EVANGELOS S. STAMATIS

REPRINTS

ATHENS 1978

EVANGELOS STAMATIS

1

ON BOOK X OF EYCLID'S ELEMENTS

ΠΛΑΤΩΝ
ΕΤΟΣ ΙΑ'—ΤΕΥΧΟΣ Β' 1959

EVANGELOS STAMATIS *

ON BOOK X OF EYCLID'S ELEMENTS

A' INTRODUCTION

A1. Book X of Euclid's Elements was regarded and really is the most difficult Book of the Elements. The Dutch mathematician Simon Stevin (1548 - 1620) named it as «the cross of martyrdom of the mathematicians», while the French mathematician Jean Montucla (1725 - 1799) doubts, whether in his epoch would be a geometrician who would dare to follow Euclid in the dark dedale of his Book X[1]. Most of the modern interpreters arrive at the conclusion that the purpose of this Book is to solve certain type of biquadratic and quadratic equations[2]. Cl. Thaer believes that the purpose of the Book X is the thorough investigation of incommensurable straight lines which gives a solid basis to the theory of regular polyhedrons[3].

It is true that out of the twelve irrational straight lines of Book X (theorems 36 - 41, 73 - 78) the six former are sums of the positive roots of equal in number of biquadratic equations, while the six latter are differences of the positive roots of the same biquatratic equations. It is also true that the irrational straight lines of theorems 48 - 53 and 85 - 90 are the six former sums of the positive roots of six quadratic equations, while the six latter differences of the roots of the same equations. This observation does not necessarily mean that the purpose of book X is to solve certain type of equations. Book VI of Euclid's Elements serves to solve the most difficult type of quadratic equations—the elleptical equations (VI, 28). The solution of the biquadratic equations met in Book X is mainly based on the solution of quadratic equations of a simplest type.

Besides in Book XIII of Elements (th. 6, 11, 16, 17) the following propositions are proved.

---

* Proceedings of the Akademie of Athens 32 (1957), 251 - 266).

[1] Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 444 publ. by Le Belles Lettres, Paris 1930.

[2] Thomas Heath, A History of Greek Mathematics I, p. 402, Oxford 1921.

[3] Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, p. 103, Leipzig 1936.

1. If a commensurable straight line is divided in extreme and mean ratio each of the parts of the straight line is an apotome (X, 73).

2. If the diameter of a circle is rational the side of the inscribed regular pentagon is minor (X, 76).

3. The side of a regular icosahedron is minor (X, 76).

4. The side of a regular dodecahedron is an apotome (X, 73).

Even these do not lead to the conclusion that the purpose of Book X is the investigation of the incommensurable straight lines, granding a basic step to the theory of regular polyhedrons, because out of the relative theorems the 6th and 11th are preparatory for the proof of the second part of theorems 16 and 17. The theory of regular polyhedrons would not be influenced even if the second part of theorems 16 and 17 missed.

A2. In my opinion the purpose of Bock X of Euclid's Elements is to demonstrate the symmetry which exists in the construction of a right triangle, when the most simple irrational straight lines are used. From the interpretation of the most important theorems of Book X, quoted below, the point of view supported by me is quite right.

B'

We begin with the definition of certain terms.

1. «Commensurable» magnitudes are these having the same measure; «incommensurable» magnitudes are those having no common measure.

2. Two commensurable magnitudes have to one another the ratio of one number to another. The incommensurable magnitudes do not hane to one another the ratio of one number to another (X, 6 7).

3. A straight line regarded as measure is rational.

4. Straight lines are «commensurable in length» or «incommensurable in length» when they are considered linearly.

5. Straight lines are «commensurable in square» or «incommensurable insquare» when the squares of them are commensurable or incommensurable.

6. Every straight line commensurable in length to the assigned rational is rational. Let a, b be two integers, non square, and ϱ a rational straight line. The fourth proportional of α, β, ϱ, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is commensurable in length to the assigned rational ϱ and as a result $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is rational.

7. The mean proportional of ϱ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ is incom-

mensurable in length both to ϱ and to $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. But the squares ϱ^2 and $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ or $\varrho^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$ and $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ are commensurable to each other. So the straight lines ϱ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ or $\varrho\left(\frac{\beta}{a}\right)$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ are rational, commensurable only in square.

8. The mean proportional of ϱ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is called medial. [or the mean proportional of $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$]. Medial is therefore defined as a monomial containing the fourth rout of a factor of a nonsquare number.

9. The rectangle of the shape $\varrho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ or $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ is called medial. Therefore medial rectangle is called the monomial containing the square root of a factor of a nonsquare number. The side of the square equivalent to the regarded rectangle is medial, and this square is also medial.

10. A straight line is called irrational when its square is incommensurable to the square of a straight line assigned as rational.

The following ten theorems numbered 10, 27, 28 29, 30, 31, 32, 33, 34 are preparatory for the whole theory of Book X.

10.

Construction of the first right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height the rational straight line ϱ is taken. As the second part we use the fourth proportional of the nonsquare integers a, b, ϱ, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. The ϱ and $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, the height of the triangle, are rational straight lines, commensurable in square only (and incommensurable in length).

Gonstruction of the second triangle. As the first part of fhe bypotenuse the ϱ is again taken. As the second part we use the height of the former triangle, the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. The height of the second triangle, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is medial. The ϱ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ are incommensurable in both length and square, that is their squares are incommensurable.

27.

To find two medials commensurable in square only, the product of which should be rational. The first medial is found in the second case of theorem 10, and is $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$. To find the second medial is constructed a right triangle which has as the first part of the hypotenuse intersected by the height the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ and as the second part the height of the triangle of the first case of th. 10, that is $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. The mean proportional of these parts, the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$ is the requiered second medial. The squares of the medials, the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}$ and the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/2}$ arė commensurable. The product of the medials, the $\varrho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ is rational.

28.

To find two medials commensurable in square only, the product of which preliminary three rational numbers, commensurable in square only, are found. There is taken the non square integers, the α, β, γ δ and a rational straight line, the ϱ. Construction of the first right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height is taken the ϱ and as a second part the fourth proportional of a, b, ϱ the $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. The height of the triangle is the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Construction of the second right triangle: As the first part of the hypotenuse intersected by the height is taken the ϱ and as the second part the fourth proportional of γ, δ, ϱ, the $\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$. The height of the triangle is the $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. The three straight lines: ϱ, $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ are rational, commensurable in square only.

Construction of the required first medial.

There is constructed a right triangle which has as parts of the hypotenuse intersected by the height the $\varrho(=A)$ and the $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}(=B)$. The height of the triangle $\Delta=\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ is the first medial.

Gonstruction of the required second medial.

We find the fourth proportional of the

$\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ and $\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$ the $E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}:\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}$.

E is the second medial.

Lemma 1.

To find two square numbers the sum of which should be a square number. It is proved that these will be of the form:

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \quad \text{or} \quad \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2 \quad (1),$$

where $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν even or odd and $\varkappa$, ξ, σ, τ integers. According to Book IX, th. 1 $\mu\nu$ is square. But if is not $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, then $\mu\nu$ is not a square. In this case we take:

$$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu \text{ non square number, or}$$

$$\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\varkappa\xi\sigma\tau$$

non square number. To simplify we substitute $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$ where ϑ non square number. The formulas (1) give all the integer solutions of the equation of Diophantus $x^2+y^2=z^2$.

Lemma 2.

To find two square nunbers the sum of which should not be a square number, It is proved that:

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda \quad \text{or} \quad \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$$

non square, where $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν even or odd. To simplify we substitute $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, λ non square number.

29.

The rational straight line $AB(=\varrho)$ is given as the hypotenuse of a right triangle. To construct the triangle to have the perpendicular side AZ rational, but only AB^2, AZ^2 commeusurable (consequently AB, AZ incommensurable in length) and the hypotenuse AB and the other perpendicular side $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ commensurable in length.

His proved that

$$AZ=\frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\varphi},\quad ZB=\frac{\varrho\omega}{\varphi},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta \text{ non square number}].$$

30.

The rational straight line AB($=\varrho$) is given as the hypotenuse of a right triangle. To construct the triangle to have the perpendicular side AZ rational, but only AB^2, AZ^2 commensurable (consequently AB, AZ incommensurable in length) and the hypotenuse AB and the other perpendicular side $BZ=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ incommensurable in length. It is proved that $AZ=\dfrac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB=\dfrac{\varrho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ non square number].

31. 1.

To construct a right triangle to have the hypotenuse Γ and one perpendicular side Δ medial, but only Γ^2, Δ^2 commensurable (consequently Γ, Δ incommensurable in length), the product $\Gamma\times\Delta$ rational and the hypotenuse Γ and the other perpendicular $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ commensurable in length.

It is proved that

$$\Gamma=\frac{\varrho\vartheta^{1/4}}{\varphi^{1/2}},\quad \Delta=\frac{\varrho\vartheta^{3/4}}{\varphi^{3/2}},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta,\ \text{non square number}].$$

31. 2.

As the precedent, but to have the hypotenuse Γ and $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ incommensurable in length.

32. 1.

To construct a right triangle to have the hypotenuse Δ and the one perpendicular side E medial, but only Δ^2, E^2 commensurable (consequently Δ, E incommensurable in length), the product $\Delta\times E$ should be medial and Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ should be commensurable in length.

It is proved that

$$\Delta=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi},\quad [\varphi^2-\omega^2=\vartheta,\ \gamma,\ \delta\ \text{non squares numbers}].$$

32. 2.

As the precedent, but to have Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ incommensurable in length. It is proved that:

$$\Delta=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4},\quad E=\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda,\ \gamma,\ \delta\ \text{non squares numbers}].$$

33.

To construct a right triangle having perpendicular sides the AZ, ZB so that the AZ^2, ZB^2 be incommensurable, AZ^2+ZB^2 rational and $AZ\times ZB$ medial. It is proved that:

$$AZ=\frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad ZB=\frac{\varrho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda \text{ non}$$

square number].

34.

To construct a right triangle having perpendicular sides the $A\Delta$, ΔB, so that $A\Delta^2$, ΔB^2 be incommensurable, $A\Delta^2+\Delta B^2$ medial and $A\Delta\times\Delta B$ rational. It is proved that:

$$A\Delta=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda,$$

nonsquare number].

35.

To construct a right triangle having perpendicular sides the $A\Delta$, ΔB so that $A\Delta^2$, ΔB^2 be incommensurable, $A\Delta^2+\Delta B^2$ medial, $A\Delta\times\Delta B$ medial and incommensurable to $A\Delta^2+\Delta B^2$. It is proved that:

$$A\Delta=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B=\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad [\alpha^2+\beta^2=\lambda,$$

γ, δ nonsquare number].

B. 2. On the basis of the previous theorems proved there are constructed twelve irrational straight lines. Each of fhe former six straight lines is the sum of two monomials. (th. 36—44). Each of the latter six straight lines is the difference of the same two monomials (apotomes, theor. 73—78). These straight lines are for the construction of twelve right triangles. More simple irrational straight lines is not possible to be constructed. These are:

1. Binomial / Apotome $\quad \varrho\pm\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\quad$ 36 / 73

The monomials are taken from the first case of theorem 10 [It can be $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\pm\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$].

2. First Bimedial / First apotome of a medial $\quad \varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}\pm\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}\quad$ 37 / 74

The monomials are taken from th. 27.

3. Second bimedial / Second apotome of a medial $\quad \varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}\pm\varrho\frac{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}\quad$ 38 / 75

The monomials are taken from th 28.

4. Major 39
Minor 76

$$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

The monomials are taken from th. 33.

5. Side of rational plus a medial area 40
That which 'produces' with a rational area a medial whole 77

$$\frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

The monomials are taken from th. 34.

6. Side of the sum of two medial areas 41
That which 'produces' with a medial area a medial area 78

$$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm$$
$$\pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

The monomials are taken from th. 35.

Second and third definitons. (the second are referred to the sums, while the third to the differences).

Let us consider a rational straight line ϱ, and the hypotenuse of a right triangle A and the one perpendicular side B. The straight lines A, B should be rational but only A^2, B^2 commensurable (commensurable only in sqnare and therefore incommensurable in length). Let Γ be the other perpendicular side of the triangle.

1) If the straight lines A, Γ are commensurable in length there are distinguished three cases of the construction of the sum A+B and three cases of the construction of the difference (apotome) A—B, characterized by the relation of the symmetry or no symmetry of A and B to the taken rational ϱ.

I. A and $\sqrt{A^2-B^2}$ are commensurable in length (A, B incommensurable in length).

1. If A, ϱ are commensurable in length (B, ϱ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta=A+B$ be called first binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called first apotome.

2. If B, ϱ are commensurable in length (A, ϱ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta=A+B$ be called second bionomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called second apotome

3. If neither A nor B are commensurable in length with ϱ,
let the binomial $\Delta=A+B$ be called third binomial
let the difference $\Delta=A-B$ be called third apotome

2) If the straight lines A, Γ are incommensurable in length there are distinguished another three cases of the construction of the sum A+B and another three cases of the construction of the difference (apotome)

A—B, which are characterized by the relation of symmetry or no symmetry of the A and B to the taken rational ϱ.

II. A and $\sqrt{A^2-B^2}$ are incommensurable in length (A, B incommensurable in length)

4. If A, ϱ are commensurable in length (B, ϱ incommensurable in length).
let the binomial $\Delta = A+B$ be called fourth binomial
let the difference $\Delta = A-B$ be called fourth apotome.

5. If B, ϱ are commensurable in length (A, ϱ incommensurable in length),
let the binomial $\Delta = A+B$ be called fifth binomial
let the difference $\Delta = A-B$ be called fifth apotome.

6 If neither A nor B are commensurable in length with ϱ,
let the binomial $\Delta = A+B$ be called sixth binomial
let the binomial $\Delta = A-B$ be called sixth apotome.

c o n s t u c t i o n o f t h e s i x b i n o m i a l s a n d t h e s i x a p o t o m e s (12 more irrational straight lines).

1	First Binomial First Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$	th.	48 85
2.	Second Binomial Second Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}$		49 86
3.	Third Binomial Third Apotome	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\pm\varrho\frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$		50 87

In the three above cases $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$, γ, δ, ε non squares numbers.

4.	Fourth Binomial Fourth Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$	51 88
5.	Fifth Binomial Fifth Apotome	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\pm\varrho\frac{\delta}{\gamma}$	52 89
6.	Sixth Binomial Sixth Apotome	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\pm\varrho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$	53 90

In the three above cases $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ, ε non squares numbers.

By the 24 irrational straight lines found we construct 24 right triangles. The construction of these triangles is the main object of the contents of Book X of Euclid's Elements. In constructing these triangles, the symmetry and harmony which exists is evident, whenever it is possible to use the simplest irrational straight lines.

There can be noted that the number 24 is the product 4×6 viz. of the number expressing the tetractys of Pythagoras and of six, which is the first perftect number.

We quote the construction of these 24 right triangles in the following four tables:

TABLE I.

Theorem	GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height: first part rational	GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height: second part irrational	GIVEN: consequently the height	PROVED: The height is irrational of the form:
54	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ first binomial th. 48.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, i. e. of the binomial of th. 36.
55	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ second binomial 49.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}+1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first bimedial 37.
56	ρ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third binomial 50.	$\rho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second bimedial 38.
57	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth binomial 51.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the major 39.
58	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth binomial 52.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of the side of rational plus a medial area 40.
59	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth binomial 53.	$\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the side of the sum of two medial areas 41.

[We here note six transformations of double radicals out of sums]

TABLE II

Theorem	GIVEN: The height of the right triangle, the corresponding to the hypotenuse — irrational	GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height — rational	PROVED: The other part of the hypotenuse has the form
60	$\rho+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ binomial of the theorem 36.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first binomial, th. 48.
61	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ first bimedial 37.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second binomial 49.
62	$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second bimedial 38.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third binomial 50.
63	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ major 39.	ρ	$\rho+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth binomial 51.
64	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ side of a rational plus a medial area 40.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth binomial 52.
65	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ side of the sum of two medial areas 41.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth binomial 53.

TABLE III.

Theorem	GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — First part rational	GIVEN: of the hypotenuse of a right triangle intersected by the height — second part irrational	GIVEN: consequently the height	PROVED: the height is irrational of the form:
91	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ first apotome th. 85.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right.}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, i. e. of the apotome of th. 73.
92	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ second apotome 86.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\theta}}-1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\theta}}\right)}$, of the first apotome of a medial 74.
93	ρ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ third apotome 87.	$\rho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of the second apotome of a medial 75.
94	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ fourth apotome 88.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, of the minor 76.
95	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$ fifth apotome 89.	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, of that which 'produces' with a rational area a medial whole 77.
96	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ sixth apotome 90.	$\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}-\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, of that which 'produces' with a medial area a medial whole 78.
				[We here note six transformations of double radicals aut of differences].

TABLE IV

Theorem	GIVEN: The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse	GIVEN: One part of the hypotenuse intersected by the height	PROVED: The other part of the hypotenuse has the form:
	irrational	rational	
97	$\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ Apotome of th. 73.	ρ	$\rho\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ of the first apotome of th. 85.
98	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ First apotome of a medial, th. 74.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}$ of the second apotome, 86.
99	$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ second apotome of a medial, th. 75.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ of the third apotome 87.
100	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ minor, th. 76.	ρ	$\rho - \frac{\rho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the fourth apotome 88.
101	$\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a rational area a medial whole th. 77.	ρ	$\frac{\rho\,\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\rho\,\alpha^2}{\lambda}$ of the fifth apotome 89.
102	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ that which 'produces' with a medial area a medial whole th. 78.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ of the sixth apotome 90.

B3. Theorems 112 and its reciprocal 113 are considered genuine. These constitute direct continuation and are therefore inseparable part of Book X of Elements. We give a picture of these in the following table. In each of these theorems there are constructed six right triangles. We also consider genuine the theorems 114, 115.

	GIVEN		PROVED
	The height of the right triangle corresponding to the hypotenuse	The first part of the hypotenuse intersected by the height is irrational of the form	The other part of the hypotenuse is irrational of the form
Th. 112	rational	of the first binomial th. 48	of the first apotome th. 85
	»	» » second binomial 49	» » second apotome 86
	»	» » third binomial 50	» » third apotome 87
	»	» » fourth binomial 51	» » fourth apotome 88
	»	» » fifth binomial 52	» » fifth apotome 89
	»	» » sixth binomial 53	» » sixth apotome 90
Th. 113	»	of the first apotome th. 85	of the first binomial th. 48
	»	» » second apotome 86	» » second binomial 49
	»	« » third apotome 87	» » third binomial 50
	»	» » fourth apotome 88	» » fourth binomial 51
	»	» » fifth apotome 89	» » fifth binomial 52
	»	» » sixth apotome 90	» » sixth binomial 53

2

HISTORY OF MATHEMATICS

I. THE MATHEMATICS OF HOMER
II. ORIGINS OF GREEK CULTURE AND GEOMETRY

By **EVANGELOS S. STAMATIS**

REPRINTED FROM
THE MAGAZINE «EUCLID» OF THE MATHEMATICAL SOCIETY
OF GREECE (1, 2, 9-10, 11, 12) ATHENS 1970

What Plato meant by saying that God
is always doing Geometry [13]

PART I THE MATHEMATICS OF HOMER

It is universally conceded that Homer is the foremost poet of mankind. On the other hand, few scholars realize that he was also a good mathematician. The great epic poet integrated mathematics with his incomparable verse.

The first and only inkling we have of this fact is provided by the second century Roman author Aulus Gellius.

Gellius who studied at the Academy of Plato was the writer of a treatise in two volumes entitled «Noctes Atticae». In the second volume (XIV, Ch. 6, para. 4), the Roman records that he was given a book to read by an Athenian acquaintance in which he found fascinating information not readily available in the works of the ancient Greeks circulating at the time. In substituting numbers for letters, certain verses of Homer yielded the same sums. For example:

Ilias (VII)
V. 264 ἀλλ' ἀναχασσάμενος λίθον εἵλετο χειρὶ παχείῃ = 3498
V. 265 κείμενον ἐν πεδίῳ, μέλανα, τρηχύν τε μέγαν τε = 3498

(but giving ground he seiz with stout hand a stone that lay upon the plain, black and jagged and geat).

(translation by A. T. Murray) (Loeb)

'Αλλ'	= 1+30+30=61,
ἀναχασσάμενος	= 1+50+1+600+1+200+200+1+40+5+50+70+200=1419,
λίθον	= 30+10+9+70+50=169,
εἵλετο	= 5+10+30+5+300+70=420,
χειρὶ	= 600+5+10+100+10=725,
παχείῃ	= 80+1+600+5+10+8=704.
sum	61+1419+169+420+725+704=3498.
κείμενον	= 20+5+10+40+5+50+70+50=250,
ἐν	= 5+50=55,
πεδίῳ	= 80+5+4+10+800=899,
μέλανα	= 40+5+30+1+50+1=127,
τρηχὺν	= 300+100+8+600+400+50=1458,
τε	= 300+5=305,
μέγαν	= 40+5+3+1+50=99,
τε	= 305.
sum	250+55+899+127+1458+305+99+305=3498.

Ilias (XIX)
306 μή με πϱὶν σίτοιο κελεύετε μηδὲ ποτῆτος =2848
307 ἄσασθαι φίλον ἦτοϱ, ἐπεὶ μ' ἄχος αἰνὸν ἱκάνει = 2848

(bid me not bevore the time sate my heart
with food or drink, seeing dread grief is come upon me
(transl. by A. T. Murray)

(units (1 to 9) α', β', γ', δ', ε', ς', ζ', η', θ',
tens (10 to 90) ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ϙ'
hundreds (100 to 900) ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϡ').

PART II ORIGINS OF GREEK CULTURE AND GEOMETRY

Anthropologists agree that man has existed on the Earth for about one million years. Many also concur with the theory first propounded by Anaximander (611 - 546 B.C.) [1], that man appeared on the Earth through a process of evolution, a theory adopted by Darwin some 2440 years later.

The oldest discovered communities of man were uncovered in Thessaly a few years ago at the Homeric site of Argissa (the modern village of Kremomagoula) some five kilometers west of Larissa by the German Archaeological Institute under the direction of Professor Miloisits. Previous excavations at the same site had been made by Professor Christos Tsountas. An official report given in Athens on the results of the excavations by Professor Biesants on Dec. 16, 1958 showed :

That these primitive settlements in Greek lands date to as early as 100,000 years B.C. From that period to about 9600 B.C.no other indication of human habitation has been recorded except for the discoveries in the caves of Pelion, of France and elsewhere (about 30,000 B.C.). Another exception is the information communicated to Solon by the Egyprian philosopher priest.

Plato provides the information on Solon's visit to Egypt (about 580 B.C.) in his Timaeus and Critias [2]. The Athenians were totally unaware of previously existing civilizations in their country due to the numerous cataclysms that had occurred over that long period.

Of these, the most destructive was the deluge of Deucalion. According to the records of the Egyptians, this occurred about 9,000 years before Solon's visit to Egypt. The Egyptian archives consisted of records imprinted on dried bricks.

According to Plato's reference to the Egyptian priest, the Athenians had 9,000 years before Solon's time an outstanding civilization, whereas Egyptian culture flourished a full 1,000 years later or 8000 years before Solon's visit in accordance with the Egyptian records.

Moreover, as the priest pointed out, the Egyptian army was supplied with weapons of war provided by the Athenians, and that the Athenians constituted a powerful nation that had saved Greece and Egypt from the onslaught of invaders originating in the large island of Atlantis situated beyond the Straits of Hercules (Gibraltar) in the great ocean. And Atlantis was engulfed by the great cataclysm of Deucalion 9,000 years before Solon's sojourn in Egypt.

The theory that Atlantis was situated on the island of Thera (Santorini) and was subsequently destroyed by a tremendous volcanic eruption in about 1500 B.C. does not hold water. Two lines of thought support the contention that Thera was in fact the mythical Atlantis.

Firstly, that Plato erred with the factor 10, and instead of writing 900 years before Solon, wrote 9,000. And secondly that the inhabitants of Atlantis lived in the Bronze Age which according to modern authorities is dated 2100-1200 B.C. But both these assumptions are incorrect. The Egyptians had different symbols to represent the numbers 100 and 1000. There was no possibility of confusing the two symbols. Moreover, Solon, carried the story of the Egyptian priest to Athens by word of mouth and not in writing as is concluded from the Timaeus [3]:

> «Tell us from the beginning, said Amynander, what Solon related and how, were the informants who vouched for its truth».
>
> (transl. by R. G. Bury)

Since the zero (0) was first used by Claudius Ptolemy in Alexandria in about 150 A.D. ([4], p. 91). It is absurd to accuse Plato of misinterpreting, it.

