ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Erhalten 1/12. 57.
Gebunden 19/12 57

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΑ XI. XII. XIII.

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ
ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ — ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ΤΟΜΟΣ IV

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1957

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ τετάρτου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοῦ περιλαμβάνοντος τὰ βιβλία XI, XII, XIII, ἤτοι τὰ στοιχεῖα τῆς στερεομετρίας, ὁλοκληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ μελετητὴς τοῦ τόμου τούτου θὰ διαπιστώσῃ ἐκ τῶν σχημάτων πολλῶν θεωρημάτων, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον προβολικὴν καὶ παραστατικὴν γεωμετρίαν.

Ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ ἐγγραφὴ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ κύβου, τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τοῦ δωδεκαέδρου, εἰς σφαῖραν. Ὁ σπουδάζων τὰ Στοιχεῖα ἐν γένει καὶ πρὸ παντὸς ἐκ τούτων τὰ συναφῆ πρὸς τὰ κανονικὰ πολύεδρα θεωρήματα μένει ἔκπληκτος πρὸ τοῦ μεγαλείου, τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ ἀνυπερβλήτου κάλλους τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ὅπως εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων (βιβλία I — X), οὕτω καὶ εἰς τὴν στερεομετρίαν ὁ Εὐκλείδης οὐδένα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν ἐπιχειρεῖ. Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο ὁ Εὐκλείδης τὸ θεωρεῖ ὡς μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, ἥτις ὁδηγεῖ τὸν ἐρευνητὴν ἐγγύτερον πρὸς τὴν θεώρησιν τοῦ Θείου.

verständig

Εἰς τοὺς νεωτέρους μαθηματικοὺς γεννᾶται τὸ εὔλογον ἐρώτημα, ἂν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τὸ θεώρημα : Τ ὸ π λ ῆ θ ο ς τ ῶ ν κ ο ρ υ φ ῶ ν κ α ὶ τ ῶ ν ἑ δ ρ ῶ ν ἑ ν ὸ ς κ α ν ο ν ι κ ο ῦ κ υ ρ τ ο ῦ π ο λ υ έ δ ρ ο υ ἰ σ ο ῦ τ α ι μ ὲ τ ὸ π λ ῆ θ ο ς τ ῶ ν ἀ κ μ ῶ ν τ ο ύ τ ο υ σ ὺ ν δ ύ ο. Ἂν λάβῃ τις ὑπ᾽ ὄψιν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀνεκάλυψαν τοὺς δυσκολωτάτους καὶ ὑπερόχους νόμους τῆς κατασκευῆς καὶ ἐγγραφῆς εἰς σφαῖραν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἄγεται κατ᾽ ἀνάγκην εἰς τὸ

schwierig

vortrefflich

συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἦτο γνωστὸν εἰς αὐτούς. Ἱστορικὴν ὅμως μαρτυρίαν περὶ τούτου δὲν ἔχομεν. Ἐνδείξεις τινὰς καὶ συναφεῖς πληροφορίας σημειοῦμεν εἰς τὸ τέλος τῶν ἐπεξηγήσεων.

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1957.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ — ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

ια΄.

Ὅροι.

α΄. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β΄. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

γ΄. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

ε΄. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ϛ΄. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

η΄. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ΄. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι΄. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια΄. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ΄. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγ΄. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ΄. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περι-

Βιβλίον XI.

Ὁρισμοί.

1. Στερεὸν εἶναι τὸ ἔχον μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος.

2. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

3. Εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς κειμένας ἐν τῷ (θεωρουμένῳ) ἐπιπέδῳ καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς.

4. Ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων αἱ κείμεναι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἄλλο.

5. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον εἶναι, ὅταν ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου εὑρισκομένου πέρατος τῆς εὐθείας ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος, καὶ ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ἀχθείσης.

6. Κλίσις ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἀγομένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

7. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον λέγεται ὁμοίως κεκλιμένον καὶ ἄλλο πρὸς ἄλλο, ὅταν αἱ γωνίαι κλίσεως εἶναι ἴσαι.

8. Παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι τὰ ἀσύμπτωτα.

