείας διανύει τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, εἰς ὃν δὲ χρόνον φθάνει ἡ περιφερομένη γραμμὴ ἀπὸ τῆς ΑΓ εἰς τὴν ΑΔ, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διανύει τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. Εἰς ἴσον δὲ χρόνον φθάνει ἡ περιφερομένη γραμμὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εἰς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῆς ΑΓ εἰς τὴν ΑΔ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· εἰς ἴσον ἄρα χρόνον τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας κινούμενον σημεῖον διανύει τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, καὶ τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. Ἴσον ἄρα ὑπερέχει καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ, ὡς καὶ αἱ ὑπόλοιποι.

13

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται τῆς ἕλικος θὰ ἐφάπτηται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἧς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τῆς ἕλικος τὸ σημεῖον Α, ἀρχὴ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς ἕλικος εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ. Λέγω ὅτι εἰς ἓν μόνον σημεῖον ἐφάπτεται αὐτῆς.

Διότι ἂς ἐφάπτηται, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΑΓ, τὸ σημεῖον δὲ ὅπου ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας συναντᾷ τὴν ἕλικα, ἔστω τὸ Θ. Ὑπερέχει λοιπὸν ἡ ΑΗ τῆς ΑΘ ἴσον, ὅσον ὑπερέχει ἡ ΑΘ τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ περιέχουσι μεταξύ των ἴσας γωνίας (θ. 12)· ὥστε εἶναι ΑΗ + ΑΓ = 2 ΑΘ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι



μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τῆς διχοτόμου [τῆς ΑΘ] τῆς γωνίας (ΓΑΗ) τοῦ τριγώνου (ΓΑΗ)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι, τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ΑΘ συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΓΗ θὰ κῆται μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Α· τέμνει ἄρα ἡ ΕΖ τὴν ἕλικα, ἐπειδὴ σημεῖόν τι ἐκ τῶν *τι τῶν ἐν τᾷ ΓΘΗ σαμείων ἐντός ἐστι τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα· καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ΕΖ τᾶς ἕλικος.*

ιδ'

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομενᾶν τᾶν περιφερειᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος.

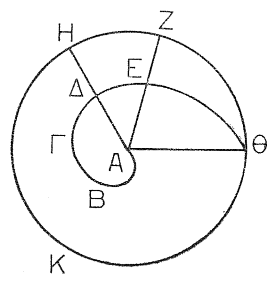
ἔστω ἕλιξ ἁ ΑΒΓΔΕΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ Α σαμεῖον, ἁ δὲ ΘΑ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς ἔστω, καὶ κύκλος ὁ ΘΚΗ ἔστω ὁ πρῶτος, ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ Α σαμείου ποτὶ τὰν ἕλικα αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν.

H 52 *περιαγομένας γὰρ τᾶς ΑΘ γραμμᾶς δῆλον, ὡς τὸ μὲν Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείας ἐνηνεγμένον ἐστὶν ἰσοταχέως, τὸ δὲ Α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ΑΘ γραμμὰν πορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν, τὸ δὲ Α τὰν ΑΕ εὐθεῖαν, καὶ πάλιν τό τε Α σαμεῖον τὰν ΑΔ γραμμὰν καὶ τὸ Θ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ* τοῦ τμήματος ΓΘΗ κεῖται ἐντὸς τῆς ἕλικος. Εἶχε δὲ ληφθῆ ὡς ἐφαπτομένη· εἰς ἓν ἄρα μόνον σημεῖον ἐφάπτεται ἡ ΕΖ τῆς ἕλικος.

14

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν προσπέσωσιν ἐκ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἕλικος, δύο εὐθεῖαι, καὶ προεκβληθῶσιν αὗται μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ πρώτου κύκλου, αἱ πρὸς τὴν ἕλικα προσπίπτουσαι εὐθεῖαι θὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ τόξα τὰ μεταξὺ τοῦ πέρατος τῆς ἕλικος καὶ τῶν περάτων τῶν προεκβληθεισῶν εὐθειῶν τῶν διηκουσῶν μέχρι τῆς περιφερείας, τῶν τόξων λαμβανομένων ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἕλικος μὲ διεύθυνσιν καθ' ἣν γράφεται ἡ ἕλιξ.

Ἔστω ἡ ἕλιξ Α Β Γ Δ Ε Θ γεγραμμένη ἐκ τῆς πρώτης περιφορᾶς, ἀρχὴ δὲ τῆς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ σημεῖον Α, ἡ δὲ εὐθεῖα ΘΑ ἔστω ἡ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, καὶ ἔστω πρῶτος κύκλος ὁ ΘΚΗ, προσπίπτουσαι δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν ἕλικα εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ καταλήγουσαι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΔ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ.



Διότι περιφερομένης τῆς γραμμῆς ΑΘ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μὲν σημεῖον Θ ἔχει διανύσει ἰσοταχῶς τὸ τόξον ΘΚΗ ,τὸ δὲ σημεῖον Α κινούμενον εὐθυγράμμως διανύει τὴν γραμμὴν ΑΘ, καὶ τὸ σημεῖον Θ κινούμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου διανύει τὸ τόξον ΘΚΖ, ἐν ᾧ τὸ Α διανύει τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, καὶ πάλιν καὶ τὸ σημεῖον Α διανύει τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΑΔ καὶ τὸ σημεῖον Θ διανύει τὸ τόξον ΘΚΗ, ἑκάτερον κινούμενον (εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον) ἰσοταχῶς· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΕ πρὸς τὴν *τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις].*

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

ιε΄

Εἰ δέ κα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΘ, ἁ μὲν ΑΒΓΔΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ ΘΛΕΜ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΛ. δεικτέον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΛ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ ΘΚΗ μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ Α σαμεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ΑΛ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ Θ σαμεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ
H 54 *πάλιν τὸ Α σαμεῖον τὰν ΑΕ εὐθεῖαν καὶ τὸ Θ ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν καὶ ἔτι τὰν ΘΚΗ, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΛ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας.*

τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι

ΑΔ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ [διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ προηγούμενα], (θεώρ. 2).

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι συμβαίνει τὸ αὐτό, ἂν ἡ μία τῶν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν προσπίπτῃ εἰς τὸ πέρας τῆς ἕλικος.

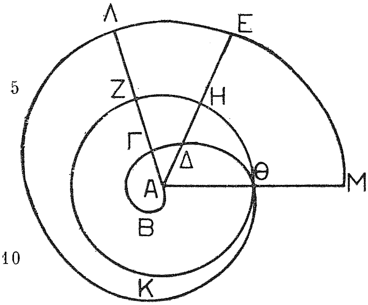
15

Ἐὰν δὲ εὐθεῖαι προσπέσωσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος εἰς τὴν ἐκ δευτέρας περιφορᾶς γεγραμμένην ἕλικα, θὰ ἔχωσιν τὸν αὐτὸν λόγον αἱ εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἔχουσι τὰ εἰρημένα τόξα εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει προστεθῇ ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Ἔστω ἕλιξ ἡ ΑΒΓΔΘ, ἡ μὲν ΑΒΓΔΘ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἡ δὲ ΘΛΕΜ κατὰ τὴν δευτέραν καὶ αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΛ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΑΕ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Διότι εἰς ἴσον χρόνον τὸ σημεῖον Α κινούμενον εὐθυγράμμως διανύει τὴν γραμμὴν ΑΛ, καὶ τὸ σημεῖον Θ κινούμενον κυκλικῶς διανύει ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου σὺν τὸ τόξον ΘΚΖ, καὶ πάλιν τὸ σημεῖον Α διανύει τὴν εὐθεῖαν ΑΕ καὶ τὸ σημεῖον Θ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου σὺν τὸ τόξον ΘΚΗ, ἑκάτερον ἰσοταχῶς (εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον) διαγράφον τὴν κίνησίν του· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γραμμὴ ΑΛ πρὸς τὴν ΑΕ, ὃν ἔχει τὸ τόξον ΘΚΖ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τόξον ΘΚΗ σὺν ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν ἕλικα τὴν γεγραμμένην ἐκ τῆς τρίτης περιφορᾶς προσπέσωσιν εὐθεῖαι, θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἔχουσι τὰ εἰρημένα τόξα *περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαυτάκις λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἑνὶ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴ κα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑτέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.*



ιϛ'

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τὰς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀνίσοι ἐσσοῦνται καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα.

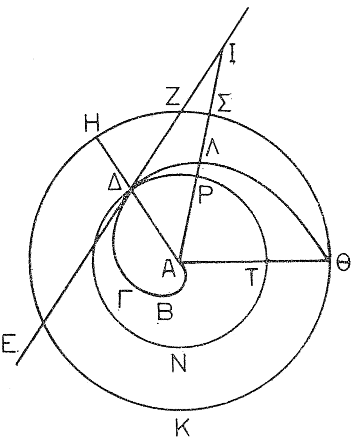
H 56 *ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν Α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΑΘ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὅ τε πρῶτος κύκλος ὁ ΘΚΗ, ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἁ ΕΔΖ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθω ἁ ΔΑ. δεικτέον, ὅτι ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΑΔ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν.*

γεγράφθω κύκλος ὁ ΔΤΝ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τᾷ ΑΔ· ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτὸς διὰ τὸ τᾶν ἀπὸ τοῦ Α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτουσᾶν εὐθειᾶν τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μεί-

σὺν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου λαμβανομένην δίς· ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τὰς ἑπομένας ἕλικας προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ διανυόμενα τόξα σὺν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου λαμβανομένην τόσας φοράς, ὅσας δεικνύει ὁ ἀριθμὸς τῶν περιφορῶν μεῖον ἕν, καὶ ἂν ἀκόμη ἡ μία ἐκ τῶν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν προσπίπτῃ εἰς τὸ πέρας τῆς ἕλικος.

16

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται ἕλικος γεγραμμένης ἐκ τῆς πρώτης περιφορᾶς, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἕλικος, αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀχθείσης εὐθείας θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ μὲν προηγουμένη θὰ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἑπομένη θὰ εἶναι ὀξεῖα.



Ἔστω ἕλιξ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Θ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, καὶ ἔστω τὸ μὲν σημεῖον Α ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΘ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, καὶ ὁ πρῶτος κύκλος ὁ ΘΚΗ, ἃς ἐφάπτηται δὲ τῆς ἕλικος εὐθεῖά τις γραμμὴ ἡ ΕΔΖ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἃς ἀχθῇ εἰς τὸ Α ἡ εὐθεῖα ΔΑ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΖ μετὰ τῆς ΑΔ σχηματίζει γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Ἃς γραφῇ ὁ κύκλος ΔΤΝ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ· εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον τὸ μὲν προηγούμενον τοῦ κύκλου τούτου τόξον νὰ πίπτῃ ἐντὸς τῆς ἕλικος, τὸ δὲ ἑπόμενον νὰ πίπτῃ ἐκτός, διότι ἐκ τῶν ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὴν ἕλικα προσπιπτουσῶν εὐθειῶν αἱ *ζονας εἶμεν τᾶς ΑΔ, τὰς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον, ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου, ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἔστι, δεικτέον οὕτως· ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά· ἁ ἄρα ΕΔΖ ἐπιψαύει τοῦ ΔΤΝ κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ, ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς* H 58 *ποτιπιπτούσας περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ ΑΙ· τεμεῖ δὴ αὕτα τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Λ, τὰν δὲ τοῦ ΔΝΤ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ρ· καὶ ἐχέτω ἁ ΡΙ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν· καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν, τουτέστιν ὃν ἔχει ἁ ΣΗΚΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ ΣΗΚΘ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΑΛ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΔ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΙ ποτὶ τὰν ΑΡ ἤπερ ἁ ΛΑ ποτὶ τὰν ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον· ἴσα γὰρ ἁ ΡΑ τᾷ ΑΔ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖά ἐστιν.*

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

ιζ′

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ΕΖ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ μὲν εἰς τὰ προηγούμενα (τόξα) εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΔ, αἱ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα εἶναι μικρότεραι. Ὅτι μὲν λοιπὸν ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ δὲν εἶναι ὀξεῖα, εἶναι φανερόν, ἐπειδὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας τῆς βαινούσης ἐπὶ ἡμικυκλίου, ὅτι δὲ δὲν εἶναι ὀρθή, θὰ ἀποδειχθῇ ὡς ἑξῆς· διότι ἔστω, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅτι εἶναι ὀρθή· ἡ ΕΔΖ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΔΤΝ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 16, πόρ.). Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Α νὰ προεκβάλωμεν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου νὰ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τῆς προσπιπτούσης τόξον, πρὸς τὸ δοθὲν τόξον (θ. 5). Ἂς προεκβληθῇ λοιπὸν μέχρι τῆς ἐφαπτομένης ἡ ΑΙ· θὰ τμήσῃ λοιπὸν αὕτη τὴν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Λ, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΝΤ κατὰ τὸ Ρ· καὶ ἂς ἔχῃ ἡ εὐθεῖα ΡΙ πρὸς τὴν ΑΡ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τόξον ΔΡ πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΙΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΡΔΝΤ πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ, τουτέστι μικρότερον τοῦ ὃν ἔχει τὸ τόξον, ΣΗΚΘ πρὸς τὸ τόξον ΗΚΘ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τόξον ΣΗΚΘ πρὸς τὸ τόξον ΗΚΘ, τοῦτον ἔχει ἡ εὐθεῖα ΑΛ πρὸς τὴν ΑΔ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 14)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΑΙ πρὸς τὴν ΑΡ τοῦ λόγου τῆς ΛΑ πρὸς ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἡ ΡΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (Εὐκλ. V, 8). Δὲν εἶναι ἄρα ὀρθὴ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ. Ἀπεδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὀξεῖα· εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα. Ὥστε ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ὀξεῖα.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι θὰ συμβαίνῃ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἕλικος ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας αὐτῆς.

17

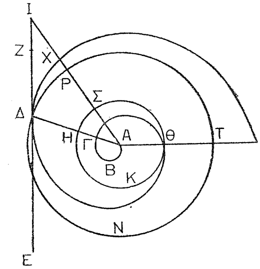
Καὶ πάλιν τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν.

Διότι ἂς ἐφάπτηται ἡ εὐθεῖα ΕΖ τῆς κατὰ τὴν δευτέραν περιφο-

γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ Δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφερείας τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός· ἁ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά· ἐπιψαύσει δὴ ἁ ΕΖ τοῦ ΡΝΔ κύκλου κατὰ τὸ Δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ ΑΙ καὶ τεμ-
H 60 νέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Χ, τὰν δὲ τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ρ, ἐχέτω δὲ ἁ ΡΙ ποτὶ ΡΑ ἐλάσσονα λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ ΔΡΝ κύκλου περιφέρειαν καὶ [ποτὶ] τὰν ΔΝΤ· δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν· καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφερείας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΣΗΚΘ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς ΘΣΗΚ ποτὶ τὰν ΗΚΘ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΘΣΗΚ κύκλου περιφερείας, ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΧΑ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΔ εὐθεῖαν· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΑΧ ποτὶ τὰν ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον [ἴση μὲν γὰρ ἡ ΡΑ τῇ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΙΑ τῆς ΑΧ]. δῆλον οὖν, ὅτι ἀμβλεῖά ἐστιν ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔΖ· ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖά ἐστι.

τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, καὶ εἴ κα ἁ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ.

H 62 ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα, καὶ εἴ κα ρὰν γεγραμμένης ἕλικος κατὰ τὸ Δ, καὶ τὰ ἄλλα ἃς κατασκευασθῶσι ὡς καὶ προηγουμένως (θ. 16). Ὁμοίως λοιπὸν τὰ μὲν προηγούμενα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΡΝΔ θὰ πέσωσιν ἐντὸς τῆς ἕλικος, τὰ δὲ ἑπόμενα ἐκτός· ἡ γωνία λοιπὸν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ δὲν εἶναι ὀρθή, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι ὀρθή· θὰ ἐφάπτηται λοιπὸν ἡ ΕΖ τοῦ κύκλου ΡΝΔ κατὰ τὸ Δ (Εὐκλ. III, 16, πόρ.). Ἃς ἀχθῇ λοιπὸν πάλιν μέχρι τῆς ἐφαπτομένης ἡ ΑΙ καὶ ἃς τέμνῃ τὴν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Χ, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΡΝΔ κατὰ τὸ Ρ, ἃς ἔχῃ δὲ ἡ ΡΙ πρὸς τὴν ΡΑ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τόξον ΔΡ πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΡΝ σὺν τὸ τόξον ΔΝΤ· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατὸν (θ. 5)· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΙΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΡΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Ἀλλ' ὃν λόγον ἔχει τὸ τόξον ΡΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΝΤΡ πρὸς τὸ τόξον ΔΝΤ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΔΝΤΡ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τόξον ΣΗΚΘ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΣΗΚ πρὸς τὸ τόξον ΗΚΘ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΣΗΚ, ὃν δὲ λόγον ἔχουσι τὰ ὕστερον λεχθέντα τόξα, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ εὐθεῖα ΧΑ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 15)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΙΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ ἡ ΑΧ πρὸς τὴν ΑΔ· ὅπερ ἀδύνατον [διότι ἡ μὲν ΡΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΙΑ τῆς ΑΧ]. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ εἶναι ἀμβλεῖα· ὥστε ἡ ὑπόλοιπος θὰ εἶναι ὀξεῖα.



Τὰ αὐτὰ δὲ θὰ συμβῶσιν, καὶ ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας τῆς ἕλικος.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτηται ἕλικος γεγραμμένης καθ' οἱανδήποτε περιφοράν, ἢ ἀκόμη *κατὰ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖαν.*

ιη'

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

ἔστω ἕλιξ ἁ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ Α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΑ γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΘΗΚ κύκλος ὁ πρῶτος, ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ Θ ἁ ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΘΑ ἁ ΑΖ· συμπεσεῖται δὴ αὔτα ποτὶ τὰν ΘΖ, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΘΑ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχοντι. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. δεικτέον, ὅτι ἁ ΖΑ ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείᾳ.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας H 64 *μείζονα. ἔστιν δὴ κύκλος τις ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΘΗ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΛ, μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν, διότι καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΖ· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν ΑΝ, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ΝΡ ποτὶ ΘΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· ἕξει οὖν ἁ ΝΡ ποτὶ τὰν ΡΑ λόγον, ὃν ἁ ΘΡ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΛ. ἁ δὲ ΘΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ* ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας αὐτῆς, ὅτι ἀνίσους θὰ σχηματίσῃ τὰς γωνίας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθεῖσαν πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος καὶ τὴν μὲν προηγουμένην ἀμβλεῖαν, τὴν δὲ ἑπομένην ὀξεῖαν.

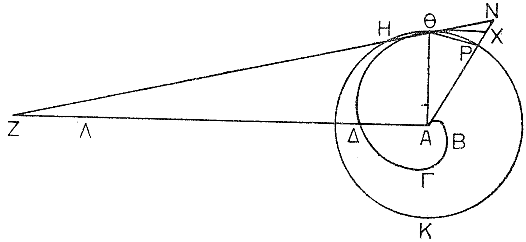
18

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρχὴ τῆς ἕλικος ἀχθῇ κάθετος εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, ἡ ἀχθεῖσα θὰ συναντήσῃ τὴν ἐφαπτομένην, καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ πρώτου κύκλου.

Ἔστω ἕλιξ ἡ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ σημεῖον Α ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἡ δὲ ΘΑ γραμμὴ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, πρῶτος δὲ κύκλος ὁ ΘΗΚ, ἃς ἐφάπτηται δὲ τῆς ἕλικος κατὰ τὸ Θ εὐθεῖά τις ἡ ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΑ ἡ ΑΖ· θὰ συναντήσῃ δὲ αὕτη τὴν ΘΖ, ἐπειδὴ αἱ ΖΘ, ΘΑ σχηματίζουσι γωνίαν ὀξεῖαν (θ. 16, Εὐκλ. Ι, αἴτ. 5). Ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Ζ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΚΗ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα. Ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλυτέρα. Λαμβάνω τώρα εὐθεῖάν τινα τὴν ΛΑ μικροτέραν μὲν τῆς εὐθείας ΖΑ, μεγαλυτέραν δὲ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ (θ. 4). Ὑπάρχει λοιπὸν κύκλος τις ὁ ΘΗΚ καὶ εἰς τὸν κύκλον χορδὴ ἡ ΘΗ μικροτέρα τῆς διαμέτρου καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς ΑΛ μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ΗΘ πρὸς τὴν ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν κάθετον, διότι ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι μεγαλύτερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς ΑΖ· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Α νὰ προεκβληθῇ εὐθεῖα πρὸς τὴν προέκτασιν (τῆς ΖΘ) ἡ ΑΝ, ὥστε ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἐκβεβλημένης ἡ ΝΡ πρὸς τὴν ΘΡ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΛ (θ. 7)· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΝΡ πρὸς τὴν ΡΑ, λόγον, ὃν ἔχει ἡ εὐθεῖα ΘΡ πρὸς τὴν ΑΛ. Ἡ δὲ ΘΡ πρὸς τὴν ΑΛ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύ-

ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἁ μὲν γὰρ ΘΡ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζων· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ΝΡ

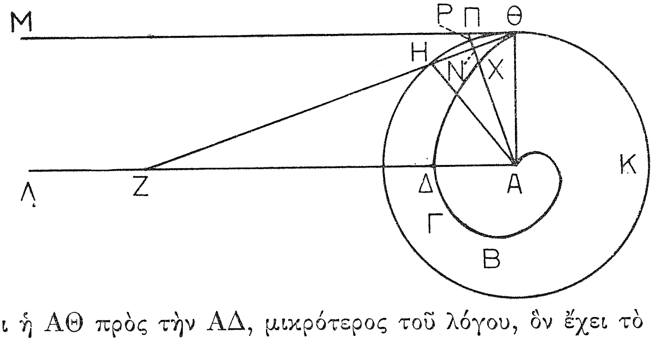


ποτὶ ΡΑ ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· καὶ ὅλα οὖν ἁ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἤπερ ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ· ὅπερ ἀδύνατον· ἁ μὲν γὰρ ΝΑ μείζων ἐστὶ τᾶς ΑΧ, ἁ δὲ ΑΡ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΘΑ. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ ΘΗΚ.

ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν ΑΛ τᾶς μὲν ΑΖ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας
H 66 ἐλάσσονα, καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ Θ τὰν ΘΜ παράλληλον τᾷ ΑΖ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ ΘΗ καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Θ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΑΘ ποτὶ τὰν ΑΔ, ἐλάσσων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν, ἐπειδὴ καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΖ, ἐλάσσων ἐστί· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν τὰν ΑΠ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν ΡΝ τὰν μεταξὺ τᾶς

κλου ΘΗΚ· διότι ἡ μὲν εὐθεῖα ΘΡ εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΘΡ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΛ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν μικρότερον λόγον καὶ ἡ ΝΡ πρὸς ΡΑ ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ· καὶ ὅλη λοιπὸν ἡ ΝΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΘΡ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τόξον ΘΡ σὺν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ, τοῦτον ἔχει ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΘ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 15)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΝΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΘ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἡ μὲν ΝΑ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΧ, ἡ δὲ ΑΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΑ. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΖΑ μεγαλυτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ.

Ἔστω τώρα πάλιν, εἰ δυνατόν, ἡ ΖΑ μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ. Λαμβάνω πάλιν εὐθεῖάν τινα τὴν ΑΛ μεγαλυτέραν μὲν τῆς ΑΖ, μικροτέραν δὲ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ καὶ φέρω ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΖ. Ὑπάρχει λοιπὸν πάλιν ὁ κύκλος ΘΗΚ καὶ εἰς αὐτὸν χορδὴ μικροτέρα τῆς διαμέτρου ἡ ΘΗ καὶ ἄλλη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Θ καὶ λόγος, ὃν



ἔχει ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΑΔ, μικρότερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ΗΘ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἐπειδὴ εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς ΑΖ· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ἡ εὐθεῖα ΑΠ, ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΠ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· τεμεῖ δὴ ἁ ΑΠ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ΝΡ ποτὶ ΡΑ, ὃν ἁ ΘΠ ποτὶ ΑΛ. ἁ δὲ ΘΠ ποτὶ τὰν ΑΛ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἁ μὲν γὰρ ΘΠ εὐθεῖα μείζων ἐστὶν τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ ἐλάσσων τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΠΡ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἁ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΘΑ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΧ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ ἢ ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΧ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα H 68 μείζων ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· ἴσα ἄρα.

ιθ′

Εἰ δέ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὕτα ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας.

ἔστω γὰρ ἁ μὲν ΑΒΓΘ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ ΘΕΤ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ὁ μὲν ΘΚΗ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ ΤΜΝ ὁ δεύτερος, ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ Τ ἁ ΤΖ, ἁ δὲ ΖΑ ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ ΤΑ· συμπεσεῖται δὲ αὕτα τᾷ ΤΖ διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν ἐοῦσαν τὰν ὑπὸ τᾶν ΑΤΖ. δεικτέον, ὅτι ἁ ΖΑ εὐθεῖα διπλασία ἐντὶ τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας.

ὥστε ἡ ΡΝ ἡ κειμένη μεταξὺ τῆς εἰς τὸν κύκλον εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν ΘΠ, ἥτις ἀπομένει ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΛ (θ. 8)· θὰ τμήσῃ λοιπὸν ἡ ΑΠ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὴν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ θὰ ἔχῃ καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. V, 16) τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΝΡ πρὸς ΡΑ, ὃν ἔχει ἡ ΘΠ πρὸς ΑΛ. Ἡ δὲ ΘΠ πρὸς τὴν ΑΛ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ· διότι ἡ μὲν εὐθεῖα ΘΠ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τόξου ΘΡ, ἡ δὲ ΑΛ εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ· ἔχει ἄρα μεγαλύτερον λόγον ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ τὸ τόξον ΘΡ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΗΚ· ὥστε καὶ ἡ ΡΑ πρὸς τὴν ΑΝ ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ΘΗΚ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ΘΗΚ πρὸς τὸ τόξον ΘΚΡ, τοῦτον ἔχει ἡ εὐθεῖα ΘΑ πρὸς τὴν ΑΧ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 14)· ἔχει ἄρα μεγαλύτερον λόγον ἡ ΡΑ πρὸς τὴν ΑΝ ἢ ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΧ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα οὔτε μικροτέρα ἡ ΖΑ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΘΗΚ· εἶναι ἄρα ἴση.

19

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται εἰς τὸ πέρας ἕλικος γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, θὰ συναντήσῃ αὕτη τὴν ἐφαπτομένην, καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος διπλασία τῆς περιφερείας τοῦ δευτέρου κύκλου.

Διότι ἔστω ἡ μὲν ἕλιξ ΑΒΓΘ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἡ δὲ ΘΕΤ κατὰ τὴν δευτέραν, καὶ ὁ μὲν κύκλος ΘΚΗ ὁ πρῶτος, ὁ δὲ ΤΜΝ ὁ δεύτερος, ἔστω δὲ ἐφαπτομένη τῆς ἕλικος κατὰ τὸ σημεῖον Τ ἡ ΤΖ, ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΖΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΤΑ· θὰ συναντήσῃ δὲ αὕτη τὴν ΤΖ διότι ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ γωνία τῶν ΑΤ, ΤΖ εἶναι ὀξεῖα (θ. 17). Πρέπει νὰ δειχθῆ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι διπλασία τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ.

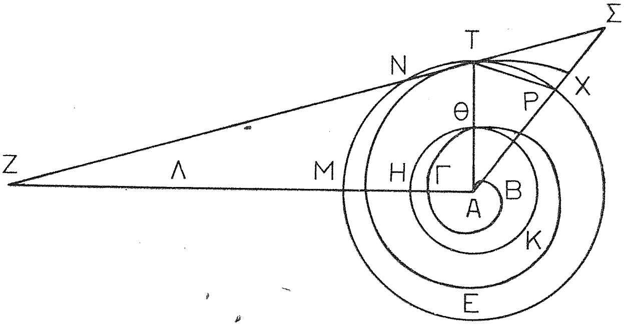
εἰ γὰρ μή ἐστιν διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ διπλασία, καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα ἁ ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστιν δή τις κύκλος ὁ ΤΜΝ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ δεδομένα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΤΝ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΤΑ ποτὶ τὰν ΑΛ, μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΤΝ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν τὰν ΑΣ ποτὶ τὰν ΤΝ H 70 *ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ΡΣ ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΤΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· τεμεῖ δὴ ἁ ΑΣ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΡΣ ποτὶ τὰν ΤΑ, ὃν ἁ ΤΡ ποτὶ τὰν ΑΛ. ἁ δὲ ΤΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΤΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφέρειαν· ἔστιν γὰρ ἁ μὲν ΤΡ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς ΤΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΡΣ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΤΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας· ὅλα οὖν ἁ ΣΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΤΡ περιφέρεια μετὰ τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας ποτὶ τὰν τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΤ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΣ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΤΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ΖΑ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΤΜΝ κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστίν.*

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι διπλασία, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διπλασίας ἢ μικροτέρα τῆς διπλασίας. Ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλυτέρα τῆς διπλασίας καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΛΑ τῆς μὲν εὐθείας ΖΑ μικροτέρα, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ διπλασίου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ (θ. 4). Ὑπάρχει λοιπὸν κύκλος ὁ ΤΜΝ καὶ εἰς τὸν κύκλον γραμμὴ (χορδὴ) δεδομένη ἡ ΤΝ μικροτέρα τῆς διαμέτρου, καὶ ὑπάρχει λόγος ὃν ἔχει ἡ ΤΑ πρὸς τὴν ΑΛ, μεγαλύτερος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ΤΝ πρὸς τὴν ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν κάθετον· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ προεκβληθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΣ πρὸς τὴν προέκτασιν τῆς ΤΝ, ὥστε ἡ μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς προεκταθείσης ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΤΡ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΤΑ πρὸς τὴν ΑΛ· θὰ τμήσῃ δὲ ἡ ΑΣ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὴν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ ἐναλλὰξ θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΤΑ, ὃν ἔχει ἡ ΤΡ πρὸς τὴν ΑΛ (Εὐκλ. V, 16). Ἡ δὲ ΤΡ πρὸς τὴν ΑΛ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΤΡ πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ· διότι ἡ μὲν χορδὴ ΤΡ εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΤΡ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΛ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ τὸ τόξον ΤΡ πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ· ὅλη λοιπὸν ἡ ΣΑ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΤΡ σὺν τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ. Ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΑΤ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 15)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΑΡ ἢ ἡ ΧΑ πρὸς τὴν ΤΑ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΑ μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΤΜΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα τοῦ διπλασίου. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι διπλασία.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτηται ἕλικος εἰς τὸ πέρας αὐτῆς, γεγραμμένης καθ' οἱανδήποτε

τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ'
ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν
H 72 *ἐπιψαύουσαν, ὅτι πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς τοῦ κύκλου πε-*



ριφερείας τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

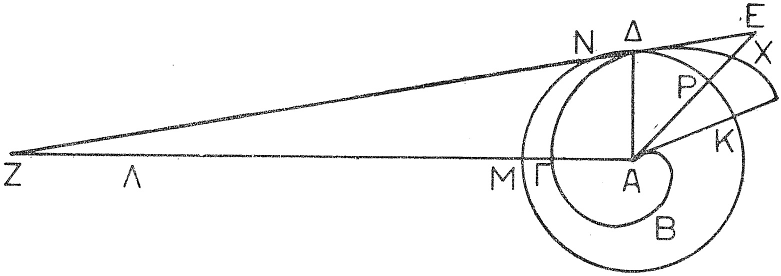
κ'

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ, συμπεσεῖται αὕτα ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ἂν τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σαμείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ ΕΖ κατὰ τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπεζεύχθω ἁ ΑΔ, καὶ περιφοράν, καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος εὐθεῖα ἀγομένη κάθετος συναντᾷ τὴν ἐφαπτομένην, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἀχθείσης καθέτου εἶναι πολλαπλάσιον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ δι' οὗ καὶ αἱ περιφοραί, κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν.

20

'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται ἕλικος γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ὄχι εἰς τὸ πέρας τῆς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος, ἀκτῖνα δὲ τὴν ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν γραφῇ κύκλος, ἀπὸ δὲ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος ἀχθῇ εὐθεῖά τις κάθετος πρὸς τὴν ἀχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς μέχρι τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος, θὰ συναντήσῃ αὕτη τὴν ἐφαπτομένην καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς συναντήσεως καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος ἴση πρὸς τὸ τόξον τοῦ γραφέντος κύκλου τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τῆς τομῆς, καθ' ἣν ὁ γραφεὶς κύκλος τέμνει τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν τῆς περιφορᾶς,



τοῦ τόξου λογιζομένου ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν περιφορᾶς καὶ ἑξῆς (κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν περιφορῶν).

"Εστω ἕλιξ, τῆς ὁποίας τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒΓΔ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, καὶ ἂς ἐφάπτηται αὐτῆς εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Δ, ἂς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος ἡ ΑΔ, κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΜΝ, τεμνέτω δ' οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ Κ, ἄχθω δὲ ἁ ΖΑ ποτὶ τὰν ΑΔ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὕτα συμπίπτει, δῆλον· ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΖΑ εὐθεῖα τᾷ ΚΜΝΔ περιφερείᾳ, δεικτέον.

H 74 εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον μείζων, λελάφθω δέ τις ἁ ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ ΚΜΝΔ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ ΚΜΝ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΔΝ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ ΑΛ, μείζων τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΔΝ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν τὰν ΑΕ ποτὶ τὰν ΝΔ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ΕΡ ποτὶ τὰν ΔΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν· ἕξει οὖν καὶ ἁ ΕΡ ποτὶ τὰν ΑΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΡ ποτὶ τὰν ΑΛ. ἁ δὲ ΔΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν, ἐπεὶ ἁ μὲν ΔΡ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΔΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ μείζων τᾶς ΚΜΔ περιφερείας· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ΕΡ εὐθεῖα ποτὶ ΡΑ ἢ ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἁ ΑΕ ποτὶ ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΚΜΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΚΜΡ ποτὶ τὰν ΚΜΔ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΧΑ ποτὶ ΑΔ· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΕΑ ποτὶ ΑΡ ἢ ἁ ΑΧ ποτὶ ΔΑ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ΖΑ τᾶς ΚΜΔ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν· ἴσα ἄρα.

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν
H 76 συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ

καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΔΜΝ, ἂς τέμνῃ δὲ οὗτος τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς κατὰ τὸ Κ, ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΖΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ὅτι μὲν λοιπὸν αὕτη συναντᾷ τὴν ἐφαπτομένην εἶναι φανερόν· ὅτι δὲ ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι καὶ ἴση πρὸς τὸ τόξον ΚΜΝΔ πρέπει νὰ δειχθῇ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα. Ἔστω πρῶτον, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μεγαλυτέρα, ἂς ληφθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἡ ΛΑ τῆς μὲν εὐθείας ΖΑ μικροτέρα, τοῦ δὲ τόξου ΚΜΝΔ μεγαλυτέρα (θ. 4). Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχει κύκλος ὁ ΚΜΝ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἡ χορδὴ ΔΝ μικροτέρα τῆς διαμέτρου καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΛ, μεγαλύτερος τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἥμισυ τῆς ΔΝ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀχθεῖσαν ἐπ' αὐτὴν κάθετον· εἶναι λοιπὸν δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Α νὰ προεκβληθῇ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν προεκβληθεῖσαν ΝΔ, ὥστε ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΔΡ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΛ· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατὸν (θ. 7)· θὰ ἔχῃ λοιπὸν καὶ ἡ ΕΡ πρὸς τὴν ΑΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΡ πρὸς τὴν ΑΛ (Εὐκλ. V, 16). Ἡ δὲ ΔΡ πρὸς τὴν ΑΛ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΔΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ, ἐπειδὴ ἡ μὲν χορδὴ ΔΡ εἶναι μικροτέρα τοῦ τόξου ΔΡ, ἡ δὲ ΑΛ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τόξου ΚΜΔ· ἔχει λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΕΡ πρὸς τὴν ΡΑ μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΔΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΡ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τόξον ΚΜΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τόξον ΚΜΡ πρὸς τὸ τόξον ΚΜΔ, τοῦτον ἔχει ἡ ΧΑ πρὸς ΑΔ (θ. 14)· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ἡ ΕΑ πρὸς ΑΡ ἢ ἡ ΑΧ πρὸς ΔΑ· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα ἡ ΖΑ τοῦ τόξου ΚΜΔ. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· εἶναι ἄρα ἴση.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται ἕλικος οὐχὶ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἕλικος, γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, γίνῃ δὲ κατὰ τὰ ἄλλα ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῆς συναντήσεως τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ γραφέντος κύ-γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων, ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας· καὶ εἴ κα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας κατὰ τὸν ἑνὶ ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ, καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένᾳ.

κα′

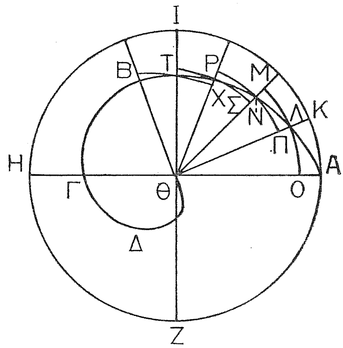
Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Θ σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ ΘΑ, ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ΖΗΙΑ, αἱ δὲ ΑΗ, ΖΙ διαμέτροι αὐτοῦ ποτ' ὀρθὰς ἀλλάλαις. ἀεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν
H 78 γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ ΑΘΚ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρήσθωσαν δὴ αἱ γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾷ περιεχομένᾳ ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΚ, καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστε ποτὶ τὰν ἕλικα ἄχθωσαν. καθ' ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἁ ΘΚ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ Λ, καὶ κέντρῳ τῷ Θ,

κλου σὺν τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σημείων, λαμβανόμενον ὡς προηγούμενως· καὶ ἂν ἀκόμη εὐθεῖά της ἐφάπτηται ἕλικος γεγραμμένης καθ' οἱανδήποτε περιφοράν, οὐχὶ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἕλικος, κατὰ τὰ ἄλλα δὲ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σημείων εὐθεῖα εἶναι πολλαπλάσιον μεῖον ἕν, τῆς περιφερείας τοῦ γραφέντος κύκλου, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιφορῶν, σὺν τὸ τόξον, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν εἰρημένων σημείων, λαμβανόμενον ὁμοίως.

21

Ἐὰν λάβῃ τις τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς πρώτης κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, εἶναι δυνατὸν περὶ αὐτὴν νὰ περιγράψῃ ἐπίπεδον σχῆμα καὶ ἄλλο νὰ ἐγγράψῃ ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγεγραμμένου μικρότερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.



Ἔστω ἕλιξ, ἡ ΑΒΓΔ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τῆς ἕλικος τὸ σημεῖον Θ, ἀρχὴ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ ΘΑ, ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ΖΗΙΑ, αἱ δὲ διάμετροι αὐτοῦ ΑΗ, ΖΙ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ὀρθὴ γωνία διχοτομῆται πάντοτε ἐπίσης δὲ καὶ ὁ τομεὺς ὁ περιέχων τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως θὰ εἶναι μικρότερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας (Εὐκλ. Χ, 1)· καὶ ἔστω ὁ οὕτω προκύψας τομεὺς ὁ ΑΘΚ μικρότερος τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Ἂς διαιρεθῶσι τώρα αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι εἰς γωνίας ἴσας πρὸς τὴν ΑΘΚ καὶ ἂς προεκταθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν σχηματισθεισῶν γωνιῶν μέχρι τῆς ἕλικος. Ἔστω τὸ σημεῖον Λ, καθ' ὃ ἡ ΘΚ τέμνει τὴν ἕλικα, καὶ μὲ

διαστήματι δὲ τῷ ΘΛ κύκλος γεγράφθω· πεσεῖται δὲ αὐτοῦ ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, ἔστε κα συμπέσῃ τᾷ ΘΑ [κατὰ τὸ Ο ἁ ΟΜ] καὶ τᾷ μετὰ τὰν ΘΚ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. πάλιν δὴ καί, καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σαμεῖον ἁ ΘΜ, ἔστω τὸ Ν, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΝ κύκλος γεγράφθω, ἔστε κα συμπέσῃ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου τᾷ ΘΚ καὶ τᾷ μετὰ τὰν ΘΜ ποτιπιπτούσᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα, ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι, κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ Θ, ἔστ' ἂν συμπέσῃ ἑκάστα ἁ περιφέρεια τᾷ τε προαγουμένᾳ εὐθείᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ· ἐσσεῖται δή τι περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου, δειχθήσεται. ἔστιν γὰρ ὁ μὲν ΘΛΟ τομεὺς ἴσος τῷ ΘΜΛ, ὁ δὲ ΘΝΠ τῷ ΘΝΡ, ὁ δὲ ΘΧΣ τῷ ΘΧΤ, ἔστιν δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομέες
H 80 *πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι χωρὶς τοῦ ΘΑΚ τομέως· μόνος γὰρ οὗτος οὐ λέλαπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ΑΚΘ τομεῖ, ὃς ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ προτεθέντος.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν, ὥστε τὸ περιγεγραμ-

κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΛ ἂς γραφῇ κύκλος· θὰ πέσῃ δὲ αὐτοῦ τὸ μὲν προηγούμενον τόξον ἐντὸς τῆς ἕλικος, τὸ δὲ ἑπόμενον ἐκτός. Ἂς γραφῇ λοιπὸν ἡ περιφέρεια (τὸ τόξον) μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΘΑ [κατὰ τὸ σημεῖον Ο τὸ τόξον ΟΜ] καὶ συναντήσῃ ἀκόμη τὴν μετὰ τὴν ΘΚ πρὸς τὴν ἕλικα προσπίπτουσαν εὐθεῖαν. Πάλιν τώρα ἔστω τὸ σημεῖον Ν καθ' ὃ τέμνει τὴν ἕλικα ἡ ΘΜ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΝ ἂς γραφῇ κύκλος μέχρις ὅτου τὸ τόξον τοῦ κύκλου συναντήσῃ τὴν ΘΚ καὶ τὴν μετὰ τὴν ΘΜ προσπίπτουσαν πρὸς τὴν ἕλικα, ὁμοίως δὲ καὶ δι' ὅλων τῶν ἄλλων σημείων, καθ' ἃ τέμνουσι τὴν ἕλικα αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας εὐθεῖαι, ἂς γραφῶσι κύκλοι μὲ κέντρον τὸ Θ, μέχρις ὅτου ἕκαστον τόξον συναντήσῃ τὴν προηγουμένην καὶ τὴν ἑπομένην εὐθεῖαν· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν περὶ τὴν ληφθεῖσαν ἐπιφάνειαν, ἐπιφάνεια περιγεγραμμένη ἀποτελουμένη ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλη ἐγγεγραμμένη. Ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας, θὰ ἀποδειχθῇ. Διότι ὁ μὲν τομεὺς ΘΛΟ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ΘΜΛ, ὁ δὲ ΘΝΠ πρὸς τὸν ΘΝΡ, ὁ δὲ ΘΧΣ πρὸς τὸν ΘΧΤ, εἶναι δὲ καὶ ἕκαστος τῶν ἄλλων τομέων ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἴσος πρὸς τὸν τομέα ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν ἔχοντα κοινὴν πλευράν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων· εἶναι ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ περιγεγραμμένον χωρὶς τὸν τομέα ΘΑΚ· διότι μόνον ὁ τομεὺς οὗτος δὲν ἐλήφθη ἐκ τῶν εἰς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κατὰ τὸν τομέα ΑΘΚ, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου δὲ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν περὶ τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν νὰ γραφῇ σχῆμα, ὡς ἐλέχθη, ὥστε τὸ περιγεγραμ-

μένον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ′

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ’ ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἔστω τὸ μὲν Θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΑΘ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δὲ ΕΑ ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΑΖΗ κύκλος ἔστω δεύτερος καὶ αἱ ΑΓΗ, ΖΙ διαμέτροι αὐτοῦ ποτ’ ὀρθὰς ἀλλάλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας καὶ τοῦ τομέως τοῦ H 82 *τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος· καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ ΘΚΑ τομεὺς ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεισᾶν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνιᾶν εἰς τὰς ἴσας γωνίας τᾷ ὑπὸ τᾶν ΚΘΑ καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι ἢ ὁ τομεὺς ὁ ΘΚΑ· μεῖζον γὰρ ἐσσεῖται τᾷ ὑπεροχᾷ, ᾇ ὑπερέχει ὁ ΘΚΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΡ.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

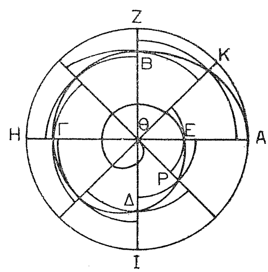
δῆλον οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστιν καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτε-

μένον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ἐπιφανείας μικρότερον οἱασδήποτε προτεθείσης ἐπιφανείας (ὁσονδήποτε μικρᾶς), καὶ πάλιν νὰ ἐγγραφῇ σχῆμα, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ὁμοίως νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μικρότερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

22

Ἐὰν λάβῃ τις τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι δευτέρα ἐκ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, εἶναι δυνατὸν περὶ αὐτὴν νὰ περιγράψῃ ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλο νὰ ἐγγράψῃ, ὥστε τὸ περιγραφὲν νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

Ἔστω ἕλιξ, ἡ ΑΒΓΔΕ, γεγραμμένη κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, καὶ ἔστω τὸ μὲν σημεῖον Θ ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΘ ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, ἡ δὲ ΕΑ ἡ δευτέρα εὐθεῖα ἐκ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ κύκλος ΑΖΗ ἔστω δεύτερος καὶ αἱ διάμετροι αὐτοῦ ΑΓΗ, ΖΙ ἔστωσαν κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Πάλιν λοιπὸν ἀφοῦ διχοτομηθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία καὶ ὁ τομεὺς ὁ περιέχων τὴν ὀρθὴν γωνίαν θὰ εἶναι τὸ καταλειπόμενον μικρότερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας (Εὐκλ. Χ, 1)· καὶ ἔστω ὅτι προέκυψεν ὁ τομεὺς ΘΚΑ μικρότερος τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Διότι ἀφοῦ διαιρεθῶσιν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἰς τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὴν ΚΘΑ καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ὑπερέχῃ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον ἢ ὁ τομεὺς ΘΚΑ· διότι θὰ εἶναι μεγαλύτερον κατὰ τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ τομεὺς ΘΚΑ τοῦ τομέως ΘΕΡ.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ληφθείσης ἐπιφανείας ὀλιγώτερον πάσης προ-

θέντος χωρίου, καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται, ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

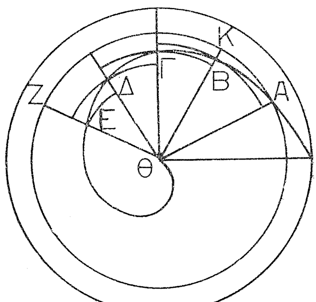
κγ'

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν
H 84 *ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομενᾶν δυνατόν ἐστι περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.*

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΕ. γεγράφθω δὴ κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΑ, καὶ συμπιπτέτω τᾷ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τῷ Θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ ΘΑΖ δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ ΘΑΚ τοῦ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τεθείσης ἐπιφανείας, καὶ πάλιν ἡ ληφθεῖσα ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

Τοῦτο εἶναι φανερὸν ἀποδεικνυόμενον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, διότι εἶναι δυνατὸν ἀφοῦ ληφθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης καθ' οἱανδήποτε περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς λεγομένης κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (τῶν περιφορῶν) νὰ περιγραφῇ σχῆμα, ὡς ἐλέχθη, ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ληφθείσης ἐπιφανείας ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας, καὶ πάλιν νὰ ἐγγραφῇ σχῆμα, ὥστε ἡ ληφθεῖσα ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

23



Ἐὰν ληφθῇ ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἕλικος, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, καὶ δὲν ἔχει πέρας τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἕλικος, εἶναι δυνατὸν περὶ τὴν ἐπιφάνειαν νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλο νὰ ἐγγραφῇ, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἧς τὸ τμῆμα ΑΒΓΔΕ, πέρατα δὲ αὐτῆς τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὴ τῆς ἕλικος τὸ Θ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΘΕ. Ἂς γραφῇ τώρα κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΑ, καὶ ἂς συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Ἐὰν δὲ διχοτομοῦμεν πάντοτε τὴν πρὸς τὸ Θ γωνίαν καὶ τὸν τομέα ΘΑΖ θὰ εἶναι τὸ καταλειπόμενον μικρότερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας. Ἔστω ὁ τομεὺς ΘΑΚ μικρότερος τῆς προτεθείσης. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς προηγουμένως, ἂς γραφῶσι κύκλοι διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνουσι *τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ Θ, ὥστε τᾶν περιφερειᾶν ἑκάσταν συμπίπτειν τᾷ τε προαγουμένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ· ἐσσεῖται δή τι περὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ ΘΑΚ τομεύς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ εἰρη-
H 86 *μένον χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.*

κδ'

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.

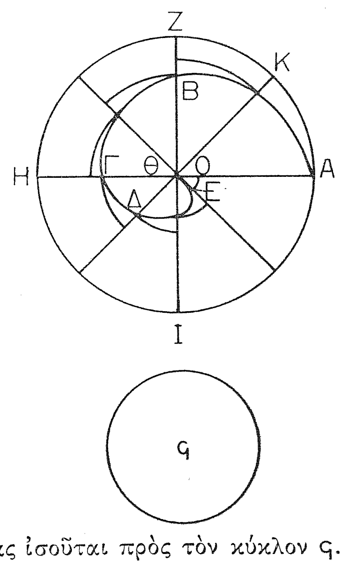
ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΕΘ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν Θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΑ εὐθεῖα πρώτα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΑΚΖΗΙ κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ὁ, ἐν ᾧ ϛ, κύκλος. δεικτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ϛ κύκλῳ.

τὴν ἕλικα αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὸ Θ, ὥστε ἕκαστον τῶν τόξων νὰ συμπίπτῃ πρὸς μίαν προηγουμένην καὶ μίαν ἑπομένην εὐθεῖαν· θὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν περὶ τὴν περιεχομένην ἐπιφάνειαν ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ περιγεγραμμένον ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ περιγεγραμμένον θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀλιγώτερον τῆς προτεθείσης ἐπιφανείας· διότι ὁ τομεὺς ΘΑΚ εἶναι μικρότερος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν περὶ τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον σχῆμα, ὡς ἐλέχθη, νὰ περιγραφῇ, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ἐπιφανείας ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας, καὶ πάλιν νὰ ἐγγραφῇ, ὥστε ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον πάσης προτεθείσης ἐπιφανείας.

24



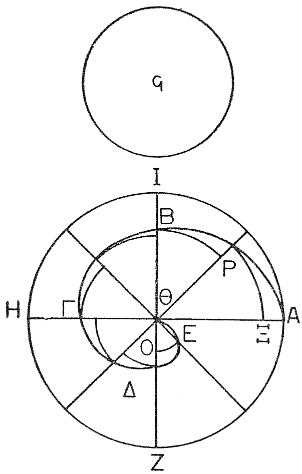
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς πρώτης ἐκ τῶν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ πρώτου κύκλου.

Ἔστω ἡ ἕλιξ ΑΒΓΔΕΘ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, ἔστω δὲ τὸ μὲν σημεῖον Θ ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΘΑ πρώτη ἐκ τῶν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς, ὁ δὲ κύκλος ΑΚΖΗΙ πρῶτος, τοῦ ὁποίου τρίτον μέρος ἔστω ὁ κύκλος ὅπου τὸ γράμμα ς. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς προειρημένης ἐπιφανείας ἰσοῦται πρὸς τὸν κύκλον ς.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστιν περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ϛ κύκλος τοῦ εἰρημένου H 88 *χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν τοῦ ϛ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποτὶ τῷ Θ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι· ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ἆν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ πασᾶν ὁμοίοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ἐλάσσονές ἐντι ἢ τριπλασίοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν· δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ ΑΖΗΙ κύκλῳ, οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι· ἐλάσσων ἄρα ὁ ΑΖΗΙ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἢ τριπλασίων. τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων· ἐλάσσων ἄρα ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ ἔλασσον τοῦ ϛ χωρίου.*

H 90 *οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἔστι*

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω πρῶτον, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μικρότερον. Εἶναι ὅμως δυνατὸν περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς εὐθείας ΑΘ νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα ἀποτελούμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐπιφανείας κατ' ὀλιγώτερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ϛ τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας. Ἂς περιγραφῇ λοιπόν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΕΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου ϛ. Ἂς προεκβληθῶσι λοιπὸν αἱ πρὸς τὸ Θ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου· θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν εὐθεῖαί τινες ἀπὸ τοῦ Θ προσπίπτουσαι πρὸς τὴν ἕλικα ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, καὶ ἡ ἐλαχίστη εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου προσπίπτουσαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς ταύτας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ ὅλας ὅμοιοι τομεῖς, καὶ ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑπερέχουσιν ἴσον ἀλλήλων καὶ ἀπὸ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν μεγίστην· οἱ τομεῖς ἄρα οἱ ἀναγραφέντες ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τομέων τῶν ἀναγραφέντων ἀπὸ τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 10, πόρ.). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ἴσον πρὸς τὸν κύκλον ΑΖΗΙ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ΑΖΗΙ μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ κύκλου ϛ εἶναι τριπλάσιος· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ϛ μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Ὅμως δὲν εἶναι, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος· δὲν εἶναι ἄρα τὸ ἐμβαδὸν *δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ϛ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΡΞ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστιν τοῦ ϛ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστε κα ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἆν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, καί ἐστιν ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ πασᾶν ὁμοίοι τομέες ἀπό τε τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ μείζονές ἐντι ἢ τριπλασίοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας· δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ*



H 92 *τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ ΑΖΗΙ κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι· μείζων ἄρα ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ ϛ κύκλου* τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς ΑΘ μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ϛ.

Ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερον. Διότι ἔστω, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μεγαλύτερον. Εἶναι λοιπὸν πάλιν δυνατὸν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς εὐθείας ΑΘ νὰ ἐγγραφῇ σχῆμα, ὥστε ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ϛ (θ. 21, πόρ.). Ἂς ἐγγραφῇ λοιπόν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΡΞ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ϛ. Ἂς προεκβληθῶσι λοιπὸν αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὸ Θ, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαί τινες ἴσον ἀλλήλων ὑπερέχουσαι, αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἕλικα, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, καὶ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἴση πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΑΖΗΙ προσπίπτουσαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι πρὸς ταύτας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἑκάστη ἴση πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ ὅλας ὅμοιοι τομεῖς καὶ ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην καὶ ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας· οἱ τομεῖς ἄρα οἱ ἀναγεγραμμένοι ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἄνευ τοῦ ἀναγραφέντος ἀπὸ τῆς μεγίστης· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 10, πόρ.). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ἀναγεγραμμένων ἴσον πρὸς τὸν κύκλον ΑΖΗΙ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τομέως, ἴσον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα· εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ΑΖΗΙ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ κύκλου ϛ εἶναι τριπλάσιος· εἶναι ἄρα *τριπλασίων· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων· οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον τὸ ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕΘ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας τοῦ ϛ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστίν [τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας].*

κε΄

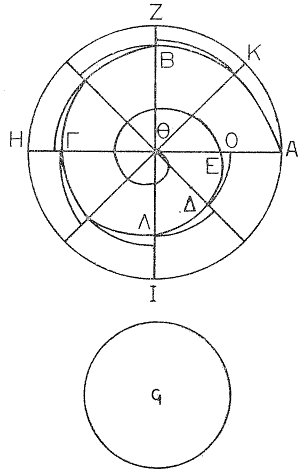
Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ̅ ποτὶ τὰ ιβ̅, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου.

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἔστω δὲ τὸ μὲν Θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΕ εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ ΑΕ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ δευτέρα, ὁ δὲ κύκλος ὁ ΑΖΗΙ ὁ δεύτερος ἔστω, καὶ αἱ ΑΗ, ΙΖ διαμέτροι ποτ' ὀρθὰς ἀλλάλαις. δεικτέον, ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ
H 94 *ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας ποτὶ τὸν ΑΖΗΙ κύκλον λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ̅ ποτὶ ιβ̅.*

ἔστω δή τις κύκλος ὁ ϛ, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ϛ κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ περιεχομένῳ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου· ἕξει δὴ ὁ ϛ ὁ κύκλος ς μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Ὅμως δὲν εἶναι, ἀλλὰ εἶναι μικρότερος· δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μεγαλύτερον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕΘ καὶ τῆς εὐθείας ΑΘ, τοῦ κύκλου ς. Εἶναι ἄρα ἴσον [πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἕλικος καὶ τῆς εὐθείας ΑΘ].

25

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης κατὰ τὴν δευτέραν περιφορὰν καὶ τῆς δευτέρας εὐθείας ἐκ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς πρὸς τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ δώδεκα, ὅστις λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ πρώτου κύκλου σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου κύκλου τῆς ἀκτῖνος τοῦ πρώτου κύκλου, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ δευτέρου κύκλου.



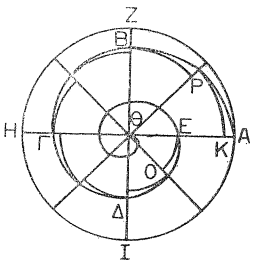
Ἔστω ἕλιξ, ἡ ΑΒΓΔΕ, γεγραμμένη κατὰ τὴν δευτέραν περιφοράν, ἔστω δὲ τὸ μὲν σημεῖον Θ ἀρχὴ τῆς ἕλικος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΘΕ ἡ πρώτη ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ἡ δὲ ΑΕ ἡ δευτέρα ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς, ἔστω δὲ δεύτερος κύκλος ὁ ΑΖΗΙ, καὶ αἱ διάμετροι ΑΗ, ΙΖ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ πρὸς τὸν κύκλον ΑΖΗΙ ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ δώδεκα.

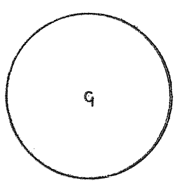
Ἔστω λοιπὸν κύκλος τις ὁ ς, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ἔστω ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ κύκλος ποτὶ τὸν ΑΗΖΙ, ὡς $\overline{\zeta}$ ποτὶ $\overline{\iota\beta}$, διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ϛ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ϛ κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τῷ Θ ἴσας γωνίας, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἇν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ H 96 αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΑΖΗΙ κύκλου περιφέρειαν, ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ὁμοίοι τομέες ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς ἐλαχίστας οὐκ ἀναγράφεται· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομέεσσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσος ὁ ΑΖΗΙ κύκλος, τοῖς δὲ τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ὁ κύκλος ϛ πρὸς τὸν κύκλον ΑΗΖΙ, ὡς ἑπτὰ πρὸς δώδεκα, διότι τὸ τετράγωγον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΖΗΙ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον (Εὐκλ. XII, 2). Θὰ ἀποδειχθῇ λοιπόν, ὅτι ὁ κύκλος ϛ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερος. Εἶναι δὲ δυνατὸν περὶ τὴν ἐπιφάνειαν νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς ἐπιφανείας ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει ὁ κύκλος ϛ τῆς ἐπιφανείας (θ. 22, πόρ.). Ἂς περιγραφῇ, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ τομεὺς ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου. Ἂς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι πρὸς τὸ Θ ἴσας γωνίας, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ δευτέρου κύκλου. Ὑπάρχουσι λοιπὸν εὐθεῖαί τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων (σχηματίζουσαι ἀριθμ. πρόοδον), αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ τοῦ σημείου Θ πρὸς τὴν ἕλικα, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΑΖΗΙ προσπίπτουσαι, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ὀλιγώτεραι τούτων κατὰ μίαν, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην καὶ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν ὅμοιοι τομεῖς, ἀπὸ δὲ τῆς ἐλαχίστης δὲν ἔχει ἀναγραφῇ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην εὐθειῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν, ἄνευ τοῦ τομέως τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης, ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΑ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 11, πόρ.). Εἶναι δὲ πρὸς μὲν ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς $A\Theta$ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $A\Theta$, ΘE καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς AE τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘA ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘA, ΘE καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς AE τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ $AZHI$ κύκλος ποτὶ τὸν ϛ κύκλον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ $AZHI$ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν ϛ κύκλον· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς $AB\Gamma\Delta E$ ἕλικος καὶ τᾶς AZ εὐθείας.

οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων.
H 98 πάλιν οὖν δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς AE εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς $AB\Gamma\Delta E$ ἕλικος καὶ τᾶς AE εὐθείας μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ϛ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘKP τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘEO· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ϛ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ Θ, ἔστ᾽ ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἃν μεγίστα





τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ἴσος ὁ κύκλος ΑΖΗΙ, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ἔχει ἄρα μικρότερον λόγον ὁ κύκλος πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωγον τῆς ΘΑ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ, τοῦτον ἔχει ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸν κύκλον ϛ· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ πρὸς τὸν κύκλον ϛ· ὥστε ὁ κύκλος ϛ εἶναι μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10). Δὲν εἶναι ὅμως, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος· δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ κύκλος ϛ τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΖ.

Οὔτε μικρότερος ὅμως εἶναι. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερος. Πάλιν λοιπὸν εἶναι δυνατὸν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ νὰ ἐγγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ὀλιγώτερον ἢ ὅσον ὑπερέχει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ϛ (θ. 22, πόρ.). Ἂς ἐγγραφῇ λοιπόν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ τομεὺς ΘΚΡ, ἐλάχιστος δὲ ὁ τομεὺς ΘΕΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ϛ. Ἂς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι ἴσας γωνίας πρὸς τὸ Θ, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαί τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων (σχηματίζουσαι ἀριθμ. πρόοδον) αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἕλικα προσπίπτουσαι, ἐκ τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου προσπίπτουσαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ὀλιγώτεραι

μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ὁμοίοι τομέες καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ· οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. ἔστιν δὲ τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας
H 100 ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος· μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνου, τουτέστιν ὁ ΑΖΗΙ κύκλος ποτὶ τὸν ϛ κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶς ΑΕ εὐθείας· ὥστε ἴσος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται καί, διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας ποτὶ τὸν κύκλον τὸν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν ἑνὶ ἐλάσσονα τᾶν περιφορᾶν λεγομένου καὶ τὸ τρίτον μέρος τούτων κατὰ μίαν, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων πρὸς τὴν μεγίστην ὅμοιοι τομεῖς· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης ἀναγεγραμμένου τομέως ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΑ (θ. 11, πόρ.). Εἶναι δὲ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας ὑπερεχουσῶν, ἄνευ τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τομέως, ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σχῆμα, πρὸς τὸ ἄλλο δὲ ἄθροισμα εἶναι ἴσος ὁ κύκλος· ἔχει λοιπὸν μεγαλύτερον λόγον ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ, τουτέστιν ὁ κύκλος ΑΖΗΙ πρὸς τὸν κύκλον ϛ. Εἶναι ἄρα ὁ κύκλος ϛ μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἦτο μικρότερος. Δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικρότερος ὁ κύκλος ϛ τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ· ὥστε εἶναι ἴσος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καί, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης καθ' οἱανδήποτε περιφορὰν καὶ τῆς εὐθείας τῆς ὀνομαζομένης κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν πρὸς τὸν κύκλον τὸν ὀνομαζόμενον πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ὀνομαζομένου κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ὀνομαζομένου κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν περιφορῶν μεῖον ἕν, σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, *τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τῶν εἰρημένων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.*

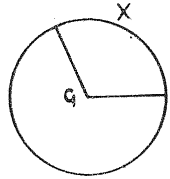
κϛ′

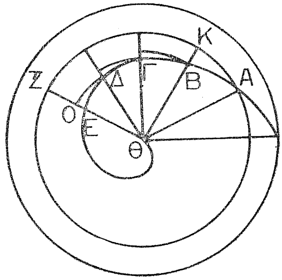
Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας H 102 *τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ περιφέρειαν, ἅ ἐστι μεταξὺ τᾶν εἰρημενᾶν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τᾶν εἰρημενᾶν εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν.*

ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ ΑΒΓΔΕ, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ Θ σαμεῖον, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΑ, κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. δεικτέον, ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ΑΘ, ΘΕ ποτὶ τὸν τομέα τὸν ΑΘΖ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου τῶν εἰρημένων κύκλων τῆς ἀκτῖνος τοῦ μικροτέρου τῶν εἰρημένων, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ μεγαλυτέρου τῶν εἰρημένων κύκλων.

26

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἕλικος, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς γεγραμμένης κατὰ μίαν περιφορὰν καὶ δὲν ἔχει πέρας τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος καὶ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῆς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος, πρὸς τὸν τομέα τὸν ἔχοντα ἀκτῖνα μὲν ἴσην πρὸς τὴν μεγαλυτέραν τῶν ἐκ τῶν περάτων τῆς ἕλικος πρὸς τὴν ἀρχὴν ἀχθεισῶν εὐθειῶν, τόξον δὲ τὸ εὑρισκόμενον μεταξὺ τῶν εἰρημένων εὐθειῶν πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ἕλικος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς ἀχθείσας ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἕλικος πρὸς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς, σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγαλυτέρα τῶν εἰρημένων εὐθειῶν τῆς μικροτέρας, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθεισῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἕλικος πρὸς τὴν ἀρχήν.





Ἔστω ἕλιξ, ἡ ΑΒΓΔΕ, μικροτέρα τῆς γεγραμμένης κατὰ μίαν περιφοράν, πέρατα δὲ αὐτῆς ἔστω τὰ Α, Ε, ἔστω δὲ ἀρχὴ τῆς ἕλικος τὸ σημεῖον Θ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΘΑ, ἂς γραφῇ κύκλος καὶ ἂς συναντᾷ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἡ ΘΕ κατὰ τὸ Ζ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ πρὸς τὸν τομέα ΑΘΖ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ πρὸς τὸ τᾶς *ΘΑ*.

ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ϛ*X*, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν *ΑΘ*, *ΘΕ* καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς *ΕΖ*, ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ τῷ *Θ*· ὁ δὴ τομεὺς ὁ ϛ*X* ποτὶ τὸν τομέα τὸν *ΘΑΖ* τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν *ΑΘ*, *ΘΕ* καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς *ΕΖ* τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς *ΘΑ* τετράγωνον· αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυ-
H 104 νάμει ποτ' ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ *X*ϛ τομεὺς ἴσος ἐὼν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς *ΑΒΓΔΕ* ἕλικος καὶ τᾶν *ΑΘ*, *ΘΕ* εὐθειᾶν.

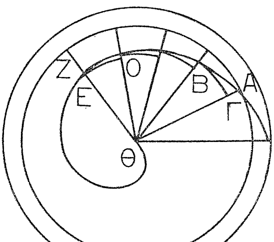
εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἢ ἐλάττων ἐστίν. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν οὖν ἐστιν περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ϛ*X* τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ *ΘΑΚ*, ἐλάχιστος δὲ ὁ *ΘΟΔ*· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν τοῦ *X*ϛ τομέως. διάχθωσαν δὴ αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ *Θ*, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ *ΘΑΖ* τομέως πέσωντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ *Θ* ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἆν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ *ΘΑ*, ἐλαχίστα δὲ ἁ *ΘΕ*, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ *Θ* ποτὶ τὰν τοῦ *ΑΘΖ* τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς *ΘΖ*, καὶ ἀναγεγράφαται ὁμοίοι τομέες ἀπὸ πασᾶν ἀπό τε τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς *ΘΕ* οὐκ ἀναγέγραπται· τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς τετράγωνον τῆς ΘΑ.

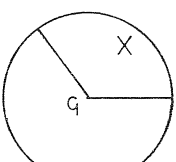
Ἔστω λοιπὸν κύκλος, ὅπου τὰ γράμματα ϛΧ, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ, ἔστω δὲ εἰς αὐτὸν ἐπίκεντρος γωνία ἴση πρὸς τὴν πρὸς τὸ Θ· ὁ τομεὺς λοιπὸν ὁ ϛΧ πρὸς τὸν τομέα ΘΑΖ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ· διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τοῦτον τὸν λόγον. Θὰ ἀποδειχθῇ δέ, ὅτι ὁ τομεὺς Χϛ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερος ἢ μικρότερος. Ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερος. Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν περὶ τὴν εἰρημένην ἐπιφάνειαν νὰ περιγραφῇ ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα νὰ ὑπερέχῃ τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ὑπερέχει ὁ τομεὺς ϛΧ τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας (θ. 23, πόρ.). Ἂς περιγραφῇ λοιπόν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΑΚ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΟΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ τομέως Χϛ. Ἂς ἀχθῶσι λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι αἱ σχηματίζουσαι τὰς ἴσας γωνίας πρὸς τὴν Θ, μέχρις ὅτου συναντήσωσι τὸ τόξον τοῦ τομέως ΘΑΖ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν εὐθεῖαί τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων (σχηματίζουσαι ἀριθμ. πρόοδον), αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἕλικα (θ. 12), τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ μὲν τὸ πλῆθος οὖσαι μικρότεραι τούτων κατὰ μίαν, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὸ τόξον τοῦ τομέως ΑΘΖ προσπίπτουσαι ἐκτὸς τῆς ΘΖ, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην καὶ ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἀπὸ δὲ τῆς ΘΕ δὲν ἔχει ἀναγραφῇ· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τομέων, οἱ ὁποῖοι

ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον
Η 106 μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνου. ἔστιν δὲ τοῖς μὲν τομέεσσιν τοῖς ἀπὸ τὰν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσος ὁ ΘΑΖ τομεύς, τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν τὸ περιγεγραμμένον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΕ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸν Χϛ τομέα· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ Χϛ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων· οὐκ ἄρα ἐσσεῖται ὁ Χϛ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν.

οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ Χϛ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΒΓ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ Χϛ τομέως. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ἆν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΕ,





Η 108

ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων, οἱ ὁποῖοι ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας ἐκτὸς τοῦ τομέως τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ (θ. 11, πόρ.). Εἶναι δὲ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην ἴσος ὁ τομεὺς ΘΑΖ, πρὸς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας εἶναι ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα· ἔχει λοιπὸν ὁ τομεὺς ΘΑΖ πρὸς τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μικρότερον λόγον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ πρὸς τὸ εἰρημένον ἄθροισμα τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ τομεὺς ΘΑΖ πρὸς τὸν τομέα Χϛ· ὥστε ὁ τομεὺς Χϛ εἶναι μικρότερος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10). Δὲν εἶναι ὅμως, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερος· δὲν θὰ εἶναι ἄρα ὁ τομεὺς Χϛ μεγαλύτερος τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ.

Ἀλλ' οὔτε μικρότερος εἶναι. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι μικρότερος, καὶ ἂς γίνῃ κατὰ τὰ λοιπὰ ἡ αὐτὴ κατασκευή. Εἶναι λοιπὸν πάλιν δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον σχῆμα συγκείμενον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥστε ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια νὰ ὑπερέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ὑπερέχει ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια τοῦ τομέως Χϛ. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπόν, καὶ ἔστω ἐκ τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΒΓ, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΟΘΕ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τομέως Χϛ. Πάλιν λοιπὸν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαί τινες ὑπερέχουσαι ἴσον ἀλλήλων, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν ἕλικα προσπίπτουσαι, τῶν ὁποίων μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΘΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΘΕ, ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ προσπίπτουσαι ἀπὸ *ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ ΘΑΖ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς ΘΑ τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι, καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ ἑκάστας ὁμοίοι τομέες, ἀπὸ δὲ τᾶς μεγίστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν οὐκ ἀναγέγραπται· οἱ τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΕ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΖ· ὥστε καὶ ὁ ΘΑΖ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ποτὶ τὸν Χϛ τομέα· ὥστε μείζων ὁ Χϛ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων· οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Χϛ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΕ ἕλικος καὶ τᾶν ΑΘ, ΘΕ εὐθειᾶν· ἴσος ἄρα.*

κζ'

Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ τὸ μὲν τρίτον τοῦ δευτέρου διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτον τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ πρῶτον χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου.

ἔστω ἁ προκειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Θ σαμεῖον, ἁ δὲ ΘΕ
H 110 *εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν Κ τὸ πρῶτον, τὸ δὲ Λ τὸ δεύτερον, τὸ δὲ Μ τὸ τρίτον, τὸ δὲ Ν τὸ τέταρτον, τὸ δὲ Ξ τὸ πέμπτον. δεικτέον, ὅτι τὸ μὲν Κ χωρίον ϛ' μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου, τὸ δὲ Μ διπλάσιον τοῦ Λ,*

τοῦ Θ πρὸς τὸ τόξον τοῦ τομέως ΘΑΖ ἐκτὸς τῆς ΘΑ, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος ἴσαι μεῖον ἓν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας, κατὰ δὲ τὸ μέγεθος ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην, καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ ἑκάστης εὐθείας ὅμοιοι τομεῖς, δὲν ἔχει δὲ ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς μεγίστης τῶν ὑπερεχουσῶν ἴσον πρὸς ἀλλήλας· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν τομέων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀναγεγραμμένοι ἀπὸ τὰς ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ πρὸς τὴν μεγίστην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τομέων τῶν ἀναγεγραμμένων ἀπὸ τὰς ὑπερεχούσας ἴσον πρὸς ἀλλήλας, ἐκτὸς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστης τομέως, ἔχει λόγον μεγαλύτερον ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΑ, ΘΕ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ (θ. 11, πόρ.)· ὥστε καὶ ὁ τομεὺς ΘΑΖ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ πρὸς τὸν τομέα Χϛ· ὥστε ὁ τομεὺς Χϛ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος (Εὐκλ. V, 10). Δὲν εἶναι δέ, ἀλλὰ εἶναι μικρότερος· δὲν εἶναι ἄρα οὔτε μικρότερος ὁ τομεὺς Χϛ τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἕλικος ΑΒΓΔΕ καὶ τῶν εὐθειῶν ΑΘ, ΘΕ· εἶναι ἄρα ἴσος.

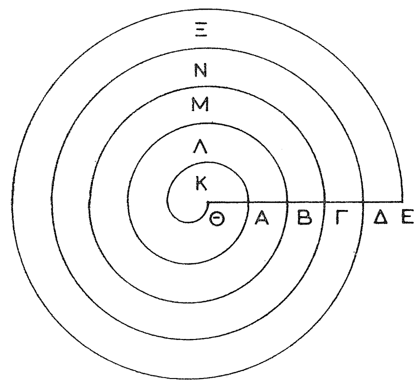
27

Ἐκ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ἑλίκων καὶ τῶν εὐθειῶν τῶν περιφορῶν τὸ μὲν τρίτον εἶναι διπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτον τετραπλάσιον, καὶ πάντοτε τὸ ἑπόμενον κατ' ἀναλογίαν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς πρώτης ἐπιφανείας εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τῆς δευτέρας.

Ἔστω ἡ προκειμένη ἕλιξ γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφορὰν καὶ κατὰ τὴν δευτέραν καὶ ὁσασδήποτε ἐν συνεχείᾳ ἄλλας, ἔστω δὲ ἀρχὴ μὲν τῆς ἕλικος τὸ σημεῖον Θ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΘΕ ἔστω ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς, ἐκ τῶν ἐμβαδῶν δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ἔστω πρῶτον μὲν τὸ Κ, δεύτερον δὲ τὸ Λ, τρίτον δὲ τὸ Μ, τέταρτον δὲ τὸ Ν, τὸ δὲ Ξ τὸ πέμπτον. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ μὲν ἐμβαδὸν Κ εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τοῦ ἑπομένου, τὸ δὲ Μ εἶναι διπλάσιον τοῦ Λ, *τὸ δὲ Ν τριπλάσιον τοῦ Λ, καὶ τῶν ἑξῆς αἰεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ Λ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς.*

ὅτι μὲν οὖν τὸ Κ ς′ μέρος ἐστὶ τοῦ Λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ τὸ ΚΛ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ ποτὶ τὰ ιβ, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ποτὶ τὸν πρῶτον κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ γ· δῆλον γάρ ἐστιν· ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ποτὶ τὸ Κ χωρίον ἔχει, ὡς γ ποτὶ α, ς′ ἄρα ἐστὶ τὸ Κ χωρίον τοῦ Λ. πάλιν δὲ καὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον ποτὶ τὸν τρίτον κύκλον δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τετράγωνον. ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ ΚΛ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ ΒΘ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου· καὶ τὸ ΚΛΜ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΘ, ΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει

H. 112 *ποτὶ ἄλλαλα λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ· ὥστε καὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον ποτὶ τὸ ΛΚ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ· αὐτὸ οὖν τὸ Μ ποτὶ τὸ ΚΛ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὰ ζ. τὸ δὲ ΚΛ ποτὶ τὸ Λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ς· δῆλον οὖν, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ Μ τοῦ Λ.*



τὸ δὲ Ν τριπλάσιον τοῦ Λ, καὶ ἐκ τῶν ἑπομένων πάντοτε τὸ ἀκολουθοῦν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Λ κατὰ τοὺς ἀναλόγους ἀριθμούς.

Ὅτι μὲν τὸ Κ εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τοῦ Λ, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας Κ + Λ ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἔχει τοῦτον τὸν λόγον πρὸς τὸν δεύτερον κύκλον, ὃν ἔχουσι τὰ 7 πρὸς τὰ 12 (θ. 25), ὁ δὲ δεύτερος κύκλος πρὸς τὸν πρῶτον κύκλον ὡς τὰ 12 πρὸς τὰ 3· διότι τοῦτο εἶναι φανερὸν (ἐκ τοῦ Εὐκλ. XII, 2 διότι ΘΒ = 2 ΘΑ)· ὁ δὲ πρῶτος κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Κ ἔχει, ὡς τὰ 3 πρὸς τὸ 1 (θ. 24), εἶναι ἄρα ἡ ἐπιφάνεια Κ τὸ ἓν ἕκτον τῆς Λ (Ἐὰν κληθῇ ὁ πρῶτος κύκλος C_1 καὶ ὁ δεύτερος C_2 θὰ εἶναι $Κ + Λ : C_2 = 7 : 12$, $C_2 : C_1 = 12 : 3$, (Εὐκλ. V, 22) $Κ + Λ : C_1 = 7 : 3$. Ἐπίσης εἶναι $C_1 : Κ = 3 : 1$ καὶ $Κ + Λ : Κ = 7 : 1$ ἢ $Κ + Λ = 7Κ$, $Λ = 6Κ$). Πάλιν δὲ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας Κ + Λ + Μ πρὸς τὸν τρίτον κύκλον ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΓΘ, ΘΒ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΘ (θ. 25, πόρ.). Ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει πρὸς τὸν δεύτερον κύκλον λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΓΘ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΒ (Εὐκλ. XII, 2), ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ΚΛ λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΒΘ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΒΘ, ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ (θ. 25)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἐπιφανειῶν Κ + Λ + Μ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Κ + Λ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΓΘ, ΘΒ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΒ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΒΘ, ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ. Ταῦτα δὲ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 19 πρὸς τὰ 7· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν Κ + Λ + Μ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν Λ + Κ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 19 πρὸς τὰ 7· αὐτὸ λοιπὸν τὸ Μ πρὸς τὸ Κ + Λ ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 12 πρὸς τὰ 7 (Εὐκλ. V, 17). Τὸ δὲ Κ + Λ πρὸς τὸ Λ ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 7 πρὸς τὰ 6· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ Μ εἶναι διπλάσιον τοῦ Λ (Εὐκλ. V, 22).

ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ ΚΛΜΝΞ ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΘΕ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΔ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΕ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΘΕ, ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΘΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΕ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΔ τετράγωνον, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ ΔΘ, ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΔ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου· καὶ τὸ ΚΛΜΝΞ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΕ, ΘΔ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ· διελόντι καὶ τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὰ τοῦ τε ὑπὸ ΕΘ, ΘΔ μετὰ τοῦ τρίτου μέρεος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΔ καὶ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ μετὰ τοῦ τρίτου μέρεος τοῦ ἀπὸ τᾶς H 114 *ΓΔ ποτί τε τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΘΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ, ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΓΕ· τὸ Ξ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΓΒ τετραγώνου· τὸ Ν ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΘΒ*

Ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ἐν συνεχείᾳ ἀριθμῶν ἀντιστοίχως, θὰ ἀποδειχθῇ. Διότι τὸ ἄθροισμα Κ + Λ + Μ + Ν + + Ξ πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΘΕ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΕΘ, ΘΔ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ (θ. 25, πόρ.). Ὁ δὲ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΘΕ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΘΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΔ, ὁ δὲ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΔΘ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν Κ + Λ + Μ + Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΔ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΔ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ (θ. 25, πόρ.)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα Κ + Λ + Μ + Ν + Ξ πρὸς τὸ ἄθροισμα Κ + Λ + + Μ + Ν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΕ, ΘΔ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΕ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ· καὶ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. V, ὁρισ. 15) θὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν Κ + Λ + Μ + Ν, ὃν ἔχει ἡ ὑπεροχή, τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΕΘ, ΘΔ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΔ, ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ. Εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ τῶν δύο ἀθροισμάτων τόση, ὅση καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΕΘ, ΘΔ ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ, ἰσοῦται δὲ ἡ ὑπεροχὴ αὕτη πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΓΕ· τὸ Ξ ἄρα πρὸς τὸ ἄθροισμα Κ + Λ + Μ + Ν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ Ν πρὸς τὸ ἄθροισμα Κ + Λ + Μ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΒΔ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΓΘ, ΘΒ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΒ· καὶ τὸ Ν ἄρα πρὸς τὸ ἐμβαδὸν Κ + Λ + Μ +

καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ [καὶ ἀνάπαλιν]· ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου, τὸ δὲ ΚΛΜΝ ποτὶ τὸ Ν, ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ, ἔχει ἄρα καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ, ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΓΕ, ΒΔ· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ.

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ Μ τοῦτον ἔχον
H 116 *τὸν λόγον, ὃν ἁ ΘΓ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ τὸ Μ ποτὶ τὸ Λ, ὃν ἁ ΒΘ ποτὶ τὰν ΑΘ· αἱ δὲ [ΕΘ] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ εὐθεῖαι τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.*

κη′

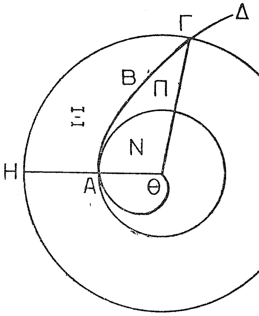
Εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σαμεῖα λαφθέωντι μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σαμείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστημάτεσσι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σαμείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶν μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτᾶν εὐθειᾶν καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό

+ Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΒΔ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΒΔ σὺν τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΘΒ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΒ [καὶ ἀνάπαλιν]· ταῦτα δὲ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὸ ἄθροισμα Κ + Λ + Μ + Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἄθροισμα Κ + Λ + Μ + Ν πρὸς τὸ Ν, ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΔΘ, ΘΓ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΔΒ (Εὐκλ. V, 7 πόρ.), ἔχει ἄρα καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΔΒ (Εὐκλ. V, 22). Τὸ δὲ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΓ, ΔΒ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΘΓ, ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι αἱ ΓΕ, ΒΔ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ Ξ πρὸς τὸ Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΘΓ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ Ν πρὸς τὸ Μ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΘΒ, καὶ τὸ Μ πρὸς τὸ Λ, ὃν ἔχει ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΑΘ· αἱ δὲ [ΕΘ] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ εὐθεῖαι ἔχουσι τὸν λόγον τῶν κατὰ σειρὰν ἑπομένων ἀντιστοίχων ἀριθμῶν.

28

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἕλικος τῆς γεγραμμένης καθ' οἱανδήποτε περιφορὰν ληφθῶσι δύο σημεῖα, οὐχὶ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς ἕλικος, ἀκτῖνας δὲ τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἕλικος, γραφῶσι κύκλοι, ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιλαμβανομένη ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τοῦ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν καὶ τοῦ ἑλικοειδοῦς τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν καὶ τῆς προεκβληθείσης (μικροτέρας) ἀκτῖνος θὰ ἔχῃ τοῦτον τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς.



ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔ, ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σαμεῖα τὰ Α, Γ, ὥστε τὸ Θ σαμεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κέντρῳ τῷ Θ, διαστημάτεσσι δὲ τοῖς ΘΑ, ΘΓ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον, ὅτι τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον,
H 118 ὃν ἔχει συναμφότερος ἅ τε ΑΘ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ΗΑ ποτὶ συναμφότερον τάν τε ΑΘ καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ΗΑ.

τὸ γὰρ χωρίον τὸ ΝΠ ποτὶ τὸν ΗΓΘ τομέα δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν ΗΘ, ΑΘ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΘ τετράγωνον· αὐτὸ ἄρα τὸ Ξ ποτὶ τὸ ΝΠ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΑΗ μετὰ δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸν ΝΠΞ τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν ΘΑ, ΘΗ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΑ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ τετράγωνον, ὁ δὲ ΝΠΞ τομεὺς ποτὶ τὸν Ν τομέα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ, ἕξει καὶ τὸ ΝΠ χωρίον ποτὶ τὸν Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμ-τὸν λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν περιλαμβανομένην ὑπὸ τοῦ τόξου τοῦ μικροτέρου κύκλου καὶ τοῦ αὐτοῦ ἑλικοειδοῦς τόξου καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ πέρατα αὐτῶν, ὃν ἔχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἀκτὶς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου τῆς ἀκτῖνος τοῦ μικροτέρου κύκλου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροτέρου κύκλου σὺν τὸ ἓν τρίτον τῆς αὐτῆς ὑπεροχῆς.

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἧς τὸ ἑλικοειδὲς τόξον ΑΒΓΔ, γεγραμμένη κατὰ τὴν πρώτην περιφοράν, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτοῦ τὰ δύο σημεῖα Α, Γ, ὥστε τὸ σημεῖον Θ νὰ εἶναι ἀρχὴ τῆς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι μέχρι τοῦ Θ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Θ, ἀκτῖνας δὲ τὰς ΘΑ, ΘΓ, ἂς γραφῶσι κύκλοι. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς ΑΘ σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ΑΘ σὺν τὸ ἓν τρίτον τῆς ΗΑ.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια Ν + Π πρὸς τὸν τομέα ΗΓΘ ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι ἔχει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΗΘ, ΑΘ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΗ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΘ (θ. 26)· αὐτὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Ν + Π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ΘΑ, ΑΗ σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΑΘ, ΘΗ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια Ν + Π πρὸς τὸν τομέα ΝΠΞ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΘΗ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ, ὁ δὲ τομεὺς ΝΠΞ πρὸς τὸν τομέα Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ, θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ν + Π πρὸς τὸν τομέα Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΘΗ σὺν τὸ ἓν τρίτον

φότερον τό τε ὑπὸ $ΘΑ$, $ΘΗ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ ποτὶ τὸ ἀπὸ $ΘΑ$· τὸ ἄρα $ΝΠ$ ποτὶ τὸ $Π$ λόγον ἔχει, ὃν
H 120 συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $ΗΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν $ΗΑ$, $ΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ $Ξ$ χωρίον ποτὶ τὸ $ΝΠ$ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ $ΘΑΗ$ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $ΗΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$, τὸ δὲ $ΝΠ$ χωρίον ποτὶ τὸ $Π$ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $ΗΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ τετραγώνου ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν $ΗΑΘ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ τετραγώνου, ἕξει καὶ τὸ $Ξ$ ποτὶ τὸ $Π$ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $ΘΑΗ$ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ ποτὶ συναμφότερον τό τε ὑπὸ τᾶν $ΘΑΗ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $ΘΑΗ$ καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν $ΘΑΗ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς $ΗΑ$ τετραγώνου τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἅ τε $ΘΑ$ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς $ΗΑ$ ποτὶ συναμφότερον τάν τε $ΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς $ΗΑ$· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ $Ξ$ χωρίον ποτὶ τὸ $Π$ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα ἅ τε $ΘΑ$ καὶ δύο τριταμόρια τᾶς $ΗΑ$ ποτὶ συναμφότερον τάν τε $ΘΑ$ καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς $ΗΑ$.

τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ (Εὐκλ. V, 22)· τὸ ἄθροισμα ἄρα Ν + Π πρὸς τὸ Π ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΗΘ, ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΗΑ, ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν Ν + Π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΑΗ, σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΗΘ, ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ, ἡ δὲ ἐπιφάνεια Ν + Π πρὸς τὴν Π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΗΘ, ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΗΑ, ΑΘ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ (Εὐκλ. V, 22), θὰ ἔχῃ καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν Π τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΑΗ σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΑΗ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ. Τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΑΗ σὺν τὰ δύο τρίτα τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρῶν ΘΑ, ΑΗ σὺν τὸ ἓν τρίτον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΑ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς ΘΑ σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τῆς ΗΑ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια Ξ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Π τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς ΘΑ σὺν τὰ δύο τρίτα τῆς ΗΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ΘΑ σὺν τὸ ἓν τρίτον τῆς ΗΑ.

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α′ ΚΑΙ Β′

(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ)

ΒΙΒΛΙΑ 2

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α′

H 124 ## Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α′

α′. Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος.

β′. εἴ κα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο, ᾧ ποτετέθη.

γ′. ὁμοίως δὲ καί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος, ἀφ' οὗ οὐκ ἀφηρέθη.

δ′. τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλλαλα.

ε′. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐσσεῖται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομες σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιέοντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς.

ϛ′. εἴ κα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει.

H 126 ζ′. παντὸς σχήματος, οὗ κα ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶμεν δεῖ τοῦ σχήματος.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων.

α′

Τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεα ἴσα ἐντί. εἴπερ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α΄

(Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων)
βιβλίον 1

1. Λαμβάνομεν ὡς αἰτήματα τὰ ἴσα βάρη νὰ ἰσορροπῶσιν ἐξηρτημένα ἀπὸ ἴσων μηκῶν, τὰ δὲ ἴσα βάρη ἐξηρτημένα ἀπὸ ἀνίσων μηκῶν νὰ μὴ ἰσορροπῶσι, ἀλλὰ νὰ κλίνῃ (ἡ φάλαγξ) πρὸς τὸ βάρος τὸ ἐξηρτημένον ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον μῆκος.

2. Ἐὰν ὑπάρχωσι βάρη ἐξηρτημένα ἀπό τινων μηκῶν (ἀπὸ τοῦ σημείου στηρίξεως) ἰσορροποῦντα καὶ προστεθῇ βάρος εἰς τὸ ἓν ἐκ τούτων, νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἀλλὰ νὰ κλίνῃ (ἡ φάλαγξ) πρὸς τὸ βάρος ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἔγινεν ἡ πρόσθεσις.

3. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸ ἓν βάρος ἀφαιρεθῇ τι, νὰ μὴ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, ἀλλὰ νὰ κλίνῃ (ἡ φάλαγξ) πρὸς τὸ βάρος, ἀπὸ τοῦ ὁποίου οὐδὲν ἀφῃρέθη.

4. Ἐὰν ἴσα καὶ ὅμοια σχήματα ἐφαρμόζωσιν ἐπ᾿ ἄλληλα καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν των ἐφαρμόζουσιν ἐπ᾿ ἄλληλα.

5. Τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δέ, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ κεῖνται ὁμοίως. Ὁμοίως δὲ λέγομεν ὅτι σημεῖα κεῖνται εἰς τὰ ὅμοια σχήματα, ἐκεῖνα ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζουσιν μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίας ἴσας.

6. Ἐὰν μεγέθη ἐξηρτημένα ἀπό τινων μηκῶν ἰσορροπῶσι, καὶ τὰ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν μηκῶν θὰ ἰσορροπήσωσι.

7. Παντὸς σχήματος, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος κοίλη, τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ σχήματος.

Κατόπιν τῶν αἰτημάτων τούτων.

1

Τὰ ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἰσορροποῦντα βάρη εἶναι ἴσα.

Διότι ἐὰν εἶναι ἄνισα, ἀφοῦ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ ἡ *ὑπεροχᾶς τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφήρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπέοντα ἴσα ἐντί.*

β′

Τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον.

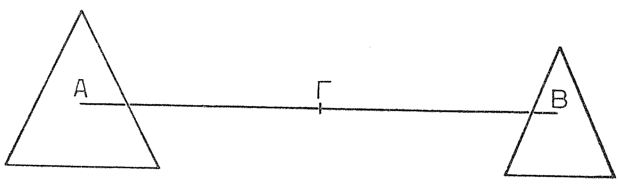
ἀφαιρεθείσας γὰρ τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτετέθη.

γ′

Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι, καὶ τὸ μεῖζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ Α, καὶ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μακέων. δεικτέον, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾶς ΓΒ.

μὴ γὰρ ἔστω ἐλάσσων. ἀφαιρεθείσας δὴ τᾶς ὑπεροχᾶς,
H 128 *ᾇ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφήρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ Β. οὐ ῥέψει δέ· εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ*



ΓΑ τᾷ ΓΒ, ἰσορροπησοῦντι [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων], εἴτε μείζων ἁ ΓΑ τᾶς ΓΒ, ῥέπει ἐπὶ τὸ Α· τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾶς ΓΒ.

ὑπεροχή, τὰ ὑπόλοιπα δὲν θὰ ἰσορροπήσωσι, ἐπειδὴ ἐν ᾧ ὑπάρχουσι ἰσορροποῦντα βάρη ἀφηρέθη κάτι ἀπὸ τοῦ ἑνός (αἴτ. 3). Ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν βάρη ἰσορροποῦντα εἶναι ἴσα.

2

Τὰ ἀπὸ ἴσων μηκῶν ἄνισα βάρη δὲν ἰσορροποῦσιν, ἀλλὰ ἡ φάλαγξ κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ μεγαλυτέρου.

Διότι ἀφοῦ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχὴ θὰ ἰσορροπήσωσι, ἐπειδὴ τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἐξηρτημένα ἰσορροποῦσι (αἴτ. 1). Ἐὰν λοιπὸν προστεθῇ τὸ ἀφαιρεθὲν ἡ φάλαγξ θὰ κλίνῃ πρὸς τὸ μεγαλύτερον ἐπειδή, ἐν ᾧ ὑπῆρχεν ἰσορροπία εἰς τὸ ἓν ἐκ τούτων προσετέθη βάρος (αἴτ. 2).

3

Ἐὰν τὰ ἄνισα βάρη ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν ἰσορροπῶσιν, τὸ μεγαλύτερον θὰ εἶναι ἐξηρτημένον ἀπὸ τοῦ μικροτέρου μήκους.

Ἔστω ἄνισα βάρη τὰ Α, Β, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ Α, καὶ ὅτι ἰσορροποῦσι ἐξηρτημένα ἀπὸ τῶν μηκῶν ΑΓ, ΓΒ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΒ.

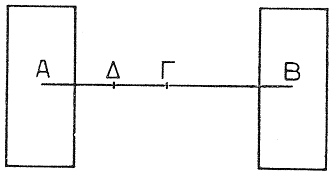
Διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι μικροτέρα. Ἀφοῦ λοιπὸν ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Β, ἐπειδὴ ἐν ᾧ εὑρίσκοντο ἐν ἰσορροπίᾳ ἀφηρέθη ἀπὸ τοῦ ἑνὸς βάρος, ἡ φάλαγξ θὰ κλίνῃ πρὸς τὸ Β (αἴτ. 3). Ἀλλὰ δὲν θὰ κλίνῃ· διότι ἐὰν εἶναι ἴση ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΒ, θὰ ἰσορροπήσωσι [διότι τὰ ἴσα ἰσορροποῦσιν ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν] (αἴτ. 1), ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΓΑ τῆς ΓΒ, θὰ ἐπέλθῃ κλίσις πρὸς τὸ Α· διότι τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν δὲν ἰσορροποῦσι, ἀλλὰ ἡ φάλαγξ κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ μεγαλυτέρου μήκους (αἴτ. 1). Διὰ τοὺς λόγους τούτους ἡ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΒ.

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν ἰσορ-φανερὸν δέ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα ἄνισά ἐντι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

δ′

Εἴ κα δύο ἴσα μεγέθεα μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος.

ἔστω τοῦ μὲν Α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Α, τοῦ δὲ Β τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΑΒ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Γ· λέγω,



ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Γ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω [τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν Α, Β μεγεθῶν] κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Δ, εἰ δυνατὸν [ὅτι γὰρ ἔστιν ἐπὶ τῆς ΑΒ, προδέδεικται]. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ Δ ἰσορροπήσει· τὰ ἄρα Α, Β μεγέθεα ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μακέων· ὅπερ ἀδύνατον [τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ
H 130 τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι]. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ Γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν Α, Β συγκειμένου μεγέθεος.

ε′

Εἴ κα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ᾽ εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάροποῦντα εἶναι ἄνισα, καὶ μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἐξηρτημένον ἀπὸ τοῦ μικροτέρου.

4

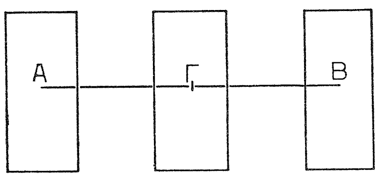
Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη μὴ ἔχοντα τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους, τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν θὰ εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα βάρους τῶν μεγεθῶν.

Ἔστω τοῦ μὲν μεγέθους Α κέντρον βάρους τὸ Α, τοῦ δὲ Β τὸ Β, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν κέντρον βάρους εἶναι τὸ Γ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω εἰ δυνατὸν τὸ Δ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους [τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθῶν Α, Β] συγκειμένου μεγέθους [ἔχει δὲ προαποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΒ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β, ἐὰν τοῦτο στηριχθῇ ἐπὶ τοῦ Δ θὰ ἰσορροπήσῃ. Τὰ μεγέθη ἄρα Α, Β θὰ ἰσορροπήσωσιν ἐξηρτημένα ἀπὸ τῶν μηκῶν ΑΔ, ΔΒ· ὅπερ ἀδύνατον [διότι τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μηκῶν δὲν ἰσορροποῦσι] (αἴτ. 1). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ Γ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β.

5

Ἐὰν τὰ κέντρα βάρους τριῶν μεγεθῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ μεγέθη ἔχωσιν ἴσον βάρος ἕκαστον, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων βά-



ρους εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι *ρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.*

ἔστω τρία μεγέθεα τὰ Α, Β, Γ, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ Α, Β, Γ σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα, ἔστω δὲ τά τε Α, Β, Γ ἴσα καὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Γ σαμεῖον.

ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον, ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ. ἔστιν δὲ καὶ τοῦ Γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ὁπόσων κα τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴ κα τά τε ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν H 132 *ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.*

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄

εἴ κα καὶ ἄρτια ἔωντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν καὶ τὰ ἴσα ἀπέχοντα ἀπ' αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ κέντρον βάρους καὶ τοῦ μεσαίου μεγέθους.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, κέντρα δὲ τοῦ βάρους αὐτῶν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἔστω δὲ ὅτι τὰ Α, Β, Γ εἶναι ἴσα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἴσαι· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν συγκειμένου μεγέθους εἶναι τὸ σημεῖον Γ.

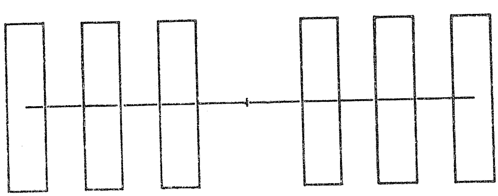
Διότι ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β ἔχουσιν ἴσον βάρος ἕκαστον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Γ, ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἴσαι (θ. 4). Εἶναι δὲ καὶ τοῦ Γ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Γ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ σημεῖον,τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους καὶ τοῦ μεσαίου μεγέθους.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν τὰ κέντρα τοῦ βάρους ὁσωνδήποτε μεγεθῶν περιττῶν κατὰ τὸ πλῆθος κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεγέθη τὰ ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τοῦ μέσου ἔχωσιν ἴσον βάρος, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεσαίου ἐξ αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Ἐὰν τὰ μεγέθη εἶναι ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεσαῖα ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ

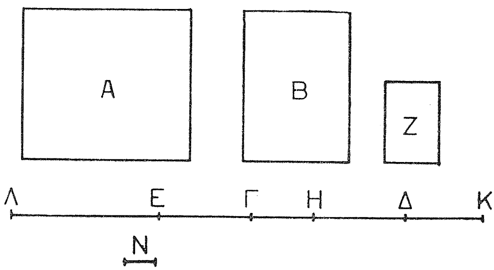


ἴσον ἀπ' αὐτῶν ἀπέχοντα ἔχωσιν ἴσον βάρος, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων (τῶν βαρῶν) εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.

ς'

Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν.

ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ A, B, ὧν κέντρα τὰ A, B, καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ $E\Delta$, καὶ ἔστω, ὡς τὸ A ποτὶ τὸ B,



οὕτως τὸ $\Delta\Gamma$ μᾶκος ποτὶ τὸ ΓE μᾶκος· δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν A, B συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Γ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ A ποτὶ τὸ B, οὕτως τὸ $\Delta\Gamma$ ποτὶ τὸ ΓE, τὸ δὲ A τῷ B σύμμετρον, καὶ τὸ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῷ ΓE σύμμετρον, τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ· ὥστε τῶν $E\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἐστι κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ N, καὶ κείσθω τᾷ μὲν $E\Gamma$ ἴσα ἑκατέρα τᾶν ΔH, ΔK, τᾷ δὲ $\Delta\Gamma$ ἴσα ἁ $E\Lambda$. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ
H 134 ΔH τᾷ ΓE, ἴσα καὶ ἁ $\Delta\Gamma$ τᾷ EH· ὥστε καὶ ἁ ΛE ἴσα τᾷ EH. διπλασία ἄρα ἁ μὲν ΛH τᾶς $\Delta\Gamma$, ἁ δὲ HK τᾶς ΓE· ὥστε τὸ N καὶ ἑκατέραν τᾶν ΛH, HK μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσεα αὐτᾶν. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ A ποτὶ τὸ B, οὕτως ἁ $\Delta\Gamma$ ποτὶ ΓE, ὡς δὲ ἁ $\Delta\Gamma$ ποτὶ ΓE, οὕτως ἁ ΛH ποτὶ HK· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ A ποτὶ τὸ

τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεγεθῶν, ὡς δηλοῦται εἰς τὸ σχῆμα.

6

Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἰσορροποῦσιν ἀπὸ μηκῶν, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὸν λόγον τῶν βαρῶν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, τῶν ὁποίων κέντρα τοῦ βάρους εἶναι τὰ Α, Β καὶ ἔστω τυχὸν μῆκος τὸ ΕΔ, καὶ ἔστω ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ μῆκος ΔΓ πρὸς τὸ μῆκος ΓΕ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν Α, Β εἶναι τὸ Γ.

Διότι ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΕ, τὸ δὲ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ ΓΔ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓΕ, τουτέστιν εὐθεῖα εἶναι σύμμετρος πρὸς εὐθεῖαν (Εὐκλ. Χ, 11)· ὥστε τῶν μεγεθῶν ΕΓ, ΓΔ ὑπάρχει κοινὸν μέτρον. Ἔστω, ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ Ν, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΕΓ ἴση ἑκατέρα τῶν ΔΗ, ΔΚ, πρὸς δὲ τὴν ΔΓ ἴση ἡ ΕΛ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, εἶναι ἴση καὶ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΕΗ· ὥστε καὶ ἡ ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Εἶναι ἄρα διπλασία ἡ μὲν ΛΗ τῆς ΔΓ, ἡ δὲ ΗΚ τῆς ΓΕ· ὥστε τὸ Ν μετρεῖ καὶ ἑκατέραν τῶν ΛΗ, ΗΚ, ἐπειδὴ μετρεῖ καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν (Εὐκλ. Χ, 12). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ· διότι ἑκατέρα εἶναι διπλασία ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ. Ὅσας φορὰς δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΛΗ τῆς Ν, τόσας φορὰς μεγαλύτερον ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΛΗ πρὸς Ν, οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Ζ (Εὐκλ. V, ὁρισ. 5). Εἶναι δὲ καί, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΛΗ, οὕτως τὸ Β πρὸς Α (Εὐκλ. V, 7 πόρ.)· δι' ἴσου ἄρα εἶναι, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς Ν, οὕτως

Β, οὕτως ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ ΛΗ τᾶς Ν, τοσαυταπλασίων ἔστω καὶ τὸ Α τοῦ Ζ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Α ποτὶ Ζ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ ΛΗ, οὕτως τὸ Β ποτὶ Α· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΚΗ ποτὶ Ν, οὕτως τὸ Β ποτὶ Ζ· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ ΚΗ τᾶς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ Ζ καὶ τὸ Α πολλαπλάσιον ἐόν· ὥστε τὸ Ζ τῶν Α, Β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν ΛΗ εἰς τὰς τᾷ Ν ἴσας, τοῦ δὲ Α εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ ΛΗ τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ Ν ἴσα ἐσσεῖται τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ Α τμαμάτεσσιν ἴσοις ἐοῦσιν τῷ Ζ. ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ ΛΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ Α, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ Ε· ἀρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ε ἴσα τῷ πλήθει διὰ τὸ ἴσαν εἶμεν τὰν

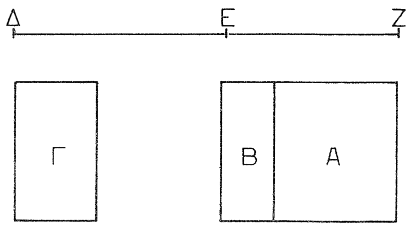
H 136 *ΛΕ τᾷ ΗΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἄν, εἴ κα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ ΚΗ τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ Ζ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ Β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ Δ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Α ἐπικείμενον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. ἐσσεῖται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλάλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διέστακεν, [συγκείμενα] ἄρτια τῷ πλήθει· δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δ' ἴσαι ἐντὶ ἁ μὲν ΛΕ τᾷ ΓΔ, ἁ δὲ ΕΓ τᾷ ΔΚ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΛΓ ἴσα τᾷ ΓΚ· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα Α κειμένου κατὰ τὸ Ε, τοῦ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ Γ.*

τὸ Β πρὸς Ζ $\left(\frac{\Lambda H}{N} = \frac{A}{Z}, (1) \text{ καὶ } \frac{KH}{\Lambda H} = \frac{B}{A}, (2).\right.$ Δι' ἴσου σημαίνει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ (1) καὶ (2) κατὰ μέλη. Εὐκλ. V, ὁρισ. 17 καὶ θεώρ. 22$\Big)$· ἰσάκις ἄρα πολλαπλασία εἶναι ἡ ΚΗ τῆς Ν καὶ τὸ Β τοῦ Ζ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Ζ· ὥστε τὸ Ζ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β. Ἀφοῦ λοιπὸν διαιρεθῇ ἡ μὲν ΛΗ εἰς τὰς ἴσας πρὸς τὴν Ν, τὸ δὲ Α εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Ζ, τὰ ἰσομεγέθη τμήματα τὰ εἰς τὴν ΛΗ τὰ ἴσα πρὸς τὴν Ν θὰ εἶναι ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὰ εἰς τὸ Α ὑπάρχοντα τμήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ Ζ. Ὥστε, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν εἰς τὴν ΛΗ τμημάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ Ζ ἔχον τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ἄθροισμα τῶν μεγεθῶν τούτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Α, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἀθροίσματος τούτου θὰ εἶναι τὸ Ε· διότι ὅλα τὰ τμήματα εἶναι ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, καὶ τὰ ἐφ' ἑκάτερα μέρη τοῦ Ε εἶναι ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος, διότι ἡ ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καί, ἂν ἐφ' ἕκαστον τῶν τμημάτων τῶν εἰς τὴν ΚΗ ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ Ζ ἔχον τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τοῦ μεσαίου τμήματος, καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μεγεθῶν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἀθροίσματος θὰ εἶναι τὸ Δ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν Α τοποθετημένον κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ. Θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν μεγέθη ἴσα πρὸς ἄλληλα κείμενα ἐπ' εὐθείας, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα τοῦ βάρους ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἴσον, ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τῶν μεγεθῶν εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν μεσαίων μεγεθῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι ἡ μὲν ΛΕ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς τὴν ΔΚ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΛΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΚ· ὥστε τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Γ. Ὅταν λοιπὸν τὸ μὲν Α κῆται κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ Β κατὰ τὸ Δ, θὰ ἰσορροπήσωσι κατὰ τὸ Γ.

ζ′

Καὶ τοίνυν, εἴ κα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν.

ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ ΑΒ, Γ, μάκεα δὲ τὰ ΔΕ, ΕΖ, ἐχέτω δὲ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ



ΕΔ ποτὶ τὸ ΕΖ μᾶκος· λέγω, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, Γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε.

εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπήσει τὸ ΑΒ τεθὲν ἐπὶ τῷ Ζ τῷ Γ τεθέντι ἐπὶ τῷ Δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορρο-
H 138 *πεῖν [τῷ Γ] ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε [τὸ] λοιπὸν τὸ Α σύμμετρον εἶμεν τῷ Γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ Γ ἢ ἁ ΔΕ ποτὶ ΕΖ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ Α, Γ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν Α ἐπὶ τῷ Ζ, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τῷ Δ. διὰ ταὐτὰ δ᾽, οὐδ᾽ εἰ τὸ Γ μεῖζόν ἐστιν ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ ΑΒ.*

η′

Εἴ κα ἀπό τινος μεγέθεος ἀφαιρεθῇ τι μέγεθος μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου

7

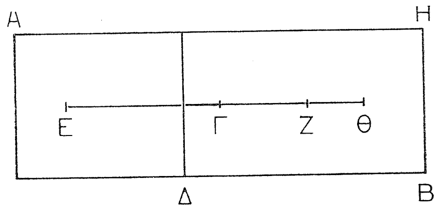
᾿Αλλὰ καὶ ἀσύμμετρα ἂν εἶναι τὰ μεγέθη, ὁμοίως θὰ ἰσορροπήσωσιν ἀπὸ μήκη ἔχοντα λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν.

῎Εστω τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη ΑΒ, Γ, μήκη δὲ τὰ ΔΕ, ΕΖ, ἃς ὑπάρχῃ δὲ ἡ σχέσις ΑΒ : Γ = μῆκος ΕΔ : μῆκος ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν ΑΒ, Γ εἶναι τὸ Ε.

Διότι, ἐὰν τὸ ΑΒ δὲν ἰσορροπήσῃ τεθὲν εἰς τὸ Ζ τοῦ Γ τεθέντος εἰς τὸ Δ, ἢ τὸ ΑΒ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Γ ὥστε νὰ μὴ ἰσορροπῇ ἢ δὲν θὰ εἶναι. ῎Εστω μεγαλύτερον, καὶ ἃς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΑΒ μέγεθος μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερον τὸ ΑΒ τοῦ Γ διὰ νὰ ἰσορροπῶσιν, ὥστε τὸ ὑπόλοιπον τὸ Α νὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. ᾿Επειδὴ λοιπὸν τὰ μεγέθη Α, Γ εἶναι σύμμετρα καὶ ὁ λόγος Α : Γ εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου ΔΕ : ΕΖ, δὲν θὰ ἰσορροπήσωσι τὰ μεγέθη Α, Γ ἀπὸ τῶν μηκῶν ΔΕ, ΕΖ, ὅταν τεθῇ τὸ μὲν Α εἰς τὸ Ζ, τὸ δὲ Γ εἰς τὸ Δ (θ. 6). Διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους, οὐδὲ ἐὰν τὸ Γ εἶναι μεγαλύτερον ὥστε νὰ ἰσορροπῇ πρὸς τὸ ΑΒ.

8

᾿Εὰν ἀπό τινος μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθός τι μὴ ἔχον τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους πρὸς τὸ ὅλον, τοῦ λοιποῦ μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ



βάρους θὰ εἶναι, ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα τῶν βαρῶν καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος πρὸς τὸ αὐτὸ *ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ [τᾶς] ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὰν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφηρημένου μεγέθεος ποτὶ τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας.*

ἔστω μεγέθεός τινος τοῦ ΑΒ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος H 140 *ἔστω τὸ Ε, ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ΕΓ καὶ ἐκβληθείσας ἀπολελάφθω ἁ ΓΖ ποτὶ τὰν ΓΕ λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὸ ΑΔ μέγεθος ποτὶ τὸ ΔΗ· δεικτέον, ὅτι τοῦ ΔΗ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ζ σαμεῖον.*

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ σαμεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΔ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε, τοῦ δὲ ΔΗ τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΔ, ΔΗ μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΘ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθέμεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν· ὥστε οὐκ ἐσσεῖται τὸ Γ σαμεῖον κατὰ τὰν ἀνάλογον τομὰν τᾷ εἰρημένᾳ. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ Γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΗ συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ ΑΒ. ἔστι δέ· ὑπέκειτο γάρ· οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ Θ κέντρον βάρεος τοῦ ΔΗ μεγέθεος.

θ'

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶν.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ἁ ΕΖ· φαμὶ δή, ὅτι τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ.

H 142 *μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΒ ἁ ΘΙ. τᾶς [δὲ] δὴ ΕΒ διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖταί ποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ΙΘ· καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα* μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους, καὶ ἀφοῦ ληφθῇ ἐπὶ [τῆς] ἐκβληθείσης τῆς ἑνούσης τὰ εἰρημένα κέντρα τοιοῦτον τμῆμα, ὥστε τοῦτο νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ δύο κέντρα, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθους πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑπολοίπου, τὸ πέρας τῆς οὕτω ληφθείσης εὐθείας.

Ἔστω μεγέθους τινὸς ΑΒ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ΑΒ τὸ ΑΔ, τοῦ ὁποίου κέντρον βάρους ἔστω τὸ Ε, ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΕΓ καὶ προεκβληθῇ, ἂς ληφθῇ ἡ ΓΖ τοιαύτη, ὥστε ΓΖ : ΓΕ = μέγεθος ΑΔ : μέγεθος ΔΗ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους ΔΗ εἶναι τὸ σημεῖον Ζ.

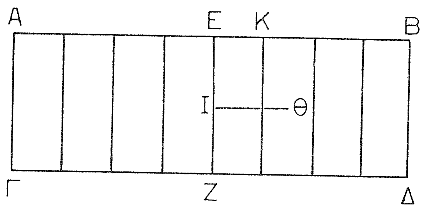
Διότι ἐὰν δὲν εἶναι τοῦτο, εἰ δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ σημεῖον Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν μεγέθους ΑΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ε, τοῦ δὲ ΔΗ τὸ Θ, τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγεθῶν ΑΔ, ΔΗ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΘ τμηθείσης κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς νὰ ἔχωσι λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν (θ. 6, 7)· ὥστε τὸ σημεῖον Γ δὲν θὰ εἶναι εἰς τὴν ἀνάλογον τομὴν πρὸς τὴν εἰρημένην. Δὲν θὰ εἶναι ἄρα τὸ Γ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΗ, τουτέστι τοῦ ΑΒ. Εἶναι δέ· διότι ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως· δὲν εἶναι ἄρα τὸ Θ κέντρον βάρους τοῦ μεγέθους ΔΗ.

9

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ ἑνοῦσα δὲ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΖ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΘΙ. Ἐὰν [δὲ] ἡ ΕΒ διχοτομῆται διαρκῶς θὰ φθάσῃ στιγμὴ καθ' ἣν θὰ ληφθῇ τμῆμα μικρότερον τῆς ΙΘ· ἂς διαιτᾶν ΑΕ, ΕΒ εἰς τὰς τᾷ ΕΚ ἴσας, καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΕΖ· διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὁμοῖα τῷ ΚΖ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ἴσων καὶ



ὁμοίων τῷ ΚΖ ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα, παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ΚΖ, ἄρτια τῷ πλήθει, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα, καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων αὐτά τε ἴσα ἐντὶ καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι· τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ· τὸ γὰρ Θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΕΖ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου.

ι'

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι.

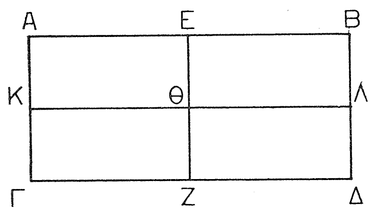
ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ΕΖ δίχα τέμνουσα τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἁ δὲ ΚΛ τὰς ΑΓ, ΒΔ· ἔστιν δὴ τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος
Η 144 ἐπὶ τᾶς ΕΖ· δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς

ρεθῇ λοιπὸν ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΕΒ εἰς τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ΕΚ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΖ· θὰ διαιρεθῇ λοιπὸν οὕτω τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὸ ΚΖ. Ἐὰν λοιπὸν τὰ ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὸ ΚΖ παραλληλόγραμμα τεθῶσιν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν (αἴτ. 4). Θὰ ὑπάρχωσι λοιπὸν μεγέθη τινά, παραλληλόγραμμα ἴσα πρὸς τὸ ΚΖ, ἄρτια κατὰ τὸ πλῆθος, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, καὶ τὰ μεσαῖα ἐξ αὐτῶν ἴσα μεταξύ των, καὶ ὅλα τὰ κείμενα ἑκατέρωθεν τῶν μεσαίων εἶναι ἴσα καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων (τῶν βαρῶν) εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι· θὰ εἶναι ἄρα τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους τῶν μεσαίων μεγεθῶν (θ. 5, πόρ. 2). Ὅμως δὲν εἶναι· διότι τὸ Θ εἶναι ἐκτὸς τῶν μεσαίων παραλληλογράμμων. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ.

10

Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον ὅπου τέμνονται αἱ διάμεσοι.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ εἰς αὐτὸ ἡ ΕΖ διχο-



τόμος τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ΚΛ διχοτόμος τῶν ΑΓ, ΒΔ· εἶναι λοιπὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΕΖ. Διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἐπὶ

ΚΛ· τὸ Θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ Θ αἱ διαμέτροι τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτοντι· ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ

ἔστιν δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι.

ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ ΔΒ. τὰ ἄρα ΑΒΔ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐντὶ καὶ ὁμοῖα ἀλλάλοις· ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλλαλα τῶν τριγώνων καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' ἄλλαλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον, καὶ τετμάσθω δίχα ἁ ΔΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΕΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΖΘ ἴσα τᾷ ΘΕ. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον καὶ τιθεμένας τᾶς μὲν ΑΒ πλευρᾶς ἐπὶ τὰν ΔΓ, τᾶς δὲ ΑΔ ἐπὶ τὰν ΒΓ, ἐφαρμόξει καὶ ἁ ΘΕ εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ΖΘ, καὶ τὸ Ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΓ τὸ Ζ, δῆλον, ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος H 146 *κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ μέσον τᾶς ΕΖ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ Θ σαμεῖον.*

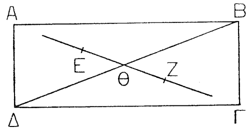
ια'

Ἐὰν δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἀλλάλοις ᾖ καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ποτὶ τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σαμεῖον τοῦ, ἐν ᾧ ἐστι, τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ, ἐν ᾧ ἐστι, τριγώνου [ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κέεσθαι ποτὶ τὰ ὁμοῖα σχήματα, τῆς ΚΛ· τὸ σημεῖον Θ ἄρα εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους. Εἰς δὲ τὸ Θ τέμνονται αἱ διάμεσοι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἀπεδείχθη τὸ ζητούμενον.