Moreover, the bronze or copper ore (orichalcum) about which Plato speaks is not the contemporary alloy of bronze but a metal unknown to Plato and to us ([2], 2) 114 E).

Cretan and Mycenaean civilization and the growth and development of the language of the Iliad and Odyssey were not creations of a few hundred years, but of many thousands.

All extant evidence supports the conclusion that at the time of the

Deucalion deluge in about 9600 B.C., when the island empire of Atlantis disappeared, there existed a thriving civilization in Greece.

Greek culture spread to the Near East and Egypt in accordance with the narrative of the priest as related to Solon [2]. The statement of Herodotus that the knowledge of applied geometry originated in Egypt and later spread to Greece is quite inaccurate, although the relevant phrase in Herodotus can be variously interpreted. Most subsequent authors using Herodotus as a source of reference perpetuated the misinformation that geometry was born in Egypt and was later introduced into Greece. Herodotus's remark reads:

«δοκέει δέ μοι ἐντεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν» [5]

(From this, to my thinking, the Greeks learnt the art of measuring land).
(transl. by A.D. Goldey)

Such inaccurate statements are not uncommon in the otherwise remarkably brilliant work of the father of history. But Herodotus was not in the position then to verify or substantiate all the stories and anecdotes he had collected.

Plutarch himself remarks on the many inaccuracies in the narrative of Herodotus. One of his essays deals with «The Improbity of Herodotus». He points out that the historian stated erroneously that Thales of Miletus, one of the seven wise men of ancient Greece, was a Phoenician. Also that the Greeks borrowed the names of the gods of Olympus from theEgyptians [6]. Moreover, the information provided by Herodotus on the number of dead at the battle of Marathon (and Plataea), appeared, to be grossly inaccurate when he maintained that 6400 Persians were slain and 192 Athenians were killed [7].

Other authors besides Plutarch remark on the inaccuracies of Herodotus when dealing with the Egyptians, as, for example, Diodorus, Strabo and Josephus. The latter states:

«πολλὰ τὸν Ἡρόδοτον ἐλέγχει τῶν Αἰγυπτιακῶν ὑπ' ἀγνοίας ἐψευσμένον» [8]

(As the say himself, from the sacred books in which he convicts Herodotus of being misled through ignorance on many points of Egyptian history)
(transl. by H. S. Thackeray)

One can conclude from the Timaeus of Plato, therefore, that the most ancient civilization and the birth of geometry occurred in Greek lands long before the deluge of Deucalion.

The rays of the luminous bodies of the universe and the shape of the sun and of the full moon conveyed to early man the significance of both the straight line and the circle. Thereupon was conceived the idea of the plain geometric figure and the simple geometric construction. This evolution of ideas in all probability ran parallel to the evolution of the Greek language.

Objects in everyday use and life in all likelihood provided the names for the first geometric figures, including the point, as the Frenchman Charles Mugler notes ([9], p. 5-32).

It is reputed that Thales was the first who proved that the diameter bisected the circle.

He was also the first to prové the theorem that every isosceles triangle had equal base angles. Eudemus in his History of Geometry first said this. ([10], p. 157, 10—250, 20—299,1—352, 14).

Since Thales is considered the most ancient of the wise men of Greece who first used the mathematical proof, he is given credit for its discovery. Kant (1724-1804) specially praises this great achievement of the Greek genius ([11], Vorrede).

THE MATHEMATICAL PROOF

Other ancient races had through long experience acquired a knowledge of geometry and arithmetic including the Sumerians, Babylonians, Egyptians, Indians and the Chinese. The most ancient of these to have practical knowledge of mathematics were the Sumerians dating back to 4000-3000 B.C.

However none of these races had attained the wisdom of mathematical proof. The ancient Greeks were the first to create the science of mathematics and logic, thus opening the paths to intellectual advancement both philosophical and theological.

To the Greeks the science of mathematics was not a means of practical applications and to commerce. Its sole purpose was the cultivation of the mind and a quest for a deeper knowledge of God.

This is clearly brought out by the extant information we have of the Pythagorean School and of Plato's reputed saying «Let no one come to our school, who has not first learnt geometry, ([12], VIII, v. 973).

What Plato meant by saying that God is always doing geometry ([13], VIII 2) :

> «But geometry especially, being, as Philolaus says, the source and mother-city of the rest of the sciences, leads the unterstanding upward and turns it in a new direction, as it undergoes, so to speak, a complete purification and a gradual deliverance from sence-perception. It was for this reason that Plato himself reproached Eudoxus and Archytas and Menaichmus for setting out to remove the problem of doubling the cube to the realm of instruments and mechanical devices, as if they were trying to find two mean proportionals not by the use of reason but in whatever way would work. In his way, he thought, the advantage of geometry was dissipated and destroyed, since it slipped back in to the realm of sense-perception instead of soaring upward and laying hold of the eternal and immaterial images in the presence of which Cod is always God».
>
> (transl. by E. L. Minar)

The discovery of mathematical proof was indeed a brillant breakthrough of the Greek mind but this did not come about spontaneously. It was the result of a long process. For the Greek genius to make this discovery it first had to verify the validity or truth of a geometric statement, and to verify this it must have had an a priori knowledge of the need for a proof, and this in turn meant a knowledge of logic. This knowledge or awareness consists firstly of the definition of a geometric or mathematical idea and secondly a definition of the axiom. Axioms mean truths that are in themselves self-evident.

It becomes obvious there fore that the basic principle of science is logic. In the age of Thales when geometric statements were first proved, it must follow that the most important laws of logic and the basic mathematical axioms had been established since without these no proofs of theorems could be made.

I therefore maintain that the argument supported to the effect that the axiomatic method of the approach to geometry and mathematics was first established by David Hilbert in about 1900, that is, 2500 years after Thales, is nothing short of ludicrous.

Thales proved that the base angles of an isosceles triangle are equal by utilizing the axiom which is applicable to both geometry and arithmetic, i.e., «If equals are subtracted from equals, the remainders are equal».

It is reasonable to assume that in the age of Thales the search for the principles of mathematics had not been exhausted. On the contrary in fact, the written tradition indicates that this search continued for many centuries afterwards and continues to the very present.

According to Aristotle (384-322 B.C.), all knowledge is a knowledge of knowable. And the knowable is that which is apprehended by knowledge:

> «If the object no longer exists, there can no longer be any knowledge, there being now nothing to know. If, however, of this or that object no knowledge has yet been acquired, yet that object itself may exist. Take the squaring of the circle, for instance, if that can be called such an object. Although it exists as an object, the knowledge does not yet exist» ([14], 7 b 29).
>
> (transl. by H. P. Cook)

Knowledge is a relative meaning not able to exist without the knowable. The components of mathematics as a science of proof number three according to Aristotle:

1. Numbers for arithmetic and figures for geometry.
2. Principles of proof used in the proving process, i.e. axioms.
3. The propositions that are to be proved ([15], § 10-12).

The aim of mathematics as a science of proof is to show with certainly the proving reason by which the truth of a certain proposition is laid down. This will be brought about by the reference of the proposition to its initial and selfevident propositions, i.e., to the axioms. Mathematics cannot advance beyong the improvable initial propositions.

This search and examination of these proposition constitutes for Aristotle, the initial or first philosophy.

Mathematical entities are thought to have existence but not to be self-existent. These exist as stable features of objects which are perceived without which they would be non-existent. Here we observe a contradiction between Aristotle and the non-existence of the ideas of Plato. Some modern mathematicians support Plato's theory of ideas by which mathematical objects pre-existed irrespective of the perceptive world.

The aim of Greek geometry is the study of the properties of three-dimensional space as this comes within our perception, and how it is understood by us. Space as we mean today was known as 'topos' by the ancients.

Zeno of Elea does not accept the existence of space. He maintains that space is non-existent because if it did exist it would be contained in some definable space, and this latter by another space, and so on to infinity [16], p. 252-3).

The problem of the definition of space still remains unsolved, as Max Jammer's Concept of Space points out [17]. But space does exist, we live within it, irrespective of whether we can define it and Greek geometry concerns itself with space.

Without specifying what space is, Greek geometry concerns itself with exploring its properties using as a datum the 'point' which it defines as 'that point which has no part', that is, dimension, which remains unanswered. The meaning of a point in a way is a beginning beyond which we cannot proceed. It is precisely for this reason that Plato writes that geometry which is based upon an unsatifactory definition of a point is a relative science and not absolute as is philosophy, the latter of which searches without being obligated to assume any hypothesis :

«For where the starting-point is something that the reasoner does not Know, and the conclusion and all that intervenes is a tissue of things not really known, what possibility is there that assent in such cases can ever be converted in to true knowledge or science? None said he ([18], 533 C).

(transl. by P. Shorey)

The definition or idea of a point which was supported by Greek geometers suffered some criticism at the hands of sextus Empiricus of Alexandria in the 2nd century A.D., who maintained that it was impossible to bisect a circle :

«Then, on these conditions, the problem is to bisect the circle; and this is imposible. For the centre, which is in the very middle of the whole circle, either is bisected in the bisection of the circle, or is added on to one or other of the sections. But it is possible to conceive what is; without parts as partitioned ? An if it is added on to either of the sections, the sections become unequal and the circle is not divided in the middle» ([19], IX 284).

(transl. by R. G. Bury)

David Hilbert's attempts to abolish Greek geometry and to establish his own geometrical theories is considered a failure by many authorities although some of his disciples keep correcting and revising the errors of the master in each new edition.

The book by Hilbert is entitled «Grundlagen der Geometrie» (Principles of Geometry). The 8th edition of the book was brought out by his pupil Paul Bernays, wherein however there is no reference to the date of the first edition. But we can date the first edition by a book review that exists to about 1900. The seven earlier editions were brought out when Hilbert was still living. Each of the editions contained corrections or revisions suggested by his pupils. The 8th edition, «D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, mit Revisionem und Ergänzungen, von Paul Bernay's», was published by Teubner of Stuttgart in 1956.
His opening statements read:

» 1. The elements of geometry and the five groups of axioms. Erklärung (he avoids the word definition, but this is what he means):

» We mean three different systems of objects: the objects of the first system which we call points and represent as A, B, C ... ; the things or objects of the 2nd system which we call straight lines and represent as a, b, c...; and the objects of the 3rd system which we call planes, and represent as α, β, γ, ... Points we call also elements of linear geometry; points and straight lines we call elements of plane geometry; and points of a line and the plane we call elements of the geometry of space, or space ([20], p. 2).

It is quite obvious that David Hilber thas most ambitiously attempted to replace Greek geometry with his own brand of new geometry. But he cryptically makes use of and speaks vaguely and abusively of Greek geometric terminology. Moreover, he construes space as a conglomeration of letters from both the Greek and Latin alphabets.

The space within which we live is real and not imaginary as David Hilbert supposes.

The first axiom as defined by Hilbert reads:

«Given two points A and B there is always a straight line belonging to each of the two points A and B.»

When the first edition of Hilbert's geometry made its debut, Gottlob Frege (1848-1925), the German mathematician wrote [21], the following:

«The system of axioms of David Hilbert is a system of equations of many unknowns, insoluble for any one. If we wish to answer the question as to whether an object, e.g. my watch, is a point we immediately are confronted with the difficulty involving the first axioms, because there reference is made to two points».

Frege then proceeds to parody Hilbert :

«Statement: We consider objects which we call Gods.

Axiom 1: Every God is almighty. Axiom 2: Ther exists at least one God».

To grasp the confusion encountered in Hilbertian geometry we cite the following facts:

In the first edition of his geometry, the proposition is stated as an axiom :

«Any four points of a straight line are given. Then we can always represent them with A, B, C, D in such manner that the point represented by B shall always lie between A and C, and moreover between A and D, and also point C would lie between A and D as well as between B and D».

In the eighth edition, 1956, this proposition is designated as the 5th theorem by the editor and pupil of Hilbert, Paul Bernays (p. 6).

Also in the first edition the following proposition is presented as an axiom by Hilbert:

«If two angles a, b, are equal to a third angle c, they are equal to each other». In the 8th edition this proposition is designated as the 19th theorem (p. 21).

In Greek geometry, as known, this proposition is the first axiom of Euclid.

The argument that mathematical theories are treated as logical constructions without need for relationships to natural experience does not hold water in accordance with Aristotle who says:

> 1. But all learning proceeds, wholly or in part, from what is already Known, whether it is through demonstration or through definition ([22], A. 992 b30).
>
> 2. All teaching and learning that involves the use of reason proceeds from pre-existent knowlege. This is evident if we consider alle the different branches of learning, because both the mathematical sciences and every other art are acquired in this way ([23], A. 71 a, 1-4).
>
> (transl. by H. Tredennick)

ADDENDA
CONCERNING THE FIRST PRINCIPLES OF GEOMETRY
GAUSS

(Gauss to Bessel. Göttingen, January 27, 1829)

...Also I have been preoccupied in my free hours with another subject about which I have been thinking for the last forty years, I mean the first principles of geometry. I do not know whether I have ever informed you of my opinions concerning this theme. Here again I have arrived at some conclusion, and I believe that we are unable to establish completely a geometry a priori has been even more reinforced.

SCHOPENHAUER

451 .... But between Socrates and Kant we note several similarities. Both refuse all dogmatism and both accept complete metaphysical uncertainty.

Being a Kantian myself I wish to express here in one word my attitude towards him. Kant teaches that we are unable to know anything beyond experience and its possibilities. ([24], p. 246).

BIBLIOGRAPHY

[1] PLUTARCH'S Strom. 2 and H. DIELS, Dox. Graeci 579, Fragm. der Vorsokratiker I, 12 [2], Berlin 1951.

[2] PLATO'S, 1. Timaeus 23-26, 2. Kritias 108-120.

[3] PLATO'S, Timaeus 21 D.

[4] WAERDEN, B. L. VAN DER, Erwachende Wissenschaft. Basel-Stuttgart 1956.

[5] HERODOT, II 109.

[6] PLUTARCH, De Herodoti malignitate 13. 857 C.

[7] HERODOT, VII 117, X 70.

[8] JOSEPHUS, Contra Apionem I 14.

[9] MUGLER, CHARLES, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Paris 1958.

[10] PROCLI DIADOCHI, In primum Euclidis Elem. libri comment., ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873, Nachdruck Hildesheim 1967.

[11] KANT, IMMANUEL, Kritik der reinen Vernunft I, Vorrede, ed. Felix Gross, Deutsche Bibliothek, Berlin, p. 15, 3.

[12] TZETZES, JOHANNES, Histor. varior. Chiliades, ed. T. Kiessling, Leipzig 1826, Nachdruck Hildesheim 1963.

[13] PLUTARCH, Quaestionum Convivalium.

[14] ARISTOTLE, Categoriae, ed. Imm. Bekkeri, Berolini 1831, Nachdruck Berlin 1960.

[15] ARISTOTLE, Analytica Posteriora.

[16] DIELS, HERMANN, Fragm. der Vorsokratiker I 29 [19], p. 252-3.

[17] JAMMER, MAX, Das Problem des Raumes, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1960 p. 220 (Concept of Space, Harvard Univers. Press, Cambridge U.S.A.).

[18] PLATO'S, Respublica.

[19] SEXTUS EMPIRICUS, Adv. Mathematicos.

[20] HILBERT, DAVID, Grundlagen der Geometrie, Stuttgart 1956.

[21] FREGE, GOTTLOB, Jahresbericht DMV 12, 1903.

[22] ARISTOTLE, Metaphysics.

[23] ARISTOTLE, Analytica Posteriora.

[24] SCHOPENHAUER, APTHUR, Auswahl aus seinen Schriften, ed.S. Friedlaender. Goldmanns Tasch., München 1962.

Author: Evangelos Stamatis, Paraschou str. 3, Athens 701, Creece.

CONTRIBUTIONS
from the
RESEARCH CENTER FOR ASTRONOMY AND APPLIED MATHEMATICS
ACADEMY OF ATHENS
SERIES I (ASTRONOMY) No. 32

3

THE HELIOCENTRIC SYSTEM OF GREEKS

by

E. S. STAMATIS

ATHENS 1973

THE HELIOCENTRIC SYSTEM OF GREEKS

BY

EVANGELOS S. STAMATIS

1. According to the narration of the Egyptian priest to Solon at the beginning of the sixth century B. C., «in Greece there had been many deluges, which had caused great disasters, on account of which Greeks did not know their own history». However, the Egyptians had entered into their archives all the events which took place in the Greek area. According to the records of the Egyptians, the Athenians had developed a civilization 9.000 years before that period of time. In these same ancient times the great island of Atlantis situated in the Atlantic Ocean beyond the Pillars of Heracles (The Straits of Gibraltar) sank under the water. The Egyptians got their civilization from the Athenians 1.000 years later, that is 8.000 years before the time the discussion between Solon and the priest took place (Plato, Timeo 23 - 26).

No information is available since then and up to the protominoic period on any achievements related to the civilization in the Greek area. Later tradition praises with admiration the cultural achievements of Orpheus, born in Libithra of Thrace. Orpheus was a disciple of Linos the Thebian, while he himself taught the Athenian Mouseos (Dictionary of Souidas). Orpheus is believed to have flourished about the 15th centuru B. C. The oldest Greek theory on the creation of the world is attributed to Orpheus and mentioned in Ornithes by Aristophanes [**1**].

There was Chaos at first, and darkness, and Night,
    and Tartarus wasty and dismal;
But the Earth was not there, nor the Sky, nor the Air,
    till at length in the bosom abysmal
Of darkness an egg, from the whirlwind conceived,
    was laid by the sable - plumed Night
And out of that egg, as the Seasons revolved,
    sprang Love, the entrancing, the bright
Love brilliant and bold with his pinions of gold,
    like a whirlwind, refulgent and sparkling.

[Loeb, B. B. Rogers]

2. Written records of the teaching of Orpheus and his disciples do not exist. Some indirect information has been compiled and published under the titles :

1) Orphics (Orphica, G. HERMANN, Leipzig 1805).

2) Orphic Fragments (Orphicorum fragmenta, KERN, Berolini 1922). Later scholars, including Willamowitz, date the first collection and edition of those scattered texts to the 2nb century A. D. (PAULY - WISSOWA R. E., Orphische Dichtung, sp. 1332, VIII, 49 - 59).

The Orphics consist of the Argonautics, of the Hymns related to the Orphic worship, of the Lithics and of the Extracts and Inscriptions. The contents of the above, as well as of the Orphic Extracts are attributed to Orpheus and his disciples and their initial formulation dates bank to the 15th century B. C.

In the Orphic Extracts we find the view that the celestial globe rotates around the axis of the world, which coincides with the axis of the Earth ; the latter rotates around its own axis which is at rest (KERN p. 261, 24).

3. The view mentioned in the Orphics that the Earth rotates around its own axis which is at rest and which coincides with the axis of the world, around which the celestial globe is rotating, is found also in «Timeo» by Plato and in the work of Aristotle on the Heavens, as mentioned below.

4. Since the time of Orpheus and up to the 7th century B. C. all available information regarding the creation of the world is mentioned, according to tradition, chiefly by Homer and Hesiod. It is not until the 7th - 6th century B. C. that scientific reasoning about the creation of the world starts with Thales and the School of Miletus.

Information is given below, concerning the theory of the heliocentric system of Ancient Greeks, as formulated from the 6th century B. C. up to the beginning of the Christian Era. A further part of this study is devoted to the publication of the astronomical book of Copernicus.

ANAXIMANDER

5. Eudemus narrates in the Astrologies that Oenopides was the first to find the Zodiacal circle and the duration of the great year while Thales studied the eclipse of the Sun and discovered that the seasons

of the year are not of equal duration. In addition, Anaximander suggested that the Earth is suspended and moves around the center of the world [**2**].

PHILOLAOS

6. Philolaos held the view that in the middle of the world approximately at the center lies the fire which he calls the hearth of the universe, the Jupiter's abode, the mother of Gods, the altar and unity and measure of nature. There is also another fire in the upper part of the world which surrounds it. First comes by nature the center arround which ten divine bodies revolve (the heavens, the sphere of fixed stars, the five planets, then the Sun under which the Moon the Earth and the Counter-Earth (Antichthon) come in succession; at the very end comes the fire which is the focus around the centers [**3**].

7. Philolaos the Pythagorean believed that the center of the world was occupied by the fire (because this is the focus of the universe), then came the Counter-Earth and thirdly the inhabited Earth which lies opposite the Counter-Earth and revolves around the center along with the Counter-Earth; thus, the inhabitants of the Counter-Earth are not visible to those who live on Earth [**4**].

PLATO

8. The form of the divine class He wrought for the most part out of fire, that this Kind might be as bright as possible to behold and as fair; and likening it to the All He made it truly spherical; and He placed it in the intelligence of the Supreme to follow therewith, distributing in round about over all the Heaven, to be unto it a veritable adornment cunningly traced over the whole.

And each member of this class He endowed with two motions, whereof the one is uniform motion in the same spot, whereby it conceives always identical thoughts about the same objects, and the other is a forward motion due to its being dominated by the revolution of the Same and Similar; but in respect of the other five motions they are at rest and move not, so that each of them may attain the greatest possible perfection. From this cause, then, came into existence all those *unwandering* stars which are living creatures divine and wandering have been generated in the fashion previously described. And Earth, our nurse, *which is globed around the pole that stretches through all, He framed to be the wardress and fashioner of night and day,* she being the first and eldest of all the gods which have come into existence within the Heaven [5].

[Loeb, R. Bury]

ARISTOTLE

9. It remains to speak of the earth, where it is, whether it should be classed among things at rest or things in motion and of its shape.

Concerning ith position there is some divergence of opinion. Most of those who bold that the whole Universe is finite say that it lies at the centre, but this is contradicted by the Italian school called Pythagoreans. These affirm that the centre is occupied by fire, and that the earth is one of the stars, *and creates night and day as it travels in a circle about the centre* . . . These raison that the most honourable body ought to occupy the most honourable place, that fire is more honourable than earth, that a limit is a more honourable place than what lies between limits, and that the centre and outer boundary are the limits. Arguing from these premises, they say it must he not the earth, but rathe fire, that is situated at the centre of the sphere . . . This then is the opinion of some about the position of the earth, and on the question of its rest or motion there are conformable views. Here again all do not think alike. Those who deny that it lies at the centre suppose that it moves in a circle about the centre, and not the earth alone, but also the *counter - earth,* as we have already explained . . . Some again say that although the earth lies at the centre, it «winds», i. e. is in motion, *«round the axis which stretches right through»,* as in written in the Timaeus [6].

[Loeb, W. Guthrie]

SIMPLICIUS

10. The Pythagoreans held the view that the Earth is at the center of the universe and that around this center revolves the Counter - Earth, which is also another Earth opposite to this Earth ; that is the reason it is called Counter - Earth. Beyond Counter - Earth lies this Earth, which also revolves around the center The Moon comes next.

Furthermore, they said that the Earth, being one of the stars and revolving around the center, creates night and day, according to its position with reference to the Sun. But the Counter - Earth revolving around the center and following this Earth is not visible, because, it is occulted by the body of the Earth. The Pythagoreans also believed that the Earth is a star and an instrument of time, as it causes day and night, for it makes day to the part illuminated by the Sun but night to the part which is in the cone of the shadow [**7**].

ARCHIMEDES

11. You are well acquainted with the fact that most astronomers consider the universe as a sphere, the center of which coincides with the center of the Earth. Its radius is equal to the distance from the center of the Earth to the center of the Sun, as you have been informed by the teaching of astronomers. Aristarchos the Samian has published in outline certain hypotheses from which it follows that the universe is vaster than formerly believed. He assumed that the fixed stars and the Sun are at rest, while the Earth revolves in an orbit the center of which is occupied by the Sun. On the other hand, the spere of fixed stars, having the same center as the Sun, is so large that the circular orbit of the Earth around the Sun has the same ratio to the distance of the fixed stars, as that existing between the center of the ephere and its surface [**8**].

CICERO

12. The Syracusam Hicetas, as Theophrastus asserts, holds the view that the heaven, sun, moon, stars, and in short all of the things on high are stationary, and that nothing in the world is in motion except the earth, which by revolving and twisting round its axis with extreme velocity produces all the same results as would be produced if the earth were stationary and the heaven in motion; and this is also in same people's opinion the doctrine stated by Plato in Timaeus (40 B), but a little more obscurely [**9**].

