ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ - ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Πρός τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρὸς πολιτείαν καὶ πρὸς τὰς τέχνας πάσας ἓν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παίδειον μάθημα μεγάλην, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή· τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται.

ΠΛΑΤΩΝ. Νόμοι 747 b 1-5.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1976

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Ewagolos

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ - ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Πρός τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρὸς πολιτείαν καὶ πρὸς τὰς τέχνας πάσας ἓν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παίδειον μάθημα μεγάλην, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή· τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχίνουν ἀπεργάζεται.

ΠΛΑΤΩΝ. Νόμοι 747 b 1-5.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1976

Διότι καὶ διὰ τὴν οἰκονομίαν καὶ διὰ τὴν πολιτείαν καὶ δι' ὅλας τὰς τέχνας κανένα ἄλλο μάθημα δὲν ἔχει τόσον μεγάλην παιδευτικὴν δύναμιν, ὅσον ἔχει ἡ ἐνασχόλησις μὲ τοὺς ἀριθμούς· τὸ δὲ μέγιστον εἶναι, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἐκ φύσεως ἀμαθῆ τὸν διεγείρει καὶ τὸν καθιστᾷ εὐμαθῆ καὶ μνημονικὸν καὶ ὀξύνουν.

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Αἱ βάσεις τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν προέρχονται ἐκ τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου (580-490 π.Χ. περίπου), χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι ἀκριβῶς γνωστὸν τί ἐδημιουργήθη εἰς τὴν Σχολὴν αὐτὴν καὶ τί εἰς τὴν 'Ακαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἡ ὁποία ἐλειτούργησεν ἐπὶ 916 συναπτὰ ἔτη (387 π.Χ.-529 μ.Χ.) καὶ κατόπιν ἐκλείσθη ἕνεκα τοῦ μεγάλου θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἰδέαν τῆς ἑλληνικῆς δημιουργίας εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν τοῦ 6ου αἰῶνος π.Χ. σημειοῦμεν, ὅτι κατὰ τὸν Πρόκλον (410-485 μ.Χ.) ὁ Πυθαγόρας ἐπέτυχε λύσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως (ἴδε κεφ. 15), καὶ κατὰ τὸν 'Ιάμβλιχον (3ος αἰ. μ.Χ.), ὁ μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρου Θυμαρίδας, ἐπέτυχε λύσιν συστήματος α' βαθμοῦ ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως (κεφ. 23 καὶ 24).

Τὴν στοιχειώδη θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, τὴν ἀναπτυχθεῖσαν εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολὴν καὶ τὴν 'Ακαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, διέσωσεν ὁ Εὐκλείδης (360-280 π.Χ. περίπου), εἰς τὰ βιβλία τῆς πραγματείας του, Στοιχεῖα, τῆς ἀποτελουμένης ἐκ 13 βιβλίων, εἰς τὰ βιβλία 7, 8, 9. Συνέχεια τοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου θεωροῦνται τὰ 'Αριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 250 μ.Χ. ἐν 'Αλεξανδρείᾳ. Τόσον τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (4 τόμοι), ὅσον καὶ τὰ 'Αριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου, τῶν ὁποίων διεσώθησαν μόνον τὰ 6 ἐκ τῶν 13 ἀρχικῶς ἐκδοθέντων βιβλίων, ἐδημοσιεύθησαν παρ' ἡμῶν ἐν 'Αθήναις, 1952-1957 καὶ 1963 ('Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων τοῦ 'Υπουργείου Παιδείας).

Κατὰ τὸν Α' αἰ. μ.Χ. ἐξεδόθησαν καὶ διεσώθησαν τὰ Μετρικὰ τοῦ Ἥρωνος τοῦ 'Αλεξανδρέως (Heronis Alexandrini, opera III, H. Schöne, Λειψία 1903) περιέχοντα καὶ πράξεις τινὰς ἀριθμητικῆς, ἐνῷ κατὰ τὸν Β' αἰ. μ.Χ. ἐξεδόθησαν καὶ διεσώθησαν δύο μικρὰ ἐγχειρίδια πραγματευόμενα προτάσεις τινὰς τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν μὴ ἀπαντωμένας εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Τὰ ἐγχειρίδια αὐτὰ εἶναι: 1) Νικομάχου Γερασηνοῦ, Πυθαγορικοῦ, 'Αριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ εἰς δύο βιβλία, ἐκ σελίδων 199 (ἔκδ. Hoche, B.G. Teubner, Λειψία 1866), 2) Θέωνος Σμυρναίου, φιλοσόφου Πλατωνικοῦ, Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, ἐκ σελίδων 216 (ἔκδ. E. Hiller, B. G. Teubner, Λειψία 1878).

Κατὰ τὸν Γ' αἰ. μ.Χ. ἐξεδόθησαν καὶ διεσώθησαν σχόλια τοῦ 'Ιαμβλίχου εἰς τὴν ἀνωτέρω 'Αριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάχου, ἐκ σελίδων 125 (ἔκδ. H. Pistelli, B. G. Teubner, Λειψία, 1894).

Διὰ τὴν ὕπαρξιν βιβλίων πρακτικῆς ἀριθμητικῆς κατὰ τὴν ἀρχαιότητα οὐδεμίαν πληροφορίαν ἔχομεν. Ἐνδείξεις τινὰς ἔχομεν, ὅτι αὕτη ὠνομάζετο λογιστική, ἐκ τῶν συγγραφῶν τοῦ Πλάτωνος (Γοργίας 450 d: οἷον ἀριθμητικὴ καὶ λογιστική. Πολιτικὸς 259 d: λογιστικὴ . . . ἦν . . . τῶν γνωστικῶν τεχνῶν. Πολιτεία VII 525a: ἀλλὰ μὴν λογιστική τε καὶ ἀριθμητικὴ περὶ ἀριθμὸν πᾶσα. Χαρμίδης 165e: τῆς λογιστικῆς τέχνης).

Κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 6ου αἰ. μ.Χ. ὁ Εὐτόκιος σχολιάζων ἐν Κωνσταντινουπόλει τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις διέσωσεν ἐκτέλεσιν μερικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ παρέχει τὴν πληροφορίαν περὶ ὑπάρξεως τότε βιβλίου ὑπὸ τὸν τίτλον Λογιστικὴ τοῦ συγγραφέως Μάγνου (μὴ διασωθέντος) (Archimedis opera omnia vol. III, I. L. Heiberg, B. G. Teubner, Stuttgart 1972, p. 234-258, 31).

Ἔκτοτε οὐδὲν μαρτύριον ἔχομεν περὶ προόδων εἰς τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀριθμητικῆς μέχρι τῶν μέσων περίπου τοῦ 9ου αἰῶνος μ.Χ., ὅτε ὁ Λέων ὁ μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος, καταγόμενος ἐξ Ὑπάτης, πρῴην Μητροπολίτης Θεσσαλονίκης καὶ κατόπιν Πρύτανις τοῦ Ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου Κωνσταντινουπόλεως, ἀνεκάλυψε τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἄλγεβραν. Τὴν αὐτὴν ἀνακάλυψιν ἔκαμε μετὰ 750 περίπου ἔτη καὶ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Viète (1540-1603). Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ Λέοντος ἔγινε γνωστὴ ἐκ σημειώσεων τοῦ μαθητοῦ αὐτοῦ Ἀρέθα, κατόπιν Μητροπολίτου Καισαρείας, ὡς ἀνεκοίνωσεν ἐν Μονάχῳ τῷ 1958 εἰς τὸ 11ον Διεθνὲς Βυζαντινολογικὸν Συνέδριον ὁ Γερμανὸς Καθηγητὴς Kurt Vogel (K. Vogel, Buchstabenrechnung und indische Ziffern in Byzanz, Akten des XI. Internationalen Byzantinischen Kongresses 1958, München 1960, 660-664).

Ὁ αὐτὸς καθηγητὴς K. Vogel μνημονεύει, ὅτι ὁ Λεονάρδος τῆς Πίζης (Fibonacci) ἀναφέρει εἰς τὸ βιβλίον του Liber Abbaci, ὅτι ἐδιδάχθη εἰς τὸ Βυζάντιον (περὶ τὸ 1210 μ.Χ.) πολλὰ ἀριθμητικὰ καὶ ἀλγεβρικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατόπιν εἰσήγαγεν εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην (K. Vogel, ἀνάτυπον ἐκ Miscellanea-Mediaevalia, Band 1, W. De Gruyter, Berlin 1962, p. 123).

Μὲ στοιχεῖα τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς ἠσχολήθησαν εἰς τὸ Βυζάντιον κατὰ τοὺς τελευταίους τρεῖς αἰῶνας μέχρι τοῦ 1453, οἱ λόγιοι Γ. Παχυμέρης, Μ. Πλανούδης, Μ. Ψελλός, Νικ. Γρηγορᾶς, Νικ. Ῥαβδᾶς καὶ Μανουὴλ Μοσχόπουλος, ὁ ἀνακαλύψας τὰ μαγικὰ τετράγωνα καὶ διδάξας περὶ αὐτῶν εἰς τὴν Ἰταλίαν, μετὰ τὴν πτῶσιν τοῦ Βυζαντίου.

Τὴν ἀριθμητικὴν τοῦ Νικολάου Ῥαβδᾶ, μετὰ γαλλικῆς μεταφράσεως, ἐδημοσίευσεν ὁ Paul Tannery (Mémoires Scientifiques, tom. IV, p. 86-187, Toulouse-Paris 1920). Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Ῥαβδᾶ ὑπολογίζεται, ὅτι ἐδημο-

---

1. Διὰ τὴν λοιπὴν δρᾶσιν τοῦ Λέοντος ἴδε Ι. Ν. Δάμπαση, Λέων ὁ Βυζαντινὸς ἐγκυκλοπαιδικὸς φιλόσοφος καὶ ἰατρός, Ἰατρικὰ Χρονικὰ τομ. 3, τεῦχος 1, Ἰανουάριος 1964, σελ. 58-64.

σιεύθη ἐν Κωνσταντινουπόλει περὶ τὸ 1330. Κατὰ τὴν αὐτὴν ἐποχὴν ἐδημοσιεύθη ἐκεῖ καὶ ἄλλο παρόμοιον βιβλίον, περιέχον κυρίως ἀριθμητικὰ προβλήματα. Τὸ πλεῖστον τοῦ βιβλίου τούτου ἐξεδόθη ἐν Βιέννῃ κατὰ τὸ 1968, μὲ γερμανικὴν μετάφρασιν, ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου K. Vogel, ὑπὸ τὸν τίτλον Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jahrhunderts, Wien 1968 (Ἓν βυζαντινὸν βιβλίον ἀριθμητικῆς τῶν ἀρχῶν τοῦ 14ου αἰῶνος). Ἡ γλῶσσα τοῦ βιβλίου, ὡς καὶ τοῦ βιβλίου τοῦ Νικ. Ῥαβδᾶ, εἶναι ἡ κοινὴ ἀττική. Μετὰ 100 ὅμως ἔτη, ἤτοι περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 15ου αἰῶνος, ἐξεδόθη ἐν Κωνσταντινουπόλει ἄλλο βιβλίον πρακτικῆς ἀριθμητικῆς εἰς γλῶσσαν ἐντελῶς λαϊκήν, ἡ ὁποία εἶχεν ὑποστῆ τὴν ἐπίδρασιν τῶν Ἑνετῶν, τῶν Φράγκων καὶ τῶν Τούρκων. Ἑκατὸν προβλήματα τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, μετὰ γερμανικῆς μεταφράσεως ἐδημοσιεύθησαν ἐν Βιέννῃ κατὰ τὸ 1963, ὑπὸ τῶν Herbert Hunger, Γεν. Γραμματέως τῆς Ἀκαδημίας τῆς Αὐστρίας καὶ τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου Kurt Vogel, καθηγητοῦ καὶ Ἀκαδημαϊκοῦ ἐν Μονάχῳ, ὑπὸ τὸν τίτλον Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts, Wien 1963 (Ἓν βυζαντινὸν βιβλίον ἀριθμητικῆς τοῦ 15ου αἰῶνος). Καὶ τὰ δύο ἐν Βιέννῃ ἐκδοθέντα βιβλία ἐδημοσιεύθησαν δαπάναις τοῦ Ἱδρύματος HOLZHAUSEN μερίμνῃ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῆς Αὐστρίας.

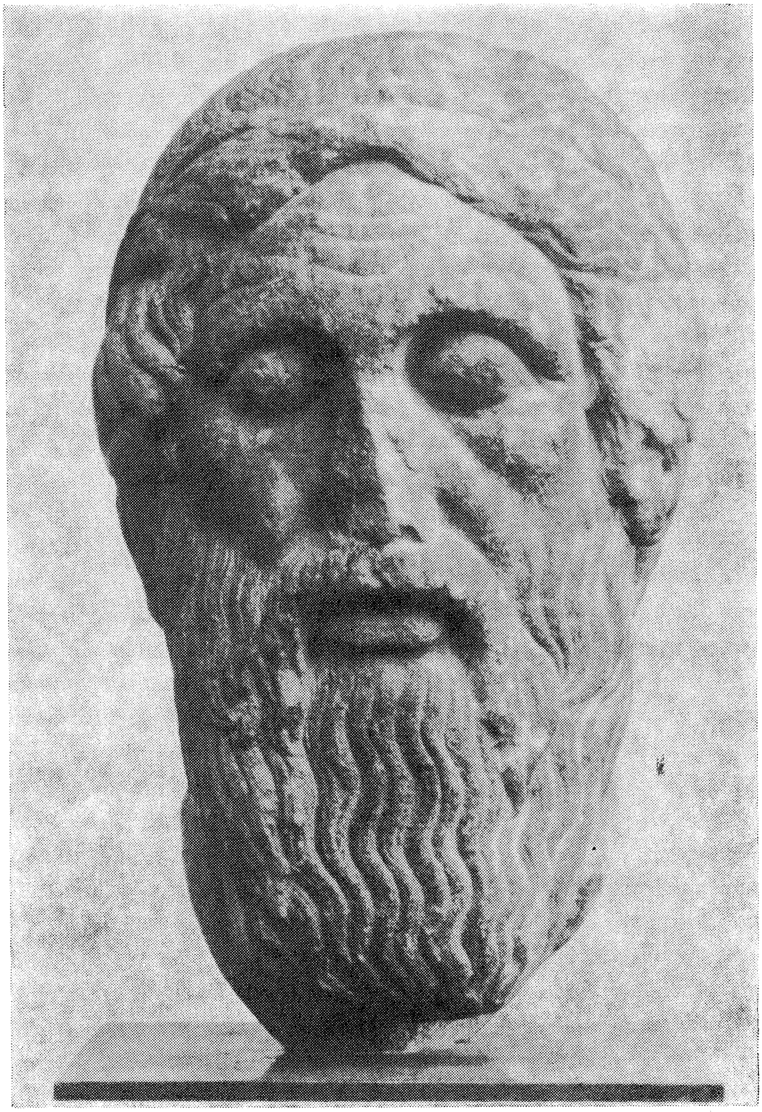
Ἡ παροῦσα μικρὰ πραγματεία προέρχεται, κατὰ τὸ πλεῖστον, ἀπὸ ἄρθρα ἀφορῶντα εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, δημοσιευθέντα εἰς τὸ μηνιαῖον περιοδικὸν τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» (Δεκέμβριος 1968 - Μάιος 1974). Εἰς ταύτην ἐκτίθεται ἡ ἀριθμητικὴ τῶν Πυθαγορείων, μὴ περιλαμβανομένη εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ὡς αὕτη διασώζεται ὑπὸ συγγραφέων τῶν πρώτων χριστιανικῶν αἰώνων. Αἱ πηγαὶ ἐκ τῶν ὁποίων προέρχεται ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου, ἐκτὸς ὀλίγων ἐξαιρέσεων (Εὐκλείδου, Ἥρωνος, Πλουτάρχου, Διοφάντου, Πάππου), εἶναι κυρίως αἱ ἀκόλουθοι τρεῖς: 1) Νικομάχου, 2) Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, 3) Ἰαμβλίχου, περὶ τῶν ὁποίων ἔγινε μνεία ἀνωτέρω. Εἰς τὰς σχετικὰς παραπομπὰς οἱ συγγραφεῖς οὗτοι σημειοῦνται, Νικόμαχος, Θέων Σμυρναῖος, Ἰάμβλιχος.

Διὰ βαθυτέραν μελέτην τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐνδείκνυνται τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (7, 8, 9) καὶ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου.

Ὕλη σχετικὴ πρὸς τὴν γεωμετρίαν δὲν περιλαμβάνεται ἐδῶ. Μόνον εἰς τὰ τελευταῖα κεφάλαια (46-47) γίνεται λόγος περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς Ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Ἐπίσης δὲν περιελήφθησαν ἐδῶ τὰ εἰς τὸν «ΕΥΚΛΕΙΔΗΝ» δημοσιευθέντα ἄρθρα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκτίθενται τὰ τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας τῶν Αἰγυπτίων καὶ τῶν Βαβυλωνίων.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Σεπτέμβριον 1975.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ



Ο ΟΜΗΡΟΣ

Προτομὴ εἰς τὴν Γλυπτοθήκην τοῦ Μονάχου

Ἡγεμὼν παιδείας αὐτὸς ζῶν λέγεται Ὅμηρος γενέσθαι

ΠΛΑΤΩΝ. Πολιτεία Χ. 600 α 11

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

ΑΙ ΠΡΩΤΑΙ ΠΗΓΑΙ

1. Ὁ Γερμανὸς λόγιος Victor Engelhardt εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ περισπουδάστου βιβλίου του ὑπὸ τὸν τίτλον «Ὁ πνευματικὸς πολιτισμὸς τῆς Ἀρχαιότητος». (Die geistige Kultur der Antike, Reclam—Verlag, Stuttgart 1956), προσπαθεῖ νὰ ἀνεύρῃ τὰ αἴτια, τὰ ὁποῖα συνετέλεσαν εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ πολιτισμοῦ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἐξετάζει μὲ θαυμασμὸν τὸν θαλάσσιον καὶ τὸν κατακόρυφον διαμελισμὸν τοῦ ἑλληνικοῦ χώρου, μελετᾷ τὰς πτυχὰς τῶν ὀρέων καὶ διερευνᾷ τὸν σχηματισμὸν τῶν ὅρμων τῶν ἑλληνικῶν θαλασσῶν. Ἀναλύει τὴν ἐπίδρασιν τοῦ περιβάλλοντος καὶ τοῦ κλίματος εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ χαρακτῆρος καὶ τῶν σωματικῶν, ψυχικῶν καὶ πνευματικῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἀνθρώπου καὶ προσπαθεῖ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν πορισμάτων τῶν ἐρευνῶν του νὰ δώσῃ μίαν ἐξήγησιν εἰς τὸ ἐρώτημα: διατί ὁ πολιτισμὸς τῆς ἀνθρωπότητος ἐδημιουργήθη καὶ ἐθεμελιώθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων;

Ἄλλος Γερμανὸς λόγιος, ὁ Max Steck, καθηγητὴς τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Μονάχου, εἰς ἐμπεριστατωμένον ἄρθρον του δημοσιευθὲν εἰς τὸ περιοδικὸν Ἔρευναι καὶ Πρόοδοι (Forschungen und Fortschritte, Jahrgang 31, Heft 4, 1957) ὑποστηρίζει, ὅτι ὁ ἐν γένει πολιτισμὸς τῆς Δύσεως, αἱ καλαὶ τέχναι, αἱ ἐπιστῆμαι, αἱ μορφαὶ τῆς πίστεως ἀκόμη, προέρχονται ἐκ τῆς ἐπιδράσεως τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, τῶν ὁποίων σύνοψις ἔφθασε μέχρι ἡμῶν διὰ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τὰ μαθηματικὰ αὐτὰ ἔχουν διεισδύσει εἰς τὰ μύχια τῶν ψυχῶν τῶν μεγάλων ἐρευνητῶν καὶ δίδουν τὴν κατεύθυνσιν εἰς ὅλας αὐτῶν τὰς ἐπιστημονικὰς ἐρεύνας, προσθέτει ὁ Steck.

Αἱ πηγαὶ ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν γνῶσιν περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν εἶναι δύο: Αἱ ἀρχαιολογικαὶ ἔρευναι καὶ τὰ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων συγγραφέων.

Ἡ σπουδὴ τῆς κατασκευῆς ἀρχαίων οἰκοδομημάτων παρέχει εἰς ἡμᾶς τὸ μέτρον ἐκτιμήσεως τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τῆς ἐποχῆς κατὰ τὴν ὁποίαν ἱδρύθησαν τὰ σχετικὰ οἰκοδομήματα. Εἰς ὅλα τὰ ἑλληνικὰ θέατρα βλέπομεν χρησιμοποίησιν κατὰ τὴν ἀνοικοδόμησιν αὐτῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ γεωμετρικῶν γνώσεων, αἱ ὁποῖαι ὑποβοηθοῦν τοὺς ἐρευνητὰς εἰς τὴν συναγωγὴν συμπερασμάτων σχετικῶν πρὸς τὰς μαθηματικὰς γνώσεις τῆς ἐποχῆς κατὰ τὴν ὁποίαν κατεσκευάσθησαν τὰ θέατρα (E. R. Fiechter, das Theater in Oropos, 1930, Heft 1 κ.λπ.).

Εἰς τὰς ἀρχαιολογικὰς ἐρεύνας κατατάσσομεν καὶ τὰς ἐρεύνας τοῦ διακεκριμένου ἐπιστήμονος καὶ Ταξιάρχου τοῦ Ἑλληνικοῦ Στρατοῦ Θεοφάνους Μανιᾶ. Ὁ Θ. Μανιᾶς ἀνεκάλυψεν, ὅτι τὰ πανάρχαια Ἱερὰ τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος ἔχουν κτισθῆ ἐπὶ τῇ βάσει γεωμετρικῶν ὑπολογισμῶν καὶ μετρήσεων, κυρίως εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν θέσιν τῆς ἱδρύσεως αὐτῶν. Τὰ Ἱερὰ τῆς Ἐλευσῖνος, τῆς Αἰγίνης, τῶν Δελφῶν, τῆς Δωδώνης, κ.λπ. εὑρίσκονται μεταξύ των εἰς γεωμετρικὰς σχέσεις. Εἰς τὰς ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν ἱερῶν αὐτῶν, ἢ μεταξὺ γειτονικῶν πρὸς αὐτὰ πόλεων παρατηρεῖ ὁ Θ. Μανιᾶς ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τῆς τομῆς εὐθείας, εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τοῦ σήμερον λεγομένου κανόνος τῆς χρυσῆς τομῆς.

Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα: Πότε ἐκτίσθησαν τὰ Ἱερὰ αὐτά; Θεωρεῖται ὑπὸ τῶν εἰδικῶν ἐπιστημόνων βέβαιον, ὅτι ἐκτίσθησαν εἰς τοὺς μυθολογικοὺς ἢ προϊστορικοὺς χρόνους καὶ μάλιστα ἀρκετὰς χιλιάδας ἔτη π.Χ. Αἱ ἔρευναι τοῦ Θ. Μανιᾶ ἀποτελοῦν πραγματικὴν ἐπανάστασιν εἰς τὴν χρονολόγησιν γεγονότων, ἅτινα ἔλαβον χώραν εἰς τὴν περιοχὴν ὅπου κατῴκησαν παλαιότατα οἱ Ἕλληνες, καὶ προσέρχονται διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν νὰ ἐπικυρώσουν τὰ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Τίμαιος ἀναφερόμενα.

Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ Τιμαίου ὁ Πλάτων ἀφηγεῖται ἀφήγησιν Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα, ὅστις εἶχε μεταβῆ εἰς τὴν Αἴγυπτον περὶ τὸ ἔτος 580 π.Χ. Ἐκ τῆς ἀφηγήσεως αὐτῆς τοῦ ἱερέως συνάγεται ὅτι 9600 ἔτη π.Χ. περίπου ἔγινε μεγάλη καταστροφὴ ἐκ κατακλυσμῶν καὶ σεισμῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὴν ὁποίαν ἐλάχιστοι ἄνθρωποι ἐσώθησαν. Εἰς τὴν Αἴγυπτον δὲν ἔγινε παρομοία καταστροφή. Οἱ ἱερεῖς τῆς Αἰγύπτου εἶχον καταγράψει εἰς τὸ ἀρχεῖον των ὅλα τὰ γεγονότα, τὰ ὁποῖα ἔλαβον χώραν εἰς τὴν Ἑλλάδα (εἰς πλάκας ἐκ πηλοῦ).

Μετὰ τὴν πάροδον τοῦ καταστρεπτικοῦ κατακλυσμοῦ φαίνεται ὅτι οἱ διασωθέντες ἄνθρωποι ἐπανέκτισαν τὰς ἐξαφανισθείσας πόλεις καὶ θαυμάζοντες καὶ εὐλαβούμενοι τὸ θεῖον ἔκτισαν τὰ Ἱερὰ περὶ τῶν ὁποίων ἔγινε μνεία προηγουμένως. Ἡ μέχρι σήμερον θεωρουμένη ὡς μῦθος ἀφήγησις τοῦ ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα περὶ μεγάλου καταστρεπτικοῦ κατακλυσμοῦ καὶ σεισμῶν καὶ περὶ τῆς βυθίσεως τῆς εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν κειμένης μεγάλης νήσου Ἀτλαντίδος, περὶ τὸ ἔτος 9,5 χιλ. π.Χ. περίπου, γίνεται διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐρευνῶν τοῦ Θ. Μανιᾶ ἱστορικὴ πραγματικότης. Σημειωτέον ὅτι ὁ Αἰγύπτιος ἱερεὺς ἀναφέρει κατὰ τὴν πρὸς τὸν Σόλωνα ἀφήγησίν του, ὅτι ὁ πολιτισμὸς τῶν Ἀθηναίων κατὰ τὸ ἔτος 9600 π.Χ., προηγεῖτο 1000 ἔτη τοῦ πολιτισμοῦ τῶν Αἰγυπτίων. Κατωτέρω παραθέτομεν μερικὰ σημεῖα τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος, ὅπου ἐκτίθενται τὰ τῆς συνομιλίας τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως μετὰ τοῦ Σόλωνος (Πλάτωνος, Τίμαιος 23 d—25 d).

«Τὸν οὖν ἱερέα φάναι· «Φθόνος οὐδείς, ὦ Σόλων, ἀλλὰ σοῦ τε ἕνεκα ἐρῶ καὶ τῆς πόλεως ὑμῶν μάλιστα δὲ τῆς θεοῦ χάριν, ἣ τήν τε ὑμετέραν καὶ τήν-

δε ἔλαχεν καὶ ἔθρεψεν καὶ ἐπαίδευσεν, προτέραν μὲν τὴν παρ' ὑμῖν ἔτεσιν χιλίοις, ἐκ Γῆς τε καὶ Ἡφαίστου τὸ σπέρμα παραλαβοῦσα ὑμῶν, τήνδε δὲ ὑστέραν. Τῆς δὲ ἐνθάδε διακοσμήσεως παρ' ἡμῖν ἐν τοῖς ἱεροῖς γράμμασιν ὀκτακισχιλίων ἐτῶν ἀριθμὸς γέγραπται. Περὶ δὴ τῶν ἐνακισχίλια γεγονότων ἔτη πολιτῶν σοι δηλώσω διὰ βραχέων νόμους, καὶ τῶν ἔργων αὐτοῖς ὃ κάλλιστον ἐπράχθη.

... Πολλὰ μὲν οὖν ὑμῶν καὶ μεγάλα ἔργα τῆς πόλεως τῇδε γεγραμμένα θαυμάζεται, πάντων μὴν ἓν ὑπερέχει μεγέθει καὶ ἀρετῇ· λέγει γὰρ τὰ γεγραμμένα ὅσην ἡ πόλις ὑμῶν ἔπαυσέ ποτε δύναμιν ὕβρει πορευομένην ἅμα ἐπὶ πᾶσαν Εὐρώπην καὶ Ἀσίαν, ἔξωθεν ὁρμηθεῖσαν ἐκ τοῦ Ἀτλαντικοῦ πελάγους. Τότε γὰρ πορεύσιμον ἦν τὸ ἐκεῖ πέλαγος· νῆσον γὰρ πρὸ τοῦ στόματος εἶχεν ὃ καλεῖτε, ὥς φατε, ὑμεῖς Ἡρακλείους στήλας, ἡ δὲ νῆσος ἅμα Λιβύης ἦν καὶ Ἀσίας μείζων.

... Ἐν δὲ δὴ τῇ Ἀτλαντίδι νήσῳ ταύτῃ μεγάλη συνέστη καὶ θαυμαστὴ δύναμις βασιλέων... πρὸς δὲ τούτοις ἔτι τῶν ἐντὸς τῇδε Λιβύης μὲν ἦρχον μέχρι πρὸς Αἴγυπτον, τῆς δὲ Εὐρώπης μέχρι Τυρρηνίας. Αὕτη δὲ πᾶσα συναθροισθεῖσα εἰς ἓν ἡ δύναμις τόν τε παρ' ὑμῖν καὶ τὸν παρ' ἡμῖν καὶ τὸν ἐντὸς τοῦ στόματος πάντα τόπον μιᾷ ποτὲ ἐπεχείρησεν ὁρμῇ δουλοῦσθαι. Τότε οὖν ὑμῶν, ὦ Σόλων, τῆς πόλεως ἡ δύναμις εἰς ἅπαντας ἀνθρώπους διαφανὴς ἀρετῇ τε καὶ ῥώμῃ ἐγένετο· πάντων γὰρ προστᾶσα εὐψυχίᾳ καὶ τέχναις ὅσαι κατὰ πόλεμον, τὰ μὲν τῶν Ἑλλήνων ἡγουμένη, τὰ δ' αὐτὴ μονωθεῖσα ἐξ ἀνάγκης τῶν ἄλλων ἀποστάντων, ἐπὶ τοὺς ἐσχάτους ἀφικομένη κινδύνους, κρατήσασα μὲν τῶν ἐπιόντων τρόπαιον ἔστησεν.... Ὑστέρῳ δὲ χρόνῳ σεισμῶν ἐξαισίων καὶ κατακλυσμῶν γενομένων, μιᾶς ἡμέρας καὶ νυκτὸς χαλεπῆς ἐπελθούσης, τό τε παρ' ὑμῖν μάχιμον πᾶν ἀθρόον ἔδυ κατὰ γῆς, ἥ τε Ἀτλαντὶς νῆσος ὡσαύτως κατὰ τῆς θαλάττης δῦσα ἠφανίσθη». (Ὁ ἱερεὺς λοιπὸν εἶπε: «Κανεὶς φθόνος, ὦ Σόλων, ἀλλὰ γιὰ τὸ χατήρι σου καὶ τῆς πόλεώς σας, μάλιστα δὲ γιὰ τὸ χατήρι τῆς θεᾶς, ἡ ὁποία ἔτυχε νὰ ἐκθρέψῃ καὶ παιδεύσῃ καὶ τὴν πόλιν σας καὶ τὴν ἰδικήν μας, πρότερον μὲν τὴν πόλιν σας κατὰ χίλια ἔτη, παραλαβοῦσα τὴν γενιά σας ἐκ τῆς γῆς καὶ τοῦ Ἡφαίστου, κατόπιν δὲ τὴν ἰδικήν μας πόλιν. Διὰ τὸν ἐδῶ δὲ πολιτισμὸν γράφεται εἰς τὰ ἱερὰ γράμματα (τοῦ ἀρχείου μας) ἀριθμὸς ἐνάρξεως 8000 ἔτη. Ἀλλὰ διὰ τὰ γεγονότα τὰ ἰδικά σας τὰ πρὸ 9000 ἐτῶν θὰ σοῦ εἴπω συντόμως καὶ διὰ τοὺς νόμους καὶ διὰ τὰ ἔργα των, τί τὸ καλλίτερον ἔγινε... Πολλὰ μὲν λοιπὸν καὶ μεγάλα ἔργα τῆς πόλεως (σας) γραμμένα ἐδῶ θαυμάζονται, ἓν ὅμως ὑπερέχει, καὶ κατὰ τὸ μέγεθος καὶ κατὰ τὴν ἀρετήν· διότι λέγει τὸ ἀρχεῖον μας πόσον μεγάλην δύναμιν συνέτριψε, ἡ ὁποία ἀγέρωχος ἐβάδιζε καὶ καθ' ὅλην τὴν Εὐρώπην καὶ τὴν Ἀσίαν, ὁρμηθεῖσα ἔξωθεν ἀπὸ τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανόν. Διότι τότε ἡ ἐκεῖ θάλασσα ἦτο διαβατή· διότι πρὸ τοῦ στομίου, τὸ ὁποῖον σεῖς καλεῖτε, ὅπως εἴπατε Ἡρακλείους στήλας, ὑπῆρχε μία νῆσος, ἡ δὲ νῆσος αὐτὴ ἦτο μεγαλυτέρα καὶ τῆς Λιβύης καὶ τῆς Ἀσίας.

. . . Εἰς τὴν νῆσον δὲ αὐτὴν τὴν 'Ατλαν~~τίδα εἶχε~~ συγκροτηθῆ μεγάλη καὶ θαυμαστὴ δύναμις βασιλέων . . . πρὸς τούτοις δὲ πρὸς τὰ ἐδῶ μὲν εἶχον κυριεύσει τὴν Λιβύην μέχρι τῶν συνόρων τῆς Αἰγύπτου, εἰς τὴν Εὐρώπην δὲ μέχρι τῆς Τυρρηνίας (τῆς 'Ιταλίας). Αὐτὴ δὲ ἡ δύναμις συγκεντρωθεῖσα ἐπεχείρησε διὰ μιᾶς νὰ ὑποδουλώση ὅλον τὸν Μεσογειακὸν χῶρον. Τότε λοιπόν, ὦ Σόλων, ἡ δύναμις τῆς πόλεώς σας ἔγινεν εἰς ὅλους φανερὰ καὶ κατὰ τὴν ἀρετὴν καὶ κατὰ τὴν ρώμην, διότι σταθεῖσα μπροστὰ ἀπ' ὅλους καὶ κατὰ τὴν εὐψυχίαν καὶ κατὰ τὴν τεχνικήν, ὅση εἶναι ἀναγκαία διὰ τὸν πόλεμον, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἦτο ἀρχηγός, ἡ πόλις σας τῶν 'Ελλήνων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἔμεινε μόνη, διότι οἱ ἄλλοι τὴν ἐγκατέλειψαν, ἀφοῦ ἔφθασε τότε εἰς τοὺς ἐσχάτους κινδύνους, ἐνίκησεν ὅμως τοὺς ἐπιδρομεῖς καὶ ἔστησε τρόπαιον . . .

. . . 'Αργότερα δὲ (μετὰ τὴν νίκην τῶν 'Αθηναίων κατὰ τοῦ στρατοῦ τῆς 'Ατλαντίδος νήσου), ὁπότε ἔγιναν φοβεροὶ σεισμοὶ καὶ κατακλυσμοί, μέσα σὲ μιὰ φοβερὴ ἡμέρα καὶ νύχτα, ὅλος ὁ στρατός σας ἐβυθίσθη εἰς τὴν γῆν, ἐπίσης δὲ καὶ ἡ νῆσος 'Ατλαντίς, ἐβυθίσθη εἰς τὴν θάλασσαν καὶ ἐξηφανίσθη).

Κατὰ τὴν ἀφήγησιν λοιπὸν τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα, ἡ νῆσος 'Ατλαντίς, κειμένη ἔξω τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτάρ, ἐβυθίσθη εἰς τὸν ὠκεανὸν καὶ ὁλόκληρος ὁ στρατὸς τῶν 'Αθηναίων ἐβυθίσθη εἰς ὀρύγματα γῆς συνεπείᾳ φοβερῶν σεισμῶν καὶ κατακλυσμῶν, οἵτινες ἔλαβον χώραν περίπου ἐννέα χιλιάδας ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος.

ΑΙ ΕΡΕΥΝΑΙ ΤΟΥ Θ. ΜΑΝΙΑ

2. Τὰ διδάγματα τὰ ὁποῖα συνάγομεν ἐκ τῶν ἐμπνευσμένων ἐρευνῶν τοῦ Θ. Μανιᾶ, δυνάμεθα νὰ τὰ συνοψίσωμεν ὡς ἑξῆς:

1. Οἱ Ἕλληνες, ἀσχέτως πρὸς τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἔλαβον τὸ ὄνομα τοῦτο, περὶ τὸ ἔτος 10 χιλ. π.Χ. καὶ ἔτι παλαιότερον κατῴκουν τὸν περὶ τὴν Μεσόγειον Θάλασσαν ἑλληνικὸν χῶρον, ἤτοι τὴν 'Ελληνικὴν Χερσόνησον, τὰς παρ' αὐτὴν νήσους καὶ μεγάλας ἐκτάσεις τῆς Μ. 'Ασίας.

2. Κατὰ τὴν μνημονευομένην παλαιὰν αὐτὴν ἐποχὴν οἱ Ἕλληνες εἶχον δημιουργήσει ἀξιοθαύμαστον πολιτισμὸν καὶ εἶχον ἀποκτήσει ἐμπειρικῶς σπουδαίας ἀριθμητικὰς καὶ γεωμετρικὰς γνώσεις, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται καὶ ἡ γνῶσις τοῦ κανόνος τῆς χρυσῆς τομῆς.

3. Μετὰ τὴν καταστροφὴν τῶν 'Ελλήνων ἐκ τοῦ μεγάλου κατακλυσμοῦ καὶ τὴν καταβύθισιν τῆς ἐν τῷ 'Ατλαντικῷ ὠκεανῷ εὑρισκομένης μεγάλης νήσου 'Ατλαντίδος, ὡς ἀναφέρει συναφῶς ὁ Πλάτων, οἱ διασωθέντες εἰς τὰ ὄρη Ἕλληνες ἐπανελθόντες εἰς τὰ πεδινὰ μέρη ἐπανέκτισαν τὰς πόλεις καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μεγίστου θαυμασμοῦ πρὸς τὸ Θεῖον, ἀνήγειρον τὰ 'Ιερά των ἐπὶ τῇ βάσει ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχέσεων, τὰς ὁποίας εἶχον ἀνακαλύψει ἐμπειρικῶς. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ κανὼν τῆς χρυσῆς τομῆς παρατηρεῖται εἰς τὰς δια-

στάσεις πολλῶν φύλλων δένδρων (δρυὸς π.χ.) καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν ἀκόμη τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος. Εἰς κανονικὸν σῶμα ἀνθρώπου ὁ ὀμφαλὸς χωρίζει τὸ ὕψος τοῦ σώματος εἰς τμήματα κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς, ὅπου ἀπὸ τοῦ ὀμφαλοῦ μέχρι τοῦ ἐδάφους εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἀπὸ τοῦ ὀμφαλοῦ μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς κεφαλῆς εἶναι τὸ μικρότερον.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο, εἶναι λογικὸν νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ διαφύγῃ τὴν προσοχὴν λαοῦ εὐφυοῦς, οἷος ἦτο ὁ Ἑλληνικός.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑπολογισμῶν καὶ τῶν παρατηρήσεων τοῦ Θ. Μανιᾶ εἰς ὡρισμένα μέρη τῆς Ἑλλάδος πρέπει νὰ εἶχον κτισθῆ Ἱερά. Περὶ τούτων ὅμως οὐδὲν ἴχνος ὑπάρχει σήμερον καὶ οὐδεμία συναφὴς πληροφορία ἔχει διασωθῆ. Ἐὰν λοιπὸν γίνουν εἰς τὰ μέρη αὐτὰ ἀνασκαφαὶ καὶ εὑρεθοῦν ἐρείπια ἀρχαίων Ἱερῶν, τοῦτο θὰ εἶναι ἀκόμη μεγαλυτέρα ἀπόδειξις τῶν πορισμάτων ἐκ τῶν ἐρευνῶν τοῦ Θ. Μανιᾶ, ὅτι εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον εἶχε δημιουργηθῆ πολιτισμὸς πρὸ 12 χιλ. ἐτῶν καὶ ἔτι παλαιότερον.

Ἐνισχυτικὸν τῶν πορισμάτων τούτων εἶναι τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι διὰ νὰ δημιουργηθῇ ἡ γλῶσσα τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν θὰ ἐχρειάσθησαν μερικαὶ χιλιάδες ἐτῶν. Εἶναι ἀδύνατον ἡ γλῶσσα τοῦ Ὁμήρου νὰ ἐδημιουργήθη εἰς χρονικὸν διάστημα μόνον ἑκατοντάδων τινῶν ἐτῶν. Ἐὰν διὰ τὴν ἐν μέρει καταστροφὴν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης, ἥτις ἤρχισεν ἀπὸ τοῦ 1200 μ.Χ. διὰ τῆς δημιουργίας τοῦ ἑλληνο-φραγκο-τουρκικοῦ γλωσσικοῦ ἰδιώματος τοῦ ἀπαιδεύτου ὄχλου, τοῦ γλωσσικοῦ δηλ. ἰδιώματος τοῦ προκύψαντος ἐκ τῆς μακραίωνος δουλείας τοῦ Ἑλληνικοῦ Ἔθνους εἰς τοὺς Φράγκους καὶ τοὺς Τούρκους, ἐχρειάσθησαν μέχρι σήμερον περισσότερα τῶν 750 ἐτῶν, διὰ τὴν δημιουργίαν τοῦ γλωσσικοῦ ἰδιώματος τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν θὰ ἐχρειάσθη γλωσσικὴ διαδικασία χρονικοῦ διαστήματος ἀρκετῶν χιλιάδων ἐτῶν.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς πρὸς τομὴν διδομένης εὐθείας ἴσον 1 καὶ παραστήσωμεν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα διὰ x θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν τῆς χρυσῆς τομῆς εὐθείας:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνεται $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ α' μέλος τῆς (1) εἶναι $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{M}{\mu}$, ἂν παρασταθῇ τὸ μέγα τμῆμα διὰ Μ καὶ τὸ μικρὸν διὰ μ. Εἶναι δὲ κατὰ προσέγγισιν $\frac{M}{\mu} = 1{,}618$.

Εἰς τὸν παρατιθέμενον χάρτην τῆς Ἀττικοβοιωτίας ὁ Θ. Μανιᾶς ἔκαμε τὰς ἑξῆς παρατηρήσεις:

Τὰ κέντρα λατρείας καὶ αἱ πόλεις:

Θῆβαι — Χαλκὶς — Ἀμφιάρειον — Στεῖρις (σημερινὸν Πορτοράφτη) — Ἀφαία — Κρομμυὼν (σημερινοὶ Ἅγιοι Θεόδωροι) εὑρίσκονται εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἑξαγώνου.

Τὰ κέντρα Χαλκὶς — Ἀμφιάρειον — Θῆβαι εὑρίσκονται εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀνήκοντος εἰς τὸ μνημονευθὲν ἑξάγωνον. Ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τούτου τριγώνου (Θῆβαι — Ἀμφιάρειον) εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εὐθείας τμηθείσης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, δηλ. κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς εὐθείας, ἐν ᾧ ἑκάστη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (Θῆβαι — Χαλκὶς καὶ Χαλκὶς — Ἀμφιάρειον) εἶναι τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτῆς.

Τὸ τετράπλευρον Θῆβαι — Ἀμφιάρειον — Στεῖρις — Κρομμυὼν εἶναι μέρος κανονικοῦ πενταγώνου καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοι Θῆβαι — Στεῖρις καὶ Ἀμφιάρειον — Κρομμυὼν τέμνονται κατὰ τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς. Ἡ ἀπόστασις Κρομμυὼν — Σ_2 εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς τεμνομένης εὐθείας, ἐν ᾧ ἡ ἀπόστασις Σ_2 — Ἀμφιάρειον εἶναι τὸ μικρότερον. Ἐπίσης ἡ ἀπόστασις Στεῖρις — Σ_2 εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα καὶ ἡ ἀπόστασις Σ_2 — Θῆβαι εἶναι τὸ μικρότερον. Ἐὰν εἰς τὴν τοποθεσίαν Σ_2 γίνουν ἀνασκαφαὶ καὶ εὑρεθῇ κέντρον λατρείας, τοῦτο θὰ ἀποτελῇ μεγαλυτέραν ἔτι ἐνίσχυσιν τῆς θεωρίας τοῦ Θ. Μανιᾶ. Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ἰσχύει καὶ διὰ τὴν Στεῖριν καὶ τὸν Κρυμμυῶνα (Πορτοράφτη καὶ Ἁγίους Θεοδώρους ἀντιστοίχως), ὅπου ἀκόμη δὲν ἔχουν γίνει ἀνασκαφαί.

Αἱ εἰς τὸν χάρτην σημειούμεναι ἀποστάσεις εἰς μέτρα μεταξὺ τῶν διαφόρων κέντρων ἔχουν ληφθῆ ἐκ τῶν χαρτῶν τῆς Γεωγραφικῆς Ὑπηρεσίας Στρατοῦ. Χάριν δὲ συντομίας ἔχει σημειωθῆ εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ ὀνόματος ἑκάστου κέντρου, ἓν γράμμα, ὡς π.χ. εἰς τὰς Θήβας τὸ γράμμα Θ, εἰς τὸ Σούνιον τὸ Σ, εἰς τὴν Στεῖριν τὸ Σ′, εἰς τοὺς Δελφοὺς τὸ Δ, εἰς τὸν Κρομμυῶνα τὸ Κ κλπ.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω σχέσεις τινὰς χρυσῆς τομῆς εὐθείας σημειοῦντες τὰ ὀνόματα τῶν κέντρων ὁλόκληρα χάριν καλυτέρας ἐποπτείας.

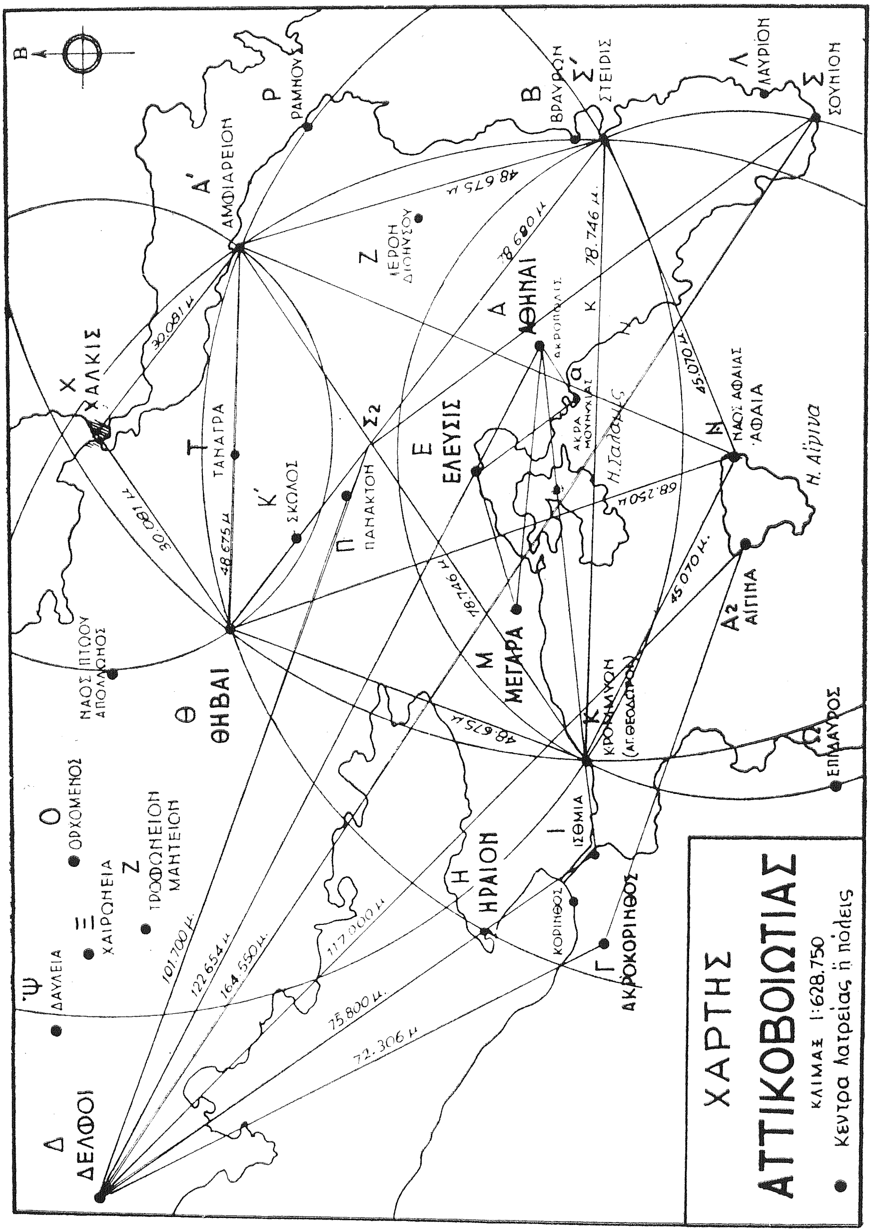
Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$\frac{\text{Κρομμυὼν — Στεῖρις}}{\text{Θῆβαι — Ἀμφιάρειον}} = \frac{78\,746}{48\,675} = 1{,}617, \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618.$$

$$\frac{\text{Θῆβαι — Ἀμφιάρειον}}{\text{Θῆβαι — Χαλκὶς}} = \frac{48\,675}{30\,081} = \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618.$$

$$\frac{\text{Κρομμυὼν — Στεῖρις}}{\text{Κρομμυὼν — Θῆβαι}} = \frac{78\,746}{48\,675} = 1{,}617, \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618.$$

$$\frac{\text{Δελφοὶ — Αἴγινα}}{\text{Δελφοὶ — Ἀκροκόρινθος}} = \frac{117\,000}{72\,306} = \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618.$$


ΧΑΡΤΗΣ
ΑΤΤΙΚΟΒΟΙΩΤΙΑΣ
ΚΛΙΜΑΞ 1:628.750
Κεντρα λατρείας ή πόλεις
Δ ΔΕΛΦΟΙ
Ψ ΔΑΥΛΕΙΑ
Ξ ΧΑΙΡΩΝΕΙΑ
Ο ΟΡΧΟΜΕΝΟΣ
Ζ ΤΡΟΦΩΝΕΙΟΝ ΜΑΝΤΕΙΟΝ
ΝΑΟΣ ΠΤΩΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΟΣ
Θ ΘΗΒΑΙ
Χ ΧΑΛΚΙΣ
Τ ΤΑΝΑΓΡΑ
Κ' ΣΚΩΛΟΣ
Α' ΑΜΦΙΑΡΕΙΟΝ
Ρ ΡΑΜΝΟΥΣ
Π ΠΑΝΑΚΤΟΝ
Σ2
Ε ΕΛΕΥΣΙΣ
Ζ ΙΕΡΟΝ ΔΙΟΝΥΣΟΥ
Α ΑΘΗΝΑΙ
ΑΚΡΟΠΟΛΙΣ
Κ
α ΑΚΡΑ ΜΟΥΝΥΧΙΑΣ
Η. Σαλαμίς
Β ΒΡΑΥΡΩΝ
Σ' ΣΤΕΙΡΙΣ
Λ ΛΑΥΡΙΟΝ
Σ ΣΟΥΝΙΟΝ
Ν ΝΑΟΣ ΑΦΑΙΑΣ ΑΦΑΙΑ
Η. Αίγινα
Α2 ΑΙΓΙΝΑ
Μ ΜΕΓΑΡΑ
Κ ΚΡΟΜΜΥΩΝ (ΑΓ. ΘΕΟΔΩΡΟΙ)
Ω ΕΠΙΔΑΥΡΟΣ
Ι ΙΣΘΜΙΑ
Η ΗΡΑΙΟΝ
ΚΟΡΙΝΘΟΣ
Γ ΑΚΡΟΚΟΡΙΝΘΟΣ
30.081 μ
48.675 μ
78.680 μ
78.746 μ
45.070 μ
68.250 μ
101.700 μ
122.654 μ
164.550 μ
117.000 μ
75.800 μ
72.306 μ

$$\frac{\text{Δελφοὶ — Ἀκρόπολις}}{\text{Δελφοὶ — Ἰσθμία}} = \frac{122\,654}{75\,800} = \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618.$$

$$\frac{\text{Δελφοὶ — Σούνιον}}{\text{Δελφοὶ — }\Sigma_2} = \frac{164\,550}{101\,700} = 1{,}617, \qquad \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618.$$

Ἐκ τῶν σημερινῶν μετρήσεων τῶν ἀποστάσεων μεταξὺ ἱερῶν καὶ πόλεων τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος, αἱ ὁποῖαι ἐπιβεβαιοῦν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς χρυσῆς τομῆς ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων περὶ τὸ ἔτος 10000 π.Χ. συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι οὗτοι εἶχον ἐπινοήσει μεθόδους μετρήσεως τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπὶ τοῦ παρόντος παραμένουν ἄγνωστοι.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

3. Τὰ περισωθέντα Μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν Ἑλλήνων εἶναι τὰ ἑξῆς : 1) Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ μικρότερα τούτου ἔργα, 2) Ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, 3) Τὰ Κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου ἐκτὸς τοῦ 8 βιβλίου, 4) Ἔργα τοῦ Ἥρωνος, 5) Τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Μεγάλη Σύνταξις, ἀστρονομικὸν ἔργον τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, 6) Τὰ Ἀριθμητικὰ (ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων) τοῦ Διοφάντου, 7) Ἡ Συναγωγὴ τοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως, 8) Τὰ σφαιρικὰ τοῦ Θεοδοσίου, 9) Σερήνου ἐξ Ἀντινοείας (κάτω Αἰγύπτου) Περὶ κυλίνδρου τομῆς, Περὶ κώνου τομῆς (περὶ τὸ 330 μ.Χ.), 10) Ἡ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ τοῦ Νικομάχου Γερασηνοῦ, 11) Θέωνος τοῦ Σμυρναίου Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, 12) Τοῦ Ὑψικλέους μικρὰ πραγματεία, 13) Τοῦ Ἰαμβλίχου, Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς (εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο, σχόλιά).

Ἔργον τοῦ περιφήμου μαθηματικοῦ Μενελάου σώζεται εἰς τὴν ἀραβικήν. Τὸ χειρόγραφον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Ἰνδικῆς πόλεως Patna. Εἰς τὴν αὐτὴν Βιβλιοθήκην εὑρίσκονται καὶ ἄλλα ἔργα Ἑλλήνων εἰς τὴν ἀραβικὴν ἀνέκδοτα (42 τὸν ἀριθμὸν) μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ δύο ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅλων τῶν ἔργων τούτων ἐλάβομεν φωτοτυπίας ἰδίαις δαπάναις. Τὰ δύο ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ ἐδημοσιεύσαμεν κατὰ τὸ 1974 δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, εἰς τὸν Γ′ τόμον τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ὁ Σωκράτης, ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἀριστοτέλης δὲν ἦσαν μαθηματικοί, ἦσαν φιλόσοφοι. Καταλέγονται ὅμως καὶ οἱ τρεῖς καὶ εἰς τὴν χορείαν τῶν μαθηματικῶν, διότι ὁ μὲν Σωκράτης διὰ τῶν ἀναζητήσεών του συνέτεινε πολὺ εἰς τὴν αὐστηρὰν μαθηματικὴν ἔρευναν, ὁ δὲ Πλάτων ἔχει κατασπείρει εἰς τὰ ἔργα του μέγα πλῆθος μαθηματικῶν γνώσεων, μερικαὶ τῶν ὁποίων θεωροῦνται ἐπινοήσεις ἰδικαί του. Ὁ Ἀριστοτέλης διὰ τῆς Λογικῆς του καὶ τῶν ἐρευνῶν ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῶν μαθηματικῶν θεωρεῖται ὡς θεμελιωτὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἐξ ἄλλου εἶναι καὶ ὁ πρῶτος ἐπιστήμων, ὅστις χρησιμοποιεῖ μαθηματικὰ εἰς τὴν Φυσικὴν καὶ ἐκ τούτου λογίζεται ὁ ἱδρυτὴς τῆς Θεωρητικῆς Φυσικῆς.

Τὸ λεγόμενον ὑπὸ τοῦ Ξενοφῶντος ὅτι ὁ Σωκράτης, τὰς μαθηματικὰς γνώσεις τοῦ ὁποίου κατὰ τὸ πλεῖστον μνημονεύει ὁ Πλάτων, δὲν ἤθελε πολλὰ μαθηματικὰ παρὰ μόνον ὅσα ἦσαν χρήσιμα εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν (Ξενοφῶντος Ἀπομνημονεύματα IV, 7) θεωρεῖται ὑπερβολικόν. Τὸ σχετικὸν χωρίον τῶν Ἀπομνημονευμάτων ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Αὐτίκα γεωμετρίαν μέχρι μὲν τούτου ἔφη δεῖν μανθάνειν, ἕως ἱκανός τις γένοιτο, εἴ ποτε δεήσειε, γῆν μέτρῳ ὀρθῶς ἢ παραλαβεῖν ἢ παραδοῦναι ἢ διανεῖμαι ἢ ἔργον ἀποδείξασθαι... Τὸ δὲ μέχρι τῶν δυσσυνέτων διαγραμμάτων γεωμετρίαν μανθάνειν ἀπεδοκίμαζεν». (Πάλι ἔλεγεν (ὁ Σωκράτης) ὅτι μέχρις ἐκείνου τοῦ σημείου πρέπει κανεὶς νὰ μανθάνῃ γεωμετρίαν μέχρι τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι ἱκανός, ἐὰν ποτὲ παραστῇ ἀνάγκη, νὰ μετρήσῃ τὴν γῆν (χωράφια ἢ οἰκόπεδα) ὀρθῶς ἢ νὰ παραλάβῃ ἢ νὰ παραδώσῃ ἢ νὰ διανείμῃ ἢ νὰ ἐκτελέσῃ κάποιο ἔργον... Τὸ νὰ μανθάνῃ δὲ κανεὶς γεωμετρίαν μέχρι τῶν δυσκαταλήπτων σχημάτων τὸ ἀπεδοκίμαζεν). Ὁ Πλάτων, λέγει ὅτι διὰ τοὺς πρακτικὰς ἀνάγκας εἶναι ἀρκετὰ ὀλίγα μαθηματικά. Τὸ πολὺ ὅμως αὐτῶν ὁδηγεῖ τὸν ἄνθρωπον νὰ κατανοήσῃ εὐκολώτερον τὴν ἔννοιαν τοῦ Θεοῦ (πρὸς τὸ κατιδεῖν ῥᾷον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν. Πολιτεία 526ε).

Πρῶτος γράψας Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου (IV 13 - 14) ὁ ἐκ Χαλκηδόνος τῆς Μ. Ἀσίας μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος Ξενοκράτης, ὅστις διετέλεσε καὶ διευθυντὴς τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος, μετὰ τὸν ἀνεψιὸν τοῦ Πλάτωνος Σπεύσιππον, ἀπὸ τοῦ ἔτους 339 - 314 π.Χ. Τὸ συναφὲς βιβλίον τοῦ Ξενοκράτους ἔφερε τὸν τίτλον Περὶ γεωμετρῶν βιβλία 5. Ὁ Ξενοκράτης εἶχε γράψει καὶ μαθηματικὰ βιβλία ὑπὸ τοὺς τίτλους Περὶ ἀριθμῶν, Ἀριθμῶν θεωρία, Περὶ γεωμετρίας ,ὡς καὶ βιβλίον μουσικῆς Περὶ διαστημάτων. Ὅλα τὰ βιβλία αὐτὰ ἀπωλέσθησαν.

Πολὺ ὀλίγα ἔτη νεώτερος τοῦ Ξενοκράτους εἶναι ὁ ἐκ Λέσβου μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Θεόφραστος (ἀκμὴ 320 π.Χ.), ὅστις ἐπίσης εἶχε γράψει Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν, κατὰ τὸν Διογένη τὸν Λαέρτιον (V 48) ὑπὸ τὸν τίτλον Ἱστορικῶν γεωμετρικῶν βιβλία α′, β′, γ′, δ′ καὶ ἔργα μαθηματικοῦ περιεχομένου καὶ Περὶ μουσικῆς. Καὶ αὐτὰ τὰ ἔργα ἀπωλέσθησαν ὅλα.

Τρίτος γράψας Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν εἶναι ὁ ἐπίσης μαθητὴς τοῦ Ἀριστοτέλους Εὔδημος ὁ Ῥόδιος σύγχρονος τοῦ Θεοφράστου. Καὶ τὸ ἔργον αὐτὸ ἀπωλέσθη, ἐκτὸς ὀλίγων ἀποσπασμάτων μνημονευομένων ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων καὶ ἐκδοθέντων ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ λογίου L. Spengel. Εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν τοῦ Εὐδήμου στηριζόμενος ὁ Γεμῖνος (1ος αἰ. π.Χ.) ἔγραψε παρόμοιον ἔργον ἀπωλεσθὲν καὶ αὐτό. Τέλος εἰς τὸ ἔργον τοῦ Γεμίνου στηριζόμενος ὁ ἐκ τῶν τελευταίων διευθυντῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος

Πρόκλος (410 - 485 μ.Χ.) ἔγραψεν σχόλια εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου μὲ ἱστορικὰς σημειώσεις περὶ τῶν μαθηματικῶν. Τοῦτο εἶναι τὸ μοναδικὸν διασωθὲν βιβλίον Ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν, τὸ ὁποῖον καίτοι δὲν εἶναι πλῆρες ἀποτελεῖ σπουδαιοτάτην πηγὴν διὰ τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικὰ (Friedlein).

ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ

4. Εἰς τὴν σύγχρονον ἐποχήν, χάρις εἰς τὴν Τυπογραφίαν καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Τεχνικῆς, αἱ πληροφορίαι περὶ τῶν ἐπιστημονικῶν ἐπιτευγμάτων καὶ περὶ τῶν δημιουργῶν αὐτῶν γίνονται εὐκόλως γνωσταί. Κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὅμως, ὅτε τὸ ἐμπόριον τοῦ βιβλίου ἦτο δυσκολωτάτη ὑπόθεσις, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνεται συστηματικὴ παρακολούθησις τῶν ἐπιστημονικῶν προόδων. Ὁ χάρτης δὲν ἦτο ἐκ τῶν εὐθηνῶν ἐμπορευμάτων καὶ οἱ ἀντιγραφεῖς βιβλίων δὲν εὑρίσκοντο, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, εἰς ἀξιοπρόσεκτον βαθμὸν φιλολογικῆς καὶ ἐπιστημονικῆς μορφώσεως. Ἐπὶ πλέον, οἱ συγγράφοντες ἐπιστημονικὰ βιβλία δὲν συνήθιζον νὰ μνημονεύουν ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι εἶχον κάμει ἐπιστημονικὰς ἀνακαλύψεις.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους εἶναι δύσκολον νὰ εὑρεθῇ σήμερον, ποῖοι ἔκαμαν τὰς ἐπιστημονικὰς ἀνακαλύψεις κατὰ τὴν ἀρχαιότητα. Αἱ συναφεῖς πληροφορίαι εἶναι λίαν πενιχραί. Ἂν ἐξαιρέσωμεν τὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Πτολεμαίου, περὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῶν διασωθέντων ἔργων των, περὶ τῶν λοιπῶν ἐπιστημονικῶν δημιουργημάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μόνον μικρὰν ἰδέαν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποκομίσωμεν. Εἰς τὸ περίφημον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου «Στοιχεῖα» π.χ. ἔχουν συγκεντρωθῆ αἱ στοιχειώδεις μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις 300 ἐτῶν ἤτοι ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι τοῦ Εὐκλείδου (600 - 300 π.Χ.) χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν εἰς ποίους Ἕλληνας ὀφείλονται αἱ ἀνακαλύψεις αὐταὶ καὶ πότε ἀκριβῶς ἔγιναν. Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ διὰ τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (τὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων), καὶ τὴν Συναγωγὴν τοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀνεύρωμεν τὰ ὀνόματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι ἐδημιούργησαν τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην καὶ τὴν ἐπιστήμην τῆς ἀστρονομίας θὰ εὑρεθῶμεν πρὸ μεγάλων δυσχερειῶν. Ἡ διάκρισις τῶν ἐπιστημῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα δὲν ἦτο τόσον ἐξειδικευμένη, ὅσον παρουσιάζεται βραδύτερον. Αὕτη ἔγινε μόλις κατὰ τὸν τέταρτον αἰῶνα π.Χ. ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Οἱ πρῶτοι ἐπιστήμονες μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀριστοτέλους ἦσαν καθολικὰ πνεύματα ἀσχολούμενα καὶ μὲ τὰς καθαρῶς θεωρητικὰς ἐπιστήμας καὶ μὲ τὰς θετικάς. Τὸ σύνολον τοῦ ἐπιστητοῦ ἀπετέλει τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐρεύνης τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐπιστημόνων. Οἱ μαθηματικοὶ ἠσχολοῦντο καὶ μὲ τὰς Φυσικὰς Ἐπιστήμας καὶ μὲ τὰς Φιλολογικάς. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν ὅτι ὁ διάσημος μαθηματικὸς τῆς 'Ακαδημίας τοῦ Πλάτωνος, ὁ Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, (408 - 353 π.Χ.), ἔγραψεν 'Αστρονομίαν καὶ Γεωγραφίαν εἰς στίχους κατὰ τὸ πρότυπον τῶν 'Ομηρικῶν 'Επῶν. Εἶχεν ἀκόμη γράψει συγγράμματα νομικά, πολιτικά, 'Ιατρικά. (Die Fragmente des Eudoxus von Knidos, F. Lasserre, Berlin 1966).

Εἰς τοὺς κατωτέρω παρατιθεμένους τρεῖς πίνακας, οἵτινες παρ' ὅλην τὴν καταβληθεῖσαν προσπάθειαν δὲν ἔχουν τὴν ἀξίωσιν νὰ θεωρηθοῦν πλήρεις, περιλαμβάνονται τὰ ὀνόματα τῶν 'Ελλήνων ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι ἐδημιούργησαν τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην, τὴν 'Αστρονομίαν καὶ τὴν Μουσικὴν ἢ συνέτειναν εἰς τὴν δημιουργίαν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ 1500 π.Χ. μέχρι τοῦ 16ου αἰῶνος μ.Χ., ἤτοι εἰς διάστημα 3000 ἐτῶν. Εἰς τὸν πρῶτον πίνακα περιλαμβάνονται οἱ ποιηταὶ καὶ οἱ φιλόσοφοι, οἱ ὁποῖοι εἶχον διατυπώσει κοσμογονικὰς θεωρίας ἢ διὰ τοῦ ἔργου των συνέβαλον γενικῶς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν 'Επιστημῶν.

Οἱ ποιηταὶ Ὅμηρος καὶ 'Ησίοδος εἶχον διατυπώσει ἐκ τῶν μυθολογικῶν παραδόσεων κοσμογονικὰς θεωρίας καὶ θεωροῦνται πρόδρομοι τῆς ἐπιστήμης τῆς 'Αστρονομίας. 'Ο 'Αναξιμένης ἦτο φυσικὸς φιλόσοφος καὶ οὐδεμίαν πληροφορίαν ἔχομεν ὅτι ἠσχολήθη μὲ Μαθηματικά. Ἦτο ὅμως διευθυντὴς τῆς ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ ἱδρυθείσης Σχολῆς τῆς Μιλήτου, ἡ ὁποία ἦτο Σχολὴ πρωτίστως Φυσικομαθηματική.

'Ο 'Αγάθαρχος ὁ Σάμιος ἦτο περίφημος ζωγράφος ἀκμάσας περὶ τὸ 500 π.Χ. Εἶναι ὅμως ὁ πρῶτος συγγράψας βιβλίον Προοπτικῆς (Παραστατικῆς Γεωμετρίας). Τὸ βιβλίον αὐτὸ ἀπετέλεσε τὴν ἀφετηρίαν πρὸς συγγραφὴν ἄλλων βιβλίων Προοπτικῆς ὑπὸ τοῦ 'Αναξαγόρου καὶ τοῦ Δημοκρίτου, τὰ ὁποῖα δυστυχῶς ἀπωλέσθησαν.

'Ο σοφιστὴς Πρωταγόρας (ἐκτὸς τοῦ ἀστρονόμου) εἶχε γράψει πραγματείαν μαθηματικοῦ περιεχομένου, ὑποστηρίζων εἰς αὐτήν, ὅτι δὲν εἶναι ὀρθὴ ἡ θεωρία (σωθεῖσα διὰ τοῦ Εὐκλείδου), καθ' ἣν ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἐφάπτεται αὐτοῦ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. Τὴν θεωρίαν αὐτὴν τοῦ Πρωταγόρου δέχεται καὶ ὁ 'Αριστοτέλης (Μετὰ τὰ Φυσικὰ Β 2.998 α 2).

'Ο Πλάτων καὶ ὁ 'Αριστοτέλης δὲν ἦσαν εἰδικοὶ μαθηματικοί. Ἦσαν φιλόσοφοι. Διὰ τῶν συγγραμμάτων αὐτῶν συνέβαλον τὰ μέγιστα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν Μαθηματικῶν καὶ θεωροῦνται, μὲ ἐπὶ κεφαλῆς τὸν Σωκράτη, οἱ θεμελιωταὶ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. 'Η μαιευτικὴ μέθοδος διαλεκτικῆς τοῦ Σωκράτους ὡδήγησεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Λογικῆς καὶ Μαθηματικὰ χωρὶς Λογικήν, βεβαίως δὲν εἶναι νοητά.

'Ο Σέξτος ὁ 'Εμπειρικὸς ἦτο ἰατροφιλόσοφος. Λογίζεται ὅμως εἰς τοὺς μαθηματικούς, διότι εἶχε γράψει ζητήματα σχετικὰ μὲ τοὺς μαθηματικοὺς καὶ φυσικούς. 'Ενδεικτικῶς ἀναφέρομεν ὅτι ἤλεγχε τοὺς μαθηματικοὺς λέγοντας ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη, ὑποστηρίζων ὅτι ἡ μαθηματικὴ αὐτὴ πρότασις δὲν ~~εἶναι~~ ἀληθής, διὰ τὸν ἑξῆς λόγον: ὁ κύκλος ἔχει ἓν σημεῖον ὡς κέντρον. Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει διάστασιν. Ὅταν ὁ κύκλος διὰ τῆς διαμέτρου τμηθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, πρέπει καὶ τὸ κέντρον νὰ τμηθῇ, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἓν ἡμικύκλιον καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἄλλο ἡμικύκλιον. Αὐτὸ ὅμως δὲν γίνεται, ἀφοῦ τὸ κέντρον δὲν τέμνεται, ὡς ἀδιάστατον σημεῖον.

Κατὰ συνέπειαν, κατὰ τὴν τομὴν τοῦ κύκλου διὰ τῆς διαμέτρου, τὸ κέντρον (τὸ σημεῖον κέντρον) τοῦ κύκλου, ὡς ὑπάρχον, θὰ ἀνήκῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο ἡμικυκλίων. Τότε ὅμως τὰ ἡμικύκλια δὲν θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, κατὰ τὸν Σέξτον τὸν Ἐμπειρικόν, δὲν τέμνει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη (Σέξτος, Ἐμπ. adv. Mathem. IX, 284).

Ὁ Λέων τῆς Κωνσταντινουπόλεως (Ἀκμὴ περὶ τὸ 850 μ.Χ.) ἐχρημάτισεν Ἀρχιδιάκονος τοῦ Ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας, Μητροπολίτης Θεσσαλονίκης καὶ κατόπιν Πρύτανις τοῦ Πανεπιστημίου Κωνσταντινουπόλεως, ὅπου ἐδίδασκεν φιλοσοφίαν καὶ μαθηματικά. Ἦτο κατ' ἀρχὴν θεολόγος. Λογίζεται ὅμως μεταξὺ τῶν σπουδαίων μαθηματικῶν, διότι εἶναι ὁ πρῶτος ἐπιστήμων, ὅστις εἰσήγαγε τὰ γράμματα ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὴν Ἄλγεβραν. Τὴν σπουδαίαν ἀνακάλυψιν αὐτὴν τοῦ Λέοντος ἔκαμεν ἐκ δευτέρου, μετὰ 750 καὶ πλέον ἔτη, ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Viète (1540 - 1603), ἐὰν βέβαια οὗτος δὲν εἶχε λάβει γνῶσιν τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Λέοντος παρὰ Σταυροφόρου τινος. Διότι εἶναι γνωστὸν ὅτι πολλοὶ Σταυροφόροι ἐπιστρέφοντες εἰς τὰς πατρίδας των μετὰ τὰς ἐπιδρομὰς καὶ λεηλασίας τῶν πόλεων τοῦ Βυζαντινοῦ Κράτους, μετέφερον εἰς αὐτὰς καὶ πλεῖστα ἑλληνικὰ χειρόγραμμα ἐπιστημονικοῦ ἢ φιλογικοῦ κ.λπ. περιεχομένου.

Δέον νὰ προσθέσωμεν ὅτι διὰ πολλοὺς μαθηματικοὺς γνωρίζομεν μόνον τὸ ὄνομα καὶ οὐδεμίαν πληροφορίαν ἔχομεν περὶ τυχὸν συμβολῆς αὐτῶν εἰς τὴν Ἐπιστήμην ἢ περὶ τυχὸν ἔργων αὐτῶν. Εἰς τοὺς παρατιθεμένους πίνακας δὲν περιλαμβάνονται οἱ μηχανικοὶ καὶ οἱ γεωγράφοι πλὴν ἐλαχίστων ἐξαιρέσεων.

ΠΙΝΑΞ Ι

Ἕλληνες ποιηταὶ καὶ φιλόσοφοι συμβαλόντες εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν Μαθηματικῶν — Ἀστρονομίας - Μουσικῆς.

1.	Λίνος ὁ Θηβαῖος	15 αἰὼν π.Χ.	31.	Κέβης ὁ Θηβαῖος	5 π.Χ.
2.	Μουσαῖος ὁ Ἀθηναῖος	15 π.Χ.	32.	Κλείδημος	5 π.Χ.
3.	Ὀρφεὺς ἐκ Θράκης	15 π.Χ.	33.	Κρατύλος	5 π.Χ.
4.	Ὅμηρος	9 π.Χ.	34.	Κριτίας	5 π.Χ.
5.	Ἡσίοδος	9 π.Χ.	35.	Κρίτων	5 π.Χ.
6.	Τυρταῖος	7 π.Χ.	36.	Λυκόφρων	5 π.Χ.
7.	Ἀλκαῖος ἐκ Λέσβου	7-6 π.Χ.	37.	Μέλισσος ὁ Σάμιος	5 π.Χ.
8.	Ἀλκμὰν ἐκ Σάρδεων	7-6 π.Χ.	38.	Ξενιάδης	5 π.Χ.
9.	Ἀρχίλοχος ἐκ Πάρου	7-6 π.Χ.	39.	Πάρων	5 π.Χ.
10.	Σαπφὼ ἡ Λεσβία	7-6 π.Χ.	40.	Πρόδικος	5 π.Χ.
11.	Φερεκύδης ἐκ Σύρου	7-6 π.Χ.	41.	Σιμμίας ὁ Θηβαῖος	5 π.Χ.
12.	Ἀνακρέων	6 π.Χ.	42.	Σιμωνίδης	5 π.Χ.
13.	Στησίχορος	6 π.Χ.	43.	Ἀντισθένης	5-4 π.Χ.
14.	Ἀλκμαίων	6-5 π.Χ.	44.	Πλάτων	5-4 π.Χ.
15.	Ἐπιμενίδης ἐκ Κρήτης	6-5 π.Χ.	45.	Ἀριστοτέλης	4 π.Χ.
16.	Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος	6-5 π.Χ.	46.	Θεόφραστος	4 π.Χ.
17.	Πίνδαρος ὁ Θηβαῖος	6-5 π.Χ.	47.	Ζήνων ὁ Κιτιεὺς	4-3 π.Χ.
18.	Ξενοφάνης ὁ Κολοφώνιος	6-5 π.Χ.	48.	Πύρρων ὁ Ἠλεῖος	4-3 π.Χ.
19.	Φρύνιχος	6-5 π.Χ.	49.	Ἄρατος	3 π.Χ.
20.	Ἀντισθένης ὁ Ἡρακλείτειος	5 π.Χ.	50.	Σφαῖρος	3 π.Χ.
21.	Ἀρχέλαος	5 π.Χ.	51.	Χρύσιππος	3 π.Χ.
22.	Γοργίας	5 π.Χ.	52.	Καρνεάδης	3-2 π.Χ.
23.	Διογένης ἐξ Ἀπολλωνίας	5 π.Χ.	53.	Μοδερᾶτος	1 π.Χ.
24.	Ἐμπεδοκλῆς	5 π.Χ.	54.	Ἀλέξανδρος Ἀφροδισιεὺς	2 μ.Χ.
25.	Ἡρόδικος ἐκ Σηλυμβρίας	5 π.Χ.	55.	Πλωτῖνος	3 μ.Χ.
26.	Θρασύμαχος	5 π.Χ.	56.	Πορφύριος	3 μ.Χ.
27.	Πρωταγόρας	5 π.Χ.	57.	Θεμίστιος	4 μ.Χ.
28.	Παρμενίδης	5 π.Χ.	58.	Ἰωάννης Φιλόπονος	6 μ.Χ.
29.	Σωκράτης	5 π.Χ.	59.	Σιμπλίκιος	6 μ.Χ.
30.	Ἰδαῖος	5 π.Χ.	60.	Πλήθων ὁ Γεμιστὸς	14-15 μ.Χ.

ΠΙΝΑΞ ΙΙ

Μαθηματικοὶ καὶ Ἀστρονόμοι

Διὰ τοῦ μετὰ τὸ ὄνομα τιθεμένου (α) δηλοῦνται οἱ περισσότερον γνωστοὶ ὡς ἀστρονόμοι.

1.	Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, αἰὼν	7-6 π.Χ.	8.	Ἑκαταῖος	6.π.Χ.
2.	Κλεόστρατος ἐκ Τενέδου (α)	7-6 π.Χ.	9.	Μαμέρτιος	6 π.Χ.
3.	Μαστρικέτας ἐκ Λέσβου (α)	7-6 π.Χ.	10.	Μανδρόλυτος ἐκ Πριήνης	6 π.Χ.
4.	Φῶκος ὁ Σάμιος	7-6 π.Χ.	11.	Μοῖρις	6 π.Χ.
5.	Ἀναξίμανδρος	6 π.Χ.	12.	Πυθαγόρας ὁ Σάμιος	6-5 π.Χ.
6.	Ἀναξιμένης	6 π.Χ.	13.	Ἀγάθαρχος	5 π.Χ.
7.	Εὐπαλῖνος	6 π.Χ.	14.	Ἀλέξανδρος ὁ Αἰτωλὸς	5 π.Χ.

15. Ἀναξαγόρας 5 π.Χ.
16. Ἀντιφῶν ἐκ Ῥαμνοῦντος Ἀττικῆς 5 π.Χ.
17. Ἀρισταῖος ὁ Κροτωνιάτης 5 π.Χ.
18. Βοΐδας 5 π.Χ.
19. Βρύσων 5 π.Χ.
20. Δημόκριτος 5 π.Χ.
21. Ἔκφαντος 5 π.Χ.
22. Εὐκτήμων (α) 5 π.Χ.
23. Ζήνων ὁ Ἐλεάτης 5 π.Χ.
24. Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος 5 π.Χ.
25. Θρασυάλκης 5 π.Χ.
26. Θυμαρίδας ὁ Πάριος 5 π.Χ.
27. Ἱκέτας (α) 5 π.Χ.
28. Ἵππασος 5 π.Χ.
29. Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος 5 π.Χ.
30. Ἱπποκράτης ὁ Χῖος 5 π.Χ.
31. Ἵππων 5 π.Χ.
32. Ἴων ὁ Χῖος 5 π.Χ.
33. Λεύκιππος 5 π.Χ.
34. Μενέστωρ 5 π.Χ.
35. Μέτων ὁ Ἀθηναῖος (α) 5 π.Χ.
36. Πρῶρος 5 π.Χ.
37. Εὔρυτος 5 π.Χ.
38. Οἰνοπίδης 5 π.Χ.
39. Τίμαιος ὁ Λοκρὸς 5 π.Χ.
40. Φαεινὸς (α) 5 π.Χ.
41. Φιλόλαος (α) 5 π.Χ.
42. Αἰσχύλος (μαθητὴς Ἱπποκράτους Χίου) 5-4 π.Χ.
43. Ἄρχιππος 5-4 π.Χ.
44. Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος 5-4 π.Χ.
45. Βροντῖνος 5-5 π.Χ.
46. Βῶλος 5-4 π.Χ.
47. Εὔδοξος ὁ Κνίδιος 5-4 π.Χ.
48. Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος 5-4 π.Χ.
49. Κέρκωψ 5-4 π.Χ.
50. Λῦσις 5-4 π.Χ.
51. Ὄκκελος 5-4 π.Χ.
52. Ὄψιμος 5-4 π.Χ.
53. Πέτρων 5-4 π.Χ.
54. Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνὸς 4 π.Χ.
55. Ἀμύλκας ὁ Ἡρακλεώτης 4 π.Χ.
56. Ἀμφίνομος 4 π.Χ.
57. Ἀνάξαρχος 4 π.Χ.
58. Ἀρισταῖος ὁ Πρεσβύτερος 4 π.Χ.
59. Βούθηρος 4 π.Χ.
60. Δεινόστρατος 4 π.Χ.
61. Δερκυλλίδας 4 π.Χ.
62. Δικαίαρχος 4 π.Χ.
63. Διογένης ὁ Σμυρναῖος 4 π.Χ.
64. Ἑλικὼν ὁ Κυζικηνὸς 4 π.Χ.
65. Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος 4 π.Χ.
66. Εὔδημος ὁ Ῥόδιος 4 π.Χ.
67. Εὐφράνωρ 4 π.Χ.
68. Θεύδιος ὁ Μάγνης 4 π.Χ.
69. Κάλλιπος ὁ Κυζικηνὸς 4 π.Χ.
70. Κράτης ὁ γεωμέτρης 4 π.Χ.
71. Λεωδάμας ὁ Θάσιος 4 π.Χ.
72. Πρωταγόρας (α) 4 π.Χ.
73. Σίμος 4 π.Χ.
74. Λέων 4 π.Χ.
75. Μέναιχμος 4 π.Χ.
76. Μητρόδωρος 4 π.Χ.
77. Μυωνίδης 4 π.Χ.
78. Νεσσᾶς 4 π.Χ.
79. Νεοκλείδης 4 π.Χ.
80. Ξενοκράτης 4 π.Χ.
81. Ξενόφιλος 4 π.Χ.
82. Πολέμαρχος ὁ Κυζικηνὸς 4 π.Χ.
83. Πυθέας 4 π.Χ.
84. Σπεύσιππος 4 π.Χ.
85. Στράτων 4 π.Χ.
86. Φίλιππος ἐκ Μένδης Μακεδονίας 4 π.Χ.
87. Φίλιππος ἐξ Ὀποῦντος Λοκρίδος 4 π.Χ.
88. Νικαρέτη ἐκ Κορίνθου 4 π.Χ.
89. Ἀλέξανδρος 4-3 π.Χ.
90. Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος 4-3 π.Χ.
91. Αὐτόλυκος ἐκ Πιτάνης 4-3 π.Χ.
92. Βίων ὁ Ἀβδηρίτης 4-3 π.Χ.
93. Εὐκλείδης 4-3 π.Χ.
94. Ἡρακλείδης ὁ ἐκ Πόντου 4-3 π.Χ.
95. Λακύδης 4-3 π.Χ.
96. Κλεινίας ὁ Ταραντῖνος 4-3 π.Χ.
97. Φειδίας (πατὴρ Ἀρχιμήδους) (α) 4-3 π.Χ.
98. Ἀριστόθηρος 3 π.Χ.
99. Ἀρίστυλος 3 π.Χ.
100. Ἀρχιμήδης 3 π.Χ.
101. Διονύσιος (α) 3 π.Χ.
102. Δοσίθεος 3 π.Χ.
103. Ἐρατοσθένης 3 π.Χ.
104. Ζεύξιππος 3 π.Χ.
105. Κλεάνθης 3 π.Χ.

