ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Γ'

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1974

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ γ΄ τόμου
ἐπεμελήθη
ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΑΠΑΝΤΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

ΤΟΜΟΣ Γ′

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1974

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ τελευταία ἐπὶ Ἑλληνικοῦ ἐδάφους γενομένη ἔκδοσις τῶν «Ἁπάντων» τοῦ Ἀρχιμήδους ἐγένετο ἐν Κωνσταντινουπόλει περὶ τὸ ἔτος 830 μ.Χ. ὑπὸ τοῦ Πρυτάνεως τοῦ αὐτόθι Πανεπιστημίου Λέοντος τοῦ Μαθηματικοῦ, διατελέσαντος προηγουμένως Ἀρχιδιακόνου τοῦ Ἱεροῦ Ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας καὶ Μητροπολίτου Θεσσαλονίκης. Ὁ Λέων αὐτὸς εἶναι ὁ ἐπινοήσας τὰ γράμματα τοῦ Ἀλφαβήτου διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς πράξεις, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Μητροπολίτου Καισαρείας Ἀρέθα[1]). Τὴν ἐπινόησιν τοῦ Λέοντος ἐπανέλαβε μετὰ 750 ἔτη καὶ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Viète (1540 - 1603).

I. Διὰ τὴν πληρεστέραν συγκέντρωσιν τῶν ἔργων, καὶ ἐν τῇ ἐπιθυμίᾳ ὅπως ἀνεύρωμεν ἔργα Ἑλλήνων μαθηματικῶν καὶ ἀστρονόμων εἰς τὴν ἀραβικήν, τῶν ὁποίων τὸ Ἑλληνικὸν κείμενον ἔχει ἀπολεσθῆ, ἀπετάθημεν εἰς βιβλιοθήκας τῆς Ἐγγὺς Ἀνατολῆς καὶ τῶν Ἰνδιῶν. Παρὰ τῆς βιβλιοθήκης τοῦ Πανεπιστημίου τῆς πόλεως Aligarh τῶν Ἰνδιῶν ἐλάβομεν τὴν πληροφορίαν, ὅτι ἐκ τῶν εἰς τὴν ἀραβικὴν 12.000 χειρογράφων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐκεῖ, τὸ πλεῖστον δὲν ἔχει καταχωρισθῆ εἰς καταλόγους καὶ ἑπομένως ἦτο ἀδύνατον νὰ παρασχεθῇ συναφὴς πληροφορία[2]).

---

[1]) K. Vogel, Akten d. XI. Internationalen Byzantinischen-Kongresses 1958, München 1960, S. 660 - 4.

[2]) Ἐπιστολὴ πρὸς ἡμᾶς τοῦ βιβλιοθηκαρίου M.H. Razni ἀπὸ 28-6-1971.

Παρὰ τῆς βιβλιοθήκης ὅμως Bankipore τῆς ἰνδικῆς πόλεως Patna ἐλάβομεν κατὰ τὸ 1969 φωτοτυπίας 40 ἔργων εἰς τὴν ἀραβικὴν (σελίδες 636), ἰδίαις δαπάναις, χάρις εἰς τὴν εὐγενῶς προσφερθεῖσαν συνδρομὴν τοῦ Ὑπουργείου τῶν Ἐξωτερικῶν (Διεύθυνσις Μορφωτικῶν σχέσεων) καὶ τῆς ἐν Νέῳ Δελχὶ Ἑλληνικῆς Πρεσβείας.

Εἰς τὸ πρὸς ἡμᾶς διαβιβασθὲν ἀντίγραφον ἐγγράφου τῆς Ἑλληνικῆς Πρεσβείας ἐν Νέῳ Δελχὶ τῶν Ἰνδιῶν πρὸς τὸ Ὑπουργεῖον τῶν Ἐξωτερικῶν[1]) ἀναφέρεται ὅτι «εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς πόλεως Patna εὑρίσκεται κατατεθειμένον ἓν βιβλίον (χειρόγραφον) Ἑ λ λ ή ν ω ν ὑπὸ τὸν τίτλον «Almu Jumuah» ὑπ' ἀριθμ. καταλόγου 2468. Τὸ ἐν λόγῳ βιβλίον περιέχει 40 θεωρήματα[2]) ἐξ ὧν δύο τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τοὺς κάτωθι τίτλους :

1. Kitab Archimidus - Fildavaré ul Mutamus.
2. Kitab Archimidus Fiusul - ul Hindsa».

Ὁ ἐκ τῆς βιβλιοθήκης Bankipore τῆς πόλεως Patna, ἀποσταλεῖς εἰς ἡμᾶς κατάλογος τῶν 40 πραγματειῶν ἐκτίθεται κατωτέρω εἰς τὴν ἀραβικὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ ὁ αὐτὸς κατάλογος διὰ λατινικῶν γραμμάτων.

Ἡ μεταγραφὴ τῶν ἀραβικῶν γραμμάτων εἰς λατινικὰ ἐγένετο ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Tübingen τῆς Γερμανίας, τῇ φιλόφρονι φροντίδι τοῦ ἐν Stuttgart Ἐκδοτικοῦ Οἴκου B.G. Teubner (Lektorat, Fr. W. Schaub). Κατὰ τὴν συναφῆ ἔρευναν ἐν Tübingen διεπιστώθη, ὅτι τὸ ὑπ' ἀριθμ. 14 ἔργον τοῦ ἀνωτέρω καταλόγου ἔχει ἤδη ἐκδοθῆ[3]). Κατόπιν ἡμετέρας ἐρεύνης διεπιστώθη, ὅτι ὑπὸ τοῦ

---

[1]) Νέον Δελχί, 3 Νοεμβρίου 1966, ἀριθμ. πρωτ. 2795.

[2]) Πρόκειται περὶ 42 πραγματειῶν

[3]) Ἄνευ παροχῆς ἑτέρων πληροφοριῶν.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Heinrich Suter ἔχει ἐκδοθῇ ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν βιβλίον τοῦ al - Biruni ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ κ.λπ.» (Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise u.s.w. Biblioth. mathem. 3 Folge, vol. 2, 1910 - 11, übersetzt und herausgegeben von Heinrich Suter, in Zürich) (ἀριθ. συνημμ. καταλόγου 40).

Ἡ ἔκδοσις αὕτη μνημονεύεται εἰς τὸν Πρόλογον τοῦ ὑπὸ τοῦ Carl Schoy ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν ἐκδοθέντος ἔργου ὑπὸ τὸν τίτλον «Μαθήματα Τριγωνομετρίας τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου al - Biruni, τοῦ περιέχοντος καὶ τὴν ἐγγραφὴν εἰς κύκλον τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al - Biruni).

Φωτοτυπίαν τοῦ ἀνωτέρω ἔργου τοῦ Suter (Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise) ἐλάβομεν φιλοφρόνως παρὰ τῆς Γερμανικῆς Ἀκαδημίας τῶν Φυσιοδιφῶν Λεοπολδίνα, τῆς γερμανικῆς πόλεως Halle (Akademie der Naturforscher Leopoldina. Halle/Saale), κατὰ τὸ 1971. Εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν τοῦ Suter περιλαμβάνονται τρεῖς ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῆς εἰς τὸν κύκλον τεθλασμένης γραμμῆς» (σελ. 12 - 15), (αἱ ὁποῖαι περιέχονται καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων» ὑπ' ἀριθ. 14), ὡς καὶ τὰ θεωρήματα «Περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ», ὡς ἀσκήσεις ὑπ' ἀριθμ. 6 καὶ 7 (σελ. 37 - 40) τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως τοῦ Suter.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Suter ἐκδοθὲν ἔργον τοῦ al - Biruni αἱ μνημονευόμεναι προτάσεις δὲν εἶναι ὅλαι τοῦ al - Biruni. Ἄλλαι εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους[1]), ἄλλαι ἀποδίδονται ὑπὸ τοῦ al -

[1]) Ἰδὲ Ἅπαντα τοῦ Ἀρχιμήδους, τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 28 - 29.

Biruni εἰς τὸν ἑαυτόν του καὶ ἄλλαι ἀποδίδονται ὑπὸ τοῦ ἰδίου εἰς τοὺς Ἄραβας : 1) Djordjani, 2) Hashbas, 3) Sidjzi, 4) Djanubi, 5) Irâq, 6) Shanni, 7) Basri, 8) Jusuf, 9) Sabbah. Μερικαὶ προτάσεις ἀποδίδονται εἰς τοὺς Ἰνδούς. Ὡς τελευταῖαι τρεῖς προτάσεις περιλαμβάνονται : ἡ εὕρεσις τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου, δεκαγώνου καὶ πενταγώνου. Αἱ προτάσεις ὅμως αὗται προέρχονται ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (IV, 6, 10, 11). Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης παρατηρήσεως συνάγεται, ὅτι τὸ ἀνωτέρω τοῦ al - Biruni βιβλίον εἶναι συλλογὴ Ἑλληνικῶν προτάσεων, μερικαὶ τῶν ὁποίων εἶναι διεσκευασμέναι ὑπὸ τῶν προηγουμένως μνημονευομένων Ἀράβων.

Τὸ ὑπ' ἀριθμ. 40 ἔργον τοῦ κατωτέρω μνημονευομένου καταλόγου φέρει τὸν τίτλον «Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ» ὑπὸ al - Biruni, *ἤτοι φέρει τὸν αὐτὸν τίτλον καὶ τὸν αὐτὸν συγγραφέα, ὡς τὸ ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Suter ἐκδοθὲν ἔργον*. Τὸ ὑπ' ἀριθμ. 40 ἔργον δὲν τὸ ἔχομεν ἀκόμη ἐν μεταφράσει. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ὅμως τῶν σχημάτων τοῦ ἔργου τούτου καὶ τοῦ ὑπὸ τοῦ Suter ἐκδοθέντος, τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ χειρογράφου ἀραβικοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Ὁλλανδικῆς πόλεως Leiden, παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουσιν μερικαὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν δύο ἔργων. Καὶ ἡ παρατήρησις αὕτη ἐνισχύει τὴν γνώμην, ὅτι τὰ εἰς τὸν al - Biruni ἀναφερόμενα ἀνωτέρω δύο ἔργα ἀποτελοῦσι συλλογὴν Ἑλληνικῶν προτάσεων.

Κατόπιν δημοσιεύσεως ἡμῶν εἰς τὸ περιοδικὸν «Πλάτων» (ἔτος ΚΔ', 1972, τόμος ΚΔ', τεύχη 47/48) καὶ εἰς τὸ περιοδικὸν «Παρνασσὸς» (τόμ. ΙΔ', ἀριθμ. 4) τοῦ εἰς ἡμᾶς ἀποσταλέντος καταλόγου 40 ἔργων τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ ἐν Patna χειρόγραφον ὑπ' ἀριθ. 2468, ἔλαβον ἐπιστολὴν (12 - 11 - 1972) τοῦ κ. Boris Rosenfeld τοῦ «Ἰνστιτούτου διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν

Ἐπιστημῶν καὶ τῆς Τεχνικῆς» τῆς Μόσχας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνεφέρετο, ὅτι ἡ μετάφρασις μερικῶν τίτλων δὲν εἶναι ἀκριβὴς καὶ ὅτι τὰ ἔργα τοῦ χειρογράφου ὑπ' ἀριθμ. 2468 τῆς βιβλιοθήκης Bankipore τῆς πόλεως Patna δὲν εἶναι 40 ἀλλὰ 42, καὶ ὅτι τὰ ἐλλείποντα εἰς τὸν κατάλογον ἡμῶν 2 ἔργα ἀφορῶσιν 1) εἰς παρατηρήσεις ἀστρονομικὰς (ἀριθμ. 1), καὶ 2) εἰς κείμενον τοῦ Εὐκλείδου ἀνῆκον εἰς τὸ β' βιβλίον τῶν Στοιχείων, ἀλλὰ μὴ περιεχόμενον εἰς τὰς μέχρι σήμερον γνωστὰς ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων (ἀριθμ. 35). Αἱ ἐξόχως ἐνδιαφέρουσαι πληροφορίαι τοῦ κ. Boris Rosenfeld ἐγένοντο ἀφορμὴ νὰ ζητήσω ἁρμοδίως καὶ ἐπειγόντως συναφεῖς πληροφορίας. Πρὸς τούτοις δέ, ἐπειδὴ τότε κατέστη ἀδύνατον νὰ εὕρω ἐν Ἀθήναις κατάλληλον μεταφραστὴν τῶν ἀκριβῶν τίτλων τῶν 40 πραγματειῶν, τοῦ ληφθέντος παρὰ τῆς βιβλιοθήκης Bankipore τῆς πόλεως Patna καταλόγου, ἀπέστειλα σχετικὰς φωτοτυπίας εἰς τὸν φίλον πολιτικὸν μηχανικὸν κ. Παῦλον Μιχαηλίδην εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ὅπως ἐκεῖ γίνῃ ἡ μετάφρασις. Μετ' ὀλίγας ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἐνεργείας μου αὐτῆς ἔλαβον ἐπιστολὴν παρὰ τοῦ ἐν Μονάχῳ φίλου διδάκτορος Heinrich Hermelink, καὶ φωτοτυπίας μεθ' ἑρμηνευτικῶν σημειώσεων, εἰς τὴν ἀγγλικήν, τοῦ καταλόγου τῶν 42 πραγματειῶν τοῦ ὑπ' ἀριθμ. 2468 χειρογράφου τῆς βιβλιοθήκης τῆς πόλεως Patna. Κατωτέρω παραθέτομεν ἐν περιλήψει, ἐκ τῆς ἀγγλικῆς, τοὺς τίτλους τῶν 40 πραγματειῶν τοῦ ἀνωτέρω χειρογράφου (ἐκτὸς τῶν ὑπ' ἀριθμ. 1 καὶ 35), ἀκολούθως δὲ φωτοτυπίαν τῶν αὐτῶν εἰς τὴν ἀραβικὴν ἀποσταλέντων ἡμῖν τίτλων τῶν 40 πραγματειῶν ὑπὸ τῆς ἐν Νέῳ Δελχὶ Ἑλληνικῆς Πρεσβείας, ὡς καὶ πίνακα τούτων διὰ λατινικῶν γραμμάτων.

Τὴν μετάφρασιν ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν ἀγγλικὴν τῶν τίτλων τῶν 40 τούτων πραγματειῶν ἐνήργησεν φιλοφρόνως τῇ φροντίδι τοῦ κ. Μιχαηλίδη ὁ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Ἀλεξανδρείας καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν Dr. Magdy Alexan, πρὸς τὸν ὁποῖον ἐκφράζομεν θερμοτάτας εὐχαριστίας.

Ἐπίσης ἐκφράζομεν θερμοτάτας εὐχαριστίας πρὸς τὸν ἐν Παρισίοις διακεκριμένον Ἕλληνα ἐπιστήμονα κ. Γεώργιον Καγιᾶν, ὁ ὁποῖος ἀπέστειλεν εἰς ἡμᾶς φιλοφρόνως φὶλμ περιέχον τὴν εἰς τὴν ἀραβικὴν σῳζομένην πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τοῦ Ὡρολογίου, ἐκ τοῦ Παρισινοῦ χειρογράφου.

Εἰς τὸν κατάλογον τὸν ὁποῖον ἀπέστειλεν εἰς ἡμᾶς ἡ βιβλιοθήκη τῆς πόλεως Patna, δὲν περιλαμβάνονται οἱ τίτλοι δύο πραγματειῶν, ἀνήκοντες εἰς τὸ μνημονευθὲν χειρόγραφον ὑπ' ἀριθ. 2468. Οἱ αὔξοντες ἀριθμοὶ τῶν τίτλων τούτων εἶναι 1, (Σπουδαῖαι ἀρχαὶ ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων) καὶ 35, (πραγματεία περιέχουσα ὕλην παραλειφθεῖσαν ἐκ τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου). Ἐκ μεταφράσεως ἐν Ἀθήναις τῆς πραγματείας ταύτης (Fol. 1936) εἴδομεν ὅτι πρόκειται περὶ ἀσκήσεων ἐπὶ τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὑπὸ τοῦ al - Kuhi. Τὴν μετάφρασιν ἔκαμε φιλοφρόνως ὁ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν Ὑφηγητὴς τῆς ἀραβικῆς κ. Ἀλῆ Νοὺρ (Aly Nour), τὸν ὁποῖον εὐχαριστοῦμεν θερμότατα.

Σημειοῦμεν ἀκόμη ὅτι ὁ τίτλος τῆς πραγματείας [Foll. 189α - 191α, A treatise on Trigonometry containing discussions on the angles of equilateral triangles] τοῦ εἰς τὴν ἀγγλικὴν ἐκδοθέντος ἐν Ἰνδίαις τόμου τοῦ περιέχοντος τὸ χειρόγραφον 2468

(Arabic Manuscripts. Mixed Contents in Mathematics and Astronomy. No. 2648. foll. 327 ; lines 32 ; site $9\frac{1}{2} \times 6$; 8×5. AL MAIMU' AH).

δὲν εἶναι ἐπιτυχής. Ἐκ γενομένης ἐν Ἀθήναις μεταφράσεως, ὁ τίτλος εἶναι «Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων» τοῦ al - Haitam. Τὸ περιεχόμενον ὅμως δὲν εἶναι περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πρόκειται 1) περὶ θεωρημάτων τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων, τοῦ 'Αρχιμήδους, περιλαμβανομένων εἰς τὴν πραγματείαν του 'Αρχαὶ τῆς γεωμετρίας. 'Ο Haitam δὲν ἀναφέρει τὸν 'Αρχιμήδη, λέγων ἁπλῶς «οἱ προγενέστεροι ἡμῶν». Καὶ 2) περὶ ἀσκήσεών τινων ἐπὶ τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων, τὰς ὁποίας ὁ Haitam ἀποδίδει εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Τέλος σημειοῦμεν, ὅτι ἡ μετάφρασις μερικῶν τίτλων ἔγινε περιληπτικῶς καὶ ὄχι κατὰ λέξιν.

II. ΟΙ ΤΙΤΛΟΙ ΤΩΝ 40 ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΑΡΑΒΕΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ ΤΩΝ

Κατάλογος τῶν 40 πραγματειῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ ὑπ' ἀριθμ. 2468 ἀραβικὸν χειρόγραφον τῆς βιβλιοθήκης τῆς πόλεως Patna τῶν 'Ινδιῶν.

Ο ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

Πραγματεῖαι	Φερόμενοι συγγραφεῖς
1. Λύσεις σπουδαίων γεωμετρικῶν καὶ ἀστρονομικῶν προβλημάτων	Ibn Qurra (826–901)
2. Πραγματεία ἀφορῶσα εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως κατὰ τὴν ἔρευναν γεωμετρικῶν προβλημάτων	»
3. Περὶ τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν	»
4. Συζητήσεις σχετικαὶ πρὸς τὸν ἀστρολάβον . . .	»
5. Πραγματεία ἀφορῶσα εἰς τὰς ἀποστάσεις καὶ τοὺς ὄγκους τῶν ἑπτὰ πλανητῶν	al-Jili (960)

6. Πραγματεία περὶ τῆς σφαιρικότητος, τοῦ ἀστερισμοῦ τοῦ Τοξότου, ἀνατολῆς τοῦ ἡλίου κ.λπ. . . . . al-Buzjani (998)
7. » περιέχουσα 4 ἀστρονομικοὺς πίνακας κ.λπ. . . . . Ibn Irâq (ἢ Arâq) (1035)
8. » περὶ τῆς διορθώσεως λαθῶν τοῦ al — Khazin. . . . . »
9. » περὶ τῆς διορθώσεως ἑνὸς τύπου ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ Μενελάου περὶ σφαιρῶν. . . »
10. » περὶ σημείων τινῶν τοῦ ἀστρολάβου κ.λπ. . . . . »
11. » συζητήσεων κριτικῶν τινων σημείων ἐπὶ τοῦ ἀστρολάβου. . . . . »
12. » ἀφορῶσα εἰς κριτικὴν συζήτησιν ἐπὶ τῆς ἐπιστήμης τοῦ ἀστρολάβου. . . . . »
13. » ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν εἰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις. »
14. » ἀφορῶσα εἰς συζητήσεις ἐπὶ ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων σχετικὰς πρὸς τὸ ἔργον τοῦ as - Sabbah. . . . . »
15. » περὶ τῶν εἰς τὸν ἀστρολάβον χρησιμοποιουμένων κύκλων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ χρόνου. . . . . »
16. » ἐπὶ συζητήσεων εἰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις τοῦ Hasib. . . . . »
17. » σχετικὴ πρὸς τὸν ἀστερισμὸν τοῦ τοξότου. . . . . »
18. » περιέχουσα ἀπαντήσεις ἐπὶ 15 γεωμετρικῶν καὶ ἀστρονομικῶν ζητημάτων. »

19. Πραγματεία περιέχουσα κριτικὰς συζητήσεις ἐπὶ τοῦ ὁρατοῦ τῆς σελήνης (ἀνασκευὴ τῆς αἱρέσεως τῶν Βατινίων) .... Ibn Irâq (ἢ Arâq) (1035)
20. » περιέχουσα τὴν λύσιν δυσκόλων προβλημάτων τοῦ 13ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου .... »
21. » περιέχουσα κεφάλαιον ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν τοῦ Irâq .... »
22. » ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ χρόνου ἀστρονομικῶν ἀρχῶν κ.λπ. .... al-Qaini
23. » περιέχουσα ὑπολογισμὸν τοῦ χρόνου ἐπὶ ἀστρονομικῆς βάσεως ἀναφερομένης εἰς τὰ ὀνόματα τῶν μηνῶν τῆς ἑβραϊκῆς ἐποχῆς κ.λπ. .... al-Khawi razmi
24. » περιέχουσα ὑπολογισμὸν καὶ σύγκρισιν ἑβραϊκῆς καὶ ἀλεξανδρινῆς ἐποχῆς .... al-Qaini
25. » ἐπὶ τῶν κινήσεων τοῦ ἡλίου κ.λπ. ... Ibn Qurra
26. » ἐπὶ τῆς μετρήσεως παραβολῶν ...... »
27. » περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων τοῦ Ἀρχιμήδους (ἀραβικὴ διασκευή) .... »
28. » περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας τοῦ Ἀρχιμήδους (ἀραβικὴ διασκευή)..... »
29. » περὶ ὑπολογισμοῦ τοῦ χρόνου εἰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις .... an-Nairizi
30. » περιέχουσα συζητήσεις ἐπὶ μαθηματικῶν τινων σημείων .... Ibn al-Bagdadi
31. » περὶ ἀνακαλύψεως πηγῶν ὕδατος .... al-Karagi
32. » περὶ ἰδιοτήτων ὀρθογωνίου τριγώνου .. al-Haitam

33.	Πραγματεία ἐπὶ τῆς μετρήσεως παραβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς.............	al-Kuhi
34.	» περιέχουσα πλήρεις συζητήσεις ἐπὶ τῶν σκιῶν, ἀπὸ ἀστρονομικῆς ἀπόψεως....	al-Biruni (973-1048)
35.	» περιέχουσα τοὺς κανόνας τῶν ἀναλογιῶν, (μέθοδος τῶν τριῶν) στηριζομένους ἐπὶ τοῦ ἰνδικοῦ συστήματος	»
36.	» περιέχουσα κινήσεις, ἀποστάσεις, ὄγκους κ.λπ. τῶν ἀστέρων	»
37.	» ἐπὶ τοῦ ἀστρολάβου	as Sagani (;)
38.	» περιέχουσα κανόνας τομῶν εἰς ἔργον τοῦ Μενελάου	as Sijzi
39.	» περιέχουσα πλήρη ἔρευναν τοῦ ἰσχυρισμοῦ ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ἡ ἀφετηρία ὅλων τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων	Ibn Abdallah
40.	» περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ	al-Biruni

Ἐκ τῶν τίτλων εἶναι φανερόν, ὅτι μερικὰ ἔργα ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι μαθηματικοῦ ἢ ἀστρονομικοῦ περιεχομένου καὶ ὅτι γενικῶς εἰς αὐτοὺς δὲν ἀναγράφονται ὀνόματα Ἑλλήνων συγγραφέων. Ταῦτα, ὡς καὶ ἡ ἀκριβὴς γνῶσις τοῦ περιεχομένου τῶν ἔργων θὰ γίνωσι γνωστά, ὅταν γίνῃ ἡ μετάφρασις αὐτῶν.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ

Authors	Titles of the treatises	
ابراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة	رسالة في وصف المعاني المستخرجه في الهندسه وعلم النجوم	(١)
" " " "	مقالة في طريق التحليل والتركيب وسائر الاعمال في المسائل الهندسية	(٢)
" " " "	الرسالة في رسم القطوع الثلاثة	(٣)
" " " "	رسالة في الاسطرلاب	(٤)
كوشيار ابن اللبان الجيلي	رسالة في الابعاد والاجرام	(٥)
ابو الوفا محمد البوزجاني	رسالة في اقامة البرهان على الدوائر من الفلك من قوس النهار وارتفاع نصف النهار وارتفاع الوقت	(٦)
ابو نصر منصور	رسالة في براهين اعمال جدول التقويم في زيج حبش الحاسب -	(٧)
" "	رسالة في تصحيح ما وقع لابي جعفر من السهو في زيج الصفائح	(٨)
" "	رسالة في اصلاح شكل من كتاب مانالاوس في الكريات	(٩)
" "	رسالة في البرهان على حقيقة مسألة وقعت بين ابي حامد وبين منجمي الري منازعة وهي من اعمال الاسطرلاب	(١٠)
" "	رسالة في مجازات دوائر الاسطرلاب والسموت	(١١)
" "	رسالة في البرهان على عمل محمد بن صباح (في الاسطرلاب)	(١٢)
ابو نصر منصور بن علي بن عراق	رسالة في معرفة التقاويم الجداول المسماة بجدول الدقائق	(١٣)
" " "	رساله في البرهان على عمل محمد بن صباح في امتحان الشمس	(١٤)
" " " "	رسالة في الدوائر التي تحد الساعات الزمانية وبعض ما يتصل بعمل الاسطرلاب	(١٥)
" " "	رسالة في البرهان على عمل حبش في مطالع السمت في زيجه	(١٦)
" " "	رسالة في معرفة القسي الفلكية بعضها من بعض بطريق غير طريق معرفتها بالشكل القطاع والنسبة المؤلفة	(١٧)
" " "	رسالة في الجواب عن بعض مسائل الهندسة	(١٨)
" " "	رسالة في كشف عوار الباطنية بما هو على عامتهم في رؤية الاهلة	(١٩)
" " "	رسالة في حل شبهة عرضت له في المقالة الثالثة من كتاب الاصول	٢٠

	Titles of the treatises:-	Authors:-
(٢١)	فصل فی کریة السماء	ابو نصر منصور بن علی بن عراق
(٢٢)	رسالة فی استخراج ساعات ما بین طلوع الشمس [الفجر] وطلوع الشمس کل یوم من ایام السنة	ابو الحسن علی بن عبد الله بن محمد بن بادشاه القاشی
(٢٣)	رسالة فی استخراج تاریخ الیهود واعیادهم	ابو جعفر محمد بن موسی الخوارزمی
(٢٤)	رسالة فی استخراج تاریخ الیهود	ابو الحسن علی بن عبد الله بن بادشاه القاشی
(٢٥)	کتاب فی حرکات الشمس	ابراهیم بن سنان بن ثابت بن قرة
(٢٦)	کتاب فی مساحة قطع المخروط المکافی	" " "
(٢٧)	کتاب فی الدوائر المتماسة	" " "
(٢٨)	کتاب فی اصول الهندسة	" " "
(٢٩)	رسالة فی تخطیط الساعات الزمانیة فی کل قبة	فضل بن حاتم التبریزی
(٣٠)	رسالة فی المقادیر المشترکة والمتباینة	ابو عبد الله الحسن بن محمد المعروف بابن البغدادی
(٣١)	کتاب انباط المیاه الخفیة	ابو بکر محمد الحبشی الحاسب الکرخی -
(٣٢)	رسالة فی خواص المثلث من جهة العمود	ابن الهیثم
(٣٣)	رسالة فی مساحة المجسم المکافی	ابو سهل بن رستم القوهی
(٣٤)	افراد المقال فی امر الظلال	ابو الریحان احمد بن محمد البیرونی
(٣٥)	رسالة فی اشکال الهندسة	" " "
(٣٦)	تمهید المستقر فی تحقیق معنی الممر	" " "
(٣٧)	رسالة فی کیفیة تسطیح الکرة علی سطح الاسطرلاب	احمد بن محمد بن حسین الصنعانی
(٣٨)	رسالة فی الشکل القطاع	احمد بن محمد بن عبد الجلیل السنجزی
(٣٩)	رسالة فی ان الاشکال کلها من الدوائر	نصر بن عبد الله
(٤٠)	رسالة فی استخراج الاوتار فی الدائرة	ابو الریحان محمد بن احمد البیرونی

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

1) Ibrāhīm Ibn Sinān Ibn Ṯābit Ibn Qurra : Risāla fī waṣf al-maʿānī 'l-mustaḫraǧa fi 'l-handasa wa-ʿulūm an-nuǧūm

gest. : 335 = 946

2) " : Maqāla fī ṭarīq at-taḥlīl wa't-tarkīb wa-sāʾir al-aʿmāl fi 'l-masāʾil al-handasīja

3) " : Risāla fī rasm al-quṭūʿ aṯ-ṯalāṯa

4) " : Risāla fi 'l-asṭurlāb

5) Kušjār Ibn al-Labbān al-Ǧīlī : Risāla fi 'l-abʿād wa'l-aǧrām

lebte : 350 = 966

6) Abu 'l-Wafāʾ Muḥammad Ibn Muḥammad al-Būzǧānī : Risāla fi iqāmat al-burhān ʿalā 'd-dawāʾir min al-falak min qaus an-nahār wa'rtifāʿ al-waqt

gest. : 388 = 998

7) Abū Naṣr Manṣūr Ibn ʿAlī Ibn ʿIrāq : Risāla fī barāhīn aʿmāl ǧadwal at-taqwīm

gest.vor : 427 = 1036

8) " : Risāla fī taṣḥīḥ mā waqaʿa li-Abī Ǧaʿfar min as-sahw fī zīǧ aṣ-ṣafāʾiḥ

9) " : Risāla fī iṣlāḥ šakl min kitāb Menelaos fi 'l-kurījāt

10) " : Risāla fi 'l-burhān ʿalā ḥaqīqat masʾala waqaʿat baina Abī Ḥāmid wa-baina munaǧǧimi 'r-raij munāzaʿa wa-hija min aʿmāl al-asṭurlāb

2

11) Abu Nasr Mansur Ibn ʿAli Ibn Iraq : Risala fi magazat dawa'ir al-asturlab wa's-samawat

12) " : Risala fi 'l-burhan ʿala ʿamal Muhammad Ibn Sabah fi 'l-asturlab

13) " : Risala fi maʿrifat taqawim al-gadawil al-musammat bi-gadwal ad-daqa'iq

14) " : Risala fi 'l-burhan ʿala ʿamal Muhammad Ibn Sabah fi 'mtihan as-sams

gedruckt

15) " : Risala fi 'd-dawa'ir allati tahudd as-saʿat az-zamanija wa-baʿd ma jattasil biʿamal al-asturlab

16) " : Risala fi 'l-burhan ʿala ʿamal Habas fi matali' as-samt fi zigihi

17) " : Risala fi maʿrifat al-qusij al-falakija bitariq gair tariq maʿrifatiha bi 's-sakl al-qattaʿ wa'n-nisba 'l-mu'allafa

18) " : Risala fi 'l-gawab min baʿd masa'il al-handasa

19) " : Risala fi kasf ʿawar al-Batinija bima huwa ʿala ʿammatihim fi ru'jat al-ahilla

20) " : Risala fi hall subha ʿaradat fi 'l-maqala at-talita ʿasar min K. al-usul

3 (3

21) Abū Naṣr Manṣūr Ibn ʿAlī Ibn ʿIraq : Faṣl fī kurījāt as-samāʾ

22) Abu 'l-Ḥasan ʿAlī Ibn ʿAbdallāh Ibn Muḥammad Ibn Pādšāh al-Qāšī : Risāla fī 'stiḫrāǧ sāʿāt mā baina ṭulūʿ al-faǧr wa-ṭulūʿ aš-šams kull jaum min aijām as-sana

23) Abū Ǧaʿfar Muḥammad Ibn Mūsā 'l-Ḫuwārizmī : Risāla fī 'stiḫrāǧ tārīḫ al-jahūd wa-aʿjādihim

gest. : nach : 232 = 846 :

24) Abu 'l-Ḥasan ʿAlī Ibn ʿAbdallāh Ibn Pādišāh al-Qāšī : Risāla fī 'stiḫrāǧ tārīḫ al-jahūd

25) Ibrāhīm Ibn Sinān Ibn Ṯābit Ibn Qurra : Kitāb fī ḥarakat aš-šams

26) : Kitāb fī misāḥat qaṭʿ al-maḫrūṭ al-mukāfī

27) " : Kitāb fī 'd-dawāʾir al-mutamāssa

28) " : Kitāb fī uṣūl al-handasa

29) Faḍl Ibn Ḥātim an-Nairīzī : Risāla fī taḫṭīṭ as-sāʿāt az-zamānīja fī kull qubba

gest. um : 310 = 922

30) Abū ʿAbdallāh al-Ḥasan Ibn Muḥammad Ibn al-Baġdādī : Risāla fī 'l-maqādīr al-muštaraka wa'l-mutabājina

31) Abū Bakr Muḥammad Ibn al-Ḥusain al-Ḥabšī 'l-Ḥāsib al-Karaǧī : Kitāb inbāṭ al-mijāh al-ḫafīja

32) Abū ʿAlī Muhammad Ibn al-Hasan Ibn al-Haitam : Risāla fī hawāss al-mutallat min gihat al-ʿamūd
gest. ß um ß 430 = 1038

33) Abū Sahl Waigan Ibn Rustum al-Kūhī : Risāla fī misāhat al-mugassam al-mukāfī
gest. : um : 390 = 1000

34) Abū 'r-Raihān Muhammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī : Ifrād al-maqāl fī amr az-zilāl
gest. : 440 = 1048

35) " : Risāla fī aškāl al-handasa

36) " : Tamhīd al-mustaqarr fī tahqīq maʿna 'l-mamarr

37) Ahmad Ibn Muhammad Ibn Husain as-Sanʿānī : Risāla fī kaifījat tastīh al-kura ʿalā sath al-asturlāb

38) Ahmad Ibn Muhammad Ibn ʿAbd-al-Galīl as-Singarī : Risāla fī 'š-šakl al-qattāʿ

39) Nasr Ibn ʿAbdallāh : Risāla fī anna 'l-aškāl kulluhā min ad-dawāʾir

40) Abū 'r-Raihān Muhammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī : Risāla fī 'stihrāg al-autār fi 'd-dāʾira

III. ΤΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ ΣΩΖΟΜΕΝΑ ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΑΙ ΑΙ ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

1. Λήμματα α'. Προτάσεις 15.

Μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ Ibn Qurra (826 - 901).

Μετάφρασις ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ I. Gravius. Ἔκδ. S. Foster, Λονδῖνον 1659.

Μετάφρασις ἐκ τῆς λατινικῆς εἰς τὴν γαλλικὴν ὑπὸ Paul ver Eecke, Bruges (Βελγίου) 1921.

Μετάφρασις ἐκ τῆς γαλλικῆς εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν καὶ ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1965.

2. Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων. Προτάσεις 13.
3. Περὶ κύκλων. Προτάσεις 2.
4. Κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου[1]). Προτάσεις 2.

Μετάφρασις τῶν προηγουμένων ὑπ' ἀριθμ. 2, 3, 4 ἔργων ἐκ τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ Ibn Qurra.

Μετάφρασις τούτων ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ Carl Shoy[2]). Ἔκδοσις Julius Ruska - Heinrich Wieleitner, Hannover 1927.

---

[1]) Αἱ ἀνωτέρω ὑπ' ἀριθμ. 2,3,4 πραγματεῖαι φέρονται εἰς τὴν ἀραβικήν, καὶ τὴν ἐκ ταύτης γερμανικὴν μετάφρασιν, ὡς μία πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου», περιέχουσα 17 προτάσεις. Ἐκ τῆς μελέτης ὅμως τῶν προτάσεων τούτων ὁδηγηθέντες προέβημεν εἰς τὸν διαχωρισμὸν αὐτῶν εἰς τὰς τρεῖς ὡς ἄνω πραγματείας ὑπ' ἀριθμ. 2,3,4. Τὴν ἐνέργειαν ἡμῶν ταύτην αἰτιολογοῦμεν κατωτέρω.

[2]) Ἰδὲ ὑποσημείωσιν [1]) εἰς σελ. XXVIII.

Μετάφρασις τούτων ἐκ τῆς γερμανικῆς εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1968.

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου τούτων εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1971.

5. Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων. Προτάσεις 14.

Μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ Ibn Qurra.

Μετάφρασις ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ὑπὸ τοῦ ἐκ Λιβάνου τελειοφοίτου τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου κ. Henri Tadros, δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1971.

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1971.

6. Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Προτάσεις 2. (Εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὄχι τοῦ Ἥρωνος).

Μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ al - Biruni. Καὶ αἱ 2 προτάσεις περιέχονται εἰς τὸ βιβλίον τούτου «Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ» (ὡς αἱ ὑπ' ἀριθμ. 6 καὶ 7 ἀσκήσεις), ὡς ἀνεφέρθη ἤδη ἀνωτέρω[1]). Τὸ βιβλίον τοῦτο εἶναι περίπου τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὑπ' ἀριθμ. 40 τοῦ ἀνωτέρω μνημονευθέντος καταλόγου. Ὡς πρώτη πρότασις τοῦ βιβλίου αὐτοῦ (τῆς γερμανικῆς μεταφράσεως, σελ. 12 - 15) περιέχεται ἡ ὑπ' ἀριθμ. 14 πρότασις περὶ τῆς διαιρέσεως τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης ἐν κύκλῳ τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύ-

---

[1]) H. Suter, «Buch von der Auffindung der Sehnen im Kreise» (Biblioth. mathem. 3 Folge, vol. 2, 1910 - 11).

κλων» μὲ τοὺς τρεῖς τρόπους ἀποδείξεως, ἡ ὁποία ἐπομένως περιεσώθη ὑπὸ δύο μεταφραστῶν καὶ τοῦ al - Biruni καὶ τοῦ Ibn Qurra, ὁ ὁποῖος ἔχει μεταφράσει τὴν πραγματείαν «Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων» (ἀριθμ. 27 τοῦ ἀνωτέρω καταλόγου).

Μετάφρασις ὁλοκλήρου τοῦ βιβλίου ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ H. Suter, Zürich 1910.

Μετάφρασις τῶν δύο ἀνωτέρω προτάσεων ὑπ' ἀριθμ. 6 καὶ 7 εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ἐκ τῆς γερμανικῆς ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, 'Αθῆναι 1971.

'Ανακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῶν δύο τούτων προτάσεων εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ 'Αρχιμήδους ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, 'Αθῆναι 1971.

7. 'Α ρ χ α ὶ τ ῆ ς γ ε ω μ ε τ ρ ί α ς. Προτάσεις 19.

Μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ Ibn Qurra.

Μετάφρασις ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ὑπὸ Henri Tadros, 'Αθῆναι 1971.

'Ανακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ 'Αρχιμήδους ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, 'Αθῆναι 1971.

8. Π ε ρ ὶ τ ο ῦ ἡ μ ι κ α ν ο ν ι κ ο ῦ 14 - ἑ δ ρ ο υ. Πρότασις 1.

Μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ κειμένου εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπὸ Ibn Qurra.

Μετάφρασις ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ Bessel/Hagen - O. Spies, Berlin 1932.

Μετάφρασις ἐκ τῆς γερμανικῆς εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν ὑπὸ Ε.Σ. Σταμάτη, 'Αθῆναι 1971.

Καὶ ἡ ἔκδοσις τοῦ Γ' τόμου τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ ἦτο ἀνέφικτος, ἐὰν δὲν ἐξεδηλοῦτο ἀμέριστον τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ Προέδρου τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, καθηγητοῦ τοῦ Ἐθνικοῦ Μετσοβίου Πολυτεχνείου κ. Ἀλεξάνδρου Σφήκα.

Τόσον πρὸς τὸν Πρόεδρον, καθηγητὴν κ. Ἀλέξανδρον Σφήκαν, ὅσον καὶ πρὸς τὴν Διοικοῦσαν Ἐπιτροπὴν τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος ἐκφράζω εὐγνωμόνως, τὰς ἀπείρους εὐχαριστίας μου.

Ἔγγραφον ἐν Ἀθήναις κατ' Ἰανουάριον 1973

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

I. Εἰς τὸν τρίτον τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους περιλαμβάνονται αἱ πραγματεῖαι αὐτοῦ αἱ διασωθεῖσαι εἰς τὴν ἀραβικήν. Αὗται εἶναι :

1. Λήμματα α′ (Liber assumptorum).
2. Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων.
3. Περὶ κύκλων.
4. Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου (μετὰ συναφοῦς κατασκευῆς τοῦ Ἄραβος al - Haitam ?).
5. Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων.
6. Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.
7. Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας.
8. Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου.
9. Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους.

II. Ὁ I. L. Heiberg[1]) εἰς τὴν πραγματείαν Λήμματα ἔχει δώσει τὸν τίτλον Liber assumptorum (Βιβλίον Λημμάτων). Ὁ ἴδιος ὅμως σημειώνει, ὅτι ὁ Ἑλληνικὸς τίτλος αὐτῆς ὑπῆρξε Λήμματα. Αἱ προτάσεις τῆς πραγματείας αὐτῆς ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐπίπεδον γεωμετρίαν. Ὑπὸ τὸν αὐτὸν τίτλον Λήμματα μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ ἔργον του Ὀχουμένων, βιβλίον β′, θεώρημα 6, πραγματεία περιέχουσα πρότασιν ἀναφερομένην

[1]) Opera II, Leipzig 1913, σελ. 511.

εἰς κωνικὰς τομάς. Ἡ πραγματεία αὕτη δὲν διεσώθη. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον Λήμματα θὰ ἀπετελεῖτο ἐκ δύο βιβλίων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶναι τὸ διασωθὲν καὶ τὸ δεύτερον τὸ ἀπολεσθέν. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον σημειοῦμεν ὡς τίτλον τοῦ διασωθέντος εἰς τὴν ἀραβικὴν βιβλίου «Λήμματα α'», ἐν ᾧ τὸ ἀπολεσθὲν τὸ σημειοῦμεν εἰς τὸν οἰκεῖον κατάλογον τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων «Λήμματα β'».

III. Ἡ πραγματεία περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου, ὡς περιεσώθη περιλαμβάνει 17 προτάσεις. Ἐκ τούτων ὅμως μόνον αἱ 2 τελευταῖαι, αἱ ὑπ' ἀριθμ. 16 καὶ 17 ἀφορῶσιν εἰς τὸ ἑπτάγωνον. Αἱ ὑπ' ἀριθμ. 1 - 13 ἀναφέρονται εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐν ᾧ αἱ ὑπόλοιποι 2, αἱ ὑπ' ἀριθμ. 14 καὶ 15, ἀναφέρονται εἰς κύκλους.

Ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν του Λήμματα α', εἰς τὴν πρότασιν 5, ἀναφέρεται εἰς ἰδικήν του πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον : Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων. Θεωροῦμεν δὲ λίαν πιθανόν, ὅτι αἱ ὑπ' ἀριθμ. 14 καὶ 15, μνημονευόμεναι προηγουμένως προτάσεις, ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἀπολεσθεῖσαν πραγματείαν Περὶ κύκλων, τὴν ἀναφερομένην ὑπὸ τῶν Ἀράβων.

Τὸ ἀραβικὸν χειρόγραφον τῆς περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους (αἱ 17 προτάσεις, ὡς ἀνωτέρω σημειοῦται) εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐν Καΐρῳ «Βιβλιοθήκην τοῦ Ἀντιβασιλέως», ὡς ἀναφέρεται εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τῆς ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν μεταφράσεως αὐτῆς ὑπὸ τοῦ Carl Schoy[1]).

IV. Ἀμέσως μετὰ τὴν καταχώρησιν τῶν δύο προτάσεων περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου παραθέτομεν συναφῆ περὶ ἑπταγώνου

---

1) Carl Schoy : Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al - Biruni, ed. J. Ruska - H. Wieleitner, Hannover 1927, S. 84 - 91.

πρότασιν, φερομένην ὡς τοῦ Ἄραβος al - Haitam, μεταγλωττίσαντες αὐτὴν ἐκ τῆς γερμανικῆς ἐκ τοῦ μνημονευθέντος ἤδη βιβλίου τοῦ Carl Schoy.

Ὁ al - Haitam, ὁ ὁποῖος θὰ εἶχεν Ἑλληνικὰς πηγὰς περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐλέγχει τὸν Ἀρχιμήδη, ἐν τῇ ἀγνοίᾳ του, ὅτι οὗτος ἀνέμιξε ἀνόμοια πράγματα, μὴ λυόμενα δηλ. διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου ! ! Ὅπως φαίνεται, ὁ al - Haitam δὲν ἀντελήφθη ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ ἐν προκειμένῳ κινητικὴν γεωμετρίαν, ὡς πράττει τοῦτο καὶ διὰ τὴν τριχοτόμησιν ὀξείας γωνίας διὰ κανόνος καὶ διαβήτου (πρότασις 8 τῆς πραγματείας Λήμματα α΄). Θεωροῦμεν ἀκόμη πολὺ πιθανόν, ὅτι ὁ al - Haitam θὰ εἶχεν Ἑλληνικὴν πραγματείαν περὶ τῆς ἐγγραφῆς τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου εἰς κύκλον διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν.

V. Ὡς πρὸς τὰ ἀπολεσθέντα συγγράμματα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὰς συναφεῖς πληροφορίας τῶν Ἀράβων[1]), ἂς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν ἐνταῦθα σχετικάς τινας λεπτομερείας ἀναφερομένας εἰς τὸν ἀραβικὸν κατάλογον (Fihrist) ἔργων Ἑλλήνων Μαθηματικῶν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀρχιμήδης» :

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

«Κάποιος ἀξιόπιστος μοῦ διηγήθη, ὅτι οἱ Ἕλληνες ἔκαυσαν 15 βιβλία τοῦ Ἀρχιμήδους ὡς περιττὰ . . . Ἀναφέρομεν μόνον τὰ εἰσέτι ὑπάρχοντα συγγράμματα : Δύο βιβλία περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Ἓν βιβλίον περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Ἓν βιβλίον περὶ τῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 7 μέρη. Ἓν βιβλίον περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων. Ἓν βιβλίον περὶ τριγώνων. Περὶ παραλλήλων γραμμῶν. Βιβλίον Λημμάτων. Βιβλίον, Δεδομένα. Ἓν βιβλίον περὶ τῶν ἰδιοτή-

---

[1]) Ἰδὲ τόμον Α΄, μέρος Α΄, σελ. 32 - 33.

των τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἓν βιβλίον περὶ τῶν ὑδραυλικῶν ὡρολογίων, τὰ ὁποῖα ἐκσφενδονίζουσι λίθους»[1]).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων ἔργων δὲν ἐσώθησαν : 1) Τὸ βιβλίον περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. 2) Τὸ βιβλίον περὶ τριγώνων. 3) Τὸ βιβλίον περὶ παραλλήλων γραμμῶν. 4) Τὸ βιβλίον Δεδομένα.

Ἐξ ἐνδελεχοῦς μελέτης τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἔχομεν ὑπ' ὄψει, συνάγομεν τὸ συμπέρασμα, ὅτι πολλαὶ τῶν εἰς τὴν ἀραβικὴν διασωθεισῶν πραγματειῶν μαθηματικοῦ καὶ ἀστρονομικοῦ περιεχομένου, φέρονται ὑπὸ τὸ ὄνομα τῶν Ἀράβων μεταφραστῶν καὶ ὄχι ὑπὸ τὸ ὄνομα τῶν Ἑλλήνων συγγραφέων.

VI. Ἡ ὕπαρξις τοῦ προηγουμένως μνημονευθέντος ὡς ἀπολεσθέντος ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους ὑπὸ τὸν τίτλον «Δεδομένα» διασημαίνεται ἐμμέσως καὶ ἐκ τοῦ Ἄραβος al - Haitam, ὅστις εἰς τὴν εἰς ἑαυτὸν ἀποδιδομένην πραγματείαν, Περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου, χρησιμοποιεῖ ἐπανειλημμένως τοὺς Ἑλληνικοὺς ὅρους «δεδομένος» καὶ «δεδομένα», οἱ ὁποῖοι ἀποδίδονται ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν ἐσφαλμένως διὰ τῆς λέξεως Erkannt ἀντὶ (statt) gegeben. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω διασημάνσεως καὶ τῆς ὅλης ἑλληνικωτάτης διατυπώσεως τῆς ἀποδείξεως περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου τοῦ al - Haitam συνάγομεν μετὰ μεγάλης πιθανότητος τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ al - Haitam κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου διὰ κωνικῶν τομῶν εἶναι διασκευὴ Ἀρχιμηδείου λύσεως

[1]) Heinrich Suter, Das mathematische Verzeichnis in Fihrist des Ibn Abi Jakub an - Nadim, ins deutsch übersetzt. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. 36 Suppl., p. 1 - 87, 1892 (Kitab al - Fihrist, éd. arabe de Gust. Flugel).

τοῦ προβλήματος καὶ ἀκριβῶς διὰ τὸν λόγον αὐτὸν περιελάβομεν αὐτὴν εἰς τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν. Σημειωτέον ὅτι ὑπὸ τὸν τίτλον Δεδομένα σῴζεται πραγματεία τοῦ Εὐκλείδου περιέχουσα καὶ σπουδαίας τριγωνομετρικὰς προτάσεις[1]).

VII. Αἱ πραγματεῖαι Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων (14 προτάσεις) καὶ Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας (19 προτάσεις ἐπιπεδομετρίας) μετεφράσθησαν ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν ἑλληνικὴν δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος[2]).

Ἐξ ἁπλῆς ἀναγνώσεως τῶν δύο προηγουμένων πραγματειῶν οἱ γνωρίζοντες τὰ εἰς τὴν ἑλληνικὴν διασωθέντα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους πείθονται, ὅτι ἐν ᾧ τὸ περιεχόμενον εἶναι Ἀρχιμήδειον, προερχόμενον κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν ἐκ τῶν πρωτολείων ἔργων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα θὰ ἐγράφησαν ὅτε ὁ Ἀρχιμήδης ἦτο ἔφηβος ἀκόμη, ἡ διατύπωσις εἰς πλεῖστα σημεῖα τῶν ἀποδείξεων δὲν εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους, διότι ὁ Ἀρχιμήδης δὲν εἶναι τόσον λεπτομερὴς καὶ παιδαγωγὸς κατὰ τὴν διατύπωσιν, ὅπως εἶναι ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα του. Οἱ μεταβαλόντες ὅμως τὴν διατύπωσιν τῶν δύο ἀνωτέρω πραγματειῶν ὑπερέβησαν κατὰ πολὺ καὶ τὴν Εὐκλείδειον διατύπωσιν, διότι παραθέτουσι διασαφήσεις κατὰ τὰς ἀποδείξεις, αἱ ὁποῖαι οὔτε ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ τεθῶσι, πολλῷ μᾶλλον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους.

VIII. Κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν αἱ διασαφήσεις εἰς ἔργα Ἑλληνικὰ μαθηματικοῦ καὶ ἀστρονομικοῦ περιεχομένου, σῳζόμενα εἰς τὴν ἀραβικήν, ὀφείλονται εἰς Βυζαντινοὺς λογίους, οἱ ὁποῖοι, ἐπειδή,

[1]) Ἰδὲ Μεγάλη Παιδαγωγικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία, λ. Εὐκλείδης.

[2]) Ἀβλεπτήματά τινα προερχόμενα ἐκ κακῆς ἐκτυπώσεως ὡρισμένων μερῶν τοῦ ἀραβικοῦ χειρογράφου ἢ ἐκ παραλείψεων τῶν κατὰ καιροὺς ἀντιγραφέων διωρθώθησαν ὑπὸ τοῦ διακεκριμένου Ἕλληνος μαθηματικοῦ κ. Δημητρίου Ν. Βάθη, πρὸς τὸν ὁποῖον ἐκφράζομεν θερμοτάτας εὐχαριστίας.

ὡς φαίνεται, ἐχρησιμοποίουν τὰ ἔργα αὐτὰ εἰς τὰ Σχολεῖα, εἶχον παρεμβάλει ἰδικάς των διασαφήσεις τῶν ἀποδείξεων, διὰ νὰ καταστήσωσι τὸ περιεχόμενον τῶν προτάσεων εὐκόλως κατανοητὸν εἰς τοὺς μαθητάς των. Τὴν γνώμην αὐτὴν συνάγομεν ἐκ τοῦ ἑξῆς περιστατικοῦ :

Κατὰ τὸ ἔτος 823 ὁ Χαλίφης al - Mamun, ὅταν ἐνίκησεν ἐν Μ. Ἀσίᾳ τὸν αὐτοκράτορα τοῦ Βυζαντίου Μιχαὴλ τὸν Β', ἔθεσεν ὅρον, μεταξὺ ἄλλων, διὰ τὴν σύναψιν εἰρήνης, ὅπως ὁ Μιχαὴλ παραδώσῃ εἰς αὐτὸν χειρόγραφα ἢ ἀντίγραφα ἔργων ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων, ὅρον τὸν ὁποῖον ὁ Μιχαὴλ ἀπεδέχθη[1]). Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα πῶς ὁ ὑποτιθέμενος ἄξεστος αὐτὸς Χαλίφης (πᾶν ἄλλο ἦτο ἢ ἄξεστος), ὡδηγήθη νὰ ζητήσῃ Ἑλληνικὰ χειρόγραφα ὡς ἀποζημίωσιν διὰ τὴν νίκην του. Διὰ νὰ δώσωμεν ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτό, θεωροῦμεν ἀναγκαῖον ν' ἀναφερθῶμεν δι' ὀλίγων εἴς τινα παλαιότερα γεγονότα.

Κατὰ τὸ ἔτος 47 π.Χ. ὁ Ῥωμαῖος δικτάτωρ Ἰούλιος Καῖσαρ ἔκαυσε τὴν μεγάλην Ἑλληνικὴν βιβλιοθήκην τῆς Ἀλεξανδρείας, ἄγνωστον διὰ ποῖον λόγον, περιέχουσαν 500.000 περίπου κυλίνδρους (ῥόλους) Ἑλληνικῶν χειρογράφων. Διεσώθη ὅμως τότε ἐκ τῆς πυρκαϊᾶς ἡ βιβλιοθήκη τοῦ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ Σαραπείου (Ἱεροῦ) περιέχουσα 100.000 περίπου κυλίνδρους Ἑλληνικῶν χειρογράφων. Καὶ εἰς τὰς δύο αὐτὰς βιβλιοθήκας εἶχε συγκεντρωθῆ καὶ διαφυλαχθῆ ἡ κυριωτέρα Ἑλληνικὴ πνευματικὴ δημιουργία 1500 περίπου ἐτῶν. Θεωρεῖται πιθανόν, ὅτι ἡ μεγάλη βιβλιοθήκη εἶχε τὰ βιβλία εἰς πολλαπλᾶ ἀντίτυπα ἕκαστον καὶ ὅτι ἡ βιβλιοθήκη τοῦ Σαραπείου εἶχε τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τίτλων, οἷον εἶχε καὶ ἡ μεγάλη βιβλιοθήκη.

---

[1]) Ptolemäus, Handbuch der Astronomie I, deutsche Übersetzung von Carl Manitius, B.G. Teubner, Leipzig 1963, S. VI.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ βιβλιοθήκη τοῦ Σαραπείου ἐπυρπολήθη κατὰ τὸ ἔτος 391 μ.Χ. ὑπὸ τοῦ μαινομένου, ἕνεκα θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ, ὄχλου τῆς Ἀλεξανδρείας, ἐπὶ Πατριάρχου Ἀλεξανδρείας καὶ πάσης Ἀφρικῆς Θεοφίλου[1]). Τὸ δὲ γραφόμενον εἴς τινα βιβλία, ὅτι ὁ Χαλίφης Omar (7ος αἰ.) διέταξε τὴν πυρπόλησιν τῆς βιβλιοθήκης τοῦ Σαραπείου ἀποτελεῖ δεινὴν κακοποίησιν τῆς ἀληθείας.

Νέα καταστροφὴ χειρογράφων Ἑλληνικῶν παλαιῶν ἔργων φαίνεται ὅτι ἔγινε κατὰ τὸ 529 μ.Χ., ὅτε ὁ αὐτοκράτωρ τοῦ Βυζαντίου Ἰουστινιανὸς ἔκλεισεν, ἕνεκα θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ, τὴν ἐν Ἀθήναις λειτουργοῦσαν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἡ ὁποία ἱδρύθη κατὰ τὸ ἔτος 387 π.Χ. καὶ ἐλειτούργησε 916 συναπτὰ ἔτη.

Οἱ καθηγηταὶ τῆς κλεισθείσης Ἀκαδημίας ἠναγκάσθησαν νὰ ἐγκαταλείψωσι τὰς Ἀθήνας καὶ τὴν περιοχὴν τοῦ Βυζαντίου καὶ νὰ καταφύγωσιν εἰς χώρας εὑρισκομένας ὑπὸ ἀραβικὴν καὶ ἄλλην ἐπιρροήν, ὅπου ἵδρυσαν Σχολὰς κατὰ τὸ πρότυπον τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι τόσον οἱ αὐτοεξορισθέντες καθηγηταί, ὅσον καὶ οἱ διάδοχοι αὐτῶν δὲν εἶχον τὰ ἀπαραίτητα βιβλία διὰ τὰς ἐπιστημονικάς των ἐνασχολήσεις καὶ ἐρεύνας. Πιστεύεται δέ, ὅτι οἱ διάδοχοι τῶν καθηγητῶν αὐτῶν καὶ οἱ φιλομαθεῖς Ἄραβες μαθηταί των ὑπέδειξαν εἰς τὸν Χαλίφην al - Mamun, ὅπως ζητήσῃ ἀπὸ τὸν αὐτοκράτορα Μιχαὴλ τὰ Ἑλληνικὰ χειρόγραφα ἐκ τῶν μεταφράσεων τῶν ὁποίων εἰς τὴν ἀραβικὴν διεσώθησαν Ἑλληνικά τινα συγγράμματα ἢ καὶ μερικὰ ἐξ αὐτῶν παρουσιάσθησαν καὶ ὡς ἀραβικὰ ἐπιτεύγματα.

Σφάλματά τινα, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶσιν εἰς τὰς ἀραβικὰς μεταφράσεις Ἑλληνικῶν ἔργων μαθηματικοῦ καὶ ἀστρονομικοῦ περιεχομένου ὀφείλονται κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον,

---

[1]) Ἰδὲ Pauly - Wissowa, Real - Encyclopädie, λ. Bibliotheken, Spalt 409, V.

εἰς τὴν ἐπείγουσαν καὶ κατ' ἀνάγκην εἰκῆ καὶ ὡς ἔτυχε γενομένην συλλογὴν σχολικῆς χρήσεως χειρογράφων τοῦ Βυζαντίου πρὸς παράδοσιν εἰς τὸν νικητὴν Χαλίφην al - Mamun, χειρογράφων, τὰ ὁποῖα δὲν θὰ εἶχον γραφῆ μετὰ μεγάλης ἐπιμελείας. Εἶναι εὐνόητον δέ, ὅτι ὁ ὄγκος καὶ τὸ πλῆθος τῶν πρὸς παράδοσιν εἰς τὸν χαλίφην χειρογράφων ἔπρεπε νὰ εἶναι μεγάλα.

IX. Ἐκ τῶν 14 προτάσεων τῆς πραγματείας Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων, 6 ἀφορῶσιν εἰς κύκλους ἐφαπτομένους ἀλλήλων (ὑπ' ἀριθμ. 1, 2, 4, 6, 9), 7 ἀφορῶσιν εἰς ἐφαπτομένας κύκλου (ὑπ' ἀριθμ. 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13) καὶ 1 ἀφορᾷ εἰς τὴν διαίρεσιν τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης ἐν κύκλῳ (ὑπ' ἀριθμ. 14).

Μετὰ τὴν καταχώρησιν τῆς πραγματείας ταύτης ἀκολουθεῖ ἡ πραγματεία Περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀποτελουμένη ἐκ δύο προτάσεων. Μέχρι σήμερον αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις ἐθεωροῦντο ὡς ἐπινόησις τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (1ος αἰ. μ.Χ.). Ἐκ τοῦ βιβλίου ὅμως τοῦ al - Biruni «Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ» (ὡς μνημονεύεται προηγουμένως) εἶναι φανερόν, ὅτι αὗται εἶναι ἀνακαλύψεις τοῦ Ἀρχιμήδους. Θεωροῦμεν δὲ πιθανόν, ὅτι αὗται θὰ ἀνῆκον εἰς τὴν ἀπολεσθεῖσαν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τριγώνων.

X. Ἐκ τῶν 19 προτάσεων τῆς πραγματείας Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας, 5 ἀφορῶσιν εἰς κύκλους (ὑπ' ἀριθμ. 1, 2, 3, 5, 6), 4 ἀφορῶσιν εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον (ὑπ' ἀριθμ. 4, 7, 8, 9), 4 ἀφορῶσιν εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον (ὑπ' ἀριθμ. 10, 12, 15, 16), 4 ἀφορῶσιν εἰς τρίγωνον γενικῶς (ὑπ' ἀριθμ. 11, 13, 17, 18), 1 ἀφορᾷ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον (ὑπ' ἀριθμ. 14) καὶ 1 ἀφορᾷ εἰς τετράπλευρον (ὑπ' ἀριθμ. 19).

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλύσεως ἐνισχύεται ἡ πιθανότης, ὅτι ἡ πραγματεία Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας, ἀποτελεῖ βυζαντινὴν σχολικὴν συλλογὴν προερχομένην ἐκ διαφόρων πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους.

XI. Ἡ κατασκευὴ τοῦ εἰς σφαῖραν ἐγγεγραμμένου ἡμικανονικοῦ 14-έδρου διεσώθη ὑπὸ τοῦ Ibn Qurra, ὁ ὁποῖος τὴν παρουσιάζει ὡς ἰδικήν του ἐπινόησιν ! ! ! Ὁ Πάππος ὅμως (περὶ τὸ 300 μ.Χ.) παρέχει ἀρκετὰς πληροφορίας περὶ τῶν 13 ἡμικανονικῶν πολυέδρων τοῦ Ἀρχιμήδους[1]) καὶ δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι ἡ διασωθεῖσα εἰς τὴν ἀραβικὴν συναφὴς πραγματεία, τὴν ὁποίαν ὁ Ibn Qurra παρουσιάζει ὡς ἰδικήν του, προέρχεται ἐκ τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14έδρου. Κατὰ παράδοξον δὲ τρόπον ὁ ἔγγονος τοῦ Ibn Qurra, ὁ Ibn Zabrun, λέγει, ὅτι ἀνεκάλυψεν εἰς τὰ κατάλοιπα τοῦ πάππου του, τὴν πραγματείαν Περὶ ἑνὸς ἡμικανονικοῦ 14-έδρου ἐγγραφομένου εἰς σφαῖραν, σημειώνων καὶ αὐτός, ὅτι αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν πάππον του. Ἔτι δὲ παράδοξον τυγχάνει ἐν προκειμένῳ, ὅτι οἱ Γερμανοὶ ἐκδόται τῆς πραγματείας Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου, ἀποφεύγουσι νὰ ἐκφράσωσι γνώμην περὶ τῆς πατρότητος τῆς πραγματείας, ἀρκούμενοι ν' ἀναφερθῶσι παρεμπιπτόντως εἰς τὰ σχόλια τοῦ Πάππου, παραπέμποντες δι' αὐτὸ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν τοῦ I. Tropfke, περὶ οὗ γίνεται διαμνημόνευσις εἰς τὴν οἰκείαν θέσιν Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι ἡ πραγματεία εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους διασκευασθεῖσα κάπως ἐπὶ τὸ ἁπλοϊκώτερον ὑπὸ τοῦ μεταφραστοῦ

[1]) Λέγονται ἡμικανονικά, διότι ἀποτελοῦνται αἱ ἕδραι ἀπὸ περισσότερα τοῦ ἑνὸς εἴδους κανονικὰ σχήματα. Ἰδὲ μαρτυρίαν 99, Α' μέρος, Α' τόμου Ἁπάντων, σελ. 120 - 128.

Ibn Qurra. Διότι, ἐπὶ παραδείγματι, ὁ Ἀρχιμήδης οὐδέποτε θὰ ἔγραφε «κατασκευάζομεν πυραμίδας ἐκ τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων, αἱ ὁποῖαι πυραμίδες ὀνομάζονται τετράεδρα», ὡς γράφει ὁ Ibn Qurra. Ὁλόκληρος ἡ συναφὴς διεθνὴς βιβλιογραφία εἶναι σύμφωνος, ὅτι ἡ πραγματεία εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους ὡς ἀναφέρεται καὶ ὑπὸ Jos. E. Hofmann[1]).

Λεπτομέρειαί τινες Περὶ τοῦ (ὑδραυλικοῦ) ὡρολογίου τοῦ Ἀρχιμήδους παρατίθενται εἰς τὴν οἰκείαν πραγματείαν.

XII. Παρ' ὅλον ὅτι αἱ εἰς τὴν ἀραβικὴν διασωθεῖσαι πραγματεῖαι τοῦ Ἀρχιμήδους ἔχουσιν ὑποστῇ πολλὰς μεταβολὰς κατὰ τὴν διατύπωσιν ὑπὸ τῶν Βυζαντινῶν καὶ τῶν Ἀράβων λογίων, ὥστε νὰ διακρίνεται ἀμέσως, ὅτι ἡ διατύπωσις, ἰδίᾳ ἡ ἀφορῶσα εἰς τὰς διασαφήσεις, δὲν εἶναι Ἀρχιμήδειος, ἐν τούτοις κατεβάλομεν προσπάθειαν ἀνακατασκευῆς τοῦ ἀπολεσθέντος Ἀρχιμηδείου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους. Τοιαύτην ἀνακατασκευὴν τοῦ κειμένου, Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου καὶ Περὶ τοῦ (ὑδραυλικοῦ) ὡρολογίου τοῦ Ἀρχιμήδους, δὲν ἐπεχειρήσαμεν, διότι δὲν ἐσώθησαν συναφεῖς Ἀρχιμήδειοι ὅροι.

Εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος τόμου παραθέτομεν τὸ ἀραβικὸν κείμενον τῶν πραγματειῶν α) Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων κύκλων, β) Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας καὶ γ) Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους.

---

[1]) Über Archimedes halbregelmässige Körper, in Archiv für Mathematik, vol. XIV, 1963, Fasc. 3, S. 212 - 216, Birkhäuser, Basel und Stuttgart.

ΠΙΝΑΞ I

Ἐμφαίνων τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ εἶδος τῶν προτάσεων τῶν τριῶν τόμων τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους

(σημ. Αἱ ἐκ τῶν ἀραβικῶν κειμένων προτάσεις περιελήφθησαν κατὰ τὴν ἀρίθμησιν εἰς τὰ θεωρήματα)

Πραγματεῖαι	Εἶδος προτάσεων						
Τόμος Α΄ (μέρος Β΄)	Ὁρισμοί	Αἰτήματα	Λαμβανόμενα (ἀξιώματα)	Λήμματα	Θεωρήματα	Προβλήματα	Πορίσματα
Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α΄	6		5	5	44		8
» » » β΄						9	1
Κύκλου μέτρησις					3		
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων					32		1
Τόμος Β΄							
Περὶ ἑλίκων	7		1		28		5
Μηχανικὰ α΄		7			15		2
» β΄ (ἢ Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν)					10		
Ψαμμίτης	Δὲν ὑποδιαιρεῖται εἰς προτάσεις						
Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου			1				
κώνου τομῆς (ἢ παραβολῆς)					24		1
Ὀχουμένων α΄					9		
» β΄					10		
Στομάχιον					1		
Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος				10	15		
Πρόβλημα βοεικὸν						1	
Τόμος Γ΄							
Βιβλίον Λημμάτων α΄					15		
Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων					13		
Περὶ κύκλων					2		
Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου					2		
Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων κύκλων					14		6
Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ					2		
Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας					19		
Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου					1		
Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους	Δὲν ὑποδιαιρεῖται εἰς προτάσεις						
Σύνολον	13	7	7	15	259	10	24

ΠΙΝΑΞ ΙΙ

Ἐμφαίνων καὶ ἄλλως τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ εἶδος τῶν προτάσεων τῶν τριῶν τόμων τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους

ΤΟΜΟΣ Α΄, ΜΕΡΟΣ Β΄	
Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, βιβλίον α΄	
Ὁρισμοὶ	6
Λαμβανόμενα (ἀξιώματα)	5 (τὸ πέμπτον εἶναι τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας)
Λήμματα	5 (ἐκφωνήσεις θεωρημάτων τοῦ 12 βιβλίου τῶν Στοιχ. Εὐκλείδου)
Θεωρήματα	44 (εἰς τὸ 7 καὶ ἄλλη ἀπόδειξις)
Πορίσματα	8 (2 εἰς τὸ θ. 12, ἀνὰ 1 εἰς τὰ θ. 31, 34, 38, 39 καὶ 2 εἰς τὸ θ. 40)
Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, βιβλίον β΄	
Προβλήματα	9 (εἰς τὸ 8 καὶ ἄλλη ἀπόδειξις)
Πορίσματα	1 (εἰς τὸ πρόβλημα 2)
	Κύκλου μέτρησις
Θεωρήματα	3
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων	
Θεωρήματα	32
Πορίσματα	1 (εἰς τὸ θ. 36)
ΤΟΜΟΣ Β΄	
Περὶ ἑλίκων	
Ὁρισμοὶ	7 (μετὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρ. 10)
Ἀξιώματα	1 (τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, εἰς τὸ τέλος τῆς ἐπιστολῆς πρὸς τὸν Δοσίθεον «τᾶν ἀνισᾶν γραμμᾶν — ποτ' ἄλλαλα λεγομένων». Εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ ἀξίωμα 5ον τῆς πραγματείας Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α΄ «ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων — πρὸς ἄλληλα λεγομένων».
Θεωρήματα	28
Πορίσματα	5 (εἰς τὰ θ. 10, 11, 22, 23, 25)

ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Μηχανικὰ α΄ (ἢ Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α΄)	
Αἰτήματα	7
Θεωρήματα	15 (εἰς τὰ θ. 10 καὶ 13 καὶ ἄλλη ἀπόδειξις)
Πορίσματα	2 (εἰς τὸ θ. 5)
Μηχανικὰ β΄ (ἢ Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν β΄)	
Θεωρήματα	10
Ψαμμίτης	
Δὲν διαχωρίζεται εἰς προτάσεις	
Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (ἢ τετραγωνισμὸς παραβολῆς)	
Ἀξιώματα	1 (τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας περιλαμβανόμενον εἰς τὴν εἰσαγωγικὴν πρὸς τὸν Δοσίθεον ἐπιστολὴν «τῶν ἀνίσων χωρίων — πεπερασμένου χωρίου»)
Θεωρήματα	24
Πορίσματα	1 (εἰς τὸ θ. 20)
Περὶ ὀχουμένων, βιβλίον α΄	
Θεωρήματα	9
Περὶ ὀχουμένων, βιβλίον β΄	
Θεωρήματα	10
Στομάχιον	
Θεώρημα	1
Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος	
Προλαμβανόμενα	10 (λήμματα)
Θεωρήματα	15
Πρόβλημα βοεικὸν εἰς στίχους	
Πρόβλημα	1 (στίχοι 44)

ΤΟΜΟΣ Γ΄	
Λήμματα α΄.	
Θεωρήματα	15
Κανονικὸν ἑπτάγωνον	
Θεωρήματα	2
Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων	
Θεωρήματα	13
Περὶ κύκλων	
Θεωρήματα	2
Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων	
Θεωρήματα	14 (εἰς τὴν πρότασιν 1 δύο περιπτώσεις. Εἰς ἑκατέραν τούτων καὶ ἄλλη ἀπόδειξις. Δύο περιπτώσεις εἰς τὴν πρότασιν 3. Εἰς τὴν πρότασιν 7 καὶ ἄλλη ἀπόδειξις. Εἰς τὴν 8 δύο περιπτώσεις. Καὶ ἄλλη ἀπόδειξις τῆς β΄ περιπτώσεως τῆς 8. Καὶ ἄλλη ἀπόδειξις τῆς προτάσεως 10. Εἰς τὴν 11 δύο περιπτώσεις. Εἰς τὴν 12 τρεῖς περιπτώσεις. Εἰς τὴν 13 καὶ ἄλλη ἀπόδειξις. Τρεῖς ἀποδείξεις τῆς προτάσεως 14)
Πορίσματα	6 (εἰς τὰς προτάσεις 1, 3, 3α, 7, 11, 12)
Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ	
Θεωρήματα	2
Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας	
Θεωρήματα	19 (εἰς τὴν πρότασιν 1 καὶ ἄλλη ἀπόδειξις)
Ἡμικανονικὸν 14-εδρον	
Θεωρήματα	1
Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους	
Δὲν διαχωρίζεται εἰς προτάσεις	

ΚΑΤΑΛΟΓΟΙ ΕΡΓΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

τῶν διασωθέντων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους

	I. Εἰς τὴν ἑλληνικὴν	
		τόμος Α΄
1	Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, βιβλία α΄, β΄	μέρος Β΄ 1
2	Κύκλου μέτρησις	» 2
3	Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων	» 3
4	Περὶ ἑλίκων	τόμος Β΄ 1
5	Μηχανικά, βιβλία α΄, β΄	» 2
6	Ψαμμίτης	» 3
7	Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς	» 4
8	Ὀχουμένων, βιβλία α΄, β΄	» 5
9	Στομάχιον	» 6
10	Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος	» 7
11	Πρόβλημα βοεικὸν	» 8
	II. Εἰς τὴν ἀραβικὴν	
12	Λήμματα α΄.	τόμος Γ΄ 1
13	Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων	» 2
14	Περὶ κύκλων (θεωρήματα 2)	» 3
15	Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου	» 4
16	Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων (ἐφαπτομένων) κύκλων	» 5
17	Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ	» 6
18	Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας	» 7
19	Περὶ τοῦ ἡμικανονικοῦ 14-έδρου	» 8
20	Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους	» 9

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους

1	Περὶ τριγώνων
2	Περὶ τετραπλεύρων
3	Περὶ 13 ἡμικανονικῶν πολυέδρων
4	Ἀριθμητικὰ
5	Περὶ ζυγῶν
6	Κεντροβαρικὰ
7	Πλινθίδες καὶ κύλινδροι
8	Κατοπτρικὰ
9	Ἰσοπεριμετρικὰ
10	Στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν (σῴζεται μέρος ὑπὸ τὸν τίτλον Μηχανικὰ)
11	Ἰσορροπίαι
12	Σφαιροποιία (κατασκευὴ πλανηταρίων)
13	Στοιχεῖα ἐπὶ τῶν στηρίξεων (Στατικὴ)
	(Πηγὴ διὰ τὰ ὑπ' ἀριθμ. 1-13 ἑλληνική. Ἰδὲ τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 30-32)
14	Περὶ παραλλήλων γραμμῶν
15	Περὶ βαρύτητος καὶ ἐλαφρότητος
16	Περὶ κοίλων παραβολικῶν καυστικῶν κατόπτρων
17	Προοπτικὴ
	(Πηγὴ διὰ τὰ ὑπ' ἀριθμ. 14-17 ἀραβική. Ἰδὲ τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 32)
18	Ἐπισίδια βιβλία
19	Βαρυουλκός, Ὑδροσκοπίαι, Πνευματικὴ
20	Καῦσις διὰ τῶν κατόπτρων
21	Περὶ Ἀρχιτεκτονικῆς
22	Περὶ δρομομέτρων
	(Πηγὴ διὰ τὰ ὑπ' ἀριθμ. 18-22 ἑλληνική. Ἰδὲ τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 32-33)
23	Στοιχεῖα τῶν Μαθηματικῶν
24	Περὶ τῆς διαμέτρου
25	Συγγράμματα ἐν ἐπιτομῇ
	(Πηγὴ διὰ τὰ ὑπ' ἀριθμ. 23-25, ἀραβική. Ἰδὲ τόμ. Α', μέρος Α', σελ. 33-34)
26	Λήμματα β'
	(Πηγὴ ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης. Περὶ Ὀχουμένων, βιβλ. β', θεώρ. 6, σελ. 315)
27	Περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου
28	Δεδομένα
	Πηγὴ διὰ τὰ ὑπ' ἀριθμ. 27, 28, H. Suter, Das Mathematik Verzeichnis in FIHRIST κ.λπ.)

SUMMARY

The library of the University of Aligarh in India has informed us that there exist 12.000 manuscripts, the majority of which are not yet included in catalogues. Also, the library of Patna in India has sent us photocopies of 40 works «as manuscript book of Greeks». Two of those works (n° 27 and n° 28) are written by Archimedes. The list of the works is exposed here in : a) modern greek language, 2) arabian, and 3) arabian with latin characters. Four of the 40 works are not mathematical or astrological content.

The 3rd volume of the complete works of Archimedes contains all his works preserved in arabian language such as :

1. Lemmata α' (Liber Assumptorum α') (propositions 15).
2. On Right - angled Triangles (propositions 13).
3. On Circles (propositions 2).
4. On the construction of the side of a regular heptagon inscribed in a circle (propositions 2).
5. On Tangent circles (propositions 14).
6. Estimation of the altitude and area of triangles from their sides (propositions 2).
7. Beginning of Geometry (Elements) (propositions 19).
8. On the semi-regular 14-hedron (proposition 1).
9. Archimedes clock.

A reconstruction of the works 1 - 7 of the original greek text in sicilian doric dialect of Archimedes is exposed.

In the treatise «Lemmata» the title «Lemmata α'» was given, because Archimedes wrote another treatise under the same title concerning conic sections, which is now lost (v. Ochoumenon II, theorem 6).

Of the 17 propositions on the regular heptagon, the 1 - 13 refer to the Right-angled Triangles and the 14 - 15 to Circles. In view of the fact that the treatises of Archimedes on Right-angled Triangles and on Circles are lost, we conclude that the propositions 1 - 13 and 14 - 15 belong, respectively, to the lost treatises.

The treatise preserved by al - Haitam, on the regular heptagon, is presumably an adaptation of a treatise by Archimedes himself. This can also be deduced from the greek disposition of the demonstration and from the use of the terms given (data), which in the german tranlation are writen «erkannt» instead of «gegeben».

To interprete the phenomenon of the transmission of greek mathematical knowledge to the Arabs we note: 1) the fire of the greek Library of Alexandria by Julius Ceasar when 500.000 volumes approximately were destroyed (47. B.C.). 2) the fire of the Library of Serapeion of Alexandria owing to religious fanatism, which contained almost 100.000 rolls of manuscripts towards 391 A. D. under Theophilos «Patriarch of Alexandria and all Africa», 3) the destruction of books during 529 A. D. also due to religious fanatism, while the Academie of Plato was shut and 4) the allotment of the greek manuscripts to the Chalif Al - Mamun by the defeated byzantine emperor Michael II (823 A. D.).

ΛΗΜΜΑΤΑ Α΄

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον δεκαπέντε θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ὁποῖα σῴζονται εἰς τὴν ἀραβικήν*).

Εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους περιέχονται 15 θεωρήματα εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τὸν τίτλον Liber Assumptorum (Βιβλίον Λημμάτων), (Archimedis opera omnia vol. II. p. 510 - 525, I. L. Heiberg, 1913, B.G. Teubner). Ταῦτα δὲν ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν ἀλλὰ εἰς τὴν ἀραβικὴν ἐκ τῆς ὁποίας μετεφράσθησαν εἰς τὴν λατινικὴν καὶ ἐξεδόθησαν τὸ πρῶτον ἐν Λονδίνῳ κατὰ τὸ 1659 ὑπὸ τοῦ S. Foster. Βραδύτερον μετεφράσθησαν καὶ εἰς ἄλλας γλώσσας. Ὁ ἀραβικὸς κῶδιξ εὑρίσκεται εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Φλωρεντίας. Ἰδοὺ τί γράφει συναφῶς ὁ Heiberg εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (σελ. 510 - 511) :

« Τὸ βιβλιάριον τοῦτο πρῶτος ἐξέδωκεν ὁ S. Foster εἰς τὰ Σύμμικτα (Λονδῖνον 1659) ἐκ μεταφράσεως τοῦ I. Gravii, ὅστις εἶχε χρησιμοποιήσει ἀραβικὸν κώδικα, διότι ἑλληνικὸς δὲν ὑπάρχει. Μετὰ ταῦτα αὐτὸ ἐκ τοῦ Μεδικαίου κώδικος μετέφρασεν ἐκ νέου λατινιστὶ ὁ Ἀβραὰμ Ecchellensis[1]), τὴν μετάφρασιν δὲ αὐτὴν μετὰ

---

*) Ἐδημοσιεύθη παρ' ἡμῶν, τὸ πρῶτον, εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, Νέα Σειρὰ τόμ. 6 II, Τεῦχος 2, 1965, σελ. 265 - 297.

1) Ἐχελαῖος, ἐκ τῆς κωμοπόλεως τῆς Παλαιστίνης Ἔχελα.

τῶν βιβλίων V — VII τοῦ 'Απολλωνίου ἐξέδωκεν ὁ I. A. Borellus (ἐν Φλωρεντίᾳ 1661). Εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπάρχει εἰς τρεῖς Μεδικαίους κώδικας, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ κῶδιξ 275 (ἰδὲ καὶ κατάλογον τῶν 'Ανατολικῶν κωδίκων τῆς Λαυρεντιανῆς Μεδικαίας Βιβλιοθήκης ἐκδόσεως S.E. Assemanus, ἐν Φλωρεντίᾳ 1742, σελὶς 385) μόνον τὸ ἀνωτέρω βιβλιάριον καὶ τὰ βιβλία V — VII τοῦ 'Απολλωνίου περιέχει, δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αὐτὸν τὸν κώδικα ἐχρησιμοποίησεν ὁ Borellus (παράβαλε πρὸς τούτοις Assemanus σελὶς 383 ἀριθ. 271 καὶ σελὶς 392 ἀριθ. 286). 'Ενταῦθα περιέλαβον τὴν ἐκδοθεῖσαν μετάφρασιν τοῦ Borelli. Παρ' αὐτῷ ὁ τίτλος εἶναι Βιβλίον Λημμάτων τοῦ 'Αρχιμήδους κατὰ μετάφρασιν τοῦ Thebit ben Kora καὶ ἔκθεσιν τοῦ Δ^ρος Almochtasso Abilhasan Hali ben Ahmad Nosuensi. [Liber Assumptorum Archimedis interprete Thebit ben Kora et exponente Doctore Almochtasso Abilhasan Hali ben Ahmad Nosuensi]. Προτάσεις 16. [ὁ Foster ὅμως ἔχει 15 ὅπως καὶ πράγματι εἶναι, διότι κακῶς ὁ Borellus προσέθεσεν (ὡς πρότασιν) τὸ ἀπόσπασμα τοῦ 'Αρχιμήδους τὸ παρ' Εὐτοκίῳ διαφυλαχθέν].

῾Ο Thebit ben Kora προέταξεν τὸν ἑξῆς πρόλογον (Borellus σελ. 385) : «῾Ο Δρ Almochtasso διαβεβαιοῖ ὅτι αὐτὸ τὸ βιβλίον ἀναφέρεται εἰς τὸν 'Αρχιμήδη, ἐν τῷ ὁποίῳ ὑπάρχουσιν ὡραιόταται προτάσεις ὀλίγαι κατὰ τὸν ἀριθμόν, ἀλλὰ μεγίστης ὠφελείας περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, ἄρισται καὶ κομψόταται, τὰς ὁποίας οἱ καθηγηταὶ αὐτῆς τῆς ἐπιστήμης συγκαταριθμοῦσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν διαμέσων προτάσεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἀναγιγνώσκωνται μεταξὺ τοῦ βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῆς 'Αλμαγέστας (Σημ. Τῆς μεγάλης Μαθηματικῆς Συντάξεως τοῦ Κλ. Πτολεμαίου). Καὶ πράγματι, μερικὰ χωρία τῶν προτάσεων ἐκείνων ἔχουσιν ἀνάγκην ἄλλων προτάσεων, διὰ τῶν ὁποίων ἐκεῖναι αἱ προτάσεις ἀποβαίνουσι σαφέστεραι. Καὶ βεβαίως ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης ὑπέδειξεν αὐτὰς τὰς προτάσεις καὶ αὐτὰς ἀναφέρει εἰς ἄλλα ἔργα του, ἐφ' ὅσον εἶπε : καθ' ὃν τρόπον κατελήξαμεν εἰς τὰς προτάσεις Περὶ ὀρθογωνίων. Ὡσαύτως καί : καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείξαμεν ἐν τῇ ἡμετέρᾳ ἐκθέσει διαπραγματευόμενοι Περὶ τριγώνων· πάλιν : καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείξαμεν εἰς τὰς προτάσεις Περὶ τετραπλεύρων· καὶ ἀνέφερεν ἐν τῇ πέμπτῃ προτάσει ἀπόδειξιν περὶ αὐτοῦ τοῦ πράγματος περισσότερον εἰδικήν. Ἔπειτα συνέθεσεν ὁ Abusahal Alkuhi βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἐπέγραψε Σύνταξις τοῦ βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ Λημμάτων καὶ ἐπραγματεύθη τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς τῆς προτάσεως δι' ὁδοῦ περισσότερον εἰδικῆς καὶ καλλιτέρας καὶ ἰδίως ἐκεῖνα τὰ μέρη τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς συνθέσεως τῆς ἀναλογίας. Ὅταν τοῦτο ἐγὼ κατενόησα, προσέθεσα εἰς τὰ σκοτεινότερα χωρία τοῦ βιβλίου τούτου ἔκθεσιν, εἴ τε κατὰ τόπους σημειώσεις καὶ ἐστερέωσα ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὐτὸς εἶχε ὑποδείξει διὰ τῶν προτάσεων, ὅπως εἶχον κρίνει καὶ ἀνέφερα ἐκ τῶν προτάσεων τοῦ Abusahal δύο προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀναγκαιοῦσι διὰ τὴν διασαφήνισιν τῆς πέμπτης προτάσεως, παραλείπων τὰ λοιπὰ χάριν συντομίας καὶ ἐπειδὴ ταῦτα δὲν εἶναι ἀναγκαῖα». Παράβαλε Wenrich, Περὶ τῆς αὐθεντίας ἑλληνικῶν μεταφράσεων Ἀράβων, σελὶς 192 κ.ἑ.

Ἐκ τῶν σχολίων τούτων τῶν Ἀράβων ἐχρησιμοποίησα ὅσα μοῦ ἐφάνησαν ὠφέλιμα, τὰ ἄλλα δὲ τὰ ἀπέρριψα. Ὅπως δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν προέρχεται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη, ὅπως τὸ ἔχομεν, οὕτω εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι μερικαὶ προτάσεις αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἀρκετὰ ἐπιστημονικῶς καὶ ἔχουσιν εὑρεθῇ καὶ ἔχουσιν ἀποδειχθῇ, καθ' ὅσον βαθμὸν ἐξέχουσιν εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους· ἀλλὰ πόσον πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς αὐτὸν δὲν εἶναι ἀρκετὰ ἀκόμη διασαφηνισμένον. Παράβαλε Quaest. Arch. p. 24 - 25. Ὁ ἑλληνικὸς τίτλος ὑπῆρξε Λήμματα ».

*

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὡς παρατηρεῖ ὁ I. L. Heiberg, ὅτι ἡ διατύπωσις τῶν ἐν λόγῳ θεωρημάτων, ὡς αὕτη ὑπάρχει εἰς τὴν ἀραβικήν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους. Διὰ τὴν γνώμην αὐτὴν συνηγοροῦσιν οἱ ἑξῆς λόγοι :

1. Εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα ὑπάρχει ἡ φράσις «σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης ὀνομάζει ἄρβηλον» καὶ εἰς τὸ δέκατον τέταρτον θεώρημα ὑπάρχει ἡ φράσις «σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης καλεῖ salinon». Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ φράσεις αὗται δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι τεθῆ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Εἴς τινας ἀποδείξεις ὑπάρχουσι διασαφηνίσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείεται νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους. Αὗται ἔχουσι τεθῆ μὲ τὸν σκοπὸν ὅπως αἱ ἀποδείξεις γίνουν εὐκόλως κατανοηταὶ ὑπὸ μαθητῶν μὴ προχωρημένων εἰς τὴν γεωμετρίαν.

Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν 15 θεωρημάτων καὶ τῆς συγκρίσεως αὐτῶν πρὸς τὰ σῳζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους κατελήξαμεν εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα :

Α΄. Τὰ 15 θεωρήματα ἀποτελοῦσιν ἑνιαῖον ὅλον καὶ εἶναι ὡς ἐκ τούτου, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, ἐπινόησις καὶ δημιουργία ἑνὸς προσώπου δηλ. τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅμως τὸ 7ον θεώρημα εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι εἶναι παρεμβολή, διότι ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ ιβ΄, β΄ χρησιμοποιεῖ τὴν πρότασιν, ὅτι τὸ εἰς κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Β΄. Αἱ πρὸς εὐκολωτέραν κατανόησιν ὡρισμένων θεωρημάτων διασαφηνίσεις δὲν ἀνήκουσιν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Αὗται δέον νὰ ἀποδοθῶσιν εἰς τὸν ἄγνωστον Ἕλληνα μαθηματικόν, ὁ ὁποῖος εἶχε συντάξει συλλογὴν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα εἶχε διαμορφώσει καταλλήλως, ὥστε νὰ εἶναι περισσότερον κατανοητὰ εἰς τοὺς μαθητάς του.

Φρονοῦμεν ὅτι ὁ Ἄραψ μεταφραστὴς Thebit ben Kora δὲν ἐπέφερε μεταβολὰς εἰς τὸ ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιηθὲν ἑλληνικὸν κείμενον.

Γ΄. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου θεωρήματος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, διότι ἡ ἰσότης ΒΖ = ΖΕ (σχ. 2α) συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ. Θεωροῦμεν Ἀρχιμήδειον ἀπόδειξιν τὴν ὑπὸ τοῦ T. L. Heath διατυπουμένην, τὴν ὁποίαν καὶ ἔχομεν ἐνταῦθα ἀποδώσει εἰς τὴν ἑλληνικὴν (σχ. 2) (T. L. Heath, The works of Archimedes p. 302, Dover, N. York).

Δ΄. Φαίνεται πολὺ πιθανόν, ὅτι τὰ θεωρήματα ἀποτελοῦσι μέρος μεγαλυτέρας πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη ὁλόκληρος καὶ ὅτι ταῦτα ἐπενοήθησαν ὅτε ὁ Ἀρχιμήδης ἦτο πολὺ νέος. Τῆς πραγματείας αὐτῆς προηγήθησαν αἱ πραγματεῖαι Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων, Περὶ τριγώνων καὶ Περὶ τετραπλεύρων, διότι αὗται μνημονεύονται εἰς τὰς προτάσεις 5, 6, 12 τῆς πραγματείας Λήμματα Α΄. (Ἰδὲ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν «Τὸ περιεχόμενον τοῦ Γ΄ τόμου, ΙΙ»).

Ε΄. Ἡ διατύπωσις τοῦ 6ου θεωρήματος, φρονοῦμεν, ὅτι εἶναι Ἀρχιμήδειος. Διότι καὶ εἰς τὸ 9ον θεώρημα τῆς πραγματείας Μηχανικὰ (Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν ΙΙ) καὶ εἰς τὸ 23ον τῆς πραγματείας Ὀρθογωνίου κώνου τομῆς (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς) σπουδάζονται ἐπίσης εἰδικαὶ περιπτώσεις καὶ ὄχι γενικαί. Ὅτι τὰ θεωρήματα δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς δυνάμεως εἶναι ὀρθόν. Ὅτι ὅμως μόνον τὰ δύσκολα ἐκ τούτων εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν εὐσταθεῖ, ὅταν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὴν σκέψιν, ὅτι αὐτὰ ἀποτελοῦν ἑνιαῖον ὅλον. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ὀνομασίαν salinon τοῦ σχήματος τοῦ 14ου θεωρήματος, φρονοῦμεν ὅτι πρόκειται περὶ λάθους κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν καὶ ὅτι ἡ ἑλληνικὴ λέξις ἦτο σελήνιον (μηνίσκος σελήνης), ὡς ὀρθῶς κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν ἔχει διορθώσει ὁ Ἰσαὰκ Μπάρροου (Isaac Barrow), ὁ καθηγητὴς τοῦ Ἰσαὰκ Νεύτωνος (Isaac Newton), (P. ver Eecke, Les oeuvres complètes d' Archimède Tom. II p. 539, ed. Vaillant — Carmanne, Liège 1960).

Διὰ τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ ἀνακατασκευασθέντος ἑλληνικοῦ κειμένου τῶν 15 θεωρημάτων εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον ἐστηρίχθημεν εἰς τὰ εἰς τὴν αὐτὴν διάλεκτον σῳζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους : 1) Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων, 2) Περὶ ἑλίκων, 3) Μηχανικὰ I καὶ II, 4) Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, 5) Ὀχουμένων I καὶ II, τὰ ὁποῖα ἔχομεν ἤδη μεταφράσει εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν. Μερικὰς διασαφηνίσεις τῶν ἀποδείξεων, διὰ τὰς ὁποίας πιστεύομεν ὅτι εἶναι παρεμβολή, τὰς παρελείψαμεν.

Αἱ παρ' ἡμῶν τεθεῖσαι ἐκφωνήσεις τῶν θεωρημάτων 1, 2, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14 δὲν ὑπάρχουσι εἰς τὴν ἀραβικήν. Φρονοῦμεν, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης θὰ εἶχε θέσει ἐκφωνήσεις εἰς τὰ θεωρήματα αὐτά.

LEMMATA A'

Reconstruction of the ancient text (in the sicilian doric dialect) of fifteen theorems of Archimedes which are preserved in the arabic language.

The Greek title of the relative treatise was «Lemmata». In the translation from Arabic into Latin it is «Liber Assumptorum»... There is no doubt, as too I. L. Heiberg observes, that the formulation of the theorems in question, as this exists in Arabic, cannot possibly be attributed to Archimedes. The following reasons plead in support of this opinion:

1. The fourth theorem contains the phrase «figure which Archimedes calls Arvelos» ; the fourteenth theorem, also, contains the phrase «figure which Archimedes calls Salinon». It is obvious that these phrases cannot have been written by Archimedes.

2. There are some elucidations in some proofs which could not possibly come from Archimedes. These have been made with the intention of rendering the proofs easily comprehensible to non advanced geometry students.

From the study of the fifteen theorems and their comparison with the preserved works of Archimedes we have come to the following conclusions:

A. The 15 theorems constitute a single whole and, owing to this, in all probability, they must be the invention of one person, that is to say of Archimedes. The 7th theorem may, probably, be an interpolation, because Euclid uses in the Elements XII, 2 the proposition, that the square, circumscribed to a circle is double the one which is inscribed.

B. The elucidations, made for an easier understanding of certain theorems, do not belong to Archimedes. These must be attributed to the unknown Greek mathematician who had composed a collection of theorems which he had shaped in a suitable manner so that they could be understood by his students more easily. In our opinion the Arab translator Thebit ben Kora did not effect any changes in the Greek text which he had used.

C. The proof of the second theorem cannot belong to Archimedes because the equation $BZ = ZE$ (fig. 2 a) is immediately inferred from the equation of the triangles AZE, BZΔ.

We consider as an Archimedean proof that which was formulated by T. L. Heath, which we also have rendered here in Greek (fig. 2, T. L. Heath, The Works of Archimedes, p. 302, Dover, New York).

D. It seems very probable that the theorems constitute a part of a bigger treatise of Archimedes which has not been preserved in whole and that these were invented when Archimedes was very young. The treatises on the Right-angled Triangles, on the Triangles and on the Quadrilaterals, which have not been preserved, had preceded the above treatise. We have no other information about the composition of these three Works of Archimedes excepting their having been mentioned in the «Lemmata A′» (theorems 5, 6, 12). (s. preface «The content of the vol. Γ′, II»).

E. We believe that the formulation of the 6th theorem is Archimedean. Because both in the 9th theorem of the treatise on Equilibriums of Planes II and in the 23rd of the treatise on Quadrature of the Parabola, special and not general cases are also studied. It is true that the theorems are not all of the same strength. But it cannot be supported that only the difficult ones among them are belong to Archimedes if we assume that these constitute one single whole.

As regards the name «Salinon» of the figure of the 14th theorem, we believe that this is due to a mistake in copying and that the Greek word was «Selenion» (meniscos of the mooncrescent), as, Isaac Barrow, Newton's teacher has correctly observed (P. ver Eecke, Les Oeuvres Complètes d'Archimède, Tom. II, p. 539, ed. Valliant - Carmanne, Liège 1960).

For the linguistic formulation of the reconstructed Greek text of the 15 theorems in the Sicilian Doric dialect we have relied on the preserved works of Archimedes which were written in the same dialect: 1. On Conoids and Spheroids, 2. On Spirals, 3. On the Equilibrium of Planes I and II, 4. On Quadrature of the Parabola, 5. On Floating Bodies I and II, which we have already translated into modern Greek. The formulations of the theorems 1, 2, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14 do not exist in Arabic. We believe that Archimedes would have placed formulations in these theorems. We have left out some elucidations of the proofs which we believe to have been interpolated.

ΛΗΜΜΑΤΑ Α΄

Τὸ ἀνακατασκευασθὲν ἀρχαῖον κείμενον τῶν 15 θεωρημάτων εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους.

α′

⟨ *Εἴ κα ἔωντι δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντὸς διαμέτροι δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλάλλαις ἐπ' εὐθείας* ⟩.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι, ἆν κέντρα τὰ Ζ, Η ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ Ε σαμεῖον, διάμετρος δὲ ἁ ΑΒ παρὰ διάμετρον τὰν ΓΔ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΒ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὸ Ε, ἄχθω δὲ ἁ ΔΘ παρὰ τὰν ΖΗ.

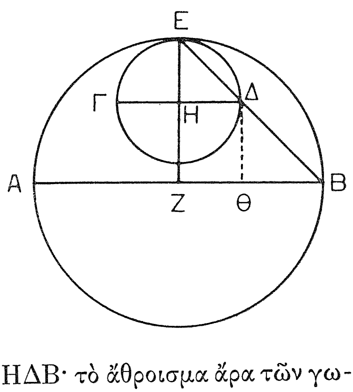
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΕ ἴσαι ἐντὶ καὶ ἁ ΗΔ τᾷ ΖΘ, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΘ, τουτέστιν ἁ ΗΕ· λοιπαὶ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΘΔ, ΘΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΘΒΔ, τουτέστιν τᾷ ὑπὸ ΗΔΕ ἐστιν ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ ἐστιν ἴσα· ἔστι δὲ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΒ, ΕΔΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴσα· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΒ· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

1

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς αἱ δὲ διάμετροι αὐτῶν ληφθῶσι παράλληλοι, αἱ συνδέουσαι τὰ πέρατα τῶν διαμέτρων καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο εὐθεῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι τῶν ὁποίων κέντρα εἶναι τὰ σημεῖα Ζ, Η ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ σημεῖον Ε, παράλληλοι δὲ διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ΕΔ, ΔΒ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

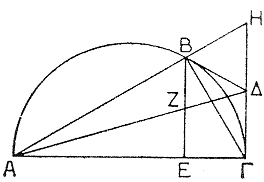
Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ καὶ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Ε καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ.



Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΕ εἶναι ἴσαι καὶ ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰς δύο (τελευταίας) ἡ ΖΘ τουτέστιν ἡ ΗΕ· αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι ΘΔ, ΘΒ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἡ γωνία ἄρα ΘΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΒΔ δηλ. τὴν ΗΔΕ· ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ γωνία ΗΔΒ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν ΗΔΒ, ΔΒΖ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΗΔΒ, ΕΔΗ· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΗΔΒ, ΔΒΖ ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν ΗΔΒ, ΕΔΗ ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς· ἐπ' εὐθείας ἄρα κεῖνται αἱ εὐθεῖαι ΕΔ, ΔΒ· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

β′

⟨ Εἴ κα ἀπὸ σαμείου ἐκτὸς ἁμικυκλίου κειμένου ἀχθέωντι δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου, ἆν ἁ μία ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πέρατος τᾶς διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ σαμείου δὲ ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας ἐπιψαυούσας ἀχθῇ εὐθεῖα ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τοῦ ἁμικυκλίου, ἁ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου πέρατος τᾶς διαμέτρου ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ κοι-



Σχ. 2 (T. Heath)

νὸν σαμεῖον τῶν ἐπιψαυουσῶν τέμνει τὰν ἀχθεῖσαν ποτ' ὀρθὰς δίχα ⟩.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ, ἁ δὲ ΒΕ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ, ἐπεζεύχθω δὲ ἁ ΑΔ· φαμὶ δή, ἁ ΒΖ ἴσα εἶμεν τᾷ ΖΕ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΒ καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ ἄχθω ἁ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΑ ὀρθή ἐστιν, ἐσσεῖται καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΒΗ ὀρθή· ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ τᾷ ΔΓ ἴσα· ἐσσεῖται ἄρα καὶ εὐθεῖα ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ τουτέστι τᾷ ΔΓ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΒΕ παρὰ τὰν ΗΓ ἐστίν, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ἁ ΒΖ τᾷ ΖΕ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

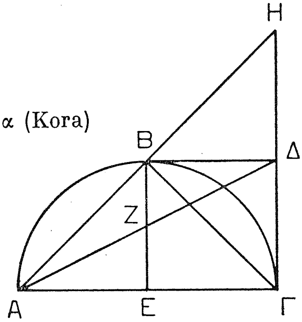
2

Ἐὰν ἀπὸ σημείου κειμένου ἐκτὸς ἡμικυκλίου ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ ἐφάπτηται εἰς τὸ ἓν πέρας τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς ἄλλης ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ ἡμικυκλίου, ἡ ἀπὸ τοῦ ἄλλου πέρατος τῆς διαμέτρου ἀγομένη εὐθεῖα μέχρι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ἐφαπτομένων τέμνει τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ αἱ ΔΒ, ΔΓ, ἡ δὲ ΒΕ ἃς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΖ = ΖΕ.

Διότι ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΒ καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῶσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ ἃς συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον Η, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΒΓ (Σχ. 2).

Σχ. 2α (Kora)



Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία ΓΒΑ εἶναι ὀρθή, εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία ΓΒΗ· εἶναι δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΔ = ΔΓ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΔΗ = ΔΒ = ΔΓ. (Διότι ἡ ΓΗ εἶναι ἡ διάμετρος κύκλου ΓΒΗ, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ Δ). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΓ, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΒΖ = ΖΕ· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

γ'

Ἔστω τμᾶμα κύκλου τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ σαμείου τινὸς Β τᾶς περιφερείας ἄχθω τᾷ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΒΔ, λελάφθω δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΕ εὐθείᾳ τᾷ ΔΑ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΒΖ τᾷ ΑΒ· φαμὶ δή, ἐπιζευχθεῖσα ἁ ΓΖ εὐθεῖα τᾷ ΓΕ ἔστιν ἴσα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΖ, ΖΕ, ΕΒ εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΕ ἐστὶν ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΒ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΕΔΒ ἴσα· βάσις ἄρα ἁ ΕΒ βάσει τᾷ ΑΒ, τουτέστι τᾷ ΒΖ ἐστιν ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΖΕ ἐστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ ΑΒΖΓ ἐν κύκλῳ ἐστίν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΓΑΒ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΓΖΒ, ΒΕΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί. ἔστι δὲ καὶ συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΓΕΒ, ΒΕΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΕΑ· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΓΖΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΕΒ ἐστιν ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ὑπὸ ΒΖΕ, τουτέστιν ἁ ὑπὸ ΒΕΖ· λοιπαὶ ἄρα αἱ ποτὶ τᾷ βάσει τᾷ ΕΖ τριγώνου τοῦ ΕΓΖ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΖΕ, ΖΕΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· πλευρὰ ἄρα ἁ ΖΓ πλευρᾷ τᾷ ΕΓ ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

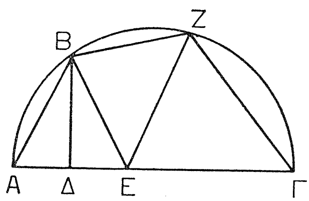
δ'

⟨ Εἴ κα ἐν ἀμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, γραφέωντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἀμικύκλια ἐντός, ἀνασταχῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ἔστ' ἐπὶ τὰν περιφέρειαν τᾷ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθάς, σχᾶμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ κύκλῳ οὗ διάμετρος ἁ ἀνασταχεῖσα κάθετος ⟩.

3

Ἔστω τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ σημείου τινὸς Β τῆς περιφερείας ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ κάθετος πρὸς τὴν ΑΓ, ἂς ληφθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα ΔΕ = ΔΑ καὶ τὸ τόξον ΒΖ = τόξον ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ.

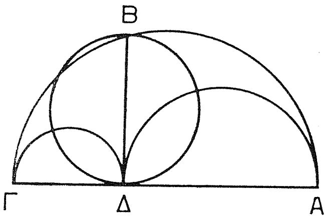
Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΖ, ΖΕ, ΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ = ΔΕ κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι πρὸς δύο ἀντιστοίχως τὰς ΕΔ, ΔΒ· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΔΒ = ΕΔΒ· ἡ βάσις ἄρα ΕΒ = ΑΒ = ΒΖ· ἡ γωνία ἄρα ΒΕΖ = ΒΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν ΓΖΒ + ΓΑΒ τουτέστι τὸ ΓΖΒ + ΒΕΑ = 2 ὀρθάς. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα ΓΕΒ + ΒΕΑ = 2 ὀρθάς. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ γωνία ΒΕΑ· εἶναι ἄρα γωνία ΓΖΒ = ΓΕΒ· ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἀθροίσματα ἡ γωνία ΒΖΕ = ΒΕΖ· αἱ ὑπόλοιποι ἄρα παρὰ τὴν βάσιν ΕΖ τοῦ τριγώνου ΕΓΖ γωνίαι ΓΖΕ, ΖΕΓ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἡ πλευρὰ ἄρα ΖΓ = πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΓ· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.



4

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ληφθῇ σημεῖόν τι γραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον μέχρι τῆς περιφερείας, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, ἰσοῦται μὲ κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ὑψωθεῖσα κάθετος.

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σαμεῖόν τι ἐπὶ διαμέτρου τᾶς ΑΓ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν ΓΔ, ΔΑ ἁμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ ἁ ΔΒ· φαμὶ δή, σχᾶμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, τουτέστι τοῦ μείζονος ἁμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρβηλος καλείσθω, κύκλῳ οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ ἴσον ἐστί.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τᾶς ὅλας τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων, τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλάλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνά ἐντι, ἐσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ δυσὶ κύκλοις ἆν διάμετρος ἁ ΔΒ καὶ δυσὶ κύκλοις, ἆν διαμέτροι αἱ ΑΔ, ΔΓ ἴσος, τουτέστιν ἁμικύκλιον τὸ ΑΓ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ, καὶ δυσὶν ἁμικυκλίοις, ἆν διαμέτροι αἱ ΑΔ, ΔΓ· κοινὸν ἀφαιρήσθω ἁμικύκλια τὰ ΑΔ, ΔΓ· λοιπὸν ἄρα χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τᾶν ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, ὅπερ ἄρβηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἁ ΔΒ ἐστιν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ε'

⟨ Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἁμικύκλια ἐντός, ἀνασταϰῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τᾷ διαμέτρῳ

Διότι ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ σημεῖόν τι Δ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΓ καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἐντὸς ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς ΓΔ, ΔΑ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ΔΒ· λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, δηλαδὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἡμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντὸς ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἂς κληθῇ ἄρβηλος, εἶναι ἴσον μὲ κύκλον διαμέτρου ΔΒ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΔΒ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΓ, τὸ ὀρθογώνιον $ΔΑ \times ΔΓ = ΒΔ^2$ (Εὐκλ. ς΄, ιζ΄)· ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΓ$ καὶ τὰ τετράγωνα $ΑΔ^2$, $ΔΓ^2$ (ὁπότε θὰ εἶναι $2ΔΑ \times ΔΓ + ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = ΒΔ^2 + ΔΑ \times ΔΓ + ΑΔ^2 + ΔΓ^2$)· θὰ εἶναι ἄρα $ΑΓ^2 = 2ΒΔ^2 + ΑΔ^2 + ΔΓ^2$ (ἐπειδὴ $ΑΔ \times ΔΓ = ΒΔ^2$). Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι μεταξύ των, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν (Εὐκλ. ιβ΄, β΄), ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ θὰ εἶναι ἴσος μὲ δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΔΒ καὶ μὲ δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ ἑπομένως τὸ ἡμικύκλιον ΑΓ εἶναι ἴσον μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΔΒ, καὶ μὲ δύο ἡμικύκλια, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΑΔ, ΔΓ· ἂς ἀφαιρεθῶσι ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος τὰ ἡμικύκλια ΑΔ, ΔΓ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τόξων ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἄρβηλος, ἰσοῦται μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΔΒ· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

5

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου γραφῶσι δύο ἡμικύκλια ἐντός, ὑψωθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ γρα-

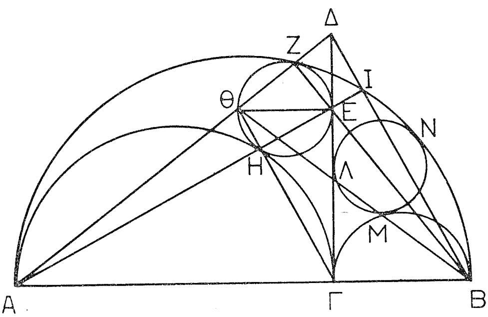
(Σημείωσις : Ἐκ τῶν ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμῶν ὁ πρὸ τοῦ κόμματος σημαίνει τὸ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὁ μετὰ τὸ κόμμα τὸν ἀριθμὸν τοῦ θεωρήματος, ἢ ἐὰν εἶναι περισσότεροι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν θεωρημάτων).

ποτ' ὀρθάς, καὶ δύο κύκλοι γραφέωντι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας ἐπιψαύοντες αὐτᾶς καὶ τῶν ἁμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι ⟩.

Ἔστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ ΑΒ σαμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτᾶς τὸ Γ, ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ ἁμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ, ἁ ΓΔ, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφότερα τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τᾶς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἁμικυκλίων· φαμὶ δή, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.

Ἔστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τᾶς ΓΔ κατὰ τὸ Ε σαμεῖον καὶ ἁμικυκλίου μὲν τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ Η, ἁμικυκλίου δὲ τοῦ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΘΕ· ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ ΑΘ, ΘΖ εὐθεῖαι ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΕ εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΕ, ΕΒ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ ΘΗ, ΗΓ, καὶ αἱ ΕΗ, ΗΑ, ἐκβεβλήσθω δὲ ἁ ΑΕ ἐπὶ τὸ Ι σαμεῖον, ἄχθω δὲ ἁ ΒΙ εὐθεῖα καὶ ἁ ΙΔ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΔ, ΑΒ εὐθεῖαί ἐντι καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου τᾷ ΑΒ ἆκται ποτ' ὀρθὰς ἁ ΔΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΔΑ ἁ ΒΖ, τεμνέουσα τὰν ΔΓ κατὰ τὸ Ε, εὐθεῖα δὲ ἁ ΑΕΙ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΙ ἐστι, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΙ, ΙΔ ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων δέδεικται. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΒΔ παρὰ τὰν ΓΗ ἐστιν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΘ, ὃν ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΘΕ, τουτέστιν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΓ· τὸ ἄρα φῶσι πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι αὐτῆς καὶ τῶν ἡμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσοι.

Ἔστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ, ἂς ἀναγραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΓ, ΓΒ ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἂς ὑψωθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ἂς ἀναγραφῶσι δὲ δύο κύκλοι πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου, ἐφαπτόμενοι καὶ τῆς ὑψωθείσης καὶ τῶν ἡμικυκλίων· λέγω, ὅτι οἱ γραφέντες κύκλοι εἶναι μεταξύ των ἴσοι.



Διότι ἔστω πρότερον κύκλος ὁ ἐφαπτόμενος τῆς ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ τοῦ μὲν ἡμικυκλίου ΑΓ κατὰ τὸ Η, τοῦ δὲ ἡμικυκλίου ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, ἂς ἀχθῇ δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΘΕ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΑΘ, ΘΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θ. 1), καὶ αἱ ΑΖ, ΓΕ ἀφοῦ προεκβληθῶσι ἂς συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὁμοίως αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΖΕ, ΕΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς ἐπίσης αἱ ΘΗ, ΗΓ καὶ αἱ ΕΗ, ΗΑ, ἂς ἐκβληθῇ δὲ ἡ ΑΕ μέχρι τοῦ σημείου Ι, ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ ΒΙ καὶ ἡ ΙΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΔ, ΑΒ εἶναι εὐθεῖαι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἔχει ἀχθῇ ἡ ΔΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἡ ΒΖ ἐπὶ τὴν ΔΑ, τέμνουσα τὴν ΔΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΕΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΙ, αἱ εὐθεῖαι ΒΙ, ΙΔ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς ἀπεδείχθη παρ' ἡμῶν εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ θὰ εἶναι ΑΔ : ΔΘ = ΑΓ : ΘΕ =

ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΘΕ ἐστιν ἴσον· ὁμοίως δὴ δείξομες, ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ ΛΜΝ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ τᾷ διαμέτρῳ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἴσον ἐστί· αἱ διαμέτροι ἄρα κύκλων τῶν ΕΖΗ, ΛΜΝ ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ϛʹ

⟨Εἴ κα ἐν ἀμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου ᾖ, καὶ γραφέωντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἀμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἀμικυκλίων, τὸν λόγον τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἀμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν⟩.

Ἔστω ἀμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, σαμεῖον δέ τι ἐπὶ τᾶς διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μεῖζον τμᾶμα τὸ ΑΔ ἐλάσσονος τοῦ ΔΓ ἀμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀναγεγράφθων ἀμικύκλια, γεγράφθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ ΕΖ ἐπιψαύων τῶν τριῶν ἀμικυκλίων καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΕΖ. εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾶς ΑΓ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΒ· εὐθεῖαι δὴ ἐντὶ αἱ ΑΒ, ΓΒ, ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. ἐπεζεύχθων ἔτι αἱ ΖΗΑ, ΕΘΓ· δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι εἶμεν· ἔτι δὲ ἐπεζεύχθων αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ αἱ ΔΙ, ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΜ, ΖΝ ἐκβεβλήσθων ἐπὶ τὰ Ο, Ρ σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΕΔ ἁ ΑΗ τᾷ ΕΔ ποτ' ὀρθάς ἐστι, καὶ ἁ ΔΙ τᾷ ΑΕ, τεμνέοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ Μ σαμεῖον, ἁ ΕΜΟ τᾷ ΑΓ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη, καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΖΝΡ τᾷ ΓΑ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐ-

ΑΒ : ΒΓ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΓ $\times$ ΓΒ $=$ ΑΒ $\times$ ΘΕ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τὸν κύκλον ΛΜΝ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ $\times$ ΓΒ $=$ ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ΛΜΝ· αἱ διάμετροι ἄρα τῶν κύκλων ΕΖΗ, ΛΜΝ, δηλαδὴ οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

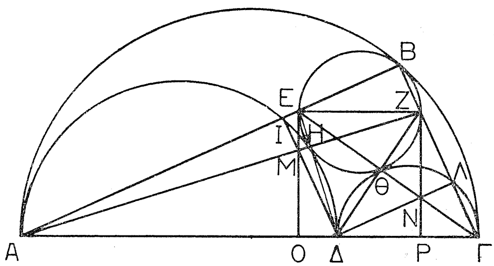
6

'Εὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ γραφῶσιν ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων, νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου.

῎Εστω ἡμικύκλιον ΑΒΓ, σημεῖον δέ τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Δ καὶ ἂς εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΔ τὰ 3 : 2 τοῦ μικροτέρου τοῦ ΔΓ, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων ΑΔ, ΔΒ ἂς ἀναγραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντός, ἂς γραφῇ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον ὁ κύκλος ΕΖ ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου ΑΓ πρὸς τὴν διάμετρον ΕΖ.

῞Ας ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΕΒ, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΒ· θὰ εἶναι λοιπὸν εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΒ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (θ. 1). ῞Ας ἐπιζευχθῶσιν ἀκόμη αἱ ΖΗ, ΗΑ καὶ αἱ ΕΘ, ΘΓ· ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι καὶ αὗται κεῖνται ἐπ' εὐθείας· προσέτι δὲ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ αἱ ΔΙ, ΔΛ καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΕΜ, ΖΝ ἂς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων Ο, Ρ.

'Επειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΔ ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΔ καὶ ἡ ΔΙ ἐπὶ τὴν ΑΕ, τέμνονται δὲ κατὰ τὸ σημεῖον Μ, ἡ ΕΜΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν πραγματείαν μας περὶ τριγώνων καὶ ὑπετέθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΖΝΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ· εἶναι *θεῖα ἁ ΔΛ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἁ ΔΙ παρὰ τὰν ΓΒ· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἔχει ἁ ΑΜ ποτὶ τὰν ΜΖ, τουτέστιν ἁ ΑΟ ποτὶ τὰν ΟΡ, καὶ ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΑ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ἁ ΓΝ ποτὶ τὰν ΝΕ, τουτέστιν ἁ ΓΡ ποτὶ τὰν ΡΟ· ἦν δὲ ἁ ΑΔ ἁμιόλιος τᾶς ΔΓ· καὶ ἁ ΑΟ ἄρα*



τᾶς ΟΡ ἐστιν ἁμιόλιος, καὶ ἁ ΟΡ τᾶς ΓΡ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΟ, ΟΡ, ΡΓ ἑξῆς ἀνάλογόν ἐντι, ἃν ἁ μὲν ΡΓ ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἁ δὲ ΟΡ ἕξ, ἁ δὲ ΑΟ ἐννέα, ἁ δὲ ΓΑ ἐννεακαίδεκα. ἔστι δὲ ἁ ΡΟ τᾷ ΕΖ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἕξ· καὶ ἔστι ἁ ΑΓ διάμετρος ἁμικυκλίου τοῦ ΑΒΓ, ἁ δὲ ΕΖ κύκλου τοῦ ΕΒΖ· εὑρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται εἴ κα ὁ λόγος τᾶς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἁμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου ἐπιμόριος ᾖ.

⟨ζ′

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστίν.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒ περὶ τετράγωνον τὸ ΑΒ καὶ ἐν δὲ ἡ εὐθεῖα ΔΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΔΙ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ· ὥστε εἶναι $ΑΔ : ΔΓ = ΑΜ : ΜΖ = ΑΟ : ΟΡ$ (1)

καὶ $ΓΔ : ΔΑ = ΓΝ : ΝΕ = ΓΡ : ΡΟ$. (2)

Ἦτο δὲ ἡ $ΑΔ = \frac{3}{2} ΔΓ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΑΟ = \frac{3}{2} ΟΡ$· εἶναι ἑπομένως ἡ $ΟΡ = \frac{3}{2} ΓΡ$· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΟ, ΟΡ, ΟΓ εὑρίσκονται εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν, ἐν ᾧ ἡ μὲν ΡΓ γίνεται $= 4$, ἡ δὲ $ΟΡ = 6$, ἡ δὲ $ΑΟ = 9$, ἡ δὲ $ΓΑ = 19$. Εἶναι δὲ ἡ $ΡΟ = ΕΖ$· ὥστε $ΑΓ : ΕΖ = 19 : 6$· καὶ εἶναι ἡ ΑΓ διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓ, ἡ δὲ ΕΖ διάμετρος τοῦ κύκλου ΕΒΖ· εὑρέθη ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἂν ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{n+1}{n}$. [Σημ. Ἐκ τῆς (1) ἀφοῦ $ΑΔ = \frac{3}{2} ΔΓ$ εἶναι καὶ $ΑΟ = \frac{3}{2} ΟΡ$, (3). Ἐκ τῆς (2), $ΓΔ : ΔΑ = ΓΡ : ΡΟ$, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος τῆς (1) ἔπεται $ΡΟ = \frac{3}{2} ΓΡ$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $ΑΟ = \frac{9}{4} ΓΡ$, ἤτοι ἔχομεν $ΑΟ = \frac{3}{2} ΟΡ = \frac{9}{4} ΓΡ$. Διαιροῦντες τὰ τρία μέλη τῶν ἰσοτήτων διὰ 9 λαμβάνομεν $\frac{ΓΡ}{4} = \frac{ΟΡ}{6} = \frac{ΑΟ}{9}$, καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν $\frac{ΓΡ}{4} = \frac{ΟΡ}{6} = \frac{ΑΟ}{9} = \frac{ΓΡ + ΟΡ + ΑΟ}{4+6+9} = \frac{ΑΓ}{19}$ ἢ $ΓΡ : ΟΡ : ΑΟ : ΑΓ = 4 : 6 : 9 : 19$, ἤτοι $ΑΓ : ΟΡ = 19 : 6$].

7

Ὁ περιγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον κύκλος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου.

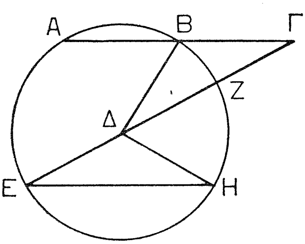
Διότι ἔστω ὁ κύκλος ΑΒ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράγω-

αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου, ἁ ΑΒ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἁ ΓΔ παρὰ τὰν ΑΕ· φαμὶ δή, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίων.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΕ, τουτέστι τᾶς ΓΔ ἐστὶ διπλάσιον, οἱ κύκλοι δέ ἐντι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν 〉.

η′

Εἴ κα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις ΑΒ προσαρμοσμένη ᾖ ἐκβληθῇ δὲ κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖά τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ Ε σαμεῖον, ἐσσεῖται περιφέρεια ἁ ΑΕ περιφερείας τὰς ΒΖ τριπλασίων.

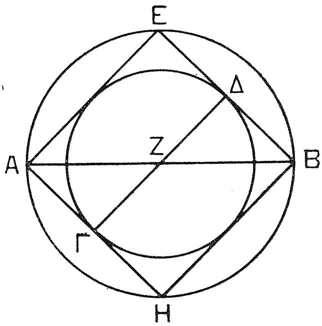


Ἄχθω γὰρ ἁ ΕΗ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΔΒ, ΔΗ. Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔΕΗ, ΔΗΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΓΔΗ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΔΕΗ ἐστι διπλασίων, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΔΓ τριπλασίων. ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΒΗ, τουτέστιν ἁ ΑΕ, περιφερείας τᾶς ΒΖ τριπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

θ′

〈 *Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέ-*

νον ΑΒ καὶ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου (δηλ. διαγώνιος) ἡ ΑΒ, ἂς ἀχθῇ δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΑΕ.



Ἐπειδὴ λοιπὸν $AB^2 = 2AE^2 = 2\Gamma\Delta^2$, οἱ δὲ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν. (Σημ. Ὅτι τὸ εἰς κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου (Εὐκλ. ιβ΄, β΄). Εἶναι ἄρα τὸ θεώρημα τοῦτο παρεμβολή).

8

Ἐὰν εἰς κύκλον χορδή τις ΑΒ ἐκβληθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΒΓ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖά τις μέχρι τοῦ σημείου Ε, τὸ τόξον ΑΕ θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ τόξου ΒΖ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΒ, ΔΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ γωνίαι ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔΕΗ, ΔΗΕ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, ἡ γωνία δὲ $\Gamma\Delta H = 2\Delta HE$, θὰ εἶναι ὅλη ἡ γωνία $B\Delta H = 3B\Delta\Gamma$· εἶναι ἑπομένως καὶ τὸ τόξον $BH = AE = 3BZ$· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

9

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καθέτως μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, τὰ δύο ἀπέναντι τόξα ἰσοῦνται μὲ τὰ ἄλλα δύο ρειαι δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί 〉.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέουσαι ἀλλάλας ποτ' ὀρθάς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· φαμὶ δή, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΑΔ, ΓΒ δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Τετμάσθω γὰρ δίχα ἁ ΓΔ κατὰ τὸ Η σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ Η διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΑΒ.

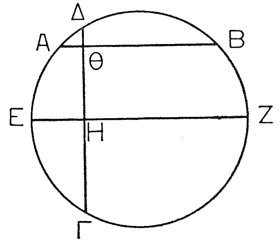
Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἁ ΕΓ περιφερείαις ταῖς ΕΑ, ΑΔ ἴσα ἐστί, ἐσσοῦνται ἄρα περιφέρειαι αἱ ΓΖ, ΕΑ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἴσαι· ἔστι δὲ περιφέρεια ἁ ΕΑ περιφερείᾳ τᾷ ΒΖ ἴσα· συναμφότερος ἄρα περιφέρεια ἁ ΓΒ, ΑΔ ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος περιφέρεια ἁ ΑΓ, ΔΒ ἁμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ι'

Εἴ κα ᾖ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Α, Γ σαμεῖα, τεμνέουσα δὲ εὐθεῖα ἁ ΔΒ, ἀχθῇ δὲ ἁ ΕΓ παρὰ τὰν ΒΔ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἁ ΕΑ τεμνέουσα τὰν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΕΓ ἀχθῇ ἁ ΖΗ, ἁ ἀγμένα τὰν ΕΓ δίχα τέμνει.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΔΑ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστί, ἁ δὲ ΑΓ τεμνέουσα αὐτοῦ, γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΓ τᾷ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμάματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΑΖΔ ἐστὶν ἴσα. ἔστι γὰρ ἁ ΓΕ παρὰ τὰν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΔΑΖ, ΑΘΔ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΖΔ, ΘΑΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἁ πρὸς τὸ Δ κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΔΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνῳ ἐστὶν ἴσον· ἐπεὶ οὖν ὃν λόγον ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, τοῦτον ἔχει ἀπέναντι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως αἱ ΑΒ, ΓΔ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι τὰ δύο ἀπέναντι τόξα ΑΔ, ΓΒ, ἰσοῦνται μὲ τὰ δύο ἀπέναντι ΑΓ, ΒΔ.

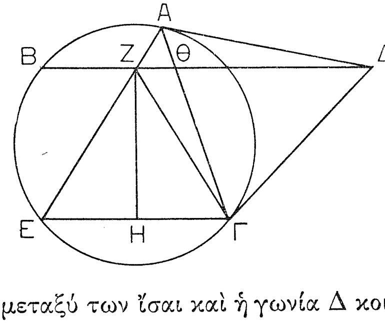


Διότι ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ εὐθεῖα ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Η καὶ διὰ τοῦ Η ἂς διαχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον ΕΓ = τοξ ΕΑ + ΑΔ, θὰ εἶναι ἄρα τοξ ΓΖ + ΕΑ + ΑΔ = μὲ ἡμικύκλιον· εἶναι δὲ τοξ ΒΖ = τοξ ΑΕ· θὰ εἶναι ἄρα τοξ ΓΒ + ΑΔ = μὲ ἡμικύκλιον· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τόξον ΑΓ + ΔΒ = μὲ ἡμικύκλιον· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

10

Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΓ ἐφάπτωνται αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Γ, ἀχθῇ δὲ τέμνουσα ἡ ΔΒ καὶ ἡ ΕΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἡ ΕΑ τέμνουσα τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν ΕΓ ἡ ΖΗ, ἡ ἀχθεῖσα διχοτομεῖ τὴν ΕΓ.



Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ΑΓ χορδὴ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἡ γωνία ΔΑΓ = ΑΕΓ = ΑΖΔ· διότι ἡ ΓΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα τὰ ΔΑΖ, ΑΘΔ δύο γωνίαι αἱ ΑΖΔ, ΘΑΔ εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ ἡ γωνία Δ κοινή, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΔΖ × ΔΘ = ΔΑ^2 = ΔΓ^2. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὃν λόγον ἔχει ἡ ΖΔ : ΔΓ = ΔΓ : ΔΘ, ἡ δὲ πρὸς τὸ Δ σημεῖον γωνία *καὶ ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΔΘ, γωνία δὲ ἁ ποτὶ τὸ Δ σαμεῖον κοινά ἐστι, τρίγωνα ἄρα τὰ ΔΖΓ, ΔΓΘ ἐστιν ὅμοια καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΖΓ, ΔΓΘ, ΔΑΘ, ΑΖΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΖΓ τᾷ ὑπὸ ΖΓΕ ἴσα· ἦν δὲ καὶ ἁ ὑπὸ ΔΖΑ τᾷ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσα· ἐν δυσὶ τριγώνοις ἄρα τοῖς ΕΗΖ, ΓΗΖ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΕΖ, ΗΓΖ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ αἱ ποτὶ τὸ Η σαμεῖον γωνίαι ὀρθαί· ἔστι δὲ πλευρὰ ἁ ΗΖ κοινά· ἔστιν ἄρα ἁ ΕΗ τᾷ ΗΓ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.*

ια′

⟨ Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέωντι ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν εὐθειῶν τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου τετραγώνῳ ἴσα ἐντί ⟩.

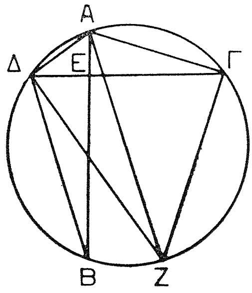
Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνάσθων ποτ' ὀρθὰς κατὰ τὸ Ε σαμεῖον· φαμὶ δή, τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστί.

Ἄχθω γὰρ διάμετρος τοῦ κύκλου ἁ ΑΖ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΓΖ, ΔΒ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΔΕ, ΑΖΓ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΔΕ, καὶ ΑΓΖ, ΑΖΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΖ, ΔΑΕ ἐσσοῦνται ἀλλάλαις ἴσαι· περιφέρειαι ἄρα αἱ ΓΖ, ΔΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΒ· ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ, τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ,ἴσον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΓΑ τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΑ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσον· ἐσσοῦνται ἄρα εἶναι κοινή, τὰ τρίγωνα ἄρα ΔΖΓ, ΔΓΘ εἶναι ὅμοια καὶ ἡ γωνία ΔΖΓ = ΔΓΘ = ΔΑΘ = ΑΖΔ· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΔΖΓ = ΖΓΕ· ἦτο δὲ καὶ ἡ ΔΖΑ = ΑΕΓ· εἰς τὰ δύο τρίγωνα ἄρα ΕΗΖ, ΓΗΖ εἶναι γωνία ἡ ΗΕΖ = ΗΓΖ, αἱ πρὸς τὸ σημεῖον Η γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΖ κοινή· εἶναι ἄρα ΕΗ = ΗΓ· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

11

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καθέτως, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

Διότι ἔστω ὁ ΑΒΓ κύκλος καὶ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως κατὰ τὸ σημεῖον Ε αἱ ΑΒ, ΓΔ, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $ΑΕ^2 + ΕΒ^2 + ΓΕ^2 + ΕΔ^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.



Διότι ἂς ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΑΖ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΑΔ, ΓΖ, ΔΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΖΓ δύο γωνίαι αἱ ΑΕΔ, ΑΔΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο γωνίας ἀντιστοίχως τὰς ΑΓΖ, ΑΖΓ θὰ εἶναι καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία ΓΑΖ = ΔΑΕ· τὰ τόξα ἄρα ΓΖ, ΔΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ αἱ εἰς αὐτὰ χορδαί, αἱ ΓΖ, ΔΒ· εἶναι δὲ καὶ $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 = ΔΒ^2 = ΓΖ^2$, καὶ $ΑΕ^2 + ΕΓ^2 = ΓΑ^2$, καὶ $ΓΖ^2 + ΓΑ^2 = ΖΑ^2$· θὰ εἶναι ἄρα τὰ τετρά-

τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ιβ′

⟨ Εἴ κα ἐκ σαμείου ἐκτὸς ἁμικυκλίου δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς δύο εὐθεῖαι ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάτεσσι τᾶς διαμέτρου τεμνέουσαι ἀλλάλας, ἁ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον τομᾶς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ποτὶ τὰν διάμετρον ἐσσεῖται ταύτᾳ ποτ' ὀρθάς ⟩.

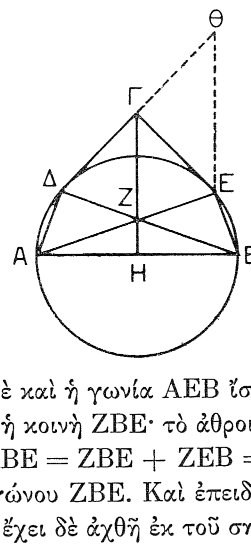
Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ, σαμεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄχθων δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Δ, Ε σαμεῖα, ἐπεζεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἁφᾶς ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάτεσσι τᾶς διαμέτρου τοῖς Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΔΒ, τεμνέουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀχθεῖσα ἁ ΓΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΓΗ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ἐσσεῖται ποτ' ὀρθάς.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΑΔ, ΕΒ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΑΒ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ ὀρθή ἐστιν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΒΑ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΕΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω ἁ ὑπὸ ΖΒΕ· συναμφότερος ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ, ΑΒΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΖΒΕ, ΖΕΒ, τουτέστιν τᾷ ἐξωτερικᾷ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ, τριγώνου τοῦ ΖΒΕ ἐστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἁ ΓΔ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστί, διᾶκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς τοῦ Δ ἁ ΔΒ τεμνέουσα τὸν κύκλον, ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΒ ἴσα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ τᾷ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴσα· καὶ συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΖ, ΓΔΖ τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴσα· καὶ δέδεικται παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων, ὅτι εἴ κα μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν γωνα τῶν τμημάτων $ΑΕ^2 + ΕΒ^2 + ΓΕ^2 + ΕΔ^2 =$ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

12

Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς ἡμικυκλίου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ, ἀχθῶσι δὲ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο εὐθεῖαι πρὸς τὰ ἀπέναντι αὐτῶν πέρατα τῆς διαμέτρου τεμνόμεναι, ἡ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σημείου πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα μέχρι τῆς διαμέτρου θὰ εἶναι ἐπ' αὐτὴν κάθετος.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒ σημεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΔΕ ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε καὶ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς πρὸς τὰ ἀπέναντι πέρατα τῆς διαμέτρου τὰ Α, Β, αἱ εὐθεῖαι ΕΑ, ΔΒ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ Ζ καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΓΖ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Η· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ.



Διότι ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΔΑΒ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθή, αἱ ὑπόλοιποι δύο γωνίαι ΔΑΒ, ΔΒΑ ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΕΒ ἴση μὲ μίαν ὀρθήν· ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ κοινὴ ΖΒΕ· τὸ ἄθροισμα ἑπομένως τῶν γωνιῶν $ΔΑΒ + ΑΒΕ = ΖΒΕ + ΖΕΒ =$ πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΔΖΕ τοῦ τριγώνου ΖΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἔχει δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ ἡ χορδὴ ΔΒ, θὰ εἶναι ἡ γωνία $ΓΔΒ = ΔΑΒ$· διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ γωνία $ΓΕΖ = ΕΒΑ$· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $ΓΕΖ + ΓΔΖ = ΔΖΕ$ καὶ ἔχομεν ἀποδείξει εἰς τὴν πραγματείαν μας Περὶ τετραπλεύρων, ὅτι, ἐὰν μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, ὡς π.χ. τῶν ΓΔ, ΓΕ, ἀχθῶσι δύο εὐ-

τεμνομένων, οἷον τῶν ΓΔ, ΓΕ, δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνόμεναι, οἷον αἱ ΔΖ, ΕΖ, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ τούτων περιεχομένα, ὡς ἁ ποτὶ τὸ Ζ, συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν περιεχομένᾳ, ὡς αἱ ποτὶ τὰ Ε, Δ σαμεῖα ἴσα ἐστίν, ἁ ἐπιζευγνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου ὅθι που αἱ δύο εὐθεῖαι συμβαλέοντι ἐπὶ τὸ σαμεῖον ὅθι που αὗται τεμνέοντι ἀλλάλας, ὡς ἁ ΓΖ εὐθεῖα, ἑκατέρᾳ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὡς αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐστιν ἴσα· ἁ ΓΖ εὐθεῖα ἄρα τᾷ ΓΔ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΖΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΔΖ, τουτέστι τᾷ ὑπὸ ΔΑΗ· γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ ΓΖΔ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΗ, ΔΖΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστί· λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΖΗ, αἱ ὑπὸ ΑΔΖ, ΑΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα ἐστί. ἔστιν ἄρα εὐθεῖα ἁ ΓΗ διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ποτ'ὀρθάς· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ιγ'

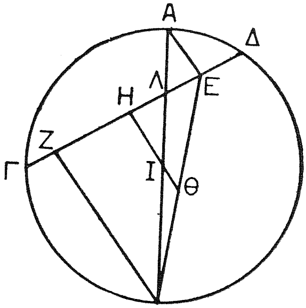
⟨ Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι ἔωντι τεμνέουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθάς, ἁ μὲν διάμετρος ἁ δὲ οὒ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἄλλᾳ εὐθείᾳ, αἱ ἀπολαφθεῖσαι ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί ⟩.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλάλας μὴ ποτ' ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἅν ἁ ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν Α, Β ἄχθων τᾷ ΓΔ ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ· φαμὶ δή, αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου ἀπολαφθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΓΖ, ΔΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΕΒ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ θεῖαι τεμνόμεναι ὡς αἱ ΔΖ, ΕΖ καὶ ἡ ὑπὸ τούτων περιεχομένη γωνία, ὡς ἡ πρὸς τὸ Ζ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρὸς τὰ σημεῖα Ε, Δ γωνιῶν, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου ὅπου αὗται τέμνονται, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΖ, ἰσοῦται πρὸς ἑκάστην τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὡς εἶναι αἱ ΓΔ, ΓΕ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΖ = ΓΔ*) καὶ ἡ γωνία ΓΖΔ = ΓΔΖ = ΔΑΗ· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν ΓΖΔ + ΔΖΗ = 2 ὀρθάς· καὶ τὸ ἄθροισμα ἑπομένως ΔΑΗ + ΔΖΗ = 2 ὀρθάς· αἱ ἄλλαι ἄρα γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΔΖΗ, αἱ ΑΔΖ + ΑΗΖ = 2 ὀρθάς· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΔΒ = 1 ὀρθήν· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΗΓ = 1 ὀρθήν· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΗ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

13

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται οὐχὶ καθέτως καὶ ἡ μία εἶναι διάμετρος ἡ δὲ ἄλλη ὄχι, ἀχθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν, τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τμήματα εἶναι μεταξύ των ἴσα.



Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ εἰς αὐτὸν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι οὐχὶ καθέτως αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῶν Α, Β ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ αἱ ΑΕ, ΒΖ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου λαμβανόμενα τμήματα τὰ ΓΖ, ΔΕ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΒ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ Ι ἂς ἀχθῇ

*) [Προεκτείνομεν τὴν ΔΓ μέχρι τοῦ Θ, ὥστε ΓΘ = ΓΕ, ὁπότε ἔχομεν ∢ ΓΘΕ = ∢ ΓΕΘ. Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως ∢ ΔΖΕ = ∢ ΓΔΖ + ΓΕΖ. Καὶ διὰ προσθέσεως, ∢ ΔΘΕ + ∢ ΔΖΕ = ∢ ΓΔΖ + ΘΕΖ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ἄρα ΘΔΖΕ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι ἄρα τοῦτο ἐγγράψιμον εἰς τὸν κύκλον ΘΔΖΕ, ὅπου Γ εἶναι τὸ κέντρον αὐτοῦ, ἐπειδὴ ΓΔ = ΓΘ = ΓΕ. Εἶναι ἄρα ΓΖ = ΓΔ].

Ι τᾷ ΓΔ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ ΙΗ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλέτω τᾷ ΕΒ κατὰ τὸ Θ σαμεῖον.

'Επεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΙΗ παρὰ τὰν ΑΕ ἐστί, ἁ δὲ ΒΙ τᾷ ΙΑ ἴσα, εὐθεῖα ἄρα ἁ ΒΘ τᾷ ΘΕ ἐστιν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΒΖ παρὰ τὰν ΘΗ ἐστί, εὐθεῖα ἄρα ἁ ΖΗ εὐθείᾳ τᾷ ΗΕ ἐστιν ἴσα· ἔστι δὲ καὶ ἁ ΗΓ τᾷ ΗΔ ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἁ ΖΗ, τουτέστιν ἁ ΗΕ· λοιπὰ ἄρα ἁ ΖΓ λοιπᾷ τᾷ ΕΔ ἐστὶν ἴσα· φανερὸν οὖν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'

⟨ Εἴ κα ἐν ἁμικυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου δύο ἴσα τμάματα λαφθέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἁμικύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τᾶς διαμέτρου ἁμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος οὗ διάμετρος συναμφότερος ἁ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἁμικυκλίου καὶ ἁ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτός, χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν ⟩.

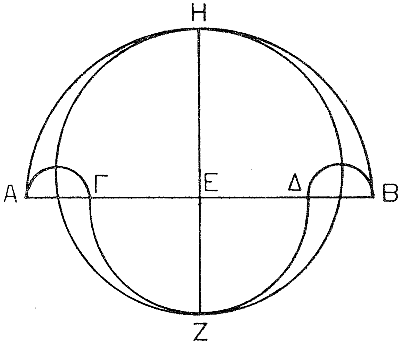
῎Εστω ἁμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἁ ΑΒ καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου τῶν Α, Β δύο τμάματα ἴσα ἀλλάλοις λελάφθων τὰ ΑΓ, ΒΔ, γεγράφθων δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἁμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμάματος τοῦ ΓΔ γεγράφθω ἁμικύκλιον ἐκτός, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἁμικυκλίου τοῦ Ε διαμέτρῳ τᾷ ΑΒ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς εὐθεῖα ἁ ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον· φαμὶ δή, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλείσθω, ἴσος ἐστίν.

ἡ ΙΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ ἐκβληθεῖσα ἂς συναντήσῃ τὴν ΕΒ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΙΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ, ἡ δὲ ΒΙ = ΙΑ, ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΘ = ΘΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ εὐθεῖα ἄρα ΖΗ = ΗΕ· εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΓ = ΗΔ· ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἡ ΖΗ = ΗΕ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν ΕΔ ἴση· εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῶσι δύο ἴσα τμήματα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τούτων γραφῶσιν ἐντὸς δύο ἡμικύκλια, γραφῇ δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τῆς διαμέτρου ἡμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ ληφθέντος ἡμικυκλίου καὶ τοῦ ἐκτὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἂς κληθῇ σελήνιον (μηνίσκος σελήνης).



Ἔστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῶν Α, Β ἂς ληφθῶσι δύο ἴσα μεταξύ των τμήματα τὰ ΑΓ, ΒΔ, ἂς γραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ ἄλλου τμήματος τοῦ ΓΔ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον ἐκτός, διὰ τοῦ κέντρου δὲ Ε τοῦ ἡμικυκλίου ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ ἡ ΕΖ καὶ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου Η· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΖΗ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἂς κληθῇ σελήνιον.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ ἁ ΔΓ δίχα τέτμαται κατὰ τὸ Ε σαμεῖον ποτικεῖται δὲ αὐτᾷ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἁ ΓΑ, τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΑ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ποτικειμένας τᾶς ΓΑ τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλασίονά ἐντι τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου. ἔστι δὲ ἁ ΖΗ τᾷ ΔΑ ἴσα· ἔστιν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ΔΕ καὶ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΒ τᾶς ΑΕ διπλασίων ἐστὶ καὶ ἁ ΓΔ τᾶς ΔΕ, ἐσσοῦνται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΓΑ διπλασίονα· κύκλοι ἄρα, ἃν διαμέτροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι κύκλων, ἃν διαμέτροι αἱ ΖΗ, ΓΑ διπλασίονές ἐντι· ἁμικύκλια ἄρα ἃν διαμέτροι αἱ ΑΒ, ΔΓ εὐθεῖαι κύκλων, ἃν διαμέτροι αἱ ΖΗ, ΓΑ ἴσοι ἐντί· κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, τουτέστι δύο ἁμικύκλια, ἃν διαμέτροι αἱ ΑΓ, ΔΒ· λοιπὸν ἄρα χωρίον, τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἁμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ οὗ διάμετρος ἁ ΖΗ ἴσον ἐστίν· δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

ιε′

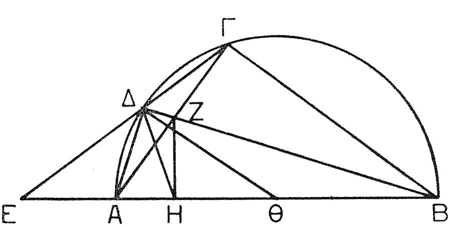
Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΒ καὶ ἁ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τετμάσθω δὲ περιφέρεια ἁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω ἁ ΔΒ τεμνέουσα πλευρὰν τὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω τᾷ ΑΒ ποτ' ὀρθὰς ἁ ΖΗ· φαμὶ δή, εὐθεῖα ἁ ΕΗ τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΓΒ καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σαμεῖον καὶ ἄχθων αἱ ΘΔ, ΔΗ, ΑΔ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστι, γωνία

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΔΓ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε σημεῖον πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΑ θὰ εἶναι $ΔΑ^2 + ΓΑ^2 = 2(ΔΕ^2 + ΕΑ^2)$, (Εὐκλ. β', ι'). Εἶναι δὲ ἡ $ΖΗ = ΔΑ$· θὰ εἶναι ἄρα $ΖΗ^2 + ΓΑ^2 = 2(ΔΕ^2 + ΕΑ^2)$, (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΒ = 2ΑΕ$ καὶ ἡ $ΓΔ = 2ΔΕ$ θὰ εἶναι $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = 4(ΔΕ^2 + ΕΑ^2) = 2(ΖΗ^2 + ΓΑ^2)$, (ἐκ τῆς 1)· οἱ κύκλοι ἄρα τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΑΒ, ΔΓ εἶναι διπλάσιοι τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΖΗ, ΓΑ· τὰ ἡμικύκλια ἄρα τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΑΒ, ΔΓ εἶναι ἴσα πρὸς τοὺς κύκλους τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ΖΗ, ΓΑ· ἂς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ, δηλ. δύο ἡμικύκλια διαμέτρων ΑΓ, ΔΒ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τόξων ἡμικυκλίων, τὸ καλούμενον σελήνιον, εἶναι ἴσον πρὸς κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΖΗ· εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

15

Ἔστω τὸ ἡμικύκλιον ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου, ἂς τμηθῇ δὲ τὸ τόξον ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, ἀφοῦ δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη ἕως τὸ Ε καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΗ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.



Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘΔ, ΔΗ, ΑΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία $ΑΒΓ = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς, θὰ εἶναι ἡ γωνία *ἁ ὑπὸ ΓΒΔ, τουτέστι ἁ ὑπὸ ΔΒΑ ὑποπενταπλασία ὀρθῆς ἐστι· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΘΑ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΖ, ΗΒΖ δύο γωνίαι αἱ ποτὶ τῷ Β ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ Η, Γ σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΖ, ἐσσεῖται ἄρα καὶ βάσις ἁ ΒΓ βάσει τᾷ ΒΗ ἴσα. Πάλιν ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΓΒΔ, ΗΒΔ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΗ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνίαι δὲ αἱ ποτὶ τὸ Β ἴσαι, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἁ ΒΔ, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΒΓΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΗΔ, τουτέστιν ἐπιπέμπτῳ ὀρθῆς ἴσα· ἔστι δὲ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΗΔ γωνιῶν, γωνίᾳ τᾷ ἐκτὸς τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΒΑΔΓ, τουτέστι τᾷ ΔΑΕ ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΑ ἐστὶν ἴσα, καὶ πλευρὰ ἁ ΔΑ τᾷ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΘΗ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστι καὶ ἁ ὑπὸ ΔΗΘ ἐπίπεμπτος ὀρθῆς, γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΘΔΗ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς ἐστιν· πλευρὰ ἄρα ἁ ΔΗ πλευρᾷ τᾷ ΗΘ ἐστιν ἴσα. πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ ΑΔΓΒ ἐκτός ἐστι, ἐσσεῖται ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσα· ἔστι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ ὑποδιπλασιεφαμίσεια ὀρθῆς· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΔΘ ἐστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΕΔΑ, ΘΔΗ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΔΑ, ΔΑΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΘΔΗ, ΔΗΘ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἁ ΔΑ βάσει τᾷ ΔΗ ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἁ ΕΑ πλευρᾷ τᾷ ΘΗ ἴσα ἐστίν. κοινὰ ποτικείσθω ἁ ΑΗ· εὐθεῖα ἄρα ἁ ΕΗ εὐθείᾳ τᾷ ΑΘ, τουτέστι τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.*

ΓΒΔ $=$ ΔΒΑ $= \frac{1}{5}$ ὀρθῆς· ἡ γωνία ἄρα ΔΘΑ $= \frac{2}{5}$ ὀρθῆς. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΓΒΖ, ΗΒΖ αἱ δύο πρὸς τὸ Β γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι δὲ αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Η, Γ γωνίαι ὀρθαί, κοινὴ δὲ ἡ πλευρὰ ΒΖ, θὰ εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΒΓ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΓΒΔ, ΗΒΔ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΗ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, αἱ δύο δὲ γωνίαι πρὸς τὸ Β εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ πλευρὰ ΒΔ εἶναι κοινή, θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΓΔ $=$ ΒΗΔ $= \frac{6}{5}$ ὀρθῆς· $\left(\widehat{\Delta\Gamma A} = \frac{1}{2}\Delta\Theta A = \Delta\hat{B}A = \frac{1}{5}\right.$ ὀρθῆς$\left.\right)$. εἶναι δὲ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΒΗΔ ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΒΑΔΓ, τὴν ΔΑΕ· (διότι ΒΓΔ $+$ ΔΑΒ $= 2$ ὀρ. καὶ ΔΑΒ $+$ ΔΑΕ $= 2$ ὀρθ.)· ἡ γωνία ἄρα ΔΑΒ $=$ ΔΗΑ καὶ ἡ πλευρὰ ΔΑ $=$ πλευρὰν ΔΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΘΗ $= \frac{2}{5}$ ὀρθῆς καὶ ἡ γωνία ΔΗΘ $= \frac{6}{5}$ ὀρθῆς, ἡ γωνία ἄρα ΘΔΗ $= \frac{2}{5}$ ὀρθῆς· ἡ πλευρὰ ἄρα ΔΗ $=$ πλευρὰν ΗΘ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΕ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ εἰς τὸν κύκλον τετραπλεύρου ΑΔΓΒ θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΑΔΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ (ΓΒΑ $+$ ΑΔΓ $= 2$ ὀρθ. καὶ ΑΔΕ $+$ ΑΔΓ $= 2$ ὀρ.)· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΒΓ $= \frac{2}{5}$ ὀρθῆς· ἡ γωνία ἄρα ΑΔΕ $=$ ΗΔΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα τὰ ΕΔΑ, ΘΔΗ αἱ δύο γωνίαι ΕΔΑ, ΔΑΕ εἶναι πρὸς τὰς δύο ΘΔΗ, ΔΗΘ ἀντιστοίχως, ἡ βάσις δὲ ΔΑ $=$ βάσιν ΔΗ, ἡ πλευρὰ ἄρα ΕΑ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΘΗ· ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ εὐθεῖα ΑΗ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΕΗ $=$ ΑΘ, τουτέστιν ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἐδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εὐθεῖα ἁ ΔΕ τᾷ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἴσα. ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΗΘ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἁ ΔΘ πλευρᾷ τᾷ ΔΕ, τουτέστι τᾷ ΑΘ ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ ἔτι δῆλον, ὅτι εὐθεῖα ἁ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμαται κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· τμᾶμα δὲ τὸ ΔΕ τὸ μεῖζόν ἐστι, ἐπεὶ ἁ ΕΔ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἁ δὲ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.

ΛΗΜΜΑΤΑ Α΄

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΕ = ΔΗΘ θὰ εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΔΘ = πλευρὰν ΔΕ = ΑΘ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

Καὶ ἀκόμη εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Δ· τμῆμα δὲ τὸ ΔΕ εἶναι τὸ μεγαλύτερον, ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ ΔΓ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων (Εὐκλ. ιγ′, θ′).

ΠΕΡΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ὡς ἀναφέρεται εἰς τὸν πρόλογον ἡ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου περιέχεται εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου al - Biruni (Carl Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Biruni, ed. Julius Ruska - Heinrich Wieleitner, Hannover 1927. Kapitel I καὶ IV S. 74 - 83). Ἡ πραγματεία αὕτη περιέχει 17 προτάσεις. Ἐκ τούτων αἱ ὑπ' ἀριθμ. 1 - 13 ἀφορῶσιν εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, αἱ ὑπ' ἀριθμ. 14 - 15 εἰς κύκλους καὶ μόνον αἱ ὑπ' ἀριθμ. 16 - 17 ἀφορῶσιν εἰς τὸ ἑπτάγωνον. Ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε γράψει πραγματείας περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων καὶ περὶ κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἀπωλέσθησαν. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὰς ἀπολεσθείσας αὐτὰς πραγματείας ἀνήκουσι αἱ ὑπ' ἀριθμ. 1 - 13 προτάσεις Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων καὶ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 14 - 15 προτάσεις περὶ κύκλων, αἵτινες δημοσιεύονται ἀμέσως κατωτέρω.

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον 13 προτάσεων τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων, αἱ ὁποῖαι σῴζονται εἰς τὴν ἀραβικήν.

α′

Κείσθω ἐπ' εὐθείας τᾶς ΑΒ δύο σαμεῖα τὰ Γ, Δ οὕτως, ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετράγωνον ἴσον εἶμεν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ τετραγώνοις. φαμὶ δή, ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ τετραγώνοις ἐστί, κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετράγωνον μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ. τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ, ΓΔ τετραγώνοις μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ περιεχομένου. ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΓΔ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΓΔ, ΑΓ, τουτέστι τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΑΔ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ, ΓΔ τετράγωνα μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ, τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΑΔ ἴσα ἐντί. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΓΔ τετραγώνου, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνοις μετὰ

1

'Επὶ τῆς εὐθείας AB λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις :

$$\Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta B^2 \qquad (1)$$

Λέγω, ὅτι ἐπίσης εἶναι καὶ $AB^2 = 2A\Delta \times B\Gamma$.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) τὸ ἄθροισμα $\Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$, ὁπότε ἔχομεν :

$$2\Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma^2 + \Delta B^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta. \qquad (2)$$

Τὸ πρῶτον ὅμως μέλος τῆς (2) εἶναι ἴσον πρὸς

$$2\Gamma\Delta \cdot (\Gamma\Delta + A\Gamma) = 2\Gamma\Delta \cdot A\Delta,$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται :

$$A\Gamma^2 + \Delta B^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta = 2\Gamma\Delta \cdot A\Delta. \qquad (3)$$

'Επειδὴ ὅμως $A\Delta^2 = (A\Gamma + \Gamma\Delta)^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$, *τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ. συναμφότερα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΑΔ ἴσα ἐντί. κοινὸν ποτικείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τᾶν ΔΒ, ΑΔ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΒ, ΑΔ ἴσα ἐντὶ τῷ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΓΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

β′

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον οὗ ἡ μία μὲν πλευρὰ συναμφοτέρῳ τᾷ τε τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινούσᾳ πλευρᾷ μετὰ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ἴσα ἐστίν, ἁ ἄλλα δὲ συναμφοτέρῳ τᾷ τε τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινούσᾳ μετὰ τᾶς ἑτέρας καθέτου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου τετραγώνῳ.

Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὰν γωνίαν ἔχον τὰν ὑπὸ ΑΒΓ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινούσας πλευρᾶς τᾶς ΑΓ, λελάφθω τᾷ ΑΒ ἁ ΑΔ ἴσα καὶ τᾷ ΒΓ ἁ ΓΗ. ἔστι δὴ ἁ μὲν ΔΓ συναμφοτέρῳ τᾷ ΑΒ, ΑΓ ἴσα, ἁ δὲ ΑΗ συναμφοτέρῳ τᾷ ΑΓ, ΓΗ καὶ ἁ ΔΗ συμπάσαις ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἴσα, τουτέστιν ἁ ΔΗ τᾷ περιμέτρῳ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνοις, ἐσσεῖται, κατὰ τὸ πρὸ τούτου, τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΗ τετράγωνον ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΓ, ΑΗ περιεχομένου ὀρθογωνίου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ′

Εἴ κα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀχθῇ τὸ ὕψος ἐπὶ τὰν ὑποτείνουσαν τὰν ὀρθὰν γωνίαν, τὸ ἀπὸ τᾶς περιμέτρου τοῦ τρι-

(Εὐκλ. β′, δ′) ἡ (3) γίνεται :

$$ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = 2ΓΔ \cdot ΑΔ. \qquad (4)$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) τὸ $2ΔΒ \cdot ΑΔ$, ὁπότε λαμβάνομεν :

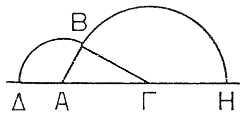
$$ΑΔ^2 + ΔΒ^2 + 2ΔΒ \cdot ΑΔ = 2(ΑΔ \cdot ΔΓ + ΑΔ \cdot ΔΒ),$$

ἤτοι

$$ΑΒ^2 = 2ΑΔ \cdot ΓΒ. \qquad ὅ.ἔ.δ.$$

2

Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

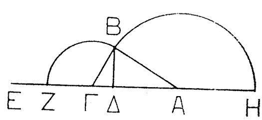


Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ. Προεκτείνομεν αὐτὴν ἑκατέρωθεν λαμβάνοντες $ΑΔ = ΑΒ$ καὶ $ΓΗ = ΒΓ$, ὁπότε ἔχομεν $ΔΓ = ΑΒ + ΑΓ$, $ΑΗ = ΑΓ + ΓΗ$, $ΔΗ = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$, ἤτοι ἡ ΔΗ ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ (Εὐκλ. α′, μζ′) θὰ εἶναι κατὰ τὸ α′ θεώρημα $ΔΗ^2 = 2ΔΓ \cdot ΑΗ$. ὅ.ἔ.δ.

3

Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς *γώνου τετράγωνον ἴσον ἐστὶν ποτὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ὑποτεινούσας τὰν ὀρθὴν γωνίαν καὶ τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ὕψους.*

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τᾶς ὀρθᾶς γωνίας τᾶς Β ὕψος ἐπὶ τὰν ὑποτείνουσαν τὰν ὀρθὰν γωνίαν τὸ ΒΔ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ὑποτεινούσας ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη λελάφθω ἁ ΑΗ τᾷ ΑΒ ἴσα, ἁ ΓΖ τᾶ ΓΒ καὶ ἁ ΖΕ τᾷ ΒΔ. φαμὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ διπλασίῳ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΗΕ.



Ἐπεὶ γὰρ τρίγωνα τὰ ΒΓΔ, ΒΓΑ ὁμοῖά ἐντι, ἔστιν ὡς ἁ ΕΖ, τουτέστιν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΓΖ, τουτέστι τὰν ΓΒ, οὕτως ἁ ΑΗ, τουτέστιν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΓ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἁ ΕΖ, ΓΖ ποτὶ τὰν ΓΖ, οὕτως συναμφότερος ἁ ΑΗ, ΑΓ ποτὶ τὰν ΑΓ, τουτέστιν, ὡς ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΓΖ, οὕτως ἁ ΗΓ ποτὶ τὰν ΑΓ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΗΓ, οὕτως ἁ ΓΖ ποτὶ τὰν ΑΓ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἁ ΕΓ, ΗΓ ποτὶ τὰν ΗΓ, οὕτως συναμφότερος ἁ ΓΖ, ΑΓ ποτὶ τὰν ΑΓ, τουτέστιν, ὡς ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΗΓ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΑΓ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΗΕ, ΑΓ, τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΗΓ ἴσον· καὶ τὰ διπλάσια ἄρα τούτων ἀλλάλοις ἴσα ἐντί. ἀλλὰ τὸ διπλάσιον τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΕ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς περιμέτρου σὺν τὸ ὕψος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Β τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τὸ ΒΔ. Εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὰ δύο μέρη αὐτῆς λαμβάνομεν $\mathrm{AH} = \mathrm{AB}$, $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{B}$ καὶ $\mathrm{ZE} = \mathrm{B}\Delta$.

Λέγω, ὅτι $\mathrm{HZ}^2 = 2\mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{HE}$.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΓΑ εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. ς′, η′)

ἔχομεν : $$\frac{\mathrm{EZ}(=\mathrm{B}\Delta)}{\Gamma\mathrm{Z}(=\Gamma\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{AH}(=\mathrm{AB})}{\mathrm{A}\Gamma}.$$

Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι :

$$\frac{\mathrm{EZ}+\Gamma\mathrm{Z}}{\Gamma\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{AH}+\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} \quad (\text{Εὐκλ. ε′, ιη′}),\ \text{τουτέστιν}$$

$$\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{H}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma},\ \text{καὶ ἐναλλὰξ εἶναι :}\ \frac{\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{A}\Gamma} \quad (\text{Εὐκλ. ε′, ις′})$$

καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι :

$$\frac{\mathrm{E}\Gamma+\mathrm{H}\Gamma}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}+\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} \quad (\text{Εὐκλ. ε′, ιη′}),\ \text{τουτέστιν}$$

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{H}\Gamma} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{A}\Gamma},\ \text{ἐξ ἧς}\ \mathrm{HE}\cdot\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{AZ}\cdot\mathrm{H}\Gamma \quad (\text{Εὐκλ. ς′, ις′}),$$

$$\text{ἢ} \qquad 2\mathrm{HE}\cdot\mathrm{A}\Gamma = 2\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{H}\Gamma.$$

Ἀλλὰ $2\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{H}\Gamma = \mathrm{HZ}^2$ (θ. 2). Δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν :

$$2\mathrm{HE}\cdot\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{HZ}^2\cdot \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

δ′

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκβληθείσας μιᾶς τῶν τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τᾶς ΒΓ ἐπ' ἀμφότερα λελάφθω ἁ ΒΗ τᾷ ΑΒ ἴσα, ἁ ΗΕ τῷ ΒΔ, τουτέστι τῷ ὕψει τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὰν ὑποτείνουσαν τὰν ὀρθὰν γωνίαν καὶ ἁ ΓΖ τᾷ ΓΑ ἴσα. φαμὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τᾶν ΓΖ, ΕΖ.

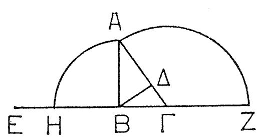
Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τᾶν ΗΕ, ΓΖ καὶ τὰ διπλάσια τούτων ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσα. ἔστι δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΒ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΓ τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετραγώνῳ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρῳ τᾷ ΗΒ, ΒΓ τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΒ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΓ τετραγώνου, μετὰ τοῦ διπλασίου περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΒΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ διπλασίου περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΗΕ, ΓΖ. κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετραγώνου ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετραγώνου μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΗΕ, ΓΖ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρῳ τᾷ ΗΓ, ΓΖ τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετραγώνου, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΗΓ, ΓΖ, ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετράγωνον ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΖ τετραγώνου μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΗΕ, ΓΖ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΗΓ, ΓΖ, τουτέστι τῷ διπλασίῳ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ΓΖ καὶ πά-

4

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς καθέτου πλευρᾶς ΒΓ πρὸς τὰ δύο μέρη λαμβάνομεν τμῆμα



ΒΗ = ΑΒ, ΗΕ = ΒΔ (ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν) καὶ ΓΖ = ΓΑ. Λέγω, ὅτι :

$$\text{ΗΖ}^2 = 2\text{ΓΖ} \cdot \text{ΕΖ}.$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ ΗΒ · ΒΓ = ΗΕ · ΓΖ, θὰ εἶναι καὶ

$$2\text{ΗΒ} \cdot \text{ΒΓ} = 2\text{ΗΕ} \cdot \text{ΓΖ},$$

καὶ εἶναι : $\text{ΗΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = \text{ΓΖ}^2$, (Εὐκλ. α′, μζ′)

$$\text{ΗΓ}^2 = (\text{ΗΒ} + \text{ΒΓ})^2 = \text{ΗΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 + 2\text{ΗΒ} \cdot \text{ΒΓ}, \text{ (Εὐκλ. β′, δ′)}$$

$$\text{ΗΓ}^2 = \text{ΓΖ}^2 + 2\text{ΗΕ} \cdot \text{ΓΖ}.$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΓΖ^2 καὶ ἔχομεν :

$$\text{ΗΓ}^2 + \text{ΓΖ}^2 = 2\text{ΓΖ}^2 + 2\text{ΗΕ} \cdot \text{ΓΖ}.$$

Ἐπειδὴ $\text{ΗΖ}^2 = (\text{ΗΓ} + \text{ΓΖ})^2 = \text{ΗΓ}^2 + \text{ΓΖ}^2 + 2\text{ΗΓ} \cdot \text{ΓΖ}$, (Εὐκλ. β′, δ′) δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\text{ΗΖ}^2 = 2\text{ΓΖ}^2 + 2\text{ΗΕ} \cdot \text{ΓΖ} + 2\text{ΗΓ} \cdot \text{ΓΖ}$$

σαις ταῖς ΓΖ, ΗΕ, ΗΓ, τουτέστι τῷ διπλασίῳ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΓΖ, ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε′

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὰν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν, λελάφθω δὲ ἐπὶ πλευρᾶς τᾶς ΒΓ τμᾶμα τὸ ΒΔ ἴσον πλευρᾷ τᾷ ΑΒ. φαμὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ πάσαις ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΑΒ ὡς ἀπὸ μιᾶς τετραγώνῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΓ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ μετὰ τᾶς ΔΓ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετραγώνου, τουτέστι τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ, καὶ ἁ ΒΔ τᾷ ΑΒ ἐστιν ἴσα, ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τᾶν ὑπὸ τᾶς ΑΒ καὶ τᾶς ΒΓ χωρὶς τᾶς ΑΒ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ δὶς τᾶν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ.

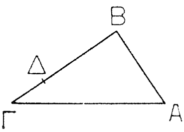
Κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον μετὰ τοῦ διπλασίου τᾶν ὑπὸ ΑΒ, ΑΓ. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τᾶν ὑπὸ ΑΒ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τὰς ΑΒ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ΔΓ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τᾶν ὑπὸ τᾶς ΑΒ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΓΒ. κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΒΓ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ συναμ-

$$= 2\Gamma Z(\Gamma Z + HE + H\Gamma)$$
$$= 2\Gamma Z \cdot EZ. \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

5

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Β. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τμῆμα $B\Delta = AB$. Λέγω, ὅτι

$$(AB + B\Gamma + \Gamma A)^2 + \Delta\Gamma^2 = (A\Gamma + AB)^2 + (A\Gamma + B\Gamma)^2.$$



Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $B\Gamma^2 + B\Delta^2 = (B\Delta + \Delta\Gamma)^2 + B\Delta^2$ (Εὐκλ. β′, δ′) $= 2B\Delta^2 + 2B\Delta \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2$ καὶ $B\Delta = AB$, θὰ ἔχωμεν :

$$A\Gamma^2 = 2AB^2 + 2AB \cdot (B\Gamma - AB) + \Delta\Gamma^2$$
$$= \Delta\Gamma^2 + 2AB \cdot B\Gamma.$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ἄθροισμα

$$AB^2 + 2AB \cdot A\Gamma,$$

ὁπότε λαμβάνομεν :

$$A\Gamma^2 + AB^2 + 2AB \cdot A\Gamma = AB^2 + \Delta\Gamma^2 + 2AB(A\Gamma + \Gamma B).$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $(A\Gamma + B\Gamma)^2$, ὁπότε *φοτέρου τᾶς ΑΓ, ΒΓ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΑΓ τετραγώνου ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετραγώνοις μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΒΓ τετραγώνου μετὰ τοῦ διπλασίου τᾶν ὑπὸ ΑΒ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΒΓ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΒ, ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ πάσαις ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ς′

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὰν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν καὶ ἐκβληθείσας τᾶς τὰν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσας ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΗ, ΓΕ πλευρᾷ τᾷ ΑΒ ἴσον καὶ ἁ ΓΖ τᾷ ΓΒ ἴσα. ἐσσεῖται δὴ ἁ ΗΓ συναμφοτέρῳ τᾷ ΑΒ, ΑΓ ἴσα, ἁ ΑΖ συναμφοτέρῳ τᾷ ΑΓ, ΒΓ καὶ ἁ ΗΖ τᾷ περιμέτρῳ τοῦ τριγώνου ἴσα. φαμὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΖ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΓ, ΑΖ τετραγώνοις.

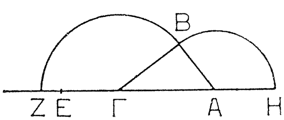
Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΓΖ τετραγώνοις, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΕ, ΓΖ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ δὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΓΖ περιεχομένου, κοινὸν ποτικείσθω τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΑΓ. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΑΗ τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ δὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΑΖ περιεχομένου ἴσον.

Κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετράγωνον. τὸ ἄρα ἔχομεν $(\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma})^2+(\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma})^2=\mathrm{AB}^2+\Delta\Gamma^2+(\mathrm{A\Gamma}+$ $+\mathrm{B\Gamma})^2+2\mathrm{AB}(\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma})$, ἤτοι $(\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma})^2+(\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma})^2=$ $=(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\mathrm{A})^2+\Delta\Gamma^2$.

ὅ. ἔ. δ.

6

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῶν δύο αὐτῆς ἄκρων καὶ λαμβάνομεν $\mathrm{AH}=\mathrm{AB}=\Gamma\mathrm{E}$, $\Gamma\mathrm{Z}=\Gamma\mathrm{B}$, ὁπότε εἶναι $\mathrm{H\Gamma}=\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{AZ}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}$ καὶ ΗΖ = πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου.



Λέγω, ὅτι $\mathrm{HZ}^2+\mathrm{ZE}^2=\mathrm{H\Gamma}^2+\mathrm{AZ}^2$.

Ἀπόδειξις. $\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2$ (Εὐκλ. α′, μζ′) $=\Gamma\mathrm{E}^2+$ $+\Gamma\mathrm{Z}^2=\mathrm{ZE}^2+2\Gamma\mathrm{E}\cdot\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{ZE}^2+2\mathrm{AH}\cdot\Gamma\mathrm{Z}$.

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ γινόμενον $2\mathrm{AH}\cdot\mathrm{A\Gamma}$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\mathrm{A\Gamma}^2+2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{ZE}^2+2\mathrm{AH}\cdot\mathrm{AZ}.$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ AH^2, ὁπότε ἔχομεν *ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετράγωνον, τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΖΕ τετραγώνοις μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΑΖ ἴσον ἐστίν. κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΓ, ΑΖ τετραγώνοις τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΗ, ΑΖ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετραγώνου, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ τετραγώνοις ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ζʹ

Ἔστω εὐθεῖά τις ἁ ΑΒ καὶ δύο σαμεῖα ἐπ' αὐτᾶς τὰ Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΑΒ περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΔΒ περιεχομένῳ ἴσον εἶμεν. φαμὶ δή, ὅτι τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΓΒ ἴσον ἐστίν.

Τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΑΒ ἐστιν ἴσον, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΓΔ, ὑπόκειται δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΓΔ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΔΒ, τουτέστι τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ ἴσον. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστιν ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΒ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΓΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ηʹ

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω κύκλος ὁ ΔΗΖ, ἐκβληθεῖσα δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα τὰ σαμεῖα ἁφῶν ΔΗ συμβαλλέτω

$$\text{ΗΓ}^2 = \text{ΑΗ}^2 + \text{ΖΕ}^2 + 2\text{ΑΗ} \cdot \text{ΑΖ} \text{ (Εὐκλ. β', δ').}$$

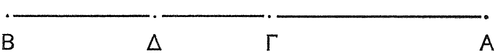
Τέλος προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ΑΖ^2 καὶ λαμβάνομεν: $\text{ΗΓ}^2 + \text{ΑΖ}^2 = (\text{ΑΗ} + \text{ΑΖ})^2 + \text{ΖΕ}^2 = \text{ΗΖ}^2 + \text{ΖΕ}^2$. ὅ.ἔ.δ.

7

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης

$$\text{ΓΔ} \cdot \text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} \cdot \text{ΔΒ}.$$

Λέγω, ὅτι $$2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΔ} = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΒ}.$$



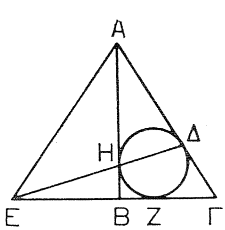
Ἀπόδειξις. $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΔΒ} = \text{ΓΔ} \cdot \text{ΑΒ} = \text{ΓΔ}(\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ}) =$
$= \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ} + \text{ΓΒ} \cdot \text{ΓΔ}$ καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν,

$$2\text{ΑΓ} \cdot \text{ΔΒ} = \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ} + \text{ΓΒ} \cdot \text{ΓΔ} + \text{ΑΓ} \cdot \text{ΔΒ} = 2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΔ}.$$

Εἶναι ὅμως $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ} + \text{ΑΓ} \cdot \text{ΔΒ} = \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ καὶ κατὰ ταῦτα ἔχομεν $2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΓΔ} = \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} + \text{ΒΓ} \cdot \text{ΓΔ} = \text{ΓΒ}(\text{ΑΓ} + \text{ΓΔ}) = \text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΒ}$. ὅ.ἔ.δ.

8

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν παρὰ τὸ Β. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον τὸν κύκλον ΔΗΖ, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΗ, ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου Δ καὶ Η καὶ προεκτείνομεν τὴν ΔΗ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Ε. Λέγω, ὅτι ΒΕ = ΑΗ.



τᾷ ΓΒ ἐκβληθεῖσᾳ κατὰ τὸ Ε σαμεῖον. φαμὶ δὴ τὰν ΒΕ τᾷ ΑΗ ἴσαν εἶμεν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΕΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετραγώνου τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραγώνοις ἴσον, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΕΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετραγώνου τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραγώνοις ἴσον. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΕΗ τῷ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνῳ ἴσον, ἔστιν ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραγώνοις τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΕΖ τετράγωνα ἴσα. κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ἴσον τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΒΖ μετὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΑΗ τετραγώνοις. κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΗ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΗΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΗΒ τετραγώνου τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΖ τετραγώνου ἴσον.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΗΒ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τὰς ΒΖ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί, ἔστιν ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΗΒ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΒΖ ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἁ ΗΒ τᾷ ΒΖ ἴσα ἐστί, ἔστιν ἄρα ἁ ΑΗ τᾷ ΕΒ ἴσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ′

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ ὡς ἐν τῷ πρότερον. φαμὶ δή, ὅτι, ὡς ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΗΒ.

Ἄχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σαμείου τᾷ ΕΓ ποτ' ὀρθὰς καὶ ἐκβληθεῖσα ἁ ΕΔ συμπιπτέτω τᾷ ἀχθείσᾳ ποτ' ὀρθὰς κατὰ τὸ Τ σαμεῖον. ἐπεὶ οὖν ἁ ΓΤ ἆκται παρὰ τὰν ΑΗ, τρίγωνα τὰ ΤΓΔ, ΑΔΗ ὁμοῖά ἐντι. ὡς ἄρα ἁ ΑΗ ποτὶ τὰν ΓΤ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΓΔ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ ΑΗ ποτὶ τὰν

Ἀπόδειξις. Ἑνοῦμεν τὸ Α μὲ τὸ Ε. (Εἶναι $ΑΔ = ΑΗ$. Ἡ ΔΗ προεκτεινομένη συναντᾶται μὲ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε). Καὶ ἐπειδὴ

$$ΕΔ \cdot ΕΗ + ΑΗ^2 = ΑΕ^2, \quad ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = ΑΕ^2 \text{ (Εὐκλ. α', μζ')}$$

καὶ ἑπομένως $\quad ΕΔ \cdot ΕΗ + ΑΗ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2$.

Προσέτι εἶναι $ΕΔ \cdot ΕΗ = ΕΖ^2$ (Εὐκλ. γ', λϛ') καὶ ἑπομένως $ΑΒ^2 + ΒΕ^2 = ΑΗ^2 + ΕΖ^2$.

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΒΕ^2$ καὶ λαμβάνομεν

$$ΑΒ^2 = 2ΕΒ \cdot ΒΖ + ΒΖ^2 + ΑΗ^2.$$

Ἀφαιροῦντες τὸ $ΑΗ^2$ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ἔχομεν

$$2ΑΗ \cdot ΗΒ + ΗΒ^2 = 2ΕΒ \cdot ΒΖ + ΒΖ^2.$$

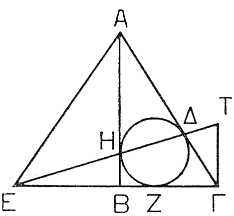
Ἐπειδὴ δὲ $ΗΒ^2 = ΒΖ^2$, θὰ ἔχωμεν

$$2ΑΗ \cdot ΗΒ = 2ΕΒ \cdot ΒΖ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ΗΒ = ΒΖ$, θὰ ἔχωμεν $ΑΗ = ΕΒ$. ὅ.ἔ.δ.

9

Θεωρῶ τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Λέγω ἀκόμη, ὅτι $\dfrac{ΕΓ}{ΕΒ} = \dfrac{ΔΓ}{ΗΒ}$.



Ἀπόδειξις. Φέρομεν εἰς τὸ Γ τὴν κάθετον καὶ προεκτείνομεν τὴν ΕΔ μέχρις ὅτου αὐτὴ συναντήσῃ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον εἴς τι σημεῖον, ἔστω Τ. Ἐπειδὴ ἡ ΓΤ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ τὰ τρίγωνα ΤΓΔ, ΑΔΗ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\dfrac{ΑΗ}{ΓΤ} = \dfrac{ΑΔ}{ΓΔ}$ καὶ ἐναλλὰξ $\dfrac{ΑΗ}{ΑΔ} = \dfrac{ΓΤ}{ΓΔ}$ (Εὐκλ. ε', ιϛ').

ΑΔ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΓΤ ποτὶ τὰν ΓΔ. ἀλλὰ ἁ ΑΔ τᾷ ΑΗ ἐστιν ἴσα καὶ ἁ ΓΤ τᾷ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἁ ΓΕ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΓΤ ποτὶ τὰν ΗΒ, ὡς ἄρα ἁ ΓΕ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΓΔ ποτὶ τὰν ΗΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι′

Γενομένας τᾶς αὐτᾶς κατασκευᾶς, ὡς ἐν τῷ πρότερον, φαμὶ δή, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἐστίν ἴσον.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἁ ΓΖ ποτὶ τὰν ΖΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ τᾶν ΕΓ, ΖΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΓΖ περιεχομένῳ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΖ, ΒΓ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστί, καὶ ἁ μὲν ΕΒ τᾷ ΑΗ ἴσα, ἁ δὲ ΒΖ τᾷ ΒΗ, ἁ δὲ ΑΒ τᾷ ΕΖ, ἐσσεῖται δὴ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΓ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον, τουτέστι [τῷ διπλασίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια′

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

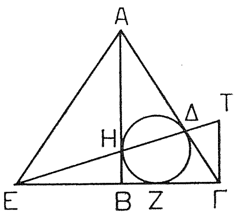
Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὰν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν, ἐγγεγράφθω δὲ κύκλος ἐν αὐτῷ ὁ ΔΗΖ. φαμὶ δέ, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον, τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἁ ΑΔ τᾷ ΑΗ ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΓΔ τᾷ ΓΖ, ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΓΖ τετραγώνοις μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ περιεχομένου ἴσον. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, Εἶναι ὅμως ΑΔ = ΑΗ· εἶναι ἄρα ΓΤ = ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{\Gamma E}{EB} = \frac{\Gamma T}{HB} \quad (\text{Εὐκλ. } \alpha', \varkappa\eta'.\ \alpha', \varkappa\theta'.\ \varsigma', \delta')$$

θὰ ἔχωμεν $\frac{\Gamma E}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{HB}$. ὅ.ἔ.δ.

10



Θεωρῶ τὸ αὐτὸ σχῆμα, ὡς προηγουμένως. Λέγω, ὅτι ΑΔ · ΔΓ = τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Εἶναι $\frac{E\Gamma}{EB} = \frac{\Gamma Z}{ZB}$, ἐξ ἧς ΕΓ · ΖΒ = ΕΒ · ΓΖ (Εὐκλ. ς΄, ις΄).

Καὶ ἐπειδὴ ΕΖ · ΒΓ = 2ΑΔ · ΔΓ, ΕΒ = ΑΗ, ΒΖ = ΒΗ καὶ ΑΒ = ΕΖ, θὰ εἶναι ΑΒ · ΒΓ = 2ΑΔ · ΔΓ = 2 τρίγωνον ΑΒΓ· εἶναι ἄρα ΑΔ · ΔΓ = τρίγωνον ΑΒΓ. ὅ.ἔ.δ.

11

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν ὀρθὴν εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος ΔΗΖ. Λέγω, ὅτι ΑΔ · ΔΓ = τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Εἶναι ΑΔ = ΑΗ καὶ ΓΔ = ΓΖ.

$$A\Gamma^2 = AH^2 + \Gamma Z^2 + 2A\Delta \cdot \Delta\Gamma \quad (\text{Εὐκλ. } \beta', \delta').$$

Ἐπειδὴ ὅμως $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ (Εὐκλ. α΄, μζ΄), θὰ εἶναι ἐπίσης

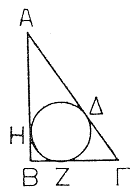
ΒΓ τετραγώνοις ἴσον. ἔστιν ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΓΖ τετράγωνα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ περιεχομένου τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνοις ἴσα. κοινὸν ἀφαιρήσθω τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΓΖ τετράγωνα. ἔστιν ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΗΒ, ΒΖ τετραγώνοις μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΑΗ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΖ, ΖΒ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ ΗΒ, ΒΖ τετράγωνα ἴσα ἀλλάλοις ἐντὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΖ τετράγωνον μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΖ, ΖΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΒΖ, ἐστιν ἴσον. ἔτι δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΑΗ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΒΖ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ καὶ ἁ ΗΒ τᾷ ΒΖ ἴσα. ἔτι δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΒΖ, ΑΗ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΓΒ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστίν.

Ἐπεὶ οὖν τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΒΓ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΒΖ, ΑΗ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΖ, ΑΗ ἴσον ἐστί, τουτέστι τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΑΗ εἴ κα τῷ μὲν διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΒΖ, ΑΗ, μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΓΒ, τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΒΓ ποτιτεθῇ, ἅπερ ἴσα ἐντὶ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ, μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ, μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΑΗ, κοινὸν δὲ ἀφαιρεθῇ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΑΗ, ἔστιν ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΓΒ, μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΒ, ΓΒ τῷ τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον, τουτέστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΑΗ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΗΒ, τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον, τουτέστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΑΒ ἴσον ἐστὶν δύο τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ, τουτέστι τῷ διπλα-

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{\Gamma Z}^2 + 2\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}.$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ ἄθροισμα $\mathrm{AH}^2 + \mathrm{\Gamma Z}^2$ καὶ λαμβάνομεν

$$\mathrm{HB}^2 + \mathrm{BZ}^2 + 2(\mathrm{HB} \cdot \mathrm{AH} + \mathrm{\Gamma Z} \cdot \mathrm{ZB}) = 2\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}.$$



Εἶναι ὅμως $\mathrm{HB}^2 = \mathrm{BZ}^2$ καὶ $\mathrm{BZ}^2 + \mathrm{\Gamma Z} \cdot \mathrm{ZB} = \mathrm{\Gamma B} \cdot \mathrm{BZ}$ (Εὐκλ. β′, γ′),

$$2(\mathrm{HB} \cdot \mathrm{AH} + \mathrm{\Gamma B} \cdot \mathrm{BZ}) = 2\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}, \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{HB} = \mathrm{BZ},$$

καὶ $$2(\mathrm{BZ} \cdot \mathrm{AH} + \mathrm{HB} \cdot \mathrm{\Gamma B}) = 2\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ $2\mathrm{AH} \cdot \mathrm{B\Gamma} = 2(\mathrm{BZ} \cdot \mathrm{AH} + \mathrm{\Gamma Z} \cdot \mathrm{AH})$

$$2\,\mathrm{AH}.\ \mathrm{B\Gamma} = 2(\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma} + \mathrm{ZB} \cdot \mathrm{AH}) \tag{2}$$

θὰ ἔχωμεν, ἐὰν προσθέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) καὶ κατόπιν ἀφαιρέσωμεν τὸ κοινὸν γινόμενον $2\mathrm{ZB} \cdot \mathrm{AH}$

$$2(\mathrm{AH} \cdot \mathrm{\Gamma B} + \mathrm{HB} \cdot \mathrm{\Gamma B}) = 4\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}$$

ἢ $$\mathrm{\Gamma B}(\mathrm{AH} + \mathrm{HB}) = 2\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma}$$

σίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον. ὅ.ἔ.δ.

ιβ'

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ ὡς ἐν τῷ πρότερον, λελάφθω δὲ ἑκάτερον τῶν δύο τμαμάτων τῶν ΔΕ, ΗΤ τμάματι τῷ ΓΔ ἴσον. ἔστιν οὖν ἁ ΒΤ τᾳ ΒΓ ἴσα.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΕ τετραγώνοις μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΤ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΕ τετραγώνοις μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ, ἔστιν ἴσον, ἔστιν ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΤ τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΤ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΤ. κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΤ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΤ, τουτέστι τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΤ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΓ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν γωνίαν ἔχον τὰν ὑπὸ ΑΒΓ, λελάφθω δὲ τμᾶμα τὸ ΑΔ τμάματι τῷ ΑΒ ἴσον.

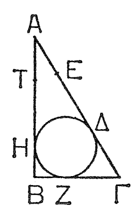
$$\text{ΓΒ} \cdot \text{ΑΒ} = 2 \text{ τρίγωνα ΑΒΓ} = 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΓ}$$

ἤτοι $\quad \text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΓ} = \text{τρίγωνον ΑΒΓ}.$ ὅ.ἔ.δ.

12

Ἄλλως τὸ αὐτό, τὸ 10

Λαμβάνομεν εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΔΕ καὶ ΗΤ ἴσον πρὸς ΓΔ.



Τότε θὰ εἶναι ΒΤ = ΒΓ, καὶ ἐπειδὴ (Εὐκλ. β′, δ′), $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΕ}^2 + 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ} = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΤ}^2$ (Εὐκλ. α′, μζ′),

καὶ $\quad \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΕ}^2 + 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ} = \text{ΑΕ}^2 + 4\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ},$

θὰ ἔχωμεν $\quad \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΤ}^2 = \text{ΑΕ}^2 + 4\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ}.$

Εἶναι ὅμως $\quad \text{ΑΕ}^2 + 4\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ} = \text{ΑΤ}^2 + 2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΤ}.$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὴν ἰσότητα $\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΤ}^2$,

θὰ ἔχωμεν $\quad 4\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ} = 2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΤ},$

ἢ $\quad 2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΕ} = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΒΤ}\cdot$ εἶναι ἄρα

$$\text{ΑΔ} \cdot \text{ΔΓ} = \text{τρίγωνον ΑΒΓ}. \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

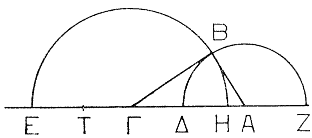
13

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὴν παρὰ τὸ Β γωνίαν ὀρθήν. Λαμβάνω ΑΔ = ΑΒ. Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον *φαμὶ δή, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΗΔ καὶ τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου τέτταρσι τριγώνοις ΑΒΓ ἴσον ἐστίν.*

'Εκβεβλήσθω γὰρ ἁ ΑΓ ἐπ' ἀμφότερα τὰ μέρη καὶ λελάφθω ἁ ΖΑ τᾷ ΑΒ ἴσα, ἁ ΓΕ τᾷ ΓΒ, ἁ ΕΤ τᾷ ΗΔ καὶ ἁ ΖΕ τᾷ περιμέτρῳ τοῦ τριγώνου. ἔστι δὲ ἁ ΖΑ μετὰ τᾶς ΓΔ τᾷ ΑΓ ἴσα. ἔτι δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΑΕ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΑΕ τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΕ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΑ, ΑΓ, ΓΕ τετραγώνοις μετὰ τοῦ διπλασίου τῶν ὑπὸ τᾶν ΖΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ διπλασίου τῶν ὑπὸ τᾶν ΖΑ, ΓΕ, μετὰ τοῦ διπλασίου τῶν ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΕ, ἔτι δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΖΕ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΤ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΑΓ, ΓΕ τετραγώνοις, μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΑΓ μετὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΑΓ. κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΖΕ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΤ, ΖΕ τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΓΕ, τουτέστι τῷ διπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν τέτταρσι τριγώνοις ΑΒΓ ἴσον. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΤ, ΖΕ τῷ ὑπὸ τᾶς ΗΔ καὶ τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, τέτταρσι τριγώνοις ΑΒΓ ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΔ ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου = 4 τρίγωνα ΑΒΓ.

'Απόδειξις. Προεκτείνομεν τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εὐθυγράμμως καὶ λαμβάνομεν ΖΑ = ΑΒ, ΓΕ = ΓΒ, ΕΤ = ΗΔ καὶ ΖΕ = περίμετρος τοῦ τριγώνου (σημ. παρελείφθη νὰ σημειωθῇ ὅτι ΓΗ = ΓΒ).



Καὶ εἶναι ΖΑ + ΓΔ = ΑΓ. 'Επίσης εἶναι

$$2(\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{AE} + \mathrm{AZ} \cdot \mathrm{AE}) = \mathrm{ZE}^2 \quad (\theta.\ 2),$$

$\mathrm{ZE}^2 = \mathrm{ZA}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma E}^2 + 2(\mathrm{ZA} \cdot \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{ZA} \cdot \mathrm{\Gamma E} + \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma E})$, $2(\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{ZE} + \mathrm{ET} \cdot \mathrm{ZE}) = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma E}^2 + 2(\mathrm{AZ} \cdot \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{ZE} \cdot \mathrm{A\Gamma})$.

'Αφαιροῦντες ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{ZE}$, λαμβάνομεν $\mathrm{ET} \cdot \mathrm{ZE} = 2\mathrm{AZ} \cdot \mathrm{\Gamma E} = 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma} = 4$ τρίγωνα ΑΒΓ.

'Εκ τούτου εἶναι $\mathrm{ET} \cdot \mathrm{ZE} =$ ΗΔ ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου = 4 τρίγωνα ΑΒΓ. ὅ.ἔ.δ.

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΩΝ

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους δύο θεωρημάτων Περὶ κύκλων.

α′

Ἔστω ἁμικύκλιον τὸ ΑΓΔΒ κέντρον ἔχον τὸ Ζ καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖα ἁ ΑΓ λελάφθω δὲ ἐπὶ μέσας τᾶς περιφερείας τᾶς ΒΓ σαμεῖον τὸ Δ καὶ ἁ ΑΗ τᾷ ΑΓ ἴσα καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΒΔ, ΔΓ· φαμὶ δή, τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΒΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν.

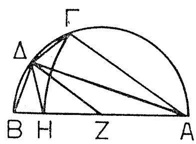
Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΑΔ, ΔΖ, ΔΗ. καὶ ἐπεὶ περιφέρεια ἁ ΓΔ περιφερείᾳ τᾷ ΔΒ ἴσα ἐστί, γωνίαι ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΑΔ, ΔΑΒ ἴσαι ἐντί. ἔστι δὲ ἁ ΑΓ τᾷ ΑΗ ἴσα. τρίγωνα ἄρα τὰ ΑΔΓ, ΑΔΗ ἴσα ἐντί. πλευρὰ ἄρα ἁ ΔΓ πλευρᾷ τᾷ ΔΗ ἐστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ πλευρὰ ἁ ΔΗ πλευρᾷ τᾷ ΔΒ ἴσα ἐστὶ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΗΒ, ΔΒΗ, ΒΔΖ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ἐσσεῖται τρίγωνον τὸ ΒΗΔ τριγώνῳ τῷ ΔΒΖ ὁμοῖον. ὡς ἄρα ἁ ΗΒ ποτὶ τὰν ΒΔ, οὕτως ἐστὶ ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΖ, ΗΒ περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′

Τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω, ὡς ἐν τῷ πρότερον· φαμὶ δή, τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΑΓ περιεχόμενον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τε-

1

Ἔστω τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΔΒ μὲ κέντρον τὸ Ζ. Εἰς τὸ ἡμικύκλιον τοῦτο ἔστω ἡ χορδὴ ΑΓ. Διχοτομοῦμεν τὸ τόξον ΒΓ διὰ τοῦ σημείου Δ, καὶ ἑνοῦμεν τοῦτο δι' εὐθειῶν μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, καὶ λαμβάνομεν ΑΗ = ΑΓ. Λέγω, ὅτι ΖΒ · ΒΗ = ΒΔ².



Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΔΖ καὶ ΔΗ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν δύο τόξων ΓΔ καὶ ΔΒ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ΓΑΔ καὶ ΔΑΒ. Ἐπίσης εἶναι ΑΓ = ΑΗ, καὶ ἡ ΑΔ εἶναι κοινὴ πλευρὰ τῶν δύο τριγώνων. Εἶναι ἄρα ΔΗ = ΔΒ, ∢ ΔΗΒ = ∢ ΔΒΗ = ∢ ΒΔΖ (Εὐκλ. α', ε') καὶ τὸ τρίγωνον ΒΗΔ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΖ.

Κατὰ συνέπειαν ὑπάρχει ἡ ἀναλογία $\frac{\text{ΗΒ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΖ}}$ (Εὐκλ. ϛ', δ'), καὶ κ ταύτης εἶναι ΒΖ · ΗΒ = ΒΔ² (Εὐκλ. ϛ', ιζ')· ὅ.ἔ.δ.

2

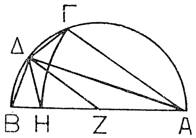
Θεωροῦμεν τὸ προηγούμενον σχῆμα. Λέγω, ὅτι

$$\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΓ} + \text{ΔΒ}^2 = 2\text{ΑΖ}^2.$$

τραγώνου τῷ διπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετραγώνου ἴσον εἶμεν.

Ἔστι γὰρ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΒ τετραγώνου τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΖΒ ἴσον, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΑΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΒΗ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΒΗ, τουτέστι τῷ ἁμίσει τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΒΗ. ἀλλ' ὡς ἐν τῷ πρότερον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΗΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί. ἔστιν ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΒ τετραγώνου τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνου ἴσον.

Ἀπόδειξις. $2ZB^2 = AB \cdot ZB = ZB \cdot AH + ZB \cdot BH =$
$= ZB \cdot A\Gamma + ZB \cdot BH = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma + ZB \cdot BH.$



Ἐκ τοῦ προηγουμένου ὅμως εἶναι $ZB \cdot HB = \Delta B^2$ *καὶ*

$$2ZB^2 = AZ \cdot A\Gamma + \Delta B^2 \cdot$$

ὅ.ἔ.δ.

ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΕΠΤΑΓΩΝΟΝ

Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ

Πολλοὶ Ἄραβες συγγραφεῖς ἀναφέρουσι πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου. Μερικοὶ ἐκ τούτων λέγουσιν, ὅτι ἐδημοσίευσαν καὶ ἰδικάς των, συναφεῖς πραγματείας ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ, ὡς ὁ κατωτέρω μνημονευόμενος Al - Haitam. Φαίνεται, ὅμως, πιθανώτατον ὅτι αὗται προέρχονται ἐκ τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ὡς ἔχει ἤδη μνημονευθῆ ὁ Carl Schoy μετέφρασεν ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν τὸ βιβλίον τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου Al - Biruni (943 - 1048), ὑπὸ τὸν τίτλον « Μαθήματα τριγωνομετρίας ». (Carl Schoy « Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al Biruni, J. Ruska - H. Wieleitner, Hannover 1927). Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχεται ἡ πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους « Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου ».

Ἐπὶ τῶν κεφαλαίων I καὶ IV, ὁ Schoy γράφει (σελ. 74): « Εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν δὲν γράφεται σχεδὸν τίποτε περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου. Καὶ ἐν τούτοις, φαίνεται, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) ἐπελήφθη τοῦ προβλήματος ἐπιτυχῶς, καίτοι δὲν ἐσώθη τὸ ἑλληνικὸν κείμενον. Ὁ M. Cantor λέγει : « Καὶ περὶ ἄλλων πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ ἔπρεπε νὰ γίνῃ λόγος ἐδῶ (εἰς τὸ βιβλίον του Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, τρίτη ἔκδοσις 1907, σελ. 307), ἐὰν αὗται δὲν εἶχον ἀπολεσθῇ. Μόλις μερικοὶ τίτλοι αὐτῶν ἔχουσι διασωθῇ ὑπὸ τῶν Ἀράβων. Κατὰ τὰς πληροφορίας τῶν Ἀράβων ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε γράψει πραγματείαν περὶ τοῦ ἐν κύκλῳ κανονικοῦ ἑπταγώνου. Πράγματι, τὸ βιβλίον τοῦτο τοῦ Ἀρχιμήδους μνημονεύεται ὑπὸ διαφόρων Ἀράβων συγγραφέων, οἱ ὁποῖοι καὶ οἱ ἴδιοι ἔγραψαν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ θέματος. Ὅλαι αἱ συναφεῖς αὗται πραγματεῖαι τῶν Ἀράβων ἐσώθησαν, καὶ ἐκ τούτων εἶναι δυνατὸν νὰ διακριβωθῇ σχεδὸν τὸ μέρος τῆς συμβολῆς τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (σημ. !!!). Χάρις εἰς τὴν αὐτοθυσίαν τοῦ Dr. M. Meyerhof, ἐν Καΐρῳ, ὅστις πλουσίως εἶναι γνώστης τῶν ἀραβικῶν Μαθηματικῶν καὶ Ἀστρονομίας, εἶμαι κάτοχος ὅλων τῶν ἀραβικῶν πραγματειῶν περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου καὶ θὰ ἀνακοινώσω ὀλίγα τινὰ περὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ, ἐπιφυλασσόμενος, ὅπως βραδύτερον ἐπιληφθῶ μιᾶς συνολικῆς σπουδῆς τῶν συναφῶν ἀραβικῶν πραγματειῶν. Δὲν μοῦ φαίνεται ἀνάρμοστον νὰ προταχθῇ μετάφρασις τῆς παλαιοτέρας τῶν πραγματειῶν τούτων, δηλαδὴ τῆς τοῦ Ταμπὶτ Ἴμπν Κουρρᾶ (Tâbit Ibn Qurra, 826 - 901), ἡ ὁποία φυλάσσεται εἰς τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Ἀντιβασιλέως ἐν Καΐρῳ, καὶ ἡ ὁποία — κατὰ τὸ κείμενον — στηρίζεται εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐὰν πράγματι τὸ περιεχόμενον τῆς πραγματείας αὐτῆς ἀποδίδει ἑλληνικὸν τρόπον τοῦ σκέπτεσθαι, θὰ πρέπει νὰ ἀποφανθῶσι περὶ αὐτοῦ, καλλίτεροι ἐμοῦ γνῶσται τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν. Τότε θὰ προσθέσω εἰς τὴν μετάφρασιν τῆς πραγματείας τοῦ Tâbit μερικὰς σημειώσεις δι' ἄλλα ἀραβικὰ ἐπιτεύγματα εἰς τὸ ἐνδιαφέρον τοῦτο ζήτημα ». Ὁ Cantor ἐνταῦθα ἐκδηλοῖ ἐνδιαφέρον διὰ τὰ ἀραβικὰ ἐπιτεύγματα ἐπὶ τοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον ἔλυσεν ὁ Ἀρχιμήδης!

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν κατωτέρω μικρὰν εἰσαγωγὴν τοῦ Ταμπὶτ Ἴμπν Κουρρᾶ, ἡ μετάφρασις τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου, ἔγινεν ἀπὸ ἑλληνικὸν χειρόγραφον κατεστραμμένον. Ἡ ἐπιτυχὴς ἀποκατάστασις τοῦ περιεχομένου τῆς πραγματείας ὀφείλεται εἰς τὴν βαθεῖαν γνῶσιν τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν ὑπὸ τοῦ Ἄραβος μαθηματικοῦ. Ἐντύπωσιν προκαλεῖ ἡ χρησιμοποίησις ὑπὸ τοῦ Ταμπὶτ Ἴμπν Κουρρᾶ τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀναμφισβητήτως ὁ Ἀρχιμήδης δὲν ἐχρησιμοποίησεν. Εἶναι γνωστὸν ὅμως ὅτι ὁ πρῶτος ἀνακαλύψας τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν τὸν ὁποῖον μετὰ πάροδον 750 ἐτῶν ἀνεκάλυψε καὶ ὁ Viète εἶναι ὁ ἄλλοτε ἀρχιδιάκονος τοῦ Ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας, κατόπιν Μητροπολίτης Θεσσαλονίκης καὶ τέλος Πρύτανις τοῦ Ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου Κωνσταντινουπόλεως, Λέων, ἀποθανὼν κατὰ τὸ 870 (Kurt Vogel, Akten des XI. Internationalen Byzantinischen - Kongresses 1958, München 1960) καὶ (Euclidis opera omnia vol. V, ἔκδ. I. L. Heiberg et H. Menge, Lipsiae 1888, σελ. 714, 17 - 715, 26).

Ἐπὶ τούτοις δέον νὰ προστεθῇ, ὅτι ἡ ἐγγραφὴ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου εἰς κύκλον διὰ κανόνος καὶ διαβήτου γίνεται δι' ἐφαρμογῆς κινητικῆς γεωμετρίας, ὡς καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας (πρόβλημα 8 τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους Λήμματα α'). Ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε βέβαια ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν λύονται διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, δὲν ἐσώθη ὅμως ἀπόδειξις περὶ τούτου.

Ἡ κατωτέρω παρατιθεμένη Εἰσαγωγὴ τοῦ Qurra ἔχει τεθῇ πρὸ τῶν 17 προτάσεων, τῶν ἀποτελούντων κατὰ τὸν Qurra τὴν

πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου, τὰ ὁποῖα ἡμεῖς διεχωρίσαμεν εἰς τὰς τρεῖς πραγματείας ὡς ἑξῆς :
Προτάσεις 1 - 13 Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων.
» 14 - 15 Περὶ κύκλων.
» 16 - 17 Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου.

Ἡ μετάφρασις

Ἐν ὀνόματι τοῦ Θεοῦ, τοῦ εὐσπλάγχνου καὶ οἰκτίρμονος!

Τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου εἰς 7 ἴσα μέρη, μεταφρασθὲν ὑπὸ τοῦ Ἀμποὺλ - Χασὰν Ταμπὶτ Ἴμπν Κουρρᾶ ἀλ - Χαρανί. Τὸ ἔργον ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς πραγματείας καὶ 17 σχημάτων.

Καὶ λέγω, μετὰ τὸν αἶνον πρὸς τὸν Ἀλλὰχ καὶ τὰς εὐχὰς πρὸς τὸν προφήτην του καὶ τὴν οἰκογένειάν του, ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν ὑπάρχει πλέον εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν τὸ εἶχον εἰς τὴν διάθεσίν μου, ἀλλὰ εἶχον ἓν ἀπόκρυφον κατεστραμμένον χειρόγραφον, ἕνεκα τῆς ἀμαθείας τοῦ ἀντιγραφέως καὶ τῆς ἀγνοίας αὐτοῦ περὶ τοῦ ἀντικειμένου. Καὶ κατέβαλον μεγάλον κόπον διὰ νὰ ἀνεύρω δυνατότητας ἐπαληθεύσεως τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἀποριῶν καὶ νὰ ἀνεύρω λύσεις περὶ αὐτῶν καὶ τὴν κανονικὴν διάταξιν τῶν σχημάτων, πρὸς τὸν σκοπὸν εὐκόλου ἐξετάσεως καὶ ἐρεύνης τῶν πηγῶν. Πιθανῶς νὰ χρησιμοποιήσω μερικὰς ἀποδείξεις μεταγενεστέρων. Πρὸς τούτοις ὁ Ἀλλάχ, ὁ παρέχων βοήθειαν, ἂς δώσῃ διὰ τῆς συμβολῆς του ἐπιτυχίαν εἰς τὸ ἔργον μου.

ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΕΠΤΑΓΩΝΟΝ

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους τῆς πραγματείας Περὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου.

α′

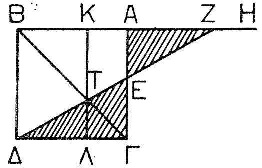
Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ΒΑ ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον ἄχθω διάμετρος ἁ ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ διάχθω ἁ ΔΖ, ὥστε τρίγωνον τὸ ΑΖΕ τριγώνῳ τῷ ΓΤΔ ἴσον εἶμεν, ἄχθω δὲ διὰ τοῦ Τ σαμείου ἁ ΚΤΛ παρὰ τὰν ΑΓ. φαμὶ δή, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΚΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΑΚ τῷ ἀπὸ τᾶς ΚΒ τετραγώνῳ ἴσον καὶ ἔτι, ὅτι ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΖ, ΒΚ τᾶς ΑΚ μεῖζόν ἐστι.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΤΛ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΑΕ ἴσον ἐστὶ ἐσσεῖται ὡς ἁ ΓΔ, τουτέστι ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΤΛ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνα τὰ ΖΑΕ, ΖΚΤ, ΤΛΔ ὁμοῖά ἐντι, ἐσσεῖται ὡς ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΤΛ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΛΔ, τουτέστι τὰν ΚΒ, ἔτι δὲ ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΚΒ, καὶ ἔτι ὡς ἁ ΤΛ, τουτέστιν

1

(Αὔξ. ἀριθ. Κουρρᾶ 16)

Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Προεκτείνομεν τὴν ΑΒ εὐθυγράμμως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ Η καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΖ κατὰ τοιοῦτον τρόπον,



ὥστε τρίγωνον ΑΖΕ = τρίγωνον ΓΤΔ. Διὰ τοῦ σημείου Τ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΤΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Λέγω, ὅτι

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{KB} = \mathrm{AZ}^2$$
$$\mathrm{ZK} \cdot \mathrm{AK} = \mathrm{KB}^2$$

καὶ ἀκόμη ὅτι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΖ, ΒΚ εἶναι > ΑΚ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ ΓΔ · ΤΛ = ΑΖ · ΑΕ θὰ εἶναι

$$\frac{\Gamma\Delta\,(=\mathrm{AB})}{\mathrm{AZ}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{T}\Lambda} \quad (\text{Εὐκλ. ϛ', ιϛ'}).$$

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΑΕ, ΖΚΤ, ΤΛΔ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

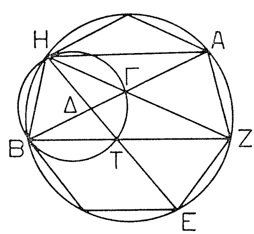
$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{T}\Lambda} = \frac{\mathrm{AZ}}{\Lambda\Delta\,(=\mathrm{KB})}, \quad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AZ}} = \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{KB}} \quad \text{καὶ}$$

ἁ ΑΚ, ποτὶ τὰν ΚΤ, τουτέστι τὰν ΚΒ, οὕτως ἁ ΛΔ, τουτέστιν ἁ ΚΒ ποτὶ τὰν ΖΚ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΚΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετραγώνῳ ἴσον καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΑΚ τῷ ἀπὸ τᾶς ΚΒ τετραγώνῳ ἴσον καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΖ, ΚΒ τᾶς ΑΚ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′

Δεδόσθω δὴ τὸν κύκλον ἑπτὰ ἴσοις μέρεσσι διελεῖν.

Λελάφθω γὰρ εὐθεῖά τις ἁ ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτᾶς δύο σαμεῖα τὰ Γ, Δ, ὥστε τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ



τετραγώνῳ ἴσον. ἐσσεῖται δὴ ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΓ, ΔΒ μεῖζον τοῦ ΓΔ τμάματος, ὡς ἐν τῷ πρότερον ἐδείχθη. συνεστάτω δὴ ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ τρίγωνον τὸ ΓΗΔ. ἔστι δὲ ἁ ΓΗ τᾷ ΑΓ ἴσα, ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ καὶ ἁ ΓΔ τᾷ ΓΔ. περιγεγράφθω οὖν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ κύκλος ὁ ΑΗΒΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθων αἱ ΗΓ, ΗΔ ἐπὶ τὰ Ζ, Ε σαμεῖα τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἀχθεῖσα δὲ ἁ ΒΖ συμβαλλέτω τᾷ ΗΕ κατὰ τὸ Τ σαμεῖον καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΓΤ.

Ἐπεὶ γὰρ ἁ ΑΓ τᾷ ΓΗ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΓΗ γωνία ἁ ὑπὸ ΗΑΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΗΓ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΑΖ περιφερείᾳ τᾷ ΗΒ ἴσα. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν

$$\frac{\text{ΤΛ} (= \text{ΑΚ})}{\text{ΚΤ} (= \text{ΚΒ})} = \frac{\text{ΛΔ} (= \text{ΚΒ})}{\text{ΖΚ}} \quad (\text{Εὐκλ. ϛ', δ'}).$$

Ἐκ τούτων ἕπεται $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΚΒ} = \text{ΑΖ}^2$

$\text{ΖΚ} \cdot \text{ΑΚ} = \text{ΚΒ}^2$ (Εὐκλ. ϛ', ιζ')

καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν ΑΖ, ΚΒ > ΑΚ· ὅ.ἔ.δ.

2
(Αὔξ. ἀριθμ. Κουρρᾶ 17)

Θέλομεν τώρα νὰ χωρίσωμεν τὸν κύκλον εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν γνωστήν. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε $\text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΔ} = \text{ΔΒ}^2$ καὶ $\text{ΓΒ} \cdot \text{ΔΒ} = \text{ΑΓ}^2$. Πρὸς τούτοις εἶναι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΔΒ > ΓΔ, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Κατασκευάζομεν τώρα ἐκ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΔ καὶ ΒΔ τὸ τρίγωνον ΓΗΔ (Εὐκλ. α', κβ'). Ἐπὶ τούτοις εἶναι ΓΗ = ΑΓ, ΔΗ = ΔΒ καὶ ΓΔ = ΓΔ. Περιγράφομεν τώρα περὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ τὸν κύκλον ΑΗΒΕΖ (Εὐκλ. δ', ε') καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΗΓ καὶ ΗΔ εὐθυγράμμως μέχρις ὅτου συναντήσουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα, ἔστω Ζ καὶ Ε. Αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΗΕ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Τ. Φέρομεν τὴν ΓΤ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος ΑΓ = ΓΗ, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ θὰ εἶναι

$\sphericalangle$ ΗΑΓ = $\sphericalangle$ ΑΗΓ, τόξον ΑΖ = τόξον ΗΒ (Εὐκλ. α', ε'. γ', κϛ').

Εἶναι δὲ $\quad \text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΔ} = \text{ΔΒ}^2 = \text{ΔΗ}^2$

(Σημείωσις: Ἐκ τῶν ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμῶν ὁ πρὸ τοῦ κόμματος σημαίνει τὸ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὁ μετὰ τὸ κόμμα τὸν ἀριθμὸν τοῦ θεωρήματος, ἢ ἐὰν εἶναι περισσότεροι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν θεωρημάτων).

ΑΓ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνῳ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΗ ἴσον καὶ τρίγωνον τὸ ΑΗΔ τριγώνῳ τῷ ΓΗΔ ὁμοῖον. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΗ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσα, τουτέστιν περιφέρεια ἁ ΖΕ περιφερείᾳ τᾷ ΒΗ ἴσα. τρεῖς ἄρα περιφέρειαι αἱ ΒΗ, ΑΖ, ΖΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί. ἄχται δὲ ἁ ΖΒ παρὰ τὰν ΑΗ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΗ, ΓΗΔ, ΤΒΑ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί. τὰ ἄρα τέτταρα σαμεῖα τὰ Β, Η, Γ, Τ ἐπὶ τᾶς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐντί. ἔστι δὲ ἁ ΗΔ τᾷ ΔΒ ἴσα καὶ ἁ ΓΔ τᾷ ΔΤ καὶ ἔτι ἁ ΤΗ τᾷ ΒΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΤΗ, ΗΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί, ἐντὶ ἄρα τρίγωνα τὰ ΤΗΓ, ΓΗΔ ὁμοῖα. ἔστι δὲ ἁ ΓΒ τᾷ ΤΗ ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΓΗ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΤΓ, τουτέστι διπλασίων γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΗ, ἔτι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΤΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΗ, τουτέστιν διπλασίων γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΗ. ἔστιν ἄρα περιφέρεια ἁ ΑΗ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΗ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΕΒ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων, τουτέστιν ἑκατέρα τῶν περιφερειῶν ΑΗ, ΕΒ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων ἐστίν. διαιρέθη ἄρα κύκλος ὁ ΑΗΒΕΖ ἑπτὰ ἴσοις μέρεσσι·

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΔ. Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΑΗ = πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΔ, δηλαδὴ τὸ τόξον ΖΕ = πρὸς τὸ τόξον ΒΗ. Κατὰ ταῦτα τὰ τρία τόξα ΒΗ, ΑΖ καὶ ΖΕ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Εἶναι δὲ ἡ ∢ ΓΑΗ = ∢ ΓΗΔ = ∢ ΤΒΔ, καὶ ἑπομένως τὰ τέσσαρα σημεῖα Β, Η, Γ, Τ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Καὶ εἶναι ΗΔ = ΔΒ, ΓΔ = ΔΤ, ΤΗ = ΒΓ.

Ἐκ τῆς ΤΗ · ΗΔ = ΗΓ², ἕπεται ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τριγώνων ΤΗΓ, ΓΗΔ.

Εἶναι δὲ ΓΒ = ΤΗ καὶ ∢ ΔΓΗ = ∢ ΗΤΓ = 2 · ∢ ΓΑΗ,

∢ ΓΤΔ = ∢ ΔΒΗ = 2 · ∢ ΓΑΗ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι τόξον ΑΗ = 2 · τόξον ΗΒ (Εὐκλ. ϛ′, λγ′) καὶ ἐπειδὴ

∢ ΔΗΒ = ∢ ΔΒΗ

θὰ εἶναι καὶ τόξον ΕΒ = 2 · τόξον ΗΒ, τουτέστιν ἑκάτερον τῶν τόξων ΑΗ καὶ ΕΒ = 2 · τόξον ΗΒ, καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος ΑΗΒΕΖ ἐχωρίσθη εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

«Καὶ ἃς εἶναι αἶνος πρὸς τὸν θεόν, τὸν ἕνα κ.λπ.

Καὶ ἐδῶ ἐτελείωσεν ἡ βελτίωσις καὶ ἡ ἐπιμελὴς σύνταξις αὐτοῦ τοῦ περιφήμου ἀντιγράφου, ἐκ τοῦ χειρογράφου τοῦ διορθώσαντος αὐτὸ Φακίρου. Θεέ, πρὸς ὃν αἶνος καὶ ὕμνος ἔστω, εὐλόγησον τὸν προσκυνητὴν τῆς Μέκκας Μουσταφᾶ, τὸν πιστόν μου, γενναῖον υἱόν. Ἂς εἶναι ἔλεος ὁ Ἀλλὰχ πρὸς αὐτὸν καὶ ὅλους τοὺς Μουσουλμάνους».

ΕΠΤΑΓΩΝΟΝ ΦΕΡΟΜΕΝΟΝ ΩΣ ΤΟΥ ΗΑΙΤΑΜ

Σύμβολα: $\sphericalangle$ = γωνία. $\parallel$ = παράλληλοι. $\sim$ = ὅμοιον. $\perp$ = κάθετος. $\triangle$ = τρίγωνον. $\square$ = τετράγωνον.

Σύνθεσις τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ (Εὐκλ. ε′ ὁρισμ. ιδ′).

*

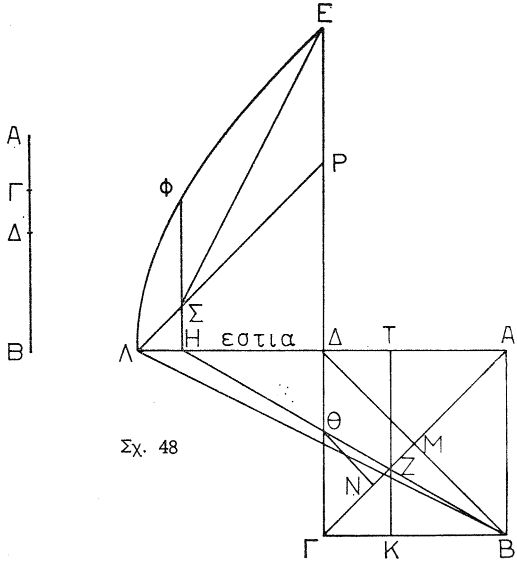
Ἡ κατασκευὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν ὑπὸ τοῦ Ἄραβος Ibn al-Haitam (965-1039). Ἡ φρασεολογία τοῦ Χαϊτάμ, καὶ ἰδίως ὁ ὅρος δεδομένον (μεταφρασθεὶς εἰς τὴν γερμανικὴν ἐσφαλμένως erkannt ἀντὶ gegeben) προδίδει χρησιμοποίησιν ἑλληνικῶν πηγῶν, πιθανώτατα πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία θὰ ἔφθασεν εἰς τὰς χεῖρας του, χωρὶς τὸ ὄνομα τοῦ Ἀρχιμήδους. Τὸ χειρόγραφον τῆς πραγματείας τοῦ Haitam εὑρίσκεται εἰς τὸ India Office τοῦ Λονδίνου, ὑπ' ἀριθμ. 734, 21°, ὡς ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Schoy (Ἰδὲ α′ μέρος, α′ τόμου, σελ. 28 - 29). Ὁ Schoy δημοσιεύει τὰ κατωτέρω ἀμέσως μετὰ τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον τοῦ Ἀρχιμήδους, σελ. 84 - 91.

Ἡ μετάφρασις

«Ἐν ὀνόματι τοῦ Ἀλλὰχ τοῦ εὐσπλάχνου καὶ οἰκτίρμονος! Ἂς εἶναι τετιμημένος ὁ Ἀλλάχ. Ἑρμηνεία ὑπὸ τοῦ Al - Hasan Ibn al - Haitam περὶ τῶν ὑποθέσεων (ἐπὶ τῆς κατασκευῆς) τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑπταγώνου.

Ὁ Ἀρχιμήδης στηρίζει τὴν κατασκευὴν τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑπταγώνου εἰς τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον κατ' ἀρχὰς πραγματεύεται·

ἀλλὰ δὲν γνωρίζομεν πῶς θὰ ἐπεξεργασθῶμεν τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὁ κανών του. Καὶ τοῦτο δὲν εἶναι σαφὲς εἰς ἡμᾶς, διότι ἡ ἐπεξεργασία τοῦ τετραγώνου, ἡ ὁποία περιέχει τὴν συνθήκην τῆς λύσεως, μόνον διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν εἶναι δυνατή. 'Αλλ'



Σχ. 48

ὁ συγγραφεὺς (ὁ 'Αρχιμήδης) δὲν δίδει οὐδεμίαν ὑπόδειξιν εἰς τὸ βιβλίον του, εἰς τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὸ ἑπτάγωνον, καὶ δὲν εἶδε, ὅτι εἰς τὸ βιβλίον του ἀνέμιξε ἀνόμοια πράγματα (σημ. ! !). Καὶ ἐχρησιμοποίησε τὸ τετράγωνον, ἵνα δι' αὐτοῦ στηρίξῃ τὴν εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑπταγώνου. Διὰ νὰ καταδείξωμεν πῶς χρησιμοποιοῦμεν τὸ μνημονευθὲν τετράγωνον διὰ τῆς ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν ἡ συνθήκη αὐτὴ συνεπάγεται, σχεδιάζομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχῆμα 48). Φέρομεν κατόπιν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, προεκτείνομεν τὴν ΑΔ μέχρι τοῦ Η καὶ φέρομεν τὴν ΒΖΓΗ. Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Η κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε $\triangle\, \Theta\Delta H = \triangle\, B\Gamma Z$, πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς λύσεως.

Φέρομεν τὴν $KZT \parallel \Gamma\Delta$, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Τώρα εἶναι :
$$A\Delta \cdot AT = \Delta H^2,$$
ὅπως διδάσκει ὁ Ἀρχιμήδης. Καὶ φέρει τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν ΑΓ ἐπειδὴ τὸ $\square$ ἔχει παραλλήλους πλευρᾶς καὶ ὀρθὰς γωνίας. Τὸ σημεῖον διχοτομίας ἔστω τὸ Μ. Τώρα εἶναι :

$\triangle\, BM\Gamma = \triangle\, AM\Delta$, καὶ ἐπειδὴ

$\triangle\, H\Delta\Theta = \triangle\, BZ\Gamma$, εἶναι ἐπίσης

$\triangle\, BM\Gamma = \triangle\, H\Delta\Theta + \triangle\, BMZ$, καὶ συνεπῶς

$\triangle\, AM\Delta = \triangle\, H\Delta\Theta + \triangle\, BMZ.$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ τραπέζιον ΜΔΘΖ καὶ ἔχομεν : $\triangle\, BH\Delta =$ τραπέζιον $A\Delta\Theta Z$.

Ἔπειτα εἶναι $\triangle\, BH\Lambda = \triangle\, \Gamma Z\Theta$,

ὁπότε ἔχομεν $\triangle\, B\Delta\Lambda = \triangle\, A\Delta\Gamma$.

Καὶ τὰ δύο τρίγωνα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἐπομένως λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς βάσεώς των ὑπάρχει ἡ ἰσότης
$$\Lambda\Delta = \Delta A \qquad \text{I)}$$

Εἶναι
$$\frac{\triangle\, B\Delta\Lambda}{\triangle\, BH\Lambda} = \frac{\triangle\, A\Delta\Gamma}{\triangle\, \Gamma\Theta Z}.$$

Φέρομεν τὴν $\Theta N \perp \Gamma Z$, ὁπότε εἶναι $\Theta N \cdot \frac{1}{2}\Gamma Z = \triangle\, \Theta Z\Gamma$·

ἐπίσης εἶναι $\Delta M \cdot \frac{1}{2} A\Gamma = \triangle\, A\Delta\Gamma$, ὁπότε
$$\frac{\triangle\, A\Delta\Gamma}{\triangle\, \Gamma Z\Theta} = \frac{\Delta M}{\Theta N} \cdot \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Ἀλλὰ
$$\frac{\Delta M}{\Theta N} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\frac{1}{2}\cdot A\Gamma}{\frac{1}{2}\cdot \Gamma Z} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z},$$

δηλαδὴ εἶναι ἐπίσης : $\dfrac{\Delta\ \mathrm{A\Delta\Gamma}}{\Delta\ \mathrm{\Gamma Z\Theta}} = \dfrac{\mathrm{\Delta\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} \cdot \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}.$

Ἔπειτα εἶναι $\dfrac{\mathrm{\Delta\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} = \dfrac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Theta}}$[1], $\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}} = \dfrac{\mathrm{HB}}{\mathrm{BZ}}$,

καὶ κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$\frac{\Delta\ \mathrm{A\Delta\Gamma}}{\Delta\ \mathrm{\Gamma Z\Theta}} = \frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Theta}} \cdot \frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{HB}^2}{\mathrm{B\Theta} \cdot \mathrm{BZ}} \qquad \mathrm{II})$$

Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ· αὕτη εἶναι $= \mathrm{\Delta M}$.

Τώρα εἶναι $\dfrac{\Delta\ \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\Delta\ \mathrm{\Gamma Z\Theta}} = \dfrac{\Delta\ \mathrm{B\Delta\Lambda}}{\Delta\ \mathrm{BH\Lambda}} = \dfrac{\mathrm{\Delta\Lambda}}{\mathrm{H\Lambda}}$, καὶ ἀκόμη :

$$\frac{\mathrm{\Delta\Lambda}}{\mathrm{\Lambda H}} = \frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{B\Theta}} \cdot \frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A\Delta}} \cdot \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{AT}} \qquad \mathrm{III})$$

Ἐκ τοῦ προηγουμένου εἶναι ἐπίσης $\dfrac{\mathrm{\Delta\Lambda}}{\mathrm{\Lambda H}} = \left(\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{\Delta H}}\right)^2$ $\quad$ IIIα)

καὶ ἐκ τοῦ I) : $\mathrm{\Delta\Lambda} = \mathrm{A\Delta}$.

Καὶ ἀναλύεται τὸ τετράγωνον κατὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ τμήματος ΑΛ ($= 2\mathrm{A\Delta}$) κατὰ τὸ σημεῖον Η. Κατὰ τὸ IIIα εἶναι :

$$\frac{\mathrm{\Delta\Lambda}}{\mathrm{\Lambda H}} = \frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{\Delta H}^2}.$$

Ἡ διαίρεσις ὅμως τῆς εὐθείας κατὰ τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν εἶναι δυνατὴ μόνον διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν. Προϋποθέτομεν κατὰ τὴν προχώρησιν τῆς λύσεως, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἔχει ἤδη διαιρεθῆ. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ εὐθυγράμμως μέχρι τοῦ Ε, ὁπότε ἔστω

$$\mathrm{\Delta E} = \mathrm{AH}.$$

Εἰς τὸ σημεῖον Η φέρομεν τὴν κάθετον $\mathrm{H\Phi} = \mathrm{\Delta H}$. Τότε εἶναι ἐπίσης :

---

[1]) Εἶναι δηλ. $\mathrm{\Delta\Theta : \Theta H = \Theta H : \Theta B}$ ἢ $\mathrm{\Delta\Theta : \Theta\Gamma = \Theta H : \Theta B}$ καὶ διὰ συνθέσεως $(\mathrm{\Delta\Theta} + \mathrm{\Theta\Gamma}) : \mathrm{\Theta\Gamma} = (\mathrm{\Theta H} + \mathrm{\Theta B}) : \mathrm{\Theta B}$.

$$\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda H} = \frac{\Delta E^2}{\Phi H^2} \qquad \text{IV)}$$

Ἔστω τώρα $\Delta\Lambda \cdot ST = \Delta E^2$,

καὶ ἡ παραβολή, τῆς ὁποίας ὁ ἄξων εἶναι $= \Delta\Lambda$ καὶ ἡ παράμετρος $= ST$, διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων Ε καὶ Φ. Ὅτι αὕτη πράγματι διέρχεται διὰ τοῦ Ε, ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι $\Delta\Lambda \cdot ST = \Delta E^2$, καὶ τοῦτο εἶναι μία εἰδικὴ ἰδιότης τῆς παραβολῆς. Ἡ δίοδος διὰ τοῦ σημείου Φ γίνεται διότι ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις IV), ὡς τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ λήμματος 20 τοῦ πρώτου κεφαλαίου τῆς πραγματείας (maqâla) περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν[1]). Ἔστω τὸ τμῆμα (χορδὴ) $= \Lambda\Phi E$· λαμβάνομεν $\Delta\Pi = \Delta\Lambda$ καὶ ἑνοῦμεν τὸ Λ μὲ τὸ Ρ. Ἡ ἀχθεῖσα γραμμὴ τέμνει τὴν ΦΗ εἰς τὸ σημεῖον Σ. Εἶναι τώρα τρίγωνον ΛΔΡ δεδομένον σχῆμα[2])· ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἡ $\sphericalangle$ ΕΡΣ δεδομένη, ἐπίσης ὁ λόγος $\frac{P\Sigma}{\Delta H}$ εἶναι δεδομένος, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{P\Lambda}{\Lambda\Delta}$. Καὶ ἐπειδὴ $E\Delta = AH$, $P\Delta = \Lambda\Delta = A\Delta$, θὰ εἶναι $PE = \Delta H$, καὶ εἶναι ὁ λόγος $\frac{EP}{P\Sigma}$ δεδομένος καὶ ἡ $\sphericalangle$ ΕΡΣ δεδομένη. Φέρομεν τὴν ΕΣ· τότε εἶναι ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΕΡΣ δεδομένον σχῆμα καὶ ὁ

---

[1]) Κατὰ τὸν Fr. Woepcke : Ἡ ἄλγεβρα τοῦ Omar Alkhayyâmî, Paris 1851, pag. 74. Ὁ Ibn al - Haitam ἔγραψεν ἐπίσης πραγματείαν Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἡ ὁποία φαίνεται δὲν ὑπάρχει πλέον. Κατ' ἀνακοίνωσιν τοῦ καθηγητοῦ Sālih Murad (Κωνσταντινούπολις) ὑπάρχει αὕτη ἀκόμη εἰς τὴν στρατιωτικὴν βιβλιοθήκην ἐν Κωνσταντινουπόλει.

[2]) Σημείωσις. Ὁ Εὐκλείδης ἔχει γράψει πραγματείαν, σῳζομένην, ὑπὸ τὸν τίτλον Δεδομένα. Κατ' ἀραβικὰς πληροφορίας καὶ ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε γράψει πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον Δεδομένα. Ἡ ἐνταῦθα χρησιμοποίησις τῶν ὅρων δεδομένος κλπ. μαρτυρεῖ, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, ὅτι ὁ Ἄραψ Χαϊτὰμ ἔλαβεν ὡς βάσιν πηγὰς ἑλληνικὰς διὰ τὴν πραγματείαν του.

λόγος $\frac{\Sigma E}{EP}$ δεδομένος. Εἶναι $EP = \Delta H = H\Phi$ καὶ ὁ λόγος $\frac{E\Sigma^2}{H\Phi^2}$ εἶναι δεδομένος καὶ $H\Phi^2 = \Lambda H \cdot ST$. Ἔπειτα, εἶναι δεδομένον $\frac{\Lambda H \cdot ST}{\Sigma E^2}$, ὡς ἐπίσης $\frac{H\Lambda}{\Lambda\Sigma}$ καὶ $\frac{\Lambda\Sigma \cdot ST}{\Sigma E^2}$ καὶ τέλος δεδομένη ἡ $\sphericalangle$ ΣΛΗ. Καὶ ἡ παραβολή, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος ΛΡ, ἡ κορυφὴ Λ, ἡ στερεά (;) $\sphericalangle$ ΕΣΛ εἶναι καὶ τῆς ὁποίας ἡ παράμετρος ἐν σχέσει πρὸς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ST εὑρίσκεται ὑπὸ δεδομένον λόγον, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ε. Ἔστω τὸ τμῆμα ἐκεῖνο (τῆς παραβολῆς) ὅτι εἶναι τὸ τμῆμα ΛΦΕ. Ὅταν ἡ ΛΔ εἶναι δεδομένη, τότε εἶναι δεδομένον καὶ τὸ σημεῖον Λ. Ἐπίσης καὶ τὸ τμῆμα ST εἶναι δεδομένον καὶ τὸ τμῆμα ΛΦΕ δεδομένης θέσεως· ἐπίσης τὸ τμῆμα ΛΡ, ἐπειδὴ ἡ $\sphericalangle$ ΔΛΡ εἶναι δεδομένη. Ἔστω ἡ παράμετρος (;) τοῦ τμήματος ΛΡΕ δεδομένου μεγέθους. Κατόπιν εἶναι ἡ $\sphericalangle$ ΕΣΛ δεδομένη, ὡς ἐκ τούτου τὸ τμῆμα ΛΦΕ δεδομένον ὡς πρὸς τὴν θέσιν του. Κατόπιν τούτων καὶ τὸ σημεῖον Ε εἶναι δεδομένον. Τὸ τμῆμα ΔΕ $\perp$ ΛΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι δεδομένον· ὁπότε καὶ τὸ ΔΕ εἶναι κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν θέσιν δεδομένον. Τὸ σημεῖον Δ εἶναι δεδομένον καὶ ἡ ΛΔ δεδομένη. Ὁ λόγος $\frac{E\Delta}{\Delta\Lambda}$ εἶναι δεδομένος, καὶ ἐπειδὴ $E\Delta = AH$ καὶ $\Delta\Lambda = A\Delta$ εἶναι καὶ ὁ λόγος $\frac{AH}{A\Delta}$ δεδομένος.

Καὶ ἔχομεν ἀρκετὰ ἐξηγήσει, ὥστε νὰ ἔχωμεν ἀποκαταστήσει δύο ἰσότιμα τμήματα, καὶ τὰ δύο κατὰ τρόπον, τὸν ὁποῖον διετυπώσαμεν σαφῶς, καὶ αὐτὰ τὰ δύο τμήματα εἶναι τὰ ΔΕ καὶ ΔΛ· καὶ τὸ τμῆμα ΑΔ εἶναι δεδομένον, ὡς ἐπίσης τὸ ΔΗ εἶναι δεδομένον, καὶ ἐπίσης τὰ σημεῖα Δ καὶ Η, καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον διὰ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ προσεδώσαμεν, εἰς τὸν χαρακτηρισμόν, ὁ ὁποῖος ἀποδίδει τοὺς κανόνας τοῦ Ἀρχιμήδους.

Τοῦτο τὸ τετράγωνον τὸ προϋποθέτει ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ἡ λύσις του ἐν σχέσει πρὸς τὰς ὑποθέσεις εἶναι ἐκείνη, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἑπταγώνου, ὅτι δηλαδὴ αὐτὸς (ὁ Ἀρχιμήδης) ἐκθέτει τὰς δύο ἐξισώσεις

$$ΑΔ \cdot ΑΤ = ΔΗ^2,$$
$$ΗΤ \cdot ΤΔ = ΑΤ^2,$$

καὶ ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΑΤ καὶ $ΗΔ > ΤΔ$. Λαμβάνει ἓν δεδομένον τμῆμα καὶ διαιρεῖ αὐτὸ κατὰ τὴν ἀναλογίαν αὐτήν· ἐπὶ τούτου στηρίζει τὴν κατασκευὴν τοῦ ἑπταγώνου.