[Loeb, H. Rackham]

PLUTARCH

13. It is doubtful whether Plato considered the Earth as being at rest or revolving in the same way as he said that the Sun, the Moon and the five planets (which he called instruments of time because of their turnings) did. He was wrong in considering the Earth, which revolves around the axis of the world, as being connected with the axis and at rest instead of considering, it as revolving and in motion. Later Aristarchos and Seleucos embraced the theory mentioned last, the former just assuming it, the latter also affirming it as true. Theophrastos narrates that Plato in his old age regretted that he had wrongly attributed to the Earth the position of the center of the universe **[10]**.

PLUTARCH

14. Oh, sir, just don't bring suit against us for impiety as Cleanthes thought that the Greeks ought to lay an action for impiety against Aristarchus the Samian on the ground that he was disturbing the hearth of the universe because he sought to save the phenomena by assuming that the heaven is at rest while the earth is revolving along the ecliptic and at the same time *is rotating about its own axis* **[11]**.

[Loeb, H. Cherniss - W. Helmbold]

PLUTARCH

15. Furthemore, it is said that Numa built the temple of Vesta, where the perpetual fire was Kept, of a circular form, not in imitation of the shape of the earth, believing Vesta to be the earth, but of the entire universe, at the centre of which the Pythagoreans place the element of fire, and call it *Vesta and Unit.* And they hold that the earth is neither motionsless nor situated in the centre of surrounding space, but that it revolves in a circle about the central fire, not being one of the most important, nor even one of the primary elements of the universe. This is the conception, we are told, which Plato also, in his old age, had of the earth, namely that it is established in a secondary space, and that the central and sovereign space is reserved for some other and nobler body **[12]**.

[Loeb, B. Perrin]

PLUTARCH

16. «Some think that the Eearth is at rest; but Philolaus the Pythagorean says that it moves around the fire with an *obliquely circular motion,* tike the Sun and Moon. Heracleides of Pontus and Ekphantus Pythagorean do not give the Earth any movement of locomotion, but rather a limited movement of rising and setting around its centre, like a wheel» [**13**].

17. Aristarchos held the view that the Sun and the fixed stars are at rest while Earth is revolving around the solar circle; also that during the Earth's obliquely circular motion the Sun's disc is shadowed (causing a solar eclipse) [**14**].

18. Some mathematicians have the same conception of the Earth as Plato did, namely that it is situated in the center of the Universe, while others believe that the Sun is in the center [**15**].

19. Seleucos the mathematician, who also formulated the doctrine that the Earth is in motion believed that the Earth's rotation and revolution hinder the Moon's motion [**16**].

SEXTUS EMPIRICUS

20. Therefore the motion of the Universe is one thing and time another. And in fact those who, like Aristarchus the mathematician, have rejected the motion of the Universe, but have held that the earth moves, are not precluded from conceiving time [**17**].

[Loeb, R. Bury].

COPERNICUS

21. Accordingly, when I had meditated upon this lack of certitude in the traditional mathematics concerning the composition of movements of the spheres of the world, I began to be annoyed that the philosophers, who in other respects had made a very careful scrutiny of the least details of the world, had discovered no sure scheme for the movements of the machinery of the world which has been built for us by the best and Most Orderly Workman of all. Wherefore I took the trouble to reread all the books by philosophers which I could get hold of, to see if any of them even supposed that the movements of the spheres of the world

were different from those laid down by those who taught mathematics in the schools. An as a matter of fact, I found first in Cicero that Nicetas thought that the Earth moved. And afterwards I found in Plutarch that there were some others of the same opinion : I shall copy out his words here, so that they may be known to all: «Some think that the Earth is at rest ; but Philolaus the Pythagorean says that it moves around the fire with an obliquely circular motion, like the sun and moon. Herakleides of Pontus and Ekphantus the Pythagorean do not give the Earth any movement of locomotion, but rather a limited movement of rising and setting around its centre, like a wheel».

Therefore I also, having found occasion, began to meditate upon the mobility of the Earth. And although the opinion seemed absurd, nevertheless because I knew that others before me had been granted the liberty of constructing whatever circles they pleased in order to demonstrate astral phenomena, I thought that I too would be readily permitted to test whether or not, by the laying down that the Earth had some movement, demonstrations less shaky than those of my predecessors could be found for the revolutions of the celestial spheres [**18**].

22. It seems credible to say that for similar reasons Philolaos held that the Earth is in motion. Also, Aristarch the Samian is said to have admitted the same conception. (De Revol. Orb. Celest. 1873). (Credibile est hisce similibusque causis Philolaum mobilitaten terrae sensisse quod etiam nonnulli Aristarchum Samium ferunt in eadem fuisse sententia).

23. Copernicus (1473 - 1543 A.D.), who had a sound knowledge of Greek and Latin, was acquainted with the geocentric and heliocentric system of Ancient Greeks. He personally admitted in his book that he got informed about the heliocentric system by Aristarchos the Samian, Cicero and Plutarch. His book entitled de Revolutionibus Orbium Coelestium, Libri VI was publisheed in 1543, after the approval of the Pope of Rome. Later on, the same book was banned by the Catholic Church and its circulation among the Catholics was forbidden. In the edition of 1873 A.D., on page 34, there is still a paragraph where Copernicus mentioned that Aristarchos the Samian was the one who first stated the theory of the heliocentric system (COUDER P. Les Etapes de l' Astronomie, Paris 1948, p. 79). In all the orher editions,

both before and after 1873 A.D. this paragraph is ommited for unknown reasons. The view supported by some later commentators that Copernicus was not acquainted with the treory of Aristarchos the Samian on the heliocentric system, as mentioned by Archimedes (Psammites, I. L. HEIBERG, Leipsig 1913, p. 218, 7) is completely groundless and wrong. These commentators base their view on the false argument that the work of Archimedes were printed in 1544 while the book of Copernicus was publisched in 1543. The truth is that the works of Archimedes in Latin translation started circulating in Europe in the 12th century A.D. or even earlier in the 5th century A.D. according to another evidence. (Boëthius). However, there is no reason to dwell upon that subject any longer, since Copernicus himself mentioned in his book, that he knew the heliocentric system of Aristarchos the Samian which is also mentioned by Plutarch. Besides, Copernicus assured that he had studied the related works of Plutarch, where the heliocentric system of Aristarchos the Samian, is mentioned [**13**].

A comparison betheen the Greek Mathematical Syntaxis of Ptolemy and Copernicus work De Revolutionibus Orbium Coelestium proves the great influnce of Ptolemy's work on Copernicus. (The great books on the Western World, 16, Ptolemy, Copernicus, Kepler, University of Chicago, by Encyclopedia Britanica Ink., 1952).

Copernicus not only adopted the theory of Aristarchos the Samian about the heliocentric system, but also presented in the above mentioned book some other astronomical and meteorological theories of the Ancient Greeks

Therefore, the great contribution of Copernicus to the progress of Astronomy is due to the fact that he was the first one who dared adopt and declare the heliocentric system of Aristarchos the Samian and who, through the support of his uncle, who was a Catholik bishop, got the Pope's approval for the publishing of his views.

24. Some astronomical and meteorological theories included in the work of Copernicus, de Revolutionibus Orbium Celestium, are listed below. There is no mentioning of the greek cources.

GREEC SOURCES		COPERNICUS, De revol. orb. celest	
Pythagoras held the view that the Earth is spherical, having life and reasoning. He also held that the universe is a sphere [19]	»	»	A_1
The sphere has the greatest volume of all the solids of equal surface. Consequently, it is bigger compared with bodies of equale surface [20]	»	»	A_1
All the stars are spherical. The Sun and Moon are spherical [21]	»	»	A_1
The Earth must have a spherical shape [22]	»	»	A_2
When we move southwards or northwards . . . the stars above our head undergo great change and they appear to be different, when we move northwards or southwards [23]	»	»	A_2
The star Kanovos, being not visible to those living north of Knidos, becomes visible to those living south [24]	»	»	A_2
When we move northwards some stars visible when we were south, are hidden, while others appear which were invisible before. The opposite happens when one moves southwards. But if the Earth was flat, nothing of the abave could happen [25]	»	»	A_2
The eclipses which take place simultaneously become visible later to those living east, than to those living west [26]	»	»	A_2
When a ship sails away from shore, its main body is hidden first, the masts being visible. However, when the ship approaches the land the masts appear first, the main body being hidden because of the curvature of the water's surface [27]	»	»	A_2

During the lunar eclipses, the limit of Earth's shadow on the Moon is always convex which proves that the Erth's periphery is spherical in shape	[28]	»	»	A_3
The horizons bisect always the sphere of the heavens. That would be impossible if the size of the Earth was significant as compared to that of the heavens	[29]	»	»	A_6
Aristarchos the Samian held that the Earth revolves around the Sun in a circular orbit	[31]			
There are also other gods, generated within the universe like the Sun made of the same immaculate substance as the Deity. These gods, though numerus form a whole with the Sun.				
It is obvious that the planets which revolve around the Sun follow some laws in their motion	[32]	»	»	E_1

BIBLIOGRAPHY

1. Aristophanes, Birds, 693.
2. Theon of Smyrna (Theonis Smyrnaei Philos. Platonici. Lipsiae 1878 p. 198, 14 - 19, Hiller).
3. Stobaei Ecl. I 22 p. 196, 18. Wachsmuth. Dox. 336 B 20 - 337 B 10.
4. Plutarch, De placitis Philosophorum IA′ E.
5. Plato, Timaeus 40 A - C.
6. Aristotle, On the heavens B 13. 293 a 15 - b 32.
7. Simplicius, Comm. in On the haeven of Aristotle (CAG. Heiberg) p. 511, 26 - 512, 17.
8. Archimedes, The Sand-reckoner (or Arenarius). Heiberg, Lipsiae 1913, p. 217, 7.
9. Cicero, Academia priora II 39 (Loeb p. 626).
10. Plutarch, Platonicae Quaestiones H 1.
11. Plutarch, De facie in orbe lunae 922 F.
12. Plutarch, Lives, Numa XI.

13. Plutarch, De placitis Philosophorum III ΙΓ'. Dox. 378.
14. » » » II ΚΔ'. Dox. 355, 1.
15. » » » II ΙΕ'. Dox. 345, 5.
16. » » » III ΙΖ'. Dox. 383.
17. Sextus Empiricus, Adv. math. X 173 - 174.
18. Copernicus, De revol. orb. celes. Praefatio.

19.	Diogenes Laertius VIII, 25.	Copernicus,	De revol. orb. celes.	A_1
20.	Plato, Timaeus 33 b. Pappus Ε', 350, 24. F. Hultsch.	»	»	A_1
21.	Aristotle, On the heavens Β' 11. 291 b 11.	»	»	A_1
22.	» » Β' 14. 297 a 8.	»	»	A_2
23.	» » Β' 14. 297 b 33 - 298 b 3		»	A_2
24.	Theon of Smyrna, Phil. Platonici, p. 121, 19. Hiller	»	»	A_2
25.	Cleomedes, De motu circulari Corporum Celestium, Lipsiae 1891, p. 76, 23. H. Ziegler	»	»	A_2
26.	Ptolemy, Great Collection, A 4. 152, 2. Heiberg.	»	»	A_2
27.	Cleomedes, De motu circ. Corp. Cel. p. 84, 9	»	»	A_2
28.	Aristotle, On the heavens, Β' 14. 297 b 19	»	»	A_3
29.	Ptolemy, Great Collection Α' 6. Heiberg	»	»	A_6
30.	Aristotle, On the heavens Α' 7. 274 b 29	»	»	A_8
31.	See [8].			
32.	Iuliani Imperatoris, vol. I, oratio IV, 143 B, 146 D, Lipsiae 1875	»	»	E_1

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

4

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΕΛΛΕΙΠΟΝΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ 5ου ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

REKONSTRUKTION DES GRIECHISCHEN TEXTES VON VIER FEHLENDEN AUFGABEN DES V. BUCHES DER ARITHMETIKA DES DIOPHANTOS

«ΠΛΑΤΩΝ»
ΕΤΟΣ ΙΓ'—1961
ΤΕΥΧΗ Α' καὶ Β' 25/26

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΕΛΛΕΙΠΟΝΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

Τοῦ προβλήματος V, 19 τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου σῴζεται μόνον ἡ ἐκφώνησις, ἐνῷ ἡ ἀπόδειξις ἐλλείπει. Ὁ P. Tannery, ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν (1893, Teubner), σημειοῖ τὴν ἔλλειψιν τῆς ἀποδείξεως διὰ μιᾶς γραμμῆς ἐκ στιγμῶν, παραθέτει δὲ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς ἄλλου προβλήματος, τοῦ ὁποίου ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο σημειοῦμεν κατωτέρω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 19 γ.

Ὁ πρῶτος ἐκδότης τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, Γάλλος μαθηματικὸς Bachet de Méziriac (1621, Paris) ὁρμηθεὶς ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 καὶ ἐκ τῆς ἐλλείψεως τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος V, 19 γ διατυπώνει τὴν γνώμην ὅτι ἐκτὸς τούτων ἐλλείπουν ἀκόμη πλήρως καὶ ἄλλα δύο προβλήματα, τὰ ὁποῖα κατωτέρω σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν 19 α καὶ 19 β. Ὁ Bachet παρέχει καὶ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων 19, 19 α, 19 β ὑπὸ τὸ πνεῦμα τοῦ Διοφάντου. [Ἴδε O. Schulz Diophantus, Berlin 1822].

Τὴν γνώμην τοῦ Bachet συμμερίζονται οἱ ἑξῆς ἐκδόται καὶ σχολιασταὶ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου: O. Schulz, Diophantus, Berlin, 1822. G. Nesselmann, Die, Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos, Leipzig 1890. T. Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge 1910. P. ver Eecke, Diophant d' Alexandrie, Bruges 1926.

Διὰ νὰ γίνῃ καταληπτὴ ἡ ὀρθότης τῆς παρατηρήσεως τοῦ Bachet παραθέτομεν κατωτέρω 9 προβλήματα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ὁποίων καταφαίνεται ὅτι πρόκειται περὶ τριῶν ὁμάδων, ἐκ τριῶν συγγενῶν προβλημάτων ἑκάστης, ἐκ τῶν ὁποίων ἐλλείπουν 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ προβλήματος 19, 2) πλήρως τὰ προβλήματα 19 α καὶ 19 β, 3) ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος 19 γ.

Ἀκολούθως ἀνακατασκευάζομεν τὰ ἐλλείποντα ἀρχαῖα κείμενα ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου καὶ προβαίνομεν, τὸ μὲν εἰς τὴν μετάφρασιν τούτων εἰς τὴν νέαν ἑλληνικήν, τὸ δὲ εἰς τὴν σύγχρονον διατύπωσιν τῶν λύσεων (1).

1) Τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου τῆς ἀποδείξεως τοῦ προβλήματος V, 19 ἀπεστείλαμεν εἰς Λειψίαν κατ' Ἀπρίλιον 1961 πρὸς δημοσίευσιν εἰς τὸν ἑορταστικὸν τόμον τοῦ οἴκου B. G. Teubner ἐπὶ τῇ συμπληρώσει 150 ἐτῶν ἀπὸ τῆς ἱδρύσεώς του (1811—1961).

Τὰ 9 προβλήματα τοῦ V βιβλίου (ἔκδ. Tannery, B. C. Teubner).

15
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x\\ x^3+y&=\alpha^3\\ x^3+z&=\beta^3\\ x^3+\omega&=\gamma^3\end{aligned}$$

16
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x\\ x^3-y&=\alpha^3\\ x^3-z&=\beta^3\\ x^3-\omega&=\gamma^3\end{aligned}$$

17
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x\\ y-x^3&=\alpha^3\\ z-x^3&=\beta^3\\ \omega-x^3&=\gamma^3\end{aligned}$$

18
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x^2\\ x^6+y&=\alpha^2\\ x^6+z&=\beta^2\\ x^6+\omega&=\gamma^2\end{aligned}$$

19
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x^2\\ x^6-y&=\alpha^2\\ x^6-z&=\beta^2\\ x^6-\omega&=\gamma^2\end{aligned}$$

[ἐλλείπει ἡ ἀπόδειξις
Beweis fehlt]

19 α
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=x^2\\ y-x^6&=\alpha^2\\ z-x^6&=\beta^2\\ \omega-x^6&=\gamma^2\end{aligned}$$

[ἐλλείπει πλήρως
es fehlt ganz]

19 β
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=\delta\\ \delta^3+y&=\alpha^2\\ \delta^3+z&=\beta^2\\ \delta^3+\omega&=\gamma^2\end{aligned}$$

[ἐλλείπει πλήρως]
es fehlt ganz

19 γ
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=\delta\\ \delta^3-y&=\alpha^2\\ \delta^3-z&=\beta^2\\ \delta^3-\omega&=\gamma^2\end{aligned}$$

[ἐλλείπει ἡ ἐκφώνησις καὶ ἐλάχιστον ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀποδείξεως
Wortlaut und geringer Teil vom Anfang des Beweises fehlt]

20
$$\begin{aligned} y+z+\omega&=\delta\\ y-\delta^3&=\alpha^2\\ z-\delta^3&=\beta^2\\ \omega-\delta^3&=\gamma^2\end{aligned}$$

Ἡ ἀνακατασκευὴ τῶν 4 τελείως ἐλλειπόντων κειμένων

V, 19 (Ἀπόδειξις)

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς $\Delta^{Y}\alpha$, *καὶ τῶν ζητουμένων, ὁ μὲν* $K^{Y}K\,\frac{\delta}{\gamma}$, *ὁ δὲ* $K^{Y}K\,\frac{\vartheta}{\eta}$, *ὁ δὲ* $K^{Y}K\,\frac{\iota\varsigma}{\iota\varepsilon}$. *καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν* $\square^{ον}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι $\Delta^{Y}\alpha$. *ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν* $K^{Y}K\,\frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$· *ταῦτα ἴσα* $\Delta^{Y}\alpha$. *καὶ πάντα παρὰ* $\Delta^{Y}\alpha$· *γίνονται* $\Delta^{Y}\Delta\,\frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ *ἴσ.* $\overset{\circ}{M}\alpha$.

καὶ ἔστιν ἡ $\overset{\circ}{M}\alpha$ $\square^{ος}$ *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ον}$· *ὥστε ἄρα καὶ* $\Delta^{Y}\Delta\,\frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ *δεήσει εἶναι* $\square^{ον}$ *πλευρὰν ἔχοντα* $\square^{ον}$. *εἰ ἦσαν καὶ αἱ* $\overset{\circ}{M}\,\frac{\varrho\mu\delta}{\tau o\alpha}$ $\square^{ος}$ *πλευρὰν ἔχων* $\square^{ον}$, *λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον· πόθεν ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν* $\Delta^{Y}\Delta$; *ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι τρεῖς τετραγώνους ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶν* $M\alpha$·

καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ α, τὸ δὲ σύνθεμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ $\square^{ον}$, πλευρὰν ἔχοντα $\square^{ον}$.

καὶ ἔτι ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι $\overset{\circ}{M}$ α· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας $\overset{\circ}{M}$ α, πολλῷ ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων M α· ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος $\square^{ος}$, πλευρὰν ἔχων $\square^{ον}$ μείζων εἶναι δυάδος. δεῖ οὖν τὰ $\frac{\text{χκε}}{\text{φοθ}}$ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{\text{χκε}}{\text{φκθ}}$, ὁ δὲ $\frac{\text{χκε}}{\text{μθ}}$, ὁ δὲ $\frac{\text{χκε}}{\text{α}}$.

ἀνατρέχομεν ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς καὶ τάσσομεν πάλιν τοὺς τρεῖς Δ^{Y} α, τῶν δὲ ζητουμένων ὃν μὲν $K^{Y} K$ $\frac{\text{χκε}}{\text{ϟς}}$, ὃν δὲ $\frac{\text{χκε}}{\text{φος}}$, ὃν δὲ $K^{Y} K$ $\frac{\text{χκε}}{\text{χκδ}}$· καὶ συμβήσεται τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, λείψαντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y}· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς $K^{Y} K$ $\frac{\text{χκε}}{\text{͵ασϟς}}$· καὶ πάντα παρὰ Δ^{Y} α· γίνονται $\Delta^{Y} \Delta$ $\frac{\text{χκε}}{\text{͵ασϟς}}$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α. καὶ γίνεται ὁ ς $\frac{\text{ς}}{\text{ε}}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

V, 19 a

Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον.

Τετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς Δ^{Y} α, καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $K^{Y} K$ β, ὁ δὲ $K^{Y} K$ ε, ὁ δὲ $K^{Y} K$ ι. καὶ συμβαίνει ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον, ποιεῖν $\square^{ον}$.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^{Y} α. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσιν $K^{Y} K$ ιζ· ταῦτα ἴσα Δ^{Y} α· καὶ πάντα παρὰ Δ^{Y} α· γίνονται $\Delta^{Y} \Delta$ ιζ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α.

Καὶ ἔστιν ἡ $\overset{\circ}{M}$ α $\square^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{ον}$· εἰ ἦσαν καὶ αἱ $\overset{\circ}{M}$ ιζ $\square^{ος}$ πλευρὰν ἔχων $\square^{ον}$ λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. Ἔστι δὲ ὁ ιζ τριῶν τετραγώνων τὸ σύνθεμα μετὰ $\overset{\circ}{M}$ γ· δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς τετραγώνους ὧν τὸ σύνθεμα μετὰ $\overset{\circ}{M}$ γ ποιεῖ $\square^{ον}$ πλευρὰν ἔχοντα $\square^{ον}$. ἔστω $\overset{\circ}{M}$ ις. δεῖ οὖν $\overset{\circ}{M}$ ιγ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους· ἔσται τῶν ζητουμένων ὁ μὲν θ, ὁ δὲ $\frac{\text{κε}}{\text{λς}}$, ὁ δὲ $\frac{\text{κε}}{\text{ξδ}}$. καὶ ἑκάστῳ τούτων προστίθεμαι $\overset{\circ}{M}$ α καὶ ἔρχομαι ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσω ἕκαστον $K^{Y} K$ τοσούτων, ὑποτιθεμένων τῶν τριῶν Δ^{Y} α. καὶ γίνονται ὁ μὲν $K^{Y} K$ ι, ὁ δὲ $K^{Y} K$ $\frac{\text{κε}}{\text{ξα}}$, ὁ δὲ $K^{Y} K$ $\frac{\text{κε}}{\text{πθ}}$ καὶ συμβήσεται ἕκαστον λείψαντα τὸν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβον ποιεῖν τετράγωνον.

λοιπόν ἐστι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι Δ^Y α· γίνονται δὲ οἱ τρεῖς K^Y K ις. καὶ πάντα παρὰ Δ^Y α· γίνονται $\Delta^Y \Delta$ ἴσ. $\overset{\circ}{M}$ α· ~~καὶ γίνεται~~ ὁ Ͻ L′.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.

V, 19 β

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος προσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β′.

Καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ β ἀριθμοῦ κύβος $\overset{\circ}{M}$ η. δεῖ οὖν τὸν β διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τούτων προσλαβὼν $\overset{\circ}{M}$ η ποιῇ $\square^{ον}$. δεήσει οὖν τὸν κς διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ η. τάσσω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων $\overset{\circ}{M}$ ϑ ὃς μείζων ἐστι $\overset{\circ}{M}$ η. ἐὰν οὖν διέλω τὸν ιζ εἰς δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ $\overset{\circ}{M}$ η λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τοῦ ιζ τὸ L′ καὶ γίνεται η L′, καὶ ζητῶ τὶ μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overset{\circ}{M}$ η L′ καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$· καὶ πάντα τετράκις· ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overset{\circ}{M}$ λδ καὶ ποιεῖν $\square^{ον}$· ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον $\Delta^{Y\chi}$ α καὶ γίνονται $\overset{\circ}{M}$ λδ $\Delta^{Y\chi}$ α ἴσ. $\square^{\varphi}$.

καὶ πάντα ἐπὶ Δ^Y· γίνονται Δ^Y λδ $\overset{\circ}{M}$ α ἴσ. $\square^{\varphi}$· ἔστω τῷ ἀπὸ π^{λ}· $\overset{\circ}{M}$α ⋔ Ͻς καὶ γίνεται ὁ Ͻ $\overset{\circ}{M}$ς· Δ^Y ἄρα $\overset{\circ}{M}$λς, τὸ $\Delta^{Y\chi}$ $\overset{\circ}{M}$λς$^{\chi}$. ἔσται ἄρα τὸ ταῖς λδ προστιθέμενον λς$^{\chi}$· τὸ ἄρα ταῖς $\overset{\circ}{M}$ η L′ προστιθέμενον ρμδ$^{\chi}$ καὶ ποιεῖ $\square^{ον}$ τὸν ἀπὸ π^{λ}· $\frac{ιβ}{λε}$.