106. Κόνων ὁ Σάμιος 3 π.Χ.
107. Κτησίβιος 3 π.Χ.
108. Παρμενίων 3 π.Χ.
109. Τιμοχάρης 3 π.Χ.
110. Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος 3-2 π.Χ.
111. Σκοπίνας 3-2 π.Χ.
112. Ἀπολλώνιος ἐκ Μύνδου 2 π.Χ.
113. Δημήτριος ὁ Λάκων 2 π.Χ.
114. Διονύσιος 2 π.Χ.
115. Διονυσόδωρος 2 π.Χ.
116. Ἐπιγένης (α) 2 π.Χ.
117. Εὔδημος 2 π.Χ.
118. Ζηνόδωρος 2 π.Χ.
119. Θεοδόσιος 2 π.Χ.
120. Ἵππαρχος (α) 2 π.Χ.
121. Κριτόδημος (α) 2 π.Χ.
122. Ἀνδρίας 2 π.Χ.
123. Πατροκλῆς 2 π.Χ.
124. Ναυκράτης 2 π.Χ.
125. Νικομήδης 2 π.Χ.
126. Περσεύς 2 π.Χ.
127. Σέλευκος 2 π.Χ.
128. Ὑψικλῆς 2 π.Χ.
129. Φίλων ὁ Βυζάντιος 2 π.Χ.
130. Φιλωνίδης 2 π.Χ.
131. Διονύσιος (α) 2-1 π.Χ.
132. Γεμῖνος 2-1 π.Χ.
133. Διοκλῆς 2-1 π.Χ.
134. Διονυσόδωρος ἐκ Μήλου 2-1 π.Χ.
135. Ζήνων ὁ Σιδώνιος 2-1 π.Χ.
136. Ποσειδώνιος 2-1 π.Χ.
137. Ἄνδρων 1 π.Χ.
138. Ἀρισταῖος ὁ νεώτερος 1 π.Χ.
139. Διονύσιος 1 π.Χ.
140. Ζηνόδοτος 1 π.Χ.
141. Σωσιγένης (α) 1 π.Χ.
142. Χάρμανδρος 1 π.Χ.
143. Διόδωρος 1 π.Χ. - 1 μ.Χ.
144. Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς 1 μ.Χ.
145. Ἐρύκινος 1 μ.Χ.
146. Ἡράκλειτος 1 μ.Χ.
147. Κάρπος 1 μ.Χ.
148. Μαρῖνος ὁ Τύριος 1 μ.Χ.
149. Μενέλαος 1 μ.Χ.
150. Λεωνίδας ὁ Ἀλεξανδρεύς (α) 1 μ.Χ.
151. Σπόρος 1 μ.Χ.
152. Ἀγρίππας (α) 1-2 μ.Χ.
153. Αἰνείας ἐξ Ἱεραπόλεως 1-2 μ.Χ.
154. Περικλῆς 1-2 μ.Χ.
155. Φίλων ὁ Τυανεύς 1-2 μ.Χ.
156. Θέων ὁ Σμυρναῖος 2 μ.Χ.
157. Κλεομήδης (α) 2 μ.Χ.
158. Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς 2 μ.Χ.
159. Πτολεμαῖος Κλαύδιος 2 μ.Χ.
160. Σέξτος ὁ Ἐμπειρικὸς 2 μ.Χ.
161. Δημήτριος ὁ Ἀλεξανδρεύς 3 μ.Χ.
162. Διονύσιος 3 μ.Χ.
163. Διόφαντος 3 μ.Χ.
164. Μάγνης 3 μ.Χ.
165. Ἱέριος 3-4 μ.Χ.
166. Μεγεθίων 3-4 μ.Χ.
167. Σύρος 3-4 μ.Χ.
168. Ἀνατόλιος 3-4 μ.Χ.
169. Ἕρμιππος (α) 3-4 μ.Χ.
170. Ἡφαιστίων (α) 3-4 μ.Χ.
171. Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύς 3-4 μ.Χ.
172. Ἰάμβλιχος 3-4 μ.Χ.
173. Πανδροσίων 4 μ.Χ.
174. Πάππος 4 μ.Χ.
175. Παῦλος 4 μ.Χ. (;)
176. Πείθων 4 μ.Χ.
177. Σερῆνος 4 μ.Χ.
178. Διονύσιος ὁ Ἀλεξανδρεύς 4-5 μ.Χ.
179. Ὑπατία 4-5 μ.Χ.
180. Δομῖνος 5 μ.Χ.
181. Πρόκλος 5 μ.Χ.
182. Μαρῖνος 5 μ.Χ.
183. Συριανὸς 5 μ.Χ.
184. Πρόκλος ὁ Βυζάντιος 5-6 μ.Χ.
185. Ἀμμώνιος 6 μ.Χ.
186. Ἀνθέμιος 6 μ.Χ.
187. Ἀσκληπιὸς 6 μ.Χ.
188. Εὐτόκιος 6 μ.Χ.
189. Ἡρώνας 6 μ.Χ. (;)
190. Ἰσίδωρος ὁ Μιλήσιος 6 μ.Χ.
191. Πρόκλος (Μητροπολίτης) 6 μ.Χ.
192. Στέφανος ὁ Ἀλεξανδρεύς 7 μ.Χ.
193. Ἥρων 7 μ.Χ.
194. Γεώργιος ὁ γεωμέτρης 9 μ.Χ.
195. Θεοδήγιος 9 μ.Χ.
196. Λέων 9 μ.Χ.
197. Ψελλὸς Μιχαὴλ 11 μ.Χ.
198. Νεόφυτος Μοναχὸς 12 μ.Χ.
199. Πρόδρομος Θεόδωρος 12 μ.Χ.
200. Τζέτζης Ἰωάννης 12 μ.Χ.
201. Βλεμμύδης Νικόλαος 13μ.Χ.

202. Βρυέννιος Μανουὴλ (α) 13 μ.Χ.
203. Παχυμέρης Γεώργιος 13 μ.Χ.
204. Πλανούδης Μάξιμος 13 μ.Χ.
205. Γρηγορᾶς Νικηφόρος (α) 13-14 μ.Χ.
206. Μετοχίτης Θεόδωρος 13-14 μ.Χ.
207. Χιονιάδης Γρηγόριος 13-14 μ.Χ.
208. Ἀργυρὸς Ἰσαὰκ 14 μ.Χ
209. Βαρλαὰμ 14 μ.Χ.
210. Καβάσιλας Νικόλαος 14 μ.Χ.
211. Μελητινιώτης Θεόδωρος 14 μ.Χ.
212. Πεδασιανὸς Ἰωάννης 14 μ.Χ.
213. Ῥαβδᾶς Νικόλαος 14 μ.Χ.
214. Χρυσοκόκης Γεώργιος (α) 14 μ.Χ.
215. Μανουὴλ Μοσχόπουλος 14-15 μ.Χ.
216. Ἀμιρούνζης Γεώργιος (α) 15 μ.Χ.
217. Βαλσαμὼν Μιχαὴλ 15 μ.Χ.
218. Χρυσολωρᾶς Δημήτριος 15 μ.Χ.
219. Ῥητόριος Βυζαντινὸς 15 μ.Χ. (;)
220. Μαυρόλυκος Φραγκῖσκος 15-16 μ.Χ.

ΠΙΝΑΞ III

Μουσικοὶ

1. Ἀμφίων ὁ Θηβαῖος αἰὼν 15 π.Χ.
2. Φιλάμμων ἐκ Θράκης καὶ Θάμυρις, υἱὸς αὐτοῦ 15 π.Χ.
3. Ὄλυμπος 8-7 π.Χ.
4. Ἀριστόνικος 7 π.Χ.
5. Ἄρδαλος 7 π.Χ.
6. Θαλῆτας (Γόρτυνος Κρήτης) 7 π.Χ.
7. Ἱέραξ ὁ Ἀργεῖος 7 π.Χ.
8. Καλλῖνος ὁ Ἐφέσιος 7 π.Χ.
9. Κλωνᾶς 7 π.Χ.
10. Ξενόδαμος ἐκ Κυθήρων 7 π.Χ.
11. Ξενόκριτος ὁ Λοκρὸς 7 π.Χ.
12. Πολύμναστος ὁ Κολοφώνιος 7 π.Χ.
13. Σακάδας ὁ Ἀργεῖος 7 π.Χ.
14. Τέρπανδρος 7 π.Χ.
15. Ἀρίων 7-6 π.Χ.
16. Τελεσίας ὁ Θηβαῖος 7-6 π.Χ.
17. Περίκλειτος 6 π.Χ.
18. Τελέσιλλα 6 π.Χ.
19. Ἄνθιππος 6-5 π.Χ.
20. Μίδας ὁ Ἀκραγαντῖνος 6-5 π.Χ.
21. Ἀγαθοκλῆς 5 π.Χ.
22. Ἀριστογένης 5 π.Χ.
23. Ἀριστοκλείδης 5 π.Χ.
24. Ἀρίστων ὁ Ἀθηναῖος 5 π.Χ.
25. Ἀρίστων ὁ Ἀργεῖος 5 π.Χ.
26. Δάμων 5 π.Χ.
27. Διόδωρος ὁ Θηβαῖος 5 π.Χ.
28. Δράκων 5 π.Χ.
29. Ἐπίγονος 5 π.Χ.
30. Θράσυλλος 5 π.Χ.
31. Κράτης 5 π.Χ.
32. Κρέξος 5 π.Χ.
33. Λαμπροκλῆς 5 π.Χ.
34. Νικοκλῆς 5 π.Χ.
35. Ξενόφιλος 5 π.Χ.
36. Πρατίνας ἐκ Φλιοῦντος 5 π.Χ.
37. Πυθοκλείδης 5 π.Χ.
38. Σῖμος 5 π.Χ.
39. Τελέστης 5 π.Χ.
40. Τελεφάνης 5 π.Χ.
41. Φρῦνις ἐκ Μυτιλήνης 5 π.Χ.
42. Λάμπρος 5-4 π.Χ.
43. Μέτελλος ὁ Ἀκραγαντῖνος 5-4 π.Χ.
44. Πρόνομος ὁ Θηβαῖος 5-4 π.Χ.
45. Σπίνθαρος ὁ Ταραντῖνος 5-4 π.Χ.
46. Ἀριστόξενος, υἱὸς Σπινθάρου 4 π.Χ.
47. Καφησίας 4 π.Χ.
48. Κλεονείδης 4 π.Χ.
49. Τιμόθεος 4 π.Χ.
50. Φανίας 4 π.Χ.
51. Βάκχιος 3 π.Χ.
52. Ἀρίστων ὁ Θηβαῖος 2 π.Χ.
53. Σωτάδης 2 π.Χ.
54. Διονύσιος 1 π.Χ.
55. Ἡφαιστίων 2 μ.Χ.
56. Ἀλύπιος 3 μ.Χ.
57. Ἀριστείδης Κουϊντιλιανὸς 3 μ.Χ.
58. Διονύσιος 4 μ.Χ.
59. Μεσονείδης (;)
60. Στρατόνικος (;)
61. Φιλόχορος (;)

Αἱ πηγαὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἐλήφθησαν τὰ ὀνόματα τῶν εἰς τοὺς προηγουμένους πίνακας μνημονευομένων Ἑλλήνων ἐπιστημόνων εἶναι κυρίως αἱ ἑξῆς:

1. Διογένης Λαέρτιος Ι, ΙΙ τόμοι. (Βίοι φιλοσόφων).
2. Πρόκλος. Σχόλια εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἐκδ. Friedlein, Λειψία 1873, ἀνατύπωσις G. Olms, Hildesheim, 1967.
3. Pauly - Wissowa Real - Encyclopädie, Stuttgart. Γερμανικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία τῆς Κλασσικῆς Ἐπιστήμης τῆς Ἀρχαιότητος, τόμοι 77 ἐξ 700 περίπου σελίδων ἕκαστος. Ἡ Ἐγκυκλοπαιδεία αὕτη μοναδικὴ εἰς τὸν κόσμον, ἤρχισε νὰ ἐκτυποῦται κατὰ τὸ ἔτος 1839. Κατὰ τὸ 1911 ἐγένετο παραλλήλως, ἐκτὸς τῶν ἀπὸ τοῦ γράμματος Α τόμων, καὶ ἡ ἐκτύπωσις τόμων δευτέρας σειρᾶς, ἀπὸ τοῦ γράμματος R, πρὸς τὸν σκοπόν, ὅπως τὸ ἔργον τελειώσῃ, ὅσον τὸ δυνατὸν ἐνωρίτερον. Τὸ ὅλον ἔργον ἐτελείωσε κατὰ τὸ 1967, ἤτοι εἰς διάστημα 128 ἐτῶν.
4. Hermann Diels. Fragmente der Vorsokratiker, I, II, III, Berlin.
5. Thomas Heath. A history of Greek Mathematics I, II, Oxford 1921.
6. Moritz Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1907.
7. Paul - Henri Michel. De Pythagore à Euclide, Paris 1950.
8. Edmund Hoppe. Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum, Heidelberg 1911.
9. Heinrich Balss. Antike Astronomie, Tusculum Bücher, Μόναχον 1949.
10. Joseph E. Hofmann. Geschichte der Mathematik I, Sammlung Goeschen Band 226/226a, Berlin 1963.
11. Κρουμβάχερ (Krumbacher). Ἱστορία τῆς Βυζαντινῆς Λογοτεχνίας· Μετάφρασις ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ ὑπὸ Γεωργίου Σωτηριάδου, τόμοι 3, ἐν Ἀθήναις. Α'. 1897, Β'. 1900, Γ'. 1900.
12. I. L. Heiberg. Geschichte der Mathematik und Naturwissenchaften im Altertum. München 1925.
13. Pape - Benseler, Griechische Eigennamen (Ἑλληνικὰ Κύρια ὀνόματα). F. Vieweg, Braunschweig 1911. Ἀνατύπωσις Akademische Druck - Verlagsanstalt 1959, GRAZ.

ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΔΙΑ ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΛΦΑΒΗΤΟΥ

5. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐχρησιμοποίουν ὡς σύμβολα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου. Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα, ποίαν ἐποχὴν ἔγινε τοῦτο; Ἡ γνῶσις τῆς ἐποχῆς αὐτῆς ὁδηγεῖ ἡμᾶς εἰς τὴν συναγωκὴν συμπερασμάτων σχετικῶν πρὸς τοὺς πρώτους χρόνους δημιουργίας πολιτισμοῦ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων. Εἶναι αὐτονόητον ὅτι, διὰ νὰ δώσωμεν κάποιαν ἀπάντησιν εἰς τὸ τιθέμενον ἐρώτημα, πρέπει νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐποχῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνεκαλύφθησαν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου. Ἀναζητοῦντες μίαν ἀπάντησιν, περιπίπτομεν ἐκ τῆς μιᾶς δυσκολίας εἰς τὴν ἄλλην.

῎Αλυτον τὸ πρόβλημα τῆς ἐποχῆς καθ' ἣν τὸ πρῶτον ἐχρησιμοποιήθησαν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ ἀλυτότερον τὸ πρόβλημα τῆς ἐποχῆς, καθ' ἣν ἀνεκαλύφθησαν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου. Οἱ ἀρχαῖοι ῞Ελληνες εἶχον ἀσχοληθεῖ ἐπισταμένως ἐπὶ τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Ὁ φανατισμὸς ὅμως ὁ προκληθεὶς ὑπὸ τῶν διαφόρων θρησκευτικῶν αἱρέσεων, τὸ αἴσθημα κατωτερότητος, τὸ ὁποῖον εἶχον πάντοτε οἱ Ῥωμαῖοι ἔναντι τῶν Ἑλλήνων καὶ διάφοροι πολεμικαὶ ἐπιχειρήσεις, συνετέλεσαν εἰς τὴν πυρπόλησιν καὶ καταστροφὴν τῶν Βιβλιοθηκῶν τῶν Ἀθηνῶν καὶ τῆς Ἀλεξανδρείας (590.000 τόμοι κατεστράφησαν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ) καὶ ἐστέρησαν τοὺς νεωτέρους, μεταξὺ ἄλλων καὶ τῶν πολλῶν στοιχείων, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ μορφωθῇ ἀσφαλὴς κάπως γνώμη ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ.

Γενικῶς ἐπικρατεῖ ἡ ἀντίληψις ὅτι τὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου εἶναι ἐπινόησις τοῦ ἐμπορικοῦ λαοῦ τῶν Φοινίκων καὶ ὅτι ταῦτα ἐκομίσθησαν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Φοινίκης (Συρίας) ὑπὸ τοῦ Κάδμου, πρὸς μόρφωσιν τῶν ἀγραμμάτων Ἑλλήνων. Ἐκ τῆς ἐρεύνης, τὴν ὁποίαν ἐνηργήσαμεν, συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἐπὶ τούτου ὑπάρχουν μεγάλαι ἀμφιβολίαι καὶ ὅτι τοιοῦτος ἰσχυρισμὸς ἀποτελεῖ ἁπλῶς μίαν πληροφορίαν ἐκ τῶν συναφῶν πληροφοριῶν, αἵτινες διεσώθησαν.

Κατὰ τὸν 2ον αἰῶνα π.Χ. ἤκμασεν ἐν Ῥόδῳ ὁ λόγιος Διονύσιος ὁ Θρᾷξ, ὁ ὁποῖος ἔγραψεν γραμματικὴν τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης ἐπὶ τῇ βάσει συλλογῆς σχετικῶν πληροφοριῶν πολὺ παλαιοτέρων αὐτοῦ συγγραφέων γραμματικῆς. Τὸ μικρὸν αὐτὸ βιβλίον ἐσώθη σχεδὸν πλῆρες (ἔκδ. Gustavus Uhlig, Τέχνη Διονυσίου Γραμματικοῦ, Λειψία 1883), ἀπετέλεσε δὲ μέχρι τῆς Ἀναγεννήσεως, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 100 π.Χ. περίπου μέχρι τοῦ 1550 μ.Χ., τὴν βάσιν τῆς διαμορφώσεως τῶν γραμματικῶν ὅλων τῶν εὐρωπαϊκῶν γλωσσῶν, (κατὰ τὸ Γερμανικὸν Λεξικὸν Tusculum, ἔκδ. Heimeran, München 1963, λέξις Διονύσιος Θρᾷξ). Ἐπὶ τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ἐγράφησαν πολλὰ σχόλια, μερικὰ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν (Βυζαντινῆς ἐποχῆς) καὶ ἐξεδόθησαν ἐν Λειψίᾳ, ἀποτελέσαντα τὸν τρίτον τόμον τῆς ἐκδόσεως τῶν συγγραφέων τῶν Ἑλλήνων Γραμματικῶν. Ὁ σχολιαστής, ἀφοῦ ἐξηγῇ ὅτι εἰς τὴν γραμματικὴν στοιχεῖον λέγεται ὁ ἐλάχιστος φθόγγος φωνῆς ἐπάγεται σχετικῶς πρὸς τὴν προέλευσιν τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου:

Σελὶς 182, 15. Περὶ δὲ τῆς τῶν γραμμάτων εὑρέσεως διαφόρως οἱ ἱστορικοὶ ἱστόρησαν. Οἱ μὲν Προμηθέα λέγουσι τοῦτον εὑρετήν, ἄλλοι Φοίνικα τὸν τοῦ Ἀχιλλέως παιδαγωγόν, ἄλλοι δὲ τὸν Μιλήσιον Κάδμον, ἄλλοι δὲ τὴν Ἀθηνᾶν, ἄλλοι δὲ ἐξ οὐρανοῦ ἐρῖφθαι τοῖς ἀνθρώποις πρὸς ὠφέλειαν. Εὕρηνται δὲ οὐχ' ὑφ' ἑνὸς ἅπαντα.

Σελὶς 183,31. Ἀπολλώνιος δὲ ὁ Μεσσήνιος ἐν τῷ περὶ ἀρχαίων γραμμά-

των φησί τινας λέγειν, ὅτι Πυθαγόρας αὐτῶν τοῦ κάλλους ἐπεμελήθη, ἐκ τῆς κατὰ γεωμετρίαν γραμμῆς ῥυθμίσας αὐτὰ γωνίαις καὶ περιφερείαις καὶ εὐθείαις. Ἰστέον δὲ ὅτι τὰ ὀνόματα τῶν στοιχείων «σημ. ἐννοεῖ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου) ἄκλιτά εἰσιν, ὡς μὲν φασίν τινες, ὅτι βαρβάρων ἐστιν εὑρήματα. Πρὸς οὓς ἔστιν εἰπεῖν, ὅτι πρῶτον μὲν πολλὰ ὀνόματα τῶν βαρβάρων κλίνονται, ὡς τὸ Ξέρξης καὶ Δαρεῖος, δεύτερον δὲ ὅτι ἄτοπόν ἐστι τὸν θεμέλιον τῆς ἑλληνικῆς διαλέκτου βαρβάρων εὕρημα λέγειν.

Σελὶς 184,20. Φοινίκεια δὲ τὰ γράμματα ἐλέγοντο, ὥς φησιν Ἔφορος ὁ Κυμαῖος καὶ Ἡρόδοτος (V 58), ἐπεὶ Φοίνικες εὗρον αὐτά. Εὐφρόνιος δὲ ὅτι μίλτῳ πρότερον ἐγράφοντο, ὅ ἐστι χρῶμα τι φοινικοῦν. Ἐτεωνεὺς δὲ καὶ Μένανδρος, ἐπειδὴ ἐν πετάλοις φοινικείοις ἐγράφοντο· ἢ ὅπερ κρεῖττον ἐστιν εἰπεῖν, ὅτι φοινίσσεται ὑπ' αὐτῶν ὁ νοῦς ἤγουν λαμπρύνεται. Ἄνδρων δὲ καὶ Μενεκράτης ἀπὸ Φοινίκης τῆς Ἀκταίωνος θυγατρός· Ἀπολλώνιος δὲ ὁ τοῦ Ἀρχιβίου, ἐπειδὴ οἱ ἀντίγραφοι ἀπὸ φοίνικος ξύλον εἶχον καὶ μετ' αὐτοῦ ἔγγραφον· Δοῦρις δὲ ὁ Σάμιος ὁ ἱστορικὸς ἐν ὀγδόῃ τῶν Μακεδονικῶν ἀπὸ Φοίνικος τοῦ Ἀχιλλέως τροφοῦ· Ἀλέξανδρος δὲ ὁ Ῥόδιος ἀπὸ Φοίνικος τοῦ Προνάπου καὶ Εὐρώπης, εὑρόντος αὐτὰ ἐν Κρήτῃ, ὃν ἀπέκτεινε ὁ Ῥοδάμανθυς φθονήσας.

Σελὶς 185,8. Ὅσοι δὲ τὴν τῶν γραμμάτων εὕρεσιν Σισύφῳ, ἢ Παλαμήδῃ ἢ Φοίνικι ἢ Προμηθεῖ ἐφάπτουσιν, ἢ παρ' Αἰγυπτίοις εὑρηκέναι Θώθ, ὃν Ἑρμῆν ἑρμηνεύουσιν, οὐκ ὀρθῶς λέγουσιν· καὶ γὰρ ἡ φύσις ἡνίκα ἐδημιούργησε τὸν ἄνθρωπον, ἐχαρίσατο αὐτῷ τοιαύτην ἐπιτηδειότητα, ὥστε τεχνάσασθαι ταῦτα τὰ στοιχεῖα.

Σελὶς 185,24. Μετὰ δὲ τὸν Δευκαλίωνος κατακλυσμόν, οὐδεὶς τῶν περιλειφθέντων Ἑλλήνων ἐφύλαξεν αὐτῶν τὴν μνήμην, πλὴν τῶν Πελασγῶν τῶν ἀφ' Ἑλλάδος εἰς βαρβάρους πλανηθέντων, οὓς καὶ ὁ ποιητὴς δίους καλεῖ φάσκων «καὶ Λέλεγες καὶ Καύκωνες δῖοί τε Πελασγοὶ» (Ἰλιὰς Κ 429).

Σελὶς 190, 19. Αἰσχύλος δὲ Προμηθέα φησὶν εὑρηκέναι αὐτὰ (Προμηθεὺς 460) ... πιθανὸν δὲ κατὰ πάντα τόπον εὑρετὰς γεγενῆσθαι τῶν στοιχείων (σημ. τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου).

Σελὶς 190, 34. Διέταξε δὲ τὰ στοιχεῖα γράφεσθαι ὡς γράφομεν νῦν Προναπίδης ὁ Ἀθηναῖος.

Ἄλλως εἰς τὸ αὐτὸ

Σελὶς 191, 83. Καλοῦνται δὲ τὰ Στοιχεῖα (σημ. τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου) φοινίκεια, ἐπεὶ ὁ Κάδμος Φοῖνιξ ὢν εἰς Ἕλληνας ταῦτα μετήνεγκεν· ἢ ὡς φωνίκειά τινα ὄντα, ἤτοι φωνῆς ἐγγραμμάτου δυνάμεις καὶ εἰκόνες τοῦ ω μεταβληθέντος εἰς τὴν οι δίφθογγον κατὰ τὴν Βοιωτῶν διάλεκτον, ὡς τὸ *ἀγκώνης ἀγκοίνη· τὴν γὰρ ἀγκάλην ~~ἥτις ἐκ~~ τοῦ ἀγκῶνος ἀγκώνη λέγεται, ἀγκοίνην οἱ Βοιωτοὶ λέγουσιν· (Μελάμποδος γραμματικοῦ ἑρμηνεία τῆς τέχνης Διονυσίου τοῦ Θρᾳκός, ἐν Crammatici Graeci III, Scholia in Dionysii Thracis artem grammaticam, ed. Alfred Hilgrad, Leipzig 1901).*

(Σελὶς 182, 15. Περὶ δὲ τῆς εὑρέσεως τῶν γραμμάτων, οἱ ἱστορικοὶ ἐκφράζουν διαφόρους γνώμας. Ἄλλοι μὲν λέγουν ὅτι εὑρετὴς αὐτῶν εἶναι ὁ Προμηθεύς, ἄλλοι δὲ λέγουν τὸν Φοίνικα εὑρετήν, τὸν παιδαγωγὸν τοῦ Ἀχιλλέως, ἄλλοι δὲ τὸν ἐκ τῆς Μιλήτου Κάδμον, ἄλλοι δὲ τὴν Ἀθηνᾶν, ἄλλοι δὲ ὅτι αὐτὰ ἐρρίφθησαν ἐξ οὐρανοῦ πρὸς ὠφέλειαν τῶν ἀνθρώπων.

Σελὶς 183, 31. Ὁ Ἀπολλώνιος δὲ ὁ Μεσσήνιος εἰς τὸ βιβλίον του Περὶ τῶν ἀρχαίων γραμμάτων, λέγουν μερικοί, ὅτι γράφει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἐφρόντισε διὰ τὴν καλλιγραφίαν των, ὁρμηθεὶς ἀπὸ τὴν γεωμετρίαν, ῥυθμίσας αὐτὰ κατὰ τὰς γωνίας, τὰ καμπύλα μέρη καὶ τὰ εὐθύγραμμα. Πρέπει δὲ νὰ γνωρίζωμεν ὅτι τὰ ὀνόματα τῶν γραμμάτων εἶναι ἄκλιτα, ὅπως λέγουν μερικοί, ὅτι εἶναι εὑρήματα τῶν βαρβάρων. Πρὸς τοὺς ὁποίους ἀξίζει νὰ εἴπῃ κανείς, πρῶτον μὲν ὅτι πολλὰ ὀνόματα τῶν βαρβάρων κλίνονται, ὅπως τὸ Ξέρξης καὶ Δαρεῖος, δεύτερον δὲ εἶναι ἄτοπον νὰ λέγεται ὅτι τὸ θεμέλιον τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης εἶναι εὕρημα βαρβάρων.

Σελὶς 184, 20. Ἐλέγοντο δὲ τὰ γράμματα φοινίκεια, ὅπως γράφει ὁ Ἔφορος ὁ Κυμαῖος καὶ ὁ Ἡρόδοτος (V 58), ἐπειδὴ εὗρον αὐτὰ οἱ Φοίνικες· ὁ Εὐφρόνιος δὲ λέγει ὅτι προηγουμένως ἐγράφοντο μὲ μίλτον (χρῶμα), τὸ ὁποῖον εἶναι χῶμα ὡσὰν φοίνικος. Ὁ Ἐτεωνεὺς δὲ καὶ ὁ Μένανδρος, ἐπειδὴ ἐγράφοντο εἰς φοινίκεια πέταλα· ἢ τὸ καλλίτερον, διότι μὲ αὐτὰ λαμπρύνεται (φοινίσσεται) τὸ μυαλό. Ὁ Ἄνδρων δὲ καὶ ὁ Μενεκράτης, ὅτι ἔλαβον τὰ γράμματα τὸ ὄνομα ἀπὸ τὴν Φοινίκην τὴν κόρην τοῦ Ἀκταίωνος· ὁ Ἀπολλώνιος δὲ ὁ υἱὸς τοῦ Ἀρχιβίου, ἐπειδὴ οἱ ἀντιγραφεῖς εἶχον ξύλον ἐκ φοίνικος καὶ δι' αὐτοῦ ἔγραφον. Ὁ Δοῦρις δὲ ὁ Σάμιος ἱστορικὸς εἰς τὸ ὄγδοον βιβλίον τῶν Μακεδονικῶν, λέγει ὅτι τὰ γράμματα ὠνομάσθησαν φοινίκεια ἀπὸ τοῦ παιδαγωγοῦ τοῦ Ἀχιλλέως, Φοίνικος. Ἀλέξανδρος δὲ ὁ Ῥόδιος ὅτι ὠνομάσθησαν ἔτσι ἀπὸ τοῦ Φοίνικος υἱοῦ τοῦ Προνάπου καὶ τῆς Εὐρώπης, ὁ ὁποῖος εὗρεν αὐτὰ εἰς τὴν Κρήτην καὶ ἐφονεύθη λόγῳ φθόνου ἀπὸ τὸν Ῥαδάμανθυν.

Σελὶς 185, 8. Ὅσοι δὲ λέγουν ὅτι τὰ γράμματα τὰ ηὗρε ὁ Σίσυφος ἢ ὁ Παλαμήδης ἢ ὁ Φοῖνιξ ἢ ὁ Προμηθεύς, ἢ εἰς τοὺς Αἰγυπτίους ὁ Θώθ, τὸν ὁποῖον ἑρμηνεύουν Ἑρμῆν, δὲν λέγουν ὀρθῶς· διότι ἡ φύσις ὅταν ἐδημιούργησε τὸν ἄνθρωπον τοῦ ἐχάρισεν αὐτὴν τὴν ἐπιτηδειότητα, ὥστε νὰ ἀνακαλύψῃ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.

Σελὶς 185, 24. Μετὰ δὲ τὸν κατακλυσμὸν τοῦ Δευκαλίωνος, κανεὶς ἀπὸ τοὺς διασωθέντας δὲν διετήρησε τὴν μνήμην αὐτῶν, πλὴν τῶν Πελασγῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπλανήθησαν ἀπὸ τὴν Ἑλλάδα εἰς τοὺς βαρβάρους, τοὺς ὁποίους ὁ ποιητής ὀνομάζει θείους, λέγων «καὶ Λέλεγες καὶ Καύκωνες καὶ θεῖοι Πελασγοί». ('Ιλ. Κ 429).

Σελὶς 190, 19. . . 'Ο Αἰσχύλος δὲ λέγει ὅτι εὑρῆκε τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ὁ Προμηθεύς (Προμηθεὺς 460). . . εἶναι δὲ πιθανώτατον ὅτι εὑρεταὶ αὐτῶν ὑπῆρξαν εἰς ὅλους τοὺς τόπους.

Σελὶς 190,34. Διέταξε δὲ νὰ γράφωνται τὰ γράμματα, ὅπως γράφομεν αὐτὰ σήμερα, ὁ Προναπίδης ὁ 'Αθηναῖος.

Ἄλλως εἰς τὸ αὐτὸ

Σελὶς 191, 83. 'Ονομάζονται δὲ τὰ γράμματα φοινίκεια, ἐπειδὴ (κατά τινα ἐκδοχὴν) ὁ Κάδμος Φοῖνιξ ὢν τὰ μετέφερεν εἰς τὴν 'Ελλάδα ἢ κατ' ἄλλην ἐκδοχήν, ὡς ὄντα φωνίκεια, δηλ. δυνάμεις ἐγγραμμάτου φωνῆς καὶ εἰκόνος, τοῦ ὠμέγα μεταβληθέντος εἰς τὴν δίφθογγον οι κατὰ τὴν διάλεκτον τῶν Βοιωτῶν, ὅπως τὸ ἀγκώνη ἔγινε ἀγκοίνη· διότι τὴν ἀγκάλην, ἡ ὁποία ἐκ τοῦ ἀγκῶνος λέγεται ἀγκώνη, οἱ Βοιωτοὶ τὴν λέγουν ἀγκοίνην.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτιθεμένων, συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι δὲν εὐσταθεῖ, ὅτι οἱ Ἕλληνες, ἀμαθεῖς ὄντες, ἐδιδάχθησαν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των ὑπὸ τῶν Φοινίκων. Διερωτᾶται τις, ἂν οἱ Φοίνικες εἶχον ἐπινοήσει ἓν ἀλφάβητον διὰ τὸν ἑαυτὸν των καὶ ἓν ἄλλο, ἐντελῶς διάφορον τοῦ ἰδικοῦ των διὰ τοὺς Ἕλληνας!. 'Εξ ἄλλου, διατί οἱ Φοίνικες ἐνῷ ἔγραφον ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἐδίδαξαν τοὺς Ἕλληνας νὰ γράφουν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά; Τοὐναντίον, θεωρεῖται λογικὸν καὶ βέβαιον ὅτι οἱ Ἕλληνες ἐπενόησαν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου των μόνοι των, ὡς τοῦτο ἔκαμον καὶ ἄλλοι λαοὶ διὰ τὰ ἰδικά των ἀλφάβητα. Τώρα γεννᾶται τὸ ἐρώτημα, διατὶ τὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου εἶναι 24 (εἰς τὸν Βοιωτικὸν ἀλφάβητον 26 παλαιότερον) καὶ ποῖος ἐδίδαξε τοὺς Ἕλληνας (καὶ τοὺς ἄλλους λαοὺς φυσικὰ) νὰ δώσουν τὴν ὡρισμένην τάξιν εἰς τὰ γράμματα, ἐντὸς τοῦ ἀλφαβήτου; Διατί τὸ βῆτα π.χ. ἐτέθη δεύτερον; διατί τὸ ἔψιλον ἐτέθη πέμπτον; Διὰ μὲν τὸ ἄλφα λέγουν, ὅτι τὸ μικρὸ παιδὶ μόλις γεννᾶται προφέρει τὸ α αὐθορμήτως.

Διὰ τὴν τάξιν ὅμως τῶν ἄλλων γραμμάτων οὐδεὶς εἶναι εἰς θέσιν νὰ δώσῃ ἀπάντησιν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν ἔργον Grammatici Graeci III κ.λπ., σελὶς 317, 15 σημειοῦνται τὰ ἑξῆς: <'Ηλιοδώρου>. Αἰτίαν δὲ τῆς τάξεως οἶδεν οὐδὲ εἷς· φύσεως γάρ εἰσιν εὑρήματα. (Κανεὶς δὲν γνωρίζει τὴν αἰτίαν τῆς τάξεώς των, διότι εἶναι εὑρήματα τῆς φύσεως).

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ βιολογικὸς παράγων χρόνος εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις συνετέλεσεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ ἀλφαβήτου, εἰς τὴν διάταξιν τῶν γραμμάτων εἰς τὸν ἀλφάβητον καὶ εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῶν λέξεων καὶ τῆς γλώσσης. Καὶ διὰ νὰ γίνουν ὅλα αὐτὰ θὰ ἐχρειάσθησαν πολλαὶ χιλιάδες ἐτῶν καὶ ὄχι ἁπλῶς ἑκατοντάδες ἐτῶν.

ΟΙ ΑΡΧΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

6. Εἰς τὸ μέγα χρονικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον ἀπῃτήθη διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὴν διάταξιν τῶν γραμμάτων ἐντὸς αὐτοῦ πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐκτεταμένον χρονικὸν διάστημα, ὁποῖον ἐχρειάσθη διὰ νὰ καταλήξουν οἱ Ἕλληνες νὰ γράφουν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Διότι κατὰ τὸν αὐτὸν ἀνωτέρω μνημονευόμενον συγγραφέα (σελ. 484, 24).

«Τῶν ἀρχαίων οἱ μὲν βουστροφηδὸν ἔγραφον, οἱ δὲ κιονηδόν, οἱ δὲ πλινθηδόν, οἱ δὲ σπειρηδὸν ὡς:

βουστροφηδὸν	κιονηδὸν	πλινθηδὸν	σπειρηδὸν δὲ οὕτω
α β γ δ ε ζ η θ	α ε ι ν ρ φ	α ω ψ χ φ υ τ	α θι πρ ω
π ο ξ ν μ λ κ ι	β ζ κ ξ σ χ	β σ	β η κ ο σ ψ
ρ σ τ υ φ χ ψ ω	γ η λ ο τ ψ	γ ρ	γ ζ λ ξ τ χ
	δ θ μ π υ ω	δ π	δε μν υφ
		ε ο	
		ζ ξ	
		η θ ι κ λ μ ν	

ἃ δὲ νῦν ἡμεῖς γράφομεν λέγονται δισχιδόν, παρὰ τὸ διεσχίσθαι τοὺς στίχους». (Σημ. Σπειρηδὸν = νὰ σχηματίζεται καμπύλη γραμμή, κοχλιοειδής, σπειροειδής, ἡμιτονοειδής).

Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν φωνητικῶν φθόγγων, ἡ ἀνακάλυψις γραμμάτων διὰ τὴν γραπτὴν παράστασιν αὐτῶν, ἡ ἀνακάλυψις τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τοῦ τρόπου γραφῆς τῶν λέξεων καὶ ἡ δημιουργία τῆς γλώσσης δὲν ἔγιναν εἰς μικρὸν χρονικὸν διάστημα, ἀλλὰ τοὐναντίον θὰ ἐχρειάσθη χρονικὸν διάστημα χιλιάδων ἐτῶν. Εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ λογικὸν εἶναι νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἕκαστος λαὸς ἀναλόγως τῶν ψυχικῶν καὶ πνευματικῶν αὐτοῦ ἰδιοτήτων καὶ τοῦ περιβάλλοντος εἰς τὸ ὁποῖον ἔζη θὰ ἐδημιούργησε καὶ ἀνάλογον πολιτισμὸν καὶ ἀνάλογα μαθηματικὰ ἐντὸς μεγάλου χρονικοῦ διαστήματος. Ἡ ἀνακάλυψις τοῦ κ. Μανιᾶ ἀποτελεῖ ἐπιβεβαίωσιν τῆς γνώμης, ὅτι οἱ Ἕλληνες περὶ τὸ ἔτος 10.000 π.Χ. εἶχον ἤδη δημιουργήσει ἀρκούντως ἀνεπτυγμένον πολιτισμόν ,ἀφοῦ ἐγνώριζον καὶ ἐφήρμοζον τὸν κανόνα τῆς χρυσῆς τομῆς εὐθείας, καὶ ἀπόδειξιν προσέτι τῆς πληροφορίας τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως τῆς δοθείσης πρὸς τὸν Σόλωνα, καὶ μνημονευομένης ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος εἰς τοὺς διαλόγους αὐτοῦ Τίμαιος καὶ Κριτίας, ὅτι οἱ Ἀθηναῖοι (καὶ οἱ Ἕλληνες) εἶχον πολιτισμὸν 9000 ἔτη πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος καὶ ὅτι τὴν παλαιὰν αὐτὴν ἐποχὴν ἐβυθίσθη ἡ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν εὑρισκομένη ἔξω τοῦ πορθμοῦ τοῦ Γιβραλτὰρ μεγάλη νῆσος Ἀτλαντίς. Πρόδηλον δὲ εἶναι ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν Ἑλλήνων, ὅπως χρησιμοποιοῦν τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν, εἶναι μεταγενεστέρα τῆς ἀνακαλύψεως τῶν γραμμάτων. Θεωρεῖται ὅμως πιθανὸν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων διὰ τοῦ νοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων καὶ ὅτι εἶναι αὕτη πολὺ προγενεστέρα τῆς ἀνακαλύψεως τῆς γραφῆς γενικῶς.

Κατὰ τοὺς κλασσικοὺς χρόνους τῆς ἀρχαιότητος (600 - 300 π.Χ.) ὑπῆρχον ἐν Ἑλλάδι δύο συστήματα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Τὸ πρῶτον σύστημα ὀνομάζεται ἀττικὸν σύστημα καί, φαίνεται, ὅτι τοῦτο εἶχεν ἐπινοηθῆ παλαιότατα ὑπὸ τῶν Ἀθηναίων, ἀναφέρεται δὲ ὅτι ἐχρησιμοποιεῖτο ἀκόμη ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος (περίπου 600 π.Χ.). Γνῶσιν τοῦ συστήματος αὐτοῦ λαμβάνομεν ἐκ περισωθέντος ἀποσπάσματός τινος ἔργου ἀποδιδομένου εἰς τὸν Ἀλεξανδρινὸν συγγραφέα Ἡρωδιανόν, ἀκμάσαντα περὶ τὸ 150 μ.Χ., δημοσιευομένου δὲ εἰς τὸ παράρτημα τοῦ 8ου τόμου τοῦ μοναδικοῦ λεξικοῦ τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης τοῦ ἐκδοθέντος ἐν Παρισίοις ἀπὸ τοῦ 1572 ὑπὸ τοῦ Γάλλου τυπογράφου καὶ ἐκδότου Ἑρρίκου Στεφάνου (1528 - 1598), ὑπὸ τὸν τίτλον Thesaurus linguae graecae (Θησαυρὸς τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης). Ἀλλὰ καὶ μερικαὶ ἐπιγραφαὶ ἐπὶ μαρμάρου παρέχουν ἀρκετὰς ἐνδείξεις ἐπὶ τοῦ συστήματος αὐτοῦ. (Wilhelm Larfeld, Griechische Epigraphik, vol I., Μόναχον 1914). Τὸ ἐν λόγῳ ἀπόσπασμα ἔχει ὡς ἑξῆς:

ΗΡΩΔΙΑΝΟΥ, ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

(ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΓΡΑΦΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧ. ΕΛΛΗΝΩΝ)

Ἐπὶ τῶν σημείων ἄν τις φαίη καὶ ταῦτα ὅσα ἀριθμοὶ σημεῖά ἐστι καὶ γὰρ ταῦτα ἔν τε ταῖς γραφαῖς τῶν βιβλίων ἐπὶ τοῖς πέρασιν ὁρῶμεν γραφόμενα· ἀλλὰ καὶ παρὰ Σόλωνι τῷ τοὺς νόμους Ἀθηναίων γράψαντι τὰ ἐπ' ἀργυρίῳ προστιμήματα, (δηλ. χρηματικὰ πρόστιμα) τούτοις ὁρῶ τοῖς γράμμασι σεσημασμένα, καὶ στήλας δὲ τὰς παλαιὰς καὶ ψηφίσματα καὶ νόμους πολλοὺς οὕτως ἐστὶν εὑρέσθαι τὰ τῶν ἀριθμῶν σημεῖα ἔχοντας· φέρε οὖν καὶ ταῦτα γράψωμεν, ἵνα μηδὲν ὑμῖν παρῶφθαι δόξῃ, τὸν μὲν οὖν ἕνα ἀριθμόν, ἓν ἰῶτα σημαίνει· τὸν δὲ δύο, δύο ΙΙ· καὶ οὕτω μέχρι τῶν τεσσάρων, τὸν γὰρ πέντε, τὸ Π γράμμα σημαίνει· ὁμοίως τὸν ἓξ τὸ αὐτὸ Π καὶ μετὰ τοῦ ἑνὸς Ι, ὥσπερ τοῖς πέντε ἑνὸς προστιθεμένου, καὶ μέχρι τῶν ἐννέα· ὁ γὰρ δέκα, τῷ Δ σημαίνεται, τὰ εἴκοσι, τὰ δύο ΔΔ. καὶ μέχρι τῶν τεσσαράκοντα ὁμοίως. τὰ γὰρ πεντήκοντα, τὸ Π γράμμα σημαίνει Δ ἔχον ἐν αὐτῷ μέσον $\overline{|Δ|}$*, τὰ δὲ ἑξήκοντα, ταὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον ἀκολούθως αὐτοῖς παρατιθέμενον. καὶ οὕτω μέχρι τῶν ἐνενήκοντα. τὰ γὰρ ἑκατόν, τῷ Η σημαίνεται. τὰ διακόσια τὰ δύο Η Η, καὶ οὕτω μέχρι τῶν τετρακοσίων. τὰ γὰρ πεντακόσια, τὸ Π γράμμα σημαίνει, ἔχον ἐν ἑαυτῷ μέσον τὸ Η,* $\overline{|Η|}$*, τὰ δὲ ἑξακόσια, ὁποίως τοῦ αὐτοῦ τούτου σημείου παρατιθεμένου τοῦ Η, καὶ μέχρι τῶν ἐνακοσίων ὁμοίως. τὰ γὰρ χίλια, τὸ Χ γράμμα σημαίνει. καὶ τὰ δισχίλια, τὰ δύο ΧΧ· καὶ μέχρι τῶν τετρακισχιλίων, ὁμοίως πάλιν τὰ πεντασχίλια τὸ Π ἔχον μέσον τὸ Χ σημαίνει* $\overline{|Χ|}$*. τὰ δὲ ἑξακισχίλια παρα-*

πλησίως τοῖς προειρημένοις, τὸ αὐτὸ ~~τοῦτο~~ σημαίνει, παρατιθεμένου αὐτῷ τοῦ Χ. καὶ μέχρι τῶν ἐνακισχιλίων ὁμοίως. τὰ δὲ μύρια, τὸ μ γράμμα σημαίνει. αἱ δὲ παραθέσεις τούτων, ἡνίκα μὲν αὔξειν τοὺς ἀριθμοὺς δέῃ, ἐπὶ τὸ δεξιὸν μέρος γίνονται· ἡνίκα μὲν μειοῦν, ἐπὶ τὸ ἕτερον. ἡ γὰρ παράθεσις ἐκεῖθεν, σημαίνει ὅτι χρὴ τοῦτον τὸν ἐλάττω ἀριθμὸν ἀπ' ἐκείνου τοῦ πλείονος ἀφαιρεῖν. ὑπέγραψα δὲ αὐτὰ τὰ σχήματα τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρξάμενος, παραθεὶς αὐτῶν ἕκαστα τὰ τοῦ κοινοῦ ἀριθμοῦ σημεῖα ἵνα οὕτω μᾶλλον γνώριμα ᾖ τὰ προειρημένα τούτων. χρὴ δ' ὡς προείρηται, ποιεῖθαι· τὰ γὰρ παρακείμενα γράμματα τὸ ἕκαστον ἀριθμοῦ πλῆθος σημαίνει. ἔγραψα δὲ μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, χιλιάδας. τὰς γὰρ ἐφ' ἑκάστῳ τούτων παρ' αὐτῶν προσαυξήσεις δῆλον ὅτι καὶ τῶν παραδεδομένων ἐστί. παραθετέον δ' ἀεὶ τὸν μείζω τῷ ἐλάττονι, κατὰ τὸ ἀκόλουθον παρατιθέντας τοσαῦτα τῶν ἀριθμῶν).

(Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Τὸ Η διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται ὁ ἀριθμὸς ἑκατὸν εἶναι ἡ δασεῖα τοῦ ἑκατόν. Τοῦτο γίνεται ἀκόμη κατανοητόν, ὅταν γράψωμεν λατινιστὶ τὸν ἑκατὸν | HECATON)).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκθέσεως τοῦ Ἡρωδιανοῦ φαίνεται σαφῶς ἡ ἀρχαϊκὴ συμβολικὴ παράστασις τῶν ἀριθμῶν, ἡ λεγομένη Ἀττικὴ παράστασις.

Κατὰ ταύτην ἡ μονὰς παρίσταται διὰ μιᾶς γραμμῆς (τοῦ ἰῶτα), οἱ δὲ ἑπόμενοι ἀριθμοὶ 2, 3, 4 παρίστανται διὰ ἀναλόγων γραμμῶν (||, |||, ||||). Ἐκ τούτων ἡ ῥωμαϊκὴ παράστασις τῶν ἀριθμῶν, ληφθεῖσα ἐξ Ἑλλάδος. Ὁ ἀριθμὸς πέντε δὲν παρίσταται διὰ πέντε ἰῶτα, ἀλλὰ διὰ τοῦ Π, ἀρχικοῦ γράμματος τῆς λέξεως πέντε. Εἰς τὴν παράστασιν αὐτὴν ἤχθησαν οἱ Ἕλληνες, διότι τὸ σύνολον τῶν πέντε δακτύλων ἀποτελεῖ τὴν ἀμέσως μεγαλυτέραν μονάδα ἀριθμήσεως. Φαίνεται δέ, ὅτι ἀρχικῶς, δηλ. ἀπὸ τῆς προομηρικῆς ἐποχῆς ἀκόμη καὶ ἐντεῦθεν, οἱ διὰ τοῦ νοῦ γινόμενοι λογαριασμοὶ ἐγίνοντο μὲ βάσιν τὴν πρώτην ἀνωτέραν μονάδα ἀριθμήσεως τὴν πεμπάδα. Ἐνδεικτικῶς σημειοῦμεν ὅτι ὑπαινιγμοὺς λογαριασμῶν διὰ τῶν δακτύλων καὶ χρήσεως τῆς πεμπάδος συναντῶμεν εἰς τὸν Ὅμηρον, τὸν Αἰσχύλον καὶ τὸν Ἀριστοφάνη. Εἰς τὴν Ὀδύσσειαν τοῦ Ὁμήρου (δ 412) ἀναγινώσκομεν *«αὐτὰρ ἐπὴν πάσας πεμπάσσεται ἠδὲ ἴδηται» (ὅταν ἀφοῦ μετρήσῃ μὲ τοὺς πέντε δακτύλους καὶ ἴδῃ)*. Εἰς τὰς Εὐμενίδας τοῦ Αἰσχύλου (748) γράφεται: *«πεμπάζετ' ὀρθῶς ἐκβολὰς ψήφων ξένοι, τὸ μὴ ἀδικεῖν σέβοντες ἐν διαιρέσει»* (Λογαριάστε σωστά, ὦ ξένοι, τὰς μετακινήσεις τῶν λιθαρίων, σεβόμενοι τὴν μὴ ἀδικίαν κατὰ τὴν καταμέτρησιν). Ἐδῶ ὁ Αἰσχύλος ἔχει ὑπ' ὄψει του τὴν ἐκτέλεσιν πράξεων ἐπὶ τοῦ ἄβακος, εἰς τὸν ὁποῖον ὡς πρώτη ἀνωτέρα μονὰς ἀριθμήσεως λαμβάνεται ὁ πέντε, ὡς θὰ γίνῃ φανερὸν κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἄβακος. Ἐνθυμίζει ὅμως εἰς ἡμᾶς τὸ ἀνωτέρω χωρίον τοῦ Αἰσχύλου καὶ τὸν τρόπον τοῦ λογίζεσθαι σήμερον μερικῶν παντοπωλῶν καὶ οἰνοπωλῶν, ἔστιν ὅτε δὲ καὶ τῶν ἐκτελούντων τὴν διαλογὴν τῶν ψήφων κατὰ τὰς διαφόρους ἐκλογὰς Σωματείων κ.λπ., ὅπου αἱ ψῆφοι μέχρι τοῦ 4 παρίστανται διὰ παραλλήλων γραμμῶν, ἡ δὲ πεντὰς σημειοῦται διὰ γραμμῆς τεμνούσης τὰς τέσσαρας παραλλήλους (ὡς —|—|—|—|—).

Εἰς τὴν κωμῳδίαν τοῦ Ἀριστοφάνους Σφῆκες γίνεται ἐπίσης μνεία τοῦ λογαριασμοῦ διὰ τῶν δακτύλων καὶ διὰ τοῦ ἄβακος:

Βδ. Ἄκουσέ με τώρα παρερούλη, ἀφοῦ παύσῃς νὰ εἶσαι συνωφρυωμένος ἐν πρώτοις λογάριασε πάνω - κάτω, ὄχι, μὲ ψήφους (μὲ πετραδάκια ἐπὶ τοῦ ἄβακος) ἀλλὰ μὲ τοὺς δακτύλους τῆς χειρός, τὸν φόρον τὸν εἰσπραττόμενον συλλήβδην· καὶ ἐκτὸς τούτου τὰ τέλη καὶ ὑπὲρ τὰ τέλη χωριστὰ τοὺς ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν φόρους, τὰ πρυτανεῖα, τὰ μέταλλα, τὰς ἀγοράς, τοὺς λιμένας, τοὺς μισθοὺς καὶ τὰς εἰσπράξεις ἀπὸ τοὺς πλειστηριασμούς. Τὸ ἄθροισμα τούτων (σημ. ἡ χρησιμοποίησις τῆς λέξεως σύνολον διὰ τὸ ἄθροισμα δὲν ἐχρησιμοποιεῖτο τότε), γίνεται περίπου 2000 τάλαντα. . . Φι. Καὶ ποῦ πηγαίνουν τὰ ἄλλα χρήματα; Βδ. Εἰς αὐτοὺς ἐδῶ τοὺς (ὁρκιζομένους) «δὲν θὰ προδώσω τὸν συρφετὸν τῶν Ἀθηναίων, ἀλλὰ θὰ πολεμῶ πάντοτε ὑπὲρ τοῦ πλήθους». [654 - 667. Βδ. *ἀκρόασαι νῦν, ὦ παππίδιον, χαλάσας ὀλίγον τὸ μέτωπον καὶ πρῶτον μὲν λόγισαι φαύλως, μὴ ψήφοις ἀλλ' ἀπὸ χειρὸς, τὸν φόρον ἡμῖν ἀπὸ τῶν πόλεων συλλήβδην τὸν προσιόντα κἄξω τούτου τὰ τέλη χωρὶς καὶ τὰς πολλὰς ἑκατοστάς, πρυτανεῖα μέταλλ' ἀγορὰς λιμένας μισθοὺς καὶ δημιόπρατα, τούτων πλήρωμα τάλαντ' ἐγγὺς δισχίλια γίνεται ἡμῖν . . . Φι. Καὶ ποῖ τρέπεται δὴ 'πειτα τὰ χρήματα τἄλλα; Βδ. ἐς τούτους τοὺς 'οὐχὶ προδώσω τῶν Ἀθηναίων κολοσυρτόν, ἀλλὰ μαχοῦμαι περὶ τοῦ πλήθους ἀεί.]*

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 6 ἐγράφετο τὸ γράμμα Π (τὸ ἀρχικὸν τοῦ πέντε) καὶ δεξιὰ τούτου μία μονάς. Διὰ τὸν 7 ἐγράφετο τὸ Π καὶ δεξιὰ τούτου δύο μονάδες κλπ. Ὁ ἀριθμὸς δέκα παρίστατο διὰ τοῦ Δ, ἀρχικοῦ γράμματος τῆς λέξεως δέκα. Οἱ ἀριθμοὶ 11, 12, 13, 14 διὰ τοῦ Δ καὶ παραθέσεως δεξιὰ τούτου ἀντιστοίχων μονάδων. Ὁ δέκα πέντε ἐγράφετο διὰ τοῦ γράμματος Π, ἔχοντος ἐντὸς αὐτοῦ τὸ γράμμα Δ, ἀρχικὸν τοῦ δέκα. Ὁ 20 ἐγράφετο διὰ δύο Δ, ὁ 30 διὰ τριῶν Δ, ὁ 40 διὰ τεσσάρων Δ, ὁ 50 διὰ τοῦ Π ἔχοντος ἐντὸς αὐτοῦ τὸ Δ (5×10). Ὁ ἑκατὸν ἐγράφετο διὰ τοῦ γράμματος Η (HECATON)), ὁ 200 διὰ δύο Η, ὁ 300 = ΗΗΗ κ.λπ. Ὁ 500 ἐγράφετο διὰ τοῦ Π = πέντε, ἔχοντος ἐντὸς αὐτοῦ τὸ γράμμα Η $= 5 \times 100$. Ὁ ἀριθμὸς χίλια ἐγράφετο διὰ τοῦ ἀρχικοῦ γράμματος τῆς λέξεως χίλια, ὁ 2000 = ΧΧ, ὁ 3000 = ΧΧΧ κλπ. Ὁ 5000 ἐγράφετο διὰ τοῦ γράμματος Π ἔχοντος ἐντὸς αὐτοῦ τὸ γράμμα Χ. Μέχρι τοῦ 9000 ἐγράφετο τὸ προηγούμενον σύμβολον ἔχον πρὸς τὰ δεξιὰ ἀντίστοιχα Χ. Ὁ ἀριθμὸς 10.000 παρίστατο διὰ τοῦ Μ, ἀρχικοῦ γράμματος τῆς λέξεως μύρια. Ὁ 20.000 = ΜΜ, ὁ 30.000 = ΜΜΜ κλπ. Ὁ 50.000 ἐγράφετο διὰ τοῦ Π ἔχοντος ἐντὸς αὐτοῦ τὸ Μ (πέντε μυριάδες). Κατωτέρω ἀναγράφομεν συναφῆ πίνακα ἐκ τοῦ ὁποίου ἐμφαίνονται οἱ συμβολισμοὶ τῶν ἀριθμῶν, ληφθέντα ἐκ τοῦ περισωθέντος ἀποσπάσματος τοῦ Ἡρωδιανοῦ:

$1 = \vert$	$11 = \Delta \vert$	$21 = \Delta\Delta \vert$	$40 = \Delta\Delta\Delta\Delta$
$2 = \vert\vert$	$12 = \Delta \vert\vert$	$22 = \Delta\Delta \vert\vert$	$41 = \Delta\Delta\Delta\Delta \vert$
$3 = \vert\vert\vert$	$13 = \Delta \vert\vert\vert$	$25 = \Delta\Delta\, \Pi$	$45 — \Delta\Delta\Delta\Delta\, \Pi$
$4 = \vert\vert\vert\vert$	$14 = \Delta \vert\vert\vert\vert$	$26 = \Delta\Delta\, \Pi \vert$	$46 = \Delta\Delta\Delta\Delta\, \Pi \vert$
$5 = \Pi$	$15 = \overline{\vert\Delta\vert}$	$27 = \Delta\Delta\, \Pi \vert\vert$	$50 = \overline{\vert\Delta\vert}$
$6 = \Pi \vert$	$16 = \overline{\vert\Delta\vert} \vert$	$30 = \Delta\Delta\Delta$	$51 = \overline{\vert\Delta\vert} \vert$
$7 = \Pi \vert\vert$	$17 = \overline{\vert\Delta\vert} \vert\vert$	$31 = \Delta\Delta\Delta \vert$	$55 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Pi$
$8 = \Pi \vert\vert\vert$	$18 = \overline{\vert\Delta\vert} \vert\vert\vert$	$35 = \Delta\Delta\Delta\, \Pi$	$56 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Pi$
$9 = \Pi \vert\vert\vert\vert$	$19 = \overline{\vert\Delta\vert} \vert\vert\vert\vert$	$36 = \Delta\Delta\Delta\, \Pi \vert$	$60 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta$
$10 = \Delta$	$20 = \Delta\Delta$	$37 = \Delta\Delta\Delta\, \Pi \vert\vert$	$61 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta \vert$
$65 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Pi$	$70 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Delta$	$80 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Delta\Delta$	$90 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Delta\Delta\Delta$
$66 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Pi \vert$	$76 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Delta\, \Pi \vert$	$86 = \overline{\vert\Delta\vert}\, \Delta\Delta\Delta\Pi \vert$	$100 = H$
$200 = HH$	$500 = \overline{\vert H\vert}$	$600 = \overline{\vert H\vert}\, H$	$700 = \overline{\vert H\vert}\, HH$
$1000 = X$	$2000 = XX$	$5000 = \overline{\vert X\vert}$	$6000 = \overline{\vert X\vert}\, X$
$9000 = \overline{\vert X\vert}\, XXXX$	$10.000 = M$	$20.000 = MM$	$50.000 = \overline{\vert M\vert}$

$60.000 = \overline{\vert M\vert}\, M$, $70.000 = \overline{\vert M\vert}\, MM$, 100.000 = Ἐντὸς τοῦ δέλτα τὸ γράμμα $M = 10 \times 10000$, 200.000 = Τὸ προηγούμενον σύμβολον δύο φορὰς ἐν συνεχείᾳ. Τὰ σύμβολα διὰ 100.000 καὶ 200.000 δὲν σώζονται εἰς τὸ χειρόγραφον Ἡρωδιανοῦ. Ἀντ' αὐτῶν σώζονται τὰ ἑξῆς σημειούμενα, τὰ ὁποῖα ὅμως, φαίνεται, εἶναι νεωτέρας ἐπινοήσεως.

͵ρ = δεκάκισμύρια = 100.000, ͵σ = εἰκοσάκισμύρια = 200.000.
͵τ = τριακοντάκισμύρια. ͵υ = τεσσαρακοντάκισμύρια. . .
͵ω = ὀγδοηκοντάκισμύρια, ͵ϡ = ἐνενηκοντάκισμύρια.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι οἱ πανάρχαιοι Ἀθηναῖοι, αὐτόχθονες εἰς τὴν Ἀττικὴν κατὰ τὴν βεβαίωσιν τοῦ Θουκυδίδου (I 5) ,εἶχον ἤδη ἐπινοήσει τὸ λεγόμενον ἀριθμητικὸν σύστημα θέσεως, ἤτοι ἀναλόγως τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατεῖχεν ἐν τῇ γραμμῇ τὸ σύμβολον ἐδηλοῦτο καὶ ἡ ἀριθμητικὴ αὐτοῦ ἀξία.

ΤΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

7. Ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον οἱ πρωτόγονοι ἄνθρωποι ἐδημιούργησαν τὰς πρώτας λέξεις διὰ τὴν δήλωσιν διαφόρων πραγμάτων, βραδύτερον δὲ καὶ ἐννοιῶν, χάνεται εἰς τὰ βάθη τῶν αἰώνων. Ἡ νεωτέρα Ψυχολογία ὑποστηρίζει, ὅτι οἱ ἄνθρωποι εἶχον τὴν ἔννοιαν τοῦ στοιχειώδους πλήθους πρὶν ἀκόμη δημιουργηθοῦν αἱ συναφεῖς λέξεις αἱ δηλοῦσαι τοὺς ἀριθμούς, ὡς τοῦτο λέγουν, συμβαίνει εἰς τὴν ὄρνιθα, ἡ ὁποία ἔχει κάποιαν γνῶσιν τοῦ πλήθους τῶν ὑπ' αὐτῆς τρεφομένων νεοσσῶν. Ὡς πρὸς τὴν ἐτυμολογίαν τῶν ἀριθμητικῶν λέξεων, δι' ὅλας τὰς γλώσσας, δὲν ὑπάρχει πειστική τις ἑρμηνεία. Ὑποστηρίζεται, ὅτι διὰ τὸν ἀριθμὸν δέκα (εἰς τὴν ἑλληνικήν), σχηματισθέντα ἐκ τοῦ πλήθους τῶν δακτύλων τῶν δύο χειρῶν ἢ ποδῶν, ἡ προέλευσίς του ἀνάγεται εἰς τὰς λέξεις δάκτυλοι — δέχομαι, ἐν ᾧ αἱ λέξεις δύο — δὶς — δίχα, προέρχονται ἐκ τῶν λέξεων δίκη — δικαιοσύνη. Παρόμοιαι παρατηρήσεις ἰσχύουν, κατὰ τοὺς εἰδικοὺς γλωσσολόγους, καὶ διὰ τὴν ἐτυμολογίαν τῶν ἀριθμητικῶν τῶν λοιπῶν ἰνδοευρωπαϊκῶν γλωσσῶν, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν μεταξύ των συγγένειαν.

Ἡ δημιουργία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος ἔχει τὴν προέλευσίν της εἰς τοὺς δέκα δακτύλους τῶν χειρῶν. Πρῶτος διαπορήσας διὰ τὸ αἴτιον τοῦ σχηματισμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὁ Ἀριστοτέλης, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία φέρει τὸν τίτλον Προβλήματα, γράφει τὰ ἑξῆς: «*Διατὶ πάντες ἄνθρωποι, καὶ βάρβαροι καὶ Ἕλληνες, εἰς τὰ δέκα καταριθμοῦσι, καὶ οὐκ εἰς ἄλλον ἀριθμόν, οἷον β', γ', δ', ε', εἶτα πάλιν ἐπαναδιπλοῦσιν, ἓν πέντε, δύο πέντε, ὥσπερ ἕνδεκα, δώδεκα; οὐδ' αὖ ἐξωτέρω παυσάμενοι τῶν δέκα, εἶτα ἐκεῖθεν ἐπαναδιπλοῦσιν; ἔστι μὲν γὰρ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν ὁ ἔμπροσθεν καὶ ἓν ἢ δύο, καὶ οὗτος ἄλλος τις, ἀριθμοῦσι δ' ὅμως ὁρίσαντες ἄχρι τῶν δέκα. οὐ γὰρ δὴ ἀπὸ τύχης γε αὐτὸ ποιοῦντες φαίνονται καὶ ἀεί. τὸ δὲ ἀεὶ καὶ ἐπὶ πάντων οὐκ ἀπὸ τύχης, ἀλλὰ φυσικόν. πότερον ὅτι τὰ δέκα τέλειος ἀριθμός; ἔχων γὰρ πάντα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ εἴδη, ἄρτιον περιττόν, τετράγωνον κύβον, μῆκος ἐπίπεδον, πρῶτον σύνθετον· ἢ ὅτι ἀρχὴ ἡ δεκάς; ἓν γὰρ καὶ τρία καὶ τέτταρα γίνονται δεκάς· ἢ ὅτι τὰ φερόμενα σώματα ἐννέα; ἢ ὅτι ἐν δέκα ἀναλογίαις τέτταρες κυβικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται, ἐξ ὧν φασὶν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι τὸ πᾶν συνεστάναι; ἢ ὅτι πάντες ὑπῆρξαν ἄνθρωποι ἔχοντες δέκα δακτύλους; οἷον οὖν ψήφους ἔχοντες τοῦ οἰκείου ἀριθμοῦ, τούτῳ τῷ πλήθει καὶ τἄλλα ἀριθμοῦσιν· μόνοι δὲ ἀριθμοῦσι τῶν Θρακῶν γένος τι εἰς τέτταρα, διὰ τὸ ὥσπερ τὰ παιδία μὴ δύνασθαι μνημονεύειν ἐπὶ πολύ, μηδὲ χρῆσιν μηδενὸς εἶναι πολλοῦ αὐτοῖς.* (Ἀριστοτέλους Προβλήματα 910 XV § 3). (Διατὶ ὅλοι οἱ ἄνθρωποι καὶ οἱ βάρβαροι καὶ οἱ Ἕλληνες ἀριθμοῦν μέχρι τοῦ δέκα, καὶ ὄχι μέχρις ἄλλου ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἔπειτα ἀναδιπλοῦν, ὡς ἓν πέντε, δύο πέντε, ὅπως ἕνδεκα, δώδεκα; Ἐπίσης διατί δὲν σταματοῦν εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἔξω τοῦ δέκα καὶ δὲν ἐπαναδιπλοῦν κατόπιν ἀπὸ ἐκεῖ; Διότι ἕκαστος (σύνθετος) ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν προηγούμενον μὲ τὴν προσθήκην ἑνὸς ἢ δύο (κλπ.) καὶ οὕτω δημιουργεῖται κάθε ἀριθμός, ὅμως ἀριθμοῦν μέχρι τοῦ δέκα ὡς ὁρίου. Διότι φαίνεται, τοῦτο δὲν γίνεται τυχαίως, καὶ πάντοτε ἀριθμοῦν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον· ὅ,τι ὅμως γίνεται πάντοτε κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δὲν ὀφείλεται εἰς τὴν τύχην, ἀλλὰ εἶναι φυσικόν. Διατί λοιπὸν κάμνουν αὐτό, διότι ὁ δέκα θεωρεῖται τέλειος ἀριθμός; Ὡς ἔχων δηλαδὴ ἐντὸς αὐτοῦ ὅλα τὰ εἴδη τῶν ἀριθμῶν, τὸν ἄρτιον, τὸν περιττόν, τὸν τετράγωνον, τὸν κύβον, τὴν ἔκφρασιν τοῦ μήκους, τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ) (π.χ.

$4 = 2.2$, $6 = 2.3$ κλπ.) περιέχων τὸν ~~πρῶτον~~ καὶ τὸν σύνθετον ἀριθμόν; Ἢ διότι ἡ δεκὰς ἀποτελεῖ μίαν ἀρχήν; Διότι ἓν καὶ δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα κάμνουν δέκα. Ἢ διότι οἱ κινούμενοι ἀστέρες εἶναι ἐννέα; Ἢ διότι εἰς τὰς δέκα ἀναλογίας ὑπάρχουν τέσσαρες κυβικοὶ ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ἀριθμῶν λέγουν οἱ Πυθαγόρειοι ὅτι ἀποτελεῖται τὸ σύμπαν; Ἢ διότι ὅλοι οἱ ἄνθρωποι ἔχουν δέκα δακτύλους; Διότι ἐν ᾧ ἔχουν λιθάρια (πετραδάκια) διὰ τὴν ἔκφρασιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἀριθμοῦν ἐν τούτοις ὅλα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δακτύλων. Μόνον δὲ μία φυλὴ τῶν Θρᾳκῶν ἀριθμεῖ μέχρι τοῦ τέσσαρα, διότι, ὅπως τὰ παιδιά, δὲν δύνανται νὰ ἐνθυμοῦνται περισσότερον καὶ δὲν χρησιμοποιοῦν καθόλου μεγαλυτέρους αὐτοῦ ἀριθμούς).

Ἐπιστημονικὴν θεώρησιν περὶ ὑπάρξεως ἄλλων ἀριθμητικῶν συστημάτων ἐκτὸς τοῦ δεκαδικοῦ ἐνήργησε τὸ πρῶτον ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Blaise Pascal (1623 - 1662) εἰς τὴν πραγματείαν του Χαρακτῆρες τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν (Caractères de divisibilité des nombres, Πασκὰλ ἅπαντα, τόμος Ε′, ἐκδ. Bossut, La Haye 1779, σελ. 123). Ἀσχέτως πρὸς τοῦτον, ἐρεύνας ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν συστημάτων ἐνήργησεν καὶ ὁ λόγιος Ἐπίσκοπος J. Caramuel y Lobkowitz (1606 - 1682), ὅστις διεπραγματεύθη ἀριθμητικὰ συστήματα μὲ βάσιν τὸ 2 ἕως τὸ 10, τὸ 12 καὶ τὸ 60, εἰς τὸ ἔργον του Mathesis biceps vetus et nova τοῦ 1670.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΒΑΡΟΥΣ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

8. Τὸ δεύτερον σύστημα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, μεταγενέστερον τοῦ πρώτου καὶ ἐπικρατῆσαν γενικῶς εἰς ὅλον τὸν χῶρον, ὅπου ὡμιλεῖτο ἡ ἑλληνικὴ γλῶσσα, εἶναι ἡ παράστασις τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἀλφαβήτου. Ὁ ἀριθμὸς 6 παρίστατο ἀρχικῶς διὰ τοῦ συμβόλου [ὀλίγον δὲ βραδύτερον διὰ τοῦ δίγαμμα F.

Καὶ τὰ δύο σύμβολα θεωροῦνται Βοιωτικῆς προελεύσεως, ὡς συνάγεται ἐκ συναφῶν ἐπιγραφῶν. (Ἴδε Larfeld, Griechische Epigraphik Μόναχον 1914) Βραδύτερον τὰ γράμματα ταῦτα ἐξειλίχθησαν εἰς τὸ Ϛ στίγμα. Ὁ ἀριθμὸς 90 παρίσταται διὰ συμβόλου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται κόππα Q ἢ ϟ, ὁ δὲ ἀριθμὸς 900 διὰ τοῦ συμβόλου, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται Sampi (πιθανὸν = σὰν π) ϡ. Ὁ ἀριθμητικὸς ἀλφάβητος χρησιμοποιεῖ 27 γράμματα, ἀντὶ τῶν 24 τοῦ γραμματικοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι ἐπὶ πλέον τούτου τὸ στίγμα, τὸ κόππα καὶ τὸ σαμπί.

Ἀρχῆθεν ἐχρησιμοποιοῦντο τὰ κεφαλαῖα γράμματα, τὰ ὁποῖα, φαίνεται, ἀνεκαλύφθησαν πρῶτα, βραδύτερον δὲ καὶ τὰ μικρά, τὰ καλούμενα σήμερον πεζά.

Εἰς διάφορα σωζόμενα χειρόγραφα ὑπάρχουν δύο τρόποι χρησιμοποιήσεως τῶν γραμμάτων ὡς ἀριθμῶν (ἰδίως τῶν μικρῶν.). Κατὰ τὸν ἕνα τρόπον τίθεται ὑπεράνω τοῦ γράμματος μία ὁριζοντία γραμμή. Κατὰ τὸν ἄλλον τίθεται εἰς τὸ γράμμα μία ὀξεῖα, πρὸς τὸ ἐπάνω καὶ δεξιὰ μέρος τοῦ γράμματος.

Τὸ ἰῶτα (ι) εἶναι τὸ δέκατον γράμμα τοῦ ἀριθμητικοῦ ἀλφαβήτου. Διὰ τοὺς ἀριθμοὺς 11 - 19 χρησιμοποιεῖται τὸ ἰῶτα (ι) δεξιὰ δὲ τούτου τίθενται τὰ γράμματα τὰ παριστῶντα μονάδας ἤτοι $11 = ια'$, $12 = ιβ'$, $13 = ιγ'$... $19 = ιθ'$. Τὸ σύμβολον κόππα (Q ἢ ϟ) διὰ τοῦ ὁποίου παρίσταται ὁ ἀριθμὸς 90, τοποθετεῖται εἰς τὸν λατινικὸν ἀλφάβητον μεταξὺ p καὶ r, καὶ προφέρεται κοὺ (q). Ὡς γνωστὸν ὁ λατινικὸς ἀλφάβητος, εἶναι ἐπινόησις τῶν κατοίκων τῆς Χαλκίδος. Κατὰ τοὺς κλασσικοὺς χρόνους οἱ Ῥωμαῖοι δὲν εἶχον ἀλφάβητον καὶ παρεκάλεσαν τοὺς Ἀθηναίους, ὅπως δώσουν εἰς αὐτοὺς ἀλφάβητον διὰ νὰ γράφουν καὶ αὐτοὶ τὴν γλῶσσαν των. Ἐκ τῶν πολλῶν ἑλληνικῶν ἀλφαβήτων, τὰ ὁποῖα ἔδειξαν εἰς αὐτοὺς οἱ Ἀθηναῖοι, οἱ Ῥωμαῖοι ἐξέλεξαν τὸν τῆς Χαλκίδος, ὡς εὐκολώτερον.

Τὰ σύμβολα — γράμματα κ ἕως Q ἢ ϟ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν παράστασιν τῶν δεκάδων, ἀπὸ 20 ἕως 90. Ὅταν ὑπάρχουν εἰς τὰς δεκάδας καὶ μονάδες, τοποθετοῦνται τὰ γράμματα τὰ δηλοῦντα μονάδας (ἀπὸ α' — θ') δεξιὰ τοῦ γράμματος τοῦ δηλοῦντος τὰς δεκάδας ὡς π.χ. $κε' = 25$, $νη' = 58$, $Qθ' = 99$. Αἱ ἐννέα ἑκατοντάδες παρίστανται διὰ τῶν γραμμάτων ἀπὸ $ρ = 100$ ἕως ϡ (sampi) $= 900$. Ὅταν ὑπάρχουν εἰς ἀριθμόν τινα ἐκτὸς τῶν ἑκατοντάδων, δεκάδες καὶ μονάδες, αὗται παρίστανται διὰ τῶν ἀντιστοίχων γραμμάτων, τιθεμένου τοῦ γράμματος τῶν δεκάδων δεξιὰ τοῦ γράμματος τῶν ἑκατοντάδων, καὶ τοῦ γράμματος τῶν μονάδων δεξιὰ τοῦ γράμματος τῶν δεκάδων (ἀριθμητικὸν σύστημα θέσεως). Ὁ ἀριθμὸς τῶν χιλιάδων ἀπὸ 1000 - 9000 παρίστατο διὰ τῶν πρώτων ἐννέα γραμμάτων τοῦ ἀριθμητικοῦ ἀλφαβήτου τιθεμένης πλαγίας γραμμῆς πρὸς τὸ κάτω καὶ ἀριστερὰ μέρος ἑκάστου τῶν γραμμάτων τούτων, ὡς, $͵α = 1000$, $͵β = 2000$..., $͵θ = 9000$. Ὁ ἀριθμὸς 10.000 παρίστατο διὰ τοῦ ἀρχικοῦ γράμματος $\overset{Υ}{Μ}$ τῆς λέξεως Μυριὰς $= 10.000$ τιθεμένου τοῦ γράμματος Υ ὑπὲρ τὸ Μ (τοῦ δευτέρου δηλ. γράμματος τῆς λέξεως μυριάς). Διὰ τὴν παράστασιν πολλῶν μυριάδων ἐτίθετο ὑπεράνω τοῦ γράμματος Μ ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὰς μυριάδας, ὡς $\overset{β}{Μ} = 2 \times 10.000 = 20.000$, $\overset{γ}{Μ} = 3 \times 10.000 =$ $= 30.000$, $\overset{͵ατνθ}{Μ} = 1359 \times 10.000 = 13.590.000$. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς περιεῖχε ἐκτὸς τῶν μυριάδων καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς μικροτέρων τάξεων, οὗτοι ἐγράφοντο δεξιὰ τοῦ γράμματος Μ, τιθεμένων τῶν ἀριθμῶν μικροτέρας τάξεως πάντοτε πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἀριθμῶν μεγαλυτέρας τάξεως, ὡς $\overset{͵ζροε}{Μ}͵εωοε' = 7175$ μυριάδες σὺν 5875 ἤτοι 71.755.875. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μυριάδων ἀντὶ νὰ γράφεται ὑπεράνω τοῦ Μ ἠδύνατο νὰ γραφῇ ἀμέσως δεξιὰ τοῦ $\overset{Υ}{Μ}$, ὁπότε ὅμως διὰ μιᾶς τελείας ἐχωρίζετο τοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρας τῆς μυριάδος τάξεως. Ὁ προηγούμενος ἀριθμὸς ἠδύνατο κατὰ ταῦτα νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\overset{\Upsilon}{\mathrm{M}}\ ,\zeta\rho o\varepsilon.,\varepsilon\omega o\varepsilon = 7175.5875 \ (\text{μυριάδες } 7175 + 5875).$$

Εἰς τὰ Γεωμετρικὰ τοῦ Ἥρωνος δύο τελεῖαι τιθέμεναι ὑπὲρ τὸ γράμμα ἐκφράζουν μυριάδας, ὡς π.χ.

$$\ddot{\alpha},\eta\varphi Q\beta = 18\,592 = 1 \text{ μυριὰς } 8592,\ \ddot{\gamma},\beta\sigma\kappa\beta\,\varsigma'\,\iota\eta' = 32222 + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} =$$

$$= 3 \text{ μυριάδες} + 2222 + \frac{1}{6}\,\frac{1}{18},\quad \ddot{\alpha},\delta\psi = 14700,\quad \ddot{\alpha},\alpha\psi = 11700$$

(Γεωμετρικὰ σελ. 17.3, σελ. 20.10, σελ. 21.14, σελ. 31.16 ἀντιστοίχως). Εἰς τὸν δεύτερον ἐκ τῶν προηγουμένων ἀριθμῶν βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὑπάρχουν κλασματικαὶ μονάδες (νοεῖται ἀριθμητὴς ἡ μονὰς) αὗται παρατίθενται δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ εἰς μικρὰν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν. Ὅταν ὅμως καὶ ὁ ἀριθμητὴς ἐκφράζεται δι' ἀριθμῶν μεγαλυτέρων τῆς μονάδος, τότε τὸ κλάσμα γράφεται ὡς καὶ σήμερον, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ὁ παρονομαστὴς γράφεται εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τῆς γραμμῆς τοῦ κλάσματος, ὁ δὲ ἀριθμητιητὴς εἰς τὸ κάτω, ὡς π.χ. $\frac{5}{8} = \frac{\eta'}{\varepsilon'}$.

Ἡ παράθεσις τῶν κλασμάτων σημαίνει πρόσθεσιν αὐτῶν, χωρὶς ὅμως τὸ σημεῖον σὺν (+). Τὰ σημεῖα σὺν (+) καὶ πλὴν (—) ἀνεκαλύφθησαν ἐν τῇ Δυτικῇ Εὐρώπῃ κατὰ τὸν 15ον αἰῶνα. Διὰ πρώτην φορὰν ἐμφανίζονται εἰς ἐγχειρίδιον Ἀριθμητικῆς τοῦ I. W. Eger, ἐκδοθὲν κατὰ τὸ ἔτος 1489 ἐν Γερμανίᾳ. Ἡ χρῆσις ὅμως τῶν σημείων τούτων γίνεται συνήθης ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως τοῦ μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ Μιχαὴλ Στῆφελ ἐν Νυρεμβέργῃ κατὰ τὸ 1544 (Mich. Stifelio cum praefatione Phil. Melanchton. Norinbergae, 1544). Δέον νὰ προστεθῇ ὅτι περὶ τὸ 1250 εἰς τὸ τότε ἱδρυθὲν Πανεπιστήμιον τῶν Παρισίων, ὡς Μαθηματικὰ ἐδιδάσκοντο αἱ πράξεις τῶν ἀκεραίων, τὰ κλάσματα καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου. Εἰς τὰ Πανεπιστήμια ὅμως τῆς Γερμανίας καὶ τῆς Αὐστρίας, δὲν εἶχον προχωρήσει τὴν ἐποχὴν ἐκείνην τόσον πολύ! Ἐκεῖ μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ 16ου αἰῶνος ἐδιδάσκοντο, ἐκτὸς τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τὰ κλάσματα!!, (Tropfke, Elementar — Mathematik 1 τόμος σελὶς 49 καὶ ἑξῆς, Berlin und Leipzig 1921).

Μονάδες βάρους καὶ νομισμάτων

Εἰς ὅλην τὴν περιοχήν, ὅπου κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὡμιλεῖτο ἡ ἑλληνικὴ γλῶσσα αἱ μονάδες βάρους καὶ νομισμάτων εἶχον τὰ αὐτὰ ὀνόματα. Εἴς τινας περιοχάς, ὅπως εἰς τὴν Αἴγιναν καὶ τὴν Εὔβοιαν, αἱ μονάδες αὗται δὲν εἶχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν, ὅπως εἶχον αἱ μονάδες τῆς Ἀττικῆς, αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιοῦντο εἰς ὁλόκληρον σχεδὸν τὸν ἑλληνικὸν χῶρον.

Μεγαλυτέρα μονὰς βάρους καὶ νομίσματος ἦτο τὸ τάλαντον, λέξις καθαρῶς ἑλληνική, ἀποδεικνύουσα ὅτι, τόσον τὴν ὀνομασίαν, ὅσον καὶ τὴν ἀξίαν τῶν μονάδων, δὲν εἶχον παραλάβει οἱ Ἕλληνες ἐκ τῶν Περσῶν, ὡς ὑποστηρίζουν μερικοὶ καλοὶ συγγραφεῖς, οἵτινες εἶχον περιηγηθῆ καὶ περιοχὰς τοῦ Μεγάλου Βασιλέως (τῶν Περσῶν) καὶ εἶχον ἐκεῖ τύχει ἀναλόγου ἐλευθέρας κινήσεως καὶ ἀναλόγων συναφῶν πληροφοριῶν καὶ περιποιήσεων. Τὴν λέξιν τάλαντον ἄλλωστε χρησιμοποιεῖ ἤδη ὁ Ὅμηρος (Ἰλιάς, Θ 69, Μ 433, Τ 223, Χ 209), ὅτε οἱ Πέρσαι δὲν εἶχον ἀκόμη ἀναφανῆ εἰς τὴν Ἱστορίαν. Κατὰ τοὺς κλασσικοὺς ὅμως χρόνους μνημονεύεται ὑπὸ πολλῶν Ἑλλήνων συγγραφέων τὸ χρυσοῦν Περσικὸν νόμισμα Δαρεικὸς (Ἐκ τοῦ βασιλέως Δαρείου), (Θουκυδίδης 8.28, Ἀριστοφ. Ἐκκλησ. 602, Ξενοφ. Ἀνάβ. 1.1.9). Ἡ χρηματικὴ ἀξία τοῦ ταλάντου, ἐν σχέσει πρὸς τὰ σημερινὰ νομίσματα δὲν εἶναι γνωστή, τόσον τοῦ χρυσοῦ ταλάντου, ὅσον καὶ τοῦ ἀργυροῦ. Γενικῶς ὅμως ἡ ἀξία τοῦ χρυσοῦ ἦτο δεκαπλασία τοῦ ἀργυροῦ ταλάντου. Τὸ βάρος τοῦ ἀττικοῦ ταλάντου ἀνήρχετο εἰς 26200 γραμμάρια περίπου, ἐν ᾧ τὸ τοῦ αἰγινητείου εἰς 37230 γραμμάρια. Τὸ βάρος τάλαντον καὶ τὸ νόμισμα τάλαντον διῃρεῖτο εἰς 60 μνᾶς. (Τὸ εὐβοϊκὸν τάλαντον διῃρεῖτο εἰς 72 μνᾶς). Ἡ λέξις μνᾶ καὶ τὸ ῥῆμα μνάωμαι = μνῶμαι (= ἐνθυμοῦμαι, θεωρῶ) εἶναι παμπάλαιαι ἑλληνικαὶ λέξεις. Τὸ γραφόμενον εἰς πολλὰ ξένα βιβλία, (μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ λεξικά τινα μετεφρασμένα εἰς τὴν ἑλληνικὴν) ὅτι ἡ λέξις μνᾶ πιθανὸν νὰ εἰσήχθη εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος διὰ τῆς Φοινίκης, ἐπειδὴ φαίνεται ὁμοία πρὸς τὴν ἑβραϊκὴν λέξιν maneh, σημαίνουσαν σταθμόν τι, φαίνεται ὀλίγον περίεργον. Τὸ πιθανώτερον εἶναι, ὅτι αὕτη ἐκ τῆς Ἑλλάδος εἰσήχθη εἰς τὴν Φοινίκην.

