ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΤΩΝ ΦΙΛΩΝ ΤΟΥ ΛΑΟΥ

ΜΟΡΦΩΤΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΑΡΙΘ. 4

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
Καθηγητοῦ

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ὁ Θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ
Πλάτων (κατὰ Πλούταρχον 718 c).

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΩΝ ΦΙΛΩΝ ΤΟΥ ΛΑΟΥ

ΜΟΡΦΩΤΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΑΡΙΘ. 4

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
Καθηγητοῦ

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ὁ Θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ
Πλάτων (κατὰ Πλούταρχον 718 c).

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΕΤΑΙΡΕΙΑ ΤΩΝ ΦΙΛΩΝ ΤΟΥ ΛΑΟΥ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΕΩΣ 1865

ΤΟ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟΝ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟΝ

Πρόεδρος :	ΣΤΥΛ. Γ. ΚΟΡΡΕΣ
Ἀντιπρόεδροι :	ΘΕΟΔ. Β. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ — Λ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΑΚΟΣ
Γεν. Γραμματεύς :	Β. Λ. ΔΕΝΤΑΚΗΣ. Ταμίας : ΚΩΝ. Θ. ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΣ. Ἔφορος : Κ. Γ. ΚΡΕΑΤΣΑΣ
Τὰ Μέλη :	Κ. Σ. ΑΡΒΑΝΙΤΗΣ, Π. Κ. ΓΕΩΡΓΟΥΝΤΖΟΣ, Π. Δ. ΔΗΜΑΚΗΣ, ΙΩ. Φ. ΔΗΜΑΡΑΤΟΣ, Ν. Π. ΜΠΡΑΤΣΙΩΤΗΣ, Μ. Α. ΣΙΩΤΗΣ.

Ἀπόσπασμα ἐκ τοῦ Καταστατικοῦ

«...Ἡ Ἑταιρεία σκοπὸν ἔχει τὴν ἀνύψωσιν τοῦ μορφωτικοῦ ἐπιπέδου τοῦ λαοῦ, τὸν ἠθικῶν καὶ ἐθνικὸν φρονηματισμὸν αὐτοῦ ἐν τῷ πνεύματι τοῦ Ἑλληνοχριστιανικοῦ πολιτισμοῦ...».

Ἀπόσπασμα ἐκ τῆς Ἀγγελίας τῆς ἱδρύσεως τῆς Ἑταιρείας τῆς 25ης Δεκεμβρίου 1865

«...Τὸν σκοπόν της δὲ τοῦτον ἐπιδιώκει ἡ Ἑταιρεία : α') διὰ τῆς διδασκαλίας μαθημάτων ἠθικῶν καὶ πρακτικῶν, παρεχομένης εἰς τὸν ἐργάτην λαὸν δωρεάν· β) διὰ τῆς συστάσεως βιβλιοθηκῶν πρὸς χρῆσιν τοῦ λαοῦ· καὶ γ') διὰ τῆς δημοσιεύσεως βιβλίων πρὸς διάδοσιν τῶν πρακτικῶν καὶ ὠφελίμων γνώσεων... Εἰς τὴν τύπωσιν δὲ βιβλίων, τὸ συμπλήρωμα τοῦτο καὶ τὴν κορωνίδα, οὕτως εἰπεῖν, τοῦ ὅλου ἔργου, θέλει προβῆ ἡ Ἑταιρεία ἀναλόγως τῶν πόρων αὐτῆς».

Ἀπόσπασμα ἐκ τοῦ λόγου τοῦ Προέδρου κατὰ τὰ ἐγκαίνια τοῦ νέου μεγάρου τῆς Ἑταιρείας (19/10/72)

«...Καὶ μόνον σήμερον δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι ἐπὶ τέλους εἰς τὸ 108ον ἔτος τοῦ βίου τῆς Ἑταιρείας ἡμῶν, ὑπάρχουν οἱ ἀναγκαῖοι πόροι καὶ θὰ πραγματοποιηθῇ καὶ ὁ τρίτος σκοπὸς αὐτῆς, ἡ ἔκδοσις καλῶν διὰ τὸν λαὸν βιβλίων».

ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΩΝ ΦΙΛΩΝ ΤΟΥ ΛΑΟΥ

ΜΟΡΦΩΤΙΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΑΡΙΘ. 4

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
Καθηγητοῦ

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ὁ Θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ
Πλάτων (κατὰ Πλούταρχον 718 c).

ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Ἀναμφισβήτητον εἶναι ὅτι σύμπασα ἡ πολιτισμένη ἀνθρωπότης ἀναγνωρίζει τὴν ἑλληνικὴν ἀρχαιότητα ἀρχὴν καὶ βάσιν τοῦ σημερινοῦ πολιτισμοῦ καὶ τὰ δημιουργήματα τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πνεύματος πηγὴν ἀστείρευτον διὰ τὴν πρόοδόν της, δι' ὃ καὶ ἐξακολουθεῖ ἀδιαλείπτως καὶ μετὰ ζωηροτάτου διαφέροντος ἐπιδιδομένη εἰς τὴν μελέτην αὐτῶν. Τοὐναντίον ἡμεῖς οἱ Ἕλληνες, ἀτυχῶς, ἐλάχιστα γνωρίζομεν, διὰ τοῦτο καὶ ἐλάχιστα ἐκτιμῶμεν τὴν ἀξίαν τῆς μοναδικῆς ἐν τῷ κόσμῳ κληρονομίας αὐτῆς, ἐκ τούτου δὲ καὶ ἡ μεγάλη καὶ ἀνεπίτρεπτος ἀδιαφορία ἡμῶν διὰ τὴν κατάστασιν καὶ τὴν τύχην αὐτῆς. Καὶ ὅσα γνωρίζομεν, οἱ πολλοί, ἀναφέρονται κυρίως εἰς τὰ γράμματα, ὑπὸ περιωρισμένην πως ἔννοιαν, ἤτοι τὴν ποίησιν καὶ τὴν πεζογραφίαν, δι' ὃ καὶ περὶ ταῦ-

τα στρέφονται συνήθως καὶ κυρίως τὰ διαφέροντα μας. Περὶ δὲ τοῦ κόσμου τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, τῆς Ἰατρικῆς, τῶν Φυσικῶν καὶ τῶν Μαθηματικῶν, μάλιστα δὲ τῶν Μαθηματικῶν, οὐδεμίαν ἢ ἐλαχίστας γνώσεις ἔχομεν, πλήν, φυσικά, ἐλαχίστων ἐξαιρέσεων, δυναμένων νὰ μετρηθοῦν «εἰς τὰ δάκτυλα τῆς μιᾶς χειρός», διαπρεπῶν Ἑλλήνων, οἵτινες ἠσχολήθησαν περὶ τὴν μελέτην τῶν Ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν καὶ ἐτίμησαν τὸ Ἑλληνικὸν Ὄνομα καὶ τὴν Ἑλληνικὴν Ἐπιστήμην.

Χαρακτηριστικὸν τῆς περὶ τὰ σημαντικώτατα ταῦτα θέματα τελείας ἀδιαφορίας μας εἶναι τὸ ἀπίστευτον γεγονός, ὅτι ἀπὸ ἐτῶν ἐθίγησαν καὶ δὴ καὶ κατηργήθησαν αἱ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ ἕδραι τῆς Ἱστορίας τῆς Ἰατρικῆς, τῆς Ἱστορίας τῶν Φυσικῶν καὶ τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν, κυρίως διὰ τὴν ἔλλειψιν ἐπιστημόνων ἱκανῶν νὰ τὰς διδάξουν! Καὶ ὅμως ἡ γνῶσις τῆς τεραστίας συμβολῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εἰς τὴν πρόοδον τῆς Ἰατρικῆς, τῶν Φυσικῶν καὶ τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν, δηλαδὴ τῆς σημαντικωτάτης συμβολῆς τῶν Ἑλλήνων εἰς τὴν σημερινὴν πρόοδον τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, καὶ εἰς αὐτὰ τὰ καταπληκτικὰ ἐπιτεύγματα τῶν τελευταίων χρόνων, θὰ ἐκραταίωνε τὴν ἐθνικὴν συνείδησιν, θὰ ἐδημιούργει ἐθνικὴν αὐτοπεποίθησιν καὶ θὰ ἀπέβαινεν ἀνεκτιμήτου ἀξίας ἐθνικὸν κεφάλαιον!

Μία τῶν προμνησθεισῶν ἐξαιρέσεων, ἴσως ἡ μοναδικὴ σημερινὴ ἐξαίρεσις, εἶναι ὁ ἀκαταπόνητος μελετητὴς τῶν Ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν καθηγητὴς κ. Εὐάγγελος Σταμάτης.

Ὁ κ. Σταμάτης ὑπηρετῶν εὐδοκιμώτατα ἐν τῇ Μέσῃ Ἐκπαιδεύσει, μετὰ λαμπρὰς ἐν Γερμανίᾳ σπουδάς, ἐπεδόθη ἐνωρὶς εἰς τὴν μελέτην τῶν Ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν.

Διὰ πολλῶν σοφῶν ἔργων προεκάλεσε τὴν προσοχήν, τὸ διαφέρον καὶ τὴν ἐκτίμησιν ἀλλὰ καὶ τὴν προσφορὰν βοηθείας ξένων Πανεπιστημίων καὶ Ἀκαδημιῶν, ξένων Ἱδρυμάτων καὶ Ἐπιστημόνων καὶ ἀποτελεῖ σήμερον μορφὴν παγκοσμίου προβολῆς εἰς τὴν μελέτην τῶν Μαθηματικῶν.

Εἰς μίαν τῶν τελευταίων ἐργασιῶν του, ὑπὸ τὸν τίτλον: «Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν», ἀποκαλύπτει τὴν μεγάλην πρόοδον τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴν τεραστίαν συμβολήν των εἰς τὴν σημερινὴν τεχνολογικὴν πρόοδον. Ἡμεῖς δὲ γνωρίζοντες τὴν ἄγνοιαν τῶν νεωτέρων Ἑλλήνων ἐπὶ τοῦ σημαντικωτάτου τούτου τομέως τῆς ἑλληνικῆς Ἀρχαιογνωσίας, ἀλλὰ καὶ τὴν παντελῆ ἔλλειψιν σχετικῶν βοηθημάτων πρὸς στοιχειώδη, ἔστω, ἐνημέρωσιν, παρεκαλέσαμεν τὸν κ. Σταμάτην, οὗτος δὲ προφρόνως καὶ προθύμως ἀπεδέχθη, καὶ παρεσκεύασεν ἐπιτομὴν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας του διὰ τὰς Μορφωτικὰς Ἐκδόσεις τῆς Ἑταιρείας τῶν Φίλων τοῦ Λαοῦ, τοῦ λαϊκοῦ Πανεπιστημίου τῆς ὁποίας τυγχάνει ἀπὸ μακροῦ χρόνου τακτικὸς καὶ πολύτιμος συνεργάτης.

Διὰ τῆς πολυτίμου ταύτης προσφορᾶς τοῦ κ. Σταμάτη, διὰ τὴν ὁποίαν θερμὰς ἐκφράζομεν πρὸς αὐτὸν εὐχαριστίας, παρέχεται ἡ δυνατότης νὰ πληροφορηθοῦν οἱ πολλοὶ τῶν νεωτέρων Ἑλλήνων περὶ τῆς μεγά-

λης συμβολῆς τῶν προγόνων μας καὶ εἰς τὰς θετικὰς Ἐπιστήμας καὶ μάλιστα εἰς τοὺς κλάδους οἱ ὁποῖοι σήμερον ἐπιτελοῦν ἀληθινὰ θαύματα καὶ ἡ δημιουργία καὶ ἡ πρόοδος τῶν ὁποίων θεωροῦνται σημερινὰ ἐπιτεύγματα.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10ῃ Αὐγούστου 1976

ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ Γ. ΚΟΡΡΕΣ
Καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου
Πρόεδρος τῆς Ἑταιρείας τῶν Φίλων τοῦ Λαοῦ

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

ΑΙ ΠΡΩΤΑΙ ΠΗΓΑΙ

1. Ὁ Γερμανὸς λόγιος Victor Engelhardt εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ περισπουδάστου βιβλίου του ὑπὸ τὸν τίτλον «Ὁ πνευματικὸς πολιτισμὸς τῆς Ἀρχαιότητος» (Die geistige Kultur der Antike, Reclam—Verlag, Stuttgart 1956), προσπαθεῖ νὰ ἀνεύρῃ τὰ αἴτια, τὰ ὁποῖα συνετέλεσαν εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ πολιτισμοῦ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἐξετάζει μὲ θαυμασμὸν τὸν θαλάσσιον καὶ τὸν κατακόρυφον διαμελισμὸν τοῦ ἑλληνικοῦ χώρου, μελετᾷ τὰς πτυχὰς τῶν ὀρέων καὶ διερευνᾷ τὸν σχηματισμὸν τῶν ὅρμων τῶν ἑλληνικῶν θαλασσῶν. Ἀναλύει τὴν ἐπίδρασιν τοῦ περιβάλλοντος καὶ τοῦ κλίματος εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ χαρακτῆρος καὶ τῶν σωματικῶν, ψυχικῶν καὶ πνευματικῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἀνθρώπου καὶ προσπαθεῖ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν πορισμάτων τῶν ἐρευνῶν του νὰ δώσῃ μίαν ἐξήγησιν εἰς τὸ ἐρώτημα : διατὶ ὁ πολιτισμὸς τῆς ἀνθρωπότητος ἐδημιουργήθη καὶ ἐθεμελιώθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων;

Ἄλλος Γερμανὸς λόγιος, ὁ Max Steck, καθηγητὴς τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Μονάχου, εἰς ἐμπεριστατωμένον ἄρθρον του δημοσιευθὲν εἰς τὸ περιοδικὸν

Ἔρευναι καὶ Πρόοδοι (Forschungen und Fortschritte, Jahrgang 31, Helf 4, 1957) ὑποστηρίζει, ὅτι ὁ ἐν γένει πολιτισμὸς τῆς Δύσεως, αἱ καλαὶ τέχναι, αἱ ἐπιστῆμαι, αἱ μορφαὶ τῆς πίστεως ἀκόμη, προέρχονται ἐκ τῆς ἐπιδράσεως τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, τῶν ὁποίων σύνοψις ἔφθασε μέχρις ἡμῶν διὰ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τὰ μαθηματικὰ αὐτὰ ἔχουν διεισδύσει εἰς τὰ μύχια τῶν ψυχῶν τῶν μεγάλων ἐρευνητῶν καὶ δίδουν τὴν κατεύθυνσιν εἰς ὅλας αὐτῶν τὰς ἐπιστημονικὰς ἐρεύνας, προσθέτει ὁ Steck.

Αἱ πηγαὶ ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν γνῶσιν περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν εἶναι δύο : Αἱ ἀρχαιολογικαὶ ἔρευναι καὶ τὰ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων συγγραφέων.

Ἡ σπουδὴ τῆς κατασκευῆς ἀρχαίων οἰκοδομημάτων παρέχει εἰς ἡμᾶς τὸ μέτρον ἐκτιμήσεως τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῆς ἐποχῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ἱδρύθησαν τὰ σχετικὰ οἰκοδομήματα. Εἰς ὅλα τὰ ἑλληνικὰ θέατρα βλέπομεν χρησιμοποίησιν κατὰ τὴν ἀνοικοδόμησιν αὐτῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ γεωμετρικῶν γνώσεων, αἱ ὁποῖαι ὑποβοηθοῦν τοὺς ἐρευνητὰς εἰς τὴν συναγωγὴν συμπερασμάτων σχετικῶν πρὸς τὰς μαθηματικὰς γνώσεις τῆς ἐποχῆς κατὰ τὴν ὁποίαν κατεσκευάσθησαν τὰ θέατρα (E. R. Fiechter, das Theater in Oropos, 1930, Heft 1 κ.λπ.).

Εἰς τὰς ἀρχαιολογικὰς ἐρεύνας κατατάσσομεν καὶ τὰς ἐρεύνας τοῦ διακεκριμένου ἐπιστήμονος καὶ Ταξιάρχου τοῦ Ἑλληνικοῦ Στρατοῦ Θεοφάνους Μανιᾶ. Ὁ Θ. Μανιᾶς ἀνεκάλυψεν, ὅτι τὰ πανάρχαια Ἱερὰ τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος ἔχουν κτισθῆ ἐπὶ τῇ βάσει γεωμετρικῶν ὑπολογισμῶν καὶ μετρήσεων, κυρίως εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν θέσιν τῆς ἱδρύσεως αὐτῶν. Τὰ Ἱερὰ τῆς Ἐλευσῖνος, τῆς Αἰγίνης, τῶν Δελφῶν, τῆς Δωδώνης, κ.λπ. εὑρίσκονται μεταξύ των εἰς γεωμετρικὰς σχέσεις. Εἰς τὰς ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν ἱερῶν αὐτῶν, ἢ μεταξὺ γειτονικῶν πρὸς αὐτὰ πόλεων παρατηρεῖ ὁ Θ. Μανιᾶς ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τῆς τομῆς εὐθείας, εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τοῦ σήμερον λεγομένου κανόνος τῆς χρυσῆς τομῆς.

Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα : Πότε ἐκτίσθησαν τὰ Ἱερὰ αὐτά; Θεωρεῖται ὑπὸ τῶν εἰδικῶν ἐπιστημόνων βέβαιον, ὅτι ἐκτίσθησαν εἰς τοὺς μυθολογικοὺς ἢ προϊστορικοὺς χρόνους καὶ μάλιστα ἀρκετὰς χιλιάδας ἔτη π.Χ. Αἱ ἔρευναι τοῦ Θ. Μανιᾶ ἀποτελοῦν πραγματικὴν ἐπανάστασιν εἰς τὴν χρονολόγησιν γεγονότων, ἅτινα ἔλαβον χώραν εἰς τὴν περιοχὴν ὅπου κατῴκησαν παλαιότατα οἱ Ἕλληνες, καὶ προσέρχονται διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν νὰ ἐπικυρώσουν τὰ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Τίμαιος ἀναφερόμενα.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ Τιμαίου ὁ Πλάτων ἀφηγεῖται ἀφήγησιν Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα, ὅστις εἶχε μεταβῆ εἰς τὴν Αἴγυπτον περὶ τὸ ἔτος 580 π.Χ. Ἐκ τῆς ἀφηγήσεως αὐτῆς τοῦ ἱερέως συνάγεται ὅτι 9600 ἔτη π.Χ. περίπου ἔγινε μεγάλη καταστροφὴ ἐκ κατακλυσμῶν καὶ σεισμῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὴν ὁποίαν ἐλάχιστοι ἄνθρωποι ἐσώθησαν. Εἰς τὴν Αἴγυπτον δὲν ἔγινε παρομοία καταστροφή. Οἱ ἱερεῖς τῆς Αἰγύπτου εἶχον καταγράψει εἰς τὸ ἀρχεῖον των ὅλα τὰ γεγονότα, τὰ ὁποῖα ἔλαβον χώραν εἰς τὴν Ἑλλάδα (εἰς πλάκας ἐκ πηλοῦ).

Μετὰ τὴν πάροδον τοῦ καταστρεπτικοῦ κατακλυσμοῦ φαίνεται ὅτι οἱ διασωθέντες ἄνθρωποι ἐπανέκτισαν τὰς ἐξαφανισθείσας πόλεις καὶ θαυμάζοντες καὶ εὐλαβούμενοι τὸ θεῖον ἔκτισαν τὰ Ἱερὰ περὶ τῶν ὁποίων ἔγινε μνεία προηγουμένως. Ἡ μέχρι σήμερον θεωρουμένη ὡς μῦθος ἀφήγησις τοῦ ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα περὶ μεγάλου καταστρεπτικοῦ κατακλυσμοῦ καὶ σεισμῶν καὶ περὶ τῆς βυθίσεως τῆς εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν κειμένης μεγάλης νήσου Ἀτλαντίδος, περὶ τὸ ἔτος 9,5 χιλ. π.Χ. περίπου, γίνεται διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐρευνῶν τοῦ Θ. Μανιᾶ ἱστορικὴ πραγματικότης. Σημειωτέον ὅτι ὁ Αἰγύπτιος ἱερεὺς ἀναφέρει κατὰ τὴν πρὸς τὸν Σόλωνα ἀφήγησίν του, ὅτι ὁ πολιτισμὸς τῶν Ἀθηναίων κατὰ τὸ ἔτος 9600 π.Χ., προηγεῖτο 1000 ἔτη τοῦ πολιτισμοῦ τῶν Αἰγυπτίων. Κατωτέρω παραθέτομεν μερικὰ σημεῖα τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος, ὅπου ἐκτίθενται τὰ τῆς συνομιλίας τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως μετὰ τοῦ Σόλωνος (Πλάτωνος, Τίμαιος 23 d—25 d).

Ὁ ἱερεὺς λοιπὸν εἶπε : «Κανεὶς φθόνος, ὦ Σόλων, ἀλλὰ γιὰ τὸ χατήρι σου καὶ τῆς πόλεώς σας, μάλιστα δὲ γιὰ τὸ χατήρι τῆς θεᾶς, ἡ ὁποία ἔτυχε νὰ ἐκθρέψῃ καὶ παιδεύσῃ καὶ τὴν πόλιν σας καὶ τὴν ἰδικήν μας, πρότερον μὲν τὴν πόλιν σας κατὰ χίλια ἔτη, παραλαβοῦσα τὴν γενιά σας ἐκ τῆς γῆς καὶ τοῦ Ἡφαίστου, κατόπιν δὲ τὴν ἰδικήν μας πόλιν. Διὰ τὸν ἐδῶ δὲ πολιτισμὸν γράφεται εἰς τὰ ἱερὰ γράμματα (τοῦ ἀρχείου μας) ἀριθμὸς ἐνάρξεως 8000 ἔτη. Ἀλλὰ διὰ τὰ γεγονότα τὰ ἰδικά σας τὰ πρὸ 9000 ἐτῶν θὰ σοῦ εἴπω συντόμως καὶ διὰ τοὺς νόμους καὶ διὰ τὰ ἔργα των, τί τὸ καλλίτερον ἔγινε... Πολλὰ μὲν λοιπὸν καὶ μεγάλα ἔργα τῆς πόλεως (σας) γραμμένα ἐδῶ θαυμάζονται, ἓν ὅμως ὑπερέχει, καὶ κατὰ τὸ μέγεθος καὶ κατὰ τὴν ἀρετήν· διότι λέγει τὸ ἀρχεῖον μας πόσον μεγάλην δύναμιν συνέτριψε, ἡ ὁποία ἀγέρωχος ἐβάδιζε καὶ καθ' ὅλην τὴν Εὐρώπην καὶ τὴν 'Ασίαν, ὁρμηθεῖσα ἔξωθεν ἀπὸ τὸν 'Ατλαντικὸν ὠκεανόν. Διότι τότε ἡ ἐκεῖ θάλασσα ἦτο διαβατή· διότι πρὸ τοῦ στομίου, τὸ ὁποῖον σεῖς καλεῖτε, ὅπως εἴπατε 'Ηρακλείους στήλας, ὑπῆρχε μία νῆσος, ἡ δὲ νῆσος αὕτη ἦτο μεγαλυτέρα καὶ τῆς Λιβύης καὶ τῆς 'Ασίας.

...Εἰς τὴν νῆσον δὲ αὐτὴν τὴν 'Ατλαντίδα εἶχε συγκροτηθῆ μεγάλη καὶ θαυμαστὴ δύναμις βασιλέων ...πρὸς τούτοις δὲ πρὸς τὰ ἐδῶ μὲν εἶχον κυριεύσει τὴν Λιβύην μέχρι τῶν συνόρων τῆς Αἰγύπτου, εἰς τὴν Εὐρώπην δὲ μέχρι τῆς Τυρρηνίας (τῆς 'Ιταλίας). Αὐτὴ δὲ ἡ δύναμις συγκεντρωθεῖσα ἐπεχείρησε διὰ μιᾶς νὰ ὑποδουλώσῃ ὅλον τὸν Μεσογειακὸν χῶρον. Τότε λοιπόν, ὦ Σόλων, ἡ δύναμις τῆς πόλεώς σας ἔγινεν εἰς ὅλους φανερὰ καὶ κατὰ τὴν ἀρετὴν καὶ κατὰ τὴν ῥώμην, διότι σταθεῖσα μπροστὰ ἀπ' ὅλους καὶ κατὰ τὴν εὐψυχίαν καὶ κατὰ τὴν τεχνικήν, ὅση εἶναι ἀναγκαία διὰ τὸν πόλεμον, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἦτο ἀρχηγός, ἡ πόλις σας τῶν 'Ελλήνων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἔμεινε μόνη, διότι οἱ ἄλλοι τὴν ἐγκατέλειψαν, ἀφοῦ ἔφθασε τότε εἰς τοὺς ἐσχάτους κινδύνους, ἐνίκησεν ὅμως τοὺς ἐπιδρομεῖς καὶ ἔστησε τρόπαιον...

...'Αργότερα δὲ (μετὰ τὴν νίκην τῶν 'Αθηναίων κατὰ τοῦ στρατοῦ τῆς Ἀτλαντίδος νήσου), ὁπότε ἔγιναν φοβεροὶ σεισμοὶ καὶ κατακλυσμοί, μέσα σὲ μιὰ φοβερὴ ἡμέρα καὶ νύχτα, ὅλος ὁ στρατός σας ἐβυθίσθη εἰς τὴν γῆν, ἐπίσης δὲ καὶ ἡ νῆσος Ἀτλαντίς, ἐβυθίσθη εἰς τὴν θάλασσαν καὶ ἐξηφανίσθη».

Κατὰ τὴν ἀφήγησιν λοιπὸν τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα, ἡ νῆσος Ἀτλαντίς, κειμένη ἔξω τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτάρ, ἐβυθίσθη εἰς τὸν ὠκεανὸν καὶ ὁλόκληρος ὁ στρατὸς τῶν Ἀθηναίων ἐβυθίσθη εἰς ὀρύγματα γῆς συνεπείᾳ φοβερῶν σεισμῶν καὶ κατακλυσμῶν, οἵτινες ἔλαβον χώραν περίπου ἐννέα χιλιάδας ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος.

ΑΙ ΕΡΕΥΝΑΙ ΤΟΥ Θ. ΜΑΝΙΑ

2. Τὰ διδάγματα τὰ ὁποῖα συνάγομεν ἐκ τῶν ἐμπνευσμένων ἐρευνῶν τοῦ Θ. Μανιᾶ, δυνάμεθα νὰ τὰ συνοψίσωμεν ὡς ἑξῆς:

1. Οἱ Ἕλληνες, ἀσχέτως πρὸς τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἔλαβον τὸ ὄνομα τοῦτο, περὶ τὸ ἔτος 10 χιλ. π.Χ. καὶ ἔτι παλαιότερον κατῴκουν τὸν περὶ τὴν Μεσόγειον Θάλασσαν ἑλληνικὸν χῶρον, ἤτοι τὴν Ἑλληνικὴν Χερσόνησον, τὰς παρ' αὐτὴν νήσους καὶ μεγάλας ἐκτάσεις τῆς Μ. Ἀσίας.

2. Κατὰ τὴν μνημονευομένην παλαιὰν αὐτὴν ἐποχὴν οἱ Ἕλληνες εἶχον δημιουργήσει ἀξιοθαύμαστον πολιτισμὸν καὶ εἶχον ἀποκτήσει ἐμπειρικῶς σπουδαίας ἀριθμητικὰς καὶ γεωμετρικὰς γνώσεις, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται καὶ ἡ γνῶσις τοῦ κανόνος τῆς χρυσῆς τομῆς.

3. Μετὰ τὴν καταστροφὴν τῶν Ἑλλήνων ἐκ τοῦ μεγάλου κατακλυσμοῦ καὶ τὴν καταβύθισιν τῆς ἐν τῷ Ἀτλαντικῷ ὠκεανῷ εὑρισκομένης μεγάλης νήσου Ἀτλαντίδος, ὡς ἀναφέρει συναφῶς ὁ Πλάτων, οἱ διασωθέντες εἰς τὰ ὄρη Ἕλληνες ἐπανελθόντες εἰς τὰ πεδινὰ μέρη ἐπανέκτισαν τὰς πόλεις καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μεγίστου θαυμασμοῦ πρὸς τὸ Θεῖον, ἀνήγειρον τὰ Ἱερά των ἐπὶ τῇ βάσει ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχέσεων, τὰς ὁποίας εἶχον ἀνακαλύψει ἐμπειρικῶς. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ κανὼν τῆς χρυσῆς τομῆς παρατηρεῖται εἰς τὰς διαστάσεις πολλῶν φύλλων δένδρων (δρυὸς π.χ.) καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν ἀκόμη τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος. Εἰς κανονικὸν σῶμα ἀνθρώπου ὁ ὀμφαλὸς χωρίζει τὸ ὕψος τοῦ σώματος εἰς τμήματα κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς, ὅπου ἀπὸ τοῦ ὀμφαλοῦ μέχρι τοῦ ἐδάφους εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἀπὸ τοῦ ὀμφαλοῦ μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς κεφαλῆς εἶναι τὸ μικρότερον.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο, εἶναι λογικὸν νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ διαφύγῃ τὴν προσοχὴν λαοῦ εὐφυοῦς, οἷος ἦτο ὁ Ἑλληνικός.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολογισμῶν καὶ τῶν παρατηρήσεων τοῦ Θ. Μανιᾶ εἰς ὡρισμένα μέρη τῆς Ἑλλάδος πρέπει νὰ εἶχον κτισθῇ Ἱερά. Περὶ τούτων ὅμως οὐδὲν ἴχνος ὑπάρχει σήμερον καὶ οὐδεμία συναφὴς πληροφορία ἔχει διασωθῇ. Ἐὰν λοιπὸν γίνουν εἰς τὰ μέρη αὐτὰ ἀνασκαφαὶ καὶ εὑρεθοῦν ἐρείπια ἀρχαίων Ἱερῶν, τοῦτο θὰ εἶναι ἀκόμη μεγαλυτέρα ἀπόδειξις τῶν πορισμάτων ἐκ τῶν ἐρευνῶν τοῦ Θ.

Μανιᾶ, ὅτι εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον εἶχε δημιουργηθῆ πολιτισμὸς πρὸ 12 χιλ. ἐτῶν καὶ ἔτι παλαιότερον.

Ἐνισχυτικὸν τῶν πορισμάτων τούτων εἶναι τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι διὰ νὰ δημιουργηθῇ ἡ γλῶσσα τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν θὰ ἐχρειάσθησαν μερικαὶ χιλιάδες ἐτῶν. Εἶναι ἀδύνατον ἡ γλῶσσα τοῦ Ὁμήρου νὰ ἐδημιουργήθη εἰς χρονικὸν διάστημα μόνον ἑκατοντάδων τινῶν ἐτῶν. Ἐὰν διὰ τὴν ἐν μέρει καταστροφὴν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης, ἥτις ἤρχισεν ἀπὸ τοῦ 1200 μ.Χ. διὰ τῆς δημιουργίας τοῦ ἑλληνο-φραγκο-τουρκικοῦ γλωσσικοῦ ἰδιώματος τοῦ ἀπαιδεύτου ὄχλου, τοῦ γλωσσικοῦ δηλ. ἰδιώματος τοῦ προκύψαντος ἐκ τῆς μακραίωνος δουλείας τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἔθνους εἰς τοὺς Φράγκους καὶ τοὺς Τούρκους, ἐχρειάσθησαν μέχρι σήμερον περισσότερα τῶν 750 ἐτῶν, διὰ τὴν δημιουργίαν τοῦ γλωσσικοῦ ἰδιώματος τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν θὰ ἐχρειάσθη γλωσσικὴ διαδικασία χρονικοῦ διαστήματος ἀρκετῶν χιλιάδων ἐτῶν.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ μῆκος μιᾶς πρὸς τομὴν διδομένης εὐθείας ἴσον 1 καὶ παραστήσωμεν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα διὰ x θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν τῆς χρυσῆς τομῆς εὐθείας :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνεται $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ α′ μέλος τῆς (1) εἶναι $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{M}{\mu}$, ἂν παρασταθῇ τὸ μέγα τμῆμα διὰ Μ καὶ τὸ μικρὸν διὰ μ. Εἶναι δὲ κατὰ προσέγγισιν $\frac{M}{\mu} = 1{,}618$.

