v. Verf. erhalten
26. 2. 57.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ X

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ – ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ III

ΕΚ ΤΟΥ ΕΘΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1956

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Χ

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΤΟΙΣ ΦΙΛΟΙΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΑΣΙΛ. ΑΙΓΙΝΗΤῌ, O. BECKER, R. S. BRUMBAUGH, J. BOUSQUET, Κ. Δ. ΓΕΩΡΓΟΥΛῌ, M. R. COHEN, Z. CULUM, E. J. DIJKSTERHUIS, J. E. DRABKIN, H. HASSE, G. HAUSER, S. HELLER, J. E. HOFMANN, W. F. KAGAN, A. LEJEUNE, S. J. LURJE, A. MADDALENA, P.—H. MICHEL, C. MUGLER, A. REHM, K. REIDEMEISTER, A. ROME, A. SCHOLZ, A. SZABÓ, ΜΙΧ. ΣΤΕΦΑΝΙΔῌ, C. THAER, K. VOGEL, B. L. VAN DER WAERDEN.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχει τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀναπτυσσομένην εἰς 115 θεωρήματα κατὰ τὴν ἔκδοσιν Heiberg, ἣν ἀκολουθοῦμεν, καὶ θεωρεῖται τὸ τελειότερον ἐκ τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ Woepcke, τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων θεωρεῖται σημαντική, γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «τίποτε δὲν εἶναι ὡραιότερον καὶ τελειότερον ἢ ἡ τάξις καὶ ὁ παραλληλισμὸς τῶν ἑξάδων τοῦ X βιβλίου. Πανταχοῦ εἰς τοῦτο διαλάμπει ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ συγγραφέως τῶν Στοιχείων»[1].

Αἱ ἀρχαὶ τῆς θεωρίας ἀνάγονται εἰς τοὺς πρώτους Πυθαγορείους. Ἡ δημιουργία ὅμως καὶ ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας, ὡς αὕτη ἐκτίθεται εἰς τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων, δέον νὰ θεωρηθῇ ἔργον τῶν μεγάλων μαθηματικῶν τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος καὶ δὴ καὶ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου (περίπου 417—369 π.Χ.) καὶ τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου (περίπου 408—355 π.Χ.). Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν[2] τὸ 9ον θεώρημα τοῦ X βιβλίου, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται βασικὸν τῆς ὅλης θεωρίας, «θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα». Περὶ τῆς συμβολῆς τοῦ Θεαιτήτου καὶ τοῦ Θεοδώρου[3] τοῦ Κυρηναίου, τοῦ διδασκάλου τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ μαθηματικά, εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἀσυμμέτρων πληροφορούμεθα καὶ ἐκ τοῦ διαλόγου τοῦ Πλάτωνος τοῦ ἀφιερωμένου εἰς τὸν Θεαίτητον (147 D — 148 B), ἔνθα γράφεται :

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον ;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Λέγε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Κάλλιστα· ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο ;

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνί-

---

1. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius p. 675 (Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide p. 453, éd. Les Belles Lettres, Paris 1950).
2. Ἔκδοσις τῶν Στοιχείων ὑπὸ J. Heiberg, τόμ. 5ος, σ. 450.
3. Ἄρθρον Theodoros, Pauly–Wissowa, Real–Enzyklopaedie der klassischen Altertumswissenschaft.

ζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες».

[Ἑρμηνεία: Θ. Ὁ παρὼν ἐδῶ Θεόδωρος ἠσχολεῖτο μὲ τὰς τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδεικνύων ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετροι ἀντιστοίχως μὲ τὴν ὑπόρριζον ποσότητα 3 καὶ 5 καὶ οὕτω ἐξετάζων ἀνὰ μίαν ἔφθασε μέχρι τῆς $\sqrt{17}$· ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Ἡμεῖς λοιπὸν συνελάβομεν τὴν ἰδέαν, ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν ἐφαίνοντο ἄπειροι, νὰ περιλάβωμεν εἰς ἕνα νόμον τὴν ἔκφρασιν τῶν ῥιζῶν τούτων.

Σ. Μήπως ηὕρετε τοιοῦτον νόμον;

Θ. Κατ' ἐμὲ νομίζω· ἰδέ το καὶ σύ.

Σ. Λέγε.

Θ. Πάντα ἀριθμὸν τὸν ἀνελύομεν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων· τὸν μὲν δυνάμενον νὰ εἶναι γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων παρομοιάσαντες πρὸς τετράγωνον σχῆμα τὸν ὠνομάσαμεν τετράγωνον καὶ ἰσόπλευρον.

Σ. Καὶ πολὺ ὀρθῶς.

Θ. Τὸν δὲ μεταξὺ δύο τετραγώνων, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀδύνατον ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων, ἀλλὰ ἢ ἔχει τὸν ἕνα παράγοντα μεγαλύτερον καὶ τὸν ἄλλον μικρότερον ἢ τὸν ἕνα μικρότερον καὶ τὸν ἄλλον μεγαλύτερον, πάντοτε δὲ οἱ δύο παράγοντες εἶναι ἄνισοι, παρομοιάσαντες πρὸς τὸ πρόμηκες (ὀρθογώνιον) σχῆμα τὸν ἐκαλέσαμεν προμήκη.

Σ. Κάλλιστα. Ἀλλὰ ποῖον τὸ συμπέρασμα;

Θ. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ ὑψούμεναι εἰς τὸ τετράγωνον παρέχουσι τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν ὠνομάσθησαν μῆκος, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ἐπειδὴ αὗται δὲν εἶναι σύμμετροι γραμμικῶς ἐξεταζόμεναι πρὸς τὰς πρώτας, ἐν ᾧ εἶναι σύμμετροι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐκφράζοντας ἐπίπεδα, ὅταν αὗται ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον. Ὁμοίως ἐπράξαμεν καὶ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν ἴσων ἢ ἀνίσων παραγόντων.

Σ. Ἄριστα παιδιά μου].

Εἰς σύγχρονον διατύπωσιν ἡ ἑρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω χωρίου ἔχει ὡς ἑξῆς· τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\alpha\times\alpha$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς τετράγωνον σχῆμα πλευρᾶς α καὶ τὴν πλευρὰν ταύτην καλοῦμεν μῆκος. Τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $A=\beta\times\gamma$, ἔνθα $\beta\gtrless\gamma$ τὸν παρομοιάζομεν πρὸς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον (πρόμηκες σχῆμα) καὶ τὸν καλοῦμεν προμήκη. Τὴν γραμμήν, δηλ. τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τετραγώνου, τὴν $\sqrt{\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν δύναμιν (Σημ. Δύναμιν, διότι αὕτη ὑψουμένη, εἰς τὸ τετράγωνον, δύναται, παράγει τὸν ἀριθμὸν A), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς A, ἐν ᾧ ἡ $(\sqrt{\beta\times\gamma})^2$ εἶναι σύμμετρος πρὸς A. Τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων. Ἐὰν δηλ. $A=\alpha\times\alpha\times\alpha$, ἡ πλευρὰ α καλεῖται μῆκος. Ἐὰν ὅμως $A=\alpha\times\beta\times\gamma$ (οὐχὶ κύβος ἀριθμός), τὴν πλευρὰν $\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}$ τὴν ὀνομάζομεν κύβον (Σημ. Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὀνομασίαν δύναμις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὕτη ὑψουμένη εἰς τὸν κύβον παρέχει τὸν ἀριθμὸν A), ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς A, ἐν ᾧ $\left(\sqrt[3]{\alpha\times\beta\times\gamma}\right)^3$ εἶναι σύμμετρος πρὸς A.

Συναφῶς πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι ὁ Δημόκριτος εἶχε γράψει πραγματείαν, μὴ σωθεῖσαν, ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν» (Περὶ ἀσυμμέτρων γραμμῶν καὶ στερεῶν,). [Diels, Fragm. II, σ. 141]. Ἐκ τοῦ σωθέντος τούτου τίτλου τῆς πραγματείας τοῦ Δημοκρίτου ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων θὰ εἶχε σημειώσει προόδους καὶ πρὸ τῶν χρόνων τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Τὸ περιεχόμενον τοῦ X βιβλίου.

Προτάσσονται τέσσαρες ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἴς τινας παλαιοτέρας τῆς τοῦ Heiberg ἐκδόσεις διαιροῦνται εἰς ἕνδεκα. Μετὰ τὸ θεώρημα 47 ἕπονται οἱ δεύτεροι ὁρισμοὶ καὶ μετὰ τὸ θεώρημα 84 οἱ τρίτοι ὁρισμοί. Οἱ δεύτεροι καὶ οἱ τρίτοι ὁρισμοὶ εἶναι ταυτόσημοι· οἱ μὲν ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, οἱ δὲ εἰς διαφοράς.

Ὁρισμὸς α΄. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

Ὁρ. β΄. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι λέγονται ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα μετροῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου· δυνάμει δὲ ἀσύμμετροι λέγονται αἱ εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα οὐδὲν χωρίον ἔχουσιν ὡς κοινὸν μέτρον.

Ὁρ. γ΄. Ἐὰν δοθῇ εὐθεῖά τις ὡς μέτρον, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι εὐθεῖαι σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι πρὸς αὐτήν, αἱ μὲν μήκει μόνον (γραμμικῶς θεωρούμεναι, μονοδιαστάτως) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι, αἱ δὲ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνα αὐτῶν) σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Ἂς καλῆται ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ῥητὴ καὶ αἱ πρὸς ταύτην μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι ῥηταί. Ἐὰν εὐθεῖά τις εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης, αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. (Ὥστε κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἔννοια τοῦ ῥητοῦ εἶναι εὐρυτέρα τῆς σημερινῆς). Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὄχι μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἀσύμμετρα) αἱ εὐθεῖαι ἂς καλῶνται ἄλογοι.

Ὁρ. δ΄. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς δοθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητὸν καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο ῥητά. Τὰ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα (ἄρρητα) καὶ αἱ πλευραὶ τούτων ἄλογοι (ἄρρητοι). Ἐὰν τὰ ἀσύμμετρα ταῦτα εἶναι ἄλλα εὐθύγραμμα καὶ ὄχι τετράγωνα, ἂς καλῶνται ἄλογοι αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων τετραγώνων.

1. Πρῶτον θεώρημα εἶναι ἡ περίφημος πρότασις, καθ' ἣν δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος ἢ τὸ ἥμισυ, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ὁμοίως, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς πάντοτε, θὰ ληφθῇ μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους, ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν εἶναι τοῦτο.

2. Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν καὶ ἐφαρμοζομένης τῆς μεθόδου τῆς ἀνθυφαιρέσεως (τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν), ἐὰν δὲν λαμβάνεται ὑπόλοιπον μηδέν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

3–4. Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων μεγεθῶν.

5. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

6. Ἐὰν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Π ό ρ ι σ μ α. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Δ, Ε, (νοοῦνται μὴ τετράγωνοι) καὶ εὐθεῖά τις Α (λαμβανομένη ὡς μέτρον, ῥητή). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖά τις ἔστω Β, ὥστε αὐτὴ καὶ ἡ Α νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα ὅμως αὐτῶν νὰ εἶναι σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β ὀνομάζονται τότε ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (κατὰ τὸν ὁρ. 3). Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τῶν Δ, Ε καὶ Α τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $Δ : Ε = Α : Ζ$, (1). Τῶν Α, Ζ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $Α : Β = Β : Ζ$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν 9 τοῦ V εἶναι $Α : Ζ = Α^2 : Β^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $Δ : Ε = Α^2 : Β^2$. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (καὶ μήκει ἀσύμμετροι), διότι μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσι λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

7. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

8. Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

9. Τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους.

Τὰ δὲ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα μὴ ἔχοντα λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

10. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μήκει ἀσυμμέτρων ἢ δυνάμει ἀσυμμέτρων.

11. Ἔστω $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Ἐὰν α, β σύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ σύμμετρα. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ γ, δ ἀσύμμετρα.

12. Ἐὰν α, β σύμμετρα πρὸς γ, εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

13. Ἐὰν α, β σύμμετρα καὶ α, γ ἢ β, γ ἀσύμμετρα εἶναι καὶ β, γ ἢ α, γ ἀσύμμετρα.

14. Ἔστω $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Ἐὰν α, $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα, εἶναι καὶ γ, $\sqrt{\gamma^2-\delta^2}$ σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

15. Ἐὰν α, β σύμμετρα, εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α σύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα. Καὶ ἂν $(\alpha+\beta)$, α ἢ $(\alpha+\beta)$, β σύμμετρα εἶναι καὶ α, β σύμμετρα.

16. Ἐὰν α, β ἀσύμμετρα εἶναι καὶ $(\alpha+\beta)$, α ἀσύμμετρα καὶ $(\alpha+\beta)$, β ἀσύμμετρα. Καὶ ἀντιστρόφως.

17. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει σύμμετροι (θεωρούμεναι δηλαδὴ γραμμικῶς), εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι (δηλ. τὸ ἄθροισμα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν). Καὶ ἀντιστρόφως:

Ἐὰν εἶναι A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ μήκει σύμμετροι.

18. Ἔστω πάλιν $A > B$. Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι καὶ A, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ τὸ ἀντίστροφον.

19. Ἐὰν $A > B$ καὶ A, B εὐθεῖαι ῥηταί, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι ῥητόν.

20. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητόν, καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ῥητὸν καὶ μήκει σύμμετρον πρὸς τὸ πρῶτον τμῆμα.

21. Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν εἶναι ἄλογον καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μέση. [Σημ. Ὀρθογώνιον μέσον εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ μέση εἶναι μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ].

22. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὸ πρῶτον.

23. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

24. Ἐὰν $A > B$ καὶ αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - Ax + \frac{B^2}{4} = 0$ εἶναι μέσαι μήκει σύμμετροι, τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι ὀρθογώνιον μέσον.

25. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\sqrt{\kappa}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων θὰ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Ῥητὸν θὰ εἶναι ἂν $\sqrt{\kappa} = \mu\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἄλλως μέσον.

26. Ἡ διαφορὰ $\rho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ οὐδέποτε εἶναι ῥητή.

27. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων A, B, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ῥητόν.

28. Εὕρεσις δύο εὐθειῶν μέσων A, B, ὥστε μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ μέσον.

Λῆμμα 1ον. Εὕρεσις τοῦ τύπου τοῦ παρέχοντος ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = z^2$ τοῦ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$ ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\kappa : \xi = \sigma : \tau$. Ἐὰν δὲν εἶναι $\kappa : \xi = \sigma : \tau$, ὁ $\kappa\xi\sigma\tau = \left(\frac{\kappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

Λῆμμα 2ον. Εὕρεσις μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, ὅστις νὰ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, τοῦ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ $\kappa : \xi = \sigma : \tau$.

29. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου A καὶ μιᾶς καθέτου B, ὥστε αὗται νὰ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ A καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει σύμμετροι.

30. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ A καὶ ἡ ἄλλη κάθετος μήκει ἀσύμμετροι.

31α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου A καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς B, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι μόνον A^2, B^2 σύμμετρα) καὶ $A \times B$ ῥητὸν καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει σύμμετροι.

31β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει ἀσύμμετροι.

32α. Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου A καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς B, ὥστε αὗται νὰ εἶναι μέσαι καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, καὶ $A + B$ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει σύμμετροι.

32β. Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ $\sqrt{A^2 - B^2}$, A μήκει ἀσύμμετροι.

33. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου A, B, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητὸν καὶ $A \times B$ μέσον.

34. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου A, B, ὥστε A^2, B^2, ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν.

35. Εὕρεσις δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, A, B, ὥστε A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$.

36. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα (καλούμενα ὀνόματα) AB, $B\Gamma$, ὥστε AB, $B\Gamma$ ῥητὰ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται, ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος).

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς δυωνύμου εἶναι $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἔνθα ρ τὸ μέτρον καὶ α, β, γ, δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ἡ $\rho + \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι δυώνυμος.

37. Ἔστωσαν AB, $B\Gamma$ μέσαι, μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα καὶ $AB \times B\Gamma$ ῥητόν.

Ἡ εὐθεῖα $\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων πρώτη.

38. AB, $B\Gamma$ μέσαι, μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα, $AB \times B\Gamma$ μέσον. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

39. AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + B\Gamma^2$ ῥητόν, $AB \times B\Gamma$ μέσον. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται μείζων.

40. AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2 + B\Delta^2$ μέσον, $AB \times B\Gamma$ ῥητόν. Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

41. AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα. $AB^2 + B\Gamma^2$ μέσον, $AB \times B\Gamma$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $AB^2 + B\Gamma^2$. Ἡ εὐθεῖα $\Gamma = AB + B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δύο μέσα δυναμένη. Ἡ μέση τοῦ θ. 21 καὶ αἱ ἓξ εὐθεῖαι τῶν θ. 36—41 εἶναι αἱ πρῶται ἑπτὰ κύριαι ἄλογοι (ἄρρητοι) εὐθεῖαι.

Λῆμμα. Ἔστω $A\Gamma + \Gamma B = A\Delta + \Delta B$, $A\Gamma > \Delta B > A\Delta > \Gamma B$. Τότε εἶναι $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$.

42-47. Τὰ μονώνυμα τῶν ἓξ ἀλόγων τῶν θ. 36-41 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι.

Ὑπαρχούσης ῥητῆς ρ καὶ τῆς δυωνύμου (ἐκ δύο ὀνομάτων) $\Delta = A + B$, ἔνθα A, B ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (ῥηταὶ ἀλλὰ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, θ. 36), καὶ $A > B$.

I. Ἔστω $\sqrt{A^2 - B^2}$ καὶ A μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πρώτη δυώνυμος.

» 2. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ δευτέρα δυώνυμος.

» 3. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τρίτη δυώνυμος.

II. Ἔστω $\sqrt{A^2 - B^2}$ καὶ A μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. A, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τετάρτη δυώνυμος.

» 5. B, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πέμπτη δυώνυμος.

» 6. Οὔτε A οὔτε B μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ ἕκτη δυώνυμος.

48-53. Εὕρεσις τῶν ἓξ τούτων δυωνύμων, αἱ ὁποῖαι εἶναι μὲν διάφοροι πρὸς ἀλλήλας, ἀλλὰ ἔχουσι τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς δυωνύμου (θ. 36), ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

54-59. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος, τὰ ἀντίστοιχα ὕψη εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη. (Ἓξ τρίγωνα).

Λῆμμα.

Ἐὰν α διάφορον τοῦ β, εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$.

60-65. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὸν καὶ τὰ ὕψη κατὰ σειρὰν εἶναι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἐκ δύο μέσων δευτέρα, μείζων, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι κατὰ σειράν, πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, τρίτη δυώνυμος, τετάρτη δυώνυμος, πέμπτη δυώνυμος, ἕκτη δυώνυμος.

66. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή, ἤτοι ἂν ἡ δοθεῖσα εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώ-

νυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν εἶναι πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος......... ἕκτη δυώνυμος.

67. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν οὖσαν ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν εἶναι καὶ αὐτὴ ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἂν δηλ. εἶναι $\Gamma=A+B$ ἔνθα A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A\times B$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον καὶ Δ μήκει σύμμετρος πρὸς Γ, εἶναι καὶ $\Delta=E+Z$ ἔνθα E, Z μέσαι, μόνον E^2, Z^2 σύμμετρα, καὶ $E\times Z$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως.

68. Ἔστω ἡ μείζων $AB=AE+EB$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσσύμετρα, AE^2+EB^2 ρητὸν καὶ $AE\times EB$ μέσον καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ $\Gamma\Delta$. Καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι μείζων, τῆς μορφῆς $\Gamma Z+Z\Delta$ ἔνθα ΓZ^2, $Z\Delta^2$ ἀσύμμετρα, $\Gamma Z^2+Z\Delta^2$ ρητόν, καὶ $\Gamma Z\times Z\Delta$ μέσον

69. Ἔστω ἡ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη $AB=AE+EB$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσύμμετρα, AE^2+EB^2 μέσον καὶ $AE\times EB$ ρητόν, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ $\Gamma\Delta$. Καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη τῆς μορφῆς $\Gamma Z+Z\Delta$, ἔνθα ΓZ^2, $Z\Delta^2$ ἀσύμμετρα, $\Gamma Z^2+Z\Delta^2$ μέσον καὶ $\Gamma Z\times Z\Delta$ ρητόν.

70. Ἔστω ἡ δύο μέσα δυναμένη $AB=AE+EB$, ἔνθα AE^2, EB^2 ἀσύμμετρα, AE^2+EB^2 μέσον, $AE\times EB$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ AE^2+EB^2, καὶ ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ $\Gamma\Delta$. Καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη τῆς μορφῆς $\Gamma Z+Z\Delta$, ἔνθα ΓZ^2, $Z\Delta^2$ ἀσύμμετρα, AE^2+EB^2 μέσον, $AE\times EB$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\Gamma Z^2+Z\Delta^2$.

71. Ἐὰν A εὐθύγραμμον σχῆμα ρητὸν καὶ B εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{A+B}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων ἢ ρητὸν καὶ μέσον δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 36, 37, 39, 40).

72. Ἐὰν A εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον καὶ B εὐθύγραμμον σχῆμα μέσον, ἡ $\sqrt{A+B}$ εἶναι ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη (δηλ. μιᾶς τῶν μορφῶν τῶν θ. 38, 41).

73. Ἔστωσαν τὰ μονώνυμα $AB > B\Gamma$ ρητὰ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Ἡ διαφορὰ $A\Gamma=AB-B\Gamma$ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος) καὶ καλεῖται ἀποτομή.

[ΣΗΜ. Ἐὰν ρητὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (ἤτοι εἶναι διαφορὰ ἄρρητος δύο ρητῶν μονωνύμων τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα), (XIII.6). Ἐπίσης ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή, XIII.17].

74. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $AB > B\Gamma$ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα, καὶ $AB\times B\Gamma$ ρητόν. Ἡ διαφορὰ $A\Gamma=AB-B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

75. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $AB > B\Gamma$ καὶ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα, καὶ $AB\times B\Gamma$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $A\Gamma=AB-B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

76. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2+B\Gamma^2$ ρητὸν καὶ $AB\times B\Gamma$ μέσον. Ἡ διαφορὰ $A\Gamma=AB-B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται ἐλάσσων. [Σημ. Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ρητὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων, (XIII.11). Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου ἐπίσης εἶναι ἐλάσσων, (XIII.16)].

77. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2+B\Gamma^2$ μέσον καὶ $AB\times B\Gamma$ ρητόν. Ἡ διαφορὰ $A\Gamma=AB-B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

78. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB^2, $B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα, $AB^2+B\Gamma^2$ μέσον, $A\times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB^2+B\Gamma^2$. Ἡ διαφορὰ $A\Gamma=AB-B\Gamma$ εἶναι ἄλογος καὶ καλεῖται, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. [Σημ. Τὰ μονώνυμα τῶν θεωρημάτων 36—41 εἶναι ἀντιστοίχως τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν θεωρ. 73—78. Ἐκεῖ μὲν ἔχομεν πρόσθεσιν, ἐνταῦθα δὲ ἀφαίρεσιν τῶν μονωνύμων. Ὅθεν ἐκτὸς τῆς ἀλόγου μέσης ἔχομεν

καὶ 12 ἀκόμη κυρίας ἀλόγους. Ἓξ ἐκ προσθέσεως καὶ ἓξ ἐξ ἀφαιρέσεως (36-41 καὶ 73-78).

79–84. Τὰ μονώνυμα τῶν διαφορῶν τῶν θ. 73–78 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Ἕπονται οἱ τρίτοι ὁρισμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι ταὐτόσημοι πρὸς τοὺς δευτέρους. Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς ἀθροίσματα, ἐν ᾧ οἱ τρίτοι εἰς διαφοράς.

Ὁ μειωτέος καλεῖται ἡ ὅλη εὐθεῖα, ὁ ἀφαιρετέος ἡ προσαρμόζουσα εὐθεῖα εἰς τὴν διαφοράν (ἀποτομήν). Ὅπως εἰς τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) τοῦ θ. 36 διακρίνομεν κατὰ τοὺς δευτέρους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη δυωνύμων ἀλόγων, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀποτομὴν τοῦ θ. 73 διακρίνομεν κατὰ τοὺς τρίτους ὁρισμοὺς ἓξ εἴδη ἀποτομῶν ἀλόγων, τὴν πρώτην ἀποτομήν, τὴν δευτέραν ἀποτομήν, τὴν τρίτην ἀποτομήν, τὴν τετάρτην ἀποτομήν, τὴν πέμπτην ἀποτομήν, τὴν ἕκτην ἀποτομήν. Ἑκάστη τούτων ἔχει ἰδίαν ἰδιότητα. Κοινὸν γνώρισμα ὅλων εἶναι ἡ ἰδιότης τῆς ἀποτομῆς, ὅτι δηλ. τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι ρητά, ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα.

85–90. Εὑρίσκονται ἡ πρώτη, ἡ δευτέρα,...... ἡ ἕκτη ἀποτομή.

91–96. [Μετασχηματισμοὶ διπλῶν ριζικῶν διαφορῶν]. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογρ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἄλλο κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή, τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστοίχως ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, ἐλάσσων, ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (εἶναι δηλ. τὰ ὕψη αἱ ἄρρητοι τῆς μορφῆς τῶν θ. 73–78 ἀντιστοίχως).

97–102. Ἀντίστροφα προηγουμένων. Ἐὰν δηλ. τὰ ὕψη ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι κατὰ σειρὰν ἀποτομή, πρώτη ἀποτομὴ μέσης, δευτέρα ἀποτομὴ μέσης...... ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ρητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα, ἀποτομή, τρίτη ἀποτομή, ... ἕκτη ἀποτομή.

103. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ $ΑΒ=ΑΕ-ΕΒ$, ὁπότε ΑΕ, ΕΒ ρηταὶ καὶ μόνον $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ σύμμετρα. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $ΓΖ-ΖΔ$ ὥστε ΓΖ, ΖΔ ρηταὶ καὶ μόνον $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ σύμμετρα, καὶ ἂν ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἢ δευτέρα ἀποτομή...... ἢ ἕκτη ἀποτομὴ θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΔ πρώτη ἀποτομὴ ἢ δευτέρα ἀποτομή, ... ἢ ἕκτη ἀποτομή.

104. Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή. Ἔστω $ΑΒ=ΑΕ-ΕΒ$ ἔνθα ΑΕ, ΕΒ μέσαι καὶ μόνον $ΑΕ^2$ $ΕΒ^2$ σύμμετρα ὁπότε θὰ εἶναι $ΑΕ \times ΕΒ$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον. Ἐὰν $ΓΔ=ΓΖ-ΖΔ$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ΓΖ, ΖΔ μέσαι, μόνον $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ σύμμετρα καὶ $ΓΖ \times ΖΔ$ ἢ ρητὸν ἢ μέσον ἀντιστοίχως

105–107. Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἢ τὴν μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν ἢ τὴν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν εἶναι καὶ αὕτη ἀντιστοίχως ἐλάσσων, ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, δηλ. τῆς μορφῆς τῶν διαφορῶν τῶν θ. 76, 77, 78 ἀντιστοίχως.

Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα σχήματα $Α > Β$.

108. Ἐὰν Α εἶναι ὀρθογώνιον ρητὸν καὶ Β ὀρθογώνιον μέσον, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ ἀποτομὴ (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 73) ἢ ἐλάσσων (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 76).

109. Ἐὰν Α ὀρθογώνιον μέσον καὶ Β ὀρθογ. ρητόν, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 74) ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 77).

110. Ἐὰν Α ὀρθογώνιον μέσον καὶ Β ὀρθογώνιον μέσον, καὶ Α, Β ἀσύμμετρα, ἡ $\sqrt{Α-Β}$ εἶναι διαφορὰ δύο μονονωνύμων, ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 75) ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 78).

Πόρισμα. Ἡ μέση καὶ αἱ ἓξ ἄλογοι διαφοραὶ (θ. 73—78) οὐδέποτε μεταξύ των ταὐτίζονται.

112. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος,... ἕκτη δυώνυμος, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή,... ἕκτη ἀποτομὴ καὶ τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

113. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ρητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι κατὰ σειρὰν πρώτη ἀποτομή, δευτέρα ἀποτομή,...... ἕκτη ἀποτομή, τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινομένης εἶναι ἀντιστοίχως πρώτη δυώνυμος, δευτέρα δυώνυμος, ... ἕκτη δυώνυμος καὶ τά μονώνυμα τῶν δυωνύμων εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μονώνυμα τῶν ἀποτομῶν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

114. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἀποτομὴ καὶ τὸ ἄλλο δυώνυμος, ὥστε τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ ὕψος εἶναι ρητόν.

115. Δοθείσης τῆς (ἀρρήτου) μέσης εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν ἄπειροι ἄρρητοι, αἱ ὁποῖαι δὲν ταὐτίζονται.

Σκοπὸς τοῦ X Βιβλίου.

Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν τῶν Στοιχείων (ἐκδ. Heiberg, τόμ. V, σ. 414), «Ὁ σκοπὸς τοῦ ι' βιβλίου τῷ Εὐκλείδῃ διδάξαι περὶ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων καὶ περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων·......... περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων οὐ πασῶν ..... ἀλλὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει».

Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦ X βιβλίου καὶ τὴν συμβολὴν τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ περιεχομένου του πληροφορούμεθα καὶ ἐκ σχολίου τοῦ Ἄραβος Aboû Othman τοῦ ἐκ Δαμασκοῦ (περίπου 1000 μ.Χ.), τὸ ὁποῖον ὑπὸ τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων θεωρεῖται ὡς προερχόμενον ἐκ πραγματείας τοῦ Πάππου (300 μ.Χ.). Τὸ σχόλιον τοῦτο σῳζόμενον εἰς τὴν ἀραβικὴν γλῶσσαν ἀνευρέθη καὶ ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Woepcke κατὰ τὸ 1855 καὶ ἔχει κατὰ τὰ κυριώτερα συναφῆ μέρη ὡς ἑξῆς : «Ὁ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων, τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν. Ἡ θεωρία αὕτη ἔχει τὴν ἀρχὴν της εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πυθαγόρου. Ἀνεπτύχθη σπουδαίως ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Ἀθηναίου, ὁ ὁποῖος ἐπέδειξεν εἰς τὸν κλάδον τοῦτον ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν τοιαύτην ὀξύνοιαν, ὥστε δικαίως νὰ προκαλῇ τὸν θαυμασμόν. Ἐξ ἄλλου οὗτος ὑπῆρξεν ἐξόχως πεπροικισμένη διάνοια καὶ ἀφωσιώθη μὲ εὐγενῆ ζῆλον εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἀληθείας τῆς περιεχομένης εἰς τὰς ἐπιστήμας, ὡς τοῦτο ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τοῦ ὁμωνύμου διαλόγου τοῦ Πλάτωνος. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς ἀκριβεῖς διακρίσεις τῶν ρηθέντων ἀνωτέρω μεγεθῶν καὶ τὰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τῆς θεωρίας αὐτῆς, πιστεύω, ὅτι αὗται κατὰ κύριον λόγον ὀφείλονται εἰς τὸν μαθηματικὸν τοῦτον. Καὶ βραδύτερον ὁ μέγας Ἀπολλώνιος τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα εἰς τὰ μαθηματικὰ ἐθαυμάσθη εἰς μέγαν βαθμὸν προσέθεσεν εἰς τὰς ἀνακαλύψεις αὐτὰς θαυμασίας θεωρίας κατόπιν πολλῶν προσπαθειῶν καὶ ἐργασιῶν. Διότι ὁ Θεαίτητος διέκρινε τὰς δυνάμεις εἰς μήκει συμμέτρους καὶ ἀσυμμέτρους καὶ διῄρεσε τὰς γνωστὰς ἀρρήτους εὐθείας κατὰ τὰς διαφόρους μεσότητας (ἀναλογίας) ἀποδίδων τὴν μέσην εἰς τὴν γεωμετρικὴν μεσότητα, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμον) εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἀποτομὴν εἰς τὴν ἁρμονικήν, ὡς γράφεται, ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου τοῦ περιπατητικοῦ. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν Εὐκλείδην προσέφερεν οὗτος γενικῶς ἀνελέγκτους κανόνας σχετικῶς πρὸς τὴν συμμετρίαν καὶ τὴν ἀσυμμετρίαν. Διετύπωσε μετ' ἀκριβείας τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς διακρίσεις τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων μεγεθῶν καὶ τέλος ἀπέδειξε σαφῶς τὴν σπουδαιότητά των.

Τέλος ὁ Ἀπολλώνιος διεχώρισε τὰ εἴδη τῶν διατεταγμένων ἀσυμμετριῶν καὶ ἀνεκάλυψε τὴν ἐπιστήμην τῶν ἀτάκτων ἀσυμμέτρων μεγεθῶν τῶν ὁποίων ἐδημιούργησε μέγαν ἀριθμὸν δι' ἀκριβῶν μεθόδων [1]».

Τινὲς τῶν νεωτέρων μελετητῶν τῶν Στοιχείων συμφωνοῦσι πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Δανοῦ μαθηματικοῦ Zeuthen διατυπωθεῖσαν γνώμην ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ καὶ διτετραγώνων.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ὡς σημειοῖ ὁ T. Heath (ὅστις γράφει ἐν προκειμένῳ ὅτι ὁ Zeuthen εὑρίσκεται πολὺ ἐγγὺς πρὸς τὴν ἀλήθειαν) τῆς μορφῆς

$$x^2 \pm 2\mu x\rho \pm \nu\rho^2 = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad x^4 \pm 2\mu x^2\rho^2 \pm \nu\rho^4 = 0.$$

ἔνθα ρ ῥητὴ εὐθεῖα καὶ μ, ν συντελεσταί [2].

Βεβαίως αἱ 12 κύριαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 36—41 καὶ 6 διαφοραί, θ. 73—78) εἶναι ῥίζαι διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης αἱ 12 δευτερεύουσαι ἄλογοι (6 ἀθροίσματα, θ. 48—53 καὶ 6 διαφοραί, θ. 85—90) εἶναι ῥίζαι δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀρκετὸν διὰ νὰ πεισθῇ τις ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὸ ὑπὸ τοῦ Πρόκλου σημειούμενον ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦτο τῇ προαιρέσει Πλατωνικὸς καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος [3] εἶναι ἀνάγκη ν' ἀναπολήσωμεν τινὰ ἐξ ὅσων ὁ Πλάτων διαλαμβάνει περὶ τῶν μαθηματικῶν εἰς τοὺς διαλόγους αὐτοῦ, ἵνα δυνηθῶμεν καὶ ἐκ τούτων νὰ μορφώσωμεν γνώμην περὶ τοῦ σκοποῦ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων. Ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ Τιμαίου, ὁ Πλάτων ἦτο ἐν γνώσει εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὸ κοσμολογικὸν πρόβλημα τῆς Ὀρφικῆς καὶ Πυθαγορείου θεωρίας, καθ' ἣν ὁ Κόσμος ἐδημιουργήθη ἐκ τοῦ χάους ὑπὸ τοῦ Δημιουργοῦ διὰ τοῦ σχήματος καὶ τοῦ μέτρου.

Κατὰ τὸν Φίληβον ἡ ἀρχὴ καθ' ἣν διαμορφοῦται τὸ σχῆμα εἶναι τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν, τὸ ἄπειρον καὶ τὸ πεπερασμένον. Τὸ ἓν (τὸ μέτρον) καὶ ἡ ἀόριστος δυὰς (τὸ ἀσύμμετρον) εἶναι τὰ στοιχεῖα τῶν ὄντων. Εἰς τὴν τοιαύτην θεώρησιν ἔχει προέλθει, πιθανῶς, ὁ Πλάτων ἔχων ὑπ' ὄψει τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$ ὡς οὗτος γίνεται διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν καὶ διὰ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Ἀρχύτου [4]. Λίαν προσφυῶς γράφει ἐν προκειμένῳ ὁ Κωνστ. Δ. Γεωργούλης «Συνεπῶς χρησιμοποιῶν ὁ Πλάτων τὴν ἔκφρασιν μέγα καὶ μικρὸν θέλει νὰ εἴπῃ ὅτι τὸ δεύτερον στοιχεῖον τὸ ὁποῖον ἀνευρίσκομεν εἰς τὸ Σύμπαν εἶναι τὸ ἄλογον, κάτι τὸ ὁποῖον δὲν ὑποτάσσεται εἰς ἀκριβῆ καθορισμόν, ἀλλὰ ἀφίνει κατόπιν οἱουδήποτε προσδιορισμοῦ ὑπόλοιπον» [5].

Τὸ πρῶτον γεωμετρικὸν σχῆμα εἶναι τὸ τρίγωνον καὶ δὴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον. Εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου τούτου κατὰ τὸ X βιβλίον ἀνευρίσκομεν τὰς δύο ἀρχὰς τὰς ὁποίας κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀπαντῶμεν εἰς τὸ Σύμπαν, τὸ μέτρον καὶ τὸ ἀσύμμετρον. Ὅθεν, φρονοῦμεν, σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται

---

1. Paul-Henri Michel: De Pythagore à Euclide, σ. 109 καὶ 457, Paris 1950, Ed. Les Belles Lettres. Καὶ Mémoir. prés. à l'Acad. des Sciences de Paris 1856, σ. 691.

2. T. Heath, A history of Greek mathematics I, σ. 411 καὶ Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444—5. übersetz. Schönberger (Steck)

3. Σχόλια εἰς Εὐκλείδην I, σ. 68, G. Friedlein, Teubner. S. 215, Z. 5/6.

4. Hans Leisegang: Die Platon Deutung der Gegenwart, S. 122 ff. 1929 καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη: Εὐκλείδου, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, σ. 8, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων 1953, Ἀθῆναι.

5. Ἐγκυκλοπαιδικὸν Λεξικὸν Ἥλιος, Τόμος Ἑλλάς, σ. 592.

τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα ἀλόγων εὐθειῶν. Ὡς πρὸς τὴν ἀναγωγὴν δὲ τῶν ἁπλουστάτων ἀρρήτων (ἀλόγων) εὐθειῶν ὑπὸ τοῦ Θεαιτήτου εἰς τὰς τρεῖς βασικὰς ἀναλογίας, τὴν γεωμετρικήν, τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν ἁρμονικὴν σημειοῦμεν τὰ ἑξῆς· ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἄρρητον μέσην, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὰς ἀρρήτους δυωνύμους θεωρουμένου τοῦ ἀθροίσματος τούτων $A + B$ ὡς τοῦ διπλασίου, μεγέθους τινος Γ, ὥστε $\Gamma = \frac{A+B}{2}$. Ἡ δὲ ἁρμονικὴ ἀναλογία ἀντικατοπτρίζεται εἰς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

Πράγματι θεωρουμένων τῶν μονωνύμων τῆς ἀποτομῆς ὡς ἄκρων ὅρων ἁρμονικῆς ἀναλογίας τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι $\dfrac{2\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}}$, (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (1) ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ (θ. 114) θὰ ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\varkappa\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} - \lambda\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, (2), ἐὰν καλέσωμεν $\dfrac{2\rho\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \varkappa$ καὶ $\dfrac{2\rho\frac{\delta}{\gamma}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta}{\gamma}} = \lambda$.

Ἡ παράστασις ὅμως (2) εἶναι ἀποτομὴ ἤτοι τὰ μονώνυμα αὐτῆς εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Συνεπῶς πᾶσα ἀποτομὴ ἀντικατοπτρίζει τὴν προέλευσιν αὐτῆς ἐξ ἁρμονικοῦ τινος μέσου.

Ὅθεν λίαν προσφυῶς ὁ Paul-Henri Michel[1], γράφει, «οὕτω εἰς τὴν βάσιν τοῦ οἰκοδομήματος τοῦ X βιβλίου ἀνευρίσκομεν τὰς τρεῖς πρώτας μεσότητας (ἀναλογίας), ὡς ἓν ἐνθύμιον τοῦ ἀρχαίου Πυθαγορισμοῦ καὶ ὡς μίαν μαρτυρίαν τῆς εὐκλειδείου πίστεως πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνος».

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατ' Ἰανουάριον 1956.

ΕΥΑΓ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

1. De Pythagore à Euclide p. 455, Paris ,1950, éd. Les Belles Lettres.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ι΄.

"Ὅροι.

α΄. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

β΄. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ΄. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

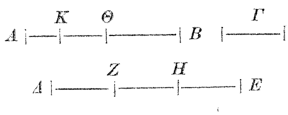
δ΄. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

α΄.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

"Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.



"Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ,

ΒΙΒΛΙΟΝ Χ.

Ὁρισμοί.

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ μετρούμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ μέτρου, ἀσύμμετρα δὲ ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον.

2. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι εἶναι ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν μετρῶνται διὰ τοῦ αὐτοῦ χωρίου, ἀσύμμετροι δὲ (δυνάμει), ὅταν διὰ τὰ τετράγωνα αὐτῶν δὲν ὑπάρχῃ χωρίον ὡς κοινὸν μέτρον.

3. Τούτων τεθέντων ἀποδεικνύεται, ὅτι πρὸς τὴν προτεθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος καὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. Ἂς καλῆται λοιπὸν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ πρὸς ταύτην σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς ταύτην ἂς καλῶνται ἄλογοι.

4. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς προτεθείσης εὐθείας ἂς καλῆται ῥητόν, καὶ τὰ σύμμετρα πρὸς τοῦτο σχήματα ῥητά, τὰ δὲ ἀσύμμετρα πρὸς τοῦτο ἂς καλῶνται ἄλογα, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν, ἐὰν μὲν τὰ σχήματα εἶναι τετράγωνα ἄλογοι, ἐὰν δὲ ὑπάρχωσιν ἄλλα εὐθύγραμμα αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς ταῦτα τετραγώνων.

1.

Δοθέντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο γίνηται πάντοτε, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ τῶν ὁποίων μεγαλύτερον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο γίνηται πάντοτε, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθος τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγέθους Γ.

Διότι τὸ Γ πολλαπλασιαζόμενον θὰ γίνῃ κάποτε μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ. Ἂς πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεγαλύτερον καὶ ἂς διαιρεθῇ τὸ ΔΕ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ μεγέθη τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ καὶ τοῦτο ἂς γίνηται πάντοτε μέχρις ὅτου αἱ διαιρέσεις τοῦ ΑΒ γίνωσιν ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς διαιρέσεις τοῦ ΔΕ.

Ἔστωσαν λοιπὸν αἱ διαιρέσεις ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ ἰσοπληθεῖς πρὸς τὰς διαι-

ΖΗ, ΗΕ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

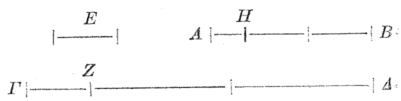
Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

β'.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.



Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

γ'.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ ρέσεις ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ· καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΕ$>$ΑΒ, καὶ ἀφῃρέθη ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΗΔ θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου ΘΑ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΔ$>$ΘΑ καὶ ἀφῃρέθη ἀπὸ μὲν τοῦ ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΘΑ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου ΑΚ. Εἶναι δὲ ΔΖ=Γ. Ἄρα καὶ τὸ Γ$>$ΑΚ. Μικρότερον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ. Ἀπομένει ἄρα ἀπὸ τοῦ μεγέθους ΑΒ τὸ μέγεθος ΑΚ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ὅταν τ' ἀφαιρούμενα εἶναι ἡμίση.

2.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀνθυφαιρεῖται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, τὸ ἑκάστοτε δὲ ὑπόλοιπον οὐδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, τὰ μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἂς εἶναι τὰ μεγέθη ΑΒ$<$ΓΔ καὶ ἂς ἀνθυφαιρῆται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου καὶ τὸ ἑκάστοτε ὑπόλοιπον οὐδέποτε νὰ καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα θὰ μετρήσῃ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρήσῃ καὶ εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ ἀφοῦ καταμετρήσει τὸ ΖΔ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ $<$ ΑΒ, τὸ δὲ ΓΖ ἀφοῦ καταμετρήσει τὸ ΒΗ ἂς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΑΗ $<$ ΓΖ, καὶ ἂς γίνεται τοῦτο πάντοτε, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε. Ἂς γίνῃ, καὶ ἔστω τὸ ὑπόλοιπον ΑΗ $<$ Ε. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΖ, καὶ τὸ Ε ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸ ΖΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΓΖ. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ μετρεῖ τὸ ΒΗ· καὶ τὸ Ε ἄρα μετρεῖ τὸ ΒΗ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· ἄρα θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΗ, τὸ μεγαλύτερον τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ μέγεθός τι· ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

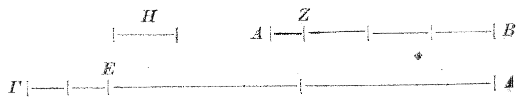
3.

Δοθέντων δύο συμμέτρων μεγεθῶν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ΑΒ $<$ ΓΔ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διότι, τὸ μέγεθος ΑΒ ἢ μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ ὄχι. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ μετρῇ, δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν· καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ, καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. ἔστω τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ, καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστιν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α. Β, Γ,· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὒ [μετρεῖ]. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ.

μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ· καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι τὸ ΑΒ δὲν μετρεῖται ὑπὸ μεγαλυτέρου τοῦ ΑΒ μεγέθους.

Ἀλλ' ἄς μὴ μετρῇ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. Καὶ ἐὰν ἀνθυφαιρῆται πάντοτε τὸ μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου, ὑπόλοιπόν τι θὰ μετρήσῃ κάποτε τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διότι τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ δὲν εἶναι ἀσύμμετρα· καὶ τὸ μὲν ΑΒ ἀφοῦ μετρήσει τὸ ΕΔ ἄς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον ΕΓ $<$ ΑΒ, τὸ δὲ ΕΓ ἀφοῦ μετρήσει τὸ ΖΒ ἄς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον τὸ ΑΖ $<$ ΕΓ, τὸ δὲ ΑΖ ἄς μετρῇ τὸ ΓΕ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΓΕ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ μετρεῖ τὸ ΖΒ, ἄρα καὶ τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του· ἄρα τὸ ΑΖ θὰ μετρήσῃ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΕ· ἄρα καὶ τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· ἄρα μετρεῖ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· τὸ ΑΖ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχῃ μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ, τὸ ὁποῖον θὰ μετρῇ τὰ ΑΒ, ΓΔ. Ἔστω τὸ Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Η μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΕΔ, καὶ τὸ Η ἄρα μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· ἄρα τὸ Η θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ μετρεῖ τὸ ΖΒ· ἄρα καὶ τὸ Η μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ καὶ θὰ μετρήσῃ καὶ τὴν διαφορὰν ΑΖ, τὸ μεγαλύτερον θὰ μετρήσῃ τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ· τὸ ΑΖ ἄρα εἶναι τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Δοθέντων ἄρα δύο συμμέτρων μεγεθῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ εὑρέθη τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος μετρῇ δύο μεγέθη θὰ μετρῇ καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

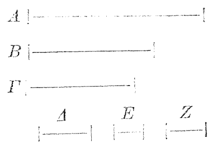
4.

Δοθέντων τριῶν συμμέτρων μεγεθῶν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ· πρέπει τῶν Α, Β, Γ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον.

Διότι, ἄς ληφθῇ δύο τῶν Α, Β τὸ μ. κ. μ. καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ Δ ἢ μετρεῖ τὸ Γ ἢ δὲν τὸ μετρεῖ. Πρῶτον ἄς τὸ μετρῇ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὸ Γ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ· τὸ Δ ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον· διότι μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους Δ δὲν μετρεῖ τὰ Α, Β.

Ἄς μὴ μετρῇ τώρα τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον, ὅτι τὰ Γ, Δ εἶναι σύμ-ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον· λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους [μέγεθος] τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.



Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸ τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς μετρα. Διότι, ἐπειδὴ τὰ Α, Β, Γ εἶναι σύμμετρα, θὰ μετρήσῃ αὐτὰ μέγεθός τι, ἐκεῖνο δηλαδή, τὸ ὁποῖον θὰ μετρήσῃ καὶ τὰ Α, Β· ὥστε θὰ μετρήσῃ καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β τὸ Δ (θεώρ. 3 πόρ.). Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. ·ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος θὰ μετρήσῃ τὰ Γ, Δ· ἄρα τὰ Γ, Δ εἶναι σύμμετρα. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν τὸ μ. κ. μ. αὐτῶν καὶ ἔστω τὸ Ε (θεώρ. 3). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ Δ, ἀλλὰ τὸ Δ μετρεῖ τὰ Α, Β, καὶ τὸ Ε ἄρα θὰ μετρήσῃ τὰ Α, Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ· τὸ Ε ἄρα εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Α, Β, Γ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι μετρεῖ τὰ Α,Β,Γ μέγεθός τι Ζ $>$ Ε. Καὶ ἐπειδὴ τὸ Ζ μετρεῖ τὰ Α, Β, Γ, ἄρα θὰ μετρῇ καὶ τὰ Α, Β καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β (θεώρ. 3 πόρ.). Τὸ δὲ μ. κ. μ. τῶν Α, Β εἶναι τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸ Δ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα μετρεῖ τὰ Γ, Δ ·ἄρα θὰ μετρῇ τὸ Ζ καὶ τὸ μ. κ. μ. τῶν Γ, Δ. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα θὰ μετρήσῃ τὸ Ε, τὸ μεγαλύτερον τὸ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μέγεθός τι μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους Ε· τὸ Ε ἄρα εἶναι τὸ μ. κ. μ. τῶν Α, Β, Γ, ἐὰν δὲν μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, εἶναι αὐτὸ τὸ Δ.

Δοθέντων ἄρα τριῶν συμμέτρων μεγεθῶν εὑρέθη τὸ μ.κ.μ. [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος μετρῇ τρία μεγέθη, θὰ μετρῇ καὶ τὸ μ.κ.μ. αὐτῶν.

Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ληφθῇ καὶ τὸ μ.κ.μ. ἐπὶ περισσοτέρων μεγεθῶν, καὶ τὸ πόρισμα θὰ ἰσχύῃ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

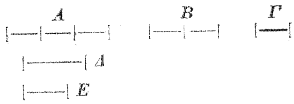
5.

Τ ὰ σ ύ μ μ ε τ ρ α μ ε γ έ θ η ἔ χ ο υ σ ι π ρ ὸ ς ἄ λ λ η λ α λ ό γ ο ν, ὃ ν ἔ χ ε ι ἀ ρ ι θ μ ὸ ς π ρ ὸ ς ἀ ρ ι θ μ ό ν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ καὶ ἔστω τὸ Γ· καὶ ὅσας φορὰς τὸ Γ μετρεῖ τὸ Α τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Δ, ὅσας δὲ φορὰς τὸ Γ μετρεῖ τὸ Β τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ε.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Γ μετρεῖ τὸ Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ τὸ μέγεθος Γ τὸ Α· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· (VII. ὁρ. 21)· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.



Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

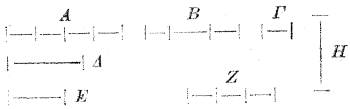
ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεί, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε [ἀριθμόν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἐστὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα (VII. 7. πόρ.). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ Γ μετρεῖ τὸ Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Ε καὶ τὸ Γ τὸ Β· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε (VII.ὁρισ. 21). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε.

Τὰ σύμμετρα ἄρα μεγέθη τὰ Α, Β ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐάν δύο μεγέθη ἔχωσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ἂς ἔχωσι τὰ μεγέθη Α, Β λόγον, ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Δ εἰς τόσα ἴσα μέρη ἂς διαιρεθῇ τὸ Α καὶ ἔστω πρὸς ἓν τούτων ἴσον τὸ Γ· ὅσας δὲ μονάδας ἔχει ὁ Ε ἐκ τόσων μεγεθῶν ἴσων πρὸς τὸ Γ ἂς σύγκειται τὸ μέγεθος Ζ.

Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Δ τόσα μεγέθη Γ ἔχει τὸ Α, ὅ,τι ἄρα μέρος εἶναι ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι καὶ τὸ Γ τοῦ Α· εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ (VII.ὁρ. 21). Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν ἀριθμὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὴν μονάδα (VII. 7. πόρ.). Πάλιν, ἐπειδὴ ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Ε, τόσα μεγέθη Γ ἔχει τὸ Ζ, εἶναι ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (V. 22). Ἀλλὰ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. Τὸ Α ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν Β, Ζ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα τὸ Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Ζ (V.9). Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλ' ὅμως μετρεῖ καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα μετρεῖ τὰ Α, Β. Σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα.

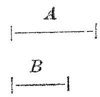
Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, εἶναι δυνατὸν νὰ κάμωμεν, ὥστε νὰ εἶναι ὡς ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε, οὕτως ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς το Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.



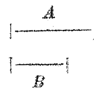
Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, καὶ τὰ ἑξῆς.

η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά εστι τὰ Α, Β μεγέθη.



Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

Ἐὰν δὲ καὶ τῶν εὐθειῶν Α, Ζ ληφθῇ μέση ἀνάλογος, ὡς ἡ Β, θὰ εἶναι $A : Z = A^2 : B^2$, δηλ. ὡς ἡ πρώτη ἀνάλογος πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναγραφόμενον τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, (VI. 20. πορ.2.V.ὁρ. 9). Ἀλλὰ $A : Z = \Delta : E$. Ἔγινεν ἄρα καὶ $\Delta : E = A^2 : B^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν τὸ Α ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ Α θὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, (θεώρ. 6). Ἀλλὰ δὲν εἶναι. Δὲν ἔχει ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἀσύμμετρα ἄρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς:

8.

Ἐὰν δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι λόγον, πρὸς ἄλληλα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, δύο μεγέθη τὰ Α, Β ἂς μὴ ἔχωσι λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. (θεώρ. 5). Ἀλλὰ δὲν ἔχει. Εἶναι ἄρα τὰ μεγέθη Α, Β ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δὲν ἔχωσι λόγον πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

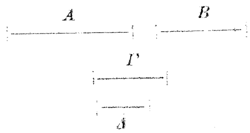
9.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς μήκει συμμέτρους. Τὰ δὲ τετράγωνα ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν δὲν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ μὴ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν τετράγω-

τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν].



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον], ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν]. ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

νος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς θὰ ἔχωσι μήκει συμμέτρους.

Διότι, ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς Α πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Β ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β ἔχει λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν (θεώρ. 5). Ἂς ἔχῃ τὸν λόγον $Α:Β=Γ:Δ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Α:Β=Γ:Δ$, ἀλλὰ $(Α:Β)^2=Α^2:Β^2$· διότι τὰ ὅμοια σχήματα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (VI. 20, πόρ.)· καὶ $(Γ:Δ)^2=Γ^2:Δ^2$· διότι μεταξὺ δύο τετραγώνων ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἔχει λόγον εἰς τὸ τετράγωνον, ἐκείνου τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν (VII. 11)· εἶναι ἄρα $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$ λέγω, ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β εἶναι μήκει σύμμετρος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$, ἀλλὰ $Α^2:Β^2=(Α:Β)^2$, καὶ $Γ^2:Δ^2=(Γ:Δ)^2$ εἶναι ἄρα $Α:Β$ ὡς ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ Α μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω μήκει ἀσύμμετρος ἡ Α πρὸς τὴν Β· λέγω, ὅτι $Α^2:Β^2$ δὲν ἔχουσι λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν $Α^2:Β^2 =$ λόγος, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ Α θὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β· ἀλλὰ δὲν εἶναι· δὲν ἔχει ἄρα τὸ $Α^2:Β^2$ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν, ἂς μὴ ἔχῃ τὸ $Α^2:Β^2$ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι πρὸς τὴν Β μήκει ἀσύμμετρος.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

πάλιν ἐπεί, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

λέγω δή, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

Λῆμμα.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται· ὅπερ οὐχ ὑπόκεινται. οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐὰν ἡ Α εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β, τὸ $A^2 : B^2$ θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀλλὰ δὲν ἔχει· δὲν εἶναι ἄρα ἡ Α μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Β.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π ό ρ ι σ μ α.

Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι πάντως καὶ δυνάμει σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ μήκει [ἐκτὸς ἐὰν τὰ τετράγωνα τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν ἔχουσι λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, εἶναι σύμμετρα. Ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι οὐ μόνον μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι εἶναι μήκει σύμμετρα ὅσα τετράγωνα ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ ὅτι εἶναι σύμμετρα τὰ τετράγωνα τὰ ἔχοντα λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα δὲν ἔχουσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, τὰ μὲν τετράγωνα εἶναι δυνάμει σύμμετρα, οὐχὶ ὅμως καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα εἶναι πάντως καὶ δυνάμει σύμμετρα, τὰ δὲ δυνάμει οὐχὶ πάντως καὶ μήκει, ἐκτὸς ἐὰν ἔχωσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει, διότι αἱ δυνάμει σύμμετροι εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχωσι λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ὥστε αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ εἶναι δυνατὸν μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι, δυνάμει νὰ εἶναι ἢ ἀσύμμετροι ἢ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· διότι ἐὰν εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ δυνάμει· ἐλήφθησαν δὲ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον· αἱ δυνάμει ἄρα ἀσύμμετροι εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι].

Λ ῆ μ μ α.

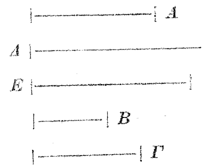
Εἰς τὰ βιβλία τῶν ἀριθμητικῶν ἀπεδείχθη, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Καὶ εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, δηλ. οἱ μὴ ἔχοντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, δὲν ἔχουσι λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Διότι, ἐὰν ἔχωσι θὰ εἶναι ὅμοιοι· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Οἱ μὴ ὅμοιοι ἄρα ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ι΄.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσιαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον· ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

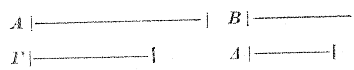


Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ια΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως

10.

Πρὸς τὴν προτεθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, ἡ μὲν μήκει μόνον, ἡ δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· πρέπει νὰ εὑρεθῶσι πρὸς τὴν Α δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, ἡ μὲν μήκει μόνον, ἡ δὲ καὶ δυνάμει.

Διότι, ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοί, οἱ Β, Γ μὴ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, δηλ. μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ ἂς γίνῃ $Β : Γ = Α^2 : Δ^2$· διότι τοῦτο τὸ ἐμάθομεν (θεώρ. 6, πόρ.)· σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Δ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Β πρὸς τὸν Γ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ ἄρα $Α^2$ πρὸς $Δ^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει εἶναι ἡ Α πρὸς τὴν Δ (θεώρ. 9). Ἂς ληφθῇ τῶν Α, Δ ἡ μέση ἀνάλογος ἡ Ε· εἶναι ἄρα $Α : Δ = Α^2 : Ε^2$, (V. ὅρ. 9). Ἡ δὲ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Δ· ἀσύμμετρον ἄρα εἶναι καὶ τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Ε^2$· ἀσύμμετρος ἄρα εἶναι καὶ ἡ Α πρὸς τὴν Ε δυνάμει.

Πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν Α εὑρέθησαν δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, μήκει δὲ καὶ δυνάμει ἡ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι πρὸς τὸ δεύτερον σύμμετρον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον θὰ εἶναι σύμμετρον· καὶ ἂν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον εἶναι ἀσύμμετρον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον θὰ εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἐν ἀναλογίᾳ τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ πρὸς τὸ Β ἔστω σύμμετρον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι πρὸς τὸ Δ σύμμετρον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Α ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θεώρ. 5). Καὶ εἶναι $Α:Β=Γ:Δ$· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· τὸ Γ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ Α ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι πρὸς τὸ Δ ἀσύμμετρον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ εἶναι τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

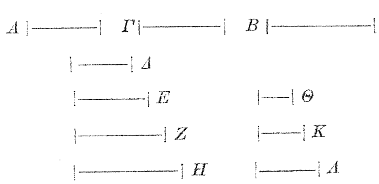
Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιβ΄.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β, τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Γ τῷ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.



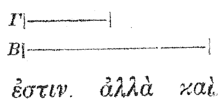
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, [οὕτως] ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ. τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν, καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ

$A:B=\Gamma:\Delta$· οὔτε τὸ Γ ἄρα ἔχει λόγον πρὸς τὸ Δ, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

12.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος σύμμετρα εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα.

Διότι ἔστω ἕκαστον τῶν Α, Β σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. Λέγω ,ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν (θεώρ. 5). Ἄς εἶναι $A:\Gamma=\Delta:E$. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. (θεώρ. 5). Ἄς εἶναι $\Gamma:B=Z:H$. Καὶ ἐνῷ ἐδόθησαν ὁσοιδήποτε λόγοι καὶ ὡς ὁ $\Delta:E$ καὶ ὡς ὁ $Z:H$ ἂς ληφθῶσιν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους πρὸς τοὺς δοθέντας, ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Θ, Κ, Λ, (VIII. 4)· ὥστε νὰ εἶναι $\Delta:E=\Theta:K$ καὶ $Z:H=K:\Lambda$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $A:\Gamma=\Delta:E$, ἀλλὰ $\Delta:E=\Theta:K$, εἶναι ἄρα $A:\Gamma=\Theta:K$ (V. 11). Πάλιν, ἐπειδὴ $\Gamma:B=Z:H$, ἀλλὰ $Z:H=K:\Lambda$ εἶναι ἄρα $\Gamma:B=K:\Lambda$. Εἶναι δὲ $A:\Gamma=\Theta:K$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A:B=\Theta:\Lambda$, (V. 22). Τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ ἀριθμὸς Θ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Λ· εἶναι ἄρα τὸ Α σύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Τὰ σύμμετρα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ ἓν δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι πρὸς μέγεθός τι ἀσύμμετρον, καὶ τὸ ἄλλο θὰ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ ἀσσύμμετρον.

Ἔστω δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β, τὸ ἓν δὲ ἐξ αὐτῶν τὸ Α ἔστω πρὸς ἄλλο τι τὸ Γ ἀσύμμετρον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο τὸ Β εἶναι πρὸς τὸ Γ ἀσύμμετρον.

Διότι, ἐὰν τὸ Β εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ Α ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ (θεώρ. 12). Ἀλλ' ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

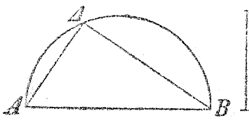
Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. φανερὸν δή, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.

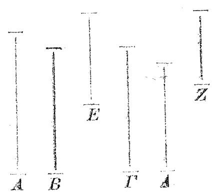


Ὁμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει].



Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α μὲν τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω, ὅτι, ἐλήφθη ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ B ἄρα δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Γ. ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας.

Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ AB, Γ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ AB· πρέπει νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τῆς AB τοῦ τετραγώνου τῆς Γ.

Ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AΔB καὶ ἂς ἐναρμοσθῇ εἰς αὐτὸ ἡ AΔ ἴση πρὸς τὴν Γ, (IV. 1), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔB. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία AΔB εἶναι ὀρθή, (III. 31), καὶ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς AB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς AΔ δηλ. τῆς Γ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΔB (I. 47).

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκεται ὅταν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ὡς ἑξῆς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AΔ, ΔB, καὶ ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δοθεισῶν. Ἂς κατασκευασθῇ ὀρθὴ γωνία μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς AΔ, ΔB καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ AB· εἶναι φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ AB δύναται τὰς εὐθείας AΔ, ΔB (δηλ. $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν πρώτην, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τετάρτης κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν τρίτην. Καὶ ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς δευτέρας κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν πρώτην καὶ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τετάρτης κατὰ τὸ τετράγωνον εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν τρίτην.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ A, B, Γ, Δ, ἤτοι $A:B = \Gamma:\Delta$ καὶ $E^2 = A^2 - B^2$, $Z^2 = \Gamma^2 - \Delta^2$. Λέγω, ὅτι ἐὰν ἡ A εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν E καὶ εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρος ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δι ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστι ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

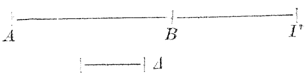
Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιε΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἔστω σύμμετρον τῷ ΑΒ· λέγω δή, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος· μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ις΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἡ Γ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ζ, καὶ ἐὰν ἡ Α εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ ἡ Γ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ζ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A:B=\Gamma:\Delta$ εἶναι ἄρα $A^2:B^2=\Gamma^2:\Delta^2$, (VI. 22). Ἀλλὰ $A^2=B^2+E^2$, $\Gamma^2=\Delta^2+Z^2$. Εἶναι ἄρα $(E^2+B^2):B^2=(\Delta^2+Z^2):\Delta^2$. Καὶ συνεπῶς $E^2:B^2=Z^2:\Delta^2$, (V. 17)· εἶναι ἄρα $E:B=Z:\Delta$, (VI.22)· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $B:E=\Delta:Z$, (V. 7π όρ.). Εἶναι δὲ καὶ $A:B=\Gamma:\Delta$. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A:E=\Gamma:Z$, (V. 22). Ἐὰν λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ ἡ Γ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Ζ, καὶ ἂν ἡ Α εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε καὶ ἡ Γ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ζ, (θ. 11).

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

15.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα προστεθῶσι, καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα δύο μεγεθῶν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὰ δύο μεγέθη θὰ εἶναι σύμμετρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι τὰ δύο σύμμετρα μεγέθη ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα των τὸ ΑΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, θὰ μετρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. Ἄρα τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ. Ἄρα τὸ ΑΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ, (ὁρ. 1).

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΓ σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι σύμμετρα.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ΑΓ, ΑΒ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἂς τὰ μετρῇ καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὸ ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι σύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

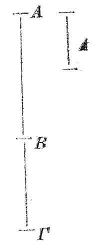
16.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα προστεθῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς ἕκαστον αὐτῶν·

ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστιν. τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἐστιν.



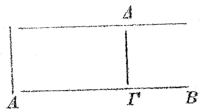
Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω. ἔστω δὴ πρότερον τῷ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γὰρ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.



Καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καί ἐστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιζ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα των τὸ ΑΓ πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον.

Διότι ἐὰν τὰ ΓΑ, ΑΒ δὲν εἶναι ἀσύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἄς τὰ μετρῇ, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τὴν ΒΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ. Σύμμετρα ἄρα εἶναι τὰ ΑΒ, ΒΓ· ἐλήφθησαν ὅμως ἀσύμμετρα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρήσῃ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μέγεθός τι· ἀσύμμετρα ἄρα εἶναι τὰ ΓΑ, ΑΒ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀσύμμετρα. Τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ ΑΓ ἀσύμμετρον πρὸς ἓν τῶν ΑΒ, ΒΓ. Ἔστω πρότερον πρὸς τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρα. Διότι ἐὰν θὰ εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι. Ἄς τὰ μετρῇ, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Δ μετρεῖ τὰ ΑΒ, ΒΓ, θὰ μετρῇ ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΓ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα μετρεῖ τὰ ΓΑ, ΑΒ. Εἶναι ἄρα σύμμετρα τὰ ΓΑ, ΓΒ· ἐλήφθησαν δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ μετρῇ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μέγεθός τι· εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς λαμβανόμενα τμήματα τῆς εὐθείας.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα τὸ ΔΒ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΓΒ.