Δεῖ οὖν τὸν ιζ διαιρούμενον εἰς δύο $\square^{ους}$ κατασκευάζειν τὴν ἑκάστου πλευρὰν ὡς ἔγγιστα $\frac{ιβ}{λε}$, καὶ ζητῶ τὶ ἡ τετρὰς λείψασα, προσλαβοῦσα μονὰς ποιεῖ τὸν αὐτόν, τουτέστιν $\frac{ιβ}{λε}$.

τάσσω οὖν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἀπὸ Ͻ κγ $\overset{\circ}{M}$ α, τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ $\overset{\circ}{M}$ δ ⋔ Ͻιγ, καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν $\square^{ων}$, Δ^Y χϞη $\overset{\circ}{M}$ ιζ ⋔ Ͻνη ἴσ. ιζ. καὶ γίνεται ὁ Ͻ $\frac{τμϑ}{κϑ}$· ἔσται ἄρα τοῦ ἑνὸς τῶν $\square^{ων}$ ἡ π^{λ}· $\frac{τμϑ}{͵αις}$, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου $\frac{τμϑ}{͵αιϑ}$· καὶ ἐὰν ἄρω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τριῶν $\square^{ων}$ $\overset{\circ}{M}$ η ἕξω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.

V, 19 γ.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς,

ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.
ἐπιτετάχθω δὴ τὸν β.

(Ἑ ρ μ η ν ε ί α : ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον δίδῃ τετράγωνον. Ἔστω ὁ δοθεὶς 2).
Σ η μ. Ἡ ἀπόδειξις ὑπάρχει εἰς τὸ κείμενον.

Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V 19.

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι τετράγωνος, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἂς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2 καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $\frac{3}{4}x^6$, ὁ δὲ $\frac{8}{9}x^6$, ὁ δὲ $\frac{15}{16}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλά τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $\frac{371}{144}x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς x^2. Καὶ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2· λαμβάνεται $\frac{371}{144}x^4=1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος ἀριθμός· ὥστε ἄρα θὰ εἶναι ἀνάγκη καὶ ὁ $\frac{371}{144}x^4$ νὰ εἶναι διτετράγωνος ἀριθμός. (Σημ. διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις). Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{371}{144}$ ἦτο διτετράγωνος ἀριθμὸς τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῇ· πόθεν προῆλθεν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^4; προῆλθεν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ 3 τοῦ ἀθροίσματος τριῶν τετραγώνων τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· καὶ ἀνάγεται οὕτω τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν.

Καὶ ζητοῦμεν ὅπως ἕκαστος αὐτῶν εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος· ἐὰν ἄρα κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μικρότερον τῆς μονάδος κατὰ μείζονα λόγον ἕκαστος αὐτῶν θὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος. Κατὰ συνέπειαν πρέπει τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι διτετράγωνος, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2.

Ἂς ταχθῇ ὡς ὑπόλοιπον διτετράγωνος μεγαλύτερος τοῦ 2· ἔστω ὁ $\frac{1296}{625}$· Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ $\frac{579}{625}$ εἰς τρεῖς τετραγώνους. Ὁ εἷς τῶν ζητουμένων θὰ εἶναι $\frac{529}{625}$, ὁ ἄλλος $\frac{49}{625}$ καὶ ὁ τρίτος $\frac{1}{625}$·

Ἀνατρέχομεν τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2, ἐκ δὲ τῶν ζητουμένων τὸν μὲν $\frac{96}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{576}{625}x^6$, τὸν δὲ $\frac{624}{625}x^6$. Καὶ θὰ συμβῇ, ὥστε ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν μεῖον ἕκαστον αὐτῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2· εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $\frac{1296}{625}x^6$· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 λαμβάνεται $\frac{1296}{625}x^4=1$. Καὶ γίνεται ὁ $x=\frac{5}{6}$·

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$y+z+\omega=x^2,\ (1),\quad x^6-y=\alpha^2,\ (2),\quad x^6-z=\beta^2,\ (3),\quad x^6-\omega=\gamma^2,\ (4).$$

Ἔστω $y=\frac{3}{4}x^6$, $z=\frac{8}{9}x^6$, $\omega=\frac{15}{16}x^6$, ὁπότε θὰ εἶναι $x^6-\frac{3}{4}x^6=\left(\frac{1}{2}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{8}{9}x^6=\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2$, $x^6-\frac{15}{16}x^6=\left(\frac{1}{4}x^3\right)^2$ ἤτοι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1), εἰς τὴν ὁποίαν δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $\left(\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}\right)x^6=x^2$, ἢ $\frac{371}{144}x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς $\frac{371}{144}$ νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου.

Ὁ $\frac{3}{4}=\left(1-\frac{1}{4}\right)$, ὁ $\frac{8}{9}=\left(1-\frac{1}{9}\right)$, ὁ $\frac{15}{16}=\left(1-\frac{1}{16}\right)$. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ ἦτο $3-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=$ διτετράγωνος. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους ἀριθμούς, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, (καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μικρότερον τῆς μονάδος), τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 3 νὰ δίδῃ διτετράγωνον ἀριθμόν. Ἐὰν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους κ^2, λ^2, μ^2 καὶ τὸν διτετράγωνον ξ^4 θὰ εἶναι $3-\xi^4=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$.

Ἔστω $\xi^4=\left(\frac{6}{5}\right)^4=\frac{1296}{625}$ ὁπότε θὰ εἶναι $3-\frac{1296}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$ ἢ $\frac{579}{625}=\kappa^2+\lambda^2+\mu^2$.

Εἶναι δὲ $2<\frac{1296}{625}<3$ καὶ $\frac{579}{625}<1$. Ὁ $\frac{579}{625}$ ἀναλύεται εἰς τρεῖς τετραγώνους, τοὺς $\kappa^2=\frac{529}{625}$, $\lambda^2=\frac{49}{625}$, $\mu^2=\frac{1}{625}$.

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτομεν πάλιν $y+z+\omega=x^2$ καὶ $y=\left(1-\frac{529}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } y=\left(1-\frac{1}{4}\right)x^6\right]$, $z=\left(1-\frac{49}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } z=\left(1-\frac{1}{9}\right)x^6\right]$, $\omega=\left(1-\frac{1}{625}\right)x^6$, $\left[\text{ἀντὶ } \omega=\left(1-\frac{1}{16}\right)x^6\right]$, ἤτοι $y=\frac{96}{625}x^6$, (5), $z=\frac{576}{625}x^6$, (6), $\omega=\frac{624}{625}x^6$, (7). Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4) συναρτήσει τοῦ x, ἤτοι εἶναι

$$x^6-\frac{96}{625}x^6=\left(\frac{23}{25}x^3\right)^2,\ x^6-\frac{576}{625}x^6=\left(\frac{7}{25}x^3\right)^2,\ x^6-\frac{624}{625}x^6=\left(\frac{1}{25}x^3\right)^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) τῶν τιμῶν y, z, ω λαμβάνομεν

$$\left(\frac{96}{625}+\frac{576}{624}+\frac{624}{625}\right)x^6=x^2,\ \text{ἐξ ἧς}\ x=\frac{5}{6}.$$

Ἐκ τῶν (5, 6, 7) εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y=\frac{96}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{2400}{46656},\quad x^6-y=\frac{15625}{46656}-\frac{2400}{46656}=\left(\frac{115}{216}\right)^2$$

$$z=\frac{576}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{14400}{46656},\quad x^6-z=\frac{15625}{36656}-\frac{14400}{46656}=\left(\frac{35}{216}\right)^2$$

$$\omega=\frac{624}{625}\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15600}{46656},\quad x^6-\omega=\frac{15625}{46656}-\frac{15600}{46656}=\left(\frac{5}{216}\right)^2$$

$$y+z+\omega=\frac{2400+14400+15600}{46656}-\frac{32400}{46656}=\left(\frac{180}{216}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V, 19 α

Νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἑκάστου δίδῃ τετράγωνον.

Ἄς ταχθῇ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν x^2 καὶ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν $2x^6$, ὁ δὲ $5x^6$, ὁ δὲ $10x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι $17x^6$· ταῦτα ἴσα πρὸς x^2· καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 γίνεται $17x^4=1$.

Καὶ εἶναι ἡ μονὰς διτετράγωνος· ἐὰν καὶ ὁ 17 ἦτο διτετράγωνος τὸ ζητούμενον θὰ εἶχε λυθῆ. Εἶναι δὲ ὁ 17 τὸ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων σὺν 3. Θὰ εἶναι ἀνάγκη ἄρα νὰ εὕρωμεν τρεῖς τετραγώνους τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16. Πρέπει λοιπὸν ὁ 13 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους· θὰ εἶναι ὁ μὲν 9, ὁ δὲ $\frac{36}{25}$, ὁ δὲ $\frac{64}{25}$. Καὶ εἰς ἕκαστον τούτων προσθέτω τὴν μονάδα καὶ ἐπανέρχομαι εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Θέτω ἕκαστον τούτων ὡς συντελεστὴν τοῦ x^6, λαμβανομένου τοῦ ἀθροίσματος ἴσου πρὸς x^2. Καὶ γίνονται ὁ μὲν $10x^6$ ὁ δὲ $\frac{61}{25}x^6$, ὁ δὲ $\frac{89}{25}x^6$. Καὶ συμβαίνει, ὥστε ἕκαστος μεῖον τὸν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν νὰ δίδῃ τετράγωνον.

Ὑπολείπεται νὰ ἐξισώσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρὸς x^2. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν $16x^6$. Καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^2 γίνεται $16x^4=1$. καὶ γίνεται ὁ $x=\frac{1}{2}$.

Ἐπὶ τὰ δεδομένα.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=x^2$, (1), $y-x^6=\alpha^2$, (2), $z-x^6=\beta^2$, (3), $\omega-x^6=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $y=2x^6$, $z=5x^6$, $\omega=10x^6$. Διὰ τῶν τιμῶν τούτων πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (2, 3, 4), συναρτήσει τοῦ x. Μένει νὰ πληρωθῇ ἡ συνθήκη (1). Ἐκ ταύτης δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν y, z, ω εἶναι $17x^6=x^2$ ἢ $17x^4=1$. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ῥητὴ λύσις ἔπρεπε ὁ συντελεστὴς 17 νὰ ἦτο διτετράγωνος. Ἐξετάζεται ἡ προέλευσις τούτου. Ὁ $17=(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)$. Ἀνάγεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς τετράγωνοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα σὺν 3 νὰ εἶναι διτετράγωνος. Ἔστω ὁ διτετράγωνος 16, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι, ἂν καλέσωμεν τοὺς ζητουμένους τετραγώνους κ^2, λ^2, μ^2,

$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+3=16$ ἢ $\kappa^2+\lambda^2+\mu^2=13$. Ὁ 13 ἀναλύεται εἰς τοὺς τρεῖς τετραγώνους 9, $\frac{36}{25}$, $\frac{64}{25}$. Εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων προσθέτομεν τὴν μονάδα, ὁπότε εἶναι $10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}=16$ καὶ θέτομεν $y=10x^6$, (5), $z=\frac{61}{25}x^6$, (6), $\omega=\frac{89}{25}x^6$, (7). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\left(10+\frac{61}{25}+\frac{89}{25}\right)x^6=x^2 \quad ἢ \quad 16x^4=1, \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{1}{2}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (5, 6, 7) λαμβάνομεν

$$y=10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{32}, \quad z=\frac{61}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{61}{1600}, \quad \omega = \frac{89}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{89}{1600}$$

καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι

$$y+z+\omega = \frac{5}{32} + \frac{61}{1600} + \frac{89}{1600} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y-x^6 = \frac{5}{32} - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{8}\right)^2, \quad z-x^6 = \frac{61}{1600} - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{20}\right)^2$$

$$\omega - x^6 = \frac{89}{1600} - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^2.$$

Μετάφρασις τοῦ προβλήματος V, 19 β.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς νὰ διαιρεθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν σὺν ἕκαστον αὐτῶν δίδῃ τετράγωνον.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ ὁ 2.

Καὶ εἶναι ὁ κύβος τοῦ 2 ὁ 8. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 2 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Θὰ εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναλυθῇ ὁ 26 εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὥστε ἕκαστος αὐτῶν νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Θέτω τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἐὰν λοιπὸν ἀναλύσω τὸν 17 εἰς δύο τετραγώνους λύω τὸ ζητούμενον. Λαμβάνω τοῦ 17 τὸ ἥμισυ, τὸ ὁποῖον εἶναι $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητῶ νὰ εὕρω ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσω εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ δίδεται τετράγωνος· πολλαπλασιάζω ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 4· ζητῶ ἄρα νὰ εὕρω τετραγ. κλάσμα, ὅπερ προστιθέμενον εἰς τὸν 34 νὰ δίδῃ τετράγωνον· ἔστω τὸ τετραγωνικὸν κλάσμα $\frac{1}{x^2}$, ὁπότε εἶναι $34+\frac{1}{x^2}$ = τετράγωνος. Διὰ πολ)σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ x^2 λαμβάνομεν $34x^2+1$=τετράγωνος· ἔστω$=(1-6x)^2$, ἐξ ἧς $x=6$· εἶναι ἄρα $x^2=36$, $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{36}$. Θὰ εἶναι ἄρα τὸ εἰς τὰς μονάδας 34 προστιθέμενον κλάσμα $\frac{1}{36}$. τὸ εἰς τὰς μονάδας ἄρα $8\frac{1}{2}$ προστιθέμενον κλάσμα θὰ εἶναι $\frac{1}{144}$ καὶ δίδει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι $\frac{35}{12}$.

Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ κατασκευασθῇ κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$ καὶ πρὸς τοῦτο ζητῶ νὰ εὕρω τί θὰ ἀφαιρέσω ἀπὸ τοῦ 4 καὶ τί θὰ προσθέσω εἰς τὸ 1 διὰ νὰ ἔχω τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, δηλ. $\frac{35}{12}$.

Θέτω λοιπὸν δύο τετραγώνους, ἕνα μὲν ἔχοντα πλευρὰν τὴν $(23x+1)$, τὸν δὲ ἄλλον τὴν $(4-13x)$ καὶ γίνεται τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν $598x^2+17-58x=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$.

Θὰ εἶναι ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου $\frac{1016}{349}$, ἡ δὲ τοῦ ἄλλου $\frac{1019}{349}$ καὶ ἐὰν ἀφαιρέσω ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων 8 θὰ ἔχω τοὺς ζητουμένους τρεῖς.

Σύγχρονος διατύπωσις τῆς λύσεως

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$y+z+\omega=\delta$, (1), $\delta^3+y=\alpha^2$, (2), $\delta^3+z=\beta^2$, (3), $\delta^3+\omega=\gamma^2$, (4).

Ἔστω $\delta=2$, $\delta^3=8$. Πρέπει λοιπὸν ὁ 2 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν σὺν 8 δίδῃ τετράγωνον. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς (2, 3, 4) καὶ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν $26=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ἤτοι πρέπει ὁ 26 νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς τετραγώνους ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8. Ἔστω ὁ εἷς τῶν ζητουμένων τετραγώνων 9, ὁπότε ὁ $17=(26-9)$ πρέπει νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο τετραγώνους, ἕκαστος τῶν ὁποίων νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 8 καὶ μικρότερος τοῦ 9. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 17, τὸν $8\frac{1}{2}$ καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποῖον τετραγωνικὸν κλάσμα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν $8\frac{1}{2}$ διὰ νὰ λάβωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν (Σημ. Μέθοδος τοῦ προβλήματος V, 9) ἤτοι νὰ εἶναι $8\frac{1}{2}+\frac{1}{4t^2}=$ τετράγωνος, (5). Διὰ πολ]σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 4 ἔχομεν $34+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, ἢ $34t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(1-6t)^2$, ἐξ ἧς $t=6$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν $\frac{17}{2}+\frac{1}{144}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$. Καὶ εἶναι $8<\frac{1225}{144}<9$. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ἑκάστου τῶν δύο τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 πρέπει νὰ εἶναι, κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς $\frac{35}{12}$. Ἐπειδὴ $17=4^2+1^2$, πρέπει ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν δύο νέων τετραγώνων εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναλυθῇ ὁ 17 νὰ εἶναι ἡ μὲν μικροτέρα τοῦ 4, ἡ δὲ μεγαλυτέρα τοῦ 1. Πρέπει λοιπὸν ἐκ μὲν τοῦ 4 νὰ ἀφαιρεθῇ κάτι εἰς δὲ τὸ 1 νὰ προστεθῇ κάτι, ὥστε νὰ λαμβάνεται καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις $\frac{35}{12}$, ἤτοι νὰ εἶναι $4-\kappa=\frac{35}{12}$ καὶ $1+\lambda=\frac{35}{12}$. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{13}{12}$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\lambda=\frac{23}{12}$. Σχηματίζομεν τώρα τοὺς δύο ζητουμένους τετραγώνους θέτοντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν $(23x+1)$ καὶ τοῦ ἄλλου $(4-13x)$, ὁπότε πρέπει νὰ εἶναι $(23x+1)^2+(4-13x)^2=17$, ἐξ ἧς $x=\frac{29}{349}$. Ἑπομένως ὁ δεύτερος τετράγωνος ἐκ τῶν τριῶν εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 26 εἶναι $\left(23\cdot\frac{29}{349}+1\right)^2=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$ καὶ ὁ τρίτος εἶναι $\left(4-13\cdot\frac{29}{349}\right)^2=\left(\frac{1019}{349}\right)^2$, ἐν ᾧ ὁ πρῶτος εἶναι 9. Δι' ἀφαιρέσεως ἀπὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων τοῦ 8 (ἐκ τῶν σχέσεων (2, 3, 4)) λαμβάνομεν $y=1$, $z=\frac{57848}{121801}$, $\omega=\frac{63953}{121801}$ καὶ τὰ ἐπιτάγματα πληροῦνται, ἤτοι εἶναι $\delta=y+z+\omega=1+\frac{57848}{121801}+\frac{63953}{121801}=2$, καὶ

$$\delta^3+y=8+1=3^2,$$

$$\delta^3+z=8+\frac{57848}{121801}=\left(\frac{1016}{349}\right)^2$$

$$\delta^3+\omega=8+\frac{63953}{121801}=\left(\frac{1019}{349}\right)^2.$$

Σ η μ. Τὰ ἀνακατασκευασθέντα κείμενα θὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὴν ἡμετέραν ἔκδοσιν τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ἥτις θὰ γίνῃ κατὰ τὸ προσεχὲς ἔτος 1962 ἐν Ἀθήναις.

ZUSAMMENFASSUNG

REKONSTRUKTION DES GRIECHISCHEN TEXTES VON VIER FEHLENDEN AUFGABEN DES V. BUCHES DER ARITHMETIKA DES DIOPHANTOS

Von der Aufgabe V, 19 der Arithmetika des Diophantos fehlt der Beweis. P. Tannery, der Herausgeber der Arithmetika (Teubner 1893) hat dies durch eine Punktreihe angedeutet. Es folgt in derselben 19. Aufgabe fast die ganze Lösung einer anderen Aufgabe, deren Wortlaut verloren ist. Diese Aufgabe wird im folgenden als 19 γ bezeichnet.

Der erste Herausgeber der Arithmetika, der französischer Mathematiker Bachet de Méziriac (Paris, 1621) meinte, dass noch zwei Aufgaben fehlen (die wir im folgenden als 19α und 19β bezeichnen) und gab die Lösungen der Aufgaben 19, 19α, 19β im Geiste Diophants wieder. (Siehe : O. Schulz, Diophantus, Berlin 1822).

Der Meinung Bachets stimmen die folgenden Herausgeber und Kommentatoren Diophants überein : O. Schulz. G. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842. G. Wertheim, Leipzig, 1890. T. Heath, (Cambridge, 1910 ; P. ver Eecke, Bruges, 1926.

Um die Richtigkeit der Meinung Bachets verständlich zu machen, legen wir 9 Aufgaben vor, aus deren Vergleichung hervorgeht, dass es sich um drei Gruppen von je drei verwandten Aufgaben handelt. Aus diesen Aufgaben fehlen im Text : 1) Der Beweis von 19 ; 2) ganz die Aufgaben 19α und 19β und 3) der Wortlaut und kleinere Teil vom Anfang des Beweises der Aufgabe 19γ. Weiter rekonstruieren wir die fehlenden griechischen Texte auf Grund der diophantischen Ausdrucksweise, übersetzen sie ins Neugriechische und geben noch die gegenwärtige Ausdrucksweise wieder. Unsere Lösung der Aufgabe 19 unterscheidet sich von der Lösung Bachets, indem wir $3-(\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2)=\left(\frac{6}{5}\right)^4$ anstatt $=1$ setzen [1]. Diese Änderung unternahmen wir auf Grund der Aufgabe V, 16.

Übersetzung der rekonstruierten griechischen Texte.

V, 19 (Fehlender Beweis).

Es werde die Summe der drei Zahlen gleich x^2 gesetzt, und die drei Zahlen mögen als $\frac{3}{4}x^6$, $\frac{8}{9}x^6$, $\frac{15}{16}x^6$ angesetzt werden. Dann ist ist der Kubus der Summe der drei Zahlen, vermindert um jede einzelne der Zahlen, ein Quadrat. Es erübrigt sich die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen.

---

1) Den rekonstruierten Text der Aufgabe 19 übersandten wir im April 1961 für die Teubner · Festschrift (1811—1961) nach Leipzig.

Die Summe ist aber $\frac{371}{144}x^6$. Dies ist gleich x^2. Und wenn wir beiderseitig durch x^2 dividieren bekommen wir $\frac{371}{144}x^4 = 1$. Wenn $\frac{371}{144}$ ein Biquadrat würde, so wäre die Aufgabe gelöst. Wie ist aber dieser Koeffizient entstanden ? Dadurch, dass wir die Summe von drei Quadraten, von denen jedes kleiner als 1 ist, von 3 subtrahieren.

Es kommt also darauf an, drei Quadrate zu finden, von denen jedes kleiner als 1 ist, und deren Summe, wenn sie von 3 subtrahiert wird, ein Biquadrat als Rest liefert. Wir wollen nämlich, dass jedes Quadrat kleiner als 1 sei ; wenn wir es also so einrichten, dass die drei Quadrate zusammen kleiner als 1 sind, so wird jedes einzelne gewiss kleiner als 1 sein. Es muss dann das (bei der Subtraktion von 3) übrigbleibende Biquadrat grösser als 2 sein. Setzen wir dies übrigbleibende Biquadrat gleich $\left(\frac{6}{5}\right)^4$, so haben wir $\frac{579}{625}$ in drei Quadrate zu zerlegen. Diese sind $\frac{529}{625}$, $\frac{49}{625}$, $\frac{1}{625}$. Jetzt gehen wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen die eine der gesuchten Zahlen $\frac{96}{625}x^6$, die andere $\frac{576}{625}x^6$, die dritte $\frac{624}{625}x^6$; und es wird ein Quadrat geben, wenn jede dieser Zahlen vom Kubus ihrer Summe subtrahiert wird.

Es erübrigt sich noch, diese Summe gleich x^2 zu setzen. Die Summe aber ist $\frac{1296}{625}x^6$; und wenn wir beiderseitig durch x^2 dividieren bekommen wir $\frac{1296}{625}x^4=1$. Daraus ergibt sich $x = \frac{5}{6}$. Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

V, 19α

Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass ihre Summe ein Quadrat ist, und dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird ein Quadrat als Rest gibt.

Wir setzen wieder die Summe der drei Zahlen gleich x^2 und die eine der gesuchten Zahlen gleich $2x^6$, die zweite $5x^6$ und die dritte $10x^6$. Dann ist schon die Bedingung erfüllt, dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gibt.