Ἑκάστη μνᾶ διῃρεῖτο εἰς 100 δραχμὰς (βάρους ἢ νομίσματος). Ἑκάστη δραχμὴ διῃρεῖτο εἰς 6 ὀβολοὺς (βάρους ἢ νομίσματος). Τὸ βάρος μιᾶς δραχμῆς ἰσοῦτο πρὸς 4,4 γραμμάρια περίπου. Σημειωτέον ὅτι εἰς τὰς Ἀθήνας ἡ θέσις εἰς τὸ θέατρον ἐτιμᾶτο 2 ὀβολούς. Θὰ ἠδυνάμεθα ἐκ τούτου νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀξίαν ἑνὸς ὀβολοῦ ἴσην πρὸς 25 σημερινὰς δραχμάς, (ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς θέσεως τοῦ θεάτρου ληφθῇ 50 δρχ.) ὁπότε ἡ παλαιὰ δραχμὴ θὰ ἐτιμᾶτο 150 σημερινὰς δραχμάς, ἡ μνᾶ 15000 δραχμὰς σημερινὰς καὶ τὸ τάλαντον 900.000 σημερινὰς δραχμάς. Πιθανὸν νὰ μὴ πλησιάζωμεν καὶ πολὺ πρὸς τὴν πραγματικὴν ἀξίαν τοῦ ταλάντου τῆς ἀρχαιότητος. Ὁπωσδήποτε ὅμως εὑρισκόμεθα ἐντὸς τῶν πιθανῶν ὁρίων τῆς ἀξίας τοῦ ταλάντου, ἐὰν ἀναλογισθῶμεν, ὅτι τὸ ἐργοστάσιον τοῦ πατρὸς τοῦ Δημοσθένους ἐν Παιανίᾳ, τὸ ὁποῖον κατεσκεύαζε ὅπλα διὰ τὸν πολεμικὸν ἐξοπλισμὸν τῶν Ἀθηναίων, ἐκτιμᾶται ὑπὸ τοῦ Πλουτάρχου εἰς 15 τάλαντα ἤτοι 13.500.000 σημερινὰς δρχ. (Βίοι παράλληλοι, Δημοσθένης).

Τὸ ἥμισυ τοῦ ὀβολοῦ ὠνομάζετο ἡμιωβέλιον (ἢ ἡμιωβόλιον). Ὁ ὀβολὸς διῃρεῖτο εἰς 8 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὠνομάζετο χαλκοῦς. Τὸ βάρος $\frac{1}{3}$ ὀβολοῦ $= 2\,\frac{2}{3}$ χαλκῶν ὠνομάζετο κεράτιον ἢ καράτιον (ἐκ τοῦ καρποῦ τῆς κερατέας).

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Περικλέους περίπου, σύνηθες νόμισμα εἰς τὰς Ἀθήνας ἦτο ὁ στατήρ, ὅστις ἀπετελεῖτο κατ' ἀρχὰς ἐκ δύο δραχμῶν, βραδύτερον δὲ ἐκ τεσσάρων. Τὸ ἐκ 4 δραχμῶν ἦτο νόμισμα ἀργυροῦν. Ὁ Φίλιππος καὶ ὁ υἱὸς αὐτοῦ Μέγας Ἀλέξανδρος εἶχον κόψει νομίσματα στατῆρας, τοῦ αὐτοῦ βάρους καὶ ἀξίας πρὸς τοὺς ἀττικοὺς ἤτοι ἴσους ἕκαστον πρὸς 2 ἢ 4 δραχμάς. Ὠνομάζοντο δὲ οἱ στατῆρες οὗτοι Φιλίππειοι καὶ Ἀλεξάνδρειοι.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς ὑποδιαιρέσεις τῶν μονάδων βάρους καὶ νομίσματος.

1	τάλαντον	= 60 μναῖ	βάρος καὶ νόμισμα
1	μνᾶ	= 100 δραχμαὶ	» » »
1	δραχμὴ	= 6 ὀβολοὶ	» » »
1	ὀβολὸς	= 8 χαλκοῖ	» » »
1	κεράτιον ἢ καράτιον	$= \frac{1}{3}$ ὀβολοῦ $= 2\frac{2}{3}$ χαλκῶν.	

Ἑπομένως 1 τάλαντον = 60 μναῖ = 6000 δρχ. = 36.000 ὀβολοὶ = 288.000 χαλκοῖ. Ἀντίστοιχος ὑπολογισμὸς εἰς γραμμάρια, ὅταν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι 1 τάλαντον = 26200 γραμμάρια.

Ἀριθμητικὴ παράστασις τῶν μονάδων βάρους καὶ νομισμάτων (Ἀττικῆς καὶ λοιπῆς Ἑλλάδος)

Τάλαντον = Τ. Στατὴρ = Σ. Δραχμὴ = |— Ὀβολὸς = | Ἡμιωβέλιον = C. Τεταρτωβέλιον ἢ τεταρτημόριον ὀβολοῦ = Ↄ. Χαλκοῦς = χ.

Ὅταν ἀριθμός τις ἐσήμαινε δραχμὰς ἐτίθετο πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ τὸ σύμβολον τῆς δραχμῆς, ὡς π.χ. |— 𐅄 Δ | = 61 δραχμαί.
(|— = δραχμῆς σύμβολον, 𐅄 = 5 × 10, Δ = 10, | = 1).

Εἰς τὴν Βοιωτίαν εὑρέθησαν ἐπιγραφαὶ ἔχουσαι τὴν ἑξῆς συμβολικὴν παράστασιν ἀριθμῶν: Δραχμὴ = |. Ὀβολὸς = 0. Ἡμιωβέλιον = Η. Εἰς τὸ Ἱερὸν τοῦ Ἀμφιαράου παρὰ τὸν Ὠρωπὸν (ὀνομάζεται τοῦτο Ἀμφιάρειον ἢ Ἀμφιαράειον ἡ δὲ ἑορτή, τὰ Ἀμφιαράϊα) εὑρέθη εἰς ἐπιγραφήν, ὡς μονὰς νομίσματος, τὸ τριώβολον, παριστάμενον διὰ S (Larfeld, Griechische Epigraphik I Μόναχον 1914 σελ. 292).

Ο ΑΒΑΞ Η ΠΡΩΤΗ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ

9. Ὁ ἄβαξ (ἢ τὸ ἀβάκιον) θεωρεῖται ἡ πρώτη ἀριθμομηχανὴ τοῦ κόσμου, γνωστὴ εἰς τοὺς Ἕλληνας τῆς προϊστορικῆς ἐποχῆς. Ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν πλάκα διαστάσεων περίπου 20 × 30 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου περιέχουσαν διαιρέσεις διὰ παραλλήλων γραμμῶν. Ὁ λογισμὸς τῶν μαθηματικῶν πράξεων ἐγίνετο διὰ ψήφων (λιθαράκια).

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ψήφου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται αὕτη μεταξὺ τῶν παραλλήλων γραμμῶν τοῦ ἄβακος. Μετακίνησις τῆς ψήφου πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐξάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ἐν ᾧ μετακίνησις αὐτῆς πρὸς τὰ δεξιὰ ἐλαττώνει αὐτήν, ὡς τοῦτο συμβαίνει καὶ σήμερον μὲ τὴν θέσιν τῶν ψηφίων τῶν ἀποτελούντων τὸν ἀριθμόν. Ἔστω π.χ. 5387. Ὁ 5 ἐὰν τεθῇ μεταξὺ τοῦ 3 καὶ τοῦ 8, ἀντὶ χιλιάδας θὰ δηλοῖ ἑκατοντάδας. Καὶ ὅσῳ πρὸς τὰ δεξιὰ μετατίθεται τόσῳ καὶ ἐλαττοῦται ἡ ἀξία του, κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Τὸ ἀντίθετον βέβαια συμβαίνῃ ὅταν ἡ ψῆφος μετατίθεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά.

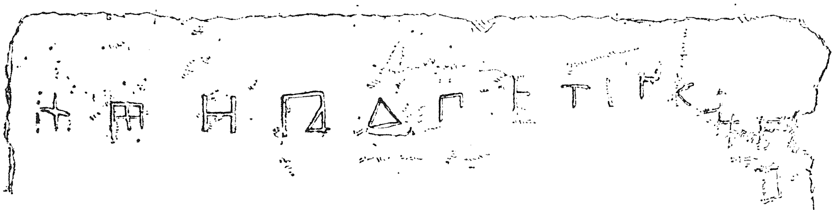
Ἀντίθετος τῆς ἑλληνικῆς μεταβολὴ τῆς ἀριθμητικῆς ἀξίας τῆς ψήφου παρατηρεῖται εἰς τὸν αἰγυπτιακὸν ἄβακα. Εἰς αὐτὸν μετακίνησις τῆς ψήφου πρὸς τὰ ἀριστερὰ σημαίνει ἐλάττωσιν τῆς ἀριθμητικῆς ἀξίας αὐτῆς, ἐν ᾧ μετακίνησις πρὸς τὰ δεξιὰ σημαίνει αὔξησιν. Τοῦτο συμβαίνει, διότι οἱ μὲν Ἕλληνες ἔγραφον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, οἱ δὲ Αἰγύπτιοι, ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἡ ἀρχαιοτέρα γραπτὴ πληροφορία περὶ τοῦ ἄβακος ἀπαντᾶται εἰς τὸν Ἡρόδοτον (περίπου 485 - 425 π.Χ.), ὁποῖος ὁ γράφει: *«Γράμματα γράφουσι καὶ λογίζονται ψήφοισι Ἕλληνες μὲν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ φέροντες τὴν χεῖρα, Αἰγύπτιοι δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά»*. (II 36).

Ὅτι ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σόλωνος (περίπου 600 π.Χ.) οἱ Ἀθηναῖοι ἐχρησιμοποίουν τὸν ἄβακα διὰ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις (εἰς τὸ ἐμπόριον) πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου (3 - 4ος αἰὼν μ.Χ.), ὁ ὁποῖος εἰς τὴν βιογραφίαν τοῦ Σόλωνος γράφει: *ἔλεγε δὲ (ὁ Σόλων) τοὺς παρὰ τοῖς τυράννοις δυναμένους παραπλησίους εἶναι ταῖς ψήφοις ταῖς ἐπὶ τῶν λογισμῶν. καὶ γὰρ ἐκείνων ἑκάστην ποτὲ μὲν πλείω σημαίνειν, ποτὲ δὲ ἧττω»* (I 59). Δηλαδή, οἱ πλησίον τῶν τυράννων ἰσχυροὶ ὁμοιάζουν μὲ τὰς ψήφους, τὰς χρησιμοποιουμένας διὰ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Διότι αὗται ἀναλόγως τῆς θέσεως ὅπου μετακινοῦνται ἄλλοτε σημαίνουν περισσότερα καὶ ἄλλοτε ὀλιγώτερα.

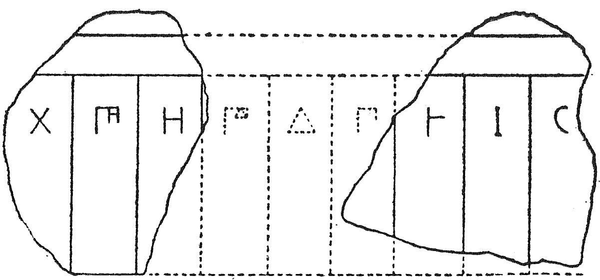
Τρίτη πληροφορία περὶ τῆς ἀξίας τῆς ἐπὶ τοῦ ἄβακος μετακινουμένης ψήφου ἀπαντᾶται εἰς τὸν Πολύβιον (V 26, 13), ὁ ὁποῖος γράφει τὰ ἑξῆς: *«ὄντως γὰρ εἰσὶν οὗτοι (οἱ εἰς τὰς αὐλὰς τῶν βασιλέων κόλακες) παραπλήσιοι ταῖς ἐπὶ τῶν ἀβακίων ψήφοις· ἐκεῖναι τε γὰρ κατὰ τὴν τοῦ ψηφίζοντος βούλησιν ἄρτι χαλκοῦν καὶ παραυτίκα τάλαντον ἰσχύουσιν»*. Δηλαδὴ οἱ κόλακες παρὰ τοὺς βασιλεῖς ὁμοιάζουν μὲ τὰ ψήφους τῶν ἀβακίων· διότι αὗται ἔχουν ἀριθμητικὴν ἀξίαν ἀναλόγως τῆς βουλήσεως τοῦ ψηφίζοντος (τοῦ μετακινοῦντος τὰς ψήφους) καὶ ἄλλοτε σημαίνουν ἕνα χαλκοῦν ($= 1/8$ τοῦ ὀβολοῦ) καὶ ἄλλοτε ἓν τάλαντον.

Τετάρτη πληροφορία, τέλος, περὶ ἐκτελέσεως ἀριθμητικῶν πράξεων ἐπὶ τοῦ ἄβακος λαμβάνεται ἀπὸ τὴν κωμῳδίαν τοῦ Ἀριστοφάνους Σφῆκες (στίχος 656), ὅπου ἀναφέρεται *«μὴ ψήφοις (λογίζεσθαι) ἀλλ' ἀπὸ τῆς χειρός»*, δηλ. νὰ μὴ κάνῃς τὰς πράξεις διὰ μετακινήσεως ψήφων ἐπὶ τοῦ ἄβακος, ἀλλὰ διὰ τῶν δακτύλων τῆς χειρός.

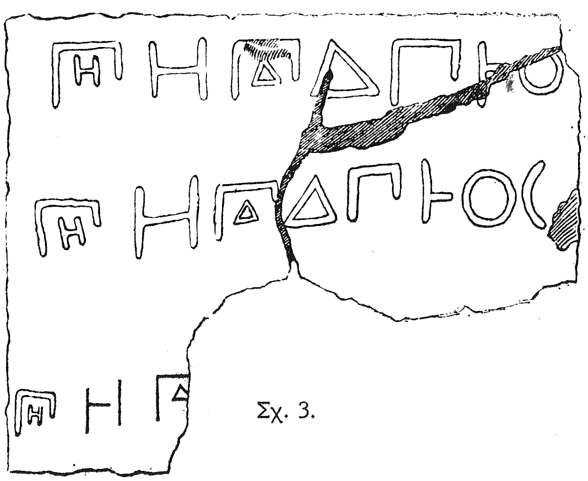
Μαρμάρινοι πλάκες ἐπὶ τῶν ὁποίων ~~ἔχουν~~ χαραχθῆ σύμβολα ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπαντῶμεν, περίπου τὰ αὐτὰ μὲ μικρὰς μεταβολάς, εἰς τὸν μοναδικὸν διασωθέντα ἑλληνικὸν ἄβακα ,ἔχουν εὑρεθῆ ἐπὶ τοῦ παρόντος τρεῖς:



Σχ. 1.



Σχ. 2.



Σχ. 3.

Ἡ μία εὑρέθη εἰς τὴν Νάξον, οἱ δὲ ἀριθμοὶ ἐπ' αὐτῆς εἶναι, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά: Δραχμαὶ 1000, 500, 100, 50, 10, 5, 1, τρεῖς ὀβολοί, 1 ὀβολός, $^1/_2$ ὀβολοῦ. (Inscriptiones Grecae XII 5, 99, Βερολῖνον 1903, σελ. 27). (Σχ. 1). (Ἐπιγραφαὶ ἑλληνικαί).

Ἡ δευτέρα εὑρέθη εἰς τὴν ἀρχαίαν πόλιν Μινώα τῆς νήσου Ἀμοργοῦ. Οἱ ἐγχάρακτοι ἀριθμοὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι δραχμαὶ 1000, 500, 100, 50, 10, 5, 1, 1 ὀβολός, $^1/_2$ ὀβολοῦ. (Inscriptiones Graecae XII 7, 282, Βερολῖνον 1903, σελὶς 73). (Σχ. 2).

Ἡ τρίτη πλὰξ εὑρέθη εἰς τὴν Ἐλευσῖνα καὶ περιέχει τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς εἰς τρεῖς σειράς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ τρίτη εἶναι κατὰ τὸ πλεῖστον ἐφθαρμένη. Οἱ δηλούμενοι ἀριθμοὶ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι:

500, 100, 50, 10, 5, 1, 1 ὀβολὸς
500, 100, 50, 10, 5, 1, 1 ὀβολός, $^1/_2$ ὀβολοῦ
500, 100, 50, 10,

(Πρακτικὰ Ἀρχαιολογικῆς Ἑταιρείας τοῦ ἔτους 1884, δημοσιευθέντα τῷ 1885, σελ. 72). (Σχ. 3).

Ο ΑΒΑΞ ΤΗΣ ΣΑΛΑΜΙΝΟΣ

10. Ἡ μοναδικὴ μαρμαρίνη πλὰξ ἡ ὁποία παριστᾷ ἄβακα, ἀνευρέθη κατὰ τὸ ἔτος 1846 εἰς τὴν Σαλαμῖνα καὶ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπιγραφικὸν Μουσεῖον Ἀθηνῶν ὑπ' ἀριθ. 11515. Ἔχει διαστάσεις 1,5 × 0,75 μέτρα. Εἶναι εὐνόητον (ἐκ τοῦ μεγέθους) ὅτι ἡ πλὰξ αὐτὴ ἀποτελεῖ ὑπόδειγμα ἄβακος καὶ ὄχι καθ' αὐτὸ ἄβακα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐτελοῦντο πράξεις ἀριθμητικαί. Σχέδιον τοῦ ἐπ' αὐτῆς ὑποδειγματικοῦ ἄβακος συμπληρωθὲν ἐλαφρῶς ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν ἐν Παρισίοις ἐκδιδομένην Ἀρχαιολογικὴν Ἐπιθεώρησιν (Revue Archaeologique I, Paris 1846, σελ. 295 - 296), τὸ ὁποῖον ἀναδημοσιεύομεν ἐνταῦθα.

Ἑρμηνεία τοῦ ὑποδειγματικοῦ ἄβακος τῆς Σαλαμῖνος, (Σχ. 4).

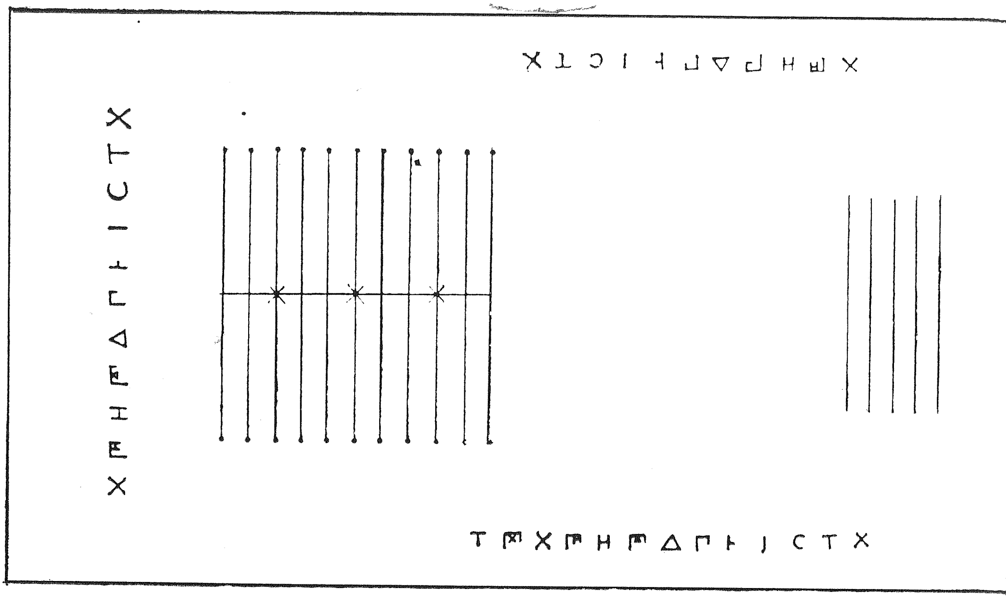
Εἰς τὸ κάτω μέρος (ὁριζοντίως), εἰς τὸ ἐπάνω μέρος (ὁριζοντίως) καὶ εἰς τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μέρος (καθέτως) ἔχουν χαραχθῆ ἀριθμοί. Οὗτοι εἶναι:

Κάτω μέρος: Τάλαντον (6000 δραχμαί), 5000, 1000, 500, 100, 50, 10, 5,1, 1 ὀβολός, $^1/_2$ ὀβολοῦ, $^1/_4$ ὀβολοῦ, 1 χαλκοῦς (= $^1/_8$ ὀβολοῦ).

Ἐπάνω μέρος: (στροφὴ τῆς σελίδος 180° ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ)
1000, 500, 100, 50, 10, 5, 1, $^1/_2$, $^1/_4$, 1 χαλκοῦς = $^1/_8$ ὀβολοῦ.

Ἀριστερά: Ἀνάγνωσις ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἀφοῦ τώρα στρέψωμεν τὴν σελίδα 90° ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά:

1000, 500, 100, 50, 10, 5, 1, 1 ὀβολός, $^1/_2$ ὀβολοῦ, $^1/_4$ ὀβολοῦ, 1 χαλκοῦς = $^1/_8$ ὀβολοῦ.



Σχ. 4.

Εἰς τὸ σχῆμα παρατηροῦμεν παραλλήλους γραμμάς, 11 πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ εἰς ἀρκετὴν ἀπόστασιν 5 παραλλήλους πρὸς τὰ δεξιά. Αἱ πρὸς τὰ ἀριστερὰ 11 γραμμαί, χωρίζονται εἰς τὸ μέσον διὰ μιᾶς ὁριζοντίου εὐθείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὑπάρχουν τρεῖς ἀστερίσκοι.

Η ΧΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΑΒΑΚΟΣ

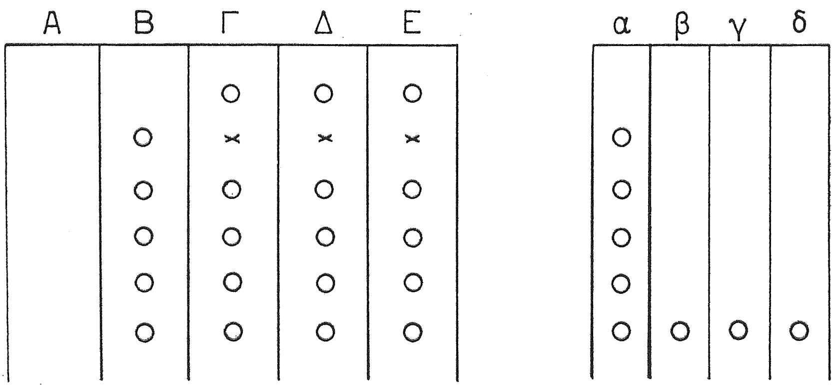
11. Οἱ χῶροι ὅπου τοποθετοῦνται αἱ ψῆφοι τῶν δραχμῶν εἶναι 5 στῆλαι, μὲ τὰς 11 παραλλήλους. Αἱ τρεῖς πρῶται πρὸς τὰ ἀριστερὰ παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποτελοῦν μίαν στήλην. Ἡ μεσαία αὐτῶν γραμμὴ εἶναι διὰ νὰ τοποθετοῦνται αἱ ψῆφοι ἐπ' αὐτῆς καὶ νὰ μὴ εὑρίσκωνται ἀριστερὰ ἢ δεξιὰ τῆς γραμμῆς αὐτῆς, καὶ τοῦτο διὰ νὰ μὴ γίνωνται λάθη (προηγούμενον σχῆμα 4).

Αἱ ἄλλαι τρεῖς γραμμαὶ (ἡ μία ἐκ τῆς προηγουμένης στήλης) ἀποτελοῦν τὴν δευτέραν στήλην, αἱ ἑπόμεναι 3 (ἡ μία ἐκ τῆς προηγουμένης στήλης) ἀποτελοῦν τὴν τρίτην, αἱ ὁμοίως ἀκολουθοῦσαι τρεῖς τὴν τετάρτην καὶ αἱ τελευταῖαι τρεῖς ἀποτελοῦν τὴν πέμπτην στήλην. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀξία τῶν ψήφων ἐπὶ τῶν 5 στηλῶν εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐν πρώτοις νοοῦμεν τὰς στήλας τὰς εὑρισκομένας εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς εὐθείας, ὅπου εἶναι οἱ ἀστερίσκοι (σχ. 4).

Πρώτη	στήλη	ἐκ δεξιῶν	πρὸς τ'ἀριστερὰ	1	ψῆφος	=	1	δρχ.	(μονάδες)
Δευτέρα	»	»	»	1	»	=	10	δρχ.	(δεκάδες)
Τρίτη	»	»	»	1	»	=	100	δρχ.	(ἑκατοντάδες
Τετάρτη	»	»	»	1	»	=	1000	δρχ.	(χιλιάδες)
Πέμπτη	»	»	»	1	»	=	6000	δρχ.	(1 τάλαντον)

Αἱ ψῆφοι, μονάδες, δεκάδες, κλπ. αἱ εὑρισκόμεναι εἰς τὰς στήλας τὰς κειμένας εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τῆς εὐθείας μὲ τοὺς ἀστερίσκους ἔχουν πενταπλασίαν ἀξίαν (Σαφέστερον αἱ 5 στῆλαι τῶν δραχμῶν παρίστανται εἰς τὸ σχ. 5).

Εἰς τὸν κάτω χῶρον τῶν μονάδων (δραχμῶν) τῆς πρώτης ἐκ δεξιῶν στήλης, χωροῦν τὸ πολὺ 4 μονάδες (Ε τοῦ σχήματος 5). Ἐὰν κατὰ τὴν πρόσ-



Σχ. 5.

θεσιν π.χ. πρέπει νὰ τοποθετηθοῦν 5 μονάδες, ἀποσύρονται αἱ 5 ψῆφοι καὶ τίθεται 1 ψῆφος εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τῆς εὐθείας τὸ ἀντίστοιχον (τὸ συνεχὲς ἄνω τοῦ ἀστερίσκου). Τὸ πολὺ λοιπόν, εἰς τὴν στήλην αὐτήν, εἶναι δυνατὸν νὰ τεθοῦν 4 ψῆφοι εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς εὐθείας καὶ 1 ψῆφος εἰς τὸ ἐπάνω (= 5), ἤτοι ἐν ὅλῳ 9 μονάδες. Ἐὰν ὑπάρξουν, ἐκ τῆς πράξεως, περισσότεραι μονάδες, ἔστω 17, αἱ ψῆφοι θὰ τοποθετηθοῦν ὡς ἑξῆς: 2 εἰς τὸ κάτω μέρος τῶν μονάδων, 1 εἰς ἄνω μέρος τῶν μονάδων ἔχουσα ἀξίαν 5 μονάδων, καὶ 1 εἰς τὸ κάτω μέρος τῶν δεκάδων, (εἰς τὴν ἀμέσως ἀριστερὰν στήλην Δ) ἔχουσα ἀξίαν 10 μονάδων.

Ἡ ἑρμηνεία αὕτη δὲν ἔχει διασωθῆ εἰς τὴν ἑλληνικήν. Αὕτη συνάγεται ἐκ τῆς ἀνευρέσεως εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην ἀρκετῶν ῥωμαϊκῶν ἀβακίων, τὰ ὁποῖα προήρχοντο ἐκ τῶν ἑλληνικῶν ἀβακίων. Προσέτι συνάγεται ὁ τρόπος τοῦ μηχανισμοῦ τῆς ἐκτελέσεως, τοὐλάχιστον τῆς προσθέσεως, τρόπος, ὁ ὁποῖος δικαιολογεῖ τὸν χαρακτηρισμὸν τοῦ ἄβακος, ὡς πρώτης ἀριθμομηχανῆς τοῦ κόσμου.

Εἰς τὰς 4 πρὸς τὰ δεξιὰ μικρὰς στήλας (σχ. 5, καὶ τὸ 4 ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλήφθη τὸ σχ. 5) τοποθετοῦνται οἱ ὀβολοὶ καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν. Ψῆφος εὑρισκομένη εἰς τὴν πρώτην στήλην α σημαίνει 1 ὀβολόν, ψῆφος εὑρισκομένη εἰς τὴν δευτέραν στήλην β (δεξιὰ) σημαίνει $^1/_2$ ὀβολοῦ, εἰς τὴν τρίτην στήλην γ σημαίνει $^1/_4$ ὀβολοῦ, καὶ εἰς τὴν τετάρτην στήλην δ σημαίνει $^1/_8$ ὀβολοῦ (1 χαλκοῦν). Εἰς τὰς στήλας αὐτὰς δὲν ὑπάρχει ὁριζοντία γραμμὴ μὲ ἀστερίσκους, διότι εἰς τὴν πρώτην ἐξ ἀριστερῶν στήλην εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετηθοῦν 5 τὸ πολὺ ψῆφοι = 5 ὀβολοί. Ἐὰν τοποθετηθῇ μία ψῆφος ἀκόμη γίνονται 6 ὀβολοὶ = 1 δραχμή, ὁπότε ἀποσύρονται αἱ 6 ψῆφοι καὶ τίθεται μία ψῆφος εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων δραχμῶν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ τούτων στήλην τῶν δραχμῶν (Ε τοῦ σχ. 5). Εἰς τὰς ἑπομένας τρεῖς στήλας τῶν ὀβολῶν (β,γ,δ) εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετηθῇ ἀνὰ μία ψῆφος μόνον. Διότι, ἐὰν εἰς μίαν ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν στηλῶν τοποθετηθοῦν 2 ψῆφοι, τότε ἡ ἀξία τῶν ψήφων αὐτῶν ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν ἀξίαν μιᾶς ψήφου τῆς προηγουμένης (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) στήλης, ὁπότε ἀποσύρονται αἱ δύο ψῆφοι καὶ τοποθετεῖται μία ψῆφος εἰς τὴν ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην.

* * *

Τὰς πρὸς τὰ ἀριστερὰ 5 στήλας τῶν δραχμῶν (σχ. 5) χαρακτηρίζομεν διὰ τῶν ἐπ' αὐτῶν κεφαλαίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι Α = στήλη ταλάντων, Β = στήλη χιλιάδων, Γ = στήλη ἑκατοντάδων, Δ = στήλη δεκάδων, Ε = στήλη μονάδων.

Τὰς πρὸς τὰ δεξιὰ 4 στήλας τῶν ὀβολῶν χαρακτηρίζομεν διὰ τῶν ἐπ' αὐτῶν μικρῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι α = ὀβολοί, β = $\frac{1}{2}$ ὀβολοῦ, γ = $\frac{1}{4}$ ὀβολοῦ, δ = $\frac{1}{8}$ ὀβολοῦ.

Παράδειγμα ἐκτελέσεως πράξεων.

Τὸ τάλαντον ἀξίζει 6000 δραχμάς. Εἰς τὸ σχῆμα 5 τοποθετοῦμεν τὰ μέγιστα μέρη τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς ἓν τάλαντον, ἤτοι 5999 δραχμὰς + 5 ὀβολοὺς + $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ὀβολοῦ, ἤτοι 5999 δραχμαὶ + $\frac{7}{8}$ ὀβολοῦ, ὡς ἑξῆς (σχ. 5):

Στήλη Β. 5 ψῆφοι = $5\times1000 = 5000$ δρχ.

Στήλη Γ. 4 ψῆφοι κάτω τοῦ ἀστερίσκου = $4\times100 = 400$ δρχ. + 1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου = $1\times500 = 500$ δρχ., ἤτοι $400 + 500 = 900$ δρχ.

Στήλη Δ. 4 ψῆφοι κάτω τοῦ ἀστερίσκου = $4\times10 = 40$ δρχ. + 1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου = $1\times50 = 50$ δρχ. ἤτοι $40 + 50 = 90$ δρχ.

Στήλη Ε. 4 ψῆφοι κάτω τοῦ ἀστερίσκου = 4 δρχ. + 1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου = $1\times5 = 5$ δρχ. ἤτοι $4 + 5 = 9$ δρχ.

Εἰς τὰς δεξιὰ τοῦ σχ. 5 στήλας α,β,γ,δ τοποθετοῦμεν ὀβολοὺς ὡς ἑξῆς:
Στήλη α. 5 ψῆφοι $=5$ ὀβολοί.

Στήλη β. 1 ψῆφος $=\frac{1}{2}$ ὀβολοῦ

Στήλη γ. 1 ψῆφος $=\frac{1}{4}$ ὀβολοῦ.

Στήλη δ. 1 ψῆφος $=\frac{1}{8}$ ὀβολοῦ.

Ἑπομένως εἰς τὸ σχῆμα 5 ἔχομεν τοποθετήσει εἰς τὰς στήλας Β, Γ, Δ, Ε τὰ ἑξῆς ποσὰ ἀντιστοίχως: 5000 δρχ. $+$ 900 δρχ. $+$ 90 δρχ. $+$ 9 δρχ. Εἰς δὲ τὰς στήλας α,β,γ,δ ἔχομεν τοποθετήσει ἀντιστοίχως τὰ ποσά: 5 ὀβολοὶ $+\frac{1}{2}$ ὀβολοῦ $+\frac{1}{4}$ ὀβολοῦ $+\frac{1}{8}$ ὀβολοῦ ἤτοι ἐν ὅλῳ εἰς τὰς ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ στήλας τοῦ σχ. 5 ἔχομεν τοποθετήσει ὡς ἀναφέρεται προηγουμένως: 5999 δρχ. $+$ 5 ὀβολοὺς $+\frac{1}{2}$ ὀβολοῦ $+\frac{1}{4}$ ὀβολοῦ $+\frac{1}{8}$ ὀβολοῦ.

Ὑπολείπεται $\frac{1}{8}$ τοῦ ὀβολοῦ διὰ νὰ λάβωμεν 1 τάλαντον:

$$\left(5999+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=6000 \text{ δρχ.}=1 \text{ τάλαντον}\right).$$

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν στήλην δ θέσωμεν ἀκόμη μίαν ψῆφον, τότε αἱ εἰς αὐτὴν 2 ψῆφοι σχηματίζουν $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ ὀβολοῦ. Ἀποσύρονται αἱ δύο ψῆφοι τῆς στήλης δ καὶ ἀντ' αὐτῶν τίθεται 1 ψῆφος εἰς τὴν στήλην, γ, ὁπότε αἱ 2 ψῆφοι τῆς στήλης γ ἀποτελοῦν $\frac{1}{2}$ ὀβολοῦ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \text{ ὀβολοῦ}=\frac{1}{2}\right)$. Ἀποσύρονται αἱ δύο ψῆφοι τῆς στήλης γ καὶ ἀντ' αὐτῶν τίθεται 1 ψῆφος εἰς τὴν στήλην β, ὁπότε αἱ 2 ψῆφοι τῆς στήλης αὐτῆς ἀποτελοῦν 1 ὀβολὸν $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$.
Ἀποσύρονται αἱ δύο ψῆφοι τῆς στήλης β καὶ ἀντ' αὐτῶν τίθεται μία ψῆφος εἰς τὴν στήλην α, ὁπότε ἔχομεν ἐκεῖ 6 ὀβολοὺς $=1$ δραχμήν. Ἀποσύρονται αἱ 6 ψῆφοι τῶν ὀβολῶν καὶ ἀντ' αὐτῶν τίθεται μία ψῆφος εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων δραχμῶν (στήλη Ε κάτω τοῦ ἀστερίσκου), ὁπότε αἱ μονάδες γίνονται $4+1=5=1$ πεντάς, τιθεμένη ἀκολούθως εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ ἀστερίσκου. Τότε ὅμως ἔχομεν ἐκεῖ 2 πεντάδας $=1$ δεκάδα. Ἀποσύρομεν τὰς δύο πεντάδας καὶ ἀντ' αὐτῶν θέτομεν εἰς τὴν στήλην Δ τῶν δεκάδων (κάτω μέρος τοῦ ἀστερίσκου αὐτῆς) μίαν ψῆφον $=10$ μονάδες, ὁπότε ἔχομεν μὲ τὰς ἐπ' αὐτῆς 4

ψήφους 5 δεκαδικὰς ψήφους (5×10 μονάδας). Αὗται ἰσοῦνται μὲ 1 ψῆφον, τιθεμένην ὑπὲρ τὸν ἀστερίσκον, ὁπότε εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἔχομεν δύο ψήφους $50+50$ μονάδες $=1$ ἑκατοντάς. Ἀποσύρομεν τὰς 2 πεντηκονταδικὰς ψήφους $=100$ μονάδες ἐκ τῆς στήλης Δ καὶ θέτομεν μίαν ψῆφον εἰς τὴν στήλην Γ (κάτω τοῦ ἀστερίσκου), ὁπότε ἔχομεν ἐκεῖ 5 ἑκατονταδικὰς ψήφους $=1$ ψῆφον τῶν 500 μονάδων, τὴν ὁποίαν θέτομεν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ ἀστερίσκου τῆς στήλης Γ. Τότε ἔχομεν ἐκεῖ 2 ψήφους τῶν 500 μονάδων ἑκάστην ἤτοι 1 ψῆφον τῶν 1000. Ἀποσύρομεν αὐτὰς καὶ θέτομεν εἰς τὴν στήλην Β μίαν ψῆφον, ὁπότε ἔχομεν ἐκεῖ $5000+1000=6000=1$ τάλαντον. Ἀποσύρομεν τὰς 6 ψήφους, ἀξίας 6000 δραχμῶν καὶ θέτομεν εἰς τὴν στήλην Α μίαν ψῆφον $=1$ τάλαντον.

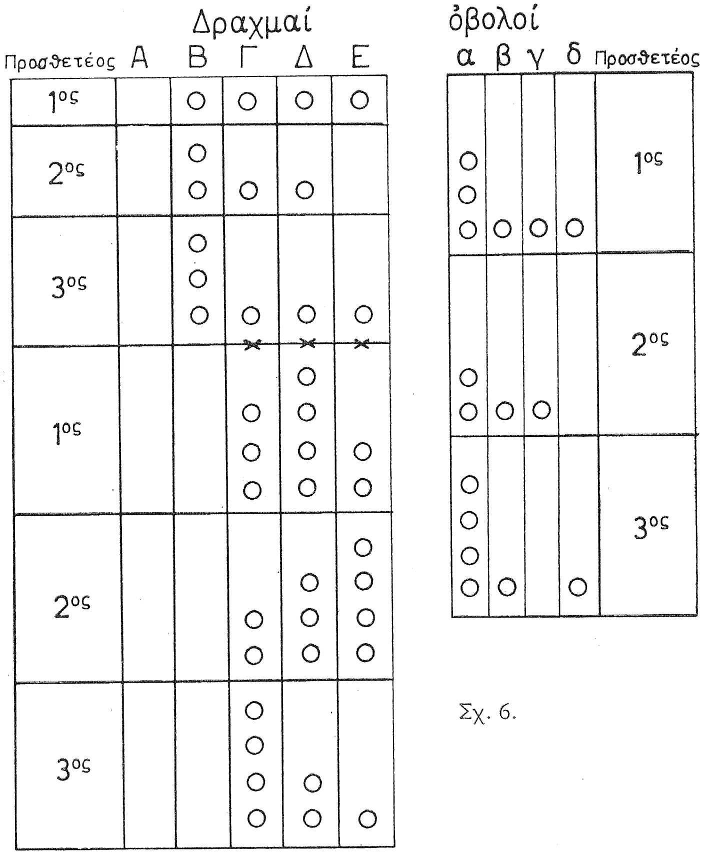
Ἐκτέλεσις προσθέσεως διὰ τοῦ ἄβακος.

Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ προσθέσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμούς:

1)	Δραχμαὶ	1897, +	ὀβολοὶ	$3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
2)	»	2784, +	»	$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3)	»	3976, +	»	$4+\frac{1}{2}\quad+\frac{1}{8}$
Ἄθροισμα	»	8658 +	»	$5+\quad+\frac{1}{4}$

ἢ τάλαντον $1+$ δρχ. $2658+$ ὀβολοὶ $5\frac{1}{4}$.

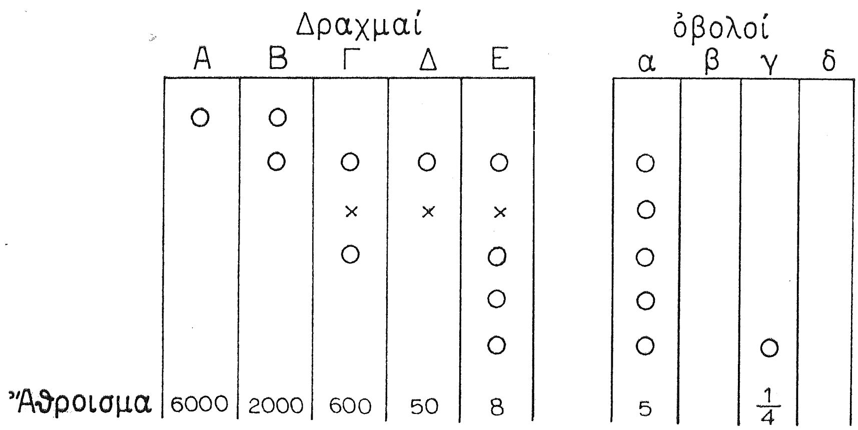
Εἰς τὸ σχῆμα 6 (πρὸς τ' ἀριστερὰ) χωρίζομεν διὰ ὁριζοντίων γραμμῶν τὸν ὑπὲρ τοὺς 3 ἀστερίσκους χῶρον εἰς τρία τμήματα, ὅσοι εἶναι καὶ οἱ προσθετέοι. Ἂν οἱ προσθετέοι ἦσαν περισσότεροι θὰ ἐχωρίζομεν αὐτὸν εἰς περισσότερα τμήματα. Ὁμοίως, χωρίζομεν τὸ κάτω μέρος τῶν ἀστερίσκων εἰς τρία τμήματα. (Περισσότεροι τῶν τριῶν αὐτῶν ἀστερίσκων δὲν χρειάζονται). Τὸν πρὸς τὰ δεξιὰ χῶρον τῶν ὀβολῶν χωρίζομεν ἐπίσης εἰς τρία τμήματα (ὅσοι εἶναι οἱ προσθετέοι). Εἰς ἕκαστον τμῆμα, τόσον τῶν δραχμῶν, ὅσον καὶ τῶν ὀβολῶν τοποθετοῦμεν τὰς ἀντιστοίχους ψήφους ἑκάστου ἀριθμοῦ ὡς ἔχουν οὗτοι δοθῆ καὶ ἀναγραφῆ ἀριθμητικῶς, προηγουμένως. Τώρα ἐργαζόμεθα, ὡς ἔχει ὑποδηλωθῆ ἐκ τῶν προηγουμένων, ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀπὸ τὴν στήλην τῶν χαλκῶν, δηλ. τὴν δ. $\left(\text{ἑκάστη ψῆφος} = \frac{1}{8} \text{ ὀβολοῦ}\right)$. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προσθέσεως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 7. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἂν ὑπῆρχον εἰς τοὺς προσθετέους μεγαλύτεροι τοῦ ταλάντου ἀριθμοὶ (μυριάδες κ.λπ.), θὰ ἐγράφοντο πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς στήλης τῶν ταλάντων. Τὴν πρόσθεσιν τὴν λογαριάζομεν εἰς τὸ σχῆμα 6 τὸ δὲ ἀποτέλεσμα τὸ ἀναγράφομεν εἰς τὸ σχῆμα 7, ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς: Τρίτος προσθετέος. Στήλη δ, 1 ψῆφος $= \frac{1}{8}$ ὀβολοῦ. Ὁ δεύτερος προσθετέος δὲν ἔχει ψήφους. Πρῶτος προσθετέος, στήλη δ, 1 ψῆφος $= \frac{1}{8}$ ὀβολοῦ. Σὺν $\frac{1}{8}$ ὀβολοῦ τοῦ τρίτου προσθετέου $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ὀβολοῦ. Αὐτὸ τὸ παίρνομεν ἀπὸ τὴν στήλην δ (ὅπου δὲν μένει καμμία ψῆφος, σχ. 7)



Σχ. 6.

καὶ τὸ προσθέτομεν ὡς κρατούμενον εἰς τὴν στήλην γ (σχ. 6), ὁπότε ἔχομεν $\frac{1}{4}$ ὀβολοῦ ($+$ μηδὲν τέταρτα τοῦ τρίτου προσθετέου) $+ \frac{1}{4}$ ὀβολοῦ τοῦ δευτέρου προσθετέου, $+ \frac{1}{4}$ ὀβολοῦ τοῦ πρώτου προσθετέου $= \frac{3}{4}$ ὀβολοῦ. Ἀφήνομεν εἰς τὴν στήλην γ τοῦ σχ. 7 μίαν ψῆφον $= \frac{1}{4}$ ὀβολοῦ, καὶ τὰ ὑπόλοιπα

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ὀβολοῦ τὰ προσθέτομεν ὡς κρατούμενον εἰς τὴν στήλην β τοῦ σχ. 6. Ἐκεῖ ὅμως ἔχομεν τρεῖς ψήφους δυνάμεως $\frac{1}{2}$ ὀβολοῦ ἑκάστην ἤτοι $\frac{3}{2}$ ὀβολοῦ. Σὺν $\frac{1}{2}$ τὸ κρατούμενον ἐκ τῆς στήλης γ $= \frac{4}{2} = 2$ ὀβολοί, τοὺς ὁποίους φέρομεν ὡς κρατούμενον εἰς τὴν στήλην α, ἐν ᾧ εἰς τὴν στήλην β τοῦ σχ. 7 δὲν μένει τίποτε. 2 λοιπὸν ὀβολοὶ ὡς κρατούμενον + 4 ὀβολοὶ τῆς στήλης α, ἐκ τοῦ τρί-



Σχ. 7.

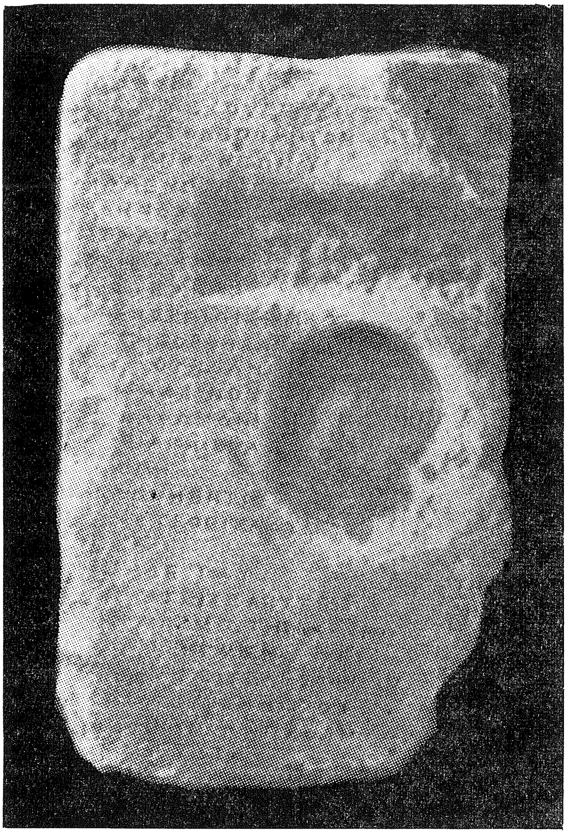
του προσθετέου, + 2 ὀβολοὶ τῆς στήλης τοῦ δευτέρου προσθετέου, + 3 ὀβολοὶ τῆς στήλης α τοῦ πρώτου προσθετέου = 11 ὀβολοί. Ἐκ τούτων οἱ 6 ὀβολοὶ = = 1 δραχμὴ λαμβάνεται ὡς κρατούμενον καὶ οἱ ὑπόλοιποι 5 ὀβολοὶ μένουν εἰς τὴν στήλην α τοῦ σχ. 7. Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν στήλην Ε τοῦ σχ. 6 καὶ λέγομεν, 1 δρχ. τὸ κρατούμενον + 1 δραχμὴ τοῦ τρίτου προσθετέου, + 4 δρχ. τοῦ δευτέρου προσθετέου, + 2 δραχμαὶ τοῦ πρώτου προσθετέου = 8 δρχ. (κάτω τοῦ ἀστερίσκου), + 5 δραχμαί (μία ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου) τοῦ τρίτου προσθετέου, + μηδὲν δραχμαὶ τοῦ δευτέρου προσθετέου, + 5 δραχμαὶ (μία ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου) τοῦ πρώτου προσθετέου = 18 δραχμ. (ὑπενθυμίζεται, ὅτι αἱ ἄνω τῶν ἀστερίσκων ψῆφοι τῶν δραχμῶν, μονάδων Ε, δεκάδων Δ, ἑκατοντάδων Γ ἔχουν πενταπλασίαν ἀξίαν τῶν ἀντιστοίχων ψήφων τῶν κάτω τῶν ἀστερίσκων). Ἐκ τῶν 18 δρχ. ἀφήνομεν εἰς τὴν στήλην Ε, τοῦ σχ. 7, τὰς 8 ψήφους (δραχμὰς) (ἤτοι 3 κάτω τοῦ ἀστερίσκου + 1 ψῆφος = 5 δρχ. ἄνω τοῦ ἀστερίσκου καὶ ἔχομεν ὡς κρατούμενον 10 δρχ. Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν στήλην Δ (σχ. 6) (κάτω τοῦ ἀστερίσκου 1 ψῆφος = 10) καὶ λέγομεν, 10 δρχ. κρατούμενον + 20 δρχ. τοῦ τρίτου προσθετέου, + 30 δρχ. τοῦ δευτέρου προσθετέου, + 40 δρχ. τοῦ πρώτου προσθετέου = 100 δρχ., + 50 δρχ. τοῦ τρίτου προσθετέου (1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου), + 50 δρχ. τοῦ δευτέρου προσθετέου (1 ψ. ἄ. ἀ.), + 50 δρχ. τοῦ πρώτου προσθετέου (1 ψ. ἄ. ἀ.) = 250 δρχ. 'Αφήνομεν 1 ψῆφον = 50 εἰς τὴν στήλην Δ τοῦ σχ. 7, ἄνω τοῦ ἀστερίσκου, καὶ κρατοῦμεν 4 πεντηκονταδικὰς ψήφους = 2 ἑκατοντάδας ὡς κρατούμενον καὶ ἐρχόμεθα εἰς τὸ σχ. 6, στήλη Γ, κάτω τοῦ ἀστερίσκου, καὶ λέγομεν 200 δρχ. κρατούμενον, + 400 δρχ. τοῦ τρίτου προσθετέου, + 200 δρχ. τοῦ δευτέρου προσθετέου, + 300 δρχ. τοῦ πρώτου προσθετέου, + 500 τοῦ δρχ. τρίτου προσθετέου (1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου), + 500 δρχ. τοῦ δευτέρου προσθετέου (1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου), + 500 δρχ. τοῦ πρώτου προσθετέου (1 ψῆφος ἄνω τοῦ ἀστερίσκου) = = 2600 δρχ. 'Αφήνομεν εἰς τὴν στήλην Γ τοῦ σχ. 7, μίαν ψῆφον = 100 δρχ., κάτω τοῦ ἀστερίσκου, καὶ μίαν ψῆφον = 500 δρχ. ἄνω τοῦ ἀστερίσκου, ἤτοι 600 δρχ. καὶ κρατοῦμεν ὡς ὑπόλοιπον 2 ψήφους, τῶν 1000 δρχ. ἑκάστην, ἤτοι 2000 δρχ. 'Ερχόμεθα τώρα εἰς τὸ σχ. 6, στήλη Β καὶ λέγομεν, 2000 δρχ. κρατούμενον, + 3000 δρχ. τοῦ τρίτου προσθετέτου, + 2000 δρχ. τοῦ δευτέρου προσθετέου, + 1000 δρχ. τοῦ πρώτου προσθετέου = 8000 δρχ. 'Αφήνομεν εἰς τὸ σχῆμα 7, στήλη Β τὰς 2000 δρχ., καὶ τὰς 6000 δρχ., ἐπειδὴ ἀποτελοῦν 1 τάλαντον, τὰς μεταφέρομεν (1 ψῆφον) εἰς τὴν στήλην Α τοῦ αὐτοῦ σχήματος 7.

Οἱ εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην εὑρεθέντες ρωμαϊκοὶ ἄβακες (ἀντίγραφα ἑλληνικῶν) εἶναι μικροῦ σχήματος. Οἱ Ῥωμαῖοι ἔμποροι ἔφερον αὐτοὺς εἰς τὰ θυλάκιά των, ὡς τοῦτο πράττουν σήμερον οἱ Τεχνικοὶ φέροντες εἰς τὰ θυλάκιά των μικροὺς λογαριθμικοὺς κανόνας πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων ἢ μικροὺς ἠλεκτρονικοὺς ὑπολογιστάς. (σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὴν κάτω σειρὰν δὲν τὴν ἔγραφον. 'Εκ τῆς θέσεως τῶν ψήφων ἀνεγινώσκετο τὸ ἄθροισμα).

ΟΙ ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΕΓΝΩΡΙΖΟΝ ΣΤΕΝΟΓΡΑΦΙΑΝ

12. Κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ παρελθόντος αἰῶνος εὑρέθη εἰς τὴν 'Ακρόπολιν τῶν 'Αθηνῶν μαρμαρίνη πλὰξ εἰς τὴν ὁποίαν ἀναγράφονται κανόνες στενογραφίας. Κατὰ τοὺς κανόνας αὐτοὺς τὰ σύμφωνα (εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ στενογραφίας) ἐκφράζονται διὰ μεταβολῶν τῶν φωνηέντων (ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ περισσότερα σύγχρονα συστήματα στενογραφίας, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ φωνήεντα παρίστανται διὰ μεταβολῶν τῶν συμφώνων). Ἡ πλὰξ εὑρίσκεται τώρα κατατεθειμένη εἰς τὸ 'Εθνικὸν 'Αρχαιολογικὸν Μουσεῖον 'Αθηνῶν, ἡ δὲ ἐπιγραφὴ περιλαμβάνεται εἰς τὸν σχετικὸν κατάλογον ἐπιγραφῶν ὑπ' ἀριθ. II 5 4321 (Inschriften Fragmente). Αἱ διαστάσεις τῆς πλακὸς εἶναι: ὕψος 26 ἑκατ. μ., πλάτος 16 ἑκατ. μ. βάθος 10 ἑκατ. μ. Μέρος τῆς πλακὸς εἰκονίζεται εἰς τὸ σχῆμα (1). Εἰς τὸ σχῆμα (2) εἰκονίζονται μέρη λιθίνων πλακῶν περιεχουσῶν μόνον σύμφωνα, πιθανῶς πρὸς ἔκφρασιν κειμένου στενογραφικῶς (Πλὰξ τῶν Δελφῶν).

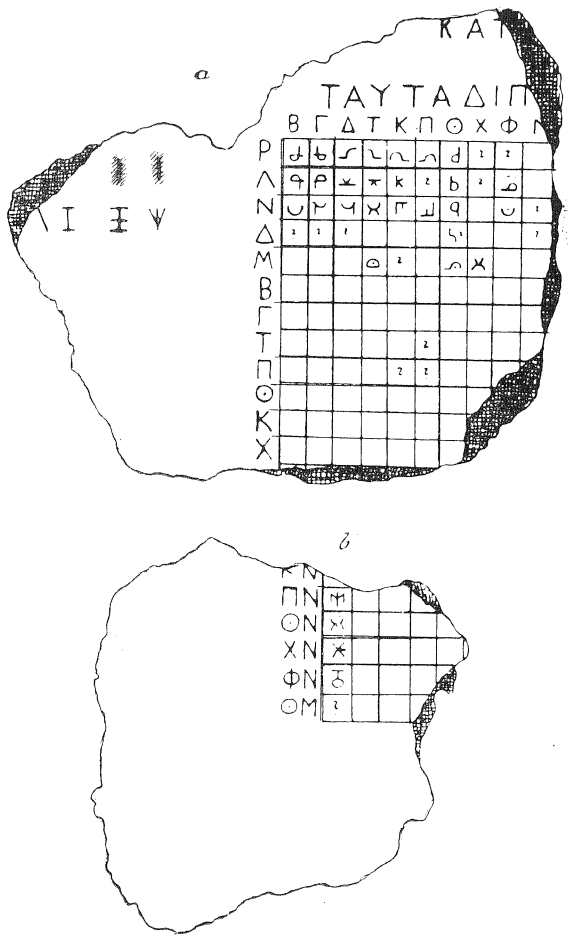
Εἶναι εὐνόητον, πόσαι μεγάλαι ~~δυσκολίαι~~ παρουσιάσθησαν διὰ τὴν ἀνάγνωσιν (ἢ ἀποκρυπτογράφησιν) τοῦ στενογραφημένου κειμένου τῆς πλακὸς τῆς 'Ακροπόλεως. Κατ' ἀρχὰς μάλιστα οἱ εἰδικοὶ Εὐρωπαῖοι ἐπιστήμονες δὲν εἶχον ἀντιληφθῆ, ὅτι τὸ κείμενον τῆς πλακὸς τῆς 'Ακροπόλεως ἦτο κείμενον στενογραφημένον. Πρῶτος ἀντιληφθεὶς τοῦτο ἦτο ὁ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Βιέννης καθηγητὴς τῶν ἀρχαίων 'Ελληνικῶν καὶ ἀρχαιολόγος Th. Gomberz,



Σχ. 1. Μέρος τῆς μαρμαρίνης πλακὸς τῆς 'Ακροπόλεως τῶν 'Αθηνῶν, ὅπου τὸ κείμενον ἔχει γραφῆ στενογραφικῶς, ἀναπτύσσεται δὲ εἰς αὐτὸ ὁ τρόπος γραφῆς τῆς στενογραφίας.

ὁ ὁποῖος ἐδημοσίευσε συναφῆ ἀποκρυπτογράφησιν τοῦ κειμένου κατὰ τὸ 1884, ἐν Βιέννῃ. Βραδύτερον, κατὰ τὸ 1894, ὁ ἐν Βιέννῃ ἐπίσης καθηγητὴς M. Giltbauer ἐδημοσίευσεν ἰδικήν του ἑρμηνείαν τοῦ κειμένου τῆς πλακὸς διάφορον τῆς ἑρμηνείας τοῦ Gomberz. Κατὰ τὰ ἐπακόλουθα ἔτη 1895 καὶ 1896 οἱ

Gomberz καὶ Wessely ἐδημοσίευσαν κοινὴν ἑρμηνείαν τοῦ κειμένου τῆς πλακός, διάφορον τῶν προηγουμένων. Αἱ ἀποκαταστάσεις (ἀποκρυπτογραφήσεις)



Σχ. 2. Δύο πλάκες ἐκ Δελφῶν, ὅπου παρίστανται μόνον σύμφωνα. Πιθανὸν ν' ἀπετέλουν ταῦτα τρόπον στενογραφίας, ὅπως ἡ σύγχρονος, ἀντίθετον τοῦ τρόπου στενογραφίας τῆς πλακὸς τῆς 'Ακροπόλεως τῶν 'Αθηνῶν.

τοῦ κειμένου τῆς πλακὸς ἔχουν ὡς ἑξῆς: (σχ. 3) (Wilhelm Larfeld, Griechische Epigraphik, München (Μόναχον) 1914 σελὶς 282).

Κατωτέρω παραθέτομεν τὰ ἀρχικὰ μέρη τῶν ἀντιστοίχων ἑρμηνειῶν τῶν τριῶν ἀποκαταστάσεων τοῦ στενογραφημένου κειμένου τῆς πλακός:

Gomperz 1884.

. . . ζυγὸς (od. ζυγός) ἐ]π[ὶ μέ-
σου στε]λέχους ἐν[κάρ-
σιο]ς † τὸ δὲ πέμπτον
τῶν φωνηέντων Υ·
τρ]ία μὲν π[ρὸς τὴν
ὀ]ρθὴν ἔχ[ει κέρα· τὸ
δὲ] πρῶτο[ν τῶν μακρῶν
προ]σλαμ[βάνει μὲν ἕν,
τὸ δ' ὕ]στερο[ν δύ' ἐπ' ἄκ-
ραι]ς κεραίαις ἀμφο[τέ-
ραις], τῆς ὀρθῆς ἀπ[ούσ-
ης. Τ]ὴν οὖν φων[ὴν μὲν
διαγ]ράφειν οὐ [δέον.
τῶν] δ' ἀφώνων ἡ [μὲν
εὐ]θεῖα καὶ βρα[χεῖα
γραμ]μὴ
το]ῦ φωνήεντος [κά-
τω μὲν] τεθεῖσα δύ[ναται
δέλτ]α,
ἐπάνω] δὲ ταῦ,
πρὸς δ]ὲ τεῖ τελευτεῖ νῦ·
μετεώρ]α δ' ἐπὶ τὴν ἀρχὴν
μὲν π]ροσηγμένη πεῖ,
πρὸς δὲ] τεῖ τελευτεῖ μῦ.
κατὰ δὲ τ]ὸ [μέ]σον πρὸς
μὲν τ]ὴν ἀρχὴν προση-
γμέ]νη βῆτα,
[πρὸς δὲ τεῖ τελευτεῖ γεῖ.]

Gitlbauer 1894.

[ἡ μὲν οὖν τρίτη τῶν φω-
νῶν δίφθογγα] ποιεῖται
τέσσα]ρα, ἔχουσ' ἓν [μόνον
κέρα]ς † τὸ δὲ πέμπτον
τῶν φωνηέντων Υ·
τρ]ία μέν, π[ρότερον δὲ τὴν
ὀ]ρθὴν ἔχ[ον κεραίαν
τὸ] πρῶτο[ν, τὸ δεύτερον
πρ]οσλαμ[βάνον αὐτεῖ κέ-
ρας ὕ]στερο[ν, τὸ τρίτον
ταῖ]ς κεραίαις ἀμφο[τέ-
ραις] τῆς ὀρθῆς ἀπ[οκλῖ-
νον. Τ]ὴν οὖν φων[ὴν μὲν
δεῖ γ]ράφειν οὕ[τως·
τῶν] δ' ἀφώνων ἡ [μὲν
εὐ]θεῖα καὶ βρα[χεῖα
γραμ]μὴ
το]ῦ φωνήεντος [ἐν μέ-
σωι μὲν] τεθεῖσα δύ[ναται
δέλτ]α,
ἀρχεῖ] δὲ ταῦ,
πρὸς δ]ὲ τεῖ τελευτεῖ νῦ·
πλαγί]α δ' ἐπὶ τὴν ἀρχὴν
μὲν π]ροσηγμένη πεῖ,
πρὸς δὲ] τεῖ τελευτεῖ μῦ·
κατὰ δὲ τ]ὸ [μέ]σον πρὸς
μὲν τ]ὴν ἀρχὴν προση-
γμέ]νη βῆτα,
[πρὸς δὲ τὴν τελευτὴν
γάμμα.]

Gomperz 1895 (Z. 12 ff.)
Wessely 1896 (Z. 2—12)

. . . ρα ἔχουσ' ἓν [μόνον
κέρα]ς † τὸ δὲ πέμπτον
τῶν φωνηέντων Υ·
τρ]ία μέν, π[ερισσὴν δὲ τὴν
ὀ]ρθὴν ἔχ[ει, ὥσπερ καὶ
τὸ] πρῶτο[ν Α· τὴν εὐθεῖαν·
προ]σλαμ[βάνει δ' ἐκ τ'
ἀρι]στερο[ῦ καὶ δεξιοῦ
ταῖ]ς κεραίαις ἀμφο[τέ-
ραις], τῆς ὀρθῆς ἀπ[ούσ-
ης. Τ]ὴν οὖν φων[ὴν μὲν
δεῖ γ]ράφειν οὕ[τως.
τῶν] δ' ἀφώνων ἡ [μὲν
εὐ]θεῖα καὶ βρα[χεῖα
γραμ]μὴ
το]ῦ φωνήεντος [ἐπὶ τεῖ ἀρ-
χεῖ μὲν] τεθεῖσα δύ[ναται
δέλτ]α,
μέση] δὲ ταῦ,
πρὸς δ]ὲ τεῖ τελευτεῖ νῦ·
πλαγί]α 1) δ' ἐπὶ τὴν ἀρχὴν
μὲν π]ροσηγμένη πεῖ,
πρὸς δὲ] τεῖ τελευτεῖ μῦ·
κατὰ δὲ τ]ὸ [μέ]σον πρὸς
μὲν τ]ὴν ἀρχὴν προση-
γμέ]νη βῆτα.

Σχ. 3. Τρεῖς προσπάθειαι ἀποκρυπτογραφήσεως τοῦ στενογραφημένου κειμένου τῆς πλακὸς τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν ἀπέδοσαν τρία διάφορα κείμενα.

Ἑ ρ μ η ν ε ί α

1884

Ὁ εἰς τὸ μέσον τοῦ στελέχους κείμενος πλαγίως κλάδος εἶναι Ι. Τὸ πέμπτον τῶν φωνηνέντων ὅμως Υ, περιέχει τρεῖς μικρὰς γραμμὰς πλαγίως ἐν σχέσει μὲ τὰς κατακορύφους· τὸ πρῶτον τῶν μικρῶν φωνηέντων δέχεται ἐπιπροσθέτως μίαν μικρὰν γραμμήν, τὸ δεύτερον δέχεται δύο, ἀνὰ μίαν εἰς ἕκαστον ἄκρον τῶν δύο σκελῶν ...

1894

Τὸ τρίτον τώρα τῶν φωνηέντων σχηματίζει τέσσαρας διφθόγγους, ἐν ᾧ τὸ ἴδιον (τὸ φωνῆεν) ἔέχει μόνον ἓν κερατίδιον· τὸ πέμπτον τῶν φωνηέντων τὸ Υ, ἔχει τρία, ἤτοι ἔμπροσθεν τὸ κατακόρυφον τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον, ἐν ᾧ ὄπισθεν τούτου δέχεται ἄλλο, τὸ τρίτον, ἐν ᾧ ἀπομακρύνεται τῶν ἄλλων δύο . . .

1895 καὶ 1896

Τὸ Ι δὲν ὑφίσταται μεταβολήν τινα, διότι ἔχει μόνον μίαν κεραίαν· τὸ πέμπτον τῶν φωνηέντων, τὸ Υ, ἔχει βέβαια τρεῖς κεραίας, ἀλλὰ ἡ κατακόρυφος εἶναι περιττή, τόσον παρὰ τὸ πρῶτον φωνῆεν Α, ὅπου αὕτη (ἡ κεραία) εἶναι ὁριζοντία· συνδέεται ἐκεῖ δεξιὰ καὶ ἀριστερά . . .

Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟΝ ΔΙΑ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

13. Αἱ ἀραβικαὶ πηγαὶ τοῦ δεκάτου περίπου αἰῶνος μ.Χ. ἀποδίδουν τὴν ἐπινόησιν τῶν συγχρόνων συμβόλων τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς Ἰνδούς. Ἐπὶ τῶν πληροφοριῶν τούτων στηριζόμενοι οἱ ἐπιστήμονες τῆς Δύσεως ἔμειναν σύμφωνοι πρὸς τὴν ἀραβικὴν παράδοσιν, ὠνόμασαν ὅμως τὰ σύμβολα αὐτὰ ἀραβικοὺς ἀριθμούς, διότι ταῦτα ἔφθασαν εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην διὰ τῶν Ἀράβων τῆς Ἱσπανίας. Ὡς πρὸς τὴν γνώμην ὅτι ἡ ἐπινόησις τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἰνδοὺς ὑπάρχουν πολλαὶ ἀμφιβολίαι καὶ τὸ ζήτημα τοῦτο δὲν ἔχει καταστῆ δυνατὸν μέχρι σήμερον νὰ διαλευκανθῆ καὶ παραμένει σκοτεινόν. Ὁ C. R. Kaye ἀποκλείει ὅτι ἡ ἐπινόησις τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἰνδοὺς διὰ τοὺς ἑξῆς λόγους: Πρῶτον, διότι οἱ Ἰνδοὶ τοῦ Θιβὲτ καὶ τῆς ὀρεινῆς Βιρμανίας, οἱ ὁποῖοι ἦσαν ἀπομεμονωμένοι ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν ξένων λαῶν καὶ «σήμερον ἀκόμη» (τὸ ἔτος 1915-19 ὅτε ἔγραψε σχετικῶς ὁ Kaye) χρησιμοποιοῦν παμπάλαιον σύστημα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν μηδεμίαν ἔχον σχέσιν πρὸς τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν. Δεύτερον, διότι οἱ Ἰνδοί, ὡς καὶ οἱ Σημῖται, ἔγραφον ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἐν ᾧ οἱ Ἕλληνες ἔγραφον καὶ γράφουν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ὁ Kaye παραδέχεται ὅτι αἱ Ἰνδίαι εἶναι ἡ περιοχὴ ὅπου ἐνεφανίσθησαν τὸ πρῶτον τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν ἀποδίδει ὅμως τὴν ἔμπνευσιν τῆς δημιουργίας αὐτῆς εἰς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, τόσον τῆς ἐποχῆς τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου, ὅσον καὶ τῆς μεταγενεστέρας ἀλεξανδρινῆς ἐποχῆς. Πρὸς τοῦτο ἐπικαλεῖται τὸ ἐπιχείρημα, ὅτι οἱ Ἕλληνες μὲ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἔγραφον ἤδη πολὺ παλαιὰ κατὰ τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα θέσεως, ὅπως γράφονται ἤδη οἱ ἀριθμοί. Ὁ ἀριθμὸς 124 π.χ. γράφεται ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ρκδ'. (G. R. Kaye, Indian Mathematics Calcutta and Simla, καὶ Influence Grecque dans le développement des Mathématiques Hindoues, Scientia 25. Bologna 1919. No 81, 1).

Ἡ ἐπινόησις τοῦ συμβόλου διὰ τὸ μηδὲν ὀφείλεται εἰς τὸν μεγάλον Ἕλληνα ἀστρονόμον καὶ μαθηματικὸν Κλαύδιον Πτολεμαῖον (100-178 μ.Χ. περίπου), ὡς πληροφορούμεθα ἐκ τοῦ περιφήμου ἔργου του Μαθηματικὴ Σύνταξις, εἰς τὸν τίτλον τοῦ ὁποίου οἱ μεταγενέστεροι προέταξαν τὴν λέξιν μεγάλην καὶ οἱ Ἄραβες μετεγλώττισαν τὸν τίτλον αὐτὸν εἰς Ἀλμαγέστη. Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον τῆς Μαθηματικῆς Συντάξεως ἀπαντῶμεν τὰς ἐκφράσεις

$$\begin{array}{llllll} 0 & \mu\zeta' & \eta'' & (= 0^0 & 47' & 8'') \\ \mu\alpha' & 0' & \iota\eta'' & (= 41^0 & 0' & 18'') \end{array}$$

Τὸ σύμβολον διὰ τὸ μηδὲν (0) εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως οὐδέν. Ὅπως παρατηροῦμεν, ὁ Πτολεμαῖος ἤδη χρησιμοποιεῖ τὸ σύστημα θέσεως γραφῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ ὅπου ~~ἐλλείπει~~ ἀριθμὸς θέτει εἰς τὴν θέσιν του τὸ μηδέν, ἐν ᾧ ὡς σύμβολα ἀριθμητικὰ μεταχειρίζεται τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου. Ὁ Ὁλλανδὸς καθηγητὴς Freudenthal τοῦ Πανεπιστημίου Utrecht καὶ ὁ Neugebauer τοῦ Κέντρου Προκεχωρημένων Σπουδῶν τοῦ Princeton (ΗΠΑ), γράφουν ὅτι, ὅταν μεταξὺ 200-600 μ.Χ. ἐδημιουργεῖτο τὸ σύστημα θέσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς Ἰνδίας, οἱ Ἰνδοὶ ἐγνώριζον ἤδη καὶ ἐσπούδαζον ἐντατικῶς τὴν ἑλληνικὴν Ἀστρονομίαν τοῦ Πτολεμαίου, ὡς τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ κυριωτέρου ἰνδικοῦ ἀστρονομικοῦ ἔργου, τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, τὸ ὁποῖον ἔφερε τὸν τίτλον Surya Siddhanta, εἰς τὸ ὁποῖον ἀπαντῶσι πλεῖσται ἑλληνικαὶ φράσεις, ὡς π.χ. kendra (κέντρα), lipta (λεπτὰ) καὶ ἄλλαι. Τοῦτο σημαίνει, κατὰ τοὺς ἰδίους ἐπιστήμονας, ὅτι ἡ ἀστρονομικὴ θεωρία τοῦ ἀνωτέρω ἔργου στηρίζεται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐπικύκλων τοῦ Πτολεμαίου καὶ ὅτι οἱ Ἰνδοὶ ἔμαθον ἤδη ἐκ τοῦ Πτολεμαίου νὰ χρησιμοποιοῦν ὡς σύμβολον διὰ τὸ μηδὲν ἕνα κύκλον καὶ τὸ σύστημα θέσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ὅτι οἱ Ἰνδοὶ κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην, προσθέτουν οἱ προηγουμένως ἀναφερθέντες ἐπιστήμονες, εἶχον ὑποστῆ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γραφῆς τῶν κλασμάτων, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ Ἰνδοὶ ἔγραφον τὸν παρονομαστὴν ἄνωθεν τοῦ ἀριθμητοῦ, χωρὶς τὴν διαχωριστικὴν τούτων γραμμήν, ὅπως ἀκριβῶς ἔγραφον τὰ κλάσματα οἱ Ἕλληνες. (B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft 1956, σελ. 91-93). Σχετικῶς πρὸς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὰς Ἰνδίας καὶ τὴν Ἀσίαν γενικῶς, ἂς ἐπιτραπῆ νὰ σημειώσωμεν τί γράφεται εἰς τὸ γερμανικὸν λεξικὸν τῆς Ἀρχαιότητος Kröner εἰς τὸ λῆμμα (λέξιν) Κίνα.

«Ὁ ἑλληνικὸς πολιτισμὸς ἐξηπλώθη μέσῳ Ἰταλίας καὶ Κωνσταντινουπόλεως εἰς τὴν λοιπὴν Εὐρώπην, εἰς τὴν Αἰθιοπίαν, τὰς Ἰνδίας, τὸ Τουρκεστάν, μέχρι τῆς Κίνας διὰ τοῦ ἐμπορίου. Οἱ Κινέζοι ὠνομάζοντο ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων Σῖναι. Ὁ ἐκ τῆς Ἡρακλείας Ἕλλην γεωγράφος Μαρκιανὸς (400 μ.Χ. περίπου) παρέχει πολλὰς πληροφορίας περὶ τῶν χωρῶν αὐτῶν, χρησίμους διὰ τοὺς ναυτιλλομένους καὶ ἐμπορευομένους, στηριζομένας εἰς παλαιότερα ἑλληνικὰ ἔργα ἀπολεσθέντα.

Ἡ ἐπικρατοῦσα ἀντίληψις ὅτι οἱ Ἕλληνες ἐγνώριζον τὴν Ἀσίαν μόνον μέχρι τῆς Ταπροβάνης (Κεϋλάνης) εἶναι ἐσφαλμένη. Ὁ Μαρκιανὸς μάλιστα μνημονεύει καὶ μίαν νοτίως τῆς Κίνας ἄγνωστον χώραν. Οἱ Λατῖνοι μετέφρασαν τὴν φράσιν τοῦ Μαρκιανοῦ εἰς terra australis incognita (χώρα νοτία ἄγνωστος), ἐξ οὗ australis = νοτία, βραδύτερον ἔλαβε τὸ ὄνομα ἡ Αὐστραλία. Παλαιοὶ Κινέζοι συγγραφεῖς λέγουν, ὅτι ὁ Ῥωμαῖος αὐτοκράτωρ Μάρκος Αὐρήλιος Ἀντωνῖνος εἶχεν ἀποστείλει πρεσβείαν εἰς τὴν Κίναν μέσῳ τοῦ Annam. Εἰς κινεζικὸν παλαιὸν βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον Πληροφορίαι περὶ τῶν Δυτικῶν Χωρῶν, αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ πόλεων δὲν ἔχουν δοθῆ εἰς κινεζικὰ μέτρα ἀλλὰ εἰς ἑλληνικὰ στάδια, ἀσφαλῶς ληφθεῖσαι ἔκ τινος ἑλληνικοῦ βιβλίου γραμμένου διὰ τοὺς περιηγητὰς τῆς ἐποχῆς ἐκείνης . . .» (Kröner, Wörterbuch der Antike, λέξις China).

Τὰ ἀνωτέρω μνημονευθέντα εἶναι σημαντικὰ διὰ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὴν ἐπινόησιν τῶν συμβόλων τῶν ἀριθμῶν ὑπὸ τῶν Ἰνδῶν, δὲν σημαίνουν ὅμως ὅτι ἡ ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν διὰ τὰ σύμβολα ὡρισμένων ἀριθμῶν χάνει τὴν ἀξίαν της καὶ τὴν πρωτοτυπίαν της. Εἰς τὴν περιοχὴν τῶν Ἰνδιῶν ἐτέθησαν αἱ πρῶται βάσεις διαμορφώσεως τοῦ σημερινοῦ συμβολισμοῦ τῶν ἀριθμῶν, ὡς τοῦτο ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ κατωτέρω παρατιθεμένου πίνακος, ὅπου ἐκτίθεται λίαν παραστατικῶς ἡ ἐξέλιξις τῆς διαμορφώσεως τῶν συμβόλων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 200 μ.Χ. μέχρι τοῦ 1600 μ.Χ. (Johannes TROPFKE, Geschichte der Elementar-Mathematuk, τόμος I, Berlin und Leipzig 1921, σελ. 28).

Ἀπόδειξις ἀκόμη τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τοὺς Ἰνδοὺς διὰ τὴν ἐπινόησιν τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων εἶναι, ὅτι τὸ σύμβολον διὰ τὸν ἀριθμὸν 4 (πρώτη καὶ δευτέρα σειρὰ τοῦ παρατιθεμένου πίνακος) χρησιμοποιεῖται ἤδη ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς παραπεμπτικὸν σημεῖον εἰς σχῆμα τοῦ 9 προβλήματος τοῦ β' βιβλίου Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Ἂς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν μερικὰς ἐνδιαφερούσας πληροφορίας, τὰς ὁποίας παρέχει ὁ van der Waerden εἰς τὸ ἀνωτέρω μνημονευθὲν βιβλίον του, σελ. 94.

«Κατὰ τὸ 776 μ.Χ. ὁ Χαλίφης Al-Mansur, ἵδρυσε τὴν Βαγδάτην ὄχι μακρὰν τῆς Σελευκείας... Ὁ ἔγγονος τούτου Al-Mamun ἵδρυσεν ἐκεῖ Ἀκαδημίαν, Ἀστεροσκοπεῖον καὶ Βιβλιοθήκην. Εἰς τὴν Βιβλιοθήκην αὐτὴν εἰργάζετο ὁ Ἄραψ (μαθηματικὸς) Muhammed Ben Musa, ἐπονομαζόμενος Al-Khwarismi (ἀλκγαρισμὶ), ὁ ὁποῖος ἔγραψε τὸ πρῶτον ἀραβικὸν βιβλίον περὶ Ἀλγέβρας. Ὁ αὐτὸς Ἀλκγαρισμὶ ἔγραψε μικρὸν βιβλίον περὶ ἀριθμητικῶν πράξεων κατ' Ἰνδούς. Τὸ βιβλίον αὐτὸ μετεφράσθη εἰς τὴν λατινικὴν κατὰ τὸν 12ον αἰῶνα ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου Μοναχοῦ Adelhard ἐκ Bath. Διὰ τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ἔγιναν γνωστοὶ εἰς τὴν Εὐρώπην οἱ ἰνδικοὶ-ἀραβικοὶ ἀριθμοί. Τὸ ὄνομα τοῦ Ἀλκγαρισμὶ παρεφράσθη εἰς ἀλγόριθμος».

Βραδύτερον ἡ λέξις ἀλγόριθμος ἔγινε μαθηματικὸς ὅρος σημαίνων τρόπον λογισμοῦ, ὅπως ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδου κλπ.

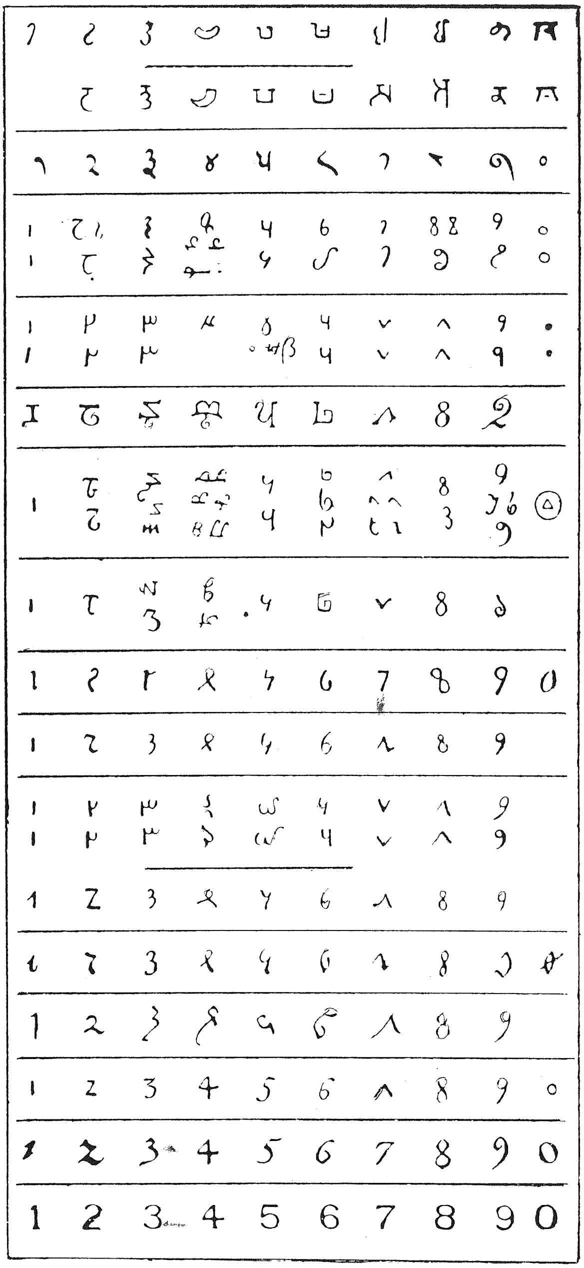
Ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ μεσαιωνικοῦ, ἰνδικοῦ καὶ ἀραβικοῦ πολιτισμοῦ συνεχίσθη ἐπὶ ἀρκετὰς ἑκατονταετίας ἀπὸ τῆς ἱδρύσεως τοῦ Βυζαντινοῦ Κράτους, ὡς συνάγεται ἐκτὸς ἄλλων, καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς περιστατικῶν:

1) Ὁ ἀνωτέρω μνημονευθεὶς Χαλίφης Al-Mamun (813-833), ὅτε κατὰ τὸ 823 ἐνίκησε τὸν Βυζαντινὸν αὐτοκράτορα Μιχαὴλ τὸν Β', ἔθεσεν ὡς ὅρον πρὸς σύναψιν εἰρήνης καὶ ἀπόδοσιν τῶν αἰχμαλώτων, τὴν παράδοσιν εἰς αὐτὸν ὑπὸ τοῦ Μιχαὴλ ἑλληνικῶν χειρογράφων ἐπιστημονικῶν ἔργων ἢ ἀντιγράφων

ΠΙΝΑΞ

ἐμφαίνων τὰς ἐποχὰς κατὰ τὰς ὁποίας διεμορφώθησαν τὰ σύγχρονα σύμβολα τῶν ἀριθμῶν (J. Tropfke)

1. Ἰνδικὰ ἀρχικὰ γράμματα ἀριθμ. λέξεων 2 αἰῶνος.
2. Ἀριθμ. ἰνδ. σύμβολα ἐπιγρ. Gwalior 876 μ.Χ.
3. Ἀριθμητικὰ σύμβολα Δυτικῶν Ἀράβων 9-10 αἰῶνος.
4. Ἀριθμ. σύμβολα Ἀνατολ. Ἀράβων 9-10 αἰ.
5. Ἀριθμ. σύμβολα τῶν ἀβακιστῶν 9-10 αἰ.
6. Ἀριθμ. σύμβολα τῆς γεωμετρίας Βοηθίου 11 αἰ.
7. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Gui d'Arezzo 12 αἰ.
8. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Lechenfelf 12 αἰ.
9. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Sacrobosco 13 αἰ.
10. Ἀριθμ. σύμβολα τοῦ Μαξίμου Πλανούδη. Ἀρχαὶ 14 αἰ. Βυζάντιον.
11. Ἀριθμ. σύμβολα τέλους 14 αἰ.
12. Ἀριθμ. σύμβολα Βασιλείας 15 αἰ.
13. Ἀριθμ. σύμβολα 16 αἰ.
14. Ἀριθμ. σύμβολα Dürer 1525.
15. Σύγχρονα ἀριθμ. σύμβολα.