Καὶ εἶναι τοῦτο φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος· διότι, ἐπειδὴ τὸ ΔΒ εἶναι τετράγωνον ἡ ΔΓ = ΓΒ καὶ εἶναι τὸ ΑΔ = ΑΓ×ΓΔ τουτέστι τὸ ΑΓ×ΓΒ.

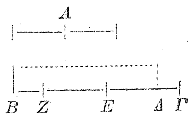
Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

17.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ τὸ παραβληθὲν διαιρῇ αὐτὴν εἰς μήκει σύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΓΕ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῇ ΔΖ. δεικτέον, ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστι σύμμετρος μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ. καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι σύμμετρος ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δύναται δὲ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμεἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν)· καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν (παραλληλόγραμμον) διαιρεῖ αὐτὴν εἰς τμήματα μήκει σύμμετρα.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς Α, δηλ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ παραβληθὲν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ $ΒΔ\times ΔΓ$, ἔστω δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ. λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΕΖ=ΔΕ$. Ἡ λοιπὴ ἄρα $ΔΓ=ΒΖ$. Καὶ ἐπειδὴ εὐθεῖά τις ἡ ΒΓ ἐτμήθη εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ, θὰ εἶναι ἄρα $ΒΔ\times ΔΓ+ΕΔ^2=ΕΓ^2$, (II.5)· καὶ τὰ τετραπλάσια αὐτῶν· ἄρα $4ΒΔ\times ΔΓ+4ΕΔ^2=4ΕΓ^2$. Ἀλλὰ $4ΒΔ\times ΔΓ=Α^2$, $4\,ΕΔ^2=ΔΖ^2$· διότι ἡ ΔΖ εἶναι διπλασία τῆς ΔΕ. Τὸ δὲ $4\,ΕΓ^2=ΒΓ^2$· διότι ἡ ΒΓ εἶναι πάλιν διπλασία τῆς ΓΕ. Ἄρα $Α^2+ΔΖ^2=ΒΓ^2$· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΖ, τὸ $ΒΓ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τὸ $ΔΖ^2$. Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὰς ΓΔ, ΒΖ· διότι $ΓΔ=ΒΖ$. Καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὰς ΒΖ, ΓΔ, (θεώρ. 12)· ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τὴν ΖΔ· τὸ $ΒΓ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ).

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι $\sqrt{ΒΓ^2-Α^2}$ (μήκει) σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ $Α^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (παραλ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ$. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

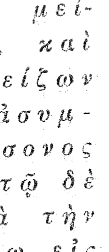
Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $ΖΔ^2=ΒΓ^2-Α^2$. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΔ· ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι μήκει φοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστι σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιη'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρος ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφοράν, ΒΓ—ΖΔ=ΒΖ + ΔΓ, (θεώρ. 15). Ἀλλὰ ΒΖ + ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 6). Ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

18.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον καὶ νὰ διαιρῇ (τὸ παραβληθὲν παραλλ.) αὐτὴν εἰς μήκει ἀσύμμετρα τμήματα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν). Καὶ ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μήκει ἀσύμμετρα.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ $\times$ ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΒΔ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΒΓ^2 ὑπερέχει τοῦ Α^2 κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι ΖΔ^2=ΒΓ^2—Α^2. Τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, εἶναι ἄρα μήκει ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 16). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι μήκει ἀσσύμμετρος πρὸς τὸ ἄθροισμα ΒΖ+ΔΓ, (θεώρ. 6)· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὸ ἄθροισμα ΒΖ+ΔΓ, (θεώρ. 13). Ὥστε ἡ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τὴν ΖΔ, (θεώρ. 16). Καὶ ΖΔ^2=ΒΓ^2—Α^2· ἄρα τὸ ΒΓ^2 ὑπερέχει τοῦ Α^2 κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ).

Ἂς ὑπερέχῃ τώρα τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ τοῦ τετραγώνου τῆς Α κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἂς παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετρα-

ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρος ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

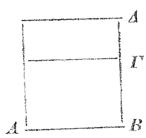
Λ ῆ μ μ α.

Ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει· εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

ιθ'.

Τ ὸ ὑ π ὸ ῥ η τ ῶ ν μ ή κ ε ι σ υ μ μ έ τ ρ ω ν κ α τ ά τ ι ν α τ ῶ ν π ρ ο ε ι ρ η μ έ ν ω ν τ ρ ό π ω ν ε ὐ θ ε ι ῶ ν π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν ο ν ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν ῥ η τ ό ν ἐ σ τ ι ν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

γώνου τῆς Α, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ$. Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$. Ἀλλὰ τὸ $ΒΓ^2$ ὑπερέχει τοῦ $Α^2$ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ). Εἶναι ἄρα μήκει ἀσύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν $(ΒΓ - ΖΔ) = (ΒΖ + ΔΓ)$, (θεώρ. 16)· Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΒΖ + ΔΓ$ εἶναι εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 6)· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. 13)· ὥστε καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἡ ΒΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ ῆ μ μ α.

Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι (δηλ. καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα) αἱ δὲ εὐθεῖαι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην σύμμετροι, ἀλλὰ δύνανται νὰ εἶναι μήκει καὶ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι, εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν πρὸς δοθεῖσαν ῥητὴν ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις μήκει σύμμετρος, αὕτη λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει (τὰ τετράγωνα των δηλ. εἶναι σύμμετρα), ἐπειδὴ αἱ μήκει σύμμετροι εἶναι πάντως σύμμετροι καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥητὴν ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις σύμμετρος δυνάμει, ἐὰν μὲν εἶναι καὶ μήκει σύμμετρος λέγεται τότε ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν μήκει καὶ δυνάμει· ἐὰν δὲ εὐθεῖά τις εἶναι πρὸς δοθεῖσαν ῥητὴν σύμμετρος μὲν δυνάμει, ἀσύμμετρος δὲ μήκει λέγεται καὶ πάλιν ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

19.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν, τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ῥητόν.

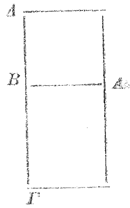
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητὸν (ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν ΒΓ μήκει σύμμετρος, εἶναι δὲ $ΑΒ = ΒΔ$, ἡ ΒΔ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ εἶναι $ΒΔ : ΒΓ = ΔΑ : ΑΓ$, (VI. 1). Τὸ ΔΑ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ τὸ ΔΑ ῥητόν· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

κ'.

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρόν τῇ, παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΑ μήκει.



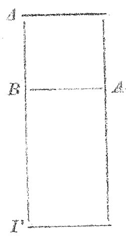
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ῥητὴ δὲ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

κα'.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη] ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.

20.

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν ῥητήν, ἡ ὁποία πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρ' ἣν παρεβλήθη εἶναι μήκει σύμμετρος.

Διότι ἂς παραβληθῇ πάλιν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων τὸ ῥητὸν ΑΓ παρὰ τὴν ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΑ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητόν, (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΑΓ ῥητόν· ἄρα τὸ ΔΑ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ. Καὶ εἶναι ΔΑ : ΑΓ = ΔΒ : ΒΓ, (VI. 1). Ἄρα εἶναι σύμμετρος ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, (θεώρ. 11)· εἶναι δὲ ΔΒ = ΒΑ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ δὲ ΑΒ εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΒΓ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

21.

Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν εὐθειῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ ῥητῶν εὐθειῶν, δυνάμει μόνον συμμέτρων, τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ μέση.

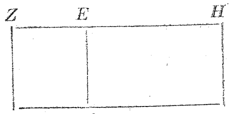
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι ῥητόν, (ὁρ. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι ἐξ ὑποθέσεως ἐλήφθησαν ὡς σύμμετροι μόνον δυνάμει· εἶναι δὲ ἡ ΑΒ=ΒΔ, ἄρα καὶ ἡ ΔΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ εἶναι ΔΒ : ΒΓ=ΑΔ : ΑΓ· ἄρα τὸ ΔΑ εἶναι πρὸς τὸ ΑΓ ἀσύμμετρον, (θεώρ. 11). Τὸ δὲ ΔΑ εἶναι ῥητόν· ἄλογον ἄρα εἶναι τὸ ΑΓ, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου] εἶναι ἄλογος, ἄς καλῆται δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. Λέγω ὅτι $ΖΕ : ΕΗ = ΖΕ^2 : ΖΕ \times ΕΗ$.

ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

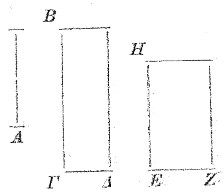


κβ΄.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ᾽ ἣν παράκειται, μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δὲ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δὲ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστί ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ· ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κγ΄.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΗΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΖΕ : ΕΗ = ΖΔ : ΔΗ, (VI. 1), καὶ εἶναι τὸ μὲν ΖΔ = $ΖΕ^2$, τὸ δὲ ΔΗ = ΔΕ × ΕΗ δηλ. = ΖΕ × ΕΗ, εἶναι ἄρα ΖΕ : ΕΗ = $ΖΕ^2$: ΖΕ × ΕΗ. Ὁμοίως δὲ καὶ ΗΕ × ΕΖ = $ΕΖ^2$ δηλ. ΗΔ : ΖΔ = ΗΕ : ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μέση παραβαλλόμενον ὡς ὀρθογώνιον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρ' ἣν παράκειται.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ καὶ ἂς παραβληθῇ τὸ τετράγωνον τῆς Α παρὰ τὴν ΒΓ, ἀφοῦ τοῦτο μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ ἔχον πλάτος τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὴ καὶ πρὸς τὴν ΓΒ μήκει ἀσύμμετρος.

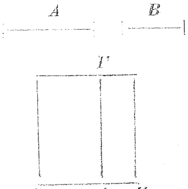
Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι μέση τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥηταί, δυνάμει μόνον σύμμετροι (θεώρ. 21). Ἔστω τὸ ἰσοδύναμον τοῦτο ὀρθογώνιον τὸ ΗΖ. Ἰσοδύναμον ὅμως εἶναι καὶ τὸ ΒΔ· ἄρα τὸ ΒΔ = ΗΖ. Εἶναι δὲ καὶ πρὸς αὐτὸ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, (VI. 14)· εἶναι ἄρα ΒΓ : ΕΗ = ΕΖ : ΓΔ. Εἶναι ἄρα καὶ $ΒΓ^2$: $ΕΗ^2$ = $ΕΖ^2$: $ΓΔ^2$, (VI. 20). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΓΒ^2$ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$· ἄρα ἑκάστη αὐτῶν (τῶν ΓΒ, ΕΗ) εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΓΔ^2$, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΕΖ^2$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΔ^2$, (ὁρ. 4)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν ΕΗ μήκει ἀσύμμετρος· διότι εἶναι σύμμετροι μόνον δυνάμει καὶ εἶναι ΕΖ : ΕΗ = $ΕΖ^2$: ΖΕ × ΕΗ, (λῆμμα τοῦ 21), ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΖΕ × ΕΗ (θεώρ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$· διότι αὗται (αἱ ΕΖ, ΓΔ) εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΖΕ × ΕΗ εἶναι σύμμετρον τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ × ΓΒ· διότι ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἶναι ἴσον πρὸς $Α^2$· ἄρα τὸ $ΓΔ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ × ΓΒ, (θεώρ. 13). Ὡς δὲ $ΓΔ^2$: ΔΓ × ΓΒ = ΔΓ : ΓΒ· (λῆμμα τοῦ 21)· ἄρα ἡ ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ, (θεώρ. 11). Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν μέσην εἶναι μέση.

Ἔστω μέση ἡ A, καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω ἡ B· λέγω, ὅτι καὶ ἡ B μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ $ΓE$ πλάτος ποιοῦν τὴν $EΔ$· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $EΔ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ $ΓZ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔZ$· ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ $EΓ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓZ$· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $EΓ$ τῷ $ΓZ$. καί ἐστιν ὡς τὸ $EΓ$ πρὸς τὸ $ΓZ$, οὕτως ἡ $EΔ$ πρὸς τὴν $ΔZ$· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $EΔ$ τῇ $ΔZ$ μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ $EΔ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΓ$ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔZ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΓ$ μήκει· αἱ $ΓΔ$, $ΔZ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, $ΔZ$ δυναμένη μέση ἐστίν· καὶ δύναται τό ὑπὸ τῶν $ΓΔ$, $ΔZ$ ἡ B· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ B.



Π ό ρ ι σ μ α.

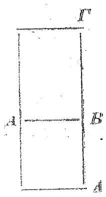
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν].

Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι *μ έ σ η ν* καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

κδ΄.

Τ ὸ ὑ π ὸ μ έ σ ω ν μ ή κ ε ι σ υ μ μ έ τ ρ ω ν ε ὐ θ ε ι ῶ ν κ α τ ά τ ι ν α τ ῶ ν ε ἰ ρ η μ έ ν ω ν τ ρ ό π ω ν π ε ρ ι ε χ ό μ ε ν ο ν ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν μ έ σ ο ν ἐ σ τ ί ν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB, $BΓ$ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ $AΓ$· λέγω, ὅτι τὸ $AΓ$ μέσον ἐστίν.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $AΔ$· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AΔ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $BΔ$, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει· ὥστε καὶ τὸ $ΔA$ τῷ $AΓ$ σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ $ΔA$· μέσον ἄρα καὶ τὸ $AΓ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστω μέση ἡ Α, καὶ ἔστω ἡ Β σύμμετρος πρὸς τὴν Α· λέγω, ὅτι καὶ ἡ Β εἶναι μέση.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ $Α^2$ ἔχον πλάτος τὴν ΕΔ· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θεώρ. 22). Πρὸς δὲ τὸ $Β^2$ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΖ ἔχον πλάτος τὴν ΔΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρρς πρὸς τὴν Β εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ $Α^2$ πρὸς τὸ $Β^2$. Ἀλλὰ τὸ μὲν τὸ $Α^2 = ΕΓ$, τὸ δὲ $Β^2 = ΓΖ$. Ἄρα τὸ ΕΓ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ εἶναι $ΕΓ : ΓΖ = ΕΔ : ΔΖ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΔ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΔΖ, (ὁρ. 3) καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΓ, (θεώρ. XIII)· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΓΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι μέση (θεώρ. 21). Ἡ δυναμένη ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΔ \times ΔΖ$ εἶναι μέση. Καὶ $Β^2 = ΓΔ \times ΔΖ$· ἄρα ἡ Β εἶναι μέση.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σύμμετρον πρὸς τὸ μέσον χωρίον εἶναι μέσον [διότι τὰ χωρία ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς τετράγωνα αἱ πλευραί, τῶν ὁποίων εἶναι δυνάμει σύμμετροι, ἡ μία τῶν ὁποίων εἶναι μέση· ὥστε καὶ ἡ ἄλλη εἶναι μέση]. Ὁμοίως δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένα, (18 λημ.) ἰσχύουσι καὶ ἐπὶ τῶν μέσων, ὥστε ἡ πρὸς τὴν μέσην μήκει σύμμετρος νὰ λέγεται πρὸς αὐτὴν μέση καὶ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, διότι ἐν γένει, αἱ μήκει σύμμετροι εἶναι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ πρὸς τὴν μέσην ὑπάρχῃ εὐθεῖά τις δυνάμει σύμμετρος, ἐὰν μὲν εἶναι καὶ μήκει σύμμετρος, λέγονται αἱ εὐθεῖαι καὶ τότε μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, ἐὰν δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

24.

Τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων ὑπὸ εὐθειῶν μέσων μήκει συμμέτρων εἶναι μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν μέσων καὶ μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι μέσον.

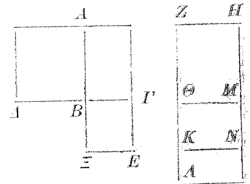
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον ΑΔ· ἄρα τὸ ΑΔ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, εἶναι δὲ $ΑΒ = ΒΔ$, ἄρα καὶ ἡ ΔΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΑΓ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Τὸ δὲ ΔΑ εἶναι μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΑΓ, (θεώρ. 23, πόρ.)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τὰ ΑΔ, ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καὶ ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΚΛ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. καὶ ἐστιν ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει. αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΞΒ τῇ ΒΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ, οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ· εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΘΝ. τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.



Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

κϛ΄.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παρ-

25.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ ὑπὸ τῶν μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

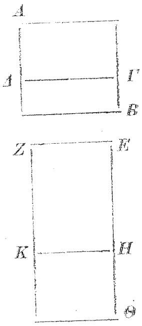
Διότι ἂς ἀναγραφῶσι ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ τὰ τετράγωνα αὐτῶν τὰ ΑΒ, ΒΕ· ἄρα ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΒΕ εἶναι μέσον. Καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ ῥητὴ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ πρὸς μὲν τὸ ΑΔ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ ἔχον πλάτος τὴν ΖΘ, πρὸς δὲ τὸ ΑΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΘΜ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ ἔχον πλάτος τὴν ΘΚ, καὶ προσέτι πρὸς τὸ ΒΕ ἴσον ἂς παραβληθῇ ὁμοίως πρὸς τὴν ΚΝ τὸ ΝΛ ἔχον πλάτος τὴν ΚΛ· ἄρα αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΑΔ, ΒΕ εἶναι μέσον καὶ τὸ μὲν ΑΔ = ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ = ΝΛ, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΗΘ, ΝΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἕκαστον τούτων παρεβλήθη παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΖΘ, ΚΛ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΔ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΒΕ, ἄρα καὶ τὸ ΗΘ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΝΛ. Καὶ εἶναι ΗΘ : ΝΛ = ΖΘ : ΚΛ, (VI 1)· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΛ, (θεώρ. 21), Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΖΘ, ΚΛ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θεώρ. 19). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΒ = ΒΑ, ἡ δὲ ΞΒ = ΒΓ, εἶναι ἄρα ΔΒ : ΒΓ = ΑΒ : ΒΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν ΔΒ : ΒΓ = ΔΑ : ΑΓ, (VI. 1)· ὡς δὲ ΑΒ : ΒΞ = ΑΓ : ΓΞ, (VI. 1)· εἶναι ἄρα ΔΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΞ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν ΑΔ = ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ = ΜΚ τὸ δὲ ΓΞ = ΝΛ· εἶναι ἄρα ΗΘ : ΜΚ = ΜΚ : ΝΛ· ἄρα εἶναι καὶ ΖΘ : ΘΚ = ΘΚ : ΚΛ, (VI. 1)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΖΘ × ΚΛ = ΘΚ², (VI 17). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον ΖΘ × ΚΛ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΘΚ²· ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂν μὲν αὕτη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, εἶναι τὸ ΘΝ ῥητόν, (θεώρ. 19)· ἐὰν δὲ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ αἱ ῥηταὶ ΚΘ, ΘΜ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΘΝ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Τὸ ΘΝ ἄρα εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ΘΝ πρὸς τὸ ΑΓ· ἄρα τὸ ΑΓ εἶναι ἢ ῥητὸν ἢ μέσον.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

26.

Μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς ὑπερέχῃ τὸ μέσον ΑΒ τοῦ μέσου τοῦ ΑΓ κατὰ τὸ ῥητὸν ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ὀρἀλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστιν ἴσον. ῥητὸν δὲ ἐστι τὸ ΔΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητὸν ἐστι τὸ ΔΒ καὶ ἐστιν ἴσον τῷ ΚΘ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητὴ ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



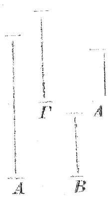
Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β, μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστίν. Μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· το ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.



θογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ, ἔχον πλάτος τὴν ΕΘ, καὶ ἐκ τούτου ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΑΓ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΚΘ. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΔΒ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΚΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι μέσον, καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ = ΖΘ$, τὸ δὲ $ΑΓ = ΖΗ$, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν ΖΘ, ΖΗ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θεώρ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΔΒ εἶναι ῥητὸν καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΚΘ, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΚΘ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θεώρ. 20). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· μήκει ἀσύμμετρος ἄρα εἶναι ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, (θεώρ. 13). Καὶ εἶναι $ΕΗ : ΗΘ = ΕΗ^2 : ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον τὸ $ΕΗ^2$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΕΗ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$· διότι καὶ τὰ δύο τετράγωνα εἶναι ῥητά· πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $ΕΗ \times ΗΘ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 6)· διότι εἶναι διπλάσιον αὐτοῦ· ἀσύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$ πρὸς τὸ $2ΕΗ \times ΗΘ$, (θεώρ. 13)· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2 + 2\,ΕΗ \times ΗΘ$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΕΘ^2$, (II. 4) εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$, (θεώρ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα $ΕΗ^2 + ΗΘ^2$· ἄρα τὸ $ΕΘ^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁριθ. 4). Ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ ΕΘ, (ὁρ. 4). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ῥητή· ὅπερ ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι.

Ἄς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογος ἡ Γ, (VI. 13), καὶ ἂς γίνῃ $Α : Β = Γ : Δ$, (VI. 12).

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $Α \times Β$ δηλ. τὸ $Γ^2$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Ἄρα ἡ Γ εἶναι μέση (θεώρ. 21). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, αἱ δὲ Α, Β εἶναι μόνον δυνάμει σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θεώρ. 11). Καὶ εἶναι ἡ Γ μέση· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Αἱ μέσαι ἄρα Γ, Δ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς $Α : Γ = Β : Δ$, (V. 16). Ἀλλὰ $Α : Γ = Γ : Β$· ἄρα καὶ $Γ : Β = Β : Δ$, (V. 11)· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $Γ \times Δ = Β^2$. Τὸ δὲ $Β^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ τὸ $Γ \times Δ$ εἶναι ῥητόν.

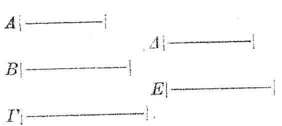
Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν [τρεῖς] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καί ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Δ πρὸς τὴν Α· καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.



Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεί, ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. καί ἐστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἳ συντεθέντες ποιοῦσιν τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρην-

Εὑρέθησαν ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι.

Ἄς ληφθῶσι τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογος ἡ Δ, (VI. 13) καὶ ἂς γίνῃ $B : \Gamma = \Delta : E$, (VI.12).

Ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $A \times B$, δηλ. τὸ Δ^2, (VI. 17) εἶναι μέσον, (θεώρ. 21). Ἄρα ἡ Δ εἶναι μέση (θεώρ. 21). Καὶ ἐπειδὴ αἱ Β, Γ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ εἶναι $B : \Gamma = \Delta : E$, ἄρα καὶ αἱ Δ, Ε εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θεώρ. 11). Εἶναι δὲ μέση ἡ Δ· ἄρα καὶ ἡ Ε εἶναι μέση, (θεώρ. 23)· αἱ μέσαι ἄρα Δ, Ε εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν ($\Delta \times E$) εἶναι μέσον. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $B : \Gamma = \Delta : E$, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $B : \Delta = \Gamma : E$, (V. 16). Ὡς δὲ $B : \Delta = \Delta : A$· καὶ ἄρα $\Delta : A = \Gamma : E$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $A \times \Gamma =$ ὀρθογώνιον $\Delta \times E$, (VI. 16). Εἶναι δὲ τὸ $A \times \Gamma$· μέσον ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $\Delta \times E$.

Εὑρέθησαν ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα (1ον).

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἄς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἢ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀφαιρεθῇ ἄρτιος, ἢ ἐὰν ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθῇ περιττός, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ΑΓ εἶναι ἄρτιος, (IX. 24, 26). Ἄς τμηθῇ ὁ ΑΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἢ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί ἢ τετράγωνοι, οἱ ὁποῖοι καὶ αὐτοὶ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Ἄρα $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$, (II. 6). Καὶ εἶναι τὸ γινόμενον $AB \times B\Gamma$ τετράγωνος ἀριθμός, διότι ἔχει ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους δίδωσι ἀριθμόν τινα ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τετράγωνος, (IX. 1). Εὑρέθησαν ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ γινόμενον $AB \times B\Gamma$ καὶ ὁ τετράγωνος $\Gamma\Delta^2$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $B\Delta^2$.

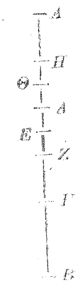
Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουσιν ἐξ ἄλλου εὑρεθῇ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $B\Delta^2$ καὶ ὁ $\Gamma\Delta^2$, ὥστε ἡ διαφορά των ἡ $AB \times B\Gamma$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Ὅταν δὲ οὗτοι δὲν

ται δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΓ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ
ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ οὐκ ἔστι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ
εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ,
καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα τῷ Δ. φανερὸν δή, ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετρά-
γωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΔ
τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ
ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΒΔ τετραγώνου. λέγω
οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ οὐκ
ἔσται τετράγωνος.



Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ ἢ
ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μο-
νάς. ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ
ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ.
ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστι διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΕ
ἐστι διπλασίων, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστι διπλα-
σίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ
ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ
ἀπὸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ
μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ. καὶ κοινοῦ
ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΓΕ συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ
ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. λέγω
δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ ΒΕ· εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ ΒΖ ἴσος, καὶ
τοῦ ΔΖ διπλασίων ὁ ΘΑ. καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ·
ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ,
ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν
ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ
μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ· ὅπερ
ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ [τῷ] ἐλάσ-
σονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῷ] τῷ ἀπὸ ΒΕ. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ
τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ τετράγωνός ἐστιν [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ
πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσθωσιν ἡμῖν οἱ
εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλέον αὐτὴν μηκύ-
νωμεν]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, εἶναι ἐπίπεδοι, ἔχουσιν εὑρεθῆ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ $ΒΔ^2$ καὶ ὁ $ΔΓ^2$ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἡ $ΑΒ \times ΒΓ$ δὲν εἶναι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα (2ον).

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος.

Διότι ἔστω ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ$, ὡς εἴπομεν (εἰς τὸ προηγούμενον λῆμμα) καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὁ ΓΑ κατὰ τὸ σημεῖον Δ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΔ^2 = ΒΔ^2$, (λῆμμα 1). Ἂς ἀφαιρεθῇ (ἐκ τοῦ πρώτου μέλους) ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· τότε ἄρα θὰ εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 < ΒΔ^2$. Λέγω τώρα, ὅτι ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

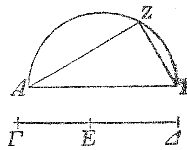
Διότι, ἐὰν θὰ εἶναι τετράγωνος ἢ θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $ΒΕ^2$ ἢ μικρότερος τοῦ $ΒΕ^2$, οὐχὶ δὲ καὶ μεγαλύτερος, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$ καὶ ἔστω διπλάσιος τῆς μονάδος ὁ ΗΑ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ εἶναι διπλάσιος, ἐξ ὧν ὁ ΑΗ εἶναι διπλάσιος τοῦ ΔΕ, ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ ΗΓ εἶναι διπλασία τῆς διαφορᾶς ΕΓ· ἄρα ὁ ΗΓ ἐδιχοτομήθη κατὰ τὸ σημεῖον Ε. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς $ΗΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$, (II. 6). Ἀλλὰ καὶ ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΕ^2$ ἐξ ὑποθέσεως· ὁ ἀριθμὸς ἄρα $ΗΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$. Καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ $ΓΕ^2$ συνάγεται $ΑΒ = ΗΒ$· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν $ΒΕ^2$. Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ μικρότερος εἶναι τοῦ $ΒΕ^2$. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ἴσος πρὸς τὸν $ΒΖ^2$ καὶ ἔστω ὁ ΘΑ διπλάσιος τοῦ ΔΖ. Καὶ πάλιν θὰ συναχθῇ ὅτι ὁ ΘΓ εἶναι διπλάσιος τοῦ ΓΖ· ὥστε καὶ ὁ ΓΘ ἔχει διχοτομηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ $ΘΒ \times ΒΓ + ΖΓ^2 = ΒΖ^2$, (II. 6). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι καὶ ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΖ^2$. Ὥστε καὶ ὁ $ΘΒ \times ΒΓ + ΓΖ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ ἴσος πρὸς τὸν μικρότερον τὸν $ΒΕ^2$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσος εἶναι πρὸς αὐτὸν τὸν $ΒΕ^2$. Δὲν εἶναι ἄρα τετράγωνος ὁ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ [Ἐν ᾧ δὲ εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ καὶ κατὰ περισσοτέρους τρόπους, ὅτι οἱ εἰρημμένοι ἀριθμοὶ δὲν ἀποτελοῦσι τετράγωνον, ἂς ἀρκεσθῶμεν εἰς τοὺς ἐκτεθέντας τρόπους, ἵνα μή, ἐν ᾧ ἡ πραγματεία εἶναι μακρὰ ἐπιμηκύνωμεν αὐτὴν ἔτι περισσότερον]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι με-ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ AB καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $ΓΔ$, $ΔΕ$, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν $ΓΕ$ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, οὕτως ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$, τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ $ΔΓ$ πρὸς ἀριθμὸν τὸν $ΓΕ$· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τῷ ἀπὸ τῆς AZ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ AZ. καὶ ἐπεὶ ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ AZ μήκει· αἱ BA, AZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ [ἐστιν] ὡς ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν $ΔΕ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ. ὁ δὲ $ΓΔ$ πρὸς τὸν $ΔΕ$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. καὶ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν AZ, ZB· ἡ AB ἄρα τῆς AZ μεῖζον δύναται τῇ BZ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.

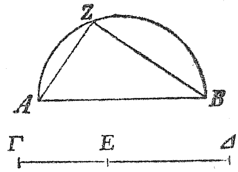


Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ BA, AZ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος τῆς AZ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς BZ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $ΓΕ$, $ΕΔ$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $ΓΔ$ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB.



Ὁμοίως δὴ δείξομεν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ BA, AZ ῥηταί εἰσι δυνάμει γαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἄς ληφθῇ ῥητή τις ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὁ ΓΕ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἄς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἄς γίνῃ $ΔΓ : ΓΕ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$, (θεώρ. 6, πόρ.) καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΖΒ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΑ^2 : ΑΖ^2 = ΔΓ : ΓΕ$, ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ ὃν λόγον ἔχει ὁ ἀριθμὸς ΔΓ πρὸς τὸν ἀριθμὸν ΓΕ· ἄρα τὸ $ΒΑ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΖ^2$, (θεώρ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΑ^2$, (ὁρ. 4)· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΑΖ^2$, (ὁρισ. 4)· ἄρα καὶ ἡ ΑΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ δὲν ἔχει λόγον ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἄρα οὔτε τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΖ, (θεώρ. 9)· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΑ, ΑΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΔΓ : ΓΕ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$, κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $ΓΔ : ΔΕ = ΑΒ^2 : ΒΖ^2$ [δηλ. $ΔΓ : (ΔΓ—ΓΕ) = ΒΑ^2 : (ΒΑ^2—ΑΖ^2)$], (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΖ, (θεώρ. 9). Καὶ εἶναι $ΑΒ^2 = ΑΖ^2 + ΖΒ^2$ (III. 31, I. 47)· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΖ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν (τὴν ΑΒ).

Εὑρέθησαν ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τῆς ΑΒ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας τῆς ΑΖ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἡ ΒΖ νὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἄς ληφθῇ ἡ ΑΒ ῥητὴ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΓΔ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, καὶ ἄς ἀναγραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἄς γίνῃ $ΔΓ : ΓΕ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2$, (θεώρ. 6, πόρ.) καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΖΒ.

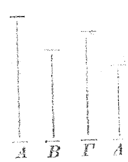
Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύεται, μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὴν Α μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β, ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.



Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta\Gamma : \Gamma\text{Ε} = \text{ΒΑ}^2 : \text{ΑΖ}^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $\Gamma\Delta : \Delta\text{Ε} = \text{ΑΒ}^2 : \text{ΒΖ}^2$, (V. 19) [δηλ. $\Gamma\Delta : (\Gamma\Delta - \Gamma\text{Ε}) = \text{ΑΒ}^2 : (\text{ΑΒ}^2 - \text{ΑΖ}^2)$]. Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ δὲν ἔχει λόγον ὃν ἔχει τετράγωγος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΖ ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΖ, (θεώρ. 9). Καὶ εἶναι $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΖ}^2 + \text{ΖΒ}^2$, ἐν ᾧ ἡ ΖΒ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΖ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ΖΒ, ἡ ὁποία εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητόν, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

Ἂς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α, ἡ ὁποία νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Β, νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν Α (θεώρ. 29). Καὶ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\text{Α} \times \text{Β}$ ἔστω ἴσον τὸ Γ^2. Εἶναι δὲ μέσον τὸ ὀρθογώνιον $\text{Α} \times \text{Β}$, (θεώρ. 21)· ἄρα καὶ τὸ Γ^2 εἶναι μέσον· ἄρα καὶ ἡ Γ εἶναι μέση, (θ. 21). Καὶ ἔστω $\text{Β}^2 = \Gamma \times \Delta$· τὸ δὲ Β^2 εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ τὸ $\Gamma \times \Delta$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\text{Α} : \text{Β} = \text{Α} \times \text{Β} : \text{Β}^2$, (θεώρ. 21, λῆμμα), ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον $\text{Α} \times \text{Β}$ εἶναι ἴσον τὸ Γ^2, πρὸς δὲ τὸ Β^2 εἶναι ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $\Gamma \times \Delta$, εἶναι ἄρα $\text{Α} : \text{Β} = \Gamma^2 : \Gamma \times \Delta$. Ὡς δὲ $\Gamma^2 : \Gamma \times \Delta = \Gamma : \Delta$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα $\text{Α} : \text{Β} = \Gamma : \Delta$. Εἶναι δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β δυνάμει μόνον σύμμετρος· ἄρα καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος, (θεώρ. 11). Καὶ εἶναι ἡ Γ μέση· ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι μέση, (θεωρ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\text{Α} : \text{Β} = \Gamma : \Delta$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), ἄρα καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Γ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Δ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Γ), (θεώρ. 14).

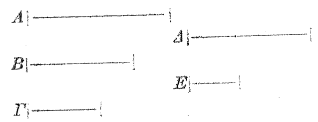
Εὑρέθησαν ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ περιέχουσαι ῥητόν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Γ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Δ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν.

῾Ομοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Β μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

λβ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

᾽Εκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.



ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ,Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ [αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

῾Ομοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Λῆμμα.

῎Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Α, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ τετράγωνον ἀπὸ ἀσυμμέτρου πλευρᾶς, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς Α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Β κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), (θεώρ. 30).

32.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον σύμμετρον πρὸς ἑαυτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Ἄς ληφθῶσι τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), (θεώρ. 29), καὶ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $Α \times Β$ ἔστω ἴσον τὸ $Δ^2$. Ἄρα τὸ $Δ^2$ εἶναι μέσον· καὶ ἡ Δ ἄρα εἶναι μέση, (θεώρ. 21). Ἔστω δὲ $Β \times Γ = Δ \times Ε$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α \times Β : Β \times Γ = Α : Γ$, (θ. 21, λῆμμα), ἀλλὰ $Α \times Β = Δ^2$ καὶ $Β \times Γ = Δ \times Ε$, εἶναι ἄρα $Α : Γ = Δ^2 : Δ \times Ε$. Ὡς δὲ $Δ^2 : Δ \times Ε = Δ : Ε$, (θεώρ. 21, λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα $Α : Γ = Δ : Ε$. Εἶναι δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ σύμμετρος δυνάμει μόνον. Ἄρα καὶ ἡ Δ εἶναι πρὸς τὴν Ε δυνάμει μόνον σύμμετρος (θεώρ. 11). Ἡ δὲ Δ εἶναι μέση· ἄρα καὶ ἡ Ε εἶναι μέση, (θεώρ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α : Γ = Δ : Ε$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α), καὶ τὸ τετράγωνον τῆς Δ ἄρα θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Ε κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Δ), (θεώρ. 14). Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $Δ \times Ε$ εἶναι μέσον. Διότι, ἐπειδὴ ὀρθογ. $Β \times Γ =$ ὀρθογ. $Δ \times Ε$ τὸ δὲ $Β \times Γ$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 21), [διότι αἱ Β, Γ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι], ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $Δ \times Ε$.

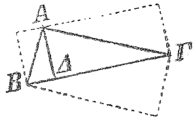
Εὑρέθησαν ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν μεγαλυτέραν).

Καθ' ὅμοιον πάλιν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου, ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς Α ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς Γ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν Α).

Λῆμμα.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν Α καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $ΓΒ \times ΒΔ = ΒΑ^2$, τὸ ὀρθογ.

τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.



Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

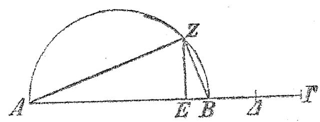
Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων]. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ.



Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ,

$ΒΓ \times ΓΔ = ΓΑ^2$, καὶ τὸ ὀρθ. $ΒΔ \times ΔΓ = ΑΔ^2$, καὶ ἀκόμη τὸ ὀρθογ. $ΒΓ \times ΑΔ =$ ὀρθογ. $ΒΑ \times ΑΓ$.

Καὶ πρῶτον, ὅτι $ΓΒ \times ΒΔ = ΒΑ^2$.

Διότι, ἐπειδὴ εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἤχθη ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ ΑΔ, ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ πρὸς ὅλον τὸ ΑΒΓ καὶ μεταξύ των, (VI. 8). Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΒΔ$ (VI. 4). Ἄρα $ΓΒ \times ΒΔ = ΑΒ^2$, (VI 17).

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ $ΒΓ \times ΓΔ = ΑΓ^2$.

Καὶ ἐπειδή, ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀχθεῖσα εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως, εἶναι ἄρα $ΒΔ : ΔΑ = ΑΔ : ΔΓ$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΒΔ \times ΔΓ =$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$, (VI. 17).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΒΓ \times ΑΔ = ΒΑ \times ΑΓ$. Διότι, ἐπειδὴ ὡς εἴπομεν, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, (VI 4), εἶναι ἄρα $ΒΓ : ΓΑ = ΒΑ : ΑΔ$ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέσων]. Ἄρα τὸ $ΒΓ \times ΑΔ = ΒΑ \times ΑΓ$, (VI. 16)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζωσι ῥητὸν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον.

Ἄς ληφθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, (θ. 30), καὶ ἄς διχοτομηθῇ ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν ΒΔ, ΔΓ ἄς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, (VI. 28), καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΑΕ \times ΕΒ$, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἄς γραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ΑΖΒ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΖ καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ $ΑΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΒΓ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΑΒ), πρὸς δὲ τὸ ἕν τέταρτον τοῦ $ΒΓ^2$, τουτέστι τοῦ $(1/2\ ΒΓ)^2$ παρεβλήθη παρὰ τὴν ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον $ΑΕ \times ΕΒ$, ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ εἶναι ἀσύμμετρος (μήκει), (θ. 18)· Καὶ εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΒΑ \times ΑΕ : ΑΒ \times ΒΕ$, εἶναι δὲ τὸ μὲν $ΒΑ \times ΑΕ = ΑΖ^2$, τὸ δὲ $ΑΒ \times ΒΕ = ΒΖ^2$, (λῆμμα τοῦ 32).

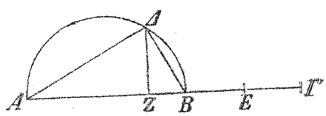
τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· αἱ AZ, ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητή ἐστιν, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ, ZB ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ $B\Delta$· διπλῆ ἄρα ἡ $B\Gamma$ τῆς ZE· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB, EZ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ, ZB· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ, ZB ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, $B\Gamma$ ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν AB τῆς $B\Gamma$ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB τὸ $A\Delta B$ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ $B\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ E, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν AB τῷ ἀπὸ τῆς BE ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν AZB· ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ AZ τῇ ZB μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $Z\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, ΔB.



Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AZ τῇ ZB, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BZ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA, AZ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BZ τῷ ἀπὸ τῆς ΔB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ τῷ ἀπὸ τῆς ΔB. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῆς ΔZ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, $Z\Delta$. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, $Z\Delta$. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, $Z\Delta$ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB· ὥστε και τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $A\Delta$, ΔB ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἄρα τὸ $ΑΖ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΒ^2$, (θεώρ. 11)· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ῥητή, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΑΒ^2$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΖ^2 + ΖΒ^2$ εἶναι ρητόν, (Ι. 47). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΕ \times ΕΒ = ΕΖ^2$, ἐλήφθη δὲ $ΑΕ \times ΕΒ = ΕΖ^2$, εἶναι ἄρα $ΖΕ = ΒΔ$· ἄρα $ΒΓ = 2\,ΖΕ$· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΕΖ$, (θ. 6). Εἶναι δὲ μέσον τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 21)· μέσον ἄρα εἶναι καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΕΖ$, (θ. 23, πόρ.). Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΕΖ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΖΒ$· εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΒ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΖ, ΖΒ σχηματίζουσαι ῥητὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, μέσον δὲ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἄς ληφθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἔχουσαι ῥητὸν τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον, ὥστε τὸ $ΑΒ^2$ νὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΒΓ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΑΒ), (θ. 31) καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ, καὶ ἂς διχοτομηθῇ ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ παραλληλόγραμμον τὸ $ΑΖ \times ΖΒ$ ἴσον πρὸς $ΒΕ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου παραλληλογράμμου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, (VI. 28)· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, (θ. 18). Καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

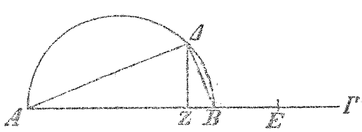
Ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, ἄρα εἶναι ἀσύμμετρον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΒΑ \times ΑΖ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΖ$, (θ. 11). Εἶναι δὲ τὸ μὲν ὀρθογώνιον $ΒΑ \times ΑΖ = ΑΔ^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΖ = ΔΒ^2$ (θ. 32, λῆμμα)· ἄρα τὸ $ΑΔ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΔΒ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΒ^2$ εἶναι μέσον εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, (ΙΙΙ. 31, Ι. 47). Καὶ ἐπειδὴ $ΒΓ = 2ΔΖ$, εἶναι ἄρα ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ = 2ΑΒ \times ΖΔ$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογ. $ΑΒ \times ΒΓ$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ὀρθογ. $ΑΒ \times ΖΔ$ (θ. 6, ὁρ. 4). Τὸ δὲ ὀρθογ. $ΑΒ \times ΖΔ =$ ὀρθ. $ΑΔ \times ΔΒ$, (θ. 32, λῆμμα)· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογ. $ΑΔ \times ΔΒ$ εἶναι ῥητόν.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΔΒ, ΔΒ, σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνῳ.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΕ, ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. καὶ ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

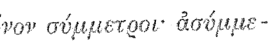
Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ'.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-



35.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων νὰ εἶναι μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον μέσον, καὶ ἀκόμη τοῦτο νὰ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των.

Ἂς ληφθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ περιέχουσαι μέσον, ὥστε τὸ $ΑΒ^2$ νὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΒΓ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (θ. 32), (τὴν ΑΒ), καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ ἂς κατασκευασθῶσιν ὁμοίως πρὸς τὰ ἐπάνω (προηγ. θεώρημα).

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δυνάμει, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΒ^2$ εἶναι μέσον, εἶναι ἄρα μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, (θ. 23, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΒ = ΒΕ^2 = ΔΖ^2$, εἶναι ἄρα $ΒΕ = ΔΖ$· ἄρα εἶναι $ΒΓ = 2ΔΖ$· ὥστε καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ = 2ΑΒ \times ΖΔ$. Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΖΔ$. Καὶ εἶναι $ΑΒ \times ΖΔ = ΑΔ \times ΔΒ$, (θ. 32, λῆμμα). Ἄρα τὸ ὀρθ. $ΑΔ \times ΔΒ$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν ΒΕ μήκει ἀσύμμετρος, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ $ΑΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ \times ΒΕ$, (θ. 21, λῆμμα, θ. 11). Ἀλλὰ $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, (Ι. 47) καὶ $ΑΒ \times ΒΕ = ΑΒ \times ΖΔ = ΑΔ \times ΔΒ$· ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΒ$.

Εὑρέθησαν ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τοῦτο εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ δυώνυμος.

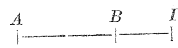
Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· διότι μόνον δυνάμει εἶναι σύμμετροι· καὶ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ \times ΒΓ : ΒΓ^2$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΒΓ^2$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 6), πρὸς δὲ τὸ $ΒΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$· διότι αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ῥηταὶ τρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

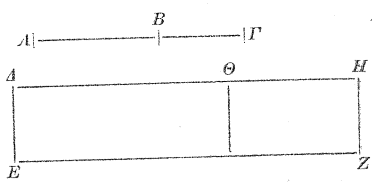


Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 15)· ἄρα τὸ $2\,AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 13). Καὶ διὰ προσθέσεως, $2\,AB \times B\Gamma + AB^2 + B\Gamma^2$ τουτέστι τὸ $A\Gamma^2$, (II. 4), εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον, (ὁρ. 4)· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητόν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ τοῦτο ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον ($AB \times B\Gamma$) εἶναι ῥητόν· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$· καὶ διὰ προσθέσεως τούτων τὸ $AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $A\Gamma^2$, (II. 4), εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB \times B\Gamma$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$· διότι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐλήφθησαν περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον· ἄρα τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι περιέχουσαι μέσον, τὸ ἄθροισμά των εἶναι εὐθεῖα ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ περιέχουσαι μέσον· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς τὸ $A\Gamma^2$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ ἔχον πλάτος τὴν ΔΗ, (I. 44). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma$, (II. 4), ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΘ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον $\Theta Z = 2AB \times B\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέση, μέσα ἄρα εἶναι καὶ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$. Ἐλήφθη δὲ μέσον καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$. Καὶ εἶναι $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, ἐν ᾧ $Z\Theta = 2AB \times B\Gamma$. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΕΘ, ΘΖ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχουσι παραβληθῇ πάρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΘ, ΘΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον, καὶ ἡ δυναμένη [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, καὶ τὸ δὶς [ἄρα] ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ [ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ]· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ

ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ $ΑΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, (θ. 15), πρὸς δὲ τὸ $ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 6). Ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$, (θ. 13). Ἀλλὰ $ΕΘ = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ καὶ $ΘΖ = 2ΑΒ \times ΒΓ$. Ἄρα τὸ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ εἶναι πρὸς τὴν ΘΗ μήκει ἀσύμμετρος, (VI, 1 καὶ θεώρ. 11). Ἄρα, αἱ ῥηταὶ ΔΘ, ΘΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ ΔΗ εἶναι ἄλογος. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον· ἄρα τὸ χωρίον ΔΖ εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος, (όρ. 4). Εἶναι δὲ $ΑΓ^2 = ΔΖ$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι προστεθῶσι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ μείζων.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ σχηματίζουσαι τὰ ζητηθέντα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι μέσον, (θεώρ. 6, 23 πόρ.). Τὸ δὲ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$ πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον, (όρ. 4)· ὥστε καὶ τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΑΒ \times ΒΓ$ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς $ΑΓ^2$ (II. 4) εἶναι πρὸς τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ἀσύμμετρον, (θ. 16) [εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$]· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον, (όρ. 4). Ὥστε καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Ἐὰν προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἃς καλῆται δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἃς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ σχηματίζουσαι τὰ ζητηθέντα, (θ. 34)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

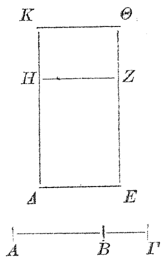
Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον *δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

μα'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΖ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί



εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΘΔ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον·

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς

$2ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$· ὥστε καὶ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι πρὸς τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$ ἀσύμμετρον, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41.

Ἐὰν προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον καὶ προσέτι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ πληροῦσαι τὰ ζητηθέντα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ῥητὴ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ἴσον τὸ ὀρθογώνιον ΔΖ, πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΒ \times ΒΓ$ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ^2$, (ΙΙ. 4). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι μέσον καὶ $= ΔΖ$, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΔΖ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΗΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστι τὴν ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΒ \times ΒΓ$, εἶναι ἀσύμμετρον καὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΚ, (VI. 1, καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΔΗ, ΗΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΚ εἶναι ἄλογος, ἡ ὁποία καλεῖται διώνυμος, (θ. 36). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4). Εἶναι δὲ $ΑΓ^2 = ΘΔ$· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, ἂς καλῆται δὲ δύο μέσα δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι εὐθεῖαι διαιροῦνται μονοτίμως εἰς τὰς εὐθείας ἐκ τῶν ὁποίων σύγκεινται καὶ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσι τὰ ζητούμενα εἴδη, ἀποδεικνύομεν προτάσσοντες τὸ ἑξῆς λημμάτιον·

Ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄνισα τμήματα πρῶτον κατὰ τὸ σημεῖον Γ καὶ ἔπειτα κατὰ τὸ Δ, ἂς εἶναι δὲ $ΑΓ > ΔΒ$· λέγω, ὅτι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > ΑΔ^2 + ΔΒ^2$.

Διότι ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΓ > ΔΒ$ ἂς ἀφαιρε-

ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστιν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μγ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, θῇ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ἡ ΔΓ· ἄρα ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπολοίπου τῆς ΓΒ. Εἶναι δὲ ΑΕ = ΕΒ· ἄρα ἡ ΔΕ $<$ ΕΓ· ἄρα τὰ σημεῖα Γ, Δ δὲν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ μέσου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} + \mathrm{E\Gamma}^2 = \mathrm{EB}^2$, (II. 5), ἀλλ' ὅμως καὶ ὀρθογώνιον $\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B} + \mathrm{\Delta E}^2 = \mathrm{EB}^2$, (II, 5), ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} + \mathrm{E\Gamma}^2 = \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B} + \mathrm{\Delta E}^2$· ἐκ τῶν ὁποίων ὅμως εἶναι $\mathrm{\Delta E}^2 < \mathrm{E\Gamma}^2$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ $\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} < \mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B}$. Ὥστε καὶ $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} < 2\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B}$. Ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον, δηλ. τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma B}^2 > \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Ἡ δυώνυμος εὐθεῖα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον εἰς τὰ μονώνυμα.

Ἔστω ἡ δυώνυμος εὐθεῖα ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Διότι ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῆται, καὶ ἂς διαιρεθῇ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ῥηταὶ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι. Τότε θὰ εἶναι καὶ ἡ ΑΔ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ θὰ εἶναι $\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{\Gamma B} = \mathrm{B\Delta} : \mathrm{\Delta A}$, καὶ ἡ ΑΒ θὰ ἔχει διαιρεθῇ κατὰ τὸ Γ εἰς τὰ αὐτὰ τμήματα ὡς καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΓ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καὶ τὰ σημεῖα Γ, Δ δὲν ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ μέσου. Οἵα ἄρα διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma B}^2$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2$ ἡ αὐτὴ διαφορὰ θὰ ὑπάρχῃ καὶ μεταξὺ τοῦ ὀρθογωνίου $2\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B}$ καὶ $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}$, διότι $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma B}^2 + 2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B} = \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2 + 2\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B} = \mathrm{AB}^2$, (II. 4). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma B}^2$ διαφέρει τοῦ ἀθροίμσατος $\mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2$ κατὰ ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο ἀθροίσματα εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B}$ διαφέρει τοῦ $2\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{\Gamma B}$ κατὰ ῥητόν, ἐν ᾧ εἶναι μέσα, (θ. 21)· ὅπερ ἄτοπον· διότι μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητὸν (θ. 26).

Δὲν διαιρεῖται ἄρα ἡ δυώνυμος εὐθεῖα εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

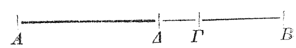
43.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ μέσαι

ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον.



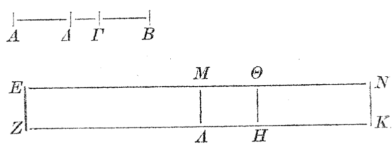
Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ′.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δή, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ· δῆλον δή, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα [καὶ] τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ τὰ



ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ νὰ περιέχωσιν ὀρθογώνιον ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ ἂς διαιρεθῇ καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι διαφέρει τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ τὸ αὐτὸ διαφέρει τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, (θ. 41, λῆμμα), διαφέρει δὲ κατὰ ῥητὸν τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ διαφέρει τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν, ἐν ᾧ εἶναι μέσα· ὅπερ ἄτοπον, (θ. 26).

Δὲν διαιρεῖται ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατὰ διάφορα σημεῖα εἰς τὰ μονώνυμα· ἄρα καθ' ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ μέσαι ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον (θ. 38)· εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ Γ δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον, διότι αἱ εὐθεῖαι δὲν εἶναι μήκει σύμμετροι. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ μὴ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ· εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὡς ἀπεδείξαμεν προηγουμένως, (θ. 41 λῆμμα) εἶναι μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$· καὶ ὅτι αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον. Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ $ΑΒ^2$ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, (Ι. 44) ἀπὸ δὲ τούτου ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὀρθογώνιον τὸ ΕΗ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΘΚ = 2ΑΓ \times ΓΒ$, (ΙΙ. 4). Πάλιν τώρα πρὸς τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, τὸ ὁποῖον ἐδείχθη μικρότερον τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον τὸ ΕΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΜΚ = 2ΑΔ \times ΔΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσα, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΕΗ. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΝ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μέσαι ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ. Εἶναι δὲ $ΑΓ : ΓΒ = ΑΓ^2 : ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21 λῆμμα)· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$· διότι αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει σύμμετροι. Πρὸς δὲ τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 6). Ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη τό τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

με'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεί, ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μϛ'.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει

$2ΑΓ \times ΓΒ$ (θ. 13). Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΕΗ$ καὶ $2ΑΓ \times ΓΒ = ΘΚ$· ἄρα τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΝ (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ προστεθῶσι δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος, (θ. 36)· ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΝ εἶναι διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ῥηταὶ ΕΜ, ΜΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ θὰ εἶναι ἡ δυώνυμος ΕΝ διῃρημένη κατὰ δύο διάφορα σημεῖα καὶ τὸ Θ καὶ τὸ Μ καὶ δὲν εἶναι ἡ ΕΘ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ, διότι τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > ΑΔ^2 + ΔΒ^2$. Ἀλλὰ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2 > 2ΑΔ \times ΔΒ$. κατὰ μείζονα λόγον ἄρα τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2ΑΔ \times ΔΒ$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΜΚ. Ὥστε καὶ ἡ $ΕΘ > ΜΝ$, (VI. 1). Ἄρα ἡ ΕΘ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

45.

Ἡ μείζων διαιρεῖται μόνον κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω ἡ μείζων ΑΒ διῃρημένη κατὰ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ῥητὸν καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΔ \times ΔΒ$ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι διαφέρει τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$, τόσον διαφέρει τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 41, λῆμμα), ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ κατὰ ῥητόν· διότι ἀμφότερα εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητὸν ἐν' ᾧ εἶναι μέσα· ὅπερ ἀδύνατον, (θ. 26)· ἄρα ἡ μείζων δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεια· ἄρα διαιρεῖται μόνον κατὰ τὸ αὐτό· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

46.

Ἡ εὐθεῖα ἡ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον διαιρεῖται μόνον καθ' ἓν σημεῖον.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἡ ὁποία δύναται ῥητὸν καὶ μέσον διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

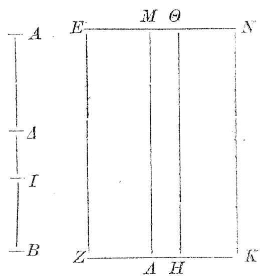
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς διαιρῆται καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

μζ′.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΗΝ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον] διαιρεῖται.



νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2ΑΔ \times ΔΒ$ ῥητόν. Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι διαφέρει τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ τοῦ ὀρθογωνίου $2ΑΔ \times ΔΒ$, τόσον διαφέρει καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, τὸ δὲ $2ΑΓ \times ΓΒ$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $2ΑΔ \times ΔΒ$, ἄρα καὶ τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, ἐν ᾧ ἀμφότερα εἶναι μέσα· ὅπερ ἀδύνατον, (θ. 26). Ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα. Ἄρα διαιρεῖται κατὰ ἓν μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

47.

Ἡ εὐθεῖα ἡ δυναμένη δύο μέσα διαιρεῖται μόνον καθ' ἓν σημεῖον.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ δυναμένη δύο μέσα καὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε αἱ ΑΓ, ΓΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον καὶ ἀκόμη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, (θ. 41) Λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ πληροῦσα τ' ἀνωτέρω δὲν διαιρεῖται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς διαιρεθῇ κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι ἡ ΑΓ νὰ μὴ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν ἡ ΑΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητή, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἰσοδύναμον τὸ ΕΗ, πρὸς δὲ τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$ ἰσοδύναμον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$, (II. 4). Πάλιν τώρα ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ΕΛ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΔ \times ΔΒ$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΜΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως μέσον, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΘΕ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΝ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $2ΑΓ \times ΓΒ$, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΗΝ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΝ, (VI. 1, θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΝ εἶναι διώνυμος διῃρημένη κατὰ τὸ Θ, (θ. 36). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι διαιρεῖται καὶ κατὰ τὸ Μ. Καὶ ἡ ΕΘ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΜΝ· ἄρα ἡ διώνυμος διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ δυναμένη δύο μέσα δὲν διαιρεῖται εἰς διάφορα σημεῖα· ἄρα διαιρεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ὅροι δεύτεροι.

α΄. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἡ [ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β΄. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

γ΄. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ΄. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

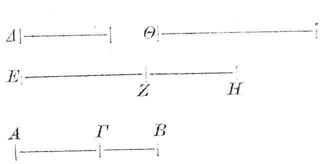
ε΄. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.

ϛ΄. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

μη΄.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.



Λέγω, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν

Ὁρισμοὶ δεύτεροι.

1. Ληφθείσης ῥητῆς καὶ δυωνύμου διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μονωνύμου νὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν μὲν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος εὐθεῖα πρώτη δυώνυμος.

2. Ἐὰν δὲ τὸ μικρότερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος δευτέρα δυώνυμος.

3. Ἐὰν δὲ οὐδὲν ἐκ τῶν μονωνύμων εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος τρίτη δυώνυμος.

4. Ἐὰν πάλιν τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου μονωνύμου ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ μεγαλυτέρου, ἐὰν μὲν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος τετάρτη δυώνυμος.

5. Ἐὰν δὲ τὸ μικρότερον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος πέμπτη δυώνυμος.

6. Ἐὰν δὲ οὐδὲν μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος ἕκτη δυώνυμος.

48.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τὸ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή, (ὁρ. 3). Καὶ ἂς γίνῃ $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.). Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἄρα καὶ ὁ λόγος $ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν· ὥστε τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ : ΑΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἄρα καὶ $ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη δυώνυμος.

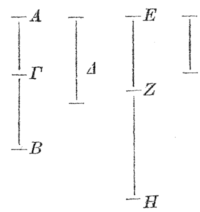
Διότι, ἐπειδὴ $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$, ἄρα εἶναι καὶ $ΕΖ^2 > ΖΗ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ΕΖ^2 = ΖΗ^2 + Θ^2$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΕΖ^2 : Θ^2$, (V. 19, *ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.*

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μθ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΕΖ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλασσον ὄνομα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πόρ.). Ὁ δὲ ΑΒ ἔχει λόγον πρὸς τὸν ΒΓ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ ὁ λόγος $ΕΖ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ (θ. 9)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΗ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς ἑαυτὴν (τὴν ΕΖ). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

49.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα δυώνυμος.

Ἄς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὁ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 28, λῆμμα) καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Ἄς γίνῃ τώρα καὶ $ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωγος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΖΗ^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9)· ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος.

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα δυώνυμος.

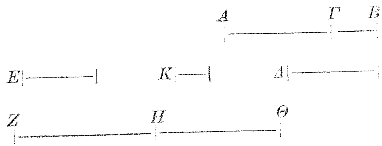
Διότι, ἐπειδὴ ἀνάπαλιν εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΗΖ^2 : ΖΕ^2$, (V. 7, πόρ.) εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$, ἄρα καὶ τὸ $ΗΖ^2 > ΖΕ^2$, (V. 14). Ἔστω $ΗΖ^2 = ΕΖ^2 + Θ^2$ καὶ δι' ἀναστροφῆς, (V. 19 πόρ.) $ΑΒ : ΒΓ = ΖΗ^2 : Θ^2$. Ἀλλὰ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $Θ^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΖΗ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς Θ κατὰ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον τὸ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν ληθεῖσαν ῥητὴν Δ μήκει σύμμετρον.

Ἡ ΕΗ ἄρα εἶναι δευτέρα δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ν'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα [ἐστίν] ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ

50.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη δυώνυμος.

Ἃς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἃς ληφθῇ δὲ καὶ ἄλλος τις μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ ὁ ὁποῖος πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΑ, ΑΓ νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Ε καὶ ἂς γίνῃ $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα το E^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZH^2, (θ. 6). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ Ε· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $\Delta : AB$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ὁ λόγος $E^2 : ZH^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Ἃς γίνῃ πάλιν $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ ZH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $H\Theta^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΗ· ἄρα καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ δὲν ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε τὸ ZH^2 πρὸς τὸ ΘH^2 ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ (θ. 9). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα ὅτι εἶναι καὶ τρίτη δυώνυμος.

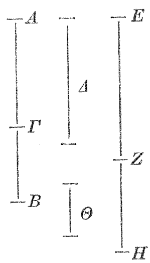
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$ καὶ $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$, (V. 22). Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ δὲν ἔχει λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε καὶ τὸ E^2 πρὸς τὸ $H\Theta^2$ ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι πρὸς τὴν ΗΘ μήκει ἀσύμμετρος. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, ἄρα $ZH^2 > H\Theta^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. Καὶ κατ' ἀναστροφὴν (V. 19, πόρ.) $AB : B\Gamma = ZH^2 : K^2$. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ ZH^2 πρὸς τὸ K^2 ἔχει λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Κ. Ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΖΗ, ΗΘ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ οὐδεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

να'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδέ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ [μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ], μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΗΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νβ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω [μήκει] ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Ε. Ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι τρίτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

51.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ οὔτε πρὸς τὸν ΒΓ οὔτε πρὸς τὸν ΑΓ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ εὐθεῖα Δ καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς γίνῃ $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6)· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ : ΑΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε $ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄραι ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος.

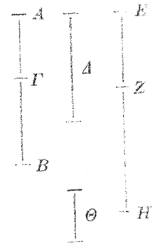
Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΑ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$ [εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$] ἄρα $ΕΖ^2 > ΖΗ^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ΕΖ^2 = ΖΗ^2 + Θ^2$· ἄρα κατ' ἀναστροφὴν εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΕΖ^2 : Θ^2$. Ὁ δὲ λόγος $ΑΒ : ΒΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ λόγος $ΕΖ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ.9)· ἄρα τὸ $ΕΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΖ). Καὶ εἶναι αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΕΖ εἶναι πρὸς τὴν Δ μήκει σύμμετρος. Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

52.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (θ. 28, λῆμμα), καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ πρὸς τὴν Δ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς γίνῃ $ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (θ. 6, πόρ.). Ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ δὲν ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε τὸ $ΕΖ^2$ πρὸς τὸ $ΖΗ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Αἱ ῥηταὶ τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

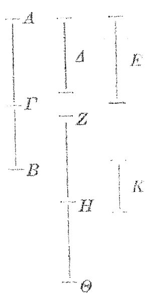
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀνάπαλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΗΖ, ΖΕ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νγ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ῥητὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma A : AB = EZ^2 : ZH^2$, ἀνάπαλιν εἶναι $BA : A\Gamma = ZH^2 : ZE^2$, (V. 7, πόρ.)· ἄρα $HZ^2 > ZE^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν ὅτι $HZ^2 = EZ^2 + \Theta^2$· κατ' ἀναστροφὴν ἄρα εἶναι $AB : B\Gamma = HZ^2 : \Theta^2$, (V. 19 πόρ.). Ὁ δὲ $AB : B\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ $ZH^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9)· ὥστε τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ ZE^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΗΖ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Δ.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

53.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη δυώνυμος.

Ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΑΒ πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ μὴ ἔχῃ λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἄλλος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ ὢν τετράγωνος οὔτε ἔχων λόγον πρὸς ἕκαστον τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς ληφθῇ εὐθεῖά τις ῥητὴ ἡ Ε, καὶ ἂς γίνῃ $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$ (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ E^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ZH^2, (θ. 6). Καὶ ἡ Ε εἶναι ῥητή· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ $\Delta : AB$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα τὸ $E^2 : ZH^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Ἂς γίνῃ πάλιν $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, (θ. 6, πόρ.). Ἄρα τὸ ZH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $H\Theta^2$. Ἄρα τὸ ΘH^2 εἶναι ῥητόν· ἡ ΘΗ ἄρα εἶναι ῥητή· Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $BA : A\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ὁ λόγος $ZH^2 : H\Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι δυώνυμος.

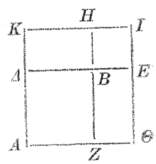
Πρέπει τώρα ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη δυώνυμος.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ· ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ, ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ, ΚΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν [ἐστι] τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ· ἴση γάρ [ἐστιν] ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, εἶναι δὲ καὶ $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$ δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$, (V. 22). Ὁ δὲ λόγος $\Delta : A\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα οὔτε ὁ λόγος $E^2 : H\Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Ε εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Ἐδείχθη δὲ ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ΖΗ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Ε. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$, (V. 14). Ἔστω λοιπὸν $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$· καὶ κατ' ἀναστροφὴν $AB : B\Gamma = ZH^2 : K^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ λόγος $AB : B\Gamma$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὔτε ὁ λόγος $ZH^2 : K^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· Ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Κ, (θ. 9)· ἄρα τὸ ZH^2 ὑπερέχει τοῦ $H\Theta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΗ). Καὶ εἶναι αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ καμμία ἐξ αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Ε.

Ἡ δυώνυμος ἄρα ΖΘ εἶναι ἕκτη δυώνυμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς εἶναι ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ· ἄρα εἶναι ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι τετράγωνον καὶ ὅτι τὸ ΔΗ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἀκόμη ὅτι τὸ ΔΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Διότι, ἐπειδὴ $\Delta B = BZ$ καὶ $BE = BH$, ἕπεται $\Delta E = ZH$. Ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΘ, ΚΓ, ἡ δὲ ΖΗ ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΘΓ, (I. 34)· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΚ, ΘΓ. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ εἶναι ἰσόπλευρον· εἶναι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τὸ ΑΓ ἄρα εἶναι τετράγωνον.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ZB : BH = \Delta B : BE$, ἀλλὰ $ZB : BH = AB : \Delta H$, καὶ $\Delta B : BE = \Delta H : B\Gamma$, ἄρα $AB : \Delta H = \Delta H : B\Gamma$, (VI. 1). Ἄρα τὸ ΔΗ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΔΓ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $A\Delta : \Delta K = KH : H\Gamma$· διότι εἶναι ἴση ἑκάστη πρὸς ἑκάστην ἀντιστοίχως· καὶ διὰ συνθέσεως (V. 18) εἶναι $AK : K\Delta = K\Gamma : \Gamma H$, ἀλλὰ $AK : K\Delta = A\Gamma : \Gamma\Delta$, καὶ $K\Gamma : \Gamma H = \Delta\Gamma : \Gamma B$, καὶ ὡς ἄρα $A\Gamma$:

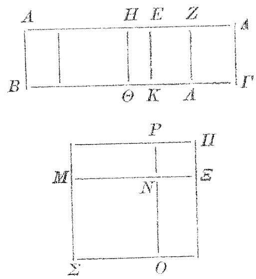
ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ· ἃ προέκειτο δεῖξαι.