Eserübrigt sich, die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen. Diese Summe ist aber $17x^6$. Es soll also $17x^6=x^2$ sein. Wird alles durch x^2 dividiert, so folgt $17x^4=1$. Und die 1 ist eine Biquadratzahl. Wenn 17 ein Biquadrat wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Die Zahl 17 aber ist die Summe von drei Quadraten plus 3. Wir müssen daher drei Quadratzahlen finden so, dass ihre Summe plus 3 ein Biquadrat ergebe. Die Biquadratzahl sei 16. Wir müssen also 13 in drei Quadrate zerlegen ; das eine ist 9, das zweite $\frac{36}{25}$ und das dritte $\frac{64}{25}$. Zu jedem dieser Quadrate addiere ich 1 und komme zu den ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Ich setze jede der gesuchten Zahlen entsprechend den obigen Zahlen, mal x^6, und die Summe der drei Zahlen wieder gleich x^2. Es wird die eine $10x^6$. die zweite $\frac{61}{25}x^6$, die dritte $\frac{89}{25}x^6$ sein. So wird die Bedingung erfüllt, dass eine jede, wenn sie um den Kubus der Summe der drei Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest gibt.

Es erübrigt sich die Summe der drei Zahlen gleich x^2 zu setzen. Diese Summe ist aber $16x^6$. Wird alles durch x^2 dividiert, so folgt $16x^4=1$. Daraus ergibt sich $x=\frac{1}{2}$. Diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

V, 19 β

Die gegebene Zahl in drei Zahlen zu zerlegen, dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermehrt wird ein Quadrat gibt.

Es sei die Zahl 2 gegeben.

Der Kubus von 2 ist 8. Wir müssen also die Zahl 2 in drei Zahlen zerlegen, so dass jede der Zahlen vermehrt um 8 ein Quadrat gibt. Wir müssen also die Zahl 26 so in drei Quadrate zerlegen, dass jedes von diesen Quadraten grösser als 8 ist. Ich setze das eine Quadrat gleich 9, was grösser als 8 ist. Wenn ich nun die Zahl 17 in zwei Quadrate zerlege, so dass jedes grösser als 8 ist, ist die Aufgabe gelöst. Ich nehme die Hälfte von 17, das ist $8\frac{1}{2}$, und untersuche welcher quadratischer Bruch zu $8\frac{1}{2}$ zu addieren ist, damit ein Quadrat entstehe. Es wird alles mit 4 multipliziert. Ich suche folglich einen quadratischen Bruch zu 34 zu addieren, damit ein Quadrat entsteht. Dieser quadratischer Bruch sei $\frac{1}{t^2}$; es wird $34+\frac{1}{t^2}=$ Quadrat sein. Durch Multiplikation mit t^2 bekomme ich $34t^2+1=$ Quadrat. Dies Quadrat sei gleich $(1-6t)^2$. Aus dieser Gleichung ergibt sich $t=6$, $t^2=36$; der zu 34 addierende quadratische Bruch ist folglich $\frac{1}{36}$; der zu $8\frac{1}{2}$ wird $\frac{1}{144}$ sein und es wird $8\frac{1}{2}+\frac{1}{144}=$Quadrat. Die Seite dieses Quadrats ist gleich $\frac{35}{12}$.

Wir müssen also die Zahl 17 so in zwei Quadrate zerlegen, dass die Seite jedes derselben nahezu gleich $\frac{35}{12}$ ist. Zu diesem Zwecke suche ich, um welche Zahl 4 vermindert und 1 vergrössert werden muss, damit man $\frac{35}{12}$ erhält.

Ich bilde also zwei Quadrate, das eine über $23x+1$, das andere über $4-13x$ $\left[\text{da } \frac{35}{12}=1+\frac{23}{12}=4-\frac{13}{12} \text{ ist}\right]$. Die Summe dieser beiden Quadrate wird $698x^2+17-58x=17$. Daraus ergibt sich $x=\frac{29}{349}$. Folglich ist die Seite des einen Quadrats $\frac{1016}{349}$ und die des anderen $\frac{1017}{349}$. Wenn ich von jedem der drei Quadrate 8 subtrahiere, so erhalte ich die gesuchten drei Zahlen.

V, 19 γ

Die gegebene Zahl in drei Zahlen zu zerlegen, dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird ein Quadrat ergibt.

[Eingegangen am 25 Juli 1961].

Die rekonstruierten griechischen Texte werden in meiner Diophant–Ausgabe, die im nächsten Jahr 1962 in Athen erscheint, eingeschaltet.

5

Über Thales von Milet

Von Evangelos Stamatis

Thales, einer der Sieben Weisen Griechenlands, ist im ersten Jahr der 35. Olympiade (etwa um 640 v. Chr.) in der kleinasiatischen Stadt Milet geboren und daselbst um 546 v. Chr. gestorben. Nach anderen Angaben lebte er von 624 bis 546 v. Chr.

Milet war eine sehr alte Stadt. Homer erwähnt sie als Verbündete Trojas (Il. 2, 868). Nach dem Fall Trojas (etwa um 1184 v. Chr.) wurde Milet mehrmals zerstört und schließlich von den Athenern neu besiedelt. In derselben Zeit (etwa 800—700 v. Chr.) haben die Griechen West-Kleinasien kolonisiert. Die Thebaner und Orchomenier, die Äoler waren, gründeten die äolischen Städte West-Kleinasiens, unter ihnen Smyrna, das aber einige Jahre später von den Ioniern besetzt wurde.

Milet entwickelte sich rasch und wurde sowohl ein wichtiger geistiger und Handelsmittelpunkt wie auch eine sehr starke Seemacht. Die bedeutendsten griechischen Kolonien am Schwarzen Meer, insbesondere die am nördlichen Rand dieses Meeres liegenden Städte, hat Milet gegründet (etwa um 700 v. Chr.). Daß Milet eine Kolonie der Athener war, wissen wir auch aus einem Brief des Thales an seinen Freund Solon, der durch Diogenes Laertios auf uns gekommen ist. Als Thales erfuhr, daß Solon die griechischen Kolonien in Kleinasien zu besuchen beabsichtigte, lud er ihn in diesem Brief nach Milet, „das eure Kolonie ist", ein.

Diogenes Laertios, ein griechischer Schriftsteller des 3. Jahrhunderts n. Chr., der Biographien der alten Philosophen geschrieben hat, sagt über Thales folgendes: Der Vater des Thales hieß, wie Herodot, Duris und Demokrit berichten, Examyos und seine Mutter Kleobuline, aus dem phönikischen Geschlecht der Theliden, das aus der Familie der Könige Agenor und Kadmos von Theben hervorging. Diogenes Laertios fügt weiter hinzu, daß sich die meisten alten Schriftsteller darin einig sind, daß Thales ein Urmilesier wäre und von einem Adelsgeschlecht abstammte.

Mit der Nachricht Herodots, nach der Thales phönikischer Abstammung sei, beschäftigte sich Plutarch, ein gebürtiger Böoter (aus Chaironeia, geboren etwa 50 n. Chr.), in seiner Schrift „Über die Bosheit Herodots" (*Περὶ τῆς Ἡροδότου κακοηθείας*). Aus dieser Schrift schließt man, daß Plutarch Thales als einen Thebaner betrachtete, dessen Vorahnen während der griechischen Kolonisation West-Kleinasiens aus Theben nach Milet übersiedelten. Der Legende über die Gründung Thebens in Böotien durch Kadmos und von dessen phönikischer Abstammung begegnen wir in den „Phönikerinnen" des Euripides (638 f.), wo es heißt: Kadmos aus Tyros (Phönikien) kam in dieses Land (Theben).

Es erhebt sich die Frage, ob Kadmos, ein Vorahne des Thales, wirklich aus Phönikien stammt und wann er nach Griechenland kam. Die Nachricht, Kadmos sei phönikischer Herkunft (und infolgedessen auch Thales als einer seiner Nach-kommen), stützt sich hauptsächlich auf die Legenden, daß Kadmos das griechische Alphabet aus Phönikien nach Griechenland einführte und daß man dem Namen Theben (dem siebentorigen Theben Böotiens) auch in Ägypten begegnet (das hunderttorige Theben Ägyptens). Außerdem gibt es noch ein Zeugnis über das Verhältnis zwischen Böotien und Ägypten: der Name Sphinx, den wir in beiden Ländern finden. Weil die ägyptische Kultur offenbar bei weitem älter ist als die griechische, so neigt man zu dem Glauben, daß Böotien von Ägypten sehr beeinflußt war und Kadmos, der Gründer Thebens und ein Vorahne des Thales, mindestens aus Vorderasien kommt.

Zuerst müssen wir aber bedenken, daß es im Altertum sehr alte Städte mit dem Namen Theben gab wie z. B. in Karien (in Kleinasien, gegenüber der Insel Rhodos) und westlich von Troja. Man kann nicht belegen, welche dieser Städte die älteste ist. Die Legende, daß der König Kadmos aus Phönikien nach Böotien gekommen ist, verliert an Glaubwürdigkeit, wenn man in Betracht zieht, daß sich dieser König aus Böotien in Illyrien (dem heutigen Albanien) wie in einem befreundeten Land bewegte, dort einen Sohn namens Illyrios hinterließ und daselbst gestorben ist. Wir müssen die älteren Berichte und Legenden über die Anfänge der Kultur Griechenlands mit Skepsis aufnehmen. Im Sommer 1958 hat das Deutsche Archäologische Institut zu Athen Ausgrabungen in Thessalien, in einem Ort, heute Kremomagula genannt (einst die von Homer erwähnte Stadt Argissa), fünf Kilometer westlich von Larissa, durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Ausgrabungen waren verblüffend und fast unglaubhaft. Man hat festgestellt, daß es in Thessalien schon 100000 Jahre vor unserer Zeitrechnung Siedlungen gab, also erste Kulturspuren in diesem Lande. Nach diesen neueren Forschungen, für die allerdings eine weitere und eingehendere Bestätigung abzuwarten ist, müssen wir alle die Vorgeschichte betreffenden Nachrichten und Legenden zurückhaltend aufnehmen.

Der Name Thales ist mit der Sage vom Dreifuß verbunden. Einen Dreifuß der Sieben Weisen gab es in vielen heiligen Orten Griechenlands; man zeigte ihn den staunenden Besuchern, so in Theben, wahrscheinlich auch in Delphi und in dem Apollonheiligtum von Didyma bei Milet.

Die Gestalt des Sokrates hat auf die Geschichte des Dreifußes sehr eingewirkt. Sokrates wurde vom delphischen Orakel für den Weisesten von allen erklärt; von sich selbst aber sagte er, daß er nichts wisse. Der delphische Spruch lautete: Sophokles ist weise, Euripides ist weiser, Sokrates aber ist der Weiseste von allen Männern (*Σοφὸς Σοφοκλῆς, σοφώτερος Εὐριπίδης, ἀνδρῶν δ' ἁπάντων σοφώτατος Σωκράτης*). Diesen Spruch bringt man in Verbindung mit der im Altertum verbreiteten Frage nach dem Weisesten der Sieben Weisen.

Über den goldenen (manchmal spricht man vom ehernen) Dreifuß, mit dem der Name des Thales eng verbunden ist, gibt es viele Versionen. Wir möchten einige von ihnen erwähnen:

Einige Schiffer in Milet warfen für Lohn ihr Netz aus, damit der Fang dem gehörte, der den Fischzug bezahlt hatte. Es geschah aber, daß sie anstatt Fische einen goldenen Dreifuß mit dem Netz fischten. Darüber gerieten sie in Streit.

Die Fischer sagten, sie hätten Fische, aber keinen Dreifuß verkauft; die Käufer, sie hätten alles, was heraufkäme und was sie fangen, gekauft. Da sie nun so stritten, kamen sie überein, Apollon zu fragen. Der aber verkündete ihnen:

Sprößling du von Milet, um den Dreifuß fragst du Apollon?
Wer an Weisheit der erste, für den bestimm' ich den Dreifuß.

Ἔκγονε Μιλήτου, τρίποδος πέρι Φοῖβον ἐρωτᾷς;
ὃς σοφίῃ πάντων πρῶτος, τούτου τρίποδ' αὐδῶ.

Sie brachten ihn nun zu den Sieben Weisen. Jeder von diesen bestritt aber, weise zu sein. Deswegen beschlossen sie, ihn dem Apollon als dem Weisesten von allen zu weihen. So, erzählt man, bekam Apollon den Dreifuß.

Eine andere Fassung der Geschichte über den Dreifuß hat der bedeutende hellenistische Dichter Kallimachos, der in Alexandrien in der ersten Hälfte des 3. Jahrhunderts wirkte, bearbeitet. Allerdings spricht Kallimachos in dieser Geschichte nicht von einem goldenen Dreifuß, sondern von einem goldenen Becher (Fr. 191, 52—77 Pfeiffer).

Bathykles, ein Mann aus Arkadien, verfügte letztwillig über sein Vermögen und übergab dem mittleren seiner Söhne, Amphalkes, einen goldenen Becher, damit er ihn dem besten der Sieben Weisen überreiche. Der aber

„fuhr nach Milet. Der Preis gehörte nämlich
dem Thales, der auch sonst in vieler Kenntnis
beschlagen war und der die Sterne, hieß es,
des Himmelswagens ausgemessen hatte ...
An ihn nun wandte sich sogleich Amphalkes ...
‚Mein Vater hat im Sterben mir bestimmt,
dies dem zu geben, der von euch der beste
der Sieben Weisen sei. Dir geb ich es.' " ...

(Thales schickte den Becher zu Bias von Priene, dieser zu Periander von Korinth, von diesem bekam ihn)

„Solon. Doch jener schickte ihn an Chilon"

(nach Sparta, dieser zu Pittakos von Mytilene, dieser zu Kleobulos von Lindos; von diesem wurde er weiter geschickt, und so)

„kam das Geschenk zurück zu Thales wieder".

(Der aber schickte ihn dem Apollon von Didyma mit folgender Widmung):

„Mich schenkt dem Herrn von Neileos' Volke Thales,
der mich zum zweitenmal als Preis erhielt."

Θαλῆς με τῷ μεδεῦντι Νείλεω δήμου
δίδωσι, τοῦτο δὶς λαβὼν ἀριστῆον.

Andere sagen, der Dreifuß sei ein Werk des Hephaistos und der Gott habe ihn dem Pelops zur Hochzeit geschenkt. Er sei dann an Menelaos gekommen, und Paris habe ihn mit der Helena geraubt; aber diese habe ihn ins Koische Meer geworfen mit den Worten: „Der wird Grund für viel Streit sein." Später kauften einige Leute aus (der Stadt) Lebedos dort einen Fang Fische; da wurde auch der Dreifuß gefischt. Darüber stritten sie mit den Fischern, bis sie nach Kos kamen, und als sie sich nicht einigen konnten, berichteten sie an ihre Stadt Milet. Die Milesier schickten eine Gesandtschaft nach Kos; sie wurde aber abgewiesen, und deshalb zogen sie gegen die Koer in den Krieg. Als viele auf beiden Seiten gefallen waren, verkündete ein Orakel, sie sollten den Dreifuß dem Weisesten geben. Sie einigten sich auf Thales. Der aber weihte den Dreifuß, nachdem er die Runde bei den Sieben Weisen gemacht hatte, dem Apollon von Didyma. Das Orakel an die Koer lautete (Diodor 9, 3, 2):

Niemals endet der Krieg der Meroper und der Ionier,
Bis ihr den Dreifuß aus Gold, den Hephaistos kunstvoll geschaffen,
Fortgesendet, bis er in das Haus des Mannes gekommen,
Der voller Weisheit schaut, was ist und was künftig noch sein wird.

Οὔποτε μὴ λήξῃ πόλεμος Μερόπων καὶ Ἰώνων,
πρὶν τρίποδα χρύσειον, ὃν Ἥφαιστος κάμε τεύχων,
ἐκ μέσσου πέμψητε καὶ ἐς δόμον ἀνδρὸς ἵκηται,
ὃς σοφίᾳ τά τ᾽ἐόντα τά τ᾽ἐσόμενα προδέδορκεν.

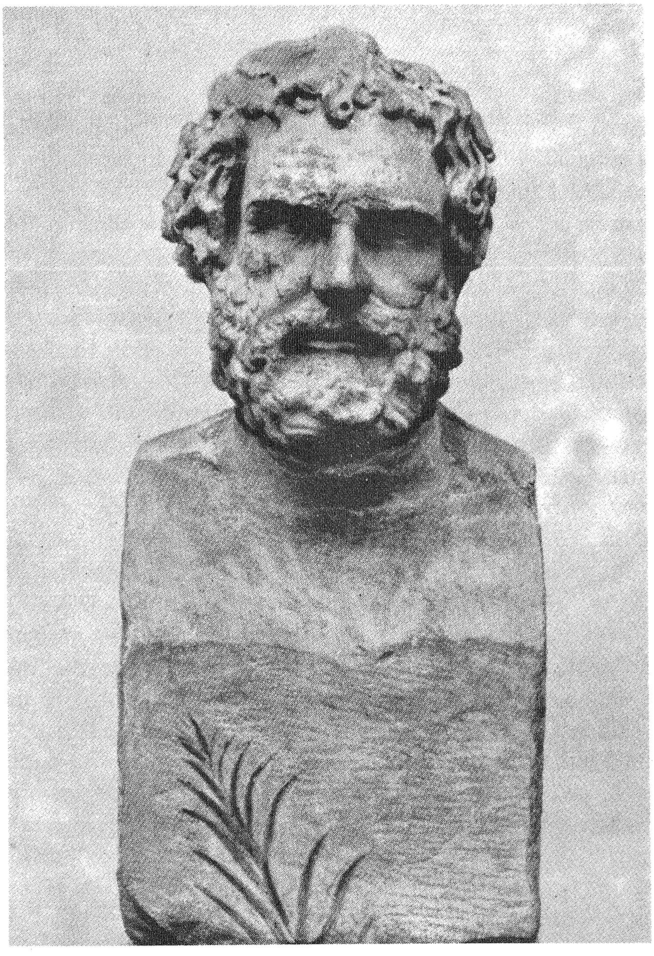
Ein paar Briefe, die durch Diogenes Laertios auf uns gekommen sind, werden von der neueren Forschung als Fragmente einer Art historischen Romans, der im 3. Jahrhundert v. Chr. abgefaßt worden ist, betrachtet. Trotzdem kann man aber nicht bestreiten, daß diese Briefe einen Kern von Wahrheit und wirklichen Geschehnissen enthalten. Wir führen auszugsweise einen Brief des Thales an Pherekydes (auf der Insel Syros) an: „Wenn du wünschest, komme ich zu dir nach Syros. Denn wir wären töricht, ich und Solon aus Athen, wenn wir nach Kreta führen, um dort Forschungen anzustellen, wenn wir nach Ägypten führen, um uns mit den dortigen Priestern und Astrologen zu unterhalten, zu dir aber nicht."

Über das private Leben des Thales gehen die Berichte auseinander. Einmal wird erwähnt, Thales war verheiratet und hatte einen Sohn namens Kybisthos. Andere erzählen, er war nicht verheiratet und adoptierte den Sohn seiner Schwester. Man fragte ihn, warum er keine Kinder zeuge. Er antwortete: nur aus Kinderliebe.

Ein köstliches Gespräch zwischen Thales und Solon hat uns Plutarch überliefert. Als Solon einmal Milet zur Erholung besuchte, wurde er von Thales gastfreundlich aufgenommen. Solon hatte aber in Athen einen sehr schwer erkrankten Sohn zurückgelassen. Ein paar Tage nach seiner Ankunft in Milet fragte Solon den Thales, warum er nicht verheiratet sei. Thales sagte ihm: „Ich werde dir morgen die Antwort geben." Am nächsten Tag kam das Schiff der Linie Piräus-Milet an. Solon fragte Thales, ob es möglich sei, Nachrichten aus Athen zu erfahren. Thales schickte zum eingelaufenen Schiff einen vertraulichen Boten. Als der Bote zurückkam, erzählte er dem Solon (nach dem geheimen Auftrag des Thales), er sah in Athen ein großes Staatsbegräbnis; er wußte aber nicht, wer gestorben war; wie er hörte, handelte es sich um eine Person des Hochadels von Athen. Als Solon diese Nachricht vernahm, begann er zu weinen. Er glaubte, sein Sohn sei gestorben. In diesem Moment sagte Thales zu ihm: „Weine nicht, mein lieber Solon! Die Nachricht ist nicht wahr. Ich wollte dir nur die Antwort geben, warum ich nicht geheiratet habe."

Amüsant ist auch die Geschichte, die man über ein Gespräch zwischen Thales und seiner Mutter erzählt. Die Mutter drängte den Sohn des öfteren, zu heiraten.

Thales gab ihr viele Jahre lang die Antwort: „Die Zeit dazu ist noch nicht gekommen“ (*οὔπω καιρός*). Als aber viele Jahre vergingen und Thales ein älterer Mann war, gab er seiner Mutter auf dieselbe Frage die Antwort: „Die Zeit zum Heiraten ist schon vorbei“ (*οὐκέτι καιρός*).



Philosoph, wahrscheinlich Thales von Milet. Römische Kopie aus dem 2. Jahrhundert n. Chr. Kopenhagen, Ny Carlsberg Glyptothek

Über die politische Tätigkeit des Thales erfahren wir von Herodot (1, 170) folgendes: „Gut war aber auch, noch ehe Ionien verlorenging, der Rat des Thales aus Milet (von weiterer Abstammung war er Phöniker); er forderte die Ionier auf, einen einheitlichen Rat zu bilden; der sollte in der Stadt Teos sein, denn Teos sei die Mitte von Ionien; ihre anderen Städte aber sollten trotzdem nach ihren Gesetzen wie selbständige Gemeinden verwaltet werden." Später, als Kroisos eine Gesandtschaft nach Milet wegen eines Bündnisses schickte, verhinderte er den Abschluß eines Vertrages, was die Stadt rettete, als Kyros zur Macht kam.

Die Legende will Zusammenkünfte der Sieben Weisen bei irgendeiner Gelegenheit oder Zusammentreffen bei einem Gastmahl kennen, wo sie ihre Meinungen über das Leben und sonstiges austauschten. Sie waren einmal bei dem König Kroisos von Lydien zusammengekommen. Geschichtlich aber ist gesichert, daß Thales eine längere oder kürzere Zeit bei Kroisos verbracht hat. So erfahren wir von Herodot folgendes (1, 75): „Als Kroisos zum Fluß Halys" (in Kleinasien) „kam, brachte er sein Heer auf den vorhandenen Brücken hinüber; so meine ich jedenfalls. Nach den gewöhnlichen Erzählungen der Griechen half aber Thales aus Milet ihnen hinüber. Denn als Kroisos nicht wußte, wie das Heer über den Fluß käme (denn die Brücken hätten damals noch nicht gestanden), habe Thales, heißt es, der damals im Lager war, es zuwege gebracht, daß der Strom, der zur Linken des Heeres war, auch zur Rechten floß: Von einem Punkt oberhalb des Lagers aus grub er einen tiefen Kanal, führte ihn mondförmig so, daß er das Lager im Rücken umfaßte und der Fluß, aus seinem alten Strom in den Kanal abgeleitet, am Lager vorbei in das alte Bett einmündete. Sobald der Fluß geteilt war, wurde er auf beiden Seiten passierbar."

Einen Trinkspruch des Thales bei einem Gastmahl der Sieben Weisen überliefert Diogenes Laertios: *Οὔ τι τὰ πολλὰ ἔπη φρονίμην ἀπεφήνατο δόξαν, ἕν τι μάτευε σοφόν, ἕν τι κεδνὸν αἱροῦ· λύσεις γὰρ ἀνδρῶν κωτίλων γλώσσας ἀπεραντολόγους.* (Nicht die vielen Worte verraten kluges Urteil. Such ein weises, wähl ein gutes! Sonst wirst du nur wüstredende Zungen der Schwätzer lockern.)