ΑΛΛΩΣ

Εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΔΒ. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ ὅμοια (Εὐκλ. Ι, 34)· ὥστε ἐὰν τὰ τρίγωνα ἐφαρμοσθῶσι τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου θὰ συμπέσωσι καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν. Ἔστω λοιπὸν

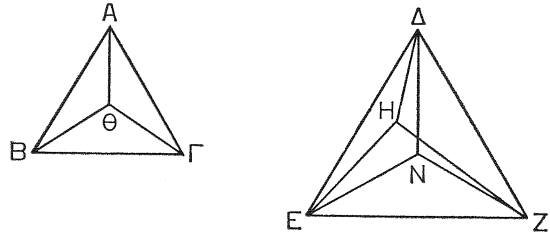


τοῦ τριγώνου ΑΒΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΒ κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΘ καὶ ἂς προεκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΖΘ ἴση πρὸς τὴν ΘΕ. Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ καὶ τεθῇ ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΔΓ, ἡ δὲ ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ εὐθεῖα ΘΕ ἐπὶ τῆς ΖΘ, καὶ τὸ σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ. Ἀλλὰ θὰ πέσῃ καὶ εἰς τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΒΔΓ (αἴτ. 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ε, τοῦ δὲ ΔΒΓ τὸ Ζ, εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΕΖ (θ. 4), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ σημεῖον Θ.

11

Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὅμοια καὶ εἰς αὐτὰ ὑπάρχωσι σημεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἓν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται, καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται [λέγομεν δὲ σημεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς ὅμοια σχήματα, ἐκεῖνα *ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσας ποιοῦσιν γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς].*

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ ΔΖ, οὕτως ἅ τε ΑΒ ποτὶ ΔΕ καὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΕΖ, καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ Θ, Ν



[πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα], καὶ ἔστω τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ ΔΕΖ τριγώνου.

μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η κέντρον βάρεος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΔΝ, ΕΝ, ΖΝ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐστὶ τὰ Θ, Η σαμεῖα, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα [ὥστε ἴσας ποιησοῦντι γωνίας ποτὶ ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς ἕκαστον ἑκάσταις], ἴσα ἄρα ἁ ὑπὸ ΗΔΕ γωνία τᾷ ὑπὸ ΘΑΒ. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ ΘΑΒ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ H 148 *ὑπὸ ΕΔΝ [διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ Θ, Ν σαμεῖα]· καὶ ἁ ὑπὸ ΕΔΝ γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΔΗ, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου τὸ Ν σαμεῖον· ἔστιν ἄρα.*

ιβ'

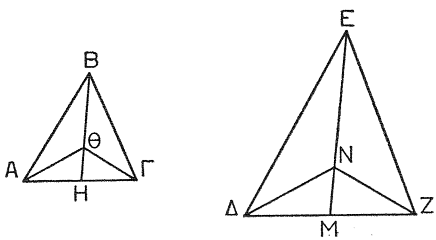
Εἴ κα δύο τρίγωνα ὁμοῖα ἔωντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐντι ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου ἐκ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰς ἴσας γωνίας, σχηματίζουσι μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας].

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ΑΓ : ΔΖ = ΑΒ : ΔΕ = ΒΓ : ΕΖ, καὶ εἰς τὰ εἰρημένα τρίγωνα ἔστω σημεῖα ὁμοίως κείμενα τὰ Θ, Ν [πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ], καὶ ἔστω τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Ν εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν τὸ Η νὰ εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΔΝ, ΕΝ, ΖΝ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ κέντρα τῶν βαρῶν εἶναι τὰ σημεῖα Θ, Η, τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρῶν κεῖνται ὁμοίως (αἴτ. 5) [ὥστε εἰς ἕκαστον νὰ σχηματίζωνται μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς γωνίαι ἴσαι ἀντιστοίχως], εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΗΔΕ ἴση πρὸς τὴν ΘΑΒ (αἴτ. 5). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΘΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΝ (αἴτ. 5) [διότι τὰ σημεῖα ΘΝ κεῖνται ὁμοίως]· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΕΔΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΗ, ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ τὸ σημεῖον Ν· εἶναι ἄρα.

12

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ὅμοια τρίγωνα, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τῆς



κορυφῆς μιᾶς γωνίας εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, καὶ τοῦ ἄλλου τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ὁμοίως πρὸς τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας γραμμᾶς.

ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ ΔΖ, οὕτως ἅ τε ΑΒ ποτὶ ΔΕ καὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΖΕ, καὶ τμαθείσας τᾶς ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η ἐπεζεύχθω ἁ ΒΗ, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τᾶς ΒΗ τὸ Θ· λέγω, ὅτι καὶ τοῦ ΕΔΖ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας.

τετμάσθω ἁ ΔΖ δίχα κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΕΜ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἁ ΒΗ ποτὶ ΒΘ, οὕτως ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΓ, ΔΝ, ΝΖ. ἐπεί ἐστι τᾶς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἁ ΑΗ, τᾶς δὲ ΔΖ ἡμίσεια ἁ ΔΜ, ἔστιν ἄρα καί, H 150 ὡς ἁ ΒΑ ποτὶ ΕΔ, οὕτως ἁ ΑΗ ποτὶ ΔΜ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία τᾷ ὑπὸ ΔΜΕ, καί ἐστιν, ὡς ἁ ΑΗ ποτὶ ΔΜ, οὕτως ἁ ΒΗ ποτὶ ΕΜ. ἔστιν δὲ καί, ὡς ἁ ΒΗ ποτὶ ΒΘ, οὕτως ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΝ· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ ΒΘ ποτὶ ΕΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν ἐντι· εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶν ἁ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τᾷ ὑπὸ ΕΔΝ· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ ΘΑΓ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΝΔΖ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ ΒΓΘ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΕΖΝ, ἁ δὲ ὑπὸ ΘΓΗ τᾷ ὑπὸ ΝΖΜ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΑΒΘ τᾷ ὑπὸ ΔΕΜ ἴσα· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ ΘΒΓ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ΝΕΖ. διὰ ταῦτα δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, Ν σαμεῖα [ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας ποιεῖ]. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ Θ, Ν σαμεῖα, καί ἐστι τὸ Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ τὸ Ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ ΔΕΖ.

ιγ′

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀγομένα τὰν βάσιν.

ταύτην ἀγομένης γραμμῆς.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ΑΓ : ΔΖ = ΑΒ : ΔΕ = ΒΓ : ΖΕ (Εὐκλ. VI, 4), καὶ ἀφοῦ τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κείμενον ἐπὶ τῆς ΒΗ τὸ σημεῖον Θ· λέγω, ὅτι καὶ τοῦ τριγώνου ΕΔΖ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ὁμοίως ἀγομένης εὐθείας.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΖ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΜ, καὶ ἂς γίνῃ ΒΗ : ΒΘ = ΜΕ : ΕΝ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΘΓ, ΔΝ, ΝΖ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΓΑ καὶ ἡ ΔΜ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΖ, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ΒΑ : ΕΔ = ΑΗ : ΔΜ. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ἴση ἡ γωνία ΑΗΒ πρὸς τὴν ΔΜΕ (Εὐκλ. VI, 6), καὶ εἶναι ὡς ΑΗ : ΔΜ = ΒΗ : ΕΜ (Εὐκλ. VI, 4). Εἶναι δὲ καὶ ὡς ΒΗ : ΒΘ = ΜΕ : ΕΝ· καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι, ὡς ΑΒ : ΔΕ = ΒΘ : ΕΝ. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· ἐὰν δὲ συμβαίνῃ τοῦτο, ἡ γωνία ΒΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΝ (Εὐκλ. VI, 6)· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία ἡ ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΔΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ μὲν γωνία ΒΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖΝ, ἡ δὲ ΘΓΗ πρὸς τὴν ΝΖΜ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΔΕΜ· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία ἡ ΘΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΕΖ. Δι' ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους τὰ σημεῖα Θ, Ν κεῖνται ὁμοίως [σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς]. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σημεῖα Θ, Ν κεῖνται ὁμοίως, καὶ τὸ Θ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ τὸ Ν ἄρα εἶναι κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΖ (θ. 11).

13

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας εἰς τὸ μέσον τῆς (ἀπέναντι) βάσεως.

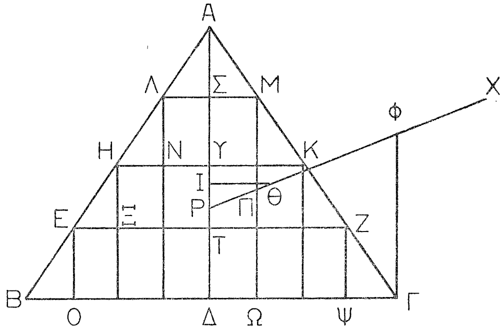
ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ βάσιν· δεικτέον, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ.

H 152 *μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθω ἁ ΘΙ. ἀεὶ δὴ δίχα τεμνομένας τᾶς ΔΓ ἐσσεῖταί ποκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ΘΙ· καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τᾶν ΒΔ, ΔΓ ἐς τὰς ἴσας, καὶ διὰ τᾶν τομᾶν παρὰ τὰν ΑΔ ἄχθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ· ἐσσοῦνται δὴ αὗται παρὰ τὰν ΒΓ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν ΜΝ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΥΣ, τοῦ δὲ ΚΞ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΤΥ, τοῦ δὲ ΖΟ ἐπὶ τᾶς ΤΔ· τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΣΔ εὐθείας. ἔστω δὴ τὸ Ρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΡΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΔ ἁ ΓΦ. τὸ δὴ ΑΔΓ [τρίγωνον] ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τῷ ΑΔΓ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ, διὰ τὸ ἴσας εἶμεν τὰς ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ ἀναγεγραμμένα ὁμοῖα τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ ΑΛ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον*
H 154 *ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ. ἀλλὰ ἁ ΓΑ ποτὶ ΑΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΡ ποτὶ ΡΘ· ὁ γὰρ τᾶς ΓΑ ποτὶ ΑΜ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ [ὅλας] τᾶς ΦΡ ποτὶ ΡΠ [διὰ τὸ ὁμοῖα εἶμεν τὰ τρίγωνα]· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον ποτὶ τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΡ ποτὶ ΡΘ· ὥστε καὶ διελόντι τὰ ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλόγραμμα ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΦΘ ποτὶ ΘΡ. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων ποτὶ τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ ΧΘ ποτὶ ΘΡ. ἐπεὶ οὖν ἔστι τι μέγεθος τὸ ΑΒΓ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ, καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ παραλληλογράμμων, καί ἐστιν*

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Α΄
(ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α΄)

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εἰς αὐτὸ ἡ ΑΔ ἀγομένη εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΔ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ σημεῖον Θ καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ΔΓ διχοτομῆται διαρκῶς θὰ φθάσῃ στιγμή, καθ' ἣν θὰ ληφθῇ τμῆμα μικρότερον τῆς ΘΙ· καὶ ἂς διαιρεθῇ ἑκάστη τῶν ΒΔ, ΔΓ εἰς ἴσα τμήματα καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν τομῶν παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ· θὰ εἶναι λοιπὸν αὗται παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ. Τοῦ μὲν παραλληλογράμμου λοιπὸν ΜΝ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΥΣ, τοῦ δὲ ΚΞ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΤΥ, τοῦ δὲ ΖΟ ἐπὶ τῆς ΤΔ (θ. 9)· τοῦ μεγέθους ἄρα τοῦ συγκειμένου ἐξ ὅλων τούτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΣΔ (θ. 4). Ἔστω ὅτι εἶναι τοῦτο τὸ Ρ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΡΘ καὶ ἂς προεκβληθῇ, καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΓΦ. Τὸ [τρίγωνον] λοιπὸν ΑΔΓ πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀναγεγραμμένα ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΚ, ΚΖ, ΖΓ καὶ ὅμοια πρὸς τὸ ΑΔΓ ἔχει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΓΑ : ΑΜ, διότι αἱ ΑΜ, ΜΚ, ΖΓ, ΚΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ πρὸς ὅλα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΛ, ΛΗ, ΗΕ, ΕΒ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΒΑ : ΑΛ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ πρὸς ὅλα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΓΑ : ΑΜ. Ἀλλὰ ΓΑ : ΑΜ $>$ ΦΡ : ΡΘ· διότι ΓΑ : ΑΜ $=$ ΦΡ : ΡΠ [διότι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια]· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ πρὸς τὰ εἰρημένα τρίγωνα ἔχει λόγον μεγαλύτερον τοῦ λόγου ΦΡ : ΡΘ· ὥστε καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως λόγου (Εὐκλ. V, ὁρισ. 15) τὰ παραλληλόγραμμα ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ πρὸς τὰ ὑπολειπόμενα τρίγωνα ἔχουσι λόγον μεγαλύτερον τοῦ ΦΘ : ΘΡ. Ἂς γίνῃ λοιπὸν πρὸς τὸν λόγον τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα ἴσος ὁ λόγος τῆς ΧΘ : ΘΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει μέγεθός τι τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἔχει ἀφαιρεθῇ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν παραλληλογράμμων ΜΝ, ΚΞ, ΖΟ, καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μεγέθους κέντρον *τοῦ ἀφηρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΡΘ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας ποτὶ τὰν ΘΡ τοῦτον ἐ-*



χούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα Χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων· ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Χ εὐθείας παρὰ τὰν ΑΔ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταὐτὰ πάντα ἐντὶ [τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος]. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

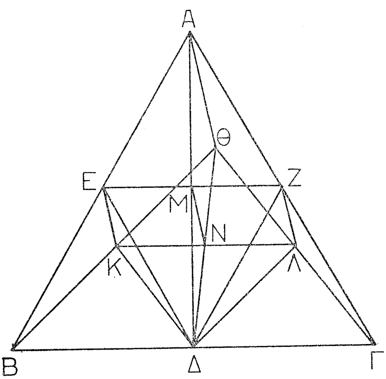
ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἁ ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΑΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

H 156 *μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἵ τε ΑΘ, ΘΒ, ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ ἐπὶ μέσας τὰς ΒΑ, ΑΓ,* τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ρ, τοῦ ὑπολοίπου ἄρα μεγέθους τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν ἀπομενόντων τριγώνων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΡΘ ἀφοῦ αὕτη ἐκβληθῇ καὶ ληφθῇ τμῆμα αὐτῆς ἔχον πρὸς τὴν ΘΡ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος πρὸς τὸ ἀπομεῖναν (θ. 8). Τὸ σημεῖον ἄρα Χ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπομενόντων (τριγώνων)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐὰν διὰ τοῦ Χ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, πάντα τὰ τρίγωνα θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ [δηλαδὴ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος]. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΔ.



Διότι ἂς μὴ εἶναι, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσι καὶ αἱ ΑΘ, ΘΒ, ΘΓ καὶ αἱ ΕΔ, ΖΕ εἰς τὸ μέσον τῶν ΒΑ, ΑΓ, καὶ

καὶ παρὰ τὰν ΑΘ ἄχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. ἐπεὶ ὁμοῖόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ διὰ τὸ παράλληλον εἶμεν τὰν ΒΑ τᾷ ΖΔ, καί ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον, καὶ τοῦ ΖΔΓ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Λ σαμεῖον· ὁμοίως γάρ ἐντι κείμενα τὰ Θ, Λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων [ἐπειδήπερ ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιέοντι γωνίας· φανερὸν γὰρ τοῦτο]. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΕΒΔ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Κ σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΕΒΔ, ΖΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τᾶς ΚΛ εὐθείας [ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ ΕΒΔ, ΖΔΓ τρίγωνα]. καί ἐστιν τᾶς ΚΛ μέσον τὸ Ν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἁ ΒΕ ποτὶ ΕΑ, οὕτως ἁ ΒΚ ποτὶ ΘΚ, ὡς δὲ ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΑ, οὕτως ἁ ΓΛ ποτὶ ΛΘ· εἰ δὲ τοῦτο, ἔστιν ἁ ΒΓ τᾷ ΚΛ παράλληλος. καὶ ἐπέζευκται ἁ ΔΘ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ ΔΓ, οὕτως ἁ ΚΝ ποτὶ τὰν ΝΛ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ Ν. ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΕΔΖ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον· ὥστε τοῦ ἐκ πάντων H 158 συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΜΝ εὐθείας. ἔστιν δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον· ἁ ΜΝ ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται διὰ τοῦ Θ σαμείου· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου οὐκ ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΑΔ εὐθείας· ἔστιν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

ιδ'

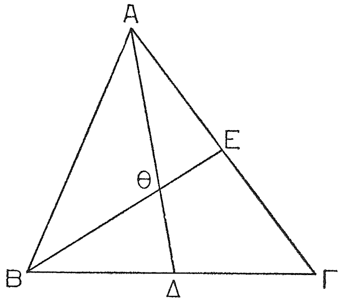
Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τᾶν γωνιᾶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι.

παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΘ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΖΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΛΔ, ΔΚ, ΔΘ, ΜΝ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΓ, διότι ἡ ΒΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ, εἶναι ἄρα καὶ τοῦ τριγώνου ΖΔΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Λ (θ. 11)· διότι τὰ σημεῖα Θ, Λ εἶναι ὁμοίως κείμενα εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων [ἐπειδὴ σχηματίζουσι πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας γωνίας· διότι τοῦτο εἶναι φανερόν]. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λοιπὸν λόγους καὶ τοῦ τριγώνου ΕΒΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Κ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων ΕΒΔ, ΖΔΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΚΛ (θ. 4) [ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΕΒΔ, ΖΔΓ εἶναι ἴσα]. Καὶ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΚΛ τὸ Ν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΕ : ΕΑ = ΒΚ : ΘΚ, ὡς δὲ ΓΖ : ΖΑ = ΓΛ : ΛΘ (Εὐκλ. VI, 2)· ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ εἶναι ἡ ΒΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΛ. Καὶ ἔχει ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ : ΔΓ = ΚΝ : ΝΛ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ν. Εἶναι δὲ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Μ (θ. 10)· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ πάντων τῶν σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΝ. Εἶναι δὲ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Θ· ἡ ΜΝ ἄρα προεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Θ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἀληθὲς ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ· εἶναι ἄρα ἐπ᾽ αὐτῆς.

14

Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἀγομένων εὐθειῶν.

ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν ΑΔ ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἐπὶ μέσαν τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ ΑΒΓ



τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐφ' ἑκατέρας τᾶν ΑΔ, ΒΕ· δέδεικται γὰρ τοῦτο. ὥστε τὸ Θ σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν.

ιε'

Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλάλαις τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τᾶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὰν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τᾶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἁ ἴσα τᾷ διπλασίᾳ τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τᾶν παραλλήλων.

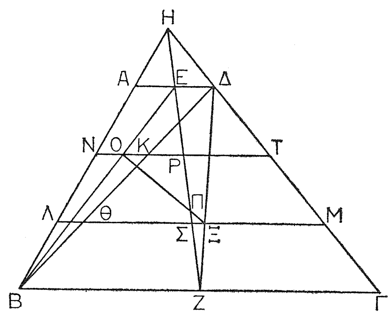
H 160 ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ παραλλήλους ἔχον τὰς ΑΔ, ΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας τᾶν ΑΔ, ΒΓ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς ΕΖ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἐὰν γὰρ ἐκβαλῇς τὰς ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, δῆλον, ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται, καὶ ἐσσεῖται τοῦ ΗΒΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΗΖ καὶ ὁμοίως τοῦ ΑΗΔ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΕΗ· καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ μὲν ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ΒΕ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἰς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΒΕ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 13). Ὥστε τὸ σημεῖον Θ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους.

15

Παντὸς τραπεζίου ἔχοντος τὰς δύο πλευρὰς παραλλήλους πρὸς ἀλλήλας τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν παραλλήλων, διαιρεθείσης κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ ἔχον πέρας τὸ μέσον τῆς μικροτέρας τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τῆς μεγαλυτέρας τῶν παραλλήλων σὺν τὴν μικροτέραν πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τῆς μικροτέρας τῶν παραλλήλων σὺν τὴν μεγαλυτέραν.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχον παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΒΓ, ἡ δὲ ΕΖ ἂς ἑνώνῃ τὰ μέσα τῶν ΑΔ, ΒΓ. Ὅτι λοιπὸν τὸ κέντρον βάρους



τοῦ τραπεζίου εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΖ εἶναι φανερόν. Διότι ἐὰν προεκβάλῃς τὰς ΓΔΗ, ΖΕΗ, ΒΑΗ, εἶναι φανερόν, ὅτι αὗται συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ θὰ εἶναι τοῦ τριγώνου ΗΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΗΖ καὶ ὁμοίως τοῦ τριγώνου ΑΗΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΗ (θ. 13)· καὶ τοῦ ἀπομένοντος ἄρα τραπε-

ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΕΖ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΒΔ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν ΒΓ ἄχθωσαν αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ΔΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΘΜ, ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ ΘΒ τᾶς ΒΔ [καὶ διὰ τοῦ Θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἆκται ἁ ΜΘ]. ἔστιν δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΔΒΓ τριγώνου καὶ ἐπὶ τᾶς ΔΖ· ὥστε τὸ Ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τὸ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΟΞ εὐθείας. ἔστιν δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος H 162 καὶ ἐπὶ τᾶς ΕΖ· ὥστε τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Π σαμεῖον. ἔχοι δ' ἂν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ λόγον, ὃν ἁ ΟΠ ποτὶ ΠΞ. ἀλλ' ὡς τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, οὕτως ἐντὶ ἁ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, ὡς δὲ ἁ ΟΠ ποτὶ ΠΞ, οὕτως ἁ ΡΠ ποτὶ ΠΣ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΒΓ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἁ ΡΠ ποτὶ ΠΣ· ὥστε καί, ὡς δύο αἱ ΒΓ μετὰ τᾶς ΑΔ ποτὶ δύο τὰς ΑΔ μετὰ τᾶς ΒΓ, οὕτως δύο αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ ποτὶ δύο τὰς ΠΣ μετὰ τᾶς ΠΡ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ΡΠ μετὰ τᾶς ΠΣ συναμφότερός ἐστιν ἁ ΣΡΠ, τουτέστιν ἁ ΠΕ, δύο δὲ αἱ ΠΣ μετὰ τᾶς ΠΡ συναμφότερός ἐστιν ἁ ΡΣΠ, τουτέστιν ἁ ΠΖ· δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα.

ζίου ΑΒΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΕΖ (θ. 8). Ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΔ ἂς διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Θ, καὶ δι' αὐτῶν ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ αἱ ΛΘΜ, ΝΚΤ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΖ, ΒΕ, ΟΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν τριγώνου ΔΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΘΜ, ἐπειδὴ ἡ ΘΒ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ΒΔ [καὶ διὰ τοῦ σημείου Θ ἔχει ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἡ ΜΘ]. Εἶναι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΖ (θ. 13)· ὥστε τὸ Ξ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εἰρημένου τριγώνου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ· τοῦ μεγέθους ἄρα τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΒΔΓ, ὅπερ εἶναι τὸ τραπέζιον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΞ. Εἶναι δὲ καὶ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἐπὶ τῆς ΕΖ· ὥστε τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Π. Θὰ ἰσχύῃ δὲ ἡ ἀναλογία, τρίγωνον ΒΔΓ : τρίγωνον ΑΒΔ $=$ ΟΠ : ΠΞ (θ. 6 καὶ 7). Ἀλλά, τρίγωνον ΒΔΓ : τρίγωνον ΑΒΔ $=$ ΒΓ : ΑΔ (Εὐκλ. VI, 1), καὶ ΟΠ : ΠΞ $=$ ΡΠ : ΠΣ· καὶ ὡς ἄρα ΒΓ : ΑΔ $=$ ΡΠ : ΠΣ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἄθροισμα, 2ΒΓ $+$ ΑΔ : ἄθροισμα 2ΑΔ $+$ ΒΓ $=$ 2ΡΠ $+$ ΠΣ : 2ΠΣ $+$ ΠΡ. Ἀλλὰ 2ΡΠ $+$ ΠΣ $=$ ΣΡ $+$ ΡΠ $=$ ΠΕ, καὶ 2ΠΣ $+$ ΠΡ $=$ ΡΣ $+$ ΣΠ $=$ ΠΖ· ἀπεδείχθησαν ἄρα τὰ ζητούμενα.

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β΄

H 164 ## Ἰσορροπικῶν β΄

α΄

Εἴ κα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν διαιρέον οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις.

ἔστω δύο χωρία τὰ ΑΒ, ΓΔ, οἷα εἴρηται, κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος ἔστω τὰ Ε, Ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ ΓΔ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΖΘ ποτὶ ΘΕ. δεικτέον, ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, ΓΔ χωρίων συγκειμένου μεγέ-
H 166 *θεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον.*

ἔστω δὴ τᾷ μὲν ΕΘ ἑκατέρα ἴσα τᾶν ΖΗ, ΖΚ, τᾷ δὲ ΖΘ, τουτέστι τᾷ ΗΕ, ἴσα ἁ ΕΛ· ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ ΛΘ τᾷ ΚΘ ἴσα, καὶ ἔτι, ὡς ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ ποτὶ ΓΔ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν ΛΗ τὸ χωρίον τοῦ ΑΒ ἐφ᾽ ἑκάτερα τᾶς ΛΗ, ὥστε εἶμεν τὸ ΜΝ ἴσον τῷ ΑΒ· ἐσσεῖται δὴ τοῦ ΜΝ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ ΝΞ, ἕξει δὲ τὸ ΜΝ ποτὶ τὸ ΝΞ λόγον, ὃν ἁ ΛΗ ποτὶ ΗΚ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ΑΒ ποτὶ τὸ ΓΔ τὸν τᾶς ΛΗ ποτὶ ΗΚ λόγον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ ποτὶ ΓΔ, οὕτως τὸ ΜΝ ποτὶ ΝΞ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ΑΒ τῷ ΜΝ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΓΔ τῷ ΝΞ, καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ Ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΛΘ τᾷ

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Β′

(’Ισορροπικῶν)

βιβλίον 2

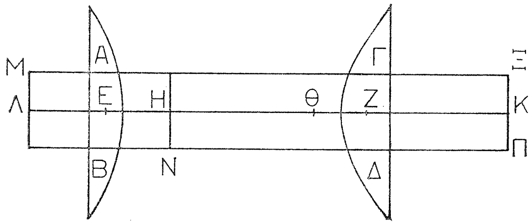
1

’Εὰν ὑπάρχωσι δύο χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ παραβάλωμεν ὡς εὐθύγραμμα παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, μὴ ἔχοντα τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους, τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν χωρίων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους αὐτῶν, καὶ θὰ διαιρῇ οὕτω πως τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς νὰ ἔχωσι λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν λόγον τῶν χωρίων.

῎Εστω δύο χωρία τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὡς ἐλέχθησαν, κέντρα δὲ τοῦ βάρους αὐτῶν ἔστω τὰ σημεῖα Ε, Ζ, καὶ ἂς εἶναι $\mathrm{AB} : \Gamma\Delta = \mathrm{Z}\Theta : \Theta\mathrm{E}$. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν χωρίων ΑΒ, ΓΔ τὸ κέντρον βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ.

῎Εστω λοιπὸν πρὸς μὲν τὴν ΕΘ ἴση ἑκάστη τῶν ΖΗ, ΖΚ, πρὸς δὲ τὴν ΖΘ, τουτέστι τὴν ΗΕ, ἴση ἡ ΕΛ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΛΘ ἴση πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἀκόμη θὰ εἶναι $\Lambda\mathrm{H} : \mathrm{HK} = \mathrm{AB} : \Gamma\Delta$ (Εὐκλ. V, 15)· διότι ἑκάστη εἶναι διπλασία ἑκάστης. ῞Ας παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΛΗ τὸ χωρίον τοῦ ΑΒ συμμετρικῶς πρὸς τὰ δύο μέρη τῆς ΛΗ, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ ΜΝ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Ε (1, 10). ῞Ας συμπληρωθῇ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΝΞ, ὁπότε θὰ εἶναι $\mathrm{MN} : \mathrm{N}\Xi = \Lambda\mathrm{H} : \mathrm{HK}$ (Εὐκλ. VI, 1). Εἶναι δὲ καὶ $\mathrm{AB} : \Gamma\Delta = \Lambda\mathrm{H} : \mathrm{HK}$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $\mathrm{AB} : \Gamma\Delta = \mathrm{MN} : \mathrm{N}\Xi$. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. V, 16)· εἶναι δὲ $\mathrm{AB} = \mathrm{MN}$· εἶναι ἄρα καὶ $\Gamma\Delta = \mathrm{N}\Xi$ καὶ εἶναι τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ τὸ σημεῖον Ζ (1, 10). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι

ΘΚ, καὶ ὅλα ἁ ΛΚ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, [τοῦ] ὅλου τοῦ ΠΜ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον. ἀλλὰ τὸ



ΜΠ ἴσον τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΜΝ, ΝΞ· ὥστε καὶ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΒ, ΓΔ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον.

H 168 β′

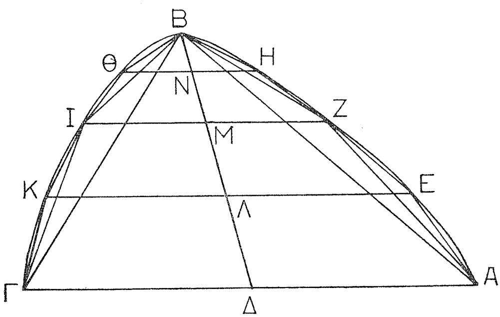
Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσιας ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερὸν δέ, ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι τάς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος. ταῦτα δὲ δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν.

Εἰ δέ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ

ΛΘ = ΘΚ καὶ ὅλη ἡ ΛΚ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς θὰ εἶναι ὅλου τοῦ παραλληλογράμμου ΠΜ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Θ (1, 10). Ἀλλὰ τὸ ΜΠ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΜΝ, ΝΞ· ὥστε καὶ τοῦ ἀθροίσματος ΑΒ, ΓΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ.

2

Ἐὰν εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐγγραφῶσι τρίγωνα ἔχοντα τὰς αὐτὰς βάσεις πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάντοτε εἰς τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐγγράφωνται τρίγωνα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα εἰς τὸ τμῆμα ἂς λέγηται, ὅτι ἐγγράφεται γνωρίμως. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τοῦ οὕτω πως ἐγγραφέντος σχήματος αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι πλησιέ-



στατα πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος καὶ ἀκολούθως αἱ συνδέουσαι ὁμοίως τὰς ἄλλας γωνίας θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τμήματος καὶ θὰ διχοτομῶνται ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τμήματος καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσι τὴν διάμετρον εἰς μέρη τὰ ὁποῖα ἔχουσι λόγους ὡς οἱ ἐν συνεχείᾳ περιττοὶ ἀριθμοὶ τῆς μονάδος λαμβανομένης διὰ τὸ πλησίον πρὸς τὴν κορυφὴν τμῆμα. Ταῦτα δὲ πρέπει νὰ ἀποδειχθῶσιν εἰς τοὺς οἰκείους τόπους.

Ἐὰν εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγρα-

ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου.

ἔστω τμᾶμα τὸ ΑΒΓ, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΕΖΗΒΘΙΚΓ. δεικτέον, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ΒΔ.

ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν ΑΕΚΓ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος
H 170 *ἐπὶ τᾶς ΛΔ ἐστι, τοῦ δὲ ΕΖΙΚ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς ΜΛ, τοῦ δὲ ΖΗΘΙ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς ΜΝ, ἔτι δὲ καὶ τοῦ ΗΒΘ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΒΝ, δῆλον, ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΒΔ ἐστιν.*

γ'

Εἴ κα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων.

ἔστω δύο τμάματα τὰ ΑΒΓ, ΞΟΠ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως, καὶ τᾶν πασᾶν πλευρᾶν τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλάλοις ἴσον, διαμέτροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ ΒΔ, ΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ καὶ αἱ ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ. ἐπεὶ οὖν ἅ τε ΒΔ διαιρεῖται ὑπὸ τᾶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσῶν λόγους καὶ ἁ ΡΟ, καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτᾶν ἴσα ἐντί, δῆλον, ὡς τά τε τμάματα τᾶν διαμέτρων ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται,
H 172 *καὶ αἱ παραλλήλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι. καὶ τῶν τρα-*

φῇ εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ τμήματος.

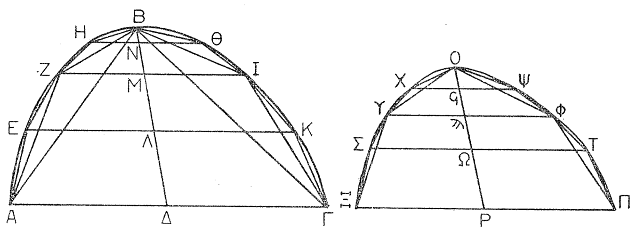
Ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ὅπως ἐλέχθη, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ γνωρίμως τὸ εὐθύγραμμον ΑΕΖΗΒΘΙΚΓ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ εὐθυγράμμου εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ.

Διότι ἐπειδὴ τοῦ μὲν τραπεζίου ΑΕΚΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΛΔ, τοῦ δὲ τραπεζίου ΕΖΙΚ τὸ κέντρον εἶναι ἐπὶ τῆς ΜΛ, τοῦ δὲ τραπεζίου ΖΗΘΙ τὸ κέντρον εἶναι ἐπὶ τῆς ΜΝ, ἀκόμη δὲ τοῦ τριγώνου ΗΒΘ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΝ, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ.

3

Ἐὰν εἰς δύο ὅμοια τμήματα περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ εἰς ἕκαστον γνωρίμως εὐθύγραμμον, νὰ ἔχωσι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας κατὰ τὸ πλῆθος, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ τέμνωσιν ὁμοίως τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων.

Ἔστω δύο τμήματα τὰ ΑΒΓ, ΞΟΠ, καὶ ἂς ἐγγραφῶσιν εἰς



αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως, καὶ νὰ ἔχωσι τὸ πλῆθος ὅλων τῶν πλευρῶν ἴσον, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμημάτων αἱ ΒΔ, ΟΡ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΖΙ, ΗΘ καὶ αἱ ΣΤ, ΥΦ, ΧΨ. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ ἡ ΒΔ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς λόγους τῶν (ἀπὸ τῆς μονάδος) ἐν συνεχείᾳ περιττῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ ΡΟ, καὶ κατὰ τὸ πλῆθος εἶναι ἴσα τὰ τμήματα αὐτά, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὰ τμήματα τῶν διαμέτρων θὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, καὶ αἱ παράλληλοι *πεζίων τοῦ τε ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶν ΛΔ, ΩΡ εὐθειᾶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ ΑΓ, ΕΚ ταῖς ΞΠ, ΣΤ· πάλιν δὲ καὶ τῶν ΕΖΙΚ, ΣΥΦΤ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς ΛΜ, Οϡ, καὶ τῶν ΖΗΘΙ, ΥΧΨΦ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς ΜΝ, ϛϡ, ἐσσεῖται δὲ καὶ τῶν ΗΒΘ, ΧΟΨ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τᾶν ΒΝ, Οϛ ὁμοίως κείμενα· ἔχοντι δὴ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα. δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ ΑΒΓ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν ΒΔ* H 174 *καὶ τοῦ ἐν τῷ ΞΟΠ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὰν ΟΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

δ′

Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου.

ἔστω τμᾶμα, ὡς εἴρηται, τὸ ΑΒΓ, οὗ διάμετρος ἔστω ἁ ΒΔ. δεικτέον, ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΒΔ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἁ ΕΖ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμᾶμα τρίγωνον τὸ ΑΒΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΔ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον· ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ Κ· τοῦ δὴ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΒΔ. ἔστω τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΘΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ παρὰ τὰν ΒΔ ἄχθω ἁ ΓΛ· δῆλον δή, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα ἢ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ. ἀλλ', ὡς θὰ ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς λόγους. Καὶ τῶν τραπεζίων καὶ τοῦ ΑΕΚΓ καὶ τοῦ ΞΣΤΠ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ εἶναι ὁμοίως κείμενα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΛΔ, ΩΡ, ἐπειδὴ ΑΓ : ΕΚ = ΞΠ : ΣΤ· πάλιν δὲ καὶ τῶν τραπεζίων ΕΖΙΚ, ΣΥΦΤ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ διαιρῶσιν ὁμοίως τὰς ΛΜ, Ω϶, καὶ τῶν τραπεζίων ΖΗΘΙ, ΥΧΨΦ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν θὰ διαιρῶσιν ὁμοίως τὰς ΜΝ, ϛ϶, θὰ εἶναι δὲ καὶ τῶν τριγώνων ΗΒΘ, ΧΟΨ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ὁμοίως κείμενα ἐπὶ τῶν ΒΝ, Οϛ· θὰ ἔχωσι λοιπὸν τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ὁλοκλήρου τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ ὁμοίως τὴν ΒΔ καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τμῆμα ΞΟΠ τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ ὁμοίως τὴν ΟΡ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

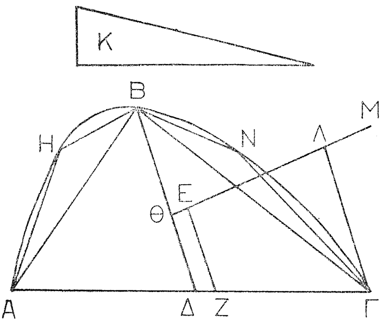
4

Παντὸς τμήματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ τμήματος.

Ἔστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη, τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τοῦ εἰρημένου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον καὶ ἂς εἶναι ΓΖ : ΖΔ = τρίγωνον ΑΒΓ : χωρίον Κ· ἂς ἐγγραφῇ δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ Κ· τοῦ ἐγγραφομένου ὅμως εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ (θ. 2). Ἔστω τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ, καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΛ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τμῆμα εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον

H 176 *τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ, οὕτως ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΔ· καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΓΖ ποτὶ ΖΔ, τουτέστιν ἁ ΛΕ ποτὶ ΕΘ. ἐχέτω οὖν ἁ ΜΕ ποτὶ ΕΘ τὸν αὐτὸν λόγον τὸν τοῦ*



εὐθυγράμμου ποτὶ τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ Θ, δῆλον, ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐκβληθείσας τᾶς ΘΕ καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν ΘΕ, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα. ὥστε εἴη κα τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ σαμεῖον· ὅπερ ἄτοπον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Μ παρὰ τὰν ΒΔ ἀγομένας ἐπὶ ταὐτὰ ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς ΒΔ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

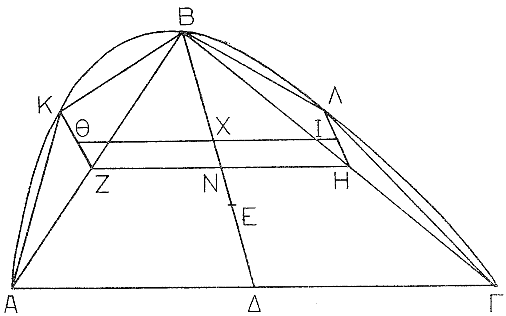
ε′

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον.

λόγον ἢ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ Κ. Ἀλλὰ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ : Κ = ΓΖ : ΖΔ· καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ ΓΖ : ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΛΕ : ΕΘ. Ἂς ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΜΕ : ΕΘ τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸν λόγον τοῦ εὐθυγράμμου πρὸς τὰ τμήματα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν Ε εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ εὐθυγράμμου εἶναι τὸ Θ, εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ λοιποῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι, ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΘΕ καὶ ληφθῇ εὐθεῖά τις, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΘΕ, ὃν ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμήματα. Ὥστε καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Μ· ὅπερ ἄτοπον· διότι τὰ περιλειπόμενα τμήματα, ὅταν ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, θὰ εἶναι ὅλα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΒΔ.

5

Ἐὰν εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ εὐθύγραμμον γνωρίμως, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμή-



ματος εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος ἢ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου.

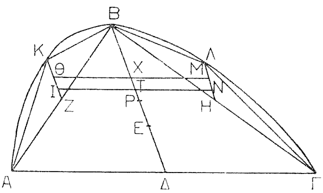
ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμάσθω ἁ ΒΔ κατὰ τὸ Ε, ὥστε εἶμεν διπλασί-
H 178 αν τὰν ΒΕ τᾶς ΕΔ· ἔστιν οὖν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε σαμεῖον. τετμάσθω δὴ δίχα ἑκατέρα τᾶν ΑΒ, ΒΓ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ τῶν Ζ, Η παρὰ τὰν ΒΔ ἄχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΗ· ἐσσεῖται ἄρα τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΖΚ, τοῦ δὲ ΒΓΛ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΗΛ. ἔστω δὲ τὰ Θ, Ι, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΘΙ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΘΖΗΙ, καὶ ἴσα ἐστι τᾷ ΖΝ ἁ ΝΗ, ἔστιν ἄρα καὶ ἁ ΧΘ ἴσα τᾷ ΧΙ· ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ μέσας τᾶς ΘΙ [ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα], τουτέστιν τὸ Χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ Χ, δῆλον οὖν,
H 180 ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΧΕ, τουτέστι μεταξὺ τῶν Χ, Ε σαμείων· ὥστ' εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΚΒΛΓ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ ΒΔ, ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων ἑκατέρα τᾶν ΚΖ, ΛΗ διάμετρος [καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ ΑΚΒ τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου]. ἔστω οὖν τοῦ μὲν τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ι, πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν ΒΛΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ν· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τριγώνων τὸ Τ. πάλιν οὖν, ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ

Ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ἐγγραφῆ εἰς αὐτὸ γνωρίμως πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς τμηθῆ ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Ε, ὥστε ἡ ΒΕ νὰ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔ· εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Ε, (1, 14). Ἂς τμηθῆ λοιπὸν ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ κατὰ τὰ σημεῖα Ζ, Η, καὶ διὰ τῶν Ζ, Η ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ αἱ ΖΚ, ΛΗ· θὰ εἶναι ἄρα τοῦ μὲν τμήματος ΑΚΒ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΖΚ (θ. 4), τοῦ δὲ τμήματος ΒΓΛ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΗΛ. Ἔστω ὅτι εἶναι αὐτὰ τὰ Θ, Ι, καὶ ἂς ἀχθῆ ἡ ΘΙ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΘΖΗΙ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἡ ΝΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΝ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΧΘ = ΧΙ· ὥστε τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς ΘΙ [ἐπειδὴ βεβαίως τὰ τμήματα εἶναι ἴσα], τουτέστιν τὸ σημεῖον Χ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ε, τοῦ δὲ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ εἶναι τὸ Χ, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλου τοῦ τμήματος ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΧΕ, τουτέστι μεταξὺ τῶν σημείων Χ, Ε· ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος θὰ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος ἢ τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ἐγγραφομένου γνωρίμως.

Ἂς ἐγγραφῆ πάλιν εἰς τὸ τμῆμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ ΑΚΒΛΓ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος διάμετρος ἡ ΒΔ, ἑκάστου δὲ τῶν τμημάτων διάμετρος ἑκάστη τῶν ΚΖ, ΛΗ [καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τμῆμα ΑΚΒ ἔχει ἐγγραφῆ γνωρίμως εὐθύγραμμον, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν ἢ τὸ κέντρον τοῦ εὐθυγράμμου]. Ἔστω λοιπὸν τοῦ μὲν τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ι, πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν τμήματος ΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ Ν· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων

τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Ε, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων τὸ Χ, δῆλον, ὡς [τοῦ] ὅλου τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΧΕ τμα-
H 182 *θείσας οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ*



τὰ συναμφότερα τὰ ΑΚΒ, ΒΛΓ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ Χ ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ ΑΚΒΛΓ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΕΤ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ ΑΚΒ, ΒΛΓ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ Τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ ΚΑΒ, ΛΒΓ τρίγωνα ἢ ποτὶ τὰ τμάματα, δῆλον οὖν, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερόν ἐστι τᾶς Β κορυφᾶς ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων τῶν ἐγγραφομένων ἐς τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

ϛ′

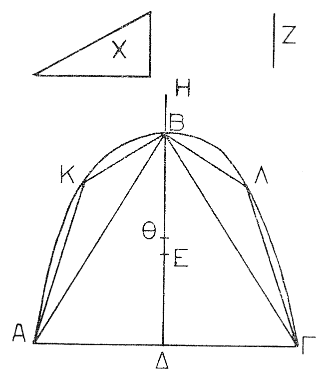
Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δυνατόν ἐστιν ἐς τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν πάσας τᾶς προτεθείσας εὐθείας.

δεδόσθω τμᾶμα τὸ ΑΒΓ, οἷον εἴρηται, οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ Θ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ Ζ, καὶ ὃν λόγον

ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ Τ. Πάλιν λοιπόν, ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ε, τοῦ δὲ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ εἶναι τὸ Χ, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλου τοῦ τμήματος ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΧΕ τμηθείσης οὕτως, ὥστε ὃν λόγον ἔχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ, τὸν αὐτὸν λόγον νὰ ἔχῃ τὸ τμῆμα τὸ ἔχον πέρας τὸ Χ (τὸ μεγαλύτερον) πρὸς τὸ μικρότερον τμῆμα. Τοῦ δὲ πενταγώνου ΑΚΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΤ τμηθείσης οὕτως, ὥστε ὃν λόγον ἔχει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΛΓ, τοῦτον τὸν λόγον νὰ ἔχῃ τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ ἔχον πέρας τὸ Τ πρὸς τὸ ὑπόλοιπον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΒΓ ἢ πρὸς τὰ τμήματα, εἶναι προφανές, ὅτι τοῦ τμήματος ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν Β ἢ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ἐπὶ ὅλων τῶν εὐθυγράμμων τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὰ τμήματα γνωρίμως.

6

Τμήματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ βάρους τοῦ τμήματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου νὰ εἶναι μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας.



Ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἔστω τὸ Θ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ γνωρίμως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Ζ, καὶ ὃν λόγον ἔχει ἡ ΒΘ πρὸς Ζ τοῦτον

ἔχει ἁ ΒΘ ποτὶ Ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Χ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα εὐθύ-
H 184 γραμμον γνωρίμως τὸ ΑΚΒΛΓ, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ Χ, καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ε. φαμὶ δὴ τὰν ΘΕ ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς Ζ.

εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ Χ, τουτέστιν ἁ ΘΒ ποτὶ Ζ, ἔχει δὲ καὶ ἁ ΒΘ ποτὶ Ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει ποτὶ ΘΕ, διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν ΘΕ τᾶς Ζ, πολλῷ ἄρα τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΒΘ ποτὶ ΘΕ· ὥστε, ἐὰν ποιῶμες, ὡς τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ ποτὶ ΘΕ [ἐπειδὴ τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ, ἐκβληθείσας τᾶς ΕΘ καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον ποτὶ τὰν ΕΘ, ὃν τὸ ΑΚΒΛΓ εὐθύγραμμον ποτὶ τὰ περιλειπόμενα τμάματα], ἐσσεῖται μείζων τᾶς ΘΒ. ἐχέτω οὖν ἁ ΗΘ ποτὶ ΘΕ. τὸ Η ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων· ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ Η ἀχθείσας παρὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστιν [τῷ τμήματι]. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ ΘΕ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς Ζ· ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

H 186 ζʹ

Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους.

ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται, τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, ὧν διαμέτροι αἱ ΒΔ, ΖΘ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ΕΖΗ τὸ Λ. δεικτέον, ὅτι εἰς τὸν λόγον νὰ ἔχῃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ χωρίον Χ. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ γνωρίμως τὸ εὐθύγραμμον ΑΚΒΛΓ, ὥστε τὰ ἀπομένοντα τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ χωρίου Χ, καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ε. Λέγω, ὅτι ἡ ΘΕ εἶναι μικροτέρα τῆς Ζ.

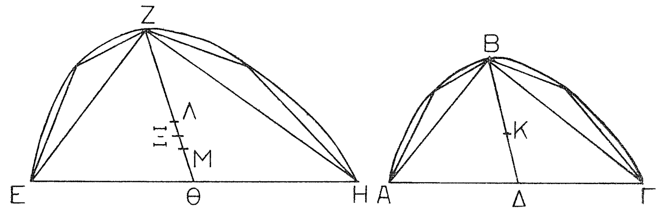
Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴση ἢ μεγαλυτέρα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εὐθύγραμμον ΑΚΒΛΓ πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ Χ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς Ζ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΒΘ πρὸς Ζ ὄχι μικρότερον λόγον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει πρὸς ΘΕ, ἐπειδὴ ἡ ΘΕ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς Ζ (Εὐκλ. V, 8), κατὰ μείζονα ἄρα λόγον τὸ εὐθύγραμμον ΑΚΒΛΓ πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἔχει μεγαλύτερον λόγον ἢ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ· ὥστε, ἐὰν κατασκευάσωμεν, ὡς τὸ εὐθύγραμμον ΑΚΒΛΓ πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα, οὕτως ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν πρὸς ΘΕ [ἐπειδὴ τοῦ τμήματος ΑΒΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ, ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΕΘ καὶ ἀπ' αὐτῆς ληφθῇ εὐθεῖά τις ἔχουσα λόγον πρὸς τὴν ΕΘ, ὃν ἔχει τὸ εὐθύγραμμον ΑΚΒΛΓ πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα], θὰ εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα τῆς ΘΒ (Εὐκλ. V, 8). Ἂς εἶναι λοιπὸν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΕ. Τὸ Η ἄρα εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπομενόντων τμημάτων· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἀχθείσης διὰ τοῦ Η τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ὅλα τὰ ἀπομένοντα τμήματα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΘΕ εἶναι μικροτέρα τῆς Ζ· τοῦτο δὲ ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

7

Δύο τμημάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὰ κέντρα τῶν βαρῶν τέμνουσι τὰς διαμέτρους εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω δύο τμήματα, ὡς ἐλέχθη, τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΒΔ, ΖΘ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν τμήματος ΑΒΓ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Κ, τοῦ δὲ ΕΖΗ τὸ Λ. Πρέπει νὰ δει-τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ Κ, Λ.

εἰ γὰρ μή, ἔστω, ὡς ἁ ΚΒ ποτὶ ΚΔ, οὕτως ἁ ΖΜ ποτὶ ΜΘ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΕΖΗ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ



ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ΛΜ, καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ξ σαμεῖον, ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ΕΖΗ [ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ] ὁμοῖον εὐθύγραμμον [τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως]· οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τὸ τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΒΚ ποτὶ ΚΔ, ὃν ἁ ΖΛ ποτὶ ΛΘ.

η´

Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθο-
H 188 γωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἁμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος τοῦ ποτὶ τᾷ βάσει.

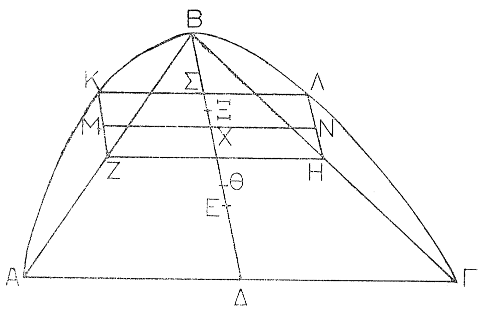
ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ Θ σαμεῖον. δεικτέον, ὅτι ἁμιολία ἐστὶν ἁ ΒΘ τᾶς ΘΔ.

ἐγγεγράφθω ἐς τὸ ΑΒΓ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ Ε, καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τᾶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἄχθων αἱ ΚΖ, ΗΛ· διαμέτροι ἄρα ἐντὶ τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων. ἔστω οὖν τοῦ μὲν ΑΚΒ τμάματος χθῇ, ὅτι τὰ Κ, Λ τέμνουσι τὰς διαμέτρους εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Διότι ἐὰν ὄχι, ἔστω, ὡς ἡ ΚΒ : ΚΔ = ΖΜ : ΜΘ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα ΕΖΗ εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε ἡ ἀπόστασις ἡ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμήματος καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ΛΜ (θ. 6), καὶ ἔστω κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου τὸ σημεῖον Ξ, ἂς ἐγγραφῇ δὲ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ εὐθύγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ [ἐγγραφὲν εὐθύγραμμον] εἰς τὸ τμῆμα ΕΖΗ [τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως]· τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐγγύτερον πρὸς τὴν κορυφὴν ἢ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 5). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ΒΚ πρὸς ΚΔ, ὃν ἔχει ἡ ΖΛ πρὸς ΛΘ.

8

Παντὸς τμήματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους διαιρεῖ τὴν διάμετρον τοῦ τμήματος, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος νὰ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ πρὸς τὴν βάσιν.



Ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Θ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΘ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τῆς ΘΔ.

Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ γνωρίμως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου κέντρον τοῦ βάρους ἔστω τὸ Ε, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΖ, ΗΛ· εἶναι ἄρα αὗται διάμετροι τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ. Ἔστω λοιπὸν τοῦ μὲν τμήματος ΑΚΒ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Μ, τοῦ δὲ ΒΛΓ τὸ Ν, καὶ

τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Μ, τοῦ δὲ ΒΛΓ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΜΝ, ΚΛ· τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Χ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἁ ΒΘ ποτὶ ΘΔ, οὕτως ἁ ΚΜ ποτὶ ΜΖ, καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ ΚΖ, οὕτως ἁ ΔΘ ποτὶ ΜΖ, τετραπλασία δὲ ἁ ΒΔ τᾶς ΚΖ· τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται, οὗ σαμεῖον ϛ· τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ ΔΘ τᾶς ΜΖ· ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ΒΘ λοιπᾶς τᾶς ΚΜ, τουτέστι τᾶς ΣΧ, τετραπλασίων. καὶ λοιπὰ ἄρα συναμφοτέρα ἁ ΒΣ, ΧΘ
H 190 τριπλασίων τᾶς ΣΧ. ἔστω τριπλασία ἁ ΒΣ τᾶς ΣΞ· καὶ ἁ ΧΘ ἄρα τᾶς ΞΧ ἐστι τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἁ ΒΔ τᾶς ΒΣ· καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται· ἁ δὲ ΒΣ τᾶς ΣΞ τριπλασίων, ἁ ΞΒ ἄρα τᾶς ΒΔ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστιν δὲ καὶ ἁ ΕΔ τᾶς ΔΒ τρίτον μέρος, ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐστὶ τὸ Ε· καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ΞΕ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ΑΚΒ, ΒΛΓ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Χ, τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου τὸ Ε, ἐσσεῖται, ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ποτὶ τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ ΧΘ ποτὶ ΘΕ. τριπλάσιον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῶν τμαμάτων [ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου]· τριπλασία ἄρα καὶ ἁ ΧΘ τᾶς ΘΕ. ἐδείχθη δὲ ἁ ΧΘ τριπλασία καὶ τᾶς ΧΞ· πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΞΕ τᾶς ΕΘ, τουτέστιν ἁ ΔΕ τᾶς ΕΘ· ἴσα γάρ ἐστιν αὐτᾷ· ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ ΔΘ τᾶς ΘΕ. καί ἐντι τᾶς ΔΕ τριπλασία ἁ ΒΔ· ἁμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ ΒΘ τᾶς ΘΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ

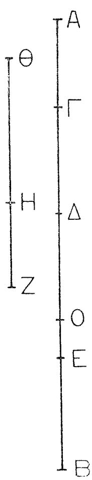
Εἴ κα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον ἔωντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λα-ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΗ, ΜΝ, ΚΛ· τοῦ μεγέθους ἄρα τοῦ συγκειμένου ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΘ : ΘΔ = ΚΜ : ΜΖ, εἶναι καὶ διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. V, 18) καὶ ἐναλλὰξ ΒΔ : ΚΖ = ΔΘ : ΜΖ (Εὐκλ. V, 16), εἶναι δὲ ἡ ΒΔ τετραπλασία τῆς ΚΖ· διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὸ τέλος ὅπου τὸ σημεῖον δ· εἶναι ἄρα τετραπλασία καὶ ἡ ΔΘ τῆς ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΒΘ τῆς ὑπολοίπου τῆς ΚΜ, τουτέστι τῆς ΣΧ, εἶναι τετραπλασία. Καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα, δηλ. τὸ ἄθροισμα ΒΣ + ΧΘ, εἶναι τριπλασία τῆς ΣΧ. Ἔστω ἡ ΒΣ τριπλασία τῆς ΣΞ· καὶ ἡ ΧΘ ἄρα εἶναι τριπλασία τῆς ΞΧ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι τετραπλασία τῆς ΒΣ· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ· ἡ δὲ ΒΣ εἶναι τριπλασία τῆς ΣΞ, εἶναι ἄρα ἡ ΞΒ τὸ ἓν τρίτον τῆς ΒΔ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΔ τὸ ἓν τρίτον τῆς ΔΒ, ἐπειδὴ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ Ε (1, 14 πόρ.)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΞΕ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Θ, τοῦ δὲ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων ΑΚΒ, ΒΛΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ, τοῦ δὲ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ Ε, θὰ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὰ ἀπομένοντα τμήματα, οὕτως ἡ ΧΘ : ΘΕ (I, 8). Εἶναι δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τριπλάσιον τῶν τμημάτων [ἐπειδὴ τὸ ὅλον τμῆμα εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου]· εἶναι ἄρα τριπλασία καὶ ἡ ΧΘ τῆς ΘΕ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΧΘ τριπλασία καὶ τῆς ΧΞ· εἶναι ἄρα πενταπλασία ἡ ΞΕ τῆς ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΕ τῆς ΕΘ· διότι εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν· ὥστε ἡ ΔΘ εἶναι ἑξαπλασία τῆς ΘΕ. Καὶ εἶναι ἡ ΒΔ τριπλασία τῆς ΔΕ· εἶναι ἄρα ἡ ΒΘ τὰ τρία δεύτερα τῆς ΘΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9

Ἐὰν ὑπάρχωσι τέσσαρες γραμμαὶ εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν, καὶ ὃν λόγον ἔχει ἡ ἐλαχίστη, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῆς ἐλαχίστης, τοῦτον τὸν λόγον ἂς ληφθῇ νὰ ἔχῃ εὐθεῖά

φθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπταμόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶν ἀνάλογον τᾶς τρίτας, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶν ἀνάλογον καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς τρίτας καὶ τᾷ τριπλασίᾳ
H 192 τᾶς τετάρτας ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε πενταπλασίᾳ τᾶς μεγίστας καὶ τᾷ δεκαπλασίᾳ τᾶς δευτέρας καὶ τᾷ δεκαπλασίᾳ τᾶς τρίτας καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς τετάρτας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶν ἀνάλογον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπταμόρια τᾶς μεγίστας.

ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνάλογον αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ*, *ΒΔ*, *ΒΕ*, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ *ΒΕ* ποτὶ *ΕΑ*, τοῦτον ἐχέτω ἁ *ΖΗ* ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς *ΑΔ*, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ διπλασίᾳ τᾶς *ΑΒ* καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς *ΒΓ* καὶ ἑξαπλασίᾳ τᾶς *ΒΔ* καὶ τριπλασίᾳ τᾶς *ΒΕ* ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς *ΑΒ* καὶ δεκαπλασίᾳ τᾶς *ΓΒ* καὶ δεκαπλασίᾳ τᾶς *ΒΔ* καὶ πενταπλασίᾳ τᾶς *ΒΕ*, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ *ΗΘ* ποτὶ τὰν *ΑΔ*. δεικτέον, ὅτι ἁ *ΖΘ* δύο πεμπταμόριά ἐντι τᾶς *ΑΒ*.



ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν ἐντι αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ*, *ΒΔ*, *ΒΕ*, καὶ αἱ *ΑΓ*, *ΓΔ*, *ΔΕ* ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἁ *ΑΒ*, *ΒΓ* ποτὶ τὰν *ΒΔ*, τουτέστιν ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς *ΑΒ*, *ΒΓ* ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς *ΒΔ*, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ *ΑΔ* ποτὶ τὰν
H 194 *ΔΕ*, καὶ συναμφότερος ἁ *ΔΒ*, *ΒΓ* ποτὶ τὰν *ΕΒ*, καὶ πάντα ποτὶ πάντα· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ *ΑΔ* ποτὶ τὰν *ΔΕ*, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς *ΑΒ* καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς *ΓΒ* καὶ τᾷ *ΔΒ* ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς *ΒΔ* καὶ τᾷ *ΒΕ*, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς *ΑΒ* καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς *ΒΓ* καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς *ΒΔ* καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς *ΒΕ* ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς

τις πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῶν τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας πρὸς τὴν τρίτην, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς μεγίστης τῶν τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς δευτέρας καὶ τὴν ἑξαπλασίαν τῆς τρίτης καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς τετάρτης, πρὸς τὴν ἴσην πρὸς τὴν πενταπλασίαν τῆς μεγίστης καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς δευτέρας καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς τρίτης καὶ τὴν πενταπλασίαν τῆς τετάρτης, τοῦτον τὸν λόγον νὰ ληφθῇ ἔχουσα εὐθεῖά τις πρὸς τὴν ὑπεροχήν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ μεγίστη τῶν τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τῆς τρίτης, καὶ αἱ δύο ληφθεῖσαι θὰ εἶναι τὰ δύο πέμπτα τῆς μεγίστης.

Ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ, τοῦτον ἂς ἔχῃ ἡ ΖΗ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ΑΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴση πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΒ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΒΓ καὶ τὴν ἑξαπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ἴσην πρὸς τὴν πενταπλασίαν τῆς ΑΒ καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς ΓΒ καὶ τὴν δεκαπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν πενταπλασίαν τῆς ΒΕ, τοῦτον ἂς ἔχῃ τὸν λόγον ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΑΔ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΖΘ εἶναι τὰ δύο πέμπτα τῆς ΑΒ.

Διότι ἐπειδὴ εἶναι εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπίσης εἶναι εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν καὶ μὲ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ, τουτέστιν ἡ διπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΕΒ, καὶ πάντα πρὸς πάντα· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ὃν ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΒ καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς ΓΒ καὶ τὴν ΔΒ πρὸς τὴν ἴσην καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν ΒΕ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΒ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΒΓ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ἴσην καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΒ καὶ τὴν ΕΒ, τοῦτον θὰ ἔχῃ ἡ

ΔΒ καὶ τᾷ ΕΒ, τοῦτον ἕξει ἁ ΔΑ ποτὶ ἐλάσσονα τᾶς ΔΕ. ἐχέτω οὖν ποτὶ ΔΟ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον· ἕξει οὖν ἁ ΟΑ ποτὶ ΑΔ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΑΒ καὶ τετραπλασίᾳ τᾶς ΓΒ καὶ ἑξαπλασίᾳ τᾶς ΒΔ καὶ τριπλασίᾳ τᾶς ΒΕ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρας τᾶς ΑΒ, ΕΒ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΑΔ ποτὶ ΗΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΒ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ καὶ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΕΒ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΒΔ· ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΟΑ ποτὶ ΗΘ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς δεκαπλασίας τᾶν ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. ἀλλ' ἁ συγκειμένα H 196 *ἔκ τε τᾶς πενταπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα ποτὶ ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΟΔ ποτὶ ΔΑ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΕΒ μετὰ τᾶς διπλασίας τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ, ἔστιν δὲ καί, ὡς ἁ ΑΔ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΒ καὶ τριπλασίας τᾶς ΓΒ καὶ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ΕΒ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ΒΔ, ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας ἐούσας τᾶς ἀναλογίας, δι' ἴσου, ὡς*

ΔΑ πρὸς μικροτέραν τῆς ΔΕ (Εὐκλ. V, 8). Ἂς ἔχῃ λοιπὸν πρὸς τὴν ΔΟ. Καὶ τὸ ἄθροισμά των δὲ πρὸς τὰς πρώτας θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον· θὰ ἔχῃ λοιπὸν ἡ ΟΑ πρὸς ΑΔ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΒ καὶ τὴν τετραπλασίαν τῆς ΓΒ καὶ τὴν ἑξαπλασίαν τῆς ΒΔ καὶ τὴν τριπλασίαν τῆς ΒΕ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΕΒ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 7 πόρ., V, 18). Ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΔ πρὸς ΗΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ πενταπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΒ καὶ τῆς τετραπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΕΒ καὶ τῆς ἑξαπλασίας τῆς ΒΔ· ἂν δὲ οἱ λόγοι ταχθῶσιν ἀνομοίως, τουτέστιν εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν (Εὐκλ. V, ὁρισμ. 18 καὶ θ. 23), καὶ ληφθῇ ὁ δι' ἴσου λόγος (δηλ. νὰ πολ/σθῶσιν αἱ ἀναλογίαι κατὰ μέλη), θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΟΑ πρὸς ΗΘ, ὃν ἔχει ἡ πενταπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 23). Ἀλλὰ ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς πενταπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς δεκαπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ ἔχει λόγον, ὃν ἔχουσι πέντε πρὸς δύο· καὶ ἡ ΑΟ ἄρα πρὸς ΗΘ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ πέντε πρὸς δύο. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΟΔ πρὸς ΔΑ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΒ μετὰ τῆς διπλασίας τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ἴσην πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 7 πόρ.), εἶναι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ἴσην καὶ πρὸς τὴν ΕΒ καὶ τὴν διπλασίαν τῆς ΒΔ, ὅταν δὲ οἱ λόγοι ταχθῶσιν ἀνομοίως, τουτέστιν ἡ ἀναλογία νὰ εἶναι τεταραγμένη (Εὐκλ. V, 23), καὶ ληφθῇ ὁ δι' ἴσου λόγος, θὰ

ἁ ΟΔ ποτὶ ΔΕ, οὕτως ἁ διπλασία τᾶς ΑΒ μετὰ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΒΓ καὶ ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε καί, ὡς ἁ ΟΕ ποτὶ ΕΔ ἐστιν, οὕτως ἁ ΓΒ μετὰ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΒΔ καὶ διπλασίας τᾶς ΕΒ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. ἔστιν δὲ καί, ὡς ἁ ΔΕ ποτὶ ΕΒ, οὕτως ἅ τε ΑΓ ποτὶ ΓΒ, ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν, καὶ ἁ τριπλασία τᾶς ΓΔ ποτὶ τὰν τριπλασίαν τᾶς ΔΒ καὶ ἁ διπλασία τᾶς
H 198 ΔΕ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΕΒ· ὥστε καὶ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς ΑΓ καὶ τριπλασίας τᾶς ΓΔ καὶ διπλασίας τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς ΓΒ καὶ τριπλασίας τᾶς ΔΒ καὶ διπλασίας τᾶς ΕΒ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΕΟ ποτὶ ΕΒ, ὃν ἁ ΑΓ μετὰ τᾶς τριπλασίας τᾶς ΓΔ καὶ διπλασίας τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ· ὅλα οὖν ἁ ΟΒ ποτὶ ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε τριπλασίᾳ τᾶς ΑΒ μετὰ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ, ΒΔ. καὶ ἐπεὶ αἵ τε ΕΔ, ΔΓ, ΓΑ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντὶ καὶ συναμφότερος ἑκάστα τᾶν ΕΒ, ΒΔ, ΔΒ, ΒΓ, ΓΒ, ΒΑ, ἐσσεῖται καί, ὡς ἁ ΕΔ ποτὶ ΔΑ, οὕτως συναμφότερος ἁ ΕΒ, ΒΔ ποτὶ συναμφότερον τὰν ΔΒ, ΒΓ μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς ΓΒ,
H 200 ΒΑ. καὶ συνθέντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΑΕ ποτὶ ΑΔ, οὕτως συναμφότερος ἁ ΕΒ, ΒΔ μετὰ συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΒΓ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ, ὅ ἐστι συναμφότερος ἁ ΕΒΑ μετὰ τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΔΒΓ ποτὶ συναμφότερον τὰν ΒΔ, ΒΑ μετὰ τᾶς διπλασίας τᾶς ΒΓ· ὥστε καὶ ἁ διπλασία ποτὶ τὰν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ ΑΔ, οὕτως ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΕΒΑ

εἶναι ὡς ἡ ΟΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΑΒ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΓ καὶ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε εἶναι καὶ ὡς ἡ ΟΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως ἡ ΓΒ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΔ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΕΒ πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ καὶ τὴν τετραπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 7 πόρ., V, 19 πόρ.). Εἶναι δὲ καὶ ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἐπειδὴ εἶναι καὶ κατὰ τὴν σύνθεσιν, καὶ ἡ τριπλασία τῆς ΓΔ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς ΔΒ καὶ ἡ διπλασία τῆς ΔΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΒ· ὥστε καὶ ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς ΑΓ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΓΔ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΔΕ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς ΓΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΔΒ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΕΒ. Ὅταν λοιπὸν οἱ λόγοι ταχθῶσι πάλιν ἀνομοίως, τουτέστιν εἰς τεταραγμένην ἀναλογίαν, δι' ἴσου θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΕΒ, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ μετὰ τῆς τριπλασίας τῆς ΓΔ καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΔΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ (Εὐκλ. V, 23)· ὅλη λοιπὸν ἡ ΟΒ πρὸς ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ἴση καὶ πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς ΑΒ μετὰ τῆς ἑξαπλασίας τῆς ΓΒ καὶ τῆς τριπλασίας τῆς ΒΔ πρὸς τὴν διπλασίαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΕ μετὰ τῆς τετραπλασίας τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ καὶ αἱ ΕΔ, ΔΓ, ΓΑ καὶ τὰ ἀθροίσματα ΕΒ + ΒΔ, ΔΒ + ΒΓ, ΓΒ + ΒΑ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν (ἐν συνεχείᾳ) λόγον, θὰ εἶναι καί, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ΕΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΔΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΓΒ, ΒΑ (Εὐκλ. V, 18). Καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ΑΕ : ΑΔ = (ΕΒ + ΒΔ) + (ΑΒ + ΒΓ) + (ΓΒ + ΒΔ), τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς ΕΒ + ΒΑ + 2(ΔΒ + ΒΓ) : (ΒΔ + ΒΑ) + 2ΒΓ· ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, τουτέστιν ὡς ΕΑ : ΑΔ = 2(ΕΒ + ΒΑ) + 4(ΓΒ + ΒΔ) :

μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ· ὥστε καί, ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ καὶ τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. ἀλλ' ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΑΔ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΕΒ ποτὶ ΖΗ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΕΒ ποτὶ ΖΗ, οὕτως ἁ διπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ μετὰ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΔΒΓ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἁ ΟΒ ποτὶ ΕΒ, οὕτως ἁ τριπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ μετὰ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΕ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΓΒΔ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἁ ΟΒ ποτὶ ΖΗ,
H 202 οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς τριπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς τριπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΓΒ ποτὶ μὲν τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΑΒΔ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΓΒ λόγον ἔχει, ὃν τρία ποτὶ δύο, ποτὶ δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο· ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ΑΟ ποτὶ ΗΘ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε ποτὶ δύο· καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΒΑ ποτὶ ὅλαν τὰν ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν πέντε ποτὶ δύο. εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπταμόριά ἐντι ἁ ΖΘ τᾶς ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

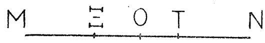
ι'

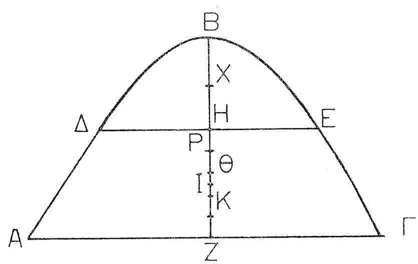
Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστίν, ἃ διάμετρός
H 204 ἐστι τοῦ τόμου, τόνδε τὸν τρόπον κείμενον· διαιρεθείσας τᾶς

2 (ΑΒ + ΒΔ) + 4ΓΒ· ὥστε καὶ ὡς ΕΑ : (3 : 5) ΑΔ = 2 (ΑΒ + ΒΕ) + 4 (ΓΒ + ΒΔ) : (3 : 5) [2 (ΑΒ + ΒΔ) + 4ΓΒ]. Ἀλλὰ ὡς ΕΑ : (3 : 5)ΑΔ = ΕΒ : ΖΗ· καὶ ὡς ἄρα ΕΒ : ΖΗ = 2 (ΑΒ + ΒΕ) + 4 (ΔΒ + ΒΓ) : (3 : 5) [2 (ΑΒ + ΒΔ) + 4ΓΒ]. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΟΒ : ΕΒ = 3(ΑΒ + ΒΔ) + 6ΓΒ : 2(ΑΒ + ΒΕ) + 4(ΓΒ + ΒΔ). Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΟΒ : ΖΗ = 3(ΑΒ + ΒΔ) + 6 ΓΒ : (3 : 5) [2(ΑΒ + ΒΔ) + 4ΓΒ] (Εὐκλ. V, 22). Ἀλλὰ 3 (ΑΒ + ΒΔ) + 6 ΓΒ : 2(ΑΒ + ΒΔ) + 4ΓΒ = 3 : 2 (Εὐκλ. VI, 16), αὐτῆς δὲ τὰ τρία πέμπτα εἶναι 5 : 2· ἐδείχθη δὲ καὶ ΑΟ : ΗΘ = 5 : 2· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΑ : ΖΘ = 5 : 2 (Εὐκλ. V, 12). Ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ ἡ ΖΘ εἶναι τὰ δύο πέμπτα τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

Παντὸς τόμου ἀφαιρουμένου ἀπὸ παραβολῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι διάμετρος τοῦ τόμου,





κείμενον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα εἰς πέντε ἴσα μέρη εἰς τὸ μέσον πέμπτον, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον *εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσου πεμπταμορίου, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν βασίων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βασίων καὶ τᾷ μείζονι, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βασίων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρᾳ τᾶ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν.*

ἔστωσαν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΔΕ, διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ ΑΒΓ τμάματος ἁ ΒΖ· φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ ΑΔΕΓ τόμου διάμετρός ἐστιν ἁ ΗΖ [καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΕ παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς]· καὶ τᾶς ΗΖ εὐθείας διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ ΘΚ, ἁ δὲ ΘΙ ποτὶ τὰν ΙΚ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ΔΗ καὶ τᾷ ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ΑΖ καὶ τᾷ ΔΗ. δεικτέον, ὅτι τοῦ ΑΔΕΓ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Ι σαμεῖον.

H 206 *ἔστω δὴ τᾷ μὲν ΖΒ ἴσα ἁ ΜΝ, τᾷ δὲ ΗΒ ἴσα ἁ ΝΟ, καὶ λελάφθω τᾶν μὲν ΜΝΟ μέσα ἀνάλογον ἁ ΝΞ, τετάρτα δὲ ἀνάλογον ἁ ΤΝ, καὶ ὡς ἁ ΤΜ ποτὶ ΤΝ, οὕτως ἁ ΖΘ ποτί τινα ἀπὸ τοῦ Ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον· οὐδὲν γὰρ διαφέρει, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν Ζ, Η εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν Η, Β· τὰν ΙΡ. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ διάμετρός ἐστι τοῦ τμάματος ἁ ΖΒ, ἁ ΒΖ ἤτοι ἀρχικά ἐστι τᾶς τομᾶς ἢ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται, αἱ δὲ ΑΖ, ΔΗ εἰς αὐτὰν τεταγμένως ἐντὶ καταγμέναι, ἐπειδὴ παράλληλοι ἐντὶ τᾷ ἐπὶ τοῦ Β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. εἰ δὲ τοῦτο, ἔστιν, ὡς ἁ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἁ ΖΒ ποτὶ ΒΗ μάκει, τουτέστιν ἁ ΜΝ ποτὶ* τῆς μικροτέρας βάσεως τοῦ τόμου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μεγαλυτέραν τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τῆς διπλασίας τῆς μικροτέρας τῶν βάσεων καὶ τῆς μεγαλυτέρας, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μικροτέραν τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τῆς διπλασίας τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς μικροτέρας αὐτῶν.

Ἔστωσαν εἰς παραβολὴν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΔΕ, διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ΑΒΓ ἡ ΒΖ· εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ τόμου ΑΔΕΓ διάμετρος εἶναι ἡ ΗΖ [καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΕ εἶναι παράλληλοι τῆς ἐφαπτομένης τῆς παραβολῆς εἰς τὸ Β]· καὶ ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΖ εἰς πέντε ἴσα μέρη ἔστω μέσον τὸ πέμπτον ἡ ΘΚ, ἡ δὲ ΘΙ πρὸς τὴν ΙΚ ἂς ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ἀμφοτέρων ἤτοι καὶ τοῦ διπλασίου τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα ἀμφοτέρων ἤτοι καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τοῦ τόμου ΑΔΕΓ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ι.

Ἔστω λοιπὸν πρὸς μὲν τὴν ΖΒ = ΜΝ, πρὸς δὲ τὴν ΗΒ = ΝΟ, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν ΜΝ, ΝΟ μέση ἀνάλογος ἡ ΝΞ, τετάρτη δὲ αὐτῶν ἀνάλογος ἡ ΤΝ καὶ ὡς ΤΜ : ΤΝ, οὕτως ἂς γίνῃ ἡ ΖΘ πρός τινα εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ Ι, ὅπου ἤθελε πέσει τὸ ἄλλο σημεῖον· διότι οὐδὲν διαφέρει εἴτε πέσει μεταξὺ τῶν Ζ, Η εἴτε μεταξὺ τῶν Η, Β· ἔστω τὴν ΙΡ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς παραβολὴν διάμετρος τοῦ παραβολικοῦ τμήματος εἶναι ἡ ΖΒ, ἡ ΒΖ ἢ θὰ εἶναι διάμετρος τῆς παραβολῆς ἢ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΖ, ΔΗ εἶναι τεταγμέναι κάθετοι, ἐπειδὴ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς παραβολῆς. Ἐὰν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ, εἶναι $ΑΖ^2 : ΔΗ^2 = ΖΒ : ΒΗ$, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΝ : ΝΟ. Ὡς δὲ ἡ ΜΝ :

ΝΟ. ὡς δὲ ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΟ μάκει, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΑΖ ποτὶ ΔΗ δυνάμει, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΞ δυνάμει· ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως τὸ ΑΒΓ τμᾶμα ποτὶ Η 208 *τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, ὡς δὲ ὁ ἀπὸ ΜΝ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΝΞ κύβον, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΤ· ὥστε καὶ διελόντι ἐστίν, ὡς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἁ ΜΤ ποτὶ ΝΤ, τουτέστι τὰ* $\overline{\gamma}$ *ε' τᾶς ΗΖ ποτὶ ΙΡ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, ποτὶ τὸν ἀπὸ ΑΖ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ διπλασία τᾶς ΔΗ μετὰ τᾶς ΑΖ ποτὶ ΖΑ, ὥστε καί, ὃν ἁ διπλασία τᾶς ΝΞ μετὰ τᾶς ΝΜ ποτὶ ΝΜ, ἔστι δὲ καί, ὡς ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος ποτὶ τὸν ἀπὸ ΔΗ κύβον, οὕτως ἁ ΜΝ ποτὶ ΝΤ, ὡς δὲ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ μετὰ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, ὥστε καὶ ἁ ΤΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΟΝ καὶ τᾶς ΤΝ, γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθεα, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, καὶ ὁ ἀπὸ ΑΖ κύβος καὶ ὁ ἀπὸ ΔΗ κύβος καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σύνδυο λαμβανομένοις, τᾷ τε συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ΝΜ καὶ ἑτέρῳ μεγέθει τᾷ ΜΝ καὶ ἄλλῳ ἑξῆς τᾷ ΝΤ καὶ τελευταῖον τᾷ* Η 210 *συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΟ καὶ τᾶς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας*

ΝΟ = $ΜΝ^2 : ΝΞ^2$ (Εὐκλ. V, ὁρισ. 9)· καὶ ὡς ἄρα $ΑΖ^2 : ΔΗ^2 = ΜΝ^2 : ΝΞ^2$· ὥστε καὶ ΑΖ : ΔΗ = ΜΝ : ΝΞ. Καὶ ὡς ἄρα $ΑΖ^3 : ΔΗ^3 = ΜΝ^3 : ΝΞ^3$. Ἀλλὰ ὡς μὲν $ΑΖ^3 : ΔΗ^3$ = τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ πρὸς τὸ τμῆμα ΔΒΕ, ὡς δὲ $ΜΝ^3 : ΝΞ^3$ = ΜΝ : ΝΤ· ὥστε καὶ διὰ διαιρέσεως (Εὐκλ. V, 17) εἶναι, ὡς ὁ τόμος ΑΔΕΓ πρὸς τὸ τμῆμα ΔΒΕ, οὕτως ἡ ΜΤ : ΝΤ, τουτέστι τὰ τρία πέμπτα τῆς ΗΖ πρὸς ΙΡ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὕψος δὲ τὸ ἄθροισμα καὶ τῆς διπλασίας τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΑΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς ΔΗ μετὰ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὥστε καί, ὃν λόγον ἔχει ἡ διπλασία τῆς ΝΞ μετὰ τῆς ΝΜ πρὸς ΝΜ, εἶναι δὲ καί, ὡς ὁ κύβος τῆς ΑΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΔΗ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΝΤ, ὡς δὲ ὁ κύβος τῆς ΔΗ πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ μετὰ τῆς ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ, ὥστε καὶ ἡ ΤΝ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΟΝ καὶ τῆς ΤΝ, ὑπάρχουσι λοιπὸν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΔΗ καὶ τῆς ΑΖ, καὶ ὁ κύβος τῆς ΑΖ καὶ ὁ κύβος τῆς ΔΗ καὶ τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ, πρὸς τέσσαρα μεγέθη λαμβανόμενα εἰς ἀναλογίαν ἀνὰ δύο, καὶ ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΝΞ καὶ τῆς ΝΜ καὶ ἄλλο μέγεθος τὸ ΜΝ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ ΝΤ καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΝΟ καὶ τῆς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι, ὡς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΔΗ καὶ τῆς τᾶς ΔΗ καὶ τᾶς ΑΖ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΗ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΑΖ καὶ τᾶς ΔΗ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ΜΝ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΟ καὶ τᾶς ΝΤ. ἀλλ' ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν ποτὶ τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἁ ΘΙ ποτὶ ΙΚ· καὶ ὡς ἄρα ἁ ΘΙ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἁ συγκειμένα ποτὶ τὰν συγκειμέναν. ὥστε καὶ συνθέντι καὶ τῶν ἀγουμένων τὰ πενταπλάσια· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΖΗ ποτὶ ΙΚ, οὕτως ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΝΞ, ΝΟ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΟΝ καὶ τὰν ΝΤ. καὶ ὡς ἁ ΖΗ ποτὶ ΖΚ ἐοῦσαν αὐτᾶς δύο πέμπτα, οὕτως ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ ποτὶ τὰν διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ τετραπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ· ἐσσεῖται οὖν, ὡς ἁ ΖΗ ποτὶ ΖΙ, οὕτως ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασία συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΜΝ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας τᾶς ΟΝ καὶ τριπλασίας τᾶς ΝΤ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ, καί ἐστιν, ὡς μὲν ἁ ΝΤ ποτὶ ΤΜ, οὕτως λελαμμένα τις ἁ ΡΙ ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΖΗ, τουτέστι τᾶς ΜΟ, ὡς δὲ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ΝΜ καὶ τετραπλασίας τᾶς ΝΞ καὶ ἑξαπλασίας H 212 τᾶς ΝΟ καὶ τριπλασίας τᾶς ΝΤ ποτὶ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς πενταπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΜΝΤ καὶ δεκαπλασίας συναμφοτέρου τᾶς ΞΝΟ, οὕτως ἑτέρα τις λελαμμένα ἁ ΙΖ ποτὶ τὰν ΖΗ, τουτέστιν ποτὶ τὰν ΜΟ, ἐσσεῖται διὰ τὰ πρότερον ἁ ΡΖ δύο πέμπτα τᾶς ΜΝ, τουτέστι τᾶς ΖΒ· ὥστε κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ ΑΒΓ τμάματος τὸ Ρ σαμεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ ΔΒΕ τμάματος κέντρον βάρεος τὸ Χ σαμεῖον. τοῦ ἄρα ΑΔΕΓ τόμου ἐσσεῖται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ἐπ' εὐθείας τᾷ ΧΡ τὸν αὐτὸν ποτὶ αὐτὰν λόγον ἐχούσας, ΑΖ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ ἔχον βάσιν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΑΖ καὶ τῆς ΔΗ, οὕτως ἡ συγκειμένη καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΝΞ καὶ τῆς ΜΝ πρὸς τὴν συγκειμένην καὶ ἐκ τῆς διπλασίας τῆς ΝΟ καὶ τῆς ΝΤ (Εὐκλ. V, 22). Ἀλλὰ ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἡ ΘΙ : ΙΚ· καὶ ὡς ἄρα ΘΙ : ΙΚ = ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. Ὥστε καὶ διὰ συνθέσεως καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ πέντε τῶν ἡγουμένων ὅρων τῆς ἀναλογίας· εἶναι ἄρα, ὡς ΖΗ : ΙΚ = 5(ΜΝ + ΝΤ) + 10(ΝΞ + ΝΟ) : 2 ΟΝ + ΝΤ. Καὶ ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΚ ἡ ὁποία εἶναι αὐτῆς τὰ δύο πέμπτα = 5(ΜΝ + ΝΤ) + 10 (ΞΝ + ΝΟ) : 2(ΜΝ + ΝΤ) + 4(ΞΝ + ΝΟ)· θὰ εἶναι λοιπὸν ὡς ἡ ΖΗ : ΖΙ = 5(ΜΝ + ΝΤ) + 10(ΞΝ + ΝΟ) : 2ΜΝ + 4ΝΞ + 6ΟΝ + 3ΝΤ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ (ἐξ ὑποθέσεως) αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΟΝ, ΝΤ, καὶ εἶναι ὡς μὲν ἡ ΝΤ : ΤΜ = ληφθεῖσά τις ἡ ΡΙ : (3 : 5)ΖΗ, τουτέστι ΡΙ : (3 : 5)ΜΟ, ὡς δὲ ἡ συγκειμένη ἐκ 2ΝΜ + 4ΝΞ + 6ΝΟ + 3ΝΤ : τὴν συγκειμένην ἐκ 5(ΜΝ + ΝΤ) + 10(ΞΝ + ΝΟ) = ληφθεῖσά τις ἡ ΙΖ : ΖΗ = ΙΖ : ΜΟ, θὰ εἶναι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (9) ἡ ΡΖ = (2 : 5)ΜΝ, τουτέστι = (2 : 5)ΖΒ· ὥστε κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος ΑΒΓ εἶναι τὸ σημεῖον Ρ (θ. 8). Ἔστω λοιπὸν καὶ τοῦ τμήματος ΔΒΕ κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Χ. Τοῦ τόμου ἄρα ΑΔΕΓ θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται καὶ ἡ ΧΡ τῆς ἐχούσης πρὸς αὐτὴν τὸν αὐτὸν *ὃν ἔχει ὁ τόμος ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστιν δὲ τὸ Ι σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τᾶς μὲν ΖΒ τρία πέμπτα ἐστὶν ἁ ΒΡ, τᾶς δὲ ΗΒ τρία πέμπτα ἐστὶν ἁ ΒΧ, καὶ λοιπᾶς ἄρα τᾶς ΗΖ τρία πέμπτα ἐστὶν ἁ ΧΡ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς μὲν ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἁ ΜΤ ποτὶ ΤΝ, ὡς δὲ ἁ ΜΤ ποτὶ τὰν ΤΝ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶς ΗΖ, ἅτις ἐστὶν ἁ ΧΡ, ποτὶ ΡΙ, ἐσσεῖται ἄρα καί, ὡς ὁ ΑΔΕΓ τόμος ποτὶ τὸ ΔΒΕ τμᾶμα, οὕτως ἁ ΧΡ ποτὶ ΡΙ. καί ἐστι τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ ΔΒΕ κέντρον βάρεος τὸ Χ· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ ΑΔΕΓ τόμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Ι σαμεῖον.*

λόγον, ὃν ἔχει ὁ τόμος πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα. Τὸ τέλος δὲ τῆς εὐθείας αὐτῆς εἶναι τὸ σημεῖον Ι. Διότι ἐπειδὴ ἡ ΒΡ εἶναι τῆς μὲν ΖΒ τρία πέμπτα, τῆς δὲ ΗΒ ἡ ΒΧ εἶναι τρία πέμπτα, καὶ τῆς λοιπῆς ἄρα τῆς ΗΖ ἡ ΧΡ εἶναι τρία πέμπτα. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς μὲν ὁ τόμος ΑΔΕΓ πρὸς τὸ τμῆμα ΔΒΕ, οὕτως ἡ ΜΤ : ΤΝ, ὡς δὲ ΜΤ : ΤΝ = (3 : 5)ΗΖ, ἥτις εἶναι ἡ ΧΡ : ΡΙ, θὰ εἶναι ἄρα καί, ὡς ὁ τόμος ΑΔΕΓ : τὸ τμῆμα ΔΒΕ = ΧΡ : ΡΙ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Ρ, τοῦ δὲ ΔΒΕ κέντρον βάρους τὸ Χ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τοῦ τόμου ΑΔΕΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Ι.

ΨΑΜΜΙΤΗΣ

H 216

Ψαμμίτης

1 I. Οἴονταί τινες, βασιλεῦ Γέλων, τοῦ ψάμμου τὸν ἀρι-
θμὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει· λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ
Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ
καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκη-
τον. ἐντί τινες δέ, οἳ αὐτὸν ἄπειρον μὲν εἶμεν οὐχ ὑπολαμ-
βάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρ-
2 χειν ἀριθμόν, ὅστις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὕτως
δοξάζοντες δῆλον ὡς, εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον
ὄγκον συγκείμενον τὸ μέγεθος, ἁλίκος ὁ τᾶς γᾶς ὄγκος ἀνα-
πεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελάγεων πάντων καὶ τῶν
κοιλωμάτων τᾶς γᾶς εἰς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν
ὀρέων, πολλαπλασίως μὴ γνώσονται μηδένα κα ῥηθῆμεν ἀ-
3 ριθμὸν ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαί
τοι δεικνύειν δι' ἀποδειξίων γεωμετρικᾶν, αἷς παρακολουθή-
σεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδε-
δομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις ὑπερβάλλοντί
τινες οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος
ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμες, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ
4 μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δέ, διότι καλεῖται
κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἅς ἐστι
κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα τᾷ
εὐθείᾳ τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς
γᾶς· ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων
δείξεσι διάκουσας. Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ὑποθεσίων τινῶν
ἐξέδωκεν γραφάς, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν
5 κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται

Ψαμμίτης

1. Νομίζουσί τινες, ὦ βασιλεῦ Γέλων, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος ἄπειρος· λέγω δὲ ὄχι μόνον τῆς ὑπαρχούσης περὶ τὰς Συρακούσας καὶ τὴν ἄλλην Σικελίαν, ἀλλὰ καὶ τῆς κατὰ πᾶσαν χώραν καὶ τὴν οἰκουμένην καὶ τὴν ἀκατοίκητον. Ὑπάρχουσι δὲ μερικοί, οἱ ὁποῖοι δὲν θεωροῦσι μὲν αὐτὸν ἄπειρον, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος κατωνομασμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος νὰ ὑπερβάλλῃ αὐτὸν κατὰ τὸ πλῆθος. Οἱ δὲ ἔχοντες αὐτὴν τὴν γνώμην εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἤθελον φαντασθῆ μέγεθος ἐκ τῆς ἄμμου κατέχον τόσον ὄγκον, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς γῆς μὲ πλήρη τὰ πελάγη ὅλα καὶ τὰ κοιλώματα τῆς γῆς εἰς ὕψος ἴσον πρὸς τὰ ὑψηλότατα τῶν ὀρέων, πολὺ περισσότερον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίσωσιν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος νὰ ὑπερβάλλῃ τὸ πλῆθος αὐτῆς. Ἐγὼ δὲ θὰ προσπαθήσω νὰ σοῦ ἀποδείξω διὰ γεωμετρικῶν ἀποδείξεων, τὰς ὁποίας θὰ παρακολουθήσῃς, ὅτι ἐκ τῶν ὑφ' ἡμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδεδομένων εἰς τὴν πραγματείαν τὴν ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν Ζεύξιππον, μερικοὶ (ἀριθμοὶ) ὑπερβάλλουσι ὄχι μόνον τὸν ἀριθμὸν τῆς ἄμμου ἡ ὁποία καταλαμβάνει μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν ὄγκον τῆς γῆς, ὅταν αὕτη πληρωθῇ, ὡς εἴπομεν, ἀλλὰ καὶ τὸν ὄγκον τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ κόσμου. Σοῦ εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι κόσμος καλεῖται ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρονόμων ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας κέντρον μὲν εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς· διότι ταῦτα ἔχεις ἤδη ἀναγνώσει εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀστρονόμων. Ὁ Ἀρίσταρχος δὲ ὁ Σάμιος ἐδημοσίευσε θεωρίας τινάς, κατὰ τὰς ὁποίας ἐκ τῶν ὑπαρχόντων στοιχείων συνάγεται, ὅτι ὁ κόσμος εἶναι πολὺ μεγαλύ-

γὰρ τὰ μὲν ἀπλανέα τῶν ἄστρων καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν, ὥστε τὸν κύκλον, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογί-
6 *αν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο γ' εὔδηλον ὡς ἀδύνατόν ἐστιν· ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον δὲ τὸν 'Αρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε· ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομες ὥσπερ εἶμεν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾇ ἐστιν ὁ κύκλος, καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν· τὰς γὰρ ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκειμένῳ ἐναρμόζει, καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν,*
7 *ἴσον ὑποτίθεσθαι τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲς δή,*
H 220 *καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν 'Αρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, καὶ οὕτως τινὰς δειχθήσειν τῶν ἐν ἀρχᾷ ἀριθμῶν τῶν κατονομαξίαν ἐχόντων ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τὸν ἀριθμὸν τὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ*
8 *εἰρημένᾳ σφαίρᾳ, ὑποκειμένων τῶνδε· πρῶτον μὲν τὰν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν ὡς τ̅ μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω, καίπερ τινῶν πεπειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καὶ τὺ παρακολουθεῖς, ἐοῦσαν αὐτὰν ὡς λ̅ μυριάδων σταδίων. ἐγὼ δ' ὑπερβαλλόμενος καὶ θεὶς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένου τὰν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν ὡς τ̅ μυριάδων σταδίων καὶ μὴ μείζω· μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα εἶμεν τᾶς δια-*

τερος ἐκείνου τὸν ὁποῖον εἴπομεν προηγουμένως. Διότι ὑποθέτει ὅτι ἐκ τῶν ἄστρων τὰ μὲν ἀπλανῆ καὶ ὁ ἥλιος μένουσιν ἀκίνητα, ἡ δὲ γῆ περιφέρεται κατὰ περιφέρειαν κύκλου περὶ τὸν ἥλιον, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον (τῆς κυκλικῆς) τροχιᾶς, τὴν δὲ σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων κειμένην περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὡς ὁ ἥλιος, ὅτι εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ὁ κύκλος, καθ' ὃν ὑποθέτει ὅτι περιφέρεται ἡ γῆ, ἔχει τοιαύτην ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀπλανῶν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. Τοῦτο εἶναι προφανές, ὅτι εἶναι ἀδύνατον· διότι ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας δὲν ἔχει μέγεθος, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν αὐτό, ὅτι δὲν ἔχει κανένα λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Πρέπει δὲ νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ὁ 'Αρίσταρχος ἐννοεῖ τὸ ἑξῆς· ἐπειδὴ θεωροῦσιν, ὅτι ἡ γῆ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν λόγον ἔχει ἡ γῆ πρὸς τὸν ὑφ' ἡμῶν (ἀνωτέρω) εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ σφαῖρα εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ὁ κύκλος, καθ' ὃν ὑποθέτει, ὅτι περιφέρεται (περὶ τὸν ἥλιον) ἡ γῆ, πρὸς τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων· διότι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐναρμόζει τὰς ἀποδείξεις τῶν φαινομένων, καὶ μάλιστα, φαίνεται, ὑποθέτει, ὅτι τὸ μέγεθος τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν θεωρεῖ ὅτι κινεῖται ἡ γῆ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ὑφ' ἡμῶν εἰρημένον κόσμον. Λέγω λοιπόν, ὅτι καὶ ἂν ὑπάρξῃ σφαῖρα μὲ ἄμμον τόση κατὰ τὸ μέγεθος, ὅσην ὑποθέτει ὁ 'Αρίσταρχος, ὅτι εἶναι ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν ἄστρων, καὶ παρὰ τοῦτο, θὰ δειχθῇ διὰ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ἔχουσι κατονομασθῆ εἰς τὴν ἀρχήν, ὅτι ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι κατὰ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἀποτελούσης μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν εἰρημένην σφαῖραν, ἀφοῦ κάμωμεν τὰς ἑξῆς ὑποθέσεις· πρῶτον μὲν ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γῆς εἶναι περίπου 3.000.000 στάδια καὶ ὄχι περισσότερον, καίτοι μερικοὶ προσπαθοῦσι νὰ ἀποδείξωσιν, καθὼς καὶ εἰς σὲ εἶναι γνωστόν, ὅτι αὐτη εἶναι περίπου 300.000 στάδια. 'Εγὼ δὲ ὑπερβάλλων αὐτοὺς (τοὺς τελευταίους) καὶ θέτων τὸ μέγεθος τῆς γῆς περίπου δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προηγουμένων θεωρουμένου, ὑποθέτω, ὅτι ἡ περίμετρος αὐτῆς εἶναι περίπου 3.000.000 στάδια καὶ ὄχι περισσότερα· μετὰ δὲ τοῦτο,

μέτρου τᾶς σελήνας, καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα
εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς
9 *πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων· μετὰ δὲ ταῦτα τὰν*
διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας ὡς τριακον-
ταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα, καίπερ τῶν προτέρων ἀστρο-
λόγων Εὐδόξου μὲν ὡς ἐννεαπλασίονα ἀποφαινομένου, Φειδία
δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρὸς ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν, Ἀριστάρχου δὲ
πεπειραμένου δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου τᾶς
διαμέτρου τᾶς σελήνας μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων,
ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων· ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ
H 222 *τοῦτον, ὅπως τὸ προκείμενον ἀναμφιλόγως ᾖ δεδειγμένον,*
ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελή-
10 *νας ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν καὶ μὴ μείζονα· ποτὶ δὲ τού-*
τοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώ-
νου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν
ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι Ἀριστάρχου μὲν εὑρηκό-
τος τοῦ κύκλου τῶν ζῳδίων τὸν ἅλιον φαινόμενον ὡς τὸ εἰ-
κοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν, αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε
τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν, εἰς ἃν ὁ
11 *ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ μὲν*
οὖν ἀκριβὲς λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν
μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν δεῖ λαβεῖν, ἀξιόπι-
στα εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι· περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ
παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοι-
ούτων ἐμπεφανισμένων· ἀποχρὴ δέ μοι ἐς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ
προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅτις ἐστὶ μὴ μείζων τᾶς γωνίας,
εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, καὶ
πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅτις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας,
εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.
12 *τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πόδα ὀρθὸν ἐν τόπῳ κείμε-*
νον, ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλων ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου
μικροῦ τορνευθέντος καὶ τεθέντος ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως

ὑποθέτω, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς γῆς, λαμβάνων αὐτὰ ὅπως τὰ λαμβάνουσιν οἱ περισσότεροι τῶν προηγουμένων ἀστρονόμων· μετὰ δὲ ταῦτα θεωρῶ ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι τριακονταπλασία καὶ ὄχι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, καίτοι ἐκ τῶν προηγουμένων ἀστρονόμων ὁ μὲν Εὔδοξος ἔλεγεν ὅτι εἶναι ἐννεαπλασία, ὁ Φειδίας δὲ ὁ πατήρ μου, ὅτι εἶναι περίπου δωδεκαπλασία, ὁ Ἀρίσταρχος δὲ προσεπάθει νὰ ἀποδείξῃ, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τῶν δεκαοκτὼ μικροτέρα δὲ τῶν εἴκοσι διαμέτρων τῆς σελήνης· ἐγὼ δὲ ὑπερβάλλων καὶ τοῦτον, διὰ νὰ ἀποδείξω ἀναντιλέκτως τὸ προκείμενον, ὑποθέτω, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι τριακονταπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης καὶ ὄχι μεγαλυτέρα αὐτῆς· πρὸς τούτοις δέ, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν εἰς τὸν κόσμον. Τοῦτο δὲ ὑποθέτω, ἐν ᾧ ὁ Ἀρίσταρχος ἔχει εὕρει, ὅτι ὁ ἥλιος φαίνεται, ὅτι εἶναι τὸ ἑπτακοσιοστὸν εἰκοστὸν τοῦ κύκλου τῶν ζῳδίων, ἐγὼ δὲ ἐρευνήσας προσεπάθησα κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον νὰ λάβω δι' ὀργάνων τὴν γωνίαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος (ἔχουσαν τὴν κορυφὴν εἰς τὸν ὀφθαλμόν). Τὸ νὰ λάβῃ μὲν κανεὶς ἀκριβῆ γωνίαν δὲν εἶναι εὐχερές, διότι οὔτε ὁ ὀφθαλμός, οὔτε αἱ χεῖρες, οὔτε τὰ ὄργανα, διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβῃ κανεὶς τὴν γωνίαν, νομίζω, ὅτι εἶναι ἀξιόπιστα, ὥστε νὰ δίδωσιν ἀκρίβειαν τῶν παρατηρήσεων· περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος δὲν εἶναι καιρὸς νὰ μηκύνωμεν τὸν λόγον, ἄλλως τε πολλὰς φορὰς ἔχει γίνει λόγος περὶ αὐτοῦ· δι' ἐμὲ εἶναι ἀρκετόν, διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου, νὰ λάβω μίαν γωνίαν, ἥτις νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος, καὶ πάλιν νὰ λάβω ἄλλην γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος. Τεθέντος λοιπὸν ἑνὸς μακροῦ κανόνος ἐπὶ κατακορύφου στελέχους εἰς τόπον ὅπου μέλλει νὰ παρατηρηθῇ ὁ ἥλιος ἀνατέλλων, καὶ μικροῦ κυλίνδρου τορνευθέντος καὶ

μετὰ τὰν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου, ἔπειτ' ἐόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ
ὁρίζοντι καὶ δυναμένου ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστράφη ὁ κανὼν εἰς
τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος· ὁ δὲ
κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος τοῦ τε ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος ἐπε-
σκότει τῷ ἁλίῳ. ἀποχωριζόμενος οὖν [τοῦ κυλίνδρου] ἀπὸ τᾶς
H 224 *ὄψιος, ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικρὸν ἐφ' ἑκά-*
13 *τερα τοῦ κυλίνδρου, κατεστάθη ὁ κύλινδρος. εἰ μὲν οὖν συνέ-*
βαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν, εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν
ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἐπι-
ψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθει-
σᾶν ἐλάσσων κα ἦς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν
κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, διὰ τὸ παραβλέπεσθαί τι τοῦ
ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου· ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἑνὸς
σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος, ἐλάφθη τι μέ-
γεθος στρογγύλον οὐκ ἔλαττον ὄψιος, καὶ τεθέντος τοῦ μεγέ-
θεος ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη,
ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν ἐπιψαυουσᾶν τοῦ τε μεγέθεος καὶ τοῦ κυ-
λίνδρου ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐλάττων
14 *ἦς τᾶς γωνίας, εἰς ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν*
ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος τόνδε
τὸν τρόπον εὑρίσκεται· δύο κυλίνδρια λαμβάνεται λεπτὰ ἰσο-
παχέα ἀλλάλοις, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ οὔ, καὶ προτίθενται πρὸ
τᾶς ὄψιος, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευ-
κὸν ὡς ἔστιν ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ
προσώπου. εἰ μὲν οὖν κα τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότερα
ἔωντι τᾶς ὄψιος, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυ-
λίνδριον, καὶ ὁρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκόν, εἰ μέν κα παρὰ
πολὺ λεπτότερα ἔωντι, πᾶν, εἰ δέ κα μὴ παρὰ πολύ, μέρεά
τινα τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐγγὺς τᾶς ὄψιος,
λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλινδρίων ἐπιταδείων πως τῷ πάχει
ἐπισκοτεῖ τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ καὶ οὐ πλείονι τόπῳ· τὸ
H 226 *δὴ ταλικοῦτον μέγεθος, ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλινδρίων*

τεθέντος κατακορύφως ἐπὶ τοῦ κανόνος εὐθὺς μετὰ τὴν ἀνατολὴν τοῦ ἡλίου, ἔπειτα ἐν ᾧ αὐτὸς ἦτο ἀκόμη εἰς τὸν ὁρίζοντα καὶ ἦτο δυνατὸν νὰ φαίνεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, ἐστράφη ὁ κανὼν μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὸν ἥλιον, καὶ ὁ ὀφθαλμὸς ἐτέθη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος· ὁ δὲ κύλινδρος κείμενος μεταξὺ τοῦ ἡλίου καὶ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐπεσκίαζε τὸν ἥλιον. Ἀπομακρυνομένου δὲ [τοῦ κυλίνδρου] ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ (μὲ διεύθυνσιν πρὸς τὸν ἥλιον), μόλις ἤρχισε νὰ φαίνεται ὁ ἥλιος ὀλίγον καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου, ἐστάθη ὁ κύλινδρος. Ἐὰν μὲν λοιπὸν συνέβαινεν νὰ βλέπῃ ὁ ὀφθαλμὸς μόνον ἐξ ἑνὸς σημείου, καὶ ἐὰν ἐφέρομεν ἐκ τοῦ ἄκρου τοῦ κανόνος, ὅπου εὑρίσκετο ὁ ὀφθαλμός, ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ ἥλιος φαίνεται, διότι καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου φαίνεται ὀλίγον μέρος τοῦ ἡλίου· ἐπειδὴ δὲ οἱ ὀφθαλμοὶ δὲν βλέπουν μόνον ἐξ ἑνὸς σημείου, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθους, ἐλήφθη μέγεθος στρογγύλον οὐχὶ μικρότερον τοῦ ὀφθαλμοῦ, καὶ ἀφοῦ ἐτέθη τὸ μέγεθος εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ὅπου ἐτέθη ὁ ὀφθαλμός, καὶ ἤχθησαν ἐφαπτόμεναι καὶ τοῦ μεγέθους καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ἦτο μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος. Τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐχὶ μικρότερον τοῦ ὀφθαλμοῦ εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· λαμβάνονται δύο κυλίνδρια λεπτὰ καὶ ἰσοπαχῆ μεταξύ των, τὸ μὲν λευκόν, τὸ δὲ ὄχι, καὶ φέρονται πρὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ, τὸ μὲν λευκὸν μακρύτερον αὐτοῦ, τὸ δὲ μὴ λευκὸν πλησιέστατα πρὸς τὸν ὀφθαλμόν, ὥστε καὶ νὰ ἐγγίζῃ τὸ πρόσωπον. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὰ ληφθέντα κυλίνδρια εἶναι λεπτότερα τοῦ ὀφθαλμοῦ, τὸ πλησιέστερον κυλίνδριον περιλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ, καὶ φαίνεται ὑπ' αὐτοῦ τὸ λευκόν, ἐὰν μὲν εἶναι παρὰ πολὺ λεπτόν, φαίνεται ὁλόκληρον, ἐὰν δὲ δὲν εἶναι, φαίνονται μέρη τινὰ τοῦ λευκοῦ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πλησίον τοῦ ὀφθαλμοῦ, ἐὰν δὲ ληφθῶσι τὰ κυλίνδρια αὐτὰ ὑπὸ κατάλληλον πάχος ἐπισκιάζει τὸ ἓν τὸ ἄλλον καὶ ὄχι περισσότερον χῶρον· τὸ δὲ τοιοῦτον μέγεθος, ἔχον τὸ πάχος τῶν κυλινδρίων, τὰ ὁποῖα προκαλοῦν τὸ

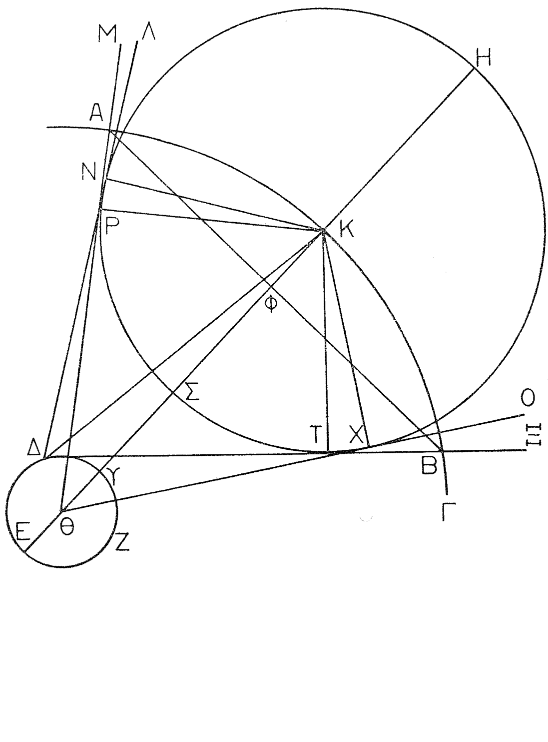
15 τῶν τοῦτο ποιούντων μάλιστά πώς ἐστιν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος. ἁ δὲ γωνία ἁ οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, οὕτως ἐλάφθη· ἀποσταθέντος ἐπὶ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος οὕτως, ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ τῷ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη, ἐπιψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ταῖς
16 δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθᾶς γωνίας ἐγένετο ἁ ἐν στίγῳ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς $\overline{ρξδ}$ ἐλάττων ἢ ἓν μέρος τούτων, ἁ δὲ ἐλάττων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς $\overline{σ}$ μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ γωνία, εἰς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάττων μέν ἐστιν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς $\overline{ρξδ}$ τούτων ἓν
17 μέρος, μείζων δὲ ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς $\overline{σ}$ τούτων ἓν μέρος. πεπιστευμένων δὲ τούτων δείκνυται ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου, τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβληθὲν ἐπίπεδον τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν ΑΒΓ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν
H 228 ΔΕΖ, τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν ΣΗ κύκλον, κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ Θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ Κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ΣΗ κύκλου ἀπὸ μὲν τοῦ Δ αἱ ΔΛ, ΔΞ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ Ν καὶ τὸ Τ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ αἱ ΘΜ, ΘΟ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ Χ καὶ τὸ Ρ, τὸν δὲ ΑΒΓ
18 κύκλον τεμνόντων αἱ ΘΜ, ΘΟ κατὰ τὸ Α καὶ τὸ Β· ἔστι δὴ μείζων ἁ ΘΚ τᾶς ΔΚ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν· ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ.

φαινόμενον αὐτό, δὲν εἶναι τοὐλάχιστον μικρότερον τοῦ ὀφθαλμοῦ· Ἡ δὲ γωνία ἡ ὁποία δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος, ἐλήφθη κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον· ὅταν σταθῇ ἐπὶ τοῦ κανόνος ὁ κύλινδρος εἰς τόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ, ὥστε ὁ κύλινδρος νὰ ἐπισκιάζῃ ὁλόκληρον τὸν ἥλιον, καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ ἄκρου τοῦ κανόνος, ἀπὸ τὸ μέρος, ὅπου ἐστάθη ὁ ὀφθαλμός, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτωνται τοῦ κυλίνδρου, ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν δὲν γίνεται μικροτέρα τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος. Ὅταν ἔγινε σύγκρισις τῶν οὕτω πως ληφθεισῶν γωνιῶν πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν εὑρέθη (ἡ μεγαλυτέρα), ἀφοῦ ἡ ὀρθὴ διῃρέθη εἰς 164 μέρη διὰ στιγμῶν (διὰ στίγων), οὐχὶ μικροτέρα τοῦ ἑνὸς 164ου, ἡ δὲ μικροτέρα, ἀφοῦ ἡ ὀρθὴ διῃρέθη εἰς 200 μέρη, οὐχὶ μεγαλυτέρα τοῦ ἑνὸς 200ου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἑνὸς 164ου τῆς ὀρθῆς, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ ἑνὸς 200ου μέρους τῆς ὀρθῆς. Ἀφοῦ δὲ ταῦτα γίνωσι παραδεκτὰ ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. Διότι ἂς νοηθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ (τοῦ παρατηρητοῦ), τοῦ ἡλίου εὑρισκομένου ὀλίγον ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα, ἂς τέμνῃ δὲ τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν κύκλον ΑΒΓ, τὴν δὲ γῆν κατὰ τὸν ΔΕΖ, τὸν δὲ ἥλιον κατὰ τὸν κύκλον ΣΗ, κέντρον δὲ ἔστω τῆς μὲν γῆς τὸ Θ, τοῦ δὲ ἡλίου τὸ Κ, ὀφθαλμὸς δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΣΗ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ αἱ ΔΛ, ΔΞ, ἂς ἐφάπτωνται δὲ κατὰ τὸ Ν καὶ τὸ Τ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ αἱ ΘΜ, ΘΟ, ἂς ἐφάπτωνται δὲ κατὰ τὸ Χ καὶ τὸ Ρ, νὰ τέμνωσι δὲ τὸν κύκλον ΑΒΓ αἱ ΘΜ, ΘΟ κατὰ τὸ Α καὶ τὸ Β· εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΘΚ τῆς ΔΚ, ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ὁ ἥλιος εἶναι ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα· ὥστε ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ.

ἁ δὲ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ μείζων μέν ἐστιν
ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, ἐλάττων δὲ ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρε-
θείσας εἰς ρ̅ξ̅δ̅ τούτων ἓν μέρος· ἴσα γάρ ἐστιν τᾷ γωνίᾳ, εἰς
ἃν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει·
ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ ἐλάττων ἐστὶν
ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρ̅ξ̅δ̅ τούτων ἓν μέρος, ἁ δὲ ΑΒ
εὐθεῖα ἐλάττων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθεί-
19 σας τᾶς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας ἐς χ̅ν̅ς̅. ἁ δὲ τοῦ εἰρη-
μένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ
H 230 ΑΒΓ κύκλου ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ τὰ μ̅δ̅ ποτὶ τὰ ζ̅ διὰ τὸ
παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον
ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάττονα λόγον ἔχειν ἢ τὰ μ̅δ̅ ποτὶ
τὰ ζ̅· ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ' ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου
ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου ἐλάσ-
σονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, ταύτας δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἁ περίμετρος
τοῦ ἐγγραφέντος πολυγωνίου· ἐλάττω οὖν λόγον ἔχει ἁ ΒΑ
ποτὶ τὰν ΘΚ ἢ τὰ ι̅α̅ ποτὶ τὰ ,α̅ρ̅μ̅η̅· ὥστε ἐλάττων ἐστὶν ἁ
20 ΒΑ τᾶς ΘΚ ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ ΒΑ ἴσα ἐστὶν ἁ διά-
μετρος τοῦ ΣΗ κύκλου, διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ ΦΑ ἴσα
ἐστὶ τᾷ ΚΡ· ἰσᾶν γὰρ ἐουσᾶν τᾶν ΘΚ, ΘΑ ἀπὸ τῶν περάτων
καθέτοι ἐπιζεύγνυνται ὑπὸ τὰν αὐτὰν γωνίαν· δῆλον οὖν, ὅτι
ἁ διάμετρος τοῦ ΣΗ κύκλου ἐλάττων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος
τᾶς ΘΚ. καὶ ἁ ΕΘΥ διάμετρος ἐλάττων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου
τοῦ ΣΗ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάττων ἐστὶν ὁ ΔΕΖ κύκλος τοῦ ΣΗ
κύκλου· ἐλάττονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ ΘΥ, ΚΣ ἢ ἑκατο-
στὸν μέρος τᾶς ΘΚ· ὥστε ἁ ΘΚ ποτὶ τὰν ΥΣ ἐλάττονα λόγον
ἔχει ἢ τὰ ρ̅ ποτὶ τὰ ϙ̅θ̅. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν ΘΚ οὐκ ἐλάττων ἐστὶ
τᾶς ΘΡ, ἁ δὲ ΣΥ ἐλάττων τᾶς ΔΤ, ἐλάττω ἄρα κα λόγον ἔχοι
21 ἁ ΘΡ ποτὶ τὰν ΔΤ ἢ τὰ ρ̅ ποτὶ τὰ ϙ̅θ̅. ἐπεὶ δὲ τῶν ΘΚΡ,
ΔΚΤ ὀρθογωνίων ἐόντων αἱ μὲν ΚΡ, ΚΤ πλευραὶ ἴσαι ἐντί,
αἱ δὲ ΘΡ, ΔΤ ἀνίσοι καὶ μείζων ἁ ΘΡ, ἁ γωνία ἁ περιεχομένα
H 232 ὑπὸ τᾶν ΔΤ, ΔΚ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν

Ἡ δὲ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν τοῦ διακοσιοστοῦ μέρους τῆς ὀρθῆς, μικροτέρα δὲ τοῦ ἑκατοστοῦ ἑξηκοστοῦ τετάρτου μέρους αὐτῆς· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὁ ἥλιος· ὥστε ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς 164ου τῆς ὀρθῆς, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης (χορδῆς) ἑνὸς τόξου τοῦ κύκλου ΑΒΓ διαιρεθέντος εἰς 656 μέρη. Ἡ δὲ περίμετρος τοῦ εἰρημένου πολυγώνου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὰ 44 : 7, διότι ἡ περίμετρος παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ἔχει λόγον μικρότερον τοῦ 44 : 7· διότι θὰ σοῦ εἶναι γνωστὸν τὸ ἀποδειχθὲν παρ' ἡμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου σὺν ὀλιγώτερον τοῦ ἑνὸς ἑβδόμου αὐτῆς (Κύκλου μέτρησις, θ. 3), ταύτης δὲ μικροτέρα εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου· ἔχει λοιπὸν μικρότερον λόγον ἡ ΒΑ : ΘΚ ἢ τὰ 11 : 1148· ὥστε εἶναι $\mathrm{BA} < \frac{1}{100}\,\Theta\mathrm{K}$. Πρὸς δὲ τὴν ΒΑ εἶναι ἴση ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ΣΗ, διότι καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἡ ΦΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΡ· διότι, ἐν ᾧ αἱ ΘΚ, ΘΑ εἶναι ἴσαι ἔχουσιν ἀχθῆ ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν κάθετοι ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν (Εὐκλ. Ι, 26)· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ΣΗ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{100}\,\Theta\mathrm{K}$. Καὶ ἡ διάμετρος ΕΘΥ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΣΗ, ἐπειδὴ ὁ κύκλος ΔΕΖ εἶναι μικρότερος τοῦ κύκλου ΣΗ· εἶναι ἄρα τὸ ἄθροισμα $\Theta\Upsilon + \mathrm{K}\Sigma < \frac{1}{100}\,\Theta\mathrm{K}$· ὥστε εἶναι $\Theta\mathrm{K} : \Upsilon\Sigma < 100 : 99$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΘΚ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΘΡ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 8), ἡ δὲ ΣΥ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΤ, θὰ εἶναι ἄρα $\Theta\mathrm{P} : \Delta\mathrm{T} < 100 : 99$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΘΚΡ, ΔΚΤ εἶναι ὀρθογώνια, αἱ μὲν πλευραὶ ΚΡ, ΚΤ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ΘΡ, ΔΤ εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΘΡ, ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΤ, ΔΚ πρὸς τὴν γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΘΡ, ΘΚ ἔχει μεγαλύ-

ΘΡ, ΘΚ μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ ΘΚ ποτὶ τὰν ΔΚ, ἐλάττω δὲ ἢ ἁ ΘΡ ποτὶ τὰν ΔΤ· εἰ γάρ κα δυῶν τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἀνίσοι, ἁ μείζων γωνία τᾶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάττονα μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινουσᾶν ποτὶ τὰν ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ
22 *τὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ τὰν ἐλάττονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν ΘΟ, ΘΜ ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ ποτὶ τὰν ΔΤ, ἅτις ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ* $\overline{\varrho}$ *ποτὶ τὰ* $\overline{\text{ϙ}\theta}$*· ὥστε καὶ ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ ἐλάττω λόγον ἔχει ἢ τὰ* $\overline{\varrho}$ *ποτὶ τὰ* $\overline{\text{ϙ}\theta}$*. καὶ ἐπεί ἐστιν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΔΛ, ΔΞ*



τερον μὲν λόγον ἢ ἡ ΘΚ : ΔΚ, μικρότερον δὲ ἢ ἡ ΘΡ : ΔΤ· διότι ἐὰν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ ἄλλαι δὲ κάθετοι εἶναι ἄνισοι, ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ἀνίσων καθέτων πλευρῶν πρὸς τὴν μικροτέραν ἔχει μεγαλύτερον μὲν λόγον ἢ ἡ μεγαλυτέρα ὑποτείνουσα πρὸς τὴν μικροτέραν, μικρότερον δὲ ἢ ἡ μεγαλυτέρα κάθετος πλευρὰ πρὸς τὴν μικροτέραν. Ὥστε ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ πρὸς τὴν γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΘΟ, ΘΜ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ ἡ ΘΡ : ΔΤ, ἡ ὁποία ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὰ 100 : 99· ὥστε καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ πρὸς τὴν γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ ἔχει μικρότερον λόγον ἢ τὰ 100 : 99. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΔΞ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $\frac{1}{200}$

μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιε-
χομένα ὑπὸ τᾶν ΘΜ, ΘΟ μείζων ἢ τὰς ὀρθᾶς διαιρεθείσας
ἐς δισμύρια τούτων ϛ̅θ̅ μέρεα· ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρε-
θείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ̅ καὶ γ̅ τούτων ἓν μέρος. ἁ ἄρα ΒΑ μεί-
ζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ ΑΒΓ
κύκλου περιφερείας εἰς ω̅ι̅β̅. τᾷ δὲ ΑΒ ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου
διάμετρος· δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος
τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

1 II. Τούτων δὲ ὑποκειμένων δείκνυται καὶ τάδε· οἷον ἁ διά-
μετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ
μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἐστὶν
ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ̅. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διά-
H 234 μετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζω εἶμεν ἢ τριακονταπλασίονα τᾶς
διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζω εἶμεν
τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον, ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου
ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς.
πάλιν δέ, ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα
τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγ-
γραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερόν, ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου
περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάττων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς
διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάττων ἐστὶν
2 ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς· ὥστε ἁ περίμε-
τρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς
διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου
τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ τρισμυριοπλα-
σίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων· δέ-
δεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάττων
ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου τᾶς περιμέτρου, ὅ κα
ἰσόπλευρον ᾖ καὶ πολυγωνότερον τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένον
ἐν τῷ κύκλῳ· εἴη κα ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριο-
πλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κό-
3 σμου ἐλάττων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς

τῆς ὀρθῆς, θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΘΜ, ΘΟ μεγαλυτέρα $\frac{99}{20.000}$ τῆς ὀρθῆς· ὥστε εἶναι μεγαλυτέρα καὶ τοῦ $\frac{1}{203}$ τῆς ὀρθῆς. Εἶναι ἄρα ἡ ΒΑ μεγαλυτέρα τῆς χορδῆς τόξου τοῦ κύκλου ΑΒΓ διαιρεθέντος εἰς 812 ἴσα μέρη. Πρὸς δὲ τὴν ΑΒ εἶναι ἴση ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου.

