Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ — ΒΙΒΛΙΑ 1. 2. 3. 4.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ—ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ—ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

[Tomos I]

1952

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ: ΝΙΚ. Α. ΣΑΚΚΟΥΛΑ
ΑΘΗΝΑΙ - ΣΟΛΩΝΟΣ 84

VERITAS IUSTITIA LIBERTAS * FREIE UNIVERSITÄT BERLIN *
FH 39701 E38-1

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΦΙΛΟΥΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΚΥΡΙΟΝ ΔΗΜΗΤΡΙΟΝ ΤΖΙΡΑΚΟΠΟΥΛΟΝ
ΚΑΙ ΚΥΡΙΑΝ ΧΑΡΙΚΛΕΙΑΝ ΔΗΜ. ΤΖΙΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ
ΤΟ ΓΕΝΟΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗ ΚΟΤΣΙΚΑ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς 35 ἀντὶ meaming γρ. meaning.
» 41 θεώρ. 3 στίχ. 6, ἀντὶ ἂς ληφθῇ ἀπὶ, γρ. ἂς ληφθῇ ἀπό.
» 46 θεώρ, 8, στίχ. 12, ἀντὶ ΑΓ γρ. ΒΓ.
» 48 θεώρ. ι', στίχ. 8, ἀντὶ ΒΔ γρ. ΒΓ.
» 70 θεώρ. λγ' στίχ. 2, ἀντὶ καὶ ἴσαι γρ. καὶ αὗται ἴσαι.
» 75 στίχ. 4, ἀντὶ ΘΖ γρ. ΘΓ.
» 88 θεώρ. α', στίχ. 2, ἀντὶ τῶν εὐθειῶν γρ. τῶν δύο εὐθειῶν.
» 89 θεώρ. 1, στίχ. 19, ἀντὶ ΒΓ γρ. ΕΓ
» 94 θεώρ, ς', σχῆμα, ἀντὶ ΓΑΕ γρ. ΓΛΕ.
» 144 θεώρ. λδ', στίχ. 3, ἀντὶ γωνίας γρ. γωνίαις.
» 153 θεώρ. 37 στίχ. 3, ἀντὶ τὰ λαμβανόμενον γρ. τὸ λαμβανόμενον.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Κατὰ τὸ 1902 ὁ περίφημος Οὔγγρος μαθηματικὸς Bolyai, εἷς ἐκ τῶν ἱδρυτῶν τῆς ὑπερβολικῆς γεωμετρίας, ἔγραψεν, ὅτι εἶχε διαπιστώσει 1700 ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἰς διαφόρους γλώσσας καὶ ἐντὸς διαστήματος 1900 ἐτῶν. Γενικῶς ὅμως πιστεύεται, ὅτι αἱ ἐκδόσεις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ὑπερβαίνουν κατὰ πολὺ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην ἡ ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς Ἀναγεννήσεως ἐξ ἀραβικῶν ἐκδόσεων. Ἅπασαι αὗται ἐστηρίζοντο εἰς ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων γενομένην ἐν Ἀλεξανδρείᾳ κατὰ τὸν 4ον μ.Χ. αἰῶνα ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ Θέωνος, πατρὸς τῆς μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου Ὑπατίας. Κατὰ τὸ 1808 μετεφέρθησαν ἐκ τοῦ Βατικανοῦ ὑπὸ τοῦ Ναπολέοντος εἰς Παρισίους πολλοὶ ἑλληνικοὶ κώδικες, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ F. Peyrard ἀνεκάλυψεν ἕνα, φερόμενον σήμερον ὑπὸ τὸ ὄνομα κῶδιξ Βατικανὸς ὑπ' ἀριθ. 190, ὅστις περιεῖχε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου. Ὁ κῶδιξ οὗτος ἐστηρίζετο εἰς ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων πολὺ παλαιοτέραν τῆς ἐκδόσεως τοῦ Θέωνος (ὁ κῶδιξ ἐπεστράφη εἰς τὸ Βατικανὸν τὸ 1814). Ἀπὸ τὸν κώδικα τοῦτον διεπιστώθησαν τὸ πρῶτον αἱ μεταβολαί, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐπιφέρει ὁ Θέων καὶ ἐσημειώθησαν αὗται ὑπὸ τοῦ E. F. August κατὰ τὴν ἔκδοσιν ὑπὸ τούτου τῶν Στοιχείων τὴν γενομένην κατὰ τὸ 1829. Κατὰ τὸ 1882 - 1888 ὁ Δανὸς I. L. Heiberg τῇ συνεργασίᾳ τοῦ Γερμανοῦ H. Menge ἐξέδωκεν ἐν Λειψίᾳ τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου. Ἐκ τοῦ προλόγου τοῦ πρώτου τόμου τῶν Στοιχείων ὑπὸ τοῦ I. L. Heiberg παραθέτομεν ἐδῶ τὰ σπουδαιότερα μέρη.

« Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τρεῖς σχεδὸν αἰῶνας εἶχον ὡς κριτικόν των θεμέλιον τὴν πρωταρχικὴν (διὰ τοῦ τύπου) ἔκδοσιν, ἡ ὁποία εἶδε τὸ φῶς ἐν Βασιλείᾳ κατὰ τὸ 1533. Διότι ὁ Gregorius εἰς τὰ Στοιχεῖα ἐξαρτᾶται ἐξ ὁλοκλήρου ἀπὸ τὴν ἔκδοσιν ἐκείνην. Τίνος ποιότητος ὑπῆρξε τὸ θεμέλιον ἐκεῖνο κατανοεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἡ Βασιλειανὴ ἔκδοσις, συμφώνως πρὸς τὴν συνήθειαν τῶν χρόνων ἐκείνων, ἐγένετο ἀκολουθοῦσα πιστῶς *ἐλαχίστους καὶ οὐχὶ τοὺς ἀρίστους κώδικας*, καίτοι ὑπάρχουν κώδικες τῶν Στοιχείων ἀρχαιότατοι καὶ ἄριστοι εἰς ἀριθμόν, εἰς τὸν ὁποῖον δυσκόλως ἀνέρχονται οἱ κώδικες οἱουδήποτε ἄλλου Ἕλληνος συγγραφέως. Ὅθεν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ αἰῶνος μας (19ου) ὁ F. Peyrard προσέφερεν ὑψίστην εὐεργεσίαν εἰς τὰ Στοιχεῖα, ἐπειδὴ ἐχρησιμοποίησεν ἕνα κώδικα ἀρχαῖον καὶ ὑπεραρχαιότατον ἐν συγκρίσει πρὸς ὅλους, πρὸς διόρθωσιν τῆς Βασιλειανῆς ἐκδόσεως, ἐφ' ὅσον ὁ κῶδιξ οὗτος περιεῖχε κριτικὴν ἀναθεώρησιν παλαιοτέραν τῆς τοῦ Θέωνος. Τὸ ὅτι τὸν κώδικα τοῦτον ἔφερεν εἰς φῶς ἐκ τῶν ἀδύτων τοῦ Βατικανοῦ καὶ τὸ ὅτι διέγνωσε τὴν ὑπεροχήν του, τοῦτο ἀποτελεῖ δόξαν τοῦ F. Peyrard, ἥτις δὲν πρέπει νὰ ἐκτιμηθῇ ὡς μικρά. Ἀλλὰ δὲν ἐχρησιμοποίησε πανταχοῦ ὀρθὴν καὶ σταθερὰν κρίσιν ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῆς ἀληθινῆς γραφῆς καὶ κατὰ πρῶτον λόγον, διότι ἐστερεῖτο καλῶν κωδίκων τῆς ἀναθεωρήσεως τοῦ Θέωνος, οὔτε ἐκρατήθη σταθερῶς εἰς τὸ εὕρημά του, οὔτε καὶ ὀρθῶς τὸ ἐξετίμησε. Εἰς τοῦτο προστίθεται, ὅτι ἡ ἔκδοσίς του καὶ δύσχρηστος εἶναι καὶ κατὰ τοὺς χρόνους μας εἶναι λίαν σπανία. Οὔτε ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι μετὰ τὸν Peyrard ἐξέδωκαν τὰ Στοιχεῖα ἐπηύξανον τὰ κριτικὰ βοηθήματα καὶ οὐδόλως διεχειρίσθησαν οὕτω τὴν ὑπόθεσιν, ὥστε τὸ κείμενον τῶν Στοιχείων νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καταστῇ φανερόν, ὅτι χρησιμοποιεῖ ἀρκετὰ βέβαιον καὶ κατάλληλον πρὸς χρῆσιν κριτικὸν θεμέλιον. Εἶναι δὲ ἀρκούντως ὡμολογημένον, ὅτι ὡς πρὸς τὰ λοιπὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου ἐγένοντο πολὺ χειρότερα. Ἐπειδὴ ἔβλεπον, ὅτι ταῦτα κατενοοῦντο ἀπὸ πολλούς, ἀπεφάσισα νὰ προσθέσω εἰς τὴν ἔκδοσιν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τὴν ἔκδοσιν τοῦ Εὐκλείδου καὶ πρὸς ἀνάληψιν τοῦ κόπου τούτου, τὸν ὁποῖον ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐν τῇ διανοίᾳ μου ἀνεπόλουν, παρωρμήθην κατὰ τοσοῦτον μᾶλλον, καθ' ὅσον ἔβλεπον, ὅτι ἡ ἔκδοσις τοῦ Ἀρχιμήδους ἐγένετο δεκτὴ ὑπὸ τῶν λογίων ἀνδρῶν εὐμενῶς. Ἀλλ' ἀμέσως ἔγινε καταφανές, ὅτι οὔτε τὰ μέσα οὔτε οἱ τρόποι οὔτε αἱ δυνάμεις μου ἦσαν ἀρκεταὶ δι' ὁλόκληρον τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐσκόπευον νὰ ἀναλάβω. Διότι ἔπρεπε νὰ γίνῃ ἀντιβολὴ μεγάλου ἀριθμοῦ κωδίκων καὶ ἔπρεπε νὰ μεταβῶ διὰ μεγάλου ἀριθμοῦ ταξιδίων εἰς μέγαν ἀριθμῶν βιβλιοθηκῶν. Ὅθεν ἠρώτησα τὸν Hurican Menge λόγιον ἄνδρα, περὶ τοῦ ὁποίου ἐγνώριζον, ὅτι καὶ αὐτὸς εἶχεν ἀρχοληθῆ μὲ τὸν Εὐκλείδην, ἂν ἤθελε νὰ ἀναλάβῃ μέρος τοῦ ἔργου. Οὗτος συγκατένευσε καὶ συνηρμόσθη μεταξύ μας τὸ πρᾶγμα οὕτως, ὥστε ἐκεῖνος μὲν νὰ κάμῃ τὴν ἔκδοσιν τῶν «Δεδομένων», «Φαινομένων» καὶ τῶν μουσικῶν συγγραφῶν τοῦ Εὐκλείδου, ἐγὼ δὲ τῶν «Στοιχείων» τῶν «Ὀπτικῶν» καὶ τῶν «Κατοπτρικῶν», ἀμφότεροι δὲ νὰ κάμωμεν διὰ κοινῆς ἐργασίας τὴν ἀντιβολὴν τῶν κωδίκων. Προκειμένου περὶ τῶν Στοιχείων, ἠναγκάσθην ἐκ τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν κωδίκων νὰ ἐκλέξω ὀλίγους.

Τούτους ἐσημείωσα διὰ τῶν κατωτέρω γραμμάτων.

P — κῶδιξ Βατικανὸς Ἑλληνικὸς 190, Peyrard, 10ου αἰῶνος, ἐπὶ μεμβράνης (δηλ. περγαμηνῆς). Ἐδῶ καὶ ἐκεῖ, χεὶρ λίαν πρόσφατος ἔχει ἀνανεώσει γράμματα, τὰ ὁποῖα εἶχον σχεδὸν ἐξαλειφθῆ ἐκ τῆς πολυκαιρίας. Ταύτην τὴν χεῖρα ἐσημείωσα διὰ τοῦ γράμματος π εἰς ὅσα μέρη ἐφαίνετο, ὅτι ἀπέδιδεν ὀλιγώτερον ὀρθῶς τὴν ἀρχαίαν γραφήν. Τὰ 4-9 βιβλία παρέβαλα ὁ ἴδιος ἐν Ῥώμῃ κατὰ τὸ 1881, τὸ 2ον καὶ μέρος τοῦ 3ου βιβλίου παρέβαλεν ὁ Menge, τὸ πρῶτον καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ τρίτου ἀνέλαβε λίαν εὐμενῶς νὰ παραβάλῃ ὁ λόγιος ἀνὴρ Augustus Man.

B — κῶδιξ Βοδληϊανός, Δορβιλλιανὸς 10,1 (δηλ. ἐκ τῆς συλλογῆς D'Orville) ἐν φύλλῳ 2,30 γραφεὶς τὸ ἔτος 888 ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὰ βιβλία 1-7 παρέβαλον ἐγὼ ἐν Ὀξφόρδῃ κατὰ τὸ 1882.

F — κῶδιξ Φλωρεντιανὸς Λαυρεντιανὸς 28,3 τοῦ 10ου αἰῶνος ἐπὶ περγαμηνῆς. Καὶ εἰς τὸν κώδικα αὐτὸν ἔχει πολλάκις ἀνανεωθῆ ἡ ἀρχαία γραφὴ διὰ χειρὸς τοῦ 16ου αἰῶνος, ἡ ὁποία ἔγραψεν ἐκ νέου πολλὰ φύλλα καὶ συνεπλήρωσεν ὁλόκληρον τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ κώδικος. Τὴν χεῖρα ταύτην ἐσημείωσα διὰ τοῦ γράμματος φ, εἰς ὅσα μέρη εἶχε καταστρέψει τὴν ἀρχαίαν γραφήν. Ὁλόκληρον τὸν κώδικα τὸν παρέβαλον ὁ ἴδιος ἐν Φλωρεντίᾳ κατὰ τὸ 1881.

Υ — κῶδιξ Βιενναῖος Ἑλληνικὸς 103, τοῦ 11ου - 12ου αἰῶνος ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ τελευταῖον μέρος ἐκ βομβυκίνου χάρτου συνεπλήρωσε χεὶρ τοῦ 13ου αἰῶνος. Τοῦτον παρέβαλον ὁλόκληρον ἐν Κοπεγχάγῃ κατὰ τὸ 1880.

β — κῶδιξ τῆς δημοτικῆς βιβλιοθήκης τῆς Βονωνίας, σημειούμενος διὰ τῶν ἀριθμῶν 18 - 19 τοῦ 11ου αἰῶνος ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ πρῶτον βιβλίον καὶ μερικὰ ἄλλα μέρη ἐθεώρησα ἐν Φλωρεντίᾳ τὸ 1881.

Ρ — κῶδιξ Παρισινός, Ἑλληνικὸς 2466 τοῦ 12ου αἰῶνος ἐπὶ περγαμηνῆς. Τὸ πρῶτον βιβλίον παρέβαλον ἐν Παρισίοις τὸ 1880. Τὰ βιβλία 2 - 7 ἐν Κοπεγχάγῃ τὸ 1882.

Ὑπολείπεται νὰ εὐχαριστήσω τοὺς ἄνδρας ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐπέδειξαν εὐμένειαν διὰ τὸ ἔργον μου. Πρῶτον, διὰ νὰ δυνηθῶ νὰ κάμω τόσον συχνὰ ταξίδια εἰς τοὺς Παρισίους καὶ τὴν Ἰταλίαν, κατωρθώθη διὰ τοῦ Ὑπουργείου, τὸ ὁποῖον προΐσταται τῆς Παιδείας καὶ τῶν Σχολείων τῆς χώρας μας (Δανίας) καὶ τοῦ Καλσβεργικοῦ Ἱδρύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει δαψιλῆ χορηγίαν εἰς τὰ γράμματα καὶ τὰς ἐπιστήμας. Προσέτι καὶ εἰς τοὺς ἐν Βιέννῃ, Παρισίοις καὶ Βονωνίᾳ προϊσταμένους βιβλιοθηκῶν πλεῖστα ὀφείλω. Ἀκόμη εἰς τὸν Κάρολον Κρώξ, μὲ τὸν ὁποῖον ἔκαμα ἀπὸ κοινοῦ μέγα μέρος τοῦ εἰς τὴν Ἰταλίαν ταξιδίου κατὰ τὸ 1881. Οὗτος μὲ ἐβοήθησεν ἐξόχως εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἡλικίας τῶν κωδίκων, διότι εἰς συναφῆ παλαιογραφικὰ ζητήματα οὐδενὸς ὑστερεῖ. Νὰ ἐκφράσω ἐδῶ τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς αὐτὸν μὲ ἠμπόδισεν ἡ μοῖρα, ἡ ὁποία ὑπῆρξεν ἀδικωτάτη καὶ πρὸς ἡμᾶς τοὺς ἐπιζῶντας φίλους του καὶ πρὸς τὴν ἐπιστήμην.

Ἔγραφον ἐν Κοπεγχάγῃ κατὰ μῆνα Ἀπρίλιον 1883.

I. L. HEIBERG »

Εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν, μέχρι τῆς ἐποχῆς τῆς ἁλώσεως αὐτῆς, τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐξεδίδοντο εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν γλῶσσαν, ὅπως ἐγράφησαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου. Μετὰ τὴν ἅλωσιν τῆς Κων/πόλεως οὐδεμία ἔκδοσις τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐγένετο εἰς τὴν περιοχὴν τὴν κατοικουμένην ὑπὸ Ἑλλήνων. Ὅτε μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἤνθησαν Ἑλληνικαὶ Σχολαὶ εἰς διαφόρους πόλεις τῆς δούλης Ἑλλάδος, ὅπως εἰς Κων/πολιν, Ἰωάννινα, Μοσχόπολιν, Ἅγιον Ὄρος, Κυδωνίας, Χίον κλπ. τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐξεδίδοντο ἐν περιλήψει ἐκ λατινικῆς μεταφράσεως, ἐκτυπούμενα εἰς τυπογραφεῖα τῆς Δύσεως. Τοιαύτην ἔκδοσιν ὀφειλομένην εἰς δαψιλῆ χορηγίαν τῶν Ζωσιμαδῶν, ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν ἐκ δωρεᾶς τοῦ λογιωτάτου καθηγητοῦ τῆς Ἰατρικῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν κ. Γεωργίου Τριανταφυλλίδου.

Ὁ τίτλος τοῦ σπανίου τούτου βιβλίου ἔχει ὡς ἑξῆς :

« Α. ΤΑΚΟΥΕΝΤΙΟΥ
Στοιχεῖα Γεωμετρίας
μετὰ σημειώσεων τοῦ Οὐΐστωνος
ἐξελληνισθεῖσα μὲν ἐκ τῆς λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τοῦ Πανιερωτάτου Ἀρχιεπισκόπου Κυρίου Εὐγενίου τοῦ Βουλγάρεως, ἱεροδιακόνου ἔτι ὄντος, καὶ σχολαρχοῦντος ἔν τε Ἰωαννίνοις καὶ ἐν τῇ Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ καὶ ἐν Κων/πόλει, πρὸς ἀκρόασιν τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιώντων.
Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς αὐταδελφότητος τῶν
ΖΩΣΙΜΑΔΩΝ
Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.
ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων νεανίσκοις.
Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὐστρίας
ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδώτη
1805».

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις περιλαμβάνουσα τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῶν Στοιχείων, ἤτοι τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τεσσάρων τόμων τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων, εἶναι ἡ πρώτη ἐν Ἑλλάδι γενομένη διὰ τοῦ τύπου ἔκδοσις τοῦ ἀρχαίου κειμένου. Εἰς ταύτην παρωρμήθην, ἀναστείλας προσωρινῶς τὴν ἀρξαμένην ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, κατόπιν ἐπιμόνου συστάσεως τοῦ διακεκριμένου Ἕλληνος φιλολόγου κ. Κωνσταντίνου Γεωργούλη, εὐμενοῦς γνωματεύσεως τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν τῇ εἰσηγήσει τοῦ ἀειμνήστου ἀκαδημαϊκοῦ Παναγιώτου Ζερβοῦ, ὡς ἐπίσης εὐνοϊκῆς κρίσεως τοῦ Ἀνωτάτου Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας, τῇ εἰσηγήσει τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβούλου κ. Νικολάου Μιχαλοπούλου.

Πρὸς τοὺς καθηγητὰς κ.κ. Βασίλειον Παραρᾶν, Γεώργιον Τσουρὸν καὶ Παναγιώτην Παναγιώτου ἐκφράζω τὰς θερμοτάτας εὐχαριστίας διὰ τὴν βοήθειαν, τὴν ὁποίαν ἀόκνως παρέσχον κατὰ τὴν διόρθωσιν τῶν τυπογραφικῶν δοκιμίων. Ἰδιαιτέρως ἀκόμη ἐκφράζω ἀπὸ τῆς θέσεως αὐτῆς τὰς θερμοτάτας εὐχαριστίας μου πρὸς τὸν ἐκδοτικὸν οἶκον τοῦ κ. Νικολάου Σάκκουλα, ὅστις παρὰ τοὺς δυσκόλους αὐτοὺς καιροὺς κατέβαλεν ἐξαιρετικὰς προσπαθείας καὶ θυσίας διὰ τὴν ἀρτιωτέραν ἐκτύπωσιν τοῦ ἔργου.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1952.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συμφώνως πρὸς τὰς μαρτυρίας τὰς ὁποίας μᾶς παρέχει ὁ Ἡρόδοτος, ὁ Εὔδημος, ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς καὶ ἄλλοι παλαιοὶ συγγραφεῖς, ἡ γεωμετρία εἶναι δημιούργημα τῶν Αἰγυπτίων. Κατὰ τοὺς συγγραφεῖς τούτους οἱ Αἰγύπτιοι ἤχθησαν εἰς τὴν ἀνακάλυψίν της, ἀπὸ τὴν ἀνάγκην μετρήσεως τῆς παρὰ τὰς ὄχθας τοῦ ποταμοῦ Νείλου γῆς, ἡ ὁποία μεθ' ἑκάστην πλήμμυραν τοῦ ποταμοῦ καὶ ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων ἔπρεπε πάντοτε νὰ μετρῆται ἐκ νέου διὰ λόγους κτηματολογικοὺς καὶ φορολογικούς. Τὸ παλαιότερον τεκμήριον, μέχρι σήμερον τοὐλάχιστον, ἐξ οὗ βεβαιούμεθα, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι ἐδημιούργησαν τὴν γεωμετρίαν, εἶναι ὁ πρὸ ὀλίγων δεκαετηρίδων εὑρεθεὶς πάπυρος τοῦ Rhind (Βρεταννικὸν Μουσεῖον), ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῆ περὶ τὸ 1700 π. Χ. περίπου, ὑπὸ τοῦ Ahmes. Ἐξ ὅλων ὅμως τῶν ὑπαρχόντων τεκμηρίων συνάγεται, ὅτι ἡ γεωμετρία τῶν Αἰγυπτίων ἦτο καθαρῶς ἐμπειρικῆς μορφῆς, δηλ. τέχνη προκύψασα ἐκ τῆς πείρας κατὰ τὰς μετρήσεις τῆς γῆς. Οὐδαμοῦ εἰς τὴν αἰγυπτιακὴν γεωμετρίαν ἀναφαίνεται ἢ ἔστω ὑποδηλοῦται ἀπόδειξις γεωμετρικῆς τινος προτάσεως.

Ἡ δημιουργία τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης πρὸς ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, εἶναι ἀποκλειστικὸν ἔργον τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος. Αἱ ἑλληνικαὶ ἐν προκειμένῳ εἰδήσεις προερχόμεναι ἐκ συγγραφέων μεταγενεστέρων τοῦ Ἡροδότου, ἀποδίδουν τὴν θεμελίωσιν τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης εἰς τὸν συγκαταλεγόμενον μεταξὺ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαιότητος Θαλῆν τὸν Μιλήσιον. Ὡς πρῶται δὲ ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ, ἀναφέρονται, μεταξὺ ἄλλων, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὰ θεωρήματα τ' ἀποδεικνύοντα τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ὅτι ἡ γωνία ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἡμικυκλίου εἶναι ὀρθή. Ὁ γερμανὸς φιλόσοφος Κὰντ γράφει εἰς τὸν πρόλογον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τοῦ περιφήμου αὐτοῦ ἔργου «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου», (Kritik der reinen Vernunft, 1787) τ' ἀκόλουθα : «Τὰ μαθηματικά, ὡς ἐπιστήμη, εὗρον τὸν ἀσφαλῆ δρόμον των εἰς τὸν ἀξιοθαύμαστον λαὸν τῶν Ἑλλήνων . . . Ὁ πρῶτος, ὅστις ἀπέδειξε τὴν ἰσότητα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (εἴτε Θαλῆς ὠνομάζετο εἴτε ἄλλως πως) ἔσχε μίαν ἀναλαμπήν . . .».

Ἡ διαπίστωσις, ὅτι οἱ Αἰγύπτιοι δὲν εἶχον ἰδέαν τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης, ἐνισχύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἄγνοιαν αὐτῶν ὡς πρὸς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτῆς. Ὁ Θαλῆς εὑρισκόμενος ἐν Αἰγύπτῳ, ἀφοῦ ἔστησε τὴν ράβδον του κατακορύφως εἰς τὸ ἄκρον τῆς σκιᾶς τῆς πυραμίδος, ὑπελόγισε τὸ ὕψος αὐτῆς ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σκιῶν, τὰς ὁποίας ἔρριπτον ἡ ράβδος καὶ ἡ πυραμίς. Τοιοῦτος ὅμως ὑπολογισμὸς προϋποθέτει γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμοίων τριγώνων καὶ ἱκανὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας, ὡς ἐπιστήμης. Περὶ τοιαύτης ὅμως ἀναπτύξεως οὐδὲν γνωρίζομεν μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Θαλοῦ. Αἱ γεωμετρικαὶ γνώσεις τοῦ Θαλοῦ. ὡς αὗται μαρτυροῦνται ὑπὸ τῶν ἑλληνικῶν εἰδήσεων, καθιστοῦν πιθανὴν τὴν γνώμην, ὅτι πολὺ πρὸ τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶχον τεθῆ ἐν Ἑλλάδι αἱ βάσεις τῆς γεωμετρίας ὡς ἐπιστήμης. Τοῦ Θαλοῦ οὐδεμία πραγματεία περιεσώθη. Ἀλλ' ἀμφίβολον εἶναι ἂν οὗτος εἶχεν ἀσχοληθῆ μὲ συγγραφάς. Ὁ Λόβων ὁ Ἀργεῖος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Θαλῆς εἶχε γράψει διακοσίας πραγματείας εἰς στίχους, αἱ ὁποῖαι ἀπωλέσθησαν. Μετὰ τὸν Θαλῆν μνημονεύεται ὡς σπουδαῖος μαθηματικὸς ὁ Μαμέρτιος, ὁ ἀδελφὸς τοῦ ποιητοῦ Στησιχόρου, ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, ὅστις ἕδρασεν ἐν τῇ μεγάλῃ Ἑλλάδι. Ἡ μυστικότης ἡ ὁποία περιέβαλε τὰς ἐργασίας τῆς Σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου, ἐστάθη ἐμπόδιον εἰς τὴν διάδοσιν ἐκτὸς τῆς Σχολῆς τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐν αὐτῇ γενομένης μαθηματικῆς ἐρεύνης. Παρὰ ταύτην ὅμως, πολλαὶ μαθηματικαὶ γνώσεις, μὴ ἀφορῶσαι εἰς τὸ μυστηριακὸν μέρος τῆς διδασκαλίας, ἦλθον εἰς τὴν δημοσιότητα μετὰ τὴν βιαίαν ἐν κάτω Ἰταλίᾳ διάλυσιν τῶν συλλόγων τῶν Πυθαγορείων καὶ τὴν διασποράν των εἰς τὰς διαφόρους ἑλληνικὰς πόλεις. Εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου ἀνεπτύχθησαν σπουδαίως ἡ γεωμετρία καὶ ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν, ἔν τινι δὲ μέτρῳ καὶ ἡ Ἄλγεβρα, ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδονται, μεταξὺ ἄλλων, τὸ ὁμώνυμον θεώρημα, ἡ συναφὴς πρὸς τοῦτο σπουδὴ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$ (ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως δευτέρου βαθμοῦ) καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων. Ὀλίγον βραδύτερον, μετὰ τὴν δρᾶσιν τοῦ Πυθαγόρου ὡς ἀρχηγοῦ Σχολῆς, ἐπιχειρεῖται ἐν Ἀθήναις ἡ λύσις τοῦ περιφήμου προβλήματος τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ὑπὸ τῶν Ἀναξαγόρου, Ἀντιφῶντος καὶ Βρύσωνος. Αὕτη μαρτυρεῖ περὶ μεγάλης ἀνθήσεως τῶν μαθηματικῶν ἐν Ἀθήναις κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην.

Τὸ ἀποκορύφωμα τῆς Ἑλληνικῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης, ἰδίως τῆς γεωμετρικῆς, σημειοῦται εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος, ἔνθα ὑπὸ τὴν θείαν τούτου καθοδήγησιν οἱ διάσημοι μαθηματικοὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος, Νεοκλείδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Λέων, Εὔδοξος ὁ Κνίδιος, Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλεώτης, οἱ ἀδελφοὶ Μέναιχμος καὶ Δεινόστρατος, Θεύδιος ὁ Μάγνης, Ἀθήναιος ὁ Κυζικηνός, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, Φίλιππος ὁ Μενδαῖος ἢ Ὀπούντιος κλπ. προήγαγον δημιουργικῶς τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας. Κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ἐλύθησαν τὰ ἄλλα δύο περίφημα προβλήματα, ἤτοι ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου, τὸ δήλιον λεγόμενον πρόβλημα, καὶ ἡ τριχοτόμησις ὀξείας γωνίας, ἀμφότερα οὐχὶ διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ἀλλὰ δι' ἄλλων γραμμῶν ἢ κινητικῆς λεγομένης γεωμετρίας. Προσωπικῶς εἰς τὸν Πλάτωνα ἀποδίδεται ἡ λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, διὰ κινητικῆς γεωμετρίας, ὡς ἀναφέρει ὁ Εὐτόκιος κατὰ τὰ σχόλια αὐτοῦ εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου I», καὶ ἡ σπουδὴ τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης διοφαντικῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν ὁ Πλάτων ἔλυσε κατὰ διάφορον τρόπον καὶ ὄχι ὅπως ὁ Πυθαγόρας. Ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς τῆς Ἀκαδημίας ἕδρασαν διάφοροι μαθηματικοὶ καὶ μάλιστα μερικοὶ ἐξ αὐτῶν πρὶν ἀκόμη ἱδρυθῆ ἡ Ἀκαδημία, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸν σοφιστὴν Ἱππίαν τὸν Ἠλεῖον, τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον, διδάσκαλον τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, καὶ τοὺς Πυθαγορείους Φιλόλαον, Θυμαρίδαν καὶ Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον, τὸν φίλον τοῦ Πλάτωνος. Ὡς ἀποφασιστικοὺς σταθμοὺς διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς περὶ τῶν ἀναλογιῶν θεωρίας ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τὴν ὑπὸ τοῦ ἰδίου διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας, ὡς τοῦτο ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰς ἐρεύνας τοῦ Ἀρχύτου εἰς τὴν στερεομετρίαν, τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων ὑπὸ τῶν Θεοδώρου τοῦ Κυρηναίου καὶ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου καὶ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου. Θεμελιώδους ἐπίσης σημασίας διὰ τὴν πρόοδον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης θεωρεῖται ἡ συμβολὴ τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Τὴν συμβολὴν ταύτην θὰ ἐξάρωμεν δι' ὀλίγων κατωτέρω ἐκεῖ, ἔνθα θὰ γίνῃ λόγος περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Ἄλλα τρία ὀνόματα διασήμων Ἑλλήνων μαθηματικῶν ὁλοκληρώνουν ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, τὴν γιγαντιαίαν προσπάθειαν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος πρὸς ἀνάπτυξιν τῆς γεωμετρίας. Καὶ τὰ ὀνόματα ταῦτα εἶναι κατὰ χρονολογικὴν σειράν, Εὐκλείδης-Ἀρχιμήδης-Ἀπολλώνιος. Μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἐπέρχεται ἡ φυσικὴ κάμψις τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος, χωρὶς ὅμως ἡ κάμψις αὕτη νὰ σημαίνῃ καὶ στασιμότητα τούτου. Σπουδαῖοι μαθηματικοί, ὅπως ὁ Νικομήδης. ὁ Διοκλῆς, ὁ Φίλων, ὁ Σπόρος, ὁ Ἀρίσταρχος, ὁ Ἥρων, ὁ Πτολεμαῖος, ὁ Διόφαντος, ὁ Μενέλαος καὶ ὁ Πάππος, συνεχίζουν καὶ συμπληρώνουν τὸ ἔργον τῶν μεγάλων προκατόχων των. Ὡς τελευταῖος μαθηματικὸς τῆς ἀρχαίας ἐποχῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς Ὑπατία (5ος αἰὼν μ.Χ.). Τὰ Πανεπιστήμια τοῦ Βυζαντίου, χωρὶς νὰ παρουσιάσουν τίποτε τὸ νέον, ἐκαλλιέργουν τὴν μαθηματικὴν κληρονομίαν τῶν ἀθανάτων προγόνων, τὴν ὁποίαν μετέδιδον εἰς τὴν Ἑσπερίαν οἱ ὑπὸ ταύτης μετακαλούμενοι αὐτόθι ἐπὶ ἁδρᾷ ἀμοιβῇ Ἕλληνες καθηγηταί. Ἀπὸ δὲ τῆς ἐμφανίσεως τοῦ Καρτεσίου ἀρχίζει ἡ νέα περίοδος τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν, ἡ ὁποία συνεχίζεται καὶ σήμερον.

Ὡς πρῶτος συγγραφεὺς γεωμετρικοῦ βιβλίου μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Σουΐδα ὁ Ἀναξίμανδρος (. . . γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν), ἀλλ' ἡ εἴδησις αὕτη δὲν φαίνεται ἀκριβής. Τὸ βέβαιον εἶναι, ὅτι ὁ Ἀναξίμανδρος ἐχρησιμοποίησε μαθηματικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ τὰς ἀστρονομικάς του μελέτας. Ἀσφαλεστέρα εἶναι ἡ πληροφορία τοῦ Πρόκλου, καθ' ἣν πρῶτος συγγραφεὺς παντὸς ὅ,τι μέχρι τῆς ἐποχῆς του παρήγαγε τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα εἰς τὴν γεωμετρίαν, εἶναι ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. Τοῦτον ἠκολούθησαν, κατὰ τὸν ἴδιον συγγραφεα, ὁ Λέων ὁ μαθητὴς τοῦ Νεοκλείδου, ὁ Θεύδιος ὁ Μάγνης καὶ ὁ Εὐκλείδης (Procli diadochi, σ. 66). Πρῶτον δὲ συγγραφέα ἱστορίας τῆς γεωμετρίας ἀναφέρει ἡ παράδοσις τὸν Εὔδημον, τὸν μαθητὴν τοῦ Ἀριστοτέλους. Λέγεται, ὅτι ἀποσπάσματά τινα τῆς μὴ σωζομένης πραγματείας ταύτης εἶχε περιλάβει εἰς ἰδικήν του πραγματείαν ὁ μαθηματικὸς Γεμῖνος (1ος αἰὼν π.Χ.), ἐκ τῆς πραγματείας δὲ ταύτης ὁ Πρόκλος (5ος αἰὼν μ.Χ.) ἤντλησε πολλὰς ἐκ τῶν εἰδήσεων, τὰς ὁποίας μᾶς παρέχει εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ τ' ἀναφερόμενα εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Ἀφ' ὅτου ὁ Εὐκλείδης ἐξέδωκε τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον Στοιχεῖα ἔργον αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνονται αἱ θεμελιώδεις γνώσεις τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ὅλαι αἱ μέχρι τῆς ἐποχῆς του συναφεῖς πραγματεῖαι δὲν ἐπέζησαν πλέον. Ὅπου δὲ μεταγενέστεροι τοῦ Εὐκλείδου συγγραφεῖς ἀναφέρουν τοὺς ὅρους Στοιχεῖα καὶ στοιχειωτὴς ἐννοοῦν πάντοτε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸν Εὐκλείδην. Τὸ ἔργον τοῦτο, ἀπὸ τοῦ 300 π. Χ. περίπου, ἐκδίδεται ἀνελλιπῶς εἰς ὅλας τὰς γλώσσας τοῦ πεπολιτισμένου κόσμου. Ἐν σχέσει πρὸς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὰ Στοιχεῖα ὁ Πρόκλος γράφει τὰ ἑξῆς (σ. 68)· «νεώτερος τῶν περὶ τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος εἶναι ὁ Εὐκλείδης, ὁ συναθροίσας τὰ Στοιχεῖα καὶ διατάξας μὲν πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Εὐδόξου, τελειοποιήσας δὲ πολλὰ εὑρεθέντα ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου, προσέτι δὲ ὁ ἀναγαγὼν εἰς ἀλανθάστους ἀποδείξεις ἐκεῖνα τὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα πρὸ αὐτοῦ δὲν εἶχον αὐστηρῶς ἀποδειχθῆ. Ἔζησε δὲ ὁ ἀνὴρ οὗτος ἐπὶ βασιλείας Πτολεμαίου τοῦ πρώτου, διότι καὶ ὁ Ἀρχιμήδης μνημονεύει τὸν Εὐκλείδην καὶ λέγεται, ὅτι ὁ βασιλεὺς Πτολεμαῖος ἠρώτησέ ποτε τὸν Εὐκλείδην, ἐὰν ὑπάρχῃ συντομωτέρα ὁδὸς πρὸς ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας, ἐκείνης, τὴν ὁποίαν προσφέρουν τὰ Στοιχεῖα· ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀπήντησεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει βασιλικὴ ἀτραπὸς διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῆς γεωμετρίας. Εἶναι λοιπὸν οὗτος νεώτερος τῶν περὶ τὸν Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ τοῦ Ἐρατοσθένους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι οὗτοι ἦσαν σύγχρονοι, καθὼς μαρτυρεῖ ὁ Ἐρατοσθένης. Κατὰ τὸ σύστημα τὸ ὑπ' αὐτοῦ προτιμώμενον ἦτο πλατωνικὸς καὶ οἰκεῖος πρὸς τὴν πλατωνικὴν φιλοσοφίαν, καὶ συνεπῶς ἔθεσεν οὗτος ὡς σκοπὸν τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων τὴν κατασκευὴν τῶν πλατωνικῶν σχημάτων [1]. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας. Ταῦτα εἶναι τὰ ὀπτικά, τὰ κατοπτρικά, αἱ κατὰ τὴν μουσικὴν Στοιχειώσεις, προσέτι δὲ τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον. Πολὺ θαυμάζουν αὐτὸν διὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων, ἕνεκα τῆς τάξεως καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων. Διότι δὲν κατεχώρισε πᾶν τὸ σχετικῶς γνωστόν, ἀλλὰ τὸ ἀπαραίτητον διὰ τὴν οἰκοδόμησιν τῆς γεωμετρίας, προσέτι δὲ ἐχρησιμοποίησε τοὺς παντοίους τρόπους τῶν συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἰκεῖοι πρὸς ἐπιστήμην καὶ ἀλάνθαστοι, ἀκόμη δὲ ἐχρησιμοποίησεν ὅλας τὰς ἀποδεικτικὰς μεθόδους. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὴν γεωμετρίαν πολλαὶ ἀποδείξεις φαίνονται ἐκ πρώτης ὄψεως ὡς ἀληθεῖς, ἐν ᾧ εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν εἶναι, παρέδωκε διὰ τοὺς μεταγενεστέρους μεθόδους, διὰ τῶν ὁποίων ἀσκοῦνται οὗτοι εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν. Εἰς τοῦτο τὸ σύγγραμμα ἔδωκε τὸν τίτλον Ψευδάρια. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ βιβλίον χρήσιμον δι' ἄσκησιν, ἐν ᾧ τὰ Στοιχεῖα περιέχουν τὴν θεωρίαν τῶν γεωμετρικῶν πραγμάτων ἀλάνθαστον καὶ εἰσάγουν ἀσφαλῶς εἰς τὴν γεωμετρίαν ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι τὸ ἐπιθυμοῦν. Ἴσως νὰ ἐρωτήσῃ κανεὶς ποῖος εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς συγγραφῆς τῶν Στοιχείων; Ἐγὼ θ' ἀπαντήσω εἰς τὸν ἔχοντα τοιαύτην ἀπορίαν. Ὁ σκοπὸς τοῦ γεωμέτρου εἶναι νὰ ἐρευνήσῃ τὰ κοσμικὰ σχήματα (κανονικὰ πολύεδρα) ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων καὶ καταλήγων εἰς τὴν ἐγγραφήν των εἰς σφαῖραν. Διὰ τὸν μανθάνοντα τὴν γεωμετρίαν τίθεται ὡς σκοπὸς ἡ ἄσκησις τῆς διανοίας. Διότι, ὅταν ὁ σπουδάζων ἀγνοῇ τὰ Στοιχεῖα, εἶναι ἀδύνατον νὰ κατανοήσῃ τὰ ἄλλα μέρη τῆς ἐπιστήμης ταύτης καὶ εἶναι ἀδύνατον ἀκόμη νὰ μάθῃ κανεὶς ἄλλα πράγματα. Διότι τὰ Στοιχεῖα περιέχουν τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῶν μαθηματικῶν, ὡς ἀναφέρουν σχετικῶς ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος. Σκοπὸς λοιπὸν τῶν Στοιχείων εἶναι νὰ δώσουν τὰς ἐπιστημονικὰς βάσεις εἰς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ μανθάνουν καὶ νὰ διδάξουν τὸν τρόπον ἐγγραφῆς εἰς τὴν σφαῖραν τῶν πλατωνικῶν σχημάτων».