Die Sieben Weisen sind von Platon in die Geschichte der griechischen Philosophie eingeordnet; sie wurden als die ersten Philosophen betrachtet, weil Thales als erster den Versuch gemacht hat, die Fülle des Wirklichen als Einheit zu fassen, indem er das Wasser für den Ursprung und das Wesen der Dinge erklärte. Der erste, der eine Philosophiegeschichte geschrieben hat, scheint Hippias von Elis gewesen zu sein, ein Sophist des ausgehenden 5. Jahrhunderts; allem Anschein nach wurde Thales an den Anfang der Philosophiegeschichte gesetzt. Platon hat in der Liste der Sieben Weisen, die er in seinem „Protagoras" anführt, den Tyrannen Periander gestrichen; an dessen Stelle setzte er den Myson. „Zu den Sieben Weisen", schreibt Platon, „gehörte auch Thales von Milet, Pittakos von Mytilene, Bias von Priene, unser Solon, Kleobulos von Lindos, Myson von Chenai, und siebtens wurde zu ihnen auch der Lakedaimonier Chilon gezählt. Sie waren alle Nacheiferer, Liebhaber und Schüler der spartanischen Bildung. Da kann man verstehen, daß ihre Weisheit derart war: kurze denkwürdige Sprüche, die jeder von ihnen sagte. Sie kamen auch zusammen und brachten ein Erstlingsopfer ihrer Weisheit dem Apollon in den Tempel zu Delphi, indem sie dort die Inschriften anbrachten, die in aller Munde leben: ‚Erkenne dich selbst' und ‚Nichts zu sehr'" (343 ab). Im „Theätet" spricht Sokrates mit dem Mathematiker Theodoros über die echten Philosophen: Ein solcher Philosoph wisse nicht, ob jemand in der Stadt guter oder schlechter Herkunft sei, ob wer eine Schuld von den Vorfahren väterlicher- oder mütterlicherseits trage. Der Geist fliege, wie Pindar sagt, „unter die Erde“ und vermesse ihre Flächen, treibe „über den Himmel hinaus“ Astronomie und forsche überall nach allem Wesen der Dinge in seiner Ganzheit, ohne sich auf die Dinge in der Nähe niederzulassen. Theodoros: „Wie meinst du das, Sokrates?“ Sokrates: „So wie es in der Geschichte von Thales heißt, mein Theodoros: Er beobachtete die Sterne, schaute nach oben und fiel in eine Zisterne. Da verspottete ihn eine witzige und muntere thrakische Magd: Was im Himmel sei, wolle er wissen, aber was vor ihm und zu seinen Füßen liege, das wisse er nicht“ (173d—174a).

Während Platon und die Platonische Akademie die Sieben Weisen als Menschen der reinen Theorie darstellt, gibt Aristoteles über Thales ein ganz anderes Bild, indem er schreibt: „Man beschimpfte Thales wegen seiner Armut, die zeige, wie unnütz die Philosophie sei. Da sah Thales, so erzählt man, auf Grund seiner Astronomie eine reiche Ölernte voraus, und noch im Winter, als er gerade ein wenig Geld hatte, sicherte er sich durch eine Anzahlung die gesamten Ölpressen in Milet und Chios; er konnte sie billig mieten, da ihn niemand überbot. Als die Zeit kam, war plötzlich eine starke Nachfrage; da vermietete er sie nach seinen Bedingungen weiter, verdiente viel Geld und bewies, daß Philosophen leicht reich sein können, falls sie wollen, aber daß dies nicht ihr Ziel ist“ (Politik 1259a).

Es ist interessant, was der Professor und Konsul Decimus Magnus Ausonius, ein Gelehrter in Bordeaux, um 390 n. Chr. über Thales in seinem Spiel von den Sieben Weisen schrieb:

Ich heiße Thales aus Milet. Das Wasser,
lehrt' ich, wie Pindar, ist der Dinge Ursprung.
Den Dreifuß brachten mir die Fischer einst,
den sie mit ihrem Netz emporgezogen.
Apollons Weisung führte sie zu mir,
da er dem Weisesten dies Werk bestimmte.
Ich wollt' es nicht behalten, gab's zurück,
damit sie es an andere weitergäben,
die ich für würdiger hielt. So ging's die Runde,
gesandt zu allen sieben weisen Männern;
zurückgesandt zu mir, bracht man es wieder.
Ich aber nahm's und weiht' es dem Apoll.
Wenn nämlich einen Weisen auszuwählen
Apoll befahl, ist's recht, auf Menschen nicht,
vielmehr auf einen Gott dies zu beziehen.
Der also bin ich. Auf die Bühne tret' ich
aus gleichem Grunde wie die beiden vor mir,
daß ich wie sie hier meinen Spruch vertrete.
Der wird mißfallen, aber nicht den Klugen,
die durch Erfahrung schon gewitzigt sind.
'Εγγύα, πάρα δ' ἄτα sag' ich griechisch,
auf deutsch: Nimm Bürgschaft, doch schon hast du Schaden! ...
Doch will ich niemanden mit Namen nennen,
ihr mögt euch selber sagen und berechnen,
wie vielen Bürgschaft Leid und Schaden brachte.
Doch lieb bleibt dies Geschäft den lockren Burschen.

Nach der Überlieferung ist Thales im Stadion von Milet, während er den Kampfspielen zuschaute, wegen der Hitze, des Durstes und der Erschöpfung im hohen Alter gestorben.

Diogenes Laertius überliefert uns ein paar alte Verse über den Tod des Thales (Anthologia Graeca 7, 85):

Γυμνικὸν αὖ ποτ᾽ ἀγῶνα θεώμενον, ἠέλιε Ζεῦ,
τὸν σοφὸν ἄνδρα Θαλῆν ἥρπασας ἐκ σταδίου.
Αἰνέω, ὅττι μιν ἐγγὺς ἀπήγαγες· ἦ γὰρ ὁ πρέσβυς
οὐκέθ᾽ ὁρᾶν ἀπὸ γῆς ἀστέρας ἠδύνατο.

Einst, als Thales der Weise ein gymnisches Wettspiel sich ansah,
nahmst du ihn, Helios-Zeus, jäh aus dem Stadion fort,
recht war's, daß du hinauf ihn geführt; denn der Alte vermochte
hier von der Erde nicht mehr droben die Sterne zu sehn.

Milet, die Heimatstadt des Thales, ließ zu seinem Standbild folgende Verse schreiben (Anthologia Graeca 7, 83):

Τόνδε Θαλῆν Μίλητος Ἰὰς θρέψασ᾽ ἀνέδειξεν
ἀστρολόγων πάντων πρεσβύτατον σοφίῃ.

Ioniens Erde, Milet, gab Thales Leben und Größe;
niemand kannte so gut droben die Sterne wie er.

Auf dem Grabmal des Thales las man folgende Inschrift: *Ἦ ὀλίγον τόδε σῆμα οὐρανόμηκες τοῦ πολυφροντίστου τοῦτο Θάλητος ὅρη.* (Klein ist das Grabmal des Thales, gewiß, doch erwäge des großen Denkers Weltruhm, der weit wie der Himmel sich dehnt.)

Die wissenschaftlichen Leistungen des Thales

Thales hat keinen Lehrer gehabt. So will es die Tradition wissen. Von Proklos (410—485), der Rektor der Platonischen Akademie war, erfahren wir, daß die Geometrie, wie die meisten berichten, bei den Ägyptern zuerst ausgebildet wurde und ihren Ursprung mit den Landesvermessungen nahm . . . „Thales verpflanzte zuerst, nachdem er nach Ägypten gekommen, die Geometrie nach Griechenland und machte selbst viele Entdeckungen. Sein Verfahren war dabei teilweise mehr allgemeiner Art, teilweise mehr auf die Sinnendinge ausgerichtet. Nach ihm war es Mamertios, der Bruder des Dichters Stesichoros, der sich nach der Überlieferung mit dem Studium der Geometrie befaßte." . . . Thales hat den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gefunden, und zwar habe er die Winkel nicht gleich, sondern ähnlich genannt. Außerdem hat Thales den Satz über die Gleichheit der Scheitelwinkel bewiesen und den Satz, daß der Durchmesser den Kreis halbiert. Der Euklidische Satz 1, 26 rührt von Thales her, der sich seiner notwendig bedienen mußte bei seiner Methode, die Entfernung der Schiffe im Meer zu bestimmen.

Aus anderen Berichten erfahren wir, daß Thales der erste war, der bewies, daß der Winkel auf dem Halbkreis ein rechter ist. Außer von Proklos haben wir Angaben von Plutarch, wonach Thales die Höhe der Pyramiden in Ägypten durch

Messung ihres Schattens bestimmt habe. Dieser Bericht stammt nach Diogenes Laertios aus Hieronymos von Rhodos, der sagt, Thales maß die Pyramiden am Schatten, wenn der Schatten der Pyramidenhöhe gleich war, d. h. bei einer Sonnenhöhe von 45°.

Es gilt als ganz sicher, daß die ägyptische und die sumerisch-babylonische Geometrie empirisch war. Es gibt keine Spur davon, daß die Mathematik dieser Kulturvölker eine Wissenschaft wie im griechischen und im heutigen Sinne darstellte. Bekanntlich nennen wir heute die griechische Mathematik eine deduktive Wissenschaft, d. h. eine Wissenschaft, die auf wenigen Definitionen und einfachen Sätzen, die keines Beweises bedürfen und die wir Axiome nennen, ihr ganzes Gebäude aufbaut. Der mathematische Beweis, den wir nur bei den Grie-

Die Sieben Weisen. Mosaik aus Torre Annunziata, 1. Jahrhundert v. Chr. Neapel, Muzeo Nazionale chen finden und der erst die Mathematik ~~zu einer~~ Wissenschaft macht, ist eine Entdeckung des griechischen Geistes. Alles, was uns über diese Entdeckung überliefert ist, spricht dafür, daß der geniale Entdecker der Notwendigkeit eines Beweises in der Mathematik Thales von Milet war. Eine Berechnung der Pyramidenhöhe durch die Schatten der Pyramide und eines Stocks, wie es Thales in Ägypten nach Hieronymos machte, setzt die Kenntnis der Ähnlichkeitssätze der Geometrie voraus, und diese Kenntnis hatten die ägyptischen Priester nicht. Außerdem erfahren wir aus dem oben angeführten Brief des Thales an Pherekydes, daß Thales Ägypten nicht zum Studium besuchte, sondern um mit den Priestern Gespräche zu führen. Aus demselben Brief schließt man, daß Thales, als er nach Ägypten reiste, einen sehr hohen Ruf als Gelehrter genoß.

Immanuel Kant äußert sich in der Vorrede seiner „Kritik der reinen Vernunft" über die Entdeckung des Beweises in der Mathematik folgendermaßen:

„Die Mathematik ist von den frühesten Zeiten her, wohin die Geschichte der menschlichen Vernunft reicht, in dem bewundernswürdigen Volke der Griechen den sicheren Weg einer Wissenschaft gegangen . . . Dem ersten, der den gleichschenkligen Triangel demonstrierte (er mag nun Thales oder wie man will geheißen haben), dem ging ein Licht auf; denn er fand, daß er nicht dem, was er in der Figur sah, oder auch dem bloßen Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst a priori hineindachte und darstellte (durch Konstruktion), hervorbringen müsse und daß er, um sicher etwas a priori zu wissen, der Sache nichts beilegen müsse, als was aus dem notwendig folgte, was er seinem Begriffe gemäß selbst in sie gelegt hat."

Daß sich Thales mit der Astronomie befaßte, haben wir schon oben zitiert. Er hat als erster, wie Herodot berichtet, eine Sonnenfinsternis vorausgesagt, die vom 28. Mai 585 v. Chr. Bei dieser Sonnenfinsternis fand die Schlacht zwischen den Medern und Lydern statt. Thales hat die Himmelskugel in die fünf Zonen der Erde durch die Wendekreise und Polarkreise geteilt. Er lehrte die Entstehung der Sonnenfinsternis durch das Dazwischentreten des Mondes, daß der Mond von der Sonne erleuchtet wird und die Erde (mit Kugelgestalt) in der Mitte der Welt auf Wasser ruht. Thales ist der erste, der sagte, daß die Sonne nicht mit gleichmäßiger Geschwindigkeit vorrücke (er fand die Ungleichheit der vier Jahreszeiten), daß aber die Dauer eines Jahres 365 Tage betrage und daß der Sonnendurchmesser der 720. Teil der Sonnenbahn sei. Er hat die Mondfinsternis durch den Eintritt des Mondes in den Schattenkegel der Erde erklärt, und er lehrte die Schiefe der Ekliptik.

Thales war der erste, der die Meinung äußerte, daß die Sonne und alle anderen Sterne aus denselben Materialien wie die Erde geschaffen sind. Im Altertum behauptete man, er habe auch ein Meteorologiebuch verfaßt; von diesem aber findet sich keine Spur.

Als Thales Ägypten besuchte, gab er eine Erklärung über die Nilschwelle, indem er behauptete, daß sie durch die jährlichen Winde (*ἐτησίαι*), die gegen die Strömung des Flusses wehen, verursacht wird. Diese Erklärung ist zwar nicht richtig, erweist sich aber als ein Argument, daß Thales Ägypten nicht besuchte, um zu studieren.

Was den Ruhm des Thales unvergänglich macht, ist die Entdeckung des Magnetismus und der Elektrizität. Im Altertum waren diese großen Entdeckungen des Thales mit philosophischen Spekulationen verknüpft und physikalisch nicht ausgewertet. Das Vorhandensein einer unsichtbaren Kraft wie des Magnetismus und der Elektrizität führte Thales zu der Erklärung, daß alle Körper mit beweglicher Seele und Dämonen gefüllt sind. Man kann diese Auffassung des Thales als eine Vorankündigung der heutigen physikalischen Theorie, daß die Materie in sich eine ungeheuere Kraft schließt — gemäß der EINSTEINschen Theorie über die Wechselwirkung zwischen Materie und Energie —, betrachten. Aristoteles beschreibt wie folgt die Theorie des Thales über die bewegliche Natur der Seele:

Ἔοικε δὲ καὶ Θαλῆς . . . κινητικόν τι τὴν ψυχὴν ὑπολαβεῖν, εἴπερ τὴν λίθον ἔφη ψυχὴν ἔχειν, ὅτι τὸν σίδηρον κινεῖ. (Es scheint, daß Thales . . . die Seele als etwas Bewegliches betrachtete, wenn er gesagt hat, daß der Magnetstein eine Seele hat, weil er das Eisen bewegt.)

Was die Lehre des Thales über die Welt betrifft, so erfahren wir von Aristoteles (Metaphysik 983b—984a) folgendes:

„Die meisten unter den ältesten Denkern wollten überall nur die stofflichen Ursachen anerkennen. Denn woraus alle Gegenstände bestehen, woraus sie sich entwickeln und worin sie sich schließlich wieder auflösen, wobei das Wesen bleibt und nur die Eigenschaften sich wandeln, das ist nach ihrer Auffassung Element und Urgrund aller Gegenstände; und dies bewirkt, so meinen sie, daß nichts entstehen oder vergehen kann, weil ein solcher Grundstoff seiner Natur nach ewig erhalten bleibt, wie wir ja auch von Sokrates nicht sagen, daß er an sich ‚wird', wenn er schön oder gebildet ‚wird', oder daß er vergeht, wenn diese Eigenschaften vergehen, weil der zugrundeliegende Gegenstand selbst, in diesem Falle Sokrates, ja bleibt. So auch in allen anderen Fällen. Denn es muß einen natürlichen Stoff geben, einen oder mehrere, aus dem das andere entsteht, während er selber erhalten bleibt. Freilich über Zahl und Art dieses Grundstoffes waren sie nicht einig: Thales, der Begründer dieses Gedankenganges, behauptet, es sei das Wasser. Deswegen lehrte er auch, die Erde schwimme auf dem Wasser. Vielleicht kam er zu dieser Auffassung durch die Beobachtung, daß überall die Nahrung flüssig ist und daß selbst die Wärme aus dem Wasser komme und von ihm lebe; das aber, woraus etwas entsteht, muß ja immer sein Urgrund sein. Dies also veranlaßte ihn zu seiner Lehre . . . Ob dies wirklich die älteste Ansicht über die Natur gewesen ist, möge dahingestellt bleiben; von Thales dagegen ist es überliefert, daß er so über die oberste Ursache gelehrt habe."

6

Über Euklid, den Mathematiker

Von Evangelos S. Stamatis

Wir wissen von Euklid, dem großen griechischen Mathematiker, weder Ort noch Zeit der Geburt und des Todes. Über sein Leben sind die Nachrichten der Alten sehr dürftig: Er war Grieche und wirkte in Alexandria, der Stadt, die Alexander der Große Anfang 331 v. u. Z. gegründet hat; seine Blüte fällt in die Zeit der Regierung Ptolemaios' I. (323–285). Allem Anschein nach war Euklid Direktor der berühmten alexandrinischen Schule oder der erste Rektor der Universität Alexandria, wenn wir seinen Titel in der heutigen Ausdrucksweise wiedergeben wollen. Proklos (410–485), der Rektor der Akademie Platons in Athen, nennt Euklid einen Platoniker (*Πλατωνικός*), d. h. einen Kenner und Anhänger der Philosophie Platons.

Vom Tode Platons (347 v. Chr.) bis zum ersten Jahr der Regierungszeit Ptolemaios' I. (323 v. Chr.) verflossen vierundzwanzig Jahre. In diesem Zeitraum muß sich Euklid in Athen einen Namen als hervorragender Mathematiker gemacht haben, um vom ersten Herrscher Ägyptens (nach dem Tode Alexanders des Großen), Ptolemaios I., zum Leiter, höchstwahrscheinlich zum Organisator, der Universität Alexandrias berufen zu werden. Daß Ptolemaios I. die besten Köpfe der griechischen Geisteswelt für seine Hauptstadt gerade in Athen suchte, entnehmen wir Alkiphron, einem scharfsinnigen und reizvollen Schriftsteller Alexandrias. Alkiphron berichtet uns über die Einladung Menanders; der Dichter reiste jedoch wegen der Liebe zu Athen und der Abneigung seiner Freundin Glykera gegen die große Reise nicht nach Alexandria (W. Plankl, Alkiphron, Hetärenbriefe, München 1942, 26). Es galt also Euklid wenige Jahre nach dem Tode Platons als ein großer Mathematiker in Athen, ja er mußte sogar der größte gewesen sein, wenn er von Ptolemaios nach Alexandria eingeladen wurde, um die Leitung der Universität zu übernehmen.

Von dem Mathematiker Pappos, der im 3. Jahrhundert in Alexandria lebte, erfahren wir (2. Band, 7. Buch, S. 676, 25—678, 12 Hultsch), daß Euklid denjenigen, die Geometrie lernen wollten, sein Wohlwollen schenkte. Köstlich ist eine bei Stobaios erhaltene Geschichte von Euklid und einem reichen Jugendlichen (Meineke 4, 205): Ein Jugendlicher suchte einmal Euklid auf, um bei ihm Geometrie zu studieren. Nachdem er den ersten geometrischen Lehrsatz gelernt hatte, fragte er Euklid: „Und was werde ich nun mit diesem Satz verdienen ?" Euklid drehte sich zu seinem Diener um und sagte: „Gib ihm drei Groschen, damit er etwas am Erlernen des Satzes verdienen kann!"

Seinen Witz könnte auch das folgende arithmetische Epigramm offenbaren, ein Rätsel aus der Algebra, das man Euklid zuschreibt (Anthologia Palatina, Editio stereotypa Tauchnitiana 3, Appendix 26):

> Esel und Maultier schritten einher, beladen mit Säcken.
> Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel:
> „Alterchen, sprich, was weinst du und jammerst schier wie ein Mägdlein ?

Doppelt soviel als du grad' trüge ich, gäbst du ein Maß mir;
nähmst du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe."
Geometer, Du Kundiger, sprich, wieviel sie getragen.
(Der Esel hatte 5 Säcke und das Maultier 7.)

Um das Werk Euklids, hauptsächlich die „Elemente", die die Leistung von drei Jahrhunderten des griechischen Geistes in der Mathematik darstellen, besser zu verstehen, müssen wir, sei es auch kurz, auf die vorgriechische Mathematik eingehen. Die älteste schriftliche Quelle über die ägyptische Mathematik ist der sogenannte Papyrus Rhind, der um 1700 v. Chr. von Ahmes geschrieben wurde (Britisches Museum). Außerdem gibt es noch eine Fülle von babylonischen Tafeln, aus denen hervorgeht, daß die Sumerer (ein nichtsemitisches Volk) und ihre Nachfolger, die Babylonier (ein semitisches Volk), im Zweistromland Mathematik getrieben haben. Über die babylonischen Tafeln mathematischen Inhalts ist viel diskutiert und geschrieben worden. Zahlreiche Tafeln sind nicht gut erhalten. Meistens wissen wir gar nicht, welcher Zeit sie angehören. „Die im Handel erworbenen Tafeln stammen meist aus Raubgrabungen, so daß oft nicht einmal der Herkunftsort, geschweige denn die archäologische Schicht und damit das Alter festzustellen ist" (K. Vogel, Vorgriechische Mathematik 2, Hannover u. Paderborn 1959, 13). Trotzdem hat man „aus Vermutungen" und „freier Wiedergabe" eines schlecht zu lesenden babylonischen Textes geschlossen, daß die Babylonier nicht nur den Pythagoreischen Lehrsatz kannten, sondern sogar eine Art von Beweis in ihrer Mathematik hatten (O. Neugebauer, Vorgriechische Mathematik 1, Berlin 1934, 35, 168, 203).

Es ist klar, daß man vorerst einen Vergleich zwischen dem Inhalt der babylonischen Texte und der Mathematik Herons sowie Diophantos' anstellen muß, um sich eine wissenschaftlich vertretbare Meinung bilden zu können. Überdies stammen viele jener babylonischen Tafeln aus der Zeit Alexanders des Großen, sind also griechisches Geistesgut. Die wenig fundierte Auffassung über die babylonische Mathematik erreicht ihren Höhepunkt in der folgenden Aussage: „Sowohl im Bereich der Elementargeometrie wie im Bereich der elementaren Proportionenlehre wie schließlich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte inhaltliche Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluß ist in allen Punkten praktisch lückenlos herzustellen . . . die einfache Tatsache, daß zu den zweieinhalb Jahrtausenden ‚Geschichte' seither reichlich weitere zweieinhalb Jahrtausende hinzugekommen sind, die Griechen also in der Mitte und nicht mehr am Anfang stehen ... In der Mathematik wurde die Einsicht in das Wesen der Irrationalzahlen erkauft mit dem abrupten Abbrechen eines bereits zu einem algebraischen Formalismus gelangten Systems, das sich in allen Punkten direkt in die Algebra der Renaissance hätte fortentwickeln können — ohne die tiefsten mathematischen Leistungen der Griechen wären vielleicht 2000 Jahre zu ‚gewinnen' gewesen" (O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra [Studien zur Geschichte der antiken Algebra III], in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik B 3, Berlin 1936, 258f.).

Wie wir heute wissen, ist in der Mathematik der alten orientalischen Kulturvölker keine Spur eines Beweises mathematischer Lehrsätze zu finden. Die Entdeckung des Beweises für die mathematischen Sätze blieb den Griechen vorbehalten. Die Begründung der Mathematik als Wissenschaft ist ausschließlich Werk der Griechen. In der Vorrede zur zweiten Auflage seiner „Kritik der reinen Vernunft" äußert sich Immanuel Kant wie folgt:

„Die Mathematik ist von den frühesten Zeiten her, wohin die Geschichte der menschlichen Vernunft reicht, in dem bewundernswürdigen Volke der Griechen den sicheren Weg einer Wissenschaft gegangen. Allein man darf nicht denken, daß es ihr so leicht geworden, wie der Logik, wo die Vernunft es nur mit sich selbst zu tun hat, jenen königlichen Weg zu treffen, oder vielmehr sich selbst zu bahnen; vielmehr glaube ich, daß es lange mit ihr (vornehmlich noch unter den Ägyptern) beim Herumtappen geblieben ist, und diese Umänderung einer Revolution zuzuschreiben sei, die der glückliche Einfall eines einzigen Mannes in einem Versuche zustande brachte, von welchem an die Bahn, die man nehmen mußte, nicht mehr zu verfehlen war, und der sichere Gang einer Wissenschaft für alle Zeiten und in unendliche Weiten eingeschlagen und vorgezeichnet war. Die Geschichte dieser Revolution der Denkart, welche viel wichtiger war als die Entdeckung des Weges um das berühmte Vorgebirge, und des Glücklichen, der sie zustande brachte, ist uns nicht aufbehalten. Doch beweist die Sage, welche Diogenes der Laertier uns überliefert, der von den kleinsten und nach dem gemeinen Urteil gar nicht einmal eines Beweises benötigten Elementen der geometrischen Demonstrationen den angeblichen Erfinder nennt, daß das Andenken der Veränderung, die durch die erste Spur der Entdeckung dieses neuen Weges bewirkt wurde, den Mathematikern äußerst wichtig geschienen haben müsse und dadurch unvergeßlich geworden sei. Dem ersten, der den gleichschenklichten Triangel demonstrierte (er mag nun Thales oder wie man will geheißen haben), dem ging ein Licht auf; denn er fand, daß er nicht dem, was er in der Figur sah, oder auch dem bloßen Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst a priori hineindachte und darstellte (durch Konstruktion), hervorbringen müsse, und daß er, um sicher etwas a priori zu wissen, der Sache nichts beilegen müsse, als was aus dem notwendig folgte, was er seinem Begriffe

Euklid (?). Miniatur aus einem Manuskript der römischen Landesvermesser (Wolfenbüttel, Herzog-August-Bibliothek, Ms. 2403), 6. Jahrhundert n. Chr.

gemäß selbst in sie gelegt hat" (vgl. die Ausgabe von R. Schmidt, Leipzig 1944 [unveränderter Abdruck der 2. Auflage von 1930]).