2. Τούτων δὲ ὑποκειμένων ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἑξῆς· ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς, καὶ ἀκόμη, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 $\times$ 10.000 $\times$ 100 σταδίων. Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριακονταπλασίου τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, ὅτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μικροτέρα τοῦ τριακονταπλασίου τῆς διαμέτρου τῆς γῆς. Πάλιν δέ, ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ χιλιαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ εἰρημένου χιλιαγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ χιλιοπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ ἡλίου. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ ἡλίου εἶναι μικροτέρα τοῦ τριακονταπλασίου τῆς διαμέτρου τῆς γῆς· ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου εἶναι μικροτέρα 30.000 διαμέτρων τῆς γῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου εἶναι μικροτέρα μὲν 30.000 διαμέτρων τῆς γῆς, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ κόσμου· διότι ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διάμετρος παντὸς κύκλου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς τρίτου τῆς περιμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, ὅταν τοῦτο ἔχῃ περισσοτέρας πλευρὰς τοῦ ἑξαγώνου· θὰ εἶναι ἑπομένως καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς. Ἀπεδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς· ὅτι δὲ ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα 10.000.000.000 σταδίων,

*δέδεικται· ὅτι δὲ ἐλάττων ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἢ
σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ̅, ἐκ τούτου δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ὑ-
πόκειται τὰν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν ἢ τριακο-
σίας μυριάδας σταδίων, ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς μείζων ἐστὶν
ἢ τριπλασία τᾶς διαμέτρου διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέ-
ρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίονα τᾶς διαμέτρου, δῆλον, ὡς
ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ̅ μυριάδες.*
H 236 *ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριοπλα-
σίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον, ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμε-*
4 *τρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ̅. περὶ μὲν
οὖν τῶν μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι,
περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε· εἴ κα ᾖ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ
τοῦ ψάμμου μὴ μεῖζον μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μεί-
ζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάτ-
τονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ
τοῦτο ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον· ἐτέθεν ἐπὶ κανόνα
λεῖον μάκωνες ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι ἁπτόμεναι ἀλ-
λαλᾶν, καὶ ἀνέλαβον αἱ κε̅ μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου
μάκεος. ἐλάττονα οὖν τιθεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος ὑπο-
τίθεμαι ὡς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου καὶ μὴ ἐλάτ-
τονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατα δείκνυσθαι
τὸ προκείμενον.*

1 III. *Ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα· χρήσιμον δὲ εἶμεν
ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως
καὶ τῶν ἄλλων οἱ τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετευχότες τῷ ποτὶ Ζεύ-
ξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν ὑπὲρ*
2 *αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ προειρημένον. συμβαίνει δὴ τὰ ὀνό-
ματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παρα-
δεδομένα, καὶ ὑπὲρ τὸ τῶν μυρίων [μὲν] ἀποχρεόντως γιγνώ-
σκομες μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἔστε ποτὶ τὰς μυρίας μυ-
ριάδας. ἔστων οὖν ἁμῖν οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰς
μυρίας μυριάδας πρῶτοι καλουμένοι, τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν*

εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ ἑξῆς· διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γῆς δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 3.000.000 σταδίων, ἡ δὲ περίμετρος τῆς γῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου αὐτῆς, ἐπειδὴ παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριπλασίου τῆς διαμέτρου, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς γῆς εἶναι μικροτέρα 1.000.000 σταδίων. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα 10.000.000.000 σταδίων. Περὶ τῶν μεγεθῶν λοιπὸν καὶ τῶν ἀποστάσεων κάμνω αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις, περὶ δὲ τῆς ἄμμου ὑποθέτω τὰ ἑξῆς· ἔστω ὅτι ὑπάρχει μέγεθος συγκείμενον ἐξ ἄμμου μὴ μεγαλύτερον κόκκου μήκωνος, ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν κόκκων τῆς ἄμμου ἐντὸς τοῦ μεγέθους νὰ εἶναι οὐχὶ μεγαλύτερος τῶν 10.000, καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος νὰ εἶναι οὐχὶ μικροτέρα τοῦ ἑνὸς τεσσαρακοστοῦ τοῦ δακτύλου. Ὑποθέτω δὲ τοῦτο σκεφθεὶς κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· ἐτέθησαν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς εἰς λεῖον κανόνα κόκκοι μήκωνος ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ οἱ 25 κόκκοι μήκωνος κατέλαβον χῶρον ἑνὸς πλήρους μήκους δακτύλου. Θέσας λοιπὸν τὴν διάμετρον τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος μικροτέραν, ὑποθέτω ὅτι εἶναι $\frac{1}{40}$ τοῦ δακτύλου καὶ ὄχι μικροτέρα, ἐπιθυμῶν καὶ διὰ τούτου νὰ ἀποδείξω τὸ προκείμενον ἀναντιρρητότατα.

3. Αὐτὰ λοιπὸν εἶναι ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ὑποθέτω· νομίζω δὲ ὅτι εἶναι χρήσιμον νὰ κατονομασθῶσιν οἱ ἀριθμοί, ἵνα, καὶ ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι δὲν ἔτυχε νὰ ἀναγνώσωσι τὸ βιβλίον (περὶ ἀριθμῶν) τὸ ἀφιερωμένον εἰς τὸν Ζεύξιππον, μὴ πλανῶνται, διότι δὲν θὰ ἔχωμεν εἴπει τίποτε περὶ αὐτῶν εἰς τὸ παρὸν βιβλίον. Συμβαίνει δέ, ὥστε τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν νὰ εἶναι ἐκ παραδόσεως γνωστὰ εἰς ἡμᾶς (ἀπὸ τῆς μονάδος) μέχρι τῶν 10.000, καὶ γνωρίζομεν ἐπίσης ἀρκούντως τοὺς ἀριθμούς, ἐν ᾧ ἀριθμοῦμεν ἀπὸ μυριάδος μέχρι 10.000 μυριάδας. Ἔστω λοιπὸν οἱ ἤδη εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι τῶν μυρίων μυριάδων, ἃς καλῶνται πρῶτοι, τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μύριαι

αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἀ-
H 238 ριθμείσθων τῶν δευτέρων μονάδες καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκά-
δες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας
μυριάδας. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀ-
ριθμῶν μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθων
τῶν τρίτων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες
3 καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυ-
ριάδας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μύριαι
μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τε-
τάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων
ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα
ἐχόντων ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριά-
δας. ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γιγνω-
4 σκομένοι, ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ
μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτας περιόδου καλουμένοι, ὁ
δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς πρώτας περιόδου μονὰς καλείσθω
δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι
μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν μονὰς κα-
λείσθω τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ
καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου
τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες τὰ ὀ-
νόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου ἐς τὰς μυριακισμυριο-
στῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀρι-
θμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου
πρώτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἐς τὰς μυριακι-
5 σμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυ-
H 240 ριάδας. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴ κα ἔωντι ἀ-
ριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κειμένοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν
μονάδα δεκὰς ᾖ, ὀκτὼ μὲν αὐτῶν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι
τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται, οἱ δὲ μετ᾽ αὐ-
τοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλουμένων, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν
αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦν-

μυριάδες ἂς καλῶνται μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἂς ἀριθμηθῶσι τῶν δευτέρων ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἐκ τῶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες μέχρι μυριάδες μυριάδων. Πάλιν δὲ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ἂς κληθῶσι μονὰς τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἂς ἀριθμηθῶσι μονάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν καὶ ἀπὸ τῶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες μέχρι μυριάδες μυριάδων. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες ἂς κληθῶσι μονὰς τῶν τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ἂς κληθῶσι μονὰς τῶν πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θὰ ὀνομάζωνται οἱ ἀριθμοὶ μέχρι τῶν μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες. Καίτοι εἶναι ἐπαρκεῖς οἱ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὀνομαζόμενοι ἀριθμοί, ἐν τούτοις εἶναι δυνατὸν νὰ προχωρήσωμεν καὶ περισσότερον. Διότι ἔστω, ὅτι οἱ ἤδη εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἂς κληθῶσι ἀριθμοὶ τῆς πρώτης περιόδου, ὁ δὲ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς πρώτης περιόδου ἂς κληθῇ μονὰς τῆς δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῆς δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν ἂς κληθῶσι μονὰς τῆς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. Ὁμοίως δὲ καὶ ὁ τελευταῖος τούτων ἂς κληθῇ μονὰς δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν, καὶ πάντοτε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἂς ὀνομάζωνται οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας περιόδου μέχρι τῶν μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες. Πάλιν δὲ καὶ ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς δευτέρας περιόδου ἂς κληθῇ μονὰς τῆς τρίτης περιόδου πρώτων ἀριθμῶν, καὶ πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν προχώρησιν μέχρι τῆς μυριάκις μυριοστῆς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. Ἐν ᾧ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι κατονομασθῇ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα εἶναι δέκα, οἱ ὀκτὼ μὲν πρῶτοι ἐξ αὐτῶν σὺν τὴν μονάδα θὰ περιέχωσι τοὺς καλουμένους πρώτους ἀριθμοὺς (τῆς πρώτης τάξεως), οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ θὰ περιέχωσι τοὺς δευτέρους ἀριθμοὺς (δευτέρας τάξεως) καὶ οἱ ἄλλοι θὰ γίνωνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πρὸς αὐτοὺς καὶ θὰ περιέχωσι τοὺς ἀντι-

ται τᾷ ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας
ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. τᾶς μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀρι-
θμῶν ὁ ὄγδοός ἐστιν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες, τᾶς δὲ δευτέρας
ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶν τοῦ πρὸ αὐτοῦ,
5 μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται· οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν δευτέρων
ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριά-
δες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος
ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλασίων ἐστὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύριαι μυ-
ριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν· οὗτος δέ ἐστιν μονὰς
6 τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δέ, ὅτι καὶ πολλοσταὶ ὀκτάδες
ἑξοῦντι, ὡς εἴρηται. χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον.
εἴ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλα-
σιάζωντί τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενό-
μενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ
μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων
τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει, ἀπὸ
δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάττονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς
7 συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιά-
ξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνάλογον ἀπὸ μο-
H 242 νάδος οἱ *Α*, *Β*, *Γ*, *Δ*, *Ε*, *Ζ*, *Η*, *Θ*, *Ι*, *Κ*, *Λ*, μονὰς δὲ ἔστω ὁ *Α*,
καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ *Δ* τῷ *Θ*, ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ *Χ*.
λελάφθω δὴ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ *Λ* ἀπέχων ἀπὸ τοῦ *Θ* τοσού-
τους, ὅσους ὁ *Δ* ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· δεικτέον, ὅτι ἴσος ἐστὶν
ὁ *Χ* τῷ *Λ*. ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἀριθμῶν ἴσους ἀπέχει
ὅ τε *Δ* ἀπὸ τοῦ *Α* καὶ ὁ *Λ* ἀπὸ τοῦ *Θ*, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον
ὁ *Δ* ποτὶ τὸν *Α*, ὃν ὁ *Λ* ποτὶ τὸν *Θ*. πολλαπλασίων δέ ἐστιν ὁ
Δ τοῦ *Α* τῷ *Δ*· πολλαπλασίων ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ *Λ* τοῦ *Θ* τῷ
8 *Δ*· ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ *Λ* τῷ *Χ*. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ
τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστιν καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλα-
σιαξάντων ἀλλάλους ἴσους ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάττων ἀπὸ τᾶς
μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δέ, ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ
ἐλάττονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέ-

στοίχους ἀριθμοὺς ἀναλόγως πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἑκάστης ὀκτάδος ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς πρώτης ὀκτάδος ἀριθμῶν. Τῆς μὲν λοιπὸν πρώτης ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὁ ὄγδοος ἀριθμὸς εἶναι χίλιαι μυριάδες, τῆς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι μύριαι μυριάδες· οὗτος δὲ εἶναι ἡ μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ὁ δὲ ὄγδοος τῆς δευτέρας ὀκτάδος εἶναι χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ τῆς τρίτης ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν· οὗτος δὲ εἶναι μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ὑπάρχωσι καὶ πολλοσταὶ ὀκτάδες, ὡς ἐλέχθη. Εἶναι δὲ χρήσιμον νὰ γνωσθῇ καὶ τὸ ἑξῆς. Ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς μονάδος εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ μερικοὶ ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθῶσι μεταξύ των, τὸ γινόμενον θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν αὐτὴν πρόοδον καὶ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν πολλαπλασιασάντων, τόσον ὅσον ἀπέχει ἀπὸ μονάδος ὁ μικρότερος τῶν πολλαπλασιασάντων. Ἀπὸ δὲ τῆς μονάδος θὰ ἀπέχῃ τὸ γινόμενον κατὰ ἕνα ὀλιγώτερον, ἢ ὅσον ἀπέχει ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλούμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο, καθ' ὃν ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς μονάδος οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους. Διότι ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοί τινες εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, μονὰς δὲ ἔστω ὁ Α καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ Δ μὲ τὸν Θ, τὸ δὲ γινόμενον ἔστω ὁ Χ. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ἐκ τῆς προόδου ὁ Λ ἀπέχων ἀπὸ τοῦ Θ τόσους ἀριθμούς, ὅσους ἀπέχει ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Δ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ $X = \Lambda$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ συνεχεῖς ὅρους καὶ ἀπέχει ἴσους τὸ πλῆθος ἀριθμοὺς καὶ ὁ Δ ἀπὸ τοῦ Α καὶ ὁ Λ ἀπὸ τοῦ Θ, θὰ εἶναι $\Delta : A = \Lambda : \Theta$. Εἶναι δὲ πολλαπλάσιος ὁ Δ τοῦ Α κατὰ τὸν Δ· εἶναι ἄρα καὶ ὁ Λ τοῦ Θ πολλαπλάσιος κατὰ τὸν Δ· ὥστε εἶναι $\Lambda = X$. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον ἀνήκει εἰς τοὺς ὅρους τῆς προόδου καὶ ὅτι ἀπέχει ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν πολλαπλασιασάντων ἀλλήλους ἴσους κατὰ τὸ πλῆθος ἀριθμούς, ὅσους ἀπέχει ὁ μικρότερος ἀπὸ τῆς μονάδος. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι καὶ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀπέχει κατὰ ἕνα ὀλιγώτερον, ἢ *χοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος οἱ Δ, Θ· οἱ μὲν γὰρ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τοσοῦτοι ἐντί, ὅσους ὁ Θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει, οἱ δὲ Ι, Κ, Λ ἑνὶ ἐλάττονες, ἢ ὅσους ὁ Δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει· σὺν γὰρ τῷ Θ τοσοῦτοι ἐντί.*

1 IV. *Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμέ-
νων, τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διά-
μετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρωκοστομόριον
δακτύλου, δῆλον, ὡς ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διά-
μετρον οὐ μείζων ἐστὶν ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας
καὶ τετρακισχιλίας· τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διά-
μετρον τετρωκοστομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶν τῷ*
H 244 *εἰρημένῳ ἀριθμῷ· δέδεικται γάρ τοι, ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλά-*
2 *σιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπό-
κειται καὶ τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν τοῦ εἰς τὸ τᾶς μάκωνος
μέγεθος μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, δῆλον, ὡς, εἰ πληρωθείη
ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ
μείζων κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακι-
σμύρια καὶ τετρακισχίλια. οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμὸς μονάδες
τε ϛ̅ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρα-
κισχίλιαι· ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ι̅ μονάδες τῶν δευτέρων ἀ-
ριθμῶν. ἁ δὲ τῶν ϱ̅ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα
πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς δακτυλιαίαν ἐχούσας τὰν διάμετρον
σφαίρας ταῖς ϱ̅ μυριάδεσσιν διὰ τὸ τριπλάσιον λόγον ἔχειν
ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων τὰς σφαίρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ
ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα
ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ϱ̅, δῆλον, ὡς ἐλάττων ἐσ-
σεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλα-*
3 *πλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς
ϱ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονά-*

ὅσον εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν δύο, καθ' οὓς ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆς μονάδος οἱ Δ, Θ· διότι οἱ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τόσοι, ὅσους ἀπέχει ὁ Θ ἀπὸ τῆς μονάδος, οἱ δὲ Ι, Κ, Λ εἶναι ὀλιγώτεροι κατὰ τὸ πλῆθος κατὰ ἓν ἢ ὅσον ἀπέχει ὁ Δ ἀπὸ τῆς μονάδος· διότι εἶναι τόσοι ὁμοῦ μὲ τὸν Θ.

4. 'Εκ τούτων δὲ ἐν ᾧ ἄλλα μὲν ἔχομεν ὑποθέσει, ἄλλα δὲ ἔχομεν ἀποδείξει, θὰ ἀποδειχθῇ τὸ προκείμενον. Διότι, ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{40}$ τοῦ δακτύλου, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον ἴσην μὲ ἕνα δάκτυλον δὲν θὰ ἔχῃ μεγαλύτερον ὄγκον, ἢ ὥστε νὰ χωρῇ 64000 κόκκους μήκωνος· διότι αὕτη εἶναι πολλαπλασία κατὰ τὸν εἰρημένον ἀριθμὸν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον $\frac{1}{40}$ τοῦ δακτύλου· διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὃν λόγον ἔχουσιν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων αὐτῶν (Εὐκλ. XII, 18). 'Επειδὴ δὲ ὑπετέθη, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ὄχι μεγαλύτερον τοῦ κόκκου τῆς μήκωνος δὲν εἶναι μεγαλύτερος τῶν μυρίων, εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον ἑνὸς δακτύλου πληρωθῇ ἄμμου, ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 640.000.000. Οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔχει 6 μονάδας τῶν δευτέρων (δευτέρας τάξεως) ἀριθμῶν καὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν (πρώτης τάξεως) ἔχει 4000 μυριάδας· εἶναι λοιπὸν μικρότερος τῶν 10 μονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν (δευτέρας τάξεως). 'Η δὲ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον 100 δακτύλους εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον ἑνὸς δακτύλου κατὰ 1.000.000, διότι αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἴσον πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῶν διαμέτρων. 'Εὰν λοιπὸν ἤθελεν ἀποτελεσθῇ σφαῖρα ἐκ τῆς ἄμμου ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ ἔχουσα διάμετρον 100 δακτύλων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ 10 μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ἐπὶ 1.000.000. 'Επειδὴ δὲ αἱ

δες δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐν τᾷ τῶν δεκαπλασίων ὅρων ἀναλογίᾳ, αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὡς ὁ γενόμενος ἀριθμὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος· δέδεικται γάρ, ὅτι ἑνὶ ἐλάσσονας ἀπέχει ἀπὸ τᾶς μονάδος, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν
H 246 *δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ ὁ ἔσχατός ἐστιν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες δευτέρων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ρ̅ δακτύλων ἐχούσᾳ*
4 *ἔλαττόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία ἐστὶν τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ̅ δακτύλων ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, άλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον, ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδεκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον, ὡς ὁ γενόμενος*
5 *ἐσσεῖται δυοκαιεικοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων καλουμένων, οἱ δὲ λοιποὶ ἓξ τῶν τρίτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ*
H 248 *μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυ-*

10 μονάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν εἶναι ὁ δέκατος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, τὸ δὲ 1.000.000 εἶναι ὁ ἕβδομος ὅρος τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς προόδου ὁ δέκατος ἕκτος ὅρος· διότι ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἀπὸ τῆς μονάδος ἀπέχει κατὰ ἕνα ὀλιγώτερον, ἢ ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο, καθ' οὓς ἀπέχουσιν οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους. Ἐκ τῶν δέκα ἓξ δὲ τούτων ὅρων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν (πρώτης τάξεως), οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν δευτέρων (δευτέρας τάξεως), καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι 10.000.000 τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ἔχουσαν διάμετρον 100 δακτύλων εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μυριάδων (10.000.000) τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον 10.000 δακτύλων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον 100 δακτύλων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνει σφαῖρα ἄμμου ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει σφαῖρα ἔχουσα διάμετρον 10.000 δακτύλων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος, ὅταν πολλαπλασιασθῶσι 1000 μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ἐπὶ 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες εἶναι δέκατος ἕκτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ἕβδομος ὅρος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον θὰ εἶναι ὁ εἰκοστὸς δεύτερος ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου. Ἐκ τῶν 22 δὲ τούτων ὅρων οἱ μὲν πρῶτοι ὀκτὼ σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν (πρώτης τάξεως), οἱ μετὰ τούτους δὲ ὀκτὼ ἐκ τῶν καλουμένων δευτέρων, οἱ ἄλλοι δὲ ἓξ ἐκ τῶν καλουμένων τρίτων, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν διάμετρον μυρίων δακτύλων εἶναι μικρότερον

ρίων δακτύλων ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι̅ μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν.
καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον
σφαῖρα τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δα-
κτύλων, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος
ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν
6 *ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ*
σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̅ σταδίων πολλαπλασίων
ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς
ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλι-
καύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ̅ στα-
δίων, δῆλον, ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ
γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μυριάδων
τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρί-
των ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δυοκαιεικοστός ἐστιν ἀπὸ μο-
νάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ
τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτω-
7 *καιεικοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ*
ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονά-
δι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι
ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρί-
των, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ
ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀρι-
θμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγε-
θος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ στα-
δίων ρ̅ ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀρι-
8 *θμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυ-*
ρίων σταδίων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας
τὰν διάμετρον σταδίων ρ̅ ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο
ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ
σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον, ὅτι
ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀρι-
θμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων τῶν τετάρτων

τῶν 10 μυριάδων τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον ἑνὸς σταδίου εἶναι μικροτέρα τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον μυρίων δακτύλων, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τῆς ἐχούσης μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν διάμετρον ἑνὸς σταδίου εἶναι μικρότερον τῶν 10 μυριάδων τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Πάλιν λοιπὸν ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον 100 σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον ἑνὸς σταδίου κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνει ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον 100 σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 10 μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὰς 100 μυριάδας. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μὲν δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ εἰκοστὸς δεύτερος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα (καὶ λόγον 10), αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἕβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύψας ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ εἰκοστὸς ὄγδοος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου. Ἐκ τῶν εἰκοσιοκτὼ δὲ τούτων ὅρων, οἱ μὲν ὀκτὼ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν, οἱ δὲ ἄλλοι ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν τρίτων, οἱ δὲ ἄλλοι τέσσαρες ἐκ τῶν καλουμένων τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ἔχουσαν διάμετρον 100 σταδίων εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον 100 σταδίων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνει σφαῖρα μὲ τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὰς 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν χίλιαι μονάδες τῶν τετάρτων

H 250 *ἀριθμῶν ταῖς $\overline{\varrho}$ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀ-*
ριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτωκαιεικοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος
ἀνάλογον, αἱ δ' ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς
αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς
9 *αὐτᾶς ἀναλογίας τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν*
δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν
τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους
ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν
τρίτων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ λοιποὶ
δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν
ἐστι δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ
τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ
τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων ἔλασσον ἐσσεῖται ἢ $\overline{\iota}$
10 *μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα*
τὰν διάμετρον σταδίων $\overline{\varrho}$ μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς
σφαίρας τᾶς τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων ταῖς $\overline{\varrho}$
μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύ-
τα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον
σταδίων $\overline{\varrho}$ μυριάδων, δῆλον, ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμ-
μου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν
δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς $\overline{\varrho}$ μυριάδεσσιν.
καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες τέταρτός
ἐστι καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ $\overline{\varrho}$ μυριάδες
ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὅτι ὁ
11 *γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ*
μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι
σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ ταῦτα
H 252 *ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ*
τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων, οἱ
δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔ-
σχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν.
φανερὸν οὖν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος

ἀριθμῶν εἶναι ὁ εἰκοστὸς ὄγδος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἕβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι τῆς αὐτῆς προόδου ὁ τριακοστὸς τέταρτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος. Ἐκ τῶν τριάκοντα καὶ τεσσάρων δὲ τούτων ὅρων οἱ μὲν ὀκτὼ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν τρίτων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν τετάρτων, οἱ ἄλλοι δὲ δύο θὰ εἶναι ἐκ τῶν πέμπτων καλουμένων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὴν ὁποίαν περιέχει μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων θὰ εἶναι μικρότερον τῶν 10 μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Πάλιν δὲ ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον μυρίων σταδίων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνει σφαῖρα ἐκ τῆς ἄμμου ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὰς 100 μυριάδας. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μὲν δέκα μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ τριακοστὸς τέταρτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἕβδομος ὅρος ἀπὸ μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. Ἐκ τῶν τεσσαράκοντα δὲ τούτων ὅρων οἱ μὲν ὀκτὼ πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν πρώτων καλουμένων ἀριθμῶν, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν τετάρτων, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν πέμπτων καλουμένων, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ

ἶσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ̅ μυριάδων
12 ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ
τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριᾶν μυριάδων πολ-
λαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον στα-
δίων ρ̅ μυριάδων ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ δὴ γένοιτο ἐκ τοῦ
ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα
ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριᾶν μυριάδων, φανερόν,
ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου
ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μυριάδων τῶν πέμ-
πτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν πέμπτων
ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀ-
νάλογον, αἱ δὲ ρ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς
13 ἀναλογίας, δῆλον, ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ τετρω-
κοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων
ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων
ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τού-
τους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι
ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν
πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ ἓξ τῶν ἕκτων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ
ἔσχατος αὐτῶν ἐστι ι̅ μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. φανερὸν
οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἶσον τᾷ
σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάδων μυριᾶν
14 ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι̅ μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διά-
μετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ̅ πολλα-
πλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον στα-
δίων μυριάδων μυριᾶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο
ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν
ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριά-
δων ρ̅, φανερόν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσσεῖται
τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν ι̅ μυριάδων
τῶν ἕκτων ἀριθμῶν ταῖς ρ̅ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν

ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. Ἡ δὲ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων μυριάδων σταδίων εἶναι πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης τὴν διάμετρον 100 μυριάδων σταδίων κατὰ 100 μυριάδας. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνει ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα ἔχουσα τόσον μέγεθος, ὅσον ἔχει ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα τὴν διάμετρον μυρίων μυριάδων σταδίων, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν, ὅταν αὗται πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ μὲν 1000 μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἕβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ἕκτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος. Ἐκ δὲ τῶν 46 τούτων ὅρων, οἱ ὀκτὼ μὲν πρῶτοι σὺν τὴν μονάδα εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων πρώτων ἀριθμῶν, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ ἐκ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ ἐκ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ εἶναι ἐκ τῶν πέμπτων, οἱ ἄλλοι δὲ ἓξ εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων ἕκτων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι 10 μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν τὴν διάμετρον μυρίων μυριάδων σταδίων εἶναι μικρότερον τῶν 10 μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν. Ἡ δὲ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον 100 μυριάδας μυριάδων σταδίων (10.000.000.000) εἶναι 100 μυριάδας φορὰς (1.000.000) πολλαπλασία τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον 10.000 μυριάδων σταδίων. Ἐὰν λοιπὸν ἤθελε γίνει ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα μὲ τόσον μέγεθος, ὅσον εἶναι ἡ σφαῖρα ἡ ἔχουσα διάμετρον 10.000.000.000 σταδίων εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 10 μυριάδων τῶν ἕκτων ἀριθμῶν, κατὰ 100 μυριάδας. Ἐπειδὴ δέ, αἱ μὲν δέκα

ἕκτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τετρωκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ϱ̅ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται
15 δυοκαιπεντακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι οἵ τε πρῶτοι καλουμένοι ἐντὶ καὶ οἱ δευτέροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστι χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ϱ̅ ἔλασ-
16 σόν ἐστιν ἢ ,α̅ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ϱ̅, δῆλον, ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,α̅ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν οὖν τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,α̅ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέ-
H 256 δεικται· ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ ταλικαύτᾳ, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἔλασσόν ἐστιν
17 ἢ ,α̅ μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἃν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, καὶ αἱ διαμέτροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλας. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίων· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρας ἐλάσσων
18 ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, φανερόν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα, ἃν Ἀρίσταρχος

μυριάδες τῶν ἕκτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ τεσσαρακοστὸς ἕκτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, αἱ δὲ 100 μυριάδες εἶναι ὁ ἕβδομος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ πεντηκοστὸς δεύτερος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου. Ἐκ τῶν 52 δὲ τούτων ὅρων οἱ μὲν τεσσαράκοντα ὀκτὼ σὺν τὴν μονάδα εἶναι οἱ κατὰ σειρὰν καλούμενοι πρῶτοι καὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι, οἱ δὲ ἄλλοι τέσσαρες εἶναι ἐκ τῶν καλουμένων ἑβδόμων, καὶ ὁ τελευταῖος ἐξ αὐτῶν εἶναι 1000 μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς σφαῖραν ἔχουσαν τὴν διάμετρον σταδίων 100 μυριάδων μυριάκις εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κόσμου εἶναι μικροτέρα σταδίων 100 μυριάδων μυριάκις, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ κόσμου εἶναι μικρότερον τῶν χιλίων μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. Ὅτι μὲν λοιπὸν τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν κόσμον τὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρονόμων εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, ἀπεδείχθη· ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν πρὸς τὸ μέγεθος τῆς ὁποίας ὁ Ἀρίσταρχος ὑποθέτει, ὅτι εἶναι ἴσον τὸ μέγεθος τῆς σφαίρας τῶν ἀπλανῶν ἄστρων, εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μυριάδων τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω. Διότι ἐπειδὴ ἔχει ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ γῆ πρὸς τὸν ὑφ' ἡμῶν εἰρημένον κόσμον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ εἰρημένος κόσμος πρὸς τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν, τὴν ὁποίαν ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, καὶ αἱ διάμετροι τῶν σφαιρῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς ἀλλήλας. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ κόσμου ἀπεδείχθη, ὅτι εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων τῆς γῆς· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας τῶν ἀπλανῶν εἶναι μικροτέρα τῶν 10.000 διαμέτρων τοῦ κόσμου. Ἐπειδὴ δὲ αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν διαμέτρων, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ σφαῖρα τῶν ἀπλανῶν,

ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι
πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται δέ, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου
πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ ἔλασσόν ἐστιν
ἢ ,α̅ μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν· δῆλον οὖν, ὅτι, εἰ γένοιτο
ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, άλίκαν δ' Ἀρί-
σταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶ-
μεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου
ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων ταῖς μυριά-
19 *κις μυρίαις μυριάδεσσιν. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων ,α̅ μο-*
νάδες δυοκαιπεντακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ
μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος ἐκ
τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρ-
τος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας· οὗτος
H 258 *δέ ἐστι τῶν ὀγδόων ὄγδοος, ὅς κα εἴη χίλιαι μυριάδες τῶν*
ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος
τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ,
ἂν 'Αρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ,α̅ μυριάδες τῶν
20 *ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δέ, βασιλεῦ Γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς*
καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φα-
νήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσιν καὶ περὶ τῶν
ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἀλίου
καὶ τᾶς σελήνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσιν πιστὰ
διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι· διόπερ ᾠήθην καὶ τὶν οὐκ ἀ-
νάρμοστον εἶμεν [ἔτι] ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.

τὴν ὁποίαν ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, εἶναι μικροτέρα τῆς σφαίρας τοῦ κόσμου κατὰ 10.000 × 10.000 × 10.000. Ἀπεδείχθη δέ, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὸν κόσμον εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μονάδων τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἐὰν ἤθελε γίνει ἐκ τῆς ἄμμου σφαῖρα μὲ τόσον μέγεθος, ὅσον ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν, ὁ ἀριθμὸς τοῦ πλήθους τῆς ἄμμου θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 1000 μονάδων ἐπὶ 10.000 × × 10.000 × 10.000. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μὲν 1000 μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν εἶναι ὁ πεντηκοστὸς δεύτερος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, τὸ δὲ ἓν τρισεκατομμύριον εἶναι ὁ δέκατος τρίτος ὅρος ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ ἑξηκοστὸς τέταρτος ($1, 10, 10^2, 10^3 \ldots\ldots 10^{63}$) ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς προόδου· οὗτος δὲ εἶναι ὄγδοος τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, ὅστις εἶναι 1000 μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῆς ἄμμου τὸ ἔχον μέγεθος ἴσον πρὸς τὴν σφαῖραν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων, τὴν ὁποίαν ὑποθέτει ὁ Ἀρίσταρχος, εἶναι μικρότερον τῶν 1000 μυριάδων τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. Ταῦτα δέ, ὦ βασιλεῦ Γέλων, νομίζω ὅτι εἰς μὲν τοὺς μὴ γνωρίζοντας μαθηματικὰ δὲν θὰ γίνουν πιστευτά, εἰς δὲ τοὺς γνωρίζοντας καὶ τοὺς ἐνδιαφερθέντας νὰ μάθωσι περὶ τῶν ἀποστάσεων καὶ τῶν μεγεθῶν καὶ τῆς γῆς καὶ τοῦ ἡλίου καὶ τῆς σελήνης καὶ ὅλου τοῦ κόσμου θὰ εἶναι πιστευτὰ ἕνεκα τῆς ἀποδείξεως· δι' αὐτὸ ἐνόμισα, ὅτι δὲν εἶναι ἀνάρμοστον νὰ τὰ ἐρευνήσῃ κανεὶς αὐτά.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ (ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ)

Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (παραβολῆς)

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημες ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστεῖλαι τοι γράψαντες, ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμες, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησάν τινες γράφειν ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμάματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν
H 264 πλείστων οὐχ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθεν. τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμᾶμα περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται· δείκνυται γάρ, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν

Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς
(παραβολῆς)

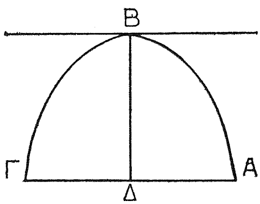
Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν

Ἀκούσας ὅτι ὁ Κόνων μὲν ἀπέθανε, ὁ ὁποῖος ἦτο πολὺ φίλος μου, σὺ δὲ ὅτι εἶσαι γνωστός του καὶ περὶ τὴν γεωμετρίαν ἱκανὸς διὰ μὲν τὸν ἀποθανόντα ἐλυπήθημεν πολὺ καὶ ὡς φίλον καὶ ὡς θαυμάσιον μαθηματικόν, προήλθομεν δὲ εἰς τὴν ἀπόφασιν νὰ ἀποστείλωμεν εἰς σὲ τὰς ἐρεύνας μας, ὡς τοῦτο ἐπράττομεν διὰ τὸν Κόνωνα, ἐκ τῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, κάτι τὸ ὁποῖον προηγουμένως δὲν εἶχεν ἐρευνηθῆ, τώρα δὲ εὑρέθη παρ' ἡμῶν, πρῶτον μὲν διὰ μεθόδων τῆς μηχανικῆς, ἔπειτα δὲ ἀπεδείχθη γεωμετρικῶς. Ἐξ ἐκείνων μὲν οἱ ὁποῖοι προηγουμένως ἠσχολήθησαν μὲ τὴν γεωμετρίαν ἐπεχείρησαν μερικοὶ νὰ ἀποδείξωσιν, ὅτι εἶναι δυνατὸν εἰς δοθέντα κύκλον καὶ εἰς δοθὲν τμῆμα κύκλου νὰ εὑρεθῇ ἴσον εὐθύγραμμον χωρίον, καὶ κατόπιν προσεπάθησαν νὰ τετραγωνίσωσι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ τμήματος ἐλλείψεως χρησιμοποιοῦντες οὐχὶ εὐκόλως ἀποδεχόμενα λήμματα, ἕνεκα τοῦ ὁποίου οἱ περισσότεροι δὲν παρεδέχοντο, ὅτι ταῦτα ἐλύθησαν. Διὰ δὲ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς δὲν γνωρίζομεν νὰ ηὗρε κανεὶς τὸν τετραγωνισμὸν ἐξ ἐκείνων οἱ ὁποῖοι πρὸ ἡμῶν ἐπεχείρησαν αὐτό, ὅπερ εὑρέθη τώρα παρ' ἡμῶν· διότι ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα

καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμάματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τᾶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρωμένοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λῆμμά τι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. ἀνα-
H 266 *γράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες πρῶτον μέν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καί, ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.*

α'

Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα ἐσσεῖται ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ· κἂν ἴσα ᾖ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ, παραλλήλοι ἐσσοῦνται ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς.



χρησιμοποιουμένου τοῦ ἑξῆς λήμματος εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· ἐκ τῶν ἀνίσων χωρίων ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου εἶναι δυνατὸν λαμβανομένη πολλὰς φορὰς νὰ ὑπερβῇ τὸ δοθὲν πεπερασμένον χωρίον. Χρησιμοποιοῦν δὲ καὶ οἱ προηγούμενοι γεωμέτραι αὐτὸ τὸ λῆμμα· διότι δι' αὐτοῦ ἀπέδειξαν, ὅτι οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον ὃν ἔχουσι τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, καὶ ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον, ὃν ἔχουσιν οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων, προσέτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὴν πυραμίδα καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι λαμβάνοντες ὅμοιον πρὸς τὸ προηγούμενον λῆμμα ἀπεδείκνυον, ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸν κῶνον καὶ ὕψος ἴσον. Πιστεύεται δέ, ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων δὲν εἶναι κατώτερον ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἀποδειχθῇ ἄνευ τοῦ λήμματος τούτου· μοῦ εἶναι δὲ ἀρκετόν, ἐὰν τὰ ὑπ' ἐμοῦ εὑρεθέντα θεωρήματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν βαθμὸν ἀληθείας. Ἀναγράψαντες λοιπὸν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις τὰς ἀποστέλλομεν, πρῶτον μὲν τὰς διὰ τῶν μηχανικῶν μεθόδων, κατόπιν δὲ πῶς ἔγινεν ἡ ἀπόδειξις διὰ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων. Προτάσσονται δὲ καὶ στοιχεῖά τινα περὶ κωνικῶν τομῶν χρήσιμα διὰ τὴν ἀπόδειξιν. Ἔρρωσο.

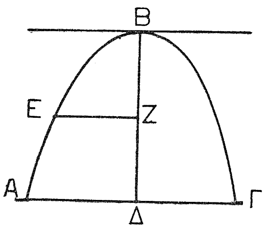
1

Ἐὰν ὑπάρχῃ παραβολή, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ καμπύλη ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς ἢ αὐτὴ ἡ ἰδία εἶναι διάμετρος, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, θὰ εἶναι ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΔΓ· καὶ ἂν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ ΑΓ καὶ ἡ κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς.

β′

Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ᾖ δὲ ἁ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ ΑΔΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ δὲ ΕΓ τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ Γ, ἐσσοῦνται αἱ ΒΔ, ΒΕ ἴσαι.

γ′



Εἴ κα ᾖ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ ΑΔ, ΕΖ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπι-
H 268 *ψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΖ, δυνάμει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΖ.*

ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

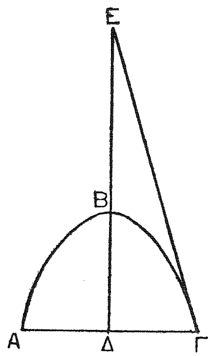
δ′

Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω ἢ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ ΒΓ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή κα ἀχθῇ τις ἄλλα ἁ ΖΘ παρὰ τὰν ΒΔ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν Β, Γ εὐθεῖαν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ.

ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΚΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΚ μάκει, οὕτως ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΚΗ δυνάμει· ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα, ὡς ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΙ μάκει, οὕτως ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ δυνάμει· ἴσαι γὰρ αἱ ΔΖ, ΚΗ· ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ ΒΓ, ΒΘ, ΒΙ γραμμαί. ὥστε τὸν αὐτὸν

2

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ αὐτὴ ἡ ἰδία εἶναι διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, θὰ εἶναι ἴσαι αἱ ΒΔ, ΒΕ.



3

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ παραβολὴ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ αὐτὴ ἡ ἰδία εἶναι διάμετρος, καὶ ἀχθῶσιν, αἱ ΑΔ, ΕΖ παράλληλοι πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, θὰ εἶναι ΒΔ : ΒΖ $=$ ΑΔ^2 : ΕΖ^2.

Ταῦτα δὲ ἔχουσιν ἀποδειχθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν.

4

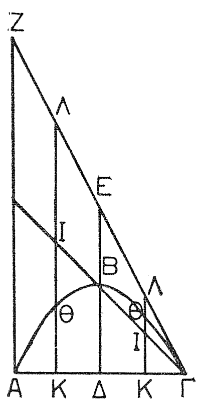
Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἢ ἡ ἰδία νὰ εἶναι διάμετρος, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΓ ἂς προεκβληθῇ. Ἐὰν κατόπιν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν Β, Γ, θὰ εἶναι ΖΘ : ΘΗ $=$ ΔΑ : ΔΖ.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ : ΒΚ $=$ ΔΓ^2 : ΚΗ^2· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 3).Θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΒΓ : ΒΙ $=$ ΒΓ^2 : ΒΘ^2· διότι εἶναι ΔΖ $=$ ΚΗ· εἶναι ἄρα εἰς (συνεχῆ) ἀναλογίαν αἱ γραμμαὶ ΒΓ, ΒΘ, ΒΙ

ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ, ὃν ἁ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΙ· ἔστιν
H 270 ἄρα, ὡς ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἁ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ. τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἐστὶν ἁ ΔΑ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ, ὃν ἁ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ.

ε′

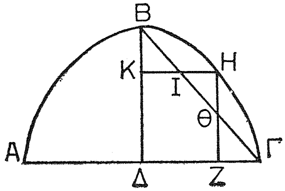
Ἔστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ ἁ ΓΖ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παρὰ τὰν ΑΖ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς καὶ ἁ ΑΓ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας [ἀνάλογον], ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς ΑΓ τὸ ποτὶ τῷ Α τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τῷ Α.



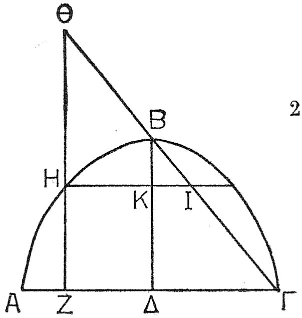
ἄχθω γάρ τις ἁ ΔΕ παρὰ τὰν ΑΖ, καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ ΔΕ τὰν ΑΓ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ καὶ ἀγμένα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΔ, ΔΓ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ ΑΓ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν, ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν ἁ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΕ ἆκται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΔΓ παράλ-

(Εὐκλ. V, ὁρισμ. 9). Ὥστε θὰ εἶναι ΒΓ : ΒΘ = ΓΘ : ΘΙ· εἶναι

1



2



ἄρα ΓΔ : ΔΖ = ΘΖ : ΘΗ. Εἶναι δὲ ΔΓ = ΔΑ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ΔΑ : ΔΖ = ΖΘ : ΘΗ.

5

Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ ἡ ΓΖ. Ἐὰν κατόπιν ἀχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΖΑΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ ἀχθεῖσα θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς παραβολῆς εἰς τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΑΓ ὑπὸ τῆς ἀχθείσης, θὰ εἶναι δὲ ὁμόλογον τὸ τμῆμα τῆς ΑΓ πρὸς τὸ Α, πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἀχθείσης τὸ πρὸς τὸ Α.

Διότι ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ ἂς τμήσῃ πρῶτον ἡ ΔΕ τὴν ΑΓ εἰς τὸ μέσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει ἡ παραβολὴ ΑΒΓ καὶ ἔχει ἀχθῇ ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, εἶναι δὲ ΑΔ = ΔΓ, θὰ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἔχει ἀχθῇ ἡ ΓΕ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΔΓ εἶναι παράλλη-

ληλος τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ ΕΒ τᾷ ΒΔ· ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΕ. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν ΑΓ, δέδεικται· εἰ δὲ H 272 *μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ ΚΛ παρὰ τὰν ΑΖ· δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ, ὃν ἁ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ. ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ ΒΕ τᾷ ΒΔ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΙΛ τᾷ ΚΙ· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΚΙ, ὃν ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΔΑ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΚΙ ποτὶ τὰν ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΚ· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ, ὃν ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.*

ϛʹ

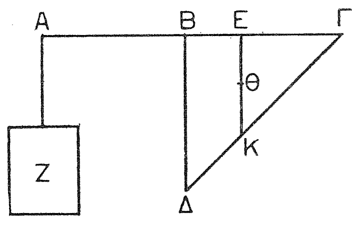
Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ] προκείμενον [ὁρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καὶ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ ΒΔΓ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Β γωνίαν καὶ τὰν ΒΓ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τᾶς ΑΒ τῇ ΒΓ], κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α κρεμάμενον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δή, τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΔΓ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη κα ἁ ΑΓ γραμμὰ παρὰ τὸν ὁρίζοντα, αἱ δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ ΑΓ H 274 *ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμάσθω δὴ ἁ ΒΓ γραμμὰ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τᾶς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΒ ἁ ΚΕ καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΓ τριγώ-*

λος πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην, εἶναι ΕΒ = ΒΔ (θ. 2)· ὥστε ΑΔ : ΔΓ = ΔΒ : ΒΕ. Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ἀχθεῖσα τέμνῃ εἰς τὸ μέσον τὴν ΑΓ, ἡ πρότασις ἀπεδείχθη· ἐὰν δὲ δὲν τὴν τέμνῃ εἰς τὸ μέσον ἂς ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ· πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι ΑΚ : ΚΓ = ΚΘ : ΘΛ. Διότι ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΒΕ = ΒΔ, εἶναι καὶ ἡ ΙΛ = ΚΙ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΛΚ : ΚΙ = ΑΓ : ΔΑ. Εἶναι δὲ καὶ ΚΙ : ΚΘ = ΔΑ : ΑΚ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη προηγουμένως· ὥστε θὰ εἶναι ΚΘ : ΘΛ = ΑΚ : ΚΓ. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

6

Ἂς νοηθῇ τὸ παρατιθέμενον σχῆμα εὑρισκόμενον ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ κάτω μὲν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἂς νοηθῇ τὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Δ, ἄνω δὲ τὸ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΔΓ ἔστω ὀρθογώνιον ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν πρὸς τὸ Β καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ [δηλαδὴ ἡ ΑΒ = ΒΓ], ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Ζ ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α, καὶ ἂς ἰσορροπῇ τὸ χωρίον Ζ ἐξηρτημένον κατὰ τὸ Α τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, ὅπως εὑρίσκεται τώρα. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον Ζ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΔΓ.

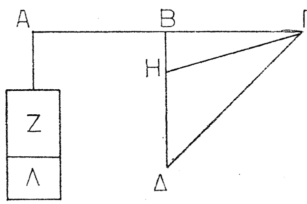


Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ, θὰ εἶναι καὶ ἡ γραμμὴ ΑΓ ὁριζοντία αἱ δὲ ἀγόμεναι κάθετοι πρὸς τὴν ΑΓ εὑρισκόμεναι εἰς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΓ κατὰ τὸ Ε ὥστε νὰ εἶναι ΓΕ = 2 ΕΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ ἡ ΚΕ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς *νου κέντρον βάρεός ἐστι τὸ Θ σαμεῖον· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. εἴ κα οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἁ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἐξ οὗ σαμείου κα κατασταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν Ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δῆλον, ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκεσιν, καί ἐστιν, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἁ ΑΒ τᾶς ΒΕ· καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ Ζ χωρίου.*

φανερὸν δὲ [ὅτι] καί, εἴ κα τριπλάσιον ᾖ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζʹ

Ἔστω πάλιν ζυγὸς ἁ ΑΓ γραμμά, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον], τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ
H 276 *τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου.*



κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ· εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΒΔΓ τὸ σημεῖον Θ κέντρον βάρους· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ Μηχανικὰ ('Επιπέδων 'Ισορ. I, 14). 'Εὰν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ παύσῃ νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, ἐξαρτηθῇ δὲ κατὰ τὸ Ε, θὰ μείνῃ ὅπως εἶναι τώρα· διότι ἕκαστον ἐκ τῶν ἐξηρτημένων παραμένει εἰς τοιαύτην θέσιν ἐκ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως, ὥστε τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐξηρτημένου νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. 'Επειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ θὰ διατηρήσῃ τὴν κατάστασίν του ἔναντι τοῦ ζυγοῦ, ὁμοίως θὰ ἰσορροπήσῃ τὸ χωρίον Ζ. 'Επειδὴ δὲ ὑπάρχει ἰσορροπία, ἐν ᾧ τὸ μὲν Ζ εἶναι ἐξηρτημένον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, εἶναι φανερόν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη, καὶ εἶναι ΑΒ : ΒΕ = τρίγωνον ΒΔΓ : χωρίον Ζ ('Επιπ. 'Ισορ. I, 6, 7). Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ = 3 ΒΕ· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ χωρίου Ζ.

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τριπλάσιον τοῦ χωρίου Ζ θὰ ἰσορροπήσωσι.

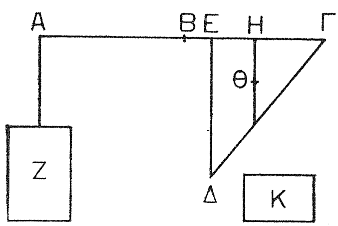
7

῎Εστω πάλιν ζυγὸς ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτῆς ἔστω τὸ Β, καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Β [τὸ τρίγωνον ΓΔΗ], ἔστω δὲ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ ἀμβλυγώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΗ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην οὖσαν πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ζυγοῦ, καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ τὸ τρίγωνον ΔΓΗ ἐκ τῶν σημείων Β, Γ, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἐξαρτηθὲν κατὰ τὸ Α ἔστω ὅτι ἰσορροπεῖ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ, εὑρισκόμενον ὅπως εἶναι τώρα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ χωρίον Ζ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΓΔΗ.

Διότι ἂς ἐξαρτηθῇ καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α ὃν ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΓΗ· θὰ ἰσορροπήσῃ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ πρὸς τὸ τῷ ΖΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Λ, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΛ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ, φανερόν, ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ.

η′

Ἔστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον.



φαμὶ δή, τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μεῖζον.

λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἁ ΘΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἰσορ-
H 278 ροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ ΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΗ, ποτὶ δὲ τὸ Κ, ὃν ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, δῆλον, ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Ζ τοῦ Κ.

θ′

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΚ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΚ, ὕψος δὲ τὰν ΕΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΓΚ

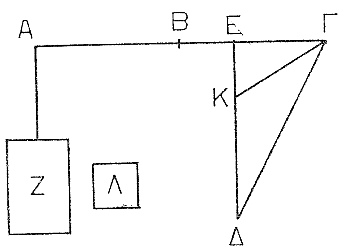
Ζ + Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΒΓΗ ἰσορροπεῖ πρὸς τὸ Λ, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΓΔ πρὸς τὸ Ζ + Λ, καὶ τὸ Ζ + Λ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τοῦ ΒΓΔ, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΓΔΗ εἶναι τριπλάσιον τοῦ Ζ.

8

Ἔστω ὁ ζυγὸς ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ τρίγωνον ΓΔΕ ἔστω ὀρθογώνιον ἔχον ὀρθὴν τὴν γωνίαν Ε, καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Ε, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Α καὶ ἂς ἰσορροπήσῃ τὸ ΓΔΕ εὑρισκόμενον, ὅπως εἶναι τώρα, νὰ εἶναι δὲ ὡς ἡ ΑΒ : ΒΕ = τρίγωνον ΓΔΕ : χωρίον Κ. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον Ζ τοῦ μὲν τριγώνου ΓΔΕ εἶναι μικρότερον, τοῦ δὲ Κ εἶναι μεγαλύτερον.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΔΕΓ καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ἰσορροπεῖ τὸ χωρίον Ζ, θὰ εἶναι ΓΔΕ : Ζ = ΑΒ : ΒΗ (Ἐπιπ. Ἰσορ. Ι, 6, 7)· ὥστε τὸ Ζ εἶναι μικρότερον τοῦ ΓΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ : Ζ = ΒΑ : ΒΗ καὶ ΓΔΕ : Κ = ΒΑ : ΒΕ (ἐξ ὑποθέσεως), εἶναι φανερόν, ὅτι ΓΔΕ : Κ > ΓΔΕ : Ζ· ὥστε Ζ > Κ (Εὐκλ. V, 10).

9



Ἔστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τρίγωνον ΓΔΚ νὰ εἶναι ἀμβλυγώνιον ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΔΚ, ὕψος δὲ τὴν ΕΓ, καὶ ἂς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Ε, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Α καὶ ἂς ἰσορροπήσῃ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΚ τρίγωνον ποτὶ τὸ Λ. φαμὶ δή, τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ ΔΓΚ ἔλασσον.

δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι′

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΒΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΚΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσαν, καὶ
H 280 ὃν ἔχει λόγον ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΒΔΚΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η σαμεῖα, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΒΔΚΗ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμί, τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ Λ.

τετμάσθω γὰρ ἁ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε, ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς ΔΒ καὶ ἁ ΚΗ ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς ΚΗ καὶ τὰν ΒΔ, τοῦτον ἔχειν τὰν ΕΗ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΒΔ ἀχθεῖσα ἁ ΕΝ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὴ ΒΔΗΚ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς. ἤν οὖν τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ Ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η σαμείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ Ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ τὸ Ε κρεμάμενον τῷ Ζ χωρίῳ κατὰ τὸ Α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ ἤπερ ποτὶ τὸ Λ, ἐπεὶ καὶ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ Ζ τοῦ Λ.

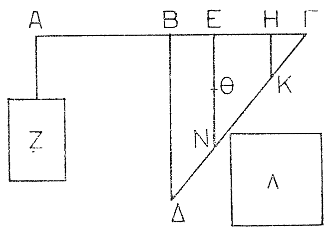
πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΚ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι, ὅπως εὑρίσκεται τώρα, καὶ νὰ εἶναι ΑΒ : ΒΕ = τρίγωνον ΓΔΚ : Λ. Λέγω, ὅτι Λ < Ζ < τρίγ. ΔΓΚ.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὅπως τὸ προηγούμενον.

10

Ἔστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΒΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἔχον ὀρθὰς μὲν τὰς παρὰ τὰ σημεῖα Β, Η γωνίας, τὴν δὲ πλευρὰν ΚΔ διευθυνομένην πρὸς τὸ Γ, καὶ νὰ εἶναι ΑΒ : ΒΗ = τραπέζιον ΒΔΚΗ : Λ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Η, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ τὸ χωρίον Ζ κατὰ τὸ Α καὶ ἂς ἰσορροπῇ πρὸς τὸ τραπέζιον ΒΔΚΗ ἔχον, ὡς τώρα εὑρίσκεται· Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον Ζ εἶναι μικρότερον τοῦ Λ.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε 2ΔΒ + ΚΗ : 2ΚΗ + ΒΔ = ΕΗ : ΒΕ (Εὐκλ. VI, 10), καὶ διὰ τοῦ Ε ἀφοῦ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΕΝ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον διὰ τοῦ Θ· τοῦ τραπεζίου λοιπὸν ΒΔΗΚ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὰ Μηχανικὰ (Ἐπιπ. Ἰσορ. Ι, 15). Ἐὰν λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Ε, λυθῇ δὲ ἀπὸ τῶν σημείων Β, Η, θὰ μείνῃ εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν διὰ τοὺς αὐτούς, ὡς καὶ πρότερον ἐκτεθέντας λόγους καὶ θὰ ἰσορροπήσῃ πρὸς τὸ χωρίον Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τραπέζιον ΒΔΗΚ ἰσορροπεῖ ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ Ε, πρὸς τὸ χωρίον Ζ ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ Α, θὰ εἶναι ΑΒ : ΒΕ = τραπέζιον ΒΔΗΚ : χωρίον Ζ· εἶναι ἄρα τραπέζιον ΒΔΗΚ : Ζ > τραπ. ΒΔΗΚ : Λ, ἐπειδὴ καὶ ΑΒ : ΒΕ > ΑΒ:ΒΗ (Εὐκλ. V, 8)· ὥστε εἶναι Ζ < Λ (Εὐκλ. V, 10).



ια΄

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, H 282 τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΔΡ ἐπὶ τὸ Β πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, τὸ δὲ ΔΚΤΡ τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ Ζ τῷ ΔΚΡΤ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Ζ χωρίον τοῦ Λ.

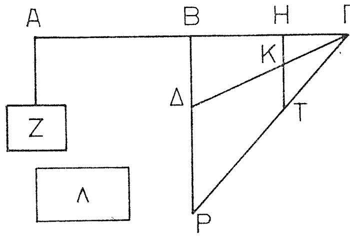
ιβ΄

Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΔΕΚΗ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ε, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ ΚΔ, ΕΗ γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νευούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δή, τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.

ἔλαβον γὰρ τοῦ ΔΚΕΗ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἔστω δὲ τὸ Θ· λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον· καὶ ἄγω H 284 τὰν ΘΙ παρὰ τὰν ΔΕ. ἂν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ, μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ Ζ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ Ι τῷ Ζ

11

Ἔστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΓ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΚΔΤΡ ἔστω ἔχον τὰς μὲν πλευρὰς ΚΔ, ΤΡ διευθυνομένας πρὸς τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους πλευρὰς ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ΔΡ ἂς πίπτῃ εἰς τὸ Β, καὶ ἂς εἶναι ΑΒ : ΒΗ = τραπέζιον ΔΚΤΡ : Λ, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΚΤΡ ἂς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ εἰς τὴν κατάστασιν αὐτήν,



ὅπως εἶναι τώρα, ἂς ἰσορροπῇ τὸ Ζ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΚΡΤ. Ἀποδεικνύεται, ὅπως προηγουμένως, ὅτι τὸ χωρίον Ζ < Λ.

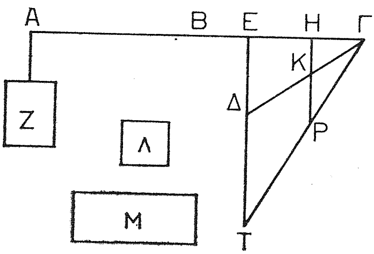
12

Ἔστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΓ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ τραπέζιον ΔΕΚΗ ἔστω ἔχον ὀρθὰς μὲν γωνίας τὰς πρὸς τὰ σημεῖα Ε, Η, τὰς δὲ πλευρὰς ΚΔ, ΕΗ διευθυνομένας πρὸς τὸ Γ, καὶ ἂς εἶναι ΑΒ : ΒΗ = τραπέζιον ΔΚΕΗ : Μ, καὶ ΑΒ : ΒΕ = τραπέζιον ΔΚΕΗ : Λ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τὸ τραπέζιον ΔΚΕΗ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Α, καὶ ἂς ἰσορροπῇ πρὸς τὸ τραπέζιον εὑρισκόμενον εἰς αὐτὴν τὴν κατάστασιν, ὅπως εἶναι τώρα. Λέγω, ὅτι Μ > Ζ > Λ.

Διότι ἂς λάβω τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τραπεζίου ΔΚΕΗ καὶ ἔστω τὸ Θ· λαμβάνεται δὲ τοῦτο ὁμοίως, ὡς προηγουμένως· καὶ φέρω τὴν ΘΙ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ. Ἂν λοιπὸν τὸ τραπέζιον ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Ι, λυθῇ δὲ ἀπὸ τῶν Ε, Η, θὰ μείνῃ εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν καὶ θὰ ἰσορροπήσῃ πρὸς τὸ Ζ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὡς ἐλέχθη προηγουμένως. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τραπέζιον ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ Ι *κρεμαμένῳ κατὰ τὸ Α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΙ· δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ΔΚΕΗ ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Ζ, ποτὶ δὲ τὸ Μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζόν ἐστι, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.*

ιγʹ

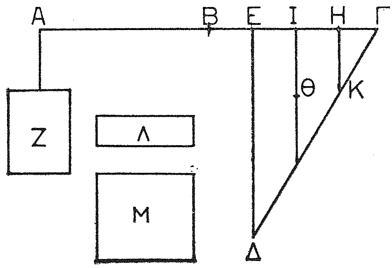
Ἔστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπείτω τῷ ΔΚΤΡ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μεῖζον, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον.



ιδʹ

Ἔστω τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ ΒΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Β σαμείου ἁ ΒΔ παρὰ τὰν
H 286 *διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ· ἐσσεῖται δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ ΒΓ ἐς ἴσα τμάματα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ*

ἰσορροπεῖ πρὸς τὸ Ζ ἐξαρτώμενον κατὰ τὸ Α, θὰ εἶναι τραπέζιον : Ζ = ΑΒ : ΒΙ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι τὸ τραπέζιον ΔΚΕΗ : Λ > ΔΚΕΗ : Ζ, καὶ ΔΚΕΗ : Μ < ΔΚΕΗ : Ζ· ὥστε Μ > Ζ > Λ.



13

Ἔστω πάλιν ζυγὸς μὲν ὁ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ νὰ εἶναι τραπέζιον, ὥστε αἱ μὲν πλευραὶ ΚΔ, ΤΡ νὰ διευθύνωνται πρὸς τὸ Γ, αἱ δὲ ΔΤ, ΚΡ νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ τοῦτο ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Η, τὸ δὲ χωρίον Ζ ἂς ἐξαρτηθῇ κατὰ τὸ Α καὶ ἂς ἰσορροπήσῃ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΚΤΡ, ἔχον ὅπως τώρα κεῖται, καὶ ἂς εἶναι ΑΒ : ΒΕ = τραπέζιον ΔΚΤΡ : χωρίον Λ, καὶ ΑΒ : ΒΗ = τραπέζιον ΔΚΤΡ : Μ. Ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον ἀποδεικνύεται Μ > Ζ > Λ.

14

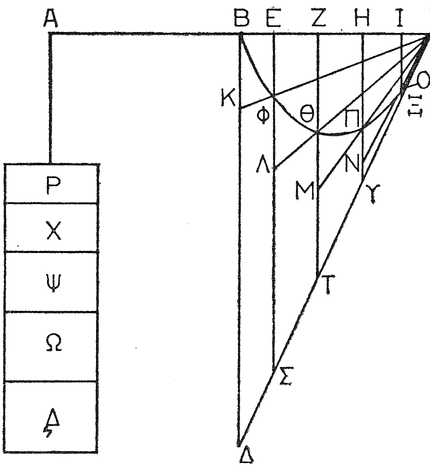
Ἔστω τὸ τμῆμα ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς. Ἔστω δὲ πρῶτον ἡ ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ σημείου Β ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς τομῆς κατὰ τὸ Γ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ὀρθογώνιον. Ἂς διαιρεθῇ τώρα ἡ ΒΓ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τμήματα τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἐκ τῶν σημείων τομῆς ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, *ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΙΟΓ τριγώνου μεῖζον [ἐστιν] ἢ τριπλάσιον.*

διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἁ ΑΒΓ, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΑΒ ἴσα τᾷ ΒΓ, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Β· καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Β, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ_5 *χωρία κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν Ρ χωρίον τῷ ΔΕ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ* Δ_5 *τῷ ΞΙΓ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ* $\mathit{Ρ Χ Ψ Ω}\Delta_5$ *χωρίου. καὶ ἐπεί ἐστιν τμᾶμα τὸ ΒΓΘ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἆκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΣΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΕ, ὃν ἁ ΣΕ ποτὶ τὰν ΕΦ· ὥστε καὶ ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ ΑΒ*
H 288 *ποτὶ τὰν ΒΖ τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ ΣΖ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΗ, ὃν τὸ ΤΗ ποτὶ τὸ ΜΗ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΙ, ὃν τὸ ΥΙ ποτὶ τὸ ΝΙ. ἐπεὶ οὖν ἐστι τραπέζιον τὸ ΔΕ τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ Ρ κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὡς ἁ ΒΑ ποτὶ*

ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων, κατὰ τὰ ὁποῖα τέμνουσιν αὗται τὴν παραβολήν, ἄς ἀχθῶσιν αἱ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖαι καὶ ἄς προεκβληθῶσι. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ σὺν τὸ τρίγωνον ΞΙΓ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ, σὺν τὸ τρίγωνον ΙΟΓ.

Διότι ἄς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ, καὶ ἄς ληφθῇ ΑΒ $=$ ΒΓ, καὶ ἄς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β· καὶ ἄς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ Β, ἄς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ τοῦ ἄλλου δὲ μέρους τοῦ ζυγοῦ ἄς ἐξαρτηθῶσι τὰ χωρία Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ_5 κατὰ τὸ Α, καὶ ἄς ἰσορροπήσῃ τὸ μὲν χωρίον Ρ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΕ ὅπως εὑρίσκεται, τὸ δὲ Χ πρὸς τὸ τραπέζιον ΖΣ, τὸ δὲ Ψ πρὸς τὸ ΤΗ, τὸ δὲ Ω πρὸς τὸ ΥΙ, τὸ δὲ Δ_5 πρὸς τὸ τρίγωνον ΞΙΓ· θὰ ἰσορροπήσῃ δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων· ὥστε θὰ εἶναι τριπλάσιον τὸ τρίγωνον ΒΔΓ τοῦ χωρίου $Ρ + Χ + Ψ + Ω + \Delta_5$ (θ. 6). Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τμῆμα τὸ ΒΓΘ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, ἔχει δὲ ἀχθῇ καὶ ἄλλη παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΣΕ, θὰ εἶναι ΒΓ : ΒΕ $=$ ΣΕ : ΕΦ (θ. 5)· ὥστε εἶναι καὶ ΒΑ : ΒΕ $=$ τραπέζιον ΔΕ : τραπέζιον ΚΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ΑΒ : ΒΖ $=$ τραπέζιον ΣΖ : τραπέζιον ΛΖ, καὶ ΑΒ : ΒΗ $=$ τραπέζιον ΤΗ : τραπέζιον ΜΗ, καὶ ΑΒ : ΒΙ $=$ τραπ. ΥΙ : τραπ. ΝΙ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχει τὸ τραπέζιον ΔΕ ἔχον τὰς μὲν πρὸς τὰ σημεῖα Β, Ε γωνίας ὀρθὰς τὰς δὲ πλευρὰς συγκλινούσας πρὸς τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ πρὸς αὐτὸ χωρίον τι τὸ Ρ ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α εὑρισκομένου τοῦ τραπεζίου ὅπως εἶναι τώρα, καὶ εἶναι ΒΑ : ΒΕ $=$ τραπέζιον ΔΕ : τραπ. ΚΕ, εἶτὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ ΚΕ χωρίον τοῦ Ρ χωρίου· δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ καὶ τὸ ΖΣ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ζ, Ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣΤ νεύουσαν ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ Χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν, ὡς μὲν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΖΦ, ὡς δὲ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΛΖ· εἴη οὖν κα τὸ Χ χωρίον τοῦ μὲν ΛΖ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΖΦ μεῖζον· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν ΜΗ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘΗ μεῖζον, καὶ τὸ Ω χω- H.290 ρίον τοῦ μὲν ΝΟΙΗ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΠΙ μεῖζον, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Δ_5 χωρίον τοῦ μὲν ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΓΙΟ μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΚΕ τραπέζιον μεῖζόν ἐστι τοῦ Ρ χωρίου, τὸ δὲ ΛΖ τοῦ Χ, τὸ δὲ ΜΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΝΙ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΞΙΓ τρίγωνον τοῦ Δ_5, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ΡΧΨΩΔ_5 χωρίου. ἔστιν δὲ τὸ ΡΧΨ ΩΔ_5 τρίτον μέρος τοῦ ΒΓΔ τριγώνου· δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ τραπεζίων καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου. πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν ΖΦ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΘΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΙΠ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΙΟΓ τρίγωνον τοῦ Δ_5, φανερόν, ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Δ_5ΩΨΧ χωρίου· φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΙΓΟ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

ναι ἄρα χωρίον ΚΕ > χωρίου Ρ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10). Πάλιν δὲ καὶ τὸ τραπέζιον ΖΣ ἔχον τὰς μὲν πρὸς τὰ σημεῖα Ζ, Ε γωνίας ὀρθάς, τὴν δὲ ΣΤ συγκλίνουσαν πρὸς τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ πρὸς αὐτὸ τὸ χωρίον Χ ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α εὑρισκομένου τοῦ τραπεζίου ὅπως εἶναι τώρα, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ : ΒΕ = τραπέζιον ΖΣ : τραπ. ΖΦ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ : ΒΖ = τραπ. ΖΣ : τραπ. ΛΖ· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ΛΖ > Χ > ΖΦ· διότι καὶ τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ΜΗ > Ψ > ΘΗ καὶ ΝΟΙΗ > Ω > ΠΙ, ὁμοίως δὲ εἶναι καὶ ΞΙΓ > Δ_5 > ΓΙΟ (θ. 8). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι τραπ. ΚΕ > χωρ. Ρ, τραπ. ΛΖ > χωρ. Χ, τραπ. ΜΗ > χωρ. Ψ, καὶ τραπ. ΝΙ > Ω, τὸ δὲ ΞΙΓ τρίγωνον > Δ_5, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ὅλα τὰ εἰρημένα χωρία εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἀθροίσματος



Ρ + Χ + Ψ + Ω + Δ_5. Εἶναι δὲ τὸ ἄρθοισμα Ρ + Χ + Ψ + Ω + $\Delta_5 = \frac{1}{3}$ τριγώνου ΒΓΔ (θ. 6)· εἶναι ἄρα φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓΔ < 3 (ΚΕ + ΛΖ + ΜΗ + ΝΙ τραπεζίων σὺν τὸ τρίγωνον ΞΙΓ). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι τραπ. ΖΦ < Χ, ΘΗ < Ψ, ΙΠ < Ω, τὸ δὲ τρίγ. ΙΟΓ < Δ_5, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ὅλα τὰ εἰρημένα εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος Δ_5 + Ω + Ψ + Χ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μεγαλύτερον μὲν τοῦ 3 (ΦΖ + ΘΗ + ΙΠ τραπεζίων σὺν τὸ τρίγωνον ΙΓΟ), μικρότερον δὲ τοῦ τριπλασίου τῶν προεκτεθέντων.

ιε′

Ἔστω πάλιν τὸ ΒΘΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ ΒΓ μὴ ἔστω ποτ’ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ· ἀναγκαῖον δὴ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ Β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμάματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ Γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν ΒΓ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ ποτὶ τῷ Β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἁ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, καὶ διῃρήσθω ἁ ΒΓ εἰς τμάματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Ζ, Η, Ι παρὰ τὰν
Η 292 *διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων, καθ’ ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΞ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον.*

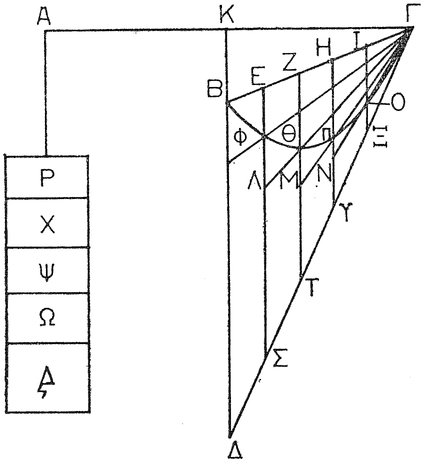
ἐκβεβλήσθω ἁ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τᾷ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΑΚ. νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον, ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρεος τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, $\underset{5}{\Delta}$ *χωρία, καὶ τὸ μὲν Ρ τῷ ΔΕ τραπεζίῳ ἰσορροπείτω οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ* $\underset{5}{\Delta}$ *τῷ ΓΙΞ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ*

15

Ἔστω πάλιν τὸ τμῆμα ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἡ δὲ ΒΓ ἂς μὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον· κατ' ἀνάγκην λοιπὸν ἢ ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Β πρὸς τὸ μέρος τῆς παραβολῆς παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΒΓ ἀμβλεῖαν γωνίαν ἢ ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ ἀμβλεῖαν γωνίαν πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος τῆς παραβολῆς. Ἔστω ἡ σχηματίζουσα τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β, καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ ΒΓ εἰς τμήματα ἴσα ὁσαδήποτε τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Ι ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων καθ' ἃ τέμνουσιν αὗται τὴν παραβολὴν ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὸ Γ καὶ ἂς προεκβληθῶσι πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος. Λέγω καὶ τώρα, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι μικρότερον μὲν τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΒΦ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ σὺν τὸ τρίγωνον ΓΙΞ, μεγαλύτερον δὲ τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ σὺν τὸ τρίγωνον ΓΟΙ.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη. Ἀφοῦ φέρω τὴν ΓΚ κάθετον ἐπ' αὐτὴν λαμβάνω ΑΚ = ΓΚ. Ἂς νοηθῇ δὲ πάλιν ζυγὸς ὁ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ ἂς στηριχθῇ εἰς τὸ Κ, ἂς ἐξαρτηθῇ δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΚΔ ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Κ, ἔχον ὡς τώρα εὑρίσκεται, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ζυγοῦ ἂς ἐξαρτηθῶσι κατὰ τὸ Α τὰ χωρία Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ_5, καὶ τὸ μὲν Ρ ἂς ἰσορροπῇ πρὸς τὸ τραπέζιον ΔΕ, ὅπως τοῦτο εὑρίσκεται, τὸ δὲ Χ πρὸς τὸ τραπέζιον ΖΣ, τὸ δὲ Ψ πρὸς τὸ ΤΗ, τὸ δὲ Ω πρὸς τὸ ΥΙ, τὸ δὲ Δ_5 πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΙΞ· θὰ ἰσορροπήσῃ δὲ καὶ τὸ ἄθροι-

ὅλῳ· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩΔ χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ Ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΝΙ



Η 294 *τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΠΙ ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον μεῖζον τοῦ Δ χωρίου, τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον· δῆλον οὖν ἐστιν.*

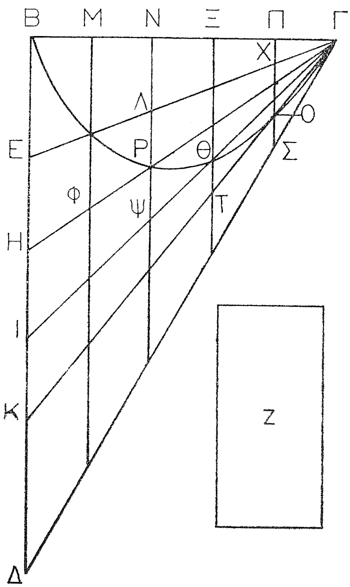
ιϛʹ

Ἔστω πάλιν τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ Β ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ Ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ζ χωρίῳ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον· ἁ δὴ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ ΒΓΔ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς σμα τῶν μὲν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δέ· ὥστε θὰ εἶναι τὸ ΔΒΓ τρίγωνον $= 3\ (\mathrm{P} + \mathrm{X} + \Psi + \Omega + \Delta_5)$, (θ. 7). Καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς προηγουμένως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τραπέζιον ΒΦ $>$ χωρ. Ρ, καὶ τραπ. ΘΕ $>$ Χ $>$ ΖΦ, ΜΗ $>$ Ψ $>$ ΗΘ, ΝΙ $>$ Ω $>$ ΠΙ, ΞΙΓ $>$ $\Delta_5 >$ ΓΙΟ· εἶναι λοιπὸν φανερόν.

16

Ἔστω πάλιν τὸ τμῆμα ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ μὲν τοῦ Β ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τὸ χωρίον Ζ ἴσον πρὸς τὸ ἓν τρίτον τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Λέγω ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΘΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ χωρίον Ζ.



Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον· ἡ ὑπεροχὴ δέ, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τμῆμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ, λαμβανομένη πολλὰς φορὰς θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τριγώνου ΒΓΔ (ἀξίωμα συνεχείας). Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ληφθῇ χωρίον τι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Ἔστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ μικρότερον τῆς εἰρημένης ὑπεροχῆς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ· θὰ εἶναι δὲ ἡ ΒΕ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΔ (Εὐκλ. VI, 1). Ἂς διαι-

καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ ΒΕ μέρος τᾶς ΒΔ. διηρήσθω οὖν ἁ ΒΔ ἐς τὰ μέρεα, καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρεσίων σαμεῖα τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ι, Κ σαμείων ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν τομὰν αἱ εὐθεῖαι,
H 296 ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, δῆλον, ὡς τὰ συναμφότερα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμάματος. καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι, δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον· τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ· τὸ δὴ Ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου· τὸ δὴ ΒΔΓ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἄρα ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμάματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. ἔστω οὖν τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ
H 298 τμάματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἀμφότερα

ρεθῇ λοιπὸν ἡ ΒΔ εἰς μέρη, καὶ ἔστω τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ι, Κ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὸ Γ· θὰ τέμνωσι λοιπὸν αὗται τὴν παραβολήν, ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη αὐτῆς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σημείων, καθ' ἃ τέμνουσι τὴν τομὴν (παραβολὴν) αἱ εὐθεῖαι, ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· θὰ εἶναι δὲ αὗται καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τμῆμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ χωρίου Ζ καὶ τοῦ τριγώνου ΒΓΕ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος. Καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι ἴσα τὰ τραπέζια διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται ἡ παραβολή, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΟΣ· διότι τὸ μὲν τραπέζιον ΜΕ εἶναι κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ = ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ = ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ = ΟΘ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΧΠ = τρίγωνον ΓΟΣ· τὸ χωρίον λοιπὸν Ζ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ. Καὶ εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΔΓ τριπλάσιον τοῦ χωρίου Ζ· τὸ δὲ ΒΔΓ εἶναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου ἀθροίσματος τῶν τραπεζίων ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ καὶ τοῦ τριγώνου ΠΟΓ· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη ὅτι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου. Δὲν εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερον τὸ τμῆμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικρότερον. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερον. Πάλιν ἄρα ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ χωρίον Ζ τοῦ τμήματος ΒΘΓ, λαμβανομένη πολλάκις ὑπερέχει τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ληφθῇ χωρίον μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ. Ἔστω λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς καὶ μέρος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ, καὶ τὰ ἄλλα ἂς κατασκευασθῶσιν ὡς προηγουμένως. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ χωρίον Ζ τοῦ τμήματος ΒΘΓ, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου· ἔστιν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμάματος ἔλασσον εἴη κα καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἅ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα τὸ τμᾶμα τῷ Ζ χωρίῳ.

ιζʹ

Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον.

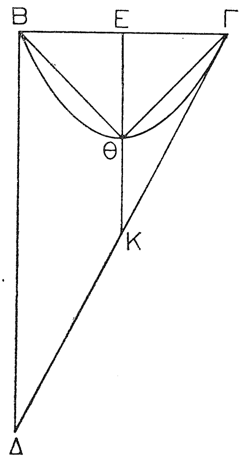
ἔστω γὰρ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ Θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἁ ΒΓ ἐστι παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν
H 300 τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ. ἄχθω δὲ ἁ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, ἁ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἁ δὲ ΕΓ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ

σὺν τὸ τμῆμα ΒΘΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ Ζ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ χωρίον Ζ μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος, τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ, σὺν τὸ τρίγωνον ΓΠΣ· διότι τὸ ΒΔΓ εἶναι τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων μικρότερον τοῦ τριπλασίου αὐτῶν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΕ σὺν τὸ τμῆμα ΒΘΓ μικρότερα τῶν τετραπλεύρων ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ, σὺν τὸ τρίγωνον ΓΠΣ. Ὥστε ἂν ἀφαιρεθῇ τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν καὶ εἰς τὰ δύο ἀθροίσματα, θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΒΕ μικρότερον τῶν ἀπομενόντων χωρίων· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τραπεζίων ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ σὺν τὸ τρίγωνον ΓΟΣ, τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλύτερα τῶν ἀπομενόντων χωρίων. Δὲν εἶναι ἄρα μικρότερον τὸ τμῆμα ΒΘΓ τοῦ χωρίου Ζ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὔτε μεγαλύτερον εἶναι· εἶναι ἄρα τὸ τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ χωρίον Ζ.

17

Τούτου ἀποδειχθέντος εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, κορυφὴ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΒΘΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Θ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος, ἡ ἀπὸ τοῦ Θ ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Θ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΘ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἡ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΚΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ δὲ ΓΔ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΕΓ εἶναι παράλλη-



τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμάματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δῆλον, ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ ΒΘΓ τριγώνου.

Τῶν τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

ιη'

Εἴ κα ἐν τμάματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ ἄχθω ἁ ΔΒ
H 302 *παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ ἆκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΔ, ΔΓ, δῆλον, ὡς παράλληλοι ἐντὶ ἅ τε ΑΓ καὶ ἁ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν, ὅτι τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται ἁ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένα· κορυφὰ οὖν ἐστιν τοῦ τμάματος τὸ Β σαμεῖον.*

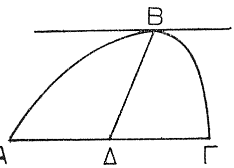
λος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Θ, τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΘΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ τοῦ μὲν τμήματος ΒΘΓ εἶναι τριπλάσιον, τοῦ δὲ τριγώνου ΒΘΓ εἶναι τετραπλάσιον, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΘΓ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου ΒΘΓ.

Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας καὶ καμπύλης γραμμῆς βάσιν μὲν καλῶ τὴν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὴν μεγίστην κάθετον τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἄγεται ἡ μεγίστη κάθετος.

18

Ἐὰν εἰς τμῆμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βάσεως εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ ἀχθεῖσα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τέμνει τὴν παραβολήν.

Διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ παράλληλος πρὸς

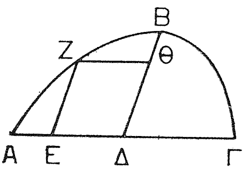


τὴν διάμετρον. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς παραβολὴν ἡ ΒΔ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ αἱ ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσαι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ καὶ ἡ κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἶναι παράλληλοι. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἐκ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς παραβολῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ μεγίστη θὰ εἶναι ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Β· κορυφὴ λοιπὸν τοῦ τμήματος εἶναι τὸ σημεῖον Β.

ιθʹ

Ἐν τμάματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ, ἁ δὲ ΕΖ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΔ, ἄχθω δὲ καὶ ἁ ΖΘ παρὰ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται, καὶ αἱ ΑΔ, ΖΘ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσάν ἐντι, δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΖΘ δυνάμει· τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἁ ΒΔ τᾶς ΒΘ μάκει. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ ΒΔ τᾶς ΕΖ μάκει.



κʹ

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογω-
H 304 *νίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον*
τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν
τρίγωνον ἢ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον, τὸ Β σαμεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμάματος· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ ΑΓ τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς. ἄχθω ἁ ΔΕ διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ αἱ ΑΔ, ΓΕ παρὰ τὰν διάμετρον· πε-

19

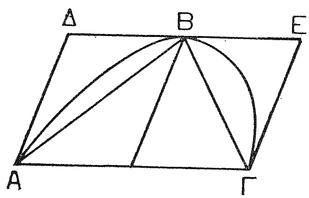
Εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς βάσεως τῆς ἀγομένης ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἡμισείας εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα κατὰ τὸ μῆκος.

Διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ ἂς ἀχθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν διάμετρον ἡ μὲν ΒΔ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΕΖ ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ΑΔ, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς παραβολὴν ἡ ΒΔ ἔχει ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ αἱ ΑΔ, ΖΘ παράλληλοι πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι $ΒΔ : ΒΘ = ΑΔ^2 : ΖΘ^2$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΒΔ = 4\ ΒΘ$. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τῆς ΕΖ κατὰ τὸ μῆκος.

20

Ἐὰν εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τὸ ἐγγραφὲν τμῆμα θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τμήματος.

Διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ ὅλον καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸ τμῆμα, εἶναι ἀναγκαῖον, τὸ σημεῖον Β νὰ εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος· εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΑΓ πρὸς τὴν κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ διὰ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΕ παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον· θὰ πέσωσι δὲ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμήματος.



σοῦνται δὴ αὖται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΔΕΓ παραλληλογράμμου, φανερόν, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δεδειγμένου δὲ τούτου δῆλον, ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμᾶμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμάματα ποιήσομες ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

H 306 *κα΄*

Εἴ κα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα ἐς τὰ λειπόμενα τμάματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν.

ἔστω τὸ ΑΒΓ τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ τετμάσθω ἁ ΑΓ δίχα τῷ Δ, ἁ δὲ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον· τὸ Β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστιν τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ ΑΔ τῷ Ε, καὶ ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δὲ ἁ ΑΒ κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα Ζ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος τοῦ ΑΖΒ. τὸ δὴ ΑΖΒ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ [ΑΖΒ] τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον, ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΖΒ τριγώνου.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΕΓ, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

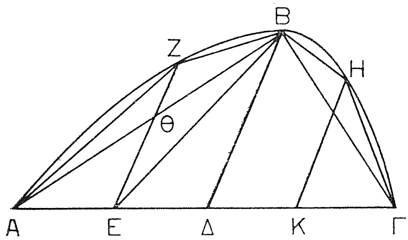
Ἀφοῦ δὲ τοῦτο ἀπεδείχθη, εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπομένοντα τμήματα νὰ εἶναι πάντοτε μικρότερα τοῦ προτεθέντος χωρίου· διότι ἀφαιρουμένου πάντοτε μεγαλυτέρου τοῦ ἡμίσεος εἶναι διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι τὰ ἀπομένοντα τμήματα δυνάμεθα νὰ τὰ κάμωμεν μικρότερα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου (Εὐκλ. Χ, 1).

21

Ἐὰν εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς ἐγγραφῇ τρίγωνον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτό, ἐγγραφῶσι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὰ τμήματα, ἑκάστου τῶν τριγώνων τῶν ἐγγραφέντων εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα θὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τὸ τρίγωνον τὸ ἐγγραφὲν εἰς τὸ ὅλον τμῆμα.

Ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Δ, ἡ δὲ ΒΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον· τὸ σημεῖον ἄρα Β εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος (θ. 18). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Πάλιν ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Ε καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἂς τμηθῇ δὲ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Θ· τὸ σημεῖον Ζ ἄρα εἶναι κορυφὴ τοῦ τμήματος ΑΖΒ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΖΒ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα [ΑΖΒ] καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΖΒ.

ἔστιν οὖν ἁ ΒΔ τᾶς μὲν ΕΖ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ ΕΘ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΕΘ τᾶς ΘΖ. ὥστε καὶ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΒΑ· τὸ μὲν γὰρ ΑΕΘ διπλάσιόν ἐστι τοῦ



ΑΘΖ, τὸ δὲ ΘΒΕ τοῦ ΖΘΒ. ὥστε τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΖΒ ἐστιν
H 308 *ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ ΒΗΓ*
τμᾶμα ἐγγραφέντος.

κβ′

Εἴ κα ᾖ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος.

ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ Ζ, Η, Θ, Ι, τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἁγούμενον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω τὸ Ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν.

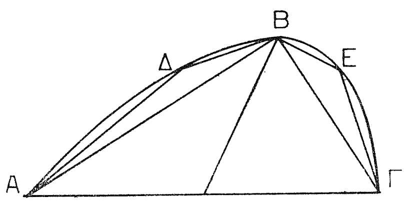
ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ Β, τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον

Εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΔ τῆς μὲν ΕΖ τὰ τέσσαρα τρίτα (θ. 19), τῆς δὲ ΕΘ διπλασία· εἶναι ἄρα διπλασία ἡ ΕΘ τῆς ΘΖ. Ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΖΒΑ· διότι τὸ μὲν ΑΕΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΘΖ, τὸ δὲ ΘΒΕ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΖΘΒ (Εὐκλ. VI, 1). Ὥστε τὸ ΑΒΓ = 8 ΑΖΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ = 8 ΒΗΓ.

22

Ἐὰν ὑπάρχῃ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, καὶ χωρία τεθῶσι κατὰ σειρὰν ὁσαδήποτε ἀποτελοῦντα φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον ἓν τέταρτον, εἶναι δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χωρίων θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος.

Διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς, ἔστω δὲ ὁσαδήποτε χωρία εἰς συνεχῆ πρόοδον τὰ Ζ, Η, Θ, Ι, ἔστω δὲ νὰ εἶναι τετραπλάσιον τὸ προηγούμενον τοῦ ἑπομένου,



μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω τὸ Ζ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν χωρίων Ζ, Η, Θ, Ι.

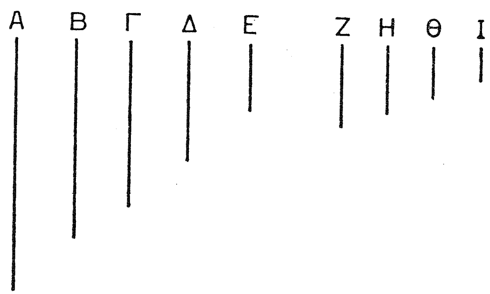
Ἔστω τοῦ ὅλου μὲν τμήματος κορυφὴ τὸ Β, τῶν δὲ ἀπομενόντων τμημάτων κορυφαὶ αἱ Δ, Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ

ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, δῆλον, ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ Η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν
H 310 καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ τῷ Θ καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ Ι χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμάματος.

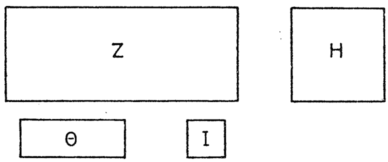
κγʹ

Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου.

ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ,



Ε τετραπλασίονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δὲ Η τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ Ι τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος εἶναι ὀκταπλάσιον ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ (θ. 21), εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι τετραπλάσιον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ $=$ Ζ θὰ εἶναι καὶ ΑΔΒ $+$ ΒΕΓ $=$ Η. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἐγγραφόμενα



τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ Θ καὶ τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ χωρίον Ι εἰς τὰ κατόπιν δημιουργούμενα τμήματα· ὅλα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία θὰ ἰσῶνται πρὸς πολύγωνόν τι ἐγγραφὲν εἰς τὸ τμῆμα. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος.

23

Ἐὰν ὑπάρχωσι μεγέθη εἰς συνεχῆ φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον ἓν τέταρτον καὶ ὅλα τὰ μεγέθη προστεθῶσι καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα προστεθῇ τὸ ἓν τρίτον τοῦ μικροτέρου ὅρου, τὸ συνολικὸν ἄθροισμα θὰ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ μεγίστου ὅρου.

Ἔστω λοιπὸν ὁσαδήποτε μεγέθη εἰς φθίνουσαν συνεχῆ γεωμετρικὴν πρόοδον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἕκαστον δὲ νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἑπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ $= \frac{1}{3}$ Β, Η $= \frac{1}{3}$ Γ, Θ $= \frac{1}{3}$ Δ, Ι $= \frac{1}{3}$ Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν Ζ $=$ $\frac{1}{3}$ Β, τὸ δὲ Β $= \frac{1}{4}$ Α, θὰ εἶναι Β $+$ Ζ $= \frac{1}{3}$ Α. Διὰ τοὺς αὐ-

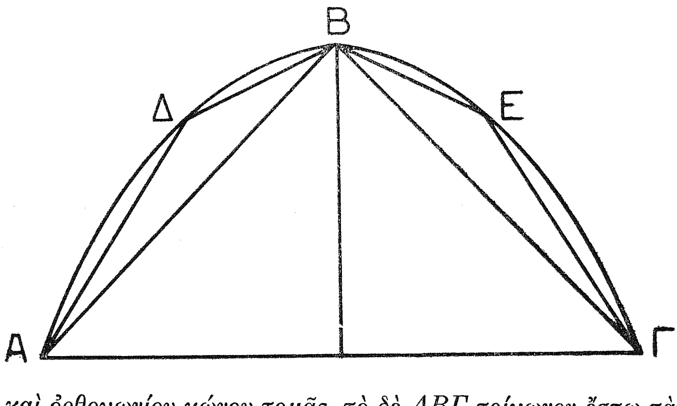
ἐστίν, τὸ δὲ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ. ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ Ζ, Η, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν Β, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ Α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ τὸ Ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ Ε, τοῦ Α ἐστιν ἐπίτριτα.

H 312

κδ'

Πᾶν τμᾶμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

ἔστω γὰρ τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας



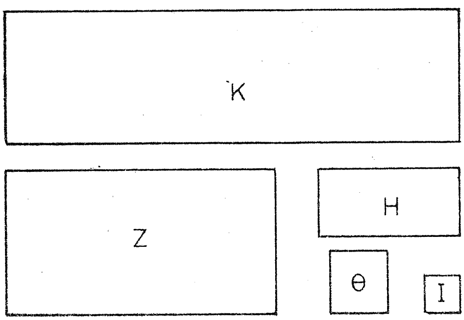
καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δὲ ΑΒΓ τρι-

τοὺς λόγους εἶναι καὶ $\mathrm{H} + \Gamma = \frac{1}{3}\mathrm{B}$, $\Theta + \Delta = \frac{1}{3}\Gamma$ καὶ $\mathrm{I} + \mathrm{E} = \frac{1}{3}\Delta$· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E} + \mathrm{Z} + \mathrm{H} + \Theta + \mathrm{I} = \frac{1}{3}(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta)$. Εἶναι δὲ καὶ $\mathrm{Z} + \mathrm{H} + \Theta = \frac{1}{3}(\mathrm{B} + \Gamma + \Delta)$ (ἐξ ὑποθέσεως)· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα $\mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E} + \mathrm{I}$ θὰ εἶναι τοῦ λοιποῦ $= \frac{1}{3}\mathrm{A}$. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ συνολικὸν ἄθροισμα $(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E})$ σὺν I, τουτέστι τὸ $\frac{1}{3}\mathrm{E}$ εἶναι $= \frac{4}{3}\mathrm{A}$.

24

Πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ παραβολῆς εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸ καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἔστω τὸ τμῆμα ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ



παραβολῆς, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς τὰ τέσσαρα τρίτα δὲ τοῦ τριγώνου

γώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ Κ χωρίον. δεικτέον, ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔΒΕΓ τμάματι.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίον. ἐνέγραψα δὴ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμάματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον.
H 314 *ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων καὶ ἀεὶ οὕτω, δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα τοῦ Κ χωρίου.*

ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ Ζ, τοῦ δὲ Ζ τέταρτον τὸ Η, καὶ ὁμοίως τοῦ Η τὸ Θ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ Κ χωρίον τοῦ τμάματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι· ἔστιν δὴ τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ Ι ἐπίτριτα τοῦ Ζ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Κ τοῦ Ζ ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ Κ τοῖς Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ Ι. ἐπεὶ οὖν τὸ Κ χωρίον τῶν μὲν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσο-

ΑΒΓ ἔστω ἴσον τὸ χωρίον Κ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι Κ = πρὸς τὸ ΑΔΒΕΓ τμῆμα.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ἴσον θὰ εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεγαλύτερον τὸ τμῆμα ΑΔΒΕΓ τοῦ χωρίου Κ. Ἐγγράφω λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ, ὡς ἐλέχθη, ἐγγράφω δὲ καὶ εἰς τὰ ἀπομένοντα τμήματα ἄλλα τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ πάντοτε εἰς τὰ γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὰ τμήματα καὶ ὕψος τὸ αὐτό· θὰ εἶναι λοιπὸν τὰ ἀπομένοντα τμήματα μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ τμῆμα ΑΔΒΕΓ τοῦ χωρίου Κ. Ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι ἐπειδὴ ὑπάρχουν χωρία εἰς φθίνουσαν συνεχῆ γεωμετρικὴν πρόοδον, μὲ λόγον ἓν τέταρτον, πρῶτον μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΒΕΓ (θ. 21), ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα εἶναι τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χωρίων εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων τρίτων τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ μεγίστου χωρίου. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον τὸ τμῆμα ΑΔΒΕΓ τοῦ χωρίου Κ.

Ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, ὅτι εἶναι μικρότερον. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον $\mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{Z}$, $\mathrm{H} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Z}$, $\Theta = \frac{1}{4}\,\mathrm{H}$ καὶ ἃς λαμβάνωνται οὕτω καθ' ἑξῆς πάντοτε, μέχρις ὅτου τὸ τελευταῖον γίνῃ μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει τοῦ τμήματος τὸ χωρίον Κ, καὶ ἔστω μικρότερον τὸ Ι· εἶναι λοιπὸν τὰ χωρία $\mathrm{Z} + \mathrm{H} + \Theta + \mathrm{I} + \frac{1}{3}\,\mathrm{I} = \frac{4}{3}\,\mathrm{Z}$ (θ. 23). Εἶναι δὲ καὶ τὸ $\mathrm{K} = \frac{4}{3}\,\mathrm{Z}$· εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{K} = \mathrm{Z} + \mathrm{H} + \Theta + \mathrm{I} + \frac{1}{3}\,\mathrm{I}$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ χωρίον Κ τῶν μὲν χωρίων Ζ, Η, Θ, Ι ὑπερέχει ὀλιγώτερον τοῦ Ι, τοῦ δὲ τμή-

νι τοῦ Ι, τοῦ δὲ τμάματος μείζονι τοῦ Ι, δῆλον, ὡς μείζονά ἐντι τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία τοῦ τμάματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι, ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμᾶμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. οὐκ ἄρα τὸ ΑΔΒΕΓ τμᾶμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Κ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ Κ. τὸ δὲ Κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ· καὶ τὸ ΑΔΒΕΓ ἄρα τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

ματος περισσότερον τοῦ Ι, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ χωρία Ζ, Η, Θ, Ι εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τμήματος· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν ὑπάρχωσι ὁσαδήποτε χωρία εἰς φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον συνεχῆ μὲ λόγον ἓν τέταρτον, τὸ δὲ μέγιστον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφόμενον τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν χωρίων θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τμήματος. Δὲν εἶναι ἄρα τὸ τμῆμα ΑΔΒΕΓ μικρότερον τοῦ χωρίου Κ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερον· εἶναι ἄρα ἴσον πρὸς τὸ χωρίον Κ. Τὸ δὲ χωρίον Κ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· καὶ τὸ τμῆμα ἄρα ΑΔΒΕΓ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΕΡΙ ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ

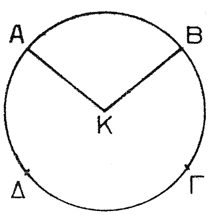
ΒΙΒΛΙΑ Α′ καὶ Β′

Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν φύσιν ἔχον | τοιαύταν, ὥστε τῶν μερέων αὐτοῦ | τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνε | χέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ ἧσσον | θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον θλι | βομένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν μερέων | αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ ὑπεράνω αὐ | τοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον ἐόντι, εἴ | κα μὴ τὸ ὑγρὸν ᾖ καθειργμένον ἔν | τινι καὶ ὑπὸ ἄλλου τινὸς θλιβόμε | νον.

α′

Εἴ κα ἡ ἐπιφάνειά τις ἐπιπέ | δῳ τεμνομένα διά τινος ἀεὶ τοῦ | αὐτοῦ σαμείου τὰν τομὰν ποιέοντι |

circuli periferiam centrum habentem signum, per quod plano secatur, sperae erit superficies.



sit enim superficies aliqua secta per signum K plano semper sectionem faciente circuli periferiam, centrum autem ipsius K. si igitur ipsa superficies non est sperae superficies, non erunt omnes quae a centro ad superficiem occurrentes lineae aequales. sint itaque quae A, B, G, D signa in superficie, et inaequales quae AK, KB, per ipsas autem
H 319 *KA, KB planum educatur et faciat sectionem in superficie lineam DABG; circuli ergo est ipsa, centrum autem ipsius K, quoniam supponebatur superficies talis. non*

’Αρχιμήδους ’Οχουμένων α΄
(’Αρχιμήδους Ὑδροστατικῆς βιβλίον 1)

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἓν ὑγρὸν ἔχει τοιαύτην φυσικὴν ἰδιότητα, ὥστε ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ τῶν κειμένων ὁμοιομόρφως καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο, τὸ ὀλιγώτερον πιεζόμενον νὰ ἐξωθῆται ὑπὸ τοῦ περισσότερον πιεζομένου, καὶ ἕκαστον δὲ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ νὰ πιέζηται κατὰ κάθετον (πρὸς τὰ κάτω) ὑπὸ τοῦ ὑπεράνω αὐτοῦ εὑρισκομένου ὑγροῦ, ἐὰν τὸ ὑγρὸν δὲν ἐμποδίζηται ὑπό τινος καὶ δὲν πιέζηται ὑπὸ ἄλλου τινός.

1

’Εὰν ἐπιφάνειά τις τέμνηται δι’ ἐπιπέδου διερχομένου πάντοτε διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἡ τομὴ εἶναι

περιφέρεια κύκλου, ὅστις ἔχει ὡς κέντρον τὸ σημεῖον αὐτὸ διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἡ ἐπιφάνεια εἶναι σφαίρας ἐπιφάνεια.

Ἔστω ὅτι ἐπιφάνειά τις τέμνεται δι’ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου Κ καὶ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι περιφέρεια κύκλου μὲ κέντρον τὸ Κ. Λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τῆς τομῆς ἐπιφάνεια εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ὅλαι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι εὐθεῖαι δὲν θὰ εἶναι ἴσαι. Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΚΒ εἶναι ἄνισοι. Ἂς ἀχθῇ διὰ τῶν ΚΑ, ΚΒ ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ τομὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἡ γραμμὴ ΔΑΒΓ. Τότε εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἐπιφανείας ἡ τομὴ περι-

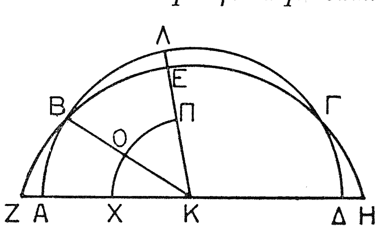
sunt ergo inaequales lineae KA, KB; necessarium igitur est, superficiem esse sperae superficiem.

II.

Omnis humidi consistentis ita, ut maneat inmotum, superficies habebit figuram sperae habentis centrum idem cum terra.

Intelligatur enim humidum consistens ita, ut maneat non motum, et secetur ipsius superficies plano per centrum terrae, sit autem terrae centrum K, superficiei autem sectio linea ABGD. dico itaque, lineam ABGD circuli esse periferiam, centrum autem ipsius K.

si enim non est, rectae a K ad lineam ABGD occurrentes non erunt aequales. sumatur itaque aliqua recta, quae
H 320 *est quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD maior, quarundam autem minor, et centro quidem K, distantia autem sumptae lineae circulus describatur; cadet igitur periferia circuli habens hoc quidem extra lineam ABGD, hoc autem intra, quoniam quae ex centro quarundam quidem a K occurrentium ad lineam ABGD est maior, quarundam autem minor. sit igitur descripti circuli periferia quae ZBH, et a B ad K recta ducatur, et copulentur quae ZK, KEL aequales facientes angulos, describatur autem et centro K periferia quaedam quae XOP in plano et in humido; partes itaque humidi quae secundum XOP periferiam ex aequo sunt positae et continuae inuicem. et premuntur quae quidem*



φέρεια κύκλου μὲ κέντρον τὸ Κ· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισοι αἱ γραμμαὶ ΚΑ, ΚΒ· εἶναι ἄρα ἡ ἐπιφάνεια, σφαίρας ἐπιφάνεια.

2

Ἡ ἐπιφάνεια, οἱουδήποτε ἰσοπύκνου ὑγροῦ, εὑρισκομένη ἐν ἠρεμίᾳ, εἶναι σφαιρικὴ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας αὐτῆς συμπίπτει πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς.

Ἂς νοήσωμεν ὅτι ὑπάρχει ὑγρόν τι ἐν ἠρεμίᾳ καὶ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τέμνεται δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἔστω δὲ τὸ κέντρον τῆς γῆς Κ καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ. Λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ εἶναι περιφέρεια κύκλου μὲ κέντρον τὸ Κ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι αἱ ἐκ τοῦ Κ πρὸς τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἄνισοι. Ἂς ληφθῇ μία εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα μὲν μερικῶν ἐκ τοῦ Κ πρὸς τὴν ΑΒΓΔ ἀγομένων εὐθειῶν, μικροτέρα δὲ μερικῶν ἄλλων ἐξ αὐτοῦ, καὶ ἂς γραφῇ μὲ αὐτὴν ὡς ἀκτῖνα καὶ κέντρον τὸ Κ κύκλος· ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου αὐτοῦ θὰ πίπτῃ ἐν μέρει μὲν ἐκτός, ἐν μέρει δὲ ἐντὸς τῆς γραμμῆς ΑΒΓΔ, ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς εἶναι μεγαλυτέρα μερικῶν καὶ μικροτέρα ἄλλων πρὸς αὐτὴν ἐκ τοῦ Κ ἀγομένων γραμμῶν. Ἡ περίμετρος τοῦ γραφέντος κύκλου ἔστω ΖΒΗ καὶ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Κ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΖΚ, ΚΕΛ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι μὲ ἐκείνην γωνίας ἴσας. Ἂς γραφῇ ἀκόμη μὲ κέντρον τὸ Κ τὸ τόξον ΧΟΠ εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ εἰς τὸ ὑγρόν· τότε τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὸ τόξον ΧΟΠ, θὰ εὑρίσκωνται μεταξύ των ὁμοιομόρφως καὶ ἄνευ κενῶν, τὰ τμήματα ὅμως τὰ εἰς τὸ τό-

secundum XO periferiam humido quod secundum ZB locum, quae autem secundum periferiam OP humido quod secundum BE locum; inaequaliter igitur premuntur partes humidi quae secundum periferiam XO ei quae [ἢ] κατὰ τὰν ΟΠ· ὥστε ἐξωθήσον | ται τὰ ἧσσον θλιβόμενα ὑπὸ τῶν | μᾶλλον θλιβομένων· οὐ μένει ἄρα | τὸ ὑγρόν. ὑπέκειτο δὲ καθεστα | κὸς εἶμεν ὥστε μένειν ἀκίνη | τον· ἀναγκαῖον ἄρα τὰν ΑΒΓΔ | γραμμὰν κύκλου περιφέρειαν εἶ- | μεν καὶ κέντρον αὐτᾶς τὸ Κ. ὁμοί | ως δὴ δειχθήσεται καί, ὅπως κα | ἄλλως ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἐ | πιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου | τᾶς γᾶς, ὅτι ἁ τομὰ ἐσσεῖται κύ | κλου περιφέφέρεια, καὶ κέντρον | αὐτᾶς ἐσσεῖται, ὃ καὶ τᾶς γᾶς | ἐστι κέντρον. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ ἐπιφά | νεια τοῦ ὑγροῦ καθεστακότος | ἀκινήτου σφαίρας ἔχει τὸ σχῆ | μα τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσας τᾷ | γᾷ, ἐπειδὴ τοιαύτα ἐστίν, ὥστε | ⟨διὰ τοῦ αὐτοῦ σαμείου τμαθεῖσ⟩ | αν τὰν τομὰν ποιεῖν περιφέρει | αν κύκλου κέντρον ἔχοντος τὸ | σαμεῖον, δι' οὗ τέμνεται τῷ ἐπιπέδῳ.

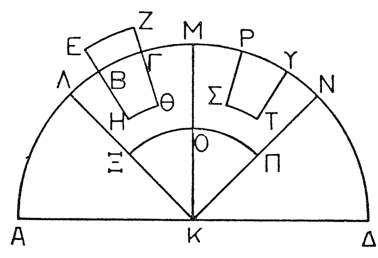
γ'

Τῶν στερεῶν μεγεθέων τὰ | ἰσοβαρέοντα τῷ ὑγρῷ ἀφε-
H 322 θέν | τα εἰς τὸ ὑγρὸν καταβασοῦνται, | ὥστε τᾶς ἐπιφανείας τᾶς τοῦ ὑ | γροῦ μὴ ὑπερέχειν μηδέν, καὶ | οὐκέτι οἰσθήσονται ἐπὶ τὰ κάτω.

ἀφείσθω γάρ τι στερεὸν μέ | γεθος εἰς τὸ ὑγρὸν τῶν ἰσοβαρέων | τῷ ὑγρῷ, καί, εἰ δυνατόν, ὑπερεχέ | τω τι αὐτοῦ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα | νείας, καθεστάτω δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε | μένειν ἀκίνητον. νοείσθω δή τι ἐ | πίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε | τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς καὶ τοῦ ὑγροῦ | καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ ξον ΧΟ θὰ πιέζωνται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ὑπὸ τὸν τόπον ΖΒ, ἐν ᾧ τὰ τμήματα εἰς τὸ τόξον ΟΠ θὰ πιέζωνται ὑπὸ τὸν τόπον ΒΕ, ὁπότε ὑφίστανται ἄνισον πίεσιν τὰ τμήματα τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ τόξα ΧΟ καὶ ΟΠ· ὥστε θὰ ἐξωθηθῶσι καὶ τὰ ὀλιγώτερον πιεζόμενα ὑπὸ τῶν περισσότερον πιεζομένων· δὲν ἰσορροπεῖ ἄρα τὸ ὑγρόν· ὑπετέθη δὲ ὅτι ἰσορροπεῖ, ὥστε νὰ μένῃ ἀκίνητον· εἶναι ἄρα ἀναγκαῖον ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ νὰ εἶναι περιφέρεια κύκλου καὶ κέντρον αὐτῆς νὰ εἶναι τὸ Κ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἂν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον τμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἡ τομὴ θὰ εἶναι περιφέρεια κύκλου, καὶ κέντρον αὐτῆς θὰ εἶναι, ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τῆς γῆς κέντρον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὑγροῦ ἔχει τὸ σχῆμα ἀκινήτου σφαίρας ἐχούσης τὸ αὐτὸ κέντρον πρὸς τὴν γῆν, ἐπειδὴ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τμηθεῖσα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (πάντοτε) νὰ σχηματίζῃ τομὴν περιφέρειαν κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

3

Ἐκ τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρὸν ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ βυθισθῶσι τόσον, ὥστε νὰ μὴ ὑπερέχωσι καθόλου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀκόμη δὲν θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω.



Διότι ἂς ἀφεθῇ στερεόν τι μέγεθος εἰς ὑγρὸν ἐκ τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρόν, καί, εἰ δυνατόν, ἂς ὑπερέχῃ κατά τι τὸ στερεὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἂς εὑρίσκηται δὲ τὸ ὑγρὸν ἐν ἠρεμίᾳ. Ἂς νοηθῇ τώρα ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ διὰ

μεγέθεος, τομὰ | δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑ | γροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθεος τὸ ΕΖΗΘ σχῆ- | μα, κέντρον δὲ τᾶς γᾶς τὸ Κ. ἔστω | δὴ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ μὲν ΒΓΗΘ | ἐν τῷ ὑγρῷ, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός. νο | είσθω δὴ τὸ στερεὸν σχῆμα περιλαμ | βανόμενον πυραμοειδεῖ βάσιν | μὲν ἔχοντι τὸ παραλληλόγραμ | μον τὸ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὑ- | γροῦ, κορυφὰν δὲ τὸ κέντρον τᾶς γᾶς, | ⟨τομὰ δὲ ἔστω τοῦ τε ἐπιπ⟩έδου, ἐν ᾧ | ἐστιν ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια, καὶ τῶν | τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων αἱ | ΚΛ, ΚΜ. γεγράφθω τις ἄλλας σφαί- | ρας ἐπιφάνεια περὶ κέντρον | τὸ Κ ἐν τῷ ὑγρῷ τῷ ὑπὸ τοῦ ΕΖΗΘ | καὶ τεμνέσθω ἐπιπέδῳ, λελάφθω | δέ τις καὶ ἄλλα πυραμὶς ἴσα καὶ ὁ | μοία τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ | στερεὸν συνε- χὴς αὐτᾷ, τομὰ δὲ | ἔστω τῶν ἐπιπέδων αὐτᾶς αἱ | ΚΜ, ΚΝ, καὶ ἐν τῷ ὑγρῷ νοείσθω | τι μέγεθος τοῦ ὑγροῦ ἀπολαμ | βανόμενον τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὅ | μοιον τῷ στερεῷ τῷ κατὰ τὰ | Β, Η,
H 324 *Θ, Γ, ὅ ἐστιν αὐτοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ· | τὰ δὴ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τά τε ἐν | τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι τὰ ὑπὸ | τὰν ἐπιφάνειαν, ἐν ᾇ ἐστιν ἁ ΞΟ | περιφέρεια, καὶ τὰ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ, | ἐν ᾇ ἐστιν ὁ ΠΟ, ἐξ ἴσου τέ ἐντι κεί | μενα καὶ συνεχέα. οὐχ ὁμοίως δὲ | θλίβον- ται· τὸ μὲν γὰρ κατὰ τὰν | ΞΟ θλίβεται τῷ στερεῷ τῷ ΘΗ | ΕΖ καὶ τῷ ὑγρῷ τῷ μεταξὺ τᾶν | ἐπιφανειᾶν τᾶν κατὰ τὰς ΞΟ, | ΛΜ καὶ τῶν τᾶς πυραμίδος ἐ | πιπέδων, τὸ δὲ κατὰ τὰν ΠΟ τῷ | ὑγρῷ τῷ μεταξὺ τᾶν ἐπιφα | νειᾶν τᾶν κατὰ τὰς ΠΟ, ΜΝ καὶ | τῶν τᾶς πυραμίδος ἐπιπέδων. ἔλασσον δὲ ἐσ- σεῖται τὸ βάρος τοῦ ὑ | γροῦ τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ· τὸ | μὲν γὰρ κατὰ τὸ ΡΣΤΥ ἔλασσόν | ἐστι τοῦ ΕΖΗΘ στερεοῦ· αὐτῷ γὰρ | τῷ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ ἴσον ἐστὶν διὰ | τὸ τῷ μεγέθει ἴσον εἶμεν καὶ ἰ | σοβαρὲς ὑποκεῖσθαι τὸ στερεὸν | ⟨τῷ ὑγρῷ· τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ⟩ | ἴσον ἐστί. δῆλον οὖν, ὅτι ἔξω | θήσεται τὸ μέρος τὸ κατὰ τὰν | ΟΠ περιφέρειαν ὑπὸ τοῦ κατὰ | τὰν*

τοῦ ὑγροῦ καὶ διὰ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, τομὴ δὲ ἔστω τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τὸ τόξον κύκλου ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ στερεοῦ μεγέθους τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ, κέντρον δὲ τῆς γῆς τὸ Κ. Ἔστω δὲ τοῦ μὲν στερεοῦ τὸ ΒΓΗΘ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ δὲ ΒΕΖΓ ἐκτός. Ἂς νοηθῇ λοιπὸν τὸ στερεὸν ὡς περιλαμβανόμενον ὑπὸ σχήματος ἔχοντος βάσιν μὲν πυραμοειδῆ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς γῆς, τομὴ δὲ ἔστω καὶ τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ τόξον ΑΒΓΔ καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος αἱ εὐθεῖαι ΚΛ, ΚΜ. Ἂς γραφῇ δὲ ἐπιφάνεια ἄλλης σφαίρας περὶ κέντρον τὸ Κ εἰς τὸ ὑγρὸν τὸ ὑπὸ τοῦ ΕΖΗΘ ὁριζόμενον καὶ ἂς τέμνηται δι' ἐπιπέδου, ἂς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλη πυραμὶς ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν περιλαμβάνουσαν τὸ στερεόν, συνεχὴς πρὸς αὐτήν, τομὴ δὲ ἔστω τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΚΝ, καὶ ἂς νοηθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν μέγεθός τι ἐξ ὑγροῦ τὸ ΡΣΤΥ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ στερεὸν τὸ κατὰ τὸ Β, Η, Θ, Γ, τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ· τὰ μέρη λοιπὸν τοῦ ὑγροῦ καὶ τὰ εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα, τὰ εὑρισκόμενα ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχει τὸ τόξον ΞΟ, καὶ τὰ εἰς τὴν ἄλλην, ὅπου ὑπάρχει ἡ ΠΟ, ὑπάρχουσιν εὑρισκόμενα ἐξ ἴσου καὶ ἐν συνεχείᾳ. Δὲν πιέζονται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διότι τὸ μὲν κατὰ τὴν ΞΟ πιέζεται κατὰ τὸ στερεὸν ΘΗ | ΕΖ καὶ κατὰ τὸ ὑγρὸν τὸ μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κατὰ τὰς ΞΟ, | ΛΜ καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ κατὰ τὴν ΠΟ πιέζεται κατὰ τὸ ὑγρὸν τὸ μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κατὰ τὰς ΠΟ, ΜΝ καὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος. Θὰ εἶναι δὲ μικρότερον τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ κατὰ τὰς ΜΝ, ΟΠ· διότι τὸ μὲν κατὰ τὸ ΡΣΤΥ εἶναι μικρότερον τοῦ στερεοῦ ΕΖΗΘ· διότι πρὸς αὐτὸ εἶναι ἴσον τὸ κατὰ τὸ ΗΒΓΘ, διότι ὑπετέθη, ὅτι τὸ στερεὸν εἶναι ἴσον κατὰ τὸ μέγεθος καὶ ἰσοβαρὲς πρὸς τὸ ὑγρόν· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι θὰ ἐξωθηθῇ τὸ μέρος τὸ κατὰ τὸ τόξον ΟΠ ὑπὸ τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΟΞ, καὶ τὸ ὑγρὸν θὰ

ΟΞ περιφέρειαν, καὶ οὐκ ἐσσεῖ | ται τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. ὑ | πόκειται δὲ ἀκίνητον ἐόν· οὐκ ἄ |ρα ὑπερέξει τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπι | φανείας οὐδὲν τοῦ στερεοῦ με | γέθεος. καταδὺν δὲ τὸ στερε | ὸν οὐκ οἰσθήσεται ἐς τὰ κάτω· | ὁμοίως γὰρ πάντα θλιβησοῦν τι | τὰ μέρεα τοῦ ὑγροῦ τὰ ἐξ ἴσου | κείμενα διὰ τὸ ἰσοβαρέα εἶμεν | τὸ στερεὸν καὶ τὸ ὑγρόν.