νδ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ. καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς ΕΛ, τὸ ΕΛ πρὸς ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ. τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.



Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν

$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma : \mathrm{B}\Gamma$. Ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΔΓ· τὰ ὁποῖα προέκειτο ν' ἀποδειχθῶσι.

54.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ τετραγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος ἂς διαιρεθῇ αὕτη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΑΕ. Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{E}\Delta^2}$ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΒ, (α'. ὁρισ. δευτ. ὁρ.). Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ AE^2 ὑπερέχει τοῦ $\mathrm{E}\Delta^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΕ, $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{E}\Delta^2}$ μήκει σύμ.), ἐὰν ἄρα παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὴν ΑΕ παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας δηλ. τὸ τέταρτον τοῦ EZ^2, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, τοῦτο διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μέρη σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΑΕ τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{AH} \times \mathrm{HE}$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ EZ^2· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ. Καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν Η,Ε,Ζ παράλληλοι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ πρὸς μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἂς κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΣΝ, πρὸς δὲ τὸ ΗΚ ἰσοδύναμον τὸ ΝΠ, (II. 14) καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ ΜΝ, ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι καὶ αἱ ΡΝ, ΝΟ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΣΠ· ἄρα τὸ ΣΠ εἶναι τετράγωνον (προηγ' λῆμμα). Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{AH} \times \mathrm{HE} = \mathrm{EZ}^2$, εἶναι ἄρα $\mathrm{AH} : \mathrm{EZ} = \mathrm{ZE} : \mathrm{EH}$ (VI. 17)· ἄρα καὶ $\mathrm{A\Theta} : \mathrm{E\Lambda} = \mathrm{E\Lambda} : \mathrm{KH}$, (VI. 1)· ἄρα τῶν ΑΘ, ΗΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν $\mathrm{A\Theta} = \Sigma\mathrm{N}$ τὸ δὲ $\mathrm{HK} = \mathrm{N\Pi}$· ἄρα τῶν ΣΝ, ΝΠ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΛ. Εἶναι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ (προηγ. λῆμμα)· ἄρα $\mathrm{E\Lambda} = \mathrm{MP}$· ὥστε καὶ $\mathrm{E\Lambda} = \mathrm{O\Xi}$ (I. 43). Εἶναι δὲ καὶ $\mathrm{A\Theta} + \mathrm{HK} = \Sigma\mathrm{N} + \mathrm{N\Pi}$· ὅλον ἄρα τὸ $\mathrm{A\Gamma} = \Sigma\Pi$ τουτέστι $= \mathrm{M\Xi}^2$· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΜΞ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, εἶναι καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΗ, ΗΕ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετροι

ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστι σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς ΜΡ, ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

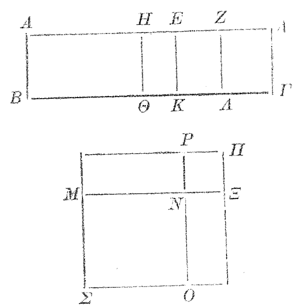
Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρόν ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει,



(θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΗΚ, (θ. 19) καὶ εἶναι σύμμετρον τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ τὸ δὲ ΗΚ = ΝΠ· ἄρα καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ, τουτέστι τὰ $ΜΝ^2$, $ΝΞ^2$ εἶναι ῥητὰ καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ = ΣΝ, τὸ δὲ ΕΛ = ΜΡ· ἄρα καὶ τὸ ΣΝ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΡ. Ἀλλὰ ΣΝ : ΜΡ = ΟΝ : ΝΡ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΟΝ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΡ, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΟΝ = ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ = ΝΞ· ἄρα ἡ ΜΝ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΞ. Καὶ τὸ $ΜΝ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΝΞ^2$ καὶ ἕκαστον εἶναι ῥητόν· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι δυώνυμος καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

55.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

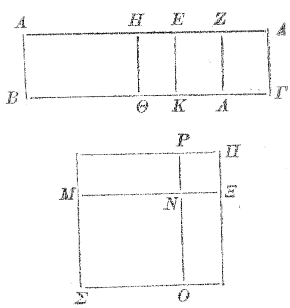
Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι δευτέρα δυώνυμος, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΔ κατὰ τὸ Ζ καὶ παρὰ τὴν ΑΕ ἂς παραβληθῇ ὀρθογ. παραλ. τὸ ΑΗ × ΗΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 17). Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ πρὸς μὲν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘ ἂς κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΣΝ, πρὸς δὲ τὸ ΗΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ ἂς κεῖνται ἐπ' εὐθείας αἱ εὐθεῖαι ΜΝ, ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἶναι καὶ αἱ ΡΝ, ΝΟ. Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ τετράγωνον ΣΠ· εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων (θεώρ. 53, λῆμμα) ὅτι τὸ μέσον ΜΡ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΣΝ, ΝΠ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΛ, (θ. 54) καὶ ὅτι $ΜΞ^2$ = ΑΓ, (θ. 54). Πρέπει τώρα ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἐκ δύο σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἀσύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ. αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ. ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστίν. καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ [ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· τὸ δὲ ΜΡ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νϛʹ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.



Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἐστι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός [ἐστι] τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δείξομεν, ὅτι μέσων πρώτη. Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, εἶναι δὲ ἡ ΕΔ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, (θ. 13). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, εἶναι καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΗ, ΗΕ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ΑΒ, (θ. 13). Ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἕκαστον τῶν ΑΘ, ΗΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Ὥστε καὶ ἕκαστον τῶν ΣΝ, ΝΠ εἶναι μέσον. Ἄρα καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι μέσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ $ΜΝ^2$ πρὸς τὸ $ΝΞ^2$ [ὥστε αἱ ΜΝ, ΝΞ, εἶναι δυνάμει σύμμετροι], (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13)· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΝΞ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ ὅτι εἶναι καὶ μέσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ μέσαι ΜΝ, ΝΞ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω τώρα, ὅτι τὸ ὀρθογώνιόν των ($ΜΝ \times ΝΞ$) εἶναι ῥητόν. Διότι, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΔΕ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΕΖ σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ. Καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ῥητή· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, (θ. 14)· τὸ δὲ $ΜΡ = ΜΝ \times ΝΞ$. Ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι προστεθῶσι περιέχουσαι ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

56.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ἐκ τῶν ὁποίων μεγαλύτερον εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΔ εἶναι τρίτη δυώνυμος, ἄρα αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς $\sqrt{ΑΕ^2 - ΕΔ^2}$, καὶ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (γ' δευτ. ὁρ.). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἀποδειἡ ΜΞ ἐστιν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ.

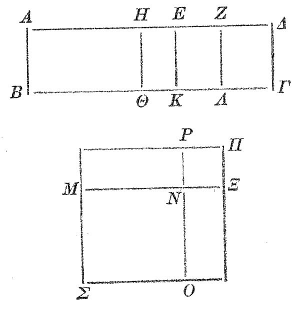
Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νζ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ· δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ· καὶ ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός [ἐστιν] ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. αἱ ΕΚ, ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ. καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ῥητὸν τὸ [συγκείμενον] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καί εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμε-



κνύεται ὅτι $ΜΞ^2=ΑΓ$ καὶ ὅτι αἱ μέσαι ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ σύγκειται ἐκ δύο μέσων.

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, εἶναι δὲ ἡ ΔΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα αἱ ΖΕ, ΕΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα τὸ ΕΛ τουτέστι τὸ ΜΡ εἶναι μέσον· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἄρα τὸ $ΜΝ \times ΝΞ$ εἶναι μέσον.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

57.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ἐν' ᾧ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΔ εἶναι τετάρτη δυώνυμος, ἄρα αἱ ῥηταὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $\sqrt{ΑΕ^2—ΕΔ^2}$ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (δ' ὁρισ. δεύτ. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ, καὶ παρὰ τὴν ΑΕ ἂς παραβληθῇ τὸ παραλληλόγραμμον $ΑΗ \times ΗΕ$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΖ^2$· ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 18). Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ ὡς προηγουμένως κατασκευή, (θ. 55)· εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ. Τώρα πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων. Ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, εἶναι καὶ τὸ ΑΘ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΝΠ, (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τὸ ΑΚ εἶναι ῥητόν, (θ. 19)· καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13), ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΚ, ΕΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΛΕ τουτέστι τὸ ΜΡ εἶναι μέσον (θ. 21). Καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἄρα τὸ $ΜΝ \times ΝΞ$ εἶναι μέσον. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ ῥητόν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι προστεθῶσι σχητροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μείζων.

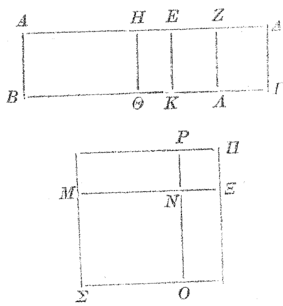
Ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νη΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω [δή], ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καί [ἐστιν] ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ, σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστιν ἀσύμμετρος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει [αἱ ΒΑ, ΑΕ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι]· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστιν, καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστιν.



καὶ ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

νθ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνοματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

58.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΓ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις (θ. 54)· εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2 = ΑΓ$. Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΞ εἶναι ἡ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΕ, (θ. 18), ἄρα καὶ τὸ ΑΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΕ, τουτέστι τὸ $ΜΝ^2$ πρὸς πρὸς τὸ $ΝΞ^2$, (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πέμπτη δυώνυμος καὶ τὸ τμῆμα αὐτῆς ΕΔ εἶναι τὸ μικρότερον, ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ε' ὁρ. δεύτ.). Ἀλλὰ ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΔ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΕ, (θ. 13) [αἱ ΒΑ, ΑΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι]· ἄρα τὸ ΑΚ τουτέστι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$, εἶναι μέσον, (θ. 21). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΕΚ· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον $ΜΝ \times ΝΞ$, (θ. 19)· ἄρα αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

59.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ καὶ τῆς ἕκτης μάτων ἕκτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει, αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· καί ἐστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι·

Ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

[Λ ῆ μ μ α.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ· ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά [ἐστι] τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ξ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

δυωνύμου τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε, ὥστε μεγαλύτερον νὰ εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον ΑΓ εἶναι ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ $ΜΞ^2 = ΑΓ$, καὶ ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι πρὸς τὴν ΝΞ δυνάμει ἀσύμμετρος, (θ. 58). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ὁρισ. δεύτ. 6), ἄρα αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ (ὁρ. δεύτ. 6), ἄρα ἡ ΖΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 13)· αἱ ΖΕ, ΕΚ, ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὀρθογώνιον $ΜΝ \times ΝΞ$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, εἶναι καὶ τὸ ΑΚ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΛ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΑΚ = ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ τὸ δὲ $ΕΛ = ΜΝ \times ΝΞ$· ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΜΝ^2 + ΝΞ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΜΝ \times ΝΞ$. Καὶ εἶναι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μέσον, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα εἶναι δύο μέσα δυναμένη καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λῆμμα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀνίσων τμημάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2\,ΑΓ \times ΓΒ$.

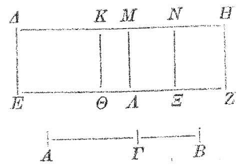
Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει τμηθῇ εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Γ, ἄρα $ΑΓ \times ΓΒ + ΓΔ^2 = ΑΔ^2$, (II. 5)· ὥστε $ΑΓ \times ΓΒ < ΑΔ^2$· ἄρα $2\,ΑΓ \times ΓΒ < 2\,ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = 2(ΑΔ^2 + ΔΓ^2)$, (II. 9)· ἄρα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2\,ΑΓ \times ΓΒ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

60.

Τὸ τετράγωνον δυωνύμου εὐθείας παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πρώτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ δυώνυμος ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον νὰ εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ ἂς παραβληθῇ τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ [ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΖ]. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ· καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ [σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ].



καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ. καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστίν. καὶ ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ τὸ ἰσοδύναμον ΔΘ πρὸς δὲ τὸ $ΒΓ^2$ τὸ ἰσοδύναμον ΚΛ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ = ΜΖ$ (II. 4). Ἂς τμηθῇ ἡ ΜΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς ἑκάστην τῶν ΜΛ, ΗΖ παράλληλος ἡ ΝΞ. Ἄρα ἕκαστον τῶν ΜΞ, ΝΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δυώνυμος ΑΒ ἔχει διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 36)· ἄρα τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι ῥητὰ καὶ μεταξύ των σύμμετρα, (θ. 15)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὰ $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ῥητόν. Καὶ εἶναι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΔΛ$· ἄρα τὸ ΔΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, εἶναι ἄρα μέσον τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, τουτέστι τὸ ΜΖ, (θ. 21). Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΜΛ· ἄρα καὶ ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ, (θ. 22). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι καὶ πρώτη δυώνυμος.

Ἐπειδὴ τῶν $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 53 λῆμμα), ἄρα καὶ τὸ ΜΞ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΔΘ, ΚΛ. Εἶναι ἄρα $ΔΘ : ΜΞ = ΜΞ : ΚΛ$, δηλαδὴ $ΔΚ : ΜΝ = ΜΝ : ΜΚ$, (VI. 1)· ἄρα $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$ (VI. 17). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, εἶναι καὶ τὸ ΔΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 > 2\,ΑΓ \times ΓΒ$, ἄρα καὶ $ΔΛ > ΜΖ$· ὥστε καὶ ἡ $ΔΜ > ΜΗ$, (VI. 1, V. 14). Καὶ εἶναι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2 = 1/4\, ΜΗ^2$, καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ. Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, πρὸς δὲ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ἰσοδύναμον ὀρθογ. παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον καὶ νὰ διαιρῇ αὐτὴν (τὴν μεγαλυτέραν) εἰς σύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ σύμμετροι). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ καὶ ἡ ΔΜ οὖσα μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

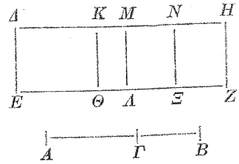
Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι πρώτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 1)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

61.

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δευτέραν δυώνυμον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.



Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

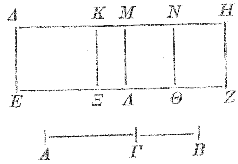
Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ,ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῆς ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.



Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ. καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ῥητὴ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι δευτέρα δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς καὶ προηγουμένως, (θ. 60). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $A\Gamma \times \Gamma B$ εἶναι ῥητόν, (θ. 37)· ὥστε καὶ τὰ $A\Gamma^2$, ΓB^2 εἶναι μέσα, (θ. 21). Ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἡ ΜΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ εἶναι ῥητόν, εἶναι καὶ τὸ ΜΖ ῥητόν· καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΜΛ· ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, τουτέστι τὴν ΔΕ, (θ. 20)· ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα δυώνυμος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2\,A\Gamma \times \Gamma B$, (θ. 59, λῆμμα), ἄρα εἶναι καὶ $\Delta\Lambda > MZ$· ὥστε καὶ ἡ $\Delta M > MH$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $A\Gamma^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΓB^2, εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). καὶ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον $\Delta K \times KM = MN^2$, (θ. 60)· ἄρα ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δευτέρα δυώνυμος (ὅρ. δεύτ. 2)· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

62.

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν τρίτην δυώνυμον.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεγαλύτερον τμῆμα νὰ εἶναι ἡ ΑΓ, ἔστω δὲ ῥητή τις ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι τρίτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 38)· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ εἶναι μέσον. Καὶ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς ΔΛ· ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον· καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΕ· ἄρα καὶ ἡ ΜΔ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΛ, *ΔΕ, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.*

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τρίτη.

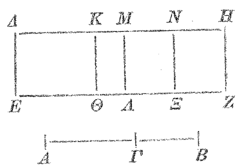
Ὁμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.



Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητήν ἐστι τὴν ΜΛ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς τουτέστι τὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΒ, ὡς δὲ $ΑΓ : ΓΒ = ΑΓ^2 : ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 11). Ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, τουτέστι τὸ ΔΛ πρὸς τὸ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει νὰ δειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη δυώνυμος.

Ὁμοίως ὡς εἰς τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ $ΔΜ > ΜΗ$ καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ. Καὶ εἶναι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$· ἄρα ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θ. 17). Καὶ οὐδεμία τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι τρίτη δώνυμος (ὅρ. δεύτ. 3)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

63.

Τὸ τετράγωνον τῆς μείζονος παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν τετάρτην δυώνυμον.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε $ΑΓ > ΓΒ$, ἔστω δὲ ἡ ΔΕ ῥητή, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ δυώνυμος ΔΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀποδείξεις. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μείζων διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον, (θ. 39). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΔΛ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $2\,ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσον, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ, ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22)· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει εἶναι καὶ ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13). Αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Πρέπει ν' ἀποδειχθῇ τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη δυώνυμος.

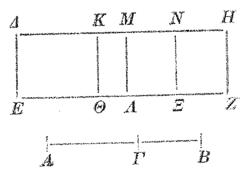
Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὡς εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι ἡ $ΔΜ > ΜΗ$ καὶ ὅτι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΒ^2$, ἄρα καὶ τὸ ΔΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. ὥστε καὶ ἡ ΔΚ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11). Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι παραβληθῇ δὲ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὀρθ. παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξδ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.



Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, ῥητὴ ἄρα ἡ ΜΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξε'.

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ὁποίου (παραλ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ νὰ διαιρῇ (τὸ παραβληθὲν) τὴν μεγαλυτέραν εἰς ἀσύμμετρα τμήματα, τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλυτ.), (θ. 18)· εἶναι ἄρα ἡ ΔΜ καὶ ἡ $\sqrt{ΔΜ^2—ΜΗ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Καὶ εἶναι αἱ ῥηταὶ ΔΜ, ΜΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι τετάρτη δυώνυμος (ὁρ. δεύτ. 4)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

64.

Τὸ τετράγωνον εὐθείας δυναμένης ῥητὸν καὶ μέσον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πέμπτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον διῃρημένη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Γ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι πέμπτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 40). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι μέσον· ὥστε ἡ ΔΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι ῥητόν, τουτέστι τὸ ΜΖ, ἄρα ἡ ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 20). Ἄρα ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (θ. 13)· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΔΜ, ΜΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη δυώνυμος.

Διότι ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ· ἄρα ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{ΔΜ^2—ΜΗ^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ εἶναι αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ἡ μικροτέρα ἡ ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι πέμπτη δυώνυμος (ὁρ. δεύτ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

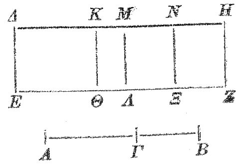
65.

Τὸ τετράγωνον εὐθείας δυναμένης δύο μέσα παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ἕκτην δυώνυμον.

Ἔστω ἡ δυναμένη δύο μέσα εὐθεῖα ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ

$ΔΕ$, καὶ παρὰ τὴν $ΔΕ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ $ΔΖ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$· λέγω, ὅτι ἡ $ΔΗ$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΑΒ$ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ $Γ$, αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $ΔΛ$, $ΜΖ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΕ$ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $ΔΜ$, $ΜΗ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΔΕ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΔΛ$ τῷ $ΜΖ$. ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ $ΔΜ$ τῇ $ΜΗ$· αἱ $ΔΜ$, $ΜΗ$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΔΗ$.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΚΜ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΜΝ$, καὶ ὅτι ἡ $ΔΚ$ τῇ $ΚΜ$ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ $ΔΜ$ τῆς $ΜΗ$ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν $ΔΜ$, $ΜΗ$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $ΔΕ$ μήκει.

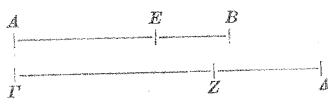
Ἡ $ΔΗ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξϛ΄.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ $ΑΒ$, καὶ τῇ $ΑΒ$ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $ΓΔ$· λέγω ὅτι ἡ $ΓΔ$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ $ΑΒ$.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΑΒ$, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ $ΑΕ$· αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $ΕΒ$ πρὸς λοιπὴν τὴν $ΖΔ$ ἐστιν, ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΓΔ$. σύμμετρος δὲ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν $ΑΕ$ τῇ $ΓΖ$, ἡ δὲ $ΕΒ$ τῇ $ΖΔ$. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ $ΓΖ$, $ΖΔ$. καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΓΖ$, ἡ $ΕΒ$ πρὸς $ΖΔ$. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$. αἱ δὲ $ΑΕ$, $ΕΒ$ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ $ΓΖ$, $ΖΔ$ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ $ΓΔ$.



Λέγω δή, ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ $ΑΒ$.

Ἡ γὰρ $ΑΕ$ τῆς $ΕΒ$ μεῖζον δύναται ἤτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΕ τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον ΔΖ, σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι ἕκτη δυώνυμος.

Διότι ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καὶ ἐπειδὴ ἡ δύο μέσα δυναμένη ΑΒ εἶναι διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΓ \times ΓΒ$ μέσον καὶ ἀκόμη τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 41)· ὥστε κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἕκαστον τῶν ΔΛ, ΜΖ εἶναι μέσον. Καὶ παράκεινται παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΕ· ἄρα ἑκάστη τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, ἄρα καὶ τὸ ΔΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΖ. Ἄρα καὶ ἡ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΗ, (VI. 1 καὶ θεώρ. 11)· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη δυώνυμος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ $ΔΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2$, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ· καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΔΜ καὶ ἡ $\sqrt{ΔΜ^2 - ΜΗ^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 18). Καὶ οὐδεμία τῶν ΔΜ, ΜΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι ἕκτη δυώνυμος, (ὁρ. δεύτ. 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

66.

Ἡ πρὸς τὴν δυώνυμον μήκει σύμμετρος εἶναι καὶ αὐτὴ δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἡ δυώνυμος ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δυώνυμος, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Ε καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 36). Ἂς γίνῃ $ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ$, (VI. 12)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν $ΖΔ = ΑΒ : ΓΔ$, (VI. 16, V. 19 πόρ.). Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, (θ. 11). Καὶ εἶναι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ἄρα εἶναι ῥηταὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ εἶναι $ΑΕ : ΓΖ = ΕΒ : ΖΔ$ (V. 11). Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ$, (V. 16). Αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11)· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ εἶναι αὗται ῥηταί· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Λέγω τώρα, ὅτι κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΕΒ^2$ ἢ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου *ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἐστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καί ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.*

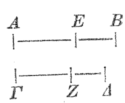
Ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξζʹ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστίν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ.

πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ) ἢ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν καὶ τὸ $ΓΖ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 1), τουτέστι κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ (πρὸς τὴν ΑΒ). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ ἡ ΖΔ θὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ διὰ τοῦτο πάλιν κατὰ τὴν τάξιν θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι δευτέρα δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 2). Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ θὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 13), καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τρίτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 3). Ἐὰν δὲ τὸ $ΑΕ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΕΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΕ), καὶ τὸ $ΓΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ ἡ ΓΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς αὐτήν, (θ. 12), καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν τετάρτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 4). Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, εἶναι πρὸς αὐτὴν σύμμετρος καὶ ἡ ΖΔ, καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν πέμπτη δυώνυμος (ὁρισ. δεύτ. 5). Ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΓΖ, ΖΔ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἕκτη δυώνυμος.

Ὥστε ἡ πρὸς τὴν δυώνυμον μήκει σύμμετρος εἶναι δυώνυμος καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

67.

Ἡ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ἐκ δύο μέσων εἶναι καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐκ δύο μέσων, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ$, (VI. 12)· ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΖΔ εἶναι ὡς ἡ $ΑΒ : ΓΔ$, (V. 19 πόρ. καὶ V. 16). Εἶναι δὲ μήκει σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΖ, ΖΔ, (θ. 11). Εἶναι δὲ μέσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ· ἄρα εἶναι μέσαι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ, (θ. 23). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ$, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ· ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ ῥητόν ἐστιν [καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καί ἐστιν ἑκατέρα δευτέρα.

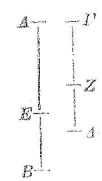
Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξη'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ μείζων ἐστίν.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καί ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.



Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ εἶναι ἄρα καὶ ΑΕ^2 : ΑΕ × ΕΒ = ΓΖ^2 : ΓΖ × ΖΔ, (θ. 21, λῆμμα)· ἐναλλὰξ δὲ ΑΕ^2 : ΓΖ^2 = ΑΕ × ΕΒ : ΓΖ × ΖΔ, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ ΑΕ^2 πρὸς τὸ ΓΖ^2· ἄρα εἶναι σύμμετρον καὶ τὸ ΑΕ × ΕΒ πρὸς τὸ ΓΖ × ΖΔ, (θ. 11). Ἐὰν λοιπὸν εἶναι ῥητὸν τὸ ΑΕ × ΕΒ θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΓΖ × ΖΔ [καὶ διὰ τοῦτο (ἑκάστη) εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη]. Ἐὰν δὲ εἶναι μέσον, θὰ εἶναι μέσον, (θ. 23, πόρ.) καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἑκάστη ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 37 καὶ 38).

Καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι ἡ ΓΔ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

68.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν μείζονα εἶναι καὶ αὐτὴ μείζων.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι μείζων.

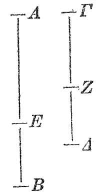
Ἄς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, (θ. 39)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ = ΕΒ : ΖΔ (θ. 67), καὶ ὡς ἄρα ΑΕ : ΓΖ = ΕΒ : ΖΔ, (V. 11). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΓΖ, ΖΔ ἀντιστοίχως, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΕ : ΓΖ = ΕΒ : ΖΔ καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ὡς ἡ ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ, καὶ διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ΑΒ : ΒΕ = ΓΔ : ΔΖ, (V. 18)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ^2 : ΒΕ^2 = ΓΔ^2 : ΔΖ^2, (VI. 20). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΑΒ^2 : ΑΕ^2 = ΓΔ^2 : ΓΖ^2. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ^2 : ΑΕ^2 + ΕΒ^2 = ΓΔ^2 : ΓΖ^2 + ΖΔ^2, (V. 24)· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ ΑΒ^2 : ΓΔ^2 = ΑΕ^2 + ΕΒ^2 : ΓΖ^2 + ΖΔ^2, (V. 16). Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ ΑΒ^2 πρὸς τὸ ΓΔ^2· ἄρα εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΕ^2 + ΕΒ^2 σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα ΓΖ^2 + ΖΔ^2, (θ. 11). Συγχρόνως δὲ εἶναι τὸ ΑΕ^2 + ΕΒ^2 καὶ ῥητὸν, ὡς ἐπίσης ῥητὸν καὶ τὸ ΓΖ^2 + ΖΔ^2. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ 2ΑΕ × ΕΒ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ 2ΓΖ × ΖΔ. Καὶ εἶναι τὸ 2ΑΕ × ΕΒ μέσον· ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ 2 ΓΖ × ΖΔ, (θ. 23, πόρ.). Ἄρα αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 13) σχηματίζουσαι ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον· ἄρα ὅλη ἡ ΓΔ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, (θ. 39).

Ἡ σύμμετρος ἄρα πρὸς τὴν μείζονα εἶναι μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξθ'.

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος [καὶ αὐτὴ] ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρός ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.



Διῃρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ, $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ AE, EB τῷ ὑπὸ ΓZ, $Z\Delta$· ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ ῥητόν.

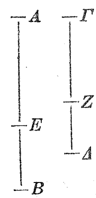
Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο'.

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E. αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE, EB. καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ, $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$.



Ἡ ἄρα $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οα'.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ AB, μέσον δὲ τὸ $\Gamma\Delta$· λέγω, ὅτι ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυνα-

69.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην εἶναι καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον.

Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 40)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, καὶ ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΕ \times ΕΒ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΔ$· ὥστε καὶ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ εἶναι μέσον τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΔ$ εἶναι ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

70.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν δύο μέσα δυναμένην εἶναι δύο μέσα δυναμένη.

Ἔστω ἡ ΑΒ δυναμένη δύο μέσα καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· πρέπει ν' ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι δύο μέσα δυναμένη.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δύο μέσα δυναμένη, ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$, (θ. 41)· καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ ὅτι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΕ \times ΕΒ$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΓΖ \times ΖΔ$· ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ εἶναι μέσον καὶ τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$ εἶναι μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$.

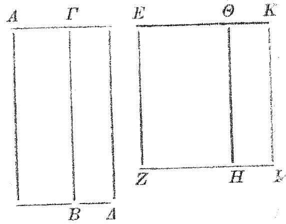
Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι δύο μέσα δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

71.

Διὰ προσθέσεως ῥητοῦ καὶ μέσου γίνονται τέσσαρες ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας μένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ [ῥητὴν] τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΙ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

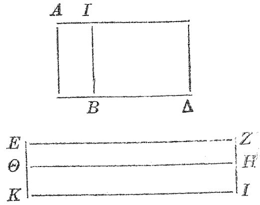


Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ·

τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ ἢ εἶναι δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Διότι τὸ ΑΒ θὰ εἶναι $\gtrless$ τοῦ ΓΔ· ἔστω πρῶτον μεγαλύτερον· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ· πρὸς δὲ τὸ ΔΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ ἰσοδύναμον τὸ ΘΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ῥητὸν καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΓΔ εἶναι μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΙ, ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ ΘΙ. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ· ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΓΔ εἶναι μέσον, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἄρα τὸ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ : ΘΙ = ΕΘ : ΘΚ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΚ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΘ, ΘΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος διῃρημένη κατὰ τὸ Θ, (θ. 36). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ $>$ ΓΔ, εἶναι δὲ ΑΒ = ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ = ΘΙ, ἄρα εἶναι καὶ ΕΗ $>$ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΘΚ, (V. 14). Ἡ λοιπὸν τὸ ΕΘ^2 ὑπερέχει τοῦ ΘΚ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ) ἢ πλευρᾶς ἀσυμμέτρου. Ἂς εἶναι πρῶτον ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἡ ΘΕ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 1). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πρώτης δυωνύμου ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δυώνυμος (θ. 54)· ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΙ εἶναι δυώνυμος· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι δυώνυμος. Ἀλλὰ ἂς εἶναι τώρα ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ΕΘ^2 ἀπὸ τοῦ ΘΚ^2, τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ)· καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι τετάρτη δυώνυμος, (ὁρισ. δεύτ. 4). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τετάρτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μείζων, (θ. 57). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθ. ΕΙ εἶναι μείζων· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΑΔ εἶναι μείζων.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω ΑΒ $<$ ΓΔ· ἄρα εἶναι καὶ ΕΗ $<$ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ $<$ ΘΚ (VI. 1, V.14). Τὸ ΘΚ^2 ὑπερέχει τοῦ ΕΘ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΘΚ). Ἂς ὑπερέχῃ πρότερον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ εἶναι ἡ μικροτέρα ἡ ΕΘ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δευτέρα ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ ΘΚ τῆς ΘΕ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.



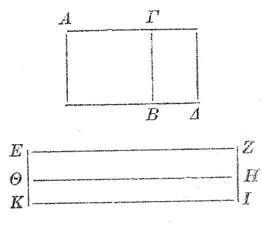
Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οβ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ [ἡ] δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ



δυώνυμος· εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς δευτέρας δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 55). Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ πρὸς τὸ ΕΙ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΔ τετραγώνου εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἀλλὰ ἂς ὑπερέχη τώρα τὸ $ΘΚ^2$ τοῦ $ΘΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΘΚ)· καὶ εἶναι ἡ μικροτέρα ἡ ΕΘ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἡ ΕΚ ἄρα εἶναι πέμπτη δυώνυμος. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς πέμπτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, (θ. 58). Ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΕΙ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἐὰν ἄρα προστεθῇ ῥητὸν καὶ μέσον γίνονται τέσσαρες ἄλογοι εὐθεῖαι ἡ δυώνυμος ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

72.

Ἐὰν προστεθῶσι δύο μέσα ἀσύμμετρα μεταξύ των γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι ἂς προστεθῶσι δύο ἀσύμμετρα μεταξύ των μέσα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογ. ΑΔ ἢ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Διότι τὸ ΑΒ $\gtrless$ ΓΔ. Ἔστω, ὅτι ἔτυχε πρῶτον νὰ εἶναι ΑΒ $>$ ΓΔ· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητὴ καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ πρὸς μὲν τὸ ΑΒ τὸ ἰσοδύναμον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΘ, πρὸς δὲ τὸ ΓΔ τὸ ἰσοδύναμον ΘΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι μέσον, ἄρα εἶναι μέσον καὶ ἕκαστον τῶν ΕΗ, ΘΙ. Καὶ παράκεινται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζοντα πλάτος τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΓΔ καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΒ=ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ=ΘΙ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ : ΘΙ = ἡ ΕΘ : ΘΚ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΘΚ, (θ. 11). Ἄρα αἱ ῥηταὶ ΕΘ, ΘΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Τὸ δὲ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ). Ἂς ὑπερέχῃ πρῶτον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν· καὶ οὐδεμία τῶν ΕΘ, ΘΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΕΖ· ἡ δυώνυμος ἄρα ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἤτοι δύο μέσα δυναμένη].

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ᾽ ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. τὰ δ᾽ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί. ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

ογ'.

Ἐ ὰ ν ἀ π ὸ ῥ η τ ῆ ς ῥ η τ ὴ ἀ φ α ι ρ ε θ ῇ δ υ ν ά μ ε ι μ ό ν ο ν (ορισ. δεύτ. 3). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΕΖ· ἐαν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς τρίτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56)· ἄρα ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα. Ἀλλὰ τώρα ἔστω, ὅτι τὸ $ΕΘ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΘΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΕΘ)· καὶ εἶναι ἑκάστη τῶν ΕΘ, ΘΚ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος (ορισ. δεύτ. 6). Ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἕκτης δυωνύμου, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἡ δυναμένη δύο μέσα, (θ. 59)· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι ἡ δυναμένη δύο μέσα.

[Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἂν ΑΒ < ΓΔ, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΔ ἢ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη].

Ἐὰν ἄρα προστεθῶσι δύο μέσα ἀσύμμετρα μεταξύ των γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

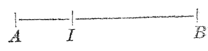
Ἡ δυώνυμος καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε πρὸς τὴν μέσην οὔτε μεταξύ των εἶναι αἱ αὐταί. Διότι τὸ μὲν τετράγωνον τῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παράκειται, (θ. 22). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δυωνύμου παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πρώτην δυώνυμον, (θ. 60). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δευτέραν δυώνυμον, (θ. 61). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τὴν τρίτην δυώνυμον, (θ. 62). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τὴν τετάρτην δυώνυμον, (θ. 63). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δυναμένης ῥητὸν καὶ μέσον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν πέμπτην δυώνυμον, (θ. 64). Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς δύο μέσα δυναμένης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ἕκτην δυώνυμον, (θ. 65). Τὰ δὲ εἰρημένα πλάτη διαφέρουσι καὶ τοῦ πρώτου καὶ μεταξύ των, τοῦ μὲν πρώτου πλάτους ὅτι τοῦτο εἶναι εὐθεῖα ῥητή, μεταξύ των δὲ ὅτι κατὰ τὴν τάξιν δὲν εἶναι αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι· ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσι μεταξύ των.

73.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ἀφαιρεθῇ ῥητή, ἡ ὁποία εἶναι σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσίν, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἀποτομή.

Διότι ἀπὸ τῆς ῥητῆς ΑΒ ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην (τὴν ΑΒ) δυνάμει μόνον σύμμετρος· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἶναι ΑΒ : ΒΓ $=$ ΑΒ^2 : ΑΒ$\times$ ΒΓ, (θ. 21, λῆμμα), ἄρα τὸ ΑΒ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΑΒ$\times$ ΒΓ, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΑΒ^2 εἶναι σύμμετρον τὸ ἄθροισμα ΑΒ^2 $+$ΒΓ^2, (θ. 15), πρὸς δὲ τὸ ΑΒ$\times$ ΒΓ εἶναι σύμμετρον τὸ 2ΑΒ$\times$ ΒΓ, (θ. 6). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΒ^2 $+$ΒΓ^2 $=$ 2ΑΒ$\times$ΒΓ $+$ ΓΑ^2, (II, 7) ἄρα τὸ ΑΒ^2 $+$ΒΓ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΓ^2, (θ. 13 καὶ 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΑΒ^2 $+$ΒΓ^2· ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἄλογος, (ὁρισ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

74.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης ἀφαιρεθῇ μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ τῆς ὅλης δὲ περιέχῃ ὀρθογώνιον ῥητόν, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μέσης ΑΒ ἡ ΒΓ ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος, νὰ σχηματίζῃ δὲ ῥητὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ$\times$ΒΓ, (θ. 27)· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

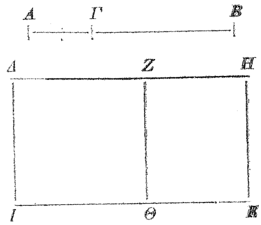
Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέσαι, εἶναι μέσα καὶ τὰ ΑΒ^2, ΒΓ^2. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΒ$\times$ ΒΓ· ἄρα τὸ ἄθροισμα ΑΒ^2 $+$ΒΓ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ 2ΑΒ$\times$ ΒΓ· ἄρα τὸ 2ΑΒ$\times$ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΑΓ^2, (II. 7), διότι καὶ ἂν τὸ ὅλον εἶναι πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν ἀσύμμετρον καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΒ$\times$ΒΓ· ἄρα τὸ ΑΓ^2 εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

75.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης ἀφαιρεθῇ μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, περιέχῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς ΑΒ ἡ ΓΒ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

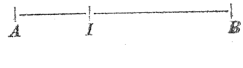
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ· τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ος'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέτὴν ὅλην τὴν AB δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς AB νὰ περιέχῃ ὀρθογώνιον μέσον τὸ $AB \times B\Gamma$· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΔI ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔI τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον ΔE σχηματίζον πλάτος τὴν ΔH, πρὸς δὲ τὸ $2AB \times B\Gamma$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔI τὸ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον $\Delta\Theta$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔZ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ZE = A\Gamma^2$ (II. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$ εἶναι μέσα καὶ σύμμετρα, ἄρα καὶ τὸ ΔE εἶναι μέσον, (θ. 15, 23 πόρ. καὶ 74). Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔI σχηματίζον πλάτος τὴν ΔH· ἄρα ἡ ΔH εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔI, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, ἄρα καὶ τὸ $2AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, (θ. 23, πόρισ.). Καὶ εἶναι τοῦτο ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\Delta\Theta$· ἄρα καὶ τὸ $\Delta\Theta$ εἶναι μέσον· καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔI σχηματίζον πλάτος τὴν ΔZ· ἄρα ἡ ΔZ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔI, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ AB, $B\Gamma$ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ AB εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $B\Gamma$· ἄρα καὶ τὸ AB^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $AB \times B\Gamma$, (θ. 11, θ. 21 λ.). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ AB^2 εἶναι σύμμετρον τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$, πρὸς δὲ τὸ $AB \times B\Gamma$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2AB \times B\Gamma$, (θ. 6)· ἄρα τὸ $2\,AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$, (θ. 13). Εἶναι δὲ $AB^2 + B\Gamma^2 = \Delta E$ καὶ $2\,AB \times B\Gamma = \Delta\Theta$· ἄρα τὸ ΔE εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\Delta\Theta$· ὡς δὲ τὸ $\Delta E : \Delta\Theta =$ ἡ $H\Delta : \Delta Z$, (VI. 1)· ἄρα ἡ $H\Delta$ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔZ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· ἄρα αἱ ῥηταὶ $H\Delta$, ΔZ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ZH ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔI· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου εἶναι ἄλογον, (θ. 20) καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Καὶ εἶναι $A\Gamma^2 = ZE$· ἄρα ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

76.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας ἀφαιρεθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος, σχηματίζῃ δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον, ἡ ὑπόλοιπος εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας AB, ἡ εὐθεῖα $B\Gamma$, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει ἀσύμμετρος καὶ νὰ πληροῖ τὰ προκείμενα· Λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ $A\Gamma$ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $2AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$ καὶ τὸ $2\,AB \times B\Gamma$ εἶναι ἀσύμμετρα·

ψαντι λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οζ΄.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ προειρημένη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οη΄.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ [πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ]. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΕ, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ καὶ δι' ἀναστροφῆς (ΙΙ. 7) τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΓ^2$, (θ. 16). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἐ λ ά σ σ ω ν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

77.

Ἐ ὰ ν ἀ π ὸ ε ὐ θ ε ί α ς ἀ φ α ι ρ ε θ ῇ ε ὐ θ ε ῖ α, ἡ ὁ π ο ί α ε ἶ ν α ι π ρ ὸ ς τ ὴ ν ὅ λ η ν δ υ ν ά μ ε ι ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς, σ χ η μ α τ ί ζ η δ ὲ μ ε τ ὰ τ ῆ ς ὅ λ η ς τ ὸ μ ὲ ν ἄ θ ρ ο ι σ μ α τ ῶ ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν τ ω ν μ έ σ ο ν, τ ὸ δ ὲ δ ι π λ ά σ ι ο ν ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν α ὐ τ ῶ ν ῥ η τ ό ν, ἡ ὑ π ό λ ο ι π ο ς ε ἶ ν α ι ἄ λ ο γ ο ς· ἂ ς κ α λ ῆ τ α ι δ ὲ ἡ μ ε τ ὰ ῥ η τ ο ῦ μ έ σ ο ν τ ὸ ὅ λ ο ν π ο ι ο ῦ σ α.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ νὰ πληροῖ τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἡ προειρημένη ἄλογος.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι μέσον, τὸ δὲ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$· ἄρα καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ΙΙ. 7) τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$ (θ. 16). Καὶ εἶναι τὸ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$ ῥητόν· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἄλογον· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, (ὁρισ. 4)· ἂς καλῆται δὲ ἡ μ ε τ ὰ ῥ η τ ο ῦ μ έ σ ο ν τ ὸ ὅ λ ο ν π ο ι ο ῦ σ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

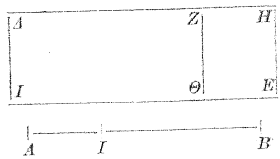
78.

Ἐ ὰ ν ἀ π ὸ ε ὐ θ ε ί α ς ἀ φ α ι ρ ε θ ῇ ε ὐ θ ε ῖ α, ἡ ὁ π ο ί α ε ἶ ν α ι π ρ ὸ ς τ ὴ ν ὅ λ η ν δ υ ν ά μ ε ι ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς σ χ η μ α τ ί ζ η δ ὲ μ ε τ ὰ τ ῆ ς ὅ λ η ς κ α ὶ τ ὸ ἄ θ ρ ο ι σ μ α τ ῶ ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν α ὐ τ ῶ ν μ έ σ ο ν κ α ὶ τ ὸ δ ι π λ ά σ ι ο ν ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν α ὐ τ ῶ ν μ έ σ ο ν κ α ὶ ἀ κ ό μ η τ ὸ ἄ θ ρ ο ι σ μ α τ ῶ ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν α ὐ τ ῶ ν ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ν π ρ ὸ ς τ ὸ δ ι π λ ά σ ι ο ν ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν α ὐ τ ῶ ν, ἡ ὑ π ό λ ο ι π ο ς ε ἶ ν α ι ἄ λ ο γ ο ς· ἂ ς κ α λ ῆ τ α ι δ ὲ ἡ μ ε τ ὰ μ έ σ ο υ μ έ σ ο ν τ ὸ ὅ λ ο ν π ο ι ο ῦ σ α.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ πληροῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ὑπόλοιπος ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Διότι ἂς ληφθῇ ἡ ΔΙ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΔΙ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΔΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ, πρὸς δὲ τὸ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΖΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΓ^2$ (ΙΙ. 7)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπειδὴ

ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ, τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ·



καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ· ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ· τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν· καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οθʹ.

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνη τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πʹ.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι μέσον καὶ ἰσοδ. πρὸς τὸ ΔΕ, ἄρα τὸ ΔΕ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΗ· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΔΘ, ἄρα τὸ ΔΘ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΔΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΖ· ἄρα καὶ ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΙ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΒ \times ΒΓ$, ἄρα καὶ τὸ ΔΕ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔΘ. Εἶναι δὲ $ΔΕ : ΔΘ = ΔΗ : ΔΖ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΖ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΗΔ, ΔΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ἀποτομὴ (θ. 73)· εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΘ. Το δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΕ· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος· ἂς καλῆται δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

79.

Π ρ ὸ ς τ ὴ ν ἀ π ο τ ο μ ὴ ν μ ί α μ ό ν ο ν ῥ η τ ὴ ε ὐ θ ε ῖ α π ρ ο σ α ρ- μ ό ζ ε ι, ἡ ὁ π ο ί α ε ἶ ν α ι π ρ ὸ ς τ ὴ ν ὅ λ η ν δ υ ν ά μ ε ι μ ό ν ο ν σ ύ μ- μ ε τ ρ ο ς.

Ἔστω ἡ ἀποτομὴ ΑΒ προσαρμόζουσα δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΓ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ οὐδεμία ἄλλη ῥητὴ προσαρμόζει, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ ῥηταὶ ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$· διότι ἕκαστον ὑπερέχει κατὰ τὸ αὐτὸ τὸ $ΑΒ^2$, (II 7)· ἐναλλὰξ ἄρα ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ τὸ αὐτὸ ὑπερέχει καὶ τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$. Τὸ δὲ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει κατὰ ῥητὸν τοῦ $2ΑΓ \times ΓΒ$· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 21), μέσον δὲ δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητὸν, (θ. 26). Πρὸς τὴν ΑΒ ἄρα δὲν προσαρμόζει ἄλλη ῥητή, ἡ ὁποία νὰ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην.

Μία ἄρα ῥητὴ προσαρμόζει πρὸς τὴν ἀποτομήν, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

80.

Π ρ ὸ ς τ ὴ ν π ρ ώ τ η ν ἀ π ο τ ο μ ὴ ν μ έ σ η ς π ρ ο σ α ρ μ ό ζ ε ι εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ *ΑΒ*, καὶ τῇ *ΑΒ* προσαρμοζέτω ἡ *ΒΓ*· αἱ *ΑΓ*, *ΓΒ* ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· λέγω, ὅτι τῇ *ΑΒ* ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

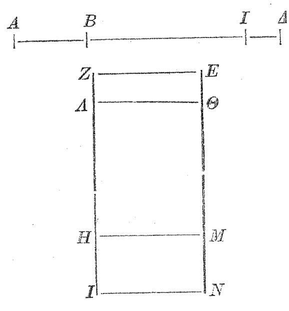
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ *ΔΒ*· αἱ ἄρα *ΑΔ*, *ΔΒ* μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* [τετραγώνων] ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πα'.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ *ΑΒ* καὶ τῇ *ΑΒ* προσαρμόζουσα ἡ *ΒΓ*· αἱ ἄρα *ΑΓ*, *ΓΒ* μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· λέγω, ὅτι τῇ *ΑΒ* ἑτέρα οὐ προσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ *ΒΔ*· καὶ αἱ *ΑΔ*, *ΔΒ* ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΕΖ*, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΕΖ* παραβεβλήσθω τὸ *ΕΗ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΕΜ*· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ *ΘΗ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΘΜ*· λοιπὸν ἄρα τὸ *ΕΛ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*· ὥστε ἡ *ΑΒ* δύναται τὸ *ΕΛ*. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΕΖ* παραβεβλήμία μόνον εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος, μετὰ δὲ τῆς ὅλης περιέχει ὀρθογώνιον ῥητόν.

Διότι ἔστω ἡ ΑΒ πρώτη ἀποτομὴ μέσης καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΓ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ × ΓΒ, (θ. 74)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν προσαρμόζει ἄλλη μέση, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος καὶ νὰ περιέχῃ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον ῥητόν.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ καὶ ἡ ΔΒ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ῥητὸν ὀρθογώνιον τὸ ΑΔ × ΔΒ (θ. 74). Καὶ ἐπειδή, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ 2 ΑΔ × ΔΒ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ τοῦ 2 ΑΓ × ΓΒ· διότι πάλιν ὑπερέχουσι κατὰ τὸ αὐτό, τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, (ΙΙ. 7)· ἐναλλὰξ ἄρα, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$, κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ 2 ΑΔ × ΔΒ τοῦ 2 ΑΓ × ΓΒ. Τὸ δὲ 2 ΑΔ × ΔΒ ὑπερέχει τοῦ 2 ΑΓ × ΓΒ κατὰ ῥητόν· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο ῥητά· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 24) καὶ μέσον δὲν ὑπερέχει μέσου κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

Πρὸς τὴν πρώτην ἄρα ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μόνον μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, καὶ περιέχει μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

81.

Πρὸς τὴν δευτέραν ἀποτομὴν μέσης προσαρμόζει μόνον μία εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, περιέχει δὲ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον.

Ἔστω ἡ ΑΒ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης καί ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζει ἡ ΒΓ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον τὸ ΑΓ × ΓΒ, (θ. 75)· λέγω ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα μέση, ἡ ὁποία νὰ εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος καὶ νὰ περιέχῃ μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον.

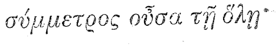
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ μέσαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον μέσον τὸ ΑΔ × ΔΒ (θ. 75). Καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἂς παραβληθῇ ἰσοδύναμον παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· πρὸς δὲ τὸ 2 ΑΓ × ΓΒ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ΘΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΛ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$, (ΙΙ. 7)· ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ΕΛ. Πάλιν τώρα, ἂς παραβληθῇ σθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΕΜ, ΜΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πβʹ.

Τ ῇ ἐ λ ά σ σ ο ν ι μ ί α μ ό ν ο ν π ρ ο σ α ρ μ ό ζ ε ι ε ὐ θ ε ῖ α δ υ ν ά μ ε ι ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς ο ὖ σ α τ ῇ ὅ λ ῃ π ο ι ο ῦ σ α μ ε τ ὰ τ ῆ ς ὅ λ η ς τ ὸ μ ὲ ν ἐ κ τ ῶ ν ἀ π᾽ α ὐ τ ῶ ν τ ε τ ρ α γ ώ ν ω ν ῥ η τ ό ν, τ ὸ δ ὲ δ ὶ ς ὑ π᾽ α ὐ τ ῶ ν μ έ σ ο ν.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ παρὰ τὴν ΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τὸ ὀρθογώνιον ΕΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΝ· εἶναι δὲ καὶ $ΕΛ = ΑΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΘΙ = 2\,ΑΔ \times ΔΒ$, (II. 7). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσαι ἄρα καὶ τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι μέσον· καὶ εἶναι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΕΗ$· ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσον, εἶναι μέσον καὶ τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 23, πόρ.). Καὶ εἶναι τοῦτο ἴσον πρὸς τὸ ΘΗ· ἄρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα καὶ ἡ ΘΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι πρὸς τὴν ΓΒ μήκει ἀσύμμετρος. Εἶναι δὲ $ΑΓ : ΓΒ = ΑΓ^2 : ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 21, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$, (θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΓ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ πρὸς δὲ τὸ $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$· ἄρα τὸ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ καὶ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 13). Καὶ εἶναι $ΑΓ^2 + ΓΒ^2 = ΕΗ$, ἐν ᾧ $2\,ΑΓ \times ΓΒ = ΗΘ$· ἄρα τὸ ΕΗ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ $ΕΗ : ΘΗ =$ ἡ $ΕΜ : ΘΜ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΘ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΜ, ΜΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73), προσαρμόζουσα δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ ΘΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΝ προσαρμόζει εἰς αὐτήν· πρὸς τὴν ἀποτομὴν ἄρα προσαρμόζει καὶ ἄλλη διάφορος εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 79).

Πρὸς τὴν δευτέραν ἄρα ἀποτομὴν μέσης μία μόνον εὐθεῖα μέση προσαρμόζει, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, καὶ περιέχει μετὰ τῆς ὅλης ὀρθογώνιον μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

82.

Πρὸς τὴν ἐλάσσονα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην σχηματίζουσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον, (θ. 76)· λέγω, ὅτι ἄλλη εὐθεῖα δὲν θὰ προσαρμόσῃ πρὸς τὴν ΑΒ σχηματίζουσα τὰ αὐτά.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι πληροῦσαι τὰ προειρημένα, (θ. 76). Καὶ ἐπειδὴ ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀρθοίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ τοῦτο τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ καὶ ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πγ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀκολούθως τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα. οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πδ'.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ υπερέχει καὶ τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, (ΙΙ. 7 καὶ θ. 79) εἶναι δὲ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ὀρθογώνιον ῥητόν· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι καὶ τὰ δύο εἶναι μέσα.

Πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἄρα προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην καὶ σχηματίζει μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ῥητόν, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

83.

Πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον προσαρμόζει μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, σχηματίζει δὲ μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προκείμενα, (θ. 17)· λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν προσαρμόζει ἄλλη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὰ αὐτά.

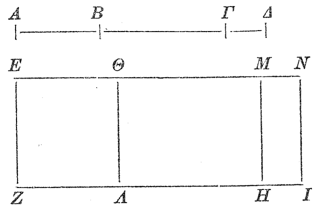
Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ· ἄρα καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προκείμενα, (θ. 77). Ἐπειδὴ λοιπόν, ὅ,τι ὑπερέχει τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ τοῦ ἀθροίσματος $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ τοῦτο ὑπερέχει καὶ τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ τοῦ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ δὲ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ ὑπερέχει τοῦ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$ κατὰ ῥητόν· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο ῥητά· ἄρα καὶ τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ κατὰ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι εἶναι καὶ τὰ δύο μέσα, (θ. 26). Ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ τῆς ὅλης δὲ νὰ σχηματίζῃ τὰ προειρημένα· ἄρα θὰ προσαρμόσῃ μία μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

84.

Εἰς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον προσαρμόζει μία μόνη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ δὲ τῆς ὅλης σχηματίζει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, προσαὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ποιοῦσα τὰ προειρημένα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τά τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΘΙ· καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΗ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστιν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ. τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα.



Τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον κ ὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι.

α´. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀ π ο τ ο μ ὴ π ρ ώ τ η.

αρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΒΓ· ἄρα αἱ ΑΓ, ΓΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὰ προειρημένα, (θ. 78). Λέγω, ὅτι πρὸς τὴν ΑΒ δὲν θα προσαρμόσῃ ἄλλη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὰ προειρημένα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς προσαρμόζῃ ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ νὰ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ νὰ σχηματίζωσι καὶ τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ μέσον καὶ τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$ μέσον καὶ ἀκόμη τὸ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ$, (θ. 78)· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΕΖ ῥητή, καὶ πρὸς μὲν τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ, πρὸς δὲ τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΘΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = ΕΛ$, (ΙΙ. 7)· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς $ΑΒ = ΕΛ$. Πάλιν, πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ἰσοδύναμον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΖ τὸ ὀρθογώνιον ΕΙ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΝ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $ΑΒ^2 = ΕΛ$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2\,ΑΔ \times ΔΒ = ΘΙ$, (ΙΙ. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΕΗ, ἄρα καὶ τὸ ΕΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ· ἄρα ἡ ΕΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΘΗ, ἄρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται τοῦτο παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΘΜ· ἄρα καὶ ἡ ΘΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,ΑΓ \times ΓΒ$, εἶναι καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΘΗ· ἄρα καὶ ἡ ΕΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΘ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΜ, ΜΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΘΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ΕΘ εἶναι πάλιν ἀποτομή, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΘΝ. Πρὸς τὴν ἀποτομὴν ἄρα προσαρμόζει καὶ ἄλλη διάφορος εὐθεῖα ῥητή, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὴν ὅλην δυνάμει μόνον σύμμετρος· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, (θ. 79). Δὲν θὰ προσαρμόσῃ ἄρα εἰς τὴν ΑΒ ἄλλη εὐθεῖα.

Εἰς τὴν ΑΒ ἄρα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι δυνάμει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, μετὰ δὲ τῆς ὅλης σχηματίζει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁρισμοὶ τρίτοι.

1. Ληφθείσης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ ἡ ὅλη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ πρώτη ἀποτομή.

β'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

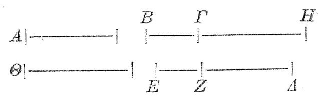
ε'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

πε'.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΖΔ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ᾽ ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

2. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ δευτέρα ἀποτομή.

3. Ἐὰν δὲ οὐδεμία εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ τρίτη ἀποτομή.

4. Πάλιν, ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, ἐὰν ἡ ὅλη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν δὲ οὐδεμία, ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ ἕκτη ἀποτομή.

85.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ἡ Α ῥητὴ καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ὁ ΖΔ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, (θ. 28, λῆμμα 1)· ἄρα οὔτε ὁ $ΕΔ : ΔΖ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς γίνῃ $ΕΔ : ΔΖ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΒΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΓ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $ΕΔ : ΔΖ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ λόγος $ΒΗ^2 : ΗΓ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΓ. Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΒΗ, ΗΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη ἀποτομή.

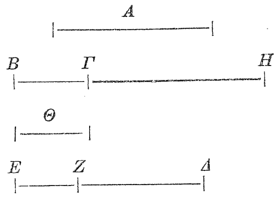
Διότι ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΒΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΓ^2$ εἶναι τὸ $Θ^2$, (θ. 13, λῆμμα). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΕΔ : ΖΔ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΔΕ : ΕΖ = ΗΒ^2 : Θ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $ΔΕ : ΕΖ$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· διότι ἕκαστος εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ $ΗΒ^2 : Θ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ τὸ $ΒΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΓ^2$ κατὰ τὸ $Θ^2$· ἄρα ΒΗ καὶ $\sqrt{ΒΗ^2 - ΗΓ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ ὅλη ἡ ΒΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Εὑρέθη ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πς'.

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ. ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὧ γὰρ μεῖζον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρος τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πζ'.

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

86.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α μήκει σύμμετρος ἡ ΗΓ. Ἄρα ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ὁ ΔΖ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, (θ. 28, λῆμμα 1). Καὶ ἂς γίνῃ ΖΔ : ΔΕ $=$ ΓΗ^2 : ΗΒ^2, (θ. 6, πόρισ.). Ἄρα τὸ ΓΗ^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΗΒ^2 (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΓΗ^2. Ἄρα καὶ τὸ ΗΒ^2 εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΗΓ^2 πρὸς τὸ ΗΒ^2 δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἡ ΓΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΒ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα ἀποτομή.

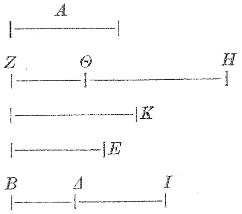
Διότι ἔστω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ΒΗ^2 ἀπὸ τοῦ ΗΓ^2 εἶναι τὸ Θ^2, (θ. 13, λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ΒΗ^2 : ΗΓ^2 $=$ ΕΔ : ΔΖ, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ΒΗ^2 : Θ^2 $=$ ΔΕ : ΕΖ, (V. 19, πόρ.). Καὶ εἶναι ἕκαστος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· ἄρα τὸ ΒΗ^2 : Θ^2 εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΒΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (29). Καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ΒΗ^2 ἀπὸ τοῦ ΗΓ^2 εἶναι τὸ Θ^2· ἄρα ἡ ΒΗ καὶ $\sqrt{\text{ΒΗ}^2-\text{ΗΓ}^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α σύμμετρος. Ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 2)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

87.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἂς ληφθῶσι τρεῖς ἀριθμοί, οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ μὴ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ :ΒΔ ἂς εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἂς γίνῃ Ε : ΒΓ $=$ Α^2 : ΖΗ^2, (θ. 28, λῆμμα 1) καὶ ΒΓ : ΓΔ $=$ ΖΗ^2 : ΗΘ^2. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι Ε : ΒΓ $=$ Α^2 : ΖΗ^2, ἄρα τὸ Α^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ^2, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ Α^2. Ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΖΗ^2· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε : ΒΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ λόγος Α^2 : ΖΗ^2 εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμ-

[τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει, καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πη'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς μετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 9). Πάλιν, ἐπειδὴ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $ΒΓ : ΓΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $ΖΗ^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Καί εἶναι καί αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταί ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη ἀποτομή.

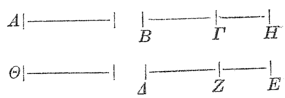
Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΘΗ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Ε : ΓΔ = Α^2 : ΘΗ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ λόγος $Ε : ΓΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα ὁ λόγος $Α^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Οὐδεμία ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α. Ἔστω λοιπὸν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ $ΖΗ^2$ ἀπὸ τοῦ $ΗΘ^2$ ἴση πρὸς $Κ^2$, (θ. 13 λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΓ : ΒΔ = ΖΗ^2 : Κ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ λόγος $ΒΓ : ΒΔ$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2 : Κ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Κ, (θ. 9), καὶ ΖΗ, $\sqrt{ΖΗ^2 - ΗΘ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ οὐδεμία τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α· ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι τρίτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι, 3).

Εὑρέθη ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

88.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ἄρα καὶ ἡ ΒΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΔΕ πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΕ, νὰ μὴ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἂς γίνῃ $ΔΕ : ΕΖ = ΒΗ^2 : ΗΓ^2$, (θ. 6, πόρ.)· ἄρα τὸ $ΒΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΓ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΒΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΓ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα ἡ ΗΓ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ὁ $ΔΕ : ΕΖ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.



[Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη].

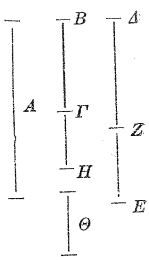
Ὧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πθ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα [ἐστίν] ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει· καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἄρα ὁ $BH^2 : H\Gamma^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ BH εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $H\Gamma$, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα BH, $H\Gamma$ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ $B\Gamma$ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $BH^2—H\Gamma^2, = \Theta^2$, (θ. 13, λῆμμα). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, καὶ δι' ἀναστροφῆς εἶναι $E\Delta : \Delta Z = HB^2 : \Theta^2$ (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $E\Delta : \Delta Z$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα $HB^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ BH εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ $BH^2—H\Gamma^2 = \Theta^2$. Εἶναι ἄρα BH καὶ $\sqrt{BH^2—H\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι ὅλη ἡ BH μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν A. Ἡ $B\Gamma$ ἄρα εἶναι τετάρτη ἀποτομὴ (ορισ. τρίτοι 4).

Εὑρέθη ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

89.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη ἀποτομή.

Ἄς ληφθῇ ῥητὴ ἡ A καὶ πρὸς τὴν A ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓH· ἄρα ἡ ΓH εἶναι ῥητή. Καὶ ἂς ληφθῶσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔZ, ZE, ὥστε τὸ ἄθροισμά των ὁ ΔE πρὸς ἕκαστον τῶν ΔZ, ZE νὰ μὴ ἔχῃ πάλιν λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς γίνῃ $ZE : E\Delta = \Gamma H^2 : HB^2$. Ἄρα καὶ τὸ HB^2 εἶναι ῥητόν, (θ. 6)· ἄρα καὶ ἡ BH εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, ὁ δὲ $\Delta E : EZ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : H\Gamma^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ BH εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν $H\Gamma$, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα BH, $H\Gamma$ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ $B\Gamma$ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη ἀποτομή.

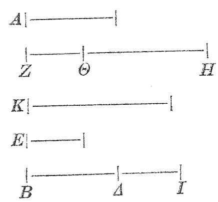
Διότι ἔστω $BH^2—H\Gamma^2 = \Theta^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $BH^2 : H\Gamma^2 = \Delta E : EZ$ καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $E\Delta : \Delta Z$ δέν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα ὁ $BH^2 : \Theta^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ BH εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Θ, (θ. 9). Καὶ ὑπερέχει ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΗΒ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙ'.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμός πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ.

τὸ $ΒΗ^2$ τοῦ $ΗΓ^2$ κατὰ τὸ $Θ^2$· εἶναι ἄρα ΗΒ καὶ $\sqrt{ΗΒ^2—ΗΓ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Α· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 5).

Εὑρέθη ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

90.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕκτη ἀποτομή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, οἱ ὁποῖοι νὰ μὴ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀκόμη δὲ καὶ ΓΒ : ΒΔ νὰ μὴ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἂς γίνῃ $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$, ἄρα τὸ $Α^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΖΗ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ Ε : ΒΓ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα $Α^2 : ΖΗ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ (θ. 9). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΘ^2$, (θ. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΖΗ^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ^2$ εἶναι ῥητόν· ἄρα καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ ΒΓ : ΓΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἄρα τὸ $ΖΗ^2$ πρὸς τὸ $ΗΘ^2$ ἔχει λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΗ, ΗΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $Ε : ΒΓ = Α^2 : ΖΗ^2$ καὶ $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἴσου ἄρα εἶναι $Ε : ΓΔ = Α^2 : ΗΘ^2$, (V. 22). Ὁ δὲ Ε : ΓΔ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα τὸ $Α^2 : ΗΘ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΘ, (θ. 9)· οὐδεμία ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ῥητὴν Α. Ἔστω τώρα $ΖΗ^2—ΗΘ^2 = Κ^2$. Ἐπειδὴ ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΓB$ πρὸς τὸν $BΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K. ὁ δὲ $ΓB$ πρὸς τὸν $BΔ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει. καὶ δύναται ἡ ZH τῆς $HΘ$ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς K· ἡ ZH ἄρα τῆς $HΘ$ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ZH, $HΘ$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ A. ἡ ἄρα $ZΘ$ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

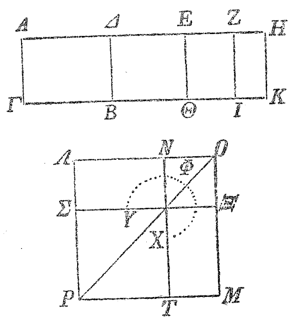
Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ $ZΘ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ϙα'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ AB ὑπὸ ῥητῆς τῆς $AΓ$ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς $AΔ$· λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομὴ ἐστι πρώτη ἡ $AΔ$, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ $ΔH$· αἱ AH, $HΔ$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $AΓ$, καὶ ἡ AH τῆς $HΔ$ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔH$ ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ $ΔH$ δίχα κατὰ τὸ E, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH. καὶ διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ $AΓ$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $EΘ$, ZI, HK.



Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AZ τῇ ZH μήκει, καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει,. ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ $AΓ$· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι τῇ $AΓ$ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἡ $AΓ$· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν AI, ZK ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΔE$ τῇ EH μήκει, καὶ ἡ $ΔH$ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν $ΔE$, EH σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ $ΔH$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $AΓ$ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν $ΔE$, EH καὶ ἀσύμμετρος τῇ $AΓ$ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΔΘ$, EK μέσον ἐστίν.