Ὁ τόπος καὶ ὁ χρόνος γεννήσεως καὶ θανάτου τοῦ Εὐκλείδου παραμένουν ἄγνωστα. Γνωστὸν εἶναι, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο Ἕλλην, ὅτι ἔζησεν ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ἔνθα διηύθυνε Σχολὴν καὶ ὅτι ἤκμασε περὶ τὸ 315 - 275 π.Χ. Παρὰ τοῦ Πάππου, πληροφορούμεθα, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο εὐμενὴς πρὸς τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ διδάσκωνται τὴν γεωμετρίαν (VII, 976), ὁ δὲ Στοβαῖος μᾶς διέσωσε τὸ ἀκόλουθον χαρακτηριστικὸν ἐπεισόδιον μεταξὺ τοῦ Εὐκλείδου καί τινος μαθητοῦ του: «Παρ' Εὐκλείδῃ τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην «τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μανθάνοντι»· καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας «δὸς αὐτῷ, ἔφη, τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν»

1. Πιθανῶς ἐκ τοῦ χωρίου τούτου τοῦ Πρόκλου ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Simon ὁρμώμενος, διατυπώνει τὴν γνώμην, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐσπούδασεν ἐν Ἀθήναις εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος (Simon, Geschichte der Mathematik σελ. 185, 1909).

(ἀνθολ. Στοβαίου, ἔκδ. Meineke τομ. IY σ. 205). Ἑρμ. : ὅταν τις, ἀρχίσας νὰ διδάσκεται γεωμετρίαν ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ἔμαθε τὸ πρῶτον θεώρημα, ἠρώτησε τὸν Εὐκλείδην «καὶ τώρα τί κέρδος θὰ ἔχω ἀφοῦ ἔμαθα τοῦτο»; Ὁ Εὐκλείδης καλέσας τὸν ὑπηρέτην του, εἶπε, «δός του τρεῖς δεκάρες, ἐπειδὴ πρέπει νὰ κερδίζη ἀπὸ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα μανθάνει». Ἄραβες συγγραφεῖς ἀναφέρουν τὰ ἑξῆς περὶ τοῦ Εὐκλείδου : «Ὁ Εὐκλείδης, υἱὸς τοῦ Ναυκράτους καὶ ἔγγονος τοῦ Ζηνάρχου, εἶναι ὁ συγγραφεὺς τῆς γεωμετρίας, παλαιὸς φιλόσοφος, Ἕλλην τὴν καταγωγήν, ἐγεννήθη εἰς τὴν Τύρον καὶ διέμενεν εἰς τὴν Δαμασκόν· οὗτος ἐδίδασκε τὴν ἐπιστήμην τῆς γεωμετρίας καὶ ἐξέδωκε τὸ πλέον ἔξοχον καὶ χρησιμώτατον βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀρχαὶ ἢ Στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἔργον γενικώτερον τοῦ ὁποίου δὲν ὑπῆρχε πρότερον εἰς τοὺς Ἕλληνας. Ὅθεν εἶναι εὐνόητον, ὅτι Ἕλληνες, Ρωμαῖοι καὶ ὄχι ὀλιγώτερον Ἄραβες συγγραφεῖς ἀνέλαβον τὸ καθῆκον νὰ ἐπεξηγοῦν τοῦτο καὶ ἐδημοσίευσαν πλῆθος σχολίων καὶ σημειώσεων ἐπὶ τοῦ ἔργου τούτου, ὡς καὶ περιλήψεις αὐτοῦ. Ἕνεκα τῆς σημασίας τῆς γεωμετρίας διὰ τὴν φιλοσοφίαν, οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι εἶχον ἀναρτήσει ἐπιγραφὴν εἰς τὰς εἰσόδους τῶν Σχολῶν των, ὅτι οὐδεὶς ἠδύνατο νὰ εἰσέλθῃ εἰς αὐτάς, ἐὰν δὲν ἐγνώριζε τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου» (Casiri Bibliotheca Arabico - Hispana Escurialencis, I σ. 339).

Ἄραβες ἐπίσης συγγραφεῖς ἀναφέρουν, ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἦτο μαθητὴς τοῦ Σολομῶντος καὶ ὅτι ὁ Ἵππαρχος ἦτο Χαλδαῖος. Τέλος, οὗτοι ἑρμηνεύουν τὸ ὄνομα Εὐκλείδης, ὡς ἑξῆς : Ucli (ἀραβιστὶ) σημαίνει κλειδί, Dis, σημαίνει μέτρον καὶ κατ' ἐπέκτασιν μέτρον γῆς. Ἄρα Εὐκλείδης (Uclidis) σημαίνει τὸ κλειδὶ τῆς γεωμετρίας ! Αἱ ἀνωτέρω πληροφορίαι τῶν Ἀράβων περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου ἐλέγχονται ὡς μὴ ἀκριβεῖς. Εἶναι δὲ προφανὴς ἡ σύγχυσις τῶν συγγραφέων τούτων ὡς πρὸς ὅ,τι ἀναφέρουν διὰ τὴν ἐπιγραφήν, τὴν ὁποίαν εἶχον ἀναρτήσει οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι εἰς τὰς εἰσόδους τῶν Σχολῶν των, πρὸς τὴν ἀναγραφὴν εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω». Ἐπίσης καὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν καταγωγὴν τοῦ Πυθαγόρου καὶ Ἱππάρχου ἀραβικαὶ εἰδήσεις εἶναι ἀνάξιαι προσοχῆς.

ΤΟ ΕΡΓΟΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τὰ Στοιχεῖα περιέχονται εἰς 13 βιβλία. Συνεκδίδονται ὅμως μετὰ τούτων καὶ ἄλλα δύο βιβλία, τὸ 14ον καὶ τὸ 15ον, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι βέβαιον, ὅτι δὲν ἐγράφησαν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδην. Περὶ τῶν δύο τούτων βιβλίων θὰ γίνῃ μνεία μετὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ περιεχομένου τῶν 13 βιβλίων. Κατὰ τὰς τελευταίας ἑκατονταετηρίδας διῄρουν τινὲς τὰ Στοιχεῖα ἀπὸ ἀπόψεως περιεχομένου καὶ διατάξεως τῆς ὕλης εἰς τέσσαρα κύρια μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἐρευνῶνται γεωμετρικὰ μεγέθη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ αἱ ἀμοιβαῖαι αὐτῶν σχέσεις, καθ' ἃς τὰ μεγέθη ταῦτα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα. Καὶ ὅταν μὲν ταῦτα εἶναι ἴσα, εἶναι ἀρκετὴ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσότητος αὐτῶν, ὅταν δὲ εἶναι ἄνισα, δέον νὰ μετρηθῇ ὁ βαθμὸς τῆς ἀνισότητος, Πρὸς τοῦτο ὅμως χρειάζεται ὁ ἀριθμός, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ μέτρον ἑκάστου μεγέθους καὶ συνεπῶς ἀπαιτεῖται ἡ σπουδὴ τῶν ἀριθμῶν, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον κύριον μέρος τῶν Στοιχείων. Ἐν τοσούτῳ ὅμως ὁ πλήρως ὁρισθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἐξαρκεῖ εἰς τὴν μέτρησιν ὅλων ἐκείνων τῶν μεγεθῶν, ἅτινα ὑπόκεινται εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν. Ὑπάρχουν γεωμετρικὰ ἀντικείμενα, γραμμαὶ ἢ ἐπιφάνειαι κλπ., ἅτινα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν μὲ τὸ αὐτὸ κοινὸν μέτρον. Ταῦτα ὀνομάζονται ἀσύμμετρα μεγέθη καὶ ἡ σπουδὴ τούτων εἶναι ἀπαραίτητος. Ὅθεν, τὸ τρίτον μέρος τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, (κατά τινας, ἡ σπουδὴ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν περιέχει ἐν ἑαυτῇ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, ἡ ἄποψις ὅμως αὕτη χρήζει εἰδικῆς ἐρεύνης). Τέλος τὸ τέταρτον κύριον μέρος τῶν Στοιχείων ἀφορᾷ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων τῶν στερεῶν καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου.

Εἰδικώτερον: Εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον περιέχονται 23 ὅροι (ὁρισμοί), πέντε αἰτήματα, ἐννέα κοιναὶ ἔννοιαι καὶ 48 θεωρήματα καὶ προβλήματα. Οἱ ὁρισμοὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας φαίνεται, ὅτι ἔχουν διατυπωθῆ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, προσπαθοῦντος νὰ ἐκφράσῃ τὰ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος ἐν σχέσει πρὸς τούτους ἀναφερόμενα. Οἱ περισσότεροι ὅμως ὁρισμοί, θεωροῦνται ὡς διατυπωθέντες ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων καὶ τῶν μαθηματικῶν τῶν μὴ Πυθαγορείων τῶν ἀκμασάντων ἐν Ἀθήναις πρὸ τῆς ἐποχῆς τῆς λειτουργίας τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος. Τὰ πρῶτα 26 θεωρήματα τοῦ πρώτου βιβλίου ἀφοροῦν γενικῶς εἰς τὰ τρίγωνα, ἐνῷ χρῆσις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν γίνεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ 27ον θεώρημα. Ὡς συνάγεται δὲ ἀπὸ δύο χωρία τοῦ Ἀριστοτέλους τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ 28ον, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ ἐπίσης εἰς ἰδιότητας παραλλήλων, ἔχουν εὑρεθῆ εἰς ἐποχὴν παλαιοτέραν τοῦ Ἀριστοτέλους, (ἀναλυτ. πρότ. II, 17, 66. Ἀναλυτ. ὕστ. 1,5, 74, 13-16). Μέχρι τοῦ 32ου θεωρήματος συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῶν παραλλήλων, ἐνῶ τὰ θεωρήματα 33-48 περιέχουν σπουδὴν παραλληλογράμμων, τριγώνων καὶ τετραγώνων, σχετικὴν πρὸς τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν. Τὸ 47ον θεώρημα εἶναι τὸ λεγόμενον πυθαγόρειον θεώρημα, ἐνῷ τὸ 48ον, τὸ τελευταῖον τοῦ πρώτου βιβλίου, εἶναι τὸ ἀντίστροφον τούτου.

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιέχει δύο ὁρισμοὺς καὶ 14 θεωρήματα καὶ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐφαρμογὰς τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος. Δι' αὐτῶν σπουδάζεται ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἀπὸ τετράγωνα καὶ ὀρθογώνια εἰς ποικίλους συνδυασμούς, διὰ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως κλπ. χρησιμοποιουμένου πολὺ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος, ὅπερ καλεῖται γνώμων. Ὁ δεύτερος ὁρισμὸς τοῦ βιβλίου τούτου ἀφορᾷ εἰς τὸν γνώμονα, ὅστις εἶναι εὕρημα τοῦ Ἀναξιμάνδρου (. . . εὗρε δὲ Ἀναξίμανδρος καὶ γνώμονα πρῶτος καὶ ἔστησεν ἐπὶ τῶν σκιοθήρων ἐν Λακεδαίμονι : (εὗρε δὲ καὶ τὸν γνώμονα πρῶτος ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ἔστησεν αὐτὸν πρὸς μέτρησιν τῆς σκιᾶς εἰς τὸ ἡλιακὸν ὡρολόγιον τῆς Λακεδαίμονος (Σπάρτης)). Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει καὶ ἐφαρμογὴν τῆς γεωμετρίας εἰς τὴν Ἄλγεβραν καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὸ μέγιστον μέρος εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Τὰ πρῶτα δέκα θεωρήματα ἀφοροῦν εἰς ἀλγεβρικὰς ταυτότητας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὡς ἀκολούθως, ἐὰν διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, . . . νοήσωμεν τμήματα εὐθειῶν γραμμῶν ἤτοι :

1. $\alpha(\beta+\gamma+\delta) = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta$
2. ἐὰν $\beta+\gamma = \alpha$, τότε $\alpha\beta+\alpha\gamma = \alpha^2$
3. $(\alpha+\beta)\,\alpha = \alpha^2 + \alpha\beta$
4. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta$
5. $\alpha\beta + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^2 = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$
6. $(2\,\alpha+\beta)\,\beta+\alpha^2 = (\alpha+\beta)^2$
7. $(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2 = 2\,(\alpha+\beta)\,\alpha+\beta^2$
8. $4\,(\alpha+\beta)\,\alpha + \beta^2 = [\,(\alpha+\beta) + \alpha\,]^2$

9. $\alpha^2 + \beta^2 = 2 \left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^2 \right]$

10. $(2\,\alpha + \beta)^2 + \beta^2 = 2\,[\alpha^{\,2} + (\alpha + \beta)^2\,]$.

Ὡς ἑνδεκάτη πρότασις εἶναι τὸ λεγόμενον πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς ἀποδιδόμενον, κατὰ τὴν εἰς τὸ β′ βιβλίον τῶν Στοιχείων διατύπωσιν, εἰς τοὺς Πυθαγορείους. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι, ὡς γνωστόν, δοθὲν τμῆμα εὐθύγραμμον νὰ διαιρεθῇ οὕτω πως εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευράς, τὸ δοθὲν τμῆμα καὶ τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου μέρους. Κατὰ τοὺς νεωτέρους κριτικοὺς ἡ ἀλγεβρικὴ σημασία τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι, ὅτι ἐπιζητεῖται δι' αὐτοῦ ἡ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $x^2 = \alpha\,(\alpha - x)$ ἢ $x^2 + \alpha x = \alpha^2$. Τὰ θεωρήματα 12 καὶ 13 τοῦ βιβλίου τούτου ἀφοροῦν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ τετραγώνου, πλευρᾶς τριγώνου κειμένης ἀπέναντι ἀμβλείας ἢ ὀξείας γωνίας, ἐνῷ τὸ 14 πρόβλημα σπουδάζει τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα.

Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον περιέχονται 11 ὁρισμοὶ καὶ 37 θεωρήματα καὶ προβλήματα. Τὸ βιβλίον τοῦτο ἀφορᾷ εἰς τὸν κύκλον, τὴν μόνην καμπύλην γραμμὴν τὴν ὁποίαν συναντῶμεν εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ τὴν ἐπαφὴν ἢ τομὴν κύκλου καὶ εὐθείας, ἢ τομὴν κύκλων. Ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως εἶναι τὸ 16ον θεώρημα, ἔνθα γίνεται λόγος περὶ γωνίας, τῆς ὁποίας τὸ ἓν σκέλος εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα, ἐνῷ τὸ ἄλλο εἶναι τόξον κύκλου, τὸ πρῶτον ἀπαντώμενον θεώρημα περὶ ἐπαφῶν.

Εἰς τὸ 4ον βιβλίον περιέχονται ἑπτὰ ὁρισμοὶ καὶ 16 προβλήματα, ἀφορῶντα εἰς συνδυασμὸν κύκλου καὶ εὐθείας καὶ εἰς τὴν ἐγγραφὴν καὶ περιγραφὴν εἰς κύκλον κανονικῶν πολυγώνων. Μεταξὺ τῶν τελευταίων τούτων περιλαμβάνεται τὸ πεντάγωνον, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὁποίου χρησιμοποιεῖται τὸ 11ον πρόβλημα τοῦ δευτέρου βιβλίου, τὸ πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς.

Εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον σπουδάζεται ἡ ἀνισότης μεταξὺ γεωμετρικῶν ἀντικειμένων καὶ ἡ μέτρησις αὐτῆς, ἡ ὁποία εἶναι γεωμετρικὴ ἢ ἀριθμητική. Ἡ μέτρησις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Τὰ θεωρούμενα κατὰ τὴν σπουδὴν ταύτην μεγέθη παριστάνονται δι' εὐθυγράμμων τμημάτων. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 ὁρισμοὺς καὶ 25 θεωρήματα.

Εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν ὁμοίων γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἡ ὁμοιότης τῶν σχημάτων τούτων προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλογιῶν. Διὰ πρώτην φορὰν ἐνταῦθα εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς συνθέτου ἀναλογίας, ἡ ὁποία ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Φιλόλαον. Εἰς τὸ 27ον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου περιέχεται τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου, τὸ ὁποῖον ἀπαντᾶται εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν. Κατὰ τοῦτο, εἰς σύγχρονον ἀλγεβρικὴν διατύπωσιν, ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς παραστάσεως $x\,(\alpha - x)$ λαμβάνεται, ὅταν $x = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 5 ὁρισμοὺς καὶ 33 θεωρήματα καὶ προβλήματα.

Τὰ βιβλία 7ον, 8ον καὶ 9ον εἶναι ἀφιερωμένα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν· Εἰς τὸ 7ον βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιέχει 23 ὁρισμοὺς καὶ 39 θεωρήματα, γίνεται ἡ σπουδὴ τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ τῶν συνθέτων ἀριθμῶν, ὡς καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Εἰς τὸ 8ον βιβλίον, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ὁρισμοὺς παρὰ 27 θεωρήματα, συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Εἰς τὸ 9ον βιβλίον συνεχίζεται ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν. Σημειώνομεν ἰδιαιτέρως τὸ 20ὸν θεώρημα, ἔνθα ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον παντὸς δοθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. Τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν περιέχει ὁρισμοὺς παρὰ μόνον 36 θεωρήματα.

Τὸ 10ον βιβλίον εἶναι τὸ ἐκτενέστερον ὅλων καὶ περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων. Ὡς πρῶτον θεώρημα τοῦ βιβλίου τούτου περιέχεται τὸ ἑξῆς : ἐὰν δοθοῦν δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μέγεθος μικρότερον τοῦ μικροῦ μεγέθους. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς ὑπὸ τῶν νεωτέρων καλουμένης ἐξαντλητικῆς μεθόδου, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καὶ συχνότατα κατόπιν ὁ Ἀρχιμήδης, εἶναι δὲ συναφὲς πρὸς τὸ σήμερον καλούμενον ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου καὶ πρὸς τὸν 4ον ὁρισμὸν τοῦ πέμπτου βιβλίου, περικλείοντος τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 4 ὁρισμοὺς καὶ 115 θεωρήματα.

Τὸ 11ον βιβλίον ἐρευνᾷ τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς σχέσεις εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδα ἢ ἐπιπέδων μεταξύ των, ὡς καὶ τὰς σχέσεις παραλληλεπιπέδου καὶ πρίσματος. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 28 ὁρισμοὺς καὶ 39 θεωρήματα.

Τὸ 12ον βιβλίον ἐρευνᾷ σχέσεις τινὰς στερεῶν, χωρὶς νὰ ἐπιχειρῇ οὐδεμίαν συγκεκριμένην ἀριθμητικὴν μέτρησιν. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 θεωρήματα καὶ προβλήματα.

Τέλος εἰς τὸ 13ον βιβλίον συνεχίζεται ἡ σπουδὴ τῶν εἰς κύκλον ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων, ἡ διακοπεῖσα εἰς τὸ 4ον βιβλίον, καὶ σπουδάζεται ἡ ἐγγραφὴ τῶν κανονικῶν πολυέδρων εἰς σφαῖραν μὲ τελικὸν συμπέρασμα, ὅτι μόνον τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφοῦν εἰς σφαῖραν, ἤτοι τὸ τετράεδρον, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι τρίγωνα, ὁ κύβος καὶ τὸ δωδεκάεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι πεντάγωνα κανονικά. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 18 θεωρήματα. Τὸ σύνολον τῶν προτάσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὰ Στοιχεῖα ἀνέρχεται εἰς 465. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ὡς καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἔργα του, τὰ ὁποῖα σώζονται, οὐδεμία ὑπάρχει εἰσαγωγή, ὅπως συμβαίνει εἰς τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου. Δὲν εἶναι γνωστόν, ἐὰν αἱ πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου συνωδεύοντο ὑπὸ εἰσαγωγῆς τινος, οὐδεὶς δὲ ὑπαινιγμὸς ἀπαντᾷ περὶ τούτου εἰς τὰς ἐργασίας τῶν σχολιαστῶν τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου. Ἐξ ὅλων τῶν σωζομένων σχολίων συνάγεται, ὅτι τὰ Στοιχεῖα δὲν εἶναι ἐξ ὑπαρχῆς προσωπικὴ παραγωγὴ τοῦ Εὐκλείδου. Σχετικῶς ἀναφέρομεν, ὅτι ὁ Γεμῖνος γράφει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν συγγραφὴν τῶν Στοιχείων πραγματείας τῶν μαθητῶν τοῦ Πλάτωνος, Εὐδόξου καὶ Θεαιτήτου. Τὸ 1ον, 2ον καὶ 4ον βιβλία τῶν Στοιχείων ἀποδίδονται εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ἐνῶ κατὰ τὸν Πρόκλον τὰ θεωρήματα 15 καὶ 26 τοῦ πρώτου βιβλίου εἶναι εὑρήματα τοῦ Θαλοῦ, καὶ τὰ θεωρήματα 12 καὶ 23 τοῦ αὐτοῦ βιβλίου εἶναι εὑρήματα τοῦ Οἰνοπίδου (Πρόκλ. σ. 283, 299, 333, 352). Τὸ πέμπτον βιβλίον κατ' ἀνώνυμόν τινα σχολιαστὴν εἶναι ὁλόκληρον εὕρημα τοῦ Εὐδόξου, (5ος τόμος τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Εὐκλείδου, σελ. 280 καὶ 282), εἰς τοῦτον δὲ ἀποδίδεται καὶ μέρος τοῦ ἕκτου βιβλίου. Τὰ βιβλία 10 καὶ 13 ἀποδίδονται κατὰ κύριον λόγον εἰς τοὺς Πυθαγορείους, τὸν Θεαίτητον καὶ τὸν Εὔδοξον. Τὰ δὲ θεωρήματα 11 - 15 τοῦ 12ου βιβλίου ἀποδίδονται κατὰ μαρτυρίαν τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸν Εὔδοξον (Ἀρχιμ. Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι. σελ. 4. Πρὸς Ἐρατοσθένην Ἔφοδος σελ. 430). Ἡ νεωτέρα κριτικὴ μεταξὺ τῶν ἄλλων ἀποδίδει προσωπικῶς εἰς τὸν Εὐκλείδην τὴν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων (5ον αἴτημα Ι βιβλ.). Καίτοι δὲν εἶναι γνωστὸν τί ἀκριβῶς παρήγαγε προσωπικῶς ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν, ἐν τούτοις δὲν ἀμφισβητεῖται ἡ προσωπικὴ πρωτότυπος δημιουργική του συμβολή. Με τὰ μεγάλης πιθανότητος ἀποδίδονται ὑπὸ τῶν νεωτέρων κριτικῶν ὡρισμένα θεωρήματα τῶν Στοιχείων εἰς τὸν Εὐκλείδην. Ἀλλὰ καὶ μόνη ἡ διατύπωσις τῶν Στοιχείων εἶναι ἀρκετή, διὰ νὰ κατατάξῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς τὴν χορείαν τῶν μεγίστων μαθηματικῶν τῆς ἀνθρωπότητος. Τέλος, σημειοῦμεν σχετικῶς πρὸς τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς τὴν στερεομετρίαν, ὅτι αὗται κατὰ μεγάλην πιθανότητα προέρχονται ἐκ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἰσχυρισμὸς ἐνισχύεται καὶ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ δηλίου προβλήματος ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου. Ὁ Ἀρχύτας χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν λύσιν ταύτην τομὰς κώνων, κυλίνδρου καὶ τροχίλου, αἱ ὁποῖαι μαρτυροῦν περὶ μεγίστης ἀνθήσεως τῆς στερεομετρίας εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολήν. (Ἴδε τὴν λύσιν ταύτην εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν, εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Ἑνώσεως τῶν Φυσικῶν τῆς Ἑλλάδος «ὁ φυσικὸς κόσμος» (τεῦχος 3 - 4 Μαρτίου - Ἀπριλίου 1950).

Τὰς προτάσεις τῶν Στοιχείων τὰς διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην ἐκ τούτων, τιθεμένης προτάσεώς τινος, ζητεῖται ἡ εὕρεσις ἀποδεικτικῶς τῆς ἀληθείας της (θεώρημα). Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ἀνήκουν αἱ προτάσεις, εἰς τὰς ὁποίας ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ὡρισμένου γεωμετρικοῦ σχήματος (πρόβλημα). Ἐν σχέσει μὲ τὸ πρῶτον εἶδος τῶν προτάσεων, ὁ Εὐκλείδης μετὰ τὴν ἀπόδειξιν παραθέτει πάντοτε τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει δεῖξαι», ἐνῷ ἐν σχέσει μὲ τὸ δεύτερον εἶδος τῶν προτάσεων παραθέτει τὴν φράσιν «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι». Δὲν ὑπάρχουν στοιχεῖα διὰ νὰ κρίνωμεν, ἐὰν ἡ χρησιμοποίησις τῶν φράσεων τούτων ἀπετέλει συνήθειαν τῶν Πυθαγορείων ἢ τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος ἢ τῆς Σχολῆς τοῦ Ἀριστοτέλους. Εἶναι γνωστὸν ὅμως ἀπὸ τὸν πάπυρον τοῦ Rhind, ὅτι ἡ φράσις «ὅπερ ἔδει ποιῆσαι», αἰγυπτιαστὶ βέβαια, ἐχρησιμοποιεῖτο ὑπὸ τῶν Αἰγυπτίων μετὰ τὸ τέλος γεωμετρικῆς τινος κατασκευῆς, ἡ ὁποία ἐγίνετο πάντοτε ἐμπειρικῶς καὶ ἄνευ ἀποδείξεώς τινος. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν δύο τούτων φράσεων ἐξηγεῖται ἴσως ἐκ τῆς προσπαθείας τῶν Πτολεμαίων νὰ ἐμφανίσουν ἑαυτοὺς ὡς συνεχιστὰς τῆς παραδόσεως τῶν παλαιῶν Αἰγυπτίων εἰς ὅλα τὰ πεδία τοῦ πολιτισμοῦ.

Μεταξὺ τῶν προτάσεων τῶν Στοιχείων ἀπαντῶμεν τινὰς ὑπὸ τὸ ὄνομα πόρισμα. Ἡ ἀλήθεια τοῦ πορίσματος δὲν ζητεῖται ἐξ ὑπαρχῆς. Ἐὰν δηλ. γεωμετρικὴ πρότασις τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν καὶ εὑρεθῇ ἀποδεικτικῶς ἡ ἀλήθεια ταύτης, ἐκ ταύτης ὅμως συνάγεται καὶ ἡ ἀλήθεια ἄλλης προτάσεως, ἡ ὁποία δὲν ἐτέθη πρὸς ἀπόδειξιν, ἡ τελευταία αὕτη πρότασις ὀνομάζεται πόρισμα τῆς ἀρχικῶς τεθείσης προτάσεως.

Αἱ ἀποδεικτικαὶ μέθοδοι τῶν Στοιχείων.

Αὗται εἶναι τρεῖς. Ἡ συνθετική, ἡ ἀναλυτικὴ καὶ ἡ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον ἢ ἄτοπον. Κατὰ τὴν συνθετικὴν μέθοδον, ὅταν τεθῇ πρὸς ἀπόδειξιν γεωμετρική τις πρότασις, ἀναχωροῦμεν ἐκ γνωστῶν προτάσεων στηριζομένων εἰς τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰ ἀξιώματα καὶ διὰ σειρᾶς καταλλήλων συλλογισμῶν καταλήγομεν εἰς τὴν ἀλήθειαν τῆς τεθείσης προτάσεως. Αὕτη εἶναι ἡ γενικὴ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῶν μαθηματικῶν. Ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος, ἀποδιδομένη ὑπὸ τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Πλάτωνα, δέχεται πρὸς στιγμὴν τὸ ζητούμενον ἔστω Α, ὡς ἀληθές. Ἐκ τῆς ἀληθείας τούτου συνάγει (εἰ δυνατὸν) τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος Β καὶ ἐκ ταύτης τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος Γ.... Ἐὰν ἡ ἀλήθεια τῆς τελευταίας προτάσεως Γ εἶναι γνωστὴ ἐξ ἄλλων στοιχείων, τότε συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως Α. Ὅμως ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον καὶ τοὺς Πυθαγορείους, πολὺ πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Πλάτωνος. Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον, δεχόμεθα πρὸς στιγμὴν τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν τεθεῖσαν πρὸς ἀπόδειξιν. Δι' ἄλλων ὅμως προτάσεων γνωστῶν ὡς ἀληθῶν, γνωρίζομεν, ὅτι ἡ γενομένη παραδεκτὴ ὡς ἀληθὴς ἀντίθετος πρότασις εἶναι ψευδής. Συνεπῶς ἡ ζητουμένη πρότασις εἶναι ἀληθής.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τῶν Στοιχείων.

Ὡς γεωμετρικὰ σχήματα χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς τὰ Στοιχεῖα ἡ εὐθεῖα γραμμή, ὁ κύκλος καὶ τὰ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τούτων προκύπτοντα. Σχήματα δηλ. δυνάμενα νὰ σχεδιασθοῦν διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Προβλήματα μὴ δυνάμενα νὰ λυθοῦν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου ἐθεωροῦντο ἄλυτα, καίτοι ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου δὲν ἔχομεν συγκεκριμένας μαρτυρίας. Τοιαῦτα προβλήματα εἶναι τ' ἀνωτέρω μνημονευθέντα προβλήματα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῆς τριχοτομήσεως τῆς ὀξείας γωνίας. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον, ὅτι τὰ τρία ταῦτα προβλήματα δὲν εἶχον λύσιν διὰ κανόνος καὶ διαβήτου, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῶν ἄλλων καμπύλων. Ἡ χρησιμοποίησις εἰς τὰ Στοιχεῖα τῶν ἁπλουστάτων γεωμετρικῶν σχημάτων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου δὲν εἶναι τυχαία. Ἀκολουθεῖ τὴν γενικὴν τάσιν τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος ν' ἀναγάγῃ τὰ πάντα εἰς ὀλίγας ἁπλᾶς γενικὰς ἀρχὰς νοήσεως, συναφεῖς ὅμως πρὸς τὴν πραγματικότητα, ὡς αὕτη παρέχεται κατὰ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως.

Ἡ λέξις ἀξίωμα οὐδαμοῦ ἀναφέρεται εἰς τὰ στοιχεῖα, καίτοι αὕτη μνημονεύεται ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐννοίας ὅμως ἀξιωμάτων ἐκφράζουν τὰ αἰτήματα καὶ αἱ «κοιναὶ ἔννοιαι» τῶν Στοιχείων. Τὴν διάκρισιν μεταξὺ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος παρέχει ὡς κάτωθι ὁ Πρόκλος εἰς τὰ σχόλια αὐτοῦ (σ. 178). «1) Τὰ αἰτήματα εἶναι πρὸς τὰ ἀξιώματα ὡς τὰ προβλήματα πρὸς τὰ θεωρήματα. Τὰ αἰτήματα ἰσχυρίζονται τὴν δυνατότητα μιᾶς κατασκευῆς, ἥτις δὲν δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς ἄλλας κατασκευὰς γενομένας δεκτὰς ὡς δυνατάς. Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν τὴν ἰδιότητα, ἥτις ἄνευ ἀποδείξεως δύναται νὰ προσαρμοσθῇ εἰς ἓν σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ κατασκευὴ ἔχει ἀποδειχθῇ ἤδη ἢ λαμβάνεται αἰτηματικῶς. 2) Τὰ ἀξιώματα ἐκφράζουν ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διὰ πᾶν μέγεθος καὶ ἰσχύουν καὶ ἐκτὸς τῆς γεωμετρίας. Τὰ αἰτήματα ἐκφράζουν ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν μόνον εἰς γεωμετρικὰ σχήματα. 3) Τὰ ἀξιώματα ἰσχύουν καθ' ἑαυτά, δηλ. ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σημασίας τῶν εἰς αὐτὰ περιεχομένων ἐκφράσεων (διατυπώσεων). Τὰ αἰτήματα δὲν προέρχονται κατ' ἀνάγκην ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν εἰς αὐτὰ περιεχομένων διατυπώσεων». Ἡ σημερινὴ γεωμετρία, ὡς γνωστόν, χρησιμοποιεῖ μόνον τὴν λέξιν ἀξίωμα.

Ἡ λέξις λῆμμα σημαίνει λῆψιν ἀρχῆς τινος γεωμετρικῆς χρησίμου πρὸς ἀπόδειξιν προτάσεων. Ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει ταύτην ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀξιώματος, ὅπως π. χ. εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ, Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι, ἔνθα χρησιμοποιεῖ, ὡς λαμβανόμενον, τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Εὐκλείδης εἴς τινας περιπτώσεις εἰς τὰ Στοιχεῖα χρησιμοποιεῖ τὴν λέξιν λῆμμα καὶ ὑπὸ ἄλλην ἔννοιαν. Τὴν θεωρεῖ ὡς ἐκφράζουσαν βασικόν τι θεώρημα, χρήσιμον διὰ περαιτέρω ἐρεύνας καὶ προβαίνει εἰς ἀπόδειξιν τούτου. Τέλος, ὁ ὅρος «διορισμὸς» εἶναι εὕρεσις τοῦ μαθηματικοῦ Λέοντος κατὰ τὸν Πρόκλον. Ἡ φράσις πρόβλημά τι ἔχει ἢ οὐκ ἔχει διορισμόν, σημαίνει πότε πρόβλημά τι εἶναι δυνατὸν ἢ ἀδύνατον. Ἔρευναι ὅμως ἐπὶ τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ μιᾶς κατασκευῆς ἦσαν γνωσταὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Σωκράτους (Μένων 86) καὶ συνεπῶς ἡ εἴδησις, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ Πρόκλος, δὲν εἶναι ἀκριβής.

Γλωσσικῶς ἐξεταζόμενα τὰ Στοιχεῖα παρουσιάζουν ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ὁμοιομορφίαν. Εάν προχωρήσωμεν ὅμως εἰς συγκριτικὴν σπουδὴν τῆς γλωσσικῆς διατυπώσεως τοῦ ἔργου, θὰ διακρίνωμεν ἐνίοτε φραστικάς τινας ἀνομοιομορφίας, προσθήκας ἢ ἀφαιρέσεις, ὀφειλομένας εἰς τοὺς κατὰ καιροὺς διαφόρους ἐκδότας τῶν Στοιχείων, οἵτινες ἐπέφερον εἰς αὐτὰ τὰς κατὰ τὴν γνώμην των ἀναγκαίας μεταβολάς. Καλυτέρα ἔκδοσις τῶν Στοιχείων θεωρεῖται σήμερον ἡ ἐν Λειψίᾳ γενομένη ὑπὸ τοῦ Δανοῦ J. Heiberg (1883), ἡ ὁποία ὡς ἀπώτερόν της θεμέλιον ἔχει ἔκδοσιν παλαιοτέραν τῆς γενομένης ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως (4ος αἰὼν μ. Χ.). Ἡ παροῦσα ἔκδοσις χρησιμοποιεῖ τὴν ἔκδοσιν J. Heiberg.

Ἄλλαι πραγματεῖαι τοῦ Εὐκλείδου.

Ὁ Εὐκλείδης πλὴν τῶν Στοιχείων ἔγραψε σειρὰν ὅλην ἔργων, μερικὰ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν, ἐνῷ ἄλλα ἀπωλέσθησαν. Τὰ περισωθέντα εἶναι 1) Δεδομένα 2) Ὀπτικά. 3) Κατοπτρικά. 4) Φαινόμενα (ἀστρονομικόν). 5) Κατατομὴ κανόνος. 6) Εἰσαγωγὴ ἁρμονική. Διὰ τὴν «Κατατομὴν κανόνος», ἡ ὁποία περιέχει στοιχεῖα τῆς θεωρίας περὶ μουσικῆς τοῦ Πυθαγόρου, ὑποστηρίζεται, ὅτι δὲν εἶναι γνήσιον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου. Κατ' ἄλλους τοῦτο ἀποτελεῖ περίληψιν γενικωτέρου περὶ μουσικῆς ἔργου τοῦ Εὐκλείδου ὑπὸ τὸν τίτλον «Στοιχεῖα μουσικῆς», τὸ ὁποῖον ὅμως δὲν σώζεται. Διὰ τὴν μουσικὴν πραγματείαν «Εἰσαγωγὴ ἁρμονική» ὑποστηρίζεται, ὅτι δὲν εἶναι τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ τοῦ Κλεομήδους. Ἀπολεσθέντα ἔργα μνημονεύονται 1) Πορίσματα, περιεχόμενα εἰς τρία βιβλία, 2) Τὸ περὶ Διαιρέσεων βιβλίον, σωζόμενον κατὰ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν, 3) Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ, δύο βιβλία, ἐξ ὧν σώζονται μόνον 4 λήμματα περιλαμβανόμενα εἰς πραγματείαν τοῦ Πάππου, 4) Κωνικά, 4 βιβλία, 5) Ψευδάρια, περὶ τοῦ περιεχομένου τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Πρόκλου. Περὶ κωνικῶν εἶχε γράψει κατὰ τὸν Πάππον πρὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰς 4 βιβλία ὁ περίφημος μαθηματικὸς Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος. Ἐξ ἀραβικῶν δὲ καὶ λατινικῶν ἀποσπασμάτων λαμβάνομεν τὴν εἴδησιν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶχε γράψει πραγματείαν ἀφορῶσαν εἰς τὴν μηχανικήν. Ἐκ περισωθέντων ἀποσπασμάτων καὶ διαμνημονεύσεως χωρίων τινῶν ἐκ τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων, ὑπὸ ἄλλων συγγραφέων, ἀνασυνεκροτήθη μετά τινος ἐπιτυχίας τὸ ἀπολεσθὲν ἔργον «Πορίσματα».

Ἡ λέξις πόρισμα ἐνταῦθα δὲν ἔχει τὴν συνήθη ἔννοιαν τοῦ πορίσματος, ὅπως ἀπαντῶμεν αὐτὴν εἰς τὰ Στοιχεῖα.

Πρόκειται περὶ προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς γεωμετρικοὺς τόπους καὶ αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς μεῖξις θεωρημάτων καὶ προβλημάτων. Αἱ προτάσεις αὗται ἀνήρχοντο εἰς τὸν ἀριθμὸν 171. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν «Πόρισμα», διασωθέν, ὡς ἀναφερόμενον εἰς πραγματείαν τοῦ Πάππου (VII) καὶ ἔχον ὡς ἑξῆς: Ἐὰν τέμνωνται αἱ γραμμαὶ ἑνὸς κλειστοῦ τετραπλεύρου εἰς 6 σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τρία δίδονται, ὡς κείμενα ἐπ' εὐθείας, καὶ ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν ὑπολοίπων σημείων τὰ δύο κεῖνται, ἕκαστον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, τότε τὸ τελευταῖον σημεῖον ἔχει ὡς γεωμετρικὸν τόπον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δύναται νὰ προσδιορισθῇ. Τὸ πόρισμα τοῦτο, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τοῦ Πάππου, ἐσπουδάζετο εἰς δέκα περιπτώσεις, ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν σημείων καὶ εὐθειῶν. Ἐκ τοῦ πορίσματος τούτου καὶ μόνον γίνεται φανερὰ ἡ σημασία τοῦ περιεχομένου τοῦ ἀπολεσθέντος σχετικοῦ ἔργου τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ πραγματεία Δεδομένα περιέχει 94 προτάσεις, τῶν ὁποίων προηγοῦνται 15 ὁρισμοί. Τὸ ἔργον τοῦτο θεωρεῖται ὡς περιέχον ἐφαρμογὰς ἐκ τῆς θεωρίας τῶν Στοιχείων. Ἀναφέρομεν μερικὰς ἐκ τῶν προτάσεων τούτων. 1) Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ἔχει δοθῇ ὁ λόγος. 4) Ἐὰν ἀπὸ δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ δεδομένον μέγεθος, τὸ λοιπὸν μέγεθος ἔχει δοθῇ. 22) Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχουν ἕκαστον δεδομένον λόγον πρός τι μέγεθος, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἔχει πρὸς τοῦτο δεδομένον λόγον. 41) Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν δεδομένην καὶ ἔχῃ δοθῇ ὁ λόγος τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν, τότε τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου εἶναι δεδομένον. 92) Ἐὰν εἰς δοθέντα κατὰ τὴν θέσιν κύκλον ληφθῇ σημεῖόν τι ἐντὸς αὐτοῦ ὡς δοθέν, καὶ διὰ τοῦ σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, τότε τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἐκ τοῦ σημείου μέχρι τῆς περιφερείας εὐθείας εἶναι δεδομένον.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο πραγματειῶν τοῦ Εὐκλείδου Δεδομένα καὶ Στοιχεῖα συνάγεται, ὅτι ἡ πραγματεία Δεδομένα εἶναι πολὺ μεταγενεστέρα τῶν Στοιχείων. Καὶ εἰς ταύτην, ὅπως καὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα, λύονται ἐξισώσεις ἀλγεβρικαὶ δευτέρου βαθμοῦ γεωμετρικῶς. Ὑπὸ ἀλγεβρικὴν ἔποψιν παρουσιάζει ἐνδιαφέρον καὶ τὸ σωζόμενον μοναδικὸν ἀριθμητικὸν ἐπίγραμμα τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὐκλείδην (συλλογὴ ἀρχαίων ἐπιγραμμάτων, τῶν Βυζαντίνων Κεφάλα-Πλανούδη, τόμος 3ος), τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἑξῆς :

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖς·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
«Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη ;
εἰ μέτρον ἕν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα·
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις».
Εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπίστορ.