Der Inhalt der „Elemente"

Aus dem Titel „Elemente", den das Hauptwerk Euklids trägt, ist leicht zu ersehen, daß dieses Werk die Elemente der mathematischen Wissenschaft überhaupt enthalten muß. Das Material verteilt sich in 13 Büchern. Die Bücher 1 bis 6 und 10 bis 13 machen mit den Grundlagen der Geometrie vertraut, während die Bücher 7 bis 9 die Zahlentheorie behandeln. Man findet also in den Elementen Euklids alles, was für den Aufbau der mathematischen Wissenschaft unentbehrlich ist.

Die Figuren der „Elemente"

Die geometrischen Figuren der „Elemente" Euklids beschränken sich auf gerade Linien und Kreise, d. h. Figuren, die sich mit Lineal und Zirkel darstellen lassen. Sehr früh aber, fast zwei Jahrhunderte vor Euklid, haben die Griechen in ihrer Mathematik auch andere Kurven gebraucht, wie z. B. die Kegelschnitte. Trotzdem dürften die „Elemente" Sätze enthalten, die sich nur auf lineare oder kreisförmige Figuren gründen. Den Grund dafür entnehmen wir den Schriften Herons, in denen man sieht, welche Rolle das Religiöse und das Okkulte in der Mathematik, besonders seit Pythagoras, spielten. Nach Heron hat der Kreis keinen Anfang und kein Ende; er symbolisiert also Gott. Die gerade Linie setzt sich aus Punkten zusammen; sie hat Anfang, Mitte und Ende. Sie bedeutet Geburt, Leben und Tod. Gerade Linien und Kreise stellen also den Verkehr des Menschen mit Gott dar; sie verbinden den Menschen mit Gott (ed. J. L. Heiberg, Heronis Alexandrini vol. IV, Definitiones). Von solchen Gedanken ausgehend, die besonders den Stempel der Pythagoreischen Schule tragen, hat man mit Zirkel und Lineal vergeblich versucht, jene drei berühmten Probleme zu lösen: 1. die Quadratur des Kreises; 2. die Verdoppelung des Würfels und 3. die Trisektion des spitzen Winkels. Sie wurden indessen noch im Altertum mit anderen Mitteln gelöst.

Die Rechnung mit Zahlen und die „Elemente"

In den 13 Büchern der „Elemente" gibt es absolut keine Zahlenrechnung. Die Zahlenrechnung hat im Unterschied zur Zahlentheorie mit der Wissenschaft und der Erziehung des Menschen nichts zu tun. Sie ist eine Sache des täglichen Bedürfnisses und der Technik und blieb im Altertum den Sklaven und den Schulmeistern der Anfänger überlassen.

Die Beziehung Euklids zu den Elementen

Sehr oft, auch im Altertum, wurde die Frage aufgeworfen, ob Euklid eigentlich bei der Schaffung der Elemente mitgewirkt hat. Aus Proklos und anderen Quellen erfahren wir, daß viele Lehrsätze der „Elemente" Euklids von Eudoxos, Theaitetos und den Pythagoreern herrühren. Wir wissen nicht, ob Euklid auch nur einen einzigen Lehrsatz der „Elemente" persönlich erfunden hat. Wenn man jedoch die „Elemente" im Original, nicht in der Übersetzung liest, dann kommt man zu der festen Überzeugung, daß Euklid wirklich ein großer Mathematiker und zugleich ein Künstler war. Wie Pheidias der Künstler des Marmors, so ist Euklid der Künstler des menschlichen Geistes. Er ist der Pheidias des Geistes.

Die Herausgabe der „Elemente"

Die „Elemente" sind ungefähr um 300 v. u. Z. zum erstenmal erschienen. Bis etwa zum Jahre 380 n. Chr. wissen wir nichts über eine systematische Herausgabe der „Elemente". Die (vor 1814) zu allen Völkern gelangten „Elemente" stammen wahrscheinlich aus einer Edition des alexandrinischen Gelehrten Theon. Diese Ausgabe war jedoch mit einigem Ballast versehen. Als Napoleon I. Rom besetzte, fand der französische Mathematiker Peyrard in der Bibliothek des Vatikans Manuskripte der „Elemente", die aus einer vortheonischen Edition stammen. Nach der Pariser Edition Peyrards (1814—1818) wurden die „Elemente" in mühevoller und bewunderungswerter Arbeit von dem dänischen Gelehrten J. L. Heiberg in Leipzig bei B. G. Teubner herausgegeben (vier Bände „Elemente" und ein Band Kommentar, 1883—1888). Zu den erhaltenen Opera omnia Euklids gehören noch drei Bände, die auch bei B. G. Teubner erschienen sind. Der erste Band enthält die „Optica", die „Catoptrica" und den Kommentar (ed. J. L. Heiberg, 1895). Die anderen zwei Bände wurden von dem deutschen Gelehrten H. Menge herausgegeben: die Schrift Euklids „Data" (Gegebenes) mit Kommentar (1896), dann die Werke „Phaenomena" (Astronomie) mit Kommentar, „Sectio canonis" (Musik), „Introductio harmonica" (auch Musik) (1916). Leider sind wertvolle Schriften aus der Feder Euklids verlorengegangen. Es handelt sich dabei um: 1. Aufgaben zur Teilung von Figuren; 2. Trugschlüsse; 3. Porismen; 4. zwei Bücher über die Orte auf der Oberfläche; 5. vier Bücher über Kegelschnitte und 6. ein Buch über Mechanik.

Von den oben erwähnten Abhandlungen Euklids sind die „Data" und „Phaenomena" echt. Die anderen Schriften: „Optica", „Catoptrica", „Sectio canonis", „Introductio harmonica", sind meiner Meinung nach unecht. Allem Anschein nach stammen sie aus Schülerheften, die die Schriften Euklids benutzt haben. Gedruckt wurden zuerst die „Elemente" 1530 in Basel von Simon Grynaeus.

Auffassungen über die „Elemente"

Das Erlernen der Elemente in der Schule ist weder einfach noch leicht. Leider gibt es keinen „königlichen Weg" für die Mathematik. Außerdem kommt es in manchen Ländern zu Versuchen, den Unterricht der Mathematik in der Schule etwas leichter zu gestalten und den Schülern nur das Nützliche für die berufliche Ausbildung zu bieten. Die Technik hat ihre Ansprüche auf das Praktische und Nützliche und kein besonderes Interesse für die Erziehung der menschlichen

Seele. Man vergißt den im „Staate“ Platons erhaltenen Spruch, daß der Unterricht der Geometrie bezweckt, die Idee des Guten leichter zu verstehen (πρὸς τὸ κατιδεῖν ῥᾶον τὴν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν, 526 de). Auf Grund verschiedener Auffassungen, die wohl auf das Praktische, Nützliche und Gewinnbringende gerichtet sind, bemüht man sich, die Logik des Aristoteles und die Elemente Euklids aus dem Unterricht auszuschließen. Wir erlauben uns zu glauben, daß diese Bemühung sehr viel Ähnlichkeit mit dem Fall jenes reichen Jugendlichen hat, der damals Euklid fragte, was mit der Kenntnis des ersten geometrischen Lehrsatzes zu verdienen wäre.

Die Forschung zu den „Elementen“ und ein Widerhall

In den letzten zwei Jahrhunderten war das Studium der „Elemente“ und insbesondere die Erforschung der Grundlagen der Geometrie sehr intensiv. Man hat neue wichtige Sätze aufgestellt und bei der Ersetzung des 5. Postulats Euklids durch andere die sogenannten nicht-Euklidischen Geometrien erfunden. Mancher erachtet die Benennung „nicht-Euklidische Geometrie“ als nicht zutreffend. „Übungen zu den ‚Elementen‘ Euklids“ wäre richtiger. Wenn man aus den 14 Postulaten Euklids das eine ersetzt und mit diesem und den anderen 13 ein wissenschaftliches Gebäude errichtet, so darf man dies nicht nicht-Euklidisch nennen. Nicht-Euklidisch bedeutet, daß man mit den Elementen Euklids nichts zu tun hat, und dies trifft wahrhaftig nicht zu. Die nicht-Euklidischen Geometrien gaben dem französischen Gelehrten Jules Tannery Anlaß zu einigen Äußerungen, die wir mit einigen kleinen Abweichungen im folgenden wiedergeben (Science et philosophie, Paris 1934, Kap. 9):

„Wie sehr würden wir gewinnen können, wenn es möglich wäre, Euklid aus dem Jenseits zu uns zurückzuholen. Zeus, der Vater der Götter und Menschen nach Homer (πατὴρ ἀνδρῶν τε θεῶν τε), hörte wohlwollend die Bitte der Menschen und gab Euklid die Erlaubnis, nach der Erde zu kommen. Als Begleiter bestimmte er Henri Poincaré. Euklid, seiner Geometrie folgend, kam vom Himmel blitzartig in Berlin an, wo man ihn mit großer Begeisterung empfing. Man überreichte ihm von Herrn Burbachis aus Sparta (er ist mit N. Bourbaki nicht zu verwechseln) ein Telegramm, worin er gebeten wurde, die blitzartige Ankunft aus dem Himmel nicht zu bezeugen, da es von der speziellen Relativitätstheorie verboten sei. Inzwischen ist Poincaré, der seine Reise nach der Erde nicht-Euklidisch unternommen hat, in den Andromeda-Spiralnebel gekommen, obwohl er während seines ersten Lebens erklärt hat, die Euklidische und die nicht-Euklidischen Geometrien seien gleichwertig. Euklid wurde von allen Staaten zum Generalinspektor der Mathematik ernannt und fuhr nach Leipzig, wo er sich bei B. G. Teubner das kostspielige Werk von J. L. Heiberg ‚Die Elemente Euklids‘ beschaffte. Mit diesem Werk als Rüstzeug fuhr er nach Göttingen, wo er von den nicht-Euklidischen Geometrien erfuhr. Mit Genugtuung nahm er Kenntnis davon, daß Gauß diesen nicht-Euklidischen Geometrien aus Furcht vor dem Geschrei der Böoter fernblieb. Es hat ihn sehr gefreut, als er erfuhr, daß man seinem 5. Postulat einen

Ehrenplatz im Hilbertschen Axiomensystem vorbehalten hat, und sagte, was in der Welt geschehen würde, hätte man ihm diesen Ehrenplatz nicht zugewiesen. ‚Ich bewundere', sagte er ferner, ‚das Stetigkeitsaxiom von Dedekind-Cantor, die vollständige Induktion von Pascal oder Poincaré und den Dedekindschen Schnitt, die alle auf meinen Elementen beruhen. Wie schön finde ich den Namen Exhaustionsverfahren, den man für meine Analysis im 12. Buche der Elemente mit großer Mühe erfand!' Inzwischen dehnte sich das Weltall unaufhörlich aus gemäß der nicht-Euklidischen Geometrie, und Euklid sah sich gezwungen zu fragen, wo eigentlich der Mittelpunkt dieses immer nicht-Euklidisch, aber stetig expandierenden Weltalls liege. ‚Es würde sehr schön sein', sagte er, ‚wenn man den kleinen Kindern solche Weltalls in hinreichender und entsprechender Größe als Spielzeuge geben könnte.' Euklid war sehr beunruhigt, weil Poincaré noch nicht aus dem Himmel gekommen war. ‚Wie ist es möglich?' sagte er. ‚Ich habe gehört, daß die nicht-Euklidischen Geometrien für die großen Entfernungen und die großen Dreiecke besondere Gültigkeit haben. Ich bin sehr zufrieden', fuhr er fort, ‚daß Ihre Raketen und Erdsatelliten auf Grund meiner Geometrie fliegen. Es wäre hochinteressant, wenn man sie auf Grund einer nicht-Euklidischen Geometrie konstruieren könnte. Ich glaube, in diesem Fall wären Sie mindestens schon auf dem Mond und dem Mars gelandet. Es ist schade, daß die Konstrukteure der Raketen und Erdsatelliten die nicht-Euklidischen Geometrien, die für die großen Entfernungen gelten, vernachlässigen.' Als man dem Generalinspektor der Mathematik der ganzen Welt erklärte, daß die heutige Jugend die Geometrie, um etwas zu verdienen, lerne, sprang er aus seinem Stuhl, öffnete seine großen Augen, schloß sie wieder und sagte zu sich: ‚Was sind doch für große Veränderungen im Leben der Menschen eingetreten, während früher die glanzvolle Sonne Griechenlands, die durchsichtigen Linien seines Horizonts, das unendliche Lächeln seiner Meere, die hellen Tempel, die glänzenden Standbilder, die Dichter und die philosophischen Gespräche, alles überhaupt, den Augen der Jugend offenstand!' "[1]

[1] Literatur: H. Diels u. W. Kranz, Die Fragmente der Vorsokratiker 1, 7. Auflage Berlin 1954. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1907. T. L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford 1921. P.-H. Michel, De Pythagore à Euclide, Paris 1950. O. Becker u. I. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Bonn 1951. P. Leander Schönberger u. M. Steck, Proklus Diadochus. Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen", Halle (Saale) 1945. G. Hauser, Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid, Luzern 1955. B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, Basel u. Stuttgart 1956.

7

Diophantos der Mathematiker

Von Evangelos S. Stamatis

Nach der griechischen Tradition ist Thales von Milet (einer der sieben Weisen Griechenlands, der etwa im Jahre 600 v. u. Z. „blühte") durch seine Entdeckung, daß ein mathematischer Satz eines Beweises bedürftig ist, der Begründer der mathematischen Wissenschaft. Thales hat als erster die axiomatische Methode in die Mathematik eingeführt, d. h. er hat ein paar einfache Lehrsätze, die nicht bewiesen werden können, aber deren Wahrheit aus sich selbst ersichtlich ist, ersonnen. Euklid in seinen „Elementen" scheidet diese einfachen Lehrsätze in zwei Gruppen: in Postulate und in gewöhnliche Begriffe. Aristoteles nennt sie Axiome, und dieser Terminus hat sich in der mathematischen Wissenschaft eingebürgert.

Auf Grund der Axiome werden alle mathematischen Propositionen bewiesen. Nachdem man aber ein paar Lehrsätze bewiesen hat, kann man außer den Axiomen auch die bewiesenen Lehrsätze zum Beweis anderer Lehrsätze benutzen. Axiome sind z. B. folgende Sätze: 1. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich. 2. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.

Seit der Entdeckung durch Thales richteten die griechischen Mathematiker ihre volle Aufmerksamkeit auf die Erforschung der Geometrie. Die Arithmetik, d. h. die Zahlentheorie, wurde etwa fünfzig Jahre später (um 550 v. u. Z.) von Pythagoras und seinen Schülern und Anhängern, den sogenannten Pythagoreern, neben der Geometrie intensiv erforscht.

Die Hauptergebnisse der griechischen mathematischen Forschung in drei Jahrhunderten (etwa von 600—300 v. u. Z.) haben ihren Niederschlag in den „Elementen" Euklids gefunden. In diesem bewunderungswürdigen Werk sind die Hauptpropositionen der Geometrie und der Arithmetik systematisch zusammengestellt. Nur auf Grund der „Elemente" Euklids konnte man die weitere mathematische Forschung betreiben. Archimedes, Apollonios und die Epigonen dieser großen Mathematiker, wie auch viel später Descartes, Barrow, Newton, Leibniz und viele andere, konnten die mathematische Wissenschaft mit Hilfe der „Elemente" Euklids weiterentwickeln und fördern.

Über die mathematische Disziplin Algebra, die sich hauptsächlich mit der Auflösung von Gleichungen befaßt, finden wir bei Euklid kein einziges Wort. Die Griechen aber haben seit Pythagoras auch Algebra betrieben, entweder im geometrischen Gewand, d. h. mit geometrischen Beweisen und den dazugehörenden Figuren, oder im arithmetischen. Die zehn ersten Lehrsätze des 2. Buches der „Elemente" Euklids sind solche von reiner Algebra im heutigen gewöhnlichen algebraischen Sinn, und zwar Lehrsätze über Identitäten. Sie werden geometrisch, d. h. mit Hilfe von Figuren, bewiesen. Deshalb pflegt man diese und andere inhaltlich verwandte Lehrsätze die geometrische Algebra der Pythagoreer zu nennen.

Euklid hat uns in seinem 10. Buch der „Elemente" ein wunderbares Spezialgebiet der Algebra im geometrischen Gewand überliefert. Die Hauptzüge dieses Buches der „Elemente" schreibt man dem genialen, jung gestorbenen Athener Mathematiker Theaitetos zu. Beim 28. Lehrsatz finden wir zwei Zusätze algebraischen Inhalts von großer Bedeutung. Im ersten Zusatz handelt es sich um die Auffindung von ganzen Zahlen, die den pythagoreischen Lehrsatz bestätigen. Solche ganzen Zahlen sind z. B. die Zahlen 3, 4, 5 und 6, 8, 10. Im ersten Fall haben wir: drei ins Quadrat erhoben plus vier ins Quadrat erhoben ist gleich fünf im Quadrat ($3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 5 \cdot 5$, d. i. $9 + 16 = 25$). Im zweiten Fall haben wir: sechs ins Quadrat erhoben plus 8 ins Quadrat erhoben ist gleich zehn im Quadrat ($6 \cdot 6 + 8 \cdot 8 = 10 \cdot 10$, d. i. $36 + 64 = 100$). Die ganzen Zahlen 3 u. 4 bzw. 6 u. 8 entsprechen der Länge der senkrechten Seiten von zwei rechtwinkligen Dreiecken, und die Zahlen 5 bzw. 10 entsprechen der Länge der Hypotenusen dieser beiden Dreiecke.

Im zweiten Zusatz handelt es sich um die Auffindung von zwei ganzen Zahlen, deren Quadrate, wenn man sie addiert, keine Quadratzahl ergeben. Der griechische Philosoph und Schriftsteller Proklos (410—485 u. Z.) vermittelt uns die Nachricht, daß Pythagoras und Platon Gleichungen 2. Grades der sogenannten unbestimmten Analytik durch ganze Zahlen für die Unbekannten gelöst haben. Die diesbezügliche Stelle hat folgenden Wortlaut·

„Es werden aber gewisse Methoden zum Finden von solchen Dreiecken (die den pythagoreischen Lehrsatz mit ganzen Zahlen bestätigen) überliefert, von denen man die eine auf Platon, die andere auf Pythagoras zurückführt. Die pythagoreische geht von den ungeraden Zahlen aus. Sie nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl, die kleinere Kathete, bildet hiervon das Quadrat, subtrahiert davon 1 und nimmt die Hälfte des Restbetrages als die größere Kathete; addiert sie aber 1 dazu, so bildet sie die dritte Seite, die Hypotenuse. Sie nimmt z. B. die Zahl 3, erhebt sie zum Quadrat, subtrahiert 1 von 9 und nimmt die Hälfte davon, 4; und dazu addiert sie wieder 1 und erhält die Zahl 5, und so ist ein rechtwinkliges Dreieck gefunden mit den Seiten 3, 4, 5.

Die platonische Methode aber geht von den geraden Zahlen aus. Sie nimmt die gegebene gerade Zahl und bestimmt sie als eine von den beiden Katheten. Diese halbiert sie sodann und erhebt die Hälfte zum Quadrat; addiert sie nun 1 zum Quadrat, so erhält sie die Hypotenuse, subtrahiert sie davon 1, so erhält sie die andere der beiden Katheten. Sie nimmt z. B. die Zahl 4, erhebt die Hälfte davon, 2, zum Quadrat und erhält so 4. Subtrahiert sie 1, so erhält sie 3, addiert sie 1, so erhält sie 5 und hat so das gleiche Dreieck, das auch bei der anderen Methode erzielt wurde. Denn das Quadrat davon ist gleich dem Quadrat von 3 und dem Quadrat von 4 zusammen“[1].

Auch Thymaridas von der Insel Paros, ein Schüler des Pythagoras, hat schwierige algebraische Probleme gelöst, wie uns Iamblichos[2] berichtet. Er behandelte die Lösungen rein arithmetisch und benutzte keine algebraischen Zeichen und keine algebraische Sprache.

Erst viel später, im 3. Jahrhundert, hat sich die Auflösung von Gleichungen, d. h. die mathematische Disziplin Algebra, von der Geometrie und der Arithmetik losgelöst und sich als unabhängiger Zweig der Mathematik entwickelt. Diese Loslösung schreibt man dem genialen griechischen Mathematiker Diophantos aus Alexandrien zu. Diophantos war der erste Algebraiker im heutigen Sinn und hat sich große Verdienste um die Begründung der mathematischen Disziplin Algebra erworben. Er wirkte in seinem Heimatland und lebte 84 Jahre. Wir wissen nicht, wann er geboren ist. Aus verschiedenen Anzeichen setzt man seine Blüte etwa ins Jahr 250 u. Z. Die dürftigen Nachrichten über sein Leben erfahren wir aus folgender Inschrift, die man auf seinem Grabmal in Alexandrien fand:

„Dieses Grabmal bedeckt Diophantos. Ein Wunder zu schauen:
durch arithmetische Kunst lehrt uns sein Alter der Stein.
Knabe zu bleiben verlieh der Gott ihm ein Sechstel des Lebens;
nach einem Zwölftel sodann ließ er ihm sprießen den Bart,
ließ ihm nach weiterem Siebtel die Fackel der Hochzeit entzünden,
und fünf Jahre darauf schenkte er ihm einen Sohn.
Ach, der geliebte, unglückliche Sproß! Als halb er das Alter
hier seines Vaters erreicht, ward er, ein Kalter, verbrannt.
Nach vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen beschwichtend,
langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an.

Οὗτος τοι Διόφαντον ἔχες. τάφος ἃ μέγα θαῦμα·
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
δωδεκάτην δ'ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ'ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' **ἐπένευσεν ἔτει.**
αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος· ἥμισυ πατρός
τοῦδ' ἐκάη κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου·
πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.[3]

Die Verse schreibt man dem Epigrammschreiber Metrodoros zu, der im 4. Jahrhundert lebte. Aus obiger Inschrift entnimmt man, daß sich Diophantos im 33. Jahre seines Lebens verheiratete, im Alter von 38 Jahren einen Sohn bekam, der im Alter von 42 Jahren starb. 4 Jahre später starb Diophantos im Alter von 84 Jahren.

---

[1] Proklos, In Euclid. α', ed. Friedlein 1873, S. 428, 7. Übers. von P. L. Schönberger und komment. von M. Steck, Halle/S 1964, S. 464, 13.
[2] Iamblichos, In Nicomachi Arithm. Introd., ed. H. Pistelli, 1894, 62, 18 ff.
[3] Anthologia Graeca XIV 126, ed. H. Beckby, München 1958.

Das Hauptwerk des Diophantos trägt den Titel „Arithmetika" und ist in 13 Bücher geteilt, wie er selber am Ende seiner Einführung mitteilt. Von diesen 13 Büchern sind uns nur die ersten sechs erhalten. Es ist auffallend, daß Diophantos sein Hauptwerk in 13 Bücher geteilt hat, wie es Euklid für seine „Elemente" machte. 450 Jahre nach Euklid hat Klaudios Ptolemaios sein astronomisches Hauptwerk („Almagest") auch in 13 Bücher eingeteilt. Wir schließen aus dieser Einteilung, daß sowohl Ptolemaios wie auch Diophantos ihre Hauptwerke, Euklid nachahmend, als die Elemente der Astronomie bzw. der Algebra enthaltend betrachteten.

Nach einer genauen Untersuchung der Sprache und des Inhalts der „Arithmetika" sieht man, daß die erhaltenen sechs Bücher mit kleinen Änderungen und Kürzungen auf uns gekommen sind. Allem Anschein nach gehörten die ersten sechs Bücher der „Arithmetika" zum gewöhnlichen Lehrstoff der Algebra für Höhere Schulen bzw. Universitäten.

Es ist viel diskutiert worden, ob die sieben verlorenen Bücher der „Arithmetika" der Reihenfolge nach die letzten waren. Der deutsche Gelehrte G. H. F. Nesselmann[4] vertritt die Meinung, daß die verlorenen Bücher hinter dem ersten oder zweiten Buch standen. Er meint, daß es an dieser Stelle eine Lücke in der Kontinuität des Stoffes gibt. Es ist wahrscheinlich, daß man zwischen dem 1 und 3. Buch der „Arithmetika" ein paar Probleme setzen könnte, um die vermutete Kontinuität zu bewahren. Dies ist aber kein schlagendes Argument, daß Diophantos seine Algebra nicht weiterentwickelt habe. Es waren nach Nesselmann keine anderen schwierigeren Probleme der Algebra, die Diophantos nach dem 6. Buch behandelt haben könnte.