λοιπὸν εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΖΗ^2 : ΗΘ^2$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΓΒ : ΒΔ = ΖΗ^2 : Κ^2$, (V. 19, πόρ.). Ὁ δὲ $ΓΒ : ΒΔ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὔτε ἄρα $ΖΗ^2 : Κ^2$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Κ. Καὶ ὑπερέχει τὸ $ΖΗ^2$ τοῦ $ΗΘ^2$ κατὰ τὸ $Κ^2$. Εἶναι ἄρα ΖΗ καὶ $\sqrt{ΖΗ^2 - ΗΘ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ οὐδεμία τῶν ΖΗ, ΗΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Α. Ἡ ΖΘ ἄρα εἶναι ἕκτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 6).

Εὑρέθη ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

91.

Ἐάν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πρώτης ἀποτομῆς, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἀποτομή.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ τῆς ῥητῆς ΑΓ καὶ τῆς πρώτης ἀποτομῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ΑΒ τετραγώνου εἶναι ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη ἀποτομή, ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, καὶ τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2 - ΗΔ^2}$ μήκει σύμ.), (ὁρισ. τρίτ. 1)· ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ παραβληθὲν διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΑΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, (θ. 12). Καὶ εἶναι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι ῥητή· ὥστε καὶ ἕκαστον τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι ῥητόν, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· (θ. 13), ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι μέσον, (θ. 20).

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΛΟΜ τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἔστι τὸ [μὲν] ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΚΖ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ. τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἐστι τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ ΛΝ ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἐστιν ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΝΞ ῥητὸν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΛΝ. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

Ϙβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ. αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον

Ἂς ληφθῇ τώρα πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον ΝΞ ἔχον κοινὴν γωνίαν πρὸς αὐτὸ τὴν ΛΟΜ· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ $\times$ ΖΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΗ^2, εἶναι ἄρα ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ, (VI. 17). Ἀλλὰ ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ, καὶ ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΚΖ, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΚΖ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον τῶν ΛΜ, ΝΞ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΙ = ΛΜ, τὸ δὲ ΚΖ = ΝΞ· ἄρα καὶ τὸ ΜΝ = ΕΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ = ΔΘ, τὸ δὲ ΜΝ = ΛΞ, (I. 43)· ἄρα τὸ ΔΚ = γνώμων ΥΦΧ + ΝΞ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον ΑΒ = ΣΤ. Τὸ δὲ ΣΤ = ΛΝ^2· ἄρα τὸ ΛΝ^2 = ΑΒ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ΑΙ = ΛΜ, ΖΚ = ΝΞ, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ εἶναι ῥητόν, τουτέστι ἕκαστον τῶν ΛΟ^2, ΟΝ^2· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ εἶναι ῥητή. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΘ εἶναι μέσον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΞ, ἄρα καὶ τὸ ΛΞ εἶναι μέσον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΛΞ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἄρα τὸ ΛΞ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΝΞ· εἶναι δὲ ΛΞ : ΝΞ = ΛΟ : ΟΝ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΛΟ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΟΝ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ· ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἀποτομή.

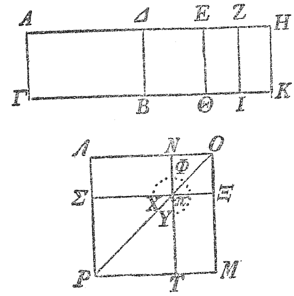
Ἐὰν ἄρα ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὰ ἑξῆς.

92.

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ δευτέρας ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ δευτέρας ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73) καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τῆς ὅλης δὲ τὸ τετράγωνον τὸ ΑΗ^2 ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τοῦ ΗΔ^2 κατὰ τετράδύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ᾽ ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει [ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει]. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ῥητόν ἐστιν.



Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μέσα ἐστὶ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ [ἄρα] μέσα ἐστίν· καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως [ἐστὶ] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΣ. τὸ δὲ ΤΣ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ· τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω δή, ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς ΟΝ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

γωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΗΔ), (ὁρισ. τρίτοι 2). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2-ΗΔ^2}$ μήκει σύμμ.) ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἕν τέταρτον τοῦ $ΗΔ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθογ.) νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, τοῦτο (τὸ ὀρθογ.) διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε· καὶ παρὰ τὴν ΑΗ ἂς παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ σχῆμα τετράγωνον, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραὶ του ΑΖ, ΖΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ ἡ ΑΗ ἄρα εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΗ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, (θ. 13)· ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, ἄρα καὶ ἡ ΔΗ εἶναι σύμμετρος πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΔΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ [ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ]· Ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι ῥητόν.

Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ πρὸς δὲ τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ τετράγωνον ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὸ ΛΜ τὴν ΛΟΜ· τὰ τετράγωνα ἄρα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσα καὶ εἶναι $ΑΙ = ΛΟ^2$, $ΖΚ = ΟΝ^2$, ἄρα καὶ τὰ $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$ εἶναι μέσα· ἄρα καὶ αἱ μέσαι ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ = ΕΗ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$, (VI. 1)· ὡς δὲ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΖΚ$· τὸ ΕΚ ἄρα εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον τῶν ΛΜ, ΝΞ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι τὸ μέν $ΑΙ = ΛΜ$, τὸ δὲ $ΖΚ = ΝΞ$· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα $= ΕΚ$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΕΚ =$ τὸ ΔΘ, πρὸς δὲ τὸ $ΜΝ =$ τὸ ΛΞ, (I. 43)· ὅλον ἄρα τὸ $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ + ΝΞ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ$ ἐξ ὧν $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ + ΝΞ$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΑΒ = ΤΣ$. Τὸ δὲ $ΤΣ = ΛΝ^2$· ἄρα τὸ $ΛΝ^2 =$ ὀρθογώνιον ΑΒ· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΛΞ, ἄρα καὶ τὸ ΛΞ εἶναι ῥητόν, τουτέστι τὸ $ΛΟ \times ΟΝ$. Ἐδείχθη δὲ μέσον τὸ ΝΞ· ἄρα τὸ ΛΞ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΝΞ· ὡς δὲ $ΛΞ : ΝΞ = ΛΟ : ΟΝ$, (VI. 1)· ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 11). Αἱ μέσαι ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν· ἡ ΛΝ ἄρα εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης, (θ. 74)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

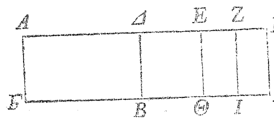
Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

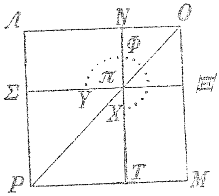
Ϙγ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει. ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΕΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.





Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

93.

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τρίτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ τρίτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι ἔστω ἡ ΔΗ προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεμία τῶν ΑΗ, ΗΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΑΗ), (ὅρ. τρίτοι 3).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2 - ΗΔ^2}$ μήκει σύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ πρὸς τὸ ἕν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς σύμμετρα (θ. 17). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΗ κατὰ τὸ Ε καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$ ὀρθογώνιον ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ $ΑΖ \times ΖΗ$. Καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· αἱ ΑΖ, ΖΗ ἄρα εἶναι σύμμετροι· καὶ τὸ ΑΙ ἄρα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι μήκει σύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά των ἡ ΑΗ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΑΖ, ΖΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἡ ΑΗ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ, (θ. 13). Ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, ἄρα καὶ ἡ ΔΗ εἶναι πρὸς ἑκάστην τῶν ΔΕ, ΕΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). Εἶναι δὲ ἡ ΗΔ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΕΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 13)· ἕκαστον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ εἶναι μέσον, (θ. 20). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΔ· Ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ δὲ ΔΗ πρὸς τὴν ΕΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΗ, (θ. 13). Ὡς δὲ ἡ ΑΖ : ΕΗ = τὸ ΑΙ : ΕΚ, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΚ, (θ. 11).

Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, πρὸς δὲ τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον ἄς ἀφαιρεθῇ τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πρὸς τὸ ΛΜ· ἄρα τὰ ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26).

ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH, οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH. ἀλλʼ ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH, οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK· ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH, οὕτως ἐστὶ τὸ EK πρὸς τὸ ZK· καὶ ὡς ἄρα τὸ AI πρὸς τὸ EK, οὕτως τὸ EK πρὸς τὸ ZK· τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK· ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛM, $N\Xi$ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ ΛM, τὸ δὲ ZK τῷ $N\Xi$· καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN· ἀλλὰ τὸ μὲν MN ἴσον ἐστὶ τῷ $\Lambda\Xi$, τὸ δὲ EK ἴσον [ἐστὶ] τῷ $\Delta\Theta$· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔK ἴσον ἐστὶ τῷ $Y\Phi X$ γνώμονι καὶ τῷ $N\Xi$. ἔστι δὲ καὶ τὸ AK ἴσον τοῖς ΛM, $N\Xi$. λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΣT, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛN τετραγώνῳ· ἡ ΛN ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛN μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ AI, ZK καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO, ON, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛO, ON· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛO, ON. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AI τῷ EK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛM τῷ MN, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ὑπὸ τῶν ΛO, ON· ὥστε καὶ ἡ ΛO ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. τῇ ON· αἱ ΛO, ON ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ EK καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛO, ON, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛO, ON· ὥστε αἱ ΛO, ON μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΛN ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ϙδ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς $A\Gamma$ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς $A\Delta$· λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ $A\Delta$ προσαρμόζουσα ἡ ΔH· αἱ ἄρα AH, $H\Delta$ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ $A\Gamma$ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἃς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ = ΕΗ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI.17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$, (VI.1)· ὡς δὲ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΖΚ$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΑΙ : ΕΚ =$ τὸ $ΕΚ : ΖΚ$· ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΕΚ. Εἶναι δὲ καὶ τῶν τετραγώνων ΛΜ, ΝΞ, τὸ ΜΝ μέσον ἀνάλογον, (θ. 53, λῆμμα)· καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ = ΛΜ$ τὸ δὲ $ΖΚ = ΝΞ$· ἄρα καὶ τὸ $ΕΚ = ΜΝ$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΜΝ = ΛΞ$, (I. 43), τὸ δὲ $ΕΚ = ΔΘ$· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΥΦΧ καὶ τὸ ΝΞ. Εἶναι δὲ καὶ $ΑΚ = ΛΜ + ΝΞ$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΑΒ = ΣΤ = ΛΝ^2$. ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ ΑΙ, ΖΚ ἐδείχθησαν μέσα καὶ ἴσα πρὸς τὰ $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$ ἀντιστοίχως, ἄρα καὶ ἕκαστον τῶν $ΛΟ^2$, $ΟΝ^2$ εἶναι μέσον· ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΛΟ, ΟΝ εἶναι μέση, (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΑΙ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΕΚ, ἄρα καὶ τὸ ΛΜ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΜΝ, τουτέστι τὸ $ΛΟ^2$ πρὸς τὸ $ΛΟ \times ΟΝ$· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΟΝ· (VI. 1 καὶ θ. 11)· αἱ μέσαι ἄρα ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΕΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΛΟ \times ΟΝ$, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ \times ΟΝ$ εἶναι μέσον· ὥστε αἱ μέσαι ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον. Ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης (θ. 75)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

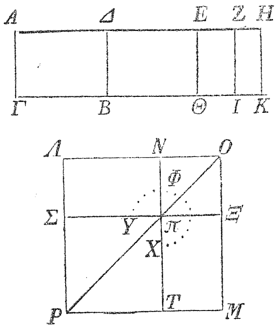
Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

94.

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἄς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τετάρτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ τὸ ΝΞ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ· ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.



Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ τετραγώνῳ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΑΗ) (ὁρισ. τρίτοι 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2 - ΗΔ^2}$ μήκει ἀσύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, (θ. 18). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν εἰς τὸ μέσον ἡ ΔΗ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει, ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Ἂς ἀχθῶσι λοιπὸν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ ἄρα ὅλον τὸ ΑΚ εἶναι ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί, ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι μέσον (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἄρα καὶ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ (VI. 1 καὶ θ. 11). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἂς ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπὸ τούτου ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον τὸ ΝΞ ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΛΟΜ. Ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ = ΕΗ^2$, ἄρα εἶναι $ΑΖ : ΕΗ = ΕΗ : ΖΗ$, (VI. 17). Ἀλλὰ $ΑΖ : ΕΗ = ΑΙ : ΕΚ$ καὶ $ΕΗ : ΖΗ = ΕΚ : ΖΚ$ (VI. 1)· ἄρα τὸ ΕΚ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΙ, ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ τῶν τετραγώνων ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, (θ. 53, λῆμμα) καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΙ = ΛΜ$, τὸ δὲ $ΖΚ = ΝΞ$· ἄρα καὶ τὸ $ΕΚ = ΜΝ$. Ἀλλὰ $ΕΚ = ΔΘ$, $ΜΝ = ΛΞ$, (I. 43)· ὅλον ἄρα τὸ $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ + ΝΞ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅλον τὸ ΑΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τὸ $ΛΜ + ΝΞ$, ἐξ ὧν $ΔΚ =$ γνώμων $ΥΦΧ +$ τετράγωνον ΝΞ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΑΒ = ΣΤ = ΛΝ^2$· ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ εἶναι ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ εἶναι μέσον καὶ εἶναι $ΔΚ = 2ΛΟ \times ΟΝ$, ἄρα τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$. Ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ $2ΛΟ \times ΟΝ$ μέσον. Ἡ ΛΝ ἄρα εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

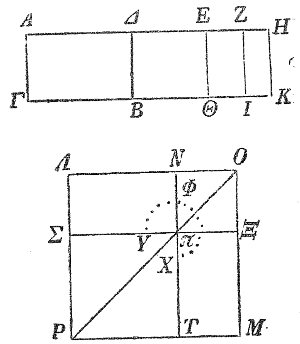
Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ϙε΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΓΑ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.



Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

95.

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πέμπτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{\text{ΑΗ}^2 - \text{ΔΗ}^2}$ μήκει ἀσύμ.), (ὁρισ. τρίτοι 5). Ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΔΗ^2, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα. Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΗ^2 ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα καὶ ἔστω τὸ ΑΖ $\times$ ΖΗ· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΑ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί, ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΔΗ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΓ, ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ῥητόν, (θ. 19). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΚ τετράγωνον τὸ ΝΞ, ὃν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ΛΟΜ· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς ΛΟ^2 + ΟΝ^2, ἄρα τὸ ἄθροισμα ΛΟ^2 + ΟΝ^2 εἶναι μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ 2ΛΟ $\times$ ΟΝ, καὶ αὐτὸ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ ΛΟ^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΟΝ^2· ἄρα αἱ ΛΟ, ΟΝ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν. Ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ σχηματίζουσα τὸ ὅλον μέσον (θ. 77)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

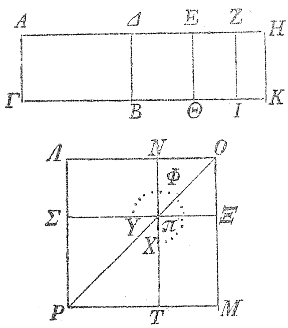
Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ϙϛʹ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.



Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ

96.

Ἐὰν ὀρθογώνιον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἕκτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἕκτης ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΔ ἡ ΔΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεμία αὐτῶν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΑΓ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ὅλης τῆς ΑΗ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΔΗ) (όρισ. τρίτοι 6). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΑΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΑΗ, $\sqrt{ΑΗ^2 - ΗΔ^2}$ μήκει ἀσύμ.), ἐὰν ἄρα παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἓν τέταρτον τοῦ $ΔΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, (θ. 18). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΔΗ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΗ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου (ὀρθ.) νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $ΑΖ \times ΖΗ$· ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ. Εἶναι δὲ $ΑΖ : ΖΗ = ΑΙ : ΖΚ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΚ, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥηταὶ ΑΗ, ΑΓ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ΑΚ εἶναι μέσον, (θ. 21). Πάλιν, ἐπειδὴ αἱ ΑΓ, ΔΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι καὶ τὸ ΔΚ μέσον, (θ. 21). Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΑΗ, ΗΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα καὶ ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΔ. Εἶναι δὲ $ΑΗ : ΗΔ = ΑΚ : ΚΔ$, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΔ, (θ. 11). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν πρὸς μὲν τὸ ΑΙ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΛΜ, ἀπὸ τούτου δὲ ἂς ἀφαιρεθῇ πρὸς τὸ ΖΚ ἰσοδύναμον τετράγωνον τὸ ΝΞ ὂν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν· ἄρα τὰ τετράγωνα ΛΜ, ΝΞ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον, (VI. 26). Ἔστω διαγώνιος αὐτῶν ἡ ΟΡ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ὁμοίως πρὸς τὰ προηγούμενα ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι ἡ σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ εἶναι μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ ΔΚ ἐδείχθη μέσον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$, καὶ τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$ εἶναι μέσον. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΚ ἐδείχθη ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΔΚ, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $ΛΟ^2 + ΟΝ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΛΟ \times ΟΝ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΑΙ εἶναι ἀσύμ-

ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον ἔτι τε τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν. ἡ ἄρα ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

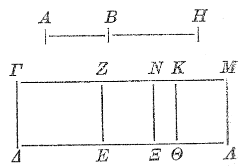
Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ϙϛ΄.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω, διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, καί ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, μέσον ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ,ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ τῷ ΖΛ· ὡς δὲ τὸ ΔΜ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ μετρον πρὸς τὸ ΖΚ, ἄρα καὶ τὸ $ΛΟ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΟΝ^2$· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον αὐτῶν. Ἄρα ἡ ΛΝ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον, (θ. 78)· καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου τὸ ὅλον μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

97.

Τὸ τετράγωνον ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΑΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΒΗ· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ.73). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ $ΑΗ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ, πρὸς δὲ τὸ $ΒΗ^2$ ἰσοδύναμον τὸ ΚΛ. Ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$· ἐκ τῶν ὁποίων $ΓΕ = ΑΒ^2$· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$, (ΙΙ. 7). Ἂς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, καὶ εἶναι $ΔΜ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἄρα τὸ ΔΜ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Πάλιν, ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$, ἄρα τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ εἶναι $ΑΗ^2 + ΗΒ^2 = ΓΛ$ καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$· ἄρα τὸ ΔΜ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $ΔΜ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ$, (VI. 1). Ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πρώτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$, (θ. 53, λῆμμα), καὶ εἶναι $ΑΗ^2 = ΓΘ$, $ΒΗ^2 = ΚΛ$, $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, ἄρα καὶ τὸ ΝΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ΓΘ, ΚΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$.

ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν [ἐστι] καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καί ἐστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

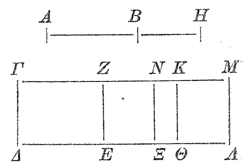
Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Οη'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΛ. ῥητὸν δέ [ἐστι] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ῥητὸν ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΖΛ, ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.



Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλ-

Ἀλλὰ ΓΘ : ΝΛ = ΓΚ : ΝΜ· καὶ ΝΛ : ΚΛ = ΝΜ : ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα τὸ ΓΚ × ΚΜ = $ΝΜ^2$, (VI. 17) = 1/4 $ΖΜ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$, εἶναι καὶ τὸ ΓΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Εἶναι δὲ ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ. 11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΓΚ × ΚΜ = 1/4 $ΖΜ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὀρθογωνίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ εἶναι σύμμετρος ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει σύμμ.), (θ. 17). Καὶ εἶναι ἡ ΓΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι πρώτη ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

98.

Τὸ τετράγωνον πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν.

Ἔστω πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἔστω ἡ ΒΗ προσαρμόζουσα πρὸς τὴν ΑΒ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι ὀρθογώνιον ῥητόν, (θ. 74). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΑΗ^2$, σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, καὶ ὀρθογώνιον τὸ ΚΛ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$, σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ = $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ΓΛ = $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἐξ ὧν $ΑΒ^2$ = ΓΕ, ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ 2ΑΗ × ΗΒ = ΖΛ. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ 2ΑΗ × ΗΒ· ἄρα τὸ ΖΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα καὶ ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ τουτέστι τὸ ΓΛ εἶναι μέσον, τὸ δὲ 2ΑΗ × ΗΒ τουτέστι τὸ ΖΛ, εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ δευτέρα ἀποτομή.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν παληλος ἡ ΝΞ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ΚΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΚ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ [καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΗ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΓΜ]· ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

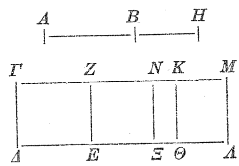
Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Qθ΄.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ [καί ἐστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ]· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει



ράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς $AH \times HB$. Καὶ ἐπειδὴ τῶν τετραγώνων AH^2, HB^2 τὸ $AH \times HB$ εἶναι μέσον ἀνάλογον, (θ. 53, λῆμμα) καὶ τὸ μὲν $AH^2 = \Gamma\Theta$, τὸ δὲ $AH \times HB = N\Lambda$, τὸ δὲ $BH^2 = K\Lambda$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. Ἀλλὰ $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$ καὶ $N\Lambda : K\Lambda = NM : MK$, (VI. 1)· ὡς ἄρα $\Gamma K : NM = NM : KM$· ἄρα τὸ $\Gamma K \times KM = NM^2 = 1/4\ ZM^2$ [καὶ ἐπειδὴ τὸ AH^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ BH^2, εἶναι καὶ τὸ ΓΘ σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστι ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ τὸ $\Gamma K \times KM = 1/4\ MZ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει σχῆμα τετράγωνον, καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, ἄρα τὸ ΓM^2 ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓM^2, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμ.), (θ. 17). Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα εἶναι δευτέρα ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

99.

Τὸ τετράγωνον δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν.

Ἔστω δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τρίτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ μέσαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι περιέχουσαι μέσον, (θ. 75). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ BH^2 ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΚΘ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΚΛ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$ [καὶ εἶναι μέσον τὸ ἄθροισμα $AH^2 + HB^2$]· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, ἐξ ὧν τὸ $\Gamma E = AB^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $\Lambda Z = 2AH \times HB$ (II. 7). Ἂς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν καὶ πρὸς τὴν ΓΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AH \times HB$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $AH \times HB$· ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα καὶ ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙϛ'.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΗΒ· ἄρα καὶ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΑΗ \times ΗΒ$, (θ. 21, λῆμμα καὶ θ. 11). Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι σύμμετρον τὸ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, πρὸς δὲ τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι σύμμετρον τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$· ἄρα τὰ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι ἀσύμμετρα, (θ. 13). Ἀλλὰ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2 = ΓΛ$, καὶ $2ΑΗ \times ΗΒ = ΖΛ$· ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ $ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΖΜ$, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΜ, (θ. 11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τρίτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$, ἄρα καὶ τὸ ΓΘ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ (VI. 1 καὶ θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΗ^2 = ΓΘ$, τὸ δὲ $ΗΒ^2 = ΚΛ$, τὸ δὲ $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$. Ἀλλὰ $ΓΘ : ΝΛ = ΓΚ : ΝΜ$, καὶ $ΝΛ : ΚΛ = ΝΜ : ΚΜ$, (VI. 1)· ἄρα $ΓΚ : ΜΝ = ΜΝ : ΚΜ$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2 = 1/4\ ΖΜ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $1/4\ ΖΜ^2$ ὀρθογώνιον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα, καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς σύμμετρα, τὸ $ΓΜ^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει σύμμ.). Καὶ οὐδεμία τῶν ΓΜ, ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τρίτη ἀποτομή.

Τὸ τετράγωνον ἄρα δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

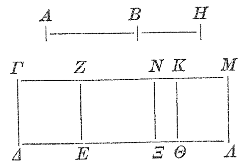
100.

Τὸ τετράγωνον ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τετάρτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· ἄρα αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των τὸ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ \times ΗΒ$ μέσον, (θ.76). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ $ΑΗ^2$ ἴσον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ $ΒΗ^2$ ἴσον τὸ ΚΛ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$. Καὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ ῥητόν· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ

καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΖΛ, καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ



παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ,ΗΒ. ἴσον δέ [ἐστι] τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ,ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστίν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

ρα´.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα καὶ ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ.20). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἐξ ὧν τὸ ΓΕ εἶναι $= ΑΒ^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$, (Π.7). Ἄς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς μίαν τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ΖΛ, ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ ἀσύμμετρος *μήκει* πρὸς τὴν ΓΔ, (θ.22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι μέσον, ἄρα τὸ $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$. Εἶναι δὲ τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ καὶ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$· ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Ὡς δὲ $ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΜΖ$ (VI.1)· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ, (θ.11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή.

Διότι, ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΓΘ = ΑΗ^2$ τὸ δὲ $ΚΛ = ΗΒ^2$· ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ$ (VI.1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ.11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν $ΑΗ^2$, $ΗΒ^2$ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $ΑΗ \times ΗΒ$, (θ. 53, λῆμμα) καὶ τὸ μὲν $ΑΗ^2 = ΓΘ$, τὸ δὲ $ΗΒ^2 = ΚΛ$, τὸ δὲ $ΑΗ \times ΗΒ = ΝΛ$, ἄρα τῶν ΓΘ, ΚΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ ΝΛ· εἶναι ἄρα $ΓΘ : ΝΛ = ΝΛ : ΚΛ$. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΘ : ΝΛ = ΓΚ : ΝΜ$, καὶ $ΝΛ : ΚΛ = ΝΜ : ΚΜ$, (VI.1)· ὡς ἄρα ἡ $ΓΚ : ΜΝ = ΜΝ : ΚΜ$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΓΚ \times ΚΜ = ΜΝ^2 = {}^1/_4\ ΖΜ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ παρὰ τὴν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ ὀρθογώνιον τὸ $ΓΚ \times ΚΜ$ ἴσον πρὸς τὸ ${}^1/_4\ ΖΜ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμ.), (θ.18). Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΓΜ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (ὁρισ. τρίτοι 4).

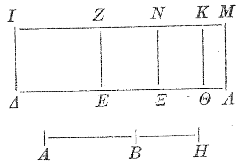
Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

101

Τὸ τετράγωνον τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον π α ρ ὰ ῥ η τ ὴ ν π α ρ α β α λ λ ό μ ε ν ο ν π λ ά τ ο ς π ο ι ε ῖ ἀ π ο-τ ο μ ὴ ν π έ μ π τ η ν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστίν· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ



ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι καί [ἐστιν] ἴσον τῷ ΖΛ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει, καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙβ'.

Τ ὸ ἀ π ὸ τ ῆ ς μ ε τ ὰ μ έ σ ο υ μ έ σ ο ν τ ὸ ὅ λ ο ν π ο ι ο ύ σ η ς σχηματιζούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος πέμπτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ $ΓΕ = ΑΒ^2$ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον, τὸ δὲ διπλάσιον ὀρθογώνινο αὐτῶν ῥητὸν (θ.77). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΘ ἴσον πρὸς τὸ $ΑΗ^2$, καὶ τὸ ΚΛ ἴσον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$· ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$. Τὸ δὲ ἄθροισμα $ΑΗ^2 + ΗΒ^2$ εἶναι καὶ μέσον· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ ὅλον τὸ $ΓΛ = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$, ἐξ ὧν τὸ $ΓΕ = ΑΒ^2$, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $ΖΛ = 2ΑΗ \times ΗΒ$. Ἄς τμηθῇ λοιπὸν ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς μίαν τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, $ΝΛ = ΑΗ \times ΗΒ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $2ΑΗ \times ΗΒ$ εἶναι ῥητὸν καὶ ἴσον πρὸς ΖΛ, ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι ῥητόν. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ,(θ.20). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ΓΛ εἶναι μέσον, τὸ δὲ ΖΛ εἶναι ῥητόν, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Εἶναι δὲ ΓΛ : ΖΛ = ΓΜ : ΜΖ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ, (θ.11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί· αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή (θ. 73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ πέμπτη ἀποτομή.

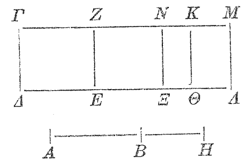
Διότι καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον $ΓΚ \times ΚΜ$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΝΜ^2$, τουτέστι τὸ $^1/_4\ ΖΜ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΑΗ^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $ΗΒ^2$, εἶναι δὲ τὸ μὲν $ΑΗ^2 = ΓΘ$, τὸ δὲ $ΗΒ^2 = ΚΛ$, ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ ΓΘ : ΚΛ = ΓΚ : ΚΜ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ.11). Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΓΜ, ΜΖ καὶ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΜ ἔχει παραβληθῇ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ $^1/_4\ ΖΜ^2$, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει τετράγωνον σχῆμα καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς ἀσύμμετρα, ἄρα τὸ $ΓΜ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΜΖ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{ΓΜ^2 - ΜΖ^2}$ μήκει ἀσύμμ.), (θ. 18). Καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἡ ἀποτομὴ ἄρα ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

102.

Τὸ τετράγωνον τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾿ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον καὶ ἀσύμμετρον τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

σχηματιζούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος ἕκτην ἀποτομήν.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ AB^2 σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι ἕκτη ἀποτομή.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ΑΗ, ΗΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι μέσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των καὶ τὸ διπλάσιον ὀρθογώνιον $AH \times HB$, καὶ τὸ $AH^2 + HB^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2\,AH \times HB$, (θ.78). Ἂς παραβληθῇ λοιπὸν παρὰ τὴν ΓΔ πρὸς μὲν τὸ AH^2 ἴσον τὸ ΓΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΚ, πρὸς δὲ τὸ HB^2 ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$· ἄρα καὶ τὸ ΓΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΜ· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 22). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, ἐξ ὧν τὸ $\Gamma E = AB^2$, τὸ ὑπόλοιπὸν ἄρα τὸ $Z\Lambda = 2AH \times HB$, (II.7). Καὶ εἶναι τὸ $2AH \times HB$ μέσον· ἄρα καὶ τὸ ΖΛ εἶναι μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΜ· ἄρα ἡ ΖΜ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ.22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $AH^2 + HB^2$ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $2AH \times HB$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $AH^2 + HB^2 = \Gamma\Lambda$, τὸ δὲ $2AH \times HB = Z\Lambda$, ἄρα τὸ ΓΛ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΖΛ. Ὡς δὲ $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : MZ$· ἄρα ἡ ΓΜ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΜΖ (θ.11). Καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ῥηταί. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΓΜ, ΜΖ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἀποτομή, (θ.73).

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἕκτη ἀποτομή.

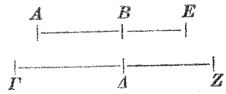
Διότι ἐπειδὴ $Z\Lambda = 2AH \times HB$, ἂς τμηθῇ ἡ ΖΜ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $AH \times HB$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΗ, ΗΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, ἄρα καὶ τὸ AH^2 εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ HB^2. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ $AH^2 = \Gamma\Theta$, πρὸς δὲ τὸ $HB^2 = K\Lambda$· ἄρα τὸ ΓΘ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΚΛ. Ὡς δὲ $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$, (VI.1)· ἄρα ἡ ΓΚ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ, (θ.11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν AH^2, HB^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $AH \times HB$, (θ. 53 λῆμμα) καὶ εἶναι $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = K\Lambda$, $AH \times HB = N\Lambda$, ἄρα καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ τὸ ΝΛ εἶναι μέσον ἀνάλογον· εἶναι ἄρα $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ ΓM^2 ὑπερέχει τοῦ MZ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (δηλ. ΓΜ, $\sqrt{\Gamma M^2 - MZ^2}$ μ. ἀσύμ), (θ. 18). Καὶ οὐδεμία αὐτῶν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι ἕκτη ἀποτομή (ὁρισ. τρίτοι 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ργ'.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα προς ἕν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι [ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.



Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή τῇ ΑΒ].

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὴ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ [τῆς ΕΒ] μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ,ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρδ'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΒ.

103.

Ἡ πρὸς τὴν ἀποτομὴν μήκει σύμμετρος εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ AB καὶ πρὸς τὴν AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν AB.

Διότι ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι ἀποτομή, ἔστω προσαρμόζουσα πρὸς αὐτὴν ἡ BE· ἄρα αἱ AE, EB εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 73). Καὶ ἂς γίνῃ BE : ΔZ = AB : ΓΔ, (VI. 12)· καὶ ὡς ἄρα εἷς ὅρος πρὸς ἕνα οὕτως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας πρὸς τὸ ἄθροισμα ὅλων, (V. 12)· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ AE : ὅλην τὴν ΓZ = AB : ΓΔ. Εἶναι δὲ μήκει σύμμετρος ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ μὲν AE εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ BE πρὸς τὴν ΔZ, (θ.11). Καὶ αἱ AE, EB εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΓZ, ZΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ.13) [ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομή, (θ.73).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν AB].

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς AE : ΓZ = BE :ΔZ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι AE : EB = ΓZ : ZΔ, (V.16). Τώρα, τὸ AE² θὰ ὑπερέχῃ τοῦ EB² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἢ συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν AE) ἢ ἀσυμμέτρου. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ AE² ὑπερέχῃ τοῦ EB² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ τὸ ΓZ² θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ZΔ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓZ), (θ.14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ AE εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι σύμμετρος καὶ ἡ ΓZ, (θ.12), ἐὰν δὲ ἡ BE (εἶναι σύμ. πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν) θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔZ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν AE, EB, καὶ οὐδεμία τῶν ΓZ, ZΔ, (θ.13). Ἐὰν δὲ τὸ AE² ὑπερέχῃ τοῦ EB² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν AE), καὶ τὸ ΓZ² θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ZΔ² κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓZ), (θ.14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ AE εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓZ, ἐὰν δὲ ἡ BE , θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔZ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν AE, EB, καὶ οὐδεμία τῶν ΓZ, ZΔ.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν AB· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

104.

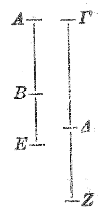
Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἀποτομὴν μέσης εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ μέσης ἡ AB, καὶ πρὸς τὴν AB ἔστω μήκει σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν AB.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι ἀποτομὴ μέσης, ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν αἱ ΑΕ,ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ [γάρ] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ]. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.



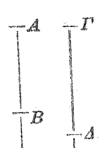
Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρε΄.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά· καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ]· σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.



Ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡ ΕΒ. Ἄρα αἱ μέσαι ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ.74-75). Καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ $AB : Γ\Delta = BE : \Delta Z$, (VI.12)· ἄρα ἡ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, (VI.12 καὶ θ.11). Αἱ δὲ μέσαι ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι μέσαι, (θ.23) δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης, (θ.74-75).

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ κατὰ τὴν τάξιν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι $AE : EB = ΓZ : Z\Delta$ [ἀλλ' ὡς μὲν $AE : EB = AE^2 : AE \times EB$, ὡς δὲ $ΓZ : Z\Delta = ΓZ^2 : ΓZ \times Z\Delta$], εἶναι ἄρα καὶ ὡς $AE^2 : AE \times EB = ΓZ^2 : ΓZ \times Z\Delta$ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς $AE^2 : ΓZ^2 = AE \times EB : ΓZ \times Z\Delta$]. Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ AE^2 πρὸς τὸ $ΓZ^2$· ἄρα καὶ τὸ $AE \times EB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓZ \times Z\Delta$, (V.16 καὶ θ.11). Ἐὰν λοιπὸν τὸ $AE \times EB$ εἶναι ῥητόν, θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓZ \times Z\Delta$, καὶ ἐὰν τὸ $AE \times EB$ εἶναι μέσον, εἶναι μέσον καὶ τὸ $ΓZ \times Z\Delta$, (θ. 23, πόρ.).

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἀποτομὴ μέσης καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

105.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα εἶναι ἐλάσσων.

Διότι ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι ἐλάσσων.

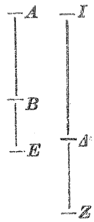
Διότι ἂς γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος· καὶ ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 76), ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $AE : EB = ΓZ : Z\Delta$, (V. 12 καὶ 16), εἶναι ἄρα καὶ $AE^2 : EB^2 = ΓZ^2 : Z\Delta^2$, (VI. 20, πόρ.). Διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι $AE^2 + EB^2 : EB^2 = ΓZ^2 + Z\Delta^2 : Z\Delta^2$ [καὶ ἐναλλάξ]· εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ BE^2 πρὸς τὸ ΔZ^2· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα $AE^2 + EB^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα $ΓZ^2 + Z\Delta^2$, (V. 16 καὶ θ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $AE^2 + EB^2$, (θ. 76)· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΓZ^2 + Z\Delta^2$, (ὁρ. 4). Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς $AE^2 : AE \times EB = ΓZ^2 : ΓZ \times Z\Delta$, σύμμετρον δὲ τὸ AE^2 πρὸς τὸ $ΓZ^2$, ἄρα καὶ τὸ $AE \times EB$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓZ \times Z\Delta$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $AE \times EB$, (θ. 76)· ἄρα καὶ τὸ $ΓZ \times Z\Delta$ εἶναι μέσον (θ. 23, πόρ.)· ἄρα αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἐλάσσων, (θ. 76)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρς'.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.



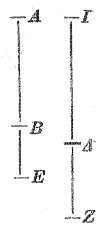
Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρζ'.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.



Ἔστω γάρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

106.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω ἡ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ἡ ΑΒ καὶ πρὸς τὴν ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον $ΑΕ \times ΕΒ$ ῥητόν, (θ. 75). Καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς θ. 103). Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἶναι $ΓΖ : ΖΔ = ΑΕ : ΕΒ$, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$, πρὸς δὲ τὸ $ΑΕ \times ΕΒ$ τὸ $ΓΖ \times ΖΔ$· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι τὸ μὲν ἄθροισμα $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ μέσον, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτῶν ῥητόν.

Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

107.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον εἶναι καὶ αὐτὴ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω ἡ ΑΒ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ (ὡς θ. 103). Αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν, (θ. 78). Καὶ εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη, (θ. 104), αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι πρὸς τὰς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρα· ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι σχηματίζουσαι καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν μέσον καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν.

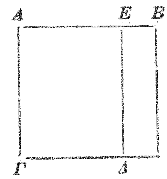
Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, (θ. 78)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

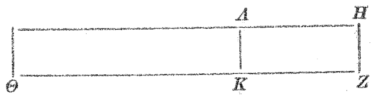
ρη'.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ μὲν ἄρα ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει. αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ.





Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι το ΕΓ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρθ'.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ

108.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητοῦ ὀρθογωνίου ἀφαιρεθῇ μέσον ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον χωρίον γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ τὸ μέσον ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ γίνεται μία ἐκ δύο ἀλόγων, ἢ ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Διότι ἄς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ πρὸς μὲν τὸ ΒΓ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ ἴσον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, πρὸς δὲ τὸ ΔΒ ἂς ἀφαιρεθῇ ἴσον τὸ ΗΚ· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ = ΛΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν ΒΓ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ΒΔ μέσον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ πρὸς τὸ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ πρὸς τὸ ΗΚ, ἄρα τὸ μὲν ΗΘ εἶναι ῥητόν, τὸ δὲ ΗΚ μέσον. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἡ μὲν ΖΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 20), ἡ δὲ ΖΚ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 22)· ἄρα ἡ ΖΘ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΚ, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΘ, ΖΚ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΚΖ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου, (θὰ εἶναι δηλ. ΘΖ, $\sqrt{ΘΖ^2 - ΖΚ^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι).

Ἂς ὑπερέχῃ πρότερον κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου. Καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΘΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 1). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ πρώτης ἀποτομῆς εἶναι ἀποτομή, (θ. 91). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, εἶναι ἀποτομή.

Ἐὰν δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν καὶ εἶναι ὅλη ἡ ΖΘ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι τετάρτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 4). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς εἶναι ἐλάσσων (θ. 94)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

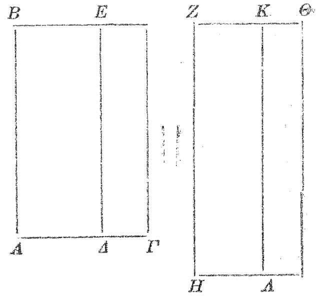
109.

Ἐὰν ἀπὸ μέσου ἀφαιρεθῇ ῥητὸν γίνονται ἄλλαι δύο ἄλογοι ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν τὸ ΒΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΕΓ γίνεται μία

ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.



Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμενη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

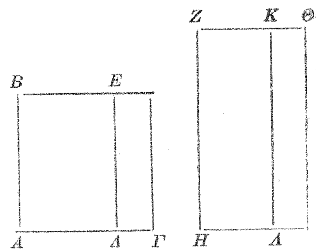
Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρι'.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ].



Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ ἐκ δύο ἀλόγων ἢ πρώτη ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ ἂς παραβληθῶσι τὰ ὀρθογώνια ὡς κατὰ τὸ προηγούμενον (108) θεώρημα. Συνεπῶς ἡ μὲν ΖΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ δὲ ΚΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ· ἄρα αἱ ΖΘ, ΖΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73), προσαρμόζουσα δὲ εἰς ταύτην ἡ ΖΚ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΘΖ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, (ΘΖ, $\sqrt{\Theta Z^2 - ZK^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΘZ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 2). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ μέσης, (θ. 92).

Ἐὰν δὲ τὸ ΘZ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ZK^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου, καὶ εἶναι ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι πέμπτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 5)· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΕΓ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον, (θ. 95)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

110.

Ἀπὸ μέσου ἀφαιρουμένου μέσου ἀσυμμέτρου πρὸς τὸ ὅλον γίνονται αἱ ὑπόλοιποι δύο ἄλογοι εὐθεῖαι ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι ἂς ἀφαιρεθῇ ὡς εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ τὸ μέσον ΒΔ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ὅλον. λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΓΕ εἶναι μία ἐκ δύο ἀλόγων ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης ἢ σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον.

Διότι, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν ΒΓ, ΒΔ εἶναι μέσον, καὶ τὸ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ΒΔ, θὰ εἶναι συνεπῶς ἑκάστη τῶν ΖΘ, ΖΚ ῥητὴ καὶ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, (θ. 22). Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΓ εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

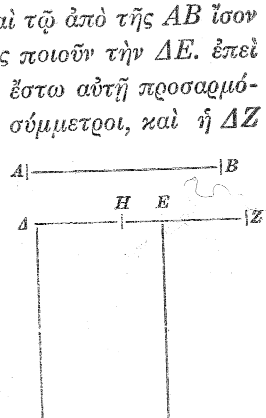
Εἰ δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ἀποτομὴ ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρια'.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατον, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶ ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ μεῖζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ



ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΗΚ, εἶναι καὶ ἡ ΘΖ ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΖΚ (VI. 1 καὶ θ. 11)· ἄρα αἱ ΖΘ, ΖΚ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. Τὸ τετράγωνον τῆς ΖΘ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ τετραγώνου τῆς ΖΚ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (δηλ. θὰ εἶναι ΖΘ, $\sqrt{ΖΘ^2 - ΖΚ^2}$ μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι)].

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΖΘ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΘ, ΖΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι τρίτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 3). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τρίτης ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον, καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος, καλεῖται δὲ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, (θ. 93)· ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

Ἐὰν δὲ τὸ $ΖΘ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΖΚ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς μήκει ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΘ) καὶ οὐδεμία τῶν ΘΖ, ΖΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ ΚΘ εἶναι ἕκτη ἀποτομὴ (ὁρισ. τρίτοι 6). Ἡ εὐθεῖα δὲ τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον πλευρῶν, ῥητῆς καὶ ἕκτης ἀποτομῆς, εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον, (θ. 96). Ἡ εὐθεῖα ἄρα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ εἶναι σχηματίζουσα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

111.

Ἡ ἀποτομὴ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι εἶναι· καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ πρὸς τὸ $ΑΒ^2$ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΔΕ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι ἀποτομή, ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη ἀποτομή, (θ. 97). Ἔστω προσαρμόζουσα εἰς αὐτὴν ἡ ΕΖ· ἄρα αἱ ΔΖ, ΖΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ $ΔΖ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΖΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (ΔΖ, $\sqrt{ΔΖ^2 - ΖΕ^2}$ σύμμετροι), καὶ ἡ ΔΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ (ὁρισ. τρίτοι 1). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι δυώνυμος, ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 60). Ἂς διαιρεθῇ αὕτη εἰς τὰ μονώνυμα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΔΗ· ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΕ, εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ $ΔΗ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΗΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΔΗ), καὶ τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον τὸ ΔΗ εἶναι εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ (ὁρισ. δευτ. 1). Καὶ ἡ ΔΖ ἄρα εἶναι πρὸς τὴν ΔΗ μήκει σύμμετρος, (θ. 12)· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ἡ ΗΖ εἶναι πρὸς τὴν ΔΖ μήκει σύμμετρος, (θ. 15). [Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι σύμμετρος

$ΔZ$, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ HZ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΔZ$ τῇ HZ μή-[κει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ $ΔZ$ τῇ EZ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH τῇ EZ μήκει. αἱ HZ, ZE ἄρα ῥηταί [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστίν ἡ EH. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα].

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον, ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὑτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ,

Μέσην,
Ἐκ δύο ὀνομάτων,
Ἐκ δύο μέσων πρώτην,
Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,
Μείζονα,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,
Δύο μέσα δυναμένην,
Ἀποτομήν,

πρὸς τὴν ΗΖ, (θ. 15), εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΖ, ἄρα καὶ ἡ ΗΖ εἶναι ῥητή. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΗΖ], εἶναι δὲ μήκει ἀσύμμετρος ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΕΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, (θ. 13). Ἄρα αἱ ΗΖ, ΖΕ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ῥητή· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ ἀποτομὴ ἄρα δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Π ό ρ ι σ μ α].

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε πρὸς τὴν μέσην οὔτε πρὸς ἀλλήλας εἶναι αἱ αὐταί.

Διότι τὸ μὲν τετράγωνον μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ῥητὴν καὶ μήκει ἀσύμμετρον πρὸς τὴν ῥητὴν εὐθεῖαν παρὰ τὴν ὁποίαν παράκειται, (θ. 22), τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος πρώτην ἀποτομήν, (θ. 97), τὸ δὲ τετράγωνον πρώτης ἀποτομῆς μέσης παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος δευτέραν ἀποτομήν, (θ. 98), τὸ δὲ τετράγωνον δευτέρας ἀποτομῆς μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τρίτην ἀποτομήν, (θ. 99), τὸ δὲ τετράγωνον ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν πραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος τετάρτην ἀποτομὴν (θ. 100), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς σχηματιζούσης μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον σχηματίζει πλάτος πέμπτην ἀποτομήν, (θ. 101), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς σχηματιζούσης μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ἕκτην ἀποτομήν, (θ. 102). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρουσι καὶ τοῦ πρώτου καὶ μεταξύ των, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι εἶναι ῥητή, μεταξύ των δέ, ἐπειδὴ κατὰ τὴν τάξιν δὲν εἶναι αἱ αὐταί, εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσι μεταξύ των. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἀποτομὴ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν δυώνυμον, (θ. 111), σχηματίζουσι δὲ παραβαλλόμεναι παρὰ ῥητὴν πλάτη αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἐν συνεχείᾳ, ἀποτομὰς κατὰ τὴν τάξιν της ἑκάστη, αἱ δὲ μετὰ τὴν δυώνυμον καὶ αὐταὶ ἐν συνεχείᾳ τὰς δυωνύμους κατὰ τὴν τάξιν της ἑκάστη, ἄρα ἄλλαι εἶναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἄλλαι αἱ μετὰ τὴν διώνυμον, ὥστε νὰ εἶναι ὅλαι αἱ ἄλογοι κατὰ τὴν τάξιν δεκατρεῖς, ἤτοι :

Μέση,
Δυώνυμος,
Ἐκ δύο μέσων πρώτη,
Ἐκ δύο μέσων δευτέρα,
Μείζων,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη,
Δύο μέσα δυναμένη,
Ἀποτομή,

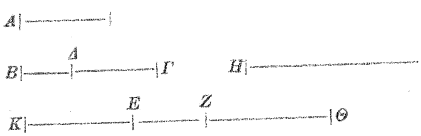
Μέσης ἀποτομὴν πρώτην,
Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν,
Ἐλάσσονα,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

[ριβ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ. ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δὲ ἐστιν ἡ ΚΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.



Πρώτη ἀποτομὴ μέσης,
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης,
Ἐλάσσων,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

§ 112.

Τὸ τετράγωνον ῥητῆς παραβαλλόμενον παρὰ τὴν δυώνυμον σχηματίζει πλάτος ἀποτομήν, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου καὶ συνάμα εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτά, καὶ ἀκόμη ἡ γινομένη ἀποτομὴ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, δυώνυμος δὲ ἡ ΒΓ, τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ $Α^2 = ΒΓ \times ΕΖ$· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰς ΓΔ, ΔΒ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ΕΖ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ.

Διότι ἔστω πάλιν $Α^2 = ΒΔ \times Η$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΒΓ \times ΕΖ = ΒΔ \times Η$, εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΔ = Η : ΕΖ$, (VI. 16). Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· ἄρα καὶ ἡ Η εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΖ, (VI. 16 καὶ 14)· ἔστω $Η = ΕΘ$· εἶναι ἄρα $ΓΒ : ΒΔ = ΘΕ : ΕΖ$· καὶ διὰ διαιρέσεως τοῦ λόγου, (V. ὁρ. 15) εἶναι $ΓΔ : ΒΔ = ΘΖ : ΖΕ$, (V. 17). Ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΘΖ : ΖΕ = ΖΚ : ΚΕ$· καὶ ὅλη ἄρα ἡ $ΘΚ : ΚΖ = ΖΚ : ΚΕ$· διότι ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων (V. 12). Ὡς δὲ ἡ $ΖΚ : ΚΕ = ΓΔ : ΔΒ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΘΚ : ΚΖ = ΓΔ : ΔΒ$. Εἶναι δὲ σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΒ^2$, (θ. 36)· ἄρα καὶ τὸ $ΘΚ^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΚΖ^2$, (VI. 20, πόρ. καὶ θ. 11). Καὶ εἶναι ὡς τὸ $ΘΚ^2 : ΚΖ^2 =$ ἡ $ΘΚ : ΚΕ$, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ εἶναι ἀνάλογοι (V. ὁρισ. 9). Ἄρα ἡ ΘΚ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΕ, (θ. 11)· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΚ, (θ. 15). Καὶ ἐπειδὴ $Α^2 = ΕΘ \times ΒΔ$, εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΕΘ \times ΒΔ$. Καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ· ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΔ, (θ. 20)· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΚ εἶναι ῥητή, (ὁρ. 3) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΔ, (θ. 12). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΓΔ : ΔΒ = ΖΚ : ΚΕ$, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΕ· ἄρα καὶ ἡ ΖΚ εἶναι ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΖΚ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73).

Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

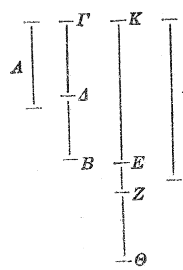
Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.



Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς Η. μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΕ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, Τὸ δὲ $ΓΔ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτήν, ($ΓΔ$, $\sqrt{ΓΔ^2 - ΔΒ^2}$ σύμμ. ἢ ἀσύμμ.).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ $ΓΔ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, καὶ τὸ $ΖΚ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΚΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΚ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΚ, (θ. 11 καὶ 12)· ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΕ, (θ. 12)· ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Ἐὰν δὲ τὸ $ΓΔ^2$ ὑπερέχῃ τοῦ $ΔΒ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΓΔ), καὶ τὸ $ΖΚ^2$ θὰ ὑπερέχῃ τοῦ $ΚΕ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΖΚ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΚ· ἐὰν δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδεμία τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἡ ΖΕ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα τὰ ΖΚ, ΚΕ εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου τὰ ΓΔ, ΔΒ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτά, καὶ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

113.

Τὸ τετράγωνον ῥητῆς παραβαλλόμενον παρὰ ἀποτομὴν σχηματίζει πλάτος τὴν δυώνυμον, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ συνάμα εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἀκόμη δὲ ἡ γινομένη δυώνυμος ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ἀποτομήν.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἔστω ἰσοδύναμον τὸ $ΒΔ \times ΚΘ$, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ῥητῆς Α παραβαλλόμενον παρὰ τὴν ἀποτομὴν ΒΔ νὰ σχηματίζῃ πλάτος τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ΒΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ΚΘ ἔχει τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΔ.

Διότι ἔστω πρὸς τὴν ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· ἄρα αἱ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ.73). Καὶ πρὸς τὸ $Α^2$ ἔστω ἴσον τὸ $ΒΓ \times Η$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Α^2$· ἄρα καὶ τὸ $ΒΓ \times Η$ εἶναι ῥητόν. Καὶ ἔχει παραβληθῆ παρὰ τὴν ῥητὴν ΒΓ· ἄρα ἡ Η εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, (θ. 20). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΒΓ \times Η$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $ΒΔ \times ΚΘ$, ἄρα εἶναι $ΓΒ : ΒΔ = ΚΘ : Η$, (VI. 16). Καὶ εἶναι ἡ ΒΓ μεγαλυτέρα τῆς ΒΔ· ἄρα καὶ ἡ ΚΘ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Η, (V.16 καὶ 14). Ἂς ληφθῆ $ΚΕ = Η$· ἄρα ἡ ΚΕ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΓΒ : ΒΔ = ΘΚ : ΚΕ$, δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $ΒΓ : ΓΔ = ΚΘ : ΘΕ$, (V.19,πόρ.). Ἂς γίνῃ ὡς ἡ $ΚΘ : ΘΕ = ΘΖ : ΖΕ$· ἄρα καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἡ $ΚΖ : ΖΘ = ΚΘ : ΘΕ = ΒΓ : ΓΔ$, (V.19).

τουτέστιν [ὡς] ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ· αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥστε ἡ ΚΖ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός [ἐστι] μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ μήκει. αἱ ΒΓ, ΓΔ δὲ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ ΚΘ.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά [ἐστι] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριδ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι

Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΚΘ : ΘΕ = ΚΖ : ΖΘ, ἀλλὰ ΚΘ : ΘΕ = ΘΖ : ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ΚΖ : ΖΘ = ΘΖ : ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας, (V.ὁρισ. 9)· καὶ ὡς ἄρα ΚΖ : ΖΕ = ΚΖ^2 : ΖΘ^2. Εἶναι δὲ τὸ ΚΖ^2 σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΘ^2· διότι αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι δυνάμει σύμμετροι· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΕ, (θ. 11)· ὥστε ἡ ΚΖ εἶναι μήκει σύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ΚΕ, (θ. 15). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΚΕ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ, (θ. 12). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΒΓ : ΓΔ = ΚΖ : ΖΘ, καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ΒΓ : ΚΖ = ΔΓ : ΖΘ, (V.16). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΓΔ, (θ. 11). Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ εἶναι ῥηταί, (ὁρ.3) δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 13)· ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36).

Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ ΒΓ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ΓΔ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ), καὶ τὸ ΚΖ^2 θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ΖΘ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΚΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΖ, (θ.12), ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΘ, ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ οὐδεμία τῶν ΚΖ, ΖΘ, (θ. 13).

Ἐὰν δὲ τὸ ΒΓ^2 ὑπερέχῃ τοῦ ΓΔ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΓ) καὶ τὸ ΚΖ^2 θὰ ὑπερέχῃ τοῦ ΖΘ^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΚΖ), (θ. 14). Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΒΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν θὰ εἶναι καὶ ἡ ΚΖ, ἐὰν δὲ ἡ ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΖΘ, (θ. 12), ἐὰν δὲ οὐδεμία τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ οὐδεμία τῶν ΚΖ, ΖΘ.

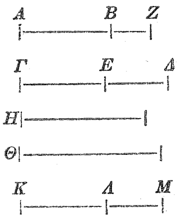
Ἄρα ἡ ΚΘ εἶναι δυώνυμος, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα τὰ ΚΖ, ΖΘ εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς τὰ ΒΓ, ΓΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἀκόμη ἡ ΚΘ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

114.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ δυωνύμου, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ῥητή.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ χωρίον ΑΒ × ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς δυωνύμου τῆς ΓΔ, τῆς ὁποίας μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου ΓΔ τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λότοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ΜΛ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΛΜ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.



Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Πόρισμα.

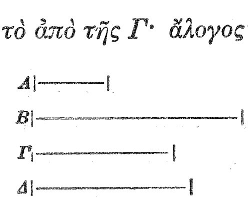
Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριε'.

Ἀ π ὸ μ έ σ η ς ἄ π ε ι ρ ο ι ἄ λ ο γ ο ι γ ί ν ο ν τ α ι, κ α ὶ ο ὐ δ ε μ ί α ο ὐ δ ε μ ι ᾷ τ ῶ ν π ρ ό τ ε ρ ο ν ἡ α ὐ τ ή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ· καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].



γον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς τὰ ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἔστω $Η^2 = ΑΒ \times ΓΔ$· λέγω ὅτι ἡ Η εἶναι ῥητή.

Διότι ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ πρὸς τὸ $Θ^2$ ἴσον ὀρθογώνιον ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ σχηματίζον πλάτος τὴν ΚΛ· ἄρα ἡ ΚΛ εἶναι ἀποτομή, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου τὰ ΓΕ, ΕΔ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, (θ.112). Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ εἶναι σύμμετροι πρὸς τὰς ΑΖ, ΖΒ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον· εἶναι ἄρα $ΑΖ : ΖΒ = ΚΜ : ΜΛ$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $ΑΖ : ΚΜ = ΒΖ : ΛΜ$, (V.16)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν ΚΛ εἶναι ὡς $ΑΖ : ΚΜ$ (V.19). Εἶναι δὲ σύμμετρος ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, (θ.12)· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΚΛ, (θ.11). Καὶ εἶναι $ΑΒ : ΚΛ = ΓΔ \times ΑΒ : ΓΔ \times ΚΛ$· (VI.1)· ἄρα καὶ τὸ $ΓΔ \times ΑΒ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $ΓΔ \times ΚΛ$, (θ.9). Εἶναι δὲ $ΓΔ \times ΚΛ = Θ^2$· ἄρα τὸ $ΓΔ \times ΑΒ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $Θ^2$. Πρὸς δὲ τὸ $ΓΔ \times ΑΒ$ εἶναι ἴσον τὸ $Η^2$· ἄρα τὸ $Η^2$ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ $Θ^2$. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $Θ^2$· ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $Η^2$· ἄρα ἡ Η εἶναι ῥητή. Καὶ $Η^2 = ΓΔ \times ΑΒ$.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ δυωνύμου, τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ῥητή.

Πόρισμα.

Καὶ γίνεται καὶ διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου φανερόν, ὅτι εἶναι δυνατὸν ῥητὸν χωρίον νὰ περιέχηται ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

115.

Ἀπὸ μέσης γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ Β καὶ ἔστω $Β \times Α = Γ^2$· ἄρα ἡ Γ εἶναι ἄλογος (ὁρ. 4)· διότι τὸ ὀρθογώνιον πλευρῶν ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον, (θ.20). Καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων (ἀλόγων) εἶναι ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων σχηματίζει πλάτος μέσην παραβαλλόμενον παρὰ ῥητήν. Πάλιν λοιπὸν ἔστω $Β \times Γ = Δ^2$· ἄρα τὸ $Δ^2$ εἶναι ἄλογον (θ.20). Ἄρα ἡ Δ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4)· καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν Γ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον ὁ τοιοῦτος συλλογισμός, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἀλόγων εἶναι ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

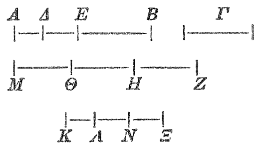
Anhang

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

1.

Ἄλλως τὸ α′ θεώρημα.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, $Γ$· καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ $Γ$, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB μεγέθους μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ ZM καὶ διῃρήσθω εἰς [τὰ] ἴσα τῷ $Γ$, καὶ ἔστω τὰ $MΘ$, $ΘH$, HZ, καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ BE, καὶ ἀπὸ τοῦ EA μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ $EΔ$, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως αἱ ἐν τῷ ZM διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ AB διαιρέσεσιν. γεγονέτωσαν ὡς αἱ BE, $EΔ$, $ΔA$, καὶ τῷ $ΔA$ ἕκαστον τῶν $KΛ$, $ΛN$, $NΞ$ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γινέσθω, ἕως αἱ διαιρέσεις τοῦ $KΞ$ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ZM.

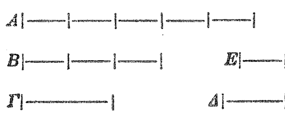


Καὶ ἐπεὶ τὸ BE μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ ἐστι τοῦ BA, τὸ BE μεῖζόν ἐστι τοῦ EA· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ $ΔA$. ἀλλὰ τὸ $ΔA$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΞN$· τὸ BE ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ $NΞ$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ $EΔ$ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ EA, μεῖζόν ἐστι τοῦ $ΔA$. ἀλλὰ τὸ $ΔA$ ἐστιν ἴσον τῷ $NΛ$· τὸ $EΔ$ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ $NΛ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΔB$ μεῖζόν ἐστι τοῦ $ΞΛ$. ἴσον δὲ τὸ $ΛA$ τῷ $ΛK$. ὅλον ἄρα τὸ BA μεῖζόν ἐστι τοῦ $ΞK$. ἀλλὰ τοῦ BA μεῖζόν ἐστι τὸ MZ· πολλῷ ἄρα τὸ MZ μεῖζόν ἐστι τοῦ $ΞK$. καὶ ἐπεὶ τὰ $ΞN$, $NΛ$, $ΛK$ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ τὰ $MΘ$, $ΘH$, HZ ἴσα ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ MZ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ $ΞK$, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $KΛ$ πρὸς τὸ ZH, οὕτως τὸ $KΞ$ πρὸς τὸ ZM. μεῖζον δὲ τὸ ZM τοῦ $KΞ$· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ HZ τοῦ $ΛK$. καί ἐστι τὸ μὲν ZH ἴσον τῷ $Γ$, τὸ δὲ $KΛ$ τῷ $AΔ$· τὸ $Γ$ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ $AΔ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἄλλως τὸ ϛ′.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A, B πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ $Γ$ πρὸς ἀριθμὸν τὸν $Δ$· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.



Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ $Γ$ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ A, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ E· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν $Γ$ ἀριθμόν, τὸ E πρὸς τὸ A. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ $Γ$ πρὸς τὸν $Δ$, τὸ A πρὸς τὸ B· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν $Δ$, τὸ E πρὸς τὸ B. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν $Δ$· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ E τὸ B. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ E τὸ A,

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

1.

Ἄλλως τὸ 1.

Ἂς ληφθῶσι δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ· καὶ ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι μικρότερον, λαμβανόμενον πολλὰς φορὰς θὰ γίνῃ κἄποτε μεγαλύτερον τοῦ μεγέθους ΑΒ, (V. ὁρισ. 4). Ἂς γίνῃ ὡς τὸ ΖΜ καὶ ἂς διαιρεθῇ εἰς τὰ ἴσα πρὸς τὸ Γ καὶ ἔστω ταῦτα τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἂς ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τοῦ ΕΑ ἂς ἀφαιρεθῇ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΔ καὶ ἂς γίνηται τοῦτο διαρκῶς μέχρις ὅτου αἱ εἰς τὸ ΖΜ διαιρέσεις γίνωσιν ἴσαι πρὸς τὰς διαιρέσεις εἰς τὸ ΑΒ. Ἔστω ὅτι ἔγιναν αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ καὶ ἔστω $ΔΑ = ΚΛ = ΛΝ = ΝΞ$, καὶ τοῦτο ἂς γίνῃ μέχρις ὅτου τὸ πλῆθος τῶν διαιρέσεων τοῦ ΚΞ γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν διαιρέσεων τοῦ ΖΜ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΒΑ, τὸ $ΒΕ > ΕΑ$· ἄρα εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ $ΔΑ = ΞΝ$· ἄρα $ΒΕ > ΝΞ$. Πάλιν, ἐπειδὴ $ΕΔ > {}^1/_2 ΕΑ$, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ $ΔΑ = ΝΛ$· ἄρα $ΕΔ > ΝΛ$. Ὅλον ἄρα τὸ $ΔΒ > ΞΛ$. εἶναι δὲ $ΔΑ = ΛΚ$. Ὅλον ἄρα τὸ $ΒΑ > ΞΚ$. Ἀλλὰ $ΜΖ > ΒΑ$· ἄρα τὸ ΜΖ εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπειδὴ $ΞΝ = ΝΛ = ΛΚ$, εἶναι δὲ καὶ $ΜΘ = ΘΗ = ΗΖ$, καὶ τὸ πλῆθος τῶν μερῶν τοῦ ΜΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μερῶν τοῦ ΞΚ, εἶναι ἄρα $ΚΛ : ΖΗ = ΚΞ : ΖΜ$, (V. 15). Εἶναι δὲ $ΖΜ > ΚΞ$· ἄρα $ΗΖ > ΛΜ$, (V. 14). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΖΗ = Γ$, τὸ δὲ $ΚΛ = ΑΔ$· ἄρα $Γ > ΑΔ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἄλλως τὸ 6.

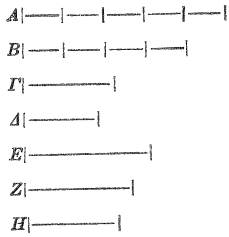
Διότι ἂς ἔχωσι λόγον μεταξὺ των δύο μεγέθη τὰ Α,Β ὃν λόγον ἔχει ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ· λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη εἶναι σύμμετρα.

Διότι ὅσας μονάδας ἔχει ὁ Γ εἰς τόσα ἴσα μέρη ἂς διαιρεθῇ τὸ μέγεθος Α καὶ πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν ἔστω ἴσον τὸ Ε· εἶναι ἄρα $1 : Γ = Ε : Α$, (V.15). Εἶναι δὲ καὶ $Γ : Δ = Α : Β$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $1 : Δ = Ε : Β$, (V.22). Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ· ἄρα καὶ τὸ Ε μετρεῖ τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστιν, καί ἐστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἄλλως τὸ θ'.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος· ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἐστιν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δέ Ε, Η ὁ Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β. αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσιν· λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γάρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.

ἐπειδὴ καὶ ἡ μονὰς μετρεῖ τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα μετρεῖ ἕκαστον τῶν Α, Β· ἄρα τὰ Α, Β εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ Ε εἶναι κοινὸν μέτρον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἄλλως τὸ 9.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β, ἔχει λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θ. 6). Ἂς ἔχῃ ὃν λόγον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω $\Gamma\times\Gamma=E$, $\Gamma\times\Delta=Z$, $\Delta\times\Delta=H$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $\Gamma^2=E$, $\Gamma\times\Delta=Z$, εἶναι ἄρα $\Gamma:\Delta$, τουτέστιν $A:B=E:Z$, (VII. 17). Ἀλλ' ὡς $A:B=A^2:A\times B$· εἶναι ἄρα $A^2:A\times B=E:Z$. Πάλιν, ἐπειδὴ $\Delta^2=H$ καὶ $\Gamma\times\Delta=Z$, εἶναι ἄρα $\Gamma:\Delta$, τουτέστιν $A:B=Z:H$. Ἀλλ' ὡς $A:B=A\times B:B^2$· εἶναι ἄρα $A\times B:B^2=Z:H$. Ἀλλὰ $A^2:A\times B=E:Z$· δι' ἴσου ἄρα εἶναι $A^2:B^2=E:H$, (V. 22). Εἶναι δὲ ἕκαστος τῶν Ε, Η τετράγωνος· διότι ὁ μὲν $E=\Gamma^2$, ὁ δὲ $H=\Delta^2$· ἄρα $A^2:B^2$ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλ' ἂς ἔχῃ τώρα τὸ A^2 πρὸς B^2 λόγον ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β.