ἑρμηνεία : Ἡμίονος καὶ ὄνος φορτωμέναι σῖτον ὡδοιποροῦσαν·
ὑπὸ τὸ βάρος ὅμως τοῦ φορτώματος, τὸ ὁποῖον ἔφερον, ἐστέναζεν ἡ ὄνος·
Ταύτην ἰδοῦσα βαρυστενάζουσαν ἡ ἡμίονος τὴν ἠρώτησε·
«Μητέρα, γιατὶ θρηνεῖς κλαίουσα σὰν κορίτσι ;
ἐὰν μοῦ ἔδιδες ἕνα σάκκον, θὰ ἔφερα διπλάσιον ἀπὸ τὸ βάρος σου·
ἐὰν δὲ ἐλάμβανες ἀπὸ ἐμὲ ἕνα, θὰ εἴχαμε ἴσον».
Εἰπὲ τὸ μέτρον (τὸν ἀριθ. τῶν σάκκων), ἄριστε γνῶστα τῆς γεωμετρίας·

(σημ. : Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν σάκκων τῆς ἡμιόνου κληθῇ y καὶ τῆς ὄνου x, τότε τὸ σύστημα πρώτου βαθμοῦ θὰ εἶναι $y+1=2(x-1)$ καὶ $y-1=x+1$, ἐξ οὗ $x=5$ καὶ $y=7$).

Τὸ φερόμενον ὡς 14ον βιβλίον τῶν Στοιχείων εἶναι πραγματεία τοῦ Ὑψικλέους τοῦ Ἀλεξανδρέως (περίπου 150 π.Χ.), ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς ὡς συγγραφεὺς ἀστρονομικῆς πραγματείας, ἥτις σώζεται, καὶ ἄλλων ἔργων, ὅπως τὰ περὶ ἁρμονίας, περὶ σφαιρῶν καὶ περὶ πολυγωνικῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ 14ου βιβλίου, φαίνεται, ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἔγραψε πραγματείαν, εἰς τὴν ὁποίαν περιελάμβανε σύγκρισιν δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου, ἐγγραφομένων εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν καὶ τὸν λόγον τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ στερεὰ ταῦτα. Κατὰ ταύτην, ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῶν στερεῶν τούτων, διότι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ πρὸς τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἡ αὐτή. Τὸ βιβλίον τοῦτο περιέχει 12 θεωρήματα. Τέλος, τὸ 15ον βιβλίον θεωρεῖται ὡς ἔχον μικρότερον ἐνδιαφέρον ἀπὸ τὸ 14ον. Τοῦτο περιέχει κατασκευὰς στερεῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πέντε πρῶται εἶναι αἱ ἑξῆς: 1) Εἰς τὸν δοθέντα κύβον νὰ ἐγγραφῇ πυραμίς. 2) Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα νὰ ἐγγραφῇ ὀκτάεδρον. 3) Εἰς τὸν δοθέντα κύβον νὰ ἐγγραφῇ ὀκτάεδρον. 4) Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον νὰ ἐγγραφῇ κύβος. 5) Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον νὰ ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον. Μετὰ τὴν κατασκευὴν ταύτην, ὁ συγγραφεὺς τοῦ βιβλίου τούτου ἀναφερόμενος εἰς τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν τῶν κανονικῶν στερεῶν, λέγει, ὅτι ταύτας εὗρεν ὁ μέγας αὐτοῦ διδάσκαλος Ἰσίδωρος.

Πρόκειται περὶ τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ ἐκ Τύρου καὶ συνεπῶς οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν ἀνήκει εἰς τὸν Εὐκλείδην.

ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

Α΄. Αἱ πρῶται ἀρχαὶ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀνάγονται εἰς τὴν ἐποχήν, κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ Ἕλληνες ἔθεσαν εἰς ἑαυτοὺς τὸ ἐρώτημα: αἴτιον καὶ προέλευσις τοῦ Κόσμου. Ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο πρῶτος, κατὰ τὴν παράδοσιν, ἐπεχείρησε νὰ δώσῃ ὁ Θαλῆς, μετὰ τοῦτον ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ἀναξίμανδρος καὶ μετ' αὐτὸν ὁ Πυθαγόρας. Ὁ Ἀναξίμανδρος εἶναι ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος σπουδάζει ἐπὶ τῇ βάσει ἀριθμῶν τὰς σχέσεις μεγέθους Γῆς, Ἡλίου καὶ Σελήνης. Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι φρονοῦν, ὅτι μόνον τὸ ἔχον μορφὴν δύναται νὰ γνωσθῇ. Μορφὴν ὅμως, οὐχὶ ὑπὸ τὴν πλατωνικὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου, ἀλλὰ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ σχήματος. Ἡ μορφὴ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μέτρον. Ὅθεν ἡ ἔρευνα τῆς φύσεως, δέον νὰ στηριχθῇ κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μέτρου. Εἰς τὴν πυθαγόρειον Σχολὴν εὑρίσκονται καὶ σπουδάζονται αἱ τέσσαρες βασικαὶ συνεχεῖς ἀναλογίαι. Ἡ ἀριθμητική, ἡ γεωμετρική, ἡ ἁρμονικὴ καὶ ἡ μουσική. Διὰ τὴν μουσικὴν ἀναλογίαν ὁ Ἰάμβλιχος (ἐν τῇ εἰσ. Ἀριθμ. Νικομάχου), λέγει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας εἰσήγαγεν αὐτὴν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος, ἐνῷ διὰ τὰς τρεῖς πρώτας, ἰσχυρίζεται, ὅτι αὗται εἶναι εὕρημα τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῆς Σχολῆς του. Δὲν θεωρεῖται ὅμως βάσιμος ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ Ἰαμβλίχου, ὅτι ἡ μουσικὴ ἀναλογία εἰσήχθη εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐκ τῆς Βαβυλῶνος. Αἱ τέσσαρες αὗται συνεχεῖς ἀναλογίαι ἔχουν ὡς ἑξῆς:

1) Ἀριθμητική: $\alpha-\beta=\beta-\gamma$

2) Γεωμετρική: $\alpha:\beta=\beta:\gamma$

3) Ἁρμονικὴ ἢ ὑπεναντία: $\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$ ἢ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{\beta}$ (ἡ ἁρμονικὴ ἢ ὑπεναντία ἀναλογία εἶναι ὁμοία πρὸς τὸν γνωστὸν τύπον τῶν σφαιρικῶν κατόπτρων, ἔνθα β ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος καὶ α καὶ γ αἱ ἀποστάσεις τοῦ φωτεινοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου).

4) Ἡ μουσική: $\alpha:\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}:\beta$

Εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Νικομάχου ἐκ Γερασῶν, περὶ Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς, γραφεῖσαν περὶ τὸ 30 μ. Χ., σώζεται ἀπόσπασμα ἔργου τοῦ Πυθαγορείου Φιλολάου, ἀναφέροντος τὸν κύβον ὡς ἁρμονικὴν ἀναλογίαν. Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εὑρίσκονται πράγματι εἰς ἁρμονικὴν συνεχῆ ἀναλογίαν, διότι εἶναι $\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$.

Τοὺς ὁρισμοὺς τῶν τριῶν πρώτων ἀναλογιῶν ἔχει δώσει ὁ Ἀρχύτας, ὡς ἐξάγεται ἔκ τινος ἀποσπάσματος πραγματείας του μνημονευομένου εἰς τὰ «Πτολεμαίου ἁρμονικὰ» τοῦ Πορφυρίου.

Τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6, 12 εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Ἡ μουσικὴ ἀναλογία δύο ἀριθμῶν, περιέχει ὡς δευτέραν ἀνάλογον τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ὡς τρίτην ἀνάλογον τὸ ἁρμονικὸν μέσον αὐτῶν. Ὁ κύβος, πάλιν, παριστᾷ μουσικὴν ἀναλογίαν σχηματιζομένην ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν 6 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν 12, ἤτοι εἶναι $6 : \frac{6+12}{2} = \frac{2.6.12}{6+12} : 12$ ἢ $6 : 9 = 8 : 12$. Τὴν μουσικὴν ταύτην ἀναλογίαν ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων εἰς τὴν Ἐπινομίδα (κεφ. 12, 990 C κ. ἑ.) ἢ Φίλιππος ὁ Ὀπούντιος, εἰς ὃν ἀποδίδεται ὑπό τινων ἡ συγγραφὴ τῆς Ἐπινομίδος. Εἰς δὲ τὸν Τίμαιον (36α) τὴν ἀναλογίαν $12 : 9 = 8 : 6$.

Κατὰ τοὺς Πυθαγορείους, αἱ ἀναλογίαι ἀποτελοῦν μορφὰς λογισμοῦ, αἱ ὁποῖαι κυριαρχοῦν καὶ διέπουν τὴν ἐκ τοῦ χάους μορφικὴν δημιουργίαν τοῦ Κόσμου. Ἐφαρμογὴν δὲ τῶν ἀναλογιῶν τούτων ἀπαντῶμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ναῶν καὶ τῶν θεάτρων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων. Καὶ εἰς μὲν τοὺς ναοὺς παρατηροῦμεν ἐφαρμογὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας, ἰδίως κατὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν κιόνων, ἐνῷ εἰς τὰ θέατρα ἐφαρμογὴν τοῦ προβλήματος τῆς διαιρέσεως εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (χρυσῆς τομῆς). Εἰς δὲ τὰ Μνημεῖα τῆς Ἀκροπόλεως τῶν Ἀθηνῶν, παρατηροῦνται, πλὴν τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ($6 : 9 = 8 : 12$) καὶ αἱ σχέσεις $3 : 1$, $12 : 7$, $12^2 : 7^2$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ σχέσις $12 : 7$ παριστᾷ κατὰ προσέγγισιν τὴν $\sqrt{3}$.

Ὁ Σωκράτης στρέφει τὴν πυθαγόρειον ἔρευναν πρὸς σπουδὴν τῆς ἐν τῷ Κόσμῳ ἁρμονίας, εἰς τὴν σπουδὴν τῆς ἁρμονίας εἰς τὸν ἐσωτερικὸν ἄνθρωπον (χαρακτηριστικὸν συναφῶς εἶναι καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ Δημοκρίτου λεχθέν, ἄνθρωπος μικρὸς κόσμος), ἐνῷ ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἀριστοτέλης συνδυάζουν τὴν πυθαγόρειον καὶ τὴν σωκρατικὴν ἔρευναν.

Β΄. Ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία ἔχει ὡς ἀντικείμενον ἐρεύνης τὸν ἐνορώμενον χῶρον. Τοῦτον δέχεται ὡς τρισδιάστατον καὶ προβαίνει εἰς τὴν διατύπωσιν ἁπλῶν, βασικῶν ἐννοιῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιχειρεῖ τὴν ἔρευναν. Γνώρισμα τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, εἶναι ἡ διατύπωσις ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρων ἁπλῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν. Τὰς ἁπλᾶς ἀρχικὰς ἐννοίας αὐτῆς συναφεῖς ὅμως πρὸς τὴν πραγματικότητα διαιρεῖ ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία εἰς τρεῖς κατηγορίας. Πρῶτον εἰς ὁρισμούς, δεύτερον εἰς αἰτήματα καὶ τρίτον εἰς κοινὰς ἐννοίας, ἐνίοτε δὲ καὶ λήμματα. Ὅθεν, ἡ γενικὴ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία εἶναι ἡ λεγομένη ἀξιωματικὴ μέθοδος. Ἀξιωματικὴ ὅμως, οὐχὶ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν καθ' ἣν χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος οὗτος ὑπὸ τοῦ D. Hilbert. Διότι ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία ἀσχολουμένη μὲ τὸν ἐνορώμενον χῶρον, δὲν ἀσχολεῖται μὲ νοητικοὺς χώρους, μὲ τοὺς ὁποίους ἀσχολοῦνται οἱ σύγχρονοι, ἀνεξαρτήτους πρὸς τὴν πραγματικότητα. Τὰ ἀξιώματα (αἰτήματα, κοιναὶ ἔννοιαι καὶ ἐνίοτε λήμματα ἢ ὁρισμοὶ) δέον νὰ εἶναι ἀλήθειαι ὑπὸ τὴν ἀριστοτέλειον ἑρμηνείαν τοῦ ὅρου ἀλήθεια, ἑρμηνείαν, ἥτις διαχωρίζει τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τὸν συμβολικὸν χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον ἀπέδιδον εἰς αὐτὰ οἱ Πυθαγόρειοι *.

* Ἑρμηνείαν τῶν ὅρων «ἐνόρασις» καὶ «ἀλήθεια» παρέχει ὁ Κ. Γεωργούλης εἰς τὴν ἔκδοσιν ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἔργου «μετὰ τὰ φυσικὰ» τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ εἰς συναφῆ πρὸς τὰ ἔργα τοῦ Ἀριστοτέλους ἄρθρα του.

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ἀξίωμα εἶναι πρωταρχικὴ ἔννοια, τὴν ὁποίαν ἀναγκαστικῶς πρέπει νὰ κατέχῃ ἐκεῖνος, ὅστις πρόκειται ν' ἀποκτήσῃ τὴν μάθησιν οἱουδήποτε πράγματος. [ἀρχὴ ἣν ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον. Ἀναλυτ. ὕστερα 1, 2 (72α 17)].

Οἱ ὁρισμοὶ τὰ αἰτήματα καὶ αἱ κοιναὶ ἔννοιαι, ὡς ταῦτα ἔχουν διατυπωθῆ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, ἔχουν ὑποστῆ κατὰ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου μικρὰς μεταβολάς. Αὗται ὅμως δὲν μεταβάλλουν τὴν μορφὴν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Ὡς θεμελιώδεις ὁρισμοὶ ταύτης θεωροῦνται αἱ ἔννοιαι σημεῖον, γραμμή, ἐπιφάνεια, ἐπίπεδον, γωνία, στερεόν. Διὰ τὴν ἀριθμητικήν, θεμελιώδεις ὁρισμοὶ θεωροῦνται αἱ ἔννοιαι μονὰς καὶ ἀριθμός. Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχον ὁ Θαλῆς εἶχεν ὁρίσει τὸν ἀριθμὸν ὡς «μονάδων σύστημα» (Ἰάμβλ. εἰς ἀριθμ. εἰσαγ. Νικομάχου σελ. 10).

Κατὰ τὰ Στοιχεῖα σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος. Ἡ ἔννοια μέρος δηλοῖ διάστασιν, τὴν ὁποίαν ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία δέχεται ὡς δεδομένην ἐκ τῶν πραγμάτων ἔννοιαν. Ἡ ἔννοια σημεῖον εἶναι ἡ θεμελιωδεστέρα τῶν ἐννοιῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, ταύτην δὲ ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων, ὅταν ἀποφαίνεται περὶ τῆς σχετικότητος τῆς ἀξίας τῆς γεωμετρίας ἐν σχέσει πρὸς τὴν φιλοσοφίαν, ὡς θὰ μνημονεύσωμεν κατωτέρω. Οἱ Πυθαγόρειοι ὥριζον τὸ σημεῖον, ὡς μονάδα θέσιν ἔχουσαν. Τῆς ἐννοίας σημεῖον θεωροῦνται παράγωγοι αἱ λοιπαὶ θεμελιώδεις ἔννοιαι τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας. Τοῦτο καταφαίνεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς. Κατὰ τοῦτον εὐθεῖα γραμμή, λέγεται ἐκείνη ἡ γραμμή, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου ἐπὶ τῶν σημείων της. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς εὐθείας γραμμῆς ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἶναι σκοτεινός. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἐπεχειρήθη κατὰ τοὺς τελευταίους αἰῶνας ἡ ἑρμηνεία του, χωρὶς ἀκόμη νὰ ἔχῃ εὑρεθῆ ἑρμηνεία τοιαύτη, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἐπιδέχεται ἀντίρρησιν. Ὁ μαθηματικὸς Π. Ζερβὸς καὶ ὁ φιλόλογος Κ. Γεωργούλης ἑρμηνεύουν ὡς ἑξῆς τὸν Εὐκλείδειον ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς: Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία εἰς ἕκαστον σημεῖον της διατηρεῖ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Τοιαύτην ἑρμηνείαν ἔχει διατυπώσει καὶ ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Grassmann. Ὁ Πλάτων ὁρίζει ὡς εὐθεῖαν γραμμὴν ἐκείνην, τῆς ὁποίας τὸ μέσον καλύπτει τὰ ἄκρα, ἐνῷ ὁ Ἀρχιμήδης ὁρίζει αὐτήν, ὡς τὴν ἐλαχίστην γραμμὴν μεταξὺ γραμμῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα.

Ἐπιφάνεια εἶναι, κατὰ τὰ Στοιχεῖα, πᾶν ὅ,τι ἔχει μῆκος καὶ πλάτος. Ἐπίπεδον δὲ ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας τιθεμένη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει καθ' ὅλα αὐτῆς τὰ σημεῖα.

Γωνία ἐπίπεδος εἶναι ἡ «κλίσις» δύο εὐθειῶν συναντωμένων καὶ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας. Πλὴν τῆς τοιαύτης γωνίας, ἀναφέρεται εἰς τὰ Στοιχεῖα καὶ ἡ γωνία, τῆς ὁποίας τὸ ἓν σκέλος εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἐνῷ τὸ ἄλλο εἶναι τόξον κύκλου.

Στερεόν, τέλος, εἶναι ὅ,τι ἔχει μῆκος, πλάτος καὶ βάθος, ἤτοι πᾶν ὅ,τι ἔχει τρεῖς διαστάσεις.

Γ') Ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου καὶ ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας.

Τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν γεωμετρίαν ἀπαντῶμεν διατυπουμένην τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, κατὰ τὴν προσπάθειαν αὐτοῦ πρὸς τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Ἡ ἔννοια αὕτη εἶναι συναφὴς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας, τὴν ὁποίαν ἐπίσης διετύπωσεν ὁ Ἀναξαγόρας, ὡς φαίνεται εἰς σωζόμενον ἐκ τοῦ ἔργου του «περὶ φύσεως» ἀπόσπασμα. Ἡ διατύπωσις αὕτη ἔχει ὡς ἑξῆς : «οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί, (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι μὴ οὐκ εἶναι)—ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἔστι μεῖζον, (διότι κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ μικροῦ δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ μικρότατον, ἀλλὰ πάντοτε τὸ μικρότερον, (διότι τὸ ὑπάρχον δὲν δύναται νὰ παύσῃ ὑπάρχον, ὅσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν θεωρηθῇ)—ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερον). Ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας ἦτο γνωστὴ εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον, ὁ ὁποῖος τὴν χρησιμοποιεῖ κατὰ τὰς ἀποπείρας αὐτοῦ πρὸς τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου. Χρησιμοποιεῖ δηλ. οὗτος πρὸς τοῦτο τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θεώρημα προϋποθέτον γνῶσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας περιέχει ὁ τέταρτος ὁρισμὸς τοῦ πέμπτου βιβλίου τῶν Στοιχείων ἔχων ὡς ἑξῆς : «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν». Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι ὅτι, ὅταν δοθοῦν δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορά των πολλαπλασιαζομένη ἐπαρκῶς ὑπερβαίνει τὸ μεγαλύτερον μέγεθος. Σαφεστέραν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας παρέχει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς δύο αὐτοῦ πραγματείας ἀναφέρων τοῦτο ὡς λῆμμα. Εἰς τὴν πραγματείαν του «Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ι» ὁ Ἀρχιμήδης μνημονεύων, ὅτι ὁ Εὔδοξος ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (χρησιμοποιῶν τὸ ἀξίωμα συνεχείας) διατυπώνει τοῦτο ὡς ἑξῆς : «ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου». (Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, εἶναι δυνατὸν ἡ διαφορά των λαμβανομένη πολλὰς φορὰς νὰ ὑπερβῇ ὁλόκληρον τὸ προτεθὲν μεγαλύτερον μέμεθος). Εἰς τὴν πραγματείαν του «Τετραγωνισμὸς παραβολῆς» κατὰ τὴν προσφώνησιν πρὸς τὸν φίλον του μαθηματικὸν Δοσίθεον τὸ ἀξίωμα τοῦτο μνημονεύεται ὡς ἑξῆς : «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου». (ἡ ὑπεροχή, καθ' ἣν τὸ μεγαλύτερον ἐκ δύο δοθέντων μεγεθῶν ὑπερέχει, εἶναι δυνατὸν λαμβανομένη πολλάκις νὰ ὑπερβῇ τὸ δοθὲν (μεγαλύτερον) πεπερασμένον μέγεθος). Ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὴν τελευταίαν ταύτην διατύπωσιν ὁ Ἀρχιμήδης προσθέτει : οἱ προγενέστεροι γεωμέτραι ἐχρησιμοποίησαν τὸ «λῆμμα» τοῦτο διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι οἱ κύκλοι ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουν ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων αὐτῶν καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφῶν μαρτυριῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, συνάγεται, ὅτι τὸ ἀξίωμα συνεχείας δὲν εἶναι εὕρημα τοῦ Εὐδόξου, ἀφοῦ τὸ ἐχρησιμοποίησαν οἱ προγενέστεροι γεωμέτραι. Διότι ναὶ μὲν ὁ Εὔδοξος εἶναι προγενέστερος τοῦ Ἀρχιμήδους, ἀλλὰ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος εἶναι προγενέστερος τοῦ Εὐδόξου· ἐγνώριζε δὲ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ὡς ἀναφέρεται ἀνωτέρω. Πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας συναντῶμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων ἔχουν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν. Δὲν εἶναι γνωστὸν πότε ἔγινεν ἡ ἀπόδειξις αὕτη, εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου (ὅστις εἶναι νεώτερος τοῦ

Ἀναξαγόρου 35 περίπου ἔτη). Ἐφ' ὅσον λοιπὸν δὲν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἐγένετο πρὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ὁ Ἀναξαγόρας εἶχε διατυπώσει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, τὸ ὀρθότερον εἶναι νὰ μνημονεύεται τοῦτο ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀναξαγόρου καὶ ὄχι ὡς ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου ἢ τοῦ Ἀρχιμήδους. Διότι κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀποκλείεται νὰ ἀνήκῃ ἡ εὕρεσις τούτου εἰς τὸν Εὔδοξον ἢ τὸν Ἀρχιμήδη ἢ τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον.

Πρὸ ὀλίγων ἀκόμη ἐτῶν τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐφέρετο εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν, ὡς ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους, αἱ δὲ γεωμετρίαι τῶν νεωτέρων αἱ μὴ χρησιμοποιοῦσαι τὸ ἀξίωμα συνεχείας, ὀνομάζονται «μὴ ἀρχιμήδειοι» γεωμετρίαι. Τὴν ὀνομασίαν ἀξίωμα μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους, χρησιμοποιεῖ ὁ D. Hilbert εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας» (Grundlagen der Geometrie, 1930, σ. 30). Εἰς τὴν νεωτέραν διεθνῆ βιβλιογραφίαν ὀνομάζεται τοῦτο ἀξίωμα τοῦ Εὐδόξου. Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Κων. Καραθεοδωρῆ, ἀναφέρων τοῦτο εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν, τὸ ὀνομάζει θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ἀποδίδει ὅμως εἰς τὸν Εὔδοξον καὶ τὸ διατυπώνει ὡς ἑξῆς: «Ἐὰν ε καὶ α εἶναι δύο τυχόντες πεπερασμένοι θετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ ἀκολουθία ε, 2ε, 3ε, 4ε, 5ε ... περιέχει ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑπερβαίνουν τὸν α» (Reelle Funktionen I 1939, σελ. 15)[1].

Ὑπό τινων νεωτέρων ὑποστηρίζεται, ὅτι τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας ὑπενόει καὶ ὁ Δημόκριτος, ὅταν οὗτος διετύπωσε τὴν ἑξῆς ἀπορίαν· «ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν εἰς ἀπείρως λεπτὰ τμήματα, τί θὰ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἀποτεμνομένων τμημάτων; Ἴσαι ἢ ἄνισοι;» Ἀποφαίνεται δὲ οὗτος, ὅτι οὔτε ἴσαι θὰ εἶναι οὔτε ἄνισοι. Διότι, ἐὰν μὲν εἶναι ἴσαι, τὸ ἀρχικὸν σχῆμα θὰ εἶναι κύλινδρος καὶ ὄχι κῶνος, ἐὰν δὲ εἶναι ἄνισοι τότε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θὰ ἔχῃ βαθμίδας, ὅπερ ἄτοπον (Diels, Fragmente der Vorsokratiker). Ἐκ τῆς διατυπώσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος συνάγεται ὑπὸ πολλῶν νεωτέρων, ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶναι ὁ πρῶτος συλλαβὼν τὴν ἰδέαν τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἡ κριτικὴ τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων.

Ἡ πρώτη κριτικὴ τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας ἀποτελεῖ μέρος τῆς καθ' ὅλου κριτικῆς ἐπὶ τοῦ ὀντολογικοῦ προβλήματος, τὴν ὁποίαν ἤσκησαν ὁ Παρμενίδης καὶ ὁ μαθητὴς αὐτοῦ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης. Ἡ συναφὴς πραγματεία τοῦ Ζήνωνος, τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων (Παρμενίδης, 127 - 28) καὶ ἄλλοι μεταγενέστεροι συγγραφεῖς, δὲν ἐσώθη. Ἐσώθησαν ὅμως ἐλάχιστα ἀποσπάσματα ταύτης, μερικὰ τῶν ὁποίων μνημονεύει ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Φυσικὴ ἀκρόασις» κατὰ τὴν ἀναίρεσιν τῶν θεωριῶν τοῦ Ζήνωνος περὶ ἀνυπαρξίας τῆς κινήσεως (Ζ, 9, 239 β κ.ἑ.).

Κατὰ τὸν Ζήνωνα Α'. Δὲν ὑπάρχει πλῆθος (καὶ συνεπῶς μονὰς καὶ σημεῖον). Διότι, πᾶν πλῆθος πρέπει ν' ἀποτελῆται ἀπὸ μονάδας. Ἡ μονὰς ὅμως εἶναι ἀδιαίρετος. Ἕκαστον λοιπὸν ἐκ τῶν πολλῶν πρέπει νὰ εἶναι ἀδιαίρετον ἢ ν' ἀποτελῆται ἀπὸ ἀδιαιρέτους μονάδας. Ὅ,τι ὅμως εἶναι ἀδιαίρετον τοῦτο δὲν ἔχει μέγεθος, διότι πᾶν ὅ,τι εἶναι μέγεθος εἶναι διαιρετὸν ἐπ' ἄπειρον. Τὰ μέρη λοιπόν,

1. Πρό τινων ἐτῶν ἐπεκράτει ἡ ἀντίληψις εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν, ὅτι τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους εἶναι θεώρημα πηγάζον ἀπὸ τὸ λεγόμενον ἀξίωμα συνεχείας τοῦ G. Cantor. Ὁ Γερμανὸς ὅμως μαθηματικὸς Baldus ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ἀξίωμα Cantor εἶναι θεώρημα προκύπτον ἐκ τοῦ ἀξιώματος συνεχείας τοῦ Ἀρχιμήδους. (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Heidelberg 1930, σ. 12).

ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πλῆθος, διὰ νὰ ὑπάρχουν, πρέπει νὰ ἔχουν μέγεθος καὶ νὰ εἶναι διαιρετὰ ἐπ' ἄπειρον. Τὸ τελευταῖον ὅμως μέρος τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως θὰ εἶναι μηδέν. Ὅ,τι ὅμως προστιθέμενον εἴς τι δὲν αὐξάνει τοῦτο ἢ ἀφαιρούμενον ἀπὸ κάτι δὲν ἐλαττώνει τοῦτο, τότε αὐτό, ὡς μηδέν, δὲν ἔχει ὕπαρξιν. Τὸ πλῆθος λοιπὸν εἶναι συγχρόνως ἀπείρως μικρὸν καὶ ἀπείρως μέγα. Ἀπείρως μικρόν, διότι κάθε μέρος του εἶναι τόσον μικρόν, ὥστε νὰ εἶναι μηδέν, πολλὰ δὲ μηδενικὰ δὲν μᾶς δίδουν μέγεθος. Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ὑπάρχη πλῆθος, τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἀπείρως μέγα. Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέρη τοῦ πλήθους, τότε μεταξὺ τῶν μερῶν τούτων, θὰ ὑπάρχουν ἄλλα μέρη, μεταξὺ τούτων ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Δεχόμενοι λοιπὸν τὴν ὕπαρξιν πλήθους, περιπίπτομεν εἰς τὴν ἀντίφασιν, ὅτι τοῦτο διὰ τῆς διχοτομίας ἐπ' ἄπειρον μηδενίζεται, ἐνῷ συγχρόνως διὰ τῆς παρεμβολῆς μεταξὺ τῶν μερῶν του ἐπ' ἄπειρον ἄλλων μερῶν γίνεται ἀπείρως μέγα. Ὅπερ ἄτοπον.

Β'. Δὲν ὑπάρχει πλῆθος. Διότι, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα αὐτὰ θὰ εἶναι συγχρόνως πεπερασμένα καὶ ἄπειρα. Διότι, ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι αὐτὰ τόσα ὅσα εἶναι καὶ οὔτε περισσότερα οὔτε ὀλιγώτερα. Ἐὰν ὅμως εἶναι τόσα, ὅσα εἶναι, τότε ταῦτα εἶναι πεπερασμένα. Ἀφ' ἑτέρου ἐὰν ὑπάρχουν πολλὰ πράγματα, τότε αὐτὰ εἶναι ἄπειρα. Διότι, μεταξὺ τῶν πολλῶν θὰ ὑπάρχουν ἄλλα, μεταξὺ τούτων θὰ ὑπάρχουν ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα τὰ πολλὰ πράγματα εἶναι ἄπειρα. Προηγουμένως ὅμως ἐδείχθη, ὅτι ταῦτα εἶναι πεπερασμένα. Τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὸν νόμον τῆς λογικῆς, καθ' ὃν εἰς ἓν πρᾶγμα δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποδώσωμεν συγχρόνως δύο ἰδιότητας. Ἄρα πλῆθος δὲν ὑπάρχει.

Τὴν ὕπαρξιν τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ἡ γεωμετρία διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἰσότητος γεωμετρικῶν σχημάτων δι' ἐπιθέσεως, ἀμφισβητεῖ ὁ Ζήνων διὰ τῶν ἑξῆς ἐπιχειρημάτων :

Α'. Διχοτομία.

Διὰ νὰ φθάση κινητὸν ἔκ τινος ἀφετηρίας εἰς τὸ τέρμα, πρέπει προηγουμένως νὰ διανύση τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως. Πρὸ τούτου ὅμως πρέπει νὰ διανύση τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος. Ἀλλὰ καὶ πρὸ τούτου πρέπει νὰ διανύση τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἡμίσεος, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα τὸ κινητὸν διὰ νὰ φθάση εἰς τὸ τέρμα, πρέπει νὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον. Συνεπῶς κίνησις δὲν ὑπάρχει.

Β'. Ἀχιλλεὺς καὶ Χελώνη.

Ἐπ' εὐθείας γραμμῆς ἵστανται ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ ἡ Χελώνη, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ Ἀχιλλέως εἰς ἀπόστασιν ἔστω ἑνὸς σταδίου. Ἡ ταχύτης τοῦ Ἀχιλλέως ἔστω δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τῆς Χελώνης. Καὶ ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ ἡ Χελώνη ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας συγχρόνως. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς φθάση εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν τῆς Χελώνης, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ τὸ ἓν δωδέκατον τῆς ὑπὸ τούτου διανυθείσης ἀποστάσεως, ἤτοι κατὰ τὸ ἓν δωδέκατον τοῦ σταδίου. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς θὰ ἔχη διανύσει τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦτο τὸ ὁποῖον ἔχει ἤδη διανύσει ἡ Χελώνη, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ $\frac{1}{12}$ τοῦ $\frac{1}{12}$ ἤτοι $\left(\frac{1}{12}\right)^2$. Ὅταν ὁ Ἀχιλλεὺς διανύση τὸ $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, τότε ἡ Χελώνη θὰ προηγῆται τούτου κατὰ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ $\left(\frac{1}{12}\right)^2$ ἤτοι κατὰ $\left(\frac{1}{12}\right)^3$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Συνεπῶς ὁ 'Αχιλλεὺς δὲν θὰ φθάσῃ ποτὲ τὴν χελώνην, ἄρα δὲν κινεῖται.

Γ'. Ἡ ὀϊστὸς (ἢ ὁ ὀϊστὸς=βέλος).

Βέλος ἐκτοξευόμενον δὲν κινεῖται. Διότι, ἐὰν ὁ χρόνος καὶ ὁ χῶρος εἶναι μεγέθη, τότε περιπίπτομεν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἀντιφάσεως, ὅτι ταῦτα εἶναι ἀπείρως μικρὰ καὶ ἀπείρως μεγάλα. 'Εὰν ὅμως δὲν κάμωμεν ὑπόθεσίν τινα περὶ τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου, τότε πάλιν τὸ βέλος δὲν κινεῖται. Διότι, δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι τοῦτο κινεῖται ἐντὸς τοῦ χώρου, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται, οὔτε ἐντὸς τοῦ χώρου εἰς τὸν ὁποῖον δὲν εὑρίσκεται. Μὲ ἄλλην διατύπωσιν: ἐὰν τὸ βέλος κατέχῃ χῶρον, δὲν κινεῖται, διότι κατέχει χῶρον, «κεῖται» ἐπὶ τοῦ χώρου, καὶ συνεπῶς ὡς «κείμενον» δὲν κινεῖται. 'Εὰν πάλιν δὲν κατέχῃ χῶρον, τότε τοῦτο εἶναι ἀνύπαρκτον καὶ συνεπῶς ἓν ἀνύπαρκτον πρᾶγμα δὲν ἔχει κίνησιν.

Δ'. Οἱ ἐν τῷ Σταδίῳ κινούμενοι ἀντιθέτως ὄγκοι.

Θεωρήσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τρεῖς σειρὰς ἀντικειμένων ὡς τὸ κατωτέρῳ σχῆμα.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & & & & \\ B_4 & B_3 & B_2 & B_1 & \longrightarrow & & & & & & \\ & & \longleftarrow & & & & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array}$$

Τὰ ἀντικείμενα Α μένουν ἀκίνητα, ἐνῷ τὰ ἀντικείμενα Β, Γ κινοῦνται συγχρόνως κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις καὶ φθάνουν εἰς τὴν θέσιν τοῦ κάτωθι σχήματος.

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_4 & B_3 & B_2 & B_1 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{array}$$

Ὅταν τὸ B_1 φθάσῃ κάτωθεν τοῦ A_4 θὰ ἔχῃ διέλθει διὰ τῶν δύο ἀντικειμένων A_3, A_4 ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ Γ_1 διὰ νὰ φθάσῃ κάτωθεν τοῦ B_4, θὰ ἔχει διέλθει διὰ τῶν τεσσάρων ἀντικειμένων B_1 B_2 B_3 B_4. Τώρα, διερωτᾶται ὁ Ζήνων: Πῶς τὸ B_1 εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἔχει διέλθει δύο ἀποστάσεις ἀνίσους ἤτοι τὰς A_3 A_4 καὶ τὰς Γ_1 Γ_2 Γ_3 Γ_4 ἤτοι πῶς ἔχει συγχρόνως μίαν ἁπλῆν ταχύτητα καὶ μίαν διπλῆν; (Σημ. 'Ο 'Ιταλὸς γεωμέτρης F. Enriques, θεωρεῖ τὸ ἐπιχείρημα τοῦτο τοῦ Ζήνωνος ὡς τὴν πρώτην διατύπωσιν τῆς θεωρίας περὶ σχετικότητος).

Διὰ τὸν χῶρον ὁ Ζήνων ἰσχυρίζεται, ὅτι οὗτος δὲν ὑπάρχει.

Διότι: διὰ νὰ ὑπάρχῃ χῶρος, πρέπει οὗτος νὰ ὑπάρχῃ εἰς χῶρον τινά. 'Ο δεύτερος οὗτος χῶρος νὰ ὑπάρχῃ εἰς ἄλλον χῶρον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἄρα χῶρος δὲν ὑπάρχει.

'Ο 'Αριστοτέλης ἀνασκευάζων τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος, γράφει, ὅτι ὁ Ζήνων παραλογίζεται. Διότι ἡ ὅλη ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ζήνωνος στηρίζεται εἰς τὴν ἔννοιαν ἄπειρον, τὴν ὁποίαν ὁ Ζήνων δὲν προσδιορίζει. Κατὰ τὸν 'Αριστοτέλη πρέπει νὰ διακρίνωμεν τὸ ἄπειρον εἰς δύο κατηγορίας, εἰς ἄπειρον δυνάμει καὶ ἄπειρον ἐνεργείᾳ. Τὸ ἄπειρον ἐνεργείᾳ εἶναι συμβατικὴ ἔννοια τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος μὴ ὑπάρχουσα εἰς τὴν πραγματικότητα. Κατὰ τὸν σχηματισμὸν π. χ. τῶν φυσικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν σχηματίζοντες ἀριθμούς, χωρὶς νὰ φθάνωμεν εἰς πέρας τι. 'Ο σχηματισμὸς οὗτος τῶν ἀριθμῶν, παρέχει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου ἐνεργείᾳ. Ἄλλως ὅμως ἔχει τὸ ζήτημα μὲ τὸ δυνάμει ἄπειρον. Τοῦτο εἶναι ἄπειρον ἐν πεπερασμένῳ καὶ ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἐὰν π. χ. θεωρήσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ταύτης, κατόπιν τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον, δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπερβῶμεν κατὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον λῆψιν τὸ πεπερασμένον μέγεθος, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Τὸ ἄθροισμα δηλ. τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν πεπερασμένον ἀριθμὸν 2.

Ἡ ἐν προκειμένῳ ἀμφισβήτησις τοῦ Ζήνωνος ἔγκειται εἰς τοῦτο : Ἡ εὐθεῖα γραμμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ σημεῖα. Μεταξὺ τῶν σημείων τούτων ὑπάρχουν ἄλλα σημεῖα, μεταξὺ τούτων ὑπάρχουν ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ὥστε ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, εἶναι κατὰ τὸ μέγεθος ἀπροσδιόριστος. Πρέπει δηλ. νὰ δικαιολογηθῇ ἄνευ ἀντιρρήσεων ὁ ὅρος «λαμβάνομεν εὐθεῖαν» καὶ τοῦτο κατὰ τὸν Ζήνωνα εἶναι ἀδύνατον.

Κατωτέρω παραθέτομεν ἀποσπάσματα ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Ἀριστοτέλους «μετὰ τὰ Φυσικὰ» ἀφορῶντα εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

«Ἄπειρον εἶναι ἢ ὅ,τι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διεξέλθωμεν, ἐπειδὴ φυσικῶς δὲν καθίσταται δυνατὴ μία διέξοδος, ἀπαράλλακτα καθὼς ἡ φωνὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀντικείμενον τῆς ὁράσεως, ἢ ὅ,τι δίδει διέξοδον χωρὶς ὅμως ἡ διέξοδος αὐτὴ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα πέρας ἢ ὅ,τι μὲ δυσκολίαν δυνάμεθα νὰ διεξέλθωμεν ἢ ὅ,τι ἐνῷ ἐκ φύσεως εἶναι κατεσκευασμένον νὰ ἔχῃ διέξοδον ἢ πέρας, δὲν ἔχει οὔτε τὸ ἓν οὔτε τὸ ἄλλο. Ἄπειρον ἀκόμη εἶναι κάτι εἰς τὴν κατεύθυνσιν τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως ἢ εἰς τὰς δύο αὐτὰς κατευθύνσεις. Νὰ ὑπάρχῃ τὸ ἄπειρον ὡς ἕνα πρᾶγμα ἰδιαίτερον μὲ ἰδικήν του ὕπαρξιν εἶναι ἀδύνατον. Διότι ἐὰν τὸ καθαυτὸ ἄπειρον δὲν εἶναι οὔτε μέγεθος οὔτε πλῆθος, ἀλλὰ εἶναι οὐσία καὶ ὄχι συμβεβηκός, πρέπει νὰ εἶναι ἀδιαίρετον, διότι τὸ διαιρετὸν εἶναι ἢ μέγεθος ἢ πλῆθος. Ἂν ὅμως εἶναι ἀδιαίρετον, δὲν εἶναι ἄπειρον ἐκτὸς μόνον εἰς τὴν σημασίαν κατὰ τὴν ὁποίαν λέγομεν τὴν φωνὴν ἀόρατον. Ἀλλὰ τὸν ὅρον ἄπειρον δὲν τὸν ἐκφωνοῦν εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν σημασίαν, οὔτε θέμα τῆς ἐρεύνης μας εἶναι αὐτὴ ἡ σημασία, ἀλλὰ ἡ σημασία ἡ ὁποία σημαίνει ὅ,τι εἶναι ἀδύνατον νὰ διεξέλθωμεν. Ἀκόμη : πῶς εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ὑπάρχῃ καθαυτὸ ἄπειρον, ἂν δὲν ἔχῃ μίαν καθ' ἑαυτὴν ὕπαρξιν ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος, ἀφοῦ τὸ ἄπειρον εἶναι ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἐπιδέχονται ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος ; Ἂν ὅμως ὑπάρχῃ τὸ ἄπειρον κατὰ συμβεβηκός, τότε δὲν δύναται νὰ εἶναι ὡς ἄπειρον ἀποκλειστικῶς θεωρημένον, στοιχεῖον τῶν ὄντων, ἀπαράλλακτα καθὼς δὲν εἶναι τὸ ἀόρατον, στοιχεῖον τῆς γλώσσης ἂν καὶ ἡ φωνὴ εἶναι ἀόρατος. Ὅτι ἀκόμη εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ ἐνεργείᾳ τὸ ἄπειρον, τοῦτο εἶναι ὁλοφάνερον. Διότι, ἐὰν ἦτο ἐνεργείᾳ τὸ ἄπειρον, οἱονδήποτε μέρος του καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν θὰ ἦτο τὸ μέρος του τοῦτο ἄπειρον...