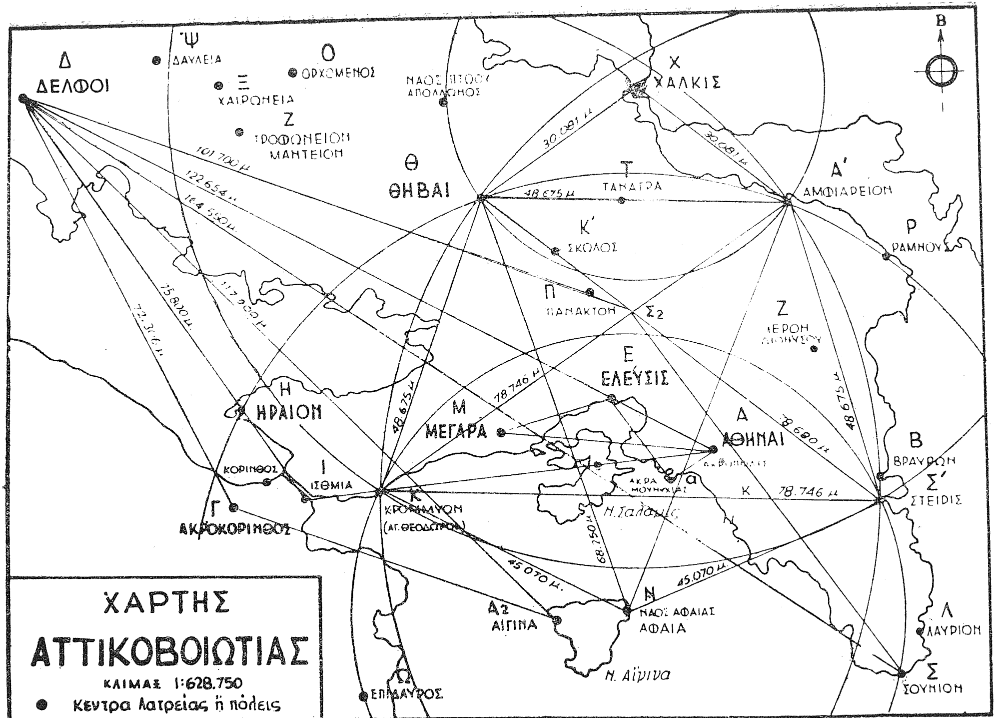
Εἰς τὸν παρατιθέμενον χάρτην τῆς Ἀττικοβοιωτίας ὁ Θ. Μανιᾶς ἔκαμε τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις:

Τὰ κέντρα λατρείας καὶ αἱ πόλεις:

Θῆβαι — Χαλκὶς — Ἀμφιάρειον — Στεῖρις (σημερινὸν Πορτοράφτη) — Ἀφαία — Κρομμυὼν (σημερινοὶ Ἅγιοι Θεόδωροι) εὑρίσκονται εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἑξαγώνου.

Τὰ κέντρα Χαλκὶς —Ἀμφιάρειον — Θῆβαι εὑρίσκονται εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀνήκοντος εἰς τὸ μνημονευθὲν ἑξάγωνον. Ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τούτου τριγώνου (Θῆβαι —Ἀμφιάρειον) εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εὐθείας τμηθείσης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, δηλ. κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς εὐθείας, ἐν ᾧ ἑκάστη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (Θῆβαι — Χαλκὶς καὶ Χαλκὶς —Ἀμφιάρειον) εἶναι τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτῆς.

Τὸ τετράπλευρον Θῆβαι —Ἀμφιάρειον — Στεῖρις — Κρομμυὼν εἶναι μέρος κανονικοῦ πενταγώνου καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοι Θῆβαι — Στεῖρις καὶ Ἀμφιάρειον — Κρομμυὼν τέμνονται κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς. Ἡ ἀπόστασις Κρομμυὼν — Σ_2 εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς τεμνομένης εὐθείας, ἐν ᾧ ἡ ἀπόστασις Σ_2 —Ἀμφιάρειον εἶναι τὸ μικρότερον. Ἐπίσης ἡ ἀπόστασις Στεῖρις — Σ_2 εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα καὶ ἡ ἀπόστασις Σ_2 — Θῆβαι εἶναι τὸ μικρότερον. Ἐὰν εἰς τὴν τοποθεσίαν Σ_2 γίνουν ἀνα-


ΧΑΡΤΗΣ
ΑΤΤΙΚΟΒΟΙΩΤΙΑΣ
ΚΛΙΜΑΞ 1:628.750
Κεντρα λατρείας ή πόλεις
Β
Δ
ΔΕΛΦΟΙ
Ψ
ΔΑΥΛΕΙΑ
Ξ
ΧΑΙΡΩΝΕΙΑ
Ο
ΟΡΧΟΜΕΝΟΣ
Ζ
ΤΡΟΦΩΝΕΙΟΝ
ΜΑΝΤΕΙΟΝ
Θ
ΘΗΒΑΙ
Χ
ΧΑΛΚΙΣ
Τ
ΤΑΝΑΓΡΑ
Α΄
ΑΜΦΙΑΡΕΙΟΝ
Ρ
ΡΑΜΝΟΥΣ
Κ΄
ΣΚΟΛΟΣ
Π
ΠΑΝΑΚΤΟΝ
Σ2
Ζ
ΙΕΡΟΝ ΔΙΟΝΥΣΟΥ
Ε
ΕΛΕΥΣΙΣ
Α
ΑΘΗΝΑΙ
Β
ΒΡΑΥΡΩΝ
Σ΄
ΣΤΕΙΡΙΣ
Μ
ΜΕΓΑΡΑ
Η
ΗΡΑΙΟΝ
Ι
ΙΣΘΜΙΑ
ΚΟΡΙΝΘΟΣ
Γ
ΑΚΡΟΚΟΡΙΝΘΟΣ
Κ
ΚΡΟΜΜΥΩΝ
(ΑΓ. ΘΕΟΔΩΡΟΙ)
ΑΚΡΑ ΜΟΥΝΥΧΙΑΣ
α
Η. Σαλαμίς
Ν
ΝΑΟΣ ΑΦΑΙΑΣ
ΑΦΑΙΑ
Α2
ΑΙΓΙΝΑ
Η. Αίγινα
Ω
ΕΠΙΔΑΥΡΟΣ
Λ
ΛΑΥΡΙΟΝ
Σ
ΣΟΥΝΙΟΝ
101.700 μ.
122.654 μ.
164.550 μ.
117.000 μ.
75.800 μ.
72.306 μ.
30.081 μ.
30.081 μ.
48.675 μ.
48.675 μ.
48.675 μ.
78.746 μ.
78.746 μ.
78.680 μ.
68.250 μ.
45.070 μ.
45.070 μ.

σκαφαὶ καὶ εὑρεθῇ κέντρον λατρείας, τοῦτο θὰ ἀποτελῇ μεγαλυτέραν ἔτι ἐνίσχυσιν τῆς θεωρίας τοῦ Θ. Μανιᾶ. Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ἰσχύει καὶ διὰ τὴν Στεῖριν καὶ τὸν Κρυμμυῶνα (Πορτοράφτη καὶ Ἁγίους Θεοδώρους ἀντιστοίχως), ὅπου ἀκόμη δὲν ἔχουν γίνει ἀνασκαφαί.

Αἱ εἰς τὸν χάρτην σημειούμεναι ἀποστάσεις *εἰς μέτρα* μεταξὺ τῶν διαφόρων κέντρων ἔχουν ληφθῆ ἐκ τῶν χαρτῶν τῆς Γεωγραφικῆς Ὑπηρεσίας Στρατοῦ. Χάριν δὲ συντομίας ἔχει σημειωθῆ εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ ὀνόματος ἑκάστου κέντρου, ἓν γράμμα, ὡς π.χ. εἰς τὰς Θήβας τὸ γράμμα Θ, εἰς τὸ Σούνιον τὸ Σ, εἰς τὴν Στεῖριν τὸ Σ′, εἰς τοὺς Δελφοὺς τὸ Δ, εἰς τὸν Κρομμυῶνα τὸ Κ κ.λπ.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω σχέσεις τινὰς χρυσῆς τομῆς εὐθείας σημειοῦντες τὰ ὀνόματα τῶν κέντρων ὁλόκληρα χάριν καλυτέρας ἐποπτείας.

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\frac{\text{Κρομμυὼν — Στεῖρις}}{\text{Θῆβαι — Ἀμφιάρειον}} = \frac{78\,746}{48\,675} = 1{,}617$$

$$\frac{\text{Θῆβαι — Ἀμφιάρειον}}{\text{Θῆβαι — Χαλκὶς}} = \frac{48\,675}{30\,081} = 1{,}618$$

$$\frac{\text{Κρομμυὼν — Στεῖρις}}{\text{Κρομμυὼν — Θῆβαι}} = \frac{78\,746}{48\,675} = 1{,}617$$

$$\frac{\text{Δελφοὶ — Αἴγινα}}{\text{Δελφοὶ — Ἀκροκόρινθος}} = \frac{117\,000}{72\,306} = 1{,}618$$

$$\frac{\text{Δελφοὶ — Ἀκρόπολις}}{\text{Δελφοὶ — Ἰσθμία}} = \frac{122\,654}{75\,800} = 1{,}618$$

$$\frac{\text{Δελφοὶ — Σούνιον}}{\text{Δελφοὶ — } \Sigma_2} = \frac{164\,550}{101\,700} = 1{,}617$$

Ἐκ τῶν σημερινῶν μετρήσεων τῶν ἀποστάσεων μεταξὺ ἱερῶν καὶ πόλεων τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, αἱ ὁποῖαι ἐπιβεβαιοῦν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς χρυσῆς τομῆς ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων περὶ τὸ ἔτος 10000 π.Χ. συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι οὗτοι εἶχον ἐπινοήσει μεθόδους μετρήσεως τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπὶ τοῦ παρόντος παραμένουν ἄγνωστοι.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

3. Τὰ περισωθέντα Μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν Ἑλλήνων εἶναι τὰ ἑξῆς : 1) Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ μικρότερα τούτου ἔργα, 2) Ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, 3) Τὰ Κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου ἐκτὸς τοῦ 8 βιβλίου, 4) Ἔργα τοῦ Ἥρωνος, 5) Τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Μεγάλη Σύνταξις, ἀστρονομικὸν ἔργον τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, 6) Τὰ Ἀριθμητικὰ (ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων) τοῦ Διοφάντου, 7) Ἡ Συναγωγὴ τοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως, 8) Τὰ σφαιρικὰ τοῦ Θεοδοσίου, 9) Σερήνου ἐξ Ἀντινοείας (κάτω Αἰγύπτου) Περὶ κυλίνδρου τομῆς, Περὶ κώνου τομῆς (περὶ τὸ 330 μ.Χ.), 10) Ἡ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ τοῦ Νικομάχου Γερασηνοῦ, 11) Θέωνος τοῦ

Σμυρναίου Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, 12) Τοῦ Ὑψικλέους μικρὰ πραγματεία, 13) Τοῦ Ἰαμβλίχου, Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς (εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο, σχόλια).

Ἔργον τοῦ περιφήμου μαθηματικοῦ Μενελάου σώζεται εἰς τὴν ἀραβικήν. Τὸ χειρόγραφον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Ἰνδικῆς πόλεως Patna. Εἰς τὴν αὐτὴν Βιβλιοθήκην εὑρίσκονται καὶ ἄλλα ἔργα Ἑλλήνων εἰς τὴν ἀραβικὴν ἀνέκδοτα (42 τὸν ἀριθμὸν) μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ δύο ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅλων τῶν ἔργων τούτων ἐλάβομεν φωτοτυπίας ἰδίαις δαπάναις. Τὰ δύο ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ἐδημοσιεύσαμεν κατὰ τὸ 1974 δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, εἰς τὸν Γ′ τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους.

Πρῶτος γράψας Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου (IV 13 – 14) ὁ ἐκ Χαλκηδόνος τῆς Μ. Ἀσίας μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος Ξενοκράτης, ὅστις διετέλεσε καὶ διευθυντὴς τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, μετὰ τὸν ἀνεψιὸν τοῦ Πλάτωνος Σπεύσιππον, ἀπὸ τοῦ ἔτους 339 – 314 π.Χ. Τὸ συναφὲς βιβλίον τοῦ Ξενοκράτους ἔφερε τὸν τίτλον Περὶ γεωμετρῶν βιβλία 5. Ὁ Ξενοκράτης εἶχε γράψει καὶ μαθηματικὰ βιβλία ὑπὸ τοὺς τίτλους Περὶ Ἀριθμῶν, Ἀριθμῶν θεωρία, Περὶ γεωμετρίας, ὡς καὶ βιβλίον μουσικῆς Περὶ διαστημάτων. Ὅλα τὰ βιβλία αὐτὰ ἀπωλέσθησαν.

Πολὺ ὀλίγα ἔτη νεώτερος τοῦ Ξενοκράτους εἶναι ὁ ἐκ Λέσβου μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Θεόφραστος (ἀκμὴ 320 π.Χ.), ὅστις ἐπίσης εἶχε γράψει Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, κατὰ τὸν Διογένη τὸν Λαέρτιον (V 48) ὑπὸ τὸν τίτλον Ἱστορικῶν γεωμετρικῶν βιβλία α΄, β΄, γ΄, δ΄ καὶ ἔργα μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ Περὶ μουσικῆς. Καὶ αὐτὰ τὰ ἔργα ἀπωλέσθησαν ὅλα.

Τρίτος γράψας Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν εἶναι ὁ ἐπίσης μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Εὔδημος ὁ Ῥόδιος σύγχρονος τοῦ Θεοφράστου. Καὶ τὸ ἔργον αὐτὸ ἀπωλέσθη, ἐκτὸς ὀλίγων ἀποσπασμάτων μνημονευομένων ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων καὶ ἐκδοθέντων ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ λογίου L. Spengel. Εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν τοῦ Εὐδήμου στηριζόμενος ὁ Γεμῖνος (1ος αἰ. π.Χ.) ἔγραψε παρόμοιον ἔργον ἀπολεσθὲν καὶ αὐτό. Τέλος εἰς τὸ ἔργον τοῦ Γεμίνου στηριζόμενος ὁ ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος Πρόκλος (410 – 485 μ.Χ.) ἔγραψε σχόλια εἰς τὸ α΄ βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου μὲ ἱστορικὰς σημειώσεις τῶν μαθηματικῶν. Τοῦτο εἶναι τὸ μοναδικὸν διασωθὲν βιβλίον Ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν, τὸ ὁποῖον καίτοι δὲν εἶναι πλῆρες ἀποτελεῖ σπουδαιοτάτην πηγὴν διὰ τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικά.

ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ

4. Εἰς τὴν σύγχρονον ἐποχήν, χάρις εἰς τὴν Τυπογραφίαν καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Τεχνικῆς, αἱ πληροφορίαι περὶ τῶν ἐπιστημονικῶν ἐπιτευγμάτων καὶ περὶ τῶν δημιουργῶν αὐτῶν γίνονται εὐκόλως γνωσταί. Κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὅμως, ὅτε τὸ ἐμπόριον τοῦ βιβλίου ἦτο δυσκολωτάτη ὑπόθεσις, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνεται συστηματικὴ παρακολούθησις τῶν ἐπιστημονικῶν προόδων. Ὁ χάρτης δὲν ἦτο ἐκ τῶν εὐθηνῶν ἐμπορευμάτων καὶ οἱ ἀντιγραφεῖς βιβλίων δὲν εὑρίσκοντο, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, εἰς ἀξιοπρόσεκτον βαθμὸν φιλολογικῆς καὶ ἐπιστημονικῆς μορφώσεως. Ἐπὶ πλέον, οἱ συγγράφοντες ἐπιστημονικὰ βιβλία δὲν συνήθιζον νὰ μνημονεύουν ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι εἶχον κάμει ἐπιστημονικὰς ἀνακαλύψεις.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους εἶναι δύσκολον νὰ εὑρεθῇ σήμερον, ποῖοι ἔκαμαν τὰς ἐπιστημονικὰς ἀνακαλύψεις κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. Αἱ συναφεῖς πληροφορίαι εἶναι λίαν πενιχραί. Ἂν ἐξαιρέσωμεν τὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Πτολεμαίου, περὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῶν διασωθέντων ἔργων των, περὶ τῶν λοιπῶν ἐπιστημονικῶν δημιουργημάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μόνον μικρὰν ἰδέαν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποκομίσωμεν.

Εἰς τοὺς κατωτέρω παρατιθεμένους τρεῖς πίνακας, οἵτινες παρ' ὅλην τὴν καταβληθεῖσαν προσπάθειαν δὲν ἔχουν τὴν ἀξίωσιν νὰ θεωρηθοῦν πλήρεις, περιλαμβάνονται τὰ ὀνόματα τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι ἐδημιούργησαν τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην, τὴν Ἀστρονομίαν καὶ τὴν Μουσικὴν ἢ συνέτειναν εἰς τὴν δημιουργίαν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ 1500 π.Χ. μέχρι τοῦ 16ου αἰῶνος μ.Χ., ἤτοι εἰς διάστημα 3000 ἐτῶν. Εἰς τὸν πρῶτον πίνακα περιλαμβάνονται οἱ ποιηταὶ καὶ οἱ φιλόσοφοι, οἱ ὁποῖοι εἶχον διατυπώσει κοσμογονικὰς θεωρίας ἢ διὰ τοῦ ἔργου των συνέβαλον γενικῶς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν Ἐπιστημῶν.

ΠΙΝΑΞ I

Ἕλληνες ποιηταὶ καὶ φιλόσοφοι συμβαλόντες εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν Μαθηματικῶν, τῆς Ἀστρονομίας καὶ τῆς Μουσικῆς.

1.	Λίνος ὁ Θηβαῖος	15 αἰὼν π.Χ.
2.	Μουσαῖος ὁ Ἀθηναῖος	15 π.Χ.
3.	Ὀρφεὺς ἐκ Θράκης	15 π.Χ.
4.	Ὅμηρος	11 ἢ 9 π.Χ.
5.	Ἡσίοδος	11 ἢ 9 π.Χ.
6.	Τυρταῖος	7 π.Χ.
7.	Ἀλκαῖος ἐκ Λέσβου	7–6 π.Χ.
8.	Ἀλκμὰν ἐκ Σάρδεων	7–6 π.Χ.
9.	Ἀρχίλοχος ἐκ Πάρου	7–6 π.Χ.
10.	Σαπφὼ ἡ Λεσβία	7–6 π.Χ.
11.	Φερεκύδης ἐκ Σύρου	7–6 π.Χ.
12.	Ἀνακρέων	6 π.Χ.
13.	Στησίχορος	6 π.Χ.
14.	Ἀλκμαίων	6–5 π.Χ.
15.	Ἐπιμενίδης ἐκ Κρήτης	6–5 π.Χ.
16.	Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος	6–5 π.Χ.
17.	Πίνδαρος ὁ Θηβαῖος	6–5 π.Χ.
18.	Ξενοφάνης ὁ Κολοφώνιος	6–5 π.Χ.
19.	Φρύνιχος	6–5 π.Χ.
20.	Ἀντισθένης ὁ Ἡρακλείτειος	5 π.Χ.
21.	Ἀρχέλαος	5 π.Χ.

22. Γοργίας	5 π.Χ.
23. Διογένης ἐξ Ἀπολλωνίας	5 π.Χ.
24. Ἐμπεδοκλῆς	5 π.Χ.
25. Ἡρόδικος ἐκ Σηλυμβρίας	5 π.Χ.
26. Θρασύμαχος	5 π.Χ.
27. Πρωταγόρας	5 π.Χ.
28. Παρμενίδης	5 π.Χ.
29. Σωκράτης	5 π.Χ.
30. Ἰδαῖος	5 π.Χ.
31. Κέβης ὁ Θηβαῖος	5 π.Χ.
32. Κλείδημος	5 π.Χ.
33. Κρατύλος	5 π.Χ.
34. Κριτίας	5 π.Χ.
35. Κρίτων	5 π.Χ.
36. Λυκόφρων	5 π.Χ.
37. Μέλισσος ὁ Σάμιος	5 π.Χ.
38. Ξενιάδης	5 π.Χ.
39. Πάρων	5 π.Χ.
40. Πρόδικος	5 π.Χ.
41. Σιμμίας ὁ Θηβαῖος	5 π.Χ.
42. Σιμωνίδης	5 π.Χ.
43. Ἀντισθένης	5–4 π.Χ.
44. Πλάτων	5–4 π.Χ.
45. Ἀριστοτέλης	4 π.Χ.
46. Θεόφραστος	4 π.Χ.
47. Ζήνων ὁ Κιτιεὺς	4–3 π.Χ.
48. Πύρρων ὁ Ἠλεῖος	4–3 π.Χ.
49. Ἄρατος	3 π.Χ.
50. Σφαῖρος	3 π.Χ.
51. Χρύσιππος	3 π.Χ.

52.	Καρνεάδης	3–2 π.Χ.
53.	Μοδερᾶτος	1 π.Χ.
54.	Ἀλέξανδρος Ἀφροδισιεὺς	2 μ.Χ.
55.	Πλωτῖνος	3 μ.Χ.
56.	Πορφύριος	3 μ.Χ.
57.	Θεμίστιος	4 μ.Χ.
58.	Ἰωάννης Φιλόπονος	6 μ.Χ.
59.	Σιμπλίκιος	6 μ.Χ.
60.	Πλήθων ὁ Γεμιστὸς	14–15 μ.Χ.

ΠΙΝΑΞ ΙΙ

Μαθηματικοὶ καὶ Ἀστρονόμοι

Διὰ τοῦ μετὰ τὸ ὄνομα τιθεμένου (α) δηλοῦνται οἱ περισσότερον γνωστοὶ ὡς ἀστρονόμοι.

1.	Θαλῆς ὁ Μιλήσιος,	αἰὼν 7–6 π.Χ.
2.	Κλεόστρατος ἐκ Τενέδου (α)	7–6 π.Χ.
3.	Μαστρικέτας ἐκ Λέσβου (α)	7–6 π.Χ.
4.	Φῶκος ὁ Σάμιος (α)	7–6 π.Χ.
5.	Ἀναξίμανδρος	6 π.Χ.
6.	Ἀναξιμένης	6 π.Χ.
7.	Εὐπαλῖνος	6 π.Χ.
8.	Ἑκαταῖος	6 π.Χ.
9.	Μαμέρτιος	6 π.Χ.
10.	Μανδρόλυτος ἐκ Πριήνης	6 π.Χ.
11.	Μοῖρις	6 π.Χ.
12.	Πυθαγόρας ὁ Σάμιος	6–5 π.Χ.
13.	Ἀγάθαρχος	5 π.Χ.
14.	Ἀλέξανδρος ὁ Αἰτωλὸς	5 π.Χ.

15. Ἀναξαγόρας	5 π.Χ.
16. Ἀντιφῶν ἐκ Ῥαμνοῦντος	5 π.Χ.
17. Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης	5 π.Χ.
18. Βοΐδας	5 π.Χ.
19. Βρύσων	5 π.Χ.
20. Δημόκριτος	5 π.Χ.
21. Ἔκφαντος	5 π.Χ.
22. Εὐκτήμων (α)	5 π.Χ.
23. Ζήνων ὁ Ἐλεάτης	5 π.Χ.
24. Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος	5 π.Χ.
25. Θρασυάλκης	5 π.Χ.
26. Θυμαρίδας ὁ Πάριος	5 π.Χ.
27. Ἱκέτας (α)	5 π.Χ.
28. Ἵππασος	5 π.Χ.
29. Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος	5 π.Χ.
30. Ἱπποκράτης ὁ Χῖος	5 π.Χ.
31. Ἵππων	5 π.Χ.
32. Ἴων ὁ Χῖος	5 π.Χ.
33. Λεύκιππος	5 π.Χ.
34. Μενίστωρ	5 π.Χ.
35. Μέτων ὁ Ἀθηναῖος (α)	5 π.Χ.
36. Πρῶρος	5 π.Χ.
37. Εὔρωτος	5 π.Χ.
38. Οἰνοπίδης	5 π.Χ.
39. Τίμαιος ὁ Λοκρὸς	5 π.Χ.
40. Φαεινὸς (α)	5 π.Χ.
41. Φιλόλαος (α)	5 π.Χ.
42. Θεαγένης	5 π.Χ.
43. Αἰσχύλος (μαθ. Ἱππ. Χίου)	5–4 π.Χ.
44. Ἄρχιππος	5–4 π.Χ.

45.	Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος	5–4 π.Χ.
46.	Βροντῖνος	5–4 π.Χ.
47.	Βῶλος	5–4 π.Χ.
48.	Εὔδοξος ὁ Κνίδιος	5–4 π.Χ.
49.	Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος	5–4 π.Χ.
50.	Κέρκωψ	5–4 π.Χ.
51.	Λῦσις	5–4 π.Χ.
52.	Ὄκκελος	5–4 π.Χ.
53.	Ὄψιμος	5–4 π.Χ.
54.	Πέτρων	5–4 π.Χ.
55.	Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνὸς	4 π.Χ.
56.	Ἀμύλκας ὁ Ἡρακλεώτης	4 π.Χ.
57.	Ἀμφίνομος	4 π.Χ.
58.	Ἀνάξαρχος	4 π.Χ.
59.	Ἀρισταῖος ὁ Πρεσβύτερος	4 π.Χ.
60.	Βούθηρος	4 π.Χ.
61.	Δεινόστρατος	4 π.Χ.
62.	Δερκυλίδας	4 π.Χ.
63.	Δικαίαρχος	4 π.Χ.
64.	Διογένης ὁ Σμυρναῖος	4 π.Χ.
65.	Ἑλικὼν ὁ Κυζικηνὸς	4 π.Χ.
66.	Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος	4 π.Χ.
67.	Εὔδημος ὁ Ῥόδιος	4 π.Χ.
68.	Εὐφράνωρ	4 π.Χ.
69.	Θεύδιος ὁ Μάγνης	4 π.Χ.
70.	Κάλλιππος ὁ Κυζικηνὸς	4 π.Χ.
71.	Κράτης ὁ γεωμέτρης	4 π.Χ.
72.	Λεωδάμας ὁ Θάσιος	4 π.Χ.
73.	Πρωταγόρας (α)	4 π.Χ.
74.	Σῖμος	4 π.Χ.

75.	Λέων	4 π.Χ.
76.	Μέναιχμος	4 π.Χ.
77.	Μητρόδωρος	4 π.Χ.
78.	Μυωνίδης	4 π.Χ.
79.	Νεσσᾶς	4 π.Χ.
80.	Νεοκλείδης	4 π.Χ.
81.	Ξενοκράτης	4 π.Χ.
81.	Ξενόφιλος	4.π.Χ.
83.	Πολέμαρχος ὁ Κυζικηνὸς	4 π.Χ.
84.	Πυθέας	4 π.Χ.
85.	Σπεύσιππος	4 π.Χ.
86.	Στράτων	4 π.Χ.
87.	Φίλιππος, ἐκ Μένδης Μακεδονίας	4 π.Χ.
85.	Φίλιππος ὁ Ὀπούντιος	4 π.Χ.
89.	Νικαρέτη ἐκ Κορίνθου	4 π.Χ.
90.	Καλλίστρατος	4 π.Χ.
91.	Μνασέας (α)	4 π.Χ.
92.	Πολύειδος (μηχανικὸς)	4 π.Χ.
93.	Φιλέας ὁ Ταυρομένιος (μηχανικὸς)	4 π.Χ.
94.	Λεόντιος	4 π.Χ.
95.	Ἀλέξανδρος	4–3 π.Χ.
96.	Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος (α)	4–3 π.Χ.
97.	Αὐτόλυκος ἐκ Πιτάνης	4–3 π.Χ.
98.	Βίων ὁ Ἀβδηρίτης	4–3 π.Χ.
99.	Εὐκλείδης	4–3 π.Χ.
100.	Ἡρακλείδης ὁ ἐκ Πόντου	4–3 π.Χ.
101.	Λακύδης	4–3 π.Χ.
102.	Κλεινίας ὁ Ταραντῖνος	4–3 π.Χ.
103.	Φειδίας (πατὴρ Ἀρχιμήδους)	4–3 π.Χ.
104.	Λεπτίνης	4–3 π.Χ.

105.	Ἀριστόθηρος	3 π.Χ.
106.	Ἀρίστυλος	3 π.Χ.
107.	Ἀρχιμήδης	3 π.Χ.
108.	Διονύσιος (α)	3 π.Χ.
109.	Δοσίθεος	3 π.Χ.
110.	Ἐρατοσθένης	3 π.Χ.
111.	Ζεύξιππος	3 π.Χ.
112.	Κλεάνθης	3 π.Χ.
113.	Κόνων ὁ Σάμιος	3 π.Χ.
114.	Κτησίβιος (μηχανικὸς)	3 π.Χ.
115.	Παρμενίων	3 π.Χ.
116.	Τιμοχάρης	3 π.Χ.
117.	Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος	3–2 π.Χ.
118.	Σκοπίνας	3–2 π.Χ.
119.	Ἀπολλώνιος ἐκ Μύνδου	2 π.Χ.
120.	Δημήτριος ὁ Λάκων	2 π.Χ.
121.	Διονύσιος	2 π.Χ.
122.	Διονυσόδωρος	2 π.Χ.
123.	Ἐπιγένης (α)	2 π.Χ.
124.	Εὔδημος	3–2 π.Χ.
125.	Ζηνόδωρος	2 π.Χ.
126.	Θεοδόσιος	2 π.Χ.
127.	Ἵππαρχος (α)	2 π.Χ.
128.	Κριτόδημος	2 π.Χ.
129.	Ἀνδρίας	2 π.Χ.
130.	Πατροκλῆς	2 π.Χ.
131.	Ναυκράτης	2 π.Χ.
132.	Νικομήδης	2 π.Χ.
133.	Περσεὺς	2 π.Χ.
134.	Σέλευκος	2 π.Χ.

135.	Ὑψικλῆς	2 π.Χ.
136.	Φίλων ὁ Βυζάντιος	2 π.Χ.
137.	Φιλωνίδης	2 π.Χ.
138.	Σεραπίων	2 π.Χ.
139.	Διονύσιος (α)	2–1 π.Χ.
140.	Γεμῖνος	2–1 π.Χ.
141.	Διοκλῆς	2–1 π.Χ.
142.	Διονυσόδωρος ἐκ Μήλου	2–1 π.Χ.
143.	Ζήνων ὁ Σιδώνιος	2–1 π.Χ.
144.	Ποσειδώνιος	2–1 π.Χ.
145.	Ἄνδρων	1 π.Χ.
146.	Ἀρισταῖος ὁ νεώτερος	1 π.Χ.
147.	Διονύσιος	1 π.Χ.
148.	Ζηνόδοτος	1 π.Χ.
149.	Σωσιγένης (α)	1 π.Χ.
150.	Χάρμανδρος	1 π.Χ.
151.	Διόδωρος	1 π.Χ. — 1 μ.Χ.
152.	Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς	1 μ.Χ.
153.	Ἐρύκινος	1 μ.Χ.
154.	Ἡράκλειτος	1 μ.Χ.
155.	Κάρπος	1 μ.Χ.
156.	Μαρῖνος ὁ Τύριος	1 μ.Χ.
157.	Μενέλαος	1 μ.Χ.
158.	Λεωνίδας ὁ Ἀλεξανδρεύς (α)	1 μ.Χ.
159.	Σπόρος	1 μ.Χ.
160.	Ἀγρίππας (α)	1–2 μ.Χ.
161.	Αἰνείας ἐξ Ἱεραπόλεως	1–2 μ.Χ.
162.	Περικλῆς	1–2 μ.Χ.
163.	Φίλων ὁ Τυανεύς	1–2 μ.Χ.
164.	Βόηθος	1–2 μ.Χ.

165. Ἑρμείας	1–2 μ.Χ.
166. Νίκων, πατὴρ Ἰατρ. Γαληνοῦ	1–2 μ.Χ.
167. Θέων ὁ Σμυρναῖος	2 μ.Χ.
168. Κλεομήδης (α)	2 μ.Χ.
169. Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς	2 μ.Χ.
170. Πτολεμαῖος Κλαύδιος	2 μ.Χ.
171. Σέξτος ὁ Ἐμπειρικὸς	2 μ.Χ.
172. Δημήτριος ὁ Ἀλεξανδρεὺς	3 μ.Χ.
173. Διονύσιος	3 μ.Χ.
174. Διόφαντος	3 μ.Χ.
175. Μάγνης	3 μ.Χ.
176. Ἱέριος	3–4 μ.Χ.
177. Μεγεθίων	3–4 μ.Χ.
178. Σύρος	3–4 μ.Χ.
179. Ἀνατόλιος	3–4 μ.Χ.
180. Ἕρμιππος (α)	3–4 μ.Χ.
181. Ἡφαιστίων (α)	3–4 μ.Χ.
182. Θέων ὁ Ἀλεξανδρεὺς	3–4 μ.Χ.
183. Ἰάμβλιχος	3–4 μ.Χ.
184. Πανδροσίων	4 μ.Χ.
185. Πάππος	4 μ.Χ.
186. Παῦλος	4 μ.Χ. (;)
187. Πείθων	4 μ.Χ.
188. Σερῆνος	4 μ.Χ.
189. Διονύσιος ὁ Ἀλεξανδρεὺς	4–5 μ.Χ.
190. Ὑπατία	4–5 μ.Χ.
191. Δομῖνος	5 μ.Χ.
192. Πρόκλος	5 μ.Χ.
193. Μαρῖνος	5 μ.Χ.
194. Συριανὸς	5 μ.Χ.

195. Πρόκλος ὁ Βυζάντιος	5–6 μ.Χ.
196. Ἀμμώνιος	6 μ.Χ.
197. Ἀνθέμιος	6 μ.Χ.
198. Ἀσκληπιὸς	6 μ.Χ.
199. Εὐτόκιος	6 μ.Χ.
200. Ἡρώνας	6 μ.Χ. (;)
201. Ἰσίδωρος ὁ Μιλήσιος	6 μ.Χ.
202. Πρόκλος (Μητροπολίτης)	6 μ.Χ.
203. Στέφανος ὁ Ἀλεξανδρεὺς	7 μ.Χ.
204. Ἥρων	7 μ.Χ.
205. Γεώργιος ὁ γεωμέτρης	9 μ.Χ.
206. Θεοδήγιος	9 μ.Χ.
207. Λέων	9 μ.Χ.
208. Ψελλὸς Μιχαὴλ	11 μ.Χ.
209. Νεόφυτος Μοναχὸς	12 μ.Χ.
210. Πρόδρομος Θεόδωρος	12 μ.Χ.
211. Βλεμμύδης Νικόλαος	13 μ.Χ.
212. Βρυέννιος Μανουὴλ (α)	13 μ.Χ.
213. Παχυμέρης Γεώργιος	13 μ.Χ.
214. Πλανούδης Μάξιμος	14 μ.Χ.
215. Γρηγορᾶς Νικηφόρος (α)	13–14 μ.Χ.
216. Μετοχίτης Θεόδωρος	13–14 μ.Χ.
217. Χιονιάδης Γρηγόριος	13–14 μ.Χ.
218. Ἀργυρὸς Ἰσαὰκ	14 μ.Χ.
219. Βαρλαὰμ	14 μ.Χ.
220. Καβάσιλας Νικόλαος	14 μ.Χ.
221. Μελητινιώτης Θεόδωρος	14 μ.Χ.
222. Πεδασιανὸς Ἰωάννης	14 μ.Χ.
223. Ῥαβδᾶς Νικόλαος	14 μ.Χ.
224. Χρυσοκόκης Γεώργιος (α)	14 μ.Χ.