Διότι ἔστω τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ἔστω $\Gamma\times\Delta=Z$· ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον $\Gamma:\Delta$ (VIII. 11). Καὶ ἐπειδὴ τῶν A^2, B^2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τὸ $A\times B$, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ, εἶναι ἄρα $A^2:A\times B=E:Z$. Ὡς δὲ $A\times B:B^2=Z:H$, ἀλλὰ $A^2:A\times B=A:B$. Αἱ Α, Β, ἄρα εἶναι σύμμετροι· διότι ἔχουσι λόγον ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, (θ. 6), τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· διότι $\Gamma:\Delta=E:Z$· διότι $\Gamma^2=E$ καὶ $\Gamma\times\Delta=Z$, (VII. 17)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ $\Gamma:\Delta=E:Z$.

4.

Εἰς τὸ 10.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ᾽ ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷον τῇ Α, προσεύρηται δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ.

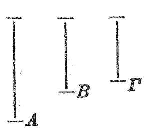
5.

Εἰς τὸ 13.

Εἰς τὸ ιγ´ λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α, καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

6.

Εἰς τὸ 18.

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν ἀσύμμετροι εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ᾽ ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται ῥηταὶ μήκει σύμμετροι ἐπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὗται οὕτως ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν.

4.

Εἰς τὸ 10.

Ἄρα πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ῥητὴν εὐθεῖαν, ἀφ' ἧς εἴπομεν ὅτι λαμβάνονται τὰ μέτρα, ὡς π.χ. πρὸς τὴν Α, εὑρέθη δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε· διότι ἀλόγους καθόλου καλεῖ τὰς μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους πρὸς τὴν ῥητήν.

5.

Εἰς τὸ 13.

Εἰς τὸ 13 λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο μεγέθη καὶ τὸ μὲν εἶναι σύμμετρον, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ αὐτό, τὰ μεγέθη θὰ εἶναι ἀσύμμετρα.

Διότι ἔστω δύο μεγέθη τὰ Α,Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α ἔστω σύμμετρον πρὸς τὸ Γ, τὸ δὲ Β ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Γ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ Β.

Διότι ἐὰν τὸ Α εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ Β, εἶναι δὲ καὶ τὸ Γ σύμμετρον πρὸς τὸ Α, ἄρα καὶ τὸ Γ εἶναι σύμετρον πρὸς τὸ Β· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

6.

Εἰς τὸ 18.

Διότι ῥητὰς καλεῖ τὰς πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ἢ μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι μήκει μὲν εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, δυνάμει δὲ σύμμετροι μόνον καὶ διὰ τοῦτο λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, δηλ. ἢ μήκει καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι μήκει σύμμετροι λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταί, ἐπακουομένου μήκει σύμμετροι, διότι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι· ἐὰν δὲ εἶναι μόνον δυνάμει σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, λέγονται καὶ αὐταὶ τοιουτοτρόπως, δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ εἶναι σύμμετροι εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ ἑξῆς· διότι, ἐπειδὴ ῥηταὶ εἶναι αἱ σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, τὰ δὲ σύμμετρα πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα, (θ.12), ἄρα αἱ ῥηταὶ εἶναι σύμμετροι.

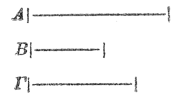
7.

Εἰς τὸ 20.

Λῆμμα.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον ἄλογός ἐστιν.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ. λέγω, ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.



Εἰ γὰρ ἔσται ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· οὕτως γὰρ [ἐστιν] ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Εἰς τὸ 23.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι ἑπομένου τοῦ, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

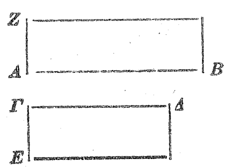
Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον. ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσιν, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

9.

Εἰς τὸ 27.

Λῆμμα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιῳοῦν καὶ ἄλλου τινὸς δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινά.



Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιονοῦν, ἄλλος δέ τις ὁ ΓΕ. δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΔΕ, καὶ τῷ ΔΕ ἴσον παρὰ τὸν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΕ

7.

Εἰς τὸ 20.

Λῆμμα.

Ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἄλογον χωρίον εἶναι ἄλογος.

Διότι ἄς δύναται ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ A^2 ἔστω ἰσοδύναμον πρὸς ἄλογον χωρίον. Λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι ἄλογος.

Διότι ἐὰν θὰ εἶναι ῥητὴ ἡ Α θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ A^2· διότι τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τοὺς ὁρισμοὺς (ὅρ. 4). Ἀλλὰ δὲν εἶναι· ἄρα ἡ Α εἶναι ἄλογος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Εἰς τὸ 23, πόρισμα.

Ὑπάρχουσι δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι μήκει μὲν εἶναι ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μέσην, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διότι εἶναι σύμμετροι δυνάμει πρὸς τὴν μέσην καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ' ὃ μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἢ δηλ. μήκει καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι μήκει σύμμετροι, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ὑπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει εἶναι σύμμετροι· ἐὰν δὲ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, λέγονται καὶ τοιουτοτρόπως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ὅτι δὲ αἱ μέσαι εἶναι σύμμετροι, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ αἱ μέσαι εἶναι πρὸς μέσην τινα σύμμετροι, τὰ δὲ σύμμετρα πρὸς τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ μεταξύ των σύμμετρα, ἄρα αἱ μέσαι εἶναι σύμμετροι.

9.

Εἰς τὸ 27.

Λῆμμα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εἰς οἱονδήποτε λόγον καὶ ἄλλου τινος νὰ γίνῃ ὡς ὁ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως ὁ ἄλλος πρὸς ἄλλον τινά.

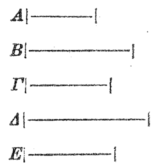
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΓΔ ἔχοντες λόγον πρὸς ἀλλήλους οἱονδήποτε, ἄλλος δὲ ἀριθμὸς ὁ ΓΕ. Πρέπει νὰ γίνῃ τὸ ζητηθέν.

Ἄς κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον πλευρῶν ΔΓ, ΓΕ, τὸ ΔΕ, καὶ πρὸς τὸ ΔΕ ἰσοδύναμον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ ἄς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ σχηματίζον πλάτος τὴν ΑΖ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΔΕ=ΒΖ εἶναι *παραλληλόγραμμον τῷ ΒΖ παραλληλογράμμῳ, ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΓΕ πρὸς τὸν ΑΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

10.

Λῆμμα εἰς τὸ κθ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπ' ἄλλης τινός.



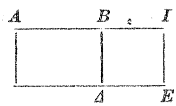
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, εὐθεῖα δὲ ἡ Γ, καὶ δέον ἐστὶ ποιῆσαι τὸ προκείμενον. πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς τὴν Δ, ἀλλ' ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε τετράγωνον.

11.

Λῆμμα εἰς τὸ λα'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δή, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



12.

Λῆμμα εἰς τὸ λβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ.

δὲ ταῦτα καὶ ἰσογώνια, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι, (VI. 14), ἄρα εἶναι $ΑΒ : ΓΔ = ΓΕ : ΑΖ$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Λῆμμα εἰς τὸ 29.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας νὰ γίνῃ ὡς ὁ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας πρὸς τὸ τετράγωνον ἄλλης τινός.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α,Β, εὐθεῖα δὲ ἡ Γ, καὶ ζητεῖται νὰ γίνῃ ἡ ἀνωτέρω κατασκευή. Διότι ἂς γίνῃ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ἡ εὐθεῖα Γ πρὸς ἄλλην τινα τὴν Δ, (θ. 6, πόρ), καὶ ἂς ληφθῇ τῶν Γ,Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε, (VI. 13). Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $Α : Β = Γ : Δ$, ἀλλὰ $Γ : Δ = Γ^2 : Ε^2$ (V. ὁρ. 9), ἄρα $Α : Β = Γ^2 : Ε^2$.

11.

Λῆμμα εἰς τὸ 31.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι εἰς λόγον τινα, θὰ εἶναι ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς δύο πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ εἰς λόγον τινά· λέγω, ὅτι εἶναι $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ \times ΒΓ : ΒΓ^2$. Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ τετράγωνον αὐτῆς τὸ ΒΔΕΓ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ. Εἶναι φανερὸν ὅτι $ΑΒ : ΒΓ =$ τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον (VI.1). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΔ = ΑΒ \times ΒΓ$· διότι $ΒΓ = ΒΔ$· τὸ δὲ $ΒΕ = ΒΓ^2$· ὡς ἄρα $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ \times ΒΓ : ΒΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

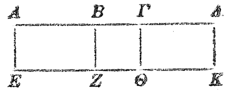
12.

Λῆμμα εἰς τὸ 32.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρεῖς εὐθεῖαι εἰς λόγον τινά, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν πρώτην καὶ τὴν μέσην πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν μέσην καὶ τὴν ἐλαχίστην.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι εἰς λόγον τινὰ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι εἶναι $ΑΒ : ΓΔ = ΑΒ \times ΒΓ : ΒΓ \times ΓΔ$.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, διὰ δὲ τῶν Β,Γ,Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ,ΓΘ,ΔΚ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΚ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΚ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.



Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Εἰς τὸ λῆμμα τοῦ 32.

Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ· ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. καί ἐστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ,ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ,ΑΓ.

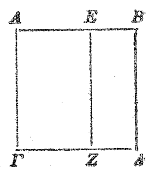
14.

Λῆμμα εἰς τὸ 33.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω, ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. φανερὸν οὖν, ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· ἴση γὰρ ἡ ΒΔ τῇ ΑΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΕ = ΒΓ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ ἡ ΕΚ, διὰ δὲ τῶν σημείων Β, Γ, Δ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΕ αἱ ΖΒ, ΓΘ, ΔΚ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΑΒ : ΒΓ = ΑΖ : ΒΘ, (VI. 1), ὡς δὲ ΒΓ : ΓΔ = ΒΘ : ΓΚ, (VI. 1), δι' ἴσου ἄρα εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΑΖ : ΓΚ, (V. 22). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΖ = ΑΒ × ΒΓ· διότι ΑΕ = ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ = ΒΓ × ΓΔ· διότι ΒΓ = ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα ὑπάρχωσι τρεῖς εὐθεῖαι εἰς λόγον τινά, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὀρθ. τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ τρίτης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Εἰς τὸ λῆμμα τοῦ 32.

Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΓ καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, θὰ εἶναι ἴσον τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΑΖ· διότι ἕκαστον αὐτῶν εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, (Ι. 41). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΕΓ = ΒΓ × ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ = ΒΑ × ΑΓ. Ἄρα τὸ ΒΓ × ΑΔ = ΒΑ × ΑΓ.

14.

Λῆμμα εἰς τὸ 33.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα θὰ εἶναι ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μεγαλυτέρας πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μικροτέρας.

Διότι εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω, ὅτι ΑΕ : ΕΒ = ΒΑ × ΑΕ : ΑΒ × ΒΕ.

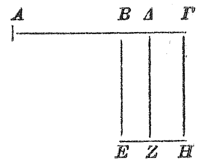
Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ τετράγωνον αὐτῆς τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ΑΓ, ΒΔ ἡ ΕΖ. Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΑΖ : ΖΒ, (VI. 1). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΖ = ΒΑ × ΑΕ· διότι ΑΓ = ΑΒ· τὸ δὲ ΖΒ = ΑΒ × ΒΕ· διότι ΒΔ = ΑΒ. Ὡς ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΒΑ × ΑΕ : ΑΒ × ΒΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Λ ῆ μ μ α ε ἰ ς τ ὸ 34.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ· διπλασίων δέ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ· τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ε ἰ ς τ ὸ 36.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐ κ δ ύ ο ὀ ν ο μ ά τ ω ν διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν συγκεῖσθαι κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητόν, καθ᾿ ὃ ῥητόν.

17.

Ε ἰ ς τ ὸ 37.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν.

18.

Ε ἰ ς τ ὸ 38.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν διὰ το μέσον περιέχειν τὸ ὑπ᾿ αὐτῶν καὶ μὴ ῥητόν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, δῆλον. εἰ γάρ ἔσται ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. ἀλλὰ καὶ ἄλογος· ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

15.

Λῆμμα εἰς τὸ 34.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι $AB \times B\Gamma = 2AB \times B\Delta$.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΒΕ, καὶ ἂς ληφθῇ $BE = BA$ καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $\Delta B : \Delta\Gamma = BZ : \Delta H$, (VI. 1), διὰ συνθέσεως, (V. 18) ἄρα εἶναι $B\Gamma : \Delta\Gamma = BH : \Delta H$· Εἶναι δὲ $B\Gamma = 2\Delta\Gamma$· ἄρα $BH = 2\Delta H$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $BH = AB \times B\Gamma$· διότι $AB = BE$· τὸ δὲ $\Delta H = AB \times B\Delta$· διότι $B\Delta = \Delta\Gamma$ καὶ $AB = \Delta Z$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Εἰς τὸ 36.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν δυώνυμον, διότι ἀποτελεῖται ἐκ δύο ῥητῶν, καλῶν κύριον ὄνομα (μονώνυμον) τὸ ῥητόν, καθ' ὃ ῥητόν.

17.

Εἰς τὸ 37.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην, διότι περιέχει ῥητὸν καὶ προηγεῖται τὸ ῥητόν.

18.

Εἰς τὸ 38.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διότι τὸ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν εἶναι μέσον καὶ οὐχὶ ῥητόν, ἕπεται δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου εἶναι ἄλογον, εἶναι φανερόν. Διότι ἐὰν θὰ εἶναι ῥητὸν καὶ ἔχῃ παραβληθῇ παρὰ ῥητήν, θὰ εἶναι καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτοῦ ῥητὴ (θ. 22). Ἀλλὰ εἶναι καὶ ἄλογος· ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἄλογον.

19.

Εἰς τὸ 39.

'Εκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπο τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ· εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΔΑ.

20.

Εἰς τὸ 40.

῾Ρητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητόν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν πρῶτον ἐκάλεσεν.

21.

Εἰς τὸ 41.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην διὰ το δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

22.

Εἰς τοὺς δευτέρους ὁρισμούς.

῞Εξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μέν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δευτέραν δέ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλασσον, διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον, τρίτην δέ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκει-

19.

Εἰς τὸ 39.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διότι τὸ ῥητὸν ἄθροισμα $AB^2 + B\Gamma^2$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2AB \times B\Gamma$, καὶ δέον ἡ ὀνομασία νὰ τίθεται ἐκ τῆς τοιαύτης τῶν ῥητῶν. Ὅτι δὲ $AB^2 + B\Gamma^2 > 2AB \times B\Gamma$, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αἱ AB, $B\Gamma$ εἶναι ἄνισοι. Διότι ἐὰν ἦσαν ἴσαι θὰ ἦτο $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \times B\Gamma$, καὶ θὰ ἦτο τὸ ὀρθογώνιον $AB \times B\Gamma$ ῥητόν· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν· ἄρα αἱ AB, $B\Gamma$ εἶναι ἄνισοι. Ἔστω μεγαλυτέρα ἡ AB καὶ ἂς ληφθῇ $B\Delta = B\Gamma$· ἄρα εἶναι $AB^2 + B\Delta^2 = 2AB \times B\Delta + \Delta A^2$, (II. 7). Εἶναι δὲ $\Delta B = B\Gamma$· ἄρα $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \times B\Gamma + A\Delta^2$. ὥστε τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$ ὑπερέχει τοῦ $2AB \times B\Gamma$ κατὰ τὸ ΔA^2.

20.

Εἰς τὸ 40.

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη, διότι τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δύο χωρία, τοῦ ἑνὸς μὲν ῥητοῦ, τοῦ ἄλλου δὲ μέσου· καὶ διὰ τὴν προήγησιν τοῦ ῥητοῦ τὸ ἐκάλεσε πρῶτον ῥητόν.

21.

Εἰς τὸ 41.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διότι τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δύο μέσα χωρία, καὶ πρὸς τὸ $AB^2 + B\Gamma^2$ καὶ πρὸς τὸ $2AB \times B\Gamma$.

22.

Εἰς τοὺς δευτέρους ὁρισμούς.

Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τοιουτοτρόπως ἓξ εὐθεῖαι, κατατάσσει ὡς πρώτας κατὰ τὴν τάξιν τρεῖς, ἐπὶ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλ.), ὡς δευτέρας δὲ κατὰ τὴν τάξιν τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐπὶ τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν μεγαλ.), διότι προηγεῖται τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ πρὸς τούτοις καλεῖ πρώτην μὲν (δυώνυμον) ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, δευτέραν δὲ (δυώνυμον), ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας τὸ μικρότερον μονώνυμον εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, διότι πάλιν τὸ μεγαλύτερον προηγεῖται τοῦ μικροτέρου, καθότι τοῦτο περιέχει τὸ μικρότερον, τρίτην δὲ (δυώνυμον), ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας οὐδὲν ἐκ τῶν δύο *μένη ῥητῇ. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.*

23.

Εἰς τὸ 90.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην. ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ. αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΔ. ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

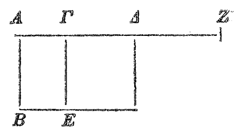
24.

Εἰς τὸ 115.

Ἄλλως.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίγνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ᾽ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ᾽ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.



Ἀπὸ μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος [ἔστω] ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἐστίν.

μονωνύμων εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν. Καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὁμοίως, καλῶν τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην (δυώνυμον) καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

23.

Εἰς τὸ 90.

Δύναται δὲ νὰ δειχθῇ καὶ συντομώτερον ἡ εὕρεσις τῶν εἰρημένων ἐξ ἀποτομῶν. Καὶ ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη ἀποτομή. Ἂς ληφθῇ ἡ πρώτη δυώνυμος ἡ ΑΓ, τῆς ὁποίας μεγαλύτερον μονώνυμον ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΔ = ΒΓ. Ἄρα αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ $ΑΒ^2$ ὑπερέχει τοῦ $ΒΓ^2$, τουτέστι τοῦ $ΒΔ^2$ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς συμμέτρου πρὸς αὐτήν, (τὴν ΒΓ), καὶ ἡ ΑΒ εἶναι σύμμετρος μήκει πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν, (ὁριστ. δεύτ. 1)· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι πρώτη ἀποτομή. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ εὕρωμεν καὶ τὰς ἄλλας ἀποτομάς, λαμβάνοντες τὰς ἰσαρίθμους δυωνύμους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἄλλως τὸ 115.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΒΓ· ἄρα τὸ ΒΓ εἶναι ἄλογον, (θ. 20) καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Ἔστω $ΓΔ^2 = ΒΓ$· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ἄλογος καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν (ὡς ὀρθογώνιον) σχηματίζει πλάτος μέσην. Πάλιν, ἂς συμπληρωθῇ τὸ ΕΔ· ἄρα τὸ ΕΔ εἶναι ἄλογον (θ. 20), καὶ ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ εἶναι ἄλογος. Ἔστω $ΔΖ^2 = ΕΔ$· ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι ἄλογος. Καὶ πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων ἡ αὐτή· διότι τὸ τετράγωνον οὐδεμιᾶς τῶν προηγουμένων παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ μέσης ἄρα γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, καὶ οὐδεμία πρὸς οὐδεμίαν τῶν προηγουμένων εἶναι ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

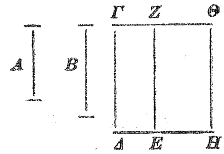
25.

Ἄλλως τὸ 105.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν ἐλάσσονα εἶναι ἐλάσσων.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ πρὸς τὴν Α ἔστω σύμμετρος ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β εἶναι ἐλάσσων.

Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ ἐστι τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΗΖ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΖΘ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



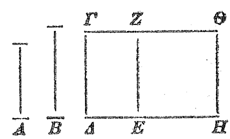
26.

Ἄλλως τὸ 106.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ. ῥητῇ δὲ ἡ ΖΕ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



27.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Ἄς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ καὶ πρὸς τὸ A^2 ἄς παραβληθῇ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ΓΔ τὸ ΓΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (θ. 100). Πρὸς δὲ τὸ B^2 ἄς παραβληθῇ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ΖΕ τὸ ΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β, ἄρα καὶ τὸ A^2 εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ B^2. Ἀλλὰ $A^2 = ΓΕ$, $B^2 = ΖΗ$· ἄρα τὸ ΓΕ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ. Ὡς δὲ ΓΕ : ΖΗ = ΓΖ : ΖΘ, (VI. 1)· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΘ, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ ΓΖ τετάρτη ἀποτομή· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι τετάρτη ἀποτομή, (θ. 103)· ἄρα τὸ ΖΗ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ τετάρτης ἀποτομῆς τῆς ΖΘ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι ἐλάσσων, (θ. 94). Εἶναι δὲ $B^2 = ΖΗ$· ἄρα ἡ Β εἶναι ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἡ σύμμετρος πρὸς τὴν σχηματίζουσαν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

Ἔστω σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ἡ Α, σύμμετρος δὲ πρὸς αὐτὴν ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Β εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον.

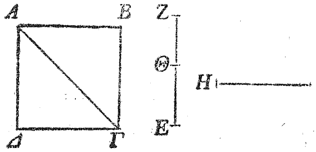
Ἄς ληφθῇ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ πρὸς μὲν τὸ A^2 ἄς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΓΔ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ σχηματίζον πλάτος τὴν ΓΖ· ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (θ. 101). Πρὸς δὲ τὸ B^2 ἄς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΕ ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΗ σχηματίζον πλάτος τὴν ΖΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ Α εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν Β, εἶναι καὶ τὸ A^2 σύμμετρον πρὸς τὸ B^2. Ἀλλὰ $A^2 = ΓΕ$, $B^2 = ΖΗ$· ἄρα τὸ ΓΕ εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ ΖΗ· ἄρα καὶ ἡ ΓΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΘ, (VI. 1 καὶ θ. 11). Εἶναι δὲ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΓΖ· ἄρα καὶ ἡ ΖΘ εἶναι πέμπτη ἀποτομή, (θ. 103). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΖΕ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ πέμπτης ἀποτομῆς, ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ χωρίον εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον. Εἶναι δὲ $B^2 = ΖΗ$· ἡ Β ἄρα εἶναι σχηματίζουσα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς τὰ τετράγωνα σχήματα ἡ διαγώνιος εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν, ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν. ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ· πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΕΘ. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η· ἀλλὰ καὶ περισσός. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἄλλως.

[Δεικτέον καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ].

Ἔστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β. λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ

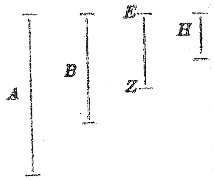
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος· λέγω, ὅτι θὰ συμβῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ εἶναι καὶ ἄρτιος καὶ περιττός. Εἶναι μὲν λοιπὸν φανερόν, ὅτι $\text{ΑΓ}^2 = 2\,\text{ΑΒ}^2$, (Ι. 47). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, (θ. 6). Ἂς ἔχῃ ὃν ὁ ἀριθμὸς ΕΖ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Η καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, (VII. 33)· ἄρα ὁ ΕΖ δὲν εἶναι μονάς. Διότι ἐὰν ὁ ΕΖ εἶναι μονάς, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ : ΑΒ καὶ ἡ $\text{ΑΓ} > \text{ΑΒ}$, ἄρα καὶ ὁ ΕΖ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ Η, (V. 14)· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ὁ ΕΖ δὲν εἶναι μονάς· ἄρα εἶναι ἀριθμὸς (δηλ. πλῆθος μονάδων)· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\text{ΓΑ} : \text{ΑΒ} = \text{ΕΖ} : \text{Η}$, εἶναι ἄρα $\text{ΓΑ}^2 : \text{ΑΒ}^2 = \text{ΕΖ}^2 : \text{Η}^2$, (VI. 20, πόρ. VIII. 11). Εἶναι δὲ $\text{ΓΑ}^2 = 2\text{ΑΒ}^2$· ἄρα $\text{ΕΖ}^2 = 2\text{Η}^2$· ἄρα ὁ ΕΖ^2 εἶναι ἄρτιος· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος. Διότι ἐὰν ἦτο περιττός, θὰ ἦτο περιττὸς καὶ ὁ ΕΖ^2, διότι, ἐὰν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ προστεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶναι περιττὸν καὶ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι περιττὸς (ΙΧ. 23)· ἄρα ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος. Ἂς τμηθῇ οὗτος εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ΕΖ, Η εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 21). Καὶ ὁ ΕΖ εἶναι ἄρτιος· ἄρα ὁ Η εἶναι περιττός. Διότι ἐὰν ἦτο ἄρτιος θὰ ἐμέτρει τοὺς ΕΖ, Η ὁ δύο· διότι πᾶς ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, (VII. ὁρ. 6)· ἐν ᾧ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ὁ Η δὲν εἶναι ἄρτιος· ἄρα εἶναι περιττός. Καὶ ἐπειδὴ $\text{ΕΖ} = 2\text{ΕΘ}$· ἄρα $\text{ΕΖ}^2 = 4\text{ΕΘ}^2$. Εἶναι δὲ $\text{ΕΖ}^2 = 2\text{Η}^2$· ἄρα $\text{Η}^2 = 2\text{ΕΘ}^2$· ἄρα ὁ Η^2 εἶναι ἄρτιος· ἄρα κατὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η εἶναι ἄρτιος· ἀλλὰ εἶναι καὶ περιττός· ὅπερ ἀδύνατον· ἄρα ἡ ΓΑ δὲν εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

[Δύναται ν' ἀποδειχθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον ὅτι ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευράν].

Ἔστω διαγώνιος μὲν ἡ Α, πλευρὰ δὲ ἡ Β· λέγω, ὅτι ἡ Α εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν Β. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι εἶναι σύμμετρος· καὶ ἂς γίνῃ πάλιν Α : Β = ἀριθμὸς ΕΖ : ἀριθμὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ἄρα οἱ ΕΖ, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η δὲν εἶναι μονάς. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω ὅτι $\text{Η} = 1$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\text{Α} : \text{Β} = \text{ΕΖ} : \text{Η}$, θὰ εἶναι ἄρα $\text{Α}^2 : \text{Β}^2 = \text{ΕΖ}^2 : \text{Η}^2$, (VI. 20, πόρ. καὶ VII. 11). Εἶναι δὲ $\text{Α}^2 = 2\text{ΑΒ}^2$

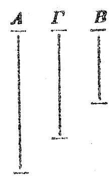
τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



28.

Σχόλιον.

Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. εὕρηνται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά, εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵ τε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ κύλινδροι, εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν, ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστι συμμετρία τε καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

(I. 47), ἄρα $EZ^2 = 2H^2$. Καὶ εἶναι μονὰς ὁ Η· ἄρα ὁ $EZ = 2$· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὁ Η δὲν εἶναι μονάς· ἄρα εἶναι ἀριθμὸς (πλῆθος μονάδων). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $A^2 : B^2 = EZ^2 : H^2$, καὶ ἀνάπαλιν εἶναι $B^2 : A^2 = H^2 : EZ^2$, μετρεῖ δὲ τὸ B^2 τὸ A^2, ἄρα καὶ ὁ H^2 μετρεῖ τὸν EZ^2· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ὁ Η μετρεῖ τὸν ΕΖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ἑαυτόν του ὁ Η· ὁ Η ἄρα μετρεῖ τοὺς ΕΖ, Η πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἀδύνατον· δὲν εἶναι ἄρα μήκει σύμμετρος ἡ Α πρὸς τὴν Β· ἄρα εἶναι ἀσύμμετρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Σχόλιον.

Εὑρημένων τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκονται καὶ πλεῖστα ἄλλα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, ἐννοῶ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα μεταξύ των. Διότι ἐὰν λάβωμεν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Α, Β μέσην ἀνάλογον τὴν Γ, θὰ εἶναι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (VI. 19, πόρ.) εἴτε τετράγωνα εἶναι τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἄλλα ὅμοια εὐθύγραμμα, εἴτε κύκλοι μὲ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (XII. 2). Εὑρέθησαν ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα μεταξύ των· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἀπεδείχθη ὅτι ὑπάρχουσιν ἐκ δύο διαστάσεων ἀσύμμετρα χωρία ἀποδεικνύομεν τώρα ἐκ τῆς στερεομετρίας, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ στερεὰ σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα μεταξύ των. Διότι ἐὰν ἀπὸ τῶν ἐπὶ τῶν Α, Β τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων πρὸς αὐτὰ εὐθυγράμμων ὑψώσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας ἢ πρίσματα, θὰ εἶναι τὰ ὑψωθέντα στερεὰ μεταξύ των, ὡς αἱ βάσεις. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ βάσεις εἶναι σύμμετροι θὰ εἶναι τὰ στερεὰ σύμμετρα, ἐὰν δὲ ἀσύμμετροι θὰ εἶναι ἀσύμμετρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλ' ὅμως καὶ ἐὰν ὑπάρχωσι δύο κύκλοι οἱ Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἀναγράψωμεν ἰσοϋψεῖς κώνους ἢ κυλίνδρους θὰ εἶναι οὗτοι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ κύκλοι Α, Β. Καὶ ἐὰν μὲν οἱ κύκλοι εἶναι σύμμετροι, θὰ εἶναι σύμμετροι καὶ οἱ κῶνοι μεταξύ των καὶ οἱ κύλινδροι, ἐὰν δὲ οἱ κύκλοι εἶναι ἀσύμμετροι θὰ εἶναι ἀσύμμετροι καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. Καὶ οὕτω εἶναι εἰς ἡμᾶς φανερόν, ὅτι ὄχι μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ὑπάρχει συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Ὁρισμοί.

3. *1.* Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ρ (καλουμένη ῥητὴ) καὶ δύο ἀριθμοὶ μὴ τετράγωνοι α, β. Τῶν α, β, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\rho\frac{\beta}{\alpha}$. Αὕτη εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ρ καὶ ῥητή. Τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα. Συνεπῶς ὑπάρχουσιν ἄπειροι εὐθεῖαι μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἑπομένως ῥηταί.

3. *2.* Τῶν ρ, $\rho\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Αὕτη εἶναι μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ρ. Ἐπειδὴ τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα ἔχομεν καὶ ἀπείρους εὐθείας μήκει ἀσυμμέτρους πρὸς τὴν ρ.

3. *3.* Τὰ τετράγωνα τῶν εὐθειῶν, τὰ ρ^2, $\rho^2\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὑπάρχουσι δὲ εὐθεῖαι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος, διότι τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα. Ἐὰν ἀποδειχθῇ ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι ῥηταί, ἀλλὰ μήκει ἀσύμμετροι, τότε κατ' ἀνάγκην, καθ' ὁρισμόν, αὗται εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι (τὰ τετράγωνα αὐτῶν μόνον). Γενικῶς δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἔνθα α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι ἀριθμοί, (ρ τὸ μέτρον).

3. *4.* Τῶν εὐθειῶν ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ $\left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right)$ εἶναι ἄλογοι (ἄρρητοι). Διότι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα. Εἶναι δὲ καὶ αὗται ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος, διότι τὰ ζεύγη τῶν ἀριθμῶν α, β εἶναι ἄπειρα. Γενικῶς, μία ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι εἶναι ἄλογοι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν δὲν εἶναι σύμμετρα πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας λαμβανομένης ὡς ῥητῆς (μέτρου).

Θεώρ. 1. Τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα συνεχείας [λεγόμενον τοῦ Εὐδόξου] (V. ὁ. 4) καὶ ἀποτελεῖ κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν.

2. Ἔστω τὰ μεγέθη ΑΒ < ΓΔ καὶ ὅτι ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ μ. κ. διαιρέτου δύο ἀριθμῶν τὸ λαμβανόμενον ἑκάστοτε ὑπόλοιπον

νὰ μὴ διαιρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. Λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη εἶναι ἀσύμμετρα. Διότι, ἐὰν εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι ἔστω Ε. Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. θὰ ἔχωμεν

$$ΓΔ = ΑΒ.\rho_1 + ΓΖ = ΔΖ + ΓΖ \quad (1)$$
$$ΑΒ = ΓΖ.\rho_2 + ΑΗ = ΒΗ + ΑΗ \quad (2).$$

Ἔστω δὲ ὅτι ἡ σχέσις (2) εἶναι ἡ νυοστὴ διαίρεσις καθ' ἣν $ΑΗ < Ε$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΑΒ, τὸ δὲ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΔΖ ($= ΑΒ.\rho_1$), ἄρα τὸ Ε μετρεῖ τὸ ΔΖ. Ἄρα τὸ Ε θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $ΓΔ - ΔΖ = ΓΖ$. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ μετρεῖ ἐκ τῆς (2) τὸ ΒΗ ($= ΓΖ.\rho_2$). Ἄρα τὸ Ε ἀφοῦ μετρεῖ καὶ τὸ ΑΒ θὰ μετρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $ΑΒ - ΒΗ = ΑΗ$, ὅπερ ἄτοπον, διότι $Ε > ΑΗ$. Ἄρα τὰ μεγέθη ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἀσύμμετρα.

3. Ἔστω τὰ σύμμετρα μεγέθη $ΑΒ < ΓΔ$. Ἐὰν τὸ ΑΒ μετρῇ τὸ ΓΔ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι τὸ μ.κ.μ. τῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἐὰν δὲν τὸ μετρῇ, ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῆς ἀνθυφαιρέσεως, (εὑρέσεως τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν) ἔστω ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$ΓΔ = ΑΒ.\rho_1 + ΕΓ = ΕΔ + ΕΓ \quad (1)$$
$$ΑΒ = ΕΓ.\rho_2 + ΑΖ = ΖΒ + ΑΖ \quad (2)$$
$$ΕΓ = ΑΖ.\rho_3 + 0 \quad (3)$$

Τὸ ΑΖ μετρεῖ ἐκ τῆς (3) τὸ ΕΓ, τὸ ὁποῖον ἐκ τῆς (2) μετρεῖ τὸ ΖΒ ($= ΕΓ.\rho_2$). Ἄρα τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΖΒ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἄθροισμα $ΖΒ + ΑΖ = ΑΒ$. Τὸ ΑΒ μετρεῖ ἐκ τῆς (1) τὸ ΕΔ ($= ΑΒ.\rho_1$). Ἄρα τὸ ΑΖ μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ ὅμως καὶ τὸ ΕΓ. Ἄρα μετρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα $ΓΔ = ΕΔ + ΕΓ$. Εἶναι ἄρα τὸ ΑΖ κοινὸν μέτρον τῶν ΑΒ, ΓΔ. Λέγω, ὅτι εἶναι καὶ μέγιστον. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι μ. κ. μ. ἄλλο μέγεθος ἔστω $Η > ΑΖ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Η μετρεῖ τὸ ΑΒ, ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) τὸ ΑΒ μετρεῖ τὸ ΕΔ, ἄρα τὸ Η μετρεῖ τὸ ΕΔ. Μετρεῖ ὅμως καὶ τὸ ΓΔ καὶ συνεπῶς καὶ τὴν διαφορὰν $ΓΔ - ΕΔ = ΕΓ$. Ἀλλὰ τὸ ΕΓ μετρεῖ ἐκ τῆς (2) τὸ ΖΒ. Ἄρα τὸ Η μετρεῖ τὸ ΖΒ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ. Μετρεῖ ἄρα καὶ τὴν διαφορὰν $ΑΒ - ΖΒ = ΑΖ$, ὅπερ ἄτοπον· διότι $Η > ΑΖ$. Ἄρα τὸ ΑΖ εἶναι τὸ μ. κ. μ. τῶν ΑΒ, ΓΔ.

5. Διότι, ἐπειδὴ τὰ μεγέθη Α,Β εἶναι σύμμετρα θὰ μετρῇ αὐτὰ μέγεθός τι, ἔστω τὸ Γ, καὶ ἔστω $Α : Γ = Δ$, (1), $Β : Γ = Ε$, (2).

Ἐκ τῆς (1) εἶναι $Α : Γ = Δ : 1$, (3)

καὶ ἐκ τῆς (2) $Γ : Β = 1 : Ε$, (4)

Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη (V. 22) θὰ ἔχωμεν $Α : Β = Δ : Ε$. Ἀλλὰ Δ, Ε εἶναι ἀριθμοί.

6. Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β καὶ $Α : Β = Δ : Ε$, ἔνθα Δ, Ε ἀριθμοί. Λέγω, ὅτι τὰ μεγέθη Α, Β εἶναι σύμμετρα. Διότι ἔστω $Α : Δ = Γ$, (1) καὶ $Ζ = Γ \times Ε$, (2).

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $A : \Gamma = \Delta : 1$ (3)
καὶ ἐκ τῆς (2) $\Gamma : Z = 1 : E$ (4).

Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη, (V. 22) θὰ ἔχωμεν $A : Z = \Delta : E$. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $A : B = \Delta : E$. Ἄρα $A : Z = A : B$ ἤτοι $B = Z$. Μετρεῖ δὲ ἐκ τῆς (2) τὸ Γ, τὸ Ζ. Μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) μετρεῖ τὸ Γ καὶ τὸ Α. Συνεπῶς μετρεῖ τὸ Γ τὰ Α, Β .Σύμμετρον ἄρα εἶναι τὸ Α πρὸς τὸ Β.

Πόρισμα.

Δίδεται ἡ εὐθεῖα Α καὶ δύο ἀριθμοὶ (μὴ τετράγωνοι) οἱ Δ, Ε καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ εὐθεῖά τις, ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς Α πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ζητουμένης νὰ ἔχῃ λόγον, ὡς ὁ ἀριθμὸς Δ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ε. Τῶν ἀριθμῶν Δ, Ε καὶ τῆς Α εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : E = A : Z$, (1). Τῶν Α, Ζ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $A : B = B : Z$. Κατὰ τὸν ὁρισμ. 9 τοῦ V. ἔχομεν $A : Z = A^2 : B^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1), $\Delta : E = A^2 : B^2$.

9. Κατ' ἀνώνυμον σχολιαστὴν (V τόμος τῆς κατὰ Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, σ.450) «τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου».

1. Διότι ἔστωσαν αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι Α, Β. Λέγω, ὅτι $A^2 : B^2$ = τετράγωνος ἀριθμὸς : τετράγωνον ἀριθμόν. Διότι, ἐπειδὴ αἱ Α, Β εἶναι (μήκει) σύμμετροι θὰ εἶναι κατὰ τὸ θ. 5, $A : B = \Gamma : \Delta$, (1), ἔνθα Γ, Δ ἀκέραιοι (μὴ τετράγωνοι). Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$. Ἀλλὰ $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2}$ καὶ $\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 = \frac{\Gamma^2}{\Delta^2}$. Εἶναι ἄρα $\frac{A^2}{B^2} = \frac{\Gamma^2}{\Delta^2}$.

2. Ἔστω $\frac{A^2}{B^2} = \frac{\Gamma^2}{\Delta^2}$, (1). Λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{A^2}{B^2} = \left(\frac{A}{B}\right)^2$ καὶ $\frac{\Gamma^2}{\Delta^2} = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$. Καὶ ἐκ τούτων καὶ τῆς (1), $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2$. Ἐξ ἧς $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι μήκει σύμμετροι, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

3. Ἔστω Α, Β μήκει ἀσύμμετροι. Λέγω, ὅτι δὲν εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$. Διότι ἐὰν ἦτο θὰ εἴχομεν $A : B = \Gamma : \Delta$ ὁπότε αἱ Α, Β θὰ ἦσαν μήκει σύμμετροι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

4. Ἐὰν δὲν εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, αἱ εὐθεῖαι Α, Β εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἀλλὰ εἶναι μήκει σύμμετροι, θὰ εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Πόρισμα.

1. Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι εἶναι καὶ δυνάμει σύμμετροι. Ἐὰν δηλ. εἶναι $A : B = \Gamma : \Delta$, ἔνθα A, B εὐθεῖαι καὶ Γ, Δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι, εἶναι καὶ $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$.

2. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει εἰ μὴ ὑπὸ περιορισμόν. Ἐὰν δηλ. εἶναι $A^2 : B^2 = \Gamma : \Delta$, (1), τότε εἶναι καὶ $A : B = \varkappa : \lambda$, ἐὰν $\Gamma = \varkappa^2$, $\Delta = \lambda^2$, ἤτοι οἱ Γ, Δ νὰ εἶναι τετράγωνοι ὁπότε $A : B =$ λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἤτοι αὗται εἶναι καὶ μήκει σύμμετροι. Ἐὰν δὲν εἶναι $\Gamma = \varkappa^2$, $\Delta = \lambda^2$, αἱ A, B [ἐκ τῆς (1)] εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

3. Αἱ μήκει ἀσύμμετροι δὲν εἶναι πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι A, B. Ἐὰν $A : B = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$ ἔνθα α, β ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι, αἱ A, B εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δυνάμει σύμμετροι, διότι $A^2 : B^2 = \alpha : \beta$, ἤτοι εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν. Ἐὰν ὅμως $A : B = \sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta}$, αἱ A, B εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, διότι $A^2 : B^2 = \sqrt[3]{\alpha^2} : \sqrt[3]{\beta^2}$, δὲν εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, (α^2, β^2 μὴ κύβοι ἀριθμοί). Αἱ A, B εἶναι κύβῳ σύμμετροι, ἐὰν $A^3 : B^3 = \alpha : \beta$.

4. Κατὰ μείζονα λόγον αἱ δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι καὶ μήκει ἀσύμμετροι. Διότι, ἐὰν ἦσαν μήκει σύμμετροι θὰ ἦσαν καὶ δυνάμει σύμμετροι ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

10. Δοθείσης εὐθείας ρ (νοουμένης κατὰ τὸν ὁρ. 3 ῥητῆς) νὰ εὑρεθῶσι δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι πρὸς αὐτήν. Ἡ μία μήκει μόνον ἀσύμμετρος (καὶ δυνάμει σύμμετρος), ἡ ἄλλη καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσύμμετρος.

1. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ α, β μὴ τετράγωνοι (τοὐλάχιστον ὁ εἷς νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος). Τῶν α, β, ρ εὑρίσμομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\alpha : \beta = \rho : \chi$, (1). Τῶν ρ, χ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἐνάλογον, $\rho : \psi = \psi : \chi$. Ἐκ ταύτης κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $\rho : \chi = \rho^2 : \psi^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι $\alpha : \beta = \rho^2 : \psi^2$, καὶ συνεπῶς $\rho : \psi = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$. Ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ρ, ψ $\left(= \rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ρ εἶναι ῥητὴ καὶ τὰ τετράγωνα ρ^2, $\rho^2 \frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι σύμμετρα, αἱ ρ, $\rho \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ ὀνομασία αὕτη συνάγεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 3 καὶ τοῦ λήμματος τοῦ θ. 18.

2. Τῶν ρ, ψ λαμβάνομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $\rho : \omega = \omega : \psi$, ἐξ ἧς κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $\rho : \psi = \rho^2 : \omega^2$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅμως εἶναι $\rho : \psi = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$. Ἄρα $\rho^2 : \omega^2 = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$, ἤτοι αἱ ρ, ω $\left[= \rho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι (καὶ κατὰ μείζονα λόγον καὶ μήκει).

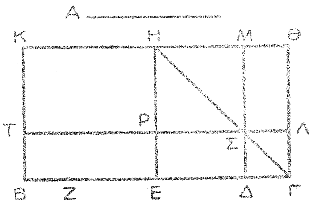
Σημ. Εἰς τὸ θεώρημα ὑποδεικνύεται εἷς ἐκ τῶν τρόπων εὑρέσεως ἀσυμμέτρων, κατὰ τὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἡ δοθεῖσα ῥητὴ λαμβάνεται ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἄλλου τμήματος, λαμβάνονται δύο ἀριθμοὶ μὴ τετράγωνοι α, β (τοὐλάχιστον ὁ εἷς μὴ τετράγωνος) καὶ τῶν α, β, ρ εὑρίσκεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος, $\rho\frac{\beta}{\alpha}$. Ἡ ρ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι). Δεύτερον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τὴν ρ καὶ ἄλλο τὸ ὕψος τοῦ πρώτου τριγώνου τὴν $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ ρ καὶ τὸ ὕψος τοῦ νέου τριγώνου, ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ εἶναι ὄχι μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι τὰ τετράγωνα αὐτῶν τὰ ρ^2, $\rho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι ἀσύμμετρα. [Δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι ἐπίσης αἱ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$]. Ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίων τριγώνων δύναται κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον (ὡς δηλοῦται ἐκ τοῦ 115 θεωρήματος). Μετὰ ν κατασκευὰς ὀρθογ. τριγώνων, τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2^{\nu-1}}}$ (τὸ πρῶτον τμῆμα λαμβάνεται πάντοτε ρ). Ἐὰν $\alpha > \beta$ τότε τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τείνει πρὸς τὸ ρ, ὅταν $\nu \to \infty$, κατ' αὔξουσαν ἀκολουθίαν τιμῶν. Ἐὰν $\alpha < \beta$ τότε τὸ δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τείνει πρὸς τὸ ρ, ὅταν $\nu \to \infty$, κατὰ φθίνουσαν ἀκολουθίαν τιμῶν. Αἱ ὁρικαὶ τιμαὶ τοῦ δευτέρου τμήματος τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ταὐτόσημοι πρὸς τὴν σχέσιν $\alpha = \beta$. ἥτις δηλοῖ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον. Εἰς τοῦτο ὅμως ἐρευνᾶται ἡ σχέσις τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τετραγώνου, πρόβλημα τὸ ὁποῖον εἶχε λυθῇ πολὺ πρὸ τῶν ἐρευνῶν τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων.

12. Ἔστω τὰ μεγέθη Α, Γ σύμμετρα καὶ Β, Γ σύμμετρα. Λέγω, ὅτι Α, Β εἶναι σύμμετρα. Ἐπειδὴ Α, Γ σύμμετρα, θὰ εἶναι $A : \Gamma = \Delta : E$, (1) ἔνθα Δ, Ε ἀκέραιοι, (θ. 5). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι $\Gamma : B = Z : H$, (2) ἔνθα Ζ, Η ἀκέραιοι. Τῶν λόγων $\frac{\Delta}{E}$, $\frac{Z}{H}$ εὑρίσκομεν ἰσοδυνάμους, ὥστε οὗτοι νὰ εἶναι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ Ζ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου λόγου καὶ διὰ τοῦ Ε τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου, ὅτε ἔχομεν $\frac{\Delta \times Z}{E \times Z}$, $\frac{Z \times E}{H \times E}$, (VIII. 4, τὰ κλάσματα $\frac{\Delta}{E}$, $\frac{Z}{H}$ ἀνάγωγα). Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $A : \Gamma = \Delta \times Z : E \times Z$, (3) καὶ ἐκ τῆς (2) $\Gamma : B = Z \times E : H \times E$ (4) Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη ἔχομεν $A : B = \Delta \times Z : H \times E$, (V.22) ἤτοι τὰ Α, Β εἶναι σύμμετρα, διότι ὁ λόγος των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν.

13. Λῆμμα. Δίδονται αἱ εὐθεῖαι $AB > A\Delta$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποῖον τετράγωνον ὑπερέχει τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας. Τοῦτο σημαίνει, δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ζητεῖται ἡ ἄλλη κάθετος. Κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ λήμματος ἐρευνᾶται ἡ συμμετρία ἢ ἀσυμμετρία τῶν ΑΒ, $\sqrt{AB^2 - A\Delta^2}$ [ἡ ΑΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου (ἢ ἀσυμ.) ἑαυτῇ μήκει σημαίνει ἡ ΑΒ καὶ ἡ $\sqrt{AB^2 - A\Delta^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι (ἢ ἀσύμ.)].

14. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ, ὥστε $Α : Β = Γ : Δ$, (1), καὶ $\sqrt{Α^2 - Β^2} = Ε$, $\sqrt{Γ^2 - Δ^2} = Ζ$. Λέγω, ὅτι ἂν Α εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς Ε θὰ εἶναι καὶ Γ μήκει σύμμετρος πρὸς Ζ. Καὶ ἂν Α, Ε μήκει ἀσύμμετροι θὰ εἶναι καὶ Γ, Ζ μήκει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $Α^2 : Β^2 = Γ^2 : Δ^2$, (2). Ἀλλὰ $Α^2 = Β^2 + Ε^2$ καὶ $Γ^2 = Δ^2 + Ζ^2$. Θὰ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (2), $(Β^2 + Ε^2) : Β^2 = (Δ^2 + Ζ^2) : Δ^2$. Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{Β^2 + Ε^2 - Β^2}{Β^2} = \frac{Δ^2 + Ζ^2 - Δ^2}{Δ^2}$ ἢ $Ε^2 : Β^2 = Ζ^2 : Δ^2$, (V. 17). Καὶ ἐκ τούτου $Β : Ε = Δ : Ζ$. Εἶναι δὲ $Α : Β = Γ : Δ$, (3) καὶ ἀπεδείχθη $Β : Ε = Δ : Ζ$ (4). Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον, (V 22) δηλ. πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) καὶ (4) κατὰ μέλη ἔχομεν, $Α : Ε = Γ : Ζ$. Ἐὰν λοιπὸν Α, Ε σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι εἶναι καὶ Γ, Ζ σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι ἀντιστοίχως, (Θ. 11).

17. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι $ΒΓ > Α$ καὶ παρὰ τὴν ΒΓ ἂς παραβληθῇ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ $\frac{Α^2}{4}$ ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου παραλληλογράμμου αἱ ΒΔ, ΔΓ μήκει σύμμετροι. Λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, $\sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Σύγχρονος διατύπωσις τοῦ θεωρήματος: Ἐὰν αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2 - ΒΓχ + \frac{Α^2}{4} = 0$ εἶναι σύμμετροι, τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν, καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν, αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι μήκει σύμμετροι. Ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι θετικαὶ καὶ ἄνισοι προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως $ΒΓ > Α$. Ἐὰν $ΒΓ = Α$, τότε τὸ $\frac{Α^2}{4} = ΒΕΗΚ$ τετράγωνον καὶ ἔχει παραβληθῇ τοῦτο παρὰ τὴν ΒΓ, ὄχι πλέον ὡς ὀρθογώνιον, ἀλλ' ὡς τετράγωνον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τὸ τετράγωνον σχῆμα ΕΓΘΗ, διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΘΚ. Η περίπτωσις ὅμως αὕτη δὲν ἐνδιαφέρει ἐνταῦθα διότι ὁδηγεῖ εἰς τὴν διπλῆν ῥίζαν $ΒΕ = \frac{ΒΓ}{2}$. Ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον κατὰ δύο τρόπους. Πρῶτον νὰ θεωρηθῇ ἡ μεγαλυτέρα εὐθεῖα ὡς ὑποτείνουσα καὶ ἡ μικροτέρα ὡς μία κάθετος πλευρά. Δεύτερον νὰ θεωρηθῶσιν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ὡς κάθετοι πλευραί. Ἐν προκειμένῳ (καὶ εἰς παρομοίας ἐκφωνήσεις τοῦ Χ βιβλίου) νοεῖται ὁ πρῶτος τρόπος κατασκευῆς. Ἡ ὕπαρξις τοιαύτης κατασκευῆς ὅμως ἀποδεικνύεται. Ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ $ΖΕ = ΕΔ$. Εἶναι ἄρα $ΔΓ = ΒΖ$. Καὶ



ἐπειδὴ ἡ ΒΓ ἐτμήθη εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Ε εἰς ἄνισα δὲ κατὰ τὸ Δ θὰ ἔχωμεν $ΒΔ \times ΔΓ + ΕΔ^2 = ΕΓ^2$, (II. 5). Εἶναι ἄρα καὶ $4ΒΔ \times ΔΓ + 4ΕΔ^2$

$= 4ΕΓ^2$, (1). Ἀλλὰ $ΒΔ \times ΔΓ = \frac{Α^2}{4}$, $2ΕΔ = ΖΔ$, $2ΕΓ = ΒΓ$. Εἶναι ἄρα $Α^2 + ΖΔ^2 = ΒΓ^2$, ἤτοι ἔχομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ μιᾶς καθέτου Α. Διὰ τὴν ἄλλην κάθετον θὰ ἔχωμεν $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$, (2), $ΖΔ = \sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$.

1) Δεικτέον ὅτι ἡ ΖΔ (ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως) εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΓ (ἥτις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν). Διότι, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΒΔ, ΔΓ μήκει σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ $(ΒΔ + ΔΓ) = ΒΓ$ καὶ ΔΓ μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν ἑαυτόν της, καὶ πρὸς τὴν ΒΖ, διότι $ΔΓ = ΒΖ$. Ἄρα ΔΓ καὶ $2ΔΓ = ΔΓ + ΒΖ$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ΔΓ, ΒΓ μήκει σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ 2ΔΓ, ΒΓ μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι $ΒΓ = (2ΔΓ + ΖΔ)$. Εἶναι ἄρα ΒΓ, ΖΔ μήκει σύμμετροι, (θ. 15).

2) Ἔστω ΒΓ, $\sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$ μήκει σύμμετροι, (ἤτοι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθ. τριγώνου μήκει σύμμετροι ἢ τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως μήκει σύμμετροι). Καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΒΓ τὸ $\frac{Α^2}{4}$ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, καὶ ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου αἱ ΒΔ, ΔΓ, ἤτοι ἔστωσαν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2 - ΒΓχ + \frac{Α^2}{4} = 0$, αἱ ΒΔ, ΔΓ. Λέγω, ὅτι αὗται εἶναι μήκει σύμμετροι. Διὰ τῆς αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω ἀποδείξεως φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν (2), (ἀποδεικνύει δηλ. τὴν ὕπαρξιν τῆς σχέσεως $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - Α^2$). Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι $ΖΔ = \sqrt{ΒΓ^2 - Α^2}$ καὶ ΒΓ μήκει σύμμετροι. Ἀλλὰ $ΒΓ = (ΖΔ + 2ΔΓ)$. Εἶναι ἄρα ΒΓ, 2ΔΓ μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἀλλὰ 2ΔΓ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἄρα ΒΓ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι. Εἶναι ὅμως $ΒΓ = (ΒΔ + ΔΓ)$. Συνεπῶς ΒΔ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι, (θ. 15).

[Σημ. Ὅτι πράγματι πρόκειται περὶ τῆς ἐξισώσεως $χ^2 - ΒΓχ^2 + \frac{Α^2}{4} = 0$ φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς· εἰς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν σχέσιν $Α^2 + ΖΔ^2 = ΒΓ^2$, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι $ΖΔ = ΒΓ - 2ΔΓ$, κληθῇ $ΔΓ = χ$ καὶ γίνῃ ἀντικατάστασις θὰ ἔχωμεν $Α^2 + (ΒΓ - 2χ)^2 = ΒΓ^2$ ἢ $χ^2 - ΒΓχ + \frac{Α^2}{4} = 0$ Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης, τῶν ΒΔ, ΔΓ ὁδηγούμεθα ἐκ τοῦ θ. 28 τοῦ VI τῶν Στοιχείων, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων. (Ἡ παροῦσα ἐξίσωσις εἶναι μερικὴ περίπτωσις. Ἰδὲ καὶ Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν τόμ. II σ. 297—301, Ὀργαν. Ἐκδόσ. Σχολ. Βιβλίων, 1953. Ἀθῆναι). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ, ὑψοῦμεν τὴν κάθετον $ΕΗ = ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2}$, σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΒΕΓΘΗΚ καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΗΓ. Ἐπὶ ταύτης ὑπάρχει πάντοτε σημεῖόν τι Σ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΣΤΒΔ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ

$\frac{A^2}{4}$ καὶ ΣΔ = ΔΓ, (παρὰ τὴν ΒΓ ἔχομεν παραβάλλει τὸ ὀρθογώνιον ΣΤΒΔ = $\frac{A^2}{4}$ καὶ ἐλλείπει τὸ τετράγωνον σχῆμα ΣΔΓΛ διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΛΤΒΓ). Πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου Σ μετασχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $\frac{ΒΓ^2}{4} - \frac{A^2}{4}$ εἰς τετράγωνον πλευρᾶς $= \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$ καὶ ἐπὶ τῆς ΗΕ λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ταύτην τὸ ΗΡ. Ἐκ τοῦ σημείου Ρ φέρομεν τὴν ΤΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν διαγώνιον ΗΓ εἴς τι σημεῖον Σ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Διότι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου $ΗΕΓΘ = \frac{ΒΓ^2}{4}$ ἀφαιρέσωμεν τὸ $ΗΡ^2 = ΗΡΣΜ = \left(\frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}\right)^2$ θὰ λάβωμεν ὡς διαφορὰν $\frac{ΒΓ^2}{4} - \frac{ΒΓ^2 - A^2}{4} = \frac{A^2}{4} =$ γνώμων ΣΡΕΓΘΜ. Ὁ γνώμων ὅμως οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΣΤΒΔ, διότι ΡΤΒΕ = ΡΕΓΛ καὶ ΡΕΔΣ = ΜΣΛΘ. Ὥστε $\frac{A^2}{4} = ΒΔ \times ΔΣ = ΒΔ \times ΔΓ$, διότι ΔΣ = ΔΓ, ἐπειδὴ ΕΗ = ΕΓ. Ἀλλὰ ΒΔ = ΒΕ + ΕΔ. Εἶναι δὲ $ΒΕ = \frac{ΒΓ}{2}$ καὶ $ΕΔ = ΗΜ = ΗΡ = \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$. Ἄρα $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$. Καὶ εἶναι ΔΓ = ΕΓ — ΕΔ. Εἶναι ἄρα $ΔΓ = \frac{ΒΓ}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$].

18. Ἐὰν ΒΓ > Α καὶ αἱ (θετικαὶ καὶ ἄνισοι) ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $χ^2 - ΒΓχ + \frac{A^2}{4} = 0$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν εἶναι μήκει ἀσύμμετρον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥιζῶν καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα (σχ. θ. 17) ἀποδεικνύεται διὰ τοῦ ΙΙ, 5 ἡ ὕπαρξις τοῦ $ΖΔ^2 = ΒΓ^2 - A^2$. 1) Καὶ ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως αἱ ΒΔ, ΔΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ αἱ (ΒΔ + ΔΓ) = ΒΓ, ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι (θ. 16). Ἀλλὰ ἡ ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς 2ΔΓ. Εἶναι ἄρα ΒΓ, 2ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Καὶ ἐπειδὴ ΒΓ = ΖΔ + 2ΔΓ, ἕπεται ΖΔ καὶ ΒΓ μήκει ἀσύμμετροι (θ. 16). Καὶ εἶναι $ΖΔ = \sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$. Ἄρα ΒΓ καὶ $\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. 2) Ἔστω ΒΓ, $\sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι αἱ ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι αὗται εἶναι ἀσύμμετροι. Πάλιν κατὰ τὸ ΙΙ, 5 ἀποδεικνύεται ἡ σχέσις $ΖΔ = \sqrt{ΒΓ^2 - A^2}$. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι ΒΓ, ΖΔ μήκει ἀσύμμετροι. Ἐπειδὴ ΒΓ = ΖΔ + 2ΔΓ, ἕπεται ΒΓ, 2ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 16). Ἀλλὰ 2ΔΓ, ΔΓ μήκει σύμμετροι. Ὥστε καὶ ΒΓ, ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι. Ἀλλὰ ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ. Εἶναι ἄρα καὶ ΒΔ, ΔΓ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 16).

19. Τὸ ὀρθογώνιον παραλ. λαμβάνεται κατὰ τὸ προηγ. θ. 17 (ἰδὲ σχῆμα τούτου). Ἐκ τῆς σχέσεως ΒΔ : ΔΓ = ΤΔ : ΔΛ καὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ εἶναι μήκει σύμμετροι, συνάγεται ὅτι ΤΔ, ΔΛ εἶναι σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ ΔΛ ῥητὸν εἶναι ἄρα καὶ ΤΔ ῥητόν.

20. Σχῆμα προηγ. θεωρ. 17. Παρὰ τὴν ῥητὴν ΔΣ ἔχομεν παραβάλλει τὸ ῥητὸν ὀρθογώνιον ΒΣ. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΒΔ εἶναι ῥητή.

Σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον ΔΛ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΣ εἶναι ῥητή, εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΔΛ ῥητόν. Ἄρα τὰ ΔΛ, ΒΣ ὡς ῥητὰ εἶναι σύμμετρα. Καὶ εἶναι ΔΛ : ΒΣ = ΔΓ : ΒΔ. Εἶναι δὲ ΔΓ = ΔΣ. Εἶναι ἄρα σύμμετρος ἡ ΔΣ πρὸς τὴν ΒΔ. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΣ. Καὶ ἡ ΒΔ ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΔΣ.

21. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ α, β μὴ τετράγωνοι καὶ εὐθεῖά τις ῥητὴ (λαμβανομένη ὡς μέτρον) ρ. Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν ρ καὶ ἄλλο τμῆμα τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν α, β, ρ τὴν $\rho\frac{\beta}{\alpha}$. Δεύτερον ὀρθογώνιον τρίγωνον κατασκευάζεται μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν ρ καὶ ἄλλο τμῆμα τὸ ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ τοῦ πρώτου τριγώνου. Αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 10). Τὸ ὀρθογώνιον $\rho \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται μέσον καὶ εἶναι ἄλογον (ἄρρητον). Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ λέγεται μέση (ὡς μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης) καὶ εἶναι ἄλογος (ἄρρητος). Τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\rho \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τετράγωνον, τὸ $\left[\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2$ λέγεται καὶ αὐτὸ μέσον καὶ εἶναι ἄλογον. Ἐὰν κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου λάβωμεν ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὴν $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ καὶ ὡς ἄλλο τὴν $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $\left[\text{αἱ } \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι}\right]$, τὸ ὀρθογώνιον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται ἐπίσης μέσον (ἄλογον) καὶ τὸ ὕψος $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$ λέγεται μέση (ἄλογος).

Τὸ ἰσοδύναμον τετράγωνον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \times \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τὸ $\left[\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2$ λέγεται καὶ αὐτὸ μέσον καὶ εἶναι ἄλογον. Ὥστε ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον μέσον εἶναι ὅταν περιέχῃ τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ εὐθεῖα μέση εἶναι ὅταν περιέχῃ τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

24. Αἱ μέσαι μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\gamma\,\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, ἔνθα γ ἀκέραιος καὶ α, β μὴ τετράγωνοι.

25. Αἱ μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν

σύμμετρα) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\sqrt{\gamma}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ ἔνθα α, β, γ μὴ τετράγωνοι.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πρώτης μέσης ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : λαμβάνομεν εὐθεῖαν τινα ρ ὡς μέτρον (ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους), δύο μὴ τετραγώνους ἀριθμοὺς α, β καὶ τῶν α, β, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ὡς ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ καὶ ἡ ρ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ, $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση. Διὰ τὴν δευτέραν μέσην λαμβάνομεν ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ρ καὶ ὡς ἄλλο τὸ $\gamma\,.\,\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἔνθα γ μὴ τετράγωνος, καὶ τούτων τὴν μέσην ἀνάλογον $\rho\sqrt{\gamma}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$. Ἐὰν $\sqrt{\gamma}=\delta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τότε τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μέσων τὸ $\rho^2\,\delta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ῥητόν. Ἄλλως εἶναι μέσον, τὸ $\rho^2\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, (δ, ἀκέραιος).

26. Ἔστωσαν τὰ μέσα $\rho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ καὶ $\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἔνθα $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma}$, (καὶ α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι). Ἡ διαφορὰ $\rho^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}\right)$ οὐδέποτε εἶναι ῥητή.

27. Πρὸς εὕρεσιν τῆς πρώτης μέσης ὁδηγούμεθα ἐκ τοῦ θ. 10. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθ. τριγώνου : λαμβάνομεν ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ ὕψους ῥητὴν ρ. Τῶν μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ὡς τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης. Ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι $\left[\text{αἱ } \rho,\ \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ καὶ } \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\ \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\ \right]$.

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου : ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ἡ ρ καὶ ἄλλο τμῆμα τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου τὸ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Κατασκευὴ τρίτου ὀρθογωνίαυ τριγώνου : ἕν τμῆμα ὑποτεινούσης ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ καὶ ἄλλο τμῆμα τὸ ὕψος τοῦ πρώτου τριγώνου ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ τρίτου τριγώνου τὸ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων τὸ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\times\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}=\rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ῥητόν.

Κατὰ τὸ θεώρημα ἡ δευτέρα μέση εὑρίσκεται ἂν τῶν ρ, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ λάβωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον. τοῦτο ὅμως εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸν προηγούμενον τρόπον κατασκευῆς εἰς ὃν ὁδηγούμεθα ἐκ τοῦ ὅρου «μέση», καθ' ὃν αὕτη πρέπει νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος δύο μεγεθῶν.

28. Αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A=\rho$, $B=\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\Gamma=\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι. Εἶναι φανερὸν ὅτι αὗται προέρχονται ἐκ τῆς κατασκευῆς δύο ὀρθογωνίων τριγώνων.

Εἰς τὸ πρῶτον τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ἡ ρ, ἄλλο τμῆμα ἡ $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ καὶ ὕψος ἡ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Εἰς τὸ δεύτερον τρίγωνον ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης εἶναι πάλιν ρ, ἄλλο τμῆμα ἡ $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$ καὶ ὕψος ἡ $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$.

[Εἶναι εὐνόητον ὅτι ληφθείσης ῥητῆς ρ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὡς ἑξῆς τὰς τρεῖς ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Πρῶτον τρίγωνον: ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ἄλλο τμῆμα $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$, ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}}$.

Δεύτερον τρίγωνον: ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης $\rho\left(\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)$, ἄλλο τμῆμα $\rho\left(\frac{\eta}{\theta}\right)$, ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\varepsilon\varkappa}{\zeta\theta}}$.

Τρίτον τρίγωνον: ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης $\rho\left(\frac{\iota}{\varkappa}\right)$, ἄλλο τμῆμα $\rho\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, ὕψος $\rho\sqrt{\frac{\iota\lambda}{\varkappa\mu}}$, ὁπότε αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι τὰ τρία ὕψη, τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. (α, β, γ... ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι)].

Τῶν Α, Β εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\Delta=\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ (πρώτη μέση), καὶ τῶν Β, Γ, Δ τὴν τετάρτην ἀνάλογον $E=\dfrac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$. Ἡ Ε εἶναι ἡ δευτέρα μέση. Τὸ γινόμενον $\Delta\times E=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$ εἶναι μέσον. Ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, οὕτω σκεπτόμεθα καὶ ἐνταῦθα διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Ε. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μέση θὰ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος δύο τμημάτων ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Τὸ ἓν τμῆμα θὰ εἶναι $\dfrac{\rho}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}$ καὶ τὸ ἄλλο $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$.

Λῆμμα 1.