Ὥστε εἶναι ἢ ἀδιαίρετον ἢ θὰ εἶναι διαιρετὸν εἰς μόρια, τὰ ὁποῖα ἐπιδέχονται πάλιν ἀτελεύτητον διαίρεσιν εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἄπειρον θὰ ἦτο διαιρετόν, ἀλλὰ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πλῆθος ἀπείρων μορίων εἶναι ἀδύνατον· ὅπως λοιπὸν μέρος τοῦ ἀέρος εἶναι ἀήρ, οὕτω καὶ μέρος τοῦ ἀπείρου εἶναι ἄπειρον, ἂν τὸ ἄπειρον εἶναι ἀρχὴ καὶ οὐσία. Εἶναι ἄρα ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον. Εἶναι ἀδύνατον ὅμως ὅ,τι εἶναι ἐντελεχείᾳ ἄπειρον νὰ εἶναι ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον· διότι τὸ ἄπειρον εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάποιο ποσόν· ὑπάρχει ἄρα κατὰ συμβεβηκός. Ἀλλ' ἂν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν ὑπάρχῃ δὲν δύναται, ὅπως ἔχομεν ἀναπτύξει εἰς τὰ προηγούμενα, νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον ἀρχή, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἀρχὴ τοῦτο, τοῦ ὁποίου τὸ ἄπειρον εἶναι συμβεβηκός.

Ἡ προηγουμένη συζήτησις ἦτο γενική. Ὅτι πάλιν ἄπειρον εἰς τὴν περιοχὴν τῶν αἰσθητῶν δὲν ὑπάρχει, συνάγεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα : ἂν δηλαδὴ τὸ σῶμα ὁρίζεται ὡς πρᾶγμα καθωρισμένον ἀπὸ ἐπίπεδα δὲν δύναται νὰ ὑπάρξῃ κανὲν οὔτε αἰσθητὸν οὔτε νοητὸν ἄπειρον σῶμα. Οὐδὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξῃ ὡς χωριστὸς καὶ ἄπειρος. Διότι καὶ ὁ ἀριθμὸς καὶ ὅ,τι ἔχει ἀριθμὸν δύναται νὰ ἀριθμηθῇ. Ἂν ἐξετάσωμεν τὸ ζήτημα ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀπόδειξιν : οὔτε δηλ. σύνθετον δύναται νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον οὔτε ἁπλοῦν· σύνθετον δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον, ἀφοῦ βέβαια ὑπάρχει ἓν πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων· διότι τὰ ἐναντία στοιχεῖα πρέπει νὰ εἶναι ἀναμεταξύ των ἴσα καὶ νὰ μὴ εἶναι τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἐναντιώσεως ἄπειρον, διότι ἂν ἡ δύναμις τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ δύο στοιχεῖα τῆς ἐναντιώσεως (σημ. π.χ. θερμὸν—ψυχρὸν) εἶναι κατωτέρα κατά τινα ποσότητα ἀπὸ τὴν δύναμιν τοῦ ἄλλου, τὸ ἄπειρον θὰ φθείρῃ τὸ πεπερασμένον. Πάλιν, τὸ κάθε σῶμα νὰ εἶναι ἄπειρον εἶναι ἀδύνατον. Διότι σῶμα εἶναι ὅ,τι ἔχει διαστάσεις πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἄπειρον εἶναι ὅ,τι ἔχει ἀπεράντους διαστάσεις· ὥστε ἂν ὑπάρχῃ ἓν ἄπειρον σῶμα, ἡ ἀπειρότης του θὰ καταλάβῃ ὅλας τὰς διαστάσεις (ἀποκλείουσα τὴν συνύπαρξιν ἑνὸς δευτέρου σώματος). (Μετὰ τὰ φυσικὰ βιβλ. Κ 1066α 35, 1066β 34 καὶ φυσικῆς ἀκροάσεως Γ 204α 3 204β 22).

Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη πᾶσα γνῶσις εἶναι γνῶσις, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι. Τὸ ἀντικείμενον τοῦτο τῆς γνώσεως καλεῖται ἐπιστητόν. Οἱ ἀριθμοὶ π.χ. εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἀριθμητικῆς, ἐνῷ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα εἶναι τὸ ἐπιστητόν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ ἀντικείμενον τῆς γεωμετρίας. Ἡ σκέψις τοῦ ἀνθρώπου ἀναφέρεται πρωτίστως εἴς τι ἀντικείμενον, δευτερευόντως δὲ δύναται νὰ στραφῇ αὕτη πρὸς τὸν ἑαυτόν της. Διὰ τοῦτο ἡ ἐπιστήμη εἶναι ἔννοια σχετικὴ μὴ δυναμένη νὰ ὑπάρξῃ ἄνευ τοῦ ἐπιστητοῦ. Τὰ συστατικὰ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη τρία : 1) Οἱ ἀριθμοὶ διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ ἡ ἔκτασις (ὁ χῶρος) διὰ τὴν γεωμετρίαν. 2) Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τιθέμεναι προτάσεις καὶ 3) αἱ ἀποδεικτικαὶ ἀρχαὶ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν διαδικασίαν. Ἡ ἀποστολὴ τῶν μαθηματικῶν ὡς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης εἶναι νὰ δείξουν μετὰ βεβαιότητος τὸν ἀποδεικτικὸν λόγον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ ἀλήθεια μιᾶς δοθείσης προτάσεως. Τοῦτο θὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῆς προτάσεως εἰς ἀρχικὰς καὶ ἀφ' ἑαυτῶν φανερὰς προτάσεις, δηλ. εἰς τὰ ἀξιώματα. Τὰ μαθηματικὰ δὲν δύνανται νὰ προχωρήσουν πέραν τῶν ἀναποδείκτων ἀρχικῶν προτάσεων. Τὴν ἔρευναν τῶν προτάσεων τούτων ἐπιτελεῖ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ πρώτη φιλοσοφία, κατὰ δὲ τοὺς νεωτέρους ἡ γνωσιολογία. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες (τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα) ἔχουν μὲν ὕπαρξιν, ὄχι ὅμως καὶ αὐθυπαρξίαν. Ὑπάρχουν δηλ. αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες, ὡς σταθερὰ χαρακτηριστικὰ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἄνευ τῶν ὁποίων αὗται θὰ ἦσαν ἀνύπαρκτοι. Αἱ μαθηματικαὶ ὀντότητες σχηματίζονται διὰ τῆς σκέψεως κατόπιν ἀφαιρέσεως.

Ἀλλὰ καὶ ὁ Πλάτων ἔχει τὴν γνώμην, ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετικὴ (σχετική), ἐνῷ οὗτος ὑπογραμμίζει ἰδιαιτέρως τὴν ἀξίαν τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν σπουδὴν τῆς φιλοσοφίας. Εἰς τὴν «Πολιτείαν» (525 Δ) γράφει : «σφόδρα ἄνω ποι᾿ἄγει (τὸ περὶ τοὺς λογισμοὺς μάθημα) τὴν ψυχὴν (πολὺ πρὸς τὰ ἐπάνω, πρὸς τὸν θεόν, ὁδηγοῦν τὰ μαθηματικὰ τὴν ψυχήν). Εἰς δὲ τὸν «Φίληβον»

(16 C), ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι «θεῶν εἰς ἀνθρώπους δόσις». Εἰς τὴν «Πολιτείαν» ὅμως σαφῶς ἀποφαίνεται ὁ Πλάτων, ὅτι ἡ γεωμετρία εἶναι ἐπιστήμη ὑποθετική. Τὸ συναφὲς χωρίον ἔχει ὡς ἑξῆς (533 c) : «ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τίς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι ; οὐδεμία ἦ δ' ὅς». (Διότι, ἐὰν χρησιμοποιῆται ὡς ἀρχὴ κάτι ἄγνωστον, (τὸ σημεῖον) διὰ τοῦ ἀγνώστου δὲ αὐτοῦ συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν τελικῶν καὶ τῶν ἐνδιαμέσων προτάσεων, ποία λογικὴ σκέψις δύναται νὰ παραδεχθῇ ποτὲ τὴν τοιαύτην συναρμολόγησιν, ὡς ἐπιστήμην ; οὐδεμία ἀπήντησεν ἐκεῖνος).

Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη ἐπὶ τῶν ἐπιχειρημάτων τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους.

Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη παραδέχεται τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀριστοτέλους περὶ δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἀπείρου. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ οἱ φρονοῦντες, ὅτι ὁ Ζήνων δὲν ἦτο τόσον ἀφελής, ὥστε νὰ πιστεύῃ, ὅτι ὁ Ἀχιλλεὺς δὲν θὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὔτε ὅτι ὁ Ζήνων δὲν θὰ ἐφονεύετο, ἐὰν ἐτίθετο ἐνώπιον ἐκτοξευομένου βέλους. Κατὰ τούτους ὁ Ζήνων ἐρωτᾷ ὄχι πότε θὰ φθάσῃ ὁ Ἀχιλλεὺς τὴν χελώνην, οὔτε πότε τὸ βέλος θὰ φθάσῃ εἰς τὸν στόχον. Τὸ ἐρώτημα τοῦ Ζήνωνος εἶναι «πῶς θὰ φθάσουν, ἀφοῦ θὰ κινοῦνται ἐπ' ἄπειρον».

Ἡ κριτικὴ τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας καὶ ἡ γένεσις νέων γεωμετριῶν.

Πλὴν τοῦ Ζήνωνος, ὁ ὁποῖος ἠμφεσβήτει τὰς βασικὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἀπὸ τῆς προαριστοτελείου ἀκόμη ἐποχῆς ἀπησχόλει τὸ ἑλληνικὸν πνεῦμα τὸ εἰδικώτερον θέμα τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ 1ον βιβλίον τῶν Στοιχείων ὡς 5ον αἴτημα. Ἀπὸ συναφῆ διαμνημόνευσιν τοῦ Ἀριστοτέλους φαίνεται, ὅτι ὑπῆρχον μαθηματικοὶ προσπαθοῦντες ν' ἀποδείξουν τὸ αἴτημα τοῦτο καὶ συνεπῶς ν' ἀναγάγουν αὐτὸ εἰς θεώρημα. Οὗτοι ὅμως περιέπιπτον εἰς τὸ σφάλμα νὰ χρησιμοποιοῦν ὡς ἀποδεικτικὸν μέσον τὴν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας, ἐκείνην δηλ. τὴν ὁποίαν ἤθελον ν' ἀποδείξουν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντιστρατεύεται εἰς τοὺς νόμους τῆς λογικῆς. Τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Ἀριστοτέλους ἔχει ὡς ἑξῆς· «...ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν· λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐσῶν τῶν παραλλήλων» (ἀναλυτ. πρότερα II 16, 65 a 4). (...τὸ ὁποῖον κάμνουν οἱ νομίζοντες, ὅτι ἀποδεικνύουν τὸ αἴτημα τῶν παραλλήλων, διότι οὗτοι ὑποπίπτουν εἰς σφάλμα χρησιμοποιοῦντες ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα θὰ ἦτο ἀδύνατον ν' ἀποδείξουν ἂν δὲν ὑπῆρχεν ἡ ἔννοια τῶν παραλλήλων).

Ἡ ἔρευνα ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ἢ μὴ τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων διαρκέσασα περὶ τὰ 2000 ἔτη ὡδήγησε τοὺς νεωτέρους εἰς τὴν δημιουργίαν ἄλλων γεωμετριῶν, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται μὴ εὐκλείδειοι γεωμετρίαι καὶ εἰς τὴν ἄποψιν, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι θεώρημα, ἀλλ' ἀξίωμα. Κατὰ τοὺς νεωτέρους, οἱ ὁρισμοὶ καὶ τὰ ἀξιώματα (διὰ τοῦ ὅρου τούτου νοοῦνται τὰ αἰτήματα αἱ κοιναὶ ἔννοιαι καὶ τὰ λήμματα τῶν Στοιχείων) ἄνευ τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων ἀποτελοῦν τὴν ἀπόλυτον λεγομένην γεωμετρίαν. Προσθήκη εἰς ταύτην τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν Στοιχείων δίδει τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν. Μεταβολὴ τοῦ αἰτήματος τούτου δίδει τὰς ἄλλας, μὴ εὐκλειδείους γεωμετρίας. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὴν ὑπερβολικὴν γεωμετρίαν τῶν Bolyai—Lobatschefskij καὶ τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν τοῦ Riemann, Εἰς τὴν ὑπερβολικὴν γεωμετρίαν, ἀντὶ τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν Στοιχείων χρησιμοποιεῖται τὸ ἑξῆς : «ἐκ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἄγονται πρὸς τὴν εὐθεῖον ἄπειροι παράλληλοι, ἐνῷ εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν χρησιμοποιεῖται ἀντιστοίχως «ἐκ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, οὐδεμία παράλληλος ἄγεται». Κατὰ τὴν ἐλλειπτικὴν γεωμετρίαν δὲν γίνεται δεκτόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ προεκτείνεται ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἐπ' ἄπειρον καὶ συνεπῶς γίνεται δεκτόν, ὅτι ὁ χῶρος εἶναι πεπερασμένος (ἐλλιπής), ἐν συμφωνίᾳ πρὸς τὸν Ἀριστοτέλη, ὑποστηρίζοντα τὸ πεπερασμένον τοῦ χώρου, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει κατὰ τοῦτον ἐνεργείᾳ ἄπειρον.

Κατὰ τὴν εὐκλείδειον γεωμετρίαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, κατὰ τὴν ὑπερβολικὴν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ κατὰ τὴν ἐλλειπικὴν εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν. Κατὰ τὴν σύγχρονον κριτικὴν ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς ἑλληνικῆς γεωμετρίας, εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ὑπάρχουν ἐλλείψεις. Οὕτω, διὰ τὸ 5ον αἴτημα, ὅτι γίνεται σιωπηρῶς παραδεκτὴ ἡ ὑπόθεσις, ὅτι κάθε εὐθεία τέμνει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη, διὰ τὴν 7ην κοινὴν ἔννοιαν, ὅτι χρησιμοποιεῖται ἐπίθεσις σχημάτων διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος αὐτῶν, χωρὶς νὰ ἔχουν προηγουμένως διατυπωθῆ ἀξιώματα κινήσεως κλπ. Τοιαῦται παρατηρήσεις ὡδήγησαν τοὺς νεωτέρους εἰς νέαν διατύπωσιν τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρομεν τὸν D. Hilbert. Οὗτος παρέχει δύο τρόπους ἀξιωματικῆς θεμελιώσεως τῆς γεωμετρίας τοὺς ὁποίους ἐκθέτομεν κατωτέρω (Grundlagen der Geometrie, 1930).

Α' τρόπος.

Ὁρισμός. Θεωροῦμεν τρία διάφορα συστήματα ἀντικειμένων:

Τ' ἀντικείμενα τοῦ πρώτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν σημεῖα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα A. B. C. ...τ' ἀντικείμενα τοῦ δευτέρου συστήματος, τὰ ὀνομάζομεν εὐθείας γραμμὰς καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ τὰ μικρὰ γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου a, b, c..., τ' ἀντικείμενα τοῦ τρίτου συστήματος τὰ ὀνομάζομεν ἐπίπεδα καὶ τὰ παριστῶμεν μὲ τὰ μικρὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου α, β, γ, δ....

Τὰ σημεῖα τὰ ὀνομάζομεν ἐπίσης, στοιχεῖα τῆς γραμμικῆς γεωμετρίας, τὰ σημεῖα καὶ τὰς εὐθείας ὁμοῦ, στοιχεῖα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας, καὶ τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας καὶ τὰ ἐπίπεδα ὁμοῦ, στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας τοῦ χώρου ἢ στοιχεῖα τοῦ χώρου. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας, καὶ τὰ ἐπίπεδα, εὑρισκόμενα εἰς ἀμοιβαίας σχέσεις, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν «κεῖνται» «μεταξὺ» «ἴσα», «παραλλήλως» «συνεχῶς». Ἡ ἀκριβὴς περιγραφὴ τῶν σχέσεων τούτων γίνεται διὰ τῶν ἀξιωμάτων τῆς γεωμετρίας.

Τ' ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας δυνάμεθα νὰ τὰ χωρίσωμεν εἰς πέντε ὁμάδας. Ἑκάστη ἐκ τῶν ὁμάδων τούτων ἐκφράζει ὡρισμένας συναφεῖς βασικὰς ἀρχὰς τῆς ἐποπτείας μας.

Ὀνοματίζομεν τὰς ὁμάδας ταύτας ὡς ἑξῆς:

I 1—8 Ἀξιώματα συνδέσεως.
II 1—4 Ἀξιώματα διατάξεως.
III 1—5 Ἀξιώματα ἰσότητος.
IV 1 Ἀξίωμα τῶν παραλλήλων.
V 1—2 Ἀξιώματα συνεχείας.

I. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΣΥΝΔΕΣΕΩΣ

Τὰ ἀξιώματα τῆς ὁμάδος ταύτης συνδέουν μεταξύ των τ' ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἀντικείμενα, σημεῖα, εὐθείας καὶ ἐπίπεδα καὶ ἔχουν ὡς ἑξῆς:

I 1. Δοθέντων δύο διαφόρων σημείων A, B, ὑπάρχει πάντοτε εὐθεῖα a, ἡ ὁποία τὰ περιέχει.

I 2. Δοθέντων δύο διαφόρων σημείων A, B, ὑπάρχει μόνον μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τὰ περιέχει.

I 3. Πᾶσα εὐθεῖα περιέχει τοὐλάχιστον δύο σημεῖα. Ὑπάρχουν τοὐλάχιστον τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

I 4. Τρία σημεῖα A, B, C, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τὰ περιέχει.
Πᾶν ἐπίπεδον περιέχει πάντοτε ἓν ἐκ τῶν τριῶν σημείων.

I 5. Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας περιέχονται μόνον ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου.

I 6. Ἐὰν δύο σημεῖα A, B, μιᾶς εὐθείας a κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου α, τότε ἕκαστον σημεῖον τῆς εὐθείας κεῖται ἐπὶ τοὺ ἐπιπέδου α.

I 7. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, τότε ἔχουν τοὐλάχιστον ἓν κοινὸν σημεῖον ἀκόμη.

I 8. Ὑπάρχουν τοὐλάχιστον τέσσαρα σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

II. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Τ' ἀξιώματα τῆς ὁμάδος ταύτης καθορίζουν τὴν ἔννοιαν «μεταξύ».

II 1. Ἐὰν τὸ σημεῖον B κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων A, C, τότε, τὰ σημεῖα A, B, C, εἶναι διάφορα σημεῖα μιᾶς εὐθείας καὶ τὸ σημεῖον B κεῖται ἐπίσης μεταξὺ τῶν σημείων C καὶ A.

II 2. Δοθέντων δύο σημείων A καὶ C ὑπάρχει πάντοτε ἓν σημεῖον B οὕτως, ὥστε τὸ C νὰ εἶναι μεταξὺ A καὶ B.

II 3. Δοθέντων τριῶν σημείων A, B, C, μιᾶς εὐθείας, ὑπάρχει μόνον ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.

II 4. Ἔστωσαν τρία σημεῖα A, B, C, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ μία εὐθεῖα a τοῦ ἐπιπέδου ABC, ἡ ὁποία δὲν περιέχει κανὲν ἐκ τῶν σημείων A, B, C: ἐὰν τότε ἡ εὐθεῖα a διέρχεται ἔκ τινος σημείου τοῦ τμήματος AB, τότε αὕτη διέρχεται εἴτε ἐκ τοῦ τμήματος AC, εἴτε ἐκ τοῦ τμήματος BC,

III. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

Ταῦτα προσδιορίζουν πλὴν τῆς ἐννοίας τῆς ἰσότητος καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως.

III 1. Ἐὰν δύο σημεῖα A, B κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας a καὶ τρίτον σημεῖον A′ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἄλλης εὐθείας a′, τότε δυνάμεθα ἐπὶ δοθέντος μέρους (δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ) τῆς εὐθείας a′ νὰ εὕρωμεν πάντοτε ἓν σημεῖον B′ οὕτως, ὥστε τὸ τμῆμα A B νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα A′ B′ ἢ συμβολικῶς $AB \equiv A'B'$ (ἢ $A'B' \equiv AB$).

III 2. Ἐὰν ἕκαστον τῶν τμημάτων A′ B′ καὶ A″ B″ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα A B, τότε εἶναι καὶ $A'B' \equiv A''B''$ (ἢ $A''B'' \equiv A'B'$).

III 3. Ἔστωσαν τὰ τμήματα A B καὶ B C ἐπὶ εὐθείας a μὴ ἔχοντα κοινὸν σημεῖον καὶ τὰ τμήματα A′ B′ καὶ B′ C′ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἄλλης εὐθείας a,

μὴ ἔχοντα κοινὸν σημεῖον: ἐὰν $AB \equiv A'B'$ καὶ $BC \equiv B'C'$, τότε εἶναι καὶ $AC \equiv A'C'$.
Ὁρισμός. Ἐὰν ἐκ σημείου ἐπιπέδου ἀναχωροῦν δύο διάφοροι ἡμιευθεῖαι h, k, τὸ σύστημα τῶν ἡμιευθειῶν τούτων τὸ ὀνομάζομεν γωνίαν καὶ τὴν παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον $\angle (h, k)$ ἢ $\angle (k, h)$.
Τὸ σημεῖον τοῦτο καλοῦμεν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ τὰς ἡμιευθείας πλευράς. Τὰ σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν, τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ ὑπὸ τούτων ὁριζομένου ἐπιπέδου, λέγομεν, ὅτι εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας. Ὅλα τ' ἄλλα σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς γωνίας.

III 4. Ἔστω μία γωνία $\angle (h, k)$ εἰς ἐπίπεδον α καὶ εὐθεῖα a′ εἰς ἐπίπεδον α′, καὶ ἡ ἡμιευθεῖα h′ ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ σημείου O′ τῆς εὐθείας a′. Τότε εἰς τὸ ἐπίπεδον α′ ὑπάρχει μόνον μία ἡμιευθεῖα k′ οὕτως ὥστε $\angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$. Κάθε γωνία εἶναι ἴση πρὸς ἑαυτήν, ἢ $\angle (h, k) \equiv \angle (h, k)$.

III 5. (Ἀφοῦ δίδεται ὁ ὁρισμὸς τοῦ πολυγώνου καὶ τοῦ τριγώνου). Ἐὰν διὰ δύο τρίγωνα ABC, A′ B′ C′ ὑπάρχουν αἱ ἰσότητες $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ τότε ὑπάρχει καὶ ἡ ἰσότης $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

IV. ΑΞΙΩΜΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

IV 1. (Εὐκλείδειον). Ἐὰν δοθῇ εὐθεῖα καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, τότε ἐκ τοῦ σημείου ἄγεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὸ πολὺ μία εὐθεῖα, κειμένη εἰς τὸ ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τοῦ σημείου ὁριζόμενον ἐπίπεδον, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὴν δοθεῖσαν.

V. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

V 1. (Ἀξίωμα μετρήσεως ἢ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους).
Δίδονται AB, CD, δύο διάφορα τμήματα. Ἐπὶ τῆς εὐθείας AB ὑπάρχει πλῆθος σημείων $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_{\nu-1}\ A_\nu$, οὕτως, ὥστε ἕκαστον τῶν τμημάτων $AA_1, A_1A_2, A_2A_3 \ldots\ldots A_{\nu-1}A_\nu$ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα CD καὶ τὸ σημεῖον B νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων $A_{\nu-1}\ A_\nu$.

V 2. (Ἀξίωμα γραμμικῆς πληρότητος).
Διὰ τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν τὰ ἀξιώματα I 1—2, II, III 1, V I, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσχύουν ἄλλα ἀξιώματα.

Β′ τρόπος.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον θεμελιώσεως τῆς γεωμετρίας, ὁ D. Hilbert προτάσσει τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ χρησιμοποιεῖ τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων τοῦ G. Cantor καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Jordan καθ' ὅ: πᾶσα συνεχὴς κλειστὴ καμπύλη, ἄνευ διπλῶν σημείων, χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν καὶ τὸ ἐξωτερικόν.

Ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω θεμελιώσεως τῆς γεωμετρίας ὁ D. Hilbert ἐπελήφθη τῆς γενικωτέρας ἐρεύνης τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀφορμηθεὶς ἐκ τῆς πολεμικῆς τοῦ Poincaré καὶ τῶν Russel καὶ Brouwer κατὰ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων τοῦ G. Cantor τὴν ὁποίαν ὁ D. Hilbert ὀνομάζει παράδεισον τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος.

Κατὰ τὸν D. Hilbert ἡ ἀνθρωπίνη λογικὴ χρησιμοποιεῖ ὡς μέσα ἐκφράσεως αὐτῆς σύμβολα. Τὰ σύμβολα ταῦτα εἶναι γράμματα, λέξεις, φθόγγοι, διὰ τὰ ὁποῖα δὲν δυνάμεθα νὰ ἰσχυρισθῶμεν, ὅτι ἀποτελοῦν ἀλάθητα ἢ μὴ δυνάμενα νὰ ὑφίστανται μεταβολὴν στοιχεῖα ἐκφράσεως. Διὰ τὴν ὀρθοτέραν διατύπωσιν τῶν νόμων τῆς λογικῆς, ἀπὸ τῆς ἐπόψεως τοῦ ἀναλλοιώτου τούτων ἐπενόησεν ὁ D. Hilbert τὴν μαθηματικὴν λογικήν, τύπους δηλ. μαθηματικούς, ἐκφράζοντας ἰδεατοὺς ἰσχυρισμούς, μὴ ἀντιβαίνοντας ὅμως εἰς τὴν ἀριστοτέλειον λογικήν. Τὴν θεωρίαν του αὐτὴν ὀνομάζει οὗτος ἀποδεικτικὴν (Beweistheorie). Ἡ θεωρία αὕτη θίγει γενικώτερα γνωσιολογικὰ προβλήματα καὶ ἰδίως τὸ πρόβλημα τῆς ἀποδείξεως τῆς ὑπάρξεως (Existenzbeweis), ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἱ γνῶμαι τῆς ἀγγλικῆς Σχολῆς διΐστανται.

Ὡς πρὸς τὸν χῶρον, ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη διακρίνει τρία εἴδη.

1) Τὸν ἐνορώμενον χῶρον, τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῆς ἐποπτείας. 2) Τὸν φυσικὸν χῶρον, τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν γνῶσιν ἐκ τῆς πείρας. 3) Τοὺς ἀφῃρημένους χώρους, γενικὰς δηλ. ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν διὰ τῆς ἀφαιρέσεως, ἐκ τῆς ἐννοίας τοῦ ἐνορωμένου χώρου.

Ἡ βαθυτέρα ἔρευνα τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας προσκρούει πάντοτε εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου. Ὁ Ἀρχιμήδης δέχεται τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, ὡς διετύπωσε ταύτην ὁ Ἀριστοτέλης, μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι ἐνῷ ὁ Ἀριστοτέλης δὲν ὁμιλεῖ περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου, ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ καὶ τὴν ἔννοιαν ταύτην διὰ τὴν ἀπόδειξιν πλείστων προτάσεων. Τὰ τελικὰ ὅμως συμπεράσματα τῶν συλλογισμῶν του συνάγει ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἀδύνατον (ἄτοπον). Ἀλλὰ καὶ πρὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὁ Εὔδοξος εἶχεν ἐφαρμόσει τὴν ἔννοιαν δυνάμει ἄπειρον καὶ τὴν συλλογιστικὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν συναντῶμεν χρησιμοποιουμένην ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ἢ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἡ σύγχρονος ἐπιστήμη ἀκολουθεῖ τὸν Εὔδοξον, τὸν Ἀριστοτέλη, τὸν Εὐκλείδην, τὸν Ἀρχιμήδη καὶ τὸν Ἀπολλώνιον. Ὁ D. Hilbert, εἰς πραγματείαν αὐτοῦ περὶ τοῦ ἀπείρου, περιεχομένην εἰς τὴν ἀνωτέρω μνημονευθεῖσαν πραγματείαν του, «Ἀρχαὶ τῆς γεωμετρίας» (Grundlagen der Geometrie, 1930) παραδεχόμενος τὸ δυνάμει καὶ ἐνεργείᾳ ἄπειρον, γράφει τὰ ἑξῆς: «Ἐὰν ἐπιθυμοῦμεν νὰ διασαφηνίσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, πρέπει νὰ παραστήσωμεν τὴν σημασίαν αὐτοῦ ἡ ὁποία παρουσιάζεται εἰς τὴν πραγματικότητα. Ἡ πρώτη ἐντύπωσις ἐκ τῶν φυσικῶν φαινομένων εἶναι ἡ ἐντύπωσις τῆς συνεχείας. Ἡ διχοτομία ὅμως εἰς τὰς φυσικὰς παρατηρήσεις προσκρούει εἰς ἀνυπέρβλητα ἐμπόδια τὰ ὁποῖα δὲν ὀφείλονται εἰς τὴν ἀτέλειαν τῶν πειραματισμῶν μας, ἀλλὰ εἰς τὴν φύσιν τῶν πραγμάτων. Ἀπόδειξις τούτου εἶναι ἡ μὴ περαιτέρω τομὴ τῶν ἠλεκτρονίων καὶ τῆς ἐνεργειακῆς ἐλαχίστης ποσότητος (Wirkungsquantum). Συνεπῶς, ἡ ἐπ' ἄπειρον διχοτομία ἑνὸς συνεχοῦς ἀντικειμένου δὲν δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ καὶ παραμένει μόνον ὡς μία ἰδέα, ὡς μία ἔννοια, ἡ ὁποία ἀντιστρατεύεται πρὸς τὴν ἐν τῇ φύσει παρατήρησιν καὶ τὸ πείραμα. Ἐξ ἄλλου, τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου κατὰ τὸ μέγεθος, τὴν συναντῶμεν κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ Κόσμου ὡς συνόλου. Εἰς τὴν παραδοχὴν τοῦ ἀπείρου τοῦ χώρου, ἀγόμεθα κατ' ἀνάγκην ἐκ τῆς εὐκλειδείου γεωμετρίας, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ οἰκοδόμημα καὶ σύστημα ἐννοιῶν μὴ ἐπιδεχόμενον ἀντιρρήσεις. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἕπεται ἀκόμη, ὅτι αὕτη ἰσχύει εἰς τὴν πραγματικότητα, κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ Κόσμου ὡς συνόλου. Μόνον ἡ παρατήρησις καὶ ἡ πεῖρα δύνανται ν' ἀποφανθοῦν ἐπὶ τούτου. Κατὰ τὴν προσπάθειαν ν' ἀποδειχθῇ νοητικῶς τὸ ἄπειρον τοῦ χώρου, παρεισφρύουν πλάναι. Ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ἐκτὸς ἑνὸς θεωρουμένου τμήματος χώρου, ὑπάρχει ἄλλος χῶρος, συνάγεται, ὅτι ὁ χῶρος εἶναι ἀπεριόριστος, ὄχι ὅμως καὶ ἄπειρος. Ἡ ἐλλειπτικὴ γεωμετρία παρέχει τὸ πρότυπον ἑνὸς Κόσμου ἀπεριορίστου μέν, ἀλλὰ πεπερασμένου. Ὁ δὲ Ἀϊνστάϊν ἀπέδειξε τὴν ἀνάγκην ἐγκαταλείψεως τῆς εὐκλειδείου γεωμετρίας καὶ τὴν παραδοχὴν τῆς ἐλλειπτικῆς καὶ διὰ τῆς θεωρίας αὐτοῦ περὶ βαρύτητος, δεικνύει τὴν δυνατότητα ἑνὸς πεπερασμένου Κόσμου».

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ οἱ ἀντιθέτως πρὸς τὸν D. Hilbert φρονοῦντες, οἱ ὁποῖοι ἐπικαλοῦνται ὅσα ὁ ἴδιος ὁ Ἀϊνστάϊν γράφει εἰς τελευταίαν πραγματείαν αὐτοῦ περὶ τῆς βαρύτητος καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἑξῆς: «Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ παρουσιάσω μίαν προσπάθειαν ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος τούτου (τῆς βαρύτητος) ἡ ὁποία μοῦ φαίνεται ἐξόχως πειστική, καίτοι λόγῳ τῶν μαθηματικῶν δυσκολιῶν, δὲν εὗρον ἀκόμη τρόπον νὰ ἐπιβεβαιώσω τ' ἀποτελέσματα τῆς θεωρίας διὰ τοῦ πειράματος (A. Einstein: The meaning of relativity . . . . . 1950, σ. 134)». n

Καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω διατυπουμένην γνώμην τοῦ D. Hilbert, καθ' ἣν ἡ παρατήρησις καὶ ἡ πεῖρα πρέπει ν' ἀποφανθοῦν ἐν προκειμένῳ, ἡ θεωρία περὶ βαρύτητος καὶ ἡ ἐλλειπτικὴ γεωμετρία τοῦ Riemann τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀϊνστάϊν, δὲν ἰσχύουν ἀκόμη εἰς τὴν πραγματικότητα.

Ἀσχέτως ὅμως πρὸς τὸ γεγονός, ὅτι τὰ πράγματα δὲν ἐπιβεβαιοῦν ἀκόμη τὰ διάφορα εἴδη τῶν μὴ εὐκλειδείων γεωμετριῶν, ἡ ἑλληνικὴ γεωμετρία, ἡ λεγομένη ὑπὸ τῶν νεωτέρων εὐκλείδειος, θὰ παραμένῃ ὡς ἓν τῶν μοναδικῶν καὶ ὑπερόχων δημιουργημάτων τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος.

α΄.

Ὅροι.

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε΄. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι΄. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

ια΄. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ΄. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ιϛ΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ΄. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα΄. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ι.

Ὁρισμοί.

1. Σημεῖον εἶναι πᾶν ὅ,τι δὲν ἔχει μέρος.
2. Γραμμὴ δὲ εἶναι μῆκος ἄνευ πλάτους.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα εἶναι σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰ ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖα.
5. Ἐπιφάνεια δὲ εἶναι ὅ,τι ἔχει μόνον μῆκος καὶ πλάτος.
6. Τῆς δὲ ἐπιφανείας τὰ πέρατα εἶναι γραμμαί.
7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἐξ ἴσου πρὸς τὰς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείας.
8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία εἶναι ἡ εἰς ἐπίπεδον κλίσις πρὸς ἀλλήλας δύο γραμμῶν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, αἱ ὁποῖαι ἅπτονται μεταξύ των.
9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖαι, ἡ γωνία καλεῖται εὐθύγραμμος.
10. Ὅταν δὲ εὐθεῖα, ἀφοῦ σταθῇ ἐπ' εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ σταθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται κάθετος ἐπὶ ἐκείνην, ἐπὶ τὴν ὁποίαν ἐστάθη.
11. Ἀμβλεῖα γωνία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς.
12. Ὀξεῖα δὲ ἡ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς.
13. Ὅριον εἶναι ὅ,τι εἶναι πέρας τινος.
14. Σχῆμα εἶναι τὸ περιεχόμενον ὑπό τινος ὁρίου ἤ τινων ὁρίων.
15. Κύκλος εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς (ἡ ὁποία καλεῖται περιφέρεια), πρὸς τὴν ὁποίαν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκ τῶν κειμένων ἐντὸς τοῦ σχήματος, ὅλαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι (πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου) εἶναι μεταξύ των ἴσαι.
16. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται κέντρον τοῦ κύκλου.
17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη.
18. Ἡμικύκλιον καλεῖται τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν διάμετρον. Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κέντρον τοῦ κύκλου.
19. Σχήματα εὐθύγραμμα εἶναι τὰ περιεχόμενα ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ περισσοτέρων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν.
20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον ἴσας τὰς τρεῖς πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ἔχον μόνον τὰς δύο πλευρὰς ἴσας, σκαληνὸν δὲ τὸ ἔχον τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους.
21. Ἀκόμη δὲ ἐκ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον εἶναι

ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα.

α'. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

[δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ϛ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν].

ζ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

η'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστιν].

[θ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν].

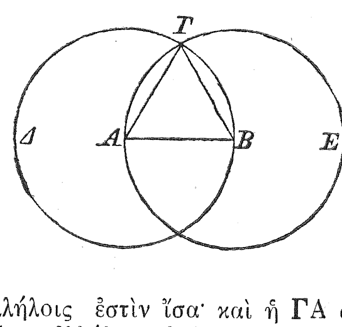
α'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ ἔχον τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας.

22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ὀρθογώνιον ἀλλ' ὄχι ἰσόπλευρον, ῥόμβος δέ, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι μὲν ἰσόπλευρον ἀλλ' ὄχι ὀρθογώνιον, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, τὸ ὁποῖον οὔτε ἰσόπλευρον εἶναι οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ ἐκτὸς τούτων τετράπλευρα ἂς καλοῦνται τραπέζια.

23. Παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ προεκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον ἀπὸ τὰ δύο μέρη δὲν συμπίπτουν ἀπὸ κανὲν μέρος.

Αἰτήματα.

1. Ἂς αἰτεῖται ὅτι ἀπὸ παντὸς σημείου εἰς πᾶν σημεῖον δύναται ν' ἄγεται εὐθεῖα γραμμή.

2. Καὶ ὅτι πεπερασμένη εὐθεῖα δύναται νὰ προεκτείνεται συνεχῶς καὶ εὐθυγράμμως.

3 Καὶ ὅτι μὲ πᾶν κέντρον καὶ πᾶσαν ἀκτῖνα δύναται νὰ γράφεται κύκλος.

4. Καὶ ὅτι ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

5. Καὶ ἐὰν εὐθεῖα τέμνουσα δύο εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι προεκταθοῦν ἐπ' ἄπειρον, θὰ συμπίπτουν πρὸς τὰ μέρη ὅπου σχηματίζονται αἱ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν γωνίαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

2. Καὶ ἐὰν εἰς ἴσα προστεθοῦν ἴσα τὰ προκύπτοντα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθοῦν ἴσα, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

[4. Καὶ ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθοῦν ἴσα, τὰ προκύπτοντα εἶναι ἄνισα.

5. Καὶ τὰ διπλάσια τοῦ αὐτοῦ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

6. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση εἶναι μεταξύ των ἴσα.]

7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα εἶναι ἴσα μεταξύ των.

8. Καὶ τὸ ὅλον (εἶναι) μεγαλύτερον τοῦ μέρους.

[9. Καὶ δύο εὐθεῖαι δὲν περικλείουν ἐπιφάνειαν.]

1.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ἔστω ἡ πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Μὲ κέντρον μὲν τὸ Α ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος, ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον μὲν τὸ Β, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΒΑ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται μεταξύ των οἱ κύκλοι ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΒ, ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΑΕ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

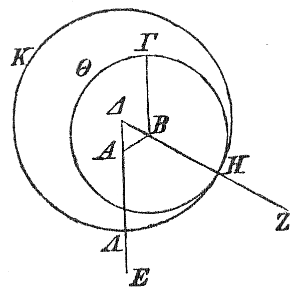
Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ κατεσκευάσθη ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας τῆς ΑΒ.

['Επὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

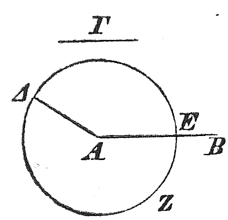
Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω, ὅτι καὶ βά-

(Ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας κατεσκευάσθη ἰσόπλευρον τρίγωνον)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Ἐπὶ δοθέντος σημείου νὰ τοποθετηθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· ζητεῖται νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ.

Διότι ἂς ἑνωθῇ τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ σημεῖον Β διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΗ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΗΚΛ.

Επειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Β εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΗΘ, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΚΛ, ἡ ΔΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, τὰ μέρη δὲ τούτων ΔΑ, ΔΒ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Καὶ αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι ΑΛ, ΒΗ θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΛ, ΒΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα· ἄρα καὶ ἡ ΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου Α κεῖται ἡ εὐθεῖα ΑΛ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Ἐὰν δοθοῦν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ν' ἀφαιρεθῇ ἐκ τῆς μεγαλυτέρας, εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, τῶν ὁποίων ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ· ζητεῖται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν εὐθεῖαν τὴν Γ.

Ἂς ληφθῇ ἀπὶ τοῦ σημείου Α ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἴση πρὸς τὴν Γ καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Α ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΔ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΔΕΖ.

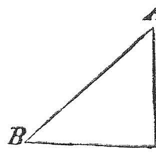
Καὶ ἐπειδή, τὸ σημεῖον Α εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΕΖ, ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ. Ἄρα ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΑΕ, Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

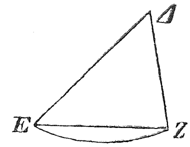
Ἐνῷ λοιπὸν ἐδόθησαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ ἀφῃρέθη ἐκ τῆς μεγαλυτέρας ΑΒ, ἡ ΑΕ ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἔχουν τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχουν καὶ τὰς βάσεις ἴσας καὶ τὸ ἓν τρίγωνον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τούτων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΔΕ, ΔΖ τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ. Λέγω, ὅτι σις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.





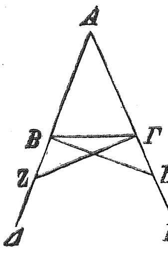
᾿Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

᾿Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

῎Εστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.



εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα καὶ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, ἤτοι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ τότε καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Ε, διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ· ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΑΒ ἐφήρμοσε ἐπὶ τῆς ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἐπὶ τῆς ΔΖ, διότι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ σημεῖον Γ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, διότι ἐπίσης ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ. Ἀλλ᾽ ὅμως ἔχει ἤδη τὸ σημεῖον Β ἐφαρμόσει ἐπὶ τοῦ Ε· ὥστε ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ. Διότι, ἐὰν μὲν τὸ σημεῖον Β ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ε τὸ δὲ σημεῖον Γ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ, ἡ δὲ βάσις ΒΓ δὲν ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, δύο εὐθεῖαι περιέχουν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἀδύνατον (κοιναὶ ἔνν. 9). Ἄρα ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτὴν (κοιναὶ ἔνν. 7)· ὥστε καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐφ᾽ ὁλοκλήρου τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ ἐφαρμόσουν ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου καὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτάς, ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ ἡ δὲ ΑΓΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, θὰ ἔχουν ἴσας καὶ τὰς βάσεις (τὴν τρίτην πλευρὰν) καὶ τὸ ἓν τρίγωνον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου τριγώνου ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ἐὰν προεκβληθοῦν αἱ ἴσαι πλευραὶ αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται κάτωθεν τῆς βάσεως εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῶν προεκβολῶν τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ αἱ εὐθεῖαι ΒΔ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ ἡ δὲ γωνία ΓΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΕ.

Διότι, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἡ ὁποία λαμβάνεται μεγαλυτέρα τῆς ΑΖ, ἡ ἴση πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ ΑΗ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΓ, ΗΒ (θεώρ. 3).

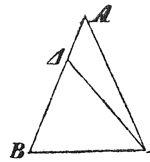
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, αἱ δύο πλευραὶ ΖΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΗΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ περιέχουν αὗται τὴν κοινὴν γωνίαν ΖΑΗ· ἡ βάσις ἄρα ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΗΒ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴσαι, ἡ μὲν γωνία ΑΓΖ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΗ ἡ δὲ ΑΖΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΗΒ (θεώρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ὅλη ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΗ καὶ τὰ μέρη τούτων ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη ΒΖ, ΓΗ θὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των (κ. ἔνν. 3). Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΒ· αἱ δύο λοιπὸν πλευραὶ ΒΖ, ΖΓ εἶναι ἴσαι ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· καὶ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.



εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

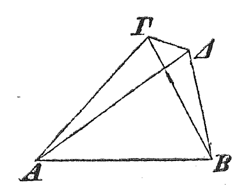
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ΄.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΓΗ, ΗΒ, ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΒ καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΒΓ εἶναι κοινή· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΒΖΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΒ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τῶν τριγώνων αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΓΒ ἡ δὲ ΒΓΖ πρὸς τὴν ΓΒΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐδείχθη, ὅτι ὅλη ἡ γωνία ΑΒΗ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν γωνίαν ΑΓΖ καὶ τὰ μέρη τῶν γωνιῶν τούτων, ἤτοι αἱ γωνίαι ΓΒΗ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ὑπόλοιπα μέρη θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· εἶναι δὲ αὗται παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΓΒ· καὶ εἶναι αὗται ὑπὸ τὴν βάσιν.

Ἄρα τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐὰν προεκβληθοῦν αἱ ἴσαι πλευραί, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ μία ἐκ τούτων θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης. Ἔστω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας ΑΒ ἡ ΔΒ, ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν ΑΓ (θεώρ. 3) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο πλευραὶ αἱ ΔΒ, ΒΓ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ καὶ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΒ· ἄρα ἡ βάσις ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ (θεώρ. 4) δηλ. τὸ μικρότερον τρίγωνον, ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα δὲν θὰ εἶναι ἡ ΑΒ ἄνισος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα εἶναι ἴση.

Ἐὰν ἄρα αἱ δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἔχουν ἀχθῇ πρὸς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας δύο εὐθεῖαι, δὲν εἶναι δυνατὸν ν' ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου, δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀχθείσας, αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας καὶ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα, ὅπως αἱ ἀρχικαὶ εὐθεῖαι.

Διότι ἔστω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὴν ὁποίαν ἐκ τοῦ σημείου Γ ἔχουν ἀχθῇ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΓΒ, νὰ ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου Δ δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀχθείσας ἐκ τοῦ σημείου Γ αἱ ΑΔ, ΔΒ κείμεναι ὅλαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἔχουσαι τὰ αὐτὰ πέρατα, ὥστε ἡ ΓΑ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑ, ἐνῷ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πέρας Α καὶ ἡ ΓΒ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἐνῷ αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πέρας Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ.

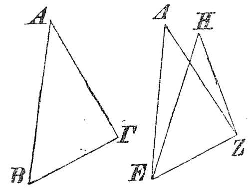
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΔΓ (θεώρ. 5)· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΓΒ (κ. ἔννοιαι 8)· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ γωνία ΓΔΒ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση.



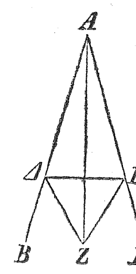
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τετμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γωνίας ΔΓΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΓΔΒ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΒ (θεώρ. 5). Ἐδείχθη ὅμως, ὅτι αὕτη (ἡ ΓΔΒ) εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἄρα, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δὲν εἶναι δυνατόν, ἐὰν ἔχουν ἀχθῆ δύο εὐθεῖαι ἐκ σημείου ἐκτὸς τῆς εὐθείας πρὸς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας, ν' ἀχθοῦν ἐξ ἄλλου σημείου δύο ἄλλαι εὐθεῖαι, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἀρχικάς, αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας καὶ νὰ ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὰς ἀρχικὰς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων ἀντιστοίχως πλευρῶν θὰ εἶναι ἴση.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ· ἂς ἔχουν δὲ καὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ. λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Ε, ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ, τὸ σημεῖον Γ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σημείου Ζ, διότι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοίχως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Διότι, ἐὰν ἡ μὲν βάσις ΒΓ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ, αἱ δὲ πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ δὲν ἐφαρμόσουν ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΕΔ, ΔΖ, ἀλλὰ λάβουν ἄλλας θέσεις, ὡς τὰς ΕΗ, ΗΖ, τότε θὰ ἔχουν ἀχθῆ εἰς τὰ πέρατα τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐκ δύο διαφορετικῶν σημείων, κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, δύο εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς ἄλλας δύο εὐθείας ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν (θεώρ. 7)· ἄρα ἀποκλείεται νὰ μὴ ἐφαρμόσουν αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ, ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ ἀντιστοίχως, ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ. Ἄρα θὰ ἐφαρμόσουν. ὥστε καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας ΕΔΖ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΒΑΓ. Πρέπει νὰ διχοτομήσωμεν αὐτήν.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς ΔΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχει διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΖ.

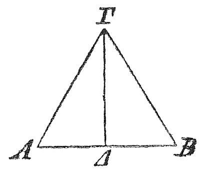
Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΔΑ, ΑΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΑ, ΑΖ. Καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΑΖ (θεώρ. 8).

Ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθύγραμμος γωνία ΒΑΓ ἔχει διχοτομηθῆ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

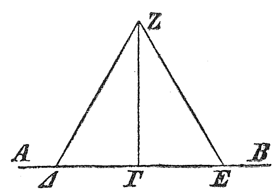
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΔ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

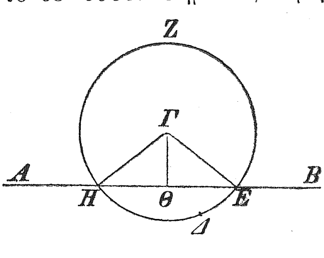
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν· καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὅ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

VERITAS IUSTITIA LIBERTAS · PHILOSOPHISCH. SEMINAR · FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

10.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν ΑΒ νὰ διχοτομήσωμεν.

Ἂς κατασκευασθῇ ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διχοτομεῖται κατὰ τὸ σημεῖον Δ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, ἡ δὲ ΓΔ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΓΔ, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ (θεώρ. 4).

Ἡ δοθεῖσα ἄρα πεπερασμένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀπὸ σημείου δοθέντος ἐπ' αὐτῆς, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Γ· πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εὐθεῖα ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ ὀρθὰς γωνίας.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΖΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ (ἀχθῇ) ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Γ ἡ εὐθεῖα ΖΓ ἤχθη σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΓΖ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΔΓ, ΓΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΓ, ΓΖ· καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΕ· ἄρα ἡ γωνία ΔΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΖ (θεώρ. 8)· καὶ εἶναι αὗται ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἄγεται ἐξ εὐθείας σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ (όρ. 10)· ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΔΓΖ, ΖΓΕ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Γ ἤχθη ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΖ σχηματίζουσα ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Ἐπὶ δοθείσης ἀπεριορίστου εὐθείας, ἀπὸ δοθέντος σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· πρέπει ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος.

Διότι, ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους τῆς εὐθείας ΑΒ, τυχὸν σημεῖον τὸ Δ καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Γ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΓΔ ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΕΖΗ, (αἴτ. 3) καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ εὐθεῖα ΕΗ (θεώρ. 10) κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν ἀπεριόριστον δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἤχθη κάθετος ἡ ΓΘ.

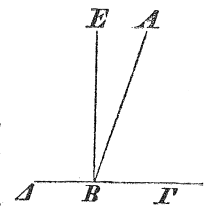
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση· καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.



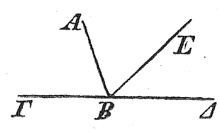
Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δε τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.



Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕ, ἡ δὲ ΘΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΗΘ, ΘΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΕΘ, ΘΓ· καὶ ἡ βάσις ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΕ· ἄρα ἡ γωνία ΓΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΓ (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι αὗται ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀχθῇ ἐξ εὐθείας σχηματίζουσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν ὁποίαν ἤχθη (ὅρ. 10).

Ἄρα ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Γ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἤχθη κάθετος ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Ἐὰν εὐθεῖα ἀγομένη ἐπὶ εὐθεῖαν σχηματίζει γωνίας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἢ δύο ὀρθαὶ ἢ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Διότι ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ ἂς σχηματίζῃ μετ' αὐτῆς τὰς γωνίας ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΓΒΑ, ΑΒΔ ἢ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί, ἢ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἐὰν μὲν ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, αὗται εἶναι δύο ὀρθαὶ (ὁρ. 10). Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τὴν (εὐθεῖαν) ΓΔ κάθετος ἡ ΒΕ (θεώρ. 11)· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι δύο ὀρθαί· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ γωνία ΕΒΔ· αἱ γωνίαι ἄρα ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ΔΒΕ, ΕΒΑ, ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ γωνία ΑΒΓ· ἄρα αἱ ΔΒΑ, ΑΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι πρὸς τὰς αὐτὰς τρεῖς γωνίας· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἶναι ἴσα (κ. ἔν. 1)· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι ΓΒΕ, ΕΒΔ, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΔΒΑ, ΑΒΓ· ἀλλὰ αἱ ΓΒΕ, ΕΒΔ εἶναι δύο ὀρθαί· ἄρα καὶ αἱ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, ἀχθεῖσα ἐπὶ εὐθεῖαν σχηματίζει γωνίας, αὗται ἢ θὰ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαὶ ἢ τὸ ἄθροισμά των θὰ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν ἔκ τινος εὐθείας καὶ ἐκ σημείου ἐπ' αὐτῆς κειμένου ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι, μὴ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς εὐθείας ΑΒ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, καὶ ἂς σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ἡ ΓΒ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΔ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΒΓ, ἔστω, ὅτι ἡ ΒΕ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ.

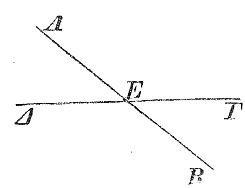
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒΕ, ἔπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΕ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς (θεώρ. 13)· εἶναι δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ ΓΒΑ, ΑΒΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΓΒΑ, ΑΒΔ (κ. ἔν. 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἐκ τούτων ἡ κοινὴ γωνία ΓΒΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

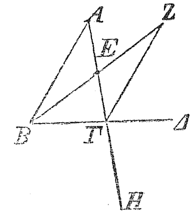
[Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν.]

ις΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.



Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα

ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον ΑΒΔ (κ.ἔν. 3), ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΒΕ δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν ΓΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ὑπάρχει πλὴν τῆς ΒΔ· ἄρα ἡ ΓΒ καὶ ἡ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα ἐκ σημείου εὐθείας τινος ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι κείμεναι οὐχὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας, καὶ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μὲ δύο ὀρθάς, αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, σχηματίζουν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας.

Διότι ἂς τέμνωνται μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΒ, ἡ δὲ ΓΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΕ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ σχηματίζουσα μετ' αὐτῆς ἐφεξῆς τὰς γωνίας ΓΕΑ, ΑΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 13). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ σχηματίζουσα ἐφεξῆς τὰς γωνίας ΑΕΔ, ΔΕΒ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ ἔχουσαι ἄθροισμα δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ ΓΕΑ, ΑΕΔ, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΑΕΔ, ΔΕΒ (κ. ἔν. 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΑΕΔ· ἄρα, ἡ ὑπόλοιπος ΓΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπόλοιπον ΒΕΔ (κ. ἔν. 3)· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ΓΕΒ, ΔΕΑ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, σχηματίζουν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα**

Ἐκ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, θὰ σχηματίσουν τὰς πρὸς τὴν τομὴν γωνίας ἴσας μὲ τέσσαρας ὀρθάς].

16.

Παντὸς τριγώνου ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἂς προεκβληθῇ μία πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τῶν ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Ε (θεώρ. 10), καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΒΕ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ σημείου Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΑΓ μέχρι τοῦ Η.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΓΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΓ· διότι εἶναι κατὰ κορυφὴν (θεώρ. 15)· ἄρα ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΕΓ, καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι τούτων αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι (θεώρ. 4)· ἄρα ἡ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

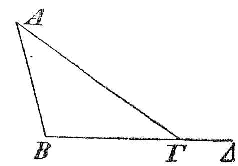
Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.



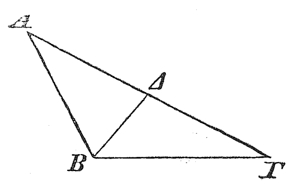
Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΓΖ. Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΕΓΔ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΓΖ· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΕ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν ἡ ΒΓ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον καὶ ἡ γωνία ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ΑΓΔ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου, ἐὰν προεκβληθῇ ἡ μία τῶν πλευρῶν, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται αὗται.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ δύο γωνίαι, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται αὗται, εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν.

Διότι, ἃς προεκβληθῇ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τῆς ΑΒΓ (θεώρ. 16). Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας γωνίας ἡ κοινὴ γωνία ΑΓΒ· αἱ γωνίαι ἄρα ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΑΒΓ, ΒΓΑ. Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΑ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΓΒ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν καὶ τὸ αὐτὸ διὰ τὰς γωνίας ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

Διότι ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΓ μεγαλυτέραν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ΒΓΑ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ, ἃς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (θεώρ. 2), καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΒΔ.

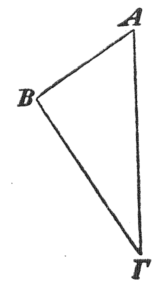
Καὶ ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἐξωτερική, εἶναι αὕτη μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΔΓΒ· εἶναι δὲ ἡ γωνία ΑΔΒ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΒ· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΓΒ (κοιν. ἔν. 8).

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα γωνία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.



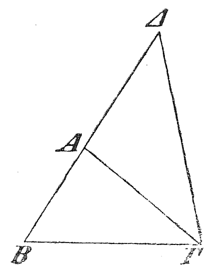
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς

19.

Παντὸς τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΑΒΓ μεγαλυτέραν τῆς ΒΓΑ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἡ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ ἢ μικροτέρα· ἴση ὅμως δὲν εἶναι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ· διότι ἂν ἦτο ἴση καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ (θεώρ. 5)· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλ' οὔτε μικροτέρα εἶναι ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· διότι ἐὰν ἦτο μικροτέρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ΑΓΒ· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ ΑΓ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΒ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε ἴση εἶναι. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης.

Διότι, ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο πλευραὶ καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διότι, ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Δ ἡ ΒΑ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ πρὸς τὴν ΑΓΔ (θεώρ. 5)· ἄρα ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΔΓ (κ. ἔν. 8)· καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΓΒ εἶναι τρίγωνον ἔχον τὴν γωνίαν ΒΓΔ μεγαλυτέραν τῆς ΒΔΓ, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρά, ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΓ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΓ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΓΑ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

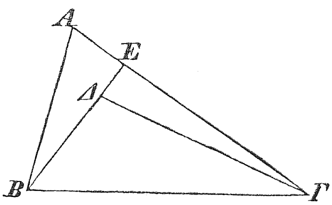
Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραί, καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται, αἱ ἀχθεῖσαι θὰ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ περιέχουν δὲ μεγαλυτέραν γωνίαν.

Διότι ἔστω, ὅτι ἐκ τῶν ἄκρων Β,Γ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἤχθησαν δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι μὲν μικρότεραι, θὰ περιέχουν δὲ γωνίαν τὴν ΒΔΓ μεγαλυτέραν τῆς ΒΑΓ.

Διότι, ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΔ μέχρι τοῦ σημείου Ε. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώλοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν· πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

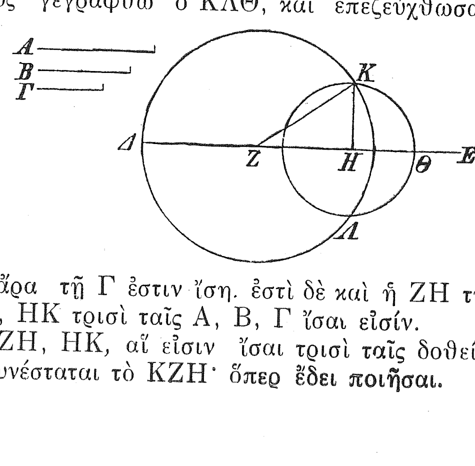
Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας.]

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

νου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης πλευρᾶς (θεώρ. 20), αἱ δύο πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, αἱ ΑΒ, ΑΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΕ. Ἂς προστεθῇ εἰς ταύτας ἡ κοινὴ ΕΓ· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΕ, ΕΓ (κ. ἔν. 4). Πάλιν, ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΓΕΔ αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΓΔ, ἂς προστεθῇ εἰς ταύτας ἡ κοινὴ ΔΒ· ἄρα αἱ ΓΕ, ΕΒ, εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΓΔ, ΔΒ. Ἀλλὰ αἱ ΒΑ, ΑΓ ἐδείχθησαν μεγαλύτεραι τῶν ΒΕ, ΕΓ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΔ, ΔΓ.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι (θεώρ. 16), ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΔΓ τοῦ τριγώνου ΓΔΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΕΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΓΕΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΔΓ ἐδείχθη μεγαλυτέρα τῆς ΓΕΒ· ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθοῦν ἐντὸς αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ὥστε νὰ τέμνωνται, αὗται θὰ εἶναι μικρότεραι μὲν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ περιέχουν δὲ μεγαλυτέραν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τρεῖς δοθείσας [εὐθείας] νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· πρέπει δὲ αἱ δύο εὐθεῖαι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης [διότι αἱ δύο πλευραὶ τριγώνου καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης πλευρᾶς].

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ Α, Β, Γ τῶν ὁποίων αἱ δύο καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης, αἱ μὲν Α, Β μεγαλύτεραι τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β καὶ αἱ Β, Γ τῆς Α· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἴσων εὐθειῶν πρὸς τὰς Α,Β,Γ.

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ μὲν ΔΖ ἴση πρὸς τὴν Α, ἡ δὲ ΖΗ ἴση πρὸς τὴν Β, ἡ δὲ ΗΘ ἴση πρὸς τὴν Γ· καὶ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον μὲν τὸ Ζ, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΖΔ, ὁ ΔΚΛ· μὲ κέντρον πάλιν τὸ Η καὶ ἀκτῖνα τὴν ΗΘ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΚΛΘ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν (τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΘ) τῶν ἴσων πρὸς τὰς Α, Β, Γ κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον ΚΖΗ.

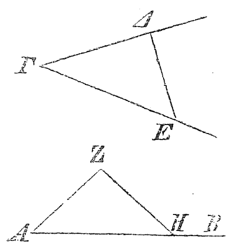
Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΚΛ, ἡ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (κ. ἔν. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΛΚΘ, ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ· ἄρα καὶ ἡ ΚΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΗ ἴση πρὸς τὴν Β· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς Α,Β,Γ.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας, τὰς Α,Β,Γ, κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστιν ἴση.

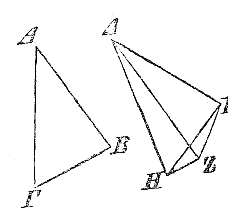
Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν

23.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ ἐκ δοθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμος γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΔΓΕ· πρέπει ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου Α νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμος γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΔΓΕ.

Ἂς ληφθοῦν ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν τῶν ΓΔ, ΓΕ τὰ τυχόντα σημεῖα Δ, Ε καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ· καὶ ἂς κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἡ μὲν ΓΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ δὲ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἡ ΔΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΗ (θεώρ. 22).

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΔΓ, ΓΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΖΑ, ΑΗ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΗ, ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΑΗ (θεώρ. 8).

Ἄρα ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ δοθέντος ἐπ' αὐτῆς σημείου Α, κατεσκευάσθη εὐθύγραμμος γωνία ἡ ΖΑΗ, ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΔΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

24.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωνία τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ βάσις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης βάσεως.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ καὶ ἂς εἶναι ἡ γωνία Α μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΕΖ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΕ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Δ γωνία ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ, ἡ ΕΔΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΔΗ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΖ καὶ ἂς ἐπιζευχθοῦν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

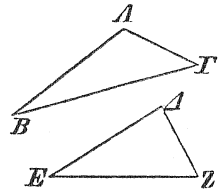
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΗ, αἱ δύο πλευραὶ ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο ΕΔ, ΔΗ· καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΗ· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ, ἡ γωνία ΔΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΗ· ἄρα ἡ γωνία ΔΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΗΖ (κ. ἔν. 8)· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ γωνία ΕΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΕΖΗ εἶναι τρίγωνον ἔχον τὴν γωνίαν ΕΖΗ μεγαλυτέραν τῆς ΕΗΖ, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ (θεωρ. 19), ἔπεται, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΕΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΗ ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ γωἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.



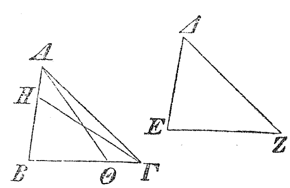
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν· ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι νία τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστοίχου γωνίας τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ βάσις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης βάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης γωνίας.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ· ἂς εἶναι δὲ ἡ βάσις ΒΓ μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα· ἴση ὅμως δὲν εἶναι ἡ γωνία ΒΑΓ πρὸς τὴν ΕΔΖ· διότι ἐὰν ἦτο ἴση, θὰ ἦτο ἴση καὶ ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (θεώρ. 4)· ἀλλὰ δὲν εἶναι. Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ· ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ μικροτέρα ἡ ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ· διότι, ἐὰν ἦτο, καὶ ἡ βάσις ΒΓ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς βάσεως ΕΖ (θεώρ. 24)· ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΔΖ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε ἴση εἶναι· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ ἄλλου, καὶ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ἤτοι τὴν πλευρὰν εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι ἢ μίαν πλευρὰν ἴσην κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας [ἀντιστοίχως] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπήν γωνίαν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ΔΕΖ, ΕΖΔ, τὴν μὲν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕΖ, τὴν δὲ ΒΓΑ ἴσην πρὸς τὴν ΕΖΔ· ἂς ἔχουν δὲ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἐν πρώτοις τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν ΕΖ, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι λέγω, ὅτι θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΑΒ ἴσην πρὸς τὴν ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν, ἤτοι τὴν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω ἡ ΑΒ μεγαλυτέρα καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΒΗ, ΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΔΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ καὶ τὸ τρίγωνον ΗΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

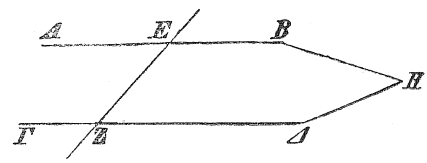
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω, ὅτι παρήλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ᾽ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ·



εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπάς, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (θεώρ. 4)· ἄρα ἡ γωνία ΗΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ (κ. ἔν. 1), ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν (κ. ἔν. 8)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΔΕ. Ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ· δύο λοιπὸν πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν τὴν ΕΔΖ (θεώρ. 4).

Ἀλλὰ πάλιν ἔστωσαν αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ ἴσαι ὅπως ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἄλλας, ἡ μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, εἰ δυνατόν, ὅτι μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΘ. Καὶ ἐπειδή, ἡ μὲν ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσαι πρὸς ἄλλας δύο ἀντιστοίχως τὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ περιέχουν αὗται γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ συνεπῶς αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, ἐκεῖναι ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραί· ἄρα ἡ γωνία ΒΘΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖΔ. Ἀλλὰ ἡ ΕΖΔ εἶναι ἴση πρὸς ΒΓΑ· ἤτοι τοῦ τριγώνου ΑΘΓ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΒΘΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὴν ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον (θεώρ. 16). Ἄρα δὲν εἶναι ἄνισος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα εἶναι ἴση. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ. Ὑπάρχουν δὲ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ· καὶ περιέχουν γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν πλευρὰν εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἢ μίαν πλευρὰν ἴσην κειμένην ἀπέναντι τῆς μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

Διότι, ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἂς γίνωνται αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, προεκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ θὰ συμπέσουν ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Α, Γ. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ εἰς τὸ σημεῖον Η. Τότε, τοῦ τριγώνου ΗΕΖ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΕΖΗ· ὅπερ ἀδύνατον (θεώρ. 16)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ προεκβαλλόμεναι δὲν θὰ συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν θὰ συμπέσουν οὐδὲ πρὸς τὸ μέαἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

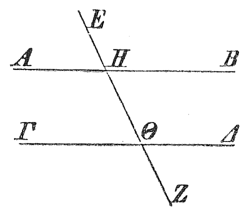
Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



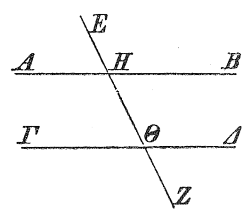
Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ᾿ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα.

ρος τῶν Α, Γ· αἱ εὐθεῖαι ὅμως αἱ ὁποῖαι δὲν συμπίπτουν πρὸς κανὲν μέρος εἶναι παράλληλοι· ἄρα ἡ ΑΒ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας, ὥστε ἡ ἐκτὸς γωνία νὰ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Διότι ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἂς γίνεται ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΗΒ ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι (καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη) τὴν ΗΘΔ ἢ ἂς γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΗΘ (θεώρ. 15), ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 1)· αὗται ὅμως εἶναι ἐναλλάξ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, ἐπίσης δὲ καὶ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 13), ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 1)· ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ γωνία ΒΗΘ· ἄρα ἡ λοιπὴ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν 3)· αὗται ὅμως εἶναι ἐναλλάξ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θεώρ. 27).

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθείας ὥστε ἡ ἐκτὸς γωνία νὰ γίνεται ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἢ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι νὰ γίνωνται ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει παραλλήλους εὐθείας σχηματίζει καὶ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἂς τμήσῃ ἡ εὐθεῖα ΕΖ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αὕτη σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΕΗΒ ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΗΘΔ καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΗΘ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΗΘΔ, τότε μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, ὅτι μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΑΗΘ· ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην ἐκ τούτων ἡ γωνία ΒΗΘ· ἄρα αἱ ΑΗΘ, ΒΗΘ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΗΘ, ΒΗΘ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 13).

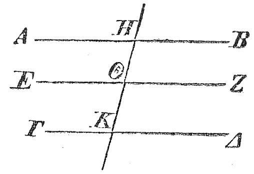
Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, ὅταν προεκβληθοῦν εἰς τὸ ἄπειρον συμπίπτουν (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον θὰ συμπέσουν· ἀλλὰ δὲν συμπίπτουν, διότι ἐλήφθησαν παράλληλοι· ἄρα ἡ γωνία ΑΗΘ δὲν εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΗΘΔ· ἄρα εἶναι ἴση. Ἀλλὰ ἡ ΑΗΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.



Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

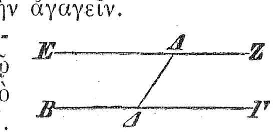
Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι·] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον το ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

ΕΗΒ (θεώρ. 15)· ἄρα καὶ ἡ ΕΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΔ (κ. ἔν. 1). Ἄς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΒΗΘ· ἄρα αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΗΘ, ΗΘΔ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ ΕΗΒ, ΒΗΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 13)· ἄρα καὶ αἱ ΒΗΘ, ΗΘΔ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἄρα, ὅταν εὐθεῖα τέμνῃ παραλλήλους εὐθείας σχηματίζει καὶ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας καὶ τὴν ἐκτὸς ἴσην πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἔστω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι, ἂς τμήσῃ αὐτὰς ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΕΖ, ἡ γωνία ΑΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΖ (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΚ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΖ, ΓΔ, ἡ γωνία ΗΘΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚΔ (θεώρ. 29). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΗΚ ἴση πρὸς τὴν ΗΘΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΑΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚΔ (κ. ἔν. 1)· καὶ εἶναι αὗται ἐναλλάξ. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (θεώρ. 27).

[Αἱ παράλληλοι ἄρα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Διὰ δοθέντος σημείου, ν' ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· πρέπει διὰ τοῦ σημείου Α ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

Ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΑ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Α ἡ γωνία ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΔΓ (θεώρ. 23)· καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΕΑ ἡ εὐθεῖα ΑΖ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ τέμνει τὰς δύο εὐθείας ΒΓ, ΕΖ καὶ σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας, ἕπεται, ὅτι ἡ ΕΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 27).

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α ἤχθη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΒΓ ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

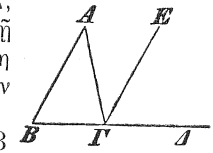
32.

Εἰς πᾶν τρίγωνον, ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία πλευρά, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ σημείου Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνίας, τὰς ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Διότι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΕ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.



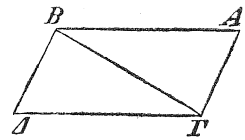
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



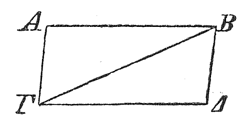
Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΒΑΓ, ΑΓΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΕΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΑΒΓ (θεώρ. 29). Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ἡ ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΓΔ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὰς ΒΑΓ, ΑΒΓ (κ. ἔν. 2).

Ἂς προστεθῇ εἰς αὐτὰς ἡ κοινὴ ΑΓΒ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 13)· ἄρα καὶ αἱ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

Παντὸς ἄρα τριγώνου, ὅταν προεκβληθῇ ἡ μία πλευρά, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι καὶ αὗται ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἂς ἑνώνουν αὐτὰς πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ, 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ· ἄρα ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΒΔ (θεώρ. 4), Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΓ τέμνουσα τὰς εὐθείας ΑΓ, ΒΔ σχηματίζει τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ. (θεώρ. 27). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἴση πρὸς αὐτήν.

Ἄρα, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας καὶ παραλλήλους εὐθείας εἶναι καὶ αὗται ἴσαι καὶ παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34

Τῶν παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἡ διαγώνιος τέμνει αὐτὰ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΓΔΒ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (θεώρ. 29). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΓΒ, ΓΒΔ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς δύο γωνίας ΑΒΓ, ΒΓΑ ἀντιστοίδυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

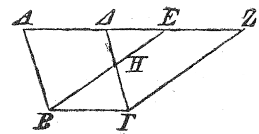
Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστιν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ χως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας ΒΓΔ, ΓΒΔ καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν κοινὴν πλευρὰν ἐφ' ἧς πρόσκεινται αἱ ἴσαι γωνίαι τὴν ΒΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν λοιπὴν γωνίαν (θεώρ. 26)· ἄρα ἡ μὲν πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ, καὶ προσέτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΒ. Καὶ ἐπειδή, ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ, ἡ δὲ ΓΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΒ, ἕπεται, ὅτι ὅλη ἡ ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΓΔ (κ. ἔν. 2). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΓΔΒ.

Ἄρα τῶν παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ἡ διαγώνιος τέμνει αὐτὰ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΓΔ, ΒΓ ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΓΔ, (θεώρ. 29). Ἄρα καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ. Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ (θεώρ. 4).

Ἄρα ἡ διαγώνιος ΒΓ τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς δύο ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΖ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 34). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ (κ. ἔν. 1)· καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κοινή· ἄρα ὅλη ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ (κ. ἔν. 2). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΔΓ (θεώρ. 34)· δύο λοιπὸν πλευραί, αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΔ, ΔΓ· καὶ ἡ γωνία ΖΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΑΒ, ἡ ἐκτὸς πρὸς τὴν ἐντὸς (θεώρ. 29). ἄρα ἡ βάσις ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΕΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΖΓ (θεώρ. 4)· ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν τρίγωνον ΔΗΕ· ἄρα τὸ ἀπομένον τραπέζιον ΑΒΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπομένον τραπέζιον ΕΗΓΖ (κ. ἔν. 3)· ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν τρίγωνον ΗΒΓ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΓΖ.

Τὰ παραλληλόγραμμα ἄρα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

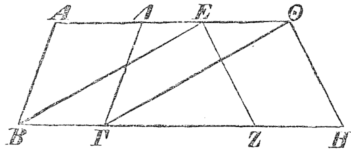
36.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἔχοντα τὰς ἴσας βάσεις ΒΓ, ΖΗ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΘ, ΒΗ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΘ. Καὶ ἐπειδή, ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ

ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστ ν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι [καὶ αἱ ΕΒ, ΘΓ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι]. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστιν ἴσον.

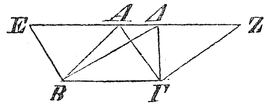


Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.



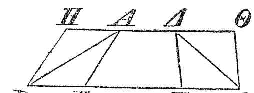
Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καὶ εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ (κ. ἔν. 1). Εἶναι δὲ καὶ παράλληλοι. Καὶ ἑνώνουν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ ἑνοῦσαι ὅμως πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι [ἄρα καὶ αἱ ΕΒ, ΘΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι]. (θεώρ. 33). Ἄρα τὸ ΕΒΓΘ εἶναι παραλληλόγραμμον (θεώρ. 34). Καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ· διότι ἔχει πρὸς αὐτὸ τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ, καὶ εἶναι μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΓ, ΑΘ (θεώρ. 35). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ ΕΒΓΘ (θεώρ. 35)· ὥστε καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ (κ. ἔν. 1).

Ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ.

Ἂς προεκβληθῇ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἡ ΑΔ πρὸς τὰ Ε, Ζ καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ (θεώρ. 31). Ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· καὶ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΕΖ (θεώρ 35)· καὶ εἶναι τοῦ μὲν παραλληλογράμμου ΕΒΓΑ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἥμισυ· διότι ἡ διαγώνιος ΑΒ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη· (θεώρ. 34)· τοῦ δὲ παραλληλογράμμου ΔΒΓΖ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ· διότι ἡ διαγώνιος ΔΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη. [Τὰ δὲ ἡμίση τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα.

Ἔστω τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχοντα ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΕΖ καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΖ, ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Διότι, ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΔ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς μέχρι τῶν σημείων Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ (θεώρ. 31). Ἄρα ἕκαστον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον· καὶ τὸ ΗΒΓΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΕΖΘ· διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΕΖ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ΒΖ, ΗΘ (θεώρ. 36)· καὶ εἶναι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΓΑ. Διότι ἡ διαγώνιος ΑΒ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34)· τὸ δὲ τρίγωνον ΖΕΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΕΖΘ· διότι ἡ διαγώνιος μου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

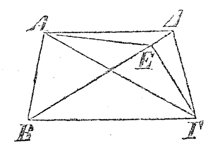
Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστι παράλληλος.

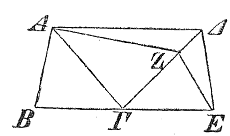
Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ [τριγώνῳ]· καὶ τὸ ΔΓΕ ἄρα [τρίγωνον] ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστι παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν

ΔΖ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη [τὰ ἡμίση δὲ τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ εὑρισκόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς βάσεως κείμενα, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἔστω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς· λέγω, ὅτι ταῦτα εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (θεώρ. 31) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ· διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτό, τὴν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (θεώρ. 37). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ΔΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΒΓ (κ. ἔν. 1), ἤτοι τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΑΕ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη τις παράλληλος, πλὴν τῆς ΑΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἄρα τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἔστω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΔΕ ἔχοντα ἴσας βάσεις τὰς ΒΓ, ΓΕ καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τούτων. Λέγω, ὅτι εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ.

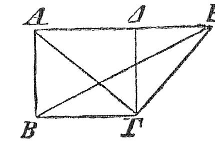
Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ΑΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΕ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΓΕ· διότι ταῦτα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰς ΒΓ, ΓΕ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΕ, ΑΖ (θεώρ. 38). Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΕ· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΓΕ (κ. ἔνν. 1), ἤτοι τὸ μεγαλύτερον, ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΑΖ δὲν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδεμία ἄλλη παράλληλος ὑπάρχει πλὴν τῆς ΑΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ.

Ἄρα τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ κείμενα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν, εὑρίσκονται καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τρίγωνον καὶ εἶναι ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου.

Διότι, ἂς ἔχῃ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τὸ τρίτὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

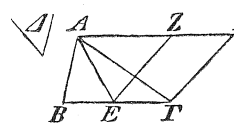
Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

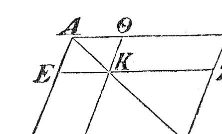


Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνον ΕΒΓ, τὴν ΒΓ καὶ ἂς εἶναι ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΓ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΒΕΓ.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΕ (θεώρ. 37). Ἀλλὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· διότι ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη (θεώρ. 34)· Ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΕΒΓ.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν μὲ τρίγωνον καὶ εὑρίσκονται ταῦτα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ κατασκευασθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐπὶ δοθείσης εὐθυγράμμου γωνίας.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τῆς εὐθυγράμμου γωνίας Δ.

Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε (θεωρ. 10), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΓ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Ε γωνία ἴση πρὸ τὴν Δ, ἡ ΓΕΖ (θεώρ. 23), καὶ διὰ μὲν τοῦ Α ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ (θεώρ. 31), διὰ δὲ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΗ παράλληλος πρὸς τήν ΕΖ· ἄρα τὸ σχῆμα ΖΕΓΗ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΓ· διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τὰς ΒΕ, ΕΓ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΒΓ, ΑΗ (θεώρ. 38)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΓΗ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΕΓ· διότι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (θεώρ· 41)· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΖΕΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Καὶ ἔχει τὴν γωνίαν ΓΕΖ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Δ.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ κατεσκευάσθη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΕΓΗ, ὑπὸ τὴν γωνίαν ΓΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

43

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τήν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, συναφῆ παραπληρώματα δὲ τούτων τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω, ὅτι τὸ παραπλήρωμα ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα ΚΔ.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι διαγώνιος αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ (θεώρ. 31). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΕΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, τὸ τρίγωνον ΑΕΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ τρίγωνον ΚΖΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΑΕΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ, τὸ δὲ ΚΖΓ ἴσον πρὸς τὸ ΚΗΓ, τὸ τρίγωνον ΑΕΚ μετὰ τοῦ ΚΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ μετὰ τοῦ ΚΖΓ (κ. ἐν. 2)·

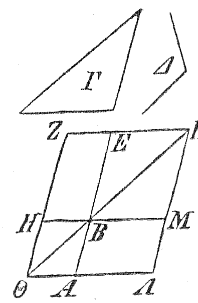
τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.



Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωεἶναι δὲ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΑΔΓ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον παραπλήρωμα ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον παραπλήρωμα ΚΔ. (κ. ἔν. 3).

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, τὰ παραπληρώματα τῶν παρὰ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει, παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ, ὑπὸ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Δ. Ἂς κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ τὸ ΒΕΖΗ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΕΒΗ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· (θεώρ. 42)· καὶ ἂς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΑΒ καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΖΗ μέχρι τοῦ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΘ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΗ, ΕΖ, (θεώρ. 31), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπειδή, αἱ παράλληλοι ΑΘ, ΕΖ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΘΖ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΘΖ, ΘΖΕ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (θεώρ. 29). Ἄρα αἱ γωνίαι ΒΘΗ, ΗΖΕ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν, προεκβαλλόμεναι εἰς τὸ ἄπειρον συναντῶνται (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΘΒ, ΖΕ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντηθοῦν. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συναντηθοῦν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Κ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΛ, παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΑ, ΖΘ, καὶ ἂς προεκβληθοῦν αἱ ΘΑ, ΗΒ μέχρι τῶν σημείων Λ,Μ. Ἄρα τὸ ΘΛΚΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ εἶναι παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τούτων τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἄρα τὸ ΛΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΖ (θεώρ. 43). Ἀλλὰ τὸ ΒΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον Γ· ἄρα καὶ τὸ ΛΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Γ (κ. ἔν. 1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΗΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΜ, (θεώρ. 15), ἀλλὰ ἡ ΗΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΒΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, παρεβλήθη τὸ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΛΒ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

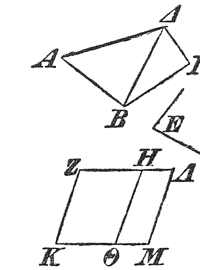
45.

Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα, ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Ε· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Ε.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΘΚΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε (θεώρ. 42)· καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΗΘΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Ε (θεώρ. 44)·

νίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ το ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.



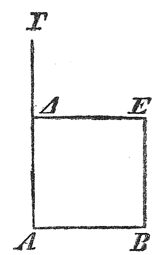
Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μϛ΄.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.



Τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτει-

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Ε εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚΖ, ΗΘΜ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΘΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΘΜ (κ. ἔν. 1). Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην ἐκ τούτων ἡ κοινὴ ΚΘΗ· ἄρα αἱ ΖΚΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΚΘΗ, ΗΘΜ. Ἀλλὰ αἱ ΖΚΘ, ΚΘΗ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 29)· ἄρα καὶ αἱ ΚΘΗ, ΗΘΜ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (κ. ἔν. 2.). Ἔχουν δὲ ἔκ τινος εὐθείας τῆς ΗΘ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Θ ἀχθῇ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς εὐθείας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ ΚΘ καὶ ΘΜ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14)· καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΚΜ, ΖΗ, τέμνονται ὑπὸ τῆς ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΜΘΗ, ΘΗΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (θεώρ. 29)· Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΘΗΛ· ἄρα αἱ ΜΘΗ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΘΗΖ, ΘΗΛ (κ. ἔνν. 2). Ἀλλὰ αἱ ΜΘΗ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 29)· ἄρα καὶ αἱ ΘΗΖ, ΘΗΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (κ. ἔν. 1· ἄρα αἱ ΖΗ ΗΛ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΘΗ (θεώρ. 34), ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΜΛ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΛ· καὶ συνδέουν αὐτὰς αἱ εὐθεῖαι ΚΜ, ΖΛ· ἄρα καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (κ. ἔν. 11, θεώρ. 30)· ἄρα τὸ ΚΖΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΖΘ, τὸ δὲ ΔΒΓ πρὸς τὸ ΗΜ, ἕπεται, ὅτι ὅλον τὸ εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον ΚΖΛΜ. (κ. ἔν. 2).

Ἄρα κατεσκευάσθη πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΚΖΛΜ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΖΚΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

46.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ν' ἀναγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ν' ἀναγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ ΑΓ κάθετος ἐπ' αὐτὴν (θεώρ. 11), καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (θεωρ. 2)· καὶ διὰ μὲν τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ διὰ δὲ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ (θεώρ. 31). Ἄρα τὸ ΑΔΕΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ μὲν ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΕ (θεώρ. 34). Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (κ. ἔν. 1)· ἄρα τὸ παραληλλόγραμμον ΑΔΕΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΔΕ τέμνονται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΑΔΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (θεώρ. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΑΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΔΕ εἶναι ὀρθή. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των (θεώρ. 34)· ἄρα εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑκάστη τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τῶν ΑΒΕ, ΒΕΔ· ἄρα τὸ ΑΔΕΒ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Ἄρα εἶναι τετράγωνον· καὶ ἔχει ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

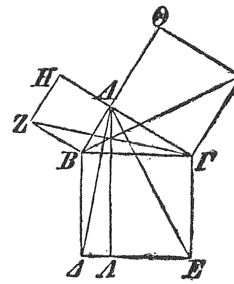
47.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ

νούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾿ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ᾿ εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καί [ἐστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.



Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη΄.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω *ὁποῖα ἀναγράφονται ἀπὸ τὰς πλευρὰς αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν (πυθαγόρειον θεώρημα).*

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΒΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

Διότι, ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ΗΒ, ΘΓ (θεώρ. 46) καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΛ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔ, ΓΕ (θεώρ. 31)· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΒΑΗ εἶναι ὀρθή, ἐκ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου Α ἔχουν ἀχθῆ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ κείμεναι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΗ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (θεώρ. 14). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΒΑ, ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΑ· διότι ἑκάστη εἶναι ὀρθή· ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάστην τούτων ἡ κοινὴ ΑΒΓ· ἄρα ὅλη ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΖΒΓ (κ. ἔν. 2). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΑ, αἱ δύο πλευραὶ ΔΒ, ΒΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΖΒ, ΒΓ· καὶ ἡ γωνία ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΓ· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΒΓ (θεώρ. 4)· καὶ εἶναι τοῦ μὲν τριγώνου ΑΒΔ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΛ διπλάσιον· διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΒΔ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΒΔ, ΑΛ (θεώρ. 41)· τοῦ δὲ τριγώνου ΖΒΓ τὸ τετράγωνον ΗΒ εἶναι διπλάσιον· διότι πάλιν ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν ΖΒ καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τῶν ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ διπλάσια τῶν ἴσων εἶναι μεταξύ των ἴσα]· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΗΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θ' ἀποδειχθῇ, ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ΑΕ, ΒΚ, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΓΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΘΓ· ἄρα ὅλον τὸ τετράγωνον ΒΔΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς δύο τετράγωνα, τὰ ΗΒ, ΘΓ (κ. ἔν. 2). Καὶ τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἔχει ἀναγραφῆ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

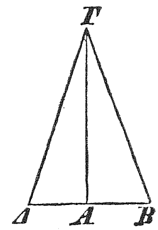
48.

Ἐὰν τριγώνου τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή.

Διότι, ἔστω τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τῆς ΒΓ, ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τ' ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, κάθετος ἡ ΑΔ (θεώρ.

τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστιν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.



Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΔΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφόμενον τετράγωνον. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν τετραγώνων τούτων τὸ κοινὸν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀναγραφόμενον τετράγωνον· ἄρα τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ (κ. ἔν. 2). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΔΓ· διότι ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ὀρθὴ (θεώρ. 47)· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τετράγωνον· διότι ἐλήφθη ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ (κ. ἔν. 1)· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΑΓ εἶναι κοινή, αἱ δύο πλευραί, αἱ ΔΑ, ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΑ, ΑΓ· καὶ ἡ βάσις ΔΓ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΓ (θεώρ. 8). Εἶναι δὲ ἡ γωνία ΔΑΓ ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἐὰν ἄρα τὸ τετράγωνον τὸ ἀναγραφόμενον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀναγραφόμενα, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β΄.

Ὅροι.

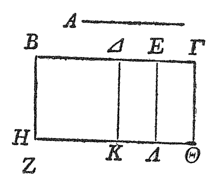
α΄. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β΄. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

α΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. καὶ ἐστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α. τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ· ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΙ.

Ὁρισμοί.

1. Πᾶν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται ὅτι περιέχεται ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

2. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου, ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμων, μαζὶ μὲ τὰ δύο παραπληρώματα, ἂς ὀνομάζεται γνώμων.

1.

Ἐὰν ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΒΖ (I.11) καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΗ ἴση πρὸς τὴν Α, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (I.31), διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ ἂς ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΗ, αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Τὸ ὀρθογώνιον ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ τὸ μὲν ΒΘ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΓ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α· τὸ δὲ ΒΚ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΒΔ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἡ δὲ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Τὸ δὲ ΔΛ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, ΔΕ· διότι ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α (I.34). Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον τὸ ΕΘ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ.

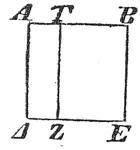
Ἐὰν ἄρα ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἰς ὁσαδήποτε τμήματα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ· λέγω ὅτι τὸ ὀρὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.



Ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ. καὶ ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

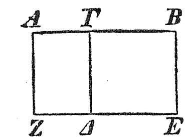
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ. ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καὶ ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστιν θογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ΑΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον ΑΔΕΒ (I.46), καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΒΕ (I.31).

Τὸ ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ΑΖ, ΓΕ. Καὶ τὸ μὲν ΑΕ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφὲν τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· διότι τοῦτο περιέχεται μὲν ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἡ δὲ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (I. ὁρ. 23)· τὸ δὲ ΓΕ εἶναι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· διότι ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν.

3.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἑνὸς τμήματος.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον ΓΔΕΒ (I.46) καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΕΔ μέχρι τοῦ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΔ, ΒΕ (I.31). Τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ ὀρθογώνια ΑΔ, ΓΕ· καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΕ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον· διότι περιέχεται μὲν τοῦτο ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· διότι ἡ ΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ.

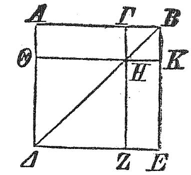
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἑνὸς τμήματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Γ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, τὸ ΑΔΕΒ (I.46) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΔ, ΕΒ (I.30 καὶ 31), διὰ δὲ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΔΕ. Καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση· ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΚΒ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ], αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστιν· καὶ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΚΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

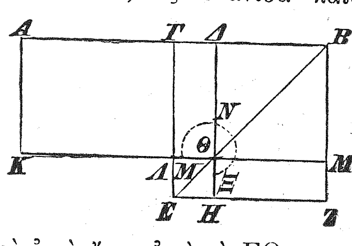
[**Π ό ρ ι σ μ α.**

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν].

ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος πάλιν ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα ἐπειδὴ ἡ ΓΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ τέμνονται αὗται ὑπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ΓΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΑΔΒ (Ι.29). Ἀλλὰ ἡ ΑΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ (Ι.5)· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΓΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΒΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΗ (Ι.6)· ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ (Ι.34), ἡ δὲ ΓΗ πρὸς τὴν ΚΒ· ἄρα καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΒ· ἄρα τὸ σχῆμα ΓΗΚΒ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΓΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΚ [καὶ αὗται τέμνονται ὑπὸ τῆς ΓΒ], αἱ γωνίαι ΚΒΓ, ΗΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (Ι.29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ γωνία ΚΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓΗ εἶναι ὀρθή· ὥστε καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι αἱ ΓΗΚ, ΗΚΒ εἶναι ὀρθαὶ (Ι.34). Ἄρα τὸ σχῆμα ΓΗΚΒ εἶναι ὀρθογώνιον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον· καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ ΘΖ εἶναι τετράγωνον· καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ, δηλ. τῆς ΑΓ (Ι.34)· ἄρα τὰ τετράγωνα ΘΖ, ΚΓ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΗΕ (Ι.43) καὶ εἶναι τὸ ΑΗ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ, ΓΒ· διότι ἡ ΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα καὶ τὸ ΗΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἄρα τὰ ΑΗ, ΗΕ ἰσοῦνται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ΘΖ, ΓΚ, τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἄρα τὰ τέσσαρα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ὅλον τὸ ΑΔΕΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα.**

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὰς τετραγώνους ἐπιφανείας, τὰ περὶ τὴν διαγώνιον παραλληλόγραμμα εἶναι τετράγωνα].

5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς τμηθείσης εὐθείας.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς ἴσα μὲν μέρη κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ, ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ.

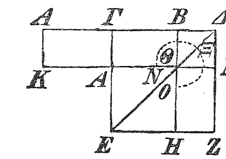
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΓΒ τὸ τετράγωνον ΓΕΖΘ (Ι.46) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΕ, ΒΖ, διὰ δὲ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΜ παράλληλος πάλιν πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ (Ι.30 καὶ 31) καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΛ, ΒΜ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραπλήρωμα ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα ΘΖ (Ι.43), ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ΔΜ· ἄρα ὅλον τὸ ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΔΖ. Ἀλλὰ τὸ ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΛ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα καὶ τὸ ΑΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΖ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ τὸ ΑΘ τῷ ΜΝΞ γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΜΝΞ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρα τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρα τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρα τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμεναν ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κοινὸν ΓΘ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ (εἰς τὴν ἔκδοσιν Gregorio ἀντὶ τοῦ Μ εἶναι τὸ Ο· ὁ γνώμων δηλοῦται ὑπὸ τοῦ τόξου, ἤτοι εἶναι ΘΛΓΒΖΗΘ). Ἀλλὰ τὸ ΑΘ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΒ· διότι ἡ ΔΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα ὁ γνώμων ΜΝΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ, ΔΒ. Ἄς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινόν ΛΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ· ἄρα ὁ γνώμων ΜΝΞ καὶ τὸ τετράγωνον ΛΗ ἰσοῦνται πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΜΝΞ καὶ τὸ τετράγωνον ΛΗ, ἀποτελοῦν ὅλον τὸ τετράγωνον ΓΕΖΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ ἰσοῦνται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας, μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ τμῆμα μεταξύ τῶν τομῶν ἰσοῦνται πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς τμηθείσης εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖα τις, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς προστεθείσης, καὶ τῆς προστεθείσης, μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας καὶ τὴν προστεθεῖσαν.

Διότι, ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Γ εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ, καὶ ἂς προστεθῇ κατὰ τὴν προέκτασιν αὐτῆς ἡ εὐθεῖα ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ.

Διότι, ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ σημείου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΗ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΓ, ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ σημείου Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΜ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ καὶ ἀκόμη διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΚ παράλληλος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΛ, ΔΜ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΖ. Ἄρα καὶ τὸ ΑΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΖ. Ἄς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν ΓΜ· ἄρα ὅλον τὸ ΑΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΝΞΟ. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· διότι ἡ ΔΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα καὶ ὁ γνώμων ΝΞΟ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ [περιεχόμενον ὀρθογώνιον] ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Ἄς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ κοινὸν ΛΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸν γνώμονα ΝΞΟ καὶ τὸ ΛΗ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΝΞΟ καὶ τὸ ΛΗ εἶναι ὅλον τὸ τετράγωνον ΓΕΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΔ.

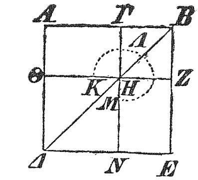
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖα τις, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς προστεθείσης καὶ τῆς προστεθείσης, μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας καὶ τὴν προστεθεῖσαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.



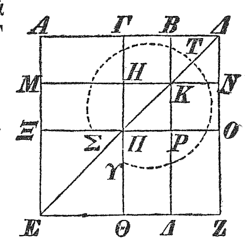
Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστι γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΗ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΒΗ, ΗΔ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας [τῇ ΑΒ εὐθεῖα] ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ

7.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς τῶν τμημάτων της, εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου τμήματος.

Διότι, ἂς τμηθῇ εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΒΓ σὺν τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ.

Διότι, ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΕΒ· καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα (ν' ἀχθῇ δηλ. ἡ διαγώνιος ΒΔ, ἡ παράλληλος ΓΝ καὶ ἡ παράλληλος ΘΖ).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΗΕ (Ι. 43), ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ΓΖ· ἄρα ὁλόκληρον τὸ ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς ὁλόκληρον τὸ ΓΕ· ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΑΖ, ΓΕ εἶναι διπλάσια τοῦ ὀρθογ. ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸν γνώμονα ΚΛΜ καὶ ἀπὸ τὸ τετράγωνον ΓΖ· ἄρα ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὸ ΓΖ εἶναι διπλάσια τοῦ ΑΖ. Εἶναι δὲ διπλάσιον τοῦ ΑΖ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ· διότι ἡ ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὸ τετράγωνον ΓΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἕκαστον τούτων τὸ ΔΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· ἄρα ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὰ τετράγωνα ΒΗ, ΗΔ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΚΛΜ καὶ τὰ τετράγωνα ΒΗ, ΗΔ εἶναι ἴσα πρὸς ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον ΑΔΕΒ καὶ τὸ τετράγωνον ΓΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ σὺν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης εὐθείας μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς τῶν τμημάτων της εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου τμήματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων της καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου τμήματος εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευράν, τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὸ εἰρημένον τμῆμα.

Διότι, ἂς τμηθῇ εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ.

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ τὸ ΑΕΖΔ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα διπλοῦν. (ἁπλοῦν σχῆμα εἶναι τὸ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Ἐνταῦθα μετὰ τὴν διαγώνιον ΔΕ, φέρονται ἀνὰ δύο παράλληλοι, αἱ ΓΘ, ΒΛ καὶ αἱ ΜΝ, ΞΟ· τοῦτο ἐννοεῖ ἡ φράσις διπλοῦν σχῆμα).

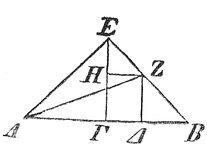
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ, ἡ δὲ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν ΚΝ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΝ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΠΡ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση μὲν ΓΚ τῷ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ. ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΚΔ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ, ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ ἐστι τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ, τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ· ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπό τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καὶ εἰσιν πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, ἕπεται, ὅτι τὸ μὲν ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΔ, τὸ δὲ ΗΡ πρὸς τὸ ΡΝ. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΝ· διότι εἶναι παραπληρώματα τοῦ παραλληλογράμμου ΓΟ (Ι.43)· ἄρα καὶ τὸ ΚΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΗΡ· ἄρα τὰ τέσσαρα τὰ ΔΚ, ΓΚ, ΗΡ, ΡΝ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ἄρα τὰ τέσσαρα εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΓΚ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΚ δηλ. τὴν ΓΗ, ἡ δὲ ΓΒ ἴση πρὸς τὴν ΗΚ δηλ. τὴν ΗΠ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΠ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΠ ἡ δὲ ΠΡ ἴση πρὸς τὴν ΡΟ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ μὲν ΑΗ πρὸς τὸ ΜΠ (Ι.36), τὸ δὲ ΠΛ πρὸς τὸ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΠΛ· διότι εἶναι παραπληρώματα τοῦ παραλληλογράμμου ΜΛ (Ι.43)· ἄρα καὶ τὸ ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΖ· ἄρα τὰ τέσσαρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ εἶναι ἴσα μεταξύ των· ἄρα τὰ τέσσαρα εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΑΗ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὰ τέσσαρα, τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΓΚ· ἄρα τὰ ὀκτὼ σχήματα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸν γνώμονα ΣΤΥ εἶναι τετραπλάσια τοῦ ΑΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΚ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· διότι ἡ ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωγίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ΑΚ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ ὁ γνώμων ΣΤΥ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ΑΚ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΣΤΥ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ ΞΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΣΤΥ καὶ τὸ ΞΘ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΣΤΥ καὶ τὸ ΞΘ ἀποτελοῦν ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον ΑΕΖΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τῶν ΑΒ, ΒΔ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἄρα τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ, δηλαδὴ πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ἀποτελουμένης ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων της, μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου τμήματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα τὰ τετράγωνα τῶν ἀνίσων τμημάτων ὅλης τῆς εὐθείας εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ σημεῖον Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΕ (Ι. 11) καὶ ἂς ληφθῇ αὕτη ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ἡ ΖΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ γωνία ΕΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΓ (Ι. 5). Καὶ ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Γ γωνία εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι αἱ λοιπαὶ γωνίαι, αἱ ΕΑΓ, ΑΕΓ ἰσοῦνται πρὸς μίαν ὀρθὴν (Ι. 32)· καὶ εἶναι αὗται ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση· πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ· ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι· ἄρα ἑκάστη τῶν ΓΕΑ, ΓΑΕ ἰσοῦται πρὸς ἥμισυ ὀρθῆς. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΓΕΒ, ΕΒΓ, ἰσοῦται πρὸς ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ὁλόκληρος ἡ ΑΕΒ ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀρθήν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΕΖ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ἡ δὲ ΕΗΖ εἶναι ὀρθή· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι, τὴν ΕΓΒ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΖΗ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖΗ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ΖΔΒ· διότι πάλιν εἶναι αὐτὴ ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι τὴν ΕΓΒ· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΒΖΔ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ παρὰ τὸ Β γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΒ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΖΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΕ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ· διότι ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΖ, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΖ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΖ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΖ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ· διότι ἡ γωνία ΑΕΖ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι διπλάσιον τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΖ· διότι ἡ παρὰ τὸ Δ γωνία εἶναι ὀρθή· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΖ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

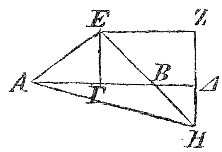
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ τετράγωνα τῶν ἀνίσων τμημάτων τῆς ὅλης εὐθείας εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν τομῶν τμῆμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖά τις, τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευράν, ὅλην τὴν εὐθεῖαν καὶ τὴν προστεθεῖσαν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς προστεθείσης, εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας (τῆς δοθείσης εὐθείας) σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευράν, τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης σὺν τὴν προστεθεῖσαν εὐθεῖαν.

Διότι, εὐθεῖά τις, ἡ ΑΒ, ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, ἂς ληφθῇ δὲ κατὰ τὴν προέκτασίν της ἡ εὐθεῖα ΒΔ· λέγω, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἂς ληφθῇ αὐτὴ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, διὰ δὲ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΔ παράλληεἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστιν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΓ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή· ἴση γὰρ ἐστιν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ], ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσια ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

λος πρὸς τὴν ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΖ τέμνει τὰς παραλλήλους ΕΓ, ΖΔ αἱ γωνίαι ΓΕΖ, ΕΖΔ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθὰς (I. 29)· ἄρα αἱ γωνίαι ΖΕΒ, ΕΖΔ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν· αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ σχηματίζουσαι γωνίας μικροτέρας τῶν δύο ὀρθῶν προεκβαλλόμεναι συμπίπτουν (αἴτ. 5)· ἄρα αἱ ΕΒ, ΖΔ προεκβαλλόμεναι θὰ συμπέσουν πρὸς τὸ μέρος τῶν Β, Δ. Ἂς προεκβληθοῦν καὶ ἂς συμπέσουν κατὰ τὸ Η καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΕΑΓ πρὸς τὴν ΑΕΓ (I. 5)· καὶ ἡ παρὰ τὸ Γ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἑκάστη τῶν ΕΑΓ, ΑΕΓ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (I. 32). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΓΕΒ, ΕΒΓ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΒΓ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΒΗ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (I.15). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΔΗ ὀρθή· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓΕ· διότι εἶναι ἐναλλὰξ (I.29)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΔΗΒ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς· ἄρα ἡ ΔΗΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΗ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ΗΔ (I.6). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΗΖ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ παρὰ τὸ Ζ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντί της, τὴν παρὰ τὸ Γ (I.34)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΖΕΗ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (I.32)· ἄρα ἡ γωνία ΕΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕΗ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΖ (I.6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΓ, ΓΑ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΑ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΕΓ, ΓΑ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ (I.47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΗΖ, ΖΕ εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΗΖ, ΖΕ, εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ (I.47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΓΔ (I.34)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΔ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΑ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΗ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΕ, ΕΗ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ (I.47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ εἶναι διπλάσιον τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΗ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΗ εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΔΗ ἴση πρὸς τὴν ΔΒ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ, εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῶν ΑΓ, ΓΔ.

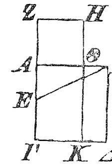
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον, προστεθῇ δὲ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς εὐθεῖά τις, τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευράν, ὅλην τὴν εὐθεῖαν καὶ τὴν προστεθεῖσαν, σὺν τὸ τετράγωνον τῆς προστεθείσης, εἶναι διπλάσια τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας, σὺν τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευράν, τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης σὺν τὴν προστεθεῖσαν εὐθεῖαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων της νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· πρέπει νὰ τμήσωμεν τὴν ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν τμημάτων της νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λοιποῦ τμήματος.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

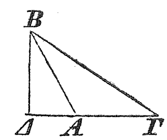


Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΖΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ τὸ ΖΚ· ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.



Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, Διότι, ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ (Ι.46) καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΓΑ μέχρι τοῦ Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΗΘ μέχρι τοῦ Κ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ ἔχει οὕτω πως τμηθῇ κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΖΑ, ἔπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ (ΙΙ.6). Εἶναι δὲ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ. Ἀλλὰ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΒΑ, ΑΕ· διότι ἡ γωνία παρὰ τὸ Α εἶναι ὀρθὴ (Ι.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΒΑ, ΑΕ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ ὀρθογώνιον τὸ ΖΚ· διότι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ· τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΖΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον ΑΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ ΑΚ· ἄρα τὸ ἀπομένον ΖΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΔ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· διότι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΘ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ.

Ἄρα ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ κατὰ τὸ Θ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Εἰς τὰ ἀμβλυγώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐκτὸς ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ἀμβλείας γωνίας.

Ἔστω τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἀμβλεῖαν, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν προεκβολὴν τῆς ΓΑ ἡ ΒΔ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν ΒΑ, ΑΓ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἔχει τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἔπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΑ, ΑΔ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ (ΙΙ. 4). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΓΔ, ΔΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ σὺν τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΓΔ, ΔΒ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ· διότι ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθὴ (Ι.47)· πρὸς δὲ τὰ τετρά-

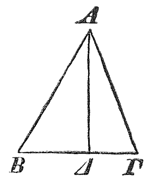
ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τήν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τὸ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

γωνα τῶν ΑΔ, ΔΒ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΑ, ΑΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΓΒ εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν ΓΑ, ΑΒ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ.

Εἰς τὰ ἀμβλυγώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν οἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐκτὸς ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ἀμβλείας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Εἰς τὰ ὀξυγώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀξείας γωνίας, ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐντὸς (τοῦ τριγώνου) εὐθείας ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ὀξείας γωνίας.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν Β ὀξεῖαν, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν ΓΒ,ΒΑ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΒ ἔχει τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, ἕπεται, ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν ΓΒ, ΒΔ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ (ΙΙ. 7). Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΑ· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΓ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΒΔ, ΔΑ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· διότι ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθὴ (Ι. 47)· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ (Ι. 47)· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΓΒ, ΒΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν ΓΒ, ΒΑ κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ.

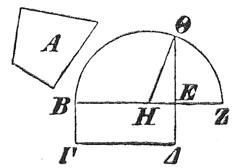
Εἰς τὰ ὀξυγώνια ἄρα τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῆς ὀξείας γωνίας κατὰ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀξείας γωνίας ἐπὶ τὴν ὁποίαν πίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς λαμβανομένης ἐντὸς (τοῦ τριγώνου) εὐθείας, ἀπὸ τῆς καθέτου μέχρι (τῆς κορυφῆς) τῆς ὀξείας γωνίας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· πρέπει νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α.

Συνεστάτω γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ. καὶ τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Διότι, ἂς κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΔ, ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α (Ι 45)· ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, τότε κατεσκευάσθη τὸ ἐπιταχθέν. Διότι θὰ ἔχῃ κατασκευασθῇ τετράγωνον τὸ ΒΔ ἴσον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α· ἐὰν δέ, δὲν εἶναι ἴση, μία ἐκ τῶν εὐθειῶν ΒΕ, ΕΔ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω, ὅτι ἡ ΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς προεκβληθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ζ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Η (Ι.10), καὶ μὲ κέντρον τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΒ, ΗΖ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΒΘΖ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΔΕ μέχρι τοῦ Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΒΖ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Η, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ, εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ (ΙΙ. 5). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΘ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΗΘ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΘΕ, ΕΗ (Ι.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΘΕ, ΕΗ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΗΕ· τὸ ἀπομένον ἄρα ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΒΕ, ΕΖ εἶναι τὸ ΒΔ· διότι ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΒΔ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Α. Ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ.

Ἄρα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α κατεσκευάσθη ἴσον τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Ὅροι.

α'. ***Ἴσοι κύκλοι*** εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β'. ***Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι*** λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

γ'. ***Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων*** λέγονται οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ***ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι*** λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν.

ε'. ***Μεῖζον δὲ ἀπέχειν*** λέγεται, ἐφ᾽ ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ'. ***Τμῆμα κύκλου*** ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. ***Τμήματος δὲ γωνία*** ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. ***Ἐν τμήματι δὲ γωνία*** ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι ***βάσις τοῦ τμήματος*** ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ***ἐπ᾽ ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι*** ἡ γωνία.

ι'. ***Τομεὺς δὲ κύκλου*** ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν περιφερείας.

ια'. ***Ὅμοια τμήματα κύκλων*** ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ [κύκλου].

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δύο ταῖς

ΒΙΒΛΙΟΝ III

Ὁρισμοί.

1. Ἴσοι κύκλοι εἶναι ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι ἢ ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι.

2. Εὐθεῖα λέγεται ὅτι ἐφάπτεται κύκλου ἐκείνη, ἡ ὁποία ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ προεκβαλλομένη δὲν τέμνει τὸν κύκλον.

3. Κύκλοι λέγονται ὅτι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἁπτόμενοι μεταξύ των δὲν τέμνονται.

4. Εὐθεῖαι εἰς κύκλον λέγονται ὅτι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὰς κάθετοι εἶναι ἴσαι.

5. Μεγαλύτερον δὲ λέγεται ὅτι ἀπέχει, ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας πίπτει ἡ μεγαλυτέρα κάθετος.

6. Τμῆμα κύκλου εἶναι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ τόξου κύκλου.

7. Γωνία δὲ τμήματος εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ εὐθείας καὶ τόξου κύκλου.

8. Γωνία δὲ εἶναι εἰς τμῆμα, ὅταν ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος ληφθῇ σημεῖον τι καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθοῦν εὐθεῖαι μέχρι τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι βάσις τοῦ τμήματος, ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων περιεχομένη γωνία.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀποκόπτουν τόξον τι κύκλου, λέγεται, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου βαίνει ἡ γωνία.

10. Τομεὺς δὲ κύκλου εἶναι, ὅταν κατασκευασθῇ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν καὶ τοῦ τόξου τοῦ κύκλου τοῦ ἀποκοπτομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων.

11. Ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

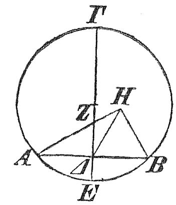
1.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα αὐτόν, ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΔΓ (Ι.11) καὶ ἂς προεκταθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΓΕ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ· λέγω, ὅτι τὸ Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι τοῦτο, ἀλλ' εἰ δυνατὸν νὰ εἶναι ἄλλο, ἔστω τὸ Η, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.



Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ [κύκλου].

Πόρισμα.

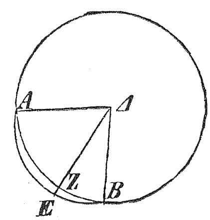
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. — ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ. μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ᾽ αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ΄.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΗ, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΗΔ, ΔΒ καὶ ἡ βάσις ΗΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΒ· διότι εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἄρα ἡ γωνία ΑΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΒ (I.8). Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀγομένη ἔκ τινος σημείου εὐθείας, σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας μεταξύ των, ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ (I. ὁρ. 10)· ἄρα ἡ γωνία ΗΔΒ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΔΒ ὀρθή· ἄρα ἡ ΖΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔΒ, ἡ μεγαλυτέρα πρὸς τὴν μικροτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ Η δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲν ἄλλο σημεῖον πλὴν τοῦ Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις τέμνῃ εὐθεῖαν εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τεμνούσης· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἂς ληφθοῦν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου. (Εἰς τὸ σχῆμα λείπει τὸ Γ).

Διότι, ἔστω, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἂς πέσῃ ἐκτός, ὅπως ἡ ΑΕΒ καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, (III. 1) καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΔΑ, ΔΒ καὶ ἡ ΔΖΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΕ (I.5)· καὶ ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΔΑΕ μία πλευρὰ ἔχει προεκβληθῆ, ἡ ΑΕΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΔΑΕ (I.16). Εἶναι δὲ ἡ ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΔΒΕ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΒΕ. Ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ (I.19)· ἄρα ἡ ΔΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΖ. Ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕ, ἤτοι ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα δὲν θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν θὰ πέσῃ οὐδ' ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἄρα θὰ πέσῃ ἐντός.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

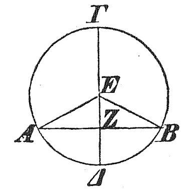
3.

Ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ εἰς τὸ μέσον εὐθεῖαν τινὰ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, θὰ εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν· καὶ ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν θὰ τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ εἰς αὐτὸν εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ, τέμνουσα εὐθεῖαν τινα μή διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον, κατὰ τὸ σημεῖον Ζ· λέγω, ὅτι εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 1) ἔστω τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσίν]· καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

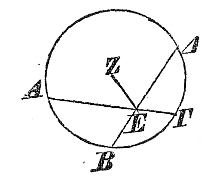
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

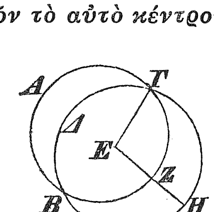
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρός ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ· πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα. λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ, ὡς ἔτυχεν. καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΗ· ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, ἡ δὲ ΖΕ κοινή, ὑπάρχουν δύο πλευραὶ ἴσαι πρὸς δυὸ πλευρὰς ἀντιστοίχως· καὶ ἡ βάσις ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΖΕ (I.8). Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ σημείου εὐθείας σχηματίζῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας (I, ὁρ. 10) ἑκάστη τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι ὀρθή· ἄρα ἑκάστη τῶν ΑΖΕ, ΒΖΕ εἶναι ὀρθή. Ἄρα ἡ ΓΔ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνουσα τὴν ΑΒ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, εἰς τὸ μέσον, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Ἂς εἶναι τώρα ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον, ὅτι δηλ. ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Διότι, ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΕΑΖ ἴση πρὸς τὴν ΕΒΖ (I.5). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ἡ ΑΖΕ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν τὴν ΒΖΕ· ἄρα ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΕΑΖ, ΕΖΒ τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, ὡς κοινήν, τὴν ΕΖ, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως (I.26)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον εὐθεῖα τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ εὐθεῖαν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου εἰς τὸ μέσον, εἶναι καὶ κάθετος ἐπ' αὐτήν· καὶ ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, θὰ τὴν τέμνῃ εἰς τὸ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, δὲν τέμνονται εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αὐτοῦ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἂς τέμνωνται μεταξύ των κατὰ τὸ Ε, νὰ μὴ διέρχωνται ὅμως διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι δὲν τέμνονται εἰς τὸ μέσον.

Διότι, εἰ δυνατόν, ἂς τέμνωνται μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι εἰς τὸ μέσον, ὥστε ἡ μὲν ΑΕ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα τις ἡ ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένην τὴν ΑΓ, ἕπεται, ὅτι εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν (III. 3)· ἄρα ἡ γωνία ΖΕΑ εἶναι ὀρθή· πάλιν, ἐπειδὴ εὐθεῖα τις ἡ ΖΕ, τέμνει εὐθεῖαν τινα τὴν ΒΔ εἰς τὸ μέσον, εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν· ἄρα ἡ γωνία ΖΕΒ εἶναι ὀρθή. Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ἡ ΖΕΑ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΖΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕΒ δηλ. ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον.

Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου τέμνωνται μεταξύ των, δὲν τέμνονται μεταξύ των εἰς τὸ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωνται μεταξύ των δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἂς τέμνωνται μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΗ κατὰ τὰ σημεῖα Β,Γ. Λέγω, ὅτι οὗτοι δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

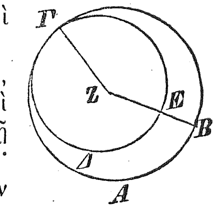
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΖΗ, ὡς ἔτυχεν. Καὶ ἐπειδή, τὸ σημεῖον Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΗ, ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ· ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐστιν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΖΕΒ.

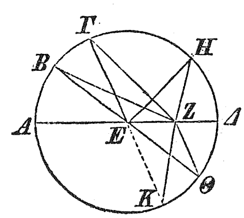
Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΕ. ἐδείχθη δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ [αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ]· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ, αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσιν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ

ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ ἤτοι ἡ μικροτέρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ σημεῖον Ε δὲν εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΗ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωνται μεταξύ των, δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΓΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ· λέγω, ὅτι δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ καὶ ἂς διαχθῇ, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΖΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΓΔΕ, ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΕ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα καὶ ἡ ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ ἤτοι ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ σημεῖον Ζ δὲν εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΑΒΓ, ΓΔΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των, δὲν θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖον τι, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαι τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἂς ληφθῇ σημεῖον τι τὸ Ζ, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἂς εἶναι δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τὸ Ζ ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς τρίτης (Ι.20), ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΒ, ΕΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΒΖ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΒΕ [ἄρα αἱ ΒΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ΑΖ]· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ δὲ ΖΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΕ, ΕΖ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΕ, ΕΖ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΒΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΓΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΓΖ (Ι,24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ.

Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΗ (Ι.20), ἡ δὲ ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ (ἴση ἐστίν), καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὅ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ᾽ ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η´.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστιν ἡ ΔΗ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

ἀμφότερα ἡ κοινὴ ΕΖ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΗΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΖΔ. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΖΑ ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἄγονται πρὸς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓΔ κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΖΔ. Διότι, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ σημείου αὐτῆς Ε (ὡς κορυφῆς) ἡ γωνία ΖΕΘ ἴση πρὸς τὴν ΗΕΖ (I.23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἡ δὲ ΕΖ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΗΕ, ΕΖ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΘΕΖ· ἄρα ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ. Λέγω, ὅτι ἄλλη ἴση (ἐκτὸς τῆς ΖΘ) πρὸς τὴν ΖΗ δὲν ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Ζ πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἄγεται ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΗ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, δηλ. ἡ ἐγγύτερον πρὸς τὸ κέντρον ἴση μὲ τὴν μακρύτερον· ὅπερ ἀδύνατον (κατὰ τὸ α΄ μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Ζ δὲν ἄγεται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἄλλη ἴση πρὸς τὴν ΗΖ· ἄρα μία μόνη.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρου κύκλου ληφθῇ σημεῖον τι τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ληφθέντος δὲ σημείου ἀχθοῦν πρὸς τὴν περιφέρειαν εὐθεῖαι τινες, μεγίστη μὲν θὰ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ κεῖται τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπόλοιπος, τῶν δὲ ἄλλων ἡ εὑρισκομένη πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς εὑρισκομένης μακρύτερον, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν περιφέρειαν, θὰ προσπέσουν ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

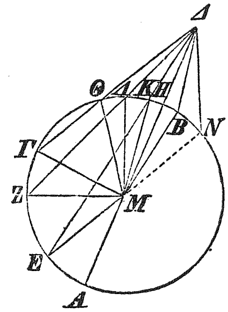
8.