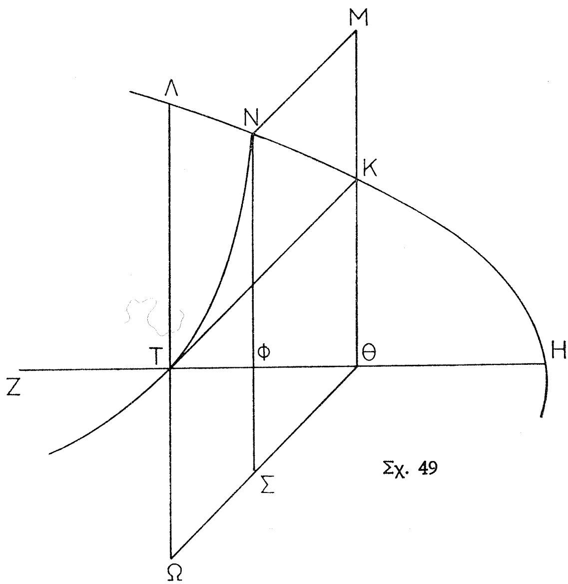
Ἀλλ' ὅμως εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ διαιρέσωμεν τὴν εὐθεῖαν κατὰ τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ τετράγωνον. Λαμβάνομεν λοιπὸν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρία μέρη ΑΓ, ΓΒ, ΔΒ τοιαῦτα, ὥστε :

$$ΔΑ \cdot ΑΓ = ΔΒ^2 \qquad \text{καὶ}$$
$$ΒΓ \cdot ΓΔ = ΑΓ^2.$$

Καὶ ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΑΓ, $ΔΒ > ΓΔ$.

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΖ ὁσηνδήποτε (σχ. 49) καὶ ἀποκόπτομεν τὸ τυχόν, ἀλλὰ δεδομένον μέγεθος ΗΘ καὶ κατασκευάζομεν μίαν παραβολὴν μὲ ἄξονα τὴν ΗΖ, κορυφὴν τὸ Η καὶ παράμετρον τὴν ΗΘ, ὅπως εἰς τὸ Λῆμμα 22 τοῦ α' τῆς πραγματείας Περὶ κωνικῶν τομῶν. Ἡ χορδὴ τῆς παραβολῆς ἔστω ἡ ΤΛ. Λαμβάνομεν $ΘΤ = ΘΗ$ καὶ φέρομεν ἐκ τῶν δύο σημείων Θ καὶ Τ τὰς καθέτους (εἴτε ἀπὸ τοῦ ἄξονος) πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ παραβολικοῦ τμήματος. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἐπιφάνειαν ΘΚΛΤ. Εἶναι $ΘΚ = ΘΗ$, ἐπειδὴ $ΚΘ^2 = ΘΗ$ ἐπὶ τὴν παράμετρον. Ἀλλὰ ἡ $ΘΗ =$ πρὸς τὴν παράμετρον, δηλαδὴ ἰσχύει $ΚΘ^2 = ΘΗ^2$, ἤτοι $ΚΘ = ΘΗ$. Προεκτείνομεν τὴν ΛΤ μέχρι τοῦ S οὕτως, ὥστε $TS = ΤΘ$· κατόπιν φέρομεν τὴν KT, ὁπότε KT ∥ ΘS, καὶ ἐπειδὴ KΘ ∥ TS, τὸ τετράπλευρον KΘST εἶναι παραλληλόγραμμον.

Σχεδιάζομεν διὰ τοῦ σημείου T τὴν ὑπερβολήν[1]), ἡ ὁποία δὲν εἰσέρχεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρὸ ὀλίγου μνημονευθέντος παραλ-



Σχ. 49

ληλογράμμου, καθ' ὃν τρόπον τοῦτο εἶναι εἰς τὸ σχῆμα 4 τῆς δευτέρας πραγματείας περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν. Τὸ τμῆμα τῆς ὑπερβολῆς ἔστω TN. Τοῦτο τέμνει τὸ παραβολικὸν τμῆμα KΛ. Καὶ εἶναι TΛ ∥ ΘK, ἐν ᾧ τὸ τελευταῖον τοῦτο τμῆμα δὲν συναντᾷ τὴν ὑπερβολήν. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ STL κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑπερ-

[1]) Ἀκριβέστερον: μίαν ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ ἄξονα τὴν ΑΓ (διαγώνιον τοῦ τετραγώνου).

βολικοῦ τμήματος ΤΝ, καὶ ὅταν προεκτείνωμεν τὴν ΤΛ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ὁ κλάδος τῆς ὑπερβολῆς ΤΝ θὰ ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ΤΛ μόνον τὸ Τ, δηλαδὴ τὰ δύο τμήματα ΘΚ, ΤΛ, ἔχουν, ὅταν τὰ προεκτείνωμεν μέχρι τοῦ ἀπείρου, πάντοτε τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν μεταξύ των. Ἀλλὰ ὁ κλάδος ΤΝ τῆς ὑπερβολῆς ἀπομακρύνεται κατὰ τὴν πέραν τοῦ Ν προχώρησιν πάντοτε περισσότερον ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΤΛ καὶ πλησιάζει ὅλῳ περισσότερον πρὸς τὴν ΘΚ. Εἰς τὸ ἄπειρον συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΚ, ὡς εἰς τὸ 2ον κεφάλαιον τοῦ βιβλίου Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν ἔχει ἀποδειχθῆ. Καὶ ἀληθῶς, ἡ ΤΛ κεῖται, ὅταν τὴν προεκτείνωμεν πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ Κ μέχρι τοῦ ἀπείρου, πάντοτε ἐντὸς τῆς ΤΝ, ἀλλὰ τὸ σημεῖον Κ ὅμως εἶναι πάντοτε ἐκτός, διότι τοῦτο κεῖται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία δὲν τέμνεται μὲ τὴν κωνικὴν τομήν, ὅταν σχεδιάσωμεν αὐτὴν περαιτέρω. Τέμνεται ὅμως μὲ τὴν παραβολὴν ΗΚΛ εἰς τὸ σημεῖον Ν. Φέρομεν τὴν ΚΤ καὶ διὰ τοῦ Ν τὸ τμῆμα ΝΜ $\parallel$ ΚΤ, ἔπειτα φέρομεν ἀπὸ τοῦ Ν τὴν κάθετον ΝΦΣ $\parallel$ ΛΤS. Τώρα ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις τοῦ γινομένου $\mathrm{MN} \cdot \mathrm{N\Sigma} = \mathrm{KT} \cdot \mathrm{TS}$, ὅπως τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὸ 12 λῆμμα τῆς πραγματείας Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΝΘ εἶναι = παραλληλόγραμμον SK, τουτέστι :

$$\mathrm{N\Sigma} \cdot \Theta\Phi = \mathrm{ST} \cdot \mathrm{T}\Theta,$$

ἐπειδὴ $\Theta\Phi \perp \mathrm{N\Sigma}$. Εἶναι ὅμως

$$\mathrm{ST} = \mathrm{T}\Theta = \Theta\mathrm{H},$$

ἤτοι εἶναι πραγματικῶς ἐπίσης τὸ ΣΚ παραλληλόγραμμον καὶ ἐμβαδοῦ $= \mathrm{H}\Theta^2$, ἤτοι :

$$\mathrm{N\Sigma} \cdot \Theta\Phi = \mathrm{H}\Theta^2, \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Λαμβάνομεν $\Phi\mathrm{Z} = \mathrm{N}\Phi$, καὶ ἡ ΦΣ εἶναι $= \Phi\Theta$, ἐπειδὴ $\mathrm{ST} = \mathrm{T}\Theta$, καὶ $\Theta\mathrm{Z} = \mathrm{N\Sigma}$, ἤτοι ἐπίσης :

$$\Theta\mathrm{Z} \cdot \Theta\Phi = \mathrm{H}\Theta^2,$$

καὶ εἶναι ἐπίσης ΝΦ ἓν ἐκ τῶν παραμενόντων σταθερῶν τμημάτων, διότι $\perp$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΗΖ· ΗΘ εἶναι ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς ΗΚΝ, καὶ

$$\Phi H \cdot H\Theta = \Phi N^2,$$
$$\Phi N = \Phi Z, \qquad \text{ἤτοι ἐπίσης}$$
$$\Phi H \cdot H\Theta = \Phi Z^2, \qquad \text{καὶ ἤδη ἦτο :}$$
$$Z\Theta \cdot \Theta\Phi = H\Theta^2.$$

Διαιροῦμεν τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται τὰ τμήματα ΗΘ, ΘΦ καὶ ΦΖ. Τότε εἶναι :

$$A\Delta \cdot A\Gamma = \Delta B^2,$$
$$B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = A\Gamma^2.$$

Τώρα ὑπολείπεται νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων

$$A\Gamma \text{ καὶ } \Delta B > \Gamma\Delta.$$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὴν ἰσότητα :

$$H\Phi \cdot H\Theta = \Phi Z^2,$$

θὰ ἔχωμεν $\Phi N > H\Theta > \Theta T$,

διότι $\Theta T = H\Theta$,

ἀλλὰ $H\Theta$ σημαίνει $> \Theta\Phi$.

Καὶ $N\Phi = \Phi Z > \Phi\Theta$,

καὶ $\Theta H > \Phi\Phi$,

ἐπειδὴ $H\Theta = T\Theta$.

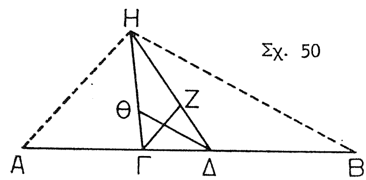
Καὶ οὕτω εἶναι ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΗΘ καὶ ΦΖ > ΘΦ, ἤτοι ἐπίσης ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων ΑΓ καὶ ΔΒ > ΓΔ. Πρὸς τούτοις τὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν σχέσιν ὅπως τὰ τμήματα ΗΘ, ΘΦ, ΦΖ.

Διαιροῦμεν τώρα τὴν ΑΒ ἀναλόγως τῶν τμημάτων ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις

$$ΑΓ \cdot ΑΔ = ΔΒ^2$$
$$ΒΓ \cdot ΓΔ = ΑΓ^2,$$

καὶ ἕκαστον τῶν τμημάτων ΑΓ, ΔΒ > ΓΔ, ὅ.ἔ.δ.

Καὶ ὅταν ἡ ΑΒ ἔχῃ διαιρεθῆ κατὰ τὴν σχέσιν αὐτήν, τότε εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν τμημάτων ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τρίγωνον. Τοῦτο ἔστω τὸ ΗΓΔ (σχ. 50). Εἶναι τοῦτο τὸ ἴδιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἑπταγώνου. Ἀλλ' εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ἑπταγώνου καὶ δι' ἄλλου τρόπου ἢ τοῦ τρόπου



Σχ. 50

τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τοῦ τριγώνου τούτου, καὶ μάλιστα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς τὸν κύκλον, εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν τὸ ἑπτάγωνον, νὰ ἐγγράψωμεν ἓν τρίγωνον μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας, ὅπως εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου τοῦ Ἀρχιμήδους. Καὶ τώρα τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, καὶ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον ὑποτείνει ἡ ΓΗ, θὰ εἶναι $\frac{2}{7}$, καὶ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνει ἡ πλευρὰ $ΗΔ = \frac{4}{7}$ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Καὶ ἐπειδὴ $\sphericalangle ΗΔΓ = 2 \cdot \sphericalangle ΓΗΔ$, καὶ $\sphericalangle ΗΓΔ = 4 \sphericalangle ΓΗΔ$, τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνεται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΗΓ, διαιρεῖται εἰς δύο ἡμίση, καὶ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ὑποτείνεται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΗΔ, διαιρεῖται εἰς 4 μέρη (ἴσα). Καὶ ὅταν κανεὶς σχεδιάσῃ τὰ τόξα τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν χορδῶν εἰς τὸν κύκλον, τότε συνάγεται τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι $\sphericalangle$ ΗΔΓ $= 2 \cdot \sphericalangle$ ΓΗΔ καὶ $\sphericalangle$ ΗΓΔ $= 4 \cdot \sphericalangle$ ΓΗΔ. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν χωρίζομεν τὴν $\sphericalangle$ ΓΔΗ διὰ τῆς εὐθείας γραμμῆς ΔΘ εἰς δύο ἴσα μέρη, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν $\sphericalangle$ ΗΓΔ διὰ τῆς εὐθείας γραμμῆς ΓΖ. Τότε ἔχομεν

$$\frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΘΓ}} = \frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}}.$$

Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι : $\dfrac{\text{ΗΓ}}{\text{ΓΘ}} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}}.$

Εἶναι δὲ $\dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΔ}} = \dfrac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΓΔ}^2},$

ἐπειδὴ ΒΓ $\cdot$ ΓΔ $=$ ΑΓ^2.

Καὶ $\dfrac{\text{ΗΓ}}{\text{ΓΘ}} = \dfrac{\text{ΑΓ}^2\,(=\text{ΔΗ}^2)}{\text{ΓΗ}^2},$

$$\frac{\text{ΗΓ}}{\text{ΓΔ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΓΘ}}.$$

Ἤτοι εἶναι $\triangle$ ΔΗΓ $\sim \triangle$ ΓΔΘ,

$\sphericalangle$ ΔΘΓ $= \sphericalangle$ ΗΔΓ, καὶ

$\sphericalangle$ ΔΘΓ $= \sphericalangle$ ΗΔΘ $+ \sphericalangle$ ΔΗΘ,

$\sphericalangle$ ΔΗΘ $= \sphericalangle$ ΘΔΓ,

$\sphericalangle$ ΗΔΓ $= 2 \cdot \sphericalangle$ ΘΔΓ,

$\sphericalangle$ ΗΔΓ $= 2 \cdot \sphericalangle$ ΔΗΓ.

Ὑφίσταται ἐπίσης ἡ ἀναλογία

$$\frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΓΗ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΓΑ}}.$$

Καὶ διὰ συνθέσεως, ἕπεται :

$$\frac{\text{ΔΗ}}{\text{ΗΖ}} = \frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΑΓ}^2},$$

καί :
$$\frac{\Delta H}{HZ} = \frac{B\Delta^2}{A\Gamma^2} = \frac{\Delta H^2}{H\Gamma^2},$$
$$\frac{\Delta H}{HZ} = \frac{\Delta H^2}{H\Gamma^2},$$
$$\frac{\Delta H}{H\Gamma} = \frac{H\Gamma}{HZ}.$$

Ἐπίσης εἶναι : $\triangle\, H\Gamma\Delta \sim \triangle\, H\Gamma Z,$

καὶ ἐπομένως
$$\sphericalangle\, \Gamma ZH = \sphericalangle\, H\Gamma\Delta,$$
$$\sphericalangle\, \Gamma ZH = \sphericalangle\, Z\Gamma\Delta + \sphericalangle\, Z\Delta\Gamma,$$
$$\sphericalangle\, HZ\Gamma = \sphericalangle\, H\Gamma\Delta,$$
$$\sphericalangle\, H\Gamma\Delta = 2 \cdot H\Gamma Z,$$
$$\sphericalangle\, H\Gamma\Delta = 2 \cdot \sphericalangle\, H\Delta\Gamma,$$
$$\sphericalangle\, H\Gamma\Delta = 4 \cdot \sphericalangle\, \Gamma H\Delta.$$

Ἐὰν λοιπὸν σχεδιάσωμεν εἰς τὸν κύκλον, εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν τὸ ἑπτάγωνον, ἓν ὅμοιον τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΓΔ, διχοτομήσωμεν τὴν γωνίαν ΗΓΔ, καὶ πάλιν διχοτομήσωμεν ἕκαστον τοῦ ληφθέντος ἡμίσεος, κατόπιν διχοτομήσωμεν τὴν $\sphericalangle$ ΗΔΓ, τότε ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου διαιρεῖται εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη. Καί, ὅταν εἰς τὰ ἑπτὰ αὐτὰ μέρη τῆς περιφερείας φέρωμεν τὰς χορδάς, τότε ἔχομεν ἐγγράψει τὸ κανονικὸν ἑπτάγωνον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ οὕτω ἐτελείωσεν ἡ πραγματεία περὶ τῶν προϋποθέσεων τοῦ ἑπταγώνου, καὶ ἐγκώμιον ἔστω πρὸς τὸν θεόν, τὸν ἕνα».

Ἐπίλογος τοῦ Γερμανοῦ μεταφραστοῦ Carl Schoy (Ε. Σ. Σταμάτη, Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, α΄ τόμ., α΄ μέρος σελ. 28 - 29).

« Ὑπάρχουν ἀκόμη ἀνεξάρτητοι πραγματεῖαι πολλῶν Ἀράβων μαθηματικῶν διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἑπταγώνου. Μία ἀξιόλογος σύνθεσις ὅλων τῶν συναφῶν αὐτῶν πραγματειῶν προέρχεται ἐκ τοῦ Kamâl ad - din Ibn al - Mu ʿâli Mûsâ Ibn Junus (1156 -

1242), ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὴν Oxford. Αἱ περισσότεραι ἀραβικαὶ λύσεις στηρίζονται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς τομῆς δύο κωνικῶν τομῶν (παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς ἢ ὑπερβολῆς καὶ ὑπερβολῆς), ἐν ᾧ ἀναχωροῦσιν ὅλαι ἀπὸ τὸ συναφὲς τετράγωνον τοῦ Ἀρχιμήδους· μερικαὶ λύσεις ἔχουσι χαρακτῆρα ἐπιπεδομετρικόν. Οὐδεὶς ὅμως Ἄραψ συγγραφεὺς φαίνεται, ὅτι παράγει τὴν ὑπὸ τοῦ Woepcke (εἰς τὸ ἀναφερθὲν βιβλίον του σελ. 127) εἰσαχθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία, φαίνεται, ὅτι εἶναι μία προσθήκη τοῦ Woepcke. Σκέπτομαι νὰ διαπραγματευθῶ εἰς ἰδιαιτέραν πραγματείαν τὸ ἐνδιαφέρον θέμα τῆς κατασκευῆς τοῦ ἑπταγώνου ὑπὸ τῶν Ἀράβων, ἐπὶ τῇ βάσει ἀνεκδότων πηγῶν καὶ ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ταύτῃ νὰ εἰσέλθω ἐγγύτερον πρὸς τὴν θεωρητικὴν πλευρὰν τοῦ θέματός μας ».

(Σημείωσις. Ὁ Carl Schoy δὲν ἐπέζησε διὰ νὰ ἐκδώσῃ τὴν ἀνεξάρτητον αὐτὴν προαναγγελθεῖσαν πραγματείαν. Τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ μὲ τὸν Moritz Cantor, δώσαντα παρομοίαν συναφῆ ὑπόσχεσιν. (Moritz Cantor, Geschichte der Mathematik I 1907, σελὶς 307)).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΠΙΨΑΥΟΝΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον δεκατεσσάρων θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν ἐπιψαυόντων κύκλων.

α′

Εἴ κα ἔωντι ὁσοιδηποτοῦν κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτὸς ἔχοντες τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας, ἐκβληθείσας δὲ τᾶς εὐθείας λαφθῇ σαμεῖόν τι ἐπ’ αὐτᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου ἀχθῇ ἐπιψαύουσα τῶν κύκλων, οἱ κύκλοι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν ἐντι. κἂν οἱ κύκλοι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν ἐντι, ἁ ἐπιψαύουσα ἀπό τινος σαμείου ἐκτὸς δύο συνεχομένων κύκλων ἐκβληθεῖσα ἐσσεῖται καὶ τῶν λοιπῶν κύκλων ἐπιψαύουσα.

α′ *Ἔστων γὰρ κύκλοι συνεχόμενοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων, ἇν τὰ κέντρα τὰ Α, Β, Γ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τᾶς ΑΓ ᾗ καὶ σαμεῖα τὰ Δ, Ε τὰ ἁφῶν τῶν κύκλων, ἐκβεβλήσθω δὲ ἁ ΑΒΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὸ Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω κοινὰ ἐπιψαύουσα τῶν κύκλων κατὰ τὰ Η, Τ, Κ σαμεῖα. φαμὶ δή, ὅτι ὡς ὁ κύκλος Α ποτὶ τὸν κύκλον Β, οὕτως ἐστὶν ὁ κύκλος Β ποτὶ τὸν κύκλον Γ.*

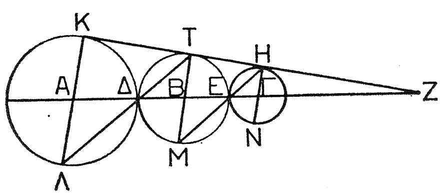
(Πρόλογος τοῦ μεταφραστοῦ Ibn Qurra) :

Σύγγραμμα τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων

Τάδε ἔφη Ἀρχιμήδης :

1

Ἐὰν δοθῶσιν ὁσοιδήποτε προσκείμενοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐξωτερικῶς τὰ δὲ κέντρα αὐτῶν εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ταύτης ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῶν κύκλων, οἱ κύκλοι εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Καὶ ἂν οἱ κύκλοι εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἥτις ἐφάπτεται δύο προσκειμένων κύκλων, προεκτεινομένη ἐφάπτεται καὶ τῶν λοιπῶν κύκλων.



α′ Ἔστωσαν κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐξωτερικῶς, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα Α, Β, Γ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΓ καὶ Δ, Ε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν κύκλων. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ΚΤΗ προεκτεινομένη συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας ΑΒΓ εἰς τι σημεῖον Ζ. Λέγω, ὅτι

$$\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{\text{κύκλος Β}}{\text{κύκλος Γ}}.$$

Ἄχθων γὰρ ἀπὸ τῶν σαμείων ἁφῶν τῶν Κ, Τ, Η διαμέτροι τῶν κύκλων αἱ ΚΑΛ, ΤΒΜ, ΗΓΝ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΛΔ, ΔΤ, ΜΕ, ΕΗ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΚΛ, ΤΜ, ΗΝ ἀπὸ τῶν σαμείων ἁφῶν διὰ τῶν κέντρων ἀγμέναι ἐντί, ἐσσοῦνται αὗται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ ποτ' ὀρθάς. ἐσσοῦνται ἄρα αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι ἀλλάλαις παράλλαλοι καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΛΑΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΤ ἴσα καὶ δύο τρίγωνα τὰ ΛΑΔ, ΔΒΤ ἰσοσκελῆ. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΔΛ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΔΤ ἐστιν ἴσα. ἐπεὶ οὖν ἁ ΑΒ εὐθεῖά ἐστιν, ἔστιν ἄρα καὶ ἁ ΛΤ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΜΗ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΛΚΤ, ΜΤΗ ἐντι, ἔχοντα καὶ γωνίαν τὰν ὑπὸ ΑΛΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΜΕ ἴσαν, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΚΤΛ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΗΜ ἴσα. εὐθεῖα ἄρα ἁ ΛΤ ἆκται παρὰ τὰν ΜΗ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνα τᾶ ΚΛΤ, ΜΤΗ ὁμοῖά ἐντι, ἔστιν ὡς ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΚΤ, οὕτως ἁ ΜΤ ποτὶ τὰν ΤΗ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΜΤ, οὕτως ἁ ΚΤ ποτὶ τὰν ΤΗ. ἀλλὰ λόγος ὁ τᾶς ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ ὁ αὐτός ἐστιν τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΚΑ ποτὶ τὰν ΤΒ, τουτέστιν ὁ τᾶς ΚΖ ποτὶ τὰν ΖΤ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΚΖ ποτὶ τὰν ΖΤ, οὕτως ἁ ΚΤ ποτὶ τὰν ΤΗ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἁ ΚΖ ποτὶ τὰν ΖΤ, οὕτως ἁ ΚΤ ποτὶ τὰν ΤΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΤΖ ποτὶ τὰν ΖΗ, οὕτως ἁ ΚΖ ποτὶ τὰν ΖΤ. ἀλλ' ὡς ἁ ΚΖ ποτὶ τὰν ΖΤ, οὕτως ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΒ, τουτέστιν ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ, καὶ ὡς ἁ ΤΖ ποτὶ τὰν ΖΗ, οὕτως ἁ ΤΒ ποτὶ τὰν ΗΓ, τουτέστιν ἁ ΤΜ ποτὶ τὰν ΗΝ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ, οὕτως ἁ ΤΜ ποτὶ τὰν ΗΝ, τουτέστιν ὁ διπλασίων λόγος τᾶς ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ ἴσος ἐστὶ τοῦ διπλασίονος λόγου τᾶς ΤΜ ποτὶ τὰν ΗΝ. ἐπεὶ οὖν οἱ λόγοι τῶν κύκλων ποτ' ἀλλάλους ἐντὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα, ἔστιν ἄρα κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β ὡς κύκλος ὁ Β ποτὶ

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς Κ, Τ, Η φέρομεν τὰς διαμέτρους τῶν κύκλων ΚΑΛ, ΤΒΜ, ΗΓΝ καὶ τὰς ΛΔ, ΔΤ, ΜΕ, ΕΗ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ΚΛ, ΤΜ καὶ ΗΝ ἤχθησαν ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς καὶ διέρχονται διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων εἶναι κάθετοι εἰς τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην (Εὐκλ. γ', ιη') καὶ συνεπῶς μεταξύ των παράλληλοι (Εὐκλ. α', κη') καὶ ἡ γωνία ΛΑΔ = πρὸς τὴν γωνίαν ΔΒΤ (Εὐκλ. α', κθ') καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΛΑΔ καὶ ΔΒΤ εἶναι ἰσοσκελῆ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΔΛ = πρὸς τὴν γωνίαν ΒΔΤ (Εὐκλ. α', ε'). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἕπεται ὅτι ἡ ΛΤ εἶναι ἐπίσης εὐθεῖα γραμμή. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΜΗ εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΛΚΤ καὶ ΜΤΗ ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν ΑΛΔ = γωνίαν ΒΜΕ, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΚΤΛ καὶ ΤΗΜ εἶναι ἴσαι. Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΛΤ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΜΗ (Εὐκλ. α', κη'). Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΚΛΤ καὶ ΜΤΗ εἶναι ὅμοια θὰ εἶναι $\frac{\text{ΛΚ}}{\text{ΚΤ}} = \frac{\text{ΜΤ}}{\text{ΤΗ}}$, (Εὐκλ. ϛ', δ'). Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{\text{ΛΚ}}{\text{ΜΤ}} = \frac{\text{ΚΤ}}{\text{ΤΗ}}$, (Εὐκλ. ε', ιϛ'), ἀλλὰ $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΤΒ}} = \frac{\text{ΚΖ}}{\text{ΖΤ}}$ (Εὐκλ. ε', ιε')· εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΚΖ}}{\text{ΖΤ}} = \frac{\text{ΚΤ}}{\text{ΤΗ}}$. Ἐπειδὴ $\frac{\text{ΚΖ}}{\text{ΖΤ}} = \frac{\text{ΚΤ}}{\text{ΤΗ}}$, θὰ εἶναι $\frac{\text{ΤΖ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{ΚΖ}}{\text{ΖΤ}}$. Ἀλλὰ $\frac{\text{ΚΖ}}{\text{ΖΤ}} = \frac{\text{ΚΑ}}{\text{ΤΒ}} = \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}}$ καὶ $\frac{\text{ΤΖ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{ΤΒ}}{\text{ΗΓ}} = \frac{\text{ΤΜ}}{\text{ΗΝ}}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΤΜ}}{\text{ΗΝ}}$ καὶ $\frac{\text{ΚΛ}^2}{\text{ΤΜ}^2} = \frac{\text{ΤΜ}^2}{\text{ΗΝ}^2}$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν (Εὐκλ. ιβ', β') εἶναι ἄρα $\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{\text{κύκλος Β}}{\text{κύκλος Γ}}$.

(Σημείωσις: Ἐκ τῶν ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμῶν ὁ πρὸ τοῦ κόμματος σημαίνει τὸ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὁ μετὰ τὸ κόμμα τὸν ἀριθμὸν τοῦ θεωρήματος, ἢ ἐὰν εἶναι περισσότεροι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν θεωρημάτων).

κύκλον τὸν Γ.

β′ *Ἀλλὰ δὴ ἔστων κύκλοι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον καὶ εὐθεῖα ἁ ΖΤ ἐπιψαύουσα κύκλων τῶν Γ, Β κατὰ τὰ Η, Τ σαμεῖα. δεικτέον, ὅτι ἐκβληθείσας τὰς ΖΤ, ἐσσεῖται αὔτα ἐπιψαύουσα καὶ τῶν λοιπῶν κύκλων.*

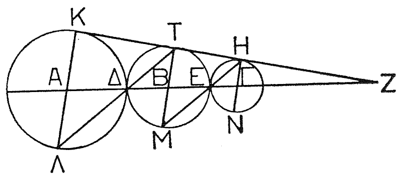
Ἄχθω γὰρ διὰ κέντρου τοῦ Α, διάμετρος ἁ ΚΑΛ παρὰ τὰν ΤΜ καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΤΚ καὶ ἔστω ἁ αὐτὰ καταγραφά, ὡς ἐν τῷ πρότερον. καὶ δέδεικται, ὅτι ἁ ΛΔΤ εὐθεῖα γραμμά ἐστιν καὶ ὅτι ἁ ΛΤ ἆκται παρὰ τὰν ΜΗ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλοι οἱ Γ, Β κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν ἐντι, ἔστιν ὡς ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ, οὕτως ἁ ΤΜ ποτὶ τὰν ΗΝ. ἀλλὰ λόγος ὁ τᾶς ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΑΛ ποτὶ τὰν ΤΒ, τουτέστιν ὁ τᾶς ΛΔ ποτὶ τὰν ΔΤ, τουτέστιν ὁ τᾶς ΛΔ ποτὶ τὰν ΜΕ, καὶ λόγος ὁ τᾶς ΤΜ ποτὶ τὰν ΗΝ ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΒΜ ποτὶ τὰν ΓΗ, τουτέστιν ἁ ΜΕ ποτὶ τὰν ΕΗ, τουτέστιν ἁ ΔΤ ποτὶ τὰν ΕΗ. καὶ δέδεικται, ὅτι ὡς ἁ ΛΔ ποτὶ τὰν ΜΕ, οὕτως ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ, οὕτως ἁ ΛΔ ποτὶ τὰν ΜΕ, τουτέστιν ἁ ΔΤ ποτὶ τὰν ΕΗ, τουτέστιν ἁ ΛΤ ποτὶ τὰν ΜΗ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἁ ΚΛ ποτὶ τὰν ΤΜ, οὕτως ἁ ΛΤ ποτὶ τὰν ΜΗ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΚΛΤ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΜΗ ἴσα ἐστί, ἔντι ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΛΤ, ΤΜΗ ὁμοῖα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΛΚΤ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΜΤΗ ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΜΤΗ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστί. ἔστιν ἄρα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΛΚΤ ὀρθά. καὶ ἐπεὶ παρὰ τὰν ΤΒ ἆκται ἁ ΚΛ, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΚΤΜ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα. ἔστιν ἄρα ἁ ΗΤΚ εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύουσα καὶ τοῦ κύκλου Α.

ὁμοίως δὴ δειξοῦμες εἴ κα πλείονες κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντί.

β΄ Ἔστω τώρα, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΤ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Γ καὶ Β εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Τ. Λέγω ὅτι ἂν προεκτείνωμεν τὴν ΖΤ αὕτη θὰ ἐφάπτηται καὶ τῶν ἄλλων κύκλων.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Α ἡ διάμετρος ΚΑΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΤΜ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΤΚ καὶ ἂς κατασκευασθῇ τὸ σχῆμα, ὅπως τὸ προηγούμενον. Ἀπεδείχθη ἤδη ὅτι ἡ ΛΔΤ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΛΤ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐ-

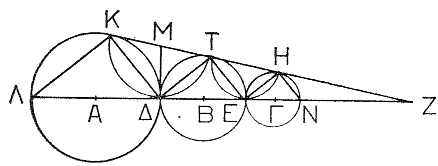


θεῖαν ΜΗ. Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ θὰ εἶναι $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΤΜ}}{\text{ΗΝ}}$. Ἀλλὰ $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΤΒ}} = \frac{\text{ΛΔ}}{\text{ΔΤ}}$, τουτέστιν $= \frac{\text{ΛΔ}}{\text{ΜΕ}}$ καὶ $\frac{\text{ΤΜ}}{\text{ΗΝ}} = \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΓΗ}} = \frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΕΗ}}$, τουτέστιν $= \frac{\text{ΔΤ}}{\text{ΕΗ}}$. Καὶ εἶχεν εὑρεθῇ ὅτι $\frac{\text{ΛΔ}}{\text{ΜΕ}} = \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΛΔ}}{\text{ΜΕ}} = \frac{\text{ΔΤ}}{\text{ΕΗ}} = \frac{\text{ΛΤ}}{\text{ΜΗ}}$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΤΜ}} = \frac{\text{ΛΤ}}{\text{ΜΗ}}$ καὶ ἡ γωνία ΚΛΤ = γωνίαν ΤΜΗ, ἕπεται ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΚΛΤ καὶ ΤΜΗ εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. ς΄, δ΄. ς΄). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΛΚΤ = γωνίαν ΜΤΗ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΜΤΗ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἡ γωνία ἄρα ΛΚΤ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΤΒ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΚΤΜ εἶναι ὀρθή. Ἡ γραμμὴ ἄρα ΗΤΚ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (Εὐκλ. α΄, δ΄) ἐφαπτομένη καὶ τοῦ κύκλου Α.

Κατὰ ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἂν ἔχωμεν περισσοτέρους κύκλους ἐφαπτομένους ἀλλήλων.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

γʹ *Ἔστων κύκλοι οἱ αὐτοί, ὡς ἐν τῷ πρότερον καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΛΚ, ΚΔ, ΤΔ, ΕΗ, ΗΝ καὶ ἀπὸ σαμείου τοῦ Δ ἄχθω ἁ ΔΜ ἐπιψαύουσα δύο κύκλων τῶν Α, Β. ἔστιν ἄρα ἁ ΔΜ κάθετος ἐπὶ τὰν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ σαμείου τοῦ Μ δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου Α, αἱ ΜΚ, ΜΔ ἀγμέναι ἐντί, ἐσσεῖται ἁ ΜΚ τᾷ ΜΔ ἴσα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἁ ΜΔ τᾷ ΜΤ ἐστιν ἴσα. ἔντι ἄρα αἱ ΜΚ, ΜΔ, ΜΤ ἀλλάλαις ἴσαι καὶ κύκλος ὁ κέντρον ἔχων τὸ Μ, ἐλεύσεται διὰ τριῶν σαμείων τῶν Κ,Δ,Τ καὶ γωνίαι αἱ ΚΔΤ, ΛΚΔ ὀρθαί ἐντι. ἔστιν ἄρα ἁ ΛΚ ἀγμένα παρὰ τὰν ΔΤ. ὁμοίως δὴ δειξοῦμες, ὅτι ἁ ΔΤ παρὰ τὰν ΕΗ ἀγμένα ἐστί.*



Πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΖΗΚ ἐπιψαύουσα κύκλου τοῦ Α κατὰ τὸ σαμεῖον Κ ἐστί, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΚΛΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΜΚΔ ἴσα καὶ δύο τρίγωνα τὰ ΛΚΔ, ΚΔΤ ἐντι ὀρθογώνια. λοιπὰ ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΚΔΛ λοιπᾷ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΚΤΔ ἴσα ἐστὶν καὶ τρίγωνα τὰ ΛΚΔ, ΚΔΤ ὁμοῖά ἐντι. ἀλλὰ τρίγωνον τὸ ΛΚΔ τριγώνῳ τῷ ΔΤΕ ἔστιν ὁμοῖον καὶ τρίγωνον τὸ ΚΔΤ τριγώνῳ τῷ ΤΕΗ ὁμοῖον. ἔντι ἄρα τρίγωνα τὰ ΛΚΔ, ΚΔΤ, ΤΕΗ, ΕΗΝ ὁμοῖα. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΚΔ, οὕτως ἁ ΚΔ ποτὶ τὰν ΔΤ, τουτέστιν ἁ ΔΤ ποτὶ τὰν ΤΕ, τουτέστιν ἁ ΤΕ ποτὶ τὰν ΕΗ. ἔστιν ἄρα ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΔΤ οὕτως ἁ ΔΤ ποτὶ τὰν ΕΗ. ἀλλὰ ὡς ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΔΤ, οὕτως ἁ ΛΔ ποτὶ τὰν ΔΕ καὶ ὡς ἁ ΔΤ ποτὶ τὰν ΕΗ, οὕτως ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΝ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΛΔ ποτὶ τὰν

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

(ἄλλως τὸ α', δηλ. κύκλος Α : κύκλος Β = κύκλος Β : κύκλος Γ).

γ' Ἔστωσαν οἱ ἴδιοι κύκλοι, ὡς προηγουμένως, καὶ ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΛΚ, ΚΔ, ΤΔ, ΕΗ, ΗΝ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν δύο κύκλων Α καὶ Β τὴν ΔΜ. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΜ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ (Εὐκλ. γ', ιη'). Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σημείου Μ ἔχομεν φέρει δύο ἐφαπτομένας ΜΚ καὶ ΜΔ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον Α θὰ εἶναι ΜΚ = ΜΔ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ εἶναι ΜΔ = ΜΤ. Εἶναι ἄρα ΜΚ = ΜΔ = ΜΤ καὶ ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον Μ διέρχεται ἐκ τῶν τριῶν σημείων Κ, Δ, Τ καὶ ἡ γωνία ΚΔΤ εἶναι ὀρθὴ (Εὐκλ. γ', λα'). Εἶναι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία ΛΚΔ· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα ΛΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΤ (Εὐκλ. α', κζ'). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΤ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ ΖΗΚ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Α εἰς τὸ σημεῖον Κ, εἶναι ἡ γωνία ΚΛΔ = γωνίαν ΜΚΔ (Εὐκλ. γ', λβ') καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΛΚΔ, ΚΔΤ εἶναι ὀρθογώνια. Εἶναι ἄρα ἡ ὑπόλοιπος γωνία ΚΔΛ = γωνίαν ΚΤΔ. Ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΛΚΔ, ΚΔΤ εἶναι ὅμοια. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΛΚΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΤΕ καὶ τὸ τρίγωνον ΚΔΤ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΤΕΗ. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΛΚΔ, ΚΔΤ, ΤΕΗ, ΕΗΝ εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. ς', κα') καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\mathrm{ΛΚ}}{\mathrm{ΚΔ}} = \frac{\mathrm{ΚΔ}}{\mathrm{ΤΔ}} = \frac{\mathrm{ΔΤ}}{\mathrm{ΤΕ}} = \frac{\mathrm{ΤΕ}}{\mathrm{ΕΗ}}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\frac{\mathrm{ΛΚ}}{\mathrm{ΔΤ}} = \frac{\mathrm{ΔΤ}}{\mathrm{ΕΗ}}$. Ἀλλὰ $\frac{\mathrm{ΛΚ}}{\mathrm{ΔΤ}} = \frac{\mathrm{ΛΔ}}{\mathrm{ΔΕ}}$ καὶ

ΔΕ, οὕτως ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΝ. διπλασίων ἄρα λόγος τᾶς ΛΔ ποτὶ τὰν ΔΕ διπλασίονι λόγῳ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΝ ἐστιν ἴσος, τουτέστιν ὡς κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, οὕτως ἐστὶ κύκλος ὁ Β πρὸς κύκλον τὸν Γ.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ (β')

δ' Ἔστων πάλιν κύκλοι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον καὶ ΖΤ κοινὰ ἐπιψαύουσα τῶν κύκλων Γ, Β κατὰ τὰ Η, Τ σαμεῖα. δεικτέον, ὅτι ἐκβληθείσας τᾶς ΗΤ αὔτα ἐπιψαύσει καὶ τοῦ κύκλου Α.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΝΗ, ΗΕ, ΕΤ, ΤΔ καὶ ἀπὸ σαμείου τοῦ Δ ἄχθω παρὰ τὰν ΤΕ ἁ ΔΚ καὶ ἄχθων αἱ ΤΚ, ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἁ ΚΔ ἆκται παρὰ τὰν ΤΕ γωνία ἁ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΕΔ ἴσα ἐστί, γωνία δὲ ἁ ΕΤΔ ὀρθὰ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΔΚ ἐστὶν ἴσα, ἐπεὶ ἁ ΚΔ παρὰ τὰν ΤΕ ἆκται. ἔστι δὲ καὶ γωνίᾳ ἁ ὑπὸ ΔΚΛ ἐν ἁμικυκλίῳ ὀρθά. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΤΔΚ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΚΛ ἐστὶν ἴσα. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἐν τῷ πρότερον δέδεικται, τὰ τρίγωνα ὁμοῖά ἐντι, ἔστιν ὡς ἁ ΝΕ ποτὶ τὰν ΗΕ, οὕτως ἁ ΗΕ ποτὶ τὰν ΕΤ, τουτέστιν ἁ ΕΤ ποτὶ τὰν ΤΔ. ἀλλὰ ὡς ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΤ, οὕτως ἁ ΤΔ ποτὶ τὰν ΔΚ καὶ ὡς ἁ ΝΗ ποτὶ τὰν ΗΕ, οὕτως ἁ ΕΤ ποτὶ τὰν ΤΔ. ὡς ἄρα ἁ ΤΔ ποτὶ τὰν ΔΚ, οὕτως ἁ ΕΤ ποτὶ τὰν ΤΔ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἁ ΕΤ ποτὶ τὰν ΤΔ, οὕτως ἁ ΤΔ ποτὶ τὰν ΔΚ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΕΤΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΔΚ ἴσα ἐστί, δύο ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΔΤ, ΔΤΕ ὁμοῖά ἐντι. γωνία ἄρα ἁ ΔΚΤ γωνίᾳ τᾷ

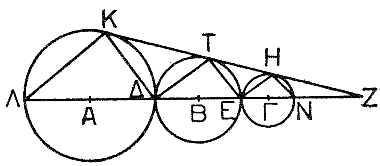
$\frac{\Delta T}{EH} = \frac{\Delta E}{EN}$. Ἑπομένως $\frac{\Lambda\Delta}{\Delta E} = \frac{\Delta E}{EN}$ καὶ ἐκ τούτου

$$\frac{\Lambda\Delta^2}{\Delta E^2} = \frac{\Delta E^2}{EN^2} \text{ ἢ } \frac{\text{κύκλος } A}{\text{κύκλος } B} = \frac{\text{κύκλος } B}{\text{κύκλος } \Gamma}.$$

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

(ἄλλως τὸ β′)

δ′ Ἔστωσαν ἐπίσης οἱ κύκλοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ἔστω ΖΗ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Γ καὶ Β εἰς τὰ σημεῖα ἀντιστοίχως Η καὶ Τ. Λέγω, ὅτι ἂν ἡ εὐθεῖα ΖΗΤ προεκταθῇ θὰ ἐφάπτηται καὶ τοῦ κύκλου Α.



Ἀπόδειξις. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΝΗ, ΗΕ, ΕΤ καὶ ΤΔ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΤΕ καὶ ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΤΚ καὶ ΚΛ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΚΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΤΕ, ἡ γωνία ΚΔΛ = γωνίαν ΤΕΔ (Εὐκλ. α′, κθ′) καὶ ἡ γωνία ΕΤΔ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΤΔΚ, διότι ἡ ΚΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΤΕ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΛ εἶναι ὀρθή, διότι βαίνει ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΛΚΔ (Εὐκλ. γ′, λα′). Ἡ γωνία ἄρα ΤΔΚ = γωνίαν ΔΚΛ. Ἐπειδὴ ὅμως εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. ϛ′, ὁρισμὸς α′), θὰ ἔχωμεν : $\frac{NH}{HE} = \frac{HE}{ET} = \frac{ET}{T\Delta}$. Ἀλλὰ $\frac{EH}{ET} = \frac{T\Delta}{\Delta K}$ καὶ $\frac{NH}{HE} = \frac{ET}{T\Delta}$. Ἑπομένως εἶναι $\frac{T\Delta}{\Delta K} = \frac{ET}{T\Delta}$. Ἐπειδὴ $\frac{ET}{T\Delta} = \frac{T\Delta}{\Delta K}$ καὶ ἡ γωνία ΕΤΔ = γωνίαν ΤΔΚ, ἔπεται ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΚΔΤ, ΔΤΕ εἶναι

ΤΔΕ ἐστιν ἴσα. καὶ δέδεικται, ὅτι γωνία ἁ ὑπὸ ΗΤΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΔΕ ἴσα ἐστίν. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΤΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΚΔ ἴσα. καὶ ἐπεὶ ἐφεξῆς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΚΤΔ, ΔΤΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί, ἐσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΤ, ΗΖ ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας. πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΤΚΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΛΚ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἁ ΖΚ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἴ κα ἔωντι δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτὸς, ἁ κοινὰ ἐπιψαύουσα μέση ἀνάλογον τῶν διαμέτρων τῶν δύο κύκλων ἐστίν.

β'

Εἴ κα ἔωντι δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτός, ἂν τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας, λαφθῇ δὲ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς ἐκβολᾶς ταύτας καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου ἀχθῇ ἐπιψαύουσα τῶν κύκλων, διπλασίων λόγος τῶν τμαμάτων τᾶς κοινᾶς ἐπιψαυούσας ἀπὸ τῶν σαμείων ἁφῶν ἐπὶ τὸ σαμεῖον συμπτώσιος ταύτας καὶ τᾶς διὰ τῶν κέντρων ἐκβληθείσας, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τοῦ, ὃν ἔχοντι οἱ δύο κύκλοι ποτ' ἀλλάλους.

Ἔστων γὰρ δύο κύκλοι οἱ Α, Β ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτὸς καὶ ἐκβληθείσας τᾶς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων λελάφθω σαμεῖόν τι Δ ἐπ' αὐτᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου ἄχθω κοινὰ ἐπιψαύουσα τῶν κύκλων ἁ ΔΕΖ. φαμὶ δή, ὅτι ὃν λόγον ἔχει κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, τοῦτον ἔχει ὁ διπλασίων λόγος τᾶς ΖΔ ποτὶ τὰν ΔΕ.

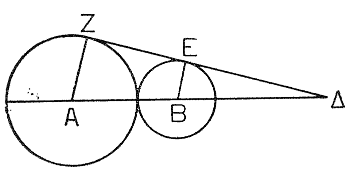
ὅμοια (Εὐκλ. ϛ′, δ′. ϛ′). Ἡ γωνία ἄρα ΔΚΤ = γωνίαν ΤΔΕ καὶ εἴχομεν εὕρει ὅτι ἡ γωνία ΗΤΕ = γωνίαν ΤΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΚΤΔ, ΔΤΗ εἶναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΚΤ, ΗΖ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΤΚΔ = γωνίαν ΔΛΚ, ἕπεται ὅτι ἡ ΖΚ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Α (Εὐκλ. α′, λβ′ ἀντίστροφον).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων κύκλων εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν διαμέτρων τῶν δυὸ κύκλων ἤτοι $\frac{\Lambda\Delta}{\mathrm{KT}} = \frac{\mathrm{KT}}{\Delta\mathrm{E}}$.

2

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς ὁ λόγος τῶν τραγώνων τῶν τμημάτων τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς ταύτης μετὰ τῆς προεκτάσεως τῆς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων διερχομένης εὐθείας, μέχρι τῶν σημείων ἐπαφῆς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους.



Ἔστωσαν οἱ δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτόμενοι κύκλοι Α, Β καὶ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ἡ ΖΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς διὰ τῶν κέντρων Α, Β διερχομένης εὐθείας, εἰς τὸ σημεῖον Δ. Λέγω, ὅτι $\frac{\text{κύκλος } \mathrm{A}}{\text{κύκλος } \mathrm{B}} = \frac{\mathrm{Z}\Delta^2}{\Delta\mathrm{E}^2}$.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΖΑ, ΕΒ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τᾶν γωνιᾶν τᾶν ὑπὸ ΑΖΔ, ΒΕΔ ὀρθά ἐστι, ἁ ΖΑ παρὰ τὰν ΒΕ ἀγμένα ἐστὶ καὶ λόγος τᾶς ΖΑ ποτὶ τὰν ΕΒ, τουτέστιν τᾶς διαμέτρου τοῦ Α κύκλου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ Β κύκλου ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΔΕ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου Α τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου Β τετράγωνον τουτέστιν ὁ κύκλος Α ποτὶ τὸν κύκλον Β, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετράγωνον.

γ′

Εἴ κα ἔωντι κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον, ἂν τὰ κέντρα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας ᾖ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν κέντρων ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, λόγος τῶν ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσῶν τετραγώνων ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχοντι οἱ κύκλοι.

Ἔστων κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ ἂν τὰ κέντρα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας ᾖ, καὶ ἀπὸ κέντρων τῶν Β, Γ, Δ ἄχθων ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων Α, Β, Γ αἱ ΒΤ, ΓΚ, ΔΛ. δεικτέον, ὅτι ὡς κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ΓΚ τετράγωνον, καὶ κύκλος ὁ Β ποτὶ κύκλον τὸν Γ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ΓΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΛ τετράγωνον.

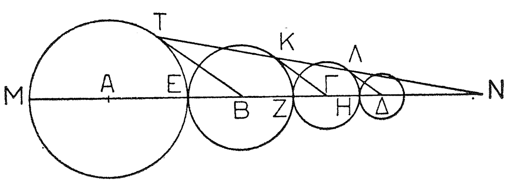
Ἐπεὶ γὰρ οἱ κύκλοι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν ἐντι, ὡς ἄρα διάμετρος ἁ ΜΕ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ, οὕτως ἐστὶ διάμετρος ἁ ΕΖ ποτὶ διάμετρον τὰν ΖΗ, τουτέστιν ἁ ΕΒ ποτὶ τὰν ΖΓ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἁ ΜΕ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἁ

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΑ καὶ ΕΒ. Ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΖΔ, ΒΕΔ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΖΑ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΕ (Εὐκλ. α', κη') καὶ ὁ λόγος $\frac{ΖΑ}{ΕΒ}$ δηλαδὴ ὁ λόγος $\frac{\text{διάμετρος τοῦ Α}}{\text{διάμετρος τοῦ Β}} = \frac{ΖΔ}{ΔΕ}$. Ἑπομένως

$$\frac{\text{τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ Α}}{\text{τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ Β}} = \frac{ΖΔ^2}{ΔΕ^2} \text{ (Εὐκλ. ιβ', β').}$$

3

Ἐὰν κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, ἐφάπτωνται ἀλλήλων, εἶναι δὲ οὗτοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι ἑκάστου αὐτῶν, οἱ λόγοι τῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων πρὸς ἄλληλα.



Ἔστωσαν κύκλοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ Α, Β, Γ, Δ, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἐκ τῶν κέντρων Β, Γ, Δ ἂς φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΒΤ, ΓΚ, ΔΛ ἀντιστοίχως εἰς τοὺς κύκλους Α, Β, Γ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι $\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{ΒΤ^2}{ΓΚ^2}$ καὶ $\frac{\text{κύκλος Β}}{\text{κύκλος Γ}} = \frac{ΓΚ^2}{ΔΛ^2}$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἕπεται, ὅτι $\frac{\text{διάμετρος ΜΕ}}{\text{διάμετρος ΕΖ}} = \frac{\text{διάμετρος ΕΖ}}{\text{διάμετρος ΖΗ}} = \frac{ΕΒ}{ΖΓ}$ καὶ ἐναλλὰξ

ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΓ καὶ συνθέντι ὡς ἁ ΜΒ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΓΖ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΜΒ, ΒΕ περιεχομένῳ, τουτέστιν ὡς ἁ ΒΤ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως ἁ ΜΒ ποτὶ τὰν ΒΤ ἐστι, καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΚ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΕΓ, ΓΖ περιεχομένῳ, τουτέστιν ὡς ἁ ΓΚ ποτὶ τὰν ΓΖ, οὕτως ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΓΚ. καὶ ὡς ἄρα ἁ ΒΤ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως ἁ ΚΓ ποτὶ τὰν ΓΖ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἁ ΒΤ ποτὶ τὰν ΚΓ, οὕτως ἁ ΕΒ ποτὶ τὰν ΓΖ. ἔστι δὲ λόγος ὁ τᾶς ΕΒ ποτὶ τὰν ΖΓ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΜΕ ποτὶ τὰν ΕΖ. ὡς ἄρα ἁ ΒΤ ποτὶ τὰν ΚΓ, οὕτως διάμετρος ἁ ΜΕ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ καὶ λόγος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΜΕ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον, τουτέστιν κύκλου τοῦ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ τετράγωνον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι αἱ ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν ἐντι καὶ παράλλαλοι.

Εἴ κα γὰρ ἀχθέωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τῶν σαμείων ἁφᾶς τῶν ἐπιψαυουσῶν τῶν κύκλων ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτᾶν, ἑξοῦμες τρίγωνα ὀρθογώνια ὁμοῖα τῷ εἴδει καὶ ὁμοίως κείμενα.

Φαμὶ δὴ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐντὶ καὶ εἴ κα αἱ ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων ἀπὸ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων ἀγμέναι ἔωντι καὶ οὐκ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων.

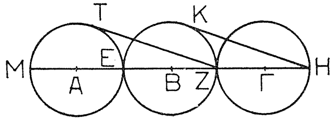
Ἔστων γὰρ κύκλοι οἱ Α, Β, Γ ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτὸς κατὰ τὰ Ε, Ζ σαμεῖα καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων τῶν Ζ, Η ἄχθων ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων κατὰ εἶναι $\frac{ΜΕ}{ΕΒ} = \frac{ΕΖ}{ΖΓ}$. Καὶ διὰ συνθέσεως $\frac{ΜΕ + ΕΒ}{ΕΒ} = \frac{ΕΖ + ΖΓ}{ΖΓ}$ ἢ $\frac{ΜΒ}{ΕΒ} = \frac{ΕΓ}{ΓΖ}$. Ἀλλὰ $ΒΤ^2 = ΜΒ \times ΕΒ$, δηλ. $\frac{ΒΤ}{ΕΒ} = \frac{ΜΒ}{ΒΤ}$ (Εὐκλ. γ′, λς′), καὶ $ΓΚ^2 = ΕΓ \times ΓΖ$ δηλ. $\frac{ΓΚ}{ΓΖ} = \frac{ΕΓ}{ΓΚ}$ (Εὐκλ. γ′, λς′). Ἑπομένως $\frac{ΒΤ}{ΒΕ} = \frac{ΚΓ}{ΓΖ}$. Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{ΒΤ}{ΚΓ} = \frac{ΕΒ}{ΓΖ}$ (Εὐκλ. ε′, ις′) καὶ ὁ λόγος $\frac{ΒΤ}{ΖΓ} = \frac{ΜΕ}{ΕΖ}$. Εἶναι ἄρα $\frac{ΒΤ}{ΚΓ} = \frac{\text{διάμετρος } ΜΕ}{\text{διάμετρος } ΕΖ}$ καὶ $\frac{ΜΕ^2}{ΕΖ^2}$ δηλ. $\frac{\text{κύκλος } Α}{\text{κύκλος } Β} = \frac{ΒΤ^2}{ΚΓ^2}$ (Εὐκλ. ιβ′, β′).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ προειρημέναι ἐφαπτόμεναι εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ πρὸς ἀλλήλας καὶ εἶναι παράλληλοι.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἂν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τοὺς κύκλους μὲ τὰ κέντρα θὰ ἔχωμεν ὀρθογώνια τρίγωνα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι ἄγωνται ἐκ τῶν πε-



ράτων τῶν διαμέτρων καὶ ὄχι ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων.

Διότι ἔστωσαν κύκλοι οἱ Α, Β, Γ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων τῶν Ζ, Η ἃς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων κατὰ τὰ σημεῖα *τὰ Τ, Κ σαμεῖα, αἱ ΤΖ, ΚΗ. φαμὶ δή, ὅτι ὡς κύκλος ὁ Α πρὸς κύκλον τὸν Β, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΖ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΗ τετράγωνον.*

'Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς διάμετρος ἁ ΜΕ ποτὶ διάμετρον τὰν ΕΖ, οὕτως ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΗ καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἁ ΜΖ ποτὶ τὰν ΖΕ, οὕτως ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΗΖ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΤ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΜΖ, ΖΕ περιεχομένῳ, τουτέστιν ὡς ἁ ΖΤ ποτὶ τὰν ΖΕ, ἁ ΜΖ ποτὶ τὰν ΖΤ, καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΗ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΕΗ, ΗΖ περιεχομένῳ. καὶ ὡς ἄρα ἁ ΤΖ ποτὶ τὰν ΚΗ, ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΗ, τουτέστιν ἁ ΜΕ ποτὶ τὰν ΕΖ. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΕ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον, τουτέστιν ὡς ὁ κύκλος Α ποτὶ τὸν κύκλον Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΖ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΗ τετράγωνον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ φανερόν, ὅτι αἱ ἐπιψαύουσαι αὗται παράλλαλοί ἐντι καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς ἀνάλογον.

δ′

Εἴ κα κύκλων ἐόντων ἑξῆς ἀνάλογον ἐπιψαυόντων ἀλλαλᾶν ἐντὸς καθ' ἓν σαμεῖον καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶν διαμέτρων τῶν κύκλων ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, οἱ κύκλοι ποτ' ἀλλάλους ἐντί, ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν τετράγωνα ποτ' ἄλλαλα.

Τ, Κ, αἱ ΤΖ. ΚΗ. Λέγω ὅτι εἶναι $\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{ΤΖ^2}{ΚΗ^2}$.

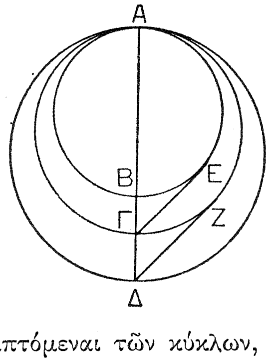
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ $\frac{ΜΕ}{ΕΖ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}$ καὶ διὰ συνθέσεως $\frac{ΜΖ}{ΕΖ} = \frac{ΕΗ}{ΖΗ}$ (Εὐκλ. ε′, ιη′). Ἀλλὰ $ΖΤ^2 = ΜΖ \times ΖΕ$ (Εὐκλ. γ′, λϛ′), δηλ. $\frac{ΖΤ}{ΖΕ} = \frac{ΜΖ}{ΖΤ}$ (καὶ $ΚΗ^2 = ΕΗ \times ΗΖ$). Εἶναι ἄρα $\frac{ΤΖ}{ΚΗ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}$ δηλ. $= \frac{ΜΕ}{ΕΖ}$. Εἶναι ἄρα $\frac{ΜΕ^2}{ΕΖ^2}$ δηλ. $\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{ΤΖ^2}{ΚΗ^2}$ (Εὐκλ. ιβ′, β′).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶναι παράλληλοι καὶ εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

4

Ἐὰν κύκλων ἐφαπτομένων ἀλλήλων ἐσωτερικῶς εἰς ἓν σημεῖον καὶ εὑρισκομένων ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐκ τῶν περάτων τῶν δια-



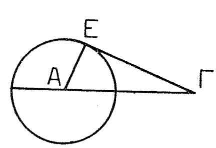
μέτρων ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων, οἱ λόγοι τῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους εἶναι οἱ αὐτοὶ πρὸς τοὺς λόγους τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων πρὸς ἄλληλα.

Ἔστων κύκλοι κατὰ τὸ ἑξῆς ἀνάλογον περὶ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σαμεῖον καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ σαμείων ἄχθων ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων τῶν περὶ τᾶν διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ, αἱ ΓΕ, ΔΖ. δεικτέον, ὅτι ὡς κύκλος ὁ ΑΕΒ ποτὶ κύκλον τὸν ΑΖΓ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΔ τετράγωνον.

Ἐπεὶ γάρ, ὡς ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΓ, οὕτως ἁ ΓΑ ποτὶ τὰν ΑΒ, καὶ ὡς ἐν τῷ πρότερον ἐδείχθη, ὡς ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΕΓ, οὕτως ἁ ΓΑ ποτὶ τὰν ΑΒ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΑ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΔ, οὕτως κύκλος ὁ ΑΕΒ ποτὶ κύκλον τὸν ΑΖΓ.

ε′

Καθόλου δέ, εἴ κα γωνίαι αἱ ὑπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν ἀνίσων κύκλων καὶ τᾶν ἐκβολᾶν τᾶν διαμέτρων αὐτᾶν ἴσαι ἐντί, οἱ κύκλοι ποτ' ἀλλάλους ἐντὶ ὡς τὰ ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν τετράγωνα.



Ἔστων δύο κύκλοι κέντρα ἔχοντες τὰ Α, Β, ἂν αἱ διαμέτροι ἐκβεβλήσθων ἐπὶ τὰ Γ, Δ σαμεῖα καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Γ ἄχθω ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου Α ἁ ΓΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ ἐπιψαύ-

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α, εὑρισκόμενοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΓΕ καὶ ΔΖ ἀντιστοίχως εἰς τοὺς κύκλους μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

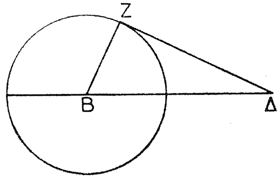
Λέγω, ὅτι $\dfrac{\text{κύκλος ΑΕΒ}}{\text{κύκλος ΑΖΓ}} = \dfrac{\text{ΕΓ}^2}{\text{ΖΔ}^2}$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ $\dfrac{\text{ΔΑ}}{\text{ΑΓ}} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ καὶ ὡς εἴδομεν προηγουμένως $\dfrac{\text{ΖΔ}}{\text{ΕΓ}} = \dfrac{\text{ΓΑ}}{\text{ΑΒ}}$, ἕπεται $\dfrac{\text{ΖΔ}^2}{\text{ΕΓ}^2} = \dfrac{\text{ΓΑ}^2}{\text{ΑΒ}^2}$, δηλαδὴ

$\dfrac{\text{ΕΓ}^2}{\text{ΖΔ}^2} = \dfrac{\text{κύκλος ΑΕΒ}}{\text{κύκλος ΑΖΓ}}$ (Εὐκλ. ιβ′, β′).

5

Καὶ γενικῶς ἐὰν αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ ἐφαπτομένων διαφόρων κύκλων καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν διαμέτρων αὐτῶν εἶναι ἴσαι, οἱ λόγοι τῶν κύκλων εἶναι ἴσοι πρὸς τοὺς λόγους τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων.



Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἔχοντες κέντρα τὰ σημεῖα Α, Β. Προεκτείνομεν τὰς διαμέτρους αὐτῶν μέχρι τῶν σημείων Γ, Δ ἀντιστοίχως, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν ΓΕ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου *ουσα τοῦ κύκλου Β ἁ ΔΖ οὕτως, ὥστε γωνίαν τὰν ὑπὸ ΑΓΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΔΖ ἴσαν εἶμεν. δεικτέον, ὅτι ὡς κύκλος ὁ Α πρὸς κύκλον τὸν Β, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΕ τετράγωνον ποτὶ τὸ ΔΖ τετράγωνον.*

Ἐπεὶ γὰρ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΑΕΓ, ΒΖΔ ὁμοῖά ἐντί, ἔστιν ὡς ἁ ΕΓ ποτὶ τὰν ΖΔ, οὕτως ἁ ΕΑ ποτὶ τὰν ΖΒ. καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τετράγωνον ἄρα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΔ τετράγωνον, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΒ τετράγωνον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΒ τετράγωνόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου Α τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου Β τετράγωνον, τουτέστιν ὡς κύκλος ὁ Α πρὸς κύκλον τὸν Β. ἔστιν ἄρα ὡς κύκλος ὁ Α πρὸς κύκλον τὸν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΔ τετράγωνον.

ϛ′

Εἴ κα ἔωντι δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτός, ἀχθέωντι δὲ ἐναλλὰξ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἀγμένας εὐθείας, εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλάλας καὶ ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, λόγος τῶν κύκλων ὁ αὐτός ἐστι ποτὶ τὸν διπλασίονα λόγον τῶν ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν τετραγώνων.

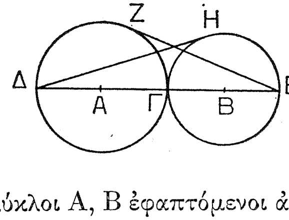
Ἔστων δύο κύκλοι οἱ Α, Β ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, διάχθω δὲ συναμφοτέρα τῶν διαμέτρων εὐθεῖα ἁ ΔΓΕ καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ σαμείου ἄχθω ἁ ΔΗ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου Β ἀπὸ δὲ τοῦ Ε σαμείου ἄχθω ἁ ΕΖ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου Α. δεικτέον, ὅτι κύκλος ὁ Α ποτὶ

Α καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΖ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Β, ὥστε νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας ἤτοι ἡ γωνία ΑΓΕ = γωνίαν ΒΔΖ. Λέγω ὅτι $\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{\Gamma E^2}{\Delta Z^2}$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $\frac{E\Gamma}{Z\Delta} = \frac{EA}{ZB}$ (Εὐκλ. ϛʹ, δʹ). Εἶναι ἄρα $\frac{E\Gamma^2}{Z\Delta^2} = \frac{EA^2}{ZB^2}$. Ἀλλὰ $\frac{EA^2}{ZB^2} = \frac{\text{τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ Α}}{\text{τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ Β}} = \frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \frac{E\Gamma^2}{Z\Delta^2}$.

6

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ἀχθῶσι δὲ ἐκ τῶν περάτων τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ ἐφαπτόμεναι ἐναλλὰξ τῶν κύκλων, ὁ λόγος τῶν κύκλων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων.



Ἔστωσαν δύο κύκλοι Α, Β ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων εἰς τὸ σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓΕ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαμέτρων. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΗ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Β κατὰ τὸ σημεῖον Η, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ΕΖ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Α κατὰ τὸ Ζ. Αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνον-

κύκλον τὸν Β τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ὁ διπλασίων λόγος τῶν ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν ΔΗ, ΕΖ τετραγώνων.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, οὕτως ἐντὶ τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ΔΓ, ΓΕ τετράγωνα καὶ ὡς ἁ ΔΓ ποτὶ τὰν ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΔΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΓ, ὡς ἄρα κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶν ΕΔ, ΔΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΓ τετράγωνον, τουτέστιν ὡς ὁ διπλασίων λόγος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΗ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον.

ζ′

Εἴ κα ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπιψαύουσα ἀχθῇ καὶ ἀπὸ τοῦ ἄλλου πέρατος εὐθεῖα τεμνέουσα τὸν κύκλον καὶ ἐκβαλλομένη συμβάλλουσα τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλας τᾶς τεμνούσας καὶ τᾶς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τοῦ τε σαμείου καὶ τᾶς κυρτᾶς περιφερείας ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τετραγώνῳ.

Ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς διαμέτρου τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ ἁ ΑΓ ἀπὸ τοῦ ἄλλου δὲ πέρατος ἄχθω τεμνέουσα τὸν κύκλον ἁ ΒΔΓ. φαμὶ δή, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ.

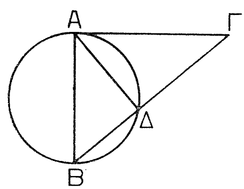
Ἄχθω γὰρ ἁ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΓΑΒ, ΑΔΒ ὁμοῖά ἐντι, ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΓΒ ποτὶ τὰν ΒΑ, οὕτως ἁ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΒΔ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ.

ται μεταξύ των. Λέγω, ὅτι $\dfrac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \dfrac{ΔΗ^4}{ΕΖ^4}$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ $\dfrac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \dfrac{ΔΓ^2}{ΓΕ^2}$ (Εὐκλ. ιβ′, β′) καὶ $\dfrac{ΔΓ}{ΓΕ} = \dfrac{ΕΔ \times ΔΓ}{ΔΕ \times ΕΓ}$, θὰ εἶναι ἄρα $\dfrac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \left(\dfrac{ΕΔ \times ΔΓ}{ΔΕ \times ΕΓ}\right)^2 = \dfrac{ΔΗ^4}{ΕΖ^4}$ (Εὐκλ. γ′, λς′).

7

Ἐὰν ἐκ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου κύκλου ἀχθῇ ἐφαπτομένη αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου πέρατος ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἥτις προεκτεινομένη συναντᾷ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν τέμνουσαν καὶ τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.



Ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ πέρατος Α τῆς διαμέτρου ΑΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ ἀπὸ τοῦ ἄλλου πέρατος τῆς διαμέτρου ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔΓ. Λέγω, ὅτι $ΓΒ \times ΒΔ = ΑΒ^2$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Φέρομεν τὴν ΑΔ. Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΒ, ΑΔΒ εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. γ′, λα′. γ′, ιη′. ς′, η′), ἕπεται $\dfrac{ΓΒ}{ΒΑ} = \dfrac{ΒΑ}{ΒΔ}$ (Εὐκλ. ς′, δ′), τουτέστιν $ΓΒ \times ΒΔ = ΑΒ^2$.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΒΓ, ΒΔ ἴσον ἐστί, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΓ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ τετραγώνῳ ἴσον, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΓ, ΒΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ ἴσον.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΒΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν, κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνου. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ. καί ἐστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνου τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΒΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΒ, ΔΒ ἴσον, τουτέστιν τῷ ὑπὸ τᾶς ΔΒ καὶ συναμφοτέρου τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΒ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ τᾶν ΔΒ, ΓΒ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ ἴσον.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἴ κα ἀπὸ τοῦ ἄλλου πέρατος τᾶς διαμέτρου ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνέουσαι τὸν κύκλον καὶ ἐκβληθεῖσαι συμβαλλέωντι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, τὰ περιεχόμενα ὑφ' ἑκάστας τᾶν τεμνεουσᾶν εὐθειᾶν καὶ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τμάματος αὐτᾶς ἴσα ἀλλάλοις ἐντί.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπειδὴ $ΓΒ^2 = ΒΓ \times ΓΔ + ΒΓ \times ΒΔ$ (Εὐκλ. β′, β′) $= ΓΑ^2 + ΑΒ^2$, (Εὐκλ. α′, μζ′) καὶ $ΒΓ \times ΓΔ = ΓΑ^2$, (Εὐκλ. γ′, λς′), εἶναι ἄρα $ΒΓ \times ΒΔ = ΑΒ^2$.

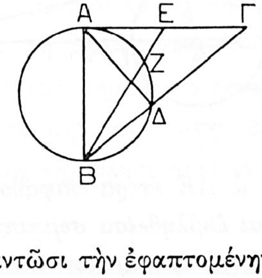
Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπειδὴ $ΓΔ \times ΒΔ = ΑΔ^2$ (Εὐκλ. ς′, η′ πόρισμα), προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος τὸ $ΔΒ^2$, θὰ ἔχωμεν $ΓΔ \times ΔΒ + ΔΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ^2$. Ἀλλὰ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2 = ΑΒ^2$, (Εὐκλ. α′, μζ′) καὶ $ΓΔ \times ΒΔ + ΔΒ^2 = ΓΔ \times ΔΒ + ΔΒ \times ΔΒ = ΔΒ \times (ΓΔ + ΔΒ) = ΔΒ \times ΓΒ$.

Εἶναι ἄρα $ΓΒ \times ΔΒ = ΑΒ^2$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ ἄλλου πέρατος τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι τέμνουσαι τὸν κύκλον καὶ

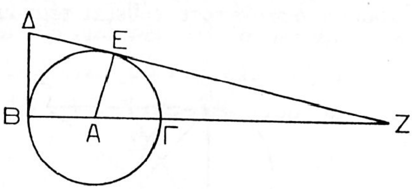


προεκτεινόμεναι συναντῶσι τὴν ἐφαπτομένην, τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ ἑκάστης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀντιστοίχου τμήματος αὐτῆς εἶναι μεταξύ των ἴσα.

η΄

Εἴ κα εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ καὶ ἀπὸ σαμείου τινὸς τᾶς εὐθείας ἀχθῇ ἑτέρα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου συμβαλλέουσα τᾷ διαμέτρῳ ἐκβληθείσᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν δύο τμαμάτων τᾶς ἑτέρας ἐπιψαυούσας ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ὅλας τᾶς διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένας καὶ τᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλας τᾶς ἑτέρας ἐπιψαυούσας καὶ τοῦ τμάματος αὐτᾶς ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς ἐπὶ τὸ σαμεῖον συμπτώσιος ταύτας καὶ τᾶς διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένας ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ὅλας τᾶς διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένας καὶ τοῦ τμάματος αὐτᾶς τοῦ ἀγμένου ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ ῥηθὲν σαμεῖον συμπτώσιος.

Ἔστω γὰρ κύκλος κέντρον ἔχων τὸ Α περὶ διάμετρον τὰν ΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου Β ἄχθω ἁ ΒΔ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σαμεῖον Β καὶ ἀπὸ σαμείου τινὸς Δ τᾶς ἐπι-



ψαυούσας ἄχθω ἁ ΔΕ ἑτέρα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Ε σαμεῖον καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τᾷ διαμέτρῳ ΒΓ ἐκβληθείσᾳ κατὰ τὸ Ζ σαμεῖον. δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΖ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΒΑ ἴσον ἐστὶ καὶ ἔτι, τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΖΕ τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΖ, ΖΑ ἐστὶν ἴσον.

8

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται κύκλου κατὰ τὸ ἓν πέρας τῆς διαμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐκ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας ἀχθῇ ἄλλη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἥτις τέμνει τὴν διάμετρον κατὰ τὴν προέκτασιν αὐτῆς, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης ἐφαπτομένης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς διὰ τοῦ κέντρου διερχομένης εὐθείας καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς ἄλλης ἐφαπτομένης καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς μέχρι τοῦ σημείου τομῆς τῆς ἐκβληθείσης διαμέτρου μετὰ τῆς ἄλλης ἐφαπτομένης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διερχομένης εὐθείας καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ σημείου τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου μετὰ τῆς ἄλλης ἐφαπτομένης.

Περίπτωσις 1η

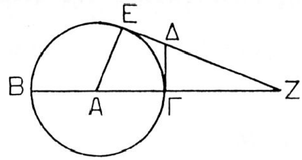
Ἔστω κύκλος ἔχων κέντρον τὸ σημεῖον Α, διαμέτρου ΒΓ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Β φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Δ φέρομεν ἄλλην ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Ε, τὴν ΔΕ. Ἂν προεκτείνωμεν τὴν ΔΕ αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

Λέγω, ὅτι $\Delta E \times EZ = ZB \times BA$ *καὶ*

$$\Delta Z \times ZE = BZ \times ZA.$$

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΕ. Δύο δὴ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΔΒΖ, ΑΕΖ ὁμοῖά ἐντι, ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΔΒΖ, ΑΕΖ ὀρθά ἐστι, κοινὰ δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΖΒ. ὡς ἄρα ἁ ΖΒ ποτὶ τὰν ΖΕ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΕΑ. ἀλλὰ ἁ ΔΒ τᾷ ΔΕ ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΕΑ τᾷ ΑΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΖΒ ποτὶ τὰν ΖΕ οὕτως ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΑΒ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΖΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΔΕ ἴσον. πάλιν, ἐπεὶ δύο τρίγωνα τὰ ΔΒΖ, ΑΕΖ ὁμοῖά ἐντι, ὡς ἄρα ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΖΑ, οὕτως ἁ ΒΖ ποτὶ τὰν ΕΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΕΖ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΒ, ΖΑ ἐστιν ἴσον.

Καὶ εἴ κα ἀπὸ τᾶς ἑτέρας ἄκρας τᾶς διαμέτρου τᾶς Γ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἁ ΓΔ ἀχθῇ, δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΖ περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΖ ἴσον ἐστὶ καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΖ, ΖΔ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΓΖ.



Ἐπεὶ γὰρ δύο τρίγωνα τὰ ΖΑΕ, ΖΔΓ ὁμοῖά ἐντι, ὡς ἄρα ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΖΓ. ἀλλὰ ἁ ΑΕ τᾷ ΑΓ ἐστὶν ἴσα καὶ ἁ ΔΓ τᾷ ΔΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΖΓ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΖΓ τῷ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΖΕ ἐστιν ἴσον.

Ἐκ τῶν αὐτῶν δὴ ὁμοίων τριγώνων ἐστὶν ὡς ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΓΖ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΔΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΖ, ΔΖ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΓΖ.

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Φέρομεν τὴν ΑΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΒΖ καὶ ΑΕΖ ἔχουσι τὴν γωνίαν ΔΒΖ = γωνίαν ΑΕΖ ὡς ὀρθὰς (Εὐκλ. γ', ιη'), καὶ ἡ γωνία ΔΖΒ εἶναι κοινή, τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως ἔχομεν $\frac{ZB}{ZE} = \frac{\Delta B}{EA}$ (Εὐκλ. ϛ', δ'). Ἐπειδὴ δὲ ΔΒ = ΔΕ (Εὐκλ. γ', λζ') καὶ ΕΑ = ΑΒ θὰ ἔχωμεν : $\frac{ZB}{ZE} = \frac{\Delta E}{AB}$. Εἶναι ἄρα ΑΒ × ΖΒ = ΖΕ × ΔΕ (Εὐκλ. ϛ', ιϛ').

Τώρα διὰ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ΔΖ × ΖΕ = ΒΖ × ΖΑ λαμβάνομεν τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΔΒΖ, ΑΕΖ, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\frac{\Delta Z}{ZA} = \frac{BZ}{EZ}$ (Εὐκλ. ϛ', δ'). Εἶναι ἄρα ΔΖ × ΕΖ = ΖΒ × ΖΑ (Εὐκλ. ϛ', ιϛ').

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 2α

Ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὸ ἄκρον Γ τῆς διαμέτρου καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ Β τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ τοῦ κύκλου, λέγω, ὅτι

$$\Delta E \times EZ = A\Gamma \times \Gamma Z \quad \text{καὶ} \quad EZ \times Z\Delta = AZ \times \Gamma Z.$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ τὰ δύο τρίγωνα ΖΑΕ καὶ ΖΔΓ εἶναι ὅμοια, (Εὐκλ. γ', ιη'. ϛ', δ') θὰ ἔχωμεν $\frac{AE}{\Delta\Gamma} = \frac{ZE}{Z\Gamma}$ (Εὐκλ. ϛ', δ'). Ἀλλὰ ΑΕ = ΑΓ καὶ ΔΓ = ΔΕ (Εὐκλ. γ', λζ'). Θὰ εἶναι ἄρα $\frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{ZE}{Z\Gamma}$. Ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΓ × ΖΓ = ΔΕ × ΖΕ (Εὐκλ. ϛ', ιϛ').

Ἐπίσης διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅτι ΕΖ × ΖΔ = ΑΖ × ΓΖ θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ὅτι $\frac{EZ}{\Gamma Z} = \frac{AZ}{\Delta Z}$ (Εὐκλ. γ', ιη'. ϛ', δ'). Εἶναι ἄρα ΕΖ × ΔΖ = ΑΖ × ΓΖ (Εὐκλ. ϛ', ιϛ')·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Κατεσκευάσθω γὰρ περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ κύκλος καὶ ἐν αὐτῷ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ἁ ΓΔ ἐπὶ τὰ Τ, Η σαμεῖα τᾶς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὰ τέμνεται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ, ἔστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΤΔ, ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΗ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τᾶν ΤΔ, ΔΗ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΕ ἐστιν ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τᾶς ΕΔ τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΔ τετραγώνου, τουτέστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΖΕ, τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΗ τετραγώνῳ ἴσον. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΗ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΖ ἴσον. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ.

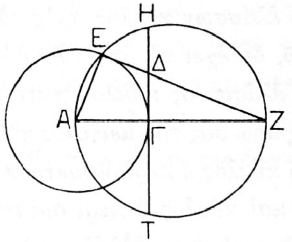
Δεικτέον οὖν ἔτι, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΖ, ΔΖ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΓΖ ἴσον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΗ τετράγωνον χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΗΔ, ΔΤ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΗ τετράγωνον χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΖΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΖ χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΖΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τᾶς ΖΓ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου ἴσον, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΓ τετραγώνου τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνῳ ἐστὶν ἴσον· ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΖ χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΖΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΖΓ τετραγώνου ἴσον· ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΖ χωρὶς τοῦ ἀπὸ ΔΖ, καὶ χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΔ, ΖΔ ἴσον συναμφοτέροις τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΓ τετραγώνοις χωρὶς συναμφοτέρων, τοῦ τε ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετραγώνου μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ τετραγώνου. οὐδὲν ἄρα ὑπερέχει τὸ

Ἄλλως τὸ αὐτὸ
(τῆς 2ας περιπτώσεως)

Μὲ διάμετρον τὴν ΑΖ κατασκευάζομεν κύκλον περὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΖ. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Τ, Η.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΗΤ τέμνεται διὰ μὲν τοῦ σημείου Γ εἰς ἴσα μέρη, διὰ δὲ τοῦ σημείου Δ εἰς ἄνισα, θὰ ἔχωμεν $ΤΔ \times ΔΗ$



$+ ΓΔ^2 = ΓΗ^2$, (Εὐκλ. β΄, ε΄). Ἀλλὰ $ΤΔ \times ΔΗ = ΖΔ \times ΔΕ$, (Εὐκλ. γ΄, λε΄) καὶ $ΓΔ^2 = ΕΔ^2$, (Εὐκλ. γ΄, λζ΄). Εἶναι ἄρα, $ΖΔ \times ΔΕ + ΕΔ^2$, τουτέστιν $ΕΔ \times ΖΕ = ΓΗ^2$ καὶ $ΓΗ^2 = ΑΓ \times ΓΖ$, (Εὐκλ. γ΄, λα΄. ς΄, η΄ πόρ.).

Εἶναι ἄρα $ΑΓ \times ΓΖ = ΖΕ \times ΕΔ$.

Ἐπίσης πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΕΖ \times ΔΖ = ΑΖ \times ΓΖ$.

Ἐπειδὴ $ΓΗ^2 — ΗΔ \times ΔΤ$ τουτέστιν $ΓΗ^2 — ΕΔ \times ΖΔ$, τουτέστιν $ΑΓ \times ΓΖ — ΕΔ \times ΖΔ = ΓΔ^2$, καὶ $ΔΖ^2 = ΖΓ^2 + ΓΔ^2$ ἢ $ΔΖ^2 — ΖΓ^2 = ΓΔ^2$· εἶναι ἄρα $ΑΓ \times ΓΖ — ΕΔ \times ΖΔ = ΔΖ^2 — ΖΓ^2$· $ΓΖ^2 + ΑΓ \times ΓΖ — ΔΖ^2 — ΕΔ \times ΖΔ = ΔΖ^2 — ΔΖ^2 — ΖΓ^2 + ΖΓ^2 = 0$.

Εἶναι ἄρα

ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΓΖ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΖ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΖ, ΖΔ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ,ΓΖ ἴσον ἐστίν.

θʹ

Εἴ κα ἔωντι δύο κύκλοι ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντὸς ἀχθῇ δὲ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ σαμεῖον ἁφᾶς τᾷ διὰ τῶν δύο κέντρων ἀγμένᾳ διαμέτρῳ, ἐκβληθείσας δὲ τᾶς διαμέτρου ταύτας λαφθῇ σαμεῖόν τι ἐπ' αὐτᾶς καὶ ἀπὸ τούτου ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι τῶν δύο κύκλων συμβαλλέουσαι τᾷ κοινᾷ ἐπιψαυούσᾳ αὐτῶν, ὁ ἐλάσσων κύκλος πρὸς τὸν μείζονα διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν δύο τμαμάτων τᾶς ἐπιψαυούσας τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δύο τμαμάτων τᾶς ἐπιψαυούσας τοῦ μείζονος κύκλου.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΓΔ κέντρον ἔχων τὸ Α σαμεῖον καὶ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΓΕ κέντρον ἔχων τὸ Β, ἐπιψαύοντες ἀλλάλων ἐντὸς κατὰ τὸ Γ κοινὰ δὲ ἐπιψαύουσα τῶν κύκλων ἁ ΓΛ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς διὰ τῶν κέντρων τῶν Α, Β ἀγμένας τᾶς ΓΕ λελάφθω σαμεῖόν τι τὸ Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθων ἁ μὲν ΖΗΤ ἐπιψαύουσα κύκλου τοῦ Α κατὰ τὸ Η καὶ συμβαλλέουσα τᾷ κοινᾷ ἐπιψαυούσᾳ κατὰ τὸ Τ, ἁ δὲ ΖΚΛ ἐπιψαύουσα κύκλου τοῦ Β κατὰ τὸ Κ καὶ συμβαλλέουσα τᾷ κοινᾷ ἐπιψαυούσᾳ κατὰ τὸ Λ σαμεῖον. δεικτέον, ὅτι ὁ λόγος κύκλου τοῦ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β διπλασίων ἐστὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΗΤ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΚΛ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἁ ΓΑ ποτὶ τὰν ΓΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΓ, ΓΑ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΓ, ΓΒ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΚΛ, ὡς ἐν τῷ πρότερον ἐδείχθη, ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΓΑ ποτὶ τὰν ΓΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν

$$\text{ΑΖ} \times \text{ΓΖ} - \text{ΕΖ} \times \text{ΖΔ} = 0 \quad \text{ἢ}$$
$$\text{ΕΖ} \times \text{ΖΔ} = \text{ΑΖ} \times \text{ΓΖ}.$$

9

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς καὶ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς κοινῆς διαμέτρου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τῶν δύο κύκλων συναντῶσαι κατὰ τὴν προέκτασιν αὐτῶν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν κύκλων, ὁ λόγος τοῦ μικροτέρου κύκλου πρὸς τὸν μεγαλύτερον εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς ἐφαπτομένης τοῦ μικροτέρου κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τῆς ἐφαπτομένης τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου.

Ἔστω κύκλος κέντρου Α ἐφαπτόμενος ἐσωτερικῶς μὲ ἄλλον κύκλον κέντρου Β εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ἡ ΓΛ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔΕΖ διερχομένην διὰ τῶν κέντρων Α, Β. Ἡ ΓΔ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Α καὶ ἡ ΓΕ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Β. Ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ φέρομεν τὴν ΖΗΤ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Α κατὰ τὸ σημεῖον Η, καὶ τὴν ΖΚΛ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Β κατὰ τὸ σημεῖον Κ. Λέγω, ὅτι

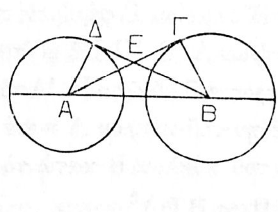
$$\frac{\text{κύκλος Α}}{\text{κύκλος Β}} = \left(\frac{\text{ΖΗ} \times \text{ΗΤ}}{\text{ΖΚ} \times \text{ΚΛ}}\right)^2.$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΖΓ} \times \text{ΓΑ}}{\text{ΖΓ} \times \text{ΓΒ}}$ καὶ τὸ ὀρθογώνιον $\text{ΖΓ} \times \text{ΓΒ} =$ ὀρθογώνιον $\text{ΖΚ} \times \text{ΚΛ}$, ὡς ἀπεδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΓΑ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΖΗ} \times \text{ΗΤ}}{\text{ΖΚ} \times \text{ΚΛ}}$. Ἀλλὰ

ΖΗ, ΗΤ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΚΛ. ἀλλὰ ὡς ἁ ΓΑ ποτὶ τὰν ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἁ διπλασίων τᾶς ΓΑ ποτὶ τὰν διπλασίονα τᾶς ΓΒ, τουτέστιν διάμετρος ἁ ΓΔ ποτὶ διάμετρον τὰν ΓΕ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΗΤ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΚΛ καὶ διπλασίων λόγος τᾶς ΓΔ ποτὶ τὰν ΓΕ ἴσος ἐστὶν τῷ διπλασίονι λόγῳ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΗΤ ποτὶ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΚΛ. ἔστιν ἄρα ὡς κύκλος ὁ Α ποτὶ κύκλον τὸν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΗΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΚΛ τετράγωνον.

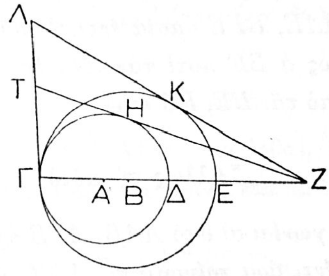
ι'

Εἴ κα ἀπὸ τῶν ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας κειμένων κέντρων δύο κύκλων μὴ τεμνομένων ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων τεμνέουσαι ἀλλάλας, τὸ ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς μιᾶς ἐπιψαυούσας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς ἑτέρας ἐπιψαυούσας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἔστων δύο μὴ τεμνόμενοι κύκλοι κέντρα αὐτῶν τὰ Α, Β ἔχοντες ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τᾶς ΑΒ καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν Α, Β ἄχθων δύο τεμνέουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ε σαμεῖον ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων ἁ μὲν τοῦ κύκλου Β κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ἁ δὲ τοῦ κύκλου Α κατὰ τὸ Δ. Αἱ δύο αὗται ἐπιψαύουσαι τεμνέοντι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ε σαμεῖον. φαμὶ δή,

$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{2\Gamma A}{2\Gamma B}$ (Εὐκλ. ε′, ιε′), δηλ.$= \frac{\text{διάμετρος } \Gamma\Delta}{\text{διάμετρος } \Gamma E}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} =$



$\frac{ZH \times HT}{ZK \times K\Lambda}$ καὶ $\left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}\right)^2 = \left(\frac{ZH \times HT}{ZK \times K\Lambda}\right)^2$. Εἶναι ἄρα

$\frac{\text{κύκλος } A}{\text{κύκλος } B} = \left(\frac{ZH \times HT}{ZK \times K\Lambda}\right)^2$, (Εὐκλ. ιβ′, β′).

10

Ἐὰν δοθῶσι δύο κύκλοι μὴ τεμνόμενοι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἐκ τῶν κέντρων τούτων ἀχθῶσι δυὸ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων τέμνουσαι ἀλλήλας, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ δύο τμήματα τῆς μιᾶς ἐφαπτομένης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ δύο τμήματα τῆς ἄλλης ἐφαπτομένης.

Ἔστωσαν δύο μὴ τεμνόμενοι κύκλοι ἔχοντες κέντρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τῶν κέντρων Α, Β φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας, τὴν ΑΓ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Β κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ τὴν ΒΔ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Α κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Αἱ δύο αὗται ἐφαπτόμεναι τέμνονται μεταξύ των κατὰ τὸ σημεῖον Ε. Λέγω, ὅτι $AE \times E\Gamma = BE \times E\Delta$.

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ἴσον εἶμεν.

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΔΑ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΑΔΕ, ΒΓΕ ὁμοῖά ἐντι, ἐσσεῖται ὡς ἁ ΕΑ ποτὶ τᾶν ΕΔ, οὕτως ἁ ΒΕ ποτὶ τὰν ΕΓ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ἴσον.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπεὶ γὰρ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΓΒ ὀρθαί ἐντι καὶ βάσις ἁ ΑΒ κοινά, ἔντι ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΔΒ, ΑΓΒ ἐν ἁμικυκλίῳ τῷ ΑΔΓΒ. ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ ἐντὶ τεμνέουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Ε σαμεῖον, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΓ τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ἴσον.

ια'

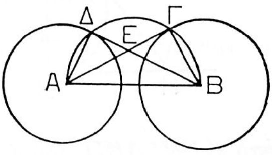
Εἴ κα ἔωντι δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι κύκλου καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἀγμένας εὐθείας λαφθῇ σαμεῖόν τι καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου ἀχθῇ ἑτέρα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ἃ τὰν μίαν μὲν τῶν ἐπιψαυουσῶν τέμνει τᾷ ἑτέρᾳ δὲ συμβάλλει, λόγος ὅλας τᾶς ἀχθείσας ἐπιψαυούσας ποτὶ τὸ ἐκτὸς τῶν δύο ἐπιψαυουσῶν ἀπολαμβανόμενον τμᾶμα αὐτᾶς ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει τὸ μεῖζον τῶν δύο τμαμάτων τῶν μεταξὺ τῶν δύο ἐπιψαυουσῶν καὶ τοῦ σαμείου ἁφᾶς τᾶς ἄλλας ἐπιψαυούσας ποτὶ τὸ ἔλασσον.

Ἔστων γὰρ αἱ ΗΒ, ΑΓ δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου καὶ ἐπιζευγνύουσα τὰ δύο σαμεῖα ἁφᾶς ἁ ΒΓ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ σαμεῖον, ἄχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἁ ΔΕΖΗ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Ζ. δεικτέον, ὅτι ὡς ἁ ΗΔ

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἄς ἀχθῇ ἡ ΔΑ καὶ ἡ ΓΒ. Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΓΕ εἶναι ὅμοια θὰ ἔχωμεν $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΒΕ}{ΕΓ}$ (Εὐκλ. γʹ, ιηʹ. αʹ, ιεʹ. ϛʹ, δʹ). Εἶναι ἄρα $ΕΑ \times ΕΓ = ΒΕ \times ΕΔ$ (Εὐκλ. ϛʹ, ιϛʹ).

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΔΒ, ΑΓΒ εἶναι ὀρθαί, (Εὐκλ. γʹ, ιηʹ) καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων τούτων εἶναι κοινή, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα



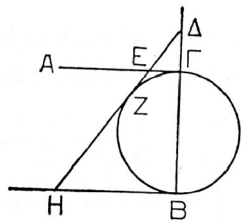
εἶναι ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΔΓΒ (Εὐκλ. γʹ, ιγʹ). Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΕΓ, ΒΕΔ τέμνονται ἐντὸς κύκλου θὰ ἔχωμεν $ΑΕ \times ΕΓ = ΒΕ \times ΕΔ$ (Εὐκλ. γʹ, λεʹ).

11

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται κύκλου καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἥτις τὴν μίαν ἐφαπτομένην τέμνει, συναντᾷ δὲ τὴν ἄλλην, ὁ λόγος ὅλης τῆς ἀχθείσης ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἐκτὸς τῶν δύο ἐφαπτομένων τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ μεγαλυτέρου τῶν δύο τμημάτων, τῶν σχηματιζομένων μεταξὺ τῶν δύο ἐφαπτομένων καὶ χωριζομένων διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς πρὸς τὸ μικρότερον.

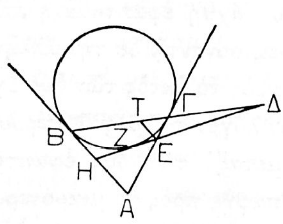
Ἔστωσαν αἱ ΗΒ, ΑΓ δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ ἃς προεκτείνωμεν τὴν ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ. Ἀπὸ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΕΖΗ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου κατὰ *ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΗΖ ποτὶ τὰν ΖΕ.*

Ἔστων πρότερον αἱ δύο ἐπιψαύουσαι ἀλλάλων παράλλαλοι. ἐπεὶ γὰρ ἁ ΑΓ ἆκται παρὰ τὰν ΗΒ, δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΔΕΓ, ΔΒΗ ὁμοῖά ἐντι, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΕΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΗΔ ἴσα ἐστί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΗΔΒ κοινὰ



καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΓΕ, ΔΒΗ ὀρθαί ἐντι. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἁ ΗΒ ποτὶ τὰν ΕΓ. ἀλλὰ ἁ ΗΖ τᾷ ΗΒ ἐστιν ἴσα, ἐπεὶ δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου Η ἐντί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἁ ΕΖ τᾷ ΕΓ ἐστὶν ἴσα. ὡς ἄρα ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΗΖ ποτὶ τᾶν ΕΖ.

Ἀλλ' ἔστων δὴ αἱ δύο ἐπιψαύουσαι μὴ παράλλαλοι ἀλλὰ τεμνέουσαι ἀλλάλας κατὰ τὸ Α σαμεῖον καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου



Ε ἄχθω ἁ ΕΤ παρὰ τὰν ΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου Α αἱ ΑΒ, ΑΓ ἴσαι ἐντί, γωνία τὸ σημεῖον Ζ. Λέγω, ὅτι $\frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΕ}}$.

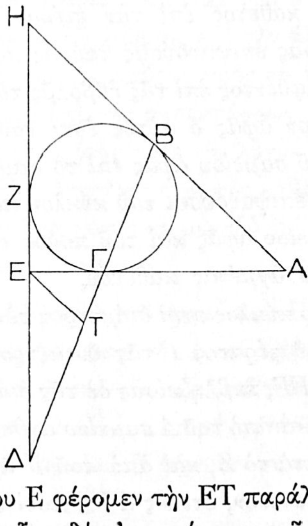
Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 1η

Ἂν αἱ δύο ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΒ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΕΓ, ΔΗΒ εἶναι ὅμοια, διότι γωνία ΓΕΔ = γωνία ΒΗΔ (Εὐκλ. α′, κθ′) καὶ ἡ γωνία ΗΔΒ εἶναι κοινὴ καὶ γωνία ΔΓΕ = γων. ΔΒΗ = ὀρθή. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΗΒ}}{\text{ΕΓ}}$ (Εὐκλ. ϛ′, δ′). Ἀλλὰ ΗΖ = ΗΒ διότι εἶναι ἐφαπτόμεναι κύκλου ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η, καὶ ΕΖ = ΕΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἑπομένως ἔχομεν $\frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΕΖ}}$.

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 2α

Ἂν αἱ δύο ἐφαπτόμεναι δὲν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ σημεῖον Α.



Ἀπὸ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ΕΤ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐπειδὴ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ἐκ τοῦ αὐτοῦ *ἁ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΕΤΓ ἐστὶν ἴσα, ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΕΤ ἀλλάλαις παράλλαλοι ἐντί. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΕΤΓ ἐστὶν ἴσα καὶ πλευρὰ ἁ ΕΤ πλευρᾷ τᾷ ΕΓ ἴσα ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ λόγος ὁ τᾶς ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΕ ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΗΒ ποτὶ τὰν ΤΕ, τουτέστιν ἁ ΗΒ ποτὶ τὰν ΕΓ καὶ ἁ ΗΒ τᾷ ΗΖ ἴσα ἐστὶν καὶ ἁ ΕΓ τᾷ ΕΖ ἴσα, ὡς ἄρα ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΗΖ ποτὶ τὰν ΕΖ.*

ιβʹ

Εἴ κα ᾖ εὐθεῖα ἐπιψαύουσα κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς διαμέτρου λαφθῇ σαμεῖόν τι ἐπὶ τᾶς ἐκβολᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου ἀχθῇ ἑτέρα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου συμβαλλέουσα τᾷ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς διαμέτρου ἀγμένᾳ καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τούτου ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὰν ἑτέραν ἐπιψαύουσαν, λόγος ὅλας τᾶς ἑτέρας ἐπιψαυούσας ταύτας ποτὶ τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος ἐπὶ τᾶς ἐκβολᾶς τᾶς διαμέτρου σαμείου ἐπὶ τὸ σαμεῖον ἁφᾶς ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει τὸ τμᾶμα αὐτᾶς ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς ἐπὶ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ συμβαλλέοντι αἱ δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ μεταξὺ τοῦ σαμείου ἁφᾶς καὶ τοῦ ποδὸς τᾶς ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς διαμέτρου ἀγμένας καθέτου.

Ἔστω γὰρ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΓΑΤ κέντρον ἔχων τὸ Α. ἀπὸ τοῦ πέρατος Γ τᾶς διαμέτρου ἄχθω ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἁ ΓΕ, ἐκβληθείσας δὲ τᾶς διαμέτρου ΓΤ λελάφθω σαμεῖόν τι Δ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου ἄχθω ἁ ΔΖΕ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἄχθω ἁ ΓΗ κάθετος ἐπὶ τὰν ΔΕ. δεικτέον, ὅτι ὡς ἁ ΕΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΗ.

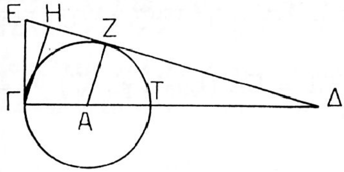
σημείου Α, θὰ εἶναι ἴσαι (Εὐκλ. γ', λζ')· ἐπομένως ἡ γωνία ΑΒΓ = γωνία ΑΓΒ, (Εὐκλ. α', ε'). 'Αλλὰ γωνία ΑΒΓ = γωνία ΕΤΓ, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΤ, (Εὐκλ. α', κθ'). Εἶναι ἄρα γωνία ΑΓΒ = γωνία ΕΤΓ (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι α') καὶ ΕΤ = ΕΓ, (Εὐκλ. α', ς'). 'Επίσης, ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\text{Η}\Delta}{\Delta\text{Ε}} = \frac{\text{ΗΒ}}{\text{ΤΕ}} = \frac{\text{ΗΒ}}{\text{Ε}\Gamma}$ καὶ ΗΒ = ΗΖ καὶ ΕΓ = ΕΖ (Εὐκλ. γ', λζ') θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{Η}\Delta}{\Delta\text{Ε}} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΕΖ}}$.

12

'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐφάπτηται κύκλου κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ ἄλλη ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου συναντῶσα τὴν ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου ἀχθεῖσαν κάθετον καὶ ἀπὸ τοῦ ἄκρου τούτου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην ἐφαπτομένην, ὁ λόγος ὅλης τῆς ἐφαπτομένης ταύτης πρὸς τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου μέχρι τοῦ σημείου ἐπαφῆς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς μέχρι τῆς καθέτου εἰς τὸ πέρας τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ποδὸς τῆς ἀχθείσης καθέτου.

Ἔστω κύκλος κέντρου Α καὶ διαμέτρου ΓΑΤ. 'Απὸ τοῦ πέρατος Γ τῆς διαμέτρου φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου ΓΕ. Ἔστω τυχὸν σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΤ. 'Απὸ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΖΕ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Ζ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν ΓΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ. Λέγω, ὅτι $\frac{\text{Ε}\Delta}{\Delta\text{Ζ}} = \frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΗ}}$.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΖΔ, ΓΗΔ ὀρθαί ἐντι, ἔστιν ἄρα ἁ ΑΖ παρὰ ΓΗ τὰν καὶ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΔΕΓ, ΔΑΖ ὁμοῖά ἐντι. ὡς ἄρα ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΓ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΖ, τουτέστιν



ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΖ, τουτέστιν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΓ. ἀλλὰ ὡς ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΓ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΖΗ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΖ, οὕτως ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΖΗ καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΗ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ συνθέντι φανερόν ἐστιν, ὅτι ὡς συναμφότερος ἁ ΔΕ, ΔΖ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἐστὶ συναμφότερος ἁ ΕΖ, ΖΗ, τουτέστιν ὡς ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΖΗ.

Δεικτέον ἔτι, ὅτι ὡς ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΑΤ ποτὶ τὰν ΤΔ.

Ἐπιζευχθεισᾶν γὰρ τᾶν ΑΕ, ΤΖ, δύο δὴ τρίγωνα τὰ ΑΓΕ, ΑΕΖ ἴσα ἐντὶ, ἐπεὶ δύο πλευρὰς τὰς ΕΓ, ΓΑ δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΕΖ, ΖΑ ἴσας ἔχοντι ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ βάσιν κοινὰν τὰν ΕΑ. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΓΑΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΑΕ ἐστιν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΑΖ διπλασίων ἐστὶ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΕ, τουτέστι διπλασίων τᾶς ὑπὸ ΓΤΖ, ἐπεὶ ἁ μὲν

Περίπτωσις 1η

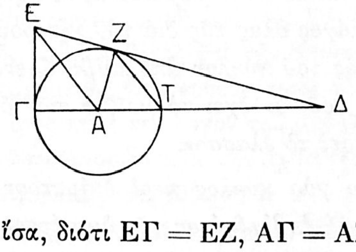
Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΑΖ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΖΔ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία ΓΗΔ ἐπίσης ὀρθὴ (Εὐκλ. γ′, ιη′), ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ (Εὐκλ. α′, κη′), καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΕΓ, ΔΑΖ εἶναι ὅμοια. Εἶναι ἄρα $\frac{\Delta E}{E\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{\Delta A}{AZ}=\frac{\Delta A}{A\Gamma}$, (Εὐκλ. ς′, δ′). Ἀλλὰ $\frac{\Delta A}{A\Gamma}=\frac{\Delta Z}{ZH}$. Ἑπομένως $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{\Delta Z}{ZH}$ καὶ ἐναλλὰξ εἶναι $\frac{\Delta E}{\Delta Z}=\frac{EZ}{ZH}$, (Εὐκλ. ε′, ις′)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι φανερὸν ὅτι $\frac{\Delta E+\Delta Z}{\Delta Z}=\frac{EZ+ZH}{ZH}$ (Εὐκλ. ε′, ιη′), ἤτοι $\frac{EZ}{\Delta Z}=\frac{EH}{ZH}$.

Περίπτωσις 2α. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{EZ}{Z\Delta}=\frac{AT}{T\Delta}$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν ΑΕ καὶ τὴν ΤΖ. Τὰ δύο τρίγωνα



ΑΓΕ, ΑΕΖ εἶναι ἴσα, διότι ΕΓ = ΕΖ, ΑΓ = ΑΖ καὶ βάσις ἡ ΑΕ κοινή. Εἶναι ἄρα γωνία ΓΑΕ = γωνία ΖΑΕ (Εὐκλ. α′, η′) καὶ γωνία ΓΑΖ = γωνία 2 ΓΑΕ, καὶ γωνία ΓΑΖ = γωνία 2 ΓΤΖ, διότι ἡ *ὑπὸ ΓΑΖ πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστί, ἁ δὲ ὑπὸ ΓΤΖ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, τὰν αὐτὰν περιφέρειαν ἔχουσαι βάσιν. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΓΑΕ, γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΤΖ ἐστιν ἴσα. ἔστιν ἄρα ἁ ΕΑ ἀγμένα παρὰ τὰν ΖΤ. λόγος ἄρα ὁ τᾶς ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΔ ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΑΤ ποτὶ τὰν ΤΔ.*

Καὶ εἴ κα ἁ ΓΕ οὐκ ἐπιψαύῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Γ σαμεῖον, ἀλλὰ ἀπὸ τοῦ ἄλλου πέρατος τᾶς διαμέτρου τοῦ Τ ἀχθῇ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἁ ΤΚ, ὡς ἐν τᾷ ἑπομένᾳ καταγραφᾷ, φαμὶ δή, ὅτι ὡς ἁ ΗΖ ποτὶ τὰν ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΖΚ ποτὶ τὰν ΚΔ.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΖΑΔ, ΤΚΔ ὁμοῖά ἐντι, ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΖΑ ποτὶ τὰν ΑΔ, τουτέστιν ἁ ΗΖ ποτὶ τὰν ΖΔ, οὕτως ἁ ΚΤ ποτὶ τὰν ΚΔ, τουτέστιν ἁ ΖΚ ποτὶ τὰν ΚΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΗΖ ποτὶ τὰν ΖΔ, οὕτως ἁ ΖΚ ποτὶ τὰν ΚΔ.

ιγ′

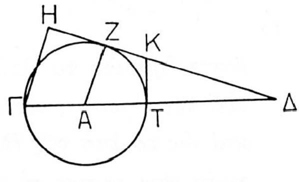
Εἴ κα ἐπὶ τᾶς ἐκβολᾶς τᾶς διαμέτρου κύκλου λαφθῇ σαμεῖόν τι καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου ἀχθῇ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἁφᾶς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὰν διάμετρον, λόγος ὅλας τᾶς διὰ τοῦ κέντρου ἀχθείσας εὐθείας ποτὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀπολαμβανόμενον τμᾶμα αὐτᾶς ὁ αὐτός ἐστιν τοῦ, ὃν ἔχει τὸ μεῖζον τῶν δύο τμαμάτων τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον.

Ἔστω γὰρ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΒΓ κέντρον ἔχων τὸ Α καὶ ἐκβληθείσας τᾶς διαμέτρου ΒΓ λελάφθω σαμεῖόν τι ἐπ᾽ αὐτᾶς τὸ Δ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄχθω ἁ ΔΕ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Ε σαμεῖον καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἄχθω κά-

γωνία ΓΑΖ εἶναι ἐπίκεντρος καὶ ἡ γωνία ΓΤΖ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, (Εὐκλ. γ', κ'). Εἶναι ἄρα γωνία ΓΑΕ = γωνία ΓΤΖ. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΕΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΤ, (Εὐκλ. α', κη'). Ὁ λόγος ἄρα $\frac{ΕΖ}{ΖΔ} = \frac{ΑΤ}{ΤΔ}$, (Εὐκλ. ς', β').

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 3η

Ἂν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΕ δὲν ἐφάπτηται τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀλλὰ ἀπὸ τοῦ ἄλλου ἄκρου Τ τῆς διαμέτρου φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΤΚ, ὡς εἰς τὸ ἑπόμενον σχῆμα, λέγω, ὅτι $\frac{ΗΖ}{ΖΔ} = \frac{ΖΚ}{ΚΔ}$.



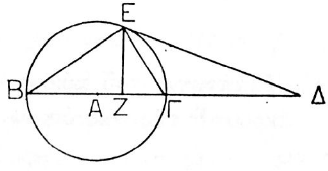
Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΑΔ, ΤΚΔ (Εὐκλ. γ', ιη') εἶναι ὅμοια θὰ ἔχωμεν $\frac{ΖΑ}{ΑΔ}$, τουτέστιν $\frac{ΗΖ}{ΖΔ} = \frac{ΚΤ}{ΚΔ}$, (Εὐκλ. ς', δ'), δηλαδὴ $= \frac{ΖΚ}{ΚΔ}$. Εἶναι ἄρα $\frac{ΗΖ}{ΖΔ} = \frac{ΖΚ}{ΚΔ}$.

13

Ἐὰν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὁ λόγος τῆς διὰ τοῦ κέντρου διερχομένης ὅλης εὐθείας πρὸς τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος τῆς διαμέτρου, τοῦ λαμβανομένου ἐκ τῆς ἀχθείσης καθέτου πρὸς τὸ μικρότερον (ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας).

Ἔστω κύκλος κέντρου Α καὶ διαμέτρου ΒΓ, καὶ σημεῖόν τι Δ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου. Ἂν ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρωμεν τὴν ΔΕ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε *θετος ἐπὶ διάμετρον τὰν ΒΓ ἁ ΕΖ. δεικτέον, ὅτι ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΒΖ ποτὶ τὰν ΖΓ.*

Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΒΕ, ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΔΓ, δύο τρίγωνα τὰ ΒΔΕ, ΕΔΓ ὁμοῖά ἐντι. Ὡς ἄρα ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΕ, οὕτως ἁ ΒΕ ποτὶ τὰν ΕΓ. ἀλλὰ ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετράγωνον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετράγωνον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΖ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, οὕτως ἁ ΒΖ ποτὶ τὰν ΖΓ.



Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστων δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΗ, ΓΤ καθέτοι ἐπὶ τὰν ΒΓ. ἐσσοῦνται δὴ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΒΗ, ΕΖ, ΓΤ ἀλλάλαις παράλλαλοι. ἐπεὶ οὖν ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἁ ΒΗ ποτὶ τὰν ΓΤ, τουτέστιν ἁ ΗΕ ποτὶ τὰν ΕΤ, λόγος ὁ τᾶς ΗΕ ποτὶ τὰν ΕΤ ὁ αὐτός ἐστιν τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΒΖ ποτὶ τὰν ΖΓ. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, οὕτως ἁ ΒΖ ποτὶ τὰν ΖΓ.

ιδʹ

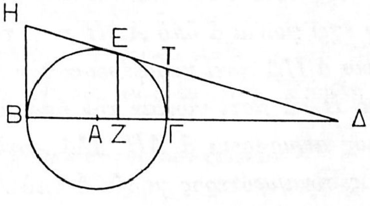
Εἴ κα ἐν τμάματι κύκλου κεκλασμένα γραμμὰ ὑποτείνουσα δύο ἀνίσους περιφερείας ᾖ, καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου διχοτομίας τοῦ τμάματος κάθετος ἐπὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τᾶς κε-

φέρωμεν τὴν κάθετον ΕΖ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΔ, λέγω, ὅτι ὁ λόγος $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΓ}}$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς (1ος τρόπος). Ἑνοῦμεν τὸ Β μὲ τὸ Ε καὶ τὸ Ε μὲ τὸ Γ. Ἐπειδὴ $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΓ}}$ θὰ ἔχωμεν τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΕ, ΕΔΓ ὅμοια· ἐπομένως $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΓ}}$, (Εὐκλ. ς′, δ′). Ἀλλὰ $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΕ}^2}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΕ}^2} = \frac{\text{ΒΕ}^2}{\text{ΕΓ}^2}$ καὶ $\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΓ}^2} = \frac{\text{ΒΖ}^2}{\text{ΖΓ}^2}$. Εἶναι ἄρα δηλαδὴ $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΓ}}$.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ (2ος τρόπος)

Ἔστωσαν ΒΗ, ΓΤ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὰς τρεῖς εὐθείας ΒΗ, ΕΖ, ΓΤ παραλλήλους μεταξύ των. Ἐπειδὴ



$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΗ}}{\text{ΓΤ}} = \frac{\text{ΗΕ}}{\text{ΕΤ}}$, ὁ λόγος $\frac{\text{ΗΕ}}{\text{ΕΤ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΓ}}$, (Εὐκλ. ς′, β′). Θὰ εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΖΓ}}$.

14

Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου ἀχθῇ τεθλασμένη γραμμὴ ὑποτείνουσα δύο διάφορα τόξα καὶ ἐκ τοῦ σημείου διχοτομίας τοῦ τμήματος ἀχθῇ *κλασμένας ἀχθῇ, ἁ ἀχθεῖσα κάθετος τὰν κεκλασμέναν γραμμὰν δίχα τέμνει.*

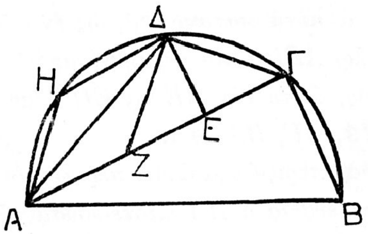
Ἔστω γὰρ τμᾶμα κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τᾶς ΑΒ, λελάφθω δὲ ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ σαμεῖόν τι τὸ Γ, καὶ ἐν τῷ τμάματι τοῦ κύκλου κεκλασμένα γραμμὰ ἁ ΑΓΒ καὶ ἔστω ἁ ΑΓ μείζων τᾶς ΓΒ, μέσον δὲ περιφερείας τᾶς ΑΒ τὸ Δ καὶ ἀπὸ σαμείου τοῦ Δ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΒ, ἁ ΔΕ. δεικτέον, ὅτι ἁ ΑΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΓΒ ἴσα ἐστίν.

Λελάφθω γὰρ ἐπὶ περιφερείας τᾶς ΑΔ περιφέρεια ἁ ΔΗ περιφερείᾳ τᾷ ΔΓ ἴσα καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΑΗ, ΗΔ, ΑΔ καὶ ἐπὶ τᾶς εὐθείας ΑΕ λελάφθω τμᾶμα τὸ ΕΖ τμάματι τῷ ΕΓ ἴσον, διάχθω δὲ ἁ ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ κάθετος ἁ ΔΕ ἐπὶ μέσαν τὰν ΖΓ ἀγμένα ἐστί, ἐσσεῖται ἁ ΔΖ τᾷ ΔΓ, τουτέστι τᾷ ΔΗ ἴσα. ἐπεὶ οὖν λόγος περιφερείας τᾶς ΑΗ ποτὶ περιφέρειαν τὰν ΑΗΔ ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΗ ποτὶ τὰν ὑπὸ ΑΓΔ, καὶ ὡς περιφέρεια ἁ ΗΔ ποτὶ περιφέρειαν τὰν ΑΗΔ, οὕτως ἐστὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΗΑΔ ποτὶ γωνίαν τὰν ὑπὸ ΑΓΔ, ἐσσεῖται ὡς συναμφότερος περιφέρεια ἁ ΑΗ, ΗΔ ποτὶ περιφέρειαν τὰν ΑΗΔ, οὕτως συναμφότερος γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΗ, ΗΑΔ ποτὶ τὰν ὑπὸ ΑΓΔ. καί ἐστι συναμφότερος περιφέρεια ἁ ΑΗ, ΗΔ περιφερείᾳ τᾷ ΑΗΔ ἴσα. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΗΔΑ μετὰ τᾶς ὑπὸ ΗΑΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΓΔ, τουτέστιν τᾷ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΑΔ μετὰ τᾶς ὑπὸ ΖΔΑ ἐστὶν ἴσα. συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΑ, ΗΑΔ συναμφοτέρῳ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΑΔ, ΖΔΑ ἴσα ἐστί, καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΗΑΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΑΔ ἐστὶν ἴσα. λοιπὰ ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΑ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΔΑ ἐστὶν ἴσα. ἐπεὶ κάθετος ἐπὶ τὴν μεγαλυτέραν τῶν δύο εὐθειῶν, ἡ ἀχθεῖσα κάθετος διαιρεῖ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω τμῆμα κύκλου μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ. Φέρομεν τεθλασμένην γραμμὴν τὴν ΑΓΒ, τῆς ὁποίας τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Ἔστω ὅτι ΑΓ > ΓΒ καὶ τὸ σημεῖον Δ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἔστω ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Λέγω, ὅτι ΑΕ = ΕΓ + ΓΒ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς (1ος τρόπος). Χωρίζομεν τὸ τόξον ΑΔ εἰς δύο μέρη, ὥστε νὰ εἶναι ΔΗ = ΔΓ καὶ φέρομεν τὰς ΑΗ, ΗΔ,



ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΕ ἂς λάβωμεν ΕΖ = ΕΓ καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΔΖ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος καὶ διάμεσος θὰ ἔχωμεν ΔΖ = ΔΓ = ΔΗ. (Εὐκλ. κοιν. ἐνν. α′). Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν τόξων $\dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{AH}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AH\Delta}}}$ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γωνιῶν $\dfrac{\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{H}}{\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Delta}$, (Εὐκλ. ς′, λγ′) καὶ

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{H\Delta}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AH\Delta}}} = \frac{\mathrm{H}\widehat{\mathrm{A}}\Delta}{\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Delta}, \text{ θὰ ἔχωμεν } \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AH}} + \overset{\frown}{\mathrm{H\Delta}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AH\Delta}}} = \frac{\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{H} + \mathrm{H}\widehat{\mathrm{A}}\Delta}{\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Delta},$$

(Εὐκλ. ε′, κδ′). Τὰ τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AH}} + \overset{\frown}{\mathrm{H\Delta}} = \overset{\frown}{\mathrm{AH\Delta}}$.