αὐτῶν, ὅρον τὸν ὁποῖον ὁ Μιχαὴλ ἀπεδέχθη (Ἴδε Μεγάλη Σύνταξις τοῦ Πτολεμαίου, μετάφρασις εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ Karl Manitius, Λειψία 1912, ἀνατύπωσις Λειψία 1962 σελ. VI).

2) Κατὰ τὸ ἔτος 529 ὁ αὐτοκράτωρ τοῦ Βυζαντίου Ἰουστινιανὸς ἔκλεισε τὴν ἐν Ἀθήναιςς Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ὅπου εἶχον σπουδάσει φιλοσοφίαν καὶ ἑλληνικὰ γράμματα οἱ Μεγάλοι Ἱεράρχαι Βασίλειος ὁ Μέγας καὶ Γρηγόριος ὁ Θεολόγος καὶ τὰς ἄλλας ἑλληνικὰς φιλοσοφικὰς Σχολάς, ὅπου εἶχον σπουδάσει φιλοσοφίαν καὶ ἑλληνικὰ γράμματα ὁ Ἀπόστολος Παῦλος καὶ ὁ Ἰωάννης ὁ Χρυσόστομος καὶ ἄλλοι μεγάλοι καὶ διαπρεπεῖς Ἱεράρχαι τοῦ Χριστιανισμοῦ. Οἱ καθηγηταὶ τῶν Σχολῶν αὐτῶν ἠναγκάσθησαν νὰ μεταβοῦν εἰς τὴν Περσίαν καὶ τὴν Ἀραβίαν ἔνθα ἵδρυσαν Σχολάς, οἱ διάδοχοί των δὲ εἶναι ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι συνεβούλευσαν τὸν Χαλίφην Al-Mamun νὰ ζητήσῃ ἑλληνικὰ χειρόγραφα ἀπὸ τὸν αὐτοκράτορα Μιχαήλ, τὰ ὁποῖα ἦσαν εἰς αὐτοὺς ἀπαραίτητα διὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν Περσῶν καὶ τῶν Ἀράβων καὶ διὰ τὰς ἐπιστημονικάς των ἐρεύνας.

Ἡ τελικὴ διαμόρφωσις τῶν ἰνδικῶν συμβόλων διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἔγινεν εἰς τὴν Εὐρώπην κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα, ἐν ᾧ εἰς τὸ Βυζάντιον γίνεται διαμνημόνευσις τῶν συμβόλων αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Βυζαντίνου λογίου Μαξίμου Πλανούδη (1255-1305), ὁ ὁποῖος τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις διὰ τῶν ἰνδικῶν ἀριθμῶν τὰς ὀνομάζει «ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς». (Paul Tannery, Mémoires Scientifiques τόμ. IV, σελ. 199).

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΟΜΗΡΟΥ

14. Ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης ἐποχῆς ὅλοι συμφωνοῦν ὅτι ὁ Ὅμηρος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ποιητής, τὸν ὁποῖον ἐγέννησεν ἡ ἀνθρωπότης. Ὅτι ὅμως ὁ Ὅμηρος ἦτο καὶ σπουδαῖος μαθηματικὸς καὶ ὅτι εἰς τοὺς στίχους τῶν ποιημάτων του παίζει μὲ τὰ μαθηματικά, αὐτὸ εἰς τοὺς πολλοὺς εἶναι ἄγνωστον.

Περὶ τῶν μαθηματικῶν γνώσεων τοῦ Ὁμήρου, ἀμυδρὰν μὲν ἀλλ' ἐνδιαφέρουσαν πληροφορίαν παρέχει εἰς ἡμᾶς ὁ Ῥωμαῖος συγγραφεὺς Aulus G. Gellius (2ος αἰὼν μ.Χ.). Ὁ Gellius (Γκέλλιος) ἐσπούδασεν εἰς τὰς Ἀθήνας, εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος καὶ ἔγραψε πραγματείαν εἰς δύο τόμους ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀττικαὶ νύκτες» (Noctes Atticae). Εἰς τὸν δεύτερον τόμον (XIV cap. 6 § 4) ἀναφέρει ὁ Γκέλλιος ὅτι Ἀθηναῖος φίλος του, τοῦ ἔδωκε πρὸς μελέτην βιβλίον του, ὅπου οὗτος εἶχε συγκεντρώσει ἐνδιαφερούσας πληροφορίας, τὰς ὁποίας δὲν εὕρισκε κανεὶς εἰς τὰ ἐν κυκλοφορίᾳ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Μεταξὺ τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν ἦτο ἡ παρατήρησις, ὅτι εἰς ὡρισμένους στίχους τοῦ Ὁμήρου, ἂν ἀντικατασταθοῦν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν αὐτῶν τιμῶν λαμβάνεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ὡς π.χ.:

Ἰλιὰς Η΄

στίχος 264 **ἀλλ' ἀναχασσάμενος λίθον εἵλετο χειρὶ παχείῃ** = 3498
στίχος 265 **κείμενον ἐν πεδίῳ, μέλανα, τρηχύν τε μέγαν τε** = 3498

(ἀλλ' ὑπεχώρησε (ὁ Ἕκτωρ) καὶ σήκωσε μὲ τὸ γερό του χέρι μιὰ πέτρα, ἡ ὁποία ἦτο στὸ ἔδαφος, μαύρη καὶ τραχεῖα καὶ πολὺ μεγάλη).

Ἀλλ' = 1 + 30 + 30 = 61,
ἀναχασσάμενος = 1 + 50 + 1 + 600 + 1 + 200 + 200 + 1 + 40 + 5 + 50 + 70 + 200 = 1419,
λίθον = 30 + 10 + 9 + 70 + 50 = 169,
εἵλετο = 5 + 10 + 30 + 5 + 300 + 70 = 420,
χειρὶ = 600 + 5 + 10 + 100 + 10 = 725,
παχείῃ = 80 + 1 + 600 + 5 + 10 + 8 = 704.
Ἐν ὅλῳ = 61 + 1419 + 169 + 420 + 725 + 704 = 3498.

κείμενον = 20 + 5 + 10 + 40 + 5 + 50 + 70 + 50 = 250,
ἐν = 5 + 50 = 55,
πεδίῳ = 80 + 5 + 4 + 10 + 800 = 899,
μέλανα = 40 + 5 + 30 + 1 + 50 + 1 = 127,
τρηχὺν = 300 + 100 + 8 + 600 + 400 + 50 = 1458,
τε = 300 + 5 = 305,
μέγαν = 40 + 5 + 3 + 1 + 50 = 99,
τε = 305.
Ἐν ὅλῳ 250 + 55 + 899 + 127 + 1458 + 305 + 99 + 305 = 3498

Ἰλιὰς Τ

στίχος 306 **μή με πρὶν σίτοιο κελεύετε μηδὲ ποτῆτος** = 2848
στίχος 307 **ἄσασθαι φίλον ἦτορ, ἐπεὶ μ' ἄχος αἰνὸν ἱκάνει** = 2848

(Μὴ μὲ προτρέπετε νὰ χορτάσω τὴν καρδιά μου προηγουμένως μὲ φαγητὸ καὶ πιοτό, γιατὶ μὲ καταλαμβάνει πόνος φοβερός).

Αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις διὰ τὰ μαθηματικὰ τοῦ Ὁμήρου εἶχον προκαλέσει τὸ ἐνδιαφέρον πολλῶν μελετητῶν τῶν Ὁμηρικῶν Ἐπῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ἐνδιαφέρον, τὸ ὁποῖον συνεχίσθη καὶ κατὰ τοὺς πρώτους μετὰ Χριστὸν αἰῶνας. Ὁ ἐκκλησιαστικὸς συγγραφεὺς Κλήμης ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἀφορμώμενος ἐκ τοιούτων παρατηρήσεων σημειώνει, ὅτι ὁ Θεὸς τιμωρεῖ τοὺς θρώπους συχνὰ μὲ 5 ἢ 6 ἢ 7 γράμματα, ἐννοῶν τὰς λέξεις λιμός, λοιμός, πόλεμος (Gellius ἔ.ἀ.).

(σημ. μονάδες (1-9) α΄, β΄, γ΄, δ΄, ε΄, ς΄, ζ΄, η΄, θ΄,
δεκάδες (10-90) ι΄, κ΄, λ΄, μ΄, ν΄, ξ΄, ο΄, π΄, ϙ΄
ἑκατοντάδες (100-900) ρ΄, σ΄, τ΄, υ΄, φ΄, χ΄, ψ΄, ω΄, ϡ).

Ἄλλοι μελετηταὶ παρετήρησαν ὅτι τὰ δύο πρῶτα γράμματα τῆς πρώτης λέξεως τῆς Ἰλιάδος μῆ-νιν, τὰ μη, παριστοῦν τὸν ἀριθμὸν τῶν ῥαψῳδιῶν τῆς-Ἰλιάδος καὶ τῆς Ὀδυσσείας ($24+24=48$) καὶ ὅτι εἰς ἕνα στίχον τῆς Ἰλιάδος ἑκάστη ἑπομένη λέξις ἔχει μίαν συλλαβὴν περισσοτέραν, τῶν συλλαβῶν τῆς προηγουμένης λέξεως, ἤτοι παριστᾷ ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἰλιὰς Γ 181 **ὦ μάκαρ Ἀτρεΐδη, μοιρηγενές, ὀλβιόδαιμον**
1 2 3 4 5

Ἄλλη παλαιὰ παρατήρησις ἐπὶ τῶν μαθηματικῶν τοῦ Ὁμήρου εἶναι ἡ χρησιμοποίησις ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιρρήματος τρίς, εἰς τὸν στίχον τῆς Ἰλιάδος Ο 189, ὅπου διαβάζομεν:

τριχθὰ δὲ πάντα δέδασται, ἕκαστος δ' ἔμμορε τιμῆς

ἤτοι τὰ πάντα ἐμοιράσθησαν εἰς τρία μέρη, ἕκαστος δὲ ἔλαβε τὸ μερίδιόν του.

Παραμένει ἀνεξήγητον, ἂν ὁ Ὅμηρος σκοπίμως κατεσκεύασε τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερομένους στίχους Ἰλ. Η 264-65 καὶ Τ 306-7. Ὁ Ἀριστοτέλης ἀναφερόμενος εἰς τὸν πρῶτον στίχον τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου, ὁ ὁποῖος ἔχει 17 συλλαβάς, ἡ τομὴ δὲ τῶν συλλαβῶν γίνεται μεταξὺ τῆς 8 καὶ 9 συλλαβῆς, λέγει ὅτι τοῦτο καὶ ἄλλα τινὰ μαθηματικὰ ἔχοντα (κατὰ τοὺς Πυθαγορείους) συμβολικὴν ἔννοιαν, εἶναι συμπτωματικά. (*ἔοικε συμπτώμασιν*) (Μετὰ τὰ φυσικὰ Ν 1093α-1093b τέλος).

[Σημείωσις. Εἰς τὸν κύβον, ἓν ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων τῶν ἐγγραφομένων εἰς σφαῖραν, οἱ Πυθαγόρειοι ἔβλεπον τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 9, 12 (6 ἕδραι, 8 κορυφαί, 12 ἀκμαί, καὶ 9 τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ $6+12$. Εἶναι δὲ ὁ λόγος 9/8 ὁ μουσικὸς φθόγγος, δι' οὗ κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ (ἴδε κεφ. 18). Ἡ μεγάλη πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας ($8+9$), ἡ δὲ μικρὰ ἔχει 8 κίονας. Εἶναι δὲ ὁ 8 τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12, τοὺς ὁποίους βλέπομεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν $6:8=9:12$, διὰ τῆς ὁποίας μὲ τὸν μουσικὸν φθόγγον $\frac{9}{8}$ κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ].

Παρὰ τὴν τυχὸν ὑπάρχουσαν γνώμην, ὅτι ὁ Ὅμηρος δὲν κατεσκεύασε σκοπίμως τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερομένους στίχους (οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται ἰσόψηφοι), φαίνεται, ὅτι ἡ ἀντίθετος γνώμη εἶναι ἀληθής. Κατὰ τὰ μέσα τοῦ Α' αἰῶνος μ.Χ. ἤκμασεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ὁ μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος Λεωνίδας ὁ Ἀλεξανδρεύς. Οὗτος ἀνεκάλυψεν ὅτι εἶχε ποιητικὴν ἰδιοφυΐαν καὶ ἐγκατέλειψε τὰ μαθηματικὰ καὶ τὴν ἀστρονομίαν καὶ ἐπεδόθη νὰ συντάσσῃ ποικίλα ἐπιγράμματα ἰσόψηφα, πολλὰ τῶν ὁποίων διεσώθησαν καὶ περιλαμβάνονται εἰς τὴν Παλατίνην Ἀνθολογίαν. Τὰ διασωθέντα ἐπιγράμματα τοῦ Λεωνίδου κατανέμονται εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τετράστιχα καὶ εἰς δίστιχα. Εἰς ἕκαστον τετράστιχον, ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἂν εἰς τὰ γράμματα τῶν δύο πρώτων στίχων θέσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμούς, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα ἐκ τῶν δύο ἑπομένων στίχων. Εἰς τὰ δίστιχα ἐπιγράμματα ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων ἐκ τοῦ πρώτου στίχου εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα ἐκ τοῦ δευτέρου στίχου. Αὐτὰ δὲ ἐγένοντο σκοπίμως, ὡς λέγει ὁ ἴδιος ὁ Λεωνίδας.

Παραδείγματα Anthologia Graeca IX 344

Τετράστιχον ΛΕΩΝΙΔΟΥ

Ἦν ὁπότε γραμμαῖσιν ἐμὴν φρένα μοῦνον ἔτερπον
οὐδ' ὄναρ εὐγενέταις γνώριμος Ἰταλίδες,
ἀλλὰ τὰ νῦν πάντεσσιν ἐράσμιος· ὀψὲ γὰρ ἔγνων,
ὁππόσον Οὐρανίην Καλλιόπη προφέρει.

ἦν = 58, ὁπότε = 525, γραμμαῖσιν = 455, ἐμὴν = 103, φρένα = 656, μοῦνον = 680, ἔτερπον = 610. Ἄθροισμα πρώτου στίχου = 3087.
οὐδ' = 474, ὄναρ = 221, εὐγενέταις = 979, γνώριμος = 1273, Ἰταλίδαις = 566. Ἄθροισμα δευτέρου στίχου = 3513. Ἄθροισμα πρώτου καὶ δευτέρου στίχου = = 6600.
ἀλλὰ = 62, τὰ = 301, νῦν = 500, πάντεσσιν = 896, ἐράσμιος = 626, ὀψὲ = 775, γὰρ = 104, ἔγνων = 908. Ἄθροισμα τρίτου στίχου = 4172.
ὁππόσον = 620, Οὐρανίην = 689, Καλλιόπη = 249, προφέρει = 870. Ἄθροισμα τετάρτου στίχου = 2428. Ἄθροισμα τρίτου καὶ τετάρτου στίχου = 6600.

(Ἑρμηνεία: Ὅτε, μόνον αἱ τροχιαὶ (ἡ ἀστρονομία) μὲ ηὐχαρίστουν, οὔτε στὸν ὕπνο μου δὲν ἤμουν γνωστὸς εἰς τὰς εὐγενεῖς Ἰταλικὰς πόλεις, τώρα ὅμως μὲ ἀγαποῦν ὅλοι· γιατὶ ἀργὰ ἀνεκάλυψα, πόσον ἡ Καλλιόπη (ἡ ἔφορος τῆς ποιήσεως Θεὰ) εἶναι ἀνωτέρα τῆς Οὐρανίας (τῆς ἐφόρου τῆς ἀστρονομίας Θεᾶς).

Δίστιχον τοῦ ἰδίου Anthol. Gr. VI 327

Εἷς πρὸς ἕνα ψήφισιν ἰσάζεται, οὐ δύο δοιοῖς·
οὐ γὰρ ἔτι στέργω τὴν δολιχογραφίην.

εἷς = 215, πρός = 450, ἕνα = 56, ψήφοισιν = 1548, ἰσάζεται = 534, οὐ = 470, δύο = 474, δοιοῖς = 364. Ἄθροισμα τοῦ πρώτου στίχου = 4111.
οὐ = 470, γὰρ = 104, ἔτι = 315, στέργω = 1408, τὴν = 358, δολιχογραφίην = 1456. Ἄθροισμα τοῦ δευτέρου στίχου = 4111.
(Ἑρμηνεία: Ἕνα-ἕνα στίχον θὰ κάνω νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὄχι δύο-δύο· γιατὶ τώρα πιὰ δὲν μ' ἀρέσει ἡ μακρολογία).

Ἀφοῦ ὁ Λεωνίδας εἶχε τὴν ἱκανότητα νὰ κατασκευάζῃ στίχους ἰσοψήφους ἢ δίστιχα ἰσόψηφα, διατί νὰ ἀποκλείσωμεν τὴν ἱκανότητα αὐτὴν ἀπὸ τὸν Ὅμηρον; Δὲν ἔχει γίνει δέ, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, ἔρευνα εἰς τοὺς στίχους τῆς Ὀδυσσείας καὶ τῆς Ἰλιάδος, διὰ νὰ ἴδωμεν μήπως καὶ ἄλλοι στίχοι εἶναι ἰσόψηφοι.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος περὶ κατασκευῆς στίχων ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας ἃς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ἐσώθησαν μονόστιχα ἐπιγράμματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν καὶ τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου (μερικὰ γράμματα ὑπάρχουν περισσότερον τῆς μιᾶς φορᾶς), ὅπως π.χ.

Τρηχὺν δ' ὑπερβὰς φραγμὸν ἐξήνθιζε κλώψ. Anthol. IX 547, ('Ανωνύμου). ('Ο κλέφτης, ἀφοῦ ἐπήδησε τὸν μὲ ἀγκάθια φράχτη, ἔκοψε πολλὰ ἄνθη).

'Αβροχίτων δ' ὁ φύλαξ θηροζυγοκαμψιμέτωπος. Anthol. IX 538 ('Ανωνύμου) (Μὲ λαμπρὰ στολὴ δὲ ἔκαμπτε τὸ μέτωπον τῶν ζῴων ὑπὸ τὸν ζυγὸν ὁ φύλαξ)

'Αβρὸς δ' ἐν προχοαῖς Κύκλωψ φθογγάζετο μύρμηξ. Anthol. IX 539 ('Ανωνύμου).
(Μὲ ἀβρότητα δέ, εἰς τὸ στόμιον ἀντήχησεν ἡ φωνὴ τῶν μυρμήκων τοῦ Κύκλωπος).

"Αλλη ἰδιότης μονοστίχων ἢ διστίχων ἐπιγραμμάτων εἶναι ὅτι ταῦτα διαβάζονται καὶ κατὰ τὴν ἀντίστροφον φορὰν καὶ λέγονται ἀντιστρέφοντα ἢ ἀνακυκλικὰ ἢ παλίνδρομα, ὅπως π.Χ.

Anthol. VI 314 ΝΙΚΟΔΗΜΟΥ ΗΡΑΚΛΕΩΤΟΥ (ἐκ Βιθυνίας, τοῦ α'. αἰω. μ.Χ. κατὰ πᾶσαν πιθανότητα)

Πηνελόπη, τόδε σοὶ φᾶρος καὶ χλαῖναν 'Οδυσσεὺς
ἤνεγκεν δολιχὴν ἐξανύσας ἀτραπόν.

'Η παλίνδρομος ἀνάγνωσις

'Οδυσσεὺς χλαῖναν καὶ φᾶρος σοὶ τόδε, Πηνελόπη,
ἀτραπὸν ἐξανύσας δολιχὴν ἤνεγκεν.

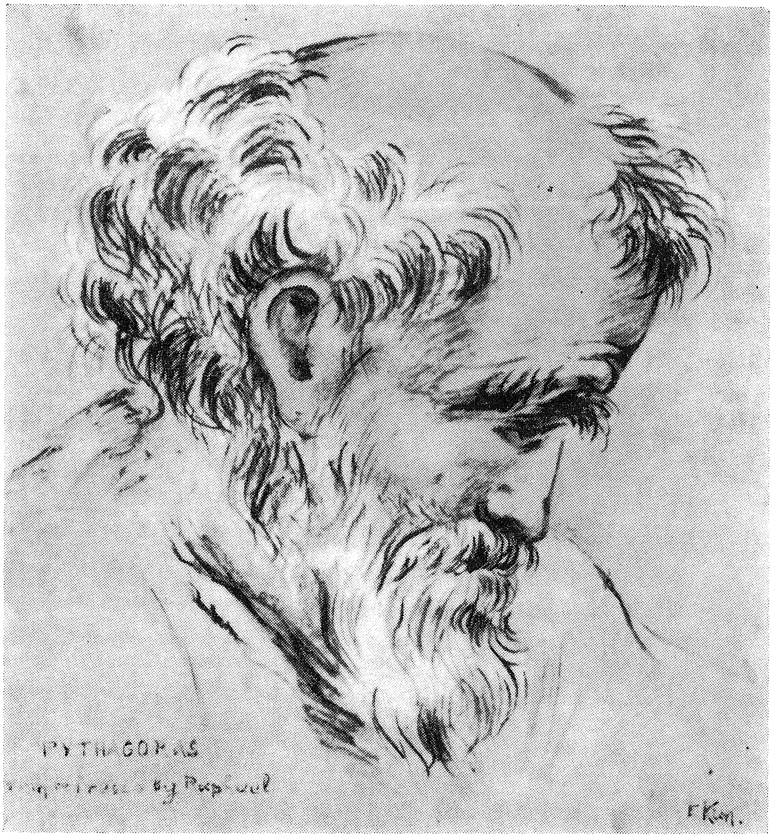
('Ερμηνεία: Πηνελόπη, αὐτὸ τὸ ροῦχο καὶ τὴν χλαίνην σοῦ ἔφερε ὁ 'Οδυσσεὺς διανύσας πολὺ μακρὺν δρόμον).

(Σημ. 'Αντιστρέφον ἢ καρκινογράφημα, ὡς ἐλέγετο, εἶναι καὶ τὸ βυζαντινόν: Νίψον ἀνομήματα μὴ μόναν ὄψιν, τὸ ὁποῖον διαβάζεται παλινδρομικῶς κατὰ συλλαβὴν καὶ ὄχι κατὰ λέξιν, ὅπως τὸ ἀνωτέρω ἐπίγραμμα).

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

15. Εἰς τὴν ἀρχαίαν 'Ελλάδα ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἡμεῖς σήμερον λέγομεν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. 'Η πρακτικὴ ἀριθμητικὴ ὠνομάζετο τότε λογιστική. 'Ο σχολιαστὴς τῶν ἔργων τοῦ 'Αρχιμήδους Εὐτόκιος (6ος αἰὼν) μνημονεύει βιβλίον λογιστικῆς τοῦ μαθηματικοῦ Μάγνου, τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν ἐσώθη ('Αρχιμήδους "Απαντα τόμ. III, σελ. 258, 31, Heiberg). Πράξεις τῆς πρακτικῆς ἀριθμητικῆς διεσώθησαν ὑπὸ τοῦ "Ηρωνος, διευθυντοῦ

τοῦ Ἑλληνικοῦ Πολυτεχνείου Ἀλεξανδρείας (πρῶτος αἰὼν μ.Χ.), ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, (4ος αἰ. μ.Χ.) διευθυντοῦ τοῦ Ἑλληνικοῦ Πανεπιστημίου Ἀλεξανδρείας, εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν Μαθηματικὴν Σύνταξιν τοῦ Πτολεμαίου, (τὴν λεγομένην ὑπὸ τῶν νεωτέρων, ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ ὀνόματος, Ἀλμαγέστην), καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις. Θὰ ὑπῆρχον βεβαίως καὶ κατὰ τὴν ἀρχαιό-



Εἰκὼν τοῦ Πυθαγόρου ἐκ τοιχογραφίας τοῦ Ῥαφαὴλ ἐν τῷ Βατικανῷ.
Εὐγενὴς προσφορὰ τοῦ Σαμίου κ. Γεωργίου Μανῆ.

τητα βιβλία πρακτικῆς ἀριθμητικῆς, τὰ ὁποῖα προωρίζοντο διὰ τὴν διδασκαλίαν εἰς τὰ Δημοτικὰ Σχολεῖα καὶ διὰ τὴν χρῆσιν τῶν ἐμπορευομένων. Δὲν διεσώθη ὅμως τίποτε ἐξ αὐτῶν, ἐκτὸς ὀλίγων ἑκατοντάδων προβλημάτων ἐκδόσεως τοῦ 14ου καὶ 15ου αἰῶνος. Ἐκ τούτων, ἐδημοσιεύθησαν εἰς τὴν Βιέννην κατὰ τὰ ἔτη 1963 καὶ 1968 περίπου 200, ὡς ἀναφέρεται εἰς τὸν πρόλογον.

Κατὰ τὰ ἀναγραφόμενα τοῦ ἐκ τῶν ἐκδοτῶν κ. Χοῦνγκερ ὑπάρχουν ἀκόμη εἰς τὰ Ἀρχεῖα τῆς Βιέννης πολλὰ ἀνέκδοτα προβλήματα, τῆς ἐποχῆς τῶν τελευταίων χρόνων τῆς Βυζαντινῆς Αὐτοκρατορίας καὶ τῆς ἐποχῆς τῶν πρώτων δεκαετιῶν ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων.

Τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, (ἀποκλειστικὴ δημιουργία τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων) μοναδικὰ εἰς τὸν κόσμον τῶν ἀρχαίων πολιτισμῶν, διέσωσεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ βιβλία 7, 8, 9 τῶν Στοιχείων του. Ἄλλο βιβλίον ἐξεδόθη, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ὑπὸ τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Γέρασα τῆς Παλαιστίνης καταγομένου Ἕλληνος μαθηματικοῦ Νικομάχου (2ος αἰ. μ.Χ.) τοῦ καλουμένου, ἐκ τοῦ ὀνόματος τῆς πόλεως ὅπου ἐγεννήθη, Γερασηνοῦ. Τὸ βιβλίον τοῦτο φέρει τὸν τίτλον Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ καὶ περιέχει ἑρμηνευτικὰ σχόλια εἴς τινας ὁρισμοὺς καὶ θεωρήματα τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τοῦ Εὐκλείδου, ὡς ἐπίσης σχόλια ἑρμηνευτικὰ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς μουσικῆς καὶ τὴν ἀστρονομίαν τοῦ Εὐκλείδου. Ἔν τινι μέτρῳ παρόμοιον περιεχόμενον περιλαμβάνει καὶ τὸ βιβλίον τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, ἐπίσης τοῦ 2ου αἰ. μ.Χ. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἐγράφη διὰ νὰ ἑρμηνεύσῃ τὰ μαθηματικά, τὰ ὁποῖα ἔχει κατασπείρει ὁ Πλάτων εἰς τοὺς διαλόγους του, ἔχει ὅμως διασώσει μερικὰς περιφήμους γνώσεις τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων συμπεραίνομεν περίπου τὴν μεγάλην ἀξίαν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἄλλο βιβλίον ἀριθμητικῆς, ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικά, εἶναι τὸ ἐκδοθὲν ὑπὸ τοῦ διασήμου Ἀλεξανδρέως μαθηματικοῦ Διοφάντου, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 250 μ.Χ. Τὸ βιβλίον ὅμως τοῦτο περιέχει ὑπὸ ἀριθμητικὸν ἔνδυμα ὕλην μαθηματικὴν τὴν ὁποίαν σήμερον κατατάσσομεν καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν. (Ἴδε Διοφάντου Ἀριθμητικὰ ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, Ὀργ. Ἐκδ. Διδ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1963).

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀποδίδονται, εἰς τὸν Πυθαγόραν καὶ τοὺς Πυθαγορείους, δηλ. τοὺς μαθητάς του καὶ τοὺς διαδόχους αὐτῶν. Εἰδικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται 1) ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων καὶ τῶν περισσοτέρων κοσμικῶν σχημάτων (κανονικῶν πολυέδρων), 2) ἡ ἀνακάλυψις καὶ ἀπόδειξις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ 3) ἡ ἀνακάλυψις ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = z^2$ διὰ τῶν τύπων μ, $\frac{\mu^2 - 1}{2}$, $\frac{\mu^2 + 1}{2}$, ὅπου μ περιττὸς 3, 5, 7 . . . Διὰ τοὺς ἀρτίους ἀριθμοὺς $\beta = 4, 6, 8 \ldots$ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως διὰ τῶν τύπων β, $\frac{\beta^2}{4} - 1$, $\frac{\beta^2}{4} + 1$ ἀποδίδονται εἰς τὸν Πλάτωνα (Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην σελ. 65,15.426,6.428,7.428,21).

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην, ὅστις συνεχίζει τὴν Πυθαγόρειον παράδοσιν, «μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος». (Ὁρισμοὶ 1 καὶ 2 τοῦ 7ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου). Ὅπως βλέπομεν ἐδῶ ἡ μονὰς δὲν περιλαμβάνεται εἰς τοὺς ἀριθμούς, ἐν ᾧ ὡς ἀριθμὸς νοεῖται πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός. Ὁ Νικόμαχος (σελὶς 13, 7) λέγει, ὅτι ἀριθμὸς εἶναι πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον». Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος ὁρίζει τὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς: «Ἀριθμός ἐστι σύστημα μονάδων, ἢ προποδισμὸς πλήθους ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ ἀναποδισμὸς εἰς μονάδα καταλήγων, μονὰς δέ ἐστι περαίνουσα ποσότης [ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν], ἥτις μειουμένου τοῦ πλήθους κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν τοῦ παντὸς ἀριθμοῦ στερηθεῖσα μονήν τε καὶ στάσιν λαμβάνει» Δηλαδή, ἀριθμὸς εἶναι σύστημα μονάδων, ἢ σχηματισμὸς διὰ προσθέσεως, πλήθους, ἀρχίζων ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἐπάνοδος δι' ἀντιστροφῆς τοῦ σχηματισμοῦ καταλήγων εἰς τὴν μονάδα. Μονὰς δὲ εἶναι περαίνουσα ποσότης, ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία, ἀφοῦ ἐλαττώνεται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, κατὰ τὴν διαδοχικὴν ἀφαίρεσιν, στερηθεῖσα τῆς ἐννοίας τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ, λαμβάνει μονὴν καὶ στάσιν, (δηλ. ἀπομένει καὶ στέκεται μόνη της). Ὁ Θέων παρέχει ἐδῶ καὶ τὴν ἐτυμολογίαν τῆς λέξεως μονὰς λέγων, ὅτι ἂν ἔκ τινος ἀκεραίου ἀφαιρῶμεν συνεχῶς μονάδα εἰς τὸ τέλος θὰ παραμείνῃ μία μονάς. Ἂν π.χ. ἔχωμεν σωρὸν μήλων καὶ ἀφαιρῶμεν συνεχῶς ἓν μῆλον τέλος θὰ παραμείνῃ ἓν μῆλον μόνον του, καὶ ἐκ τῶν λέξεων «παραμείνῃ» καὶ «μόνον» του σχηματίζεται ἡ λέξις μονάς. (Θέων Σμυρναῖος, σελὶς 18, 31). Κατὰ τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα «Τὴν μονάδα λέγουσι (νοεῖ, οἱ Πυθαγόρειοι) στιγμὴν ἄθετον, τὴν δὲ στιγμὴν (νοεῖ τὸ σημεῖον εἰς τὴν γεωμετρίαν) θέσιν ἔχουσαν». (Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως Ἅπαντα, τόμος 4ος ἔκδ. I. L. Heiberg, Λειψία 1912, σελὶς 124, 21).

Κατὰ τὸν Νικόμαχον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς τετραγώνους, ἑτερομήκεις, προμήκεις, ἐλλιπεῖς, ὑπερτελείους, τελείους, τριγώνους καὶ πολυγώνους. (Νικόμαχος, σελὶς 86, 9.199, 18. Θέων Σμυρν. σελ. 26, 21.46, 19). Τετράγωνοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων (ὡς ὁρίζει τοῦτο ὁ Εὐκλείδης). Ἑτερομήκεις εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς δύο παράγοντας, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, $\nu\,(\nu+1)$. Προμήκεις ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀναλυόμενοι εἰς δύο παράγοντας, τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μεγαλείτερος τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας. Ὥστε ἡ ἔννοια προμήκης ἀριθμὸς περιλαμβάνει τὴν ἔννοιαν ἑτερομήκης. Ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ τὰς λέξεις ἑτερομήκης καὶ προμήκης ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, (Πλάτων, Θεαίτητος 147 d-148 b). Ἐλλιπὴς ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν δυνατῶν πηλίκων αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς 10 π.χ. εἶναι ἐλλιπής, διότι $10{:}10 = 1$, $10{:}5 = 2$, $10{:}2 = 5$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων, $1 + 2 + 5 < 10$. Ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι ὑπερτελής, διότι $12{:}12 = 1$, $12{:}6 = 2$, $12{:}4 = 3$, $12{:}3 = 4$, $12{:}2 = 6$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$.

ΤΕΛΕΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

16. Τέλειος ἀριθμὸς κατὰ τὸν Εὐκλείδην (Στοιχείων βιβλ. 7 ὁρισμὸς 23) εἶναι ὁ ἴσος πρὸς τὰ μέρη του, ἤτοι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του δίδῃ τὸν ἀριθμόν. Ὁ 6 π.χ. εἶναι τέλειος, διότι $6:6 = 1$, $6:3 = 2$, $6:2 = 3$ καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του $1 + 2 + 3 = 6$, ἤτοι αὐτὸς ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Ἀπὸ 1-10 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος ἀριθμὸς ὁ 6. Ὁ 28 εἶναι ἐπίσης τέλειος, διότι $28:28 = 1$, $28:14 = 2$, $28:7 = 4$, $28:4 = 7$, $28:2 = 14$, καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Ἀπὸ τοῦ 11 μέχρι τοῦ 100 ὑπάρχει εἷς μόνον τέλειος ἀριθμὸς ὁ 28. Ὁ ἀριθμὸς 496 εἶναι τέλειος, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων του $1 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$. Ἀπὸ τοῦ 101 μέχρι τοῦ 1000 ὑπάρχει μόνον εἷς τέλειος ἀριθμὸς ὁ 496. Ἀπὸ τοῦ 1001 μέχρι τοῦ 10000 ὑπάρχει μόνον εἷς τέλειος ἀριθμὸς ὁ 8128. Ὁ Ἰάμβλιχος, ἑκατὸν ἔτη περίπου μεταγενέστερος τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, ὁμιλῶν διὰ τοὺς τελείους ἀριθμοὺς λέγει, ὅτι, ἐὰν τυχὸν ἀναζητήσωμεν περαιτέρω τέλειον ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν μεταξὺ $1000\overset{1}{0}$ καὶ $1000\overset{2}{0}$ μόνον ἕνα τέλειον ἀριθμόν, καὶ μεταξὺ $1000\overset{2}{0}$ καὶ $1000\overset{3}{0}$ θὰ εὕρωμεν πάλιν ἕνα μόνον τέλειον ἀριθμόν, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. (καὶ εἰ τύχοι ἐν πρώτῳ βαθμῷ μυριάδων ὁμοίως μόνον ἕνα, καὶ δευτέρῳ βαθμῷ πάλιν ἕνα, καὶ τὸ τοιοῦτον ἐπ' ἄπειρον). (Ἰάμβλιχος, σ. 33, 20). Ἡ πληροφορία αὕτη τοῦ Ἰαμβλίχου δὲν συμπίπτει πρὸς τὰ πράγματα. Ἐκ τοῦ Ἰαμβλίχου συνάγεται ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μόνον τοὺς πέντε πρώτους τελείους ἀριθμούς. Διὰ πρώτην δὲ φοράν, καθ' ὅσον γνωρίζομεν, βλέπομεν νὰ χρησιμοποιῆται ἡ λέξις βαθμὸς διὰ τὴν ἔκφρασιν τῆς τάξεως δυνάμεως ἀριθμοῦ τινός. Θεωροῦμεν ὅμως βέβαιον, ὅτι ἡ λέξις αὕτη εἶχε δημιουργηθῆ ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων. Δὲν εἶναι βέβαιον πότε ἀνεκαλύφθη ὁ ἕκτος καὶ ὁ ἕβδομος τέλειος ἀριθμός. Ὁ ὄγδοος ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Jean Prestet (περὶ τὸ 1670), ὁ ἔνατος ὑπὸ τοῦ P. Seelhoff (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1886, σελ. 174 καὶ ἑξῆς). Ὁ δέκατος τέλειος ἀριθμὸς ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ Ἀμερικανοῦ R. E. Powers (Bulletin, American Mathem. Society, 1912 σελ. 162).

Εἶναι δυσκολώτατον νὰ ἀνακαλυφθῇ πότε ἀριθμός τις εἶναι τέλειος, ὡς τοῦτο θὰ γίνῃ ἀντιληπτὸν ἀμέσως κατωτέρω. Ἐνῷ ἡ ἀπόφανσις, πότε ἀριθμός τις εἶναι ἐλλιπὴς ἢ ὑπερτελὴς εἶναι εὐκολωτάτη κατόπιν τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν πηλίκων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ ἀθροίσματος τούτου πρὸς τὸν ἀριθμόν, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τελείου ἀριθμοῦ ἰσχύουν ἄλλα κριτήρια.

Κατὰ τὸν Εὐκλείδην (Στοιχείων βιβλίον 9, θεώρ. 36), ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $1, 2, \overset{2}{2}, \overset{3}{2}, \overset{4}{2}, \ldots \overset{\nu-1}{2}$, (1), καὶ σχηματίσωμεν διαδοχικῶς τὰ μερικὰ ἀθροίσματα αὐτῆς, ἐὰν μερικόν τι ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς πρω-τος, τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς τέλειος.

Ἔστωσαν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα:

$\sigma_1 = 1$

$\sigma_2 = 1 + 2 = 3$. Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2^{1} \times 3 = 6$ ἀριθμὸς τέλειος.

$\sigma_3 = 1 + 2 + 2^{2} = 7$. Ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2^{2} \times 7 = 28$ ἀριθμὸς τέλειος.

$\sigma_4 = 1 + 2 + 2^{2} + 2^{3} = 15$. Ὁ ἀριθμὸς 15 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_5 = 1 + 2 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} = 31$. Ὁ ἀριθμὸς 31 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2^{4} \times 31 = 496$ ἀριθμὸς τέλειος.

$\sigma_6 = 1 + 2 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + 2^{5} = 63$. Ὁ ἀριθμὸς 63 δὲν εἶναι πρῶτος.

$\sigma_7 = 1 + 2 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + 2^{5} + 2^{6} = 127$. Ὁ ἀριθμὸς 127 εἶναι πρῶτος. Εἶναι ἄρα $2^{6} \times 127 = 8128$ ἀριθμὸς τέλειος.

Τὸ ἄθροισμα τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς προόδου (1) εἶναι $\Sigma = 2^{\nu} - 1$. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τότε τὸ γινόμενον, τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος τοῦ $2^{\nu-1}$, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $2^{\nu} - 1$ εἶναι ἀριθμός τέλειος. Ὡς ἐτονίσθη προηγουμένως, εἶναι δύσκολον νὰ εὑρεθῇ πότε ὁ ἀριθμὸς $2^{\nu} - 1$ εἶναι πρῶτος, ὅταν ὁ ν εἶναι μεγάλος. Ἡ μέθοδος τοῦ Ἐρατοσθένους (τὸ κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους) δὲν εὐκολύνει τὴν ἔρευναν διὰ μεγάλους ἀριθμούς. Ὁ Γάλλος δικηγόρος καὶ περίφημος ἐρευνητὴς μαθηματικῶν Fermat, ἀνεκοίνωσε δύο θεωρήματα, ἄνευ ἀποδείξεων, τὰ ὁποῖα εὐκολύνουν τὴν ἔρευναν ἂν ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $2^{\nu} - 1$ εἶναι πρῶτος.

Πρὸς τοῦτο, λέγει ὁ Fermat, γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν (β) τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς γεωμετρικῆς προόδου $2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, \ldots 2^{\nu-1}$. Ἄνωθεν ταύτης γράφομεν εἰς σειρὰν (α) ἀντιστοίχως τοὺς ἐκθέτας τῆς προηγουμένης γεωμετρικῆς προόδου, ἀφοῦ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν προσθέσωμεν τὴν μονάδα. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν: α) 1 2 3 4 5 6 7 . . . ν

β) 1 3 7 15 31 63 127 . . . $2^{\nu} - 1$.

Θεώρημα 1ον. Ἐὰν ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (α) δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε τὸ κάτωθεν τούτου ἐπὶ τῆς σειρᾶς (β) εὑρισκόμενον μερικὸν ἄρθροισμα θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $2^{\kappa.\lambda} - 1$, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ $2^{\kappa} - 1$

καὶ διὰ τοῦ $\overset{\lambda}{2} - 1$, ἤτοι ὁ $\overset{\nu}{2} - 1 = \overset{\kappa.\lambda}{2} - 1$ δὲν εἶναι πρῶτος (κ,λ ἀκέραιοι).

Θεώρημα 2ον. Ἐὰν ἀριθμός τις τῆς σειρᾶς (α) εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε μερικόν τι ἀντίστοιχον ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (β) εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $2\,m\cdot n + 1$. Ἐὰν τὸ μερικὸν τοῦτο ἄθροισμα δὲν ἔχει διαιρέτην τῆς μορφῆς ταύτης, δὲν ἔχει γενικῶς διαιρέτην, ἤτοι εἶναι τοῦτο ἀριθμὸς πρῶτος. (Ἐπιστολὴ Fermat πρὸς Mersenne. Varia opera mathem. Tolosae 1679, fol. p. 177). Ὁ Νικόμαχος προσθέτει εἰς τὴν ἔκθεσίν του περὶ τῶν τελείων ἀριθμῶν, ὅτι οἱ τέλειοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄρτιοι καὶ ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἶναι 6 ἢ 8. (Νικόμαχος 40, 20).

Κατὰ τοὺς νεωτέρους, (Wilson, 1741-1793) ἐὰν ὁ p εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, τὸ ἄθροισμα $1.\,2.\,3.\,4\ldots(p-2)\,(p-1)+1$ εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ p.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει: Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς p διαιρῇ τὸ ἄθροισμα $1.2.3.4.\ldots(p-2)\,(p-1)+1$, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι πρῶτος.

Κατὰ τὸν Γερμανὸν καθηγητὴν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Βερολίνου L. Kronecker «ὁ Euler ἀπέδειξεν, ὅτι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου λαμβάνονται ὅλοι οἱ ἄρτιοι τέλειοι ἀριθμοὶ καὶ ὅτι, ἂν ὑπάρχουν περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοὶ οὗτοι κατ' ἀνάγκην θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $(4\,m+1)^{4n+1}\cdot\chi^2$, ὅπου ὁ $4m+1=p$ θὰ εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς καὶ ὁ χ περιττὸς μὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ p. Οὐδεὶς ὅμως εὑρέθη περιττὸς τέλειος ἀριθμός. Ἐξ ἄλλου δὲν κατωρθώθη ν' ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχουν περιττοὶ τέλειοι ἀριθμοί. (L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie I, 1901, σελ. 24).

Οἱ πρῶτοι 10 τέλειοι ἀριθμοί:

6 28 496 8128

Πέμπτος $\overset{12}{2}\,(\overset{13}{2}-1) = 33\ 550\ 336$

Ἕκτος $\overset{16}{2}\,(\overset{17}{2}-1) = 8\ 589\ 869\ 056$

Ἕβδομος $\overset{18}{2}\,(\overset{19}{2}-1) = 137\ 438\ 691\ 328$

Ὄγδοος $\overset{30}{2}\,(\overset{31}{2}-1) = 2\ 305\ 843\ 008\ 139\ 952\ 128$

Ἔνατος $\overset{60}{2}\,(\overset{61}{2}-1)$

Δέκατος $\overset{88}{2}\,(\overset{89}{2}-1)$

Κατὰ τὸ ἔτος 1876 ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Edouard Lucas ἀνεκάλυψε τὸν 12ον τέλειον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εἶναι $\overset{126}{2}\,(\overset{127}{2}-1)$.

Ὡς ἐμνημονεύθη προηγουμένως ὁ τύπος ὁ παρέχων τοὺς τελείους ἀριθμοὺς εἶναι κατὰ τὸν Εὐκλείδην $\overset{\nu-1}{2}\,(\overset{\nu}{2}-1)$, ὅταν ὁ $\overset{\nu}{2}-1$ εἶναι πρῶτος ἀριθμός. (Στοιχεῖα Εὐκλείδου 9, 36) (= βιβλίον 9 θεώρημα 36).

'Αφ' ἧς ἐποχῆς ἀνεπτύχθη ἡ κατασκευὴ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν κατεβλήθη προσπάθεια ἀνακαλύψεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $2^{\nu}-1$ ($\nu = 2, 3, 4 \ldots$). Οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς αὐτῆς ὠνομάσθησαν ἀριθμοὶ Mersenne ὑπὸ τῶν νεωτέρων. (Marin Mersenne, Γάλλος μαθηματικὸς (1588-1648). Κατὰ τὸ 1963 ἀνεκαλύφθη διὰ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ὁ 23ος ἀριθμὸς Mersenne ὁ $2^{11213}-1$, ὁ ὁποῖος παρέχει τὸν 23ον τέλειον ἀριθμὸν κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλείδου.

Κατωτέρω παραθέτομεν πίνακα τῶν τελείων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 11ου μέχρι τοῦ 23ου (ὁ δέκατος τέλειος, $2^{88}(2^{89}-1)$ ἔχει ψηφία 54).

Π Ι Ν Α Ξ

ἐμφαίνων τοὺς τελείους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 11ου μέχρι τοῦ 23ου, ὡς καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων αὐτῶν.

Αὔξ. ἀρ.	Τύπος	'Αριθ. ψηφίων	Αὔξ. ἀρ.	Τύπος	'Αριθ. ψηφίων
11	$2^{106}(2^{107}-1)$	65	18	$2^{3216}(2^{3217}-1)$	1937
12	$2^{126}(2^{127}-1)$	77	19	$2^{4252}(2^{4253}-1)$	2561
13	$2^{520}(2^{521}-1)$	314	20	$2^{4422}(2^{4423}-1)$	2663
14	$2^{606}(2^{607}-1)$	366	21	$2^{9688}(2^{9689}-1)$	5834
15	$2^{1278}(2^{1279}-1)$	770	22	$2^{9940}(2^{9941}-1)$	5985
16	$2^{2202}(2^{2203}-1)$	1327	23	$2^{11212}(2^{11213}-1)$	6751
17	$2^{2280}(2^{2281}-1)$	1373			

Ὅπως εἶναι φανερὸν ἡ δυσκολία τῆς εὑρέσεως τῶν τελείων ἀριθμῶν ἔγκειται εἰς τὴν δυσκολίαν τῆς εὑρέσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $(2^{\nu}-1)$, τῶν καλουμένων ἀριθμῶν Mersenne. Διότι δὲν ὑπάρχει τύπος παρέχων τοὺς πρώτους ἀριθμούς. 'Εκτὸς τοῦ 2, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μόνος ἄρτιος πρῶτος ἀριθμός, οἱ λοιποὶ πρῶτοι εἶναι περιττοὶ τῆς μορφῆς $2\nu+1$. Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $4\nu \pm 1$. Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει, δηλ. πᾶς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $4\nu \pm 1$ δὲν εἶναι πάντοτε πρῶτος ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$).

Μερικαὶ ἰδιότητες τῶν τελείων ἀριθμῶν

Κατὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας μαθηματικοὺς τὰ μερικὰ διαδοχικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 . . . ὀνομάζονται τρίγωνοι ἀριθμοί. Ὡς εἶναι π.χ. οἱ 1, 3, 6, 10 . . . Εἰς κατωτέρω κεφάλαιον γίνεται εἰδικωτέρα μνεία αὐτῶν.

Πρώτη ἰδιότης τῶν τελείων ἀριθμῶν: Τὸ τελικὸν ψηφίον παντὸς τελείου ἀριθμοῦ εἶναι 6 ἢ 8 (ὡς ἐμνημονεύθη ἤδη καὶ ἦτο γνωστὸν εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας).

Δευτέρα ἰδιότης: Πᾶς τέλειος ἀριθμὸς εἶναι ἀριθμὸς τρίγωνος.

Τρίτη ἰδιότης: Πλὴν τοῦ πρώτου τελείου ἀριθμοῦ τοῦ 6, πᾶς τέλειος ἀριθμὸς εἶναι μερικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν, $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots$, $(1^3 + 3^3 = 28,\ 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496$ κλπ.).

Τετάρτη ἰδιότης: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν πηλίκων παντὸς τελείου ἀριθμοῦ (ἡ μονὰς δὲν λογίζεται ὡς διαιρέτης) σὺν τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἰδίου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε ὁ ἀριθμὸς 2. Τοῦ δευτέρου τελείου ἀριθμοῦ, τοῦ 28, τὰ μέρη εἶναι, $28 : 28 = 1$, $28 : 14 = 2$, $28 : 7 = 4$, $28 : 4 = 7$, $28 : 2 = 14$. Καὶ εἶναι $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμὸς 28.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μερῶν εἶναι:

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$, + τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἰδίου τοῦ ἀριθμοῦ 28,

δηλ. $+ \frac{1}{28} = 2$.

Τοῦ τρίτου τελείου ἀριθμοῦ, τοῦ 496, τὰ μέρη εἶναι:

$496 : 496 = 1$, $496 : 248 = 2$, $496 : 124 = 4$, $496 : 62 = 8$, $496 : 31 = 16$,

$496 : 16 = 31$, $496 : 8 = 62$, $496 : 4 = 124$, $496 : 2 = 248$.

Καὶ εἶναι : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$, ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμὸς 496.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μερῶν εἶναι:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248},$$ + τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἰδίου τοῦ ἀριθμοῦ, δηλ. $+\frac{1}{496}=2.$

[Σημείωσις: Ὁ ἀνωτέρω πίναξ τῶν τελείων ἀριθμῶν, ὡς καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτῶν ὑπ' ἀριθ. 2, 3, 4 (ἄνευ τοῦ παραδείγματος τῶν ἀντιστρόφων μερῶν τοῦ 496) ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ ἀμερικανικοῦ περιοδικοῦ Scientific American, Μαρτίου 1968, Mathematical games, by Martin Gardner].

ΦΙΛΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

17. Ὁ Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς σελ. 35, 6 λέγει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας, ὅταν τις τὸν ἠρώτησε «τί ἐστι φίλος» εἶπεν «ἕτερος ἐγώ». Ἐκ τῆς γνώμης αὐτῆς τοῦ Πυθαγόρου ἐδόθη ἀφορμὴ καὶ εὑρέθησαν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται φίλοι ἀριθμοί. Καλοῦνται δὲ δύο ἀριθμοὶ φίλοι, προσθέτει ὁ Ἰάμβλιχος, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πηλίκων τοῦ πρώτου ἰσοῦται μὲ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πηλίκων τοῦ δευτέρου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ἀριθμόν. Οἱ δύο ἀριθμοὶ π.χ. 220 καὶ 284 εἶναι φίλοι ἀριθμοί, διότι

$$\begin{array}{rr}
220:220= & 1\\
220:110= & 2\\
220:\ 55= & 4\\
220:\ 44= & 5\\
220:\ 22= & 10\\
220:\ 20= & 11\\
220:\ 11= & 20\\
220:\ 10= & 22\\
220:\ \ 5= & 44\\
220:\ \ 4= & 55\\
220:\ \ 2= & 110\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
284:284= & 1\\
284:142= & 2\\
284:\ 71= & 4\\
284:\ \ 4= & 71\\
284:\ \ 2= & 142\\
\hline
 & 220
\end{array}$$

Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα = 220, ἤτοι ὁ ἄλλος ἀριθμός.

Καὶ εἶναι τὸ ἄρθροισμα = 284, ἤτοι ὁ ἄλλος ἀριθμός.

Ὁ Γάλλος φιλόσοφος Καρτέσιος (Descartes, 1596—1650) καὶ ὁ Ὁλανδὸς μαθηματικὸς Van Schooten (1615—1660) μετὰ τὸ ζεῦγος τῶν φίλων ἀριθμῶν 220, 284, τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Ἰάμβλιχος, ὡς ἀνακάλυψιν τῶν Πυθαγορείων, ἐπεδόθησαν μετὰ ζήλου εἰς τὴν ἔρευναν πρὸς ἀνακάλυψιν ἄλλων ζευγῶν φίλων ἀριθμῶν καὶ εὗρον τὰ ἑξῆς τρία ζεύγη:

1) $2620 = 2^2 \times 5 \times 131$; 2) $5020 = 2^2 \times 5 \times 251$, 3) $6232 = 2^3 \times 19 \times 41$

$2964 = 2^2 \times 17 \times 43$, $5564 = 2^2 \times 13 \times 107$, $6368 = 2^5 \times 199$.

Βραδύτερον ὁ Γερμανοελβετὸς Euler (1707—1783) ἀνεκάλυψε 61 ἄλλους φίλους ἀριθμούς. Δὲν ἔχει ἀνακαλυφθῆ ἀκόμη ἂν ὑπάρχῃ γενικὸς τύπος παρέχων τοὺς φίλους ἀριθμούς. [Σήμερον ἔχουν ἀνακαλυφθῆ διὰ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν περισσότερα τῶν 600 ζεύγη φίλων ἀριθμῶν. Τὸ τελευταῖον ζεῦγος ἀνεκαλύφθη κατὰ τὸ 1964 ὑπὸ τοῦ Howard L. Rolf].

ΑΙ ΤΕΤΡΑΚΤΥΕΣ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ ΚΑΙ Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΣ ΜΟΥΣΙΚΗ ΚΛΙΜΑΞ

18. Ὡς ἔχει ἤδη μνημονευθῆ ὁ Πυθαγόρας καὶ ἀκολούθως καὶ οἱ μαθηταί του ἐπίστευον, ὅτι ἀρχαὶ καὶ στοιχεῖα τῶν ὄντων εἶναι οἱ ἀριθμοί. Πῶς ἀκριβῶς ἐνόουν τοῦτο δὲν εἶναι γνωστόν, διότι ἡ διδασκαλία εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου ἦτο μυστική. Εἶχον ὅμως, μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου, διαφύγει μερικαὶ σχετικαὶ πληροφορίαι, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ἄλλων μεταγενεστέρων συγγραφέων. Αἱ εἰς τὸν κόσμον παρατηρούμεναι ἀντιθέσεις εἶχον ἐπισύρει ἰδιαιτέρως τὴν προσοχὴν τῶν Πυθαγορείων, οἱ ὁποῖοι εἶχον καθορίσει αὐτάς, κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, εἰς τὰς ἑξῆς δέκα:

πέρας	καὶ	ἄπειρον
περιττὸν	καὶ	ἄρτιον
ἓν	καὶ	πλῆθος
δεξιὸν	καὶ	ἀριστερὸν
ἄρρεν	καὶ	θῆλυ
ἠρεμοῦν	καὶ	κινούμενον
εὐθὺ	καὶ	καμπύλον
φῶς	καὶ	σκότος
ἀγαθὸν	καὶ	κακὸν
τετράγωνον	καὶ	ἑτερόμηκες

(Ἀριστοτέλης, Μετὰ τὰ Φυσικὰ Α. 986 α 24).

Διὰ τὸν λόγον, ὅτι αἱ ἀντιθέσεις εἶναι δέκα καὶ διότι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 10 δίδουν ὁσονδήποτε μεγάλον ἀριθμόν, οἱ Πυθαγόρειοι ἔλεγον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι τέλειος ἀριθμὸς (ἀσχέτως πρὸς τὸν μνημονευθέντα μαθηματικὸν ὁρισμὸν τοῦ τελείου ἀριθμοῦ). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀπὸ μονάδος πρώτων ἀριθμῶν $1+2+3+4$ εἶναι 10, ἐθεωρεῖτο καὶ ὁ 4 τέλειος ἀριθμός, καλούμενος τετρακτύς, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποίουν ὡς ὅρκον, καθ' ὃν δὲν θὰ ἐπρόδιδον τὰ μυστικὰ τῆς Σχολῆς:

οὐ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ ψυχᾷ παραδόντα τετρακτύν,
παγὰν ἀενάου φύσεως ῥίζωμά τ' ἔχουσαν.

(ὄχι, δὲν θὰ προδώσω, μὰ τὸν Πυθαγόρα, ὁ ὁποῖος παρέδωκεν εἰς τὴν ψυχήν μας τὴν τετρακτύν, πηγὴν αἰωνίου φύσεως ἔχουσαν βαθὺ ῥίζωμα) (Θέων Σμυρναῖος σ. 94, 6). Εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον ὁ Θέων λέγει, ὅτι ἐπὶ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν τῆς τετρακτύος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 ἐκφράζουν τὸ κάτω do καὶ τὸ ἄνω do τῆς μουσικῆς κλίμακος (τὴν ὀκτάβα, τὴν διὰ πασῶν λεγομένην). Οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 4 ἐκφράζουν τὴν διπλῆν ὀκτάβα, τὴν δὶς διὰ πασῶν λεγομένην· (διὰ πασῶν, νοεῖται τῶν χορδῶν, τοῦ ὀκταχόρδου. Ἡ ἁπλῆ διὰ πασῶν εἶναι ἡ διὰ τεσσάρων χορδῶν ἐκφραζομένη). Ἡ σχέσις 4 : 3 ἐκφράζει τὸν βασικὸν φθόγγον τῆς μουσικῆς κλίμακος, fa, καὶ ἡ σχέσις 3 : 2 ἐκφράζει τὸν βασικὸν φθόγγον τῆς μουσικῆς κλίμακος, sol. Ὑπάρχουν ἀκόμη κατὰ τὸν Θέωνα δέκα ἀκόμη τετρακτύες ἤτοι ἐν ὅλῳ ἕνδεκα.

Ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη τετρακτύες εἶναι αἱ ἐκφράζουσαι τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀρτίου καὶ τοῦ περιττοῦ κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν δύο στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν ἀπὸ μονάδος προόδων, μὲ λόγον τὸν 2 ἡ μία, καὶ τὸν 3 ἡ ἄλλη, ὡς:

1 2 4 8   1 3 9 27

Ἡ τετάρτη τετρακτὺς εἶναι ἡ δηλοῦσα τὰ 4 ἁπλᾶ σώματα, ἐκ τῶν ὁποίων γίνονται ὅλα τὰ σώματα : πῦρ, ἀήρ, ὕδωρ, γῆ.

Ἡ πέμπτη τετρακτὺς εἶναι ἡ συμβολίζουσα τὰ σχήματα τῶν ἁπλῶν σωμάτων. Ἡ πυραμὶς (τετράεδρον) συμβολίζει τὸ πῦρ, τὸ ὀκτάεδρον συμβολίζει τὸν ἀέρα, τὸ εἰκοσάεδρον τὸ ὕδωρ καὶ ὁ κύβος τὴν γῆν.

Ἡ ἕκτη τετρακτὺς συμβολίζει τὰ φυόμενα (τὰ γεννώμενα). Τὸ σπέρμα συμβολίζει τὴν μονάδα (τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τὸ σημεῖον τῆς γεωμετρίας). Τὸ μῆκος, ἐκφράζεται ἀπὸ ἄθροισμα σημείων, καὶ συνεπῶς δηλοῦται διὰ τοῦ μετὰ τὴν μονάδα ἀριθμοῦ 2. Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἀκόμη μίαν διάστασιν καὶ δηλοῦται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Τὸ στερεὸν ἔχει ἀκόμη μίαν διάστασιν καὶ δηλοῦται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

Ἡ ἑβδόμη τετρακτὺς εἶναι ἡ τῶν κοινωνιῶν. Μονὰς = ἄνθρωπος, δυὰς = οἶκος, τριὰς = κώμη, τετρὰς = πόλις. «Τὸ γὰρ ἔθνος ἐκ τούτων σύγκειται» κατὰ τὸν Θέωνα.

Ἡ ὀγδόη τετρακτὺς : νοῦς, ἐπιστήμη, δόξα, αἴσθησις.

Ἡ ἐνάτη τετρακτὺς εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τὴν σύστασιν τοῦ ζῴου, ἤτοι τῆς ψυχῆς καὶ τοῦ σώματος αὐτοῦ. Καὶ εἰς μὲν τὴν ψυχὴν ἀνήκουν τρία μέρη ἤτοι τὸ λογιστικόν, τὸ θυμικόν, τὸ ἐπιθυμητικόν. Ὡς τέταρτος ἀριθμὸς τῆς τετρακτύος αὐτῆς εἶναι τὸ σῶμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἡ ψυχή.

Ἡ δεκάτη τετρακτὺς εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τὰς 4 ἐποχὰς τοῦ ἔτους : ἔαρ, θέρος, μετόπωρον, χειμών.

Ἡ ἑνδεκάτη τετρακτὺς εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τὰς 4 ἡλικίας τοῦ ἀνθρώπου: νήπιον, μειράκιον, ἀνήρ, γέρων.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ὁ συμβολισμὸς τῆς γῆς διὰ τοῦ κύβου καὶ ὁ συνδυασμὸς τῶν στοιχείων τοῦ κύβου διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας καὶ τῆς μουσικῆς κλίμακος τοῦ Πυθαγόρου. Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς, ἤτοι ἐκφράζονται διὰ τοῦ κύβου ὁ πρῶτος, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς κατωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας.

Ἡ μουσικὴ ἀναλογία εἶναι $6 : 8 = 9 : 12$, (1), ὅπου οἱ ἄκροι ὅροι ἐκφράζουν τὸ κάτω καὶ ἄνω do τῆς μουσικῆς κλίμακος (τὸ ἄνω do ἔχει διπλασίαν συχνότητα τοῦ κάτω do), ὁ ἀριθμὸς 8, εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς ἀναλογίας, τοῦ 6 καὶ τοῦ 12, $\left(= \frac{2 \times 6 \times 12}{6 + 12}\right)$, καὶ ὁ ἀριθμὸς 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων τῆς αὐτῆς ἀναλογίας $\left(9 = \frac{6 + 12}{2}\right)$. Πρὸς τούτοις ὁ ἀριθμὸς 8 ἐκφράζει τὴν συχνότητα τοῦ φθόγγου fa καὶ ὁ ἀριθμὸς 9 ἐκφράζει τὴν συχνότητα τοῦ φθόγγου sol τῆς μουσικῆς κλίμακος. Διὰ τὴν ἁπλουστέραν κατασκευὴν τῆς μουσικῆς κλίμακος διαιροῦμεν τὴν προηγουμένην μουσικὴν ἀναλογίαν (1) διὰ τοῦ 6 καὶ λαμβάνομεν

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2, \tag{2}$$

Ἡ μαθηματικὴ κατασκευὴ τῆς μουσικῆς κλίμακος ἀποδίδεται προσωπικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν, ὁ ὁποῖος προηγουμένως ἔκαμε πειράματα εἰς τὸ μονόχορδον, (Θέων Σμυρν. σελ. 6. 57 καὶ 66. Ἰάμβλιχος (σελ. 121, 15) ἐκ τῶν ὁποίων ὡδηγήθη εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῶν μαθηματικῶν σχέσεων τῶν μουσικῶν φθόγγων τῆς κλίμακος. Ὁ πρῶτος ὅρος (φθόγγος) τῆς ἀνωτέρω (2) μουσικῆς ἀναλογίας ἔχει συχνότητα 1 καὶ ὀνομάζεται ὑπάτη. Οἱ λοιποὶ ὅροι (φθόγγοι) ἔχουν συχνότητας $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, καὶ 2 καὶ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως μέση, παραμέση, νήτη. Ἡ σύγχρονος (ἰταλικὴ) ὀνομασία εἶναι, ὡς ἀνεφέρθη προηγουμένως do, fa sol, do. Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὴν ἀντιστοιχίαν τῆς Πυθαγορείου καὶ τῆς συγχρόνου ὀνομασίας.

do	fa	sol	do
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
ὑπάτη	μέση	παραμέση	νήτη

Ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψεν ὅτι, ὁ μουσικὸς φθόγγος διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ ἔχει συχνότητα $\frac{9}{8}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δευτέρου μουσικοῦ φθόγγου τῆς μουσικῆς κλίμακος, πολλαπλασιάζει τὸν πρῶτον φθόγγον 1 ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνει, ὡς δεύτερον φθόγγον, τὸν $\frac{9}{8}$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τρίτου φθόγγου πολλαπλασιάζει τὸν δεύτερον φθόγγον ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνει $\frac{81}{64}$. Ὡς τέταρτον φθόγγον λαμβάνει τὸν συχνότητος $\frac{4}{3}$ (fa) καὶ ὡς πέμπτον, τὸν συχνότητος $\frac{3}{2}$ (sol) τῆς προηγουμένως ἐκτεθείσης μουσικῆς ἀναλογίας (2). Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἕκτου φθόγγου πολλαπλασιάζει τὸν πέμπτον φθόγγον ἐπὶ $\frac{9}{8}$ καὶ λαμβάνει $\frac{3}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$. Ὡς ἕβδομον φθόγγον λαμβάνει τὸ γινόμενον τοῦ ἕκτου φθόγγου ἐπὶ $\frac{9}{8}$ ἤτοι τὸν $\frac{27}{16} \times \frac{9}{8} = \frac{243}{128}$ καὶ ὡς ὄγδοον φθόγγον (τῆς ἰταλιστὶ λεγομένης ὀκτάβας) λαμβάνει τὸν ἀριθμὸν 2 τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας (2). Εἰς τὰς κατωτέρω τρεῖς σειρὰς ἀναγράφομεν:

1) Τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν 8 φθόγγων τῆς μουσικῆς κλίμακος τοῦ Πυθαγόρου, τὰ περισσότερα τῶν ὁποίων ἔχουν προέλθει ἐκ τῆς ὀνομασίας τῶν δακτύλων τῆς χειρὸς καὶ ἐκ τῆς θέσεως μερικῶν χορδῶν τοῦ ὀκταχόρδου (κατώτατος φθόγγος = ὑπάτη, ἀνώτατος φθόγγος = νήτη. [Σημείωσις 1. Εἰς τὴν ἐποχὴν τοῦ Πυθαγόρου ἡ ὑπάτη ἦτο ὁ ἀνώτατος φθόγγος (ὄγδοος) καὶ ἡ νήτη ὁ κατώτατος (πρῶτος) τῆς μουσικῆς ὀκταφθόγγου (ἰταλιστὶ ὀκτάβας) κλίμακος. Μεταγενέστεροι μετέβαλον τὴν ὀνομασίαν. Ἡ λέξις νήτη παράγεται ἐκ τῆς λέξεως νέατος, ἡ ὁποῖα νοεῖται ὡς ὑπερθετικὸν τοῦ νέος καὶ σημαίνει νεώτατος, τελευταῖος, κατώτατος, χαμηλότατος. (Ὁμήρου Ἰλιὰς Λ 712). Σημείωσις 2. Ἡ μεγάλη πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας. Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{9}{8}$, δηλ. τοῦ μουσικοῦ φθόγγου, διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ. Ἡ μικρὰ πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 8 κίονας. Εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 8, τὸ ἁρμονικὸν μέσον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου 6 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου 12, ἤτοι τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας].

2) Τὰ κατὰ παράδοσιν σύμβολα τῶν 8 φθόγγων. 3) Τὰ ὀνόματα τῶν φθόγγων τῆς βυζαντινῆς κλίμακος εἰς τὴν ὁποίαν βλέπομεν τὴν ὁμοιότητα τῆς ὀνομασίας των πρὸς τὴν ἀρχαίαν ὀνομασίαν τῶν φθόγγων. Εἰδικώτερον, ἡ ὀνομασία τοῦ φθόγγου πα ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς ὀνομασίας τοῦ πυθαγορείου φθόγγου ὑ—πά—τη καὶ ἡ ὀνομασία τοῦ φθόγγου νη ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς ὀνομασίας τοῦ πυθαγορείου φθόγγου νή—τη. 4) Τὰ ἰταλικὰ ὀνόματα τῶν φθόγγων (χρησιμοποιούμενα ἐν Ἑλλάδι). 5) Τὰς συχνότητας τῶν 8 φθόγγων ἀνηγμένας ἐκ

τοῦ πρώτου φθόγγου συχνότητος 1. (Ἡ πραγματικὴ σύγχρονος Πυθαγόρειος κλῖμαξ κατασκευάζεται κατόπιν διεθνοῦς συμφωνίας μὲ βάσιν τὸν φθόγγον la συχνότητος 435) :

1.	ὑπάτη	παρυπάτη	λιχανὸς	μέση	παραμέση	τρίτη	παρανήτη	νήτη
2.	τη	τα	τε	τω	τη	τα	τω	τη
3.	πα	βου	γα	δι	καὶ	ζω	νη	πα
4.	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
5.	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2.

Αἱ σχέσεις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φθόγγων, ὀνομάζονται μουσικὸν διάστημα. Μεταξὺ λοιπόν, τῶν 8 φθόγγων τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος καὶ τῆς συγχρόνου, φυσικά, ἀφοῦ καὶ αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν Πυθαγόρειον, ἔχομεν ἑπτὰ μουσικὰ διαστήματα. (Θαυμασίας ἐργασίας ἐπὶ τῆς μουσικῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐδημοσίευσεν ὁ καθηγητὴς τῆς Μουσικῆς εἰς τὸ Γυμνάσιον Ῥόδου Γεώργιος Α. Καραμηνᾶς, εἰς τὸ περιοδικὸν τῶν Προσκόπων Κύπρου τῷ 1973 καὶ εἰς τὸ Δελτίον τῆς Ὁμοσπονδίας Λειτουργῶν Μέσης Ἐκπαιδεύσεως (ΟΛΜΕ) κατὰ Σεπτέμβριον—Ὀκτώβριον 1973).

ΟΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

19. Ὁ ὅρος πολύγωνοι ἀριθμοὶ ἔχει τὴν προέλευσίν του προφανῶς ἐκ τῆς γεωμετρίας. Ὑπὸ τὸν ὅρον τοῦτον νοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ καλούμενοι τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, ἑξάγωνοι, ἑπτάγωνοι κλπ. (Νικόμαχος, σ. 87 κ.ἑ. Θέων Σμυρναῖος σ. 37 κ.ἑ. Ἰάμβλιχος σ. 58 κ.ἑ.)

Τρίγωνοι ἀριθμοὶ

Ἔστω ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \ldots \qquad (1)$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἀριθμητικὴν πρόοδον ἔχουσαν πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα καὶ διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων τὴν μονάδα. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ νυοστὸν ἄθροισμα εἰς τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον (1). Σχηματίζουν τὰ διαδοχικὰ μερικὰ ἀθροίσματα αὐτῆς, ὁπότε λαμβάνουν :

$$\sigma_1 = 1$$
$$\sigma_2 = 1 + 2 = 3$$
$$\sigma_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$\sigma_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_\nu = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Τὰ μερικὰ ἀθροίσματα σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots \sigma_\nu$ ὀνομάζονται τρίγωνοι ἀριθμοί. Ἀναγράφομεν εἰς μίαν γραμμὴν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ κάτωθεν αὐτῶν τὰ διαδοχικὰ μερικὰ ἀθροίσματα, δηλ. τοὺς τριγώνους ἀριθμούς.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\ldots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 & 66\ldots \end{array} \qquad (2)$$

Ἔστω ὅτι ἤθελον νὰ εὕρουν τὸ ἄθροισμα τῶν 9 διαδοχικῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀνωτέρω ἀριθμητικῆς προόδου. Τοῦτο δίδεται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τριγώνου ἀριθμοῦ, τοῦ εὑρισκομένου κάτωθεν τοῦ ἀριθμοῦ 9, καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 45. Σπουδαῖαι ἀνακαλύψεις εἶχον γίνει ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῶν Πυθαγορείων σχετικαὶ πρὸς τὴν σπουδὴν τῶν ἀριθμητικῶν προόδων. Ἐν πρώτοις, ἐγνώριζον ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν 9 διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (2) λαμβάνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 9 ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον 10 καὶ διαιρέσεως τοῦ λαμβανομένου γινομένου διὰ τοῦ 2, ἤτοι ἐγνώριζον τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τὸν $\frac{1}{2}\,\nu\,(\nu+1)$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. (Προβλήματα ἀριθμητικά. Νικόμαχος σ. 148-151). Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὀνομάζεται γνώμων (Θέων Σμυρναῖος, σελ. 33, 15).

Τετράγωνοι ἀριθμοὶ

Ἔστω ἡ ἀκολουθία τῶν ἀπὸ μονάδος διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν:

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \ldots 2\nu - 1 \; (\nu = 1, 2, 3 \ldots), \qquad (\alpha),$$

καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα αὐτῆς:

$$\sigma_1 = 1^2, \quad \sigma_2 = 1 + 3 = 2^2, \quad \sigma_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2,$$
$$\sigma_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \ldots, \quad \sigma_\nu = 1 + 3 + 5 \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2.$$

Εἰς τοὺς τριγώνους ἀριθμούς, ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνονται ὡς τρίγωνοι ἀριθμοὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα, εἶναι ἡ μονάς. Ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς αὐτῆς ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίας εἶναι δύο μονάδες, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἀκολουθίαν (α), τὰ μερικὰ ἀθροίσματα καλοῦνται τετράγωνοι ἀριθμοί. Ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τρεῖς μονάδες, τὰ μερικὰ ἀθροίσματα καλοῦνται πεντάγωνοι ἀριθμοί. Καὶ γενικῶς, ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων, τῆς αὐτῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, πλήθους ν, εἶναι ν—2 ἀριθμοὶ (ὅπου $\nu \geqslant 3$), τὰ μερικὰ ἀθροίσματα καλοῦνται ν—γωνοι (ἢ πολύγωνοι) ἀριθμοί. Ὁ ἀριθμὸς ν—2 καλεῖται γνώμων ἢ γνωμονικὸς ἀριθμός, ἡ δὲ ἀκολουθία εἶναι τῆς μορφῆς:

$$1 \quad \nu - 1 \quad 2\nu - 3 \quad 3\nu - 5 \quad 4\nu - 7 \quad 5\nu - 9 \quad 6\nu - 11 \ldots$$

Ὁ γνωμονικὸς ἀριθμὸς ν—2 ἔχει σχέσιν πρὸς τὴν λύσιν συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, ὡς θὰ φανῇ ὀλίγον κατωτέρω. Ὅταν δοθῇ ὁ γνωμονικὸς ἀριθμὸς εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ. Ἐὰν π.χ. ὁ γνωμονικὸς ἀριθμὸς εἶαι $\nu - 2 = 13$ γνωρίζομεν ὅτι πρόκειται περὶ τῶν δεκαπενταγώνων ἀριθμῶν, οἵτινες σχηματίζονται γεωμετρικῶς ἐκ πολυγώνου ἔχοντος $\nu = 13 + 2 = 15$ πλευράς.

Κατωτέρω παραθέτομεν πίνακα μερικῶν πολυγώνων ἀριθμῶν.

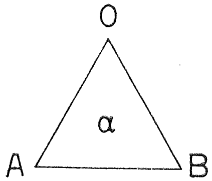
α = πρῶτος ὅρος τῆς ἀκολουθίας, δ = διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων (ὁ γνώμων, ἢ ὁ γνωμονικὸς ἀριθμός).

ΠΙΝΑΞ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

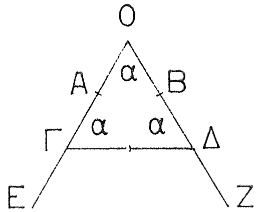
Αὔξων ἀριθμὸς	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha = 1, \quad \delta = 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τρίγωνοι ἀριθμοὶ	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$\alpha = 1, \quad \delta = 2$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
τετράγωνοι ἀριθμοὶ	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$\alpha = 1, \quad \delta = 3$	1	4	7	10	13	16	19	22	25
πεντάγωνοι ἀριθμοὶ	1	5	12	22	35	51	70	92	117
$\alpha = 1, \quad \delta = 4$	1	5	9	13	17	21	25	29	33
ἑξάγωνοι ἀριθμοὶ	1	6	15	28	45	66	91	120	153
$\alpha = 1, \quad \delta = 5$	1	6	11	16	21	26	31	36	41
ἑπτάγωνοι ἀριθμοὶ	1	7	18	34	55	81	112	148	189
$\alpha = 1, \quad \delta = 6$	1	7	13	19	25	31	37	43	49
ὀκτάγωνοι ἀριθμοὶ	1	8	21	40	65	96	133	176	225

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΙΣΤΩΜΕΝΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ

20. Παριστῶμεν κατὰ τὸν Νικόμαχον (σελὶς 89 καὶ ἑξῆς) καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (38 κ.ἑ.) τὴν μονάδα διὰ τοῦ γράμματος ἄλφα (α). Ὁ ἀριθμὸς ἄλφα (α) παριστᾷ τὸν πρῶτον τῇ τάξει τρίγωνον ἀριθμόν. Οὗτος ὀνομάζεται καὶ ὁ πρῶτος δυνάμει τρίγωνος ἀριθμός. Διότι τοποθετούμενος ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔστω ΟΑΒ (σχ. 1) ἐνέχει ~~ἐν ἑαυτῷ~~ ἐν λανθανούσῃ καταστάσει τὴν τριάδα, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ἐντὸς τοῦ ὁποίου τοποθετεῖται εἶναι μὲν ἓν τρίγωνον, ἀλλὰ ἔχει τρεῖς κορυφάς, τρεῖς πλευράς, τρεῖς γωνίας, τρία ὕψη τρεῖς διαμέσους. Θέλομεν τώρα νὰ σχηματίσωμεν γεωμετρικῶς τοὺς λοιποὺς ἀπὸ μονάδος τριγώνους ἀριθμούς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν γωνίαν τοῦ ληφθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἔστω τὴν ἐπάνω, τῆς ὁποίας προεκτείνομεν τὰς δύο πλευρὰς ἀπεριορίστως (σχ. 2) Ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν σημείων Α, Β λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκταθεισῶν πλευρῶν τμήματα ΑΓ = ΒΔ = ΟΒ καὶ φέρομεν τὴν ΓΔ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ οὕτω πως σχηματισθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μονάδας μήκους. Ἐντὸς τοῦ



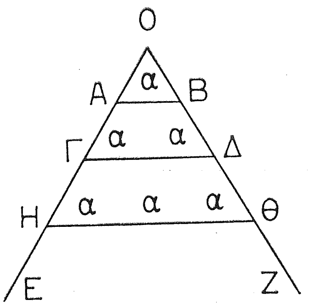
Σχ. 1.



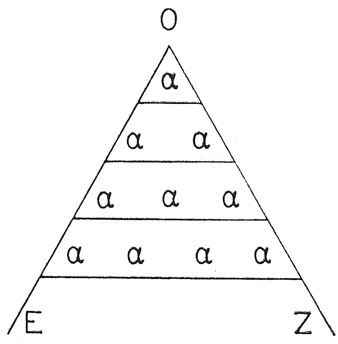
Σχ. 2.

νέου τριγώνου ΟΓΔ τοποθετοῦμεν συμμετρικῶς δύο ἄλφα ἀκόμη καὶ ἔχομεν ἐν ὅλῳ τρία ἄλφα. Τὸ πρῶτον τρίγωνον μὲ τὸ ἓν ἄλφα παριστᾷ τὸν πρῶτον τρίγωνον ἀριθμὸν 1. Τὸ δεύτερον τρίγωνον μὲ τὰ τρία ἄλφα παριστᾶ τὸν δεύτερον τρίγωνον ἀριθμὸν 3. Ἐν ᾧ ὁ πρῶτος τρίγωνος ἀριθμὸς παρίσταται μὲ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ περιέχον ἓν ἄλφα, καλεῖται δέ, ὡς ἀνεφέρθη, δυνάμει τρίγωνος ἀριθμός, ὡς περικλείων ἐν ἑαυτῷ ἐν λανθανούσῃ καταστάσει τὸν ἀριθμὸν τρία, ὁ δεύτερος τρίγωνος ἀριθμός, ὁ 3, παριστώμενος διὰ τοῦ τριγώνου ΟΓΔ, καλεῖται καὶ ὁ πρῶτος ἐνεργείᾳ τρίγωνος ἀριθμός, διότι διὰ νὰ σχηματισθῇ οὗτος ἐχρειάσθη νὰ γίνουν κινήσεις τοῦ α ἀκολουθοῦσαι ὡρισμένους νόμους, ὡς ἡ τοποθέτησις τῶν δύο α παραλλήλως πρὸς τὸ πρῶτον α. (σημ. Οἱ ὅροι δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἀπαντοῦν συνήθως εἰς τὸν Ἀριστοτέλη. Ὁ σπόρος π.χ. ἑνὸς φυτοῦ ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ τὸ φαινόμενον τῆς ζωῆς δυνάμει, χωρὶς τοῦτο νὰ φαίνεται. Ὅταν ὅμως εὑρεθῇ ὁ σπόρος εἰς κατάλληλον θερμοκρασίαν τότε φυτρώνει καὶ λέγομεν, ὅτι ἐκεῖ παρατηροῦμεν τὸ φαινόμενον τῆς ζωῆς ἐν ἐκδηλώσει, ἐν ἐνεργείᾳ).

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τώρα τὸν τρίτον τῇ τάξει ἢ δεύτερον ἐνεργείᾳ τρίγωνον ἀριθμὸν προεκτείνομεν τὰς ΟΑΓ, ΟΒΔ (σχ. 3) καὶ λαμβάνομεν ΓΗ = ΔΘ (= ΟΑ = ΑΒ = ΑΓ = ΒΔ) καὶ τοποθετοῦμεν συμμετρικῶς ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΟΗΘ τρία ἄλφα ἀκόμη, παραλλήλως πρὸς τὰ ἄνω αὐτῶν δύο ἄλφα. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλφα μᾶς δίδει τὸν τρίτον τρίγωνον ἀριθμόν, τὸν 6, (ἐνεργείᾳ δεύτερον). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λαμβάνομεν τὸν τέταρτον τρίγωνον ἀριθμόν, τὸν 10, (ἐνεργείᾳ τρίτον), (σχ. 4) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ὁ κανὼν τοῦ γεωμετρικοῦ σχηματισμοῦ τῶν τριγώνων ἀριθμῶν εἶναι προφανής. Δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου τοποθετοῦμεν ἓν ἄλφα ἢ μίαν στιγμήν, προεκτείνομεν τὰς δύο πλευρὰς μιᾶς γωνίας καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν τμήματα ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Ἐκ τῶν περάτων τῶν ληφθέντων ἴσων τμημάτων φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου. Ἄνωθεν τῆς πρώτης παραλλήλου τοποθετοῦμεν 2 ἄλφα (ἢ 2



Σχ. 3.



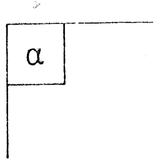
Σχ. 4.

στιγμάς), ἄνωθεν τῆς δευτέρας παραλλήλου τοποθετοῦμεν 3 ἄλφα (ἢ 3 στιγμάς) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Δι' ἑκάστης ἀγομένης παραλλήλου αὐξάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν τριγώνων κατὰ μίαν μονάδα. Ἡ μονὰς αὕτη εἶναι ὁ γνώμων ἢ ὁ γνωμονικὸς ἀριθμὸς τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, ἡ διαφορὰ δηλαδὴ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἐκφραζόντων ἄλφα ἢ στιγμάς. Διατὶ λέγεται γνώμων θὰ φανῇ ἀμέσως κατωτέρω.