225.	Μανουὴλ Μοσχόπουλος	14–15 μ.Χ.
226.	Ἀμιρούνζης Γεώργιος (α)	15 μ.Χ.
227.	Βαλσαμὼν Μιχαὴλ	15 μ.Χ.
228.	Χρυσολωρᾶς Δημήτριος	15 μ.Χ.
229.	Ῥητόριος Βυζαντινὸς	15 μ.Χ. (;)
230.	Μαυρόλυκος Φραγκῖσκος	15–16 μ.Χ.

ΠΙΝΑΞ III

Μουσικοὶ

1.	Ἀμφίων ὁ Θηβαῖος	αἰὼν 15 π.Χ.
2.	Φιλάμμων ἐκ Θράκης	15 π.Χ.
3.	Θάμυρις, υἱὸς Φιλάμμωνος	15 π.Χ.
4.	Ἄνθης, ἐξ Ἀνθηδόνος Θηβῶν	15 π.Χ.
5.	Χείρων, διδάσκαλος τοῦ Ἀχιλλέως εἰς τὴν μουσικὴν	12 π.Χ.
6.	Φήμιος, τῶν Ἀνακτόρων Ὀδυσσέως	12 π.Χ.
7.	Δημόδοκος	12 π.Χ.
8.	Προναπίδης ὁ Ἀθηναῖος, διδάσκαλος τοῦ Ὁμήρου εἰς τὴν Μουσικὴν	11 π.Χ.
9.	Ὕαγνις	8 π.Χ.
10.	Μαρσύας	8 π.Χ.
11.	Πίερος ἐκ Πιερίας	8 π.Χ.
12.	Ὄλυμπος	8–7 π.Χ.
13.	Ἀριστόνικος	7 π.Χ.
14.	Ἄρδαλος	7 π.Χ.
15.	Θαλήτας (Γόρτυνος Κρήτης)	7 π.Χ.
16.	Ἱέραξ ὁ Ἀργεῖος	7 π.Χ.
17.	Καλλῖνος ὁ Ἐφέσιος	7 π.Χ.

18.	Κλωνᾶς	7 π.Χ.
19.	Ξενόδαμος ἐκ Κυθήρων	7 π.Χ.
20.	Ξενόκριτος ὁ Λοκρὸς	7 π.Χ.
21.	Πολύμναστος ὁ Κολοφώνιος	7 π.Χ.
22.	Σακάδας ὁ ᾿Αργεῖος	7 π.Χ.
23.	Τέρπανδρος	7 π.Χ.
24.	Λᾶσος ὁ ῾Ερμιονεὺς	7 π.Χ.
25.	῎Ιων	7 π.Χ.
26.	᾿Αρίων	7–6 π.Χ.
27.	Τελεσίας ὁ Θηβαῖος	7–6 π.Χ.
28.	Περίκλειτος	6 π.Χ.
29.	Τελέσσιλα	6 π.Χ.
30.	Τόρρηβος	6 π.Χ.
31.	Διονύσιος ὁ Θηβαῖος	6 π.Χ.
32.	Μελανιππίδης	6 π.Χ.
33.	Φίλλις ὁ Δήλιος	6 π.Χ.
34.	῎Ανθιππος	6–5 π.Χ.
35.	Μίδας ὁ ᾿Ακραγαντῖνος	6–5 π.Χ.
36.	᾿Αγαθοκλῆς	5 π.Χ.
37.	᾿Αριστογένης	5 π.Χ.
38.	᾿Αριστοκλείδης	5 π.Χ.
39.	᾿Αρίστων ὁ ᾿Αθηναῖος	5 π.Χ.
40.	᾿Αρίστων ὁ ᾿Αργεῖος	5 π.Χ.
41.	Δάμων	5 π.Χ.
42.	Διόδωρος ὁ Θηβαῖος	5 π.Χ.
43.	Δράκων	5 π.Χ.
44.	᾿Επίγονος	5 π.Χ.
45.	Θράσυλλος	5 π.Χ.
46.	Κράτης	5 π.Χ.
47.	Κρέξος	5 π.Χ.

48. Λαμπροκλῆς 5 π.Χ.
49. Νικοκλῆς 5 π.Χ.
50. Ξενόφιλος 5 π.Χ.
51. Πρατίνας ἐκ Φλιοῦντος 5 π.Χ.
52. Πυθοκλείδης ὁ Κεῖος, διδάσκαλος τοῦ Περικλέους εἰς τὴν μουσικὴν 5 π.Χ.
53. Σῖμος 5 π.Χ.
54. Τελέστης 5 π.Χ.
55. Φρῦνις ἐκ Μυτιλήνης 5 π.Χ.
56. Τελεφάνης 5 π.Χ.
57. Παγκράτης 5 π.Χ.
58. Στησίχορος ὁ Ἱμεραῖος 5 π.Χ.
59. Τυρταῖος ὁ Μαντινεὺς 5 π.Χ.
60. Ἀνδρέας ὁ Κορίνθιος 5 π.Χ.
61. Ξάνθος ὁ Ἀθηναῖος 5 π.Χ.
62. Λάμπρος, διδάσκαλος τοῦ Σωκράτους εἰς τὴν μουσικὴν 5 π.Χ.
63. Ἀντιγενίδης ὁ Θηβαῖος, διδάσκαλος τοῦ Ἀλκιβιάδου εἰς τὴν μουσικὴν 5–4 π.Χ.
64. Ὀρθαγόρας ὁ Θηβαῖος, διδάσκαλος τοῦ Ἐπαμεινώνδου εἰς τὴν μουσικὴν 5–4 π.Χ.
65. Μέτελλος ὁ Ἀκραγαντῖνος 5–4 π.Χ.
66. Πρόνομος ὁ Θηβαῖος 5–4 π.Χ.
67. Σπίνθαρος ὁ Ταραντῖνος 5–4 π.Χ.
68. Φιλόξενος ἐκ Κυθήρων 5–4 π.Χ.
69. Ἀλέξανδρος ἐκ Κυθήρων 5–4 π.Χ.
70. Δημόκριτος ὁ Χῖος 5–4 π.Χ.
71. Ἀριστόξενος, υἱὸς Σπινθάρου 4 π.Χ.
72. Καφησίας 4 π.Χ.
73. Κλεονείδης 4 π.Χ.

74. Τιμόθεος	4 π.Χ.
75. Φανίας	4 π.Χ.
76. Ἱππῶναξ	4 π.Χ.
77. Κηπίων	4 π.Χ.
78. Πύθων	4 π.Χ.
79. Ἀρχύτας ὁ Μυτιληναῖος	4 π.Χ.
80. Ἀγήνωρ ὁ Μυτιληναῖος	4 π.Χ.
81. Διοκλῆς	4 π.Χ.
82. Δημόδικος ὁ Κερκυραῖος	4 π.Χ.
83. Ἀγίας ὁ Ἀθηναῖος	4 π.Χ.
84. Ἀκύλας	4 π.Χ.
85. Ἀριστοκλῆς	4 π.Χ.
86. Ἀριστοκράτης	4 π.Χ.
87. Βάκχειος	3 π.Χ.
88. Ἀρίστων ὁ Θηβαῖος	2 π.Χ.
89. Σωτάδης	2 π.Χ.
90. Ἀλκείδης	2 π.Χ.
91. Διονύσιος	1 π.Χ.
92. Ἡφαιστίων	2 μ.Χ.
93. Ἀλύπιος	3 μ.Χ.
94. Σωτήριχος	1–2 μ.Χ.
95. Λυσίας	1–2 μ.Χ.
96. Ἀριστείδης Κουϊντιλιανὸς	3 μ.Χ.
97. Διονύσιος	4 μ.Χ.
98. Μεσονείδης	;
99. Στρατόνικος	;
90. Φιλόχορος	;
91. Χρυσόθεμις ὁ Κρὴς	8 π.Χ.
92. Ἐχέμβροτος	7 π.Χ.

Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟΝ ΔΙΑ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

5. Αἱ ἀραβικαὶ πηγαὶ τοῦ δεκάτου περίπου αἰῶνος μ.Χ. ἀποδίδουν τὴν ἐπινόησιν τῶν συγχρόνων συμβόλων τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς Ἰνδούς. Ἐπὶ τῶν πληροφοριῶν τούτων στηριζόμενοι οἱ ἐπιστήμονες τῆς Δύσεως ἔμειναν σύμφωνοι πρὸς τὴν ἀραβικὴν παράδοσιν, ὠνόμασαν ὅμως τὰ σύμβολα αὐτὰ ἀραβικοὺς ἀριθμούς, διότι ταῦτα ἔφθασαν εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην διὰ τῶν Ἀράβων τῆς Ἱσπανίας.

Ἡ ἐπινόησις τοῦ συμβόλου διὰ τὸ μηδὲν ὀφείλεται εἰς τὸν μεγάλον Ἕλληνα ἀστρονόμον καὶ μαθηματικὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον (100–178 μ.Χ. περίπου), ὡς πληροφορούμεθα ἐκ τοῦ περιφήμου ἔργου του Μαθηματικὴ Σύνταξις, εἰς τὸν τίτλον τοῦ ὁποίου οἱ μεταγενέστεροι προέταξαν τὴν λέξιν μεγάλην καὶ οἱ Ἄραβες μετεγλώττισαν τὸν τίτλον αὐτὸν εἰς Ἀλμαγέστη. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τῆς Μαθηματικῆς Συντάξεως ἀπαντῶμεν τὰς ἐκφράσεις

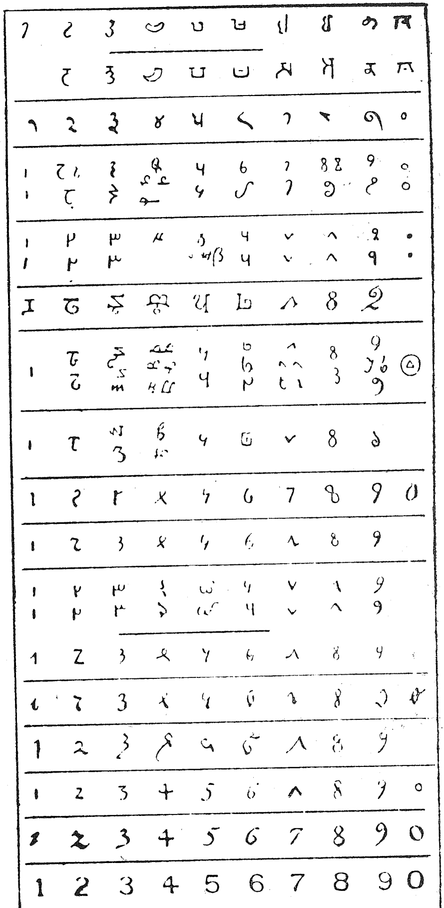
$$\begin{array}{llll} 0 & \mu\zeta' & \eta'' & (= 0^0 \quad 47' \quad 8'') \\ \mu\alpha' & 0' & \iota\eta'' & (= 41^0 \quad 0' \quad 18'') \end{array}$$

Τὸ σύμβολον διὰ τὸ μηδὲν (0) εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως οὐδέν.

Ὅπως παρατηροῦμεν, ὁ Πτολεμαῖος ἤδη χρησιμοποιεῖ τὸ σύστημα θέσεως γραφῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ ὅπου ἐλλείπει ἀριθμὸς θέτει εἰς τὴν θέσιν του τὸ

ΠΙΝΑΞ

ἐμφαίνων τὰς ἐποχὰς κατὰ τὰς ὁποίας διεμορφώθησαν τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν (J. Tropfke)



1. Ἰνδικὰ ἀρχικὰ γράμματα ἀριθμ. λέξεων 2 αἰῶνος.
2. Ἀριθμ. ἰνδ. σύμβολα ἐπιγρ. Gwalior 876 μ.Χ.
3. Ἀριθμητικὰ σύμβολα Δυτικῶν Ἀράβων 9-10 αἰῶνος.
4. Ἀριθμ. σύμβολα Ἀνατολ. Ἀράβων 9-10 αἰ.
5. Ἀριθμ. σύμβολα τῶν ἀβακιστῶν 9-10 αἰ.
6. Ἀριθμ. σύμβολα τῆς γεωμετρίας Βοηθίου 11 αἰ.
7. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Gui d'Arezzo 12 αἰ.
8. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Lechenfelf 12 αἰ.
9. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Sacrobosco 13 αἰ.
10. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Μαξίμου Πλανούδη. Ἀρχαὶ 14 αἰ. Βυζάντιον.
11. Ἀριθμ. σύμβολα τέλους 14 αἰ.
12. Ἀριθμ. σύμβολα Βασιλείας 15 αἰ.
13. Ἀριθμ. σύμβολα 16 αἰ.
14. Ἀριθμ. σύμβολα Dürer 1525.
15. Σύγχρονα ἀριθμ. σύμβολα.

μηδέν, ἐν ᾧ ὡς σύμβολα ἀριθμητικὰ μεταχειρίζεται τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.

Ἡ τελικὴ διαμόρφωσις τῶν ἰνδικῶν συμβόλων διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἔγινεν εἰς τὴν Εὐρώπην κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα, ἐν ᾧ εἰς τὸ Βυζάντιον γίνεται διαμνημόνευσις τῶν συμβόλων αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Βυζαντινοῦ λογίου Μαξίμου Πλανούδη (1255–1305), ὁ ὁποῖος τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις διὰ τῶν ἰνδικῶν ἀριθμῶν τὰς ὀνομάζει «ψηφοφορίας κατ' Ἰνδούς». (Paul Tannery, Mémoires Scientifiques, τόμ. IV, σελ. 199).

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΟΜΗΡΟΥ

6. Ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης ἐποχῆς ὅλοι συμφωνοῦν ὅτι ὁ Ὅμηρος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ποιητής, τὸν ὁποῖον ἐγέννησεν ἡ ἀνθρωπότης. Ὅτι ὅμως ὁ Ὅμηρος ἦτο καὶ σπουδαῖος μαθηματικὸς καὶ ὅτι εἰς τοὺς στίχους τῶν ποιημάτων του παίζει μὲ τὰ μαθηματικά, αὐτὸ εἰς τοὺς πολλοὺς εἶναι ἄγνωστον.

Περὶ τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τοῦ Ὁμήρου, ἀμυδρὰν μὲν ἀλλ' ἐνδιαφέρουσαν πληροφορίαν παρέχει εἰς ἡμᾶς ὁ Ῥωμαῖος συγγραφεὺς Aulus G. Gellius (2ος αἰὼν μ.Χ.). Ὁ Gellius (Γκέλλιος) ἐσπούδασεν εἰς τὰς Ἀθήνας, εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος καὶ ἔγραψε πραγματείαν εἰς δύο τόμους ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀττικαὶ νύκτες» (Noctes Atticae). Εἰς τὸν δεύτερον τόμον (XIV cap. 6 § 4) ἀναφέρει ὁ Γκέλλιος ὅτι Ἀθηναῖος φίλος του, τοῦ ἔδωκε πρὸς μελέτην βιβλίον του, ὅπου οὗτος εἶχε συγκεντρώσει ἐνδιαφερούσας πληροφορίας, τὰς ὁποίας δὲν εὕρισκε κανεὶς εἰς τὰ ἐν κυκλοφορίᾳ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Μεταξὺ τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν ἦτο ἡ παρατήρησις, ὅτι εἰς ὡρισμένους στίχους τοῦ Ὁμήρου, ἂν ἀντικατασταθοῦν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν αὐτῶν τιμῶν λαμβάνεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ὡς π.χ. :

Ἰλιὰς Η′

στίχος 264	ἀλλ' ἀναχασσάμενος λίθον εἵλετο χειρὶ παχείῃ = 3498
στίχος 265	κείμενον ἐν πεδίῳ, μέλανα, τρηχύν τε μέγαν τε = 3498

(ἀλλ' ὑπεχώρησε (ὁ Ἕκτωρ) καὶ σήκωσε μὲ τὸ γερό του χέρι μιὰ πέτρα, ἡ ὁποία ἦτο στὸ ἔδαφος, μαύρη καὶ τραχεῖα καὶ πολὺ μεγάλη).

Ἀλλ'	$= 1+30+30=61$,
ἀναχασσάμενος	$= 1+50+1+600+1+200+200+1+40+5+50+70+200=1419$,
λίθον	$= 30+10+9+70+50=169$,
εἵλετο	$= 5+10+30+5+300+70=420$,
χειρὶ	$= 600+5+10+100+10=725$,
παχείῃ	$= 80+1+600+5+10+8=704$,
Ἐν ὅλῳ	$= 61+1419+169+420+725+704=3498$.

κείμενον	$= 20+5+10+40+5+50+70+50=250$,
ἐν	$= 5+50=55$,
πεδίῳ	$= 80+5+4+10+800=899$,
μέλανα	$= 40+5+30+1+50+1=127$,

τρηχὺν	= 300+ 100+ 8+ 600+ 400+ 50 = = 1458,
τε	= 300+ 5 = 305,
μέγαν	= 40+ 5+ 3+ 1+ 50 = 99,
τε	= 305.
Ἐν ὅλῳ	250+ 55+ 899+ 127+ 1458+ 305 +99+305 = 3498

Ἰλιὰς Τ

στίχος 306	μή με πρὶν σίτοιο κελεύετε μηδὲ ποτῆτος = 2848
στίχος 307	ἄσασθαι φίλον ἦτορ, ἐπεὶ μ᾽ ἄχος αἰνὸν ἱκάνει = 2848

(Μὴ μὲ προτρέπετε νὰ χορτάσω τὴν καρδιά μου προηγουμένως μὲ φαγητὸ καὶ πιοτό, γιατὶ μὲ καταλαμβάνει πόνος φοβερός).

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις διὰ τὰ μαθηματικὰ τοῦ Ὁμήρου εἶχον προκαλέσει τὸ ἐνδιαφέρον πολλῶν μελετητῶν τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ἐνδιαφέρον, τὸ ὁποῖον συνεχίσθη καὶ κατὰ τοὺς πρώτους μετὰ Χριστὸν αἰῶνας. Ὁ ἐκκλησιαστικὸς συγγραφεὺς Κλήμης ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἀφορμώμενος ἐκ τοιούτων παρατηρήσεων σημειώνει, ὅτι ὁ Θεὸς τιμωρεῖ τοὺς ἀνθρώπους συχνὰ μὲ 5 ἢ 6 ἢ 7 γράμματα, ἐννοῶν τὰς λέξεις λιμός, λοιμός, πόλεμος (Gellius ἔ.ἀ.)

(σημ. μονάδες (1–9) α′, β′, γ′, δ′, ε′, ς′, ζ′, η′, θ′,
δεκάδες (10–90) ι′, κ′, λ′, μ′, ν′, ξ′, ο′, π′, ϙ′
ἑκατοντάδες (100–900) ρ′, σ′, τ′, υ′, φ′, χ′, ψ′, ω′, ϡ).

῎Αλλοι μελετηταὶ παρετήρησαν ὅτι τὰ δύο πρῶτα γράμματα τῆς πρώτης λέξεως τῆς ᾿Ιλιάδος μῆ–νιν, τὰ μη, παριστοῦν τὸν ἀριθμὸν τῶν ῥαψῳδιῶν τῆς ᾿Ιλιάδος καὶ τῆς ᾿Οδυσσείας (24 + 24 = 48) καὶ ὅτι εἰς ἕνα στίχον τῆς ᾿Ιλιάδος ἑκάστη ἑπομένη λέξις ἔχει μίαν συλλαβὴν περισσοτέραν, τῶν συλλαβῶν τῆς προηγουμένης λέξεως, ἤτοι παριστᾷ ἀριθμητικὴν πρόοδον.

᾿Ιλιὰς Γ 181 ὦ μάκαρ ᾿Ατρεΐδη, μοιρηγενές, ὀλβιόδαιμον

1 2 3 4 5

Παραμένει ἀνεξήγητον, ἂν ὁ ῞Ομηρος σκοπίμως κατεσκεύασε τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερομένους στίχους ᾿Ιλ. Η 264–65 καὶ Τ 306–7. ῾Ο ᾿Αριστοτέλης ἀναφερόμενος εἰς τὸν πρῶτον στίχον τῆς ᾿Οδυσσείας τοῦ ῾Ομήρου, ὁ ὁποῖος ἔχει 17 συλλαβάς, ἡ τομὴ δὲ τῶν συλλαβῶν γίνεται μεταξὺ τῆς 8 καὶ 9 συλλαβῆς, λέγει ὅτι τοῦτο καὶ ἄλλα τινὰ μαθηματικὰ ἔχοντα (κατὰ τοὺς Πυθαγορείους) συμβολικὴν ἔννοιαν, εἶναι συμπτωματικά. (ἔοικε συμπτώμασιν). (Μετὰ τὰ φυσικὰ Ν 1093α–1093b τέλος).

Παρὰ τὴν τυχὸν ὑπάρχουσαν γνώμην, ὅτι ὁ ῞Ομηρος δὲν κατεσκεύασε σκοπίμως τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερομένους στίχους (οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται ἰσόψηφοι), φαίνεται, ὅτι ἡ ἀντίθετος γνώμη εἶναι ἀληθής. Κατὰ τὰ μέσα τοῦ Α΄ αἰῶνος μ.Χ. ἤκμασεν εἰς τὴν ᾿Αλεξάνδρειαν ὁ μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος Λεωνίδας ὁ ᾿Αλεξανδρεύς. Οὗτος ἀνεκάλυψεν ὅτι εἶχε ποιητικὴν ἰδιοφυΐαν καὶ ἐγκατέλειψε τὰ μαθηματικὰ καὶ τὴν ἀστρονομίαν καὶ ἐπεδόθη νὰ συντάσσῃ ποικίλα ἐπιγράμματα ἰσόψηφα, πολλὰ τῶν ὁποίων διεσώθησαν καὶ περιλαμβάνονται εἰς τὴν Παλατίνην Ἀνθολογίαν. Τὰ διασωθέντα ἐπιγράμματα τοῦ Λεωνίδου κατανέμονται εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τετράστιχα καὶ εἰς δίστιχα. Εἰς ἕκαστον τετράστιχον, ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἂν εἰς τὰ γράμματα τῶν δύο πρώτων στίχων θέσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμούς, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα ἐκ τῶν δύο ἑπομένων στίχων. Εἰς τὰ δίστιχα ἐπιγράμματα ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων ἐκ τοῦ πρώτου στίχου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα ἐκ τοῦ δευτέρου στίχου. Αὐτὰ δὲ ἐγένοντο σκοπίμως, ὡς λέγει ὁ ἴδιος ὁ Λεωνίδας.

Παραδείγματα Anthologia Graeca IX 344

Τετράστιχον ΛΕΩΝΙΔΟΥ

Ἦν ὁπότε γραμμαῖσιν ἐμὴν φρένα μοῦνον ἔτερπον
οὐδ᾽ ὄναρ εὐγενέταις γνώριμος Ἰταλίδες,
ἀλλὰ τὰ νῦν πάντεσσιν ἐράσμιος· ὀψὲ γὰρ ἔγνων,
ὁππόσον Οὐρανίην Καλλιόπη προφέρει.

ἦν = 58, ὁπότε = 525, γραμμαῖσιν = 455, ἐμὴν = = 103, φρένα = 656, μοῦνον = 680, ἔτερπον = 610. Ἄθροισμα πρώτου στίχου = 3087.
οὐδ᾽ = 474, ὄναρ = 221, εὐγενέταις = 979, γνώριμος = 1273, Ἰταλίδαις = 566. Ἄθροισμα δευτέρου στίχου = 3513. Ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου στίχου = 6600.
ἀλλὰ = 62, τὰ = 301, νῦν = 500, πάντεσσιν = 896,

ἐράσμιος = 626, ὀψὲ = 775, γὰρ = 104, ἔγνων =908. Ἄθροισμα τρίτου στίχου = 4172.
ὁππόσον = 620, Οὐρανίην = 689, Καλλιόπη = 249, προφέρει = 870. Ἄθροισμα τετάρτου στίχου = 2428. Ἄθροισμα τρίτου καὶ τετάρτου στίχου = 6600.

(Ἑρμηνεία: Ὅτε, μόνον αἱ τροχιαὶ (ἡ ἀστρονομία) μὲ ηὐχαρίστουν, οὔτε στὸν ὕπνο μου δὲν ἤμουν γνωστὸς εἰς τὰς εὐγενεῖς Ἰταλικὰς πόλεις, τώρα ὅμως μὲ ἀγαποῦν ὅλοι· γιατὶ ἀργὰ ἀνεκάλυψα, πόσον ἡ Καλλιόπη (ἡ ἔφορος τῆς ποιήσεως Θεὰ) εἶναι ἀνωτέρα τῆς Οὐρανίας (τῆς ἐφόρου τῆς ἀστρονομίας Θεᾶς).

Δίστιχον τοῦ ἰδίου — Anthol. Gr. VI 327

Εἷς πρὸς ἕνα ψήφισιν ἰσάζεται, οὐ δύο δοιοῖς·
οὐ γὰρ ἔτι στέργω τὴν δολιχογραφίην.

εἷς = 215, πρὸς = 450, ἕνα = 56, ψήφοισιν = 1548, ἰσάζεται = 534, οὐ = 470, δύο = 474, δοιοῖς = 364. Ἄθροισμα τοῦ πρώτου στίχου = 4111.
οὐ = 470, γὰρ = 104, ἔτι = 315, στέργω = 1408, τὴν = 358, δολιχογραφίην = 1456. Ἄθροισμα τοῦ δευτέρου στίχου = 4111.
(Ἑρμηνεία: Ἕνα-ἕνα στίχον θὰ κάνω νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὄχι δύο-δύο· γιατὶ τώρα πιὰ δὲν μ' ἀρέσει ἡ μακρολογία).

Ἀφοῦ ὁ Λεωνίδας εἶχε τὴν ἱκανότητα νὰ κατασκευάζῃ στίχους ἰσοψήφους ἢ δίστιχα ἰσόψηφα, διατί νὰ ἀποκλείσωμεν τὴν ἱκανότητα αὐτὴν ἀπὸ τὸν Ὅμηρον; Δὲν ἔχει γίνει δέ, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, ἔρευνα εἰς τοὺς στίχους τῆς Ὀδυσσείας καὶ τῆς Ἰλιάδος, διὰ νὰ ἴδωμεν μήπως καὶ ἄλλοι στίχοι εἶναι ἰσόψηφοι.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος περὶ κατασκευῆς στίχων ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας ἂς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ἐσώθησαν μονόστιχα ἐπιγράμματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν καὶ τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου (μερικὰ γράμματα ὑπάρχουν περισσότερον τῆς μιᾶς φορᾶς), ὅπως π.χ.

Τρηχὺν δ' ὑπερβὰς φραγμὸν ἐξήνθιζε κλώψ.
Anthol. IX 547, (Ἀνωνύμου).
(Ὁ κλέφτης, ἀφοῦ ἐπήδησε τὸν μὲ ἀγκάθια φράχτη, ἔκοψε πολλὰ ἄνθη).

Ἁβροχίτων δ' ὁ φύλαξ θηροζυγοκαμψιμέτωπος.
Anthol. IX 538, (Ἀνωνύμου).
(Μὲ λαμπρὰ στολὴ δὲ ἔκαμπτε τὸ μέτωπον τῶν ζῴων ὑπὸ τὸν ζυγὸν ὁ φύλαξ).

Ἁβρὸς δ' ἐν προχοαῖς Κύκλωψ φθογγάζετο μύρμηξ.
Anthol. IX 539, (Ἀνωνύμου).
(Μὲ ἁβρότητα δέ, εἰς τὸ στόμιον ἀντήχησεν ἡ φωνὴ τῶν μυρμήκων τοῦ Κύκλωπος).

Ἄλλη ἰδιότης μονοστίχων ἢ διστίχων ἐπιγραμμάτων εἶναι ὅτι ταῦτα διαβάζονται καὶ κατὰ τὴν ἀντίστροφον φορὰν καὶ λέγονται ἀντιστρέφοντα ἢ ἀνακυκλικὰ ἢ παλίνδρομα, ὅπως π.Χ.

Anthol. VI 314 ΝΙΚΟΔΗΜΟΥ ΗΡΑΚΛΕΩΤΟΥ (ἐκ Βιθυνίας, τοῦ α'. αἰω. μ.Χ. κατὰ πᾶσαν πιθανότητα).

Πηνελόπη, τόδε σοὶ φᾶρος καὶ χλαῖναν Ὀδυσσεὺς
ἤνεγκεν δολιχὴν ἐξανύσας ἀτραπόν.

Ἡ παλίνδρομος ἀνάγνωσις

Ὀδυσσεὺς χλαῖναν καὶ φᾶρος σοὶ τόδε, Πηνελόπη ἀτραπὸν ἐξανύσας δολιχὴν ἤνεγκεν.

(Ἑρμηνεία : Πηνελόπη, αὐτὸ τὸ ροῦχο καὶ τὴν χλαίνην σοῦ ἔφερε ὁ Ὀδυσσεὺς διανύσας πολὺ μακρὺν δρόμον).

(Σημ. Ἀντιστρέφον ἢ καρκινογράφημα, ὡς ἐλέγετο, εἶναι καὶ τὸ βυζαντινόν : Νίψον ἀνομήματα μὴ μόναν ὄψιν, τὸ ὁποῖον διαβάζεται παλινδρομικῶς κατὰ συλλαβὴν καὶ ὄχι κατὰ λέξιν, ὅπως τὸ ἀνωτέρω ἐπίγραμμα).

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

7. Εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἑλλάδα ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο τότε λογιστική. Ὁ σχολιαστὴς τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους Εὐτόκιος (6ος αἰὼν) μνημονεύει βιβλίον λογιστικῆς τοῦ μαθηματικοῦ Μάγνου, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ἐσώθη (Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμ. III, σελ. 258, 31, Heiberg). Πράξεις τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς διεσώθησαν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, διευθυντοῦ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πολυτεχνείου Ἀλεξανδρείας (πρῶτος αἰὼν μ.Χ.), ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, (4ος αἰ. μ.Χ.) διευθυντοῦ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου Ἀλεξανδρείας, εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου, (τὴν λεγομένην ὑπὸ τῶν νεωτέρων, ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ ὀνόματος, Ἀλμαγέστην), καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις. Θὰ ὑπῆρχον βεβαίως καὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα βιβλία πρακτικῆς ἀριθμητικῆς, τὰ ὁποῖα προωρίζοντο διὰ τὴν διδασκαλίαν εἰς τὰ Δημοτικὰ Σχολεῖα καὶ διὰ τὴν χρῆσιν τῶν ἐμπορευομένων. Δὲν διεσώθη ὅμως τίποτε ἐξ αὐτῶν, ἐκτὸς ὀλίγων ἑκατοντάδων προβλημάτων ἐκδόσεως τοῦ 14ου καὶ 15ου αἰῶνος. Ἐκ τούτων, ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν Βιέννην κατὰ τὰ ἔτη 1963 καὶ 1968 περίπου 200.

Κατὰ τὰ ἀναγραφόμενα τοῦ ἐκ τῶν ἐκδοτῶν Η. Χοῦνγκερ ὑπάρχουν ἀκόμη εἰς τὰ Ἀρχεῖα τῆς Βιέννης πολλὰ ἀνέκδοτα προβλήματα, τῆς ἐποχῆς τῶν τελευταίων χρόνων τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας καὶ τῆς ἐποχῆς τῶν πρώτων δεκαετιῶν ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων.

Τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, (ἀποκλειστικὴ δημιουργία τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων) μοναδικὰ εἰς τὸν κόσμον τῶν ἀρχαίων πολιτισμῶν, διέσωσεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ βιβλία 7, 8, 9 τῶν Στοιχείων του. Ἄλλο βιβλίον ἐξεδόθη, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ὑπὸ τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Γέρασα τῆς Παλαιστίνης καταγομένου Ἕλληνος μαθηματικοῦ Νικομάχου (2ος αἰ. μ.Χ.) τοῦ καλουμένου, ἐκ τοῦ ὀνόματος τῆς πόλεως ὅπου ἐγεννήθη, Γερασηνοῦ. Τὸ βιβλίον τοῦτο φέρει τὸν τίτλον Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ καὶ περιέχει ἑρμηνευτικὰ σχόλια εἴς τινας ὁρισμοὺς καὶ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τοῦ Εὐκλείδου, ὡς ἐπίσης σχόλια ἑρμηνευτικὰ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς μουσικῆς καὶ τὴν ἀστρονομίαν τοῦ Εὐκλείδου. Ἔν τινι μέτρῳ παρόμοιον περιεχόμενον περιλαμβάνει καὶ τὸ βιβλίον τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, ἐπίσης τοῦ 2ου μ.Χ. αἰ. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἐγράφη διὰ νὰ ἑρμηνεύσῃ τὰ μαθηματικά, τὰ ὁποῖα ἔχει κατασπείρει ὁ Πλάτων εἰς τοὺς διαλόγους του· ἔχει ὅμως διασώσει μερικὰς περιφήμους γνώσεις τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων συμπεραίνομεν περίπου τὴν μεγάλην ἀξίαν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἄλλο βιβλίον ἀριθμητικῆς, ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικά, εἶναι τὸ ἐκδοθὲν ὑπὸ τοῦ διασήμου Ἀλεξανδρέως μαθηματικοῦ Διοφάντου, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 250 μ.Χ. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει ὑπὸ ἀριθμητικὸν ἔνδυμα ὕλην μαθηματικὴν τὴν ὁποίαν σήμερον κατατάσσομεν καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν. (Ἴδε Διοφάντου Ἀριθμητικὰ ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, Ὀργ. Ἐκδ. Διδ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1963).