Αἱ γωνίαι ἄρα ΗΔΑ + ΗΑΔ = γωνία ΑΓΔ = γωνία ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΖΕ = γωνία ΖΑΔ + γωνία ΖΔΑ. Αἱ γωνίαι ἄρα ΗΔΑ + ΗΑΔ = ΖΑΔ + ΖΔΑ, καὶ ἡ γωνία ΗΑΔ = ΖΑΔ, (Εὐκλ. γ′, κζ′). Ἡ ὑπόλοιπος ἄρα γωνία ΗΔΑ = ΖΔΑ. Θεωρήσωμεν τὰ τρί-

οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΑΗΔ, ΑΖΔ ἴσα ἐντὶ καὶ πλευρὰ ἁ ΔΗ πλευρᾷ τᾷ ΔΖ ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ ΑΔ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΑ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΔΑ ἴσα, ἔστιν ἄρα πλευρὰ ἁ ΑΖ πλευρᾷ τᾷ ΑΗ ἴσα. ἀλλὰ ἁ ΑΗ τᾷ ΒΓ ἐστὶν ἴσα, τουτέστιν ἁ ΑΖ τᾷ ΒΓ ἴσα, ἔστι δὲ καὶ ἁ ΖΕ τᾷ ΕΓ ἴσα. ἔστιν ἄρα συναμφότερος ἁ ΑΖ, ΖΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΒΓ, τουτέστιν ἁ ΑΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΓΒ ἴσα.

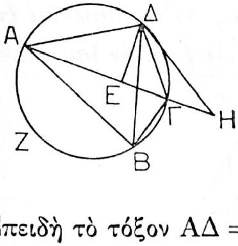
Ἄλλως τὸ αὐτὸ

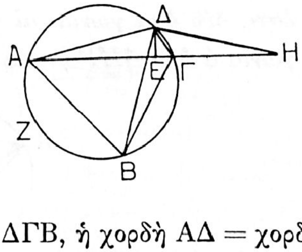
Ἔστω ἁ αὐτὰ καταγραφά, ὡς ἐν τῷ πρότερον, ἐν ὅλῳ δὴ τῷ κύκλῳ ΑΖΒΔ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον οὕτως, ὥστε τὰν ΑΕ τᾷ ΕΗ ἴσαν εἶμεν καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΗΔ, ΔΓ, ΒΔ, ΑΔ.

Ἐπεὶ γὰρ περιφέρεια ἁ ΑΔ περιφερείᾳ τᾷ ΔΓΒ ἴσα ἐστίν, ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἁ ΑΔ ὑποτεινούσᾳ εὐθείᾳ τᾷ ΔΒ ἐστιν ἴσα καὶ ἁ ΔΗ τᾷ ΑΔ ἴσα. ἔστιν ἄρα ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ ἴσα. καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΓ ἴσα, ἐπεὶ βεβακυῖαι ἐντὶ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς περιφερείας τᾶς ΔΓ, καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΕ ἐστιν ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΓ ἴσα. καὶ ἐπεὶ περιφέρεια ἁ ΔΑΖΒ περιφερείᾳ τᾷ ΔΓΒΖΑ ἐστὶν ἴσα, ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΓΒ βεβακυῖά ἐστιν ἐπὶ τᾶς περιφερείας ΔΑΖΒ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΔΓ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ΔΓΒΖΑ βεβακυῖαί ἐντι, τουτέστιν γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΓ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ΔΓ καὶ ἁ ὑπὸ ΑΔΓ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ΓΒΖΑ, συναμφότερος ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΔΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΓΒ ἐστιν ἴσα, καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΓΗ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΔΓ ἐστὶν ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΓΗ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΓΒ ἴσα. καὶ δέδεικται, ὅτι γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΓ γωνα ΑΗΔ καὶ ΑΖΔ. Τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι ΔΗ = ΔΖ, βάσις ἡ ΑΔ κοινὴ καὶ γωνία ΗΔΑ = γωνία ΖΔΑ. Ἑπομένως ΑΖ = ΑΗ, (Εὐκλ. α′, δ′). Ἀλλὰ ΑΗ = ΒΓ (Εὐκλ. κοιν. ἔνν. γ′), ἤτοι ΑΖ = ΒΓ, (Εὐκλ. κοιν. ἔνν. α′). Καὶ εἶναι ΖΕ = ΕΓ. Εἶναι ἄρα ΑΖ + ΖΕ = ΕΓ + ΒΓ ἢ ΑΕ = ΕΓ + ΓΒ.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ (2ος τρόπος).

Ἔστω τὸ προηγούμενον σχῆμα, ἀλλὰ ἀντὶ τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου λαμβάνομεν ὁλόκληρον τὸν κύκλον ΑΖΒΔ. Προεκτείνομεν τὴν ΑΓ μέχρι τοῦ σημείου Η οὕτως, ὥστε ΕΗ = ΕΑ καὶ φέρομεν τὰς ΗΔ, ΔΓ, ΒΔ, ΑΔ.

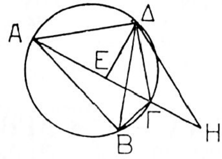




Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΔ = τόξον ΔΓΒ, ἡ χορδὴ ΑΔ = χορδὴ ΔΒ (Εὐκλ. γ′, κθ′) καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΗ = ΑΔ. Εἶναι ἄρα ΔΗ = ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΓ = γωνία ΔΒΓ, διότι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΓ, (Εὐκλ. γ′, κζ′) καὶ ἡ γωνία ΔΗΕ = γωνία ΔΑΕ (Εὐκλ. α′, ε′). Εἶναι ἄρα γωνία ΔΗΕ = γωνία ΔΒΓ, (Εὐκλ. γ′, κζ′). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΔΑΖΒ = τόξον ΔΓΒΖΑ, ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΓΒ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΑΖΒ καὶ αἱ γωνίαι ΔΑΓ, ΑΔΓ βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΓΒΖΑ δηλαδὴ ἡ γωνία ΔΑΓ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΒΖΑ. Αἱ γωνίαι ἄρα ΔΑΓ + ΑΔΓ = γωνία ΔΓΒ, καὶ ἡ γωνία ΔΓΗ = γωνία ΔΑΓ + γωνία ΑΔΓ. Εἶναι ἄρα γωνία ΔΓΗ = γωνία ΔΓΒ. Καὶ ἔχομεν ἀποδείξει, ὅτι γωνία ΔΗΓ ἐστιν ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΔΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΔΓ ἴσα. καὶ ἐπεὶ αἱ ΔΗ, ΔΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ ἁ ΔΓ κοινὰ καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι, ἐσσεῖται ἁ ΓΗ τᾷ ΓΒ ἴσα. συναμφότερος ἄρα ἁ ΕΓ, ΓΒ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΓΗ ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ συναμφότερος ἁ ΕΓ, ΓΗ τᾷ ΑΕ ἴσα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΑΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΓΒ ἴσα.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἔστω πάλιν ἁ ἐν τῷ πρότερον καταγραφά. ἔστιν οὖν γωνία μὲν ἁ ὑπὸ ΔΓΒ ἀμβλεῖα, ἐπεὶ ἐν ἐλάσσονι τμάματι ἁμικυκλίου ἐστί, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΔΓΑ ὀξεῖα, ἐπεὶ ἐν μείζονι τμάματι ἁμικυκλίου ἐστί. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΔΓΗ ἀμβλεῖά ἐστι. δύο ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΓΒ, ΔΓΗ ἀμβλεῖαί ἐντι καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσα, πλευρὰ δὲ



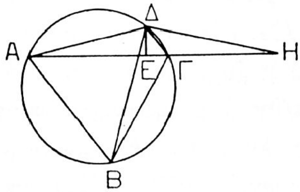
ἁ ΔΒ πλευρᾷ τᾷ ΔΗ ἴσα καὶ ἁ ΔΓ κοινά. ἐντὶ δὴ δύο τρίγωνα ἴσα τὰ ΔΓΗ, ΔΓΒ ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ γωνίαν τὰν ὑπὸ ΔΗΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΓ ἴσαν, τὰν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομέναν. λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΓΗ, ΔΓΒ ἴσαι ἐντὶ καὶ βάσις ἁ ΓΗ βάσει τᾷ ΓΒ ἴσα. ἔστιν ἄρα συναμφότερος ἁ ΕΓ, ΓΗ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΓΒ, τουτέστιν ἁ ΑΕ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΓ, ΓΒ ἴσα.

= ΔΒΓ. Εἶναι ἄρα γωνία ΗΔΓ = ΒΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ ΔΗ = ΔΒ καὶ βάσις ἡ ΔΓ κοινὴ καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν ΓΗ = ΓΒ, (Εὐκλ. α′, δ′). Ἑπομένως ΕΓ + ΓΒ = ΕΓ + ΓΗ. Ἀλλὰ ΕΓ + ΓΗ = ΑΕ. Εἶναι ἄρα ΑΕ = ΕΓ + ΓΒ.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ (3ος τρόπος)

Ἔστω τὸ προηγούμενον σχῆμα.

Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΔΓΒ εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου, ἡ γωνία ΔΓΒ εἶναι ἀμβλεῖα (Εὐκλ. γ′, λα′). Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΔΒΑ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου, ἡ γωνία ΔΓΑ εἶναι ὀξεῖα. Ἡ γωνία ἄρα ΔΓΗ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἑπομένως αἱ δύο γωνίαι ΔΓΒ, ΔΓΗ εἶ-



ναι ἀμβλεῖαι καὶ ἡ γωνία ΔΗΓ = γωνία ΔΒΓ, καὶ ΔΒ = ΔΗ καὶ βάσις ΔΓ κοινή. Τὰ δύο ἄρα τρίγωνα ΔΓΗ καὶ ΔΓΒ ἔχοντα τὴν γωνίαν ΔΗΓ = ΔΒΓ καὶ δύο πλευρὰς ἴσας εἶναι ἴσα καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι ΔΓΗ = ΔΓΒ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΗ = ΓΒ. Εἶναι ἄρα ΕΓ + ΓΗ = ΕΓ + ΓΒ, δηλαδὴ ΑΕ = ΕΓ + ΓΒ.

(Προσθήκη τοῦ Ἄραβος μεταφραστοῦ Ibn Qurra : Τέλος τοῦ συγγράμματος τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ ἐφαπτομένων κύκλων).

[ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΚΑΙ] ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΥΨΟΥΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

Εἰς τὸν πρόλογον τοῦ παρόντος τόμου γίνεται μνεία τοῦ ὑπὸ τοῦ H. Suter ἐκδοθέντος βιβλίου τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου al-Biruni Περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ. Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο προτάσσονται τρεῖς ἀποδείξεις τοῦ Ἀρχιμήδους, ὅτι « ἐὰν εἰς κύκλον ἐναρμοσθῇ (=ἐγγραφῇ) τεθλασμένη γραμμὴ ἀποτελουμένη ἐκ δύο ἀνίσων τμημάτων, ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐνηρμοσμένη ἡ τεθλασμένη γραμμή, κάθετος ἐπ' αὐτήν, αὕτη διαιρεῖ τὴν τεθλασμένην εἰς δύο ἴσα μέρη». (ἐνηρμοσμένη = ἐγγεγραμμένη. Εὐκλ. Στοιχ. βιβλ. 4, ὁρισ. 7). Αἱ αὐταὶ τρεῖς ἀποδείξεις περιέχονται καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους (τοῦ παρόντος τόμου), Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων, εἰς τὴν πρότασιν ὑπ' ἀριθμ. 14. Εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον τοῦ al-Biruni αἱ προτάσεις ὑπ' ἀριθμ. 6 καὶ 7 ἀφορῶσιν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (σελὶς 39 - 40. H. Suter). Στηρίζονται δὲ καὶ αἱ δύο αὗται προτάσεις εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναφερομένην ὑπ' ἀριθμ. 14 πρότασιν τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ὁ al-Biruni ἀποδίδει τὰς ἐκφωνήσεις μόνον τῶν ὑπ' ἀριθμ. 6 καὶ 7 προτάσεων εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὑπ' ἀριθμ. 6 προτάσεως τὴν ἀποδίδει εἰς τὸν ἑαυτόν του, ἐν ᾧ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὑπ' ἀριθμ. 7 τὴν ἀποδίδει εἰς τὸν el-Shanni. Εἶναι ὅμως αὐτονόητον, ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ θέσῃ ἐκφωνήσεις θεωρημάτων ἄνευ ἀποδείξεων καὶ ὅτι αἱ παρατιθέμεναι ἀποδείξεις εἶναι τοῦ 'Αρχιμήδους μετά τινος βυζαντινῆς ἢ ἀραβικῆς διασκευῆς. Τὸ ὅτι δὲ ὁ el-Shanni λέγει (κατωτέρω εἰς τὴν πρότασιν 7) ὅτι αὐτὸς ἀπέδειξε τὴν ὡς ἄνω ὑπ' ἀριθμ. 14 πρότασιν, διὰ τὴν ὁποίαν σῴζονται τρεῖς ἀποδείξεις τοῦ 'Αρχιμήδους, τοῦτο ἀποτελεῖ σοβαρωτάτην ἔνδειξιν, μεταξὺ παρομοίων ἄλλων, ὅτι τὰ θρυλούμενα περὶ ἀραβικῶν μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων ἀποτελοῦσιν ὑπερβολήν. Θεωροῦμεν δὲ λίαν πιθανὸν ὅτι οἱ Ἄραβες μαθηματικοὶ διεσκεύασαν πλείστας Ἑλληνικὰς μαθηματικὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας ἐδημοσίευσαν κατόπιν ὡς ἰδικάς των.

Κατωτέρω παραθέτομεν, ἐκ τῆς εἰς τὴν γερμανικὴν μεταφράσεως τοῦ βιβλίου τοῦ al - Biruni, τὰς 3 ἀποδείξεις τῆς προτάσεως τοῦ 'Αρχιμήδους περὶ τῆς διαιρέσεως τεθλασμένης γραμμῆς, ἀποτελουμένης ἐκ δύο ἀνίσων τμημάτων καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον, περιεχομένας καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ 'Αρχιμήδους Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων (ὑπ' ἀριθμ. 14), ἀκολούθως δέ, ἐκ τῆς αὐτῆς μεταφράσεως, τὰς προτάσεις 6 καὶ 7 τὰς ἀφορώσας εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, αἵτινες στηρίζονται εἰς τὴν ὑπ' ἀριθμ. 14 πρότασιν.

Κατὰ τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολεσθέντος ἀρχαίου κειμένου τῶν προτάσεων 6 καὶ 7 παραλείπομεν τὰς φράσεις, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν παρεμβολὰς τοῦ al - Biruni « 'Απόδειξις τῆς μεθόδου τοῦ 'Αρχιμήδους . . . ὁ 'Αρχιμήδης λέγει . . . ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν ὁποίαν παρεκλήθην» κ.λπ. ὡς καὶ διασαφήσεις τινὰς τῶν ἀποδείξεων, αἵτινες, φρονοῦμεν, ὅτι ἐτέθησαν μεταγενεστέρως ὑπὸ τῶν Βυζαντινῶν ἢ τῶν 'Αράβων.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ ΕΚ ΤΟΥ ΓΕΡΜΑΝΙΚΟΥ

(Heinrich Suter, Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise u.s.w. Τὸ βιβλίον τῆς εὑρέσεως τῶν χορδῶν ἐν τῷ κύκλῳ κ.λπ. σελ. 12 - 15 καὶ 37 - 40).

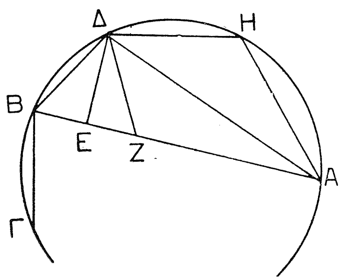
Πρώτη πρότασις

Ἐὰν εἰς τυχὸν τόξον κύκλου ἐναρμοσθῇ τεθλασμένη γραμμὴ ἐκ δύο ἀνίσων τμημάτων καὶ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὰ τμήματα τῆς τεθλασμένης, τῆς οὕτω διαιρουμένης, εἶναι ἴσα. Ἐπὶ παραδείγματι: Ἔστω ΑΒΓ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ἡ ἐνηρμοσμένη εἰς τὸ τόξον ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Δ τοῦ τόξου τούτου ἔστω ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΔΕ· λέγω, (λέγει, ὁ al - Biruni) ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓ διχοτομεῖται, τουτέστιν, ὅτι εἶναι ΑΕ = ΕΒ + ΒΓ. Ὁ Ἀλλὰχ γνωρίζει κάλλιστα τὴν ὀρθότητα.

α′) Ἀπόδειξις τούτου ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ βιβλίον τῶν κύκλων.

(Σημ. Τὸ βιβλίον Περὶ κύκλων, τοῦ Ἀρχιμήδους, δὲν ἐσώθη. Ἡ ἐνταῦθα ὅμως περιλαμβανομένη πρότασις μὲ τρεῖς ἀποδείξεις περιλαμβάνεται μὲ τὰς τρεῖς ἀποδείξεις καὶ εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων ὑπ' ἀριθμ. 14. Τὸ συμπέρασμα πρέπει νὰ εἶναι, ὅτι ἡ πραγματεία Περὶ κύκλων καὶ Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων εἶναι ἡ αὐτή. Ἐπειδὴ ὅμως ἔχομεν ἀμφιβολίας διὰ τοιούτου εἴδους πληροφορίας τῶν Ἀράβων μεταφραστῶν, θεωροῦμεν πιθανόν, ὅτι μέρη τῆς πραγματείας Περὶ κύκλων εἶναι αἱ πραγματεῖαι 1) Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων, καὶ 2) τὰ περισωθέντα δύο θεωρήματα περὶ κύκλων, τὰ καταχωρισθέντα ἐνταῦθα ὡς ἀνεξάρτητος πραγματεία Περὶ κύκλων, καὶ περιεχόμενα εἰς τὴν πραγματείαν « Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου» ὑπ' ἀριθμ. 14 καὶ 15.

Λέγει (ὁ 'Αρχιμήδης), (σχ. 1) : Λαμβάνομεν τόξον ΔΗ = τόξον ΔΒ καὶ ΕΖ = ΕΒ καὶ φέρομεν τὰς ΔΖ καὶ ΔΑ, καί, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι κοινὴ καὶ αἱ δύο παρὰ τὸ Ε γωνίαι εἶναι ὀρθαί, εἶναι ΔΒ =



Σχ. 1

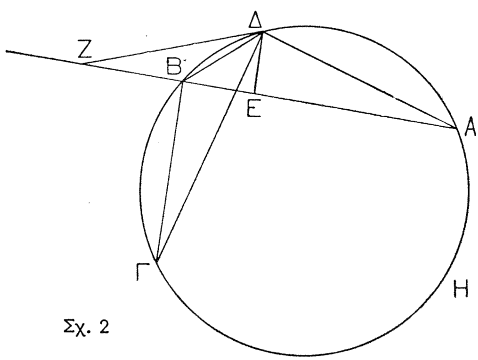
ΔΖ, ἤτοι ΔΗ = ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ τόξον ΔΒ = τόξον ΔΗ εἶναι καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἐκ τῶν ἴσων ἡμίσεων ἴσα ἤτοι τόξον ΑΗ = ΒΓ. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν, ΗΔΑ + ΔΑΒ = γωνία ΔΒΑ = ΔΖΒ. 'Αλλὰ γωνία ΔΖΒ = γωνία ΗΔΑ καὶ ΔΗ = ΔΖ, ἐν ᾧ ἡ ΑΔ εἶναι κοινή, ὁπότε ΑΖ = ΑΗ (σημείωσις τοῦ Γερμανοῦ ἐκδότου H. Suter: Παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν γίνεται λόγος περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων, ἀλλὰ ὑποτίθεται αὕτη, καὶ ἐκ ταύτης συνάγεται ἡ ἰσότης τῶν λοιπῶν τμημάτων). 'Αλλὰ ΑΗ = ΒΓ καὶ ΕΖ = ΕΒ, τουτέστιν ΑΖ + ΕΖ = ΕΒ + ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′) 'Απόδειξις τοῦ Abu Said el - Darir.

Ὑπάρχει καὶ μία ἀπόδειξις τοῦ Abu Said el - Darir ὁμοία πρὸς ἐκείνην τοῦ 'Αρχιμήδους.

γ′) Δευτέρα ἀπόδειξις τοῦ 'Αρχιμήδους εἰς τὸ βιβλίον τῶν κύκλων.

Λέγει, (σχ. 2) : προεκτείνομεν τὴν ΑΒ πέραν τοῦ Β καὶ λαμβάνομεν ΕΖ = ΑΕ καὶ φέρομεν τὰς ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ, ΔΖ. Τότε, ἐπειδὴ αἱ δύο χορδαὶ ΑΔ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ΑΔ = ΔΖ, καὶ ΔΖ = ΔΓ, καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, καὶ ἐπίσης καὶ αἱ δύο γωνίαι ΔΑΕ, καὶ ΔΖΕ εἶναι ἴσαι, εἶναι καὶ γωνία ΔΖΒ = γωνία ΔΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ τόξα ΔΑ, ΔΓ εἶναι ἴσα καὶ τὸ τόξον ΑΗΓ εἶναι κοινόν, εἶναι καὶ τόξον ΔΑΗΓ = τόξον ΔΓΗΑ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΒΓ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΑΗΓ, καὶ αἱ δύο γωνίαι ΔΑΒ, ΑΔΒ βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΓΗΑ, δηλαδὴ ἡ γωνία ΔΑΒ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΒ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΑ· εἶναι κατὰ ταῦτα γωνία ΔΒΓ = γωνία ΔΑΒ + γωνία ΑΔΒ. Ἀλλὰ γωνία ΔΒΖ, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώ-



Σχ. 2

νου ΔΒΑ εἶναι = γωνία ΔΑΒ + γωνία ΑΔΒ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι αὐτῆς, δηλ. εἶναι γωνία ΔΒΓ = γωνία ΔΒΖ. Ἀλλ' ἀπεδείχθη, ὅτι γωνία ΔΖΒ = γωνία ΔΓΒ, ἤτοι εἶναι ἐπίσης γωνία ΓΔΒ = = γωνία ΖΔΒ καὶ ΔΖ = ΔΓ καὶ ἡ ΔΒ εἶναι κοινή, δηλαδὴ εἶναι ΒΓ = ΒΖ, ἤτοι ΒΓ + ΒΕ = ΖΕ = ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄) Ἀπόδειξις τοῦ Hashbas.

Παρὰ τούτου ὑπάρχει μία ὁμοία ἀπόδειξις ......

ε΄) Τρίτη ἀπόδειξις τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ βιβλίον τῶν κύκλων.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εὑρέθη εἰς προβλήματα τῶν Ἑλλήνων, περὶ αὐτῶν ὅμως δὲν εἶναι βέβαιον ἐὰν ταῦτα εἶναι τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ τὰ ὁποῖα μετεφράσθησαν ὑπὸ τοῦ Yusuf.

Λέγει (ὁ Ἀρχιμήδης) (σχῆμα προηγούμενον): Προεκτείνομεν τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ΕΖ = ΑΕ καὶ φέρομεν τὰς ΔΓ, ΔΒ, ΔΖ. Ἐπειδὴ τώρα ἡ ΔΓ εἶναι χορδὴ κύκλου, τὸ τόξον ΔΒΓ εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερον, διότι τὸ τόξον ΑΔ = τόξον ΔΓ, καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσιν εἰς ἕνα κύκλον δύο ἴσα τόξα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, χωρὶς νὰ ἔχωσι ἓν κοινὸν μέρος· Ἑπομένως ἡ γωνία ΔΒΓ, τὴν ὁποίαν ὑποτείνει ἡ χορδὴ ΔΓ εἶναι ἀμβλεῖα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι χορδὴ κύκλου, τὸ τόξον ΔΓΑ εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, δηλαδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ, τὴν ὁποίαν ὑποτείνει ἡ χορδὴ ΑΔ, εἶναι ὀξεῖα, καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΔΒΖ εἶναι ἀμβλεῖα. Αἱ γωνίαι ΔΖΒ, ΔΓΒ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΔΓ, ΔΖ, ἑπομένως ὁ λόγος των πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΒ εἶναι ὁ αὐτός, καὶ κατὰ ταῦτα τὰ δύο τρίγωνα ΔΒΖ, ΔΒΓ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (Γ = Ζ) καὶ αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι περικλείουσι τὰς δύο ἄλλας γωνίας εἶναι ἀνάλογοι, καὶ ἑκάστη τῶν δύο γωνιῶν ΔΒΓ, ΔΒΖ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἑπομένως εἶναι αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι ἐπίσης ἴσαι, καὶ τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια καὶ ἐπίσης ἴσα καὶ εἶναι ΒΖ = ΒΓ, ἤτοι ΒΓ + ΒΕ = ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Ἀκολουθοῦσι 16 ἀκόμη ἀποδείξεις τῆς αὐτῆς προτάσεως ὑπὸ Ἀράβων).

Ἐν συνεχείᾳ ἕπονται 29 προβλήματα. Ἐκ τούτων τὸ ὑπ' ἀριθμ. 6 ἀφορᾷ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὕψους τῶν τριγώνων ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν καὶ τὸ ὑπ' ἀριθμ. 7 ἀφορᾷ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Ὁ al - Biruni λέγει, ὅτι αἱ ἀποδείξεις καὶ τῶν δύο αὐτῶν προτάσεων εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους.

Αἱ ἀνωτέρω δύο προτάσεις ἀπεδίδοντο μέχρι τοῦδε εἰς τὸν Ἥρωνα (1ος αἰ. μ.Χ.), ἐπειδὴ χρησιμοποιοῦνται ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὴν πραγματείαν του Μετρικὰ (I 8) καὶ Διόπτρα (κεφ. 30).

Δευτέρα πρότασις

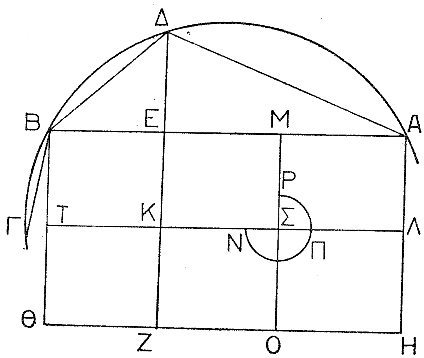
Εὕρεσις τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους.

6. Ἀπόδειξις τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους τῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ πλευραί, καὶ τῶν διὰ τῶν ὑψῶν σχηματιζομένων τμημάτων τῶν πλευρῶν, ὑπ' ἐμοῦ (δηλ. τοῦ al - Biruni).

Ὁ Ἀρχιμήδης λέγει : Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης καὶ διαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ τῆς βάσεως, προσθέτομεν τὸ πηλίκον εἰς τὴν βάσιν καὶ τοῦ ἀθροίσματος λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ, ὁπότε ἔχομεν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς βάσεως· ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ πηλίκον ἀπὸ τῆς βάσεως καὶ τῆς διαφορᾶς λάβωμεν τὸ ἥμισυ, τότε λαμβάνομεν τὸ μικρότερον τμῆμα τῆς βάσεως.

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τὴν ὁποίαν παρεκλήθην (ὁ al - Biruni) εἶναι ἡ ἑξῆς : Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΔΒ καὶ ὕψος αὐτοῦ τὸ ΔΕ (σχ. 37 τοῦ βιβλίου τοῦ Suter). Εἰς τὸ τρίγωνον περιγράφομεν κύκλον καὶ λαμβάνομεν τόξον ΔΓ= ΑΔ, φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον ΑΖ, πλευρᾶς ΑΕ, καὶ τὸ τετράγωνον ΤΕ, πλευρᾶς ΒΕ, καὶ λαμβάνομεν ΕΜ = ΕΒ. Φέρομεν τὴν ΜΟ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ καὶ τὴν ΤΚΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ συμπληροῦμεν τὸ σχῆμα

ΑΘ, ὁπότε εἶναι $ΒΔ^2 = ΔΕ^2 + ΒΕ^2$ καὶ $ΑΔ^2 = ΑΕ^2 + ΔΕ^2$, ὅπου τὸ $ΔΕ^2$ εἶναι κοινόν. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ $ΒΔ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΑΔ^2$ λαμβάνομεν $ΑΕ^2 - ΒΕ^2$. Εἶναι ὅμως φανερόν, ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ τὸν γνώμονα ΡΠΝ. Ἐπειδὴ δὲ $ΤΚ = ΚΣ = ΣΜ$ καὶ $ΤΘ = ΚΖ$



$= ΑΜ$, αἱ ἐπιφάνειαι ΤΖ, ΚΟ, ΜΛ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνεια ΤΗ = γνώμων ΡΠΝ. Ἀλλὰ $ΤΘ = ΑΜ = ΒΓ$, ἐπειδὴ $ΑΜ = ΒΓ$ καὶ $ΒΕ = ΜΕ$, ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια $ΤΗ = ΑΒ \cdot ΒΓ$. Διαιροῦντες αὐτὴν διὰ τῆς βάσεως ΑΒ λαμβάνομεν τὴν ΒΓ καὶ ἂν προσθέσωμεν ταύτην εἰς τὴν βάσιν λαμβάνομεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ, τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι ἡ ΑΕ, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς βάσεως. Ἀφαιροῦντες τὴν ΒΓ ἀπὸ τῆς βάσεως λαμβάνομεν τὴν ΒΜ τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι ἡ ΒΕ, τὸ μικρότερον τμῆμα τῆς βάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

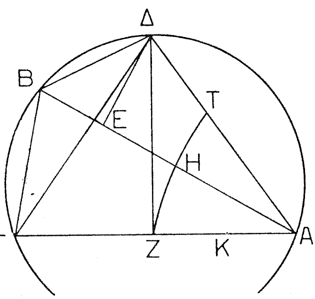
Ἀντὶ τῆς διαφορᾶς $ΑΔ^2 - ΒΔ^2$ δύναταί τις νὰ λάβῃ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ΑΔ καὶ ΒΔ, ἐπειδὴ εἶναι ἴσα καὶ ἐπίσης εἶναι $ΑΕ^2 - ΒΕ^2 = (ΑΕ + ΒΕ)(ΑΕ - ΒΕ) = ΑΒ(ΑΕ - ΒΕ) = ΑΒ \cdot ΑΜ = ΑΒ \cdot ΒΓ$.

7. Ἀπόδειξις τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν τριγώνων ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν των ὑπὸ τοῦ Abu Abdallah el Shanni.

Ὁ Ἀρχιμήδης λέγει : Ἐὰν θέλωμεν νὰ μάθωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν ἑκάστης πλευρᾶς ἀπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τούτων διαφορῶν, καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ τοῦ γινομένου τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ὁπότε ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ὁ Abu Abdallah el Shanni λέγει:

Ἡ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ ἑξῆς : Λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 39 τοῦ βιβλίου τοῦ Suter) καὶ περιγράφομεν εἰς αὐτὸ τὸν κύκλον ΑΔΒΓ καὶ ἔστω Δ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ μέσου τούτου



φέρομεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν κάθετον ΔΖ ἐπὶ τὴν ΑΓ [1]), καὶ φέρομεν τὰς ΑΔ, ΔΓ, ΔΒ. Ἀκολούθως μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΖ γράφομεν τὸ τόξον ΖΗΤ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Η καὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Τ. Τότε

[1]) Τὸ ἀραβικὸν κείμενον ἔχει ΑΔ.

ἔχομεν $ΑΔ^2 = ΑΖ^2 + ΔΖ^2$ [1]), εἶναι δὲ $ΑΤ = ΑΖ$, καὶ συνεπῶς $ΔΤ^2 + 2ΔΤ \cdot ΑΤ = ΔΖ^2 = (ΑΔ^2 - ΑΤ^2)$. Ἐπειδὴ δὲ ἐλάβομεν $ΑΤ = ΑΖ$, εἶναι ἐπίσης $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ΕΗ^2 + 2ΑΗ \cdot ΕΗ$ [2]). Τὸ τρίγωνον ΔΕΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΔΓΖ, ΔΑΖ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΓΑΔ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν βαίνει εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔΒΓ. Ὑπάρχει λοιπὸν ἡ ἀναλογία $ΔΕ : ΕΒ = ΔΖ : ΑΖ$. Ἀλλὰ $ΔΖ : ΑΖ = ΔΖ^2 : ΔΖ \cdot ΑΖ = ΔΖ \cdot ΑΖ : ΑΖ^2$, ὡς ἐπίσης εἶναι $ΔΕ^2 : ΔΕ \cdot ΕΒ = ΔΕ \cdot ΕΒ : ΕΒ^2$. Ἐὰν δέ τις ἀφαιρέσῃ μέλη μιᾶς ἀναλογίας ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα μέλη ἄλλης ἀναλογίας, εἶναι δὲ οἱ λόγοι τῶν ἀναλογιῶν τούτων ἴσοι, τὰ ὑπόλοιπα σχηματίζουσι πάλιν ἀναλογίαν. Ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν τὸ $ΔΕ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΔΖ^2$, λαμβάνομεν, ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν, $ΕΗ^2 + 2ΑΗ \cdot ΕΗ$ ἢ $ΕΗ\ (ΑΕ + ΑΖ)$, καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ $ΔΕ \cdot ΕΒ$ ἀπὸ τοῦ $ΔΖ \cdot ΑΖ$ ἢ δύο τρίγωνα ΒΔΕ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς ἐδείξαμεν κατὰ τὰς ἰδιότητας τῆς τεθλασμένης γραμμῆς. (Σημείωσις. Ἐνταῦθα ὁ Shanni γράφει ἀνακριβείας, διότι τὰς ἰδιότητας αὐτὰς δὲν τὰς ἀπέδειξεν αὐτός, ἀλλὰ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν ὑπ' ἀριθ. 14 πρότασιν τῆς πραγματείας του Περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων. Ἡ ἀνωτέρω δὲ φράσις « Ἀλλὰ $ΔΖ : ΑΖ = \ldots$ ὡς ἐπίσης εἶναι $\ldots = ΔΕ \cdot ΕΒ : ΕΒ^2$ » περιέχει τεχνάσματα Ἀρχιμήδεια, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῶν εἰς τὴν ἑλληνικὴν διασωθέντων ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὄχι τεχνάσματα Σιαννίνεια, περὶ τῶν ὁποίων

---

[1]) Τὸ ἀραβικὸν κείμενον ἔχει $ΑΕ^2 + ΔΕ^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ὀρθόν, δὲν ὑπεισέρχεται ὅμως ἐνταῦθα.

[2]) Ἐδῶ ἐλλείπει σαφεστέρα αἰτιολόγησις τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἡ ὁποία (ἐξίσωσις) ἐπαναλαμβάνεται· ἡ αἰτιολόγησις θὰ ἦτο περίπου ἡ ἑξῆς: Εἶναι $ΑΕ^2 = ΑΗ^2 + ΕΗ^2 + 2ΑΗ \cdot ΕΗ$. Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΔΕ^2$ καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψει, ὅτι $ΑΕ^2 + ΔΕ^2 = ΑΔ^2 = ΑΖ^2 + ΔΖ^2 = ΑΗ^2 + ΔΖ^2$, λαμβάνεται $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ΕΗ^2 + 2ΑΗ \cdot ΕΗ$.

οὐδὲν γνωρίζομεν. Καὶ ἐκ τῶν παρατηρήσεων τούτων ἐνισχύεται ἡ γνώμη ἡμῶν ὅτι ἡ προκειμένη ἀπόδειξις εἶναι τοῦ 'Αρχιμήδους, καὶ ὄχι μόνον ἡ ἐκφώνησις, μὲ μικράς τινας ἁπλοποιήσεις τῶν 'Αράβων).

'Εὰν κατόπιν ἀφαιρέσωμεν τὸ $ΕΒ^2$ ἢ τὸ $ΚΖ^2$ (ἀφοῦ λάβωμεν $ΚΖ = ΕΒ$) ἀπὸ τοῦ $ΑΖ^2$, λαμβάνομεν $ΓΚ \cdot ΑΚ$ [1]). Εἶναι ὅμως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μέσον ἀνάλογον τοῦ ΕΗ (ΑΕ + ΑΖ) καὶ τοῦ $ΓΚ \cdot ΑΚ$ [2]). Τὸ ΕΗ ὅμως εἶναι ἡ διαφορὰ ἀπὸ τοῦ ΑΕ + ΑΖ, δηλ. τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπὸ τῆς ἡμισείας περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἐλάβομεν $ΑΗ = ΑΖ = ΓΖ$, καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ διχοτομεῖ εἰς τὸ σημεῖον Ε τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. 'Ακόμη εἶναι τὸ ΑΚ ἡ διαφορὰ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀπὸ τοῦ ΑΕ + ΑΖ, ἐπειδὴ ἐλάβομεν $ΚΖ = ΕΒ$ [3]). 'Ακόμη εἶναι τὸ ΓΚ ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἀπὸ τοῦ ΑΕ + ΑΖ [4]), δηλ. ΕΗ, ΑΚ, ΓΚ εἶναι αἱ διαφοραὶ ἑκάστης τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τῆς ἡμισείας περιμέτρου τοῦ τριγώνου. 'Εὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν $ΑΚ \cdot ΓΚ$ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν ΕΗ (ΑΕ + ΑΖ) ἔχομεν τὸ γινόμενον τῆς πρώτης διαφορᾶς ἐπὶ τὴν δευτέραν, καὶ τοῦτο ἐπὶ τὴν τρίτην διαφορὰν καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον ἐπὶ τὸ ΑΕ + ΑΖ, δηλ. ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1) Λεπτομερέστερον : $ΑΚ^2 + 2ΑΚ \cdot ΖΚ = ΑΚ\,(ΑΚ + 2ΖΚ) = ΑΚ \cdot ΓΚ$.

2) Τὸ ἀραβικὸν κείμενον ἔχει $ΓΚ \cdot ΚΒ$.

3) Εἶναι δηλ. $ΑΕ + ΑΖ - ΑΒ = 2ΑΗ + ΕΗ - ΑΒ = ΑΗ - ΒΕ = ΑΖ - ΚΖ = ΑΚ$.

4) 'Η πρότασις ἐλλείπει ἀπὸ τὸ χειρόγραφον, ὅπου ἐπαναλαμβάνεται ἡ προηγουμένη πρότασις· ἡ αἰτιολογία τοῦ ἰσχυρισμοῦ εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Εἶναι $ΑΕ + ΑΖ - ΒΓ = ΒΓ + ΒΕ + ΑΖ - ΒΓ = ΒΕ + ΑΖ = ΖΚ + ΓΖ = ΓΚ$.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ὅπως π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, τότε ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $ΔΖ^2 : ΔΖ \cdot ΑΖ = ΔΖ \cdot ΑΖ : ΑΖ^2$. Ἀπεδείξαμεν ὅμως ἤδη, ὅτι $ΔΖ^2 = ΔΤ^2 + 2ΔΤ \cdot ΑΤ = ΔΤ\,(ΑΔ + ΑΖ)$ [1]. Εἶναι δὲ $ΔΖ \cdot ΑΖ =$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, καὶ $ΑΖ^2 =$ ἐπιφάνεια $ΑΖ \cdot ΖΓ$. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $ΑΖ \cdot ΖΓ = ΑΤ \cdot ΑΖ$ [2], λαμβάνομεν τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς διαφορᾶς ἐπὶ τὴν ἄλλην, κατόπιν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ ΔΤ, δηλ. ἐπὶ τὴν τρίτην διαφοράν, καὶ τὸ νέον αὐτὸ γινόμενον ἐπὶ $(ΑΔ + ΑΖ)$, δηλ. ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν, ὁπότε ἔχομεν τὸ τετράγωνον τῆς ἐπιφανείας $ΔΖ \cdot ΑΖ$, δηλ. τοῦ τριγώνου ΑΔΓ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1) Τὸ χειρόγραφον ἔχει $ΔΚ^2$.

2) Τὸ χειρόγραφον ἔχει $ΑΤ \cdot ΚΖ$.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΥΨΟΥΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ
(ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ)

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τῆς ἀπολεσθείσης πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ὕψους καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης δευτέρας προτάσεως).

1. 6. Εὕρεσις τοῦ ὕψους τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (Βιβλίου Biruni ἀριθμ. 6).

Εἴ κα ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ἄλλας πλευρᾶς τετραγώνου ὑπὸ τᾶς τοῦ τριγώνου βάσιος μερισθῇ, ποτιτεθῇ δὲ τῷ λαφθέντι ἁ ἄλλα πλευρὰ τοῦ τριγώνου, τὸ ἅμισυ τοῦ οὕτω λαφθέντος ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τμάματι τᾶς βάσιος διαιρεθείσας ὑπὸ τοῦ τοῦ τριγώνου ὕψους, τὸ ἅμισυ δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ βάσις τᾶς ὑπεροχᾶς τῶν ἀπὸ τῶν εἰρημένων πλευρῶν τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι τμάματι τᾶς βάσιος.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΔΒ καὶ ὕψος αὐτοῦ τὸ ΔΕ, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου ἔστω περιφέρεια ἁ ΔΓ περιφερείᾳ τᾷ ΑΔ ἴσα καὶ ἐναρμόσθω εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα ἁ ΒΓ, ἀναγεγράφθων δὲ ἀπὸ βάσιος τᾶς ΑΒ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΤΕ καὶ γεγονέτω ἁ ΒΕ τᾷ ΕΜ ἴσα καὶ ἄχθων παρὰ μὲν τὰν ΕΖ ἁ ΜΟ, παρὰ δὲ τὰν ΑΒ ἁ ΤΚΛ καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΘ σχᾶμα· φαμὶ δὴ τὰ προειρημένα.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΒΕ τετραγώνοις καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΔΕ τετραγώνοις, ἐσσεῖται δὴ ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετραγώνου τᾷ ὑπεροχᾷ ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετραγώνου ἴσα· ἔστι δὴ ἁ ὑπεροχὰ αὕτα γνώμονι *τῷ ΡΠΝ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΤΚ, ΚΣ, ΣΜ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὁμοίως δὲ αἱ ΤΘ, ΚΖ, ΑΜ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, χωρία τὰ ΤΖ, ΚΟ, ΜΛ ἐσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσα· ἔστιν ἄρα χωρίον τὸ ΤΗ γνώμονι τῷ ΡΠΝ ἴσον. ἀλλὰ αἱ ΤΘ, ΑΜ, ΒΓ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ἐπεὶ ἁ ΑΜ τᾷ ΒΓ ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΜΕ τᾷ ΒΕ· ἔστιν ἄρα χωρίον τὸ ΤΗ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον. Μερίζοντες δὴ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΓ εὐθείᾳ τᾷ ΑΒ λαψοῦμες τὰν ΒΓ. ποτιτιθεμένας οὖν τᾶς ΒΓ βάσει τοῦ τριγώνου τᾷ ΑΒ λαφθήσεται κεκλασμένα γραμμὰ ἐναρμοσμένα εἰς τὸν κύκλον ἁ ΑΒΓ, ἇς ἁ ΑΕ ἁ ἀμίσεα, τὸ μεῖζον τμᾶμα τᾶς βάσιος ἐστί. ἐσσεῖται οὖν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει βάσις ἁ ΑΒ τᾶς ΒΓ, τᾷ ΒΜ ἴσα, ἇς ἀμίσεα ἁ ΒΕ ἐστί, τουτέστι τὸ ἔλασσον τμᾶμα τᾶς βάσιος· ἐδείχθη οὖν τὸ προτεθέν.*

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ τετραγώνου λαβεῖν, ἐπεὶ ἁ εἰρημένα ὑπεροχὰ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τᾶς ΑΔ, ΒΔ καὶ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΒ τᾶς ΒΔ ἴσα ἐστί. ἔστιν ἄρα ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετραγώνου ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶν συναμφοτέρου τᾶς ΑΕ, ΒΕ καὶ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΕ τᾶς ΒΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ καὶ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΕ τᾶς ΒΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΑΜ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΒΓ.

2. 7. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (Βιβλίου Biruni ἀριθμ. 7).

Εἴ κα παντὸς τριγώνου αἱ ὑπεροχαὶ αἷς ἁ ἀμίσεα τᾶς περιμέτρου αὐτοῦ ὑπερέχει ἑκάστας πλευρᾶς ἐπὶ τὰν ἀμί-

σεαν τᾶς περιμέτρου γένωνται τοῦ γεναμένου πλευρὰ τετραγωνικὰ ἐσσεῖται τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ τριγώνου ἴσα.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ περὶ αὐτὸ δὲ περιγεγράφθω κύκλος ὁ ΑΔΒΓ, τετμάσθω δὲ περιφέρεια ἁ ΑΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ σαμεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΒ ἁ ΔΕ καὶ τᾷ ΑΓ ἁ ΔΖ, ἐπεζεύχθων δὲ αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΔΒ καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΖ κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΗΤ, ὃς εὐθεῖαν μὲν τὰν ΑΕ κατὰ τὸ Η σαμεῖον τέμνει, εὐθεῖαν δὲ τὰν ΑΔ κατὰ τὸ Τ· φαμὶ δὴ τὰ προειρημένα.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΔΖ τετραγώνοις, ἔστι δὲ καὶ ἁ ΑΤ τᾷ ΑΖ ἴσα, ἐσσεῖται ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΤ τετράγωνον μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΔΤ, ΑΤ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετραγώνῳ ἴσον, τουτέστι τᾷ ὑπεροχᾷ, ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΤ τετραγώνου ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἁ ΑΤ τᾷ ΑΖ ἴσα ἐστί, ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ τετραγώνοις μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΕΗ ἴσον. ἔστι δὲ τρίγωνον τὸ ΔΕΒ ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων ΔΓΖ, ΔΑΖ ὁμοῖον, ἐπεὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΓΑΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί. ἔστιν ἄρα, ὡς ἁ ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΒ, οὕτως ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΑΖ. ἀλλ' ὡς ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΑΖ, τουτέστιν, ὡς τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΑΖ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον. ὁμοίως δή ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΒ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΒ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα, ὡς πρότερον ἐδείχθη, ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετραγώνου τῷ ἀπὸ τᾶς ΕΗ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΕΗ ἴσα, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν ΕΗ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΕ, ΑΖ.

ὁμοίως δὴ ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΑΖ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΕ, ΕΒ, τουτέστιν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τρίγωνον τὸ ΑΔΓ τοῦ διπλασίου τριγώνου τοῦ ΒΔΕ ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ὡς ἐν τῷ περὶ κεκλαομένας γραμμὰς πρότερον ἐδείχθη. καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΖ, ΕΒ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχά ᾇ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΒ τετραγώνου, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τᾶς ΚΖ, τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΚ, ΑΚ ἴσα. ἔστι δὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μέσον ἀνάλογον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΕΗ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΕ, ΑΖ καὶ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΓΚ, ΑΚ. ἀλλὰ ἁ ΕΗ ἁ ὑπεροχά ἐστιν ᾇ ὑπερέχει συναμφότερος ἁ ΑΕ, ΑΖ, τουτέστιν ἁ ἁμίσεα τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, πλευρᾶς τᾶς ΑΓ, ἐπεὶ εὐθεῖαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΓΖ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντὶ καὶ ἁ ΔΕ συναμφότερον τὰν ΑΒ, ΒΓ δίχα τέμνει κατὰ τὸ Ε σαμεῖον. ὁμοίως δὴ ἁ ΑΚ ἁ ὑπεροχά ἐστι, ᾇ συναμφότερος ἁ ΑΕ, ΑΖ πλευρᾶς τᾶς ΑΒ ὑπερέχει, ἐπεὶ ἁ ΚΖ, ΕΒ, ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί. ἔτι δὲ ἁ ΓΚ ἁ ὑπεροχά ἐστιν ᾇ συναμφότερος ἁ ΑΕ, ΑΖ πλευρᾶς τᾶς ΒΓ ὑπερέχει. Ἐντὶ οὖν αἱ ΕΗ, ΑΚ, ΓΚ αἱ ὑπεροχαὶ αἷς ἁ ἁμίσεα τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἑκάστας τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὑπερέχει. Ἐσσεῖται ἄρα ἴσον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἁμισέας τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ ὑπὸ τᾶν ΕΗ, ΑΚ, ΚΓ τῷ ἀπὸ τᾶς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τετραγώνῳ· ἐδείχθη οὖν τὸ προτεθέν.

Καὶ εἴ κα τρίγωνον τὸ ΑΔΓ ἰσοσκελὲς ᾖ, ἐσσεῖται ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΑΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΑΖ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΤ τετραγώνῳ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τᾶν ΔΤ, ΑΤ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τᾶν

ΔΤ καὶ συναμφοτέρου τᾶς ΑΔ, ΑΖ. Ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΖ, ΑΖ ἐπιφανείᾳ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΖΓ ἴσον· ἔστιν ἄρα χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν τριᾶν ὑπεροχᾶν, αἷς ὑπερέχει ἁ ἁμισέα τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἑκάστας τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ, καὶ τᾶς ἁμισέας, τᾶς περιμέτρου τοῦ τριγώνου τῷ ἀπὸ τᾶς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου τετραγώνῳ ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους 19 θεωρημάτων ἐπιπεδομετρίας (ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας), τὰ ὁποῖα σῴζονται εἰς τὴν ἀραβικήν.

α′

Εἴ κα ἀπὸ τῶν περάτων ἴσων ἐκβολῶν τᾶς διαμέτρου ἁμικυκλίου ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι τοῦ ἁμικυκλίου ἁ ἐπιζευγνύουσα τὰ σαμεῖα ἁφῆς ἐσσεῖται παρὰ τὰν διάμετρον·

Ἔστω ἁμικύκλιον οὗ κέντρον τὸ Τ καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου Β, Γ ἐκβεβλήσθων εὐθεῖαι ἴσαι αἱ ΒΕ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σαμείων ἄχθων ἐπιψαύουσαι τοῦ ἁμικυκλίου αἱ ΕΖ, ΔΗ, διάχθω δὲ ἁ ΖΗ· φαμὶ δὴ ἁ ΖΗ ἐσσεῖται παρὰ τὰν ΕΔ.

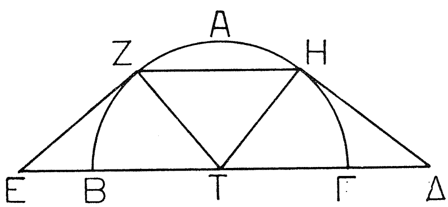
Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΤΗ, ΤΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσα ἐστὶν ἁ ΕΒ τᾷ ΓΔ, κοινὸν ποτικείσθω ἁ ΒΓ. ἔστιν ἄρα ἁ ΕΓ τᾷ ΒΔ ἴσα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΕΓ περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τᾶν ΔΓ, ΔΒ ἐστιν ἴσον· τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΕΓ περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνῳ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΓ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΗ. ἔστιν ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΔΗ τετράγωνα ἴσα καὶ ἁ ΕΖ τᾷ ΔΗ ἴσα. τρίγωνον ἄρα τὸ ΤΗΔ τριγώνῳ τῷ ΤΖΕ ἴσον ἐστὶ καὶ γωνίᾳ ἁ ὑπὸ ΗΤΔ τᾷ ὑπὸ ΖΤΕ ἐστιν ἴσα. περιφέρειαι ἄρα αἱ ΗΓ, ΖΒ ἐντι ἴσαι.ἔστιν ἄρα ἁ ΖΗ παρὰ τὰν ΒΓ, τουτέστιν παρὰ τὰν ΕΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

« Τὸ σύγγραμμα τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον μετέφρασεν ἐκ τῆς ἑλληνικῆς ὁ πρίγκηψ τῶν πιστῶν Tâbit Ibn Qurra » (Πρόλογος τοῦ Ἄραβος μεταφραστοῦ).

1

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἄκρα ἴσων προεκτάσεων τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ ἡμικυκλίου, ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὰ σημεῖα ἐπαφῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον.

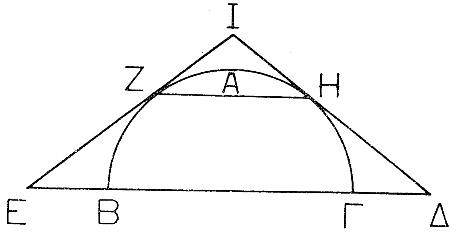
Ἀπόδειξις: Ἔστω Τ τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου. Φέρομεν τὴν ΤΗ καὶ τὴν ΤΖ. Ἐπειδὴ ΕΒ = ΓΔ καὶ ΒΓ κοινόν, ἕπεται ὅτι



ΕΓ = ΒΔ (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι β′). Εἶναι ἄρα ΕΒ × ΕΓ = ΔΓ × ΔΒ. Τὸ δὲ γινόμενον ΕΒ × ΕΓ = ΕΖ² καὶ τὸ γινόμενον ΔΓ × ΔΒ = ΔΗ², (Εὐκλ. γ′, λϛ′). Εἶναι ἄρα ΕΖ² = ΔΗ² (Εὐκλ. κοιν. ἔνν. α′). Καὶ ΕΖ = ΔΗ. Ἑπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΤΗΔ καὶ ΤΖΕ εἶναι ἴσα (διότι ΕΖ = ΔΗ, ΤΖ = ΤΗ = ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ΤΕ = ΤΔ)· ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΗΤΔ = γωνίαν ΖΤΕ (Εὐκλ. α′, η′). Εἶναι ἄρα τὰ δύο τόξα ΗΓ καὶ ΖΒ ἴσα, (Εὐκλ. γ′, κϛ′). Εἶναι ἄρα ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (Εὐκλ. α′, κζ′) ἤτοι ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς ΕΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΒ, ΕΓ περιεχόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΔΒ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΕΒ, ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΗ ἴσον καὶ πλευρὰ ἁ ΕΖ πλευρᾷ τᾷ ΔΗ ἴσα.



Ἐκβεβλήσθων αἱ ΕΖ, ΔΗ καὶ συμπιπτέσθων κατὰ τὸ Ι. ἐπεὶ οὖν ἁ ΙΖ τᾷ ΙΗ ἴσα ἐστὶ καὶ δέδεικται ἁ ΕΖ τᾷ ΔΗ ἴσα, ἔστιν ἄρα λόγος ὁ τᾶς ΕΖ ποτὶ τὰν ΖΙ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΗΙ. ἔστιν ἄρα ἁ ΖΗ παρὰ τὰν ΒΓ, τουτέστι τὰν ΕΔ.

β′

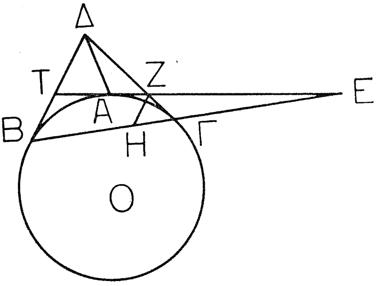
Εἴ κα ᾖ κύκλος καὶ σαμεῖόν τι ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου ἀχθέωντι δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ σαμεῖα ἁφᾶς λαφθῇ σαμεῖόν τι καὶ ἐκ τούτου ἀχθῇ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου τεμνέουσα τὰς δύο ἐπιψαυούσας, λόγος πάσας τᾶς ἀχθείσας ποτὶ τὸ τμᾶμα αὐτᾶς ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου ἐπὶ τὰν ἐγγύτερον τούτου κειμέναν ἐπιψαύουσαν, ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς

Ἄλλως τὸ αὐτὸ

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ΕΒ × ΕΓ = ΔΓ × ΔΒ καὶ ἐπειδὴ ΕΒ × ΕΓ = ΕΖ² καὶ ΔΓ × ΔΒ = ΔΗ² ἕπεται ὅτι ΕΖ² = ΔΗ², (Εὐκλ. γ, λϛ΄), δηλαδὴ ΕΖ = ΔΗ. Προεκτείνομεν τὰς δύο εὐθείας ΕΖ καὶ ΔΗ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ι. Ἡ εὐθεῖα ΙΖ = ΙΗ (Εὐκλ. γ΄, λϛ΄). Ἔχει δὲ ἀποδειχθῆ, ὅτι ΕΖ = ΔΗ. Εἶναι ἄρα ΕΖ : ΖΙ= ΔΗ : ΗΙ (Εὐκλ. ϛ΄, β΄). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἤτοι ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ.

2

Ἐὰν δοθῇ κύκλος καὶ σημεῖόν τι ἐκτὸς αὐτοῦ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου καὶ ἀφοῦ προεκβληθῇ ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ ληφθῇ σημεῖόν τι καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ



ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τέμνουσα τὰς δύο ἐφαπτομένας, ὁ λόγος ὅλης τῆς ἀχθείσης πρὸς τὸ τμῆμα αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου μέχρι τῆς πλησιεστέρας πρὸς τοῦτο ἐφαπτομένης εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς τμῆμα μέχρι τῆς *τμᾶμα ἐπὶ τὰν ἀπώτερον τοῦ λαφθέντος σαμείου ἐπιψαύουσαν ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἐγγύτερον τοῦ λαφθέντος σημείου.*

Δεδόσθω γὰρ κύκλος ἔχων κέντρον τὸ Ο καὶ ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς σαμείου Δ ἄχθων δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου αἱ ΔΒ, ΔΓ, διάχθω δὲ ἁ ΒΓ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ΒΓ ἄχθω ἐκ τοῦ σαμείου Ε ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Α τεμνέουσα τὰς δύο ἐπιψαυούσας ΔΒ, ΔΓ κατὰ τὰ Τ, Ζ. δεικτέον ὅτι ὅλα ἁ ΕΤ ποτὶ τὰν ΕΖ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΑΤ ποτὶ τὰν ΑΖ.

Ἀχθείσας γὰρ τᾶς ΖΗ παρὰ τὰν ΤΒ ἐσσεῖται λόγος ὁ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΗΖ ποτὶ τὰν ΖΓ. Ἀλλὰ ἁ ΒΔ τᾷ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ἔστιν ἄρα ἁ ΗΖ τᾷ ΖΓ ἴσα καὶ λόγος ὁ τᾶς ΤΕ ποτὶ τὰν ΕΖ ὁ αὐτὸς ἐσσεῖται τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΤΒ ποτὶ τὰν ΖΗ, τουτέστιν ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΤΒ ποτὶ τὰν ΖΓ, ἐπεὶ πλευρὰ ἁ ΖΗ πλευρᾷ τᾷ ΖΓ ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἁ ΤΒ τᾷ ΤΑ ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΖΑ τᾷ ΖΓ, ἔστιν ἄρα λόγος ὁ τᾶς ΤΕ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΤΑ ποτὶ τὰν ΑΖ.

γʹ

Εἴ κα ἀπὸ σαμείου τινὸς ἀχθέωντι δύο ἐπιψαύουσαι κύκλου καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου διαχθῇ εὐθεῖα τεμνέουσα τὸν κύκλον ἀπὸ δὲ τοῦ ἑνὸς σαμείου ἁφᾶς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν τεμνέουσαν καὶ ἀπὸ πέρατος τᾶς εὐθείας ταύτας ἐναρμοσθῇ εὐθεῖα ἐν τῷ κύκλῳ ἐπὶ τὸ ἄλλο πέρας τᾶς ἁφᾶς, αὕτα δίχα τέμνει τὸ ἐν τῷ κύκλῳ τμᾶμα τᾶς τεμνεούσας.

ἀπωτέρας ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἐφαπτομένης πρὸς τὸ τμῆμα τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τῆς πλησιέστερον πρὸς τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐφαπτομένης.

Ἔστω κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ο. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου φέρομεν δύο ἐφαπτομένας ΔΒ καὶ ΔΓ. Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ προκτείνομεν αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Ε. Ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸν κύκλον τὴν ΕΑ ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΒ εἰς τὸ σημεῖον Τ καὶ τὴν ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{\text{ΕΤ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΤ}}{\text{ΑΖ}}$.

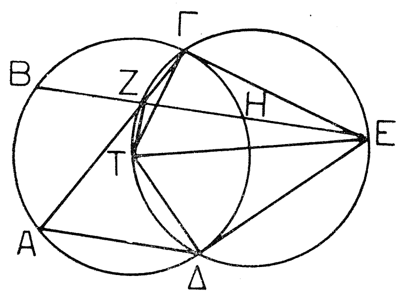
Ἐκ τοῦ σημείου Ζ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΤΒ, ὁπότε ἔχομεν $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΖΓ}}$ (Εὐκλ. α′, κθ′. ϛ′, δ′). Ἀλλὰ ΒΔ = ΔΓ (Εὐκλ. γ′, λζ′). Ἑπομένως ΗΖ = ΖΓ. Ἐκ τούτου ἔχομεν $\frac{\text{ΤΕ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΤΒ}}{\text{ΖΗ}}$ (1), καὶ ἐπειδὴ ΖΗ = ΖΓ ὁ λόγος γίνεται $\frac{\text{ΤΕ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΤΒ}}{\text{ΖΓ}}$ (1′) (Εὐκλ. α′, κθ′. ϛ′, δ′).

Ἀλλὰ ΤΒ = ΤΑ, ὡς ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ ΖΑ = ΖΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ὁ λόγος ἄρα (1′) γίνεται $\frac{\text{ΤΕ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΤΑ}}{\text{ΑΖ}}$.

3

Ἐὰν ἐκ σημείου τινὸς ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι κύκλου καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἀπὸ τοῦ ἑνὸς δὲ σημείου ἐπαφῆς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν τέμνουσαν καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς εὐθείας ταύτης ἐναρμοσθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ ἄλλου σημείου ἐπαφῆς, ἡ ἐναρμοσθεῖσα εὐθεῖα τέμνει τὸ εἰς τὸν κύκλον τμῆμα τῆς τεμνούσης εἰς δύο ἴσα μέρη.

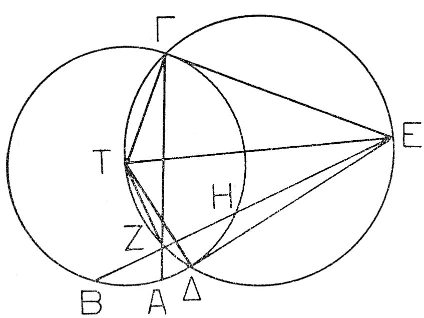
Ἔστω σαμεῖον Ε καθ' ὃ τεμνέοντι δύο ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου Τ αἱ ΕΓ, ΕΔ καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διάχθω εὐθεῖα τεμνέουσα τὸν κύκλον κατὰ τὰ Η, Β σαμεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου ἁφᾶς Δ ἄχθω εὐθεῖα παρὰ τὰν ΕΒ καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΑΓ τεμνέουσα τὰν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖαν ΒΗ κατὰ τὸ Ζ. φαμὶ δὴ τὰν ΖΒ τᾷ ΖΗ ἴσαν εἶμεν.



Ἐπεζεύχθων γὰρ αἱ ΤΖ, ΤΕ, ΤΓ, ΤΔ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΤΓ, ΤΔ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐντὶ ἴσαι καὶ ἁ ΕΓ τᾷ ΕΔ ἴσα, κοινὰ δὲ ἁ ΤΕ, ἔστιν ἄρα τρίγωνον τὸ ΕΓΤ τῷ ΕΔΤ τριγώνῳ ἴσον. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ΓΤΕ γωνίᾳ τᾷ ΕΤΔ ἴσα καὶ γωνία ἁ ΔΤΓ γωνίας τᾶς ΓΤΕ διπλασίων καὶ γωνία ἁ ΔΤΓ γωνίας τᾶς ΓΑΔ διπλασίων. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ΓΑΔ γωνίᾳ τᾷ ΓΤΕ ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ΔΑΓ γωνίᾳ τᾷ ΕΖΓ ἐστὶν ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ΕΤΓ γωνίᾳ τᾷ ΕΖΓ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἐν τετραπλεύρῳ αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΕΓΤ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΕΖΓ ἴσα. ἐπεὶ οὖν ἁ ὑπὸ ΕΓΤ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστί, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΕΖΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα. ἔστιν ἄρα ἁ ΤΖ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ ΤΖ εὐθεῖαν μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὰν ΒΗ πρὸς ὀρθὰς τέμνει δίχα αὐτὰν τέμνει. ἔστιν ἄρα ἁ ΖΒ τᾷ ΖΗ ἴσα.

Ἔστω ἐκ τοῦ σημείου Ε τομῆς δύο ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου Τ τῶν ΕΓ καὶ ΕΔ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Η, Β καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου ἐπαφῆς Δ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα ἡ ΔΑ παράλληλος πρὸς τὴν τέμνουσαν ΕΒ καὶ ἐκ τοῦ πέρατος Α τῆς χορδῆς ταύτης ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ ἄλλου σημείου ἐπαφῆς Γ, τέμνουσα τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου τμῆμα ΒΗ τῆς τεμνούσης εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Λέγω, ὅτι ΖΒ = ΖΗ.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΤΖ, ΤΕ, ΤΓ καὶ ΤΔ. Ἐπειδὴ ΤΓ = ΤΔ καὶ ΤΕ κοινὴ καὶ ΕΓ = ΕΔ, ἕπεται ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΕΓΤ καὶ ΕΔΤ εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΓΤΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΤΔ (Εὐκλ. α′, η′) καὶ ἡ γωνία ΔΤΓ = 2ΓΤΕ, καὶ ἡ γωνία ΔΤΓ = 2 ΓΑΔ (Εὐκλ. γ′, κ′) καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΓΑΔ = ΓΤΕ. Εἶναι ὅμως



γωνία ΔΑΓ = ΕΖΓ (Εὐκλ. α′, κθ′) καὶ συνεπῶς ἡ γωνία ΕΤΓ = ΕΖΓ (Εὐκλ. κοιν. ἐνν. α′). Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΕΓΖΤ δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον. Εἶναι ἄρα γωνία ΕΓΤ = ΕΖΤ, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΓΤ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΕΖΤ εἶναι ὀρθή. Ἑπομένως ἡ ΤΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΤΖ ἔχει ἀχθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Τ τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΗ, τέμνει αὐτὴν εἰς δύο ἴσα τμήματα, ἤτοι ΖΒ = ΖΗ, (Εὐκλ. γ′, γ′).

δ′

Εἴ κα ἁ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐκβληθῇ λαφθέωντι δὲ ἐπὶ τὰς πλευρᾶς καὶ τᾶς ἐκβολᾶς δύο σαμεῖα οὕτως, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἀποστάσεων τῶν σαμείων τούτων ἀπὸ μιᾶς κορυφᾶς τοῦ τριγώνου τῷ ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς πλευρᾶς τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν, ἀχθῇ δὲ εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ σαμείου τοῦ ἐγγύτερον τᾷ κορυφᾷ ταύτᾳ κειμένου παρὰ τὰν τᾷ καρυφᾷ ποτικειμέναν πλευράν, ἐπιζευχθείσας δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου τούτου εὐθείας ἐπὶ μέσαν τὰν πλευρὰν ταύταν καὶ διὰ τοῦ σαμείου, καθ' ὃ ἁ ἀχθεῖσα παράλλαλος τέμνει τὰν τρίταν πλευρὰν διαχθῇ εὐθεῖα συμβαλλέουσα τῷ ἐπὶ τᾶς ἐκβληθείσας λαφθὲν σαμεῖον, γωνία ἁ ὑπὸ τᾶς διαχθείσας καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους τᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, γωνίας τᾶς ὑπὸ τᾶς πρώτας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου καὶ τᾶς ἀχθείσας ἀπὸ τοῦ ἐγγύτερον τᾷ κορυφᾷ λαφθέντος σαμείου ἐπὶ μέσαν τὰν πλευρὰν διπλασίων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ βάσει ΒΓ ἁ ΑΔ, ἐκβληθείσας δὲ τᾶς ΒΑ λελάφθω σαμεῖόν τι τὸ Ε οὕτως, ὥστε τὸ ἀπὸ τῶν ἀποστάσεων τῶν σαμείων τούτων ἀπὸ μιᾶς κορυφᾶς τοῦ τριγώνου ἴσον εἶμεν τῷ ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς πλευρᾶς τετραγώνῳ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἁ ΔΖ καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἁ ΖΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΒΓ καὶ διάχθω ἁ ΕΗ. φαμὶ δή, ὅτι γωνία ἁ ὑπὸ ΕΗΓ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΑΖΔ διπλασίων ἐστίν.

Ἐπεζεύχθων οὖν αἱ ΔΗ, ΔΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν, γωνία ἁ ὑπὸ ΖΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΖΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΗΖΔ ἐστὶν ἴσα· γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΗΖΔ

4

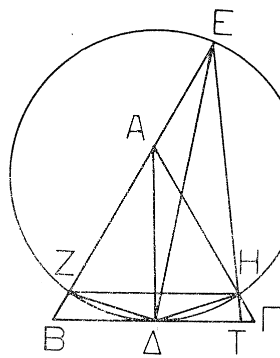
Ἐὰν ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου προεκταθῇ, ληφθῶσι δὲ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς προεκτάσεως δύο σημεῖα τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἐκ μιᾶς κορυφῆς τοῦ τριγώνου νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς, ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ σημείου τοῦ πλησιεστέρου πρὸς τὴν κορυφὴν ταύτην παράλληλος πρὸς τὴν εἰς αὐτὴν προσκειμένην πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ ἑνωθῇ τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὸν πόδα τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, ἑνωθῇ δὲ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς παραλλήλου ταύτης μετὰ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου μὲ τὸ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον, ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ μέρους τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ πλησιέστερον πρὸς τὴν κορυφὴν ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸν πόδα τοῦ ληφθέντος ὕψους τοῦ τριγώνου καὶ τῆς πρώτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Ε οὕτως, ὥστε $ΒΔ^2 = ΒΕ \times ΒΖ$ (Εὐκλ. γ′, λϛ′). Φέρομεν τὴν ΔΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Ζ φέρομεν τὴν ΖΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ φέρομεν τὴν ΕΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΕΗΓ = 2ΑΖΔ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΗ καὶ ΔΕ. Ἐπειδὴ $ΕΒ \times ΒΖ = ΔΒ^2$, ἡ γωνία ΖΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΖΕΔ [1]), (Εὐκλ. γ′, λζ′.γ,λβ′). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΖΔΒ = γωνίαν ΗΖΔ, (Εὐκλ. α′, κθ′)·

[1]) Διότι ἐκ τῆς σχέσεως $ΕΒ \times ΒΖ = ΔΒ^2$ ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Δ. Ἡ γωνία ἄρα ΕΖΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη, καὶ ἡ γωνία ΖΔΒ σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ συνεπῶς εἶναι ἴσαι (Εὐκλ. γ′, λβ′).

γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΗΖΔ τᾷ ὑπὸ ΖΗΔ ἐστὶν ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ΖΕΔ τᾷ ὑπὸ ΖΗΔ ἴσα καὶ τετράπλευρον τὸ ΕΖΔΗ ἐν κύκλῳ ἐστίν. ἐκβεβλήσθω δὴ ἁ ΕΗ ἐπὶ τὸ Τ. ἐπεὶ οὖν γωνία ἁ ΔΗΤ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ



ΕΖΔ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΕΖΔ τᾷ ΑΗΔ ἴσα, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΗΤ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΑΗΔ ἐστὶ διπλασίων. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΗΤ τᾷ ὑπὸ ΕΗΓ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΗΔ τᾷ ὑπὸ ΑΖΔ ἴσα. γωνία ἄρα ἁ ὑπὸ ΕΗΓ γωνίας τᾶς ὑπὸ ΑΖΔ ἐστὶ διπλασίων.

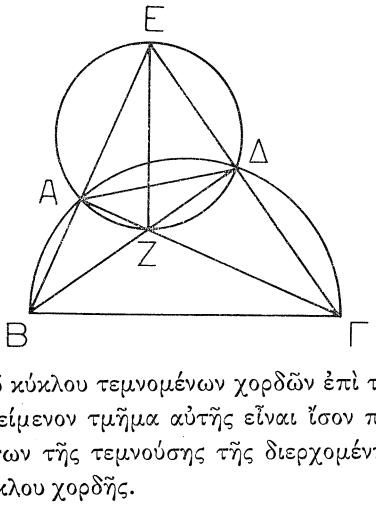
ε′

Εἴ κα ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς διαμέτρου ἁμικυκλίου ἀχθέωντι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἐκτός, τὰ δὲ σαμεῖα τομᾶς τοῦ ἁμικυκλίου ἐπιζευχθέωντι ἐναλλὰξ τοῖς περάτεσσι τούτοις, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ μιᾶς τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν καὶ τοῦ ἀπώτερον τᾶς διαμέτρου κειμένου τμάματος αὐτᾶς τῷ ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς εὐθείας τᾶς διὰ τοῦ πέρατος τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἀχθείσας ἴσον.

εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΗΖΔ = γωνίαν ΖΕΔ. Ἡ γωνία ὅμως ΗΖΔ = ΖΗΔ, (Εὐκλ. α′,ε′), διότι τὸ τρίγωνον ΗΖΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπομένως ἡ γωνία ΖΕΔ = γωνίαν ΖΗΔ καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΖΔΗ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Προεκτείνομεν τὴν ΕΗ μέχρι τοῦ σημείου Τ. Ἡ γωνία ΔΗΤ = γωνίαν ΕΖΔ, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν [1]) γωνίαν ΕΗΔ καὶ ἡ γωνία ΕΖΔ = ΑΗΔ. Ἡ γωνία ἄρα ΑΗΤ = 2ΑΗΔ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΑΗΤ = ΕΗΓ, (Εὐκλ. α′, ιε′) καὶ ἡ γωνία ΑΗΔ = ΑΖΔ. Εἶναι ἄρα γωνία ΕΗΓ = 2ΑΖΔ.

5

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου ἑνὸς ἡμικυκλίου ἀχθῶσι δύο χορδαὶ τεμνόμεναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὰ δὲ σημεῖα τομῆς τοῦ ἡμικυκλίου ἑνωθῶσιν ἐναλλὰξ μὲ τὰ ἄκρα ταῦτα, τὸ γινόμενον μιᾶς



ἐκ τῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων χορδῶν ἐπὶ τὸ ἀπώτερον πρὸς τὴν διάμετρον κείμενον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς τεμνούσης τῆς διερχομένης διὰ τοῦ ἄκρου τῆς ἐντὸς τοῦ κύκλου χορδῆς.

[1]) Διότι γωνία ΔΗΤ + γωνία ΕΗΔ = 2 ὀρθαὶ (ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ μὲ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας καὶ γωνία ΕΖΔ + ΕΗΔ = 2 ὀρθαί, ὡς ἀπέναντι γωνίαι τοῦ εἰς κύκλον ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΕΖΔΗ. Εἶναι ἄρα γωνία ΔΗΤ = γωνία ΕΖΔ).

Ἔστω γὰρ Β, Γ τὰ πέρατα διαμέτρου ἁμικυκλίου καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τούτων ἄχθων δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἐκτὸς κατὰ τὸ Ε καὶ ἐπεζεύχθων ἐναλλὰξ ἀπὸ μὲν τοῦ σαμείου τομᾶς Α τᾶς ΒΕ ἁ ΑΓ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ ἁ ΔΒ, τεμνέσθων δὲ αἱ ἀχθεῖσαι ΑΓ, ΔΒ κατὰ τὸ Ζ. φαμὶ δή, τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΖ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΕ ἴσον εἶμεν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΖ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΕ ἴσον ἐστίν, λόγος ὁ τᾶς ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ ὁ αὐτός ἐστι τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΕΔ ποτὶ τὰν ΔΖ. ἐπιζευχθείσας οὖν τᾶς ΕΖ ἐσσεῖται τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τριγώνῳ τῷ ΕΔΖ ὁμοῖον καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΒΓ τᾷ ὑπὸ ΔΕΖ ἴσα. ἐπεζεύχθω οὖν ἁ ΔΑ. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴσα, ἔστιν ἄρα καὶ ἁ ὑπὸ ΔΕΖ τᾷ ὑπὸ ΓΑΔ ἴσα καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΑΖΔ ἐν κύκλῳ ἐστὶν, ἐπεὶ γωνία ἁ ΕΔΖ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΕΑΖ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστί. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΕ ἴσον ἐστίν.

ϛ΄

Τὰς αὐτὰς καταγραφὰς γενομένας ὡς ἐν τῷ πρότερον, εἴ κα λαφθῇ ἀπὸ τοῦ σαμείου τομᾶς τῶν ἐν τῷ κύκλῳ τεμνομένων εὐθειῶν τμάματα ἴσα τοῖς γεωμετρικοῖς μέσοις τῶν εἰρημένων ὀρθογωνίων καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῶν τμαμάτων τούτων ἀχθέωντι εὐθεῖαι ποτὶ τὰ πέρατα τᾶς διαμέτρου, τμάματα τὰ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν γεωμετρικῶν μέσων μέχρι τοῦ σαμείου τομᾶς τῶν εὐθειῶν τούτων ἴσα ἐντί.

Ἔστω ἁμικύκλιον περὶ διάμετρον τὰν ΒΓ καὶ δύο σαμεῖα τὰ Α, Δ ἐπὶ τοῦ ἁμικυκλίου, σαμεῖον δὲ τὸ Ι καθ' ὃ

Ἔστωσαν τὰ δύο ἄκρα Β, Γ τῆς διαμέτρου ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ ἐκ τούτων ἂς ἀχθῶσιν δύο χορδαὶ τεμνόμεναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΒΕ μὲ τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ σημεῖον Δ τῆς ΓΕ μὲ τὸ σημεῖον Β. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΔΒ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $ΒΔ \times ΔΖ = ΓΔ \times ΔΕ$.

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς : Ἔστω ὅτι ἡ ἰσότης $ΒΔ \times ΔΖ = ΓΔ \times ΔΕ$ εἶναι ἀληθής. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{ΕΔ}{ΔΖ}$, (Εὐκλ. ς΄, ις΄), καὶ ἂν φέρωμεν τὴν ΕΖ τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΕΔΖ εἶναι ὅμοια καὶ ἡ γωνία ΔΒΓ = ΔΕΖ. Φέρομεν τὴν ΔΑ, ὁπότε ἡ γωνία ΔΒΓ = γωνίαν ΓΑΔ, (Εὐκλ. γ΄, κζ΄) καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΔΕΖ = γωνίαν ΓΑΔ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΕΑΖΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ὀρθὴ (Εὐκλ. γ΄, λα΄) καὶ ἡ γωνία ΕΑΖ εἶναι ὀρθή (Εὐκλ. γ΄, λα΄). Εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον $ΒΔ \times ΔΖ$ = γινόμενον $ΓΔ \times ΔΕ$.

6

Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ληφθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων χορδῶν, ἐπ᾽ αὐτῶν (τῶν χορδῶν) ἴσα τμήματα πρὸς τὰ γεωμετρικὰ μέσα τῶν εἰρημένων γινομένων καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τούτων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, τὰ τμήματα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων τῶν γεωμετρικῶν μέσων μέχρι τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν εἶναι ἴσα.

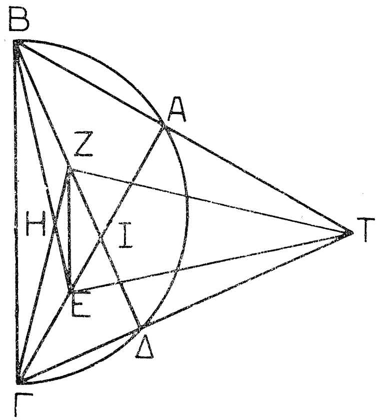
Ἔστω ἡμικύκλιον μὲ διάμετρον ΒΓ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Δ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου. Τὸ σημεῖον τομῆς Ι τῶν ΒΔ καὶ ΓΑ εἶναι ἐντὸς *συμβαλλέοντι αἱ ΒΔ, ΓΑ ἐντὸς τοῦ κύκλου ἔστω ἔτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΙ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΖ τετραγώνῳ ἴσον καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΑ, ΑΙ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνῳ ἴσον, ἐπεζεύχθων δὲ αἱ ΕΒ, ΖΓ τεμνόμεναι κατὰ τὸ Η σαμεῖον. φαμὶ δὴ τὰν ΖΗ ἴσαν εἶμεν τᾷ ΗΕ.*

Διαχθεῖσαι γὰρ αἱ ΒΑ, ΓΔ καὶ ἐκβληθεῖσαι τεμνάσθων ἐκτὸς τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Τ. καὶ δέδεικται ἐν τῷ πρότερον, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΙ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΤ ἴσον ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΑ, ΑΙ τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΑ, ΑΤ ἴσον. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΑ, ΑΤ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετραγώνῳ ἴσον καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΤ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΖ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΤΔΖ, ΤΑΕ ὀρθαί. εἴ κα οὖν ἀχθέωντι αἱ ΤΖ, ΤΕ γωνίαι αἱ ΤΖΗ, ΤΕΗ ὀρθαί ἐντι. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΤ, ΤΑ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΤ, ΤΔ ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΤ, ΤΑ τῷ ὑπὸ τᾶν ΒΑ, ΑΤ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΤ τετραγώνου, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΤ, ΤΔ τῷ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΔΤ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΤΔ τετραγώνου ἴσον καὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΤ, ΓΔ, ΔΤ συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΔΖ τετραγώνοις ἴσα, ἔστιν ἄρα συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν ΤΑ, ΑΕ τετράγωνα συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν ΤΔ, ΔΖ ἴσα. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΤΑ, ΑΕ τετράγωνα τῷ ἀπὸ τᾶς ΤΕ τετραγώνῳ ἴσα ἐντί, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΤΑΕ ὀρθά ἐστι. ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΖ τῷ ἀπὸ τᾶς ΤΕ τετραγώνῳ ἴσον καὶ πλευρὰ ἁ ΤΖ πλευρᾷ τᾷ ΤΕ ἴσα. ἐπιζευχθείσας οὖν τᾶς ΖΕ, γωνία ἁ ὑπὸ ΤΖΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΕΖ ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΤΖΗ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΤΕΗ ἐστιν ἴσα, τουτέστι μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΗΖΕ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΖΕΗ καὶ πλευρὰ ἁ ΗΖ τᾷ ΗΕ ἴσα.

δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

τοῦ κύκλου. Ἔστω ἐπίσης ὅτι ΒΔ $\times$ ΔΙ $=$ ΔΖ^2 καὶ ΓΑ $\times$ ΑΙ $=$ ΑΕ^2. Φέρομεν τὴν ΕΒ καὶ τὴν ΖΓ. Ἔστω Η τὸ σημεῖον τομῆς τούτων. (Λέγω, ὅτι ΗΖ $=$ ΗΕ).

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΑ καὶ τὴν ΓΔ καὶ προεκτείνομεν αὐτὰς μέχρι τοῦ σημείου τομῆς Τ ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔχομεν ἀποδείξει, ὅτι ΒΔ $\times$ ΔΙ $=$ ΓΔ $\times$ ΔΤ καὶ ΓΑ $\times$ ΑΙ $=$ ΒΑ $\times$ ΑΤ. Εἶναι ἄρα τὸ γινόμενον ΒΑ $\times$ ΑΤ $=$ΑΕ^2 καὶ τὸ γινόμενον ΓΔ $\times$ ΔΤ $=$ ΔΖ^2 καὶ αἱ γωνίαι ΤΔΖ καὶ ΤΑΕ



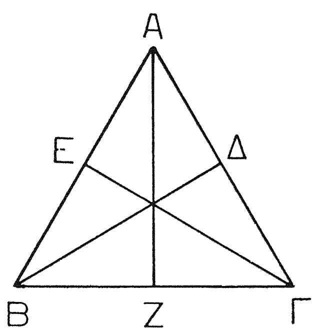
εἶναι ὀρθαὶ (Εὐκλ. γ′, λα′. α′, ιγ′). Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΤΖ καὶ ΤΕ αἱ γωνίαι ΤΖΗ καὶ ΤΕΗ εἶναι ὀρθαί. Ἐπειδὴ ΒΤ $\times$ ΤΑ $=$ ΓΤ $\times$ ΤΔ, (Εὐκλ. γ′, λε′) καὶ ΒΤ $\times$ ΤΑ $=$ ΒΑ $\times$ ΑΤ $+$ ΑΤ^2, (Εὐκλ. β′ γ′,) ΓΤ $\times$ ΤΔ $=$ ΓΔ $\times$ ΔΤ $+$ ΤΔ^2 καὶ ΒΑ$^2+$ ΑΤ$^2+$ ΓΔ^2 $+$ ΔΤ^2 $=$ ΑΕ^2 $+$ ΔΖ^2 θὰ εἶναι ΤΑ$^2+$ ΑΕ^2 $=$ ΤΔ^2 $+$ ΔΖ^2. Ἀλλὰ ΤΑ^2 $+$ ΑΕ^2 $=$ ΤΕ^2, (Εὐκλ. α′, μζ′), διότι ἡ γωνία ΤΑΕ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως ΤΖ^2 $=$ ΤΕ^2 καὶ ΤΖ $=$ ΤΕ, καὶ ἂν ἑνώσωμεν τὸ σημεῖον Ζ μὲ τὸ Ε, αἱ δύο γωνίαι ΤΖΕ καὶ ΤΕΖ θὰ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΤΖΗ $=$ ΤΕΗ $=$ μίαν ὀρθήν. Ἑπομένως ἡ γωνία ΗΖΕ $=$ γωνία ΖΕΗ καὶ ΗΖ $=$ ΗΕ (Εὐκλ. α′, ε′). ὅ.ἔ.δ.

ζ'

Εἴ κα ἀπὸ σαμείου τινὸς ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀχθέωντι τρεῖς καθέτοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς πᾶσαι αἱ καθέτοι αὗται τῷ ὕψει τοῦ τριγώνου ἴσαι ἐντί.

Ἔστω ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἔστω πρότερον καθέτοι ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὰς βάσιας ἀγμέναι αἱ ΑΖ, ΒΔ, ΓΕ. φαμὶ δὴ αἱ ἀγμέναι καθέτοι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἐπεὶ γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἰσοσκελές ἐστι, κάθετος ἁ ΑΖ κάθετος ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ΒΓ ἀγμένα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΒΖ τᾷ ΖΓ ἴσα. Διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ τρίγωνον τὸ ΒΓΑ ἰσοσκελές ἐστι, κάθετος ἁ ΓΕ ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ΑΒ ἀγμένα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΑΕ τᾷ ΕΒ ἴσα, τουτέστιν τᾷ ΓΖ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΑΕΓ, ΑΖΓ ἴσα ἐντί, ἐπεὶ πλευρὰ ἁ ΑΕ ἴσα τᾷ ΓΖ ἐστι, βάσις δὲ ἁ ΑΓ κοινά, γωνία δὲ ἁ ὑπὸ ΕΑΓ τᾷ ὑπὸ ΖΓΑ ἴσα, ἔστιν ἄρα πλευρὰ ἁ ΑΖ τᾷ ΓΕ ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ τρίγωνον τὸ ΓΒΑ ἰσοσκελές ἐστι, κάθετος ἁ ΒΔ ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ΑΓ ἀγμένα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ ἴσα καὶ ΔΓ τᾷ ΒΕ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΔΓ, ΓΕΒ ἴσα ἐντί, ἐπεὶ πλευρὰ ἁ ΒΕ τᾷ ΓΔ ἐστὶν ἴσα καὶ βάσις ἁ ΒΓ κοινά, γωνία δὲ ἁ ΕΒΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΓΒ ἴσα, ἔστιν ἄρα πλευρὰ ἁ ΒΔ τᾷ ΓΕ ἴσα. δέδεικται δέ, ὅτι ἁ ΑΖ τᾷ ΓΕ ἴσα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΑΖ τᾷ ΒΔ ἴσα, τουτέστιν τρεῖς αἱ ΑΖ, ΒΔ, ΓΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί·



7

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἔκ τινος σημείου εὑρισκομένου ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀγομένων ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καθέτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος.

Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ φέρωμεν ἀντιστοίχως τὰς καθέτους ΑΖ, ΒΔ, ΓΕ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ἡ κάθετος ΑΖ εἶναι καὶ διάμεσος· εἶναι ἄρα ΒΖ = ΖΓ. Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΓΑ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἡ κάθετος ΓΕ εἶναι καὶ αὐτὴ διάμεσος· εἶναι ἄρα ΑΕ = ΕΒ, καὶ συνεπῶς ΓΖ = ΑΕ (Εὐκλ. κοιν. ἐνν. α′). Λαμβάνομεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΑΖΓ. Ταῦτα εἶναι ἴσα ἐπειδὴ ἔχουν τὴν ΑΓ κοινήν, τὴν ΑΕ = ΓΖ καὶ τὴν γωνίαν ΕΑΓ = ΖΓΑ (Εὐκλ. α′, δ′). Εἶναι ἄρα ΑΖ = ΓΕ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΒΑ εἶναι ἰσοσκελὲς ἡ κάθετος ΒΔ εἶναι καὶ διάμεσος. Ἑπομένως ΑΔ = ΔΓ· εἶναι ἄρα ΔΓ = ΒΕ. Λαμβάνομεν τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΓΕΒ. Ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἡ ΒΓ εἶναι κοινή, ἡ ΒΕ = ΓΔ καὶ ἡ γωνία ΕΒΓ = ΔΓΒ. Ἑπομένως ΒΔ = ΓΕ. Ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει ὅτι ΑΖ = ΓΕ. Εἶναι ἄρα ΑΖ = ΒΔ (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι α′)· καὶ συνεπῶς ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ.

(Σημείωσις. Ὁ μαθηματικὸς κ. Δημήτριος Βάθης παρέσχεν εἰς ἡμᾶς τὴν πληροφορίαν, δι' ἐπιστολῆς του ἀπὸ 8 - 8 - 1971, ἐξ Ἁγίου Νικολάου Χαλκίδος, ὅτι τὸ θεώρημα αὐτὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (καὶ τὰ δύο κατωτέρω) ὑπάρχει εἰς ὅλα τὰ βιβλία τῆς γεωμετρίας, ὡς ἄσκησις, χωρὶς νὰ ἀναφέρηται ὅτι εἶναι πρότασις τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐπὶ πλέον δὲ ὅτι εἰς τὸ βιβλίον « 100 Great Problems of Elementary Mathematics » (Dover Publications) ἡ πρότασις αὕτη ἀναφέρεται ὡς θεώρημα τοῦ Viviani (1622 - 1703) Ἰταλοῦ μαθηματικοῦ, μαθητοῦ τοῦ Γαλιλαίου καὶ τοῦ Τορικέλλι ! ! !).

η′

Ἔστω πάλιν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἁ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ΒΓ ἀγμένα κάθετος. λελάφθω ἐπὶ τᾶς ΒΔ σαμεῖόν τι Ε καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἄχθων πρὸς ὀρθὰς ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς ταῖς ΑΒ, ΑΓ αἱ ΕΗ, ΕΖ. φαμὶ δή, ὅτι ἁ ΑΔ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΗ, ΕΖ ἴσα ἐστίν.

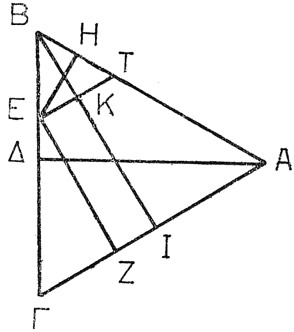
Ἄχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΑΓ ἁ ΕΤ καὶ ἀπὸ τοῦ Β ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ ἁ ΒΙ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ παρὰ τὰν ΑΓ ἆκται ἁ ΕΤ, ἐσσεῖται καὶ τρίγωνον τὸ ΒΕΤ ἰσόπλευρον. καὶ ἐπεὶ ἁ ΒΙ τᾷ ΑΓ ποτ' ὀρθὰς ἆκται καὶ ἁ ΕΤ παρὰ τὰν ΑΓ, ἔστιν ἄρα ἁ ΒΚΙ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΕΤ, καὶ ἁ ΚΙ τᾷ ΕΖ ἴσα, ἐπεὶ σχᾶμα τὸ ΕΚΙΖ ὀρθογώνιόν ἐστι. καὶ δέδεικται ἐν τῷ πρότερον, ὅτι τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. ἔστιν ἄρα ἁ ΕΗ τᾷ ΒΚ ἴσα καὶ συναμφότερος ἁ ΒΚ, ΚΙ, συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΗ, ΕΖ ἴσα ἐστί, τουτέστιν ἁ ΒΙ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΗ, ΕΖ ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ ἁ ΒΙ τᾷ ΑΔ ἐστὶν ἴσα. ἔστιν ἄρα ἁ ΑΔ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΗ, ΕΖ ἴσα.

θ′

Ἔστω πάλιν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἁ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ μέσαν τὰν βάσιν ΒΓ ἀγμένα κάθετος, λελάφθω δὲ σαμεῖόν τι τὸ Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἄχθων ποτ' ὀρθὰς ταῖς βάσεσσιν ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αἱ ΕΗ, ΕΖ, ΕΤ. φαμὶ δὴ τὰν ΑΔ κάθετον, ταῖς καθέτοις ΕΖ, ΕΗ, ΕΤ ἴσαν εἶμεν.

8

Ἔστω πάλιν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ἐπὶ τῆς ΒΔ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε καὶ ἐκ τοῦ σημείου τούτου φέρομεν τὰς δύο καθέτους ΕΗ καὶ ΕΖ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ = ΖΕ + ΕΗ.



Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ΕΤ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΙ ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΓ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΤ, τὸ τρίγωνον ΒΕΤ εἶναι ἰσόπλευρον (Εὐκλ. ς′,β′). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΤ, ἡ ΒΚΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΤ (Εὐκλ. α′, κθ′) καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΙ = ΕΖ (Εὐκλ. α′, λδ′), διότι τὸ ΕΚΙΖ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει, ὅτι τὰ ὕψη εἰς ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΕΗ = ΒΚ. Θὰ εἶναι ἄρα ΒΚ + ΚΙ = ΕΗ + ΕΖ, δηλαδὴ ΒΙ = ΕΗ + ΕΖ. Ἀλλὰ ΒΙ = ΑΔ. Θὰ εἶναι ἄρα ΑΔ = ΕΗ + ΕΖ.

9

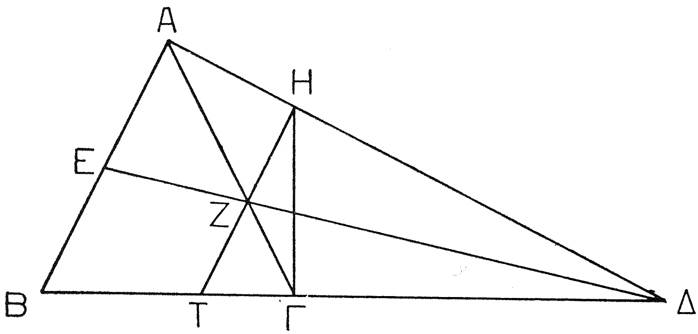
Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.

Ἔστω τὸ τυχὸν σημεῖον Ε ἐντὸς τοῦ τριγώνου. Ἐκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὰς καθέτους ΕΗ, ΕΖ, καὶ ΕΤ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒ, ΒΓ, καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ = ΕΖ + ΕΗ + ΕΤ.

Ἄχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΒΓ εὐθεῖα ἁ ΙΕΛΚ. ἐπεὶ οὖν ἁ ΙΚ παρὰ τὰν ΒΓ ἆκται καὶ ἁ ΕΖ παρὰ τὰν ΔΛ σχᾶμα τὸ ΖΕΛΔ ὀρθογώνιόν ἐστι· ἔστιν ἄρα ἁ ΖΕ τᾷ ΔΛ ἴσα. καὶ ἐπεὶ ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ βάσει ΒΓ ἆκται ἁ ΑΔ καὶ παρὰ τὰν βάσιν ΒΓ ἁ ΙΚ, ἐσσεῖται τρίγωνον τὸ ΑΙΚ ἰσόπλευρον. καὶ δέδεικται ἐν τῷ πρότερον, ὅτι εἴ κα ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ ΑΙΚ καὶ ἀπὸ σαμείου τινὸς Ε βάσιος τᾶς ΙΚ ἀχθέωντι δύο καθέτοι ἁ μὲν ΕΗ ἐπὶ βάσιν τὰν ΑΙ, ἁ δὲ ΕΤ ἐπὶ βάσιν τὰν ΑΚ τὸ ὕψος τριγώνου τοῦ ΑΙΚ συναμφοτέρῳ τᾷ ΕΗ, ΕΤ ἴσον ἐστίν. καὶ δέδεικται, ὅτι αἱ ΖΕ, ΔΛ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί. συναμφότερος ἄρα ἁ ΑΛ, ΛΔ πάσαις ταῖς ΕΗ, ΕΤ, ΕΖ ἴσαι ἐντί, τουτέστιν ἁ ΑΔ πάσαις ταῖς ΕΗ, ΕΤ, ΕΖ ἴσα.

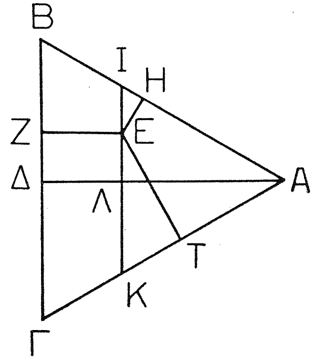
ι'

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ μίαν τᾶν ἰσᾶν πλευρᾶν τεμνέουσα τὰν ἐκβολὰν τᾶς



βάσιος τοῦ τριγώνου καὶ ἀπὸ τοῦ σαμείου τομᾶς ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ μέσαν τὰν εἰρημέναν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τοῦ μέσου τομᾶς τᾶς εὐθείας ταύτας καὶ τᾶς ἑτέρας πλευρᾶς ἀχθῇ παράλληλος τᾷ πρώτᾳ πλευρᾷ, ἁ ἑτέρα πλευρὰ μέσον ἀνάλογόν ἐστιν

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς : 'Εκ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΙΕΛΚ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. 'Επειδὴ ἡ ΙΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΛ, τὸ σχῆμα ΖΕΛΔ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως ΖΕ = ΔΛ (Εὐκλ. α', λδ'). 'Επίσης ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευ-



ρον καὶ ἡ ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος του καὶ ἐπειδὴ ἡ ΙΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΙΚ εἶναι ἰσόπλευρον (Εὐκλ. ς'. β'). Καὶ ὡς ἔχομεν ἀποδείξει εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἐὰν εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΙΚ, ἐκ τυχόντος σημείου Ε κειμένου εἰς τὴν βάσιν του ΙΚ φέρωμεν δύο καθέτους ΕΗ καὶ ΕΤ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΙ καὶ ΑΚ, τότε τὸ ὕψος ΑΛ = ΕΗ + ΕΤ. Καὶ εἶναι ΛΔ = ΖΕ. Εἶναι ἄρα ΑΛ + ΛΔ = ΕΗ + ΕΤ + ΕΖ, δηλαδὴ ΑΔ = ΕΗ + ΕΤ + ΕΖ.

10

'Εὰν εἰς τὴν κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν τέμνουσα τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ ἐκ τοῦ σημείου τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ μέσου τῆς εἰρημένης πλευρᾶς καὶ ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν πρώτην *πάσας τᾶς ἐπὶ τὰν κορυφὰν ἀχθείσας καθέτου καὶ τοῦ μεταξὺ τᾶς κορυφᾶς καὶ τᾶς ἀχθείσας παραλλάλου τμάματος αὐτᾶς.*

Ἔστω γὰρ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ κορυφᾶς τᾶς Α ἄχθω κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ ἁ ΑΔ, ἃ συμβαλλέτω τᾷ ἐκβολᾷ τᾶς βάσιος τοῦ τριγώνου κατὰ τὸ Δ σαμεῖον καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄχθω ἐπὶ μέσαν τὰν ΑΒ τὰν Ε ἁ ΕΔ, τεμνέουσα τὰν ΑΓ κατὰ τὸ Ζ σαμεῖον καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἄχθω παρὰ τὰν ΑΒ ἁ ΖΗ. δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΑ, ΑΗ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἁ ΗΖ ἐπὶ τὸ Τ σαμεῖον. ἐπεὶ οὖν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἰσοσκελές ἐστι καὶ παρὰ τὰν ΑΒ ἆκται ἁ ΖΤ, ἔστιν ἄρα ἁ ΖΤ τᾷ ΖΓ ἴσα. πάλιν, ἐπεὶ ἁ ΑΕ τᾷ ΕΒ ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ΗΤ ἆκται παρὰ τὰν ΕΒ, ἔστιν ἄρα ἁ ΖΗ τᾷ ΖΤ ἴσα, καὶ δέδεικται, ὅτι ἁ ΖΤ τᾷ ΖΓ ἴσα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΖΗ τᾷ ΖΓ ἴσα, τουτέστιν τᾷ ΖΤ. καὶ διαχθείσας τᾶς ΗΓ ἐσσεῖται γωνία ἁ ὑπὸ ΗΓΤ ὀρθὰ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τριγώνου τοῦ ΗΓΤ, αἱ ΖΗΓ, ΖΤΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι καὶ γωνία ἁ ΖΤΓ τᾷ ΑΒΓ ἴσα. γωνίαι ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΖΗΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι ἐντὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ τᾷ ὑπὸ ΖΗΓ ἴσα. ἀλλὰ γωνία ἁ ὑπὸ ΖΗΓ τᾷ ὑπὸ ΖΓΗ ἐστιν ἴσα. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ τᾷ ὑπὸ ΖΓΗ ἴσα. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΑ, ΑΗ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον.

ια´

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τριγώνου ἀχθῇ εὐθεῖα τεμνέουσα τὰν βάσιν οὕτως, ὥστε γωνία ἁ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας πλευράν, ἡ ἄλλη πλευρὰ εἶναι τὸ γεωμετρικὸν μέσον ὅλης τῆς ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἀχθείσης καθέτου καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς μέχρι τῆς ἀχθείσης παραλλήλου.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ. Ἐκ τοῦ σημείου Ε, μέσου τῆς ΑΒ, φέρομεν τὴν ΕΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ζ φέρωμεν τὴν παράλληλον ΖΗ πρὸς τὴν ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΔΑ × ΑΗ = ΑΓ².

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Προεκτείνομεν τὴν ΗΖ μέχρι τοῦ σημείου Τ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ ΖΤ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἕπεται, ὅτι ΖΤ = ΖΓ. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΒ καὶ ἡ ΕΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΤ, ἕπεται, ὅτι ΖΗ = ΖΤ. Καὶ ἔχομεν ἀποδείξει ὅτι ΖΤ = ΖΓ. Εἶναι ἄρα ΖΗ = ΖΓ καὶ ΖΤ = ΖΗ = ΖΓ. Φέρομεν τὴν ΗΓ. Ἡ γωνία ΗΓΤ εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΗΓΤ ἤτοι γωνία ΖΗΓ + γωνία ΖΤΓ = 1 ὀρθή, καὶ ἡ γωνία ΖΤΓ = γωνία ΑΒΓ, (Εὐκλ. α',ε'). Ἑπομένως ἡ γωνία ΑΒΓ + ΖΗΓ = 1 ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ + ΑΔΒ = 1 ὀρθή. Εἶναι ἄρα γωνία ΑΔΒ = γωνία ΖΗΓ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΖΗΓ = γωνίαν ΖΓΗ (Εὐκλ. α',ε'). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΔΒ = γωνίαν ΖΓΗ. Ἑπομένως ΔΑ × ΑΗ = ΑΓ², ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΗΓ καὶ ΑΓΔ [1]).

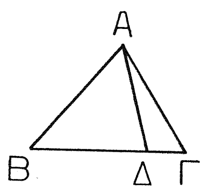
11

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τριγώνου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν βάσιν, ὥστε ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ μιᾶς

---

1) Τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, διότι ἡ γωνία ΑΓΗ = γωνίαν ΑΔΒ καὶ ἡ γωνία ΓΑΗ εἶναι κοινή. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΗ}}$ καὶ συνεπῶς ΔΑ × ΑΗ = ΑΓ² (Εὐκλ. ϛ', ιϛ').

καὶ μιᾶς τᾷ κορυφᾷ ποτικειμένης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ τᾶς ἑτέρας πλευρᾶς καὶ τᾶς βάσιος τοῦ τριγώνου ἴσαν εἶμεν, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τᾶς βάσιος καὶ τοῦ τμάματος τᾶς βάσιος τὸ μὴ ποτικείμενον τᾷ παρὰ τᾷ βάσει εἰρημένᾳ γωνίᾳ τῷ ἀπὸ τᾶς τᾷ κορυφᾷ τᾶς πρώτας γωνίας ποτικειμένας πλευρᾶς τετραγώνῳ ἴσον.



Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ἐπὶ τὰν βάσιν ἁ ΑΔ οὕτως, ὥστε γωνίαν τὰν ὑπὸ ΔΑΒ τᾷ ὑπὸ ΑΓΒ ἴσαν εἶμεν. φαμὶ δὴ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΒΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΔΒ, ΓΑΒ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΒ ἴσα ἐστὶ καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΔ κοινά, ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΑΔΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσα· τὰ δύο ἄρα εἰρημένα τρίγωνα τὰ ΑΔΒ, ΓΑΒ ὁμοῖά ἐντι. ἔστιν ἄρα λόγος ὁ τᾶς ΔΒ ποτὶ τὰν ΑΒ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΓΒ, τουτέστιν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΓΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν.

ιβ′

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ τις εὐθεῖα ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ βάσει, τὸ δὶς ὑπὸ τᾶς βάσιος καὶ ἑνὸς τῶν τμαμάτων αὐτᾶς, τῷ ἀπὸ μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ πλευρὰν ἔχον τὰν ΑΒ πλευρᾷ τᾷ ΒΓ ἴσαν καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ᾽ ὀρθὰς βάσει τᾷ ΒΓ ἁ ΑΔ. φαμὶ δή, τὸ δὶς ὑπὸ τᾶν ΔΓ, ΓΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν.

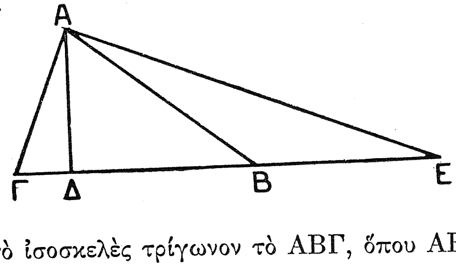
εἰς τὴν κορυφὴν προσκειμένης πλευρᾶς νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ μὴ προσκείμενον πρὸς τὴν παρὰ τὴν βάσιν εἰρημένην γωνίαν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ἀρχικῆς γωνίας προσκειμένης πλευρᾶς.

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ τὴν γωνίαν ΔΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΑΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΓΒ \times ΒΔ = ΑΒ^2$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΑΒ εἶναι ὅμοια διότι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως γωνία ΑΓΒ = ΔΑΒ καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ κοινὴ καὶ συνεπῶς γωνία ΑΔΒ = γωνία ΒΑΓ. Τὰ δύο ἄρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΓΑΒ εἶναι ὅμοια. Θὰ εἶναι ἄρα $\frac{ΔΒ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΓΒ}$,(Εὐκλ. ϛ',δ') καὶ ἐκ τούτου $ΔΒ \times ΓΒ = ΑΒ^2$.

12

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ ἓν τῶν τμημάτων αὐτῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.



Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὅπου ΑΒ = ΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $2ΔΓ \times ΓΒ = ΑΓ^2$.

Ἄχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἁ ΑΕ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἁ ΓΒ ἐπὶ τὸ Ε σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΕΑΓ ὀρθά ἐστι καὶ πλευρὰ ἁ ΑΒ πλευρᾷ τᾷ ΒΓ ἴσα, ἐσσεῖται καὶ ἁ ΑΒ τᾷ ΒΓ, τουτέστι τᾷ ΒΕ ἴσα. ἔστιν ἄρα πλευρὰ ἁ ΕΓ πλευρᾶς τᾶς ΓΒ διπλασίων καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΓ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΑ τετραγώνῳ ἴσον. δύο δὴ τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΕΓΑ ὁμοῖά ἐντι, ἐπεὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΕΔΑ ὀρθαί ἐντι καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΓΔ κοινά ἐστι. ἐπεὶ οὖν ἁ ΕΓ τᾶς ΓΒ διπλασίων ἐστί, ἔστιν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΓΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον.

ιγ'

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τριγώνου τινὸς ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ βάσει, λαφθέωντι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν τμαμάτων καθ' ἃ ἁ ἀχθεῖσα τέμνει τὰν βάσιν τετράγωνα, ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ τῶν τετραγώνων τούτων τᾷ ὑπεροχᾷ τῶν ἀπὸ τῶν παρὰ τὰν βάσιν ποτικειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου τετραγώνων ἴσα.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἁ ΑΔ ἀχθεῖσα ποτ' ὀρθὰς τᾷ βάσει ΒΓ. φαμὶ δή, ὅτι ἁ ὑπεροχὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνου τᾷ ὑπεροχᾷ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΔ ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ ἴσα ἐστίν.

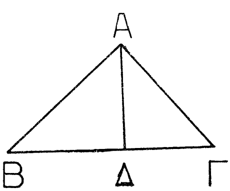
Ἐπεὶ γὰρ δύο τρίγωνα τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ ὀρθογώνιά ἐντι, ἔστιν ἄρα τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΒΔ τετραγώνοις. καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ὑπεροχὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΓ, τᾷ ὑπεροχᾷ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου ἴσα.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: 'Εκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΓΒ μέχρι τοῦ σημείου Ε. 'Επειδὴ ἡ γωνία ΕΑΓ εἶναι ὀρθὴ καὶ ΑΒ = ΒΓ, θὰ εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΒΕ. Εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ ΕΓ = 2ΓΒ καὶ ΕΓ × ΓΔ = $\Gamma\mathrm{A}^2$, (Εὐκλ. ς', η' πόρ.) διότι τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΕΓΑ εἶναι ὅμοια (Εὐκλ. ς',η'), ἐπειδὴ γωνία ΕΑΓ = γωνία ΕΔΑ = 1 ὀρθὴ καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι κοινή. Καὶ ἐπειδὴ ΕΓ = 2ΓΒ θὰ ἔχωμεν 2ΓΒ × ΓΔ = $\mathrm{A}\Gamma^2$.

13

'Η διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ βάσις τριγώνου τινὸς χωρίζεται ὑπὸ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν προσκειμένων εἰς τὴν βάσιν πλευρῶν.

"Εστω τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\mathrm{AB}^2 - \mathrm{A}\Gamma^2 = \mathrm{B}\Delta^2 - \Delta\Gamma^2$.



'Α π ό δ ε ι ξ ι ς: "Ας θεωρήσωμεν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{A}\Delta^2 + \mathrm{B}\Delta^2, \text{ (Εὐκλ. α', μζ')} \qquad (1)$$

καὶ $$\mathrm{A}\Gamma^2 = \mathrm{A}\Delta^2 + \Delta\Gamma^2. \text{ (Εὐκλ. α', μζ').} \qquad (2)$$

'Αφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν δευτέραν ἰσότητα ἀπὸ τῆς πρώτης θὰ ἔχωμεν $\mathrm{AB}^2 - \mathrm{A}\Gamma^2 = \mathrm{B}\Delta^2 - \Delta\Gamma^2$.

ιδ'

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τᾶς ὀρθᾶς γωνίας τριγώνου ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ μέσαν τὰν ὑποτείνουσαν πλευράν, ἁ ἀχθεῖσα ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων τᾶς ὑποτεινούσας ἴσα ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὰν γωνίαν ἔχον τὰν κατὰ τὸ Α, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ μέσαν τὰν ΒΓ ὑποτείνουσαν ἄχθω ἁ ΑΔ. φαμὶ δή, ὅτι ἁ ἀγμένα ΑΔ ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ΒΔ, ΔΓ ἴσα ἐστίν.

Ἄχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου ἁ ΔΕ παρὰ τὰν ΒΑ πλευράν. Ἐπεὶ οὖν ἁ ΒΔ τᾷ ΔΓ ἴσα ἐστὶν καὶ ἁ ΔΕ ἆκται παρὰ τὰν ΒΑ, ἔστιν ἄρα ἁ ΑΕ τᾷ ΕΓ ἴσα καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΓ γωνιῶν ὀρθά ἐστι. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα ἐντὶ τὰ ΑΔΕ, ΓΔΕ, ἔχοντα γωνίαν τὰν ΔΕΑ γωνίᾳ τᾷ ΔΕΓ ἴσαν, πλευρὰν δὲ τὰν ΑΕ τᾷ ΕΓ ἴσαν, τὰν δὲ ΔΕ κοινάν, ἔστιν ἄρα πλευρὰ ἁ ΑΔ τᾷ ΔΓ, τουτέστι τᾷ ΒΔ ἴσα.

ιε'

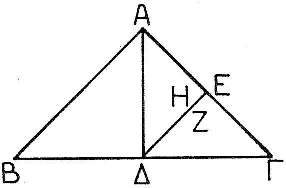
Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἐπὶ τὰν βάσιν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς βάσιος μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας τετραγώνου τῷ τετραγώνῳ ἑκατέρας τῶν ἴσων πλευρῶν ἴσον ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἔχον πλευρὰν τὰν ΑΒ τᾷ ΑΓ ἴσαν καὶ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς Α ἄχθω ἐπὶ τὰν βάσιν τὰν ΒΓ εὐθεῖά τις ἁ ΑΔ. φαμὶ δή, τὸ ὑπὸ τῶν τμαμάτων ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΑ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἴσον εἶμεν.

14

Ἡ διχοτομοῦσα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς ἕκαστον τῶν τμημάτων αὐτῆς.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή. Λαμβάνομεν σημεῖόν τι Δ εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ φέρομεν τὴν ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ = ΒΔ = ΔΓ.



Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐπειδὴ ΒΔ = ΔΓ καὶ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΑ, ἡ ΑΕ = ΕΓ. Καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΕΔ, ΔΕΓ εἶναι ὀρθὴ (Εὐκλ. α′, κθ′). Ἄς θεωρήσωμεν τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΓΔΕ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα διότι ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΔΕΓ = 1 ὀρθὴν καὶ ΑΕ = ΕΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ εἶναι κοινή. Θὰ εἶναι ἄρα ΑΔ = ΔΓ. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι ΔΒ = ΔΓ. Θὰ εἶναι ἄρα ΑΔ = ΔΒ = ΔΓ (Εὐκλ. α′, δ′ καὶ κοιναὶ ἔνν. α′).

15

Τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη τέμνεται ὑπὸ εὐθείας ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς τεμνούσης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου ΑΒ = ΑΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\mathrm{B\Delta} \times \mathrm{\Delta\Gamma} + \mathrm{\Delta A}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2$.

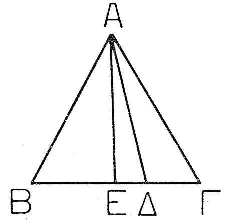
Ἄχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σαμείου βάσει τᾷ ΒΓ ποτ' ὀρθάς, ἁ ΑΕ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἁ ΒΓ τέτμαται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ, ἐσσεῖται τὸ ὑπὸ τᾶν ἀνισᾶν τᾶς ὅλας τμαμάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τῶν τομῶν τᾶς ΕΔ τετραγώνου, τῷ ἀπὸ τᾶς ἁμισείας τᾶς ΕΓ τετραγώνῳ ἴσον. κοινὸν ποτικείσθω τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΑΕ τετραγώνων ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΑΕ τετραγώνοις. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετραγώνῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ. ἔστιν ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ.

ιϛ'

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθέωντι δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι τὰν βάσιν, ὁ λόγος δὲ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς βάσιος τᾶς πρώτας τομᾶς ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τεμνούσας τετράγωνον ὁ αὐτός ἐστιν, τοῦ, ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς βάσιος τᾶς ἑτέρας τομᾶς ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας τεμνούσας τετράγωνον, αἱ τεμνέουσαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς Α ἄχθων δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν βάσιν ΒΓ, αἱ ΑΕ, ΑΔ οὕτως, ὥστε τὸν λόγον τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθογωνίου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ἴσον εἶμεν τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΕ, ΕΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΕ τετράγωνον. φαμὶ δή, ὅτι αἱ τεμνέουσαι ΔΑ, ΑΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΒΓ ἔχει διαιρεθῆ εἰς τὸ σημεῖον Ε εἰς δύο ἴσα τμήματα καὶ εἰς τὸ σημεῖον Δ εἰς δύο ἄνισα τμήματα, θὰ



ἔχωμεν $ΒΔ \times ΔΓ + ΕΔ^2 = ΕΓ^2$ (Εὐκλ. β′,ε′). Ἄς προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸ $ΑΕ^2$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν $ΒΔ \times ΔΓ + ΕΔ^2 + ΑΕ^2 = ΕΓ^2 + ΑΕ^2$. Ἀλλὰ $ΑΕ^2 + ΕΔ^2 = ΑΔ^2$ (Εὐκλ. α′, μζ′) καὶ $ΑΕ^2 + ΕΓ^2 = ΑΓ^2$. Θὰ εἶναι ἄρα $ΒΔ \times ΔΓ + ΑΔ^2 = ΑΓ^2$.

16

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν βάσιν, τὸ γινόμενον δὲ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως ἐκ τῆς μιᾶς τομῆς διὰ τοῦ τετραγώνου τῆς τεμνούσης εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων τῆς βάσεως τῆς ἄλλης τομῆς διὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης τεμνούσης, αἱ τέμνουσαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἂς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ΑΕ, ΑΔ τέμνουσαι τὴν βάσιν ΒΓ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\dfrac{ΒΔ \times ΔΓ}{ΔΑ^2} = \dfrac{ΓΕ \times ΕΒ}{ΑΕ^2}$.

Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι $ΔΑ = ΑΕ$.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ὁ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΑ τετράγωνον ὁ αὐτός ἐστιν τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετράγωνον καὶ συνθέντι ἐσσεῖται λόγος ὁ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΑ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΑ τετράγωνον ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ τετράγωνον. καὶ δέδεικται ἐν τῷ πρότερον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΑ ἴσον τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΒ. ἔστιν ἄρα λόγος ὁ τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΑ ποτὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΕ. ἀλλὰ ἁ ΑΒ τᾷ ΑΓ ἴσα ἐστίν. ἔστιν ἄρα ἁ ΑΔ τᾷ ΑΕ ἴσα.

ιζ'

Εἴ κα γωνία τριγώνου δίχα τμαθῇ ἁ δὲ τεμνέουσα τὰν γωνίαν τέμνῃ καὶ τὰν βάσιν, συναμφότεραι αἱ πλευραὶ τᾶς γωνίας ποτὶ τὰν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον τοῦ, ὃν ἔχει ἁ μία πλευρὰ ποτὶ τὸ τμᾶμα τᾶς βάσιος τὸ ποτικείμενον τᾷ πλευρᾷ ταύτᾳ.

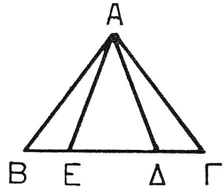
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς Α ἄχθω ἐπὶ τὰν βάσιν ΒΓ εὐθεῖά τις ἁ ΑΔ τεμνέουσα τὰν γωνίαν ΒΑΓ δίχα. φαμὶ δή, ὅτι συναμφότεραι αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ποτὶ τὰν ΒΓ βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τοῦ, ὃν ἁ ΑΒ ποτὶ τὸ ποτικείμενον αὐτᾷ τμᾶμα τᾶς βάσιος τὸ ΒΔ.

Ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΒΑΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΑΓ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα λόγος ὁ τᾶς ΒΑ ποτὶ τὰν ΑΓ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΔΓ καὶ ἐναλλὰξ ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΔ

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\frac{\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ}}{\text{ΔΑ}^2} = \frac{\text{ΓΕ} \times \text{ΕΒ}}{\text{ΑΕ}^2}$.

Ἡ σχέσις αὕτη γίνεται

$$\frac{\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ} + \text{ΔΑ}^2}{\text{ΔΑ}^2} = \frac{\text{ΓΕ} \times \text{ΕΒ} + \text{ΑΕ}^2}{\text{ΑΕ}^2},$$

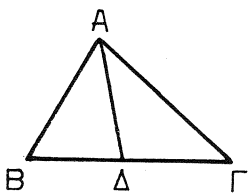


(Εὐκλ. ε΄, ιη΄). Εἰς τὸ προηγούμενον ὅμως θεώρημα ἀπεδείξαμεν ὅτι $\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ} + \text{ΔΑ}^2 = \text{ΑΓ}^2$ καὶ $\text{ΓΕ} \times \text{ΕΒ} + \text{ΕΑ}^2 = \text{ΑΒ}^2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΔ}^2} = \frac{\text{ΒΑ}^2}{\text{ΑΕ}^2}$. Ἀλλὰ $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$. Εἶναι ἄρα $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$.

17

Ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου τέμνει τὴν βάσιν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας διὰ τῆς τρίτης πλευρᾶς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας διὰ τοῦ εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος τῆς βάσεως.

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τρι-



γώνου φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας ΒΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{\text{ΒΑ} + \text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΔ}}$.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι γωνία $\text{ΒΑΔ} =$ γωνία ΔΑΓ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}}$ (Εὐκλ. ϛ΄, γ΄). Καὶ ἐναλ-

τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΑΓ ποτὶ τὰν ΓΔ. καὶ ἐπεὶ εἴ κα ὁποτοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔωντι ἐσσεῖται ὡς εἷς τῶν ἀγομένων ποθ' ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἀγούμενοι ποθ' ἅπαντας τοὺς ἑπομένους, ἔστιν ἄρα λόγος ὁ τᾶς ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΔ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχοντι συναμφότεραι αἱ ΑΓ, ΑΒ ποτὶ συναμφοτέρας τὰς ΓΔ, ΔΒ, τουτέστιν ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΔ ὁ αὐτὸς τοῦ, ὃν ἔχοντι συναμφότεραι αἱ ΑΓ, ΑΒ ποτὶ τὰν ΓΒ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ιη'

Εἴ κα ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων τὰν αὐτὰν ἐχόντων βάσιν ἀχθέωντι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰς ἐναλλὰξ ἐκτὸς πλευρὰς τῶν τριγώνων, ἁ ἐπιζευγνύουσα τὰ σαμεῖα τομᾶς τῶν παραλλάλων αὐτῶν μετὰ τῶν ἐντὸς πλευρῶν τῶν τριγώνων παράλλαλος τᾷ βάσει ἐστίν.

Ἔστω γὰρ δύο τρίγωνα τὰ ΕΒΓ, ΔΓΒ τὰν αὐτὰν ἔχοντα βάσιν τὰν ΒΓ, ἂν αἱ ἐντὸς πλευραὶ τέμνονται κατὰ τὸ Α σαμεῖον, ἄχθω δὲ παρὰ μὲν τὰν ΕΒ ἁ ΔΗ παρὰ δὲ τὰν ΔΓ ἁ ΕΖ καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΖΗ. φαμὶ δή, τὰν ΖΗ παρὰ βάσιν τὰν ΒΓ εἶμεν.

Διάχθων γὰρ αἱ ΖΓ, ΒΗ, ΕΔ. Δύο δὴ τρίγωνα τὰ ΔΕΓ, ΔΖΓ ἔοντα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς βάσιος καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλάλοις ταῖς ΕΖ, ΔΓ ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. κοινὸν ἀφαιρήσθω τρίγωνον τὸ ΔΑΓ. λοιπὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΑΕ, ΓΑΖ ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. πάλιν, ἐπεὶ δύο τρίγωνα τὰ ΔΕΒ, ΗΕΒ ἐντὶ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς βάσιος τᾶς ΕΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλάλοις ταῖς ΔΗ, ΕΒ ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. κοινὸν ἀφαιρήσθω τρίγωνον τὸ ΕΑΒ. λοιπὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΑΕ, ΑΒΗ, ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. καὶ δέδεικται, ὅτι τρίγωνα τὰ ΔΑΕ, λὰξ εἶναι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$, (Εὐκλ. ε΄, ις΄) ἢ $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma + AB}{\Gamma\Delta + \Delta B}$, ἢ $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma + AB}{\Gamma B}$.

18

Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν βάσιν, ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐναλλὰξ ἐξωτερικὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα τομῆς τῶν παραλλήλων αὐτῶν μὲ τὰς ἐσωτερικὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΔΓΒ ἔχοντα κοινὴν βάσιν τὴν ΒΓ, τῶν ὁποίων αἱ ἐσωτερικαὶ πλευραὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΓ καὶ φέρομεν τὴν ΖΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

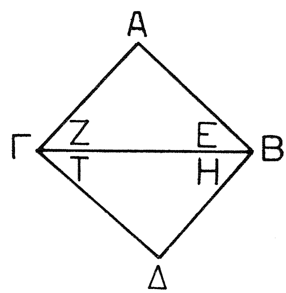
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ἑνοῦμεν τὸ Ζ μὲ τὸ Γ, τὸ Β μὲ τὸ Η, καὶ τὸ Ε μὲ τὸ Δ. Τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΓ καὶ ΔΖΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΔΓ κοινὴν καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ (Εὐκλ. α΄,λη΄). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι κοινόν, τὰ ὑπόλοιπα τρίγωνα ΔΑΕ καὶ ΓΑΖ εἶναι ἴσα (Εὐκλ. κοιν. ἔνν. γ΄). Ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΔΕΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΗΕΒ, διότι ἔχουσι κοινὴν τὴν βάσιν ΕΒ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΔΗ, ΕΒ εἶναι παράλληλοι (Εὐκλ. α΄,λη΄). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι κοινόν, τὰ ὑπόλοιπα ἄρα τρίγωνα ΔΑΕ καὶ ΑΒΗ εἶναι ἴσα. Καὶ ἔχομεν ἀποδείξει ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΑΕ, *ΓΑΖ ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. ἔστιν ἄρα τρίγωνον τὸ ΑΒΗ τριγώνῳ τῷ ΑΖΓ ἴσον. κοινὸν ἀφαιρήσθω τρίγωνον τὸ ΑΖΗ. λοιπὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ΒΖΗ, ΗΖΓ ἴσα ἀλλάλοις ἐντί. καί ἐντι ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς βάσιος καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ἔστιν ἄρα ἁ ΖΗ παρὰ τὰν ΒΓ.*

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ′

Ἐν τετραπλεύρῳ ἔχοντι ἑκατέραν τᾶν ἀπεναντίον γωνιᾶν μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαν, λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί.

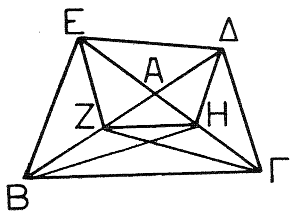
Ἔστω τετράπλευρον τὸ ΑΒΔΓ ἔχον πλευρὰν τὰν ΑΒ



τᾷ ΑΓ ἴσαν καὶ τὰν ΔΓ τᾷ ΔΒ, ἑκατέραν δὲ τᾶν ἀπεναντίον γωνιῶν τᾶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΔΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαν. δεικτέον ὅτι γωνία ἁ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΓΔ ἴσα ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω ἁ ΓΒ. ἐπεὶ γὰρ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΑΒ ὀρθά ἐστι, ἔντι ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΒΓ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΔΒ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσα ἐστί, ἔντι ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ μιᾷ ὀρθᾷ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴσα καὶ γωνία

ΓΑΖ εἶναι ἴσα. Τὰ δύο ἄρα τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΑΖΓ εἶναι ἴσα. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΖΗ εἶναι κοινόν, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΖΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΗΖΓ (Εὐκλ. κοιν. ἐνν. γ′). Τὰ



δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχουσι τὴν βάσιν ΖΗ κοινήν. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΖΗ ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα τομῆς τῶν παραλλήλων μὲ τὰς ἐσωτερικὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ (Εὐκλ. α′, μ′)·

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19

Εἰς τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίας ὀρθὰς αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ, ὅπου ΑΒ = ΑΓ καὶ ΔΓ = ΔΒ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ = γωνίαν ΒΔΓ = 1 ὀρθή. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι γωνία ΑΒΔ = γωνίαν ΑΓΔ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Φέρομεν τὴν ΓΒ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι ὀρθὴ θὰ εἶναι γωνία Ζ + γωνία Ε = 1 ὀρθή. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΔΒ εἶναι ὀρθὴ θὰ εἶναι γωνία Τ + γωνία Η = 1 ὀρθή.

Εἶναι ἄρα γωνία Ζ + γωνία Ε = γωνία Τ + γωνία Η. Καὶ *ἁ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΔΒΓ ἴσα ἐστίν, ἔστιν ἄρα συναμφότερος ἁ ὑπὸ ΑΓΒ, ΔΓΒ συναμφοτέρῳ τᾷ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἴσα.*

ἐπειδὴ γωνία Ζ = γωνία Ε καὶ γωνία Τ = γωνία Η, θὰ ἔχωμεν γωνία Ζ + γωνία Τ = γωνία Ε + γωνία Η, δηλαδὴ γωνία ΑΓΔ = γωνία ΑΒΔ.

«Τέλος τοῦ συγγράμματος τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον περιέχει 20 σχήματα» (Προσθήκη τοῦ μεταφραστοῦ Ἴμπν Κουρρά).

(Σημείωσις. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω διατύπωσις τῶν ἀποδείξεων δὲν εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀλλ' ὅτι αὕτη ἔχει ὑποστῆ τὴν ἐπίδρασιν τῶν Ἑλλήνων ἀντιγραφέων καὶ τοῦ Ἄραβος μεταφραστοῦ).

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΕΙΣ ΣΦΑΙΡΑΝ ΤΟΥ ΗΜΙΚΑΝΟΝΙΚΟΥ 14-ΕΔΡΟΥ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ 13 ΗΜΙΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Πάππου Συναγωγὴ Ι § 34 - 37, ἔκδ. F. Hultsch, σελ. 352. Μαρτυρίαι τόμ. Α′ μέρος Α′, ἀριθ. 99. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ Πάππου καὶ παλαιοῦ σχολίου συνετάχθη ὁ κατωτέρω πίναξ ὑπὸ τοῦ Tropfke (ἰδὲ κατωτέρω, τέλος §).

	Αὔξων ἀριθμ.	Τρί-γωνα	Ἑξά-γωνα	Τετρά-γωνα	Ὀκτά-γωνα	Πεντά-γωνα	Δεκά-γωνα
8 - εδρον	1	4	4				
14 - εδρον	2	8		6			
	3		8	6			
	4	8			6		
26 - εδρον	5	8		18			
	6		8	12	6		
32 - εδρον	7	20				12	
	8		20			12	
	9	20					12
38 - εδρον	10	32		6			
62 - εδρον	11	20		30		12	
	12		20		30		12
92 - εδρον	13	80				12	

Ἐπὶ τούτοις προστίθενται δύο πρισματοειδῆ σώματα, τῶν ὁποίων ἑκατέρα τῶν βάσεων ἔχει 2ν ἕδρας. Τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἔχει ν τετράγωνα, ἐν ᾧ τοῦ ἄλλου ἔχει ἐναλλασσομένως διατεταγμένα τρίγωνα 2ν.

ΕΓΓΡΑΦΗ ΕΙΣ ΣΦΑΙΡΑΝ ΗΜΙΚΑΝΟΝΙΚΟΥ 14-ΕΔΡΟΥ

Μετάφρασις

τοῦ ἄρθρου τῶν E. Bessel/Hagen — O. Spies, δημοσιευθέντος εἰς τὸ περιοδικὸν «Πηγαὶ καὶ Σπουδαὶ ἐπὶ τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν», τόμος B_2, Βερολῖνον 1932.

«Ἡ πραγματεία τοῦ Ibn Qurra

ΠΕΡΙ ΕΝΟΣ ΗΜΙΚΑΝΟΝΙΚΟΥ 14-ΕΔΡΟΥ

(Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik B_2, Berlin 1932).

Ὑπὸ E. Bessel - Hagen, ἐν Bonn, καὶ O. Spies, ἐν Bonn, S. 186 - 198.

Εἰσαγωγή

Ἐκ τῶν πολυπληθῶν πραγματειῶν τοῦ Tâbit Ibn Qurra[1]) μέγα μέρος ἔχει ἀπολεσθῆ ἢ καταστραφῆ. Ἐννοεῖται, ὅτι σήμερον ἐμφανίζεται πάλιν εἰς ταύτην ἢ ἐκείνην τὴν βιβλιοθήκην τῆς Ἀνατολῆς τὸ ἓν ἢ ἄλλο χειρόγραφον. Οὕτω ἡ βιβλιοθήκη Köprülü ἐν Κωνσταντινουπόλει ἔχει ἓν πολὺ παλαιόν, πολύτιμον, χειρόγραφον, τοῦ 370 d. H. (= 980 μ. X.) περιέχον τρεῖς πραγματείας τοῦ Tâbit Ibn Qurra. Τῇ μεσολαβήσει τοῦ H. Ritter ἡ Κρατικὴ

1) Ἰδὲ Suter: Οἱ μαθηματικοὶ καὶ ἀστρονόμοι τῶν Ἀράβων καὶ τὰ ἔργα των [= Abhandl. z. Geschichte der Mathem. Wiss. Heft 10], Leipzig 1900, S. 34. Brockelmann: Geschichte der arabischen Literatur, Bd. 1, Weimar 1898, S. 217. Ruska in d. Enz. d. Islam, s.v.

Πρωσσική Βιβλιοθήκη ἐν Βερολίνῳ ἀπέκτησε φωτογραφίαν τοῦ χειρογράφου τούτου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκεῖ ὑπὸ τὴν ἔνδειξιν Mss. simulata orient. 19 ὑπὸ τὸν τίτλον : Tâbit Ibn Qurra, Fī â - jât as - sâ ʿāt.

Τὸ χειρόγραφον τοῦτο περιέχει

1. Βιβλίον περὶ τῶν συσκευῶν τῶν ὡρῶν (ἡλιακῶν ὡρολογίων), τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται ruhâmât. Τὸ ἔργον τοῦτο μνημονεύεται ἐπανειλημμένως εἰς τὴν ἀραβικὴν βιβλιογραφίαν. . . Εἶναι ἀντιγεγραμμένον ἀπὸ τὸ αὐτόγραφον τοῦ Ibn Qurra ὑπὸ τοῦ Ἰμπραὴμ Ibn Zabrun κατὰ τὸ 370 (= 980 μ.Χ.) . . . .

2. Βιβλίον περὶ τῆς ἑρμηνείας τοῦ τρόπου καθ' ὅν, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ Πτολεμαίου, οἱ προηγούμενοί του ὑπελόγισαν τὰς περιφορὰς τῆς Σελήνης. . . . .

3. Βιβλίον περὶ τῆς κατασκευῆς στερεοῦ ἔχοντος 14 ἕδρας, τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται εἰς σφαῖραν, σελ. 108 - 115. Ἀντεγράφη ἀπὸ τὸ αὐτόγραφον τοῦ Tâbit Ibn Qurra κατὰ τὸ 370 (= 980 μ.Χ.). Ὁ ἐπίλογος ἐτυπώθη εἰς τὸ τέλος τοῦ κειμένου ἡμῶν· μετεφρασμένος, εἶναι :

«Τὸ ἔγραψεν ὁ Ἰμπραὴμ Ibn Zabrun, ὁ γραφεύς, κατὰ τὸ ἔτος 370 (= 980 μ.Χ.). Τὸ ἀντέγραψα ἀπὸ ἰδιόχειρον χειρόγραφον τοῦ πάππου μου Tâbit Ibn Qurra. Ὁ θεὸς ἂς τὸν ἐλεήσῃ, ὅτι τὸ ἔγραψε μὲ τὸ χέρι του».

Κατωτέρω παραθέτομεν τὸ κείμενον (ἀραβικὸν) καὶ τὴν μετάφρασιν (γερμανικὴν) τούτου τοῦ μέχρι τοῦδε ὡς ἀπολεσθέντος θεωρουμένου ἔργου. Ἡ γραφὴ τοῦ χειρογράφου εἶναι θαυμασία . . . . μὲ 11 στίχους κατὰ σελίδα. . . . . . Τὸ σχῆμα τοῦ ἀραβικοῦ κειμένου τὸ διετηρήσαμεν ἀκριβῶς. Εἰς τὴν μετάφρασιν παρέχομεν χάριν σαφηνείας ἓν σχῆμα σχεδιασθὲν ἀξονομετρικῶς, τὸ ὁποῖον ἐσχεδίασε δι' ἡμᾶς ὁ κ. H. Rödel ἐν Darmstadt. . . . . . Ἕνεκα τοῦ ἁπλοῦ τοῦ μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ τῆς εὐκόλου κατανοήσεως τῶν διατυπώσεων τοῦ συγγραφέως μας (τοῦ Ibn Qurra) δὲν προέβημεν εἰς σχόλια καὶ ἠρκέσθημεν νὰ προβῶμεν εἰς ἑρμηνευτικὰς ὑποσημειώσεις. Ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῶν ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ χωρίου τοῦ Πάππου διεξοδικῶς διαπραγματευθέντων ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἡμικανονικῶν πολυέδρων, δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν ἀλλὰ παραπέμπομεν πρὸς τοῦτο εἰς τὸν Tropfke (Geschichte der Elementarmathematik, 2 ἔκδοσις, τόμος 7, σελ. 52 - 54, Βερολῖνον καὶ Λειψία 1924). (Ἰδὲ μαρτυρίαν Πάππου ὑπ' ἀριθμ. 99 σελ. 120 τοῦ Α' τόμου, Α' μέρους).

Η ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗΝ
(ἐκ τῆς γερμανικῆς)

Πραγματεία τοῦ Tâbit Ibn Qurra (!) περὶ τῆς κατασκευῆς στερεοῦ σχήματος ἔχοντος δεκατέσσαρας ἰσοπλεύρους καὶ ἰσογωνίους ἕδρας, τὸ ὁποῖον περιβάλλει δοθεῖσα σφαῖρα.

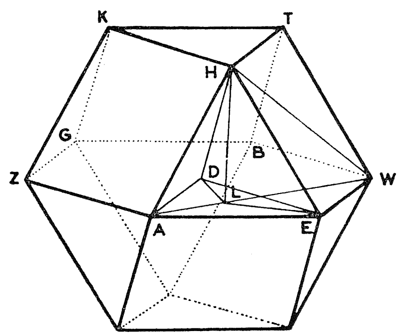
Θέλομεν νὰ ἐξηγήσωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν στερεὸν σχῆμα ἔχον δεκατέσσαρας ἰσοπλεύρους καὶ ἰσογωνίους ἕδρας, τὸ ὁποῖον περιβάλλει δοθεῖσα σφαῖρα.

Τὸ σχῆμα τοῦτο δὲν εἶναι ἓν ἔχον ὁμοίας βάσεις· πολὺ περισσότερον, εἶναι ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ ὀκτὼ τρίγωνα καὶ ἓξ τετράγωνα, καὶ κατεσκευάσθη, ὥστε ἡ μία ἕδρα πρὸς τὴν ἄλλην νὰ εἶναι τοποθετημένη καθ' ὁμοίαν διάταξιν, καὶ ἡ ἀκμὴ τοῦ σώματος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

Ἔστω μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν τὸ σχῆμα, ὁ κύκλος ABG, ἔχων κέντρον τὸ D. Ἐὰν θέλωμεν εἰς τὴν σφαῖραν αὐτὴν νὰ κατασκευάσωμεν (ἐγγράψωμεν) ἓν δεκατετράεδρον, ὡς τοῦτο περιεγράψαμεν, κατασκευάζομεν εἰς τὸν κύκλον ABG ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, τὸ AEWBGZ. Καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου D πρὸς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου τὰς εὐθείας DA, DE, DW, DB, DG, DZ. Τότε τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη τὸ ἑξάγωνον εἶναι ἰσόπλευρα. Καὶ ὑπὲρ τὰ τρίγωνα ADE, WDB, GDZ κατασκευάζομεν πυραμίδας ἐχούσας ἕδρας ἰσόπλευρα τρίγωνα, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται τετράεδρα. Ἔστωσαν τὰ σημεῖα τῶν κορυφῶν τὰ H, T, K, ἐκ τῶν ὁποίων φέρομεν τὰς εὐθείας HT, TK, KH. Καὶ κατασκευάζομεν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κύκλου ABG, ὑπὲρ τὰ τρίγωνα EDW, BDG, DZA ἄλλα τετράεδρα, ὡς κατεσκευάσαμεν τὰ προηγουμένως ἀναφερθέντα τετράγωνα. Καὶ φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰ σημεῖα τῶν κορυφῶν των.

Τώρα λέγω, ὅτι εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἔχομεν κατασκευάσει (ἐγγράψει) ἓν σχῆμα μὲ δεκατέσσαρας ἰσοπλεύρους καὶ ἰσογωνίους ἕδρας, ἐκ τῶν ὁποίων ὀκτὼ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ αἱ ἓξ ὑπόλοιποι ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα ὀρθογώνια τετράπλευρα (τετράγωνα). Καὶ ἑκάστη πλευρὰ τῶν τετραγώνων εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην πλευρὰν τῶν τριγώνων καὶ ἡ σύνθεσίς των ἔγινε ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς μοναδικῆς διατάξεως, καὶ ἡ ἀκμὴ τοῦ στερεοῦ τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

Ἡ ἀπόδειξις δι' αὐτό : Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου H, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ τετραέδρου ADEH κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ADE, ἡ δὲ κάθετος εἶναι ἡ HL. Καὶ ἐκ τοῦ σημείου L φέρομεν πρὸς τὰ σημεῖα A, E, W, D τὰς εὐθείας AL, LE, LW, LD. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα HL εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ADE, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ ποδός της εἰς τὴν ἕδραν αὐτήν. Ἑπομένως εἶναι αὐτη κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας AL, LD. Τότε τὰ δύο τετράγωνα, τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν HL, AL, εἶναι ὅπως τὸ ἐκ τῆς AH προκῦπτον τετράγωνον. Καὶ τὰ δύο τετράγωνα, τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν HL, LD, εἶναι ὅπως τὸ τετράγωνον, τὸ προκῦπτον ἐκ τῆς DH. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας AH εἶναι ὅπως τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας DH, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον AHΔ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι τοῦτο εἶναι ἐκ τῶν βάσεων τοῦ τετραέδρου. Κατὰ συνέπειαν εἶναι τὰ δύο τετράγωνα τῶν δύο εὐθειῶν HL, AL ὅπως τὰ δύο τετράγωνα τῶν



δύο εὐθειῶν HL, LD. Ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ κοινόν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας HL, ἀπομένει ὑπόλοιπον τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας AL, ὅπως τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας LD. Τότε αἱ δύο εὐθεῖαι AL, LD τῶν δύο τριγώνων ALE, LDE εἶναι ἴσαι· καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι AE, ED ἐκ τούτων εἶναι ἐπίσης ἴσαι, ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου. Καὶ ἡ πλευρὰ LE εἶναι κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα. Ἑπομένως τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως. Τότε ἡ εὐθεῖα LE διχοτομεῖ τὴν γωνίαν AED. Ἀλλὰ ἡ γωνία AED εἶναι τὰ δύο τρίτα τῆς ὀρθῆς γωνίας, διότι τὸ τρίγωνον AED εἶναι ἰσόπλευρον. Τότε ἡ γωνία LED εἶναι ἓν τρίτον τῆς ὀρθῆς. Ἡ γωνία DEW εἶναι τὰ δύο τρίτα τῆς ὀρθῆς, διότι τὸ τρίγωνον EDW εἶναι ἰσόπλευρον. Κατὰ συνέπειαν τὸ σύνολον τῆς γωνίας LEW εἶναι μία ὀρθή. Τότε εἶναι τὰ ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν LE, EW προκύπτοντα τετράγωνα ὁμοῦ ἴσα πρὸς τὸ ἐκ τῆς LW προκῦπτον τετράγωνον. Καὶ κάμνομεν τὸ ἐκ τῆς HL προκῦπτον τετράγωνον κοινὸν ⟨προσθετέον⟩. Τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῶν εὐθειῶν LE, EW, HL, εἶναι ὅπως τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐκ τῶν εὐθειῶν LW, LH. Εἰς ὅ,τι ὅμως ἀφορᾷ εἰς τὰ τετράγωνα τὰ προκύπτοντα ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν LE, HL, ταῦτα εἶναι ὅπως τὸ ἐκ τῆς EH προκῦπτον τετράγωνον, ἐπειδὴ ἡ HL εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου L εἰς τὸ ἐπίπεδον ADE, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ABG. Ἐπίσης, εἶναι ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῶν εὐθειῶν HL, LW ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας HW. Κατὰ συνέπειαν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν EH, EW ὅπως τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας WH (δηλ. ἴσον). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία WEH μία ὀρθή. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ γωνία EWT εἶναι ὀρθή. Τότε εἶναι τὸ σχῆμα HEWT τετράπλευρον, ὅπου αἱ δύο πλευραί του EH, WT εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν πλευρὰν EW. Καὶ τὸ σχῆμα αὐτὸ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν EH, WT, EW εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου ABG καὶ αἱ δύο ὑπόλοιποι εὐθεῖαι ἰσοῦνται πρὸς δύο πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου τούτου, εἶναι αἱ τρεῖς ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπιφανείας (ἕδρας) EHTW ἴσαι, καὶ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀνεφέρθησαν προηγουμένως, εἶναι δύο ὀρθαί. Καὶ ἐδείχθη ὅτι αὕτη (ἡ ἕδρα EHTW) εἶναι ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον τετράπλευρον (τετράγωνον). Ὁμοίως ἐδείχθη, ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν δύο τούτων τετραπλεύρων (τετραγώνων), καὶ ταῦτα εἶναι τὰ δύο τετράπλευρα (τετράγωνα) BTKG, ZKHA, εἶναι ἰσόπλευρον ὀρθογώνιον, καὶ ὅτι τὰ τρία τετράπλευρα (τετράγωνα), τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὸ ἄλλο μέρος, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι αἱ εὐθεῖαι AE, WB, GZ, εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνια ἰσόπλευρα. Καὶ αἱ πλευραὶ ὅλων τούτων τῶν ἓξ τετραπλεύρων εἶναι ἴσαι, διότι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Καὶ κατὰ ταῦτα εἶναι ἴσαι ἐπίσης αἱ πλευραὶ τῶν ἓξ τριγώνων, αἱ ὁποῖαι ἐξέρχονται ἐκ τῶν τετραπλεύρων τούτων, καὶ ταῦτα εἶναι τὰ τρίγωνα AEH, WTB, GKZ καὶ τὰ ἀντίστοιχα τούτων ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, καὶ ταῦτα εἶναι ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι αἱ εὐθεῖαι EW, BG, ZA, καὶ ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ABG ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου. Ὁπότε αὗται εἶναι ἐπίσης ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν ἓξ τετραγώνων, τὰ ὁποῖα ἀνεφέραμεν. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ τρίγωνον HTK, βλέπομεν ὅτι ἑκάστη τῶν πλευρῶν του εἶναι ἡ ἰδία πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν τετραπλεύρων EHTW, BTKG, ZKHA, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἑξαγώνου. Ὁπότε εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστοιχον πρὸς τὸ τρίγωνον HTK. Τότε τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἰσόπλευρα καὶ τὰ δύο εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἓξ ὑπόλοιπα τρίγωνα, τῶν ὁποίων μνεία ἔγινε προηγουμένως.

Τότε περιβάλλουσι ταῦτα τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον κατεσκευάσαμεν μὲ 14 ἕδρας, συμφώνως πρὸς ὅ,τι περιεγράψαμεν. Καὶ αἱ βάσεις του εἶναι εἰς ὁμοίαν διάταξιν διατεταγμέναι, διότι ἕκαστον τρίγωνον ἐξ αὐτῶν περιβάλλεται μὲ τρία τετράγωνα εἰς τὰς πλευρὰς του καὶ ἕκαστον τετράγωνον ἐξ αὐτῶν περιβάλλεται μὲ τέσσαρα τρίγωνα εἰς τὰς πλευρὰς του. Καὶ ἑκάστην γωνίαν ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ στερεοῦ τούτου περιβάλλουσι δύο γωνίαι ἑνὸς τετραγώνου καὶ δύο γωνίαι ἑνὸς τριγώνου εἰς τὸ μέρος τὸ ὁποῖον εἶναι μεταξὺ τῶν δύο. (Διὰ τούτου νοεῖται, ὅτι αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων ἐκτείνονται εἰς τοὺς δύο μεταξὺ χώρους, τοὺς ὁποίους αἱ δύο γωνίαι τῶν τετραγώνων ἀφίνουσι μὲ τὰς κορυφάς των). Καὶ τοῦτο συμβαίνει κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ὅλας τὰς γωνίας του. Ὁπότε ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

Εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν, ἡ ὁποία ἐσκοπεύομεν νὰ περιβάλλῃ τὸ στερεόν, τοῦτο εἶναι φανερόν, καὶ δὴ καὶ ὅτι ὁ κύκλος ABG διέρχεται διὰ τῶν σημείων (κορυφῶν) τῶν γωνιῶν A, E, W, B, G, Z τοῦ σχήματος τούτου. Καὶ αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ταύτης πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας, τὰς κειμένας παρὰ τὰ σημεῖα H, T, K, καὶ αὗται εἶναι αἱ εὐθεῖαι DH, DT, DK καὶ αἱ πρὸς ταύτας ἀντίστοιχοι ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος εἶναι ἴσαι καὶ ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, διότι αὗται εἶναι πλευραὶ τῶν τετραέδρων, τὰ ὁποῖα ἐν ἀρχῇ κατεσκευάσαμεν. Τότε ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ στερεοῦ τούτου σχήματος, τὸ ὁποῖον κατεσκευάσαμεν. Καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ἀναφερθέντος τούτου σχήματος μὲ δεκατέσσαρας ἕδρας εἶναι (ἑκάστη) τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας. Καὶ ἂς εἶναι αἶνος πρὸς τὸν θεόν, τὸν Κύριον τῶν κόσμων».

ΩΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Περὶ τὸ ἔτος 400 π.Χ. ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν Διονύσιος ὁ πρῶτος (430 - 367 π.Χ.) βλέπων ἐπικείμενον τὸν κίνδυνον ὑποδουλώσεως τῶν Συρακουσῶν εἰς τοὺς Καρχηδονίους, εὑρισκομένους εἰς πολὺ ἀνωτέραν στρατιωτικὴν θέσιν ἔναντί του, ἐσκέφθη νὰ ἀνεύρῃ τελειότερα καὶ ἀνώτερα τεχνικῶς τῶν συνήθων πολεμικὰ ὅπλα διὰ νὰ ἀντιμετωπίσῃ τὸν ἐπερχόμενον κίνδυνον. Πρὸς τοῦτο ἵδρυσεν ἐν Συρακούσαις τὸ πρῶτον Κέντρον Στρατηγικῶν Ἐρευνῶν. Εἰς αὐτὸ ἐκλήθησαν μηχανικοὶ διαπρέποντες εἰς ὅλον τὸν Ἑλληνικὸν χῶρον καὶ ἐκεῖ ἀνεκαλύφθησαν οἱ πρῶτοι καταπέλται καὶ τὰ πρῶτα βλητικὰ μηχανήματα. Ὁ Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) εὑρέθη κατὰ τὴν ἐποχήν του πρὸ μιᾶς μεγάλης παραδόσεως τῶν Συρακουσῶν εἰς τὴν Τεχνικήν. Αὐτὴν τὴν ἐκ παραδόσεως Τεχνικὴν ἀνέπτυξεν εἰς τὸ ἔπακρον. Συγγράμματα τοῦ Ἀρχιμήδους τεχνικῶν κατασκευῶν δὲν διεσώθησαν. Αἱ περιγραφαὶ ὅμως τοῦ Πολυβίου καὶ τοῦ Πλουτάρχου καὶ ἄλλων διὰ τὰ μηχανήματα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ χρησιμοποιηθέντα παρ' αὐτοῦ κατὰ τὴν πολιορκίαν τῶν Συρακουσῶν ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων (ἰδὲ α' τόμος, α' μέρος), παρέχουν μίαν ἰδέαν τοῦ μηχανικοῦ δαιμονίου τοῦ μέχρι σήμερον μεγίστου τῶν μαθηματικῶν, μηχανικῶν καὶ φυσικῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Ἡ μόνη διασωθεῖσα συγγραφὴ τεχνικῆς κατασκευῆς αὐτοῦ εἶναι τὸ «ὡρολόγιον». Τὸ ἀρχαῖον Ἑλληνικὸν κείμενον τῆς συγγραφῆς δὲν ἐσώθη. Ἐσώθη μόνον μετάφρασις αὐτῆς εἰς τὴν ἀραβικὴν γενομένη περὶ τὸν 9ον αἰῶνα. Τὰ ἀραβικὰ χειρόγραφα εὑρίσκονται εἰς τὰς βιβλιοθήκας τῶν Παρισίων, τοῦ Λονδίνου καὶ τῆς 'Οξφόρδης. 'Εκ τούτων μετεφράσθη αὕτη εἰς τὴν γερμανικὴν καὶ ἐδημοσιεύθη εἰς τὰ Πρακτικὰ τῆς 'Ακαδημίας τῶν Φυσιοδιφῶν τῆς πόλεως Halle/Saale (1918).

'Εκ ταύτης δημοσιεύομεν κατωτέρω μετάφρασιν εἰς τὴν ἑλληνικήν. Διὰ πρώτην δὲ φορὰν περιλαμβάνεται ἡ πραγματεία αὕτη εἰς ἔκδοσιν ἔργων τοῦ 'Αρχιμήδους. 'Εκ τῆς σπουδῆς τοῦ γερμανικοῦ κειμένου πειθόμεθα, ὅτι ἡ μετάφρασις τῶν 'Αράβων δὲν εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἀπόδοσις τοῦ 'Αρχιμηδείου κειμένου αὐτῆς. Πιθανὸν καὶ οἱ Ἄραβες μεταφρασταὶ νὰ παρέλαβον τὸ κείμενον τῆς Ἑλληνικῆς πραγματείας εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Βυζαντίου τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Τὸ ὡρολόγιον τοῦ 'Αρχιμήδους δὲν εἶναι τύπος κλεψύδρας ἀλλὰ μηχανισμὸς ὡρολογίου, ὅπου ἀντὶ τοῦ σημερινοῦ ἐλατηρίου χρησιμοποιεῖται ῥοὴ ὕδατος. Δὲν εἶναι γνωστὸν ἂν ὑπῆρχεν ἀρχαιότερον συναφὲς αὐτόματον μηχάνημα καὶ θεωροῦμεν πολὺ πιθανόν, ὅτι τὰ αὐτόματα μηχανήματα τοῦ Ἥρωνος (1ος αἰ. μ.Χ.) καὶ τὰ αὐτόματα μηχανήματα τῶν ἀνακτόρων τοῦ Βυζαντίου ἔχουν τὴν ἀρχήν των εἰς τὸ ὑδραυλικὸν ὡρολόγιον τοῦ 'Αρχιμήδους. (Κατὰ τὴν παράδοσιν εἰς τὴν αἴθουσαν ὑποδοχῆς τῶν ἀνακτόρων τοῦ Βυζαντίου ὑπῆρχον λέοντες ἐκ μετάλλου, οἱ ὁποῖοι ἅμα τῇ εἰσόδῳ τῶν ξένων πρεσβευτῶν ἐβρυχῶντο).

ΝΕΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ

Πραγματεῖαι τῆς αὐτοκρατορικῆς Λεοπόλδου – Καρόλου
Γερμανικῆς 'Ακαδημίας τῶν Φυσιοδιφῶν
Τόμος 103 'Αριθμ. 2

Ὡρολόγιον τοῦ 'Αρχιμήδους

καὶ δύο ἄλλαι συσκευαὶ

ὑπὸ
Δρος φιλοσ. Ε. Βίντεμαν καὶ Δρος φιλοσ. καὶ Δρος τεχν.
(Πολυτεχνείου) Φ. Χάουζερ

Ὑπεβλήθη εἰς τὴν 'Ακαδημίαν τὴν 9ην 'Ιουλίου 1917

HALLE 1918
(Γερμανίας, παρὰ τὸν ποταμὸν Ζάαλε)

NOVA ACTA
Abh. der Kaiserl. Leop.– Carol. Deutschen Akademie
der Naturforscher Band CIII. Nr. 2

Uhr des Archimedes
und zwei andere Vorrichtungen

von

Dr. phil. E. Wiedemann und Dr. phil. und Dr. techn.
F. Hauser

Eingegangen bei der Akademie am 9. Juli 1917

HALLE 1918

ΩΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

I

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Περὶ ἑνὸς ὡρολογίου ἀποδιδομένου εἰς τὸν Ἀρχιμήδη ὑπὸ Dr. Phil. Eilhard Wiedemann καὶ Dr. phil. u. Dr. techn. Fritz Hauser.

Εἰς τὸν 100ὸν τόμον τῶν Νέων Πρακτικῶν (Nova Acta) ἠδυνήθημεν χάρις εἰς τὴν κατανόησιν τοῦ Προέδρου τῆς Ἀκαδημίας Κυρίου μυστικοσυμβούλου καθηγητοῦ Dr. Wangerin νὰ δώσωμεν μίαν ἔκθεσιν διὰ τὰς γνώσεις μας περὶ τῶν ὡρολογίων εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ἰσλαμικῆς πολιτιστικῆς περιοχῆς. Ἐκεῖ ὑπηνίχθημεν ἓν ὡρολόγιον ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Ἀρχιμήδη καὶ δὴ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει στοιχείων τοῦ Βαρώνου Carra de Vaux δημοσιευομένων εἰς τὴν Ἀσιατικὴν Ἐφημερίδα (Jourmal asiatique [8], τόμος 17, σελ. 287, 1891).

Ἡ συναφὴς πραγματεία ὑπάρχει εἰς χειρόγραφα ἐν Παρισίοις (Κατάλογος τοῦ G. de Slane, no. 2468, σελ. 437) καὶ ἐν Λονδίνῳ (Βρεταννικὸν Μουσεῖον, κατάλογος τοῦ Rieu, no. 1336, σελ. 619). Καὶ τὰ δύο χειρόγραφα περιέχουν κενὰ — τὸ Λονδίνειον ὅμως εἶναι πληρέστερον — ἀλλὰ συμπληροῦνται ἀμοιβαίως. Τὸ ἀρχικὸν μέρος τῆς πραγματείας τὸ περιέχει ἓν χειρόγραφον τῆς Βοδληϊανῆς (βιβλιοθήκης) ἐν Ὀξφόρδῃ (Bodleiana no. 954 σελ. 95). Ἐξ ὅλων τῶν χειρογράφων τούτων ἐτέθησαν εἰς τὴν διάθεσίν μας φωτοτυπίαι, ἐξ ὧν μία χάρις εἰς φιλόφρονα κατανόησιν τοῦ Βαρώνου Carra de Vaux. Ἐκ τούτων ἠδυνήθημεν εἰς τὰ ἑπόμενα νὰ δώσωμεν μετάφρασιν ὁλοκλήρου τοῦ κειμένου. Μετὰ ταῦτα παραθέτομεν τὴν περιγραφὴν δύο ἄλλων συσκευῶν, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουσιν εἰς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον καὶ προφανῶς ἀντιστοιχοῦσιν εἰς μέρη ὡρολογίων, τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιοῦντο εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας.

II

ΩΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

1. Προοίμιον

Ἡ περιγραφὴ τοῦ ὡρολογίου τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς αὕτη διά τινος μεταφράσεως ἐκ τῆς Ἑλληνικῆς διεσώθη, φαίνεται, ὅτι προέρχεται ἐκ τοῦ Βυζαντίου καὶ παρέχει εἰς ἡμᾶς μετὰ τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἔχομεν περὶ τοῦ ὡρολογίου τοῦ Κτησιβίου ἐκ τοῦ Βιτρουβίου[1]), καλὴν εἰκόνα περὶ τῶν τεχνικῶν ἱκανοτήτων τῆς ἀρχαιότητος εἰς τὸ

---

[1]) Διὰ τῆς ἀκριβοῦς τεχνικῆς περιγραφῆς τοῦ ὡρολογίου τοῦ Ἀρχιμήδους μερικαὶ πληροφορίαι τοῦ Βιτρουβίου γίνονται κατανοητότεραι. Ὁ καθηγητὴς Δρ. Rehm ἐφάνη τόσον καλός, ὥστε νὰ δώσῃ εἰς ἐμὲ τὴν σχετικὴν βιβλιογραφίαν : Ἡ μοναδικὴ ἐπιτελεσθεῖσα ἀνακατασκευὴ τοῦ παρὰ Βιτρουβίῳ IX, 8, σελ. 2 καὶ ἑξῆς, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον μνημονευομένου, ὄχι ὅμως περιγραφομένου ὡρολογίου τοῦ Κτησιβίου, τὴν ὁποίαν γνωρίζω, προέρχεται ὑπὸ τοῦ Perrault εἰς τὴν πραγματείαν του «Δέκα βιβλία ἀρχιτεκτονικῆς τοῦ Βιτρουβίου» (Dix livres d' architecture de Vitruve» Paris 1673) (δευτέρα ἔκδοσις 1684). Τὴν ἀρχήν, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν ἐπίσης ἐκ τοῦ Γαληνοῦ (Περὶ ψυχῆς ἁμαρτημάτων 84), ἀνέπτυξα εἰς τὸ ἄρθρον Horologium, δι' ὀλίγων, εἰς τὴν Ἐγκυκλοπαιδείαν τοῦ Pauly — Wissowas. Διεξοδικώτερος εἶναι ὁ Bilfinger, Ὡρολόγια τῶν ἀρχαίων λαῶν, σελ. 40 κ. ἑξῆς, ὁ M.C.P. Schmidt, πολιτιστικοϊστορικαὶ συμβολαὶ II (σχ. 23)· ἐποικοδομητικὸς ἐπίσης εἶναι ὁ Choisy, Vitruve IV, πίναξ 77 καὶ 78. Αἱ ἀνακατασκευαί, ἕνεκα τῶν ἀνεπαρκῶν στοιχείων, ἔχουν γίνει μὲ τὴν φαντασίαν. — Τὸ Γερμανικὸν Μουσεῖον (Deutsches Museum, ἐν Μονάχῳ) ἔχει ἓν «ὡρολόγιον τοῦ Κτησιβίου» ἀνακατασκευασθὲν κατὰ τὸν Perrault, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν εἶναι ἀκριβὲς (παράβαλε κριτικὴν τοῦ Feldhaus, Ἱστορικὰ φύλλα διὰ τὴν τεχνικὴν (Geschichtsblätter für Technik II 1916).

Εἰς τὴν θέσιν ταύτην παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι καὶ οἱ Ἄραβες ἐπίσης, ὡς ὁ Βιτρούβιος, κατασκευάζουν τὸ ἐπιστόμιον ἐξ ἀνθεκτικοῦ ὑλικοῦ (πολύτιμους λίθους, χρυσόν).

πεδίον τοῦτο[1]). Ἐπειδὴ ἐδῶ καὶ ἐκεῖ παρουσιάζονται περσικαὶ λέξεις, θεωρεῖται πιθανὸν ὅτι τὸ ἔργον ἔφθασεν εἰς τοὺς Ἄραβας ἐκ τῆς Περσίας. Ὅτι εἰς οὐδεμίαν συγγραφὴν τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ Ἀρχιμήδους ἀπαντᾷ τι περὶ τοῦ ὡρολογίου εἶναι γνωστόν.

Ἡ συγγραφὴ περὶ τοῦ ὡρολογίου μνημονεύεται εἰς ἀραβικὰς βιβλιογραφίας, ὡς εἰς τὸν Fihrist (= κατάλογον σελ. 266), ὑπὸ τοῦ ibn Ishâq al Nadîm († 995) ὑπὸ τὸν τίτλον «Συγγραφὴ περὶ τοῦ ὀργάνου τῶν ὡρῶν, τὸ ὁποῖον ῥίπτει σφαιρίδια» καὶ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Λογίων, Ta'rich al Huqamâ' (σελ. 67), ὑπὸ Ibn al - Qifti († 1248) ὑπὸ τὸν τίτλον «Συγγραφὴ περὶ τῶν ὡρῶν τῶν ὀργάνων, τὰ ὁποῖα ῥίπτουν σφαιρίδια». Περαιτέρω τονίζει ὁ al - Akfânî († 1348) εἰς τὸ ἔργον του «Ὀρθὴ κατεύθυνσις τοῦ ἐπιδιώκοντος πρὸς τὰ ὕψη τῶν ἐπιδιωκομένων» (σελ. 84) κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῆς ἐπιστήμης τῶν ὡρολογίων : «Ἡ συγγραφὴ τοῦ Ἀρχιμήδους παρέχει τὸ ὑπόβαθρον διὰ τὴν γνῶσιν αὐτῶν ».

Τόσον ὁ al - Gazarî, ὡς ἐπίσης καὶ ὁ Ridwan, ὡς γράφουν οἱ ἴδιοι, ἐγνώριζον τὴν συγγραφὴν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ἐχρησιμοποίησαν αὐτὴν κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὡρολογίων των (Nova Acta Bd. 100 S. 60, 177 καὶ 181).

Περὶ τῶν χειρογράφων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ ὑπαρχόντων σχημάτων θὰ ἠδυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς :

Εἰς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ὑπάρχει ὁ τίτλος : Τοῦτο εἶναι τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ τῆς κατασκευῆς τῶν ὡρολογίων. Εἰς τὸ χειρόγραφον τῶν Παρισίων καὶ τῆς Ὀξφόρδης δὲν ὑπάρχει τίτλος. Εἰς τὸ τῆς Ὀξφόρδης ὑπάρχει ὡς τίτλος ὁλοκλήρου τοῦ

---

1) Ἐπὶ τῇ βάσει στοιχείων παρεχομένων ὑπὸ τοῦ Προκοπίου καὶ τοῦ Gazarî κατώρθωσεν ὁ H. Diels νὰ ἀνακατασκευάσῃ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου περιγραφόμενον ὡρολόγιον ἐν Γάζῃ (Πρακτικὰ συνεδρίας τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου 19 Ἰουλίου 1917).

χειρογράφου εἰς τὴν πρώτην σελίδα : Τοῦτο εἶναι ὅ,τι ὁ Îrun (= Ἥρων) παρέλαβεν ἀπὸ τὸ ἔργον τοῦ Φίλωνος καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, τῶν δύο Ἑλλήνων, περὶ τῆς ἕλξεως τῶν βαρῶν, τῶν σφαιριδίων, τοῦ ὕδατος, τῶν δίσκων τῶν ζυγῶν καὶ τῶν ὁμοίων.

Τὰ συναφῆ χειρόγραφα τῶν Παρισίων καὶ τοῦ Λονδίνου εἶναι εὐανάγνωστα, ἐν ᾧ σαφέστερον φαίνεται εἰς ἡμᾶς, ὅτι εἶναι τὸ τῶν Παρισίων. Προφανῶς εἶναι τὸ παλαιότερον. Εἰς τὸ Λονδίνειον φαίνεται ὅτι ὑπάρχουν μερικαὶ παρεμβολαί, πρὸ παντὸς ἐπικλήσεως εἰς τὸν Ἀλλάχ. Τοῦτο περιέχει πολλὰς βραχείας περσικὰς παρατηρήσεις ὄχι ἀξίας λόγου. Περὶ τῶν ὑπαρχόντων κενῶν εἰς τὰ δύο χειρόγραφα καὶ σημαντικῶν ἀποκλίσεων μεταξὺ τῶν δύο γίνεται μνεία εἰς τὰς παραπομπάς. Αὗται εἶναι βεβαίως βραχεῖαι ἀλλ' ἀρκεταί, ὥστε νὰ ὑποτεθῇ ἁπλῆ ἀντιγραφὴ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀρχετύπου. Τὴν κριτικὴν τοῦ κειμένου τὴν ἀφίνομεν εἰς τοὺς φιλολόγους.

Ἐπειδὴ τὰ σχήματα καὶ εἰς τὰ δύο χειρόγραφα παρουσιάζουν πολλὰς διαφορὰς τὰ ἀνακοινοῦμεν ὅλα. Τὰ Λονδίνεια ἔχουσι κατασκευασθῆ καλλιτεχνικώτερα (παράβαλε π.χ. τὸ δένδρον μὲ τὰ σπουργίτια). Ἐὰν ἐνταῦθα ἔχει σημασίαν, ὅτι τὸ χειρόγραφον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνάγονται αἱ περσικαὶ προσθῆκαι, ἔχει γραφῇ ἐν Περσίᾳ, τοῦτο δὲν τὸ ἐξετάζομεν.

Περὶ τοῦ εἴδους τῶν σχεδιάσεων κ.λπ. (Nova Acta Bd. 100 Nr. 5, S. 3 καὶ 4) δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψει τὸ προηγουμένως παρατηρηθέν. Ἐνδιαφέρον, εἶναι, ὅτι εἰς τὸ (j) τοῦ σχήματος [1], εἰς τὸν ὑπότιτλον, ἡ εἰς τὸ μέσα προσαρμογὴ τοῦ τροχοῦ μνημονεύεται ἰδιαιτέρως : τοῦτο εἶναι περίεργον, διότι ἡ πραγματεία εἶναι παλαιοτέρα τῆς τοῦ al - Gazarî. Ἡ τελευταία δὲν μνημονεύει τοιοῦτόν τι· προφανῶς εἰς τὸν μεταξὺ χρόνον συνήθισαν εἰς τὰ τοιαῦτα.

Εἰς μίαν πραγματείαν τοῦ Μυρίστου, τὴν ὁποίαν μετεφράσαμεν καὶ ἐδημοσιεύσαμεν ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ εἰς τὴν γερμανικὴν ('Αρχεῖον für die Geschichte der Naturwissenschaft und Technik. Bd. 8 S. 140, 1917), παρατηρεῖται, σχετικῶς πρὸς προοπτικὰς σχεδιάσεις, ὅτι σχεδιάζουν ἐκ τριῶν σωλήνων, οἵτινες παρατίθενται ἀνὰ 120^0, ἔχουσι δὲ σχεδιασθῇ μόνον οἱ δύο, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ σχεδιάσεως εἰς τὸ ἐπίπεδον.

2. Συνοπτικὸν σχῆμα

'Επειδὴ ἐκ τοῦ κειμένου καὶ τῶν εἰς αὐτὸ εὑρισκομένων σχημάτων τῶν ἐπὶ μέρους συσκευῶν ἡ κατασκευὴ ὁλοκλήρου τοῦ ὡρολογίου δυσκόλως δύναται νὰ γίνῃ κατανοητή, παρετέθη ἡ ἀνακατασκευὴ ἐν σχεδίῳ (συνοπτικὸν σχῆμα σ. 238α). Δεικνύει σχηματικῶς, χωρὶς νὰ εἰσέρχεται εἰς λεπτομερείας[1]), τὴν ἀλληλοσύνδεσιν ὅλων τῶν τεμαχίων τοῦ ὡρολογίου. Τὰ ἐντὸς παρενθέσεως, εἰς τὸ κείμενον, τεθειμένα γράμματα ἀνάγονται εἰς τὴν παρατεθεῖσαν ἀνακατασκευήν. Διὰ τῆς συσκευῆς, ὅπου τὸ γράμμα A, παρίσταται ἡ πρόσοψις. Διὰ τῆς συσκευῆς ὅπου τὸ γράμμα B παρίσταται κάθετος τομὴ τῆς προσόψεως. Εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς συσκευῆς C παρίσταται τομὴ παράλληλος πρὸς τὴν πρόσοψιν, ἐν ᾧ εἰς τὸ κάτω μέρος παρίσταται ἄποψις ἀπὸ τὸ ὀπίσω μέρος.

Τὸ ὡρολόγιον τίθεται εἰς κίνησιν διὰ τοῦ εἰς τὸ «δοχεῖον τοῦ πλωτῆρος» (a) εὑρισκομένου πλωτῆρος (b), ὅστις βυθίζεται,

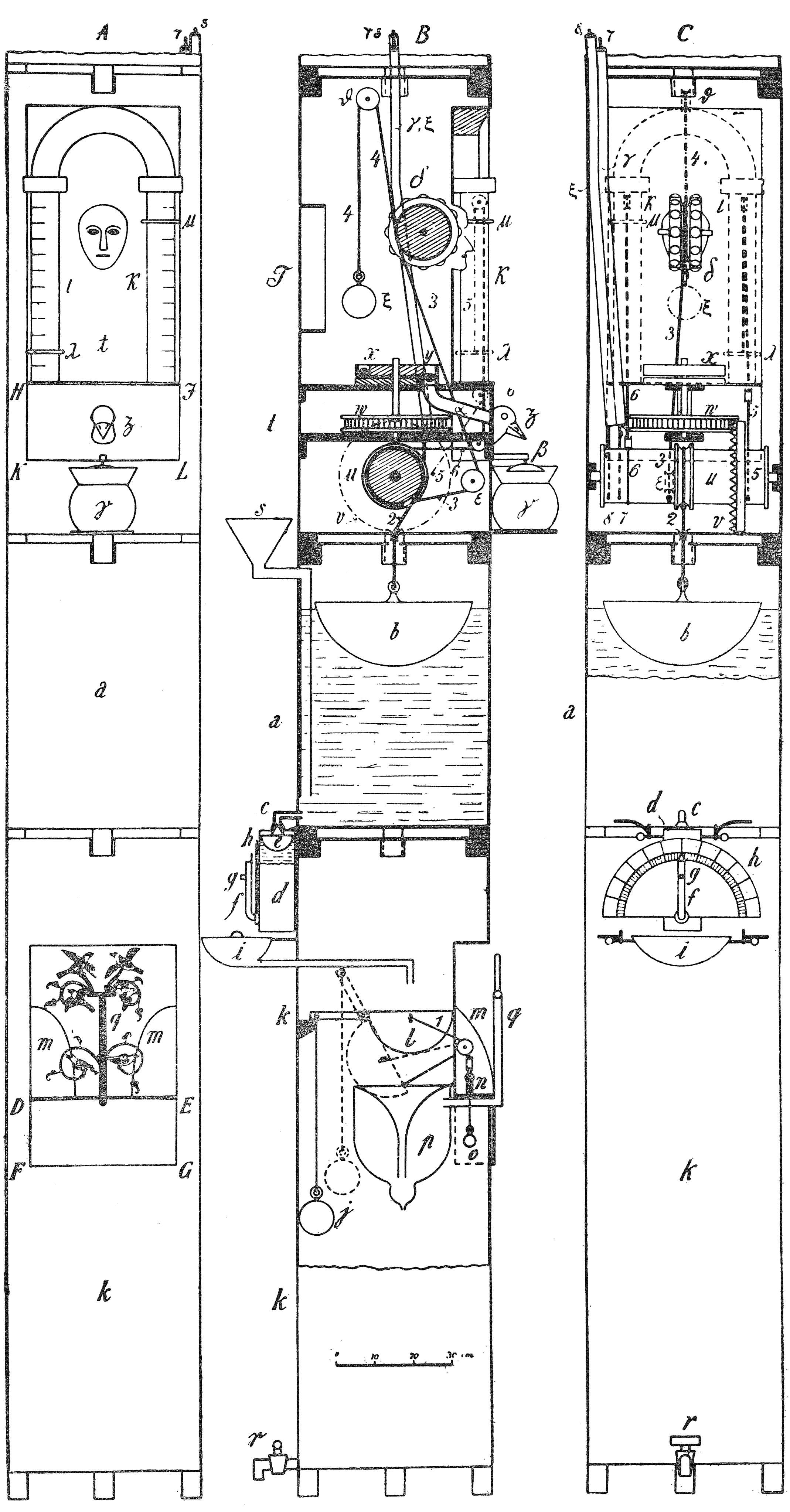
---

[1]) Πρὸς τούτοις θὰ ἦτο ἀναγκαία μία ἀνακατασκευὴ τοῦ ὡρολογίου, ἐπειδὴ ὁλόκληρος σειρὰ διαστάσεων (τῶν μερῶν τοῦ ὡρολογίου) μόνον διὰ μιᾶς πραγματικῆς ἀνακατασκευῆς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐξακριβωθῇ. 'Αλλὰ διὰ μίαν τοιαύτην ἀνακατασκευὴν ἔλειπαν κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ πολέμου ἡ εὐκαιρία καὶ τὰ ὑλικὰ μέσα (Δημοσίευσις τῆς ἐργασίας 1918, τελευταῖον ἔτος τοῦ α' παγκοσμίου πολέμου (1914 - 1918)).

ὅταν ὕδωρ ἐκ τοῦ δοχείου (a) ἐκρέει διὰ τοῦ σωλῆνος (c). Ἡ ταχύτης ἐκροῆς ρυθμίζεται εἰς τὸ δοχεῖον (Rub') (d) ἔχοντος πλωτῆρα μετὰ δικλίδος (e) καὶ δυνάμενον νὰ περιστρέφεται μὲ «ἀμφιρρέποντα σωλῆνα» (f) (μὲ χωλαίνοντα), μὲ περιστόμιον (g). Ὁ «ἀμφιρρέπων σωλὴν» ρυθμίζεται τῇ βοηθείᾳ τῆς ὑποδιαιρέσεως, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος αὐτοῦ, εἰς τὸ δοχεῖον (Rub') στερεωμένου ἡμιδίσκου (h). Ἐκ τοῦ περιστομίου ἐκρέει τὸ ὕδωρ εἰς ἓν πινάκιον (i)· ἐκ τούτου διευθύνεται διὰ σωλῆνος εἰς τὸ δοχεῖον συσσωρευτὴν (k). Ἐκ τούτου εἰσρέει εἰς τὸ κοχλιάριον (l), τὸ ὁποῖον ἀνατρέπεται πρὸς τὰ κάτω, ὅταν πληροῦται (παράβαλε τὴν διὰ διακεκομμένων γραμμῶν θέσιν του). Τότε κινεῖ τοῦτο τὰ εἰς τὰ «βουνὰ» (m) εὑρισκόμενα φίδια (n) (ἰδὲ καὶ σχ. 8) μέσῳ τοῦ σχοινίου (1) καὶ κενοῦται εἰς τὸν ἀεροθάλαμον (p), ὁπότε τὰ ἐπὶ τοῦ «δένδρου» (q) εὑρισκόμενα σπουργίτια (ἰδὲ καὶ σχῆμα [9]), σφυρίζουν. Μεθ' ἑκάστην κένωσιν τὸ κοχλιάριον (l) ἐπαναφέρεται εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν διὰ τοῦ εἰς τὸ χαλύβδινον ἄκρον του εὑρισκομένου βάρους (j) καὶ τὰ φίδια (ἰδὲ καὶ σχ. 8) (n) ἐπαναφέρονται διὰ τῶν βαρῶν (o)[1]) εἰς τὰ βουνὰ (m). Διὰ τοῦ λεπτοῦ ἀνοίγματος τοῦ πυθμένος τοῦ ἀεροθαλάμου (p) εἰσέρχεται τὸ ὕδωρ εἰς τὸ κατώτερον μέρος τοῦ συλλέκτου τοῦ ὕδατος, ἐκ τοῦ ὁποίου τοῦτο μετὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ ὡρολογίου (εἰς τὴν προτεθεῖσαν συσκευὴν συμβαίνει τοῦτο ἀνὰ 12 ὥρας) κενοῦται μέσῳ τῆς στρόφιγγος ἐκροῆς (r). Διὰ τὴν ἐκ νέου λειτουργίαν τοῦ ὡρολογίου πρέπει τὸ δοχεῖον (a) νὰ πληρωθῇ ἐκ νέου. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται ἡ χοάνη (s) μὲ τὸν σωλῆνα, ὁ ὁποῖος φθάνει μέχρι σχεδὸν τοῦ πυθμένος τοῦ δο-

---

[1]) Διὰ νὰ καλυφθῇ αὐτὸ τὸ βάρος (o) εὑρίσκεται ἐν πάσῃ περιπτώσει κάτωθι τοῦ γείσου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἵστανται τὸ δένδρον καὶ τὰ βουνά, μία ἀντίστοιχος κιβωτοειδὴς ἐπέκτασις (παράβαλε D E F G εἰς τὸ μερικὸν σχῆμα A).



238 α

Συνοπτικὸν σχῆμα τοῦ Ὡρολογίου τοῦ Ἀρχιμήδους.

χείου τοῦ πλωτῆρος καὶ εἶναι προσκεκολλημένος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τείχωμα τοῦ δοχείου τούτου.

Ὁ πλωτὴρ (b) στρέφει κατὰ τὴν βύθισιν, μέσῳ τῆς ἁλύσεως (2) τὸ εἰς τὸ «δοχεῖον τοῦ τροχοῦ» (t) εὑρισκόμενον τύμπανον (u). Ἐπὶ τούτου κεῖται ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς (υ) (εἰς τὴν τομὴν B, ἐπειδὴ εἶναι πρὸ τοῦ ἐπιπέδου τομῆς, ὑποσημαίνεται μὲ διακεκομμένας γραμμάς), ὁ ὁποῖος θέτει εἰς περιστροφὴν τὸν κινητήριον τροχὸν (w). Εἰς τὸν ἄξονα τούτου κεῖται ὁ ἀνώτερος δίσκος τῆς ὁμοίας πρὸς μύλον διατάξεως (x), ὁ ὁποῖος ῥυθμίζει τὴν πτῶσιν τῶν σφαιριδίων. Παρίσταται ἐνταῦθα καθ' ἣν στιγμὴν ἓν σφαιρίδιον (y) ἐκ τῆς ὀπῆς τοῦ δίσκου εἰς τὸν ἄνω (περιστρεπτὸν) δίσκον, εἰσέρχεται εἰς τὴν ὀπήν, εἰς τὸν κάτω (στερεὸν) δίσκον, ἵνα ἐκ τούτου διὰ τοῦ σωλῆνος (α) καὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ κόρακος (z) ἐγκαταλείψῃ τὸ δοχεῖον (t). Κατόπιν πίπτει εἰς τὸ κύμβαλον (τὸν κυρτὸν δίσκον) (β) καὶ ἐκ τούτου εἰς τὸ «συλλεκτικὸν δοχεῖον» (γ) τῶν σφαιριδίων. Διὰ τὴν ἐπανατοποθέτησιν τῶν σφαιριδίων τούτων εἰς τὴν ἀναρρίπτουσαν συσκευὴν (χ) πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ὄπισθεν τείχωμα τοῦ δοχείου (t) μία θυρὶς (T) (εἰς τὸ κείμενον δὲν μνημονεύεται).

Εἰς τὸ τύμπανον (u) εἶναι στερεωμένα, ἐκτὸς τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ (υ), ἀκόμη μία σειρὰ σχοινίων διὰ τὴν κίνησιν τῶν περαιτέρω συσκευῶν. Οὕτω τὸ σχοινίον (3), τὸ ὁποῖον στρέφει τὸ τύμπανον μὲ τὸν ὀφθαλμὸν (δ) ὄπισθεν τῆς ὄψεως εἰς τὸ πρόσθιον τείχωμα. Τὸ κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ σχοινίου (3) παρεισαγόμενον βοηθητικὸν τύμπανον (ε) εἶναι ἀναγκαῖον, διὰ νὰ φέρῃ πρὸς τὰ ἐμπρὸς τὸ σχοινίον, πρὸς τὸν κινητήριον τροχὸν (w). Τὸ σχοινίον (3) διατηρεῖται τεταμένον διά τινος ἀντιβάρους (ζ) (μὴ ἀναφερομένου εἰς τὸ κείμενον), τὸ ὁποῖον μέσῳ ἑνὸς σχοινίου (4) (προφανῶς μιᾶς ἀμέσου ἐπιμηκύνσεως τοῦ σχοινίου (3) εἶναι στερεωμένον εἰς τὸ τύμπανον (δ). Τὸ σχοινίον τοῦτο (4) πρέπει νὰ κινῆται διὰ τυμπάνου (τροχαλίας) (θ) ὑπὸ τὸ κάλυμμα τοῦ δοχείου (t).

Εἰς τὸ τύμπανον (u) εἶναι ἀκόμη στερεωμένα τὰ σχοινία (5 καὶ 6), τὰ ὁποῖα θέτουν εἰς κίνησιν τοὺς ἐπὶ τῶν στηλῶν (ι καὶ κ) διολισθαίνοντας δακτυλίους (λ καὶ μ) : Τὸν πρῶτον πρὸς τὰ ἐπάνω, τὸν ἄλλον πρὸς τὰ κάτω. (Τὸ σχοινίον 5, τὰ τύμπανά του καὶ ὁ δακτύλιος λ εἶναι σημειωμένα εἰς τὸ μερικὸν σχῆμα Β διὰ διακεκομμένων γραμμῶν, διότι κεῖνται πρὸ τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως). Διὰ νὰ ἐπιτυγχάνεται ἡ ὀρθὴ κατεύθυνσις τῶν σχοινίων (5 καὶ 6) ἐντὸς τοῦ δοχείου (t) ἔπρεπε νὰ εὑρίσκεται εἰς αὐτὸ μία ἀντίστοιχος κιβωτοειδὴς κατασκευὴ (H I K L εἰς τὸ μερικὸν σχῆμα Α) πρὸς ὑποδοχὴν τῶν ἀναγκαίων κινητικῶν τυμπάνων (τροχαλιῶν) κάτωθεν τοῦ γείσου, ἐφ' οὗ στηρίζονται αἱ στῆλαι (ι καὶ κ).

Τέλος εἶναι ἀκόμη εἰς τὸ τύμπανον (u) στερεωμένα τὰ σχοινία (7 καὶ 8), τὰ ὁποῖα διὰ τῶν σωλήνων (ν καὶ ξ) κατευθύνονται πρὸς τὰ ἄνω διὰ νὰ κινοῦν εἰς τὰ δύο ἀνώτατα εὑρισκόμενα δοχεῖα τὸν δήμιον καὶ τὸν ἱππέα καὶ τὰς θυρίδας των. Ἐπειδὴ ἡ εἰς λειτουργίαν θέσις τῶν δύο τούτων συσκευῶν καὶ ἡ σύνδεσις πρὸς τὰ σχοινία (7 καὶ 8) εἶναι ἤδη σαφὴ ἐκ τοῦ κειμένου καὶ τῶν σχημάτων αὐτοῦ, παρέλκει ἡ σχεδίασις εἰς τὸ προκείμενον σχῆμα, διότι τοῦτο ἄλλωστε θὰ ἦτο ἐκτενές.

Ὁ αὐλητὴς ἐπίσης δὲν περιελήφθη εἰς τὸ προκείμενον σχῆμα (παράβαλε πρὸς τούτοις σελ. 293). Ἂς ὑπομνησθῇ, ὅτι ὁλόκληρον τὸ ὡρολόγιον ὕψους περισσότερον τῶν 4 μέτρων θὰ ἦτο ἀξιόλογον ἔργον τέχνης.

3. Μετάφρασις τοῦ ἀραβικοῦ κειμένου

Ἡ εἰς τὰ ἑπόμενα παρεχομένη μετάφρασις συνάπτεται καθ' ὅσον ἦτο δυνατόν, εἰς τὸ ἀραβικὸν κείμενον. Ὅπου ἦτο ἀναγκαῖον ἐτέθησαν εἰς τὸ κείμενον ἐντὸς παρενθέσεως ( ) ὀλίγαι ἐπεξηγηματικαὶ ἢ συμπληρωματικαὶ λέξεις, ἐν ᾧ μακρότεραι φράσεις ἐτέθησαν ὡς ὑποσημειώσεις κάτωθι τοῦ κειμένου. Εἰς τὸ πρωτότυπον (ἀραβικὸν κείμενον) ὅλα τὰ δεδομένα παρέχονται εἰς τὸν εὐθὺν λόγον, μὲ τὴν προσφώνησιν «σύ». Ἀντὶ τούτου ἐθέσαμεν «τις». Μόνον ὅπου ἐκφράζεται παραίνεσις ἢ παρόμοιόν τι, διετηρήσαμεν τὸ «σύ».

Εἰς τὰ σχήματα τὰ παριστῶντα τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον[1]) εἰς τὸ Λονδίνειον καὶ τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἐτέθησαν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί. Πρὸς διάκρισιν οἱ ἀριθμοὶ τῶν σχημάτων τῶν χειρογράφων τοῦ Λονδίνου ἐτέθησαν ἐντὸς παρενθέσεως. Δευτερεύοντα σχήματα, τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν πρὸς ἐπεξήγησιν τῶν κυρίων σχημάτων χαρακτηρίζονται ἐκτὸς τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοίχων κυρίων σχημάτων καὶ μὲ μικρὰ λατινικὰ γράμματα.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ σχήματα τῶν χειρογράφων ἀντὶ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου ὑπάρχουν διάφορα σύμβολα, χρησιμεύουν τὰ τεθέντα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ὡς ὑπομνηστικὰ τῶν συμβόλων αὐτῶν, τὰ ὁποῖα ἀνακοινοῦνται κάτωθεν τῶν σχημάτων. Τὰ γράμματα εἰς τὸ κείμενον ἀναφέρονται, ὡς ὑπεμνήσθη, εἰς τὸ ὑφ' ἡμῶν προτεθὲν συνοπτικὸν σχῆμα.

---

[1]) Τὰ σχήματα ἀπεδόθησαν κατὰ τὸν πρότερον ἐκτεθέντα τρόπον [Nova Acta Bd. 100 Nr. 5 S. 3, παρατήρησις 1).

Ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους

Τὰ ὑδροδοχεῖα, οἱ πλωτῆρες τούτων καὶ ἡ συσκευὴ ἐκροῆς[1]).

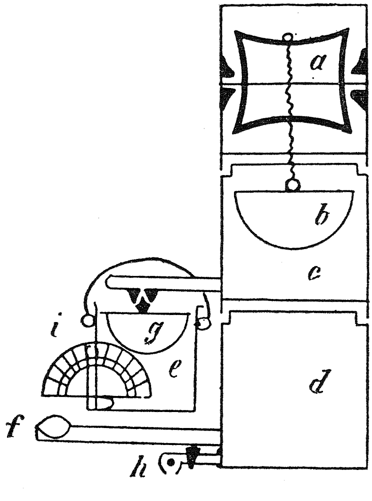
†Ἐν ὀνόματι τοῦ θεοῦ τοῦ πανοικτίρμονος. Οὗτος εἶναι ὁ χορηγὸς βοηθείας καὶ ὁδηγίας. Ὁ Ἀρχιμήδης λέγει, ἀφοῦ οὗτος ἀπέτινε ἔπαινον καὶ τιμὴν εἰς τὸν θεόν : Ὅταν εἶδα ὅτι αἱ ἐπινοήσεις τῶν ἀνθρώπων διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὡρολογίων (Binkamât) ἦσαν ἀτελεῖς καὶ δὲν εἶχον καλὴν θεμελίωσιν, τότε ἔγραψα αὐτὴν ἐδῶ τὴν πραγματείαν καὶ τὴν ἔκαμα ὅσον ἦτο δυνατὸν τελειοτέραν. Διὰ τὴν κατασκευὴν ὡρολογίων χρησιμοποιοῦσι χαλκόν†[2]). Ἐκ τούτου κατασκευάζεται ὑδροδοχεῖον [(α), Chizâna] (σχ. 1, 1α, [1] καὶ [1α] μέχρι [1 f]). Τὸ ὕψος τοῦ ὑδροδοχείου

---

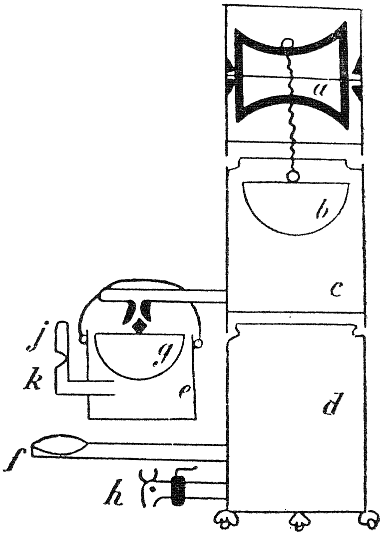
[1]) Οἱ τίτλοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν καθ' ἕκαστα κεφαλαίων ἐτέθησαν παρ' ἡμῶν διὰ τὴν εὐκολωτέραν ἐπισκόπησιν.

[2]) Ἡ θέσις μεταξὺ ††, δηλ. ἡ ἀρχὴ ἔχει ὡς ἑξῆς εἰς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον : Τοῦτο εἶναι τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὡρολογίων. Ἐν ὀνόματι τοῦ θεοῦ τοῦ πανοικτίρμονος, ἐὰν θέλῃς τοῦτο, τότε χρησιμοποίησε χαλκόν.

Εἰς τὸ χειρόγραφον τῆς Ὀξφόρδης ἡ ἀρχὴ ἔχει ὡς ἑξῆς : Μὲ ὅ,τι γράφω ἔστω ἔπαινος εἰς τὸν θεὸν τὸν κύριον τῶν κόσμων. Αἱ εὐλογίαι του διὰ τοῦ Μωάμεθ, καὶ τῆς οἰκογενείας του καὶ ἂς δώσῃ αὐτῷ χαράν. Ὁ Ἀρχιμήδης γράφει : Ὦ ἀγαπητέ μου Mâristân, θέλω νὰ σοῦ ἐξηγήσω, πῶς κατασκευάζονται τὰ δι' ὕδατος λειτουργοῦντα ὡρολόγια, τὰς κινήσεις διὰ τῶν σφαιριδίων καὶ ἄλλα, ἵνα τοῦτο σοῦ χρησιμεύσῃ ὡς ἀφετηρία δι' ὅ,τι ζωηρῶς ἐπιθυμεῖς νὰ μάθῃς καὶ ἐπιθυμῶ πᾶν ἀντικείμενον ἀνῆκον ἐδῶ νὰ διατάξω κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὡς ἁρμόζει εἰς αὐτό. Προτάσσω τὴν μητέρα τῶν κινήσεων (δηλ. τὴν ἀνάπτυξιν τῆς συσκευῆς, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὰς κινήσεις) καὶ τὸ σπουδαιότατον καὶ τελειότατον τῶν τεμαχίων τῶν ὡρολογίων, διὰ νὰ εἶναι ἡ ἔκθεσις, ὅσον τὸ δυνατὸν σαφεστέρα. Καὶ ἔχω πίστιν εἰς τὸν Ἀλλάχ. Αὐτὸς εἶπε. Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃς χαλκόν.....



Σχ. 1



Σχ. 1α

Τὰ σχήματα διαφέρουν κατὰ τοῦτο : Εἰς τὸ σχ. 1 ἔχει σχεδιασθῆ τὸ ἡμικύκλιον καὶ τὸ περιστόμιον (Gaz'a) ἐκ τῶν ἔμπροσθεν, ἐν ᾧ εἰς τὸ σχῆμα 1α τοὐναντίον ἔχουν σχεδιασθῆ ταῦτα πλαγίως, ἐπὶ πλέον δὲ ὅτι εἰς τὸ σχ. 1α ἔχουν σχεδιασθῆ καὶ οἱ πόδες (στηρίγματα).

Εἰς τὰ σχήματα 1 καὶ 1α, a εἶναι τὸ τύμπανον, b ὁ πλωτὴρ (Dabba), c τὸ δοχεῖον ὅπου ὁ πλωτὴρ (Chizânat al Dabba), d ὁ συλλέκτης (Chizânat al Magîd), e τὸ Rub', f κοιλότης (τηγάνι) (Migla), g πλωτήρ, ('Awwâma) h στρόφιγξ. Εἰς τὸ σχ. 1 τὸ i εἶναι ἡμικύκλιον, εἰς τὸ σχ. 1α τὸ j εἶναι ἡ ὀπὴ τοῦ περιστομίου (Gaz'a) καὶ εἰς τὸ k ὁ σωλὴν τοῦ περιστομίου (Gaz'a).

Εἰς τὰ δύο αὐτὰ σχήματα, ὡς καὶ εἰς τὸ σχ. [1] ὁ συλλέκτης ἔχει σχεδιασθῆ πολὺ χαμηλά. Κάτωθεν τῆς συμβολῆς τοῦ σωλῆνος μὲ τὴν κοιλότητα (τηγάνι) πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τόσος χῶρος, ὥστε ὅλον τὸ καθ' ὅλην τὴν ἡμέραν ἐκρέον ὕδωρ νὰ δύναται ἐκεῖ νὰ χωρέσῃ. Κατὰ τὰς σχεδιασθείσας διαστάσεις τῶν δοχείων ἐπιτυγχάνεται ἀκόμη τοῦτο διὰ τῆς ἐπιμηκύνσεως τῶν ποδῶν τοῦ δοχείου, ὅπου ὁ πλωτὴρ (c), καὶ δι' ὑψηλοτέρας τοποθετήσεως τοῦ τηγανίου (f) εἰς τὸν συλλέκτην.

εἶναι 3 σπιθαμαὶ[1]) (περίπου 75 ἑκ. μ.) μὲ ἄνοιγμα (διάμετρον) 2 σπιθαμῶν. Πρέπει νὰ εἶναι ἀκριβῶς κυλινδρικὸν καὶ μὲ ἀκρίβειαν προσκεκολλημένα τὰ τεμάχιά του. Ἔχει 3 ἢ 4 στηρίγματα (πόδια). Ὕστερον τοποθετοῦμεν ἐδῶ μίαν λεκάνην [(b) Qarʿa] ἐκ χαλκοῦ, ἡ ὁποία βυθίζεται εἰς τὸ ὕδωρ (kabas). Ὀνομάζουν αὐτὴν Dabba (πλωτῆρα). Τὸ σχῆμα της εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ σχῆμα ἑνὸς ἡμισφαιρίου. Ἔχει ὕψος 4 δακτύλων ἀνοικτῶν (16 ἑκατ. μ. Οἱ 4 κλειστοὶ δάκτυλοι = 8 ἑκατ. μ.) † καὶ πλάτος 5/3 σπιθαμῆς, ὥστε νὰ πλησιάζῃ τὸ πλάτος τοῦ ὑδροδοχείου †[2]). Κατόπιν τοποθετοῦσι διὰ ἐπιμελοῦς συγκολλήσεως ἓν κάλυμμα διὰ νὰ μὴ εἰσέρχεται ὕδωρ εἰς τὸν πλωτῆρα, διότι ἄλλως ἡ ὅλη συσκευὴ ἀχρηστεύεται.

Εἰς τὸ μέσον τοῦ καλύμματος ἔχει τοποθετηθῆ κομβίον (Razza) ὅπου στερεώνεται ἡ ἅλυσις [(2) Silsila τοῦ συνοπτικοῦ σχήματος τοῦ ὡρολογίου], τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζουσι ἐπὶ τοῦ τυμπάνου [(u), Bakra] τοῦ τροχοῦ (Daulâb), τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ὅλας τὰς κινήσεις καὶ ἄλλα ἀκόμη.

Κατόπιν κατασκευάζουσι δεύτερον μεγαλύτερον δοχεῖον (συλλέκτην) (k), τὸ ὁποῖον κεῖται κάτωθι τοῦ πρώτου· τοῦτο ὑποδέχεται τὸ ὕδωρ (Magîd lil Mâ')[3]), τὸ ὁποῖον ἐκρέει ἐκ τοῦ δοχείου, ὅπου ὁ πλωτήρ. Τὸ δεύτερον τοῦτο δοχεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκρέει τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ πρώτου, εἶναι στρογγύλον ὅπως τὸ πρῶτον : δύ-

---

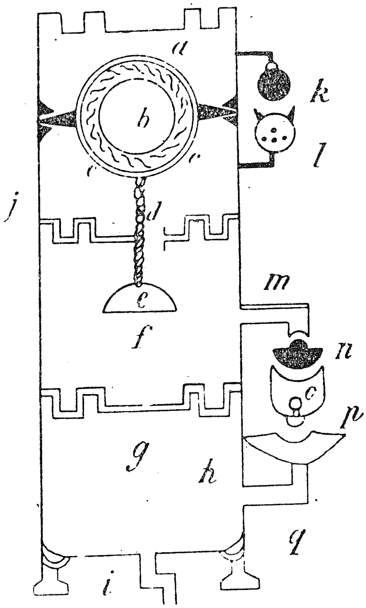
[1]) Διὰ τὰ μέτρα καὶ σειρὰν τεχνικῶν ἐκφράσεων παράβαλε τὴν ἐργασίαν εἰς Nova Acta Bd. 100 S. 46. Θέτομεν τὴν σπιθαμὴν = 25 cm, τὸν ἀνοικτὸν δάκτυλον = 4 cm, τὸν παρατιθέμενον = 2 cm, τὸ δακτυλιαῖον μέλος ʿAqd = 3 1/2 cm. Πιθανὸν τὸ τελευταῖον νὰ εἶναι οὐσιωδῶς μικρότερον.

[2]) Οὕτω ἔχει τὸ Λονδίνειον. Τὸ Παρισινὸν ἔχει χειρότερα καὶ ἀσαφῶς : Τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, ὅστις εἶναι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ (τοῦ πλωτῆρος). Γεμίζει ἀκριβῶς τὸ δοχεῖον.

[3]) Magîd lil Mâ'. Magîd σημαίνει ἐκτὸς ἄλλων καὶ κάδον (κουβᾶν) διὰ τὸ ὕδωρ. Μεταφράζομεν τὴν ἔκφρασιν μὲ δοχεῖον συλλογῆς (συλλέκτην).

ναται ἐπίσης νὰ ἔχῃ οἱονδήποτε σχῆμα. Ἔχει κάλυμμα. Εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν τούτου εὑρίσκονται εἰς τὰς ἀκμὰς θέσεις αἵτινες ὁμοιάζουσι πρὸς βόθρους (Hufra) (λάκκους), εἰς τοὺς ὁποίους

Σχ. [1]



Εἰς τὸ σχῆμα [1] εἶναι a δοχεῖον τοῦ τυμπάνου, b τὸ τύμπανον, c ὁ ἄξων, d ἡ ἅλυσις, e ὁ πλωτὴρ (Dabba), f τὸ ὑδροδοχεῖον, g συλλέκτης, h θέσις εἰσόδου τοῦ ὕδατος, i στρόφιγξ ἐξόδου τοῦ ὕδατος, j τρόπος διατάξεως τοῦ τροχοῦ εἰς τὸν ἄξονα τοῦ τυμπάνου, ἵνα διὰ τῆς στροφῆς τούτου στρέφεται, καὶ κατάστασις τοῦ τυμπάνου, τὸ ὁποῖον ἀποκλίνει τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχομεν σχεδιάσει (εἶναι δηλονότι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως, εἶναι ὅμως εἰς αὐτὸ καὶ ὡς ἐκ τούτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἄξονός του πρὸς τὰ ἔσω περιεστραμμένον), k τὸ κύμβαλον, l ὁ χῶρος ὅπου συλλέγονται τὰ σφαιρίδια(;), m θέσις ἐκροῆς τοῦ ὕδατος πρὸς τὸ παράπλευρον δοχεῖον (Rubʿ) n ὁ πλωτὴρ (ʿAwwâma), o τὸ περιστόμιον (Gazʿa), p εἰκὼν τοῦ Rubʿ, q τὸ τηγάνιον (Migla).

ἐνθέτουσι τοὺς πόδας τοῦ δοχείου, ὅπου ὁ πλωτὴρ (a). Τὸ δοχεῖον τοῦτο, εἶναι εἷς συλλέκτης καὶ ἔχει πρὸς τὰ ἄνω καὶ κάτω βάσιν. Ἐκτὸς τούτου ἔχει εἰς τὸ ὀπίσθιον μέρος μίαν στρόφιγγα (r)[1]) πρὸς διαφυγὴν τοῦ ὕδατος, ὅταν αἱ κινήσεις καὶ ἡ λειτουργία τοῦ ὡρολογίου ἔχουν τελειώσει[2]).

[1]) Τὸ σχῆμα [1] δεικνύει ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ σχῆμα 1 καὶ 1α τὴν στρόφιγγα οὐχὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ συλλέκτου, ἀλλὰ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του καὶ ἐδῶ βλέπει κανεὶς μόνον τὸν σωλῆνα ἐκροῆς.

[2]) Τὸ Λονδίνειον προσθέτει συχνά: «Ἐὰν ὁ θεὸς θέλῃ κ.λπ.» Πάντοτε παραλείπομεν τοῦτο.

Κατόπιν τοποθετοῦσι ἀκόμη ἓν δοχεῖον (t), τὸ ὁποῖον ἐπιτίθεται εἰς τὸ δοχεῖον, ὅπου ὁ πλωτήρ, ὡς τοῦτο ἔχει τοποθετηθῆ εἰς τὸν συλλέκτην. Τὰ δοχεῖα ἀποτελοῦσι τότε, ὅταν τὸ ἓν ἔχῃ τοποθετηθῆ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἓν ἑνιαῖον ὅλον.

Ἐκ τοῦ τρίτου τούτου δοχείου πίπτουσι τὰ σφαιρίδια καὶ εἰς αὐτὸ λαμβάνουν χώραν μερικαὶ κινήσεις. Ὀνομάζομεν αὐτό, τὸ δοχεῖον τῶν σφαιριδίων[1]). Κάτωθεν εἶναι τὸ δοχεῖον τοῦτο κλειστὸν διὰ μιᾶς βάσεως. Εἰς ταύτην ὑπάρχει ὀπὴ διὰ τὴν θέσιν, εἰς τὴν ὁποίαν εἰσάγεται ἡ ἅλυσις (2), εἰς τὴν ὁποίαν ἐξαρτᾶται ὁ πλωτὴρ (b). Εἰς τὸ δοχεῖον τῶν σφαιριδίων (t) καὶ εἰς τὸ 1/4 τοῦ ὕψους του ἐφαρμόζεται ἄξων ἐκ τῶν κάτω, ὅστις ἔχει δύο ἐξοχὰς (Qutb). Εἶναι al Surn (παράβαλε Συμβολαὶ VI, S. 40).

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος, ἅτινα σχηματίζουσι τὰς δύο ἐξοχάς, προσαρμόζονται δύο ὑπόβαθρα (Mauda') ἵνα ἐντὸς αὐτῶν δύναται ὁ ἄξων νὰ στρέφεται. Εἰς τοῦτον εὑρίσκεται ἓν τύμπανον (u) τὸ ὁποῖον εἶναι πολὺ καλῶς στερεωμένον μὲ αὐτόν, ὥστε νὰ μὴ μετατοπίζεται. Ἡ ἀκτίς του (δηλ. τὸ ἄκρον του) εὑρίσκεται πλησίον τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου τοῦτο εὑρίσκεται, δηλ. τοῦ δοχείου τῶν σφαιριδίων. † Ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ τύμπανον προορίζεται διὰ τὸ ὡρολόγιον καὶ ὄχι διὰ τὴν παραγωγὴν διαφόρων κινήσεων πρὸς παίγνιον †[2]), αἱ διαστάσεις του εἶναι τοιαῦται, ὥστε ὅταν κάμνῃ μίαν περιστροφήν, τοῦτο νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν ἡμέραν, ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου.

---

[1]) Μέχρις ἐδῶ φθάνει τὸ χειρόγραφον τῆς Ὀξφόρδης, τὸ ὁποῖον ἀκόμη προσθέτει :

«Τοῦτο εἶναι τὸ δοχεῖον τῶν σφαιριδίων».

[2]) †† Τοῦτο ἐλλείπει εἰς τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον. Ἐκεῖ διαβάζομεν : Ἡ διάστασις τοῦ τυμπάνου εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἐὰν τοῦτο κάμνῃ μίαν περιστροφήν, τοῦτο ἀντιστοιχεῖ ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου.

Πρὸς τούτοις πίπτουσι κάτω 12 σφαιρίδια· ἕκαστον σφαιρίδιον ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ὥραν.

Ἐὰν ἡ στροφὴ συνεχίζεται ἡμέραν καὶ νύκτα τοῦτο ἰσοδυναμεῖ πρὸς δύο περιστροφὰς τοῦ τυμπάνου, ὥστε νὰ ῥιφθῶσι πρὸς τὰ κάτω 24 σφαιρίδια, † τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦσι εἰς τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα † [1]). Συγχρόνως μὲ τοῦτο κινοῦνται ὅλαι αἱ συσκευαί, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι ἐγκατασταθῆ διὰ νὰ κινῶνται διὰ τοῦ τυμπάνου καὶ ἐν συνεπαφῇ πρὸς τοῦτο, δηλαδὴ εἰς χρόνον μιᾶς ἡμέρας καὶ μιᾶς νυκτός, ἐφ' ὅσον τὸ τύμπανον ἔχει οὕτως ῥυθμισθῆ, ὥστε κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἡμέρας καὶ μιᾶς νυκτὸς νὰ ἐκτελῇ δύο περιστροφάς. Τότε ἡ εἰς τὸν πλωτῆρα προσδεδεμένη ἅλυσις ἔχει δύο φορὰς περὶ τὸ τύμπανον περιστραφῆ.

Ὅταν χυθῇ ὕδωρ εἰς τὸ ὑδροδοχεῖον (a), τοῦτο πρέπει νὰ φθάσῃ σχεδὸν ἕως τὰ χείλη τοῦ δοχείου. Ὁ πλωτὴρ (b) ἐπιπλέει ἄνω τῆς ἀνωτάτης ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὥστε τὸ ἀνώτατον μέρος τούτου νὰ ἐφάπτεται σχεδὸν τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδροδοχείου. Τὸ μῆκος τῆς ἁλύσεως (2) εἶναι, ὡς προηγουμένως ἐμνημονεύθη, ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς περιμέτρου τοῦ τυμπάνου (u) τοῦ εἰς τὸν πλωτῆρα ἐξηρτημένου τεμαχίου καὶ τοῦ πάχους τῶν δύο ἐπιφανειῶν τῶν δύο δοχείων.

Ὅταν κατόπιν τὸ ὕδωρ ἐκρέῃ ἐκ τοῦ κατωτέρου μέρους τοῦ δοχείου, ὅπου ὁ πλωτήρ, ἐκ τῆς ὀπῆς τῆς στρόφιγγος τοῦ περιστομίου [(g) Gazʿa],[2]) τότε ἀπορρίπτονται κατὰ τὴν περιστροφήν, μετὰ τὴν πάροδον ἑνὸς ἡμερονυκτίου, 24 σφαιρίδια.

[1]) †† Ταῦτα ἐλλείπουν εἰς τὸ χειρόγραφον τῶν Παρισίων. Διὰ τὴν περιγραφὴν ταύτην παράβαλε σελ. 261.

[2]) Διατηροῦμεν διὰ τὸ περιστόμιον τὴν ἀραβικὴν λέξιν Gazʿa, ὅπως καὶ τὸ Rubʿ (ἓν εἶδος μετρητοῦ) διὰ τὸ μὲ ταύτην τὴν λέξιν σημειούμενον δοχεῖον.

Πρὶν περιγράψομεν τὰς κινήσεις, ἐπιθυμοῦμεν νὰ περιγράψωμεν τὴν θέσιν ἐκ τῆς ὁποίας τὸ ὕδωρ ἐκρέει ἐκ τοῦ δοχείου, ὅπου ὁ πλωτήρ, ὡς ἐπίσης νὰ διασαφηνίσωμεν, κατὰ ποῖον τρόπον τὸ περιστόμιον ἔχει προσαρμοσθῇ διὰ τὴν ἐκροὴν τοῦ ὕδατος. Ἐκτὸς τούτου ἐπιθυμοῦμεν νὰ παρουσιάσωμεν, ποῖαι συσκευαὶ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἀπαιτοῦνται, ὥστε ἐκεῖνος, ὅστις θέλει νὰ ἐγκαταστήσῃ τὸ ὡρολόγιον τοῦτο, νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ τὸ ἐπιτύχῃ, ἐπίσης δὲ θὰ περιγράψωμεν τὰ σχήματα τῶν συσκευῶν, τὰς διαστάσεις αὐτῶν καὶ τὴν τοποθέτησίν των εἰς τὰς δι' αὐτὰς ἀντιστοίχους θέσεις.

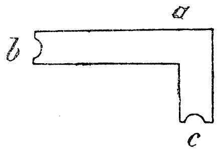
Λαμβάνομεν ἓν δοχεῖον (Rubʿ) (d) [σημ. παράπλευρον δοχεῖον, εἴδους μετρητοῦ], τὸ ὁποῖον χρησιμεύει διὰ τὰς μετρήσεις, τοῦ ὁποίου ὅμως ὁ πυθμὴν εἶναι θολωτὸς[1]) (τὸ κοῖλον πρὸς τὰ κάτω).

Εἰς τὰς δύο πλευράς του ἔχει τὸ δοχεῖον δύο κόμβους (κεφαλὰς) μὲ μακρὰ στελέχη (σχ. [1 c]).

Ἔπειτα ἑτοιμάζεται εἷς πλωτὴρ [(e) (ʿAwwâma)], ὅστις εὐχερῶς χωρεῖ εἰς τὸ δοχεῖον τοῦτο (τὸ παράπλευρον, τύπου μετρητοῦ, ἀραβιστὶ Rubʿ). Ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς ἡμισφαιρίου μετὰ καλύμματος. Εἰς τὴν ἐπιφάνειάν του ὑπάρχει ἓν εἶδος ἐξογκώματος, (Nutuww), τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει πρὸς κομβίον (Zirra) (σχ. [1b]).

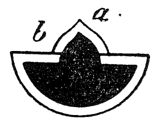
Κατόπιν κατασκευάζουσι ἀνάλογον (muqtadir) σωλῆνα [(c), Anbûb], (κεκαμμένον, συνοπτικὸν σχῆμα) τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον εἰσάγεται ὀλίγον ὑψηλότερον τῆς βάσεως, εἰς τὸ ὑδροδοχεῖον (a), εἰς ὕψος περίπου ἑνὸς ʿAqd (μέλους) ἢ ὀλιγώτερον. Εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ὑδροδοχείου καὶ ἔχει μῆκος περίπου 1/2 δακτύλου

[1]) Ὁ θολωτὸς πυθμὴν δεικνύεται εἰς τὰ σχήματα [1] καὶ [1c], ἐν ᾧ εἰς τὰ σχήματα 1 καὶ 1α ὁ πυθμὴν παρίσταται ἐπίπεδος. Ἐφαρμόζονται δηλ. καὶ τὰ δύο εἴδη σχήματος τοῦ πυθμένος. Τὸ συνοπτικὸν σχῆμα παρέχει τὸν πυθμένα ὡς τὰ σχήματα 1 καὶ 1α.



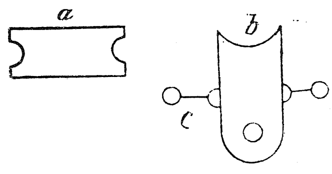
Σχ. [1α]

Πρὸ τοῦ σχήματος [1α] γράφεται : Τοῦτο εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ σωλῆνος, ὁ ὁποῖος εἰσέρχεται εἰς τὸ δοχεῖον, ὅπου ὁ πλωτήρ· εἶναι τὸ ὑδροδοχεῖον καὶ τὸ ὕδωρ ἐκρέει ἐκ τῆς καμπῆς (Inhina), εἰς τὴν ὁποίαν ἡ προεκβολὴ τοῦ πλωτῆρος προσάπτεται. Εἰς τὸ α εἶναι ὁ σωλήν, εἰς τὸ b ἡ θέσις συγκολλήσεως μὲ τὸ δοχεῖον, εἰς τὸ c ἡ θέσις ἐκ τῆς ὁποίας ἐκρέει τὸ ὕδωρ καὶ εἰς τὴν ὁποίαν εἰσέρχεται ὁ κόμβος τοῦ πλωτῆρος.



Σχ. [1b]

Τὸ α παριστᾷ τὸν πλωτῆρα καὶ τὸ b τὸν κόμβον (προεξοχὴν) (Zirrahâ).



Σχ. [1c]

Ὑπὲρ τὸ σχῆμα [1c] γράφεται : Τοῦτο εἶναι τὸ σχῆμα τοῦ Rubʿ (δοχείου ὁμοίου πρὸς μετρητὴν) καὶ τῆς θέσεως διὰ τὴν ὀπὴν εἰς τὸ περιστόμιον (Gazʿa), ἡ ὁποία εἶναι ἐπ' αὐτοῦ, καὶ τοῦ μικροῦ σωλῆνος, ὅστις εὑρίσκεται περὶ τὸ περιστόμιον καὶ ἐκ τούτου ἐξέρχεται πρὸς τὸ τηγάνιον. Παρὰ τὸ α γράφεται : ὁ σωλήν, ὅστις εὑρίσκεται περὶ τὸ περιστόμιον, παρὰ τὸ b : ἐδῶ εἶναι ὁ πλωτήρ, παρὰ τὸ c : ἡ θέσις τοῦ δοχείου σχήματος μετρητοῦ (Rubʿ).

(= 0,009 μ. περίπου). Τὸν συγκολλῶσι μετὰ τοῦ ὑδροδοχείου. Διὰ τοῦ σωλῆνος τούτου ἐκρέει τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ δοχείου ὅπου ὁ πλωτήρ. Τὸ ἄκρον του, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐκρέει τὸ ὕδωρ εἶναι κεκαμμένον πρὸς τὰ κάτω περὶ τὸ 1 ʿAqd (σχ. [1α]). Τὸ πλάτος (διάμετρος) τοῦ κεκαμμένου τούτου μέρους ὡς καὶ ὅλος ὁ σωλὴν εἶναι τόσον, ὥστε ἡ κεφαλὴ (κομβίον) τοῦ (μικροῦ) πλωτῆρος (e) νὰ εἰσέρχεται εὐκόλως εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σωλῆνος. Δέον ὅμως ἡ κεφαλὴ αὕτη οὔτε νὰ προσκολλᾶται εἰς τὸν σωλῆνα, οὔτε νὰ ἀφίνῃ πολὺ κενόν.

Εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ Rubʿ (δοχείου σχήματος μετρητοῦ, τὸ d τοῦ συνοπτικοῦ σχήματος) προσθέτουσι τὸ περιστόμιον (Gazʿa) ἐκ τοῦ ὁποίου ἐκρέει τὸ ὕδωρ: ῥυθμίζεται ἀναλόγως τῶν διαφόρων (διαφόρου μήκους) ὡρῶν, δηλαδὴ παρέχει ἀναλόγως τῆς ὑψώσεως (ἀναλόγως ἂν τὸ στρέφῃ κανεὶς πολὺ πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω) τὰς ἴσας (ὁμαλὰς) ἢ ἀνίσους ὥρας, (σημείωσις: ἴσαι ὧραι καλοῦνται αἱ 24 ὧραι τοῦ ἡμερονυκτίου. Τὸ χρονικὸν διάστημα ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου χωριζόμενον εἰς 12 ἴσα μέρη ἀποτελεῖ τὰς ἀνίσους ὥρας) (Κατὰ E. Wiedemann, Beiträge zur Geschichte der Naturwiss. Sitzungsber. d. Phys.— med. Soz. in Erlangen, Vol. 1905, σελὶς 257), οὕτως ὥστε τὸ ἡμερονύκτιον νὰ δίδῃ 24 ὥρας[1]). Τοῦτο θὰ τὸ ἐξηγήσωμεν. Περὶ τὸ περιστόμιον τοῦτο (g) (Gazʿa) θέτομεν ἕνα μικρὸν σωλῆνα — οὗτος ἔχει μῆκος μικρότερον ἑνὸς ʿAqd — ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραπλεύρως σχήματος μετρητοῦ δοχείου (Rubʿ)· οὗτος συγκολλᾶται καλῶς. Ἐκ τούτου θὰ ἐκρέῃ τὸ ὕδωρ[2]).

Κατόπιν θέτουσιν ἓν εἶδος τηγανίου (i) (Migla)[3]). Ὅταν στάξῃ

---

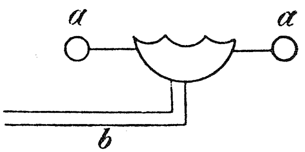
[1]) Εἰς τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον οἱ ἀριθμοὶ ἐκφράζονται διὰ συμβόλων ἐν ᾧ εἰς τὸ Λονδίνειον διὰ λέξεων.

[2]) Ποῦ ὁ σωλὴν οὗτος ἔχει προσαρμοσθῆ δὲν συνάγεται σαφῶς. Ὁπωσδήποτε, ὡς ἡ μεθεπομένη πρότασις ἀφίνει νὰ νοηθῇ, οὗτος εἶναι εἷς βραχὺς σωλὴν (σχ. [2α]), ὅστις περιβάλλει τὸ περιστόμιον καὶ εἶναι προσκεκολλημένος καθέτως πρὸς τὸν κεκαμμένον σωλῆνα. Ἡ ἔννοια τῶν λέξεων «ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Rubʿ» εἶναι ἡ ἑξῆς· ὁ μικρὸς οὗτος σωλὴν περὶ τὸ περιστόμιον ἐπὶ τοῦ κεκαμμένου σωλῆνος εἶναι οὕτω πως προσκεκολλημένος, ὥστε νὰ διευθύνεται μακρὰν τοῦ τειχώματος τοῦ Rubʿ.

[3]) Εἶναι δυνατὸν νὰ μεταφρασθῇ ἡ ἀραβικὴ λέξις Migla εἰς κοχλιάριον. Προτιμῶμεν ὅμως τὴν λέξιν τηγάνιον, διότι βραδύτερον ἐπεισάγεται καὶ ἡ λέξις κοχλιάριον.

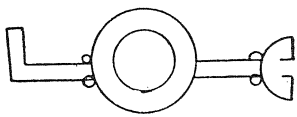
τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ σωλῆνος, ὁ ὁποῖος περιβάλλει τὸ περιστόμιον (Gaz'a), πίπτει εἰς αὐτὸ τὸ τηγάνιον. Εἰς τὸ τηγάνιον τοῦτο εὑρίσκεται εἷς συγκεκολλημένος μὲ αὐτὸ σωλήν, ὁ ὁποῖος εἰσέρχεται εἰς τὸν συλλέκτην (k).

Εἰς τὸ τηγάνιον τοῦτο εὑρίσκονται ἀκόμη δύο μακρὰ κομβία



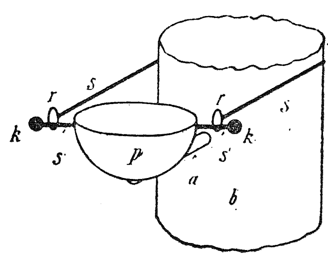
Σχ. [1 d]

Πρὸ τοῦ σχήματος [1 d] διαβάζομεν: Τοῦτο εἶναι τὸ σχῆμα τοῦ τηγανίου, τὸ ὁποῖον ἀποστέλλει τὸ ὕδωρ περαιτέρω, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται περὶ τὸ περιστόμιον. Φθάνει τοῦτο εἰς τὸν συλλέκτην. Τοῦτο τὸ γνωρίζω καὶ σὲ διαβεβαιῶ περὶ τῆς ὀρθότητος αὐτοῦ. Εἰς τὸ a εἶναι ὁ κόμβος (κεφαλή), εἰς τὸ b εἶναι ὁ σωλὴν ὅπου εἰσρέει τὸ ὕδωρ εἰς τὸν συλλέκτην.



Σχ. [1 e]

Τὸ σχῆμα [1 e] ἵσταται παραπλεύρως τοῦ σχήματος [1] χωρὶς ὅμως ἐνδείξεις.



Σχ. [1 f]

(Zirra) (σχ. [1d] καὶ [1e]). Εἰς τὸ δοχεῖον (α) τοῦ πλωτῆρος (Dabba) (σχ. συνοπτικὸν) εὑρίσκονται βαθύτερον ἢ ὁ σωλὴν (c) ἐκ τῶν ὁποίου ἐκρέει τὸ ὕδωρ, δύο ἐπιμήκεις δακτύλιοι (Zurfa) (δηλ. δακτύλιοι ἐξαρτώμενοι ἐξ ἐπιμήκων στελεχῶν), ὅπου τὰ κομβία (Zirra) τοῦ Rub' στηρίζονται[1]) καὶ εἰς τὸν συλλέκτην

1) Κατ' ἀπόκλισιν τούτου καὶ τοῦ σχήματος [1c] δεικνύουσι τὰ σχήματα 1 καὶ 1α τὸ Rub' (δοχεῖον εἴδους μετρητοῦ) ἐξηρτημένον μέσῳ ἑνὸς τόξου εἰς τὸν σωλῆνα ἐκροῆς, ἐν ᾧ εἰς τὸ σχ. [1] ἡ συσκευὴ ἐξαρτήσεως δὲν ἔχει σχεδιασθῆ.

(k) εὑρίσκονται δύο δακτύλιοι (Zurfa)[1]), εἰς τοὺς ὁποίους στηρίζονται τὰ κομβία (Zirra) τοῦ τηγανίου (i)[2]). Τὸ τηγάνιον κεῖται κάτωθεν τῆς χαμηλοτάτης θέσεως τοῦ Rubʿ, διὰ νὰ στάζῃ εἰς αὐτὸ τὸ ὕδωρ, ὡς ἐμνημονεύσαμεν.

Ὅλα ταῦτα εἶναι, ὅταν τὸ ὡρολόγιον ἔχῃ συντεθῇ, πρὸς τὸ ὀπίσθιον μέρος, διὰ νὰ μὴ βλέπῃ κανεὶς τίποτε. Μάθε τώρα, ὅ,τι σοῦ εἶπα ὡς ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζῃ κανεὶς διὰ τὸ ὡρολόγιον καὶ δὴ καὶ διὰ τὴν θέσιν ἐκ τῆς ὁποίας τὸ ὕδωρ ἐκρέει, διὰ νὰ ἀκολουθῇ ὥρα πρὸς ὥραν, ὡς τοῦτο ἔχομεν ἐπεξηγήσει καὶ περιγράψει. Ἀπεικόνισα αὐτὰ τὰ πράγματα διὰ σὲ διὰ νὰ τὰ μάθῃς καὶ τὸ πρᾶγμα σοῦ γίνῃ εὔκολον[3]).

---

[1]) Πιθανὸν ἀντὶ Zurfatain νὰ διαβάζεται Zurfînain. Zurfîn σημαίνει δακτύλιον, ἀλλὰ ἐπίσης εἰς τὸ Ridwân σημαίνει ἐπίθεμα, ἐπιστόμιον. Ἐνταῦθα πιθανὸν ἓν ἄγκιστρον ἢ μίαν ἐπιμήκη ὀπήν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ εἰσέλθῃ ἄλλη συσκευή.

[2]) Ἐν ἀντιθέσει πρὸς ταῦτα δὲν δεικνύουσι τὰ σχήματα 1, 1α καὶ [1] τοιούτους φορεῖς εἰς τὸ ὑδροδοχεῖον, ἀλλὰ μόνον τὸ τηγάνιον φερόμενον ὑπὸ τοῦ σωλῆνος του. Τὸ σχῆμα [1d] δεικνύει, ἐννοεῖται, εἰς τὸ τηγάνιον κομβία (ἐξογκώματα), ὡς ἂν οἱ φορεῖς νὰ ὑπῆρχον. Ἐκ τοῦ κειμένου δὲν διαφαίνεται σαφῶς ἡ κατασκευὴ τῆς συσκευῆς φορέως, ὡς αὕτη ἀνωτέρω παρέχεται διὰ τὸ Rubʿ καὶ ἐδῶ διὰ τὸ τηγάνιον. Πιστεύομεν ἐν τούτοις, ὅτι θὰ ἠδύνατο νὰ προταθῇ ἡ εἰς τὸ σχῆμα [1 f] διὰ τὸ τηγάνιον σχηματικῶς ἐκτεθεῖσα ἀνακατασκευή.

Εἰς τὸν συλλέκτην (b) κεῖνται στερεῶς δύο ὁριζόντια στελέχη (s), τὰ ὁποῖα φέρουσι εἰς τὸ τέλος των δύο δακτυλίους (r). Διὰ τῶν δακτυλίων τούτων ἔχουσιν ἐμπηχθῇ τὰ κομβία (κεφαλαὶ) (k), τὰ ὁποῖα μέσῳ τῶν στελεχῶν (s′) κάθηνται ἐπὶ τοῦ τηγανίου (p). Διὰ τὸ τηγάνιον ἐξελέγη τὸ εἶδος τοῦτο τῆς στερεώσεως, ἐκτὸς τῆς συγκολλήσεως διὰ τοῦ σωλῆνος ἐκροῆς (α), διὰ νὰ ἐμποδίζῃ τὴν διάρρηξιν τῆς θέσεως, ὅπου ἡ συγκόλλησις τοῦ σωλῆνος (α) εἰς τὸ δοχεῖον (b).

[3]) Εἰς τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἀκολουθεῖ συνέχεια κειμένου, τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς τὰ σχήματα κεχωρισμένων μερῶν τοῦ ὡρολογίου, τὰ

Ἐτελειώσαμεν τὴν περιγραφὴν ἐκείνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀναγκαῖον διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν συσκευῶν διὰ τὴν ἐκροὴν τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ ὑδροδοχείου. Ἡ περιγραφὴ αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ὡρολογίων, τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν νὰ δεικνύουν τὰς ἀνίσους ὥρας. Εἰς αὐτὰ ἔχει ἡ ἡμέρα τοῦ Καρκίνου[1]) ἐξ ὅλων τῶν ἐποχῶν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν ὡρῶν, εἰς τὸν Αἰγόκερω εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ὁ μικρότερος ὅλων τῶν ἐποχῶν, ἐν ᾧ ἰσότης ἡμερῶν καὶ νυκτῶν ὑπάρχει εἰς τὸν Κριὸν καὶ εἰς τὸν Ζυγόν, δηλ. ἡ ἡμέρα καὶ ἡ νύξ, ἔχουσιν ἐνταῦθα ἀνὰ 12 ὥρας.

Ὁ σταθερὸς καθορισμὸς τῶν ὡρῶν τοῦ ὀργάνου τούτου δηλαδὴ τὸ ποσὸν τοῦ ἐκρέοντος ὕδατος ἐκ τοῦ Gazʿa (περιστομίου), ἐπιτυγχάνεται διὰ τῶν ὑψῶν[2]) τῶν ὡρῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦσι εἰς τοὺς χρόνους τοὺς ὁποίους ἔχομεν καθορίσει. Ἐὰν κανεὶς ἔχῃ ἀποκαταστήσει τοὺς χρόνους αὐτοὺς εἰς πάντα τόπον, (διαφόρου γεωγρ. πλάτους) διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ὑψῶν τῶν ὡρῶν, δηλαδὴ τῶν ἀνίσων ὡρῶν, τότε συντελεῖ τοῦτο, ὥστε ἡ ἡμέρα

ὁποῖα ὅμως εἰς αὐτὸ ἐλλείπουσιν. Εἰς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ κείμενον, τὸ ὁποῖον τίθεται πάντοτε ἄνωθεν τῶν ἀντιστοίχων σχημάτων. Ἐπὶ τῇ βάσει τούτου τὸ ἐδημοσιεύσαμεν ἐδῶ. Τὸ τέλος τῆς φράσεως εἰς τὸ τελευταῖον σχῆμα «Μάθε τοῦτο καὶ πίστευσε περὶ τῆς ὀρθότητος αὐτοῦ» ἐλλείπει ἐκ τοῦ Λονδινείου χειρογράφου.

[1]) Ἡ ἡμέρα τοῦ Καρκίνου, δηλαδὴ ἡ ἡμέρα, καθ' ἣν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸν Καρκίνον ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν ἰσοτίμων ὡρῶν, ἐκ τῶν ὁποίων 24 κατανέμονται εἰς τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα· τοὐναντίον ἡ ἡμέρα τοῦ Κριοῦ ἔχει τὸν μικρότερον ἀριθμόν. Ἡ ἡμέρα ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς τοῦ ἡλίου μέχρι τῆς δύσεως αὐτοῦ, καὶ ἡ νὺξ ἀπὸ τῆς δύσεως μέχρι τῆς ἀνατολῆς αὐτοῦ μοιράζεται ἀνὰ 12 κυρτὰς (ἀνίσους) ὥρας.

[2]) Καθορίζουσι τοὺς χρόνους διὰ τῶν παρατηρήσεων τῶν ὑψῶν τοῦ ἡλίου.

νὰ εἶναι μακρά, ὅση πράγματι εἶναι, καὶ ἡ νὺξ τόση, ὅση πράγματι εἶναι.

Τὸ τέχνασμα[1]) εἰς τὸ ὡρολόγιον αὐτό, ὥστε εἰς πάντα τόπον (διαφόρου γεωγραφικοῦ πλάτους) καὶ εἰς πᾶσαν ἐποχὴν τοῦ ἔτους νὰ παρέχῃ πάντοτε τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα μὲ 12 ὥρας ἑκάστην, συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς.

Λαμβάνομεν (διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς συσκευῆς διὰ τὴν ρύθμισιν τοῦ ἐκρέοντος ὕδατος) ἓν ἡμικύκλιον (h) ἐκ ψευδαργύρου (Schibh, σχ. 2 καὶ [2]). Ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι 2 σπιθαμαὶ[2]) καὶ περισσότερον, ἐν ᾗ περιπτώσει τὸ ὡρολόγιον εἶναι ἀρκετὰ μέγα καὶ περιλαμβάνει πολυπληθῆ ἀριθμὸν κινήσεων ἢ μικρότερον, ἀντιστοίχως πρὸς τὴν σχέσιν, τὴν ὁποίαν κανεὶς ἐδῶ θεωρεῖ κατάλληλον.

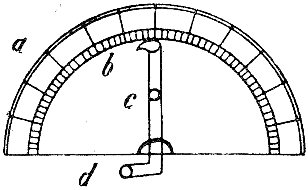
Τὸ ἡμικύκλιον αὐτὸ τὸ διαιροῦμεν εἰς 12 ἴσα μέρη κύρια (Qism), καὶ ἕκαστον μέρος εἰς 5 μικρότερα μέρη (ὑποδιαιρέσεις), (Guzʿ), ὅπως τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Εἰς αὐτὸ γράφει κανεὶς τὰ σύμβολα τῶν 12 ζῳδίων (Burg), ὅπως φαίνονται εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα, καὶ τὰ ὀνόματα (τοὺς ἀριθμοὺς) τῶν μοιρῶν. Τὸ ἡμικύκλιον τοῦτο τὸ στερεώνομεν κατόπιν ἐξωτερικῶς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Rubʿ (d) καὶ τὸ συγκολλῶμεν εἰς τὴν θέσιν αὐτήν. Εἰς τὸ Rubʿ εὑρίσκεται εἷς μικρὸς σωλήν, ὁ ὁποῖος εἶναι συγκεκολλημένος μὲ αὐτὸ καὶ εἰσέρχεται εἰς αὐτό, καὶ εἰς τὸ ἡμικύκλιον, καὶ εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τούτου τοῦ ἡμικυκλίου. Κατόπιν

---

[1]) Λεπτομερῆ κριτικὴν τῆς εἰς τὰ ἑπόμενα περιγραφομένης, ἀλλὰ μὴ ἀκριβῆ ἀποτελέσματα παρεχούσης μεθόδου, παρέχει ὁ Gazari εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἔργου του, ὅπου ἐκτίθεται μέθοδος παρέχουσα ἀκριβῆ ἀποτελέσματα.

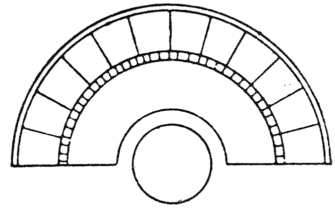
[2]) Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει 1 σπιθαμήν.