1. Ὡς γνωστὸν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ παριστῶντες ἐμβαδὰ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι ὅταν αἱ πλευραὶ τῶν ὀρθογ. παραλληλογράμμων εἶναι ἀνάλογοι, (VII. ὁρισ. 22). Τὸ δὲ γινόμενον δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος, (IX. 1).

1. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ $AB > B\Gamma$ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Οὗτοι δύνανται νὰ εἶναι καὶ τετράγωνοι, διότι καὶ τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι. Καὶ ἐπειδὴ ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀφαιρεθῇ ἄρτιος ἢ ἀπὸ περιττοῦ ἀφαιρεθῇ περιττὸς ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι ἄρτιος θὰ εἶναι $AB - B\Gamma = A\Gamma$ ἄρτιος Ἂς διχοτομηθῇ ὁ $A\Gamma$ κατὰ τὸ Δ, ὥστε $A\Gamma = 2\Gamma\Delta$. Κατὰ τὸ θ. 6 τοῦ II βιβλίου θὰ εἶναι $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$, (1). Καὶ ἐπειδὴ $AB \times B\Gamma$ εἶναι τετράγωνος, εὑρέθησαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι τετράγωνος.

2. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2 = AB \times B\Gamma$, (2) ἤτοι τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ἴσην πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

3. Ἐὰν οἱ AB, $B\Gamma$ δὲν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τὸ γινόμενον αὐτῶν $AB \times B\Gamma$ δὲν εἶναι τετράγωνος καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ὡς μὴ τετράγωνον ἀριθμόν. Ἡ σχέσις (1) παρέχει ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς πυθαγορείου ἐξισώσεως $z^2 = \chi^2 + \psi^2$.

Ἐὰν καλέσωμεν τοὺς δύο ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς $\mu > \nu$ τότε θὰ εἶναι ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν $\kappa : \xi = \sigma : \tau$, ἂν καλέσωμεν κ, ξ τὰς πλευρὰς τοῦ μ καὶ σ, τ τὰς πλευρὰς τοῦ ν, ($\mu = \kappa.\xi$, $\nu = \sigma.\tau$), (κ, ξ, σ, τ, ἀκέραιοι). Κατὰ τ' ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :

1. $\mu.\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2$, ἔνθα $\mu.\nu$ τετράγωνος,

1α. ἢ $\kappa.\xi.\sigma.\tau + \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2$, ἔνθα $\kappa.\xi.\sigma.\tau$ τετράγωνος.

2. $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \mu.\nu$, ἔνθα $\mu.\nu$ τετράγωνος,

ἢ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2 = \kappa.\xi.\sigma.\tau$, ἔνθα $\kappa.\xi.\sigma.\tau$ τετράγωνος.

3. Ἐὰν δὲν εἶναι οἱ μ,ν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἤτοι δὲν εἶναι $\kappa : \xi = \sigma : \tau$ τότε εἶναι

$$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2 = \mu.\nu \text{ οὐχὶ τετράγωνος,}$$

ἢ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2 = \kappa.\xi.\sigma.\tau$ οὐχὶ τετράγωνος,

ἢ $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ οὐχὶ τετράγωνος.

Σημ. 1. Ἐὰν οἱ μ, ν εἶναι περιττοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (ἤτοι

$\varkappa:\xi=\sigma:\tau$ καὶ $\mu=\varkappa.\xi$, $\nu=\sigma.\tau$), ἀλλὰ $\nu=\sigma.\tau=1\times 1$, ὁ $\mu.\nu=\varkappa.\xi.1$ εἶναι τετράγωνος, ἔστω α^2. Τότε ἡ σχέσις (1α) γίνεται

$\alpha^2+\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2$ Αὔτη παρέχει τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἀνωτέρω πυθαγορικῆς ἐξισώσεως διὰ πάσας τὰς περιττὰς τιμὰς τοῦ α, ($\alpha=3, 5, 7 \ldots$) καὶ ἀποδίδεται προσωπικῶς εἰς τὸν Πυθαγόραν.

Σημ. 2. Ἐὰν οἱ μ, ν εἶναι ἄρτιοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, ἀλλὰ $\nu=\sigma.\tau=1\times 2$, ὁ $\mu.\nu=\varkappa.\xi.2=$ τετράγωνος, ἔστω β^2. Τότε ἡ σχέσις (1α) γίνεται $\beta^2+\left(\frac{\beta^2}{4}-1\right)^2=\left(\frac{\beta^2}{4}+1\right)^2$. Αὔτη παρέχει τὰς ἀκεραίας λύσεις διὰ πάσας τὰς ἀρτίας τιμὰς τοῦ β, ($\beta=4, 6, 8 \ldots$) καὶ ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα.

Λῆμμα 2.

Ἔστωσαν δύο ἄρτιοι ἢ περιττοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ > ΒΓ, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν ὁ ΑΒ × ΒΓ εἶναι ἀριθμὸς τετράγωνος (σχῆμα λήμματος). Ἡ διαφορὰ ΑΒ − ΒΓ = ΓΑ εἶναι ἄρτιος. Λαμβάνομεν πάλιν τὸ ἥμισυ τοῦ ΓΑ, ὥστε $\Gamma\Delta=\frac{\Gamma\mathrm{A}}{2}$. Κατὰ τὸ II. 6 θὰ εἶναι $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\Delta^2=\mathrm{B}\Delta^2$. Ἀπὸ τοῦ ΓΔ ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα (τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ΔΕ), ὥστε ΓΔ − 1 = ΓΕ. Εἶναι ἄρα $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2<\mathrm{B}\Delta^2=(\mathrm{BE}+1)^2$. Λέγω, ὅτι ὁ $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος. Διότι ἔστω εἶναι τετράγωνος. Καλοῦντες αὐτὸν x^2 θὰ ἔχωμεν

$$\mathrm{x}^2<(\mathrm{BE}+1)^2 \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{x}<\mathrm{BE}+1, \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (1) πρέπει νὰ εἶναι $\mathrm{x}\leqq\mathrm{BE}$. Ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\mathrm{x}>\mathrm{BE}$, διότι τότε διὰ νὰ ἰσχύσῃ ἡ ἀνισότης (1) πρέπει νὰ εἶναι

$$\mathrm{BE}+\frac{\varkappa}{\lambda}<\mathrm{BE}+1$$

$\left(0<\frac{\varkappa}{\lambda}<1\right)$, ἤτοι ὁ $\mathrm{x}=\mathrm{BE}+\frac{\varkappa}{\lambda}$ δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἀπομένει ἄρα $\mathrm{x}\leqq\mathrm{BE}$. Ἔστω πρότερον x = ΒΕ καὶ συνεπῶς $\mathrm{x}^2=\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{BE}^2$ καὶ ἔστω ΗΑ = 2ΔΕ, (2), ἐν ᾧ εἶναι ΑΓ = 2ΓΔ, (3). Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (2) ἀπὸ τῆς (3) ἔχομεν ΑΓ − ΗΑ = 2ΓΔ − 2ΔΕ ἢ ΗΓ = 2ΕΓ ἤτοι ὁ ΗΓ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε. Καὶ κατὰ τὸ II. 6 θὰ εἶναι $\mathrm{HB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{BE}^2$. Ὑπετέθη δὲ $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{BE}^2$. Εἶναι ἄρα καὶ ΗΒ × ΒΓ = ΑΒ × ΒΓ ἤτοι ΗΒ = ΑΒ ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{BE}^2$.

Λέγω, ὅτι ὁ x δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ ΒΕ ἤτοι ὁ $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2$ δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ BE^2. Ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ὅτι $\mathrm{AB}\times\mathrm{B}\Gamma+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{BZ}^2$ καὶ ἔστω ΘΑ = 2ΔΖ, (4). Καὶ εἶναι ΑΓ = 2ΓΔ, (5). Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (4) ἀπὸ τῆς (5) ἔχομεν $ΑΓ - ΘΑ = 2(ΓΔ - ΔΖ)$ ἢ $ΘΓ = 2ΓΖ$ ἤτοι ὁ ΘΓ τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ζ καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ ΙΙ. 6 θὰ ἔχωμεν $ΘΒ \times ΒΓ + ΖΓ^2 = ΒΖ^2$. Ὑπετέθη δὲ $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 = ΒΖ^2$. Ἄρα εἶναι $ΘΒ \times ΒΓ + ΖΓ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$, ὅπερ ἄτοπον, διότι $ΑΒ > ΘΒ$ καὶ $ΓΕ > ΖΓ$. Ἄρα δὲν εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2 < ΒΕ^2$. Ἐδείχθη δὲ ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ἴσος. Ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ + ΓΕ^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

[Σημ. Ἡ ἀπόδειξις εἰς σύγχρονον διατύπωσιν. Ἔστωσαν οἱ δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοὶ οἱ μ, ν, (ὅμοιοι ἐπίπεδοι σημαίνει : $μν = α^2$, $μ = κ \cdot ξ$, $ν = σ \cdot τ$, καὶ $κ : ξ = σ : τ$, κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι), ὁπότε κατὰ τὸ ΙΙ. 6 θὰ ἔχωμεν $μν + \left(\frac{μ-ν}{2}\right)^2 = \left(\frac{μ+ν}{2}\right)^2$. Ἀπὸ τοῦ $\left(\frac{μ-ν}{2}\right)$ ἀφαιροῦμεν τὴν μονάδα, ὁπότε ἔχομεν $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{μ+ν}{2}\right)^2$, (1). Λέγω ὅτι ὁ $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2$ δὲν εἶναι τετράγωνος.

Ἔστω ὅτι εἶναι τετράγωνος.

Ἡ σχέσις (1) γράφεται $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{μ+ν}{2} - 1 + 1\right)^2$.

Καλοῦμεν τὸν ὑποτιθέμενον τετράγωνον $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 = x^2$ καὶ τὸν $\frac{μ+ν}{2} - 1 = φ$. Τότε θὰ εἶναι $x^2 < (φ + 1)^2$, καὶ $x < φ + 1$, (2).

Μεταξὺ τοῦ $χ^2$ καὶ τοῦ $φ^2$ πρέπει νὰ ἰσχύῃ μία τῶν τριῶν σχέσεων $x^2 \gtreqless φ^2$.

Ἔστω 1ον $χ^2 > φ^2$ ὅτε εἶναι καὶ $χ > φ$, καὶ ἔστω $χ = φ + θ$.

Κατὰ τὴν ἀνισότητα (2) θὰ εἶναι $φ + θ < φ + 1$, ἤτοι $θ = \frac{λ}{ρ}, < 1$ $(λ, < ρ)$ δηλ. ὁ χ δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὅθεν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $χ^2 > φ^2$. Ἀπομένει $χ^2 \leqslant φ^2$.

Ἔστω 2ον $χ^2 = φ^2$ ἤτοι $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{μ+ν}{2} - 1\right)^2$, (3).

Ἐπειδὴ $\left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right) + ν = \left(\frac{μ+ν}{2} - 1\right)$, ἕπεται κατὰ τὸ ΙΙ. 6, [καθ' ὃ $(2α + β)\,β + α^2 = (α + β)^2$], ἐὰν κληθῇ $α = \frac{μ-ν}{2} - 1$, $β = ν$, ὅτι εἶναι $\left[2\left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right) + ν\right] \cdot ν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{μ+ν}{2} - 1\right)^2$, (4).

Ἐκ τῶν (4) καὶ (3) ἕπεται $(μ - 2)\,ν = μν$, ἤτοι $μ - 2 = μ$, ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα $χ^2 = φ^2$.

Ἔστω 3ον $χ^2 < φ^2$, ἤτοι $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 < \left(\frac{μ+ν}{2} - 1\right)^2$.

Τότε θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ $\left(\frac{μ+ν}{2} - 1\right)$ τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ $χ^2$.

Ἔστω ὅτι εἶναι $μν + \left(\frac{μ-ν}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{μ+ν}{2} - 2\right)^2$, (5).

Ἐπειδὴ $\left(\frac{\mu-\nu}{2}-2\right)+\nu=\left(\frac{\mu+\nu}{2}-2\right)$, ἕπεται κατὰ τὸ II. 6, ὅτι $\left[2\left(\frac{\mu-\nu}{2}-2\right)+\nu\right].\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-2\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}-2\right)^2$ (καλοῦμεν $\alpha=\frac{\mu-\nu}{2}$ -2 καὶ $\beta=\nu$, (6)).

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) ἕπεται $\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=(\mu-4)\,\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-2\right)^2$ ὅπερ ἄτοπον διότι $\mu\nu > (\mu-4)\,\nu$, καὶ $\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2 > \left(\frac{\mu-\nu}{2}-2\right)^2$.

Δὲν εἶναι ἄρα $\chi^2 < \varphi^2$. Ἀπεδείχθη δὲ ὅτι οὔτε εἶναι $\chi^2 \geqslant \varphi^2$.

Ἄρα ὁ $\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda$ ἢ $\varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$ ἢ $\alpha^2+\beta^2$ $=\lambda$, δὲν εἶναι τετράγωνος].

29. Ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε ΓΔ−ΔΕ = ΓΕ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΖ καὶ ἂς γίνῃ $\Delta\Gamma:\Gamma E=BA^2:AZ^2$, (1), (κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θ. 6), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ. Ἐπειδὴ ΔΓ : ΓΕ εἶναι λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, εἶναι ἄρα BA^2 καὶ AZ^2 σύμμετρα καὶ ΒΑ, ΑΖ μήκει ἀσύμμετροι, ἐπειδὴ ὁ λόγος ΔΓ : ΓΕ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, (0.9)· ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΖ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma-\Gamma E}=\frac{BA^2}{BA^2-AZ^2}$, ἢ $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}=\frac{BA^2}{BZ^2}$. Ἄρα ὁ λόγος $\frac{BA^2}{BZ^2}$ ἰσοῦται πρὸς λόγον τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἐπειδὴ οἱ ΔΓ, ΔΕ εἶναι τετράγωνοι. Εἶναι ἄρα αἱ ΒΑ, ΒΖ μήκει σύμμετροι. Καὶ εἶναι $AB^2=AZ^2+ZB^2$. Εἶναι ἄρα $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$, (2) καὶ ΑΒ μήκει σύμμετροι. Ἤτοι ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος εἶναι μήκει σύμμετροι.

[Οἱ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ δὲν εἶναι τετράγωνος ἀριθμὸς εἶναι κατὰ τὸ πρῶτον λῆμμα τοῦ θ. 28, $\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\theta$, ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι, ἀλλὰ δὲν εἶναι $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, ἤτοι οἱ $\mu=\varkappa.\xi$, $\nu=\sigma.\tau$ δὲν εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, (ἄρτιοι ἢ περιττοί). Τοῦ λοιποῦ θὰ χρησιμοποιῶμεν πρὸς ἁπλούστευσιν τὴν παράστασιν $\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος. Ὅθεν ἐὰν καλέσωμεν $AB=\rho$, $\Gamma\Delta=\varphi^2$, $\Delta E=\omega^2$, $\Gamma E=\theta$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1), $AZ^2=\frac{\rho^2\theta}{\varphi^2}$ καὶ ἐκ τῆς (2), $ZB=\rho\,\frac{\omega}{\varphi}$.

Εὑρέθησαν λοιπὸν ἡ ὑποτείνουσα (ρ) καὶ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ $\rho\,\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$ ῥηταί, ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\frac{\rho\omega}{\varphi}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

30. Ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε ΓΕ + ΕΔ = ΓΔ μὴ τετράγωνος. Ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον καὶ ἂς γίνῃ $\Delta\Gamma:\Gamma E=BA^2:AZ^2$, (1), (θ. 6, πόρισμα) καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ. Ἐπειδὴ ὁ λόγος ΔΓ : ΓΕ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετρ.

ἀριθμόν, εἶναι ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΖ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma - \Gamma E} = \frac{BA^2}{BA^2 - AZ^2}$ ἢ $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta E} = \frac{BA^2}{BZ^2}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $\Delta\Gamma : \Delta E$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα BA^2, BZ^2 ἁπλῶς σύμμετρα, ἐν ᾧ ΒΑ, ΒΖ μήκει ἀσύμμετροι. Εἶναι ὅμως $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$, ἤτοι $ZB = \sqrt{AB^2 - AZ^2}$, (2) καὶ ΑΒ μήκει ἀσύμμετροι. [Οἱ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα δὲν εἶναι τετράγωνος εἶναι κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα τοῦ θ. 28 $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἔνθα κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι, $\mu = \kappa.\xi$, $\nu = \sigma.\tau$ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, δηλ. $\kappa : \xi = \sigma : \tau$, ἄρτιοι ἢ περιττοί. Τοῦ λοιποῦ θὰ χρησιμοποιῶμεν πρὸς ἁπλούστευσιν τὴν παράστασιν $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, μὴ τετράγωνος. Ὅθεν ἐὰν καλέσωμεν $AB = \rho$, $\Delta\Gamma = \lambda$, $\Gamma E = \alpha^2$, $E\Delta = \beta^2$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1), $AZ^2 = \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}$ καὶ ἐκ τῆς (2) $ZB = \frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$. Εὑρέθησαν λοιπὸν ἡ ὑποτείνουσα (ρ) καὶ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου ἡ $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ ῥηταὶ ἀλλὰ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

31. *1.* Ἔστωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $A > B$, ὥστε Α καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ ἔστω $A \times B = \Gamma^2$. Ἐπειδὴ αἱ δύο ῥηταὶ Α, Β εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ $A \times B$ εἶναι μέσον, (θ. 21). Εἶναι ἄρα καὶ τὸ Γ^2 μέσον· ἄρα καὶ ἡ Γ. Ἔστω ἀκόμη $B^2 = \Gamma \times \Delta$ (τῶν Γ, Β εὑρίσκει τὴν τρίτην ἀνάλογον Δ). Ἐπειδὴ ἡ Β εἶναι ῥητή, ἄρα B^2 ῥητόν. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{A}{B} = \frac{A \times B}{B^2}$ καὶ $A \times B = \Gamma^2$, $B^2 = \Gamma \times \Delta$, εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma^2}{\Gamma \times \Delta}$. Καὶ εἶναι $\frac{\Gamma^2}{\Gamma \times \Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta}$. Εἶναι ἄρα $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, (1). Εἶναι δὲ αἱ Α, Β δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα καὶ Γ, Δ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ Γ εἶναι μέση, εἶναι ἄρα καὶ ἡ Δ μέση. Καὶ ἐπειδὴ Α, $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει σύμμετροι, ἕπεται ἐκ τῆς (1) ὅτι καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ μήκει σύμμετροι. [Αἱ Α, Β εἶναι τῆς μορφῆς τῶν τοῦ θ. 29 αἱ ρ καὶ $\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi}$. Ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω λαμβάνομεν $\Gamma = \frac{\rho\theta^{\frac{1}{4}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}$, $\Delta = \frac{\rho\theta^{\frac{3}{4}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}}$. Τὸ γινόμενον. $\Gamma \times \Delta = \frac{\rho^2\theta}{\varphi^2}$ εἶναι ῥητὸν καὶ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2} = \rho\left(\frac{\omega}{\varphi}\right)\frac{\theta^{\frac{1}{4}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}$ μήκει σύμμετρος πρὸς Γ. ($\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τετράγωνος). Εἶναι φανερὸν ὅτι κατασκευάζονται τρία ὀρθογώνια τρίγωνα. Εἰς τὸ πρῶτον εἶναι ἡ ὑποτείνουσα $\rho = A$, ἡ μία κάθετος $\frac{\rho\sqrt{\theta}}{\varphi} = B$ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος $\frac{\rho\omega}{\varphi}$, (θ. 29). Εἰς τὸ δεύτερον τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα

ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους ἡ Α, τὸ ἄλλο τμῆμα ἡ Β καὶ τὸ ὕψος ἡ Γ. Εἰς τὸ τρίτον τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ἡ Γ, ὕψος ἡ Β καὶ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης ἡ Δ. (Θὰ ἔπρεπε καὶ ἡ Δ ἐπειδὴ εἶναι μέση νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος δύο τμημάτων ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους. Ὡς τοιαῦτα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ἡ ρ καὶ ἡ $\frac{\rho\theta^{\frac{3}{2}}}{\varphi^3}$. Ὁπωσδήποτε, ἀσχέτως τοῦ πόθεν ἔχει προέλθει ὁ ὅρος μέση, ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης αὐτῆς εἶναι ὅτι περιέχει τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

[Σημ. Τὸ 31. 1 οὐδαμοῦ χρησιμοποιεῖται. Ὑπάρχει διὰ νὰ ὑποδείξῃ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 31. 2, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ 34].

31. *2.* Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται....... Ἐὰν δοθῶσιν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β καὶ Α, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι εὑρίσκονται δύο μέσαι αἱ Γ, Δ δυνάμει μόνον σύμμετροι (μόνον Γ^2, Δ^2 σύμμετρα), ὥστε Γ, $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ $\Gamma\times\Delta$ ῥητόν. Ἐνταῦθα αἱ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι αἱ τοῦ θ. 30, ἤτοι εἶναι $A=\rho$, $B=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Σχηματίζομεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἀπόδειξιν τὸ $A\times B=\Gamma^2$, ἐξ οὗ $\Gamma=\rho\alpha^{\frac{1}{2}}:\lambda^{\frac{1}{4}}$, καὶ $B^2=\Gamma\times\Delta$, ἐξ οὗ $\Delta=\rho\alpha^{\frac{3}{2}}:\lambda^{\frac{3}{4}}$. Τὰ τετράγωνα Γ^2, Δ^2 εἶναι σύμμετρα, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι $=\frac{\lambda}{\alpha^2}$, τὸ $\Gamma\times\Delta=\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ ῥητόν, καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2-\Delta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, διότι ὁ λόγος των $=\lambda^{\frac{1}{2}}:\beta$. ($\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος).

32. *1.* Ἔστωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε Α, $\sqrt{A^2-\Gamma^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ ἔστω $A\times B=\Delta^2$, (1). Ἄρα τὸ Δ^2 εἶναι μέσον καὶ συνεπῶς καὶ ἡ Δ εἶναι μέση. Ἔστω ἀκόμη $B\times\Gamma=\Delta\times E$, (2), (τῶν Δ, Β, Γ λαμβάνει τὴν τετάρτην ἀνάλογον Ε). Ἐπειδὴ $\frac{A\times B}{B\times\Gamma}=\frac{A}{\Gamma}$, ἕπεται ἐκ τῶν (1) καὶ (2) $\frac{A}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}$, (3). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως Α, Γ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι ἄρα καὶ Δ, Ε δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι δὲ μέση ἡ Δ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ Ε μέση. Καὶ ἐπειδὴ Α, $\sqrt{A^2-\Gamma^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ μήκει σύμμετροι. Ἐπειδὴ $B\times\Gamma$ εἶναι μέσον, (θ. 21) εἶναι ἐκ τῆς (2) καὶ $\Delta\times E$ μέσον. [Αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι $A=\rho$, $B=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma=\frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ (Α, Γ κατὰ τὸ θ. 29, γ, δ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι). Ἀντικαθιστῶντες ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν $\Delta=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $E=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$, ὥστε Δ^2, E^2 μόνον σύμμετρα $\Delta\times E=$ μέσον, καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\omega}{\varphi}$ μήκει σύμμετροι, ($\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος).

Σημ. Τὸ 32. 1 οὐδαμοῦ χρησιμοποιεῖται ὑπάρχει διὰ νὰ ὑποδείξῃ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 32. 2, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ 35].

32. 2. Ὁμοίως δειχθήσεται..... Αἱ τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἶναι $A=\rho$, $B=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Gamma=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ (ἡ Γ ἐκ τοῦ θ. 30, ὥστε Α, $\sqrt{A^2-\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι). Ἡ ἀπόδειξις ὡς προηγουμένως. Ἀντικαθιστῶντες θὰ ἔχωμεν $\Delta=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $E=\frac{B\times\Gamma}{\Delta}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Καὶ εἶναι Δ, Ε μέσαι, μόνον Δ^2, E^2 σύμμετρα, $\Delta\times E$ μέσον καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2-E^2}$ μήκει ἀσύμμετροι ($\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος).

33. Ἄλλη ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος: Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ῥητόν, καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς καθέτους νὰ εἶναι μέσον.

Ἔστωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $AB>B\Gamma$ ὥστε ΑΒ, $\sqrt{AB^2-B\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ καὶ ἂς παραβληθῇ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν ΑΒ, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα τὸ $B\Delta^2=\frac{B\Gamma^2}{4}$ καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τὸ $AE\times EB$, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον καὶ ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος ΕΖ καὶ αἱ ΑΖ, ΖΒ. (Κατὰ τὸ θ. 18 αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-AB\chi+\frac{B\Gamma^2}{4}=0$). Ἐπειδὴ ΑΒ καὶ $\sqrt{AB^2-B\Gamma^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ μήκει ἀσύμετροι, (θ. 18). Καὶ εἶναι $\frac{AE}{EB}=\frac{BA\times AE}{AB\times BE}$. Εἶναι δὲ $AZ^2=BA\times AE$, $ZB^2=AB\times BE$. Εἶναι ἄρα καὶ AZ^2, ZB^2 ἀσύμμετρα. Δηλ. αἱ ΑΖ, ΖΒ εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ ῥητὴ ἄρα $AB^2=AZ^2+ZB^2$ ῥητόν. Ἐπειδὴ $EZ^2=AE\times EB=B\Delta^2$, εἶναι ἄρα $ZE=B\Delta$, καὶ συνεπῶς $B\Gamma=2ZE$. Ὥστε $AB\times B\Gamma=AB\times 2EZ$ εἶναι σύμμετρον πρὸς $AB\times ZE$, (θ. 6). Εἶναι δὲ $AB\times B\Gamma$ μέσον (διότι ΑΒ, ΒΓ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, θ. 21)· εἶναι ἄρα καὶ $AB\times EZ$ μέσον λόγῳ τῆς συμμετρίας πρὸς $AB\times B\Gamma$. Εἶναι δὲ $AB\times EZ=AZ\times ZB$. Ἄρα $AZ\times ZB$ μέσον. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ AZ^2+ZB^2 ῥητόν. [Αἱ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε κλπ. εἶναι τῆς μορφῆς τῶν τοῦ θ. 30, αἱ $AB=\rho$, $B\Gamma=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, ($\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος). Αἱ ΑΕ, ΕΒ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι ῥίζαι (θετικαὶ καὶ ἄνισοι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\rho\chi+\frac{\rho^2\alpha^2}{4\lambda}=0$.

Αὗται εἶναι $AE=\frac{\rho}{2}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $EB=\frac{\rho}{2}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΖ, ΖΒ θὰ ὑπολογισθῶσιν ἐκ τῶν σχέσεων $AZ^2=$ $=AB\times AE$, $ZB^2=AB\times EB$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ $AZ=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$,

$ZB=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$. Σημειωτέον, ὅτι αἱ AZ, ZB εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$\chi^4-AB^2\chi^2+AB^2.\frac{B\Gamma^2}{4}=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^4-\rho^2\chi^2+\frac{\rho^4\alpha^2}{4\lambda}=0.$$

34. Ἄλλη ἐκφώνησις: Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ τετράγωγον τῆς ὑποτεινούσης νὰ εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλ. τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς καθέτους νὰ εἶναι ῥητόν.

Ἔστωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι $AB > B\Gamma$, ὥστε AB, $\sqrt{AB^2-B\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι καὶ $AB\times B\Gamma$ ῥητόν, καὶ ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν AB τὸ $BE^2=E\Gamma^2=B\Gamma^2:4$, ὡς ὀρθογώνιον παραλ. τὸ $AZ\times ZB$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωγον σχῆμα, ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον, ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος $Z\Delta$ καὶ αἱ $A\Delta$, ΔB. Κατὰ τὸ θ. 18 αἱ AZ, ZB εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἄρα $AB\times AZ$, $AB\times ZB$ εἶναι ἀσύμμετρα. Συνεπῶς καὶ τὰ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ταῦτα τὰ $A\Delta^2$, ΔB^2 ἀσύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ AB^2 ἐξ ὑποθέσεως μέσον εἶναι ἄρα καὶ τὸ ἴσον πρὸς τοῦτο $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ $B\Gamma=$ $=2\Delta Z$ (διότι $\frac{B\Gamma^2}{4}=AZ\times ZB=Z\Delta^2$), εἶναι ἄρα $AB\times B\Gamma=2AB\times Z\Delta$. Ῥητὸν δὲ ἐξ ὑποθέσεως τὸ $AB\times B\Gamma$. Ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ $AB\times Z\Delta$. Ἀλλὰ $AB\times Z\Delta=A\Delta\times\Delta B$. Ῥητὸν ἄρα τὸ $A\Delta\times\Delta B$. (Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι κλπ. εἶναι αἱ μέσαι τοῦ θ. 31. 2, αἱ $AB=\rho\alpha^{\frac{1}{2}}:\lambda^{\frac{1}{4}}$, $B\Gamma=$ $\rho\alpha^{\frac{3}{2}}:\lambda^{\frac{3}{4}}$, ($\alpha^2+\beta^2=\lambda$, μὴ τετράγωνος). Αἱ AZ, ZB εἶναι κατὰ τὸ θ. 18 αἱ θετικαὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-AB\chi+\frac{B\Gamma^2}{4}=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2-\frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\chi+\frac{\rho^2\alpha^3}{4\lambda^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\text{ἤτοι} \quad AZ=\frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\lambda^{\frac{1}{4}}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad ZB=\frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\lambda^{\frac{1}{4}}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Αἱ κάθετοι πλευραὶ $A\Delta$, ΔB θὰ ληφθῶσιν ἐκ τῶν σχέσεων, $A\Delta^2=$ $=AB\times AZ$, $\Delta B^2=AB\times ZB$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ

$$A\Delta=\frac{\rho}{\sqrt{2}}.\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad \Delta B=\frac{\rho}{\sqrt{2}}.\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ $A\Delta$, ΔB εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$\chi^4-AB^2\chi^2+\frac{AB^2\times B\Gamma^2}{4}=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^4-\frac{\rho^2\alpha}{\sqrt{\lambda}}\chi^2+\frac{\rho^4\alpha^4}{4\lambda^2}=0.$$

35. Ἄλλη ἐκφώνησις: Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ τετράγωνον τῆς

ὑποτεινούσης νὰ εἶναι μέσον καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς καθέτους νὰ εἶναι μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἔστωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $AB > B\Gamma$ ὥστε $AB \times B\Gamma$ μέσον καὶ AB, $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον, ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν AB τὸ $\frac{B\Gamma^2}{4} = BE^2 = E\Gamma^2$, ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZB$, καὶ ἂς ἀχθῶσι αἱ $A\Delta$, ΔB καὶ τὸ ὕψος $Z\Delta$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ AZ, ZB εἶναι μήκει ἀσύμμετροι καὶ $\frac{AZ}{ZB} = \frac{A\Delta^2}{\Delta B^2}$, εἶναι ἄρα $A\Delta^2$ ΔB^2 ἀσύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ τὸ AB^2 εἶναι μέσον (διότι ἡ AB εἶναι μέση) εἶναι μέσον καὶ τὸ ἴσον πρὸς τοῦτο $A\Delta^2 + \Delta B^2$. Ἐπειδὴ $AZ \times ZB = Z\Delta^2 = BE^2$, εἶναι ἄρα $BE = \Delta Z$. Ἄρα $B\Gamma = 2Z\Delta$. Ὥστε καὶ τὸ $AB \times B\Gamma = 2AB \times Z\Delta$. Εἶναι δὲ μέσον τὸ $AB \times B\Gamma$. Ἄρα εἶναι μέσον καὶ τὸ $AB \times Z\Delta$ καὶ συνεπῶς εἶναι καὶ τὸ $A\Delta \times \Delta B$ μέσον. Καὶ ἐπειδὴ AB, $B\Gamma$ μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι δὲ ΓB, BE μήκει σύμμετροι (διότι $2BE$, BE μήκει σύμμετροι) εἶναι ἄρα AB, BE μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Ὥστε AB^2, $AB \times BE$ ἀσύμμετρα (διότι $\frac{AB}{BE} = \frac{AB^2}{AB \times BE}$ καὶ θ. 11). Ἀλλὰ $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$ καὶ $AB \times BE = AB \times Z\Delta = A\Delta \times \Delta B$. Εἶναι ἄρα τὸ $A\Delta^2 + \Delta B^2$ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $A\Delta \times \Delta B$. Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι κλπ. εἶναι αἱ μέσαι τοῦ θεωρ. 32. 2, αἱ

$$AB = \rho\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad B\Gamma = \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} . \alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda \text{ μὴ τετράγωνος}).$$

Αἱ AZ, ZB εἶναι κατὰ τὸ θ. 18 αἱ θετικαὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως.

$$\chi^2 - AB\chi + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2 - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha^2}{4\lambda} = 0,$$

ἤτοι αἱ $AZ = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$, $ZB = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Αἱ κάθετοι πλευραὶ $A\Delta$, ΔB θὰ ληφθῶσιν ἐκ τῶν σχέσεων $A\Delta^2 = AB \times AZ$, $\Delta B^2 = AB \times ZB$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ

$$A\Delta = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}, \quad \Delta B = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ $A\Delta$, ΔB εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$\chi^4 - AB^2\chi^2 + AB^2 . \frac{B\Gamma^2}{4} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^4 - \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\chi^2 + \rho^4\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{\alpha^2}{4\lambda} = 0.$$

[$A\Delta^2$, ΔB^2 ἀσύμμετρα, διότι ὁ λόγος των $= \frac{\sqrt{\lambda} + \beta}{\sqrt{\lambda} - \beta}$, $A\Delta^2 + \Delta B^2 =$

$=\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\text{ΑΔ}\times\text{ΔΒ}=\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΒ}^2$, διότι ὁ λόγος των $=\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}}$].

Πρόσθεσις μονωνύμων ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας.

36. Αἱ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι θὰ εἶναι κατὰ τὸ θ. 10 τῆς μορφῆς, $\text{ΑΒ}=\rho$, $\text{ΒΓ}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Τὸ ἄθροισμα $\text{ΑΓ}=\rho+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ καλεῖται ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) καὶ εἶναι ἄλογος(ἄρρητος).

37. Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι (τὸ γινόμενόν των ῥητὸν) εἶναι τῆς μορφῆς τῶν τοῦ θ. 27, $\text{ΑΒ}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\text{ΒΓ}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$. Τὸ ἄθροισμα $\text{ΑΓ}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$ καλεῖται ἐκ δύο μέσων πρώτη καὶ εἶναι ἄλογος.

38. Ἔστω $\text{ΑΓ}=\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}$, ἔνθα ΑΒ, ΒΓ μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ $\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ μέσον. Μετασχηματίζομεν τὸ ΑΓ^2 εἰς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ ῥητὴ ΔΕ καὶ ἄλλη πλευρὰ ἡ ΔΗ καὶ ἔστω $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2=\text{ΕΘ}$. Τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ $2\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}=\text{ΘΖ}$. Καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι μέση, εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ^2, ΒΓ^2 μέσα καὶ ἐπομένως καὶ τὸ $\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2$ μέσον. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ μέσον· εἶναι ἄρα τὰ ΕΘ $(=\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2)$ καὶ ΘΖ $(=2\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ})$ μέσα. Καὶ ἕκαστον τούτων ἔχει πλευρὰν τὴν ῥητὴν ΔΕ. Ἄρα ΔΘ, ΘΗ ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι πρὸς τὴν ΔΕ, (θ. 22). Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, διότι εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΑΒ}^2}{\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}}$, εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ^2, $\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ ἀσύμμετροι. Ἐπειδὴ ΑΒ^2, ΒΓ^2 σύμμετρα, εἶναι ἄρα ΑΒ^2, $(\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2)$ σύμμετρα· εἶναι δὲ καὶ $\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$, $2\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ σύμμετρα. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ^2, $\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ ἀσύμμετρα, εἶναι ἄρα $(\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΓ}^2)$, $2\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ ἀσύμμετρα ἤτοι τὰ ΕΘ, ΘΖ ἀσύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{\text{ΕΘ}}{\text{ΘΖ}}=\frac{\text{ΔΘ}}{\text{ΘΗ}}$, εἶναι ἄρα ΔΘ, ΘΗ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 11). Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΔΘ, ΘΗ ἐδείχθησαν ῥηταί, καὶ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, (ὁρ. 3). Εἶναι ἄρα ἡ $\text{ΔΗ}=\text{ΔΘ}+\text{ΘΗ}$ ἄλογος (θ. 36). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΔΕ· τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς εἶναι ἄλογον (σημ. Δὲν ὑπάρχει προηγούμενον θεώρημα ἐπὶ τούτου· συνάγεται ὅμως ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ἐκ τοῦ ὁρ. 4 καὶ τοῦ θ. 21) καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου εἶναι ἄλογος. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ ΑΓ, ἡ ὁποία συνεπῶς εἶναι ἄλογος καὶ ἂς καλῆται ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

(Αἱ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι εἶναι αἱ τοῦ θ. 28. Τὸ ἄθροισμά των ἡ $A\Gamma = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$ εἶναι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

39. Ἡ μείζων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ θ. 33 ἡ

$$A\Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

40. Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ θ. 34 ἡ

$$A\Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

41. Ἡ δύο μέσα δυναμένη εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ θ. 35 ἡ

$$A\Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Λῆμμα.

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε $A\Gamma > \Gamma B$ καὶ πάλιν εἰς ἄνισα κατὰ τὸ σημεῖον Δ, ὥστε $\Delta B > A\Delta$ καὶ ἔστω $A\Gamma > \Delta B$, (1). Λέγω, ὅτι

$$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2.$$

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ. Ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς (1) ἀφαιροῦμεν τὴν ΔΓ ὅτε θὰ ἔχωμεν $A\Gamma - \Delta\Gamma > \Delta B - \Delta\Gamma$ ἢ $A\Delta > \Gamma B$, (2). Ἀπὸ τῆς ἰσότητος $AE = EB$ ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὴν ἀνισότητα (2), ὅτε θὰ ἔχωμεν $AE - A\Delta < EB - \Gamma B$ ἢ $\Delta E < E\Gamma$, (3). Τὰ σημεῖα ἄρα Δ, Γ δὲν ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ μέσου Ε. Καὶ ἐπειδὴ $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = EB^2$, (II. 5), ἀλλὰ καὶ $A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2 = EB^2$, (II. 5), εἶναι ἄρα $A\Gamma \times \Gamma B^2 + E\Gamma^2 = A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2$. Ἐκ τῆς (3) ὅμως $E\Gamma^2 > \Delta E^2$. Εἶναι ἄρα $A\Gamma \times \Gamma B < A\Delta \times \Delta B$. Ἀλλὰ $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma \times \Gamma B = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2A\Delta \times \Delta B$. Ἑπομένως εἶναι $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$.

[Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων ἀνίσων ἀριθμῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ περιέχοντος τὸν μεγαλύτερον (ἢ μικρότερον) ὅρον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος].

42. Τὰ μονώνυμα τῆς διωνύμου $\rho + \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ $\left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$ τοῦ θ. 36 εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα.

Τὸ προηγούμενον λῆμμα τοῦ θ. 41 ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν τῆς διαφορᾶς $(ΑΓ^2 + ΓΒ^2) - (ΔΒ^2 + ΑΔ^2)$. Ὑπετέθη $ΑΓ > ΔΒ$.

Κατὰ τὸ θεώρημα, ἐὰν εἶναι $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ$, ἔνθα $ΑΓ \neq ΑΔ$, $ΓΒ \neq ΔΒ$. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ διαφορὰ μεταξὺ τῶν μονωνύμων, τοῦτο ἀντιβαίνει πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ὑπάρχῃ διαφορά, τότε ἐκ τῆς σχέσεως $(ΑΓ+ΓΒ)^2=(ΑΔ+ΔΒ)^2$ ἔχομεν $(ΑΓ^2+ΓΒ^2) -(ΑΔ^2+ΔΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$. Ἡ διαφορὰ τοῦ α′ μέλους εἶναι **ῥητὴ** (διότι τὰ μονώνυμα εἶναι ῥητὰ δυνάμει μόνον σύμμετρα). Ἄρα καὶ τοῦ **δευτέρου** μέλους ἡ διαφορὰ εἶναι ῥητή, ὅπερ ἄτοπον. Διότι $ΑΔ \times ΔΒ$, $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσα.

43. Εἰς τὴν σχέσιν $(ΑΓ^2 + ΓΒ^2) - (ΑΔ^2 + ΔΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$, τὸ δεύτερον μέλος εἶναι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ῥητόν. Ἄρα καὶ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ῥητόν, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὰ ἀθροίσματα τοῦ πρώτου μέλους εἶναι μέσα καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

44. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος χρησιμοποιεῖται ἡ πρότασις $α^2 + β^2 > 2αβ$, ἂν $α \neq β$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἀποδειχθῆ προηγουμένως. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης περιέχεται εἰς τὸ λῆμμα τοῦ θ. 59. Ὅθεν ἡ θέσις τοῦ λήμματος τούτου εἶναι μετὰ τὸ θ. 43.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι.

Ληφθείσης ῥητῆς ρ καὶ τῆς δυωνύμου $Δ = Α + Β$ (ἔνθα $Α > Β$ ῥηταὶ καὶ μόνον $Α^2, Β^2$ σύμμετρα)

Ι. Ἔστω $Α$, $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. $Α$, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πρώτη δυώνυμος.

Ἐὰν 2. $Β$, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ δευτέρα δυώνυμος.

Ἐὰν 3. Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τρίτη δυώνυμος.

ΙΙ. Ἔστω $Α$, $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. $Α$, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ τετάρτη δυώνυμος.

Ἐὰν 5. $Β$, ρ μήκει σύμμετροι, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ πέμπτη δυώνυμος.

Ἐὰν 6. Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, ἂς καλῆται ἡ δυώνυμος Δ ἕκτη δυώνυμος.

[Σημ. Αἱ τρεῖς πρῶται περιπτώσεις λαμβάνονται ὅταν ἡ ὑποτείνουσα Α εἶναι πρὸς τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν Β ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον σύμμετρος. Αἱ τρεῖς δεύτεραι περιπτώσεις λαμβάνονται ὅταν ἡ ὑποτείνουσα Α εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὰς δύο καθέτους πλευράς].

48. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$, $(φ^2 = θ + ω^2$, ἔνθα θ μὴ

τετράγωνος, 1ον λῆμμα τοῦ 28, τρίτη περίπτωσις) καὶ ῥητὴ ἡ Δ ($=\rho$). Τῶν ἀκεραίων γ, δ καὶ τῆς ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $ΕΖ=\rho\frac{\delta}{\gamma}$. Ἡ ΕΖ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ καὶ ῥητή. Τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΒ : ΑΓ = ΕΖ : Κ$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ τὴν μέσην ἀνάλογον, $ΕΖ : ΖΗ = ΖΗ : Κ$, ἐξ ἧς κατὰ τὸν όρ. 9 τοῦ V εἶναι $ΕΖ : Κ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1), $ΑΒ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (2). Ἐπειδὴ $ΑΒ : ΑΓ$ δὲν εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα ΕΖ, ΖΗ μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ $ΕΖ^2$, $ΖΗ^2$ σύμμετρα. Ἐπειδὴ ΕΖ ῥητή, $ΕΖ^2$ ῥητὸν καὶ συνεπῶς $ΖΗ^2$ ῥητόν, ἄρα καὶ ΖΗ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ $ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον ὅτι καὶ πρώτη δυώνυμος. Ἐπειδὴ $ΑΒ > ΑΓ$ εἶναι ἐκ τῆς (2) καὶ $ΕΖ^2 > ΖΗ^2$. Ἔστω $ΕΖ^2 = ΖΗ^2 + Θ^2$, (3). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν δι' ἀναστροφῆς $ΑΒ : (ΑΒ - ΑΓ) = ΕΖ^2 : (ΕΖ^2 - ΖΗ^2)$ ἢ $ΑΒ : ΓΒ = ΕΖ^2 : Θ^2$, (4).

Ἐπειδὴ ΑΒ, ΓΒ εἶναι τετράγωνοι, εἶναι ἄρα ΕΖ, Θ μήκει σύμμετροι, (θ. 9). Ἐκ τῆς (3), ἡ $Θ = \sqrt{ΕΖ^2 - ΖΗ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν Δ. Ὥστε εὕρομεν 1) ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ΕΖ > ΖΗ$, 3) ΕΖ, Θ μήκει σύμμετροι, 4) Τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἡ ΕΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΗ πρώτη δυώνυμος, (ὁρισ. 1 δευτέρων ὁρισμῶν). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως $ΖΗ = \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$. Ὥστε ἡ πρώτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς $ΕΖ + ΖΗ = \rho\frac{\delta}{\gamma} + \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\theta}}{\varphi}$.

(Ὡς καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα λαμβάνεται πρὸς συντομίαν $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$ μὴ τρετράγωνος ἀντὶ τοῦ $\left(\frac{\kappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2 = \kappa\xi\sigma\tau$, μὴ τετράγωνος ἔνθα $\mu = \kappa\xi$ καὶ $\nu = \sigma\tau$ εἶναι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, ὄχι ὅμως ὅμοιοι).

49. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$ ($\varphi^2 = \theta + \omega^2$, ἔνθα θ μὴ τετράγωνος) ῥητὴ ἡ Δ ($=\rho$) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΕΖ ($=\rho\frac{\delta}{\gamma}$, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον). Ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ῥητή. Τῶν ΑΓ, ΑΒ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ : Κ$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον, $ΕΖ : ΖΗ = ΖΗ : Κ$. Κατὰ τὸν όρ. 9 τοῦ V εἶναι $ΕΖ : Κ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1), $ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (2). Ἐπειδὴ $ΑΓ : ΑΒ$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, αἱ ΕΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δυνάμει σύμμετροι ($ΕΖ^2$, $ΖΗ^2$ σύμμετρα). Ἐπειδὴ $ΕΖ^2$ ῥητὸν εἶναι καὶ $ΖΗ^2$ ῥητόν, ἄρα καὶ ΖΗ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον, καὶ δευτέρα δυώνυμος. Ἐκ τῆς (2) ἀνάπαλιν εἶναι $ΑΒ : ΑΓ = ΖΗ^2 : ΕΖ^2$, (3). Καὶ ἐπειδὴ $ΑΒ > ΑΓ$ εἶναι καὶ $ΖΗ^2 > ΕΖ^2$.

Ἔστω $ZH^2 = EZ^2 + \Theta^2$, (4). Ἐκ τῆς (3) δι' ἀναστροφῆς εἶναι $AB : (AB - A\Gamma) = ZH^2 : (ZH^2 - EZ^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = ZH^2 : \Theta^2$, (5). Ἐπειδὴ AB, ΓB τετράγωνοι, ἄρα ZH, Θ μήκει σύμμετροι, (θ. 9). Καὶ ἐκ τῆς (4) εἶναι $\Theta = \sqrt{ZH^2 - EZ^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ZH, EZ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ZH > EZ$, 3) ZH, Θ μήκει σύμμετροι, 4) Τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ EZ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ EH δευτέρα δυώνυμος (όρ. 2 δευτέρων ὁρισ.). Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως $ZH = \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}$. Ὥστε ἡ δευτέρα δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ZH + EZ = \rho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} + \rho \frac{\delta}{\gamma}.$$

50. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $AB = A\Gamma + \Gamma B$ ($\varphi^2 = \theta + \omega^2$, ἔνθα θ μὴ τετράγωνος) καὶ ὁ ἀριθμὸς Δ ($= \varepsilon$) μὴ τετράγωνος καὶ ῥητὴ ἡ E ($= \rho$). Τῶν Δ, AB, E εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : AB = E : N$, (1) Τῶν E, N τὴν μέσην ἀνάλογον, $E : ZH = ZH : N$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V ἔχομεν $E : N = E^2 : ZH^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1) εἶναι $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, (2). Ἐκ τῆς (2) ἕπεται E^2, ZH^2 σύμμετρα. Καὶ ἐπειδὴ E ῥητή, ἄρα ZH ῥητή. Ἐπειδὴ ὅμως $\Delta : AB$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, εἶναι E, ZH, (α), μήκει ἀσύμμετροι.

Τῶν AB, $A\Gamma$, ZH εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $AB : A\Gamma = ZH : \Lambda$, (3). Τῶν ZH, Λ τὴν μέσην ἀνάλογον, $ZH : H\Theta = H\Theta : \Lambda$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $ZH : \Lambda = ZH^2 : H\Theta^2$.

Καὶ κατὰ τὴν (3), $AB : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, (4). Ἐπειδὴ $AB : A\Gamma$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, αἱ ZH, $H\Theta$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἀλλὰ ZH^2, $H\Theta^2$ σύμμετρα. Ἐδείχθη δὲ ἡ ZH ῥητή. Ἄρα καὶ $H\Theta$ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ZH, $H\Theta$ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $Z\Theta = ZH + H\Theta$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον, καὶ τρίτη δυώνυμος. Τῶν (2) καὶ (4) λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον (δηλ. πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς κατὰ μέλη) ἔχομεν, $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$, (5). Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\Delta : A\Gamma$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν (καὶ ὄχι τετραγώνου πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν), αἱ E, $H\Theta$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (β), ἀλλὰ E^2, $H\Theta^2$ σύμμετρα, (θ. 9). Εἰς τὴν (2) εἶναι $AB > A\Gamma$ καὶ συνεπῶς $ZH^2 > H\Theta^2$. Ἔστω $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$, (6) Ἐκ τῆς (4) δι' ἀναστροφῆς λαμβάνομεν, $AB : (AB - A\Gamma) = ZH^2 : (ZH^2 - H\Theta^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = ZH^2 : K^2$. Ἐπειδὴ $AB : \Gamma B$ εἶναι λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν εἶναι ἄρα αἱ ZH, K μήκει σύμμετροι. Καὶ ἐκ τῆς (6) εἶναι $K = \sqrt{ZH^2 - H\Theta^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ZH, $H\Theta$ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ZH > H\Theta$, 3) ZH, K μήκει σύμμετροι, 4) Οὔτε ZH οὔτε $H\Theta$ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν E [ἐκ τῶν (α) καὶ (β)]. Εἶναι ἄρα ἡ $Z\Theta = ZH + H\Theta$ τρίτη δυώνυμος (ὁρ. 3 δευτ. ὁρισ.). Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $ZH = \frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (4), $ΗΘ = \frac{ρ\sqrt{θ}}{\sqrt{ε}}$. Ὥστε ἡ τρίτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ΖΗ + ΗΘ = \frac{ρφ}{\sqrt{ε}} + \frac{ρ\sqrt{θ}}{\sqrt{ε}}.$$

51. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$, ($λ = α^2 + β^2$, ἔνθα λ μὴ τετράγωνος, 2 λῆμμα τοῦ 28. Λαμβάνεται πρὸς συντομίαν ὡς καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα $λ = α^2 + β^2$ ἀντὶ τοῦ $λ = κξστ + \left(\frac{κξ-στ}{2} - 1\right)^2$, ἔνθα κ,ξ,σ,τ, ἀκέραιοι $μ = κξ$ καὶ $ν = στ$ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοὶ) καὶ ῥητὴ ἡ Δ ($= ρ$) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΕΖ ($= ρ\frac{δ}{γ}$, ὡς εἰς προηγούμενα). Ἄρα ΕΖ ῥητή. Τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΒ : ΑΓ = ΕΖ : Κ$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ τὴν μέσην ἀνάλογον, $ΕΖ : ΖΗ = ΖΗ : Κ$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V εἶναι $ΕΖ : Κ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$. Καὶ ἐκ τῆς (1) $ΑΒ : ΑΓ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (2). Ἐπειδὴ ΑΒ : ΑΓ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ἄρα ΕΖ, ΖΗ μήκει ἀσύμμετροι καὶ $ΕΖ^2$, $ΖΗ^2$ μόνον σύμμετρα. Ἐπειδὴ ΕΖ ῥητὴ εἶναι καὶ $ΕΖ^2$ ῥητὸν καὶ ἐκ τῆς (2) $ΖΗ^2$ ῥητὸν καὶ συνεπῶς ΖΗ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε ἡ $ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον ὅτι καὶ τετάρτη δυώνυμος. Ἐπειδὴ $ΑΒ > ΑΓ$ εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (2) καὶ $ΕΖ^2 > ΖΗ^2$. Ἔστω $ΕΖ^2 = ΖΗ^2 + Θ^2$, (3). Ἐκ τῆς (2) δι' ἀναστροφῆς εἶναι $ΑΒ : (ΑΒ - ΑΓ) = ΕΖ^2 : (ΕΖ^2 - ΖΗ^2)$ ἢ $ΑΒ : ΓΒ = ΕΖ^2 : Θ^2$. Ἐπειδὴ ΑΒ : ΓΒ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν αἱ ΕΖ, Θ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 9). Καὶ ἐκ τῆς (3) $Θ = \sqrt{ΕΖ^2 - ΖΗ^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ΕΖ > ΖΗ$, 3) ΕΖ, Θ μήκει ἀσύμμετροι, 4) Τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον ἡ ΕΖ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ $ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ$ τετάρτη δυώνυμος, (4 ὁρ. τῶν δευτ. ὁρισ.). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν $ΖΗ = ρ\frac{δ}{γ}. \frac{α}{\sqrt{λ}}$. Ὥστε ἡ τετάρτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ΕΖ + ΖΗ = ρ\frac{δ}{γ} + ρ\frac{δ}{γ} \cdot \frac{α}{\sqrt{λ}}.$$

52. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$, ($λ = α^2 + β^2$, ἔνθα λ μὴ τετράγωνος, ὡς προηγουμένως) καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ Δ ($= ρ$) καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΕΖ $\left(= ρ\frac{δ}{γ}\right)$. Ἄρα ἡ ΕΖ ῥητή. Τῶν ΑΓ, ΑΒ, ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ : Κ$, (1). Τῶν ΕΖ, Κ τὴν μέσην ἀνάλογον, $ΕΖ : ΖΗ = ΖΗ : Κ$. Κατὰ τὸν ὁρ. 9 τοῦ V ἔχομεν $ΕΖ : Κ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1) $ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ^2 : ΖΗ^2$, (2). Ἐπειδὴ ΑΓ : ΑΒ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν αἱ ΕΖ, ΖΗ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ $ΕΖ^2$, $ΖΗ^2$ σύμμετρα, (θ. 9). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΕΖ, ΖΗ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ$ εἶναι δυώνυμος (θ. 36). Δεικτέον, ὅτι καὶ πέμπτη δυώνυμος. Ἐκ τῆς (2) ἀνάπαλιν εἶναι

$AB : A\Gamma = ZH^2 : EZ^2$, (3). Ἐπειδὴ $AB > A\Gamma$, ἄρα $ZH^2 > EZ^2$. Ἔστω $ZH^2 = EZ^2 + \Theta^2$, (4). Ἐκ τῆς (3) κατ' ἀναστροφὴν λαμβάνομεν $AB : (AB - A\Gamma) = ZH^2 : (ZH^2 - EZ^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = ZH^2 : \Theta^2$. Ἐπειδὴ $AB : \Gamma B$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν αἱ ZH, Θ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 9). Καὶ ἐκ τῆς (4) εἶναι $\Theta = \sqrt{ZH^2 - EZ^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ZH, EZ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. 2) $ZH > EZ$, 3) EZ, Θ μήκει ἀσύμμετροι, 4) Τὸ μικρότερον μονώνυμον, ἡ EZ μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν Δ. Εἶναι ἄρα ἡ $EH = ZH + EZ$ πέμπτη δυώνυμος (όρ. 5 τῶν δευτ. ὁρισ.). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν $ZH = \rho\frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}$. Ὥστε ἡ πέμπτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ZH + EZ = \rho\frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

53. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $AB = A\Gamma + \Gamma B$ ($\lambda = \alpha^2 + \beta^2$, ἔνθα λ μὴ τετράγωνος) καὶ ὁ μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς Δ ($= \varepsilon$), καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ E ($= \rho$). Τῶν Δ, AB, E εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\Delta : AB = E : N$, (1). Τῶν E, N τὴν μέσην ἀνάλογον, $E : ZH = ZH : N$. Κατὰ τὸν όρ. 9 τοῦ V εἶναι $E : N = E^2 : ZH^2$. Καὶ κατὰ τὴν (1) $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$, (2). Ἐπειδὴ $\Delta : AB$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, ἕπεται ἐκ τῆς (2) ὅτι E^2, ZH^2 σύμμετρα καὶ E, ZH μήκει ἀσύμμετροι, (α), καὶ ἐπειδὴ E ῥητή, εἶναι E^2 ῥητόν, συνεπῶς ZH^2 ῥητόν, ἄρα ZH ῥητή. Τῶν AB, $A\Gamma$, ZH εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $AB : A\Gamma = ZH : M$, (3). Τῶν ZH, M τὴν μέσην ἀνάλογον, $ZH : H\Theta = H\Theta : M$. Κατὰ τὸν όρ. 9 τοῦ V εἶναι $ZH : M = ZH^2 : H\Theta^2$. Καὶ κατὰ τὴν (3) εἶναι $AB : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, (4). Ἐπειδὴ $AB : A\Gamma$ εἶναι λόγος ἁπλῶς ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν εἶναι ἄρα ZH^2, $H\Theta^2$ σύμμετρα καὶ ZH, $H\Theta$ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 9). Ἐπειδὴ δὲ ZH ῥητή, ἄρα ZH^2, ῥητόν, καὶ $H\Theta^2$ ῥητὸν καὶ συνεπῶς $H\Theta$ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ZH, $H\Theta$ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ $Z\Theta = ZH + H\Theta$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36). Δεικτέον, ὅτι καὶ ἕκτη δυώνυμος. Λαμβάνοντες τὸν δι' ἴσου λόγον τῶν (2) καὶ (4), δηλ. πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς κατὰ μέλη, ἔχομεν $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$. Ἐπειδὴ $\Delta : A\Gamma$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, εἶναι E, $H\Theta$ μήκει ἀσύμμετροι, (β). Ἐδείχθη δὲ καὶ E, ZH μήκει ἀσύμμετροι. Ἐπειδὴ εἰς τὴν (4) εἶναι $AB > A\Gamma$, εἶναι ἄρα καὶ $ZH^2 > H\Theta^2$. Ἔστω $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. Ἐκ τῆς (4) δι' ἀναστροφῆς εἶναι $AB : (AB - A\Gamma) = ZH^2 : (ZH^2 - H\Theta^2)$ ἢ $AB : \Gamma B = ZH^2 : K^2$. Ἐπειδὴ $AB : \Gamma B$ εἶναι ἁπλῶς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν, αἱ ZH, K εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ εἶναι $K = \sqrt{ZH^2 - H\Theta^2}$. Ὥστε εὕρομεν 1) ZH, $H\Theta$ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, 2) $ZH > H\Theta$, 3) ZH, K μήκει ἀσύμμετροι, 4) Οὔτε ZH, οὔτε $H\Theta$ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν E [ἐκ τῶν (α) καὶ (β)]. Εἶναι ἄρα ἡ $Z\Theta = ZH + H\Theta$ ἕκτη δυώνυμος, (6 όρ. δευτ. όρ.). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$ZH = \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) λαμβάνομεν $H\Theta = \rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$.
Ὥστε ἡ ἕκτη δυώνυμος εἶναι τῆς μορφῆς

$$ZH + H\Theta = \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Λῆμμα.

Ἐὰν ὑπάρχῃ $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς $(\alpha+\beta)^2$ καὶ 1) $\alpha^2 : \alpha\beta = \alpha\beta : \beta^2$, 2) $(\alpha+\beta)^2 : (\alpha+\beta)\beta = (\alpha+\beta)^2\beta : \beta^2$.

[Σημ. Ἑκάστη δυώνυμος τῶν προηγουμένων 6 θεωρ. 48 - 53 εἶναι ἄθροισμα ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθ. τριγώνου (μήκει ἀσύμμετροι) Εἰς τὰ ἑπόμενα 6 θεωρ. (54 - 59) ἑκάστη τῶν δυωνύμων τούτων λαμβάνεται ὡς δεύτερον τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους, ὡς πρώτου τμήματος λαμβανομένης ῥητῆς τινος].

54. Ἄλλη ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι εὐθεῖα ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα πρώτη δυώνυμος, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος δυώνυμος.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $AB = \rho$ καὶ ἡ πρώτη δυώνυμος $A\Delta = AE + E\Delta$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 48, ἤτοι $\rho\frac{\delta}{\gamma} + \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$.

Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει σύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - AE\chi + \frac{E\Delta^2}{4} = 0$ ἢ $\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\chi + \frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2}\cdot\frac{\theta}{\varphi^2} = 0$, (κατὰ τὸ θ. 17), αἱ $AH = \frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}$, $HE = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}$.

Ἐκ τοῦ σχήματος εἶναι:

$$A\Theta = \rho AH = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right) = MN^2,\quad MN = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\omega}{\varphi}\right)}$$

$$HK = \rho HE = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right) = N\Xi^2,\quad N\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\omega}{\varphi}\right)}.$$

Καὶ $A\Gamma = AB\,(AE + E\Delta) = \rho\left(\rho\frac{\delta}{\gamma} + \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right) = (MN + N\Xi)^2$, ὥστε

$$\sqrt{A\Gamma} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)} = MN + N\Xi = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν τὸν πρῶτον μετασχηματισμὸν διπλοῦ ῥιζικοῦ δυωνύμου εἰς ἄθροισμα δύο ἁπλῶν ῥιζικῶν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἡ $\sqrt{A\Gamma} = MN + N\Xi$ εἶναι δυώνυμος (τῆς μορφῆς τοῦ θ. 36), διότι αἱ ΜΝ, ΝΞ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον MN^2, $N\Xi^2$ σύμμετρα.

[γ, δ ἀκέραιοι, ἐτέθη $\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος, ἀντὶ $\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=$ $=\varkappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι καὶ μ $(=\varkappa\xi)$, ν $(=\sigma\tau)$, ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, οὐχὶ ὅμως ὅμοιοι, οὐχὶ δηλ. $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$].

55. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τμῆμα δευτέρα δυώνυμος τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἐπὶ τοῦ ὅτι αἱ ῥηταὶ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι: αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι μήκει σύμμετροι, ἄρα ῥηταὶ καὶ ἡ ΒΑ ἐξ ὑποθέσεως ῥητή. Ἐδείχθη δὲ ΒΑ, ΑΗ μήκει ἀσύμμετροι καὶ ΒΑ, ΗΕ μήκει ἀσύμμετροι. Καθ' ὁρισμόν, (ὁρ. 3) αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἐπειδὴ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\mathrm{AB}=\rho$ καὶ ἡ δευτέρα δυώνυμος $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}+\mathrm{E\Delta}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 49, ἤτοι $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}$.

Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει σύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\mathrm{AE}\chi+\frac{\mathrm{E\Delta}^2}{4}=0$, ἢ $\chi^2-\rho\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}\chi+\frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2}=0$, (θ. 17), αἱ

$$\mathrm{AH}=\rho\frac{\delta}{2\gamma}\,\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}},\quad \mathrm{HE}=\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}.$$

$$\mathrm{A\Theta}=\rho\mathrm{AH}=\rho\left(\rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)=\mathrm{MN}^2,\quad \mathrm{MN}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$$

$$\mathrm{HK}=\rho\mathrm{HE}=\rho\left(\rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)=\mathrm{N\Xi}^2,\quad \mathrm{N\Xi}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}.$$

$$\text{Καὶ }\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AB}\,(\mathrm{AE}+\mathrm{E\Delta})=\rho\left(\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+\rho\frac{\delta}{\gamma}\right)=(\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi})^2,\quad\text{ὥστε}$$

$$\sqrt{\mathrm{A\Gamma}}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+1\right)}=\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}.$$

Δεύτερος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\mathrm{A\Gamma}}=\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 37) διότι ἑκάστη τῶν ΜΝ, ΝΞ περιέχει τὴν τετάρτην ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ (τοῦ θ), μόνον MN^2, $\mathrm{N\Xi}^2$ σύμμετρα καὶ $\mathrm{MN}\times\mathrm{N\Xi}=\frac{\rho^2\delta}{2\gamma}$ ῥητόν.

[γ, δ ἀκέραιοι, $\varphi^2-\omega^2=\theta$ μὴ τετράγωνος κλπ. ὡς προηγουμένως].

56. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τρίτη δυώνυμος τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Ἔστω τὸ ὀρθ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\mathrm{AB}=\rho$ καὶ ἡ τρίτη δυώνυμος $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}+\mathrm{E\Delta}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 50, ἤτοι

$\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει σύμμετροι ῥίζαι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι, τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \text{ΑΕ}\chi + \frac{\text{ΕΔ}^2}{4} = 0$ ἢ

$$\chi^2 - \frac{\rho\varphi\chi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho^2\theta}{4\varepsilon} = 0, \quad (\theta.\ 17),\ \alpha\acute{\iota}$$

$$\text{ΑΗ} = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}, \quad \text{ΗΕ} = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$\text{ΑΘ} = \rho\text{ΑΗ} = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΜΝ}^2, \quad \text{ΜΝ} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\text{ΗΚ} = \rho\text{ΗΕ} = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΝΞ}^2, \quad \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

Καὶ $\text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}\ (\text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}) = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = (\text{ΜΝ} + \text{ΝΞ})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\text{ΑΓ}} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Τρίτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\text{ΑΓ}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα (θ. 38), διότι ἑκάστη τῶν ΜΝ, ΝΞ περιέχει τὴν τετάρτην ῥίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ (τοῦ ε), μόνον ΜΝ^2, ΝΞ^2 σύμμετρα, καὶ $\text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ} = \frac{\rho^2}{2}\sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon}}$ μέσον. [θ, ε μὴ τετράγωνοι, $\varphi^2 - \omega^2 = \theta$, ὡς προηγουμένως].

57. Ἄλλη ἐκφώνησις : ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο τετάρτη δυώνυμος, τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἄρρητος μείζων.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\text{ΑΒ} = \rho$ καὶ ἡ τετάρτη δυώνυμος $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 51, ἤτοι $\rho\frac{\delta}{\gamma} + \rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \text{ΑΕ}\chi + \frac{\text{ΕΔ}^2}{4} = 0$, ἢ

$$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\chi + \frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\lambda} = 0, \quad (\theta.\ 18), \quad \alpha\acute{\iota}$$

$$\text{ΑΗ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{ΗΕ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\text{ΑΘ} = \rho\text{ΑΗ} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\sqrt{\lambda}}\right) = \text{ΜΝ}^2, \quad \text{ΜΝ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$\text{ΗΚ} = \rho\text{ΗΕ} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\sqrt{\lambda}}\right) = \text{ΝΞ}^2, \quad \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

Καὶ $\text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}\ (\text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma} + \frac{\rho\delta\alpha}{\gamma\sqrt{\lambda}}\right) = (\text{ΜΝ} + \text{ΝΞ})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\text{ΑΓ}} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}.$$

Benedikt Zingen

Τέταρτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ριζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\text{ΑΓ}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ}$ εἶναι μείζων (θ. 39), διότι ΜΝ^2, ΝΞ^2 ἀσύμμετρα, $\text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2 = \rho^2 \frac{\delta}{\gamma}$ ῥητὸν καὶ $\text{ΜΝ} + \text{ΝΞ} = \frac{\rho^2\delta}{2\gamma} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ μέσον. [γ, δ, α ἀκέραιοι, λ μὴ τετράγωνος.