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀποδίδονται εἰς τὸν Πυθαγόραν καὶ τοὺς

Πυθαγορείους, δηλ. τοὺς μαθητάς του καὶ τοὺς διαδόχους αὐτῶν. Εἰδικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται 1) ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων καὶ τῶν περισσοτέρων κοσμικῶν σχημάτων (κανονικῶν πολυέδρων), 2) ἡ ἀνακάλυψις καὶ ἀπόδειξις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ 3) ἡ ἀνακάλυψις ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = z^2$.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην, ὅστις συνεχίζει τὴν Πυθαγόρειον παράδοσιν, «μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος». (Ὁρισμοὶ 1 καὶ 2 τοῦ 7ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου). Ὅπως βλέπομεν ἐδῶ ἡ μονὰς δὲν περιλαμβάνεται εἰς τοὺς ἀριθμούς, ἐν ᾧ ὡς ἀριθμὸς νοεῖται πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός. Ὁ Νικόμαχος (σελὶς 13, 7) λέγει, ὅτι ἀριθμὸς εἶναι πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον». Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος ὁρίζει τὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς : ἀριθμὸς εἶναι σύστημα μονάδων, ἢ σχηματισμὸς διὰ προσθέσεως, πλήθους, ἀρχίζων ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ δι' ἀντιστροφῆς τοῦ σχηματισμοῦ καταλήγων εἰς τὴν μονάδα. Μονὰς δὲ εἶναι περαίνουσα ποσότης, ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία, ἀφοῦ ἐλαττώνεται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, κατὰ τὴν διαδοχικὴν ἀφαίρεσιν, στερηθεῖσα τῆς ἐννοίας τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, λαμβάνει μονὴν καὶ στάσιν, (δηλ. ἀπομένει καὶ στέκεται μόνη της).

Κατὰ τὸν Νικόμαχον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς τετραγώνους, ἑτερομήκεις, προμήκεις, ἐλλιπεῖς, ὑπερτελείους,

τελείους, τριγώνους καὶ πολυγώνους. (Νικόμαχος, σελὶς 86, 9, 199, 18. Θέων Σμυρν. σελ. 26, 21.46, 19). Τετράγωνοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων. Ἑτερομήκεις εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς δύο παράγοντας, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, ν. (ν+1). Προμήκεις ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς δύο παράγοντας, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας. Ὥστε ἡ ἔννοια προμήκης ἀριθμὸς περιλαμβάνει τὴν ἔννοιαν ἑτερομήκης. Ἐλλιπὴς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν δυνατῶν πηλίκων αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς 10 π.χ. εἶναι ἐλλιπής, διότι $10 : 10 = 1, 10 : 5 = 2, 10 : 2 = 5$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων, $1 + 2 + 5 < 10$. Ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι, ὑπερτελής, διότι $12 : 12 = 1, 12 : 6 = 2, 12 : 4 = 3, 12 : 3 = 4, \quad 12 : 2 = 6$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$.

ΤΕΛΕΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

8. Τέλειος ἀριθμὸς κατὰ τὸν Εὐκλείδην (Στοι-(χείων βιβλ. 7, ὁρισμὸς 23) εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του, ἤτοι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του δίδῃ τὸν ἀριθμόν. Ὁ 6 π.χ. εἶναι τέλειος, διότι $6 : 6 = 1$, $6 : 3 = 2$, $6 : 2 = 3$ καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του $1 + 2 + 3 = 6$, ἤτοι αὐτὸς ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Ἀπὸ 1–10 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος ἀριθμός, ὁ 6. Ὁ 28 εἶναι ἐπίσης τέλειος, διότι $28 : 28 = 1$, $28 : 14 = 2$, $28 : 7 = 4$, $28 : 4 = 7$, $28 : 2 = 14$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του $1 + 2 + 4 + 7 +$

$+14=28$. Ἀπὸ τοῦ 11 μέχρι τοῦ 100 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος ἀριθμὸς ὁ 28. Ὁ ἀριθμὸς 496 εἶναι τέλειος, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του $1+2+$ $+4+8+16+31+62+124+228=496$. Ἀπὸ τοῦ 101 μέχρι τοῦ 1000 ὑπάρχει μόνον εἷς τέλειος ἀριθμὸς ὁ 496. Ἀπὸ τοῦ 1001—10000 μόνον ὁ 8128.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην (Στοιχείων βιβλίον 9, θεώρ. 36), ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, $\ldots 2^{\nu-1}$, (1), καὶ σχηματίσωμεν διαδοχικῶς τὰ μερικὰ ἀθροίσματα αὐτῆς, ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς τέλειος.

Ἔστωσαν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα :

$\sigma_1 = 1$

$\sigma_2 = 1+2=3$. Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2^1 \times 3 = 6$ ἀριθμὸς τέλειος.

$\sigma_3 = 1+2+2^2=7$. Ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2^2 \times 7 = 28$ ἀριθμὸς τέλειος.

$\sigma_4 = 1+2+2^2+2^3=15$. Ὁ ἀριθμὸς 15 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_5 = 1+2+2^2+2^3+2^4=31$. Ὁ ἀριθμὸς 31 εἶναι πρῶτος.

Εἶναι ἄρα $2^4 \times 31 = 496$ ἀριθμὸς τέλειος.

$\sigma_6 = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=63$. Ὁ ἀριθμὸς 63 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_7 = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=127$. Ὁ ἀριθμὸς 127 εἶναι πρῶτος.

Εἶναι ἄρα $2^6 \times 127 = 8128$ ἀριθμὸς τέλειος.

Τὸ ἄθροισμα τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς προόδου (1) εἶναι $\Sigma = 2^{\nu} - 1$. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος τοῦ $2^{\nu-1}$, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $2^{\nu}-1$ εἶναι ἀριθμὸς τέλειος. Εἶναι δύσκολον νὰ εὑρεθῇ πότε ὁ ἀριθμὸς $2^{\nu} - 1$ εἶναι πρῶτος, ὅταν ὁ ν εἶναι μεγάλος. Ἡ μέθοδος τοῦ Ἐρατοσθένους (τὸ κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους) δὲν εὐκολύνει τὴν ἔρευναν διὰ μεγάλους ἀριθμούς.

Οἱ πρῶτοι 10 τέλειοι ἀριθμοί :

	6	28	496	8128	
Πέμπτος	2^{12}	$(2^{13} - 1) = 33\,550\,336$			
Ἕκτος	2^{16}	$(2^{17} - 1) = 8\,589\,869\,056$			
Ἕβδομος	2^{18}	$(2^{19} - 1) = 137\,438\,691\,328$			
Ὄγδοος	2^{30}	$(2^{31} - 1) = 2\,305\,843\,008\,139\,952$			
Ἔνατος	2^{60}	$(2^{61} - 1)$			128
Δέκατος	2^{88}	$(2^{89} - 1)$			

Ὡς ἐμνημονεύθη προηγουμένως ὁ τύπος ὁ παρέχων τοὺς τελείους ἀριθμοὺς εἶναι κατὰ τὸν Εὐκλείδην $2^{\nu-1}\ (2^{\nu} - 1)$, ὅταν $2^{\nu} - 1$ εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Ἀφ' ἧς ἐποχῆς ἀνεπτύχθη ἡ κατασκευὴ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν κατεβλήθη προσπάθεια ἀνακαλύψεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $2^{\nu} - 1$ $(\nu = 2, 3, 4 \ldots)$. Κατὰ τὸ 1963 ἀνεκαλύφθη διὰ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ὁ 23ος τέλειος ἀριθμός.

Ὅπως εἶναι φανερὸν ἡ δυσκολία τῆς εὑρέσεως τῶν τελείων ἀριθμῶν ἔγκειται εἰς τὴν δυσκολίαν τῆς εὑρέσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $(2^{\nu} - 1)$. Διότι δὲν ὑπάρχει τύπος παρέχων τοὺς πρώτους ἀριθμούς. Ἐκτὸς τοῦ 2, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μόνος ἄρτιος πρῶτος ἀριθμός, οἱ λοιποὶ πρῶτοι εἶναι περιττοί.

Μερικαὶ ἰδιότητες τῶν τελείων ἀριθμῶν

Κατὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικοὺς τὰ μερικὰ διαδοχικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4... ὀνομάζονται τρίγωνοι ἀριθμοί. Ὡς εἶναι π.χ. οἱ 1, 3, 6, 10...

Πρώτη ἰδιότης τῶν τελείων ἀριθμῶν : Τὸ τελικὸν ψηφίον παντὸς τελείου ἀριθμοῦ εἶναι 6 ἢ 8.

Δευτέρα ἰδιότης : Πᾶς τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς τρίγωνος.

Τρίτη ἰδιότης : Πλὴν τοῦ πρώτου τελείου ἀριθμοῦ τοῦ 6, πᾶς τέλειος ἀριθμὸς εἶναι μερικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν, $1^3+3^3+5^3+\ldots$, ($1^3+3^3=28$, $1^3+3^3+5^3+$ $+7^3=496$ κ.λπ.).

Τετάρτη ἰδιότης : Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν πηλίκων παντὸς τελείου ἀριθμοῦ (ἡ μονὰς δὲν λογίζεται ὡς διαιρέτης) σὺν τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἰδίου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε ὁ ἀριθμὸς 2. Τοῦ δευτέρου τελείου ἀριθμοῦ, τοῦ 28, τὰ μέρη εἶναι : $28:28=1$, $28:14=2$, $28:7=4$, $28:4=7$, $28:2=14$. Καὶ εἶναι $1+2+4+7+14=28$, ὁ ἴδιος ἀριθμὸς 28.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$, + τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἰδίου τοῦ ἀριθμοῦ 28 δηλ. $+\frac{1}{28}=2$.

Τοῦ τρίτου τελείου ἀριθμοῦ, τοῦ 496, τὰ μέρη εἶναι:

$$496 : 496 = 1, \quad 496 : 248 = 2, \quad 496 : 124 = 4,$$
$$496 : 62 = 8, \quad 496 : 31 = 16, \quad 496 : 16 = 31,$$
$$496 : 8 = 62, \quad 496 : 4 = 124, \quad 496 : 2 = 248.$$

Καὶ εἶναι : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$, ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμὸς 496.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μερῶν εἶναι :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248}, +$$

+ τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἰδίου τοῦ ἀριθμοῦ, δηλ. +

$$+ \frac{1}{496} = 2.$$

Πέμπτη ἰδιότης. Τὸ τελικὸν ἄθροισμα τῶν ψηφίων παντὸς τελείου ἀριθμοῦ, πλὴν τοῦ πρώτου, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. Π.χ. 28, $2 + 8 = 10$, $1 + 0 = 1$, 496, $4 + 9 + 6 = 19$, $1 + 9 = 10$, $1 + 0 = 1$, 8128, $8 + 1 + 2 + 8 = 19$, $1 + 9 = 10$, $1 + 0 = 1$.

ΦΙΛΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

9. Ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς σελ. 35, 6, λέγει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας, ὅταν τις τὸν ἠρώτησε «τί ἐστι φίλος» εἶπεν «ἕτερος ἐγώ». Ἐκ τῆς γνώμης αὐτῆς τοῦ Πυθαγόρου ἐδόθη ἀφορμὴ καὶ εὑρέθησαν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται φίλοι ἀριθμοί. Καλοῦνται δὲ δύο ἀριθμοὶ φίλοι, προσθέτει ὁ Ἰάμβλιχος, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πηλίκων τοῦ πρώτου ἰσοῦται μὲ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πηλίκων τοῦ δευτέρου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ἀριθμόν. Οἱ δύο ἀριθμοὶ π.χ. 220 καὶ 284 εἶναι φίλοι ἀριθμοί, διότι :

220 : 220 = 1	284 : 284 = 1
220 : 110 = 2	284 : 142 = 2
220 : 55 = 4	284 : 71 = 4
220 : 44 = 5	284 : 4 = 71
220 : 22 = 10	284 : 2 = 142
220 : 20 = 11	220
220 : 11 = 20	Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα = = 220, ἤτοι ὁ ἄλλος ἀριθμός.
220 : 10 = 22	
220 : 5 = 44	
220 : 4 = 55	
220 : 2 = 110	
284	

Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα = 284 ἤτοι ὁ ἄλλος ἀριθμός.

ΑΙ ΤΕΤΡΑΚΤΥΕΣ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ ΚΑΙ Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΣ ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΛΙΜΑΞ

10. Ὁ Πυθαγόρας καὶ ἀκολούθως καὶ οἱ μαθηταί του ἐπίστευον, ὅτι ἀρχαὶ καὶ στοιχεῖα τῶν ὄντων εἶναι οἱ ἀριθμοί. Πῶς ἀκριβῶς ἐνόουν τοῦτο δὲν εἶναι γνωστόν, διότι ἡ διδασκαλία εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου ἦτο μυστική.

Διὰ τὸν λόγον, ὅτι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10 δίδουν ὁσονδήποτε μεγάλον ἀριθμόν, οἱ Πυθαγόρειοι ἔλεγον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι τέλειος ἀριθμὸς (ἀσχέτως πρὸς τὸν μνημονευθέντα μαθηματικὸν ὁρισμὸν τοῦ τελείου ἀριθμοῦ). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀπὸ μονάδος πρώτων ἀριθμῶν $1 + 2 + 3 + 4$ εἶναι 10, ἐθεωρεῖτο καὶ ὁ 4 τέλειος ἀριθμός, καλούμενος τετρακτύς, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποίουν ὡς ὅρκον, καθ' ὃν δὲν θὰ ἐπρόδιδον τὰ μυστικὰ τῆς Σχολῆς:

οὐ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ ψυχᾷ παραδόντα τετρακτύν,
παγὰν ἀενάου φύσεως ῥίζωμά τ' ἔχουσαν.

(ὄχι, δὲν θὰ προδώσω, μὰ τὸν Πυθαγόρα, ὁ ὁποῖος παρέδωκεν εἰς τὴν ψυχήν μας τὴν τετρακτύν, πηγὴν αἰωνίου φύσεως, ἔχουσαν βαθὺ ῥίζωμα) (Θέων Σμυρναῖος, σ. 94, 6). Εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον ὁ Θέων λέγει, ὅτι ἐπὶ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν τῆς τετρακτύος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 ἐκφράζουν τὸ κάτω do καὶ τὸ ἄνω do τῆς μουσικῆς κλίμακος (τὴν ὀκτάβα, τὴν διὰ πασῶν λεγομένην). Οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 4 ἐκφράζουν τὴν διπλῆν ὀκτάβα, τὴν δὶς διὰ πασῶν λεγομένην· (διὰ πασῶν, νοεῖται τῶν χορδῶν, τοῦ ὀκταχόρδου. Ἡ ἁπλῆ διὰ πασῶν εἶναι ἡ διὰ τεσσάρων χορδῶν ἐκφραζομένη). Ἡ σχέσις $4:3$ ἐκφράζει τὸν βασικὸν φθόγγον τῆς μουσικῆς κλίμακος fa, καὶ ἡ σχέσις $3:2$ ἐκφράζει τὸν βασικὸν φθόγγον τῆς μουσικῆς κλίμακος sol. Ὑπάρχουν ἀκόμη κατὰ τὸν Θέωνα δέκα ἀκόμη τετρακτύες ἤτοι ἐν ὅλῳ ἕνδεκα. Κατὰ τὸν Πλούταρχον (382 Α) ἡ μεγάλη τετρακτὺς $=$ $= 36$, ἤτοι $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$.

Ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη τετρακτύες εἶναι αἱ ἐκφράζουσαι τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀρτίου καὶ τοῦ περιττοῦ κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν δύο στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν ἀπὸ μονάδος προόδων, μὲ λόγον τὸν 2 ἡ μία, καὶ τὸν 3 ἡ ἄλλη, ὡς :

1 2 4 8   1 3 9 27

Ἡ τετάρτη τετρακτὺς εἶναι ἡ δηλοῦσα τὰ 4 ἁπλᾶ σώματα, ἐκ τῶν ὁποίων γίνονται ὅλα τὰ σώματα : πῦρ, ἀήρ, ὕδωρ, γῆ.

Ἡ πέμπτη τετρακτὺς εἶναι ἡ συμβολίζουσα τὰ σχήματα τῶν ἁπλῶν σωμάτων. Ἡ πυραμὶς (τετράεδρον) συμβολίζει τὸ πῦρ, τὸ ὀκτάεδρον συμβολίζει τὸν ἀέρα, τὸ εἰκοσάεδρον τὸ ὕδωρ καὶ ὁ κύβος τὴν γῆν.

Ἡ ἕκτη τετρακτὺς συμβολίζει τὰ φυόμενα (τὰ γεννώμενα). Τὸ σπέρμα συμβολίζει τὴν μονάδα (τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τὸ σημεῖον τῆς γεωμετρίας). Τὸ μῆκος, ἐκφράζεται ἀπὸ ἄθροισμα σημείων, καὶ συνεπῶς δηλοῦται διὰ τοῦ μετὰ τὴν μονάδα ἀριθμοῦ 2. Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἀκόμη μίαν διάστασιν καὶ δηλοῦται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Τὸ στερεὸν ἔχει ἀκόμη μίαν διάστασιν καὶ δηλοῦται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

Ἡ ἑβδόμη τετρακτὺς εἶναι ἡ τῶν κοινωνιῶν. Μονὰς = ἄνθρωπος, δυὰς = οἶκος, τριὰς = κώμη, τετρὰς = πόλις. «Τὸ γὰρ ἔθνος ἐκ τούτων σύγκειται» κατὰ τὸν Θέωνα.

Ἡ ὀγδόη τετρακτύς : νοῦς, ἐπιστήμη, δόξα, αἴσθησις.

Ἡ ἐνάτη τετρακτὺς εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τὴν σύστασιν τοῦ ζῴου, ἤτοι τῆς ψυχῆς καὶ τοῦ σώματος αὐτοῦ. Καὶ εἰς μὲν τὴν ψυχὴν ἀνήκουν τρία μέρη ἤτοι τὸ λογιστικόν, τὸ θυμικόν, τὸ ἐπιθυμητικόν. Ὡς τέταρτος ἀριθμὸς τῆς τετρακτύος αὐτῆς εἶναι τὸ σῶμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἡ ψυχή.

Ἡ δεκάτη τετρακτὺς εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τὰς 4 ἐποχὰς τοῦ ἔτους : ἔαρ, θέρος, μετόπωρον, χειμών.

Ἡ ἑνδεκάτη τετρακτὺς εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τὰς 4 ἡλικίας τοῦ ἀνθρώπου : νήπιον, μειράκιον, ἀνήρ, γέρων.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ὁ συμβολισμὸς τῆς γῆς διὰ τοῦ κύβου καὶ ὁ συνδυασμὸς τῶν στοιχείων τοῦ κύβου διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας καὶ τῆς μουσικῆς κλίμακος τοῦ Πυθαγόρου. Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς, ἤτοι ἐκφράζονται διὰ τοῦ κύβου ὁ πρῶτος, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς κατωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία εἶναι $6 : 8 = 9 : 12$, (1), ὅπου οἱ ἄκροι ὅροι ἐκφράζουν τὸ κάτω καὶ ἄνω do τῆς μουσικῆς κλίμακος (τὸ ἄνω do ἔχει διπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do), ὁ ἀριθμὸς 8, εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀναλογίας, τοῦ 6 καὶ τοῦ 12, $\left(= \frac{2 \times 6 \times 12}{6 + 12}\right)$, καὶ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς αὐτῆς ἀναλογίας $\left(9 = \frac{6 + 12}{2}\right)$. Πρὸς τούτοις ὁ ἀριθμὸς 8 ἐκφράζει τὴν συχνότητα τοῦ φθόγγου fa καὶ ὁ ἀριθμὸς 9 ἐκφράζει τὴν συχνότητα τοῦ φθόγγου sol τῆς μουσικῆς κλίμακος. Διὰ τὴν ἁπλουστέραν κατασκευὴν τῆς μουσικῆς κλίμακος διαιροῦμεν τὴν προηγουμένην μουσικὴν ἀναλογίαν (1) διὰ τοῦ 6 καὶ λαμβάνομεν :

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2, \qquad (2)$$

Ἡ μαθηματικὴ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος ἀποδίδεται προσωπικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν, ὁ ὁποῖος προηγουμένως ἔκαμε πειράματα εἰς τὸ μονόχορδον, (Θέων Σμυρν. σελ. 6.57 καὶ 66. Ἰάμβλιχος σελ. 121, 15) ἐκ τῶν ὁποίων ὡδηγήθη εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῶν μαθηματικῶν σχέσεων τῶν μουσικῶν φθόγγων τῆς κλίμακος. Ὁ πρῶτος ὅρος (φθόγγος) τῆς ἀνωτέρω (2) μουσικῆς ἀναλογίας ἔχει συχνότητα 1 καὶ ὀνομάζεται ὑπάτη. Οἱ λοιποὶ ὅροι (φθόγγοι) ἔχουν συχνότητας $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, καὶ 2 καὶ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως μέση, παραμέση, νήτη. Ἡ σύγχρονος (ἰταλικὴ) ὀνομασία εἶναι, ὡς ἀνεφέρθη προηγουμένως do, fa, sol, do. Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὴν ἀντιστοιχίαν τῆς Πυθαγορείου καὶ τῆς συγχρόνου ὀνομασίας :

do	fa	sol	do
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
ὑπάτη	μέση	παραμέση	νήτη

Ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψεν ὅτι, ὁ μουσικὸς φθόγγος διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ ἔχει συχνότητα $\frac{9}{8}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δευτέρου μουσικοῦ φθόγγου τῆς μουσικῆς κλίμακος, πολλαπλασιάζει τὸν πρῶτον φθόγγον 1 ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνει, ὡς δεύτερον φθόγγον, τὸν $\frac{9}{8}$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου φθόγγου πολλαπλασιάζει τὸν δεύτερον φθόγγον ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνει $\frac{81}{64}$. Ὡς τέταρτον φθόγγον λαμβάνει τὸν συχνότητος $\frac{4}{3}$ (fa) καὶ ὡς πέμπτον, τὸν συχνότητος $\frac{3}{2}$ (sol) τῆς προηγουμένως ἐκτεθείσης μουσικῆς ἀναλογίας (2). Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἕκτου φθόγγου πολλαπλασιάζει τὸν πέμπτον φθόγγον ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνει $\frac{3}{2}\times\frac{9}{8}=\frac{27}{16}$. Ὡς ἕβδομον φθόγγον λαμβάνει τὸ γινόμενον τοῦ ἕκτου φθόγγου ἐπὶ $\frac{9}{8}$ ἤτοι τὸν $\frac{27}{16}\times\frac{9}{8}=\frac{243}{128}$ καὶ ὡς ὄγδοον φθόγγον (τῆς ἰταλιστὶ λεγομένης ὀκτάβας) λαμβάνει τὸν ἀριθμὸν 2 τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας (2). Εἰς τὰς κατωτέρω τρεῖς σειρὰς ἀναγράφομεν :

1) Τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν 8 φθόγγων τῆς μουσικῆς κλίμακος τοῦ Πυθαγόρου, τὰ περισσότερα τῶν ὁποίων ἔχουν προέλθει ἐκ τῆς ὀνομασίας τῶν δακτύλων τῆς χειρὸς καὶ ἐκ τῆς θέσεως μερικῶν χορδῶν τοῦ ὀκταχόρδου (κατώτατος φθόγγος = ὑπάτη, ἀνώ-

τατος φθόγγος = νήτη). [Σημείωσις 1. Εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ Πυθαγόρου ἡ ὑπάτη ἦτο ὁ ἀνώτατος φθόγγος (ὄγδοος) καὶ ἡ νήτη ὁ κατώτατος (πρῶτος) τῆς μουσικῆς ὀκταφθόγγου (ἰταλιστὶ ὀκτάβας) κλίμακος. Μεταγενέστεροι μετέβαλον τὴν ὀνομασίαν. Ἡ λέξις νήτη παράγεται ἐκ τῆς λέξεως νέατος, ἡ ὁποία νοεῖται ὡς ὑπερθετικὸν τοῦ νέος καὶ σημαίνει νεώτατος, τελευταῖος, κατώτατος, χαμηλότατος. (Ὁμήρου Ἰλιὰς Λ 712). Σημείωσις 2. Ἡ μεγάλη πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας. Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{9}{8}$, δηλ. τοῦ μουσικοῦ φθόγγου, διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ. Ἡ μικρὰ πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 8 κίονας. Εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 8, τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου 6 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου 12, ἤτοι τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας].

2) Τὰ κατὰ παράδοσιν σύμβολα τῶν 8 φθόγγων.

3) Τὰ ὀνόματα τῶν φθόγγων τῆς βυζαντινῆς κλίμακος εἰς τὴν ὁποίαν βλέπομεν τὴν ὁμοιότητα τῆς ὀνομασίας των πρὸς τὴν ἀρχαίαν ὀνομασίαν τῶν φθόγγων. Εἰδικώτερον, ἡ ὀνομασία τοῦ φθόγγου πα ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς ὀνομασίας τοῦ πυθαγορείου φθόγγου ὑ—πά—τη καὶ ἡ ὀνομασία τοῦ φθόγγου νη ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς ὀνομασίας τοῦ πυθαγορείου φθόγγου νή—τη.

4) Τὰ ἰταλικὰ ὀνόματα τῶν φθόγγων (χρησιμοποιούμενα ἐν Ἑλλάδι).

5) Τὰς συχνότητας τῶν 8 φθόγγων ἀνηγμένας

ἐκ τοῦ πρώτου φθόγγου συχνότητος 1. (Ἡ πραγματικὴ σύγχρονος Πυθαγόρειος κλῖμαξ κατασκευάζεται κατόπιν διεθνοῦς συμφωνίας μὲ βάσιν τὸν φθόγγον la συχνότητος 435) :

1.	ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
2.	τη	τα	τε	τω	τη	τα	τω	τη
3.	πα	βου	γα	δι	καὶ	ζω	νη	πα
4.	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
5.	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Αἱ σχέσεις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φθόγγων, ὀνομάζονται μουσικὸν διάστημα. Μεταξὺ λοιπόν, τῶν 8 φθόγγων τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος καὶ τῆς συγχρόνου, φυσικά, ἀφοῦ καὶ αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν Πυθαγόρειον, ἔχομεν ἑπτὰ μουσικὰ διαστήματα.

11. *Ἓν θεώρημα*

Ὁ Ἰάμβλιχος, (σ. 103,10–104,13), ἀναφέρει τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Ἐὰν δοθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3 καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν δοθέντων σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, καὶ τοῦ νέου τούτου ἀθροίσματος σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λαμβάνεται πάντοτε ὡς τελικὸν ἄθροισμα ὁ ἀριθμὸς 6.

Παραδείγματα :

1) $664 + 665 + 666 = 1995$
$1 + 9 + 9 + 5 = 24$
$2 + 4 = 6$

2) $997 + 998 + 999 = 2994$
$2 + 9 + 9 + 4 = 24$
$2 + 4 = 6$

3) $6787 + 6788 + 6789 = 20364$
$2 + 0 + 3 + 6 + 4 = 15$
$1 + 5 = 6$

4) $8976565 + 8976566 + 8976567 = 26929698$
$2 + 6 + 9 + 2 + 9 + 6 + 9 + 8 = 51$
$5 + 1 = 6$

Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα γίνεται χρῆσις τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λέγονται «πυθμένες».

ΟΙ ΠΥΘΜΕΝΕΣ

12. Ἡ λέξις πυθμὴν ἀπαντᾷ τὸ πρῶτον ὡς μαθηματικὸς ὅρος εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος (546 C). Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Πλάτωνος εἶναι μυστηριῶδες καὶ σκοτεινόν. Ἡ ἐν προκειμένῳ ἐνδιαφέρουσα φράσις τοῦ χωρίου εἶναι «ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγής», (τῶν ὁποίων ἀριθμῶν ὁ ἐπίτριτος πυθμὴν συζευχθεὶς μὲ τὴν πεντάδα $\left(\text{ἐπίτριτος} = 1\,\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\right)$. Ἐννοεῖ ἐδῶ ὁ Πλάτων τοὺς μικροτέρους ἀριθμούς, ἐξ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν ἀριθμητικῶς τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $z^2 = x^2 + y^2$. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι 3, 4, 5 (ἤτοι $5^2 = 3^2 + 4^2$). Τὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 ἱκανοποιοῦν βέβαια τὴν συνθήκην τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος. Οἱ μικρότεροι ὅμως ἀριθμοὶ οἱ ἱκανοποιοῦντες τοιαύτας σχέσεις (ἀναλογίας) καλοῦνται πυθμένες. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα του δὲν χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρον πυθμένες, ἀλλὰ τὸν ἁπλοῦν ὅρον «ἐλάχιστοι ἀριθμοί», ὅπως π.χ. εἰς τὰ θεωρήματα 20, 21, 22 τοῦ 7ου βιβλίου τῶν Στοιχείων.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν π.χ. $\frac{8}{12} = \frac{20}{30} = \frac{24}{36}$ πυθμένες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3, τῶν ὁποίων πολλαπλάσια εἶναι οἱ ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν προηγουμένων κλασμάτων ἀντιστοίχως.

Ἐφαρμογὴν τῶν πυθμένων ἐν συναφείᾳ πρὸς τὸ μνημονευθὲν ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ἀνωτέρω θεώρημα, καθ' ὃ ἐκ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3, εὑρίσκεται ὡς ἐξαγόμενον ὁ ἀριθμὸς 6, διὰ προσθήκης τῶν ψηφίων κ.λπ., διασώζεται εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ ἐν Ῥώμῃ κατὰ τὸν 2ον αἰῶνα μ.Χ. ἀκμάσαντος Ἕλληνος ἱερέως (πρεσβυτέρου) Ἱππολύτου, ἡ ὁποία φέρει τὸν τίτλον «Κατὰ πασῶν αἱρέσεων ἔλεγχος» (Hippolytos, Refut. IV, C. 14 ἢ Πατρολογία Ἑλληνικὴ Migne, τόμος 16, 3, στήλη 3078). Τίθεται τὸ πρόβλημα, κατὰ τὸν Ἱππόλυτον, νὰ εὑρεθῇ ὁ πυθμὴν τοῦ ὀνόματος Ἀγαμέμνων, ὅταν εἰς ἕκαστον γράμμα τῆς λέξεως Ἀγαμέμνων τεθῇ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι :

Ἀ	γ	α	μ	έ	μ	ν	ω	ν
1	3	1	40	5	40	50	800	50

Οἱ πυθμένες τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν εἶναι :

1	3	1	4	5	4	5	8	5.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων τούτων εἶναι 36. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 36, $= 3 + 6 = 9$. Ὁ πυθμὴν ἑπομένως, λέγει ὁ Ἱππόλυτος, τοῦ ὀνόματος Ἀγαμέμνων εἶναι ὁ ἀριθμὸς 9. (Κατωτέρω θὰ φανῇ ἡ σημασία τοῦ πυθμένος ὀνόματός τινος).

Ἐν συνεχείᾳ ὁ Ἱππόλυτος ἀναγράφει τοὺς πυθμένας τῶν ὀνομάτων Ἕκτωρ καὶ Πάτροκλος :

Ἕ	κ	τ	ω	ρ
5	20	300	800	100.

Οἱ πυθμένες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι :

5	2	3	8	1.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων τούτων εἶναι 19. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 19, $= 1 + 9 = 10$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 10, $= 1 + 0 = 1$. Ὁ πυθμὴν ἄρα τοῦ ὀνόματος Ἕκτωρ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1. Εἶναι εὐκολώτερον, προσθέτει ὁ Ἱππόλυτος, νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς : Ἀφοῦ εὑρέθη τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν πυθμένων, ὁ 19, διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ 9. Ὁ $19 = 2 \,.\, 9 + 1$. Ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ἄρα 1 βλέπομεν τὸν πυθμένα τοῦ ὀνόματος Ἕκτωρ.

Δύο λοιπὸν τρόπους μνημονεύει ὁ Ἱππόλυτος, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πυθμένος ἑνὸς κυρίου ὀνόματος.