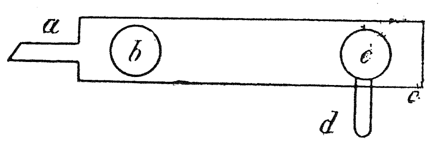
λαμβάνομεν ἕνα κοῖλον[1]) σωλῆνα (f) καὶ διανοίγομεν εἰς τὸ πλευρὸν αὐτοῦ μίαν ὀπήν. Τὸ πάχος του εἶναι τόσον μέγα (ἡ



Σχ. 2

Εἰς τὸ α σημειοῦται : Τοῦτο εἶναι τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον ἔχει στερεωθῆ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Rubʿ. Εἰς τὸ b : δείκτης διὰ τὰς ὑποδιαιρέσεις (Guzʿ). Εἰς τὸ c : ὀπὴ τοῦ περιστομίου. Εἰς τὸ d : τὸ ἀνδρικὸν μέλος, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸ Rubʿ. Εἰς τοὺς κατὰ μέρος τόπους περὶ τὸν κύκλον ὑπάρχουν τὰ ὀνόματα τῶν ζῳδίων ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά : Τοξότης, Σκορπιός, Ζυγός, Παρθένος, Λέων, Καρκίνος, Δίδυμοι, Ταῦρος, Κριός, Ἰχθύες, Ὑδροχόος, Αἰγόκερως.





Σχ. [2]

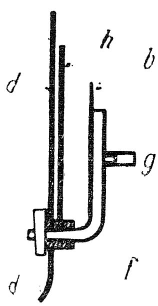
Εἰς τὸ κύριον σχῆμα ὑπάρχουν μόνον τὰ ὀνόματα τῶν ζῳδίων. Εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα εἶναι εἰς τὸ α : δείκτης τῶν ὑποδιαιρέσεων (Guzʿ). Εἰς τὸ b : τὸ περιστόμιον (Gazʿa). Εἰς τὸ c : ὁ σωλήν. Εἰς τὸ d : στρόφιγξ (Batjûn). Εἰς τὸ e : ἄνθρωπος.

διάμετρός του), ὥστε νὰ στρέφεται εἰς τὸν πρῶτον σωλῆνα, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχει διεισδύσει. Τὸ περιστόμιον (g) (Gazʿa) ἔχει

---

[1]) Ἀντὶ κοῖλον (mugawwaf) σωλῆνα ἔπρεπε νὰ λέγῃ κεκαμμένον. Πῶς ὁ κεκαμμένος οὗτος σωλὴν συγκρατεῖται εἰς τὸν μικρὸν παρὰ τὸ Rubʿ σωλῆνα, ὅπου ἔχει εἰσδύσει, δὲν περιέχει τὸ κείμενον τίποτε. Ὁπωσδήποτε τοῦτο συμβαίνει, ὡς ὑπὸ τοῦ Gazarî ἢ τοῦ Ridwân ἐκτίθεται δι' ἑνὸς ἐξογκώματος ἢ ἑνὸς σφηνὸς (παράβαλε Nova Acta Bd. 100 Nr 5 S. 68 καὶ 174).

τεθῇ ἐπὶ τοῦ σωλῆνος τούτου, πλησίον τοῦ ἄκρου του,[1]) ἵνα τὸ ὕδωρ οὕτω ἐκ τοῦ μεγάλου δοχείου (α) ἐκρέῃ περὶ τὴν προεξοχὴν τοῦ πλωτῆρος (e) (μικρὸς πλωτὴρ συνοπτικοῦ σχήματος). Κατόπιν φθάνει τοῦτο εἰς τὸ Rubʿ (d), εἰσέρχεται εἰς τὸν μικρὸν σωλῆνα, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ Rubʿ εἰς τὸ μέσον τοῦ ἡμικυκλίου καὶ φθάνει εἰς τὸν σωλῆνα (f), ὅπου εὑρίσκεται τὸ περιστόμιον (g) (Gazʿa). Κατόπιν ἀνέρχεται εἰς τοῦτο τὸ ὕδωρ, ὑψηλά, κατὰ τὸ ποσὸν διὰ τὸ ὁποῖον διὰ κάθε χρόνον ἔχει καθορισθῇ, ὡς ἐὰν ἦτο πίδαξ, μέχρις ὅτου τέλος ἐκρέῃ ἐκ τοῦ περιστομίου (Gazʿa), διότι οὗτος ὁ σωλὴν περιστρέφεται εἰς τὸν μικρὸν σωλῆνα καὶ ἔχει ἐγξυσθῇ εἰς αὐτὸν ὡς μία στρόφιγξ. Εἰς τὸν περιστρεφόμενον τοῦτον ἐγκεξυσμένον σωλῆνα, εἰς τοῦ ὁποίου τὸ ἄκρον ἔχει προσαρμοσθῇ τὸ περιστόμιον (Gazʿa), εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ περιστομίου ἓν στέλεχος (Schazîja, b, σχ. [2α]), τοῦ ὁποίου τὸ ἄκρον εἶναι ὀξύ· τοῦτο ἔχει τὴν μορφὴν ἑνὸς δείκτου (Murî) διὰ τὰς ὑποδιαιρέσεις (εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ἡμικυκλίου). Τοῦτο περιστρέφεται, ὅταν ὁ σωλὴν στρέφεται, ὑπὲρ τὰ μικρὰ μέρη τὰ ὁποῖα ἔχουν προσαρμοσθῇ εἰς τὸ Rubʿ. Κατόπιν θέτουσι τὸν σωλῆνα αὐτόν, ὡς ἐμνημονεύθη, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμικυκλίου, ἵνα κατὰ ταῦτα στρέφεται, ὡς ἔχει ὑπολογισθῇ.



Σχ. [2α]

Διὰ νὰ γίνῃ ἡ κατασκευὴ παρατηροῦμεν τὸν ἥλιον, ὅταν οὗτος

[1]) Τὸ περιστόμιον (Gazʿa) εὑρίσκεται εἰς τὴν προσθίαν πλευρὰν τοῦ κεκαμμένου σωλῆνος, πλησίον τοῦ ἄκρου του, ἐπὶ τῆς μνησθείσης ἤδη ὀπῆς παρὰ τὴν πλευράν της. Τὸ ἄκρον εἶναι κλειστόν. Παράβαλε τὴν κατασκευὴν τοῦ σχ. [2α]. Τὰ γράμματα τοῦ σχήματος τούτου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ γράμματα τοῦ συνοπτικοῦ σχήματος.

φθάση εἰς τὴν ἀρχὴν μιᾶς μοίρας τοῦ Καρκίνου[1]) † καὶ στρέφομεν τὸν σωλῆνα, μέχρις ὅτου ὁ δείκτης διὰ τὰς ὑποδιαιρέσεις σταθῇ εἰς τὴν γραμμὴν τῆς ἀρχῆς τοῦ Καρκίνου. † [2]) Τότε ὁ σωλὴν ἵσταται κατακορύφως καὶ τὸ ὕδωρ ἐκρέει ὀλίγον κατ' ὀλίγον (κατὰ σταγόνας). Ἐὰν εἶναι νὺξ θέτουσι τὸν δείκτην ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Αἰγόκερω, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ κάτω. Τὸ ὕδωρ ἐκρέει εἰς μεγάλα ποσά. Ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται[3]) εἰς τὸν Αἰγόκερω, τότε θέτουσι τὸν δείκτην κατὰ τὴν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ Αἰγόκερω: Τὸ ὕδωρ ἐκρέει κατὰ μεγάλα ποσὰ καὶ ἡ ἡμέρα[4]) παρέχει 12 ὥρας συνεχεῖς, ὡς κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Καρκίνου, μόνον ὅτι τὸ μικρὸν ποσὸν τοῦ ὕδατος εἰς τὸν Καρκίνον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγα ποσὸν τοῦ Αἰγόκερω, οὕτως ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνίσων ὡρῶν εἰς τὸν Καρκίνον καὶ εἰς τὸν Αἰγόκερω εἶναι ἴσος. Κατὰ τὴν νύκτα θέτουσι (καθ' ὃν χρόνον ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸν Αἰγόκερω) τὸν δείκτην εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ Καρκίνου. Ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸν Κριὸν ἢ εἰς τὸν Ζυγόν, τότε θέτουσι τὸν δείκτην κατὰ τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ Κριοῦ καὶ τοῦ Ζυγοῦ καὶ δὲν μεταβάλλουσι τὴν θέσιν του. Ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὸν Λέοντα, τότε θέτουσι κατὰ τὴν ἡμέραν τὸν δείκτην εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ Λέοντος καὶ κατὰ τὴν νύκτα εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ Ὑδροχόου[5]). Ἐὰν ὁ ἥλιος

[1]) Δηλαδὴ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ Καρκίνου. — Διὰ τὴν μοῖραν καὶ τὴν ὑποδιαίρεσιν τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἔχει Gaz' = ὑποδιαίρεσις. Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει Daraga = μοῖρα.

[2]) Ἐλλείπει εἰς τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον.

[3]) Μέχρι τοῦ τέλους τοῦ κεφαλαίου τούτου ἀκολουθοῦμεν τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον. Ὁ ἀντιγραφεὺς τοῦ Παρισινοῦ κατὰ τὴν ἀπόδοσιν τῶν αὐτῶν λέξεων παρέλειψε μερικά.

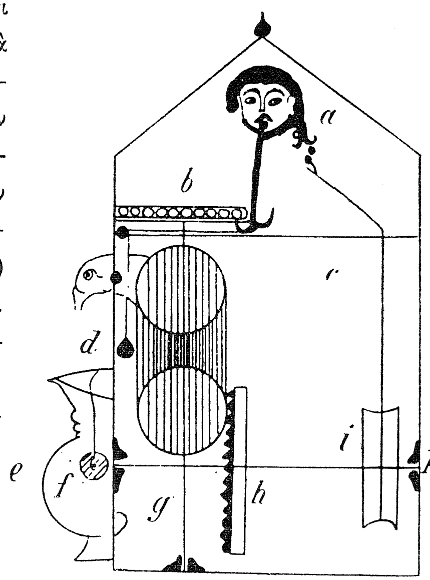
[4]) Ἐκ παραδρομῆς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει Schuhûr = μήν, ἀντὶ Nahâr = ἡμέρα.

[5]) Τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἔχει: «ἐπὶ τῆς, εἰς τοῦτο, ἀπέναντι εὑρισκομένης γραμμῆς». Ἡ ἔννοια εἶναι: «ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ σύμβολα τῶν εἰς τὸν οὐρανὸν ἀπέναντι κειμένων ζῳδίων », διότι γραμμαὶ κείμεναι «ἀπέναντι» ἑνὸς ἡμικυκλίου δὲν ὑπάρχουσι.

εὑρίσκεται εἰς τὸν Τοξότην, τότε θέτουσι τὸν δείκτην κατὰ τὴν ἡμέραν εἰς τὸν Τοξότην καὶ κατὰ τὴν νύκτα εἰς τοὺς Διδύμους.

Ἐὰν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται εἰς τὴν Παρθένον, τότε θέτουσι κατὰ τὴν ἡμέραν τὸν δείκτην εἰς τὴν Παρθένον καὶ κατὰ τὴν νύκτα εἰς τοὺς Ἰχθῦς. Οὕτω μεταθέτουσι τὸν δείκτην (περαιτέρω) κατὰ τὴν ἡμέραν πρὸς τὸ εἰς τὴν ἡμέραν ἀντιστοιχοῦν σύμβολον τῶν ζῳδίων, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ἥλιος, καὶ κατὰ τὴν νύκτα πρὸς τὴν εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσαν ἑβδόμην θέσιν[1]) (ἐνδιάμεσος χῶρος, Riqba). Δι' ἕκαστον χρόνον (Dahr) παρέχει οὗτος 12 ἀνίσους ὥρας. Εἰς ἑκάστην ὑποδιαίρεσιν ἀντιστοιχοῦσι 6 ἡμέραι[2]). Αὗται αἱ 12 ὧραι ὑπάρχουσι πάντοτε.

†Ὁ τροχὸς (Daulâb) δέον νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸν ἄξονα τοῦ



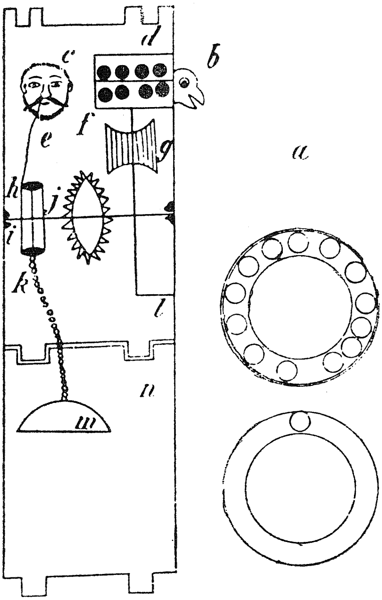
Σχ. 3

Εἰς τὸ a εἶναι τὸ πρόσωπον τοῦ ὁποίου οἱ ὀφθαλμοὶ χρωματίζονται. Εἰς τὸ b ἡ ἀνωτέρα καὶ κατωτέρα μυλόπετρα. Εἰς τὸ c τὸ δοχεῖον τοῦ τυμπάνου (τροχίσκου). Εἰς τὸ d τὸ βάρος τοῦ ῥάμφους. Εἰς τὸ e τὸ κιβώτιον συλλογῆς (Magma') τῶν σφαιριδίων. Εἰς τὸ f τὸ κύμβαλον. Εἰς τὸ g al Schahârastûn. Εἰς τὸ h ὁ κύκλος μὲ τοὺς ὀδόντας. Εἰς τὸ i τὸ τύμπανον. Εἰς τὸ k δοχεῖον διὰ τὸ τύμπανον.

[1]) Δηλαδὴ θέτουσι τὸν δείκτην εἰς τὸ ἕβδομον ἐκ τοῦ θεωρουμένου συμβόλου ἐκ τῶν ζῳδίων, τοῦ θεωρουμένου λογιζομένου ὡς πρώτου. Εὑρισκόμεθα τότε εἰς τὸ ἀπέναντι πρὸς τὸ πρῶτον εἰς τὸν οὐρανὸν εὑρισκόμενον σύμβολον ζῳδίων.

[2]) Δηλαδὴ μετατοπίζουσι ἀνὰ 6 ἡμέρας τὸν δείκτην κατὰ μίαν ὑποδιαίρεσιν.

τυμπάνου (τροχίσκου, τροχαλίας) [Bakra, (u)], ὥστε ἐκ τῆς περιστροφῆς τούτου νὰ στρέφεται. Τὸ τύμπανον δέον νὰ ἔχῃ θέσιν (mâ'il) ἀποκλίνουσαν ὀλίγον τοῦ μέσου. Πρέπει νὰ παραστήσωμεν τοῦτο εἰς ἄλλο σχῆμα, διὰ νὰ τὸ καταστήσωμεν εἰς



Σχ. [3]

Τὸ σχῆμα τοῦτο εὑρίσκεται μόνον εἰς τὸ ἐξώφυλλον τοῦ Λονδινείου χειρογράφου. Εἰς τὸ α ὑπάρχει, 'Αρχιμήδης. Εἰς τὸ b, ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ σχῆμα τῆς συσκευῆς (Ala) ὅπου συλλέγονται τὰ σφαιρίδια, τὰ ὁποῖα πίπτουν ἐκ τοῦ ῥάμφους τοῦ κόρακος. Εἰς τὸ c ἡ κεφαλὴ τοῦ ἀνδρός. Εἰς τὸ d οἱ κύκλοι τῆς ὀπῆς. Εἰς τὸ e δοχεῖον τοῦ τροχοῦ. Εἰς τὸ f ἡ ῥάβδος (Saffûd ;). Εἰς τὸ g βάρος. Εἰς τὸ h : νῆμα. Εἰς τὸ i : τύμπανον (τροχίσκος, τροχαλία). Εἰς τὸ j ὁ κύκλος μὲ τοὺς ὀδόντας. Εἰς τὸ k ἡ ἅλυσις. Εἰς τὸ l κέντρον τῆς ῥάβδου. Εἰς τὸ m ὁ πλωτὴρ (Dabba). Εἰς τὸ n ὑδροδοχεῖον. Τὰ δύο παραπλεύρως σχήματα δεικνύουσι κεχωρισμένως τὸ ἀνώτερον καὶ τὸ κατώτερον μέρος τοῦ δίσκου. Καίτοι ἡ μεγάλη ἀνωμαλία κατὰ τὴν κατανομὴν τῶν ὀπῶν εἰς τὸν ἀνώτερον δίσκον (ἀντὶ 12 εἶναι σχεδιασμένοι 13) εἶναι ἐσφαλμένη, ἐν τούτοις εἶναι ὀρθὸν ὅτι εἰς μίαν θέσιν ἔχει ἀφεθῇ μεγαλύτερον κενόν. Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, τοῦ δίσκου, διότι τὸ 12ον σφαιρίδιον δὲν ἐπιτρέπεται νὰ εἶναι ὑπὲρ τὴν ὀπὴν τοῦ κατωτέρου δίσκου. Ὁ μεταξὺ τοῦ 1ου καὶ τοῦ 12ου σφαιριδίου ὑπάρχων χῶρος πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοὐλάχιστον κατὰ τὴν διάμετρον ἑνὸς σφαιριδίου ἢ οἱ λοιποὶ ἴσοι ἐνδιάμεσοι χῶροι. Κατὰ τὸ τμῆμα τοῦτο παραμένει ἡ περιστροφὴ τοῦ ἀνωτέρω κύκλου κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας ὀπίσω κατὰ μίαν πλήρη περιστροφήν. Τοῦτο δὲν μνημονεύεται εἰς τὸ κείμενον, ἕπεται ὅμως ἀναμφιβόλως ἐκ τῆς ὅλης κατασκευῆς.

τὸν ἐξετάζοντα σαφές: διότι διὰ τοῦ τυμπάνου τούτου (τῆς τροχαλίας) ἐπιτελοῦνται ὅλαι αἱ ἄλλαι κινήσεις. Τὸ ὀρθὸν εἶναι, ὅτι ὁ τροχὸς ἀποκλίνει ἀπὸ τοῦ μέσου τοῦ ἄξονος (munharif), διὰ νὰ παρασταθῶσι πλήρως αἱ συσκευαί, τὰς ὁποίας θέλει κανεὶς νὰ προσαρμόσῃ. Τοῦτο εἶναι μία ἀπεικόνισις (σχ. 3 καὶ [3])†[1]).

[1]) †† Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἐν προκειμένῳ ἔχει: «Τοῦτο εἶναι εἰκὼν (σχῆμα) τοῦ δοχείου τοῦ τυμπάνου (Bakra)· εἶναι τὸ δοχεῖον τοῦ τροχοῦ (Daulâb). Κάτωθεν εὑρίσκεται τὸ δοχεῖον τοῦ πλωτῆρος (Dabba) καὶ κάτωθεν τοῦ συλλέκτου, περαιτέρω τὸ σχῆμα τοῦ Rub', τοῦ πλωτῆρος ('Awwâma) καὶ τοῦ τηγανίου, ἐὰν ὁ θεὸς θέλῃ».

Οὔτε τὸ κείμενον, οὔτε τὰ σχήματα (3, [3], 1, 1 α, [1] κ.λπ.) παρέχουσι σαφῶς τὴν θέσιν τοῦ τροχοῦ καὶ τοῦ τυμπάνου εἰς τὸν ἄξονα, οὔτε καὶ τὴν θέσιν αὐτοῦ, τοῦ ἄξονος. Εἰδικώτερον δὲν εἶναι σαφὲς τί ὑποδηλοῦται μὲ τὴν θέσιν τὴν ἀποκλίνουσαν ἐκ τοῦ μέσου. Βέβαιον εἶναι, ὡς συναγόμενον ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ πλωτῆρος, ὅτι ἡ ἅλυσις τοῦ πλωτῆρος διὰ μιᾶς ὀπῆς εἰς τὸ μέσον τοῦ πυθμένος, τοῦ δοχείου τοῦ τυμπάνου, εἰσέρχεται εἰς τοῦτο (τὸ δοχεῖον). Ἐὰν κατὰ ταῦτα δέον ν' ἀποφευχθῇ προσέγγισις τῆς ἁλύσεως εἰς τὰ χείλη τῆς ὀπῆς, τότε πρέπει ὁ ἄξων περὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τυμπάνου νὰ ἀφίσταται τοῦ μέσου τοῦ δοχείου. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει, διότι τότε κατὰ τὰς δεδομένας διαστάσεις, ὁ τόπος διὰ τὸν τροχὸν κ.λπ. θὰ ἦτο πολὺ περιωρισμένος. Ὁ ἄξων λοιπὸν θὰ εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ δοχείου καὶ ἡ ἐκ τούτου προκαλουμένη προσέγγισις (προσεπαφὴ) τῆς ἁλύσεως τοῦ πλωτῆρος θὰ ἐγίνετο ἀβλαβὴς διὰ συγκολλήσεως ἑνὸς μικροῦ σωλῆνος μὲ κεκαμμένους τροχοὺς (παράβαλε τὸ συνοπτικὸν σχῆμα) ἢ διὰ μικροῦ τυμπάνου (μικρᾶς τροχαλίας).

Παρομοίως θὰ στηρίζεται τὸ τύμπανον εἰς τὸ μέσον τοῦ ἄξονός του (οὕτω παρίσταται εἰς τὸ συνοπτικὸν σχῆμα). Ἀσφαλῶς ὅμως εἶναι ἐκεῖ ὁ ἐπ' αὐτοῦ προσηρμοσμένος διὰ τὴν ἅλυσιν τοῦ πλωτῆρος αὖλαξ (ἰδὲ σελ. 273 κ.έ.), διότι ἄλλως θὰ ἔπρεπε ἡ ἅλυσις νὰ διήκῃ λοξῶς πρὸς τὰ πλάγια τοῦ τυμπάνου καὶ κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἀρχικῆς θέσεως νὰ προσκλίνῃ πρὸς αὐτήν.

Τὸ νόημα τοῦ προηγουμένου ἀσαφοῦς κεφαλαίου εἶναι ἴσως, ὅτι τὸ τύμπανον κατὰ τὴν σχεδίασιν ἐτέθη ὀλίγον πλάγια, ἵνα διατεθῇ περισσότερος τόπος διὰ τὴν πλήρη παράστασιν τῶν λοιπῶν διατάξεων (συσκευῶν).

Διὰ τὴν μορφὴν τοῦ τυμπάνου (u) τοῦ πλωτῆρος (b) (συνοπτικὸν

Συσκευαὶ τιθέμεναι εἰς κίνησιν ὑπὸ τοῦ πλωτῆρος.

1. Περιγράφομεν τώρα τὸν τροχὸν τοῦ τυμπάνου καὶ πῶς τὰ σφαιρίδια ἀπορρίπτονται πρὸς τὰ κάτω, ὥστε νὰ ἐξέρχωνται ἐκ τοῦ ῥάμφους τοῦ κόρακος. Πρὸς τούτοις προσαρμόζομεν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμίσεος τοῦ ἄξονος τοῦ τυμπάνου (u) (συνοπτικὸν σχῆμα) ἕνα κύκλον μὲ ὀδόντας (υ), ὅστις στρέφει ἓν στέλεχος (Saffûd). Τοῦτο εἶναι al Schahârastûn[1]). Τὸ στέλεχος εἶναι κάθετον ἐπὶ

σχῆμα) δὲν προκύπτουν σαφῆ τεκμήρια οὔτε ἐδῶ, οὔτε ἀπὸ τὸ ἑπόμενον κείμενον, οὔτε ἀπὸ τὰ σχήματα. Ὁπωσδήποτε εἶναι κάπως μακρόν, διὰ νὰ προσφέρῃ τόπον διὰ τὰ διάφορα εἰς αὐτὸ προσδεδεμένα νήματα, διότι ἄλλως τε δι' αὐτοῦ κινοῦνται ὅλοι οἱ μηχανισμοὶ τοῦ ὡρολογίου. Ἡ ἄλυσις τοῦ πλωτῆρος εὑρίσκεται εἰς αὔλακα εἰς τὸ μέσον τοῦ τυμπάνου. Ὁ αὖλαξ οὗτος εἴτε εἶναι ἐγκεκομμένος εἰς τὸ τύμπανον εἴτε εὑρίσκεται εἰς ἕνα ὅμοιον πρὸς τροχὸν ἐνισχυτήν. Τοῦτο ρυθμίζεται ἀναλόγως τῶν μεγεθῶν τοῦ δρόμου τοῦ πλωτῆρος καὶ τῶν δρόμων τῶν διαφόρων κινουμένων μερῶν.

Κατὰ τὰ λοιπὰ παράβαλε τὴν παρ' ἡμῶν δοθεῖσαν ἀνακατασκευὴν εἰς τὸ συνοπτικὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνταποκρίνεται κάλλιστα εἰς τὰς διατάξεις.

1) Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον δὲν ἔχει τὴν πρότασιν «τοῦτο εἶναι al Schahârastûn». Schahârastûn εἶναι τὸ Περσικὸν Caharâstûn. Ἡ λέξις σημαίνει ἐν πρώτοις τὰς 4 στήλας ἢ ῥάβδους, ἕνα ὑπαινιγμὸν διὰ τὰς 4 ῥάβδους, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὸ πηνίον (τὴν κουβαρίστραν) τοῦ πλεκτοῦ σχοινίου. Εἰς τὴν περίπτωσίν μας σημαίνει τοῦτο, ὡς δεικνύουσι τὰ σχήματα, ἕνα ἄξονα ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι στερεωμένος εἷς κινητήριος τροχός. Ἀπὸ τὸ μνημονευθὲν πηνίον τοῦ πλεκτοῦ σχοινίου διαφέρει ὁ κινητήριος τροχὸς μόνον κατὰ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν καὶ τὸ μικρότερον μῆκος τῶν ῥάβδων (κινητηρίων στελεχῶν). Τὸ ἀραβικὸν κείμενον ἔχει διὰ τὴν προσοδόντωσιν τοῦ κινητηρίου τροχοῦ ἄλλην ὀνομασίαν ἢ διὰ τοὺς ὀδόντας τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ τοῦ ἐπεισερχομένου εἰς τὸν κινητήριον τροχὸν (κύκλου). Διὰ τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν ἐθέσαμεν τὴν λέξιν κινητήριος ῥάβδος. (Παράβαλε Carra de Vaux, Les Pneumatiques de Philon, Notices et extraits des manuscrits etc. Bd. 38 S. 231, Paris 1903 καὶ E. Wiedemann, Beiträge XXXVI S. 24).

τὸν ἄξονα (καὶ φέρει ἕνα κινητήριον τροχὸν) (w). Τὰ κινητήρια στελέχη τῆς ῥάβδου ἀντιστοιχοῦσι (ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν) πρὸς τοὺς ὀδόντας (Dandânga) τοῦ κύκλου, † ὥστε, ὅταν τὸ τύμπανον ἐκτελῇ μίαν στροφήν[1]), ὁ κύκλος στρέφεται ἐπίσης μίαν στροφὴν καὶ τὸ στέλεχος στρέφεται μίαν στροφήν, ὁπότε παραμένει σταθερῶς εἰς τὴν παρ' ἡμῶν καθορισθεῖσαν θέσιν. †[2]) Τὸ ἀνώτερον ἄκρον αὐτοῦ ἐξέρχεται τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία ἔχει κατασκευασθῇ ὡς γεῖσον (Raff). Ἐξέρχεται τόσον πρὸς τὰ ἔξω, ὅσον ἡ ῥάβδος (σημ. τὸ στέλεχος, ἄξων) τοῦ ὑδρομύλου. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἔχει στερεωθῇ εἷς δίσκος, ὅπως ἡ κατωτέρα πέτρα

---

[1]) Τοῦτο εἶναι ἡ περίπτωσις μόνον, ὅταν τὸ ὡρολόγιον εἶναι οὕτω πως διατεταγμένον ὥστε νὰ ἔχῃ χρόνον διαδρομῆς 12 ὡρῶν, ὁπότε τὸ τύμπανον κάμνει μίαν περιστροφὴν (σημ. παράβαλε σελ. 245, 246). Ἐὰν ἡ διαδρομὴ τοῦ ὡρολογίου εἶναι 24 ὧραι, τότε κατὰ τὰ προηγούμενα περιστρέφεται τὸ τύμπανον δύο φοράς. Ὁ ἀνώτερος δίσκος, ὅστις τώρα ἔχει 24 ἀντὶ 12 ὀπὰς σφαιριδίων (παράβαλε κατωτέρω), ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν στρέφεται μόνον μίαν φοράν. Τότε πρέπει ὁ κινητήριος τροχὸς νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ὀδοντωτοῦ τροχοῦ.

Δέον νὰ παρατηρηθῇ ἀκόμη — ὡς τοῦτο συνάγεται ἀναντιρρήτως ἐκ τῆς ὅλης διατάξεως — ὅτι ἡ «μία» περιστροφὴ τοῦ δίσκου μὲ τὰς ὀπὰς τῶν σφαιριδίων δὲν ἐπιτρέπεται νὰ περιλαμβάνῃ 360°, ἀλλὰ πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα κατὰ μίαν πρὸς τὴν διάμετρον μιᾶς σφαιρικῆς ὀπῆς ἀντιστοιχοῦσαν ποσότητα. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τελευταίας σφαιρικῆς ὀπῆς πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα κατὰ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου μιᾶς σφαιρικῆς ὀπῆς, ἢ ἡ ἀντίστοιχος ἀπόστασις τῶν λοιπῶν σφαιρικῶν ὀπῶν, διότι ἄλλως κατὰ τὴν ἔνταξιν τῶν σφαιριδίων, τὸ τελευταῖον ἀμέσως διὰ τῆς ὀπῆς θὰ ἐφέρετο πρὸς τὸν κατώτερον δίσκον.

[2]) †† Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει : ὥστε, ὅταν τὸ τύμπανον ἐκτελέσῃ μίαν περιστροφήν, ὁ κύκλος νὰ ἔχῃ περιστραφῇ μίαν φορὰν καὶ τότε τὸ στέλεχος ἔχει μίαν φορὰν περιστραφῇ, ὥστε ἡ περιστροφὴ τοῦ στελέχους (Saffûd καὶ ὄχι Sugût) ἔχει ἐπιτελεσθῇ εἰς 12 ὥρας. Τὸ στέλεχος μένει εἰς τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν περιεγράψαμεν.

τοῦ ὑδρομύλου. Τὸ ἄκρον τῆς ῥάβδου προεξέχει ἐκ μιᾶς ὀπῆς εἰς τὸ μέσον τοῦ δίσκου αὐτοῦ (χωρὶς νὰ ἐφάπτεται αὐτοῦ). Εἰς τὸν δίσκον αὐτὸν εὑρίσκεται (πλησίον τοῦ χείλους) μία ὀπή, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ἑκάστου πίπτοντος πρὸς τὰ κάτω σφαιριδίου. Εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στελέχους εὑρίσκεται εἷς δεύτερος δίσκος στερεωμένος ἐπ' αὐτοῦ, ὅστις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἀνωτέραν πέτραν τοῦ μύλου καὶ περιστρέφεται διὰ τῆς στροφῆς τοῦ στελέχους. Εἰς αὐτὸν εὑρίσκονται 12 ἢ 24 ὀπαὶ (διὰ τὰ σφαιρίδια) διὰ μίαν ἡμέραν καὶ μίαν νύκτα. Ἐν συντόμῳ ἡ διάστασις τοῦ δίσκου αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν διάστασιν τοῦ τυμπάνου καὶ ἡ περίμετρός του (Daura) πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τυμπάνου. Αἱ ὀπαὶ αὗται διέρχονται: δηλαδὴ ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὸν δεύτερον δίσκον, ὁ ὁποῖος εἶναι προσηρμοσμένος εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στελέχους: εἶναι οὗτος ἀκριβῶς ὁμαλῶς (ἐπικέντρως) στερεωμένος. Αἱ ὀπαὶ αὗται εἶναι αἱ θέσεις εἰς τὰς ὁποίας φέρονται τὰ σφαιρίδια. Τὰ σφαιρίδια εἶναι ἀπὸ χαλκὸν ἀκριβῶς σφαιρικὰ καὶ τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Εἰς ἑκάστην ὀπὴν εὑρίσκεται ἓν σφαιρίδιον. † Ἡ ὀπὴ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἡ ὀπὴ τοῦ σφαιριδίου † [1]). Ἡ μία μεμονωμένη ὀπὴ εἰς τὸν κατώτερον δίσκον, ὅστις εἶναι στερεωμένος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν[2]) εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ σφαιριδίου, ὡς ἔχομεν σημειώσει. Ὁ δίσκος αὐτὸς ἀνήκει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἡ ὀπὴ εὑρίσκεται εἰς αὐτόν.

† Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο δίσκων εἶναι μικρά. Ῥυθμίζουσι τὸν ἄνω δίσκον ἔναντι τοῦ κάτω κατὰ τὴν σύνθεσιν τῆς συσκευῆς (x) κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἡμέρας οὕτω πως, ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ

---

[1]) †† Ἀσφαλῶς μία παρεμβολή. Ἀντὶ «τοῦ σφαιριδίου» πρέπει νὰ εἴπῃ «διάμετρος τοῦ σφαιριδίου».

[2]) Αὐτὴ ἡ «ἐπιφάνεια» εἶναι εἷς ἐνδιάμεσος πυθμήν, ἢ εἷς ἐγκάρσιος φορεύς, ὅπου εἶναι στερεωμένος ὁ κάτω δίσκος (παράβαλε τὸ συνοπτικὸν σχῆμα).

πρώτου σφαιριδίου εἰς τὸν ἄνω δίσκον, ὅστις εἶναι στερεωμένος εἰς τὸ στέλεχος, ἐκ τῆς μιᾶς ὀπῆς τοῦ κάτω δίσκου εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀπόστασιν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ κατὰ τὴν διαδρομὴν τῆς πρώτης ὥρας τῆς ἡμέρας ἢ τῆς νυκτός † [1]). Ὅταν κατόπιν τὸ τύμπανον στρέφεται κατὰ τὸ ποσὸν τοῦτο, στρέφεται καὶ ὁ τροχὸς κατὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ καὶ τὰ σφαιρίδια στρέφονται ἐπίσης, ὥστε τὸ πρῶτον σφαιρίδιον φθάνει διὰ τῆς εὐρείας ὀπῆς εἰς τὸν κατώτερον δίσκον. Ἔπειτα ἐξέρχεται ἐξ αὐτοῦ, πίπτει εἰς ἕνα αὔλακα (α) καὶ ἐξέρχεται ἐκ τοῦ ῥάμφους ἑνὸς κόρακος (z), ὁ ὁποῖος εἶναι προσηρμοσμένος εἰς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ δοχείου (t).

Τὸ ῥάμφος τοῦ κόρακος τούτου εἶναι κατεσκευασμένον ὡς ἑξῆς: Τὸ κατώτερον μέρος του ἔχει ἐξαρτηθῇ κατὰ τὰ 2/3 εἰς ἕνα ἄξονα. Τό, ὑπὸ τὸν οὐρανίσκον, ὑπερκείμενον 1/3 ἔχει ἐπιβαρυνθῇ μὲ μόλυβδον, ὥστε νὰ ἕλκεται πρὸς τὰ κάτω καὶ τὸ ἄκρον τοῦ κατωτέρου ῥάμφους νὰ πιέζεται ἰσχυρῶς πρὸς τὸ ἄκρον τοῦ ἀνωτέρου ῥάμφους. Ὅταν κατόπιν τὸ σφαιρίδιον πίπτει[2]) (ἐκ τοῦ δίσκου), τότε τοῦτο πίπτει ἐκ τῶν ἔσωθεν εἰς τὸ κατώτερον μέρος τοῦ ῥάμφους καὶ δὴ καὶ εἰς ἀπόστασιν, ἐκ τοῦ ἄκρου τοῦ ῥάμφους, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/3 τοῦ μήκους τοῦ ῥάμφους. Τότε ἀπομακρύνεται (πρὸς τὰ ἐμπρὸς) ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ ῥάμφους, δίδει κλίσιν εἰς τὸ ῥάμφος, ὥστε τοῦτο νὰ ἀνοίγεται, καὶ ἐξέρχεται. Ὅταν κανεὶς θέλῃ, ὥστε τὸ σφαιρίδιον, νὰ ἐξέρχεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, καὶ ἡ συσκευὴ νὰ συμπεριφέρεται, ὅπως ἡ κεφαλὴ τοῦ Bîgâ (ἱέρακος) εἰς τὴν θέσιν (Maidân) τοῦ σφαιριδίου, εἰς τὴν ὁποίαν

---

[1]) †† Τὸ μέρος αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο χειρόγραφα εἶναι ἐφθαρμένον. Τὰ ἀνωτέρω παρέχουσι τὴν ἔννοιαν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀραβικοῦ κειμένου.

[2]) Τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἔχει daʿat = σφάζειν, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν. Τὸ Λονδίνειον ἔχει ὀρθῶς sagat = πίπτειν.

εὑρίσκονται ὁ Bîgâ καὶ ὁ κόραξ, τότε τοῦτο εἶναι ὡραιότερον.†[1]) Ὅταν θέλουσι συγκολλῶσι τὴν κεφαλὴν ἐκτὸς τοῦ δοχείου· κινεῖται ὅμως τότε τὸ κατώτερον μέρος τοῦ ῥάμφους, ὡς ἔχομεν περιγράψει. Τὸ σφαιρίδιον ἐξέρχεται ἐκ τοῦ ῥάμφους, τοῦτο ἐπανέρχεται (τὸ ῥάμφος) εἰς τὴν προτέραν του θέσιν καὶ κλείνεται. Ἓν κύμβαλον (Mir'ât) (β) ἔχει ἐξαρτηθῇ ἐκ χαλκοῦ ἢ χάλυβος μὲ καθαρὸν ἦχον, καὶ ἐπ' αὐτοῦ πίπτει τὸ σφαιρίδιον, ὅταν ἔχῃ ἐξέλθει ἐκ τοῦ ῥάμφους τοῦ κόρακος (z)· ὡς ἐκ τούτου ἀκούει κανεὶς ἕνα κρότον καὶ ἓν ἰσχυρὸν κωδώνισμα (Tanîn). Τὰ σφαιρίδια, ἀφοῦ ἐγκαταλείψωσι τὸ κύμβαλον, πίπτουσι εἰς μίαν χαλκίνην χοάνην, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον ἑνὸς κύκλου (γ)[2]), ὁμοία πρὸς κιβώτιον (Huqq). Εἰς αὐτὸ συλλέγονται ὅλα τὰ σφαιρίδια. Τοῦτο ἔχει τοποθετηθῇ ὑπὸ τὸ κύμβαλον καὶ εἰς τὸ γεῖσον τοῦ δοχείου τοῦ τροχοῦ (t).

2. Εἰς τὸ δοχεῖον αὐτὸ εὑρίσκεται ἀκόμη τὸ πρόσωπον ἑνὸς ἀνθρώπου, τοῦ ὁποίου οἱ ὀφθαλμοὶ ἑκάστην ὥραν λαμβάνουσι ὡρισμένον χρῶμα. Κατωτέρω θὰ ἐξηγήσωμεν τοῦτο[3]). Ἡ θέσις διὰ τὴν κεφαλὴν τοῦ ἀνθρώπου τούτου εὑρίσκεται εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ τυμπάνου· †ὁμοιάζει πρὸς τὴν μορφὴν ἑνὸς ἀνθρώπου†[4]).

---

[1]) †† Ἐδῶ καὶ τὰ δύο χειρόγραφα ἀποκλίνουσιν ὀλίγον. Τὸ Bîgâ θὰ εἶναι τὸ Περσικὸν Pighâ, εἶδός τι ἱέρακος. Pîgâ θὰ ἦτο ὁ παπαγάλος, τὸ ὁποῖον ὅμως ἐδῶ δὲν προσιδιάζει. Κατὰ τὰ λοιπὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ ὡρολόγια ἐπίσης ἱέρακες. Ἡ διάταξις ἔχει περιγραφῇ εἰς τὸ χειρόγραφον Oxford Bodleiana ὑπ' ἀριθ. 954 (Κῶδιξ Ὀξφορδιανὸς Βοδληϊανός). Θὰ ἐκθέσωμεν τὴν περιγραφὴν αὐτοῦ κατωτέρω.

[2]) Ἐνταῦθα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν κύκλος νοεῖται δοχεῖον στρογγύλον κυκλικὸν ἢ σφαιρικόν.

[3]) Ἐδῶ, εἰς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον περιλαμβάνονται μερικαὶ περσικαὶ λέξεις, αἱ ὁποῖαι δὲν περιέχουσι τίποτε τὸ οὐσιῶδες.

[4]) †† Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει: «ὡς μία εἰκὼν εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ἀπεικονισμένον πρόσωπον ἑνὸς ἀνθρώπου φαίνεται χαρούμενον».

Ἡ θέσις ὅπου εὑρίσκονται οἱ ὀφθαλμοὶ εἶναι διάτρητος. Ὄπισθεν τῶν ὀφθαλμῶν εὑρίσκεται εἷς ἄξων ἐπὶ δύο πόλων (Qutb)· εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς ῥινὸς ἓν λεπτὸν (στενὸν) τύμπανον[1]), εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει περιελιχθῆ ἓν λεπτὸν νῆμα (3). Πρὸς τὸ ὀπίσω μέρος του (δηλαδὴ ὄπισθεν τοῦ προσώπου) εὑρίσκεται δι' ἕκαστον ὀφθαλμὸν εἷς χονδρὸς δίσκος,[2]) ὅμοιος πρὸς Schûmich al ʿAṭṭârîn[3]). Ἐπὶ τούτου εὑρίσκονται λίθοι (Fass)[4]) ὅμοιοι πρὸς τὴν κόρην τοῦ ὀφθαλμοῦ (Hadaqa), οἱ ὁποῖοι εἶναι χρωματισμένοι μὲ τόσα τὸ πλῆθος χρώματα, μὲ ὅσας ὥρας ἔχουν ἡ ἡμέρα καὶ ἡ νύξ, ὡς τοῦτο ἔχομεν προηγουμένως περιγράψει. Τὸ ἄκρον τοῦ νήματος εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς μικροῦ κομβίου, τὸ ὁποῖον εἶναι στερεωμένον εἰς τὸ τύμπανον, ὅπου ὁ πλωτήρ. Ὅταν στρέφεται τὸ τύμπανον ἕλκει τὰ νήματα καὶ στρέφει τὸν «τροχὸν

---

[1]) Ἐπειδὴ ἡ θέσις τοῦ τυμπάνου εἰς τὰ πρωτότυπα σχήματα δὲν δύναται σαφῶς νὰ ἀναγνωρισθῇ δέον νὰ γίνῃ σύγκρισις πρὸς τὸ συνοπτικὸν σχῆμα.

[2]) Τὸ ἀραβικὸν κείμενον χρησιμοποιεῖ ἐδῶ ἐπίσης τὴν λέξιν Mihwar, τὸ ὁποῖον κατὰ λέξιν σημαίνει ἄξων. Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ταῦτα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ μνημονευθέντος τώρα ἄξονος, εἰς τὸ μέσον τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται τὸ τύμπανον μὲ τὸ νῆμα, διὰ τοῦτο σκοπιμωτέρα εἶναι ἡ μετάφρασις «χονδρὸς δίσκος». Τοῦτο ἐπιτρέπεται, τοσούτῳ μᾶλλον, καθ' ὅσον καθαρῶς σωματικῶς θεωρούμενον, εἷς βραχύς, ἰσχυρὸς ἄξων εἶναι τὸ ἴδιον, ὡς εἷς χονδρὸς δίσκος μὲ μικρὰν διάμετρον.

[3]) Καὶ τὰ δύο κείμενα ἔχουσι Schûmich καὶ Sûmich al ʿAttârîn. Schûmich εἶναι περσικὸν καὶ σημαίνει φυτὸν (Ἀρτεμισία)· ἐνταῦθα θὰ ἐσήμαινε τὴν Ἀρτεμισίαν τῶν φαρμακοποιῶν, ἐὰν ἐπιτρέπεται ν' ἀντικατασταθῇ τὸ t μὲ ṭ.

Ἴσως πρόκειται ἐδῶ μὲ τὴν λέξιν Schûmich μὲ ἀνωτέρω καὶ κατωτέρω ἰσοπεδωμένους βολβοὺς ἢ παρομοίου σχήματος καρπούς. Δὲν ἠδυνήθημεν ὅμως νὰ τὸ ἐξακριβώσωμεν

[4]) Fass σημαίνει λίθινον δακτύλιον, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐκ πολυτίμου λίθου.

τοῦ ὀφθαλμοῦ» (δ), ὅπου εὑρίσκονται αἱ πέτραι (Fass), διὰ τῶν ὁποίων ἑκάστην ὥραν ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ σχήματος (τῆς εἰκόνος) χρωματίζεται μὲ ἓν χρῶμα. † Τὸ ποσὸν τῆς περιστροφῆς (Daura) αὐτοῦ τοῦ τροχοῦ τῆς κόρης τοῦ ὀφθαλμοῦ ἀντιστοιχεῖ πρὸς μίαν περιστροφὴν τοῦ τυμπάνου. † [1])

3. † Ἐπιθυμοῦμεν τώρα νὰ περιγράψωμεν πῶς παρασκευάζομεν τὰς δύο στήλας (ι καὶ κ), εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὰς ὥρας· εἰς τὴν μίαν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ δὴ καὶ διὰ τὴν ἡμέραν 12, ἢ διὰ τὴν ἡμέραν καὶ τὴν νύκτα 24, ἐν ᾧ εἰς τὴν ἄλλην εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω (σχ. 4 καὶ [4]). Ἑτοιμάζουσι δύο στρογγύλους δακτυλίους (λ καὶ μ) περὶ τὰς στήλας, ἐκ τῶν ὁποίων (δακτυλίων) ὁ εἷς ἀνέρχεται πρὸς τὰ ἐπάνω, ἐν ᾧ ὁ ἄλλος κατέρχεται πρὸς τὰ κάτω † [2]). Ἐπὶ τούτοις ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ

---

[1]) Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει ἀπὸ † εἰς † : Τὸ ποσὸν (ἡ διάρκεια) τῆς διαδρομῆς αὐτῶν τῶν κορῶν τῶν ὀφθαλμῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ πέτραι, διὰ τῶν ὁποίων ὁ ὀφθαλμὸς τῆς εἰκόνος χρωματίζεται, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν διαδρομὴν τοῦ τυμπάνου καὶ δὴ καὶ πρὸς μίαν περιστροφήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ τελευταῖον χρῶμα τῆς κόρης δεικνύεται εἴτε κατὰ τὸ τέλος τῆς ἡμέρας, εἴτε κατὰ τὸ τέλος τῆς ἡμέρας καὶ τῆς νυκτός, ὡς τοῦτο προηγουμένως τὸ περιεγράψαμεν.

[2]) †† Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει : Θέλομεν τώρα νὰ περιγράψωμεν πῶς ἀποκαθιστᾷ κανεὶς δύο στήλας, ἐπὶ τῶν ὁποίων εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν. Ἐπὶ τῆς μιᾶς εὑρίσκονται οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ μιᾶς ὥρας ἕως 12 διὰ μίαν ἡμέραν, ἢ ἀπὸ μιᾶς ὥρας μέχρι 24 διὰ μίαν ἡμέραν καὶ μίαν νύκτα. Ἐπὶ τῆς στήλης αὐτῆς κατέρχεται ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν εἷς δακτύλιος, ὁ ὁποῖος περιβάλλει τὴν στήλην κυκλικῶς, ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ὥραν μὲ ὥραν. Εἰς τὴν ἄλλην στήλην, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι γραφῇ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἀνέρχεται εἷς δακτύλιος, ὁ ὁποῖος περιβάλλει τὴν στήλην ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὥρας τῆς πρώτης στήλης.

δοχείου τοῦ τροχοῦ ἓν εἶδος γείσου, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸ σῶμα τοῦ δοχείου. Ἐπὶ τούτου εὑρίσκονται δύο ἐλεύθεραι κατακόρυφοι στῆλαι (ι καὶ κ)· πλησίον αὐτῶν δὲν ὑπάρχει ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον νὰ τὰς ἐγγίζῃ. Αὗται ἔχουσι βάθρα (Asâfil), τῶν ὁποίων τὰ ἀνώτερα ἄκρα εἶναι ὅμοια πρὸς τὰ ἄκρα τῶν στηλῶν. Ἐπὶ τούτων (τῶν ἄκρων) εὑρίσκεται εἷς κοῖλος θόλος (maʿ qûd), ὅπου εὑρίσκεται τὸ πρόσωπον τοῦ ἀνθρώπου, τοῦ ὁποίου οἱ ὀφθαλμοί, ὡς ἐμνημονεύθη, καθ' ἑκάστην ὥραν ἀλλάσσουσι χρῶμα. Τοῦτο εἶναι τὸ ὡραιότερον μέρος τοῦ ὡρολογίου[1]).

Αἱ δύο στῆλαι εἶναι κοῖλαι. Εἶναι ἐφωδιασμέναι κατὰ μῆκος τοῦ ὀπισθίου μέρους ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἕως τὸ τέλος μὲ μίαν ἐγκοπὴν (maschqûq), διότι αὗται δέον νὰ σχηματίζουσι σωλῆνας, οἱ ὁποῖοι μένουσι στερεῶς, ἀλλ' ὄχι συγκεκολλημένοι.

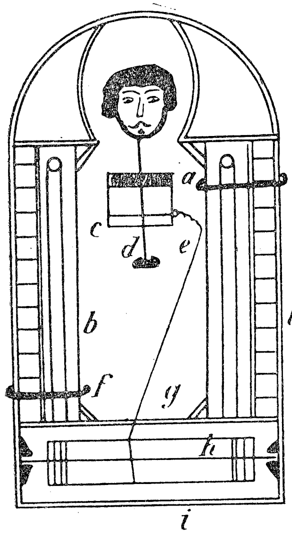
Ἡ σχισμὴ ἔχει ἀνάλογον πλάτος (ἄνοιγμα). Ἐφαρμόζομεν εἰς ἑκάστην στήλην μίαν ὑποδιαίρεσιν ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν καὶ γράφομεν εἰς ἑκάστην γραμμὴν ὑποδιαιρέσεως τὸ ὄνομα τῆς ὥρας ὡς ἑξῆς: τὴν πρώτην, τὴν δευτέραν, τὴν τρίτην, μέχρις ὅτου ἐκτελέσωμεν ὅ,τι θέλομεν. Εἰς τὴν μίαν στήλην γίνεται τοῦτο ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω †[2]).

Κατόπιν ἑτοιμάζομεν δύο δακτυλίους (λ καὶ μ). Δὲν ἔχομεν αὐτοὺς συγκολλήσει. Τὸ ἓν ἄκρον τοῦ δακτυλίου εὑρίσκεται εἰς τὴν σχισμήν, εἰς τὴν στήλην, τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ δακτυλίου εἰσέρχεται εἰς τὴν σχισμήν, μέχρι τοῦ μέσου αὐτῆς (σχ. [4α]). Ἐνταῦθα εἶναι s ἐγκαρσία τομὴ τῆς στήλης, r δακτύλιος, l ἡ σχισμὴ

---

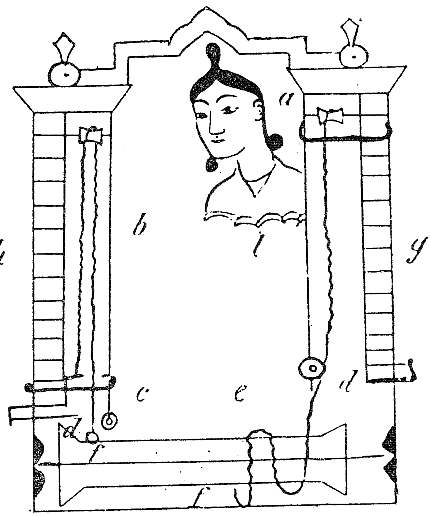
[1]) Τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον ἔχει: Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ἐφαρμόζομεν αὐτὸν τὸν θόλον ἐπὶ τοῦ ὡρολογίου καὶ δὴ καὶ ἄνωθεν τῶν δύο τούτων στηλῶν, καθ' ὅσον τοῦτο διὰ τὸ ὡρολόγιον εἶναι μία πολὺ ὡραία θέσις.

[2]) Τὸ Λονδίνειον ἔχει: «μέχρι πληρώσεως τῶν ὡρῶν».



Σχ. 4

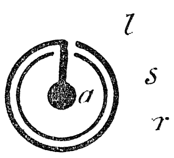
α δακτύλιος, b αἱ στῆλαι, c πέτραι, d ἄξων, e τύμπανον, f δακτύλιος, g γεῖσον (Raff), h τύμπανον, i δοχεῖον τοῦ τυμπάνου. Εἰς τὰ ἐπὶ μέρους τμήματα τῶν στηλῶν εἶναι, δεξιὰ μὲν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἀριστερὰ δὲ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, τὰ ἀραβικὰ γράμματα τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 ἕως 12.



Σχ. [4]

α δακτύλιος, b στῆλαι, c δακτύλιος, d νῆμα, e ὁ μεγάλος τροχός, f δακτύλιος (θηλειά), g οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, h οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὡρῶν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, l στήλη. Παρὰ τὰ ἐπὶ μέρους τμήματα τῶν στηλῶν εὑρίσκονται τὰ σύμβολα τῶν ἀριθμῶν. Ὅτι δεξιὰ εἶναι τὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀριστερὰ τὰ ἀριθμ. σύμβολα ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι οἱ Ἄραβες γράφουσι ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

εἰς τὴν στήλην, α τὸ ἐπιβαρυνθὲν καὶ μὲ μίαν θηλειὰν ἐφωδιασμένον ἄκρον τοῦ δακτυλίου. Εἰς τὸ ἄκρον αὐτὸ εὑρίσκεται μία ὀπή, ὅπου εἶναι προσδεδεμένον ἓν νῆμα (κλωστή). Ὁ δακτύλιος ἔχει ἀνάλογον βάρος. Ὁμοίως εἶναι κατεσκευα-



Σχ. [4α]

σμένος καὶ ὁ ἄλλος δακτύλιος. Ἔχει μίαν ὀπὴν εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν ὅπως καὶ ὁ σύντροφός του, ὅπου ἐπίσης εἶναι προσδεδεμένον ἓν νῆμα. Κατόπιν διατρυπῶσι μίαν ὀπὴν εἰς τὴν κατωτέραν ἐπιφάνειαν ἑκάστης στήλης, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ γείσου, τὸ ὁποῖον ἐξέχει τοῦ δοχείου. Εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον τῶν στηλῶν εὑρίσκονται ἐντὸς αὐτῶν δύο μικρὰ τύμπανα. Κατόπιν ἐφαρμόζουσι εἰς τὸ μεγάλο τύμπανον, δηλαδὴ τὸ τύμπανον (u), ὅπου ὁ πλωτὴρ (σημ. συνοπτικὸν σχῆμα) δύο μικροὺς δακτυλίους (θηλειές), οἱ ὁποῖοι ἔχουσι διάφορον θέσιν. † Κατόπιν προσδένουσι εἰς ἕκαστον δακτύλιον ἓν νῆμα (5 καὶ 6), τὸ ὁποῖον φέρεται ὑπὲρ τὸ μικρὸν τύμπανον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον τῆς στήλης. Ἐπὶ τούτου ἐπαναφέρεται τὸ νῆμα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς στήλης, μέχρις ὅτου τοῦτο ἐξέρχεται ἐκ τῆς ὀπῆς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ γείσου. Κατόπιν στερεώνεται τοῦτο εἰς μίαν θηλειὰν εἰς τὸ τύμπανον τοῦ πλωτῆρος (Dabba). Τὸ νῆμα τοῦ δακτυλίου τῆς στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ δακτύλιος φέρεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον περιειλιγμένον εἰς τὸ τύμπανον τοῦ πλωτῆρος, ὥστε, ὅταν τὸ τύμπανον περιστρέφεται μίαν φοράν, τὸ νῆμα ἐξελίσσεται καὶ ὁ δακτύλιος φέρεται πρὸς τὰ κάτω, ἐπειδὴ ὁ δακτύλιος, ὡς ἔχομεν εἴπει, εἶναι βαρύς. Ἐπιβαρύνεται ἐκεῖ, ὅπου τὸ νῆμα εἶναι εἰς αὐτὸν προσδεδεμένον, διὰ νὰ μὴ ἐμποδίζεται, κατὰ τὴν κίνησίν του, ὅταν κατέρχεται (βυθίζεται). Ἐν ὅσῳ τώρα τὸ τύμπανον κινεῖται περιστροφικῶς καὶ ὁ κόραξ ἐκβάλλει ἓν σφαιρίδιον καὶ ὁ ὀφθαλμὸς ἀλλάσσει χρῶμα, κατέρχεται εἷς δακτύλιος καὶ εἷς ἄλλος ἀνέρχεται καὶ δὴ καὶ κατὰ τὴν ἀπόστασιν, ὅση εἶναι μεταξὺ δύο ὑποδιαιρέσεων (χαραγῶν). Τὸ νῆμα (5) τοῦ δακτυλίου (λ) εἰς τὴν μίαν στήλην, τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, εὑρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν εἰς τὸ τύμπανον (u), ὅπου ὁ πλωτήρ, ὥστε, ὅταν τοῦτο περιστρέφεται, τὸ νῆμα περιελίσσεται, ὥστε ὁ δακτύλιος ἀνέρχεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, καὶ τὸ ἄλλο [νῆμα (6) εὑρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὅταν τοῦτο περιστρέφεται, τὸ νῆμα ἐξελίσσεται] καὶ ὁ δακτύλιος (μ) βυθίζεται (κατέρχεται) ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἐν ὅσῳ ἡ περιστροφὴ τοῦ μεγάλου τυμπάνου (u) συνεχίζεται ἀδιακόπως, ὁ εἷς δακτύλιος κατευθύνεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ὁ ἄλλος ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.† [1])

4. Τώρα ἐπιθυμοῦμεν νὰ περιγράψωμεν πῶς γίνεται ἡ κατασκευὴ δεσμωτῶν ἀνδρῶν (mukattaf) καὶ ἑνὸς ὀπίσω τούτων ἱσταμένου ἀνδρός, εἰς τὴν χεῖρα τοῦ ὁποίου ὑπάρχει ξίφος. Μετὰ πάροδον μιᾶς ὥρας κτυπᾷ οὗτος εἰς τὸν τράχηλον ἑνὸς τῶν ἀνδρῶν τούτων· κατόπιν κλίνει ἡ κεφαλὴ τούτου εἰς τὸ στῆθος, ἐπειδὴ ἡ κεφαλή του ἔχει μίαν ἄρθρωσιν (σχ. 5 καὶ [5]). Κατόπιν ἀποκαθιστῶμεν ἓν ἄλλο τετράγωνον κιβώτιον. Ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τρίτου τούτου εὑρίσκεται ἓν μεταστύλιον (ἐξώστεγον) (Ifrîz), τὸ ὁποῖον ὁμοιάζον πρὸς γεῖσον (Raff) ἐξέρχεται (ἐξέχει) τοῦ κιβωτίου. Ἐπὶ τούτου ἵστανται 12 ἢ 24 εἰκόνες ἐκ χαλκοῦ, τῶν ὁποίων αἱ κεφαλαὶ εἶναι στερεῶς στερεωμέναι δι' ἀρθρώσεων μὲ τὸν λαιμόν. Ἐὰν αἱ κεφαλαὶ θέλωμεν νὰ εὑρίσκωνται πρὸς τὰ ἐπάνω, τότε θέτομεν αὐτὰς ἐπὶ τῶν σωμάτων καὶ μένουν ὄρθιαι.

Ὀπίσω ἀπὸ τοὺς ἄνδρας ἐφαρμόζομεν ἕνα τετράγωνον αὔλακα (Mi'zâb), ὁ ὁποῖος ἔχει τόσον μῆκος, ὅσον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ κιβωτίου, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ τέλους· ἔχει τόσον μῆκος ὅσος εἶναι ὁ τόπος ἐπὶ τοῦ ὁποίου μένουν οἱ δεσμῶται ἄνδρες. Εἰς τὸ

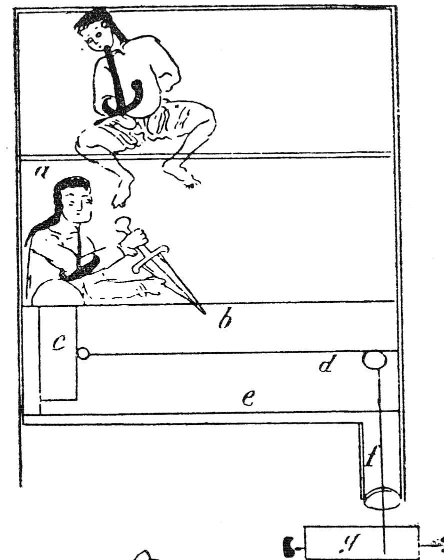
---

[1]) †† Ἐδῶ ἀκολουθοῦμεν τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάπως διεξοδικώτερον καὶ συνεπῶς καλλίτερον. Μεγάλη διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο χειρογράφων δὲν ὑπάρχει. Κατὰ τὸ Παρισινὸν χρησιμεύει ὁ βυθιζόμενος (κατερχόμενος) δακτύλιος πρὸς προσδιορισμὸν τῶν παρερχομένων ὡρῶν τῆς ἡμέρας, ἐν ᾧ ὁ ἀνερχόμενος παρέχει τὰς ὑπολοίπους. Τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἐξαίρει πρὸς τούτοις, ὅτι κατὰ τὸ μέσον τῆς ἡμέρας οἱ δύο δακτύλιοι εὑρίσκονται ἀπέναντι ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον.

τέλος τοῦ αὔλακος εὑρίσκεται ἓν μικρὸν τύμπανον. Εἰς τὸν τετράγωνον τοῦτον αὔλακα εὑρίσκεται ἡ εἰκὼν ἑνὸς ὀρθίως ἱσταμένου ἀνδρός, ἡ ὁποία εἶναι ὁρατὴ ἀπὸ τοῦ μέσου μέχρι τῆς κεφαλῆς. Τὸ ἄλλο ἥμισυ εἶναι ἓν τεμάχιον στερεωμένον εἰς τὸ πρῶτον, τὸ ὁποῖον γεμίζει σχεδὸν τὸν αὔλακα, ἀφίνει ὅμως ὀλίγον χῶρον. Τοῦτο κινεῖται εἰς τὸν αὔλακα, ὁ ὁποῖος εἶναι πολὺ λεῖος. Εἰς τοῦτο τὸ ἥμισυ τῆς εἰκόνος αὐτῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι βυθισμένον εἰς τὸν αὔλακα, εὑρίσκεται μία μικρὰ θηλειὰ καὶ δὴ καὶ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ αὔλακος. Εἰς ταύτην προσδένεται ἓν νῆμα (7), τὸ ὁποῖον φέρεται εἰς τὸ μικρὸν τύμπανον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ τέλος τοῦ αὔλακος. Πρὸς τὸ κατώτερον μέρος τοῦ τυμπάνου ἀπέναντι εὑρίσκεται εἷς σωλὴν (ν), ὅστις εἶναι καθέτως πρὸς τὸ κατώτερον μέρος τοῦ κιβωτίου, ἵνα τὸ νῆμα διὰ τοῦ μικροῦ τυμπάνου καὶ εἰς τοῦτον τὸν σωλῆνα διατείνεται (διήκει) μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ μεγάλο τύμπανον, ὅπου ὁ πλωτήρ, τὸ ὁποῖον ἔχει κατασκευασθῇ δι' ὅλας τὰς κινήσεις. Τὸ νῆμα τοῦτο (7) στερεοῦται εἰς κατάλληλον θέσιν εἰς τὸ μεγάλο τύμπανον (u), εἰς μίαν μικρὰν θηλειάν. Τὸ νῆμα ἔχει τόσον μῆκος, ὥστε, ὅταν τοῦτο ἐκτυλιχθῇ καθ' ὡρισμένον ποσὸν (μέγεθος), ὁ ἐπὶ τοῦ αὔλακος ὄρθιος ἱστάμενος ἀνήρ, εἰς τὴν χεῖρα τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἓν ξίφος, νὰ ἵσταται παρὰ τὸν πρῶτον δεσμώτην ἄνδρα. Ἐὰν τώρα περιστραφῇ τὸ μεγάλο τύμπανον, δηλ. τὸ τύμπανον ὅπου ὁ πλωτήρ, τότε περιτυλίσσεται τὸ νῆμα καὶ ἕλκει πρὸς τὰ ἐμπρὸς τὸν κρατοῦντα τὸ ξίφος ἄνδρα. Οὗτος εἶναι διατεταγμένος καταλλήλως καὶ οὕτω πως προσηρμοσμένος, ὥστε νὰ ἐγγίζῃ τὰς κεφαλὰς τῶν ἀνδρῶν εἰς τὸν αὐχένα (τράχηλον). Ὅσον προσεγγίζομεν τὸν ἄνδρα τὸ ξίφος κτυπᾷ εἰς τὴν κεφαλὴν (ἑνὸς δεσμώτου ἀνδρός), κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αὐτὴ νὰ πίπτῃ πρὸς τὰ κάτω πρὸς τὸ στῆθος τοῦ δεσμώτου ἀνδρός, διότι ὡς ἐμνημονεύθη, οὗτος εἶναι στερεωμένος μὲ ἄρθρωσιν.

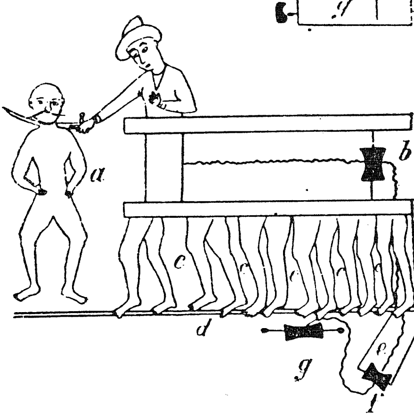
ΩΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Τὸ μεγάλο τύμπανον (u) πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὸ μέσον ἓν μέρος, εἰς τὸ ὁποῖον μόνον εἶναι προσδεδεμένη ἡ ἅλυσις τοῦ πλωτῆρος· τὸ μέρος τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον μέρος τοῦ τυμπά-



Σχ. 5

Εἰς τὸ α εἶναι ὁ κτυπῶν τὸν τράχηλον. Εἰς τὸ b ὁ αὖλαξ, ὅστις εἶναι ὄπισθεν τοῦ δεσμώτου ἀνδρός. Εἰς τὸ c τὸ εἰς τὸν αὔλακα στερεωμένον τεμάχιον. Εἰς τὸ d τὸ μικρὸν τύμπανον. Εἰς τὴν γραμμὴν τοῦ e εἶναι οἱ δεσμῶται ἄνδρες. Εἰς τὸ f ὁ σωλήν. Εἰς τὸ g τὸ μεγάλο τύμπανον.



Σχ. [5]

Εἰς τὸ α εἶναι ὁ ἄνθρωπος τοῦ ὁποίου ὁ τράχηλος κτυπᾶται. Εἰς τὸ b τὸ τύμπανον. Εἰς τὸ c ὁ ἄνθρωπος (ἐκ τῶν ἀνδρῶν σχεδιάζεται πάντοτε τὸ κατώτερον μέρος διὰ νὰ ἐνδεικνύεται ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως τοῦ δημίου). Εἰς τὸ d ἡ θέσις παραθέσεως (Maqâm) τοῦ δεσμώτου ἀνδρός. Εἰς τὸ e νῆμα. Εἰς τὸ f τύμπανον. Εἰς τὸ g τὸ μεγάλο τύμπανον, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ τὰς κινήσεις (Πρὸς τὸ τύμπανον b ἀντιστοιχεῖ τὸ τύμπανον d τοῦ σχήματος 5. Εἰς τὸ σχῆμα 5 τοὐναντίον ἐλλείπει τὸ τύμπανον f).

νου διὰ τὸν κάδον τοῦ ὕδατος[1]), ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὸ φρέαρ. Ἡ θέσις τῶν κατ' ἰδίων θηλειῶν (δακτυλίων), εἰς τὰς ὁποίας ἔχουσι προσδεθῆ τὰ διάφορα ὄργανα, εἶναι δι' ὅλας τοιαύτη, ὥστε τὰ νήματα νὰ μὴ ἐξέρχωνται ἐκ τῆς εἰς αὐτὰ καθορισθείσης θέσεως. Ἡ ὀρθὴ στάθμισις αὐτῶν εἶναι ἡ βάσις τοῦ ἔργου καὶ καθορίζει τὸ ἀλάθητον τῆς λειτουργίας, διότι δὲν ἐπιτρέπεται τὸ ἓν νῆμα νὰ περιελίσσεται πρὸς τὸ ἄλλο. Ἐὰν θέλωμεν κατασκευάζομεν τὸ κιβώτιον στρογγύλον ἢ ἐπίμηκες[2]). Οὕτω καὶ θὰ φαίνεται τότε. Ὅταν εἶναι στρογγύλον τὰ σχήματα (εἰκόνες) εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς χορδῆς τοῦ τόξου † διὰ νὰ γίνεται εὐκόλως ἡ κροῦσις τοῦ τραχήλου των. Τοῦτο εἶναι ἡ περίπτωσις, ὅταν ἡ χορδὴ ἀφαιρῆται. †[3])

5. Ἐπιθυμοῦμεν τώρα νὰ ἐκθέσωμεν πῶς ἀνοίγουσι τὰ παραθυρόφυλλα[4]) τῶν κιβωτίων, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ὄρθιοι ἱστάμενοι ἵπποι, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἵππων[5]) ἵστανται ἄνδρες ὄρθιοι. Ἕκαστος ἄνθρωπος κάθηται ἐπὶ τοῦ ἀλόγου του ὅταν ἀνοίγῃ ἡ ἀντίστοιχος θύρα. Τοῦτο συμβαίνει μετὰ τὴν πάροδον ἑκάστης ὥρας. Πρέπει ὅμως ὅ,τι περιγράφομεν νὰ γίνεται ἀντιληπτόν (σχ. 6 καὶ [6]).

Εἰς τὸ κιβώτιον τοῦτο, εἴτε εἶναι τετράγωνον εἴτε εἶναι στρογγύλον, εἴτε ὁμοιάζει πρὸς τὸ Tailasân, δηλαδὴ οἱονδήποτε σχῆμα καὶ ἂν ἔχῃ προσαρμόζουσι εἰς τὸ ἐσωτερικόν του[6]) ἓν εἶδος γεί-

[1]) Τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἔχει: Dilâ' = κάδος ὕδατος, τὸ Λονδίνειον: Daulâh = τροχός.

[2]) Τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἔχει mustatîl = ἐπίμηκες, τὸ Λονδίνειον ἔχει ὅμοιον πρὸς Tailasân. Tailasân σημαίνει εἶδος κοντοῦ παλτοῦ. Ὁ Mas'ûdî, Goldfelder, τόμος I, σελ. 185, λέγει, ὅτι μερικαὶ θάλασσαι ἔχουσι τὴν μορφὴν ἑνὸς Tailasân.

[3]) †† Ἐλλείπει εἰς τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον.

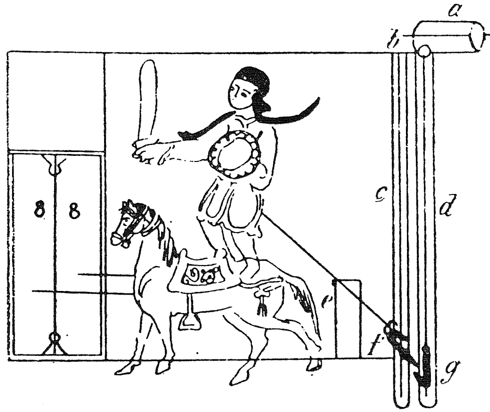
[4]) Τὸ Παρισινὸν ἔχει θύραν, τὸ Λονδίνειον παραθυρόφυλλα.

[5]) Τὸ Λονδίνειον ἔχει: «καὶ ἄνδρες ὄπισθεν τῶν θυρῶν τούτων».

[6]) Τὸ Παρισινὸν ἔχει: «εἰς τὸ κιβώτιον» Bait, τὸ Λονδίνειον «εἰς τὸ δεύτερον κιβώτιον».

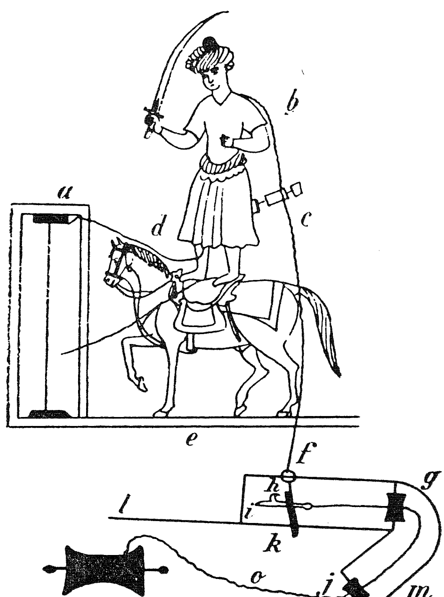
Σχ. 6

Εἰς τὸ a εἶναι ὁ σωλήν. Εἰς τὸ b τὸ μικρὸν τύμπανον. Εἰς τὸ c τὸ ἐγκάρσιον τεμάχιον, ὅπου ἔχει καρφωθῆ τὸ κάλυμμα (Zurfîn). Εἰς τὸ d ὁ αὖλαξ. Εἰς τὸ e ὁ ἄξων διὰ τὸ στέλεχος (ῥάβδον)[1]. Εἰς τὸ f ἓν πέτασμα. Εἰς τὸ g τὸ ἄγκιστρον (Kullâb).



Σχ. [6]

Εἰς τὸ a εἶναι ἡ θύρα. Εἰς τὸ b τὸ στέλεχος. Εἰς τὸ c ὁ ἄξων. Εἰς τὸ d ὁ ἵππος. Εἰς τὸ e θέσις διὰ τὰ ζῷα. Εἰς τὸ f δακτύλιος. Εἰς τὸ g αὖλαξ. Εἰς τὸ h τὸ πέτασμα. Εἰς τὸ i ὁ ἀνοίγων (ἀφέτης). Εἰς τὸ j τὸ τύμπανον. Εἰς τὸ k τὸ νῆμα. Εἰς τὸ l τὸ ἐγκάρσιον τεμάχιον. Εἰς τὸ m ὁ σωλήν. Εἰς τὸ o νῆμα.



[1]) Αὖλαξ καὶ ἄξων κεῖνται μὲ τὰ α καὶ b καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως.

σου, ὡς τοῦτο περιεγράψαμεν προηγουμένως. Ἐπὶ τούτου θέτουσι τὰ ζῷα ὑπὸ τὴν μορφὴν ἵππων. Οὗτοι εἶναι στερεωμένοι ἐπὶ τοῦ γείσου τούτου. Δὲν εἶναι προσδεδεμένοι (musarrah)[1]) καὶ φέρουσι τοὺς χαλινοὺς (mulgam). Πρὸ αὐτῶν εὑρίσκονται θύραι μὲ φύλλα, τὰ ὁποῖα εἶναι κλειστά[2]). Αἱ θύραι ὅμως εἶναι οὕτω πως κατεσκευασμέναι (δηλ. εἶναι κατεσκευασμέναι διὰ τῶν πλαγίων θέσεων τῶν ἀξόνων των, οὕτω πως, ἰδὲ κατωτέρω) ὥστε νὰ ἀνοίγουσι φυσικῶς, ὅταν ἀφίνωνται ἐλεύθερα τὰ νήματά των. Πρὸς τοῦτο ἔχει ἕκαστον παραθυρόφυλλον ἓν νῆμα. Αἱ ὁπλαὶ τῶν ζῴων συνδέονται μὲ τὸν πυθμένα τοῦ κιβωτίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δηλονότι τὰ ζῷα ἵστανται. Εἰς τοὺς ἄνδρας δίδομεν τὴν μορφὴν ἱππέων μὲ οἱονδήποτε ὅπλον, † τὸ ὁποῖον δύναται κανεὶς νὰ κατασκευάσῃ εὐκόλως †[3]). Εἰς τὰ νῶτα ἑκάστου ἀνδρὸς εὑρίσκεται λεπτὸν σιδηροῦν στέλεχος[4]), τὸ ὁποῖον ἔχει τόσον μῆκος, ὥστε νὰ φθάνῃ μέχρι τοῦ ἡμίσεος τοῦ κιβωτίου. Εἰς τὸ μέσον τοῦ στελέχους εὑρίσκεται εἷς ἄξων (Qutb), ὅστις ἐξ ἀμφοτέρων τῶν πλευρῶν εἰσδύει εἰς δύο «κέντρα» ὡς ἡ τέχνη (San'a) τοῦ Manganîq[5]). Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ στελέχους εὑρίσκεται πλατεῖα ὀπή, ὁμοία πρὸς δακτύλιον (θηλειάν). Εἰς ἕκαστον τῶν δύο φύλλων τῆς θύρας εἶναι στερεωμένα τὰ νήματα, τὰ ὁποῖα μέσῳ μικρῶν θηλειῶν εἶναι προσδεδεμένα πρὸς τὰ δύο σκέλη ἢ τὰ δύο γόνατα τῶν ἱππέων. Εἰς τὸ κιβώτιον εἶναι ἐπὶ πλέον στερεωμένον ἓν ἐγκάρσιον τεμάχιον, τὸ ὁποῖον φθάνει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ κιβωτίου μέχρι τοῦ τέ-

---

1) Τὸ Λονδίνειον ἔχει «musarra'», τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ἔχει ἔννοιάν τινα.

2) Τὸ Παρισινὸν χειρόγραφον ἔχει muglaq=κλεισμένον, τὸ Λονδίνειον mardûd = ἐστηριγμένον.

3) Τὸ Παρισινὸν ἔχει : «ἢ διά τινος ἄλλου».

4) Τὸ στέλεχος (ἡ ῥάβδος) εὑρίσκεται κάθετον εἰς τὰ νῶτα τοῦ ἱππέως.

5) Τὸ (ὄργανον) Manganîq εἶναι βλητικὴ μηχανὴ (ἰδὲ Beiträge VI, S. 22 καὶ XXIII, S. 311).

λους του καὶ ἔχει τόσον μῆκος, ὡς ὁ προηγουμένως περιγραφεὶς αὖλαξ, ὅστις χρησιμεύει διὰ τὸν φέροντα τὸ ξίφος. Εἰς τὸ ἐγκάρσιον αὐτὸ τεμάχιον ἔχουσι καρφωθῆ δύο ἄγκιστρα (πετάσματα, Zurfîn), τὰ ὁποῖα εὐκόλως ἀνοίγουσι καὶ κλείνουσι. Ἕκαστον πέτασμα εὑρίσκεται ἀπέναντι τοῦ δακτυλίου (τῆς θηλειᾶς) ἑνὸς στελέχους, δηλαδὴ ἀπέναντι τῆς ὀπῆς εἰς τὸ ἐξώτατον μέρος τοῦ στελέχους. Ἀκόμη ἔχει κατασκευασθῆ εἷς δεύτερος αὖλαξ, τοῦ αὐτοῦ σχήματος, ὡς ἐκεῖνος τοῦ φέροντος τὸ ξίφος[1]), μόνον ὅτι εἰς αὐτὸν ἔχει προσαρμοσθῆ ἐσχισμένος σωλὴν (maschqûq), ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ σχῆμα μιᾶς τῶν δύο στηλῶν[2]). Οὗτος ὁ αὖλαξ ἔχει σταθερὰν θέσιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ κιβωτίου μέχρι τοῦ τέλους αὐτοῦ. Ἔχει τὸ μῆκος τοῦ ἐγκαρσίου τεμαχίου διὰ τὸ πέτασμα. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ αὔλακος τούτου εὑρίσκεται ἓν μικρὸν στέλεχος (Qadîb). Τοῦτο ἔχει μῆκος ἑνὸς δακτύλου ἢ ὀλιγώτερον τούτου καὶ γεμίζει σχεδὸν τὸν αὔλακα. Διατρέχει, ὅταν κανεὶς τὸ ἕλκῃ, εὔκολα τὸν κενὸν χῶρον τούτου (τοῦ αὔλακος) χωρὶς πρὸς τοῦτο νὰ χρειάζεται κόπος τις. Εἰς τὸ τέλος τοῦ στελέχους τούτου εὑρίσκεται εἷς μικρὸς δακτύλιος (θηλειά), καὶ εἰς τὸ μέσον τοῦ ἰδίου στελέχους ἐξέχει ἓν τεμάχιον (ῥάβδος, στέλεχος), ἐκ τῆς σχισμῆς τοῦ αὔλακος. Εἰς αὐτὸ ἔχει συγκολληθῆ ἓν ἄγκιστρον (Kullâb). Τὸ ἄγκιστρον τοῦτο διέρχεται πρὸ ὅλων τῶν πετασμάτων καὶ ἀνοίγει ὅλα τὰ πετάσματα. Εἰς τὸ τέλος τοῦ αὔλακος εὑρίσκεται ἓν μικρὸν τύμπανον, ὅμοιον πρὸς τὸ τύμπανον τοῦ φέροντος τὸ ξίφος. Κατόπιν προσδένουσι ἓν νῆμα (8) εἰς τὴν θηλειὰν (τῆς συσκευῆς τῆς χρησιμευούσης διὰ τὸ ἄνοιγμα τῶν πετασμάτων) εἰς τὴν θέσιν, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ αὔλακος. Τὸ νῆμα τὸ φέρομεν περὶ ἓν μικρὸν τύμ-

1) Τὸ Λονδίνειον προσθέτει: «ὅστις κτυπᾷ τὸν αὐχένα».

2) Τὸ Λονδίνειον προσθέτει: «ὅπου ὁ δακτύλιος ἀνέρχεται καὶ κατέρχεται».

πανον (τὸ περιελίσσομεν) καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς ἕνα σωλῆνα (ξ), ὅστις ὁμοιάζει πρὸς τὸν (ἀντίστοιχον) σωλῆνα (ν) τοῦ φέροντος τὸ ξίφος. Τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος εἶναι στερεωμένον εἰς τὸ μεγάλο τύμπανον (u), τὸ ὁποῖον ἔχει κατασκευασθῇ διὰ τὴν παραγωγὴν ὅλων τῶν κινήσεων.

Ἐκ τῆς περιγραφῆς αὐτῆς συνάγεται, ὅτι, ὅταν τὰ στελέχη τῶν ἱππέων ἔχουν ἐξαρτηθῇ ἐκ τῶν θηλειῶν (δακτυλίων), ὁπότε τὸ ἄλλο ἄκρον τῶν στελεχῶν αἴρεται ὑψηλά, οἱ ἱππεῖς εἶναι κρυμμένοι καὶ αἱ κεφαλαί των στηρίζονται εἰς τὴν στέγην τοῦ κιβωτίου, διότι τὰ πετάσματα εἶναι προσηρμοσμένα εἰς μικρὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐγκαρσίου τεμαχίου[1]). Τὰ στελέχη (μὲ τοὺς ἱππεῖς) συμπεριφέρονται ὅπως τὰ βέλη (Sahm) τοῦ Manganîq (μιᾶς βλητικῆς μηχανῆς), ὅταν τοῦτο εἶναι τεταμένον. Ὅταν φέρωμεν τὴν συσκευὴν τὴν ἀνοίγουσαν τὰ πετάσματα εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ αὔλακος — οἱανδήποτε ἐκ τῶν δύο πλευρῶν του καὶ ἂν ἔχωμεν ὁρίσει ὡς ἀρχὴν — καὶ περιστρέφεται τὸ μεγάλο τύμπανον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγκατεστημένον διὰ τὰς κινήσεις, τότε κτυπᾷ ἡ συσκευὴ ἡ χρησιμεύουσα διὰ τὸ ἄνοιγμα τῶν πετασμάτων (μετὰ πάροδον μιᾶς ὥρας) εἰς τὸ πρῶτον πέτασμα καὶ τὸ ἀνοίγει, διότι ἔχει κατασκευασθῇ νὰ ἀνοίγῃ καὶ εἶναι διαμεμορφωμένη διὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ὅταν ἡ συσκευὴ ἀνοίξῃ στρέφεται τὸ πέτασμα ἐπὶ τοῦ ἥλου του (τοῦ καρφιοῦ του) καὶ βυθίζεται πρὸς τὰ κάτω. Τότε βυθίζεται ὁ ἱππεὺς ἐκ τῆς θέσεώς του εἰς τὸ σάγμα (τὸ σαμάρι) καὶ τὰ παραθυρόφυλλα ἀνοίγουσι, διότι τὰ νήματα χαλαρώνονται †καὶ διότι εἶναι οὕτω πως διατεταγμένα, ὥστε, ὅταν χαλαρώνονται νὰ ἀνοίγουσι †[2]). Κλίνουσι δηλαδὴ πρὸς τὰ ἔξω καὶ εἶναι βαρειά. Ἡ διὰ τὸ ἄνοιγμα τῶν πε-

---

[1]) Ἐννοεῖ ὅτι τὰ πετάσματα ὑπερέχουν μόνον ὀλίγον ὑπὲρ τὸ ἐγκάρσιον τεμάχιον. Τὸ μέρος εἶναι ἀσαφές.

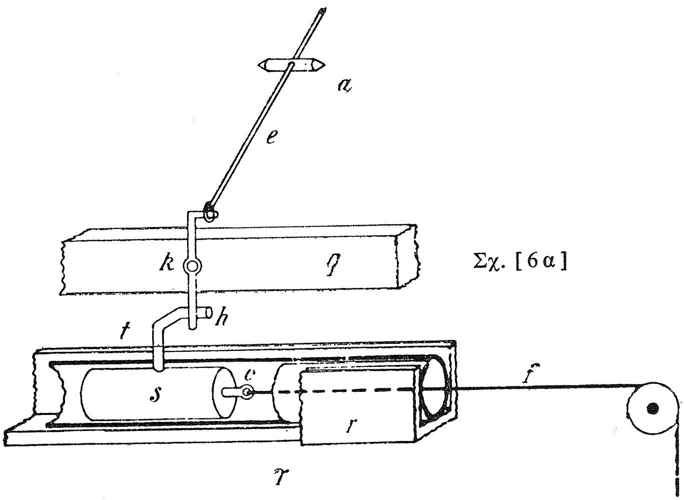
[2]) †† Τὸ ἔχει μόνον τὸ Λονδίνειον

τασμάτων χρησιμεύουσα συσκευὴ ἀνοίγει διαδοχικῶς πέτασμα — πέτασμα. Ὁ εἷς ἱππεὺς τίθεται εἰς κίνησιν μετὰ τὸν ἄλλον, μέχρις ὅτου κινηθῶσιν ὅλοι, ὅσοι καὶ ἂν εἶναι, † ὡς τοῦτο ἔχομεν ἐξηγήσει διὰ τὸν ἄνθρωπον, ὁ ὁποῖος κτυπᾷ ἄλλον † [1]).

---

1) †† Τὸ ἔχει μόνον τὸ Λονδίνειον.

Ἡ κατασκευὴ τῆς προκαλούσης τὴν κίνησιν τῶν ἱππέων συσκευῆς δὲν γίνεται σαφής, οὔτε ἐκ τοῦ κειμένου οὔτε ἐκ τῶν σχημάτων 6 καὶ [6]. Ὁπωσδήποτε πιστεύομεν, ὅτι ἡ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ (ἀσαφοῦς) κειμένου καὶ τοῦ σχήματος [6α] γενομένη ἀνακατασκευὴ εἶναι ἐπιτυχής. Ἐδῶ εἶναι r ὁ



Σχ. [6α]

αὖλαξ, r′ ὁ εἰς αὐτὸν εὑρισκόμενος ἐσχισμένος (μὲ σχισμὴν) σωλήν, ὅπου τὸ μικρὸν στέλεχος (τύμπανον) (s) εὐκόλως δύναται νὰ μετακινῆται. Τοῦτο κινεῖται διὰ τοῦ εἰς τὴν θηλειὰν (o) στερεωμένου νήματος (f), τὸ ὁποῖον διὰ τοῦ τυμπάνου (l) κατέρχεται πρὸς τὰ κάτω. Τὸ μικρὸν στέλεχος εἰς τὸ στέλεχος (τύμπανον) (s), τὸ ὁποῖον διὰ τῆς σχισμῆς τοῦ σωλῆνος (r′) ἀνέρχεται πρὸς τὰ ἄνω εἶναι τὸ t, τὸ εἰς αὐτὸ στερεωμένον ἄγκιστρον (γάντζος) εἶναι τὸ (h). Τοῦτο κτυπᾷ κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ στελέχους (s)

(Συνέχεια ὑποσ. εἰς τὴν σελ. 280)

Γνώριζε ὅτι, ὅσον θέλωμεν νὰ αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν κινήσεων, τόσον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν νημάτων. Ὅταν ταῦτα γίνωσι πολλά, τότε πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν βοηθητικῶς ἕνα ὀδοντωτὸν τροχόν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μορφὴν ἐπίσης ἑνὸς τυμπάνου. Οἱ ὀδόντες αὐτοῦ εὑρίσκονται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τούτου καὶ περιστρέφουσι τὸ στέλεχος (δηλαδὴ τὸ ἐπίμηκες στελεχῶδες τύμπανον).

Τότε ἐπακολουθοῦσι μερικαὶ κινήσεις εἰς αὐτὸ (τὸ στέλεχος), καθ' ὅσον τὰ ἄκρα[1]) τῶν νημάτων εὑρίσκονται εἰς μικρὰς θηλειὰς ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὅπου οἱ ὀδόντες (δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ ἐκ τούτου τιθεμένου εἰς κίνησιν τυμπάνου). Τὸ μῆκος τῶν νημάτων ἔχει ληφθῆ τόσον, ὥστε αἱ κινήσεις των νὰ συμφωνοῦν πρὸς τὴν περιστροφὴν τοῦ μεγάλου τυμπάνου, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ τὰς κινήσεις. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐφ' ὅσον τὰ νήματα βραχύνωνται ἢ ἐπιμηκύνωνται ἀναλόγως, ὅταν τὰ προσαρμόζωσιν εἰς τὸ τύμπανον, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ τὰς κινήσεις[2]).

Ὅταν τὸ ὄργανον κατασκευασθῆ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον καὶ μὲ ἀντοχήν, τότε εἶναι μόνιμον καὶ τέλειον μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεοῦ.

(Συνέχεια ὑποσ. ἐκ τῆς σελ. 279)
πρὸς τὸ « πέτασμα » (k). Τοῦτο εὑρίσκεται, δυνάμενον νὰ περιστραφῆ ἐπὶ τοῦ ἐγκαρσίου τεμαχίου (q) καὶ ἔχει ἐξαρτηθῆ μὲ τὸ ἀνώτερον ἄκρον του εἰς τὴν δακτυλιοειδῆ διάτρησιν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σιδηροῦ στελέχους (e). Τὸ σιδηροῦν στέλεχος (e) στηρίζεται εἰς τὸ μέσον του εἰς τὸν ἄξονα (α) περὶ τὸν ὁποῖον δύναται νὰ περιστρέφεται καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του τὸν ἱππέα.

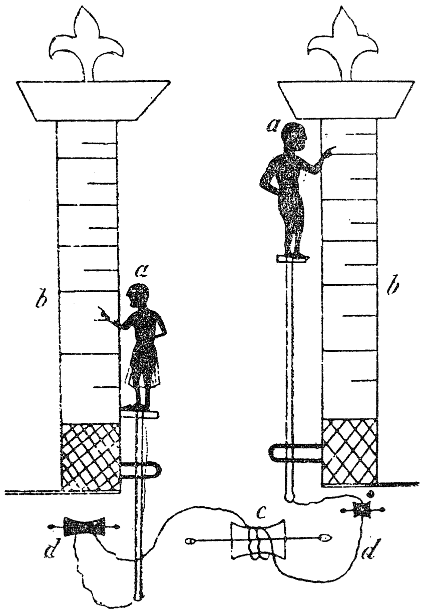
Ἐὰν τώρα τὸ ἄγκιστρον (γάντζος) h συμπαρασύρη τὸ κατώτερον μέρος τοῦ πετάσματος (k), τότε τὸ ἀνώτερον ἄκρον του ἐξέρχεται ἐκ τῆς θηλειᾶς τοῦ στελέχους (e), ὁ ἱππεὺς πίπτει ἀπὸ τὸ ἄλογον καὶ ὁλόκληρον τὸ πέτασμα περιστρέφεται κατὰ 180^0, διότι τὸ ἀνώτερον ἄκρον εἶναι βαρύτερον τοῦ κατωτέρου.

[1]) Τὸ κείμενον ἔχει «κέντρα».

[2]) Εἰς τὸ Παρισινὸν ὑπάρχει ἐδῶ μεγάλο κενόν, τὸ ὁποῖον λήγει εἰς τὴν σελίδα 284 κατὰ τὴν περιγραφὴν τοῦ δένδρου μὲ τὰ στρουθία.

† Περιγράφομεν τώρα τί δύναται νὰ γίνῃ εἰς αὐτὴν τὴν συσκευήν, ὅταν αὐτὴν θέλωμεν, ἢ εἰς μίαν ἄλλην, διότι αὐτὰ τὰ πράγματα, καίτοι τὰ ἔχωμεν ἡμεῖς συνθέσει, ὡς τὰ ἔχωμεν περιγράψει, λειτουργοῦσιν ἐπίσης ὀρθῶς, ὅταν ἕκαστον τεμάχιον εἶναι (ἐν λειτουργίᾳ) μόνον του, οὕτως ὥστε ἑκάστη κίνησις σχηματίζει δι' ἑαυτὴν μίαν συσκευὴν † [1]).

6. Τώρα θέλομεν πάλιν νὰ παρασκευάσωμεν (εἰς τὸ ὡρολόγιον) δύο συμπαγεῖς στήλας καὶ δύο ἀνθρώπους (σχ. [7]). (Διὰ τῶν δακτύλων των δεικνύουν τὰς ὥρας) [2]). Ὁ εἷς εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφου στελέχους ('Amûd) καὶ θέτει τὸν δάκτυλόν του εἰς τὴν πρώτην ὥραν, εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος τῆς μιᾶς στήλης,



Σχ. [7]

Εἰς τὸ a εἶναι εἰκὼν ἀνθρώπου (Mitâl). Εἰς τὸ b αἱ ὧραι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω εἶναι εἰς αὐτὴν τὴν στήλην. Εἰς τὸ b_1 αἱ ὧραι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω εἶναι εἰς αὐτὴν τὴν στήλην. Εἰς τὸ c εἶναι τὸ τύμπανον τὸ προκαλοῦν τὴν κίνησιν. Εἰς τὸ d_1 εἶναι τὸ νῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει περιελιχθῆ περὶ τὸ τύμπανον, καὶ ὅταν τοῦτο περιστρέφεται ἐξελίσσεται (ξετυλίγεται). Εἰς τὸ d τὸ νῆμα περιελίσσεται, ὅταν τὸ τύμπανον περιστρέφεται.

[1]) †† Ἐδῶ φαίνεται, ὅτι τὸ κείμενον δὲν εἶναι ἐντελῶς ἐν τάξει. Ἡ μετάφρασις ὅμως ἀποδίδει οὐσιωδῶς τὴν ἔννοιαν.

[2]) Ὁλόκληρον τὸ τμῆμα τοῦτο, τὸ ἔχει μόνον τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον. Ἴσως τοῦτο εἶναι προστεθειμένον βραδύτερον, διότι ἐν σχέσει πρὸς τὸ τμῆμα 3 δὲν περιέχει τίποτε οὐσιωδῶς νέον.

ἐν ᾧ ὁ ἄλλος εἶναι παρὰ τὴν βάσιν τῆς ἄλλης στήλης καὶ θέτει τὴν χεῖρα του εἰς τὴν πρώτην ὥραν (εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον) τῆς στήλης αὐτῆς. Ὁ ἄνθρωπος, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ὑψηλὰ εἰς τὴν στήλην, κατέρχεται, ἐν ᾧ ὁ ἄλλος, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται κάτω, ἀνέρχεται[1]).

Ἡ διάταξις αὕτη ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὰς δύο στήλας μὲ τοὺς δύο δακτυλίους. Εἰς ταύτην ἡ μέθοδος εἶναι ἡ ἰδία, ἐφ' ὅσον ὁ τεχνίτης κατὰ τὴν κατασκευὴν εἶναι ἐπιδέξιος· καὶ αἱ δύο εἰκόνες εἶναι πράγματι κοσμήματα. Χρησιμοποιοῦσι δύο συμπαγεῖς στήλας, εἰς τὰς ὁποίας αἱ χαραγαὶ διὰ τὰς ὥρας εἶναι διατεταγμέναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Πρὸ ἑκάστης στήλης ὑπάρχει μία ὀπή, καὶ ὑπὸ τὴν ὀπὴν εὑρίσκεται κάτωθι τοῦ καλύμματος (τοῦ γείσου) ἓν μικρὸν τύμπανον (τροχαλία), τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κινηθῇ εὐκόλως.

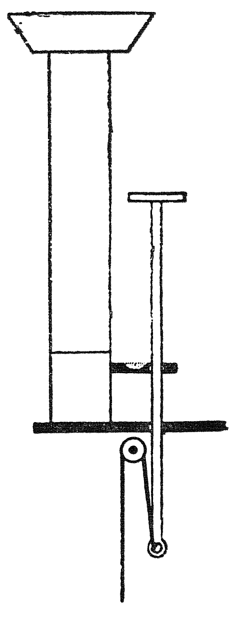
Κατασκευάζομεν δύο στελέχη (ʽAmûd) ἔχοντα μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῶν στηλῶν καὶ ἀντιστοίχως ἀνάλογα μεγέθη καὶ τὰ θέτομεν κατακορύφως. Πρὸς τούτοις πρέπει ὁ δείκτης τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἑκάστου ἀνδρὸς νὰ κεῖται εἰς τὴν πρώτην χαραγὴν τῶν ὡρῶν, εἴτε τῶν ἄνω εἴτε τῶν κάτω. Εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον ἑκάστου στελέχους μὲ τὸν ἕνα ἄνδρα εὑρίσκεται μία μικρὰ θηλειὰ μὲ ἓν νῆμα. Τοῦτο ἔχει περιελιχθῇ περὶ τὸ μικρὸν τύμπανον. Τὸ ἄλλο ἄκρον εἶναι στερεωμένον εἰς τὸ μεγάλο τύμπανον, δηλαδὴ τὸ τύμπανον, ὅπου ὁ πλωτὴρ (συνοπτικὸν σχῆμα), τὸ ὁποῖον θέτει ἐν ἐνεργείᾳ τὰς κινήσεις καὶ δὴ καὶ εἶναι τὰ νήματα στερεωμένα ἐν ἀντιθέτῳ διευθύνσει, ὡς τοῦτο ἔχομεν περιγράψει κατὰ τὴν στερέωσιν τῶν νημάτων τῶν δακτυλίων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἀνέρχεται εἰς τὴν στήλην, καὶ ὁ ἄλλος κατέρχεται. Καθ' ὅμοιον τρόπον στερεώνονται εἰς ἀντίθετον διεύθυνσιν τὰ νήματα αὐτά, οὕτως, ὥστε, ὅταν τὸ

---

[1]) Ὡρολόγια, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνερχόμεναι εἰκόνες δεικνύουν διά τινος στελέχους τὰς ὥρας ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Βιτρουβίου, (βιβλίον IX).

μέγα τύμπανον περιστρέφεται, διὰ τὴν εἰκόνα ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην ἄνω, ὅπου εὑρίσκεται τὸ ἀντίστοιχον γράμμα τῆς πρώτης ὥρας, τὸ νῆμα ἐξελίσσεται (ξετυλίγεται) καὶ ἡ εἰκὼν βυθίζεται, ἐν ᾧ τὸ νῆμα τῆς εἰκόνος, ἡ ὁποία εὑρίσκεται κάτω ἔχει ἐξελιχθῆ (ἤδη) καὶ περιελίσσεται (τώρα), ὥστε ἡ εἰκὼν αὕτη ἀνέρχεται. Ἐὰν ὁ τεχνίτης θέλῃ νὰ κάμῃ τοῦτο, τὸ ὁποῖον περιεγράψαμεν, γνωρίζει ὅτι τοῦτο εἶναι, ὅπως τὸ εἴπομεν[1]).

Αὐταὶ αἱ συσκευαί, τῶν ὁποίων τὴν περιγραφὴν ἐτελειώσαμεν, ὡς καὶ ὅλοι οἱ μηχανισμοί, οἱ ὁποῖοι ἐκ τούτων παράγονται καὶ ὁμοιάζουν πρὸς αὐτάς, συνδέονται μὲ τὸ μεγάλο τύμπανον, ὅπου ὁ πλωτήρ, τὸ ὁποῖον θέτει εἰς λειτουργίαν τὰς κινήσεις καὶ εἶναι στερεωμέναι εἰς τὸν ὀδοντωτὸν τροχόν. Ἐὰν τὰ νήματα γίνωνται πάρα πολλὰ καὶ τὸ ὄργανον μεγαλύτερον, καὶ ὁ κενὸς χῶρος του εὐρύτερος, τότε θέτουν εἰς τὸν ἄξονα (Sahm) τοῦ μεγάλου τυμπάνου, τὸ ὁποῖον θέτει εἰς λειτουργίαν τὰς κινήσεις, τὸ τύμπανον δὲ τοῦτο εἶναι ὅπου ὁ πλωτήρ, ἓν ἄλλο τύμπανον, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται μερικὰ νήματα τῶν κι-



Σχ. [7α]

---

1) Τὰ στελέχη, τὰ ὁποῖα φέρουν τὰς εἰκόνας, πρέπει ἐκτὸς τῶν χειλέων τῶν ὀπῶν διὰ τῶν ὁποίων ταῦτα κατευθύνονται πρὸς τὰ ἄνω διὰ τοῦ εἰσδύοντος γείσου νὰ φέρωνται δι' εἰδικῶν θηλειῶν, εἴτε παρομοίων, εἰς ἀπόστασίν τινα ἀπὸ τὰς ὀπάς, διότι ἄλλως θὰ ἀνατρέπωνται. Εἰς τὸ σχ. [7] ὑποδηλοῦνται τοιαῦται φοραὶ εἰς τὸ βάθρον τῶν στηλῶν. Τὸ σχῆμα [7α] δεικνύει μίαν ἀνακατασκευήν. Ἡ κατασκευὴ εἶναι ὁμοία πρὸς κινητικὸν μηχανισμὸν τοῦ ὡρολογίου τοῦ al Gazarî (παράβαλε Nova Acta τόμ. 100, ἀριθμ. 5, S. 160).

νουμένων μηχανισμῶν. Τοῦτο τὸ κάμνουν διὰ νὰ μὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν νημάτων εἰς τὸ ἓν τύμπανον πολὺ μεγάλος, καὶ νὰ μὴ περιπλέκωνται μεταξύ των καὶ συγκολλῶνται τὰ νήματα, καὶ διὰ νὰ μή, τέλος, αἱ θέσεις διὰ τὰ μέσα τῶν νημάτων ἐπὶ τοῦ τυμπάνου πλησιάζουν μεταξύ των (καὶ νὰ παρεμποδίζῃ τὸ ἕν, τὸ ἄλλο), διότι τότε παύει ἡ λειτουργία τοῦ ὡρολογίου.

Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν κατασκευάζομεν ἓν δεύτερον τύμπανον, διὰ νὰ ἀνακουφίζωμεν τὸ πρῶτον, ὥστε τίποτε νὰ μὴ καταστρέφεται καὶ καμμία ἀπὸ τὰς κινήσεις του νὰ καταστρέφεται[1]).

Μηχανισμοί, οἱ ὁποῖοι τίθενται εἰς λειτουργίαν οὐχὶ διὰ τοῦ πλωτῆρος ἀλλὰ διὰ τοῦ ἐκρέοντος ὕδατος.

Τώρα ἐπιθυμοῦμεν νὰ περιγράψωμεν δύο κινήσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν σχετίζονται πρὸς τὸ μεγάλο τύμπανον, τὸ ὁποῖον θέτει εἰς λειτουργίαν τὰς κινήσεις, ἢ μὲ οἱονδήποτε ἄλλο τύμπανον (Αἱ κινήσεις αὗται προκαλοῦνται διὰ τοῦ ἐκ τοῦ ἐπιστομίου ῥέοντος ὕδατος. Ἡ κατασκευὴ καὶ διάταξις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἑπομένην περιγραφὴν (παράβαλε τὰ σχήματα 8, [8], 9 καὶ [9]).

1. Περιγράφομεν τώρα πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ παρασκευασθῇ ἓν δένδρον (q), εἰς τοὺς κλάδους[2]) τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται δύο σπουργίτια.

Τὸ δένδρον αὐτὸ δέον νὰ εἶναι κατακόρυφον μεταξὺ δύο βουνῶν (m) (πρῶτον σχῆμα συνοπτικοῦ σχήματος, ἀριστερὰ κάτω,

---

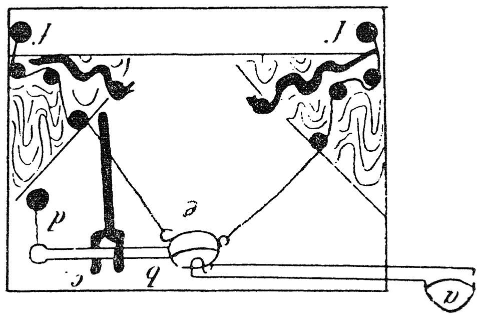
[1]) Πολὺ ἀνωτέρω τὸ κείμενον ἔχει προβλέψει διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν τὴν προσαρμογὴν ἑνὸς δευτέρου τυμπάνου τιθεμένου εἰς κίνησιν δι' ὀδοντωτοῦ τροχοῦ.

[2]) Ἐδῶ τελειώνει τὸ κενὸν τοῦ Παρισινοῦ χειρογράφου. Τοιαύτας συσκευὰς περιγράφει ἐπίσης ὁ Ἥρων εἰς τὰ Πνευματικὰ I, 15, 16, 41· II, 4, 5, 32, καὶ ὁ Φίλων, ἔκδ. C. de Vaux Nr. 40, 42, 58 κ.λπ.

ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸ σχ. 8). Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ ἑκάστου βουνοῦ καὶ τοῦ κορμοῦ (Sâq) τοῦ δένδρου ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος ἑνὸς δακτύλου (19,3 mm). † Μετὰ τὴν πάροδον μιᾶς ὥρας ἔρχονται ἐκ

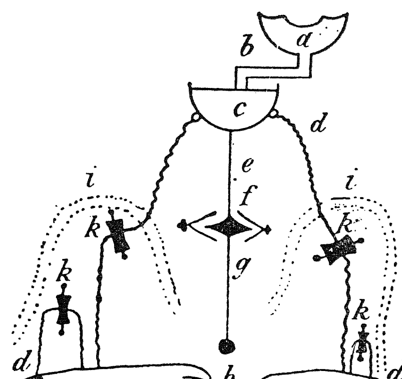
Σχ. 8.

Εἰς τὸ a εἶναι τηγάνιον (Migla). Εἰς τὸ b κοχλιάριον. Εἰς τὸ c ἄξων. Εἰς τὸ d βαρύδι. Εἰς τὸ e συλλέκτης. Εἰς τὸ f βάρος.



Σχ. [8]

Εἰς τὸ a εἶναι τηγάνιον. Εἰς τὸ b αὖλαξ (ὑδρορρόη). Εἰς τὸ c κοχλιάριον. Εἰς τὸ d νῆμα. Εἰς τὸ e στέλεχος κοχλιαρίου. Εἰς τὸ f ἄξων. Εἰς τὸ g θέσις τοῦ δένδρου. Εἰς τὸ h μολύβδινον βαρύδι. Εἰς τὸ i τὰ δύο βουνά. Εἰς τὸ k τύμπανον. Εἰς τὸ l μολύβδινα βαρύδια.



τῶν προπόδων τῶν δύο βουνῶν 2 φίδια (n) (σχ. 8), ἐκ δύο ὀπῶν, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὰ βουνά. Αἱ ὀπαὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν μνημονευθέντων σπουργιτιῶν. Ἐν ὅσῳ τὰ σπουργίτια βλέπουν τὰ φίδια, κραυγάζουν καὶ σφυρίζουν μέχρις ὅτου τὰ φίδια γίνουν ὁρατὰ † [1]) (ἐξέλθουν ἀπὸ τὰς ὀπάς). Κατόπιν ἀποσύρονται τὰ φίδια εἰς τὰ βουνὰ (φωλεάς των). Τότε παύει (αὐτομάτως) ἡ κραυγὴ καὶ τὸ σφύριγμα τῶν σπουργιτιῶν [2]).

Διὰ νὰ πραγματοποιήσωμεν τοῦτο φέρομεν εἰς τὸν συλλέκτην (k), δηλ. εἰς τὸ δοχεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται τὸ ὕδωρ ἐκ τοῦ τηγανίου [(i), Migla], ἓν τηγάνιον [(l), Mingala] ἐκ ψευδαργύρου εἰς ἓν στέλεχος (Qutb). Τοῦτο εἶναι εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ, κατὰ τοιοῦτον τρόπον στερεωμένον, ὡς ἐὰν ἦτο ἓν κοχλιάριον (Migraf), ὡς τοῦτο χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ ἀσχολουμένου μὲ τὰ αἰγυπτιακὰ φασόλια (Bâqillâ) (δηλ. τὰ μαγειρεύει). Εἰς τὸ μέσον τοῦ στελέχους (Qutb) εὑρίσκονται δύο ἄξονες (Mihwar), οἱ ὁποῖοι εἶναι στερεωμένοι εἰς δύο δι' αὐτοὺς καθωρισμένα κέντρα. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς λαβῆς (Dastag) τοῦ κοχλιαρίου εἶναι ἓν βαρύδι (j) ἐκ μολύβδου, τὸ ὁποῖον κλίνει τὸ κοχλιάριον καὶ τὸ αἴρει πρὸς τὰ ἄνω, ὅταν ἐπ' αὐτοῦ δὲν εὑρίσκεται τίποτε. Τὸ κοχλιάριον τοῦτο (l) (τηγ.) εἶναι οὕτω πως προσηρμοσμένον εἰς τὴν θέσιν του, ὥστε τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸν αὔλακα (τὸ κοῖλον) τοῦ τηγανίου (i), νὰ χύνεται εἰς αὐτό. Ὅταν τὸ κοχλιάριον γεμίζῃ μὲ ὕδωρ, τότε κλίνει καὶ ἀπο-

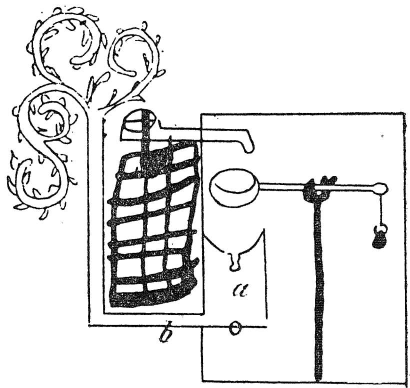
---

[1]) Τὸ Λονδίνειον ἐδῶ ἔχει : Μετὰ πάροδον μιᾶς ὥρας ἐξέρχεται ἐκ τοῦ πρόποδος τοῦ βουνοῦ, ἐκ μιᾶς εἰς αὐτὸ εὑρισκομένης ὀπῆς ἓν φίδι. Ἡ ὀπὴ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ κορμοῦ τοῦ δένδρου ἢ ἀπέναντι τῶν σπουργιτιῶν εἰς τοὺς κλάδους τοῦ δένδρου. Ὅταν ἐξέλθουν τὰ δύο φίδια, τότε κραυγάζουν καὶ σφυρίζουν τὰ σπουργίτια, ἐν ὅσῳ τὰ φίδια εἶναι ὁρατά.

[2]) Τὸ Λονδίνειον ἔχει : «Ὅταν τοῦτο εἶναι νὰ γίνῃ, τὸ κάμνομεν εἰς τὸ δοχεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀνώτατον τῶν δοχείων καὶ τοῦτο εἶναι ὁ τόπος, ὅστις». Κατόπιν ἀκολουθεῖ τὸ σχῆμα καὶ τίποτε, τὸ ὁποῖον θὰ ἀνταπεκρίνετο πρὸς τὸ «ὅστις». Τὸ κείμενον συνεχίζεται ὑπὸ τὸ σχῆμα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ κείμενον τοῦ Παρισινοῦ, εἰς τὴν σελίδα 289. Κατὰ τὸ Παρισινὸν κείμενον τὸ ὁποῖον βεβαίως ἐδῶ εἶναι ὀρθότερον, τὸ δένδρον μὲ τὰ σπουργίτια δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον δοχεῖον, ἀλλὰ εἰς τὸν συλλέκτην. Οὕτω πως ἐξετέθη καὶ εἰς τὸ συνοπτικὸν σχῆμα.

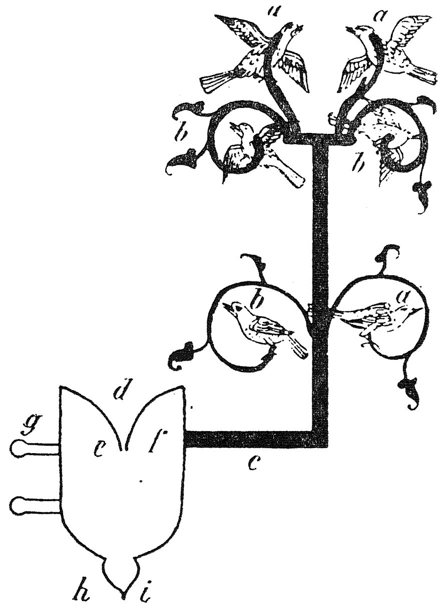
Σχ. 9

Εἰς τὸ α εἶναι κιβώτιον ὅπου τὸ κοχλιάριον ἐκχύνει τὸ ὕδωρ. Εἰς τὸ b ὁ τόπος διὰ τοῦ ὁποίου ὁ ἀὴρ εἰσέρχεται εἰς τὸ δένδρον. (Ὁ σωλὴν οὗτος πρέπει βεβαίως νὰ καταλήγῃ ἀνωτέρω παρὰ κατωτέρω τοῦ δοχείου (α). Παράβαλε τὸ σχῆμα [9].



Σχ. [9]

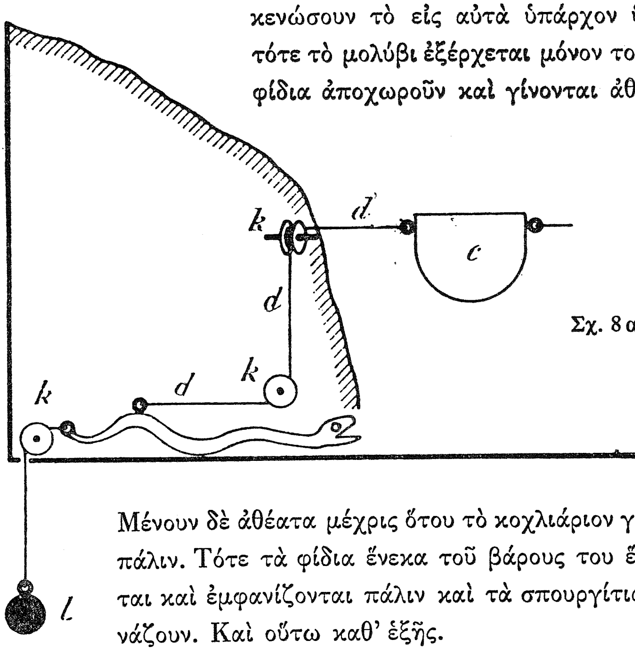
Εἰς τὸ α εἶναι σφυρίκτρα. Εἰς τὸ b σπουργίτι. Εἰς τὸ c ἡ ῥίζα τοῦ δένδρου. Εἶναι ἡ θέσις ὅπου αὕτη (ἡ ῥίζα) συνεχίζεται εἰς τὸ κιβώτιον, διὰ νὰ δύναται νὰ εἰσέρχεται ὁ ἀὴρ εἰς τὸ δένδρον. Εἰς τὸ d στέγη τοῦ κιβωτίου, δηλαδὴ ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποίαν τὸ κοχλιάριον ἐκχύνει τὸ ὕδωρ. Εἰς τὸ e θέσις εἰσόδου τοῦ ὕδατος εἰς τὸ δοχεῖον. Εἰς τὸ f εἴσοδος τοῦ ἀέρος εἰς τὸ δένδρον. Εἰς τὸ g θέσεις εἰς τὰς ὁποίας στηρίζεται τὸ κιβώτιον. Εἰς τὸ h πινάκιον (πιάτο). Εἰς τὸ i θέσις ἐκροῆς τοῦ ὕδατος ἐκ τοῦ κιβωτίου (δοχείου).



βάλλει τὸ ὕδωρ εἰς τὸν τόπον, τοῦ ὁποίου τὴν παρασκευὴν ἔχομεν ἤδη περιγράψει.

Εἰς τὸν συλλέκτην (k) κατασκευάζομεν πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος ἓν εἶδος γείσου, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὸ δοχεῖον καὶ δίδομεν εἰς αὐτὸ τὴν μορφὴν δύο κοίλων (κούφιων) βουνῶν (m), διὰ νὰ κρύψωμεν τὰ δύο φίδια (n), ὅταν αὐτὰ εἰσέρχωνται εἰς τὰ βουνά. Μεταξὺ τῶν δύο βουνῶν ὑπάρχει τόπος διὰ νὰ θέσωμεν τὸ δένδρον (q), ὡς τοῦτο ἐμνημονεύσαμεν ἤδη. Εἰς ἕκαστον βουνὸν προσαρμόζομεν ἓν μικρὸν τύμπανον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ βουνοῦ. Ἔπειτα τοποθετοῦμεν δύο ὡραῖα χρωματισμένα φίδια ἀπὸ ἄργυρον. Ἕκαστον φῖδι εὑρίσκεται εἰς τὸ βουνόν του. Εἰς τὸ φῖδι προσδένομεν νῆμα (1) καὶ δὴ καὶ εἰς ἀπόστασιν 1/4 ἢ μικροτέραν ἀπὸ τῆς οὐρᾶς. Τὸ νῆμα εὑρίσκεται ὑπὲρ τὸ τύμπανον· τὸ ἄλλο ἄκρον ἔχει προσδεθῆ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ κοχλιαρίου (l). Τοῦτο τὸ κάμνομεν καὶ διὰ τὰ δύο φίδια. Εἰς τὸ ἐξώτατον ἄκρον ἑκάστου βουνοῦ προσαρμόζομεν ἀκόμη ἓν μικρὸν τύμπανον· τοῦτο κεῖται περισσότερον πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ βουνοῦ ἢ ἡ οὐρὰ τοῦ φιδιοῦ.