δ′

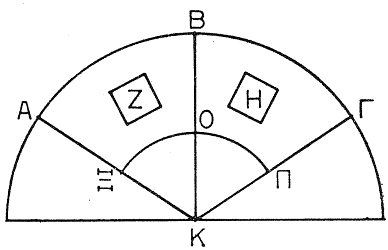
Τῶν στερεῶν μεγεθέων ὅ κα | κουφότερον ᾖ τοῦ ὑγροῦ,
H 326 *ἀφεθὲν | ἐς τὸ ὑγρὸν οὐ καταδύσεται ὅλον, | ἀλλὰ ἐσσεῖταί τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.*

ἔστω γὰρ | στερεὸν μέγεθος κουφότερον | τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν | δεδυκέτω ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ μη | δὲν αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑ | γροῦ ἐπιφανείας, καθεστακέτω | δὲ τὸ ὑγρόν, ὥστε μένειν ἀκίνητον. | νοείσθω δή τι ἐπίπεδον ἐκβε |βλημένον διὰ τοῦ κέντρου τᾶς | γᾶς καὶ διὰ τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ | στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω | δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ μὲν | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνεια κατὰ τὰν | ΑΒΓ περιφέρειαν, τὸ δὲ στερεὸν | μέγεθος κατὰ τὸ σχῆμα, ἐν ᾧ Ζ, κέν | τρον δὲ ἔστω τᾶς γᾶς τὸ Κ, νοείσθω | δέ τις πυραμὶς περιλαμβάνου | σα τὸ Ζ σχῆμα, καθ’ ἃ καὶ πρότε | ρον, κορυφὰν ἔχουσα τὸ Κ σαμεῖ | ον, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπεδ | α ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ | τὰς ΑΚ, ΚΒ, λελάφθω δέ τις καὶ | ἄλλα ἴσα πυραμὶς καὶ ὁμοία ταύ | τα̣, τεμνέσθω δὲ αὐτᾶς τὰ ἐπίπε | δα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰς | ΚΒ, ΚΓ, γεγράφθω δέ τις καὶ ἄλλας | σφαίρας ἐπιφάνεια ἐν τῷ ὑγρῷ | περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω δὲ τοῦ | στερεοῦ μεγέθεος, τεμνέσθω δ’αὖ | τα ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κα |τὰ τὰν ΞΟΠ εὑρίσκηται ἐν ἠρεμίᾳ. Ὑπετέθη δὲ ὅτι δὲν ἦτο ἐν ἠρεμίᾳ· δὲν θὰ ὑπερέχῃ ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ κατ' οὐδὲν τὸ στερεὸν μέγεθος. Ἀλλὰ καὶ πρὸς τὰ κάτω δὲν θὰ φερθῇ τὸ στερεόν· διότι ὅλα τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ θὰ πιεσθῶσιν ὁμοίως, τὰ ἐξ ἴσου κείμενα, διότι τὸ στερεὸν καὶ τὸ ὑγρὸν εἶναι ἰσοβαρῆ.

4

Ἐκ τῶν στερεῶν μεγεθῶν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν δὲν θὰ βυθισθῇ ὅλον, ἀλλὰ θὰ μείνῃ μέρος τι αὐτοῦ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Διότι ἔστω στερεὸν μέγεθος ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν ἂς βυθισθῇ ὅλον, εἰ δυνατόν, καὶ οὐδὲν μέρος αὐτοῦ ἔστω ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἂς ἀφεθῇ δὲ τὸ ὑγρὸν νὰ παραμένῃ ἐν ἠρεμίᾳ. Ἂς νοηθῇ τώρα ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ διὰ τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, ἂς τέμνηται δὲ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓ, τὸ δὲ στερεὸν μέγεθος κατὰ τὸ σχῆμα εἰς τὸν ὁποῖον ὑπάρχει τὸ γράμμα Ζ, ἔστω δὲ κέντρον τῆς γῆς τὸ Κ, ἂς νοηθῇ δὲ



πυραμίς τις περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα Ζ, ὡς καὶ πρότερον ἐλέχθη, ἔχουσα κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ, ἂς τέμνωνται δὲ τὰ ἐπίπεδα αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΚ, ΚΒ, ἂς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλη τις πυραμὶς ἴση καὶ ὁμοία πρὸς ταύτην, ἂς τέμνωνται δὲ τὰ ἐπίπεδα αὐτῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰς ΚΒ, ΚΓ, ἂς γραφῇ δὲ καὶ ἄλλη ἐπιφάνεια σφαίρας εἰς τὸ ὑγρὸν περὶ κέντρον τὸ Κ, ὑποκάτω δὲ τοῦ στερεοῦ μεγέθους, ἂς τέμνηται δὲ αὕτη ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπι-

περιφέρειαν, νοείσθω | δὲ καὶ μέγεθος ἀπολαμβανό | μενον τοῦ ὑγροῦ τὸ κατὰ τὸ Η ἐν τᾷ | ὕστερον πυραμίδι ἴσον τῷ κατὰ | τὸ Ζ στερεῷ· τὰ δὴ μέρεα τοῦ ὑ | γροῦ, τοῦ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυρα- | μίδι τὰ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν | κατὰ τὰν ΞΟ περιφέρειαν καὶ τοῦ | ἐν τᾷ δευτέρᾳ τὰ ὑπὸ τὰν ἐπι | φάνειαν τὰν κατὰ τὰν ΟΠ περι | φέρειαν ἐξ ἴσου τέ ἐντι κείμενα | καὶ συνεχέα ἀλ-
H 328 λάλοις. οὐχ ὁμοίως | δὲ θλίβονται· τὸ μὲν γὰρ ἐν τᾷ πρώ | τᾳ πυραμίδι θλίβεται τῷ κατὰ | τὸ Ζ στερεῷ μεγέθει καὶ τῷ περιέ | χοντι ὑγρῷ αὐτὸ καὶ ἐόντι ἐν τῷ | τόπῳ τᾶς πυραμίδος τῷ κατὰ | τὰ Α, Β, Ο, Ξ, τὸ δ' ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι θλίβεται τῷ ὑγρῷ τῷ πε | ριέχοντι αὐτὸ καὶ ἐόντι τᾶς πυρα | μίδος ἐν τῷ τόπῳ τῷ κατὰ | τὰ Π, Ο, Β, Γ, ἔστι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ | ⟨τὸ Ζ ἔλασσον τοῦ βάρεος τοῦ κατὰ τὸ⟩ Η, ἐπειδὴ τῷ μὲν μεγέθει ἴσον | ἐστίν, κουφότερον δὲ ὑπόκειται | τὸ στερεὸν μέγεθος εἶμεν τοῦ ὑ | γροῦ, τὰ δὲ τοῦ περιέχοντος ὑγροῦ τὰ | Ζ, Η μεγέθεα ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν πυρα | μίδων ἴσα· μᾶλλον οὖν θλιβή | σεται τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ | τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κατὰ τὰν | ΟΠ περιφέρειαν· ἐξωθήσει οὖν | τὸ ἧσσον θλιβόμενον, καὶ οὐ με- | νεῖ τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον. ὑπέκει | το δέ· οὐκ ἄρα καταδύσεται ὅλον, | ἀλλ' ἐσσεῖταί τι αὐτοῦ ἐκτὸς τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ε′

Τῶν στερεῶν μεγεθέων ὅ κα ᾖ κου | φότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑ | γρὸν ἐς τοσοῦτο καταδύσεται, ὥστε | ταλικοῦτον ὄγκον τοῦ ὑγροῦ, ἁλίκος | ἐστὶν ὁ τοῦ καταδεδυκότος ὄγκος, | ἴσον βάρος ἔχειν ὅλῳ τῷ μεγέθει.

κατεσκευάσθω ταὐτὰ τοῖς πρότε | ρον, καὶ ἔστω τὸ ὑγρὸν ἀκίνητον, | ἔστω δὲ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τὸ ΕΖ | ΗΘ μέγεθος. ἐπεὶ οὖν ἀκίνητόν ἐστιν | τὸ ὑγρόν, ὁμοίως θλιβήσεται τὰ |

πέδου κατὰ τὸ τόξον ΞΟΠ, ἂς νοηθῇ δὲ τὸ ἀπολαμβανόμενον μέγεθος τοῦ ὑγροῦ τὸ κατὰ τὸ Η εἰς τὴν δευτέραν ληφθεῖσαν πυραμίδα ἴσον πρὸς τὸ κατὰ τὸ Ζ στερεόν· θὰ εἶναι λοιπὸν τὰ μέρη τοῦ ὑγροῦ τοῦ εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα, τὰ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὸ τόξον ΞΟ καὶ τοῦ εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα τὰ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὸ τόξον ΟΠ, ἐξ ἴσου κείμενα καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς ἄλληλα. Δὲν πιέζονται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· διότι τὸ μὲν εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα πιέζεται κατὰ τὸ στερεὸν μέγεθος Ζ καὶ τὸ περιέχον αὐτὸ ὑγρόν, τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸν τόπον τῆς πυραμίδος τὸν κατὰ τὰ Α, Β, Ο, Ξ, τὸ δὲ εἰς τὴν ἄλλην πυραμίδα πιέζεται κατὰ τὸ ὑγρὸν τὸ περιέχον αὐτό, τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸν τόπον τῆς πυραμίδος τὸν κατὰ τὰ Π, Ο, Β, Γ, εἶναι δὲ τὸ βάρος τὸ κατὰ τὸ Ζ μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ κατὰ τὸ Η, ἐπειδὴ πρὸς μὲν τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον, ὑπετέθη δὲ τὸ στερεὸν μέγεθος, ὅτι εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, τὰ δὲ μεγέθη τοῦ περιέχοντος ὑγροῦ τὰ Ζ, Η, εἰς ἑκάστην τῶν πυραμίδων εἶναι ἴσα· θὰ πιεσθῇ λοιπὸν περισσότερον τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ τὸ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὸ τόξον ΟΠ· θὰ ἐξωθήσῃ λοιπὸν τὸ ὀλιγώτερον πιεζόμενον, καὶ δὲν θὰ παραμείνῃ τὸ ὑγρὸν ἐν ἠρεμίᾳ. Ὑπετέθη δὲ ὅτι ἠρεμεῖ· δὲν θὰ βυθισθῇ ἄρα ὅλον, ἀλλὰ μέρος τι αὐτοῦ θὰ εὑρίσκηται ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

5

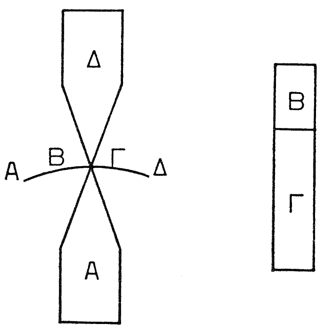
Ἐκ τῶν στερεῶν μεγεθῶν, τὸ ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ βυθισθῇ τόσον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ ὁ ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ βυθισθέντος στερεοῦ, νὰ ἔχῃ ἴσον βάρος πρὸς τὸ βάρος ὅλου τοῦ μεγέθους.

Ἂς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ προηγούμενα, καὶ ἔστω τὸ ὑγρὸν ἐν ἠρεμίᾳ, ἔστω δὲ τὸ μέγεθος ΕΖΗΘ ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὑγρὸν εὑρίσκεται ἐν ἠρεμίᾳ, τὰ μέρη αὐτοῦ

μέρεα αὐτοῦ τὰ ἐξ ἴσου κείμενα· | ὁμοίως ἄρα θλιβήσεται τὸ ὑγρὸν | τὸ ὑπὸ τὰν ἐπιφάνειαν τὰν κα|τὰ τὰς ΞΟ καὶ ΠΟ
H 330 *περιφερείας· ὥσ|τε ἴσον ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ θλίβον|ται. ἔστι δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος | τοῦ ἐν τᾷ πρώτᾳ πυραμίδι χωρὶς | τοῦ ΒΗΘΓ στερεοῦ ἴσον τῷ βάρει τῷ | ⟨τοῦ ἐν τᾷ ἑτέρᾳ πυραμίδι⟩ | χωρὶς τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ· δῆλον οὖν, ὅτι | τὸ τοῦ ΕΖΗΘ μεγέθεος βάρος ἴσον | ἐστὶ τῷ τοῦ ΡΣΤΥ ὑγροῦ βάρει. φα|νερὸν οὖν, ὅτι ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ | ὑγροῦ, ἁλίκον ἐστὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ στε|ρεοῦ μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχει | ὅλῳ τῷ μεγέθει.*

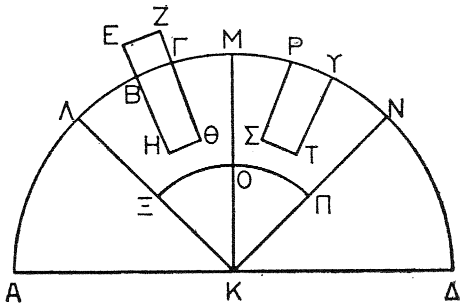
ς′

Τὰ κουφότερα στερεὰ τοῦ ὑγροῦ | βιασθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρεται | τοσαύτᾳ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον | ἐστὶ τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ | μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον | ἔχον τῷ μεγέθει.



ἔστω τι μέγεθος | τὸ Α κουφότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω | δὲ τοῦ μὲν μεγέθεος τοῦ ἐν ᾧ Α | βάρος τὸ Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγ|κον ἔχοντος τῷ Α τὸ ΒΓ. δεικτέον, ὅτι | τὸ Α μέγεθος βιασθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν ἀνοισεῖται ἐς τὸ ἐπάνω τοσαύτᾳ βίᾳ, | ὅσον ἐστὶ τὸ βάρος τὸ Γ.

λελάφθω γὰρ | τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ βάρος ἴσον | ἔχον τῷ Γ· τὸ δὴ μέγεθος τὸ ἐξ ἀμ|φοτέρων τῶν ἐν οἷς Α, Δ μεγεθέων | ἐς τὰ αὐτὰ συντεθέντων κουφότερόν | ἐστι τοῦ ὑγροῦ· ἔστι γὰρ τοῦ μὲν με|γέθεος τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρος | τὸ τὰ εὑρισκόμενα εἰς ἴσας θέσεις θὰ πιέζωνται ὁμοίως· ὁμοίως ἄρα θὰ πιεσθῇ τὸ ὑγρὸν τὸ ὑπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κατὰ τὰ τόξα ΞΟ καὶ ΠΟ· ὥστε τὸ βάρος ὑπὸ τὸ ὁποῖον πιέζονται εἶναι ἴσον. Εἶναι δὲ καὶ τοῦ ὑγροῦ τὸ βάρος τοῦ εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα, ἄνευ τοῦ στερεοῦ ΒΗΘΓ, ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ εἰς τὴν ἄλλην πυραμίδα ὑγροῦ, ἄνευ τοῦ ὑγροῦ ΡΣΤΥ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ μεγέθους ΕΖΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ΡΣΤΥ. Φανερὸν λοιπὸν εἶναι, ὅτι τόσος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ὅσον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ βυθισθέντος στερεοῦ, ἔχει βάρος ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὅλου μεγέθους.



6

Τὰ ἐλαφρότερα τοῦ ὑγροῦ στερεὰ τιθέμενα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται μὲ τόσην δύναμιν πρὸς τὰ ἄνω, ὅσον εἶναι τὸ βάρος, καθ' ὃ τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον πρὸς τὸ μέγεθος εἶναι βαρύτερον τοῦ μεγέθους.

Ἔστω μέγεθός τι τὸ Α ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔστω δὲ Β τὸ βάρος τοῦ μεγέθους Α, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ Α βάρος τὸ ΒΓ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ μέγεθος Α τιθέμενον εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ ὑφίσταται ἄνωσιν μὲ τόσην δύναμιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος Γ.

Διότι ἂς ληφθῇ μέγεθός τι, ὅπου τὸ Δ, ἔχον ἴσον βάρος πρὸς τὸ Γ· τὸ μέγεθος λοιπὸν τὸ ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν Α, Δ θεωρούμενον ὡς ἓν θὰ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ· διότι τὸ βάρος τοῦ μεγέθους τοῦ

ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον | ἔχοντος αὐτῷ μεῖζον τοῦ
H 332 ΒΓ δι|ὰ τὸ τοῦ ἴσον ἔχοντος ὄγκον τῷ τοῦ | Α τὸ βάρος εἶμεν
τὸ ΒΓ. ἀφε|θὲν οὖν ἐς τὸ ὑγρὸν τὸ μέγεθος | τὸ ἐξ ἀμφοτέρων
τῶν Α, Δ συγ|κείμενον ἐς τοσοῦτον δύσεται, |⟨ἔστε κα τα-
λικοῦτος ὄγκος τοῦ⟩ | ὑγροῦ, ἁλίκον καὶ τὸ δεδυκὸς τοῦ |
μεγέθεος, ἴσον βάρος ἔχῃ τῷ | ὅλῳ μεγέθει· δέδεικται γὰρ
τοῦ | το. ἔστω δὴ ἐπιφάνειά τινος ὑ|γροῦ ἁ ΑΒΓΔ περιφέρεια.
ἐπεὶ | οὖν ὁ ταλικοῦτος ὄγκος τοῦ ὑ|γροῦ, ἁλίκον ἐστὶ τὸ Α
μέγεθος, | ἴσον βάρος ἔχει τοῖς Α, Δ μεγέθε|σιν, δῆλον, ὅτι
τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ | ἐσσεῖται τὸ Α μέγεθος, τὸ δὲ λοιπὸν |
αὐτοῦ, ἐν ᾧ Δ, ἐσσεῖται ὅλον ὑπὲρ | τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας·
εἰ γὰρ α | . . . δέδυκεν τὸ στερεόν, ἕπεται | . . . . . . τούτου
δεδειγμένου. δῆ|λον οὖν, ὅτι . . . . . ἐς τὸ ἄνω φέρεται | τὸ Α
μέγεθος . . . . | . . . . ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ Δ | ἐς
τὸ κάτω, ἐπεὶ οὐδέτερον ὑπ' οὐ|δετέρου ἐξωθεῖτο. ἀλλὰ τὸ
Δ ἐς τὸ | κάτω θλίβει τοσούτῳ βάρει, ἁλίκον | ἐστὶ τὸ Γ·
ὑπέκειτο γὰρ τὸ βάρος | τοῦ ἐν ᾧ τὸ Δ εἶμεν ἴσον τῷ Γ·
δῆ|λον οὖν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ζ'

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ ἀφεθέντα | εἰς τὸ ὑγρὸν οἰσεῖται
H 334 κάτω, ἔστ' ἂν | καταβᾶντι, καὶ ἐσσοῦνται κουφότε|ρα ἐν τῷ
ὑγρῷ τοσοῦτον, ὅσον | ἔχει τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ ταλικοῦ-|
τον ὄγκον ἔχοντος, ἁλίκος ἐστὶν | ὁ τοῦ στερεοῦ μεγέθεος ὄ-
γκος.

ὅτι | μὲν οὖν οἰσεῖται ἐς τὸ κάτω, ἔστ' ἂν | καταβᾶντι, δῆλον· τὰ γὰρ ὑπο|κάτω αὐτοῦ μέρεα τοῦ ὑγροῦ θλι|βησοῦνται μᾶλλον τῶν ἐξ ἴσου αὐτοῖς | κειμένων μερέων, ἐπειδὴ βαρύ|τερον ὑπόκειται τὸ στερεὸν μέ|γεθος τοῦ ὑγροῦ· ὅτι δὲ ἀποτελουμένου ἐκ τῶν δύο μεγεθῶν εἶναι τὸ Β + Γ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς αὐτὸ (δηλ. Α + Δ) εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Β + Γ, διότι τὸ βάρος τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ Α εἶναι τὸ Β + Γ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ μέγεθος τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν Α + Δ ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ βυθισθῇ τόσον, ὥστε τὸ βάρος ἴσου ὄγκου πρὸς τὸ βυθισθὲν σῶμα ὑγροῦ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος ὅλου τοῦ μεγέθους· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 5). Ἔστω λοιπὸν ἐπιφάνεια ὑγροῦ τινος ἡ κατὰ τὸ τόξον ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὁ τόσος ὄγκος τοῦ ὑγροῦ, ὅσος εἶναι τὸ μέγεθος Α, ἔχει ἴσον βάρος πρὸς τὰ μεγέθη Α + Δ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ βυθισμένον μέρος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ μέγεθος Α, τὸ δὲ ἄλλο, ὅπου τὸ Δ, θὰ εὑρίσκηται ὅλον ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ· ἐὰν λοιπὸν ἡ . . . ἔχει βυθισθῇ τὸ στερεόν, ἕπεται . . . . διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι. . . . . τὸ μέγεθος Α φέρεται πρὸς τὰ ἄνω. . . . . ὑπὸ τοῦ ἄνω τοῦ Δ εἰς τὸ κάτω, ἐπειδὴ κανὲν δὲν ἐξωθεῖτο ὑπὸ κανενός. Ἀλλὰ τὸ Δ εἰς τὸ ὑποκάτω πιέζει κατὰ τοσοῦτον βάρος, ὅσον εἶναι τὸ Γ· διότι ὑπετέθη τὸ βάρος ὅπου τὸ Δ ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθῇ.

7

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ στερεὰ ἀφεθέντα εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ φέρωνται πρὸς τὰ κάτω, ὅσον εἶναι δυνατὸν νὰ βυθίζωνται, καὶ θὰ εἶναι ἐλαφρότερα ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τόσον, ὅσον βάρος ἔχει τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον τόσον ὄγκον, ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ μεγέθους.

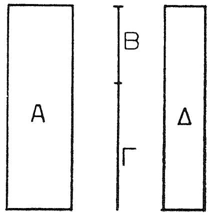
Ὅτι μὲν λοιπὸν θὰ φέρωνται πρὸς τὰ κάτω, ὅσον εἶναι δυνατὸν νὰ κατέρχωνται, εἶναι φανερόν· διότι τὰ κάτωθεν αὐτοῦ μέρη τοῦ ὑγροῦ θὰ πιέζωνται περισσότερον ἢ τὰ ἐξ ἴσου πρὸς αὐτὰ κείμενα μέρη τοῦ ὑγροῦ, ἐπειδὴ τὸ στερεὸν μέγεθος ὑπετέθη βαρύτερον τοῦ κουφότερα | ἐσσοῦνται, ὡς εἴρηται, δειχθήσεται. |

ἔστω τι μέγεθος τὸ Α, ὅ ἐστι βαρύτερον τοῦ | ὑγροῦ, βάρος δὲ ἔστω τοῦ μὲν ἐν ᾧ | Α μεγέθεος τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ | ἴσον ὄγκον ἔχοντος τῷ Α τὸ Β. δεικτέον, ὅτι τὸ Α μέγεθος ἐν τῷ ὑγρῷ | ἐὸν βάρος ἕξει ἴσον τῷ Γ.

λελά |φθω γάρ τι μέγεθος τὸ ἐν ᾧ τὸ Δ | ⟨κουφότερον τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἴσον | ὄγκον ἔχοντος αὐτῷ, ἔστω⟩ | δὲ τοῦ μὲν ἐν ᾧ τὸ Δ μεγέθεος βάρος | ἴσον τῷ Β βάρει, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἴ | σον ὄγκον ἔχοντος τῷ Δ μεγέθει | τὸ βάρος ἔστω ἴσον τῷ ΒΓ βάρει. | συντεθέντων δὴ ἐς τὸ αὐτὸ τῶν με | γεθέων, ἐν οἷς τὰ Α, Δ, τὸ τῶν συν |αμφοτέρων μέγεθος ἰσοβαρὲς | ἐσσεῖται τῷ ὑγρῷ· ἔστι γὰρ τῶν | μεγεθέων συναμφοτέρων τὸ βάρος | ἴσον συναμφοτέροις τοῖς βάρε | σιν τῷ τε ΒΓ καὶ τῷ Β, τοῦ δὲ ὑ | γροῦ τοῦ ἴσον ὄγκον ἔχοντος ἀμ | φοτέροις τοῖς μεγέθεσι τὸ βά | ρος ἴσον ἐστὶ τοῖς αὐτοῖς βάρε | σιν. ἀφεθέντων οὖν τῶν μεγεθέων ἐς τὸ ὑγρὸν ἰσορροπησοῦν | ται τῷ ὑγρῷ H 336 καὶ οὔτε εἰς τὸ ἄνω | οἰσοῦνται οὔτε εἰς τὸ κάτω· διὸ τὸ μὲν ἐν ᾧ Α μέγεθος οἰσεῖ |⟨ται ἐς τὸ κάτω καὶ τοσαύτᾳ βίᾳ ὑ⟩ | πὸ τοῦ ἐν ᾧ Δ μεγέθεος ἀν | έλκεται ἐς τὸ ἄνω, τὸ δὲ ἐν ᾧ Δ | μέγεθος, ἐπεὶ κουφότερόν ἐστι | τοῦ ὑγροῦ, ἀνοισεῖται εἰς τὸ ἄνω | τοσαύτᾳ βίᾳ, ὅσον ἐστὶ τὸ Γ βά | ρος· δέδεικται γάρ, ὅτι τὰ κουφότερα | τοῦ ὑγροῦ μεγέθεα στερεὰ βιασ | θέντα ἐς τὸ ὑγρὸν ἀναφέρονται | τοσαύτᾳ βίᾳ ἐς τὸ ἄνω, ὅσον ἐστὶ | τὸ βάρος, ᾧ βαρύτερόν ἐστι τοῦ | μεγέθεος τὸ ὑγρὸν τὸ ἴσογκον | τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ τῷ Γ βάρει | βαρύτερον τοῦ Δ μεγέθεος τὸ ὑγρὸν | τὸ ἴσον ὄγκον ἔχον τῷ Δ· δῆλον οὖν, ὅτι καὶ | τὸ ἐν ᾧ Α μέγεθος ἐς τὸ κάτω οἰσεῖ|⟨ται τοσούτῳ βάρει, ὅσον ἐστὶ τὸ Γ⟩.

Ὑποκεί ⟨σθω, τῶν ἐν τῷ ὑγρῷ ἄνω ⟩ | φερομένων ἕκαστον ὑγροῦ· ὅτι δὲ θὰ γίνωνται τόσον ἐλαφρότερα, ὅσον ἐλέχθη, θὰ δειχθῇ.

Ἔστω μέγεθός τι τὸ Α, τὸ ὁποῖον εἶναι βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ, βάρος δὲ τοῦ σώματος τοῦ ἔχοντος μέγεθος Α, ἔστω τὸ ΒΓ, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ὄγκον ἴσον πρὸς τὸ Α, βάρος τὸ Β. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ μέγεθος Α εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ ἔχῃ βάρος ἴσον πρὸς τὸ Γ.



Διότι ἂς ληφθῇ μέγεθός τι Δ ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς αὐτό, ἔστω δὲ τοῦ μὲν μεγέθους Δ τὸ βάρος ἴσον πρὸς βάρος Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ὄγκον ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος Δ τὸ βάρος ἔστω ἴσον πρὸς τὸ βάρος ΒΓ. Διότι ἐὰν προστεθῶσι τὰ μεγέθη Α, Δ, τὸ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος μέγεθος θὰ εἶναι ἰσοβαρὲς πρὸς τὸ ὑγρόν· διότι καὶ τῶν δύο μεγεθῶν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἀθροίσματος (Β + Γ) + Β, τοῦ δὲ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ὄγκον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν δύο μεγεθῶν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὰ βάρη αὐτῶν. Ὅταν λοιπὸν ἀφεθῶσι τὰ μεγέθη εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ ἰσορροπήσωσι καὶ οὔτε θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ ἄνω οὔτε πρὸς τὰ κάτω· διότι τὸ μὲν μέγεθος Α θὰ φέρηται πρὸς τὰ κάτω (ὡς βαρύτερον τοῦ ὑγροῦ) θὰ ἀνέλκηται ὅμως πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ τοῦ μεγέθους Δ, ἐν ᾧ τὸ μέγεθος Δ, ἐπειδὴ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, θὰ ὑφίσταται τόσην ἄνωσιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος Γ· διότι ἀπεδείχθη, ὅτι τὰ στερεὰ μεγέθη τὰ ἐλαφρότερα τοῦ ὑγροῦ βυθιζόμενα εἰς τὸ ὑγρὸν ὑφίστανται τόσην ἄνωσιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος, καθ' ὃ τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ μέγεθος εἶναι βαρύτερον τοῦ μεγέθους. Εἶναι δὲ τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον ὄγκον ἴσον πρὸς Δ, κατὰ τὸ βάρος Γ, βαρύτερον τοῦ μεγέθους Δ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ τὸ μέγεθος Α θὰ ἔλθῃ πρὸς τὰ κάτω μὲ τόσην δύναμιν, ὅσον εἶναι τὸ βάρος Γ.

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ εἰς τὸ ὑγρὸν εὑρισκόμενα σώματα ὠθοῦ-

ἀναφέρεσθαι | κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέν | τρου τοῦ βάρεος αὐτοῦ ἀγμέναν.

η′

Εἴ κα στερεόν τι μέγεθος κουφότε | ρον τοῦ ὑγροῦ σφαίρας τμάματος | ἔχον σχῆμα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφεθῇ οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν τοῦ τμάματος μὴ | ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὀρθὸν κατα- | στασεῖται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν | ἄξονα τοῦ τμάματος κατὰ κά | θετον εἶμεν· καὶ εἴ κα ὑπό τινος | ἕλκηται τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὰν | βάσιν τοῦ τμάματος ἅπτεσθαι τοῦ | ὑγροῦ, οὐ μενεῖ κεκλιμένον, εἴ | κα ἀφεθῇ, ἀλλ' ὀρθὸν ἀποκα | ταστασεῖται.

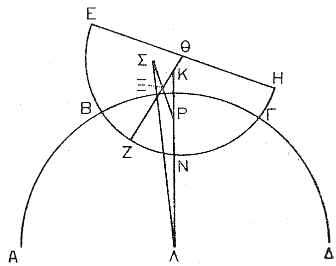
H 338 *νοείσθω γάρ τι μέγε | θος, οἷον εἴρηται, ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφε | ⟨θέν, καὶ διά τε τοῦ ἄξονος τοῦ⟩ | τμάματος καὶ τοῦ κέντρου τᾶς | γᾶς νοείσθω ἐπίπεδον ἐκβεβλ | ημένον, τομὰ δ' ἔστω τᾶς μὲν | ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ, | τοῦ δὲ σχήματος τοῦ ἐς τὸ ὑγρὸν ἀ | φεθέντος ἁ ΕΖΗΘ περιφέρει | α, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος ἔστω ὁ | ΘΖ· τὸ δὴ κέντρον τᾶς σφαίρας ἔστιν ἐπὶ τᾶς ΘΖ.*

πρῶτον μέν, εἰ | μεῖζόν ἐστιν ἡμισφαιρίου τὸ τμᾶμα, ἔστω τὸ Κ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, | κεκλιμένον τὸ σχῆμα ἤτοι ὑπό | τινος κλιθὲν ἢ καθ' αὐτό. δεικτέον | οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλ' εἰς ὀρθὸν ἀποκα | ταστασεῖται, ὥστε τὰ Ζ, Θ κατὰ | κάθετον εἶμεν.

ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται κε | κλίσθαι τὸ σχῆμα, οὐκ ἔστι τὰ Ζ, Θ κα |τὰ κάθετον. ἄχθω δὴ διὰ τοῦ Κ καὶ | τοῦ Λ ἁ ΚΛ, τὸ δὲ Λ κέντρον ὑποκείσ | θω τᾶς γᾶς· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐν τῷ | ὑγρῷ μενα πρὸς τὰ ἄνω, διευθύνονται κατὰ τὴν κατακόρυφον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐτῶν.

8

Ἐὰν στερεόν τι μέγεθος ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, ἔχον σχῆμα τμήματος σφαίρας, ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρόν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις τοῦ τμήματος νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, τὸ σχῆμα θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν ἰσορροπίας, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ τμήματος νὰ εἶναι κατακόρυφος· καὶ ἐὰν τὸ σχῆμα ἕλκηται ὑπό τινος οὕτως, ὥστε ἡ βάσις τοῦ τμήματος νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἐὰν ἀφεθῇ, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ εἰς τὴν κατακόρυφον θέσιν του.



Διότι ἂς νοηθῇ μέγεθός τι, ὡς ἐλέχθη, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, καὶ ἂς νοηθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἔστω δὲ τομὴ τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ σχήματος τοῦ ἀφεθέντος εἰς τὸ ὑγρὸν τὸ τόξον ΕΖΗΘ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ὁ ΘΖ· τὸ κέντρον λοιπὸν τῆς σφαίρας θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΘΖ.

Πρῶτον μέν, ἐὰν τὸ τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου, ἔστω τὸ Κ, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ σχῆμα κεκλιμένον, δηλ. ἢ νὰ ἔχῃ κλιθῇ ὑπό τινος ἢ νὰ ἔχῃ κλίνει μόνον του. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν θὰ παραμείνῃ εἰς τὴν θέσιν αὐτήν, ἀλλὰ θὰ λάβῃ θέσιν ἠρεμίας τοιαύτην, ὥστε τὰ Ζ, Θ νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς κατακορύφου.

Διότι ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι τὸ σχῆμα ἔχει κλιθῇ, τὰ Ζ, Θ δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς κατακορύφου. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν διὰ τοῦ Κ καὶ τοῦ Λ, ἡ ΚΛ, ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι τὸ Λ εἶναι τὸ κέντρον τῆς γῆς· τὸ σχῆμα

ἀπολελαμμένον ὑπὸ τᾶς | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα | ἔχει ἐπὶ τᾶς ΚΛ· εἰ γάρ κα δύο σφαι|ρᾶν ἐπιφάνειαι τέμνωντι ἀλλήλας, ἁ | τομὰ κύκλος ἐστὶν ὀρθὸς ποτὶ τὰν | εὐθεῖαν τὰν ἐπιζευγνύουσαν τὰ | κέντρα τᾶν σφαιρᾶν. ἔστιν οὖν | τοῦ σχήματος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ | περιφέρειαν ἀπολαμβανομένου | ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ κέντρον τοῦ βάρε|ος ἐπὶ τᾶς ΚΛ· ἔστω τὸ Ρ. τοῦ δὲ τμά|ματος ὅλου τοῦ κατὰ τὰν ΘΗΖΕ περι|φέρειαν τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρε|ος ἐπὶ τᾶς ΖΘ· ἔστω τὸ Ξ. τοῦ ἄρα | ⟨λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐκτὸς⟩ | τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸ κέν|τρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΡΞ ἐστιν ἐκβλη|θείσας καὶ ἀπο-
H 340 *λαφθείσας τινὸς τᾶς ΣΞ | ποτὶ τὰν ΞΡ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχούσας, ὃν | ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὰν ΒΝΓ | περιφέρειαν τοῦ τμάματος ποτὶ | τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ· δέδει|κται γὰρ ταῦτα. ἔστω δὴ τὸ Σ κέν|τρον τοῦ εἰρημένου σχήματος. | ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν σχήματος, ὅ ἐστιν | ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος ἐς τὸ κάτω | φέρεται κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΛΣ, | τὸ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ ἐς τὸ ἄνω κατὰ | τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΚ, δῆλον, ὡς | οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ πο|τὶ τῷ Ε μέρεα αὐτοῦ ἐς τὸ κάτω | οἰσοῦνται, τὰ δὲ ποτὶ τῷ Η ἐς τὸ | ἄνω, καὶ ἀεὶ ἐς τὸ αὐτὸ οἰσοῦνται, ἕ|ως κα ἁ ΖΘ κατὰ κάθετον γέ|νηται. κατὰ κάθετον δὲ γενομέ|νας τᾶς ΖΘ τὰ κέντρα τοῦ βά|ρεος ἐσσοῦνται τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ καὶ | τοῦ ἐκτὸς ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς καθέ|του· ἐπὶ γὰρ τᾶς ΖΘ ἐσσοῦνται· | ἀντιθλιψοῦνται οὖν ἀλλήλοις τὰ | βάρεα κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον, τὸ | μὲν ἐς τὸ κάτω φερόμενον, τὸ δὲ ἐς | τὸ ἄνω. ὥστε μένει τὸ σχῆμα· | οὐδέτερον γὰρ ὑπ' οὐδετέρου ἐξωθή|σει.*

τὰ δ' αὐτὰ ἐσσεῖται καί, εἴ κα | τὸ σχῆμα ἡμισφαίριον ᾖ ἢ ἔλασ|σον ἡμισφαιρίον.

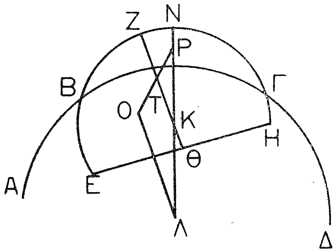
λοιπὸν τὸ εἰς τὸ ὑγρὸν ἀποληφθὲν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἔχει τὸν ἄξονα ἐπὶ τῆς ΚΛ· διότι ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν τέμνωνται πρὸς ἀλλήλας, ἡ τομή των εἶναι κύκλος κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. Εἶναι λοιπὸν τοῦ σχήματος τοῦ ἀπολαμβανομένου εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὸ τόξον ΒΝΓ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΚΛ· ἔστω τὸ Ρ. Ὅλου δὲ τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΘΗΖΕ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΖΘ· ἔστω τὸ Ξ. Τοῦ λοιποῦ ἄρα σχήματος τοῦ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΡΞ, εἰς τοιαύτην δηλ. προέκτασίν της (ΣΞ), ὥστε ΣΞ πρὸς ΞΡ νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ κατὰ τὸ τόξον ΒΝΓ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ· διότι ταῦτα ἔχουσιν ἀποδειχθῆ. Ἔστω λοιπὸν Σ τὸ κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος. Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, τὸ βάρος διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΛΣ, τὸ δὲ βάρος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ διευθύνεται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΡΚ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα δὲν θὰ ἠρεμήσῃ, ἀλλὰ τὰ πρὸς τὸ Ε μέρη αὐτοῦ θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω, τὰ δὲ πρὸς τὸ Η πρὸς τὰ ἄνω, καὶ πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ θὰ φέρωνται, ἕως ὅτου ἡ ΖΘ γίνῃ κατακόρυφος. Ὅταν δὲ ἡ ΖΘ γίνῃ κατακόρυφος τὰ κέντρα τοῦ βάρους τοῦ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου· διότι θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΖΘ· θὰ πιεσθῶσι λοιπὸν ἀντιθέτως μεταξύ των τὰ βάρη κατὰ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον, τὸ μὲν φερόμενον πρὸς τὰ κάτω, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἄνω. Ὥστε τὸ σχῆμα θὰ ἠρεμῇ· διότι οὐδὲν ἐκ τῶν σχημάτων θὰ πιεσθῇ ὑπὸ τοῦ ἄλλου περισσότερον.

Τὰ αὐτὰ δὲ θὰ συμβῶσι καί, ἐὰν τὸ σχῆμα εἶναι ἡμισφαίριον ἢ μικρότερον ἡμισφαιρίου.

θ′

Καὶ τοίνυν, εἴ κα τὸ σχῆμα κουφότερον ἐὸν | τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν | ἐν τῷ ὑγρῷ, ὀρθὸν καταστασεῖται | τὸ σχῆμα οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα | αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν.

H 342 *νοείσθω | γάρ τι μέγεθος, οἷον εἴρηται, εἰς | τὸ ὑγρὸν ἀφετωμένον, νοείσθω δὲ | καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ ἄξονος | τοῦ τμάματος καὶ διὰ τοῦ κέντρου | τᾶς γᾶς, τομὰ δὲ ἔστω τᾶς μὲν ἐπι | φανείας τοῦ ὑγροῦ ἁ ΑΒΓΔ πε | ριφέρεια, τοῦ δὲ σχήματος ἁ ΕΖΗ | περιφέρεια καὶ ἁ ΕΗ εὐθεῖα, ἄ | ξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΖΘ. | εἰ οὖν δυνατόν, μὴ κατὰ κάθετον | ἔστω ἁ ΖΘ· δεικτέον οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ | τὸ σχῆμα, ἀλλὰ ἐπ' ὀρθὸν κατασ | τασεῖται.*



ἔστι δὴ τὸ κέντρον τᾶς | σφαίρας ἐπὶ τᾶς ΖΘ· πάλιν γὰρ μεῖζον | ἡμισφαιρίου ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα· | καὶ ἔστω τὸ Κ· διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ | κέντρου τᾶς γᾶς τοῦ Λ ἄχθω | ἁ ΚΛ· τὸ δὴ σχῆμα τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑ | γροῦ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τᾶς | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας τὸν ἄξονα | ἔχει ἐπὶ τᾶς διὰ τοῦ Κ, καὶ διὰ ταῦτὰ | τοῖς πρότερον ἔστιν αὐτοῦ τὸ κέν | τρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ΝΚ· ἔστω | [γὰρ] τὸ Ρ. τοῦ δὲ ὅλου τμάματος τὸ κέν |⟨τρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ΖΘ⟩ | μεταξὺ τῶν Κ, Ζ· ἔστω τὸ Τ. τοῦ ἄρα | λοιποῦ σχήματος τοῦ ἐν τῷ ὑ | γρῷ τὸ κέντρον ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς | ΤΡ εὐθείας ἐκβληθείσας καὶ ἀπολαφθείσας τινός, | ἃ ἕξει ποτὶ τὰν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν | ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμάματος τοῦ ἐκ | τὸς τοῦ ὑγροῦ ποτὶ τὸ

9

Καὶ ἀκόμη, ἐὰν τὸ σχῆμα εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ ὅλη νὰ εἶναι εἰς τὸ ὑγρόν, τὸ σχῆμα θὰ ὀρθωθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ εἶναι κατακόρυφος.

Διότι ἂς νοηθῇ μέγεθός τι, ὡς ἐλέχθη, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ἂς νοηθῇ δὲ καὶ ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, ἔστω δὲ τομὴ τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τὸ τόξον ΑΒΓΔ, τοῦ δὲ σχήματος τὸ τόξον ΕΖΗ καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΗ, ἔστω δὲ ἄξων τοῦ τμήματος ἡ ΖΘ. Ἐὰν λοιπὸν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἡ ΖΘ δὲν εἶναι κατακόρυφος· πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ σχῆμα δὲν θὰ ἰσορροπήσῃ εἰς τὴν θέσιν αὐτήν, ἀλλὰ θὰ λάβῃ θέσιν κατακόρυφον.

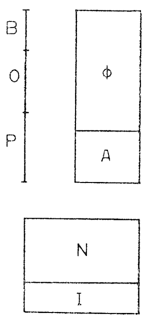
Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εὑρίσκεται βέβαια ἐπὶ τῆς ΖΘ· διότι πάλιν ἔστω πρῶτον τὸ σχῆμα μεγαλύτερον ἡμισφαιρίου· καὶ ἔστω τὸ Κ· διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τοῦ κέντρου τῆς γῆς τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ· τὸ σχῆμα λοιπὸν τὸ εὑρισκόμενον ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἔχει τὸν ἄξονα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Κ, καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΝΚ· ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ρ. Ὅλου δὲ τοῦ τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς ΖΘ μεταξὺ τῶν Κ, Ζ· ἔστω τὸ Τ. Τοῦ λοιποῦ ἄρα τμήματος τοῦ εἰς τὸ ὑγρὸν εὑρισκομένου τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΤΡ ἀφοῦ προεκβληθῇ αὕτη καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τμῆμά τι τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ πρὸς τὴν ΤΡ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὸ βάρος τοῦ σχήματος τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ

H 344 *βάρος τοῦ σχή |ματος τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ· καὶ ἔστω | τὸ Ο κέντρον τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ | διὰ τοῦ Ο κάθετος ἔστω ἁ ΟΛ· οἰ | σεῖται οὖν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμά | ματος, ὅ ἐστιν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ, | κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΡΛ ἐς τὸ | κάτω, τοῦ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ σχήματος | κατὰ τὰν εὐθεῖαν τὰν ΟΛ ἐς τὸ | ἄνω. οὐκ ἄρα μενεῖ τὸ σχῆμα, | ἀλλὰ τοῦ σχήματος τὰ μὲν | ποτὶ τῷ Η μέρεα οἰσοῦνται ἐς τὸ κάτω, | τὰ δὲ ποτὶ τῷ Ε ἐς τὸ ἄνω, καὶ ἀεὶ | τοῦτο ἐσσεῖται, ἔστε κα ΘΖ κατὰ κά | θετον γένηται.*

ὑγρόν· καὶ ἔστω Ο τὸ κέντρον βάρους τοῦ εἰρημένου σχήματος, καὶ διὰ τοῦ Ο ἔστω κάθετος ἡ ΟΛ· θὰ φέρηται λοιπὸν τὸ βάρος τοῦ μὲν τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΡΛ, τοῦ δὲ σχήματος τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ ὑγρὸν θὰ φέρηται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΛ. Δὲν θὰ ἠρεμῇ ἄρα τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τοῦ σχήματος τὰ μὲν πρὸς τὸ Η μέρη θὰ φέρωνται πρὸς τὰ κάτω, τὰ δὲ πρὸς τὸ Ε πρὸς τὰ ἄνω, καὶ τοῦτο θὰ γίνεται πάντοτε μέχρις ὅτου ἡ ΘΖ γίνῃ κατακόρυφος.

α′

Εἴ κά τι μέγεθος κουφότερον ἐὸν τοῦ ὑγροῦ ἀφεθῇ ἐς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἔχει τὸ δεδυκὸς μέγεθος ποτὶ τὸ ὅλον μέγεθος.



ἀφείσθω γάρ τι εἰς τὸ ὑγρὸν μέγεθος στερε| όν τὸ ΦΑ κουφότερον τοῦ ὑγροῦ ἐόν, | ἔστω δὲ τὸ μὲν δεδυκὸς αὐτοῦ τὸ Α, | τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Φ. δεικτέον, | ὅτι τὸ ΦΑ τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν | τὸ ἴσογκον τοῦτον ἔχει | τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ.

λελάφθω | γάρ τι τοῦ ὑγροῦ μέγεθος τὸ ΝΙ ἴσον | ὄγκον ἔχον τῷ ΦΑ, καὶ τῷ μὲν Φ ἴσον ἔσ| τω τὸ Ν, τῷ δὲ Α τὸ Ι, καὶ ἔτι τὸ μὲν | τοῦ ΦΑ μεγέθεος βάρος ἔστω τὸ Β, | τοῦ δὲ ΝΙ τὸ ΡΟ, τοῦ δὲ Ι τὸ Ρ· τὸ ΦΑ | ἄρα ποτὶ τὸ ΝΙ τοῦτον ἔχει τὸν λό| γον, ὃν τὸ Β ποτὶ τὸ ΡΟ. ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ΦΑ | μέγεθος ἐς τὸ ὑγρὸν ἀφείθη κου| φότερον ὑπάρχον τοῦ ὑγροῦ, δῆ| λον, ὡς ὁ τοῦ δεδυκότος μεγέ| θεος ὄγκος ἴσον βάρος ἔχει τῷ | ΦΑ
H 348 μεγέθει· δέδεικται γὰρ τοῦτο· | ἴσον ἄρα τὸ Β βάρος τῷ Ρ, ἐπειδὴ | τὸ μὲν Β τὸ βάρος ἐστὶ ὅλου τοῦ ΦΑ | μεγέθεος, τὸ δὲ Ρ τοῦ Ι ὑγροῦ, ὃ τῷ | μεγέθει ἐγένετο ἴσον τῷ ἴσον ὄγκον

᾿Αρχιμήδους ᾿Οχουμένων β′
(᾿Αρχιμήδους ῾Υδροστατικῆς βιβλίον 2)

1

᾿Εὰν ὑπάρχῃ μέγεθός τι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρόν, τὸ βάρος τοῦ μεγέθους πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βυθισθὲν μέγεθος πρὸς τὸ ὅλον μέγεθος.

Διότι ἂς ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν τὸ στερεὸν μέγεθος ΦΑ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐλαφρότερον ἴσου ὄγκου ὑγροῦ, ἔστω δὲ τὸ μὲν βυθισθὲν μέρος αὐτοῦ τὸ Α, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Φ. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ βάρος τοῦ ΦΑ πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ ΦΑ.

Διότι ἂς ληφθῇ μέγεθός τι τοῦ ὑγροῦ τὸ ΝΙ ἔχον ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ ΦΑ, καὶ ἔστω $\Phi = N$ καὶ $A = I$, καὶ προσέτι τὸ βάρος τοῦ μὲν μεγέθους ΦΑ ἔστω τὸ Β, τοῦ δὲ ΝΙ τὸ ΡΟ, τοῦ δὲ Ι τὸ Ρ· θὰ εἶναι ἄρα $\Phi A : NI = B : PO$. ᾿Αλλ᾿ ἐπειδὴ τὸ εἰς τὸ ὑγρὸν ἀφεθὲν μέγεθος ΦΑ εἶναι ἐλαφρότερον ἴσου ὄγκου ὑγροῦ, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἔχοντος ἴσον ὄγκον πρὸς τὸ ἐν βυθίσει μέγεθος θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ μεγέθους ΦΑ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ (1, 5)· εἶναι ἄρα τὸ βάρος $B = P$, ἐπειδὴ τὸ μὲν Β εἶναι τὸ βάρος ὅλου τοῦ μεγέθους ΦΑ, τὸ δὲ Ρ τοῦ ὑγροῦ Ι, τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ἐν βυθίσει εὑρισκομένου μεγέ-

| ἔχοντι τῷ δεδυκότι μεγέθει τῷ | Α· ἔχει ἄρα τὸ ΦΑ μέγεθος τῷ | βάρει ποτὶ τὸ ΝΙ, ὡς τὸ Ρ ποτὶ τὸ | ΡΟ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Ρ ποτὶ τὸ | ΡΟ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ Ι ποτὶ | τὸ ΙΝ καὶ τὸ Α ποτὶ τὸ ΦΑ· δέδεικται | ἄρα τὸ προτεθέν.

β′

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ | μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέ | χρι τοῦ ἄξονος, πάντα λόγον ἔχον | ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν εἰς | τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν | κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμέ | νον, ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται ὀρθόν. | ὀρθὸν δὲ λέγω καθεστακέναι τὸ | τοιοῦτο τμᾶμα, ὁπόταν τὸ ἀπο | τετμακὸς αὐτὸ ἐπίπεδον παρὰ | τὰν ἐπιφάνειαν ᾖ τοῦ ὑγροῦ.

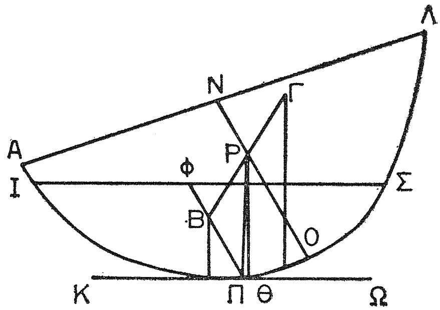
ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοει | δέος, οἷον εἴρηται, καὶ κείσθω | κεκλιμένον. δεικτέον, ὅτι οὐ με | νεῖ, ἀλλ’ ἀποκαταστασεῖται ὀρθόν.

τμαθέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ | διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ | ⟨ἐπίπεδον τὸ ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας⟩ | τοῦ ὑγροῦ τμάματος H 350 *ἔστω το | μὰ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου | τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμάματος | καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ | ΝΟ, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας | τομὰ ἁ ΙΣ. ἐπεὶ οὖν τὸ τμᾶμα οὐ | κ ἐστὶν ὀρθόν, οὐκ ἂν εἴη παράλ |ληλος ἁ ΑΛ τᾷ ΙΣ· ὥστε οὐ ποι | ήσει ὀρθὰν γωνίαν ἁ ΝΟ ποτὶ τὰν | ΙΣ. ἄχθω οὖν παράλληλος ἁ ἐ | φαπτομένα ἁ ΚΩ τᾶς | τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Π, καὶ | ἀπὸ τοῦ Π παρὰ τὰν ΝΟ ἄχθω ἁ ΠΦ· τέ | μνει δὴ ἁ ΠΦ δίχα τὰν ΙΣ· δέδει | κται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. τετμάσ | θω ἁ* θους Α· εἶναι ἄρα τὸ βάρος τοῦ ΦΑ : ΝΙ = Ρ : ΡΟ. Εἶναι δὲ Ρ : ΡΟ = Ι : ΙΝ = Α : ΦΑ· ἀπεδείχθη ἄρα τὸ ζητούμενον.

2

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς, ὅταν ὁ ἄξων του δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3 : 2 τῆς ἀποστάσεως μέχρι τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου (δηλ. τῆς παραμέτρου), εὑρίσκεται δὲ εἰς οἱανδήποτε σχέσιν κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρόν, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, ἐὰν τεθῇ κεκλιμένον δὲν θὰ παραμείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ ὀρθόν. Λέγω δὲ ὅτι τὸ τοιοῦτον τμῆμα ἀποκαθίσταται ὀρθόν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς αὐτοῦ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ.

Ἔστω τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς κεῖται κεκλιμένον. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ ὀρθόν.



Διότι ἀφοῦ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ παραβολοειδοῦς καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τμήματος ἔστω τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΝΟ, τῆς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὴ ἡ ΙΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα δὲν εἶναι ὀρθὸν δὲν θὰ εἶναι παράλληλος ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΙΣ· ὥστε ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΙΣ δὲν θὰ σχηματίσῃ ὀρθὴν γωνίαν. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν παράλληλος ἡ ἐφαπτομένη ΚΩ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ ἡ ΠΦ· τέμνει λοιπὸν ἡ ΠΦ τὴν ΙΣ εἰς τὸ μέσον· διότι τοῦτο ἔχει ἀπο-

ΠΦ, ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν | ΠΒ τᾶς ΒΦ, καὶ ἁ ΝΟ κατὰ τὸ Ρ τετμά | σθω, ὥστε καὶ τὰν ΟΡ τᾶς ΡΝ διπλασίαν | εἶμεν· ἐσσεῖται δὴ τοῦ μείζονος ἀπ | οτμάματος τοῦ στερεοῦ κέν | τρον τοῦ βάρεος τὸ Ρ, τοῦ δὲ κατὰ | τὰν ΙΠΟΣ τὸ Β· δέδεικται γὰρ | ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις, ὅτι παν |τὸς ὀρθογωνίου κωνοειδέος | τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βά |ρεός ἐστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος διῃ | ρημένου οὕτως, ὥστε τὸ ποτὶ τᾷ | κορυφᾷ τοῦ ἄξονος τμᾶμα | διπλάσιον εἶμεν τοῦ λοιποῦ. ἀ | φαιρεθέντος δὴ τοῦ κατὰ τὰν | ΙΠΟΣ τμάματος στερεοῦ ἀ | πὸ τοῦ ὅλου τοῦ λοιποῦ κέν | τρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς | ΒΓ εὐθείας· δέδεικται γὰρ τοῦ |το ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχα⟨νικῶν, ὅτι, εἴ κα μέγεθος ἀφαιρεθῇ μὴ⟩ | τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τοῦ βάρεος | τῷ ὅλῳ μεγέθει, τοῦ λοιποῦ τὸ | κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς | εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας | τὰ κέντρα τοῦ τε ὅλου μεγέθεος | καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐκβεβλημένας ἐπὶ τὰ αὐτά, | ἐφ' ἃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέ |θεός ἐστιν. ἐκβεβλήσθω δὴ ἁ ΒΡ ἐπὶ | τὸ Γ, καὶ ἔστω τὸ Γ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ | λοιποῦ μεγέθεος. ἐπεὶ οὖν ἁ ΝΟ | τᾶς μὲν ΟΡ ἡμιολία, τᾶς δὲ μέχρι | τοῦ ἄξονος οὐ μείζων ἢ ἡμιολί | α, δῆλον, ὅτι ἁ

H 352 *ΡΟ τᾶς μέχρι τοῦ | ἄξονος οὐκ ἐστὶ μείζων· ἡ ΠΡ ἄρα | ποτὶ τὰν ΚΩ γωνίας ἀνίσους | ποιεῖ, καὶ ἁ ὑπὸ τῶν ΡΠΩ γίνεται | ὀξεῖα· ἁ ἀπὸ τοῦ Ρ ἄρα κάθετος ἐπὶ | τὰν ΠΩ ἀγομένα μεταξὺ πεσεῖται | τῶν Π, Ω, πιπτέτω ὡς ἁ ΡΘ· ἁ ΡΘ | ἄρα ὀρθά ἐστιν ποτὶ τὸ . . . . κ . | . ος ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΣΙ, ὅ | ἐστιν ἐπὶ τᾶς ἐπιφανείας τοῦ | ὑγροῦ. ἄχθωσαν δή τινες ἀπὸ τῶν | Β, Γ παρὰ τὰν ΡΘ· ἐνεχθήσεται δὴ | τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τοῦ μεγέ | θεος εἰς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ | Γ ἀγομέναν κάθετον· ὑπόκειται γὰρ | ἕκαστον τῶν βαρέων εἰς τὸ κάτω | φέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν | διὰ τοῦ κέντρου* δειχθῆ εἰς τὰ κωνικὰ (Τετραγ. Παραβολῆς 1). Ἂς τμηθῆ ἡ ΠΦ, ὥστε νὰ εἶναι ΠΒ = 2ΒΦ, καὶ ἡ ΝΟ ἂς τμηθῆ κατὰ τὸ Ρ, ὥστε νὰ εἶναι καὶ ΟΡ = 2ΡΝ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μεγαλυτέρου ἀποτμήματος τοῦ στερεοῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, τοῦ δὲ κατὰ τὴν ΙΠΟΣ θὰ εἶναι τὸ Β· διότι ἔχει δειχθῆ εἰς τὰ περὶ Ἰσορροπιῶν (πραγματεία ἀπολεσθεῖσα), ὅτι παντὸς τμήματος παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος διῃρημένου οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ ἄξονος τμῆμα νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ λοιποῦ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ κατὰ τὴν ΙΠΟΣ στερεὸν τμῆμα ἀφαιρεθῆ ἀπὸ τοῦ ὅλου, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν, ὅτι, ἐὰν ἀφαιρεθῆ μέγεθος μὴ ἔχον τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὅλου μεγέθους, τοῦ λοιποῦ τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος, προεκβληθείσης πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθους (Μηχανικὰ 1, 8). Ἂς προεκβληθῆ λοιπὸν ἡ ΒΡ πρὸς τὸ Γ, καὶ ἔστω τὸ Γ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΝΟ τῆς μὲν ΟΡ εἶναι τὰ τρία δεύτερα, τῆς δὲ μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου) δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῶν τριῶν δευτέρων, εἶναι φανερόν, ὅτι ΡΟ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος· ἡ ΠΡ ἄρα μετὰ τῆς ΚΩ σχηματίζει γωνίας ἀνίσους, καὶ ἡ γωνία ΡΠΩ γίνεται ὀξεῖα· ἡ ἀπὸ τοῦ Ρ ἄρα ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΩ θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν Π, Ω. Ἂς πέσῃ ὡς ἡ ΡΘ· ἡ ΡΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ . . . . . . τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εἶναι ἡ ΣΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἂς ἀχθῶσι λοιπὸν εὐθεῖαί τινες ἀπὸ τῶν σημείων Β, Γ παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΘ· θὰ ἔλθῃ λοιπὸν τὸ μὲν μέρος τοῦ μεγέθους τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διὰ τοῦ Γ ἀγομένην κάθετον· διότι ὑπετέθη ὅτι ἕκαστον τῶν βαρῶν φέρε-

ἀγομέναν· τὸ δὲ | ἐν τῷ ὑγρῷ μέγεθος, ἐπεὶ κουφό | τερον γίνεται τοῦ ὑγροῦ, ἐνεχθή | σεται εἰς τὸ ἄνω κατὰ τὰν κάθε- | τον τὰν διὰ τοῦ Β ἀγομέναν. ἐπεὶ | δὲ οὐ κατὰ τὰν αὐτὰν κάθετον | ἀλλάλοις ἀντιθλίβονται, | ⟨οὐ μενεῖ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ μὲν κατὰ⟩ | τὸ Α εἰς τὸ ἄνω ἐνεχθήσεται, τὰ | δὲ κατὰ τὸ Λ εἰς τὸ κάτω, καὶ τοῦτο ἀεὶ ἐσσεῖται, | ἕως ἂν ὀρθὸν ἀποκατασταθῇ.

γ′

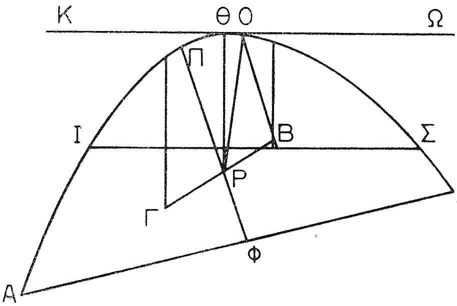
Ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κω | νοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ | μὴ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι | τοῦ ἄξονος, πάντα λόγον ἔχον | ποτὶ τὸ ὑγρὸν τῷ βάρει, ἀφεθὲν | εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, τε | θὲν κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλι | μένον, ἀλλ' ἀποκαταστασεῖται | οὕτως, ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ κα | τὰ κάθετον εἶμεν.

H 354 *ἀφείσθω γάρ τι | τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρόν, οἷον εἴρηται, | καὶ ἔστω αὐτοῦ ἁ βάσις ἐν τῷ ὑ | γρῷ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέ | δῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ το | μὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου | κώνου τομά, ἄξων δὲ τοῦ τμά- | ματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΠΦ, | τᾶς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ το | μὰ ἁ ΙΣ. ἐπειδὴ οὖν κεκλιμένον | κεῖται τὸ τμᾶμα, οὐκ ἐσσεῖται κα | τὰ κάθετον ὁ ἄξων· οὐκ ἄρα | ποιήσει ἁ ΠΦ ἴσας γωνίας | ποτὶ τὰν ΙΣ. ἄχθω δή τις | ⟨ἁ ΚΩ παρὰ τὰν ΙΣ ἐφαπτομένα κατὰ⟩ | τὸ Ο τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς, καὶ τοῦ μὲν | ΑΠΟΛ στερεοῦ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος | τὸ Ρ, τοῦ δὲ ΙΠΟΣ στερεοῦ τὸ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΒΡ ἐκβεβλήσ | θω, καὶ ἔστω κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Γ | τοῦ ΙΣΛΑ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἁ | μὲν ὑπὸ τᾶν ΡΟ, ΟΚ γωνία ὀξεῖ | α, ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὰν | ΚΩ ἀγομένα μεταξὺ πίπτουσα | τῶν* ται πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ κέντρου· τὸ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ μέγεθος, ἐπειδὴ εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἔλθῃ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ Β. Ἐπειδὴ δὲ δὲν ἀντιπιέζονται μεταξύ των κατὰ τὴν αὐτὴν κάθετον, δὲν θὰ ἰσορροπῇ τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὰ μὲν κατὰ τὸ Α θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ ἄνω, τὰ δὲ κατὰ τὸ Λ πρὸς τὰ κάτω, καὶ τοῦτο θὰ γίνεται πάντοτε, μέχρις ὅτου τὸ σχῆμα ἀποκατασταθῇ ὀρθόν.

3

Ὀρθὸν τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἔχῃ τὸν ἄξονα οὐχὶ μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ἔχον οἱονδήποτε λόγον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι ὅλη εἰς τὸ ὑγρόν, ἐὰν τεθῇ κεκλιμένον δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ οὕτως, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ εἶναι κατακόρυφος.

Διότι ἂς ἀφεθῇ τμῆμά τι εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἔστω ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς τὸ ὑγρόν, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΠΦ, τομὴ δὲ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΙΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα εὑρίσκεται κεκλιμένον, ὁ ἄξων δὲν θὰ εἶναι κατακόρυφος· δὲν θὰ σχηματίσῃ ἄρα ἡ ΠΦ ἴσας γωνίας πρὸς τὴν ΙΣ. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν ἡ ΚΩ παράλληλος πρὸς τὴν ΙΣ, ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Ο, καὶ τοῦ μὲν στερεοῦ ΑΠΟΛ ἔστω κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, τοῦ δὲ στερεοῦ ΙΠΟΣ ἔστω τὸ Β, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΡ ἂς προεκβληθῇ, καὶ ἔστω τοῦ ΙΣΛΑ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ μὲν γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ΡΟ, ΟΚ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΚΩ ἀγομένη κάθετος, *Κ, Ο· ἔστω ἁ ΡΘ. ἐὰν δὴ ἀπὸ | τῶν Γ, Β ἀχθέωντί τινες παρὰ τὰν ΡΘ, | τὸ μὲν ἐν τῷ ὑγρῷ ἀπολαφθὲν | ἐνεχθήσεται ἄνω κατὰ τὰν διὰ | τοῦ Γ ἀγομέναν, τὸ δ' ἐκτὸς τοῦ | ὑγροῦ κατὰ τὰν διὰ τοῦ Β ἀγομέ | ναν κάτω, καὶ οὐ μενεῖ τὸ ΑΠΟΛ | στερεὸν οὕτως ἔχον ἐν τῷ ὑγρῷ, | ἀλλὰ τὸ μὲν κατὰ τὸ Α ἄνω τὰν | φορὰν ἕξει, τὸ δὲ κατὰ τὸ Λ κάτω, | ἕως ἂν γένηται ἁ ΠΦ κατὰ κάθ | ετον.*



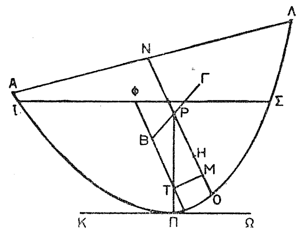
δ'

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὁπόταν H 356 *κουφότε | ρον ᾖ τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸν ἄξονα | ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέ |χρι τοῦ ἄξονος, ὅταν τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ἴσογκον ὑγρὸν μὴ ἐλάσ |⟨σονα λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει⟩ | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ | ἡμιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, | ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ | ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν | οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ | μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν | κεκλιμένον οὐ μενεῖ κεκλιμέ | νον, ἀλλὰ ἀποκαταστασεῖται | εἰς ὀρθόν.*

ἔστω τμᾶμα ὀρθο | γωνίου κωνοειδέος, οἷον εἴρη | ται, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, εἰ δυ | νατόν, ἔστω μὴ ὀρθόν, ἀλλὰ | κεκλιμένον, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ | ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρ | θῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ | ὑγροῦ τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ὅτι πίπτει μεταξὺ τῶν Κ, Ο· ἔστω ἡ ΡΘ. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τῶν Γ, Β ἀχθῶσι μερικαὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΘ, τὸ μὲν εἰς τὸ ὑγρὸν μένον τμῆμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ Γ, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν ἀγομένην διὰ τοῦ Β, καὶ δὲν θὰ μείνῃ τὸ ΑΠΟΛ στερεὸν εἰς τὸ ὑγρὸν ἔχον οὕτω πως, ἀλλὰ τὸ μὲν κατὰ τὸ Α θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὰ ἄνω, τὸ δὲ κατὰ τὸ Λ θὰ ἔχῃ πρὸς τὰ κάτω, μέχρις ὅτου ἡ ΠΦ γίνῃ κατακόρυφος.

4

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ὅταν κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ ὑγρὸν τὸ ἔχον ἴσον ὄγκον, δὲν ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, ἐὰν τεθῇ κεκλιμένον δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ εἰς θέσιν κατακόρυφον.



Ἔστω τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὡς ἐλέχθη, καὶ ὅταν ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν ἔστω, ὅτι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, δὲν εἶναι κατακόρυφον, ἀλλὰ κεκλιμένον, ἐὰν τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, τοῦ μὲν τμήματος τομὴ *sit rectanguli coni sectio* [De Conoid. 11 a] *quae APOL, axis autem portionis et diameter ⟨sectionis⟩ quae NO, superficiei autem humidi sectio sit IS. si igitur portio non est recta, non faciet quae NO ad IS angulos aequales* [σ. 296, 11 κ.ἑ.]. *ducatur autem quae KΩ contingens sectionem rectanguli coni penes P, aequedistans autem ipsi IS, a P autem aequedistanter ipsi ON ducatur quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et erit solidi quidem APOL centrum R, eius autem, quod intra humidum, centrum B, et copuletur quae BR et educatur ad G, et sit solidi, quod supra humidum, centrum grauitatis G* [cfr. De plan. aequil. I, 8]. *et* H 357 *quoniam quae NO ipsius quidem RO est emiolia* [σ. 296, 20 κ.ἑ.], *eius autem, quae usque ad axem, est maior quam emiolia, palam, quod quae RO est maior quam quae usque ad axem. sit igitur quae RM aequalis ei, quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM. quoniam igitur fit quae quidem NO ipsius RO emiolia, quae autem HO ipsius OM, et reliqua quae NH reliquae, scilicet RM, emiolia est;*[1]*) ipsi HO igitur maior quam emiolius est axis eius, quae usque ad axem, scilicet RM.*[2]*) et quoniam supponebatur portio ad humidum in grauitate non minorem proportionem habens illa, quam habet tetragonum, quod ab excessu, quo axis* H 358 *est maior quam emiolius eius, quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, palam, quod non minorem proportionem habet portio ad humidum in grauitate illa proportione, quam habet tetragonum quod ab HO ad id quod ab NO. quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet demersa ipsius portio ad totam soli-*

1) NH = NO ∸ HO = $^3/_2$ PO ∸ $^3/_2$ OM (Eucl. I κοιν. ἔνν. 3) = $^3/_2$ (PO ∸ OM) = $^3/_2$ PM.

2) NO = NH + HO = $^3/_2$ PM + HO, et PM dimidia parametrus est (Apollon. Con. V, 13) siue recta usque ad axem ducta (ZMP. XXV p. 51 nr. 13).

ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἡ ΝΟ, τομὴ δὲ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΙΣ. Ἐὰν ἡ τομὴ δὲν εἶναι κατακόρυφος, αἱ εὐθεῖαι ΝΟ καὶ ΙΣ δὲν θὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας. Ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΙΣ παράλληλος ἡ εὐθεῖα ΚΩ, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτηται τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Π, καὶ ἀπὸ τοῦ Π ἂς ἀχθῇ ἡ ΠΦ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΝ καὶ ἂς ληφθῶσιν τὰ κέντρα βάρους, καὶ ἔστω τοῦ στερεοῦ ΑΠΟΛ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ρ, καὶ τοῦ ἐν βυθίσει κέντρον τοῦ βάρους τὸ Β, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ἑνοῦσα αὐτὰ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΡ μέχρι τοῦ Γ, ὥστε τοῦ ὑπὲρ τὸ ὑγρὸν στερεοῦ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Γ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $\text{ΝΟ} = \frac{3}{2}\,\text{ΡΟ}$ ἡ ὁποία εἶναι τρία δεύτερα μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος (παραμέτρου) εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΡΟ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου). Ἔστω ἡ ΡΜ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἡ ΟΜ = 2ΗΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ $\text{ΝΟ} = \frac{3}{2}\,\text{ΡΟ}$, καὶ $\text{ΗΟ} = \frac{3}{2}\,\text{ΟΜ}$, εἶναι ἄρα ἡ ὑπόλοιπος $\text{ΝΗ} = \frac{3}{2}\,\text{ΡΜ}$. Εἶναι ἄρα ὁ ἄξων μεγαλύτερος τῆς εὐθείας ΗΟ κατὰ τρία δεύτερα τῆς παραμέτρου, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν ΡΜ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἄξονος κατὰ τρία τέταρτα τῆς παραμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου τοῦ ὑγροῦ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου $\text{ΗΟ}^2 : \text{ΝΟ}^2$. Ἀλλὰ ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ

dam portionem; demonstratum est enim hoc [prop. I]*; sed quam habet proportionem demersa portio ad totam, hanc habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO; demonstratum est enim in his, quae de conoidalibus, quod, si a rectangulo conoidali duae portiones qualitercunque productis planis abscindantur, portiones adinuicem eandem habebunt proportionem quam tetragona quae ab axibus ipsorum* [De conoid. 24]. *non minorem ergo proportionem habet tetragonum quod a PF ad tetragonum quod ab NO quam tetragonum quod ab HO ad tetragonum quod ab NO; quare quae PF non est minor quam HO* [Eucl. V, 7 - 8], *neque quae BP quam MO;*[1] *si igitur ab M ipsi NO recta ducatur, cadet inter B et P. quoniam igitur quae quidem PF est aequedistanter diametro, quae autem MT est perpendicularis ad diametrum, et quae RM aequalis ei quae usque ad axem, ab R ad T copulata et educta faciet angulos rectos ad contingentem secundum P;*[2] *quare et ad IS et ad eam quae per IS superficiem humidi faciet aequales angulos.*[3] *si autem per B, G ipsi RT aequedistantes ducantur, anguli recti erunt facti ad superficiem humidi, et quod quidem in humido absumitur solidum conoidalis, sursum*
H 359 *feretur secundum eam quae per B aequedistantem ipsi RT* [σ. 284, 29], *quod autem extra humidum absumptum deorsum feretur in humidum secundum productam per G aequedistantem ipsi RT, et per totum idem erit, donec utique conoidale rectum restituatur.*

---

1) Nam BP = $^2/_3$ PF (p. 350, 11 sq.), et MO = $^2/_3$ HO.

2) ZMP. XXV p. 54 nr. 21.

3) Eucl. I, 29; nam IS || KΩ.

ἐν βυθίσει τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὅλου τμήματος εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου τοῦ ὑγροῦ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ· καὶ ὁ λόγος $\Pi\Phi^2$: NO^2 εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἐν βυθίσει τμήματος πρὸς τὸ ὅλον τμῆμα· διότι εἰς τὸ περὶ Κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ἓν παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμηθῇ εἰς δύο τμήματα διὰ τυχόντος ἐπιπέδου, τὰ τμήματα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀξόνων των (θ. 24). Ὁ λόγος λοιπὸν $\Pi\Phi^2$: NO^2 δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ λόγου HO^2 : NO^2· δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΠΦ μικροτέρα τῆς ΗΟ, οὔτε ἡ ΒΠ μικροτέρα τῆς ΜΟ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν ΝΟ θὰ πέσῃ αὕτη μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Π ⟨ἔστω κατὰ τὸ Τ⟩. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΠΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ ἡ ΜΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἡ εὐθεῖα ΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα Ρ, Τ προεκβαλλομένη θὰ σχηματίζῃ γωνίας ὀρθὰς πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Π· θὰ σχηματίζῃ ἄρα καὶ πρὸς τὴν ΙΣ καὶ τὴν δι' αὐτῆς διερχομένην ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίας ἴσας. Ἐὰν λοιπὸν διὰ τῶν σημείων Β, Γ φέρωμεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΡΤ θὰ σχηματίζωσιν αὗται μετὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ γωνίας ὀρθὰς καὶ τὸ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εὑρισκόμενον τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διὰ τοῦ Β διερχομένην παράλληλον πρὸς τὴν ΡΤ, καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ εὑρισκόμενον τμῆμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὴν διὰ τοῦ Γ διερχομένην παράλληλον πρὸς τὴν ΡΤ· καὶ τοῦτο θὰ συνεχισθῇ μέχρις ὅτου τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς λάβῃ θέσιν κατακόρυφον.

V.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando leuior existens humido habuerit axem maiorem quam emiolium eius quae usque ad axem, si ad humidum in grauitate non maiorem proportionem habeat illa, quam habet excessus, quo maius est tetragonum quod ab axe tetragono quod ab excessu, quo axis est maior quam emiolius eius quae usque ad axem, ad tetragonum quod ab axe, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius tota sit in humido, posita inclinata non manet inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem sit.

dimittatur enim in humidum aliqua portio, qualis dicta est, et sit basis ipsius tota in humido, secta autem ipsa plano per axem recto ad superficiem humidi erit sectio rectanguli coni sectio [De conoid. 11 a], *et sit quae APOL, axis autem ⟨portionis⟩ et diameter sectionis quae NO, superficiei autem humidi sectio quae IS. et quoniam non est axis secundum perpendicularem, non faciet quae NO ad IS angulos aequales. ducatur autem quae KΩ contingens sectionem APOL secundum P aequedistans ipsi IS et per P ipsi NO aequedistans quae PF, et accipiantur centra grauitatum, et sit ipsius quidem APOL centrum R, eius autem quod extra humidum B, et copulata quae BR educatur ad G, et sit G centrum grauitatis solidi absumpti in humido*
H 360 [cfr. De plan. aequil. I, 8], *et accipiatur quae RM aequalis ei quae usque ad axem, quae autem OM dupla ipsius HM, et alia fiant consimiliter superiori* [prop. IV σ. 304, 1]. *quoniam igitur supponitur portio ad humidum in grauitate*

5

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), καὶ ὅταν ὁ λόγος τοῦ βάρους του πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ δὲν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς παραμέτρου, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι καθ' ὁλοκληρίαν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ τεθὲν κεκλιμένον δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἀλλὰ θὰ ἀποκατασταθῇ εἰς ὀρθὸν (κατακόρυφον).

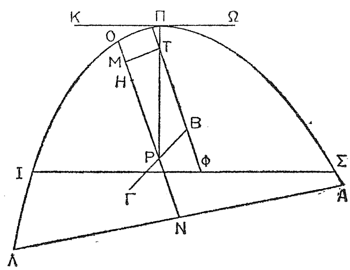
Ἔστω τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν νὰ ἔχῃ τὴν βάσιν του ὅλην ἐντὸς αὐτοῦ, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, τοῦ τμήματος τομὴ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἡ ΝΟ καὶ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΙΣ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων δὲν εἶναι κατακόρυφος, ἡ ΝΟ δὲν θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΙΣ γωνίας ἴσας. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΩ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΙΣ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Π ἂς ἀχθῇ ἡ ΠΦ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ καὶ ἂς ληφθῶσι τὰ κέντρα βάρους καὶ ἔστω Ρ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ στερεοῦ ΑΠΟΛ, Β τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΡ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Γ, καὶ ἔστω Γ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐν βυθίσει εὑρισκομένου τμήματος, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΡΜ ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἄξονος (ἴση πρὸς τὴν παράμετρον), καὶ ἔστω ΟΜ $=$ 2ΗΜ καὶ αἱ λοιπαὶ κατασκευαὶ ἂς γίνουν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμή-

non maiorem proportionem habens proportione, quam habet excessus, quo maius est tetragonum quod ab NO tetragono quod ab HO, ad tetragonum quod ab NO, sed quam proportionem habet in grauitate portio ad humidum aequalis molis, hanc proportionem habet demersa ipsius portio ad totum solidum (demonstratum est enim hoc in primo theoremate), non maiorem ergo proportionem habet demersa magnitudo portionis ad totam portionem, quam sit dicta proportio; quare non maiorem proportionem habet tota portio ad eam quae extra humidum portionem, quam habet tetragonum quod ab NO ad tetragonum quod ab HO.[1]) *habet autem tota portio ad portionem quae extra humidum eandem proportionem, quam habet tetragonum quod ab NO ad id quod a PF* [De conoid. 24]*; non maiorem ergo proportionem habet quod ab NO ad id quod a PF, quam quod ab NO ad id quod ab HO. non minor ergo fit quae PF quam quae OH; quare nec quae PB quam MO* [σ. 306 ὑποσ. 1]. *quae ergo ab M producitur ipsi RO ad rectos angulos, concidet ipsi BP inter P et B; concidat secundum T. et quoniam in rectanguli coni sectione quae PF est aequedistanter diametro RO, quae autem MT perpendicularis super diametrum, quae autem RM aequalis ei quae usque ad axem, palam, quod quae RT educta facit angulos rectos ad KPΩ; quare*

1) Quoniam $ISAL : APOL \lesseqgtr NO^2 \div HO^2 : NO^2$ siue $APOL : ISAL \gtreqless NO^2 : NO^2 \div HO^2$, erit conuertendo (Eucl. V, 19 coroll., Pappus VII, 48 p. 686)

$$APOL : APOL \div ISAL \lesseqgtr NO^2 : HO^2.$$

ματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ δὲν εἶναι μεγαλύτερος τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς ΝΟ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΝΟ, ($NO^2 - HO^2 : NO^2$), καὶ ὅτι τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ ἔχει λόγον, οἷον τὸ ἐν βυθίσει εὑρισκόμενον τμῆμα πρὸς τὸ ὅλον τμῆμα, ὅπερ ἀπεδείχθη εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα, θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ ἐν βυθίσει τμήματος πρὸς τὸ ὅλον τμῆμα ὄχι μεγαλύτερος πρὸς τὸν λεχθέντα· δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ λόγος ὅλου τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα, πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ΝΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΟ. Ἀλλὰ ὁ λόγος τοῦ ὅλου τμήματος πρὸς τὸ

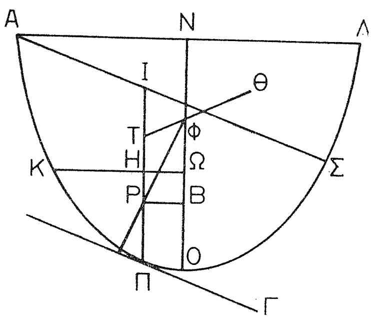


ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ΝΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΠΦ· δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερος ὁ λόγος $NO^2 : \Pi\Phi^2$ τοῦ λόγου $NO^2 : HO^2$ καὶ ἄρα ἡ ΠΦ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΟΗ, καὶ ἡ ΠΒ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΜΟ. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τοῦ σημείου Μ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΡΟ αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν ΒΠ μεταξὺ τῶν σημείων Π καὶ Β εἴς τι σημεῖον ἔστω Τ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν παραβολὴν ἡ ΠΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΡΟ, καὶ ἡ ΜΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ ἡ εὐθεῖα ΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΡΤ προεκτεινομένη θὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΚΠΩ γωνίας

et ad IS. quae ergo RT est perpendicularis ad superficiem
H 361 *humidi, et per signa B, G aequedistanter ipsi RT productae erunt perpendiculares ad superficiem humidi; quae quidem igitur extra humidum portio deorsum feretur in humidum secundum productam per B perpendicularem, quae autem intra humidum sursum feretur secundum perpendicularem quae per G, et non manet solida portio APOL, sed intra humidum erit motum, donec utique quae NO fiat secundum perpendicularem.*

VI.

Recta portio rectanguli conoidalis, quando humido leuior existens axem habuerit maiorem quidem quam hemiolium, minorem autem, quam ut hanc habeat proportionem ad eam quae usque ad axem, quam habent quindecim ad quattuor, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius contingat humidum, numquam stabit inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum contingat humidum.



sit portio, qualis dicta est, et dimissa in humidum consistat, sicut ostensum est, ita ut basis ipsius secundum unum signum contingat humidum, secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi sectio superficiei portionis sit quae APOL rectanguli coni sectio [De conoid. 11 a], ἴσας καὶ πρὸς τὴν ΙΣ ὁμοίως. Εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΡΤ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΤ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Τὸ μέρος ἄρα τοῦ τμήματος τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω, ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης διὰ τοῦ Β, καὶ τὸ μέρος τοῦ τμήματος τὸ ἐν βυθίσει θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ Γ. Τὸ τμῆμα ἄρα ΑΠΟΛ δὲν θὰ μείνῃ ἐν ἠρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κινηθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ μέχρις ὅτου ἡ εὐθεῖα ΝΟ γίνῃ κατακόρυφος.

6

Ἐὰν ὀρθὸν τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς παραμέτρου, ἀλλὰ ὁ λόγος τούτου πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς παραμέτρου νὰ εἶναι μικρότερος τῶν $\frac{15}{4}$, καὶ ἐὰν τὸ τμῆμα τούτου εἶναι βυθισμένον εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, τότε τοῦτο οὐδέποτε θὰ λάβῃ τοιαύτην κλίσιν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ μόνον κατὰ ἓν σημεῖον.

Ἔστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ βάσις του νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ κατὰ ἓν μόνον σημεῖον καὶ ἡ τομὴ τούτου δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΑΣ καὶ ὁ ἄξων τοῦ τμήματος καὶ ἡ διά-

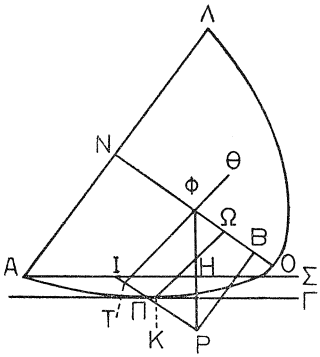
superficiei autem humidi quae AS, axis autem portionis et diameter ⟨sectionis⟩ sit quae NO, et secetur secundum F quidem ita, ut quae OF sit dupla ipsius FN, secundum Ω autem ita, ut quae NO ad FΩ habeat proportionem, quam quindecim ad quattuor, et ipsi NO adducatur quae ΩK. quae autem NO maiorem proportionem habet ad FΩ quam ad eam quae usque ad axem. sit quae FB aequalis ei quae usque ad axem, et ducatur quae quidem PC aequedistanter ipsi AS contingens sectionem APOL secundum P, quae autem PI aequedistanter ipsi NO; secet autem quae PI prius ipsam KΩ. quoniam igitur in portione APOL con-
H 362 *tenta a recta et a sectione rectanguli coni quae quidem KH aequedistanter ipsi AL, quae autem PI aequedistanter diametro secta ipsa KΩ, quae autem AS aequedistanter contingenti secundum P, necessarium est, ipsam PI aut eandem proportionem habere ad PH, quam habet quae NΩ ad ΩO, aut maiorem proportionem; demonstratum est enim hoc per sumpta.*[1]*) quae autem ΩN est emiolia ipsius ΩO;*[2]*) et quae IP ergo aut emiolia est ipsius HP aut maior quam emiolia; quae ergo PH ipsius HI aut dupla est aut minor quam dupla.*[3]*) sit autem quae PT ipsius TI dupla; centrum ergo grauitatis eius quod in humido est signum T*

1) H. e. διὰ λημμάτων, quae sine dubio huic libro ab ipso Archimede adiuncta erant, sed nunc perierunt. de re u. Nizzius p. 238 sq.

2) Fecimus enim $FO = 2\,FN$ siue $FN : NO = 5 : 15$. erat autem $F\Omega : NO = 4 : 15$; addendo igitur
$$FN + F\Omega : NO = 9 : 15 = N\Omega : NO,$$
unde (Eucl. V, 7 coroll.; 17) $O\Omega : N\Omega = 6 : 9$.

3) Quoniam $PI : PH \geqq N\Omega : O\Omega = 3 : 2$, erit $HI = PI \div PH \geqq {}^1/_2\,PH$ siue $PH \leqq 2\,HI$.

μετρος τῆς παραβολῆς ἔστω ἡ ΝΟ. Ἂς τμηθῇ ἡ ΝΟ κατὰ τὸ σημεῖον μὲν Φ, ὥστε ΟΦ = 2ΦΝ κατὰ τὸ Ω ὅμως, ὥστε ΝΟ : ΦΩ = 15 : 4 καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΩΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΝΟ. Ὡς ἐκ τούτου ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΦΩ ἔχει λόγον μεγαλύτερον ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει πρὸς τὴν παράμετρον. Ἔστω ἡ ΦΒ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΠΓ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΣ καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ εἰς τὸ σημεῖον Π καὶ ἐκ τοῦ Π ἡ ΠΙ παράλ-



ληλος πρὸς τὴν ΝΟ καὶ ἔστω πρότερον, ὅτι ἡ ΠΙ τέμνει τὴν ΚΩ (κατὰ τὸ Η). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ καὶ εὐθείας (ΑΛ) ἔχει ἀχθῇ ἡ ΚΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΛ καὶ ἡ ΠΙ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, τέμνεται ὑπὸ τῆς ΚΩ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΣ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τὸ σημεῖον Π, θὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς ΡΙ πρὸς τὴν ΡΗ ἴσος ἢ μεγαλύτερος πρὸς τὸν λόγον ΝΩ : ΩΟ· διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῇ διὰ τῶν Λημμάτων· θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΩΝ τὰ τρία δεύτερα τῆς ΩΟ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΙΠ ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΗΠ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΠΗ θὰ εἶναι διπλασία ἢ μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΗΙ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΠΤ εἶναι διπλασία τῆς ΤΙ· θὰ εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Τ τὸ κέντρον τοῦ βάρους [p. 350, 13 sq.]. *et copulata quae TF educatur, et sit centrum grauitatis eius quod extra humidum G* [cfr. De plan. aequil. I, 8], *et a B ipsi NO recta quae BR. quoniam igitur est quae quidem PI aequedistanter diametro NO, quae autem BR perpendicularis super diametrum, quae autem FB aequalis ei quae usque ad axem, palam, quod quae FR edu-* H 363 *cta aequales facit angulos ad contingentem sectionem APOL secundum P; quare et ad AS et ad superficiem aquae. ductis autem per T, G aequedistanter ipsi FR erunt et ipsae perpendiculares ad superficiem aquae, et magnitudo quidem intra humidum absumpta ex solido APOL sursum feretur secundum eam quae per T perpendicularem, quae autem extra humidum deorsum feretur in humidum secundum eam quae per G perpendicularem. reuoluetur ergo solidum APOL, et basis ipsius non tanget superficiem humidi secundum unum signum.*

si autem quae PI non secuerit lineam KΩ, sicut in secunda figura descriptum est, manifestum, quod signum T, quod est centrum grauitatis demersae portionis, cadet inter P et I, et reliqua similiter demonstrabuntur.

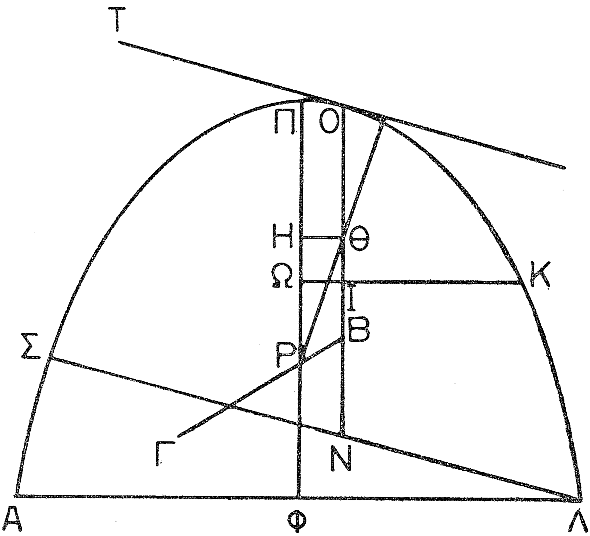
ζʹ

H 364 Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνί | ου κωνοειδέος, ὅταν τοῦ ὑγροῦ κου | φότερον ᾖ καὶ τὸν ἄξονα ἔχῃ | μείζονα μὲν ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ | ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε | λόγον ἔχειν ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ | ἄξονος, ὃν τὰ ι̅ε̅ ποτὶ δ̅, ἀφεθὲν εἰς | τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν ὅ | λαν εἶμεν ἐν τῷ ὑγρῷ, οὐδέποτε | κατασταθήσεται οὕτως, ὥστε τὰν τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ εὑρισκομένου τμήματος. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΤΦ καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Θ καὶ ἔστω τὸ Θ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΡ κάθετος πρὸς τὴν ΝΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΠΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΝΟ, καὶ ἡ ΒΡ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον αὐτήν, καὶ ἡ εὐθεῖα ΦΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν παράμετρον, ἡ εὐθεῖα ΦΡ ἐκβληθεῖσα θὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ εἰς τὸ σημεῖον Π γωνίας ἴσας καὶ πρὸς τὴν ΑΣ, τουτέστι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων Τ, Θ παράλληλοι πρὸς τὴν ΦΡ, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ μὲν μέγεθος ἐκ τοῦ στερεοῦ ΑΠΟΛ τὸ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φέρηται πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ σημείου Τ, τὸ δὲ μέγεθος τὸ εὑρισκόμενον ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φέρηται πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου τῆς ἀχθείσης ἐκ τοῦ σημείου Θ. Θὰ κλίνῃ ἄρα τὸ στερεὸν ΑΠΟΛ καὶ ἡ βάσις του δὲν θὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον.

Ἔστω τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα ΠΙ δὲν τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΚΩ, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σημεῖον Τ, τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος, θὰ πέσῃ μεταξὺ τῶν σημείων Π καὶ Ι καὶ τὰ λοιπὰ ἀποδειχθήσονται ὁμοίως.

7

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν εἶναι ἐλαφρότερον τοῦ ὑγροῦ καὶ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον μὲν κατὰ τὰ τρία δεύτερα τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), μικρότερον δέ, ὥστε νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ὃν ἔχουν τὰ δεκαπέντε πρὸς τέσσαρα, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ὅλη ἡ βάσις νὰ εἶναι εἰς τὸ ὑγρόν, *βά | σιν αὐτοῦ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ | ἐπιφανείας, ἀλλ' ὥστε ὅλαν εἶμεν | ἐν τῷ ὑγρῷ μηδὲ καθ' ἓν σαμεῖον ἁπτομέναν τᾶς | ἐπιφανείας.*

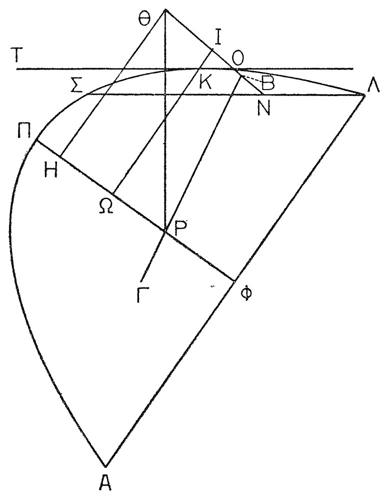


ἔστω τμᾶμα, | οἷον εἴρηται, καὶ ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑ | γρόν, καθάπερ ἐρρέθη, καθε | στακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐ | τοῦ ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα | νείας. δεικτέον, ὅτι οὐ μενεῖ, ἀλλὰ | ἀνακλιθήσεται οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐ- | τοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ | ὑγροῦ ἐπιφανείας.

τμαθέντος | γὰρ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ | τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν τομὰ | ἔστω ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου | τομά, ἔστω δὲ καὶ τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπι | φανείας τομὰ ἁ ΣΛ, ἄξων δὲ | ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος | ἁ ΠΦ, πάλιν δὲ τεμνέσθω ἁ ΠΦ κατὰ | μὲν τὸ Ρ, ὥστε διπλασίαν εἶμεν | τὰν ΡΠ τᾶς ΡΦ, κατὰ δὲ τὸ Ω, ὥστε | τὰν ΠΦ ποτὶ οὐδέποτε θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ἀλλὰ θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ εἶναι βυθισμένη ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ καὶ νὰ μὴ ἐφάπτηται οὐδενὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ἔστω τμῆμα, ὡς περιεγράφη, καὶ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, νὰ ἀποκατασταθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι δὲν θὰ παραμείνῃ εἰς τὴν θέσιν αὐτήν , ἀλλὰ θὰ ἀνακλιθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται οὐδενὸς σημείου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Διότι ἀφοῦ αὐτὸ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, τομὴ ἔστω ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἔστω δὲ καὶ τῆς



ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τομὴ ἡ ΣΛ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος ἔστω ἡ ΠΦ, πάλιν δὲ ἂς τμηθῇ ἡ ΠΦ κατὰ μὲν τὸ Ρ, ὥστε νὰ εἶναι ΡΠ $=$ 2ΡΦ, κατὰ δὲ τὸ Ω, ὥστε νὰ εἶναι ΠΦ : ΡΩ $=$

τὰν ΡΩ λόγον ἔχειν, | ὃν τὰ $\overline{\iota\varepsilon}$ ποτὶ τὰ $\overline{\delta}$, καὶ ἁ ΩΚ ὀρθὰ | H 366 *ἄχθω τᾷ ΠΦ· ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων | ἁ ΡΩ τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. | ἀπολελάφθω οὖν τᾷ μέχρι τοῦ | ἄξονος ἴσα ἁ ΡΗ, καὶ ἁ μὲν ΤΟ | ἄχθω ἐφαπτομένα τᾶς τομᾶς | κατὰ τὸ Ο παράλληλος ἐοῦσα τᾷ | ΣΛ, ἁ δὲ ΝΟ τᾷ ΠΦ, τεμνέτω δὲ | ἁ ΝΟ τὰν ΚΩ πρότερον κατὰ τὸ Ι. | ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, | ὅτι ἁ ΝΟ ἤτοι ἡμιολία τᾶς ΟΙ ἢ μεί|ζων ἢ ἡμιολία· γίνεται δὴ ἁ ΟΙ τᾶς | ΙΝ ἐλάσσων ἢ διπλασία. ἔστω δὴ | ἁ ΟΒ διπλασία τᾶς ΒΝ, καὶ | κατεσκευάσθω τὰ αὐτά· ὁμοίως δὴ | δειχθήσεται ἁ ΡΘ ὀρθὰς γωνίας | ποιοῦσα ποτὶ τὰν ΤΟ καὶ ποτὶ τὰν | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἀχθεῖσαι παρὰ τὰν ΡΘ καθέτοι | ἐσσοῦνται ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν. | κατενεχθήσεται οὖν τὸ μὲν ἐκτὸς | τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ | τὰν διὰ τοῦ Β κάθετον, τὸ δ' ἐν τῷ | ὑγρῷ ἀνενεχθήσεται κατὰ τὰν διὰ τοῦ |Γ· φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπικλιθήσεται τὸ | στερεόν, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μη|δὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ | ἐπιφανείας, ἐπειδὴ νῦν καθ' ἓν σα|μεῖον ⟨ἁπτόμενον ἐπὶ τὸ κάτω φέρε⟩| ται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ.*

φανερὸν δέ, | ὅτι, κἂν ἁ ΟΝ μὴ τέμνῃ τὰν ΩΚ, | ταὐτὰ δειχθήσεται.

H 368 *η′*

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὅταν τὸν ἄξονα | ἔχῃ μείζονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι | τοῦ ἄξονος, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε | ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦτον | ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\varepsilon}$ ποτὶ | τὰ $\overline{\delta}$, ὅταν τὸ βάρος ποτὶ τὸ ὑγρὸν | ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ὑπερο|χᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμι-

15 : 4, καὶ ἡ ΩΚ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΦ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΡΩ μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου). Ἂς ληφθῇ λοιπὸν πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παράμετρον) ἴση ἡ ΡΗ, καὶ ἡ μὲν ΤΟ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Ο καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΣΛ, ἡ δὲ ΝΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΠΦ, ἂς τέμνη δὲ ἡ ΝΟ τὴν ΚΩ πρῶτον κατὰ τὸ Ι. Ἀποδεικνύεται ὁμοίως πρὸς τὸ προηγούμενον, ὅτι ἡ ΝΟ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τῆς ΟΙ ἢ μεγαλυτέρα τῶν τριῶν δευτέρων· γίνεται λοιπὸν ἡ ΟΙ $<$ 2ΙΝ. Ἔστω ἡ ΟΒ $=$ 2ΒΝ καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτά· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΡΘ σχηματίζει ὀρθὰς γωνίας πρὸς τὴν ΤΟ καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, καὶ ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἀχθεῖσαι παράλληλοι πρὸς τὴν ΡΘ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Θὰ φερθῇ λοιπὸν τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τὴν διὰ τοῦ Β κάθετον, τὸ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διὰ τοῦ Γ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ στερεὸν θὰ κλίνῃ, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον, ἐπειδὴ τώρα ἐφαπτόμενον εἰς ἓν σημεῖον φέρεται πρὸς τὰ κάτω πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τὸ Λ.

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ αὐτὰ ἀποδεικνύονται καὶ ἂν ἡ ΟΝ δὲν τέμνῃ τὴν ΩΚ.

8

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), μικρότερον δὲ ἀπὸ τοῦ νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παράμετρον) τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ 15 : 4, ὅταν τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρὸν ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος (πα-

| ὅλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, ποτὶ | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, | ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν | μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, οὔτ' ἐς | ὀρθὸν ἀποκαταστασεῖται οὔτε μενεῖ | κεκλιμένον, πλὴν ὁπόταν ὁ ἄξων | αὐτοῦ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν ποι|ῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ μελλούσᾳ λέ|γεσθαι.

ἔστω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, | καὶ ἁ ΒΔ ἴσα τῷ ἄξονι, καὶ ἁ μὲν | ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλασία, ἁ δὲ ΚΡ ἴσα | τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, ἔστω δὲ καὶ ἁ | μὲν ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, ἁ δὲ ΤΔ τᾶς | ΚΡ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ | βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω | τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ τετράγωνον ποτὶ | τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, ἔστω δὲ καὶ ἁ Φ | ⟨διπλασία τᾶς Χ. δῆλον οὖν, ὅτι⟩ | ἁ ΦΧ ποτὶ τὰν ΔΒ ἐλάσσονα λόγον | ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΤΒ ποτὶ τὰν ΒΔ· ἔστι | γὰρ ἁ ΤΒ ἁ ὑπεροχά, ᾇ
H 370 μείζων ἢ ἡμιόλιος | ὁ ἄξων τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος· | ἐλάσσων ἄρα ἁ ΦΧ τᾶς ΒΤ· ὥσ|τε καὶ ἁ Φ τᾶς ΒΡ. ἔστω δὴ τᾷ Φ ἴσα ἁ | ΡΨ, καὶ τᾷ ΒΔ ὀρθὰ ἄχθω ἁ ΨΕ | δυναμένα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπὸ τῶν | ΚΡ, ΒΨ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΒΕ. δει|κτέον, ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς | τὸ ὑγρόν, ὡς εἴρηται, καταστασεῖται | κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεῖν | γωνίαν ἴσαν τᾷ ΕΒΨ.

ἀφείσθω | γάρ τι ἐς τὸ ὑγρὸν τμᾶμα, καὶ ἁ | βάσις αὐτοῦ μὴ ἁπτέσθω τᾶς τοῦ | ὑγροῦ ἐπιφανείας, καί, εἰ δυνατόν, | μὴ ποιείσθω ὁ ἄξων αὐτοῦ ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσαν | τᾷ Β, ἀλλὰ μείζω πρῶτον.

τμα|θέντος δὴ τοῦ τμάματος ἐπιπέ|δῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφά|νειαν τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἁ ΑΠΟΛ | ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐν δὲ τᾷ | τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείᾳ ἁ ΞΣ, ἄξων | δὲ καὶ διάμετρος [τοῦ τμήματος] | ἁ ΝΟ.

ραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, οὔτε ἀποκαθίσταται ὀρθόν, οὔτε θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς ἐκείνην, ἡ ὁποία θὰ λεχθῇ μελλοντικῶς.

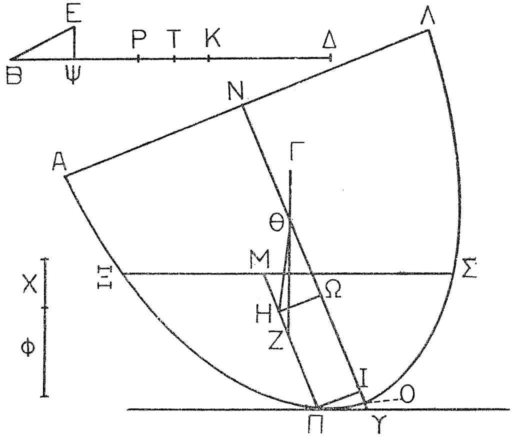
Ἔστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἡ ΒΔ ἴση πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἡ μὲν $ΒΚ = 2ΚΔ$, ἡ δὲ ΚΡ ἴση πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παράμετρον), ἔστω δὲ καὶ ἡ μὲν $ΤΒ = (3 : 2)\, ΒΡ$, ἡ δὲ $ΤΔ = (3 : 2)\, ΚΡ$, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἂς ἔχῃ $ΦΧ^2 : ΔΒ^2$, ἔστω δὲ καὶ ἡ $Φ = 2Χ$. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι $ΦΧ : ΔΒ < ΤΒ : ΒΔ$· διότι ἡ ΤΒ εἶναι ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος τῶν $(3 : 2)$ ὁ ἄξων, τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (παραμέτρου)· εἶναι ἄρα $Φ + Χ < ΒΤ$ (Εὐκλ. V, 10)· ὥστε καὶ ἡ $Φ < ΒΡ$. Ἔστω λοιπὸν $Φ = ΡΨ$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΨΕ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, ὥστε $ΨΕ^2 = \frac{1}{2} ΚΡ \cdot ΒΨ$, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Πρέπει νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, θὰ κλίνῃ, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΕΒΨ.

Διότι ἂς ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν τμῆμά τι, καὶ ἡ βάσις αὐτοῦ ἂς μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καί, εἰ δυνατόν, ἂς μὴ σχηματίζῃ ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Β, ἀλλὰ πρῶτον μεγαλυτέραν.

Ἀφοῦ τμηθῇ λοιπὸν τὸ τμῆμα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, εἰς δὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ τομὴ ἔστω ἡ ΞΣ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τοῦ τμήματος ἡ ΝΟ. Ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν

ἄχθω δὴ καὶ ἁ μὲν ΠΥ παρὰ τὰν ΞΣ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ | τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΜ παρὰ | τὰν ΝΟ, ἁ δὲ ΠΙ κάθετος ἐπὶ τὰν | ΝΟ, καὶ τᾷ ΒΡ ἔστω ἴσα ἁ ΟΩ, τᾷ δὲ ΡΚ ἁ ΩΘ, καὶ ὀρθὰ ἁ ΩΗ τῷ | ἄξονι. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὁ ἄξων | τοῦ τμάματος ποτὶ τὰν ἐπιφά | νειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν μεί | ζονα τᾶς Β, δῆλον, ὅτι τοῦ ΠΙΥ | τριγώνου ἁ ποτὶ τῷ Υ γωνία | μείζων τᾶς Β· μείζονα δὴ λόγον | ἔχει τὸ
H 372 *τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς | ΠΙ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς | ΙΥ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς | ΕΨ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ | τᾶς ΨΒ. ἀλλ' ὃν μὲν λόγον ἔχει τὸ | ἀπὸ τᾶς ΠΙ τετράγωνον ποτὶ | τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ, τοῦτον ἔχει ἁ ΚΡ | ποτὶ ΥΙ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΨ ποτὶ τὸ τε- | τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ, τοῦτον | ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ ποτὶ τὰν ΨΒ· | μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΚΡ ποτὶ τὰν ΥΙ ἤπερ ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ | ποτὶ τὰν ΨΒ· ἐλάσσων ἄρα ἢ διπλασία | ἁ ΥΙ τᾶς ΨΒ. τᾶς δὲ ΟΙ διπλασία ἁ ΙΥ· ἐλάσσων ἄρα | ἁ ΟΙ τᾶς ΨΒ· ὥστε ἁ ΙΩ μείζων | ἐστὶ τᾶς ΨΡ. ἁ δὲ ΨΡ ἴσα ἐστὶ τᾷ | Φ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἁ ΙΩ τᾶς Φ. | καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται τὸ τμᾶμα | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἔχειν λό | γον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς | ΦΧ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς | ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον | ἔχει τὸν λόγον τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ | ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, ὃν δὲ τὸ δεδυ | κὸς ποτὶ τὸ ὅλον, τοῦτον ἔχει τὸ τε |τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΜ ποτὶ | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ, | ὃν ἄρα λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ ποτὶ τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, τοῦτον | ἔχει τὸν λόγον τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΠ ποτὶ τὸ τετρά |γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΝ· ἴσα ἄρα | ἐστὶν ἁ ΦΧ τᾷ ΠΜ. ἁ δὲ ΠΗ ἐδείχθη | μείζων ἐοῦσα τᾶς Φ· δῆλον οὖν, | ὅτι ἁ*

ΠΥ παράλληλος πρὸς τὴν ΞΣ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΜ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ, ἡ δὲ ΠΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ΝΟ, καὶ ἔστω ἡ ΒΡ = ΟΩ, ἡ δὲ ΡΚ = ΩΘ, καὶ ἡ ΩΗ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη ὅτι ὁ ἄξων τοῦ τμήματος σχηματίζει πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς Β, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ πρὸς τὸ Υ γωνία τοῦ τριγώνου ΠΙΥ



εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Β· εἶναι λοιπὸν $\text{ΠΙ}^2 : \text{ΙΥ}^2 > \text{ΕΨ}^2 : \text{ΨΒ}^2$. Ἀλλὰ

$\text{ΠΙ}^2 : \text{ΙΥ}^2 = \text{ΚΡ} : \text{ΥΙ}$, καὶ $\text{ΕΨ}^2 : \text{ΨΒ}^2 = \frac{1}{2}\,\text{ΚΡ} : \text{ΨΒ}$· εἶναι ἄρα

$\text{ΚΡ} : \text{ΥΙ} > \frac{1}{2}\,\text{ΚΡ} : \text{ΨΒ}$· εἶναι ἄρα ἡ $\text{ΥΙ} < 2\text{ΨΒ}$ (Εὐκλ. V, 10). Εἶναι δὲ ἡ $\text{ΙΥ} = 2\text{ΟΙ}$· εἶναι ἄρα ἡ $\text{ΟΙ} < \text{ΨΒ}$· ὥστε ἡ $\text{ΙΩ} > \text{ΨΡ}$. Εἶναι δὲ ἡ $\text{ΨΡ} = \Phi$· εἶναι ἄρα ἡ $\text{ΙΩ} > \Phi$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ τμήματος ὑπετέθη, ὅτι πρὸς τὸ ὑγρὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ $(\Phi + \text{Χ})^2 : \text{ΒΔ}^2$, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ ἐν βυθίσει μέρος αὐτοῦ πρὸς τὸ ὅλον τμῆμα, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἐν βυθίσει τμῆμα πρὸς τὸ ὅλον, τοῦτον ἔχει τὸ $\text{ΠΜ}^2 : \text{ΟΝ}^2$, θὰ εἶναι ἄρα $(\Phi + \text{Χ})^2 : \text{ΒΔ}^2 = \text{ΜΠ}^2 : \text{ΟΝ}^2$ (Εὐκλ. V, 9)· εἶναι ἄρα ἡ $\Phi + \text{Χ} = \text{ΠΜ}$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι ἡ $\text{ΠΗ} > \Phi$· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ $\text{ΠΜ} < \frac{3}{2}\,\text{ΠΗ}$, ἡ δὲ $\text{ΠΗ} > 2\,\text{ΗΜ}$.

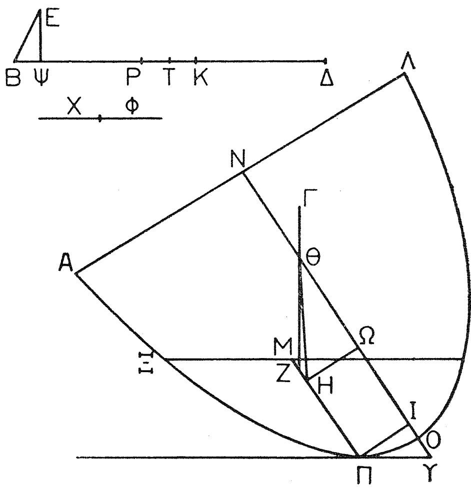
ΠΜ ἐλάσσων ἢ ἡμιολία ἐστὶν | τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ τᾶς ΗΜ μείζων | ἢ διπλασίων. ἔστω οὖν ἁ ΠΖ δι | πλασίων τᾶς ΖΜ· ἐσσεῖται δὴ τὸ | μὲν Θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ στε | ρεοῦ, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ· τοῦ δὴ | λοιποῦ μεγέθεος τὸ κέντρον | τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ΖΘ εὐ | θείας ἐπιζευχθείσας καὶ H 374 *ἐκβληθείσας. ἐκ | βεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ· δειχθήσ | εται δὴ ὁμοίως ἁ ΘΗ κάθ | ετος ἐοῦσα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν, | καὶ τὸ μὲν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα | ἐνεχθήσεται εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ | κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ ἀγμέναν κάθε | τον ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνει |αν, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐνεχθήσεται | εἰς τὸ ἐντὸς κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ· οὐ | μενεῖ δὴ τὸ τμᾶμα κατὰ τὰν ὑπο | κειμέναν κλίσιν.*

οὐδὲ μὴν εἰς τὸ ὀρ | θὸν ἀποκαταστασεῖται. δῆλον δὲ | διὰ τούτων· ἐπειδὴ τῶν ἀγμένων | διὰ τῶν Ζ, Γ καθέτων ἁ μὲν διὰ | τοῦ Ζ ἀγμένα τᾶς ΓΖ ἐπὶ τὰ αὐτὰ | μέρεα πίπτει, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Λ, ἁ δὲ | διὰ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α, δῆλον, | ὅτι διὰ τὰ προειρημένα τὸ μὲν Ζ κέν | τρον ἄνω οἰσθήσεται, τὸ δὲ Γ κάτω· | ὥστε τοῦ ὅλου μεγέθεος τὰ | μέρεα τὰ ἀπὸ τοῦ Α κάτω οἰσθήσεται. |

τοῦτο δ' ἦν εὔχρηστον ποτὶ τὸ δεῖξαι. |

Ὑποκείσθω πάλιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ | αὐτά, ὁ δὲ ἄξων τοῦ τμάματος ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιεί | ⟨τω γωνίαν ἐλάσσονα τᾶς ποτὶ | τῷ Β· ἐλάσσονα δὴ λόγον⟩ | ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΙ | ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΙΥ ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς | ΕΨ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΨΒ· καὶ ἁ ΚΡ | ἄρα ποτὶ τὰν ΥΙ ἐλάσσονα λόγον | ἔχει ἤπερ ἁ ἡμίσεια τᾶς ΚΡ

Ἔστω λοιπὸν ἡ ΠΖ = 2ΖΜ· θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ μὲν Θ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ στερεοῦ, τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ μέρους αὐτοῦ κέντρον βάρους θὰ εἶναι τὸ Ζ· τοῦ λοιποῦ δὲ μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΘ ἐπιζευχθείσης καὶ προεκβληθείσης. Ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ Γ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΘΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, καὶ ὅτι τὸ μὲν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα θὰ φερθῇ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὴν διὰ τοῦ Ζ ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ κατὰ τὴν διὰ τοῦ Γ· δὲν θὰ παραμείνῃ λοιπὸν τὸ τμῆμα κατὰ τὴν ὑποτεθεῖσαν κλίσιν.



Ἀλλὰ δὲν θὰ ἀποκατασταθῇ οὔτε εἰς τὸ ὀρθόν. Εἶναι δὲ τοῦτο φανερὸν διὰ τῶν ἑξῆς· ἐπειδὴ τῶν καθέτων αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἀχθῆ διὰ τῶν Ζ, Γ ἡ μὲ ἀχθεῖσα διὰ τοῦ Ζ πίπτει πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΓΖ, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ Λ, ἡ δὲ διὰ τοῦ Γ πρὸς τὰ αὐτὰ πρὸς τὸ Α, εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ τὰ προλεχθέντα, τὸ μὲν κέντρον (βάρους) Ζ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω, τὸ δὲ Γ πρὸς τὰ κάτω· ὥστε τοῦ ὅλου μεγέθους τὰ ἀπὸ τοῦ Α μέρη θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω.

Τοῦτο δὲ ἦτο εὔκολον νὰ δειχθῇ.

Ἂς ὑποτεθῶσι πάλιν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, ὁ δὲ ἄξων τοῦ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἂς σχηματίζῃ γωνίαν μικροτέραν τῆς πρὸς τὸ Β· εἶναι λοιπὸν $ΠΙ^2 : ΙΥ^2 < ΕΨ^2 : ΨΒ^2$· εἶναι

ποτὶ τὰν ΨΒ. | μείζων ἄρα ἐσσεῖται ἢ διπλασίων ἁ | ΙΥ τᾶς ΨΒ· ἁ ἄρα ΩΙ ἐλάσσων τᾶς ΨΡ. | ἐσσεῖται οὖν καὶ ἁ ΠΗ
H 376 *ἐλάσσων τᾶς Φ. | ἁ δὲ ΜΠ τᾷ ΦΧ ἴσα· δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἢ | ἡμιολία ἁ ΠΜ τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ ἐ | λάσσων ἢ διπλασίων τᾶς ΗΜ. ἔστω | οὖν ἁ ΠΖ τᾶς ΖΜ διπλασία. πάλιν | οὖν τοῦ μὲν ὅλου κέντρον ἐσσεῖται τοῦ | βάρεος τὸ Θ, τοῦ δ' ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Ζ· | ἐπιζευχθείσας δὴ τᾶς ΖΘ καὶ ἐκ | βληθείσας ἐσσεῖται τὸ ⟨κέντρον τοῦ βά | ρεος τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τᾶς | ἐκβληθείσας. ἔστω τὸ Γ, καὶ ἄχθωσαν κα⟩ | θέτοι ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνει | αν διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ τὰν ΗΘ· δῆ | λον οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ τὸ ὅλον τμᾶ | μα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄξο | να ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ | ποιεῖν γωνίαν μείζονα, ἇς νῦν ποιεῖ.*

ἐπεὶ οὖν οὔτε γωνίαν μεί | ζονα τᾶς Β ποιοῦντος τοῦ ἄξο- νος | ποτὶ τὸ ὑγρὸν σταθήσεται τὸ τμᾶ | μα οὔτ' ἐλάσσονα, φανερόν, ὅτι | ταλικαύταν ποιοῦντος γωνίαν | σταθήσεται· οὕτως γὰρ ἁ ΙΟ ἐσσεῖ |ται ἴσα τᾷ ΨΒ καὶ ἁ ΩΙ τᾷ ΨΡ καὶ τᾷ Φ | ἁ ΠΗ· ἡμιολία ἄρα ἐσσεῖται ἁ ΜΠ | τᾶς ΠΗ, ἁ δὲ ΠΗ
H 378 *τᾶς ΗΜ διπλασία. | τὸ Η ἄρα τοῦ ἐν τῷ ὑγρῷ | βάρεος κέν- τρον ἐστίν· ὥστε κατὰ | τὰν αὐτὰν κάθετον ἀνενεχθήσε | ται, καὶ τὸ ἐκτὸς ἐς τὸ κάτω ἐνε | χθήσεται. μενεῖ ἄρα· ἀντωθοῦν- ται | γὰρ ὑπ' ἀλλάλων.*

θ'

Τὸ ὀρθὸν | τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, | ὅταν τὸν ἄξονα ἔχῃ μείζονα μὲν | ἢ ἡμιόλιον τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, | ἐλάσσονα δὲ ἢ ὥστε τοῦτον ἔχειν τὸν | λόγον, ὃν ἔχει τὰ $\overline{\iota\varepsilon}$ *ποτὶ* $\overline{\delta}$, *καὶ | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν μείζονα λό | γον ἔχῃ* ἄρα καὶ $KP : \Upsilon I < \frac{1}{2} KP : \Psi B$. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ $I\Upsilon > 2\Psi B$· θὰ εἶναι ἄρα $\Omega I < \Psi P$. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ $\Pi H < \Phi$. Εἶναι δὲ $M\Pi = \Phi + X$· εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι ἡ $\Pi M > \frac{3}{2} \Pi H$ καὶ $\Pi H < 2HM$. Ἔστω λοιπὸν ἡ $\Pi Z = 2ZM$. Πάλιν λοιπὸν τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ μέρους τὸ Ζ· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΘ καὶ προεκβληθῇ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς προεκβληθείσης. Ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ διὰ τῶν Ζ, Γ, παράλληλοι πρὸς τὴν ΗΘ· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ ὅλον τμῆμα δὲν θὰ παραμείνῃ ἐν ἠρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ, ὥστε ὁ ἄξων του πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν μεγαλυτέραν, ἐκείνης τὴν ὁποίαν σχηματίζει τώρα.