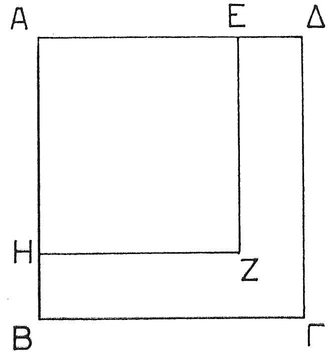
ΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΙΣΤΩΜΕΝΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ

21. Ὁ πρῶτος τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς. Ἐντὸς τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν μονάδα τοποθετοῦμεν ἓν ἄλφα (σχ. 1). Ἡ μονὰς ἐνταῦθα παριστᾷ τὸν πρῶτον, δυνάμει, τετράγωνον ἀριθμόν, διότι τὸ τετράγωνον εἶναι ἕν, ἐμπερικλείει ὅμως ἐν ἑαυτῇ ἡ μονὰς ἐν λανθανούσῃ καταστάσει τὸν ἀριθμόν, 4, διότι τὸ ἓν τετράγωνον ἔχει τέσσαρας κορυφάς, τέσσαρας πλευράς, τέσσαρας γωνίας. Διὰ νὰ λάβωμεν τώρα τὸν δεύτερον τετράγωνον ἀριθμὸν θὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸν γνώμονα τοῦ Ἀναξιμάνδρου, ἀστρονομικοῦ ὀργάνου, ἀποτελουμένου ἐξ ὀρθῆς γωνίας. Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 2). Ἐὰν ἐκ τούτου ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον ΕΖΗΑ, τὸ ἀπομένον σχῆμα ΕΔΓΒΗΖ ὀνομάζεται γνώμων. Ἕκαστον σκέλος τοῦ σπουδαίου αὐτοῦ ἀστρονομικοῦ ὀργάνου εἶχε μῆκος 1—1,50 μ., πλάτος μερικῶν ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου καὶ ἐλάχιστον πάχος

Ὁ γνώμων ἐτίθετο ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κατακορύφως (ὀρθὸς) καὶ ἐκ τῆς ῥιπτομένης σκιᾶς ἐκ τοῦ φωτὸς τῶν ἀστέρων ἐγίνοντο διάφοροι ὑπολογισμοί. Ἐπειδὴ τὰ σκέλη τοῦ γνώμονος ἦσαν κάθετα ἀπ' ἄλληλα καὶ οὗτος ἐτοποθετεῖτο ὀρθός, ἡ γωνία τὴν ὁποίαν ἐσχημάτιζον ταῦτα ὠνομάσθη ὀρθὴ γωνία.



Σχ. 1.

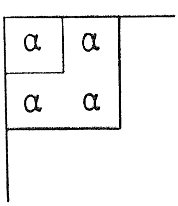


Σχ. 2.

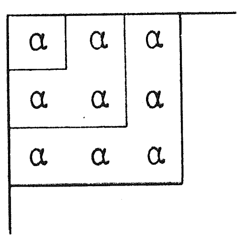
Ἐφαρμόζομεν τώρα εἰς τὸ σχῆμα (1) ἕνα γνώμονα, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος ἑκάστου σκέλους εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλάτος τοῦ τετραγώνου τοῦ σχήματος (1) καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸ σχῆμα (3), τοποθετοῦντες ἀκολούθως τρία ἄλφα εἰς συμμετρικὰς ἀποστάσεις. Ὁ γνώμων ἐδῶ, λέγεται τετραγωνικός. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι:

$$\alpha + 3\alpha = 2^2\alpha.$$

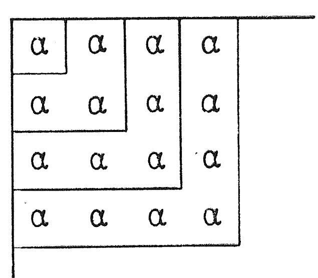
Ὁ ἑπόμενος, εἰς τὸ σχῆμα (3) τοποθετούμενος γνώμων δίδει τὸ σχῆμα (4) περιέχει δὲ 5α καὶ δίδει τὸ τετράγωνον $3^2\alpha$. Εἰς τὸ σχῆμα (4) ἐφαρμόζομεν τὸν γνώμονα τὸν περιέχοντα 7α καὶ λαμβάνομεν τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν $4^2\alpha$



Σχ. 3.



Σχ. 4.



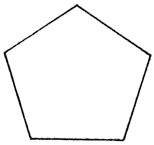
Σχ. 5.

(σχ. 5) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ὁ γνώμων λοιπὸν εἶναι ὁ ὁδηγὸς τοῦ σχηματισμοῦ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν (τριγώνων ἀριθμῶν, τετραγώνων, πενταγώνων, κλπ.), ἡ δὲ ὀνομασία του εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ ἀστρονομικοῦ ὀργάνου, τὸ ὁποῖον εἶναι μία ὀρθὴ γωνία.

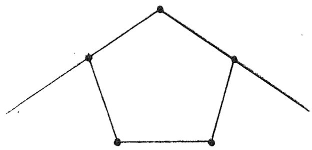
ΟΙ ΠΕΝΤΑΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΙΣΤΩΜΕΝΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ

22. Ὁ πρῶτος πεντάγωνος ἀριθμὸς εἶναι ἡ μονάς. Ὅθεν ἓν κανονικὸν πεντάγωνον παριστᾷ τὸν πρῶτον πεντάγωνον ἀριθμὸν (σχ. 1). Τοῦτο ἐπίσης παριστᾷ τὸν πρῶτον δυνάμει πεντάγωνον ἀριθμόν, διότι τὸ ἓν πεντάγωνον περιέχει ἐν λανθανούσῃ καταστάσει τὸν ἀριθμὸν 5 (πέντε πλευραί, πέντε γωνίαι, πέντε κορυφαί).

Ὁ δεύτερος πεντάγωνος ἀριθμὸς ἐκφράζεται γεωμετρικῶς πάλιν δι' ἑνὸς



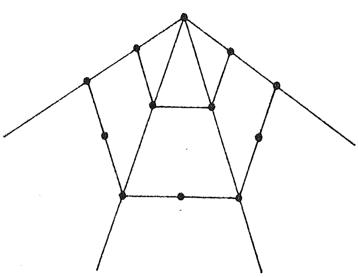
Σχ. 1.



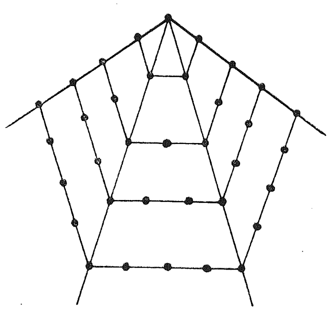
Σχ. 2.

πενταγώνου κανονικοῦ, εἰς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ὁποίου τοποθετοῦμεν στιγμὰς παριστώσας τὴν μονάδα (σχ. 2). Οὗτος ὀνομάζεται καὶ πρῶτος ἐνεργείᾳ πεντάγωνος ἀριθμός, διότι ἐχρειάσθη νὰ γίνουν κινήσεις μονάδων διὰ νὰ σχηματισθῇ. Ἡ κατασκευὴ τοῦ πενταγώνου νοεῖται ὡς ἑξῆς : Εἰς τὴν ἐπάνω γωνίαν κανονικοῦ πενταγώνου, μὲ τὰς ἀπεριορίστους πλευρὰς περιθέτομεν ἐκ τῶν κάτω τρίπλευρον πενταγωνικὸν γνώμονα, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἐκ τῶν δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν κανονικοῦ πενταγώνου. Εἰς τὴν μονάδα τῆς κορυφῆς, προσεθέσαμεν ἄλλας 4 μονάδας, τὰς τέσσαρας στιγμὰς τῶν κορυφῶν. Οἱ ὅροι τῆς σχηματιζομένης ἀκολουθίας εἶναι 1, 4, ἡ δὲ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 3 (σχ. 2).

Διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου τῇ τάξει πενταγώνου ἀριθμοῦ (δευτέρου,



Σχ. 3.



Σχ. 4.

ἐνεργείᾳ πενταγώνου) νοοῦμεν δύο πλευράς, γωνίας τινος τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, προεκτεινομένας ἀπεριορίστως, ὡς τοῦτο φαίνεται εἰς τὰ σχήματα (3, 4). Φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς τυχούσης γωνίας τοῦ πενταγώνου (σχ. 3) τὰς διαγωνίους καὶ προεκτείνομεν ταύτας ἀπεριορίστως. Περιθέτομεν τώρα γνώμονα ἀποτελούμενον ἐκ τριῶν πλευρῶν (σχ. 3), καλούμενον πενταγωνικὸν γνώμονα, διὰ τοῦ ὁποίου συμπληροῦται τὸ δεύτερον πεντάγωνον, ὅπου αἱ ἴσαι πρὸς τὴν πλευρὰν (τὴν παριστῶσαν τὴν μονάδα) τοῦ ἀρχικοῦ πενταγώνου ἀποστάσεις δηλοῦνται διὰ στιγμῶν. Αἱ μονάδες τοῦ δευτέρου περιτεθέντος πενταγωνικοῦ γνώμονος (στιγμαὶ) εἶναι 7 ἤτοι 3 περισσότεραι τοῦ προηγουμένου γνώμονος. Εἰς τὸ σχῆμα (4) ἔχομεν περιθέσει διαδοχικῶς ἄλλους δύο γνώμονας. Ἕκαστος γνώμων ἔχει τρεῖς μονάδας (στιγμὰς) περισσοτέρας τοῦ προηγουμένου. Πάντοτε δὲ αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ δύο στιγμῶν ἰσοῦνται μὲ τὴν μονάδα, τὴν πλευρὰν δηλ. τοῦ πρώτου πενταγώνου. (ἑξάγωνοι, ἑπτάγωνοι κλπ. ἀριθμοὶ κατασκευάζονται ὁμοίως).

ΤΟ ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ

23. Ἐπάνθημα ὀνομάζεται μέθοδος (= ἔφοδος) ἐπιλύσεως συστήματος ἐξισώσεων. Ἡ θυμαρίδειος μέθοδος ἔλαβε τὸ ὄνομά της ἐκ τοῦ ἀνακαλύψαντος αὐτὴν ἐκ τῆς νήσου Πάρου καταγομένου μαθηματικοῦ Θυμαρίδου. Ὁ Θυμαρίδας μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου, εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου (παρ. 23. 104), ὡς μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρου. Ἑπομένως ἡ ἀκμή του τοποθετεῖται περὶ τὸ 500 π.Χ. Ὁ αὐτὸς Ἰάμβλιχος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς (σελ. 88), ἀφοῦ διαπραγματεύεται τὰ περὶ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν, λέγει, «ἐντεῦθεν (ἐκ τῶν πολυγώνων δηλ. ἀριθμῶν) καὶ ἡ ἔφοδος τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος ἐλήφθη» καὶ ἀναπτύσσει τὴν μέθοδον (= ἔφοδον) τοῦ Θυμαρίδου διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀκολούθου συστήματος ἐξισώσεων:

Δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων $x + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{\nu-1} = \Sigma$
καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ν — 1 ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$\begin{aligned} x + x_1 &= \Sigma_1 \\ x + x_2 &= \Sigma_2 \\ x + x_3 &= \Sigma_3 \\ &\vdots \\ x + x_{\nu-1} &= \Sigma_{\nu-1} \end{aligned}$$

ἤτοι δίδονται ἐν ὅλῳ ν ἐξισώσεις ($\nu > 2$).

Κατὰ τὸν Θυμαρίδαν ἡ λύσις τοῦ συστήματυς εἶναι:

$$x = \frac{(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots + \Sigma_{\nu-1}) - \Sigma}{\nu - 2}$$

Ὁ παρονομαστὴς ν—2 εἶναι ὁ γνωστός μας ἤδη γνωμονικὸς ἀριθμός. Δὲν διεσώθη πληροφορία, πῶς ὁ Θυμαρίδας ἤχθη εἰς τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου του. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἐπινόησις τοῦ Θυμαρίδου προέκυψεν ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν, ὡς κατωτέρω ἐκθέτομεν:

Ἔστω ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (σημ. Ἡ ὀνομασία «φυσικοὶ ἀριθμοὶ» διὰ τοὺς ἀκεραίους ἀπαντᾷ εἰς τὸν Νικόμαχον σελ. 52, 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 . . . καὶ ὅτι δίδεται τὸ ἄθροισμα πλήθους τινός ἐκ τούτων ἔστω τῶν ἓξ πρώτων ἀριθμῶν $1+2+3+4+5+6=21$, δίδεται δηλ. ὁ ἕκτος τῇ τάξει τρίγωνος ἀριθμὸς 21, καὶ ὅτι σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τοῦ πρώτου ἐκ τῶν ἓξ ἀριθμῶν μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{lrcl}
 & 1+2 &=& 3=\Sigma_1 \\
 & 1+3 &=& 4=\Sigma_2 \\
 & 1+4 &=& 5=\Sigma_3 \\
 & 1+5 &=& 6=\Sigma_4 \\
 & 1+6 &=& 7=\Sigma_5 \\
\hline
\text{Ἄθροισμα} & 5+20 &=& 25
\end{array}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω διατάξεως καὶ τοῦ ἀθροίσματος $1+2+3+4+5+6=21$ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος δηλ. ἡ μονάς, περιέχεται εἰς μὲν τὸν τρίγωνον ἀριθμὸν 21 μίαν φοράν, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε μερικῶν ἀθροισμάτων περιέχεται 5 φοράς. Ἐὰν ἐπομένως ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος εἶναι ἄγνωστος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τοῦτον, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος 25 τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων (τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $6-1=5$) τὸ δοθὲν ἄθροισμα 21. Εἰς τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν $25-21=4$ θὰ περιλαμβάνεται ὁ πρῶτος ὅρος 4 φοράς. Ὅθεν διαιροῦμεν τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν διὰ τοῦ 4 διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὑποτιθέμενον ἄγνωστον, ὅστις ἐνταῦθα εἶναι $4:4=1$. Ἡ μέθοδος παραμένει βεβαίως ἡ αὐτή, ὅταν δοθοῦν 1) τυχόντες ἄγνωστοι, 2) τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, καὶ 3) τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τυχόντος ἐκ τῶν ἀγνώστων, μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ μέθοδος (= ἔφοδος) τοῦ Θυμαρίδου, (ἐνταῦθα $\nu=6$).

Γενικωτέρα διατύπωσις τοῦ ὑποτιθεμένου τρόπου εὑρέσεως τοῦ ἐπανθήματος (δηλ. τῆς μεθόδου) ὑπὸ τοῦ Θυμαρίδου

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων $x+y+z+u+t=\Sigma$, καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀγνώστων μὲ ἕκαστον τῶν λοιπῶν:

$x+y=\Sigma_1$
$x+z=\Sigma_2$
$x+u=\Sigma_3$
$x+t=\Sigma_4$, ἤτοι δίδονται ἐν ὅλῳ 5 ἐξισώσεις μὲ 5 ἀγνώστους.

Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων καὶ ἔστω τοῦτο $=K$. Εἰς τὸ K τοῦτο ὁ x περιέχεται τέσσαρας φοράς, ἐν ᾧ εἰς τὸ ἄθροισμα Σ περιέχεται μίαν φοράν. Ἐὰν ἐπομένως ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα Σ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα K, τότε εἰς τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν ὁ x θὰ περιέχεται 3 φοράς.

Ὅθεν διαιροῦμεν τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν Κ—Σ διὰ τοῦ 3 καὶ εὑρίσκομεν τὸν x. Ὁ διαιρέτης 3 προκύπτει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων, ἐνταῦθα τοῦ 5. Διὰ δοκιμῶν εἰς διαφόρους περιπτώσεις, γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ διαιρέτης τῆς προκυπτούσης, ὡς ἄνω, διαφορᾶς εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πάντοτε τοῦ ἀριθμοῦ 2 ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων ν τοῦ συστήματος. Εἶναι δὲ ν—2 ὁ γνωστός μας ἤδη γνωμονικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ ἀριθμὸς 2 εἰς τὸν γνωμονικὸν τοῦτον ἀριθμὸν παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν ἀμεταθέτων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου κατὰ τὸν σχηματισμὸν γεωμετρικῶς τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ.

Ἐν συνεχείᾳ τῆς ἑρμηνείας τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος (ἐπίλυσις συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους) ὁ Ἰάμβλιχος ἀναφέρει δύο ἀκόμη ἐφαρμογὰς τοῦ θυμαριδείου ἐπανθήματος πρὸς ἐπίλυσιν συστημάτων ἐχόντων ν + 1 ἀγνώστους μὲ ν ἐξισώσεις, ἤτοι λύσεις συστημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ ὡς ἑξῆς:

«Ὅτι δὲν παρέλκει τὸ ἐπάνθημα τοῦτο, ἀλλ' ἀναφέρεται καὶ εἰς ἀριθμητικὸν θεώρημα καὶ γίνεται αἴτιον εἰς ἡμᾶς ν' ἀνεύρωμεν γλαφυρωτάτην μέθοδον, τὸ ἐρευνῶμεν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Ἂς ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τέσσαρας ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου εἶναι διπλάσιος τοῦ τρίτου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ πάλιν ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τετάρτου, καὶ ὁμοίως ὁ αὐτὸς πρῶτος μετὰ τοῦ τετάρτου εἶναι τετραπλάσιος τῶν δύο μέσων, δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν νὰ εἶναι πενταπλάσιον τῶν αὐτῶν δύο μέσων, δηλ. τοῦ δευτέρου μετὰ τοῦ τρίτου, ὡς ἐὰν ἡ προχώρησις κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν πολλαπλασίων ἀπὸ τοῦ διπλασίου εἰς τὸ πενταπλάσιον ν' ἀκολουθῇ φυσικήν τινα τάξιν. Πρὸς τοῦτο δέον ν' ἀκολουθήσωμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον . . .»

Κατωτέρω ἐκθέτομεν τὴν λύσιν, ὅπως τὴν διατυπώνει ὁ Ἰάμβλιχος, χρησιμοποιοῦντες τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, παριστῶντες δηλ. διὰ x, y, z, u τοὺς ἀγνώστους.

«Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ διπλασίου, τριπλασίου, τετραπλασίου καὶ πενταπλασίου, θέτω τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀγνώστων ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $2.3.4.5 = 120$. Ἐπειδὴ τώρα $x + y = 2\ (z + u)$ κατὰ τὸ πρόβλημα, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $2(x + y)$, ὁπότε ἔχομεν:

$$x + y + 2(x + y) = 2(z + u) + 2(x + y) \qquad \text{ἢ}$$
$$3(x + y) = 2(x + y + z + u).$$

Ἀλλὰ $x + y + z + u = 120$. Ἑπομένως πολλαπλασιάζω τὸν 120 ἐπὶ 2 καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 3, ὅτε λαμβάνω $x + y = \dfrac{2 \cdot 120}{3} = 80$

Ἐπειδὴ πάλιν $(x+y)=3(y+u)$, προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸν $3(x+z)$ καὶ ἔχω:

$$x+z+3(x+z)=3(y+u)+3(x+z) \qquad \text{ἢ}$$
$$4(x+z)=3(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ τὸ $x+y+z+u=120$. Ἑπομένως πολλαπλασιάζω τὸν 120 ἐπὶ 3 καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 4 καὶ ἔχω:

$$x+y=\frac{3\cdot 120}{4}=90.$$

Ἐπειδὴ πάλιν $x+u=4(y+z)$, προσθέτω εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $4(x+u)$ καὶ ἔχω :

$$x+u+4(x+u)=4(y+z)+4(x+u) \qquad \text{ἢ}$$
$$5(x+u)=4(x+y+z+u).$$

Ἀλλὰ $x+y+z+u=120$. Ἑπομένως πολλαπλασιάζω τὸν 120 ἐπὶ 4 καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον διαιρῶ διὰ 5, καὶ ἔχω:

$$x+u=\frac{4\cdot 120}{5}=96.$$

Μέχρι τοῦδε εὕρομεν

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= 120 \\ x+y &= 80 \\ x+z &= 90 \\ x+u &= 96. \end{aligned}$$

Τὸ σύστημα ὅμως τοῦτο εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ Θυμαρίδου, τοῦ ὁποίου ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως (τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα) μᾶς δίδει :

$$(\nu=4), \quad x=\frac{(80+90+96)-120}{2}=\frac{266-120}{2}=\frac{146}{2}=73.$$

Κατόπιν τούτου εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων:

$$y=7, \qquad z=17, \qquad u=23.$$

Εἰς τὴν προηγουμένην λύσιν τοῦ Ἰαμβλίχου, ἡ μόνη μεταβολή, τὴν ὁποίαν ἐκάμαμεν ἦτο νὰ χρησιμοποιήσωμεν συμβολικὰς πράξεις ἀντὶ τῆς λεκτικῆς ἐκφράσεως τοῦ Ἰαμβλίχου διὰ τὰς πράξεις αὐτάς.

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ἡ γενικὴ λύσις θὰ ἦτο ἡ ἑξῆς:

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως (α, β, γ συντελεσταὶ ἀκέραιοι):

$$(x+y)=\alpha\,(z+u) \qquad (1)$$
$$(x+z)=\beta\,(y+u) \qquad (2)$$
$$(x+u)=\gamma\,(y+z) \qquad (3).$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας ἐξισώσεις, ὅτε ἔχομεν:

$$3x + y + z + u = \alpha(z + u) + \beta(y + u) + \gamma(y + z) \qquad (4)$$

Προσθέτομεν τὰς (2) καὶ (3), ὁπότε λαμβάνομεν:

$$2x + z + u = \beta(y + u) + \gamma(y + z).$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς 2x, ὁπότε ἔχομεν:

$$2x = \beta(y + u) + \gamma(y + z) - (z + u) \qquad (5)$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (5) ἀπὸ τὴν (4) καὶ ἔχομεν:

$$x + y + z + u = \alpha(z + u) + (z + u) \text{ ἢ } x + y + z + u = (\alpha + 1)(z + u). \qquad (6)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως, λαμβάνομεν:

$$x + y + z + u = (\beta + 1)(y + u) \qquad (7)$$

$$x + y + z + u = (\gamma + 1)(y + z). \qquad (8)$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τώρα ἀκεραίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων πρέπει τὸ ἄθροισμα $x + y + z + u$ νὰ περιέχῃ ὡς παράγοντας τοὺς συντελεστὰς $(\alpha + 1)$, $(\beta + 1)$, $(\gamma + 1)$. Ἐὰν καλέσωμεν E τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τούτων, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $x + y + z + u = E$, ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6), (7), (8) λαμβάνομεν:

$$E = (\alpha + 1)(z + u)$$

$$E = (\beta + 1)(y + u)$$

$$E = (\gamma + 1)(y + z)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας ὡς πρὸς $(z + u)$, $(y + u)$, $(y + z)$, ἔχομεν:

$$z + u = \frac{E}{\alpha + 1}, \quad y + u = \frac{E}{\beta + 1}, \quad y + z = \frac{E}{\gamma + 1}$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $(z + u)$, $(y + u)$, $(y + z)$, λαμβάνομεν:

$$x + y = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \cdot E \qquad (9)$$

$$x + z = \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot E \qquad (10)$$

$$x + u = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot E \qquad (11)$$

Ἔχομεν δὲ λάβει:

$$x + y + z + u = E \qquad (12)$$

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων (9) (10), (11), (12) (ἐνταῦθα $\nu = 4$) εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου.

Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον ἐπιλύσεως τοῦ Θυμαρίδου (τὸ Θυμαρίδειον ἐπάνθημα) λαμβάνομεν:

$$x = \frac{E\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\right) - E}{2}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀνωτέρω τιμῆς τοῦ x εἶναι μὲν ἀκέραιος, ἀλλ' εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι περιττὸς καὶ ἑπομένως διαιρούμενος διὰ 2 νὰ μὴ δίδῃ ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x. Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν ἀντὶ τοῦ E πρέπει νὰ λάβωμεν 2E.

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω λύσιν εἰς τὸ ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου μνημονευόμενον πρόβλημα:

$$x + y = 2(z + u)$$
$$x + z = 3(y + u)$$
$$x + u = 4(y + z)$$
$$x + y + z + u = 5(y + z), \text{ ἔχομεν :}$$

$$x + y = \frac{2}{3} E \tag{13}$$

$$x + z = \frac{3}{4} E \tag{14}$$

$$x + u = \frac{4}{5} E \tag{15}$$

ἐξ οὗ κατὰ τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα εἶναι:

$$x = \frac{E\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) - E}{\nu - 2}.$$

Εἶναι ὅμως E τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν $(2+1)$, $(3+1)$, $(4+1)$ ἤτοι 60 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀγνώστων $\nu = 4$. Θὰ εἶναι ἄρα:

$$x = \frac{\frac{60 \cdot 133}{60} - 60}{2} = \frac{73}{2}.$$

Ἐπειδὴ ὁ 73 εἶναι περιττός, διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x λαμβάνομεν $2E = 120$, ὁπότε εἶναι:

$$x = \frac{\frac{120 \cdot 133}{60} - 120}{2} = \frac{266 - 120}{2} = 73.$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὰς ἐξισώσεις (13), (14), (15) καὶ 2E ἀντὶ E, εὑρίσκομεν $y = 7$, $z = 17$, $u = 23$.

ΘΥΜΑΡΙΔΕΙΟΝ ΕΠΑΝΘΗΜΑ (συνέχεια)

24. Τὸ δεύτερον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Ἰάμβλιχος εἶναι ὅπως καὶ τὸ προηγούμενον, ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ, μὲ συντελεστὰς ὅμως κλασματικοὺς ἀριθμούς, ἤτοι:

$$x + y = \frac{3}{2}(z + u) \qquad (1)$$

$$x + z = \frac{4}{3}(y + u) \qquad (2)$$

$$x + u = \frac{5}{4}(y + z) \qquad (3)$$

Ὁ Ἰάμβλιχος (σ. 67, 1) ἀναπτύσσει τὴν λύσιν ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ ἡμιολίου (ἡμιόλιον = ἓν καὶ ἥμισυ τοῦ ὅλου, δηλ. $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ = ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (1)), ὁ πρῶτος δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ δώσῃ ἥμισυ εἶναι ὁ 2, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{3}{2}$ εἶναι = 5, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸ 2 ἐπὶ 5 καὶ ἔχω = 10.

Ἐπειδὴ ἀκόμη εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτρίτου $\left(\text{ἐπίτριτον} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\right)$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{4}{3}$ εἶναι = 7, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν 10 ἐπὶ 7 καὶ λαμβάνω = 70.

Ἐπειδὴ τέλος εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν πρόκειται περὶ ἐπιτετάρτου $\left(\text{ἐπιτέταρτον} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}\right)$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{4}$ εἶναι = 9, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζω τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν 70 ἐπὶ 9 καὶ ἔχω = 630. Τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $x + y + z + u$, τοὺς ὁποίους πρόκειται νὰ εὕρωμεν.

Ἐπειδὴ τώρα εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) πρόκειται περὶ ἡμιολίου $\left(= \frac{3}{2}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τὸ $\frac{3}{2}(x + y)$ καὶ ἔχομεν

$$x + y + \frac{3}{2}(x + y) = \frac{3}{2}(z + u) + \frac{3}{2}(x + y) \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{5}{2}(x + y) = \frac{3}{2}(x + y + z + u) \quad \text{ἢ}$$

$$5(x + y) = 3(x + y + z + u).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίωσιν ταύτην, ὡς πρὸς $x+y$ λαμβάνομεν:

$$x+y=\frac{3\cdot 630}{5}=\frac{1890}{5}=378.$$

Ἐπειδὴ πάλιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) πρόκειται περὶ ἐπιτρίτου $\left(=\frac{4}{3}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $\frac{4}{3}\ (x+z)$ καὶ ἔχομεν

$$x+z+\frac{4}{3}\ (x+z)=\frac{4}{3}\ (y+u)+\frac{4}{3}\ (x+z) \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{7}{3}\ (x+z)=\frac{4}{3}\ (x+y+z+u) \quad \text{ἢ}$$

$$7\ (x+z)=4\ (x+y+z+u).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $x+z$ ἔχομεν

$$x+z=\frac{4\cdot 630}{7}=\frac{2520}{7}=360.$$

Ἐπειδὴ τέλος εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) πρόκειται περὶ ἐπιτετάρτου $\left(=\frac{5}{4}\right)$ προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης τὸ $\frac{5}{4}\ (x+u)$ καὶ ἔχομεν

$$x+u+\frac{5}{4}\ (x+u)=\frac{5}{4}\ (y+z)+\frac{5}{4}\ (x+u) \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{9}{4}\ (x+u)=\frac{5}{4}\ (x+y+z+u) \quad \text{ἢ}$$

$$9\ (x+u)=5\ (x+y+z+u).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u)$ διὰ τοῦ ἴσου του 630 καὶ λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $x+u$ ἔχομεν

$$x+u=\frac{5\cdot 630}{9}=\frac{3150}{9}=350.$$

Ἦτοι εὕρομεν

$$x+y+378 \qquad (4)$$

$$x+z=360 \qquad (5)$$

$$x+u=350 \qquad (6)$$

καὶ

$$x+y+z+u=630 \qquad (7)$$

Τὸ σύστημα ὅμως τοῦτο, τῶν τεσσάρων τελευταίων ἐξισώσεων, εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις κατὰ τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα εἶναι

$$x = \frac{(378 + 360 + 350) - 630}{4 - 2 = 2} = 229.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ x εἰς τὰς ἐξισώσεις (4), (5), (6) εὑρίσκομεν $y = 149$, $z = 131$, $u = 121$.

Καὶ εἰς τὸ δεύτερον τοῦτο πρόβλημα ἐχρησιμοποιήθη ἀκριβῶς ἡ λύσις τὴν ὁποίαν διέσωσεν ὁ Ἰάμβλιχος, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ἀντὶ τῶν λεκτικῶν ἐκφράσεων διὰ τὰς πράξεις ἐχρησιμοποιήθη ὁ σύγχρονος ἀριθμητικὸς συμβολισμός.

Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως ἔχει ὡς ἑξῆς:

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) τοῦ (δευτέρου προβλήματος) καὶ ἔχομεν

$$3x + y + z + u = \frac{3}{2}(z + u) + \frac{4}{3}(y + u) + \frac{5}{4}(y + z). \tag{8}$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν

$$2x + z + u = \frac{4}{3}(y + u) + \frac{5}{4}(y + z).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $2x$ λαμβάνομεν

$$2x = \frac{4}{3}(y + u) + \frac{5}{4}(y + z) - (z + u). \tag{9}$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν (9) ἀπὸ τῆς (8) ἔχομεν

$$x + y + z + u = \frac{3}{2}(z + u) + (z + u) \quad ἢ$$

$$x + y + z + u = \frac{5}{2}(z + u). \tag{10}$$

Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον λαμβάνομεν

$$x + y + z + u = \frac{7}{3}(y + u) \tag{11}$$

$$x + y + z + u = \frac{9}{4}(y + z). \tag{12}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (10), (11), (12) λαμβάνομεν

$$2(x + y + z + u) = 5(z + u) \tag{13}$$

$$3(x + y + z + u) = 7(y + u) \tag{14}$$

$$4(x + y + z + u) = 9(y + z) \tag{15}$$

Ἐὰν καλέσωμεν E τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν 5, 7, 9 = 315, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ ἄθροισμα $(x+y+z+u) = E$ (= 315), ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (13), (14), (15) λαμβάνομεν

$$2E = 5\,(z+u)$$

$$3E = 7\,(y+u)$$

$$4E = 9\,(y+z)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας, ὡς πρὸς $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ ἀντιστοίχως λαμβάνομεν

$$z+u = \frac{2E}{5}$$

$$y+u = \frac{3E}{7}$$

$$y+z = \frac{4E}{9}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $(z+u)$, $(y+u)$, $(y+z)$ εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2), (3) τοῦ δευτέρου προβλήματος ἔχομεν

$$x+y = \frac{3}{2} \cdot \frac{2E}{5}$$

$$x+z = \frac{4}{3} \cdot \frac{3E}{7}$$

$$x+u = \frac{5}{4} \cdot \frac{4E}{9} \qquad \text{ἢ}$$

$$x+y = \frac{3E}{5} \tag{16}$$

$$x+z = \frac{4E}{7} \tag{17}$$

$$x+u = \frac{5E}{9} \tag{18}$$

Καὶ εἶναι $\qquad x+y+z+u = E\ (=315).$ (19)

Τὸ σύστημα ὅμως τῶν ἐξισώσεων (16), (17), (18), (19) εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ συστήματος τοῦ Θυμαρίδου. Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα λαμβάνομεν

$$x = \frac{E\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\right) - E}{\nu - 2}.$$

Εἶναι δὲ $E = 315$, $\nu = 4$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$x = \frac{315\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9}\right) - 315}{2} = \frac{229}{2}.$$

'Επειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμητὴς 229 εἶναι περιττὸς ἀριθμός, διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ x λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ E τὸ $2E = 630$, ὁπότε ἔχομεν

$$x = \frac{\frac{630 \cdot 544}{315} - 630}{2} = \frac{1088 - 630}{2} = \frac{458}{2} = 229.$$

'Εκ τῶν ἐξισώσεων (16), (17), (18) λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ x διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς του 229 καὶ ἀντὶ τοῦ E θέτοντες $2E = 630$,

$$y = 149, \qquad z = 131, \qquad u = 121$$

ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΕΚ ΤΟΥ ΙΑΜΒΛΙΧΟΥ

25. 'Εν συνεχείᾳ πρὸς τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα ὁ 'Ιάμβλιχος ἀναφέρει τὴν ἑξῆς πρότασιν: "Εστω ὅτι δίδεται ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. . 'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν δύο διαδοχικοὺς περιττοὺς ἢ ἀρτίους καὶ εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὴν μονάδα ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνος. Καὶ μάλιστα, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν περιττῶν λαμβανόμενος τετράγωνος εἶναι ἄρτιος, ἐν ᾧ ὁ ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀρτίων εἶναι περιττός. Π.χ.

$3 \cdot 5 + 1 = 16$, $\quad 7 \cdot 9 + 1 = 64$. Οἱ ἐκ τῶν περιττῶν τετράγωνοι εἶναι ἄρτιοι.

$2 \cdot 4 + 1 = 9$, $\quad 8 \cdot 10 + 1 = 81$. Οἱ ἐκ τῶν ἀρτίων τετράγωνοι εἶναι περιττοί.

Κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, ἡ πρότασις τοῦ 'Ιαμβλίχου εἶναι

$$\alpha(\alpha \pm 2) + 1 = (\alpha \pm 1)^2,$$

('Ιάμβλιχος σελ. 90, 12).

ΜΕΡΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

26. 'Ακολούθως ὁ 'Ιάμβλιχος προσθέτει, ὅτι πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 8 καὶ προσλαμβάνων τὴν μονάδα γίνεται τετράγωνος (σελὶς 90, 18). ἤτοι:

$$\frac{8 \cdot \nu(\nu + 1)}{2} + 1 = (2\nu + 1)^2.$$

Τὴν αὐτὴν πληροφορίαν παρέχει καὶ ὁ Πλούταρχος (Πλατωνικὰ ζητήματα

Ε 1003 F). Τὸ θεώρημα τοῦτο τὸ χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος εἰς τὴν πραγματείαν του 'Αριθμητικὰ (Βιβλίον IV, θ. 38. Ἴδε Ε. Σ. Σταμάτη, Διοφάντου 'Αριθμητικά. 'Οργανισμὸς 'Εκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων, 'Αθῆναι 1963).

'Ενδιαφέρουσαν ἀκόμη ἀριθμητικὴν πληροφορίαν παρέχει ὁ 'Ιάμβλιχος, τὴν ἑξῆς, (σελ. 75, 20):

'Εὰν σχηματίσωμεν ἄθροισμά τι τῶν ἀπὸ μονάδος φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ κατόπιν παραλείποντες τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν μετὰ τὸν παραλειφθέντα, προχωροῦντες ἀντιστρόφως μέχρι τῆς ἀφετηρίας, δηλ. τῆς μονάδος, καὶ ἀκολούθως προσθέσωμεν τὰ ληφθέντα δύο ἀθροίσματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι τρίγωνος ἀριθμός, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνος. Π.χ.

$$\overleftarrow{1} + 2 + 3 + \ldots + (\alpha - 2) + (\alpha - 1) = \text{τρίγωνος ἀριθμός} \uparrow, \quad (2)$$

$$\rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + (\alpha - 1) + \alpha = \text{τρίγωνος ἀριθμὸς}, \quad (1).$$

Ἄθροισμα = τρίγωνος ἀριθμὸς (1) + τρίγωνος ἀριθμὸς (2) = ἀριθμὸς τετράγωνος.

'Ο Νικόμαχος διατυπώνει τὸ θεώρημα αὐτὸ ὡς ἑξῆς: Πᾶν τετράγωνον σχῆμα διαγωνίως διαιρεθὲν ἀναλύεται εἰς δύο τρίγωνα καὶ πᾶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς δύο διαδοχικοὺς τριγώνους ἀριθμοὺς καὶ συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν τριγώνων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ ἀριθμὸν τετράγωνον, ἤτοι

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (\alpha - 2) + (\alpha - 1) + \\ &+ 1 + 2 + 3 + \ldots + (\alpha - 1) + \alpha. \qquad (\mathrm{A}) \end{aligned}$$

(Νικόμαχος (σ. 96, 2—13). [σημ. Τὰ δύο τρίγωνα ἐδῶ, δι' ὧν νοοῦνται ἐκφραζόμενοι οἱ τρίγωνοι ἀριθμοί, εἶναι ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ καὶ ὄχι ἰσόπλευρα, ὡς θὰ φανῇ κατωτέρω. 'Η μία ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου θὰ εἶναι α—1 καὶ ἡ τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι α]

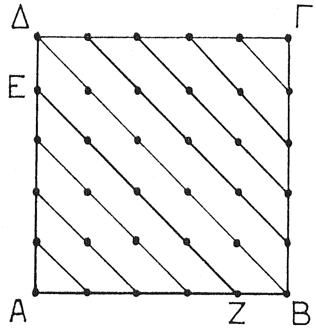
'Η γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ ἀριθμητικοῦ θεωρήματος τοῦ Νικομάχου ἔχει ὡς ἑξῆς. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α = , ἔστω 5 ἑκατ. μ. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ χωρίζομεν ἑκάστην πλευρὰν τοῦ τετραγώνου διὰ 4 στιγμῶν εἰς 5 ἴσα μέρη, καὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ διαιροῦμεν ἐπίσης εἰς 5 ἴσα μέρη. Διὰ τῆς διαγωνίου ΒΔ τὸ τετράγωνον ἔχει διαιρεθῆ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ.

Φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ χωρίζομεν αὐτὰς εἰς ἴσα μέρη, διὰ στιγμῶν, ὡς εἰς τὸ σχῆμα. Αἱ στιγμαὶ τοῦ τριγώνου ΑΕΖ προστιθέμεναι δίδουν

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

= τὸν τρίγωνον ἀριθμὸν 15. Αἱ στιγμαὶ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ προστιθέμεναι δίδουν 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = τὸν τρίγωνον ἀριθμὸν 21. 'Η πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου ἔχει $5 - 1 = 4$ μονάδας (εὐθύγραμμα τμήματα). Ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τριγώνου ἔχει $\alpha = 5$ μονάδας, ἤτοι ὅσας ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου. Εἶναι δὲ $15 + 21 = 6^2$.

Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ σημειώσωμεν πῶς ἐκφράζει λεκτικῶς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμὸν (Α) ὁ Ἰάμβλιχος, διότι δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται, ὅτι τὰ σημεῖα σὺν $(+)$ καὶ πλὴν (-1) ἀνεκαλύφθησαν περὶ τὸ 1450 (ἐν Γερμανίᾳ). Φαντά-



ζεται λοιπὸν ὁ Ἰάμβλιχος, ὅτι ἀναχωροῦμεν ὡς ἀθληταὶ ἀπὸ τὴν ἀφετηρίαν τοῦ Σταδίου, προχωροῦμεν τὰ 200 μ, διανύομεν τὴν στροφήν, (τὸν καμπτῆρα ὡς ἐλέγετο) καὶ μετὰ 200 μ. φθάνομεν εἰς τὸ τέρμα τοῦ δρόμου τῶν 400 περίπου μέτρων. Ἡ ἄφεσις τῶν ἀθλητῶν εἰς τὴν ἀφετηρίαν ἐγίνετο ὄχι διὰ πυροβολισμοῦ, ἀλλὰ διὰ κοπῆς σχοινίου εὑρισκομένου πρὸ τῶν ἀθλητῶν, ἢ δι' ἀφέσεως τούτου νὰ πέσῃ. Τὸ σχοινίον τοῦτο ὠνομάζετο ὕσπληγξ, τὸ δὲ τέρμα τῶν δρομένων ὠνομάζετο νύσσα. Τὰ δύο σκέλη τοῦ διανυομένου πετάλου τοῦ Σταδίου ὠνομάζοντο δίαυλος. Λέγει λοιπὸν ὁ Ἰάμβλιχος, ὅτι θεωροῦμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀναχωροῦντας ἐκ τῆς μονάδος, ἐκ τῆς ὕσπληγκος, καὶ διανύοντας τὸν δίαυλον, ἀφοῦ διέλθωσιν ἐκ τοῦ καμπτῆρος καὶ καταλήξωσιν (στρεφόμενοι ἀριστερὰ) εἰς τὴν νύσσαν (τὸ τέρμα), Τὸ κέντρον τοῦ καμπτηρίου τόξου καταλαμβάνει ὁ μεγαλύτερος φυσικὸς ἀριθμὸς τῶν χρησιμοποιουμένων, διότι μετ' αὐτὸν ἀρχίζει ἡ μείωσις διὰ νὰ καταλήξωσιν εἰς τὴν μονάδα. Παρ. χάριν,

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \leftarrow \\ & & & & & & & & 8 \\ \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \uparrow \end{array}$$

Προσθέτοντες τοὺς ἀριθμοὺς τῆς κάτω σειρᾶς μέχρι τοῦ 8 λαμβάνομεν $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Προσθέτοντες τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἐπάνω σειρᾶς ἀπὸ τοῦ 7 λαμβάνομεν $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀθροισμάτων, τὸ σύνολον τῶν δύο ὑποσυνόλων, ὡς λέγεται τώρα τελευταίως, $36 + 28 = 64$ ἀριθμὸς τετράγωνος. Ἡ πρόσθεσις τῶν κατὰ ζεύγη ἀριθμῶν τῶν διαύλων νοεῖται γινομένη κατὰ στήλας, λέγει, ὁ Ἰάμβλιχος.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἀντὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀπὸ μονάδος φυσικῶν ἀριθμῶν τοῦ διαύλου ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὸν ἀριθμὸν τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὸν καμπτῆρα, ἐνταῦθα τὸν 8.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ συγχρόνου συμβολισμοῦ τὸ ὑπὸ τοῦ Νικομάχου διασωθὲν θεώρημα τῶν Πυθαγορείων, καὶ ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου διὰ τοῦ διαύλου ἐκφραζόμενον, θὰ ἔχωμεν

$$2 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1) = (\nu+1)^2,$$

ὅπου τὸ $2 \cdot \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ ἐκφράζει τὸ κατὰ στήλας ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τοῦ διαύλου καὶ τὸ $(\nu+1)$ τὸν ἐπὶ τοῦ καμπτῆρος ἀριθμὸν $(\nu = 2,3,4,\ldots)$.

Χρησιμοποιῶν τὴν ἔννοιαν τοῦ διαύλου εἰς τὸ Στάδιον ὁ Ἰάμβλιχος, πλέκει τὸ ἐγκώμιον τῆς δεκάδος ὡς δημιουργοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος κατὰ τοὺς Πυθαγορείους.

Μερικὰ συναφῆ παραδείγματα διὰ τὴν δεκάδα καὶ πολλαπλάσια αὐτῆς

1) νύσσα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
										10
ὕσπληγξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

$$2+4+6+8+10+12+14+16+18+10 = 10\cdot 10 = 100.$$

Ὁ 100 ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων, κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον, μονὰς τριωδουμένη (δηλ. μονὰς ἔχουσα, μὲ 2 μηδενικὰ δεξιά της, τρία ψηφία ἐν ὅλῳ (Ἰάμβλιχος, σ. 88, 15).

(Ἡ δεκὰς ὀνομάζεται μονὰς δευτερωδουμένη)

2) νύσσα	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
										100
ὕσπληγξ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	

$$20+40+60+80+100+120+140+160+180+100 =$$
$$= 10\cdot 100 = 1000 = \text{μονὰς τετρωδουμένη}$$

3) νύσσα	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
										1000
ὕσπληγξ	100	200	300	400	500	600	700	800	900	

$$200+400+600+800+1000+1200+1400+1600+1800+1000 =$$
$$= 100\cdot 100 = 10.000 = \text{μονὰς πεντωδουμένη κλπ.}$$

Καὶ γενικῶς

$$
\begin{aligned}
&\text{μονὰς δευτερωδουμένη} = 10 && = 10^1\\
&\text{μονὰς τριωδουμένη} = 100 && = 10^2\\
&\text{μονὰς τετρωδουμένη} = 1000 && = 10^3\\
&\text{μονὰς πεντωδουμένη} = 10000 && = 10^4\\
&\text{μονὰς ἑξωδουμένη} = 100\cdot 000 && = 10^5\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\text{μονὰς νυωδουμένη} = 10.\ 10\cdots 10 && = 10^{\nu-1}.
\end{aligned}
$$

Ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός, ὁ $10^{\nu-1}$ = τετράγωνος.

Ἓν θεώρημα

Μετὰ τὴν προηγουμένην θεώρησιν τῆς δεκάδος ὁ Ἰάμβλιοχς, (σ. 103, 10—104, 13), ἀναφέρει τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἐὰν δοθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3 καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν δοθέντων σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, καὶ τοῦ νέου τούτου ἀθροίσματος σχηματισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λαμβάνεται πάντοτε ὡς τελικὸν ἄθροισμα ὁ ἀριθμὸς 6.

Παραδείγματα:

1) $664 + 665 + 666 = 1995$
$1 + 9 + 9 + 5 = 24$
$2 + 4 = 6$

2) $997 + 998 + 999 = 2994$
$2 + 9 + 9 + 4 = 24$
$2 + 4 = 6$

3) $6787 + 6788 + 6789 = 20364$
$2 + 0 + 3 + 6 + 4 = 15$
$1 + 5 = 6$

4) $8976565 + 8976566 + 8976567 = 26929698$
$2 + 6 + 9 + 2 + 9 + 6 + 9 + 8 = 51$
$5 + 1 = 6$

Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα γίνεται χρῆσις τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λέγονται «πυθμένες».

ΟΙ ΠΥΘΜΕΝΕΣ

27. Ἡ λέξις πυθμὴν ἀπαντᾷ τὸ πρῶτον ὡς μαθηματικὸς ὅρος εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος (546 C), ὅπου γίνεται λόγος περὶ τῶν νυμφικῶν καλουμένων ἀριθμῶν, ἢ περὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ γάμου, ἀριθμῶν δηλ. τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ τηροῦν οἱ νυμφευόμενοι διὰ ν' ἀποκτοῦν παιδιὰ ὑγιᾶ κατὰ τὸ σῶμα καὶ τὴν ψυχήν, ὥστε ἡ ἐξ αὐτῶν μέλλουσα νὰ προέλθῃ Πολιτεία νὰ εἶναι ἡ ἀρίστη. Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Πλάτωνος εἶναι μυστηριῶδες καὶ σκοτεινόν. Ἡ ἐν προκειμένῳ ἐνδιαφέρουσα φράσις τοῦ χωρίου εἶναι «ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγής», τῶν ὁποίων ἀριθμῶν ὁ ἐπίτριτος πυθμὴν συζευχθεὶς μὲ τὴν πεντάδα) $\left(\text{ἐπίτριτος} = 1\,\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\right)$. Ἐννοεῖ ἐδῶ ὁ Πλάτων τοὺς μικροτέρους ἀριθμούς, ἐξ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν ἀριθμητικῶς τὸ πυθαγόρειον θεώρημα $z^2 = x^2 + y^2$. Καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι 3, 4, 5 (ἤτοι $5^2 = 3^2 + 4^2$). Τὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5 ἱκανοποιοῦν βέβαια τὴν συνθήκην τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος. Οἱ μικρότεροι ὅμως ἀριθμοὶ οἱ ἱκανοποιοῦντες τοιαύτας σχέσεις (ἀναλογίας) καλοῦνται πυθμένες. Θεωρεῖται βέβαιον, ὅτι ὁ ὅρος εἶναι παλαιὸς πυθαγόρειος καὶ δὲν εἶναι δημιουργία τοῦ Πλάτωνος, ὁ ὁποῖος ἐγνώριζε μὲν μαθηματικὰ ἀλλὰ δὲν ἦτο μαθηματικός, ἦτο φιλόσοφος. Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα του δὲν χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρον πυθμένες, ἀλλὰ τὸν ἁπλοῦν ὅρον «ἐλάχιστοι ἀριθμοί», ὅπως π.χ. εἰς τὰ θεωρήματα 20, 21, 22 τοῦ 7ου βιβλίου τῶν Στοιχείων.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν π.χ. $\frac{8}{12} = \frac{20}{30} = \frac{24}{36}$ πυθμένες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3, τῶν ὁποίων πολλαπλάσια εἶναι οἱ ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν προηγουμένων κλασμάτων ἀντιστοίχως.

Ἐφαρμογὴν τῶν πυθμένων ἐν συναφείᾳ πρὸς τὸ μνημονευθὲν ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου ἀνωτέρω θεώρημα, καθ' ὃ ἐκ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3, εὑρίσκεται ὡς ἐξαγόμενον ὁ ἀριθμὸς 6, διὰ προσθήκης τῶν ψηφίων κλπ., διασώζεται εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ ἐν Ῥώμῃ κατὰ τὸν 2ον αἰῶνα μ.Χ. ἀκμάσαντος Ἕλληνος ἱερέως (πρεσβυτέρου) Ἱππολύτου, ἡ ὁποία φέρει τὸν τίτλον «Κατὰ πασῶν αἱρέσεων ἔλεγχος» (Hippolytos, Refut. IV, C. 14 ἢ Πατρολογία Ἑλληνικὴ Migne, τόμος 16, 3, στήλη 3078). Τίθεται τὸ πρόβλημα, κατὰ τὸν Ἱππόλυτον, νὰ εὑρεθῇ ὁ πυθμὴν τοῦ ὀνόματος Ἀγαμέμνων, ὅταν εἰς ἕκαστον γράμμα τῆς λέξεως Ἀγαμέμνων τεθῇ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι:

Ἀ	γ	α	μ	έ	μ	ν	ω	ν
1	3	1	40	5	40	50	800	50

Οἱ πυθμένες τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν εἶναι:

1 3 1 4 5 4 5 8 5.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων τούτων εἶναι 36. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 36, $= 3 + 6 = 9$. Ὁ πυθμὴν ἑπομένως, λέγει ὁ Ἱππόλυτος, τοῦ ὀνόματος Ἀγαμέμνων εἶναι ὁ ἀριθμὸς 9. (Κατωτέρω θὰ φανῇ ἡ σημασία τοῦ πυθμένος ὀνόματός τινος).

Ἐν συνεχείᾳ ὁ Ἱππόλυτος ἀναγράφει τοὺς πυθμένας τῶν ὀνομάτων Ἕκτωρ καὶ Πάτροκλος:

Ἕ	κ	τ	ω	ρ
5	20	300	800	100.

Οἱ πυθμένες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι:

5 2 3 8 1.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων τούτων εἶναι 19. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 19, $= 1 + 9 = 10$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ $10 = 1 + 0 = 1$. Ὁ πυθμὴν ἄρα τοῦ ὀνόματος Ἕκτωρ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1. Εἶναι εὐκολώτερον, προσθέτει ὁ Ἱππόλυτος, νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Ἀφοῦ εὑρέθη τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν πυθμένων, ὁ 19, διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ 9. Ὁ $19 = 2 \cdot 9 + 1$. Ἐκ τοῦ ὑπολοίπου ἄρα 1 βλέπομεν τὸν πυθμένα τοῦ ὀνόματος Ἕκτωρ.

Δύο λοιπὸν τρόπους μνημονεύει ὁ Ἱππόλυτος, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πυθμένος ἑνὸς κυρίου ὀνόματος.

Ὁ πρῶτος εἶναι 1) διάταξις τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ γράμματα τοῦ ὀνόματος καὶ διαίρεσις τῶν δεκάδων διὰ τοῦ 10, τῶν ἑκατοντάδων διὰ τοῦ 100 πρὸς λῆψιν τῶν πυθμένων τῶν ἀριθμῶν τοῦ ὀνόματος. 3) Πρόσθεσις τῶν πυθμένων. 3) Πρόσθεσις τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος τῶν πυθμένων. 4) Πρόσθεσις τῶν ψηφίων τοῦ νέου ἀθροίσματος κλπ.

Ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι, ἀφοῦ εὕρωμεν τὸ πρῶτον ἄθροισμα τῶν πυθμένων τῶν ἀριθμῶν τοῦ ὀνόματος, νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τῶν πυθμένων διὰ τοῦ 9. Καὶ ἂν μὲν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, τελικὸς πυθμὴν τοῦ ὀνόματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 9, δηλ. ὁ διαιρέτης. Ἂν δὲ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι τελεία, τελικὸς πυθμὴν εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν πυθμένων διὰ τοῦ 9. Ὁ δεύτερος αὐτὸς τρόπος, προσθέτει ὁ Ἱππόλυτος, λέγεται εὕρεσις τοῦ πυθμένος ἑνὸς ὀνόματος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ 9.

Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἄλλη μέθοδος, ἡ μέθοδος τοῦ 7, διαίρεσις, δηλ. τοῦ πρώτου ἀθροίσματος τῶν πυθμένων τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7 καὶ λῆψις τοῦ ὑπολοίπου ὡς τελικοῦ πυθμένος ἢ λῆψις τοῦ 7, ὡς πυθμένος τελικοῦ, ὅταν ἡ διαίρεσις δίδῃ ὑπόλοιπον μηδέν.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ πυθμὴν τοῦ ὀνόματος:

	Π	ά	τ	ρ	ο	κ	λ	ο	ς
Οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ εἶναι:	80	1	300	100	70	20	30	70	200
Οἱ πυθμένες εἶναι:	8	1	3	1	7	2	3	7	2

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων εἶναι: $8+1+3+1+7+2+3+7+2=$ $=34$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 34 εἶναι $3+4=7$. Ὁ πυθμὴν ἄρα τοῦ ὀνόματος Πάτροκλος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 7. Ἂν ἐφαρμόσωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ πυθμένος τὴν μέθοδον τοῦ 9, διαιροῦμεν τὸν 34 διὰ τοῦ 9, ὁπότε ἔχομεν $34 =$ $9\cdot 3+7$. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα 7 εἶναι πάλιν, ὁ αὐτὸς πυθμὴν 7 τοῦ ὀνόματος Πάτροκλος.

Ἐὰν ὅμως ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ 7, ἐὰν δηλ. διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πυθμένων 34 διὰ τοῦ 7, θὰ ἔχωμεν $34=7\cdot 4+6$. Καὶ ἀφοῦ ἔχομεν ὑπόλοιπον 6, ὁ πυθμὴν τοῦ ὀνόματος Πάτροκλος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ 7 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 6.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου λαμβανόμενοι πυθμένες ἐξ ὀνόματος, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθοῦν ἀκόμη διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν πυθμένων ἢ διὰ τοῦ 5 ἢ τοῦ 3.

Ἀξίζει νὰ σημειώσωμεν, διατὶ ὁ ἱερεὺς Ἱππόλυτος ἀσχολεῖται μὲ τοὺς πυθμένας τῶν ὀνομάτων.

Κατὰ τὴν πρὸ τῆς ἐπικρατήσεως τοῦ Χριστιανισμοῦ ἐποχὴν (πρὸ τοῦ 325 μ.Χ.) ἤκμαζεν εἰς ὅλον τὸν παλαιὸν πολιτισμένον κόσμον ἡ ἐπιστήμη ἢ ἡ τέχνη τῆς ἀστρολογίας. Ὑπῆρχον εἰδικοὶ ἀστρολόγοι, οἱ ὁποῖοι διὰ παρατηρήσεων εἰς τὰ ἄστρα προέλεγον τὸ μέλλον τῶν ἀνθρώπων, ὅταν οἱ ἐνδιαφερόμενοι ἔλεγον εἰς αὐτοὺς τὴν ἡμερομηνίαν τῆς γεννήσεως καὶ μάλιστα ποῖος ἀστερισμὸς ἐμεσουράνει κατὰ τὴν γέννησιν (ποῖον ζῴδιον). Δι' αὐτὸ καὶ τώρα ἀκόμη, εἰς τὰ διάφορα λεξικά, πρὸ τῆς χρονολογίας γεννήσεως σημειώνουν ἕνα ἀστέρα, ἐν ᾧ διὰ τὴν χρονολογίαν θανάτου προτάσσεται εἷς σταυρός, ὅπως π.χ. *1855, †1918. Οἱ ἀστρολόγοι προκειμένου νὰ μαντεύσουν τὸ μέλλον ἑνὸς ἐρωτῶντος, ἔκαμον διαφόρους συνδυασμοὺς μὲ τοὺς πυθμένας τῶν ὀνομάτων καὶ ὄχι μόνον προέλεγον τὰ μέλλοντα, ἀλλὰ ἡρμήνευον καὶ τὰ ἱστορικὰ γεγονότα. Διὰ νὰ δικαιολογήσουν π.χ. τὴν ὑπεροχὴν τοῦ Ἀχιλλέως ἔναντι τοῦ Ἕκτορος, ἐσχημάτιζον τοὺς πυθμένας ἑκάστου ὀνόματος καὶ ἔλεγον, ὅτι ὁ Ἀχιλλεὺς ἔπρεπε νὰ νικήσῃ, διότι τὸ ὄνομά του εἶχε μεγαλύτερον πυθμένα. Π.χ.

	Ἀ	χ	ι	λ	λ	ε	ὺ	ς	
οἱ ἀριθμοί:	1	600	10	30	30	5	400	200,	
οἱ πυθμένες:	1	6	1	3	3	5	4	2.	Ἄθροισμα $=25$, $2+5=7$

	Ἕ	κ	τ	ω	ρ	
οἱ ἀριθμοί:	5	20	300	800	100	
οἱ πυθμένες	5	2	3	8	1.	Ἄθροισμα $=19$, $1+9=10$, $1+0=1$

Ἑπομένως ὁ Ἀχιλλεὺς ἔπρεπε νὰ νικήσῃ τὸν Ἕκτορα, ἀφοῦ $7>1$.

Ὁ Ἱππόλυτος ἐθεώρει τὴν ἀστρολογίαν ὡς ἀγυρτείαν. Γράφων ὅμως τὴν ἐναντίον αὐτῆς κατηγορίαν του, μᾶς διέσωσε μερικὰς ἀριθμητικὰς γνώσεις, τὰς ὁποίας δὲν συναντῶμεν εἰς τὰ παλαιὰ μαθηματικὰ βιβλία. Ἐν ᾧ ὅμως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐκλείδου γίνεται λόγος περὶ τῶν μικροτέρων, τῶν ἐλαχίστων ὅρων τῶν ἀναλογιῶν, δηλ. τῶν πυθμένων τῶν διδομένων ἀριθμῶν, (ὅπως εἰς τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν), ἐδῶ εἰς τὴν ἀστρολογίαν, γίνεται λόγος περὶ τοῦ πυθμένος τῶν πυθμένων, βλέπομεν δηλ. ἐφαρμοζομένην τὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 6, ὅταν δίδωνται τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3. (§ 26). Εἶναι πιθανώτατον, ὅτι καὶ ἄλλους μαθηματικοὺς συνδυασμοὺς θὰ ἐχρησιμοποίει ἡ ἀστρολογία. Περὶ αὐτῶν ὅμως οὐδὲν διεσώθη. Εἰς τὸ αὐτὸ χωρίον ὁ Ἱππόλυτος ἐπιτίθεται κατὰ τοῦ Ἀρχιμήδους κατηγορῶν αὐτοῦ, ὅτι ἡ σειρὰ τῶν πλανητῶν, ὡς οὗτος τὴν θεωρεῖ, δὲν εἶναι ἡ ὀρθή, (ἐν ᾧ ἦτο). Διὰ τῆς κατηγορίας του ὅμως αὐτῆς ὁ Ἱππόλυτος μᾶς διέσωσε ἀστρονομικὰς γνώσεις τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ ὁποῖαι εἰς οὐδὲν ἄλλο βιβλίον διεσώθησαν (Ἴδε Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Α′, μέρος Α′, ὑπὸ Ε. Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1970).

Ἡ ἀνωτέρω μνημονευομένη ὑπὸ τοῦ Ἱππολύτου «μέθοδος τοῦ 9» εἶναι ὁμοία πρὸς τὸ θεώρημα, ὅτι «τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δι' 9 ἢ 3 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9 ἢ 3». Τὸ θεώρημα τοῦτο δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, διότι ἀνήκει εἰς τὴν σφαῖραν τῶν πρακτικῶν μαθηματικῶν.

Δὲν ἐσώθη ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ, οὔτε καὶ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, καθ' ὃ λαμβάνεται ὡς τελικὸν ἄθροισμα τῶν ψηφίων ὁ ἀριθμὸς 6, ὅταν δοθῶσι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ 3. Ἀπόδειξιν τοῦ τελευταίου τούτου θεωρήματος παρέχει ὁ Ἰταλὸς μαθηματικὸς Loria (G. Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia, Milano 1914, σελ. 841-2).

ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΗΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

28. Ἡ σπουδὴ τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν περιλαμβάνει τὴν σπουδὴν τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονάς. Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τὰ προηγούμενα, ὅταν ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι ἡ μονάς, πᾶν μερικὸν ἄθροισμα ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς ἀκολουθίας 1,2,3 . . . ὀνομάζεται τρίγωνος ἀριθμός. Ὅταν ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι 2, πᾶν μερικὸν ἄθροισμα τῆς ἀκολουθίας 1, 3, 5 . . ὀνομάζεται τετράγωνος ἀριθμός. Ὅταν ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν εἶναι 3, πᾶν μερικὸν ἄθροισμα τῆς ἀκολουθίας, 1, 4, 7.. ὀνομάζεται πεντάγωνος ἀριθμός, κλπ.

Κατὰ ταῦτα ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ὅπου ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀπὸ μονάδος ὅρων τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ τύπος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα, πλῆθος ὅρων ν, διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων ἴσων πρὸς 2, 3, 4 . . κλπ., ἦτο ἐπίσης γνωστός, ὅπως καὶ ὁ τύπος ὁ παρέχων τὸ ἄθροισμα συναρτήσει πλήθους ν ὅρων, τοῦ πρώτου ὅρου, καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου. Ταῦτα συνάγονται ἀπὸ τὰς πληροφορίας τοῦ Νικομάχου, τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ τοῦ Ἰαμβλίχου, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἔκφρασις γίνεται λεκτικῶς καὶ ὄχι βέβαια διὰ τύπων.

Παριστῶμεν κατωτέρω τὸν γνωστόν μας ἤδη γνωμονικὸν ἀριθμόν, δηλ. τὴν διαφορὰν δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, διὰ α—2, ὅπου α εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων τὴν πλευράν, εἰς ἀριθμούς, τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, ἐκ τοῦ ὁποίου νοεῖται, ὅτι γίνεται ὁ πολύγωνος ἀριθμός. Διὰ ν παριστῶμεν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου. Λέγοντες πολύγωνον ἀριθμόν, ἔχοντα γνωμονικὸν ἀριθμὸν α—2 καὶ πλῆθος ὅρων ν, ἐννοοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος εἶναι ἡ μονὰς καὶ ἡ διαφορὰ (δ) δύο διαδοχικῶν ὅρων εἶναι α—2, ἔνθα α λαμβάνει τιμὰς 3, 4, 5 . . .

Εἰς τοὺς	τριγώνους	ἀριθμοὺς τὸ	$\alpha = 3$,	ἑπομένως	$\delta = 3 - 2 = 1$
» »	τετραγώνους	ἀριθμοὺς τὸ	$\alpha = 4$,	»	$\delta = 4 - 2 = 2$
» »	πενταγώνους	ἀριθμοὺς τὸ	$\alpha = 5$,	»	$\delta = 5 - 2 = 3$
» »	ἑξαγώνους	ἀριθμοὺς τὸ	$\alpha = 6$,	»	$\delta = 6 - 2 = 4$ κλπ.

Κατὰ ταῦτα πᾶς πολύγωνος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\Sigma = \nu + \frac{\nu}{2}(\nu - 1)(\alpha - 2). \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots, \quad \alpha = 3, 4, 5 \ldots)$$

Ὁ Νικόμαχος ἀφοῦ ἀναφέρει τὴν πρότασιν, ὅτι πᾶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν τριγώνων ἀριθμῶν (σελ. 96,2) προσθέτει μερικὰ ἀριθμητικὰ παραδείγματα, τὰ ὁποῖα ἐπὶ τὸ ἐποπτικώτερον ἐκθέτομεν ὡς ἑξῆς:

ὁ 2ος	τετράγωνος	ἀριθμὸς	+ τὸν 1ον	τρίγωνον	ἀριθμὸν	= 2ος	πεντάγ.	ἀριθ.
ὁ 3ος	»	»	+ τὸν 2ον	»	»	= 3ος	»	»
ὁ 4ος	»	»	+ τὸν 3ον	»	»	= 4ος	»	»
ὁ 5ος	»	»	+ τὸν 4ον	»	»	= 5ος	»	»
ὁ 2ος	πεντάγωνος	ἀριθμὸς	+ τὸν 1ον	τρίγωνον	ἀριθμὸν	= 2ος	ἑξάγωνος	ἀριθ.
ὁ 3ος	»	»	+ τὸν 2ον	»	»	= 3ος	»	»
ὁ 4ος	»	»	+ τὸν 3ον	»	»	= 4ος	»	»
ὁ 5ος	»	»	+ τὸν 4ον	»	»	= 5ος	»	»
ὁ 2ος	ἑξάγωνος	ἀριθμὸς	+ τὸν 1ον	τρίγωνον	ἀριθμὸν	= 2ος	ἑπτάγων.	ἀριθ.
ὁ 3ος	»	»	+ τὸν 2ον	»	»	= 3ος	»	»
ὁ 4ος	»	»	+ τὸν 3ον	»	»	= 4ος	»	»
ὁ 5ος	»	»	+ τὸν 4ον	»	»	= 5ος	»	»

Καὶ κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμὸν εἶναι:

$$\underset{\text{πολύγωνος}}{\nu+\frac{\nu}{2}(\nu-1)(\alpha-3)}+\underset{\text{τρίγωνος}}{\frac{\nu}{2}(\nu-1)}=\underset{\text{πολύγωνος}}{\nu+\frac{\nu}{2}(\nu-1)(\alpha-2)}, \qquad (\text{B})$$

ὅπου ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων καὶ α ὁ ἀριθμὸς ὁ δηλῶν τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα ἐξ οὗ ἔλαβε τὴν ὀνομασίαν ὁ πολύγωνος ἀριθμός.

Ὁ τύπος (B) δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$(\alpha-1)$ — γωνικὸς ἀριθμός, πλήθους ν + τρίγωνος ἀριθμὸς πλήθους $(\nu-1)$ =
= α — γωνικὸς ἀριθμὸς πλήθους ν.

Ἐνδιαφέρουσαν πραγματείαν περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν περιέχουσαν 12 θεωρήματα ἐδημοσίευσεν ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Ἀνάργυρος Ν. Ἀκύλας, ὑπὸ τὸν τίτλον «Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοί» Ἀθῆναι 1966, σελίδες 24.

Μερικαὶ ἰδιότητες τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν

Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος ἀναφέρει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν. Ἔστω, ὅτι ἔχει δοθῇ ὁ μ^2 $(\mu = 2, 3 \ldots)$.

$$\text{Ἢ θὰ εἶναι } \frac{\mu^2}{3} \text{ ἀκέραιος ἢ } \frac{\mu^2-1}{3} \text{ ἀκέραιος,}$$

$$\text{ἢ » » } \frac{\mu^2}{4} \text{ ἀκέραιος ἢ } \frac{\mu^2-1}{4} \text{ ἀκέραιος.}$$

Ταῦτα κατὰ τὴν σύγχρονον ἔκφρασιν εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ ὅτι εἷς τετράγωνος ἀριθμὸς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $3\nu+2$, $4\nu+2$, $4\nu+3$.

Ἐν συνεχείᾳ προσθέτει, ὅτι διὰ πάντα τετράγωνον ἀριθμὸν θὰ ἰσχύῃ μία τῶν κάτωθι τεσσάρων περιπτώσεων:

1) $\frac{\mu^2-1}{3}$, $\frac{\mu^2}{4}$ ἀκέραιοι, ὡς $\mu^2 = 4$.

2) $\frac{\mu^2-1}{4}$, $\frac{\mu^2}{3}$ ἀκέραιοι, ὡς $\mu^2 = 9$.

3) $\frac{\mu^2}{3}$, $\frac{\mu^2}{4}$ ἀκέραιοι, ὡς $\mu^2 = 36$.

4) $\frac{\mu^2-1}{3}$, $\frac{\mu^2-1}{4}$ ἀκέραιοι ὡς $\mu^2 = 25$. (Θέων Σμυρναῖος, σελ. 35, 17—36, 2).

Ὁ Ἰάμβλιχος τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας τὰς διατυπώνει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω, ὅτι δίδεται ὁ μ^2. Εἶναι δυνατὸν ἢ ὁ $\frac{\mu^2}{3}$ ἢ ὁ $\frac{\mu^2}{4}$ νὰ εἶναι ἀκέραιος.

Ἐὰν $\frac{\mu^2}{3}$ ἀκέραιος, εἶναι καὶ $\frac{\mu^2-1}{4}$ ἀκέραιος.

Ἐὰν $\frac{\mu^2}{4}$ ἀκέραιος, εἶναι καὶ $\frac{\mu^2-1}{3}$ ἀκέραιος.

Ἐὰν $\frac{\mu^2}{3}$, $\frac{\mu^2}{4}$ δὲν εἶναι ἀκέραιοι οἱ $\frac{\mu^2-1}{3}$, $\frac{\mu^2-1}{4}$ εἶναι ἀκέραιοι ἀντιστοίχως.

Ἐὰν $\frac{\mu^2}{3}$, $\frac{\mu^2}{4}$ εἶναι ἀκέραιοι, οἱ $\frac{\mu^2-1}{3}$, $\frac{\mu^2-1}{4}$ δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀντιστοίχως.

(Ἰάμβλιχος σελ. 90, 6—11).

Ἀποδείξεις τῶν ἀνωτέρω δὲν ἐσώθησαν. Κατὰ τὸν Ἰταλὸν μαθηματικὸν Loria (ἔνθ' ἀνωτέρω, σελ. 834) πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι μιᾶς τῶν ἑξῆς μορφῶν:

$$6\lambda, \quad 6\lambda \pm 1, \quad 6\lambda \pm 2, \quad 6\lambda \pm 3,$$

ἐν ᾧ πᾶς τετράγωνος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι μιᾶς τῶν ἑξῆς μορφῶν:

$$1)\ 36\lambda^2, \quad 2)\ 36\lambda^2 \pm 12\lambda + 1, \quad 3)\ 36\lambda^2 \pm 24\lambda + 4, \quad 4)\ 36\lambda^2 \pm 36\lambda + 9, \quad (\Gamma).$$

Διὰ τετράγωνα τῆς πρώτης ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων μορφῶν (Γ) εἶναι οἱ $\frac{\mu^2}{3}$ καὶ $\frac{\mu^2}{4}$ ἀκέραιοι. Διὰ τετράγωνα τῆς δευτέρας μορφῆς εἶναι οἱ $\frac{\mu^2-1}{3}$, $\frac{\mu^2-1}{4}$ ἀκέραιοι. Διὰ τετράγωνα τῆς τρίτης μορφῆς εἶναι οἱ $\frac{\mu^2-1}{3}$, $\frac{\mu^2}{4}$ ἀκέραιοι. Διὰ τετράγωνα τῆς τετάρτης μορφῆς εἶναι οἱ $\frac{\mu^2}{3}$, $\frac{\mu^2-1}{4}$ ἀκέραιοι.

Ταῦτα εἶναι σύμφωνα πρὸς τὰς τέσσαρας ἀνωτέρω ἐκτεθείσας ὑπὸ τοῦ Θέωνος περιπτώσεις. Ὁ Loria προσθέτει, ὅτι ἐὰν οἱ τετράγωνοι τῶν τεσσάρων μορφῶν (Γ) διαιρεθοῦν διὰ 3 ἢ 4 τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 0 ἢ 1, ὅπερ εἶναι σύμφωνον πρὸς τὸ ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Θέωνος ἰσοδυνάμως ἐκτεθέν, ὅτι οὐδεὶς τετράγωνος εἶναι τῆς μορφῆς $3\nu + 2$, $4\nu + 2$, $4\nu + 3$.

Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΑΝΑΛΥΣΙΝ

29. Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ κατόπιν σχηματίζομεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ταύτης, δηλ. τὴν ἀκολουθίαν τῶν τριγώνων ἀριθμῶν. Ἐκ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν τριγώνων ἀριθμῶν σχηματίζομεν νέαν ἀκολουθίαν. Ἐκ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων ταύτης σχηματίζομεν νέαν ἀκολουθίαν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55...
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220...
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715...
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002...
1	7	28	84	210	452	924	1716	3003	5005...

Τοὺς ἀριθμοὺς τῶν προηγουμένων ἀκολουθιῶν οἱ νεώτεροι τοὺς ἔγραψαν ὑπὸ τὸ ἑξῆς σχῆμα:

Γραμμὴ 1								1								
» 2							1		1							
» 3						1		2		1						
» 4					1		3		3		1					
» 5				1		4		6		4		1				
» 6			1		5		10		10		5		1			
» 7		1		6		15		20		15		6		1		
» 8	1		7		21		35		35		21		7		1	

Σχῆμα Α.

Τὸ σχῆμα ὠνομάσθη ὑπὸ τῶν νεωτέρων τρίγωνον τοῦ Pascal (Γάλλος Μαθηματικός, 1623 - 1662). Τοῦτο παρέχει, ὡς ἔχει γραφῆ, τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)^\nu$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, ὡς φαίνεται ἀμέσως κατωτέρω. Εἰς τὸ σχῆμα Α παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας πλαγίας γραμμῆς, εἴτε θεωρήσωμεν αὐτὴν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, εἴτε ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ τῆς τρίτης πλαγίας γραμμῆς, θεωρούμενοι ὁμοίως, εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν. Οἱ τῆς τετάρτης γραμμῆς, ὁμοίως, εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν τριγώνων ἀριθμῶν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἔστωσαν τώρα τὰ ἀναπτύγματα τοῦ διωνύμου $(\alpha+\beta)^\nu$ διὰ $\nu = 1$ ἕως 7.

$$(\alpha+\beta)^1 = 1\alpha + 1\beta \quad (1)$$
$$(\alpha+\beta)^2 = 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2 \quad (2)$$
$$(\alpha+\beta)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3 \quad (3)$$
$$(\alpha+\beta)^4 = 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4 \quad (4)$$
$$(\alpha+\beta)^5 = 1\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + 1\beta^5 \quad (5)$$
$$(\alpha+\beta)^6 = 1\alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + 1\beta^6 \quad (6)$$
$$(\alpha+\beta)^7 = 1\alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + 1\beta^7 \quad (7)$$

Ἐπὶ τῶν ἀναπτυγμάτων τούτων παρατηροῦμεν ὅτι:

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 1 τῆς δευτέρας γραμμῆς τοῦ σχήματος Α.

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (2) εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 1 τῆς τρίτης γραμμῆς τοῦ σχήματος Α.

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (3) εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 3, 1 τῆς τετάρτης γραμμῆς τοῦ σχήματοςΑ. Καὶ γενικῶς οἱ συντελεσταὶ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (ν) εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς $(\nu+1)$ γραμμῆς τοῦ σχήματος Α.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων εἶναι φανερὰ ἡ σημασία τῆς σπουδῆς τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν καὶ ὁ σύνδεσμος αὐτῶν πρὸς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν, ἰδίως τῶν ἀκολουθιῶν καὶ τῶν σειρῶν. Ἡ ἀφετηρία τῆς ἀναπτύξεως αὐτῆς σημειοῦται κατὰ τὸν 16 - 17ον αἰῶνα.

Ἡ χρησιμοποίησις τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν ὑπὸ τοῦ Wallis.

Κατὰ τὸ 1655 ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς John Wallis (1616 - 1703) ἐξέδωκε τὸ περίφημον διὰ τὴν ἐποχήν του βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον (Ἀριθμητικὰ ἀπειροστῶν (Arithmetica infinitorum), τὸ ὁποῖον ἤσκησε μεγίστην ἐπίδρασιν εἰς τὰς ἐρεύνας τοῦ Ἰσαὰκ Νεύτωνος (Isaac Newton). Ὁ Wallis εἶναι ὁ μαθηματικὸς ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος πρῶτος ὑπέδειξεν, ὅτι ὁ Διαφορικὸς καὶ Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμὸς ἐχρησιμοποιήθη πολὺ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (287 - 212 π.Χ.) καὶ ὅτι ὁ Λάϊπνιτς καὶ ὁ Νεύτων (Leibniz, Newton) ἐπροχώρησαν τὰς μεθόδους τοῦ Ἀρχιμήδους (Ἴδε Max Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909, σελ. 264 - 265). Τὴν γνώμην τοῦ Wallis ἀνέπτυξαν ἐκ θεωρημάτων τοῦ Ἀρχιμήδους, ὁ Δανὸς μαθηματικὸς H. Zeuthen (1839 - 1920), ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς E. J. Diksterhuis, ἡ Ρωσὶς μαθηματικὸς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Μόσχας Isabella Grigorievna Bachmakova, ὁ Γάλλος μαθηματικὸς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Nice, Charles Mugler καὶ ἄλλοι. (Λεπτομερείας ἐπὶ τούτων καὶ τὰς συναφεῖς προτάσεις, ἴδε εἰς Β΄ τόμον τῶν

Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους, εἰς τὸ Ἐπίμετρον, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος). Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ ταύτῃ σημειοῦμεν ὅτι ἡ πρώτη ἰδέα τοῦ ἀπειροτικοῦ Λογισμοῦ ὀφείλεται εἰς τὸν Δημόκριτον.

Ἡ πρότασις τοῦ Wallis εἶναι, ὅτι:

$$\text{ὅριον}\ \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεώς του ἀναχωρεῖ οὗτος ἐκ τῆς ἀκολούθου διαμνημονεύσεως:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..	Πολύγωνοι ἀριθμοὶ 1ης τάξεως, (φυσικοὶ)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28..	Πολύγωνοι ἀριθμοὶ 2ας τάξεως (τρίγωνοι)
1, 4, 10, 20, 35, 56, 84..	Πολύγωνοι ἀριθμοὶ 3ης τάξεως (πυραμοειδεῖς ἐκ τριγώνου βάσεως)
1, 5, 15, 35, 70, 126, 210..	Πολύγωνοι ἀριθμοὶ 4ης τάξεως (πυραμοειδεῖς ἐκ τετραγ. βάσεως) κλπ. καὶ ὅτι:

ὁ νυοστὸς ὅρος τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν δευτέρας τάξεως εἶναι $= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$,

ὁ νυοστὸς ὅρος τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν τρίτης τάξεως εἶναι :

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 .\ 3},$$

ὁ νυοστὸς ὅρος τῶν πολυγώνων ἄριθμὸν τετάρτης τάξεως εἶναι :

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 .\ 3 \cdot 4},$$

ὁ νυοστὸς ὅρος τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν p τάξεως εἶναι :

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1 \cdot 2 .\ 3 \cdot 4 \ldots p},\ \text{κλπ.}$$

ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

30. Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τὰ μήκη πλευρῶν τετραγώνων. Διαμετρικοὶ δὲ ἀριθμοὶ καλοῦνται οἱ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (διαγωνίων) τῶν τετραγώνων τούτων.

Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον (Θέων Σμυρν. σ. 42-45) οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ σχηματίζονται ὡς ἑξῆς· θεωροῦμεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα καὶ ἡ διάμετρος (δηλ. ἡ διαγώνιος) ἐπίσης ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. [Τοῦτο εἰς τὴν σημερινὴν μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν λέγεται, θεωροῦμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν]. Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον (δηλ. διαγώνιον) μεγαλυτέρου τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: προσθέτομεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Εἰς τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τετραγώνου προσθέτομεν τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου. Καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον τοιαύτης κατασκευῆς μεγαλυτέρων τετραγώνων ἐπ' ἄπειρον. Κατὰ τὸν Θέωνα λοιπὸν θὰ ἔχωμεν:

Ἀριθμοὶ πλευρικοὶ			Ἀριθμοὶ διαμετρικοὶ		
Πλευρὰ πρώτου τετραγώνου		1	Διάμετρος πρώτου τετραγώνου		1
» δευτέρου τετρ.	1 + 1 =	2	» 2ου τετρ.	2. 1 + 1 =	3
» τρίτου »	2 + 3 =	5	» 3ου »	2. 2 + 3 =	7
» τετάρτου »	5 + 7 =	12	» 4ου »	2. 5 + 7 =	17
» πέμπτου »	12 + 17 =	29	» 5ου »	2. 12 + 17 =	41
» ἕκτου »	29 + 41 =	70	» 6ου »	2. 29 + 41 =	99
» ἑβδόμου »	70 + 99 =	169	» 7ου »	2. 70 + 99 =	239
» ὀγδόου »	169 + 239 =	408	» 8ου »	2.169 + 239 =	577

Καλοῦντες α τὴν πλευρὰν καὶ δ τὴν διάμετρον τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ ἔχωμεν:

Ἀριθμοὶ πλευρικοὶ	Ἀριθμοὶ διαμετρικοὶ
α	δ
$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2\cdot\alpha + \delta = \delta_1$
$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2\cdot\alpha_1 + \delta_1 = \delta_2$
$\alpha_2 + \delta_2 = \alpha_3$	$2\cdot\alpha_2 + \delta_2 = \delta_3$
$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2\cdot\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων πρὸς τὰς πλευράς, ὡς ἐκθέτει αὐτὰς ὁ Θέων, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad = \lambda_1$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5000000\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_2$$

$$\frac{7}{5} = 1{,}4000000\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_3$$

$$\frac{17}{12} = 1{,}4166666\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_4$$

$$\frac{41}{29} = 1{,}4137913\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_5$$

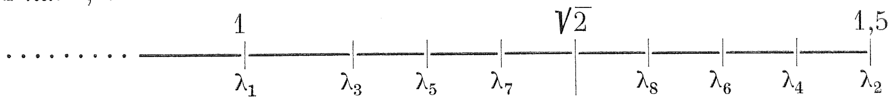
$$\frac{99}{70} = 1{,}4142857 \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_6$$

$$\frac{239}{169} = 1{,}4142011 \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_7$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}4142156 \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda_8$$

$$\delta_\nu : \alpha_\nu \qquad\qquad = \sqrt{2}$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι αὐξάνονται συνεχῶς, ἐν ᾧ οἱ ἀρτίας τάξεως λόγοι ἐλαττοῦνται συνεχῶς. Ἔχομεν δηλ. δύο ἀκολουθίας ἀριθμῶν, προκυπτούσας ἐξ ἑνὸς νόμου σχηματισμοῦ, τὴν μὲν αὔξουσαν, τὴν δὲ φθίνουσαν, αἱ ὁποῖαι ὅταν τὸ $\nu \to \infty$ συμπίπτουν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' εὐθυγράμμου τμήματος, ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι παράστασιν τῶν λόγων, τῶν ὁποίων ἡ διακύμανσις τῶν τιμῶν θὰ γίνεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5.



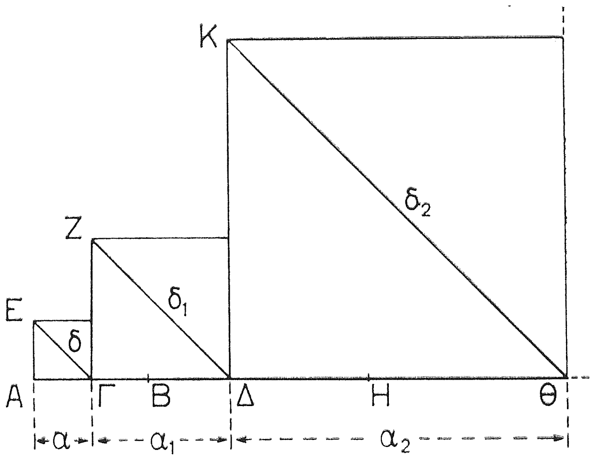
Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἡ περιττῆς τάξεως ἀκολουθία ἔχει ἀνώτερον φράγμα, ἐν ᾧ ἡ ἀρτίας τάξεως ἀκολουθία ἔχει κατώτερον φράγμα. Καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ φράγμα εἶναι κοινόν, ἤτοι ἡ $\sqrt{2}$. Διὰ τῶν λόγων δηλ. τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς λαμβάνεται ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$, δηλ. ἡ $\sqrt{2}$, ὅταν $\nu \to \infty$.