Εἰς τὴν οὐρὰν τοῦ φιδιοῦ δένομεν ἓν νῆμα, εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι στερεωμένον ἓν βαρύδι (o). Εἶναι τοῦτο στρογγύλον καὶ ἀναλόγου μεγέθους. Τὸ νῆμα τοῦτο θέτομεν ἐπὶ τοῦ τυμπάνου, τὸ δὲ ἐκ μολύβδου βαρύδι ἐξαρτᾶται εἰς μίαν θέσιν ἐκ τῆς ὁποίας δύναται νὰ βυθίζεται πρὸς τὰ κάτω, ὅταν τείνῃ πρὸς τὸ φῖδι. Τὸ ἴδιο κάμνομεν καὶ μὲ τὸ ἄλλο φῖδι. Τοῦτο εἶναι ὅ,τι ἠθέλαμε νὰ περιγράψωμεν περὶ τοῦ φιδιοῦ, τοῦ κοχλιαρίου καὶ τοῦ τυμπάνου. Εἶναι οὕτως μετρημένα καὶ προσηρμοσμένα, ὥστε ὅταν τὸ κοχλιάριον ἔχῃ κενωθῆ, καὶ τίποτε δὲν εὑρίσκεται ἐντός του, τὰ δύο νήματα τῆς στάθμης (Schâqûl), τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὰ φίδια, ὡς καὶ τὸ βαρύδι ἐκ μολύβδου εἰς τὸ τέλος τῆς λαβῆς τοῦ κοχλιαρίου, καὶ τὰ δύο, λόγῳ τῆς φύσεώς των, τείνουν πρὸς τὰ κάτω. Τὸ κοχλιάριον κατ' ἀρχὰς ἔχει ἀρθῆ ὑψηλὰ καὶ τὰ φίδια εἶναι κρυμμένα εἰς τὰ βουνά. Ὅταν τὸ κοχλιάριον εἶναι πλῆρες ὕδατος, τότε τὸ βάρος του εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ἐξ ἑαυτοῦ νὰ κατέρχεται πρὸς τὰ κάτω, κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἐξέρχωνται τὰ φίδια καὶ νὰ πλησιάζουν πρὸς τὸ δένδρον. Ὅταν τὰ κοχλιάρια ἐκκενώσουν τὸ εἰς αὐτὰ ὑπάρχον ὕδωρ, τότε τὸ μολύβι ἐξέρχεται μόνον του. Τὰ φίδια ἀποχωροῦν καὶ γίνονται ἀθέατα.



Σχ. 8 α

Μένουν δὲ ἀθέατα μέχρις ὅτου τὸ κοχλιάριον γεμίση πάλιν. Τότε τὰ φίδια ἕνεκα τοῦ βάρους του ἕλκονται καὶ ἐμφανίζονται πάλιν καὶ τὰ σπουργίτια φωνάζουν. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐπιθυμοῦμεν τώρα νὰ περιγράψωμεν τὸ μέρος, ὅπου τὸ κοχλιάριον χύνει τὸ ὕδωρ, διὰ νὰ ἀκούση κανεὶς τοὺς ἤχους[1]) (τὰς

[1]) Ἐδῶ ἐπαναρχίζει τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον. Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ κείμενον καὶ τὸ σχῆμα [8], τὸ σχῆμα 8 δεικνύει διὰ τὴν κίνησιν τῶν δύο φιδιῶν ἀνὰ 3, ἀντὶ μόνον ἀνὰ 2 τύμπανα (τροχαλίας). Τῷ ὄντι ἡ εἰκονισθεῖσα κίνησις δὲν δύναται νὰ γίνη μόνον μὲ 2 τύμπανα, ὥστε τὸ σχῆμα 8 παρέχει τὸν ὀρθὸν ἀριθμὸν τροχαλιῶν. (Παράβαλε τὴν σχηματικὴν ἀνακατασκευὴν εἰς τὸ σχῆμα 8α. Ἐδῶ εἶναι: c τὸ κοχλιάριον, d τὸ εἰς αὐτὸ στερεωμένον νῆμα, k αἱ τρεῖς τροχαλίαι καὶ l τὸ βαρύδι).

φωνὰς) τῶν σπουργιτιῶν, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ δένδρον. Κατασκευάζομε πρὸς τοῦτο ὑπὸ τὸ κοχλιάριον ἓν κιβώτιον (p), τὸ ὁποῖον ἐξαρτῶμεν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ συλλέκτου[1]), σπιθαμὴν πρὸς σπιθαμήν, ἢ ὀλιγώτερον ἢ περισσότερον· ἀναλόγως τοῦ μεγέθους τοῦ ὄγκου του, φθάνει ὁ ἦχος πρὸς τὰ σπουργίτια. Τὸ κιβώτιον χωρεῖ 1 1/2 φορὰν ὕδωρ, τοῦ ἀπαιτουμένου νὰ γεμίσῃ τὸ κοχλιάριον, διὰ νὰ μὴ συμπιέζεται εἰς αὐτὸ ὁ ἀήρ. Ἡ στέγη τοῦ κιβωτίου τούτου ἔχει τὴν μορφὴν ἑνὸς Targahâra † [2]) καὶ τὸ βάθος του ὡς καὶ ὁ πυθμήν του ἔχουν τὴν μορφὴν ἑνὸς Targahâra † [3]). Ὁ τόπος τοῦ κοχλιαρίου καὶ ἡ θέσις, ὅπου τοῦτο ἔχει τεθῇ, ἔχει ἐκλεγῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὅταν † κλίνῃ † [4]) νὰ χύνῃ τὸ ὕδωρ εἰς τὸ κιβώτιον, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει πρὸς τὸ Targahâra. Εἰς τὸ μέσον τῆς στέγης του εὑρίσκεται μία ὀπή, ἥτις εἰσδύει εἰς τὸ κιβώτιον. Πρὸς τὸ ἐσωτερικόν της ἡ ὀπὴ ἔχει ἕνα σωλῆνα, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ κατώτερον μέρος εἶναι στενώτερος τοῦ ἀνωτέρου μέρους,

---

[1]) Ὅταν ἡ συσκευὴ μὲ τὰ φίδια καὶ τὰ σπουργίτια, προσαρμοσθῇ εἰς τὸ ὡρολόγιον, πρέπει ὁ συλλέκτης του νὰ τίθεται ἀναλόγως (νὰ γίνεται) ὑψηλότερα, διότι τότε ὅλον τὸ ὕδωρ πρέπει νὰ συλλεχθῇ εἰς τὸν χῶρον κάτωθεν τοῦ προμνησθέντος κιβωτίου.

[2]) Τὸ Targahâra εἶναι ἓν λεβητοειδὲς δοχεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκει πολλαπλῶς ἐφαρμογὴν εἰς δι' ὕδατος λειτουργοῦντα ὡρολόγια. Εἰς τὸν πυθμένα ἔχει μίαν ὀπὴν καὶ τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Τὸ ὕδωρ εἰσέρχεται βαθμηδόν, τὸ δοχεῖον βυθίζεται βραδέως, μέχρις ὅτου τὸ κάλυμμά του φθάσῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, κατόπιν εἰσέρχεται διὰ μιᾶς μεγάλη ποσότης ὕδατος καὶ τὸ δοχεῖον βυθίζεται αἰφνιδίως ὁλόκληρον, ὁπότε ἀκούει κανεὶς τὸν θόρυβον τοῦ εἰσερχομένου ὕδατος ἢ τὸν θόρυβον τῶν ὑπὸ τοῦ βυθιζομένου ὕδατος λειτουργουσῶν συσκευῶν (Παράβαλε, Nova Acta τόμ., 100 Nr. 5 S. 22).

[3]) †† Τὸ Παρισινὸν εἶναι προφανῶς ἀτελές. Ἡ στέγη τοῦ κιβωτίου τούτου ἔχει ἐπίσης τὴν μορφὴν τοῦ Targahâra.

[4]) Ἐλλείπει ἀπὸ τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον

ὥστε, ὡς ἐκ τούτου τὸ κιβώτιον νὰ ὁμοιάζῃ πρὸς χοάνην. Τοῦτο συμβαίνει διὰ νὰ μὴ ἐκφεύγῃ ὁ ἀὴρ (κατὰ λέξιν : διὰ νὰ μὴ κλέπτεται ὁ ἀήρ)[1]). Τώρα ἐπιθυμοῦμεν, νὰ κάμωμεν ἓν κοῖλον δένδρον (q)[2]) ἐκ χαλκοῦ, δηλ. δένδρον μὲ κοῖλον (κενὸν ἐσωτερικῶς) κορμόν. Ἔχει κλάδους, φύλλα, διακλαδώσεις ὅπως νὰ τὰ θέλῃ κανείς. Ὁ κορμὸς τοῦ δένδρου, δηλ. τὸ κενὸν αὐτοῦ, ἔχει μῆκος 2/3 ἢ 3/4 (τοῦ ὕψους) τοῦ δένδρου.Κατόπιν κατασκευάζομεν σπουργίτια ἐξ ἀργύρου. Ὁ ἀριθμός των εἶναι τόσος, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κλάδων ἢ περισσότερος ἢ μικρότερος, ὅπως κανεὶς θέλει. Τὰ ἐπὶ τῶν κενῶν (κούφιων) κλάδων τεθειμένα σπουργίτια εἶναι καὶ αὐτὰ κενά. Αἱ κεναὶ κεφαλαὶ τῶν σπουργιτιῶν αὐτῶν εἶναι ῥωμαϊκαὶ (βυζαντιναὶ) σφυρίκτραι. Ἐκ τῶν σφυρικτρῶν αὐτῶν, δηλ. ἀπὸ τὰ ῥάμφη τῶν σπουργιτιῶν ἐξέρχεται ὁ ἀήρ. Κατόπιν θέτομεν τὰ κενὰ ἐσωτερικῶς σπουργίτια, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ σφυρίκτραι εἰς τοὺς κενοὺς (κοίλους) κλάδους, οἱ ὁποῖοι (κενοὶ) συνεχίζονται εἰς τὸν κορμὸν τοῦ δένδρου. Τὰ πλεονάζοντα σπουργίτια, τὰ θέτομεν εἰς ἄλλους κλάδους μὴ κοίλους (μὴ κενούς). Τονίζομεν, ὅτι δὲν πρέπει ὅλα τὰ σπουργίτια νὰ εἶναι κοῖλα, διὰ νὰ μὴ διαμοιράζεται πολὺ ὁ ἐκ τοῦ κιβωτίου ἐξερχόμενος ἀὴρ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐξασθενῇ ἡ πίεσίς του, διότι εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἐξασθενήσεως τῆς πιέσεως, λαμβάνεται ἦχος ἀσθενοῦς ἐντάσεως.

Ὁ κορμὸς τοῦ δένδρου εἶναι, ὡς εἴπομεν, κενὸς σωλήν, ὅστις συνεχίζεται. Συνεχίζεται εἰς τὸ μικρὸν κιβώτιον περὶ τοῦ ὁποίου ὡμιλήσαμεν.

Ὅταν τὸ ὕδωρ ἐκχύνεται ἀπὸ τὸ κλίνον (βυθιζόμενον) κοχλιάριον, τότε ἐξέρχονται τὰ δύο φίδια, τὸ ὕδωρ εἰσέρχεται εἰς τὸ

---

[1]) Ὁ χοανοειδὴς σωλὴν ἔφθανε ὁπωσδήποτε μέχρι τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου (παράβαλε τὸ συνοπτικὸν σχῆμα).

[2]) Διαβάζεται : magawwafa.

κιβώτιον, ὁ ἐγκεκλεισμένος ἀὴρ παραμένει εἰς τὸ κιβώτιον· ὡς ἐκ τούτου εἰσέρχεται εἰς τὸν κορμὸν τοῦ δένδρου καὶ κατευθύνεται πρὸς τὰς σφυρίκτρας, ὥστε ἀκούομεν τὸ σφύριγμα ἐκ τῶν ῥαμφῶν τῶν σπουργιτιῶν, ὅμοιον πρὸς τὰς φωνὰς τῶν σπουργιτιῶν. Ὅταν τώρα τὸ ὕδωρ φθάνῃ εἰς τὸ κιβώτιον (p), τοῦτο πρέπει ὁμοίως νὰ κενωθῇ πάλιν, διὰ νὰ ἐπανέλθῃ τὸ κιβώτιον εἰς τὴν προτέραν κατάστασιν καὶ πληρωθῇ ἐκ νέου μὲ ἀέρα. Διότι ὅταν τὸ κοχλιάριον εἶναι πάλιν πλῆρες, τότε πρέπει νὰ ἐκκενώσῃ τὸ περιεχόμενόν του εἰς τὸ κιβώτιον.

Ὁ πυθμὴν τοῦ κιβωτίου τούτου εἶναι, ὡς εἶπον προηγουμένως, ὅμοιος ἑνὸς Targahâra. Εἰς τὸ μέσον τούτου εὑρίσκεται ἓν εἶδος κοιλώματος, ὅμοιον πρὸς τὸν πυθμένα ἑνὸς κυμβάλου (Isringa).

Εἰς τὸ μέσον εὑρίσκεται μία λεπτὴ ὀπή· αὕτη εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἀπέναντι τῆς ὀπῆς τῆς χοάνης, ἐκ τῆς ὁποίας τὸ ὕδωρ εἰσέρχεται εἰς τὸ κιβώτιον, δηλαδὴ τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὴν στέγην τοῦ κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει πρὸς χοάνην, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι πολὺ περισσότερον τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἐκ τῆς ὀπῆς ἐξέρχεται εἰς τοῦτο τὸ κύμβαλον. Ἐκάμαμε τοῦτο κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διότι τότε τοῦτο, ὅ,τι ἐκ τοῦ ὕδατος ἐξέρχεται[1]), φράσσει[2]) τὸ κύμβαλον. Ὁ ἀὴρ δύναται νὰ ἐξέρχεται μόνον ἐκ τῶν ῥαμφῶν τῶν σπουργιτιῶν καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀκούει κανεὶς τὸν ἦχον, ὡς τὸν ἔχομεν περιγράψει.

Τοῦτο εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ κορμοῦ καὶ τοῦ δένδρου † ὡς καὶ τὰ ἐκ τούτων συναφῆ πρὸς τὰ σπουργίτια †[3]).

Κατὰ ταῦτα ἐτελείωσεν ἡ κατασκευὴ τοῦ δένδρου καὶ τῶν σπουργιτιῶν.

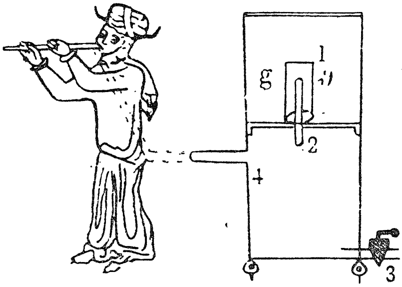
---

[1]) Τὸ Παρισινὸν ἔχει charag = ἐξέρχεσθαι. Τὸ Λονδίνειον nazal = κατέρχεσθαι

[2]) Ἡ λέξις δὲν διαβάζεται εὔκολα.

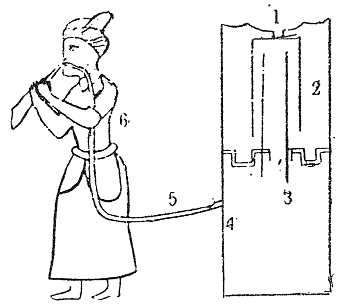
[3]) †† Τὸ ἔχει μόνον τὸ Λονδίνειον.

2. Τώρα ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἐκθέσωμεν πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ ὁ ὄρθιος ἄνθρωπος, ὁ ὁποῖος μὲ τὴν βοήθειαν τῆς χειρός του κρατεῖ εἰς τὸ στόμα του ἕνα αὐλὸν (Zammâra). Ὅταν παρέλθῃ τὸ ἥμισυ τῆς ἡμέρας τότε αὐτὸς αὐλεῖ δυνατὰ μὲ αὐτὸν



Σχ. 10

Εἰς τὸ 1 εἶναι τὸ ἀνάλογον κύπελλον. Εἰς τὸ 2 ἡ εἴσοδος τοῦ ὕδατος. Εἰς τὸ 3 στρόφιγξ. Εἰς τὸ 4 θέσις ἐξόδου τοῦ ἀέρος. Δεξιὰ κατὰ μῆκος τοῦ δοχείου εἶναι τὸ «δοχεῖον» τοῦ αὐλητοῦ.



Σχ. [10]

Εἰς τὸ 1 εἶναι πυθμὴν τοῦ δοχείου (κιβωτίου) διὰ τὸ δένδρον. Εἰς τὸ 2 σωλὴν ἀναλόγου μεγέθους. Εἰς τὸ 3 θέσις εἰσόδου τοῦ ὕδατος εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ. Εἰς τὸ 4 θέσις εἰσόδου τοῦ ἀέρος εἰς τὸν αὐλόν. Εἰς τὸ 5 σωλήν. Εἰς τὸ 6 αὐλητής.

τὸν αὐλόν, τόσον, ὥστε εὑρισκόμενος κανεὶς ἀρκετὰ μακρὰν νὰ τὸν ἀκούῃ[1]). Πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ αὐλητοῦ (σχ. 10 καὶ [10]),

---

[1]) Τὸ περιεχόμενον τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ ἐδημοσίευσεν ὁ E. Wiedemann εἰς (Συμβολαὶ) Beiträge XXXV. S. 18. Κατὰ τὸν H. Diels τὸ ξυπνητήρι τοῦ Πλάτωνος (νυκτερινὸν ὡρολόγιον) εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸν αὐλητὴν τοῦτον τοῦ Ἀρχιμήδους. (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου 1915, σελ. 824).

Ἡ συσκευὴ τοποθετεῖται, ὡς πληροφορούμεθα ἐκ τοῦ κειμένου καὶ τοῦ Λονδινείου σχήματος (σχ. [10]) κάτωθεν τοῦ συλλέκτου, ὅπου εὑρίσκεται ὁ ἀερολέβης διὰ τὰ σπουργίτια.

Πρὸς τὴν ἐνταῦθα ἀκολουθοῦσαν περιγραφὴν εὑρίσκεται εἰς ἀντίφασιν

Συνέχεια ὑποσ. εἰς σελ. 294

πρέπει νὰ ἑτοιμάσωμεν ἓν ἄλλο δοχεῖον τὸ ὁποῖον χρειάζεται διὰ τὴν διατήρησιν τοῦ ἀέρος, ἵνα οὗτος ἐκ τοῦ δοχείου τούτου ἐξέρχεται διὰ νὰ εἰσέρχεται εἰς τὸν αὐλὸν τοῦ αὐλητοῦ.

Τὸ δοχεῖον τοῦτο τὸ ἐφαρμόζομεν κάτωθεν τοῦ συλλέκτου. Ὀνομάζομεν τοῦτο δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ. Ὁ συλλέκτης μένει εἰς τὸ δοχεῖον τοῦτο, δηλ. εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ. Εἰς αὐτὸ προσαρμόζομεν ἓν ὁρατὸν προεκτεταμένον γεῖσον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἵσταται εἷς ἄνθρωπος. Οὗτος εἶναι κενός. Εἰς τὸ ἐσωτερικόν του εὑρίσκεται εἷς σωλήν, ὁ ὁποῖος εἰσδύει ἐκ τοῦ ὀπίσω μέρους (τοῦ ἀνθρώπου) † ἢ πρὸς τὸ γεῖσον κάτωθεν τῶν ποδῶν του † [1]), εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ. Ἐπειδὴ ἔχει τεθῆ, ὅπου ἡ κεφαλὴ τοῦ αὐλητοῦ, τίθεται ἐπὶ τοῦ σωλῆνος τούτου τὸ πρόσθιον μέρος (ἐπιστόμιον = Habba) τοῦ αὐλοῦ (Zamr), δηλ. τῆς βυζαντινῆς σφυρίκτρας (Saffâra). Ὅταν ὅλα αὐτὰ ἔχουν συντεθῆ, τότε ἔχομεν ἤδη μίαν Zammâra (εἶδος αὐλοῦ. Εἰς τὸ στόμιον ἔρχεται ἀκόμη ὁ σωλήν).

Συνέχεια ἐκ τῆς σελ. 293

τὸ εἰς τὴν σελίδα 245 κ.ἑ. περὶ τοῦ συλλέκτου λεγόμενον «ἐκτὸς τούτου ἔχει εἰς τὰ νῶτα του μίαν στρόφιγγα πρὸς ἄφεσιν τοῦ ὕδατος, ὅταν τελειώσουν αἱ ὧραι καὶ αἱ κινήσεις».

Κατὰ τὴν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τούτων κατασκευὴν τοῦ ὡρολογίου δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ προσαρμοσθῇ ὁ αὐλητής. Ἑπομένως οὗτος, ὡς καὶ οἱ εἰς τὰς στήλας ἀνερχόμενοι καὶ κατερχόμενοι ἄνδρες (παράβ. σελ. 281) θὰ ἐχρειάζοντο ἰδιαιτέραν πλουσίαν κατασκευήν (Τόσον περισσότερον, διότι οὗτος ἄλλως θὰ ἐδυσχέραινε τὴν λειτουργίαν τοῦ ὡρολογίου. Ὅπως δηλ. συνάγεται ἐκ τῶν σελ. 296, 297 ἐκ τῶν ἄνω καὶ ἐκ τῶν ἑπομένων, θὰ ἔπρεπε ἡ στρόφιγξ εἰς τὸ ἀεροδοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ νὰ ἀνοιγῇ 4 φοράς, ἐντὸς 24 ὡρῶν, διὰ τὴν ἐκροὴν τοῦ ὕδατος, ἐν ᾧ κατὰ τὴν κατασκευὴν ἄνευ αὐλητοῦ θὰ ἦτο ἀναγκαῖον νὰ γίνῃ ἡ ἐκκένωσις μίαν ἢ δύο φορὰς ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου).

Εἰς τὸ συνοπτικὸν σχῆμα, ὁ αὐλητὴς παρελείφθη διὰ νὰ μὴ γίνῃ τοῦτο πολύπλοκον. Τοῦτο ἔγινε ἐπιτρεπτόν, διότι ἐκ τοῦ κειμένου καὶ τῶν σχημάτων 10 καὶ [10] τὸ εἶδος τῆς προσαρμογῆς εἶναι καθ' ἑαυτὸ σαφές.

[1]) Τὸ ἔχει μόνον τὸ Λονδίνειον χειρόγραφον.

Ὁ αὐλὸς οὗτος ἔχει τόσον μῆκος, ὥστε ὁ ἄνθρωπος νὰ δύναται νὰ θέτῃ ἐπ' αὐτοῦ τὰς δύο χεῖρας του, ὥστε νὰ ἔχῃ κανεὶς τὴν ἐντύπωσιν ἑνὸς αὐλητοῦ. Ὁ αὐλὸς οὗτος δέον νὰ εἶναι λεπτὸς καὶ διάκενος, νὰ ἔχῃ αὔλακα (σήραγγα), διὰ νὰ δύναται ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξέρχεται ὁ ἀήρ. Πρέπει διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν νὰ ἔχῃ κατασκευασθῇ, πρέπει νὰ ἔχῃ λεπτότητα, ὥστε, ὅταν ὁ ἀὴρ ἐξέρχεται ἐκ τοῦ κοίλου χώρου τοῦ ἀνθρώπου καὶ διαβαίνει διὰ τοῦ αὐλοῦ, νὰ αὐλῇ ἰσχυρῶς. Τὴν κεφαλὴν τοῦ αὐλητοῦ στερεώνομεν εἰς τὸ σῶμα του, ὥστε τὸ ἐπιστόμιον (Habba) τοῦ αὐλοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ στόμα του, ὡς τοῦτο ἔχομεν περιγράψει. Ἡ διάταξις αὕτη τῆς συσκευῆς, πρέπει νὰ γίνῃ ὅσον εἶναι δυνατὸν ὡραιοτέρα. Τότε ἡ μορφή του εἶναι ἡ μορφὴ ἑνὸς ἀνθρώπου, ὁ ὁποῖος κλίνεται, παίζει τὸν αὐλόν, καὶ ἵσταται κατακορύφως εἰς τὸν τόπον, τὸν ὁποῖον ἔχομεν περιγράψει καὶ προπαρασκευάσει. Εἰς τὸ δοχεῖον του ἐν πρώτοις δὲν εὑρίσκεται τίποτε. Τοῦτο εἶναι πεπληρωμένον μόνον μὲ ἀέρα.

Ἐπανερχόμεθα τώρα πάλιν εἰς τὸν μεγάλον συλλέκτην. Εἰς αὐτὸν ἔχομεν προσαρμόσει τὸ κιβώτιον τοῦ δένδρου. Εἰς τὸ μέσον τοῦ πυθμένος ἀνοίγομεν μίαν ὀπήν, ἡ ὁποία συνεχίζεται εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ. Εἰς τὴν ὀπὴν προσαρμόζομεν ἕνα σωλῆνα (2, σχ. 10· 3, σχ. [10]). Μέχρι τῶν 3/4 τοῦ μήκους του ὁ σωλὴν οὗτος φθάνει εἰς τὸν συλλέκτην. Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἡμίσεος τῆς ἡμέρας[1]) ὑψοῦται τὸ ὕδωρ μέχρι τοῦ ὕψους αὐτοῦ (σημ. τῶν 3/4) ἢ ὀλίγον περισσότερον. Εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ φθάνει ὁ σωλὴν ἐντὸς μέχρις ἑνὸς δακτύλου ἢ κατὰ τὸ μῆκος ἑνὸς μέλους (σημ. τοῦ σώματος). Ὑπὲρ τὸν κατακόρυφον σωλῆνα ἐπικάθηται εἰς τὸν συλλέκτην, ὁ σωλὴν τοῦ κυπέλλου, ἀναλόγου

---

[1]) Δηλαδὴ ἐντὸς τοῦ ἡμίσεος χρόνου ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς μέχρι τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου εἴτε ἀπὸ τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου μέχρι τῆς ἀνατολῆς.

μεγέθους (δηλ. ὁ σωλὴν ἑνὸς ὑψωτοῦ κάψης)[1]. Ὁ σωλὴν οὗτος φθάνει μέχρι σχεδὸν τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου. Οὕτω ἐπετελέσθη ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν.

Τὸ κοχλιάριον (ἰδὲ ἀνωτέρω) πληροῦται καὶ κενοῖ διαρκῶς τὸ εἰς αὐτὸ εὑρισκόμενον ὕδωρ †διὰ τοῦ κιβωτίου τοῦ δένδρου καὶ τῶν σπουργιτιῶν †[2]) εἰς τὸν συλλέκτην, μέχρις ὅτου οὗτος ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ ἀνωτέρου ἄκρου τοῦ σωλῆνος ἀναλόγου μεγέθους. Κατόπιν ὅλον τὸ ὕδωρ μὲ μίαν ὁρμητικὴν φορὰν ἀπορροφεῖται καὶ κατέρχεται εἰς τὸ δοχεῖον τοῦ αὐλητοῦ. Τὸ ὕδωρ πιέζει τὸν ἀέρα καὶ ἐξάγει αὐτὸν ἐντελῶς ἐκ τοῦ αὐλοῦ τοῦ αὐλητοῦ· οὗτος τότε αὐλεῖ, ὡς ἔχομεν τοῦτο ἐκθέσει.

Εἰς τὸ ὑδροδοχεῖον εὑρίσκεται μία στρόφιγξ, ἡ ὁποία ἔχει πολὺ καλῶς λειανθῇ, ἐπιμελῶς στερεωθῇ (muhandam), στερεῶς συνδεθῇ καὶ ἐξαρτηθῇ. Μόλις αὐλήσῃ ὁ αὐλητὴς ἀνοίγει ἡ στρόφιγξ καὶ ὅλον τὸ ὕδωρ τοῦ δοχείου ἐξέρχεται ἐκ τῆς στρόφιγγος. Κατόπιν ἐπαναφέρουν αὐτὴν (τὴν στρόφιγγα) εἰς τὴν προτέραν της θέσιν καὶ τὴν ἐπαναστερεώνουν.

Τὸ ὕδωρ συλλέγεται ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς τοῦ ἡλίου μέχρι τῆς μεσημβρίας, μέχρις ὅτου, ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται σχεδὸν εἰς τὸν μεσημβρινόν, φθάνῃ μέχρι τοῦ τέλους τοῦ σωλῆνος τοῦ κυπέλλου, ἀναλόγου μεγέθους, πρὸς τὴν ἔνδειξιν g ϑ (σχ. 10), ὁπότε ἀνέρχεται ἀκόμη καὶ ῥέει διὰ μιᾶς εἰς τὸν σωλῆνα ἀναλόγου μεγέθους εἰς τὸ ἀεροδοχεῖον (ἀεροθάλαμον) καὶ ὁ αὐλητὴς αὐλεῖ. Ὁμοίως

---

[1]) Εἷς ὑψωτὴς κάψης συνίσταται ἐξ ἑνὸς διὰ τοῦ πυθμένος τοῦ σχετικοῦ δοχείου ἀγομένου εὐθέος σωλῆνος ὑπὲρ τὸν ὁποῖον ἐπικάθηται εἷς εὐρύτερος, εἰς τὸ ἐπάνω μέρος κλειστὸς σωλήν. Ὅταν χύνεται ὕδωρ εἰς τὸ δοχεῖον, μέχρις ὅτου τοῦτο φθάσῃ εἰς τὸ χεῖλος τοῦ εὐθέος (δηλ. ἀκάμπτου) σωλῆνος, τότε ταῦτα κενοῦνται (παράβαλε Beiträge VI, S. 31)

[2]) Τὸ ἔχει μόνον τὸ Λονδίνειον.

συλλέγεται τοῦτο ἀπὸ τῆς μεσημβρίας μέχρι τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου καὶ ὁ αὐλητὴς αὐλεῖ κατὰ τὴν δύσιν τοῦ ἡλίου, ὡς ἐπίσης ὁμοίως συλλέγεται τὸ ὕδωρ ἀπὸ τῆς δύσεως τοῦ ἡλίου μέχρι τοῦ μεσονυκτίου καὶ αὐλεῖ πάλιν, † καὶ ὁμοίως αὐλεῖ κατὰ τὴν ἀνατολὴν τοῦ ἡλίου.

Κατόπιν ἐπαναφέρομεν τὸ ὕδωρ εἰς τὸ δοχεῖον ὅπου ὁ πλωτήρ, καὶ δὴ καὶ διὰ μιᾶς χοάνης, εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς ὁποίας (θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν εἰς τὸ κάτω μέρος) εἶναι στερεωμένος εἷς σωλήν, ὅστις φθάνει σχεδὸν μέχρι τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, διὰ νὰ μὴ βλάπτεται ἡ πτῶσις τοῦ ὕδατος ἐκ τῶν συσκευῶν. Τοῦτο εἶναι μία εἰκὼν τοῦ αὐλητοῦ †[1]). (σχ. 10 καὶ [10]).

[1]) †† Τὸ Λονδίνειον ἔχει : Μέχρις ὅτου ἔχῃ ἐπιτελεσθῇ ἡ ὅλη λειτουργία τοῦ ὡρολογίου, καὶ ὅλον τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς αὐτὸ ἔχῃ ἐκρεύσει. Τότε ἐπαναφέρουν τὸ ὕδωρ εἰς τὸ δοχεῖον, ὅπου ὁ πλωτὴρ καὶ δὴ καὶ διὰ μιᾶς ἐξωτερικῶς εὑρισκομένης χοάνης. Ῥέει τοῦτο διά τινος σωλῆνος, ὅστις ἔχει συγκολληθῆ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δοχείου, σχεδὸν μέχρι τοῦ πυθμένος. Ἡ χοάνη τίθεται εἰς τὸ ἀνώτερον ἐξωτερικῶς εὑρισκόμενον ἄκρον τοῦ σωλῆνος. Χύνεται εἰς αὐτὸ τόσον ὕδωρ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀναγκαῖον διὰ τὸ δοχεῖον καὶ τὸ ὁποῖον ἡμεῖς διὰ τὴν χρησιμοποίησίν του ἀνωτέρῳ ἐσημειώσαμεν, ἐὰν ὁ θεὸς θέλῃ. Ἐκ τοῦ ὀργάνου τούτου παράγονται πολλὰ ἄλλα ὄργανα (ἀνάγνωθι Katîr ἀντὶ Kabir). Κατανόησον, ὅ,τι ἔχομεν περιγράψει καὶ ὁ θεὸς εἶναι ὁ ὁδηγός.

III

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΕΝ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΟΝ ΤΗΣ ΟΞΦΟΡΔΗΣ

Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν δύο συσκευῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸ μνησθὲν ἤδη χειρόγραφον τῆς Ὀξφόρδης, καὶ αἵτινες χρησιμεύουν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ χρόνου.

Ἐν ᾧ εἰς τὸ ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους ἡ περιγραφὴ τῶν μεμονωμένων μερῶν καὶ τῆς μεταξύ των ἐξαρτήσεως εἶναι ἐξόχως σαφής, τόσον ὥστε νὰ δύναταί τις νὰ ἀποκομίσῃ πλήρη εἰκόνα τῆς διατάξεώς των, τοῦτο δὲν συμβαίνει εἰς τὰς συσκευάς, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν τώρα. Ἕνεκα τούτου δὲν παρέχομεν μετάφρασιν τοῦ κειμένου, ἀλλὰ ἐνδείξεις τοῦ περιεχομένου[1]).

1. Σύνθεσις τοῦ Ὡρολογίου μὲ τὰ σφαιρίδια καὶ τὸν κόρακα· ἐπὶ τούτοις παρουσιάζονται διάφοροι κινήσεις.

Ὁ κύριος σκοπὸς τῆς περιγραφῆς εἶναι, ὡς τοῦτο δηλοῦται εἰς τὸ τέλος, ἡ ἔκθεσις, πῶς « τὰ σφαιρίδια ἀνέρχονται ὑψηλότερα ἐκ τῆς ἀρχικῆς των θέσεως».

Τοῦτο εἶναι ἡ μοναδικὴ περίπτωσις τῶν περιγραφομένων συσκευῶν τοῦ ὡρολογίου, τῶν ὁποίων ἡ κατασκευὴ καὶ ὁ τρόπος λειτουργίας εἶναι σαφὴς [2]), ἐνῷ διὰ τὰς λοιπὰς ἕνεκα τῆς ἀσαφείας τοῦ κειμένου καὶ τοῦ ἐπεξηγηματικοῦ σχήματος (σχ. 11) δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ κατόπιν ὑποθέσεων.

Τὸ ὡρολόγιον, ὡς τοῦτο δεικνύει τὸ σχῆμα 11 εἶναι κατεσκευασμένον ἐντὸς κιβωτίου 4 × 4 σπιθαμῶν.

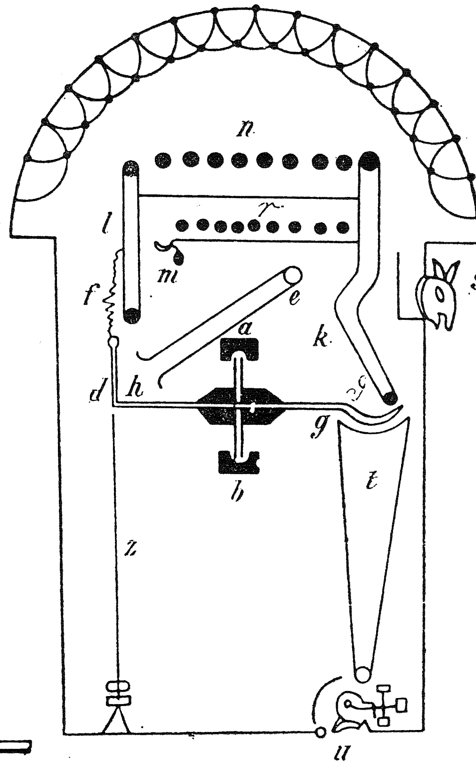
---

[1]) Βραχεῖα σημείωσις εὑρίσκεται εἰς Carra de Vaux, Bibliotheca mathematica [3] 1, S. 31. 1900.

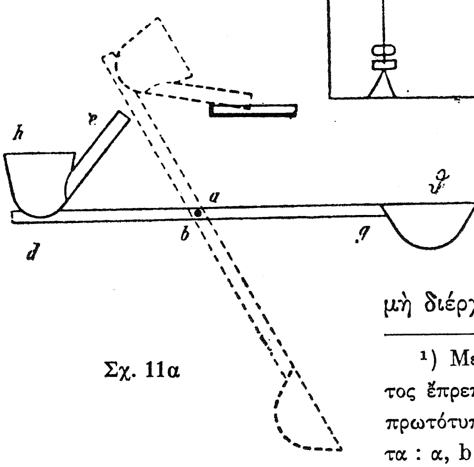
[2]) Ὡς ἐκ τούτου ἀνακατεσκευάσθη εἰς τὸ σχ. 11α σχηματικῶς.

Εἰς τὸ ἀνώτερον τρίτον τοῦ κιβωτίου εὑρίσκεται ἡ συσκευὴ ἡ ρυθμίζουσα τὴν διαδρομὴν τῶν σφαιριδίων. Τοῦτο εἶναι ἓν κιβώτιον, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει καρφωθῇ (παρὰ τὸ n) [1]) μία στέγη.

Τὰ σφαιρίδια τίθενται εἰς τὰς ὀπὰς τῆς στέγης (τοῦ καλύμματος) αὐτῆς, τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τῶν σφαιριδίων. Διὰ νὰ



Σχ. 11



Σχ. 11α

μὴ διέρχωνται ὅμως τὰ σφαιρί-

[1]) Μερικὰ γράμματα τοῦ σχήματος ἔπρεπε νὰ συμπληρωθοῦν. Εἰς τὸ πρωτότυπον ὑπάρχουν ἤδη τὰ γράμματα : α, b, g, d, e, h, ϑ, r καὶ m.

δια διὰ τῶν ὀπῶν καὶ πίπτουν, ὑπάρχει ὑπὸ τὴν στέγην αὐτὴν μία δευτέρα στέγη[1]) «μὲ μίαν διαδοκίδα» (ἓν μάνταλον) (δηλ. ἕνα σανίδι, δυνάμενον νὰ ἀποσύρεται, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι τόσον μεγάλο ὅσον ἡ ἀνωτέρα μὲ ὀπὰς ἐφωδιασμένη στέγη). Ἡ ὅλη (ἐδῶ) συσκευὴ ὀνομάζεται « ἡ εἰσροὴ τῶν σφαιριδίων ». Ὅταν ἀποσύρωμεν τὴν διαδοκίδα τότε πίπτουν τὰ σφαιρίδια, ἐκτὸς δύο, τὰ ὁποῖα διαχωρίζονται εἰς ἓν δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται « περιστροφή ». Ἐκ τούτου φθάνουν τὰ σφαιρίδια εἰς ἕνα αὔλακα (r), ὅπου τὸ ἓν κεῖται κατόπιν τοῦ ἄλλου (εἰς σειράν). Ὁ αὖλαξ αὐτὸς ἔχει δηλ. εἰς τὸ ἄκρον του ἓν περίφραγμα (m) ὀνομαζόμενον κλειδί, ὄπισθεν τοῦ ὁποίου τὰ σφαιρίδια σταματοῦν.

Ἡ «περιστροφή» ἔχει εἰς τὰ ἄκρα της δύο μέρη[2]) (χώρους), ὅπου εἰς ἕκαστον, πίπτει[3]) ἓν ἐκ τῶν ἀποχωριζομένων δύο σφαιριδίων, ὅταν ἀποσύρωμεν τὴν διαδοκίδα (τὸ μάνταλον).

Εἰς τὰ δύο μέρη (χώρους) ἀντιστοιχοῦν δύο πρὸς τὰ ὀπίσω κατευθυνόμενοι αὔλακες : Εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος ἀντιστοιχεῖ εἷς βραχύς, εὐθύγραμμος, αὖλαξ (l), εἰς δὲ τὸ δεξιὸν εἷς μακρὸς κεκαμμένος (k).

Ἐκ τῶν διαχωρισθέντων σφαιριδίων τὸ ἓν φθάνει διὰ τῶν αὐλάκων τούτων εἰς τὸ ἀριστερὸν (h, παράβαλε ἐπίσης τὴν ἀνακατασκευὴν σχ. 11α), ἐν ᾧ τὸ ἄλλο φθάνει ὀλίγον βραδύτερον (διότι

[1]) Τὸ ἀραβικὸν κείμενον θέτει ἐσφαλμένως τὴν δευτέραν στέγην ὑπὲρ τὴν πρώτην.

[2]) Δηλ. δι' ἐνδιαμέσου τειχώματος κεχωρισμένα μέρη (χώρους).

[3]) Ἡ «περιστροφή», περὶ τῆς ὁποίας εἰς δυσνόητον σημεῖον, λέγεται, ὅτι εἶναι σταυροειδής, εἶναι ὁπωσδήποτε ἓν δοχεῖον κεκλιμένον πρὸς τὸν αὔλακα (r) μὲ τὸ «κλειδί» (m).

Ὁ σκοπὸς τῆς ὅλης «εἰσροῆς τῶν σφαιριδίων» εἶναι ἡ κατανομὴ τῶν σφαιριδίων — ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τῶν κατωτέρω — καὶ ἡ θέσις εἰς λειτουργίαν τοῦ ὡρολογίου. Καὶ τὰ δύο ἐπιτελοῦνται μετὰ τὴν ἀπόσυρσιν τῆς διαδοκίδος (τοῦ μάνταλου).

συγκρατεῖται κάπως ἕνεκα τῆς καμπυλότητος τοῦ αὔλακος) εἰς τὸ δεξιὸν πινάκιον (πιάτο) (ϑ) μιᾶς σταθμιστικῆς φάλαγγος (d g). Ὁ ἄξων της εἶναι a b. Ὁ ἀριστερὸς μοχλοβραχίων εἶναι βραχύτερος ἢ ὁ δεξιὸς καὶ ὡς ἐκ τούτου κατὰ τὴν ἄφιξιν τοῦ δευτέρου σφαιριδίου ὁ ἀριστερὸς μοχλοβραχίων (h) αἴρεται. Οὗτος ἔχει δεξιὰ μίαν ὀπήν, διὰ τῆς ὁποίας τὸ εἰς αὐτὴν εὑρισκόμενον σφαιρίδιον, μετὰ τὴν ὑπέρβασιν ὑπὸ τοῦ μοχλοβραχίονος μιᾶς ὡρισμένης γωνίας στροφῆς (παράβαλε τὴν μὲ διακεκομμένας γραμμὰς θέσιν του εἰς τὸ σχῆμα 11α) κυλίεται εἰς ἕνα, εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦτο, ἐπιτεθέντα σωλῆνα (e) (τὸ ῥύγχος). Διὰ τοῦ σωλῆνος αὐτοῦ φθάνει τὸ σφαιρίδιον εἰς τὴν κεφαλὴν ἑνὸς ζώου (s) καὶ κατόπιν τοῦτο ἐξέρχεται ἐκ τοῦ στόματός του.

Ὀλίγον μετὰ τὴν ἐκκύλισιν τοῦ σφαιριδίου αὐτοῦ ἐκ τοῦ ἀριστεροῦ μοχλοβραχίονος συναντᾷ ὁ δεξιὸς μοχλοβραχίων (ϑ) ἕνα χοανοειδῆ σωλῆνα (t). Τὸ εἰς αὐτὸν εὑρισκόμενον σφαιρίδιον κυλίεται ὑπὲρ τὸ χεῖλος τοῦ πινακίου (πιάτου) εἰς τὸν σωλῆνα αὐτὸν (t) καὶ δι' αὐτοῦ εἰς τὴν κεφαλὴν ἑνὸς κόρακος (u) καὶ ἐξέρχεται ἐκ τοῦ ῥάμφους του. Ὁ κόραξ αὐτὸς εἶναι κατεσκευασμένος, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ σχήματος, ὅπως οἱ κατωτέρω περιγραφόμενοι ἱέρακες[1]).

Ἡ φάλαγξ (τοῦ μοχλοῦ) ἐπανέρχεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν ἀρχικήν της θέσιν, ἀφοῦ ἔχῃ ἐπίσης ἐκκενωθῆ τὸ δεξιόν της πινάκιον (πιάτο) (ϑ), διότι ἄνευ τῆς προσθέσεως τῶν σφαιριδίων, ἡ ῥοπὴ στροφῆς πρὸς τὰ ἀριστερά, ὑπερβαίνει τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ ῥοπήν. Διὰ νὰ ἐμποδίζεται μία ἀνατροπὴ πρὸς τὰ ἀριστερά, στηρίζεται ὁ ἀριστερὸς μοχλοβραχίων (h), ὅταν εἶναι ὁριζοντία ἡ θέσις τῆς φάλαγγος, ἐπὶ ἑνὸς ὑποστηρίγματος (z).

Εἰς τὸν ἀριστερὸν μοχλοβραχίονα εἴτε εἰς τὸν ἐπ' αὐτοῦ ἐπικα-

---

1) Ἰδὲ σελὶς 305.

θήμενον σωλῆνα εἶναι στερεωμένον ἓν νῆμα (f), τὸ ὁποῖον κινεῖ τὸ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ αὔλακος (r) «κλειδὶ» (m).

Κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἀριστεροῦ μοχλοβραχίονος (h) ἀνοίγει τὸ κλειδὶ (m) μὲ τὴν χαλάρωσιν τῆς τάσεως τοῦ νήματος, « διότι τοῦτο στηρίζεται εἰς μίαν ἄρθρωσιν καὶ εἶναι βεβαρυμένον». Κατόπιν, ἓν σφαιρίδιον εἰσέρχεται εἰς τὸ κλειδὶ (m) καὶ κρατεῖται εἰς αὐτό, διότι τοῦτο ἔχει σχῆμα κοχλιαρίου. Ὅταν κατόπιν κατέρχεται ὁ ἀριστερὸς μοχλοβραχίων (h), τότε ἐπανακλείεται τὸ κλειδὶ (m) καὶ ἀφίνει συγχρόνως τὸ εἰς αὐτὸ εὑρισκόμενον σφαιρίδιον νὰ πέσῃ[1]) εἰς τὸν ἀριστερὸν μοχλοβραχίονα (h).

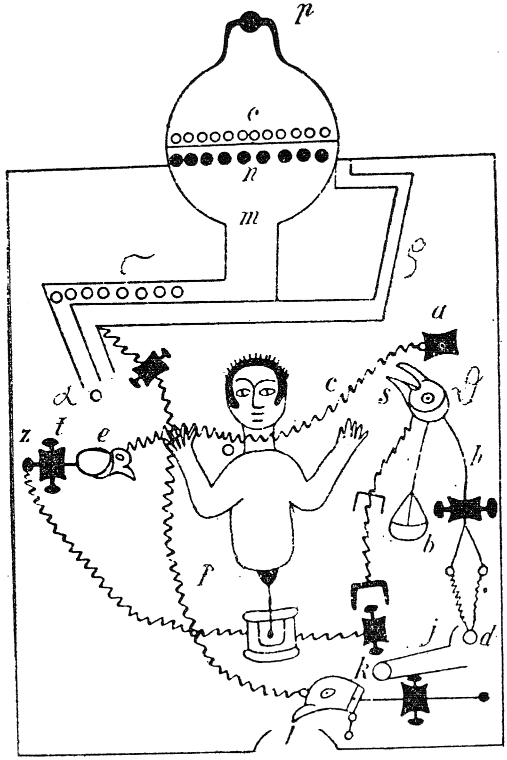
Ἐν ᾧ ἡ φάλαγξ μετὰ τὴν ἐκκένωσιν τῶν πινακίων της (τῶν κοίλων δίσκων) ἐπανέρχεται εἰς τὴν ὁριζοντίαν θέσιν καὶ εἰς τὸν ἀριστερὸν μοχλοβραχίονα (h) (δίσκον) πίπτει νέον σφαιρίδιον, φθάνει τὸ σφαιρίδιον, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦ « ῥύγχους » (e) ἔχει ἐγκαταλείψει τὸν ἀριστερὸν μοχλοβραχίονα (h), ἀπὸ τὸ στόμα τοῦ ζώου (s) εἰς τὸν αὔλακά του, δηλ. τὸν κεκαμμένον αὔλακα (k), ὁ ὁποῖος ὁδηγεῖ (κατευθύνεται) ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους (ἑνὸς χώρου) τῆς «περιστροφῆς» πρὸς τὸν δεξιὸν μοχλοβραχίονα (δίσκον) (ϑ). Τὸ σφαιρίδιον φθάνει ἐν πάσῃ περιπτώσει εἰς τὸν αὔλακα αὐτὸν (k) διὰ μιᾶς παραπλεύρου εἰσόδου. Κυλίεται τοῦτο κατόπιν εἰς τὸν δεξιὸν μοχλοβραχίονα (δίσκον) (ϑ) καὶ οὕτω ἀρχίζει τὸ παιγνίδι ἐκ νέου. Τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται ἐπὶ τόσον χρόνον, ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχῃ πλέον σφαιρίδιον εἰς τὸν αὔλακα.

Ἐπειδὴ τοῦτο φυσικὰ δὲν δύναται νὰ διαρκέσῃ ἐπὶ πολὺ ἔχομεν ἐδῶ ἓν ὡρολόγιον πρὸς μέτρησιν μικρῶν χρονικῶν διαστημάτων, ἴσως μόνον λεπτῶν (ἀντὶ ὡρῶν).

---

[1]) Κάτι λεπτομερέστερον περὶ τῆς κατασκευῆς τοῦ κλειδιοῦ δὲν ἀναφέρεται. Ἐν τούτοις φαίνεται τοῦτο, κατὰ τὴν περιγραφὴν αὐτήν, νὰ προσομοιάζῃ πρὸς σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὰ ἐκ τοῦ al Gazarî (Παράβαλε E. Wiedemann καὶ F. Hauser, εἰς τὴν οἰκείαν θέσιν σελ. 125) (γερμ.).

2. Κατασκευὴ ἑνὸς Maidân[1]) τῶν ὡρῶν (τοῦ ὡρολογίου) μὲ τὰ σφαιρίδια, τὸν ἱέρακα καὶ τὸν κόρακα.



Σχ. 12

Περιγραφὴ καὶ σχεδίασις (σχ. 12)[2]) καὶ αὐτῆς τῆς συσκευῆς εἶναι πολλαπλῶς ἀσαφὴς καὶ δι' αὐτὸ ἀνατρέχομεν συχνὰ εἰς ὑποθέσεις. Μόνον μία πραγματικὴ ἀνακατασκευὴ θὰ καθίστα δυνατὸν νὰ διασαφισθῇ τοὐλάχιστον ἓν μέγα μέρος τῶν λεπτομερειῶν καὶ θὰ ἐπέτρεπε νὰ σχεδιασθῇ μία εἰκὼν παρέχουσα τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν τῶν ἐπὶ μέρους τμημάτων.

'Απολύτως τίποτε δὲν ἀναφέρεται εἰς

---

[1]) Maidân σημαίνει μεγάλον ἐπίπεδον, πλατεῖαν, ἱππόδρομον. 'Εδῶ λαμβάνεται ὡς ὁ τόπος ὅπου εὑρίσκεται τὸ ὡρολόγιον καὶ δεικνύει τὰς κινήσεις του.

[2]) Τὰ γράμματα εἰς τὸ σχῆμα αὐτὸ μετεβλήθησαν κατά τι μὲ τοποθέτησιν ἢ παράλειψιν γραμμάτων.

τὴν περιγραφὴν τῶν σχεδιασθέντων, κατὰ τὰ φαινόμενα περιστρεφομένου ἀνθρωπίνου σχήματος.

Εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος τῆς συσκευῆς εἶναι, ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα ἡ θέσις εἰσροῆς (εἰσρίψεως) διὰ τὰ σφαιρίδια :

Ἐπὶ ἑνός, ἐν πάσῃ περιπτώσει χοανοειδοῦς ἢ ἡμισφαιρικοῦ κιβωτίου (δοχείου) (m) εἶναι καρφωμένον ἓν κάλυμμα (n) τὸ ὁποῖον ἔχει τόσας ὀπὰς ὅσα εἶναι τὰ πρὸς χρησιμοποίησιν ἀναλογοῦντα σφαιρίδια, πιθανῶς εἰς κυκλικὴν διάταξιν. Ἐπ' αὐτοῦ ὑπάρχει δεύτερον κάλυμμα (o) δυνάμενον νὰ περιστρέφεται περὶ κατακόρυφον εἰς τὸ μέσον του ἄξονα, μὲ ὀπὰς διατεταγμένον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ τὰς ὀπὰς ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὀπὰς τοῦ κατωτέρου καλύμματος. Στρέφομεν ἐν πρώτοις τώρα τὸ ἀνώτερον κάλυμμα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ ὀπαί του νὰ μὴ συμπίπτουν μὲ τὰς ὀπὰς τοῦ κατωτέρου καλύμματος, καὶ θέτομεν τὰ σφαιρίδια εἰς τὰς ὀπάς των[1]). Τότε ταῦτα παραμένουν ἐκεῖ ἐπὶ τῶν παραπλεύρως ἢ τῶν ἐνδιαμέσων μερῶν τῶν καθ' ἕκαστα ὀπῶν τοῦ κατωτέρου καλύμματος. Ἐὰν τώρα περιστρέψωμεν τὸ ἀνώτερον κάλυμμα, μέχρις ὅτου αἱ ὀπαί του ἀντίκεινται πρὸς τὰς ὀπὰς τοῦ κατωτέρου καλύμματος, τότε τὰ σφαιρίδια πίπτουν εἰς τὸ κιβώτιον (δοχεῖον) (m).

Μέχρις ἑνὸς (δηλ. ἐκτὸς ἑνὸς) κυλίονται ταῦτα εἰς τὸν αὔλακα (σ), εἰς τὸν ὁποῖον, ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην συσκευήν, τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου σταματοῦν εἰς ἓν κλειδὶ (α) (εἰς μίαν δικλίδα).

Τὸ μνησθὲν ἓν σφαιρίδιον πίπτει εἰς ἕνα χῶρον κεχωρισμένον

---

[1]) Ἡ περιστροφὴ του καλύμματος δύναται νὰ ἐπακολουθήσῃ δι' ἑνὸς εἰς τὸ μέσον του στερεωμένου κομβίου (p), τὸ ὁποῖον ἐξέχει ἐκ τοῦ κιβωτίου πρὸς τὰ ἄνω, καὶ ἐὰν ἔχῃ εἰς αὐτὸ τοποθετηθῆ ἡ στέγη του. Διὰ τὴν ἐντὸς τοποθέτησιν τῶν σφαιριδίων εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦτο δύναται νὰ ἀφαιρῆται.

δι' ἑνὸς παραπετάσματος καὶ ἐκ τούτου κυλίεται δι' ἑνὸς κεκαμμένου αὔλακος (ρ)[1]) εἰς ἓν μικρὸν γεῖσον μὲ δύο τειχώματα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τῆς προσόψεως τοῦ κιβωτίου, ὅπου τοῦτο κατόπιν παραμένει[2]) ὄπισθεν ἑνὸς κλειδίου (α) (μιᾶς δικλίδος).

Ἐὰν τώρα ἡ ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσα δικλὶς (α) ἀνοίγει[3]) εἰς τὸν αὔλακα (σ), τότε τὸ πρῶτον σφαιρίδιον κυλίεται δι' ἑνὸς αὔλακος πρὸς τὴν κεφαλὴν ἑνὸς ἱέρακος (e).

Ἡ κεφαλὴ αὕτη εὑρίσκεται εἰς τὸ ἓν ἄκρον ἑνὸς στελέχους (σχ. 12). Εἰς τὸ μέσον (t) τοῦ στελέχους ὑπάρχουν στερεωμένοι δύο «ἄξονες» (πώματα, στρόφιγγες), περὶ τοὺς ὁποίους αὕτη περιστρέφεται εὐκόλως. Τὸ ἄλλο ἄκρον (z) τοῦ στελέχους εἶναι βεβαρυμένον μὲ μολύβι, τὸ ὁποῖον ὑψώνει πρὸς τὰ ἄνω τὴν κενὴν (κοίλην), κεφαλὴν τοῦ ἱέρακος, μέχρις ὅτου αὕτη μείνῃ ὀρθία εἰς ἓν κοιλοειδὲς ἄνοιγμα τοῦ τειχώματος τοῦ δοχείου. Ὄπισθεν τῆς κεφαλῆς τοῦ ἱέρακος εἶναι μία ὀπή. Εἰς αὐτὴν πίπτει τὸ ἐκ τοῦ αὔλακος (σ) πίπτον σφαιρίδιον. Συνεπείᾳ τούτου κλίνει ἡ κεφαλὴ τοῦ ἱέρακος, ἐξερχομένη ἐκ τοῦ ἀνοίγματός της (τοῦ κοιλώματος), μέχρις ὅτου τὸ σφαιρίδιον ἐκκυλισθῇ ἐκ τοῦ ἀνοιγομένου ῥάμφους (τὸ κάτωθι μέρος τοῦ ῥάμφους εἶναι κινητόν).

Κυλίεται τοῦτο (τὸ σφαιρίδιον) εἰς τὸ ἓν ἄκρον ἑνὸς γείσου εὑρισκομένου εἰς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ τειχώματος τοῦ δοχείου καὶ ἐκ τούτου κατὰ μῆκος ὑπὲρ τὸ γεῖσον μέχρι τῆς εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του εὑρισκομένης κεφαλῆς ἑνὸς κόρακος (ϑ). Ἡ κατωτέρα

---

[1]) Ἡ καμπυλότης ἢ καλλίτερον ἡ περιστροφὴ τοῦ αὔλακος τούτου πρέπει ἐν πάσῃ περιπτώσει νὰ ἐπιβραδύνῃ τὴν διαδρομὴν τοῦ σφαιριδίου, διὰ νὰ μὴ φθάνῃ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν του μὲ μεγάλην ὁρμήν.

[2]) Τὸ κιβώτιον (m) μὲ τὰ δύο καλύμματα ἔχει κατὰ τὰ φαινόμενα μόνον τὸν σκοπὸν νὰ ἐξασφαλίζῃ τὴν ὀρθὴν τοποθέτησιν ἐντός, τῶν σφαιριδίων.

[3]) Παράβαλε πρὸς τούτοις τὴν παρατήρησιν τῆς σελίδος 302.

σιαγὼν (s) τοῦ ῥάμφους τοῦ κόρακος εἶναι περιστρέψιμος περὶ μίαν ἄρθρωσιν εὑρισκομένην εἰς τὴν ῥίζαν της. Διὰ νὰ μὴ κλείνῃ αὕτη ἐντελῶς πρὸς τὰ κάτω, ἀλλὰ νὰ παραμένῃ ἐν μέρει ἀνοικτή, εἶναι τὸ ἄκρον της ἐξηρτημένον εἰς δύο τρίχας «ὡς ἓν κοχλιάριον»[1]).

Ἡ κεφαλὴ τοῦ κόρακος εὑρίσκεται, ὡς καὶ ἡ τοῦ ἱέρακος εἰς τὸ ἓν ἄκρον ἑνὸς στελέχους (h) στηριζομένου εἰς δύο πώματα (ἐξογκώματα) εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ περιστρέφεται.

Εἰς τὸ κατώτερον μέρος τοῦ ὀπισθίου μέρους τῆς κεφαλῆς ἐξαρτᾶται μέσῳ δύο νημάτων εἷς κάδος (κουβᾶς) ὅμοιος πρὸς δίσκον ζυγοῦ. Εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ στελέχους (h) εὑρίσκεται ἐπίσης ἐξηρτημένος διὰ δύο νημάτων εἷς κάδος (d). Ἡ ῥοπὴ στροφῆς του εἶναι τόσον μεγάλη ὥστε αὕτη νὰ ὑψώνῃ ὀρθίως τὴν κεφαλὴν τοῦ κόρακος εἰς ἓν ἄνοιγμα τοῦ τοιχώματος τοῦ δοχείου.

Ἡ περαιτέρω λειτουργία τῆς συσκευῆς εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

Ὅταν ἡ κεφαλὴ τοῦ ἱέρακος (e) κλίνῃ, μετὰ τὴν εἴσοδον τοῦ ἀπὸ τοῦ αὔλακος (σ) ἐρχομένου σφαιριδίου, τότε ἀνοίγει αὕτη τὴν εἰς τὸ μικρὸν γεῖσον κλεῖδα (α), διότι αὕτη εἶναι συνδεδεμένη μὲ αὐτὴν διὰ τοῦ νήματος (c).

Τὸ ἐπὶ τοῦ μικροῦ γείσου εὑρισκόμενον σφαιρίδιον ἐγκαταλείπει τώρα τοῦτο καὶ φθάνει δι' ἑνὸς αὔλακος εἰς τὸν δίσκον (b) εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος τῆς κεφαλῆς τοῦ κόρακος. Ὡς ἐκ τούτου κλίνει τοῦτο τὴν κεφαλὴν (ϑ) τοῦ κόρακος, οὕτως ὥστε τὸ κατώτερον μέρος τοῦ ῥάμφους (ἡ κάτω σιαγὼν τούτου) (s) νὰ τίθεται ἰσοπέδως ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ γείσου, χωρὶς ὅμως νὰ ὑψώνεται πρὸς τὴν ἀνωτέραν σιαγόνα τοῦ ῥάμφους. Πρὸς τὸ γεῖσον τοῦτο

---

[1]) Δηλαδή, λαμβάνει συνεπείᾳ ταύτης τῆς ἐξαρτήσεως τοιαύτην θέσιν, οἵαν κανεὶς θέτει εἰς τὸ κοχλιάριον κατὰ τὸ φαγητόν.

κυλίεται πλέον τὸ ἐν τῷ μεταξὺ ἐκ τῆς κεφαλῆς τοῦ ἱέρακος ἐξελθὸν σφαιρίδιον, ἐρχόμενον ἐκ τοῦ αὔλακος (σ). Κυλίεται εἰς τὸ ἀνοιχθὲν ῥάμφος τοῦ κόρακος (θ) καὶ μένει εἰς τὸν κοῖλον χῶρον τὸν σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς κάτω σιαγόνος, τῆς ἄνω σιαγόνος καὶ τῆς κεφαλῆς, διότι ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς κάτω σιαγόνος εἶναι ὀλίγον κεκλιμένη πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κεφαλῆς.

Ἐν ᾧ τὸ ἐκ τοῦ αὔλακος (σ) ἐρχόμενον σφαιρίδιον ἀναλαμβάνεται ὑπὸ τοῦ ῥάμφους τοῦ κόρακος, ἐγκαταλείπει τὸ σφαιρίδιον τὸ ἐρχόμενον ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ μικροῦ γείσου τὸν κάδον (κουβᾶν) (b)[1]) καὶ κυλίεται διά τινος αὔλακος εἰς τὸν κάδον (d). Ἕνεκα τούτου οὗτος γίνεται τόσον βαρύς, ὥστε ὑψώνει τὴν κεφαλὴν τοῦ κόρακος ὁμοῦ μετὰ τοῦ ἐκ τοῦ αὔλακος (σ) ἐρχομένου σφαιριδίου, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ αὕτη εἰς τὸ δι' αὐτὴν ὡρισμένον ἄνοιγμα (κοίλωμα) τοῦ τειχώματος τοῦ δοχείου. Πρὸς τούτοις ἐφάπτεται μὲ τὰ νῶτα του εἰς τὸ χεῖλος τοῦ ἀναφερθέντος, ἐδῶ εὑρισκομένου μικροῦ γείσου καὶ τὸ εἰς αὐτὸ εὑρισκόμενον σφαιρίδιον κυλίεται δι' ἑνὸς εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος τῆς κεφαλῆς εὑρισκομένου ἀνοίγματος, εἰς τὸ γεῖσον τοῦτο. Ἐνταῦθα μένει τοῦτο ὄπισθεν τῆς δικλίδος (α), ἐπειδὴ αὕτη ἔχει κλεισθῇ πάλιν κατὰ τὴν ἐν τῷ μεταξὺ ἐπακολουθήσασαν ἀνόρθωσιν τῆς κεφαλῆς τοῦ ἱέρακος (e).

Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἐγκαταλείπει τὸν κάδον (d) τὸ ἐκ τοῦ μικροῦ γείσου ἐρχόμενον σφαιρίδιον καὶ κυλίεται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ (j) πρὸς μίαν δευτέραν κεφαλὴν ἱέρακος (k), ἡ ὁποία εἶναι κατεσκευασμένη ἀκριβῶς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅπως ἡ κατὰ πρῶτον περιγραφεῖσα κεφαλὴ (e).

---

[1]) Πῶς τοῦτο συμβαίνει δὲν μνημονεύεται· ἐν πάσῃ περιπτώσει γίνεται δι' ἀνατροπῆς τοῦ κάδου (κουβᾶ) συνεπείᾳ μονομεροῦς προσπτώσεως ἐπί τινος ἀντιστάσεως.

Ἐπίσης καὶ ἡ κεφαλὴ αὕτη τοῦ ἱέρακος (k) κλίνει, ὅταν κυλισθῇ εἰς αὐτὴν ἓν σφαιρίδιον καὶ ἀπορρίπτει τότε τοῦτο ἐκ τοῦ ῥάμφους της (l) ἔξω τῆς συσκευῆς.

Κατὰ τὴν κλίσιν της ἀνοίγει δι' ἑνὸς εἰς αὐτὴν στερεωμένου νήματος (f) τὴν εἰς τὸν ἀναφερθέντα αὔλακα (σ) προσαρμοσθεῖσαν δικλίδα (α) [1]), τὸ ἑπόμενον σφαιρίδιον κυλίεται πρὸς τὰ κάτω καὶ τὸ παιγνίδι ἀρχίζει ἐκ νέου. Ἐπαναλαμβάνεται δὲ διαρκῶς μέχρις ὅτου οὐδὲν σφαιρίδιον μείνῃ εἰς τὸν αὔλακα (σ) [2]).

Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο δύναται νὰ διαρκέσῃ ὀλίγον χρόνον, δι' αὐτὸ καὶ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ ὡρολογίου πρὸς μέτρησιν μικρῶν χρονικῶν διαστημάτων. Θὰ ἦτο δυνατὸν ἐπίσης ἡ συσκευὴ αὕτη νὰ εἶναι ἓν μηχανικὸν παιγνίδι, τὸ ὁποῖον συνδέεται μὲ ἓν ὡρολόγιον. Ὑπὸ τούτου θὰ ἐτίθετο μίαν φορὰν τὴν ἡμέραν ἐν λειτουργείᾳ κατὰ μίαν ἰδιαιτέρως σπουδαίαν ὥραν.

*

(Σημείωσις: Διὰ τῆς ἀπὸ 2 Σεπτεμβρίου 1971 ἐπιστολῆς ἡμῶν πρὸς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Ὀξφόρδης (Department of oriental books, Bodleian Library, Oxford), ἐζητήσαμε φωτοτυπίας τῶν ἀραβικῶν χειρογράφων τῶν συναφῶν πρὸς τὸ ὡρολόγιον τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀλλ' ἀκόμη δὲν ἐλάβομεν ταύτας. Ἰανουάριος 1974).

---

[1]) Τὸ κατώτερον μέρος τῆς κεφαλῆς τοῦ ἱέρακος (k) χρησιμεύει διὰ νὰ θέτῃ τὴν συσκευὴν εἰς λειτουργίαν. Ἀρκεῖ νὰ τὸ πιέσωμεν διὰ τῆς χειρὸς ἢ μηχανικῶς ἐπ' ὀλίγον πρὸς τὰ κάτω.

[2]) Τὸ τελευταῖον σφαιρίδιον μένει εἰς τὴν δικλίδα (α) τοῦ μικροῦ γείσου. Πρέπει ἀπὸ ἐκεῖ, πρὸ τῆς ἐκ νέου θέσεως εἰς λειτουργίαν τῆς συσκευῆς, νὰ ἀπομακρυνθῇ. Τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ πιέσεως πρὸς τὰ κάτω τοῦ ἀνωτέρου μέρους τῆς κεφαλῆς τοῦ ἱέρακος (e) διὰ τῆς χειρός, ὁπότε τὸ σφαιρίδιον διὰ τοῦ κάτω μέρους τῆς κεφαλῆς τοῦ ἱέρακος (k) ἐγκαταλείπει τὴν συσκευήν.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΠΥΡΠΟΛΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΡΩΜΑΪΚΟΥ ΣΤΟΛΟΥ ΥΠΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Κατωτέρω παραθέτομεν περιγραφὴν τοῦ πειράματος πυρπολήσεως τοῦ Ῥωμαϊκοῦ στόλου ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ καυστικῶν κατόπτρων δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ Ἐνημερωτικὸν Δελτίον τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος τῆς 17 - 11 - 1973 (Σάββατον). Προηγουμένως ὁ διακεκριμένος Ἕλλην Δρ μηχανολόγος κ. Σακκᾶς, ὁ ὁποῖος κατὰ τὸ 1966 εἶχε δημοσιεύσει σχετικὴν μελέτην πυρπολήσεως διὰ τῶν κατόπτρων, ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ στόλου τῶν Ῥωμαίων, ἐξετέλεσεν ἐπιτυχῶς τρία ἄλλα πειράματα εἰς τὰς Ὑπωρείας τοῦ Ὑμηττοῦ (Ἄνω Ἡλιούπολις) κατὰ τὰς ἡμερομηνίας 24 - 6 - 1973, 17 - 7 - 1973, 22 - 7 - 1973 καὶ ἓν πείραμα εἰς τὴν Ναυτικὴν Βάσιν Παλάσκας τὴν 3 - 11 - 1973.— Ἐμπεριστατωμένην ἀνάλυσιν τοῦ θέματος ἐκθέτει ὁ κ. Σακκᾶς εἰς τὰ Τεχνικὰ Χρονικὰ μηνὸς Σεπτεμβρίου 1973, σελὶς 771 - 779.

*

«Τῷ 215—212 π.Χ. ὁ Ῥωμαῖος Ὕπατος Μάρκελλος πολιορκεῖ τὰς Συρακούσας τῆς Σικελίας. Τὴν ἄμυναν τῆς πόλεως ὠργάνωσεν, ὁ μέγας μαθηματικὸς καὶ μηχανικὸς Ἀρχιμήδης 75ετὴς τότε. Αἱ ἔφοδοι τῶν Ῥωμαίων ἀπεκρούοντο ἐπιτυχῶς καὶ μὲ ὀλεθρίας συνεπείας ἐπὶ τοῦ ἠθικοῦ τῶν ἐπιτιθεμένων, χάρις εἰς τὰς καταπληκτικὰς ἀμυντικὰς μηχανὰς τοῦ 'Αρχιμήδους. 'Ο Λουκιανὸς (120—200 μ.Χ.) καὶ ἔτι μεταγενέστεροι ἱστορικοὶ ἀναφέρουν ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης ἐπυρπόλησε πλοῖα τοῦ 'Ρωμαϊκοῦ πολεμικοῦ στόλου διὰ συγκεντρώσεως ἐπ' αὐτῶν τῶν ἡλιακῶν ἀκτίνων, καθ' ὃν χρόνον ὑπεστήριζον διὰ τῶν τοξοτῶν καὶ σφενδονιστῶν των ἔφοδον κατὰ τῶν τειχῶν τῶν Συρακουσῶν ἐκ τῆς θαλάσσης.

'Επειδὴ οἱ σύγχρονοι τοῦ 'Αρχιμήδους ἱστορικοὶ δὲν ἀναφέρουν τὸ ἐπίτευγμά του τοῦτο καὶ ἕνεκα δυσμενῶν τινων διὰ τὴν πραγματοποίησίν του τεχνικῶν καὶ στρατιωτικῶν λεπτομερειῶν, ἐθεωρήθη τοῦτο ὑπὸ πολλῶν ἀδύνατον μέχρι καὶ σήμερον.

Τῷ 1966, ὁ μηχανικὸς κ. Ι. Σακκᾶς ἐδημοσίευσεν εἰς τὰ «Τεχνικὰ Χρονικά», ἐπίσημον ὄργανον τοῦ Τεχνικοῦ 'Επιμελητηρίου, ἐργασίαν του, εἰς τὴν ὁποίαν ὑποστηρίζεται ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης θὰ ἠδύνατο νὰ εἶχε χρησιμοποιήσει ἐπίπεδα χάλκινα κάτοπτρα, μεγέθους μεγάλης ἀσπίδος, ἀντὶ οἱουδήποτε ἑτέρου συγγενοῦς συστήματος, διὰ τὴν συγκέντρωσιν τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας καὶ καῦσιν 'Ρωμαϊκῶν πλοίων. Τὰ ἐπίπεδα κάτοπτρα ταῦτα συγκεντρώνουν, διὰ τὸν ὑπ' ὄψιν σκοπόν, τὰ περισσότερα τεχνικὰ καὶ στρατιωτικὰ πλεονεκτήματα ἔναντι ὅλων τῶν ἄλλων συγκεντρωτικῶν συστημάτων τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας.

Τὸ Τεχνικὸν 'Επιμελητήριον τῆς 'Ελλάδος, προτάσει τοῦ καθηγητοῦ κ. Εὐαγγ. Σταμάτη, συγγραφέως τῶν 'Απάντων τοῦ 'Αρχιμήδους, ἀνέλαβε τὴν ἐκτέλεσιν ἀναπαραστάσεως τῆς καύσεως τοῦ στόλου τῶν 'Ρωμαίων ὑπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους, διὰ τοῦ Δρος μηχανικοῦ κ. Ι. Σακκᾶ πρὸς χάριν τῆς Τεχνικῆς ἀλλὰ καὶ τῆς 'Εθνικῆς καὶ Πολεμικῆς μας ἱστορίας.

Τὸν συντονισμὸν ἐν γένει τῶν σχετικῶν ἐνεργειῶν πρὸς πραγματοποίησιν τῆς ἀναπαραστάσεως ταύτης ὡς καὶ τῶν προηγηθεισῶν δοκιμῶν, ὁ Πρόεδρος τοῦ Τεχνικοῦ 'Επιμελητηρίου καθηγητῆς κ. Ἀλέξ. Σφήκας, ἀνέθεσεν εἰς τὸν ἐκ τῶν μελῶν τῆς Διοικούσης Ἐπιτροπῆς τοῦ Τ.Ε.Ε. καθηγητὴν κ. Ἀλ. Καραβασίλην.

Κατεσκευάσθησαν 200 ἐπίπεδα ἐπίχαλκα κάτοπτρα, διαστάσεων 1,70 Χ 0,70 μέτρων καὶ ἐξετελέσθησαν μέχρι σήμερον τέσσαρες ἐπιτυχεῖς καύσεις στόχων εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κατόπτρων 40, 55, 75 καὶ 100 μέτρων, ἡ τελευταία τῶν ὁποίων ἐπραγματοποιήθη τὴν 11ην ὥραν τῆς 3.11.73 μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Πολεμικοῦ μας Ναυτικοῦ, δι' ἀναφλέξεως μικροῦ στόχου, παρὰ τὴν θάλασσαν, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν 55 μέτρων ἀπὸ 60 κατόπτρων.

Τὴν μεσημβρίαν τῆς Τρίτης 6.11.73 ἐπραγματοποιήθη ὑπὸ τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος ἡ χειμερινὴ καὶ ἐπίσημος ἀναπαράστασις τῆς καύσεως τοῦ στόλου τῶν Ῥωμαίων ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὰς Συρακούσας τῆς Σικελίας τῷ 215—212 π.Χ.

Κατ' αὐτήν, διὰ 70 ἐπιχαλκωμένων ὑαλίνων κατόπτρων, διαστάσεων ἕκαστον 1,70 Χ 0,70 μέτρων εἰς τὴν θαλασσίαν περιοχὴν τοῦ Κέντρου Ἐκπαιδεύσεως Παλάσκα (ΚΕΠΑΛ) τοῦ Πολεμικοῦ μας Ναυτικοῦ, παρὰ τὴν θέσιν Σκαραμαγκᾶ τοῦ Σαρωνικοῦ ἔναντι τῆς Σαλαμῖνος, συνεκεντρώθη ἡ ἡλιακὴ ἀκτινοβολία ἐπὶ μικρᾶς λέμβου εὑρισκομένης εἰς μέσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν κατόπτρων 55 μέτρων διεσκευασμένης εἰς σχῆμα πεντήρεος διὰ τοιχώματος ἐκ δυσκαύστου ξύλου, ἐλαφρῶς ἐπηλειμμένου διὰ πίσσης καὶ φέροντος τεμάχιά τινα τίλματος παριστῶντα τὰς ὑφασματίνους ἀποσκευὰς τῶν πληρωμάτων καὶ τῆς ἐξαρτίας τῶν πλοίων.

Παρὰ τὴν μειωμένην ἡλιακὴν ἀκτινοβολίαν, λόγῳ ἐλαφροτάτης διαχύτου νεφώσεως (ἀχλύος), οἱ πρῶτοι λεπτοὶ καπνοὶ ἀνυψώθησαν ἐκ τῆς πλευρᾶς τῆς λέμβου ἐντὸς ὀλίγων δευτερολέπτων ἀπὸ τῆς ὀρθῆς προσβολῆς της διὰ τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας καὶ μετὰ τούτους ἐντὸς τριῶν περίπου λεπτῶν εἶχε παραδοθῆ ὁλόκληρος εἰς τὰς φλόγας.

Ἡ ἀναπαράστασις αὕτη ἐξετελέσθη μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ Πολεμικοῦ μας Ναυτικοῦ κατόπιν ἐγκρίσεως τῆς Ἡγεσίας τῶν Ἐνόπλων Δυνάμεων, δράττεται δὲ ἐνταῦθα τῆς εὐκαιρίας τὸ Τεχνικὸν Ἐπιμελητήριον τῆς Ἑλλάδος νὰ ἐκφράσῃ θερμὰς εὐχαριστίας πρὸς τὴν ἡγεσίαν τῶν δυνάμεων τούτων, καθὼς ἐπίσης τοὺς ἀξιωματικούς, ὑπαξιωματικοὺς καὶ ναύτας τοῦ ΚΕΠΑΛ, οἱ ὁποῖοι ὑπὸ τὰς ὁδηγίας τοῦ Δρος Μηχ/γου - Ἠλεκ/γου Μηχανικοῦ κ. Ἰ. Σακκᾶ συνετέλεσαν εἰς τὴν ἐπιτυχῆ ταύτην ἀναπαράστασιν.

Τὴν ἀναπαράστασιν ἐτίμησεν διὰ τῆς παρουσίας του ὁ Διοικητὴς Ναυτικῆς Ἐκπαιδεύσεως Ναύαρχος κ. Δημήτριος Δούσης καὶ παρηκολούθησαν ὁ Διοικητὴς τοῦ ΚΕΠΑΛ Πλοίαρχος κ. Ἀνδρέας Βαφειάδης, ὁ Πλοίαρχος κ. Εὐθύμιος Δρομάζος, ὁ Γεν. Δ/ντὴς τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας στρατηγὸς κ. Κοζώνης, ὁ καθηγητὴς κ. Ἀλ. Καραβασίλης, ὁ καθηγητὴς κ. Εὐάγγ. Σταμάτης, ἐκπρόσωποι τοῦ Ἑλληνικοῦ καὶ ξένου Τύπου καθὼς καὶ τῆς τηλεοράσεως, ὡς καὶ ἀξιωματικοὶ τοῦ ΚΕΠΑΛ, ἐπιστήμονες καὶ μηχανικοὶ τοῦ Δημοκρίτου, τῆς ΔΕΗ, μηχανικοὶ ἐλεύθεροι ἐπαγγελματίαι κ.ἄ.

Μετὰ τὸ τέλος τῆς ἀναπαραστάσεως ὁ κ. Ἀλ. Καραβασίλης, ὑπὸ τὴν ἰδιότητα τοῦ συντονιστοῦ τοῦ ἐγχειρήματος ἐκπροσώπου τοῦ Προέδρου καὶ τῆς Δ. Ἐπιτροπῆς τοῦ ΤΕΕ, ὁ κ. Εὐάγγ. Σταμάτης, συγγραφεὺς τῶν Ἀπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὁ δρ. μηχανικὸς κ. Ἰ. Σακκᾶς, ἐπὶ τῇ βάσει μελέτης τοῦ ὁποίου ὡς γνωστὸν ἐξετελέσθη ἡ ἀναπαράστασις, ἀπήντησαν εἰς ἐρωτήσεις τῶν ἐκπροσώπων τοῦ Τύπου καὶ προέβησαν εἰς γενικήν τινα ἐνημέρωσιν τῶν παρισταμένων ἐπὶ τῆς πραγματοποιηθείσης ἀναπαραστάσεως καὶ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀρχιμήδους».

ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΗΣ ΠΥΡΠΟΛΗΣΕΩΣ

ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΚΤΕΛΕΣΘΕΝΤΩΝ ΥΠΟ ΤΟΥ κ. ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΑΚΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ ΤΟΥ ΔΥΝΑΤΟΥ ΤΗΣ ΠΥΡΠΟΛΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΠΛΟΙΩΝ ΤΟΥ ΣΤΟΛΟΥ ΤΩΝ ΡΩΜΑΙΩΝ ΥΠΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

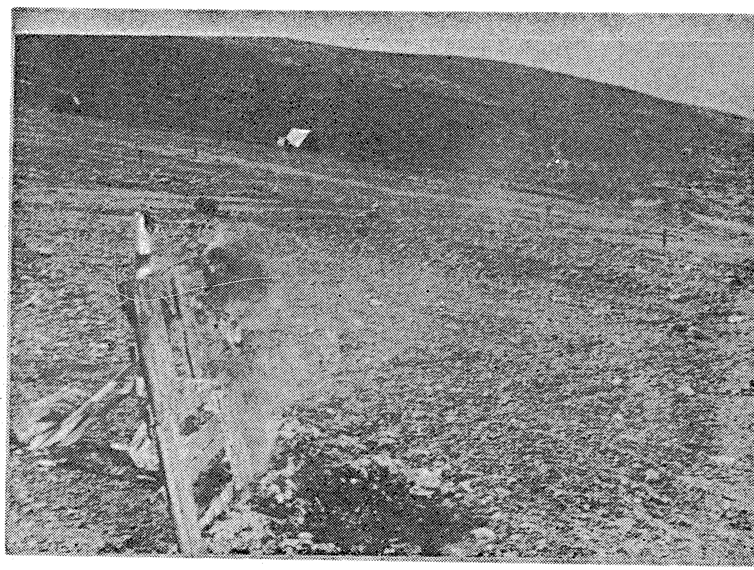
Α΄. Τόπος ἐκτελέσεως τῶν τριῶν πρώτων πειραμάτων: Ὑπώρειαι τοῦ Ὑμηττοῦ, Ἄνω Ἡλιούπολις Ἀθηνῶν.

1. Πείραμα πρῶτον. 24-6-1973, Κυριακή, ὥρα 9.30 π.μ. Κάτοπτρα 50, ἀπόστασις 40 μέτρα. Στόχος σύνηθες ξύλον καὶ ὑφάσματα βαμβακερά. Ἀποτέλεσμα, ἀνάφλεξις (εἰκὼν 1).

Εἰκὼν 1

2. Πείραμα δεύτερον. 17-7-1973, Τρίτη, ὥρα 3.30 μ.μ. Κάτοπτρα 57, ἀπόστασις 70 μέτρα. Στόχος σκληρὸν ξύλον (κόντρα πλακέ). Ἀποτέλεσμα, καπνὸς μετὰ πάροδον 3 πρώτων λεπτῶν τῆς ὥρας.

3. Πείραμα τρίτον. 22-7-1973, Κυριακή, ὥρα 9.30 π.μ. Κάτοπτρα 130, ἀπόστασις 100 μέτρα. Στόχος, σύνηθες ξύλον καὶ βαμβακερὰ ὑφάσματα. Ἀποτέλεσμα, μετὰ πάροδον 2 δευτερολέπτων καπνός, μετὰ πάροδον 3 πρώτων λεπτῶν τῆς ὥρας ἀνάφλεξις (εἰκὼν 2).

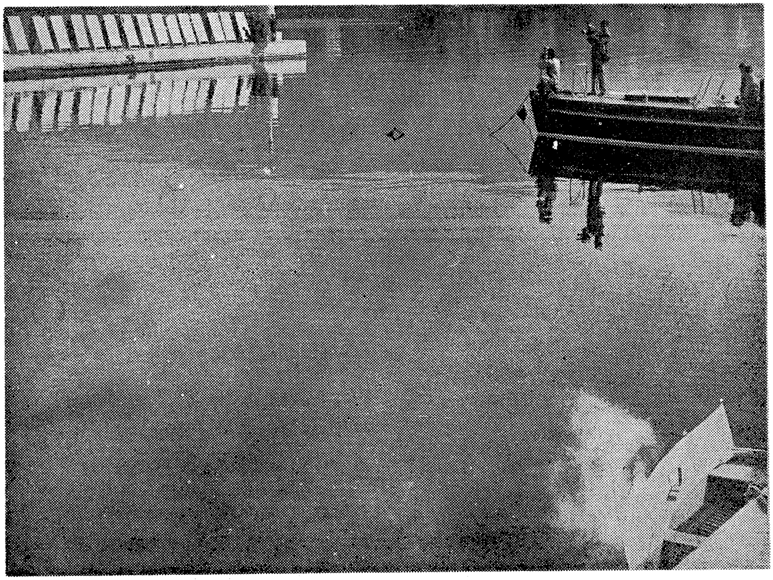


Εἰκὼν 2

Β΄. Τόπος ἐκτελέσεως τῶν δύο τελευταίων πειραμάτων τετάρτου καὶ πέμπτου: Ὅρμος τοῦ Κέντρου Ἐκπαιδεύσεως τοῦ Πολεμικοῦ Ναυτικοῦ «Παλάσκας» (ΚΕΠΑΛ) εἰς Σκαραμαγκᾶν ἐπὶ τῆς Ἀττικῆς ἀκτῆς, ἔναντι τῆς Σαλαμῖνος.

Καὶ τὰ δύο πειράματα ἐγένοντο ὑπὸ τὴν αἰγίδα τοῦ Πολεμικοῦ Ναυτικοῦ. Πρὸς κράτησιν τῶν κατόπτρων διετέθησαν 100 ναῦται.

4. Πείραμα τέταρτον. 3-11-1973, Σάββατον, ὥρα 12 μεσημβρινή. Κάτοπτρα 60, ἀπόστασις 55 μέτρα (ἡ ἀπόστασις δὲν ἠδύ-

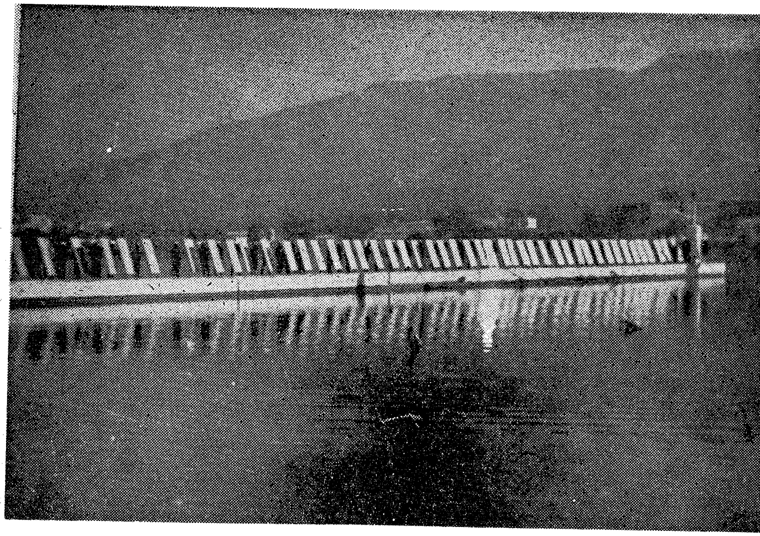


Εἰκὼν 3

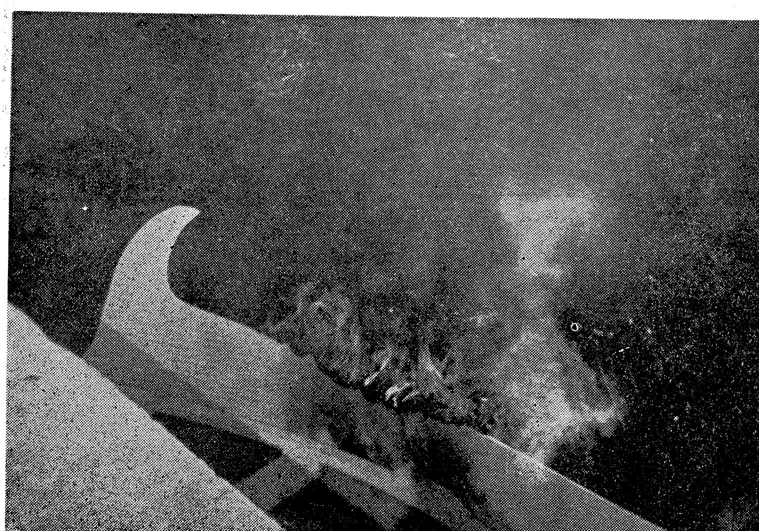
νατο νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα, ἕνεκα τῆς στενότητος τοῦ ὅρμου). Στόχος, λέμβος. Ἀποτέλεσμα, ἀνάφλεξις.

5. Πείραμα πέμπτον. 6-11-1973, Τρίτη, ὥρα 12 μεσημβρινή. Κάτοπτρα 70, ἀπόστασις 55 μέτρα. Στόχος λέμβος. Ἀποτέλεσμα, ἀνάφλεξις (εἰκόνες 3, 4, 5).

Ἐκ τῶν ξένων ἀνταποκριτῶν παρηκολούθησαν τὸ τελευταῖον



Εἰκὼν 4



Εἰκὼν 5

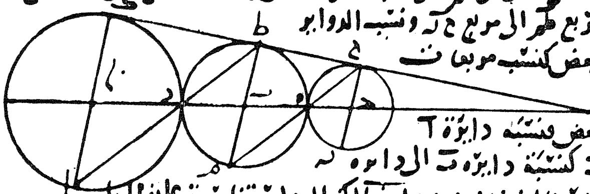
(πέμπτον) πείραμα εἰς τὸν Σκαραμαγκᾶν (ΚΕΠΑΛ), ὁ ἀνταποκριτὴς τῆς ἐφημερίδος τῆς Νέας Ὑόρκης, The New York Times, κ. Mario S. Modiano, ὅστις ἔγραψεν ἐκτεταμένως εἰς τὸ φύλλον τῆς 11-11-1973 τῆς ἐφημερίδος αὐτῆς καὶ ὁ ἀνταποκριτὴς τοῦ περιοδικοῦ Time (European Edition), ὅστις ἐδημοσίευσε καὶ φωτογραφίαν τοῦ ἐπιτυχοῦς πειράματος, εἰς τὸ φύλλον τῆς 26-11-1973. Ἡ ἀνταπόκρισις εἶναι ἀνυπόγραφος.

ΤΟ ΑΡΑΒΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΣ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΠΙΨΑΥΟΝΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

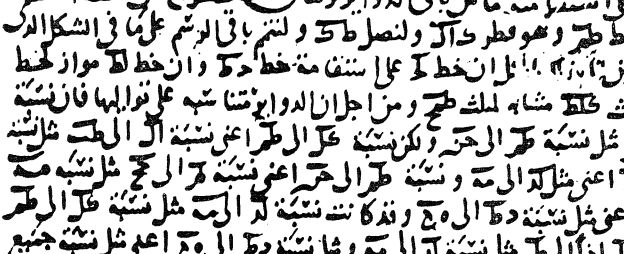
بسم الله الرحمن الرحيم كتاب ارشميدس في الدوائر المتماسة
قال ارشميدس اذا كانت دوائر كم كانت متتالية متماسة و مراكزها على خط واحد
واخرج ذلك الخط على استقامة و تعلمت عليه نقطة ما واخرج منها خط مماس للدوائر
فان الدوائر متناسبة على توالیها وان كانت الدوائر متناسبة على توالیها فان الخط الذي
يماس دائرتين متتاليتين منها اذا اخرج على استقامة ماس باقي الدوائر مثال ذلك لنفرض
دوائر متتالية متماسة على مراكزها آ ب ج ولكن مراكز آ ب ج على خط واحد مستقيم
وهو خط آ ج ولنفرض الدوائر تماس بعضها بعضا على نقطتي د ه ولنعلم على خط آ ج
نقطة ز ولنخرج منها خط مماس للدوائر على نقط ح ط ك فاقول ان نسبة دائرة آ
الى دائرة ب كنسبة دائرة ب الى دائرة ج برهان ذلك لنخرج من نقط المماسة اقطارا
على المراكز وهي خطوط آ ح ب ط ج ك ولنصل ح د ط ه ك فمن اجل ان
خطوط آ ح ب ط ج ك قد اخرجت من نقط المماسة على المراكز فانها عمود على الخط المماس
فهي اذا متوازية فزاوية آ ح د اذن مساوية لزاوية د ب ط ومثلثا آ ح د د ب ط متساويا
الساقين فزاوية آ د ح اذن مساوية لزاوية ب د ط فخط ح د ط مستقيم فخط ط ه ك اذن ايضا
مستقيم وبمثل ذلك يتبين ان خط ط ك مستقيم ومن اجل ان مثلثي ح د ط ط ه ك متوازي القائمي
الزوايا زاويتا الخارجة منها متساوية فان الزاوية الباقية منها ومما لكل
ط ج م متساويا وتباين فخط ح ط اذن موازي لخط ط ك ومن اجل ان مثلثي ح ط ط ك متشابه

متشابها

متشابهان تكون نسبة لك الى لط مثل نسبة مط الى طح واذا بدلنا تكون نسبة لك الى
مط مثل نسبة كط الى طح ولكن نسبة كل الى طم مثل نسبة كا الى طت اعني مثل نسبة
كز الى زط فنسبة اذن الى زط مثل نسبة كط الى طح ومن اجل ان نسبة كل
الى كل زط مثل نسبة كط المنقوص الى طح المنقوص يكون نسبة طم الباقي الى زح
الباقي مثل نسبة كز الى زط ولكن نسبة كز الى زط مثل نسبة كا الى طت اعني مثل
نسبة كل الى طم ونسبة طم الى زح مثل نسبة طت الى حخ اعني مثل نسبة طم الى
حز فنسبة كل اذن الى طم مثل نسبة طم الى حز ونسبة مربع كل الى مربع طم
مثل نسبة مربع طم الى مربع ح ز ونسب الدوائر
بعضها الى بعض كنسب مربعات

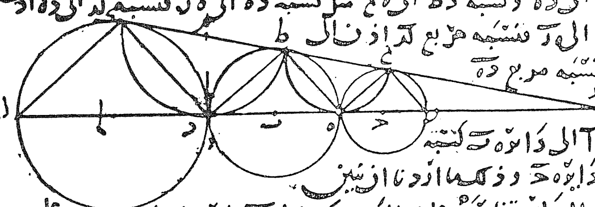


اقطارها
بعضها الى بعض فنسبة دائرة آ
الى دائرة ب كنسبة دائرة ب الى دائرة ج
د وذلك ما اردنا ان نبين . وايضا لتكن الدوائر متناسبة على توالها
ولتماس دائرتي ب ج على نقطتي ح ط فاقول انا اذا اخرجنا
خط زط على استقامته ماس باقي الدوائر فلنخرج على نقطة آ خطا
موازيا لخط طح وهو قطر دا ك ولنصل طك ولنتمم باقي الرسم على ما في الشكل الذي
تقدم فيبين ان خط لك على استقامة خط دك وان خط لك مواز لخط
مح وان مثلث كلط مشابه لمثلث طمح ومن اجل ان الدوائر متناسبة على توالها فان نسبة
كل الى طم مثل نسبة طم الى حز ولكن نسبة كل الى طم اعني نسبة اك الى طب مثل نسبة
لك الى زط اعني مثل لك الى مه ونسبة طم الى حز اعني نسبة لم الى مح مثل نسبة مه
الى ه ح اعني مثل نسبة دط الى ه ح وقد كانت نسبة لك الى مه مثل نسبة كل الى طم
نسبة كل اذا الى طم مثل نسبة لك الى مه ومثل نسبة دط الى ه ح اعني مثل نسبة جميع
لد الى جميع مح ومن اجل ان نسبة كل الى طم مثل نسبة لك الى مح والزاويتان اللتان
يحيط بهما متساويتان فان مثلثي كلط طمح متشابهان فزاوية لكط مساوية لزاوية مطح
وزاوية مطح قائمة فزاوية لكط قائمة وخط كل مواز لخط طت فزاوية كطم اذا قائمة
وقد كانت زاوية مطح قائمة فخط ح ط اذن على استقامة خط طك
ويماس دائرة آ ويتبين ذلك من انه
اذا كانت دوائر اكثر من



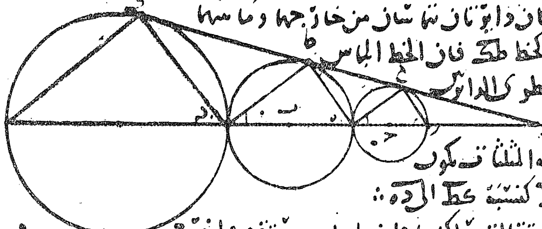
هذه
كم كانت تماسها كلها . وانصال
لبعض من الدوائر على ما في المقدمة ولنصل

لك كد طه هح حز ولنخرج من نقطة د خطا ماس كل واحدة من دائرتي
اب وهو خط دم لخط دم عمود على خط كز ومن اجل ان كل واحد من خطي كم مد
ماس دائرة ا يكون خط كم مساويا لخط مد وكذلك ايضا يكون خط حم مساويا لخط مد
فخطوط كم مد لم الثلثة متساوية والدائرة المرسومة على مركز م وببعد مك كدائرة
كدل تجوز على نقط ك د ل فزاوية كدل قائمة وزاوية لكد قائمة فخطا لك طد
متوازيان مثل ذلك تبين ان خطي دل هح متوازيان وايضا من اجل ان خط دك
ماس دائرة ا على نقطة ك وخط كد يفصلها تكون زاوية طكد مساوية لزاوية كلد
ومثلثا لكد كدل قائمتا الزاويتين فزاوية كدل الباقية مساوية لزاوية كطد الباقية
فمثلثا لكد كدل متشابهان ولكن مثلث لكد هو مشابه لمثلث دطه ومثلث كدط
مشابه لمثلث طهح فمثلثات لكد كدل طهح هحز اذن متشابهة فنسبة لك الى كد
مثل نسبة كد الى طد ومثل نسبة دل الى طه ومثل نسبة طه الى هح فاذا القينا
الاوساط صير نسبة لك الى دل مثل نسبة دل الى هح ولكن نسبة لك الى دل
مثل نسبة لد الى ده ونسبة دل الى هح مثل نسبة ده الى هز فنسبة لد الى ده
مثل نسبة ده الى هز فنسبة مربع لد اذن الى

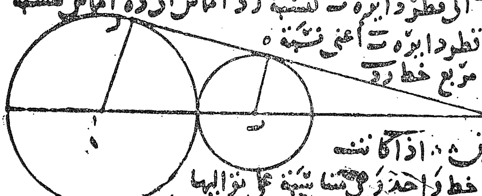


مربع ده مثل نسبة مربع ده
الى مربع هز
فنسبة دائرة ا الى دائرة ب كنسبة
دائرة ب الى دائرة ح وذلك ما اردنا ان نبين
وايضا لتكن الدوائر متماسة على تواليها ولتكن خط دح ماس دائرتي ا ب على
نقطتي ح ط فاقول انا اذا اخرجنا خط دح على استقامته ماس دائرة ا ايضا برهان
ذلك لنصل خطوط طح حه هط طد ولنخرج من نقطة د خطا موازيا لخط طه وهو
خط دك ولنصل طك كل فمن اجل ان خط كد مواز لخط طه تكون زاوية كدل مساوية
لزاوية طهد وزاوية [illegible] قائمة فهي مساوية لزاوية طدك لان خطي كد طه
متوازيان وزاوية دكل قائمة لانها في نصف دائرة فزاوية طدك اذن
مساوية لزاوية دكل فخطا لك دط اذن مستقيما وخطا دك ومن اجل ان المثلثات متشابهة
على ما تبين فيما تقدم تكون نسبة طح الى حه مثل نسبة حه الى هط ومثل نسبة هط
الى طد فنسبة دح الى هط مثل نسبة دح الى هط مثناه ولكن نسبة دح الى هط مثل
نسبة هط الى دك ونسبة دح الى حه كنسبة هط الى طد فنسبة هط اذن الى
كنسبة هط الى طد مثناه فنسبة طد الى دك مثل نسبة هط الى طد [illegible] وزاويتا
متساويتان فمثلث كدط مشابه لمثلث دطه فزاوية دكط مساوية لزاوية دطه
وهكذا زاوية حطه مساوية لزاوية طهد فزاوية حطه اذن مساوية لزاوية

طكد ومن اجل ان زاويتي كطح طحه معادلتين لقائمتين وزاوية كحد مساوية
لزاوية طحه تكون زوايا دكه دطح معادلتين لقائمتين لخط كط على استقامة خط هز
وايضا من اجل ان زاوية طكد مساوية لزاوية دكط تكون خط زكى مماسا لدايرة آ
لقلت ما قيل في المقالة الثالثة من كتاب اوقليدس الموسوم بالاسطقسات وقد تحصل
لنا مما بيناه انه اذا كانت دايرتان تماسان من خارجهما ومماسهما
جميعا خط واحد كخط طكى فان الخط المماس
يكون وسطا بين قطري الدايرتين
على توالي النسبة
وذلك انه يشابه المثلثات يكون
نسبة له الى كط كنسبة كط الى ده ::

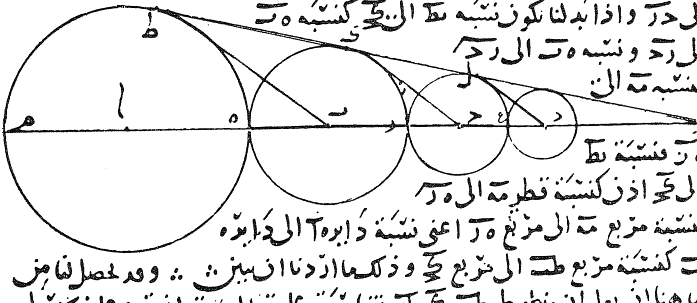


اذا كانت دواير متتالية مراكزها على خط واحد مستقيم واخرج
ذلك الخط وفرض على المخرج منه نقطة ما واخرج منها خط مستقيم يماس الدواير فان
نسب الدواير بعضها الى بعض كنسب مربعات الخطوط التي تماسها بعضها الى بعض فليكن
دواير متماسة على مركزي آب ولتكن مركزا آب على خط واحد مستقيم واخرج خط
آب ولتقطع على دايرة ب نقطة ه واخرج خطا يلقى خط آب ويماس دايرة ب على ح ودايرة
آ على ز فاقول ان نسبة دايرة آ الى دايرة ب مثل نسبة المربع الذي يكون من خط زد
المماس الى المربع الذي يكون من خط حد المماس برهانه لنصل زآ حب من اجل ان
كل واحدة من زاويتي آزد بحد قائمة يكون خط زآ موازيا لخط حب فنسبة زآ الى
حب اعني نسبة قطر دايرة آ الى قطر دايرة ب كنسبة زد المماس الى حد المماس فنسبة
مربع قطر دايرة آ الى مربع قطر دايرة ب اعني نسبة
دايرة آ الى دايرة ب كنسبة مربع خط زد
المماس الى مربع خط حد
المماس وذلك ما اردنا ان نبين :: اذا كانت

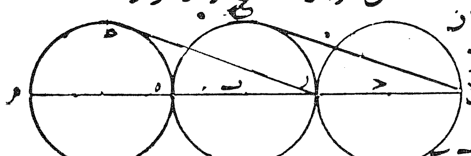


دواير متماسة مراكزها على خط واحد وهي متناسبة على توالبها
واخرج من مراكزها خطوط تماسها على ترتيب فان نسب الدواير بعضها الى بعض كنسب
مربعات الخطوط التي تماسها بعضها الى بعض فليفرض دواير متماسة على مراكز
آ ب ج د ولتكن مراكز آ ب ج د على خط واحد ولتكن متناسبة على توالبها واخرج من
نقطة [illegible] خطوط تماس دواير آ ب ج د على ترتيب وهي خطوط [illegible] دك
فاقول ان نسبة دايرة ب الى دايرة آ كنسبة مربع خط [illegible] الى مربع خط [illegible]
ونسبة دايرة ب الى دايرة ج كنسبة مربع خط حك الى مربع خط دك برهان ذلك
من اجل ان الدواير متناسبة على توالبها تكون نسبة قطر ب الى [illegible] مثل نسبة ه د الى

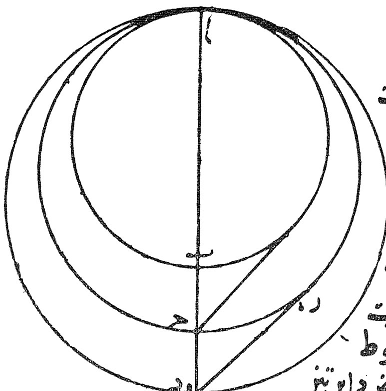
دح اعني مثل نسبة ه د الى د ح فاذا بدلنا تكون نسبة مه الى ه ب كنسبة ه ر الى ر ح
واذا ركبنا تكون نسبة مب الى به كنسبة ه ح الى ح د ولكن خط نط هو موسط بين
خطي مب به وخط كح هو موسط بين خطي ه ح ح د فنسبة نط الى كح اذن كنسبة كح
الى حد واذا بدلنا تكون نسبة نط الى كح كنسبة ه ب
الى ح د ونسبة ه ب الى ر د
كنسبة مه الى



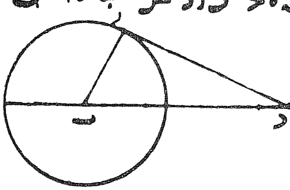
ه ر فنسبة نط
الى كح اذن كنسبة قطر مه الى ه ر
فنسبة مربع مه الى مربع ه ر اعني نسبة دائرة ا الى دائرة
ب كنسبة مربع طب الى مربع كح وذلك ما اردنا ان نبين :. وقد يحصل لنا من
ها هنا ان نعلم ان خطوط طب كح لد متناسبة على توالیها متوازية وعلى ذلك يسهل
ويقرب ماخذه اذا وصلنا بين نقط المماسة وبين المراكز فانه تحدث لنا مثلثات
قائمة الزوايا متشابهة في الخلقة والوضع واقول ان هذا بعينه يعرض اذا خرجت
الخطوط المماسة من اطراف الاقطار لا من المراكز كالذي هو مرسوم في هذه

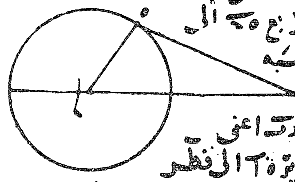


الصورة برهان ذلك من اجل ان
نسبة قطر مه الى ه ر كنسبة هر
الى رح فانا اذا ركبنا تكون نسبة
مر الى ره مثل نسبة ه ح الى حر
ولكن خط رط هو موسط بين خطي مر ره
وخط كح هو موسط بين خطي ه ح ح ر فنسبة طر الى كح مثل نسبة ه ر الى ر ح اعني
كنسبة مه الى ه ر فنسبة مربع مه الى مربع ه ر اعني نسبة دائرة ا الى دائرة ب كنسبة
مربع خط طر المماس الى مربع كح المماس وقد تبين ايضا بما تقدم ان هذه الخطوط ايضا
متوازية متناسبة على توالیها كما كانت :. اذا كانت دوائر تماس من داخل على نقطة
واحدة وكانت متناسبة على توالیها واخرج من اطراف اقطارها خطوط تماسها على
ترتيب فان نسب الدوائر بعضها الى بعض كنسبة مربعات الخطوط التي تماسها بعضها
الى بعض مثال ذلك لتعرض دوائر على اقطار اب اج اد ولتكن متناسبة على توالیها
ولتماس بعضها بعضا على نقطة ا وليخرج من نقطتي ج د خطين يماسان الدوائر وهما
خطا ح ه د ر فاقول ان نسبة دائرة اب الى دائرة اد كنسبة مربع خط ه ح
المماس الى مربع خط ر د المماس برهان ذلك من اجل ان نسبة د ا الى ا ج كنسبة ج ا
الى اب فانا اذا فصلنا وبدلنا كما بينا فيما تقدم تكون نسبة د ج الى ه ح كنسبة

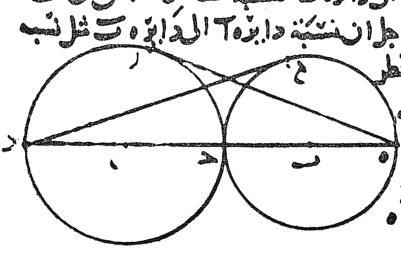


دا الى اب فنسبة مربع دا اذن الى
مربع دج كنسبة مربع ها الى المربع
اب اعني مثل نسبة دايرة حدا الى
دايرة هجب وذلك ما اردنا ان
نبين :: وبالجملة فانه اذا كانت دوائر
تماسها خطوط وتحيط مع الخطوط الخارجة
على مراكزها زوايا متساوية فان نسبة
الدواير بعضها الى بعض كنسب الخطوط
المماسة بعضها الى بعض مثاله لنفرض دايرتين
على مركزي اب ولنخرج على المركزين خطي اجد بد ولنخرج جه تماس دايرة ا ودز تماس
دايرة ب ولكن زاوية اجه مساوية لزاوية بدز فاقول ان نسبة دايرة ا الى
دايرة ب كنسبة مربع خط جه المماس الى مربع خط دز المماس برهان ذلك من اجل ان
مثلثي اهج بزد القائمي الزاوية متشابهان فان نسبة هج الى زد مثل نسبة اه الى



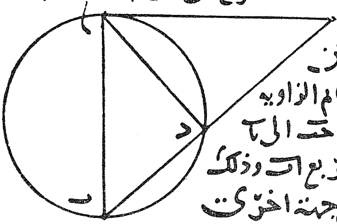


زب فنسبة مربع هج الى
مربع دز كنسبة
مربع خط اه الى
المربع خط زب اعني
نصف قطر دايرة ا الى قطر
دايرة ب اعني مثل نسبة دايرة ا الى دايرة ب وذلك ما اردنا ان نبين
اذا كانت دايرتان تتماسان واخرج من طرفي الخط الذي يمر على مركزيهما
وعلى نقطة المماسة خطان متقاطعان ويماس الدايرتين فان نسبة الدايرة
الى الدايرة مثل نسبة الخطين اللذين بين المتقاطعين الى المماسين مثال ذلك
نفرض دايرتين على مركزي اب ولتماسا على نقطة ج ولنخرج الخط الذي يمر على مركزيهما
وهو خط دجه ولنخرج من نقطتي د ه خطان متقاطعان ويماسان الدايرتين على
نقطتي زح فاقول ان نسبة دايرة ا الى الدايرة ب كنسبة خط دح المماس الى خط
هز المماس مثاله برهان ذلك من اجل ان نسبة دايرة ا الى الدايرة ب مثل نسبة

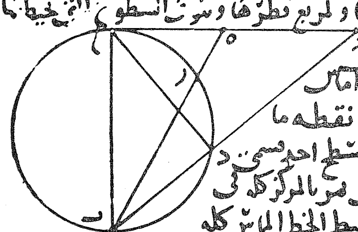


قطر دج الى قطر جه مثناه ونسبة قطر
دج الى قطر جه مثل نسبة مسطح هد في
دج الى مسطح ده في هج يكون نسبة
دايرة ا الى الدايرة ب كنسبة مسطح
هد في دج الى مسطح ده في هج مثناه

اعنى مثل نسبة مربع دج المماس الى مربع هز المماس وذلك ما اردنا ان نبين ∴
اذا كانت دايرة واخرج من احد طرفى قطرها خط مماسها واخرج من طرفه الاخر
خط يقطع الدايرة ويلقى الخط المماس فان مسطح الخط القاطع فى قسمه الذى فى داخل الدايرة
مساو لمربع القطر فلنفرض دايرة قطرها اب ولنخرج من نقطة ا خطا مماسها وهو
خط اج ولنوصل بدج فاقول ان

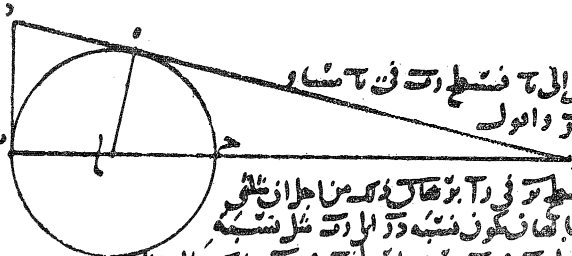


مسطح جب فى بد مساو لمربع اب برهان
ذلك لنصل اد فمن اجل ان مثلث جدا القايم الزاوية
مشابه لمثلث ادب القايم الزاوية يكون نسبة جب الى با
مثل نسبة با الى بد فمسطح جب فى بد مثل مربع اب وذلك
ما اردنا ان نبين ∴ برهان هذا الشكل على جهة اخرى
من اجل ان مربع جب اعنى مسطح جد فى جب مع مسطح جب فى بد مثل مربع جا مع مربع
اب ومسطح جد فى جب مثل مربع جا يكون مسطح جب فى بد الباقى مثل مربع اب الباقى
وذلك ما اردنا ان نبين ∴ برهان هذا الشكل على جهة اخرى من اجل ان مسطح جد
فى بد مساو لمربع اد فانا نجعل مربع دب مشتركا فيكون مربعا اد دب اعنى مربع
اب مساو لمسطح جد فى دب مع مربع دب اعنى مسطح جب فى بد وذلك ما اردنا
ان نبين ∴ وكذلك ايضا اذا اخرجنا خطوطا كم كانت مثل هز رب يكون مسطح الخط
كله فى قسمه الذى يقع داخل الدايرة مساو لمربع قطرها وسوى السطوح التى يحيط بها

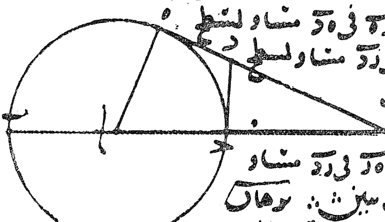


كل واحد من الخطوط المخرجة مع قسمه
الذى يقع داخل الدايرة متساوية ∴ اذا مال
خط دايرة من طرف قطرها وفرضت عليه نقطة ما
واخرج منها خط اخر مماس الدايرة فان مسطح احدهما سمى د
الخط المماس فى الاخر مثل مسطح الخط الذى يمر بالمركز كله فى
قسمه الذى من مركز الدايرة الى محيطها ومسطح الخط المماس كله
فى قسمه الذى بين نقطة الالتقا ونقطة المماسة مساو لمسطح الخط الذى يمر على المركز فى قسمه
الذى بين نقطة الالتقا ومركز الدايرة مثال ذلك لنفرض دايرة على مركز ا وقطرها بج
ولنخرج من نقطة ب خطا مماسا وهو خط بد ولنفرض على خط بد نقطة ما كيف ما وقع
وهى نقطة د وتخرج منها خطا اخر مماس الدايرة على نقطة ه وهو خط ده ويلقى
الخط الذى يمر بالمركز على نقطة ز فاقول ان مسطح زه فى زد مساو لمسطح زب فى
زا وان مسطح دز فى ده مساو لمسطح زب فى زا برهان ذلك لنصل اه فمن اجل ان
زاوية زها زاوية دبز القايمة من احدهما مساوية لزاوية زها القايمة من الاخر وزاوية
دزب مشتركة لهما يكون المثلثان متشابهين فنسبة دز الى زب اعنى الى زه مثل نسبة

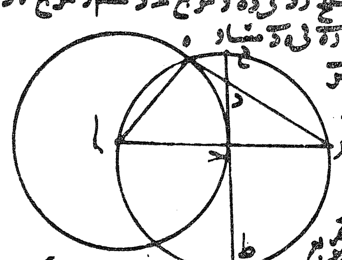
١٢٨



ده الى دح اعني الى اح فسطح زح في اح مساو
لسطح ده في هز واقول
ان سطح دز
في ده مساو لسطح زه في دا برهان ذلك من اجل ان مثلثي
دز و ها متشابهان تكون نسبة دز الى زه مثل نسبة
اد الى ده فسطح دز في ده مساو لسطح زه في دا وذلك ما اردنا
ان نبين . فان كان الخط المماس على طرف القطر لا مماس على نقطة ح لكن على نقطة
د مثل خط حد فان سطح ده في هز يكون مساويا لسطح اح في حد ~~وسطح هد~~
~~في حد يكون مساويا لسطح اح في حد~~ وسطح هز في زد يكون مساويا لسطح اه
في دز برهان ذلك من اجل ان مثلثي زها زحد متشابهان تكون نسبة زه الى هد



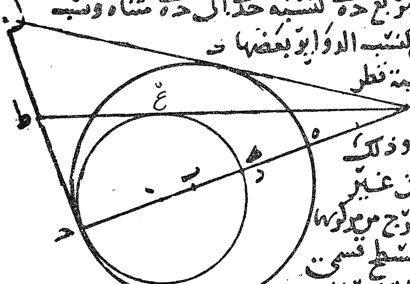
مثل زح الى حد اعني الى هد فسطح زه في هد مساو لسطح
اح في حز واقول ان سطح هز في زد مساو لسطح
اه في زح برهان ذلك من اجل ان
المثلثين متشابهان تكون نسبة هز
الى زا مثل نسبة حز الى زد فسطح هز في زد مساو
لسطح زا في زح وذلك ما اردنا ان نبين . برهان
هذا الشكل بطريق اخر . نرسم على مثلث ازه القائم الزاوية
دايرة زط فيكون خط از قطرها ولنخرج خط طح فمن اجل ان خط طح قد قسم نصفين
على نقطة ح و بقسمين مختلفين على نقطة د يكون سطح طد في دح مع مربع حد مساويا
لمربع طح ولكن سطح طد في دح مساو لسطح زد في ده ومربع حد مساو لمربع هد
فسطح زد في ده مع مربع هد اعني سطح زه في هد مساو