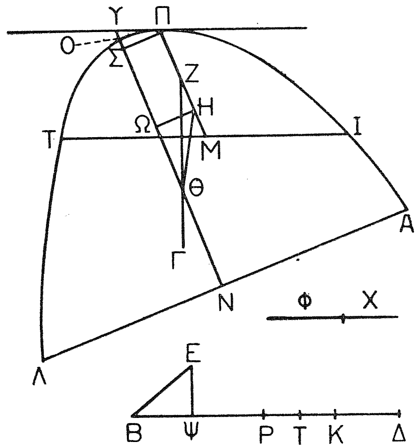
Ἐπειδὴ λοιπὸν οὔτε ὅταν σχηματίζῃ ὁ ἄξων πρὸς τὸ ὑγρὸν γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς Β, οὔτε ὅταν σχηματίζῃ γωνίαν μικροτέραν θὰ σταθῇ (ὀρθὸν) τὸ τμῆμα, εἶναι φανερόν, ὅτι ὅταν σχηματίζῃ ἴσην γωνίαν θὰ σταθῇ· θὰ εἶναι λοιπὸν κατὰ ταῦτα ἡ $IO = \Psi B$ καὶ ἡ $\Omega I = \Psi P$ καὶ ἡ $\Phi = \Pi H$· θὰ εἶναι ἄρα ἡ $M\Pi = \frac{3}{2} \Pi H$ καὶ ἡ $\Pi H = 2\,HM$. Τὸ Η ἄρα εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος· ὥστε τοῦτο θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον, καὶ τὸ ἐκτὸς θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω. Θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα· διότι μεταξύ των ἀντιπιέζονται.

9

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα τοῦ ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδοῦς, ὅταν ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον μὲν τῶν τριῶν δευτέρων τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος ἀποστάσεως (τῆς παραμέτρου), μικρότερον δὲ τοῦ λόγου 15 : 4, καὶ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχῃ μεγαλύτερον λότοῦ, ὃν ἔχει ἁ ὑπεροχά, ᾇ μεῖ | ζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος τετρά | γωνον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς | ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡ | μιόλιος τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, | ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξ | ονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν | ἐν τῷ ὑγρῷ, τεθὲν κεκλιμένον οὔ | τε κατασταθήσεται, ὥστε τὸν ἄξο | να αὐτοῦ κατὰ κάθετον εἶμεν, οὔτε | μενεῖ κεκλιμένον, πλὴν ὅταν ὁ | ἄξων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν | τοῦ ὑγροῦ ποιῇ γωνίαν ἴσαν τᾷ | λαφθείσᾳ ὁμοίως, ᾇ πρότερον.

ἔστω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ κείσ | θω ἁ ΔΒ ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάμα | τος, καὶ ἁ μὲν ΒΚ τᾶς ΚΔ διπλα | σία ἔστω, ἁ δὲ ΚΡ ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ | ἄξονος, ἁ δὲ ΤΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ, | ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτῳ ἁ | ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τε | τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ | τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς | ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ | ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἔστω δὲ ἁ Φ | διπλασία τᾶς Χ. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ ὑ | περοχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγω | νον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τᾶς | ΒΤ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ
H 380 τᾶς | ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· ἔστι γὰρ ἁ ΒΤ ἁ ὑπεροχά, ᾇ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος | ὁ ἄξων τοῦ τμάματος τᾶς μέχρι τοῦ | ἄξονος. μείζονι ἄρα ὑπερέχει τὸ | τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ ἀ |πὸ τᾶς ΦΧ ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀ |πὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετραγώνου τοῦ | ἀπὸ τᾶς ΒΤ· ὥστε ἁ ΦΧ ἐλάσσων ἐσ |τὶ τᾶς ΒΤ· καὶ ἁ Φ ἄρα τᾶς ΒΡ. |

ἔστω οὖν τᾷ Φ ἴσα ἁ ΡΨ, καὶ ἁ ΨΕ | ὀρθὰ ἄχθω τᾷ ΒΔ δυναμένα | τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ὑ |πὸ τᾶν ΚΡ, ΨΒ. φαμί, ὅτι τὸ τμᾶ |μα ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν | βάσιν γον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερον τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος τοῦ τετραγώνου τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι ὅλη ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, τεθὲν κεκλιμένον οὔτε θὰ ἀποκατασταθῇ, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ εἶναι κατακόρυφος, οὔτε θὰ μείνῃ κεκλιμένον, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ὁμοίως, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον.



Ἔστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΔΒ ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἡ μὲν $BK = 2K\Delta$, ἡ δὲ ΚΡ ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν μέχρι τοῦ ἄξονος (τὴν παράμετρον), ἡ δὲ $TB = \frac{3}{2} BP$, νὰ εἶναι δὲ βάρος τοῦ τμήματος : βάρος ὑγροῦ $= [B\Delta^2 - (\Phi + X)^2] : B\Delta^2$, ἔστω δὲ ἡ $\Phi = 2X$. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι $B\Delta^2 - BT^2 : B\Delta^2 < [B\Delta^2 - (\Phi + X)^2] : B\Delta^2$· διότι ἡ ΒΤ εἶναι ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τοῦ τμήματος τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου) κατὰ τρία δεύτερα. Εἶναι ἄρα $B\Delta^2 - (\Phi + X)^2 > B\Delta^2 - BT^2$ (Εὐκλ. V,10)· ὥστε εἶναι $\Phi + X < BT$ καὶ συνεπῶς $\Phi < BP$.

Ἔστω λοιπὸν $\Phi = P\Psi$ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΨΕ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, ὥστε $\Psi E^2 = \frac{1}{2} KP \cdot \Psi B$. Λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ἀφεθὲν εἰς αὐτοῦ ὅλαν εἶμεν ἐν τῷ | ὑγρῷ, καταστασεῖται οὕτως, | ὥστε τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν | ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν | ποιεῖν ἴσαν τᾷ Β.

ἀφείσθω [μὲν] | γὰρ τὸ τμᾶμα, ὡς εἴρηται, ἐς τὸ | ὑγρόν, καὶ μὴ ποιείτω ὁ ἄξων ποτὶ | τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσαν τᾷ | Β, ἀλλὰ μείζονα πρότερον.

τμα | θέντος δὴ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ | ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ | ἔστω τοῦ τμάματος τομὰ ἁ ΑΠ |ΟΛ ὀρθογωνίου κώνου τομά, | τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἁ | ΤΙ, ἄξων δὲ [τῆς τομῆς] | καὶ διάμετρος ἁ ΝΟ, καὶ τετμάσ | θω κατὰ τὰ Ω, Θ, ὡς καὶ πρότερον, ἄχθω δὲ καὶ ἁ μὲν ΥΠ | παρὰ τὰν ΤΙ ἐφαπτομένα | τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΜ

H 382 *aequedistanter ipsi NO, quae uero PS perpendicularis super axem. quoniam igitur axis portionis ad superficiem humidi facit angulum maiorem angulo B, erit utique et angulus qui sub SYP maior angulo B* [Eucl. I, 29]*; tetragonum ergo quod a PS ad tetragonum quod ab SY habet proportionem maiorem quam tetragonum quod a ΨE ad tetragonum quod a ΨB* [σ. 324, 6 κ.ἑ.]. *ergo et quae KR ad SY habet proportionem maiorem quam medietas ipsius KR ad ΨB; minor ergo quae SY quam dupla ipsius ΨB* [Eucl. V, 10]. *et quae SO quam ΨB minor;*

μείζων ἄρα ἁ ΣΩ τᾶς ΡΨ καὶ ἁ | ΠΗ τᾶς Φ. καὶ ἐπεὶ τὸ τμᾶμα τῷ βά | ρει λόγον ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν ἁ | ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστιν τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τετρα|γώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ | τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ὃν δὲ | λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ | τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον | τὸ δεδυκὸς αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὅλον, | δῆλον, ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ | δεδυκὸς αὐτοῦ μέρος ποτὶ τὸ ὅλον τμᾶμα, | ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ τε | τράτὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶναι ὅλη ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, θὰ λάβη τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζη πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Β.

Διότι ἂς ἀφεθῇ μέν, ὡς ἐλέχθη, τὸ τμῆμα εἰς τὸ ὑγρόν, καὶ ἂς μὴ σχηματίζη ὁ ἄξων πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν Β, ἀλλὰ πρῶτον μεγαλυτέραν.

Ἀφοῦ δὲ τμηθῇ αὐτὸ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τοῦ τμήματος τομὴ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, τῆς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΤΙ, ἄξων δὲ τῆς παραβολῆς καὶ διάμετρος ἡ ΝΟ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη κατὰ τὰ Ω, Θ, ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν ΥΠ παράλληλος πρὸς τὴν ΤΙ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΜ

παράλληλος πρὸς τὴν ΝΟ καὶ ἡ ΡΣ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ἄξων τοῦ τμήματος σχηματίζει μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς Β, ἡ γωνία ΣΥΠ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Β (Εὐκλ. Ι, 29)· θὰ εἶναι ἄρα ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τῆς ΠΣ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΣΥ μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ τετραγώνου τῆς ΨΕ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΨΒ· καὶ ὁ λόγος ἄρα τῆς ΚΡ πρὸς ΣΥ θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τοῦ ἡμίσεος τῆς ΚΡ πρὸς τὴν ΨΒ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΥ μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ΨΒ (Εὐκλ. V, 10) καὶ ἡ ΣΟ μικροτέρα τῆς ΨΒ.

Εἶναι ἄρα ἡ $ΣΩ > ΡΨ$ καὶ ἡ $ΠΗ > Φ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ τμήματος : τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ $= ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2 : ΒΔ^2$, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ ἐν βυθίσει τμῆμα αὐτοῦ πρὸς τὸ ὅλον, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἐν βυθίσει τμῆμα αὐτοῦ θὰ ἔχη τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ὅλον τμῆμα, ὃν ἔχει $ΒΔ^2 - (Φ + Χ)^2 : ΒΔ^2$· θὰ ἔχη λοιπὸν καὶ τὸ ὅλον

γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τοῦ τε |τραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΦΧ, ποτὶ τὸ | τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΒΔ· ἕξει οὖν καὶ | τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς | τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ | ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΦΧ. ὃν δὲ λόγον | ἔχει τὸ ὅλον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἐκτὸς | τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς | ΝΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ ΠΜ· ἴσα ἄρα ἁ ΜΠ | τᾷ ΦΧ. ἁ δὲ ΠΗ δέδεικται μεί| ζων τᾶς Φ· ἁ ἄρα ΜΗ ἐλάσσων ἐστὶν | τᾶς Χ· μείζων ⟨ἄρα ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ΠΗ⟩ | τᾶς ⟨ΗΜ. ἔστω δὴ ἁ ΠΖ διπλασία τᾶς ΖΜ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα
H 384 ἁ ΖΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ· ἔσται οὖν τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐκτὸς⟩ τοῦ ὑγροῦ τὸ | ⟨Ζ, τοῦ δὲ ἐντὸς ἐν τᾷ ΘΓ· ἔστω δὲ τὸ⟩ Γ. ⟨δειχθήσεται δὴ ὁμοίως τοῖς πρότερον ἁ ΘΗ⟩ κάθετος ἐπὶ | ⟨τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν Ζ, Γ παρὰ τὰν ΘΗ⟩ ἀγόμεναι κα| θέτοι καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὰν| ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. κατενεχθήσεται | ἄρα τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμᾶμα | ἐς τὸ κάτω κατὰ τὰν διὰ τοῦ Ζ, τὸ δὲ ἐντὸς | κατὰ τὰν διὰ τοῦ Γ ἀνενεχθή|σεται· οὐ μενεῖ οὖν τὸ ὅλον τμᾶ|μα ἀκλινές. οὐδὲ μὴν καταστρα| φήσεται, ὥστε κατὰ κάθετον | εἶμεν τὸν ἄξονα ἐπὶ τὰν τοῦ ὑ| γροῦ ἐπιφάνειαν, ἐπειδὴ τὰ ἐπὶ | ⟨τὰ αὐτὰ τῷ Λ κάτω, τὰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐ|τὰ τῷ Α ἐς τὰ ἄνω οἰσθήσεται,⟩ | διὰ τὰ ἀνάλογον τοῖς λεγομέ| νοις ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ.

ἐὰν δὲ | ὁ ἄξων ποτὶ τὸ ὑγρὸν ποιῇ γωνί| αν ἐλάσσονα τᾶς Β, ὁμοίως τοῖς | πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐ με| νεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ κλιθήσεται, | ἕως ἂν ὁ ἄξων ποιῇ γωνίαν | ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ | ἴσαν τᾷ Β.

ι′

Τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδέος, ὅταν κουφότε |ρον ὂν τοῦ ὑγροῦ τὸν ἄξονα ἔ |χῃ μείζονα ἢ ὥστε λόγον τμῆμα πρὸς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ λόγον, ὃν ἔχει τὸ $ΒΔ^2 : (Φ + Χ)^2$ (Εὐκλ. V, 7 πόρ., 19 πόρ.). Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ὅλον τμῆμα πρὸς τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα, τοῦτον ἔχει τὸ $ΝΟ^2 : ΠΜ^2$ (Περὶ Κωνοειδ. 24)· εἶναι ἄρα ἡ $ΜΠ = Φ + Χ$ (Εὐκλ. V, 9). Ἀπεδείχθη δὲ ἡ $ΠΗ > Φ$· εἶναι ἄρα ἡ $ΜΗ < Χ$· εἶναι ἄρα ἡ $ΠΗ > 2$ ΗΜ. Ἔστω λοιπὸν ἡ $ΠΖ = 2ΖΜ$, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΖΘ ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ Γ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν ὅλου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Ζ, τοῦ δὲ ἐντὸς τμήματος ἐπὶ τῆς ΘΓ· ἔστω δὲ τὸ Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΘΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ ἀγόμεναι διὰ τῶν Ζ, Γ παράλληλοι πρὸς τὴν ΘΗ εἶναι κάθετοι καὶ αὐταὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Θὰ φερθῇ λοιπὸν τὸ μὲν ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὴν διὰ τοῦ Ζ κάθετον, τὸ δὲ ἐντὸς θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω κατὰ τὴν διὰ τοῦ Γ· δὲν θὰ μείνῃ λοιπὸν τὸ ὅλον τμῆμα ἀκλινές. Ἀλλ' οὐδὲ θὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἐπειδὴ τὰ πρὸς τὸ Λ θὰ φερθῶσι πρὸς τὰ κάτω, τὰ δὲ πρὸς τὸ Α πρὸς τὰ ἄνω, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν ἀναλόγως λεχθέντων εἰς τὸ προηγούμενον.

Ἐὰν δὲ ὁ ἄξων σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μικροτέραν τῆς Β, ἀποδεικνύεται καθ' ὅμοιον τρόπον ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι τὸ τμῆμα δὲν θὰ ἰσορροπήσῃ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ, μέχρις ὅτου ὁ ἄξων σχηματίσῃ γωνίαν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἴσην πρὸς τὴν Β.

10

Τὸ ὀρθὸν τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἐλαφρότερον ὂν τοῦ ὑγροῦ ἔχῃ τὸν ἄξονα μεγαλύτερον ἐκείνου, καθ'

ἔχειν | ποτὶ τὰν μέχρι τοῦ ἄξονος [τοῦ], | ὃν ἔχει τὰ ιε ποτὶ τὰ δ, ἀφεθὲν | εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὁτὲ | μὲν ὀρθὸν καταστασεῖται, ὁτὲ δὲ | κεκλιμένον, καὶ ποτὲ μὲν οὕ |τω κεκλιμένον, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι | τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπι-
H 386 *φανείας, καὶ | τοῦτο ἐν δισσοῖς κλιμάτεσσι ποιή |σει, ποτὲ δὲ οὕτως κεκλιμένον | καταστασεῖται, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ κατὰ πλείονα τόπον | βρέχεσθαι, ποτὲ δὲ οὕτως, ὥστε | τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν | ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα |⟨νείας· ὃν δὲ λόγον ἔχοντος τῷ⟩ | βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἕκαστα αὐ |τῶν ἐσσεῖται, νῦν δηλωθήσεται. |*

ἔστω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, καὶ | τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ | ὀρθῷ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν | τοῦ ὑγροῦ τομὰ ἔστω ἐν τᾷ ἐπιφα |νείᾳ ἁ ΑΠΟΛ ὀρθογωνίου κώνου | τομά, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος | τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, τετμάσθω δὲ | ἁ ΒΔ κατὰ τὸ Κ, ὥστε διπλασίαν | εἶμεν τὰν ΒΚ τᾶς ΚΔ, κατὰ δὲ | τὸ Τ, ὥστε τὰν ΔΒ ποτὶ τὰν ΚΤ | λόγον ἔχειν, ὡς τὰ ιε ποτὶ δ· δῆλον | οὖν, ὅτι ἁ ΚΤ μείζων ἐστὶ τᾶς μέ | χρι τοῦ ἄξονος. ἔστω οὖν ἁ ΚΡ | ἴσα τᾷ μέχρι τοῦ ἄξονος, τᾶς | δὲ ΒΡ ἡμίσεια ἔστω ἁ ΡΣ· ἔστι δὴ καὶ | ἁ ΣΒ ἡμιολία τᾶς ΒΡ. ἐπιζευχθείσας | δὲ τᾶς ΑΒ καὶ τᾶς ΤΕ ὀρθᾶς ἀχθεί |σας ἄχθω ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΒΔ, καὶ | πάλιν τᾶς ΑΒ δίχα τμαθείσας κα | τὰ τὸ Θ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΔ ἁ ΘΗ, | καὶ λελάφθω ὀρθογωνίου κώνου | τομὰ ἁ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὰν | ΕΖ καὶ ἁ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὰν | ΘΗ, ὥστε ὅμοια εἶμεν τὰ
H 388 *ΑΕΙ, | ΑΘΔ τμάματα τῷ ΑΒΛ τμάμα | τι· γραφήσεται δὴ ἁ ΑΕΙ κώνου | τομὰ διὰ τοῦ Κ, ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ ὀρθὰ ἀχθεῖσα τᾷ ΒΔ τεμεῖ τὰν ΑΕΙ. | τεμνέτω κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ | τῶν Υ, Γ ἄχθωσαν παρὰ τὰν ΒΔ | αἱ ΥΧ, ΓΝ, τεμνέτωσαν δὲ αὗται | τὰν ΑΘΔ τομὰν κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἄ |χθωσαν δὲ*

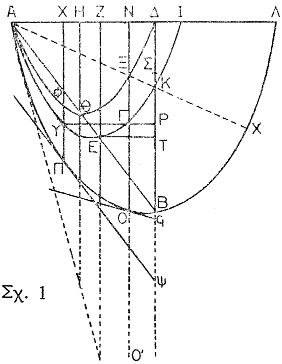
ὃν θὰ εἶχε λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν μέχρι τοῦ ἄξονος (τὴν παράμετρον), ὃν ἔχουν τὰ 15 : 4, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, ἄλλοτε μὲν θὰ καταστῇ ὀρθὸν (κατακόρυφον), ἄλλοτε δὲ κεκλιμένον, καὶ ἐνίοτε οὕτω κεκλιμένον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τοῦτο θὰ τὸ κάμῃ εἰς δύο θέσεις, ἐνίοτε δὲ θὰ κλίνῃ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ βρέχηται εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν, ἐνίοτε δὲ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται οὔτε εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ· ποῖον δὲ λόγον θὰ ἔχῃ τὸ βάρος ἑκάστου πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω.

Ἔστω τμῆμα, ὡς ἐλέχθη (Σχῆμα 1, σελ. 339), καὶ ἀφοῦ αὐτὸ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, ἔστω τομὴ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἔστω ἡ ΒΔ, ἂς τμηθῇ δὲ ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Κ, ὥστε νὰ εἶναι ἡ ΒΚ = 2ΚΔ, κατὰ δὲ τὸ Τ, ὥστε ἡ ΔΒ : ΚΤ = 15 : 4· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ ΚΤ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου) (Εὐκλ. V, 10). Ἔστω λοιπὸν ἡ ΚΡ ἴση πρὸς τὴν μέχρι τοῦ ἄξονος (παράμετρον), καὶ ἡ ΡΣ $= \frac{1}{2}$ ΒΡ· εἶναι δὲ καὶ ἡ ΣΒ $= \frac{3}{2}$ ΒΡ. Ἀφοῦ δὲ ἀχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΤΕ ἀχθῇ κάθετος, ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ πάλιν ἀφοῦ ἡ ΑΒ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΘΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ παραβολὴ ΑΕΙ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ καὶ ἡ παραβολὴ ΑΘΔ περὶ διάμετρον τὴν ΘΗ, ὥστε τὰ τμήματα ΑΕΙ, ΑΘΔ νὰ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒΛ· θὰ διέρχηται λοιπὸν ἡ παραβολὴ ΑΕΙ διὰ τοῦ Κ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ρ ἀχθεῖσα κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΕΙ. Ἂς τὴν τέμνῃ κατὰ τὰ Υ, Γ, καὶ διὰ τῶν Υ, Γ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ αἱ ΥΧ, ΓΝ, ἂς τέμνωσι δὲ αὗται τὴν παραβολὴν ΑΘΔ κατὰ τὰ Ξ, Φ, ἂς ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ΠΨ, Ος ἐφαπτόμε-

καὶ αἱ ΠΨ, Ος ἐφαπτόμεναι τᾶς ΑΠΟΛ τομᾶς κα | τὰ τὰ Ο, Π. δεδομένα δὴ τρία τινὰ | τμάματα τὰ ΑΠΟΛ, ΑΕΙ, ΑΘΔ | περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν εὐθειᾶν | καὶ τᾶν ὀρθογωνίων κώνων | τομᾶν ὀρθὰ καὶ ὅμοια, ἄνι | σα δέ, καὶ ἀπολέλαπται ἀφ' ἑκάσ |τας βάσιος, ἀπὸ δὲ τοῦ Ν ἀναγμέναι αἱ ΝΞ, ΝΓ, ΝΟ· ἁ ΟΓ ἄρα | ποτὶ τὰν ΓΞ τὸν συγκείμενον | λόγον ἕξει ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΙΛ ποτὶ ΛΑ, καὶ ὃν ἔ |χει ἁ ΑΔ ποτὶ ΔΙ. ἔχει δὲ καὶ ἁ ΛΙ | ποτὶ ΛΑ, ὃν δύο ποτὶ ε̅· ἅ τε γὰρ ΤΒ ποτὶ | ΒΔ ἐστίν, ὡς δύο ποτὶ ε̅, καὶ ἁ ΕΒ ποτὶ | ΒΑ καὶ ἁ Η 390 *ΔΖ ποτὶ ΔΑ, τούτων | δὲ διπλάσιαι αἱ ΛΙ, ΛΑ· ἁ δὲ ΑΔ ποτὶ | ΔΙ ἔχει, ὅσον πέντε πρὸς α̅, | ὁ δὲ συγκείμενος λόγος, ἐξ οὗ ὃν ἔχει | τὰ δύο ποτὶ τὰ ε̅, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὰ | πέντε ποτὶ τὸ ἕν, ὁ αὐτός ἐστι τῷ, ὃν | ἔχει τὰ δύο ποτὶ τὸ α̅· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ΟΓ τᾶς | ΓΞ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΠΥ τᾶς | ΥΦ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ἁ ΔΣ ἡμιολία τᾶς | ΚΡ, δῆλον, ὅτι ἁ ΒΣ ἁ ὑπεροχά ἐστιν, | ᾇ μείζων ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος | τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος.*

εἰ μὲν οὖν | τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν | τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς | ΒΣ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἢ μείζονα | τούτου τοῦ λόγου, ἀφεθὲν τὸ τμᾶμα | εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν | αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, ὀρ |θὸν καταστασεῖται· δέδεικται γὰρ | πρότερον, ὅτι [ἐὰν] τμᾶμα μείζο |να ἔχον τὸν ἄξονα ἢ ἡμιόλιον τᾶς | μέχρι τοῦ ἄξονος, ἐὰν τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ὑγρὸν μὴ ἐλάσσονα λόγον | ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ | ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν | ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι | τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν | ἐς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὡς εἴρηται, ὀρθὸν | καταστασεῖται.

ἐπὴν δὲ τὸ τμᾶ | μα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν ναι τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὰ Ο,Π. Εἶναι λοιπὸν δεδομένα τρία τμήματα τὰ ΑΠΟΛ, ΑΕΙ, ΑΘΔ περιεχόμενα ὑπὸ εὐθειῶν καὶ παραβολῶν καὶ ὅμοια, ἄνισα δέ, καὶ ἀναχωροῦσιν ἐκ τῆς αὐτῆς βάσεως, ἀπὸ δὲ τοῦ Ν ἔχουσιν ἀχθῆ αἱ ΝΞ, ΝΓ, ΝΟ· ἡ ΟΓ ἄρα : ΓΞ = (ΙΛ : ΛΑ) : (ΑΔ : ΔΙ). Εἶναι δὲ καὶ ΛΙ : ΛΑ = 2 : 5· διότι εἶναι ΤΒ : ΒΔ = 2 : 5 = ΕΒ : ΒΑ = ΔΖ : ΔΑ (Εὐκλ. VI, 4), τούτων δὲ εἶναι ΛΙ = 2ΔΖ, ΛΑ = 2ΔΑ· εἶναι δὲ ΑΔ : ΔΙ = 5 : 1 καὶ (2 : 5) × (5 : 1) = 2 : 1· εἶναι ἄρα ΟΓ = 2ΓΞ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἡ



Σχ. 1

ΠΥ = 2ΥΦ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἡ $\Delta\Sigma = \dfrac{3}{2}$ ΚΡ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΒΣ εἶναι ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχει λόγον ΒΣ^2 : ΒΔ^2, ἢ μεγαλύτερον τούτου τοῦ λόγου, ἐὰν τὸ τμῆμα ἀφεθῆ εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ κατασταθῆ ὀρθὸν (κατακόρυφον)· διότι ἀπεδείχθη προηγουμένως, ὅτι ἐὰν τμῆμα ἔχον τὸν ἄξονα μεγαλύτερον τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), ἐὰν τὸ βάρος του πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ δὲν ἔχη μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὡς ἐλέχθη, θὰ κατασταθῆ κατακόρυφον.

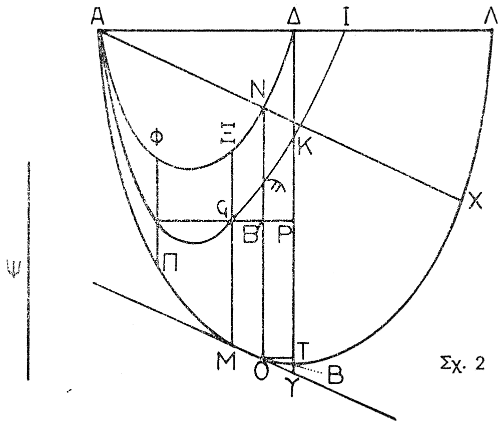
Ὅταν δὲ τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχη *λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ | τᾶς ΣΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀ | πὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ, ὃν ἔχει | τὸ ἀπὸ τᾶς ΟΞ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρὸν | κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν βά |σιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, | καταστασεῖται κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν | ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανεί | ας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν | ποιεῖν ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ | ὑγροῦ μείζονα τᾶς ϛ.*

ἐὰν δὲ τὸ | τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρὸν | τοῦτον ἔχῃ H 392 *τὸν λόγον, ὃν τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ ποτὶ τὸ τε- | τράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφε | θὲν ἐς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι | τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται κεκλι | μένον οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐ | τοῦ ἅπτεσθαι καθ' ἓν τᾶς τοῦ ὑγροῦ | ἐπιφανείας, καὶ τὸν ἄξονα | αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ | ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἴσαν τᾷ ϛ.*

ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ | τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔ | χῃ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ | ἀπὸ τᾶς ΞΟ ποτὶ τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, μείζονα δὲ τοῦ, | ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑ | γρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον | οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ | ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖ | ται κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὰν | βάσιν αὐτοῦ κατὰ πλείονα τό | πον τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ.

εἰ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει | ποτὶ τὸ ὑγρὸν τοῦτον ἔχει τὸν λό | γον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀ | πὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τετράγωνον | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑ | γρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ | μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, κατα | στασεῖται κεκλιμένον οὕτως, | ὥστε τὰν βάσιν μικρότερον μὲν λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $\Sigma B^2 : B\Delta^2$, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου $O\Xi^2 : B\Delta^2$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ μεγαλυτέραν τῆς ϛ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμῆμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦτον ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν $\Xi O^2 : B\Delta^2$, ἀφεθῇ δὲ εἰς τὸ ὑγρὸν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καθ' ἓν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ϛ.



Σχ. 2

Ἐὰν δὲ τὸ τμῆμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχῃ λόγον μικρότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $\Xi O^2 : B\Delta^2$, μεγαλύτερον δὲ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $\Pi\Phi^2 : B\Delta^2$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ τέμνηται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν.

Ἐὰν δὲ τὸ τμῆμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ τοῦτον ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ $\Pi\Phi^2 : B\Delta^2$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ *αὐτοῦ καθ' ἓν σα | μεῖον ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφα | νείας, καὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ ποιεῖν γω | νίαν ἴσαν τᾷ Ψ.*

ἐὰν δὲ τὸ τμᾶμα | τῷ βάρει πρὸς τὸ ὑγρὸν ἐλάσσονα | λόγον ἔχῃ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τετράγω | νον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΦ ποτὶ τὸ τετρά | γωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἀφεθὲν | ἐς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον | οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅ | πτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, καταστασεῖται | κεκλιμένον οὕτως, ὥστε τὸν μὲν | ἄξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνει | αν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν
H 393 *ἐλάσ | σονα τᾶς Ψ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ | μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑ | γροῦ ἐπιφανείας.*

δειχθήσεται | δὲ ταῦτα ἑξῆς .

H 394 *ἐχέτω δὴ | πρῶτον τὸ τμᾶμα τῷ βάρει ποτὶ | τὸ ὑγρὸν μείζονα μὲν λόγον τοῦ, | ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΟ τετρά | γωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐλάσ | σονα δὲ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ὑ | περοχᾶς τετράγωνον, ᾇ μείζων | ἐστὶν ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι | τοῦ ἄξονος, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ | τετράγωνον, καὶ ὑποκείσθω τὸ | πρότερον κατεσκευασμένον | σχῆμα, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα | τῷ βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον | ἐχέτω τὸ ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγω |νον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· ἔστι | δὴ ἁ Ψ τᾶς μὲν ΞΟ μείζων, ἐλάσσων | δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μείζων ἐστὶν | ὁ ἄξων ἢ ἡμιόλιος τᾶς μέχρι | τοῦ ἄξονος. ἐναρμόσθω δέ τις | μεταξὺ τῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ κώνων ⟨τομᾶν⟩*

quae NO aequalis ipsi Ψ, et secet ipsa reliquam coni sectionem penes ϡ, ipsam autem Rς rectam penes B′ ; demonstrabitur autem quae Oϡ dupla ipsius ϡN, sicut demonstrata est quae Mς ipsius ςX dupla ab O autem ducatur quae Oς contingens sectionem APOL, quae autem OC perpendicularis super BD, et ab A ad N copuletur; erunt autem quae AN, QN aequales inuicem. quo-

γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς ἓν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Ψ.

Ἐὰν δὲ τὸ τμῆμα κατὰ τὸ βάρος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχῃ μικρότερον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $ΠΦ^2 : ΒΔ^2$, ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ τεθὲν κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ γίνῃ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ὁ μὲν ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μικροτέραν τῆς Ψ, ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, οὔτε εἰς ἓν σημεῖον.

Ἀποδεικνύονται δὲ ταῦτα ὡς ἑξῆς.

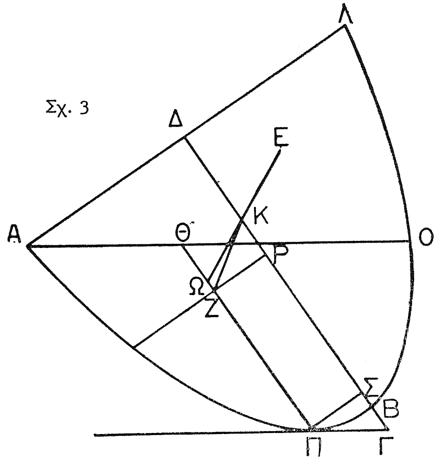
Ἂς ἔχῃ λοιπὸν πρῶτον τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ μεγαλύτερον μὲν λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ $ΞΟ^2 : ΒΔ^2$, μικρότερον δὲ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὁ ἄξων εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου), πρὸς τὸ $ΒΔ^2$, καὶ ἂς ληφθῇ ὑπ' ὄψει τὸ προηγουμένως κατασκευασθὲν σχῆμα, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἂς ἔχῃ τὸ $Ψ^2 : ΒΔ^2$· εἶναι δὲ ἡ $Ψ > ΞΟ$, μικροτέρα δὲ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τῶν τριῶν δευτέρων τῆς ἀποστάσεως μέχρι τοῦ ἄξονος (τῆς παραμέτρου). Ἂς ἐναρμοσθῇ δὲ εὐθεῖά τις μεταξὺ τῶν παραβολῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ ἡ ΝΟ ἴση πρὸς τὴν Ψ, τέμνουσα τὴν ἄλλην παραβολὴν εἰς τὸ ϡ καὶ τὴν εὐθεῖαν Ρϛ εἰς τὸ Β′· ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι ἡ Οϡ εἶναι διπλασία τῆς ϡΝ, ὅπως ἐδείχθη ὅτι ἡ Μϛ εἶναι διπλασία τῆς ϛΞ. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Ο ἡ εὐθεῖα ΟΥ (Σχῆμα 2, σελ. 341) ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΤ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΝ· θὰ εἶναι ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΝ, ΧΝ ἴσαι μεταξύ των. διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΝ, ΑΧ ἔχουσιν ἀχθῇ ἐκ τῶν βάσεων τῶν ὁμοίων παρα-

*niam enim in similibus portionibus APOL, AXD productae sunt a basibus ad portiones quae AN, AQ aequales angulos facientes ad bases, eandem proportionem habebunt quae QA, AN cum ipsis LA, AD propter secundam figuram praescriptarum; aequalis ergo quae AN ipsi QN, et aequedistans ipsi O*ϛ*. demonstrandum, quod dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non secundum unum tangat ⟨humidum, ita inclinatum consistet, ut basis eius in nullo* H 396 *puncto superficiem humidi tangat, et⟩ axis ad superficiem humidi angulum acutum faciat maiorem angulo* ϛ.

dimittatur enim et consistat ita, ut basis ipsius tangat secundum unum signum superficiem humidi, secta autem portione per axem plano recto ad superficiem humidi superficiei quidem portionis sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio [De conoid. 11 a], *superficiei autem humidi quae OA, axis autem [sectionis] et diameter quae BD, et secetur quae BD penes K, R, ut dictum est, ducatur autem et quae quidem PG aequedistanter ipsi AO recta contingens sectionem APOL secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD. quoniam igitur portio ad humidum in grauitate* βολῶν ΑΠΟΛ, ΑΞΔ καὶ σχηματίζουσιν γωνίας ἴσας πρὸς τὰς βάσεις, αἱ εὐθεῖαι ΧΑ, ΑΝ θὰ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσιν αἱ εὐθεῖαι ΛΑ, ΑΔ, δυνάμει τῆς κατασκευῆς τοῦ δευτέρου σχήματος· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΝ ἴση πρὸς τὴν ΧΝ· εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΟΥ παράλληλος πρὸς τὴν ΧΝ· πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ τμῆμα ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον, θὰ κλίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων του θὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ὀξεῖαν, μεγαλυτέραν τῆς γωνίας Υ.

Ἂς ἀφεθῇ λοιπὸν τὸ τμῆμα εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. Ἔστω δὲ ἡ τομὴ τοῦ τμήματος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καὶ καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ εἶναι ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΑ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ ΒΔ ὁ ἄξων καὶ ἡ διάμετρος τῆς παραβολῆς (Σχῆμα 3). Ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Ρ, ὡς ἔχει λεχθῇ (δηλ. κατὰ τὴν σχέσιν 15 : 4), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΠΓ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΟ καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ σημεῖον Π (Σχ. 3), καὶ ἡ εὐθεῖα ΠΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΠΣ κάθετος

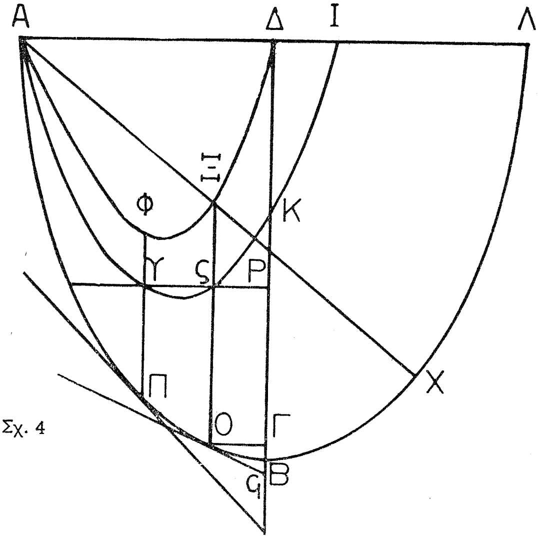
Σχ. 3



proportionem habet, quam tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum, hanc habet demersa ipsius portio ad totam [prop. I], *quam autem demersa ad totam, tetragonum quod a TP ad id quod a DB* [De conoid. 24], *erit quae Ψ ipsi TP aequalis. et quae NO ergo ipsi TP aequalis est; quare et portiones APQ, APO inuicem sunt aequales* [De conoid. 24]. *quoniam autem in portionibus aequalibus et similibus APOL, AMQL ab extremitatibus basium productae sunt quae OA, AQ, et portiones ablatae faciunt ad diametros angulos aequales propter tertiam figuram praescritarum, quare anguli*
II 397 *qui apud ϛ, G sunt aequales. et quae ϛB, GB ergo aequales sunt; quare et quae SR, CR et quae PZ, OB′ et quae ZT, B′N. quoniam minor est quam dupla quae OB′ ipsius B′N, palam, quod quae PZ ipsius ZT est minor quam dupla. sit igitur quae PΩ ipsius ΩT dupla, et copulata quae KΩ educatur ad E; totius quidem igitur centrum grauitatis erit K, eius autem portionis quae intra humidum cendrum Ω, eius autem quae extra in linea KE; et sit E* [De plan. aequilib. I, 8]. *quae autem KZ perpendicularis erit super superficiem humidi; quare et quae per signa E, Ω aequedistanter ipsi KZ. non ergo manet portio, sed reclinabitur, ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi, quoniam nunc secundum unum tacta ipsa reclinatur; manifestum igitur, quod portio consistet ita, ut axis ad superficiem humidi faciat angulum maiorem angulo ϛ.*

πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ εἶναι ὡς τὸ τετράγωνον τῆς Ψ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ, καὶ ὁ λόγος τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος πρὸς ὅλον τὸ τμῆμα εἶναι ὁ αὐτὸς οἷος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρόν, καὶ ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου τῆς ΘΠ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος πρὸς ὅλον τὸ τμῆμα, θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα Ψ ἴση πρὸς τὴν ΘΠ, καὶ ἡ ΝΟ ἴση πρὸς τὴν ΘΠ· θὰ εἶναι ἄρα τὰ τμήματα ΑΠΧ, ΑΠΟ ἴσα μεταξύ των (Σχ. 2 καὶ 3). Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα ΑΠΟΛ, ΑΜΧΛ ἔχουσιν ἀχθῇ ἐκ τῶν ἄκρων τῶν βάσεων αὐτῶν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΑΧ, ὥστε τὰ χωριζόμενα τμήματα νὰ εὑρίσκωνται ὑπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας πρὸς τοὺς ἄξονας αὐτῶν, κατὰ τὸ τρίτον σχῆμα, θὰ εἶναι ἄρα αἱ γωνίαι Υ καὶ Γ ἴσαι (δευτέρου καὶ τρίτου σχήματος) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΥΒ, ΓΒ θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· θὰ εἶναι ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΣΡ, ΤΡ ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ ΠΖ, ΟΒ′ καὶ αἱ ΖΘ, Β′Ν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΒ′ εἶναι μικροτέρα τῆς 2Β′Ν, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΠΖ εἶναι μικροτέρα τῆς 2ΖΘ. Ἔστω ὅτι ἡ ΠΩ $=$ 2ΩΘ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΚΩ καὶ ἃς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Ε. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Κ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ὅλου τοῦ τμήματος, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι τὸ Ω, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΕ, ἔστω εἰς τὸ Ε. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΚΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, θὰ εἶναι ἄρα κάθετοι ἐπ' αὐτὴν καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων Ε, Ω παραλλήλως πρὸς τὴν ΚΖ· δὲν θὰ μείνῃ ἄρα ἐν ἠρεμίᾳ τὸ τμῆμα, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον, διότι ἐκ τῆς θέσεως ἐπαφῆς εἰς ἓν σημεῖον πρὸς τὴν βάσιν ἀνυψώθη. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα θὰ ἀποκατασταθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς γωνίας Υ.

Habeat autem portio ad humidum in grauitate hanc proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad id, quod a BD, et dimittatur in humidum ita inclinata. secta autem ipsa per axem plano recto ad superficiem humidi

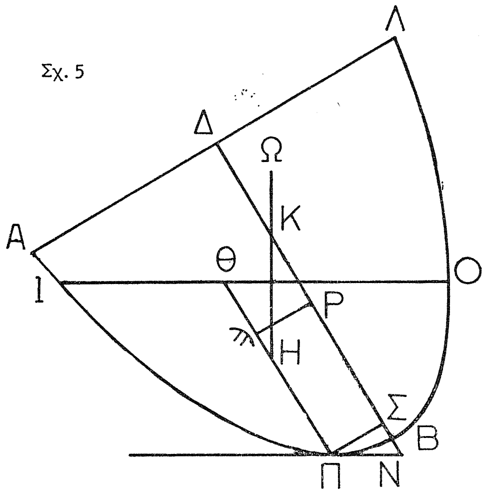


Σχ. 4

solidi quidem sectio sit quae APOL rectanguli coni sectio, H 398 *superficiei autem humidi quae OI, axis autem portionis et diameter sectionis quae BD, et secetur quae BD ut prius et ducatur quae quidem PN aequedistanter ipsi IO contingens sectionem secundum P, quae autem PT aequedistanter ipsi BD, quae autem PS perpendicularis super BD. demonstrandum, quod portio non manet inclinata sic, sed inclinatur, donec utique basis secundum unum signum tangat superficiem humidi.*

Ἔστω πάλιν ὅτι τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ΞΟ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ (Σχ. 4) καὶ ἂς ἀφεθῇ τὸ τμῆμα εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον. Ἔστω δὲ ἡ τομὴ τοῦ τμήματος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἡ παραβολὴ ΑΠΟΛ, ἡ εὐθεῖα ΟΙ ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ (Σχ. 5), καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΔ ἄξων τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς προηγουμένως (δηλ. νὰ εἶναι ΒΔ : ΚΡ = 15 : 4, Σχ. 3). Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΠΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΙΟ (Σχ. 5) καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Π,

Σχ. 5



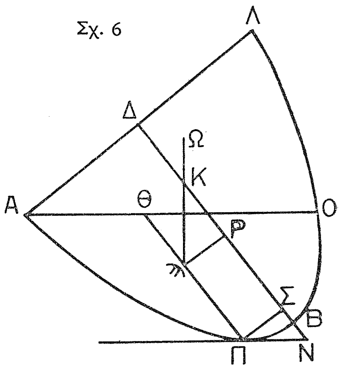
ἡ εὐθεῖα ΠΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΠΣ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ στερεὸν δὲν θὰ μείνῃ κεκλιμένον κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

praeiaceant autem et, quae in superiori figura prius disposita sunt et quae CO perpendicularis ducatur super BD, et quae AX copulata educatur ad Q; erit autem quae AX ipsi XQ aequalis et ducatur ipsi AQ quae Oς aequedistans. et quoniam supponitur portio ad humidum in grauitate hanc habere proportionem, quam habet tetragonum quod ab XO ad id quod a BD, habet autem hanc proportionem et demersa portio ad totam [prop. I], *hoc est quod a TP ad id quod a BD* [De conoid. 24], *aequalis utique erit quae PT ipsi XO. et quoniam portionum IBO, ABQ diametri sunt aequales, et portiones* [De conoid. 24]. *rursum quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AOQL productae sunt AQ, IO aequales portiones auferentes, hoc quidem ab extremitate basis, hoc autem non ab extremitate, palam, quod minorem facit acutum angulum ad diametrum totius portionis, quae ab extremitate basis producta est. et quoniam angulus qui apud ς* H 399 *est minor quam qui apud N, maior est quae BC quam BS, quae autem CR minor quam RS;) quare et quae Oς minor quam P⅄,* ⟨*et ςX*⟩ *maior est quam ⅄T. et quoniam quae Oς dupla est ipsius ςX palam, quod quae P⅄ maior est quam dupla ipsius ⅄T. sit igitur quae PH dupla ipsius HT,*

καὶ ἐπεζεύχθω ἁ HK καὶ ἐκβεβλήσθω | ἐπὶ τὸ Ω. ἐσσεῖται

Ἔστω δὲ ὅλα κατὰ τὴν προηγουμένην κατασκευήν. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΟ (Σχ. 4) κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΞ μέχρι τοῦ Χ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΞ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΧ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα Ος παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ (Σχ. 4). Ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ (ἴσου ὄγκου) εἶναι ἴσος πρὸς $ΞΟ^2 : ΒΔ^2$, καὶ ὅτι τὸ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα πρὸς τὸ ὅλον τμῆμα εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, τουτέστι $ΘΠ^2 : ΒΔ^2$, θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΠΘ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΞΟ καὶ τὰ τμήματα ΙΒΟ, ΑΒΧ θὰ εἶναι ἴσα· διότι αἱ διάμετροι αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα ΑΠΟΛ, ΑΟΧΛ, αἱ εὐθεῖαι ΑΧ, ΙΟ, αἱ ὁποῖαι χωρίζουσιν ἴσα τμήματα ἔχουσιν ἀχθῇ ἡ μὲν μία ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς βάσεως (Σχ. 4) καὶ ἡ ἄλλη ὄχι ἐκ τοῦ ἄκρου (Σχ. 5), εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀχθεῖσα ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς βάσεως θὰ σχηματίζῃ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ὅλου τμήματος ὀξεῖαν γωνίαν μικροτέραν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία περὶ τὸ ς (Σχ. 4) εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας περὶ τὸ Ν (Σχ. 5), ἡ εὐθεῖα ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας ΒΣ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΡ εἶναι μικροτέρα τῆς εὐθείας ΡΣ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα Ος μικροτέρα τῆς εὐθείας Πϡ, καὶ ἡ εὐθεῖα ςΞ μεγαλυτέρα τῆς ϡΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα Ος εἶναι διπλασία τῆς εὐθείας ςΞ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα Πϡ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς εὐθείας ϡΘ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΠΗ διπλασία τῆς εὐθείας ΗΘ

Σχ. 6



καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΚ καὶ ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ Ω (Σχ. 5). Θὰ εἶναι *δὴ τοῦ μὲν ὅλου τμά | ματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ Κ, | τοῦ δὲ ἐν τῷ ὑγρῷ τὸ Η, τοῦ δ' ἐκτὸς | ἐπὶ τᾶς ΚΩ· ἔστω τὸ Ω. δειχθή | σεται δὴ ὁμοίως ἅ τε Κ⋋ κά | θετος ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφά | νειαν καὶ αἱ διὰ τῶν Η, Ω σαμείων | παρὰ* H 400 *τὰν Κ⋋. δῆλον οὖν, ὅτι οὐ μενεῖ | τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται, ἕως | ἂν ἁ βάσις αὐτοῦ ἅπτηται κα | θ' ἓν σαμεῖον τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπι | φανείας, καθάπερ*

demonstrabitur in tertia figura, quomodo se habet in tertio theoremate, et manebit portio ita consistens.

in portionibus enim aequalibus APOL, AOQL productae erunt ab extremitatibus basium quae AQ, AO aequales ⟨portiones⟩ auferentes; demonstrabitur enim APQ aequalis ipsi APO similiter prioribus aequales igitur facient acutos angulos quae AO, AQ ad diametros portionum, quoniam aequales sunt qui apud N, ϛ anguli [Eucl. I, 29]. *et ⟨sit P⋋ dupla ipsius⟩ ⋋T; copulata autem ipsa ⋋K et educta ad Ω erit totius quidem portionis centrum grauitatis K, eius autem quae intra humidum ⋋ eius autem quae extra in linea KΩ; et sit Ω* [De plan. aequil. I, 8]. *et quae K⋋*

H 401 *⟨κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὰν τοῦ ὑγρ | οῦ⟩ ἐπιφάνειαν. κατὰ τὰς αὐτὰς | οὖν εὐθείας | τό τε ἐν τῷ ὑγρῷ ἀνε | νεχθήσεται καὶ τὸ ⟨ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ⟩ | κατενεχθήσεται· μενεῖ ⟨δὴ τὸ τμᾶμα, | καὶ⟩ ἅ τε ⟨βάσις καθ' ἓν σαμεῖον ἅψ | εται τᾶς τοῦ⟩ ὑγροῦ ἐπιφανείας, καὶ ὁ ἄξων ⟨τοῦ τμάματος⟩ ποτὶ τὰν | ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ποιήσει γωνί | αν ἴσαν | τᾷ προγεγραμμένᾳ.*

Habeat etiam rursum portio ad humidum in grauitate λοιπὸν τοῦ μὲν ὅλου τμήματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τοῦ δὲ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τὸ Η, τοῦ δὲ ἐκτὸς ἐπὶ τῆς ΚΩ· ἔστω τὸ Ω. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ Κϡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ αἱ διὰ τῶν σημείων Η, Ω διερχόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν Κϡ. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι δὲν θὰ μείνῃ τὸ τμῆμα ἐν ἠρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ, μέχρις ὅτου ἡ βάσις αὐτοῦ ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ὡς

ἀποδεικνύεται εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, ὅπου θεωρεῖται ἡ τρίτη περίπτωσις τῆς προτάσεως (τοῦ θεωρήματος), καὶ ὅπου τὸ τμῆμα θὰ μείνῃ ἐν ἠρεμίᾳ εἰς αὐτὴν τὴν θέσιν.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΧ (Σχ. 4), ΑΟ (Σχ. 6) ἔχουσιν ἀχθῆ ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἴσων τμημάτων ΑΟΧΛ, ΑΠΟΛ, χωρίζουσαι ἴσα τμήματα· διότι ἀποδεικνύεται, ὡς προηγουμένως, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΠΧ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΑΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ν καὶ ϛ γωνίαι εἶναι ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι ΑΟ, ΑΧ σχηματίζουσι μὲ τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων γωνίας ἴσας· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα Πϡ διπλασία τῆς εὐθείας ϡΘ. Ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ϡΚ καὶ ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ Ω· θὰ εἶναι ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὅλου τμήματος τὸ σημεῖον Κ, τοῦ δὲ εὑρισκομένου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος τὸ σημεῖον ϡ καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΩ· ἔστω τὸ σημεῖον Ω. Καὶ ἡ Κϡ

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Κατὰ τὰς αὐτὰς λοιπὸν εὐθείας τὸ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τμῆμα θὰ φερθῇ πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ θὰ φερθῇ πρὸς τὰ κάτω· θὰ μείνῃ λοιπὸν ἐν ἠρεμίᾳ τὸ τμῆμα καὶ ἡ βάσις του θὰ ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ ὁ ἄξων τοῦ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ θὰ σχηματίσῃ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν προγεγραμμένην.

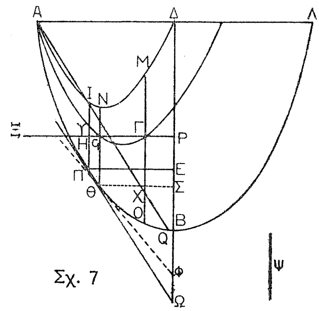
Ἔστω πάλιν ὅτι ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ

proportionem minorem ea, quam habet tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habeat tetragonum quod a Ψ ⟨ad tetragonum quod a BD⟩; minor autem est quae Ψ quam TN. rursum igitur inaptetur quaedam intermedia portionum AMD, APOL quae PI aequedistanter
H 402 *ipsi BD producta aequalis ipsi Ψ, secet autem ipsa intermediam coni sectionem penes Y, ipsam autem XR*

εὐθεῖαν κατὰ τὸ Η. δειχθήσεται δὴ | ἁ ΠΥ διπλασία τᾶς ΥΙ, καθάπερ ἐδεί|χθη καὶ ἁ ΓΟ τᾶς ΓΧ. ἄχθω δὲ καὶ | ἁ μὲν ΠΩ ἐφαπτομένα τᾶς ΑΠΟΛ | κατὰ τὸ Π, ἁ δὲ ΠΕ κάθετος ἐπὶ τὰν | ΒΔ, καὶ ἁ ΙΑ ἐπιζευχθεῖσα ⟨ἐκβεβλήσθω⟩ | ἐπὶ τὸ Χ· ἐσσεῖται δὲ ἁ ΑΙ τᾷ ΙΧ ἴσα καὶ | ἁ ΑΧ τᾷ ΠΩ παράλληλος. δεικτέον | δή, ὅτι τὸ τμᾶμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑ | γρὸν καὶ κεκλιμένον οὔτ | ως, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μὴ ἅπτεσθαι | τοῦ ὑγροῦ, οὕτως καταστασεῖται | κεκλιμένον, ὥστε τὸν ἄξονα ποτὶ τὰν | ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν | ποιεῖν ⟨ἐλάσσονα τᾶς Φ, τὰν δὲ βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ καθεστακέτω οὕτως, ὥστε τὰν βάσιν⟩ αὐτοῦ καθ' ἓν σαμεῖον ἅπτεσθαι | τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, τμα | θέντος δὲ τοῦ τμάματος ἐπιπέ | δῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφά | νειαν διὰ τοῦ ἄξονος τομὰ ἔστω | τᾶς μὲν τοῦ τμάματος ἐπιφα | νείας ἁ ΑΗΒΛ ὀρθογωνίου κώνου
H 404 *| τομά, τᾶς δὲ τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας ἁ ΑΖ, ἄξων δὲ καὶ διάμετρος | τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, καὶ τετμάσθω ἁ | ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως*

ὑγρὸν (ἴσου ὄγκου) εἶναι μικρότερος τοῦ $Ν\Theta^2 : Β\Delta^2$ καὶ ὅτι ὁ λόγος τοῦ τετραγώνου εὐθείας τινὸς Ψ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας ΒΔ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑγρὸν ἴσου ὄγκου· θὰ εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα Ψ μικροτέρα τῆς εὐθείας ΘΝ. Ἂς ἀχθῇ μεταξὺ τῶν (παραβολοειδῶν) τμημάτων ΑΜΔ, ΑΠΟΛ ἡ εὐθεῖα ΠΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ (Σχ. 7) καὶ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ψ, καὶ ἃς τέμνῃ αὕτη τὴν ἐντὸς παραβολὴν εἰς τὸ σημεῖον Υ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΞΡ κατὰ τὸ Η. Ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι εἶναι ἡ $\Pi\Upsilon = 2\Upsilon\mathrm{I}$, καθὼς ἐδείχθη καὶ ἡ $\Gamma\mathrm{O} = 2\Gamma\mathrm{M}$. Ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν ΠΩ ἐφαπτομένη τῆς ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΙΑ ἃς προεκβληθῇ πρὸς τὸ Χ· θὰ εἶναι δὲ ἡ $\mathrm{AI} = \mathrm{IX}$ καὶ ἡ ΑΧ παράλληλος πρὸς τὴν ΠΩ. Πρέπει λοιπὸν νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ κεκλιμένον οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τοῦ ὑγροῦ, θὰ κλίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων του πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν μικροτέραν τῆς Φ, ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε εἰς ἓν σημεῖον.



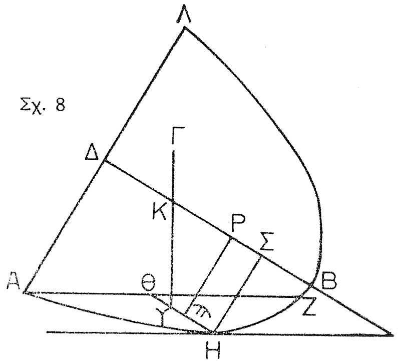
Σχ. 7

Διότι ἃς ἀφεθῇ εἰς τὸ ὑγρὸν καὶ ἃς κατασταθῇ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς ἓν σημεῖον, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ τὸ τμῆμα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ ἔστω τομὴ τῆς μὲν ἐπιφανείας τοῦ τμήματος ἡ παραβολὴ ΑΗΒΛ, τῆς δὲ ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἡ ΑΖ (Σχ. 8), ἄξων δὲ καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ἡ ΒΔ, καὶ ἃς τμηθῇ ἡ ΒΔ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Ρ ὁμοίως

superioribus ducatur autem et quae HI aequedistanter ipsi AZ contingens sectionem coni penes H, quae autem HT aequedistanter ipsi BD, quae autem HS perpendicularis super BD. quoniam igitur portio ad humidum in grauitate hanc habet proportionem, quam habet tetragonum quod a Ψ ad id quod a BD, quam autem proportionem habet portio ad humidum in grauitate, hanc habet tetragonum quod ab HT ad id quod a BD propter eadem prioribus palam, quod quae HT est aequalis ipsi Ψ [Eucl. V, 9]*; quare et portiones AHZ, APQ* [fig. p. 403] *sunt aequales* [De conoid. 24]. *et quoniam in portionibus aequalibus et similibus APOL, AHZL ab extremitatibus basium sunt productae quae AQ, AZ aequales portiones auferentes, palam, quod aequales faciunt angulos ad diametros portionum. adhuc autem*
H 405 *et trigonorum HIS, PΩE aequales sunt anguli qui apud I, Ω; erunt ⟨igitur⟩ et SB, EB aequales; quare et quae SR, ER aequales et quae Hϡ, PH et quae ϡT, HI et quoniam est dupla quae PY ipsius YI, manifestum, quod minor est quam dupla quae Hϡ ipsius ϡT.*[1] *sit igitur quae HY dupla ipsius YT, et copulata protrahatur quae YKC; sunt autem centra grauitatum totius quidem K, eius autem quod intra humidim Y eius autem quod extra in linea KC; et sit C* [De plan. aequilib. I, 8]. *erit autem propter praecedens theorema hoc manifestum, quod non manet portio, sed inclinabitur ita,*

1) Nam PH < 2 HI et PH = Hϡ, HI = ϡT.

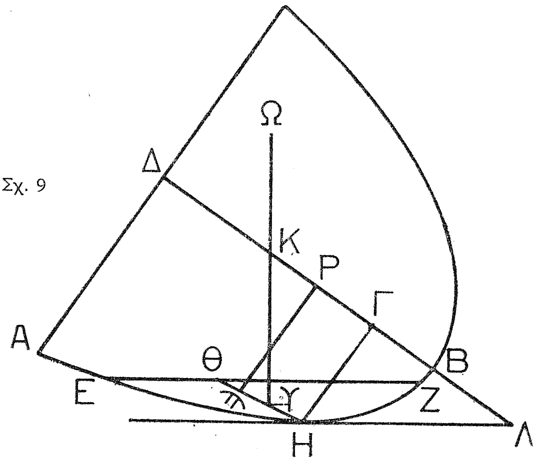
ὡς προηγουμένως (δηλ. ΒΔ : ΚΡ = 15 : 4). Ἄς ἀχθῇ ἡ ΗΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ σημεῖον Η (Σχ. 8), ἡ ΗΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἡ ΗΣ κάθετος πρὸς τὴν ΒΔ. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ (ἴσου ὄγκου) εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον Ψ^2 : ΒΔ^2 καὶ ὁ λόγος τοῦ ΗΘ^2 : ΒΔ^2 εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὑγροῦ, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὡς προηγουμένως (θ. 1), εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ψ (Εὐκλ. V, 9)· καὶ τὰ τμήματα ΑΗΖ, ΑΠΧ εἶναι ἴσα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΧ (Σχ. 7), ΑΖ (Σχ. 8), αἱ ὁποῖαι χωρίζουσιν ἴσα τμήματα ἔχουσιν ἀχθῇ ἐκ τῶν ἄκρων τῶν βάσεων τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων τμημάτων ΑΠΟΛ, ΑΗΖΛ, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ σχηματίζωσι πρὸς τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων γωνίας ἴσας. Εἶναι ἄρα ἴσαι αἱ περὶ τὸ Ι καὶ τὸ Ω γωνίαι τῶν τριγώνων ΗΙΣ (Σχ. 8), ΠΩΕ (Σχ. 7), καὶ αἱ εὐθεῖαι ΣΒ, ΕΒ θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΣΡ (Σχ. 8), ΕΡ (Σχ. 7) εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ Ηϡ, ΠΗ καὶ αἱ ϡΘ, ΗΙ (Σχ. 8, 7). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΠΥ εἶναι διπλασία τῆς ΥΙ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ηϡ εἶναι μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ϡΘ. Ἔστω πάλιν ἡ εὐθεῖα ΗΥ διπλασία τῆς ΥΘ καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΥΚ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Γ. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ὅλου τοῦ τμήματος τὸ σημεῖον Κ, τοῦ ἐντὸς δὲ τοῦ ὑγροῦ τμήματος τὸ σημεῖον Υ καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ὑγροῦ τμήματος θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΓ· ἔστω τὸ Γ. Εἶναι ἄρα φανε-



Σχ. 8

ut basis ipsius nec secundum unum tangat superficiem humidi.

quod autem consistet ita, ut axis ipsius ad superficiem



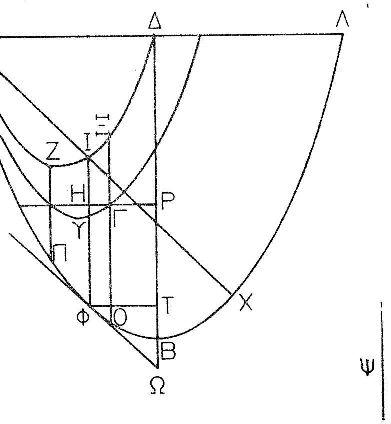
Σχ. 9

humidi faciat angulum minorem angulo Φ, demonstrabitur. consistat enim, si possibile est, ita, ut faciat angulum non minorem angulo Φ, et alia

H 406 ⟨*κατε*⟩ *σκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ τρί* | *τῳ σχήματι. ὁμοίως δὴ δειχθή* | *σεται ἁ ΘΗ ἴσα τᾷ Ψ· ὥστε καὶ τᾷ* | *ΙΠ ἴσα. ἐπεὶ οὖν ἁ Λ γωνία οὐκ ἐ* | *λάσσων ἐστὶ τᾶς Φ, οὐκ ἄρα μείζων* | *ἐστὶν ἁ ΓΒ τᾶς ΣΒ, οὐδὲ ἁ ΓΡ ἐλάσσων τᾶς* | *ΣΡ οὐδὲ ἁ Ηϡ τᾶς Θϛ. καὶ ἐπειδὴ* | *ἁ ΙΠ ἡμιολία ἐστὶ τᾶς ΠΥ, ἐλάσσων* | *δὲ ἁ ΠΥ τᾶς Θϛ, καὶ ἁ μὲν ΗΘ ἴ* | *σα τᾷ ΠΙ, ἁ δὲ Ηϡ οὐκ ἐλάσσων* | *τᾶς Θϛ, μείζων ἔσται ἁ ϡΗ* | *τᾶς ΠΥ· ἁ ἄρα Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλα* | *σία τᾶς ϡΘ. ἔστω δὴ ἁ ΗΥ διπλασ* | *ία τᾶς ΥΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα* ρόν, ἐκ τῶν προειρημένων (προηγουμένου θεωρήματος), ὅτι τὸ τμῆμα δὲν θὰ ἠρεμήσῃ ἀλλὰ θὰ κλίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς οὐδὲν σημεῖον.

Τώρα θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τμῆμα ἀποκαθίσταται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν μικροτέραν τῆς γωνίας Φ. Ἔστω ὅτι ἀποκαθίσταται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε, εἰ δυνατόν, ἡ σχηματιζομένη γωνία νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς Φ καὶ

ἂς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτὰ ὅπως εἰς τὸ τρίτον σχῆμα (καὶ Σχ. 9). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ΘΗ = Ψ· ὥστε εἶναι καὶ ΘΗ = ΙΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία Λ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς Φ,



Σχ. 10

δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ μεγαλυτέρα τῆς ΣΒ, οὔτε ἡ ΓΡ μικροτέρα τῆς ΣΡ οὔτε ἡ Ηϡ τῆς Θϛ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΙΠ $= \frac{3}{2}$ ΠΥ, εἶναι δὲ ἡ ΠΥ < Θϛ, καὶ ἡ μὲν ΗΘ = ΠΙ, ἡ δὲ Ηϡ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς Θϛ, θὰ εἶναι ἡ ϡΗ > ΠΥ· εἶναι ἄρα ἡ Ηϡ > 2 ϡΘ. Ἔστω λοιπὸν ἁ | ΥΚ ἐκβεβλήσθω· δῆλον δὴ ὁμοί|ως τοῖς πρότερον, ὅτι οὐ μενεῖ τὸ τμᾶ|μα, ἀλλὰ κλιθήσεται, ὥστε τὸν ἄ|ξονα αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν | ⟨τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ποιεῖν ἐλάσσονα τᾶς Φ⟩.

Similiter autem demonstrabitur, ⟨quod⟩ et, si portio ad humidum in grauitate habeat proportionem eandem, quam tetragonum quod ab NT ad id quod a BD, dimissa in humidum ita, ut basis ipsius non tangat superficiem humidi, consistet inclinata ita, ut basis ipsius secundum unum signum tangat superficiem humidi, et axis ipsius ad superficiem humidi faciat angulum aequalem angulo qui apud Φ.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸ ὑ|γρὸν τῷ βάρει μείζονα μὲν λό|γον ἔχον τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΠ | τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, ἐ|λάσσονα δὲ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς | ΞΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς | ΒΔ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τμᾶμα τῷ | βάρει ποτὶ τὸ ὑγρόν, τοῦτον ἐχέτω | τὸ
H 408 ἀπὸ τᾶς Ψ τετράγωνον ποτὶ | τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ· δῆλον οὖν, ὅτι ἁ Ψ τᾶς | μὲν ΖΠ μείζων ἐστίν, τᾶς δὲ ΞΟ ἐλάσ|σων. ἐναρμόσθω δὴ εἰς τὸ μεταξὺ | τᾶν ΑΞΔ, ΑΠΟΛ [τμημάτων] ἴσα τᾷ | Ψ, παράλληλος δὲ τᾷ ΒΔ ἁ ΦΙ τέ|μνουσα τὰν μεταξὺ [τοῦ] κώνου τομὰν | κατὰ τὸ Υ· πάλιν δὴ ἁ ΦΥ διπλασία τᾶς | ΥΙ δειχθήσεται, καθάπερ ἁ ΟΓ τᾶς | ΞΓ. ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Φ τοῦ ΑΠΟΛ ἐ| φαπτομένα κατὰ τὸ Φ ἁ ΦΩ· ὁμοίως | δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἁ μὲν | ΑΙ τᾷ ΧΙ ἴσα, ἁ δὲ ΑΧ τᾷ ΦΩ παράλ|ληλος. δεικτέον δέ, ὅτι τὸ τμᾶμα | ἀφεθὲν ἐς τὸ ὑγρόν, ὥστε τὰν βάσιν | μὴ ἅπτεσθαι τᾶς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ | τεθὲν κεκλιμένον οὕτως κλιθή| σεται, ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ κα|τὰ πλείονα τόπον τέμνεσθαι ὑ|πὸ τοῦ ὑγροῦ.

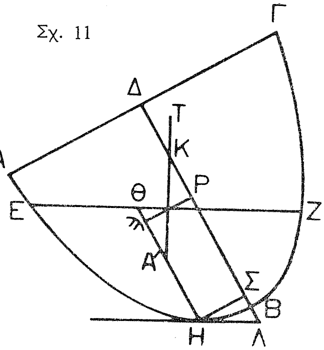
ἡ ΗΥ $= 2$ ΥΘ καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΥΚ ἂς προεκβληθῇ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι τὸ τμῆμα δὲν θὰ ἠρεμήσῃ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ, ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ νὰ σχηματίζῃ γωνίαν μικροτέραν τῆς Φ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ (ἴσου ὄγκου) εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν ΝΘ^2 : ΒΔ^2, τὸ τμῆμα ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρὸν κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἀποκατασταθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς ἓν μόνον σημεῖον, καὶ ὁ ἄξων του θὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν Φ.

Ἔστω λοιπὸν πάλιν τὸ βάρος τοῦ τμήματος (Σχ. 10) πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ἔχον μεγαλύτερον μὲν λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ΖΠ^2 : ΒΔ^2, μικρότερον δὲ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ΞΟ^2 : ΒΔ^2, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ βάρος τοῦ τμήματος πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, τοῦτον ἂς ἔχῃ τὸ Ψ^2 : ΒΔ^2· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι ΞΟ $>$ Ψ $>$ ΖΠ. Ἂς ἀχθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν τμημάτων ΑΞΔ, ΑΠΟΛ ἴση πρὸς τὴν Ψ, παράλληλος δὲ πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΦΙ τέμνουσα τὴν μεταξὺ τοῦ κώνου τομὴν κατὰ τὸ Υ· πάλιν λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΦΥ $= 2$ ΥΙ, ὡς καὶ ἡ ΟΓ $=$ 2ΞΓ. Ἂς ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ Φ ἐφαπτομένη τοῦ ΑΠΟΛ κατὰ τὸ Φ ἡ ΦΩ· καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς εἰς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μὲν ΑΙ $=$ ΧΙ, ἡ δὲ ΑΧ παράλληλος πρὸς τὴν ΦΩ. Πρέπει δὲ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα τὸ ἀφεθὲν εἰς τὸ ὑγρόν, ὥστε ἡ βάσις του νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, καὶ τεθὲν κεκλιμένον, θὰ κλίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ τέμνηται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν.

ἀφείσθω γὰρ εἰς τὸ | ὑγρόν, ὡς εἴρηται, καὶ κείσθω τὸ | πρῶτον [καὶ] οὕτως κεκλιμένον, | ⟨ὥστε τὰν βάσιν αὐτοῦ μηδὲ καθ' ἓν ⟩ | ἅπτεσθαι τᾶς τοῦ ὑγροῦ ἐπιφανείας, | τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ δι | ὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὰν τοῦ

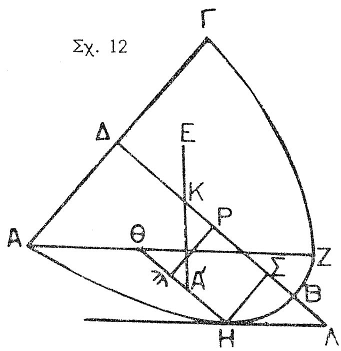
Σχ. 11



ὑγροῦ | ἐπιφάνειαν ἐν μὲν τᾷ τοῦ τμάμα | τος ἐπιφανείᾳ γίνεται τομὰ ἁ | ΑΒΓ, ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὑγροῦ ἁ ΕΖ, ἄξων | δὲ ἔστω [τῆς τομῆς] καὶ διάμετρος | [τοῦ τμήματος] ἁ ΒΔ, καὶ τετμάσθω | ἁ ΒΔ κατὰ τὰ Κ, Ρ ὁμοίως τοῖς πρότε | ρον, ἄχθω δὲ καὶ ἁ
H 410 μὲν ΗΛ παρὰ | τὰν ΕΖ ἐφαπτομένα τᾶς [ἀπὸ | τῆς] ΑΒΓ τομᾶς κατὰ τὸ Η, ἁ δὲ ΗΘ | παρὰ τὰν ΒΔ, ἁ δὲ ΗΣ κάθετος ἐπὶ τὰν | ΒΔ. ἐπεὶ δὲ τὸ τμᾶμα τῷ βάρει λόγον | ἔχει ποτὶ τὸ ὑγρόν, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς | Ψ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ, | δῆλον, ὅτι ἁ Ψ ἴσα ἐστὶν τᾷ ΗΘ· δειχθή | σεται γὰρ ὁμοίως τοῖς πρότερον· ὥστε | καὶ ἁ ΗΘ ἴσα ἐστὶν τᾷ ΦΙ· καὶ τὰ | τμάματα ἄρα τὰ ΑΦΧ, ΕΒΖ ἴσα | ἐστὶν ἀλλάλοις. ἐπεὶ δ' ἐν ἴσοις καὶ | ὁμοίοις τμαμάτεσσι τοῖς ΑΠΟΛ, ΑΒΓ | ἀγμέναι ἐντὶ αἱ ΑΧ, ΕΖ ἴσα τμάματα ἀφαιροῦσαι, καὶ ἁ μὲν | ἀπ' ἄκρας τᾶς βάσιος, ἁ δὲ οὐκ | ἀπ' ἄκρας, ἐλάσσονα

Διότι ἂς ἀφεθῇ τὸ τμῆμα εἰς τὸ ὑγρόν, ὡς ἐλέχθη, καὶ κατ' ἀρχὰς ἂς εἶναι κατὰ τοιοῦτον τρόπον κεκλιμένον, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ οὔτε καθ' ἓν σημεῖον, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἰς μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος γίνεται τομὴ ἡ ΑΒΓ, εἰς δὲ τὴν τοῦ ὑγροῦ ἡ ΕΖ, ἔστω δὲ ἄξων τῆς τομῆς καὶ διάμετρος τοῦ τμήματος ἡ ΒΔ (Σχ. 11) καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΔ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Ρ, ὅπως ἐγένετο καὶ εἰς τὰ προηγούμενα, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ μὲν ΗΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἐφαπτομένη τῆς ἀπὸ τῆς ΑΒΓ τομῆς κατὰ τὸ Η, ἡ δὲ ΗΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ δὲ ΗΣ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος τοῦ τμήματος ἔχει λόγον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, ὃν ἔχει τὸ $\Psi^2 : \mathrm{B}\Delta^2$, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ $\Psi = \mathrm{H}\Theta$· διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται καθ'

Σχ. 12



ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα· ὥστε εἶναι καὶ ἡ $\mathrm{H}\Theta = \Phi\mathrm{I}$· καὶ τὰ τμήματα ἄρα ΑΦΧ, ΕΒΖ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα, τὰ ΑΠΟΛ, ΑΒΓ, ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ ΑΧ, ΕΖ ἀφαιροῦσαι ἴσα τμήματα, καὶ ἡ μὲν μία ἔχει ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς βάσεως, ἡ δὲ ἄλλη ὄχι ἀπὸ τοῦ ἄκρου, θὰ σχηματίσῃ μι-

ποιήσει | τὰν ὀξεῖαν ποτὶ τὰν διάμετρον | τοῦ τμάματος ἁ ἀπ' ἄκρας τᾶς | βάσιος ἀχθεῖσα. καὶ ἐπειδὴ | τοῦ ΗΛΣ τριγώνου ἁ Λ μείζων | τᾶς Ω γωνίας τοῦ ΦΤΩ τριγώ | νου, δῆλον, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ | Βς τᾶς ΒΤ, ἁ δὲ ςΡ τᾶς ΡΤ μείζων, | καὶ ἁ Ηϡ μείζων τᾶς ΦΗ· ἁ ϡΘ | ἄρα ἐλάσσων τᾶς ΗΙ. καὶ ἐπεὶ δι |πλασία ἐστὶν ἁ ΦΥ τᾶς ΥΙ, δῆλον, ὅτι |ἁ Ηϡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία τᾶς | ⟨ϡΘ. ἔστω δὴ ἁ ΗΑ' διπλασία⟩ | τᾶς Α'Θ· δῆλον δὴ ἐκ τούτων, ὅτι | οὐ μενεῖ τὸ τμᾶμα, ἀλλὰ ἐπικλι | θήσεται, ἕως ἂν ἁ βάσις αὐτοῦ | θίγῃ καθ' ἓν σαμεῖον τᾶς τοῦ | ὑγροῦ ἐπιφανείας.

ἁπτέσθω δὴ | καθ' ἓν σαμεῖον, ὡς ἐν τῷ τρίτῳ | σχήματι ἐγράφθη, καὶ τὰ ἄλλα | τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· δειχθή |σεται H 412 *δὴ πάλιν ἅ τε ΘΗ ἴσα ἐοῦσα | τᾷ ΦΙ καὶ τὰ ΑΦΧ, ΑΒΖ τμά |ματα ἴσα ἀλλάλοις. καὶ ἐπεὶ | ἐν ἴσοις καὶ ὁμοίοις τμαμάτεσσι | τοῖς ΑΠΟΛ, ΑΒΓ ἀγμέναι ἐντὶ | αἱ ΑΧ, ΑΖ ἴσα τμάματα ἀφαι |ροῦσαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας ποτὶ | ταῖς διαμέτροις τῶν τμαμά |των· τῶν ἄρα ΛΗΣ, ΦΤΩ αἱ ποτὶ | τοῖς Λ, Ω γωνίαι ἴσαι ἐντί, καὶ ἁ ΒΣ | εὐθεῖα τᾷ ΒΤ ἴσα καὶ ἁ ΣΡ τᾷ | ΡΤ καὶ ἁ Ηϡ τᾷ ΦΗ καὶ ἁ ϡΘ τᾷ | ΗΙ. ἐπεὶ δὲ διπλασία ἐστὶν ἁ ΦΥ τᾶς | ΥΙ, φανερόν, ὅτι ἁ Ηϡ μείζων ἐστὶν | ἢ διπλασία τᾶς ϡΘ. ἔστω οὖν ἁ ΗΑ' | τᾶς Α'Θ διπλασίων· πάλιν | δὴ ἐκ τούτων δῆλον, ὡς οὐ μενεῖ | τὸ τμᾶμα, ἀλλ' ἐπικλιθήσεται | ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Α. ἐπεὶ δὴ καθ' ἓν | σημεῖον ὑπετέθη τὸ τμᾶμα ἅ |πτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, δῆλον, ὅτι κα | τὰ πλείονα τόπον ἁ βάσις ὑπὸ | τοῦ ὑγροῦ καταλαφθήσεται.*

κροτέραν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν μὲ τὴν διάμετρον τοῦ τμήματος ἡ ἀχθεῖσα ἀπὸ τοῦ ἄκρου τῆς βάσεως. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Λ τοῦ τριγώνου ΗΛΣ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Ω τοῦ τριγώνου ΦΤΩ (Εὐκλ. Ι, 39), εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΒΣ $<$ ΒΤ, ἡ δὲ ΣΡ $>$ ΡΤ, καὶ ἡ Ηϡ $>$ ΦΗ· εἶναι ἄρα ἡ ϡΘ $<$ ΗΙ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΦΥ $=$ 2ΥΙ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ Ηϡ $>$ 2 ϡΘ. Ἔστω λοιπὸν ἡ ΗΑ΄ $=$ 2Α΄Θ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ τμῆμα δὲν θὰ μείνῃ ἐν ἠρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ, μέχρις ὅτου ἡ βάσις αὐτοῦ ἐφάπτηται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ἂς ἐφάπτηται λοιπὸν εἰς ἓν σημεῖον, ὡς εἰκονίζεται εἰς τὸ τρίτον σχῆμα (τῶν ἐξεταζομένων περιπτώσεων, ἐδῶ Σχ. 12), καὶ τὰ ἄλλα ἂς κατασκευασθῶσι τὰ αὐτά· ἀποδεικνύεται λοιπὸν πάλιν ὅτι ἡ ΘΗ $=$ ΦΙ καὶ ὅτι τὰ τμήματα ΑΦΧ, ΑΒΖ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα καὶ ὅμοια τμήματα, τὰ ΑΠΟΛ, ΑΒΓ, ἔχουσιν ἀχθῆ αἱ ΑΧ, ΑΖ ἀφαιροῦσαι ἴσα τμήματα, σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας μὲ τὰς διαμέτρους τῶν τμημάτων· τῶν τριγώνων ἄρα ΛΗΣ, ΦΤΩ αἱ πρὸς τὰ Λ, Ω γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΣ $=$ ΒΤ καὶ ἡ ΣΡ $=$ ΡΤ καὶ ἡ Ηϡ $=$ ΦΗ καὶ ἡ ϡΘ $=$ ΗΙ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΦΥ $=$ 2ΥΙ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ Ηϡ $>$ 2 ϡΘ. Ἔστω λοιπὸν ἡ ΗΑ΄ $=$ 2Α΄Θ· πάλιν λοιπὸν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ τμῆμα δὲν θὰ μείνῃ ἐν ἠρεμίᾳ, ἀλλὰ θὰ κλίνῃ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ Α. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπετέθη, ὅτι τὸ τμῆμα ἐφάπτεται τοῦ ὑγροῦ εἰς ἓν σημεῖον, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ βάσις αὐτοῦ θὰ καλυφθῇ ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν.

Ἀπόσπασμα ἐκ τῆς ἐκδόσεως Ἀγγέλου Μάι (Fragmentum ab Angelo Mai editum).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἄνευ μεταφράσεως ἀποσπάσματά τινα τῆς πραγματείας Ὀχουμένων. Πρόκειται περὶ προτάσεων τοῦ βιβλίου α′ τῶν Ὀχουμένων, ἄλλης ὅμως ἐκδόσεως, πιθανώτατα μεταγενεστέρας. Ταῦτα προτάσσονται τοῦ κειμένου εἰς τὸν II τόμον τῆς ἐκδόσεως Heiberg.

H VII *Περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων [ἢ περὶ τῶν ὀχουμένων].*

Αἴτημα α′

Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν τοιάνδε τινὰ φύσιν ἔχον, ὥστε τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐξ ἴσου κειμένων καὶ ὠθεῖσθαι συνεχῶν ὄντων ἐλαύνεσθαι τὸ ἧττον ὠθούμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον ὠθουμένου· καὶ πάντων αὐτοῦ μερῶν ὠθεῖσθαι ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ὑπεράνω αὐτοῦ ὄντος κατὰ κάθετον, ἐὰν τὸ ὑγρὸν ᾖ καταβαῖνον ἔν τινι καὶ ὑπό τινος ἑτέρου πιεζόμενον.

Θεώρημα πρῶτον

Ἐὰν ἐπιφάνειά τις ἐπιπέδῳ τμηθῇ διά τινος ἀεὶ σημείου, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ ἀεὶ περιφέρεια ᾖ ἔχουσα κέντρον τὸ προειρημένον σημεῖον, σφαίρας ἐστὶν ἐπιφάνεια.

τετμήσθω γὰρ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ α′ σημείου, καὶ ἀεὶ ἡ κοινὴ τομὴ ἔστω κύκλου περιφέρεια. λέγω, ὅτι σφαίρας ἐπιφάνειά ἐστιν, ἧς κέντρον τὸ α′.

H VIII *εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α′ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν ἄνισοι. ἔστωσαν αἱ αβ′, αγ′· τὰ ἄρα β′, γ′ σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ. τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ διὰ τῶν β′, γ′, α′ σημείων· κύκλου δὴ ποιήσει περιφέρειαν ᾧ ὑποκείμενον, οὗ* *κέντρον τὸ α′· ἴσαι ἄρα αἱ αβ′, αγ′. ἀλλὰ καὶ ἄνισοι· ὅπερ ἀδύνατον. σφαίρας ἄρα ἐστὶν ἐπιφάνεια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

β′

Παντὸς ὕδατος ἡσυχάζοντος ὥστε ἀκίνητον μένειν ἡ ἐπιφάνεια σφαιροειδὴς ἔσται ἔχουσα τὸ αὐτὸ τῇ γῇ κέντρον.

γ′

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ ἰσομεγέθη καὶ ὑποβαρῆ τῷ ὑγρῷ καθειμένα εἰς τὸ ὑγρὸν βαπτισθήσονται, ὥστε τὴν τοῦ ὑγροῦ ἐπιφάνειαν μὴ ὑπερβάλλειν, καὶ οὐκέτι οἰσθήσεται εἰς τὰ κατωτέρω.

δ′

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ τοῦ ὑγροῦ κουφότερα, ἐὰν εἰς ὑγρὸν καθιῶνται, οὐχ ὅλα βαπτισθήσεται, ἀλλ' ἔσται τι αὐτῶν καὶ ἔξω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

ε′

Τῶν στερεῶν μεγεθῶν τὰ τοῦ ὑγροῦ κουφότερα εἰς τὸ ὑγρὸν καθειμένα ἐπὶ τοσοῦτον βαπτισθήσεται, ἐφ' ὅσον τοσοῦτον τοῦ ὑγροῦ ὄγκον, ὅσος ἐστὶν ὁ τοῦ βαπτισθέντος μέρους, ἰσοβαρεῖ εἶναι τῷ ὅλῳ μεγέθει.

H IX *ς′*

Τὰ στερεὰ ὑγροῦ κουφότερα βίᾳ εἰς τὸ ὑγρὸν πιεσθέντα ἐπανιστάμενα φέρονται ἐπὶ τὰ ἄνω τοσαύτῃ δυνάμει, ὅσῳ τὸ ὑγρὸν ἰσομέγεθες τῷ μεγέθει βαρύτερόν ἐστι τοῦ μεγέθους.

ζ′

Τὰ βαρύτερα τοῦ ὑγροῦ στερεὰ καθειμένα εἰς τὸ ὑγρὸν οἰσθήσεται κάτω, ἕως οὗ καταβαίνωσι, καὶ ἔσται τοσούτῳ κουφότερα ἐν τῷ ὑγρῷ, ὅσον ἔχει τὸ βάρος τὸ ὑγρὸν ἰσομέγεθες τῷ στερεῷ μεγέθει.

Λῆμμα ἢ ὑπόθεσις

Ὑποκείσθω τῶν ἐν ὑγρῷ ἄνω φερομένων ἕκαστον ἄνω φέρεσθαι κατὰ κάθετον, ἥτις ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐτῶν ἐκβάλλεται.

Θεώρημα η′

Ἐὰν στερεῶν τι μέγεθος ἔχον σχῆμα τμήματος σφαίρας εἰς τὸ ὑγρὸν καθιῆται, ὥστε τὴν βάσιν τοῦ τμήματος μὴ ἅπτεσθαι τοῦ ὑγροῦ, τὸ σχῆμα ἐπισταθήσεται ὀρθόν, ὥστε τὸν ἄξονα τοῦ τμήματος κατὰ κάθετον εἶναι. καὶ . . . .

ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ

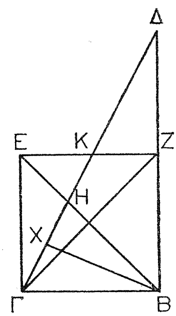
H 416 ## Ἀρχιμήδους Στομάχιον

Τοῦ λεγομένου Στομαχίου ποικί|λαν ἔχοντος τᾶς ἐξ ὧν συνέστακε | σχημάτων μεταθέσεως θεωρίαν | ἀναγκαῖον ἡγησάμην πραττον του | ⟨. . . . .⟩ | ρῶν ἐκθέσθαι, εἴς τε ἃ διαιρεῖται, | ἕκαστόν τε αὐτῶν τίνι ἐστὶν ὁμοιού|μενον, ἔτι δὲ καί, ποῖαι γωνίαι σύ|νδυο λαμβανόμεναι ⟨ . . . ⟩ καὶ ⟨ . . . ⟩ | θάς, εἴρηται πρὸς τὸ τὰς ἐναρμόσεις | τῶν ἐξ αὐτῶν γεννωμένων σχα | μάτων γιγνώσκεσθαι, εἴτε ἐπ' εὐ|θείας εἰσὶν αἱ γεννώμεναι ἐν τοῖς | σχάμασι πλευραί, εἴτε καὶ μικρῶς | λείπουσαι τᾷ θεωρίᾳ λανθά | νουσιν· τὰ γὰρ τοιαῦτα φιλότεχνα· | καὶ ἐὰν ἐλάχιστον μὲν λείπηται, τᾷ | δὲ θεωρίᾳ λανθάνῃ, οὐ παρὰ τοῦ|τ' ἐστιν ἔκβλητα, ἃ συνίσταται. |

Ἔστι μὲν οὖν ἐξ αὐτῶν οὐκ ὀλίγων σχημάτων | . . . . ο . . διὰ τὸ . . . . . ν . . τον εἶναι | εἰς ἕτερον τόπον τοῦ ἴσου καὶ ἰσο|γωνίου σχάματος μετατιθεμε . . . | καὶ ἑτέ . . . . . λαμβάνοντας. ⟨ἐνίο⟩|τε δὲ καὶ δύο σχημάτων συνάμφω | ἑνὶ σχήματι ἴσων ὄντων καὶ ὁμοί|ων τῷ ἑνὶ σχή-
H 418 ματι ἢ καὶ δύο σχη|μάτων συνάμφω ἴσων τε καὶ ὁμοί|ων ὄντων δυσὶ σχήμασι συνάμφω | πλείονα σχήματα συνίσταται ἐ|κ τῆς μεταθέσεως. προγράφομε|ν οὖν τι θεώρημα εἰς αὐτὸ συντεῖ|νον.

Ἀρχιμήδους Στομάχιον

Ἐπειδὴ τὸ λεγόμενον στομάχιον ἔχει ποικίλην θεωρίαν τῆς μεταθέσεως τῶν σχημάτων ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἐθεώρησα ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσω τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται, καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν πρὸς ποῖον εἶναι ὅμοιον, προσέτι δὲ καὶ ποῖαι γωνίαι λαμβανόμεναι ἀνὰ δύο ⟨σχηματίζουσι δύο ὀρθὰς⟩ ἐλέχθη διὰ νὰ ἀναγνωρίζωνται αἱ ἐναρμόσεις (μεταθέσεις) τῶν ἐξ αὐτῶν γεννωμένων σχημάτων, εἴτε αἱ γεννώμεναι εἰς τὰ σχήματα πλευραὶ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, εἴτε καὶ ἂν παρεκκλίνωσιν ὀλίγον ἡ ἀπόκλισις δὲν φαίνεται· διότι τὰ τοιαῦτα πράγματα ἀπαιτοῦσι ἐνδελεχῆ ἔρευναν· καὶ ἐὰν ἐλλείπη ὀλίγον διὰ νὰ εἶναι αἱ πλευραὶ ἐπ' εὐθείας, τοῦτο δὲ δὲν φαίνεται, δὲν εἶναι τοῦτο λόγος διὰ νὰ παραμεληθῇ ἡ ἔρευνα αὐτῶν.

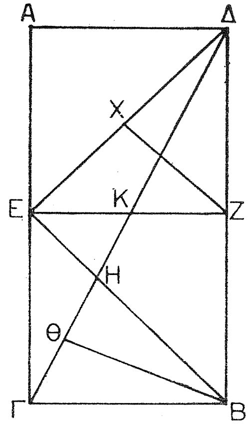


Ὑπάρχουσι μὲν λοιπὸν ἐξ αὐτῶν ὄχι ὀλίγα σχήματα . . . διότι ἓν μέρος αὐτῶν εἰς τὴν θέσιν ἄλλου σχήματος δύναται νὰ μετατεθῇ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον καὶ ἰσογώνιον. Ἐνίοτε δὲ καὶ ἐκ δύο σχημάτων τὰ ὁποῖα ὁμοῦ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς ἓν σχῆμα ἢ καὶ ἐκ δύο σχημάτων τὰ ὁποῖα ὁμοῦ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς δύο σχήματα ὁμοῦ σχηματίζονται περισσότερα σχήματα ἐκ τῆς μεταθέσεως. Προτάσσομεν λοιπὸν θεώρημά τι χρήσιμον πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν.

Ἔστω γὰρ παραλληλόγραμ | μον ὀρθογώνιον τὸ ΖΓ, καὶ δε . ι . . . . . ω | ἡ ΕΖ τῷ Κ, καὶ . . διήχθωσαν | ἀπὸ τῶν Γ, Β αἱ ΓΚ, ΒΕ . ει . . ων | . . . τῶν . . . Γ . . . . ἐκ⟨βεβλή⟩ | σθωσαν αἱ ΓΚ, ΒΖ καὶ συμπιπτέ | τωσαν κατὰ τὸ Δ . . . . ⟩ | ἡ ΓΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ⟨ἴση⟩ | καὶ ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΒΖ, τῇ ΖΔ· ὥ⟨στε⟩ | μείζων ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ· καὶ γωνία ⟨ἄρα⟩ | ἡ ὑπὸ τῶν ΖΔΓ τῆς ὑπὸ τῶν ΖΓΔ | μείζων. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ ὑπὸ ΗΒΔ, ΖΓΒ· | ἡμίσεια γὰρ ὀρθῆς ἑκατέρα· μεί |ζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓΗΒ, ἐπεὶ | ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ | ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΗΒΔ, ΗΔΒ, | τῆς ὑπὸ τῶν ΗΓΒ· ὥστε μείζων | ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ. ἐὰν ἄρα δίχα τμη |θῇ ἡ ΓΗ κατὰ Χ, ἔσται ἀμβλεῖα μὲν | ἡ ὑπὸ ΓΧΒ· ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ΓΧ τῇ ΧΗ, | καὶ κοινὴ ἡ ΧΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ | βάσις ἡ ΓΒ τῆς ΒΗ μείζων· καὶ | ἡ γωνία ἄρα τῆς γωνίας μεί |ζων. ἀμβλεῖα μὲν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΧΒ, ὀξεῖα | δὲ ἡ ἐφεξῆς. ἡμίσεια δὲ ὀρθῆς ἡ | ὑπὸ ΓΒΗ· τοῦτο γάρ ἐστιν ὑποκείμε | νον τοῦ παραλληλογράμμου· ὀξεῖ |α δὲ ἡ ὑπὸ ΒΧΗ. καὶ . τι δὴ ἴση ἡ | λοιπαὶ ΓΒΗ καὶ συνίσταται καὶ | διαιρεῖται τοῦτο επ . ον τον . . . . | . . . . βάσιος . τι . . . . | . . . . . . αστ . H 420 α . ἄρα ο . . . ΑΒ . . . | . αν . . ο . . . τὴν ΓΑ . . . . . νῶν | . . . . . . ἔχον . . . . τὸ ἐπίλοιπ . . . . | . . . . | . . δύνασθαι ἀρ . . . . . ξειν εκ . . . . | τῶν τομῶν . . . τῶν τάξιν ἐχοντ.

τετμήσθω ἡ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ | διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω | ἡ ΕΖ· ἔστιν οὖν τετράγωνα τὰ ΓΖ, ΖΑ. | ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΓΔ, ΒΕ, ΕΔ, | καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΓΗ, ΕΔ | κατὰ τὰ Θ, Χ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν | αἱ ΒΘ, ΧΖ, καὶ διὰ τῶν . ,Κ τῇ ΒΔ πα |ράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Κ., . Ξ. διὰ | τὸ προκείμενον ἄρα θεώρημα τοῦ | ΒΓΘ τρι-

Διότι ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΓ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Γ, Β, αἱ ΓΚ, ΒΕ . . . καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΓΚ, ΒΖ, καὶ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Δ . . . ἡ ΓΗ. Ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΕΚ = ΚΖ καὶ ἡ ΓΕ τουτέστιν ἡ ΒΖ = ΖΔ· ὥστε εἶναι ἡ ΓΖ > ΖΔ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΖΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΓΔ (Εὐκλ. I, 18). Εἶναι δὲ γωνία ΗΒΔ = γωνία ΖΓΒ· διότι ἑκάστη εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· εἶναι ἄρα γωνία ΓΗΒ > γωνίας ΗΓΒ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΗΒ = πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὰς ΗΒΔ + ΗΔΒ (Εὐκλ. I, 32)· ὥστε εἶναι ΓΒ > ΒΗ (Εὐκλ. I, 19). Ἐὰν ἄρα ἡ ΓΗ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Χ, θὰ εἶναι ἀμβλεῖα ἡ ΓΧΒ· διότι ἐπειδὴ εἶναι ΓΧ = ΧΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΧΒ, ὑπάρχουσιν εἰς ἓν τρίγωνον δύο πλευραὶ ἴσαι πρὸς δύο πλευράς· καὶ ἡ βάσις ΓΒ > τῆς βάσεως ΒΗ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας βάσεως εἶναι μεγαλυτέρα (Εὐκλ. I, 25). Εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα μὲν ἡ ΓΧΒ, ὀξεῖα δὲ ἡ ἐφεξῆς. Εἶναι δὲ ἥμισυ ὀρθῆς ἡ ΓΒΗ· διότι τοῦτο ὑπάρχει ἐκ τοῦ τετραγώνου σχήματος· εἶναι δὲ ὀξεῖα ἡ ΒΧΗ. Καὶ . . . εἶναι ἴση . . . λοιπαὶ ΓΒΗ καὶ συνίσταται καὶ διαιρεῖται τοῦτο . . .

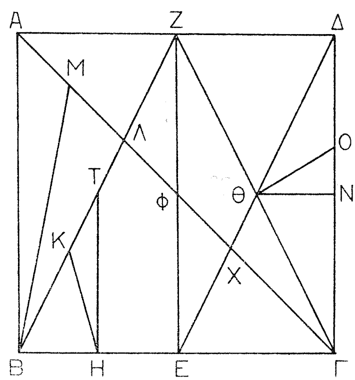


Ἂς τμηθῇ ἡ ΓΑ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· εἶναι λοιπὸν τὰ σχήματα ΓΖ, ΖΑ τετράγωνα. Ἂς ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΓΔ, ΒΕ, ΕΔ, καὶ ἂς τμηθῶσι εἰς τὸ μέσον αἱ ΓΗ, ΕΔ κατὰ τὰ Θ, Χ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΘ, ΧΖ, καὶ διὰ τῶν . . . Κ πρὸς τὴν ΒΔ παράλληλοι ἂς ἀχθῶσιν αἱ Κ . . . Ξ. Ἐκ τοῦ προηγουμένου ἄρα θεωρήματος συνάγεται ὅτι ἡ πρὸς τὸ Θ γώνου ἡ πρὸς τῷ Θ γωνία | ἀμβλεῖα, ἡ δὲ λοιπὴ ὀξεῖα ..... | νερὸν φανερὸν δὲ ... ει .....

Das Buch des Archimedes über die Teilung der Figur Stomachion in vierzehn zu ihr in Verhältnis stehende Figuren.

Wir zeichnen ein Parallelogramm, es sei dies ABGD, halbieren BG in E, errichten EZ senkrecht auf BG, ziehen die Diagonalen AG, BZ und ZG, halbieren ebenfalls BE in H, und errichten HT senkrecht auf BE; dann legen wir das Lineal an den Punkt H und visieren nach dem Punkt A und ziehen HK, halbieren AL in M und ziehen BM, so ist das Rechteck AE in sieben Teile geteilt. Hierauf halbie-
H 421 *ren wir GD in N, ebenso ZG in C, ziehen EC, legen das Lineal an die Punkte B und C an und ziehen CO, ziehen noch CN, so ist auch das Rechteck ZG in sieben Teile, aber auf andere Weise als das erste, geteilt, mithin das ganze Quadrat in vierzehn Teile.*

Wir beweisen nun, dass jeder der vierzehn Teile zum ganzen Quadrat in rationalem Verhältnis stehe.



γωνία τοῦ τριγώνου ΒΓΘ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ὀξεῖα . . . εἶναι δὲ φανερὸν . . . ει . . .

Τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ σχήματος τοῦ καλουμένου Στομάχιον εἰς δέκα τέσσαρα σχήματα εὑρισκόμενα εἰς λόγον πρὸς αὐτό*.

Σχεδιάζομεν ἓν παραλληλόγραμμον, ἔστω τὸ ΑΒΓΔ, διχοτομοῦμεν τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, ὑψώνομεν τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΒΖ, καὶ ΖΓ, διχοτομοῦμεν ἐπίσης τὴν ΒΕ εἰς τὸ Η, καὶ ὑψώνομεν τὴν ΗΤ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ. Κατόπιν θέτομεν τὸν κανόνα εἰς τὸ σημεῖον Η καὶ κατοπτεύομεν πρὸς τὸ σημεῖον Α καὶ φέρομεν τὴν ΗΚ, διχοτομοῦμεν τὴν ΑΛ εἰς τὸ Μ καὶ φέρομεν τὴν ΒΜ, ὁπότε τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ ἔχει διαιρεθῇ εἰς ἑπτὰ μέρη. Διχοτομοῦμεν τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ν, ἐπίσης τὴν ΖΓ εἰς τὸ Θ, φέρομεν τὴν ΕΘ, θέτομεν τὸν κανόνα εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Θ καὶ φέρομεν τὴν ΘΟ, φέρομεν ἀκόμη τὴν ΘΝ, ὁπότε ἔχει ἐπίσης καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΖΓ διαιρεθῇ εἰς ἑπτὰ μέρη, ἀλλὰ κατ' ἄλλον τρόπον ἢ τὸ πρῶτον ὀρθογώνιον, καὶ κατὰ ταῦτα τὸ ὅλον τετράγωνον ἔχει διαιρεθῇ εἰς δέκα τέσσαρα μέρη.

Ἀποδεικνύομεν τώρα ὅτι ἕκαστον τῶν δεκατεσσάρων μερῶν πρὸς ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον εὑρίσκεται εἰς ῥητὴν σχέσιν.

---

* Ἀπόσπασμα ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ μεταφρασθὲν εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ H. Suter.

Weil ZG die Diagonale des Rechtecks ZG ist, so ist $\triangle$ H 422 *DZG die Hälfte dieses Rechtecks, also* $^1/_4$ *des Quadrates. Aber* $\triangle$ *GNC ist* $^1/_4$ *von* $\triangle$ *DZG, weil, wenn wir EC verlängern, es in den Punkt D trifft, und dann also* $\triangle$ *GDC die Hälfte des* $\triangle$ *DZG und gleich den beiden* $\triangle$ *GNC und DNC zusammen ist; also ist* $\triangle\, GNC = {}^1/_{16}$ *des Quadrats. Wenn wir nun ferner annehmen, die Linie OC sei nach dem Punkte B gerichtet, wie sie in der Tat auch gezeichnet wurde, so ist die Linie NC parallel zur Seite BG des Quadrates, resp. des* $\triangle$ *OBG, also hat man die Proportion* [Eucl. VI, 2]

$$BG : NC = GO : NO.$$

Es ist aber BG das Vierfache von NC, also auch GO das Vierfache von NO; deshalb ist nun GN das Dreifache von NO und $\triangle\, GNC = 3\, ONC$ [Eucl. VI, 1]. *Da aber, wie wir gezeigt haben,* $\triangle\, GNC = {}^1/_{16}$ *des Quadrates ist, so ist* $\triangle\, ONC = {}^1/_{48}$ *des Quadrates. Weil ferner* $\triangle\, GDZ = {}^1/_4$ *des Quadrates ist und deshalb* $GNC = {}^1/_{16}$ *desselben und* $\triangle\, NCO = {}^1/_{48}$ *desselben, so bleibt für das Viereck* $DOCZ = {}^1/_6$ *der Quadratfläche übrig. Nach der Voraussetzung*[1]*) geht ferner die Linie NC durch den Punkt F, und es wäre CF parallel zu GE; also hat man die Proportion* [Eucl. VI, 4] $EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ$. *Weil nun* $EQ = 2CQ$ *und* $GQ = 2FQ$,[2]*) so ist* $\triangle$ *EQG das Doppelte jedes der beiden* $\triangle$ *GCQ und EFQ* [Eucl. VI, 1]. *Es ist aber klar, dass* $\triangle\, EGZ = 2 \triangle\, EFG$ *ist* [Eucl. VI, 1], *weil* $ZE = 2FE$ *ist. Das* $\triangle$ *EGZ ist aber* $= {}^1/_4$ *des Quadrates, also* $\triangle$

1) Quia rectae DG, ZE inter se aequales utraque in punctis N, F et recta ZG in C in binas partes aequales sectae sunt.

2) Quia EG = 2CF.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΖΓ εἶναι διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου ΖΓ, τὸ τρίγωνον ΔΖΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, ἤτοι τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΓΝΘ εἶναι τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τριγώνου ΔΖΓ, ἐπειδή, ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΕΘ, συναντᾷ αὐτὸ εἰς τὸ Δ, καὶ τότε εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΔΘ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΔΖΓ καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΓΝΘ, ΔΝΘ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΝΘ ἴσον πρὸς τὸ ἓν δέκατον ἕκτον τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΟΘ νεύει πρὸς τὸ σημεῖον Β, ὅπως πράγματι ἔχει σχεδιασθῆ, ἡ εὐθεῖα ΝΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ, ὁπότε ὑπάρχει ἡ ἀναλογία

$$\mathrm{B\Gamma : N\Theta = \Gamma O : NO}$$

(Εὐκλ. VI, 2). Εἶναι ὅμως ἡ ΒΓ = 4 ΝΘ, καὶ ἐπίσης ἡ ΓΟ = 4ΝΟ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΝ = 3ΝΟ καὶ τὸ τρίγωνον ΓΝΘ = 3 τρίγωνα ΟΝΘ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐπειδὴ ὅμως, ὡς ἔχομεν ἀποδείξει, τὸ τρίγωνον ΓΝΘ = $^1/_{16}$ τοῦ τετραγώνου, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΝΘ = $^1/_{48}$ τοῦ τετραγώνου.

Ἐπειδὴ ἀκόμη τὸ τρίγωνον ΓΔΖ = $^1/_4$ τοῦ τετραγώνου καὶ ἑπομένως ΓΝΘ = $^1/_{16}$ τοῦ ἰδίου καὶ τρίγωνον ΝΘΟ = $^1/_{48}$ τοῦ ἰδίου, οὕτω μένει νὰ εἶναι τὸ τετράπλευρον ΔΟΘΖ = $^1/_6$ τοῦ τετραγώνου. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΘ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Φ, καὶ θὰ εἶναι ἡ ΘΦ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ. Εἶναι ἄρα ΕΓ : ΘΦ = ΕΧ : ΘΧ = ΓΧ : ΦΧ (Εὐκλ. VI, 4). Ἐπειδὴ τώρα εἶναι ΕΧ = 2ΘΧ καὶ ΓΧ = 2ΦΧ, θὰ εἶναι καὶ τὸ τρίγωνον ΕΧΓ ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον ἑκατέρου τῶν δύο τριγώνων ΓΘΧ καὶ ΕΦΧ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΓΖ = 2 τρίγωνα ΕΦΓ (Εὐκλ. VI, 1), ἐπειδὴ εἶναι ΖΕ = 2ΦΕ. Εἶναι ὅμως τὸ τρίγωνον ΕΓΖ = $^1/_4$ τοῦ τετραγώνου, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΕΦΓ = $^1/_8$ τοῦ ἰδίου. Τοῦτο ὅμως εἶναι τὸ τριπλάσιον ἑκα-

EFG = $^1/_8$ *desselben. Dieses ist aber das Dreifache jedes der beiden △ EFQ und GCQ; also ist jedes dieser beiden Dreiecke* = $^1/_{24}$ *des Quadrates AG. Und das △ EGQ ist das* H 423 *Doppelte jedes der beiden △ EFQ und GCQ; also ist es* = $^1/_{12}$ *des Quadrates. Weil ferner ZF = EF ist, so ist △ ZFG = △ EFG* [Eucl. VI, 1]; *wenn wir nun △ GCQ = △ EFQ wegnehmen, so bleibt Viereck FQCZ = △ EGQ; also ist auch Viereck FQCZ* = $^1/_{12}$ *des Quadrates AG.*

Wir haben nun das Rechteck ZG in 7 Teile geteilt und gehen nun zur Teilung des andern Rechtecks über.

Weil BZ und EC zwei parallele Diagonalen sind [Eucl. VI, 2], *und ZF = EF ist, so ist △ ZLF = EFQ* [Eucl. VI, 19], *mithin △ ZLF* = $^1/_{24}$ *des Quadrates AG. Weil BH = HE ist, so ist △ BEZ das Vierfache des △ BHT; denn jedes derselben ist rechtwinklig.*[1] *Da aber △ BEZ* = $^1/_4$ *des Quadrates ABGD ist, so ist △ BHT* = $^1/_{16}$ *desselben. Nach unserer Voraussetzung geht ferner die Linie HK durch den Punkt A; also hat man die Proportion* [Eucl. VI, 4]

$$AB : HT = BK : KT.$$

Es ist aber AB = 2HT,[2] *also auch BK = 2KT, mithin BT = 3 KT; also ist △ BHT das Dreifache des △ KHT* [Eucl. VI, 1]. *Weil aber △ BHT* = $^1/_{16}$ *des ganzen Quadrates ist, so ist △ KHT* = $^1/_{48}$ *desselben. Ferner ist △ BKH das Doppelte des △ KHT* [Eucl. VI, 1], *also* = $^1/_{24}$ *des Quadrates. Da weiter BL = 2ZL,*[3] *und AL = 2LF*

---

1) Ideo △ BEZ, BHT aequianguli sunt et rationem habent, quam $BE^2 : BH^2$ (Eucl. VI, 19).

2) Quia BZ in T in duas partes aequales secta est.

3) Quia △ ABL, ZFL aequianguli et AB = 2ZF; tum u. Eucl. VI, 4.

τέρου τῶν δύο τριγώνων ΕΦΧ καὶ ΓΘΧ· εἶναι ἄρα ἑκάτερον τῶν δύο τούτων τριγώνων $= {}^1/_{24}$ τοῦ τετραγώνου ΑΓ. Καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΧ εἶναι τὸ διπλάσιον ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΕΦΧ καὶ ΓΘΧ· εἶναι ἄρα τοῦτο $= {}^1/_{12}$ τοῦ τετραγώνου. Ἐπειδὴ ἀκόμη εἶναι ΖΦ = ΕΦ, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΦΓ = τρίγωνον ΕΦΓ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τώρα τὸ τρίγωνον ΓΘΧ = τρίγωνον ΕΦΧ, μένει ὑπόλοιπον τὸ τετράπλευρον ΦΧΘΖ = τρίγωνον ΕΓΧ. Εἶναι ἄρα τὸ τετράπλευρον ΦΧΘΖ $= {}^1/_{12}$ τετραγώνου ΑΓ.

Ἔχομεν ἤδη διαιρέσει τὸ ὀρθογώνιον ΖΓ εἰς ἑπτὰ μέρη καὶ προβαίνομεν εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ἄλλου ὀρθογωνίου.

Ἐπειδὴ αἱ ΒΖ, ΕΘ εἶναι δύο παράλληλοι διαγώνιοι (Εὐκλ. VI, 2), καὶ εἶναι ΖΦ = ΕΦ, εἶναι ἄρα τρίγωνον ΖΛΦ = τρίγ. ΕΦΧ (Εὐκλ. VI, 19), καὶ ἑπομένως τρίγωνον ΖΛΦ $= {}^1/_{24}$ τοῦ τετραγώνου ΑΓ. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΗ = ΗΕ, εἶναι ἄρα τρίγωνον ΒΕΖ = 4 τρίγωνα ΒΗΤ· διότι ἕκαστον αὐτῶν εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ τρίγωνον ΒΕΖ $= {}^1/_4$ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἕπεται τρίγωνον ΒΗΤ $= {}^1/_{16}$ τοῦ ἰδίου. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἡμῶν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΗΚ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α· θὰ εἶναι ἄρα (Εὐκλ. VI, 4)

$$\mathrm{AB : HT = BK : KT}.$$

Εἶναι ὅμως ΑΒ = 2ΗΤ, καὶ ἐπίσης ΒΚ = 2ΚΤ, καὶ συνεπῶς ΒΤ = 3 ΚΤ· εἶναι ἄρα τρίγωνον ΒΗΤ = 3 τρίγωνα ΚΗΤ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι τρίγωνον ΒΗΤ $= {}^1/_{16}$ τοῦ ὅλου τετραγώνου εἶναι ἄρα τρίγωνον ΚΗΤ $= {}^1/_{48}$ τοῦ ἰδίου. Εἶναι δὲ τρίγωνον ΒΚΗ = 2 τρίγωνα ΚΗΤ (Εὐκλ. VI, 1), ἤτοι $= {}^1/_{24}$ τοῦ τετραγώνου. Ἐπειδὴ ΒΛ = 2ΖΛ καὶ ΑΛ = 2ΛΦ, εἶναι ἄρα *ist,*[1]*) so ist* $\triangle$ *ABL das Doppelte des* $\triangle$ *ALZ und* $\triangle$ *ALZ das Doppelte des* $\triangle$ *ZLF* [Eucl. VI, 1]. *Weil aber* $\triangle$ *ZLF* = $^1/_{24}$ *des ganzen Quadrates ist, so ist* $\triangle$ *ALZ* = $^1/_{12}$ *desselben, also* $\triangle$*ABL* = $^1/_6$. *Es ist aber* $\triangle$ *ABM* = $\triangle$ *BML* [Eucl. VI, 1], *also jedes dieser beiden Dreiecke* = $^1/_{12}$ *des Quadrates. Es bleibt noch übrig das Fünfeck LFEHT = der Hälfte* H 424 *eines Sechstels mehr der Hälfte eines Achtels des ganzen Quadrates.*[2]*)*

Wir haben also auch das Quadrat AE in 7 Teile geteilt; mithin ist die ganze Figur ABGD in 14 Teile geteilt, welche zu ihr in Verhältnis stehen; und das ist, was wir wollten.

---

1) U. not. 3.

2) Pentagonum illud =

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{AG} \div \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24}\right)\mathrm{AG} =$$

$$\mathrm{AG}\left(\frac{1}{2} \div \frac{17}{48}\right) = \frac{7}{48}\,\mathrm{AG} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)\right)\mathrm{AG}.$$

τρίγωνον ΑΒΛ = 2 τρίγωνα ΑΛΖ, καὶ τρίγωνον ΑΛΖ = 2 τρίγωνα ΖΛΦ (Εὐκλ. VI, 1). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι τρίγωνον ΖΛΦ = $^1/_{24}$ τοῦ ὅλου τετραγώνου, εἶναι ἄρα τρίγωνον ΑΛΖ = $^1/_{12}$ τοῦ ἰδίου, ἤτοι τρίγωνον ΑΒΛ = $^1/_6$. Εἶναι ὅμως τρίγωνον ΑΒΜ = τρίγωνον ΒΜΛ (Εὐκλ. VI, 1), ἤτοι εἶναι ἑκάτερον τῶν δύο τούτων τριγώνων = $^1/_{12}$ τοῦ τετραγώνου. Μένει ἀκόμη ὑπόλοιπον τὸ πεντάγωνον ΛΦΕΗΤ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ ἑκάστου ἕκτου σὺν τὸ ἥμισυ ἑνὸς ὀγδόου τοῦ ὅλου τετραγώνου.

Ἔχομεν ἄρα ἐπίσης διαιρέσει τὸ τετράγωνον ΑΕ εἰς ἑπτὰ μέρη· εἶναι ἄρα τὸ ὅλον σχῆμα ΑΒΓΔ εἰς 14 μέρη διῃρημένον, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται πρὸς αὐτὸ εἰς λόγον· καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ ΕΦΟΔΟΣ

H 426 ## Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πρά|ττειν.

Ἀπέστειλά σοι πρότερον | τῶν εὑρημένων θεωρημάτων | ἀναγράψας αὐτῶν τὰς προτά|σεις φάμενος εὑρίσκειν ταύτας | τὰς ἀποδείξεις, ἃς οὐκ εἶπον | ἐπὶ τοῦ παρόντος· ἦσαν δὲ τῶν ἀ|πεσταλμένων θεωρημάτων | αἱ προτάσεις αἵδε· τοῦ μὲν | πρώτου· ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν πα|ραλληλόγραμμον ἔχον βάσιν | κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν | βάσεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναν|τίον παραλληλογράμμοις, τὰς | δὲ πλευρὰς ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ | πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διά τε | ⟨τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου,⟩ | ὅς ἐστι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μι|ᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ | ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέδῳ | ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπί|πεδον ἀποτεμεῖ τμῆμα ἀπὸ | τοῦ κυλίνδρου, ὅ ἐστι περιεχόμε|νον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπι|φανείας κυλίνδρου, ἑνὸς μὲν | τοῦ ἀχθέντος, ἑτέρου δέ, ἐν ᾧ ἡ | βάσις ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου, τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς με|ταξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέ|δων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου τμῆμα ἕκτον μέρος | ἐστὶ τοῦ ὅλου πρίσματος. | τοῦ δὲ ἑτέρου θεωρήματος ἡ πρότασ|ις ἥδε· ἐὰν εἰς κύβον κύλινδρος | ἐγγραφῇ τὰς μὲν βάσεις ἔχων | πρὸς τοῖς κατεναντίον παραλλη|λογράμμοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν | τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέ|δων ἐφαπτομένην, ἐγγραφῇ δὲ καὶ | ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύ|βον τὰς μὲν βάσεις ἔχων ἐν ἄλλοις | πα-

H 428

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη μέθοδος

Ἀρχιμήδης Ἐρατοσθένει εὖ πράττειν.

Σοῦ ἀπέστειλα πρό τινος μερικὰ ἐκ τῶν παρ' ἐμοῦ εὑρεθέντων θεωρημάτων ἀναγράψας τὰς ἐκφωνήσεις αὐτῶν καὶ λέγων νὰ προσπαθήσῃς νὰ εὕρῃς τὰς ἀποδείξεις των, τὰς ὁποίας προσωρινῶς δὲν εἶχον ἐξαγγείλει· ἦσαν δὲ τῶν ἀπεσταλμένων θεωρημάτων αἱ ἐκφωνήσεις αἱ ἑξῆς· τοῦ μὲν πρώτου· ἐὰν εἰς ὀρθὸν πρίσμα ἔχον βάσιν παραλληλόγραμμον ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὰς μὲν βάσεις εἰς τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα, τὰς δὲ πλευρὰς (δηλ. τὰς 4 γεννητρίας) ἐπὶ τῶν λοιπῶν τοῦ πρίσματος ἐπιπέδων, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπέναντι ἐπιπέδου ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον θὰ τμήσῃ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἑνὸς μὲν τοῦ ἀχθέντος, ἄλλου δέ, ὅπου εἶναι ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου, ἡ ἐπιφάνεια δὲ τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι μεταξὺ τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων, τὸ δὲ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα εἶναι τὸ 1/6 τοῦ ὅλου πρίσματος. Τοῦ δὲ ἄλλου θεωρήματος ἡ ἐκφώνησις εἶναι ἡ ἑξῆς· ἐὰν εἰς κύβον ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὰς μὲν βάσεις εἰς τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα, τὴν δὲ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐφαπτομένην τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων, ἐγγραφῇ δὲ καὶ ἄλλος κύλινδρος εἰς τὸν αὐτὸν κύβον ἔχων τὰς μὲν βάσεις εἰς ἄλλα παραλληλόγραμμα, *ραλληλογράμμοις, τὴν δὲ ἐπι|φάνειαν τῶν λοιπῶν τεσσάρων | ἐπιπέδων ἐφαπτομένην, τὸ πε|ριληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν ἐπι|φανειῶν τῶν κυλίνδρων, ὅ ἐστιν | ἐν ἀμφοτέροις τοῖς κυλίνδροις, | δίμοιρόν ἐστι τοῦ ὅλου κύβου. συμ|βαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα | διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρη|μένων· ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχή|ματα, τά τε κωνοειδῆ καὶ | σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα | ⟨αὐτῶν, τῷ μεγέθει σχήμασι⟩ | κώνων καὶ κυλίνδρων συνε|κρίναμεν, ἐπιπέδοις δὲ περι|εχομένῳ στερεῷ σχήματι οὐ|δὲν αὐτῶν ἴσον ἐὸν εὕρηται, | τούτων δὲ τῶν σχημάτων τῶν | δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ἐπιφανεί|αις κυλίνδρων ἕκαστον ἑνὶ τῶν | ἐπιπέδοις περιεχομένων στερ|εῶν σχημάτων ἴσον εὑρίσκεται.*

Τούτων δὴ τῶν θεωρημάτων | τὰς ἀποδείξεις ἐν τῷδε τῷ βι|βλίῳ γράψας ἀποστελῶ σοι.

Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπου|δαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶ|τα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς | μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον | θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμα|σα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλί|ον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιό|τητα, καθ' ὃν σοι παρεχόμενον | ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰς εἰς | τὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖς | μαθήμασι θεωρεῖν διὰ τῶν | μηχανικῶν. τοῦτο δὲ πέπεισμαι χρή|σιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν | ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρη|μάτων. καὶ γάρ τινα τῶν πρότερον μοι φα|νέντων μηχανικῶς ὕστερον γε|ωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ | χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ | τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ | ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶ|σίν τινα τῶν ζητημάτων πο|ρί-
H 430 *σασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον | ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν. | ⟨. . . . . διόπερ καὶ τῶν θεωρη⟩|μάτων τούτων, ὧν*

τὴν δὲ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐφαπτομένην τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων, τὸ περιληφθὲν σχῆμα ὑπὸ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρους τοὺς κυλίνδρους εἶναι τὰ 2/3 τοῦ ὅλου κύβου. Συμβαίνει δὲ τὰ θεωρήματα αὐτὰ νὰ διαφέρωσι τῶν προηγουμένως εὑρεθέντων· διότι ἐκεῖνα μὲν τὰ σχήματα, καὶ τὰ κωνοειδῆ καὶ τὰ σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα αὐτῶν συνεκρίναμεν κατὰ τὸ μέγεθος πρὸς σχήματα κώνων καὶ κυλίνδρων, οὐδὲν δὲ ἐξ αὐτῶν εὑρέθη ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων, ἐν ᾧ εὑρίσκεται τούτων τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καὶ κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἕκαστον ἴσον πρὸς ἓν ἐκ τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἐπιπέδων.

Τούτων λοιπῶν τῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις σοῦ ἀποστέλλω ἀναγράψας εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο.

Βλέπων δέ σε, ὡς ἔχω ἤδη εἴπει, σπουδαῖον καὶ ἀξιολόγως προεξάρχοντα κατὰ τὴν φιλοσοφίαν καὶ ἔχοντα τιμήσει τὴν μαθηματικὴν ἔρευναν κατὰ τὴν περίστασιν, ἔκρινα ὀρθὸν νὰ σοῦ ἐκθέσω εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον καὶ νὰ καθορίσω μέθοδόν τινα, ἡ ὁποία θὰ σοῦ ἐπιτρέπῃ νὰ λαμβάνῃς ἀφορμάς, ὥστε νὰ δύνασαι μερικὰς μαθηματικὰς προτάσεις νὰ τὰς ἐξετάζῃς διὰ τῆς μηχανικῆς. Εἶμαι δὲ πεπεισμένος ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι ὀλιγώτερον χρήσιμον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν ἰδίων θεωρημάτων. Διότι καὶ μερικὰ ἐξ αὐτῶν, τὰ ὁποῖα προηγουμένως ἀπέδειξα διὰ τῆς μηχανικῆς, ἀπεδείχθησαν γεωμετρικῶς, διότι ἡ διὰ τοῦ τρόπου τῆς μηχανικῆς ἐξέτασις δὲν περιέχει (γεωμετρικὴν) ἀπόδειξιν· διότι εἶναι εὐκολώτερον, ἀφοῦ κανεὶς εὕρῃ διὰ τοῦ τρόπου τούτου (τῆς μηχανικῆς) γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων, νὰ εὕρῃ τὴν (γεωμετρικὴν) ἀπόδειξιν, παρὰ νὰ ἐρευνᾷ χωρὶς νὰ γνωρίζῃ προηγουμένως τίποτε..... ἕνεκα τοῦ ὁποίου καὶ διὰ τὰ θεωρήματα ταῦτα, τῶν ὁποίων ὁ Εὔ-

Εὔδοξος ἐξηύρη|κεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, | περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, | ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κῶνος | τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ | πρίσματος, τῶν βάσιν ἐ-χόν|των τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ | μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημο|κρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀ|πόφανσιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημέ|νου σχήματος χωρὶς ἀποδείξε|ως ἀποφηναμένῳ. ἡμῖν δὲ | συμβαίνει καὶ τοῦ νῦν ἐκδιδο|μένου θεωρήματος τὴν εὕρεσιν | ὁμοίαν ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι· | ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀνα|γράψας ἐξενεγκεῖν ἅμα μὲν | καὶ διὰ τὸ προειρηκέναι ὑπὲρ | αὐτοῦ, μή τισιν δοκῶμεν κενὴν | φωνὴν καταβεβλῆσθαι, ἅμα | δὲ καὶ πεπεισμένος εἰς τὸ μάθη|μα οὐ μικρὰν ἂν συμβαλέσθαι χρεί|αν· ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ | τοῦ ἀποδειχθέντος τρό-που καὶ | ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συμ|παραπεπτωκότα εὑρήσειν.

γρά|φομεν οὖν πρῶτον τὸ καὶ πρῶ|τον φανὲν διὰ τῶν μη-χανικῶν, | ὅτι πᾶν τμῆμα ὀρθογωνίου κώ|νου τομῆς ἐπί-τριτόν ἐστιν τρι|γώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν | αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦ|το ἕκαστον τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρό-που | θεωρηθέντων· ἐπὶ τέλει δὲ τοῦ βι|βλίου γράφομεν τὰς γεωμετρι|⟨κὰς ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν⟩ | ⟨θεωρημάτων, ὧν τὰς προ⟩|τάσεις ἀπεστείλαμέν ⟨σοι πρότερον⟩.

ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους μέγεθος ἀ|φαιρεθῇ, ⟨τὸ δὲ αὐτὸ ση-
H 432 μεῖον κέν⟩|τρον τοῦ βάρους ⟨ᾖ τοῦ τε ὅλου⟩ | καὶ τοῦ ἀφαι-ρουμένου, ⟨τοῦ⟩ | λοιποῦ τὸ αὐτὸ σημεῖον ⟨κέντρον⟩ | ἐστὶ τοῦ βάρους.

δοξος ηὗρε πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου (δηλαδὴ) καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι εἶναι τὸ ἓν τρίτον ὁ μὲν κῶνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον, οὐχὶ μικρὸν μέρος πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν Δημόκριτον, ὁ ὁποῖος πρῶτος ἐξήγγειλε τὴν ἐκφώνησιν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀπόδειξιν. Εἰς ἐμὲ δὲ συνέβη καὶ τοῦ ἐκδιδομένου τώρα θεωρήματος ἡ εὕρεσις νὰ ἔχῃ γίνει ὁμοία πρὸς τὰ προηγούμενα· ἤθελα δὲ ἀναγράψας τὴν μέθοδον νὰ δημοσιεύσω αὐτήν, τὸ μὲν διότι ἔχω ὁμιλήσει προηγουμένως δι' αὐτὴν (εἰσαγ. εἰς τετραγ. παραβολῆς), διὰ νὰ μὴ φανῶμεν εἰς μερικοὺς ὅτι ἐκθέτομεν κενοὺς λόγους, τὸ δὲ διότι εἶμαι πεπεισμένος ὅτι προσφέρω ὄχι μικρὰν ὑπηρεσίαν εἰς τὰ μαθηματικά· διότι νομίζω ὅτι μερικοὶ ἐκ τῶν συγχρόνων μου ἢ ἐκ τῶν μεταγενεστέρων θὰ εὕρωσι καὶ ἄλλα θεωρήματα διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχω σκεφθῇ ἀκόμη.

'Αναγράφομεν λοιπὸν πρῶτον τὸ καὶ πρῶτον ἀναφανὲν (ἀποδειχθὲν) διὰ τῆς μηχανικῆς, ὅτι πᾶν παραβολικὸν τμῆμα εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, μετὰ δὲ τοῦτο ἕκαστον θεώρημα ἐκ τῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἐξετασθέντων· εἰς τὸ τέλος δὲ τοῦ βιβλίου ἀναγράφομεν τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων ἐκείνων, τῶν ὁποίων τὰς ἐκφωνήσεις σοῦ ἀπεστείλαμεν προηγουμένως.

ΠΡΟΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ *(Λήμματα)*

1. 'Εὰν ἀπὸ μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθος, τὸ αὐτὸ δὲ σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου, τοῦ λοιποῦ θὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τὸ αὐτὸ σημεῖον.

⟨Ἐὰν ἀπὸ μεγέ⟩|θους μέγεθο⟨ς ἀφαιρεθῇ, ᾗ δὲ⟩ | μὴ τὸ αὐτὸ σημεῖον κέντρον | τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου μεγέθους | καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους, | τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ | λοιποῦ μεγέθους ἐπὶ τῆς ⟨εὐθείας⟩ | τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰ κέντρα | τοῦ βάρους τοῦ τε ὅλου ⟨καὶ⟩ | ⟨τοῦ ἀφαιρουμέ⟩νου ἐκβεβλη|μένης καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπ' αὐ|τῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν εἰρημέ|νων κέντρων τοῦ βάρους τοῦτον | ἐχούσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ βάρος | τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθους πρὸς | τὸ [λοιπὸν] βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους.

Ἐὰν ὁποσωνοῦν μεγεθέων τὸ κέν|τρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς αὐτῆς | εὐθείας ᾖ, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγ|κειμένου μεγέθους τὸ κέντρον ἔσται | ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Πάσης | εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους | ἡ διχοτομία τῆς εὐθείας.

Παντὸς | τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βά|ρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ ἐκ τῶν | γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ μέσας | τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι | τέμνουσιν ἀλλήλας.

Παντὸς πα|ραλληλογράμμου τὸ κέντρον ἐοτὶν | ⟨τοῦ βάρους τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αἱ | διάμετροι συμπίπτουσιν.

Κύκλου⟩ | τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστίν, ὃ καὶ | ⟨τοῦ κύκλου⟩ ἐστὶ κέντρον.

Παντὸς | κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους | ἐστὶν ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

Παν|τὸς πρίσματος τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ | βάρους ἡ διχοτομία τοῦ ἄξονος.

H 434 *Παν|τὸς κώνου τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βά|ρους ἐπὶ τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος | οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τμῆ|μα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ.*

Χρη|σόμεθα δὲ καὶ [ἐν τῷ προγεγραμ|μένῳ Κωνοειδῶν] τῷδε τῷ θεωρή|ματι· Ἐὰν ὁποσαοῦν μεγέθη ἄλ|λοις μεγέ-

2. Ἐὰν ἀπὸ μεγέθους ἀφαιρεθῇ μέγεθος δὲν εἶναι δὲ τοῦ ὅλου μεγέθους καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου μεγέθους τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους, τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ λοιποῦ μεγέθους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τοῦ βάρους καὶ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ ἀφαιρουμένου, καὶ ἀφοῦ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἐκβληθείσης (πρὸς τὸ μέρος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ὅλου μεγέθους) τοιοῦτον τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ τμῆμα τὸ μεταξὺ τῶν εἰρημένων κέντρων τοῦ βάρους, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφαιρεθέντος μεγέθους πρὸς τὸ [λοιπὸν] βάρος τοῦ λοιποῦ μεγέθους (Μηχανικὰ 1, 8).

3. Ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἑκάστου ἐξ ὁσωνδήποτε μεγεθῶν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὸ κέντρον τοῦ μεγέθους τοῦ συγκειμένου ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

4. Τὸ κέντρον τοῦ βάρους πάσης εὐθείας εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας.

5. Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

6. Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον ὅπου τέμνονται αἱ διαγώνιοι.

7. Κύκλου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κύκλου.

8. Παντὸς κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος.

9. Παντὸς πρίσματος τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος.

10. Παντὸς κώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τμῆμα νὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ λοιποῦ.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν δὲ καὶ [ὡς εἰς τὸ προγεγραμμένον περὶ κωνοειδῶν (θεώρ. 1)] τὸ ἑξῆς θεώρημα· Ἐὰν ὁσαδήποτε μεγέθη *θεσιν ἴσοις τὸ πλῆθος | κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον τὰ ὁ|μοίως τεταγμένα, ᾖ δὲ τὰ πρῶτα | μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, ἢ τὰ | πάντα ἤ τινα αὐτῶν, καὶ τὰ ὕστε|ρον μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη τὰ ὁμόλογα ἐν | τοῖς αὐτοῖς λόγοις ᾖ, πάντα τὰ | πρῶτα μεγέθη πρὸς πάντα τὰ | λεγόμενα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, | ὃν ἔχει πάντα τὰ ὕστερον πρὸς | πάντα τὰ λεγόμενα.*

α′

Ἔστω | τμῆμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον | ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ ὀρθο|γωνίου κώνου τομῆς τῆς ΑΒΓ, | καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΓ τῷ Δ, | καὶ παρὰ τὴν διάμετρον ἤχθω ἡ | ΔΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, | ΒΓ.

λέγω, ὅτι ἐπίτριτόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ | τμῆμα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

ἤχθω|σαν ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ἡ μὲν | ΑΖ παρὰ τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐπιψαύ|ουσα τῆς τομῆς, καὶ ἐκβεβλήσ|⟨θω ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΓΚ | ἴση ἡ ΚΘ⟩. νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ | μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ τῇ ΕΔ πα|ράλληλος τυχοῦσα ἡ ΜΞ.

H 436 *ἐπεὶ οὖν | παραβολή ἐστιν ἡ ΓΒΑ, καὶ ἐφά|πτεται ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως ἡ | ΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΔ· τοῦτο γὰρ ἐν | τοῖς στοιχείοις δείκνυται· διὰ δὴ | τοῦτο, καὶ διότι παράλληλοί εἰσιν | αἱ ΖΑ, ΜΞ τῇ ΕΔ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ | μὲν ΜΝ τῇ ΝΞ, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΑ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, οὕ|τως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ [τοῦτο γὰρ ἐν | λήμματι δείκνυται], ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς | ΑΞ,* μιᾶς σειρᾶς εἶναι ἀνὰ δύο ἀνάλογα πρὸς ὁσαδήποτε μεγέθη ἄλλης σειρᾶς ἀντιστοίχως, εἶναι δὲ τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς ἄλλα μεγέθη (τρίτης σειρᾶς) εἰς οἱουσδήποτε λόγους ἢ ὅλα ἢ μερικὰ ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ὕστερον μεγέθη (τῆς δευτέρας σειρᾶς) εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς ἄλλα μεγέθη (τετάρτης σειρᾶς) ἀντιστοίχως, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τρίτων μεγεθῶν, ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μεγεθῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων μεγεθῶν (Περὶ κων. καὶ σφαιρ. 1).

1

Ἔστω τὸ τμῆμα ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τῆς ΑΓ καὶ τῆς παραβολῆς ΑΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ἡ ΔΒΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ.

Λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒΓ εἶναι τὰ τέσσαρα τρίτα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Α, Γ, ἡ μὲν ΑΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒΕ, ἡ δὲ ΓΖ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΓΒ πρὸς τὸ Κ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΚΘ = ΓΚ. Ἂς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΓΘ καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Κ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΞ τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒΑ εἶναι παραβολή, καὶ ἡ ΓΖ ἐφαπτομένη, καὶ τεταγμένη ἡ ΓΔ, εἶναι ἡ ΕΒ = ΒΔ· διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται εἰς τὰ Στοιχεῖα (Κωνικὰ Εὐκλείδου — Ἀρισταίου, ἀπολεσθέντα, Τετρ. παραβ. 2) ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου καὶ διότι αἱ ΖΑ, ΜΞ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΔ, εἶναι ἡ μὲν ΜΝ = ΝΞ, ἡ δὲ ΖΚ = ΚΑ (Εὐκλ. V, 9. VI, 4). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΓΑ : ΑΞ = ΜΞ : ΞΟ [διότι τοῦτο ἔχει δειχθῇ εἰς τὸ λῆμμα], ὡς δὲ ἡ ΓΑ : ΑΞ =

οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΚΝ, καὶ ἴση | ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΘΚ | πρὸς ΚΝ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ. | καὶ ἐπεὶ τὸ Ν σημεῖον κέντρον | τοῦ βάρους τῆς ΜΞ εὐθείας ἐστίν, | ἐπείπερ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ, | ἐὰν ἄρα τῇ ΞΟ ἴσην θῶμεν τὴν ΤΗ | καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ | Θ, ὅπως ἴση ᾖ ἡ ΤΘ τῇ ΘΗ, ἰσορ|ροπήσει ἡ ΤΘΗ τῇ ΜΞ αὐτοῦ με|νούσῃ διὰ τὸ ἀντιπεπονθότως | τετμῆσθαι τὴν ΘΝ τοῖς ΤΗ, ΜΞ | βάρεσιν, καὶ ὡς τὴν ΘΚ πρὸς ΚΝ, | οὕτως τὴν ΜΞ πρὸς τὴν ΗΤ· ὥσ|τε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων βάρους κέν|τρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Κ. ὁμοί|ως δὲ καί, ὅσαι ἂν ἀχθῶσιν | ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παράλλη|λοι τῇ ΕΔ, ἰσορροπήσουσιν αὐ|τοῦ μένουσαι ταῖς ἀπολαμβα|νομέναις ἀπ' αὐτῶν ὑπὸ τῆς | τομῆς μετενεχθείσαις ἐπὶ τὸ | ⟨Θ, ὥστε εἶναι τοῦ ἐξ ἀμφοτέ⟩|ρων κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ. | καὶ ἐπεὶ ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ ΓΖΑ | τριγώνῳ τὸ ΓΖΑ τρίγωνον συνέστηκεν, ἐκ δὲ τῶν | ἐν τῇ τομῇ ὁμοίως τῇ ΞΟ λαμβανομένων συνέστηκε τὸ ΑΒΓ | τμῆμα, ἰσορροπήσει ἄρα τὸ | ΖΑΓ τρίγωνον αὐτοῦ μένον τῷ | τμήματι τῆς τομῆς τεθέν|τι περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ | κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ὥστε τοῦ ἐ|ξ ἀμφοτέρων κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ Κ. τετμήσθω δὴ | ἡ ΓΚ τῷ Χ, ὥστε

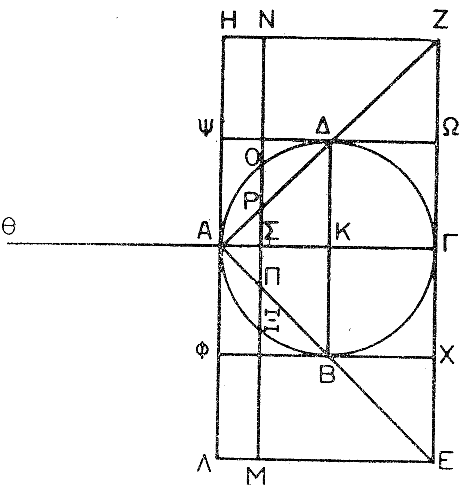
H 438 τριπλασίαν | εἶναι τὴν ΓΚ τῆς ΚΧ· ἔσται ἄρα | τὸ Χ σημεῖον κέντρον βάρους | τοῦ ΑΖΓ τριγώνου· δέδεικται γὰρ | ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς. ἐπεὶ οὖν ἰ|σόρροπον τὸ ΖΑΓ τρίγωνον αὐ|τοῦ μένον τῷ ΒΑΓ τμήματι κατὰ | τὸ Κ τεθέντι περὶ τὸ Θ κέντρον | τοῦ βάρους, καί ἐστιν τοῦ ΖΑΓ τρι|γώνου κέντρον βάρους τὸ Χ, ἔστιν | ἄρα, ὡς τὸ ΑΖΓ τρίγωνον πρὸς | τὸ ΑΒΓ τμῆμα κείμενον περὶ τὸ | Θ κέντρον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΧΚ. | τριπλασία δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῆς ΚΧ· τρι|πλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον | τοῦ ΑΒΓ τμήματος. ἔστι δὲ καὶ |

ΓΚ : ΚΝ (Εὐκλ. V, 18. VI, 2), καὶ εἶναι ἡ ΓΚ = ΚΘ, εἶναι ἄρα ἡ ΘΚ : ΚΝ = ΜΞ : ΞΟ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ν εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τῆς εὐθείας ΜΞ (Λῆμμα 4), διότι εἶναι ἡ ΜΝ = ΝΞ, ἐὰν ἄρα λάβωμεν πρὸς τὴν ΞΟ ἴσην τὴν ΤΗ καὶ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῆς τὸ Θ, διὰ νὰ εἶναι ἡ ΤΘ = ΘΗ, θὰ ἰσορροπήσῃ ἡ ΤΘΗ πρὸς τὴν ΜΞ μένουσαν αὐτοῦ, διότι ἡ ΘΝ τέμνεται εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὑπὸ τῶν βαρῶν ΤΗ, ΜΞ, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΘΚ : ΚΝ = ΜΞ : ΗΤ (Μηχανικὰ 1, 6 - 7)· ὥστε τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο εἶναι τὸ Κ (Λῆμμα 3). Ὁμοίως δὲ καὶ ὅσαι παράλληλοι καὶ ἂν ἀχθῶσιν εἰς τὸ τρίγωνον ΖΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, θὰ ἰσορροπήσωσιν αὐτοῦ μένουσαι πρὸς τὰς εὐθείας τὰς λαμβανομένας ἀπὸ τῆς παραβολῆς (μέχρι τῆς ΑΓ) καὶ μεταφερομένας εἰς τὸ Θ, ὥστε τὸ κέντρον βάρους τοῦ (ἑκάστοτε) ἀθροίσματος τῶν δύο εἶναι τὸ Κ. Καὶ ἐπειδὴ ἐκ μὲν τῶν παραλλήλων τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΖΑ ἀποτελεῖται τὸ τρίγωνον ΓΖΑ, ἐκ δὲ τῶν ἐν τῇ παραβολῇ ὁμοίως πρὸς τὴν ΞΟ λαμβανομένων ἀποτελεῖται τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ, θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΑΓ, αὐτοῦ μένον, πρὸς τὸ παραβολικὸν τμῆμα τεθὲν μὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους του εἰς τὸ Θ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον Κ, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο νὰ εἶναι τὸ Κ. Ἂς τμηθῇ τώρα ἡ ΓΚ κατὰ τὸ Χ, ὥστε νὰ εἶναι ΓΚ = 3ΚΧ· θὰ εἶναι ἄρα τὸ σημεῖον Χ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΖΓ· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὰ Ἰσορροπικὰ (Λῆμμα 5 καὶ Μηχανικὰ 1, 15 καὶ 2, 5). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΖΑΓ, αὐτοῦ μένον, ἰσορροπεῖ τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΒΑΓ τεθὲν μὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρους του εἰς τὸ Θ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ σημεῖον Κ, καὶ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου ΖΑΓ τὸ Χ, εἶναι ἄρα, ὡς τὸ τρίγωνον ΑΖΓ : παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ, κείμενον εἰς τὸ κέντρον βάρους Θ = ἡ ΘΚ : ΧΚ. Εἶναι δὲ ἡ ΘΚ = 3ΚΧ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ τριπλάσιον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ΑΒΓ. Εἶναι δὲ καὶ *τὸ ΖΑΓ τρίγωνον τετραπλάσιον | τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διὰ τὸ ἴσην εἶναι | τὴν μὲν ΖΚ τῇ ΚΑ, τὴν δὲ ΑΔ τῇ | ΔΓ· ἐπίτριτον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τμῆ|μα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. [τοῦτο οὖν | φανερόν ἐστιν].*

Τοῦτο δὴ διὰ μὲν τῶν νῦν εἰρημένων | οὐκ ἀποδέδεικται, ἔμφασιν δέ | τινα πεποίηκε τὸ συμπέρασμα | ἀληθὲς εἶναι· διόπερ ἡμεῖς ὁ|ρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμέ|νον, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέ|ρασμα ἀληθὲς εἶναι, τάξο|μεν τὴν γεωμετρουμένην ἀ|πόδειξιν ἐξευρόντες αὐτοὶ τὴν | ἐκδοθεῖσαν πρότερον.

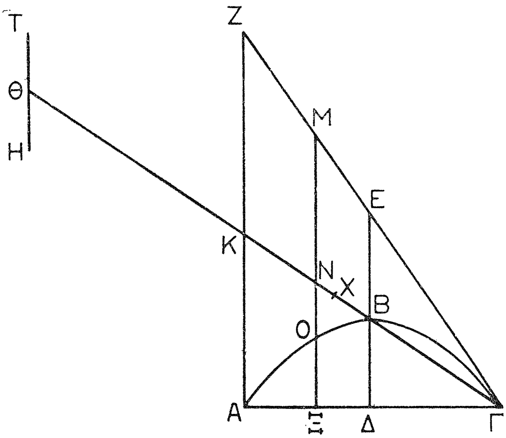
β′

Ὅτι δὲ πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶν τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος | ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν | τῇ



σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ | κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλιν|δρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ | μεγίστῳ κύκλῳ τῶν τὸ τρίγωνον ΖΑΓ τετραπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι εἶναι ἡ μὲν ΖΚ = ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ = ΔΓ· εἶναι ἄρα τὸ παραβολικὸν τμῆμα τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. [Τοῦτο λοιπὸν εἶναι φανερόν].

Ἀλλὰ τοῦτο διὰ μὲν τῶν λεχθέντων τώρα δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ (γεωμετρικῶς), παρέχει δὲ κάποιαν ἔνδειξιν, ὅτι τὸ συμπέρασμα



εἶναι ἀληθές· διὰ τὸν λόγον τοῦτον βλέποντες μὲν ὅτι δὲν εἶναι ἀποδεδειγμένον, γνωρίζοντες ὅμως ὅτι τὸ συμπέρασμα εἶναι ἀληθές, θὰ παραθέσωμεν τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν, τὴν ὁποίαν ηὕρομεν ἡμεῖς καὶ ἐδημοσιεύσαμεν προηγουμένως (Σημ. Ἐννοεῖ τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τοῦ τετραγ. παραβολῆς, ἡ ὁποία εἰς τὸν παλίμψηστον δὲν ὑπῆρχε).

2

Ὅτι δὲ πᾶσα σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, καὶ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον τῶν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον ἐν τῇ σφαίρᾳ, | ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαί|ρας, ἡμιόλιος τῆς σφαίρας ἐστίν, | ὧδε θεωρεῖται κατὰ τρόπον τόνδε·

Ἔστω γάρ τις σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος | κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, H 440 διάμετροι δὲ αἱ | ΑΓ, ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις οὖ|σαι, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῇ σφαί|ρᾳ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς | πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἀπὸ | τοῦ ὀρθοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἀναγε|γράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Α ση|μεῖον, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ἐπιφα|νείας αὐτοῦ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπι|πέδῳ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν βάσιν· | ⟨ποιήσει δὴ κύκλον ὀρθὸν πρὸς⟩ | τὴν ΑΓ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΕΖ. | ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος | ἀναγεγράφθω ἄξονα ἔχων τῇ | ΑΓ ἴσον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κυλίν|δρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἐκβεβλήσθω | ἡ ΓΑ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις παράλληλος ὑ|πάρχουσα τῇ ΒΔ ἡ ΜΝ, τεμνέτω | δὲ αὕτη τὸν μὲν ΑΒΓΔ κύκλον κατὰ | τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ διάμετρον κατὰ τὸ Σ, | τὴν δὲ ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Π, τὴν | δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ | εὐθείας ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | ⟨κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΜΝ, | ἐν δὲ τῇ ΑΒΓΔ σφαίρᾳ⟩ | κύκλον, οὗ ἔσται διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν | δὲ τῷ ΑΕΖ κώνῳ κύκλον, οὗ ἔσται δι|άμετρος ἡ ΠΡ.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ τῷ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ· ἴση γὰρ | ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ τῇ ΠΣ· τῷ δὲ | ὑπὸ ΓΑ, ΑΣ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΞ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, ἴσον ἄρα τὸ ὑ|πὸ τῶν ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ τῶν ΞΣ, ΣΠ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ | ΜΣ πρὸς ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ | ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ. τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, | ΣΠ ἴσα ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ· ὡς ἄρα | ἡ ΑΘ πρὸς ΑΣ, οὕτως πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, εἶναι τὰ τρία δεύτερα τῆς σφαίρας, ἐξετάζονται ἐδῶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον·

Διότι ἔστω σφαῖρά τις, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ κάθετοι μεταξύ των αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἔστω δὲ κύκλος εἰς τὴν σφαῖραν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κάθετος πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ καθέτου τούτου κύκλου ἂς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Γ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν κύκλον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ διάμετρος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ΕΖ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου ἂς ἀναγραφῇ κύλινδρος ἔχων ἄξονα ἴσον πρὸς τὴν ΑΓ, ἔστωσαν δὲ πλευραὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ ΕΛ, ΖΗ· καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ΓΑ $=$ ΑΘ, καὶ ἂς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἂς ἀχθῇ παράλληλός τις πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΜΝ, ἂς τέμνῃ δὲ αὕτη τὸν μὲν κύκλον ΑΒΓΔ κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὴν δὲ διάμετρον ΑΓ κατὰ τὸ Σ, τὴν δὲ εὐθεῖαν ΑΕ κατὰ τὸ Π, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΜΝ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὴν ΑΒΓΔ σφαῖραν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΞΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον ΑΕΖ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΓΑ $\times$ ΑΣ $=$ ὀρθογ. ΜΣ $\times$ ΣΠ· διότι εἶναι ἡ μὲν ΑΓ $=$ ΣΜ, ἡ δὲ ΑΣ $=$ ΠΣ (Εὐκλ. VI, 4)· τὸ δὲ ΓΑ $\times$ ΑΣ $=$ ΑΞ^2 (Εὐκλ. VI, 8 πόρ.), τουτέστιν $=$ ΞΣ^2 $+$ ΣΠ^2 (Εὐκλ. I, 47), εἶναι ἄρα τὸ ΜΣ $\times$ ΣΠ $=$ ΞΣ^2 $+$ ΣΠ^2. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΓΑ : ΑΣ $=$ ΜΣ : ΣΠ, εἶναι δὲ ἡ ΓΑ $=$ ΑΘ, θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ $=$ ΜΣ : ΣΠ, τουτέστιν $=$ ΜΣ^2 $=$ ΜΣ $\times$ ΣΠ. Πρὸς δὲ τὸ ΜΣ $\times$ ΣΠ ἐδείχθη ἴσον τὸ ἄθροισμα

H 442 τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΣ, ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΞΟ, ΠΡ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ | κυλίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς | ⟨ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους τόν τε | ἐν τῷ κώνῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ⟩ |καὶ τὸν ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ ἐστιν διά|μετρος ἡ ΞΟ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως | ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ πρὸς τοὺς | κυκλους τόν τε ἐν τῇ σφαίρᾳ καὶ | τὸν ἐν τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΘΑ | πρὸς ΑΣ, οὕτως αὐτὸς ὁ κύκλος ὁ ἐν | τῷ κυλίνδρῳ αὐτοῦ μένων ἀμφο|τέροις τοῖς κύκλοις, ὧν εἰσιν διάμε|τροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν οὕτως ἐπὶ τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου | αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ | Θ, ἰσορροπήσουσι κατὰ τὸ Α σημεῖ|ον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλ|λη ἀχθῇ ἐν τῷ ΛΖ παραλληλογράμ|μῳ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀ|χθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν | πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν | τῷ κυλίνδρῳ ἰσορροπήσει πε|ρὶ τὸ Α σημεῖον αὐτοῦ μένων ἀμ|φοτέροις τοῖς κύκλοις τῷ τε | ἐν τῇ σφαίρᾳ γινομένῳ καὶ τῷ | ἐν τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τε|θεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, | ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ Θ. συμπληρω|θέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν | ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσει | ὁ κύλινδρος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐ|τοῦ μένων συναμφοτέροις τῇ | τε σφαίρᾳ καὶ τῷ κώνῳ μετενε|χθεῖσι καὶ τεθεῖσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ | τὸ Θ, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον | εἶναι τοῦ βάρους τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ | τὰ εἰρημένα στερεὰ κατὰ τὸ Α ση|μεῖον τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέν-
H 444 τρον | τοῦ βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ | τοῦ κώνου μετενηνεγμένων, ὡς | εἴρηται, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, | ἔ-

$\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2$· θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΘ : ΑΣ $= M\Sigma^2 : (\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2)$. Εἶναι δὲ ὡς $M\Sigma^2 : (\Xi\Sigma^2 + \Sigma\Pi^2) = MN^2 : (\Xi O^2 + \Pi P^2)$ (Εὐκλ. V, 15), ὡς δὲ τὸ $MN^2 : (\Xi O^2 + \Pi P^2)$ οὕτως ὁ κύκλος ὁ εἰς τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ ⟨πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κύκλων, καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ,⟩ καὶ πρὸς τὸν εἰς τὴν σφαῖραν, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ εἰς τὸν κύλινδρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων καὶ τὸν εἰς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ, οὕτως ὁ αὐτὸς κύκλος ὁ εἰς τὸν κύλινδρον, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ, ὅταν μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσι κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους ἑκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ Θ, θὰ ἰσορροπήσωσι κατὰ τὸ σημεῖον Α. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΖ ἄλλη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ὑψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος εἰς τὸν κύλινδρον θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους καὶ τὸν εἰς τὴν σφαῖραν γινόμενον καὶ πρὸς τὸν εἰς τὸν κῶνον, ἀφοῦ μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκάστου ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ. Συμπληρωθέντος λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου θὰ ἰσορροπήσῃ ὁ κύλινδρος περὶ τὸ Α σημεῖον, αὐτοῦ μένων, καὶ τοὺς δύο κύκλους καὶ τὸν εἰς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον, ἀφοῦ μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ, κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκάστου ἐξ αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ προηγουμένως λεχθέντα στερεὰ ἰσορροποῦσι κατὰ τὸ σημεῖον Α, τοῦ μὲν κυλίνδρου μένοντος περὶ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τῆς δὲ σφαίρας καὶ τοῦ κώνου μεταφερθέντων, ὡς ἐλέχθη, περὶ κέντρον βάρους τὸ Θ, θὰ εἶναι ὡς ἡ ΘΑ : ΑΚ, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὴν *σται, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως ὁ κύλιν|δρος πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κῶ|νον. διπλασία δὲ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλα|σίων ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος συναμ|φοτέρου τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ |κώνου. αὐτοῦ δὲ τοῦ κώνου τριπλα|σίων ἐστί· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι εἰσὶ δυ|σὶ κώνοις τοῖς αὐτοῖς καὶ δυσὶ σφαί|ραις. κοινοὶ ἀφῃρήσθωσαν δύο | κῶνοι· εἷς ἄρα κῶνος ὁ ἔχων τὸ | διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ | ἴσος ἐστὶ ταῖς εἰρημέναις δυσὶ | σφαίραις. ὁ δὲ κῶνος, οὗ τὸ διὰ | τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΕΖ, ἴσος ἐστὶν | ὀκτὼ κώνοις, ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ | ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, διὰ τὸ | διπλῆν εἶναι τὴν ΕΖ τῆς ΒΔ. οἱ ἄρα | ὀκτὼ κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσοι εἰσὶ | δυσὶ σφαίραις. τετραπλασίων | ἄρα ἐστὶν ἡ σφαῖρα, ἧς μέγιστος | κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τοῦ κώνου, οὗ κορυ|φὴ μέν ἐστι τὸ Α σημεῖον, βάσις | δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύ|κλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν ΑΓ.*

ἤχθω|σαν δὴ διὰ τῶν Β, Δ σημείων ἐν | τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ τῇ | ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, καὶ | νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσεις | μὲν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. ἐπεὶ | οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος, οὗ | ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλλη|λόγραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κυλίνδρου, | ⟨οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλ⟩|ληλόγραμμον τὸ ΦΔ, αὐτὸς δὲ οὗ|τος τριπλασίων ἐστὶν τοῦ κώνου, | οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον | τὸ ΑΒΔ, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις, ἑξα|πλασίων ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι | τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλό|γραμμον τὸ ΦΩ, τοῦ κώνου, οὗ | τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΔ. | ἐδείχθη δὲ τοῦ αὐτοῦ
H 446 *κώνου τετρα|πλασία οὖσα ἡ σφαῖρα, ἧς μέ|γιστός ἐστιν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· | ἡμιόλιος ἄρα ὁ κύλινδρος τῆς | σφαίρας· ὅπερ ἔδει δειχθῆναι. |*

σφαῖραν καὶ τὸν κῶνον (Μηχανικὰ 1, 6 - 7). Εἶναι δὲ ἡ ΘΑ = 2ΑΚ· εἶναι ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος διπλάσιος τοῦ ἀθροίσματος τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Τοῦ κώνου δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ κύλινδρος τριπλάσιος (Εὐκλ. XII, 10)· τρεῖς ἄρα κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο κώνους, τοὺς αὐτούς, καὶ πρὸς δύο σφαίρας. Ἂς ἀφαιρεθῶσι ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος δύο κῶνοι· εἶναι ἄρα εἷς κῶνος ὁ ἔχων τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΕΖ ἴσος πρὸς τὰς εἰρημένας δύο σφαίρας. Ὁ δὲ κῶνος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΕΖ, εἶναι ἴσος πρὸς ὀκτὼ κώνους, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀνήκει τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, διότι εἶναι ΕΖ = 2ΒΔ. Οἱ εἰρημένοι ἄρα ὀκτὼ κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο σφαίρας. Εἶναι ἄρα ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ, τετραπλασία τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος ὁ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Ἂς ἀχθῶσι τώρα διὰ τῶν σημείων Β, Δ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΖ, αἱ ΦΒΧ, ΨΔΩ, παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς νοηθῇ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσεις μὲν εἶναι αἱ περὶ τὰς διαμέτρους ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ὁ ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΩ εἶναι διπλάσιος τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΔ, ὁ ἴδιος δὲ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΒΔ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ Στοιχεῖα (Εὐκλ. XII, 10), εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΩ, ἑξαπλάσιος τοῦ κώνου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΒΔ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι τοῦ αὐτοῦ κώνου εἶναι τετραπλασία ἡ σφαῖρα, τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ· εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος τὰ τρία δεύτερα τῆς σφαίρας· πρᾶγμα, ὅπερ ἔπρεπε νὰ δειχθῇ.

Τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶ|σα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ | κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν | μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον | τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, | ἡ ἔννοια ἐγένετο, ὅτι πάσης σφαί|ρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ | τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαί|ρᾳ· ὑπόληψις γὰρ ἦν, καὶ διότι πᾶς κύκλος | ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχον|τι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, | καὶ διότι πᾶ|σα σφαῖρα | ἴση ἐστὶ κώ|νῳ τῷ βά|σιν μὲν ἔχον|τι τὴν ἐπι|φάνειαν τῆς | σφαίρας, ὕψος | δὲ ἴσον τῇ ἐκ | τοῦ κέντρου | τῆς σφαίρας.

γ′

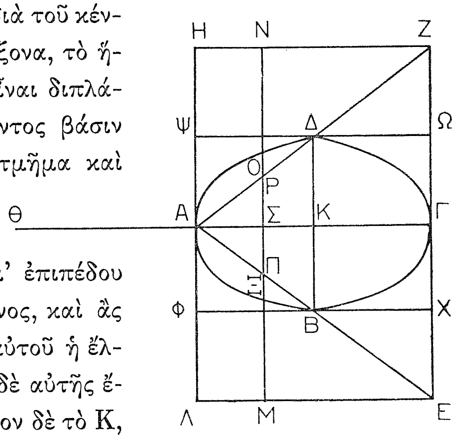
Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου τούτου | ⟨καί, ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ τὴν μὲν βάσιν ⟩ | ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν | ἐν τῷ σφαιροειδεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῷ | ἄξονι τοῦ σφαιροειδοῦς, ἡμιόλιός ἐστι | τοῦ σφαιροειδοῦς· | τούτου δὲ θεωρη-|θέντος φανερόν, ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς ἐπιπέδῳ τμηθέντος δι|ὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄ|ξονα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς δι|πλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν | μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμή|ματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

ἔστω γάρ τι | σφαιροειδὲς καὶ τετμήσθω ἐπιπέ|δῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐν | τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ὀξυγωνίου | κώνου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ | αὐτῆς ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον | δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος ἐν τῷ σφαι|ροειδεῖ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθ|ὸς πρὸς τὴν ΑΓ, νοείσθω (H 448) δὲ κῶνος βά|σιν ἔχων τὸν εἰρημένον κύκλον, κο|ρυφὴν δὲ

'Εκ τοῦ θεωρήματος τούτου, ὅτι πᾶσα σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἤχθην εἰς τὸ συμπέρασμα (τὴν σκέψιν), ὅτι ἡ ἐπιφάνεια πάσης σφαίρας εἶναι τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου, ἐκ τῶν τῆς σφαίρας· διότι ἀνεχώρησα ἐκ τῆς σκέψεως, ὅτι πᾶς κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ ὅτι πᾶσα σφαῖρα εἶναι ἴση πρὸς κῶνον ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

3

Διὰ τοῦ τρόπου δὲ τούτου ἐξετάζεται καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων τὴν μὲν βάσιν ἴσην πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον ἐκ τῶν εἰς τὸ σφαιροειδὲς (ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς), ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σφαιροειδοῦς, εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ σφαιροειδοῦς· τούτου δὲ ἐξετασθέντος εἶναι φανερόν, ὅτι παντὸς σφαιροειδοῦς τμηθέντος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.



Διότι ἔστω σφαιροειδές τι καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς γίνῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἡ ἔλλειψις ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτῆς ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, ἔστω δὲ κύκλος εἰς τὸ σφαιροειδὲς περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἂς νοηθῇ δὲ κῶνος ἔχων βάσιν τὸν εἰρημένον κύκλον, τὸ Α σημεῖον, καὶ ἐκβλη|θείσης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τετ|μήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ | Γ παρὰ τὴν βάσιν· ἔσται δὴ ἡ τομὴ | αὐτοῦ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὴν ΑΓ, διά|μετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. ἔστω δὲ καὶ κύ|λινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν αὐτὸν | κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΕΖ, ἄξονα | δὲ τὴν ΑΓ εὐθεῖαν, καὶ ἐκβληθείσης | τῆς ΓΑ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νο|είσθω ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ | Α, ἤχθω δέ τις ἐν τῷ ΛΖ παραλλη|λογράμμῳ παρὰ τὴν ΕΖ ἡ ΜΝ, καὶ | ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρ|⟨θὸν πρὸς τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν⟩ | μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, | οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ σφαιρο|ειδεῖ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ | κώνῳ τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος | ἡ ΠΡ.

καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΣ, | οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΠ, τουτέστιν ἡ ΜΣ πρὸς | τὴν ΣΠ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὡς ἄρα ἡ | ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΜΣ πρὸς ΣΠ. ὡς δὲ ἡ | ΜΣ πρὸς ΣΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣ, | ΣΠ· τῷ δὲ ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν | ΠΣ, ΣΞ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΣ, ΣΓ | πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΓ, | τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ | [ἀμφότεροι γὰρ οἱ λόγοι ἐν τῷ τῆς | πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν εἰσίν], ὡς | δὲ τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΣ | πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ἐναλλὰξ ἄρα ἔσται, ὡς τὸ | H 450 ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΠΣ | πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ | ΑΣΓ, τὸ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΠ, ΠΜ· ἴ|σον ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΠΣ τῷ ἀπὸ ΞΣ. κοι|νὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΠΣ· τὸ ἄρα | ὑπὸ ΜΣ, ΣΠ τοῖς ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ ἴσον. | ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΠΣ, ΣΞ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὰ | ἀπὸ ΣΞ, ΣΠ, οὕτως κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Α, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Γ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ τομὴ αὐτοῦ κύκλος κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΖ. Ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος ἔχων βάσιν μὲν τὸν αὐτὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΕΖ, ἄξονα δὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΘ $=$ ΑΓ, καὶ ἂς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἂς ἀχθῇ δὲ εὐθεῖά τις εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὸ σφαιροειδὲς τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον τομὴν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΓΑ : ΑΣ $=$ ΕΑ : ΑΠ (Εὐκλ. VI, 4) $=$ ΜΣ : ΣΠ (Εὐκλ. V, 18. VI, 4), εἶναι δὲ ἡ ΓΑ $=$ ΑΘ, θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ $=$ ΜΣ : ΣΠ. Ὡς δὲ ἡ ΜΣ : ΣΠ $=$ ΜΣ^2 : ΜΣ $\times$ ΣΠ· πρὸς δὲ τὸ ΜΣ $\times$ ΣΠ εἶναι ἴσον τὸ ἄθροισμα ΠΣ^2 $+$ ΣΞ^2. Διότι ἐπειδὴ εἶναι, ὡς τὸ ΑΣ $\times$ ΣΓ : ΣΞ^2 $=$ ΑΚ $\times$ ΚΓ : ΚΒ^2 $=$ ΑΚ^2 : ΚΒ^2 [διότι καὶ οἱ δύο λόγοι εἶναι (ἕκαστος) εἰς τὸν λόγον τῆς πλαγίας πρὸς τὴν κάθετον], ὡς δὲ τὸ ΑΚ^2 : ΚΒ^2 $=$ ΑΣ^2 : ΣΠ^2 (Εὐκλ. VI, 4), καὶ ἐναλλὰξ ἄρα θὰ εἶναι, ὡς τὸ ΑΣ^2 : ΑΣ $\times$ ΣΓ $=$ ΠΣ^2 : ΣΞ^2 (Εὐκλ. V, 16). Ὡς δὲ τὸ ΑΣ^2 : ΑΣ $\times$ ΣΓ $=$ ΣΠ^2 : ΣΠ $\times$ ΠΜ (Εὐκλ. V, 15. VI, 4)· εἶναι ἄρα τὸ ΜΠ $\times$ ΠΣ $=$ ΞΣ^2 (Εὐκλ. V, 9). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΠΣ^2· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΜΣ $\times$ ΣΠ $=$ ΠΣ^2 $+$ ΣΞ^2 (Εὐκλ. II, 3). Θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ $=$ ΜΣ^2 : ΠΣ^2 $+$ ΣΞ^2. Ὡς δὲ τὸ ΜΣ^2 : ΣΞ^2 $+$ ΣΠ^2 $=$ ὁ εἰς τὸν κύλινδρον κύκλος, τοῦ ὁποίου διά-

ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ | κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμ|φοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διά|μετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ· ὥστε ἰσορροπή|σει περὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, | οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων | ἀμφοτέροις τοῖς κύκλοις, ὧν διά|μετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μετενεχθεῖσι καὶ | τεθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε | ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ | βάρους τὸ Θ. συναμφοτέρων δὲ τῶν | κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, | μετενηνεγμένων κέντρον τοῦ βά|ρους τὸ Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς | ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς ἀμ|φοτέρους τοὺς κύκλους, ὧν διά|μετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ. ὁμοίως δὲ δειχθή|σεται, καὶ ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν | τῷ ΛΖ παραλληλογράμμῳ παρὰ | τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐ|πίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν | ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ κυλίν|δρῳ ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α ση|μεῖον αὐτοῦ μένων συναμφοτέ|ροις τοῖς κύκλοις τῷ τε ἐν τῷ | σφαιροειδεῖ γινομένῳ καὶ τῷ ἐν τῷ | κώνῳ μετενεχθεῖσιν τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου | αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βάρους | τὸ Θ. συμπληρωθέντος οὖν τοῦ κυ|λίνδρου ὑπὸ τῶν ληφθέντων | κύκλων καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ | τοῦ κώνου ἰσόρροπος ὁ κύλινδρος | ἔσται περὶ τὸ Α σημεῖον H 452 *αὐτοῦ μέ|νων τῷ τε σφαιροειδεῖ καὶ τῷ κώ|νῳ μετενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσιν | ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥσ|τε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ Θ. καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, | τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου | συναμφοτέρων, ὡς ἐρρέθη, κέν|τρον τοῦ βάρους τὸ Θ· ἔστιν οὖν, | ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὁ κύλινδρος | πρὸς ἀμφότερα τό τε σφαιρο|⟨ειδὲς καὶ τὸν κῶνον⟩. δ⟨ιπλα⟩σία | δὲ ἡ ΑΘ τῆς ΑΚ· διπλάσιος ἄρα | καὶ ὁ κύλινδρος ἀμφοτέρων τοῦ | τε σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου· | εἷς ἄρα κύλινδρος ἴσος δυσὶν | κώνοις καὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. | εἷς* μετρος εἶναι ἡ ΜΝ, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ (Εὐκλ. XII, 2)· ὥστε θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ, ἀφοῦ μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκάστου αὐτῶν νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ. Καὶ τῶν δύο δὲ κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ, εἰς τὴν θέσιν ὅπου ἔχουσι μεταφερθῆ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ ΘΑ : ΑΣ = ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ : τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τις εὐθεῖα εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος εἰς τὸν κύλινδρον θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένων, καὶ τοὺς δύο κύκλους καὶ τὸν γινόμενον εἰς τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὸν εἰς τὸν κῶνον, ὅταν μεταφερθῶσιν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἀφοῦ λοιπὸν συμπληρωθῇ ὁ κύλινδρος ὑπὸ τῶν ληφθέντων κύκλων, καὶ τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου, ὁ κύλινδρος θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένων, καὶ τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὸν κῶνον, ὅταν μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Κ, τοῦ δὲ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου ὁμοῦ, ὡς ἐλέχθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ· εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΘΑ : ΑΚ, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου. Εἶναι δὲ ἡ ΑΘ = 2ΑΚ· εἶναι ἄρα διπλάσιος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ ἀθροίσματος τοῦ σφαιροειδοῦς καὶ τοῦ κώνου· εἷς ἄρα κύλινδρος εἶναι ἴσος πρὸς δύο κώνους καὶ δύο σφαιροειδῆ. Εἷς δὲ κύλινδρος εἶναι ἴσος πρὸς τρεῖς, δὲ κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τρισὶ κώ|νοις τοῖς αὐτοῖς· τρεῖς ἄρα κῶνοι ἴσοι | εἰσὶ δυσὶ κώνοις καὶ δυσὶ σφαιρο|ειδέσι. κοινοὶ ἀφηρήσθωσαν | δύο κῶνοι· λοιπὸς ἄρα εἷς κῶνος, | οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ $A|EZ$, ἴσος ἐστὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν. εἷς δὲ | κῶνος ὁ αὐτὸς ἴσος ἐστὶν ὀκτὼ κώνοις, | ὧν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ | $AB\Delta$· ὀκτὼ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι ἴσ|οι εἰσὶ δυσὶ σφαιροειδέσιν· καὶ τέσσαρες | ἄρα κῶνοι ἴσοι ἑνὶ σφαιροειδεῖ· | τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ σφαιροειδὲς | τοῦ κώνου, οὗ κορυφὴ μέν ἐστι τὸ A σημεῖ|ον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν | $B\Delta$ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν $A\Gamma$, καὶ | τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς διπλάσι|όν ἐστι τοῦ εἰρημένου κώνου.

ἤχθωσαν | δὲ διὰ τῶν B, Δ σημείων ἐν τῷ ΛZ παρ|αλληλογράμμῳ τῇ $A\Gamma$ παράλλη|λοι αἱ ΦX, $\Psi\Omega$, καὶ νοείσθω κύλινδρος, | οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ διαμέτρους | τὰς $\Phi\Psi$, $X\Omega$ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ $A\Gamma$ | εὐθεῖα.

ἐπεὶ οὖν διπλάσιός ἐστιν ὁ κύλιν|δρος, οὗ ἐστι, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλλη|λόγραμμον τὸ $\Phi\Omega$, τοῦ κυλίνδρου, οὗ | τὸ
H 453 διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ | $\Phi\Delta$, διὰ τὸ ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς βά|σεις, τὸν δὲ ἄξονα τοῦ ἄξονος διπλά|σιον, αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, οὗ τὸ | διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλό-
H 454 γραμμον | τὸ $\Phi\Delta$, τριπλασίων ἐστὶ τοῦ κώνου,| οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις | δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν $B\Delta$ κύκλος | ὀρθὸς ὢν πρὸς τὴν $A\Gamma$, ἑξαπλά|σιος ἄρα ὁ κύλινδρος, οὗ ἐστι τὸ διὰ τοῦ | ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ | $\Phi\Omega$, τοῦ εἰρημένου κώνου. ἐδείχθη | δὲ τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλάσιον | τὸ σφαιροειδές· ἡμιόλιος ἄρα ἐστὶν ὁ | κύλινδρος τοῦ σφαιροειδοῦς.

τοὺς αὐτούς, κώνους (Εὐκλ. XII, 10)· τρεῖς ἄρα κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο κώνους καὶ δύο σφαιροειδῆ. Ἂς ἀφαιρεθῶσιν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν δύο κῶνοι· ὁ ὑπόλοιπος ἄρα εἷς κῶνος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΕΖ, εἶναι ἴσος πρὸς δύο σφαιροειδῆ. Εἷς δὲ κῶνος ὁ αὐτὸς εἶναι ἴσος πρὸς ὀκτὼ κώνους, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον ΑΒΔ· ὀκτὼ ἄρα κῶνοι οἱ εἰρημένοι εἶναι ἴσοι πρὸς δύο σφαιροειδῆ· καὶ τέσσαρες ἄρα κῶνοι εἶναι ἴσοι πρὸς ἓν σφαιροειδές· εἶναι ἄρα τὸ σφαιροειδὲς τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδοῦς εἶναι διπλάσιον τοῦ εἰρημένου κώνου.

Ἂς ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν σημείων Β, Δ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΛΖ πρὸς τὴν ΑΓ παράλληλοι αἱ ΦΧ, ΨΩ, καὶ ἂς νοηθῇ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσεις μὲν εἶναι οἱ περὶ τὰς διαμέτρους ΦΨ, ΧΩ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΩ εἶναι διπλάσιος τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΔ, ἐπειδὴ αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσαι, καὶ ὁ εἷς ἄξων εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου, αὐτὸς δὲ ὁ κύλινδρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον παραλληλόγραμμον ΦΔ, εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ (Εὐκλ. XII, 10), εἶναι ἄρα ἑξαπλάσιος ὁ κύλινδρος, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον ΦΩ τοῦ εἰρημένου κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι τοῦ αὐτοῦ κώνου τὸ σφαιροειδὲς εἶναι τετραπλάσιον· εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος τὰ τρία δεύτερα τοῦ σφαιροειδοῦς.

δ′

Ὅτι δὲ πᾶν | τμῆμα ὀρ|θογωνίου κω|νοειδοῦς ἐπι|πέδῳ ἀπο|τεμνόμενον | ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος | τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ τὸν ἄ-|ξονα τὸν αὐτόν, ὧδε διὰ τοῦ τρόπου | τούτου θεωρεῖται·

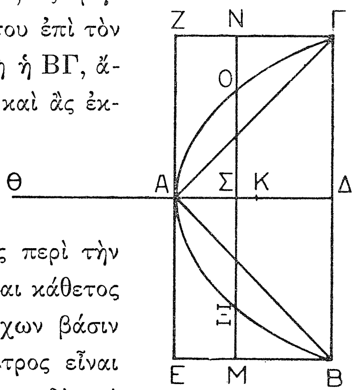
ἔστω γὰρ ὀρθογώ|νιον κωνοειδὲς καὶ τετμήσθω ἐ|πιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποι|είτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρ|θογωνίου κώνου τομὴν τὴν ΑΒΓ, | τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ | ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω | αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ | ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΔΑ, καὶ ἐκ|βεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω | αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ νοείσθω ζυγὸς | ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ ἡ | τοῦ τμήματος βάσις ὁ περὶ διά|μετρον τὴν ΒΓ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς | ⟨τὴν ΑΔ, νοείσθω δὲ κῶνος βάσιν⟩ | μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἐστι διάμετρος | ἡ ΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἔστω | δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων | τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓ, ἄ|ξονα δὲ τὸν ΑΔ, καὶ ἤχθω τις ἐν | τῷ
H 456 παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ | παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ | ἀπὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστά|τω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ· ποιήσει δὴ | τοῦτο ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν | κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ | τῷ τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου | κωνοειδοῦς τομὴν κύκλον, οὗ διά|μετρος ἡ ΞΟ.

καὶ ἐπεὶ ὀρθογωνίου | κώνου τομή ἐστιν ἡ ΒΑΓ, διά|μετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ τεταγμέ|νως κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞΣ, | ΒΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ | ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ | ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ,

4

Ὅτι δὲ πᾶν τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτεμνόμενον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐξετάζεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον διὰ τῆς μεθόδου ταύτης.

Διότι ἔστω παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν παραβολὴν ΑΒΓ, ἂς τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΔΑ πρὸς τὸ Θ, καὶ ἂς ληφθῇ ΔΑ = ΑΘ, καὶ ἂς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ ἡ βάσις τοῦ τμήματος περὶ τὴν διάμετρον ΒΓ κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἂς νοηθῇ δὲ κῶνος ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος ἔχων βάσιν μὲν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΒΓ, ἄξονα δὲ τὸν ΑΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον (ΖΒ) ἡ ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὸ τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ.



Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑΓ εἶναι παραβολή, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ, καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ ὡς τεταγμέναι αἱ ΞΣ, ΒΔ, εἶναι ὡς ἡ ΔΑ : ΑΣ = $ΒΔ^2 : ΞΣ^2$ (Τετρ. παραβ. 3). Εἶναι δὲ ἡ ΔΑ = ΑΘ· ὡς εἶναι ἄρα

οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΣ | πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΞ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΣ πρὸς τὸ | ἀπὸ ΣΞ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ ἐν τῷ κυ|λίνδρῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς | τὸν κύκλον τὸν ἐν τῷ τμήματι | τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς, οὗ | διάμετρος ἡ ΞΟ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς | ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος | ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος | ἡ ΞΟ. ἰσόρροπος ἄρα ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος | ἡ ΜΝ, ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ περὶ τὸ | Α σημεῖον αὐτοῦ μένων τῷ κύ|κλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, μετενε|χθέντι καὶ τεθέντι ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον αὐτοῦ | ⟨εἶναι τοῦ βάρους τὸ⟩ Θ· ⟨καί ἐστι | τοῦ⟩ μὲν ⟨κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ⟩ | ΜΝ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ | κύκλου, οὗ ἐστι διάμετρος ἡ ΞΟ, μετε|νηνεγμένου κέντρον τοῦ βάρους | τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπονθότως τὸν | αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὃν | ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, πρὸς | τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ. ὁ|μοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη | τις ἀχθῇ ἐν τῷ ΕΓ παραλληλο|γράμμῳ παρὰ τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ | τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον ἀνα|σταθῇ ὀρθὸν
H 457 *πρὸς τὴν ΑΘ, ὅτι ἰσορ|ροπήσει πρὸς τῷ Α σημείῳ ὁ γενόμε-|νος κύκλος ἐν τῷ κυλίνδρῳ αὐ|τοῦ μένων τῷ γενομένῳ ἐν τῷ | τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνο|ειδέος μετενεχθέντι ἐπὶ*
H 458 *τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι | αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. συμπληρω|θέντος οὖν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ |τμήματος τοῦ ὀρθογωνίου κωνο|ειδοῦς ἰσορροπήσει περὶ τὸ Α ση|μεῖον ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων τῷ | τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνοει|δέος μετενεχθέντι καὶ τεθέντι | τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέν|τρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. | ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖ|ον τὰ εἰρημένα μεγέθη, καί ἐστι | τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον βά|ρους τὸ Κ σημεῖον δίχα τεμνομέ|νης τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, | τοῦ δὲ τμή-*

ἡ ΘΑ : ΑΣ $=$ ΜΣ^2 : ΣΞ^2. Ὡς δὲ τὸ ΜΣ^2 : ΣΞ^2 $=$ ὁ εἰς τὸν κύλινδρον κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ πρὸς τὸν εἰς τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ (Εὐκλ. XII, 2)· εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΘΑ : ΑΣ $=$ ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ. Θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, ὁ εἰς τὸν κύλινδρον περὶ τὸ σημεῖον Α, μένων αὐτοῦ, πρὸς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, ἀφοῦ οὗτος μεταφερθῇ καὶ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ· καὶ εἶναι τοῦ μὲν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Σ (Λῆμμα 7), τοῦ δὲ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, ὁ ὁποῖος ἔχει μεταφερθῆ, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιστρόφως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΘΑ : ΑΣ, ὃν ἔχει ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἄλλη εὐθεῖά τις ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΘ, ὅτι θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ γενόμενος κύκλος, αὐτοῦ μένων, πρὸς τὸν γενόμενον κύκλον εἰς τὸ τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἀφοῦ μεταφερθῇ οὗτος ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ὅταν λοιπὸν συμπληρωθῇ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμῆμα θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ κύλινδρος, αὐτοῦ μένων, πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐπειδὴ δὲ ἰσορροποῦσιν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α τὰ εἰρημένα μεγέθη, καὶ εἶναι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ σημεῖον Κ, ὅπου ἡ ΑΔ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ *ματος μετενηνεγμένου | κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ Θ, ἀντι-| πεπονθότως τὸν αὐτὸν ἕξει λόγ|ον ⟨ἡ ΘΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ὁ⟩ κύλινδρος | πρὸς τὸ τμῆμα. διπλασία δὲ ἡ | ΘΑ τῆς ΑΚ· διπλάσιος ἄρα καὶ | ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. ὁ δὲ | αὐτὸς κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι | τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος | τὸν κύκλον, | οὗ διάμε|τρος ἡ ΒΓ, | κορυφὴν δὲ | τὸ Α σημεῖ|ον· δῆλον | οὖν, ὅτι τὸ τμῆμα ἡμιόλιόν | ἐστιν τοῦ αὐ|τοῦ κώνου.*

ε′

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ ὀρθογω|νίου κωνοειδέος τοῦ ἀποτεμνομένου | ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸν ἄξονα | τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς | εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, | τμηθείσης οὕτως τῆς εἰρημένης | εὐθείας, ὥστε διπλάσιον εἶναι | τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ | λοιποῦ τμήματος, ὧδε διὰ τοῦ τρό|που θεωρεῖται·

ἔστω τμῆμα | ὀρθογωνίου κωνοειδοῦς ἀποτε|μνόμενον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς | τὸν ἄξονα καὶ τετμήσθω ἐπιπέ|δῳ ἑτέρῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποι|είτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν |
H 459 *ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, τοῦ | δὲ ἀποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἐπι|πέδου καὶ τοῦ τέμνοντος κοινὴ | τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ | τμήματος καὶ διάμετρος τῆς | ΑΒΓ τομῆς ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ τῆς ⟨ΔΑ ἐκβληθείσης ἴση αὐτῇ κεί-*
H 460 *σθω ἡ ΑΘ, καὶ⟩ | νοείσθω ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγε|γραμμένος ἐν τῷ τμήματι, πλευ|ραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἤχθω δέ τις | ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου το|μῇ ἡ ΞΟ παράλληλος οὖσα τῇ | ΒΓ, τεμνέτω δὲ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ὀρ|θογωνίου κώνου τομὴν κατὰ τὰ | Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώνου πλευρὰς κατὰ | τὰ Π, Ρ σημεῖα.*

ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνί|ου κώνου τομῇ κάθετοι ἠγμέναι |

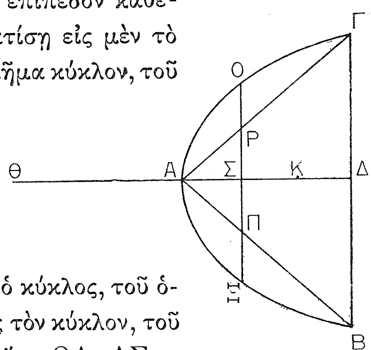
τὸ σημεῖον Κ, τοῦ δὲ μεταφερθέντος τμήματος κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ, ἀντιστρόφως θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΘΑ : ΑΚ, ὃν ἔχει ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ τμῆμα. Εἶναι δὲ ἡ ΘΑ = 2ΑΚ· εἶναι ἄρα διπλάσιος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ τμήματος. Ὁ αὐτὸς δὲ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου.

5

Ὅτι δὲ τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τοῦ ἀποτεμνομένου δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ τμήματος, τμηθείσης τῆς εἰρημένης εὐθείας οὕτως, ὥστε τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ λοιποῦ τμήματος, ἐξετάζεται ὡς ἑξῆς διὰ τῆς μεθόδου ταύτης.

Ἔστω τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτεμνόμενον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἄλλου ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομὴν τὴν παραβολὴν ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποκόψαντος τὸ τμῆμα καὶ τοῦ τέμνοντος ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, ἄξων δὲ τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τῆς παραβολῆς ΑΒΓ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΔΑ ἂς ληφθῇ ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ ΑΘ, καὶ ἂς νοηθῇ ζυγὸς ὁ ΔΘ, μέσον δὲ τῆς εὐθείας αὐτῆς τὸ Α, ἔστω δὲ καὶ κῶνος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τμῆμα, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΒΑ, ΑΓ, ἂς ἀχθῇ δὲ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὴν παραβολὴν ἡ ΞΟ, παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἂς τέμνῃ δὲ αὕτη τὴν μὲν παραβολὴν κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Ο, τὰς δὲ πλευρὰς τοῦ κώνου κατὰ τὰ Π, Ρ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς παραβολὴν ἔχουσιν ἀχθῇ κάθετοι ἐπὶ τὴν *εἰσὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον αἱ ΞΣ, ΒΔ, | ἔστιν, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς | τὸ ἀπὸ ΞΣ. ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ἡ ΒΔ | πρὸς ΠΣ, ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ | ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΠΣ· ἔσται ἄρα | καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, οὕτως | τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ. ἴσον ἄρα | τὸ ἀπὸ ΞΣ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΠΣ· ἀνάλογον | ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν, | ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ | ἀπὸ ΣΠ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΔΑ | πρὸς ΑΣ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ· καὶ ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ. | ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπε|δον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΔ· ποιήσει δὴ | τοῦτο ἐν μὲν τῷ τμήματι τοῦ ὀρ|θογωνίου κωνοειδέος κύκλον, | οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώ|νῳ κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. | καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως | τὸ ἀπὸ ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ | ΞΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΠ, οὕτως ὁ κύ|κλος, οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν | κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, ὡς ἄρα | ἡ ΘΑ πρὸς ΑΣ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ διάμε|τρος ἡ ΞΟ,* H 462 *πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διάμε|⟨τρος ἡ ΠΡ. ἰσορροπήσει ἄρα πε-⟩| ρὶ τὸ Α σημεῖον ὁ κύκλος, οὗ διάμε|τρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένων τῷ κύ|κλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥσ|τε κέντρον εἶναι τοῦ βάρους τὸ | Θ. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν κύκλου, οὗ διά|μετρος ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένοντος κέν|τρον ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Σ, τοῦ δὲ | κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, μετε|νεχθέντος, ὡς ἐρρέθη, κέντρον | τοῦ βάρους τὸ Θ, καὶ ἀντιπεπον|θότως τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ | ΘΑ πρὸς ΑΣ, ὃν ὁ κύκλος, οὗ διάμε|τρος ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ διά|μετρος ἡ ΠΡ, ἰσορροπήσουσιν | ἄρα πρὸς τῷ Α σημείῳ. ὁμοίως | δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἄλλη | τις ἀχθῇ ἐν τῇ* διάμετρον αἱ ΞΣ, ΒΔ, εἶναι ὡς ἡ $\Delta A : A\Sigma = B\Delta^2 : \Xi\Sigma^2$ (Τετρ. παραβ. 3). Ὡς δὲ ἡ $\Delta A : A\Sigma = B\Delta : \Pi\Sigma$ (Εὐκλ. VI, 4) $= B\Delta^2 : B\Delta \times \Pi\Sigma$· θὰ εἶναι ἄρα καί, ὡς τὸ $B\Delta^2 : \Xi\Sigma^2 = B\Delta^2 : B\Delta \times \Pi\Sigma$. Εἶναι ἄρα τὸ $\Xi\Sigma^2 = B\Delta \times \Pi\Sigma$ (Εὐκλείδου V, 9)· εἶναι ἄρα ἐν ἀναλογίᾳ αἱ ΒΔ, ΣΞ, ΣΠ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι, ὡς ἡ $B\Delta : \Pi\Sigma = \Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$ (Εὐκλ. V, ὁρισμ. 9). Ὡς δὲ ἡ $B\Delta : \Pi\Sigma = \Delta A : A\Sigma = \Theta A : A\Sigma$· καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ $\Theta A : A\Sigma = \Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$.



Ἂς ἀνυψωθῇ λοιπὸν ἀπὸ τῆς ΞΟ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ· τοῦτο θὰ σχηματίσῃ εἰς μὲν τὸ παραβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς τμῆμα κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον κύκλον (Περὶ κωνοειδ. 11α), τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ $\Theta A : A\Sigma = \Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$, ὡς δὲ τὸ $\Xi\Sigma^2 : \Sigma\Pi^2$, οὕτως ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, ὡς ἄρα $\Theta A : A\Sigma =$ κύκλος διαμέτρου ΞΟ : κύκλον διαμέτρου ΠΡ. Θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένων, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, ἀφοῦ μεταφερθῇ οὗτος ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ εἰς τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ μὲν κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, αὐτοῦ μένοντος, κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Σ, τοῦ δὲ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, ἀφοῦ μεταφερθῇ οὗτος, ὡς ἐλέχθη, κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ, καὶ κατ' ἀντιστροφὴν θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΘΑ : ΑΣ, ὃν ἔχει ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, ἑπομένως θὰ ἰσορροπήσωσιν ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Α. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, καὶ ἐὰν ἀχθῇ εἰς τὴν παρα-

τοῦ ὀρθογωνίου | κώνου τομῇ παράλληλος τῇ | ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἐπί|πεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς τὴν | ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος ἐν τῷ | τμήματι τοῦ ὀρθογωνίου κωνο|ειδέος αὐτοῦ μένων ἰσορροπήσει| περὶ τὸ Α σημεῖον τῷ γενο-μέ|νῳ κύκλῳ ἐν τῷ κώνῳ μετενε|χθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ | τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ | τοῦ βάρους τὸ Θ. συμπληρωθέν|των οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ | τε τμήματος καὶ τοῦ κώνου ἰσορ|ροπήσουσι περὶ τὸ Α σημεῖον | τεθέντες πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ τμή|ματι αὐτοῦ μένοντες πᾶσι τοῖς | κύκλοις τοῖς ἐν τῷ κώνῳ με|τενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ | ⟨κατὰ τὸ Θ σημεῖον οὕτως, ὥστε⟩ | αὐτῶν κέντρον εἶναι τοῦ βά|ρους τὸ Θ· ἰσόρροπον οὖν καὶ τὸ | τμῆμα τοῦ ὀρθογωνίου κω|νοειδέος περὶ τὸ Α σημεῖον αὐ|τοῦ μένον τῷ κώνῳ μετενε|χθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν | συναμφοτέρων τῶν μεγεθ|ῶν ὡς ἑνὸς λεγομένων κέντρον |
H 463 *ἐστὶν τοῦ βάρους τὸ Α, αὐτοῦ δὲ τοῦ κώ|νου τοῦ μετενηνεγμένου κέντρον | τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα | μεγέθους τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βά|ρους ἐπὶ τῆς ΑΘ εὐθείας ἐκβε|βλημένης ἐπὶ τὸ Α καὶ ἀπολη|φθείσης ἀπ' αὐτῆς τῆς ΑΚ τηλικαύτης, | ⟨ὥστε τὴν ΑΘ⟩ πρὸς αὐτὴν τοῦτον ἔ|χειν τὸν*
H 464 *λόγον, ὃν ἔχει τὸ τμῆμα | πρὸς τὸν κῶνον. ἡμιόλιον δέ ἐστιν τὸ | τμῆμα τοῦ κώνου· ἡμιόλιος ἄρα | ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῆς ΑΚ, καί ἐστιν τὸ | Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογω|νίου κωνοειδέος τῆς ΑΔ τετμη|μένης οὕτως, ὥστε διπλάσιον εἶναι | τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυ|φῇ τοῦ τμήματος τοῦ λοιποῦ τμή|ματος.*

ϛʹ

Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον | ⟨τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς βολὴν ἄλλη τις εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὅτι ὁ γενόμενος κύκλος εἰς τὸ τμῆμα τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, αὐτοῦ μένων, θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α τὸν γενόμενον κύκλον εἰς τὸν κῶνον, μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐὰν λοιπὸν συμπληρωθῶσιν ὑπὸ τῶν κύκλων καὶ τὸ παραβολικὸν τμῆμα καὶ ὁ κῶνος θὰ ἰσορροπήσωσι, περὶ τὸ σημεῖον Α, ὅλοι οἱ κύκλοι οἱ ἀπαρτίζοντες τὸ τμῆμα, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους τοὺς ἀπαρτίζοντας τὸν κῶνον, μεταφερθέντας καὶ τεθέντας ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Θ οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ Θ· θὰ ἰσορροπήσῃ λοιπὸν καὶ τὸ τμῆμα τοῦ ὀρθογωνίου παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, αὐτοῦ μένον, περὶ τὸ σημεῖον Α, πρὸς τὸν κῶνον μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγεθῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Α, τοῦ μεταφερθέντος δὲ κώνου κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ, τοῦ λοιποῦ ἄρα μεγέθους τὸ κέντρον τοῦ βάρους θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΘ ἐκβληθείσης πρὸς τὸ Α καὶ ληφθείσης ἐπ' αὐτῆς τῆς ΑΚ τόσης, ὥστε ἡ ΑΘ πρὸς αὐτὴν νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον (Λῆμμα 2). Εἶναι δὲ τὸ τμῆμα τὰ τρία δεύτερα τοῦ κώνου (θ. 4)· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΘΑ τὰ τρία δεύτερα τῆς ΑΚ, καὶ θὰ εἶναι τὸ Κ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ ὀρθογωνίου παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἐν ᾧ ἡ ΑΔ θὰ ἔχῃ τμηθῆ οὕτως, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

6

Παντὸς ἡμισφαιρίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθεί-

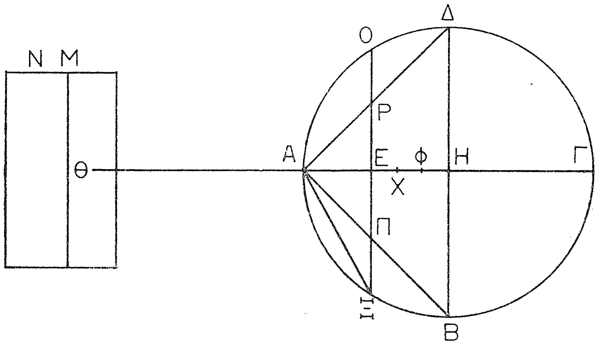
εὐθείας ἐστίν, ἥ⟩ | ἐστιν ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης | οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ | πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἡμισφαι|ρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα τοῦ|τον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ | πέντε πρὸς τὰ τρία.

ἔστω σφαῖ|ρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ | διὰ τοῦ κέντρου, καὶ γενέσθω ἐν | τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ ὁ ΑΒΓΔ | κύκλος, διάμετροι δὲ ἔστωσαν | τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις | αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἐπίπε|δον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ | ἔστω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων | τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ | κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖ|ον, πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώ|νου αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ | ΓΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ | νοείσθω ζυγὸς ἡ ΘΓ εὐθεῖα, μέσον | δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ | ΒΑΔ ἡμικυκλίῳ ἡ ΞΟ παράλλη|λος οὖσα τῇ ΒΔ, τεμνέτω δὲ αὐ|τη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου περι|φέρειαν κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ τοῦ κώ|νου H 466 *πλευρὰς κατὰ τὰ Π, Ρ σημεῖα, | τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς | ΞΟ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν | πρὸς τὴν ΑΕ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν | τῷ ἡμισφαιρίῳ τομὴν κύκλον, | οὗ διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ | τομὴν κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ.*

καὶ | ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς | τὸ ἀπὸ ΑΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΞΑ ἴσα τὰ ἀπὸ | ⟨ΑΕ, ΕΞ, τῇ δὲ ΑΕ ἴση ἡ ΕΠ, ὡς ἄρα ἡ ΑΓ⟩ | πρὸς ΑΕ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ | ΕΠ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ | ΕΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον | τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον | τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον | τὴν ΠΡ, καί ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ ἴση· ὡς | ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ | περὶ διάμετρον τὴν ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ | περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ πρὸς τὸν κύ|κλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΠΡ. | ἰσορροπήσουσιν ἄρα περὶ τὸ | Α ας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων αὐτοῦ, τμηθείσης οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχουσι τὰ πέντε πρὸς τὰ τρία.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἂς γίνῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομὴ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, ἔστωσαν δὲ διάμετροι τοῦ κύκλου κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς ΒΔ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω κῶνος ἔχων βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ τοῦ κώνου ἔστωσαν αἱ ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΓΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ΓΑ = ΑΘ, καὶ ἂς νοηθῇ ζυγὸς ἡ εὐθεῖα ΘΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, καὶ ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ἡ ΞΟ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ἂς τέμνῃ δὲ αὕτη τὴν μὲν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κατὰ τὰ Ξ, Ο, τὰς δὲ πλευρὰς τοῦ κώνου κατὰ τὰ σημεῖα Π, Ρ, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τῆς ΞΟ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸ ἡμισφαίριον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΓ : ΑΕ = ΞΑ^2 : ΑΕ^2$ (Εὐκλ. ΙΙΙ, 31. V, ὁρισ. 9. V, 8 πόρισ.), εἶναι δὲ $ΞΑ^2 = ΑΕ^2 + ΕΞ^2$ (Εὐκλ. Ι, 47), καὶ $ΑΕ = ΕΠ$ (Εὐκλ. VI, 4), θὰ εἶναι ἄρα ἡ $ΑΓ : ΑΕ = ΞΕ^2 + ΕΠ^2 : ΕΠ^2$. Ὡς δὲ $ΞΕ^2 + ΕΠ^2 : ΕΠ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ (Εὐκλ. XII, 2), καὶ εἶναι ἡ $ΓΑ = ΑΘ$· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΘΑ : ΑΕ$, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΞΟ καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΠΡ. Θὰ ἰσορροπήσωσιν ἄρα περὶ σημεῖον ἀμφότεροι οἱ κύκλοι, ὧν | εἰσι διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μένον|τες τῷ κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ | ΠΡ, μετενεχθέντι καὶ τεθέντι | κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι | αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν | ἀμφοτέρων μὲν τῶν κύκλων, ὧν εἰσι | διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μενόν|των κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν | ⟨τὸ Ε, τοῦ δὲ κύκλου, οὗ ἐστι διά-|μετρος ἡ ΠΡ, μετενεχθέντος | τὸ Θ, ἔστιν, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς



ΑΘ, οὕτως ὁ κύκλος, | οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, πρὸς τοὺς κύκλους, | ὧν διάμετροι αἱ⟩ ΞΟ, ⟨ΠΡ. ὁμοίως | δὲ καί, ἐὰν ἄλλη τις ἀχθῇ ἐν τῇ | τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ | παράλληλος τῇ⟩ Β⟨Η⟩Δ, καὶ ⟨ἀπὸ | τῆς ἀχθείσης ἐπίπεδον | ἀνασταθῇ ὀρθὸν πρὸς ⟨τὴν | ΑΓ⟩, ἰσορροπ⟨ήσουσιν⟩ περὶ τὸ Α |
H 467 ⟨σημεῖον⟩ ἀμφότερ⟨οι οἱ κύκλοι | ὅ τε ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ γενό⟩μεν⟨ος⟩ | κ⟨αὶ ὁ ἐν τῷ κών⟩ῳ αὐ⟨τοῦ μένοντες τῷ | γ⟩ενομένῳ ⟨κύκλῳ ἐν τῷ κώ|νῳ⟩ μετενεχθέντι ⟨καὶ⟩ τε⟨θέν-
H 468 τι τοῦ⟩ | ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. ⟨συμπληρωθέν|των οὖν ὑπὸ τῶν κύκλων τοῦ τε⟩ | ἡμισφαιρίου καὶ τοῦ κώ⟨νου⟩ ἰσορ|⟨ροπή-

τὸ σημεῖον Α καὶ οἱ δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, μεταφερθέντα καὶ τεθέντα κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τῶν δύο κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ, ἐν ᾧ μένουν αὐτοῦ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ε (Λῆμμα 7), τοῦ δὲ κύκλου, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, μεταφερθέντος εἶναι τὸ Θ, εἶναι ὡς ἡ ΕΑ : ΑΘ, οὕτως ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ, πρὸς τοὺς κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ. Ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν ἀχθῇ ἄλλη τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὴν τομὴν τοῦ ὀρθογωνίου κώνου παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗΔ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, θὰ ἰσορροπήσωσιν περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ οἱ δύο κύκλοι, καὶ ὁ εἰς τὸ ἡμισφαίριον γενόμενος καὶ ὁ εἰς τὸν κῶνον, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς γενόμενον εἰς τὸν κῶνον κύκλον, μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦσι τὸ ἡμισφαίριον καὶ τὸν κῶνον θὰ ἰσορροπήσωσιν περὶ τὸ σημεῖον Α ὅλοι οἱ κύκλοι ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους τοὺς ἀπαρτίζοντας τὸν κῶνον, μεταφερθέντας καὶ τεθέντας ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ Θ· ὥστε νὰ ἰσορροπήσωσιν περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ ἡμισφαίριον καὶ ὁ κῶνος, αὐτοῦ μένοντα, πρὸς τὸν κῶνον μεταφερθέντα καὶ τεθέντα εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον Θ. ⟨Ἔστω δὲ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Α ἴσος ὁ κύλινδρος ΜΝ καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε ἡ ΑΗ νὰ εἶναι τετραπλασία τῆς ΦΗ· τὸ σημεῖον ἄρα Φ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κώνου ΑΒΔ· διότι τοῦτο ἔχει *σουσι περὶ τὸ Α σημεῖον πάν|τες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ἡμισφαι-⟩| ρίῳ καὶ οἱ ⟨ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ⟩ | μένοντες ⟨πᾶσι τοῖς κύκλοις τοῖς ἐν⟩ | τῷ κώνῳ μετενεχθεῖσι καὶ τε|θεῖσι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥσ|τε κέντρον ⟨εἶναι αὐτῶν⟩ τοῦ βάρους | τὸ Θ· ⟨ὥστε ἰσορροπήσουσι | περὶ τὸ Α σημεῖον τό τε ἡμι-| σφαίριον καὶ ὁ κῶνος αὐτοῦ⟩ | μένοντα τῷ κώνῳ μετενεχθέν|τι καὶ τεθέντι ⟨τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ⟩ | οὕτως, ὥστε κέν⟨τρον⟩ αὐτοῦ ⟨εἶναι τοῦ βάρους⟩ | τὸ Θ σημεῖον . . . . | . . . δ . . . . | . . . . ἔλασσον . . . . | . . . . τῶν δὲ . . . | . . ⟨ἰσορροπ⟩ού⟨ντ⟩ων κατὰ τὸ ⟨Α⟩ | . . . . τρ . . . . . . τὸ . . . | . . ⟨καὶ ἐπεί⟩ ἐστιν, ὡς ἡ Θ⟨Α πρὸς⟩ ΑΧ, | . . . . ἄξων ὁ ΑΗ . . τὰ | . . . . μον. . . . . . | . . . . | . . . . ⟨ση⟩ | μεῖ⟨ον⟩ . . . . | κῶνον τοῖ⟨ς⟩. . . . . . | τοῦ κώνου . . . . | καὶ ἐπεὶ τετρα⟨πλασίᾳ ἐστὶν⟩ | ἡ σφαῖρα τοῦ ⟨κώνου, οὗ βάσις | ὁ⟩ περὶ ⟨διάμετρον τὴν ΒΔ κύ|κλος, ἄξων δὲ ἡ ΑΗ⟩ . . . . | . . . . | . . . . | . . . .*

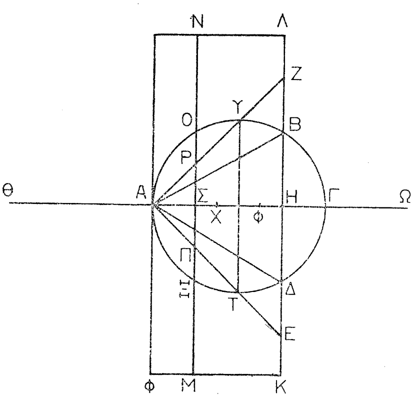
ζ′

Θεωρεῖται ⟨δὲ⟩ διὰ τοῦ ⟨τρόπου τού⟩|του καί, ὅτι π⟨ᾶν
Η 470 *τμῆμα⟩ σφαί|ρας πρὸς τὸν κῶνον ⟨τὸν βάσιν⟩ | ἔχοντα τὴν αὐ⟨τὴν τῷ τμήματι⟩ | καὶ ἄξονα ⟨τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔ|χει*

γραφῇ εἰς τὰ προηγούμενα (Λῆμμα 10). Καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΜΝ δι' ἐπιπέδου τέμνοντος καθέτως τὴν ΘΑ, ὥστε ὁ κύλινδρος Μ νὰ ἰσορροπῇ τὸν κῶνον ΑΒΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κῶνος ΑΒΔ καὶ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, αὐτοῦ μένοντα, ἰσορροποῦσι τὸν κῶνον ΑΒΔ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ, καὶ εἶναι πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΔ ἴσος ὁ κύλινδρος Μ + Ν καὶ κεῖται ἑκάτερος ἐκ τῶν κυλίνδρων Μ, Ν κατὰ τὸ Θ καὶ ὁ κύλινδρος Μ + Ν ἰσορροπεῖ πρὸς τὸ ἄθροισμά των, εἶναι ἰσόρροπος καὶ ὁ κύλινδρος Ν πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, περὶ τὸ σημεῖον Α. Ἂς τμηθῇ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Χ, ὥστε ΑΗ : ΑΧ = 8 : 5. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύλινδρος Μ εἶναι ἰσόρροπος πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΔ θὰ εἶναι κύλινδρος Μ : κῶνον ΑΒΔ = ΦΑ : ΑΘ = 3 : 8. Εἶναι δὲ ὁ κῶνος ΑΒΔ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον Μ + Ν. Θὰ εἶναι ἄρα κύλινδρος Μ + Ν : κύλινδρον Μ = 8 : 3. Καὶ ὡς ἄρα Ν : Μ + Ν = 5 : 8. Καὶ ἀνάπαλιν εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος Μ + Ν, τουτέστιν, ὁ κῶνος ΑΒΔ : κύλινδρον Ν = 8 : 5 = ΑΗ : ΑΧ⟩. Καὶ ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα εἶναι τετραπλασία τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, ἄξων δὲ (δηλ. ὕψος) ὁ ΑΗ ⟨θὰ εἶναι ἡμισφαίριον ΑΒΔ : κῶνον ΑΒΔ = ΑΘ : ΑΗ. Δι' ἴσου ἄρα (διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) θὰ εἶναι ὡς τὸ ἡμισφαίριον ΑΒΔ : κύλινδρον Ν = ΑΘ : ΑΧ. Καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον τὸ ἡμισφαίριον ΑΒΔ πρὸς τὸν κύλινδρον Ν περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κυλίνδρου Ν τὸ Θ· εἶναι καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου ΑΒΔ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΗ ἔχει τμηθῇ κατὰ τὸ Χ οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα νὰ ἔχῃ λόγον 5 : 3⟩.

7

Ἐξετάζεται δὲ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καί, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφό|τερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς | σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοι|ποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος | τοῦ λοιποῦ τμήματος.〉 . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . τω . | . . . . | . . . . | . . . . ὀρθη . . . | . . . . τὸ αὐτὸ . . . . . . | . . . . | . . . παρα . . . . . | . . . . | . . . . | . . . . 〈καὶ ἀπὸ τῆς〉 | ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστάτω ὀρθὸν πρὸς | τὴν ΑΓ· ποιήσει δὴ τοῦτο ἐν μὲν | τῷ κυλίνδρῳ τομὴν κύκλον, οὗ ἐστι | διάμετρος ἡ ΜΝ, ἐν δὲ τῷ τμή|μα | τι τῆς σφαίρας τομὴν κύκλον, οὗ | διάμετρος ἡ ΞΟ, ἐν δὲ τῷ κώνῳ, | οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ | κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, κύκλον, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΠΡ. ὁ | μοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσε | ται ἰσόρροπος περὶ τὸ Α σημεῖον | ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ, αὐ | τοῦ μένων ἀμφοτέροις τοῖς κύ-| 〈κλοις, ὧν διάμετροι αἱ ΞΟ, ΠΡ, | μετεν〉εχθεῖσι τοῦ ζυγοῦ 〈κατὰ τὸ Θ,〉 | ὥστε ἑκατέρου αὐτῶν κέντρον | 〈τοῦ βάρους εἶναι τὸ Θ· ὁμοίως〉 δὲ | 〈ἐπὶ πάντων〉 συμπληρω-



H 472 θέντων | οὖν καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ | 〈κώνου καὶ τοῦ〉 τμήματος 〈τῆς σφαίρας | ὑπὸ τῶν κύκλων ἰσορροπήσει καὶ〉 |

καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας σὺν τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

⟨Διότι ἔστω σφαῖρα τῆς ὁποίας μέγιστος κύκλος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ, διάμετροι δὲ αὐτοῦ αἱ ΑΓ, ΤΥ τεμνόμεναι καθέτως πρὸς ἀλλήλας, ἂς τμηθῇ δὲ αὕτη δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΓ, βάσις δὲ τοῦ τμήματος ΑΒΔ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, ἂς τέμνῃ δὲ οὗτος τὴν ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Η καὶ ἀπὸ τοῦ καθέτου τούτου κύκλου ἂς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α. Ἔστω δὲ καὶ ἄλλος κύκλος εἰς τὴν σφαῖραν περὶ διάμετρον τὴν ΤΥ κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τοῦ καθέτου τούτου κύκλου ἂς ἀναγραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α· καὶ ἀφοῦ προεκβληθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ Η παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν βάσιν κύκλον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΕΖ, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ αἱ ΑΕ, ΑΖ· καὶ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ ἡ ΜΝ,⟩ καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, εἰς δὲ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τομὴν κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΞΟ, εἰς δὲ τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύεται, ὅτι θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Α ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ, αὐτοῦ μένων, πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΞΟ, ΠΡ, μεταφερθέντας ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ (καὶ τεθέντας) κατὰ τὸ Θ, ὥστε ἑκάστου αὐτῶν τὸ κέντρον τοῦ βάρους νὰ εἶναι τὸ Θ· τὸ αὐτὸ δὲ ἐπὶ ὅλων. Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦσι τὸν κύλινδρον καὶ τὸν κῶνον καὶ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ὁ κύλινδρος αὐτοῦ μένων συ|ναμφοτέροις τῷ τε κώνῳ | καὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας | μετενηνεγμένοις καὶ κειμένοις | τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ. τεμνέσθω | δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ Φ, Χ σημεῖα οὕτως, | ὥστε τὴν μὲν ΑΧ εἶναι ἴσην τῇ ΧΗ, | τὴν δὲ ΗΦ τρίτον μέρος τῆς | ΑΗ· ἔσται δὴ τοῦ μὲν κυλίνδρου | κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ διὰ τὸ διχο|τομίαν εἶναι τοῦ ΑΗ ἄξονος. | ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α ση|μεῖον τὰ εἰρημένα μεγέθη, ἔσται, | ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς ἀμφότερον | τόν τε κῶνον, οὗ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμῆμα | τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΘΑ | πρὸς ΑΧ. καὶ ἐπεὶ ⟨τριπλ⟩ασία ἐστὶν | ἡ ΗΑ τῆς ΗΦ, τρίτον μέρος ἐστὶν | ⟨τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΦ τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ. ἴσον δὲ⟩ | τῷ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ τὸ ἀπὸ ΗΒ· ἔσται δὴ καὶ τοῦ | ἀπὸ τῆς ΒΗ τρίτον μέρος τὸ | ὑπὸ ΓΗ, ⟨ΗΦ⟩. . . . . | . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . | τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ . . . . | . . . . . ὑπὸ ΗΓ . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . τῆς . . . . | . . . . | . . ΚΛ . . . . | . . . τρον. . . . . | . . . . οὕτως ⟨ὁ κύλινδρος, | οὗ βάσις ὁ περὶ⟩ διάμετρον | ⟨τὴν . . κύκλος⟩ πρὸς τὸν . . . | . . . . ⟨ὁ κύλινδρος, | οὗ⟩ βάσις ⟨ . . . . ὁ περὶ⟩ | διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν ΑΕΖ | κῶνον. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς . . . . . | . . . . ἄρα ἡ . . | . . . . πρὸς τὸν κῶνον. | ἐδείχθη δὲ καί, ⟨ὡς ἡ ΘΑ⟩ πρὸς ΑΧ, | οὕτως ὁ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρ|⟨ον⟩ τὴν ΚΛ κύκλος ⟨πρὸς τὸ⟩ | τμῆμα ⟨τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ | καὶ τὸν ⟩ κῶνον· καὶ ὡς

Η 473 ἄρα ἡ ΘΑ | πρὸς συναμφοτέρας τὰς . . Φ. | . . . . τὸ ΑΒΔ | ⟨τμῆμα τῆς σ⟩φαίρ⟨ας⟩ . . . τα . . . | . . . . καὶ . . . . | . . . . ὅ τε | . . . . | ὡς τὸ ΑΒΔ τμῆμα πρὸς τὸν κύλιν-θὰ ἰσορροπήσῃ καὶ ὁ κύλινδρος, αὐτοῦ μένων, τὸ ἄθροισμα τοῦ κώνου καὶ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ. Ἂς τέμνηται δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὰ σημεῖα Φ, Χ οὕτως, ὥστε ἡ μὲν ΑΧ = ΧΗ, ἡ δὲ ΗΦ = $^1/_3$ ΑΗ· θὰ εἶναι λοιπὸν τοῦ μὲν κυλίνδρου τὸ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, διότι τοῦτο τέμνει εἰς τὸ μέσον τὸν ἄξονα ΑΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἰσορροποῦσιν περὶ τὸ σημεῖον Α τὰ εἰρημένα μεγέθη, θὰ εἶναι, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι ἡ ΕΖ, καὶ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΘΑ : ΑΧ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΑ = 3ΗΦ, εἶναι $\Gamma H \times H\Phi = \frac{1}{3} AH \times H\Gamma$. Εἶναι δὲ τὸ $AH \times H\Gamma = HB^2$ (Εὐκλ. VI, 8 πόρισ. VI, 17)· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ $\Gamma H \times H\Phi = \frac{1}{3} BH^2$........................

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΘΑ : ΑΧ, οὕτως ὁ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος πρὸς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΔ καὶ τὸν κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ...... τὸ τμῆμα ΑΒΔ πρὸς τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποίου βάσις

δρον, | οὗ ἐστι βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν | . . κύκ⟨λος⟩, ἄξων ⟨δὲ ὁ⟩ α⟨ὐτός, | οὕτως⟩ . . . . Χ πρὸς . . . . ὡ⟨ς
H 474 *δὲ ὁ⟩ | κύλινδρος, οὗ βάσις ⟨ὁ περὶ διά|μετρον⟩ τὴν Κ⟨Λ κύκλος πρὸς τὸν⟩ ΑΒΔ | κῶνον, ⟨οὕτως⟩ . . . . | . τω . . . . πρὸς . | . Β . . . . η | . Φ. . . . . | ὡς ἡ . . . . | . . . . | ἡ Α . τῇ . . . . | . . . . . . καὶ ἡ ΗΓ καὶ . . . . . .*

η′

⟨Ὁμοί|ως δὲ θεωρεῖ|ται διὰ τοῦ ⟨αὐ|τοῦ τρόπου καί, ὅτι⟩ πᾶν τμῆμα ⟨σφαι|ροειδέος⟩ ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ | ὀρθῷ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχον|τα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ | ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν | λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε | ἡμίσεια τοῦ ἄξονος τοῦ ⟨σ⟩φαιρο|⟨ειδέος⟩ καὶ |⟨τοῦ ἄξονος⟩ τοῦ | ⟨ἀντι⟩κειμέ|νου ⟨τμήμα|τος⟩ πρὸ⟨ς | τὸν ἄξονα τοῦ | ἀντικειμέ|νου τμήματος⟩.

θ′

⟨Παντὸς τμήματος σφαίρας | τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἐπὶ τῆς | εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, | διηρημένης οὕτως, ὥστε τὸ | μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κορυ|φῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν | τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συ|ναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμή|ματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ | ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ | τμήματι πρὸς συναμφότερον τόν | τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν | διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ | ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριε|χομένου.⟩ . . . . | . . . . | . . . . |. . . . . |. . . . . ⟨τοῦ δὲ | απο-

εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον...... κύκλος, ἄξων δὲ ὁ αὐτός, οὕτως...... ὡς δὲ ὁ κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΔ, οὕτως....................
....
....
....
....
....
....
....

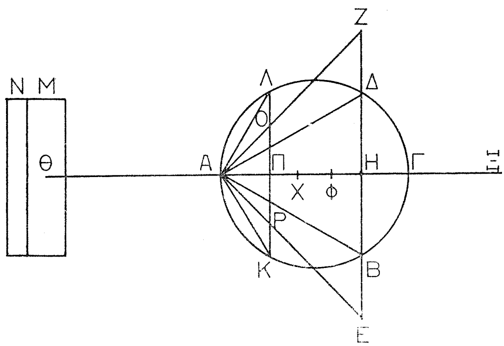
8

Ὁμοίως δὲ ἐξετάζεται διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου καί, ὅτι πᾶν τμῆμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ἀποτετμημένον δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα, τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἄξονος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ὑπολοίπου τμήματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ ὑπολοίπου τμήματος.

9

Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ τμήματος, διῃρημένης οὕτως, ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ὑπόλοιπον νὰ ἔχῃ τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα, τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ εἰς τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα, πρὸς τὸ ἄθροισμα, καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα.......................................
.... διάμετρος

τε⟩τμηκότος ⟨τὸ τμῆμα ἐπι|πέδου ἡ ΒΔ, ἡ δὲ⟩ ΓΑ εὐθεῖα H 476 διά|⟨με⟩τρ⟨ος ἔστω ὀρθὴ πρὸς τὴν⟩ | ΒΔ καὶ τετμή⟨σθω κ⟩ατ⟨ὰ τὸ Η ση|μεῖον· ὥ⟩στε τοῦ τμήμ⟨ατος, οὗ κορυ⟩|φὴ τὸ Α σημεῖον, ἄξων ⟨ἔσται ἡ ΑΗ,⟩ | τ⟨οῦ δ⟩ὲ ἀντικειμέν⟨ου ἄξων ἡ | Η⟩Γ. τετμήσθω δὲ ἡ ΑΗ κατὰ ⟨τὸ Χ, | ὥστε⟩ εἶναι, ὡς τὴν ⟨Α⟩Χ πρὸς ΧΗ, ⟨οὕ|τως τήν τε ΑΗ καὶ τὴν⟩ τετρα|⟨πλασί⟩αν τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ | τὴν διπλασίαν ⟨τῆς | ΗΓ. λ⟩έγω, ὅτι | ⟨τοῦ τ⟩μ⟨ήματος, | οὗ⟩ κορυφὴ | τὸ Α ση|μεῖον, | ⟨κ⟩έντρ⟨ον τοῦ | βάρους ἐστι | τὸ⟩ Χ |. . . . . . | . . . . | φοτέροις . . . . τμημ . . ., οὗ κορυ|⟨φὴ⟩. . . σημεῖον . . . . . . ΗΑ . . | εχ . . . . | . . . . τὴν Η. λόγον | . . . . κέντρον . . . | . . . . | . . . Χ. εἰ . . τμηθη . . . ρ . . . . | . . . . χηματ . . μει . | . . . ω . . . ἐν δὴ . . . τέρ . . . . | . . . καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσ|θω αὐτῇ ἴση ἡ ΑΘ καὶ τῇ ἐκ τοῦ | κέντρου τῆς σφαίρας ἴση ἡ ΓΞ, | καὶ νοείσθω ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσον δὲ αὐ|τοῦ τὸ Α, γεγράφθω δὲ καὶ κύκλος | ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀποτέμνον|τι τὸ τμῆμα κέντρῳ μὲν τῷ Η, | διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΑΗ, καὶ | ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ⟨γεγράφ|θω κῶνος κορυφὴν ἔχων τὸ Α σημεῖον,⟩ | πλευραὶ δὲ ἔστωσαν τοῦ κώνου | αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἤχθω τις τῇ ΕΖ πα|ράλληλος ἡ ΚΛ καὶ συμβαλλέτω τῇ | μὲν περιφερείᾳ τοῦ τμήματος | κατὰ τὰ Κ, Λ, ταῖς δὲ τοῦ ΑΕΖ κώ|νου πλευραῖς κατὰ τὰ Ρ, Ο, τῇ δὲ | ΑΓ κατὰ τὸ Π. ἐπεὶ δή ἐστιν, ὡς ἡ ΑΓ | πρὸς ΑΠ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ | ΑΠ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΚΑ ἴσα τὰ ἀ|πὸ τῶν ΑΠ, ΠΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΠ | τὸ ἀπὸ ΠΟ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἀπὸ ΑΗ τὸ ἀ|πὸ τῆς ΕΗ ἐστιν ἴσον, ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΠ, | οὕτως τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΠ. | ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΚΠ, ΠΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, | οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διά-δὲ τοῦ ἀποτμήσαντος τὸ τμῆμα ἐπιπέδου ἡ ΒΔ, ἔστω δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΑ διάμετρος κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Η· ὥστε τοῦ τμήματος τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι ἄξων ἡ ΑΗ, τοῦ δὲ ὑπολοίπου τμήματος θὰ εἶναι ἄξων ἡ ΗΓ. Ἂς τμηθῇ δὲ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Χ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ἡ ΑΧ : ΧΗ $=$ ΑΗ $+$ 4ΗΓ : ΑΗ $+$ 2ΗΓ. Λέγω, ὅτι τοῦ τμήματος τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α, κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ. . . . .



καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΘ $=$ ΑΓ καὶ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ἂς ληφθῇ ἴση ἡ ΓΞ, καὶ ἂς νοηθῇ ζυγὸς ἡ ΓΘ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Α, ἂς γραφῇ δὲ κύκλος εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτέμνον τὸ τμῆμα μὲ κέντρον μὲν τὸ Η, ἀκτῖνα δὲ ἴσην πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου ἂς γραφῇ κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ τοῦ κώνου (γεννήτριαι) ἔστωσαν αἱ ΑΕ, ΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ ΚΛ καὶ ἂς συναντᾷ αὕτη τὸ τόξον τοῦ τμήματος κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, τὰς δὲ πλευρὰς τοῦ ΑΕΖ κώνου κατὰ τὰ Ρ, Ο, τὴν δὲ ΑΓ κατὰ τὸ Π. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς ἡ ΑΓ : ΑΠ $=$ ΚΑ^2 : ΑΠ^2 (Εὐκλ. III, 31. VI, 8 πόρισ. V, ὁρισ. 9), καὶ εἶναι ΚΑ^2 $=$ ΑΠ^2 $+$ ΠΚ^2 (Εὐκλ. I, 47), καὶ ΑΠ^2 $=$ ΠΟ^2 (Εὐκλ. VI, 4), ἐπειδὴ εἶναι ΑΗ^2 $=$ ΕΗ^2, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΓΑ : ΑΠ $=$ ΚΠ^2 $+$ ΠΟ^2 : ΟΠ^2. Ὡς δὲ ΚΠ^2 $+$ ΠΟ^2 :

H 477 *μετρον τὴν ΚΛ | καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ πρὸς τὸν κύ|κλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, | καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ*
H 478 *τῇ ΑΘ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς | ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ διάμετρον τὴν | ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ κύ|κλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ΟΡ. ἐπεὶ οὖν, ὡς οἱ | περὶ διαμέτρους τὰς ΚΛ, ΟΡ κύκλοι | πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ, | οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΠΑ, μετακείσθω ὁ περὶ | διάμετρον τὴν ΟΡ κύκλος καὶ κείσθω | τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι | αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς | ΑΠ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν | ΚΛ καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΟΡ αὐ|τοῦ μένοντες πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ | διάμετρον τὴν ΟΡ μετενεχθέντα καὶ | τεθέντα τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε | κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ | Θ· ἰσόρροποι ἄρα οἱ κύκλοι ὅ τε ἐν τῷ | τμήματι τῷ ΒΑΔ καὶ ὁ ἐν τῷ ΑΕΖ | ⟨κώνῳ τῷ ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ περὶ⟩ | τὸ Α. ὁμοίως δὲ καὶ πάντες οἱ κύκλοι | οἱ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι καὶ ἐν τῷ | ΑΕΖ κώνῳ αὐτοῦ μένοντες κατὰ | τὸ Α σημεῖον ἰσόρροποι πᾶσι τοῖς | κύκλοις τοῖς ἐν τῷ ΑΕΖ κώνῳ με|τενεχθεῖσι καὶ τεθεῖσι τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐ-| τῶν τοῦ βάρους τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΔ | τμῆμα τῆς σφαί-ρας καὶ ὁ ΑΕΖ | κῶνος ἰσορροπεῖ περὶ τὸ Α σημεῖ|ον αὐτοῦ μένοντα τῷ ΕΑΖ κώνῳ | μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ| κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον εἶναι αὐ|τοῦ τοῦ βάρους τὸ Θ. ἔστω δὲ τῷ κώνῳ | τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ | διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ | τὸ Α σημεῖον, ἴσος κύλινδρος ὁ | ΜΝ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΗ κατὰ τὸ | Φ, ὥστε τετραπλασίαν εἶναι τὴν | ΑΗ τῆς ΦΗ· τὸ Φ ἄρα σημεῖον κέντρον | ἐστὶ*
H 480 *τοῦ βάρους τοῦ ΕΑΖ κώνου· τοῦ|το γὰρ προγράφεται. καὶ τετμήσθω | ἔτι ὁ ΜΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ | τέμνοντι πρὸς*

ΠΟ^2, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ σὺν τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ (Εὐκλ. XII, 2), καὶ εἶναι ἡ ΓΑ = ΑΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος σὺν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ κύκλον, πρὸς τὸν κύκλον περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὰς διαμέτρους ΚΛ, ΟΡ κύκλων πρὸς τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ κύκλον, οὕτως ἡ ΑΘ : ΠΑ, ἂς μεταφερθῇ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ κύκλος καὶ ἂς τεθῇ ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Θ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΑ : ΑΠ, οὕτως ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΛ κύκλος, σὺν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ, αὐτοῦ μένοντες, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΟΡ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ· θὰ εἶναι ἄρα ἐν ἰσορροπίᾳ οἱ κύκλοι, καὶ ὁ εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΔ σὺν τὸν εἰς τὸν κῶνον ΑΕΖ, πρὸς τὸν εἰς τὸν κῶνον ΑΕΖ, περὶ τὸ σημεῖον Α. Ὁμοίως δὲ θὰ εἶναι ἐν ἰσορροπίᾳ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουσι τὸ τμῆμα ΒΑΔ καὶ τὸν κῶνον ΑΕΖ, ἐν ᾧ θὰ μένωσιν αὐτοῦ, περὶ τὸ σημεῖον Α, πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουσι τὸν κῶνον ΑΕΖ, ὅταν μεταφερθῶσι καὶ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ τμῆμα ΑΒΔ τῆς σφαίρας σὺν τὸν κῶνον ΑΕΖ ἰσορροποῦσι, περὶ τὸ σημεῖον Α, αὐτοῦ μένοντα, τὸν κῶνον ΕΑΖ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ. Ἔστω δὲ πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν μὲν τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Α, ἴσος κύλινδρος ὁ Μ + Ν, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Φ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΗ = 4ΦΗ· τὸ σημεῖον ἄρα Φ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κώνου ΕΑΖ· διότι τοῦτο ἔχει προαποδειχθῇ (Σημ. Ἀναφέρεται εἰς τὸ λῆμμα 10. Ἡ ἀπόδειξις δὲν ἐσώθη). Καὶ ἂς τμηθῇ ἀκόμη ὁ κύλινδρος Μ + Ν δι' ἐπιπέδου καθέτου

ὀρθάς, ⟨ὥστε τὸν Μ κύλιν⟩|δρον ἰσορροπεῖν τῷ ΕΑΖ κώνῳ. | ἐπεὶ οὖν ἰσόρροπος ὁ ΕΑΖ κῶνος | καὶ τὸ ΑΒΔ τμῆμα αὐτοῦ μένον|τα τῷ ΕΑΖ κώνῳ μετενεχθέντι | καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Θ, ὥσ|τε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους | τὸ Θ, καί ἐστιν τῷ ΕΑΖ κώνῳ ἴσος | ὁ ΜΝ κύλινδρος, καὶ κεῖται ἑκά|τερος τῶν Μ, Ν κυλίνδρων κατὰ | τὸ Θ, καὶ ἰσόρροπος ὁ ΜΝ κύλιν|δρος, ἑκατέροις, ἰσόρροπος καὶ ὁ Ν τῷ | τμήματι τῆς σφαίρας κατὰ | τὸ Α σημεῖον. καί [ἐπεί] ἐστιν, ὡς τὸ | ΒΑΔ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν | κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμε|τρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ | τὸ Α σημεῖον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΗΓ· τοῦ|το γὰρ προγράφεται. ὡς δὲ ὁ ΒΑΔ | κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ὁ | κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ | πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμε|τρον τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν | κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ | ΗΕ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ ΒΗ ἴσον τὸ | ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΗΕ ἴσον τὸ | ἀπὸ ΗΑ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΗΑ πρὸς τὸ | ἀπὸ ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ· ὡς ἄρα | ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, | οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς | ὁ ΒΑΔ κῶνος πρὸς τὸ ΒΑΔ τμῆμα, | οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΞ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ΒΑΔ τμῆμα | πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς | ΗΑ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΧ πρὸς ΧΗ, | οὕτως ἡ ΗΑ καὶ ἡ τετραπλασία | τῆς ΗΓ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ τὴν διπλα|σίαν τῆς ΗΓ, ἀνάπαλιν ἔσται, | ὡς ἡ ΗΧ πρὸς ΧΑ, οὕτως ἡ διπλασία | τῆς ΓΗ καὶ ἡ ΗΑ | πρὸς τὴν τετραπλῆν τῆς ΓΗ καὶ τὴν | ΗΑ. συνθέντι, ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως |
H 482 ἡ ἑξαπλασία τῆς ΓΗ καὶ διπλα|σία τῆς ΗΑ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ τετρα|πλῆν τῆς ΗΓ. καὶ τῆς μὲν ἑξαπλα|σίας τῆς ΗΓ

ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ὁ κύλινδρος Μ νὰ ἰσορροπῇ πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κῶνος ΕΑΖ σὺν τὸ τμῆμα ΑΒΔ, αὐτοῦ μένοντα, ἰσορροποῦσι πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ μεταφερθέντα καὶ τεθέντα εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ Θ, καὶ εἶναι πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ ἴσος ὁ κύλινδρος Μ + Ν καὶ κεῖται ἑκάτερος τῶν κυλίνδρων Μ, Ν κατὰ τὸ Θ, καὶ ἰσορροπεῖ ὁ κύλινδρος Μ + Ν ἕκαστον ἀντιστοίχως, θὰ ἰσορροπῇ καὶ ὁ κύλινδρος Ν πρὸς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας περὶ τὸ σημεῖον Α. Καὶ [ἐπειδὴ] εἶναι ὡς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, οὕτως ἡ ΞΗ : ΗΓ· διότι τοῦτο ἔχει προαποδειχθῇ (θ. 7). Ὡς δὲ ὁ κῶνος ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ, οὕτως ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ (Εὐκλ. XII, 11), ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ $ΒΗ^2 : ΗΕ^2$ (Εὐκλ. XII, 2), καὶ εἶναι πρὸς μὲν τὸ $ΒΗ^2$ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $ΓΗ \times ΗΑ$ (Εὐκλ. III, 31. VI, 8 πόρ.) καὶ $ΗΕ^2 = ΗΑ^2$, ὡς δὲ $ΓΗ \times ΗΑ : ΗΑ^2 = ΓΗ : ΗΑ$· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κῶνος ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ, οὕτως ἡ ΓΗ : ΗΑ. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ὁ κῶνος ΒΑΔ πρὸς τὸ τμῆμα ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΗ : ΗΞ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι (δηλ. διὰ πολλ/σμοῦ κατὰ μέλη) ὡς τὸ τμῆμα ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ, οὕτως ἡ ΞΗ : ΗΑ (Εὐκλ. V, 22). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΧ : ΧΗ = ΗΑ + 4ΗΓ : ΑΗ + 2ΗΓ$, ἀνάπαλιν θὰ εἶναι, ὡς ἡ $ΗΧ : ΧΑ = 2ΓΗ + ΗΑ : 4ΓΗ + ΗΑ$ (Εὐκλ. V, 7, πόρ.). Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς $ΗΑ : ΑΧ = 6ΓΗ + 2ΗΑ : ΗΑ + 4ΗΓ$ (Εὐκλ. V, 18). Καὶ

καὶ διπλασίας τῆς | ΗΑ ἡ ΗΞ, τῆς δὲ τετραπλασίας τῆς | ΗΓ καὶ τῆς ΗΑ τέταρτον μέρος | ἡ ΓΦ· τοῦτο γὰρ φανερόν· ὡς ἄρα | ἡ ΗΑ πρὸς ΑΧ, οὕτως ἡ ΞΗ πρὸς ΓΦ· ὥστε | καί, ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ. | ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως | τὸ τμῆμα, οὗ ἐστι κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, | βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ | κύκλος, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἐστι κορυφὴ | τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλος· ὡς ἄρα τὸ ΒΑΔ | τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως ἡ | ΓΦ πρὸς ΧΑ. καὶ ἐπεὶ ἰσόρροπος ὁ Μ | κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώνῳ κατὰ | τὸ Α, καί ἐστι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέν|τρον βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ ΕΑΖ κώνου | τὸ Φ, ἔσται ἄρα, ὡς ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν | Μ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΦ, τουτέστιν | ἡ ΓΑ πρὸς ΑΦ. καί ἐστι τῷ ΕΑΖ κώνῳ | ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος· διελόντι ἄρα, | ὡς ὁ ΜΝ κύλινδρος πρὸς τὸν Ν κύ|λινδρον, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΦ. καί ἐστιν | ἴσος ὁ ΜΝ κύλινδρος τῷ ΕΑΖ κώ|νῳ· ὡς ἄρα ὁ ΕΑΖ κῶνος πρὸς τὸν Ν | κύλινδρον, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΓΦ, τουτέστιν | ἡ ΘΑ πρὸς ΓΦ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τό Β|ΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως | ἡ ΓΦ πρὸς ΧΑ· δι' ἴσου ἄρα ἔσται, ὡς τὸ ΑΒΔ | τμῆμα πρὸς τὸν Ν κύλινδρον, οὕτως ἡ | ΘΑ πρὸς ΑΧ. καὶ ἐδείχθη ἰσόρροπον | τὸ ΒΑΔ τμῆμα τῷ Ν κυλίνδρῳ | κατὰ τὸ Α, καί ἐστι τοῦ Ν κυλίνδρου| κέντρον βάρους τὸ Θ· καὶ τοῦ ΒΑΔ | ἄρα τμήματος κέντρον τὸ Χ σημεῖον. | [τὸ σχῆμα].

H 483 ι'

Ὁμοίως δὲ τούτοις θεωρεῖται καί, | ὅτι παντὸς τμήματος σφαιροειδέος | τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς |
H 484 εὐθείας, ἥ ἐστιν ἄξων τοῦ τμήματος, | διῃρημένης τῆς

εἶναι $HΞ = \frac{1}{4}(6HΓ + 2HA)$, $ΓΦ = \frac{1}{4}(4HΓ + HA)$· διότι τοῦτο εἶναι φανερόν· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $HA : AX = ΞH : ΓΦ$ (Εὐκλ. V, 15)· ὥστε καί, ὡς ἡ $ΞH : HA = ΓΦ : XA$ (Εὐκλ. V, 16). Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΞΗ : ΗΑ, οὕτως τὸ τμῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΔ κύκλος, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΕΖ κύκλος· ὡς ἄρα εἶναι τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν ΕΑΖ κῶνον, οὕτως εἶναι ἡ ΓΦ : ΧΑ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος Μ ἰσορροπεῖ τὸν κῶνον ΕΑΖ, περὶ τὸ σημεῖον Α, καὶ εἶναι τοῦ μὲν κυλίνδρου κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ, τοῦ δὲ κώνου ΕΑΖ τὸ Φ, θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ὁ κῶνος ΕΑΖ : τὸν κύλινδρον Μ $= ΘA : AΦ = ΓA : AΦ$. Καὶ εἶναι πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ ἴσος ὁ κύλινδρος ΜΝ· διὰ διαιρέσεως ἄρα εἶναι κύλινδρος ΜΝ : κύλινδρον Ν $= AΓ : ΓΦ$ (Εὐκλ. V, 17). Καὶ ὁ κύλινδρος ΜΝ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ· ὡς ἄρα εἶναι ὁ κῶνος ΕΑΖ : τὸν κύλινδρον Ν $= ΓA : ΓΦ = ΘA : ΓΦ$. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ τμῆμα ΒΑΔ πρὸς τὸν κῶνον ΕΑΖ $= ΓΦ : XA$· δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι, ὡς τὸ τμῆμα ΑΒΔ : τὸν κύλινδρον Ν $= ΘA : AX$ (Εὐκλ. V, 22). Καὶ ἐδείχθη ὅτι τὸ τμῆμα ΒΑΔ ἰσορροπεῖ τὸν κύλινδρον Ν περὶ τὸ σημεῖον Α, καὶ εἶναι τοῦ κυλίνδρου Ν κέντρον τοῦ βάρους τὸ Θ· καὶ τοῦ τμήματος ἄρα ΒΑΔ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ σημεῖον Χ. [τὸ σχῆμα]

10

Ὁμοίως δὲ πρὸς ταῦτα ἀποδεικνύεται καί, ὅτι παντὸς τμήματος ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους εἶναι ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων τοῦ τμήματος, διηρημένης τῆς εὐθείας,

εὐθείας, ὥστε | τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τῇ κο|ρυφῇ τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν | τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συ|ναμφότερον ὅ τε ἄξων τοῦ τμή|ματος καὶ ἡ τετραπλασία τοῦ | ἄξονος τοῦ ἐν τῷ ἀντικειμένῳ | τμήματι πρὸς συναμφότερον τόν | τε ἄξονα τοῦ τμήματος καὶ τὴν | διπλασίαν τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ | ἀντικειμένῳ τμήματι ἐμπεριε|χομένου.