Ἐτέθη $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ ἀντὶ $\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ἔνθα μ ($= \varkappa\xi$), ν ($= \sigma\tau$) ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, ἤτοι $\varkappa : \xi = \sigma : \tau$ καὶ μν τετράγωνος. Ἡ αὐτὴ συντομία καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα δύο θεωρήματα].

58. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο πέμπτη δυώνυμος τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἄρρητος, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω τὸ ὀρθ. παραλ. ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\text{ΑΒ} = \rho$ καὶ ἡ πέμπτη δυώνυμος $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 52, ἤτοι $\rho\frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \rho\frac{\delta}{\gamma}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$\chi^2 - \text{ΑΕ}\chi + \frac{\text{ΕΔ}^2}{4} = 0$, ἢ

$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\chi + \frac{\rho^2\delta^2}{4\gamma^2} = 0$, (θ. 18), αἱ

$$\text{ΑΗ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta}{2\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{ΗΕ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}.$$

$$\text{ΑΘ} = \rho\text{ΑΗ} = \rho\left(\frac{\rho\delta\sqrt{\lambda}}{2\gamma\alpha} + \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \text{ΜΝ}^2, \quad \text{ΜΝ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}$$

$$\text{ΗΚ} = \rho\text{ΗΕ} = \rho\left(\frac{\rho\delta\sqrt{\lambda}}{2\gamma\alpha} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \text{ΝΞ}^2, \quad \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}.$$

Καὶ $\text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}\,(\text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta}{\gamma}\right) = (\text{ΜΝ} + \text{ΝΞ})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\text{ΑΓ}} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + 1\right)} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}.$$

Πέμπτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\text{ΑΓ}} = \text{ΜΝ} + \text{ΝΞ}$ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη (θ. 40), διότι ΜΝ^2, ΝΞ^2 ἀσύμμετρα, $\text{ΜΝ}^2 + \text{ΝΞ}^2 = \frac{\rho^2\delta\sqrt{\lambda}}{\gamma\alpha}$ μέσον, $\text{ΜΝ} \times \text{ΝΞ} = \frac{\rho^2\delta}{2\gamma}$ ῥητόν. [γ, δ, α ἀκέραιοι, λ μὴ τετράγωνος, $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$].

59. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγ. τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο ἕκτη δυώνυμος, τὸ ὕψος εἶναι ἡ ἄρρητος, δύο μέσα δυναμένη.

Ἔστω τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμον ΑΓ, ἡ ῥητὴ $\text{ΑΒ} = \rho$ καὶ ἡ ἕκτη δυώνυμος $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΔ}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 53, ἤτοι

$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$. Αἱ ΑΗ, ΗΕ εἶναι αἱ μήκει ἀσύμμετροι, θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\mathrm{AE}\chi+\frac{\mathrm{E\Delta}^2}{4}=0$ ἤ

$\chi^2-\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\cdot\chi+\frac{\rho^2\alpha^2}{4\varepsilon}=0$, (θ. 18), αἱ

$$\mathrm{AH}=\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}},\qquad \mathrm{HE}=\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$\mathrm{A\Theta}=\rho\mathrm{AH}=\rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)=\mathrm{MN}^2,\qquad \mathrm{MN}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\mathrm{HK}=\rho\mathrm{HE}=\rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\frac{\rho\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)=\mathrm{N\Xi}^2,\qquad \mathrm{N\Xi}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Καὶ $\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AB}\,(\mathrm{AE}+\mathrm{E\Delta})=\rho\left(\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=(\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi})^2$, ὥστε

$$\sqrt{\mathrm{A\Gamma}}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}=\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi}=\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Ἔκτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ. Ἡ $\sqrt{\mathrm{A\Gamma}}=\mathrm{MN}+\mathrm{N\Xi}$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη (θ. 41), διότι MN^2, $\mathrm{N\Xi}^2$ ἀσύμμετρα, $\mathrm{MN}^2+\mathrm{N\Xi}^2=\rho^2\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$ μέσον, $\mathrm{MN}\times\mathrm{N\Xi}=\frac{\rho^2\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $\rho^2\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$. [$\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος, ε μὴ τετράγωνος. Ὅπως διὰ τὸν λ ἡ πραγματικὴ μορφὴ λαμβάνεται ἐκ τοῦ 2 λήμματος τοῦ θ. 28, οὕτω καὶ διὰ τὸν ε. Ἑπομένως θὰ εἶναι $\pi\rho\psi\upsilon+\left(\frac{\pi\rho-\psi\upsilon}{2}-1\right)^2=\varepsilon$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα μ ($=\pi\rho$), ν ($=\psi\upsilon$) ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί, ἤτοι $\pi:\rho=\psi:\upsilon$, π, ρ, ψ, υ ἀκέραιοι, μ. ν τετράγωνος].

Τὰ ἑπόμενα 6 θεωρήματα εἶναι ἀντιστοίχως τ' ἀντίστροφα τῶν 54 - 59.

60. Ἄλλη ἐκφώνησις: Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος δυώνυμος καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 48).

Ἡ δυώνυμος $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma B}$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 36) $\rho+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. $\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{\Gamma B}$. (Δύναται βεβαίως νὰ εἶναι καὶ $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, διότι καὶ τὰ μονώνυμα ταῦτα εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα). Ἀντὶ τῆς ῥητῆς ΔΕ λαμβάνομεν πάλιν ρ. Κατὰ τὸ θεώρημα θὰ εἶναι

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\rho^2=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{\Delta K},\qquad \mathrm{\Delta K}=\rho$$

$$\mathrm{\Gamma B}^2=\rho^2\frac{\delta}{\gamma}=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{KM},\qquad \mathrm{KM}=\rho\frac{\delta}{\gamma},\quad \mathrm{\Delta K}+\mathrm{KM}=\mathrm{\Delta M}.$$

$$2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}=2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{MH},\qquad \mathrm{MH}=2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}},$$

$\Delta H = \Delta M + MH = \rho\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2}$ μήκει σύμμετροι, καὶ ΔΜ, ρ μήκει σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι πρώτη δυώνυμος (1 ὁρ. δευτ. ὁρισ.).

61. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων πρώτη καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι δευτέρα δυώνυμος, (θ. 49).

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 37), $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$, καὶ ἔστω $\gamma > \delta$, ὅτε τὸ πρῶτον μονώνυμον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου.

$$A\Gamma^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta E \times \Delta K, \quad \Delta K = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Gamma B^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} = \Delta E \times KM, \quad KM = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \Delta M = \Delta K + KM.$$

$$2A\Gamma \times \Gamma B = 2\rho^2\frac{\delta}{\gamma} = \Delta E \times MH, \quad MH = 2\rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

$$\Delta H = \Delta M + MH = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) + 2\rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ $\Delta M > MH$. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\Delta M^2 - MH^2} = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right)$ μήκει σύμμετροι, καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ἡ ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ. Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι δευτέρα δυώνυμος.

62. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος ἐκ δύο μέσων δευτέρα καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι τρίτη δυώνυμος, (θ. 50). Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα $AB = A\Gamma + \Gamma B$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 38)

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}, \quad A\Gamma > \Gamma B.$$

$$A\Gamma^2 = \rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta E \times \Delta K, \quad \Delta K = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Gamma B^2 = \frac{\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = \Delta E \times KM, \quad KM = \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \Delta M = \Delta K + KM.$$

$$2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}=2\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{MH},\quad \mathrm{MH}=2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mathrm{\Delta H}=\mathrm{\Delta M}+\mathrm{MH}=\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]+2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταὶ τῶν ὁποίων μόνον τὰ τετράγωνα εἶναι σύμμετρα. Ἡ ΔΜ $>$ ΜΗ. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\mathrm{\Delta M}^2-\mathrm{MH}^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ οὔτε ΔΜ, οὔτε ΜΗ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ($=$ ΔΕ).

Ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι τρίτη δυώνυμος.

63. Ἄλλη ἐκφώνησις : ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἡ ἄρρητος μείζων καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι τετάρτη δυώνυμος, (θ. 51).

Ἡ μείζων ΑΒ $=$ ΑΓ $+$ ΓΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 39)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \mathrm{A\Gamma}>\mathrm{\Gamma B}.$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{\Delta K},\quad \mathrm{\Delta K}=\frac{\rho}{2}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\mathrm{\Gamma B}^2=\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{KM},\quad \mathrm{KM}=\frac{\rho}{2}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),\ \mathrm{\Delta M}=\mathrm{\Delta K}+\mathrm{KM}.$$

$$2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}=\frac{\rho^2\alpha}{\sqrt{\lambda}}=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{MH},\quad \mathrm{MH}=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\mathrm{\Delta H}=\mathrm{\Delta M}+\mathrm{MH}=\rho+\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΔΜ, ΜΗ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΔΜ $>$ ΜΗ. Ἡ ΔΜ καὶ $\sqrt{\mathrm{\Delta M}^2-\mathrm{MH}^2}=\frac{\rho\beta}{\sqrt{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ ΔΜ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ($=$ ΔΕ).

Ἄρα ἡ ΔΗ εἶναι τετάρτη δυώνυμος.

64. Ἄλλη ἐκφώνησις : ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι πέμπτη δυώνυμος, (θ. 52).

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ΑΒ $=$ ΑΓ $+$ Γ Β εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 40)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \mathrm{A\Gamma}>\mathrm{\Gamma B}.$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\frac{\rho^2}{2}\,\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{\Delta K},\quad \mathrm{\Delta K}=\frac{\rho\alpha}{2\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\mathrm{\Gamma B}^2=\frac{\rho^2}{2}\,\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\mathrm{\Delta E}\times\mathrm{KM},\quad \mathrm{KM}=\frac{\rho\alpha}{2\sqrt{\lambda}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),\ \mathrm{\Delta M}=\mathrm{\Delta K}+\mathrm{KM}.$$

$$2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}=\frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}=\Delta\mathrm{E}\times\mathrm{MH},\quad \mathrm{MH}=\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}.$$

$$\Delta\mathrm{H}=\Delta\mathrm{M}+\mathrm{MH}=\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho\alpha^2}{\lambda}.$$

Τὰ μονώνυμα $\Delta\mathrm{M}$, MH εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωγα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ $\Delta\mathrm{M}>\mathrm{MH}$. Ἡ $\Delta\mathrm{M}$ καὶ $\sqrt{\Delta\mathrm{M}^2-\mathrm{MH}^2}=\rho\beta$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ MH μήκει σύμμετρος πρὸς ρ $(=\Delta\mathrm{E})$. Ἄρα ἡ $\Delta\mathrm{H}$ εἶναι πέμπτη δυώνυμος.

65. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ἡ ἄρρητος δύο μέσα δυναμένη καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἕκτη δυώνυμος, (θ. 53).

Ἡ δύο μέσα δυναμένη $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma B}$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 41)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \mathrm{A\Gamma}>\mathrm{\Gamma B}.$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\Delta\mathrm{E}\times\Delta\mathrm{K},\quad \Delta\mathrm{K}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\mathrm{\Gamma B}^2=\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)=\Delta\mathrm{E}\times\mathrm{KM},\quad \mathrm{KM}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$\Delta\mathrm{M}=\Delta\mathrm{K}+\mathrm{KM}.$$

$$2\mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{\Gamma B}=\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}=\Delta\mathrm{E}\times\mathrm{MH},\quad \mathrm{MH}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\Delta\mathrm{H}=\Delta\mathrm{M}+\mathrm{MH}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}+\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα $\Delta\mathrm{M}$, MH εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ $\Delta\mathrm{M}>\mathrm{MH}$. Ἡ $\Delta\mathrm{M}$ καὶ $\sqrt{\Delta\mathrm{M}^2-\mathrm{MH}^2}=\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ οὔτε $\Delta\mathrm{M}$, οὔτε MH μήκει σύμμετρος πρὸς ρ $(=\Delta\mathrm{E})$. Ἄρα ἡ $\Delta\mathrm{H}$ εἶναι ἕκτη δυώνυμος.

66. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος, Λέγω ὅτι κλπ. Προηγουμένως εὕρομεν $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=\frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{Z\Delta}}$ καὶ $\mathrm{AE}>\mathrm{EB}$. Ἡ AE θὰ εἶναι πρὸς τὴν $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{EB}^2}$ μήκει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος. Ἐὰν AE, $\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{EB}^2}$ μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι λόγῳ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας καὶ $\mathrm{\Gamma Z}$, $\sqrt{\mathrm{\Gamma Z}^2-\mathrm{Z\Delta}^2}$ μήκει σύμμετροι. Καὶ ἂν μὲν ὑπαρχούσης ῥητῆς ρ ἡ AE εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ θὰ εἶναι καὶ ἡ $\mathrm{\Gamma Z}$ μήκει σύμ. πρὸς ρ καὶ συνεπῶς ἑκάστη τῶν AB, $\mathrm{\Gamma\Delta}$ εἶναι πρώτη δυώνυμος ἤτοι τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν ἡ EB εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ θὰ εἶναι καὶ $\mathrm{Z\Delta}$ μήκει σύμμετρος πρὸς ρ καὶ ἑκάστη συνεπῶς τῶν AB, $\mathrm{\Gamma\Delta}$ εἶναι δευτέρα δυώνυμος, ἤτοι τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἐὰν οὔτε AE οὔτε EB εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ, θὰ εἶναι οὔτε $\mathrm{\Gamma Z}$ οὔτε $\mathrm{Z\Delta}$ μήκει σύμμετροι πρὸς ρ. Ἄρα ἑκάστη τῶν AB, $\mathrm{\Gamma\Delta}$ εἶναι τρίτη δυώνυμος, ἤτοι τῆς αὐτῆς τά-

ξεως. Ἐὰν ΑΕ, $\sqrt{ΑΕ^2 - ΕΒ^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι θὰ εἶναι καὶ ΓΖ, $\sqrt{ΓΖ^2 - ΖΔ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ ἂν μὲν ΑΕ ἢ ΕΒ ἢ οὐδεμία τούτων εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ρ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως καὶ ΓΖ ἢ ΖΔ ἢ οὐδεμία τούτων μήκει σύμμετρος πρὸς ρ καὶ συνεπῶς ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΓΔ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως τετάρτη ἢ πέμπτη ἢ ἕκτη δυώνυμος, δηλ. θὰ εἶναι καὶ αἱ δύο τῆς αὐτῆς τάξεως.

67. Ἐν ᾧ εἰς τὸ ἄθροισμα δύο μονωνύμων, ῥητῶν δυνάμει συμμέτρων εὐθειῶν, (δυώνυμον) διακρίνομεν ἓξ τάξεις, εἰς τὸ ἄθροισμα δύο μέσων εὐθειῶν Α, Β διακρίνομεν δύο τάξεις, καθ' ἃς $Α \times Β$ εἶναι ῥητὸν ἢ μέσον (θ. 37 καὶ 38). Ὅθεν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μέσων εὐθειῶν Γ, Δ εἶναι σύμμετρον πρὸς $Α + Β$, καὶ $Α \times Β$ εἶναι ῥητὸν εἶναι καὶ $Γ \times Δ$ ῥητόν· ἐὰν $Α \times Β$ μέσον εἶναι καὶ $Γ \times Δ$ μέσον.

68. Ἔστω μείζων ἡ $ΑΒ = ΑΕ + ΕΒ$ (δηλ. $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ ῥητὸν καὶ $ΑΕ \times ΕΒ$ μέσον) καὶ σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ ΓΔ. Ἔστω $ΑΕ > ΕΒ$. Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΑΕ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ$, (1).

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $ΑΒ : ΓΔ = ΑΕ : ΓΖ = ΕΒ : ΖΔ$ (2), ἂν καλέσωμεν $ΓΔ - ΓΖ = ΖΔ$. Ἐκ τῆς συμμετρίας τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἕπεται ἡ συμμετρία τῶν ΑΕ, ΓΖ καὶ ΕΒ, ΖΔ. Ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ}{ΖΔ}$, (3). Ἐπειδὴ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει ἀσύμμετροι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἄρα καὶ $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $\frac{ΑΕ+ΕΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΖ+ΖΔ}{ΖΔ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΖΔ}$. Συνεπῶς καὶ $\frac{ΑΒ^2}{ΕΒ^2} = \frac{ΓΔ^2}{ΖΔ^2}$, (4). Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν ἐπίσης $\frac{ΑΕ+ΕΒ}{ΑΕ} = \frac{ΓΖ+ΖΔ}{ΓΖ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΑΕ} = \frac{ΓΔ}{ΓΖ}$. Συνεπῶς καὶ $\frac{ΑΒ^2}{ΑΕ^2} = \frac{ΓΔ^2}{ΓΖ^2}$, (5). Δι' ἀντιστροφῆς τῶν ὅρων τῶν (4) καὶ (5) καὶ προσθέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{ΑΕ^2+ΕΒ^2}{ΑΒ^2} = \frac{ΓΖ^2+ΖΔ^2}{ΓΔ^2}$. Ἐκ ταύτης $ΑΒ^2 : ΓΔ^2 = (ΑΕ^2 + ΕΒ^2) : (ΓΖ^2 + ΖΔ^2)$, (6). Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἐξ ὑποθέσεως σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ οἱ δεύτεροι. Καὶ $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ ῥητόν· ἄρα καὶ $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ ῥητόν.

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν $\frac{ΑΒ^2}{ΓΔ^2} = \frac{ΑΒ^2-(ΑΕ^2+ΕΒ^2)}{ΓΔ^2-(ΓΖ^2+ΖΔ^2)}$ ἢ $\frac{ΑΒ^2}{ΓΔ^2} = \frac{2ΑΕ \times ΕΒ}{2ΓΖ \times ΖΔ}$. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν $ΑΒ^2$, $ΓΔ^2$ ἕπεται καὶ ἡ συμμετρία τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους. Καὶ εἶναι $ΑΕ \times ΕΒ$ μέσον. Εἶναι ἄρα $ΓΖ \times ΖΔ$ μέσον. Ἐδείχθη λοιπόν, $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, $ΓΖ^2 + ΖΔ^2$ ῥητόν, $ΓΖ \times ΖΔ$ μέσον. Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι μείζων.

69. Ἔστω ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη $ΑΒ = ΑΕ + ΕΓ$ (δηλ. $ΑΕ^2$, $ΕΒ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΕ^2 + ΕΒ^2$ μέσον, $ΑΕ \times ΕΒ$ ῥητὸν) καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς

ταύτην ΓΔ. Ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀποδεικνύεται ὅτι $ΓΖ^2$, $ΖΔ^2$ ἀσύμμετρα, καὶ ἡ συμμετρία τῶν $(ΑΕ^2+ΕΒ^2)$, $(ΓΖ^2+ΖΔ^2)$ καὶ $2ΑΕ\times ΕΒ$, $2ΓΖ\times ΖΔ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΕ^2+ΕΒ^2$ μέσον καὶ $ΑΕ\times ΕΒ$ ῥητόν, ἕπεται $ΓΖ^2+ΖΔ^2$ μέσον καὶ $ΓΖ\times ΖΔ$ ῥητόν, ὅτι δηλ. ἡ ΓΔ εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

70. Ὁμοία ἀπόδειξις πρὸς τὴν τοῦ θ. 68.

71. Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ μέσον δὲ τὸ ΓΔ. Λέγω ὅτι ἡ $\sqrt{ΑΒ+ΓΔ}$ θὰ εἶναι μία τῶν τεσσάρων ἀρρήτων, (θ. 36, 37, 39, 40). Ἐπειδὴ τὸ ΑΒ εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ ΓΔ μέσον εἶναι ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ ἀσύμμετρα. Κατ' ἀνάγκην $ΑΒ \gtrless ΓΔ$. Ἡ ἀσυμμετρία ἀποκλείει τὴν ἰσότητα. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΕΚ εἶναι δυώνυμος, (θ. 36) καὶ $=ΕΘ+ΘΚ$ καὶ $ΕΘ > ΘΚ$. Ἐξετάζονται δύο περιπτώσεις

Πρῶτον $ΑΒ > ΓΔ$, ὁπότε $ΕΗ > ΘΙ$ καὶ $ΕΘ > ΘΚ$.

1. ΕΘ καὶ $\sqrt{ΕΘ^2-ΘΚ^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι πρώτη δυώνυμος καὶ $\sqrt{ΕΙ}=\sqrt{ΑΔ}$ εἶναι δυώνυμος, (θ. 54).

2. ΕΘ καὶ $\sqrt{ΕΘ^2-ΘΚ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι τετάρτη δυώνυμος καὶ $\sqrt{ΕΙ}=\sqrt{ΑΔ}$, εἶναι μείζων (θ. 57).

Δεύτερον $ΑΒ < ΓΔ$, ὁπότε $ΕΗ < ΘΙ$ καὶ $ΕΘ < ΘΚ$.

3. ΕΘ καὶ $\sqrt{ΕΘ^2-ΘΚ^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι δευτέρα δυώνυμος καὶ $\sqrt{ΑΙ}=\sqrt{ΑΔ}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, (θ. 55).

4. ΕΘ καὶ $\sqrt{ΕΘ^2-ΘΚ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ΕΚ εἶναι ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, (θ. 58).

72. Ἔστωσαν τὰ ἀσύμμετρα εὐθύγραμμα ΑΒ, ΓΔ. Λέγω, ὅτι ἡ $\sqrt{ΑΒ+ΓΔ}$ εἶναι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη. Ἔστω πρῶτον $ΑΒ > ΓΔ$ ὁπότε $ΕΗ > ΘΙ$ καὶ $ΕΘ > ΘΚ$. Αἱ ΕΘ, ΘΚ ἀποδεικνύονται ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρ. 3 εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα $ΕΚ=ΕΘ+ΘΚ$ εἶναι δυώνυμος, (36).

1. ΕΘ καὶ $\sqrt{ΕΘ^2-ΘΚ^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος συνεπῶς καὶ $\sqrt{ΕΙ}=\sqrt{ΑΔ}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56).

2. ΕΘ καὶ $\sqrt{ΕΘ^2-ΘΚ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος καὶ συνεπῶς $\sqrt{ΕΙ}=\sqrt{ΑΔ}$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη, (θ. 59).

Ἐὰν $ΑΒ < ΓΔ$ εἶναι καὶ $ΕΗ < ΘΙ$ καὶ $ΕΘ < ΘΚ$. Τότε εἶναι πάλιν, 1) ΘΚ καὶ $\sqrt{ΘΚ^2-ΑΘ^2}$ μήκει σύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι τρίτη δυώνυμος καὶ συνεπῶς $\sqrt{ΕΙ}=\sqrt{ΑΔ}$ εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, (θ. 56).

2. ΘΚ καὶ $\sqrt{ΘΚ^2-ΕΘ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, ὁπότε ἡ ΕΚ εἶναι ἕκτη δυώνυμος καὶ συνεπῶς $\sqrt{ΕΙ}=\sqrt{ΑΔ}$ εἶναι δύο μέσα δυναμένη, (θ. 59).

Ἀ π ο τ ο μ α ί.

Ἀφαίρεσις μονωνύμων ἐχόντων ὡρισμένας ἰδιότητας.

73. Ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ταύτης ἡ ῥητὴ ΒΓ, νὰ εἶναι δὲ μόνον AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα. Λέγω ὅτι ἡ $A\Gamma = AB - B\Gamma$, (1) εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή. Διότι ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι καὶ $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB^2}{AB \times B\Gamma}$ εἶναι ἄρα AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα, (2).

Ἐπειδὴ AB^2, $B\Gamma^2$ σύμμετρα εἶναι ἄρα AB^2, $(AB^2 + B\Gamma^2)$ σύμμετρα (θ. 15). Καὶ εἶναι $AB \times B\Gamma$, $2AB \times B\Gamma$ σύμμετρα.

Εἶναι ἄρα λόγῳ τῆς (2) καὶ $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα (θ. 13). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $A\Gamma^2 + 2AB \times B\Gamma = AB^2 + B\Gamma^2$. Καὶ ἐπειδὴ $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα εἶναι κατὰ τὸ β′ μέρος τοῦ θ. 16 καὶ $A\Gamma^2$, $AB^2 + B\Gamma^2$ ἀσύμμετρα. Εἶναι δὲ ῥητὰ τὰ AB^2, $B\Gamma^2$. Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς $AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \times B\Gamma$ τετραγώνου ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4). Ἂς καλῆται δὲ ἀποτομή.

[Αἱ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ $\left(ἢ\ \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$, ἐκ τοῦ θ. 10, ἔνθα α, β γ, δ μὴ τετράγωνοι, καὶ συνεπῶς ἡ ἀποτομὴ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ $\left(ἢ\ \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$].

Σημ. 1. Εἰς τὸ 6 θεώρημα τοῦ XIII Βιβλίου τῶν Στοιχείων ἀποδεικνύεται ὅτι ἕκαστον τμῆμα ῥητῆς εὐθείας διαιρεθείσης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον εἶναι ἀποτομή. Εἶναι δηλ. ἡ ῥητὴ εὐθεῖα Α διῃρημένη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ χ, ὥστε $\frac{A}{\chi} = \frac{\chi}{A-\chi}$, τότε ἡ χ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\alpha} - \rho\sqrt{\beta}$ καὶ ἡ $A - \chi$ τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\gamma} - \rho\sqrt{\delta}$, ἔνθα α, β, γ, δ μὴ τετράγωνοι, ρ ῥητή.

2. Εἰς τὸ αὐτὸ XIII Βιβλίον, θ. 17, ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή.

74. Ἔστωσαν αἱ μέσαι $AB > B\Gamma$, ὥστε $A\Gamma = AB - B\Gamma$, $AB \times B\Gamma$ ῥητὸν AB^2, $B\Gamma^2$ μόνον σύμμετρα. Ἡ ΑΓ ἡ ὁποία καλεῖται πρώτη ἀποτομὴ μέσης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\gamma > \delta$. Αἱ μέσαι ἐκ τοῦ θ. 27.

75. Ἐξ ὑποθέσεως AB^2, $B\Gamma^2$ (1) μόνον σύμμετρα. Ἄρα εἶναι ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετροι. Εἶναι δὲ $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB^2}{AB \times B\Gamma}$. Εἶναι ἄρα καὶ AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς (1) ἕπεται AB^2, $(AB^2 + B\Gamma^2)$, (2) σύμμετρα, (θ. 15). Εἶναι δὲ $AB \times B\Gamma$, $2AB \times B\Gamma$ σύμμετρα. (3). Καὶ ἐδείχθη AB^2, $AB \times B\Gamma$ ἀσύμμετρα. Εἶναι ἄρα ἐκ τῶν (2) καὶ (3), $(AB^2 + B\Gamma^2)$, $2AB \times B\Gamma$ ἀσύμ-

μετρα, κλπ. Αἱ ΗΔ, ΔΖ, ἐδείχθησαν ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι. Ἄρα μόνον $ΗΔ^2$, $ΔΖ^2$ εἶναι σύμμετρα, (ὁρ. 3).

Αἱ δύο μέσαι ΑΒ, ΒΓ ὥστε $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον εἶναι αἱ τοῦ θ. 28. Ἡ δευτέρα ἄρα ἀποτομὴ μέσης θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} - \dfrac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$.

76. Ὅπως εἰς τὰ προηγούμενα 75 καὶ 74 ἀποδεικνύομεν ὅτι $(ΑΒ^2 + ΒΓ^2)$, $2ΑΒ \times ΒΓ$ εἶναι ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς ἀσυμμετρίας ταύτης καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2$ ἕπεται κατὰ τὸ θ. 16, β΄ μέρος καὶ $ΑΓ^2$, $(ΑΒ^2 + ΒΓ^2)$ ἀσύμμετρα. Ὥστε ἡ ΑΓ εἶναι ἄλογος, (ὁρ. 4).

Αἱ δύο εὐθεῖαι $ΑΒ > ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ῥητὸν καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον εἶναι αἱ τοῦ θ. 33. Ἡ ἐλάσσων ἄρα εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Σημ. 1. Εἰς τὸ 11 θ. τοῦ XIII Βιβλίου τῶν Στοιχείων ἀποδεικνύεται ὅτι ἂν ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ῥητὴ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων.

2. Εἰς τὸ αὐτὸ XIII Βιβλίον, θ. 16, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων.

77. Ἐπειδὴ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ μέσον καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ ῥητὸν ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, $2ΑΒ \times ΒΓ$ ἀσύμμετρα. Ἐκ τῆς σχέσεως ἄρα $ΑΓ^2 + 2ΑΒ \times ΒΓ = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, ἕπεται $ΑΓ^2$ καὶ $2ΑΒ \times ΒΓ$ ἀσύμμετρα. (θ. 16). Καὶ εἶναι τὸ $2ΑΒ \times ΒΓ$ ῥητόν. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΓ^2$ ἄλογον καὶ ἡ ΑΓ ἄλογος, (ὁρ. 4).

Αἱ δύο εὐθεῖαι $ΑΒ > ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ μέσον καὶ $ΑΒ \times ΒΓ$ ῥητὸν εἶναι αἱ τοῦ θεωρ. 34.

Εἶναι ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα τῆς μορφῆς

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

78. Ἐπειδὴ ἡ ἀποτομὴ καθ' ὁρισμόν, (θ. 73) εἶναι ἄλογος, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὴ × ἀποτομὴν ἄλογον.

Αἱ δύο εὐθεῖαι $ΑΒ > ΒΓ$, ὥστε $ΑΒ^2$, $ΒΓ^2$ ἀσύμμετρα, $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ μέσον, $ΑΒ \times ΒΓ$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ εἶναι αἱ τοῦ θ. 35. Εἶναι ἄρα ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα τῆς μορφῆς

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

Ὅπως εἰς τὰ θ. 42 — 47 ἀπεδείχθη ὅτι τὰ μονώνυμα τῶν δυωνύμων (τῶν θ. 36 — 41) εἶναι μονοτίμως ὡρισμένα, οὕτω καὶ εἰς τὰ θ. 79 — 84 ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἀφαιρετέοι, ὅταν δοθῶσιν αἱ διαφοραί, εἶναι μονοτίμως ὡρισμένοι (ὑπὸ τὰς ὡρισμένας συνθήκας).

79. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ $ΑΒ = ΑΓ - ΓΒ$, (1), ἤτοι ΑΒ ἄλογος καὶ ΑΓ, ΓΒ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ σύμμετρα. Λέγω, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα ῥητὴ πλὴν τῆς ΓΒ, ὥστε $ΑΒ + ΓΒ = ΑΓ$ καὶ ἡ ΓΒ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἡ $ΑΓ^2$ νὰ εἶναι σύμμετροι. Διότι ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἡ ΒΔ, ὁπότε $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$, (2), καὶ ἔστω $ΔΒ > ΓΒ$. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $(ΑΔ^2 + ΔΒ^2) - (ΑΓ^2 + ΓΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$, (3). Ἐπειδὴ ΑΓ, ΓΒ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ σύμμετρα καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ΑΔ, ΔΒ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ σύμμετρα εἶναι ἄρα $ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ ῥητὸν καὶ $ΑΔ^2 + ΔΒ^2$ ῥητόν. Συνεπῶς ἐκ τῆς (3) καὶ $2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$ ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον. Διότι $ΑΔ \times ΔΒ$ καὶ $ΑΓ \times ΓΒ$ εἶναι μέσα, (θ. 21), καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26). Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅταν $ΔΒ < ΓΒ$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$(ΑΓ^2 + ΓΒ^2) - (ΑΔ^2 + ΔΒ^2) = 2ΑΓ \times ΓΒ - 2ΑΔ \times ΔΒ.$$

80. Ἔστω $ΑΒ = ΑΓ - ΓΒ$, ἔνθα ΑΓ, ΓΒ εἶναι μέσα καὶ μόνον $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ σύμμετρα, καὶ $ΑΓ \times ΓΒ$ ῥητόν. Λέγω, ὅτι δὲν εἶναι $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$, ὅπου ΑΔ, ΔΒ μέσαι $ΑΔ^2$, $ΔΒ^2$ σύμμετρα καὶ $ΑΔ \times ΔΒ$ ῥητόν. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ἔστω $ΔΒ > ΓΒ$. Ὅπως προηγουμένως, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν $(ΑΔ^2 + ΔΒ^2) - (ΑΓ^2 + ΓΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$. Ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ῥητόν, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως οἱ ὅροι ταύτης εἶναι ῥητοί. Ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ α΄ μέλους εἶναι ῥητόν· ὅπερ ἀδύνατον· διότι ταῦτα ἐξ ὑποθέσεως εἶναι μέσα καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητὸν (θ. 26). Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἂν $ΔΒ < ΓΒ$.

81. Δίδεται ἡ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης $ΑΒ = ΑΓ - ΓΒ$, ὥστε ΑΓ, ΓΒ μέσαι, μόνον $ΑΓ^2$, $ΓΒ^2$ σύμμετρα καὶ $ΑΓ \times ΓΒ$ ῥητόν. Λέγει, ὅτι μόνον $ΑΒ + ΓΒ = ΑΓ$ καὶ ὄχι $ΑΒ + ΔΒ = ΑΔ$, ὥστε τὰ μονώνυμα ΑΔ, ΔΒ νὰ ἔχωσι τὰς αὐτὰς ἰδιότητας πρὸς τὰ μονώνυμα ΑΓ, ΓΒ.

Πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος. Διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ $(ΑΓ^2 + ΓΒ^2)$ εἰς τὸ ὀρθογώνιον $ΕΖ \times ΕΜ$ καὶ ἀφαιρέσεως ἀπὸ τούτου τοῦ εἰς ἄλλο ὀρθογώνιον μετασχηματισθέντος $2ΑΓ \times ΓΒ$, τοῦ $ΕΖ \times ΘΜ$, λαμβάνεται $ΑΒ^2 = ΕΖ \times ΕΘ$ καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ΕΜ, ΘΜ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ μόνον $ΕΜ^2$, $ΘΜ^2$ εἶναι σύμμετρα. Εἶναι ἄρα ἡ $ΕΘ = ΕΜ - ΘΜ$ ἀποτομή, (θ. 73).

Δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος. Ἔστω ὅτι εἶναι καὶ $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$ καὶ $ΑΔ > ΑΓ$. Διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ $(ΑΔ^2 + ΔΒ^2)$ εἰς τὸ ὀρθογώνιον $ΕΖ \times ΕΝ$ καὶ ἀφαιρέσεως ἀπὸ τούτου τοῦ ὀρθογωνίου $ΕΖ \times ΘΝ = 2ΑΔ \times ΔΒ$ λαμβάνεται $ΑΒ^2 = ΕΖ \times ΕΘ$, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν ἀκριβῶς συλλογισμῶν, ὅπως εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ θεωρήματος, ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ ΕΝ, ΘΝ εἶναι ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ μόνον $ΕΝ^2$, $ΘΝ^2$ σύμμετρα. Εἶναι ἄρα ἡ $ΕΘ = ΕΝ - ΘΝ$ ἀποτομή· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἔχει ἤδη εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὴν ἀποτομὴν ΕΘ προσαρμόζει ἡ εὐθεῖα ΘΜ καὶ κατὰ τὸ θ. 79 εἰς τὴν ἀποτομὴν μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα κλπ. Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἂν $ΑΔ < ΑΓ$.

82. Ἔστω ἡ ἐλάσσων $ΑΒ = ΑΓ - ΓΒ$. Δὲν εἶναι καὶ $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ἔστω $ΑΔ > ΑΓ$. Εἰς τὴν σχέσιν $(ΑΔ^2 + ΔΒ^2) - (ΑΓ^2 + ΓΒ^2) = 2ΑΔ \times ΔΒ - 2ΑΓ \times ΓΒ$, (1) τὰ δύο ἀθροίσματα τοῦ α′ μέλους εἶναι ῥητὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐλάσσονος. Ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρρυ μέλους εἶναι ῥητή· ὅπερ ἄτοπον· διότι οἱ ὅροι τοῦ β′ μέλους εἶναι μέσα καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26). Δὲν εἶναι ἄρα $ΑΒ = ΑΔ - ΔΒ$.

83. Εἰς τὴν σχέσιν (1) τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἡ διαφορὰ τοῦ β′ τώρα μέλους εἶναι ῥητὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης, (θ. 77). Ἄρα εἶναι ῥητὴ καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ α′ μέλους· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἕκαστον ἄθροισμα τοῦ α′ μέλους εἶναι μέσον ἐξ ὁρισμοῦ, (θ. 77), καὶ μέσον μέσου δὲν διαφέρει κατὰ ῥητόν, (θ. 26).

84. Ἡ ἀπόδειξις ἀκριβῶς ὁμοία ὅπως εἰς τὸ θ. 81.

Ὁρισμοὶ τρίτοι.

Ληφθείσης ῥητῆς ρ καὶ ἀποτομῆς $Δ = Α - Β$, (ἔνθα $Α > Β$ ῥηταὶ καὶ μόνον $Α^2$, $Β^2$ σύμμετρα

I. Ἔστω Α, $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει σύμμετροι.

Ἐὰν 1. Α, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ Δ πρώτη ἀποτομή.

Ἐὰν 2. Β, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ Δ δευτέρα ἀποτομή.

Ἐὰν 3. Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ Δ τρίτη ἀποτομή.

II. Ἔστω Α, $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

Ἐὰν 4. Α, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ Δ τετάρτη ἀποτομή.

Ἐὰν 5. Β, ρ μήκει σύμμετροι ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ Δ πέμπτη ἀποτομή.

Ἐὰν 6. Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ ἂς καλῆται ἡ ἀποτομὴ Δ ἕκτη ἀποτομή.

(Σημ. Ἡ αὐτὴ παρατήρησις ὡς εἰς τοὺς δευτέρους ὁρισμούς).

85—90. Αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀκριβῶς ὅμοιαι ὅπως εἰς τὰ θεωρήματα 48—53. Ἐνταῦθα ἔχομεν ἀφαίρεσιν τῶν μονωνύμων, ἐν ᾧ ἐκεῖ πρόσθεσιν. Ὅθεν αἱ ἀποτομαὶ εἶναι τῆς μορφῆς

1. Πρώτη ἀποτομὴ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$	θ. 85.
2. Δευτέρα ἀποτομὴ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$	θ. 86.
3. Τρίτη ἀποτομὴ	$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$	θ. 87.
4. Τετάρτη ἀποτομὴ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$	θ. 88.
5. Πέμπτη ἀποτομὴ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-\rho\frac{\delta}{\gamma}$	θ. 89.
6. Ἕκτη ἀποτομὴ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}-\rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$	θ. 90.

[$\varphi^2-\omega^2=\vartheta$, $\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ, ε, ϑ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι].

91. Ἄλλη ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος: ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἄλλο πρώτη ἀποτομὴ τὸ ὕψος εἶναι ἀποτομή. (Ἀνάλογοι ἐκφωνήσεις καὶ εἰς τὰ ἑπόμενα θεωρήματα).

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $AB=A\Gamma\times A\Delta$ ἔνθα $A\Gamma$ ῥητὴ καὶ $A\Delta$ πρώτη ἀποτομή. Ἐπειδὴ ἡ $A\Delta$ εἶναι ἀποτομὴ πρώτη θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A\Delta=AH-H\Delta$, ἔνθα AH, $H\Delta$ ῥηταὶ μήκει ἀσύμμετροι καὶ μόνον AH^2, $H\Delta^2$ σύμμετρα, ὁ μειωτέος AH (ἡ ὅλη) εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν $A\Gamma$ καὶ AH, $\sqrt{AH^2-H\Delta^2}$ μήκει σύμμετροι, (1). Ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-AH\chi+\frac{H\Delta^2}{4}=0$ διαιροῦσι τὴν μεγαλυτέραν AH εἰς μήκει σύμμετρα, (θ. 17). Ἂς τμηθῇ ἡ μικροτέρα ΔH εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ E, ὁπότε $\Delta E^2=EH^2=\frac{\Delta H^2}{4}=AZ\times ZH$, ἂν καλέσωμεν AZ, ZH τὰς ῥίζας τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι μήκει σύμμετροι, κλπ.

Ἡ πρώτη ἀποτομὴ εἶναι κατὰ τὸ θ. 85 τῆς μορφῆς $\rho\frac{\delta}{\gamma}-\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$, (ἔνθα τὸ α′ μονώνυμον εἶναι ἡ AH καὶ τὸ β′ ἡ $H\Delta$). Αἱ AZ, ZH εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει σύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2-AH\chi+\frac{H\Delta^2}{4}=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2-\rho\frac{\delta}{\gamma}\chi+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2\frac{\vartheta}{\varphi^2}=0, \quad \text{αἱ}$$

$$AZ=\frac{\rho\delta}{2\gamma}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}, \quad ZH=\frac{\rho\delta}{2\gamma}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}.$$

$$AI=A\Gamma\times AZ=\rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}+\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right)=\Lambda O^2, \quad \Lambda O=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}$$

$$ZK=A\Gamma\times ZH=\rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}-\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\varphi}\right)=ON^2, \quad ON=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}.$$

$$\text{Καὶ } AB=A\Gamma\,(AH-H\Delta)=\rho\left[\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(1-\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)\right]=\Lambda N^2=(\Lambda O-ON)^2,$$

$$\sqrt{AB}=\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}=\Lambda O-ON=\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}-\rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$$

[γ, δ ἀκέραιοι, ἐτέθη $\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος ὡς εἰς τὸ θ. 54. Ἐνταῦθα ἔχομεν τὸν πρῶτον μετασχηματισμὸν διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς].

92. Ἡ δευτέρα ἀποτομὴ $ΑΔ = ΑΗ - ΗΔ$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 86, $\rho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - \rho\,\frac{\delta}{\gamma}$.

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει σύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - ΑΗ\chi + \frac{ΗΔ^2}{4} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = 0, \quad \text{αἱ}$$

$$ΑΖ = \rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}, \qquad ΖΗ = \rho\frac{\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}.$$

$$ΑΙ = ΑΓ \times ΑΖ = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right) = ΛΟ^2, \quad ΛΟ = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$$

$$ΖΚ = ΑΓ \times ΖΗ = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right) = ΟΝ^2, \quad ΟΝ = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}.$$

$$\text{Καὶ } ΑΒ = ΑΓ\ (ΑΗ - ΗΔ) = \rho\left[\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - 1\right)\right] = ΛΝ^2 = (ΛΟ - ΟΝ)^2,$$

$$\sqrt{ΑΒ} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - 1\right)} = ΛΟ - ΟΝ = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}.$$

Δεύτερος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

93. Ἡ τρίτη, ἀποτομὴ $ΑΔ = ΑΗ - ΗΔ$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 87,

$$\rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει σύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - ΑΗ\chi + \frac{ΗΔ^2}{4} = 0$ ἢ $\chi^2 - \frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}\chi + \frac{\rho^2\vartheta}{4\varepsilon} = 0$, αἱ

$$ΑΖ = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}, \qquad ΖΗ = \frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$ΑΙ = ΑΓ \times ΑΖ = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = ΛΟ^2, \quad ΛΟ = \rho\sqrt{\frac{\rho+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$ΖΚ = ΑΓ \times ΖΚ = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = ΟΝ^2, \quad ΟΝ = \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

$$\text{Καὶ } ΑΒ = ΑΓ\,(ΑΗ - ΗΔ) = \rho\left(\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = ΛΝ^2 = (ΛΟ - ΟΝ)^2,$$

$$\sqrt{ΑΒ} = \rho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}} = ΛΟ - ΟΝ = \rho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \rho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Τρίτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

94. Ἡ τετάρτη ἀποτομὴ $ΑΔ = ΑΗ - ΗΔ$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 88, $\frac{\rho\delta}{\gamma} - \frac{\rho\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$.

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει ἀσύμμετροι, θ. 48) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \mathrm{AH}\chi + \frac{\mathrm{H\Delta}^2}{4} = 0$, ἢ

$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\chi + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\lambda} = 0$, αἱ

$$\mathrm{AZ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}},\quad \mathrm{ZH} = \frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\mathrm{AI} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{AZ} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathrm{AO}^2,\quad \mathrm{AO} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$\mathrm{ZK} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{ZH} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathrm{ON}^2,\quad \mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}.$$

Καὶ $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}\,(\mathrm{AH} - \mathrm{H\Delta}) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma} - \frac{\rho\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathrm{AN}^2 = (\mathrm{AO} - \mathrm{ON})^2$,

$$\sqrt{\mathrm{AB}} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)} = \mathrm{AO} - \mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}.$$

Τέταρτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

95. Ἡ πέμπτη ἀποτομὴ $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AH} - \mathrm{H\Delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 89,

$$\rho\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει ἀσύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \mathrm{AH}\chi + \frac{\mathrm{H\Delta}^2}{4} = 0$, ἢ

$\chi^2 - \rho\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\cdot\chi + \frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = 0$, αἱ

$$\mathrm{AZ} = \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha},\quad \mathrm{ZH} = \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\mathrm{AI} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{AZ} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \mathrm{AO}^2,\quad \mathrm{AO} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}$$

$$\mathrm{ZK} = \mathrm{A\Gamma}\times\mathrm{ZH} = \rho\left(\frac{\rho\delta}{2\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta\beta}{2\gamma\alpha}\right) = \mathrm{ON}^2,\quad \mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}.$$

Καὶ $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}\,(\mathrm{AH} - \mathrm{H\Delta}) = \rho\left(\frac{\rho\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{\rho\delta}{\gamma}\right) = \mathrm{AN}^2 = (\mathrm{AO} - \mathrm{ON})^2$,

$$\sqrt{\mathrm{AB}} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - 1\right)} = \mathrm{AO} - \mathrm{ON} = \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} - \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}.$$

Πέμπτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

96. Ἡ ἕκτη ἀποτομὴ $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AH} - \mathrm{H\Delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ θ. 90,

$$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Αἱ ΑΖ, ΖΗ εἶναι αἱ θετικαὶ καὶ ἄνισοι ῥίζαι (μήκει ἀσύμμετροι) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - \text{ΑΗ}\chi + \frac{\text{ΗΔ}^2}{4} = 0$ ἢ

$$\chi^2 - \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\,.\,\chi + \frac{\rho^2}{4}\,.\,\frac{\alpha^2}{\varepsilon} = 0,\quad \text{αἱ}$$

$$\text{ΑΖ} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\rho}{2}\,.\,\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \text{ΖΗ} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho}{2}\,.\,\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$\text{ΑΙ} = \text{ΑΓ}\times\text{ΑΖ} = \rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \frac{\rho}{2}\,.\,\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΛΟ}^2,\quad \text{ΛΟ} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$\text{ΖΚ} = \text{ΑΓ}\times\text{ΖΗ} = \rho\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho}{2}\,.\,\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΟΝ}^2,\quad \text{ΟΝ} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

$$\text{Καὶ ΑΒ} = \text{ΑΓ}(\text{ΑΗ} - \text{ΗΔ}) = \rho\left(\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \text{ΛΝ}^2 = (\text{ΛΟ} - \text{ΟΝ})^2,$$

$$\sqrt{\text{ΑΒ}} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}} = \text{ΛΟ} - \text{ΟΝ} = \rho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Ἕκτος μετασχηματισμὸς διπλοῦ ῥιζικοῦ ἐξ ἀποτομῆς.

Τὰ ἑπόμενα ἓξ θεωρήματα εἶναι ἀντιστοίχως τ' ἀντίστροφα τῶν 91–96.

97. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἀποτομὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ῥητή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι πρώτη ἀποτομή. (Ἀνάλογοι ἐκφωνήσεις εἰς τὰ ἑπόμενα 5 θεωρήματα).

Ἡ ἀποτομὴ ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 73), $\rho - \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Ἀντὶ τῆς ῥητῆς ΓΔ λαμβάνομεν πάλιν ρ. Κατὰ τὸ θεώρημα θὰ εἶναι

$$\text{ΑΗ}^2 = \rho^2 = \text{ΓΔ}\times\text{ΓΚ},\quad \text{ΓΚ} = \rho.$$

$$\text{ΗΒ}^2 = \rho^2\frac{\delta}{\gamma} = \text{ΓΔ}\times\text{ΚΜ},\quad \text{ΚΜ} = \rho\frac{\delta}{\gamma},\ \text{ΓΜ} = \text{ΓΚ} + \text{ΚΜ}.$$

$$2\text{ΑΗ}\times\text{ΗΒ} = 2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} = \text{ΓΔ}\times\text{ΜΖ} = 2\rho^2\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}},\quad \text{ΜΖ} = 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}},$$

$$\text{ΓΖ} = \text{ΓΜ} - \text{ΜΖ} = \rho\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\text{ΓΜ}^2 - \text{ΜΖ}^2}$ μήκει σύμμετροι, καὶ ΓΜ, ρ μήκει σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΓΖ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ (1 ὁρ. τρίτων ὁρισ.).

98. Ἡ πρώτη ἀποτομὴ μέσης, ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 74), $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} - \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$.

$$\text{ΑΗ}^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{ΓΔ}\times\text{ΓΚ},\quad \text{ΓΚ} = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$HB^2 = \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} = ΓΔ \times KM, \quad KM = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad ΓM = ΓK + KM.$$

$$2AH \times HB = 2\rho^2\frac{\delta}{\gamma} = ΓΔ \times MZ, \quad MZ = 2\rho\frac{\delta}{\gamma},$$

$$ΓZ = ΓM - MZ = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ, εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{ΓM^2 - MZ^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετρον πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν $\rho = ΓΔ$. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ δευτέρα ἀποτομὴ (2 ὁρισ. τρίτ. ὁρισ.).

99. Ἡ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης $AB = AH - HB$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 75),

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

$$AH^2 = \rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = ΓΔ \times ΓK, \quad ΓK = \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$HB^2 = \frac{\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} = ΓΔ \times KM, \quad KM = \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad ΓM = ΓK + KM,$$

$$2AH \times HB = 2\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = ΓΔ \times MZ, \quad MZ = 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$ΓZ = ΓM - MZ = \rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{ΓM^2 - MZ^2}$ εἶναι μήκει σύμμετροι. Οὔτε ΓΜ οὔτε ΜΖ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ ($=$ ΓΔ). Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ τρίτη ἀποτομή, (3 ὁρισ. τρίτ. ὁρισ.).

100. Ἡ ἐλάσσων $AB = AH - HB$ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 76)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$$AH^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = ΓΔ \times ΓK, \quad ΓK = \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$HB^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = ΓΔ \times KM, \quad KM = \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad ΓM = ΓK + KM.$$

$$2\text{ΑΗ} \times \text{ΗΒ} = \rho^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = \text{ΓΔ} \times \text{ΜΖ}, \quad \text{ΜΖ} = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\text{ΓΖ} = \text{ΓΜ} - \text{ΜΖ} = \rho - \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\text{ΓΜ}^2 - \text{ΜΖ}^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ ΓΜ, ρ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ τετάρτη ἀποτομὴ (4 ὁρ. τρίτ. ὁρισ.).

101. Ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ΑΒ = ΑΗ — ΗΒ εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 97)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$$\text{ΑΗ}^2 = \frac{\rho^2}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \text{ΓΔ} \times \text{ΓΚ}, \quad \text{ΓΚ} = \frac{\rho}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$\text{ΗΒ}^2 = \frac{\rho^2}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \text{ΓΔ} \times \text{ΚΜ},$$

$$\text{ΚΜ} = \frac{\rho}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \text{ΓΜ} = \text{ΓΚ} + \text{ΚΜ}.$$

$$2\text{ΑΗ} \times \text{ΗΒ} = \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda} = \text{ΓΔ} \times \text{ΜΖ}, \quad \text{ΜΖ} = \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}.$$

$$\text{ΓΖ} = \text{ΓΜ} - \text{ΜΖ} = \rho\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \rho\frac{\alpha^2}{\lambda}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\text{ΓΜ}^2 - \text{ΜΖ}^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ τὸ μικρότερον μονώνυμον ΜΖ καὶ ρ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ πέμπτη ἀποτομὴ (5 ὁρισ. τρίτ. ὁρισ.).

102. Ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα εἶναι τῆς μορφῆς (τοῦ θ. 78)

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

$$\text{ΑΗ}^2 = \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \text{ΓΔ} \times \text{ΓΚ}, \quad \text{ΓΚ} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

$$\text{ΗΒ}^2 = \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right) = \text{ΓΔ} \times \text{ΚΜ},$$

$$\text{ΚΜ} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \text{ΓΜ} = \text{ΓΚ} + \text{ΚΜ}.$$

$$2\text{ΑΗ} \times \text{ΗΒ} = \rho^2 \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = \text{ΓΔ} \times \text{ΜΖ}, \quad \text{ΜΖ} = \rho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\text{ΓΖ} = \text{ΓΜ} - \text{ΜΖ} = \rho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Τὰ μονώνυμα ΓΜ, ΜΖ εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα. Ἡ ΓΜ $>$ ΜΖ. Ἡ ΓΜ καὶ $\sqrt{\Gamma M^2-MZ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, καὶ οὔτε ΓΜ οὔτε ΜΖ μήκει σύμμετροι πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ρ ($=\Gamma\Delta$). Εἶναι ἄρα ἡ ΓΖ ἕκτη ἀποτομή.

103. Ἔστω ἡ ἀποτομὴ $AB = AE - BE$ καὶ ἡ πρὸς ταύτην σύμμετρος ἡ ΓΔ. Εἶναι ἄρα αἱ ΑΕ, ΒΕ ῥηταὶ καὶ μόνον AE^2, BE^2 σύμμετρα, (θ. 73). Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΒΕ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}=\frac{AB+BE}{\Gamma\Delta+\Delta Z}$ ἢ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}=\frac{AE}{\Gamma Z}$, (1), ἂν ληφθῇ $\Gamma\Delta+\Delta Z=\Gamma Z$. Ἐκ τῆς συμμετρίας τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἕπεται ἡ συμμετρία τῶν ΑΕ, ΓΖ καὶ ΒΕ, ΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ΑΕ, ΒΕ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον AE^2, BE^2 σύμμετρα, εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΔΖ ῥηταὶ καὶ μόνον ΓZ^2, ΔZ^2 σύμμετρα. Ἡ διαφορὰ ἄρα $\Gamma Z - \Delta Z = \Gamma\Delta$ εἶναι ἀποτομή. Λέγω ὅτι εἶναι καὶ κατὰ τὴν τάξιν ἡ αὐτὴ (Αἱ τάξεις εἶναι ἕξ· πρώτη, δευτέρα........ ἕκτη ἀποτομή). Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{AE}{EB}=\frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$. Αἱ ΑΕ, $\sqrt{AE^2-EB^2}$ θὰ εἶναι μήκει σύμμετροι ἢ μήκει ἀσύμμετροι. Ἂν αὗται εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ αἱ ΓΖ, $\sqrt{\Gamma Z^2-Z\Delta^2}$ μήκει σύμμετροι. Καὶ ἂν μὲν ἡ δοθεῖσα ῥητὴ ρ καὶ ἡ ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετροι θὰ εἶναι καὶ ρ, ΓΖ μήκει σύμμετροι (πρώτη ἀποτομή), ἂν ρ, ΒΕ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ρ, ΖΔ μήκει σύμμετροι (δευτέρα ἀποτομή), ἂν δὲ οὔτε ΑΕ, οὔτε ΕΒ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ, οὔτε ΓΖ οὔτε ΖΔ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ, (τρίτη ἀποτομή). Ἂν ΑΕ, $\sqrt{AE^2-EB^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, $\sqrt{\Gamma Z^2-Z\Delta^2}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Καὶ ἂν ρ, ΑΕ εἶναι μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ρ, ΓΖ μήκει σύμμετροι (τετάρτη ἀποτομή), ἂν ρ, ΕΒ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ρ, ΖΔ μήκει σύμμετροι (πέμπτη ἀποτομή, καὶ ἂν τέλος οὔτε ΑΕ, οὔτε ΕΒ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ, οὔτε ΓΖ, οὔτε ΖΔ εἶναι μήκει σύμμετροι πρὸς ρ (ἕκτη ἀποτομή).

104. Ἔστω ἀποτομὴ μέσης ἡ $AB = AE - EB$, (θὰ εἶναι ἡ πρώτη ἀποτομὴ μέσης δηλ. $AE \times EB$ ῥητὸν ἢ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης δηλ. $AE \times EB$ μέσον). Καὶ ἡ σύμμετρος πρὸς ταύτην ΓΔ. Τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΒΕ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἔστω $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}=\frac{AB+BE}{\Gamma\Delta+\Delta Z}$ ἢ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}=\frac{AE}{\Gamma Z}$, (1), ἂν ληφθῇ $\Gamma\Delta+\Delta Z=\Gamma Z$. Ἐπειδὴ ΑΒ, ΓΔ σύμμετροι εἶναι ἄρα καὶ ΑΕ, ΓΖ σύμμετροι καὶ ΒΕ, ΔΖ σύμμετροι. Ἐπειδὴ ΑΕ, ΕΒ εἶναι ἄρα καὶ ΓΖ, ΔΖ μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) εἶναι $\frac{AE}{EB}=\frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$, καὶ ἐπειδὴ $\frac{AE}{EB}=\frac{AE^2}{AE\times EB}$ καὶ $\frac{\Gamma Z}{Z\Delta}=\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times Z\Delta}$, εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2}{AE\times EB}=\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times Z\Delta}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{AE^2}{\Gamma Z^2}=\frac{AE\times EB}{\Gamma Z\times Z\Delta}$. Εἶναι δὲ

$AE^2 = \Gamma Z^2$ σύμμετρα (ἐκ τῆς 1). Εἶναι ἄρα $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ σύμμετρα. Ἐὰν ἄρα $AE \times EB$ ῥητὸν εἶναι καὶ $\Gamma Z \times Z\Delta$ ῥητόν. Ἐὰν $AE \times EB$ μέσον, εἶναι καὶ $\Gamma Z \times Z\Delta$ μέσον.

105. Ἔστω ἐλάσσων ἡ $AB = AE - BE$ καὶ σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ $\Gamma\Delta$. Τῶν AB, $\Gamma\Delta$, BE εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Delta Z}$. Ἐκ ταύτης εἶναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Delta Z} = \frac{AB+BE}{\Gamma\Delta+\Delta Z}$ ἢ $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Delta Z} = \frac{AE}{\Gamma Z}$, (1), ἂν ληφθῇ $\Gamma\Delta + \Delta Z = \Gamma Z$. Ἐπειδὴ AE, BE εἶναι δυνάμει ἀσύμμετροι (ὁρισ. ἐλάσσονος, θ. 76) καὶ ἐκ τῆς (1), $\frac{AE}{BE} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, εἶναι ἄρα καὶ ΓZ, ΔZ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{AE^2}{BE^2} = \frac{\Gamma Z^2}{\Delta Z^2}$. Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2+BE^2}{BE^2} = \frac{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}{\Delta Z^2}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{BE^2}{\Delta Z^2} = \frac{AE^2+BE^2}{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}$. Εἶναι δὲ BE^2, ΔZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς (1) λόγῳ τῆς συμμετρίας AB, $\Gamma\Delta$). Εἶναι ἄρα καὶ $(AE^2 + BE^2)$, $(\Gamma Z^2 + \Delta Z^2)$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ εἶναι (AE^2+BE^2) ῥητόν, (ὁρισμὸς ἐλάσσονος). Ἄρα καὶ $(\Gamma Z^2 + \Delta Z^2)$ ῥητόν. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{AE^2}{AE\times BE} = \frac{AE}{BE}$ καὶ $\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$ καὶ εἶναι $\frac{AE}{BE} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$ (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2}{AE\times BE} = \frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}$. Καὶ ἐπειδὴ AE^2, ΓZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς 1) εἶναι ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{\Gamma Z^2} = \frac{AE\times BE}{\Gamma Z\times\Delta Z}$ καὶ $AE\times BE$, $\Gamma Z\times \Delta Z$ σύμμετρα.

Εἶναι δὲ $AE \times BE$ μέσον (ὁρισ. ἐλάσσονος). Ἄρα, λόγῳ τῆς συμμετρίας, καὶ $\Gamma Z\times \Delta Z$ μέσον. Ἄρα αἱ δυνάμει ἀσύμμετροι ΓZ, ΔZ σχηματίζουσι $(\Gamma Z^2 + \Delta Z^2)$ ῥητὸν καὶ $\Gamma Z\times \Delta Z$ μέσον. Ἄρα ἡ διαφορὰ $\Gamma Z - \Delta Z = \Gamma\Delta$ εἶναι ἐλάσσων, (θ. 76).

106. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ $AB = AE - BE$ καὶ σύμμετρος πρὸς ταύτην ἡ $\Gamma\Delta$. Κατὰ τὸ θ. 77 εἶναι AE^2, BE^2 ἀσύμμετρα, $(AE^2 + BE^2)$ μέσον καὶ $AE\times BE$ ῥητόν. Τῶν AB, $\Gamma\Delta$, BE εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Delta Z}$. Ἐκ ταύτης, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον, λαμβάνομεν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{BE}{\Delta Z} = \frac{AE}{\Gamma Z}$ (1). Ἐπειδὴ AE, BE δυνάμει ἀσύμμετροι (ἐξ ὑποθέσεως), καὶ ἐκ τῆς (1) $\frac{AE}{BE} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, εἶναι ἄρα καὶ ΓZ, ΔZ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{BE^2} = \frac{\Gamma Z^2}{\Delta Z^2}$, εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2+BE^2}{BE^2} = \frac{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}{\Delta Z^2}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{BE^2}{\Delta Z^2} = \frac{AE^2+BE^2}{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}$. Εἶναι δὲ BE^2, ΔZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς (1) λόγῳ τῆς συμμετρίας AB, $\Gamma\Delta$). Εἶναι ἄρα καὶ $(AE^2 + BE^2)$,

$(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ (AE^2+BE^2) μέσον. Ἄρα καὶ $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{AE}{BE}$ καὶ $\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, καὶ εἶναι $\frac{AE}{BE}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}$. Καὶ ἐπειδὴ AE^2, ΓZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{\Gamma Z^2}=\frac{AE\times BE}{\Gamma Z\times\Delta Z}$, καὶ $AE\times BE$, $\Gamma Z\times\Delta Z$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $AE\times BE$ ῥητόν. Ἄρα καὶ $\Gamma Z\times\Delta Z$ ῥητόν, Ἄρα αἱ δυνάμει ἀσύμμετροι ΓZ, ΔZ σχηματίζουσι $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ μέσον καὶ $\Gamma Z\times\Delta Z$ ῥητόν. Ἡ διαφορὰ ἄρα $\Gamma Z-\Delta Z=\Gamma\Delta$ εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, (θ. 77).

107. Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $AB=AE-BE$, ἔνθα AE^2, BE^2 ἀσύμμετρα, $(AE^2+BE)^2$ μέσον, $AE\times BE$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς (AE^2+BE^2). Καὶ σύμμετρος πρὸς τὴν AB ἡ $\Gamma\Delta$. Ὡς εἰς τὸ προηγούμενον φθάνομεν εἰς τὴν σχέσιν $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{BE}{\Delta Z}=\frac{AE}{\Gamma Z}$, (1). Ἐπειδὴ AE, BE δυνάμει ἀσύμμετροι καὶ ἐκ τῆς (1) $\frac{AE}{BE}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, εἶναι ἄρα καὶ ΓZ, ΔZ δυνάμει ἀσύμμετροι. Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{AE^2}{BE^2}=\frac{\Gamma Z^2}{\Delta Z^2}$. Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2+BE^2}{BE^2}=\frac{\Gamma Z^2\times\Delta Z^2}{\Delta Z^2}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{BE^2}{\Delta Z^2}=\frac{AE^2+BE^2}{\Gamma Z^2+\Delta Z^2}$.

Εἶναι δὲ BE^2, ΔZ^2 σύμμετρα (λόγῳ τῆς συμμετρίας ἐκ τῆς 1 τῶν AB, $\Gamma\Delta$). Εἶναι ἄρα καὶ (AE^2+BE^2), $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ σύμμετρα. Ἐξ ὑποθέσεως δὲ (AE^2+BE^2) μέσον. Ἄρα καὶ $(\Gamma Z^2+\Delta Z^2)$ μέσον. Πάλιν, ἐπειδὴ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{AE}{BE}$ καὶ $\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, καὶ εἶναι $\frac{AE}{BE}=\frac{\Gamma Z}{\Delta Z}$, (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα καὶ $\frac{AE^2}{AE\times BE}=\frac{\Gamma Z^2}{\Gamma Z\times\Delta Z}$. Καὶ ἐπειδὴ AE^2, ΓZ^2 σύμμετρα (ἐκ τῆς 1), εἶναι ἄρα ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{AE^2}{\Gamma Z^2}=\frac{AE\times BE}{\Gamma Z\times\Delta Z}$, καὶ $AE\times BE$, $\Gamma Z\times\Delta Z$ σύμμετρα.

Ἐξ ὑποθέσεως δὲ $AE\times BE$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς AE^2+BE^2. Εἶναι ἄρα καὶ $\Gamma Z\times\Delta Z$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $\Gamma Z^2+\Delta Z^2$. Ἡ διαφορὰ ἄρα $\Gamma Z-\Delta Z=\Gamma\Delta$ εἶναι μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, (θ. 78).

111. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ AB. Λέγω, ὅτι δὲν εἶναι καὶ δυώνυμος. Διότι ἔστω ὅτι εἶναι καὶ ἂς ληφθῇ ῥητὴ ἡ $\Delta\Gamma$ καὶ ἂς μετασχηματισθῇ τὸ AB^2 εἰς ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ $\Delta\Gamma$, ἔστω τὸ ὀρθογώνιον $\Delta\Gamma\times\Delta E$. Εἶναι ἄρα ἡ ΔE πρώτη ἀποτομή, (θ. 97). Ἔστω ἀφαιρετέος (προσαρμόζουσα) τῆς ἀποτομῆς ἡ EZ, ὁπότε $(\Delta E+EZ)=\Delta Z$ καὶ EZ εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον ΔZ^2, EZ^2 σύμμετρα, (θ. 73). Ἐπειδὴ ἡ $\Delta E=\Delta Z-ZE$ εἶναι πρώτη ἀποτομὴ εἶναι κατὰ τὸν ὁρ. 1 τῶν τρίτων ὁρισμῶν ΔZ, $\sqrt{\Delta Z^2-ZE^2}$

μήκει σύμμετροι, καὶ ΔΖ, τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον, μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΔΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι καὶ δυώνυμος ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος, (θ. 60).

Ἔστω $ΔΕ = ΔΗ + ΗΕ$ καὶ $ΔΗ > ΗΕ$. Εἶναι ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΕ ῥηταὶ (α), καὶ μόνον $ΔΗ^2$, $ΗΕ^2$ σύμμετρα, (θ. 36). Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι πρώτη δυώνυμος θὰ εἶναι ΔΗ, $\sqrt{ΔΗ^2 - ΗΕ^2}$ μήκει σύμμετροι καὶ ΔΓ, ΔΗ, (1) (τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον) μήκει σύμμετροι, (α΄ ὁρισ. δευτ. ὁρισ.). Ἀνωτέρω ἐδείχθησαν καὶ ΔΓ, ΔΖ, (2) μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (1) καὶ (2) ΔΗ, ΔΖ μήκει σύμμετροι, (θ. 12). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ ($= ΔΗ + ΗΖ$) εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ΔΗ εἶναι ἄρα καὶ ΔΖ, ΗΖ (3) μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΖ εἶναι ῥητὴ εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΗΖ ὡς μήκει σύμ. πρὸς ταύτην ῥητή. Εἶναι δὲ ΔΖ, ΕΖ, (4) μήκει ἀσύμμετροι, διότι ὡς μονώνυμα ἀποτομῆς εἶναι ῥηταὶ καὶ μόνον $ΔΖ^2$, $ΕΖ^2$ σύμμετρα. Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἕπεται ΗΖ, ΕΖ μήκει ἀσύμμετροι, (θ. 13). Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΗΖ, ΕΖ, (ἐπειδὴ εἶναι ῥηταὶ καὶ μήκει ἀσύμμετροι) εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ διαφορὰ των συνεπῶς $ΗΖ - ΕΖ = ΗΕ$ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73) ἤτοι ἄρρητος. Ὅπερ ἄτοπον. Διότι αὕτη ἀνωτέρω, (α), ἐδείχθη ῥητή. [Ὥστε, ἐὰν εἶναι $ΑΒ = ρ\sqrt{\frac{β}{α}} - ρ\sqrt{\frac{δ}{γ}}$, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ $ΑΒ = ρ\sqrt{\frac{ζ}{ε}} - ρ\sqrt{\frac{θ}{η}}$ (α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ μὴ τετράγωνοι)].