Ἐὰν ἐκτὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖον τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου διαχθοῦν πρὸς τὸν κύκλον εὐθεῖαι τινες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἄλλαι δέ, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον τῆς περιφερείας, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτοῦ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτῆς, δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι θὰ προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖον τι Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ καὶ ἂς διαχθοῦν ἐκ τοῦ σημείου τούτου μερικαὶ εὐθεῖαι, ὅπως αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ καὶ ἂς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ. Λέγω, ὅτι τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον μέρος τῆς περιφερείας τὸ ΑΕΖΓ, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη ἡ ΔΑ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας τὸ ΘΛΚΗ ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΗ ἡ ὁποία εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, πάντοτε δὲ ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ΔΗ εἶναι μικροτέρα τῆς εὑρισκομένης ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ·

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. ἀλλ' αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονες εἰσιν· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΕ τῇ ΜΖ κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῇ ΓΔ μείζων ἐστιν· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε ἡ ΗΔ τῆς ΚΔ ἐλάττων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω, ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης· συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δύο ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λέγω [δή], ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἔστιν ἴση, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον [ἐστιν] ἴση· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 1) καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΜ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας ἡ ΜΔ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΕΜ, ΜΔ. Ἀλλὰ αἱ ΕΜ, ΜΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΕΔ (I. 20)· ἄρα καὶ ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΜΕ εἶναι ἴση πρὸς ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΕΜ, ΜΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΖΜ, ΜΔ· καὶ ἡ γωνία ΕΜΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΜΔ. Ἄρα ἡ βάσις ΕΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΔ (I.24). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ· ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΔΑ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΜΚ, ΚΔ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΜΔ (I.20), ἡ δὲ ΜΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΚ, ἕπεται, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ΚΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΔ· ὥστε ἡ ΗΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΚΔ· καὶ ἐπειδὴ ἐκ σημείου ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΜΛΔ ἐπὶ τὰ ἄκρα μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῆς ΜΔ ἤχθησαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΜΚ, ΚΔ, ἕπεται, ὅτι αἱ ΜΚ, ΚΔ εἶναι μικρότεραι τῶν ΜΛ, ΛΔ (I.21)· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΜΛ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΔΚ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑπολοίπου ΔΛ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΘ· ἄρα εἶναι ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, μικροτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Δ θὰ προσπέσουν εἰς τὸν κύκλον μόνον δύο ἴσαι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΔΗ· ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΔ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ (ὡς κορυφῆς) ἡ γωνία ΔΜΒ ἴση πρὸς τὴν ΚΜΔ (I.23) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΜΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΜΚ, ΜΔ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΜ, ΜΔ· καὶ ἡ γωνία ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΜΔ· ἄρα ἡ βάσις ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΒ (I.4). Λέγω, ὅτι ἄλλη εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν ΔΚ δὲν θὰ προσπέσῃ εἰς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ σημείου Δ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσπέσῃ καὶ ἄλλη, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΝ, ἀλλὰ ἡ ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΝ, δηλ. ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπώτερον κειμένην· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (κατὰ τὸ α' μέρος τοῦ θεωρ.). Ἄρα δὲν θὰ προσπέσουν ἐκ τοῦ σημείου Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ, περισσότεραι τῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι κείμεναι ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης ΔΗ.

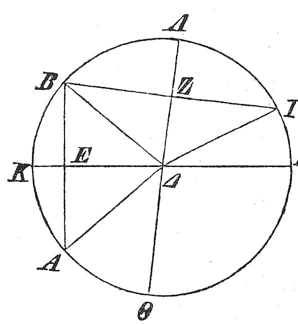
Ἐὰν ἄρα ἐκτὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖον τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου διαχθοῦν πρὸς τὸν κύκλον εὐθεῖαι τινες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, αἱ ἄλλαι δέ, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν εἰς τὸ κοῖλον τῆς περιφερείας, μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτοῦ, τῶν δὲ εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι προσπίπτουν πρὸς τὸ κυρτὸν μέρος τῆς περιφερείας, ἐλαχίστη μὲν εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἡ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἐλαχίστην εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς ἀπώτερον αὐτῆς, δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι θὰ προσπέσουν ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἑκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν ἐντὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖον τι, ἀπὸ τοῦ σημείου δὲ προσπέσουν εἰς τὴν περιφέρειαν περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἂς προσπέσουν τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. λέγω, ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Κ, Θ, Λ σημεῖα



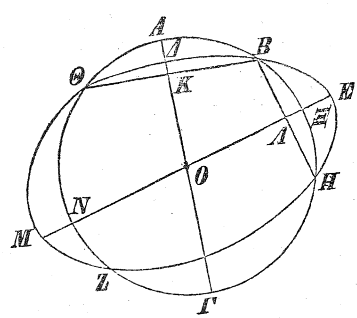
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δύο ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ Β, Η, Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεῖα.



Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖα τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ τὸ αὐτὸ ἐστι κέντρον τὸ Ο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α ση ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς τὴν περιφέρειαν ΑΒΓ περισσότεραι τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς τμηθοῦν εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΕΔ, ΖΔ, ἂς διαχθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Η, Κ, Θ, Λ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, ἡ δὲ ΕΔ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΔ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΒΕ, ΕΔ· καὶ ἡ βάσις ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΕΔ (I.8)· ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΕΔ, ΒΕΔ εἶναι ὀρθὴ (I. ὁρ. 10)· ἄρα ἡ ΗΚ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς κύκλον εὐθεῖά τις τέμνῃ εὐθεῖαν τινα εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τεμνούσης, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται ἐπὶ τῆς ΗΚ (πόρ. III. 1.). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ. Αἱ εὐθεῖαι ὅμως ΗΚ, ΘΛ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Δ· ἄρα τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Ἐὰν ἄρα ἐντὸς κύκλου ληφθῇ σημεῖόν τι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπέσουν εἰς τὴν περιφέρειαν περισσότεραι τῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τέμνῃ ὁ κύκλος ΑΒΓ τὸν κύκλον ΔΕΖ εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα, τὰ Β. Η, Ζ, Θ καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΒΘ, ΒΗ ἂς τμηθοῦν εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ· καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν ἀπὸ τῶν σημείων Κ,Λ αἱ ΚΓ, ΛΜ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΘ, ΒΗ, ἂς ἀχθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Α.Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ τέμνει εὐθεῖαν τινα τὴν ΒΘ εἰς τὸ μέσον καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ (πόρ. III. 1). Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ τέμνει εἰς τὸ μέσον εὐθεῖαν τινα τὴν ΒΗ καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΝΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΝΞ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἢ τὸ Ο· ἄρα τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τοῦ κύκλου ΔΕΖ κέντρον εἶναι τὸ Ο· ἄρα, ὅταν δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ τέμνωνται μεταξύ των ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, τὸ Ο, ὅπερ ἀδύνατον (III. 5).

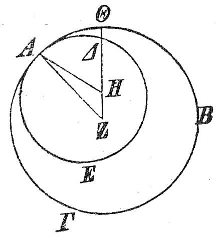
Ἄρα κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντὸς καὶ ληφθοῦν τὰ κέντρα αὐτῶν, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν προεκτεινομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν κύκλων.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντὸς οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ κατὰ τὸ μεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.



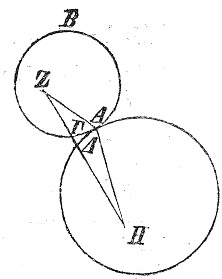
Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ, τουτέστι τῆς ΖΘ, μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται· κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, [καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα], ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐκβαλλομένη] ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑ τῇ ΗΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΗΔ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν· ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη [εὐθεῖα] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ Δ, Β.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου κέντρον τὸ Η, τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΔΘ· ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

σημεῖον Α, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η (III. 1)· λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Η πρὸς τὸ Ζ ἀγομένη εὐθεῖα προεκβαλλομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν διέρχεται, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς κεῖται, ὅπως ἡ ΖΗΘ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΖΑ (I. 20) δηλ, τῆς ΖΘ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ταύτας ἡ κοινὴ ΖΗ· ἄρα, ἡ ὑπόλοιπος ΑΗ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΘ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα καὶ ἡ ΗΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΗΘ δηλ. ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ Ζ μὲ τὸ Η δὲν θὰ πέσῃ ἐκτός· ἄρα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐντός [καὶ ληφθοῦν τὰ κέντρα αὐτῶν], ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα [καὶ προεκβαλλομένη] θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν κύκλων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτός, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Διότι, ἂς ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτὸς κατὰ τὸ σημεῖαν Α οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η (III 1)· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Η εὐθεῖα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Διότι, ἔστω ὅτι δὲν θὰ διέλθῃ, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἀκολουθῇ τὴν διαδρομὴν ΖΓΔΗ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΔΕ, ἡ ΗΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· ἄρα αἱ ΖΑ, ΑΗ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΖΓ, ΗΔ· ὥστε ὁλόκληρος ἡ ΖΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ΖΑ, ΑΗ· αὐτὴ ὅμως εἶναι καὶ μικροτέρα (I. 20)· ὅπερ ἀδύνατον· Ὄχι ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ εἰς τὸ Η ἀγομένη εὐθεῖα δὲν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α· ἄρα θὰ διέλθῃ.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται μεταξύ των ἐκτός, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα αὐτῶν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Κύκλος δὲν ἐφάπτεται κύκλου εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἓν εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτεται.

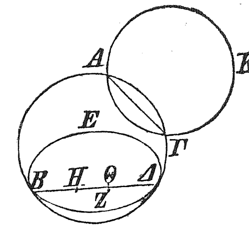
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἐφάπτεται ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρῶτον τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ κύκλου ΕΒΖΔ, εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Δ, Β.

Καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν κύκλου ΑΒΓΔ κέντρον τὸ Η, τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ.

Ἡ ἀγομένη ἄρα ἀπὸ τὸ Η πρὸς τὸ Θ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Β, Δ (III. 11). Ἂς εἶναι δὲ αὐτή, ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἡ ΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΔ· ἄρα, κατὰ μείζονα λόγον ἡ ΒΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Θ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΕΒΖΔ, ἡ ΒΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΔ· ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ πολὺ μεγαλυτέρα αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα κύκλος δὲν ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου ἐντός, εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ Α, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεία τὰ Α, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτός· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

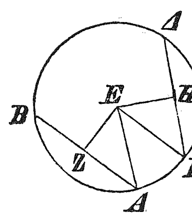
Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ [καθ'] ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστι διπλῆ· καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΕΖ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστιν ἴσον· ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· καί ἐστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Λέγω ἐπίσης, ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐκτός.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἄς ἐφάπτεται ἐκτὸς ὁ κύκλος ΑΓΚ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εἰς περισσότερα ἢ ἓν σημεῖα, τὰ Α, Γ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχουν ληφθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκάστου τῶν κύκλων ΑΒΓΔ, ΑΓΚ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Γ, ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ πέσῃ ἐντὸς ἑκάστου τῶν κύκλων τούτων (III. 2)· ἀλλὰ εἰς μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἔπεσεν ἐντός, εἰς δὲ τὸν κύκλον ΑΓΚ ἔπεσεν ἐκτὸς (ὁρ. III. 3)· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα κύκλος δὲν ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου ἐκτὸς εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα δὲν ἐφάπτεται κύκλου εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ ἕν, εἴτε ἐντὸς ἐφάπτεται εἴτε ἐκτός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Εἰς κύκλον αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ καὶ ἐντὸς αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Διότι, ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (III. 1) καὶ ἔστω τοῦτο τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἄς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΕΗ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἄς ἀχθοῦν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ, τέμνει καθέτως εὐθεῖαν τινα μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ, τέμνει αὐτὴν καὶ εἰς τὸ μέσον (III. 3). Ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΑΖ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΗ· καὶ εἶναι ἴση ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΖ, ΕΖ (I.47)· διότι ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθή· πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ· διότι ἡ πρὸς τὸ Η γωνία εἶναι ὀρθή· ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΑΖ, ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΗΕ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΗ· διότι ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τετράγωνον τὸ τῆς ΖΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Εἰς κύκλον δέ, λέγονται εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπ' αὐτὰς εἶναι ἴσαι (ὁρ. III. 4)· ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλ' ἄς ἀπέχουν τώρα ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ἤτοι ἡ ΕΖ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ.

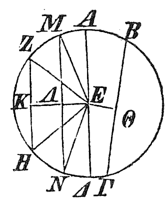
Διότι, ἐὰν γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ μὲν ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ διπλασία τῆς ΓΗ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ· ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΖ, ΖΑ (I.47) πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΓΕ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ. Ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΖ, ΖΑ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΓ· ἐξ ὧν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΗ· διότι ἡ ΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΗ· ἄρα καὶ τὸ ἀπομένον τετράγωνον τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸν τὴν ΓΗ· καὶ εἶναι τῆς μὲν ΑΖ διπλασία ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλασία ἡ ΓΔ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἡ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τῆς ΑΔ διαμέτρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ, ΕΗ.

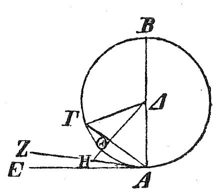
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσιν [καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν], ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ· ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων [ἐστίν], βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση [καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν]. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις΄.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ του Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ ΑΕ· λέγω δή, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰς κύκλον ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Εἰς κύκλον μεγίστη μὲν εὐθεῖα εἶναι ἡ διάμετρος, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον τούτου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ πλησιέστερον μὲν τῆς διαμέτρου ΑΔ ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν εἶναι ἡ ΑΔ, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν ἀπὸ τοῦ κέντρου Ε ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ, αἱ κάθετοι ΕΘ, ΕΚ· Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΕΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΘ (όρ. III. 5). Ἂς ληφθῇ ἡ ΕΛ ἴση πρὸς τὴν ΕΘ καὶ διὰ τοῦ Λ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΛΜ ἐπὶ τὴν ΕΚ ἂς προεκταθῇ αὕτη μέχρι τοῦ Ν, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΜΕ, ΕΝ, ΖΕ, ΕΗ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΛ, εἶναι ἴση καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΜΝ (III. 14). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΝ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΜΕ, ΕΝ. Ἀλλ' αἱ μὲν ΜΕ, ΕΝ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΜΝ (I. 20) [καὶ ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΝ], εἶναι δὲ ἴση ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο πλευραὶ ΜΕ, ΕΝ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἡ γωνία ΜΕΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΖΕΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΜΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΗ (I.24). Ἀλλὰ ἡ ΜΝ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΓ [καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ]. Ἄρα μεγίστη μὲν εἶναι ἡ διάμετρος, μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Εἰς κύκλον ἄρα μεγίστη μὲν εὐθεῖα εἶναι ἡ διάμετρος, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, πάντοτε ἡ πλησιέστερον πρὸς τὸ κέντρον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπώτερον τούτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν τόπον τὸν μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τῆς περιφερείας δὲν δύναται νὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα, καὶ ἡ μὲν γωνία τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας, ἡ δὲ ὑπόλοιπος εἶναι μικροτέρα.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α, τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου, ἀγομένη κάθετος θὰ πέσῃ ἐκτὸς κύκλου.

Διότι, ἔστω ὅτι δὲν πίπτει ἐκτός, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς πέσῃ ἐντὸς ὅπως ἡ ΓΑ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΔ (I.5). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ γωνία ΔΑΓ· ἄρα καὶ ἡ ΑΓΔ εἶναι ὀρθή· εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ΔΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον (I.17). Ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΒΑ κάθετος δὲν θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ πέσῃ· ἄρα θὰ πέσῃ ἐκτός.

Ἂς πέσῃ αὕτη ὅπως ἡ ΑΕ· λέγω τώρα, ὅτι εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τῆς εὐθείας ΑΕ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ, μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας.

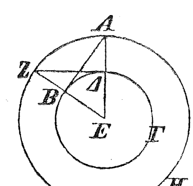
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομενην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. καί ἐστιν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΔ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἄς παρεμπέσῃ ἄλλη, ὅπως ἡ ΖΑ καὶ ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΗΔ εἶναι ὀρθή, μικροτέρα δὲ τῆς ὀρθῆς ἡ ΔΑΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ (I.19). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΘ· ἄρα ἡ ΔΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΗ, ἡ μικροτέρα τῆς μεγαλυτέρας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ τόξου δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι ἡ μὲν γωνία τοῦ ἡμικυκλίου ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ εἶναι μεγαλυτέρα πάσης εὐθύγράμμου ὀξείας γωνίας, ἡ δὲ ὑπόλοιπος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ εἶναι μικροτέρα πάσης εὐθυγράμμου ὀξείας γωνίας.

Διότι, ἐὰν ὑπάρχῃ γωνία τις εὐθύγραμμος μεγαλυτέρα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, μικροτέρα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, εἰς τὸν τόπον μεταξὺ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, θὰ παρεμπέσῃ εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ σχηματίσῃ γωνίαν περιεχομένην ὑπὸ εὐθειῶν, μεγαλυτέραν μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, μικροτέραν δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ. Ἀλλὰ δὲν παρεμπίπτει τοιαύτη εὐθεῖα (κατὰ τ' ἀνωτέρω)· ἄρα δὲν θὰ ὑπάρχῃ μεγαλυτέρα ὀξεῖα γωνία περιεχομένη ὑπὸ εὐθειῶν ἀπὸ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΑ καὶ τοῦ τόξου ΓΘΑ, οὐδὲ μικροτέρα τῆς περιεχομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΘΑ καὶ τῆς εὐθείας ΑΕ.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα ἐφάπτεται κύκλου μόνον εἰς ἓν σημεῖον, διότι ἐδείχθη, ὅτι ἡ ἔχουσα μετ' αὐτοῦ δυό κοινὰ σημεῖα πίπτει ἐντός αὐτοῦ]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· πρέπει ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου ΒΓΔ ν' ἀχθῇ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμή.

Διότι, ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε καὶ ἄς ἄχθῇ ἡ ΑΕ, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Ε ἀκτῖνα δὲ τὴν ΕΑ ἄς γραφῇ ὁ κύκλος ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΕΑ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἄς ἀχθοῦν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου ΒΓΔ ἔχει ἀχθῆ ἐφαπτομένη ἡ ΑΒ.

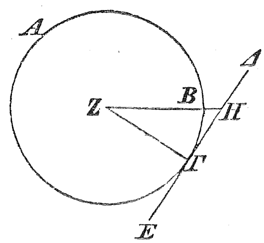
Διότι, ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι κέντρον τῶν κύκλων ΒΓΔ, ΑΖΗ, ἕπεται, ὅτι ἡ μὲν ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΒ· εἶναι λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΕΒ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΖΕ, ΕΔ· καὶ περιέχουν αὗται τὴν κοινὴν γωνίαν Ε· ἄρα ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΑ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς τοῦ ἄλλου (I.4)· ἄρα ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΕΔΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΒΑ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἡ ΕΒ ἔχει ἀχθῆ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (III. 16 πόρ)· ἄρα ἡ ΑΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΒΓΔ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἔχει ἀχθῆ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαπτομένη ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιη΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

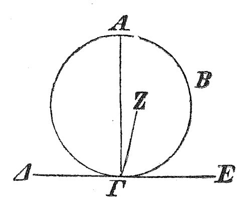
Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ· ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῆς ΖΗ ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

18.

Ἐὰν εὐθεῖα τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖα τις, μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Διότι, ἂς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖα τις ἡ ΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ Γ ἡ ΖΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΖΗ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΖΗΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓΗ εἶναι ὀξεῖα (I.17)· κεῖται δὲ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ (I.19)· ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ· εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα καὶ ἡ ΖΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΖΗ, ἡ μικροτέρα, τῆς μεγαλυτέρας· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ἡ ΖΗ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ὑπάρχει πλὴν τῆς ΖΓ· ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖα τις μέχρι τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς, ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν εὐθεῖα τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀχθείσης.

Διότι, ἂς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖα τις ἡ ΔΕ, κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ ἡ ΓΑ· λέγω, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Διότι ἔστω, ὅτι δὲν εἶναι, ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι τὸ Ζ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτεται εὐθεῖα τις ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῇ ἡ ΖΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ (III. 18)· ἄρα ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΓΕ ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓΕ, ἡ μικροτέρα πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα τὸ Ζ δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικύομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι ὑπάρχει, πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἐπὶ τῆς ἀχθείσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

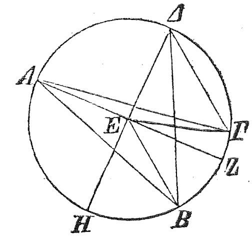
20.

Εἰς κύκλον ἡ γωνία ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῆς ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν καὶ αἱ δύο γωνίαι ἔχουν ὡς βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐπίκεντρος μὲν γωνία, ἔστω ἡ ΒΕΓ, ἐγγεγραμμένη δὲ ἡ ΒΑΓ, ἂς ἔχουν δὲ τὸ αὐτὸ τόξον ὡς βάσιν, τὸ ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΒΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστι διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστι διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστι διπλῆ.



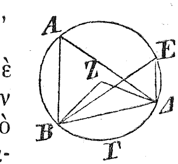
Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΕΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓΔ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστι διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

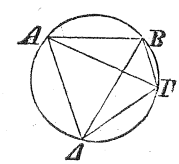
κβ΄.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ· ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῳ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι, ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΕ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ, καὶ ἡ γωνία ΕΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ· ἄρα αἱ γωνίαι ΕΑΒ, ΕΒΑ εἶναι διπλάσιαι τῆς ΕΑΒ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΕΖ ἴση πρὸς τὰς ΕΑΒ, ΕΒΑ (Ι.32)· ἄρα καὶ ἡ ΒΕΖ εἶναι διπλασία τῆς ΕΑΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΖΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΑΓ. Ἄρα ὅλη ἡ ΒΕΓ εἶναι διπλασία ὅλης τῆς ΒΑΓ.

Ἂς φέρωμεν πάλιν μίαν τεθλασμένην γραμμὴν καὶ ἔστω ἄλλη γωνία ἡ ΒΔΓ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἂς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ Η. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ γωνία ΗΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔΓ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΗΕΒ εἶναι διπλασία τῆς ΕΔΒ· ἄρα ἡ λοιπὴ ἡ ΒΕΓ εἶναι διπλασία τῆς ΒΔΓ.

Εἰς κύκλον ἄρα ἡ γωνία ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον εἶναι διπλασία τῆς ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, ὅταν [αἱ γωνίαι] ἔχουν τὸ αὐτὸ τόξον ὡς βάσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Εἰς κύκλον, αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΒΑΕΔ ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΕΔ εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Διότι, ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν γωνία ΒΖΔ εἶναι ἐπίκεντρος, ἡ δὲ ΒΑΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἔχουν ὡς βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον τὸ ΒΓΔ, ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΔ (ΙΙΙ. 20). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΒΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΒΕΔ· ἄρα ἡ ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΕΔ.

Εἰς κύκλον ἄρα αἱ εἰς τὸ αὐτὸ αὐτὸ τμῆμα γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν εἰς κύκλον τετραπλεύρων ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

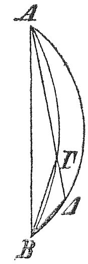
Ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθὰς (Ι.32), ἔπεται, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΓΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΒΔΓ· διότι αὗται εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΒΑΔΓ (ΙΙΙ. 21)· ἡ δὲ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ· διότι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ ΑΔΓΒ· ἄρα ὅλη ἡ ΑΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ἂς προστεθῇ ἡ κοινὴ ΑΒΓ· ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΑΒΓ, ΑΔΓ. Ἀλλὰ αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Ἄρα καὶ αἱ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΔΓΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς.

Ἄρα τῶν εἰς τοὺς κύκλους τετραπλεύρων, αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ΄.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ

Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστί τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

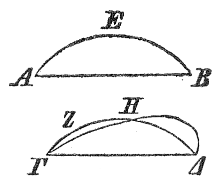
Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ΄.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.



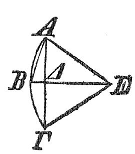
Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων.



Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΒ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δύο ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ

23.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς δὲν δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς κατασκευασθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ καὶ καὶ ἂς διαχθῇ ἡ ΑΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τμῆμα ΑΓΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΑΔΒ, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων εἶναι τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, (ὁρ. III. 11), ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ, ἤτοι ἡ ἐκτὸς ἴση πρὸς τὴν ἐντός· ὅπερ ἀδύνατον (I.16). Ἄρα δὲν δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῆς δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξὺ των ἴσα.

Διότι, ἔστωσαν ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΕΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα ΓΖΔ.

Διότι, ἐὰν ἐφαρμοσθῇ τὸ τμῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖΔ καὶ τεθῇ τὸ μὲν σημεῖον Α ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ σημείου Δ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· ὅταν δὲ ἡ ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ τὸ τμῆμα ΑΕΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΖΔ. Διότι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, τὸ δὲ τμῆμα ΑΕΒ δὲν ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΖΔ, τοῦτο ἢ θὰ πέσῃ ἐντὸς αὐτοῦ ἢ ἐκτὸς ἢ θὰ παραλλάξῃ ὅπως τὸ ΓΗΔ, ὁπότε κύκλος τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα ἢ δύο σημεῖα· ὅπερ ἀδύνατον (III. 10). Ὄχι λοιπόν, ἐὰν ἐφαρμόσῃ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς ΓΔ, δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ τμῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ ΓΖΔ· ἄρα θὰ ἐφαρμόσῃ, καὶ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό.

Ἄρα τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι μεταξύ των ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

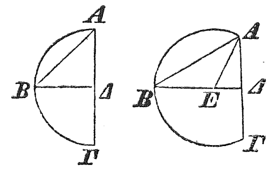
Ἐὰν δοθῇ τμῆμα κύκλου νὰ γραφῇ ἐπ᾽ αὐτοῦ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· πρέπει νὰ γραφῇ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα ΑΒΓ.

Διότι, ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἡ ΔΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΔ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ΒΑΔ.

Ἔστω πρῶτον, ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α, ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΔ (I.23) καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΔΒ μέχρι τοῦ σημείου Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἔπεται, ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΔΕ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΕ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας ΓΔ, ΔΕ· καὶ ἡ γωνία ΑΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΕ· διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ βάσις ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΕ (I. 4). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΕ· ἄρα καὶ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ· αἱ

ΓΕ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου διὰ τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.



Ὁμοίως [δὲ] κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ αἱ τρεῖς αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

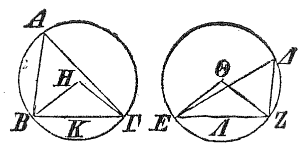
Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγέγραπται ὁ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κϛ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ]· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ εἶναι μεταξὺ των ἴσαι· ἐπομένως ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα (III. 9). Ἄρα δοθέντος τμήματος κύκλου ἔχει γραφῆ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τοῦτο. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒΓ εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου, διότι τὸ κέντρον Ε εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Ὁμοίως δέ, καὶ ἂν ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΔ, ἀφοῦ ἡ ΑΔ ληφθῇ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (I. 6) καὶ θὰ εἶναι τὸ Δ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τμῆμα, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΑΔ, καὶ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ μὲ κορυφὴν τὸ Α, γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ΑΒΔ (I. 23), τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΒΓ καὶ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΔΒ, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΑΒΓ μεγαλύτερον ἡμικυκλίου.

Ἄρα δοθέντος τμήματος κύκλου ἔχει γραφῆ ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τοῦτο· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

26.

Εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἴτε ἐπίκεντροι εἶναι αὗται, εἴτε ἐγγεγραμμέναι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ εἰς αὐτοὺς ἔστωσαν ἴσαι γωνίαι ἐπίκεντροι μὲν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι τὸ τόξον ΒΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΛΖ.

Διότι, ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσοι, αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΗ, ΗΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΕΘ, ΘΖ· καὶ ἡ γωνία Η εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Θ· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ, ἕπεται, ὅτι τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τμῆμα ΕΔΖ (ὁρισ. III. 11)· καὶ εἶναι ταῦτα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ]. τὰ δὲ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, εἶναι μεταξὺ των ἴσα (III. 24)· ἄρα τὸ τμῆμα ΒΑΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΔΖ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος ΑΒΓ ἴσος πρὸς ὅλον τὸν κύκλον ΔΕΖ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΒΚΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΛΖ.

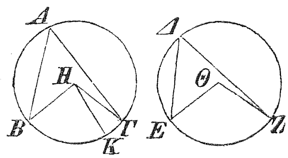
Εἰς ἴσους ἄρα κύκλους, αἱ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι μεταξὺ των ἴσαι, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι.

Διότι, εἰς τοὺς ἴσους κύκλους ΑΒΓ, ΔΕΖ ἂς βαίνουν ἐπὶ τῶν ἴσων τόξων ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τὰ κέντρα Η, Θ (ἐπίκεντροι) αἱ γωνίαι ΒΗΓ, ΕΘΖ, ἐγγεγραμμέναι δὲ αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΒΗΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘΖ, ἡ δὲ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΖ.

Διότι, ἐὰν ἡ ΒΗΓ εἶναι ἄνισος πρὸς τὴν ΕΘΖ, μία ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἔστω ἡ ΒΗΓ μεγαλυτέρα, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΗ καὶ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ

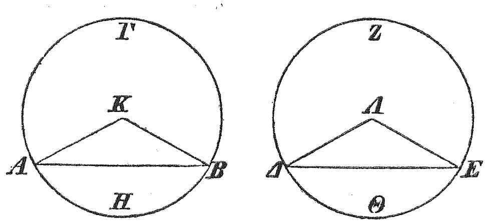


Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάτων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.



Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

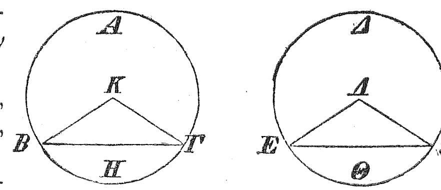
Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ.



Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. καὶ ἐπεὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον τὸ Η, γωνία ἴση πρὸς τὴν ΕΘΖ ἡ ΒΗΚ (Ι. 23)· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ὅταν εἶναι ἐπίκεντροι, βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (ΙΙΙ. 26)· ἄρα τὸ τόξον ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΖ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ· ἄρα καὶ τὸ ΒΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΓ, τὸ μικρότερον, ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισος ἡ γωνία ΒΗΓ πρὸς τὴν γωνίαν ΕΘΖ· ἄρα εἶναι ἴση Καὶ εἶναι ἡ μὲν (ἐγγεγραμμένη) ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ Α, τὸ ἥμισυ τῆς ΒΗΓ, ἡ δὲ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὸ Δ τὸ ἥμισυ τῆς ΕΘΖ, (ΙΙΙ. 20). Ἄρα καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη ἡ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην τὴν ἔχουσαν κορυφήν τὸ Δ.

Εἰς τοὺς ἴσους ἄρα κύκλους αἱ γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων εἶναι μεταξύ των ἴσαι, εἴτε αὗται εἶναι ἐπίκεντροι εἴτε ἐγγεγραμμέναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι (χορδαὶ) χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ εἰς τοὺς κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, νὰ χωρίζουν μεγαλύτερα μὲν τόξα τὰ ΑΓΒ, ΔΖΕ, μικρότερα δὲ τὰ ΑΗΒ, ΔΘΕ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν μεγαλύτερον τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τόξον ΔΖΕ, τὸ δὲ μικρότερον τόξον ΑΗΒ πρὸς τὸ μικρότερον ΔΘΕ.

Διότι, ἂς ληφθοῦν τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀκτῖνες (ὁρισ. ΙΙΙ. Ι)· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΚ, ΚΒ ἴσαι πρὸς δύο, τὰς ΔΛ, ΛΕ· καὶ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΕ· ἄρα ἡ γωνία ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΛΕ (Ι. 8). Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, ὅταν εἶναι ἐπίκεντροι (ΙΙΙ. 26)· ἄρα τὸ τόξον ΑΗΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΘΕ. Εἶναι δὲ καὶ ὅλος ὁ κύκλος ΑΒΓ ἴσος πρὸς ὅλον τὸν κύκλον ΔΕΖ· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΑΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΔΖΕ (κ. ἔν. 3).

Εἰς τοὺς ἴσους ἄρα κύκλους αἱ ἴσαι εὐθεῖαι χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον, τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουν ἴσαι εὐθεῖαι (εἰς τὰ ἴσα τόξα, ἴσων κύκλων, ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί).

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθοῦν εἰς αὐτοὺς τὰ ἴσα τόξα ΒΗΓ, ΕΘΖ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι, ἂς ληφθοῦν τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω ταῦτα τὰ Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΗΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΘΖ, εἶναι ἴση καὶ ἡ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

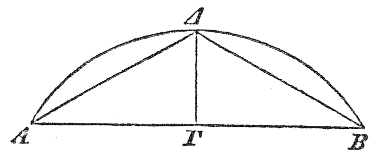
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι,

λ'

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν, αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

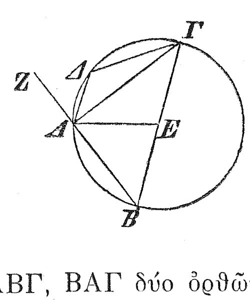
Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λα'.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ**. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· καὶ ἐστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν [αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ γωνία ΒΚΓ πρὸς τὴν ΕΛΖ (III. 27). Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἴσοι, εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀκτῖνες (ὁρ. III. 1)· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΚ, ΚΒ ἴσαι πρὸς δύο, τὰς ΕΛ, ΛΖ' καὶ περιέχουν αὗται γωνίας ἴσας· ἄρα ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ (I. 4).

Ἄρα εἰς τοὺς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνουν ἴσαι εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Τὸ δοθὲν τόξον νὰ διχοτομηθῇ.

Ἔστω τὸ δοθὲν τόξον τὸ ΑΔΒ· πρέπει τὸ τόξον ΑΔΒ νὰ διχοτομηθῇ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ (I.10), καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΓΔ, ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ· καὶ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ' διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ βάσις ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ (I.4). Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι χωρίζουν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τὸ δὲ μικρότερον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον (III. 28)· καὶ εἶναι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΔ, ΔΒ μικρότερον ἡμικυκλίου· ἄρα τὸ τόξον ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΒ.

Ἄρα τὸ δοθὲν τόξον ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

31.

Εἰς κύκλον ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς μικρότερον τμῆμα εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ ἀκόμη, ἡ μὲν γωνία τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία τοῦ μικροτέρου τμήματος μικροτέρα ὀρθῆς.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν εἰς τὸ ΒΑΓ ἡμικύκλιον γωνία, ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου, γωνία ἡ ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς τὸ μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου τμῆμα τὸ ΑΔΓ γωνία ἡ ΑΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΑ μέχρι τοῦ Ζ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ (I.5). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑΕ· ἄρα ὅλη ἡ γωνία ΒΑΓ ἰσοῦται πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΖΑΓ, ἡ ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἴση πρὸς τὰς δύο γωνίας τὰς ΑΒΓ, ΑΓΒ (I.32)· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΑΓ. ἄρα ἑκάστη τούτων εἶναι ὀρθὴ (I ὁρισ. 10)· ἄρα ἡ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΒΑΓ γωνία, ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Καὶ ἐπειδὴ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΑΒΓ, ΒΑΓ εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν, (I.17) ἡ δὲ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· καὶ εὑρίσκεται αὐτὴ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμικυκλίου.

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει τετράπλευρον εἰς κύκλον, τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ εἰς κύκλον τετραπλεύρων, αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθὰς (III. 22), [ἕπεται γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν], καί ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστιν· καί ἐστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό [τε] τῆς ΑΔ[Γ] περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐστιν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔ[Γ] περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι [τμήματι] μείζων ὀρθῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος [γωνία] μείζων [ἐστὶν] ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος [γωνία] ἐλάττων ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

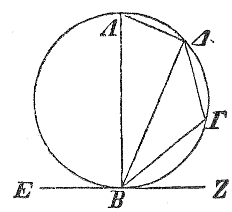
[Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν [ἡ] μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι· ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν].

λβ΄

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίας.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστιν. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τε-ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΔΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς], καὶ εἶναι ἡ ΑΒΓ μικροτέρα ὀρθῆς· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος, ἡ ΑΔΓ γωνία, εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ εὑρίσκεται αὕτη εἰς τὸ τμῆμα ΑΔΓ τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου.

Λέγω ἀκόμη, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ μικροτέρου τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΔΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς. Καὶ εἶναι τοῦτο φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΑ, ΑΓ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΑΖ γωνία εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΑ καὶ τοῦ τόξου ΑΔΓ, εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς.

Εἰς κύκλον ἄρα, ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ εὑρισκομένη εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ εἰς τὸ μικρότερον τμῆμα μεγαλυτέρα ὀρθῆς· καὶ ἀκόμη ἡ μὲν γωνία τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία τοῦ μικροτέρου τμήματος μικροτέρα ὀρθῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[**Πόρισμα.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας δύο, ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἴση πρὸς ταύτην καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὰς ἄλλας (ἐντὸς) δύο· ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς εἶναι ἴσαι, εἶναι ὀρθαί].

32.

Ἐὰν εὐθεῖα τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα τις τέμνουσα τὸν κύκλον, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας εἰς τὰ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματα.

Διότι, ἄς ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εὐθεῖα τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἄς ἀχθῇ εὐθεῖα τις εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. Λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης ΕΖ, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς εἰς τὰ ἐναλλὰξ τμήματα τοῦ κύκλου γωνίας, τοὐτέστιν, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΖΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΔ κατασκευαζομένην γωνίαν (δηλ. τὴν ἐγγεγραμμένην, τὴν ἔχουσαν τὴν κορυφὴν εἰς τὸ τόξον ΒΑΔ καὶ βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ), ἡ δὲ γωνία ΕΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΔΓΒ κατασκευαζομένην γωνίαν.

Διότι, ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἡ ΒΑ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἄς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ, τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἄς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ ἐφάπτεται εὐθεῖα τις ἡ ΕΖ κατὰ τὸ σημεῖον Β καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῆ ἡ ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΑ (III. 19). Ἄρα ἡ ΒΑ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ἡ γωνία ἄρα ΑΔΒ εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθὴ (III. 31). Αἱ λοιπαὶ ἄρα γωνίαι (τοῦ τριγώνου) αἱ ΒΑΔ, ΑΒΔ ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθὴν (I. 32). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΒΖ ὀρθή· ἄρα ἡ ΑΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὰς ΒΑΔ, ΑΒΔ. Ἄς ἀφαιρεθῇ (ἀπὸ τὰς δύο ὀρθὰς) ἡ κοινὴ ΑΒΔ· ἄρα ἡ ἀπομένουσα γωνία ΔΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

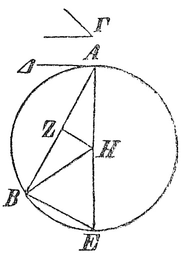
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

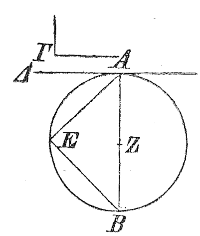
Ἡ δὴ πρὸς τῷ Γ [γωνία] ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. ἤχθω τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. γεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ. ἐπεὶ οὖν ἀπ᾽ ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΕ κύκλου· ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸν ΑΒΕ κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΕΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ [γωνίᾳ]· συνεστάτω [πάλιν] τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΖΑ, ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ.



Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κύκλου διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι· ὀρθὴ τμῆμα τοῦ κύκλου ἀπομένουσαν γωνίαν ΒΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχει εἰς τὸν κύκλον (ἐγγεγραμμ.) τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθὰς (ΙΙΙ. 22). Εἶναι δὲ καὶ αἱ ΔΒΖ, ΔΒΕ ἴσαι μὲ δύο ὀρθὰς (Ι. 13)· ἄρα, αἱ ΔΒΖ, ΔΒΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΒΑΔ, ΒΓΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΒΑΔ ἐδείχθη ὅτι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒΖ· ἄρα (ἀφαιρουμένων τῶν ἴσων) ἡ ἀπομένουσα ΔΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν γωνίαν ΔΓΒ, τὴν εὑρισκομένην εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου, τὸ ΔΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τις ἐφάπτεται κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα τις τέμνουσα τὸν κύκλον, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τὰς κειμένας εἰς τὰ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Γ· πρέπει ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ, νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ·

Ἡ γωνία Γ θὰ εἶναι ἢ ὀξεῖα ἢ ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον, ὅτι εἶναι ὀξεῖα, καὶ ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία ἴση πρὸς τὴν Γ ἡ ΒΑΔ (Ι. 23)· ἄρα καὶ ἡ ΒΑΔ εἶναι ὀξεῖα. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΗ ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΖ, ΖΗ· καὶ ἡ γωνία ΑΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΖΗ· ἄρα καὶ ἡ βάσις ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ (Ι. 4). Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτινα δὲ τὴν ΗΑ θὰ διέλθη καὶ διὰ τοῦ Β. Ἂς γραφῇ οὗτος καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΕ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΕ (ΙΙΙ, 16 πόρ.)· ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΕ ἐφάπτεται εὐθεῖα τις ἡ ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α ἔχει διαχθῇ εἰς τὸν κύκλον, ΑΒΕ εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου γωνίαν τὴν ΑΕΒ (ΙΙΙ. 32). Ἀλλὰ ἡ ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ· ἄρα καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ.

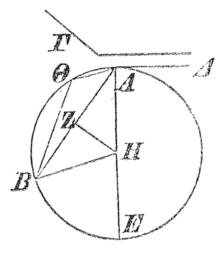
Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἔχει γραφῆ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον τὴν γωνίαν ΑΕΒ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ.

Ἀλλ' ἔστω τώρα, ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή· καὶ ὅτι πρέπει πάλιν νὰ γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν Γ. Ἂς κατασκευασθῇ πάλιν γωνία, ἡ ΒΑΔ, ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν Γ, ὅπως εἶναι εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ καὶ μὲ κέντρον τὸ Ζ, ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΑΕΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἐφάπτεται ἄρα τοῦ κύκλου ΑΒΕ, διότι ἡ παρὰ τὸ Α γωνία εἶναι ὀρθὴ (πόρ. ΙΙΙ. 16). Καὶ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ· διότι καὶ αὕτη εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή (ΙΙΙ. 31). Ἀλλὰ καὶ ἡ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΕΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.