ιαʹ

Θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου | ⟨καί, ὅτι πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνο|ειδέος⟩ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχον|τα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ | ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, | ὃν ἔχει συναμφότερος ὅ τε ἄξων | τοῦ τμήματος καὶ ἡ τριπλασία | τῆς προσούσης τῷ ἄξονι πρὸς συ|ναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμή|ματος τοῦ κωνοειδοῦς καὶ τὴν δι|πλασίαν τῆς προσούσης τῷ ἄξο|νι, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ἀμβλυ|γωνίου κωνοειδέος τμηθέντος | τοῦ ἄξονος, ⟨ὥστε⟩ τὸ πρὸς τῇ | κορυφῇ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν | λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ὅ τε τριπλάσιος | τοῦ ἄξονος ⟨καὶ ἡ ὀκταπλασία⟩ | τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα | αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν τετρα|πλασίαν αὐτῆς τῆς προσκειμένης | πρὸς αὐτόν· καὶ ἄλλων πλειόνων ἅ |. . . . . θεωρουμένων τὰ | . . . . . περιλήψομεν ῥη . . .΄τως, | ἐπεὶ ὁ τρόπος ὑποδέδεικται διὰ τῶν | προειρημένων.

ιβʹ

Ἐὰν εἰς πρίσμα | ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον βάσεις | κύλινδρος ἐγγραφῇ τὰς μὲν βά|σεις ἔχων ἐν τοῖς ἀπεναντίον | τετραγώνοις, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν τῶν | λοιπῶν [παραλληλο-
H 486 *γράμμων] | τεσσάρων ἐπιπέδων ἐφαπτομέ|νην, διὰ δὲ τοῦ*

ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τοῦ τμήματος πρὸς τὸ λοιπὸν τοῦτον νὰ ἔχῃ τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος σὺν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ ὑπολοίπου μέρους τοῦ τμήματος, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ ἄξονος τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα.

11

Ἐξετάζεται δὲ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καί, ὅτι πᾶν τμῆμα ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα βάσιν τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος σὺν τὸ τριπλάσιον τῆς εὑρισκομένης πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἄξονος, πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἄξονος τοῦ τμήματος τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς σὺν τὸ διπλάσιον τῆς εὑρισκομένης πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἄξονος, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ὁ ἄξων τμηθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τὸ τριπλάσιον τοῦ ἄξονος σὺν τὸ ὀκταπλάσιον τῆς προσκειμένης πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς σὺν τὸ τετραπλάσιον αὐτῆς τῆς προσκειμένης πρὸς αὐτόν· καὶ ἄλλα περισσότερα . . . ἐξεταζόμενα διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου θὰ περιλάβωμεν . . ., ἐπειδὴ ἡ μέθοδος ἔχει ὑποδειχθῇ διὰ τῶν προλεχθέντων.

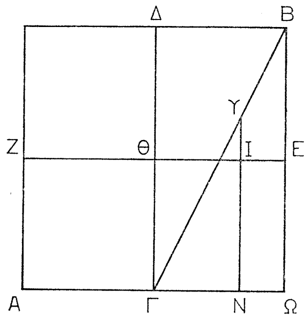
12

Ἐὰν εἰς πρίσμα ὀρθὸν ἔχον βάσεις τετραγώνους ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων τὰς βάσεις πρὸς τὰ ἀπέναντι τετράγωνα, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἐφαπτομένην τῶν λοιπῶν τεσσάρων ἐπιπέδων [παραλληλογράμμων], διὰ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι βάσις τοῦ *κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι | βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευ|⟨ρᾶς τοῦ ἀπεναντίον τετραγώνου ἐπίπε⟩|δον ἀχθῇ, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν σχῆ|μα ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου | ⟨ἕκτον⟩ ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος, | διὰ τοῦ τρόπου τούτου θεωρεῖται. | δείξαντες δὴ ἀναχωρήσομεν | ἐπὶ τὴν διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀπόδειξιν αὐτοῦ.*

νοείσθω | πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους ἔχον | βάσεις καὶ ἐν τῷ πρίσματι κύλιν|δρος ἐγγεγραμμένος, ὡς εἴρη|ται, τμηθέντος δὲ τοῦ πρίσμα|τος διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ὀρ|θῷ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμη|κὸς τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου τοῦ | μὲν πρίσματος τοῦ τὸν κύλινδρον | ἔχοντος τομὴ ἔστω τὸ ΑΒ παραλληλό|γραμμον, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀ|ποτετμηκότος τὸ τμῆμα ἀπὸ | τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξο|νος ἠγμένου ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς | τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ | ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τμῆμα κοι|νὴ τομὴ ἔστω ἡ ΒΓ εὐθεῖα, ἄξων | δὲ ἔστω τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ | κυλίνδρου ἡ ΓΔ εὐθεῖα, καὶ τεμνέ|τω αὐτὴν ἡ ΕΖ δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς, | καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἐπίπεδον ἀνεστάτω | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΓΔ· ποιήσει δὴ τοῦ|το ἐν μὲν τῷ πρίσματι τομὴν | τετράγωνον, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ | τομὴν κύκλον. ἔστω οὖν τοῦ μὲν | πρίσματος τομὴ τὸ ΜΝ τετρά|γωνον, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ ΞΟΠΡ | ⟨κύκλος, καὶ ἐφαπτέσθω ὁ κύκλος⟩ | τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν | κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, τοῦ δὲ | ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος | τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου | καὶ τοῦ διὰ τῆς ΕΖ ἀχθέντος | ἐπιπέδου ὀρθοῦ πρὸς τὸν ἄξονα | τοῦ κυλίνδρου κοινὴ τομὴ ἔστω | ἡ ΚΛ εὐθεῖα· τέμνει δὲ αὐτὴν δίχα | ἡ ΠΘΞ. ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῷ | ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ ἡ
H 488 *ΣΤ πρὸς ὀρθὰς οὖ|σα τῇ ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἐπί|πεδον ἀνασταθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν | ΞΠ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα | τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύ|κλος· ποιήσει δὴ τοῦτο*

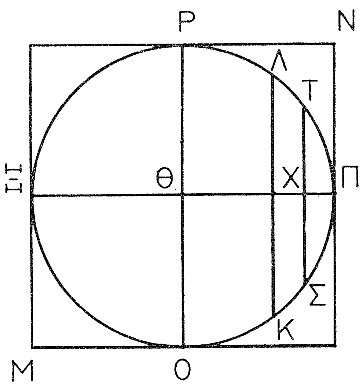
κυλίνδρου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἀπέναντι τετραγώνου ἀχθῇ ἐπίπεδον, ὅτι τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου σχῆμα εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τοῦ ὅλου πρίσματος, ἐξετάζεται διὰ τῆς μεθόδου ταύτης. Ἀφοῦ δὲ τὸ ἀποδείξωμεν δι' αὐτῆς θὰ προβῶμεν εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

Ἂς νοηθῇ πρίσμα ὀρθὸν ἔχον τετραγώνους βάσεις, καὶ εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος ἐγγεγραμμένος, ὡς ἐλέχθη, ἀφοῦ δὲ τμηθῇ τὸ πρίσμα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει τμήσει τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου, τοῦ μὲν πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον ἔστω τομὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τμήσει τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τμῆσαν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τὸ τμῆμα κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἄξων δὲ τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΔ, καὶ ἂς τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως, ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς μὲν τὸ πρίσμα τομὴν τετράγωνον, εἰς δὲ τὸν κύλινδρον τομὴν κύκλον. Ἔστω λοιπὸν τοῦ μὲν πρίσματος τομὴ τὸ τετράγωνον ΜΝ, τοῦ δὲ κυλίνδρου ὁ κύκλος ΞΟΠΡ, καὶ ἂς ἐφάπτηται ὁ κύκλος τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Ο, Π, Ρ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἔχοντος τμήσει τὸ τμῆμα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΖ καθέτως ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ εὐθεῖα ΚΛ· τέμνει δὲ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον ἡ ΠΘΞ. Ἂς ἀχθῇ δὲ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ, ἡ ΣΤ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΧ, καὶ ἀπὸ τῆς ΣΤ ἀφοῦ ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΞΠ ἂς ἐκβληθῇ τοῦτο ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ κύκλος ΞΟΠΡ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τοῦτο εἰς τὸν ἡμικύλινδρον, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσματος, τομὴν ἐν τῷ ἡμικυ|λίνδρῳ, οὗ ἐστι βάσις τὸ ΟΠΡ ἡμικύ|κλιον, ὕψος δὲ ὁ ἄξων τοῦ πρίσ|ματος, τομὴν παραλληλόγραμ|μον, οὗ ἔσται μία μὲν πλευρὰ ἡ ἴ|ση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ



κυ|λίνδρου πλευρᾷ, ποιήσει δὲ καὶ | ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτετμη|μένῳ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν | παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν ἡ μὲν | ἑτέρα πλευρὰ ἴση τῇ ΣΤ, ἡ δὲ | ἑτέρα τῇ ΝΥ· ἔστω δὲ | οὕτως ἡ ΝΥ ἠγμένη ἐν τῷ ΔΕ | παραλληλογράμμῳ παράλλη|λος οὖσα τῇ ΒΩ ἴσην ἀπολαμ|βάνουσα τὴν ΕΙ τῇ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ | παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΓ, καὶ | παράλληλος ἡ ΝΙ τῇ ΘΓ, καὶ | διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΘ, ΓΒ, ἔστιν, ὡς | ἡ ΕΘ πρὸς ΘΙ, οὕτως ἡ ΩΓ πρὸς ΓΝ, του|τέστιν ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ. ὡς δὲ ἡ ΒΩ πρὸς ΥΝ, | οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον | ⟨ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ πρὸς τὸ γε-⟩| νόμενον ἐν τῷ ἀποτμήμα|τι τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν | παραλληλογράμμων ἡ αὐτὴ | πλευρά ἐστιν ἡ ΣΤ· καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ | τῇ ΘΠ, ἡ δὲ ΙΘ τῇ ΧΘ· καὶ ἐπεὶ | ἴση ἐστὶν ἡ ΠΘ τῇ ΘΞ, ὡς ἄρα ἡ ΘΞ | πρὸς ΘΧ, οὕτως τὸ γενόμενον παραλ|ληλόγραμμον ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ | πρὸς τὸ γενόμενον ἐν τῷ ἀποτμή|ματι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου.

παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΣΤ, ἡ δὲ ἄλλη θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου (γεννήτριαν), θὰ σχηματίσῃ δὲ καὶ εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τομὴν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν ἄλλη πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΣΤ, ἡ δὲ ἄλλη πρὸς τὴν ΝΥ· ἔστω δὲ ὅτι ἔχει ἀχθῇ ἡ ΝΥ κατὰ τοιοῦτον τρόπον εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΕ, ὥστε νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΩ καὶ νὰ δίδῃ τὴν ΕΙ (τοῦ πρώτου σχήματος) ἴσην πρὸς τὴν ΠΧ (τοῦ δευτέρου σχήματος). Καὶ ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἡ ΝΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΓ, καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ ΕΘ, ΓΒ, εἶναι ὡς ἡ ΕΘ : ΘΙ = ΩΓ : ΓΝ = ΒΩ : ΥΝ (Εὐκλ. VI, 4). Ὡς δὲ ἡ ΒΩ : ΥΝ, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον εἰς τὸν ἡμικύλινδρον πρὸς τὸ γενόμενον εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου (Εὐκλ. VI, 1)· διότι καὶ τῶν δύο παραλληλο-



γράμμων εἶναι ἡ πλευρὰ ΣΤ ἡ αὐτὴ καὶ εἶναι ΕΘ = ΘΠ, ΙΘ = ΧΘ· καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΠΘ = ΘΞ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΘΞ : ΘΧ, οὕτως τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον εἰς τὸν ἡμικύλινδρον πρὸς τὸ γενόμενον εἰς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα.

νοείσ|θω μετακείμενον τὸ ἐν τῷ ¦ τμήματι παραλληλόγραμμον | καὶ κείμενον κατὰ τὸ Ξ, ὥστε | κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ, | καὶ ἔτι νοείσθω ζυγὸς ὁ ΠΞ, μέσον | δὲ αὐτοῦ τὸ Θ· ἰσορροπεῖ δὴ περὶ | τὸ Θ σημεῖον τὸ παραλληλόγραμ|μον τὸ ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτ|οῦ μένον H 490 *τῷ παραλληλογράμμῳ | τῷ γενομένῳ ἐν τῷ ἀποτμήμα|τι τῷ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέν|τι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ | Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ τοῦ | βάρους τὸ Ξ σημεῖον. καὶ ἐπεί ἐστι | τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ | γενομένου ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ | κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τοῦ δὲ πα|ραλληλογράμμου τοῦ γενομένου | ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέν|τι μετενηνεγμένου κέντρον τοῦ | βάρους τὸ Ξ, καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον | ἡ ΞΘ πρὸς ΘΧ, ὃν τὸ παραλληλόγραμ|μον, οὗ εἴπομεν κέντρον εἶναι | τοῦ βάρους τὸ Χ, πρὸς τὸ παραλληλό|γραμμον, οὗ εἴπομεν κέντρον | εἶναι τοῦ βάρους τὸ Ξ, ἰσορροπήσει ἄρα περὶ τὸ Θ τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τῷ παραλληλογράμμῳ, οὗ κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ. ὁμοίως δὲ | δειχθήσεται, ὅτι καί, ὅταν ἄλλη τις | ἀχθῇ ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυκλίῳ πρὸς | ὀρθὰς τῇ ΠΘ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀ|χθείσης ἐπίπεδον ἀνασταθῇ | ὀρθὸν πρὸς τὴν ΠΘ καὶ ἐκβληθῇ ἐ|φ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ, ἐ|ν ᾧ ἐστιν ὁ ΞΟΠΡ κύκλος, [ὅτι] τὸ γινόμε|νον παραλληλόγραμμον ἐν τῷ | ἡμικυλινδρίῳ ἰσόρροπον περὶ | τὸ Θ σημεῖον αὐτοῦ μένον τῷ πα|ραλληλογράμμῳ τῷ γενομένῳ | ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέν|τι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενεχθέν|τι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ | Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι αὐτοῦ | τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον. καὶ πάντα | ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενό|μενα ἐν τῷ ἡμικυλινδρίῳ αὐτοῦ | μένοντα ἰσορροπήσει περὶ τὸ | Θ σημεῖον πᾶσι τοῖς παραλλη-*

Ἂς νοηθῇ μετατιθέμενον τὸ εἰς τὸ τμῆμα παραλληλόγραμμον καὶ τιθέμενον κατὰ τὸ Ξ, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ Ξ, καὶ ἀκόμη ἂς νοηθῇ ζυγὸς ἡ ΠΞ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Θ· θὰ ἰσορροπήσῃ λοιπὸν περὶ τὸ σημεῖον Θ τὸ εἰς τὸν ἡμικύλινδρον παραλληλόγραμμον, αὐτοῦ μένον, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, τὸ μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ σημεῖον Ξ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου εἰς τὸν ἡμικύλινδρον κέντρον τοῦ βάρους τὸ Χ, τοῦ δὲ παραλληλογράμμου τοῦ γενομένου εἰς τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀπετμήθη καὶ μετεφέρθη, κέντρον τοῦ βάρους τὸ Ξ, καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΞΘ : ΘΧ, ὃν ἔχει τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου εἴπομεν, ὅτι κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου εἴπομεν, ὅτι κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ξ, θὰ ἰσορροπήσῃ ἄρα περὶ τὸ σημεῖον Θ τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Χ, πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου κέντρον τοῦ βάρους εἶναι τὸ Ξ. Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὅταν καὶ ἄλλη τις εὐθεῖα ἀχθῇ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΘ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΠΘ καὶ ἐκβληθῇ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ κύκλος ΞΟΠΡ, [ὅτι] τὸ γενόμενον παραλληλόγραμμον εἰς τὸν ἡμικύλινδρον, αὐτοῦ μένον, θὰ ἰσορροπήσῃ περὶ τὸ σημεῖον Θ, τὸ παραλληλόγραμμον τὸ γενόμενον εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, μεταφερθὲν καὶ τεθὲν εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον Ξ. Καὶ ὅλα (τὸ ἄθροισμα) ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα εἰς τὸν ἡμικύλινδρον, ἐὰν μείνωσιν αὐτοῦ, θὰ ἰσορροπήσωσι περὶ τὸ σημεῖον Θ, πρὸς ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ γενόμενα εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, *λο|γράμμοις τοῖς γενομένοις ἐν | τῷ τμήματι τῷ ἀποτμηθέντι | ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου μετενηνεγμέ|νοις καὶ κειμένοις τοῦ ζυγοῦ κατὰ | τὸ Ξ σημεῖον· ὥστε ἰσορροπεῖν καὶ τὸ ἡ|μικυλίνδριον αὐτοῦ μένον περὶ | τὸ Θ σημεῖον τῷ τμήματι τῷ* H 492 *ἀ|ποτμηθέντι μετενεχθέντι καὶ τεθέντι τοῦ ζυγοῦ | κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε κέντρον εἶναι | αὐτοῦ τοῦ βάρους τὸ Ξ σημεῖον.*

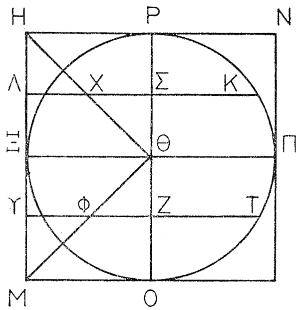
ιγ'

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ ⟨ὀρθὸν πρὸς⟩ τὸν ἄ|ξονα παραλληλόγραμμον τὸ ΜΝ | καὶ ὁ κύκλος ⟨ὁ⟩ ΞΟ ⟨ΠΡ⟩, καὶ ἐπεζ⟨εύχθω⟩|σαν αἱ ΘΜ, ΘΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ' | αὐτῶν ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὸ ἐπί|πεδον, ἐν ᾧ ἐστι τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, καὶ | ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ | εἰρημένα ἐπίπεδα· ἔσται δή τι | πρίσμα βάσιν μὲν ἔχον τηλικαύ|την, ἡλίκη ἐστὶ τὸ ΘΜΗ τρίγωνον, | ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἄξονι τοῦ κυλίν|δρου, καί ἐστι τὸ πρίσμα τοῦτο τέταρτον | μέρος τοῦ ὅλου πρίσματος τοῦ | περιέχοντος τὸν κύλινδρον. ἤχθωσαν | δέ τινες εὐθεῖαι | ἐν τῷ ΟΠΡ ἡμικυ|κλίῳ καὶ ἐν τῷ ΜΝ τετραγώνῳ | αἱ ΚΛ, ΤΥ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς | ΠΞ· τέμνουσιν δὴ αὗται τὴν μὲν | τοῦ ΟΠΡ ἡμικυκλίου περιφέρειαν | κατὰ τὰ Κ, Τ σημεῖα, τὴν δὲ ΟΡ | διάμετρον κατὰ τὰ Σ, Ζ, τὰς δὲ ΘΗ, | ΘΜ κατὰ τὰ Φ, Χ, καὶ ἀνεστάτω ἀ|πὸ τῶν ΚΛ, ΤΥ ἐπίπεδα ὀρθὰ | πρὸς τὴν ΟΡ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑ|κάτερα τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ | ⟨ΞΟΠΡ κύκλος· ποιήσει δὴ τὸ ἕτερον ἐν⟩ | μὲν τῷ ἡμικυλινδρίῳ, οὗ βάσις | μέν ἐστιν τὸ ΟΠΡ ἡμικύκλιον, ὕψος | δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τομὴν πα|ραλληλόγραμμον, οὗ ἐστιν μία μὲν | πλευρὰ ἴση τῇ ΚΣ, ἡ δὲ ἑτέρα | ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου, ἐν | δὲ τῷ πρίσματι τῷ ΘΗΜ ὁμοί|ως παραλληλόγραμμον, οὗ ἔσται | μία μὲν ἴση τῇ ΛΧ, ἡ δὲ ἑτέρα μεταφερθέντα καὶ τεθέντα ἐπὶ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ σημεῖον Ξ· ὥστε θὰ ἰσορροπήση καὶ ὁ ἡμικύλινδρος, αὐτοῦ μένων, περὶ τὸ σημεῖον Θ πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθέν, ἀφοῦ μεταφερθῆ καὶ τεθῆ εἰς τὸν ζυγὸν κατὰ τὸ Ξ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ τὸ σημεῖον Ξ.

13

Ἔστω λοιπὸν πάλιν τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα παραλληλόγραμμον τὸ ΜΝ καὶ ὁ κύκλος ΞΟΠΡ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΜ, ΘΗ, καὶ ἀνυψωθῶσιν ἀπ' αὐτῶν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ, καὶ ἂς ἐκβληθῶσι καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη τὰ εἰρημένα ἐπίπεδα· θὰ ὑπάρχη λοιπὸν πρίσμα τι ἔχον βάσιν μὲν τόσην, ὅση εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΜΗ, ὕψος δὲ ἴσον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἶναι τὸ πρίσμα τοῦτο τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ὅλου πρίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν κύλινδρον (Εὐκλ. XI, 32). Ἂς ἀχθῶσι δὲ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ καὶ τὸ τετράγωνον ΜΝ τυχοῦσαι εὐθεῖαι αἱ ΚΛ, ΤΥ ἀπέχουσαι ἴσον τῆς ΠΞ· ἂς τέμνωσιν δὲ αὗται τὸ μὲν τόξον τοῦ ἡμικυκλίου ΟΠΡ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Τ, τὴν δὲ διάμετρον ΟΡ κατὰ τὰ Σ, Ζ, τὰς δὲ ΘΗ, ΘΜ κατὰ τὰ Φ, Χ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν ΚΛ, ΤΥ ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν ΟΡ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου, ὅπου εἶναι ὁ κύκλος ΞΟΠΡ· θὰ σχηματίση δὲ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εἰς μὲν τὸν ἡμικύλινδρον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ἡμικύκλιον ΟΠΡ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, τομὴν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΣ, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἰς δὲ τὸ πρίσμα ΘΗΜ θὰ σχηματίση ὁμοίως παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΧ, ἡ δὲ ἄλλη ἴση πρὸς τὸν ἄξονα· διὰ τοὺς αὐ-

ἴση | τῷ ἄξονι· διὰ δὲ τὰ αὐτὰ ἐν τῷ | αὐτῷ ἡμικυλινδρίῳ ἔσται τι | παραλληλόγραμμον, οὗ ἐστι μία | μὲν πλευρὰ ἴση



H 494 *τῇ ΤΖ, ἡ δὲ ἑτέ|ρα ἴση τῷ ἄξονι ⟨τοῦ κυλίνδρου, ἐν δὲ τῷ πρίσματι παραλληλό|γραμμον, οὗ ἐστιν ἡ μὲν μία⟩ | πλευρὰ ἴση τῇ ΥΦ, ἡ δὲ ἑτέρα | ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου . . . .*

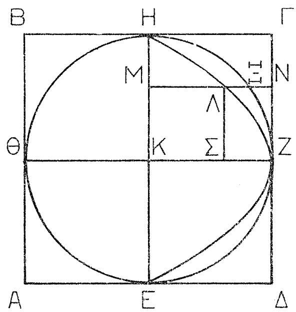
ιδʹ

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους | ἔχον βάσεις, καὶ ἔστω αὐτοῦ μία τῶν | βάσεων τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, | καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ πρίσμα κύ|λινδρος, καὶ ἔστω τοῦ κυλίνδρου | βάσις ὁ ΕΖΗΘ κύκλος ἐφαπτό|μενος τῶν τοῦ ΑΒΓΔ πλευρῶν κατὰ | τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου αὐ|τοῦ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευ|ρᾶς τῆς ἐν τῷ κατεναντίον ἐπιπέ|δῳ τοῦ ΑΒΓΔ τῆς κατὰ τὴν ΓΔ | ἐπίπεδον ἤχθω· ἀ|ποτεμεῖ δὴ τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου | πρίσματος ἄλλο πρίσμα, ὃ ἔσται τέταρτον μέρος | τοῦ ὅλου πρίσματος, αὐτὸ δὲ τοῦτο | ἔσται περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν | παραλληλογράμμων καὶ δύο τρι-|γώνων κατεναντίον ἀλλήλοις. | γεγράφθω δὴ ἐν τῷ ΕΖΗ ἡμικυ|κλίῳ ὀρθογωνίου κώνου τομή, | ἔστω ⟨δὲ⟩. . . . . . |

τοὺς λόγους εἰς τὸν αὐτὸν ἡμικύλινδρον θὰ εἶναι παραλληλόγραμμόν τι, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΤΖ, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἰς δὲ τὸ πρίσμα θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον ,τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΥΦ, ἡ δὲ ἄλλη ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου . . . .

14

Ἔστω ὀρθὸν πρίσμα ἔχον βάσεις τετραγώνους, καὶ ἔστω μία τῶν βάσεων αὐτοῦ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, καὶ ἔστω βάσις τοῦ κυλίνδρου ὁ κύκλος ΕΖΗΘ ἐφαπτόμενος τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ τετραγ. κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ αὐτοῦ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου



τῆς εἰς τὸ ἀπέναντι ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, τῆς κατὰ τὴν ΓΔ, ἂς ἀχθῇ ἐπίπεδον· θὰ τμήσῃ λοιπὸν τοῦτο ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος ἄλλο πρίσμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἓν τέταρτον τοῦ ὅλου πρίσματος, τὸ πρίσμα δὲ τοῦτο θὰ περιέχηται ὑπὸ τριῶν παραλληλογράμμων καὶ δύο τριγώνων κειμένων ἀπέναντι ἀλλήλων. Ἂς γραφῇ λοιπὸν εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΕΖΗ παραβολή, ἔστω δὲ . . . .

. . . . ἐν τῇ τομῇ. . | τῆς ἡ ΖΚ, καὶ ἤχθω τις ἐν τῷ | H 496 *ΔΗ παραλληλογράμμῳ ἡ ΜΝ | παράλληλος οὖσα τῇ ΚΖ· τεμεῖ | δὴ αὕτη τὴν μὲν τοῦ ἡμικυκλίου | περιφέρειαν κατὰ τὸ Ξ, τὴν δὲ τοῦ | κώνου τομὴν κατὰ τὸ Λ. καί ἐστιν | ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς | ΝΖ· τοῦτο γάρ ἐστι σαφές· διὰ τοῦ|το δὴ ἔσται, ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ, οὕτως | τὸ ἀπὸ ΚΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΣ. καὶ ἀ|πὸ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον ἀνεστά|τω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΕΗ· ποιήσει δὴ | τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ πρίσματι | τῷ ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ ὅλου | πρίσματος τομὴν τρίγωνον | ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μία τῶν περὶ | τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ ΜΝ, ἡ δὲ ἑ|τέρα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ἀπὸ τῆς | ΓΔ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΓΔ ἀναγομένη | ἀπὸ τοῦ Ν ἴση τῷ ἄξονι τοῦ κυλίν|δρου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἐν αὐτῷ | τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ· ποιήσει δὲ | καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀποτμη|θέντι ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ | ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς | ΕΗ καὶ τῆς τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς | τῆς κατεναντίον τῇ ΓΔ τομὴν | τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔσται μί|α τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ | ΜΞ, ἡ δὲ ἑτέρα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ | τοῦ κυλίνδρου ⟨ἀν⟩ηγμένη ⟨ἀπὸ | τοῦ Ξ⟩ ὀρθὴ πρὸς τὸ ΚΝ ἐπίπεδον, | ⟨ἡ δὲ⟩ ὑποτείνουσα ἐν ⟨τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ⟩. | ὁμοίως οὖν, ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑ|πὸ ΜΝ, ΜΛ τῷ ἀπὸ ΜΞ· ⟨τοῦτο γὰρ | φανε⟩ρόν ⟨ἐστιν⟩· ἔσται, ὡς ἡ | ⟨ΜΝ⟩ πρὸς τὴν ⟨ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ⟩ πρὸς τὸ | ⟨ἀπὸ ΜΞ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ⟩ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ | ⟨ΜΞ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς⟩ ΜΝ τρίγω | ⟨νον τὸ ἐν τῷ πρίσμα⟩τι γε|⟨νόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΞ τρίγω⟩νον | τὸ ἐν τῷ ⟨τμήματι ἀφῃρημένον⟩ | ὑπὸ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· | ὡς ἄρα ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ, ⟨οὕτως τὸ τρίγωνον⟩ | πρὸς τὸ τρίγωνον. ὁμοίως δὲ ⟨δ⟩εί⟨ξομεν, καὶ⟩ | ἐὰν ⟨ἄλλ⟩η τ⟨ις ἀχθῇ ἐν τῷ πε|ρὶ τὴν τομὴν πε⟩ριγραφ⟨έντι⟩ παραλληλο-*

. . . . διάμετρος καὶ (ἄξων) τῆς παραβολῆς ἡ ΖΚ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΖ· θὰ τέμνῃ λοιπὸν αὕτη τὸ μὲν τόξον τοῦ ἡμικυκλίου κατὰ τὸ Ξ, τὴν δὲ παραβολὴν κατὰ τὸ Λ. Καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΜΝ $\times$ ΝΛ $=$ ΝΖ^2· διότι τοῦτο εἶναι σαφές· διὰ τοῦτο λοιπὸν θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΜΝ : ΝΛ $=$ ΚΗ^2 : ΛΣ^2 (Εὐκλ. VI, 17. V, ὁρισμ. 9). Καὶ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΗ· θὰ σχηματίσῃ δὲ τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος τομὴν τρίγωνον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου μία κάθετος θὰ εἶναι ἡ ΜΝ, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΓΔ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ν κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἴση πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι εἰς αὐτὸ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· θὰ σχηματίσῃ δὲ καὶ εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀχθέντος διὰ τῆς ΕΗ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν ΓΔ, τομὴν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος θὰ εἶναι ἡ ΜΞ, ἡ δὲ ἄλλη θὰ ἔχῃ ἀχθῇ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τοῦ Ξ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΚΝ, ἡ δὲ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι εἰς τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Ὁμοίως λοιπόν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΜΝ $\times$ ΜΛ $=$ ΜΞ^2· διότι τοῦτο εἶναι φανερόν· θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΜΝ : ΜΛ $=$ ΜΝ^2 : ΜΞ^2 (Εὐκλ. VI, 17. V, ὁρισμ. 9). Ὡς δὲ τὸ ΜΝ^2 : ΜΞ^2, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τρίγωνον τὸ γενόμενον εἰς τὸ πρίσμα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΞ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ τμῆμα ἀφῃρημένον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου (Εὐκλ. VI, 19)· θὰ εἶναι ἄρα, ὡς ἡ ΜΝ : ΜΛ, οὕτως τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύομεν, καὶ ἐὰν ἄλλη τυχοῦσα εὐθεῖα ἀχθῇ εἰς τὸ περὶ τὴν παραβολὴν περιγραφὲν παραλληλόγραμμον, παράλληλος

H 498 *γράμμῳ ⟨παρὰ⟩ | τὴν ΚΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης | ἐπί⟨πεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν⟩ πρὸς τὴν | ΕΗ, ὅτι ἔσται, ὡς τὸ τρίγωνον τὸ γε|νόμενον ἐν τῷ πρίσματι πρὸς τὸ | . . . . τμήματι | . . . . . ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως | ἡ ἀχθεῖσα ⟨ἐν⟩ τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παράλληλος τῇ ΚΖ | ⟨πρὸς τὴν⟩ ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ | τῆς ΕΗΖ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ τῆς ΕΗ διαμέτρου. | συμπληρωθέντος οὖν τοῦ ΔΗ πα|ραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν ἠγμέ|νων παρὰ τὴν ΚΖ καὶ τοῦ τμή|ματος τοῦ περιεχομένου ὑπό | τε τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου το|μῆς καὶ τῆς διαμέτρου ὑπὸ τῶν | ἀπολαμβανομένων ἐν τῷ τμή|ματι συμπληρω . . . . | . τοῦ τμήματος τοῦ . . . . . | ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ . . . . . | γινομ. . . . . | πων . . . . τὰ γ. . . . . | . . . . . α καὶ . . . . . | τῷ ΔΗ . . . . | . . . . | . . . . . δὲ ἐτι . . . | . . . . | . . . . μα . . . | . . . . η ετι | . . . . | . . . . ἀπ . . | . . . . | . . . . | . . . . | ἀγομένων παρὰ τὴν ΚΖ . . . . . | . . . . | τομῆς καὶ . . . . | . . . . . ει ταῖς ἐν τῷ ΔΗ παραλ|ληλογράμμῳ ἠγμέναις παρὰ | τὴν ΚΖ, καὶ ἔσται, ὡς πάντα τὰ | τρίγωνα τὰ ἐν τῷ πρίσματι | πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα τὰ | ἐν τῷ ἀποτμηθέντι τμήματι | τοῦ κυλίνδρου ἀφῃρημένα, | οὕτως πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐν | τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς | πάσας τὰς εὐθείας τὰς μετα|ξὺ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. καὶ | ἐκ μὲν τῶν ἐν τῷ πρίσματι τρι|γώνων σύγκειται τὸ πρίσμα, ἐκ | δὲ τῶν ἐν τῷ ἀποτμήματι τῷ | ⟨ἀποτμηθέντι ἀπὸ τοῦ κυλίν|δρου τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ⟩ τῶν ἐν | τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ παρ|αλλήλων τῇ ΚΖ τὸ ΔΗ παραλλη|λόγραμμον, ἐκ δὲ τῶν . . . . . . | μεταξὺ τῆς τοῦ*
H 499 *ὀρθογωνίου κώ|νου τομῆς καὶ τῆς ΕΗ ⟨τὸ τμῆμα⟩ | τῆς ὀρ-*

πρὸς τὴν ΚΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀχθείσης ἀνυψωθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΗ, ὅτι θὰ εἶναι, ὡς τὸ τρίγωνον τὸ γενόμενον εἰς τὸ πρίσμα πρὸς τὸ . . . τμῆμα . . . ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, οὕτως ἡ ἀχθεῖσα εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΖ πρὸς τὴν ἀποληφθεῖσαν ὑπὸ τῆς παραβολῆς ΕΗΖ καὶ τῆς διαμέτρου ΕΗ. Ὅταν λοιπὸν συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΚΖ καὶ τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς διαμέτρου (αὐτῆς) ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εἰς τὸ τμῆμα . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . πρὸς τὰς ἀχθείσας εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ παραλλήλους πρὸς τὴν ΚΖ, καὶ θὰ εἶναι, ὡς ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ εἰς τὸ πρίσμα πρὸς ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ ἀφῃρημένα εἰς τὸ ἀποτμηθὲν τμῆμα τοῦ κυλίνδρου, οὕτως ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αἱ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς μεταξὺ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Καὶ ἐκ μὲν τῶν εἰς τὸ πρίσμα τριγώνων ἀποτελεῖται τὸ πρίσμα, ἐκ δὲ τῶν εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου τριγώνων ἀποτελεῖται τὸ ἀπότμημα, ἐκ δὲ τῶν εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ παραλλήλων πρὸς τὴν ΚΖ ἀποτελεῖται τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, ἐκ δὲ τῶν . . . . μεταξὺ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ΕΗ τὸ τμῆμα τῆς παραβολῆς·

θογωνίου κώνου τομῆς· ὡς ἄρα τὸ πρίσ|μα πρὸς τὸ ἀπότμη-
μα τὸ ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου, οὕτω τὸ ΔΗ παραλ|ληλόγραμ-
μον πρὸς τὸ ΕΖΗ τμῆμα | τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς τοῦ
| ὀρθογωνίου κώνου τομῆς καὶ | τῆς ΕΗ εὐθείας. ἡμιόλιον
δὲ | τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον τοῦ | τμήματος τοῦ περιεχομέ-
νου | ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐ-
H 500 *θείας· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς πρότερον | ἐκδεδομένοις·*
ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ | καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος | τοῦ
ἀφῃρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδ|ρου · οἵων ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπότμημα
| τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ | πρίσμα τριῶν. οἵων
δὲ τὸ πρίσ|μα τριῶν, τοιούτων ἐστὶν τὸ | ὅλον πρίσμα τὸ πε-
ριέχον τὸν | κύλινδρον ι̅β̅ διὰ τὸ δʹ εἶναι τὸ ἕτερον | τοῦ ἑ-
τέρου· οἵων ἄρα τὸ ἀπότμημα | τοῦ κυλίνδρου δύο, τοιού-
των ἐστὶν | τὸ ὅλον πρίσμα ι̅β̅· ὥστε τὸ τμῆ|μα τὸ ἀποτμη-
θὲν ἀπὸ τοῦ | κυλίνδρου ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ | πρίσματος.

ιεʹ

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τετραγώνους | ἔχον βάσεις, ὧν μία ἔστω τὸ ΑΒΓΔ | τετράγωνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς | τὸ πρίσμα κύλινδρος, οὗ βάσις | ἔστω ὁ ΕΖΗ κύκλος· ⟨ἐφάπτεται⟩ | δὴ οὗτος τῶν τοῦ τετραγώνου πλευ|ρῶν κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα· κέντρον δὲ ⟨ἔστω τὸ Κ, καὶ διὰ τῆς⟩ | ΕΗ διαμέτρου ⟨καὶ μιᾶς πλευρᾶς⟩ | . . . . ⟨ἐπίπεδον ἤχθω⟩· | τοῦτο δὴ τὸ ἐπίπεδον ἀποτέμνει | πρίσμα ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος καὶ | ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυ|λίνδρου. ⟨λέγω δή, ὅτι τοῦ⟩το ⟨τὸ⟩ | τμῆμα τὸ ἀποτετμημένον ἀπὸ | τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος | ἐπιπέδου ἕκτον μέρος ὂν δει|χθήσεται τοῦ ὅλου πρίσματος.

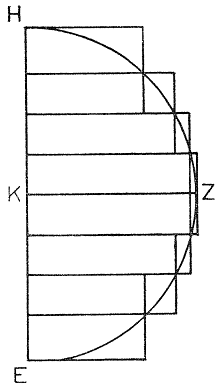
θὰ εἶναι ἄρα ὡς τὸ πρίσμα πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα, οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ πρὸς τὸ τμῆμα ΕΖΗ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ τὰ τρία δεύτερα τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Διότι τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς προηγουμένως ἐκδοθείσας πραγματείας (Τετραγ. παραβ., θ. 24)· εἶναι ἄρα τρία δεύτερα καὶ τὸ πρίσμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ ἀφῃρημένου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου· ἐὰν ἄρα τὸ ἀπότμημα εἶναι ἴσον πρὸς δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου, τὸ πρίσμα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τρία. Ἐὰν δὲ τὸ πρίσμα εἶναι ἴσον πρὸς τρία, τὸ ὅλον πρίσμα τὸ περιέχον τὸν κύλινδρον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς δώδεκα, διότι τὸ ἓν εἶναι τὸ ἓν τέταρτον τοῦ ἄλλου· ἐὰν ἄρα τὸ ἀπότμημα εἶναι δύο μέρη τοῦ κυλίνδρου, τὸ ὅλον πρίσμα θὰ εἶναι ἴσον πρὸς δώδεκα· ὥστε τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τοῦ πρίσματος.

15

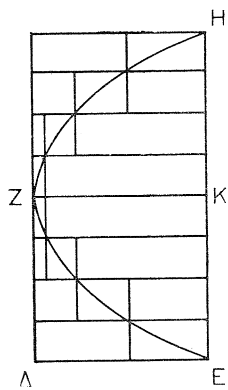
Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν ἔχον βάσεις τετραγώνους, τῶν ὁποίων μία ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἐγγραφῆ εἰς τὸ πρίσμα κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις ἔστω ὁ κύκλος ΕΖΗ· ἐφάπτεται δὲ οὗτος τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ· ἔστω δὲ κέντρον τὸ Κ, καὶ διὰ τῆς διαμέτρου ΕΗ καὶ μιᾶς πλευρᾶς . . . ἂς ἀχθῆ ἐπίπεδον· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἀποτέμνει ἀπὸ τοῦ ὅλου πρίσματος πρίσμα καὶ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα κυλίνδρου. Λέγω λοιπόν, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τοῦ ἀχθέντος ἐπιπέδου θὰ δειχθῆ ὅτι εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τοῦ πρίσματος.

πρῶτον δὲ δείξομεν, ὅτι δυνατὸν | ἔσται εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμη|θὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα | στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περι|γράψαι ἐκ πρισμάτων συγκεί|μενον ἴσον ὕψος ἐχόντων καὶ | βάσεις τριγώνους ἐχόντων ὁ|μοίας, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆ|μα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέ|χειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προ|τεθέντος μεγέθους. . . . . | γὰρ τοῦ πρίσματος τοῦ
H 502 κατὰ | τὸ ΒΔ παραλληλογράμμου . . . | . . . . καὶ . . . ω . . | . . . . . . γραμμένου . ω . . το . . Ξ. | ἐπιπέδῳ . . ⟨σ⟩ημεῖα τοῦ . . . . | . ατος . . . η . . . ρετό . πω . . . . | . . . . . νομεν. . . . . εστ . . σων | . . . . ἔστω . . . . το . . | λειπόμενον . . νι . μια ἐλασ . | . . . ν . . τοῦ λείμματος . στ . . . . | . . . . . . ε . . ει . . . καὶ . . . ει . . . α | τω . ει . . . . το . . | ατα | . . . . | . . . τω ἐκ . . . . | . . . . | . . . . | τμῆμα τὸν το . . . . . . | ἀπο⟨τ⟩μ⟨η⟩θ . . . . ἀπὸ . . . . | δι . . . . | ε . . . μάτων . . . . μεν . . | . . ων . . . . ται καὶ τῶν . . . | . . ἐγγεγραμμένω . . . δι . . . | . . . . των κει . . . . . τα . . . | ΚΩ παραλληλόγραμμον . . . | . . . . αμμον | . . . . | σχήματι πρίσμα . . . . . . ησ . | . . . . | . . . . | τὸ ἀπο . . . . δρου . | ἐγγεγράφθω . . . . . . μι|α . . . . | . . . . | . . . . | . . σχῆμα, τὸ εἰρ⟨ημένον⟩ | σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου . . . | . . . . . . ἔχει . . . τοῦ δοθέντος | . . . . . . ἐχέτω . . . . . . οσ | . . . . . τῶν πρισμάτων | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . ἴσον αὐ . . . ⟨ση⟩μεῖα . . . . ἐγγεγρά|⟨φθω⟩ . . . . | . . . . . ν ἐσ. . . . δευτέρῳ | . . . . γεγρ . . . . γει | . . . . . η . . . . . .
H 504 ⟨τέ⟩τμηται | κατὰ τὸ αὐτὸ . . . . | ⟨ἐγγεγρ⟩αμμένον ἐν . . . . . . | κύκλ . . . το⟨ῦ⟩ τμήματος τη | συνθε . τ . . . . ἀπο

Πρῶτον δὲ θὰ δείξωμεν ὅτι θὰ εἶναι δυνατὸν εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἀποτμηθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου νὰ ἐγγράψωμεν στερεὸν σχῆμα καὶ



ἄλλο νὰ περιγράψωμεν ἀποτελούμενον ἐκ πρισμάτων ἐχόντων ὕψος ἴσον καὶ βάσεις τρίγωνα ὅμοια, ὥστε τὸ περιγραφὲν τμῆμα νὰ ὑπε-



ρέχῃ τοῦ ἐγγραφέντος ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος μεγέθους (ὁσονδήποτε μικροῦ)..

. . . . | μείζων ἐστὶν τοῦ ἐγγεγραμμένου | . . . . . . ⟨τμ⟩ήματος ἐν τῷ πρίσ|ματι τῷ κατὰ τὸ . . . . . | . . . . ω

⟨ . . . . . . ἔλασσον ἄρα ἢ ἡμιό⟩|λιον τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λοξοῦ | ἐπιπέδου τοῦ ἐγγεγραμμένου | εἰς τὸ ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυ|λίνδρου στερεοῦ. ἐδείχθη δέ, ὡς τὸ | ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφῃ|ρημένον πρίσμα πρὸς τὸ | ἐγγεγραμμένον στερεὸν εἰς τὸ | ἀπότμημα τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίν|δρου, οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλό|γραμμον πρὸς τὰ ἐγγεγραμμέ|να παραλληλόγραμμα εἰς τὸ | τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς | τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς | καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας· ἔλασσον ἄρα | ἢ ἡμιόλιον τὸ ΔΗ παραλληλό-|γραμμον τῶν παραλληλογράμ|μων τῶν ἐν τῷ τμήματι τῷ | περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρ|θογωνίου κώνου τομῆς καὶ τῆς | ΕΗ εὐθείας· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ | τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου | ὑπὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου | τομῆς καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας ἡμιόλι|ον δέδεικται τὸ ΔΗ παραλληλό|γραμμον ἐν ἑτέροις. οὐκ ἄρα μεῖ|⟨ζον⟩ . . . . | . . . . | . . . . | . . . . ⟨στε⟩|ρεὸν ἐτ. . . . . ⟨ἀ⟩|ποτεμν. . . . . | σχῆμ⟨α⟩ . . . . . . | τα ὀρθο. . . . . | περιγραφ . . . . . . ⟨τοῦ ἐγγρα⟩|φέντος ἐν . . . . | ἐπεὶ . . . . | τμήματ . . . . | ἐγγεγράφ⟨θω . . . . . ἐν τῷ τμή⟩|ματι τῷ ⟨περιεχομένῳ ὑπό τε⟩ | τῆς τοῦ ὀρθ⟨ογωνίου κώνου τομῆς⟩ | καὶ τῆς ⟨ΕΗ εὐθείας⟩ . . . . | γεγράφθ⟨ω⟩ . . . . | τοῦ ὀρθ⟨ογωνίου κώνου⟩ . . . . | φὲν περι. . . . . . . ⟨ἐγγεγραμ⟩|μένον ἐν τ⟨ῷ⟩ . . . . . . | τοῦ κυλίνδρ⟨ου⟩. . . . . . | τοῦ στερε⟨οῦ⟩ . . . . | τοῦ κυ-
H 506 *λίν⟨δρου⟩ . . . . . | τμήματ . . . . | ἐστιν καὶ . . . . | γραμμέν. . . . . |. . . . . |. . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . . .*

. . . .
. . . .

. . . . .εἶναι ἄρα τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου μικρότερον τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ στερεοῦ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἀπότμημα. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἀφῃρημένον πρίσμα πρὸς τὸ εἰς τὸ ἀπότμημα ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου ἐγγεγραμμένον στερεόν, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ πρὸς τὰ ἐγγεγραμμένα παραλληλόγραμμα εἰς τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ· εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ μικρότερον τῶν τριῶν δευτέρων τῶν παραλληλογράμμων τῶν εἰς τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπειδὴ εἰς ἄλλην θέσιν ἀπεδείχθη ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τμήματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Δὲν εἶναι ἄρα μεγαλύτερον . . . .

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

...... | .... | .... εχομεν | .... | ...... νη ... | .... | .... Η ... | .... τιν. . .| .... πρὸς τὸ | .... τὸ ἐν τ⟨ῷ⟩ | .... | .... ⟨πε⟩ριεχομε| .... γο. . . | τῆς ΕΗ καὶ | .... τοῖς λόγ|⟨οις⟩ ...... αμμέν. . . | .... τμήματος | .... δρ ..... | .... νον ἀπὸ τῆς | .... ⟨τ⟩ῆς πλευρ⟨ᾶς⟩ | .... | .... ἐν τῷ | .... τετμή⟨σθω⟩ |.... .... | .... εχθήσ | .... τὸ μεῖ|⟨ζον⟩ .... | .... | .... | .... ⟨εὐ⟩-| ⟨θ⟩είας, καὶ πάντα τὰ πρίσματα | τὰ ἐν τῷ πρίσματι τῷ ἀποτε|τμημένῳ ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέ|δου πρὸς πάντα τὰ πρίσματα τὰ | ἐν τῷ σχήματι τῷ περιγε|γραμμένῳ περὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ | κυλίνδρου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν | πάντα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν | τῷ ΔΗ παραλληλογράμμῳ πρὸς πάν|τα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐν τῷ | σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ | περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑ|πὸ τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς | καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας, τουτέστιν τὸ πρί|σμα τὸ ἀποτετμημένον ὑπὸ τοῦ λο|ξοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγε|γραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυ|λίνδρου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν | τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ | σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τὸ περι|εχόμενον ὑπὸ | τῆς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς | καὶ τῆς ΕΗ εὐθείας. μεῖζον δέ ἐστι | τὸ πρίσμα τὸ ἀποτετμημένον ὑ-| πὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου ἢ ἡμιόλιον | τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ περιγε|⟨γραμμένου περὶ τὸ τμῆμα τοῦ | κυλίνδρου⟩.........

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

καὶ ὅλα τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς ὅλα τὰ πρίσματα τὰ εἰς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, πρὸς ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ εἰς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ, τουτέστιν τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗ, πρὸς τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΕΗ. Εἶναι δὲ μεγαλύτερον τὸ πρίσμα τὸ ἀποτμηθὲν ὑπὸ τοῦ λοξοῦ ἐπιπέδου τῶν τριῶν δευτέρων τοῦ στερεοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τμῆμα τοῦ κυλίνδρου . . . .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΟΕΙΚΟΝ

P Κῶδιξ Παρισινὸς Ἑλληνικὸς 2448, XIV αἰῶνος*
G. Guelferbytanus Gudianus Ἑλληνικὸς 77.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΕΠΙ ΤΟΥΤΟΥ

B. Krumbiegel, Das Problema bovinum des Archimedes, Zeitschr. für Mathem. und Physik, XXV, 1880, Hist. litter. Abteilung, p. 121-136.
G. Hermann, De Archimedis, problemate bovino, dissert.Leipzig, 1828.
I. F. Wurm, Jahns Jahrbücher, XIV, p. 194.
G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842,

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη

* Τὸν κώδικα τοῦτον ἐξήτασε διὰ πρώτην φορὰν τῇ προτροπῇ τοῦ Heiberg ὁ Henri Lebèque.

p. 481 sq.
I. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae, Kopenhagen, 1879, p. 66-69.
A. Amthor, Zeitschrift für Math. und Physik, XXV, 1880, p. 153-171.
M. Cantor, Ibid. XXIV, p. 169.
P. Tannery, Mémoires de la Soc. des Sciences de Bordeaux, 1880, III, p. 369 sq.
Th. Heath, Diophantus of Alexandria, 2e éd. 1910, p. 142 sq.
G. E. Lessing, Beiträge zur Gesch. und Litteratur, Braunschweig, 1773, p. 421 sq.

Πρόβλημα

τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης εὑρὼν ἀπέστειλεν εἰς στίχους πρὸς τοὺς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἀσχολουμένους μὲ τὰ θέματα αὐτά, περιεχόμενον εἰς τὴν ἐπιστολὴν του πρὸς τὸν Ἐρατοσθένη τὸν Κυρηναῖον.

Τὸ πλῆθος τῶν βοῶν τοῦ ἡλίου, ὦ ξένε, μέτρησον
ἀφοῦ ἐπιστήσῃς τὴν προσοχήν σου, ἐὰν μετέχῃς σοφίας,
πόσον δηλαδὴ ἔβοσκε εἰς τὰς πεδιάδας τῆς νήσου Σικελίας
τῆς τριγωνικῆς* διῃρημένον εἰς τέσσαρας ἀγέλας

* Θρινακία = τρία ἄκρα ἔχουσα, ἡ Τρινάκρια, ἡ Σικελία.

χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον. ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες· ἀργότριχας μέν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον,
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὐτοὺς πᾶσιν ἰσαζομένους.
θηλείαισι δὲ βουσὶ τάδ' ἔπλετο· λευκότριχες μέν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἶσαι·
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις πάσαις εἰς νομὸν ἐρχομέναις.
ξανθοτρίχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον τετραχῇ.
ξανθαὶ δ' ἠριθμεῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἶσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
ξεῖνε, σὺ δ', Ἠελίοιο βόες πόσαι, ἀτρεκὲς εἰπών,
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ, θήλειαι ὅσαι κατὰ χροιὰν ἕκασται,

διαφόρου χρώματος· ἡ μὲν μία μὲ λευκὸν ὡς γάλα,
ἡ δὲ ἄλλη μὲ κυανοῦν ἔλαμπε χρῶμα,
ἡ ἄλλη μὲν μὲ ξανθόν, ἡ ἄλλη δὲ μὲ ἀνάμικτον. Εἰς ἑκάστην δὲ
ἀγέλην ἦσαν ταῦροι εἰς μέγα πλῆθος
διαμεμοιρασμένοι κατὰ τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν· οἱ λευκοὶ μὲν
ἦσαν τὸ ἥμισυ καὶ τὸ ἓν τρίτον τῶν κυανῶν ταύρων
καὶ φαντάσου, ὦ ξένε, ηὐξημένον τὸ πλῆθος τοῦτο μὲ ὅλους τοὺς ξανθούς,
οἱ δὲ κυανοῖ ἦσαν ἴσοι μὲ τὸ τέταρτον μέρος
καὶ τὸ πέμπτον τοῦ ἀναμίκτου χρώματος, σὺν ὅλους τοὺς ξανθούς.
Τοὺς δὲ ὑπολειπομένους ἀναμίκτους φαντάσου
ὅτι ἐξισοῦνται κατὰ τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ ἕκτον καὶ ἕβδομον μέρος τῶν λευκῶν
ταύρων καὶ μὲ ὅλους τοὺς ξανθούς.
Ὡς πρὸς δὲ τὰς ἀγελάδας ὑπῆρχον αἱ ἑξῆς σχέσεις· αἱ μὲν λευκαὶ
ἦσαν ὅλης τῆς κυανῆς ἀγέλης
ἀκριβῶς ἴσαι πρὸς τὸ τρίτον μέρος καὶ τὸ τέταρτον·
αἱ δὲ κυαναῖ πάλιν ἦσαν ἴσαι μὲ τὸ τέταρτον
καὶ τὸ πέμπτον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν ἀναμίκτου χρώματος,
ὅταν ἤρχοντο ὅλαι μὲ τοὺς ταύρους εἰς τὴν βοσκήν.
Αἱ ἀναμίκτου δὲ χρώματος ἀγελάδες εἶχον ἀριθμὸν κατὰ τὸ πλῆθος
ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ τέσσαρα μέρη μὲ τὸ πέμπτον καὶ ἕκτον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν ξανθοτρίχων.
Αἱ δὲ ξανθαὶ ἠρίθμουν τὸ ἥμισυ τοῦ τρίτου μέρους
σὺν τὸ ἕβδομον μέρος τῆς ἀγέλης τῶν λευκῶν.
Σὺ δέ, ὦ ξένε, ἂν μοῦ εἴπῃς μὲ ἀκρίβειαν πόσοι ἦσαν οἱ βόες τοῦ ἡλίου,
χωριστὰ μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν καλοθρεμμένων ταύρων,
χωριστὰ δὲ πάλιν, πόσαι ἦσαν αἱ ἀγελάδες ἑκάστου χρώματος,

οὐκ ἄιδρίς κε λέγοι' οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος. ἀλλ' ἴθι φράζευ
καὶ τάδε πάντα βοῶν 'Ηελίοιο πάθη.
ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος, εἰς εὖρός τε, τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ξεῖνε, τὰ πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Σχόλιον

Τὸ μὲν οὖν πρόβλημα διὰ τοῦ ποιήματος ὁ 'Αρχιμήδης ἐδήλωσε σαφῶς· ἰστέον δὲ τὸ λεγόμενον, ὅτι τέσσαρας ἀγέλας εἶναι δεῖ βοῶν, λευκοτρίχων μὲν μίαν ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθος ὁμοῦ συνάγει μυριάδας διπλᾶς ιδ' καὶ ἁπλᾶς φπβ' καὶ μονάδας ͵ζτξ', κυανοχρόων δ' ἄλλην ὁμοῦ ταύρων

δὲν θὰ χαρακτηρίζεσαι ὡς ἀμαθὴς καὶ ἀδαὴς τῶν ἀριθμῶν,
ὅμως δὲν θὰ συγκαταλέγεσαι ἀκόμη μεταξὺ τῶν σοφῶν. Ἔλα λοιπὸν λέγε
καὶ ὅλας τὰς ἀκολούθους σχέσεις τῶν βοῶν τοῦ ἡλίου.
Οἱ μὲν λευκοὶ ταῦροι, ὅταν ἀναμιχθῶσι μὲ τὸ πλῆθος
τῶν κυανῶν, ἵστανται εἰς συμπαγῆ σχηματισμὸν ἰσομέτρως
καὶ κατὰ τὸ βάθος, καὶ κατὰ τὸ πλάτος, ὅλαι δὲ αἱ πεδιάδες
τῆς Θρινακίας (Σικελίας) ἦσαν γεμᾶται ἀπὸ τὸν τετράγωνον αὐτὸν σχηματισμόν.
Ἐξ ἄλλου δὲ οἱ ξανθοὶ καὶ οἱ ἀναμίκτου χρώματος ἀθροιζόμενοι ὁμοῦ
εὑρίσκοντο τοιουτοτρόπως, ὥστε ἀρχίζοντες ἀπὸ ἕνα
νὰ ἀποτελοῦν σχῆμα τριγώνου ἀριθμοῦ χωρὶς νὰ εἶναι περισσότεροι
καὶ χωρὶς νὰ εἶναι ὀλιγώτεροι οἱ ταῦροι τῶν ἄλλων χρωμάτων.
Ἀφοῦ εὕρῃς καὶ αὐτὰ καὶ τὰ συμπεριλάβῃς εἰς τὸν νοῦν σου
καὶ ἐκφράσῃς, ὦ ξένε, ὅλα τὰ μέτρα τῶν πληθῶν
ἄπελθε ὑπερηφανευόμενος ὅτι ἀνεδείχθης νικητὴς καὶ γνώριζε
ὅτι ἐκρίθης τέλειος εἰς αὐτὴν τὴν σοφίαν.

Σχόλιον (ἀρχαῖον)

Τὸ μὲν πρόβλημα λοιπὸν ὁ Ἀρχιμήδης τὸ ἐδήλωσε διὰ τοῦ ποιήματος σαφῶς· πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν τὸ λεγόμενον, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι τέσσαρες ἀγέλαι βοῶν, μία μὲν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἀγελάδων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος ὁμοῦ δίδει διπλᾶς μυριάδας 14 = 1.400.000.000 (διπλῆ μυριὰς ἢ δευτέρα μυριὰς = 10.000^2) καὶ ἁπλᾶς μυριάδας 582 (= 5.820.000) καὶ μονάδας 7360 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 1.405.827.360), κυανοχρόων δὲ ἄλλην ἀγέλην ταύρων καὶ

καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ἐννέα καὶ ἁπλῶν ͵ηωλʹ καὶ μονάδων ωʹ, μιξοτρίχων δ' ἄλλην ταύρων καὶ θηλειῶν, ὧν τὸ πλῆθός ἐστι μυριάδων διπλῶν ηʹ καὶ ἁπλῶν ͵ϛϡϙαʹ καὶ μονάδων υʹ· τῆς δὲ λοιπῆς ἀγέλης τῶν ξανθοχρόων συνάγει τὸ πλῆθος διπλᾶς μυριάδας ζʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ϛψηʹ, μονάδας δὲ ͵η· ὥστε συνάγεσθαι ὁμοῦ τὸ πλῆθος τῶν δʹ ἀγελῶν μυριάδας διπλᾶς μʹ καὶ ἁπλᾶς ͵γριβʹ καὶ μονάδας ͵ϛφξʹ. καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς ηʹ καὶ ἁπλᾶς ͵βϡλαʹ καὶ μονάδας ͵ηφξʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς εʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ζχνʹ καὶ μονάδας ͵ηωʹ, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς εʹ καὶ ἁπλᾶς ͵θχπδʹ καὶ μονάδας ͵αρκʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς γʹ καὶ ἁπλᾶς ͵θρμεʹ καὶ μονάδας ͵θχπʹ, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς εʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ηωξδʹ καὶ μονάδας ͵δωʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς βʹ καὶ ἁπλᾶς ͵ηρκϛʹ καὶ μονάδας ͵εχʹ, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς γʹ καὶ ἁπλᾶς ͵γρϙεʹ καὶ μονάδας ϡξʹ, θηλειῶν δὲ μυριάδας διπλᾶς δʹ καὶ ἁπλᾶς ͵γφιγʹ καὶ μονάδας ͵ζμʹ. καί ἐστι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ἀγελάδων ὁμοῦ, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι 9 διπλῶν μυριάδων ($=9 \times 10.000^2 = 900.000.000$) καὶ ἁπλῶν μυριάδων 8830 (= 88.300.000) καὶ μονάδων 800 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 988.300.800), ἄλλην δὲ ἀγέλην ἀναμίκτου χρώματος, ἐκ ταύρων καὶ ἀγελάδων, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι μυριάδων διπλῶν 8 (=800.000.000), καὶ ἁπλῶν 6991 (= 69.910.000) καὶ μονάδων 400 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 869.910.400)· τῆς ἀπομενούσης δὲ ἀγέλης τῶν ξανθοχρόων τὸ πλῆθος συνάγει διπλᾶς μυριάδας 7 (= 700.000.000) καὶ ἁπλᾶς 6708 (= 67.080.000), μονάδας δὲ 8000 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 767.088.000)· ὥστε τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀγελῶν νὰ συνάγηται μυριάδας διπλᾶς 40 (= 4.000.000.000) καὶ ἁπλᾶς 3112 (= 31.120.000) καὶ μονάδας 6560 (ἤτοι σύνολον 4.031.126.560). Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἔχει μυριάδας διπλᾶς 8 (=800.000.000) καὶ ἁπλᾶς 2931 (=29.310.000) καὶ μονάδας 8560 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 829.318.560), τῶν ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 5 (=500.000.000) καὶ ἁπλᾶς 7650 (=76.500.000) καὶ μονάδας 8800 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 576.508.800), ἡ δὲ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς 5 (= 500.000.000) καὶ ἁπλᾶς 9684 (96.840.000) καὶ μονάδας 1120 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 596.841.120), ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 3 (= 300.000.000) καὶ ἁπλᾶς 9145 (= 91.450.000) καὶ μονάδας 9680 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 391.459.680), ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς 5 (=500.000.000) καὶ ἁπλᾶς 8864 (=88.640.000) καὶ μονάδας 4800 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 588.644.800), ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 2 (=200.000.000) καὶ ἁπλᾶς 8126 (= 81.260.000) καὶ μονάδας 5600, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ξανθοχρόων ταύρων ἔχει μὲν μυριάδας διπλᾶς 3 (= 300.000.000) καὶ ἁπλᾶς 3195 (31.950.000) καὶ μονάδας 960 (ἤτοι ἐν ὅλῳ 331.950.960), ἀγελάδων δὲ μυριάδας διπλᾶς 4 (= 400.000.000) καὶ ἁπλᾶς 3513 (= 35.130.000) καὶ μονάδας 7040 (ἤτοι ἐν ὅλῳ *ταύρων ἶσον τῷ ἡμίσει καὶ τρίτῳ μέρει τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων καὶ ἔτι ὅλη τῇ τῶν ξανθοχρωμάτων ἀγέλῃ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρωμάτων ἶσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων καὶ ὅλῳ τῷ πλήθει τῶν ξανθοχρωμάτων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ποικιλοτρίχων ταύρων ἶσον τῷ ἕκτῳ καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἔτι τῷ πλήθει ὅλῳ τῶν ξανθοχρωμάτων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν θηλειῶν ἶσον τῷ τρίτῳ καὶ τετάρτῳ μέρει ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ τῶν κυανοχρόων ἶσον τῷ τετάρτῳ καὶ πέμπτῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν ποικιλοτρίχων, τὸ δὲ τῶν ποικιλοτρίχων ἶσον τῷ πέμπτῳ καὶ ἕκτῳ μέρει τῆς ὅλης τῶν ξανθῶν βοῶν. πάλιν δὲ τὸ τῶν ξανθῶν θηλειῶν πλῆθος ἦν ἶσον τῷ ἕκτῳ τε καὶ ἑβδόμῳ μέρει τῆς ὅλης ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ τῶν κυανοχρόων ταύρων συντεθεῖσα ποιεῖ τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δ' ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων μετὰ τῆς ἀγέλης τῶν ποικιλοχρόων συντεθεῖσα ποιεῖ τρίγωνον, ὡς ἔχει τὰ τῶν ὑποκειμένων κανόνων καθ' ἕκαστον χρῶμα.*

435.137.040). Καὶ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν λευκοτρίχων ταύρων ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ καὶ τὸ ἓν τρίτον τοῦ πλήθους τῶν κυανοχρόων ταύρων σὺν ὅλην τὴν ἀγέλην τῶν ξανθοχρόων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρόων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον καὶ τὸ ἓν πέμπτον τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων σὺν ὅλον τὸ πλῆθος τῶν ξανθοχρόων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν ἕκτον καὶ τὸ ἓν ἕβδομον τῶν λευκοτρίχων ταύρων σὺν ὅλον τὸ πλῆθος τῶν ξανθοχρόων ταύρων, καὶ πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν ἀγελάδων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τρίτον καὶ τὸ ἓν τέταρτον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν κυανοχρόων, τὸ δὲ πλῆθος τῶν κυανοχρόων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον καὶ τὸ ἓν πέμπτον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν μικτοῦ χρώματος, τὸ δὲ πλῆθος τῶν μικτοῦ χρώματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἓν πέμπτον καὶ τὸ ἓν ἕκτον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν ξανθῶν βοῶν. Πάλιν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ξανθῶν ἀγελάδων ἦτο ἴσον πρὸς τὸ ἓν ἕκτον καὶ τὸ ἓν ἕβδομον ὅλης τῆς ἀγέλης τῶν λευκῶν βοῶν. Καὶ ἡ μὲν ἀγέλη τῶν λευκοτρίχων ταύρων καὶ ἡ ἀγέλη τῶν κυανοχρόων ταύρων προστεθεῖσαι σχηματίζουσι τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ δὲ ἀγέλη τῶν ξανθοτρίχων ταύρων προστεθεῖσα εἰς τὴν ἀγέλην τῶν μικτοῦ χρώματος σχηματίζει ἀριθμὸν τρίγωνον, συμφώνως πρὸς τὴν ὑποκειμένην κατανομὴν δι' ἕκαστον χρῶμα.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ

4

Ἔστω τὸ τόξον $A >$ τῆς εὐθείας B.

Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τόσον μεγάλος ἀριθμὸς ν ὥστε $(A-B)\nu > B$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $A - B > \frac{B}{\nu}$ καὶ $A > B + \frac{B}{\nu} > B$. Εὑρέθη λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $B + \frac{B}{\nu}$ ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα κατὰ τὸ μῆκος τῆς μεγαλυτέρας γραμμῆς A (τοῦ τόξου) καὶ μεγαλυτέρα τῆς μικροτέρας γραμμῆς B.

5

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΘΖ, ΚΘΗ λαμβάνεται $\frac{ΘΖ}{ΘΚ} = \frac{ΒΘ}{ΘΗ}$. Ἐπειδὴ δὲ εὐθεῖα ΒΘ $<$ τόξ. ΒΘ καὶ ΘΗ $=$ Ε $>$ δοθέντος τόξου, ἕπεται $\frac{ΘΖ}{ΘΚ} < \frac{\text{τόξον ΒΘ}}{\text{τόξον δοθέν}}$. Ὑποθέτει γνωστὸν τὸν τρόπον καθ' ὃν θὰ ληφθῇ Ε $=$ ΗΘ καταλήγουσα εἰς τὸ σημεῖον Β. Τοῦτον ἀναπτύσσει ὁ Zeuthen εἰς τὸ βιβλίον του Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, 1886, σελ. 262 (ἀνατύπωσις G. Olms 1966) καὶ ὁ P. ver Eecke, Les oevres complètes d' Archimède I, (Vaillant - Carmanne, Liège 1960). Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ διὰ τὰ ἑπόμενα θεωρήματα 6, 7, 8, 9.

10

Ἔστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὅπου Θ ὁ μικρότερος ὅρος ἴσος πρὸς τὴν διαφορὰν δύο συνεχῶν ὅρων καὶ ἂς προστεθῇ εἰς τὴν Β ἡ Ι = Θ, εἰς τὴν Γ ἡ Κ = Η, εἰς τὴν Δ ἡ Λ = Ζ, εἰς τὴν Ε ἡ Μ = Ε, εἰς τὴν Ζ ἡ Ν = Δ, εἰς τὴν Η ἡ Ξ = Γ, εἰς τὴν Θ ἡ Ο = Β, ὁπότε θὰ εἶναι $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{I} = \Gamma + \mathrm{K} = \Delta + \Lambda = \mathrm{E} + \mathrm{M} = \mathrm{Z} + \mathrm{N} = \mathrm{H} + \Xi = \Theta + \mathrm{O}$, (1).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathrm{A}^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{I})^2 + (\Gamma + \mathrm{K})^2 + (\Delta + \Lambda)^2 + (\mathrm{E} + \mathrm{M})^2 + (\mathrm{Z} + \mathrm{N})^2 + (\mathrm{H} + \Xi)^2 + (\Theta + \mathrm{O})^2 + \mathrm{A}^2 + \Theta(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E} + \mathrm{Z} + \mathrm{H} + \Theta) = 3(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + \mathrm{E}^2 + \mathrm{Z}^2 + \mathrm{H}^2 + \Theta^2) \qquad (2).$$

(Σημείωσις: Πρόκειται περὶ τύπου δίδοντος τὸ ἄθροισμα τῶν $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots. + \nu^2$)

Ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{B} + \mathrm{I})^2 &= \mathrm{B}^2 + \mathrm{I}^2 + 2\mathrm{B} \cdot \mathrm{I}\\
(\Gamma + \mathrm{K})^2 &= \Gamma^2 + \mathrm{K}^2 + 2\Gamma \cdot \mathrm{K}\\
(\Delta + \Lambda)^2 &= \Delta^2 + \Lambda^2 + 2\Delta \cdot \Lambda\\
(\mathrm{E} + \mathrm{M})^2 &= \mathrm{E}^2 + \mathrm{M}^2 + 2\mathrm{E} \cdot \mathrm{M}\\
(\mathrm{Z} + \mathrm{N})^2 &= \mathrm{Z}^2 + \mathrm{N}^2 + 2\mathrm{Z} \cdot \mathrm{N}\\
(\mathrm{H} + \Xi)^2 &= \mathrm{H}^2 + \Xi^2 + 2\mathrm{H} \cdot \Xi\\
(\Theta + \mathrm{O})^2 &= \Theta^2 + \mathrm{O}^2 + 2\Theta \cdot \mathrm{O}
\end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς εἰς τὴν (2) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὴν (1) ἔχομεν :

$$2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + \mathrm{E}^2 + \mathrm{Z}^2 + \mathrm{H}^2 + \Theta^2) + 2\mathrm{B} \cdot \mathrm{I} + 2\Gamma \cdot \mathrm{K} + 2\Delta \cdot \Lambda + 2\mathrm{E} \cdot \mathrm{M} + 2\mathrm{Z} \cdot \mathrm{N} + 2\mathrm{H} \cdot \Xi + 2\Theta \cdot \mathrm{O} +$$

$\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = 3(A^2+B^2+$
$\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2)$ (3).

Ἐπειδὴ	$I=\Theta$	θὰ εἶναι	$2B\cdot I=\Theta\cdot 2B$
»	$K=2\Theta\ (=H)$	»	$2\Gamma\cdot K=\Theta\cdot 4\Gamma$
»	$\Lambda=3\Theta\ (=Z)$	»	$2\Delta\cdot\Lambda=\Theta\cdot 6\Delta$
»	$M=4\Theta\ (=E)$	»	$2E\cdot M=\Theta\cdot 8E$
»	$N=5\Theta\ (=\Delta)$	»	$2Z\cdot N=\Theta\cdot 10Z$
»	$\Xi=6\Theta\ (=\Gamma)$	»	$2H\cdot\Xi=\Theta\cdot 12H$
»	$O=7\Theta\ (=B)$	»	$2\Theta\cdot O=\Theta\cdot 14\Theta$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$2(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2)+$$
$$+\Theta(A+3B+5\Gamma+7\Delta+9E+11Z+13H+15\Theta)=$$
$$=3(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2).$$

Ὑπολείπεται νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος εἶναι ἴσος πρὸς $A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+$ $+\Theta^2$. Καὶ πράγματι εἶναι, διότι :

$$A=8\Theta,\ A^2=\Theta\cdot 8A=$$
$$=\Theta\,[A+(B+I)+(\Gamma+K)+(\Delta+\Lambda)+$$
$$(E+M)+(Z+N)+(H+\Xi)+(\Theta+O)].$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$=\Theta\,[A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+O+\Xi+N$$
$$+M+\Lambda+K+I].$$

Καὶ κατὰ τὴν (1) ἐπίσης εἶναι :

$$=\Theta\,[A+2(B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)] \quad (4)$$

$$B=7\Theta,\quad B^2=\Theta\cdot 7B=$$
$$=\Theta\,[B+(\Gamma+I)+(\Delta+K)+$$

$$(E + \Lambda) + (Z + M) + (H + N) + (\Theta + \Xi)\,] =$$
$$= \Theta\,[B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + \Xi + N + M + \Lambda + K + I]$$
$$= \Theta\,[B + 2\,(\Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta)] \qquad (5)$$

ὁμοίως :

$$\Gamma = 6\Theta,\ \Gamma^2 = \Theta \cdot 6\Gamma =$$
$$\Theta\,[\,\Gamma + (\Delta + I) + (E + K) + (Z + \Lambda) + (H + M) + (\Theta + N)\,] =$$
$$= \Theta\,[\Gamma + 2(\Delta + E + Z + H + \Theta)] \qquad (6)$$

$$\Delta = 5\Theta,\ \Delta^2 = \Theta \cdot 5\Delta =$$
$$= \Theta\,[\Delta + 2(E + Z + H + \Theta)] \qquad (7)$$

$$E = 4\Theta,\ E^2 = \Theta \cdot 4E =$$
$$= \Theta\,[E + 2(Z + H + \Theta)] \qquad (8)$$

$$Z = 3\Theta,\ Z^2 = \Theta \cdot 3Z =$$
$$= \Theta\,[Z + 2\,(H + \Theta)] \qquad (9)$$

$$H = 2\Theta,\ H^2 = \Theta \cdot 2H =$$
$$= \Theta\,[H + 2\Theta] \quad \text{καὶ} \qquad (10)$$
$$\Theta^2 = \Theta \cdot \Theta$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων (4 - 10) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2 =$$
$$= \Theta\,[A + 3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta], \qquad (11)$$

καὶ τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη.

Τὸ νόημα τοῦ θεωρήματος εἰς σύγχρονον διατύπωσιν :

Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha, \ldots\ldots \nu\alpha$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$\nu(\nu\alpha)^2 + (\nu\alpha)^2 + \alpha(\alpha + 2\alpha + 3\alpha + \ldots\ldots + \nu\alpha) =$$
$$= 3\,[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + (3\alpha)^2 + \ldots\ldots + (\nu\alpha)^2] \qquad (1)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ α^2 λαμβάνομεν :

$$\nu^3 + \nu^2 + (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + \nu) = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + \nu^2) \qquad (2)$$

ἤτοι τὸν τύπον τὸν παρέχοντα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $1^2+2^2+ \ldots\ldots + \nu^2$, διότι ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $\dfrac{\nu(2\nu+1)(\nu+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + \nu^2$. (3)

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $\nu(\nu\alpha)^2 < 3\,[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \ldots + (\nu\alpha)^2]$

καὶ $\nu(\nu\alpha)^2 > 3\,[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \ldots\ldots + ((\nu-1)\alpha)^2]$

11

Ἐκ τῆς αὐξούσης ἀριθμητικῆς προόδου (ἀκολουθίας) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_\nu$, ὅπου $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\alpha_3 = 3\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_\nu = \nu\alpha_1$
νὰ δειχθῇ ὅτι ἀληθεύουσιν αἱ σχέσεις :

$$\frac{(\nu-1)\,\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 + \ldots\ldots + \alpha_2^2} < \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \dfrac{1}{3}(\alpha_\nu - \alpha_1)^2}, \quad (1)$$

καὶ

$$\frac{(\nu-1)\,\alpha_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \ldots + \alpha_1^2} > \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \dfrac{1}{3}(\alpha_\nu - \alpha_1)^2}, \quad (2)$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῶν ἀνισοτήτων λαμβάνεται :

$$\frac{(\nu-1)\,\alpha_\nu^2}{(\nu-1)\left(\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \dfrac{1}{3}\,\alpha_{\nu-1}^2\right)} = \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \dfrac{1}{3}(\alpha_\nu - \alpha_1)^2}, \quad (3)$$

(ἐκ τῆς προόδου εἶναι $\alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu - \alpha_1$).

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (1) ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ α′ μέλους τῆς (3) εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ α′ μέλους τῆς (1), ἤτοι, ὅτι :

$$(\nu-1)\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\nu-1)\alpha_{\nu-1}^2 < \alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 + \ldots + \alpha_2^2, \quad (4)$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος, ἐπειδὴ $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_1$, γράφεται $(\nu-1)\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\nu-1)\alpha_{\nu-1}^2 = (\nu-1)\alpha_1^2 +$

$$+ (\nu-1)\alpha_1 \cdot \alpha_{\nu-1} + \frac{1}{3}(\nu-1)\alpha_{\nu-1}^2 . \qquad (5)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (4), ἤτοι ὁ παρονομαστὴς τοῦ α′ μέλους τῆς (1) γράφεται :

$$\alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 + \ldots + \alpha_2^2 = (\alpha_{\nu-1} + \alpha_1)^2 + (\alpha_{\nu-2} + \alpha_1)^2 + \ldots +$$
$$+ (\alpha_1 + \alpha_1) = \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \ldots + \alpha_1^2 + 2\alpha_1(\alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} +$$
$$+ \ldots + \alpha_1) + (\nu-1)\alpha_1^2 = \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \ldots + \alpha_1^2 +$$
$$+ \alpha_1(\alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \ldots + \alpha_1) +$$
$$+ (\nu-1)\alpha_1^2 = \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \ldots + \alpha_1^2 + \nu\alpha_1 \cdot \alpha_{\nu-1} +$$
$$+ (\nu-1)\alpha_1^2. \qquad (6)$$

Θεωροῦμεν τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6), ἤτοι :

$$(5) \qquad (\nu-1)\alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\nu-1)\alpha_{\nu-1}^2 = (\nu-1)\alpha_1^2 +$$
$$+ (\nu-1)\alpha_1 \cdot \alpha_{\nu-1} + \frac{1}{3}(\nu-1)\alpha_{\nu-1}^2$$

$$(6) \qquad \alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 + \ldots + \alpha_2^2 = \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \ldots + \alpha_1^2 +$$
$$+ \nu\alpha_1 \cdot \alpha_{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_1^2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ δεύτερα μέλη τούτων ὁ ὅρος $(\nu-1)\alpha_1^2$ εἶναι κοινός, ἐν ᾧ εἰς τὰ αὐτὰ μέλη ὁ ὅρος τῆς πρώτης ὁ

$(\nu-1)\,\alpha_1\cdot\alpha_{\nu-1}<$ τοῦ ὅρου τῆς δευτέρας τοῦ $\nu\alpha_1\cdot\alpha_{\nu-1}$ καὶ ἐκ τοῦ πορίσματος τοῦ προηγουμένου 10 θεωρήματος εἶναι $\frac{1}{3}(\nu-1)\,\alpha^2_{\nu-1}<\alpha^2_{\nu-1}+\alpha^2_{\nu-2}+\ldots+\alpha^2_1$. Ὅθεν, τὸ α′ μέλος τῆς (5) τὸ $(\nu-1)\,\alpha_\nu\cdot\alpha_1+\frac{1}{3}(\nu-1)\,\alpha^2_{\nu-1}<\alpha^2_\nu+\alpha^2_{\nu-1}+$ $+\ldots+\alpha^2_2$, ἤτοι ἐδείχθη ἡ ἀλήθεια τῆς (4).

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως (2) ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ α′ μέλους τῆς (3) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ α′ μέλους τῆς (2), ἤτοι ὅτι :

$$(\nu-1)\,\alpha_\nu\cdot\alpha_1+\frac{1}{3}(\nu-1)\,\alpha^2_{\nu-1}>\alpha^2_{\nu-1}+\alpha^2_{\nu-2}+\ldots+\alpha^2_1. \quad (7)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (7), ἤτοι ὁ παρονομαστὴς τοῦ α′ μέλους τῆς (2) γράφεται :

$$\begin{aligned}\alpha^2_{\nu-1}+\alpha^2_{\nu-2}+\ldots+\alpha^2_2+\alpha^2_1 &= (\alpha_{\nu-2}+\alpha_1)^2+(\alpha_{\nu-3}+\alpha_1)^2+\\ &+\ldots+(\alpha_1+\alpha_1)^2+\alpha^2_1=\alpha^2_{\nu-2}+\alpha^2_{\nu-3}+\ldots+\alpha^2_1+\\ &+2(\alpha_{\nu-2}\cdot\alpha_1+\alpha_{\nu-3}\cdot\alpha_1+\ldots+\alpha^2_1)+(\nu-1)\,\alpha^2_1=\alpha^2_{\nu-2}+\\ &+\alpha^2_{\nu-3}+\ldots+\alpha^2_1+\alpha_1(\alpha_{\nu-2}+\alpha_{\nu-3}+\ldots+\alpha_1+\alpha_{\nu-2}+\\ &+\alpha_{\nu-3}+\ldots+\alpha_1)+(\nu-1)\,\alpha^2_1=\alpha^2_{\nu-2}+\alpha^2_{\nu-3}+\ldots+\\ &+\alpha^2_1+(\nu-2)\,\alpha_1\cdot\alpha_{\nu-1}+(\nu-1)\,\alpha^2_1. \qquad (8)\end{aligned}$$

Θεωροῦμεν τὰς ἰσότητας (5) καὶ (8), ἤτοι

$$(5)\qquad (\nu-1)\,\alpha_\nu\cdot\alpha_1+\frac{1}{3}(\nu-1)\,\alpha^2_{\nu-1}=(\nu-1)\,\alpha^2_1+ (\nu-1)\,\alpha_1\cdot\alpha_{\nu-1}+\frac{1}{3}(\nu-1)\,\alpha^2_{\nu-1}$$

$$(8)\qquad \alpha^2_{\nu-1}+\alpha^2_{\nu-2}+\ldots+\alpha^2_2+\alpha^2_1=\alpha^2_{\nu-2}+\alpha^2_{\nu-3}+\ldots+\alpha^2_1+ +(\nu-2)\,\alpha_1\cdot\alpha_{\nu-1}+(\nu-1)\,\alpha^2_1.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὰ δεύτερα μέλη τούτων ὁ ὅρος $(\nu - 1)\, \alpha_1^2$ εἶναι κοινός, ἐν ᾧ εἰς τὰ αὐτὰ μέλη ὁ ὅρος τῆς πρώτης ὁ $(\nu - 1)\, \alpha_1 \cdot \alpha_{\nu-1} >$ τοῦ ὅρου τῆς δευτέρας τοῦ $(\nu - 2)\, \alpha_1 \cdot \alpha_{\nu-1}$ καὶ ἐκ τοῦ πορίσματος τοῦ προηγουμένου 10 θεωρήματος εἶναι: $\frac{1}{3}(\nu - 1)\, \alpha_{\nu-1}^2 > \alpha_{\nu-2}^2 + \alpha_{\nu-3}^2 + \ldots + \alpha_1^2$. Ὅθεν, τὸ α΄ μέλος τῆς (5) τὸ $(\nu - 1)\, \alpha_\nu \cdot \alpha_1 + \frac{1}{3}(\nu - 1)\, \alpha_{\nu-1}^2 > \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_{\nu-2}^2 + \ldots + \alpha_1^2$, ἤτοι ἐδείχθη ἡ ἀλήθεια τῆς (7).

13

Ἔστω ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΑΗ τέμνει τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου ΓΑΗ εἴς τι σημεῖον Λ. Θεωρεῖ ὡς γνωστὸν ὅτι ΑΓ + ΑΗ > 2ΑΛ καὶ ἐπειδὴ (ΑΓ + ΑΗ) : 2 = ΑΘ, θὰ εἶναι ΑΘ > ΑΛ.

25

...ἕξει λόγον... Διότι $\text{ΑΘ} \times \text{ΘΕ} + \frac{1}{3}\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΘ}^2 = 2\text{ΘΕ}^2 + \frac{1}{3}\text{ΘΕ}^2 : 4\text{ΘΕ}^2 = 6\text{ΘΕ}^2 + \text{ΘΕ}^2 : 12\text{ΘΕ}^2 = 7 : 12$, ἐπειδὴ ΘΕ = ΕΑ. Διότι ἔστω ὁ πρῶτος κύκλος Ρ· θὰ εἶναι ΘΕ : ΘΑ = = Ρ : 2Ρ (θεώρ. 15).

ΜΗΧΑΝΙΚΑ α΄ (Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α΄)

5

Αἱ παράλληλοι ΔΖ, ΑΗ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΗ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΘΖ, ΚΘΗ λαμβάνεται $\frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΘΚ}} = \frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΘΗ}}$, (1).

Ἔχει ληφθῆ εὐθεῖα Ε = ΘΗ > δοθέντος τυχόντος τόξου, καὶ εἶναι τόξον ΒΘ > χορδῆς ΒΘ. Ὅθεν ἐκ τῆς (1) λαμβάνεται

$$\frac{\Theta Z}{\Theta K} < \frac{\text{τόξον } B\Theta}{\text{δοθὲν τόξον}}.$$

6

Καὶ ἐπεὶ $\frac{A}{B} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E}$, $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma E} = \frac{\Lambda H}{HK}$, εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Lambda H}{HK}$. $\frac{\Lambda H}{N} = \frac{A}{Z}$, (1), $\frac{KH}{\Lambda H} = \frac{B}{A}$, (2). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη (τοῦτο σημαίνει τὸ «δι' ἴσου») ἔχομεν $\frac{KH}{N} = \frac{B}{Z}$.

7

Ἔστω ὅτι δὲν ὑπάρχει ἰσορροπία καὶ ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ, συνεπείᾳ ὑπεροχῆς τινος τοῦ ΑΒ ἔναντι τοῦ Γ. Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ μέγεθος ΑΒ τὸ μέγεθος Β, ὥστε τὰ Α, Γ, νὰ γίνουν σύμμετρα, τὸ δὲ Β νὰ εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ΑΒ ἔναντι τοῦ Γ, καὶ ἥτις ὑπεροχὴ ἂν δὲν ὑπῆρχε θὰ ἦτο ἰσορροπία, τότε ὁ ζυγὸς θὰ ἐξακολουθῆ νὰ κλίνη πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ, ἀφοῦ ἀφῃρέθη ἀπὸ τὸ Β μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς ἔναντι τοῦ Γ. Ἡ σχέσις ὅμως $AB : \Gamma = E\Delta : EZ$ θὰ ἐγίνετο μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ Β, $A : \Gamma < E\Delta : EZ$, ἤτοι ἡ στατικὴ ῥοπὴ $A \cdot EZ < \Gamma \cdot E\Delta$. Δηλαδὴ ὁ ζυγὸς ἔπρεπε νὰ κλίνῃ ὄχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ ἀλλὰ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Δ· ὅπερ ἀδύνατον· ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ὅταν τὸ Γ ὑπερέχῃ τοῦ ΑΒ. Ἀφοῦ λοιπὸν ἀποκλείωνται αἱ δύο αὐταὶ περιπτώσεις, ἀπομένει ἡ τρίτη, νὰ ὑπάρχῃ δηλ. ἰσορροπία μὲ τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὅταν ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $AB : \Gamma = E\Delta : EZ$.

13

...Τὸ δὴ ΑΔΓ [τρίγωνον]... $\frac{\text{τρίγωνον ΑΔΓ}}{\text{τρίγωνον ΑΣΜ}} = \frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΜ}^2}$, (1).

Ἐὰν καλέσωμεν ν τὸ πλῆθος τῶν μικρῶν ἴσων τριγώνων ΑΣΜ. ... θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τούτων Σ = ν τρίγωνα ΑΣΜ καὶ ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\frac{\text{τρίγωνον ΑΔΓ}}{\nu \cdot \text{τρίγωνον ΑΣΜ}} = \frac{\text{ΑΓ}^2}{\nu \cdot \text{ΑΜ}^2}$. Καὶ ἐπειδὴ ΑΓ = ν · ΑΜ θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{τρίγωνον ΑΔΓ}}{\Sigma} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}}$. Ἐὰν καλέσωμεν ν τὸ πλῆθος τῶν μικρῶν ἴσων τριγώνων ΑΛΣ καὶ Σ′ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν = = ν τρίγωνα ΑΛΣ, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως $\frac{\text{τρίγωνον ΑΔΒ}}{\Sigma'} = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΛ}}$.

Ἐπειδὴ (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων) $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΛ}}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{τρίγωνον ΑΔΓ}}{\Sigma} = \frac{\text{τρίγωνον ΑΔΒ}}{\Sigma'}$, ἐξ ἧς

$$\frac{\text{τρίγ. ΑΔΓ} + \text{τρίγ. ΑΔΒ}}{\Sigma + \Sigma'} = \frac{\text{τρίγ. ΑΔΒ}}{\Sigma'} = \frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΛ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}},$$

ἐξ ἧς $\frac{\text{τρίγ. ΑΒΓ}}{\Sigma + \Sigma'} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}}$. (2)

Ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΔΩ}} = \frac{\text{ΦΡ}}{\text{ΡΠ}}$, ἐπειδὴ ΡΘ > ΡΠ ἔχομεν $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΜ}} > \frac{\text{ΦΡ}}{\text{ΡΘ}}$, (3). Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{\text{τρίγωνον ΑΒΓ}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} > \frac{\text{ΦΡ}}{\text{ΡΘ}},$$ ἐξ ἧς, (διελόντι, ἂν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, διελόντι σημαίνει $\frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\gamma - \delta}{\delta}$, Εὐκλ. V ὁρισμὸς 15)

$$\frac{\text{τρίγωνον ΑΒΓ} - \text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} > \frac{\Phi\mathrm{P} - \mathrm{P}\Theta}{\mathrm{P}\Theta},$$ ἐξ ἧς $$\frac{\text{ἄθροισμα παραλληλογράμμων}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}} > \frac{\Phi\Theta}{\mathrm{P}\Theta},$$ (4). Λαμβάνοντες :

$$\frac{\mathrm{X}\Theta}{\mathrm{P}\Theta} = \frac{\text{ἄθροισμα παραλληλογράμμων}}{\text{ἄθροισμα μικρῶν τριγώνων}}$$ ἔχομεν ἐκ τῆς (4)

$$\frac{\mathrm{X}\Theta}{\mathrm{P}\Theta} > \frac{\Phi\Theta}{\mathrm{P}\Theta},$$ ἐξ ἧς $\mathrm{X}\Theta > \Phi\Theta$ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Χ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ΡΦ.

ΨΑΜΜΙΤΗΣ

Τὸ σύστημα ἀριθμήσεως τοῦ Ψαμμίτου

Πρώτη περίοδος

σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ 1 — 10.000 μυριάδας, ἢ ἀπὸ $1 - 10^8$

σειρὰ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀπὸ 10^8 — 10.000 μυριάδας τοῦ 10^8, ἢ ἀπὸ $10^8 - 10^{16}$

σειρὰ τῶν τρίτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ 10^{16} — 10.000 μυριάδας τοῦ 10^{16}, ἢ ἀπὸ $10^{16} - 10^{24}$

⋮

σειρὰ τῶν 10^8 ἀριθμῶν. Ἀπὸ $10^{8\cdot(10^{8}-1)} - 10^{8\cdot 10^8}$.

Ἔστω $10^{8\cdot 10^8} = \mathrm{A}$

Δευτέρα περίοδος

σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ $\mathrm{A}\cdot 1 - \mathrm{A}\cdot 10^8$

σειρὰ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀπὸ $\mathrm{A}\cdot 10^8 - \mathrm{A}\cdot 10^{16}$

⋮

σειρὰ τῶν 10^8 ἀριθμῶν. Ἀπὸ $A \cdot 10^{8 \cdot (10^8-1)}$ — $A \cdot 10^{8 \cdot 10^8}$,
($A \cdot 10^{8 \cdot 10^8} = A^2$)

. . . .

10^8 περίοδος

σειρὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἀπὸ $A^{10^8-1} \cdot 1$ — $A^{10^8-1} \cdot 10^8$
σειρὰ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. Ἀπὸ $A^{10^8-1} \cdot 10^8$ — $A^{10^8-1} \cdot 10^{16}$

⋮

σειρὰ τῶν 10^8 ἀριθμῶν. Ἀπὸ $A^{10^8-1} \cdot 10^{8 \cdot (10^8-1)}$ — $A^{10^8-1} \cdot 10^{8 \cdot 10^8}$
(δηλ. A^{10^8})

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἰδέαν τινὰ τοῦ μεγέθους τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἀριθμήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς πρώτης περιόδου, ὁ A, παρίσταται διὰ τῆς μονάδος, τῆς ὁποίας ἀκολουθοῦν πρὸς τὰ δεξιὰ 800.000.000 μηδενικά.

Σελὶς 198, 27 . . . τούτων δὲ . . .

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος
$1 \quad 10^1 \quad 10^2 \quad 10^3 \quad 10^4 \quad 10^5 \quad 10^6 \quad 10^7 \quad 10^8 \quad 10^9$ . . . . . .

Πρώτη	ὀκτὰς	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Δευτέρα	ὀκτὰς	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}
Τρίτη	ὀκτὰς	10^{16}	10^{17}	10^{18}	10^{19}	10^{20}	10^{21}	10^{22}	10^{23}
Τετάρτη	ὀκτὰς	10^{24}	10^{25}	10^{26}	10^{27}	10^{28}	10^{29}	10^{30}	10^{31}
Πέμπτη	ὀκτὰς	10^{32}	10^{33}	10^{34}	10^{35}	10^{36}	10^{37}	10^{38}	10^{39}

Ἕκτη	ὀκτὰς	10^{40}	10^{41}	10^{42}	10^{43}	10^{44}	10^{45}	10^{46}	10^{47}
Ἑβδόμη	ὀκτὰς	10^{18}	10^{49}	10^{50}	10^{51}	10^{52}	10^{53}	10^{54}	10^{55}
Ὀγδόη	ὀκτὰς	10^{56}	10^{57}	10^{58}	10^{59}	10^{60}	10^{61}	10^{62}	10^{63}.

σελὶς 200, 11 . . . Χρήσιμον δὲ

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_m \ldots\ldots \alpha_n \ldots\ldots \alpha_{m+n-1}$$

Ἔστω ὁ ὅρος τῆς προόδου ὁ α_{m+n-1} ἀπέχων τόσους ὅρους ἀπὸ τοῦ α_n, ὅσους ὅρους ἀπέχει ὁ α_m ἀπὸ τοῦ α_1, ὅπου $\alpha_1 = 1$. Ἀποδεικνύεται ὅτι $\alpha_m \times \alpha_n = \alpha_{m+n-1}$. Διότι $\dfrac{\alpha_m}{\alpha_1} = \dfrac{\alpha_{m+n-1}}{\alpha_n}$.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ

(Τετραγωνισμὸς παραβολῆς)

4

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΔΓ, ΒΚΙ ἕπεται ΒΔ : ΒΚ = ΒΓ : ΒΙ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΔ : ΒΚ = ΔΓ² : ΚΗ² λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ = ΔΓ² : ΚΗ², (1). Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΓ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΒΔ εἴς τι σημεῖον Λ (ἡ ΘΛ ἐλλείπει ἀπὸ τὸ σχῆμα). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΓΒ, ΛΒΘ λαμβάνομεν ΔΓ : ΛΘ = ΒΓ : ΒΘ ἢ ΔΓ : ΚΗ = ΒΓ : ΒΘ. Ἐκ ταύτης, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΙ = ΒΓ² : ΒΘ², ἐξ ἧς εἶναι ΒΓ × ΒΘ² = ΒΙ × ΒΓ² ἢ ΒΘ² = ΒΙ × ΒΓ ἢ ΒΓ : ΒΘ = ΒΘ : ΒΙ, (2), ἤτοι ἡ ΒΘ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΒΓ, ΒΙ. Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν ΒΓ : ΒΘ = (ΒΓ — ΒΘ) : (ΒΘ — ΒΙ), ἤτοι ΒΓ : ΒΘ = ΓΘ : ΘΙ.

23 (’Ιδὲ ἐπίμετρον)

ΟΧΟΥΜΕΝΩΝ α′

’Εφαρμογὴ τῶν θεωρημάτων 6 καὶ 7 διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς νοθείας τοῦ χρυσοῦ στεφάνου, κατὰ τὰς πληροφορίας τοῦ ‘Ρωμαίου συγγραφέως Βιτρουβίου (μαρτυρία εἰς α′ μέρος, α′ τόμου τῶν ‘Απάντων, ὑπ’ ἀριθ. 249). ῎Εστω:

1) Τὸ βάρος τοῦ στεφάνου $= \alpha$ γραμμάρια

2) Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος $= \beta$ γραμμάρια, ὅταν ὁ στέφανος βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ (ἡ ἄνωσις).

3) ‘Η ἄνωσις τεμαχίου καθαροῦ χρυσοῦ, ὅταν τοῦτο βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος $= \gamma$ γραμμ.

4) ‘Η ἄνωσις τεμαχίου καθαροῦ ἀργύρου, ὅταν τοῦτο βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος $= \delta$ γραμμ.

5) Τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν στέφανον $=$ x γραμμ.

6) Τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν στέφανον $=$ ψ γραμμ.

’Εκ τῶν δεδομένων τούτων λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$\mathrm{x} + \psi = \alpha$$

καὶ

$$\gamma \mathrm{x} + \psi \delta = \beta,$$

ἐξ οὗ $\mathrm{x} = \dfrac{\alpha\delta - \beta}{\delta - \gamma}$ καὶ $\psi = \dfrac{\beta - \alpha\gamma}{\delta - \gamma}$.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΟΕΙΚΟΝ

Ἔστωσαν :

Ω, ω οἱ ἀριθμοὶ τῶν λευκῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως,
X, χ οἱ ἀριθμοὶ τῶν κυανῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως,
Ψ, ψ οἱ ἀριθμοὶ τῶν ξανθῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως,
Φ, φ οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀναμίκτου χρώματος ταύρων καὶ ἀγελάδων ἀντιστοίχως.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι :

Ταῦροι

Λευκοὶ $$\Omega=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+\Psi \tag{1}$$

Κυανοῖ $$X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\Phi+\Psi \tag{2}$$

Ἀναμίκτου χρώματος $$\Phi=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\Omega+\Psi \tag{3}$$

Ἀγελάδες

Λευκαὶ $$\omega=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+\chi) \tag{4}$$

Κυαναῖ $$\chi=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(\Phi+\varphi) \tag{5}$$

Ἀναμίκτου χρώματος $$\varphi=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(\Psi+\psi) \tag{6}$$

Ξανθαὶ $$\psi=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(\Omega+\omega) \tag{7}$$

(8) $\Omega + X =$ τετράγωνος ἀριθμὸς

(9) $\Psi + \Phi =$ τρίγωνος ἀριθμὸς (τῆς μορφῆς $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu = 1, 2, 3.....$).

Πρόκειται δηλ. διὰ πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως μὲ 7 ἐξισώσεις καὶ 8 ἀγνώστους, μὲ ἐπὶ πλέον δύο εἰδικὰς συνθήκας. Κατὰ τὸ σχόλιον εἶναι:

Λευκοὶ ταῦροι, $\Omega = 829.318.560.$

Λευκαὶ ἀγελάδες, $\omega = 576.508.800$

$\Omega + \omega = 1.405.827.360$

Κυανοῖ ταῦροι, $X = 596.841.120.$

Κυαναῖ ἀγελάδες, $\chi = 391.459.680.$

$X + \chi = 988.300.800.$

Ξανθοὶ ταῦροι, $\Psi = 331.950.960.$

Ξανθαὶ ἀγελάδες, $\psi = 435.137.040.$

$\Psi + \psi = 767.088.000.$

Ἀναμίκτου χρώματος ταῦροι, $\Phi = 588.644.800.$

Ἀναμίκτου χρώματος ἀγελάδες, $\varphi = 281.265.600$

$\Phi + \varphi = 869.910.400.$

Σύνολον $\Omega + X + \Psi + \Phi + \omega + \chi + \psi + \varphi = 4.031.126.560$

Οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) — (7), ὄχι ὅμως καὶ τὰς ἐξισώσεις (8) καὶ (9), καίτοι ὁ σχολιαστὴς γράφει ὅτι ἐπαληθεύονται καὶ αἱ ἐξισώσεις αὐταί.

Τὸ προηγούμενον σχόλιον ἐπὶ τοῦ προβλήματος, φαίνεται ὅτι εἶναι βυζαντινῆς ἐποχῆς. Δὲν ἔχουν διασωθῆ πληροφορίαι περὶ προσπαθειῶν ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος μέχρι τοῦ 18ου αἰῶνος. Κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς G. Nesselmann περιλαμβάνει εἰς τὸ βιβλίον του Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, σελ. 484 κ.ἑ. (Ἡ ἄλγεβρα τῶν Ἑλλήνων) τὴν κατωτέρω ἐκτιθεμένην προσπάθειαν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοῦ Struwe ἢ τοῦ ἰδίου τοῦ Nesselmann, χωρὶς νὰ παραθέτῃ πληροφορίας περὶ τοῦ χρόνου δημοσιεύσεως αὐτῆς. «Ὁ Struwe καλεῖ διὰ μεγάλων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου τοὺς ταύρους καὶ διὰ μικρῶν τὰς ἀγελάδας ὡς ἑξῆς :

Λευκοὶ ταῦροι	W,	λευκαὶ ἀγελάδες	w
Κυανοῖ ταῦροι	B,	κυαναῖ ἀγελάδες	b
Ξανθοὶ ταῦροι	G,	ξανθαὶ ἀγελάδες	g
Ἀναμίκτου χρώματος ταῦροι	S,	ἀναμίκτου χρώματος ἀγελάδες	s

Η ΠΑΡΑΤΙΘΕΜΕΝΗ ΛΥΣΙΣ :

Αἱ ἑπτὰ πρῶται ἐξισώσεις εἶναι :

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) B + G = \frac{5}{6} B + G \qquad (1)$$

$$B = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) S + G = \frac{9}{20} S + G \qquad (2)$$

$$S = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + G = \frac{13}{42} W + G \qquad (3)$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (B + b) = \frac{7}{12} B + \frac{7}{12} b \qquad (4)$$

$$b = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (S + s) = \frac{9}{20} S + \frac{9}{20} s \qquad (5)$$

$$s = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (G + g) = \frac{11}{30} G + \frac{11}{30} g \qquad (6)$$

$$g = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) = \frac{13}{42} W + \frac{13}{42} w \qquad (7)$$

Ἐὰν ἐκφράσωμεν εἰς τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις τοὺς ἀγνώστους W, B, S συναρτήσει τοῦ G θὰ ἔχωμεν :

$$W = \frac{2226}{891} G$$

$$B = \frac{1602}{891} G$$

$$S = \frac{1580}{891} G$$

Ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ἀκεραίων τιμῶν τῶν ἀγνώστων θέτομεν τὸν G ὡς πολλαπλάσιόν τι τοῦ 891, ὁπότε ἔχομεν :

$$\begin{aligned} W &= 2226\ m \\ B &= 1602\ m \\ S &= 1580\ m \\ G &= 891\ m \end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς ἐξισώσεις (4, 5, 6, 7) λαμβάνομεν :

$$w = \frac{7\,206\,360}{4657} m$$

$$b = \frac{4\,893\,246}{4657} m$$

$$s = \frac{3\,515\,820}{4657} m$$

$$g = \frac{5\,439\,213}{4657} m$$

Διὰ νὰ λάβωμεν καὶ ἐνταῦθα ἀκεραίας τιμὰς θέτομεν : $m = 4657\,n$, ὁπότε ἔχομεν :

$$W = 10\,366\,482\,n \qquad w = 7\,206\,360\,n$$
$$B = 7\,460\,514\,n \qquad b = 4\,893\,246\,n$$
$$S = 7\,358\,060\,n \qquad s = 3\,515\,820\,n$$
$$G = 4\,149\,387\,n \qquad g = 5\,739\,213\,n$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν μικροτέραν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $n = 1$ θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα βοῶν καὶ ἀγελάδων 50 389 082.

Πρέπει νὰ πληρωθοῦν ἀκόμη αἱ δύο συνθῆκαι :

$$W + B = \text{τετράγωνος ἀριθμὸς} \tag{8}$$
$$S + G = \text{τρίγωνος ἀριθμὸς} \tag{9}$$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν τιμῶν αἱ συνθῆκαι αὗται δὲν πληροῦνται. Ἐπιλαμβανόμενοι τῆς ἐξισώσεως (8) μόνον, θὰ ἔχωμεν :

$$W + B = 17\,826\,996\,n$$

Ἀλλὰ ὁ 17 826 996 εἶναι γινόμενον παραγόντων 3.4.11.29.4657 ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ὁ 4 εἶναι τετράγωνος. Διὰ νὰ πληρῶται λοιπὸν ἡ συνθήκη (8) πρέπει τοὐλάχιστον νὰ εἶναι $n = 3.11.29.4657 = 4\,456\,749$ καὶ διὰ τούτου νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀνωτέρω εὑρεθέντας ὀκτὼ ἀριθμούς. Ἐπειδὴ ὅμως πάντοτε εἶναι δυνατὸν αἱ οὕτω εὑρισκόμεναι τιμαὶ νὰ μὴ πληρῶσι τὴν συνθήκην (9), ὀφείλομεν χάριν ἀσφαλείας νὰ δώσωμεν εἰς τὰς τιμὰς αὐτὰς ἕνα ἀπροσδιόριστον τετραγωνικὸν παράγοντα p^2. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν :

$$W = 46\,200\,808\,287\,018\,p^2 \qquad w = 32\,116\,937\,723\,640\,p^2$$
$$B = 33\,249\,638\,308\,986\,p^2 \qquad b = 21\,807\,969\,217\,254\,p^2$$

$$S = 32\,793\,026\,546\,940\,p^2 \qquad s = 15\,669\,127\,269\,180\,p^2$$
$$G = 18\,492\,776\,362\,863\,p^2 \qquad g = 24\,241\,207\,098\,537\,p^2$$

Ἤδη εἶναι ὁπωσδήποτε $W + B$ ἀριθμὸς τετράγωνος, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι 8 913 498 p.

Κατὰ τὴν ἐνάτην συνθήκην πρέπει $S + G$ νὰ εἶναι τρίγωνος ἀριθμός, δηλαδὴ τὸ ὀκταπλάσιον τούτου $+ 1$ νὰ εἶναι τετράγωνος. (Σημείωσις. Τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλοῦνται τρίγωνοι ἀριθμοί. Τὸ ὀκταπλάσιον δὲ παντὸς τριγώνου ἀριθμοῦ σὺν ἓν εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος. (Πλούταρχος, Πλατωνικὰ ζητήματα V. 2, 1003 F καὶ Διοφάντου Ἀριθμητικὰ 4, 38)). Ἂς κάμωμεν τὴν δοκιμὴν μὲ τὴν τιμὴν $p = 1$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν, ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς

$$S + G = 51\,285\,802\,909\,803$$

καὶ ἐπομένως :

$$8\,(S + G) + 1 = 410\,286\,423\,278\,425 = \text{τετράγωνος}.$$

Διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ 25 λαμβάνομεν ὡς πηλίκον 16 411 456 931 137, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τετράγωνος, διότι οὐδεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἔχῃ ὡς ψηφίον τῶν μονάδων τὸν ἀριθμὸν 7. Ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $p = 1$, ἀλλὰ νὰ δώσωμεν εἰς τὸν p μεγαλυτέραν τιμήν. Ἐὰν καλέσωμεν $S + G = A$ πρέπει νὰ ἔχωμεν $8Ap^2 + 1 =$ τετράγωνος $= q^2$. Θεωρητικῶς ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ λυθῇ. Πιθανὸν ὅμως νὰ βραδύνῃ ἡ λύσις αὐτῆς, διότι ἡ τιμὴ τοῦ p θὰ εἶναι πολὺ μεγάλη· ἄλλως τε ἡ λύσις αὕτη δὲν παρουσιάζει ἐπιστημονικὸν ἐνδιαφέρον».

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Η ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ WURM

(The works of ARCHIMEDES, by T. L. Heath, Dover publications, inc. New Υork, p. 319).

«Ὁ Wurm ἐξετάζει τὸ πρόβλημα θεωρῶν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ὀγδόης συνθήκης εἶναι ὀρθογώνιος ἀριθμὸς (γινόμενον δύο ἀνίσων παραγόντων, ἑτερομήκης) καὶ ὄχι τετράγωνος. Τὴν λύσιν Wurm δημοσιεύει ὁμοῦ μετὰ τῆς ἰδικῆς του γενικῆς λύσεως ὁ Amthor εἰς τὸ γερμανικὸν περιοδικὸν διὰ Μαθηματικὰ καὶ Φυσικὴν (τμῆμα ἱστορικοφιλολογικὸν) (Zeitschrift für Mathematik und Physik (Hist. litt. Abtheilung), XXV. (1880), p. 156 sqq.).

Ἔστωσαν :

W, w οἱ λευκοὶ ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως

X, x οἱ κυανοῖ ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως

Υ, y οἱ ξανθοὶ ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως

Z, z οἱ ἀναμίκτου χρώματος ταῦροι καὶ ἀγελάδες ἀντιστοίχως.

Πρῶτον μέρος :

I

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + \Upsilon \qquad (\alpha)$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Z + \Upsilon \qquad (\beta)$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + \Upsilon \qquad (\gamma)$$

II

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x) \qquad (\delta)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Z + z) \qquad (\varepsilon)$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(\Upsilon + y) \qquad (\zeta)$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) \qquad (\eta)$$

Δεύτερον μέρος :

$$W + X = \text{τετράγωνος ἀριθμὸς} \qquad (\theta)$$

$$\Upsilon + Z = \text{τρίγωνος ἀριθμὸς} \qquad (\iota)$$

Ἔστω $W + X =$ ὀρθογώνιος ἀριθμὸς (ἑτερομήκης).
Πολλαπλασιάζοντες τὴν (α) ἐπὶ 336, τὴν (β) ἐπὶ 280, τὴν (γ) ἐπὶ 126 καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν :

$$297\ W = 742\ \Upsilon, \quad \text{ἢ} \quad 3^3 \cdot 11\ W = 2 \cdot 7 \cdot 53\ \Upsilon \qquad (\alpha')$$

Ἐκ τῶν γ καὶ β λαμβάνομεν :

$$891\ Z = 1580\ \Upsilon, \text{ ἢ } 3^4 \cdot 11\ Z = 2^2 \cdot 5 \cdot 79\ \Upsilon \qquad (\beta')$$

$$\text{καὶ } 99\ X = 178\ \Upsilon, \text{ ἢ } 3^2 \cdot 11\ X = 2 \cdot 89\ \Upsilon \qquad (\gamma')$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν (δ) ἐπὶ 4800, τὴν (ε) ἐπὶ 2800, τὴν (ζ) ἐπὶ 1260, τὴν (η) ἐπὶ 462 καὶ προσθέσωμεν λαμβάνομεν :

$$4657\ \omega = 2800\ X + 1260\ Z + 462\ \Upsilon + 143\ W$$

καὶ διὰ τῶν τιμῶν τῶν (α′), (β′), (γ′) λαμβάνομεν

$$297 \cdot 4657\ w = 2\,402\,120\ \Upsilon,$$

$$\text{ἢ} \quad 3^3 \cdot 11 \cdot 4657\ w = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373\ \Upsilon \qquad (\delta')$$

Ὅθεν μέσῳ τῶν (η), (ζ), (ε) λαμβάνομεν :

$$3^2 \cdot 11 \cdot 4657\ y = 13 \cdot 46489\ \Upsilon \qquad (\varepsilon')$$

$$3^3 \cdot 4657\ z = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 761\ \Upsilon \qquad (\zeta')$$

$$\text{καὶ } 3^2 \cdot 11 \cdot 4657\ x = 2 \cdot 17 \cdot 15991\ \Upsilon \qquad (\eta')$$

Καὶ ἐπειδὴ ὅλοι οἱ ἄγνωστοι πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι βλέπομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (α'), (β'), . . . (η') ὅτι ὁ Υ πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ $3^4 \cdot 11 \cdot 4657$, δηλαδὴ πρέπει νὰ θέσωμεν :

$$\Upsilon = 3^4 \cdot 11 \cdot 4\,657\ n = 4\,149\,387\ n.$$

Ἐκ τούτων αἱ ἐξισώσεις (α') , (β'), . . . (η') δίδουν τὰς ἑπομένας τιμὰς δι' ὅλους τοὺς ἀγνώστους συναρτήσει τοῦ n, ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{lll}
W & = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4657\ n & = 10366482\ n \\
X & = 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4657\ n & = 7460514\ n \\
\Upsilon & = 3^4 \cdot 11 \cdot 4657\ n & = 4149387\ n \\
Z & = 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657\ n & = 7358060\ n \\
w & = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373\ n & = 7206360\ n \\
x & = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15991\ n & = 4893246\ n \\
y & = 3^2 \cdot 13 \cdot 46489\ n & = 5439213\ n \\
z & = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761\ n & = 3515820\ n
\end{array}\right] \quad \ldots . A$$

Διὰ τὴν τιμὴν $n = 1$ οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μικρότεροι οἱ ἐπαληθεύοντες τὰς ἑπτὰ ἐξισώσεις (α), (β), ... (η) καὶ ὑπολείπεται νὰ εὕρωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ n διὰ τὴν ἐξίσωσιν (ι). Ἐπειδὴ πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $q(q+1) : 2$, ὅπου q ἀκέραιος, 1, 2, 3 . . . . . . , ἡ ἐξίσωσις (ι) εἶναι :

$$\Upsilon + Z = \frac{q\ (q+1)}{2}$$

Θέτοντες τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας τιμὰς διὰ Υ, Z λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned}
\frac{q\ (q+1)}{2} &= (3^4 \cdot 11 + 2^2 \cdot 5 \cdot 79) \cdot 4657\ n \\
&= 2471 \cdot 4657\ n \\
&= 7 \cdot 353 \cdot 4657\ n
\end{aligned}$$

Ὁ q θὰ εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός, δηλ. τῆς μορφῆς $q = 2s$, ἢ

$q = 2s \pm 1$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται :

$$s\,(2s \pm 1) = 7 \cdot 353 \cdot 4567\ n.$$

Ἐπειδὴ ὁ n δὲν πρέπει νὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὑποθέτομεν $n = u \cdot v$, ὅπου ὁ u εἶναι παράγων τοῦ n, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν s καὶ ὁ v παράγων, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν $2s \pm 1$· τότε λαμβάνομεν τὰ 16 ἀντίστοιχα ζεύγη τιμῶν :

1.	$s = u$	$2s \pm 1 = 7 \cdot 353 \cdot 4657\ v$
2.	$s = 7\ u$	$2s \pm 1 = 353 \cdot 4657\ v$
3.	$s = 353\ u$	$2s \pm 1 = 7 \cdot 4657\ v$
4.	$s = 4657\ u$	$2s \pm 1 = 7 \cdot 353\ v$
5.	$s = 7 \cdot 353\ u$	$2s \pm 1 = 4657\ v$
6.	$s = 7 \cdot 4657\ u$	$2s \pm 1 = 353\ v$
7.	$s = 353 \cdot 4657\ u$	$2s \pm 1 = 7\ v$
8.	$s = 7 \cdot 353 \cdot 4657\ u$	$2s \pm 1 = v$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς μικροτέρας τιμὰς τοῦ n, αἱ ὁποῖαι πληροῦν ὅλας τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν ἐκ τῶν διαφόρων ἀκεραίων ζευγῶν, ἐκείνας αἱ ὁποῖαι δίδουν τὰς μικροτέρας τιμὰς διὰ τὸ γινόμενον un ἢ n.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰ διάφορα ζεύγη καὶ συγκρίνωμεν τὰ ἀποτελέσματα εὑρίσκομεν τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων

$$S = 7\ u, \qquad 2s - 1 = 353 \cdot 4657\ v,$$

τὸ ὁποῖον παρέχει τὴν λύσιν

$$u = 117\,423, \qquad v = 1,$$

ὥστε $\qquad n = uv = 117\,423 = 3^3 \cdot 4349,$

ὁπότε ἕπεται $\qquad s = 7\ u = 821\,961$

καὶ $\qquad q = 2s - 1 = 1\,643\,921.$

Κατὰ ταῦτα $\Upsilon + Z = 2471 \cdot 4657\, n$

$$= 2471 \cdot 4657 \cdot 117423$$
$$= 1\,351\,238\,949\,081$$
$$= \frac{1643921 \cdot 1643922}{2}$$

ὅστις εἶναι τρίγωνος ἀριθμός, ὡς ζητεῖται.

Ὁ ἀριθμὸς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (θ), ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ εἶναι γινόμενον δύο ἀκεραίων θὰ εἶναι :

$$W + X = 2 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot 4657\, n$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\, n$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot 117423$$
$$= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot 4349$$
$$= (2^2 \cdot 3^4 \cdot 4349) \cdot (11 \cdot 29 \cdot 4657)$$
$$= 1409076 \cdot 1485583,$$

ὅστις εἶναι ὀρθογώνιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσοι.

Ἡ λύσις εἶναι τότε, δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ $n = 117423$.

$$
\begin{array}{rcr}
W & = & 1\,217\,263\,415\,886 \\
X & = & 876\,035\,935\,422 \\
\Upsilon & = & 487\,233\,469\,701 \\
Z & = & 864\,005\,479\,380 \\
w & = & 846\,192\,410\,280 \\
x & = & 574\,579\,625\,058 \\
y & = & 638\,688\,708\,099 \\
z & = & 412\,838\,131\,860 \\
\hline
\text{καὶ τὸ ἄθροισμα} & = & 5\,916\,837\,175\,686
\end{array}
$$

ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

(δηλ. ὁ $W+X$ νὰ εἶναι τετράγωνος καὶ ὄχι ὀρθογώνιος).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ πληρῶνται αἱ ἑπτὰ ἐξισώσεις (α), (β), ... (η) καὶ αἱ ἑπόμεναι δύο ἀκόμη

$$W+X = \text{τετράγωνος, ἔστω} = p^2$$

καὶ

$$\Upsilon + Z = \text{τρίγωνος ἀριθμός, ἔστω} = \frac{q\,(q+1)}{2}.$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς (Α) ἔχομεν ἐν πρώτοις :

$$\begin{aligned} p^2 &= 2 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot 4657\, n \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\, n, \end{aligned}$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις αὕτη πληροῦται, ὅταν

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\, \xi^2 = 4\,456\,749\, \xi^2,$$

ὅπου ὁ ξ τυχὼν ἀκέραιος.