Ὁ πρῶτος εἶναι, 1) διάταξις τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ γράμματα τοῦ ὀνόματος καὶ διαίρεσις τῶν δεκάδων διὰ τοῦ 10, τῶν ἑκατοντάδων διὰ τοῦ 100 πρὸς λῆψιν τῶν πυθμένων τῶν ἀριθμῶν τοῦ ὀνόματος. 2) Πρόσθεσις τῶν πυθμένων, 3) Πρόσθεσις τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος τῶν πυθμένων, 5) Πρόσθεσις τῶν ψηφίων τοῦ νέου ἀθροίσματος κ.λπ.

Ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι, ἀφοῦ εὕρωμεν τὸ πρῶτον ἄθροισμα τῶν πυθμένων τῶν ἀριθμῶν τοῦ ὀνόματος, νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τῶν πυθμένων διὰ τοῦ 9. Καὶ ἂν μὲν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, τελικὸς πυθμὴν τοῦ ὀνόματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 9, δηλ. ὁ διαιρέτης. Ἂν δὲ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι τελεία, τελικὸς πυθμὴν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν πυθμένων διὰ τοῦ 9. Ὁ δεύτερος αὐτὸς τρόπος, προσθέτει ὁ Ἱππόλυτος, λέγεται εὕρεσις τοῦ πυθμένος ἑνὸς ὀνόματος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ 9.

Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἄλλη μέθοδος, ἡ μέθοδος τοῦ 7, διαίρεσις, δηλ., τοῦ πρώτου ἀθροίσματος τῶν πυθμένων τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 7 καὶ λῆψις τοῦ ὑπολοίπου ὡς τελικοῦ πυθμένος ἢ λῆψις τοῦ 7, ὡς πυθμένος τελικοῦ, ὅταν ἡ διαίρεσις δίδῃ ὑπόλοιπον μηδέν.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ πυθμὴν τοῦ ὀνόματος:

Π	ά	τ	ρ	ο	κ	λ	ο	ς

Οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ εἶναι

80	1	300	100	70	20	30	70	200

Οἱ πυθμένες εἶναι:

8	1	3	1	7	2	3	7	2

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων εἶναι: $8 + 1 + 3 + 1 + 7 + 2 + 3 + 7 + 2 = 34$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 34 εἶναι $3 + 4 = 7$. Ὁ πυθμὴν ἄρα τοῦ ὀνόματος Πάτροκλος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 7. Ἂν ἐφαρμόσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πυθμένος τὴν μέθοδον τοῦ 9, διαιροῦμεν τὸν 34 διὰ τοῦ 9, ὁπότε ἔχομεν $34 = 9 \,.\, 3 + 7$. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα 7 εἶναι πάλιν, ὁ αὐτὸς πυθμὴν 7 τοῦ ὀνόματος Πάτροκλος.

Ἐὰν ὅμως ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ 7, ἐὰν δηλ. διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων 34 διὰ τοῦ 7, θὰ ἔχωμεν $34 = 7 . 4 + 6$. Καὶ ἀφοῦ ἔχομεν ὑπόλοιπον 6, ὁ πυθμὴν τοῦ ὀνόματος Πάτροκλος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ 7 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6.

Ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν διατί ὁ ἱερεὺς Ἱππόλυτος ἀσχολεῖται μὲ τοὺς πυθμένας τῶν ὀνομάτων.

Κατὰ τὴν πρὸ τῆς ἐπικρατήσεως τοῦ Χριστιανισμοῦ ἐποχὴν (πρὸ τοῦ 325 μ.Χ.) ἤκμαζεν εἰς ὅλον τὸν παλαιὸν πολιτισμένον κόσμον ἡ ἐπιστήμη ἢ ἡ τέχνη τῆς ἀστρολογίας. Ὑπῆρχον εἰδικοὶ ἀστρολόγοι, οἱ ὁποῖοι διὰ παρατηρήσεων εἰς τὰ ἄστρα προέλεγον τὸ μέλλον τῶν ἀνθρώπων, ὅταν οἱ ἐνδιαφερόμενοι ἔλεγον εἰς αὐτοὺς τὴν ἡμερομηνίαν τῆς γεννήσεως καὶ μάλιστα ποῖος ἀστερισμὸς ἐμεσουράνει κατὰ τὴν γέννησιν (ποῖον ζῴδιον). Δι' αὐτὸ καὶ τώρα ἀκόμη, εἰς τὰ διάφορα λεξικά, πρὸ τῆς χρονολογίας γεννήσεως σημειώνουν ἕνα ἀστέρα, ἐν ᾧ διὰ τὴν χρονολογίαν θανάτου προτάσσεται εἷς σταυρός, ὅπως π.χ. *1855, †1918. Οἱ ἀστρολόγοι προκειμένου νὰ μαντεύσουν τὸ μέλλον ἑνὸς ἐρωτῶντος, ἔκαμον διαφόρους συνδυασμοὺς μὲ τοὺς πυθμένας τῶν ὀνομάτων καὶ ὄχι μόνον προέλεγον τὰ μέλλοντα, ἀλλὰ ἡρμήνευον καὶ τὰ ἱστορικὰ γεγονότα. Διὰ νὰ δικαιολογήσουν π.χ. τὴν ὑπεροχὴν τοῦ Ἀχιλλέως ἔναντι τοῦ Ἕκτορος, ἐσχημάτιζον τοὺς πυθμένας ἑκάστου ὀνόματος καὶ ἔλεγον, ὅτι ὁ Ἀχιλλεὺς ἔπρεπε νὰ νικήσῃ, διότι τὸ ὄνομά του εἶχε μεγαλύτερον πυθμένα. Π.χ. :

	Ἀ	χ	ι	λ	λ	ε	ύ	ς
οἱ ἀριθμοί :	1	600	10	30	30	5	400	200
οἱ πυθμένες :	1	6	1	3	3	5	4	2

Ἄθροισμα = 25, $2 + 5 = 7$

	῞Ε	κ	τ	ω	ρ
οἱ ἀριθμοί :	5	20	300	800	100
οἱ πυθμένες :	5	2	3	8	1

῎Αθροισμα $= 19,\ 1 + 9 = 10,\ 1 + 0 = 1.$
Ἑπομένως ὁ Ἀχιλλεὺς ἔπρεπε νὰ νικήσῃ τὸν ῞Εκτορα, ἀφοῦ $7 > 1$.

Ὁ Ἱππόλυτος ἐθεώρει τὴν ἀστρολογίαν ὡς ἀγυρτείαν. Γράφων ὅμως τὴν ἐναντίον αὐτῆς κατηγορίαν του, μᾶς διέσωσε μερικὰς ἀριθμητικὰς γνώσεις, τὰς ὁποίας δὲν συναντῶμεν εἰς τὰ παλαιὰ μαθηματικὰ βιβλία. Ἐν ᾧ ὅμως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐκλείδου γίνεται λόγος περὶ τῶν μικροτέρων, τῶν ἐλαχίστων ὅρων τῶν ἀναλογιῶν, δηλ. τῶν πυθμένων τῶν διδομένων ἀριθμῶν, (ὅπως εἰς τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν), ἐδῶ εἰς τὴν ἀστρολογίαν, γίνεται λόγος περὶ τοῦ πυθμένος τῶν πυθμένων, βλέπομεν δηλ. ἐφαρμοζομένην τὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 6, ὅταν δίδωνται τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3. Εἶναι πιθανώτατον, ὅτι καὶ ἄλλους μαθηματικοὺς συνδυασμοὺς θὰ ἐχρησιμοποίει ἡ ἀστρολογία. Περὶ αὐτῶν ὅμως οὐδὲν διεσώθη. Εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον ὁ Ἱππόλυτος ἐπιτίθεται κατὰ τοῦ Ἀρχιμήδους κατηγορῶν αὐτοῦ, ὅτι ἡ σειρὰ τῶν πλανητῶν, ὡς οὗτος τὴν θεωρεῖ, δὲν εἶναι ἡ ὀρθή, (ἐν ᾧ ἦτο). Διὰ τῆς κατηγορίας του ὅμως αὐτῆς ὁ Ἱππόλυτος μᾶς διέσωσε ἀστρονομικὰς γνώσεις τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ ὁποῖαι εἰς οὐδὲν βιβλίον διεσώθησαν

("Ιδε Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Α', μέρος Α', ὑπὸ Ε. Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1970, σελ. 98).

Ἡ ἀνωτέρω μνημονευομένη ὑπὸ τοῦ Ἱππολύτου «μέθοδος τοῦ 9» εἶναι ὁμοία πρὸς τὸ θεώρημα, ὅτι «τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δι' 9 ἢ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9 ἢ 3». Τὸ θεώρημα τοῦτο δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, διότι ἀνήκει εἰς τὴν σφαῖραν τῶν πρακτικῶν μαθηματικῶν.

ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

13. Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰ μήκη πλευρῶν τετραγώνων. Διαμετρικοὶ δὲ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (διαγωνίων) τῶν τετραγώνων τούτων.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (Θέων Σμυρν. σ. 42–45) οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ὡς ἑξῆς: θεωροῦμεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ διάμετρος (δηλ. ἡ διαγώνιος) ἐπίσης ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. [Τοῦτο εἰς τὴν σημερινὴν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν λέγεται, θεωροῦμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν]. Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον (δηλ. διαγώνιον) μεγαλυτέρου τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: προσθέτομεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Εἰς τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τετραγώνου προσθέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον τοιαύτης κατασκευῆς μεγαλυτέρων τετραγώνων ἐπ' ἄπειρον. Κατὰ τὸν Θέωνα λοιπὸν θὰ ἔχωμεν :

'Αριθμοὶ πλευρικοὶ

Πλευρὰ	πρώτου	τετραγώνου	1
»	δευτέρου	»	$1 + 1 = 2$
»	τρίτου	»	$2 + 3 = 5$
»	τετάρτου	»	$5 + 7 = 12$
»	πέμπτου	»	$12 + 17 = 29$
»	ἕκτου	»	$29 + 41 = 70$
»	ἑβδόμου	»	$70 + 99 = 169$
»	ὀγδόου	»	$169 + 239 = 408$

'Αριθμοὶ διαμετρικοὶ

Διάμετρος	1ου	τετραγώνου	1
»	2ου	»	$2.\ 1 + 1 = 3$
»	3ου	»	$2.\ 2 + 3 = 7$
»	4ου	»	$2.\ 5 + 7 = 17$
»	5ου	»	$2.\ 12 + 17 = 41$
»	6ου	»	$2.\ 29 + 41 = 99$
»	7ου	»	$2.\ 70 + 99 = 239$
»	8ου	»	$2.169 + 239 = 577$

Καλοῦντες α τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διάμετρον τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ ἔχωμεν

Ἀριθμοὶ πλευρικοὶ		Ἀριθμοὶ διαμετρικοὶ	
	α		δ
$\alpha + \delta$	$= \alpha_1$	$2.\alpha + \delta$	$= \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1$	$= \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1$	$= \delta_2$
$\alpha_2 + \delta_2$	$= \alpha_3$	$2.\alpha_2 + \delta_2$	$= \delta_3$
$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$= \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$= \delta_\nu$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων πρὸς τὰς πλευράς, ὡς ἐκθέτει αὐτὰς ὁ Θέων, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad = \lambda_1$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_2$$

$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_3$$

$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_4$$

$$\frac{41}{29} = 1{,}4137913 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_5$$

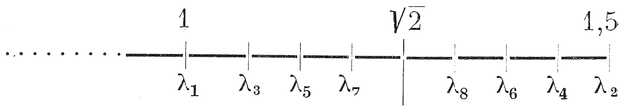
$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_6$$

$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_7$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156 \;\ldots\ldots\ldots\; = \lambda_8$$

$$\delta_\nu : \alpha_\nu \qquad = \sqrt{2}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι αὐξάνονται συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Ἔχομεν δηλ. δύο ἀκολουθίας ἀριθμῶν, προκυπτούσας ἐξ ἑνὸς νόμου σχηματισμοῦ, τὴν μὲν αὔξουσαν, τὴν δὲ φθίνουσαν, αἱ ὁποῖαι ὅταν τὸ $\nu \to \infty$ συμπίπτουν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' εὐθυγράμμου τμήματος, ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι παράστασιν τῶν λόγων, τῶν ὁποίων ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν θὰ γίνεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5.



Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἡ περιττῆς τάξεως ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ ἀρτίας τάξεως ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ φράγμα εἶναι κοινόν, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$. Διὰ τῶν λόγων δηλ. τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς λαμβάνεται ὁ λόγος: $\delta_\nu : \alpha_\nu$, δηλ. ἡ $\sqrt{2}$, ὅταν $\nu \to \infty$.

Ὁ Θέων καὶ ὁ Πρόκλος, ὅστις διατυπώνει ἐπίσης τὸν νόμον σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν δὲν μνημονεύουν τι περὶ κριτηρίου συγκλίσεως τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν. Ὡς τοιοῦτον ὅμως θεωρεῖται τὸ 2ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων, καθ' ὅ, ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, δὲν ὑπάρχει τελικὸν ὑπόλοιπον μετροῦν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ (προκειμένου περὶ ἀσυμμέτρων). Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ὑποδηλοῖ ὁ Πρόκλος, καθιστᾷ φανερὰν τοιαύτην σύγκλισιν.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν

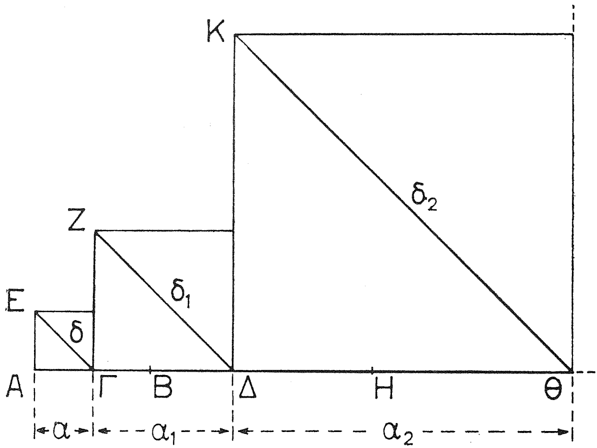
Ἐτέθη τὸ πρόβλημα, δοθέντος τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ζητουμένου τετραγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἕκαστον δὲ εὑρισκόμενον τετράγωνον νὰ θεωρῆται δοθὲν καὶ νὰ συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω νόμου.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$ καὶ διαμέτρου $\mathrm{\Gamma E} = \delta$ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα $\mathrm{\Gamma B} = \alpha$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τούτου τμῆμα $\mathrm{B\Delta} = \delta$. Τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν $\mathrm{\Gamma\Delta} = \alpha + \delta$. Ἀπομένει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΔΖ.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς διαμέτρου ΔΖ χρησιμοποιεῖται, ὡς λέγει ὁ Πρόκλος [1], τὸ 10ον θεώρημα τοῦ

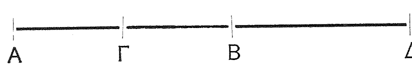
1. Πρόκλου. Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σελ. 24 καὶ 293, Hultsh - Kroll.

δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ, καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις τῆς ΑΒ, ἡ ΒΔ, τότε εἶναι $(\text{ΑΔ})^2 + (\text{ΒΔ})^2$



Σχ. 1.

$= 2(\text{ΑΓ})^2 + 2(\text{ΓΔ})^2$, (1), (σχ. 2) (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία I. II. III. IV., Ε. Σταμάτη, 1952). Ἐν προκειμένῳ εἶναι $\text{ΑΓ} = \alpha$, $\text{ΓΒ} = \alpha$ καὶ $\text{ΒΔ} = \delta$ (σχ. 1) καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις (1). Ἐπειδὴ $\text{ΒΔ} = \text{ΓΕ}$ καὶ $(\text{ΓΕ})^2 = 2(\text{ΑΓ})^2$



Σχ. 2.

θὰ εἶναι $(\text{ΒΔ})^2 = 2(\text{ΑΓ})^2$. Ἀφαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν

$(\text{ΑΔ})^2 = 2(\text{ΓΔ})^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος (διαγώνιος) τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ διάμετρος ὅμως τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα ΔΖ = ΑΔ. Ἡ ΑΔ ὅμως = ΑΓ + ΓΒ + + ΒΔ, ἔνθα ΒΔ = ΓΕ καὶ συνεπῶς ΑΔ = $2\alpha + \delta$. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθη ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμετρος δ ἑνὸς τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι $\alpha + \delta = \alpha_1$, καὶ ἡ διάμετρος $2\alpha + \delta = \delta_1$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΔΗ = ΓΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ΗΘ = ΔΖ (σχ. 1). Κατὰ τὸ αὐτὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν $(\text{ΓΘ})^2 + (\text{ΗΘ})^2 = 2(\text{ΓΔ})^2 + 2(\text{ΔΘ})^2$, (2). Ἐπειδὴ ΗΘ = ΔΖ καὶ $(\text{ΔΖ})^2 = 2(\text{ΓΔ})^2$, θὰ εἶναι καὶ $(\text{ΗΘ})^2 = 2(\text{ΓΔ})^2$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῆς (2) ἔχομεν $(\text{ΓΘ})^2 = 2(\text{ΔΘ})^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ διάμετρος δὲ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα ΓΘ = ΘΚ. Ἀλλὰ ἡ ΔΘ = ΔΗ + ΗΘ = $\alpha_1 + \delta_1$ καὶ ΘΚ = ΓΔ + ΔΗ + ΗΘ = $2\alpha_1 + \delta_1$. Καὶ ἑπομένως τοῦ νυοστοῦ νέου τετραγώνου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, ἡ δὲ διάμετρος $\delta_\nu = 2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς εὑρεθείσας πλευρὰς καὶ διαμέτρους τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων :

πλευρὰ	διάμετρος (διαγώνιος)
α	δ
$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
....	....
$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$.

Ἐὰν λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$, ἔχομεν τότε τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀναφέρουν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Πρόκλος καὶ τοὺς ὁποίους ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω. Ἐὰν ἡ κατασκευὴ τετραγώνου συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, τότε ὁ λόγος $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ $(\nu \to \infty)$ προσδιορίζει τὴν $\sqrt{2}$.

Ἀπομένει νὰ ἐξετασθῇ, διατί ἔχομεν τὸ δικαίωμα νὰ λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$, δηλ. νὰ λάβωμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον (διαγώνιον) $= 1$.

Πρὸς τοῦτο ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος πορεία κατασκευῆς τετραγώνων, ἐκείνη τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν Πρόκλον, ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω καὶ ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς $\sqrt{2}$. Ἔστω δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΘΔ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν ΘΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΘΚ, γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ εἴς τι σημεῖον Γ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Τοῦτο τὸ θεωροῦμεν δοθὲν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἤτοι μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΔΖ γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἴς τι σημεῖον Α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΘΚ = ΘΓ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὴν ΘΔ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ. Ἐπίσης πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΓΑ ἀφηρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΔΖ = = ΔΑ τὴν πλευρὰν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΔΖ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἑπομένας κατασκευὰς τετραγώνων. [Ἐπὶ πλέον δὲ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ΘΔ, ἡ διάμετρος ΔΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς διαμέτρου ΘΚ κ.λπ. Ἡ ἀπόδειξις τούτου παρέχεται ἐκ τῆς σχέσεως $\sqrt{2} < 1{,}5$ ἢ γεωμετρικῶς]. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων δυνάμεθα, συνεχίζοντες οὕτω τὴν κατασκευὴν τετραγώνων, νὰ λάβωμεν πλευρὰν τετραγώνου (καὶ διάμετρον) μικροτέραν πάσης δοθείσης πλευρᾶς ὁσονδήποτε μικρᾶς. Μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν $\nu \to \infty$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαμέτρου καὶ πλευρᾶς τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ. $(\delta_\nu - \alpha_\nu) = 0$, καὶ συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Εἶναι ἄρα ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$.

Τελειώνων ὁ Θέων τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ πλευρικοὶ καὶ οἱ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἐπάγεται: «αἱ δὲ διάμετροι (διαγώνιοι) ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦνται ἐναλλὰξ ἄλλοτε μὲν πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς σὺν μίαν μονάδα καὶ ἄλλοτε πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς μεῖον μίαν μονάδα καὶ τοῦτο γίνεται συνεχῶς (ὁμαλῶς)· τὰ τετράγωνα λοιπὸν ὅλων τῶν διαμέτρων (τῶν διαμετρικῶν δηλ. ἀριθμῶν) θὰ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν πλευρῶν (τῶν πλευρικῶν δηλ. ἀριθμῶν), διότι ἡ ἐναλλὰξ καὶ συνεχῶς πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀποκαθιστᾷ ἰσότητα, ὥστε εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις νὰ μὴ ἐλλείπῃ οὔτε νὰ ὑπερβάλλῃ ἀπὸ τὸ διπλάσιον· διότι ὅ,τι ἐλλείπει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς προηγουμένης διαμέτρου, ὑπερβάλλει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ἑπομένης ἤτοι $\delta^2{}_\nu = 2\alpha^2{}_\nu \mp 1$.

Ἔστωσαν πάλιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1	1
2	3
5	7
12	17

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα τούτων

$1^2 = 1$	$1^2 = 1$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀπόσπασμα τοῦ Θέωνος θὰ εἶναι:

$$1^2 = 2.\ 1^2 - 1 = 1$$
$$3^2 = 2.\ 2^2 + 1 = 9$$
$$7^2 = 2.\ 5^2 - 1 = 49$$
$$17^2 = 2.12^2 + 1 = 289$$

καὶ γενικῶς $\delta^2{}_\nu = 2.\ \alpha^2{}_\nu \mp 1$ (α πλευρά, δ διάμετρος), δηλ. διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν παρέχονται αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 2x^2 \mp 1$.

ΟΙ ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑ ΤΗΝ $\sqrt{3}$

14. Ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν πραγματείαν του Κύκλου Μέτρησις τὴν σχέσιν :

$$\frac{365}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

χωρὶς νὰ ἀποδεικνύῃ τὴν εὕρεσιν αὐτῆς.

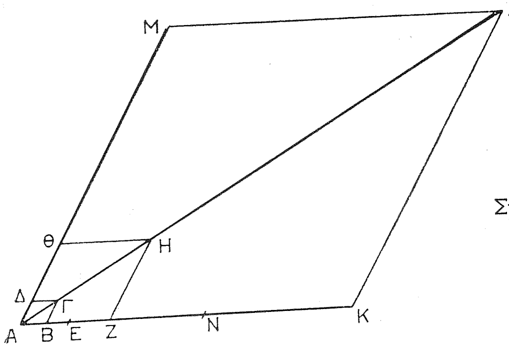
Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου κλάσματος τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 3x^2 + 1$, ἤτοι εἶναι $265^2 = 3.153^2 - 2$ καὶ $1351^2 = 3.780^2 + 1$.

Κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας ἔγιναν πολλαὶ προσπάθειαι πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως.

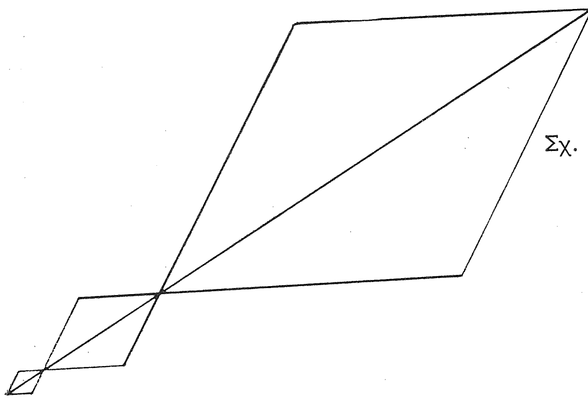
Κατὰ τὸ 1955 στηριζόμενοι εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν μνημονεύομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἀνεκοινώσαμεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (2 – 6 – 55) τὴν κάτωθι μέθοδον ἀποδείξεως τῆς ἀνωτέρω σχέσεως :

Ἀντὶ νὰ κατασκευάσωμεν διαδοχικῶς τετράγωνα καθ' ὡρισμένον νόμον καὶ διὰ τῆς λήψεως τῶν λόγων τῶν διαμέτρων (δηλ. διαγωνίων) πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς νὰ εὕρωμεν κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{2}$, κατασκευάζομεν διαδοχικῶς ῥόμβους καθ' ὡρισμένον νόμον, ὅπου ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἑκάστου ῥόμβου νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ



Σχ. 1.



Σχ. 2.

ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ 12ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $ΑΓ^2 = 3ΑΒ^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας, πλευρά, δηλ. ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, καὶ συνεπῶς $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \sqrt{3}$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $ΒΕ = ΑΒ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα $ΕΖ = ΑΓ$, ὥστε $ΑΖ = 2ΑΒ + ΕΖ$. Κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἀνεφέρθη ἀνωτέρω), θὰ ἔχωμεν :

$$ΑΖ^2 + ΕΖ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΒΖ^2.$$

Ἐπειδὴ $ΒΖ = ΒΕ + ΕΖ$, θὰ εἶναι

$$ΑΖ^2 + ΕΖ^2 = 2ΑΒ^2 + 2(ΒΕ + ΕΖ)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ $ΕΖ^2$ λαμβάνομεν

$$ΑΖ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΒΕ^2 + ΕΖ^2 + 4ΒΕ \times ΕΖ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ΒΕ = ΑΒ$ καὶ $ΕΖ = ΑΓ$, θὰ ἔχωμεν

$$ΑΖ^2 = 4ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 4ΑΒ \times ΑΓ.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3ΑΖ^2 = 12ΑΒ^2 + 3ΑΓ^2 + 12ΑΒ \times ΑΓ$.
Ἀλλὰ $3ΑΒ^2 = ΑΓ^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3ΑΖ^2 = 9ΑΒ^2 + 4ΑΓ^2 + 12ΑΒ \times ΑΓ = (3ΑΒ + ΑΓ)^2.$$

(ΣΗΜ.: Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα οἱ ἐν συνεχείᾳ κατασκευαζόμενοι ῥόμβοι ΑΒΓΔ, ΑΖΗΘ, ΑΚΛΜ τοῦ πρώτου σχήματος ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως).

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $ΑΖ = 2ΑΒ + ΕΖ = 2ΑΒ + ΑΓ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3ΑΒ + 2ΑΓ$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν $ΑΖΗΘ$,

ἔνθα $ΑΗ = 3ΑΒ + 2ΑΓ$ καὶ $ΑΗ^2 = 3ΑΖ^2$.

Ἐὰν καλέσωμεν $ΑΒ = α$ καὶ $ΑΓ = δ$, θὰ ἔχωμεν

$$ΑΖ = 2α + δ, \quad (1)$$

καὶ

$$ΑΗ = 3α + 2δ. \quad (2)$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $ΑΖ$ λαμβάνομεν τμῆμα $ΖΝ = ΑΖ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $ΖΝ$ λαμβάνομεν τμῆμα $ΝΚ = ΑΗ$, ὥστε $ΑΚ = 2ΑΖ + ΝΚ$. Πάλιν κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$ΑΚ^2 + ΝΚ^2 = 2ΑΖ^2 + 2ΖΚ^2.$$

Ἐπειδὴ $ΖΚ = ΖΝ + ΝΚ$, θὰ εἶναι

$$ΑΚ^2 + ΝΚ^2 = 2ΑΖ^2 + 2(ΖΝ + ΝΚ)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ $ΝΚ^2$ λαμβάνομεν

$$ΑΚ^2 = 2ΑΖ^2 + 2ΖΝ^2 + ΝΚ^2 + 4ΖΝ \times ΝΚ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ΖΝ = ΑΖ$ καὶ $ΝΚ = ΑΗ$, θὰ ἔχωμεν

$$ΑΚ^2 = 4ΑΖ^2 + ΑΗ^2 + 4ΑΖ \times ΑΗ.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3ΑΚ^2 = 12ΑΖ^2 + 3ΑΗ^2 + 12ΑΖ \times ΑΗ$.

Ἀλλὰ εἶναι $ΑΗ^2 = 3ΑΖ^2$. Ὅθεν εἶναι

$3ΑΚ^2 = 9ΑΖ^2 + 4ΑΗ^2 + 12ΑΖ \times ΑΗ = (3ΑΖ + 2ΑΗ)^2$.

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $ΑΚ = 2ΑΖ + ΝΚ = 2ΑΖ + ΑΗ$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3ΑΖ + 2ΑΗ$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζοντες τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΚΛΜ, ἔνθα $ΑΛ = 3ΑΖ + 2ΑΗ$ καὶ $ΑΛ^2 = 3ΑΚ^2$.

Ἐὰν εἰς τὰς εὐθείας ΑΚ καὶ ΑΛ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ΑΖ, ΑΗ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $ΑΛ = 12\alpha + 7\delta$ καὶ $ΑΚ = 7\alpha + 4\delta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ῥόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων.

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α = πλευρὰ ῥόμβου	δ = διαγώνιος ῥόμβου
$\alpha_1 = 2\alpha + \delta$	$\delta_1 = 3\alpha + 2\delta$
$\alpha_2 = 7\alpha + 4\delta$	$\delta_2 = 12\alpha + 7\delta$
$\alpha_3 = 26\alpha + 15\delta$	$\delta_3 = 45\alpha + 26\delta$
$\alpha_4 = 97\alpha + 56\delta$	$\delta_4 = 168\alpha + 97\delta$
$\alpha_5 = 362\alpha + 209\delta$	$\delta_5 = 627\alpha + 362\delta$
$\vdots$	$\vdots$

ἢ

α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
$\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4$	$\delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Ἐὰν ἀνωτέρω θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{\delta_2}{\alpha_2}=\frac{5}{3},\quad \frac{\delta_3}{\alpha_3}=\frac{19}{11},$$

$$\frac{\delta_4}{\alpha_4}=\frac{71}{41},\quad \frac{\delta_5}{\alpha_5}=\frac{265}{153},\ \varkappa\lambda.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1=1$ καὶ $\delta_1=2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1}=\frac{2}{1},\quad \frac{\delta_2}{\alpha_2}=\frac{7}{4},\quad \frac{\delta_3}{\alpha_3}=\frac{25}{15},$$

$$\frac{\delta_4}{\alpha_4}=\frac{97}{96},\quad \frac{\delta_5}{\alpha_5}=\frac{362}{209},\quad \frac{\delta_6}{\alpha_6}=\frac{1351}{780},\ \varkappa\lambda\pi.$$

Ἤτοι εἶναι :

$$\frac{1}{1}<\frac{5}{3}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\ldots\sqrt{3}\ldots$$

$$<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<\frac{2}{1}.$$

Αἱ τιμαὶ δ_ν, α_ν, ἐὰν τεθῇ $\delta_1=1$, $\alpha_1=1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2-2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1=2$, $\alpha_1=1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2=3x^2+1$. ($y=\delta$, $x=\alpha$).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

15. Εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια τοῦ β′ βιβλίου τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Νικόμαχος ἀναφέρει τὸ ἑξῆς θεώρημα : Ἐὰν δοθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι (αὐξούσης) γεωμετρικῆς προόδου, $\alpha < \beta < \gamma$, ὅπου α δύναται νὰ εἶναι καὶ κλασματικός, δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τρεῖς ὅρους, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι ἴσοι μεταξύ των (ἤτοι οἱ δύο μεγαλύτεροι νὰ γίνουν ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον), ἐφαρμόζοντες τὴν ἑξῆς μέθοδον. Ὡς πρῶτον ὅρον λαμβάνομεν τὸν μικρότερον α· ὡς δεύτερον τὸν $(\beta - \alpha)$ καὶ ὡς τρίτον τὸν $(\gamma - \alpha - 2(\beta - \alpha)) = \gamma + \alpha - 2\beta$. Ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν μέθοδον εἰς τοὺς τρεῖς ληφθέντας νέους ὅρους λαμβάνομεν ὡς πρῶτον ὅρον τὸν α, ὡς δεύτερον ὅρον τὸν $(\beta - \alpha) - \alpha = (\beta - 2\alpha)$ καὶ ὡς τρίτον τὸν $(\gamma + \alpha - 2\beta) - \alpha - 2(\beta - 2\alpha) = \gamma + 4\alpha - 4\beta$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἤτοι θὰ εἶναι :

Δοθέντες τρεῖς ὅροι

$$\begin{array}{llll}
\alpha & \beta & \gamma & \\
\end{array}$$

Λαμβανόμενοι διαδοχικῶς

$$\begin{array}{llll}
\alpha & \beta - \alpha & \gamma + \alpha - 2\beta & (1) \\
\alpha & \beta - 2\alpha & \gamma + 4\alpha - 4\beta & (2) \\
\alpha & \beta - 3\alpha & \gamma + 9\alpha - 6\beta & (3) \\
\alpha & \beta - 4\alpha & \gamma + 16\alpha - 8\beta & (4) \\
\alpha & \beta - 5\alpha & \gamma + 25\alpha - 10\beta & (5) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha & \beta - (\nu - 1)\alpha & \gamma + (\nu - 1)^2\alpha - 2(\nu - 1)\beta & \\
\alpha & \beta - \nu\alpha & \gamma + \nu^2\alpha - 2\nu\beta & (\nu)
\end{array}$$

Ἐὰν ὁ λόγος τῆς αὐξούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι ω, τὸ πλῆθος τῶν μετασχηματισμῶν ν διὰ νὰ ληφθοῦν οἱ τρεῖς ἐν συνεχείᾳ δοθέντες ὅροι αὐτῆς ἴσοι μεταξύ των, δηλ. οἱ δύο μεγαλύτεροι ἴσοι πρὸς τὸν μικρότερον, θὰ εἶναι $\nu = \omega - 1$, οἱ δὲ ὅροι θὰ εἶναι $\alpha = \beta - \nu\alpha = \gamma + \nu^2\alpha - 2\nu\beta$. (τ)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου $\alpha = 5$, $\beta = 25$, $\gamma = 125$, ὅπου $\alpha = 5$ καὶ $\omega = 5$. Διὰ νὰ γίνουν οἱ τρεῖς ὅροι ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον 5 ἐφαρμόζομεν τοὺς προηγουμένους τύπους. Ἐπειδὴ $\omega = 5$, ὁ $\nu = 5 - 1 = 4$, ἤτοι χρειάζονται τέσσαρες μετασχηματισμοὶ διὰ νὰ γίνουν οἱ δύο μεγαλύτεροι ὅροι ἴσοι πρὸς τὸν μικρότερον 5, οἱ ἑξῆς :

1)	5	25—5 =20	125+ 5—2.25=80
2)	5	25—2.5=15	125+ 4.5—4.25=45
3)	5	25—3.5=10	125+ 9.5—6.25=20
4)	5	25—4.5=5	125+16.5—8.25=5

Τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα ἠδύνατο βέβαια νὰ ληφθῇ ἀμέσως ἐκ τῶν τύπων (τ), ὁπότε θὰ ἦτο $5 = 25 - 4 \,.\, 5 = 125 + 4^2 \,.\, 5 - 2 \,.\, 4 \,.\, 25$, ἀφοῦ $\omega = 5$ καὶ $\nu = \omega - 1$.