Ὁ Θέων καὶ ὁ Πρόκλος, ὅστις διατυπώνει ἐπίσης τὸν νόμον σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν δὲν μνημονεύουν τι περὶ κριτηρίου συγκλίσεως τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν. Ὡς τοιοῦτον ὅμως θεωρεῖται τὸ 2ον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων, καθ' ὅ, ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν, δὲν ὑπάρχει τελικὸν ὑπόλοιπον μετροῦν τὸ πρὸ ἑαυτοῦ (προκειμένου περὶ ἀσυμμέτρων). Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ὑποδηλοῖ ὁ Πρόκλος, καθιστᾷ φανερὰν τοιαύτην σύγκλισιν.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν

Ἐτέθη τὸ πρόβλημα, δοθέντος τετραγώνου νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ζητουμένου τετραγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἕκαστον δὲ εὑρισκόμενον τετράγωνον νὰ θεωρῆται δοθὲν καὶ νὰ συνεχίζηται ἐπ' ἄπειρον ἡ κατασκευὴ τετραγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω νόμου.

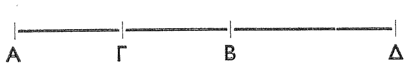
Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$ καὶ διαμέτρου $\mathrm{\Gamma E} = \delta$ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως



Σχ. 1.

ταύτης τμῆμα $\mathrm{\Gamma B} = \alpha$ καὶ ἐν συνεχείᾳ τούτου τμῆμα $\mathrm{B\Delta} = \delta$. Τὸ ζητούμενον τετράγωνον ἔχει πλευρὰν $\mathrm{\Gamma\Delta} = \alpha + \delta$. Ἀπομένει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΔΖ.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς διαμέτρου ΔΖ χρησιμοποιεῖται, ὡς λέγει ὁ Πρόκλος[1], τὸ 10ον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ μέσον ἔστω Γ, καὶ ληφθῇ τυχοῦσα προέκτασις τῆς ΑΒ, ἡ ΒΔ, τότε εἶναι $(\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{B\Delta})^2 = 2(\mathrm{A\Gamma})^2 + 2(\mathrm{\Gamma\Delta})^2$, (1), (σχ. 2) (ἰδὲ τὴν ἀπόδειξιν Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλία I. II. III. IV., Ε. Σταμάτη, 1952). Ἐν προκειμένῳ εἶναι $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$, $\mathrm{\Gamma B} = \alpha$ καὶ $\mathrm{B\Delta} = \delta$ (σχ. 1) καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις (1). Ἐπειδὴ $\mathrm{B\Delta} =$



Σχ. 2.

$= \mathrm{\Gamma E}$ καὶ $(\mathrm{\Gamma E})^2 = 2(\mathrm{A\Gamma})^2$, θὰ εἶναι $(\mathrm{B\Delta})^2 = 2(\mathrm{A\Gamma})^2$. Ἀφαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην κατὰ μέλη ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν $(\mathrm{A\Delta})^2 = 2(\mathrm{\Gamma\Delta})^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ διάμετρος (διαγώνιος) τετραγώνου πλευρᾶς ΓΔ. Ἡ διά-

1. Πρόκλου, Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. Hultsch - Kroll.

μετρος ὅμως τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΔΖ. Ἄρα ΔΖ = ΑΔ. Ἡ ΑΔ ὅμως = ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ, ἔνθα ΒΔ = ΓΕ καὶ συνεπῶς ΑΔ = 2α + δ. Ἐν ᾧ λοιπὸν ἐδόθη ἡ πλευρὰ α καὶ ἡ διάμετρος δ ἑνὸς τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι $\alpha + \delta = \alpha_1$ καὶ ἡ διάμετρος $2\alpha + \delta = \delta_1$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΔΗ = ΓΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα ΗΘ = ΔΖ (σχ. 1). Κατὰ τὸ αὐτὸ 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν $(\Gamma\Theta)^2 + (\mathrm{H}\Theta)^2 = 2(\Gamma\Delta)^2 + 2(\Delta\Theta)^2$, (2). Ἐπειδὴ ΗΘ = = ΔΖ καὶ $(\Delta\mathrm{Z})^2 = 2(\Gamma\Delta)^2$, θὰ εἶναι καὶ $(\mathrm{H}\Theta)^2 = 2(\Gamma\Delta)^2$. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῆς (2) ἔχομεν $(\Gamma\Theta)^2 = 2(\Delta\Theta)^2$. Τοῦτο ὅμως δηλοῖ, ὅτι ἡ ΓΘ εἶναι ἡ διάμετρος τετραγώνου πλευρᾶς ΔΘ. Ἡ διάμετρος δὲ τοῦ τετραγώνου τούτου εἶναι ἡ ΘΚ. Ἄρα ΓΘ = ΘΚ. Ἀλλὰ ἡ ΔΘ = ΔΗ + + ΗΘ $= \alpha_1 + \delta_1$ καὶ ΘΚ = ΓΔ + ΔΗ + ΗΘ $= 2\alpha_1 + \delta_1$. Καὶ ἑπομένως τοῦ νυοστοῦ νέου τετραγώνου ἡ μὲν πλευρὰ θὰ εἶναι $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$, ἡ δὲ διάμετρος $\delta_\nu = 2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς εὑρεθείσας πλευρὰς καὶ διαμέτρους τῶν συνεχῶν τετραγώνων:

	πλευρὰ	διάμετρος (διαγώνιος)
Δοθέντος τετραγώνου	α	δ
πρώτου νέου τετραγώνου	$\alpha + \delta = \alpha_1$	$2.\alpha + \delta = \delta_2$
δευτέρου νέου τετραγώνου	$\alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2$	$2.\alpha_1 + \delta_1 = \delta_1$
....	....	....
νυοστοῦ νέου τετραγώνου	$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2.\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$.

Ἐὰν λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$, ἔχομεν τότε τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ἀναφέρουν Θέων ὁ Σμυρναῖος καὶ ὁ Πρόκλος καὶ τοὺς ὁποίους ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω. Ἐὰν ἡ κατασκευὴ τετραγώνων συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, τότε ὁ λόγος $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ $(\nu \to \infty)$ προσδιορίζει τὴν $\sqrt{2}$.

Ἀπομένει νὰ ἐξετασθῇ, διατί ἔχομεν τὸ δικαίωμα νὰ λάβωμεν $\alpha = 1$ καὶ $\delta = 1$, δηλ. νὰ λάβωμεν τετράγωνον ἀπειροελαχίστως μικρόν, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον (διαγώνιον) = 1.

Πρὸς τοῦτο ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος πορεία κατασκευῆς τετραγώνων, ἐκείνης τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν Πρόκλον, ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω καὶ ἡ ὁποία ὡδήγησεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς $\sqrt{2}$. Ἔστω δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς ΘΔ (σχ. 1). Προεκτείνομεν τὴν ΘΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΘΚ, γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΘΔ εἰς τι σημεῖον Γ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΔΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Τοῦτο τὸ θεωροῦμεν δοθὲν καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἤτοι μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν διάμετρον ΔΖ γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τι σημεῖον Α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν τετράγωνον. Δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν τὴν τοιαύτην κατασκευὴν ἐπ' ἄπειρον. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΔΓ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΘΚ = ΘΓ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τὴν ΘΔ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΘΚ. Ἐπίσης πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς ΓΑ ἀφῃρέσαμεν ἐκ τῆς διαμέτρου ΔΖ = ΔΑ τὴν πλευρὰν ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΔΖ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἑπομένας κατασκευὰς τετραγώνων. [Ἐπὶ πλέον δὲ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς ΘΔ, ἡ διάμετρος ΔΖ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς διαμέτρου ΘΚ κλπ. Ἡ ἀπόδειξις τούτου παρέχεται ἐκ τῆς σχέσεως $\sqrt{2} < 1{,}5$ ἢ γεωμετρικῶς]. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων δυνάμεθα, συνεχίζοντες οὕτω τὴν κατασκευὴν τετραγώνων, νὰ λάβωμεν πλευρὰν τετραγώνου (καὶ διάμετρον) μικροτέραν πάσης δοθείσης πλευρᾶς ὁσονδήποτε μικρᾶς. Μετὰ ν τοιαύτας κατασκευὰς ὅταν $\nu \to \infty$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ διαμέτρου καὶ πλευρᾶς τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἤτοι ὅρ. $(\delta_\nu - \alpha_\nu) = 0$, καὶ συνεπῶς $\delta_\nu = \alpha_\nu$. Εἶναι ἄρα ὁ λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu = 1$.

Τελειώνων ὁ Θέων τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου, καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἐπάγεται: «αἱ δὲ διάμετροι (διαγώνιοι) ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον ἰσοῦνται ἐναλλὰξ ἄλλοτε μὲν πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς σὺν μίαν μονάδα καὶ ἄλλοτε πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς μεῖον μίαν μονάδα καὶ τοῦτο γίνεται συνεχῶς (ὁμαλῶς)· τὰ τετράγωνα λοιπὸν ὅλων τῶν διαμέτρων (τῶν διαμετρικῶν δηλ. ἀριθμῶν) θὰ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν πλευρῶν (τῶν πλευρικῶν δηλ. ἀριθμῶν), διότι ἡ ἐναλλὰξ καὶ συνεχῶς πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀποκαθιστᾷ ἰσότητα, ὥστε εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις νὰ μὴ ἐλλείπῃ οὔτε νὰ ὑπερβάλλῃ ἀπὸ τὸ διπλάσιον· διότι ὅ,τι ἐλλείπει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς προηγουμένης διαμέτρου, ὑπερβάλλει ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ἑπομένης ἤτοι $\delta_\nu^2 = 2\alpha_\nu^2 \mp 1$.

Ἔστωσαν πάλιν οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1	1
2	3
5	7
12	17

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα τούτων

$1^2 = 1$	$1^2 = 1$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω ἀπόσπασμα τοῦ Θέωνος θὰ εἶναι:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 2.\,1^2 - 1 = 1\\
3^2 &= 2.\,2^2 + 1 = 9\\
7^2 &= 2.\,5^2 - 1 = 49\\
17^2 &= 2.12^2 + 1 = 289
\end{aligned}
$$

καὶ γενικῶς $\delta_\nu^2 = 2.\,\alpha_\nu^2 \mp 1$ (α πλευρά, δ διάμετρος), δηλ. διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν παρέχονται αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 2x^2 \mp 1$

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΑΡΧΥΤΟΥ

31. Ὁ Ἀρχύτας[1] ἀνέλυσε τὸ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα $\frac{3}{2}$ (μιᾶς πέμπτης) εἰς τὸ διάστημα $\frac{5}{4}$ (μεγάλης τρίτης) καὶ τὸ διάστημα $\frac{6}{5}$ (μικρᾶς τρίτης), ὥστε $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$, (1). Ἡ σχέσις (1) ὅμως προκύπτει ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι 2 καὶ 3. Αὕτη ἐν προκειμένῳ εἶναι:

$2 : \frac{2\cdot 2\cdot 3}{2+3}$ (ἁρμον. μέσον) $= \frac{2+3}{2}$ (ἀριθμ. μέσον): 3, καὶ μετασχηματίζεται εἰς $2 \times 3 = \frac{5}{2} \times \frac{12}{5}$ ἢ $\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}$.

Ἐὰν τὸν ἐπιμόριον ἀριθμὸν (ἐπιμόριος λόγος λέγεται τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρονομαστοῦ κατὰ μονάδα) παραστήσωμεν γενικῶς ὡς $\frac{\nu+1}{\nu}$, τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἔλυσεν ὁ Ἀρχύτας διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, εἶναι ἡ ἀνάλυσις τοῦ μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$ εἰς γινόμενον δύο μουσικῶν διαστημάτων, δοθέντων τῶν φθόγγων συχνότητος ν καὶ ν + 1. Καὶ ἡ μὲν μουσικὴ ἀναλογία θὰ εἶναι $\nu : \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} = \frac{2\nu+1}{2} : \nu+1$, (2), τὸ δὲ ἐπιμόριον μουσικὸν διάστημα ἀναλύεται εἰς τὴν σχέσιν:

$$\frac{\nu+1}{\nu} = \frac{2\nu+1}{2\nu} \times \frac{2(\nu+1)}{2\nu+1}, \quad (3).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2), ἡ ὁποία ἐκφράζει μουσικὴν ἀναλογίαν, ἐτέθη τὸ πρόβλημα, ἂν εἶναι δυνατὸν οἱ δύο μέσοι ὅροι νὰ γίνωνται ἢ νὰ εἶναι ἴσοι. Ὁ

1. P. Tannery, Mém. Scient. III σελ. 68 καὶ 244.

Εὐκλείδης εἰς τὴν μουσικὴν πραγματείαν αὐτοῦ « Κατατομὴ Κανόνος » περιλαμβάνει ὡς τρίτον θεώρημα τὴν πρότασιν, ὅτι μεταξὺ τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{\nu+1}{\nu}$, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, μεταξὺ τῶν ἄκρων ὅρων τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, τῶν ν καὶ $\nu+1$, εἶναι ἀδύνατον νὰ παρεμβληθῶσιν εἷς ἢ περισσότεροι μέσοι ἀνάλογοι (ῥητοὶ ἀριθμοί).

Παρομοίαν πρὸς τὴν Εὐκλείδειον ἀπόδειξιν διέσωσεν ὁ Λατῖνος συγγραφεὺς Βοήθιος (Boethius, 5ος αἰὼν μ.Χ.), ὅστις ἀποδίδει ταύτην εἰς τὸν Ἀρχύταν[1]. Ἐὰν τοῦτο ἦτο δυνατόν, θὰ ἐσήμαινε τὴν ὕπαρξιν τῆς $\sqrt{\nu(\nu+1)}$, λαμβανομένης ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\nu+1}{x}=\frac{x}{\nu}$, $x^2=\nu(\nu+1)$. Ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τούτου (ἀπὸ μουσικῆς θεωρητικῆς ἀπόψεως) δὲν κατέχομεν ἐπαρκῆ στοιχεῖα, ἵνα συναγάγωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς παρεμβολῆς μέσων ἀναλόγων, μὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐσώθη ὅμως ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως σπουδαῖον στοιχεῖον, περιεχόμενον εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Μετρικὰ» (τόμ. ΙΙΙ, σ. 18 - 20, Schöne, Leipzig 1903). Κατὰ τὸ στοιχεῖον τοῦτο εἶναι δυνατὸν ἡ σχέσις ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ν : $\frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}=\frac{2\nu+1}{2}:\nu+1$, ἢ $\nu(\nu+1)=\frac{2\nu+1}{2}\times\frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$ νὰ δώσῃ ἰσότητα τῶν δύο παραγόντων, τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\frac{2\nu+1}{2}$ καὶ τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου $\frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἀπείρων μουσικῶν ἀναλογιῶν, κατὰ τὴν ἀκόλουθον μέθοδον. Ἄς καλέσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῆς ἀνωτέρω μουσικῆς ἀναλογίας α_1 καὶ τὸ ἁρμονικὸν μέσον β_1. Σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς α_1, β_1 καὶ ἔστω τὸ ἀριθμ. μέσον α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_2. Μὲ ἄκρους τοὺς α_2, β_2 σχηματίζομεν νέαν μουσικὴν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμ. μέσον ἔστω β_3. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ὅτε τῆς νυοστῆς μουσικῆς ἀναλογίας τὸ ἀριθμ. μέσον θὰ εἶναι α_ν καὶ τὸ ἁρμ. μέσον β_ν . Ἐὰν $\nu\to\infty$, τότε $\alpha_\nu=\beta_\nu$ καὶ ἐλύθη τὸ πρόβλημα τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ ν καὶ $\nu+1$ ἑνὸς μέσου ἀναλόγου, ὁ ὁποῖος βεβαίως δὲν εἶναι ἀκέραιος, διότι τοῦτο ἀποκλείεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχύτου. Ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἐπιμορίου μουσικοῦ διαστήματος $\frac{3}{2}$ εἰς τὸ γινόμενον $\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχύταν. Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος τοῦ Ἀρχύτου ἀφορᾷ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου. Πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς

---

1. De institutione arithmetica III. 11, σ. 285, Friedlein, 1867. Teubner.

δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν γινομένου ἐκ δύο παραγόντων. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι οἱ παράγοντες οὗτοι νὰ καταστῶσιν ἴσοι. Ἀλλ' ἂς ἐκθέσωμεν τὸ σωθὲν ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος συναφὲς στοιχεῖον. Πρόκειται κατὰ τοῦτο νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. (Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους)[1]. «Ἔστω ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 7,8,9. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} 7+8+9 &= 24 \\ 24 : 2 &= 12 \\ 12-7 &= 5 \\ 12-8 &= 4 \\ 12-9 &= 3 \\ 12 \times 5 &= 60 \\ 60 \times 4 &= 240 \\ 240 \times 3 &= 720 \end{aligned}$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 δίδει τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

Ἐπειδὴ τώρα ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὑπολογίζομεν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν 720 τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 729, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 27, διαιροῦμεν τὸν 720 διὰ τοῦ 27 καὶ λαμβάνομεν $26\frac{2}{3}$. Τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $26\frac{2}{3}$ σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι: $\frac{1}{2}\left(27+26\frac{2}{3}\right)=26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, (α_1). Ὥστε ἡ $\sqrt{720}$ κατὰ προσέγγισιν καὶ καθ' ὑπεροχὴν εἶναι $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, διότι $\left(26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=720\frac{1}{36}$. Ἐὰν ὅμως ἀποβλέπωμεν εἰς μεγαλυτέραν προσέγγισιν, τότε ἀντὶ 729 λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $720\frac{1}{36}$ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν διαφορὰν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{36}$. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ κάτωθι. . . . ».

Προχωροῦμεν κατὰ τὴν ὑπόδειξιν τοῦ Ἥρωνος. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $720\frac{1}{36}=26\frac{5}{6}$. Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν 720 διὰ τοῦ $26\frac{5}{6}$ καὶ ἔχομεν $720 : 26\frac{5}{6}=\beta_1$. Τῶν $26\frac{5}{6}$ καὶ $720 : 26\frac{5}{6}$ λαμβάνομεν τὸ ἀριθμητικὸν

1. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, τόμος Γ' σελ. 159, ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, ἔκδ. Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1974.

μέσον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 720 καθ' ὑπεροχὴν πάλιν, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς προηγουμένης. Τὸ ἀριθμητικὸν τοῦτο μέσον εἶναι $\frac{1}{2}$

$$\left[26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right]=\alpha_2=26{,}83281573\ldots \quad \text{Τὸ } (\alpha_2)^2=720\frac{1}{3732624},$$

ὥστε ἀμέσως εἰς τὸ δεύτερον ἀριθμητικὸν μέσον ἡ προσέγγισις τῆς $\sqrt{720}$ εἶναι πολὺ μεγάλη. Τὸ β_1 παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 27 καὶ $\frac{720}{27}$, ἐν ᾧ τὸ α_2 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ πρώτου ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου, ἤτοι $\alpha_2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου ἁρμονικοῦ μέσου εἶναι $\beta_1=26{,}832235\ldots$ ἤτοι τοῦτο εἶναι ἡ $\sqrt{720}$ κατ' ἔλλειψιν. Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι προφανὴς καὶ ἀκριβῶς ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου. Ἄς παραστήσωμεν γενικῶς τὴν ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος διασωθεῖσαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{A}$, ὅταν αὕτη δὲν εἶναι ῥητή.

Λαμβάνομεν τὴν καθ' ὑπεροχήν, ῥίζαν τοῦ A ἔστω α. Σχηματίζομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο α_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ καθ' ὑπεροχήν. Σχηματίζομεν τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν α καὶ $\frac{A}{\alpha}$ καὶ ἔστω τοῦτο β_1. Τοῦτο εἶναι προσέγγισις τῆς $\sqrt{A}$ κατ' ἔλλειψιν. Τῶν α_1 καὶ β_1 σχηματίζομεν τὸ ἀριθμ. μέσον ἔστω α_2 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_2. Τῶν α_2, β_2 σχηματίζομεν τὸ ἀριθ. μέσον ἔστω α_3 καὶ τὸ ἁρμον. μέσον ἔστω β_3, καὶ ἔστω α_ν τὸ νυοστὸν ἀριθ. μέσον κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον σχηματισμοῦ, καὶ τὸ ἁρμον. μέσον β_ν. Ἐὰν $\nu\to\infty$ τότε $\alpha_\nu=\beta_\nu$. Καὶ ἐνταῦθα εὑρισκόμεθα πρὸ τοῦ σχηματισμοῦ δύο ἀκολουθιῶν, μιᾶς τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα, καὶ ἄλλης τῶν ἁρμονικῶν μέσων, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα. Καὶ αἱ δύο ἀκολουθίαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὅριον, τὴν $\sqrt{A}$, ἤτοι τὸ ἀνώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἁρμονικῶν μέσων συμπίπτει πρὸς τὸ κατώτερον φράγμα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀριθμητικῶν μέσων. Ἐὰν παραστήσωμεν γραφικῶς τἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν:

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \sqrt{A} \quad \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad (\nu\to\infty).$$

Ὁ Ἥρων δὲν ὁμιλεῖ περὶ φραγμάτων ἀκολουθιῶν. Ἀφήνει ὅμως νὰ ὁμιλήσῃ περὶ τούτου ἡ χρησιμοποιουμένη μέθοδος καὶ ῥητῶς λέγει, ὅτι ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητή, ὅτι δηλ. εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. «Ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ (= 720) ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα...)»· ἐπειδὴ δηλ. ἡ $\sqrt{720}$ δὲν εἶναι ῥητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν......

ΟΙ ΠΛΕΥΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑ ΤΗΝ $\sqrt{3}$

32. Ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν πραγματείαν του Κύκλου Μέτρησις τὴν σχέσιν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

χωρὶς νὰ ἀποδεικνύῃ τὴν εὕρεσιν αὐτῆς.

Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου κλάσματος τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπαληθεύουν τὴν διοφαντικὴν ἐξίσωσιν $y^2 = 3x^2 + 1$, ἤτοι εἶναι $265^2 = 3.153^2 - 2$ καὶ $1351^2 = 3.780^2 + 1$.

Κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας ἔγιναν πολλαὶ προσπάθειαι πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως.

Κατὰ τὸ 1955 στηριζόμενοι εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία μνημονεύεται εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἀνεκοινώσαμεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν (2 - 6 - 1955) τὴν κάτωθι μέθοδον ἀποδείξεως τῆς ἀνωτέρω σχέσεως:

Ἀντὶ νὰ κατασκευάσωμεν διαδοχικῶς τετράγωνα καθ' ὡρισμένον νόμον καὶ διὰ τῆς λήψεως τῶν λόγων τῶν διαμέτρων (δηλ. διαγωνίων) πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς νὰ εὕρωμεν κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{2}$, κατασκευάζομεν διαδοχικῶς ῥόμβους καθ' ὡρισμένον νόμον, ὅπου ἡ μεγαλυτέρα γωνία ἑκάστου ῥόμβου νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ 12ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $ΑΓ^2 = 3ΑΒ^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας, πλευρά, δηλ. ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ΑΒΓΔ, καὶ συνεπῶς $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \sqrt{3}$.

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $ΒΕ = ΑΒ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα $ΕΖ = ΑΓ$, ὥστε $ΑΖ = 2ΑΒ + ΕΖ$. Κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἀνεφέρθη ἀνωτέρω), θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΖ^2 + ΕΖ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΒΖ^2.$$

Ἐπειδὴ $ΒΖ = ΒΕ + ΕΖ$, θὰ εἶναι

$$ΑΖ^2 + ΕΖ^2 = 2ΑΒ^2 + 2(ΒΕ + ΕΖ)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ $ΕΖ^2$ λαμβάνομεν

$$ΑΖ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΒΕ^2 + ΕΖ^2 + 4ΒΕ \times ΕΖ.$$

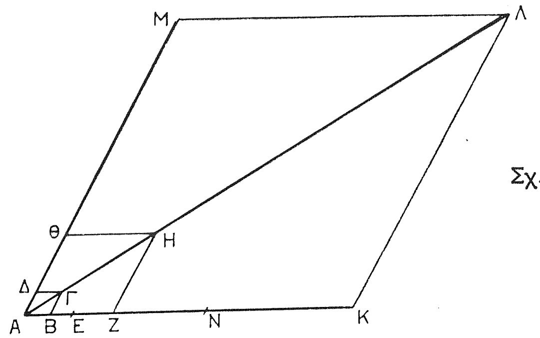
Καὶ ἐπειδὴ $BE = AB$ καὶ $EZ = A\Gamma$, θὰ ἔχωμεν

$$AZ^2 = 4AB^2 + A\Gamma^2 + 4AB \times A\Gamma.$$

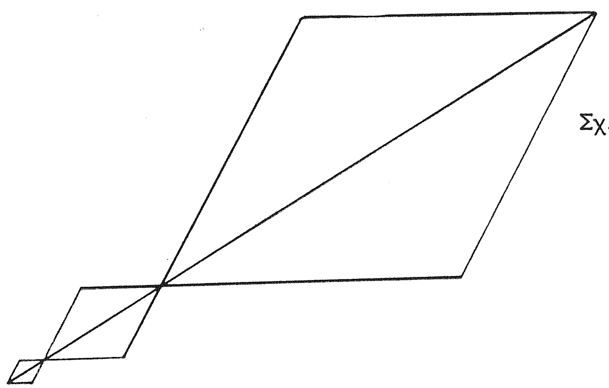
Εἶναι ἄρα καὶ $3AZ^2 = 12AB^2 + 3A\Gamma^2 + 12AB \times A\Gamma$.

Ἀλλὰ $3AB^2 = A\Gamma^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AZ^2 = 9AB^2 + 4A\Gamma^2 + 12AB \times A\Gamma = (3AB + 2A\Gamma)^2.$$



Σχ. 1



Σχ. 2

[σημ.: Εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα οἱ ἐν συνεχείᾳ κατασκευαζόμενοι ῥόμβοι ΑΒΓΔ, ΑΖΗΘ, ΑΚΛΜ τοῦ πρώτου σχήματος ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως].

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AZ = 2AB + EZ = 2AB + A\Gamma$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AB + 2A\Gamma$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΖΗΘ,
ἔνθα $AH = 3AB + 2A\Gamma$ καὶ $AH^2 = 3AZ^2$.

Ἐὰν καλέσωμεν $AB = \alpha$ καὶ $A\Gamma = \delta$, θὰ ἔχωμεν

$$AZ = 2\alpha + \delta, \tag{1}$$

καὶ

$$AH = 3\alpha + 2\delta, \tag{2}$$

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΖ λαμβάνομεν τμῆμα ΖΝ = ΑΖ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΝ λαμβάνομεν τμῆμα ΝΚ = ΑΗ, ὥστε ΑΚ = 2ΑΖ + ΝΚ. Πάλιν κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ ΙΙ τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{AK}^2 + \mathrm{NK}^2 = 2\mathrm{AZ}^2 + 2\mathrm{ZK}^2.$$

Ἐπειδὴ ΖΚ = ΖΝ + ΝΚ, θὰ εἶναι

$$\mathrm{AK}^2 + \mathrm{NK}^2 = 2\mathrm{AZ}^2 + 2(\mathrm{ZN} + \mathrm{NK})^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ NK^2 λαμβάνομεν

$$\mathrm{AK}^2 = 2\mathrm{AZ}^2 + 2\mathrm{ZN}^2 + \mathrm{NK}^2 + 4\mathrm{ZN} \times \mathrm{NK}.$$

Καὶ ἐπειδὴ ΖΝ = ΑΖ καὶ ΝΚ = ΑΗ, θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{AK}^2 = 4\mathrm{AZ}^2 + \mathrm{AH}^2 + 4\mathrm{AZ} \times \mathrm{AH}.$$

Εἶναι ἄρα καὶ $3\mathrm{AK}^2 = 12\mathrm{AZ}^2 + 3\mathrm{AH}^2 + 12\mathrm{AZ} \times \mathrm{AH}.$

Ἀλλὰ εἶναι $\mathrm{AH}^2 = 3\mathrm{AZ}^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3\mathrm{AK}^2 = 9\mathrm{AZ}^2 + 4\mathrm{AH}^2 + 12\mathrm{AZ} \times \mathrm{AH} = (3\mathrm{AZ} + 2\mathrm{AH})^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν ΑΚ = 2ΑΖ + ΝΚ = 2ΑΖ + ΑΗ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ 3ΑΖ + 2ΑΗ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ῥόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ῥόμβον τοῦτον, τὸν ΑΚΛΜ, ἔνθα ΑΛ = 3ΑΖ + 2ΑΗ καὶ $\mathrm{A\Lambda}^2 = 3\mathrm{AK}^2$.

Ἐὰν εἰς τὰς εὐθείας ΑΚ καὶ ΑΛ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ΑΖ, ΑΗ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\mathrm{A\Lambda} = 12\alpha + 7\delta$ καὶ $\mathrm{AK} = 7\alpha + 4\delta$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ῥόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων.

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν:

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
α = πλευρὰ ῥόμβου	δ = διαγώνιος ῥόμβου
$\alpha_1 = 2\alpha + \delta$	$\delta_1 = 3\alpha + 2\delta$
$\alpha_2 = 7\alpha + 4\delta$	$\delta_2 = 12\alpha + 7\delta$
$\alpha_3 = 26\alpha + 15\delta$	$\delta_3 = 45\alpha + 26\delta$
$\alpha_4 = 97\alpha + 56\delta$	$\delta_4 = 168\alpha + 97\delta$
$\alpha_5 = 362\alpha + 209\delta$	$\delta_5 = 627\alpha + 362\delta$
$\vdots$	$\vdots$

ἢ

α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
$\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4$	$\delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

'Εάν ἀνωτέρω θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{19}{11}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{71}{41}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{265}{153}, \text{ κλπ.}$$

'Εάν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{2}{1}, \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{7}{4}, \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{26}{15}, \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{97}{56}, \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{362}{209}, \frac{\delta_6}{\alpha_6} = \frac{1351}{780},$$

κλπ.

"Ητοι εἶναι:

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \dots \sqrt{3} \dots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

Αἱ τιμαὶ δ_ν, α_ν, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 2$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 + 1$.

Η ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

33. "Οπως φαίνεται ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν διασωθέντων μαθηματικῶν ἔργων τῶν 'Αρχαίων 'Ελλήνων ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς καὶ τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ τινος ἐθεωροῦντο μέρη τῆς τεχνικῆς τῶν Μαθηματικῶν, τῆς πρακτικῆς δηλ. ἀριθμητικῆς. Διὰ τὸν λόγον αὐτῶν δὲν ὑπάρχει τίποτε τὸ συναφὲς εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου οὔτε καὶ εἰς τὴν 'Αριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάχου καὶ τὴν Συναγωγὴν τοῦ Πάππου. 'Ο Εὐτόκιος ὁ 'Ασκαλωνίτης (καταγόμενος ἐκ τῆς παραθαλασσίας πόλεως τῆς Παλαιστίνης 'Ασκαλών, κειμένης 20 χιλ. περίπου βορείως τῆς Γάζης) μαθητὴς τοῦ ἐκ τῶν μηχανικῶν τοῦ Ναοῦ τῆς 'Αγίας Σοφίας 'Ισιδώρου τοῦ Μιλησίου (περὶ τὸ 530 μ.Χ.) εἰς τὰ σχόλιά του τῆς πραγματείας τοῦ 'Αρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις» ἀναφέρει βιβλίον Πρακτικῆς 'Αριθμητικῆς τοῦ Μάγνου, τὸ ὁποῖον δὲν διεσώθη ('Αρχιμήδους Opera τόμος III, ὑπὸ I. L. Heiberg - E. Σ. Σταμάτη, B. G. Teubner, Stuttgart, 1972, σελ. 258, 37).

Περὶ τῆς μεθόδου ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀριθμοῦ λαμβάνομεν γνῶσιν ἔκ τινος σχολίου τοῦ Θέωνος τοῦ 'Αλεξανδρέως, Πρυτάνεως τοῦ 'Ελληνικοῦ Πανεπιστημίου τῆς 'Αλεξανδρείας, ἀκμάσαντος περὶ τὸ 380 μ.Χ. Τὸ σχόλιον τοῦ Θέωνος ἀναφέρεται εἰς τὴν 'Αστρονομίαν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου τὴν φέρουσαν τὸν τίτλον Μαθηματικὴ Σύνταξις ἢ Μεγάλη Σύνταξις καὶ μεταγενέστερον τὸν ἀραβικὸν τίτλον 'Αλμαγέστη (al-Magesthi = μεγίστη).

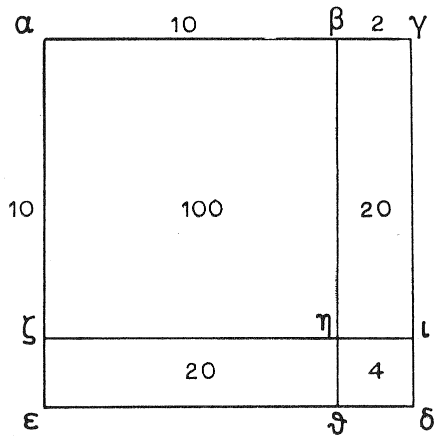
Ὁ Πτολεμαῖος σημειώνει εἰς τὸ βιβλίον του, ὅτι ἡ $\sqrt{4500^0}$ εἶναι $67^0\ 4'\ 55''$ κατὰ προσέγγισιν. Ὁ Θέων εἰς τὸ σχόλιόν του ἑρμηνεύει, πῶς ὁ Πτολεμαῖος εὗρε τὴν ῥίζαν αὐτήν, τὴν εὕρεσιν τῆς ὁποίας ὁ Πτολεμαῖος ἐθεώρησεν ὡς γνωστήν, καὶ δι' αὐτὸ δὲν τὴν ἡρμήνευσεν, ὡς τοῦτο πράττομεν καὶ ἡμεῖς σήμερον εἰς ἀναλόγους περιπτώσεις. Ὁ Πτολεμαῖος χρησιμοποιεῖ τὸ ἑξηκονταδικὸν ἀριθμητικὸν σύστημα κλασμάτων καὶ ὄχι τὸ δεκαδικόν. Ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν μᾶς διέσωσεν ὁ Θέων εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν σημερινήν, στηρίζεται δὲ εἰς τὸ 4ον θεώρημα τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους (περὶ τὸ 530 π.Χ.) τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς·

«Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ». Δηλαδή, ἐὰν καλέσωμεν α, β τὰ δύο τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνεται ἡ εὐθεῖα, τὸ θεώρημα λέγει, ὅτι

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta.$$

Εἰς αὐτὸ τὸ θεώρημα στηρίζεται ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔγινε γνωστὴ εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην ὑπὸ τῶν Σταυροφόρων.

«Ἔστω, λέγει ὁ Θέων, (συνεκδίδονται ὁμοῦ: Κλ. Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως βιβλία ιγ'. Θέωνος Ἀλεξανδρέως εἰς τὰ αὐτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. ια'. Ἔκδ. Halma, I 110 - 119 καὶ 185 - 186. Ἐκεῖ ἐκ παραδρομῆς μετὰ τὴν σελ. 120 ἀκολουθεῖ σελ. 181 ἀντὶ 121),



Σχ. 1.

ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 144. Λαμβάνομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τετραγώνου ἀριθμοῦ εὑρισκομένου ἐγγὺς τοῦ 144, ἔστω τὴν ῥίζαν 10 τοῦ 100 καὶ κατασκευάζομεν τετράγωνον πλευρᾶς $\alpha\beta = 10$. Ἔστω βγ ὁ ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν 10, ὥστε:

$$(10 + \beta\gamma)^2 = 144.$$

Κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον πλευρᾶς $10 + \beta\gamma$. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ τετραγώνου $\alpha\eta = 100$ καὶ ἐκ τοῦ γνώμονος ζηβγδε. Ὁ γνώμων ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων μεταξύ των παραλληλογράμμων, τῶν ζηθε καὶ βηιγ καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου ηθδι. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γνώμονος εἶναι:

$$144 - 100 = 44.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 44 διὰ τοῦ $2 \times 10 = 20$ [ἐπειδὴ ἔχομεν δύο ἴσα παραλληλόγραμμα καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $(\alpha\beta + \alpha\beta) \times \times \beta\gamma = 2 \times 10 \times \beta\gamma$], λαμβάνομεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 2, ὅστις ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν βγ, καὶ ὡς ὑπόλοιπον τὸν 4 ἤτοι τὸ τετράγωνον $\eta\theta\delta\iota = 4$. Ἐὰν λοιπόν, λέγει ὁ Θέων, προσθέσωμεν τὸν 2 εἰς τὸν 10 θὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 12 ὡς τὴν ζητουμένην τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 144».

Ἐπὶ τὸ ἐποπτικώτερον παριστῶμεν τὰ ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς: ἀφοῦ καλέσωμεν τὴν $\alpha\beta = \alpha$ καὶ τὴν $\beta\gamma = x$, ἔχομεν:

$$144 = \alpha^2 + 2\alpha x + x^2 = (\alpha + x)^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ $\alpha = 10$, ἔχομεν:

$$144 - 100 = 20x + x^2.$$

Ἀλλὰ ἡ σχέσις:

$$44 = 20x + x^2$$

εἶναι παράστασις ἐκφράζουσα ἀτελῆ διαίρεσιν, ὅπου ὁ 44 εἶναι διαιρετέος, 20 ὁ διαιρέτης καὶ x^2 τὸ ὑπόλοιπον. Διαιροῦντες τὸν 44 διὰ τοῦ 20 λαμβάνομεν πηλίκον $2 = x$ καὶ ὑπόλοιπον $4 = x^2$, ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔχοντος ἐμβαδὸν 144 εἶναι ἴση μὲ $10 + 2 = 12$.

Ἀκολούθως ὁ Θέων ἑρμηνεύει πῶς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν τῶν 4500^0, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Πτολεμαῖος ὡς:

$$\sqrt{4500^0} = 67^0\ 4'\ 55''$$

κατὰ προσέγγισιν, μὴ ἑρμηνεύων τὸν τρόπον εὑρέσεως αὐτῆς, ὡς γνωστόν.

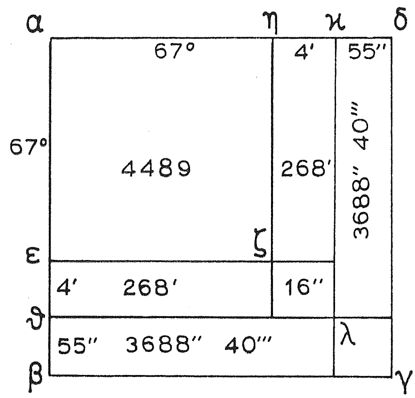
«Ἔστω (λέγει ὁ Θέων) ἡ τετραγωνικὴ ἐπιφάνεια αβγδ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, δηλ. ἡ πλευρά της εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Τὸ πλησιέστερον τετράγωνον πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4500^0 εἶναι τὸ ἔχον πλευρὰν 67^0 ἤτοι ὁ ἀριθμὸς $4489''$. Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦτο ἀπὸ τοῦ τετραγώνου αβγδ, ὁπότε ἀπομένει ὡς ὑπόλοιπον ὁ γνώμων βζδ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι:

$$4500^0 - 4489^0 = 11^0.$$

Μετατρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον αὐτὸ εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ ἔχομεν:

$$11^0 \times 60' = 660'.$$

Ἀκολούθως λαμβάνομεν τὸ διπλάσιον τῆς εζ, διότι ἔχομεν δύο ἴσα μεταξὺ των παραλληλόγραμμα (τὰ θζ καὶ ζκ), ἤτοι $67+67=134$ καὶ διὰ τούτου διαιροῦμεν τὰ $660'$, ὁπότε ἔχομεν πηλίκον $4'$ (καὶ ὑπόλοιπον $124'$). Διὰ τοῦ πηλί-



Σχ. 2.

κου τούτου 4 ἐκφράζονται αἱ εὐθεῖαι ηκ καὶ εθ, ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου θζ καί:

$$\zeta\kappa = 67^0 \times 4' = 268'.$$

Μετατρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον $124'$ εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ ἔχομεν:

$$124' \times 60' = 7440''.$$

Ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τούτου ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον $\zeta\lambda = 16''$ καὶ λαμβάνομεν:

$$7440'' - 16'' = 7424''.$$

Ἐὰν εἰς τὸ τετράγωνον ζλ περιθέσωμεν τὸν γνώμονα θζκ λαμβάνομεν τὸ τετράγωνον αλ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $67^0\ 4'$ καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον ταύτης εἶναι:

$$(67^0\ 4')^2 = 4497^0\ 56'\ 16''.$$

Τώρα μένει ὑπόλοιπον ὁ γνώμων βλδ, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρός:

$$4500^0 - (4497^0\ 56'\ 16'') = 2^0\ 3'\ 44'' = 7424''$$

Λαμβάνομεν πάλιν τὴν θλ δύο φοράς, ἐπειδὴ $\theta\lambda = \lambda\kappa$, καὶ διαιροῦμεν διὰ τούτου, τοῦ:

$$134^0\ 8'\ [\text{τοῦ } 2(67^0\ 4']$$

τὰ $7424''$ καὶ λαμβάνομεν ὡς πηλίκον:

$$55'' = \theta\beta = \kappa\delta.$$

Εὑρίσκομεν τώρα τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἴσων ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων $\beta\lambda + \lambda\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$7377'' \; 20''' \left[\sigma\eta\mu. \ \frac{7377}{60^2} \ \frac{20}{60^3}\right],$$

καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τούτων $= 3688'' \; 40'''$. Μένει ὑπόλοιπον $46'' \; 40'''$, τὸ ὁποῖον εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον λγ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $55''$, καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου αβγδ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς 4500^0, ἴσην πρὸς $67^0 \, 4' \; 55''$ κατὰ προσέγγισιν.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν ζητῶμεν τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν (ῥίζαν) ἀριθμοῦ τινος, λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἐγγὺς τετραγώνου ἀριθμοῦ, κατόπιν διπλασιάζομεν αὐτὴν καὶ διὰ τοῦ γινομένου τούτου διαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον, ἀφοῦ προηγουμένως τὸ ἔχομεν μετατρέψει εἰς πρῶτα λεπτὰ (σημ. τετραγωνικὴ ῥίζα μοιρῶν κλπ.) καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου, κατόπιν μετατρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῶν μοιρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν, ὁπότε λαμβάνομεν κατὰ προσέγγισιν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τὴν πλευρὰν τῆς τετραγωνικῆς ἐπιφανείας. *[Καὶ καθ' ὅλου, ἐὰν ζητῶμεν ἀριθμοῦ τινὸς τὴν τετραγωνικὴν πλευράν, λαμβάνομεν πρῶτον τοῦ σύνεγγυς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὴν πλευράν, εἶτα ταύτην διπλασιάζοντες καὶ περὶ τὸν γενόμενον ἀριθμὸν μερίζοντες τὸν λοιπὸν ἀριθμόν, ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστά, ἀπὸ τοῦ ἐκ τῆς παραβολῆς γινομένου ἀφαιροῦμεν τετράγωνον, καὶ ἀναλύοντες πάλιν τὰ ὑπολειπόμενα εἰς δεύτερα ἑξηκοστὰ καὶ μερίζοντες παρὰ τὸν διπλασίονα τῶν μοιρῶν καὶ ἑξηκοστῶν, ἕξομεν ἔγγιστα τὸν ἐπιζητούμενον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ χωρίου ἀριθμόν]*.

Ἐν συνεχείᾳ ὁ Θέων θέλων νὰ ἑρμηνεύσῃ τὴν $\sqrt{2^0 \, 28'}$, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Πτολεμαῖος, λέγει: «Καταγράφω ἓν τετράγωνον καὶ λαμβάνω ἄλλο τετράγωνον πλευρᾶς 1^0, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 1^0, διότι αὐτὸ τὸ τετράγωνον εἶναι πλησιέστερον πρὸς ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα. Τώρα ἀφαιρῶ τὴν 1^0 ἀπὸ τὰς $2^0 \, 28'$, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ μετατρέπω εἰς πρῶτα λεπτά, εἰς αὐτὰ προσθέτω τώρα τὰ $28'$, ὁπότε ἔχω $88'$. Τοῦτο τὸ διαιρῶ διὰ τοῦ διπλασίου τῆς 1^0, δηλ. διὰ τοῦ 2^0, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι $34'$. Δύο φορὰς ὁ $34'$ εἶναι $68'$. Ἐὰν ἀφαιρέσω τοῦτο ἀπὸ τοῦ $88'$ λαμβάνω $20'$. Μετατρέπω ταῦτα εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ ἔχω $1200''$. Ἐκ τούτου ἀφαιρῶ τὸ τετράγωνον τῶν $34'$, δηλ. $1156''$, ὁπότε λαμβάνω ὑπόλοιπον $44''$. Ταῦτα τὰ διαιρῶ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ $1^0 \, 34'$, ὅπερ εἶναι $3^0 \, 8'$, ὁπότε τὸ πηλίκον εἶναι 15 καὶ ὡς ἀποτέλεσμα ἔχω εὕρει κατὰ προσέγγισιν:

$$1^0 \; 34' \; 15'' \sim \sqrt{2^0 \, 28'}».$$

[Σημείωσις. Ἡ εὕρεσις τοῦ 34 δὲν εἶναι ἐμφανής, διότι $88 : 2 = 44$ καὶ ὄχι 34. Ἔστω:

$$\sqrt{2^0 \, 28'} = 1^0 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2}$$

καὶ ἑπομένως:

$$2+\frac{28}{60}=\left(1+\frac{x}{60}+\frac{y}{60^2}\right)^2=1+\frac{x^2}{60^2}+\frac{y^2}{60^4}+$$
$$+\frac{2x}{60}+\frac{2y}{60^2}+\frac{2xy}{60^3}.$$

Εἶναι ἄρα:

$$2+\frac{28}{60}>1+\frac{2x}{60}+\frac{x^2}{60^2}, \quad (1)$$

καὶ κατὰ μείζονα λόγον:

$$2+\frac{28}{60}>1+\frac{2x}{60}, \quad \frac{88}{60}>\frac{2x}{60}, \quad 44>x.$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$x^2+120x-5280<0.$$

τῆς ὁποίας αἱ δύο ῥίζαι εἶναι $\rho_1=34{,}2$ καὶ $\rho_2=-154,2$. Ἡ μεγαλυτέρα ἄρα ἀκεραία τιμή, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα (1) εἶναι $x=34$]. Ὁ Πτολεμαῖος μετὰ τὴν ἔκφρασιν τῆς:

$$\sqrt{4500^0}=67^0\ 4'\ 55''$$

ὑπολογίζει τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου:

$$=70^0\ 32'\ 3'',$$

λαμβάνων αὐτὴν ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ:

$$4975^0\ 4'\ 15'',$$

χωρὶς νὰ ἑρμηνεύῃ τὸν τρόπον εὑρέσεως αὐτῆς, τὸν ὁποῖον θεωρεῖ γνωστόν.

Η ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

34. Ἐν ᾧ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ ἐσώθη ἡ πληροφορία τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, καθ' ἣν ἡ πρὸς τοῦτο ἐφαρμοζομένη μέθοδος στηρίζεται εἰς τὸ 4ον θεώρημα τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὸ ἀνάπτυγμα δηλ. τοῦ τετραγώνου τοῦ διωνύμου $(\alpha+x)^2$, διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ δὲν διεσώθη παρομοία πληροφορία. Εἰς τὰ Μετρικὰ ὅμως τοῦ Ἥρωνος (1ος αἰ. μ.Χ.) διεσώθη παράδειγμα ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, καθ' ὃ χρησιμοποιεῖται τύπος τις πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης, χωρὶς ὅμως νὰ αἰτιολογῆται ἡ προέλευσις τοῦ τύπου. Ἀναφέρομεν τὸ παράδειγμα τοῦ Ἥρωνος:

«*Ὡς δὲ δεῖ λαβεῖν τῶν ρ μονάδων κυβικὴν πλευρὰν νῦν ἐροῦμεν.*

Λαβὲ τὸν ἔγγιστα κύβον τοῦ ρ τόν τε ὑπερβάλλοντα καὶ τὸν ἐλλείποντα·

ἔστι δὲ ὁ ρκε καὶ ξδ. Καὶ ὅσα μὲν ὑπερβάλλει, μονάδες κε, ὅσα δὲ ἐλλείπει, μονάδε λς καὶ ποίησον τὰ ε ἐπὶ τὰ 36· γίγνεται ρπ· καὶ τὰ ρ· γίγνεται σπ· καὶ παράβαλε τὰ ρπ παρὰ τὰ σπ· γίγνεται $\overset{\iota\delta}{\theta}$. *πρόσβαλε τῇ τοῦ ἐλάσσονος κύβου πλευρᾷ, τουτέστι τῷ δ· γίγνεται μονάδες δ καὶ* $\overset{\iota\delta}{\theta}$. *τοσούτων ἔσται ἡ τῶν ρ μονάδων κυβικὴ πλευρὰ ὡς ἔγγιστα». (Ἥρωνος Μετρικὰ βιβλίον Γ' κεφ. 20, ἐκδ. Hermann Schöne, Λειψία 1903, σελ. 178, 3-16).*

(Πῶς δὲ πρέπει νὰ λάβωμεν τῶν 100 μονάδων τὴν κυβικὴν ρίζαν θὰ εἴπωμεν τώρα.

Λάβε τὸν ἐγγὺς τοῦ 100, τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον κύβον· οὗτος εἶναι ὁ 125 καὶ ὁ 64.

Καὶ ἡ διαφορὰ	$125 - 100 = 25 = \delta_2$
»	$100 - 64 = 36 = \delta_1$
Πολλαπλασίασε	$5 \times 36 = 180.$
Πρόσθεσε εἰς αὐτὰ τὸ 100, $(\delta_2 \times 4 = 25 \times 4)$	$180 + 100 = 280.$
Καὶ διαίρεσε τὰ 180 διὰ τοῦ 280, γίνεται	$\frac{180}{280} = \frac{9}{14}.$
Πρόσθεσε τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἰς τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ μικροτέρου κύβου, ἤτοι	$4 + \frac{9}{14} = 4\frac{9}{14}.$

Τόση εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν).

Πολλαὶ προσπάθειαι ἔχουν γίνει μέχρι σήμερον διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τύπου, τὸν ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ὁ Ἥρων διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ μὴ τελείου κύβου, κατὰ προσέγγισιν. Καλλιτέρα θεωρεῖται ἡ τοῦ Γερμανοῦ G. Wertheim, τοῦ ἐκδότου ἐν Γερμανίᾳ (γερμανικὴ μετάφρασις καὶ σχόλια) τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, τῆς Ἀλγέβρας δηλ. τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Κατὰ τὸν Wertheim, ἔστω:

$$\alpha^3 < A < (1+\alpha)^3 \quad \text{καὶ} \quad A - \alpha^3 = \delta_1 \quad \text{καὶ} \quad (1+\alpha)^3 - A = \delta_2.$$

Ὁ τύπος ὁ παρέχων τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ A, κατὰ τὸν Wertheim, (ὁ σύμφωνος πρὸς τὸν τοῦ Ἥρωνος) εἶναι

$$\sqrt[3]{A} = \alpha + \frac{(1+\alpha)\delta_1}{(1+\alpha)\delta_1 + \alpha\delta_2},$$

κατὰ προσέγγισιν.

(Zeitschrift für Mathematik und Physik 1899, hist.— litt. Abt. p. 1 - 3).

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

I. ΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

35. Τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν εἰς 25 θεωρήματα. Τῶν θεωρημάτων προτάσσοται 18 ὁρισμοί. Ὁλόκληρον τὸ βιβλίον, κατά τινα σχολιαστήν, ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὔδοξον (408 - 353 π.Χ.) καθηγητὴν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Οἱ 18 ὁρισμοὶ τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Στοιχείων.

1. Μέρος εἶναι μέγεθος μεγέθους, τὸ μικρότερον τοῦ μεγαλυτέρου, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεγαλύτερον.

2. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ μικροτέρου.

3. Λόγος δύο ὁμογενῶν μεγεθῶν εἶναι ἡ κατὰ πηλικότητά τινα σχέσις.

4. Μεγέθη λέγονται ὅτι ἔχουν λόγον πρὸς ἄλληλα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα δύνανται νὰ ὑπερέχουν ἀλλήλων. (Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι ἀσαφής. Ἐκ τοῦ 8 ὅμως θεωρήματος συνάγεται ὅτι ἐὰν $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι $(\alpha - \beta)\nu > \alpha$. Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐκφράζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας).

5. Μεγέθη λέγονται ὅτι εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ οἱονδήποτε πολλαπλασιασμὸν ἢ εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἢ μικρότερα, ὅταν ληφθοῦν καταλλήλως. (Θὰ εἶναι δηλ. $A : B = \Gamma : \Delta$, μόνον ἐὰν δι' οἱουσδήποτε δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς μ, ν ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων:

1) $\mu.A > \nu.B$ καὶ συγχρόνως $\mu.\Gamma > \nu.\Delta$
2) $\mu.A = \nu.B$ καὶ συγχρόνως $\mu.\Gamma = \nu.\Delta$
3) $\mu.A < \nu.B$ καὶ συγχρόνως $\mu.\Gamma < \nu.\Delta$

Ἡ ἑρμηνεία τοῦ ὁρισμοῦ 5 ἐλήφθη ἔκ τινων θεωρημάτων τοῦ 5ου βιβλίου καὶ ἐδόθη κατὰ τὸ τέλος τοῦ παρελθόντος αἰῶνος).

6. Τὰ δὲ μεγέθη τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον ἂς καλῶνται ἀνάλογα.

7. Ὅταν δὲ ἐκ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου ὑπερέχει τοῦ πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ πολλαπλάσιον τοῦ τρίτου δὲν ὑπερέχῃ τοῦ πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, τότε τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον λέγεται ὅτι ἔχει μεγαλύτερον λόγον πρὸς τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

8. Ἐλαχίστη δὲ ἀναλογία εἶναι ἡ περιέχουσα τρεῖς ὅρους.

9. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον, πρὸς τὸ τρίτον εὑρίσκεται εἰς διπλάσιον λόγον ἢ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον. (δηλ. ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, εἶναι $\alpha : \gamma = \alpha^2 : \beta^2$).

10. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, λέγεται, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον εὑρίσκεται εἰς τριπλάσιον λόγον ἢ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἀναλόγως τῆς ὑπαρχούσης ἀναλογίας. (δηλ. ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, εἶναι $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$ καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta = \ldots = \varkappa : \lambda$ εἶναι $\alpha : \lambda = \alpha^\nu : \beta^\nu$)

11. Ἐάν $\alpha : \beta = \gamma : \delta = \ldots = \varkappa : \lambda$ ὁμόλογα μεγέθη, εἶναι τὰ $\alpha, \gamma \ldots \varkappa$ καὶ $\beta, \delta \ldots \lambda$.

12. Ἐναλλὰξ λόγος. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $\alpha : \gamma = \beta : \delta$.

13. Ἀνάπαλιν λόγος. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $\beta : \alpha = \delta : \gamma$.

14. Σύνθεσις λόγου. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $(\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$. (λέγεται, συνθέντι).

15. Διαίρεσις λόγου. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $(\alpha - \beta) : \beta = (\gamma - \delta) : \delta$. (λέγεται, διελόντι).

16. Ἀναστροφὴ λόγου. Ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, εἶναι $\alpha : (\alpha - \beta) = \gamma(\gamma - \delta)$.

17. Ἐάν $\alpha : \beta = \mathrm{A} : \mathrm{B}$
$\beta : \gamma = \mathrm{B} : \Gamma$
$\gamma : \delta = \Gamma : \Delta$
$\mu : \nu = \mathrm{M} : \mathrm{N}$, ὁ λόγος $\alpha{:}\nu = \mathrm{A}{:}\mathrm{N}$ λέγεται «δι' ἴσου λόγος» λαμβάνεται δὲ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων κατὰ μέλη.

18. Ἐάν $\alpha : \beta = \mathrm{B} : \Gamma$
$\beta : \gamma = \mathrm{A} : \mathrm{B}$, ὁ λόγος $\alpha : \gamma = \mathrm{A} : \Gamma$ λέγεται «δι' ἴσου λόγος, ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ» λαμβάνεται δὲ διὰ πολλ/σμοῦ τῶν ἰσοτήτων κατὰ μέλη (αἱ σχέσεις $\alpha : \beta = \mathrm{B} : \Gamma$ καὶ $\beta : \gamma = \mathrm{A} : \mathrm{B}$ λέγονται τεταραγμένη ἀναλογία).

II. ΟΙ ΛΟΓΟΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΝΙΚΟΜΑΧΟΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

36. Ὁ Νικόμαχος, ὡς ἔχει ἤδη μνημονευθῇ, ἔγραψε πραγματείαν εἰς δύο βιβλία ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή, ἡ ὁποία μετεφράσθη καὶ εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Ῥωμαίου φιλοσόφου Βοηθίου (Boethius, 480 - 524). Διὰ τῆς ἐννοίας τοῦ λόγου ὁ Νικόμαχος ἐπιθυμεῖ νὰ κατατάξῃ συστηματικῶς τὰ διάφορα εἴδη τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι μεγαλύτερα ἢ μικρότερα τῆς μονάδος, δίδων εἰς αὐτὰ τὰ ὑπὸ τῶν παλαιοτέρων μαθηματικῶν καθιερωθέντα ὀνόματα. Ὡς θὰ γίνῃ φανερὸν κατωτέρω τοιαύτη ὀνομασία θὰ ἦτο περιττὴ ἂν εἶχε δημιουργηθῇ ὁ σημερινὸς συμβολισμός. Ἀξίζει ὅμως νὰ καταχωρισθῇ ἡ ὀνομασία αὐτὴ διὰ νὰ ἴδωμεν τὰς δυσκολίας ἐναντίον τῶν ὁποίων ἐπάλαισαν οἱ παλαιοὶ Ἕλληνες μαθηματικοὶ διὰ τὴν θεμελίωσιν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ὁ τρόπος ὅμως τοῦ σχηματισμοῦ τῶν λόγων εἶναι λίαν ἐνδιαφέρων. Διακρίνει ὁ Νικόμαχος πέντε εἴδη λόγων μεγαλυτέρων τῆς μονάδος καὶ πέντε εἴδη λόγων μικροτέρων τῆς μονάδος. (Β:βλίον α' κεφ. 17-22).

Εἴδη μεγαλύτερα τῆς μονάδος	Εἴδη μικρότερα τῆς μονάδος
1. Πολλαπλάσιον	Ὑποπολλαπλάσιον
2. Ἐπιμόριον (τὸ ὅλον καὶ μέρος τοῦ ὅλου) $\frac{\nu+1}{\nu}$	Ὑποεπιμόριον $\frac{\nu}{\nu+1}$
3. Ἐπιμερὲς (τὸ ὅλον καὶ μέρη τοῦ ὅλου) $\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}$	Ὑπεπιμερὲς $\frac{\mu+\nu}{2\mu+\nu}$
4. Πολλαπλασιεπιμόριον (πολλαπλάσιον τοῦ ἐπιμορίου)	Ὑποπολλαπλασιεπιμόριον
5. Πολλαπλασιεπιμερὲς (πολλαπλάσιον τοῦ ἐπιμεροῦς)	Ὑποπολλαπλασιεπιμερὲς

Εἰδικώτερον (μ,ν ἀκέραιοι).

Πολλαπλάσιος (λόγος), διπλάσιος, τριπλάσιος κ.λπ.	Ὑποπολλαπλάσιος, ὑποδιπλάσιος $\frac{1}{2}$, ὑποτριπλάσιος $\frac{1}{3}$ κ.λπ.

Ἐπιμόριος	$1+\frac{1}{\nu}$	Ὑπεπιμόριος	$\frac{\nu}{\nu+1}$
ἡμιόλιος	$1\,\frac{1}{2}$	ὑφημιόλιος	$\frac{2}{3}$
ἐπίτριτος	$1\,\frac{1}{3}$	ὑπεπίτριτος	$\frac{3}{4}$
ἐπιτέταρτος	$1\,\frac{1}{4}$	ὑπεπιτέταρτος	$\frac{4}{5}$
ἐπίπεμπτος	$1\,\frac{1}{5}$ κ.λπ.	ὑπεπίπεμπτος	$\frac{5}{6}$ κ.λπ.

Ἐπιμερὴς $1+\frac{\mu}{\mu+\nu}$	Ὑπεπιμερὴς $\frac{\mu+\nu}{2\mu+\nu}$
ἐπιδιμερὴς $1\,\frac{2}{3}$ ἢ ἐπιδίτριτος ἢ δισεπίτριτος.	Ἀντίστοιχοι δὲν ἀναγράφονται.
ἐπιτριμερὴς $1\,\frac{3}{4}$ ἢ ἐπιτριτέταρτος ἢ τρισεπιτέταρτος.	
ἐπιτετραμερὴς $1\,\frac{4}{5}$ ἢ ἐπιτετράπεμπτος ἢ τετράκισεπίπεμπτος.	

'Επιμερὴς τῆς μορφῆς $1 + \frac{\mu}{\mu+1}$.

ἐπιδιμερὴς $1\frac{2}{3}$ ἢ ἐπιδίτριτος ἢ δισεπίτριτος.

ἐπιτριμερὴς $1\frac{3}{4}$ ἢ ἐπιτριτέταρτος ἢ τρισεπιτέταρτος.

ἐπιτετραμερὴς $1\frac{4}{5}$ ἢ ἐπιτετράπεμπτος ἢ τετράκις ἐπίπεμπτος κ.λπ.

τρισεπίπεμπτος $1\frac{3}{5}$.

τετράκις ἐφέβδομος $1\frac{4}{7}$.

πεντάκις ἐπένατος $1\frac{5}{9}$ κ.λπ.

Πολλαπλασιεπιμόριος $\mu + \frac{1}{\nu}$.

διπλασιεφήμισυς $2\frac{1}{2}$.

διπλασιεπίτριτος $2\frac{1}{3}$.

τριπλασεπίπεμπτος $3\frac{1}{5}$ κ.λπ.

'Υποπολλαπλασιεπιμόριος $\frac{\nu}{\mu\nu+1}$

'Αντίστοιχοι δὲν ἀναγράφονται

Πολλαπλασιεπιμερὴς $\rho + \frac{\mu}{\mu+\nu}$.

διπλασιεπιδιμερὴς $2\frac{2}{3}$.

τριπλασιεπιτετραμερὴς $3\frac{4}{5}$ κ.λπ.

'Υποπολλαπλασιεπιμερὴς

$$\frac{\mu+\nu}{(\rho+1)\,\mu+\nu}$$

'Αντίστοιχοι δὲν ἀναγράφονται (ρ, μ, ν ἀκέραιοι).

ΠΩΣ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΟΙ ΛΟΓΟΙ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΝΙΚΟΜΑΧΟΝ (βιβλ. α', κεφ. 23).

"Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ εὑρισκόμενοι εἰς τὴν σχέσιν $\alpha : \beta = \beta : \gamma$.

'Εκ τῶν α, β, γ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμούς.

(A) $\quad \alpha \quad \alpha+\beta \quad \alpha+2\beta+\gamma,$ καὶ $\quad \gamma \quad \gamma+\beta \quad \gamma+2\beta+\alpha \quad$ (B)

ΕΠΙΜΟΡΙΟΙ ΛΟΓΟΙ

Διὰ $\alpha = \beta = \gamma = 1$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (A) 1 2 4 (1)	Θέτοντες τὰς τιμὰς 1,2,4 ἐκ τῆς (1) (ὡς α,β,γ) εἰς τὴν (B) λαμβάνομεν 4 6 9 (I) καὶ εἶναι $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2} =$ = ἐπιμόριος λόγος (ἡμιόλιος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} =$ ὑ- πεπιμόριος (ὑφημιόλιος)
Θέτοντες τὰς τιμὰς 1, 2, 4 ἐκ τῆς (1), (ὡς α,β,γ) εἰς τὴν (A) λαμβάνομεν 1 3 9 (2)	Θέτοντες τὰς τιμὰς 1,3,9 (ὡς α,β,γ) εἰς τὴν (B) λαμβάνομεν 9 12 16 (II) καὶ εἶναι $\frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\,\frac{1}{3} =$ = ἐπιμόριος (ἐπίτριτος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} =$ = ὑπεπιμόριος (ὑπεπίτριτος)
Ὁμοίως ἐκ τῆς (2) διὰ τῆς (A) λαμβάνομεν 1 4 16 (3)	Ὁμοίως ἐκ τῶν 1,4,16 τῆς (3) διὰ τῆς (B) λαμβάνομεν 16 20 25 (III) καὶ εἶναι $\frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1\,\frac{1}{4} =$ = ἐπιμόριος (ἐπιτέταρτος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} =$ = ὑπεπιμόριος (ὑπεπιτέταρτος)
Ἐκ τῆς (3) διὰ τῆς (A) λαμβά- νομεν 1 5 25 (4)	Ἐκ τῶν 1,5,25 τῆς (4) λαμβάνομεν διὰ τῆς (B) 25 10 36 (IV) καὶ εἶναι $\frac{30}{25} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5} = 1\,\frac{1}{5} =$ = ἐπιμόριος (ἐπίπεμπτος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{25}{30} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} =$ = ὑπεπιμόριος (ὑπεπίπεμπτος)

Ἐκ τῆς (4) διὰ τῆς (A) λαμβάνομεν 1 6 36 (5)	Ἐκ τῆς (5) διὰ τῆς (B) λαμβάνομεν 36 42 49 (V) καὶ εἶναι $\frac{42}{36} = \frac{49}{42} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6} =$ = ἐπιμόριος (ἐφέκτος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{36}{42} = \frac{42}{49} = \frac{6}{7} =$ ὑπεπιμόριος (ὑπεφέκτος)
Ἐκ τῆς (5) διὰ τῆς (A) λαμβάνομεν 1 7 49 (6)	Ἐκ τῆς (6) διὰ τῆς (B) λαμβάνομεν 49 56 64 (VI) καὶ εἶναι $\frac{56}{49} = \frac{64}{56} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7} =$ = ἐπιμόριος (ἐφέβδομος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{49}{56} = \frac{56}{64} = \frac{7}{8} =$ = ὑπεπιμόριος (ὑπεφέβδομος)
Ἐκ τῆς (6) διὰ τῆς (A) λαμβάνομεν 1 8 64 (7)	Ἐκ τῆς (7) διὰ τῆς (B) λαμβάνομεν 64 72 81 (VII) καὶ εἶναι $\frac{72}{64} = \frac{81}{72} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8} =$ = ἐπιμόριος (ἐπόγδοος = ὁ φθόγγος τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος) καὶ ἀντιστρόφως $\frac{64}{72} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9} =$ = ὑπεπιμόριος (ὑπεπόγδοος).

Ἐκ τῶν τιμῶν 4,6,9 τῆς (I) λαμβάνομεν διὰ τῆς (A), 4 10 25 (δ) καὶ εἶναι $\frac{10}{4} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} =$ πολλαπλασιεπιμόριος (διπλασιεφήμισυς). Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{4}{10} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} =$ ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (= ὑποδιπλασιεφήμισυς).

Ἐκ τῶν 9,10,16 τῆς (II) λαμβάνομεν διὰ τῆς (A), 9 21 49 (ε) καὶ εἶναι $\frac{21}{9} = \frac{49}{21} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} =$ πολλαπλασιεπιμόριος (διπλασιεπίτριτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{9}{21} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (ὑποδιπλασιεπίτριτος).

Ἐκ τῶν 16,20,25 τῆς (ΙΙΙ) λαμβάνομεν διὰ τῆς (Α), 16 36 81 (ζ) καὶ εἶναι $\frac{36}{16} = \frac{81}{36} = \frac{9}{4} = 2\,\frac{1}{4}$ = πολλαπλασιεπιμόριος (διπλασιεπιτέταρτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{16}{36} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (ὑποδιπλασιεπιτέταρτος).

Ἐκ τῶν 25,30,36 τῆς (IV) λαμβάνομεν διὰ τῆς (Α), 25 55 121 (η) καὶ εἶναι $\frac{55}{25} = \frac{121}{55} = \frac{11}{5} = 2\,\frac{1}{5}$ = πολλαπλασιεπιμόριος (διπλασιεπίπεμπτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{25}{55} = \frac{55}{121} = \frac{5}{11}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (ὑποδιπλασιεπίπεμπτος).

Ἐκ τῶν 36, 42, 49 τῆς (V) λαμβάνομεν διὰ τῆς (Α), 36 78 169 (θ) καὶ εἶναι $\frac{78}{36} = \frac{169}{78} = 2\,\frac{1}{6}$ = πολλαπλασιεπιμόριος (διπλασιεφέκτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{36}{78} = \frac{78}{169} = \frac{6}{13}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (ὑποδιπλασιεφέκτος).

Ἐκ τῶν 49, 56, 64, τῆς (VI) λαμβάνομεν διὰ τῆς (Α), 49 105 225 (ι) καὶ εἶναι $\frac{105}{49} = \frac{225}{105} = \frac{15}{7} = 2\,\frac{1}{4}$ = πολλαπλασιεπιμόριος (διπλασιεφέβδομος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{49}{105} = \frac{105}{225} = \frac{7}{15}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (ὑποδιπλασιεφέβδομος).

ΕΠΙΜΕΡΕΙΣ ΛΟΓΟΙ

Ἐκ τῶν τιμῶν 4,6,9 τῆς (Ι) λαμβάνομεν διὰ τῆς (Β), 9 15 25 (κ) καὶ εἶναι $\frac{15}{9} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = 1\,\frac{2}{3}$ = ἐπιμερὴς (ἐπιδιμερὴς ἢ ἐπιδίτριτος ἢ δισεπίτριτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{9}{15} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} =$ ὑπεπιμερὴς (ὑπεπιδιμερής, ὑπεπιδίτριτος, ὑπεπιδισεπίτριτος).

Ἐκ τῶν 9,12,16 τῆς (II) λαμβάνομεν διὰ τῆς (B), 16 28 409 (λ)

καὶ εἶναι $\frac{28}{16} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} =$ ἐπιμερὴς (ἐπιτριμερής, ἐπιτριτέταρτος, τρισεπιτέταρτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{16}{28} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7} =$ ὑπεπιμερὴς (ὑπεπιτριμερής, ὑπεπιτριτέταρτος, ὑποτρισεπιτέταρτος).

Ἐκ τῶν 16,20,25 τῆς (III) λαμβάνομεν διὰ τῆς (B), 25 45 81 (μ)

καὶ εἶναι $\frac{45}{25} = \frac{81}{45} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} =$ ἐπιμερὴς (ἐπιτετραμερής, ἐπιτετράπεμπτος, τετρακισεπίπεμπτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{25}{45} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9} =$ ὑπεπιμερὴς (ὑπεπιτετραμερής, ὑπεπιτετράπεμπτος, ὑποτετράκισεπίπεμπτος).

Ἐκ τῶν 25, 10, 36 τῆς (IV) λαμβάνομεν διὰ τῆς (B), 36 66 121 (ν)

καὶ εἶναι $\frac{66}{36} = \frac{121}{66} = 1\frac{5}{6} =$ ἐπιμερὴς (ἐπιπενταμερής, ἐπιπενθέκτος, πεντακισεφέκτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{36}{66} = \frac{66}{121} = \frac{6}{11} =$ ὑπεπιμερὴς (ὑπεπιπενταμερής, ὑπεπιπενθέκτος, ὑπεπιπεντακισεφέκτος).

Ἐκ τῶν 9, 15, 25 τῆς (κ) λαμβάνομεν διὰ τῆς (A), 9 24 64 (ξ)

καὶ εἶναι $\frac{24}{9} = \frac{64}{24} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} =$ πολλαπλασιεπιμερὴς (διπλασιεπιδιμερής, διπλασιεπιδίτριτος, διπλασιεπιδισεπίτριτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{9}{24} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8} =$ ὑποπολλαπλασιεπιδιμερής.

Ἐκ τῶν 16, 28, 49 τῆς (λ) λαμβάνομεν διὰ τῆς (A), 16 44 121 (ο)

καὶ εἶναι $\frac{44}{16} = \frac{121}{44} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} =$ πολλαπλασιεπιμερὴς (διπλασιεπίτριτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{16}{44} = \frac{44}{121} = \frac{4}{11}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς (ὑποδιπλασιεπίτριτος).

Ἐκ τῶν 25, 45, 81 τῆς (μ) λαμβάνομεν διὰ τῆς (Α), 25 70 196 (π) καὶ εἶναι $\frac{70}{25} = \frac{196}{70} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ = πολλαπλασιεπιμερὴς (διπλασιεπιτέταρτος).

Καὶ ἀντιστρόφως $\frac{25}{70} = \frac{70}{196} = \frac{5}{14}$ = ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς (ὑποδιπλασιεπιτέταρτος) κ.λπ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ ΤΟΥ ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ

Εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια τοῦ β′ βιβλίου τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Νικόμαχος ἀναφέρει τὸ ἑξῆς θεώρημα: Ἐὰν δοθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι (αὐξούσης) γεωμετρικῆς προόδου, $\alpha < \beta < \gamma$, ὅπου α δύναται νὰ εἶναι καὶ κλασματικός, δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τρεῖς ὅρους, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι ἴσοι μεταξύ των (ἤτοι οἱ δύο μεγαλύτεροι νὰ γίνουν ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον ὅρον), ἐφαρμόζοντες τὴν ἑξῆς μέθοδον. Ὡς πρῶτον ὅρον λαμβάνομεν τὸν μικρότερον α· ὡς δεύτερον τὸν (β - α) καὶ ὡς τρίτον τὸν $(\gamma - \alpha - 2(\beta - \alpha)) = \gamma + \alpha - 2\beta$. Ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν μέθοδον εἰς τοὺς τρεῖς ληφθέντας νέους ὅρους λαμβάνομεν ὡς πρῶτον ὅρον τὸν α, ὡς δεύτερον ὅρον τὸν $(\beta - \alpha) - \alpha = (\beta - 2\alpha)$ καὶ ὡς τρίτον τὸν $(\gamma + \alpha - 2\beta) - \alpha - 2(\beta - 2\alpha) = \gamma + 4\alpha - 4\beta$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἤτοι θὰ εἶναι:

Δοθέντες τρεῖς ὅροι	α	β	γ	
Λαμβανόμενοι διαδοχικῶς	α	$\beta - \alpha$	$\gamma + \alpha - 2\beta$	(1)
	α	$\beta - 2\alpha$	$\gamma + 4\alpha - 4\beta$	(2)
	α	$\beta - 3\alpha$	$\gamma + 9\alpha - 6\beta$	(3)
	α	$\beta - 4\alpha$	$\gamma + 16\alpha - 8\beta$	(4)
	α	$\beta - 5\alpha$	$\gamma + 25\alpha - 10\beta$	(5)
	⋮	⋮	⋮	⋮
	α	$\beta - (\nu - 1)\alpha$	$\gamma + (\nu - 1)^2\alpha - 2(\nu - 1)\beta$	$(\nu - 1)$
	α	$\beta - \nu\alpha$	$\gamma + \nu^2\alpha - 2\nu\beta$	(ν)

Ἐὰν ὁ λόγος τῆς αὐξούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι ω, τὸ πλῆθος τῶν μετασχηματισμῶν ν διὰ νὰ ληφθοῦν οἱ τρεῖς ἐν συνεχείᾳ δοθέντες ὅροι αὐτῆς ἴσοι μεταξύ των, δηλ. οἱ δύο μεγαλύτεροι ἴσοι πρὸς τὸν μικρότερον, θὰ εἶναι $\nu = \omega - 1$, οἱ δὲ ὅροι θὰ εἶναι $\alpha = \beta - \nu\alpha = \gamma + \nu^2\alpha - 2\nu\beta$. (τ)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστωσαν οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου $\alpha = 5$, $\beta = 25$, $\gamma = 125$, ὅπου $\alpha = 5$ καὶ $\omega = 5$. Διὰ νὰ γίνουν οἱ τρεῖς ὅροι ἴσοι πρὸς τὸν πρῶτον 5 ἐφαρμόζομεν τοὺς προηγουμένους τύπους. Ἐπειδὴ $\omega = 5$, ὁ $\nu = 5 - 1 = 4$ ἤτοι χρειάζονται τέσσαρες μετασχηματισμοὶ διὰ νὰ γίνουν οἱ δύο μεγαλύτεροι ὅροι ἴσοι πρὸς τὸν μικρότερον 5, οἱ ἑξῆς:

1)	5	$25 - 5 = 20$	$125 + 5 - 2 \cdot 25 = 80$
2)	5	$25 - 2 \cdot 5 = 15$	$125 + 4 \cdot 5 - 4 \cdot 25 = 45$
3)	5	$25 - 3 \cdot 5 = 10$	$125 + 9 \cdot 5 - 6 \cdot 25 = 20$
4)	5	$25 - 4 \cdot 5 = 5$	$125 + 16 \cdot 5 - 8 \cdot 25 = 5$

Τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα ἠδύνατο βέβαια νὰ ληφθῇ ἀμέσως ἐκ τῶν τύπων (τ), ὁπότε θὰ ἦτο $5 = 25 - 4 \cdot 5 = 125 + 4^2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 25$, ἀφοῦ $\omega = 5$ καὶ $\nu = \omega - 1$.

Εἰς τὰ κεφάλαια 3 καὶ 4 ἀναφέρονται τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

1. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots \omega^\nu \dots$

Ἐὰν $\rho_\nu = \omega^{\nu-1} + \omega^\nu$ τότε θὰ εἶναι $\dfrac{\rho_\nu}{\omega^\nu} = \dfrac{\omega + 1}{\omega}$ = λόγος ἐπιμόριος.

2. Καὶ ἐὰν $\rho'_\nu = \rho_{\nu-1} + \rho_\nu$, τότε θὰ εἶναι $\dfrac{\rho'_\nu}{\rho_\nu} = \dfrac{\omega + 1}{\omega}$.

3. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots . \omega^\nu$

Ἐὰν σχηματίζωμεν ἀκολουθίας προσθέτοντες εἰς ἕκαστον ὅρον τὸν προηγούμενόν του θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{array}{lllll}
1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^\nu \\
 & \omega + 1 & \omega^2 + \omega & \omega^3 + \omega^2 \dots & \omega^\nu + \omega^{\nu-1} \\
 & & \omega^2 + 2\omega + 1 & \omega^3 + 2\omega^2 + \omega \dots & \omega^\nu + 2\omega^{\nu-1} + \omega^{\nu-2} \\
 & & & \omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 1 \dots & \omega^\nu + 3\omega^{\nu-1} + 3\omega^{\nu-2} + \omega^{\nu-3} \\
 & & & & \vdots
\end{array}$$

$$\omega^\nu + \nu\omega^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\,\omega^{\nu-2} + \dots + 1$$

ὅπου τὸ πηλίκον τῶν δύο διαδοχικῶν ὅρων ἑκάστης στήλης ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\omega}{\omega + 1}$, ἐν ᾧ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ σχήματος ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ παρέχει τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $1, \omega + 1, (\omega + 1)^2, (\omega + 1)^3, \dots$

III. ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

37. Εἰς τὸ β′ βιβλίον τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς ὁ Νικόμαχος πραγματεύεται περὶ τῶν ἀναλογιῶν (κεφ. 21), διακρίνων αὐτὰς εἰς ἀριθμητικήν, γεωμετρικὴν καὶ ἁρμονικὴν καὶ εἰς ἄλλας τρεῖς ἀντιστοίχους πρὸς αὐτάς, τὰς καλουμένας ὑπεναντίας. Κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Πρόκλου (Εἰς Εὐκλείδου α′ σελ. 67,2) τὰς τρεῖς ὑπεναντίας ἀναλογίας ἀνεκάλυψεν ὁ Εὔδοξος (408-355π.Χ.) Βραδύτερον ἀνεκαλύφθησαν καὶ ἄλλαι τέσσαρες ἀναλογίαι ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Νικομάχου καὶ τοῦ Πάππου. Μνεία αὐτῶν θὰ γίνῃ ὀλίγον κατωτέρω. Τὰς ἀναλογίας γενικῶς τὰς ὀνομάζουν καὶ μεσότητας, ἐν ᾧ κατὰ τὸν Πάππον ὑπάρχει διαφορά τις μεταξὺ ἀναλογίας καὶ μεσότητος (Πάππου Συναγωγῆς Γ′, Ι σελ. 70, 16. F. Hultsch).

Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Ἔστωσαν οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. . . . . Ἡ σχέσις $5-4=4-3$, (1), ἀποτελεῖ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν. Ὁ μέσος ὅρος 4 ὡς πρὸς μὲν τὸν μεγαλύτερον 5 ὀνομάζεται ὑπόλογος, ὡς πρὸς δὲ τὸν μικρότερον, 3 ὀνομάζεται πρόλογος. Ἐπίσης ἡ σχέσις $10-8=6-4$, (2) εἶναι ἀριθμητικὴ ἀναλογία. Ἡ (1) ὀνομάζεται συνημμένη ἀναλογία, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 4 συνάπτει τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 3, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν συμβαίνει εἰς τὴν (2) ἡ ὁποία ὀνομάζεται διεζευγμένη. Οἱ ὅροι συνημμένη καὶ διαζευγμένη ἀπαντοῦν εἰς τὴν ἀρχαίαν μουσικὴν (Εὐκλείδου Κατατομὴ Κανόνος, σελ. 182 καὶ Ἁρμονικὴ Εἰσαγωγὴ σελ. 190—194 ἔκδ. H. Menge - I.L. Heiberg).

Ἰδιότητες τῆς Ἀριθμητικῆς ἀναλογίας.

1. Ἐὰν ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν ὅρων α, β, γ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μέσου ($\alpha-\beta=\beta-\gamma$, $\alpha+\gamma=2\beta$).

2. Ἐὰν ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων ($\alpha-\beta=\gamma-\delta$, $\alpha+\delta=\beta+\gamma$).

Ἐκ τῶν προηγουμένων σχέσεων εἶναι $(\alpha-\beta):(\gamma-\delta)=1$ καὶ $(\alpha+\delta):(\beta+\gamma)=1$.

3. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν $\alpha-\beta=\beta-\gamma$, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων συγκρινόμενον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεσαίου ὅρου εἶναι μικρότερον αὐτοῦ κατὰ τὸ γινόμενον τῶν διαφορῶν $(\alpha-\beta)$, $(\beta-\gamma)$ ἤτοι $\beta^2=\alpha\gamma+(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$ ἢ $\beta^2-\alpha\gamma=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$. Καὶ ἐπειδὴ $(\alpha-\beta)=(\beta-\gamma)$ εἶναι $\beta^2-\alpha\gamma=(\alpha-\beta)^2=(\beta-\gamma)^2$. (Νικόμαχος βιβλ. β′, κεφ. 23 σελ. 125, 16).

4. Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὁ λόγος τῶν μικροτέρων ὅρων εἶναι

μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μεγαλυτέρων ὅρων. Ἐὰν π.χ. $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ ἢ $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ καὶ εἶναι $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$. Τὸ ἀντίθετον συμβαίνει εἰς τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, ὅπου δοθέντων τριῶν ὅρων $\alpha > \beta > \gamma$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία λέγεται ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς (Νικόμαχος β' κεφ. 23).

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Ἐνταῦθα ὁ Νικόμαχος, ἀφοῦ ἀναφέρῃ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἐπάγεται, ὅτι ἐὰν δοθῶσιν τρεῖς συνεχεῖς ὅροι φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, οἱ α, β, γ, $(\alpha : \beta = \beta : \gamma = \omega)$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ $\alpha - \beta = \beta$, $\beta - \gamma = \gamma$, καὶ γενικῶς αἱ ἰδιότητες τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσχύουν καὶ ὅταν ὁ λόγος εἶναι κλάσμα μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τῆς μονάδος.

Ἐὰν δὲ σχηματίσωμεν τοὺς ἑτερομήκεις ἀριθμοὺς $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12 \ldots \nu(\nu + 1)$ καὶ τοὺς ἀπὸ μονάδος τετραγώνους καὶ διατάξωμεν αὐτοὺς εἰς μίαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸν διπλάσιον λόγον καὶ ὅλους τοὺς ἐπιμορίους $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots \frac{\nu+1}{\nu}\right)$. Π.χ.

ἑτερομήκεις	2,	6,	12,	20,	30,	42,	56,	72,	90,	110.....
τετράγωνοι	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.....

Καὶ ἡ διάταξις ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς,

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100, 110...