Κατὰ ταῦτα αἱ 8 πρῶται ἐξισώσεις (α), (β), ... (η), (θ) πληροῦνται διὰ τῶν ἑπομένων τιμῶν.

$$\begin{aligned}
W &= 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 53\cdot 4657^2\cdot \xi^2 &&= 46\,200\,808\,287\,018\cdot \xi^2\\
X &= 2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 29\cdot 89\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 33\,249\,638\,308\,986\cdot \xi^2\\
\Upsilon &= 3^5\cdot 11^2\cdot 29\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 18\,492\,776\,362\,863\cdot \xi^2\\
Z &= 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 29\cdot 79\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 32\,793\,026\,546\,940\cdot \xi^2\\
w &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23\cdot 29\cdot 373\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 32\,116\,937\,723\,640\cdot \xi^2\\
x &= 2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 17\cdot 29\cdot 15991\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 21\,807\,969\,217\,254\cdot \xi^2\\
y &= 3^3\cdot 11\cdot 13\cdot 29\cdot 46489\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 24\,241\,207\,098\,537\cdot \xi^2\\
z &= 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2\cdot 29\cdot 761\cdot 4657\cdot \xi^2 &&= 15\,669\,127\,269\,180\cdot \xi^2
\end{aligned}$$

Ὑπολείπεται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ξ ὥστε νὰ πληρῶται ἡ ἐξίσωσις (ι), δηλ. νὰ εἶναι :

$$\Upsilon + Z = \frac{q\,(q+1)}{2}$$

'Αντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς διὰ Υ, Ζ ἔχομεν :

$$q\,(q+1) = 51\,285\,802\,909\,803 \cdot \xi^2$$
$$= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot \xi^2.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 8 καὶ θέτοντες :

$$2\,q+1 = t, \qquad 2 \cdot 4657 \cdot \xi = u,$$

λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Pell

$$t^2 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot u^2,$$

ἤτοι : $$t^2 - 4729494\, u^2 = 1.$$

'Εκ τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἡ μικροτέρα δέον νὰ ἐκλεγῇ, ὥστε ὁ u νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ $2 \cdot 4657$,

ἤτοι $\xi = \dfrac{u}{2 \cdot 4657}$ νὰ εἶναι ἀκέραιος, ὁπότε

δι' ἀντικαταστάσεως τῆς οὕτω εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ ξ εἰς τὸ τελευταῖον σύστημα τῶν ἐξισώσεων φθάνομεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ πλήρους προβλήματος.

Θὰ ἐχρειάζετο πολὺς χῶρος διὰ νὰ δώσωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως τοῦ Pell

$$t^2 - 4729494\, u^2 = 1$$

καὶ ὁ περίεργος ἀναγνώστης παραπέμπεται εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Amthor. 'Αρκεῖ νὰ εἴπωμεν ὅτι οὗτος ἀναπτύσσει τὴν $\sqrt{4729494}$ ὑπὸ τὴν μορφὴν συνεχοῦς κλάσματος καὶ φθάνει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι :

$W = 1598\ \boxed{206541}$ ὅπου ὁ ἀριθμὸς $\boxed{206541}$

σημαίνει, ὅτι ὁ 1598 ἀκολουθεῖται ὑπὸ 206541 ψηφίων καὶ ὅτι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν βοῶν (ταύρων καὶ ἀγελάδων) εἶναι :

$$= 7766\ \boxed{206541}$$

'Ο Amthor παρατηρεῖ, ὅτι «ὁ μεγαλύτερος λογαριθμικὸς πίναξ μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία περιέχει εἰς μίαν σελίδα 50 γραμμὰς μὲ 50 ψηφία ἑκάστην ἢ 2500 ψηφία. Κατὰ ταῦτα ὁ εἷς ἐκ τῶν ὀκτὼ ἀγνώστων, ὅταν εὑρεθῇ, θὰ κατέχῃ 88 ½ τοιαύτας σελίδας (ψηφίων) καὶ διὰ νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία τῶν 8 ἀγνώστων θὰ ἐχρειαζόμεθα ἕνα τόμον ἐξ 660 σελίδων !».

ΕΠΙΜΕΤΡΟΝ

FRIEDRICH VON SCHILLER*

ARCHIMEDES UND DER SCHÜLER (1795)

Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling,
«Weihe mich «sprach er zu ihm» ein in die göttliche Kunst
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen
Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt!»
«Göttlich nennst du die Kunst? Sie ist, es versetzte der Weise,
Aber das war sie, mein Sohn eh sie dem Staat noch gedient.
Willst du nur Früchte von ihr, die kann auch die sterbliche zeugen;
Wer um die Göttin freit, sucht in ihr nicht Weib».

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ ΠΑΡ' ΑΡΧΙΜΗΔΕΙ

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 8ον πρόβλημα τοῦ β' βιβλίου τῆς πραγματείας του Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀποδεικνύει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον μὲν τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς

* Friedrich von Schiller (1759 - 1805), Sämtliche Werke, 1. Band, Ed. Gerhard Fricke und Herbert Göpfert, München 1958, S. 245.

ΦΡΕΙΔΕΡΙΚΟΣ ΦΟΝ ΣΙΛΛΕΡ

Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΚΑΙ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ

Πρὸς τὸν 'Αρχιμήδη προσῆλθεν εἷς φιλομαθὴς νέος,
«Μύησέ με, τοῦ εἶπε, εἰς τὴν θείαν τέχνην
Ἡ ὁποία τόσον ἐξαισίους καρποὺς ἔφερεν εἰς τὴν πατρίδα
Καὶ ἐπροστάτευσε τὰ τείχη τῆς πόλεως ἀπὸ τὴν Σαμβύκην[1]).
«Θείαν ὀνομάζεις τὴν τέχνην; Πράγματι εἶναι, ἀπήντησεν ὁ σοφός,
'Αλλ' αὐτὸ ἦτο, παιδί μου, πρὶν ἀκόμη αὕτη ὑπηρετήση τὴν Πολιτείαν.
Θέλεις μόνον καρποὺς ἀπὸ αὐτήν, αὐτοὺς δύναται ἐπίσης ἡ θνητὴ νὰ παραγάγῃ·
Ὅποιος ἐρωτεύεται τὴν θεάν, δὲν ζητεῖ εἰς αὐτὴν γυναῖκα».

τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, εἰς τὴν $\frac{3}{2}$ δύναμιν.

'Εὰν καλέσωμεν τὰ σφαιρικὰ τμήματα ΑΒΓ > ΑΔΓ θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα.

$$\frac{\text{σφ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. τμ. ΑΔΓ}} < \left(\frac{\text{ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{ἐπιφ. ΑΔΓ}}\right)^2 \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{\text{σφ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. τμ. ΑΔΓ}} > \left(\frac{\text{ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{ἐπιφ. ΑΔΓ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1) Σαμβύκη. Πολεμικὸν μέσον ἀποτελούμενον ἐκ τῆς ζεύξεως τεσσάρων ζευγῶν πλοίων φερόντων κλίμακα πρὸς προσπέλασιν τῶν τειχῶν πολιορκουμένης πόλεως. 'Ιδὲ α' μέρος, α' τόμου, λέξις σαμβύκη.

2. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἕπεται, ὅτι αὗται εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν Ἀρχιμηδείων ἔργων συνάγεται τὸ συμπέρασμα, ὅτι αἱ βοηθητικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας οὗτος χρησιμοποιεῖ ἀναποδείκτως εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεών του, ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων αὐτοῦ μαθηματικῶν. Ἐνδεικτικῶς πρὸς τοῦτο ἀναφέρομεν τὴν ἀναποδείκτως χρησιμοποιουμένην πρότασιν ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3, καθ' ἣν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Τὴν πρότασιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 3 θεώρημα τῆς πραγματείας του Κύκλου μέτρησις.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης προτάσεως, καίτοι αὕτη ἀπαντᾷ διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, δὲν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Διότι ὑπάρχουν τεκμήρια τοῦ συγγενοῦς πρὸς τοῦτον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2, τοῦ ἐπιτυγχανομένου διὰ τῶν καλουμένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ὅστις ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους (Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, Leipzig 1878, σελ. 42-45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος II, ἔκδ. Kroll. Leipzig σελ. 24 καὶ 393. Ταῦτα ἀναπτύσσονται εἰς Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλία V—IX, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8 κ.ἑ.).

3. Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἴτε ὑπὸ ἀριθμητικὴν εἴτε ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν, ἀνεπτύχθη συγχρόνως πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Ἡ γνώμη αὕτη ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς ἐνδείξεων :

ΕΠΙΜΕΤΡΟΝ

α'. Ἐκ τοῦ Θυμαριδείου Ἐπανθήματος. Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο καλεῖται μέθοδος ἐπιλύσεως προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ν—1 ἐξισώσεων, ἤτοι

$$\begin{aligned} x + x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{\nu-1} &= S \\ x + x_1 &= S_1 \\ x + x_2 &= S_2 \\ x + x_{\nu-1} &= S_{\nu-1} \end{aligned}$$

Κατὰ τὸν ἐκ Πάρου μαθηματικὸν καὶ μαθητὴν τοῦ Πυθαγόρου Θυμαρίδαν, ἀκμάσαντα περὶ τὸ 500 π.Χ., ὅτε ὁ Πυθαγόρας ἦτο ἤδη γέρων, ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εἶναι

$$x = \frac{(S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_{\nu-1}) - S}{\nu-2}$$

(Ε. Σταμάτη, Τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, «Πλάτων» ἔτος Δ' —τεῦχος Α 1952 σελ. 123 - 142).

Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀναφέρει τὸ πρόβλημα τοῦτο, μνημονεύει καὶ τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως :

$$\begin{aligned} 1.\quad x + y &= 2\,(z + u) \\ x + z &= 2\,(y + u) \\ x + u &= 2\,(y + z) \end{aligned}$$

['Ενταῦθα ἀναφέρει ἀκόμη $x + y + z + u = 5\,(y + z)$]

$$\text{καὶ}\quad 2.\quad x + y = \frac{3}{2}\,(z + u)$$

$$x + z = \frac{4}{3}\,(y + u)$$

$$x+u=\frac{5}{4}(y+z).$$

Αἱ λύσεις καὶ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μνημονευομένων προβλημάτων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου λεκτικῶς μόνον καὶ ἄνευ συμβολισμοῦ τινος (Ἰάμβλιχος, εἰς Νικομάχου Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν, H. Pistelli, Leipzig 1894, σελ. 62 κ.ἑ.).

β΄. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων VIII καὶ IX τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται θεωρήματα περὶ γεωμετρικῶν προόδων.

γ΄. Ἐκ τῶν δέκα πρώτων θεωρημάτων τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου γίνεται ἀπόδειξις ἀλγεβρικῶν ταὐτοτήτων.

δ΄. Ἐκ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις (α καὶ β) ἡ Ἄλγεβρα σπουδάζεται ἀριθμητικῶς, ἐν ᾧ εἰς τὰς περιπτώσεις γ καὶ δ γεωμετρικῶς.

4. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ἐκφραζομένους ὅμως ἐμμέσως, ἀπαντῶμεν καὶ εἴς τινα θεωρήματα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Δὲν ἀναφέρεται εἰς αὐτὰ ὅμως σαφῶς ὅτι πρόκειται περὶ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ὅπως τοῦτο γίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ X 27 θεώρημα τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται δύο εὐθεῖαι «μέσαι», αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ῥητόν. Αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$$

κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, ὅπου ρ εἶναι εὐθεῖα ῥητή, καὶ α,β ἀκέραιοι ἀριθμοί. (Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλίον X, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι 1957, σελ. 251).

5. Ὁ Ἀρχιμήδης κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου προβλήματος καταλήγει εἰς τὰς σχέσεις

$$\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{ZH}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{\Theta B}{BE = BK}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{KZ}{ZH}$$

καὶ συμπεραίνει ἀμέσως, παραλείπων τοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμοὺς ὡς εὐκόλους καὶ γνωστούς, ὅτι

$$\frac{\Theta Z}{ZH} > \left(\frac{KZ}{ZH}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Εἶναι δὲ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ΘΖ =σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, ΖΗ =σφαιρικὸν τμῆμα ΑΔΓ, καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος ΚΖ =ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΓ, καὶ ΖΗ =ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΔΓ.

6. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος παρέχει τὴν ἑξῆς ἑρμηνείαν τῆς εὑρέσεως τῆς δυνάμεως μὲ τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην :

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ > Γ > Δ καὶ ἂς εἶναι

$$\frac{AB^2}{\Gamma^2} > \frac{\Gamma}{\Delta} \tag{1}$$

Λέγω, ὅτι $\dfrac{AB}{\Delta} > \left(\dfrac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Διότι, ἂς ληφθῇ τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε. [Ὁπότε εἶναι

$$\frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}, \quad \frac{\Gamma^2}{E^2} = \frac{E^2}{\Delta^2} = \frac{\Gamma \times E}{E \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta}, \tag{2}$$

Ταῦτα θεωρεῖ εὐκόλως ἐννοούμενα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 9 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου]. Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $\frac{AB}{\Gamma} > \frac{\Gamma}{E}$.

Λαμβάνει εὐθεῖάν τινα $BZ < AB$, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{BZ}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E}$ [ὁπότε αἱ εὐθεῖαι BZ, Γ, E, Δ ἀποτελοῦν τέσσαρας συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, ἤτοι εἶναι

$$\frac{BZ}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{E} = \frac{E}{\Delta}, \quad \frac{BZ^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{E^3} = \frac{E^3}{\Delta^3} =$$

$$= \frac{BZ \times \Gamma \times E}{\Gamma \times E \times \Delta} = \frac{BZ}{\Delta}, \qquad (3).$$

[Ταῦτα ἕπονται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου].

Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\frac{BZ}{\Delta} = \frac{\Gamma^3}{E^3}$, (4).

Εἶναι δὲ ἐκ τῆς (2) καὶ (4) $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\Gamma^2}{E^2}$, (5).

Εἶναι ἄρα $\frac{BZ}{\Delta} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$, (6).

[Διότι ἐκ τῆς (5) λαμβάνει $\frac{\Gamma}{E} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}$ καὶ κατόπιν $\left(\frac{\Gamma}{E}\right)^3 = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$ καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) ἕπεται ἡ (6)].

Ἐπειδὴ δὲ $AB > BZ$, ἕπεται $\frac{AB}{\Delta} > \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$

ΕΠΙΜΕΤΡΟΝ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ *

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 23ον θεώρημα τῆς πραγματείας του Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ἀποδεικνύει ὅτι :

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{4}$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{3}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνει τὴν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4},$$

ὅπου A εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὅρος καὶ $\frac{A}{4^4}$ ὁ μικρότερος, καὶ ἀποδεικνύει ὅτι

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \frac{A}{4^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{4^4} = \frac{4}{3} A.$$

χωρὶς νὰ χρησιμοποιῇ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

Τὸ Ἀρχιμήδειον θεώρημα εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ θεώρημα, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \frac{A}{4^3} + \cdots + \frac{A}{4^{\nu-1}}$$

$$\text{εἶναι } \frac{4}{3} A, \quad \text{ὅταν } \nu \to \infty.$$

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται διὰ τῆς αὐτῆς Ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως ὅτι :

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς

* Περιοδικὸν « Πλάτων », τόμ. ΙΕ' (1963), τεύχη 29/30.

προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$, $(n = 2, 3, 4 \ldots .)$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{n-1}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{n}{n-1}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ἔστω ὅτι ἐδόθησαν οἱ ἐν συνεχείᾳ ὅροι τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3}, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots .).$$

Κατὰ τὴν γενίκευσιν τῆς Ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως θὰ εἶναι

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \frac{A}{n^3} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{A}{n^3} = \frac{nA}{n-1},$$

$$\left(= \frac{A}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τοῦτο, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁποίου δὲν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου, εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = A + \frac{A}{n} + \frac{A}{n^2} + \cdots + \frac{A}{n^{\nu-1}}, \quad \text{ὅταν } \nu \to \infty.$$

2. Ἡ γενίκευσις τοῦ Ἀρχιμηδείου θεωρήματος

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε . . . . ἀποτελοῦντα ἐν συνεχείᾳ ὅρους φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, 4 \ldots .)$, ὅπου Α ὁ μέγιστος ὅρος, καὶ

$$B = \frac{A}{n} \tag{1}$$

$$\Gamma = \frac{B}{n} \qquad (2)$$

$$\Delta = \frac{\Gamma}{n} \qquad (3)$$

καὶ $$E = \frac{\Delta}{n} \text{ ὁ μικρότερος ὅρος} \qquad (4).$$

Ἔστω δὲ

$$Z = \frac{B}{n-1} \qquad (5)$$

$$H = \frac{\Gamma}{n-1} \qquad (6)$$

$$\Theta = \frac{\Delta}{n-1} \qquad (7)$$

$$I = \frac{E}{n-1} \qquad (8).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (5) λαμβάνομεν $B + Z = \frac{A}{n-1}$, (9)

Ἐκ τῶν (2) καὶ (6) λαμβάνομεν $\Gamma + H = \frac{B}{n-1}$, (10)

Ἐκ τῶν (3) καὶ (7) λαμβάνομεν $\Delta + \Theta = \frac{\Gamma}{n-1}$, (11)

Ἐκ τῶν (4) καὶ (8) λαμβάνομεν $E + I = \frac{\Delta}{n-1}$, (12).

Ἀλλ' ἐκ τῶν (5), (6), (7) εἶναι $Z + H + \Theta =$

$$= \frac{1}{n-1}(B + \Gamma + \Delta), \qquad (13).$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (9, 10, 11, 12) λαμβάνομεν

$$B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{n-1}(A + B + \Gamma + \Delta), \qquad (14).$$

Εἰς ταύτην δι' ἀπαλοιφῆς τῶν ἴσων ἐκ τῆς (13) εἶναι

$$\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}+\mathrm{I}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}-1}, \qquad (15).$$

Καὶ διὰ προσθέσεως τοῦ Α εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (15) λαμβάνομεν

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta+\mathrm{E}+\mathrm{I}=\frac{\mathrm{nA}}{\mathrm{n}-1}=\frac{\mathrm{A}}{1-\dfrac{1}{\mathrm{n}}}=\frac{\mathrm{A}}{1-\omega},$$

ἐὰν τεθῇ $\frac{1}{\mathrm{n}}=\omega$. Εἶναι δὲ $\mathrm{I}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{n}-1}$, (ἐκ τῆς 8), ὅπου Ε εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος τῆς φθινούσης προόδου. Κατὰ συνέπειαν διὰ τῆς 'Αρχιμηδείου ἀποδείξεως εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\mathrm{S}=\mathrm{A}+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}}+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}^2}+\cdots\cdot\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}^{\nu-1}},$$

ὅταν $\nu\rightarrow\infty$, χωρὶς ὅμως νὰ γίνεται κατ' αὐτὴν χρησιμοποίησις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

ΓΝΩΜΑΙ

Περὶ χρησιμοποιήσεως ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους τῶν ἀρχῶν τοῦ Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ, τῶν :
1) H. G. Zeuthen, 2) I. G. Bachmakova, 3) Charles Mugler.

Ἀνάλυσιν ἐπίσης τῶν μεθόδων διαφορίσεως καὶ ὁλοκληρώσεως τοῦ Ἀρχιμήδους δύναται νὰ εὕρῃ τις εἰς τὸ σύγγραμμα τοῦ T. L. Heath, The works of Archimedes withe the method of Archimedes, New York, Dover publications, Inc. p. CXLII — CLXXXVI.

1. H. G. Zeuthen. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum (Αἱ κωνικαὶ τομαὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα). Ed. R. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886, reprogr. G. Olms, Hildesheim 1966, S. 440-451.

...«Ἐν ᾧ ἡ προηγουμένως ἐκτεθεῖσα ἔρευνα δὲν παριστᾷ οὐδεμίαν ἀπόλυτον σύμπτωσιν μὲ τὴν σύγχρονον χρησιμοποίησιν ἀπείρων σειρῶν, οἱ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἐκτελούμενοι προσδιορισμοὶ ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων διὰ διαιρέσεως αὐτῶν εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα ὅλα εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ὁσονδήποτε μικρά, συμφωνοῦν ἀκριβῶς μὲ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτῶν δι᾽ ὁλοκληρώσεως. Ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μερῶν δύναται νὰ γίνῃ τόσον μέγα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεών των ἀπὸ μεγέθη, τῶν ὁποίων δύναταί τις νὰ ὑπολογίσῃ τὸ ἄθροισμα, νὰ γίνεται μικρότερον ὁσονδήποτε μικροῦ ὁρίου δοθέντος, τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν αὐτὴν θεώρησιν, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει εἰς ἡμᾶς εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν νὰ ὑπολογίσωμεν ἓν μέγεθος ὡς ἄθροισμα ἀτελειώτως, ἀπείρως μικρῶν μεγεθῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης, ἐννοεῖται, ἐφαρμόζει μόνον ἕνα πολὺ περιωρισμένον ἀριθμόν, ἐνταῦθα ἀνηκόντων, γενικῶν θεωρημάτων ἢ — ὡς θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν χρησιμοποιοῦντες τὴν σύγχρονον ὁρολογίαν — ἐφαρμόζει τύπους ὁλοκληρώσεως (ἰδίως (4) καὶ (5) εἰς τὰ ἑπόμενα)· ἀλλὰ ἐπειδὴ ἐφαρμόζει αὐτὰ εἰς διάφορα προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐν μέρει πρέπει νὰ μετασχηματισθῶσι διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ τοῦτο, ἀφίνει σαφῶς νὰ ἐννοηθῇ, ὅτι χρησιμοποιεῖ αὐτὰ ὡς γενικὰ βοηθητικὰ μέσα. Ὁ Ἀρχιμήδης, ὅστις τὰ θεωρήματα αὐτά, ἓν ἕκαστον, πλήρως θεμελιώνει, ἔχει θέσει ἓν στερεὸν θεμέλιον διὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν καὶ ἐπὶ τοῦ θεμελίου τούτου οὗτος ἐπῳκοδομήθη κατὰ τοὺς νεωτέρους χρόνους.

Μεταφράζοντες τοὺς μετασχηματισμοὺς τετραγωνισμῶν καὶ κυβισμῶν εἰς ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα ἀπαντοῦν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, εἰς τὴν σύγχρονον συμβολικὴν γλῶσσαν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι οὗτος, ἀσχέτως πρὸς τὴν τυπικὴν ὑπ' αὐτοῦ διατύπωσιν, ἐγνώριζε καὶ ἐφήρμοζε τὰ ἑξῆς ὁλοκληρώματα : πρῶτον

$$a\int_a^b k\,dx \tag{1}$$

ὡς ἔκφρασιν μιᾶς ἐπιφανείας, παρὰ τῇ ὁποίᾳ εἰς τὴν τεταγμένην, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τετμημένην x, ἀποκόπτεται ἡ χορδὴ k, ἐν ᾧ a καὶ b εἶναι αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ διὰ τὸ x καὶ a εἶναι μία σταθερά, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν γωνίαν μεταξὺ τετμημένης καὶ τεταγμένης : Δεύτερον

$$a\int_a^b A\,dx \tag{2}$$

ὡς ἔκφρασιν διὰ τὸν ὄγκον, εἰς τὸν ὁποῖον ἐπὶ τοῦ δι' ὡρισμένην τιμὴν τοῦ x καθοριζομένου ἐπιπέδου, ἀποκόπτεται ἡ ἐπιφάνεια A. Ἕνεκα τῆς συνεξαρτήσεως ἐπιθυμοῦμεν νὰ προσθέσωμεν ἀκόμη, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ἑλίκων, χρησιμοποιεῖ τὸν τύπον μὲ πολικὰς συντεταγμένας

$$\frac{1}{2}\int_{s}^{r} r^2 \frac{d\theta}{dr}\,dr \qquad (3)$$

εἰς τὸν ὁποῖον ἐν τούτοις $\frac{\theta}{r} = \frac{d\theta}{dr}$ εἶναι σταθερόν. (Σημείωσις. Διὰ τὴν ἀκρίβειαν σημειοῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ὁ 'Αρχιμήδης προσδιορίζει τὴν σχέσιν τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἕνα κύκλον, ὁ παράγων $\frac{1}{2}$, ὡς καὶ ὁ παράγων a δὲν ἐμφανίζονται). Περαιτέρω ὁ 'Αρχιμήδης, ἐπειδὴ γνωρίζει τὸ θεώρημα Περὶ στατικῆς ῥοπῆς, κέκτηται τὸ αὐτὸ μέσον, ὅπως τὰ σύγχρονα μαθηματικά, διὰ νὰ ἀναγάγῃ εἰς ὁλοκληρώσεις τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ βάρους ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ ἀπὸ μιᾶς γραμμῆς. Περαιτέρω μᾶς ἔδωκε τὴν σπουδαιοτάτην ὅλων τῶν ὁλοκληρώσεών του, τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διὰ μετασχηματισμῶν, οἱ ὁποῖοι μᾶς εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ τὰ στοιχειώδη βιβλία.

Διὰ τοὺς ἐπακολουθοῦντας ὑπολογισμοὺς εὑρίσκονται πρὸ παντὸς εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ 'Αρχιμήδους αἱ προτάσεις, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἑπόμενα ὁλοκληρώματα :

$$\int_{0}^{c} x\,dx = \frac{1}{2}c^2 \qquad (4)$$

καὶ

$$\int_{0}^{c} x^2\,dx = \frac{1}{3}c^3 \qquad (5)$$

Ταῦτα ἐκτίθενται ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, τὸ πρῶτον κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων (πρώτη ἔκδοσις Heiberg 1880 σελὶς 290), τὸ δεύτερον εἰς ἓν πόρισμα τοῦ 10ου θεωρήματος Περὶ ἑλίκων, τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται εἰς τοὺς ἑξῆς τύπους :

$$\left.\begin{aligned} & h + 2h + 3h + \cdots\cdots + nh > \frac{n^2}{2}\, h \\ & h + 2h + 3h + \cdots\cdots + (n-1)\, h < \frac{n^2}{2}\, h^2 \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

καὶ

$$\left.\begin{aligned} & h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \cdots\cdots + (nh)^2 > \frac{n^3}{3}\, h^2 \\ & h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \cdots\cdots + (\,(n-1)h)^2 < \frac{n^3}{3}\, h^2 \end{aligned}\right\} \quad (5b)$$

Διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα παρατηρεῖ ὁ Ἀρχιμήδης, ὅτι ἡ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολος. Ἡ ὀρθότης αὐτῆς ἕπεται ἐκ τῶν ἐκφράσεων διὰ τὰ δύο ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα ἦσαν γνωστὰ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὡς τρίγωνοι ἀριθμοί. Ἡ ὀρθότης τοῦ δευτέρου θεωρήματος ἕπεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\begin{aligned} & 3\,[\,h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \cdots\cdots + (nh)^2\,] \\ & = (n+1)\,(nh)^2 + h(h + 2h + 3h + \cdots\cdots + nh), \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα 10 (Περὶ ἑλίκων) ἐκτίθεται καὶ ἀποδεικνύεται. Ἵνα ἐκ τούτου ληφθῇ ἡ τελευταία ἀνισότης (5b) δέον νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ τελευταία ἀνισότης εἰς τὸ (4b) καὶ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι

$$n(n-1)^2 + \frac{n^2}{2} < n^3$$

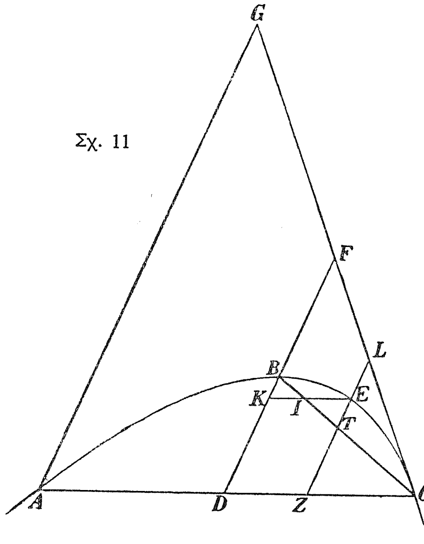
Ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιήσῃ τὰς ἀνισότητας (4b) καὶ (5b), ὡς ἡμεῖς χρησιμοποιοῦμεν τὰ ὁλοκληρώματα (4) καὶ (5), συνάγεται, ὅταν τεθῇ $h = dx$ καὶ $nh = c$. Ἐκτὸς τούτων χρησιμοποιεῖ οὗτος, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν, ἐπίσης μερικὰς ἀρχὰς ὁλοκληρώσεως, αἱ ὁποῖαι ἀμεσώτατα ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὴν ἀντίληψιν τῶν ὁλοκληρωμάτων ὡς ἀθροισμάτων ὁρίων . . . . . Ἓν γνωστὸν καὶ λίαν περιεκτικὸν μέσον διὰ τὴν μεταφορὰν ἀποτελεσμάτων ὁλοκληρώσεως ἀπὸ μιᾶς περιοχῆς εἰς ἄλλην εἶναι ὁ μεταγενεστέρως σημειούμενος κανὼν τοῦ Guldin, ὁ ὁποῖος ἀπαντᾷ εἰς τὸν Πάππον (σελὶς 682 ἔκδ. Hultsh).

Ἤδη ἐπιθυμοῦμεν νὰ παρουσιάσωμεν τὰς ἐκτεθείσας ἀρχὰς τὰς ὁποίας ἐφαρμόζει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν δευτέρας τάξεως. Ἀρχίζομεν μὲ τὴν ἐφαρμογὴν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ τύπου (1) διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐλλείψεως. Κατασκευάζει ἕνα κύκλον μὲ τὸν ἄξονα a ὡς διάμετρον. Δεχόμεθα, ὅτι αἱ τετμημέναι ὑπολογίζονται ἐπὶ τούτου καὶ ὅτι ὁ κύκλος ἀποκόπτει ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου τὴν χορδὴν k_1 ἐν ᾧ ἡ ἔλλειψις ἐπὶ τῆς ἰδίας καθέτου ἀποκόπτει τὴν χορδὴν k. Ἐὰν τώρα b εἶναι ὁ δεύτερος ἄξων, [Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων θεώρ. 4] δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x :

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{k_1} = \frac{k\,dx}{k_1\,dx} = \frac{\int_0^a k\,dx}{\int_0^a k_1 dx} = \frac{\text{ἔλλειψις}}{\text{κύκλος}}.$$

Εἰς τὰ ἑπόμενα θεωρήματα [5 - 6] ἐξάγονται παραστάσεις διὰ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν μιᾶς ἐλλείψεως καὶ τυχόντος κύκλου ἢ μεταξὺ δύο ἐλλείψεων, ἰδιαιτέρως τὸ θεώρημα, ὅτι ὅμοιαι ἐλλείψεις εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν μεγάλων ἢ τῶν μικρῶν ἀξόνων. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἠδύνατο εὐκόλως νὰ προσδιορίσῃ ἓν τμῆμα, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα χορδῆς, ἢ χρησιμοποιῶν πλαγιογωνίους συντεταγμένας, ἓν τμῆμα περιοριζόμενον ὑπὸ τυχούσης χορδῆς. Τοῦτο ἀσφαλῶς τὸ εἶχε σκεφθῆ, διότι χρησιμοποιεῖ τοὺς ἀντιστοίχους προσδιορισμοὺς εἰς τὸ ἐλλειψοειδές· ἀλλὰ ὁ προσδιορισμὸς ἐπιφανείας εἶναι μόνον μία βοηθητικὴ ἔρευνα, καὶ ἐκ τούτων λαμβάνει ὑπ' ὄψιν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐφαρμογήν.

Σχ. 11



Ἡ δευτέρα ἐφαρμογὴ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους τοῦ τύπου (1) ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς παραβολοειδοῦς τμήματος. Τὸν πρὸς τοῦτο ἀποσκοποῦντα μετασχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως τῆς παραβολῆς ὑπεμνήσαμεν ἤδη εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον. Ἐκεῖ ἐδείχθη (σελὶς 59 καὶ ἑξῆς), ὅτι, ἐὰν (Σχ. 11) μία χορδὴ $AC = a$ μιᾶς παραβολῆς ληφθῇ ὡς ἄξων τῶν τετμημένων, καὶ δὴ καὶ τὸ ἄκρον της A ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων, ἐν ᾧ αἱ τεταγμέναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον τῆς χορδῆς BD, τότε ἡ σχέσις $\frac{y}{y_1}$ μεταξὺ τῶν τεταγμένων τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ C, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν τετμημένην x εἶναι $\frac{x}{a}$. Τοῦτο χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν μετασχηματισμὸν

$$a \int_0^a y\,dx = \int_0^a y_1\,x\,dx.$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐκφράζει ὁ Ἀρχιμήδης, λέγων, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος ἐξαρτωμένη εἰς τὸ ἄκρον ἑνὸς μοχλοβραχίονος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν κάθετον ἀπόστασιν τοῦ σημείου C ἀπὸ τῆς εὐθείας AG, ἰσορροπεῖ τὸ βάρος ἑνὸς τριγώνου AGC, τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου τοῦ μοχλοβραχίονος, ὥστε τὸ A νὰ κεῖται εἰς τὸ σημεῖον στηρίξεως καὶ τὸ βάρος νὰ δρᾷ παραλλήλως πρὸς τὴν AG. Τότε τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν τιμὴν πρὸς τὸ x ἐπιφέρουν ἰσορροπίαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ τριγώνου, ἀπὸ τοῦ AG ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου C ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διὰ τοῦτο τὸ παραβολικὸν τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ τριγώνου AGC $= \frac{4}{3}$ τοῦ τριγώνου ABC.

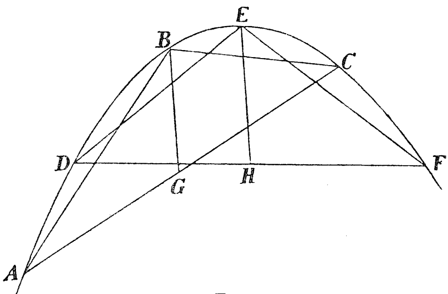
Ὁ Ἀρχιμήδης ἔχει ἤδη ἀποδείξει, ὡς ἐκτίθεται εἰς τὸ τέλος τοῦ 4 κεφαλαίου (σελὶς 103) [Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων θ. 3], ὅτι εἰς τὴν αὐτὴν παραβολὴν αἱ ἐπιφάνειαι τοιούτων ἐγγεγραμμένων τριγώνων ὡς τὸ ABC ἔχουν ἴσον μέγεθος, ἐὰν τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου BD εἶναι ἴσα. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι τότε, ὡς οὗτος εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν παρατηρεῖ, ἐπίσης ἀποδεδειγμένον, ὅτι τμήματα τῆς αὐτῆς παραβολῆς εἶναι ἰσομεγέθη, ὅταν τὰ εἰς αὐτὰ περιεχόμενα τμήματα πρὸς τὰς διαμέτρους, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὰς περιοριζούσας χορδάς, εἶναι ἴσα.

Οὔτε εἰς τὸν ἐδῶ ἀνακοινούμενον ὑπ' αὐτοῦ προσδιορισμόν, (σημ. μηχανικὸν) οὔτε εἰς τὸν μεταγενέστερον γεωμετρικόν, τὸν ὁποῖον ἤδη ἔχομεν ἀναφέρει, χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης τὴν κατάτμησιν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος διὰ παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν AC· διὰ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως αὐτῆς ἀποφεύγει τὸ ὁλοκλήρωμα $\int \sqrt{x}\, dx$. Τοὐναντίον χρησιμοποιεῖται ἡ ἀντίστοιχος κατάτμησις τῶν τμημάτων ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς δευτέρας τάξεως, δηλαδὴ δι' ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὄγκου τῶν τμημάτων τούτων εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ κωνοειδέων.

Ὡς ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης [θ. 19-22 Περὶ κωνοειδέων] ἀρχίζομεν καὶ ἡμεῖς μὲ τὸ παραβολοειδές· ἐν ᾧ ὅμως αὐτὸς κατὰ πρῶτον ἀποκόπτει ἓν τμῆμα διὰ τομῆς ἐπιφερομένης καθέτως πρὸς τὸν ἄξονα, ἐπιθυμοῦμεν ἐδῶ καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἐπιφανείας νὰ μεταβῶμεν ἀμέσως εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποίησιν μιᾶς τυχούσης τομῆς (ὅπως τοιαύτη εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπ' αὐτῆς εὑρισκομένου ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ εἰς τὸ σχῆμα 75 παρίσταται διὰ AC). Τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐλλείψεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποκόπτεται τὸ παραβολοειδὲς σημειοῦμεν διὰ G, τὸ τμῆμα BG, τὸ ὁποῖον ἀποκόπτεται διὰ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως ἀγομένης διαμέτρου, διὰ c, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου ὑπολογίζομεν τὴν τετμημένην x, λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον τομῆς B μὲ τὴν ἐπιφάνειαν. Προσδιορίζεται ἡ σχέσις τοῦ παραβολοειδοῦς τμήματος πρὸς κύλινδρον βάσεως G, ὁ ὁποῖος ἀποκόπτεται μεταξὺ τούτου καὶ τοῦ πρὸς ταύτην (τὴν βάσιν) παραλλήλου ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ παραβολοειδοῦς. Κατὰ ταῦτα λαμβάνεται διὰ τῶν (2) καὶ (4), ἐὰν y καὶ q (=GC) εἶναι οἱ ἡμιάξονες τῆς διὰ τοῦ x προσδιοριζομένης τομῆς καὶ τῆς βάσεως, οἱ ὁποῖοι πίπτουν ἐπὶ τοῦ ἐπὶ τοῦ G καθέτου μεσημβρινοῦ τοῦ παραβολοειδοῦς,

$$\frac{\text{τμῆμα}}{\text{κύλινδρος}} = \frac{\int_0^c A\,dx}{\int_0^c G\,dx} = \frac{\int_0^c \frac{y^2}{q^2} G\,dx}{\int_0^c G\,dx} = \frac{\int_0^c \frac{x}{c} G\,dx}{\int_0^c G\,dx} = \frac{1}{2}.$$

Ἐκ τούτου ἐξάγει ὁ Ἀρχιμήδης τὸ συμπέρασμα [θ. 23], ὅτι ἐὰν εἰς δύο τμήματα τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς διαμέτρου εἶναι



Σχ. 75

ἰσομεγέθη, εἶναι ἐπίσης ἰσομεγέθη καὶ τὰ τμήματα. Διότι ἐὰν (Σχ. 75) (ABC) καὶ (DEF) εἶναι δύο τμήματα μὲ βάσεις τὰς ἐκ προβολῆς εἰς AC καὶ DF ἐλλείψεις, ἐν ᾧ BG καὶ EH παριστῶσι τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς διαμέτρου καὶ y καὶ z εἶναι αἱ εἰς τὰ G καὶ H καθέτως ἐπὶ τοῦ σημειουμένου μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου ἀχθεῖσαι τεταγμέναι τοῦ παραβολοειδοῦς, τότε λαμβάνεται ἐκ τοῦ εὑρεθέντος ἀποτελέσματος, ὅτι

$$\frac{(\mathrm{ABC})}{(\mathrm{DEF})} = \frac{\text{τρίγωνον ABC}}{\text{τρίγωνον DEF}} \times \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}}.$$

Ἐὰν τώρα εἶναι BG $=$ EH εἶναι καὶ τρίγωνον ABC $=$ τρίγωνον DEF, ὡς εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου κεφαλαίου ἀπεδείχθη, καὶ $\mathrm{y} = \mathrm{z}$, ἐπειδὴ αἱ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ κάθετοι τομαὶ διὰ τῶν BG καὶ EH εἶναι παραβολαὶ ἴσαι. Γενικῶς τὰ τμήματα τοῦ αὐτοῦ παραβολοειδοῦς εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν BG καὶ EH. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου [24] δύναται ὁ Ἀρχιμήδης νὰ χρησιμοποιήσῃ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ βάσεις εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μέχρι τοῦδε ἐπιτευχθέντων.

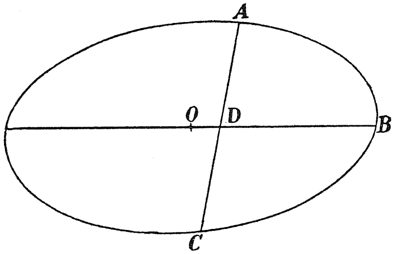
Ἓν τμῆμα ἑνὸς παραβολοειδοῦς προσδιορίζεται κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον [θ. 25-26], μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα ἕνεκα τῆς ἐξισώσεως τῆς ὑπερβολῆς λαμβάνεται

$$\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{q}^2} = \frac{\mathrm{x}\,(\mathrm{a}+\mathrm{x})}{\mathrm{c}\,(\mathrm{a}+\mathrm{c})}.$$

Ὑπὸ τὴν ὑπόδειξιν τοῦ ἄλλοθι εὑρεθέντος προσδιορισμοῦ τῶν ὁλοκληρωμάτων (4) καὶ (5) ἀποδεικνύεται ἐνταῦθα [2], ὅτι

$$\int_0^{\mathrm{c}} \mathrm{x}\,(\mathrm{a}+\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \mathrm{c}^2\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{a} + \frac{1}{3}\,\mathrm{c}\right) \tag{6}$$

Δι' ἀνταλλαγῆς τοῦ $+$ μὲ τὸ $-$ ἠδύνατο ὁ αὐτὸς προσδιορισμὸς νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς· ἀλλὰ κατὰ περίεργον τρόπον δὲν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης τὴν παράθεσιν ἐπιφανειῶν, διὰ νὰ παραστήσῃ ἐνταῦθα τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, ὡς ἔκαμε τοῦτο προηγουμένως διὰ τὴν ὑπερβολήν. Τοὐναντίον παριστᾷ ταύτην κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς ἡμίσεος ἐλλειψοειδοῦς δι' ἑνὸς γνώμονος, δηλ. διὰ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ δύο τετραγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν κοινὴν γωνίαν· μὲ ἄλλας λέξεις : δὲν χρησιμοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως $y^2 = kx\,(\alpha - x)$, ὅπου k εἶναι μία σταθερά, ἀλλὰ χρησιμοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, $y^2 = k\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)$.



Σχ. 76

Τὸ γεγονὸς τοῦτο παρέχει εἰς τὸν Ἀρχιμήδη τὴν εὐκαιρίαν, νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^c x^2 dx$ εἰς μίαν νέαν σύνδεσιν, ἤτοι :

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) dx = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς τμήματος διαφόρου τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἐλλειψοειδοῦς χρησιμοποιεῖται τὸ ὁλοκλήρωμα (6) εἰς μίαν νέαν σύνδεσιν. Τὸ σχῆμα 76, ἔστω παριστῶν ἓν μεσημβρινὸν ἐπίπεδον καὶ AC ἡ εὐθεῖα τομῆς ἐπὶ τούτου ἑνὸς καθέτου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀποτέμνει τὸ ἐλλειψοειδὲς (ABC). Κατόπιν λαμβάνεται ὡς ἄξων τῶν τετμημένων ἡ διὰ τοῦ μέσου D τῆς χορδῆς AC ἀγομένη διάμετρος καὶ D ὡς ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Θέτοντες τώρα OD $=$e καὶ ὡς προηγουμένως DC $=$ q, λαμβάνομεν :

$$\frac{y^2}{q^2}=\frac{\frac{a^2}{4}-e^2-2ex-x^2}{\left(\frac{a}{2}-e\right)\left(\frac{a}{2}+e\right)}=\frac{\left(\frac{a}{2}-e\right)\left(\frac{a}{2}+e\right)-x(2e+x)}{\left(\frac{a}{2}-e\right)\left(\frac{a}{2}+e\right)}$$

Τοῦτο σημαίνει νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{a}{2}-e}\left[\left(\frac{a}{2}-e\right)\left(\frac{a}{2}+e\right)-x\,(2e+x)\right]dx,$$

τὸ ὁποῖον, ἐπειδὴ τὸ μέρος τῆς ἐντὸς τῆς ἀγκύλης παραστάσεως εἶναι σταθερόν, μεταπίπτει εἰς

$$\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\left(\frac{a}{2}+e\right)-\int_0^{\frac{a}{2}-e}x\,(2e+x)\,dx.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον προηγουμένως ἐκαλέσαμεν (6) καὶ τοῦ ὁποίου τὴν τιμὴν σαφῶς ὁ Ἀρχιμήδης προηγουμένως ὑπελόγισε [2] καὶ ἐχρησιμοποίησε διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς τμήματος.

2. Isabella Grigorievna Bachmakova, in «Archive for History of Exact Sciences». Αἱ μέθοδοι διαφορίσεως τοῦ Ἀρχιμήδους, (Les méthodes différentielles d' Archimède, Volume 2, Number 2, 1964, P. 87 - 107).

Εἶναι γνωστὸν τώρα, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ προσδιορίσῃ τὰ ἐμβαδὰ καὶ τοὺς ὄγκους κατεῖχε γενικὴν μέθοδον, ἡ ὁποία συνίστατο εἰς τὸ νὰ κατασκευάζῃ, διὰ τὸ σπουδαζόμενον σχῆμα, τὰ «ἀθροίσματα τοῦ Ῥῆμαν (Riemann)» καὶ νὰ προσδιορίζῃ τὰ ἀνώτερα καὶ κατώτερα ὅριά των. Ὅπως εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τὰς θεωρουμένας ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ δύο αὐτὰ ὅρια συνέπιπτον, ἀπεδείκνυε δηλ. ὅτι ἡ κοινὴ τιμή των ἦτο ἡ ἔκφρασις τοῦ ζητουμένου μεγέθους. Ὁ τελικὸς σταθμὸς ἀνήγετο εἰς τὸ νὰ ἀποδείξῃ, διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅτι τὸ ζητούμενον μέγεθος δὲν ἠδύνατο νὰ εἶναι οὔτε μικρότερον οὔτε μεγαλύτερον τῆς ἐκφωνηθείσης τιμῆς. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἀκριβῶς ἐκείνη, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὴν βάσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος.

Καίτοι ἀκόμη δὲν ὑπάρχει πλήρης ὁμοφωνία μεταξὺ τῶν ἱστορικῶν τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ τῆς ἑρμηνείας τῆς ἀφορώσης εἰς τὸ ἀντικείμενον τοῦτο, ἐν τούτοις οὐδεὶς πλέον σήμερον ἀμφισβητεῖ, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν εἰσαγάγει καὶ ἐχρησιμοποίει « τὰ ἀθροίσματα τοῦ Ῥῆμαν».

Κατεῖχεν οὗτος συγκριτικὰς μεθόδους διὰ νὰ προσδιορίσῃ τὰς ἐφαπτομένας καὶ νὰ λύσῃ ὡρισμένα προβλήματα μεγίστου καὶ ἐλαχίστου ; Ἢ ἀκόμη καλλίτερον, ἐνεπιστεύθησαν τὴν ἐμφάνισίν των (αἱ μέθοδοι αὗται) μόνον εἰς τὸν 17ον αἰῶνα καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι περισσότερον στενῶς συνδεδεμέναι πρὸς τὴν σύγχρονον ἐποχήν, παρὰ αἱ ἰδέαι τῆς ὁλοκληρώσεως ; Περὶ τούτου ὑπάρχουσι διάφοροι ἀπόψεις καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν εὐκαιρίαν νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ αὐτοῦ κατωτέρω.

Εἰς τὸ ἄρθρον τοῦτο θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἶχεν εὕρει μέθοδον γενικὴν διὰ νὰ προσδιορίζῃ τὰς ἐφαπτομένας καὶ ἦτο κάτοχος μεθόδου, ἡ ὁποία τοῦ ἐπέτρεπε ν' ἀνάγῃ τὰ προβλήματα τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου εἰς προβλήματα ἐφαπτομένων. Τὰς μεθόδους αὐτὰς τὰς καλοῦμεν μεθόδους διαφορίσεως . . .

Θὰ ἀποδείξωμεν ἐπίσης, ὅτι ὄχι μόνον αἱ μέθοδοι ὁλοκληρώσεως, ἀλλ' ἐπίσης καὶ αἱ μέθοδοι διαφορίσεως τοῦ Ἀρχιμήδους, ἦσαν πολὺ γνωσταὶ εἰς τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ 17ου αἰῶνος, οἱ ὁποῖοι τὰς εἶχον λεπτομερῶς σπουδάσει καὶ ἐφαρμόσει εἰς πολλὰ ἄλλα προβλήματα.

§ 1. Ἡ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ ἑλίκων» εἰς τὴν ἱστορικομαθηματικὴν παράδοσιν.

Ἡ μέθοδος τῶν ἐφαπτομένων ἐφηρμόσθη καὶ ἐθεμελιώθη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν πραγματείαν του « Περὶ ἑλίκων ». Ἡ πραγματεία αὕτη, ἐν τούτοις, ὑπῆρξε περίπτωσις μοναδική. Κατὰ τὸν 3ον αἰῶνα τῆς ἐποχῆς μας ὁ Πάππος ἐπέκρινε τὴν μέθοδον τῆς ἀποδείξεως τῶν θεωρημάτων 5 - 9, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐβασίζετο ἀμέσως ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῶν ἐφαπτομένων τῆς ἕλικος. Ὁ Πάππος ἔγραψε : «Τέλος, φαίνεται, δὲν ὑπάρχει ἀσήμαντον λάθος παρὰ τοῖς γεωμέτραις, ὅταν εὑρίσκωσιν ἓν πρόβλημα ἐπίπεδον διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν καὶ κατὰ γενικὸν τρόπον, ὅταν τὸ λύωσι κατὰ τρόπον οὐχὶ κατάλληλον, ὅπως παρουσιάζεται ἡ περίπτωσις διὰ τὸ πρόβλημα τῆς παραβολῆς εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ βιβλίου «Περὶ ἑλίκων» τοῦ Ἀρχιμήδους ὑποτιθεμένης στερεᾶς νεύσεως εἰς τὸν κύκλον, διότι δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἐδημοσίευσε χωρὶς νὰ κάμῃ χρῆσιν προβλήματος στερεοῦ» ([6], p. 208 - 209).

Ἀκολουθοῦντες τὴν ἀνοιχθεῖσαν ὁδὸν ὑπὸ τοῦ Πάππου, πολλοὶ ἱστορικοὶ τῶν ἐπιστημῶν, ὡς ὁ P. Tannery, Th. Heath καὶ ἄλλοι, κατηύθυναν τὰς προσπαθείας των διὰ νὰ δώσωσιν ἁπλουστέρας ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ H.

G. Zeuthen, φαίνεται, ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἀπεκάλυψε τὰς ἰδέας τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἔγραψεν οὗτος, ὅτι διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς μίαν ἕλικα « — ἐννοεῖται ὑπὸ τὸν ὑποχρεωτικὸν ἔλεγχον μιᾶς ἀποδείξεως διὰ τῆς ἐξαντλητικῆς μεθόδου — ὁ Ἀρχιμήδης θεωρεῖ τὸ αὐτὸ ἀπειροστικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ τώρα διὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰς καμπύλας ἐκπεφρασμένας εἰς πολικὰς συντεταγμένας : Ὡς ἀποτέλεσμα, ἡ πολικὴ ὑπεφαπτομένη εἶναι ἴση πρὸς $r\,\Theta$ » ([9], p. 151).

Εἶναι λυπηρὸν ὅμως, ὅτι ὁ H. G. Zeuthen περιορίζεται μόνον εἰς τὴν παρατήρησιν αὐτὴν καὶ δὲν μᾶς δίδει λεπτομερῆ ἀνάλυσιν τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους.

Οἱ μεταγενέστεροι τοῦ H. G. Zeuthen ἱστορικοὶ τῶν μαθηματικῶν, T. Heath, A. Czwalina, M. Simon, S. Lurié συμφωνοῦν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι δεξιωτάτη· κατὰ τὸν A. Czwalina, ἐπὶ παραδείγματι, ὁ Ἀρχιμήδης «εὗρε τὰ διαφορικὰ αὐτὰ θεωρήματα κατὰ τρόπον ὅλως διάφορον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἐχρησιμοποίησε διὰ νὰ τὰ ἀποδείξῃ, διότι ἡ ἀπόδειξίς του δὲν εἶναι ἄμεσος» ([4], p. 62). Καὶ ὁ S. Lurié ἔγραψεν ἐπίσης, ὅτι «τὸ ἔξοχον τέχνασμα τῆς λύσεως αὐτῆς καὶ τὸ ἀπροσδόκητον τοῦ ἀποτελέσματος ὑπῆρξαν ἡ αἰτία τῶν διαμαρτυριῶν τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τοῦ Πάππου καὶ ἑξῆς» ([12], p. 162).

Ἡ ἀντίληψις αὕτη, ἡ ὁποία δὲν ἀπεδείχθη, ἀλλὰ μόνον διετυπώθη, ἤγαγεν εἰς τὸ ἑπόμενον περιστατικόν : τὸ πρόβλημα τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν, τὸ ὁποῖον συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀποκαλύψῃ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους, διὰ τῆς ὁδοῦ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀποδείξεών του, ἐγκατελείφθη καὶ ὀλίγον κατ' ὀλίγον ἀντικατεστάθη δι' ἑνὸς ἄλλου, δηλαδή, πῶς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ στοιχειωδεστέρων μέσων καὶ εὐφυοῦς μεθόδου . . .

Σημειώνομεν, ὅτι τελευταίως, βαθεῖα ἀνάλυσις τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους « Περὶ ἑλίκων » ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ E. J. Dijcksterhuis (1956).

§ 2. Τὸ σχέδιον τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ ἑλίκων».

Ἡ θαυμασία αὐτὴ πραγματεία περιέχει ἐν συνόλῳ 28 θεωρήματα, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν εἰς τρεῖς ὁμάδας.

Ἡ πρώτη ὁμὰς παίζει ῥόλον εἰσαγωγῆς (θεωρήματα 1-11)· τὰ θεωρήματα αὐτὰ εἶναι, τῷ ὄντι, τὰ ἀναγκαῖα λήμματα διὰ τὰς περαιτέρω ἐρεύνας. Μόνον ἀπὸ τοῦ θεωρήματος 11 ἀρχίζει ἡ σπουδὴ τῆς ἕλικος.

Ἡ δευτέρα ὁμὰς (θεωρήματα 12-20) περιλαμβάνει τὴν σπουδὴν τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἕλικος καὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς· ἐνταῦθα ὁ Ἀρχιμήδης εὑρίσκει τὴν ὑπεφαπτομένην εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς ἕλικος.

Τὰ θεωρήματα τῆς τρίτης ὁμάδος (θεωρήματα 21-28) ἀναφέρονται εἰς ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἀποτελοῦν ἀντικείμενον τοῦ ἄρθρου τούτου.

Ἐπανερχόμεθα εἰς τὰ λήμματα τοῦ Ἀρχιμήδους. Εἰς τὰ δύο τελευταῖα λήμματα (θεωρήματα 10 καὶ 11), θεμελιοῖ τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ δίδει διὰ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τὰς ἀναγκαίας ἀνισότητας διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν. Τὰ λήμματα αὐτὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ θεωρήματα τῆς τρίτης ὁμάδος.

Τὰ ἐννέα ὑπόλοιπα λήμματα συνδέονται ἀμέσως πρὸς τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ἐνταῦθα. Εἰς τὰ θεωρήματα (1) καὶ (2) ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι «ἐὰν δύο σημεῖα μετατοπίζωνται εἰς ὁμαλὴν κίνησιν, ἕκαστον διαγράφον μίαν γραμμήν, καί, ἐὰν ἐφ' ἑκάστης τῶν γραμμῶν τούτων, τῶν ὁποίων αἱ πρῶται καὶ αἱ δεύτεραι διανύονται ὑπὸ τῶν σημείων εἰς ἴσους χρόνους, ληφθῶσι δύο γραμμαί, αἱ οὕτω ληφθεῖσαι γραμμαὶ ἔχουσι μεταξύ των τὸν αὐτὸν λόγον» ([2] p. 244).

Αἱ προτάσεις αὗται χρησιμοποιοῦνται διὰ νὰ προσδιορίσωσι τὴν ἔννοιαν τῆς ἕλικος.

Εἰς τὰς προτάσεις (3) καὶ (4) ἀποδεικνύει, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τμῆμα εὐθείας, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν δοθέντων κύκλων («οἱουδήποτε ἀριθμοῦ») καὶ ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι γραμμαί, εὐθεῖαι καὶ περιφέρεια κύκλου, εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν εὐθεῖαν μικροτέραν τῆς δοθείσης μεγαλυτέρας γραμμῆς καὶ μικροτέραν τῆς μεγαλυτέρας» ([2], p. 245).

Τέλος, αἱ προτάσεις 5-9, αἱ σπουδαιότεραι δι' ἡμᾶς, συνιστῶσι τὴν βάσιν τῆς μεθόδου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ Ἀρχιμήδους. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν καλλίτερον τὴν ἀξίαν καὶ τὸν ῥόλον των, ἐξετάζομεν τώρα τὴν δευτέραν ὁμάδα τῶν προτάσεων.

§ 3. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἕλικος καὶ ἡ θεμελίωσις τῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς.

Ὁ Ἀρχιμήδης δίδει τὸν κινηματικὸν ὁρισμὸν τῆς ἕλικος: (α' ὁρισμὸς μετὰ τὸ πόρισμα τοῦ θ. 11).

Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ περιστροφὴ γίνεται κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Ὁ Ἀρχιμήδης καλεῖ τὴν εὐθεῖαν ὅπου τὸ σταθερὸν σημεῖον ἔνθα ἀρχίζει ἡ ἕλιξ, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν γωνίαν $\varphi = 2\pi$, πρώτην εὐθεῖαν κ.λπ....

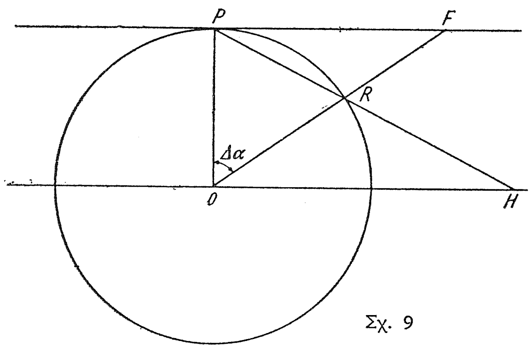
Εἰς τὰ θεωρήματα 14-15 ὁ Ἀρχιμήδης θεμελιώνει μίαν σχέσιν, ἡ ὁποία εἶναι ἰσότιμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἕλικος εἰς πολικὰς συντεταγμένας

$$\rho = a\varphi \ldots\ldots$$

§ 4. Ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἕλικα......

§ 5. Τὰ λήμματα (θεωρήματα 1-11)......

Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι δοθέντος κύκλου καὶ ἐφα-



Σχ. 9

πτομένης εἰς αὐτόν, εἰς τὸ σημεῖον P (Σχ. 9) δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν εὐθεῖάν τινα OF, ὥστε :

$$\frac{\mathrm{FR}}{\mathrm{OR}} < \frac{\widehat{\mathrm{PR}}}{\mathrm{C}},$$

ὅπου C εἶναι δοθὲν τόξον τοῦ κύκλου.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως αὐτῆς ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα D > C καὶ κατασκευάζει «τὴν νεῦσιν» : Φέρει τὴν εὐθεῖαν PH, ὥστε RH = D (Σχ. 9). Ὅθεν ἡ ORF εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Πράγματι, τὰ τρίγωνα PRF καὶ ORH εἶναι ὅμοια· συνεπῶς :

$$\frac{PR}{FR} = \frac{RH}{OR} \quad \text{ἢ} \quad \frac{FR}{OR} = \frac{PR}{RH} < \frac{\widehat{PR}}{C}.$$

Καὶ ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Εἰς τὸ κείμενον, τὸ ὁποῖον διεσώθη, ὁ Ἀρχιμήδης δὲν δεικνύει κατασκευήν τινα τῆς ἀναγκαίας νεύσεως.

Ὡς παρατηρεῖ ὁ Πάππος, ἡ χρησιμοποιουμένη νεῦσις εἰς τὸ θεώρημα (5) δύναται νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Κατὰ τρόπον γενικὸν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς νεύσεις μεταξὺ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν κύκλων διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν. Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἦτο πιθανῶς γνωστὴ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς τὰ λήμματα, τὰ ὁποῖα ἐνδιαφέρουν ἡμᾶς, δὲν ἀπασχολεῖται μὲ τὸ ζήτημα αὐτό, διότι λεπτομερὴς ἀνάλυσις τούτου δὲν ἦτο ἀναγκαία.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν λάβωμεν ὡς C τυχόντα πολλαπλάσια τόξου τοῦ θεωρηθέντος κύκλου, ἡ ἀπόδειξις τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι ἀκόμη ἰσχυρά. Ὅθεν προκύπτει, ὅτι ὁ λόγος $\frac{FR}{RP} = \frac{\Delta r}{r\Delta\alpha}$ δύναται νὰ ληφθῇ τόσον μικρός, ὅσον θέλει τις (σημ. εἰς τὴν παράγραφον ταύτην σημειοῦμεν τὴν γωνίαν $\widehat{POF}$ διὰ $\Delta\alpha$), καὶ

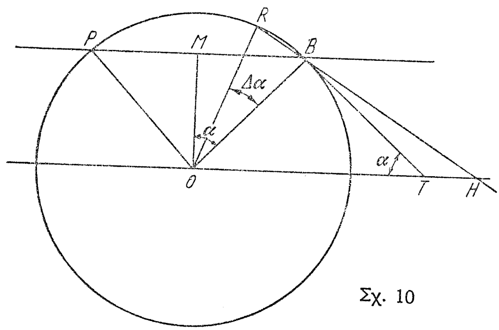
$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\sec\Delta\alpha - 1}{\Delta\alpha} = 0,$$

δηλαδή, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν περιφέρειαν εἶναι ἀπειροστῆς τάξεως ἐν σχέσει πρὸς τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν περιφέρειαν.

Ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Θεώρημα 6.

Δοθέντος κύκλου, καὶ εἰς τὸν κύκλον εὐθείας μικροτέρας τῆς διαμέτρου, εἶναι δυνατὸν νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας εἰς τὸν κύκλον, νὰ ἔχῃ λόγον δοθέντα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἄκρου, κειμένου ἐπὶ τῆς περιφερείας, πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ κύκλου, ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι



Σχ. 10

μικρότερος τοῦ λόγου τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας τῆς δοθείσης εἰς τὸν κύκλον, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀχθεῖσαν καθέτως ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν τελευταίαν αὐτὴν εὐθεῖαν ([2], p. 247).

Ἔστω ΑΒΡ ὁ δοθεὶς κύκλος κέντρου Ο (Σχ. 10), καὶ ἔστω ΡΒ χορδὴ μικροτέρα τῆς διαμέτρου. Φέρομεν τὴν ΟΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΡ καὶ λαμβάνομεν τὸν λόγον $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} < \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{OM}} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Διὰ ν' ἀποδείξῃ τὸ θεώρημα (6) ὁ Ἀρχιμήδης φέρει τὴν ΒΤ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ τὴν ΟΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΡΒ· Ὅθεν $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{TO}} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{OB}} = \alpha$ καὶ $\mathrm{a} : \mathrm{b} < \mathrm{OB} : \mathrm{BT}$. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐκλέγει τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας C, ὥστε :

$$\frac{a}{b}=\frac{OB}{C}$$

καὶ κατασκευάζει τὴν νεῦσιν : λαμβάνει δευτέραν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου B, ὥστε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας OH νὰ εἶναι ἴσον πρὸς C. Παριστῶμεν τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν διὰ RH. Τὸ σημεῖον H δὲν συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον T, ἐπειδὴ $RH = C > BT$.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ORH καὶ FRB συνάγεται

$$\frac{FR}{RB}=\frac{OR}{RH}=\frac{OB}{C}=\frac{a}{b}.$$

Ἡ χρησιμοποιουμένη νεῦσις εἰς τὸ λῆμμα αὐτὸ (θ. 6) δύναται ἐπίσης νὰ κατασκευασθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν κωνικῶν τομῶν.

Οὕτω, βλέπομεν ὅτι τὸ λῆμμα τοῦτο ἀποδεικνύει, ὅτι, ἐὰν $a : b < \mathrm{tg}\alpha = \frac{MB}{OM}$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν γωνίαν Δα τοιαύτην, ὥστε :

$$\frac{\Delta r}{2r\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}=\frac{a}{b}$$

ὅπου $\Delta r = FR$.

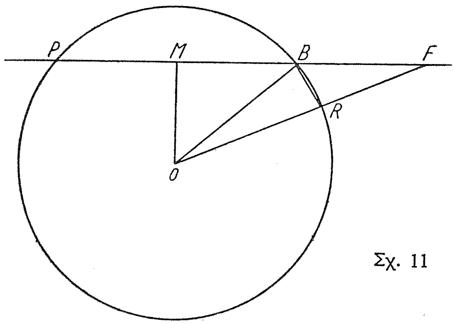
Τὸ θεώρημα (7) συμπληρώνει τὸ θεώρημα (6). Ἔστω τώρα $a : b$ λόγος τις μεγαλύτερος τῆς $\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{BM}{OM}$. Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖάν τινα OF διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου O τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον R καὶ τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς PB εἰς τὸ σημεῖον F, ὥστε

$$\frac{FR}{BR} = \frac{a}{b} \text{ (Σχ. 11).}$$

Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ δύο αὐτὰ λήμματα (θ. 6 καὶ 7) ὡς ἑξῆς :

$$(*) \quad \frac{\sec\alpha - \sec(\alpha - \Delta\alpha)}{\sec\alpha \, 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} < \operatorname{tg}\alpha < \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec\alpha}{\sec\alpha \, 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}},$$

ὅπου τὸ ἀκραῖον πρὸς τ' ἀριστερὰ μέλος τῆς ἀνισότητος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν κατωτέραν τῆς $\operatorname{tg}\alpha$ (ἐὰν $\Delta\alpha$ ἔχῃ ἐκλεγῆ καταλ-



Σχ. 11

λήλως), ἐν ᾧ τὸ δεξιὸν ἀκραῖον μέλος τῆς ἀνισότητος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἀνωτέραν τῆς $\operatorname{tg}\alpha$, καὶ

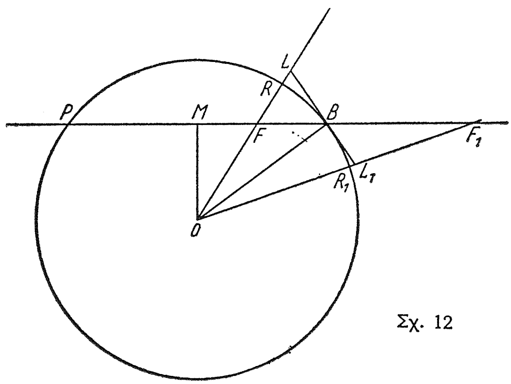
$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec\alpha}{\sec\alpha \, 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Μεταβαίνομεν εἰς τὰ θεωρήματα (8) καὶ (9). Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει ὅτι (θεώρ. 8) οἱουδήποτε ὄντος τοῦ δοθέντος λόγου

$$\frac{a}{b} > \frac{MB}{OM} \ [= \mathrm{tg}\,\alpha\ ],$$

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν OL, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον B, ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα R καὶ L, κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε

$$\frac{FR}{BL} = \frac{a}{b}\ (\Sigma\chi.\ 12).$$



Σχ. 12

Ἐπίσης (θεώρημα 9), οἱουδήποτε ὄντος τοῦ δοθέντος λόγου

$$\frac{a}{b} > \frac{MB}{OM}\,[\mathrm{tg}\,\alpha]$$

δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν OL, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς PB εἰς τὸ σημεῖον F_1, τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον R_1 καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον B τοῦ κύκλου, εἰς τὸ σημεῖον L_1 κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε

$$\frac{F_1R_1}{BL_1} = \frac{a}{b}\ (\Sigma\chi.\ 12).$$

Ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει τὰ λήμματα αὐτὰ τῇ βοηθείᾳ τῶν νεύσεων, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ κατασκευασθῶσι διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν. Εἰς τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις εἶναι

$$(**)\quad \frac{\sec\alpha - \sec(\alpha - \Delta\alpha)}{\sec\alpha \operatorname{tg}\Delta\alpha} < \operatorname{tg}\alpha < \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec\alpha}{\sec\alpha \operatorname{tg}\Delta\alpha},$$

ἢ ἀκόμη, τὸ ἀκραῖον ἀριστερὸν μέλος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν κατωτέραν τῆς $\operatorname{tg}\alpha$, καὶ τὸ ἀκραῖον δεξιὸν μέλος δύναται νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν ἀνωτέραν τῆς $\operatorname{tg}\alpha$.

Ἐπίσης εἶναι

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec\alpha}{\sec\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$ [1]

---

1. Ὁ E. J. Dijksterhuis ἑρμηνεύει, εἰς σύγχρονον συμβολισμόν, τὰ λήμματα τοῦ Ἀρχιμήδους ὡς ἑξῆς:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sec\varphi - 1}{\varphi} = 0 \quad (\text{θεώρημα } 5)$$

$$\lim_{R \to B} \frac{RF}{RB} = \lim_{\varphi \to \alpha} \frac{1 - \sec\varphi\cos\alpha}{\alpha - \varphi} = \frac{BM}{OM} = \operatorname{tg}\alpha$$

(θεωρήματα 6 - 9), ὅπου $B\widehat{O}M = \alpha$, $F\widehat{O}M = \varphi$ (Σχ. 10 καὶ 11).
Ὁ A. Czwalina δίδει τὴν ἑπομένην ἑρμηνείαν εἰς τὸ θεώρημα (7):
Ἐὰν θέσωμεν $B\widehat{O}M = \alpha$, $F\widehat{O}M = \varphi$, τότε

$$RF \equiv r\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} - 1\right), \quad BR = 2r\sin\frac{\varphi - \alpha}{2}.$$

ἡ παράστασις

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi} - 1}{2\sin\dfrac{\varphi - \alpha}{2}}$$

δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς τὰς περιλαμβανομένας μεταξὺ $\operatorname{tg}\alpha$ καὶ $+\infty$, ὅταν τὸ φ μεταβάλληται ἀπὸ α ἕως $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ἐπειδὴ $\sin \Delta\alpha < \Delta\alpha < \mathrm{tg}\, \Delta\alpha$ (πρᾶγμα γνωστὸν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη ὑπὸ ἄλλην μορφήν), αἱ ἀνισότητες (*) καὶ (**) ἐπιτρέπουσι νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος $\frac{\Delta r}{r\,\Delta\alpha}$ (σημ. τοῦ θ. 6) δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς τόσον πλησίον, ὅσον θέλομεν, πρὸς τὴν $\mathrm{tg}\,\alpha$, μὲ

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta r}{r\,\Delta\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

§7. Τὸ πρόβλημα τῶν ἀκραίων τιμῶν παρὰ τῷ Ἀρχιμήδει

Εἰς τὴν πραγματείαν του «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου» (βιβλίον β΄, θεώρ. 4) ὁ Ἀρχιμήδης ἐξετάζει τὸ ἑξῆς πρόβλημα: «Δοθεῖσα σφαῖρα νὰ τμηθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ σφαιρικὰ τμήματα νὰ ἔχωσι μεταξύ των δοθέντα λόγον». ([2], σελ. 101).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς ἀναλογίας:

$$(1) \qquad 4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n}\, a,$$

ὅπου a εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, m/n ὁ δοθεὶς λόγος καὶ x τὸ ὕψος τοῦ μεγαλυτέρου σφαιρικοῦ τμήματος.

Ὁ Ἀρχιμήδης θέτει ἓν γενικώτερον πρόβλημα: «Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΔΖ εἴς τι σημεῖον Χ καὶ νὰ κάμωμεν ὡς τὴν ΧΖ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν τετράγωνον πρὸς τὸ ΔX^2» ([2], σελ. 103).

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

$$(2) \qquad S : x^2 = (a - x) : c,$$

ὅπου S εἶναι ἐπιφάνεια δοθεῖσα, $\Delta Z = a$, $\Delta X = x$, $XZ = a - x$ καὶ c εἶναι δοθὲν μῆκος μιᾶς εὐθείας.

«Τοῦτο, (προσθέτει ὁ Ἀρχιμήδης), οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει περιορισμόν, προστιθεμένων ὅμως τῶν προβλημάτων τῶν ὑπαρχόντων ἐνταῦθα [τουτέστι τοῦ νὰ εἶναι διπλασία ἡ ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ μεγαλυτέρα ἡ ΖΘ τῆς ΖΒ ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ἐλέχθη] δὲν ἔχει περιορισμόν».

Ὑπόσχεται νὰ δώσῃ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν τοῦ προβλήματος εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ([2], σελ. 103). Ἡ λύσις ὅμως αὕτη τοῦ Ἀρχιμήδους ἀπωλέσθη. Οἱ Ἕλληνες γεωμέτραι Διοκλῆς καὶ Διονυσόδωρος ἀκμάσαντες μετὰ τὸν Ἀρχιμήδη, δὲν τὴν ἐγνώριζον . . .

Ὁ σχολιαστὴς τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος (6ος αἰ.) ἀνεῦρε τὴν ἀπολεσθεῖσαν λύσιν. . . . . Εἰς τὸ κείμενον αὐτὸ διὰ νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα καταφεύγει εἰς δύο κωνικὰς τομάς, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς ἑξῆς : τὴν παραβολὴν

$$y = \frac{x^2}{p}, \tag{3}$$

ὅπου $S = pb$, καὶ τὴν ὑπερβολὴν

$$y = \frac{cb}{a - x}. \tag{4}$$

Αἱ δύο ἐξισώσεις δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν ἀμέσως εἰς τὴν ἀναλογίαν (2).

Διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην λύσεως τοῦ προβλήματος, ὁ Ἀρχιμήδης μεταβαίνει ἐκ τῆς ἀναλογίας (2) εἰς τὴν κυβικὴν ἐξίσωσιν :

$$x^2 (a - x) = Sc = bpc, \tag{5}$$

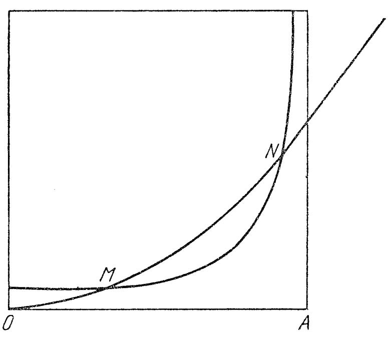
τὴν ὁποίαν ἑρμηνεύει ὡς σχέσιν μεταξὺ ὄγκων.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (5) δέχεται θετικὰς ῥίζας, ἐὰν

$$Sc \leqq \max_{0 \leq x \leq \alpha} x^2 (a - x).$$

Κατὰ ταῦτα, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου τῆς παραστάσεως $x^2(a - x)$ διὰ $0 \leqq x \leqq a$.

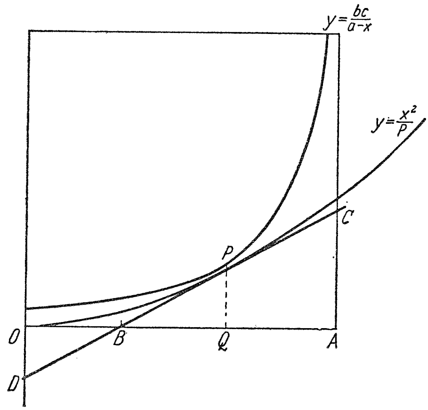
Ὁ Ἀρχιμήδης βεβαιοῖ ὅτι τὸ μέγιστον λαμβάνεται διὰ $x = \frac{2}{3} a$. Εἰς τὸ κείμενον τὸ εὑρεθὲν ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου, ὁ Ἀρχιμήδης δὲν δίδει ἑρμηνείαν τινὰ τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου ηὗρε τὴν τιμὴν αὐτήν. Τὸ κείμενον ὅμως αὐτὸ περιέχει τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι, ἐὰν $x = \frac{2}{3} a$, ἡ παράστασις $x^2(a - x)$ ἔχει μεγίστην τιμὴν ἴσην πρὸς $\frac{4}{27} a^3$. Ἐξ οὗ δυνάμεθα νὰ ἀνακατασκευάσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκραίαν τιμήν.



Σχ. 14

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν $cS > \max x^2 (a - x) = \frac{4}{27} a^3$, ἡ ἐξίσωσις (5) δὲν ἔχει θετικὰς ῥίζας. Ἐὰν $cS < \frac{4}{27} a^3$, ἡ ἐξίσωσις (5), ὡς τὸ ἀποδεικνύει ὁ Ἀρχιμήδης, ἔχει δύο ῥίζας θετικάς, αἵτινες δύνανται νὰ ληφθῶσι διὰ τομῆς τῶν καμπύλων (3) καὶ (4) (Σχ. 14).

Τέλος, ἐὰν $cS = \frac{4}{27} a^3$, τότε $x = \frac{2}{3} a$ εἶναι μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (5). Ὅθεν αἱ καμπύλαι (3) καὶ (4) κέκτηνται ἓν σημεῖον τομῆς, P, τετμημένης $\frac{2}{3}$ a (Σχ. 15).



Σχ. 15

Ἔστω $OA = a$, $OQ = \frac{2}{3} a$. Ὁ Ἀρχιμήδης φέρει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον P τῆς παραβολῆς (Σχ. 15). Ἀλλὰ κατὰ μίαν ἰδιότητα γνωστὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν παραβολήν, ἔχομεν

$$PQ = OD,$$

ὅθεν $OB = BQ = \frac{1}{3} a = QA$.

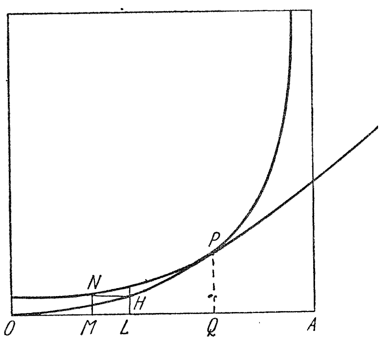
Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων BCA, BPQ, ἔχομεν

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BA}{BQ},$$

ἀλλὰ $BA = 2BQ$, ἐξ οὗ $BC = 2PB$ καὶ $PB = PC$.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα BC ἐφάπτεται τῆς ὑπερβολῆς εἰς τὸ σημεῖον P. Οὕτω, τὸ σημεῖον P εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης τῶν καμπύλων (3) καὶ (4), καὶ $x = \frac{2}{3}a$ εἶναι διπλῆ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (5).

Ἔπειτα ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ παράστασις $x^2(\alpha - x)$ ἔχει πράγματι μέγιστον διὰ $x = \frac{2}{3}a$. Ἀναπαράγομεν τὸν συλλογισμόν του: Ἔστω $OA = a$, $OQ = \frac{2}{3}a$ (Σχ. 16). Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον $M(\xi, O)$, ὅπου $\xi < \frac{2}{3}a$, καὶ φέρομεν τὴν MN κάθετον



Σχ. 16

ἐπὶ τὴν OA, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ὑπερβολήν. Τότε $y_M = MN = \frac{bc}{a-\xi}$. Τώρα φέρομεν τὴν NH παράλληλον πρὸς τὴν OA καὶ ἔστω H τὸ σημεῖον τομῆς μετὰ τῆς παραβολῆς (3):

$$y_L = HL = NM = \frac{bc}{a-\xi} = \frac{x^2}{p}.$$

Ὅθεν, $x = OL > OM = \xi$, ἐξ οὗ

$$x^2 = \frac{pbc}{a-\xi} < \xi^2,$$

ἢ $\xi^2\,(a-\xi) < pbc = Sc = \frac{4}{27}\,a^3.$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει ὅτι, ἐὰν $\frac{2}{3}\,a < \xi < a$, θὰ εἶναι $\xi^2\,(a-\xi) < \frac{4}{27}\,a^3$.

Τοῦτο δεικνύει ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιῶν τὴν ἰδιότητα: πλησίον τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἡ μία τῶν καμπύλων (ἡ ὑπερβολή) εὑρίσκεται συμπληρωματικῶς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἄλλης καμπύλης (παραβολή).

Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ κατὰ λέξιν διὰ δύο καμπύλας οἱασδήποτε $y = \frac{c}{g(x)}$ καὶ $y = f(x)$, ἐὰν μόνον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς P δὲν εἶναι σημεῖον κλίσεως (inflexion).

Τώρα προβαίνομεν εἰς τὴν ἔκθεσιν τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ ἑπόμενον πρόβλημα: Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον (ἢ τὸ ἐλάχιστον) τῆς παραστάσεως $u(x) = f(x)\,g(x)$. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $u(x)$ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν M διὰ $x = x_0$. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ x_0, πρέπει κατὰ τὸν Ἀρχιμήδη νὰ θεωρήσωμεν τὰς δύο καμπύλας:

$$y = f(x) \tag{6}$$

καὶ

$$y = \frac{M}{g(x)}. \tag{7}$$

Δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν εὐκόλως ὅτι, ἐὰν αἱ καμπύλαι (6) καὶ (7) ἔχουσι σημεῖον τομῆς P (x_1, y_1), τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς, τὸ γινόμενον $u(x) = f(x)g(x)$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ μέγιστον (ἢ ἐλάχιστον) διὰ $x = x_1$. Πράγματι, ὑποθέτομεν, ὅτι διὰ $\xi < x_1$ ἡ καμπύλη (6) διέρχεται ἄνωθεν τῆς καμπύλης (7).

$$f(\xi) > \frac{M_1}{g(\xi)}, \quad \text{μὲ} \quad M_1 = f(x_1)\, g(x_1),$$

ἢ $f(\xi)g(\xi) > M_1$. Τότε διὰ $\eta < x_1$ ἡ καμπύλη (7) διέρχεται ἄνωθεν τῆς καμπύλης (6):

$$\frac{M_1}{g(\eta)} < f(\eta),$$

ἢ $f(\eta)g(\eta) < M_1$. Οὕτω τὸ M_1 δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον διὰ $u(x)$.

Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ, ὁ 'Αρχιμήδης ἠδύνατο νὰ λάβῃ τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀκραίας τιμῆς· αὐτὴ ἡ συνθήκη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἰδικήν μας. Πράγματι, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ γινόμενον $u(x) = f(x)g(x)$ λαμβάνει τὸ μέγιστόν του M (ἢ τὸ ἐλάχιστον) διὰ $x = x_0$.

Αἱ καμπύλαι $y = f(x)$ καὶ $y = \dfrac{M}{g(x)}$ πρέπει νὰ εἶναι τότε ἐφαπτόμεναι διὰ $x = x_0$.

'Αναγράφομεν τὴν συνθήκην, ἵνα αἱ καμπύλαι αὗται ἔχωσι κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον αὐτό :

$$f'(x_0) = -\frac{M}{g^2(x_0)}\, g'(x_0)$$

ἐξ οὗ $g^2(x_0)f'(x_0) + Mg'(x_0) = 0$.
Ὅθεν, $M = f(x_0)g(x_0)$, ἐξ οὗ τελικῶς ἔχομεν τὴν συνθήκην

$$g(x_0)f'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) = 0$$

Τοῦτο εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνθήκη τοῦ 'Αρχιμήδους ἐκπεφρασμένη διὰ τοῦ συγχρόνου συμβολισμοῦ.

Ἰδοὺ πῶς ἐσκέφθη ὁ Ἀρχιμήδης διὰ νὰ εὕρῃ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ ὁποία δίδει τὸ μέγιστον εἰς τὸ $x^2(a-x)$: ἐὰν αἱ καμπύλαι (3) καὶ (4) ἔχωσι ἓν σημεῖον ἐπαφῆς P (Σχ. 15), τότε $OB = BQ$ (ἐπειδὴ PD εἶναι ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς) καὶ $PC = PB$ (ἐπειδὴ PD εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς), ὅθεν $OB = BQ = QA = \frac{1}{3}a$ καὶ $OQ = \frac{2}{3}a = x_0$. Μετὰ τοῦτο ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθεῖσα συνθήκη (ὕπαρξις τοῦ σημείου ἐπαφῆς) εἶναι διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὄχι μόνον ἀναγκαία, ἀλλὰ καὶ ἀρκετή.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ηὗρε γενικὴν μέθοδον διὰ νὰ ἀνάγῃ τὰ προβλήματα τοῦ μεγίστου εἰς προβλήματα ἐφαπτομένων.

§8. Συμπέρασμα

Τὰ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εὑρεθέντα θεωρήματα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἑπόμενα :

1. Διὰ τυχοῦσαν καμπύλην $\rho = \rho(\varphi)$, δεδομένην εἰς πολικὰς συντεταγμένας, λαμβάνει

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = \frac{\rho}{S_t} \; [= \mathrm{tg}\,\alpha],$$

ὅπου S_t εἶναι ἡ πολικὴ ὑπεφαπτομένη, r ἡ ἀνυσματικὴ ἀκτὶς τῆς ἐφαπτομένης.

2. Διὰ τὴν ἕλικα $\rho = a\varphi$, λαμβάνει

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \frac{\rho}{S_t} = \frac{I}{\varphi}, \; S_t = \rho\varphi.$$

3. Διὰ τὸν κύκλον $\rho = c$, λαμβάνει

$$\frac{\rho}{S_t} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = 0.$$

4. Αἱ σχέσεις $\dfrac{\sec(\alpha+\Delta\alpha)-\sec\alpha}{\Delta\alpha}$ καὶ $\dfrac{\sec\alpha-\sec(\alpha-\Delta\alpha)}{\Delta\alpha}$ διαφέρουσιν ὀλίγον τῆς $\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha$ δι' ἐκλογὴν ἁρμοζούσης τιμῆς τοῦ $\Delta\alpha$, ἢ

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\sec(a+\Delta\alpha)-\sec\alpha}{\Delta\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha.$$

Ὅπως εἴδομεν ὁ Ἀρχιμήδης ηὗρεν οὕτω γενικὴν μέθοδον διὰ ν' ἀναγάγῃ τὰ προβλήματα τῆς ἀκραίας τιμῆς εἰς προβλήματα ἐφαπτομένων. Μάλιστα, ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x δίδουσα τὸ μέγιστον M εἰς τὴν παράστασιν $u(x)=f(x)g(x)$ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ τεμνομένη τοῦ σημείου τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης $y=f(x)$ καὶ $y=\dfrac{M}{g(x)}$.

Εἰς τὸν σύγχρονον συμβολισμὸν ἡ συνθήκη τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀκόλουθον :

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)=0$$

Ἡ σημασία τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μεθόδων ὁλοκληρώσεως τῶν αἰώνων $16_{ου}$-$17_{ου}$ εἶναι παγκοσμίως γνωστή[1]).

Ἡ σπουδαιότης τῶν ἐργασιῶν τῶν σχετικῶν πρὸς τὰς μεθόδους διαφορίσεως ἔχει ὀλιγώτερον μελετηθῆ. Ἐν τούτοις, οἱ μεγάλοι μαθηματικοὶ τοῦ 16-17 αἰῶνος, ὡς οἱ Viète, Pascal, Fermat, Roberval, Torricelli, Cavalieri, Barrow ἐπέδειξαν ζωηρότατον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ ἑλίκων».

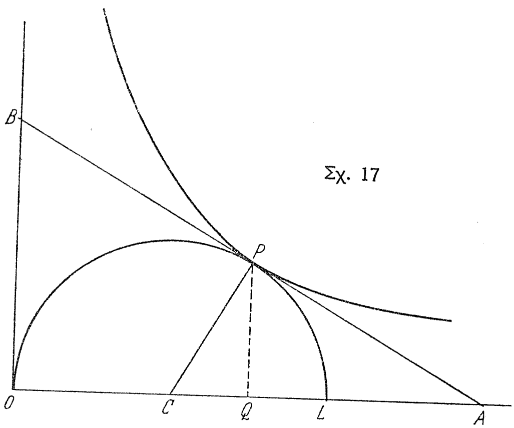
Ἡ σπουδὴ τοῦ ἱστορικοῦ ῥόλου τῆς πραγματείας «Περὶ ἑλίκων»

---

1. Βαθεῖα ἀνάλυσις τῆς ἐπιδράσεως τῆς ἐξαντλητικῆς λεγομένης μεθόδου εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων τοῦ 17ου αἰῶνος ἐδόθη τελευταίως ὑπὸ τοῦ D. T. Whiteside [10].

εἶναι θέμα, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ εἰδικὰς ἐρεύνας. Ἐνταῦθα θὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχιμήδους τῶν ἀκραίων τιμῶν.

Ἡ μέθοδος αὕτη, ὀνομαζομένη, «μέθοδος τῶν κωνικῶν» ὡς ἀπέδειξεν ὁ L. Sorokina [13] ἦτο ἤδη πολὺ γνωστὴ καὶ ἐπὶ μακρὸν χρησιμοποιουμένη ὑπὸ τοῦ Ricci καὶ τοῦ E. Torricelli. Εἰς ἐπιστολὴν ἀπευθυνομένην πρὸς τὸν Torricelli ([8], v. 3, p. 243-244), ὁ Ricci δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τὴν σχετικὴν πρὸς τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως $u = x\sqrt{x(a-\chi)}$. Οὗτος ἀνάγει τὸ πρόβλημα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης $y = \sqrt{a\chi - \chi^2}$ καὶ $y = M/\chi$ (Σχ. 17).



Σχ. 17

Χρησιμοποιοῦντες τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τοῦ κύκλου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅτι $BP = PA$ καὶ ὅτι CP εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB, ἐξ οὗ συνάγομεν ἄνευ δυσκολίας, ὅτι $OQ = \frac{3}{4}\, OL = \frac{3}{4}\, a$, ὅπου a εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου.

῾Ο Ricci παρατηρεῖ, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου πάσης παραστάσεως τῆς μορφῆς $u = f(x)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὰς καμπύλας $y = f(x)$ καὶ $y = M/x$. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ὑπερβολὴν εἶναι γνωσταί, ὁπότε ἀπομένει νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης $y = f(x)$. ῾Ο Ricci θέτει τὸ αὐτὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $y = f(x)$ εἶναι ἡ ἔλλειψις $y^2 = k^2x(a-x)$.

῾Ο E. Torricelli γενικεύει τὸ τεθὲν πρόβλημα. Ζητεῖ τὴν ἀκραίαν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $u = x^m(a-x)^n$, $0 \leqq x \leqq a$. Δεικνύει, ὅτι ἡ ἀκραία αὕτη τιμὴ λαμβάνεται, ὅταν

$$\frac{x}{a-x} = \frac{m}{n}$$

([8], v. 1, p. 2, p. 257).

᾿Αναλύοντες τοὺς συλλογισμοὺς τῆς ἀποδείξεως, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ὁ Torricelli ἐφαρμόζει καὶ αὐτὸς τὴν μέθοδον τοῦ ᾿Αρχιμήδους. Θεωρεῖ τὴν συνάρτησιν

$$z = \sqrt[n]{u} = x^{\frac{m}{n}}(a-x)$$

καὶ ἀναζητεῖ τὴν συνθήκην διὰ τὴν ὁποίαν αἱ καμπύλαι $y = a - x$ καὶ $y = \dfrac{M}{x^{\frac{m}{n}}}$ ἔχουσιν ἓν σημεῖον ἐπαφῆς.

Κατὰ ταῦτα, βλέπομεν ὅτι ἡ μέθοδος τῆς ἀκραίας τιμῆς τοῦ ᾿Αρχιμήδους ἦτο γνωστὴ καὶ ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν μαθηματικῶν τοῦ 17ου αἰῶνος.

Οἱ μαθηματικοὶ τοῦ 17ου αἰῶνος εἶχον σαφῶς κατανοήσει τὴν σπουδαιότητα τῶν ἔργων τοῦ ᾿Αρχιμήδους διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν τῶν ἀπειροστικῶν μεθόδων καὶ ἔβλεπον εἰς τὸν Ἀρχιμήδη τὸν μεγαλοφυᾶ προγενέστερόν των. Ὁ G. W. Leibniz ἔγραψεν : «Ἀναγινώσκοντες μετὰ προσοχῆς τὰ ἔργα τοῦ Ἀχιμήδους δὲν θαυμάζομεν τὰς νεωτέρας ἀνακαλύψεις τῶν γεωμετρῶν».

Βιβλιογραφία

[1] Archimedes, Opera omnia, 3 vol., Ed. I. L. Heiberg, 2. Ed. Leipzig : Teubner, 1910 - 1915.

[2] Les Oeuvres complètes d' Archimède, trad. P. Ver Eecke, Paris—Bruxelles : Desclée—de—Brouwer 1921.

[3] Dijksterhuis, E. J., Archimedes. Copenhagen: Ejnar Munksgaard 1956.

[4] Archimedes, Über Spiralen. Übers. mit Anm. und Anh., A. Czwalina.

[5] Heath, T., A History of Greek Mathematics, 2 vol. Oxford 1921.

[6] Pappus d' Alexandrie, La collection mathématique, trad. P. Ver Eecke. Paris : Bruges 1933.

[7] Simon, M., Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte. Berlin 1909.

[8] Torricelli, E., Opera, edite de G. Loria e G. Vassura. Faenza 1919-1944.

[9] Zeuthen, H. G., Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen âge. Paris: Gauthier-Villars 1902.

[10] Whiteside, D. T., Patterns of mathematical thought in the later seventeenth Century. Arch. Hist. Exact Sci. 1 (1961).

[11] Bachmakova, I. G., Differential methods in Archimedes' Works. Actes du VIII[e] Congrès International d' Histoire des Sciences, Florence, 1956, pp. 120-122.
[12] Lurié, S. J., Archimède. Moscou—Léningrand, 1945 (en russe).
[13] Sorokina, L. A., Conférence au IV Congrès des mathématiciens de l'URSS, 1961.

3. Charles Mugler. Archimède, tome II, éd. Les Belles Lettres, Paris 1971, p. 4-5.

«Τὸ τέλος τῆς πραγματείας Περὶ ἑλίκων, τὰ θεωρήματα 21-28, εἶναι ἀφιερωμένα εἰς ἓν ἐκ τῶν ἐξόχων ἐπιτευγμάτων τῆς μεγαλοφυΐας του, εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τῆς ἕλικος. Αἱ σελίδες αὗται παρουσιάζουσι κατὰ σαφῆ τρόπον τὰς συναφεῖς δυσκολίας, αἵτινες ὑπῆρχον κατὰ τὸν 3ον αἰ. π.Χ., διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἐμβαδοῦ ἐπιφανείας περιβαλλομένης ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς καὶ καμπύλης μὴ κυκλικῆς, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ μέσα τῆς ἐφευρετικότητος διὰ τῶν ὁποίων ὁ 'Αρχιμήδης ἐθριάμβευσε κατὰ τῶν δυσκολιῶν αὐτῶν. Μὲ τὸν σημερινὸν συμβολισμὸν τὸ πρᾶγμα βέβαια δὲν εἶναι δύσκολον. 'Η ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως εἰς πολικὰς συντεταγμένας, ἐχούσης τὴν ἀρχήν της εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ὡς ἀρχικὴν εὐθεῖαν περιστροφῆς κειμένην ἐπὶ τῆς τετμημένης εἶναι

$$(1) \qquad \rho = \frac{a}{2\pi}\varphi,$$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕλικος ἐκ τῆς πρώτης περιστροφῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$(2)\qquad A = \int_{o}^{2\pi} \frac{1}{2}\,\rho^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\pi^2}\int_{o}^{2\pi}\varphi^2 d\varphi, \qquad \text{ἐξ οὗ}$$

$$(3)\qquad A = \frac{a^2\,\varphi^3}{8\pi^2\,3}\Bigg|_{o}^{2\pi} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

. . . . . . ὅπερ ἐπέτυχεν ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τῶν ἀνωτέρω μνημονευθέντων θεωρημάτων.

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΜΑΡΤΥΡΙΩΝ

274. Ἐκ τοῦ E. Wiedemann, Συμβολαὶ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, Συνεδρία τῆς Φυσικο-ιατρικῆς Ἑταιρείας ἐν Ἐρλάνγκεν, τόμος 1905 σελ. 234 (Beiträge zur Geschichte der Naturwiss. Sitzungsber, d. Phys. — med. Soz. in Erlangen, Vol. 1905, S. 234).

18. Ὁ Ἀρχιμήδης ἠσχολεῖτο μὲ τεχνάσματα (σημ. ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ Ἄραβος el Kindi) τῆς γεωμετρίας (τῆς μηχανικῆς) (Hijal el Handasa), ὡς ἐπίσης μὲ καυστικὰ κάτοπτρα, ἀκόμη δὲ μὲ τὴν κατασκευὴν πολεμικῶν μηχανῶν καὶ τὸν βομβαρδισμὸν φρουρίων, προσέτι δὲ μὲ συσκευάς, αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιοῦντο ἐναντίον στρατοῦ κατὰ τὴν ὑποχώρησιν ἢ κατὰ τὴν ἀντεπίθεσιν.

275. Ἀρχιμήδης

(Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἔργου τοῦ E. Wiedemann, σελ. 247, ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἄραβος Qifti, σελ. 66):

Ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ σοφός, ὁ μαθηματικός, εἷς Ἕλλην, ἔζη ἐν Αἰγύπτῳ καὶ ἐκεῖ ἡδραίωσε τὰς γνώσεις του. Παρὰ τῶν Αἰγυπτίων ἔμαθε τὰ διάφορα μέρη τῆς γεωμετρίας, διότι αὐτοὶ παλαιόθεν εἶχον ἀσχοληθῆ μὲ αὐτήν. Συνέγραψε πολλὰ ὡραῖα ἔργα. Ὁ el Chatib (ὁ κῆρυξ) μοῦ εἶπε, καὶ οὗτος ἦτο ὁ ἁρμοδιώτερος, τὸν ὁποῖον εἶδα, κατὰ καταγωγήν, μόρφωσιν, εὐφράδειαν καὶ προθυμίαν πρὸς βοήθειαν. Οὗτος λέγει: Συνήντησα τοὺς πλέον πεπειραμένους ἐκ τῶν διασημοτέρων Σεΐχηδων τῆς χώρας μου, καὶ οὗτοι ἦσαν σύμφωνοι, ὅτι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος διήνοιξε τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἀγρῶν τῆς Αἰγύπτου καὶ ὅστις ἔθεσε τὰς βάσεις διὰ τὰ ἀναχώματα, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται σύνδεσις τοῦ ἑνὸς τόπου πρὸς τὸν ἄλλον, κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν πλημμυρῶν τοῦ Νείλου, οὗτος ἦτο ὁ Ἀρχιμήδης. Τοῦτο τὸ ἔκαμε πρὸς χάριν ἑνὸς τῶν βασιλέων τῆς Αἰγύπτου. Τὸ αἴτιον δι' αὐτὰ (σημ. τὰ ἀναχώματα) ἦτο, ὅτι οἱ κάτοικοι τῶν περισσοτέρων τόπων τῆς Αἰγύπτου, ὅταν τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου ἀνήρχοντο ἐγκατέλιπον τοὺς ἀγροὺς καὶ κατέφευγον εἰς τοὺς πλησίον λόφους, ἐκ τοῦ φόβου μήπως πνιγῶσι, καὶ ἔμενον ἐκεῖ μέχρις ὅτου τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου ὑπεχώρουν. Ὅταν ἤρχιζεν ἡ ὑποχώρησις τῶν ὑδάτων, οἱ κάτοικοι κατήρχοντο εἰς τὰ πεδινὰ μέρη καὶ ἤρχιζον νὰ σπείρουν. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως αὐτὸ εἰς τὰ κατώτατα μέρη ἔπρεπε αὐτὰ πρῶτα νὰ ξηρανθοῦν, ὁπότε σπορὰ δὲν ἐπρόφθανε νὰ γίνῃ. Ὅταν ἐπληροφορήθη αὐτὰ τὰ πράγματα ὁ Ἀρχιμήδης, ὅταν ἦτο ἐκεῖ, ἐμέτρησεν ὅλους τοὺς ἀγροὺς τῶν περισσοτέρων τόπων, ὡς πρὸς τὸ μέγιστον ὕψος τῶν ὑδάτων, εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθανον τὰ ὕδατα τοῦ Νείλου καὶ ἔκλεισεν αὐτοὺς μὲ τείχη. Μεταξὺ τῶν διαφόρων τόπων ἔκτισεν ἀναχώματα καὶ εἰς τὸ μέσον τῶν ἀναχωμάτων ἔκαμε γεφυρώματα, διὰ τῶν ὁποίων τὸ ὕδωρ ἀπὸ τὸν ἕνα τόπον ἔφθανε εἰς τὸν ἄλλον. Καὶ διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἕκαστος σπείρει τὸν ἀγρόν του χωρὶς ἀπωλείας. Ἐξ ἑκάστου ἀγροκτήματος καθώρισε ἓν μέρος, τοῦ ὁποίου τὸ εἰσόδημα διετίθετο διὰ τὴν διατήρησιν τῶν ἀναχωμάτων. Ταῦτα εἶναι μέχρι σήμερον γνωστὰ καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν χρησιμεύει ἰδιαιτέρα Ἀρχὴ εἰς τὴν Αἴγυπτον, ἡ Ἀρχὴ (Ὑπηρεσία)

---

276. Ps. Hyginus Gromaticus, De limitibus constituendis. Ed. K. Lachmann in: Die Schriften der römischen Feldmesser, Band I, Berlin 1848 (Nachdruck Hildesheim 1967), S. 166-208.

S. 183, 17 - 184, 13

τῶν ἀγρῶν καὶ πρὸς τοῦτο προσέχουν πολὺ καὶ ἐνθυμοῦμαι, ὅταν ἤμην παιδί, ἡ περιοχὴ αὐτὴ μαζὶ μὲ τὰς ἀνατολικὰς περιοχὰς τῆς Αἰγύπτου τοῦ el Gauf εἶχον ἀνατεθῆ πρὸς ἐπιθεώρησιν (ὁ θεὸς ἂς εἶναι εἰς αὐτὸν οἰκτίρμων) εἰς τὸν πατέρα μου. Εἶχεν εἰς τὴν διάθεσίν του φρουράν, ἐπιθεωρητάς, καὶ ἐνοικιαστάς. Ἡ ἀπασχόλησίς του ἦτο κοπιωδεστάτη.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔγραψε πλῆθος ἔργων διὰ τὰ πράγματα αὐτὰ καὶ δι' ὅ,τι σχετίζεται μὲ αὐτά :

1. Περὶ τοῦ ἑπταγώνου εἰς τὸν κύκλον. 2. Περὶ τῆς μετρήσεως τοῦ κύκλου. 3. Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. 4. Περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου (1 βιβλίον). 5. Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων (1 βιβλίον). 6. Περὶ τῶν τριγώνων (1 βιβλίον). 7. Περὶ τῶν παραλλήλων γραμμῶν. 8. Περὶ τῶν ὑποθέσεων διὰ τὰς ἀρχὰς (στοιχεῖα) τῆς γεωμετρίας. 9. Περὶ δεδομένων μεγεθῶν (1 βιβλίον). 10. Περὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων (1 βιβλίον). 11. Ἔργον ἐνδείξεως τῶν ὡρῶν διὰ ὑδραυλικῶν ὀργάνων, τὰ ὁποῖα ἐκτοξεύουν σφαιρίδια (1 βιβλίον).

Ὁ δὲ Muhamed ibn Ishaq el Nadim (σημ. οὗτος εἶναι ὁ συντάκτης τοῦ καταλόγου ἑλληνικῶν ἔργων, τοῦ Fihrist) ἀναφέρει τὰ ἑξῆς : «Οὗτος λέγει : Ἔμπιστον πρόσωπον μοῦ ἀνέφερε, ὅτι οἱ Ῥωμαῖοι 25 ἐκ τῶν βιβλίων τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ἔκαυσαν, ὡς περιττά. Περὶ τοῦ περιστατικοῦ ὑπάρχει λεπτομερὴς ἔκθεσις, ἡ ὁποία δὲν ἀνακοινοῦται, διότι εἶναι ἐκτεταμένη».

---

276. Ψευδο-Ὑγῖνος γεωμετρικὸς (τοπογράφος)

Πρέπει νὰ ἐρωτηθῆ κατὰ πρῶτον ποῖον εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ κόσμου, ποῖος ὁ λόγος τῆς γενέσεως ἢ τῶν συμβαινόντων, πόση εἶναι ἡ γῆ ἐν τῷ κόσμῳ . . . Διότι καὶ διὰ τὸν Ἀρχιμήδη, ἄνδρα

Quaerendum est primum quae sit mundi, que ratio oriundi aut occidenti, quanta sit mundo terra ...... Nam et Archimedem, virum praeclari ingenii et magnarum rerum inventorum, ferunt scribsisse quantum arenarum capere posset mundus, si repleretur. Credamus ergo illum divinarum rerum magnitudinem ante oculos habuisse: qua ratione dicamus «tot saeculis unus mortalium hoc scire potuerit: unus propter hoc laboravit et per incrementa umbrarum deprehendit?».

277. Eutocius, Comm. in Conica Apollonii Pergaei. Apoll. Perg. opera vol. II, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1893, p. 218, 3-15.

Δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέγετο, ἐζητήσαμεν αὐτὸ καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν 'Αρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου Συντάξεως·

278.— P. 354, 1. *Εἰς τὸ δ'.*

Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὦ φίλε ἑταῖρε 'Ανθέμιε, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσιν ἤτοι ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι, ἔστι δὲ καὶ χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσιν . . . δέδεικται δὲ ἐξόχου πνεύματος καὶ πολλῶν πραγμάτων ἐφευρέτην, λέγουν, ὅτι ἔγραψε πόσην ἄμμον θὰ ἠδύνατο νὰ χωρέσῃ ὁ κόσμος, ἐὰν ἐπληροῦτο μὲ αὐτήν. Ἂς πιστεύσωμεν, ὅτι ἐκεῖνος εἶχε πρὸ ὀφθαλμῶν τὸ μέγεθος τῶν θείων πραγμάτων δηλ. : Κατὰ ποίαν λογικὴν «εἰς διάστημα τόσων αἰώνων εἷς τῶν θνητῶν νὰ δύναται νὰ γνωρίσῃ τοῦτο : εἷς εἰργάσθη διὰ τοῦτο καὶ τὸ κατενόησε διὰ τῆς αὐξήσεως τῶν σκιῶν» ; (σημ. ὑπαινίσσεται τὴν μέτρησιν τῆς διαμέτρου τοῦ ἡλίου διὰ τῶν κυλινδρίων εἰς τὸν Ψαμμίτην).

277. Εὐτόκιος εἰς σχόλιά του τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

Διότι ἀπεδείχθη μὲν εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὸ εἰκοστὸν τρίτον θεώρημα, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουσι λόγον μεταξύ των, τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν πλευρῶν· ἐπειδὴ δὲ τὸ πρᾶγμα ἐλέγετο ὑπὸ τῶν σχολιαστῶν μᾶλλον ἐπαγωγικώτερον καὶ οὐχὶ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον, ἠρευνήσαμεν αὐτὸ καὶ τὸ ἐγράψαμεν εἰς τὴν ἔκδοσίν μας, εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ εἰς τὰ σχόλια τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Συντάξεως τοῦ Πτολεμαίου·

278.— σ. 354,1. Εἰς τὸ 4ον.

Τὸ τέταρτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ὦ φίλε συνάδελφε Ἀνθέμιε, ἐρευνᾷ μὲν κατὰ πόσους τρόπους αἱ κωνικαὶ τομαὶ καὶ μεταξύ των καὶ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου συναντῶνται ἢ ἐφαπτόμεναι ἢ τεμνόμεναι, εἶναι δὲ τοῦτο καὶ χαρίεν καὶ σαφὲς διὰ τοὺς γνωρίζοντας . . . Ἀποδεικνύονται δὲ εἰς τὸ βιβλίον αὐτὸ ὅλα διὰ τῆς εἰς *τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. εὔχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις καὶ μάλιστα τῷ Ἀρχιμήδει.*

ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅπως καὶ ὁ Εὐκλείδης ἀπέδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. Εὔχρηστον δὲ καὶ ἀναγκαῖον τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ἀποδείξεως, φαίνεται, ὅτι θεωρεῖ καὶ ὁ Ἀριστοτέλης καὶ οἱ γεωμέτραι καὶ μάλιστα ὁ Ἀρχιμήδης.

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Περὶ τὸ 510.— BOËTHIUS. Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικήν. Ῥώμη

Περὶ τὸ 530.— ΙΣΙΔΩΡΟΣ. Ἔκδοσις τοῦ κειμένου ἐν Κωνσταντινουπόλει

Περὶ τὸ 540.— ΕΥΤΟΚΙΟΣ. Σχόλια ἔργων τινῶν ἐν Κωνσταντινουπόλει

Περὶ τὸ 830.— ΛΕΩΝ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ. Ἔκδοσις τοῦ κειμένου ἐν Κωνσταντινουπόλει

Περὶ τὸ 870.— IBN QURRA. Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου ὑπὸ τοῦ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, ἀραβιστὶ

Περὶ τὸ 1036.— AL-BIRUNI. Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ, ἀραβιστὶ

1270.— MOERBEKE, WILHELM VON. Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικήν. Φλωρεντία

1450.— CREMONA, JACOB VON. Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικὴν

1462.—REGIOMONTANUS, I. (MÜLLER, I.). Μετάφρασις τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικήν.

1501.— VALLA, G. Τμήματά τινα ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λατινικήν, εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ «De rebus expetiendis et fugiendis, Venedig

1646.— VIÈTE, FRANCOIS. Opera mathematica von Francisci à Schooten, Leydensis. Repr. Hildesheim - N. York, 1970

1716.— WOLFF, CHRISTIAN. Mathematisches Lexikon. Leipzig. Repr. Hildesheim 1965

1741.— WOLFF, CHRISTIAN. Elementa matheseos universae tom. V, Halle /S. Repr. Hildesheim, 1971

1751.— TAQUET, ANDREA. Elementa geometriae plane et solide quibus accerunt selecta ex Archimede auctori Patavii

1768.— BENTON, WILLIAM. ENZYCLOPAEDIA BRITANNICA. The University of Chicago. Archimedes

1796.— KÄSTNER, A.G. Geschichte der Mathematik I. Göttingen, Repr. Hildesheim-N. York, 1970

1797.— KÄSTNER, A. G. Geschichte der Mathematik II. Göttingen, Repr. Hildesheim - N. York, 1970

1799.— ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΣ ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ. Στοιχείων μαθηματικῶν ἐκ παλαιῶν καὶ νεωτέρων, τομ. Β', 'Αρχιμήδεια θεωρήματα. Μόσχα.

1843.— SCHICK, HEINRICH-AUGUST. Über die Himmelsgloben des Anaximander und des Archimedes. Hanau

1879.— ZOTENBERG, M. H. Traduction Arabe du traité des corps flottants d'Archimède. Extrait au journal Asiatique

1882.— GÜNTHER, S. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden. Z. F. Math. Phys. 27 Suppl. hist.—lit. Abt.=Gesch. Math. 4, 5. 1-134

1882 /3.—HUNRATH, K. Über das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Gymn. Progr. Hadersleben

1884.— HUNRATH, K. Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Dezimalbrüche. Kiel

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

1895.— Hultsch, F. Archimedes, Pauly-Wissowa Real-Encyclöpädie. Stuttgart

1907.—Cantor, Moritz. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Leipzig. Repr. Stuttgart 1965

1909.— Simon, Max. Geschichte der Mathematik im Altertum. Berlin

1909.—Heiberg, I. L. Δεύτεραι Φροντίδες. In: Festkrift til H. G. Zeuthen, Kopenhagen 1909. S. 63-65

1910-11.—Suter, Heinrich. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise. Bibliotheca Mathematica 3. Folge, vol. 2, S. 2-78 (Aus Carl Schoy, Al-Biruni), Die trigonometrischen Lehren... 1927. Hannover

1916.— Heiberg, I. L. Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes. Scientia vol. 20, p. 81-89

1922.—Bosmans, H. Guillaume de Moerbeke et le Traité des corps flottants d'Archimède. Revue des Questions scientifiques

1922.— Tannery, Paul. Mémoires scientifiques, vol. 5. Paris-Toulouse

1924.— Deventer, Ch. M. van. Grepen uit de historie der Chemie. Haarlem. S. 108-127

1925.— Richardt, Th. Archimedes' beregning av $\sqrt{3}$. Norsk. Mat. Tidss-Krift 7, 73-88

1927.— Haskins, C. H. Studies in the History of Mediveal Science, 2d ed. Cambridge, Mass

1927.—48.—Sarton, G. Introduction to the History of Science, 3 vol. in 5. Baltimore

1928.— Bromwich, T. J. The methods used by Archimedes for approximating to square roots. Math. Gazette 14, 253-257

1930.— ZACHARIAS, MAX. Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Göschen Lehrbücherei Bd. 16, Berlin

1932.— BESSEL/HAGEN, E.—SPIES, O. Halbregelmässiges 14—Flach. Quellen und Studien z. Geschichte d. Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. 2. Berlin

1937.—BELL, E.T. MEN of Mathematics

1941.—SCHEFFERS, GEORG. Lehrbuch der Mathematik. Berlin

1942/3.—SCHREK, D. J. E. De sikkel van Archimedes. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 30, 1-13

1945.—BONNY, CH. Les oeuvres d'Archimède et les prongrès de la construction navale. Revue et Bulletin Technique de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles Spéciales de Louvain et de l'Uniondes Ingénieurs navals de Belgique. No. 2, 41-68

1947.— BURGER, D. Heeft Archimedes de brandspiegels uitgevonden? Faraday 17, 1-10

1948.— COHEN, MORRIS R. and DRABKIN, I. E. A Source book in Greek Science. McGraw-Hill book Co. Inc. N. York-Toronto-London

1949.— TOEPLITZ, OTTO. Die Entwiklung der Infinitesimalrechnung I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften B. LVI. Berlin - Göttingen - Heidelberg (Springer-Verlag)

1950.—LINDELÖF - ULLRICH. Einführung in die höhere Analysis. Leipzig

1951.— BECKER, OSKAR — HOFMANN, JOS. E. Geschichte der Mathematik. Bonn

1952.— WESTPHAL, WILHELM. Physikalisches Wörterbuch. Berlin-Göttingen-Heidelberg

1953-1963.—HOFMANN, JOSEPH, E. Geschichte der Mathematik I. W. de Gruyter, Berlin (Sg Göschen)

1956.— HOFMANN, JOSEPH, E. Über Viètes Konstruktion des regelmässigen Siebenecks. Centaurus vol. 4: no 3:p. 177-184

1956.— DIJKSTERHUIS, E. J. Die Mechanisierung des Weltbildes, ins deutsch übertragen von H. Habicht. Berlin-Göttingen-Heidelberg

1956.— WAERDEN, B. L. van der. Erwachende Wissenschaft. Basel-Stuttgart

1956.— NEWMAN, JAMES R. The world of Mathematics I. London

1957.— HOFMANN, JOSEPH, E. Geschichte der Mathematik II, III, W. de Gruyter. Berlin (Sg Göschen)

1957.— LEJEUNE, A. Recherches sur la catoptrique grecque. Brussels-Paris

1957.— CLAGETT, M. Three notes. Isis 48, 182f.

1960.— HOFMANN, JOSEPH, E. Der Mathematikunterricht Heft 1, Stuttgart, S. 47-49

1960.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S). 'Ανθολογία ἀρχαίων κειμένων. 'Αθῆναι, σ. 30-31, 38-40.

1960.— DE CAMP, SPRAGUE, L. The ancien engineers. Doubleday and Co. New York. Ins deutsch vom Rudolf Ritscher. Econ, Düsseldorf -Wien, 1964

1960.— MESCHKOWSKI, HERBERT. Wandlungen des mathematischen Denkens. Braunschweig

1961.— MESCHKOWSKI, HERBERT. Denkweise grosser Mathematiker. Braunschweig

1961.— Hofmann, Joseph, E. Grundlagen der Archimedischen Kreismessung. Der Mathematikunterricht 7. Heft 3. Stuttgart, S. 59-75

1962.—Mittelstrass, Jürgen. Die Rettung der Phänomene. W. de Gruyter. Berlin

1964.— Becker, Oskar. Die Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Orbis Academicus. Freiburg-München

1964.— Μεγαλη Αμερικανικη Εγκυκλοπαιδεια. Ἔκδ. Κ. Ἐμμανουὴλ Ἀθῆναι

1965.—Gardner, M. Archimedes, mathematician and inventor. New York.

1965.— Diels, Hermann. Antike Technik. Archimedes, 24. 33f. 83. 113. 114f. 200. 211. O. Zeller, Osnabrück

1966.— Σταματης, Ε.Σ. (Stamatis, E.S.). Ἀρχιμήδης. Παγκόσμιον Λεξικὸν τῶν Ἔργων. Ἐκ. Spiritus Mundi, τόμ. α', σελ. 225-232 Διευθυντής: Βασιλειος Αθ. Σπανοπουλος

1966.— Babini, I. El. método, introd. y notas Buenos Aires

1966.— Tronquart, G. Quelques réflexions sur Archimède et sa mort. In: Bull. de l'Assoc. G. Budé. Paris, S. 299-308

1967.— Clagett, M. A medieval Archimedean-type proof of the Law of the lever. In: Miscellanea A. Combes. Roma. S. 805-817

1967.— Drachmann, A. G. Archimedes and the science of Physics. Centaurus 12, 1-11

1967.— Σταματης, Ε.Σ. (Stamatis, E.S.). Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας παρ' Ἀρχιμήδει (Powers with fractional exponents by Archimedes). «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΘ', 37/38, σελ. 111-117

ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

1967.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Ἀρχιμήδεια Ι. «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΘ΄, 37/38, σελ. 150-153

1967.— MATHEMATISCHES WÖRTERBUCH. Archimedes Deutsche Akademie der Wiss. zu Berlin. Josef Naas-Hermann Lundwig Schmid. Stuttgart-Berlin

1968-1969.—SINISGALI, LEONARDO. ARCHIMEDE. Alberto Tallone, Torino

1968.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τὰ κατορθώματα τοῦ Ἀρχιμήδους. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι». 5, Ἰούλιος, Ἀθῆναι, σελ. 75-82

1968.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, E.S. (STAMATIS, E.S.). Τεχνικὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 6, Αὔγουστος, Ἀθῆναι, σελ. 61-63

1969.— MEYERS LEXIKON DER TECHNIK UND DER NATURWISSENSCHAFTEN I. Bibl. Inst. Mannheim

1970.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Ἡ Τεχνικὴ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 5, Μάϊος, Ἀθῆναι, σελ. 39-46

1970.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τὸ τηλεβόλον τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὸ ὑγρὸν πῦρ τῶν Βυζαντινῶν. Περιοδικὸν «Θέσεις καὶ Ἰδέαι», 10, Ὀκτώβριος, Ἀθῆναι, σελ. 51-53

1970.— MUGLER, CHARLES. APCHIMÈDE, tome I, De la sphère et du cylindre, La mesure du cercle, Sur les conoides et les sphéroides. Texte établi et traduit. Éd. Les Belles Lettres. Paris

1970.—DELSEDIME, PIERO. Uno strumento astronomico descritto nel corpus Archimedeo: La dioptra di Archimede, Physis, rivista internationale di storia della scienza, 2. Forschungsinstitut des Deutschen Museums, Reihe B, Abh. Nr. 6. München 1971.

1971.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.). Τὸ ἡλιοκεντρικὸν σύστημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, τόμ. 46, σελ. 65 - 84

1971.— ΣΤΑΜΑΤΗΣ, Ε.Σ. (STAMATIS, E.S.), Μηχανικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Ἀρχιμήδους. Περιοδικὸν «Θέματα Συγχρόνου Τεχνολογίας», Ἰούνιος - Ἰούλιος, Ἀθῆναι, σελ. 40 - 45.48

1971.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome II. Des spirales, De l'équilibre des figures planes, L'Arenaire, La quadrature de la parabole. Texte établi et traduit. Éd. Les Belles Lettres. Paris

1971.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome III. Des corps flottants, Stomachion, La méthode, Le livre des lemmes, Le problème des boeufs. Texte établi et traduit. Éd. Les Belles Lettres. Paris

1972.— MUGLER, CHARLES. ARCHIMÈDE, tome IV. Commentaires d'Eutocius et fragments. Éd. Les Belles Lettres. Paris.

ΓΕΩΡΓΟΥΛΗΣ, ΚΩΝΣΤ. Δ. Ἀρχιμήδης. Νεώτερον Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος. Ἔκδ. ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΠΑΣΣΑΣ. Ἀθῆναι

ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Ν.Θ., ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ, Γ. Ἀρχιμήδης. Μεγάλη Ἑλληνικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία. Ἔκδ. ΠΑΥΛΟΣ ΔΡΑΝΔΑΚΗΣ. Ἀθῆναι

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ, Α. Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἐλευθερουδάκη. Ἀθῆναι

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

Β

Γ

Δ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ε

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Ζ

Η

Θ

Ι

Κ

Λ

Μ

Ν

Ο

Π

Ρ

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

Ψ

Ω

Τύποις : 'Α/φῶν Γ. ΡΟΔΗ, Χαλανδρίου - 'Αμαρουσίου 59 — 'Αμαρούσιον

1-4

1100

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΑΠΑΝΤΑ

2

ΤΟΜΟΣ Β'