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

16. Εἰς τὸ β΄ βιβλίον τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Νικόμαχος πραγματεύεται περὶ τῶν ἀναλογιῶν (κεφ. 21), διακρίνων αὐτὰς εἰς ἀριθμητικήν, γεωμετρικὴν καὶ ἁρμονικὴν καὶ εἰς ἄλλας τρεῖς ἀντιστοίχους πρὸς αὐτάς, τὰς καλουμένας ὑπεναντίας. Κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Πρόκλου (Εἰς Εὐκλείδου α', σελ. 67, 2) τὰς τρεῖς ὑπεναντίας ἀναλογίας ἀνεκάλυψεν ὁ Εὔδοξος (408-355 π.Χ.). Βραδύτερον ἀνεκαλύφθησαν καὶ ἄλλαι τέσσαρες ἀναλογίαι ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Πάππου.

Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Ἔστωσαν οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... Ἡ σχέσις $5 - 4 = 4 - 3$, (1), ἀποτελεῖ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν. Ὁ μέσος ὅρος 4 ὡς πρὸς μὲν τὸν μεγαλύτερον 5 ὀνομάζεται ὑπόλογος, ὡς πρὸς δὲ τὸν μικρότερον 3 ὀνομάζεται πρόλογος. Ἐπίσης ἡ σχέσις $10 - 8 = 6 - 4$, (2) εἶναι ἀριθμητικὴ ἀναλογία. Ἡ (1) ὀνομάζεται συνημμένη ἀναλογία, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 4 συνάπτει τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 3, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν συμβαίνει εἰς τὴν (2) ἡ ὁποία ὀνομάζεται διεζευγμένη. Οἱ ὅροι συνημμένη καὶ διεζευγμένη ἀπαντοῦν εἰς τὴν ἀρχαίαν μουσικὴν (Εὐκλείδου Κατατομὴ Κανόνος, σελ. 182 καὶ Ἁρμονικὴ Εἰσαγωγή, σελ. 190 - 194, ἔκδ. H. Menge - I.L. Heiberg).

Ἰδιότητες τῆς Ἀριθμητικῆς ἀναλογίας.

1. Ἐὰν ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν ὅρων α, β, γ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μέσου ($\alpha - \beta = \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma = 2\beta$).

2. Ἐὰν ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀποτελεῖται ἐκ

τεσσάρων ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων ($\alpha - \beta = \gamma - \delta$, $\alpha + \delta = \beta + \gamma$).

Ἐκ τῶν προηγουμένων σχέσεων εἶναι $(\alpha - \beta) : (\gamma - \delta) = 1$ καὶ $(\alpha + \delta) : (\beta + \gamma) = 1$.

3. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν $\alpha - \beta = \beta - \gamma$, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων συγκρινόμενον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεσαίου ὅρου εἶναι μικρότερον αὐτοῦ κατὰ τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν $(\alpha - \beta)$, $(\beta - \gamma)$ ἤτοι $\beta^2 = \alpha\gamma + (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$ ἢ $\beta^2 - \alpha\gamma = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$. Καὶ ἐπειδὴ $(\alpha - \beta) = (\beta - \gamma)$ εἶναι $\beta^2 - \alpha\gamma = (\alpha - \beta)^2 = (\beta - \gamma)^2$. (Νικόμαχος βιβλ. β΄, κεφ. 23 σελ. 125, 16).

4. Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὁ λόγος τῶν μικροτέρων ὅρων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μεγαλυτέρων ὅρων. Ἐὰν π.χ. $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ ἢ $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ καὶ εἶναι $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$. Τὸ ἀντίθετον συμβαίνει εἰς τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, ὅπου δοθέντων τριῶν ὅρων $\alpha > \beta > \gamma$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$ καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία λέγεται ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς (Νικόμαχος β΄ κεφ. 23).

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Ἐνταῦθα ὁ Νικόμαχος, ἀφοῦ ἀναφέρῃ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἐπάγεται, ὅτι ἐὰν δοθῶσιν τρεῖς συνεχεῖς ὅροι φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, οἱ α, β, γ, $(\alpha : \beta = \beta : \gamma = \omega)$, θὰ εἶναι $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma}$, καὶ $\alpha - \beta = (\omega - 1)\,\beta$, $\beta - \gamma = (\omega - 1)\,\gamma$, καὶ γενικῶς αἱ ἰδιότητες τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσχύουν καὶ ὅταν ὁ λόγος εἶναι κλάσμα μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τῆς μονάδος.

Ἐὰν δὲ σχηματίσωμεν τοὺς ἑτερομήκεις ἀριθμοὺς $1 \,.\, 2 = 2$, $2 \,.\, 3 = 6$, $3 \,.\, 4 = 12 \ldots \nu(\nu + 1)$ καὶ τοὺς ἀπὸ μονάδος τετραγώνους καὶ διατάξωμεν αὐτοὺς εἰς μίαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν διπλάσιον λόγον καὶ ὅλους τοὺς ἐπιμορίους

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots \frac{\nu+1}{\nu}\right).$$ Π.χ.

ἑτερομήκεις 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110...
τετράγωνοι 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Καὶ ἡ διάταξις ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς,
1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100, 110...

Λόγοι ἐκ τούτων

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2 = \text{διπλάσιος}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = \text{ἐπιμόριος (ἡμιόλιος)}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = \text{ἐπιμόριος (ἐπίτριτος)}$$

$$\frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \quad \text{»} \quad \text{ἐπιτέταρτος}$$

$$\frac{30}{25} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5} = \quad \text{»} \quad \text{ἐπίπεμπτος}$$

$$\frac{42}{36} = \frac{49}{42} = \frac{7}{6} = \quad \text{»} \quad \text{ἐφέκτος}$$

$$\frac{56}{49} = \frac{64}{56} = \frac{8}{7} = \quad \text{»} \quad \text{ἐφέβδομος}$$

$$\frac{72}{84} = \frac{81}{72} = \frac{9}{8} = \quad \text{»} \quad \text{ἐπόγδοος, κλπ.}$$

Ἀκολούθως ὁ Νικόμαχος ὑπενθυμίζει τὰ εἰς τὸν Τίμαιον τοῦ Πλάτωνος (32 Α,Β) ἀναφερόμενα καὶ λέγει, ὅτι δοθέντων δύο διαδοχικῶν τετραγώνων, εἷς μόνον εὑρίσκεται μέσος ἀνάλογος τούτων καὶ ὅτι δοθέντων δύο διαδοχικῶν κύβων δύο μόνον εὑρίσκονται μέσοι ἀνάλογοι τούτων. Π.χ. ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν τετραγώνων α^2, β^2 μόνον εἷς εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μέσος ἀνάλογος, ὥστε $\alpha^2 : \alpha\beta = \alpha\beta : \beta^2$ καὶ ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν κύβων α^3, β^3, μόνον δύο εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μέσοι ἀνάλογοι οἱ $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha^3 : \alpha^2\beta = \alpha^2\beta : \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2 : \beta^3$ κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν.

Πρὸς τούτοις ἀναφέρει καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα : 1) Τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν 1, 4 μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 2 καὶ τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων 4, 9 μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 6, ὥστε $4 : 6 = 6 : 9$.. 2) Τῶν διαδοχικῶν κύβων 8, 27 εὑρίσκονται μόνον δύο μέσοι ἀνάλογοι, οἱ 12 καὶ 18, ὥστε $8 : 12 = 12 : 18 = 18 : 27$ (Νικόμαχος, β′ κεφ. 24 σελ. 126–131).

Η ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Ἁρμονικὴ ἀναλογία ἢ μεσότης εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν $\alpha > \beta > \gamma$ ὑπάρχει ἡ σχέσις $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$, ὅπως π.χ. διὰ 3, 4, 6 εἶναι $\frac{6-4}{4-3} = \frac{6}{3}$ καὶ διὰ 2, 3, 6 εἶναι $\frac{6-3}{3-2} = \frac{6}{2}$.

Ὁ Πάππος (Συναγωγῆς Γ′ σελ. 72, 1. F. Hultsch) παρέχει ὡς ἑξῆς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας: Τρεῖς ἄνισοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, ὅταν ὁ μεσαῖος ὑπερέχῃ τοῦ μικροτέρου κατὰ τόσον μέρος τοῦ μικροτέρου, ὅσον μέρος τοῦ μεγαλυτέρου, ὁ μεγαλύτερος ὑπερέχει τοῦ μεσαίου. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 6, 8, 12 εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διότι ὁ μεσαῖος 8 ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου 6 κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 6, καὶ ὁ μεγαλύτερος 12 ὑπερέχει τοῦ μεσαίου 8 κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 12. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 6 εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διότι ὁ μεσαῖος 3 ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου 2 κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 2, καὶ ὁ μεγαλύτερος 6 ὑπερέχει τοῦ μεσαίου 3 κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 6. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 3, 4, 6 εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διότι ὁ μεσαῖος 4 ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου 3 κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου, καθ' ὃ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἑαυτοῦ του, ὑπερέχει ὁ μεγαλύτερος τοῦ μεσαίου. Καὶ γενικῶς οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ $\alpha > \beta > \gamma$ εὑρίσκονται εἰς ἁρμοινκὴν ἀναλογίαν, ὅταν $\beta = \gamma + \frac{\gamma}{\nu}$ καὶ $\alpha = \beta + \frac{\alpha}{\nu}$.

Ἐν συνεχείᾳ ἀναφέρει ὁ Νικόμαχος, ὅτι ἂν δοθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματίζωνται αἱ τρεῖς ἀναλογίαι : ἀριθμητική, γεωμετρική, ἁρμονική, εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν οἱ λόγοι τῶν μεγαλυτέρων ὅρων πρὸς τοὺς λόγους τῶν μικροτέρων ὅρων εἶναι μικρότεροι, εἰς τὴν γεωμετρικὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μικροτέρων καὶ εἰς τὴν ἁρμονικὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μικροτέρων ὅρων. Π.χ. ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha > \beta > \gamma$.

1. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν $\alpha - \beta = \beta = \gamma$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$.

2. Εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι πάντοτε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ

3. Εἰς τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$ (δι' αὐτὸ ἡ ἁρμονικὴ λέγεται ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

(Νικόμαχος β', κεφ. 25–27 σελ. 131–140).

1. Ὅταν οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

Δίδονται οἱ ἄκροι ὅροι 10 καὶ 40, ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας εἶναι $(10+40):2=25$ καὶ ἡ ἀναλογία εἶναι $40-25=25-10$. Ὁ μέσος ὅρος τῆς γεωμ. ἀναλογίας εἶναι $\sqrt{10 \,.\, 40}=20$ καὶ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία εἶναι $10:20=20:40$.

Ὁ μέσος ὅρος τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας εἶναι 16 $\left(\text{ἐκ τῆς σχέσεως } \dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$, καὶ ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία εἶναι $\dfrac{40-16}{16-10}=\dfrac{40}{10}$.

2. Ὅταν οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι περιττοί, ἔστωσαν οἱ 5 καὶ 45. Αἱ ἀναλογίαι εἶναι:

Ἀριθμητικὴ $45-25=25-5$

Γεωμετρικὴ $45 : 15=15 : 5$

Ἁρμονικὴ $(45-9):(9-5)=45:5$

Κανὼν εὑρέσεως τῶν τριῶν ἀναλογιῶν ὅταν δοθῶσιν οἱ δύο ἄκροι ὅροι α, γ (ἔστω $\alpha>\gamma$).

Διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὁ μέσος ὅρος $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

Διὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ὁ μέσος ὅρος $\beta=\sqrt{\alpha\gamma}$.

Διὰ τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον β λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τῶν δοθέντων ἄκρων ὅρων, τὴν $(\alpha - \gamma)$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν μικρότερον ὅρον, ὅτε εἶναι $(\alpha - \gamma)\gamma$. Τὸ γινόμενον τοῦτο τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων, τοῦ $(\alpha + \gamma)$ καὶ τὸ ληφθὲν πηλίκον τὸ προσθέτομεν εἰς τὸν μικρότερον ὅρον, ὁπότε ἔχομεν τὸν μεσαῖον ὅρον, ἤτοι εἶναι

$$\beta = \frac{(\alpha - \gamma)\gamma}{\alpha + \gamma} + \gamma. \quad (\text{κεφ. } 25 - 27).$$

ΑΙ ΔΕΚΑ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΝΙΚΟΜΑΧΟΝ

17. Ὁ Νικόμαχος (σ. 140, 14) ὑπενθυμίζει ὅτι ἀπὸ τοῦ Πυθαγόρου (580–490 π.Χ.) μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Πλάτωνος (427–347 π.Χ.) καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους (384–322 π.Χ.) τρεῖς ἦσαν αἱ κύριαι ἀναλογίαι, ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ἁρμονική. Κατόπιν προσετέθησαν ἄλλαι τρεῖς (ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη), αἱ ὁποῖαι ἐκλήθησαν ὑπεναντίαι αὐτῶν. Μεταγενεστέρως προσετέθησαν ἄλλαι τέσσαρες, καὶ ἔγιναν ἐν ὅλῳ δέκα. Αὗται εἶναι ὅταν ἔχωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς $\alpha > \beta > \gamma$, αἱ κάτωθι :

1. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma}, \quad \alpha + \gamma = 2\beta,$

   $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$, ἀριθμητική.

2. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma}, \quad \alpha\gamma = \beta^2,$

   $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$, γεωμετρική.

3. $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$; $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{2}{\beta}$ (ὁ τύπος τῶν κοίλων σφαιρ. κατόπτρων), $\beta=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, ἁρμονική.

Ἡ ἁρμονικὴ εἶναι ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς, διότι εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\beta}{\gamma}$, εἰς τὴν ἁρμονικὴν εἶναι ὑπεναντίως, $\dfrac{\alpha}{\beta}>\dfrac{\beta}{\gamma}$.

4. $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}=\beta$. Αὕτη λέγεται ὑπεναντία τῆς ἁρμονικῆς, διότι εἰς μὲν τὴν ἁρμονικὴν εἶναι $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, ἐνταῦθα δὲ εἶναι $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

5. $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\gamma}{\beta}$, $\alpha=\beta+\gamma-\dfrac{\gamma^2}{\beta}$. Ὑπεναντία τῆς γεωμετρικῆς, διότι εἰς τὴν γεωμετρικὴν εἶναι $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=$ $=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$.

6. $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\gamma=\alpha+\beta-\dfrac{\alpha^2}{\beta}$. Ὑπεναντία τῆς γεωμετρικῆς.

7. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$. (Ἀριθ. παράδειγμα, $\alpha=9$, $\beta=8$, $\gamma=6$).

8. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\alpha^2+\gamma^2=\alpha\,(\beta+\gamma)$. ('Αριθμ. παράδειγμα, $\alpha=9$, $\beta=7$, $\gamma=6$).

9. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, $\beta^2+\gamma^2=\gamma\,(\alpha+\beta)$. ('Αριθμ. παράδειγμα $\alpha=7$, $\beta=6$, $\gamma=4$).

10. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, $\alpha=\beta+\gamma$. ('Αριθμ. παράδειγμα $\alpha=8$, $\beta=5$, $\gamma=3$).

ΑΙ ΔΕΚΑ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΠΑΠΠΟΝ

18. Ὁ Πάππος πραγματεύεται τὸ θέμα τῶν ἀναλογιῶν εἰς τὰς σελίδας 70–104 τῆς πραγματείας του «Συναγωγή», βιβλ. Γ', F. Hultch). 'Αναφέρει καὶ αὐτὸς δέκα ἀναλογίας, τὰς ὁποίας ἀποδεικνύει γεωμετρικῶς. Αἱ πρῶται ἓξ ἐκ τούτων ταὐτίζονται πρὸς τὰς πρώτας ἕξ, τὰς ὁποίας ἀναφέρει ὁ Νικόμαχος. Εἰς τὰς ὑπολοίπους 4 ὑπάρχουν μερικαὶ διαφοραί.

'Αναγράφομεν κατωτέρω τὰς ὑπολοίπους ἀναλογίας Αὔξων ἀριθμός,

Νικομάχου	Πάππου	'Ισοδύναμον
7	ἐλλείπει	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$; $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$.
8	9	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\alpha^2+\gamma^2=\alpha\,(\beta+\gamma)$

9	10	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma},\ \beta^2+\gamma^2=\gamma(\alpha+\beta).$
10	7	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma},\ \alpha=\beta+\gamma.$
ἐλλείπει	8	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta},\ \alpha^2=2\alpha\beta-\beta\gamma.$

Δηλαδὴ ὁ Νικόμαχος δὲν ἀναφέρει τὴν ὑπ' ἀριθ. 8 ἀναλογίαν τοῦ Πάππου καὶ ὁ Πάππος δὲν ἀναφέρει τὴν ὑπ' ἀριθ. 7 ἀναλογίαν τοῦ Νικομάχου.

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

19. Στοιχεῖα πρακτικῆς ἀριθμητικῆς ἀναμεμιγμένα μὲ θεωρητικὰς γνώσεις ἀπαντοῦν εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, τοῦ Νικομάχου, τοῦ Διοφάντου, τοῦ Πάππου, τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως καὶ τοῦ Εὐτοκίου. Εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ἔργων τούτων ὑπάρχει πληροφορία ἀναφερομένη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τετραγώνων ἀριθμῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως εἰς τὸ 10 θεώρημα τῆς πραγματείας του Περὶ ἑλίκων ἀποδεικνύει τὸν τύπον :

$$1^2+2^2+3^2\ldots+\nu^2=\frac{\nu(2\nu+1)\,(\nu+1)}{6}$$

(Ἀρχιμήδους Ἅπαντα τόμ. Β', Ἀθῆναι 1973, σελ. 482, ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος). Ἀλλὰ καὶ πολὺ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους οἱ Ἕλληνες εἶχον εὕρει τύπον παρέχοντα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν. Τοῦτο συνάγεται ἀπὸ πινακίδα εὑρεθεῖσαν εἰς τὴν Μεσοποταμίαν, γραφεῖσαν εἰς τὴν γνωστὴν ἤδη βαβυλωνιακὴν σφηνοειδῆ γραφὴν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Σελευκιδῶν, μετὰ τὸν θάνατον δηλ. τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π.Χ.). Ἡ πινακὶς αὕτη πολλὰ μαρτυρεῖ περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ἔφθασαν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Μεσοποταμίας διὰ τῆς ἐκπολιτιστικῆς ἐκστρατείας τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τὰ ὁποῖα ὑπό τινων ἐκλαμβάνονται ὡς βαβυλωνιακὰ ἐπιτεύγματα. Ὅτι πρόκειται περὶ Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν συνάγεται ἐκ τῆς ἀποδείξεως τοῦ συναφοῦς τύπου, ἥτις γίνεται διὰ μεθόδων τῶν Πυθαγορείων. Ἐπὶ πλέον δέ, τὸ πλεῖστον τῶν βαβυλωνιακῶν πινακίδων, αἵτινες περιέχουν μαθηματικὰ προέρχεται ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῇ ὁ τόπος, ὅπου αὗται εὑρέθησαν, πολλῷ δὲ μᾶλλον τὸ ἀρχαιολογικὸν στρῶμα ἐξ οὗ προέρχεται καὶ δι' αὐτοῦ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος γραφῆς των. (Kurt Vogel, Vorgriechische Mathematik II, Verl. H. Schroedel, Hannover, F. Schöning, Paderborn 1959 p. 13). Ὁ εἰς τὴν πινακίδα ἀναφερόμενος τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς :

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 =$$

$$= \frac{1}{3} (1 + 2\nu) \ (1 + 2 + 3 + \dots + \nu)$$

ἀναφερόμενος διὰ λόγων καὶ οὐχὶ διὰ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμητικῶν συμβόλων. Ἡ πινακὶς εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τῶν Παρισίων Louvre, Dép. des Antiquités Orientales, ὑπὸ τὴν ἔνδειξιν AO 6484.

Οὐδεμία ἑρμηνεία παρέχεται περὶ τοῦ τρόπου εὑρέσεως τοῦ τύπου. Φαίνεται ὅμως ὅτι οὗτος εἶναι Πυθαγορικῆς προελεύσεως καὶ ὅτι ἔχει εὑρεθῆ ἐμπειρικῶς διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν γνωμόνων, διὰ τῶν ὁποίων οἱ Πυθαγόρειοι ὑπελόγιζον τοὺς τετραγώνους ἀριθμούς.

Ἡ μετάφρασις τοῦ προβλήματος τῆς πινακίδος (ἡ ὁποία περιέχει καὶ ἄλλα προβλήματα):

«Ἓν τετράγωνον ἀπὸ 1 ἐπὶ 1 (τοῦτο εἶναι) 1, μέχρι 10 ἐπὶ 10 (τοῦτο εἶναι) 1,40.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα· 1 ἐπὶ 20 (τοῦτο εἶναι) [1/3]. Πολλαπλασίασε· (δίδει) 20, 10 ἐπὶ 40 (τοῦτο εἶναι) δύο τρίτα· πολλαπλασίασε· (δίδει) 6,40. 6,40 σὺν 20 (εἶναι) 7. 7 πολλαπλασίασε ἐπὶ 55· (δίδει) 6,25. 6,25 εἶναι τὸ ἄθροισμα». Μὲ ἄλλους λόγους:

$1 \times 1 = 1^2$ μέχρι $10 \times 10 = 1{,}40$ ($1{,}40 = 100$, ἐπειδὴ χρησιμοποιεῖται τὸ ἑξηκονταδικὸν σύστημα, δηλ. 1 ἑξηκοντὰς σὺν 40 μονάδες $= 100$). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα, δηλ. τὸ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$

Πολλαπλασίασε $1 \times 20 = 20 \left(= \frac{1}{3} \text{ τοῦ } 60\right)$, 10×40 (ὅπερ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $60) = 400 = 6{,}40$ δηλ. 6 ἑξηκοντάδες + 40 μονάδες. Σὺν $20 = 7$ (διότι 400 +

$+ 20 = 420 = 7$ ἑξηκοντάδες. $7 \times 55 = 6{,}25$. Τὸ 6,25 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα. Τὸ $55 = 1 + + 2 + 3 + \ldots + 10$. Τὸ δὲ $6{,}25 =$ ἓξ ἑξηκοντάδες σὺν 25 μονάδες $= 385 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 10^2$.

Ὁ ἐκ τῆς φρασεολογίας αὐτῆς συναγόμενος τύπος εἶναι :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{1}{3}\,(1 + 2\nu).$$
$$(1 + 2 + 3 + \ldots + \nu).$$

Διὰ $\nu = 10$, εἶναι $\dfrac{1 + 2\nu}{3} = 7$ καὶ $55 =$
$$= 1 + 2 + 3 + \ldots 10, \quad 7.55 = 385.$$

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΚΥΒΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

20. Ὁ Νικόμαχος εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του (κεφ. 20, σελ. 118, 24–119, 18, R. Hoche) ἐξαίρει τὰς ἰδιότητας τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, λέγων, ὅτι ἂν καταγράψωμεν τοὺς

φυσικοὺς ἀριθμοὺς	1	2	3	4	5	6	7...
καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰς γεω-	1	2	4	8	16	32	64...
μετρικὰς ἀκολουθίας	1	3	9	27	81	243	729...

οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ἀκολουθιῶν, κατὰ τὴν ἀρίθμησιν αὐτῶν ἀπὸ τῆς μονάδος, κατέχουν πάντοτε θέσιν περιττοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν δὲ καταγράψωμεν, συνεχίζει ὁ Νικόμαχος, τὴν ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29...

παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ μονὰς ἐκφράζει τὸν κύβον αὐτῆς δυνάμει, ἤτοι $1 = 1^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ δύο ὅρων εἶναι $3 + 5 = 2^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὅρων εἶναι $7 + 9 + 11 = 3^3$

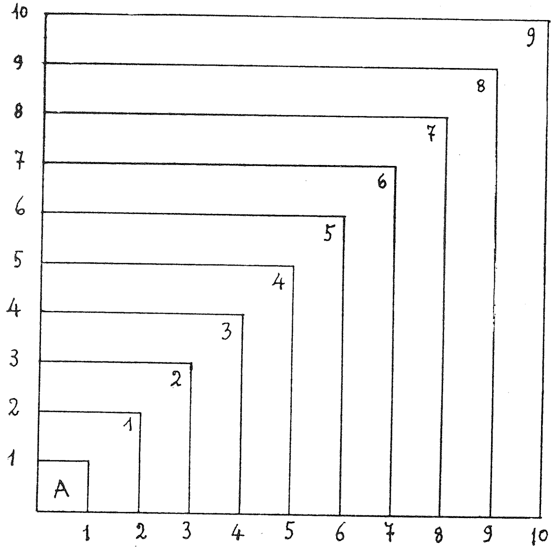
Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τεσσάρων ὅρων εἶναι $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ἄλλη πληροφορία σχετικὴ δὲν παρέχεται ὑπὸ τοῦ Νικομάχου. Ἔκ τινος ὅμως ἀραβικοῦ χειρογράφου, τοῦ Ἄραβος AL - KARKHI (10–11 αἰὼν), εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ διὰ τῶν γνωμόνων τρόπος εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots$ χωρὶς νὰ ἀναφέρεται τὸ ὄνομα τοῦ Ἕλληνος συγγραφέως, εἶναι εὔκολον νὰ συναγάγωμεν τὴν διὰ τῶν γνωμόνων, ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \nu^3$, ὡς ἀκολούθως.

Ἔστω τὸ τετράγωνον Α, πλευρᾶς 1. Περὶ αὐτὸ γράφομεν ἐν συνεχείᾳ γνώμονας, τῶν ὁποίων ἕκαστος περιβάλλει τὸν προηγούμενόν του, τὸ πλάτος δὲ ἑκάστου γνώμονος εἶναι πάντοτε ἡ μονάς. Εἰς τὸ σχῆμα ἔχομεν περιβάλει τὸ τετράγωνον Α διὰ 9 γνωμόνων, τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις γίνεται εἰς τὴν κορυφὴν ἑκάστου γνώμονος.

Τὸ τετράγωνον Α ἐκφράζει τὸν κύβον τῆς μονάδος, 1^3. Ὁ περὶ τὸ τετράγωνον πρῶτος γνώμων



ἔχει ἐμβαδὸν $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$. Ὁ ἑπόμενος δεύτερος γνώμων ἔχει ἐμβαδὸν $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$. Τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου γνώμονος εἶναι $3 + 5 = 8 = 2^3$. Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου Α, τὸ ὁποῖον ἔχομεν παραστήσει διὰ 1^3, θὰ ἔχωμεν $1 + 3 + 5 = 1^3 + 2^3 = 3^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρίτου γνώμονος εἶναι $4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετάρτου γνώμονος εἶναι $5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πέμπτου γνώμονος εἶναι $6 \,.\, 1 + 5 \,.\, 1 = 11$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων γνωμόνων (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου) εἶναι $7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$.

Ὁ κύβος τῆς μονάδος, ὁ ἐκφραζόμενος διὰ τοῦ τετραγώνου Α σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων πρώτου καὶ δευτέρου, σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τρίτου καὶ τετάρτου καὶ πέμπτου δίδει $1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$.

Ἐμβαδὸν τοῦ ἕκτου γνώμονος $7 \,.\, 1 + 6 \,.\, 1 = 13$
Ἐμβαδὸν τοῦ ἑβδόμου γνώμονος $8 \,.\, 1 + 7 \,.\, 1 = 15$
Ἐμβαδὸν τοῦ ὀγδόου γνώμονος $9 \,.\, 1 + 8 \,.\, 1 = 17$
Ἐμβαδὸν τοῦ ἐνάτου γνώμονος $10 \,.\, 1 + 9 \,.\, 1 = 19$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων γνωμόνων (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3 = 8^2$. Καὶ τὸ συνολικὸν ἄθροισμα ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου Α $(= 1^3)$ καὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν γνωμόνων (πρώτου, δευτέρου), (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου), (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

Τὸ πρῶτον μερικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3, 2^3, 3^3, \ldots \nu^3$ εἶναι $1^3 = 1^2$

Τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3 + 2^3 = 3^2$

Τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$

Τὸ τέταρτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$... καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 6, 10... εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, εἶναι τὰ ἀπὸ μονάδος διαδοχικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ κανών, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ μονάδος ν κύβων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ νυοστὸς τρίγωνος ἀριθμὸς εἰς τὸ τετράγωνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τρίγωνος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + \nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$.
Ἡ εὕρεσις τοῦ τύπου ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

21. Εἰς τὴν Παλατίνην Ἀνθολογίαν (14) ὑπάρχουν ἀρκετὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὰ περισσότερα δημοσιεύονται καὶ εἰς τὸν Β' τόμον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἔκδ. P. Tannery, Λειψία 1894, ὡς καὶ εἰς τὴν ἡμετέραν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Ἀθῆναι 1963, σελ. 382, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων. Εἰς τὸ τέλος ὅμως τῆς ἐκδόσεως τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου παρατίθενται μερικὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Νικομάχου οὔτε περιέχονται εἰς τὴν Παλατίνην Ἀνθολογίαν. Τὰ τρία ἐκ τούτων τὰ ὑπογράφει ὁ (μοναχὸς) Ἰσαάκ. Τὰ ἄλλα τρία δὲν φέρουν ὑπογραφήν. Τὰ τρία πρῶτα ἀσχολοῦνται μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $1 + 2 + 3 + \ldots + \nu$. Τὸ τέταρτον ἀφορᾷ εἰς τὸν τρόπον διαχωρισμοῦ δοθέντων ἀριθμῶν, τὸ πέμπτον εἶναι λίαν ἐνδιαφέρον καὶ προέρχεται ἐξ ἐφαρμογῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ καὶ τὸ ἕκτον εἶναι σύστημα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

Κατωτέρω παραθέτομεν καὶ τὰ ἓξ ταῦτα προβλήματα.

1. Δοθέντων ἀπὸ μονάδος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν $1 + 2 + 3 + \ldots + \nu$ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμά των.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + + 7 + 8 + 9$, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν θὰ εἶναι ἢ ἄρτιον ἢ περιττόν. Ἔστω πρῶτον περιττόν. Εἶναι φανερὸν ὅτι $1 + 9 = 2 \,.\, 5$, καὶ $2 + 8 = 2.5$ καὶ ἑξῆς. Ὅσον ἄρα εἶναι τὸ πλῆθος ὅλων, τόσας φορὰς ὁ 5 εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων. Εἶναι ἄρα ὡς $9 : 1 = \Sigma : 5$ (ὅταν κληθῇ τὸ ἄθροισμα Σ), ἢ $9 \,.\, 5 = 1 \,.\, \Sigma$. Ἂς ληφθῇ ὁ ἑπόμενος τοῦ 9 ἀριθμὸς ὁ 10. Εἶναι φανερὸν ὅτι $10 = 2 \,.\, 5 = 1 + 9$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $9 \,.\, 5 = \Sigma$, ἐὰν ἄρα, ὁ 9 πολλαπλασιάσῃ τὸν 10 καὶ δώσῃ τινά, τὸ γινόμενον αὐτὸ θὰ εἶναι $2.\Sigma$. Ἐὰν λοιπὸν δοθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ὡς ἀνωτέρω, καὶ ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸν μέγιστον τῶν δοθέντων ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν κατὰ μονάδα μεγαλύτερον καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ 2. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

2. Δεύτερος τρόπος διὰ τὸ αὐτὸ πρόβλημα. Πολλαπλασιάζω τὸν μεγαλύτερον ὅρον τῆς δοθείσης ἀριθ. προόδου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ τοῦ προκύπτοντος γινομένου λαμβάνω τὸ ἥμισυ. Εἰς τὸ ἥμισυ τοῦτο προσθέτω τὸ ἥμισυ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου τῆς προόδου. Τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῆς προόδου.

ΙΣΑΑΚ

Αὐτὸ τὸ πρόβλημα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον.

Λαμβάνω τὸ ἥμισυ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου καὶ προσθέτω ἓν δεύτερον. Τὸ προκῦπτον ἄθροισμα τὸ πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὸν μεγαλύτερον ὅρον.

ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

3. Ὅταν ἡ διαφορὰ δύο συνεχῶν ὅρων τῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ἔστω $2+4+6+8+10+12$. Λάβε τὰ ἡμίση τῶν ἄκρων ὅρων καὶ πρόσθεσέ τα, ἤτοι $1+$ $+6=7$. Τοῦτο πολλαπλασίασέ το ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων τὸν 6. Θὰ ἔχῃς $7 \,.\, 6=42$. Πάλιν ἔστω ἡ πρόοδος $1+4+7+10+13+16+19$. Θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{2}+\frac{19}{2}=10$, καὶ $10 \,.\, 7=70$

ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

4. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 1, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 9 τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 40. Λέγουν, ὅτι ὁ βασιλεὺς Λέων τοὺς ἔδωσε καὶ εἶπε νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο ὁμάδας ἀπὸ πέντε ἀριθμοὺς ἑκάστη καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἑκάστης ὁμάδος νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τῆς ἄλλης (τὸ ἐξαγόμενον καθ' οἱανδήποτε πρᾶξιν, παρ. χάριν πρόσθεσιν καὶ πολ/σμόν).

Χωρίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς:

$5 \cdot (1+1+3+7) = 3 \cdot (1+5+5+9)$ ἤτοι ἐκ τῶν πέντε ἀριθμῶν τοῦ πρώτου μέλους λαμβάνομεν $5 \cdot 12 = 60$ καὶ ἐκ τῶν πέντε ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου μέλους λαμβάνομεν πάλιν $3 \cdot 20 = 60$. (Ἡ παράστασις τοῦ Νικομάχου εἶναι $\varepsilon^{-\iota\varsigma}$, α,α,γ,ζ′ — $\gamma^{\iota\varsigma-}$, α, ε, ε, θ. Τὸ πρῶτον ις σημαίνει πεντάκις, τὸ δεύτερον ις σημαίνει τρὶς καὶ ἡ παῦλα τὸ ἴσον. Τὰ σύμβολα διὰ τὸ ἴσον, τὸ σύν, καὶ τὸ πλὴν (=, +, —) ἀνεκαλύφθησαν περὶ τὸ 1450).

5. Μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται εὐφυῶς ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του.

Ἐάν τις ἔχῃ εἰς τὸν νοῦν του ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ 7 μέχρι τοῦ 105 εἶναι δυνατὸν νὰ τὸν εὕρωμεν διὰ τῆς ἑξῆς μεθόδου. Λέγομεν εἰς τὸν ἔχοντα εἰς τὸν νοῦν του τὸν ἀριθμὸν νὰ μᾶς εἴπῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διὰ 3. Κατόπιν νὰ μᾶς εἴπῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ 5. Καὶ τέλος νὰ μᾶς εἴπῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ 7. Ἡμεῖς πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον ἐπὶ 70, τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ἐπὶ 21 καὶ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ἐπὶ 15. Κατόπιν προσθέτομεν τὰ ληφθέντα τρία γινόμενα καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ 105. Τὸ λαμβανόμενον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του. Ἐὰν ὑπόλοιπόν τι εἶναι 0 δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Παραδείγματος χάριν. Ἔστω ὅτι ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του τὸν ἀριθμὸν 28. Ὁ 28 διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον

1. Ὁ 28 διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 3 καὶ ὁ 28 διὰ 7 δίδει ὑπόλοιπον 0. Κατὰ τ' ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν 1 x 70 = = 70, 3 x 21 = 63 καὶ 0 x 15 = 0. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων γινομένων εἶναι 70 + 63 + 0 = 133. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 133 : 105 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 28».

(Παρατηρήσεις. 1 Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γινομένων εἶναι μικρότερον τοῦ 105 τότε τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. 2) Ὁ ἀριθμὸς 105 εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7, οἵτινες λαμβάνονται διαδοχικῶς ὡς διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του. Ὁ ἀριθμὸς 70 ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλ/ζεται τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον εἶναι = 5 . 7 . 2. Ὁ ἀριθμὸς 21 ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλ/ζεται τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον εἶναι = 3 . 7. Καὶ ὁ ἀριθμὸς 15 ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλ/ζεται τὸ τρίτον ὑπόλοιπον εἶναι = 3 . 5. Διατὶ λαμβάνονται ὡς παράγοντες οἱ ἀριθμοὶ 70, 21, 15 δὲν ἑρμηνεύεται. Ἐνταῦθα ἔχομεν πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως α' βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔλυσαν ὁ Ἐπίτιμος Γεν. Ἐπιθεωρητὴς τῶν Μαθηματικῶν κ. Ἰωάννης Σ. Παπαδᾶτος καὶ ὁ Γυμνασιάρχης κ. Νικόλαος Παυλίδης ἀνεξαρτήτως ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον· ἐπίσης τὸ ἔλυσεν ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Ἁμβούργου κ. Helmut Hasse).

6. Ἀποθανών τις ἀφῆκεν 6 παιδιὰ ἤτοι 3 ἄρρενα καὶ 3 θήλεα καὶ ὥρισεν ὅτι ἐκ τῶν χρυσῶν νομισμάτων, τὰ ὁποῖα εἶχεν εἰς τὸ κιβώτιόν του, ὁ πρῶτος, ἀφοῦ ῥίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὅσα νομίσματα εἶναι ἐντὸς αὐτοῦ, νὰ λάβῃ κατόπιν 250. Ὁ δεύτερος, ἀφοῦ

῾ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου τόσα, ὅσα νομίσματα ἔμειναν εἰς τὸ κιβώτιον, νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 250 καὶ ὁ τρίτος, ἀφοῦ ῾ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου τόσα, ὅσα νομίσματα ἔμειναν, νὰ λάβῃ 250. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν θυγατέρων, ἀφοῦ ῾ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου, τόσα ὅσα νομίσματα ἔμειναν νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 125. Ἡ δευτέρα ἐκ τῶν θυγατέρων, ἀφοῦ ῾ρίψῃ εἰς τὸ κιβώτιον τόσα νομίσματα ὅσα ἔμειναν, νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 125. Καὶ ἡ τρίτη ὁμοίως νὰ ῾ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου τόσα νομίσματα, ὅσα ἔμειναν καὶ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 125, ὥστε νὰ μὴ μείνῃ τίποτε ἐντὸς τοῦ κιβωτίου. Ἀπ. Τὰ νομίσματα ἦσαν $252 + 1/3 + 1/12 + 1/192$.
(Σημείωσις. Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τοῦ προβλήματος εἶναι :

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi - 250 &= x \\ x + x - 250 &= y \\ \psi + \psi - 250 &= \omega \\ \omega + \omega - 125 &= \lambda \\ \lambda + \lambda - 125 &= \mu \\ \mu + \mu - 125 &= 0 \end{aligned}$$

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΥΠΟ ΔΙΩΓΜΟΝ !

22. Κατὰ τὸ τέλος περίπου τοῦ Γ′ μ.Χ. αἰῶνος τὰ μαθηματικὰ καὶ οἱ μαθηματικοὶ ὑπέστησαν μεγάλους διωγμούς. Τοῦτο προῆλθεν ἀπὸ τὰς ὑπερβολὰς τῆς ἀστρολογίας καὶ τῶν ἀστρολόγων. Ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης ἀκόμη ἐποχῆς εἶχε δημιουργηθῆ μία τάξις ἐπαγγελματιῶν ἀστρολόγων, οἱ ὁποῖοι διὰ διαφόρων παρατηρήσεων ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν ἄστρων, προέλεγον τὸ μέλλον τῶν ἀνθρώπων. Αἱ προβλέψεις αὐταὶ εἶχον ἐπιφέρει ἀναστάτωσιν εἰς τὰς ἰσχυούσας θρησκευτικὰς δοξασίας τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου ἰδίως αἰῶνος μ.Χ. Ἀποτέλεσμα τῆς ἀναστατώσεως αὐτῆς ἦτο νὰ ἐπέλθῃ ῥῆξις μεταξὺ τῶν ἐχόντων ἀντιθέτους θρησκευτικὰς πεποιθήσεις καὶ νὰ σημειωθοῦν πολλὰ ἔκτροπα. Πρὸς διόρθωσιν τοῦ κακοῦ οἱ αὐτοκράτορες τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἠναγκάσθησαν νὰ ἐκδώσουν διαταγάς, αἱ ὁποῖαι ἀπηγόρευον τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν, ἰδίως ὅμως τῆς ἀριθμητικῆς, τὴν ὁποίαν ἐξελάμβανον, ὡς ὑπόβαθρον τῆς ἀστρολογίας. Ἰδοὺ μερικὰ δείγματα τῶν σχετικῶν διαταγῶν:

«1). Κῶδιξ Θεοδοσιανὸς (Οὐαλεντινιανοῦ καὶ Οὐάλεντος), IX, 16, 8. Ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Μόδιστον Ὕπαρχον.

Ἂς παύσῃ ἡ πραγματεία τῶν μαθηματικῶν. Διότι ἐάν τις δημοσίᾳ ἢ κατ' ἰδίαν, καθ' ἡμέραν ἢ νύκτωρ συλληφθῇ ἀναστρεφόμενος ἐν τῇ ἀπηγορευμένῃ πλάνῃ, ἀμφότεροι ἂς πληγοῦν διὰ κεφαλικῆς ποινῆς. Διότι δὲν εἶναι διάφορον ἁμάρτημα τὸ διδάσκεσθαι κεκωλυμένα ἢ τὸ διδάσκειν.

2) Αὐτοκράτορες Ὀνώριος καὶ Θεοδόσιος πρὸς τὸν Καικιλιανὸν Ὕπαρχον.

Οἱ μαθηματικοί, ἐὰν μὴ ὦσιν ἕτοιμοι, καυθέντων τῶν κωδίκων τῆς ἰδίας πλάνης ὑπὸ τὰ ὄμματα τῶν Ἐπισκόπων, νὰ δώσουν πίστιν εἰς τὴν λατρείαν τῆς καθολικῆς πίστεως, ὅτι δὲν θὰ ἐπανέλθουν εἰς τὴν παλαιὰν πλάνην, οὐ μόνον ἀπὸ τῆς πόλεως Ῥώμης, ἀλλὰ καὶ ἐκ πασῶν τῶν πόλεων ἀποφασίζομεν νὰ ἐκδιωχθοῦν. Ἐὰν δὲ δὲν κάμνουν τοῦτο καὶ παρὰ τὴν σωτηρίαν ἀπόφασιν τῆς ἡμετέρας ἐπιεικείας, συλληφθοῦν ἐν ταῖς πόλεσιν· εἴτε παρεισάγουν τὰ μυστικὰ τῆς πλάνης, θὰ τύχωσι τῆς ποινῆς τῆς ἐξορίας.

3) Κῶδιξ Ἰουστινιανὸς IX, 18, 2.

Τὴν γεωμετρικὴν τέχνην ἐκμανθάνειν καὶ ἀσκεῖν δημοσίᾳ, ὠφελεῖ. Ἡ μαθηματικὴ ὅμως τέχνη (σημ. ἐννοεῖ τὴν ἀριθμητικήν), ἀξιόποινος οὖσα ἀπαγορεύεται, (ἔτος 294).

«Καὶ ἓν σχόλιον : Νόμος. Ταύτῃ τοι καὶ ὁ νόμος φησίν· ἡ μὲν γεωμετρία δημοσίᾳ διδάσκεται· ἡ δὲ μαθηματικὴ κατακρίνεται ὡς ἀπηγορευμένη. (Σύνταγμα Κανόνων. Ἐκδοθὲν ὑπὸ Γ. Ράλλη καὶ Μ. Ποτλῆ, Τόμος 6)».

ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

23. Ὁ Κρητικὸς πολιτισμός, ὁ Μυκηναϊκὸς πολιτισμός, ἡ δημιουργία τῆς γλώσσης τῆς Ὀδυσσείας καὶ τῆς Ἰλιάδος τοῦ Ὁμήρου δὲν ἔγιναν εἰς χρονικὸν διάστημα ὀλίγων ἑκατοντάδων ἐτῶν, ἀλλὰ εἰς διάστημα χιλιάδων ἐτῶν. Ὅλα τὰ ὑπάρχοντα στοιχεῖα συνηγοροῦν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Δευκαλίωνος, περὶ τὸ ἔτος 9600 π.Χ., ὁπότε ἐβυθίσθη ἡ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν εὑρισκομένη μεγάλη νῆσος Ἀτλαντίς, ὑπῆρχεν εἰς τὴν Ἑλλάδα μεγάλος πολιτισμὸς (Κεφ. 1).

Ὁ πολιτισμὸς δὲ αὐτὸς μετεδόθη εἰς τὴν Ἐγγὺς Ἀνατολὴν καὶ τὴν Αἴγυπτον, ὡς ἀφηγεῖται ὁ ἱερεὺς εἰς τὸν Σόλωνα (Τίμαιος 23–26).

῾Ο ῾Ηρόδοτος σχετικῶς πρὸς τὴν γεωμετρίαν (Β 109), γράφει τὰ ἑξῆς· «δοκέει δέ μοι ἐντεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τὴν ῾Ελλάδα ἐπανελθεῖν», δηλ.

Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

νομίζω, ὅτι ἀπὸ ἐδῶ (τὴν Αἴγυπτον), ἡ γεωμετρία, ἀφοῦ εὑρέθη, ἐπανῆλθεν εἰς τὴν ῾Ελλάδα. ῾Η φράσις αὐτὴ ἡρμηνεύθη ὑπὸ πολλῶν, ὅτι ἡ γεωμετρία ἀνακαλυφθεῖσα εἰς τὴν Αἴγυπτον, μετεφέρθη εἰς τὴν Ἑλλάδα. Ἡ ἑρμηνεία αὕτη ἔδωκεν ἀφορμήν, μεταξὺ ἄλλων, ὥστε νὰ γραφοῦν πολλαὶ ἐπικρίσεις κατὰ τοῦ Ἡροδότου, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ἡμέτεραι. Νεώτεραι ὅμως ἔρευναι ἀνατρέπουν τὴν ἀνωτέρω ἑρμηνείαν, στηριζόμεναι εἰς τὴν σημασίαν τῆς λέξεως ἐπανελθεῖν. Κατὰ ταύτην, ὑποστηρίζεται ὅτι διὰ τῆς λέξεως ἐπανελθεῖν νοεῖται, ὅτι ἡ γεωμετρία εἰσήχθη εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐκ τῆς Ἑλλάδος, συμφώνως πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα ἀνακοινωθέντα καὶ μετὰ τὴν ἐν Ἑλλάδι καταστροφὴν ἐκ τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος ἐπανῆλθεν αὕτη ἐκ τῆς Αἰγύπτου εἰς τὴν Ἑλλάδα. Ἐννοεῖται ἐνταῦθα ὅτι πρόκειται πάντοτε περὶ τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας καὶ ὄχι τῆς θεωρητικῆς, τῆς ἐπιστημονικῆς, τῆς ὁποίας θεμελιωτὴς εἶναι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος.

Ἂς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν ἐδῶ, ὅτι ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος, δηλ. 9600 ἔτη π.Χ. περίπου, μέχρι τοῦ 1500 π.Χ., δὲν ἔχομεν πληροφορίας περὶ πολιτιστικῶν ἐπιτευγμάτων εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον ἐκτὸς τῶν τῆς νεολιθικῆς ἐποχῆς ἀγγείων. Ἀπὸ τοῦ 1500 π.Χ. μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Τροίας (1184 π.Χ.) ἔχομεν ποικίλας πληροφορίας διὰ τὸν Κρητικὸν καὶ τὸν Μυκηναϊκὸν πολιτισμόν, διὰ τὴν Ἀργοναυτικὴν ἐκστρατείαν καὶ διὰ τοὺς Ὀρφικούς.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ὅμως τῆς ἁλώσεως τῆς Τροίας μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ, ἤτοι διὰ χρονικὸν διάστημα 600 περίπου ἐτῶν τὰ μόνα γνωστὰ καὶ σημαντικὰ πολιτιστικὰ ἐπιτεύγματα εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον εἶναι τὰ ποιήματα τοῦ Ὁμήρου καὶ τοῦ Ἡσιόδου, ἡ δημιουργία τῶν ὁποίων τοποθετεῖται κατ' ἄλλους μὲν εἰς τὰ ἔτη 1150 – 1000 π.Χ., κατ' ἄλλους δὲ εἰς τὸν ἔνατον ἢ ὄγδοον αἰῶνα π.Χ.

Διὰ τὰ περίφημα ἐρείπια τῆς Τίρυνθος καὶ τῶν Κυκλωπείων τειχῶν τῆς Ἄσκρης τῆς Βοιωτίας, τῆς πατρίδος τοῦ Ἡσιόδου, καὶ τῶν Πλαταιῶν, ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη, ὅτι ταῦτα ἀνήκουν εἰς πολὺ παλαιοτέραν τῆς Μινωϊκῆς καὶ Μυκηναϊκῆς ἐποχήν.

Ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος ὁ ἀρχαιότερος πολιτισμὸς ἐπὶ τῆς γῆς καὶ συνεπῶς καὶ ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας ἐδημιουργήθη εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον πολὺ πρὸ τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος.

Μὲ τὴν ἐξέλιξιν τοῦ πολιτισμοῦ εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον ἐδημιουργήθη ἡ ἔννοια τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Τοῦτο, ὑποτίθεται, ὅτι ἔγινε παραλλήλως πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης. Ἀντικείμενα τῆς καθημερινῆς ζωῆς ἔδοσαν τὸ ὄνομά των εἰς τὰ πρῶτα γεωμετρικὰ σχήματα, ὡς λίαν προσφυῶς τονίζει ὁ σοφὸς Γάλλος καθηγητὴς Charles Mugler εἰς τὸ περίφημον λεξικόν του τῶν γεωμετρικῶν ὅρων τῶν Ἑλλήνων (Charles Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris 1958, σελ. 5 – 32).

Η ΕΠΙΝΟΗΣΙΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΥΠΟ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

24. Ἀφ' ἧς ἐποχῆς ἐπενοήθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἡ ἀπόδειξις εἰς τὰς μαθηματικὰς προτάσεις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μίαν τῶν ὑψίστων ἐπινοήσεων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος καὶ τὸ θεμέλιον πάσης ἐπιστήμης, ἀπὸ τότε ἤρχισεν ἡ δημιουργία τῶν ἐπιστημῶν ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων, ὑπὸ τὴν σημερινὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου Ἐπιστήμη. Τὰ χρονικὰ ὅρια τῆς ἐποχῆς αὐτῆς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν, διότι δὲν ὑπάρχουν τὰ πρὸς τοῦτο γραπτὰ στοιχεῖα. Ὁ Πρόκλος (410–485 μ.Χ.), ὁ ὁποῖος ἀντλεῖ τὰς πληροφορίας του παρὰ τοῦ ἱστορικοῦ τῶν Μαθηματικῶν, τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, Εὐδήμου τοῦ Ροδίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον δὲν διεσώθη, ἀναφέρει ὡς πρῶτον χρησιμοποιήσαντα ἀπόδειξιν εἰς μαθηματικὰς προτάσεις τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον (640–546 π.Χ.).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Θαλῆς θεωρεῖται ὁ ἀρχαιότερος τῶν σοφῶν τῆς Ἑλλάδος ὁ χρησιμοποιήσας ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἀποδίδεται εἰς αὐτὸν ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως. Συναφῶς ὁ μεγαλύτερος τῶν Γερμανῶν φιλοσόφων Ἐμμανουὴλ Κάντιος (Immanuel KANT, 1724–1804) ἐκθειάζει ἰδιαιτέρως τὸ μέγα τοῦτο ἐπίτευγμα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, λέγων, ὅτι ὅπως καὶ ἂν ὀνομάζεται ὁ ἐπινοήσας τὴν ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἴτε Θαλῆς, εἴτε ἄλλως πως, οὗτος ἔσχε μίαν ἀναλαμπὴν (Πρόλογος εἰς τὴν πραγματείαν του, Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου (Kant, Kritik der reinen Vernunft, Vorwort).

Καὶ ἄλλοι ἐκ τῶν παλαιῶν πολιτισμένων λαῶν εἶχον ἀποκτήσει ἐκ τῆς μακραίωνος πείρας γνώσεις γεωμετρικὰς καὶ ἀριθμητικάς, ὅπως π.χ. οἱ Σουμέριοι, οἱ Βαβυλώνιοι, οἱ Αἰγύπτιοι, οἱ Ἰνδοί, οἱ Κινέζοι. Αἱ ἀρχαιότεραι ἐμπειρικαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις τῶν λαῶν αὐτῶν (ἰδίως τῶν Σουμερίων) ἀνάγονται περὶ τὴν 4 – 3ην χιλιετηρίδα π.Χ. Οὐδεὶς ὅμως ἐκ τῶν λαῶν αὐτῶν εἶχε τὴν ἀγαθὴν τύχην τῆς ἐπινοήσεως τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά, πλὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, οἱ ὁποῖοι καὶ μόνοι ἐδημιούργησαν τὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν καὶ τὴν ἐπιστήμην τῆς Λογικῆς κατορθώσαντες δι' αὐτῶν ν' ἀνοίξουν τοὺς ὀφθαλμοὺς τῶν ἀνθρώπων εἰς πᾶσαν πνευματικὴν δραστηριότητα καὶ πᾶσαν φιλοσοφικὴν καὶ θεολογικὴν ἀναζήτησιν. Ἡ ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν διὰ τοὺς Ἕλληνας δὲν εἶχε καμμίαν σχέσιν μὲ τὰς Ἐπιχειρησιακὰς Ἐρεύνας καὶ τὸν Κερδῷον Ἑρμῆν ἀλλὰ εἶχε σκοπὸν τὴν καλλιέργειαν τοῦ νοῦ καὶ τῆς ψυχῆς τοῦ ἀνθρώπου, διὰ τὴν βαθυτέραν κατανόησιν τοῦ Θείου. Τοῦτο συνάγεται πλὴν ἄλλων, καὶ ἐκ τῶν διασωθεισῶν πληροφοριῶν περὶ τῆς λειτουργίας τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου (580–490 π.Χ. περίπου) καὶ ἐκ τῶν εἰς τὸν Πλάτωνα ἀποδιδομένων ῥήσεων «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην». (Τζέτζης, Χιλιάδες VIII 973) καὶ «πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν» (Πλούταρχος, Συμποσιακὰ Προβλήματα VIII Β') (718). Εἰς τὸν προηγούμενον Διάλογον τοῦ Πλουτάρχου ὁ μετέχων τῆς συζητήσεως Τυνδάρης προσθέτει, ὅτι «κατὰ τὸν Πυθαγόρειον Φιλόλαον, ἡ γεωμετρία ἀρχὴ καὶ μητρόπολις οὖσα τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν ἐπαναφέρει καὶ καθοδηγεῖ τὴν διάνοιαν ὡς ἐκκαθαριζομένην καὶ διαχωριζομένην ἡσύχως ἀπὸ τὰ αἰσθητὰ πράγματα. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καὶ αὐτὸς ὁ Πλάτων κατηγόρησε τοὺς περὶ τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Ἀρχύταν καὶ τὸν Μέναιχμον, οἱ ὁποῖοι προσεπάθησαν νὰ ἀναγάγουν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου (τοῦ δηλίου προβλήματος) εἰς λύσιν δι' ὀργανικῶν καὶ μηχανικῶν κατασκευῶν, προσπαθοῦντες δηλαδὴ νὰ λάβουν δι' ἀσυμμέτρου σχέσεως δύο μέσας ἀναλόγους, ὡς ἐὰν τοῦτο ἦτο ἐπιτρεπτόν, διότι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ τῆς λύσεως χάνεται καὶ καταστρέφεται τὸ ἀγαθὸν τῆς γεωμετρίας, ἡ ὁποία παλινδρομεῖ πάλιν πρὸς τὰ αἰσθητὰ καὶ δὲν φέρεται ἄνω (πρὸς τὸν θεὸν) οὔτε κατανοεῖ τὰς αἰωνίους καὶ ἀσωμάτους εἰκόνας, εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχων ὁ Θεὸς εἶναι πάντοτε θεός».

Ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ὑπῆρξε βέβαια μία ἀναλαμπὴ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, αὕτη ὅμως δὲν προῆλθεν αὐτομάτως. Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα εἰς τὴν ἀνακάλυψιν, ὅτι διὰ τὴν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας μιᾶς γεωμετρικῆς προτάσεως εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπόδειξις αὐτῆς, ἔπρεπε νὰ ἔχουν προηγηθῆ ἄλλαι γνώσεις ἐκ τῶν ὁποίων νὰ προκύπτῃ ὡς λογικὴ συνέπεια ἡ ἀνάγκη τῆς ἀποδείξεως. Αἱ γνώσεις αὗται εἶναι πρῶτον ὁ καθορισμὸς τοῦ γεωμετρικοῦ (καὶ γενικῶς τοῦ μαθηματικοῦ) ἀντικειμένου καὶ δεύτερον ὁ καθορισμὸς τῶν ἀξιωμάτων. Ὑπὸ τὸν ὅρον ἀξιώματα νοοῦνται ἀλήθειαι ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί. Καθίσταται φανερόν, ὅτι πρὸς τούτοις πρέπει νὰ εἶναι γνωσταὶ αἱ σπουδαιότεραι ἀρχαὶ τῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ὀνομάζεται Λογική. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ (ἀκμὴ 600 π.Χ.), ὁπότε μαρτυροῦνται ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπ' αὐτοῦ, ἔπρεπε νὰ εἶναι γνωστοὶ οἱ σπουδαιότεροι νόμοι τῆς Λογικῆς καὶ τὰ κυριώτερα μαθηματικὰ ἀξιώματα, διότι ἄνευ γνώσεως αὐτῶν εἶναι ἀδύνατον νὰ ζητηθῇ καὶ νὰ γίνῃ ἀπόδειξις μαθηματικῆς προτάσεως.

Ὅθεν τὸ ὑποστηριζόμενον, ὅτι ὑπὸ τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert, 1862–1943) ἱδρύθη περὶ τὸ 1900, ἤτοι 2500 ἔτη ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ, ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος τῆς γεωμετρίας καὶ τῶν μαθηματικῶν δικαίως προκαλεῖ εἰς τοὺς ἐπαΐοντας τὴν θυμηδίαν.

Διὰ ν' ἀποδείξῃ ὁ Θαλῆς, ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι χρησιμοποιεῖ τὸ ἀξίωμα, τὸ ὁποῖον ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ διὰ τὴν γεωμετρίαν, ὅτι «ἐὰν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρέσωμεν ἴσα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα». Θεωρεῖται λογικόν, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ εἶχεν ἐξαντληθῇ ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῶν Μαθηματικῶν. Τοὐναντίον, καθ' ὅσον εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς γραπτῆς παραδόσεως, αὕτη συνεχίσθη ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας καὶ συνεχίζεται ἀκόμη καὶ ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν ἂν ἐν Ἑλλάδι ἐδημοσιεύθησαν ἢ πρόκειται νὰ δημοσιευθοῦν πορίσματα ἐρευνῶν καὶ ἰδίως τῶν συναφῶν πρὸς τὰς ἀρχὰς τῶν μαθηματικῶν, τοῦ Ἐθνικοῦ Ἱδρύματος Ἐρευνῶν.

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη (384–322 π.Χ.), πᾶσα γνῶσις εἶναι γνῶσις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ σκέψις τοῦ ἀνθρώπου ἀναφέρεται πρωτίστως εἴς τι ἀντικείμενον, δευτερευόντως δὲ δύναται νὰ στραφῇ αὕτη πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἐπιστητὸν δὲν ὑπάρχει ἐπιστήμη. Ἡ μὴ ὕπαρξις ἐπιστήμης δὲν ἐμποδίζει νὰ ὑπάρχῃ ἐπιστητόν, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης. Ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου π.χ. ἀποτελεῖ ἐπιστητόν. Τοῦ ἐπιστητοῦ ὅμως τούτου δὲν ὑπάρχει γνῶσις, δὲν ὑπάρχει ἐπιστήμη. (σημ. Ἐννοεῖ, ὅτι δὲν ὑπάρχει γνῶσις τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου διὰ κανόνος καὶ διαβήτου).

Ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία: 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν, δηλαδὴ τὰ ἀξιώματα, καὶ 3) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον διὰ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ ἀφ' ἑαυτῶν φανερὰς προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα.

Τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ προχωρήσουν πέρα τῶν ἀναποδείκτων ἀρχικῶν προτάσεων. Τὴν ἔρευναν τῶν προτάσεων τούτων ἐπιτελεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ πρώτη φιλοσοφία, ἡ λεγομένη ὑπὸ τῶν νεωτέρων γνωσιολογία ἢ γνωσιοθεωρία. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες ἔχουν μὲν ὕπαρξιν ὄχι ὅμως καὶ αὐθυπαρξίαν. Αὗται ὑπάρχουν ὡς σταθερὰ χαρακτηριστικὰ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἄνευ τῶν ὁποίων θὰ ἦσαν ἀνύπαρκτοι. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἀντίθεσιν τοῦ Ἀριστοτέλους πρὸς τὴν αὐθυπαρξίαν τῶν ἰδεῶν τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ ἀντικείμενον ἐρεύνης τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τρισδιαστάτου χώρου, ὅπως οὗτος ὑποπίπτει εἰς τὰς αἰσθήσεις μας, ὅπως γίνεται ἀντιληπτὸς παρ' ἡμῶν. Ὁ χῶρος, ὡς ἐννοοῦμεν τοῦτον σήμερον, ἐκαλεῖτο κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τόπος.

Ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης δὲν παραδέχεται τὴν ὕπαρξιν τοῦ χώρου, λέγων, ὅτι χῶρος δὲν ὑπάρχει, διότι ἐὰν ὑπῆρχε ἔπρεπε νὰ ἦτο εἰς κάποιον χῶρον, αὐτὸς εἰς κάποιον ἄλλον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. (Ἀριστοτέλης Φυσ. Δ 3. 210 b 22).

Τὸ πρόβλημα τί εἶναι χῶρος παραμένει καὶ σήμερον ἄλυτον, ὡς εὐστόχως παρατηρεῖ εἰς τοὺς δύο τελευταίους στίχους τοῦ βιβλίου του Τὸ πρόβλημα τοῦ χώρου, ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Bar – Ilan τοῦ Ἰσραήλ, Μὰξ Γιάμμερ (Max Jammer, Das Problem des Raumes, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1960, σελὶς 220, μετάφρασις *ἐκ τοῦ ἀμερικανικοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον Concept of Space, Harvard University Press, Gambridge U.S.A.). Ὁ χῶρος ὅμως ὑπάρχει, ζῶμεν ἐντὸς αὐτοῦ, ἀσχέτως ἂν δὲν δυνάμεθα νὰ τὸν ὁρίσωμεν καὶ περὶ αὐτὸν ἀσχολεῖται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία.*

Ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία χωρὶς νὰ κατονομάζῃ τὸν χῶρον ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ χρησιμοποιοῦσα ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἔννοιαν «σημεῖον» τὸ ὁποῖον καθορίζει ὡς ἑξῆς : «σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθὲν» (σημεῖον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει μέρος).

Ἀμέσως γεννᾶται τὸ ἐρώτημα τί εἶναι *μέρος*, δηλαδὴ διάστασις, τὸ ὁποῖον μένει ἀναπάντητον. Ἡ οὕτω πως ὁριζομένη ἔννοια *σημεῖον* εἶναι μία ἀρχὴ πέρα τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁ Πλάτων σημειώνει, ὅτι ἡ γεωμετρία, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῆς μὴ ἱκανοποιητικῶς ὁριζομένης ἐννοίας *σημεῖον*, εἶναι ἐπιστήμη σχετικὴ καὶ ὄχι ἀπόλυτος ὡς εἶναι ἡ φιλοσοφία, ἡ ὁποία ἐρευνᾷ χωρὶς νὰ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ κάμῃ οὐδεμίαν ὑπόθεσιν, γράφων :

(Πολιτεία 533 C). (Διότι, ὅταν μία ἐπιστήμη λαμβάνει ὡς ἀρχὴν κάτι, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει (σημ. τὴν ἔννοιαν *σημεῖον*), τὰ τελικὰ δὲ συμπεράσματα καὶ τὰ ἐνδιάμεσα συναρμολογοῦνται ἐξ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει, ποία ἐπινόησις εἶναι δυνατόν ποτε τὴν τοιαύτην παραδοχὴν νὰ θεωρήσῃ ὡς ἐπιστήμην; Οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος).

Ἡ ἔννοια *σημεῖον* ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία ὑπέστη κριτικὴν ὑπὸ τοῦ ἰατροφιλοσόφου Σέξτου τοῦ Ἐμπειρικοῦ (Ἀλεξάνδρεια 2ος αἰ. μ.Χ.), ὁ ὁποῖος λέγει, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ διχοτομηθῇ ὁ κύκλος. Διότι τὸ κέντρον του, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον ἢ τέμνεται εἰς δύο, κατὰ τὴν διχοτόμησιν παντὸς κύκλου ἢ περιέρχεται εἰς ἓν τῶν ἡμικυκλίων. Ἀλλὰ νὰ διχοτομῆται τὸ κέντρον εἶναι ἀδύνατον· διότι πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι τὸ μὴ ἔχον μέρος (τὸ σημεῖον) διχοτομεῖται; ἐὰν δὲ τὸ κέντρον περιέρχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν ἡμικυκλίων, τὰ ἡμικύκλια γίνονται ἄνισα καὶ ὁ κύκλος δὲν διχοτομεῖται. (Πρὸς Φυσικοὺς Α΄, adv. math. IX 284).