112. Ἄλλη ἐκφώνησις: ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγώνου εἶναι ῥητὴ καὶ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τούτου δυώνυμος τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι ἀποτομὴ τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου καὶ ἡ γινομένη ἀποτομὴ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἔστω ῥητὴ ἡ Α καὶ δυώνυμος ἡ $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ$, ὥστε $ΔΓ > ΒΔ$ καὶ ἃς γίνῃ $Α^2 = ΒΓ \times ΕΖ$. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι ἀποτομὴ κλπ. Ἂς γίνῃ πάλιν $Α^2 = ΒΔ \times Η$. Εἶναι ἄρα $\frac{ΒΓ}{ΒΔ} = \frac{Η}{ΕΖ}$, (1). Ἐπειδὴ $ΒΓ > ΒΔ$ εἶναι ἄρα καὶ $Η > ΕΖ$. Ἔστω $Η = ΕΖ + ΖΘ = ΕΘ$, (2). Ἄρα $\frac{ΒΓ}{ΒΔ} = \frac{ΕΘ}{ΕΖ}$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\frac{ΒΓ - ΒΔ}{ΒΔ} = \frac{ΕΘ - ΕΖ}{ΕΖ}$ ἢ $\frac{ΔΓ}{ΒΔ} = \frac{ΖΘ}{ΕΖ}$, (3). Ἐπειδὴ $ΔΓ > ΒΔ$ εἶναι ἄρα καὶ $ΖΘ > ΕΖ$. Τῆς διαφορᾶς $ΖΘ - ΕΖ$ καὶ τῆς ΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην ἀνάλογον ἔστω ΚΕ, $\frac{ΖΘ - ΕΖ}{ΕΖ} = \frac{ΕΖ}{ΚΕ}$, ἐξ ἧς $\frac{ΖΘ - ΕΖ + ΕΖ}{ΕΖ} = \frac{ΕΖ + ΚΕ}{ΚΕ}$ ἢ $\frac{ΖΘ}{ΕΖ} = \frac{ΚΖ}{ΚΕ}$, (4), ἂν καλέσωμεν $ΕΖ + ΚΕ = ΚΖ$, (5). Ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν $\frac{ΖΘ + ΚΖ}{ΕΖ + ΚΕ} = \frac{ΚΖ}{ΚΕ}$ ἢ $\frac{ΘΚ}{ΚΖ} = \frac{ΚΖ}{ΚΕ}$, (6), ἂν καλέσωμεν $ΖΘ + ΚΖ = ΘΚ$, (7). Ἐκ τῶν (3), (4), (6) λαμβάνομεν $\frac{ΔΓ}{ΒΔ} = \frac{ΘΚ}{ΚΖ} = \frac{ΚΖ}{ΚΕ}$, (8). Ἐπειδὴ

ΔΓ, ΒΔ εἶναι μονώνυμα δυωνύμου εἶναι ἄρα $ΔΓ^2$, $ΒΔ^2$ σύμμετρα, (θ. 36). Ἐκ τῆς (8) ἄρα εἶναι καὶ $ΘΚ^2$, $ΚΖ^2$ σύμμετρα. Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν $\frac{ΘΚ}{ΚΕ} = \frac{ΘΚ^2}{ΚΖ^2}$, (9), (V. ὁρ. 9). Εἶναι ἄρα ΘΚ, ΚΕ μήκει σύμμετροι. Ἀλλὰ ἐκ τῆς (2) εἶναι $ΖΘ = ΕΘ - ΕΖ$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ΖΘ εἰς τὴν (7) καὶ εἰς ταύτην ἀντὶ τοῦ ΚΖ τὴν τιμὴν τούτου ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν $ΘΚ = ΕΘ + ΚΕ$. Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ΘΚ, ΚΕ μήκει σύμμετροι εἶναι ὅρα καὶ ΕΘ, ΚΕ μήκει σύμμετροι, (θ. 15). Ἐπειδὴ $Α^2 = ΒΔ \times Η = ΒΔ \times ΕΘ$ καὶ εἶναι $Α^2$ ῥητόν, εἶναι ἄρα καὶ $ΒΔ \times ΕΘ$ ῥητόν. Καὶ εἶναι ἡ ΒΔ ῥητή, ὡς μονώνυμον δυωνύμου. Εἶναι ἄρα ἡ ΕΘ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΔ, (θ. 20). Ἀλλὰ καὶ ΕΘ, ΚΕ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα ΚΕ, ΒΔ ῥηταὶ καὶ μήκει σύμμετροι, (θ. 12), (10). Ἐπειδὴ λοιπὸν $\frac{ΔΓ}{ΒΔ} = \frac{ΚΖ}{ΚΕ}$, (ἐκ τῆς 8) αἱ δὲ ΔΓ, ΒΔ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ ΚΖ, ΚΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, (θ. 11). Εἶναι δὲ ἡ ΚΕ ῥητή· ἄρα καὶ ἡ ΚΖ ῥητή. Αἱ ῥηταὶ ἄρα ΚΖ, ΚΕ εἶναι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ διαφορά των ἄρα ἡ ἐκ τῆς (5), $ΚΖ - ΚΕ = ΕΖ$ εἶναι ἀποτομή, (θ. 73). Καὶ ἐδείχθη ὅτι τὰ μονώνυμα αὐτῆς εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου (ἐκ τῆς 8). Ἐκ τῆς (8) πάλιν εἶναι $\frac{ΔΓ}{ΚΖ} = \frac{ΒΔ}{ΚΕ}$. Καὶ ἐπειδὴ ΒΔ, ΚΕ εἶναι ῥηταὶ μήκει σύμμετροι, (ἐκ τῆς 10), εἶναι καὶ ΔΓ, ΚΖ ῥηταὶ καὶ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς σύμμετρα πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου ἀντιστοίχως καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον. Δεικτέον ἀκόμη ὅτι ἡ ἀποτομὴ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὴν δυώνυμον.

Ἡ $\sqrt{ΓΔ^2 - ΔΒ^2}$ θὰ εἶναι πρὸς τὴν ΓΔ μήκει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν μονωνύμων τῆς ἀποτομῆς πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς δυωνύμου θὰ εἶναι ἀντιστοίχως καὶ $\sqrt{ΚΖ^2 - ΚΕ^2}$ μήκει σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος πρὸς ΚΖ.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τῆς συμμετρίας θὰ ἔχωμεν πρώτην, δευτέραν, τρίτην δυώνυμον ἂν 1) ΔΓ, Α μήκει σύμμετροι, 2) ΒΔ, Α μήκει σύμμετροι, 3) οὔτε ΔΓ οὔτε ΒΔ μήκει σύμμετροι πρὸς Α, καὶ συνεπῶς, πρώτην, δευτέραν, τρίτην ἀποτομήν, διότι θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ΚΖ, Α μήκει σύμμετροι, ΚΕ, Α μήκει σύμμετροι, οὔτε ΚΖ οὔτε ΚΕ μήκει σύμμετροι πρὸς Α.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀσυμμετρίας θὰ ἔχωμεν τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην δυώνυμον ἂν ΓΔ, Α μήκει σύμμετροι, ΔΒ, Α μήκει σύμμετροι, οὔτε ΓΔ οὔτε ΔΒ μήκει σύμμετροι πρὸς Α καὶ συνεπῶς τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην ἀποτομήν, διότι θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ΚΖ, Α μήκει σύμμετροι, ΚΕ, Α μήκει σύμμετροι, οὔτε ΚΖ οὔτε ΚΕ μήκει σύμμετροι πρὸς Α.

113. Ἐὰν τὸ ὕψος ὀρθ. τριγ. εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τούτου εἶναι ἀποτομή, τὸ ἄλλο τμῆμα εἶναι δυώνυμος

τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς καὶ ἡ δυώνυμος εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως πρὸς τὴν ἀποτομήν.

Ἔστω ῥητὴ ἡ Α καὶ ἀποτομὴ ἡ $ΒΔ = ΒΓ - ΓΔ$, ὥστε ΒΓ, ΓΔ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΒΓ^2$, $ΓΔ^2$ σύμμετρα. Ἔστω $Α^2 = ΒΔ \times ΚΘ$, (1) καὶ $Α^2 = ΒΓ \times Η$, (2). Ἐπειδὴ $Α^2$ ῥητὸν καὶ ΒΓ ῥητὴ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀποτομῆς, (θ. 73) εἶναι ἄρα καὶ Η ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ, (θ. 20). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $\frac{ΒΓ}{ΒΔ} = \frac{ΚΘ}{Η}$. Ἐπειδὴ $ΒΓ > ΒΔ$ εἶναι ἄρα καὶ $ΚΘ > Η$. Ἔστω $Η = ΚΕ$, ὥστε καὶ ΚΕ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ καὶ ἔστω $ΚΘ - ΚΕ = ΕΘ$, (3). Καὶ ἐπειδὴ $\frac{ΒΓ}{ΒΔ} = \frac{ΚΘ}{ΚΕ}$ εἶναι καὶ $\frac{ΒΓ}{ΒΓ-ΒΔ} = \frac{ΚΘ}{ΚΘ-ΚΕ}$ ἢ $\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{ΚΘ}{ΕΘ}$, (4). Τοῦ ἀθροίσματος $ΚΘ + ΕΘ$ καὶ τῆς ΕΘ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην ἀνάλογον ἔστω ΖΕ, ἤτοι $\frac{ΚΘ+ΕΘ}{ΕΘ} = \frac{ΕΘ}{ΖΕ}$, ἐξ ἧς εἶναι $\frac{ΚΘ+ΕΘ-ΕΘ}{ΕΘ} = \frac{ΕΘ-ΖΕ}{ΖΕ}$ ἢ $\frac{ΚΘ}{ΕΘ} = \frac{ΘΖ}{ΖΕ}$, (5), ἂν καλέσωμεν $ΕΘ - ΖΕ = ΘΖ$, (6). Ἐκ τῆς (5) ἔχομεν $\frac{ΚΘ}{ΕΘ} = \frac{ΚΘ-ΘΖ}{ΕΘ-ΖΕ}$ ἢ $\frac{ΚΘ}{ΕΘ} = \frac{ΚΖ}{ΘΖ}$, (7), ἂν καλέσωμεν $ΚΘ - ΘΖ = ΚΖ$, (8). Ἐκ τῆς (4) καὶ (7) ἔχομεν $\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{ΚΖ}{ΘΖ}$, (9). Ἐπειδὴ εἶναι $ΒΓ^2$, $ΓΔ^2$ μόνον σύμμετρα, εἶναι ἄρα καὶ $ΚΖ^2$, $ΘΖ^2$ μόνον σύμμετρα. Ἐκ τῆς (5) καὶ (7) εἶναι $\frac{ΚΖ}{ΘΖ} = \frac{ΘΖ}{ΖΕ}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{ΚΖ}{ΖΕ} = \frac{ΚΖ^2}{ΘΖ^2}$, (V. ὁρισ. 9). Ἐπειδὴ δὲ $ΚΖ^2$, $ΘΖ^2$ σύμμετρα εἶναι ἄρα καὶ ΚΖ, ΖΕ μήκει σύμμετροι. Ἐκ τῆς (3) καὶ (6) εἶναι $ΚΘ - ΕΘ = ΚΕ$ καὶ $ΕΘ - ΘΖ = ΖΕ$. Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν $ΚΘ - ΘΖ = ΚΕ + ΖΕ$. Καὶ ἐκ τῆς (8), $ΚΖ = ΚΕ + ΖΕ$. Ἐπειδὴ ΚΖ, ΖΕ ἐδείχθησαν μήκει σύμμετροι, εἶναι ἄρα καὶ ΚΕ, ΖΕ μήκει σύμμετροι, (θ. 15), καὶ συνεπῶς ΚΖ, ΚΕ μήκει σύμμετροι. Εἶναι δὲ ἡ ΚΕ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΖ ῥητὴ καὶ μήκει σύμμετρος πρὸς ΒΓ. Ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν $\frac{ΒΓ}{ΚΖ} = \frac{ΓΔ}{ΘΖ}$, (10). Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΚΖ, ΒΓ μήκει σύμμετροι. Εἶναι ἄρα αἱ ΓΔ, ΘΖ μήκει σύμμετροι. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΚΖ, ΘΖ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ ἐκ τῆς (8) ἄρα $ΚΘ = ΚΖ + ΘΖ$ εἶναι δυώνυμος, διότι τὰ μονώνυμα αὐτῆς ἐδείχθησαν ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὥστε τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι δυώνυμος τῆς ὁποίας τὰ μονώνυμα εἶναι σύμμετρα ἀντιστοίχως καὶ εἰς αὐτὸν τὸν λόγον πρὸς τὰ μονώνυμα τῆς ἀποτομῆς (ἐκ τῆς 10). Δεικτέον κλπ. ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Εἰς τὴν α′ περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν πρώτην, δευτέραν, τρίτην ἀποτομὴν καὶ συνεπῶς πρώτην, δευτέραν τρίτην δυώνυμον, καὶ εἰς τὴν β′ περίπτωσιν τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην ἀποτομὴν καὶ συνεπῶς τετάρτην, πέμπτην, ἕκτην δυώνυμον.

114. Τὸ γινόμενον δυωνύμου ἐπὶ ἀποτομήν, ὅταν τὰ μονώνυμα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἀντιστοίχως εἶναι ῥητή. Ἔστω $ΑΒ \times ΓΔ$ = ὀρθογώνιον $Κ = Η^2$, ἔνθα ΑΒ ἀποτομὴ $= ΑΖ - ΖΒ$ καὶ ΓΔ δυώνυμος $= ΓΕ + ΕΔ$ $(ΓΕ > ΕΔ)$, ΑΖ, ΓΕ σύμμετρα, ΖΒ, ΕΔ σύμμετρα καὶ $\frac{ΓΕ}{ΑΖ} = \frac{ΕΔ}{ΖΒ}$, (1). Λέγω, ὅτι ἡ Η εἶναι ῥητή. Ἔστω ῥητὴ ἡ Θ καὶ ἂς γίνῃ $Θ^2 = ΚΛ \times ΓΔ$. Ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι ἀποτομή, (θ. 112). Ἔστω $ΚΛ = ΚΜ - ΜΛ$, ὁπότε ΚΜ, ΜΛ ῥηταὶ καὶ μόνον $ΚΜ^2$, $ΜΛ^2$ σύμμετρα, καὶ $\frac{ΓΕ}{ΚΜ} = \frac{ΕΔ}{ΜΛ}$, (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΚΜ}{ΜΛ}$, καὶ ἐκ ταύτης $\frac{ΑΖ}{ΚΜ} = \frac{ΖΒ}{ΜΛ}$, ἐξ ἧς $\frac{ΑΖ-ΖΒ}{ΚΜ-ΜΛ} = \frac{ΑΖ}{ΚΜ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΚΛ} = \frac{ΑΖ}{ΚΜ}$, (3).

Εἰς τὰς (1) καὶ (2) εἶναι ΓΕ, ΑΖ σύμμετρα καὶ ΓΕ, ΚΜ σύμμετρα. Εἶναι ἄρα ΑΖ, ΚΜ σύμμετρα· ἄρα εἰς τὴν (3) καὶ ΑΒ, ΚΛ σύμμετρα. Καὶ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΚΛ} = \frac{ΑΒ \times ΓΔ}{ΚΛ \times ΓΔ}$. Τὰ ὀρθογώνια ἄρα $ΑΒ \times ΓΔ$, $ΚΛ \times ΓΔ$ εἶναι σύμμετρα. Ἄρα καὶ τὰ ἴσα πρὸς ταῦτα ἀντιστοίχως τὰ $Η^2$, $Θ^2$ εἶναι σύμμετρα. Ἐπειδὴ ἡ Θ ἐλήφθη ῥητὴ εἶναι ἄρα καὶ $Θ^2$ ῥητόν, καὶ συνεπῶς καὶ $Η^2$ ῥητὸν καὶ ἄρα ἡ Η ῥητή.

[Ἡ δυώνυμος $ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ἡ δὲ ἀποτομὴ $ΑΒ = ΑΖ - ΖΒ$ τῆς μορφῆς $\varphi\,\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \varphi\,\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, ὁπότε $Η^2 = \rho^2\varphi\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$ καὶ $\varphi = \frac{Η^2}{\rho^2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma}\right)}$, $\left(\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \text{ἀκέραιοι}\right)$.

Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει εἰς τὴν πραγματικότητα ὅτι ἂν κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{Κ}{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}}$, ὁ παρονομαστὴς γίνεται ῥητὸς ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta}$].

115. Ἐὰν τὸ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρ καὶ τὸ ἄλλο $\rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, τὸ ὕψος $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$ λαμβάνεται πρὸς κατασκευὴν ἄλλου ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ρ. Ἐὰν γίνῃ τοιαύτη κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης πάντοτε τὸ ρ καὶ ἄλλο, τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, τὰ ὕψη θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}}$, $\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{16}}$ κλπ. Ταῦτα εἶναι ἄπειρα κατὰ τὸ πλῆθος ἄρρητα, καὶ δὲν ταὐτίζονται.

Ζησαπεπληρωμένης ε Αλ.ιφ

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΕΡΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Θεώρ. 10 καὶ λῆμμα τοῦ 18.

Δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (ἤτοι γραμμικῶς θεωρούμεναι ἀσύμμετροι, καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho, \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \rho\,\frac{\beta}{\alpha}, \ \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ρ τὸ μέτρον καὶ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι).

21. Μέσον ὀρθογώνιον λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. (Καὶ τὸ ἰσοδύναμον τετράγωνον εἶναι μέσον). Μέση, λέγεται, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογ. τοῦτο τετραγώνου ἢ μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

27. Δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι (μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, τὸ γινόμενον αὐτῶν ῥητὸν) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad (\gamma,\ \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}).$$

28. Δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι (μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν σύμμετρα, τὸ γινόμενον αὐτῶν μέσον) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}, \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}).$$

Λῆμμα 1.

Τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός.

$$\kappa.\ \xi.\ \sigma.\ \tau + \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2$$

ἔνθα $\kappa,, \xi, \sigma, \tau$ ἀκέραιοι καὶ $\kappa : \xi = \sigma : \tau$, καὶ μ ($=\kappa\xi$), ν ($=\sigma\tau$) ἄρτιοι ἢ περιττοί. (ὁ $\kappa\xi\sigma\tau$ εἶναι τετράγωνος IX, 1).

Ἐὰν δὲν εἶναι $\kappa : \xi = \sigma : \tau$, τότε ἡ διαφορὰ δύο τετραγώνων ἀριθμῶν δὲν εἶναι τετράγωνος

$$\text{ἤτοι} \quad \left(\frac{\kappa\xi + \sigma\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2}\right)^2 = \kappa\xi\sigma\tau \text{ μὴ τετράγωνος.}$$

(Πρὸς ἁπλούστευσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀντὶ τούτου τὸν τύπον $\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος).

Λῆμμα 2.

Τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος.

$\varkappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\varkappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$, ($\varkappa : \xi = \sigma : \tau$ καὶ μ $(= \varkappa\xi)$, ν $(= \sigma\tau)$ ἄρτιοι ἢ περιττοί).

(Πρὸς ἁπλούστευσιν χρησιμοποιοῦμεν ἀντὶ τούτου τὸν τύπον $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$).

29. Δύο ῥηταὶ $AB \rangle AZ$ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ AB, $\sqrt{AB^2 - AZ^2}$ μήκει σύμμετροι, εἶναι τῆς μορφῆς $AB^2 = \rho$, $AZ = \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$, $(\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος).

30. Δύο ῥηταὶ $AB \rangle AZ$ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ AB, $\sqrt{AB^2 - AZ^2}$ μήκει ἀσύμμετροι, εἶναι τῆς μορφῆς $AB = \rho$, $AZ = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος).

31. 1. Δύο μέσαι $\Gamma \rangle \Delta$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Gamma \times \Delta$ ῥητὸν καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Gamma = \frac{\rho\vartheta^{\frac{1}{4}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}, \quad \Delta = \frac{\rho\vartheta^{\frac{3}{4}}}{\varphi^{\frac{3}{2}}}, \ (\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta \text{ μὴ τετράγωνος}).$$

31. 2. Δύο μέσαι $\Gamma \rangle \Delta$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Gamma \times \Delta$ ῥητὸν καὶ Γ, $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Gamma = \frac{\rho\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}, \quad \Delta = \frac{\rho\alpha^{\frac{3}{2}}}{\lambda^{\frac{3}{4}}}, \ (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda \text{ μὴ τετράγωνος}).$$

32. 1. Δύο μέσαι $\Delta \rangle E$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Delta \times E$ μέσον καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ μήκει σύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Delta = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad E = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}, \ (\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta, \gamma, \delta, \text{ μὴ τετράγωνοι}).$$

32. 2. Δύο μέσαι $\Delta \rangle E$ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε $\Delta \times E$ μέσον καὶ Δ, $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ μήκει ἀσύμμετροι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Delta = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad E = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \ (\alpha^2 + \beta^2 = \lambda, \gamma, \delta, \text{ μὴ τετράγωνοι}).$$

33. Δύο εὐθεῖαι AZ, ZB δυνάμει ἀσύμμετροι (AZ^2, ZB^2 ἀσύμμετρα), ὥστε $AZ^2 + ZB^2$ ῥητὸν καὶ $AZ \times ZB$ μέσον εἶναι τῆς μορφῆς

$\mathrm{AZ} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $\mathrm{ZB} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος$)$.

34. Δύο εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι, ὥστε $\mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2$ μέσον καὶ $\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B}$ ῥητὸν εἶναι τῆς μορφῆς

$\mathrm{A\Delta} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $\mathrm{\Delta B} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος$)$.

35. Δύο εὐθεῖαι ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι, ὥστε $\mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2$ μέσον $\mathrm{A\Delta} \times \mathrm{\Delta B}$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $\mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta B}^2$ εἶναι τῆς μορφῆς.

$\mathrm{A\Delta} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $\mathrm{B\Delta} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ μὴ τετράγωνοι$)$.

Αἱ 12 (κύριαι) ἄλογοι (ἐκτὸς τῆς μέσης). Τὰ ἀθροίσματα $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ εἶναι τῶν θ. 36–41 καὶ αἱ διαφοραὶ Α—Β τῶν θ. 73–78. Καλοῦμεν τὸ μεγαλύτερον μονώνυμον Α καὶ τὸ μικρότερον Β.

1. Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), 36
Ἀποτομή, 73
$\rho \pm \rho \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, $\left(\text{ἢ } \rho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right)$.

Α, Β ῥητὰ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, α, β, γ, δ, ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Τὰ μονώνυμα ἐκ τοῦ θ. 10 καὶ λήμματος τοῦ 18.

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη, 37
Πρώτη ἀποτομὴ μέσης, 74
$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Α, Β μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ῥητόν, $\gamma > \delta$ ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα, 38
Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, 75
$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \frac{\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$.

Α, Β μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ μέσον, $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma}$, α, β, γ, δ, ἀκέραιοι μὴ τετράγωνοι. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

4. Μείζων, 39
Ἐλάσσων, 76
$\frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$, $(\alpha^2 + \beta^2 =$ μὴ τετράγ.$)$.

A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$ ῥητόν, $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ μέσον. Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33 καὶ τοῦτο ἐκ τοῦ θ. 30.

5. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, 40
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 77

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\rho}{\sqrt{\ }}\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}.$$

($\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγ.), A^2, B^2 ἀσύμμετρα, A^2+B^2 μέσον, $A\times B$ ῥητόν.
Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34 καὶ τοῦτο ἐκ 31.2.

6. Δύο μέσα δυναμένη, 41
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 79

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ }{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{\ }{\sqrt{\lambda}}}.$$

A^2, B^2 ἀσύμμετρα, A^2+B^2 μέσον, $A\times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς A^2+B^2.
($\alpha^2+\beta^2=\lambda, \gamma, \delta,$ μὴ τετράγ.). Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35 καὶ τοῦτο ἐκ 32.2.

Σημείωσις: Αἱ ἀνωτέρω ἄλογοι εἶναι αἱ θετικαὶ ῥίζαι τῶν κάτωθι διτετραγώνων ἐξισώσεων ἀντιστοίχως,

1. 36, 73. $\chi^4-2\rho^2\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)\chi^2+\rho^4\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2=0.$

2. 37, 74. $\chi^4-2\rho^2\sqrt{\frac{\ }{\gamma}}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)\chi^2+\rho^4\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2=0.$

3. 38, 75. $\chi^4-2\rho^2\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\chi^2+\rho^4\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2=0.$

4. 39, 76. $\chi^4-2\rho^2\chi^2+\rho^4\frac{\beta^2}{\lambda}=0.$

5. 40, 77. $\chi^4-2\rho^2\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\chi^2+\frac{\rho^4\alpha^2\beta^2}{\lambda^2}=0.$

6. 41, 78. $\chi^4-2\rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\chi^2+\rho^4\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{\beta^2}{\lambda}=0.$

[Σημ.: Εἰς τὰς 4, 5, 6 ἡ ἐπαλήθευσις διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ, (θ. 57, 94),

$$\rho\sqrt{1\pm\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\pm\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$$

($\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος)].

Ἡ γενικὴ ἰδιότης τῆς δυωνύμου (ἀθροίσματος) καὶ τῆς ἀποτομῆς (διαφορᾶς) εἶναι, ἂν παραστήσωμεν ταύτας $A\pm B$, (θ. 36 καὶ 73), ὅτι A, B ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα.

Διακρίνονται 6 εἴδη δυωνύμων καὶ 6 εἴδη ἀποτομῶν (δευτερεύουσαι ἄλογοι), (ληφθείσης ῥητῆς τινος ρ).

I. Α, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει σύμμετροι.

1. Πρώτη δυώνυμος, 48
Πρώτη ἀποτομή, 85 $\quad \rho\frac{\delta}{\gamma} \pm \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}.$
Α, ρ μήκει σύμμετροι, (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
($\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, γ, δ, μὴ τετράγωνοι).

2. Δευτέρα δυώνυμος, 49
Δευτέρα ἀποτομή, 86 $\quad \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm \rho\frac{\delta}{\gamma}$
Β, ρ μήκει σύμμετροι, (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
($\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, γ, δ, μὴ τετράγωνοι).

3. Τρίτη δυώνυμος, 50
Τρίτη ἀποτομή, 87 $\quad \rho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \pm \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$
Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
($\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, ε μὴ τετράγωνοι).

II. Α, $\sqrt{A^2-B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι.

4. Τετάρτη δυώνυμος, 51
Τετάρτη ἀποτομή, 88 $\quad \rho\frac{\delta}{\gamma} \pm \frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$
Α, ρ μήκει σύμμετροι (Β, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, μὴ τετράγωνοι).

5. Πέμπτη δυώνυμος, 52
Πέμπτη ἀποτομή, 89 $\quad \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \frac{\delta}{\gamma}.$
Β, ρ μήκει σύμμετροι (Α, ρ μήκει ἀσύμμετροι)
($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, μὴ τετράγωνοι).

6. Ἕκτη δυώνυμος, 53
Ἕκτη ἀποτομή, 90 $\quad \rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}.$
Οὔτε Α οὔτε Β μήκει σύμμετρος πρὸς ρ,
($\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, ε μὴ τετράγωνοι).

Σημ. Τὰ ἀνωτέρω ἓξ ζεύγη δυωνύμων καὶ ἀποτομῶν εἶναι ῥίζαι ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων. Κατὰ τοὺς δευτέρους καὶ τρίτους ὁρισμοὺς τὸ μὲν μεγαλύτερον μονώνυμον ἑκάστης δυωνύμου καὶ ἀποτομῆς (τῶν προηγουμένων 1-6) παριστᾷ ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ δὲ μικρότερον μίαν κάθετον πλευρὰν τούτου.

1.	$\chi^2 - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{\varphi^2} = 0,$	$(\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta)$	48 85
2.	$\chi^2 - 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{\vartheta} = 0.$	»	49 86
3.	$\chi^2 - \frac{2\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \chi + \frac{\rho^2\omega^2}{\varepsilon} = 0,$	»	50 87
4.	$\chi^2 - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \frac{\beta^2}{\lambda} = 0,$	$(\alpha^2 + \beta^2 = \lambda)$	51 88
5.	$\chi^2 - 2\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}\chi + \rho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 0,$	»	52 89
6.	$\chi^2 - 2\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \cdot \chi + \frac{\rho^2\beta^2}{\varepsilon} = 0,$	»	53 90

Umformung

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ῬΙΖΙΚΩΝ

Grundform

	Δίδονται τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους			Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ὕψος εἶναι τῆς μορφῆς	
	α' τμ.	β' τμῆμα	ἑπομένως τὸ ὕψος		
1	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma} \pm \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη δυώνυμος, 48 πρώτη ἀποτομή, 85	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 \pm \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$= \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)} \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, ἡ 54 εἶναι δυώνυμος, 36 ἡ 91 εἶναι ἀποτομή, 73	54 91
2	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm \rho\frac{\delta}{\gamma}$ ευτέρα δυώνυμος, 49 δευτέρα ἀποτομή, 86	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm 1\right)}$	$= \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)} \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$, ἡ 55 εἶναι ἐκ δύο μέσων πρώτη, 37 ἡ 92 πρώτη ἀποτομὴ μέσης, 74	55 92
3	ρ	$\frac{\rho\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \pm \frac{\rho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη δυώνυμος, 50 τρίτη ἀποτομή, 87	$\rho\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\varphi \pm \sqrt{\vartheta})}$	$= \rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\varphi+\omega)} \pm \rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\varphi-\omega)}$, ἡ 56 εἶναι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, 38 ἡ 93 εἶναι δευτέρα ἀποτομὴ μέσης, 75	56 93
4	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma} \pm \rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη δυώνυμος, 51 τετάρτη ἀποτομή, 88	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$= \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, ἡ 57 εἶναι μείζων, 39 ἡ 94 εἶναι ἐλάσσων, 76	57 94
5	ρ	$\rho\frac{\delta}{\gamma}\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \rho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη δυώνυμος, 52 πέμπτη ἀποτομή, 89	$\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm 1\right)}$	$= \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} \pm \rho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, ἡ 58 εἶναι ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, 40 ἡ 95 εἶναι ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 77	58 95
6	ρ	$\rho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \rho\frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη δυώνυμος, 53 ἕκτη ἀποτομή, 90	$\rho\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\lambda} \pm \alpha)}$	$= \rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\lambda}+\beta)} \pm \rho\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\lambda}-\beta)}$, ἡ 59 εἶναι δύο μέσα δυναμένη, 41 ἡ 96 εἶναι ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, 78	59 96

[Σημ. $\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, ε, γ, δ, μὴ τετράγωνοι. Οἱ ϑ καὶ λ ἐκ τῶν λημμάτων 1 καὶ 2 τοῦ θ. 28 ἀντιστοίχως. Ἴδε ἐπεξηγήσεις].

[Ἀντίστροφα προηγουμένων]

	Δίδονται Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας	Ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης	Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι τῆς μορφῆς	
1	$\rho\left[1 \pm \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right]$ ἐκ θεωρ. 36, 73.	ρ	$\rho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) \pm 2\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἡ 60 τῆς μορφῆς τοῦ 48, δηλ. πρώτη διώνυμος. ἡ 97 τῆς μορφῆς τοῦ 85, δηλ. πρώτη ἀποτομή.	60 97
2	$\rho\left[\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}\right]$ ἐκ θεωρ. 37, 74.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{}{\gamma}\right] \pm 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)$ ἡ 61 τῆς μ. τοῦ 49, δηλ. δευτέρα διώνυμος. ἡ 98 τῆς μ. τοῦ 86, δηλ. δευτέρα ἀποτομή.	61 98
3	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \frac{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 38, 75.	ρ	$\rho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \pm 2\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$ ἡ 62 τῆς μ. τοῦ 50, δηλ. τρίτη διώνυμος. ἡ 99 τῆς μ. τοῦ 87, δηλ. τρίτη ἀποτομή.	62 99
4	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 39, 76.	ρ	$\rho \pm \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ ἡ 63 τῆς μ. τοῦ 51, δηλ. τετάρτη διώνυμος. ἡ 100 τῆς μ. τοῦ 88, δηλ. τετάρτη ἀποτομή.	63 100
5	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\left[\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 40, 77.	ρ	$\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}} \pm \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$ ἡ 64 τῆς μ. τοῦ 52, δηλ. πέμπτη διώνυμος. ἡ 101 τῆς μ. τοῦ 89, δηλ. πέμπτη ἀποτομή.	64 101
6	$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}\right]$ ἐκ θεωρ. 41, 78.	ρ	$\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ ἡ 65 τῆς μ. τοῦ 53, δηλ. ἕκτη διώνυμος. ἡ 102 τῆς μ. τοῦ 90, δηλ ἕκτη ἀποτομή.	65 102

(Σημ. Εἰς τὰς 1, 2, 3, εἶναι α, β, γ, δ, μὴ τετράγωνοι. Εἰς τὰς 4, 5, 6 εἶναι γ, δ, $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνοι. Ὁ λ ἐκ τοῦ 2ου λήμ. τοῦ θ. 28).

Τὰ 12 θεωρήματα τῶν μετασχηματισμῶν ῥιζικῶν καὶ τὰ προηγούμενα 12, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίστροφα τούτων τὰ παριστῶμεν ἐπὶ τὸ ἐποπτικώτερον καὶ ὡς ἑξῆς·

	Δίδονται τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους		Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
	α' τμῆμα ῥητή	β' τμῆμα ἄλογος	
54	ρ	πρώτη δυώνυμος τοῦ θ. 48	τῆς δυωνύμου τοῦ θ. 36
55	ρ	δευτέρα δυώνυμος » 49	» ἐκ δύο μέσων πρώτης » 37
56	ρ	τρίτη δυώνυμος » 50	» ἐκ δύο μέσων δευτέρας » 38
57	ρ	τετάρτη δυώνυμος » 51	» μείζονος » 39
58	ρ	πέμπτη δυώνυμος » 52	» ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης » 40
59	ρ	ἕκτη δυώνυμος » 53	» δύο μέσα δυναμένης » 41

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

	Δίδονται		Ἀποδεικνύεται
	Ἓν τμῆμα ὑποτειν. ὀρθ. τριγ. τεμνομ. ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή	Τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἄλογος	Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
60	ρ	δυώνυμος τοῦ θ. 36	τῆς πρώτης δυωνύμου τοῦ θ. 48
61	ρ	ἐκ δύο μέσων πρώτη » 37	» δευτέρας δυωνύμου » 49
62	ρ	ἐκ δύο μέσων δευτέρα » 38	» τρίτης δυωνύμου » 50
63	ρ	μείζων » 39	» τετάρτης δυωνύμου » 51
64	ρ	ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη » 40	» πέμπτης δυωνύμου » 52
65	ρ	δύο μέσα δυναμένη » 41	» ἕκτης δυωνύμου » 53

	Δίδονται τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους		Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
	α΄ τμῆμα ῥητή	β΄ τμῆμα, ἄλογος	
91	ρ	πρώτη ἀποτομὴ τοῦ θ. 85	τῆς ἀποτομῆς τοῦ θ. 73
92	ρ	δευτέρα ἀποτομὴ » 86	» πρώτης ἀποτομῆς μέσης » 74
93	ρ	τρίτη ἀποτομὴ » 87	» δευτέρας ἀποτομῆς μέσης » 75
94	ρ	τετάρτη ἀποτομὴ » 88	» ἐλάσσονος » 76
95	ρ	πέμπτη ἀποτομὴ » 89	» μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης » 77
96	ρ	ἕκτη ἀποτομὴ » 90	» μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης » 78

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

	Δίδονται		Ἀποδεικνύεται
	Ἓν τμῆμα ὑποτειν. ὀρθογ. τριγ. τεμνομ. ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή	Τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἄλογος	Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
97	ρ	ἀποτομὴ τοῦ θ. 73	τῆς πρώτης ἀποτομῆς τοῦ θ. 85
98	ρ	πρώτη ἀποτομὴ μέσης » 74	» δευτέρας ἀποτομῆς » 86
99	ρ	δευτέρα ἀποτομὴ μέσης » 75	» τρίτης ἀποτομῆς » 87
100	ρ	ἐλάσσων » 76	» τετάρτης ἀποτομῆς » 88
101	ρ	μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα » 77	» πέμπτης ἀποτομῆς » 89
102	ρ	μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα » 78	» ἕκτης ἀποτομῆς » 90

'Επὶ τῶν θεωρημάτων 71, 72 καὶ 108, 109, 110.

Δίδονται τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

71. 1. $\alpha \times \beta$ ῥητὸν καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.

Ἡ $\sqrt{\alpha \times \beta + \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A + B$, ἔνθα

ἢ 1) A, B ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, (τοῦ θ. 36), δυώνυμος,

ἢ 2) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα καὶ $A \times B$ ῥητόν, (37), ἐκ δύο μέσων πρώτη,

ἢ 3) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ ῥητὸν καὶ $A \times B$ μέσον, (38), μείζων,

ἢ 4) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν, (40), ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

72. 2. $\alpha \times \beta$ μέσον καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.

Ἡ $\sqrt{\alpha \times \beta + \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A + B$, ἔνθα

ἢ 5) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, $A \times B$ μέσον, (38), ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

ἢ 6) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$, (41), δύο μέσα δυναμένη.

108. 1. $\alpha \times \beta$ ῥητὸν καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.

Ἡ $\sqrt{\alpha \times \beta - \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A - B$, ἔνθα

ἢ 1) A, B ῥηταὶ καὶ μόνον A^2, B^2 σύμμετρα, (τοῦ θ. 73), ἀποτομή,

ἢ 2) $A^2 + B^2$ ῥητόν, $A \times B$ μέσον, (76), ἐλάσσων.

109. 2. $\alpha \times \beta$ μέσον καὶ $\gamma \times \delta$ ῥητόν.

Ἡ $\sqrt{\alpha \times \beta - \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A - B$, ἔνθα

ἢ 3) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα $A \times B$ ῥητόν, (τοῦ θ. 74), πρώτη ἀποτομὴ μέσης.

ἢ 4) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον καὶ $A \times B$ ῥητόν, (77), μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

110. 3. $\alpha \times \beta$ μέσον καὶ $\gamma \times \delta$ μέσον.

Ἡ $\sqrt{\alpha \times \beta - \gamma \times \delta}$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $A - B$, ἔνθα

ἢ 5) A, B μέσαι, μόνον A^2, B^2 σύμμετρα $A \times B$ μέσον, (75), δευτέρα ἀποτομὴ μέσης.

ἢ 6) A^2, B^2 ἀσύμμετρα, $A^2 + B^2$ μέσον, $A \times B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς $A^2 + B^2$, (78), μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Σ η μ. 1. Ὁ Woepke, ὅστις ἀνεῦρε τὸ σχόλιον εἰς τὸ X βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοῦ Ἄραβος Aboû Othman ἐγεννήθη τὸ 1826 ἐν Dessau τῆς Γερμανίας καὶ ἐσπούδασεν ἐν Βερολίνῳ. Ἔζησε κατὰ τὸ πλεῖστον ἐν Παρισίοις ἀποθανὼν αὐτόθι τῷ 1864. Τὰς βιογραφικὰς πληροφορίας ἔλαβον παρὰ τοῦ φίλου καθηγητοῦ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τοῦ Μονάχου κ. Kurt Vogel.

Σ η μ. 2. Ἐπὶ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐγένετο ἀνακοίνωσις ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 17 Ἰανουαρίου 1957 διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς	22	Ἀντὶ ΣΤΟΙΣΕΙΩΝ γράφε ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
»	36	» ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ γράφε ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
»	40	» » » »
»	41	» » » »
»	49	δέκατος στίχος προτάσεως θεωρ. 18, ἀντὶ ἀσσύμετρος γράφε ἀσύμμετρος.
»	77	πρῶτος στίχος προτάσεως θεωρ. 36 ἀντὶ ἀσύμμετροι γράφε σύμμετροι.
»	245	θ. 10.1 ἀντὶ εὑρίσμομεν γράφε εὑρίσκομεν
»	256	Εἰς τὸν πέμπτον στίχον ἀντὶ $\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right) > \left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2$ γράφε $\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2 > \left(\frac{\mu-\nu}{2}-2\right)^2$
»	257	στίχος 8 ἀντὶ $\frac{\kappa-\sigma\tau}{2}$ γράφε $\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2}$.
»	258	ἀρχὴ τρίτου στίχου θεωρ. 32,1 ἀντὶ Δ γράφε Δ^2.
»	283	πρῶτος στίχος ἀντὶ + γράφε —.
»	297	τρίτος στίχος ἐκ τῶν κάτω, ἀντὶ $\frac{}{\gamma}$ γράφε $\frac{\delta}{\gamma}$.
»	302	εἰς τὰς περιπτώσεις 2,4 καὶ 5 ἀντὶ $\frac{}{2\gamma}$ γράφε $\frac{\delta}{2\gamma}$.

ʼΑναγράφομεν κατωτέρω τὰς χώρας ἐκ τῶν ὁποίων κατάγονται οἱ φίλοι τῶν ʽΕλληνικῶν μαθηματικῶν πρὸς τοὺς ὁποίους ἐγένετο ἡ ἀφιέρωσις τοῦ βιβλίου (κατὰ τὴν σειρὰν τῶν ὀνομάτων).

ʽΕλλάς, Γερμανία, ʽΗνωμέναι Πολιτεῖαι ʼΑμερικῆς, Γαλλία, ʽΕλλάς, ʽΗνωμέναι Πολιτεῖαι ʼΑμερικῆς, Νοτιοσλαυΐα, ʽΟλλανδία, ʽΗνωμέναι Πολιτεῖαι ʼΑμερικῆς, Γερμανία, ʽΕλβετία, Γερμανία, Γερμανία, ʽΡωσσία, Γαλλία, ʽΡωσσία, ʼΙταλία, Γαλλία, Γαλλία, Γερμανία, Γερμανία, Γαλλία, Γερμανία, Οὐγγαρία, ʽΕλλάς, Γερμανία, Γερμανία, ʽΟλλανδία.

Deutschland 9
Frankreich 5
Griechenland 3
USA 3
Niederlande 2
Rußland 2
Italien 1
Jugoslavien 1
Schweiz 1
Ungarn 1
28

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

I. L. Heiberg et H. Menge, Euclidis opera omnia.

G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842.

Pauly-Wissowa, Real-Enz. unter Eukleides, Theodoros.

G. Friedlein, Procli Diadochi in Primum Euclidis elem. Teubner, 1873.

P. Tannery, Mémoires scientifiques I. II. III Toulouse, Paris.

H. G. Zeuthen, Geschichte d. Mathematik im Altertum u. Mittelalter, Kopenhagen, 1896.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I.

T. Heath, A history of Greek mathematics I. II, Oxford, 1921.

T. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements, Cambridge, 1926.

Cl. Thaer, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, No 241.

Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclide, éd. Les Belles Lettres, Paris 1950.

B. L. van der Waerden, Die Arithmetik der Pythagoreer II. Die Theorie des Irrationalen. Math. Annalen B. 120, Heft 5)6, 1949, Springer V.

B. L. van der Waerden, Zenon und die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Math. Annalen B. 117, Heft 1, 1939.

E. Sachs, Die fünf Platonischen Körper, Berlin, 1917.

H. Hasse-H. Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik Berlin-Charl. 1928. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Φίλ. Βασιλείου—Χρ. Καπνουκάγια.

J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik I, Walter de Gruyter und Co, B. 226, Berlin, 1953.

K. Reidemeister, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig-Berlin, 1940.

K. Reidemeister, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949.

G. Loria, Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique, Paris 1929.

F. Enriques-G. Santillana, Storia del pensiero scientifico, Bologna 1932.

W. A. Heidel, The heroic age of science, Baltimore 1933.

M. R. Cohen-J.E. Drabkin, A source book in greek science, Mc Graw-Hill book com., inc. New York, Toronto, London, 1948.

A. Rehm-K. Vogel, Einleitung in die Altertumswissenschaft II, 5; Exakte Naturwissenschaften, Leipzig-Berlin, 1933.

E. J. Dijksterhuis, De Elementen von Euclidis, Groningen, 1929.

Robert S. Brumbaugh, Plato's Mathematical Imagination, Indiana, University Press, Bloomington, 1954.

M. Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin 1909.

G. Hauser, Geometrie und Philosophie, 2 Aufl. Räber und Cie Luzern, 1946.,

G. Hauser, Über die Entstehung der Geometrie, Schweizer Schule, 34 Jahrg. Nr. 23.

G. Hauser, Über eine neue Auffassung der Bedeutung Platos fur die Entwicklung der Mathematik, Schweizer Schule, 39 Jahrg., Nr. 3.
G. Hauser, Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid, Verl. Eugen Haag Luzern, 1955.
J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, 4. Band Ebene Geometrie, 7. B. Stereometrie, Walter de Gruyter und Co, Berlin, 1924.
E. Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, Halle, 1923.
Ch. Mugler, Platon et la recherche mathematique de son époque. Ed. P.H. Heitz, Strassburg-Zürich, 1948.
M. Pihl, Die Theodoros-Stelle in Platons Theaetetos und die Frühgeschichte der Irrationalen Zahlen, Kopenhagen, 1949.

Ἡ σύγχρονος ἑλληνικὴ μαθηματικὴ βιβλιογραφία*.

Ἀνάργ. Ἀκύλας, Περὶ τῶν κανονικῶν κυρτῶν πολυέδρων.
Ἰ. Ἀναστασιάδης, Μαθήματα Διαφορικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ.
Κων. Γ. Ἀραχωβίτης, Ἀσκήσεις καὶ θεωρία ἀλγέβρας, τόμ. Ι.
Ἰ. Ἀρβανίτης, Στοιχεῖα παραστατικῆς γεωμετρίας, 1926.
Ἰωάν. Αὐδῆς, Στοιχειώδης Ἄλγεβρα Ι.
Ἰωάν. Αὐδῆς, Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ Ι.
Θ. Βαρόπουλος, Γενικὰ μαθηματικά, Ἀθῆναι 1949.
Θ. Βαρόπουλος, Ἀνωτέρα μαθηματικὴ ἀνάλυσις, Τόμ. Ι, Ἀθῆναι, 1949.
Θ. Βαρόπουλος, Θεωρία τῶν ἀριθμῶν.
Φίλ. Βασιλείου, Μαθήματα ἀνωτέρων μαθηματικῶν, Τόμ. Ι. Ἀθῆναι, 1953.
Φίλ. Βασιλείου, Περὶ τῆς συγχρόνου ἀξιωματικῆς μεθόδου, 1936.
Φίλ. Βασιλείου, Ἡ ἑδραίωσις τῶν μαθηματικῶν καὶ ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος, 1936.
Φίλ. Βασιλείου, Ἡ ἄλγεβρα καὶ αἱ νεώτεραι αὐτῆς μέθοδοι, 1938.
Π. Βιδωρῆς, Θεωρία διαφορικῶν ἐξισώσεων, 1939.
Ν. Β. Γεννηματᾶς, Ἀναλυτικὴ γεωμετρία.
Ν. Β. Γεννηματᾶς, Διανυσματικὴ ἀνάλυσις, Ἀθῆναι, 1930.
Μιλτ. Γερμανός, Ἀνωτέρα Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι.
Κων. Χ. Γεωργικόπουλος, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν θεωρητικὴν μηχανικήν, Ἀθῆναι 1943.
Κων. Δ. Γεωργούλης, Ἡ ἑλληνικὴ ἐπιστήμη, Ἐγκυκλοπ. Λεξικὸν Ἥλιος, Τόμος Ἑλλάς.
Π. Γιακουμέλλος, Σημειώσεις μαθηματικῆς ἀναλύσεως, Ἀθῆναι, 1937.
Ἀλ. Γκίκας, Φιλοσοφικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀρχῆς τοῦ ἀπειροστοῦ, Νεάπολις 1952 (γαλλιστί).
Δ. Γκιόκας, Ἀσκήσεις γεωμετρίας (μετάφρασις ἔργου F.G.M.) Ἀθῆναι 1952.
Δ. Γ. Δασκαλόπουλος, Ἀνώτερα μαθηματικά, τόμ. Α,Β,Γ.
Δ. Γ. Δασκαλόπουλος, Γενικὰ μαθηματικά.
Π. Σ. Ζερβός, Ἀπειροστικὸς Λογισμός, Ἀθῆναι, 1953.
Π. Σ. Ζερβός, Ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ Monge.
Π. Σ. Ζερβός, Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους, Ἀθῆναι, 1917.
Π. Σ. Ζερβός, Σχέσεις τῶν μαθηματικῶν μὲ τὰς λοιπὰς ἐπιστήμας καὶ τὴν φιλοσοφίαν, Ἀθῆναι, 1919.

---

* Ὅση εἶναι εἰς ἡμᾶς γνωστή.

Σπυρ. Κανέλλος, Πιθανοθεωρία, μέρος I, Ἀθῆναι.

Σπυρ. Κανέλλος, Πιθανοθεωρία, μέρος II.

Σπυρ. Κανέλλος, Θεωρία τοῦ μέτρου τῶν Συνόλων, Ἀθῆναι.

Σπυρ. Κανέλλος. Μαθήματα ἀλγέβρας, τόμ. Α, Β'.

Δημ. Κάππος, Μαθήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων, Α'. μέρος Ἀθῆναι 1956.

Δημ. Κάππος, Μαθήματα ἀναλύσεως (Εἰσαγωγή, θεωρία συνόλων, θεμελίωσις πραγματικῶν ἀριθμῶν, στοιχεῖα τοπολογίας (ἐκτυποῦται).

Δημ. Κάππος, Ἀπειροστικὸς Λογισμός (ἐκτυποῦται).

Δημ. Κάππος, θεωρία τοῦ μέτρου καὶ τῆς πιθανότητος (γερμανιστί, ἐκτυποῦται).

Κων. Σ. Καραθεοδωρῆ, Πραγματικαὶ συναρτήσεις (γερμανιστί).

Κων. Σ. Καραθεοδωρῆ, Λογισμὸς μεταβολῶν καὶ διαφορικαὶ ἐξισώσεις (γερμανιστί).

Κων. Σ. Καραθεοδωρῆ, Θεωρία συναρτήσεων (γερμανιστί).

Θ. Καρρᾶς, Λογισμός, Ἀθῆναι 1953.

Τρ. Γ. Κεραμιδᾶς, Στοιχεῖα ἀσφαλιστικῶν μαθηματικῶν, Ἀθῆναι, 1947.

Χρ. Κεφάλας, Πρακτικὴ παραστατικὴ γεωμετρία, Ἀθῆναι.

Δ.Σ. Κονιδάρης, Διαφορικαὶ ἐξισώσεις μετὰ μερικῶν παραγώγων, Ἀθῆναι, 1949.

Ἠ. Λ. Κοντογεωργόπουλος, Προβλήματα ἀριθμητικῆς, Ἀθῆναι.

Κων. Α. Κοντογιάννης, Τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως καὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τὸ δήλιον καὶ τὸ τῆς τριχοτομήσεως τῶν γωνιῶν, Μυτιλήνη, 1955.

Κων. Α. Κοντογιάννης, Τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως καὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου κλπ. μέρος II, Μυτιλήνη, 1956.

Δ. Κούκης, Ἄλγεβρα, τόμ. Α'. Ἀθῆναι.

Νικ. Κριτικὸς, Στοιχεῖα ἀνωτέρων μαθηματικῶν, τόμ. I, Ἀθῆναι, 1953.

Νικ. Κριτικός, Στοιχεῖα μαθηματικῆς ἀναλύσεως, μέρ. Α'.

Νικ. Κριτικός, Εἰσαγωγικὸν κεφάλαιον εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά. Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, Ἀθῆναι, 1939.

Νικ. Κυράνης, Διαφορικὸς Λογισμός, Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμός.

Νικ. Κυράνης, Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία, Ἀθῆναι.

Νικ. Κυράνης, Ἀνωτέρα Ἄλγεβρα.

Μιχ. Κ. Κωβαῖος, Περὶ ἀντιστροφῆς καὶ ἀναστροφῆς τῶν ὑποθετικῶν σωρειτῶν Ἀθῆναι 1955.

Μιχ. Κ. Κωβαῖος Ἐγχειρίδιον Νομογραφίας, Ἀθῆναι, 1956.

Δημ. Δ. Κωτσάκης, Θεωρία τῶν σφαλμάτων καὶ μέθοδος ἐλαχίστων τετραγώνων, Ἀθῆναι, 1953.

Π. Δ. Λαδόπουλος. Ἐπὶ τῆς μετρήσεως τῶν κωνικῶν (γαλλιστί), Ἀθῆναι, 1953.

Κ. Ν. Λαμπίρης, Στοιχεῖα οἰκονομικῶν μαθηματικῶν.

Κων. Λαμπρινόπουλος, Ἄλγεβρα.

Κων. Λαμπρινόπουλος, Γεωμετρία.

Κων. Λαμπρινόπουλος, Τριγωνομετρία.

Γερ. Λεγᾶτος, Μαθήματα Γενικῶν Μαθηματικῶν.

Γερ. Λεγᾶτος, Τὸ σύμβολον τοῦ ἀπολύτου εἰς τὴν τριγωνομετρικὴν ἔκφρασιν.

Γερ. Λεγᾶτος, Ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, 1950.

Διον. Λιβέρης, Ἄλγεβρα.

Διον. Λιβέρης, Γεωμετρία.

Διον. Λιβέρης, Τριγωνομετρία.

Π. Ν. Μάγειρας, I Σειρὰ ἀλγεβρικῶν θεμάτων Ἀθῆναι.

Π. Ν. Μάγειρας, II Σειρὰ ἀλγεβρικῶν θεμάτων, Ἀθῆναι 1952.

Π. Ν. Μαγειρας, Τριγωνομετρικὰ θέματα, Σειρὰ Ι.
Κάρ. Μέρλιν, Ἁπλουστευμένος διαφορικός—ὁλοκληρ. λογισμός, Ἀθῆναι, 1954.
Νικ. Γ. Μιχαλόπουλος, Τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς ἴσα μέρη. Ἔκδ. Σωτ. Δ. Σπυροπούλου. Ἀθῆναι, 1950.
Νικ. Γ. Μιχαλόπουλος, Συμβολὴ εἰς τὴν μεθοδικὴν τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν, Ἀθῆναι, 1950.
Νικ. Γ. Μιχαλόπουλος, Μαθηματικὰ θέματα τόμοι Α-Β Ἀθῆναι 1956.
Γ. Μουτόπουδος, Μεγάλαι γεωμ. κατασκευαὶ καὶ γεωμ. τόποι, Ἀθῆναι, 1937.
Γ. Π. Μπακοῦρος, Θεωρία ἐπὶ τῶν λογαρίθμων, Ἀθῆναι, 1955.
Α. Χ. Μπαρμπαστάθης, Στοιχεῖα ἀλγέβρας, Ἀθῆναι, 1946.
Α. Χ. Μπαρμπαστάθης, Μεγάλη ἐπίπεδος τριγωνομετρία, Ἀθῆναι, 1950.
Α.Χ. Μπαρμπαστάθης, Μεγάλη ἐπίπεδος γεωμετρία, Ἀθῆναι, 1955.
Ν. Χ. Μπιναρδόπουλος, προβλήματα ἀριθμητικῆς, Ἀθῆναι, 1954.
Μαυρ. Μπρίκας, Γενικὰ Μαθηματικά.
Μαυρ. Μπρίκας, Λογισμὸς Πιθανοτήτων.
Μαυρ. Μπρίκας, Στατιστική.
Λ. Νάτσης, Ἀσκήσεις καὶ θεωρία πρακτικῆς καὶ θεωρητικῆς ἀριθμητικῆς.
Ν. Δ. Νικολάου, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι.
Ν. Δ. Νικολάου, Μεγάλη Στοιχειώδης Ἄλγεβρα, 1946.
Ν. Δ. Νικολάου, Μεγάλη Στοιχειώδης Γεωμετρία, Ἀθῆναι.
Ν. Δ. Νικολάου, Μεγάλη Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία, 1948.
Ν. Δ. Νικολάου, Στοιχεῖα Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, 1948.
Ἰωαν. Ξανθάκης, Μαθήματα Γενικῶν Μαθηματικῶν.
Ἰωαν. Ξανθάκης, Λογισμὸς Πιθανοτήτων.
Ἰωαν. Ξανθάκης, Οὐράνιος μηχανική.
Γ. Ν. Ξένος, Διανομαὶ ἐπιφανειῶν, Ἀθῆναι, 1947.
Γ. Φ. Ξηρουδάκης, Ἁπλῆ ἐξέτασις τοῦ θεωρήματος τοῦ Φερμά, Ἀθῆναι, 1954 (γαλλιστί).
Γ. Φ. Ξηρουδάκης—Κ.Ν. Φασουλάκης, Ἀξιόλογα τριγωνομετρικὰ συστήματα, 1948.
Γεώργ. Κ. Οἰκονόμου, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι, 1952.
Ἔκ. Οἰκονόμου, Μαθήματα ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, Ἀθῆναι.
Ἔκ. Οἰκονόμου, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι.
Α. Χ. Οἰκονόμου—Σ.Χ. Λαζαρίμος, Ἐπίπεδος τριγωνομετρία, 1936.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Μεγάλη Ἄλγεβρα, τόμοι Α,Β,Γ, Ἀθῆναι.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Μεγάλη Γεωμετρία, τόμοι Α,Β.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Μεγάλη Τριγωνομετρία.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Στοιχεῖα Διαφορικῆς Γεωμετρίας.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Ἀνωτέρα Ἄλγεβρα.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Διαφορικὸς Λογισμός.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμός.
Ἀριστ. Φ. Πάλλας, Θεωρία Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων.
Ἰ. Φ. Πανάκης, Τὸ ἰσοσκελὲς Τρίγωνον.
Ἰ. Φ. Πανάκης, Θεωρητικὴ Γεωμετρία, βιβλ. Α,Β.
Γεώργ. Παπανικολάου, Μαθήματα Ἀλγέβρας, Ἀθῆναι.
Γεώργ. Παπανικολάου, Τριγωνομετρία Ἐπίπεδος καὶ σφαιρική.
Κων. Παπαϊωάννου, Μηχανικὴ τόμος Ι.
Κων. Παπαϊωάννου, Μηχανική, τόμ. ΙΙ, Ἀθῆναι 1954.

Κων. Παπαϊωάννου, Συμπλέγματα καμπύλων καὶ συμπλέγματα εὐθειῶν, Ἀθῆναι 1930.

Ἡρ. Κ. Παπανικολάου, Ἡ τριγωνομετρία ὑπὸ τὴν ἁπλουστάτην αὐτῆς μορφήν, 1939.

Ἀλ. Παππᾶς, Μαθήματα θεωρίας σφαλμάτων, Ἀθῆναι, 1948.

Γεώρ. Πατέλης, Ἀνωτέρα πρακτικὴ ἀριθμητική, Ἀθῆναι, 1952.

Σ. Πατσίφας, Μαθήματα τριγωνομετρίας, 1946 .

Παν. Χ. Πούντζας, Στοιχεῖα ἐπιπέδου ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, 1928.

Παν. Χ. Πούντζας, Ἀριθμητικὸς ὑπολογισμός, Πάτραι.

Παν. Χ. Πούντζας, Γεωμετρικὸς ὑπολογισμός, Πάτραι.

Ὄθων Πυλαρινός, Διαφορικὴ Γεωμετρία.

Ὄθων Πυλαρινός, Θεωρία Ἐπιφανειῶν.

Ὄθων Πυλαρινὸς, Τὸ πρόβλημα τῆς διαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς ἴσα μέρη.

Ὄθων Πυλαρινός, Ἡ Ἀξιωματικὴ Μέθοδος.

Ὄθων Πυλαρινός, Ἡ κωδικοποίησις τῆς γεωμετρίας.

Γ. Ῥεμοῦνδος, Μαθήματα ἀνωτέρας ἀλγέβρας.

Γ. Ρεμοῦνδος, Ἐγχειρίδιον ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, Ἀθῆναι, 1944.

Γ. Ρεμοῦνδος, Μαθήματα ἀναλύσεως, Ἀθῆναι, 1917–1920.

Γ. Ρεμοῦνδος, Στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Ν. Σακελλαρίου, Ἀναλυτικὴ γεωμετρία.

Ν. Σακελλαρίου, Προβολικὴ γεωμετρία.

Ν. Σακελλαρίου — Λ. Ἀδαμόπουλος, Ἄλγεβρα.

Σπ. Σαραντόπουλος, Θεωρήματά τινα ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (γαλλιστί), 1940.

Σπ. Σαραντόπουλος, Περὶ τοῦ Fermat καὶ τοῦ τελευταίου προβλήματος αὐτοῦ, Δελτίον Ἑλ. Μαθ. Ἑταιρ. τόμος ΙΣΤ τεῦχος, Γ, Ἀθῆναι, 1935.

Σπυρ. Σαραντόπουλος, Διαφορικὸς Λογισμὸς τόμ. Α. Ἀθῆναι 1956

Σπυρ. Σαραντόπουλος, Διαφορικὸς Λογισμὸς, τόμ. Β′ (ὑπὸ ἐκτύπωσιν)

Μιχ. Στεφανίδης, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, Ἀθῆναι 1938.

Μιχ. Στεφανίδης. Τὰ μαθηματικὰ τῶν Βυζαντινῶν, Περ. Ἀθηνᾶ, Ἀθῆναι 1923.

Γεώρ. Στρίκης, Κυρτὰ κανονικὰ πολύεδρα, Ῥόδος, 1950.

Π. Τόγκας — Θ. Πασσᾶς — Ν. Νικολάου, Ἀριθμητική, Ἀθῆναι, 1949.

Πέτ. Τόγκας, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι.

Πέτ. Τόγκας, Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία.

Πέτ. Τόγκας, Προβλήματα γεωμ. τόπων καὶ κατασκευῶν, I,II,III.

Πέτ. Τόγκας, Γεωμετρία.

Χρ. Φουσιάνης, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι.

Ν. Ι. Χατζηδάκης, Μαθήματα ἀνωτέρας ἀλγέβρας, Ἀθῆναι.

Ν. Ι. Χατζηδάκης, Σφαιρικὴ τριγωνομετρία.

Ν. Ι. Χατζηδάκης, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀναλυτικὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν.

Ν. Ι. Χατζηδάκης, θεωρητικὴ μηχανική.

Ἰω. Χατζῆς, Ἄλγεβρα, Ἀθῆναι.

Ἰ. Δ. Χατσόπουλος Μαθήματα παραστατικῆς γεωμετρίας, Ἀθῆναι.

Ἰ. Δ. Χατσόπουλος Μαθήματα γεωμετρίας, Κωνικαὶ τομαί, Ἀθῆναι 1957.

Εὐάγ. Σ. Σταμάτης ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, Ἀθῆναι, 1946.

» » ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, Μηχανικά, Ἀθῆναι, 1946.

Ευάγ. Σ. Σταμάτης Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, Ἀθῆναι, 1949.
» » ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, Κύκλου μέτρησις, Ἀθῆναι, 1950.
» » ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Γεωμετρία, Στοιχείων βιβλ. I.II.III.IV τόμος I ἔκδ. Ν. Σάκκουλα, Ἀθῆναι, 1952.
» » ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλ. V, VI, VII, VIII. IX τόμος II Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953.
» » Μαθήματα ἱστορίας τοῦ πολιτισμοῦ, Τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικά, ἔκδ. Ἀνδρέου Σιδέρη καὶ Σίας Ἀθῆναι 1956.
» » ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλ. X, τόμ. III, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι, 1956–1957.
» » ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Στερεομετρία, Στοιχείων βιβλ. XI, XII, XIII, τόμος IV, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι, (Ἐκτυποῦται).

([illegible])

Ὁ χάρτης ἐκτυπώσεως τοῦ βιβλίου ἐλήφθη ἐκ τῆς Ἀθηναϊκῆς Χαρτοποιΐας, Γ. Α. ΓΙΑΝΝΟΥΛΑΤΟΣ—Κ. Γ. ΚΕΦΑΛΑΣ καὶ ΣΙΑ, ἑδρευούσης ἐν Ἀθήναις ὁδὸς Θησέως 10.

Θεωρῶ εὐχάριστον καθῆκον ὅπως ἐκφράσω τὰς θερμοτάτας εὐχαριστίας μου πρὸς τὴν Σεβαστὴν Κυβέρνησιν διὰ τὴν ἀπόφασιν αὐτῆς, ὅπως ἡ ἐκτύπωσις τοῦ βιβλίου γίνῃ ἐν τῷ Ἐθνικῷ Τυπογραφείῳ. Τοὺς εἰσηγητὰς τῆς ἀποφάσεως ταύτης Γενικὸν Διευθυντὴν τοῦ Ὑπουργείου Οἰκονομικῶν κ. *ΘΕΟΔΩΡΟΝ ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΝ*, Διευθυντὴν κ. *ΔΗΜΗΤΡΙΟΝ ΑΛΕΒΙΖΟΝ* καὶ τμηματάρχην Α΄ τάξεως τοῦ αὐτοῦ Ὑπουργ. κ. *ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΝ ΣΜΠΑΡΟΥΝΗΝ* εὐχαριστῶ θερμότατα διὰ τὴν ἀμέριστον συμβολήν των. Ἰδιαίτατα εὐχαριστῶ τοῦ Ἐθνικοῦ Τυπογραφείου τόν:

Direktor Finanz-Ministerium

Διευθυντὴν κ. *ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΝ ΧΡ. ΤΡΥΦΩΝΑΝ*
Ἐργοστασιάρχην κ. *ΠΑΝΑΓ. ΣΤ. ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΝ*
Τμηματάρχην κ. *ΗΛΙΑΝ ΜΙΧΑΗΛ ΚΑΡΒΟΥΝΗΝ*
Ἀρχιτεχνίτην κ. *ΙΩΑΝΝΗΝ Γ. ΠΑΠΑΣΑΒΒΙΔΗΝ*

καὶ τὸ λοιπὸν προσωπικὸν τοῦ Τμήματος Βιβλίων, ἄνευ τῆς στοργικῆς μερίμνης τῶν ὁποίων θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ὑπερνικηθῶσι σοβαρώταται δυσκολίαι προερχόμεναι ἐκ τῆς φύσεως τοῦ βιβλίου καὶ τοῦ μεγίστου φόρτου τῆς τρεχούσης ἐργασίας τοῦ Ε. Τυπογραφείου.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 25 Φεβρουαρίου 1957

Ε. Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