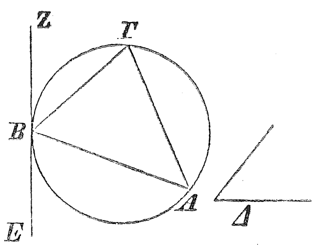
Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ᾽ ἄκρας πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΖΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ, ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ [γωνίᾳ].

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λε'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν γὰρ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ

ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἄρα ἔχει γραφῆ πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ.

Ἀλλ' ἀκόμη ἔστω ἡ γωνία Γ ἀμβλεῖα· καὶ ἄς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α γωνία ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΑΔ, ὅπως εἶναι εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, καὶ ἄς τμηθῇ πάλιν ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΗ ἴσαι πρὸς τὰς δύο τὰς ΒΖ, ΖΗ καὶ ἡ γωνία ΑΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΖΗ· ἄρα ἡ βάσις ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΗ (I.4)· ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ τὴν ΗΛ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β. Ἄς διέρχεται δέ, ὅπως ὁ ΑΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΕ ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος, ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΕΒ (πόρ. III., 16). Καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α ἔχει ἀχθῇ ἡ ΑΒ· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα ΑΘΒ τοῦ κύκλου κατεσκευασμένην γωνίαν (III. 32). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ. Ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΑΘΒ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν Γ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἔχει γραφῆ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

34.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου ν' ἀφαιρεθῇ τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· πρέπει ἀπὸ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ν' ἀφαιρεθῇ τμῆμα τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν Δ.

Ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Β, καὶ ἄς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Β γωνία ἴση πρὸς τὴν Δ ἡ ΖΒΓ (I.23).

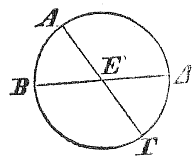
Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Β ἐπαφῆς ἔχει ἀχθῇ ἡ ΒΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα ΒΑΓ κατασκευασθεῖσαν γωνίαν (III. 32). Ἀλλὰ ἡ ΖΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα ΒΑΓ γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Δ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ, ἔχει ἀφαιρεθῇ τὸ τμῆμα ΒΑΓ, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

35.

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης.

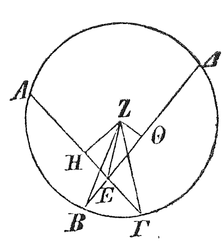
Διότι, ἄς τέμνωνται μεταξύ των εἰς κύκλον τὸν ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΓ, τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, φανερόν, ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰςΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσον αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ· [κοινὸν] προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι δύο τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ'

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓ[Α], ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΒΔ ἐφαπτέσθω· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα [Δ]ΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ

ΒΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἐὰν μὲν αἱ ΑΓ, ΒΔ διέρχωνται διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε τὸ Ε νὰ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

Ἂς μὴ διέρχωνται τώρα διὰ τοῦ κέντρου αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΔΒ αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ τέμνει καθέτως εὐθεῖαν τινα μὴ διερχομενην διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον (III. 3)· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῇ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Ε, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΗ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΗΓ (II. 5)· ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΗΖ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν ΗΕ, ΗΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΓΖ. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὰ τετράγωνα τῶν ΕΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ, πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΓΗ, ΗΖ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ (I.47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ (I.47). Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΕ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· τὸ ἀπομένον ἄρα ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ.

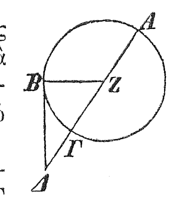
Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται μεταξύ των, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

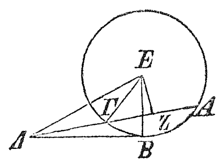
Ἐὰν ληφθῇ σημεῖον τι ἐκτὸς κύκλου, καὶ προσπίπτουν ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας μέρους αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης.

Διότι, ἂς ληφθῇ σημεῖον τι τὸ Δ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἂς προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ ἂς τέμνῃ τὸν κύκλον ΑΒΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἂς ἐφάπτεται· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ.

Ἡ ΔΓΑ ἢ θὰ διέρχεται ἢ δὲν θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Ἔστω πρότε κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ· τὸ ἄραὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.



ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΔ, ΖΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ· ὀρθὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ ὑπὸ ΕΖΓ [γωνία]· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.



Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς ρον, ὅτι διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω Ζ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΖΒ· ἄρα ἡ ΖΒΔ εἶναι ὀρθὴ (ΙΙΙ. 28). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ (ΙΙ. 6). Εἶναι δὲ ἡ ΖΓ ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ. Πρὸς τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ΖΔ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΔ (Ι. 47)· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΔ. Ἄς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ΔΒ.

Ἀλλ' ἀκόμη ἔστω, ὅτι ἡ ΔΓΑ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἄς ληφθῇ τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἄς ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἄς ἀχθοῦν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ἄρα ἡ ΕΒΔ εἶναι ὀρθὴ (ΙΙΙ. 28). Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ΕΖ, τέμνει καθέτως εὐθεῖαν τινα τὴν ΑΓ μὴ διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον (ΙΙΙ. 3)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖα ἡ ΑΓ ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΔ (ΙΙ. 6). Ἄς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΖΕ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν ΓΖ, ΖΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΔ, ΖΕ. Πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΓΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΓ (Ι. 47)· διότι ἡ γωνία ΕΖΓ εἶναι ὀρθή· πρὸς δὲ τὰ τετράγωνα τῶν ΔΖ, ΖΕ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΓ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΓ ἴση πρὸς τὴν ΕΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ. Πρὸς δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΔ εἶναι ἴσα τὰ τετράγωνα τῶν ΕΒ, ΒΔ (Ι. 47)· διότι ἡ γωνία ΕΒΔ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΒ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΕΒ, ΒΔ. Ἄς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὸ τετράγωνον τῆς ΕΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ.

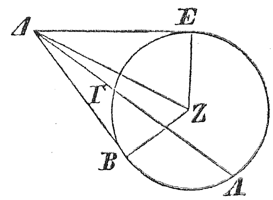
Ἐὰν ἄρα ληφθῇ σημεῖον τι ἐκτὸς κύκλου, καὶ προσπίπτουν ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας μέρους αὐτῆς θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν ληφθῇ σημεῖον τι ἐκτὸς κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὰ λαμβανόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Διότι, ἄς ληφθῇ σημεῖον τι τὸ Δ κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. καί ἐστιν ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.



Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τοῦ Δ ἂς προσπίπτουν πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ ἂς τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἂς προσπίπτῃ, ἔστω δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III. 27), καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. Ἄρα ἡ ΖΕΔ εἶναι ὀρθὴ (III. 28). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ἡ δὲ ΔΓΑ τέμνει τὸν κύκλον, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ (III. 36). Ἦτο δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΔΒ· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΕ ἴση πρὸς τὴν ΖΒ· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΕΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΒ, ΒΖ· καὶ βάσις αὐτῶν (τῶν τριγώνων) εἶναι ἡ κοινὴ ΖΔ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΒΖ (I. 8). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΔΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΔΒΖ εἶναι ὀρθή. Καὶ εἶναι ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος (ἀρχίζουσα ἀπὸ τὸ Β, διερχομένη διὰ τοῦ Ζ καὶ προεκτεινομένη)· ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ὁποία ἄγεται κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (πόρ. III. 16)· ἄρα ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον θ' ἀποδειχθῇ, καὶ ἂν τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα ληφθῇ σημεῖον τι ἐκτὸς κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτουν δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ἡ μὲν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ λαμβανόμενον ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου ἀπὸ τοῦ σημείου μέχρι τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ὅροι.

α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον ***εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι*** λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως ***περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται***, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

γ'. Σχῆμα εὐθύγραμμον ***εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι*** λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον ***περὶ κύκλον περιγράφεσθαι*** λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ε'. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

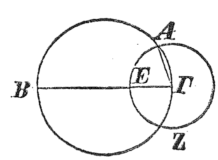
ϛ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ περατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ. δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΑΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστιν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΙΒΛΙΟΝ IV.

Ὁρισμοί.

1. Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι ἐγγράφεται εἰς εὐθύγραμμον σχῆμα, ὅταν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἐφάπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται.

2. Ὁμοίως δὲ λέγεται, ὅτι σχῆμα περιγράφεται περὶ σχῆμα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος, περὶ τὸ ὁποῖον περιγράφεται.

3. Σχῆμα εὐθύγραμμον λέγεται, ὅτι ἐγγράφεται εἰς κύκλον, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

4. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμον λέγεται, ὅτι περιγράφεται εἰς κύκλον, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

5. Ὁμοίως δὲ λέγεται, ὅτι κύκλος ἐγγράφεται εἰς σχῆμα, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐφάπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται.

6. Κύκλος δὲ λέγεται, ὅτι περιγράφεται περὶ σχῆμα, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἐφάπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον περιγράφεται.

7. Εὐθεῖα λέγεται, ὅτι ἐναρμόζεται εἰς κύκλον ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

1.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐναρμόσωμεν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Δ, ἡ ὁποία νὰ μὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ ἐναρμόσωμεν εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ, τὸ προσταχθὲν εἶναι γεγονός· διότι εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἔχει ἐναρμοσθῇ ἡ ΒΓ ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν Δ. Ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Δ, ἂς ληφθῇ ἡ ΓΕ ἴση πρὸς τὴν Δ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΓΕ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΕΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΕΑΖ, ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Δ· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΑ.

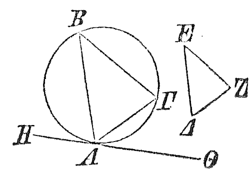
Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν ΑΒΓ ἔχει ἐναρμοσθῇ ἡ ΓΑ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ, πρὸς δὲ τῇ ΑΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΖΕ [γωνίᾳ] ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



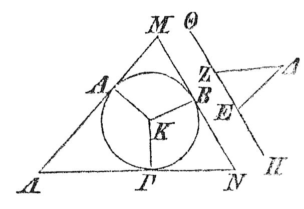
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση· [ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον].

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.



Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΚΑΜ, ΚΒΜ γωνίαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΛΝ [λοιπῇ] τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

2.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ σημεῖον Α ἡ ΗΘ (III. 17) καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΘ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΘΑΓ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΗ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΗΑΒ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΕ (I. 23), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτεται εὐθεῖα τις, ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς Α ἔχει ἀχθῇ εἰς τὸν κύκλον ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου γωνίαν, τὴν ΑΒΓ (III. 32). Ἀλλὰ ἡ ΘΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ· ἄρα καὶ ἡ ἀπομένουσα ἡ ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΕΔΖ (I. 32)· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ ἔχει ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ἔχει ἐγγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· πρέπει περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ ἰσογώνιον τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΕΖ καὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτῆς μέρη κατὰ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ κύκλου ΑΒΓ κέντρον τὸ Κ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τούτου τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΚΒ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Κ, πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΔΕΗ ἴση ἡ ΒΚΑ, πρὸς δὲ τὴν ΔΖΘ ἴση ἡ ΒΚΓ, (I. 23) καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓ αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ (III. 17).

Καὶ ἐπειδὴ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἐφάπτονται αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Κ ἔχουν ἀχθῇ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ἔπεται, ὅτι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ (III. 18). Καὶ ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΒΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, διότι τὸ ΑΜΒΚ διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα (I. 32), καὶ αἱ γωνίαι ΚΑΜ, ΚΒΜ εἶναι ὀρθαί, ἔπεται, ὅτι αἱ ἀπομένουσαι ΑΚΒ, ΑΜΒ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς. Εἶναι δὲ καὶ αἱ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι μὲ δύο ὀρθὰς (I. 13)· ἄρα αἱ ΑΚΒ, ΑΜΒ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΔΕΗ ΔΕΖ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΗ· ἄρα ἡ ἀπομένουσα ἡ ΑΜΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΔΕΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΛΝΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖΕ· ἄρα καὶ ἡ ἀπομένουσα ἡ ΜΛΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπομένουσαν τὴν ΕΔΖ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΛΜΝ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· καὶ εἶναι τοῦτο περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓ.

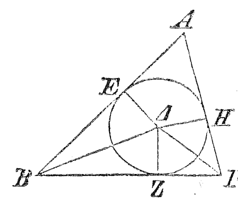
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν Ε,Ζ, Η κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Η γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἐγγεγράφθω ὡς ὁ ΖΗΕ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε, σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΖ· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον περιεγράφη ἰσογώνιον τρίγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· πρέπει εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἂς διχοτομηθοῦν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΓΒ διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΔ, ΓΔ (I.9), καὶ ἂς συμβάλλουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι κατὰ τὸ σημεῖον Δ (I. αἴτ. 5), καὶ ἂς ἀχθοῦν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΔ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΒΕΔ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΒΖΔ, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, δηλ. κοινὴν τὴν ἀπέναντι (ὑποτείνουσαν) μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΒΔ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς (I. 26)· ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΔΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΖ· ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (εἰς τὸν κώδικα ἐλλείπει τὸ γράμμα Δ) θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, διότι αἱ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Διότι, ἐὰν θὰ τέμνῃ ὁ κύκλος αὐτάς, τότε ἡ εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἀγομένη κάθετος θὰ πίπτῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἄτοπον (III. 16)· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· ἐπομένως θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν καὶ θὰ εἶναι ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς γραφῇ, ὅπως ὁ ΖΗΕ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

5.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· πρέπει περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

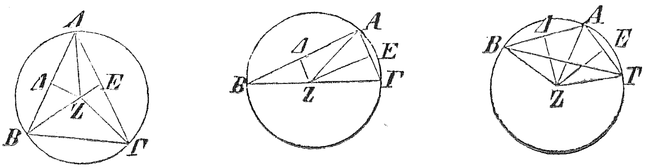
Ἂς διχοτομηθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Ε ἂς ἀχθοῦν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κάθετοι αἱ ΔΖ, ΕΖ· αὗται θὰ συμπέσουν ἢ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Ἂς συμπέσουν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΔΖ, ἔπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΒ (I.4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ ἡ ΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ εἶναι μεταξύ των ἴσαι (κοιναὶ ἔνν. 1). Ὁ γραφόμενος ἄρα κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς περιγραφῇ ὅπως ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλ' ἂς συμπίπτουν τώρα αἱ ΔΖ, ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Ζ, ὅπως συμβαίἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ, βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ΒΖ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· ὁ ἄρα [πάλιν] κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



[**Πόρισμα.**]

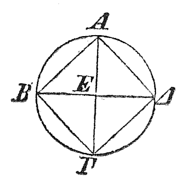
Καὶ φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίνου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. [ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου πεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ, ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.]

ς'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ· κέντρον γὰρ τὸ Ε· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ, βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

νει τοῦτο εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθῆ ἡ ΑΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ ἂς συμπίπτουν αἱ ΔΖ, ΕΖ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πάλιν κατὰ τὸ Ζ, ὅπως συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ τρίτον σχῆμα, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, εἶναι δὲ κοινὴ καὶ κάθετος ἡ ΔΖ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΖ (1.4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ ἡ ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ· ἄρα πάλιν ὁ κύκλος γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον ἔχει περιγραφῆ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[Πόρισμα.]

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἡ γωνία ΒΑΓ, εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μεγαλύτερον ἡμικυκλίου εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς· ὅτε δὲ τὸ κέντρον πίπτει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, ἡ γωνία ΒΑΓ εὑρισκομένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ἡ ΒΑΓ εὑρισκομένη εἰς τμῆμα μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς. ["Ωστε καὶ ὅταν ἡ διδομένη γωνία εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς, αἱ ΔΖ, ΕΖ θὰ πέσουν ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ὅταν δὲ εἶναι ὀρθή, θὰ πέσουν ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς θὰ πέσουν ἐκτὸς τῆς ΒΓ (III. 31)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

6.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῆ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῆ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ κάθετοι μεταξύ των αἱ ΑΓ, ΒΔ καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· διότι τὸ Ε εἶναι κέντρον· κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΕΑ, ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΔ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΓΔ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΑΔ· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ΒΑΔ εἶναι ἡμικύκλιον· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή (III. 31). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ εἶναι ὀρθή· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον (I. ορισ. 22). Καὶ ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ.

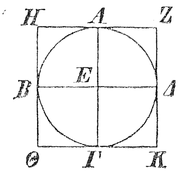
Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῆ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ζ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.



Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ, αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστι παράλληλος. ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἔστι παράλληλος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστι παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστιν ἴση [καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστιν ἴση], ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω δή, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

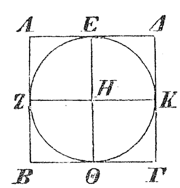
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΑΒ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ. διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν



ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι [εἰσιν]. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστιν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις [εἰσίν]. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Θ, Κ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖ-

7.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Ἂς ἀχθοῦν δύο διάμετροι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ κάθετοι μεταξύ των, αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ (III. 17).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΗ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Ε ἔχει ἀχθῇ ἕως τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α ἡ ΕΑ, ἕπεται, ὅτι αἱ παρὰ τὸ Α γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ (III. 18). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΒΗ ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ (I. 29). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ. Ὥστε καὶ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΚ (I. 30). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΗΖ, ΘΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕΔ. Ἄρα τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἄρα ἡ μὲν ΗΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΚ (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΖ, ΘΚ, [καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΗΖ, ΘΚ], ἕπεται, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΗΘΚ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΗΒΕΑ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗΒ εἶναι ὀρθὴ (I. 34). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Θ, Κ, Ζ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Ἄρα τὸ ΖΗΘΚ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ἄρα εἶναι τετράγωνον. Καὶ ἔχει περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ.

Ἄρα περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ἔχει περιγραφῆ τετράγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

8.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν ΑΔ, ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν ΑΒ. ΓΔ, ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ πρὸς ὁποιανδήποτε τῶν ΑΔ, ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΖΚ (I. 30 καὶ 31)· ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι (I. 34). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΕ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΑΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΕ. Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΗΚ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΗ, ΗΕ· ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον μὲν τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, διότι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Θ, Κ, γωνίαι εἶναι ὀρθαί· διότι, ἐὰν ὁ κύκλος θὰ τέμνῃ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ ται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Ε, Ζ, Θ, Κ κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

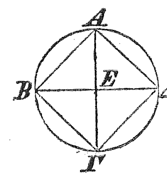
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

θʹ.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

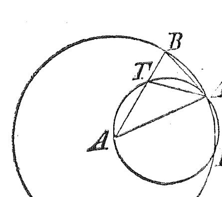


Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ ἐστιν ἴση· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ [εὐθειῶν] ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιʹ.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.



Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου· ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ, ἡ ἄρα πέση ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον (III. 16). Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Η ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ δὲν θὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἄρα θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν καὶ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον ἔχει ἐγγραφῆ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

9.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· πρέπει περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Διότι, ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἂς τέμνωνται μεταξύ των κατὰ τὸ σημεῖον Ε.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΑΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΑ, ΑΓ· καὶ ἡ βάσις ΔΓ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΓ· ἄρα ἡ γωνία ΔΑΒ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν γωνι ν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ διχοτομεῖται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΕΑΒ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΑΒ, ἡ δὲ ΕΒΑ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒΓ, ἄρα καὶ ἡ ΕΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒΑ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΒ (I.6). Ὁμοίως θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν ΕΑ, ΕΒ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΕΓ, ΕΔ. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ. ΕΔ, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἂς περιγραφῇ, ὅπως ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον ἔχει περιγραφῆ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἑκάστην τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασίαν τῆς λοιπῆς.

Ἂς ληφθῇ εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη κατὰ τὸ σημεῖον Γ οὕτως, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΓΑ (II.11)· καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΒΔΕ, καὶ ἂς ἐναρμοσθῇ εἰς τὸν κύκλον ΒΔΕ ἡ εὐθεῖα ΔΒ, ἴση πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΒΔΕ (IV. 1)· καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ κύκλος ὁ ΑΓΔ (IV· 5).

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, εἶναι δὲ ἡ ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΒΔ, ἕπεται, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ κύκλου τοῦ ΑΓΔ ἔχει ληφθῆ σημεῖον τι ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἔχουν προσπέσει πρὸς τὸν κύκλον ΑΓΔ δύο εὐθεῖαι, αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν ἐξ αὐτῶν τέμνει αὐτόν, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΓΔ (III. 37). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ σημεῖον Δ ἐπαφῆς διέρχεται ἡ ΔΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστιν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστιν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. ἀλλὰ ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσι διπλασίους. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ ἐστι διπλῆ.

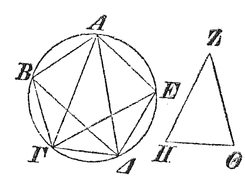
Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΒΔ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστι διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, [ΓΔ], ΔΕ, ΕΑ.



Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστιν ἴση· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γωνίαν ΔΑΓ τὴν εὑρισκομένην εἰς τὸ ἐναλλὰξ τμῆμα τοῦ κύκλου (III. 32). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΔΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑΓ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρας ἡ ΓΔΑ· ἄρα ὅλη ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς δύο, τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ πρὸς τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ εἶναι ἴση ἡ ἐκτὸς ἡ ΒΓΔ (I. 32)· ἄρα καὶ ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ. Ἀλλὰ ἡ ΒΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒΔ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ (I. 5)· ὥστε καὶ ἡ ΔΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ. Ἄρα αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΔ, εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΒΔ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΓ (I.6). Ἀλλὰ ἡ ΒΔ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὴν ΓΑ· ἄρα καὶ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΓΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΑΓ (I.5)· ἄρα αἱ γωνίαι ΓΔΑ, ΔΑΓ εἶναι διπλάσιαι τῆς ΔΑΓ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΓΔ ἴση πρὸς τὰς ΓΔΑ, ΔΑΓ· ἄρα καὶ ἡ ΒΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΓΔ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΔΑ, ΔΒΑ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΒΔΑ, ΔΒΑ εἶναι διπλασία τῆς ΔΑΒ.

Κατεσκευάσθη ἄρα ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἑκάστην τῶν παρὰ τὴν βάσιν ΔΒ γωνιῶν διπλασίαν τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ νὰ ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ληφθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ΖΗΘ, ἔχον ἑκάστην τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Η, Θ γωνιῶν διπλασίαν τῆς γωνίας παρὰ τὸ Ζ, (IV. 10) καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΘ (IV. 2), ὥστε ἡ μὲν γωνία ΓΑΔ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Ζ, ἑκάστη δὲ τῶν πρὸς τὰ σημεῖα Η, Θ γωνιῶν νὰ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ (IV. 2)· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ. Ἂς διχοτομηθῇ τώρα ἑκάστη τῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΓΔΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑΔ καὶ αὗται ἔχουν διχοτομηθῇ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΕ, ΔΒ, (I. 9), ἕπεται, ὅτι αἱ πέντε γωνίαι, αἱ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (III. 26)· ἄρα τὰ πέντε τόξα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Τὰ ἴσα δὲ τόξα ὑποτείνουν εὐθεῖαι ἴσαι· ἄρα αἱ πέντε εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΔΕ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τόξον ΒΓΔ· ἄρα ὅλον τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΔΓΒ. Καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΑΒΓΔ βαίνει ἡ γωνία ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΔΓΒ βαίνει ἡ γωνία ΒΑΕ· ἄρα καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ (III. 27)· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

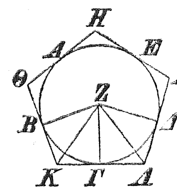
Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστιν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ [γωνίᾳ] τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστιν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστι διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τῆς ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καί ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστιν ἴση ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον.

12.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· πρέπει περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον.

Ἂς νοήσωμεν, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον πενταγώνου (IV. 11) εἶναι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ νὰ εἶναι ἴσα· καὶ διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε ἂς ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ (III. 17) καὶ ἂς ληφθῇ τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕ κέντρον τὸ Ζ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου Ζ πρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ ἔχει ἀχθῆ ἡ ΖΓ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ (III. 18)· ἄρα ἑκάστη τῶν πρὸς τὸ σημεῖον Γ γωνιῶν εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Β, Δ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΓΚ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΖΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΓ, ΓΚ (I. 47). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΚ εἶναι ἴσον τὸ τετράγωνον τῆς ΖΚ· ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν ΖΓ, ΓΚ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΖΒ, ΒΚ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς ΖΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΒ· ἄρα τὸ ἀπομένον τετράγωνον τῆς ΓΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΚ. Ἄρα ἡ ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΒ εἶναι πρὸς τὴν ΖΓ, καὶ ἡ ΖΚ εἶναι κοινή, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΖ, ΖΚ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΖ, ΖΚ· καὶ ἡ βάσις ΒΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΚ· ἄρα ἡ μὲν γωνία ΒΖΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΖΓ (I. 8)· ἡ δὲ ΒΚΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΚΓ (I. 32)· ἄρα ἡ μὲν ΒΖΓ εἶναι διπλασία τῆς ΚΖΓ, ἡ δὲ ΒΚΓ εἶναι διπλασία τῆς ΖΚΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ μὲν ΓΖΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΖΛ, ἡ δὲ ΔΛΓ εἶναι διπλασία τῆς ΖΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΒΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΖΔ (III. 27). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΖΓ διπλασία τῆς ΚΖΓ, ἡ δὲ ΔΖΓ διπλασία τῆς ΛΖΓ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΖΓ· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΖΓΚ ἴση πρὸς τὴν ΖΓΛ. Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κοινὴν πλευρὰν αὐτῶν τὴν ΖΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑπολοίπους πλευρὰς πρὸς τὰς ὑπολοίπους ἴσας καὶ τὴν ὑπόλοιπον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ὑπόλοιπον (I. 26)· ἄρα ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΛ, ἡ δὲ γωνία ΖΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΛ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι διπλασία τῆς ΚΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΘΚ εἶναι διπλασία τῆς ΒΚ. Καὶ εἶναι ἡ ΒΚ ἴση πρὸς τὴν ΚΓ· ἄρα καὶ ἡ ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ, εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚ, ΚΛ· ἄρα τὸ πεντάγωνον ΗΘΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΖΚΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη, ὅτι τῆς μὲν ΖΚΓ εἶναι διπλασία ἡ ΘΚΛ, τῆς δὲ ΖΛΓ εἶναι διπλασία ἡ ΚΛΜ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΘΚΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ἑκάστη τῶν ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΚΛ, ΚΛΜ· ἄρα αἱ πέντε γωνίαι αἱ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα τὸ πεντάγωνον ΗΘΚΛΜ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ἰσόπλευρον καὶ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ.

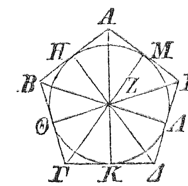
[Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ΄.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἐστιν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ [ὀρθῇ] τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, Μ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ο κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείων γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν· γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.



Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδ΄.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἄρα περὶ τὸν δοθέντα κύκλον περιγράφη ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ· πρέπει εἰς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

Διότι, ἂς διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΓΖ, ΔΖ· καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ εἰς τὸ ὁποῖον συμβάλλουν μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι ΓΖ, ΔΖ, ἂς ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΖ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΓ, ΓΖ· καὶ ἡ γωνία ΒΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΓΖ· ἄρα ἡ βάσις ΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ (I.4), καὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΖ (I.4) καὶ αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ὑπολοίπους γωνίας, ἀπέναντι τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἴσαι πλευραί· ἄρα ἡ γωνία ΓΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΔΕ εἶναι διπλασία τῆς ΓΔΖ, εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΓΔΕ πρὸς τὴν ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ πρὸς τὴν ΓΒΖ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΓΒΑ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒΖ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΒΓ· ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΒΖ· Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΖΑ, ΖΕ. Ἂς ἀχθοῦν τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΘΓΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΓΖ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΖΘΓ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΖΚΓ, ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑπολοίπους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς ὑπολοίπους πλευράς· ἄρα ἡ κάθετος ΖΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον ΖΚ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΘ, ΖΚ· ἄρα αἱ πέντε εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρρν τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ θὰ διέλθη καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, διότι αἱ πρὸς τὰ σημεῖα Η, Θ, Κ, Λ, Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Διότι, ἐὰν δὲν θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν, ἀλλὰ θὰ τέμνη αὐτάς, θὰ συμβῇ, ὥστε ἡ ἀγομένη κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου νὰ πίπτη ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον (III. 16)· ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ ἀκτῖνα δὲ μίαν τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ δὲν θὰ τέμνη τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ· ἄρα θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν. Ἂς γραφῇ, ὅπως ὁ ΗΘΚΛΜ.

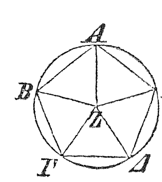
Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, ἔχει ἐγγραφῇ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

14.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· πρέπει περὶ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ νὰ περιγραφῇ κύκλος.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστιν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. περιγεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

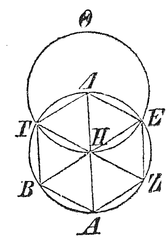


Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιε'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ἀλλ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶν [ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ]. αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ ἐστιν ἴση· καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περι-

Ἂς διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΒΓΔ, ΓΔΕ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΓΖ, ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ, εἰς τὸ ὁποῖον συμβάλλουν αἱ εὐθεῖαι ἂς ἀχθοῦν πρὸς τὰ σημεῖα Β, Α, Ε αἱ εὐθεῖαι ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον (IV. 13) ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ διχοτομεῖται ὑπὸ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ, καὶ εἶναι ἡ μὲν ΖΓΔ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓΔ, ἡ δὲ ΓΔΖ τὸ ἥμισυ τῆς ΓΔΕ, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΖΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΔΓ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΖΔ (Ι.6). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ. ΖΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΖΓ, ΖΔ· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἄρα ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ θὰ εἶναι περιγεγραμμένος. Ἂς περιγραφῇ καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, περιεγράφη κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

15.*

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· πρέπει εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕΖ νὰ ἐγγραφῇ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕΖ ἡ ΑΔ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Δ ἀκτῖνα δὲ τὴν ΔΗ ἂς γραφῇ κύκλος ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἀφοῦ ἀχθοῦν αἱ ΕΗ, ΓΗ, ἂς προεκταθοῦν αὗται μέχρι τῶν σημείων Β, Ζ καὶ ἂς ἀχθοῦν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω, ὅτι τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Η εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἴση ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΗΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΗΓΘ, ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΗ. Ἀλλ' ἐδείχθη, ὅτι ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΔ· ἄρα καὶ ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΗΔ εἶναι ἰσόπλευρον· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αὐτοῦ αἱ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, ἐπειδὴ βεβαίως αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων εἶναι μεταξύ των ἴσαι (Ι. 5)· καὶ εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ἴσαι μὲ δύο ὀρθὰς (Ι. 32)· ἄρα ἡ γωνία ΕΗΔ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΗΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΓΗ σταθεῖσα ἐπὶ τὴν ΕΒ σχηματίζει τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΕΗΓ, ΓΗΒ ἴσας μὲ δύο ὀρθὰς (Ι. 13), ἕπεται, ὅτι ἡ ἀπομένουσα ΓΗΒ εἶναι τὸ ἓν τρίτον δύο ὀρθῶν· ἄρα αἱ γωνίαι ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν πρὸς αὐτὰς αἱ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ (Ι. 15). Ἄρα αἱ ἓξ γωνίαι αἱ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ, εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων (ΙΙΙ. 26). Ἄρα τὰ ἓξ τόξα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ εἶναι μεταξύ των ἴσα. Ὑπὸ δὲ τὰ ἴσα τόξα βαίνουν ἴσαι εὐθεῖαι (ΙΙΙ. 29)· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἄρα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΖΑ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΕΔ, ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ τόξον ΑΒΓΔ· ἄρα ὅλον τὸ τόξον ΖΑΒΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ τόξον ΕΔΓΒΑ· καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ τόξου ΖΑΒΓΔ βαίνει ἡ γωνία ΖΕΔ, ἐπὶ δὲ τοῦ τόξου ΕΔΓΒΑ βαίνει ἡ γωνία ΑΖΕ· ἄρα ἡ γωνία φερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

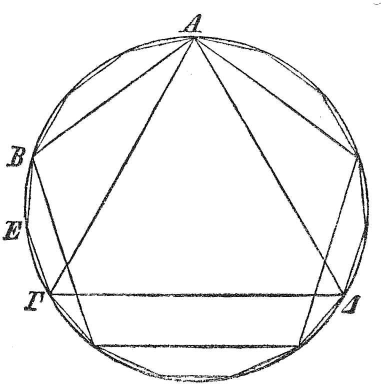
Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ις'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια πέμπτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.



Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ[Ε] κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου δείξεων καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΖΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ (III. 27). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ ἀνὰ μία, εἶναι ἴσαι πρὸς ἑκάστην τῶν γωνιῶν ΑΖΕ, ΖΕΔ· ἄρα τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσογώνιον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· καὶ ἔχει ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕΖ.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἔχει ἐγγραφῆ ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον, ὅπως ἐπράξαμεν εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐὰν διὰ τῶν (νοουμένων ἕξ) σημείων διαιρέσεως τοῦ κύκλου φέρωμεν ἐφαπτομένας, θὰ περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, ἀποδεικνυομένου τούτου, ὅπως καὶ εἰς τὸ πεντάγωνον (IV. 12). Καὶ ἀκόμη, καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς ἀπεδείχθη καὶ διὰ τὸ πεντάγωνον, δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

16.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· πρέπει εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψωμεν δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Ἂς ἐγγραφῆ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς αὐτὸν τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου ἡ ΑΓ (IV. 2), πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ (IV, 11)· ἄρα ἐκ τῶν δεκαπέντε ἴσων τμημάτων ἐκ τῶν ὁποίων θ' ἀποτελεῖται ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, πέντε μὲν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κύκλου, τρία δὲ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πέμπτον τοῦ κύκλου· εἰς τὸ λοιπὸν ἄρα τόξον ΒΓ ἀντιστοιχοῦν ἐκ τῶν ἴσων τμημάτων δύο. Ἂς τμηθῆ εἰς τὸ μέσον τὸ τόξον ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Ε (III. 30)· ἄρα ἕκαστον τῶν τόξων ΒΕ, ΕΓ εἶναι τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Ἐὰν ἄρα, ἀφοῦ φέρωμεν τὰς ΒΕ, ΕΓ ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ συνεχῶς, ἴσας εὐθείας πρὸς ταύτας (IV. 1) θὰ ὑπάρχη εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον, ὅπως καὶ εἰς τὸ πεντάγωνον, ἐὰν ἐκ τῶν σημείων διαιρέσεως τοῦ κύκλου (τῶν 15) φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, θὰ περιγραφῆ περὶ τὸν κύκλον δεκαπεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον (IV. 12). Προσέτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων ἀποδείξεων, ὅπως ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν καὶ νὰ περιγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δοθὲν δεκαπεντάγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΛΛΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον, θεώρημα 4.

Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι, λαμβάνοντες τὸ αὐτὸ σχῆμα, ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΔΒ (Ι. 5)· καὶ ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς, ἔπεται, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΔΒ αἱ ΑΔΒ, ΒΑΔ, ΔΒΑ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς (Ι.32). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΑΔ· ἄρα αἱ λοιπαὶ αἱ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν· καὶ εἶναι ἴσαι· ἄρα ἑκάστη τῶν ΑΒΔ, ΑΔΒ εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΒΓΗ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Α (Ι. 3)· ἄρα ἡ λοιπή, ἡ ΓΗΒ εἶναι τὸ ἥμισυ ὀρθῆς (Ι. 32)· ἄρα ἡ γωνία ΓΒΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗΒ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΗ (Ι. 6). Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΚ (Ι. 34), ἡ δὲ ΓΗ πρὸς τὴν ΒΚ· ἄρα τὸ σχῆμα ΓΚ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἔχει δὲ καὶ τὴν γωνίαν ΓΒΚ ὀρθήν· ἄρα τὸ σχῆμα ΓΚ εἶναι τετράγωνον· καὶ ἔχει πλευρὰν τὴν ΓΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ΖΘ εἶναι τετράγωνον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· ἄρα τὰ ΓΚ, ΘΖ εἶναι τετράγωνα, καὶ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΗΕ (Ι. 43) καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ· διότι ἡ ΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΒ· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Εἶναι δὲ καὶ τὰ τετράγωνα ΓΚ, ΘΖ ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἄρα τὰ σχήματα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ σχήματα ΓΚ, ΘΖ καὶ ΑΗ, ΗΕ ἀποτελοῦν ὁλόκληρον τὸ τετράγωνον ΑΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

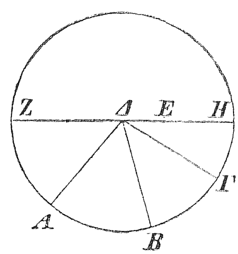
2. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 7.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΚ, ἡ δὲ ΖΕ εἶναι κοινή, καὶ ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΚ, ἔπεται, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΕΖ (Ι. 8). Ἀλλὰ ἡ γωνία ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΘΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΕΖ, ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

3. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 8.

Ἢ καὶ ἄλλως. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΝ. Ἐπειδὴ ἡ ΚΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ δὲ ΜΔ εἶναι κοινή, καὶ ἡ βάσις ΔΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΝ, ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΜΝ (Ι. 8). Ἀλλὰ ἡ ΚΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΜΔ· ἄρα καὶ ἡ ΒΜΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΝΜΔ, ἡ μικροτέρα ἴση πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

4. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 9.

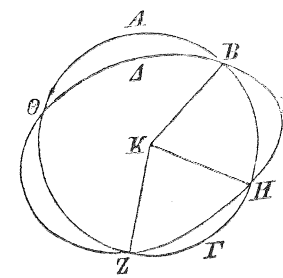


Διότι, ἂς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓ, σημεῖον τι ἐντὸς τὸ Δ, ἂς προσπέσουν δὲ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ εὐθεῖαι ἴσαι περισσότεραι τῶν δύο, αἱ ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ Ε, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἂς προεκταθῇ μέχρι τῶν σημείων Ζ, Η. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΖΗ τοῦ κύκλου ΑΒΓ ἔχει ληφθῇ σημεῖον τι, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ, ἡ μὲν ΔΗ θὰ εἶναι μεγίστη, μεγαλυτέρα δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ (III. 7). Ἀλλὰ συγχρόνως εἶναι καὶ ἴση· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα τὸ Ε δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Καθ᾽ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλο τι εἶναι πλὴν τοῦ Δ· ἄρα τὸ σημεῖον Δ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

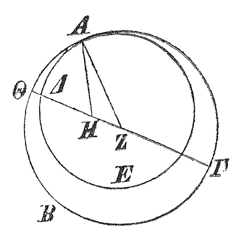
5. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 10.

Διότι, ἂς τέμνῃ πάλιν ὁ κύκλος ΑΒΓ τὸν κύκλον ΔΕΖ εἰς περισσότερα ἢ δύο σημεῖα, τὰ Β, Η, Θ, Ζ καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχει ληφθῇ ἐντὸς τοῦ κύκλου ΔΕΖ σημεῖον τι τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἔχουν προσπέσει πρὸς τὸν κύκλον ΔΕΖ περισσότεραι ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Κ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΔΕΖ (III. 9). Εἶναι δὲ τὸ Κ κέντρον καὶ τοῦ κύκλου ΑΒΓ· ἄρα δύο κύκλων οἱ ὁποῖοι τέμνονται μεταξύ των ὑπάρχει τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· ὅπερ ἀδύνατον (III. 5). Ἄρα, κύκλος δὲν τέμνει κύκλον εἰς περισσότερα σημεῖα ἢ δύο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



6. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 11.

Ἀλλ᾽ ἂς πέσῃ ὅπως ἡ ΗΖΓ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΓΖΗ ἐπὶ τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἀχθοῦν αἱ ΑΗ, ΑΖ.



Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΖ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΓ, τουτέστι πρὸς τὴν ΖΘ, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὰς δύο ἡ κοινὴ εὐθεῖα ἡ ΖΗ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ΑΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ ἄτοπον, καὶ ἂν τὸ κέντρον τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου εἶναι ἐκτὸς τοῦ μικροῦ κύκλου.

7. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, θεώρημα 31.

ἡ ἀπόδειξις, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΒΑΕ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΕΒ διπλασία τῆς γωνίας ΕΑΓ· ἄρα αἱ γωνίαι ΑΕΒ, ΑΕΓ εἶναι διπλάσιαι τῆς γωνίας ΒΑΓ. Ἀλλ᾽ αἱ γωνίαι ΑΕΒ, ΑΕΓ ἰσοῦνται μὲ δύο ὀρθάς· ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IUSTITIA LIBERTAS VERITAS
PHILOSOPHISCH. SEMINAR
FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

Institut für Philosophie
Inv. No. 77/18856

70/152
See
Hellas
Md. I - IV
4°
a
Philologische Bibliothek - FU Berlin
2606440 188