Ἡ ἐπινόησις τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Δημοκρίτου.

Ἡ ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ὡδήγησε τὸν Δημόκριτον εἰς τὴν πρώτην σκέψιν περὶ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ὅπως πληροφορούμεθα ἀπὸ τὸν Πλούταρχον (1079 Ε), ὁ ὁποῖος γράφει : «ἔλα τώρα κύτταξε μὲ ποῖον τρόπον ἀπήντησεν (ὁ Χρύσιππος) πρὸς τὸν Δημόκριτον ἀποροῦντα φυσικῶς καὶ ἐπιτυχῶς : ἐὰν κῶνος ἤθελε τμηθῇ δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τί πρέπει νὰ σκεφθῶμεν διὰ τὸ μέγεθος τῶν τεμνομένων ἐπιφανειῶν, εἶναι αὗται ἴσαι ἢ ἄνισοι; Διότι ἐὰν μὲν εἶναι ἄνισοι θὰ ἀνασχηματήσουν τὸν κῶνον μὲ πολλὰς βαθμίδας, ἐὰν δὲ εἶναι ἴσαι θὰ ἀνασχηματίσουν κύλινδρον, ὅπερ εἶναι ἀτοπώτατον νὰ τὸ δεχθῶμεν διὰ τὸν κῶνον».

Η ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΤΟΥ ΔΑΒΙΔ ΧΙΛΜΠΕΡΤ ΔΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΡΓΗΣΙΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

25. Ἡ προσπάθεια τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert), ὅπως καταργήση τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν καὶ ἱδρύση ἰδικήν του γεωμετρίαν θεωρεῖται ὡς ἀποτυχοῦσα, καίτοι μερικοὶ ἐκ τῶν μαθητῶν του διορθώνουν αὐτὴν ἐκ τῶν σφαλμάτων, ὡς λέγουν εἰς ἑκάστην ἔκδοσίν της.

Ὁ Γερμανικὸς τίτλος τοῦ βιβλίου τοῦ Χίλμπερτ: Grundlagen der Geometrie (Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας). Κατὰ τὸ ἔτος 1965 ἔγινεν ἡ ὀγδόη ἔκδοσις τοῦ βιβλίου ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Χίλμπερτ Paul Bernays, καθηγητοῦ τοῦ Πολυτεχνείου τῆς Ζυρίχης, χωρὶς νὰ σημειοῦται πότε ἔγινεν ἡ πρώτη ἔκδοσις. Ἐκ κριτικῆς ὅμως δημοσιευομένης τῷ 1903 τοποθετοῦμεν τὴν πρώτην ἔκδοσιν περὶ τὸ 1900. Αἱ ἑπτὰ προηγούμεναι ἐκδόσεις ἔγιναν ζῶντος τοῦ Χίλμπερτ, ὅστις ἐπέφερεν ἑκάστοτε διορθώσεις τῇ ὑποδείξει τῶν μαθητῶν του, ὡς γράφει ὁ ἴδιος. Ὁ τίτλος τῆς ὀγδόης ἐκδόσεως εἶναι D. Hilbert Grundlagen der Geometrie, mit Revisionen und Ergänzungen, von Paul Bernays, B. G. Teubner, Stuttgart 1956 (Δ. Χίλμπερτ Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας, μετ' ἀναθεωρήσεων καὶ συμπληρώσεων ὑπὸ Paul Bernays, B. G. Τόιμπνερ, Στουτγάρτη 1956). Τὸ βιβλίον ἀρχίζει ὡς ἑξῆς:

« § 1. Τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας καὶ αἱ πέντε ὁμάδες ἀξιωμάτων. Δήλωσις (= Erklärung) (σημ. ἀποφεύγει τὴν λέξιν Definition = ὁρισμός, αὐτὴν ὅμως ἐννοεῖ). Νοοῦμεν τρία διάφορα συστήματα πραγμάτων (ἀντικειμένων) : Τὰ πράγματα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ A, B, C... Τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ a, b, c... Τὰ πράγματα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ α, β, γ... Τὰ σημεῖα τὰ ὀνομάζομεν ἐπίσης, τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας τὰ ὀνομάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, καὶ τὰ σημεῖα τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὀνομάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ στοιχεῖα τοῦ χώρου».

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ Δαβὶδ Χίλμπερτ ἐν ᾧ φιλοδοξεῖ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν διὰ γεωμετρίας ἰδικῆς του κατασκευῆς, κατὰ κρυπτοφανῆ τρόπον κάμνει χρῆσιν καὶ ἀοριστολογικὴν κατάχρησιν τῶν ἑλληνικῶν γεωμετρικῶν ὅρων. Πρὸς τούτοις παρουσιάζεται, ὅτι ἐκλαμβάνει τὸν χῶρον ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ καὶ τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου! !

Διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ἡ σύγχυσις, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς :

Εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν τῆς γεωμετρίας αὐτῆς τίθεται ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ ὡς ἀξίωμα ἡ πρότασις:

«Δίδονται τέσσαρα τυχόντα σημεῖα μιᾶς εὐθείας. Τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ παριστῶμεν αὐτὰ μὲ A, B, C, D κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ διὰ τοῦ B παριστώμενον σημεῖον νὰ κεῖται μεταξὺ A καὶ C, καὶ ἐπίσης μεταξὺ τοῦ A καὶ D καὶ ἀκόμη τὸ μὲ C παριστώμενον σημεῖον νὰ κεῖται μεταξὺ A καὶ D καὶ ἐπίσης μεταξὺ B καὶ D».

Εἰς τὴν ὀγδόην ἔκδοσιν τοῦ 1956 ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἐκδότου καὶ μαθητοῦ τοῦ Χίλμπερτ Paul Bernays ὡς 5ον Θεώρημα! (σελ. 6).

Ἐπίσης εἰς τὴν αὐτὴν πρώτην ἔκδοσιν τίθεται ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ ὡς ἀξίωμα ἡ πρότασις:

«Ἐὰν δύο γωνίαι α, β, εἶναι ἴσαι πρὸς τρίτην γωνίαν γ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι». Εἰς τὴν ὀγδόην ἔκδοσιν τοῦ 1956 ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ Paul Bernays ὡς 19ον θεώρημα! (σελὶς 21).

Τὸ ὑποστηριζόμενον ὅτι αἱ μαθηματικαὶ θεωρίαι θεωροῦνται ὡς λογικὰ οἰκοδομήματα ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγκαίας σχέσεως πρὸς τὴν φυσικὴν ἐμπειρίαν δὲν εὐσταθεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ὁ ὁποῖος λέγει:

1) Πᾶσα μάθησις διὰ προγιγνωσκομένων ἢ πάντων ἢ τινῶν ἐστί, καὶ ἡ δι' ἀποδείξεως ἢ δι' ὁρισμῶν. (Μετὰ τὰ Φυσικὰ Α, 992 β 30).
(Πᾶσα μάθησις γίνεται διὰ προγιγνωσκομένων ἢ καθ' ὁλοκληρίαν γνωστῶν ἢ μερικῶς, τόσον ἡ δι' ἀποδείξεως μάθησις, ὅσον καὶ ἡ δι' ὁρισμῶν).

2) Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου παραγίνονται

καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν. ('Αναλυτικὰ Ὕστερα Α. 71 α 1 - 4). (Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα διανοητικὴ μάθησις γίνεται ἐκ προϋπαρχούσης γνώσεως· θεωροῦν δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐπὶ ὅλων τῶν ἐπιστημῶν, διότι καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι διὰ τούτου τοῦ τρόπου ἐπιτυγχάνονται καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων τεχνῶν).

ΑΙ ΛΕΓΟΜΕΝΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΙ

26. Κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα ἐξηγγέλθη, ὅτι ἐκτὸς τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου ἀνεκαλύφθησαν καὶ ἄλλα δύο εἴδη γεωμετριῶν, μὴ Εὐκλειδείων, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἓν εἶδος ὠνομάσθη *ὑπερβολικὴ* γεωμετρία, τὸ δὲ ἄλλο ὠνομάσθη *ἐλλειπτικὴ* γεωμετρία. Τὴν γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου τὴν ὠνόμασαν *παραβολικὴν* γεωμετρίαν. Πρὸς τούτοις ὑπεστηρίζετο, ὅτι ἡ μὲν γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου ἰσχύει διὰ τὰς μικρὰς ἀποστάσεις, ἐνῷ αἱ μὴ Εὐκλείδειοι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα. Προϊόντος τοῦ χρόνου παρετηρήθη, ὅτι ἐνῷ ὁ Εὐκλείδης χρησιμοποιεῖ ὡς ὑπόβαθρον τῆς γεωμετρίας του 14 ἀξιώματα, οἱ ἰσχυριζόμενοι, ὅτι ἀνεκάλυψαν τὰς μὴ Εὐκλειδείους γεωμετρίας, λαμβάνουν 13 ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου, τὰ βαπτίζουν εἰς «ἀπόλυτον γεωμετρίαν» καὶ εἰς αὐτὰ προσθέτουν «ἓν ἀξίωμα περὶ παραλλήλων», διάφορον τοῦ εὐκλειδείου ἀξιώματος. Παρατηρεῖται ὅμως ὑπὸ πολλῶν ὅτι μὲ 13 εὐκλείδεια ἀξιώματα καὶ 1 μὴ εὐκλείδειον, δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ γίνεται λόγος περὶ «μὴ Εὐκλειδείων γεωμετριῶν», ἀλλὰ ὁ ὀρθὸς τίτλος τῶν νέων αὐτῶν ἐπιτευγμάτων πρέπει νὰ εἶναι «Ἀσκήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου».

Ἐπὶ τούτοις τονίζεται τελευταίως ὅτι οἱ κατασκευασταὶ τῶν δορυφόρων καὶ τῶν πυραύλων περιφρονοῦν τελείως τὰς μὴ Εὐκλειδείους γεωμετρίας, τὰς ἰσχυούσας, ὡς λέγεται, διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις, καὶ χρησιμοποιοῦν διὰ τὰς κατασκευάς των μόνον τὴν Εὐκλείδειον γεωμετρίαν!

Ἐνδιαφέρουσα εἶναι καὶ ἡ παρατήρησις, ὅτι κατὰ τὰ τελευταῖα 50 ἔτη ἐδιδάσκετο εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Συνόλων, εἰς ὅλα τὰ Πανεπιστήμια τοῦ κόσμου, ὅτι τὸ μέρος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὅλου (!) πρὸς μεγάλην ἔκπληξιν καὶ καγχασμὸν τοῦ Εὐκλείδου, ὁ ὁποῖος διδάσκει, ὅτι τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους (κοιναὶ ἔννοιαι 8).

Καὶ ναὶ μὲν ὁ Ἡσίοδος γράφει, ὅτι τὸ ἥμισυ εἶναι περισσότερον τοῦ ὅλου, τοῦτο ὅμως ὄχι μὲ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν, ἀλλὰ μὲ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ὁ ἔχων ὀλίγα εἰσοδήματα ἀλλὰ δαπανῶν μὲ σύνεσιν περνάει καλύτερα ἀπὸ τὸν πλούσιον, ἀλλὰ σπάταλον.

«Νήπιοι οὐδὲ ἴσασιν ὅσῳ πλέον ἥμισυ παντός». Ἔργα καὶ ἡμέραι 40. (ἀνόητοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ξεύρουν, πόσον περισσότερον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου).

Ὁ Ἡσίοδος εἶχεν ἀδελφὸν ὀνόματι Πέρσην. Μετὰ τὸν θάνατον τοῦ πατρός των, ἔγινε διανομὴ τῆς κληρονομίας εἰς τοὺς δύο ἀδελφούς. Ὁ Πέρσης ὅμως δὲν ἔμεινεν εὐχαριστημένος καὶ κατέφυγεν εἰς τὰ δικαστήρια. Δικασταὶ ἐν προκειμένῳ ἦσαν οἱ ἄρχοντες τῆς Βοιωτίας, τοὺς ὁποίους ὁ Ἡσίοδος ὀνομάζει βασιλῆας, δωροφάγους. Ἔφαγον δηλ. δῶρα ἀπὸ τὸν Πέρσην καὶ ἐξέδωκαν ἀπόφασιν, διὰ τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς κληρονομίας ἐδίδετο εἰς τὸν Πέρσην.

Τὴν ἀδικίαν αὐτὴν ἀπὸ τοὺς δωροφάγους βασιλεῖς τῆς Βοιωτίας περιγράφει ὁ Ἡσίοδος εἰς τὸ μνημονευθὲν ποίημά του «Ἔργα καὶ Ἡμέραι». Κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ Πέρσης ἦτο σπάταλος καὶ ἐντὸς μικροῦ χρονικοῦ διαστήματος κατεσπατάλησε τὴν κληρονομίαν καὶ ὁ Ἡσίοδος, λαβὼν τὰ ὀλιγώτερα ἐκ τῆς κληρονομίας, ἠναγκάσθη νὰ τρέφη τὸν ἀδελφόν του, ὁ ὁποῖος ἔλαβε τὰ περισσότερα. Ἐὰν ἡ κληρονομία ἀπετελεῖτο ἀπὸ τρία μέρη ὁ Πέρσης ἔλαβε τὰ δύο καὶ ὁ Ἡσίοδος τὸ ἕν. Μετὰ τὴν σπατάλην ὅμως τοῦ Πέρσου, τὸ ἓν μέρος τοῦ Ἡσιόδου ἔτρεφε τὸν Πέρσην τὸν λαβόντα τὰ δύο μέρη. Ὁπότε βέβαια, τὸ ἥμισυ εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τοῦ ὅλου!!

Ἀλλὰ καὶ ἄλλαι παρατηρήσεις σημειοῦνται ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἐκ τῆς δημιουργίας τῆς λεγομένης Συμβολικῆς καὶ τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς. Λέγουν λοιπόν, ὅτι ἡ Λογικὴ εἶναι μία, ἰσχύουσα δι' ὅλας τὰς ἐπιστήμας, ὡς διετύπωσεν αὐτὴν ὁ Ἀριστοτέλης, καὶ ὅτι ἂν ὑπάρχῃ Συμβολικὴ Λογικὴ καὶ Μαθηματικὴ Λογική, θὰ πρέπῃ νὰ ὑπάρχῃ καὶ Φυσικὴ Λογική, καὶ Φιλολογικὴ Λογική, καὶ Θεολογικὴ Λογική, καὶ Φαρμακευτικὴ Λογικὴ καὶ τὰ τοιαῦτα. Οὐδὲν ὅμως ἀκούεται περὶ τῆς ὑπάρξεως τοιούτων Λογικῶν!

27. Ἀφορμὴν λαμβάνων ἀπὸ τὰς ἀποκληθείσας μὴ Εὐκλειδείους γεωμετρίας ὁ Ἄγγλος σὲρ Edmund Whittaker ἐδημοσίευσεν ἐν Ἀγγλίᾳ, μετὰ τὸ 1947, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὸν Ἔντινγκτον» βιβλίον του (From Euclid to Eddington), τὸ ὁποῖον ἀνεδημοσιεύθη ἐν Νέᾳ Ὑόρκῃ (Dover publications. Inc. N.Y.N.Y.).

Ἐν πρώτοις προκαλεῖ ἐντύπωσιν, ἡ ὑπὸ τοῦ σὲρ Whittaker θεώρησις τοῦ σὲρ Eddington (1882–1944), ὡς ἐπιστημονικοῦ σταθμοῦ τῆς ἀνθρωπότητος, θεώρησις, ἡ ὁποία θεωρεῖται πολὺ τολμηρά. Ἐὰν ἔζη σήμερον ὁ ἀείμνηστος πρόγονος ἡμῶν Αἴσωπος θὰ παρέπεμπεν ἐν προκειμένῳ τὸν σὲρ Whittaker εἰς τὸν μῦθον του «Κώνωψ ἐπὶ κέρατος βοός», ὅπου διαβάζομεν «οὔτε ὅτε ἦλθες ἔγνων, οὔτε ἐὰν μένῃς μελλήσει μοι». Καὶ κατ' ἄλλην διατύπωσιν τοῦ μύθου «ἀλλ' οὔτε ὅτε ἦλθες ἔγνων, οὔτε ἐὰν ἀπέλθῃς γνώσομαι» (Κώνωψ καὶ ταῦρος, 140, Hausrath, Λειψία 1957, Teubner).

Ἄλλη παρατήρησις ἐπὶ τοῦ βιβλίου τοῦ σὲρ Whittaker, ἀποκαλύπτει τὴν ἀμάθειαν αὐτοῦ, ὅταν οὗτος ἰσχυρίζεται, ὅτι : «τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, προφανῶς δὲν ἔχουν καμμίαν ἀπαίτησιν νὰ θεωρηθοῦν ὡς καθαρὸν λογικὸν σύστημα» (a fact which obviously destroys any claim of the work to be a purely logical system, p. 23, 10). Καὶ κατωτέρω ὁ αὐτὸς συγγραφεὺς προσθέτει : «Σήμερον γνωρίζομεν καλύτερα : ἡ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου οὔτε εἶναι ἀναγκαία οὔτε εἶναι παγκοσμίως ἀληθής, ἐν τῇ ἐννοίᾳ τὴν ὁποίαν κατέδειξα». (We now know better : Euclidean geometry is neither necessary, nor is it universally true in the sence I have indicated, p. 31, 21).

Αἱ ἀνωτέρω ἀτυχεῖς διατυπώσεις τοῦ σὲρ Whittaker ἐξήγειρον καὶ τὸν Γερμανόν, ἐν Βερολίνῳ καθηγητήν, κ. Herbert Meschkowski, ὁ ὁποῖος ἀπαντᾷ : «Σήμερον ἔχομεν προχωρήσει ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Παρὰ ταῦτα ὅμως, φαίνεται τελείως ἀδικαιολόγητον, ὅταν εἰς ἓν σύγχρονον ἔργον περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἐννοίας τοῦ χώρου, γίνεται κριτικὴ τοῦ Εὐκλείδου, ἡ ὁποία συνοψίζεται ὡς ἑξῆς :

«Οὕτω τὸ ἔργον τοῦτο χάνει κάθε ἀξίωσιν νὰ ἐκληφθῇ εἰς τὰ σοβαρὰ ὡς ἐπιστημονικόν».

Θυμηδίαν προκαλεῖ ἀκόμη καὶ μία εἴδησιςῗ δημοσιευομένη εἰς τὸ σχολικὸν περιοδικὸν τῆς Ἀμερικανικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας τοῦ τεύχους μηνὸς Σεπτεμβρίου 1974, ὅπου ὁ R. Kapadia γράφει : «ὁ Εὐκλείδης ἦτο εἷς Αἰγύπτιος Bourbaki δηλ. ἀνύπαρκτον πρόσωπον !»

ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΠΗΧΗΣΙΣ

28. Αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι παρέσχον ἀφορμὴν εἰς τὸν Γάλλον μαθηματικὸν - φιλόσοφον, Ἰούλιον Ταννερὺ (Jules Tannery) νὰ γράψῃ μερικὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἀποδίδομεν κατωτέρω μὲ μερικὰς παραλλαγάς. (Science et Philosophie, Paris 1934 Kap. 9).

«Πόσον θὰ εἴχομεν νὰ ὠφεληθῶμεν, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπαναφέρωμεν ἐκ τοῦ Ὑπερπέραν τὸν Εὐκλείδην μεταξύ μας. Ὁ Ζεύς, πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε κατὰ τὸν Ὅμηρον, ἤκουσε εὐμενῶς τὴν παράκλησιν αὐτὴν τῶν ἀνθρώπων καὶ ἔδωκε τὴν ἄδειαν εἰς τὸν Εὐκλείδην, νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν γῆν. Ὡς συνοδόν του ὥρισε τὸν Ἑρρῖκον Πουανκαρέ. Ὁ Εὐκλείδης ἀκολουθῶν τὴν γεωμετρίαν του ἔφθασεν ἐκ τοῦ οὐρανοῦ εἰς τὸ Βερολῖνον ἀστραπιαίως, ὅπου τὸν ὑπεδέχθησαν μὲ μεγάλον ἐνθουσιασμόν. Τοῦ ἐνεχείρισαν ἐκεῖ τηλεγράφημα ἐκ Σπάρτης τοῦ κ. Βούρβαχη διὰ τοῦ ὁποίου παρεκαλεῖτο ὁ Εὐκλείδης νὰ μὴ ἀνακοινώσῃ ὅτι ἀφίχθη ἐκ τοῦ οὐρανοῦ ἀστραπιαίως, διότι τοῦτο ἀπαγορεύεται ὑπὸ τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητος. Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Πουανκαρέ, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἀναλάβει τὸ ταξίδιόν του πρὸς τὴν γῆν μὴ εὐκλειδείως, εἶχε φθάσει εἰς τὸ νεφέλωμα τῆς Ἀνδρομέδας, καίτοι οὗτος κατὰ τὸ διάστημα τῆς πρώτης του ζωῆς εἶχε δηλώσει, ὅτι ἡ εὐκλείδειος καὶ αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι εἶναι ἰσότιμοι. Ὁ Εὐκλείδης ἀνεκηρύχθη ὑφ' ὅλων τῶν Κρατῶν Γενικὸς Ἐπιθεωρητὴς τῶν Μαθηματικῶν καὶ μετέβη εἰς τὴν Λειψίαν, ὅπου ἐπρομηθεύθη παρὰ τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου B. G. Teubner τὸ πολύτιμον ἔργον τοῦ I. L. Heiberg (Χάϊμπεργκ) «Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου». Μὲ ἐφόδιον τὸ ἔργον αὐτὸ μετέβη εἰς τὴν πόλιν Γκαίττιγκεν τῆς Γερμανίας, ὅπου ἐπληροφορήθη διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν. Μὲ ἱκανοποίησιν ἔλαβε γνῶσιν, ὅτι ὁ Gauss ἀπέσχε τῶν μὴ Εὐκλειδείων αὐτῶν γεωμετριῶν «ἐκ τοῦ φόβου τῶν κραυγῶν τῶν Βοιωτῶν». Ἔμεινε πολὺ εὐχαριστημένος, ὅταν ἐπληροφορήθη, ὅτι εἰς τὸ 5ον αἴτημά του, εἶχε δοθῆ τιμητικὴ θέσις εἰς τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Hilbert καὶ εἶπε, τί θὰ συνέβαινε εἰς τὸν κόσμον, ἂν τυχὸν δὲν εἶχε δοθῆ ἡ τιμητικὴ αὐτὴ θέσις. «Θαυμάζω, εἶπεν ἔπειτα, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Dedekind – Cantor, τὴν τελείαν ἐπαγωγὴν τοῦ Pascal ἢ τοῦ Poincaré καὶ τὴν τομὴν τοῦ Dedekind, τὰ ὁποῖα ὅλα στηρίζονται εἰς τὰ Στοιχεῖα μου. Πολὺ μοῦ ἀρέσει τὸ ὄνομα «ἐξαντλητικὴ μέθοδος» τὴν ὁποίαν μὲ πολὺν κόπον ἀνεκάλυψαν, διὰ τὴν Ἀνάλυσιν τὴν περιεχομένην εἰς τὸ 12ον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ἐν τῷ μεταξὺ τὸ σύμπαν διεστέλλετο ἀδιακόπως συμφώνως μὲ τὴν μὴ εὐκλείδειον γεωμετρίαν, καὶ ὁ Εὐκλείδης εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐρωτήσῃ ποῦ τέλος πάντων κεῖται τὸ κέντρον αὐτοῦ τοῦ πάντοτε μὴ εὐκλειδείως, ἀλλὰ συνεχῶς διατεινομένου σύμπαντος; «Θὰ ἦτο πολὺ ὡραῖον, εἶπε, ἐὰν ἠδύνατο κανεὶς νὰ δώσῃ εἰς τὰ μικρὰ παιδιὰ ὡς παιγνίδια τοιαῦτα σύμπαντα εἰς ἐπαρκῆ καὶ ἀνάλογον ἀριθμόν.» Ὁ Εὐκλείδης ἦτο πολὺ ἀνήσυχος, διότι ὁ Πουανκαρὲ δὲν εἶχεν ἀκόμη φθάσει ἀπὸ τὸν οὐρανόν. «Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ αὐτό;» εἶπε. «Ἔχω ἀκούσει, ὅτι αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι ἰσχύουν ἰδιαιτέρως διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα. Εἶμαι πολὺ εὐχαριστημένος, συνέχισε διότι οἱ πύραυλοί σας καὶ οἱ δορυφόροι σας ἵπτανται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γεωμετρίας μου. Θὰ ἦτο ἐξόχως ἐνδιαφέρον, ἐὰν κανεὶς ἦτο δυνατὸν νὰ δώσῃ εἰς τὰ ὀχήματα αὐτὰ μὴ εὐκλείδειον ταχύτητα. Εἶναι κρίμα, ὅτι οἱ κατασκευασταὶ τῶν πυραύλων καὶ τῶν δορυφόρων παραμελοῦν τὰς μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις». Ὅταν ἐδήλωσαν εἰς τὸν Γενικὸν Ἐπιθεωρητὴν τῶν Μαθηματικῶν, ὅλου τοῦ κόσμου, ὅτι ἡ σημερινὴ νεολαία μανθάνει τὴν γεωμετρίαν διὰ νὰ κερδίζῃ κάτι, ἀνεπήδησεν ἀπὸ τὸ κάθισμά του, ἤνοιξε τοὺς μεγάλους ὀφθαλμούς του, τοὺς ἔκλεισε πάλιν καὶ εἶπε μονολογῶν : «Τί μεγάλαι μεταβολαὶ ἐπῆλθον τώρα εἰς τὴν ζωὴν τῶν ἀνθρώπων, ἐν ᾧ προηγουμένως ὁ ἔκλαμπρος ἥλιος τῆς Ἑλλάδος, αἱ διαυγεῖς γραμμαὶ τοῦ ὁρίζοντός της, τὸ διαρκὲς γέλοιο τῶν θαλασσῶν της, οἱ λαμπροὶ ναοί, τὰ μεγαλοπρεπῆ ἀγάλματα, οἱ ποιηταὶ καὶ αἱ φιλοσοφικαὶ συζητήσεις, τὰ πάντα τέλος προσεφέροντο διὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν νέων» !

ΕΠΙΜΕΤΡΟΝ

29. Ἡ ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν εἶναι ἀποκλειστικὸν δημιούργημα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, τοῦ ὁποίου ἡ ἀφετηρία τοποθετεῖται περὶ τὸ ἔτος 600 π.Χ., εἰς τὴν ἐποχὴν δηλαδὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος ἐπενόησε τὴν ἀπόδειξιν τῶν μαθηματικῶν προτάσεων. Ἔκτοτε καὶ μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐκλείδου, ὁ ὁποῖος ἤκμασε περὶ τὸ 310 π.Χ. ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ἐπηκολούθησεν ἡ ἀνακάλυψις πολλῶν μαθηματικῶν θεωρημάτων.

Τὰ στοιχεῖα τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς δημιουργίας 300 ἐτῶν διέσωσεν εἰς ἡμᾶς ὁ Εὐκλείδης εἰς 13 βιβλία, εἰς τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα περίφημον ἔργον του.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν θεωρημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου εἶχον ἀνακαλυφθῆ καὶ πολλὰ ἄλλα θεωρήματα, τὰ ὁποῖα δὲν διεσώθησαν. Περὶ τῆς ὑπάρξεως τοιούτων θεωρημάτων πειθόμεθα ὑπὸ μεταγενεστέρων τοῦ Εὐκλείδου συγγραφέων καὶ ἰδίως ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (†212 π.Χ.) καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου (†170 π.Χ. περίπου), οἱ ὁποῖοι ἐλάμπρυναν τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην.

Εἰς τὴν παροῦσαν μικρὰν πραγματείαν ἐκτίθενται, μεταξὺ ἄλλων, ἀριθμητικαὶ γνώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν περιλαμβάνονται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Αὗται διεσώθησαν, κυρίως, ὑπὸ τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ, τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Ἰαμβλίχου. Οἱ δύο πρῶτοι ἐκ τούτων ἤκμασαν κατὰ τὸν Β′ αἰῶνα μ.χ., ἐνῷ ὁ τρίτος ἤκμασε κατὰ τὸν Γ′ αἰῶνα μ.Χ. Ἡ δημιουργία ὅμως τῶν μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων, τὰ ὁποῖα διέσωσαν οἱ συγγραφεῖς οὗτοι, ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους τοῦ πέμπτου καὶ τοῦ ἕκτου αἰῶνος π.Χ.

Κατὰ τὸν Β′ αἰ. μ.Χ. ὁ Κλαύδιος Πτολεμαῖος ἐδημοσίευσεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν τὴν περίφημον Ἀστρονομίαν του εἰς 13 βιβλία, ἡ ὁποία ἔφερε τὸν τίτλον «Μεγάλη Σύνταξις» καὶ βραδύτερον μετεγλωττίσθη ὑπὸ τῶν Ἀράβων εἰς «Ἀλμαγέστην». Ἡ πραγματεία αὐτὴ περιέχει καὶ πολλὰ μαθηματικὰ θεωρήματα χρήσιμα εἰς ἀστρονομικοὺς ὑπολογισμούς.

Κατὰ τὸν Γ′ αἰ. μ.Χ. τοποθετεῖται καὶ ἡ δρᾶσις τοῦ περιφήμου μαθηματικοῦ Διοφάντου τοῦ Ἀλεξανδρέως, ὁ ὁποῖος ἐδημοσίευσεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ἔργον του ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀριθμητικὰ» εἰς 13 βιβλία. Ἐκ τῶν βιβλίων αὐτῶν διεσώθησαν τὰ ἓξ πρῶτα, εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται καὶ προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ὡς καὶ ἄλλη ὕλη μαθηματική, ἡ ὁποία σήμερον κατατάσσεται εἰς τὴν ἄλγεβραν. Κατὰ τὸ 1970 ἀνευρέθη εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς Κωμοπόλεως τοῦ Ἰρὰν Astan Quds Mashad ἀραβικὸν χειρόγραφον περιέρχον 4 ἐκ τῶν ἀπολεσθέντων βιβλίων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη (ἐν Καΐρῳ) ὑπὸ τοῦ Αἰγυπτίου καθηγητοῦ Roshdi Rashed. Ὁ αὐτὸς καθηγητὴς ἐδημοσίευσε περίληψιν τῶν βιβλίων τούτων εἰς τὴν γαλλικὴν ἐπιθεώρησιν τῶν Παρισίων Revue d'Histoire des Sciences (1974, τεῦχος 27, 2 καὶ 1975, τεῦχος 28, 1). Τὸ πρῶτον ἐκ τῶν ἀνευρεθέντων 4 βιβλίων τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου περιέχον 44 θεωρήματα ἐδημοσιεύθη ἤδη εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Ἑταιρείας τῶν Ἑλλήνων Φιλολόγων «Πλάτων», τόμος 28 τοῦ 1976.

Οἱ νεώτεροι ἐρευνηταὶ δὲν θεωροῦν συμπτωματικόν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐδημοσίευσε τὰ Στοιχεῖα τῶν μαθηματικῶν εἰς 13 βιβλία καὶ ὅτι κατόπιν ὁ Κλαύδιος Πτολεμαῖος καὶ ὁ Διόφαντος ζηλώσαντες τὴν δόξαν τοῦ Εὐκλείδου ἐδημοσίευσαν καὶ αὐτοὶ τὰ ἔργα των εἰς 13 βιβλία ἕκαστος. Εὑρίσκονται ὅμως εἰς ἀδυναμίαν νὰ ἑρμηνεύσουν τὸ περίεργον αὐτὸ φαινόμενον τῆς ἐκλογῆς τοῦ ἀριθμοῦ 13, ὁ ὁποῖος, παρατηροῦν, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς τῆς δεκάδος δύο πρώτων τετραγώνων, τοῦ 2 καὶ τοῦ 3 ($2^2+3^2=13$).

Ὕλη γεωμετρικὴ δὲν περιελήφθη εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, διότι ἐθεωρήθη ἀρκετὴ μόνον ἡ περίληψις τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας.

Ἡ σπουδὴ τοῦ περιεχομένου τῆς ἀνὰ χεῖρας πραγματείας θὰ δώσῃ τὴν εὐκαιρίαν εἰς τοὺς νέους μας, ὅπως ἐκτιμήσουν τὸ ἐπιστημονικὸν ἔργον τῶν ἀρχαίων ἡμῶν προγόνων καὶ συγχρόνως ὅπως ἀναλογισθοῦν τὰς εὐθύνας, τὰς ὁποίας ἔχουν ἐκ τῆς μεγάλης αὐτῆς ἐθνικῆς κληρονομίας.

ΠΡΟΣΘΗΚΗ

Εἰς τὸν κατάλογον τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων, (σελ. 20).

Μένιππος ὁ Πελοποννήσιος: διδάσκαλος τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου εἰς τὴν γεωμετρίαν.

Ἄλκιππος ὁ Λήμνιος: διδάσκαλος τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου εἰς τὴν μουσικήν.

(Πηγή: Ψευδοκαλλισθένης A ed. Kroll 1,13)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελὶς

Τύποις Φ. ΤΣΙΡΩΝΗ
Μονοτυπικὰ Συγκροτήματα
Λένορμαν 185—Τηλ. 5123734

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4