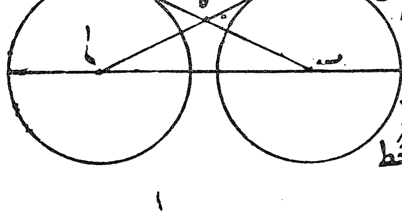
لمربع طح فمربع طح مساو لسطح اح في حز
فسطح اح في حز مساو لسطح زه في هد
وذلك ما اردنا ان نبين . وايضا
من اجل ان سطح هد في دز اعني سطح
هد في زد اقل من مربع طح اعني من سطح
اح في حز بمربع حد ومربع دز اعظم من مربع
زح بمثل مربع حد فان سطح هد في دز مع مربع زد اعني سطح هز في زد مساو
لسطح اح في حز مع مربع هح اعني سطح اه في زح وذلك ما اردنا ان نبين
اذا كان دايرتان تتماسان من داخلهما واخرج خط مماس لهما ويحيط مع الخط الذي
يجوز على نقطة المماسة و نقطتي المركز زاوية قائمة وفرض على الخط الذي هو على

ما

المركزين نقطة ما واخرج منها خطان آخران مماسان الدائرة وملقيان الخط الاخر
المماس فان نسبة الدائرة العظمى الى الدائرة الصغرى مثل نسبة السطح الذي يحيط به
قسما الخط الذي يماس الدائرة العظمى الى السطح الذي يحيط به قسما الخط الذي يماس الدائرة
الصغرى مثناه مثاله لنفرض الدائرة التي على مركز ا تماس الدائرة التي على مركز ب
من داخل على نقطة ج ونخرج على نقطة المماسة والمركزين خط ج ه د ونقطر دائرة ا خط
ج د وقطر دائرة ب خط ج ه ولنخرج من نقطة د خطي د ع ط د ك ل مماسان الدائرة
على نقطتي ع ك فاقول ان نسبة دائرة ا الى دائرة ب كنسبة سطح د ع في ع ط
الى سطح د ك في ك ل مثناه برهان ذلك من اجل ان نسبة خط د ا الى ج ب كنسبة
سطح ا ج في د ا الى سطح ا ج في ج ب وسطح ا ج في د ا مساو لسطح د ك في ك ل
كما بينا في الشكل الذي قبل هذا يكون نسبة د ا الى ج ب مثل نسبة سطح د ع في ع ط
الى سطح د ك في ك ل ولكن نسبة د ا الى ج ب كنسبة مثلي د ا الى مثلي ج ب اعني مثل نسبة
قطر ج د الى قطر ج ه ويكون نسبة قطر ج د الى قطر ج ه كنسبة سطح د ع في ع ط الى
سطح د ك في ك ل ونسبة مربع ج د الى مربع ج ه كنسبة ج د الى ج ه مثناه ونسب
مربعات اقطار الدوائر بعضها الى بعض كنسب الدوائر بعضها



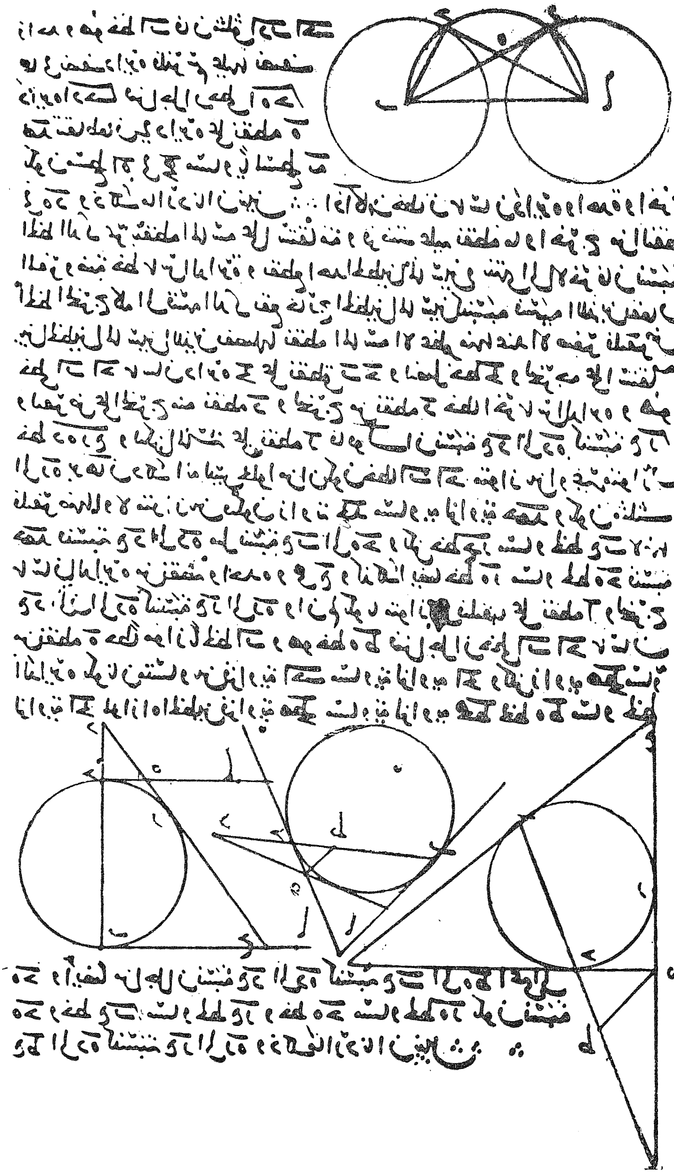
الى بعض فنسبة دائرة ا الى دائرة ب كنسبة قطر
ج د الى قطر ج ه مثناه اعني مثل نسبة سطح
د ع في ع ط الى سطح د ك في ك ل مثناه وذلك
ما اردنا ان نبين . اذا كان دائرتان غير
متقاطعتين مركزاهما على خط واحد واخرج من مركزيهما
خطان متقاطعان مماسان الدائرتين فان سطح قسمي
احد الخطين المماسين مساو لسطح قسمي الخط الآخر المماس
مثاله لنفرض دائرتين غير متقاطعتين مركزاهما وهما نقطتا ا ب على خط واحد
وهو ا ب ولنخرج من مركزي ا ب خطي ا ح ب د مماسان الدائرتين على نقطتي د ح
وتقاطعان على نقطة ه فاقول ان سطح ا ه في ه ح مساو لسطح ب ه في ه د برهان
ذلك انا نصل د ا ح ب من اجل ان مثلثي ا ه د ح ه ب القائمي الزوايا متشابهان يكون نسبة
ب ه الى ه د مثل نسبة ا ه الى ه ح وسطح
ا ه في ه ح مساو لسطح ب ه في ه د
وذلك ما اردنا ان نبين



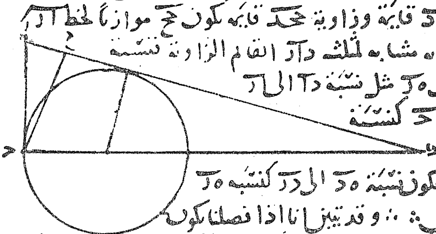
برهان هذا الشكل بطريق اخر من
اجل ان كل واحدة من زاويتي ا د ب
ا ح ب قائمة ومثلثا ا د ب ا ح ب على خط

١

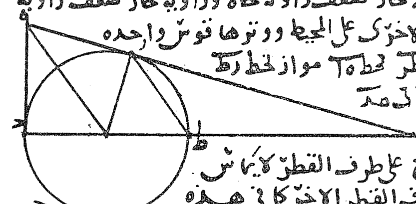
٥٩



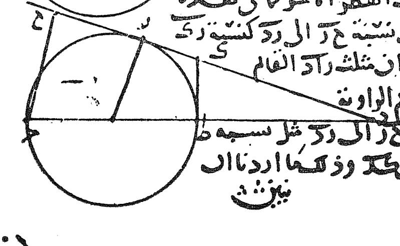
اذا كان خط ماس دايرة على طرف قطرها واخرج القطر على استقامة وفرضت عليه
نقطة ما واخرج منها خط اخر ماس الدايرة ويلقى الخط الذي هو عمود على القطر
واخرج من نقطة ماسة طرف القطر الى الخط المخرج عمود عليه فان نسبة الخط
المخرج كله الى قسمه الذي بين النقطة المفروضة وبين الخط القائم على القطر الى نسبة قسمه
الذي بين نقطة المماسة والنقطة التي وقع عليها العمود مثال ذلك لنفرض دايرة على
مركز ا ولكن قطرها خط ح ا ط ولنخرج على القطر عمودا ماس الدايرة وهو خط ح ه
ولنخرج خط ح ط ولنفرض على المخرج منه نقطة ما وهي نقطة د ولنخرج من نقطة
د خطا ماس الدايرة على نقطة ز وهو خط د ز ه ولنخرج من نقطة ح عمودا على
خط د ه وهو خط ح ح فاقول ان نسبة د ه الى د ز كنسبة ه ز الى ز ح برهان ذلك
لنصل ا ز فمن اجل ان زاوية ا ز د قايمة وزاوية ح ح د قايمة يكون ح ح موازيا لخط ا ز



ويكون مثلث د ح ح القايم الزاوية مشابه لمثلث د ا ز القايم الزاوية فنسبة
د ه الى ه ح اعني نسبة د ه الى ه ز مثل نسبة د ا الى ا ز
اعني الى ا ح لكن نسبة د ا الى ا ح كنسبة
د ز الى ز ح فنسبة د ه الى ه ز
كنسبة د ز الى ز ح واذا بدلنا يكون نسبة ه د الى د ز كنسبة ه ز
الى ز ح وذلك ما اردنا ان نبين وقد تبين انا اذا فصلنا يكون
نسبة ه ز الى ز د كنسبة ه ح الى ح ز وعلى هذا الوضع اقول ان نسبة ه ز الى
ز د كنسبة ا ط الى الخارج من المركز الى ط د برهانه لنصل خطي ح ه ز ط فمن اجل ان
خط ح ه مساو لخط ه ز وخط ا ح مساو لخط ا ز والقاعدة واحدة للمثلثين يكون زاوية
ح ا ه مساوية لزاوية ز ا ه فزاوية ح ا ز ضعف زاوية ح ا ه وزاوية ح ا ز ضعف زاوية



ح ط ز لان احدهما على المركز والاخرى على المحيط ووترهما قوس واحدة
فزاوية ح ا ه مساوية لزاوية ح ط ز فخط ه ا مواز لخط ز ط
فنسبة ه ز الى ز د كنسبة ا ط الى ط د
وذلك ما اردنا ان نبين
فان كان الخط المماس الذي يخرج على طرف القطر لا يماس
الدايرة على نقطة ح لكن على طرف القطر الاخر كما في هذه

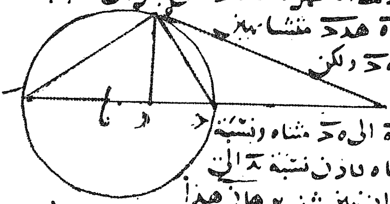


الصورة مثل خط ط ك اقول ان نسبة ح ز الى ز د كنسبة ز ك
الى ك د برهان ذلك من اجل ان مثلث ز ا د القايم
الزاوية مشابه لمثلث ط ك د القايم الزاوية
يكون نسبة ز ا الى ا د اعني نسبة ح ز الى ز د مثل نسبة
ك ط الى ط د اعني مثل نسبة ز ك الى ك د وذلك ما اردنا ان
نبين

١٠١

١٤٠

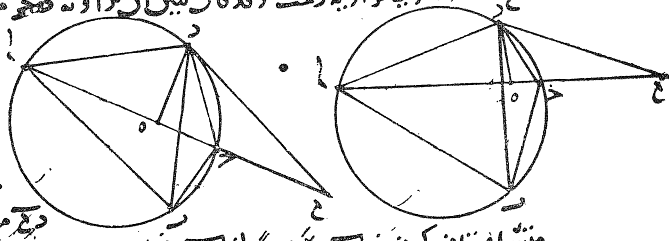
اذا اخرج قطر دايرة على استقامة وفرض على المخرج منه نقطة ما واخرج منها
خط ماس الدايرة واخرج من نقطة المماسة عمود على القطر فان نسبة الخط المخرج
على المركز كله الى قسمه الذي وقع خارج الدايرة كنسبة قسمي القطر اللذين فصلهما
العمود الاعظم منهما عند الاصغر :. فلنفرض دايرة على مركز ا وقطرها خط جه
ولنخرجه على استقامة ولنعلم على المخرج منه نقطة د ولنخرج منها خطا ماسا للدايرة
على نقطة ه ولنخرج من نقطة ه عمودا على خط جه وهو هز فاقول ان نسبة
بد الى دج كنسبة بز الى زج برهان ذلك انا نصل ه ب ه ج فمن اجل ان نسبة بد
الى ده كنسبة ده الى دج لكون مثلثي بده هدج متشابهين



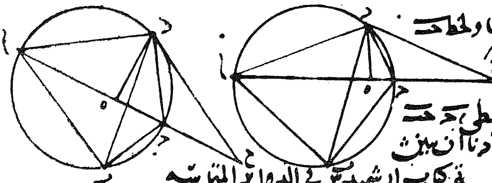
ويكون نسبة بد الى ده كنسبة به الى هج ولكن
نسبة بد الى دج كنسبة بد الى ده
مثناة فنسبة بد الى دج اذن كنسبة به الى هج مثناة ونسبة
بز الى زج هي ايضا كنسبة به الى هج مثناة فاذن نسبة بد الى
دج كنسبة بز الى زج وذلك ما اردنا ان نبين :. برهان هذا
الشكل بطريق اخر :. لنخرج على خط بد خطي بح دط محيطين معه بزاوية قائمة ونتمهما
الى خط هز ونكون خطوط بح زه دط متوازية فمن اجل ان نسبة بد الى دج كنسبة
بح الى حط اعني مثل نسبة حه الى هط ونسبة حه الى هط كنسبة بز الى زج يكون
نسبة بد الى دج كنسبة بز الى زج وذلك ما اردنا ان
نبين :. فاذا انحنا في قطعة من دايرة خط يوتر
قوسين مختلفتين واخرج من نقطة تنصيف القطعة
بنصفين عمود على الخط الاعظم من قسمي الخط المنحني فان العمود يقسم الخط المنحني بنصفين
فلنفرض قطعة من دايرة على قاعدة اب ولنحن فيها خط احب على نقطة ح وليكن
خط اح اعظم من خط حب ولنقسم محيط قوس اب بنصفين على نقطة د ولنخرج
منها عمودا على خط اح وهو خط ده فاقول ان خط اح قد انقسم بنصفين على نقطة
ه اعني ان خط اه مساو لخطي هح حب برهان ذلك لنفصل من قوس اد العظمى قوسا
مساوية لقوس دب الصغرى وهي قوس دز ولنصل اد دز زب وانفصل من خط اه
الاعظم خطا مساويا لخط هح وهو خط هز ولنصل دز فمن اجل ان خط هد عمود
مشترك يكون دز مساويا لدح وكذلك دب فتكون الخطوط الثلثة متساوية ومن اجل ان
نسبة قوس اد الى قوس دز كنسبة زاوية ادح الى زاوية احد ونسبة قوس دب الى
قوس دز مثل نسبة زاوية دحز الى زاوية احد يكون نسبة قوسي

اد دز جميعا الى قوس احد كنسبة زاويتي دحا ادح الى
زاوية احد وقوسا اد دز مساويتان لقوس احد فزاويتا

ج د ا ا د ج جميعا معا وبيان لزاوية ا ح د اعني لزاوية د ز ه ولكن زاوية د ز ه مساوية
لزاويتي ز ا د ز د ا فزاويتا ج د ا ج ا د اذن مساويتان لزاويتي ز ا د ز د ا وزاوية
ج د ا مساوية لزاوية ز ا د فزاوية ج د ا الباقية مساوية لزاوية ز د ا الباقية ومن اجل
ان خطي د ز د ج متساويان وخط د ا مشترك والزاويتان متساويتان تكون قاعدة
ا ز مساوية لقاعدة ا ج ولكن خط ا ج مساو لخط ح ب وخط ه ز مساو لخط ه د فمجموع
ا ه اذن مساو لخطي ه د ح ب وذلك ما اردنا ان نبين . برهان هذا الشكل
بعمل اخر لترسم الصورة على ما في المقدمة ولتتم دائرة ا ب د ولنخرج خط ا د على
استقامة ولنفرض خط ه ج مساويا لخط ه ا ولنصل خطوط ح د د ب ب ا ا ح فمن اجل
ان قوس ا د مساوية لقوس د ح ب تكون وتر ا د مساويا لوتر د ب وخط د ج مساو
لخط ا د فخط د ج مساو لخط د ب ومن اجل ان زاوية د ا ح مساوية لزاوية د ب ح
لانهما على قوس واحدة وزاوية د ج ه مساوية لزاوية د ا ه تكون زاوية د ج ه مساوية
لزاوية د ب ح وايضا من اجل ان قوس د ا ب مساوية لجميع قوسي د ح ب د ا ولكن
زاوية د ح ب هي على قوس د ا ب وزاويتا د ا ح ا د ح جميعا هما على قوسي د ح ب د ا
اما زاوية د ا ح فعلى قوس د ح واما زاوية ا د ح فعلى قوس ح ب ا فزاويتا د ا ح
ا د ح مساويتان لزاوية د ح ب وزاوية د ج ح مساوية لزاويتي د ا ح ا د ح فزاوية
د ج ح اذا مساوية لزاوية د ح ب وقد كان بين ان زاوية د ج ح مساوية لزاوية د ب ح
فزاوية ح د ج الباقية
مساوية لزاوية
د ح ب الباقية ومن
اجل ان خط د ج
مساو لخط د ب وخط
د ح مشترك والزاويتان



متساويتان يكون خط ح ج مساويا لخط ح ب فخطا ه د ح ب مساويان لخطي ه د ه ج
اعني خط ا ه وذلك ما اردنا ان نبين . برهان هذا الشكل بعمل اخر لتثبت الصورة
على حالها ونقول من اجل ان قوس د ح ب اقل من نصف دائرة تكون الزاوية التي تقع
فيها وهي زاوية د ح ب منفرجة وايضا من اجل ان قوس د ا ب اعظم من نصف دائرة
تكون الزاوية التي تقع فيها وهي زاوية د ح ا حادة فزاوية د ح ج منفرجة فزاويتا
د ح ب د ح ج منفرجتان وزاوية د ج ح مساوية لزاوية د ب ح وخط د ب مساو لخط د ج
وخط د ح مشترك فمثلثا د ح ج د ح ب زاوية من احدهما وهي زاوية ج مساوية لزاوية
من الاخر وهي زاوية ب والاضلاع التي تحيط بزاويتين اخريين متناسبة والزاويتان
الباقيتان وهما زاويتا د ح ج د ح ب كل واحدة منهما اعظم من قائمة فالزوايا الباقية متساوية

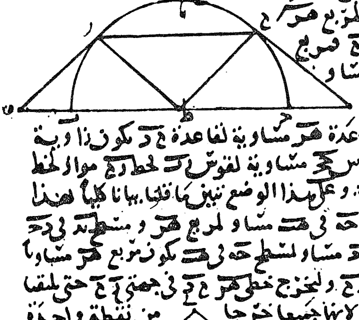

١٤١

فخط حج مساو لخط حب
فكل خط ه ح
أعني خط ح
اه مساو لخطي دح حب
وذلك ما أردنا أن نبين
تم كتاب ارشميدس في الدوائر المتماسة
والحمد لله وحده وصلواته على سيدنا محمد وآله
بسم الله الرحمن الرحيم

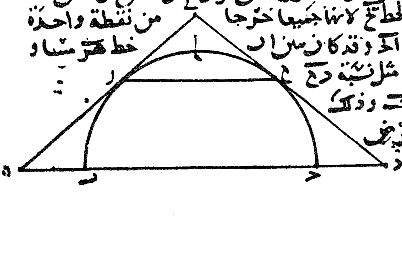
٢٧

ΤΟ ΑΡΑΒΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΣ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

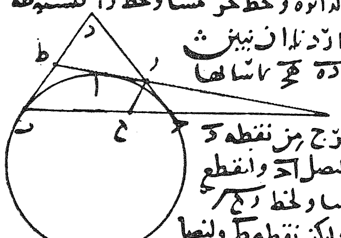
كتاب ارشميدس في الاصول الهندسية نقله من اللغة اليونانية
الى اللغة العربية ابو الحسن علي بن يحيى مولى امير المومنين ثابت بن قره
لنفرض نصف دايره ا ب ج ولنخرج خط ب ج على استقامة في كلتي الجهتين الى نقطتي د ه
ولنفرض خطي ب ه ج د متساويين ولنخرج من نقطتي د ه خطين يماسان نصف دايره
ا ب ج وهما خطا ه ر د ح ولنصل ر ح فاقول ان خط ر ح موازٍ لخط ه د برهان ذلك
لنستخرج مركز دايره ا ب ج وليكن نقطة ط ولنصل ر ط ط ح فمن اجل ان خط ه ب مساو
لخط ج د وخط ب ج مشترك يكون جميع خط ه ج مساويا لجميع خط ب د وخط ه ب مساو
لخط ج د فسطح ج ه في ه ب مساو لمربع ه ر



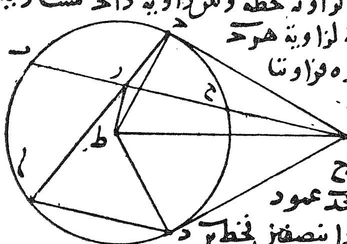
وسطح ب د في د ج مساو لمربع د ح فمربع
ه ر مساو لمربع د ح فخط د ح مساو
لخط ه ر ومن اجل ان خطي ح ط د
ط ر مساويان لخطي ر ط ط ه وقاعدة ه ر مساوية لقاعدة ح د يكون زاوية
ر ط ه مساوية لزاوية ح ط د فقوس ر ب مساوية لقوس ح ج فخط ر ح موازٍ لخط
ه د وذلك ما اردنا ان نبين ∴ وعلى هذا الوضع نبين ما قلنا بها انا كلما عملنا هذا
العمل انا نقول من اجل ان سطح ج ه في ه ب مساو لمربع ه ر وسطح ب د في د ج
مساو لمربع د ح وسطح ب د في د ج مساو لسطح ج ه في ه ب يكون مربع ه ر مساويا
لمربع د ح وخط ه ر مساويا لخط د ح ولنخرج خطي ه ر د ح في جهتي ر ح حتى يلتقيا
على نقطة ك فخط ك ر مساو لخط ك ح لانهما جميعا خرجا من نقطة واحدة
وهي نقطة ك يماسان دايره ا ب ج وقد كان تبين ان خط ه ر مساو
لخط د ح فنسبة ه ر الى ر ك مثل نسبة د ح
الى ح ك فخط ح ر موازٍ لخط ه د وذلك
ما اردنا ان نبين ∴ ولنفرض
دايره عليها ا ب ج وليكن خط د



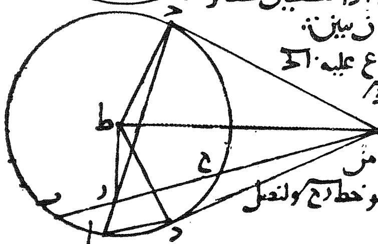
دب بد مماسان فلنصل بح ولنخرجه على استقامة الى نقطة ه ولنخرج
من نقطة ه خطا مماسا لدائرة اجد ويلقى خط دب على نقطة ط وهو خط هح
فاقول ان نسبة هط الى هح كنسبة طا الى اب برهانه لنخرج من نقطة
ب خطا موازيا لخط طب وهو بح فنسبة بد الى دح كنسبة هب الى بح ولكن
خط بد مساو لخط دح لخط هب مساو لخط بح ومن اجل ان نسبة طه الى هح
كنسبة طب الى بح وبح مساو لبح تكون نسبة طه الى هح كنسبة طب الى بح
ولكن طب مساو لخط طا لانهما مماسان للدائرة وخط هح مساو لخط با فنسبة طه
الى هح مثل نسبة طا الى اب وذلك ما اردنا ان نبين



لنفرض دائرة عليها اجد ولكن خطا ده هح مماسا لها
ولنخرج من نقطة ه خطا يقطع
الدائرة كيف وقع وهو خط هب ولنخرج من نقطة د د
خطا موازيا لخط هب وهو خط دا ولنصل اح وانقطع
خط اح على نقطة ز فاقول ان بز مساو لخط زح
برهان ذلك لنستخرج مركز الدائرة وليكن نقطة ط ولنصل
طز طه طد طح فمن اجل ان خط طد مساو لخط طح وخط طه مشترك يكون خط
طح طه مساويا لخطي هط طد وقاعدة مساوية لقاعدة فزاوية حطه
مساوية لزاوية هطد فزاوية دطح ضعف زاوية حطه وزاوية دطح ضعف
زاوية حاد فزاوية داح مساوية لزاوية حطه ولكن زاوية داح مساوية
لزاوية هزح فزاوية هطح مساوية لزاوية هزح

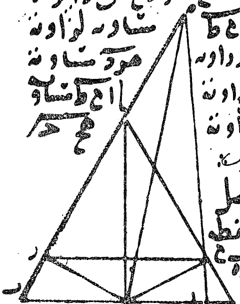


فذو الاربعة اضلاع هحزط في دائرة فزاويتا
هحط هزط متساويتان وزاوية
هحط قائمة فزاوية هزط قائمة ا
فخط طز عمود على خط بح وقد خرج
من نقطة ط التي هي مركز دائرة اجد عمود
على خط بح وهو طز فقد قسمه اذا بنصفين فخط بز
مساو لخط زح وذلك ما اردنا ان نبين

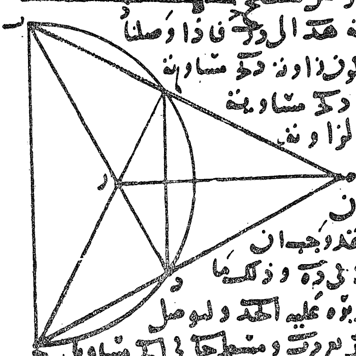


لنفرض مثلثا متساوي الاضلاع عليه اجد ه
ولنخرج خط اد عمودا على خط جد
ولنجعل مربع دب مساويا للسطح
هب في بز ولنصل دز ولنخرج من
نقطة ز خطا موازيا لخط جد وهو خط زح ولنعمل

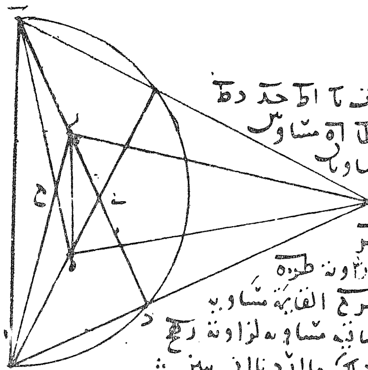
هج فاقول ان زاوية هجح ضعف زاوية ادح برهان ذلك لنصل دج ده فمن
اجل ان سطح هب في بح مساو لمربع دب تكون زاوية ددب مساوية لزاوية
دهح وزاوية ددب مساوية لزاوية ج دح فزاوية دهح مساوية لزاوية ج دح
ولكن زاوية ج دح مساوية لزاوية دجح لان مثلث ج دح يكون متساوي الساقين
فزاوية دهح مساوية لزاوية دجح فذو الاربعة اضلاع هدجح في دائرة
ولنخرج خط هج على استقامة الى نقطة ط فزاوية دجط مساوية لزاوية
هحد لانها خارجة عن ذي الاربعة اضلاع هدجح وزاوية هحد مساوية
لزاوية اجد فزاوية اجط ضعف زاوية اجد ولكن زاوية اجط مساوية
لزاوية هجح وزاوية اجد مساوية لزاوية ادح فزاوية هجح
ضعف زاوية ادح وذلك ما اردنا ان نبين



لنفرض نصف دائرة عليه ابجد ولنصل اجد بد ولنصل و
ايضا باحد ولنخرجها على استقامة حتى يلتقيا على نقطة
ب فاقول ان سطح بد في در مساو لسطح حد في ده
برهان ذلك انه اذا كان سطح بد في در مثل سطح
حد في ده يكون نسبة بد الى دح مثل نسبة هد الى در فاذا وصلنا
هر يكون مثلثا بدح هدر متشابهين ويكون زاوية دهر مساوية
لزاوية دحب واذا وصلنا دك كانت زاوية دكا مساوية
لزاوية حاد فيكون زاوية دار مساوية لزاوية
دهر فيجب ان يكون ذو الاربعة اضلاع
هادر في دائرة ومن البين انه في دائرة لان
كل واحدة من زاويتي هار رده قائمة فقد وجب ان
يكون سطح بد في در مساويا لسطح حد في ده وذلك ما
اردنا ان نبين لنفرض نصف دائرة عليه ابجد ولنوصل ز



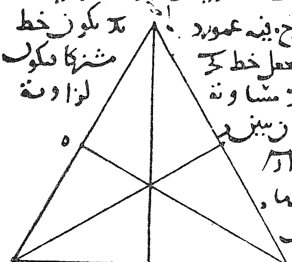
اجد بد ولكن سطح بد في دب مساويا لمربع دب ومسطحا في اه مساويا
لمربع اه ولنصل حب بد فاقول ان خط دج مساو لخط جه برهان ذلك
لنصل باحد ولنخرجها على استقامة حتى يلتقيا على نقطة ك فسطح بد في دك
مساو لسطح حد في ده كما قد تبين فيما تقدم وسطح ها في اه مساو لسطح [illegible]
[illegible] مربع اه وسطح حد في ده مساو لمربع دك وزاويتا
هدر طاه كل واحدة منهما قائمة فاذا وصلنا دك طك كل واحدة من زاويتي
[illegible] قائمة ومن اجل ان سطح بد في دط مساو لسطح حد في ده وسطح
[illegible] مساو لسطح با في اط مع مربع اه وسطح حد في ده مساو [illegible]



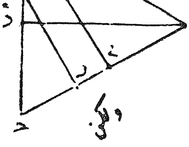
حد في دط مع مربع طد ومربعات با اط حد دط
مساوية لمربعي ج دز يكون مربعا طا اه مساوين
لمربعي طد دز ولكن مربعي طا اه مساويان
لمربع طه لان زاوية طاه قائمة فمربع
مربع طز مساويا لمربع طه فخط طز
مساو لخط طه فاذا وصلنا ده يكون زاوية طزه
مساوية لزاوية طهز ولكن زاوية طزح القايمة مساوية
لزاوية طهح القايمة فزاوية ح زه الباقية مساوية لزاوية زهح
الباقية فخط ح ز مساو لخط ح ه وذلك ما اردنا ان نبين ح

لنفرض مثلثا متساوي الاضلاع عليه احد ولنخرج فيه اعمدة بد حه اا فاقول
ان اعمدة بد حه از متساوية برهان ذلك من اجل ان مثلث احد متساوي الساقين
وقد اخرج فيه عمود از يكون خط بز مساويا لخط زد وايضا من اجل ان مثلث حدا
متساوي الساقين وقد اخرج فيه عمود حه يكون خط اه مساويا لخط هد فخط
حز مساو لخط اه ونجعل خط اد مشتركا فيكون خطا ها اد مساويين لخطي اد دز
وزاوية حاه مساوية لزاوية احز فقاعدة از مساوية لقاعدة حه وايضا من

ىد يكون خط
مشتركا يكون
لزاوية



اجل ان مثلث حد متساوي الساقين وقد اخرج فيه عمود بد
اد مساويا لخط ده فخط هد مساو لخط حد ونجعل خط حد
خطا هد حد مساوين لخطي اد حد وزاوية حد مساوية
حه فقاعدة بد مساوية لقاعدة حه وقد كان تبين
ان خط حز مساو لخط اه فخط از لخط بد مساو لخط از
فخطوط حز اه بد الثلثة متساوية وذلك ما
اردنا ان نبين ط لنفرض مثلثا متساوي
الاضلاع عليه احد ولنخرج فيه عمود اد
ولنعلم على خط بد نقطة كيف ما وقعت وهي نقطة ه ولنخرج من نقطة ه الى
خطي حا اد عمودين زه هط اره هح فاقول ان خط اد مساو لخطي زه هح
برهان ذلك لنخرج من نقطة ه خطا موازيا لاد وهو خط هك ولنخرج من نقطة
ح خطا يكون عمودا على خط اد وهو خط ىى فمن اجل ان مثلث احد متساوي
الاضلاع وخط احد مواز لخط طه يكون مثلث بطه متساوي الاضلاع

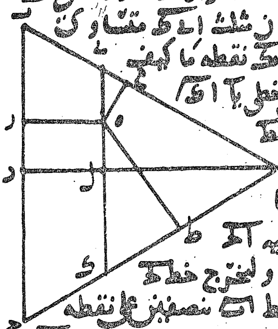


ومن اجل ان خط ىى عمود على خط اد وخط اد مواز لخط طه يكون خط
ىى عمودا على خط طه وخط ىى مساو لخط هز لان سطح
كهزى متوازي الاضلاع فجميع خط ىى مساو لخطي هح هز

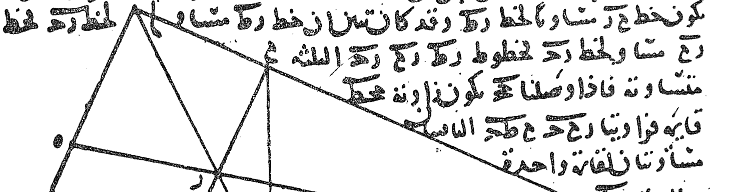
ولكن

١٤٣'

ولكن خط به مساو لخط اد فخط اد مساو لخطى هز هح وذلك ما اردنا ان نبين
ليكن مثلثا متساوى الاضلاع عليه ابج ولنخرج فيه عمود اد ولنعلم فى داخله ي
نقطه كيف وقعت وهى نقطة ه ولنخرج منها الى اضلاع المثلث اعمده وهى خطوط
ده هح هط فاقول ان خط اد مساو لخطوط هز هح هط برهان ذلك لنخرج على
نقطة ه خطا موازيا لخط بج وهو خط كهل. فمن اجل ان خط كل مواز لخط
بج وخط هح مواز لخط دك يكون سطح هح متوازى الاضلاع ومن اجل ان مثلث ابج
متساوى الاضلاع وقد اخرج فيه عمود اد وخط كل مواز لقاعدة وهو خط
بج يكون مثلث اكل متساوى الاضلاع ومن اجل ان مثلث اكل متساوى
الاضلاع وقد اخرج فيه عمود اك ونعلم على خط كل نقطة ما كيف

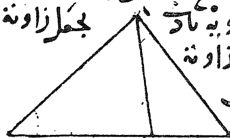


وقعت وهى نقطة ه واخرج منها عمودان على خطى اك ال
وهما خطا هز هط يكون خط اك مساويا لخطى هز هط
وقد كان تبين ان خط كد مساو لخط هح فخط اد
اذا هو مساو لخطوط هح هز هط وذلك ما اردنا
ان نبين ∴ ليكن مثلثا متساوى الساقين عليه ابج يا
ولنخرج من نقطة ا عمودا على خط بج وهو اد ولنخرج خط اد
على استقامة حتى يلقى خط اد على نقطة د ولنقسم خط اب بنصفين على نقطة
ه ولنصل هد ولنخرج من نقطة د خطا موازيا لخط اب وهو خط دح فاقول
ان سطح دا فى اح مساو لمربع اد برهان ذلك لنخرج دح على استقامة الى النقطة
ط فمن اجل ان مثلث ابج متساوى الساقين وخط دط مواز لخط اب يكون خط دط
مساويا لخط بد وايضا من اجل ان خط اه مساو لخط هب وخط هد مواز لخط دح
يكون خط جد مساويا لخط دح وقد كان تبين ان خط دط مساو لخط دح فخط
دج مساو لخط دح فخطوط دط دج دح الثلثة
متساوية فاذا وصلنا طج يكون زاوية طجح
قائمة فزاويتا دجح دحج ... الاساس
مساويتان لقائمة واحدة
وزاوية دطج

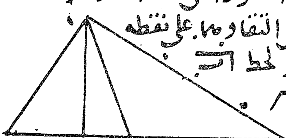


مساوية لزاوية اجد لان زاوية اجد مع زاوية دجح مساويتان لقائمة واحدة وزاوية اجد
مع زاوية ادب مساويتان لقائمة واحدة فزاوية ادب مساوية لزاوية دجح و
زاوية دجح مساوية لزاوية دحج فزاوية ادب مساوية لزاوية دحج فسطح

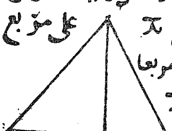
دا فى اج مساو لمربع اد وذلك ما اردنا ان نبين :. لنفرض مثلثا عليه احـ يب
ولنخرج من نقطة ا الى خط بج خطا يحيط مع اب بزاوية مساوية لزاوية احب وهو
خط اد فزاوية باد مساوية لزاوية احد فاقول ان مسطح حب فى بد مساو لمربع
اب برهان ذلك من اجل ان زاوية احب مساوية لزاوية باد يجعل زاوية



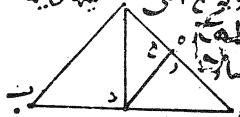
اب مشتركة لمثلثى احب ابد تكون زاوية بدا الباقية مثل زاوية
باح فمثلثا احب ابد متساويا الزوايا فهما اذا متشابهان
فنسبة حب الى با مثل نسبة اب الى بد فمسطح حب
فى بد مساو لمربع اب وذلك ما اردنا ان نبين :. لنفرض مثلثا متساوى يج
الساقين عليه احب ولكن ساقاه المتساويان خطى اب اح ولنخرج من نقطة ا
خطا يكون عمودا على خط بح وهو خط اد فاقول ان مسطح دح فى حب مرتين
مساو لمربع اح برهان ذلك لنخرج من نقطة ا عمودا على خط اح وهو خط اه
ولنخرج خط حب على استقامة حتى يلقى خط اه ولكن التقاؤهما على نقطة



ه فمن اجل ان زاوية هاح قائمة وخط حب مساو لخط اب
تكون خطوط هب بح با الثلثة متساوية لخط هح
ضعف خط حب فمسطح هح فى حد مساو لمربع
حا لان زاوية هاح قائمة وخط دا عمود على خط هح فمسطح دح فى حب مرتين مساو
لمربع اح وذلك ما اردنا ان نبين :. لنفرض مثلثا عليه احـد ولنخرج من نقطة يد
ا الى خط بح عمود اد فاقول ان زيادة مربع بد على مربع دح مثل زيادة مربع
با على مربع اح برهان ذلك من اجل انه اذا زيد على زيادة مربع بد



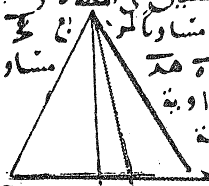
دح مربع اد كانت مثل زيادة مربعى بد دا على مربعى اد دح ومربعا
بد دا مساويان لمربع اب ومربعا اد دح مساويان لمربع اح
تكون زيادة مربع بد على مربع دح مثل زيادة مربع با على مربع
اح وذلك ما اردنا ان نبين :. لنفرض مثلثا قائم الزاوية عليه احب ولكن زاوية يه
القائمة زاوية ا ولنقسم بح بنصفين على نقطة د ولنصل اد فاقول ان خطوط
اد بد دح متساوية برهان ذلك لنخرج من نقطة د خطا موازيا لخط اب
وهو خط ده فمن اجل ان خط بد مساو لخط دح وخط ده موازٍ لخط اب تكون
خط اه مساويا لخط هح وزاوية باح قد فرضت قائمة فزاوية ه التى تليها قائمة



وكذلك زاوية ه ومن اجل ان خط اه مساو لخط هح وخط هد
مشترك وزاوية ه مساوية لزاوية ه تكون قاعدة اد مساوية
لقاعدة دح ولكن خط دح مساو لخط دب فخطوط
اد بد دح الثلثة متساوية وذلك ما اردنا ان نبين :. لنفرض مثلثا يو

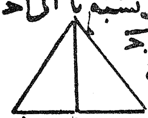
متساوى

متساوي الساقين عليه ا ب ج ولنخرج من نقطة ا الى خط ب ج خط كيف ما وقع وهو خط
ا د فاقول ان مسطح ب د في د ج مع مربع د ا مساو لمربع ا ج برهان ذلك انا نخرج من
نقطة ا الى خط ب ج عمود ا ه فمن اجل ان خط ب ج قد قسم بنصفين على نقطة ه وبقسمين
مختلفين على نقطة د يكون مسطح ب د في د ج مع مربع ه د مساويا لمربع ه ج

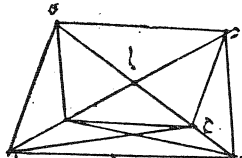


ولنجعل مربع ا ه مشتركا فيكون مسطح ب د في د ج مع مربعي ا ه ه د مساو
لمربعي ا ه ه ج ولكن مربعي ا ه ه د مساويان لمربع ا د لان زاوية
ا ه د قائمة ومربعا ا ه ه ج مساويان لمربع ا ج لان زاوية
ا ه ج قائمة فمسطح ب د في د ج مع مربع د ا مساو لمربع ا ج
وذلك ما اردنا ان نبين :: لنفرض مثلثا متساوي الساقين عليه ا ب ج ولنخرج
من نقطة ا خطين وهما خطا ا د ا ه ولكن نسبة مسطح ب د في د ج الى مربع د ا مثل نسبة
مسطح ب ه في ه ج الى مربع ه ا فاقول ان خط د ا مساو لخط ا ه برهان ذلك من
اجل ان نسبة مسطح ب د في د ج الى مربع ا د مثل نسبة مسطح ب ه في ه ج الى المربع
ا ه فانا اذا ركبنا كانت نسبة مسطح ب د في د ج مع مربع د ا الى مربع ا د مثل نسبة مسطح
ب ه في ه ج مع مربع ه ا الى مربع ا ه ولكن مسطح ب د في د ج مع مربع د ا مساو لمربع
ا ب ومسطح ب ه في ه ج مع مربع ه ا مساو لمربع ا ب فنسبة مربع ب ا الى المربع
ا د مثل نسبة مربع ب ا الى مربع ا ه والمقدمان متساويان فالتاليان

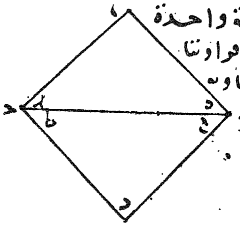
اذا متساويان وخط د ا مساو لخط ا ه وذلك ما اردنا ان
نبين :: لنفرض مثلثا عليه ا ب ج ولنقسم زاوية ا بنصفين بخط
خط ا د فاقول ان نسبة خطي ب ا ا ج جميعا الى خط ب ج مثل ا ج الى ج د برهان ذلك
من اجل ان زاوية ا من مثلث ا ب ج قد قسمت بنصفين بخط ا د يكون نسبة ب ا الى ا ج
مثل نسبة ب د الى د ج واذا بدلنا كانت نسبة ا ب الى ب د مثل نسبة ا ج



الى ج د ونسبة الجميع الى الجميع مثل نسبة واحد الى واحد فنسبة
خطي ب ا ا ج الى الخط ب ج مثل نسبة ا ج الى ج د وذلك ما اردنا
ان نبين :: لنفرض مثلثا عليه ا ب ج ولنخرج خطي ج ا ب ا على استقامة الى
نقطتي د ه ولنصل د ج ه ب ولنخرج من نقطة د خطا موازيا لخط ه ب وهو
خط د ح ولنخرج من نقطة ه خطا موازيا لخط د ج وهو خط ه ز ولنصل ز ح فاقول
ان خط ز ح مواز لخط ب ج برهان ذلك لنصل ز د ح ه فمثلث ز ج د مساو
لمثلث د ه ج لانهما على قاعدة واحدة وهي خط د ج ومن خطين متوازيين وهما خطا
د ج ه ز ولنلق مثلث د ا ج المشترك فيكون مثلث د ا ز الباقي مساويا لمثلث [illegible]
الباقي ومثلث د ه ب مساو لمثلث ه ب ح لانهما على قاعدة واحدة وهي خط ه ب
ومن خطين متوازيين وهما ه ب د ح ولنلق مثلث ه ا ب المشترك فيكون [illegible]

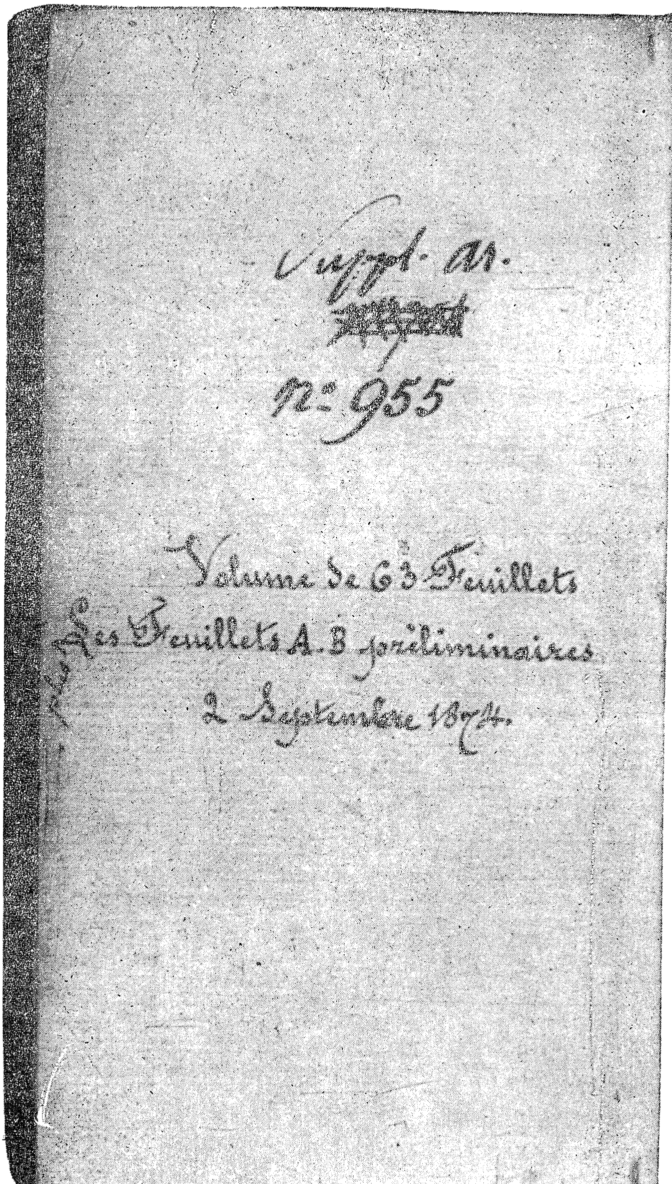


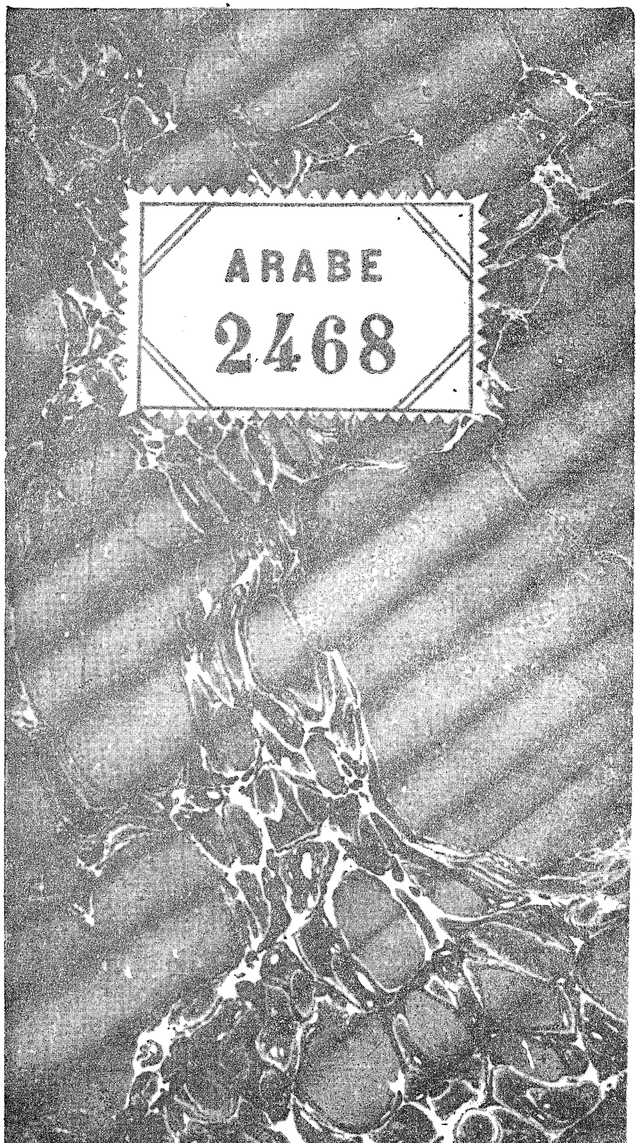
الباقي مساوياً لمثلث اجح الباقي ولكن قد كان تبين
ان مثلث داه مساو لمثلث حاب فمثلث اجح مساو
لمثلث ارد ونلقي مثلث ارح المشترك فيكون مثلث
زوح الباقي مساوياً لمثلث حرد وهما على قاعدة
واحدة وهي خط رح فهما بين خطين متوازيين
فخط رح مواز لخط حد وذلك ما اردنا ان نبين ∴ لنفرض خطا اب مساوياً كـ
لخط اد وخط بد مساوياً لخط دج ولكن كل واحدة من زاويتي باد بجد قائمة
فاقول ان زاوية ابد مساوية لزاوية اجد برهان ذلك نصل اج فمن اجل
ان زاوية ا قائمة تكون زاويتا اه د مساويتين لقائمة واحدة وايضا من اجل ان
زاوية د قائمة تكون زاويتا ح ط مساويتين لقائمة واحدة
وقد كانتا زاويتا ه ر مساويتين لقائمة واحدة فزاويتا
ه ر مساويتان لزاويتي ح ط فجميع زاوية هح مساوية
لجميع زاوية رط وذلك ما اردنا ان نبين

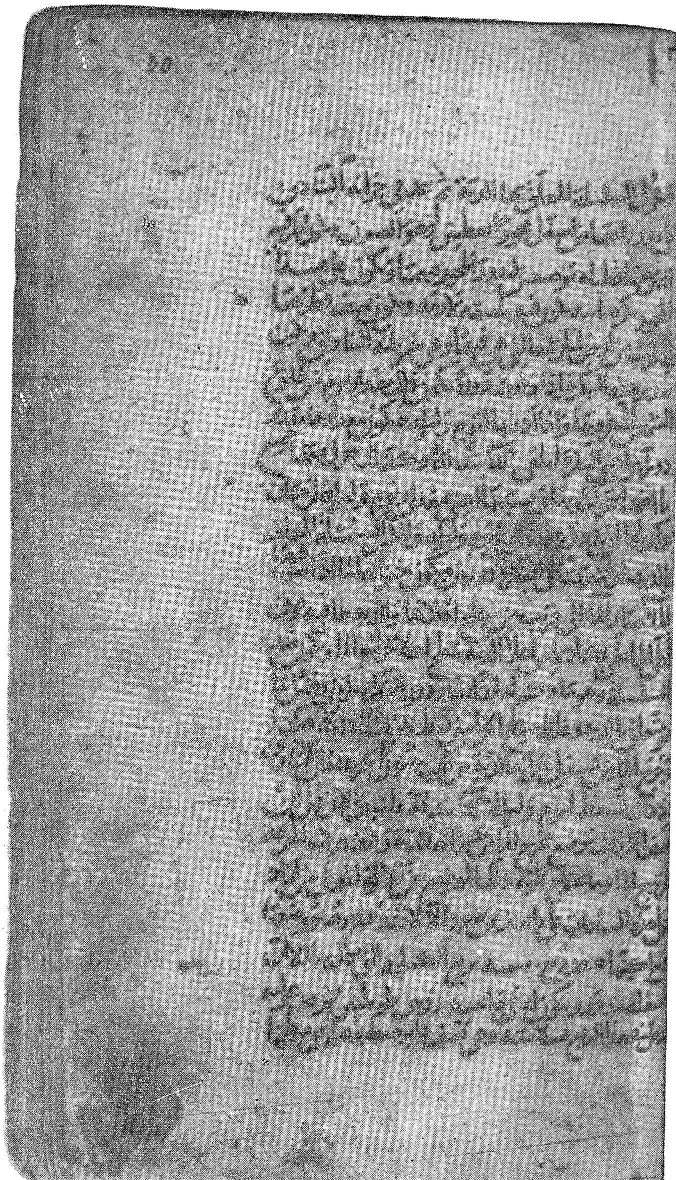


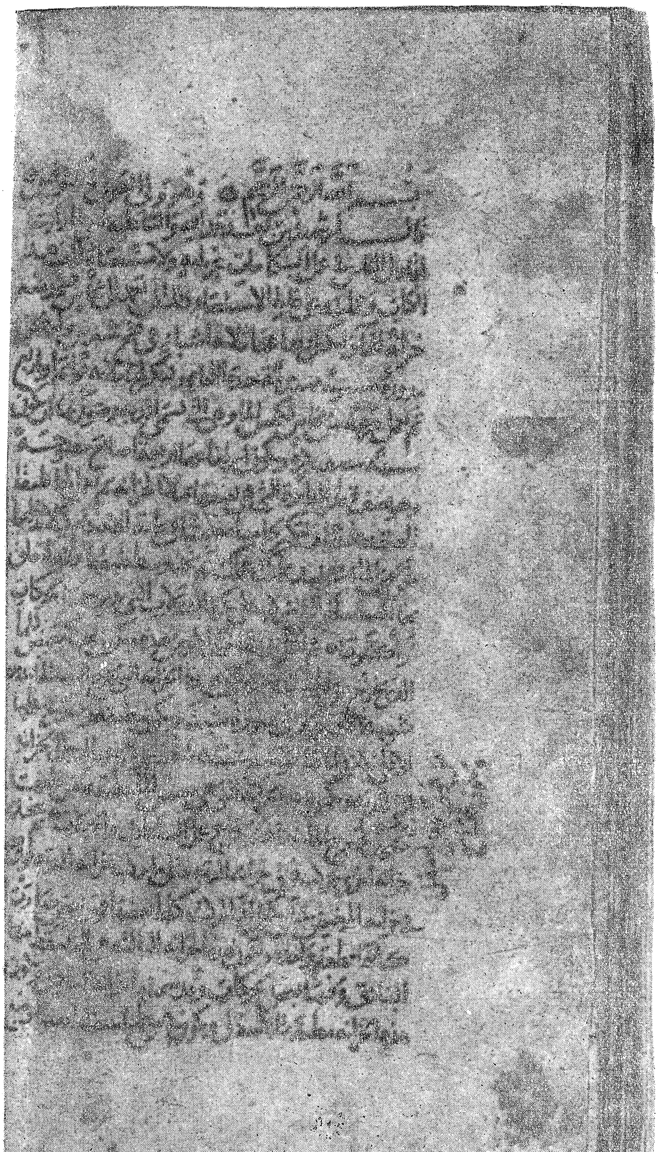
تم كتاب ارشميدس في اصول الهندسة
وهو عشرون شكلا ∴ ولله الحمد
وصلواته على نبيه محمد وآله

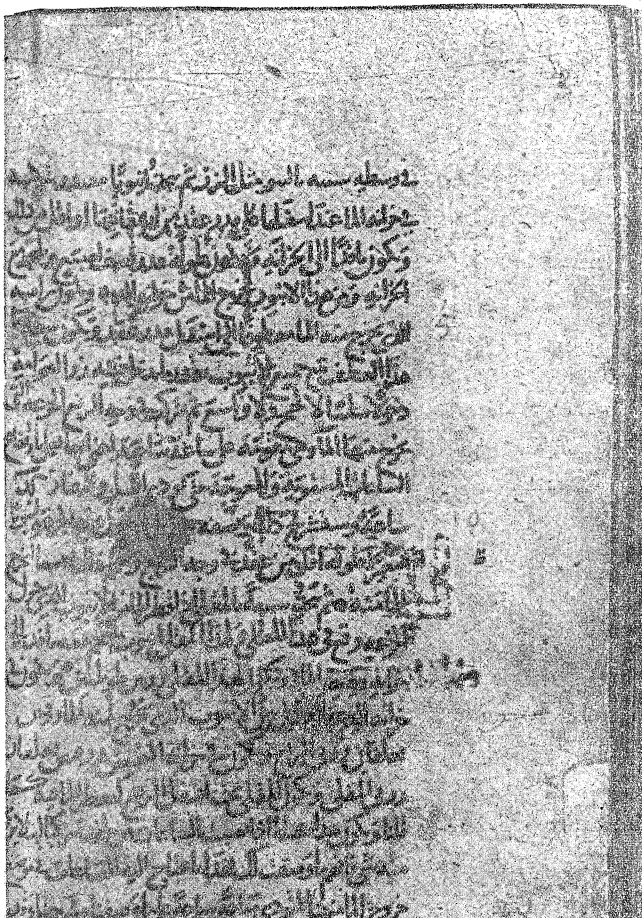
ΤΟ ΑΡΑΒΙΚΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΣ ΩΡΟΛΟΓΙΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

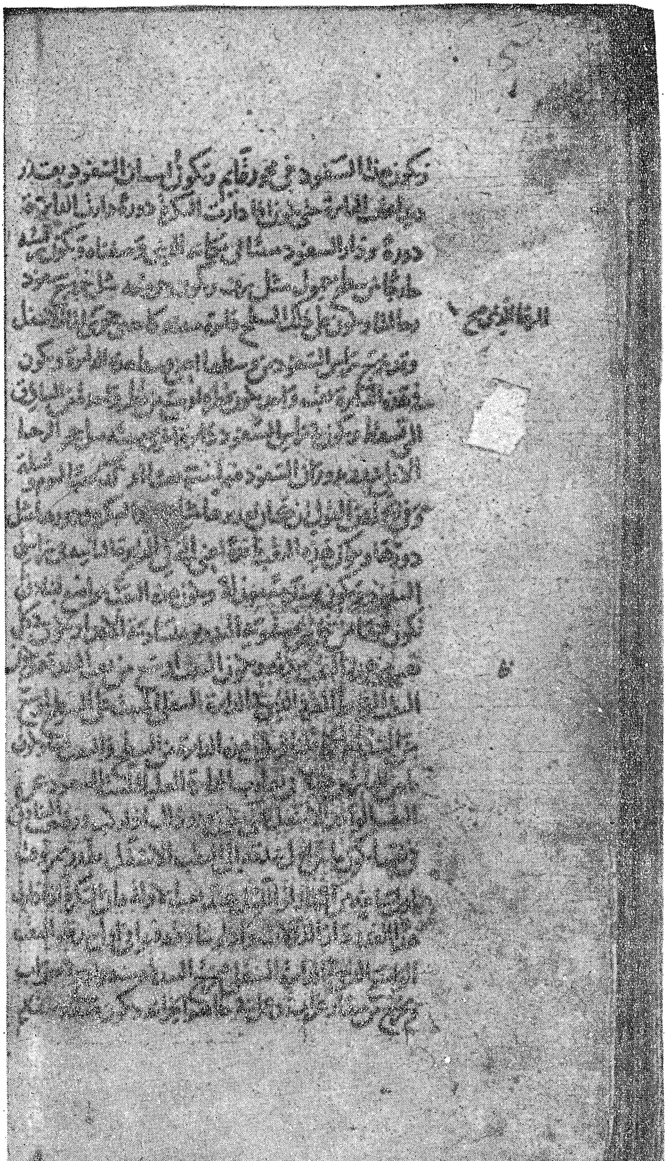

Suppl. Ar.
N° 955
Volume de 63 Feuillets
Les Feuillets A.B préliminaires
2 Septembre 1874.

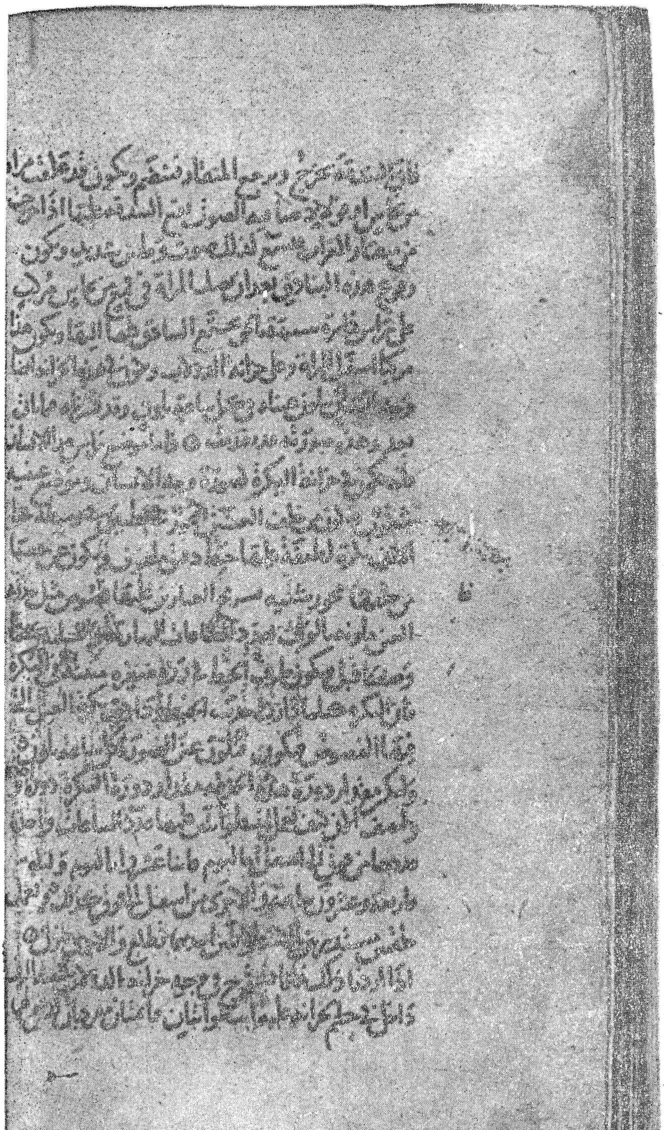

ARABE
2468

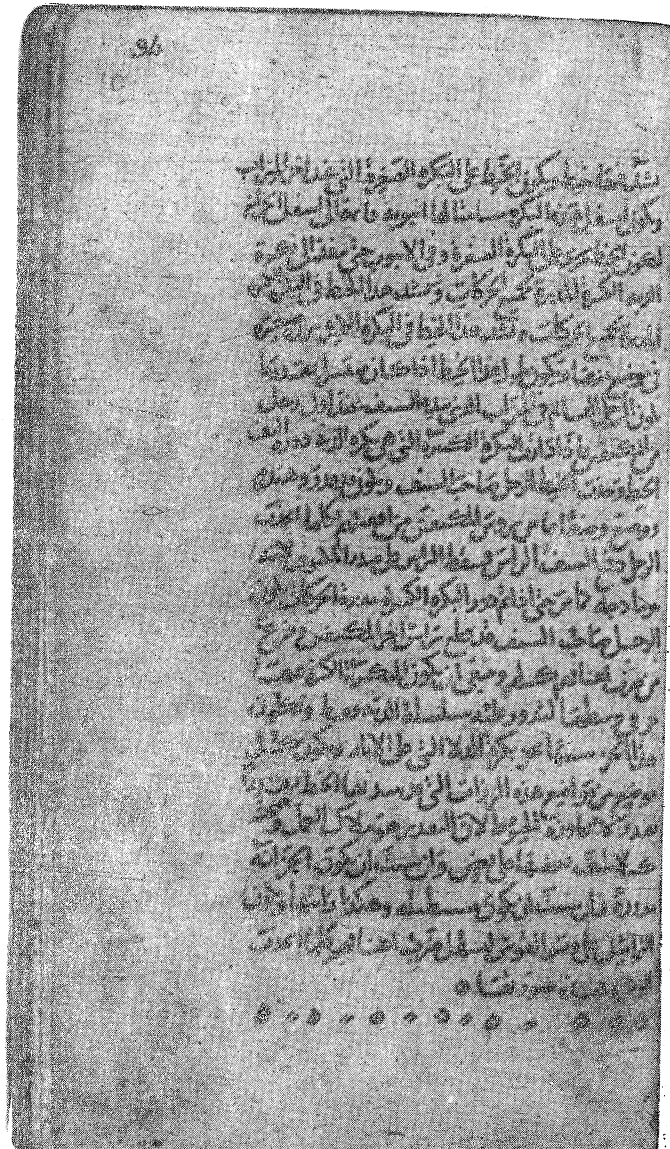


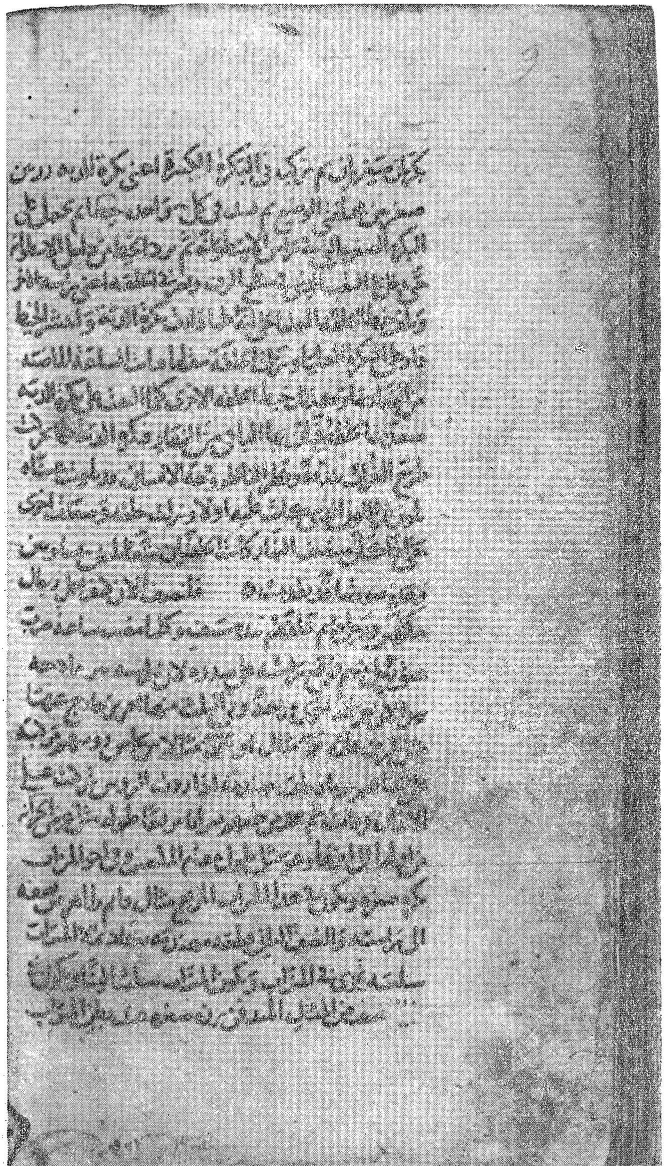


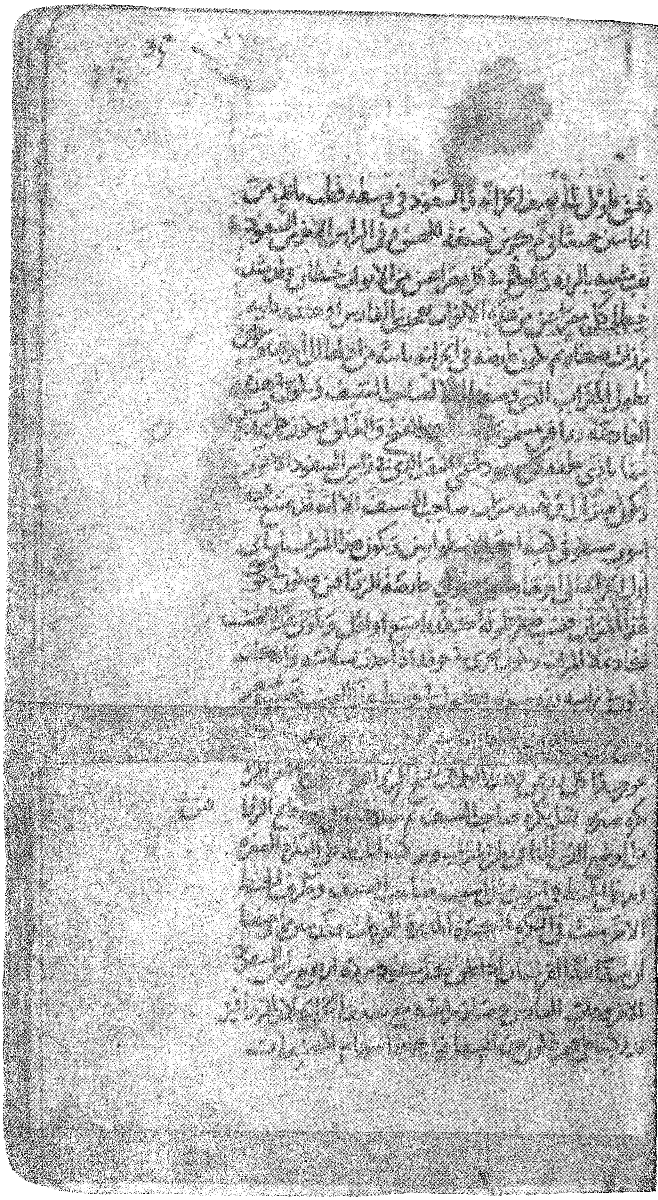


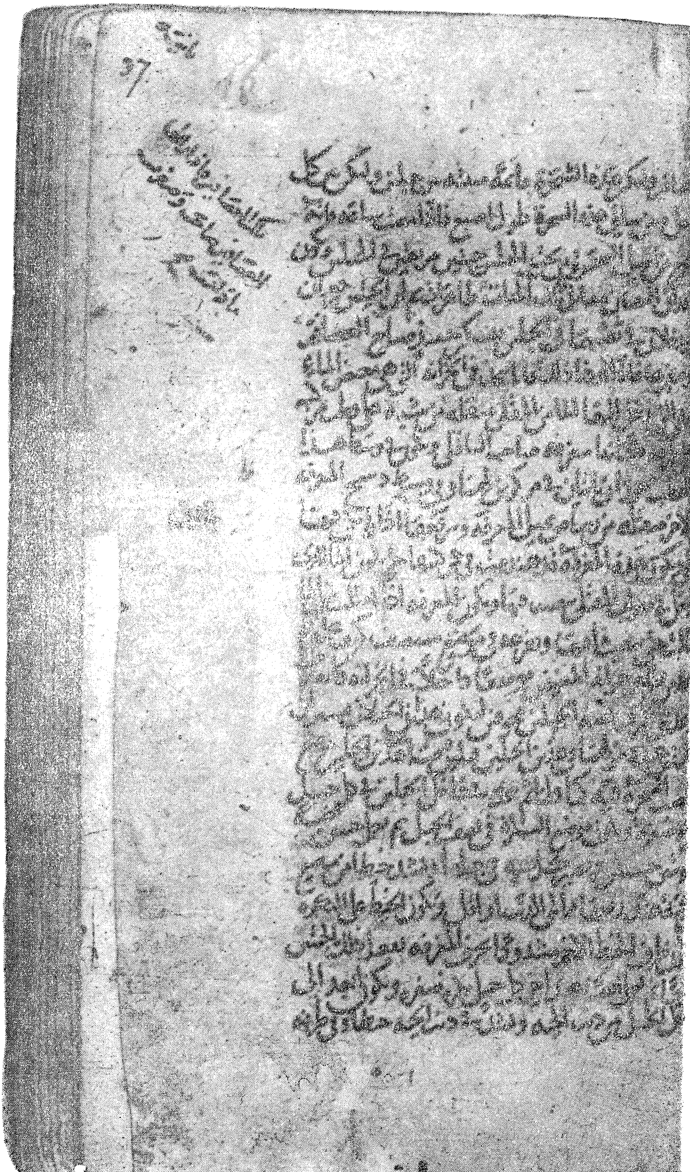


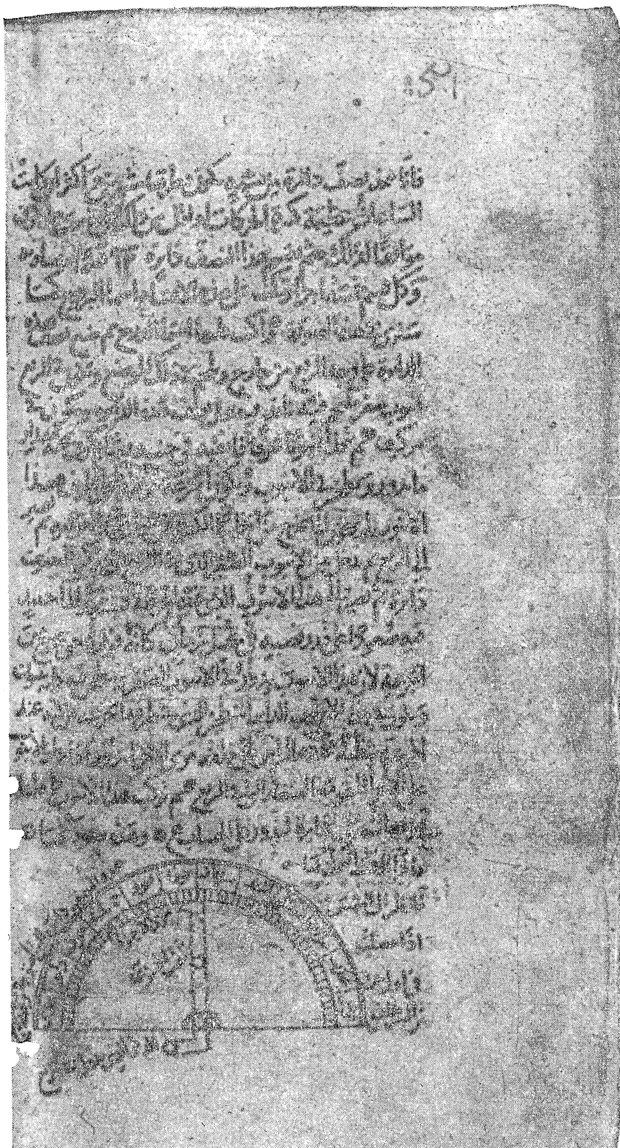


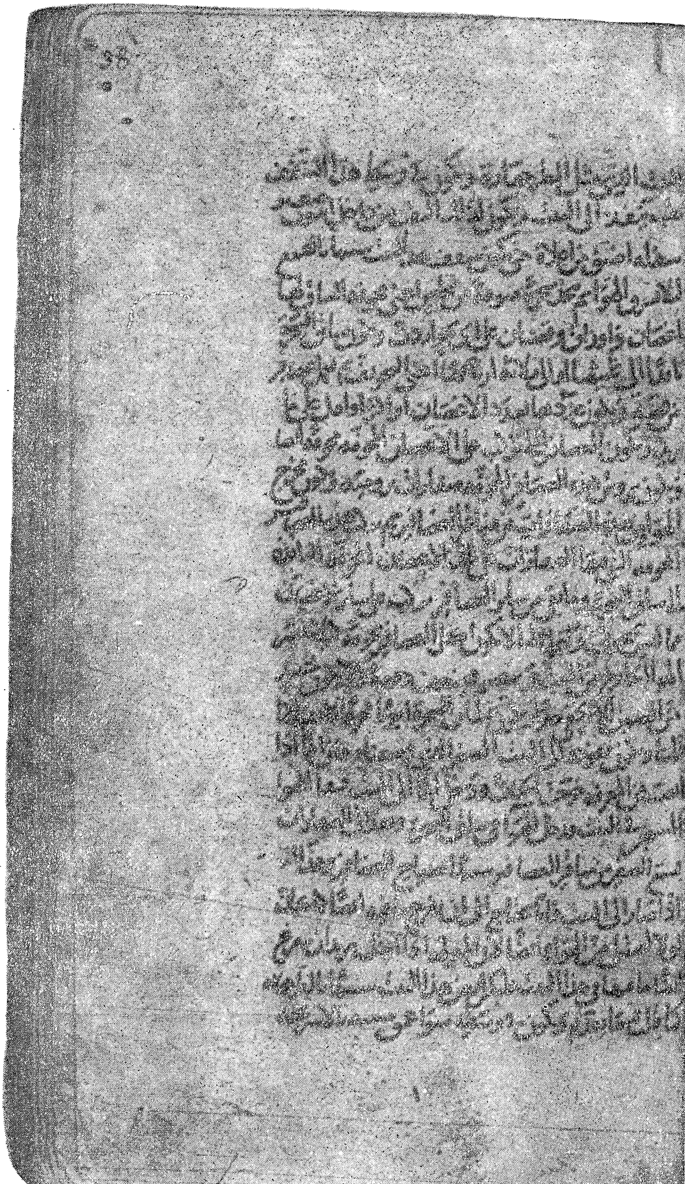


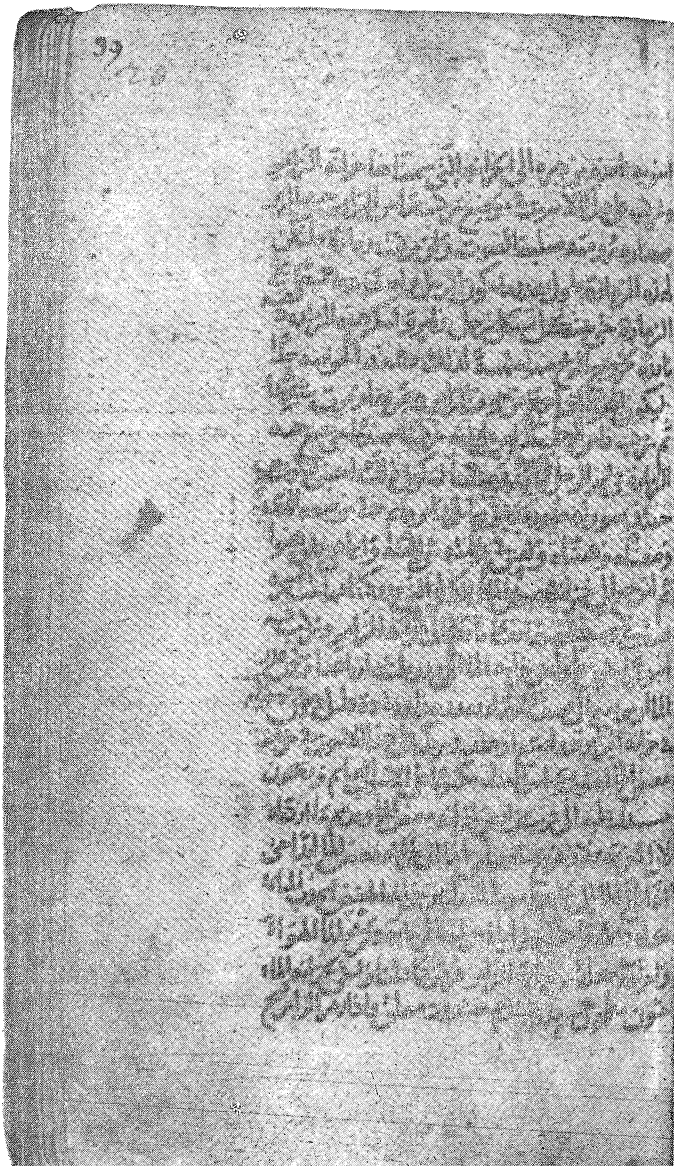


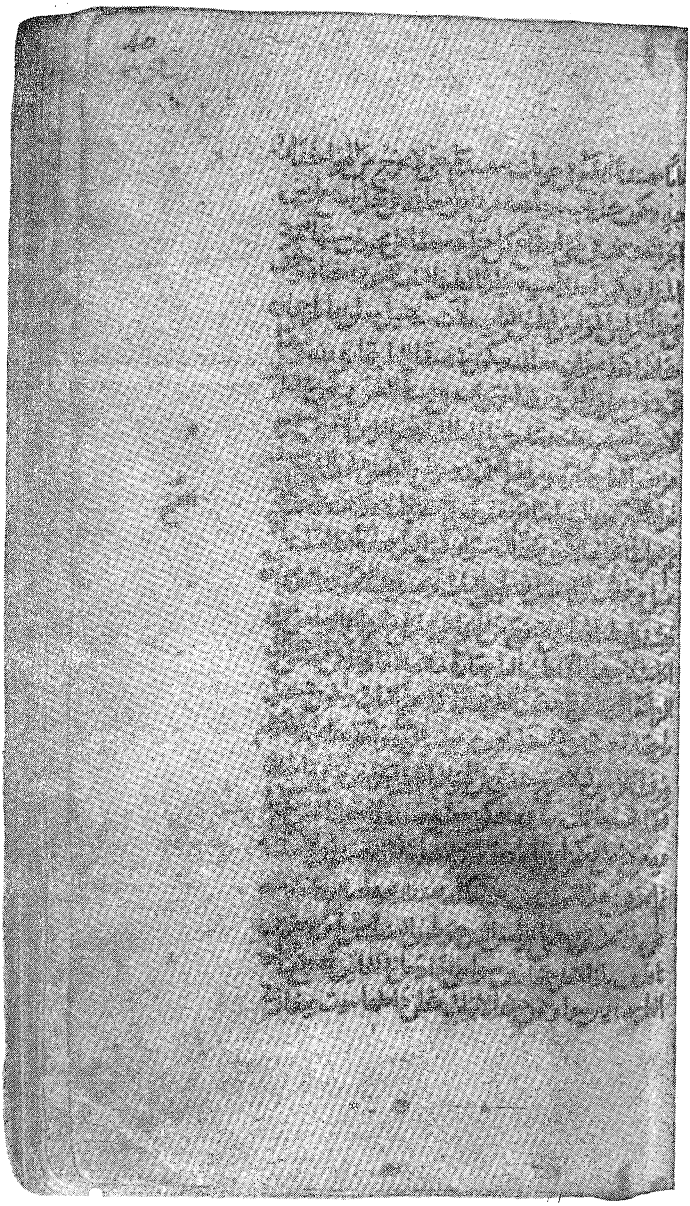


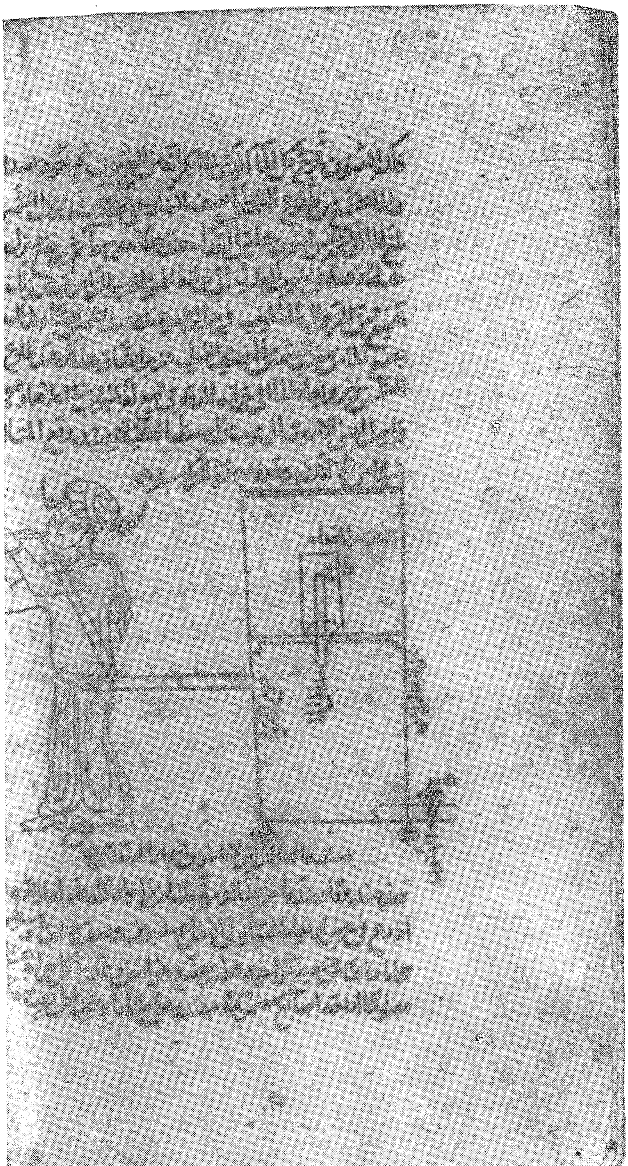


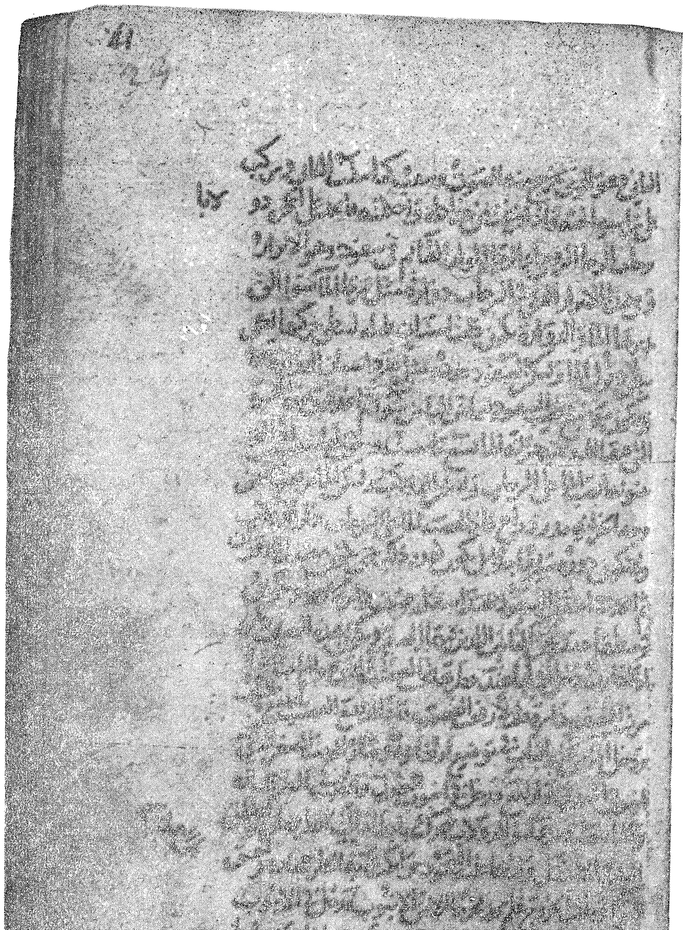


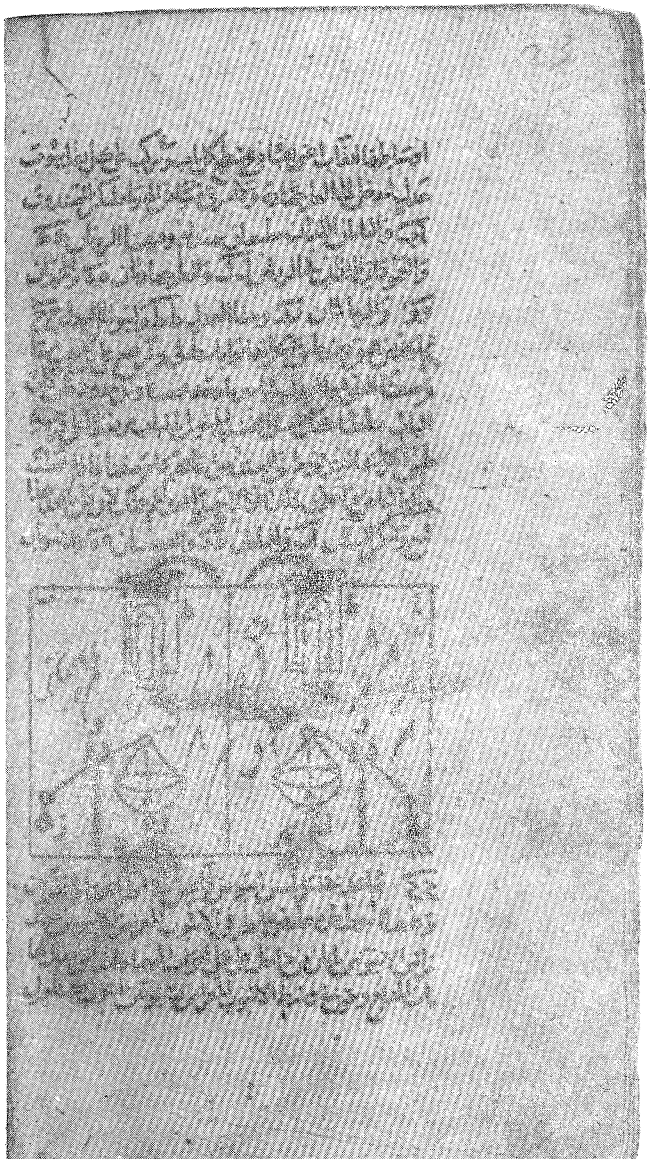


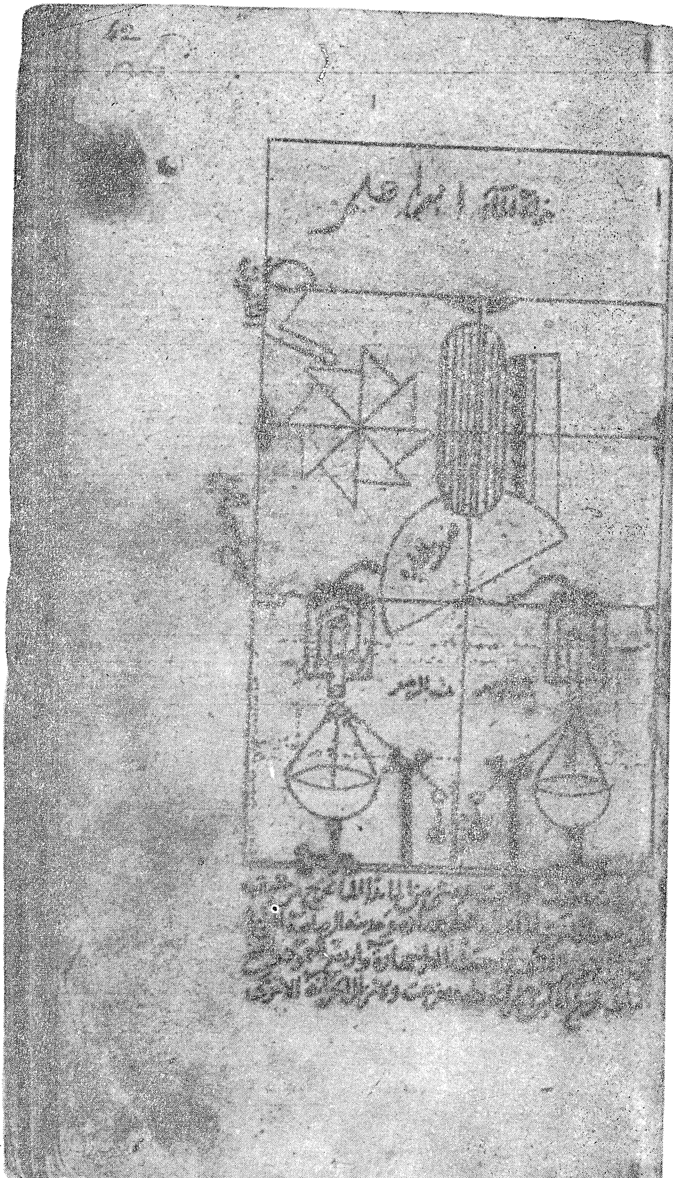


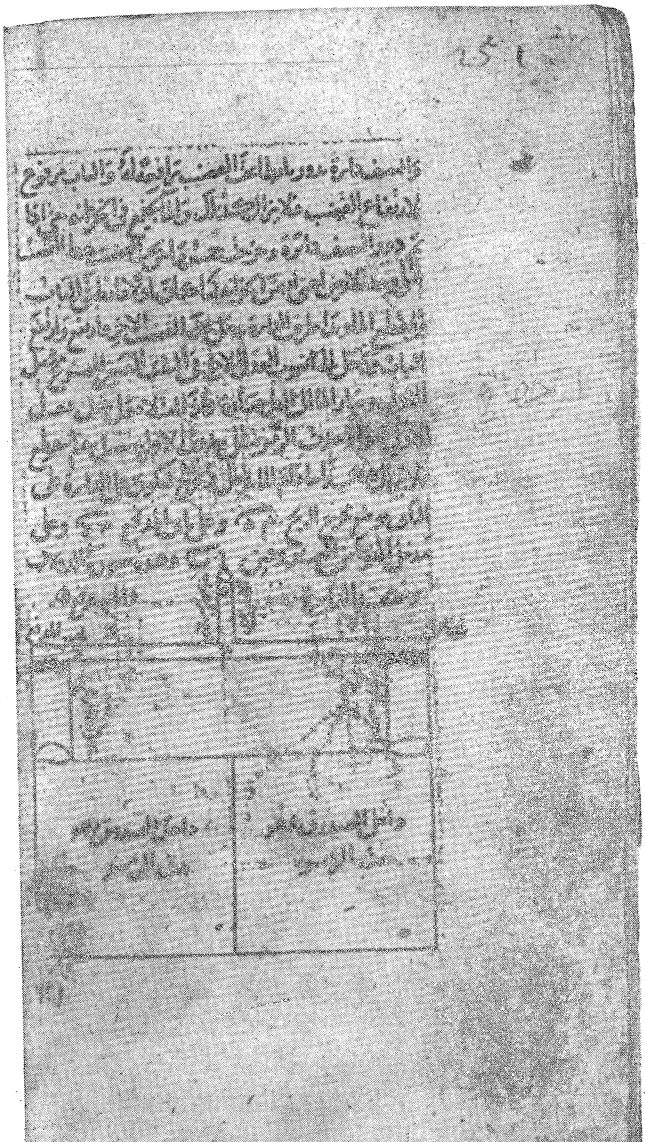


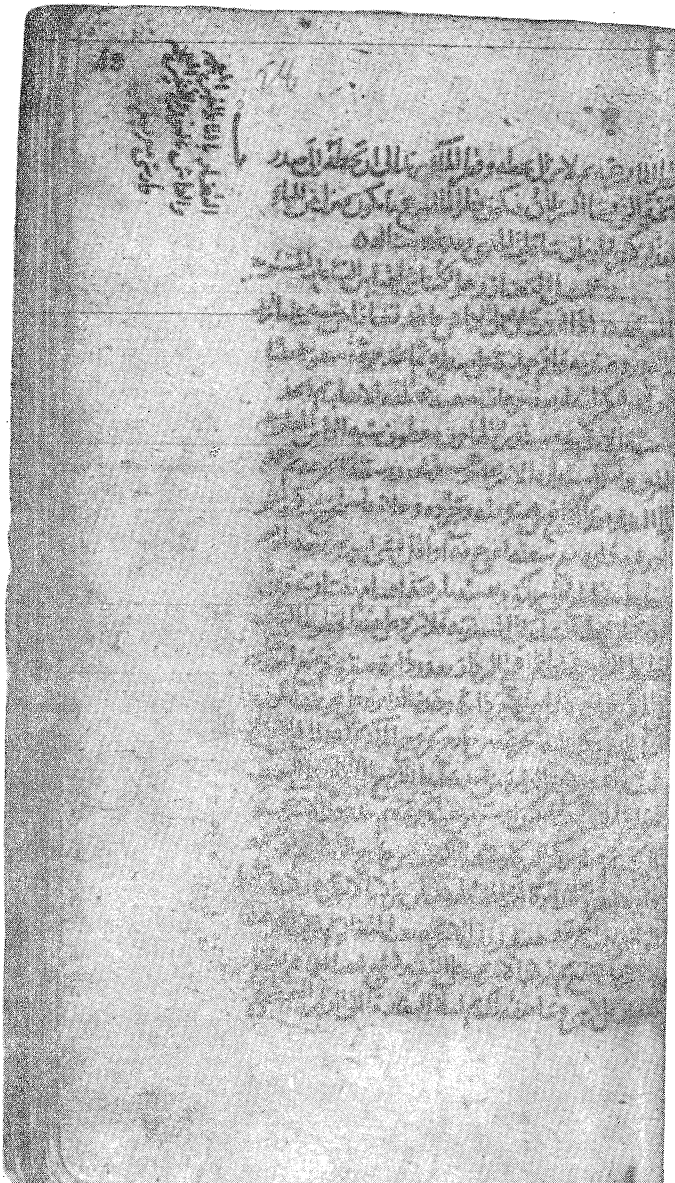


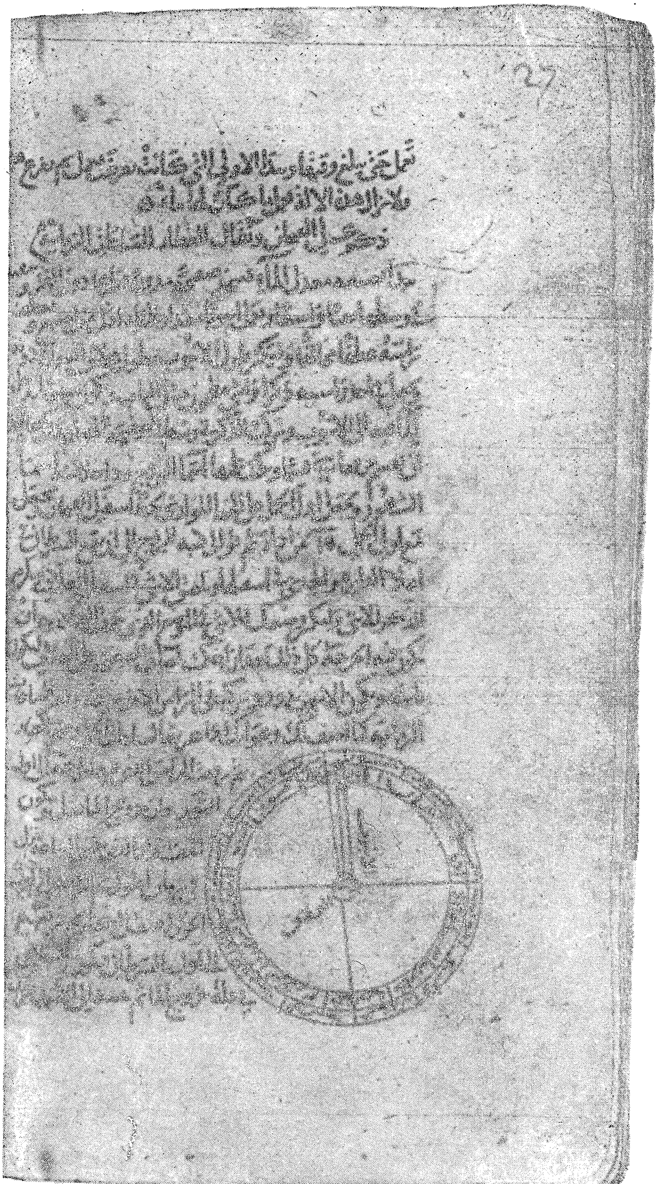


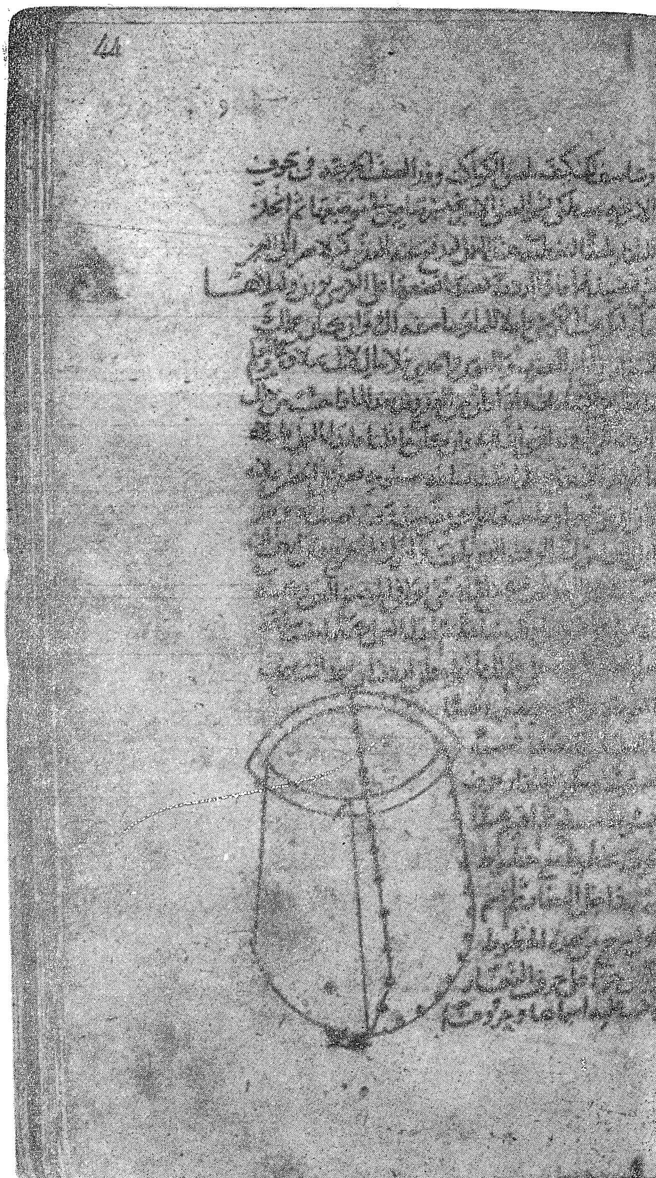


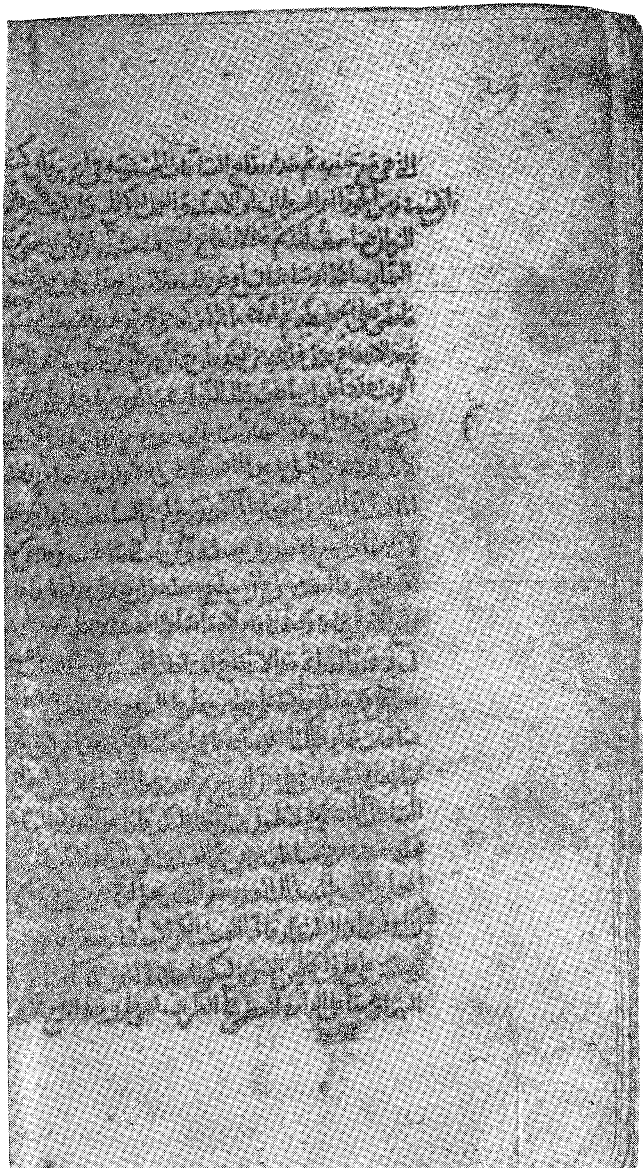


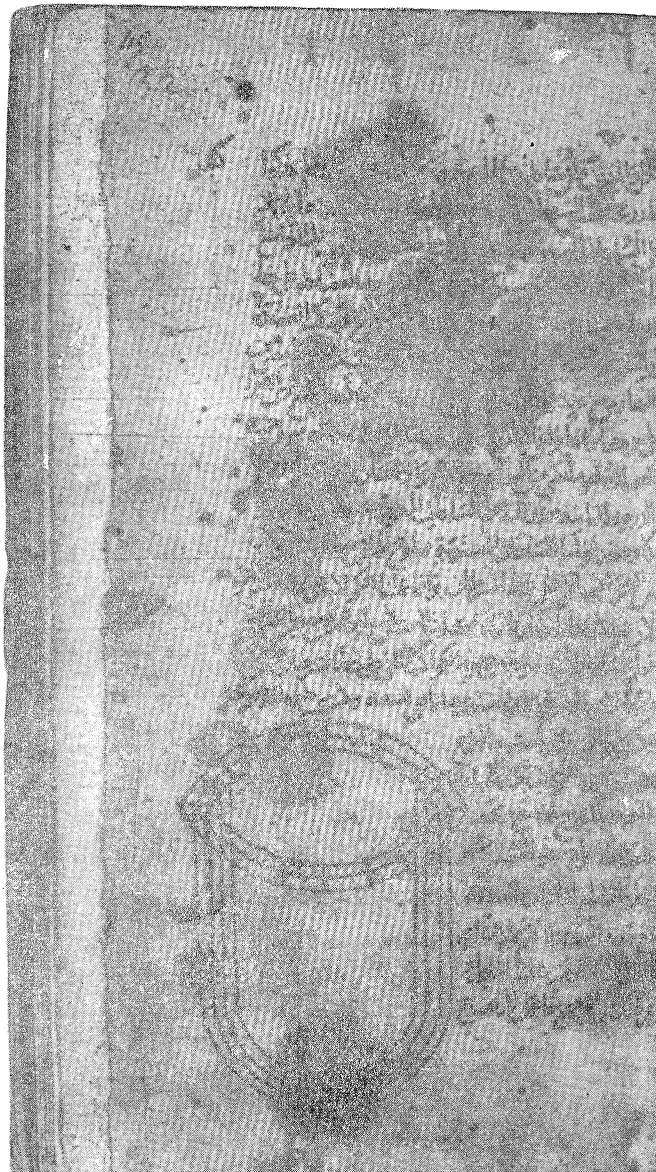


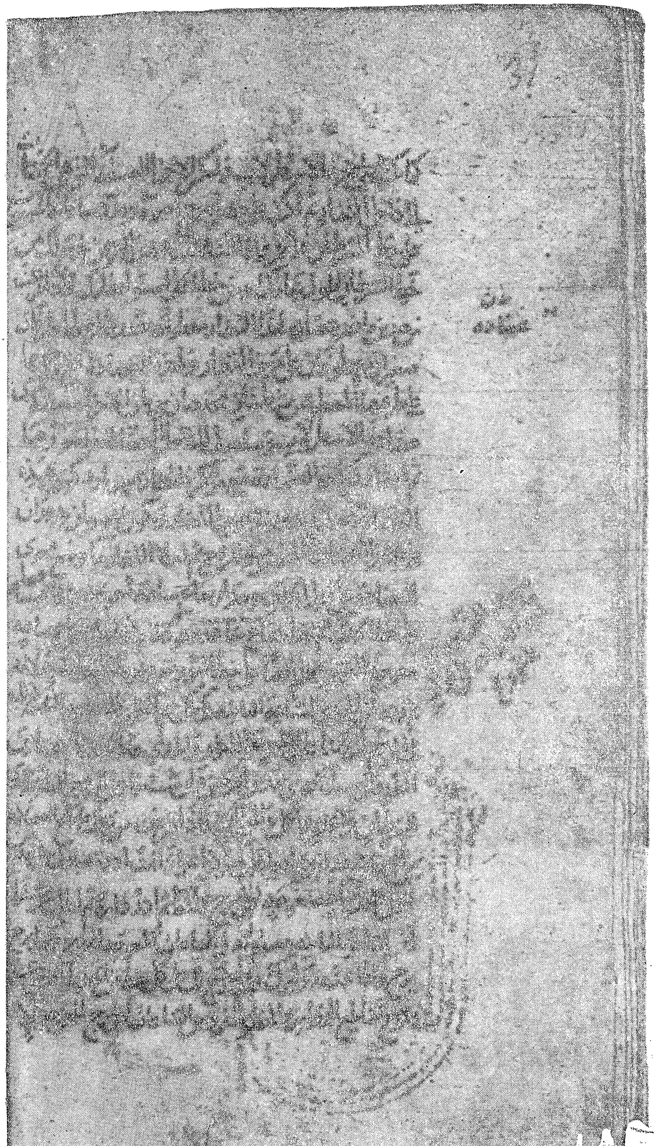


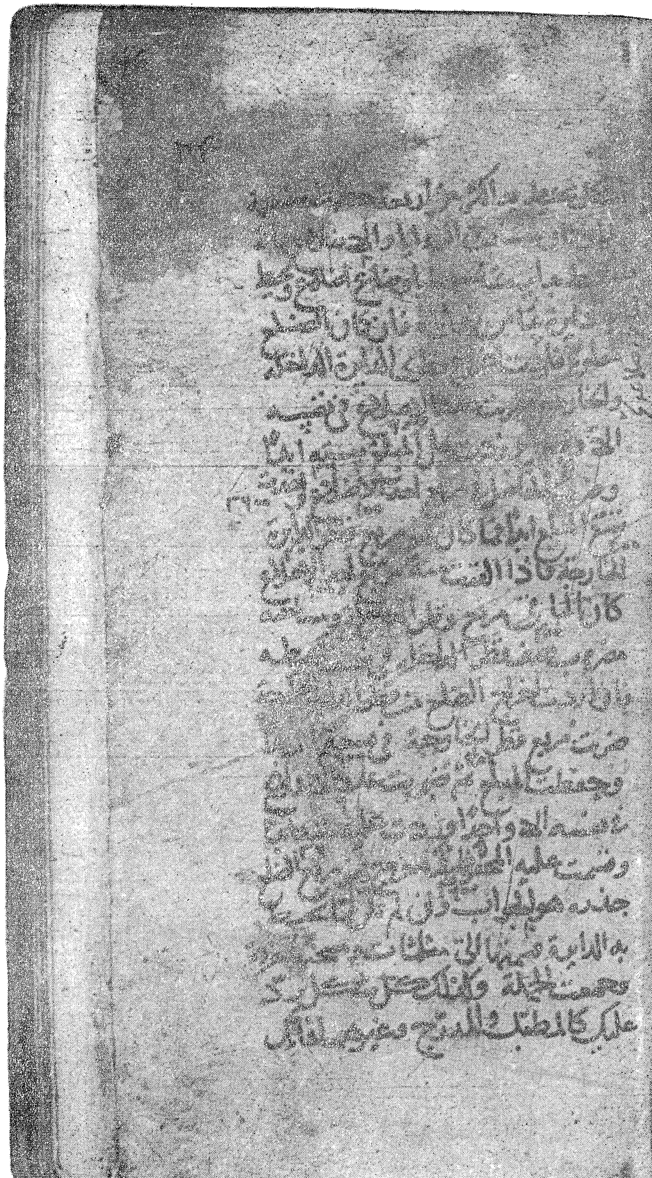


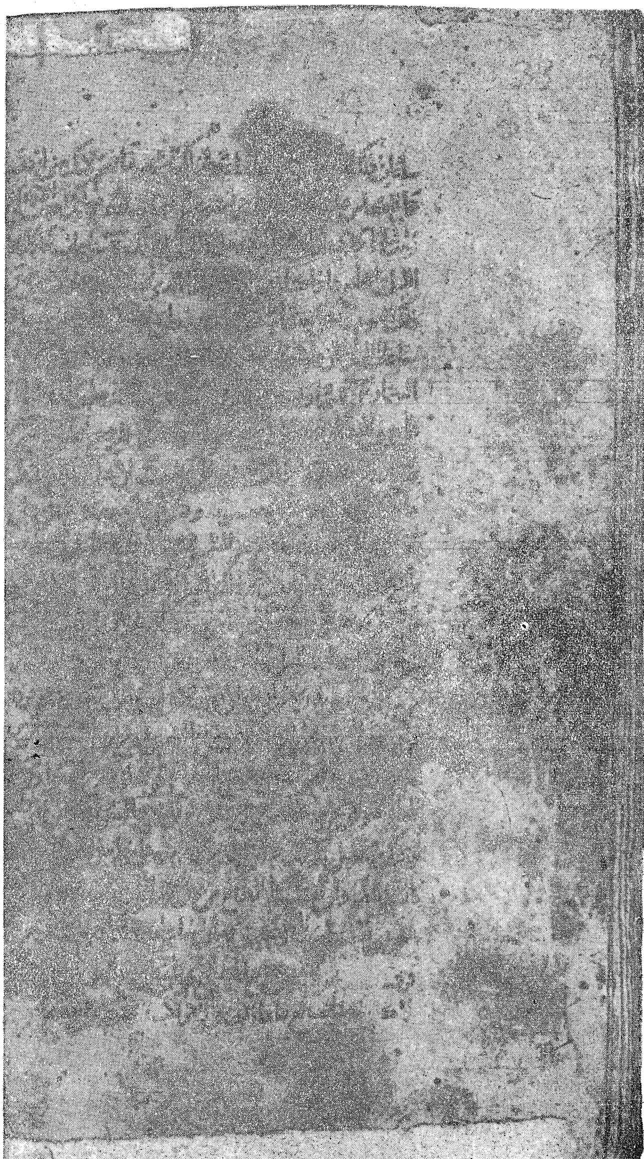


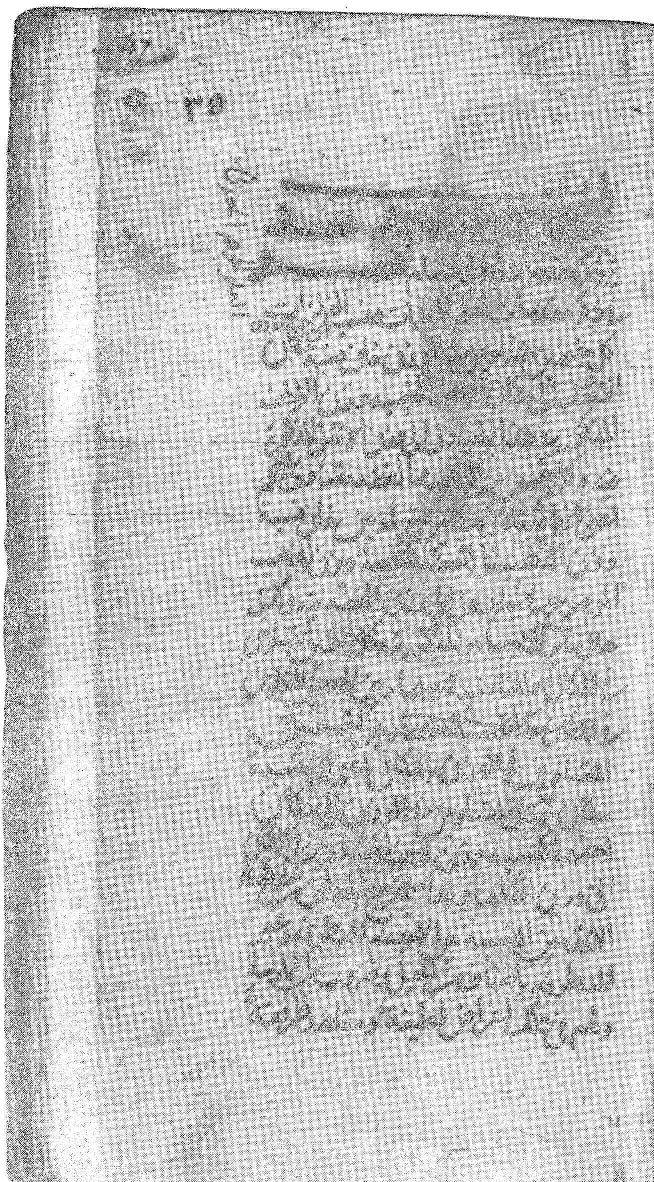


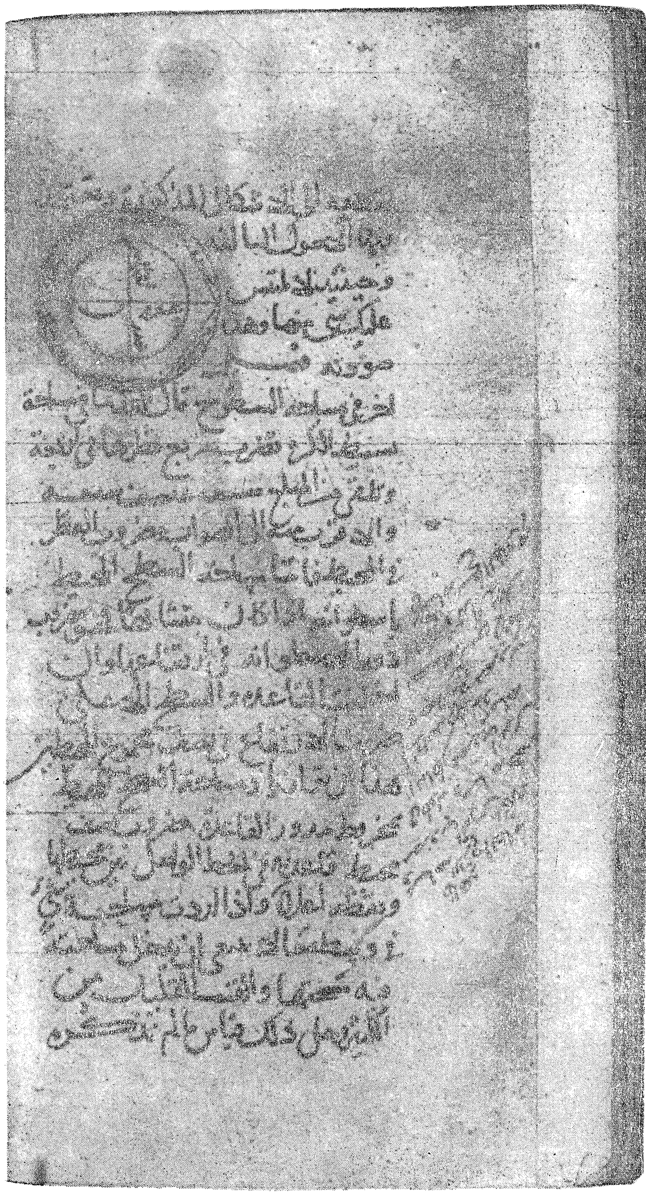












ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

Β

Γ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Δ

Ε

Ζ

Η

Θ

Ι

Κ

Λ

Ρ

Σ

Τ

Υ

Φ

Ω

Τύποις: 'Α/φῶν Γ. ΡΟΔΗ, Χαλανδρίου - 'Αμαρουσίου 59 — 'Αμαρούσιον

7

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΑΠΑΝΤΑ

3

ΤΟΜΟΣ Γ΄