Wenn man bedenkt, daß im 10. Buch Euklids, also 500 Jahre vor Diophantos, sehr schwierige algebraische Probleme enthalten sind, so kommt man zu dem Schluß, daß auch in den verlorengegangenen Büchern des Diophantos Probleme enthalten waren, deren Inhalt wir nicht mehr imstande sind zu bestimmen.

Die Probleme des 6. Buches der „Arithmetika" besprechen die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks durch rationale Zahlen, während 500 Jahre früher das 10. Buch der „Elemente" die Konstruktion desselben Dreiecks durch irrationale Größen behandelt. Diese Bemerkung erlaubt uns die Vermutung, daß Diophantos in den verlorenen Büchern der „Arithmetika" die Theorie der Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks im Anschluß an das 10. Buch Euklids weiterentwickelte, und zwar im algebraischen Sinn und nicht im geometrischen, wie es Euklid tat.

In den erhaltenen 6 Büchern der „Arithmetika" des Diophantos werden Gleichungen ersten und zweiten Grades gelöst. Die Lösung entsprechender Ungleichungen ist ihm bekannt. Es wird auch eine einfache Gleichung dritten Grades gelöst (5, 17). Meistens sind mehr gesuchte Unbekannte als gegebene Gleichungen, es gehören also diese Probleme der sogenannten unbestimmten Analytik an. Man nennt heute solche Gleichungen eines Problems mit mehr Unbekannten als gegebenen Gleichungen „diophantische Gleichungen", und man verlangt, daß

[4] G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, 265.

die Lösung durch ganze Zahlen geschieht, obwohl Diophantos das nirgends ausdrücklich verlangt.

Er kennt die negativen Zahlen und operiert mit ihnen. Doch bei der Lösung seiner Probleme vermeidet er immer die negativen Zahlen durch Anwendung sehr scharfsinniger Kunstgriffe. Er sucht immer positive Zahlen für die Lösungen seiner Probleme. Hochinteressant ist die in der Einführung der ,,Arithmetika“ erhaltene Bemerkung, daß Minus mal Minus Plus und Minus mal Plus Minus ergibt.

Die ,,Arithmetika“ hat Diophantos einem gewissen Dionysios gewidmet, den er als Ehrenvollsten bezeichnet. Die Einführung schließt er folgendermaßen: ,,Nun wollen wir aber den Weg zu den Problemen, deren wir eine große Fülle haben, beschreiten. Da es sich um viele und umfangreiche Probleme handelt, und da es deswegen lange dauert, bis sie von denjenigen, die sie studieren, im Gedächtnis behalten und beherrscht werden, so habe ich mich entschlossen, soweit wie möglich eine Teilung der Probleme vorzunehmen, mit den elementaren Problemen anzufangen und allmählich zu den schwierigen vorzuschreiten. So nämlich wird der Weg für den Anfänger leichter sein, und so wird der Stoff auch leichter im Gedächtnis bleiben. Wir behandeln den Stoff in 13 Büchern.“

Um einen Eindruck vom Inhalt der ,,Arithmetika“ zu vermitteln, geben wir den Wortlaut von sechs Problemen, ein Problem je Buch, wieder:

1, 30: Es sind zwei Zahlen zu finden, deren Differenz und Produkt gegebenen Zahlen gleich sind.

2, 8: Ein gegebenes Quadrat soll in eine Summe zweier Quadrate zerlegt werden.

3, 10: Es sind drei Zahlen von der Art zu finden, daß die Produkte je zweier von ihnen, vermehrt um eine gegebene Zahl, Quadrate ergeben.

4, 28: Es sind zwei Zahlen zu finden, deren Produkt, sowohl vermehrt als auch vermindert um die Summe der Zahlen, einen Kubus ergibt.

5, 24: Es sind drei Quadrate zu finden von der Art, daß die Produkte von je zweien von ihnen um 1 vermehrt, Quadrate ergeben.

6, 22: Es ist ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Umfang ein Kubus ist, während die Summe des Umfanges und der Fläche ein Quadrat ist.

Diophantos ist der erste in der Geschichte der Algebra, der Symbole für algebraische Operationen oder Darstellungen eingeführt hat. Zur Bezeichnung einer Unbekannten benutzt er das Symbol ς (heute x). Wenn in demselben Problem zwei, drei oder noch mehr Unbekannte vorkommen, verwendet er dasselbe Symbol. Durch Anreihen der Operationen wird kein Mißverständnis hervorgerufen. Auch für andere algebraische Ausdrücke ist Diophantos originell und bahnbrechend. Um das Quadrat einer Zahl oder eines algebraischen Ausdrucks darzustellen, benutzt er den ersten Buchstaben des griechischen Wortes *Δύναμις* (= Potenz), versehen mit einem Ypsilon (y) als Exponent: Δ^{y}. Analog benutzt er, um den Kubus einer Zahl oder eines algebraischen Ausdrucks darzustellen, den ersten Buchstaben des griechischen Wortes für Kubus (*Κύβος*) auch mit einem Ypsilon als Exponent: K^{y}. Als Zeichen für das Wort Minus benutzt er das griechische Wort für den Großbuchstaben L, auf griechisch Λ, mit einer winkelhalbierenden Linie: ⁄|⍀.

Durch Kombination dieser Ausdrücke, d. h. der Symbole für Quadrat und Kubus, bildet er Ausdrücke für höhere Potenzen als drei, bis zur 6. Potenz. Es versteht sich, daß diese Methode für den Symbolismus von viel größeren Potenzen gereicht hätte. Diophantos benutzt aber in seinen Problemen nicht größere als die 6. Potenz.

Auch für die Bezeichnung von Brüchen algebraischer Relationen hat er besondere Symbole eingeführt, wie z. B.:

$$\mathrm{K}^{\mathrm{y}}\,\eta^{\mathrm{x}},\ \text{was}\ \frac{1}{8}\,\mathrm{x}^3\ \text{bedeutet.}$$

Man kann sich vorstellen, welche Schwierigkeiten Diophantos wegen des Mangels eines entsprechenden Symbolismus zu überwinden hatte, um die Operationen seiner Probleme auszudrücken. Um die Bedeutung der von Diophantos in die Algebra eingeführten Zeichen richtig zu würdigen, erwähnen wir, daß erst in der Renaissance, also mehr als 1250 Jahre nach Diophantos, die einfachsten Zeichen der Mathematik erfunden wurden. Die Zeichen z. B. für Plus (+) und Minus (−) erscheinen zum ersten Mal in einem Leitfaden der Arithmetik von I. W. Eger, herausgegeben im Jahre 1489. In der Abhandlung von Michael Stiefel[5] findet man den häufigen Gebrauch der Zeichen für Plus und Minus. Das Zeichen der Gleichheit (=) wurde erst vom Engländer Robert Recorde in seinem Leitfaden der Algebra im Jahre 1557 verwendet, der Gebrauch von Buchstaben statt Zahlen ist erst im 16. Jahrhundert in Westeuropa von François Viète (1540–1603) eingeführt. Es muß aber gleich hinzugefügt werden, daß die Buchstabenrechnung für allgemeine Zahlen etwa um 850 u. Z. vom byzantinischen Philosophen und Mathematiker Leo in Konstantinopel erfunden wurde, also etwa 750 Jahre früher als von Viète[6].

Es ist bekannt, daß Diophantos außer seinem Hauptwerk „Arithmetika“, das die verschiedenen Kommentatoren *Ἀριθμητικὴ στοιχείωσις* (nach der Benennung der Elemente = *Στοιχεῖα* Euklids) nannten, noch drei Werke schrieb: 1. Über Vieleckzahlen (Polygonalzahlen), 2. *Πορίσματα* (= Ergebnisse), 3. *Μοριαστικά* (= Über Brüche). Von der Abhandlung „Vieleckzahlen“, die algebraischen Inhalts ist, sind vier Lehrsätze erhalten. Die anderen zwei Abhandlungen sind verloren. Aus den „Arithmetika“ (5, 3.4.5.16) erfahren wir, daß auch die „Porismata“ algebraischen Inhalts waren. Die Abhandlung „Moriastika“ wird in Scholien bei Jamblichos („In Nicomachi Arithm. Introd.“[7]) erwähnt.

Wir können nicht behaupten, daß die Lösungsmethoden der „Arithmetika“ ausschließlich auf Diophantos zurückgehen. Wir glauben, daß diese Methoden im Verlauf einiger Jahrhunderte von den Griechen entwickelt wurden. Allem Anschein nach hat Diophantos diese Methoden vervollkommnet und algebraisiert. Es gibt keine Anzeichen dafür, daß die Griechen vor Diophantos Symbole

---

[5] Arithmetica Integra auctore Mich. Stifelio cum Praefatione Phil. Melannchthon, Nürnberg 1544.

[6] Kurt Vogel, Buchstabenrechnung und indische Ziffern in Byzanz, Akt. d. XI. Intern. Byzant. Kongreß (1958), 1960, 660–664.

[7] H. Pistelli, a. O. S. 127, 11.

für algebraische Ausdrücke und gleichartige Methoden für die Auflösung algebraischer Probleme, wie sie bei Diophantos begegnen, kannten. Die Einführung eines Buchstabens für den Unbekannten einer Gleichung sowie anderer Zeichen für Potenzen und Brüche muß man dem Diophantos persönlich zuschreiben. Seine Originalität sowohl auf diesem Gebiet wie auch bei der Anwendung vieler scharfsinniger Kunstgriffe zur Lösung von schwierigen Aufgaben ist wohl unwiderlegbar.

Erst Diophantos hat durch sein Werk „Arithmetika" der Algebra den Weg gewiesen. Mit Recht nennt man ihn den Vater der Algebra.

Daß die „Arithmetika" des Diophantos ein bahnbrechendes Werk der Algebra waren, bezeugen die Kommentare aus vielen Jahrhunderten. Zuerst sind sie von der Mathematikerin und Philosophin Hypatia in Alexandrien kommentiert worden. Dieser Kommentar ist uns nicht erhalten. Wir erfahren von ihm aus dem byzantinischen Wörterbuch der Suda (s. v. Hypatia). Hypatia war die Tochter des Mathematikers Theon von Alexandrien und wurde von dem durch Religionsfanatiker aufgehetzten Pöbel Alexandriens im Jahre 415 gesteinigt, zerstückelt und verbrannt. Derselbe Pöbel hat auch die zweite Bibliothek der Stadt mit 90000 Bänden, das sogenannte Serapeion, verbrannt. Die erste Bibliothek mit 500000 Bänden fiel bei der Belagerung Alexandriens durch Julius Caesar im Jahre 47 v. u. Z. den Flammen zum Opfer.

Das Wort Algebra ist arabischen Ursprungs. Die Araber haben, als sie Ägypten besetzten und griechische Bücher in ihre Hände fielen, die „Arithmetika" des Diophantos eifrig studiert. Mit Hilfe der indischen Symbole für die Zahlen, die man gewöhnlich arabische Ziffern nennt, weil sie durch die Araber nach Westeuropa gekommen sind, haben die Araber die Algebra neu geformt und sie später in Spanien eingeführt.

Von den griechischen Kommentatoren sind die Gelehrten, die in Konstantinopel gewirkt haben, zu nennen, wie beispielsweise Michael Psellos (11. Jahrhundert), Georg Pachymeres und Maximos Planudes (beide 13. Jahrhundert). Am Anfang des 15. Jahrhunderts sind im Bereich des Byzantinischen Reiches arithmetische Bücher im Umlauf, die bei vielen Problemen an verschiedene einfache Probleme der „Arithmetika" des Diophantos anknüpfen. Das 16. Problem des 1. Buches der „Arithmetika" beispielsweise finden wir anders formuliert als das 60. Problem einer Sammlung byzantinischer arithmetischer Probleme, die am Anfang des 15. Jahrhunderts in Umlauf war[8].

In Italien wurden die „Arithmetika" des Diophantos mit arabischen Ziffern versehen von Leonardo von Pisa (Fibonazzi) etwa im Jahre 1200 eingeführt. Die um die Mitte des 13. Jahrhunderts in Italien herausgegebene „Algebra" Fibonazzis enthält viele Probleme aus den „Arithmetika" des Diophantos. Diophantos' Name wurde zum ersten Mal in Westeuropa im Jahre 1464 von dem deutschen Mathematiker Regiomontanus (Johannes Müller) in einem Brief an den Astronomen Bianchini, der im Dienste des Herzogs von Ferrara stand, erwähnt. Er schreibt, daß er in Venedig das mathematische Buch eines gewissen

[8] H. Hunger u. K. Vogel, Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts, Wien 1963, 48.

Diophantos entdeckt habe, das noch nicht ins Lateinische übersetzt sei. In dieser Zeit waren in Italien Leitfäden der Algebra im Umlauf, welche viele Probleme der „Arithmetika" des Diophantos enthielten, ohne ihn zu erwähnen.

Im Jahre 1556 machte der deutsche Mathematiker Joachim Camerarius in einem Brief darauf aufmerksam, daß in der Bibliothek des Vatikans die „Arithmetika" des Diophantos vorhanden sind. Im Jahre 1572 gab der italienische Mathematiker Bombelli seine „Algebra" heraus. In diesem Buch hat Bombelli von den 189 Problemen der sechs Bücher der „Arithmetika" des Diophantos 143 übernommen, ohne die „Arithmetika" zu zitieren[9].

In lateinischer Übersetzung wurden die „Arithmetika" zum ersten Mal in Deutschland im Jahre 1575 von Wilhelm Holzmann veröffentlicht, der aus Liebe zu Griechenland seinen Namen in Wilhelm Xylander (Holz auf griechisch = *ξύλον* = xylon, ander = *ἀνήρ* = Mann) hellenisierte.

Der griechische Text der „Arithmetika" mit den vier erhaltenen Lehrsätzen über Vieleckzahlen (d. h. über arithmetische Reihen und andere algebraische Operationen) wurde zum ersten Mal in Westeuropa in Paris im Jahre 1621 vom französischen Mathematiker Claude Gaspar Bachet nach einem Manuskript der Pariser Nationalbibliothek mit lateinischer Übersetzung herausgegeben. Bachet hat viel kommentiert. Auch Pierre Fermat hat die „Arithmetika" eifrig studiert und kommentiert. Zum zweiten Mal wurde der Text mit der lateinischen Übersetzung von Samuel Fermat, dem Sohn von P. Fermat, in Toulouse im Jahre 1670 ediert. Die dritte Ausgabe, auch mit lateinischer Übersetzung, folgte in Leipzig (bei B. G. Teubner) vom französischen Mathematiker Paul Tannery in zwei Bänden: 1. Band 1893, 2. Band, der nur die Kommentare der Byzantiner und arithmetische Epigramme enthält, 1895. Diese Epigramme enthalten Probleme arithmetisch-algebraischer Natur, die vielen Problemen der „Arithmetika" ähnlich sind. Ein solches Epigramm, dem Epigrammschreiber Metrodoros zugeschrieben, lautet:

„Schmied' einen Kranz mir, du Künser! Nimm Gold und Kupfer zur Mischung,
gieß auch Zinn noch hinzu und hartes Eisen! Denn sechzig
Mienen wiege der Kranz: Das Gold mit dem Kupfer zusammen
wiege zwei Viertel vom Ganzen; das Gold mit dem Zinne zusammen
wiege drei Viertel davon: das Gold mit dem Eisen hinwieder
wiege drei Fünftel vom Kranz. Nun sag mir genaustens, wieviel du
Gold benötigst dazu, wieviel von dem Kupfer, wieviel du
Zinn auch benötigst, und sag, wieviel Eisen brauchst du am Ende,
daß ein Kranz mir ersteht von sechzig Minen zusammen."
(Antwort: Gold $30^1/_2$, Kupfer $9^1/_2$, Zinn $14^1/_2$, Eisen $5^1/_2$).

Τεῦξον μοι στέφανον χρυσὸν χαλκόν τε κεράσσας
κασσίτερόν θ' ἅμα τοῖσι πολύκμητόν τε σίδηρον,
μνῶν ἑξήκοντα· χρυσός δ' ἅμα κασσίτερός τε
τρισσὰ μέρη τετόρων· χρυσὸς δ' αὖτ' ἠδὲ σίδηρος
τόσσα μέρη τῶν πέντε. πόσον δ' ἄρα δεῖ σε κεράσσαι
λέξον τοῦ χρυσοῦ, χαλκοῦ πόσον, ἀλλ' ἔτι λέξον,
κασσιτέροιο πόσον, λοιποῦ πόσον εἰπὲ σιδήρου,
ὥστε σε τὸν στέφανον τεῦξαι μνῶν ἑξήκοντα.

(Anthologia Graeca XIV 49).

---

[9] P. ver Eecke, Diophante d'Alexandrie p. LXII—LXVII, Bruges 1926, 2. Aufl. von A. Blanchard, Paris 1959.

Einen köstlichen Kommentar finden wir am Ende des 2. Bandes der Edition der „Arithmetika" von Tannery. Es handelt sich um den Kommentar zum Problem 2, 8, welches wegen seiner Schwierigkeit den Grimm des anonymen Kommentators hervorrief: „Deine Seele, o Diophantos, sei mit der des Teufels, wegen der Schwierigkeit aller deiner Probleme, besonders aber wegen dieses Theorems."

Die vierte Edition wurde von mir im Jahre 1963 in Athen herausgebracht (Text, Übersetzung ins Neugriechische, Vieleckzahlen, Arithmetische Epigramme und umfangreicher Kommentar). In dieser Edition habe ich vier fehlende Probleme des 5. Buches der „Arithmetika" in der Sprache des Diophantos rekonstruiert.

Die Wirkung des Diophantos war für die Entwicklung der Algebra in Europa von entscheidender Bedeutung. Davon zeugen zunächst die aus den „Arithmetika" angeregten algebraischen Arbeiten der Araber, ferner wurden die französischen Mathematiker Bachet und P. Fermat bei der Kommentierung der „Arithmetika" und deren Lösungsmethoden sehr angeregt und fanden wichtige neue algebraische Lehrsätze. Euler hat in wunderbarer Weise die Lösungsmethoden des Diophantos weitergeführt, wie aus seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra"[10] hervorgeht.

[10] Revidierte Fassung von Jos. E. Hofmann, Stuttgart 1959. Von den neueren Herausgebern und Forschern der „Arithmetika" des Diophantos erwähnen wir: F. Th. Poselger (Leipzig), Otto Schulz (Berlin), G. H. F. Nesselmann (Berlin), Thomas Heath (Cambridge), G. Wertheim (Leipzig), Paul ver Eecke (Bruges), Arthur Czwalina (Göttingen)., Isabella Grigorjewna Bachmakowa (Moskau).

8

«ΠΛΑΤΩΝ»
ΕΤΟΣ ΙΓ'—1961
ΤΕΥΧΗ Α' καὶ Β' 25/26

A few remarks on the method ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ of Diophantus (Method of approximation to limits).

From studying the problems V 9, 11 of the Arithmetica of Diophantus we conclude the following :

II 1.

We can always define a square t^2 so that the converse of that, when additioned to a given whole number, to make that square.

Let a be the given whole number and t^2 the square we want to find. Then $a+\frac{1}{t^2}$=square, (1). From this relation we have $at^2+1=$ square. We can write this square$=(1+\kappa t)^2$, with $\kappa^2<a$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2>a$.

Examble

a) $7+\frac{1}{t^2}$=square, (2), or $7t^2+1$=square, let$=(1+2t)^2$, then $t=\frac{4}{3}$ and from the (2) we have $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

b) $7t^2+1=(1-3t)^2$, then $t=3$ and from the (2) we have

$$7+\frac{1}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

II 2.

We can always define a square t^2, so that the representation $\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ to be a square number, (1), (a is the given whole number and

$$n=2, 3, 4 \ldots).$$

From the (1) we have ant^2+1=square. Let it be $=(1+\varkappa t)^2$, with

$\varkappa^2 < an$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2 > an$.

Examble

a) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}$ =square. (2) or $55t^2+1$=square.

Let it be$=(1+7t)^2$, then $t=\frac{7}{3}$ and from the (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2.$$

b) $55t^2+1$=square, let it be $=(1-8t)^2$, $t=\frac{16}{9}$ and from (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25\,.\,256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2.$$

II 3.

While every whole number is analysed to a sum of four, five, six, . . , ν squares, is also possible to be analysed to a sum of 4, 5, 6 . . , ν squares, appoximately equal, by the application of the method of appoximation of Diophantus, after we have made the given number a square according to the relation II 2.

Examble

To be analysed the number 35 in four approximately equal squares.

With respect to the II 2 we will have $\frac{35}{4}+\frac{1}{16t^2}$=square, (1). From this relation we have $140t^2+1$=square, let it be$=(1-12t)^2$, then $t=6$, and from the (1) we have

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\,.\,36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2.$$

The number 35 is analysed to a sum of four squares that is of

$$1^2+3^2+3^2+4^2.$$

The number 35 must be analysed to a sum of four squares, each of them has a side about equal to $\frac{71}{24}$. The side of the first of the required squares will be larger of 1 and smaller of 3, the side of other three squares will be smaller of 3 i. e. if the 4 squares are equal we will have as side of each of them the following

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

From the above relations we have

$$\varkappa=\frac{47}{24},\ \lambda=\frac{1}{24},\ \mu=\frac{25}{24}.$$

But four equal squares, each of them has as side $\frac{71}{24}$, have a sum $4\cdot\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{20164}{576}=35\frac{4}{576}$, thus >35. In order to be the required squares approximately equal, with their sum exactly equal to 35, we express the sides of them according to the method of Diophantus. Then we have

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

From this relation we find $x=\frac{59}{1418}$ and by substituting in the (2) we take the required four squares

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

Τύποις: Α/ΦΩΝ Γ. ΡΟΔΗ Α.Ε. 'Αμαρουσίου - Χαλανδρίου 59 — Μαρούσι

Kurt Gödel

Zum Tode des Mathematikers

Kurt Gödel, einer der bedeutendsten Mathematiker und Logiker unserer Zeit, ist, wie erst jetzt bekannt wird, Anfang des Jahres in Princeton gestorben. Gödel hat 1931 als Fünfundzwanzigjähriger eine Arbeit „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme" veröffentlicht, deren Aussagen nicht nur für die Mathematik selbst, sondern generell für die Wissenschaftstheorie von grundlegender Bedeutung sind. Er hat damit das erkenntnistheoretische Selbstverständnis der Mathematik jener Zeit auf ähnliche Weise erschüttert wie Heisenbergs Unschärferelation das der Physik.

Mit der Erkenntnis, daß mit den Mitteln eines mathematischen Systems dessen eigene Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden kann, hat er die von David Hilbert formulierte Überzeugung, es gebe „in der Mathematik kein Ignorabismus", widerlegt. Gödel zeigte, daß sich immer Behauptungen finden lassen, über deren Gültigkeit in der jeweiligen Theorie nicht entschieden werden kann. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit einer Theorie läßt sich nur mit Mitteln führen, die über diese Theorie hinausgehen. Das Programm Hilberts vom Jahre 1900, die klassische Mathematik der euklidischen Geometrie vergleichbar in einem widerspruchsfreien Axiomensystem zu formulieren, erwies sich so als nicht realisierbar.

‚Abgesehen von den Konsequenzen für die Mathematik, sind Gödels Erkenntnisse ganz allgemein für die Frage von Bedeutung, unter welchen Bedingungen durch logisches Schließen Aussagen von absoluter Gewißheit möglich sind. In seinem Buch „Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik" zitiert H. Meschkowski den Münchener Wissenschaftstheoretiker W. Stegmüller, der in diesem Zusammenhang schreibt: „Eine ‚Selbstgarantie' des menschlichen Denkens ist, auf welchem Gebiet auch immer, ausgeschlossen. Man kann nicht vollkommen ‚voraussetzungslos' ein positives Resultat gewinnen. Man muß bereits an etwas glauben, um etwas anderes rechtfertigen zu können."

Gödel, am 28. April 1906 in Brünn geboren, hatte in Wien studiert und war dort von 1933 bis 1938 Dozent an der Universität. Nach der Emigration wirkte er am berühmten Institute for Advanced Study in Princeton. Gödel, dem neben wichtigen Beiträgen zur Mengenlehre auch eine Arbeit über allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie zu verdanken ist, war Träger des Einstein-Preises. Zahlreiche Hochschulen haben ihn mit der Ehrendoktorwürde ausgezeichnet. H. Z.