Λόγοι ἐκ τούτων

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2 = \text{διπλάσιος}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = \text{ἐπιμόριος (ἡμιόλιος)}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = \text{ἐπιμόριος (ἐπίτριτος)}$$

$$\frac{20}{16} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \text{» ἐπιτέταρτος}$$

$$\frac{30}{25} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5} = \text{» ἐπίπεμπτος}$$

$$\frac{42}{36}=\frac{49}{42}=\frac{7}{6}= \text{ἐπιμόριος ἐφέκτος}$$

$$\frac{56}{49}=\frac{64}{56}=\frac{8}{7}= \quad \text{»} \quad \text{ἐφέβδομος}$$

$$\frac{72}{84}=\frac{81}{72}=\frac{9}{8}= \quad \text{»} \quad \text{ἐπόγδοος, κλπ.}$$

Ἀκολούθως ὁ Νικόμαχος ὑπενθυμίζει τὰ εἰς τὸν Τίμαιον τοῦ Πλάτωνος (32 A,B) ἀναφερόμενα καὶ λέγει, ὅτι δοθέντων δύο διαδοχικῶν τετραγώνων, εἷς μόνον εὑρίσκεται μέσος ἀνάλογος τούτων καὶ ὅτι δοθέντων δύο διαδοχικῶν κύβων δύο μόνον εὑρίσκονται μέσοι ἀνάλογοι τούτων. Π.χ. ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν τετραγώνων α^2, β^2 μόνον εἷς εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μέσος ἀνάλογος, ὥστε $\alpha^2 : \alpha\beta = \alpha\beta : \beta^2$ καὶ ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν κύβων α^3, β^3, μόνον δύο εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μέσοι ἀνάλογοι οἱ $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha^3 : \alpha^2\beta = \alpha^2\beta : \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2 : \beta^3$, κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν.

Πρὸς τούτοις ἀναφέρει καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα: 1) Τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν 1, 4 μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 2 καὶ τῶν διαδοχικῶν τετραγώνων 4, 9 μέσος ἀνάλογος εἶναι ὁ 6, ὥστε $4:6 = 6:9$. 2) Τῶν διαδοχικῶν κύβων 8, 27 εὑρίσκονται μόνον δύο μέσοι ἀνάλογοι, οἱ 12 καὶ 18, ὥστε $8:12 = 12:18 = 18:27$ (Νικόμαχος, β' κεφ. 24 σελ. 126-131).

Η ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Ἁρμονικὴ ἀναλογία ἢ μεσότης εἶναι ἐκείνη, καθ' ἣν δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν $\alpha > \beta > \gamma$ ὑπάρχει ἡ σχέσις $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$, ὅπως π.χ. διὰ 3,4,6 εἶναι $\frac{6-4}{4-3}=\frac{6}{3}$ καὶ διὰ 2,3,6 εἶναι $\frac{6-3}{3-2}=\frac{6}{2}$.

Ὁ Πάππος (Συναγωγῆς Γ' σελ. 72, 1. F. Hultsch) παρέχει ὡς ἑξῆς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας: Τρεῖς ἄνισοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, ὅταν ὁ μεσαῖος ὑπερέχῃ τοῦ μικροτέρου κατὰ τόσον μέρος τοῦ μικροτέρου, ὅσον μέρος τοῦ μεγαλυτέρου, ὁ μεγαλύτερος ὑπερέχει τοῦ μεσαίου. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 6, 8, 12 εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διότι ὁ μεσαῖος 8 ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου 6 κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 6, καὶ ὁ μεγαλύτερος 12 ὑπερέχει τοῦ μεσαίου 8 κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 12. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 6 εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διότι ὁ μεσαῖος 3 ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου 2 κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 2, καὶ ὁ μεγαλύτερος 6 ὑπερέχει τοῦ μεσαίου 3 κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 6.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 3,4,6 εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διότι ὁ μεσαῖος 4 ὑπερέχει τοῦ μικροτέρου 3 κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου, καθ' ὃ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἑαυτοῦ του, ὑπερέχει ὁ μεγαλύτερος τοῦ μεσαίου. Καὶ γενικῶς οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ $\alpha > \beta > \gamma$ εὑρίσκονται εἰς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, ὅταν $\beta = \gamma + \frac{\gamma}{\nu}$ καὶ $\alpha = \beta + \frac{\alpha}{\nu}$.

Ἐν συνεχείᾳ ἀναφέρει ὁ Νικόμαχος, ὅτι ἂν δοθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματίζωνται αἱ τρεῖς ἀναλογίαι: ἀριθμητική, γεωμετρική, ἁρμονική, εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν οἱ λόγοι τῶν μεγαλυτέρων ὅρων πρὸς τοὺς λόγους τῶν μικροτέρων ὅρων εἶναι μικρότεροι, εἰς τὴν γεωμετρικὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν μικροτέρων καὶ εἰς τὴν ἁρμονικὴν ὁ λόγος τῶν μεγαλυτέρων ὅρων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου τῶν μικροτέρων ὅρων. Π.χ. ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha > \beta > \gamma$.

1. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$.

2. Εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι πάντοτε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ

3. Εἰς τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$ (δι' αὐτὸ ἡ ἁρμονικὴ λέγεται ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

(Νικόμαχος β', κεφ. 25-27 σελ. 131-140)

1. Ὅταν οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

Δίδονται οἱ ἄκροι ὅροι 10 καὶ 40, ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας εἶναι $(10 + 40) : 2 = 25$ καὶ ἡ ἀναλογία εἶναι $40 - 25 = 25 - 10$. Ὁ μέσος ὅρος τῆς γεωμ. ἀναλογίας εἶναι $\sqrt{10 \cdot 40} = 20$ καὶ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία εἶναι $10 : 20 = 20 : 40$.

Ὁ μέσος ὅρος τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας εἶναι 16 $\left(\text{ἐκ τῆς σχέσεως } \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}\right)$, καὶ ἡ ἁρμονικὴ ἀναλογία εἶναι $\frac{40 - 16}{16 - 10} = \frac{40}{10}$.

2. Ὅταν οἱ ἄκροι ὅροι εἶναι περιττοί, ἔστωσαν οἱ 5 καὶ 45.

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία εἶναι $45 - 25 = 25 - 5$

Ἡ γεωμετρικὴ » » $45 : 15 = 15 : 5$

Ἡ ἁρμονικὴ » » $(45 - 9) : (9 - 5) = 45 : 5$

Κανὼν εὑρέσεως τῶν τριῶν ἀναλογιῶν ὅταν δοθῶσιν οἱ δύο ἄκροι ὅροι α, γ (ἔστω $\alpha > \gamma$).

Διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὁ μέσος ὅρος $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Διὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ὁ μέσος ὅρος $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$

Διὰ τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον β λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τῶν δοθέντων ἄκρων ὅρων, τὴν $(\alpha - \gamma)$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν μικρότερον ὅρον, ὅτε εἶναι $(\alpha - \gamma)\gamma$. Τὸ γινόμενον τοῦτο τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων ὅρων, τοῦ $(\alpha + \gamma)$ καὶ τὸ ληφθὲν πηλίκον τὸ προσθέτομεν εἰς τὸν μικρότερον ὅρον, ὁπότε ἔχομεν τὸν μεσαῖον ὅρον, ἤτοι εἶναι

$$\beta = \frac{(\alpha - \gamma)\gamma}{\alpha + \gamma} + \gamma. \text{ (κεφ. } 25 - 27).$$

ΑΙ ΔΕΚΑ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΝΙΚΟΜΑΧΟΝ

38. Ὁ Νικόμαχος (σ. 140, 14) ὑπενθυμίζει ὅτι ἀπὸ τοῦ Πυθαγόρου (580 - 490 π.Χ.) μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Πλάτωνος (427 - 347 π.Χ.) καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους (384 - 322 π.Χ.) τρεῖς ἦσαν αἱ κύριαι ἀναλογίαι, ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ἁρμονική. Κατόπιν προσετέθησαν ἄλλαι τρεῖς (ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη), αἱ ὁποῖαι ἐκλήθησαν ὑπεναντίαι αὐτῶν. Μεταγενεστέρως προσετέθησαν ἄλλαι τέσσαρες, καὶ ἔγιναν ἐν ὅλῳ δέκα. Αὗται εἶναι ὅταν ἔχωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς $\alpha > \beta > \gamma$, αἱ κάτωθι:

1. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\gamma}$, $\alpha + \gamma = 2\beta$, $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$, ἀριθμητική.

2. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma}$, $\alpha\gamma = \beta^2$, $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$, γεωμετρική.

3. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{2}{\beta}$ (ὁ τύπος τῶν κοίλων σφαιρ. κατόπτρων), $\beta = \dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$, ἁρμονική.

Ἡ ἁρμονικὴ εἶναι ὑπεναντία τῆς ἀριθμητικῆς, διότι εἰς μὲν τὴν ἀριθμητικὴν εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\beta}{\gamma}$, εἰς τὴν ἁρμονικὴν εἶναι ὑπεναντίως, $\dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{\beta}{\gamma}$.

4. $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha + \gamma} = \beta$. Αὐτὴ λέγεται ὑπεναντία τῆς ἁρμονικῆς, διότι εἰς μὲν τὴν ἁρμονικὴν εἶναι $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\alpha}{\gamma}$, ἐνταῦθα δὲ εἶναι $\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

5. $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\gamma}{\beta}$, $\alpha=\beta+\gamma-\dfrac{\gamma^2}{\beta}$. Ὑπεναντία τῆς γεωμετρικῆς, διότι εἰς τὴν γεωμετρικὴν εἶναι $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$.

6. $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\gamma=\alpha+\beta-\dfrac{\alpha^2}{\beta}$. Ὑπεναντία τῆς γεωμετρικῆς.

7. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$. (Ἀριθ. παράδειγμα, $\alpha=9, \beta=8, \gamma=6$).

8. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\alpha^2+\gamma^2=\alpha\,(\beta+\gamma)$. (Ἀριθμ. παράδειγμα, $\alpha=9$, $\beta=7$, $\gamma=6$).

9. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, $\beta^2+\gamma^2=\gamma(\alpha+\beta)$. (Ἀριθμ. παράδειγμα $\alpha=7$, $\beta=6$, $\gamma=4$).

10. $\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, $\alpha=\beta+\gamma$. (Ἀριθμ. παράδειγμα $\alpha=8$, $\beta=5$, $\gamma=3$).

ΑΙ ΔΕΚΑ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΠΑΠΠΟΝ

39. Ὁ Πάππος πραγματεύεται τὸ θέμα τῶν ἀναλογιῶν εἰς τὰς σελίδας 70-104 τῆς πραγματείας του «Συναγωγή», βιβλ. Γ', F. Hultch). Ἀναφέρει καὶ αὐτὸς δέκα ἀναλογίας, τὰς ὁποίας ἀποδεικνύει γεωμετρικῶς. Αἱ πρῶται ἓξ ἐκ τούτων ταὐτίζονται πρὸς τὰς πρώτας ἕξ, τὰς ὁποίας ἀναφέρει ὁ Νικόμαχος. Εἰς τὰς ὑπολοίπους 4 ὑπάρχουν μερικαὶ διαφοραί.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς ὑπολοίπους ἀναλογίας

Αὔξων ἀριθμός, Νικομάχου	Πάππου	Ἰσοδύναμον
7	ἐλλείπει	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$.
8	9	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $\alpha^2+\gamma^2=\alpha(\beta+\gamma)$.
9	10	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, $\beta^2+\gamma^2=\gamma(\alpha+\beta)$.
10	7	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, $\alpha=\beta+\gamma$.
ἐλλείπει	8	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\alpha^2=2\alpha\beta-\beta\gamma$.

Δηλαδὴ ὁ Νικόμαχος δὲν ἀναφέρει τὴν ὑπ' ἀριθ. 8 ἀναλογίαν τοῦ Πάππου καὶ ὁ Πάππος δὲν ἀναφέρει τὴν ὑπ' ἀριθ. 7 ἀναλογίαν τοῦ Νικομάχου.

Ἐν συνεχείᾳ ὁ Πάππος (βιβλ. Γ' ~~σελ. 86~~ - 104) προσθέτει, ὅτι ἄν, οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εὑρίσκωνται εἰς γεωμετρικὴν ἀναλογίαν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ἐκ τούτων ἄλλους τρεῖς ὅρους a, b, c, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν α, β, γ, αἵτινες νὰ ἱκανοποιοῦν ἀντιστοίχως ὀκτὼ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτοῦ σημειωθεισῶν δέκα ἀναλογιῶν. Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν λύσιν ὀκτὼ προβλημάτων ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως β' βαθμοῦ.

Αἱ παρεχόμεναι ὑπὸ τοῦ Πάππου λύσεις

Αὔξων ἀριθμὸς Νικομάχου	Πάππου	Ἀναλογίαι	Λύσεις διὰ τῶν α,β,γ	Ἐλάχισται λύσεις
2	2	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,	$a=\alpha+2\beta+\gamma$	$a=4$
			$b=\beta+\gamma$	$b=2$
			$c=\gamma$	$c=1$
3	3	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$,	$a=2\alpha+3\beta+\gamma$	$a=6$
			$b=2\beta+\gamma$	$b=3$
			$c=\beta+\gamma$	$c=2$
4	4	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$,	$a=2\alpha+3\beta+\gamma$	$a=6$
			$b=2\alpha+2\beta+\gamma$	$b=5$
			$c=\beta+\gamma$	$c=2$
5	5	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$,	$a=\alpha+3\beta+\gamma$	$a=5$
			$b=\alpha+2\beta+\gamma$	$b=4$
			$c=\beta+\gamma$	$c=2$
6	6	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$,	$a=\beta+3\beta+2\gamma$	$a=6$
			$b=\alpha+2\beta+\gamma$	$b=4$
			$c=\alpha+\beta-\gamma$	$c=1$
ἐλλείπει	8	$\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{b}$,	$a=2\alpha+3\beta+\gamma$	$a=6$
			$b=\alpha+2\beta+\gamma$	$b=4$
			$c=2\beta+\gamma$	$c=3$
8	9	$\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$,	$a=\alpha+2\beta+\gamma$	$a=4$
			$b=\alpha+\beta+\gamma$	$b=3$
			$c=\beta+\gamma$	$c=2$
9	10	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$,	$a=\alpha+\beta+\gamma$	$a=3$
			$b=\beta+\gamma$	$b=2$
			$c=\gamma$	$c=1$

Ἐν ἀνακεφαλαιώσει ὁ Νικόμαχος ἀναφέρει τὰ ἑξῆς ἀριθμητικὰ παραδείγματα τῶν 10 ἀναλογιῶν (ἐκ τῶν ὅρων $\alpha > \beta > \gamma$).

	α	β	γ	
1. Ἀναλογία	3,	2,	1	
2. »	4,	2,	1	
3. »	6,	4,	3	
4. »	6,	5,	3	
5. »	5,	4,	2	
6. »	6,	4,	1	
7. »	9,	8,	6	
8. »	9,	7,	6	
9. »	7,	6,	4	
10. »	8,	5,	3	(Νικόμαχος β', κεφ. 28, σελ. 144).

Τέλος ἀναφέρει τὴν «τελειοτάτην» πασῶν τῶν ἀναλογιῶν, τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν $6:8 = 9:12$ (ὅπου 8 εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἄκρων ὅρων 6 καὶ 12, καὶ 9 εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τούτων) ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὁποίας ὁ Πυθαγόρας εἶχε κατασκευάσει τὴν μουσικὴν Πυθαγόρειον κλίμακα (κεφ. 18).

Η ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

40. 1. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ὀνομάζεται ἐπίπεδος ἀριθμός. Καὶ πᾶς ἀκέραιος εἶναι ἐπίπεδος ἀριθμός, διότι νοεῖται ὅτι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν μονάδα. Ὅταν οἱ δύο παράγοντες τοῦ ἐπιπέδου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσοι ὁ ἐπίπεδος ἀριθμὸς ὀνομάζεται τετράγωνος ἢ ἰσιομήκης. Ὅταν ὁ εἷς παράγων δὲν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἄλλον ἀλλὰ «ἕτερος», ὁ ἐπίπεδος ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἑτερομήκης. Αἱ ὀνομασίαι ἔχουν ληφθῇ ἐκ τῆς γεωμετρίας. Ὁ ἑτερομήκης ἐπίπεδος ἀριθμὸς παριστᾶ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι διάφορος τῆς ἄλλης. Ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ἰδία (ἴση) πρὸς τὴν ἄλλην. Ὁ Πλάτων ὀνομάζει προμήκεις τοὺς ἐπιπέδους ἀριθμοὺς τοὺς ἔχοντας τὰς δύο αὐτῶν πλευρᾶς (παράγοντας) ἀνίσους (Θεαίτητος 148 A, Πολιτεία VIII 546 C. Διογένης Λαέρτιος: Πλάτων 3.24). Ὁ Ἀριστοτέλης ὀνομάζει αὐτοὺς ἑτερομήκεις (11a 10, 73 b 1, 413 a 17, 986 a 26).

Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος ὀνομάζει τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $\alpha(\alpha+1)$ ἑτερομήκεις, ἐν ᾧ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $\alpha(\alpha+\beta)$, ὅπου $\beta = 2, 3, 4, \ldots$ ὀνομάζει παραλληλογράμμους ἢ προμήκεις (Θέων Σμυρναῖος, σ. 36, 1 καὶ 27, 22 καὶ 30, 8).

Ὁ Νικόμαχος χρησιμοποιεῖ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, ἑτερομήκεις καὶ προμήκεις, χωρὶς τὴν ὀνομασίαν παραλληλόγραμμοι. (Νικόμαχος σ. 108, 8—109, 2).

῾Ο ᾿Ιάμβλιχος χρησιμοποιεῖ τὴν αὐτὴν ὀνομασίαν, ὡς καὶ ὁ Νικόμαχος (᾿Ιάμβλιχος σ. 83, 8).

᾿Επειδὴ οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουν δύο διαστάσεις ὀνομάζονται διχῇ διαστατοί.

῾Η τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἐπιπέδου ἀριθμοῦ ὀνομάζεται πλευρὰ τετραγωνική, διότι καὶ ὁ μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς (ἑτερομήκης ἢ προμήκης) δύναται νὰ μετασχηματισθῇ γεωμετρικῶς εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ πλευρά. Δύο ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (ἢ καὶ περισσότεροι) λέγονται ὅμοιοι ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτῶν (οἱ παράγοντες) εἶναι ἀνάλογοι. (Εὐκλείδου Στοιχεῖα βιβλ. 7, ὁρισμοὶ 17, 19, 22).

῞Οταν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τετραγώνου τινὸς ἀριθμοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς λέγεται καὶ κυκλικός. Οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ π.χ. 25 καὶ 36 εἶναι καὶ κυκλικοί, διότι τὰ ψηφία τῶν μονάδων 5 καὶ 6 εἶναι τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ ψηφία τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἀντιστοίχως, ἐν ᾧ οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ 49 καὶ 81 δὲν εἶναι καὶ κυκλικοί. ῾Ο τετράγωνος ἀριθμὸς $1^2 = 1 \cdot 1$ εἶναι κυκλικὸς δυνάμει.

2. Τὸ γινόμενον τριῶν ἀριθμῶν ὀνομάζεται στερεὸς ἀριθμός. ᾿Επειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουν τρεῖς διαστάσεις ὀνομάζονται τριχῇ διαστατοί. Καὶ ἡ ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς γεωμετρίας. ῞Οταν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ στερεοῦ ἀριθμοῦ (οἱ τρεῖς παράγοντες) εἶναι ἴσοι ὁ ἀριθμὸς λέγεται κύβος. Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς στερεὸς ἀριθμὸς $1 \cdot 1 \cdot \alpha$. ῾Η κυβικὴ ῥίζα τοῦ στερεοῦ ἀριθμοῦ ὀνομάζεται πλευρὰ κυβική.

῎Εστωσαν αἱ τρεῖς πλευραὶ (παράγοντες) τοῦ στερεοῦ ἀριθμοῦ αἱ α, β, γ. ᾿Εὰν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, ὁ στερεὸς ἀριθμὸς $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, ὀνομάζεται βωμίσκος ἢ σφηνίσκος, ἢ σφηκίσκος, ἢ σκαληνός. ᾿Εὰν $\alpha = \beta > \gamma$, ὁ στερεὸς ἀριθμὸς $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ὀνομάζεται πλινθίς. ᾿Εὰν $\alpha = \beta < \gamma$, ὁ στερεὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται δοκίς. (Νικόμαχος σελ. 110 — 111 καὶ 145, καὶ Θέων Σμυρναῖος, σ. 41, 8).

Εἰς τὰ ᾿Αριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου (τὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων ῾Ελλήνων) ἀπαντῶμεν τετάρτην, πέμπτην καὶ ἕκτην πλευρὰν (ῥίζαν) ἀριθμοῦ. ῾Η ὀνομασία ὅμως δευτέρα ῥίζα, τρίτη ῥίζα. . . νυοστὴ ῥίζα εἶναι τῶν νεωτέρων χρόνων.

῞Οταν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἑνὸς ἀριθμοῦ κύβου εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ψηφίων τῶν μονάδων τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ ὁ κύβος ὀνομάζεται καὶ σφαιρικὸς ἢ ἀποκαταστατικός.

ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3. Οἱ ἐπίπεδοι πολύγωνοι ἀριθμοί, ὡς ἐμνημονεύθη ἤδη, ἔχουν λάβει τὴν ὀνομασίαν αὐτῶν ἐκ τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου κ.λπ. Εἶναι δὲ οἱ τρίγωνοι ἀριθμοὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας 1, 2, 3, 4, 5.. ἤτοι οἱ 1, 3, 6, 10, 15... Οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ εἶναι τὰ μερι-

κὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας 1, 3, 5, 7, 9..., οἱ 1, 4, 9. 16, 25... Οἱ πεντάγωνοι ἀριθμοὶ εἶναι τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας: 1, 4, 7, 10, 13..., οἱ 1, 5, 12, 22, 35. Εἶναι δὲ γενικῶς ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίας $= \nu - 2$, ὅπου $\nu = 3, 4, 5...$

Οἱ στερεοὶ πολύγωνοι ἀριθμοὶ ἔχουν λάβει τὴν ὀνομασίαν αὐτῶν ἐκ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος τῆς πυραμμίδος καὶ ὀνομάζονται πυραμοειδεῖς ἀριθμοί. Ἡ ἁπλουστέρα πυραμὶς εἶναι τὸ κανονικὸν τετράεδρον, ἀποτελούμενον ἐκ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγωνικῶν ἑδρῶν. Ὁ πρῶτος πυραμοειδὴς ἀριθμὸς εἶναι ὁ $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ ἤτοι αὐτὴ αὕτη ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἐκφραζομένη διὰ τῆς μονάδος. Ὁ δεύτερος πυραμοειδὴς ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τεσσάρων μονάδων, ἤτοι ἐκ τριῶν μονάδων, τῶν τριῶν κορυφῶν τῆς τριγωνικῆς ἰσοπλεύρου βάσεως, καὶ τῆς μονάδος τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος. Ὁ πρῶτος πυραμοειδὴς ἀριθμὸς ὁ 1, ὀνομάζεται πρῶτος δυνάμει πυραμοειδὴς ἀριθμός. Ὁ δεύτερος πυραμοειδὴς ἀριθμός, ὁ 4, ὀνομάζεται δεύτερος δυνάμει πυραμοειδὴς ἀριθμὸς καὶ πρῶτος ἐνεργείᾳ πυραμοειδὴς καὶ ἑπομένως ὁ νυοστὸς πυραμοειδὴς ἀριθμὸς ὀνομάζεται νυοστὸς δυνάμει καὶ $\nu - 1$ πυραμοειδὴς ἐνεργείᾳ. Ἰδιαιτέρα μαθηματικὴ σημασία εἰς τὰς ὀνομασίας αὐτὰς δὲν ὑπάρχει, φαίνεται δέ, ὅτι αἱ ὀνομασίαι αὗται εἶναι κατάλοιπα μαθηματικῶν ὀνομασιῶν τῶν πρώτων Πυθαγορείων ἐρευνῶν, περὶ τὸ 530 π.Χ. (Νικόμαχος σ. 99 — 104).

Ἐὰν θεωρήσωμεν, ὅτι αἱ τρεῖς ὀρθαὶ πλάγιαι ἀκμαὶ τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου προεκτείνονται πρὸς τὰ κάτω ἀπεριορίστως καὶ τμήσωμεν τὴν πυραμίδα πρὸς τὸ κάτω τῆς βάσεως μέρος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἀπέχοντος τῆς βάσεως, ὅσον ἀπέχει αὕτη ἐκ τῆς κορυφῆς, χωρίσωμεν δὲ τὰς ἀκμὰς τῆς νέας βάσεως εἰς τμήματα ἴσα πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς πρώτης βάσεως (ἑκάστην ἀκμὴν εἰς δύο ἴσα τμήματα, τότε ἡ νέα βάσις ἐκφράζει 6 μονάδας, τρεῖς τῶν κορυφῶν αὐτῆς καὶ τρεῖς τῶν διαιρέσεων τῶν ἀκμῶν της). Ἡ νέα ὅμως πυραμὶς παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν 10 (4 αἱ πρῶται μονάδες καὶ 6 αἱ νέαι μονάδες). Κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν στερεῶν πολυγώνων ἀριθμῶν λαμβάνεται μὲν ἡ ὀνομασία αὐτῶν ἐκ τῶν στερεῶν σχημάτων, τὸ ἀντικείμενον ὅμως ἐρεύνης αὐτῶν εἶναι καθαρῶς ἀλγεβρικόν.

Ἀναγράφομεν κατωτέρω τὸν σχηματισμὸν μερικῶν πυραμοειδῶν ἀριθμῶν.

1. Οἱ πυραμοειδεῖς ἀριθμοὶ ἐκ τριγώνου βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Φυσικοὶ ἀριθμοί: 1, 2, 3, 4, 5. . . (πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, διαφορὰ δύο διαδ. ὅρων $\delta = 1$)·

Τρίγωνοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί: 1, 3, 6, 10, 15. (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν).

Πυραμοειδεῖς στερεοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τριγώνου βάσεως: 1, 4, 10, 20, 35. . . (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν τριγώνων ἀριθμῶν). (α).

2. Ἀκολουθία περιττῶν. 1, 3, 5, 7, 9... (πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$), διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων $\delta = 2$).

Τετράγωνοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί: 1, 4, 9, 16, 25... (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν).

Πυραμοειδεῖς στερεοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τετραγώνου βάσεως: 1, 5, 14, 30, 55,... (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν), (β).

Εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν πυραμοοειδῶν ἀριθμῶν ἐκ τριγώνου βάσεως, ἐκ τετραγώνου βάσεως κ.λπ., ὁπότε:

ἐκ τοῦ (α) θὰ ἔχωμεν: 1, 5, 15, 35, 70... καὶ

ἐκ τοῦ (β) θὰ ἔχωμεν: 1, 6, 20, 50, 105... κ.λπ.

Τοιαῦται λεπτομέρειαι δὲν διεσώθησαν μέχρις ἡμῶν. Συστηματικὴ σπουδὴ αὐτῶν ἔγινε κατὰ τὸν 16ον - 17ον αἰῶνα.

3. Ἀκολουθία: 1, 4, 7, 10, 13... (πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, διαφορὰ δύο διαδ. ὅρων $\delta = 3$).

Πεντάγωνοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί: 1, 5, 12, 22, 35...

Πυραμοειδεῖς στερεοὶ ἀριθμοὶ ἐκ πενταγώνου βάσεως: 1, 6, 18, 40, 75... (τὰ μερικὰ ἀθροίσμ. τῶν πενταγώνων ἀριθμῶν), (γ).

4. Ἀκολουθία: 1, 5, 9, 13, 17... (πρῶτος ὅρος $\alpha = 1$, διαφορὰ δύο διαδ. ὅρων $\delta = 4$).

Ἑξάγωνοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί : 1, 6, 15, 28, 45...

Πυραμοειδεῖς ἀριθμοὶ ἐξ ἑξαγώνου βάσεως: 1, 7, 22, 50, 95, (τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν ἑξαγώγων ἀριθμῶν) (δ).

Γενικῶς, κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν:

Πᾶς ἐπίπεδος πολύγωνος ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Sigma = \nu + \frac{1}{2}\nu(\nu - 1)(\alpha - 2).$$

ὅπου $\nu =$ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας καὶ $\alpha = 3, 4, 5, 6\ldots$ (τρίγωνος, τετράγωνος, πεντάγωνος, ἑξάγωνος...).

Πᾶς στερεός, πυραμοειδὴς ἀριθμός, ὁ ἔχων βάσιν τῆς πυραμίδος τὸν ἀριθμὸν (λ), (τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον...) εἶναι τῆς μορφῆς.:

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \ldots + \nu + \frac{1}{2}(\alpha - 2)\,[\,1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots$$

$$\ldots + (\nu - 1) \cdot \nu\,] = \frac{\nu\,(\nu + 1}{2} + \frac{\alpha - 2}{2} \cdot \frac{(\nu - 1)\,\nu\,(\nu + 1)}{3}.$$

Ἐὰν ἐκ τῆς ἀκολουθίας (α) ἀποκόψωμεν τὴν μονάδα, οἱ ὑπόλοιποι ἀριθμοὶ 4, 10, 20... ἀποτελοῦν κόλουρον πυραμίδα ἀριθμῶν. Ἐὰν ἀποκόψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 4, οἱ ὑπόλοιποι ἀριθμοὶ 10, 20, 35... ἀποτελοῦν δικόλουρον πυραμίδα ἀριθμῶν. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι θὰ ἔχωμεν τρικόλουρον κ.λπ. πυραμίδα ἀριθμῶν.

Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἀκολουθίας (β), (γ), (δ)... ὁπότε λαμβάνονται:

κόλουρος πυραμὶς ἀριθμῶν ἐκ τετραγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου βάσεως κλπ.

δικόλουρος πυραμὶς ἀριθμῶν ἐκ τετραγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου βάσεως κλπ.

τρικόλουρος πυραμὶς ἀριθμῶν ἐκ τετραγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου βάσεως κλπ.

(Νικόμαχος σελ. 104, 1 — 22).

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

41. Στοιχεῖα πρακτικῆς ἀριθμητικῆς ἀναμεμιγμένα μὲ θεωρητικὰς γνώσεις ἀπαντοῦν εἰς τὰ διασωθέντα ἔργα τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, τοῦ Νικομάχου, τοῦ Διοφάντου, τοῦ Πάππου, τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως καὶ τοῦ Εὐτοκίου. Εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ἔργων τούτων ὑπάρχει πληροφορία ἀναφερομένη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τετραγώνων ἀριθμῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως εἰς τὸ 10 θεώρημα τῆς πραγματείας του Περὶ ἑλίκων ἀποδεικνύει τὸν τύπον

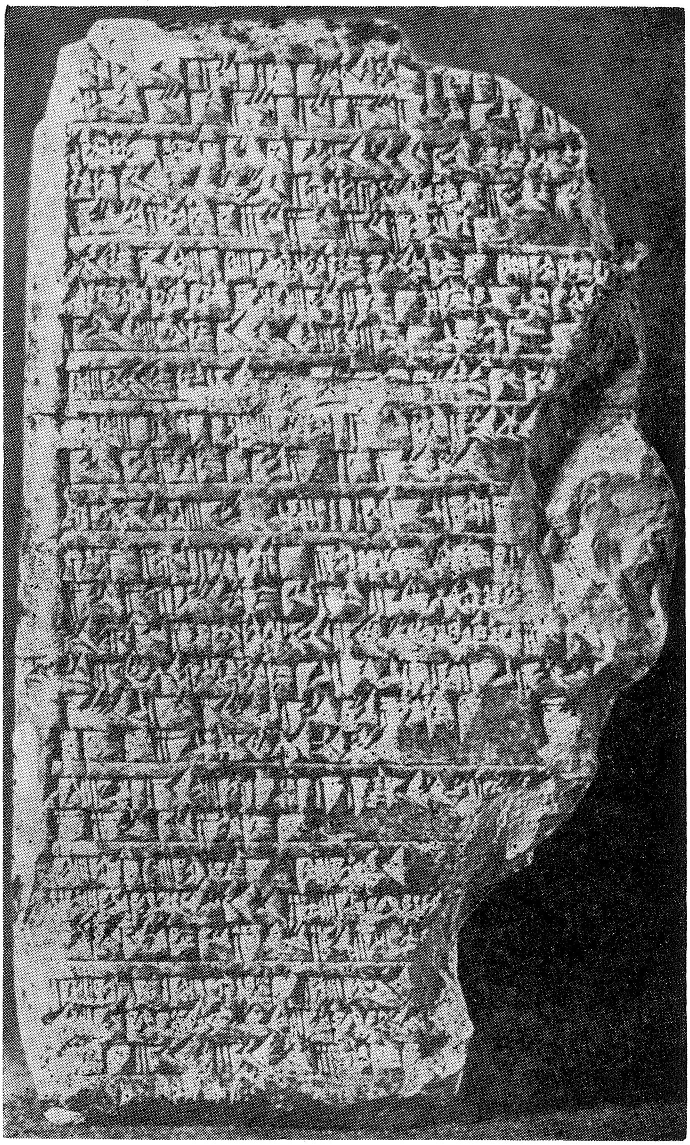
$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{\nu\,(2\nu + 1)\,(\nu + 1)}{6}$$

(Ἀρχιμήδους Ἅπαντα τόμ. Β΄, Ἀθῆναι 1973, σελ. 482, ὑπὸ Εὐ. Σ. Σταμάτη, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος). Ἀλλὰ καὶ πολὺ πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους οἱ Ἕλληνες εἶχον εὕρει τύπον παρέχοντα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν. Τοῦτο συνάγεται ἀπὸ πινακίδα εὑρεθεῖσαν εἰς τὴν Μεσοποταμίαν, γραφεῖσαν εἰς τὴν γνωστὴν ἤδη βαβυλωνιακὴν σφηνοειδῆ γραφὴν κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Σελευκιδῶν, μετὰ τὸν θάνατον δηλ. τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου (323 π.Χ.). Ἡ πινακὶς αὐτὴ πολλὰ μαρτυρεῖ περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν, τὰ ὁποῖα ἔφθασαν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Μεσοποταμίας διὰ τῆς ἐκπολιτιστικῆς ἐκστρατείας τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τὰ ὁποῖα ὑπό τινων ἐκλαμβάνονται ὡς βαβυλωνιακὰ ἐπιτεύγματα[1]. Ὁ εἰς τὴν πινακίδα ἀναφερόμενος τύπος εἶναι ὁ ἑξῆς

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{1}{3}\,(1 + 2\nu)\,(1 + 2 + 3 + \dots + \nu)$$

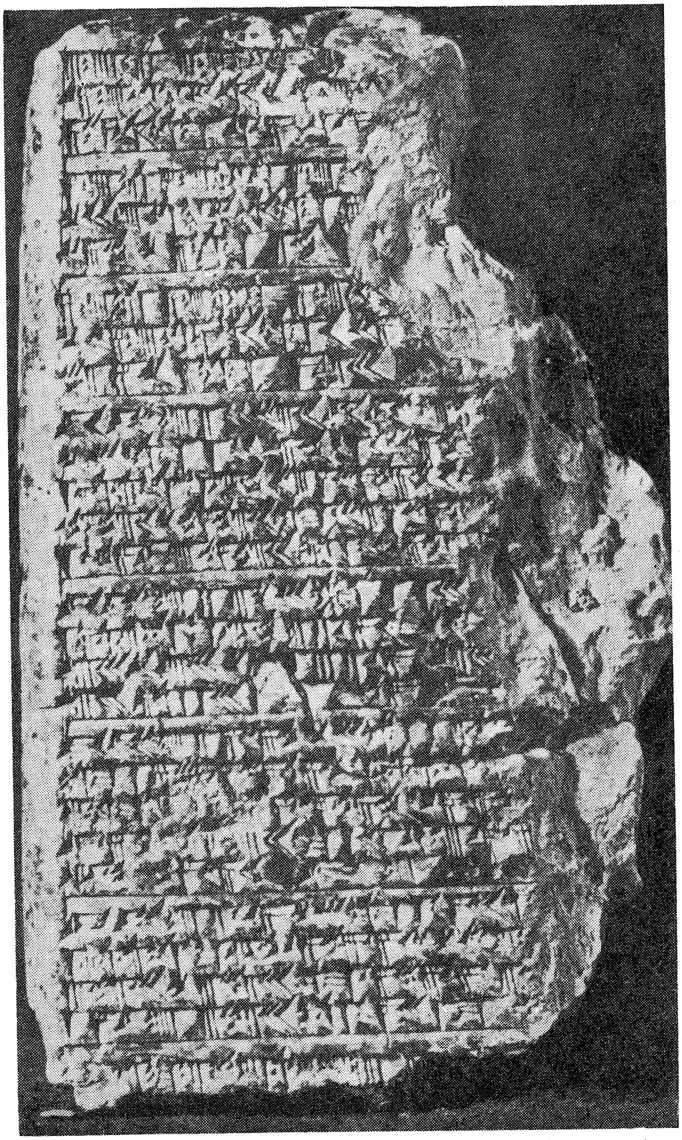
1) Ὅτι πρόκειται περὶ Ἑλληνικῶν μαθηματικῶν συνάγεται ἐκ τῆς ἀποδείξεως τοῦ συναφοῦς τύπου, ἥτις γίνεται διὰ μεθόδων τῶν Πυθαγορείων. Ἐπὶ πλέον δέ, τὸ πλεῖστον τῶν βαβυλωνιακῶν πινακίδων, αἵτινες περιέχουν μαθηματικὰ προέρχεται ἐξ ἀρχαιοκαπηλείας, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῇ ὁ τόπος, ὅπου αὗται εὑρέθησαν, πολλῷ δὲ μᾶλλον τὸ ἀρχαιολογικὸν στρῶμα ἐξ οὗ προέρχονται καὶ δι' αὐτοῦ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος γραφῆς των. (Kurt Vogel, Vorgriechische Mathematik II, Verl. H. Schroedel, Hannover, F. Schöning, Paderborn, 1959 p. 13).

ἀναφερόμενος διὰ λόγων καὶ οὐχὶ διὰ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμητικῶν συμβόλων. Ἡ πινακὶς εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τῶν Παρισίων Louvre, Dép. des Antiqui-



Προσθία ὄψις τῆς Βαβυλωνιακῆς πινακίδος.

tés Orientales, ὑπὸ τὴν ἔνδειξιν AO 6484. Φωτοτυπικὰ ἀντίγραφα ταύτης ἐλάβομεν παρὰ τοῦ ἐν Μονάχῳ φίλου καθηγητοῦ κ. Kurt Vogel καὶ παρὰ τοῦ ἐν Παρισίοις διαδεκριμένου Ἕλληνος ἐπιστήμονος κ. Γεωργίου Καγιᾶ, ἐργαζομένου εἰς τὸ Κέντρον Πυρηνικῶν Ἐρευνῶν τῶν Παρισίων. Ὁ κ. Καγιᾶς ἀπέστειλεν εἰς



Ὀπισθία ὄψις τῆς Βαβυλωνιακῆς πινακίδος

ἡμᾶς καὶ ἑρμηνείαν τοῦ βαβυλωνιακοῦ κειμένου τῆς πινακίδος. Ὁμοίαν ἑρμηνείαν ἐλάβομεν καὶ παρὰ τοῦ φίλου καθηγητοῦ τοῦ Τεχνικοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Βερολίνου κ. Christoph J. Scriba. Αἱ φωτοτυπίαι προέρχονται ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ O. Neugebauer, Mathematische Keilschrift - Texte II, 1935, Tafel 1.

Οὐδεμία ἑρμηνεία παρέχεται περὶ τοῦ τρόπου εὑρέσεως τοῦ τύπου. Φαίνεται ὅμως ὅτι οὗτος εἶναι Πυθαγορικῆς προελεύσεως καὶ ὅτι ἔχει εὑρεθῆ ἐμπειρικῶς διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν γνωμόνων, διὰ τῶν ὁποίων οἱ Πυθαγόρειοι ὑπελόγιζον τοὺς τετραγώνους ἀριθμούς.

Ἡ μετάφρασις τοῦ προβλήματος τῆς πινακίδος (ἡ ὁποία περιέχει καὶ ἄλλα προβλήματα):

«Ἓν τετράγωνον ἀπὸ 1 ἐπὶ 1 (τοῦτο εἶναι) 1, μέχρι 10 ἐπὶ 10 (τοῦτο εἶναι) 1,40. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα. 1 ἐπὶ 20 (τοῦτο εἶναι) [$^1/_3$]. Πολλαπλασίασε· (δίδει) 20, 10 ἐπὶ 40 (τοῦτο εἶναι) δύο τρίτα· πολλαπλασίασε· (δίδει) 6,40. 6,40 σὺν 20 (εἶναι) 7. 7 πολλαπλασίασε ἐπὶ 55· (δίδει) 6,25. 6,25 εἶναι τὸ ἄθροισμα». Μὲ ἄλλους λόγους:

$1 \times 1 = 1^2$ μέχρι $10 \times 10 = 1{,}40$ $(1{,}40 = 100$, ἐπειδὴ χρησιμοποιεῖται τὸ ἑξηκονταδικὸν σύστημα, δηλ. 1 ἑξηκοντὰς σὺν 40 μονάδες $= 100)$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα, δηλ. τὸ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$.

Πολλαπλασίασε $1 \times 20 = 20 \left(= \frac{1}{3} \text{ τοῦ } 60. \right)$, 10×40 (ὅπερ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 60) $= 400 = 6{,}40$ δηλ. 6 ἑξηκοντάδες + 40 μονάδες. Σὺν $20 = 7$ (διότι $400 + 20 = 420 = 7$ ἑξηκοντάδες. $7 \times 55 = 6{,}25$. Τὸ 6,25 εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα. Τὸ $55 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10$. Τὸ δὲ $6{,}25 =$ ἓξ ἑξηκοντάδες σὺν 25 μονάδες $= 385 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$.

Ὁ ἐκ τῆς φρασεολογίας αὐτῆς συναγόμενος τύπος εἶναι

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{1}{3}\,(1 + 2\nu).\,(1 + 2 + 3 + \ldots + \nu).$$

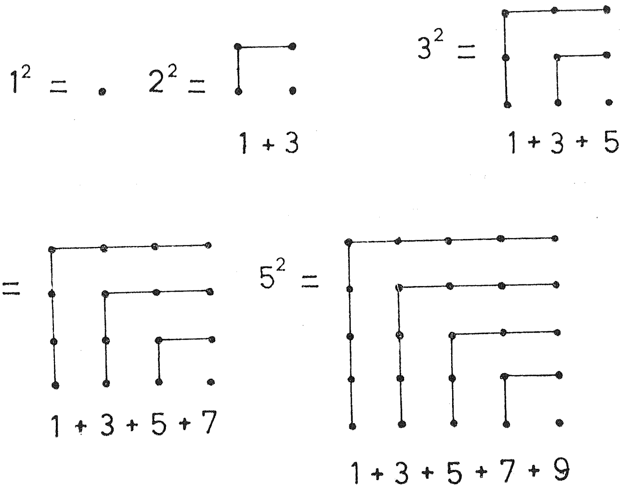
$$\text{Διὰ } \nu = 10 \text{ εἶναι } \frac{1 + 2\nu}{3} = 7 \text{ καὶ } 55 = 1 + 2 + 3 + \ldots 10,\ 7.55 = 385.$$

Κατὰ τὸν J. E. Hofmann, ἐν Praxis der Mathematik 5, 15-10-1963, παραστατικὴν ἔκφρασιν τοῦ τύπου τῇ πινακίδος ἐπεχείρησαν οἱ: J. Boulliau (Paris 1682), P. Luckey (1930), J.E. Hofmann (1936), O. Becker, διὰ τοῦ J. E. Hofmann (1954), J. Lohre (Νορβηγία 1956).

Ὁ ὑποτιθέμενος καθ' ἡμᾶς τρόπος εὑρέσεως τοῦ τύπου τῆς πινακίδος ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων.

Ἐν πρώτοις σχηματίζομεν τοὺς γνώμονας τῶν Πυθαγορείων, διὰ τῶν ὁποίων οὗτοι εὕρισκον τοὺς τετραγώνους ἀριθμούς. Γώμων, ὡς γνωστόν, καλεῖται γωνία τις ὀρθὴ ἢ μὴ ὀρθή. Τὰς μονάδας τῶν γνωμόνων τὰς παριστῶμεν ἐνταῦθα διὰ πλήρων κύκλων, ἐνῷ οἱ Πυθαγόρειοι παρίστων αὐτὰς διὰ μικρῶν λίθων (ψῆφοι, πετραδάκια). Ὁ γνώμων τοῦ 1^2 παρίσταται δι' ἑνὸς πλήρους κύκλου, διὰ τὸν ὁποῖον λέγομεν ὅτι ἐγκλείει ἐν ἑαυτῷ τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας δυνάμει, ἐπειδὴ εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν γωνία δὲν φαίνεται.

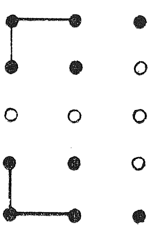
Οἱ γνώμονες τῶν Πυθαγορείων



Σχ. 1.

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ Εὕρεσις τοῦ τύπου τῆς πινακίδος



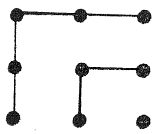
Σχ. 2.

1. Ἀριστερὰ τοῦ γνώμονος διὰ τὸ 1^2 θέτομεν τοὺς γνώμονας διὰ τὸν ἀριθμὸν 4. Συμπληροῦμεν τὴν κενὴν θέσιν διὰ νὰ ἔχωμεν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, διὰ κενοῦ κύκλου. Κάτωθεν τοῦ σχήματος τούτου θέτομεν ἀντιστοίχως τρεῖς κενοὺς κύκλους καὶ μὲ ἄξονα συμμετρίας τοὺς τρεῖς κενοὺς κύκλους κατασκευάζομεν κάτωθεν τούτων τὸ ὑπὲρ αὐτοὺς σχῆμα συμμετρικῶς καὶ λαμβάνομεν τὸ σχ. 2. Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $5 = (1 + 2 \cdot 2)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι τρεῖς $= (1 + 2)$. Ὅλαι αἱ μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι) εἶναι $5 \times 3 = 15$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $15 = 10$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $15 = 5$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $= 1^2 + 2^2$).

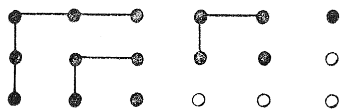
2. Ἀριστερὰ τοῦ γνώμονος διὰ τὸ 1^2 τοποθετοῦμεν τοὺς γνώμονας διὰ τὸν

4 καὶ ἀριστερὰ τούτων τοποθετοῦμεν τοὺς γνώμονας διὰ τὸν 9 καὶ ἔχομεν τὸ σχῆμα 3.

Συμπληροῦμεν τὰς κενὰς θέσεις διὰ κενῶν κύκλων διὰ νὰ λάβωμεν ὀρθογώνιον σχῆμα καὶ ἔχομεν τὸ σχ. 4. Κάτωθεν τοῦ σχήματος τούτου τοποθετοῦμεν ἀντιστοίχως 6 κενοὺς κύκλους καὶ μὲ ἄξονα συμμετρίας τοὺς 6 τούτους κύ-

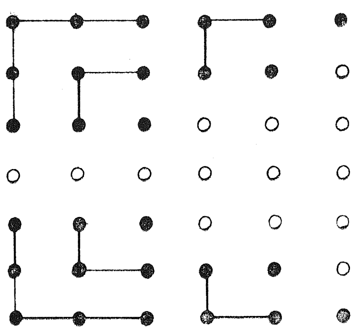


Σχ. 3.



Σχ. 4.

κλους κατασκευάζομεν κάτωθεν τὸ ὑπὲρ αὐτοὺς σχῆμα συμμετρικῶς καὶ ἔχομεν τὸ σχ. 5. Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $7 = (1 + 2 \cdot 3)$



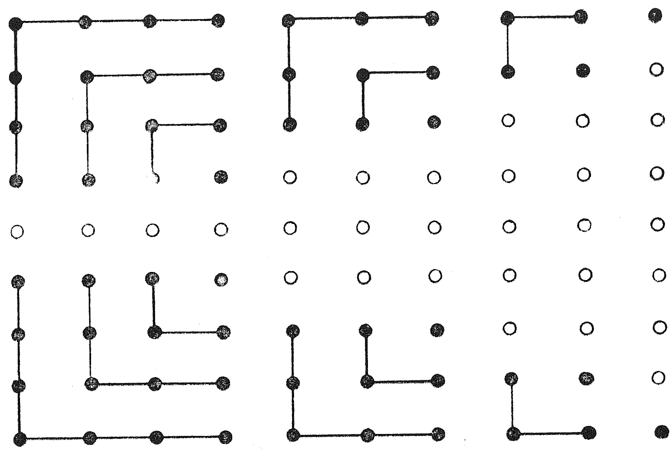
Σχ. 5.

καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $6 = (1 + 2 + 3)$. Ὅλαι αἱ μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι εἶναι $7 \times 6 = 42$). Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $42 = 28$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $42 = 14$, (οἱ κενοὶ κύκλοι $= 1^2 + 2^2 + 3^2$).

3. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν τὸ ἑπόμενον σχῆμα (6). Εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $9 = (1 + 2 \cdot 4)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $9 = (1 + 2 \cdot 4)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $10 = (1 + 2 + 3 + 4)$ Ὅλαι αἱ μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι) εἶναι $9 \times 10 = 90$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $90 = 60$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $90 = 30$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $=$ $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$).

4. Εἰς τὸ ἐν συνεχείᾳ ἑπόμενον σχῆμα αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $11 = (1 + 2 \cdot 5)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $15 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

Ὅλαι μονάδες (πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι) εἶναι $11 \times 15 = 165$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $165 = 110$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $165 = 55$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $=$ $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$).



Σχ. 6.

5. Εἰς τὸ ἐν συνεχείᾳ ἑπόμενον σχῆμα αἱ μονάδες μιᾶς στήλης εἶναι $13 =$ $= (1 + 2 \cdot 6)$ καὶ αἱ μονάδες μιᾶς σειρᾶς εἶναι $21 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$. Ὅλαι αἱ μονάδες πλήρεις καὶ κενοὶ κύκλοι εἶναι $13 \times 21 = 273$. Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $273 = 182$ (οἱ πλήρεις κύκλοι) καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $273 = 91$ (οἱ κενοὶ κύκλοι $=$ $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$).

Ἐκ τῶν προηγουμένων κατασκευῶν συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

$$3 \cdot 1 : 3 = 1^2$$
$$5 \cdot 3 : 3 = 5 = 1^2 + 2^2$$
$$7 \cdot 6 : 3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$9 \cdot 10 : 3 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$
$$11 \cdot 15 : 3 = 55 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

ἢ

2ος περιττὸς $\times$ 1ον τρίγωνον : $3 = 1^2$

3ος περιττὸς $\times$ 2ον τρίγωνον : $3 = 5 = 1^2 + 2^2$

4ος περιττὸς $\times$ 3ον τρίγωνον : $3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$

5ος περιττὸς $\times$ 4ον τρίγωνον : $3 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

6ος περιττὸς $\times$ 5ον τρίγωνον : $3 = 55 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$\vdots$

$\nu + 1$ περιττὸς $\times$ ν τρίγωνον : $3 = (1 + 2\nu) \cdot \dfrac{\nu(\nu+1)}{2} : 3 = 1^2 + 3^2 + \ldots$

$+ \nu^2$ (ὁ ν περιττὸς $= 2\nu - 1$, ὅπου $\nu = 1, 2, 3 \ldots$),

ἢ $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + \nu^2 = \dfrac{1}{3}(1 + 2\nu)(1 + 2 + 3 + \ldots + \nu)$.

(Σημ[1]. Φυσικοὶ ἀριθμοί : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.....
Τρίγωνοι ἀριθμοί : 1, 3, 6, 10, 16, 21, 28.....).

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΚΥΒΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

42. Ὁ Νικόμαχος εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του (κεφ. 20, σελ. 118, 24-119, 18, R. Hoche) ἐξαίρει τὰς ἰδιότητας τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, λέγων, ὅτι ἂν καταγράψωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1 2 3 4 5 6 7...
καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰς γεωμετρικὰς ἀκολουθίας 1 2 4 8 16 32 64...
1 3 9 27 81 243 729...
οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ἀκολουθιῶν, κατὰ τὴν ἀρίθμησιν αὐτῶν ἀπὸ τῆς μονάδος, κατέχουν πάντοτε θέσιν περιττοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν δὲ καταγράψωμεν, συνεχίζει ὁ Νικόμαχος, τὴν ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29...

παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἡ μονὰς ἐκφράζει τὸν κύβον αὐτῆς δυνάμει, ἤτοι $1 = 1^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ δύο ὅρων εἶναι $3 + 5 = 2^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὅρων εἶναι $7 + 9 + 11 = 3^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τεσσάρων ὅρων εἶναι $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ἄλλη πληροφορία σχετικὴ δὲν παρέχεται ὑπὸ τοῦ Νικομάχου. Ἔκ τινος ὅμως ἀραβικοῦ χειρογράφου, τοῦ Ἄραβος AL-KARKHI (10 - 11 αἰών)[2], εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ διὰ τῶν γνωμόνων τρόπος εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots$ χωρὶς νὰ ἀναφέρεται τὸ ὄνομα τοῦ Ἕλληνος συγγραφέως, εἶναι εὔκολον νὰ συναγάγωμεν τὴν διὰ τῶν γνω-

---

1) Τρίγωνοι ἀριθμοὶ καλοῦνται τὰ διαδοχικὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὅπως 1, $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$ $6 + 4 = 10$ κλπ.

2) T. L. Heath, Greek Mathematics I. p. 109, Oxford 1921.

μόνων, ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \nu^3$, ὡς ἀκολούθως.

Ἔστω τὸ τετράγωνον Α, πλευρᾶς 1. Περὶ αὐτὸ γράφομεν ἐν συνεχείᾳ γνώμονας, τῶν ὁποίων ἕκαστος περιβάλλει τὸν προηγούμενόν του, τὸ πλάτος δὲ ἑκάστου γνώμονος εἶναι πάντοτε ἡ μονάς. Εἰς τὸ σχῆμα ἔχομεν περιβάλλει τὸ τετράγωνον Α διὰ 9 γνωμόνων, τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις γίνεται εἰς τὴν κορυφὴν ἑκάστου γνώμονος.

Τὸ τετράγωνον Α ἐκφράζει τὸν κύβον τῆς μονάδος, 1^3. Ὁ περὶ τὸ τετράγωνον πρῶτος γνώμων ἔχει ἐμβαδὸν $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$. Ὁ ἑπόμενος δεύτερος γνώμων ἔχει ἐμβαδὸν $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$. Τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου γνώμονος εἶναι $3 + 5 = 8 = 2^3$. Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου Α, τὸ ὁποῖον ἔχομεν παραστήσει διὰ 1^3, θὰ ἔχωμεν $1 + 3 + 5 = 1^3 + 2^3 = 3^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρίτου γνώμονος εἶναι $4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετάρτου γνώμονος εἶναι $5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πέμπτου γνώμονος εἶναι $6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 11$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων γνωμόνων (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου) εἶναι $7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$.

Ὁ κύβος τῆς μονάδος, ὁ ἐκφραζόμενος διὰ τοῦ τετραγώνου Α σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων πρώτου καὶ δευτέρου, σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τρίτου καὶ τετάρτου καὶ πέμπτου δίδει $1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἕκτου γνώμονος εἶναι $7 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 13$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑβδόμου γνώμονος εἶναι $8 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 15$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀγδόου γνώμονος εἶναι $9 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 17$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐνάτου γνώμονος εἶναι $10 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 19$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων γνωμόνων (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3 = 8^2$. Καὶ τὸ συνολικὸν ἄθροισμα ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου $A(= 1^3)$ καὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν γνωμόνων (πρώτου, δευτέρου), (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου), (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$.

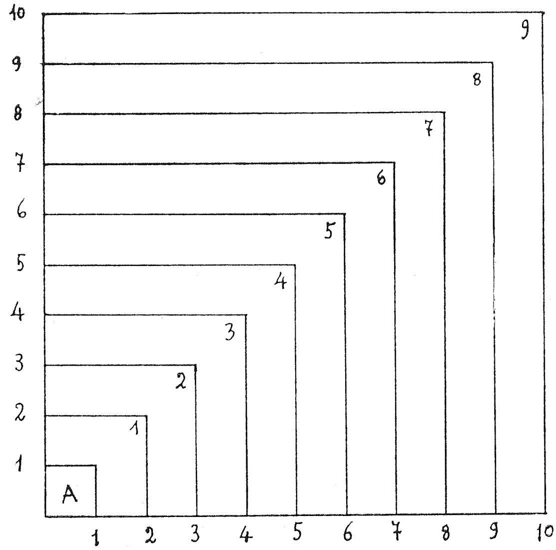
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

Τὸ πρῶτον μερικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3, 2^3, 3^3, \ldots \nu^3$ εἶναι $1^3 = 1^2$

Τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3 + 2^3 = 3^2$

Τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$

Τὸ τέταρτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2 \ldots$ καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $1, 3, 6, 10 \ldots$ εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, εἶναι τὰ ἀπὸ μονάδος διαδοχικὰ ἀθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ κανών, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ μονάδος ν κύβων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ νυοστὸς τρίγωνος ἀριθμὸς εἰς τὸ τετράγωνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τρίγωνος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + \nu^3 = \left[\frac{(\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$. Ἡ εὕρεσις τοῦ τύπου ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους.



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

43. Εἰς τὴν Παλατίνην Ἀνθολογίαν (14) ὑπάρχουν ἀρκετὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὰ περισσότερα δημοσιεύονται καὶ εἰς τὸν Β′ τόμον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἔκδ. P. Tannery, Λειψία 1894, ὡς καὶ εἰς τὴν ἡμετέραν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Ἀθῆναι 1973 σελ. 382, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων. Εἰς τὸ τέλος ὅμως τῆς ἐκδόσεως τῆς Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς τοῦ Νικομάχου παρατίθενται μερικὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Νικομάχου οὔτε περιέχονται εἰς τὴν Παλατίνην Ἀνθολογίαν. Τὰ τρία ἐκ τούτων τὰ ὑπογράφει ὁ (μοναχὸς) Ἰσαάκ. Τὰ ἄλλα τρία δὲν φέρουν ὑπογραφήν. Τὰ τρία πρῶτα ἀσχολοῦνται μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $1 + 2 + 3 + \ldots + \nu$. Τὸ τέταρτον ἀφορᾷ εἰς τὸν τρόπον διαχωρισμοῦ δοθέντων ἀριθμῶν, τὸ πέμπτον εἶναι λίαν ἐνδιαφέρον καὶ προέρχεται ἐξ ἐφαρμογῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ καὶ τὸ ἕκτον εἶναι σύστημα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

Κατωτέρω παραθέτομεν καὶ τὰ ἓξ ταῦτα προβλήματα.

1. Δοθέντων ἀπὸ μονάδος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν $1+2+3+\ldots+\nu$ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμά των.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $1+2+3+4+5+6+7+8+9$, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν θὰ εἶναι ἢ ἄρτιον ἢ περιττόν. Ἔστω πρῶτον περιττόν. Εἶναι φανερὸν ὅτι $1+9=2\cdot 5$, καὶ $2+8=2.5$ καὶ ἑξῆς. Ὅσον ἄρα εἶναι τὸ πλῆθος ὅλων, τόσας φορὰς ὁ 5 εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων. Εἶναι ἄρα ὡς $9:1=\Sigma:5$ (ὅταν κληθῇ τὸ ἄθροισμα Σ), ἢ $9\cdot 5=1\cdot\Sigma$. Ἂς ληφθῇ ὁ ἑπόμενος τοῦ 9 ἀριθμὸς ὁ 10. Εἶναι φανερὸν ὅτι $10=2\cdot 5=1+9$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $9\cdot 5=\Sigma$, ἐὰν ἄρα, ὁ 9 πολλαπλασιάσῃ τὸν 10 καὶ δώσῃ τινά, τὸ γινόμενον αὐτὸ θὰ εἶναι 2.Σ. Ἐὰν λοιπὸν δοθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος, ὡς ἀνωτέρω, καὶ ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸν μέγιστον τῶν δοθέντων ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν κατὰ μονάδα μεγαλύτερον καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ 2. $\left(\text{δηλ. } \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δοθέντων εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

2. Δεύτερος τρόπος διὰ τὸ αὐτὸ πρόβλημα. Πολλαπλασιάζω τὸν μεγαλύτερον ὅρον τῆς δοθείσης ἀριθμ. προόδου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καὶ τοῦ προκύπτοντος γινομένου λαμβάνω τὸ ἥμισυ. Εἰς τὸ ἥμισυ τοῦτο προσθέτω τὸ ἥμισυ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου τῆς προόδου. Τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῆς προόδου. $\left(\text{ἢ } \frac{\nu\cdot\nu}{2}+\frac{\nu}{2}\right)$.

ΙΣΑΑΚ

Αὐτὸ τὸ πρόβλημα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. $\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\nu$.

ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

3. Ὅταν ἡ διαφορὰ δύο συνεχῶν ὅρων τῆς ἀπὸ μονάδος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ἔστω $2+4+6+8+10+12$. Λάβε τὰ ἡμίση τῶν ἄκρων ὅρων καὶ πρόσθεσέ τα, ἤτοι $1+6=7$. Τοῦτο πολλαπλασίασέ το ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων τὸν 6. Θὰ ἔχῃς $7\cdot 6=42$. $\left(\text{δηλ.} \left(\frac{\alpha+\tau}{2}\right)\nu\right)$. Πάλιν ἔστω ἡ πρόοδος $1+4+7+10+13+16+19$. Θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{2}+\frac{19}{2}=10$, καὶ $10\cdot 7=70$.

ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

4. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 1, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 9 τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 40. Λέγουν, ὅτι ὁ βασιλεὺς Λέων τοὺς ἔδωσε καὶ εἶπε νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο ὁμάδας ἀπὸ πέντε ἀριθμοὺς ἑκάστη καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἑκάστης ὁμάδος νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τῆς ἄλλης (τὸ ἐξαγόμενον καθ' οἱανδήποτε πρᾶξιν, παρ. χάριν πρόσθεσιν καὶ πολ/σμόν).

Χωρίζομεν τούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$5 \cdot (1 + 1 + 3 + 7) = 3 \cdot (1 + 5 + 5 + 9)$ ἤτοι ἐκ τῶν πέντε ἀριθμῶν τοῦ πρώτου μέλους λαμβάνομεν $5 \cdot 12 = 60$ καὶ ἐκ τῶν πέντε ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου μέλους λαμβάνομεν πάλιν $3 \cdot 20 = 60$. (Ἡ παράστασις εἰς τὸν Νικόμαχον εἶναι ε$^{-ις}$, α,α,γ,ζ′ — γ$^{-ις}$, α, ε, ε, θ. Τὸ πρῶτον ις σημαίνει πεντάκις, τὸ δεύτερον ις σημαίνει τρὶς καὶ ἡ παῦλα τὸ ἴσον. Τὰ σύμβολα διὰ τὸ ἴσον, τὸ σύν, καὶ τὸ πλὴν ($=$, $+$, $-$) ἀνεκαλύφθησαν περὶ τὸ 1450).

5. Μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται εὐφυῶς ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του.

Ἐάν τις ἔχῃ εἰς τὸν νοῦν του ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ 7 μέχρι τοῦ 105 εἶναι δυνατὸν νὰ τὸν εὕρωμεν διὰ τῆς ἑξῆς μεθόδου. Λέγομεν εἰς τὸν ἔχοντα εἰς τὸν νοῦν του τὸν ἀριθμὸν νὰ μᾶς εἴπῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ διὰ 3. Κατόπιν νὰ μᾶς εἴπῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ 5. Καὶ τέλος νὰ μᾶς εἴπῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διὰ 7. Ἡμεῖς πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον ἐπὶ 70, τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ἐπὶ 21 καὶ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ἐπὶ 15. Κατόπιν προσθέτομεν τὰ ληφθέντα τρία γινόμενα καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ 105. Τὸ λαμβανόμενον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του. Ἐὰν ὑπόλοιπόν τι εἶναι 0 δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

Παραδείγματος χάριν. Ἔστω ὅτι ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του τὸν ἀριθμὸν 28. Ὁ 28 διὰ 3 δίδει ὑπόλοιπον 1. Ὁ 28 διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 3 καὶ ὁ 28 διὰ 7 δίδει ὑπόλοιπον 0. Κατὰ τ' ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν $1 \times 70 = 70$, $3 \times 21 = 63$ καὶ $0 \times 15 = 0$. Τὸ ἄρθροισμα τῶν τριῶν τούτων γινομένων εἶναι $70 + 63 + 0 = 133$. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 133:105 εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 28».

(Παρατηρήσεις. 1. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γινομένων εἶναι μικρότερον τοῦ 105 τότε τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. 2) Ὁ ἀριθμὸς 105 εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7, οἵτινες λαμβάνονται διαδοχικῶς ὡς διαιρέται τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἔχει τις εἰς τὸν νοῦν του. Ὁ ἀριθμὸς 70 ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλ/ζεται τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον εἶναι $= 5 \cdot 7 \cdot 2$. Ὁ ἀριθμὸς 21 ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλ/ζεται τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον εἶναι $= 3 \cdot 7$. Καὶ ὁ ἀριθμὸς 15 ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλ/ζεται τὸ τρίτον ὑπόλοιπον εἶναι $= 3 \cdot 5$. Διατί λαμβάνονται ὡς παράγοντες οἱ ἀριθμοὶ 70, 21, 15 δὲν ἑρμηνεύεται. Ἐνταῦθα ἔχομεν πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως α′ βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔλυσεν ὁ Ἐπίτιμος Γεν. Ἐπιθεωρητὴς τῶν Μαθηματικῶν κ. Ἰωάννης Σ. Παπαδᾶτος καὶ θὰ δημοσιεύσῃ προσεχῶς.

6. Ἀποθανών τις ἀφῆκεν 6 παιδιὰ ἤτοι 3 ἄρρενα καὶ 3 θήλεα καὶ ὥρισεν ὅτι ἐκ τῶν χρυσῶν νομισμάτων, τὰ ὁποῖα εἶχεν εἰς τὸ κιβώτιόν του, ὁ πρῶτος, ἀφοῦ ῥίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου ὅσα νομίσματα εἶναι ἐντὸς αὐτοῦ, νὰ λάβῃ κατόπιν 250. Ὁ δεύτερος, ἀφοῦ ῥίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου τόσα, ὅσα νομίσματα

ἔμειναν εἰς τὸ κιβώτιον, νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 250 καὶ ὁ τρίτος, ἀφοῦ ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου τόσα, ὅσα νομίσματα ἔμειναν, νὰ λάβῃ 250. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν θυγατέρων, ἀφοῦ ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου, τόσα ὅσα νομίσματα ἔμειναν νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 125. Ἡ δευτέρα ἐκ τῶν θυγατέρων, ἀφοῦ ρίψῃ εἰς τὸ κιβώτιον τόσα νομίσματα ὅσα ἔμειναν, νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 125. Καὶ ἡ τρίτη ὁμοίως νὰ ρίψῃ ἐντὸς τοῦ κιβωτίου τόσα νομίσματα, ὅσα ἔμειναν καὶ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ 125, ὥστε νὰ μὴ μείνῃ τίποτε ἐντὸς τοῦ κιβωτίου. Ἀπ. Τὰ νομίσματα ἦσαν $252 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{192}$.

(Σημείωσις. Ἡ σύγχρονος διατύπωσις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\varphi + \varphi - 250 = \mathrm{x}$$
$$\mathrm{x} + \mathrm{x} - 250 = \mathrm{y}$$
$$\psi + \psi - 250 = \omega$$
$$\omega + \omega - 125 = \lambda$$
$$\lambda + \lambda - 125 = \mu$$
$$\mu + \mu - 125 = 0$$

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

44. Βιβλία πρακτικῆς ἀριθμητικῆς δὲν ἐσώθησαν. Ὠνομάζετο δὲ ἡ πρακτικὴ ἀριθμητικὴ λογιστική, ὡς συνάγεται ἀπὸ μερικοὺς διαλόγους τοῦ Πλάτωνος. Ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου, σχολιαστοῦ ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 6ου αἰῶνος εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν, μνημονεύεται λογιστικὴ τοῦ Μάγνου, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη. Ἀπὸ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου γνωρίζομεν πῶς ἐγίνετο ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμῶν καὶ ἀπὸ σχόλια τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως γνωρίζομεν πῶς ἐγίνετο ἡ διαίρεσις (τέλος τοῦ 4 αἰ. μ.Χ.). Ἐκ τῶν δύο τούτων σχολιαστῶν συνάγεται πῶς ἐγίνετο, ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις. Ἀντὶ τοῦ συμβόλου τοῦ μηδενός, τὸ ὁποῖον ἀνεκαλύφθη περὶ τὸ 150 μ.Χ. ὑπὸ τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, χρησιμοποιοῦμεν κατωτέρω εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν μίαν παῦλαν, σημεῖον κενῆς θέσεως ἐνδιαμέσου.

ἡ πρόσθεσις

$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}\ ,\bar{\eta} - \overline{\nu\delta}$	38054
$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}\ ,\varepsilon\upsilon - \varsigma$	15406
$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}\ ,\gamma\upsilon\xi$	53460

ἡ ἀφαίρεσις

$\overset{\eta}{\mathrm{M}}$,δ ψ λ η	84738
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$,β φ κ γ	32523
$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$,β β α ε	52215

ὁ πολλαπλασιασμός

Διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐσώθησαν τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις, ὅπου πολλαπλασιάζονται ἀριθμοὶ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν των, δηλ. ὑψούμενοι εἰς τὸ τετράγωνον. Ἐκ τῶν πράξεων ὅμως συνάγεται εὐκόλως ὁ πολλ/σμὸς ἀνίσων παραγόντων. Καὶ ἐδῶ, χρησιμοποιεῖται τὸ σημερινὸν σύστημα πολλ/σμοῦ, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐκτελοῦν τοὺς πολλ/σμοὺς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὄχι ἐκ δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερά, ὅπως πράττομεν σήμερον.

Ἡ διαίρεσις

Δὲν διεσώθη ὁ τρόπος ἐκτελέσεως ἀκεραίου δι' ἀκεραίου. Διεσώθη ὅμως ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως, εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ τῆς Συντάξεως τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου (I 186 Halma) διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἡ διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου (F. Hultsch εἰς Pauly - Wissowa RE).

Πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 445440 διὰ τοῦ 8048. Τὸ σχῆμα τῆς διαιρέσεως ἔχει ὡς ἑξῆς:

Διαιρετέος	44 μυριάδες + 5440	διαιρέτης 8000 + 40 + 8
8000 × 50	40 »	5 δεκάδες, πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου
ὑπόλοιπον	4 μυριάδες + 5440	
40 × 50	2000	
ὑπόλοιπον	4 μυριάδες + 3440	
8 × 50	400	
ὑπόλοιπον	4 μυριάδες + 3040	5 μονάδες, δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου
8000 × 5	4 μυριάδες	
ὑπόλοιπον	3040	
40 × 5	200	
ὑπόλοιπον	2840	
8 × 5	40	
τελευταῖον ὑπόλοιπον	2800	55, τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου

’Ακέραιος ἐπὶ ἀκέραιον

,βϡια	2911		
ἐπὶ ,βϡια	× 2911		
$\overset{\upsilon}{\mathrm{M}}\overset{\rho\pi}{\mathrm{M}}\overset{\beta}{\mathrm{M}}\,\overline{,\beta}$	Μυριάδες 400 + μυρ. 180 + μυρ. 2 + 2.000	=	4.000.000 + 1.800.000 + 20.000 + 2.000
$\overset{\rho\pi}{\mathrm{M}}\overset{\pi\alpha}{\mathrm{M}}\,\overline{,\theta ϡ}$	Μυριάδες 180 + μυρ. 81 + 9.900	=	1.800.000 + 810.000 + 9.900
$\overset{\beta}{\mathrm{M}}\,\overline{,\theta\rho\iota}$	Μυριάδες 2 + 9.110	=	20.000 + 9.110
$\overline{,\beta ϡ\iota\alpha}$		=	2.911
ὁμοῦ $\overset{\omega\mu\zeta}{\mathrm{M}}\,\overline{,\gamma ϡ\kappa\alpha}$	= ἄθροισμα = μυρ. 847 + 3921	=	8.473.921

Μικτὸς ἐπὶ μικτὸν

$\overline{,\gamma\iota\gamma}$ 𐅵′ δ′		$3013\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$
ἐπὶ $\overline{,\gamma\iota\gamma}$ 𐅵′ δ′		× $3013\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ (ἡ παράθεσις κλασμάτων σημαίνει πρόσθεσιν)
$\overset{ϡ}{\mathrm{M}}\overset{\gamma}{\mathrm{M}}\,\overline{,\theta}\,\overline{,\alpha\varphi}\,\overline{\psi\nu}$	=	$9.000.000 + 30.000 + 9.000 + 1.500 + 750$
$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}\,\overline{\rho\lambda\varepsilon}\,\overline{\beta}$ 𐅵′	=	$+ 30.000 + 135 + 2 + \frac{1}{2}$
$\overline{,\theta\lambda\theta}\,\overline{\alpha}$ 𐅵′ 𐅵′ δ′	=	$+ 9.039 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$\overline{,\alpha\varphi}\,\overline{\varepsilon}\,\overline{\alpha}$ 𐅵′ δ′ η′	=	$+ 1.500 + 5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$\overline{\psi\nu}\,\overline{\beta}$ 𐅵′ 𐅵′ δ′ η′ ις′	=	$+ 750 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
ὁμοῦ $\overset{ϡ\eta}{\mathrm{M}}\,\overline{,\beta\chi\pi\theta}$ ις′	,	ἄθροισμα = $9.082.689\,\frac{1}{16}$

Τὰ κλάσματα

Τὰ κλάσματα ἐγράφοντο ὅπως καὶ σήμερον· μὲ τὴν διαφορὰν ὅμως ὅτι ὁ παρονομαστὴς ἐγράφετο ἄνωθεν τῆς γραμμῆς τοῦ κλάσματος, ἐνῷ ὁ ἀριθμητὴς ἐγράφετο κάτωθεν. Διὰ κλάσματα γραφόμενα ἐν σειρᾷ ἐδηλοῦτο ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ πρόσθεσις. Δὲν ὑπῆρχον σημεῖα δηλωτικὰ τῶν τεσσάρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς. Ταῦτα ἀνεκαλύφθησαν περὶ τὸ 1450 ἐν Εὐρώπῃ. Διὰ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς ἀπαντῶμεν εἰς τὸν Διοφάντον (περὶ τὸ 250 μ.Χ.) ὡς σύμβολον τοῦ πλὴν τὸ κεφαλαῖον γράμμα λάμβδα, μὲ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ δύο σκέλη τοῦ λάμβδα. Εἰς τὸν αὐτὸν Διόφαντον ἀπαντῶμεν τοὺς ὁρισμοὺς λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν ποιεῖ ὕπαρξιν (δηλ. πλὴν ἐπὶ πλὴν = σὺν) καὶ λεῖψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν (δηλ. πλὴν ἐπὶ σὺν = πλήν). Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος παρίστανται διὰ τοῦ συμβόλου Δ^{y}, τιθεμένου πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ. $\Delta^{\mathrm{y}}\,\Delta$ = ἡ τετάρτη δύναμις ἀριθμοῦ, $\Delta^{\mathrm{y}}\,\Delta\Delta$ = ἡ ἕκτη δύναμις ἀριθμοῦ κ.λπ. Ὁ κύβος ἀριθμοῦ παρίστατο διὰ τοῦ συμβόλου. K^{y}, ἤτοι διὰ τῶν δύο πρώτων γραμμάτων τῆς λέξεως κύβος, ὅπως τοῦτο ἔγινε καὶ διὰ τὴν παράστασιν τῆς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ. $\mathrm{K}^{\mathrm{y}}\,\mathrm{K}$ = ἡ ἕκτη δύναμις ἀριθμοῦ. $\mathrm{K}^{\mathrm{y}}\,\mathrm{KK}$ = ἡ ἐνάτη δύναμις ἀριθμοῦ κ.λπ. (Διὰ περισσοτέρας ἐπὶ τούτων πληροφορίας, ἴδε: Διοφάντου Ἀριθμητικὰ ὑπὸ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Ἀθῆναι 1963, σελ. 12 - 16).

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΥΠΟ ΔΙΩΓΜΟΝ!

45. Κατὰ τὸ τέλος περίπου τοῦ Γ′ μ.Χ. αἰῶνος τὰ μαθηματικὰ καὶ οἱ μαθηματικοὶ ὑπέστησαν μεγάλους διωγμούς. Τοῦτο προῆλθεν ἀπὸ τὰς ὑπερβολὰς τῆς ἀστρολογίας καὶ τῶν ἀστρολόγων. Ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης ἀκόμη ἐποχῆς εἶχε δημιουργηθῆ μία τάξις ἐπαγγελματιῶν ἀστρολόγων, οἱ ὁποῖοι διὰ διαφόρων παρατηρήσεων ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν ἄστρων, προέλεγον τὸ μέλλον τῶν ἀνθρώπων. Αἱ προβλέψεις αὐταὶ εἶχον ἐπιφέρει ἀναστάτωσιν εἰς τὰς ἰσχυούσας θρησκευτικὰς δοξασίας τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου ἰδίως αἰῶνος μ.Χ. Ἀποτέλεσμα τῆς ἀναστατώσεως αὐτῆς ἦτο νὰ ἐπέλθῃ ῥῆξις μεταξὺ τῶν ἐχόντων ἀντιθέτους θρησκευτικὰς πεποιθήσεις καὶ νὰ σημειωθοῦν πολλὰ ἔκτροπα. Πρὸς διόρθωσιν τοῦ κακοῦ οἱ αὐτοκράτορες τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἠναγκάσθησαν νὰ ἐκδώσουν διαταγάς, αἱ ὁποῖαι ἀπηγόρευον τὴν διδασκαλίαν τῶν μαθηματικῶν, ἰδίως ὅμως τῆς ἀριθμητικῆς, τὴν ὁποίαν ἐξελάμβανον, ὡς ὑπόβαθρον τῆς ἀστρολογίας. Ἰδοὺ μερικὰ δείγματα τῶν σχετικῶν διαταγῶν:

«1). Κῶδιξ Θεοδοσιανὸς (Οὐαλεντιανοῦ καὶ Οὐάλεντος), IX, 16, 8. Ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν Μόδιστον Ὕπαρχον.

Ἂς παύσῃ ἡ πραγματεία τῶν μαθηματικῶν. Διότι ἐάν τις δημοσίᾳ ἢ κατ' ἰδίαν, καθ' ἡμέραν ἢ νύκτωρ συλληφθῇ ἀναστρεφόμενος ἐν τῇ ἀπηγορευμένῃ πλάνη, **ἀμφότεροι ἂς πληγοῦν διὰ κεφαλικῆς ποινῆς.** Διότι δὲν εἶναι διάφορον ἁμάρτημα τὸ διδάσκεσθαι κεκωλυμένα ἢ τὸ διδάσκειν.

2) Αὐτοκράτορες Ὀνώριος καὶ Θεοδόσιος πρὸς τὸν Καικιλιανὸν Ὕπαρχον.

Οἱ μαθηματικοί, ἐὰν μὴ ὦσιν ἕτοιμοι, καυθέντων τῶν κωδίκων τῆς ἰδίας πλάνης ὑπὸ τὰ ὄμματα τῶν Ἐπισκόπων, νὰ δώσουν πίστιν εἰς τὴν λατρείαν τῆς καθολικῆς πίστεως, ὅτι δὲν θὰ ἐπανέλθουν εἰς τὴν παλαιὰν πλάνην, οὐ μόνον ἀπὸ τῆς πόλεως Ῥώμης, ἀλλὰ καὶ ἐκ πασῶν τῶν πόλεων ἀποφασίζομεν νὰ ἐκδιωχθοῦν. Ἐὰν δὲ δὲν κάμνουν τοῦτο καὶ παρὰ τὴν σωτηρίαν ἀπόφασιν τῆς ἡμετέρας ἐπιεικείας, συλληφθοῦν ἐν ταῖς πόλεσιν· εἴτε παρεισάγουν τὰ μυστικὰ τῆς πλάνης, θὰ τύχωσι τῆς ποινῆς τῆς ἐξορίας.

3) Κῶδιξ Ἰουστινιανὸς IX, 18, 2.

Τὴν γεωμετρικὴν τέχνην ἐκμανθάνειν καὶ ἀσκεῖν δημοσίᾳ, ὠφελεῖ. Ἡ μαθηματικὴ ὅμως τέχνη (σημ. ἐννοεῖ τὴν ἀριθμητικήν), ἀξιόποινος οὖσα ἀπαγορεύεται, (ἔτος 294).

«Καὶ ἓν σχόλιον: Νόμος. Ταύτῃ τοι καὶ ὁ νόμος φησίν· ἡ μὲν γεωμετρία δημοσίᾳ διδάσκεται· ἡ δὲ μαθηματικὴ κατακρίνεται ὡς ἀπηγορευμένη. (Σύνταγμα Κανόνων. Ἐκδοθὲν ὑπὸ Γ. Ῥάλλη καὶ Μ. Ποτλῆ, Τόμος 6)».

ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

46. Ὁ Κρητικὸς πολιτισμός, ὁ Μυκηναϊκὸς πολιτισμός, ἡ δημιουργία τῆς γλώσσης τῆς Ὀδυσσείας καὶ τῆς Ἰλιάδος τοῦ Ὁμήρου δὲν ἔγιναν εἰς χρονικὸν διάστημα ὀλίγων ἑκατοντάδων ἐτῶν, ἀλλὰ εἰς διάστημα χιλιάδων ἐτῶν. Ὅλα τὰ ὑπάρχοντα στοιχεῖα συνηγοροῦν εἰς τὴν γνώμην, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Δευκαλίωνος, περὶ τὸ ἔτος 9600 π.Χ., ὁπότε ἐβυθίσθη ἡ εἰς τὸν Ἀτλαντικὸν ὠκεανὸν εὑρισκομένη μεγάλη νῆσος Ἀτλαντίς, ὑπῆρχεν εἰς τὴν Ἑλλάδα μεγάλος πολιτισμὸς (Κεφ. 1).

Ὁ πολιτισμὸς δὲ αὐτὸς μετεδόθη εἰς τὴν Ἐγγὺς Ἀνατολὴν καὶ τὴν Αἴγυπτον, ὡς ἀφηγεῖται ὁ ἱερεὺς εἰς τὸν Σόλωνα (Τίμαιος 23 - 26).

Ὁ Ἡρόδοτος σχετικῶς πρὸς τὴν γεωμετρίαν (Β 109), γράφει τὰ ἑξῆς· «δοκέει δέ μοι ἐντεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν, δηλ. νομίζω, ὅτι ἀπὸ ἐδῶ (τὴν Αἴγυπτον), ἡ γεωμετρία, ἀφοῦ εὑρέθη, ἐπανῆλθεν εἰς τὴν Ἑλλάδα. Ἡ φράσις αὐτὴ ἡρμηνεύθη ὑπὸ πολλῶν, ὅτι ἡ γεωμετρία ἀνακαλυφθεῖσα εἰς τὴν Αἴγυπτον, μετεφέρθη εἰς τὴν Ἑλλάδα. Ἡ ἑρμηνεία αὕτη ἔδωκεν ἀφορμήν, μεταξὺ ἄλλων, ὥστε νὰ γραφοῦν πολλαὶ ἐπικρίσεις κατὰ τοῦ Ἡροδότου, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ἡμέτεραι. Νεώτεραι ὅμως ἔρευναι ἀνατρέπουν τὴν ἀνωτέρω ἑρμηνείαν, στηριζόμεναι εἰς τὴν σημασίαν τῆς λέξεως ἐπανελθεῖν. Κατὰ ταύτην, ὑποστηρίζεται ὅτι διὰ τῆς λέξεως ἐπανελθεῖν νοεῖται, ὅτι ἡ γεωμετρία εἰσήχθη εἰς τὴν Αἴγυπτον ἐκ τῆς Ἑλλάδος, συμφώνως πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Αἰγυπτίου ἱερέως πρὸς τὸν Σόλωνα ἀνακοινωνθέντα καὶ μετὰ τὴν ἐν Ἑλλάδι καταστροφὴν ἐκ τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος ἐπανῆλθεν αὕτη ἐκ τῆς Αἰγύπτου εἰς τὴν Ἑλλάδα. Ἐννοεῖται ἐνταῦθα ὅτι πρόκειται πάν-πάντοτε περὶ τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας καὶ ὄχι τῆς θεωρητικῆς, τῆς ἐπιστημονικῆς, τῆς ὁποίας θεμελιωτὴς εἶναι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος.

Ἄς ἐπιτραπῇ νὰ προσθέσωμεν ἐδῶ, ὅτι ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος, δηλ. 9600 ἔτη π.Χ. περίπου, μέχρι τοῦ 1500 π.Χ., δὲν ἔχομεν πληροφορίας περὶ πολιτιστικῶν ἐπιτευγμάτων εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον ἐκτὸς τῶν τῆς νεολιθικῆς ἐποχῆς ἀγγείων. Ἀπὸ τοῦ 1500 π.Χ. μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Τροίας (1184 π.Χ.) ἔχομεν ποικίλας πληροφορίας διὰ τὸν Κρητικὸν καὶ τὸν Μυκηναϊκὸν πολιτισμόν, διὰ τὴν Ἀργοναυτικὴν ἐκστρατείαν καὶ διὰ τοὺς Ὀρφικούς.

Ἀπὸ τῆς ἐποχῆς ὅμως τῆς ἁλώσεως τῆς Τροίας μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ, ἤτοι διὰ χρονικὸν διάστημα 600 περίπου ἐτῶν τὰ μόνα γνωστὰ καὶ σημαντικὰ πολιτιστικὰ ἐπιτεύγματα εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον εἶναι τὰ ποιήματα τοῦ Ὁμήρου καὶ τοῦ Ἡσιόδου, ἡ δημιουργία τῶν ὁποίων τοποθετεῖται κατ' ἄλλους μὲν ὡς τὰ ἔτη 1150 - 1000 π.Χ., κατ' ἄλλους δὲ εἰς τὸν ἔνατον ἢ ὄγδοον αἰῶνα π.Χ.

Διὰ τὰ περίφημα ἐρείπια τῆς Τίρυνθος καὶ τῶν Κυκλωπείων τειχῶν τῆς Ἄσκρης τῆς Βοιωτίας, τῆς πατρίδος τοῦ Ἡσιόδου, καὶ τῶν Πλαταιῶν, ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη, ὅτι ταῦτα ἀνήκουν εἰς πολὺ παλαιοτέραν τῆς Μινωϊκῆς καὶ Μυκηναϊκῆς ἐποχῆς.

Ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου τοῦ Πλάτωνος ὁ ἀρχαιότερος πολιτισμὸς ἐπὶ τῆς γῆς καὶ συνεπῶς καὶ ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας ἐδημιουργήθη εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον πολὺ πρὸ τοῦ κατακλυσμοῦ τοῦ Δευκαλίωνος.

Αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες τῶν οὐρανίων σωμάτων καὶ τὸ σχῆμα τοῦ ἡλίου καὶ τῆς πανσελήνου ἔδοσαν εἰς τὸν ἄνθρωπον εὐθὺς ἀμέσως ἀπὸ τῆς δημιουργίας του τὴν ἔννοιαν τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τοῦ κύκλου. Μὲ τὴν ἐξέλιξιν τοῦ πολιτισμοῦ εἰς τὸν ἑλληνικὸν χῶρον ἐδημιουργήθη ἡ ἔννοια τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ τῶν ἁπλῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Τοῦτο, ὑποτίθεται, ὅτι ἔγινε παραλλήλως πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης. Ἀντικείμενα τῆς καθημερινῆς ζωῆς ἔδοσαν τὸ ὄνομά των εἰς τὰ πρῶτα γεωμετρικὰ σχήματα, ὡς λίαν προσφυῶς τονίζει ὁ σοφὸς Γάλλος καθηγητὴς Charles Mugler εἰς τὸ περίφημον λεξικόν του τῶν γεωμετρικῶν ὅρων τῶν Ἑλλήνων (Charles Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris 1958, σελ. 5 - 32).

Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft.
Βιβλιοθήκη τῆς γερμανικῆς πόλεως Wolfenbüttel, ἀριθμ. 2403.

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΙΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ ΕΙΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΥΠΟ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

47. Ἀφ' ἧς ἐποχῆς ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἡ ἀπόδειξις εἰς τὰς μαθηματικὰς προτάσεις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μίαν τῶν ὑψίστων ἀνακαλύψεων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος καὶ τὸ θεμέλιον πάσης ἐπιστήμης, ἀπὸ τότε ἤρχισεν ἡ δημιουργία τῶν ἐπιστημῶν ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων, ὑπὸ τὴν σημερινὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου Ἐπιστήμη. Τὰ χρονικὰ ὅρια τῆς ἐποχῆς αὐτῆς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν, διότι δὲν ὑπάρχουν τὰ πρὸς τοῦτο γραπτὰ στοιχεῖα. Ὁ Πρόκλος (410-485 μ.Χ.), ὁ ὁποῖος ἀντλεῖ τὰς πληροφορίας του παρὰ τοῦ ἱστορικοῦ τῶν Μαθηματικῶν, τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους, Εὐδήμου τοῦ Ῥοδίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον δὲν διεσώθη, ἀναφέρει ὡς πρῶτον χρησιμοποιήσαντα ἀπόδειξιν εἰς μαθηματικὰς προτάσεις τὸν Θαλῆν τὸν Μιλήσιον (640 - 546 π.Χ.) γράφων τὰ ἑξῆς:

«Τὸ μὲν οὖν διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαί φασιν».

«Τῷ μὲν οὖν Θαλῇ τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὑρέσεως ἕνεκα καὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος χάρις. Λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἀρχαϊκώτερον δὲ τὰς «ἴσας» ὁμοίας προσειρηκέναι».

«Τοῦτο γὰρ τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εὑρημένου μέν, ὥς φησιν, Εὔδημος, ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου».

«Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα» (σημ. τὸ θεώρημα ἐν συντομίᾳ εἶναι: Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, εἶναι ἴσα). (Ἔκδοσις Friedlein, 157,10 - 250,20 - 299,1 - 352,14).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Θαλῆς θεωρεῖται ὁ ἀρχαιότερος τῶν σοφῶν τῆς Ἑλλάδος ὁ χρησιμοποιήσας ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἀποδίδεται εἰς αὐτὸν ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀποδείξεως. Συναφῶς ὁ μεγαλύτερος τῶν Γερμανῶν φιλοσόφων Ἐμμανουὴλ Κάντιος (Immanuel KANT, 1724 - 1804) ἐκθειάζει ἰδιαιτέρως τὸ μέγα τοῦτο ἐπίτευγμα τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, λέγων, ὅτι ὅπως καὶ ἂν ὀνομάζεται ὁ ἐπινοήσας τὴν ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἴτε Θαλῆς, εἴτε ἄλλως πως, οὗτος ἔσχε μίαν ἀναλαμπὴν (Πρόλογος εἰς τὴν πραγματείαν του, Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου (Kant, Kritik der reinen Vernunft, Vorwort).

Καὶ ἄλλοι ἐκ τῶν παλαιῶν πολιτισμένων λαῶν εἶχον ἀποκτήσει ἐκ τῆς μακραίωνος πείρας γνώσεις γεωμετρικὰς καὶ ἀριθμητικάς, ὅπως π.χ. οἱ Σουμέριοι, οἱ Βαβυλώνιοι, οἱ Αἰγύπτιοι, οἱ Ἰνδοί, οἱ Κινέζοι. Αἱ ἀρχαιότεραι ἐμπειρικαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις τῶν λαῶν αὐτῶν (ἰδίως τοῦ Σουμερίων) ἀνάγονται περὶ τὴν 4 - 3ην χιλιετηρίδα π.Χ. Οὐδεὶς ὅμως ἐκ τῶν λαῶν αὐτῶν εἶχε τὴν ἀγαθὴν τύχην τῆς ἐπινοήσεως τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά, πλὴν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, οἱ ὁποῖοι καὶ μόνοι ἐδημιούργησαν τὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν καὶ τὴν ἐπιστήμην τῆς Λογικῆς κατορθώσαντες δι' αὐτῶν ν' ἀνοίξουν τοὺς ὀφθαλμοὺς τῶν ἀνθρώπων εἰς πᾶσαν πνευματικὴν δραστηριότητα καὶ πᾶσαν φιλοσοφικὴν καὶ θεολογικὴν ἀναζήτησιν. Ἡ ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν διὰ τοὺς Ἕλληνας δὲν εἶχε καμμίαν σχέσιν μὲ τὰς Ἐπιχειρησιακὰς Ἐρεύνας καὶ τὸν Κερδῷον Ἑρμῆν ἀλλὰ εἶχε σκοπὸν τὴν καλλιέργειαν τοῦ νοῦ καὶ τῆς ψυχῆς τοῦ ἀνθρώπου, διὰ τὴν βαθυτέραν κατανόησιν τοῦ Θείου. Τοῦτο συνάγεται πλὴν ἄλλων, καὶ ἐκ τῶν διασωθεισῶν πληροφοριῶν περὶ τῆς λειτουργίας τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου (580 - 490 π.Χ. περίπου) καὶ ἐκ τῶν εἰς τὸν Πλάτωνα ἀποδιδομένων ῥήσεων **«μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην»**. (Τζέτζης, Χιλιάδες VIII 973) καὶ **«πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν»** (Πλούταρχος, Συμποσιακὰ Προβλήματα VIII Β'). Εἰς τὸν προηγούμενον Διάλογον τοῦ Πλουτάρχου ὁ μετέχων τῆς συζητήσεως Τυνδάρης προσθέτει, ὅτι κατὰ τὸν Πυθαγόρειον Φιλόλαον, ἡ γεωμετρία ἀρχὴ καὶ μητρόπολις οὖσα τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν ἐπαναφέρει καὶ καθοδηγεῖ τὴν διάνοιαν ὡς ἐκκαθαριζομένην καὶ διαχωριζομένην ἡσύχως ἀπὸ τὰ αἰσθητὰ πράγματα. « **Διὸ καὶ Πλάτων αὐτὸς ἐμέμψατο τοὺς περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν καὶ Μέναιχμον εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας, ὥσπερ πειρωμένους δι' ἀλόγου δύο μέσας ἀνάλογον ᾗ παρείκοι, λαβεῖν· ἀπόλλυσθαι γὰρ οὕτω καὶ διαφθείρεσθαι τὸ γεωμετρίας ἀγαθὸν αὖθις ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ παλινδρομούσης καὶ μὴ φερομένης ἄνω μηδ' ἀντιλαμβανομένης τῶν ἀϊδίων καὶ ἀσωμάτων εἰκόνων, πρὸς αἷσπερ ὢν ὁ θεὸς ἀεὶ θεός ἐστι».** (Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν καὶ αὐτὸς ὁ Πλάτων κατηγόρησε τοὺς περὶ τὸν Εὔδοξον καὶ τὸν Ἀρχύταν καὶ τὸν Μέναιχμον, οἱ ὁποῖοι προσεπάθησαν νὰ ἀναγάγουν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου (τοῦ δηλίου προβλήματος) εἰς λύσιν δι' ὀργανικῶν καὶ μηχανικῶν κατασκευῶν, προσπαθοῦντας δηλαδὴ νὰ λάβουν δι' ἀσυμμέτρου σχέσεως δύο μέσας ἀναλόγους, ὡς ἐὰν τοῦτο ἦτο ἐπιτρεπτόν, διότι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ τῆς λύσεως χάνεται καὶ καταστρέφεται τὸ ἀγαθὸν τῆς γεωμετρίας, ἡ ὁποία παλινδρομεῖ πάλιν πρὸς τὰ αἰσθητὰ καὶ δὲν φέρεται ἄνω (πρὸς τὸν θεὸν) οὔτε κατανοεῖ τὰς αἰωνίους καὶ ἀσωμάτους εἰκόνας, εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχων ὁ Θεὸς εἶναι πάντοτε θεός).

Ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ὑπῆρξε βέβαια μία ἀναλαμπὴ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, αὐτὴ ὅμως δὲν προῆλθεν αὐτομάτως. Διὰ νὰ φθάσῃ τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα εἰς τὴν ἀνακάλυψιν, ὅτι διὰ τὴν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας μιᾶς γεωμετρικῆς προτάσεως εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἀπόδειξις αὐτῆς ἔπρεπε νὰ ἔχουν προηγηθῆ ἄλλαι γνώσεις ἐκ τῶν ὁποίων νὰ προκύπτῃ ὡς λογικὴ συνέπεια ἡ ἀνάγκη τῆς ἀποδείξεως. Αἱ γνώσεις αὗται εἶναι πρῶτον ὁ καθορισμὸς τοῦ γεωμετρικοῦ (καὶ γενικῶς τοῦ μαθηματικοῦ) ἀντικειμένου καὶ δεύτερον ὁ καθορισμὸς τῶν ἀξιωμάτων. Ὑπὸ τὸν ὅρον ἀξιώματα νοοῦνται ἀλήθειαι ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί. Καθίσταται φανερόν, ὅτι πρὸς τούτοις πρέπει νὰ εἶναι γνωσταὶ αἱ σπουαιότεραι ἀρχαὶ τῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία ὀνομάζεται Λογική. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ (ἀκμὴ 600 π.Χ.), ὁπότε μαρτυροῦνται ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπ' αὐτοῦ, ἔπρεπε νὰ εἶναι γνωστοὶ οἱ σπουδαιότεροι νόμοι τῆς Λογικῆς καὶ τὰ κυριώτερα μαθηματικὰ ἀξιώματα, διότι ἄνευ γνώσεως αὐτῶν εἶναι ἀδύνατον νὰ ζητηθῇ καὶ νὰ γίνῃ ἀπόδειξις μαθηματικῆς προτάσεως.

Ὅθεν τὸ ὑποστηριζόμενον, ὅτι ὑπὸ τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert, 1862 - 1943) ἱδρύθη περὶ τὸ 1900, ἤτοι 2500 ἔτη ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ, ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος τῆς γεωμετρίας καὶ τῶν μαθηματικῶν δικαίως προκαλεῖ εἰς τοὺς ἐπαΐοντας τὴν θυμηδίαν.

Διὰ ν' ἀποδείξῃ ὁ Θαλῆς, ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι χρησιμοποιεῖ τὸ ἀξίωμα, τὸ ὁποῖον ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ διὰ τὴν γεωμετρίαν, ὅτι «ἐὰν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρέσωμεν ἴσα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα». Θεωρεῖται λογικόν, ὅτι κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Θαλοῦ δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ εἶχεν ἐξαντληθῆ ἡ ἔρευνα τῶν ~~ἀρχῶν τῶν~~ Μαθηματικῶν. Τοὐναντίον, καθ' ὅσον εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς γραπτῆς παραδόσεως, αὕτη συνεχίσθη ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας καὶ συνεχίζεται ἀκόμη καὶ ἐπὶ τῶν ἡμερῶν μας. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν ἂν ἐν Ἑλλάδι ἐδημοσιεύθησαν ἢ πρόκειται νὰ δημοσιευθοῦν πορίσματα ἐρευνῶν καὶ ἰδίως τῶν συναφῶν ἐρευνῶν πρὸς τὰς ἀρχὰς τῶν μαθηματικῶν, τοῦ Ἐθνικοῦ Ἱδρύματος Ἐρευνῶν.

* * *

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη (384-322 π.Χ.), πᾶσα γνῶσις εἶναι γνῶσις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ σκέψις τοῦ ἀνθρώπου ἀναφέρεται πρωτίστως εἴς τι ἀντικείμενον, δευτερευόντως δὲ δύναται νὰ στραφῇ αὕτη πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἐπιστητὸν δὲν ὑπάρχει ἐπιστήμη. Ἡ μὴ ὕπαρξις ἐπιστήμης δὲν ἐμποδίζει νὰ ὑπάρχῃ ἐπιστητόν, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης. Ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου π.χ. ἀποτελεῖ ἐπιστητόν. Τοῦ ἐπιστητοῦ ὅμως τούτου δὲν ὑπάρχει γνῶσις, δὲν ὑπάρχει ἐπιστήμη (σημ. Ἐννοεῖ, ὅτι δὲν ὑπάρχει γνῶσις τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου διὰ κανόνος καὶ διαβήτου).

«Ἐπιστητοῦ μὲν γὰρ μὴ ὄντος οὐκ ἔστιν ἐπιστήμη οὐδενὸς γὰρ ἔσται ἐπιστήμη) ἐπιστήμης δὲ μὴ οὔσης οὐδὲν κωλύει ἐπιστητὸν εἶναι, οἷον καὶ ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἴ γε ἔστιν ἐπιστητόν, ἐπιστήμης μὲν αὐτοῦ οὐκ ἔστιν οὐδέπω, αὐτὸς δὲ ἐπιστητὸν ἐστὶ» (Ἀριστοτέλους Κατηγορίαι- 7 β 29, (εἴ γε = ἀφοῦ).

Ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία: 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν, δηλαδὴ τὰ ἀξιώματα καὶ 3) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον διὰ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ ἀφ' ἑαυτῶν φανερὰς προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα. Τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ προχωρήσουν πέρα τῶν ἀναποδείκτων ἀρχικῶν προτάσεων. Τὴν ἔρευναν τῶν προτάσεων τούτων ἐπιτελεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ πρώτη φιλοσοφία, ἡ λεγομένη ὑπὸ τῶν νεωτέρων γνωσιολογία ἢ γνωσιοθεωρία. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες ἔχουν μὲν ὕπαρξιν ὄχι ὅμως καὶ αὐθυπαρξίαν. Αὗται ὑπάρχουν ὡς σταθερὰ χαρακτηριστικὰ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἄνευ τῶν ὁποίων θὰ ἦσαν ἀνύπαρκτοι. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἀντίθεσιν τοῦ Ἀριστοτέλους πρὸς τὴν αὐθυπαρξίαν τῶν ἰδεῶν τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ ἀντικείμενον ἐρεύνης τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ τρισδιαστάτου χώρου, ὅπως οὗτος ὑποπίπτει εἰς τὰς αἰσθήσεις μας, ὅπως γίνεται ἀντιληπτὸς παρ' ἡμῶν. Ὁ χῶρος, ὡς ἐννοοῦμεν τοῦτον σήμερον, ἐκαλεῖτο κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τόπος. Παρὰ τοῦ Ἀριστοτέλους πληροφορούμεθα πῶς ὁ Δημόκριτος ὠνόμαζε τὸν χῶρον:

«Προσαγορεύει Δημόκριτος τὸν τόπον τοῖς δε τοῖς ὀνόμασι, τῷ τε κενῷ καὶ τῷ οὐθενὶ καὶ τῷ ἀπείρῳ». Fragmenta 202. 1514 β 11)· (Ὁ Δημόκριτος ὀνομάζει τὸν χῶρον μὲ τὰ ἑξῆς ὀνόματα, καὶ μὲ τὸ ὄνομα κενόν, καὶ μὲ τὸ ὄνομα οὐδέν, καὶ μὲ τὸ ὄνομα ἄπειρον).

Ὁ ἴδιος ὁ Ἀριστοτέλης ὁρίζει τὸν χῶρον ὡς ἑξῆς:

«Τὸ τοῦ περιέχοντος πέρας ἀκίνητον πρῶτον, τοῦτ' ἔστιν ὁ τόπος». (Φ δ 4. 212 α 20).

Ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης δὲν παραδέχεται τὴν ὕπαρξιν τοῦ χώρου, λέγων, ὅτι χῶρος δὲν ὑπάρχει, διότι ἐὰν ὑπῆρχε ἔπρεπε νὰ ἦτο εἰς κάποιον χῶρον, αὐτὸς εἰς κάποιον ἄλλον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. (Ἀριστοτέλης Φυσ. Δ 3. 210 b 22).

Τὸ πρόβλημα τί εἶναι χῶρος παραμένει καὶ σήμερον ἄλυτον, ὡς εὐστόχως παρατηρεῖ εἰς τοὺς δύο τελευταίους στίχους τοῦ βιβλίου του Τὸ πρόβλημα τοῦ χώρου, ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Bar - Ilan τοῦ Ἰσραήλ, Μὰξ Γιάμμερ (Max Jammer, Das Problem des Raumes, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1960, σελὶς 220, μετάφρασις ἐκ τοῦ ἀμερικανικοῦ ὑπὸ τὸν τίτλον Concept of Space, Harvard University Press, Cambridge U.S.A.). Ὁ χῶρος ὅμως ὑπάρχει, ζῶμεν ἐντὸς αὐτοῦ, ἀσχέτως ἂν δὲν δυνάμεθα νὰ τὸν ὁρίσωμεν καὶ περὶ αὐτὸν ἀσχολεῖται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία.

Ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία χωρὶς νὰ κατονομάζῃ τὸν χῶρον ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ χρησιμοποιοῦσα ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἔννοιαν «σημεῖον» τὸ ὁποῖον καθορίζει ὡς ἑξῆς: **« σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθὲν »** (σημεῖον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει μέρος).

Ἀμέσως γεννᾶται τὸ ἐρώτημα τί εἶναι μέρος, δηλαδὴ διάστασις, τὸ ὁποῖον μένει ἀναπάντητον. Ἡ οὕτω πως ὁριζομένη ἔννοια σημεῖον εἶναι μία ἀρχὴ πέρα τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁ Πλάτων σημειώνει ,ὅτι ἡ γεωμετρία, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ τῆς μὴ ἱκανοποιητικῶς ὁριζομένης ἐννοίας σημεῖον, εἶναι ἐπιστήμη σχετικὴ καὶ ὄχι ἀπόλυτος ὡς εἶναι ἡ φιλοσοφία, ἡ ὁποία ἐρευνᾷ χωρὶς νὰ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ κάμῃ οὐδεμίαν ὑπόθεσιν, γράφων:

(Ὧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι; Οὐδεμία ἦδ' ὅς». (Πολιτεία 533 C). (Διότι, ὅταν μία ἐπιστήμη λαμβάνει ὡς ἀρχὴν κάτι, τὸ ὁποῖον δὲν ~~γνωρίζει~~ (σημ. τὴν ἔννοιαν σημεῖον), τὰ τελικὰ δὲ συμπεράσματα καὶ τὰ ἐνδιάμεσα συναρμολογοῦνται ἐξ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζει, ποία ἐπινόησις εἶναι δυνατόν ποτε τὴν τοιαύτην παραδοχὴν νὰ θεωρήσῃ ὡς ἐπιστήμην; Οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος).

Ἡ ἔννοια σημεῖον ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία ὑπέστη κριτικὴν ὑπὸ τοῦ ἰατροφιλοσόφου Σέξτου τοῦ Ἐμπειρικοῦ (Ἀλεξάνδρεια 2ος αἰ. μ.Χ.), ὁ ὁποῖος λέγει, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ διχοτομηθῇ ὁ κύκλος. Διότι τὸ κέντρον του, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον ἢ τέμνεται εἰς δύο, κατὰ τὴν διχοτόμησιν παντὸς κύκλου ἢ περιέρχεται εἰς ἓν τῶν ἡμικυκλίων. Ἀλλὰ νὰ διχοτομῆται τὸ κέντρον εἶναι ἀδύνατον· διότι πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ σκεφθῶμεν, ὅτι τὸ μὴ ἔχον μέρος (τὸ σημεῖον) διχοτομεῖται; ἐὰν δὲ τὸ κέντρον περιέρχεται εἰς ἓν ἐκ τῶν ἡμικυκλίων, τὰ ἡμικύκλια γίνονται ἄνισα καὶ ὁ κύκλος δὲν διχοτομεῖται. **(πρόβλημά ἐστι τὸν κύκλον δίχα τεμεῖν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. τὸ γὰρ κέντρον, ὅπερ παντὸς τοῦ κύκλου μεσαίτατόν ἐστιν, ἤτοι δίχα τέμνεται κατὰ τὴν τοῦ κύκλου διχοτόμησιν ἢ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι. ἀλλὰ δίχα μὲν τμηθῆναι τῶν ἀδυνάτων· πῶς γὰρ οἷόν τε τὸ ἀμερὲς ἐπινοεῖν μεριζόμενον; εἰ δὲ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι, ἄνισα γίνεται τὰ τμήματα καὶ ὁ κύκλος οὐ μέσος διαιρεῖται).** (Πρὸς Φυσικοὺς Α΄, adv. math. IX 284).

Η ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΤΟΥ ΔΑΒΙΔ ΧΙΛΜΠΕΡΤ ΔΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΡΓΗΣΙΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

48. Ἡ προσπάθεια τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ (David Hilbert), ὅπως καταργήσῃ τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν καὶ ἱδρύσῃ ἰδικήν του γεωμετρίαν θεωρεῖται ὡς ἀποτυχοῦσα, καίτοι μερικοὶ ἐκ τῶν μαθητῶν του διορθώνουν αὐτὴν ἐκ τῶν σφαλμάτων, ὡς λέγουν εἰς ἑκάστην ἔκδοσίν της.

Ὁ γερμανικὸς τίτλος τοῦ βιβλίου τοῦ Χίλμπερτ εἶναι Grundlagen der Geometrie (Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας). Κατὰ τὸ ἔτος 1956 ἔγινεν ἡ ὀγδόη ἔκδοσις τοῦ βιβλίου ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Χίλμπερτ Paul Bernays, καθηγητοῦ τοῦ Πολυτεχνείου τῆς Ζυρίχης, χωρὶς νὰ σημειοῦται πότε ἔγινεν ἡ πρώτη ἔκδοσις. Ἐκ κριτικῆς ὅμως δημοσιευομένης τῷ 1903 τοποθετοῦμεν τὴν πρώτην ἔκδοσιν περὶ τὸ 1900. Αἱ ἑπτὰ προηγούμεναι ἐκδόσεις ἔγιναν ζῶντος τοῦ Χίλμπερτ, ὅστις ἐπέφερεν ἑκάστοτε διορθώσεις τῇ ὑποδείξει τῶν μαθητῶν του, ὡς γράφει ὁ ἴδιος. Ὁ τίτλος τῆς ὀγδόης ἐκδόσεως εἶναι D. Hilbert Grundlagen der Geometrie, mit Revisionen und Ergänzungen, von Paul Bernays, B. G. Teubner, Stuttgart 1956 (Δ. Χίλμπερτ Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας, μετ' ἀναθεωρήσεων καὶ συμπληρώσεων ὑπὸ Paul Bernays, B. G. Τόϊμπνερ Στουτγάρτη 1956). Τὸ βιβλίον ἀρχίζει ὡς ἑξῆς:

« § 1. Τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας καὶ αἱ πέντε ὁμάδες ἀξιωμάτων.

Δήλωσις (= Erklärung) (σημ. ἀποφεύγει τὴν λέξιν Definition = ὁρισμός, αὐτὴν ὅμως ἐννοεῖ). Νοοῦμεν τρία διάφορα συστήματα πραγμάτων (ἀντικειμένων): Τὰ πράγματα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ A, B, C. . . Τὰ πράγματα τοῦ δευτέρου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ a, b, c. . . Τὰ πράγματα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ α, β, γ. . . Τὰ σημεῖα τὰ ὀνομάζομεν ἐπίσης τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας τὰ ὀνομάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, καὶ τὰ σημεῖα τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὀνομάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ στοιχεῖα τοῦ χώρου».

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ Δαβὶδ Χίλμπερτ ἐν ᾧ φιλοδοξεῖ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἑλληνικὴν γεωμετρίαν διὰ γεωμετρίας ἰδικῆς του κατασκευῆς, κατὰ κρυπτοφανῆ τρόπον κάμνει χρῆσιν καὶ ἀοριστολογικὴν κατάχρησιν τῶν ἑλληνικῶν γεωμετρικῶν ὅρων. Πρὸς τούτοις παρουσιάζεται, ὅτι ἐκλαμβάνει τὸν χῶρον ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ καὶ τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου!!

Τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ διατυπούμενον ἀξίωμα ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Ὅταν δοθοῦν δύο σημεῖα A, B, ὑπάρχει πάντοτε εὐθεῖα τις, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς ἕκαστον τῶν δύο σημείων A, B».

Ὅταν ἐδημοσιεύθη ἡ πρώτη ἔκδοσις τῆς γεωμετρίας τοῦ Χίλμπερτ, ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Γκότλοπ Φρέγγε (Cottlob Frege 1828 - 1926) ἔγραψε τὰ ἑξῆς εἰς τὴν Ἐπετηρίδα τῶν Μαθηματικῶν τῆς Γερμανίας τοῦ 1903:

«Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ εἶναι ἓν σύστημα ἐξισώσεων μὲ πολλοὺς ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ λύσῃ κανείς. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα, ἂν ἓν ἀντικείμενον π.χ. τὸ ὡρολόγιόν μου, εἶναι ἓν σημεῖον προσκρούομεν ἀμέσως εἰς τὴν δυσκολίαν τοῦ πρώτου ἀξιώματος, διότι ἐκεῖ γίνεται λόγος περὶ δύο σημείων».

Ἀκολούθως ὁ Φρέγγε παρῳδεῖ τὸν Χίλμπερτ γράφων τὰ ἑξῆς:

«Δήλωσις. Νοοῦμεν ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν θεούς. Ἀξίωμα 1. Πᾶς θεὸς εἶναι παντοδύναμος. Ἀξίωμα 2. Ὑπάρχει τοὐλάχιστον εἷς θεός». (Jahresbericht DMV 12, 1903. Ἐπετηρὶς τῆς Ἑνώσεως τῶν Μαθηματικῶν τῆς Γερμανίας).

Διὰ νὰ γίνῃ ἀντιληπτὴ ἡ σύγχυσις, ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς:

Εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν τῆς γεωμετρίας αὐτῆς τίθεται ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ ὡς ἀξίωμα ἡ πρότασις.

«Δίδονται τέσσαρα τυχόντα σημεῖα μιᾶς εὐθείας. Τότε δυνάμεθα πάντοτε νὰ παριστῶμεν αὐτὰ μὲ A, B, C, D κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ διὰ τοῦ B παριστώμενον σημεῖον νὰ κεῖται μεταξὺ A καὶ C, καὶ ἐπίσης μεταξὺ τοῦ A καὶ D καὶ ἀκόμη τὸ μὲ C παριστώμενον σημεῖον νὰ κεῖται μεταξὺ A καὶ D καὶ ἐπίσης μεταξὺ B καὶ D».

Εἰς τὴν ὀγδόην ἔκδοσιν τοῦ 1956 ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἐκδότου καὶ μαθητοῦ τοῦ Χίλμπερτ Paul Bernays ὡς 5ον Θεώρημα? (σελὶς 6).

Ἐπίσης εἰς τὴν αὐτὴν πρώτην ἔκδοσιν τίθεται ὑπὸ τοῦ Χίλμπερτ ὡς ἀξίωμα ἡ πρότασις:

«Ἐὰν δύο γωνίαι α, β, εἶναι ἴσαι πρὸς τρίτην γωνίαν γ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι». Εἰς τὴν ὀγδόην ἔκδοσιν τοῦ 1956 ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὑπὸ τοῦ Paul Bernays ὡς 19ον θεώρημα, (σελὶς 21).

* * *

Τὸ ὑποστηριζόμενον ὅτι αἱ μαθηματικαὶ θεωρίαι θεωροῦνται ὡς λογικὰ οἰκοδομήματα ἄνευ οὐδεμιᾶς ἀναγκαίας σχέσεως πρὸς τὴν φυσικὴν ἐμπειρίαν δὲν εὐσταθεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ὁ ὁποῖος λέγει:

1) Πᾶσα μάθησις διὰ προγιγνωσκομένων ἢ πάντων ἢ τινῶν ἐστί, καὶ ἢ δι' ἀποδείξεως ἢ δι' ὁρισμῶν. (Μετὰ τὰ Φυσικὰ Α, 992 β 30). (Πᾶσα μάθησις γίνεται διὰ προγιγνωσκομένων ἢ καθ' ὁλοκληρίαν γνωστῶν ἢ μερικῶς, τόσον ἡ δι' ἀποδείξεως μάθησις, ὅσον καὶ ἡ δι' ὁρισμῶν).

2) Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν. (Ἀναλυτικὰ Ὕστερα Α. 71 α 1 - 4). (Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα διανοητικὴ μάθησις γίνεται ἐκ προϋπαρχούσης γνώσεως· θεωροῦν δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐπὶ ὅλων τῶν ἐπιστημῶν, διότι καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι διὰ τούτου τοῦ τρόπου ἐπιτυγχάνονται καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων τεχνῶν).

ΑΙ ΛΕΓΟΜΕΝΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΙ

49. Κατὰ τὸν παρελθόντα αἰῶνα ἐξηγγέλθη, ὅτι ἐκτὸς τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου ἀνεκαλύφθησαν καὶ ἄλλα δύο εἴδη γεωμετριῶν, μὴ Εὐκλειδείων, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἓν εἶδος ὠνομάσθη ὑπερβολικὴ γεωμετρία, τὸ δὲ ἄλλο ὠνομάσθη ἐλλειπτικὴ γεωμετρία. Τὴν γεωμετρίαν τοῦ Εὐκλείδου τὴν ὠνόμασαν παραβολικὴν γεωμετρίαν. Πρὸς τούτοις ὑπεστηρίζετο, ὅτι ἡ μὲν γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου ἰσχύει διὰ τὰς μικρὰς ἀποστάσεις, ἐνῷ αἱ μὴ Εὐκλείδειοι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα. Προϊόντος τοῦ χρόνου παρετηρήθη, ὅτι ἐνῷ ὁ Εὐκλείδης χρησιμοποιεῖ ὡς ὑπόβαθρον τῆς γεωμετρίας του 14 ἀξιώματα, οἱ ἰσχυριζόμενοι, ὅτι ἀνεκάλυψαν τὰς μὴ Εὐκλειδείους γεωμετρίας, λαμβάνουν 13 ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου, τὰ βαπτίζουν εἰς «ἀπόλυτον γεωμετρίαν» καὶ εἰς αὐτὰ προσθέτουν ἓν ἀξίωμα περὶ παραλλήλων, διάφορον τοῦ εὐκλειδείου ἀξιώματος. Παρατηρεῖται ὅμως ὑπὸ πολλῶν ὅτι μὲ 13 εὐκλείδεια ἀξιώματα καὶ 1 μὴ εὐκλείδειον, δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ γίνεται λόγος περὶ «μὴ Εὐκλειδείων γεωμετριῶν», ἀλλὰ ὁ ὀρθὸς τίτλος τῶν νέων αὐτῶν ἐπιτευγμάτων πρέπει νὰ εἶναι «'Ασκήσεις τινες ἐπὶ τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου».

'Επὶ τούτοις τονίζεται τελευταίως, ὅτι οἱ κατασκευασταὶ τῶν δορυφόρων καὶ τῶν πυραύλων περιφρονοῦν τελείως τὰς μὴ Εὐκλειδείους γεωμετρίας, τὰς ἰσχυούσας, ὡς λέγεται, διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις, καὶ χρησιμοποιοῦν διὰ τὰς κατασκευάς των μόνον τὴν Εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Εἶναι δὲ ἀξιοσημείωτον, ὅτι τὰς παρατηρήσεις περὶ μὴ Εὐκλειδείων γεωμετριῶν τὰς εἶχε κάμει ἤδη ὁ 'Αριστοτέλης, ὡς ἀπέδειξεν ἐσχάτως ὁ Οὔγγρος καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Βουκουρεστίου Imre Tóth διὰ τῆς ἀνακοινώσεώς του ὑπὸ τὸν τίτλον (Das Parallelenproblem im corpus Aristotelicum» (Arch. Hist. Exact Sci., 17-27, vol. 3, eingegangen 28-12-1965), (Τὸ πρόβλημα τῶν παραλλήλων εἰς τὸ σῶμα τῶν 'Αριστοτελικῶν συγγραφῶν).

'Εξ ἴσου ἐνδιαφέρουσα εἶναι καὶ ἡ παρατήρησις, ὅτι κατὰ τὰ τελευταῖα 50 ἔτη ἐδιδάσκετο εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Συνόλων, εἰς ὅλα τὰ Πανεπιστήμια τοῦ κόσμου, ὅτι τὸ μέρος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὅλου (!) πρὸς μεγάλην ἔκπληξιν καὶ καγχασμὸν τοῦ Εὐκλείδου, ὁ ὁποῖος διδάσκει, ὅτι τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους (κοιναὶ ἔννοιαι 8).

Καὶ ναὶ μὲν ὁ 'Ησίοδος γράφει, ὅτι τὸ ἥμισυ εἶναι περισσότερον τοῦ ὅλου, τοῦτο ὅμως ὄχι μὲ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν, ἀλλὰ μὲ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ὁ ἔχων ὀλίγα εἰσοδήματα ἀλλὰ δαπανῶν μὲ σύνεσιν περνάει καλύτερα ἀπὸ τὸν πλούσιον, ἀλλὰ σπάταλον.

«Νήπιοι οὐδὲ ἴσασιν ὅσῳ πλέον ἥμισυ παντός». Ἔργα καὶ ἡμέραι 40. (ἀνόητοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ξεύρουν, πόσον περισσότερον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου)[1].

---

1) 'Ο 'Ησίοδος εἶχε ἀδελφὸν ὀνόματι Πέρσην. Μετὰ τὸν θάνατον τοῦ πατρός των, ἔγινε διανομὴ τῆς κληρονομίας εἰς τοὺς δύο ἀδελφούς. 'Ο Πέρσης ὅμως δὲν ἔμεινεν εὐχαριστημένος καὶ κατέφυγεν εἰς τὰ δικαστήρια. Δικασταὶ ἐν προκειμένῳ ἦσαν οἱ ἄρχοντες τῆς Βοιωτίας, τοὺς ὁποίους ὁ 'Ησίοδος ὀνομάζει βασιλῆας, δωροφάγους. Ἔφαγον δηλ. δῶρα ἀπὸ τὸν Πέρσην καὶ ἐξέδωκαν ἀπόφασιν, διὰ τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς κληρονομίας ἐδίδετο εἰς τὸν Πέρσην.

Τὴν ἀδικίαν αὐτὴν ἀπὸ τοὺς δωροφάγους βασιλεῖς τῆς Βοιωτίας περιγράφει ὁ 'Ησίοδος εἰς τὸ μνημονευθὲν ποίημά του «Ἔργα καὶ 'Ημέραι». Κατὰ τὴν παράδοσιν ὁ Πέρσης ἦτο σπάταλος καὶ ἐντὸς μικροῦ χρονικοῦ διαστήματος κατεσπατάλησε τὴν κληρονομίαν καὶ ὁ 'Ησίοδος, λαβὼν τὰ ὀλιγώτερα ἐκ τῆς κληρονομίας, ἠναγκάσθη νὰ τρέφῃ τὸν ἀδελφόν του, ὁ ὁποῖος ἔλαβε τὰ περισσότερα. 'Εὰν ἡ κληρονομία ἀπετελεῖτο ἀπὸ τρία μέρη ὁ Πέρσης ἔλαβε τὰ δύο καὶ ὁ 'Ησίοδος τὸ ἕν. Μετὰ τὴν σπατάλην ὅμως τοῦ Πέρσου, τὸ ἓν μέρος τοῦ 'Ησιόδου ἔτρεφε τὸν Πέρσην τὸν λαβόντα τὰ δύο μέρη. 'Οπότε βέβαια, τὸ ἥμισυ εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τοῦ ὅλου.

Ἀλλὰ καὶ ἄλλαι παρατηρήσεις σημειοῦνται ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ἐκ τῆς δημιουργίας τῆς λεγομένης Συμβολικῆς καὶ τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς. Λέγουν λοιπόν, ὅτι ἡ Λογικὴ εἶναι μία, ἰσχύουσα δι' ὅλας τὰς ἐπιστήμας, ὡς διετύπωσεν αὐτὴν ὁ Ἀριστοτέλης, καὶ ὅτι ἂν ὑπάρχῃ Συμβολικὴ Λογικὴ καὶ Μαθηματικὴ Λογική, θὰ πρέπῃ νὰ ὑπάρχῃ καὶ Φυσικὴ Λογική, καὶ Φιλολογικὴ Λογική, καὶ Θεολογικὴ Λογική, καὶ Φαρμακευτικὴ Λογικὴ καὶ τὰ τοιαῦτα. Οὐδὲν ὅμως ἀκούεται περὶ τῆς ὑπάρξεως τοιούτων Λογικῶν!

ΜΙΑ ΚΡΙΤΙΚΗ

Ἀφορμὴν λαμβάνων ἀπὸ τὰς ἀποκληθείσας μὴ Εὐκλειδείους γεωμετρίας ὁ Ἄγγλος σὲρ Edmund Whittaker ἐδημοσίευσεν ἐν Ἀγγλίᾳ, μετὰ τὸ 1947, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὸν Ἔντινγκτον» βιβλίον του (From Euclid to Eddington), τὸ ὁποῖον ἀνεδημοσιεύθη ἐν Νέᾳ Ὑόρκῃ (Dover publications. Inc. N.Υ. N.Υ.).

Ἐν πρώτοις προκαλεῖ ἐντύπωσιν, ἡ ὑπὸ τοῦ σὲρ Whittaker θεώρησις τοῦ σὲρ Eddington (1882 - 1944), ὡς ἐπιστημονικοῦ σταθμοῦ τῆς ἀνθρωπότητος, θεώρησις, ἡ ὁποία θεωρεῖται πολὺ τολμηρά. Ἐὰν ἔζῃ σήμερον ὁ ἀείμνηστος πρόγονος ἡμῶν Αἴσωπος θὰ παρέπεμπεν ἐν προκειμένῳ τὸν σὲρ Whittaker εἰς τὸν μῦθον του « Κώνωψ ἐπὶ κέρατος βοός» ὅπου διαβάζομεν «οὔτε ὅτε ἦλθες ἔγνων, οὔτε ἐὰν μένῃς μελλήσει μοι». Καὶ κατ' ἄλλην διατύπωσιν τοῦ μύθου «ἀλλ' οὔτε ὅτε ἦλθες ἔγνων, οὔτε ἐὰν ἀπέλθῃς γνώσομαι» (Κώνωψ καὶ ταῦρος, 140, Hausrath, Λειψία 1957, Teubner).

Ἄλλη παρατήρησις ἐπὶ τοῦ βιβλίου τοῦ σὲρ Whittaker, ἀποκαλύπτει τὴν ἀμάθειαν αὐτοῦ, ὅταν οὗτος ἰσχυρίζεται, ὅτι: «τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, προφανῶς δὲν ἔχουν καμμίαν ἀπαίτησιν νὰ θεωρηθοῦν ὡς καθαρὸν λογικὸν σύστημα» (a fact which obviously destroys any claim of the work to be a purely logical system, p. 23,10). Καὶ κατωτέρω ὁ αὐτὸς συγγραφεὺς προσθέτει: «Σήμερον γνωρίζομεν καλύτερα: ἡ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου οὔτε εἶναι ἀναγκαία, οὔτε εἶναι παγκοσμίως ἀληθής, ἐν τῇ ἐννοίᾳ τὴν ὁποίαν κατέδειξα». (We now know better: Euclidean geometry is neither necessary, nor is it universally true in the sense I have indicated, P. 31, 21).

Αἱ ἀνωτέρω ἀτυχεῖς διατυπώσεις τοῦ σὲρ Whittaker ἐξήγειρον καὶ τὸν Γερμανόν, ἐν Βερολίνῳ καθηγητὴν κ. Herbert Meschkowski, ὁ ὁποῖος ἀπαντᾷ: «Σήμερον ἔχομεν προχωρήσει ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Παρὰ ταῦτα ὅμως, φαίνεται τελείως ἀδικαιολόγητον, ὅταν εἰς ἓν σύγχρονον ἔργον περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἐννοίας τοῦ χώρου, γίνεται κριτικὴ τοῦ Εὐκλείδου, ἡ ὁποία συνοψίζεται ὡς ἑξῆς:

«Οὕτω τὸ ἔργον τοῦτο χάνει κάθε ἀξίωσιν νὰ ἐκληφθῇ εἰς τὰ σοβαρὰ ὡς ἐπιστημονικόν». (Wir sind heute weiter als Euklid. Trotzdem scheint es durchaus unberechtigt, wenn in einem modernen Werk über die Entwicklung des Raumbegriffs die Kritik an Euklid so zusammengefasst wird: «Damit verliert dieses, Werk jeden Ansprush, wissenschafltich ernst genommen zu werden» (Herbert Meschkowski, Wandlungen des mathematischen Denkens, Vieweg, Braunschweig 1960, p. 6).

Θυμηδίαν προκαλεῖ ἀκόμη καὶ μία εἴδησις[1] δημοσιευομένη εἰς τὸ σχολικὸν περιοδικὸν τῆς Ἀμερικανικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας τοῦ τεύχους μηνὸς Σεπτεμβρίου 1974, ὅπου ὁ R. Kapadia γράφει ὅτι «Ὁ Εὐκλείδης ἦτο εἷς Αἰγύπτιος Bourbaki[2])» δηλ. ἀνύπαρκτον πρόσωπον! Ὁ Kapadia λέγει εἰς τὸ ἄρθρον αὐτό, ὅτι τοῦτο συνάγεται ἀπὸ μίαν διάλεξιν τοῦ καθηγητοῦ Zeeman, μὲ τὸ θέμα αὐτὸ περὶ Εὐκλείδου, γενομένην εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Nottingham, U.S.A. (Mathematics in School, September 1974, American Mathematical Society).

ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΠΗΧΗΣΙΣ

50. Αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι παρέσχον ἀφορμὴν εἰς τὸν Γάλλον μαθηματικὸν - φιλόσοφον, Ἰούλιον Ταννερὺ (Jules Tannery) νὰ γράψῃ μερικὰς σκέψεις, τὰς ὁποίας ἀποδίδομεν κατωτέρω μὲ μερικὰς παραλλαγάς. (Science et Philosophie, Paris 1934 Kap. 9).

«Πόσον θὰ εἴχομεν νὰ ὠφεληθῶμεν, ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπαναφέρωμεν ἐκ τοῦ Ὑπερπέραν τὸν Εὐκλείδην μεταξύ μας. Ὁ Ζεύς, πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε κατὰ τὸν Ὅμηρον, ἤκουσε εὐμενῶς τὴν παράκκλησιν αὐτὴν τῶν ἀνθρώπων καὶ ἔδωκε τὴν ἄδειαν εἰς τὸν Εὐκλείδην, νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν γῆν. Ὡς συνοδόν του ὥρισε τὸν Ἑρρῖκον Πουανκαρέ. Ὁ Εὐκλείδης ἀκολουθῶν τὴν γεωμετρίαν του ἔφθασεν ἐκ τοῦ οὐρανοῦ εἰς τὸ Βερολῖνον ἀστραπιαίως, ὅπου τὸν ὑπεδέχθησαν μὲ μεγάλον ἐνθουσιασμόν. Τοῦ ἐνεχείρισαν ἐκεῖ τηλεγράφημα ἐκ Σπάρτης τοῦ κ. Βούρβαχη διὰ τοῦ ὁποίου παρεκαλεῖτο ὁ Εὐκλείδης νὰ μὴ ἀνακοινώσῃ ὅτι ἀφίχθη ἐκ τοῦ οὐρανοῦ ἀστραπιαίως, διότι τοῦτο ἀπαγορεύεται ὑπὸ τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητος. Ἐν τῷ μεταξὺ ὁ Πουανκαρέ, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἀναλάβει τὸ ταξίδιόν του πρὸς τὴν γῆν μὴ εὐκλειδείως, εἶχε φθάσει εἰς τὸ νεφέλωμα τῆς Ἀνδρομέδας, καίτοι οὗτος κατὰ τὸ διάστημα τῆς πρώτης του ζωῆς εἶχε δηλώσει, ὅτι ἡ εὐκλείδειος καὶ αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι εἶναι ἰσότιμοι. Ὁ Εὐκλείδης ἀνεκηρύχθη ὑφ' ὅλων τῶν Κρατῶν Γενικὸς Ἐπιθεωρητὴς τῶν Μαθηματικῶν καὶ μετέβη εἰς τὴν Λειψίαν, ὅπου ἐπρομηθεύθη παρὰ τοῦ ἐκδοτικοῦ οἴκου B. G. Teubner τὸ πολύτιμον ἔργον τοῦ I. L. Heiberg (Χάϊμπεργκ) «Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου». Μὲ ἐφόδιον τὸ ἔργον αὐτὸ μετέβη εἰς τὴν πόλιν

1. Ἡ εἴδησις ἀνεκοινώθη εἰς ἡμᾶς ὑπὸ τοῦ ἐν Χαλκίδι διακεκριμένου μαθηματικοῦ κ. Δημητρίου Ν. Βάθη.

2. Ψευδώνυμον ὁμάδος Γάλλων μαθηματικῶν ἐν Παρισίοις.

Γκαίττιγκεν τῆς Γερμανίας, ὅπου ἐπληροφορήθη διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν. Μὲ ἱκανοποίησιν ἔλαβεν γνῶσιν, ὅτι ὁ Gauss ἀπέσχε τῶν μὴ Εὐκλειδείων αὐτῶν γεωμετριῶν ἐκ τοῦ φόβου τῶν κραυγῶν τῶν Βοιωτῶν. Ἔμεινε πολὺ εὐχαριστημένος, ὅταν ἐπληροφορήθη, ὅτι εἰς τὸ 5ον αἴτημά του, εἶχε δοθῆ τιμητικὴ θέσις εἰς τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Hilbert καὶ εἶπε, τί θὰ συνέβαινε εἰς τὸν κόσμον, ἂν τυχὸν δὲν εἶχε δοθῆ ἡ τιμητικὴ αὐτὴ θέσις. «Θαυμάζω, εἶπεν ἔπειτα, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Dedekind - Cantor, τὴν τελείαν ἐπαγωγὴν τοῦ Pascal ἢ τοῦ Poincaré καὶ τὴν τομὴν τοῦ Dedekind, τὰ ὁποῖα ὅλα στηρίζονται εἰς τὰ Στοιχεῖά μου. Πολὺ μοῦ ἀρέσει τὸ ὄνομα «ἐξαντλητικὴ μέθοδος» τὴν ὁποίαν μὲ πολὺν κόπον ἀνεκάλυψαν, διὰ τὴν Ἀνάλυσιν τὴν περιεχομένην εἰς τὸ 12ον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ἐν τῷ μεταξὺ τὸ σύμπαν διεστέλλετο ἀδιακόπως συμφώνως μὲ τὴν μὴ εὐκλείδειον γεωμετρίαν, καὶ ὁ Εὐκλείδης εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐρωτήσῃ ποῦ τέλος πάντων κεῖται τὸ κέντρον αὐτοῦ τοῦ πάντοτε μὴ εὐκλειδείως, ἀλλὰ συνεχῶς διατεινομένου σύμπαντος; «Θὰ ἦτο πολὺ ὡραῖον, εἶπε, ἐὰν ἠδύνατο κανεὶς νὰ δώσῃ εἰς τὰ μικρὰ παιδιὰ ὡς παιγνίδια τοιαῦτα σύμπαντα εἰς ἐπαρκῆ καὶ ἀνάλογον ἀριθμόν.» Ὁ Εὐκλείδης ἦτο πολὺ ἀνήσυχος, διότι ὁ Πουανκαρὲ δὲν εἶχεν ἀκόμη φθάσει ἀπὸ τὸν οὐρανόν. «Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ αὐτό;» εἶπε. «Ἔχω ἀκούσει, ὅτι αἱ μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι ἰσχύουν ἰδιαιτέρως διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις καὶ τὰ μεγάλα τρίγωνα. Εἶμαι πολὺ εὐχαριστημένος, συνέχισε διότι οἱ πύραυλοί σας καὶ οἱ δορυφόροι σας ἵπτανται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γεωμετρίας μου. Θὰ ἦτο ἐξόχως ἐνδιαφέρον, ἐὰν κανεὶς ἦτο δυνατὸν νὰ δώσῃ εἰς τὰ ὀχήματα αὐτὰ μὴ εὐκλείδειον ταχύτητα. Εἶναι κρίμα, ὅτι οἱ κατασκευασταὶ τῶν πυραύλων καὶ τῶν δορυφόρων παραμελοῦν τὰς μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις». Ὅταν ἐδήλωσαν εἰς τὸν Γενικὸν Ἐπιθεωρητὴν τῶν Μαθηματικῶν, ὅλου τοῦ κόσμου, ὅτι ἡ σημερινὴ νεολαία μανθάνει τὴν γεωμετρίαν διὰ νὰ κερδίζῃ κάτι, ἀνεπήδησεν ἀπὸ τὸ κάθισμά του, ἤνοιξε τοὺς μεγάλους ὀφθαλμούς του, τοὺς ἔκλεισε πάλιν καὶ εἶπε μονολογῶν: Τί μεγάλαι μεταβολαὶ ἐπῆλθον τώρα εἰς τὴν ζωὴν τῶν ἀνθρώπων, ἐν ᾧ προηγουμένως ὁ ἔκλαμπρος ἥλιος τῆς Ἑλλάδος, αἱ διαυγεῖς γραμμαὶ τοῦ ὁρίζοντός της, τὸ διαρκὲς γέλοιο τῶν θαλασσῶν της, οἱ λαμπροὶ ναοί, τὰ μεγαλοπρεπῆ ἀγάλματα, οἱ ποιηταὶ καὶ αἱ φιλοσοφικαὶ συζητήσεις, τὰ πάντα τέλος προσεφέροντο διὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν νέων!

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

ἄβαξ 40 - 48
ἀβροχίτων 63
Ἀγάθαρχος 19
Ἀγαμέμνων 99
ἀγεωμέτρητος 168
Αἰσχύλος 27, 29
ἀκέραιος 65, 88, 89, 94, 104, 105
ἀκολουθία 79, 102, 106, 109, 156
Ἀκταίων 27, 28
Ἀκύλας Νικόλαος 104
Ἀλέξανδρος 27, 28
ἀλφάβητος 26, 29, 37
ἀναλογίαι 128, 129, 138 - 145
Ἀναξαγόρας 19
Ἀναξίμανδρος 81
ἀνάπτυγμα δυωνύμου 107
Ἄνδρων 27, 28
Ἀπολλώνιος Ἀρχιβίου 27, 28
Ἀπολλώνιος Μεσσήνιος 26, 28
ἀπροσδιόρ. ἀνάλυσις 86, 90, 160
Ἀρέθας 6
ἀριθμ. ἀναλογία 138, 141, 142
ἀριθμ. μέσον 115
ἀριθμ. πρόοδος 77, 103, 159
ἀριθμομηχανὴ 40, 45
Ἀριστοτέλης 16, 17, 19, 35, 61, 72, 73, 80, 167, 174
ἁρμονικὴ ἀναλογία 140 - 142
ἁρμονικὸν μέσον 115, 117
Ἀρχιμήδης 16, 18, 64, 102, 108, 118, 121, 149, 161
Ἀρχύτας 114, 115
Ἄσκρη 166
Ἀστρολογία 101, 102, 164
Ἀστρολογία 101, 102, 164
Ἀτλαντὶς 10, 12, 30
Ἀχιλλεὺς 26, 27, 104

Β

Βαγδάτη 57
Βάθης Δημήτριος 177
Βασίλειος 59
Βιέννη 52, 65
Βοιωτικὸς 29, 36
Βοιωτοὶ 27, 28, 29
βωμίσκος 146

Γ

Γεμῖνος 17
γεωμετρικὴ ἀναλογία 139, 141, 142, 144
Γκέλλιος 59
γνώμων (-ικὸς) 78, 79, 81, 82, 84, 123, 124 157
Γοργίας 6
γραμμὴ 106
Γρηγορᾶς 6
Γρηγόριος 59
γωνία 80, 82

Δ

Δάμπασης Ἰωάννης 6
δέκα ἀναλογίαι 36
δεκαδ. ἀριθμ. σύστημα 34
δεύτερον ἀριθμ. σύστημα 36 - 38
Δελφοὶ 14, 16, 53
Δευκαλίων, 10, 166
Δημόκριτος 19, 108, 171
διαγώνιος 84, 95, 112
διαδοχικοὶ ἀκέραιοι 98, 102
διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ 107, 109
δίαυλος 96, 97
Διογένης Λαέρτιος 17, 25
Διονύσιος Θρᾷξ 26, 28
διοφαντικὴ ἐξίσωσις 115, 118, 121
Διόφαντος 5, 16, 65, 95, 127, 149
δίστιχον 63
δοκὶς 146
Δοῦρις 27, 28
δραχμὴ 45 - 48
δυώνυμον 106

Ε

Ἕκτωρ 60, 100, 101
ἐλάχ. κ. πολλ/σιον 88, 89

ἐλλιπὴς 66
Ἕλληνες ἐπιστήμονες 21 - 24, 188
ἐμβαδὸν 124, 125, 145, 156
ἑξηκονταδικὸν 122, 152
ἐξίσωσις 84 - 93
ἐξωτερικὴ γωνία 118
ἐπάνθημα 84 - 87
ἔπη Ὁμήρου 13
ἐπιγράμματα 61, 62, 63
ἐπιστητὸν 169, 170
ἐπίπεδος ἀριθμὸς 145
ἑπτάγωνοι ἀριθμοὶ 79
Ἐρατοσθένης 68
Ἔργα καὶ Ἡμέραι 175
Ἑρμῆς 27
ἑτερομήκης 66, 145
Ἐτεωνεὺς 28
Εὔδημος 17, 167, 168
Εὔδοξος, 19, 169
Εὐκλείδης 5, 6, 16, 18, 19, 65, 67, 69, 71, 99, 102, 111, 115, 121, 126, 127, 174, 177, 178
Εὐτόκιος 6, 64, 121, 161, 162
Εὐφρόνιος 27

Ζ

Ζεὺς 177
ζῴδιον 101

Η

Ἡλιόδωρος 29
ἡμικύκλιον 20
ἡμιόλιον 90
Ἡρόδοτος 27, 28, 41, 165, 166
Ἡρωδιανὸς 30, 33
Ἥρων 5, 6, 16, 18, 66, 115, 116, 127
Ἡσίοδος 19, 166, 175
Ἥφαιστος 11

Θ

Θαλῆς 18, 19, 167, 168, 169
Θεαίτητος 66
Θεόφραστος 17
Θέων Ἀλεξανδρεὺς 64, 121 - 125, 149
Θέων Σμυρναῖος 5, 7, 16, 65, 67, 103, 109 - 111, 145, 149
θεώρημα 98, 136
θεωρία ἀριθμῶν 5, 17
Θῆβαι 14
~~Θουκυδίδης 34~~
Θρᾷκες 35, 36
Θυμαρίδας 5, 84, 85, 92, 93
θυμαρίδειον ἐπάνθημα 84, 87, 89
Θὼθ 27

Ι

Ἰάμβλιχος 5, 7, 16, 67, 97, 103, 105
ἰδιομήκης 145
ἰδιότης 102, 104, 105
Ἱερὰ 10, 13
Ἱερεὺς 10, 12
Ἰλιὰς 60, 61, 103
Ἰνδοὶ 56, 57
Ἱππόλυτος 99, 100 - 102
Ἰσαὰκ 158, 159
Ἰσθμία 16
Ἰσοδύναμον 104
ἰσόπλευροι τρίγ. 118
ἰσόψηφοι 61

Κ

Καγιᾶς Γεώργιος 151
Κάδμος 26, 28, 29
καμπτὴρ 96, 97
κανονικὰ πολύεδρα 61, 65
Καραμηνᾶς Γεώργιος 76
καρκινογράφημα 63
Καύκωνες 27, 29
κιονηδὸν 30
Κλήμης 60
Κλαύδιος Πτολεμαῖος 16, 18, 55, 59, 121, 122, 161
κολοσυρτὸς 33
κοσμικὰ σχήματα 65
Κριτίας 30
Κρομμυὼν 14
κυβικὴ ῥίζα 126, 127
κύβος 61, 127, 146, 156, 157
κύκλου μέτρησις 64
Κύκλωψ 63

Λ

Λέλεγες 27, 29
Λέων ϛ, 20
Λεωνίδας 61, 62
Λιβύη 11, 12
λιμὸς 60

λογιστική 6
λόγοι 128 - 132, 139
λοιμὸς 60
λύσεις 144

M

Μάγνης 6, 121
Μανῆς Γεώργιος 64
Μανιᾶς Θεοφάνης 10, 12 - 14
Μάξιμος Πλανούδης 58, 59
Μαρκιανὸς 56
Μαθημ. Σύνταξις 64
Μέγας 'Αλέξανδρος 55, 149
Μελάμπους 28
Μέναιχμος 169
Μένανδρος 28
Μενεκράτης 27, 28
Μενέλαος 16
μέσος ἀνάλογος 140
μεσότης 139
μηδὲν 55
Μιχαὴλ 59
μονὰς 61, 81, 93, 102, 103
μονόστιχον 63
Μοσχόπουλος 6
μουσικὴ ἀναλογία (-κλῖμαξ) 61, 74, 75
μουσικὸς φθόγγος 61
μυριάδες 48
μύρμηξ 63

N

Νάξος 42
Νικόδημος 63
Νικόμαχος 5, 7, 16, 65 - 67, 103, 129, 136
νύσσα 96, 97

Ξ

Ξενοφῶν 17
Ξενοκράτης 17

O

ὀβολὸς 45 - 48
'Οδυσσεὺς 63
ὀκτάβα 74, 75
ὀκτάγωνοι ἀριθμοὶ 99
Ὅμηρος 8, 19, 59, 61, 166, 167
ὀμφαλὸς 12
ὀρθὴ γωνία 82

Π

Παλαμήδης 27
Παλατίνη 'Ανθολογία 158
Παπαδᾶτος 'Ιωάννης 160
Πάππος 6, 7, 16, 121, 143, 149
Παρθενὼν 61, 76
Πάτροκλος 100, 101
Παῦλος 59
Πελασγοὶ 27
περιττὸς 35, 65, 94
Πέρσης 175
πινακὶς 149 - 151, 152
Πηνελόπη 63
πλὰξ 51 - 53
Πλανούδης 6
Πλαταιαὶ 166
Πλάτων 5, 6, 10, 16, 17, 30, 65, 66, 99, 111, 168, 171
πλευρικοὶ ἀριθμοὶ 107 - 110, 112 - 114, 118, 120
πλινθηδὸν 30
πλινθὶς 146
Πλούταρχος 6, 94, 168
Πολύβιος 41
πολύγωνοι ἀριθμοὶ 77, 103, 104, 107, 148
Πρόκλος 5, 18, 25, 110 - 112
Προμηθεὺς 26, 28, 29
προμήκης 66, 145
Προναπίδης 27, 28, 29
Πρόναπος 27
Πρωταγόρας 19
Πτολεμαῖος Κλαύδιος 16, 18, 55, 59, 121, 122, 161
Πυθαγόρας 5, 27, 63, 65, 72, 73
Πυθαγόρειοι 35, 61, 63, 65, 67, 76, 97, 152, 153, 158
πυραμοειδὴς 107
πυραμὶς 147

P

'Ραβδᾶς 6
'Ραδάμανθυς 27, 28
'Ραφαὴλ 64
ῥόμβος 118 - 120
'Ρωμαῖοι 37

Σ

Σελευκίδαι 149

Σέξτος 'Εμπειρικὸς 19, 20, 171
Σερῆνος 16
σημεῖον 171
Σίσυφος 27
Σόλων 10 - 12, 30, 31, 41
Σούνιον 16
σπειρηδὸν 30
Σπεύσιππος 17
Στενογραφία 51, 52
στερεοὶ ἀριθμοὶ 146
στήλη 44 - 51
Στοιχεῖα Εὐκλείδου 5 - 7, 18
συμβολισμὸς ἀριθμῶν 33, 34
συνάρτησις 103
συρφετὸς 33
σύστημα γραφῆς 31
συντελεσταὶ 107
σφηνίσκος 146
Σωκράτης 17, 19

Τ

τάλαντον 41, 43, 45, 47, 48
τέλειοι ἀριθμοὶ 67
τετραγωνικὴ 'ρίζα 121, 122, 126
τετράγωνοι ἀριθμοὶ 66, 78, 79, 82, 94, 95, 98, 102, 104, 110, 111, 148, 149
τετρακτὺς 73, 74
Τεχνικὸν 'Επιμελητήριον 'Ελλάδος 149
Τζέτζης 168
Τίρυνς 166
τρίγωνον 95, 96
Τροία 166

Υ

ὑπεναντία 142, 143
ὑπερτελὴς 66
ὑπόλοιπον 123, 125, 160
ὕσπληγξ 96, 97

Φ

φᾶρος 63
φθόγγος 76, 77
φίλοι ἀριθμοὶ 72
Φοινίκεια 27
Φοίνικες 26, 29
Φοῖνιξ 27
φράγμα 110
φύσεως εὑρήματα 30
φυσικοὶ ἀριθμοὶ 106
φωνίκεια 27

Χ

Χαλκὶς 14, 37, 177
χαλκοῦς 46, 48
Χίλμπερτ 169, 172 - 174
χλαῖνα 63
χρῆσις ἄβακος 44
χρυσῆ τομὴ 12, 16, 30
Χρυσόστομος 59
χῶρος 171

Ψ

Ψελλὸς 6
ψῆφος 33, 41, 45, 46, 48
ψυχολογία 34

al Mansur 57
al Mamun 57
Amer. Math Soc. 177

Balss 25
Ben Musa 57
Bachmakova, Is. Gr. 107
Bernays 174
Boethius 115, 129
Bourbaki 177

Cantor 25, 178

Dedekind 178
Diksterhuis 107

Engelhardt 10
Euler 69, 73

Fermat 68, 69
Fibonacci 6
Fichter 10
Fregge 173
Freudenthal 56

Gardner 72
Gauss 178
Gellius 59
Giltbauer 52
Gomberz 52

Heath 25
Heiberg 25, 177

Hilbert 169, 172, 173, 178
Hofmann 25, 152
Holzhausen 7
Hoppe 25
Hultsch 111, 143
Hunger 7

Jammer 171

Kant 168
Kapadia 177
Kaye 55
Kroll 111
Kronecker 69

Larfeld 36, 53
Leibniz 107
Lobkowitz 36
Loria 105
Lucas 69

Mersenne 69, 70
Meschkowski 177
Michel 25
Mugler 107, 166

Newton 107
Neugebauer 152

Pape - Benselez 25
Pascal 36, 106, 178
Pauly - Wissowa 25
Poincaré 178
Prestet 67

Schöne 5
Scriba 152
Seelhof 57
Spengel 27
Stiefel 38
Simon 107
Steck 10

Tannery 6, 177
Tóth 175
Tropfke 38, 57, 58

Uhlig 26

Viète 6, 20
Vogel 6, 7, 149

Waerden 56, 57, 167
Wallis 107, 108
Wertheim 127
Wessely 54
Whittaker 176
Wilson 69

Zeeman 177
Zeuthen 107

Σημ. Τὰ πλεῖστα τῶν ὀνομάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐπιστημόνων ἐλήφθησαν ἐκ τῆς ἐρεύνης 1710 σελίδων τοῦ διτόμου γερμανικοῦ λεξικοῦ τῶν κυρίων ὀνομάτων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, W. Pape - G. Benseler, Griechische Eigennamen, ἐκδ. Friedr. Vieweg, Braunschweig 1911, ἀνατύπωσις Akademische Druck - u. Verlagsanstalt, GRAZ 1959.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Ἀναργύρου Ν. Ἀκύλα:* Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοί, Ἀθῆναι 1966.
2. *Α. Σ. Ἀναστασιάδου:* Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις Ἕλλησι, Ἀθῆναι 1929.
3. *Κων. Εὐ. Γκίκα:* Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι 1971
4. *Χρ. Γκλαβᾶ:* Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, Ἀθῆναι 1973.
5. *Παναγιώτη Χ. Δαμάσκου:* Κύκλος - Εὐθεῖα, Ἀθῆναι 1972.
6. *Δημητρίου Θ. Δημαρᾶ:* Φιλοσοφία τῆς Μαθηματικῆς, κλασσικῆς καὶ συγχρόνου, ἔκδοσις τρίτη, ἐκδόσεις «Δωδώνη», Ἀθῆναι 1975.
7. *Παναγιώτου Σ. Ζερβοῦ:* 1. Σχέσις τῶν μαθηματικῶν μὲ τὰς λοιπὰς ἐπιστήμας καὶ τὴν φιλοσοφίαν, Δελτίον Ε.Μ.Ε., Μάιος 1919, Ἀθῆναι.
   2. *Φιλοσοφία καὶ ἐπιστήμη.* Ἀναδημοσίευσις εἰς τὸ βιβλίον Σπυρίδωνος Π. Ζερβοῦ: Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ Νεώτερα Μαθηματικά, Β′ ἔκδ. Ἀθῆναι 1972.
8. *Χαρικλείας Π. Ζερβοῦ:* Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν μελέτην τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς ποιήσεως, ἔκδ. Ἀ. Καραβία, Ἀθῆναι 1974.
9. *Σπυρίδωνος Π. Ζερβοῦ:* Στοιχειώδης εἰσαγωγὴ σὲ ἔννοιες καὶ προβλήματα τῆς θεμελιώσεως τῆς Λογικῆς καὶ τῶν Μαθηματικῶν, περιοδικὸν «Ὁ Ἑλληνικὸς Λόγος», διπλοῦν τεῦχος 8-9, Ἀθῆναι 1973.
10. *Δημητρίου Ν. Κορδῆ:* Ὁ Πυθαγόρειος πίναξ ὡλοκληρωμένος, Ἀθῆναι 1973.
11. *Μιχαὴλ Κ. Κωβαίου:* Ἱστορία τῆς ἀριθμήσεως. Ἐγκυκλοπαιδικὸν περιοδικὸν «Ἥλιος» ἀριθμ. 147, 148 (1946), 173, 174, 175 (1947), 423 (1952), Ἀθῆναι.
    2. *Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδη,* σὰν σχολικὸ βιβλίο, ἄλλοτε καὶ σήμερα, περιοδικὸν «Παιδεία καὶ Ζωή», τεῦχος 2, Ἀθῆναι 1952.
12. *Διον. Ἰ. Λιβέρη:* 1. Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου, Ἀθῆναι 1969.
    2. Θεωρητικὴ γεωμετρία, τρίτη ἔκδοσις, Ἀθῆναι 1974.
    3. Στερεομετρία, ἐνάτη ἔκδοσις, Ἀθῆναι 1969.
    4. Ἀκέραιαι λύσεις, τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $x^3 + y^3 + t^3 + f^3 = 0$, Ἀθῆναι 1974.
13. *Παναγιώτου Ν. Μάγειρα:* 1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Ἀριθμοθεωρίαν μέρος Α′, Ἀθῆναι 1964.
    2. Εἰσαγωγή εἰς τὴν Ἀριθμοθεωρίαν, μέρος Β′, Ἀθῆναι 1965.
14. *Δρος Θεοφάνη Ν. Μανιᾶ:* Ἄγνωστα μεγαλουργήματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, Ἀθῆναι 1972.
15. *Νικολ. Δ. Νικολάου:* Θεωρητικὴ Ἀριθμητική, Ἀθῆναι 1954.
16. *Ἀριστείδου Πάλλα:* 1. Μεγάλη Γεωμετρία, Ἀθῆναι 1971.
    2. Μεγάλη Ἄλγεβρα, τόμοι τρεῖς, Ἀθῆναι 1971.
17. *Θεωδώρου Πασσᾶ:* Περὶ τῶν ἀξιωμάτων τῆς Εὐκλειδείου γεωμετρίας, Δελτίον τῆς Ε.Μ.Ε. τόμ. ΙΕ′, τεῦχος Γ′, Ἀθῆναι 1935.
18. *Γ. Ι. Πρωτοπαπᾶ:* Ἄλγεβρα 3. Ἀθῆναι 1973.
19. *Βίκτωρος Δημοσθένους Τζάθα:* 1. Περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκεραίων δυνάμεων τῶν ὅρων ἁρμονικῆς καὶ ἀριθμητικῆς προόδου, Κορωπὶ 1970.
    2. Περὶ τῶν ἀπείρων συμμέτρων λύσεων τῶν ἐξισώσεων 1) $\varphi^2 - \lambda\omega^2 = \alpha^2 - \lambda\beta^2$, 2) $\varphi^2 - \omega^2 = 2\alpha - 1$, κλπ. Κορωπὶ 1975.
    3. Περὶ ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως $\chi_1^3 + \lambda\chi_2^3 = \alpha_1^3 + \lambda\alpha_2^3$ κλπ. Κορωπὶ 1975.

20. Isab. Gr. Bachmakoba: ДИОФАНТ АРИФМЕТИКА, Mockba 1974, (Ἰσαβέλλα Γρ. Μπαχμάκοβα: Διοφάντου Ἀριθμητικά, Μόσχα 1974).
21. *H. Beckby: Anthologia Graeca*, vol. I - IV, Ed. Heimeran, München 1957-58.
22. *Helmuth Gericke:* Geschichte des Zahlbegriffs, Bibl. Inst. Mannheim 1970.
23. *G. Loria:* Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν I, μετάφρασις ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ ὑπὸ Μ. Κωβαίου, ἐκδ. Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, Ἀθῆναι 1974.
24. *Paul-Henri Michel:* De Pythagore à Euclide, Les Belles Lettres, Paris 1950.
25. *Gharles Mugler:* Dictionnaire historique de la terminologie géométrigue des Grecs, Gauthier - Villars, Paris 1958.
26. *G.H.F. Nesselmann:* Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, Minerva, Frankfurt 1969.
27. *Argyris Petronotis:* Zum Problem der Bauzeichnungen bei den Griechen, Dodona Verlag, Athen 1972.
28. *Paul-Tannery:* Mémoires scientifiques III-IV, Toulouse-Paris 1915-1920.
29. *Otto Toeplitz:* Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Springer, Berlin 1949.
30. *Ivor Thomas:* Greek Mathematics I, II. Heinemann, London 1957.
31. *Imre Tóth:* Das Parallelenproblem im corpus Aristotelicum 17. Archiv Hist. Exact Sci. vol. 3.
32. *Kurt Vogel:* Der Anteil von Byzanz an Erhaltung und weiter Bildung der griechischen Mathematik. Miscellanea mediaevalia Band 1, Antike und Orien, im Mittelalter, Ed. W. de Gruyter, Berlin 1962.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

1. Ἀρχιμήδους Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, Ἀθῆναι, 1946.
2. Ἀρχιμήδους Μηχανικὰ α', Ἀθῆναι, 1946.
3. Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, Ἀθῆναι, 1949.
4. Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις, Ἀθῆναι, 1950.
5. Εὐκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλία I - IV, Ἀθῆναι, 1952.
6. Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. Βιβλία V-IX, ΟΕΣΒ, Ἀθῆναι, 1953.
7. Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικά, Ἀθῆναι, 1956.
8. Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχ. Βιβλίον X, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι, 1957.
9. Εὐκλείδου Στερεομετρία, Στοιχείων Βιβλ. XI - XIII, ΟΕΣΒ, Ἀθῆναι, 1957.
10. Διοφάντου Ἀριθμητικά. ΟΕΔΒ, Ἀθῆναι, 1963.
11. Αἱ ἐπιστῆμαι ἐν Ἑλλάδι, Ἐγκυκλ. Πάπυρος-Λαρούς. Τόμος Ἑλλάς, σελ. 382-399. Ἀνάτυπον, Ἀθῆναι, 1966.
12. Προσωκρατικοὶ Φιλόσοφοι, Ἀθῆναι, 1966.
13. Ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπιστήμη, Ἀθῆναι, 1968.
14. Euclides I, Elementa I-IV, B. G. Teubner, Λειψία, 1969.
15. Euclides II, Elementa V-IX, B. G. Teubner, Λειψία, 1970.
16. Euclides III, Elementa X, B. G. Teubner, Λειψία, 1972.
17. Euclides IV, Elementa XI-XIII, B. G. Teubner, Λειψία, 1973.
18. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, Τόμος Α', Μέρη 2, ἔκδοσις Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι, 1970.
19. Archimedis Opera Omnia, Vol. I, II, III, Ed. Iohan Ludwig Heiberg Corrigenda Adiecit Evangelos S. Stamatis, Στουτγάρδη, B. G. Teubner, 1972.
20. Ἐπιστημονικαὶ ἐργασίαι - ἄρθρα, Τόμος Α', Ἀθῆναι, 1972.
21. Ἐπιστημονικαὶ ἐργασίαι - ἄρθρα, Τόμος Β', Ἀθῆναι, 1973.
22. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, Τόμος Β', ἐκδ. Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι, 1973.
23. Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, Τόμος Γ', ἐκδ. Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι, 1974.
24. Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, εἰς τὸ μηνιαῖον περιοδικὸν τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας «Ὁ Εὐκλείδης» ἀπὸ τὸ 1968-1974. (Κατ' ἐκλογήν, τὸ παρόν).
25. Ἀπολλωνίου Κωνικά, Τόμος Α', ἐκδ. Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι, 1975.
26. Ἀπολλωνίου Κωνικά, Τόμος Β', ἐκδ. Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθῆναι, 1976. Οἱ τόμοι Γ' καὶ Δ' εὑρίσκονται ὑπὸ ἐκτύπωσιν.

ΠΡΟΣΘΗΚΗ

Εἰς τὸν κατάλογον τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων τῆς ἀρχαιότητος τοῦ κεφ. 4.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

1. Θεαγένης 5 αἰὼν π.Χ.
2. Καλλίστρατος 4 π.Χ.
3. Μνασέας ἐκ Κερκύρας (ἀστρον.) 4 π.Χ.
4. Πολύειδος (μηχανικὸς) 4 π.Χ.
5. Φιλέας ὁ Ταυρομένιος (μηχ.) 4 π.Χ.
6. Λεόντιος 4 π.Χ.
7. Λεπτίνης 4-3 π.Χ.
8. Σεραπίων 2 π.Χ.
9. Βόηθος 1-2 μ.Χ.
10. Ἑρμείας 1-2 μ.Χ.
11. Νίκων, πατὴρ τοῦ ἰατροῦ Γαληνοῦ 1-2 μ.Χ.

ΜΟΥΣΙΚΟΙ

1. Ἄνθης, ἐξ Ἀνθηδόνος Θηβῶν 15 αἰ. π.Χ.
2. Χείρων, διδάσκαλος τοῦ Ἀχιλλέως εἰς τὴν μουσικὴν 12 π.Χ.
3. Φήμιος, τῶν Ἀνακτόρων τοῦ Ὀδυσσέως 12 π.Χ.
4. Προναπίδης ὁ Ἀθηναῖος, διδάσκαλος τοῦ Ὁμήρου εἰς τὴν μουσικὴν 11-10 π.Χ.
5. Ὕαγνις 8 π.Χ.
6. Μαρσύας 8 π.Χ.
7. Πίερος ἐκ Πιερίας 8 π.Χ.
8. Λᾶσος ὁ Ἑρμιονεύς 7 π.Χ.
9. Ἴων 7 π.Χ.
10. Τόρηβος 6 π.Χ.
11. Διονύσιος ὁ Θηβαῖος 6 π.Χ.
12. Μελανιππίδης 6 π.Χ.
13. Φίλλις ὁ Δήλιος 6 π.Χ.
14. Παγκράτης 5 π.Χ.
15. Στησίχορος ὁ Ἱμεραῖος 5 π.Χ.
16. Τυρταῖος ὁ Μαντινεύς 5 π.Χ.
17. Ἀνδρέας ὁ Κορίνθιος 5 π.Χ.
18. Ξάνθος ὁ Ἀθηναῖος 5 π.Χ.
19. Ὀρθαγόρας ὁ Θηβαῖος, διδάσκαλος τοῦ Ἐπαμεινώνδου εἰς τὴν μουσικὴν 5 π.Χ.
20. Ἀντιγενίδης ὁ Θηβαῖος, διδάσκαλος τοῦ Ἀλκιβιάδου εἰς τὴν μουσικὴν 5 π.Χ.
21. Φιλόξενος ἐκ Κυθήρων 5-4 π.Χ.
22. Ἀλέξανδρος ἐκ Κυθήρων 5-4 π.Χ.
23. Δημόκριτος ὁ Χῖος 5-4 π.Χ.
24. Ἱππῶναξ 4 π.Χ.
25. Κηπίων 4 π.Χ.
26. Πύθων 4 π.Χ.
27. Ἀρχύτας ὁ Μυτιληναῖος 4 π.Χ.
28. Ἀγήνωρ ὁ Μυτιληναῖος 4 π.Χ.
29. Διοκλῆς 4 π.Χ.
30. Δημόδικος ὁ Κερκυραῖος 4 π.Χ.
31. Ἀγίας ὁ Ἀθηναῖος 4 π.Χ.
32. Ἀκύλας 4 π.Χ.
33. Ἀριστοκλῆς 4 π.Χ.
34. Ἀριστοκράτης 4 π.Χ.
35. Ἀλκείδης 2 μ.Χ.

(Σημείωσις. Αἱ χρονολογίαι μερικῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀνομάτων ἐτέθησαν κατὰ προσέγγισιν, διότι οἱ συγγραφεῖς ἐκ τῶν ὁποίων ἐλήφθησαν τὰ ὀνόματα αὐτὰ δὲν ἀναφέρουν χρονολογίας).

Εἰς σελ. 24

37. Πυθοκλείδης, διδάσκαλος τοῦ Περικλέους εἰς τὴν μουσικὴν
42. Λάμπρος, διδάσκαλος τοῦ Σωκράτους εἰς τὴν μουσικὴν

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

σελὶς

Προλεγόμενα 5
1. Τὰ μαθηματικὰ τῶν Ἑλλήνων. Αἱ πρῶται πηγαὶ 9
2. Αἱ ἔρευναι τοῦ Θ. Μανιᾶ 12
3. Τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν Ἑλλήνων 16
4. Ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐπιστήμονες 18
5. Τὰ σύμβολα διὰ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου 26
6. Οἱ ἀρχικοὶ τρόποι γραφῆς τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων 30
7. Τὸ δεκαδικὸν ἀριθμητικὸν σύστημα 35
8. Τὸ δεύτερον ἀριθμητικὸν σύστημα. Μονάδες βάρους καὶ νομισμάτων 36
9. Ὁ ἄβαξ. ἡ πρώτη ἀριθμομηχανὴ τοῦ κόσμου 41
10. Ὁ ἄβαξ τῆς Σαλαμῖνος 43
11. Ἡ χρῆσις τοῦ ἄβακος 44
12. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον στενογραφίαν 51
13. Ἡ προέλευσις τῶν συγχρόνων συμβόλων τῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύμβολον διὰ τὸ μηδέν. 55
14. Τὰ μαθηματικὰ τοῦ Ὁμήρου 59
15. Πυθαγόρας καὶ Πυθαγόρειοι 63
16. Τέλειοι ἀριθμοὶ 67
17. Φίλοι ἀριθμοὶ 72
18. Αἱ τετρακτύες τῶν Πυθαγορείων καὶ ἡ Πυθαγόρειος μουσικὴ κλῖμαξ 73
19. Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ 77
20. Οἱ τρίγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι γεωμετρικῶς 79
21. Οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι γεωμετρικῶς 81
22. Οἱ πεντάγωνοι ἀριθμοὶ θεωρούμενοι γεωμετρικῶς 83
23. Τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα 84
24. Τὸ θυμαρίδειον ἐπάνθημα (συνέχεια) 90
25. Μία πρότασις ἐκ τοῦ Ἰαμβλίχου 94
26. Μερικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων ἀριθμῶν 94
27. Οἱ πυθμένες 99
28. Μία ἰδιότης τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν 102
29. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν πολυγώνων ἀριθμῶν εἰς τὴν Μαθηματικὴν Ἀνάλυσιν ... 106
30. Πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ 108
31. Ἡ θεωρία τοῦ Ἀρχύτου 114
32. Οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ διὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3 118
33. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ 121
34. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ 126
35. Λόγοι καὶ ἀναλογίαι. Οἱ ὁρισμοὶ τοῦ Εὐκλείδου 128
36. Οἱ λόγοι εἰς τὸν Νικόμαχον καὶ θεωρήματα γεωμετρικῶν προόδων 129
37. Αἱ ἀναλογίαι 138
38. Αἱ δέκα ἀναλογίαι κατὰ τὸν Νικόμαχον 142
39. Αἱ δέκα ἀναλογίαι κατὰ τὸν Πάππον 143
40. Ἡ ὀνομασία διαφόρων ἀριθμῶν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα 145

41. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν 149
42. Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν 156
43. Ἀριθμητικὰ προβλήματα 158
44. Αἱ τέσσαρες πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς 161
45. Τὰ μαθηματικὰ ὑπὸ διωγμὸν 164
46. Αἱ ἀρχαὶ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας 165
47. Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ μαθηματικὰ ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων 167
48. Ἡ προσπάθεια τοῦ Δαβὶδ Χίλμπερτ διὰ τὴν κατάργησιν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας 172
49. Αἱ λεγόμεναι μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι 174
50. Καὶ μία ἀπήχησις 177
51. Εὑρετήριον 179
52. Βιβλιογραφία. 185
53. Ἔργα τοῦ αὐτοῦ 187
54. Προσθήκη 188

Τύποις: 'Αδελφῶν Γ. ΡΟΔΗ, 'Αμαρουσίου - Χαλανδρίου 59 — 'Αμαρούσιον

Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