9. Ὅμοια στερεὰ σχήματα εἶναι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων, ἴσων τὸ πλῆθος, περιεχόμενα.

10. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματα εἶναι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων κατὰ τὸ πλῆθος καὶ τὸ μέγεθος.

11. Στερεὰ γωνία εἶναι ἡ κλίσις πρὸς πάσας τὰς γραμμὰς περισσοτέρων τῶν δύο εὐθειῶν γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Ἄλλως· στερεὰ γωνία εἶναι ἡ περιεχομένη ὑπὸ περισσοτέρων τῶν δύο ἐπιπέδων γωνιῶν μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐχουσῶν κοινὴν κορυφήν.

12. Πυραμὶς εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων ἀρχομένων ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ καταληγόντων εἰς ἓν σημεῖον.

13. Πρίσμα εἶναι σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων δύο ἀπέναντι κείμενα εἶναι ἴσα, ὅμοια καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

14. Σφαῖρα εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ἡμικύκλιον στραφὲν περὶ

ενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ις'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κς'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κζ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

τὴν διάμετρον αὐτοῦ μένουσαν ἀκίνητον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον.

15. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

16. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας εἶναι τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

17. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖά τις διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη κατὰ τὰ δύο μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

18. Κῶνος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν μένουσαν ἀκίνητον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον. Καὶ ἂν μὲν ἡ μένουσα ἀκίνητος κάθετος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον, τὴν ἐκτελοῦσαν τὴν περιστροφήν, ὁ κῶνος θὰ εἶναι ὀρθογώνιος, ἐὰν δὲ μικροτέρα, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μεγαλυτέρα, ὀξυγώνιος.

19. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ τρίγωνον.

20. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς περιστρεφομένης εὐθείας.

21. Κύλινδρος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον περιστραφὲν περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, μένουσαν ἀκίνητον, ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον.

22. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

23. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ γραφόμενοι ὑπὸ τῶν δύο ἀπέναντι κειμένων καὶ περιστρεφομένων πλευρῶν.

24. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων καὶ οἱ ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι ἀνάλογοι.

25. Κύβος εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

26. Ὀκτάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.

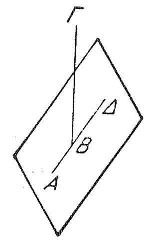
27. Εἰκοσάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων.

28. Δωδεκάεδρον εἶναι στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων.

α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ.



Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ Β καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

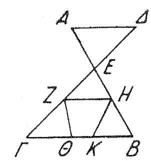
Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ, ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ. αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

1.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται, καὶ μέρος τι ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, τῆς εὐθείας γραμμῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω, ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐκτὸς αὐτοῦ.

Τῆς ΑΒ θὰ ὑπάρχῃ συνεχὴς εὐθεῖα κειμένη ἐπ' εὐθείας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἔστω ἡ ΒΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι κοινὸν τμῆμα ἡ ΑΒ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπειδή, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράψωμεν κύκλον, θὰ ἀντιστοιχῶσιν εἰς τὰς διαμέτρους ἄνισα τόξα.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι δὲν εἶναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται, καὶ μέρος τι ἐκτὸς αὐτοῦ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ σημεῖον Ε· λέγω, ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

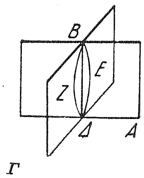
Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ΕΓ, ΕΒ τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΒ, ΖΗ καὶ αἱ ΖΘ, ΗΚ· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΓΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Διότι ἐὰν τοῦ τριγώνου ΕΓΒ εἶναι μέρος ἢ τὸ ΖΘΓ ἢ τὸ ΗΒΚ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου, θὰ εἶναι καὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΕΓ, ΕΒ μέρος μέν τι ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, μέρος δέ τι ἐπὶ ἄλλου. Ἐὰν δὲ τοῦ τριγώνου ΕΓΒ τὸ μέρος ΖΓΒΗ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπὶ ἄλλου, θὰ εἶναι καὶ τῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΕΓ, ΕΒ μέρος μέν τι εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, μέρος δέ τι εἰς ἄλλο· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον (θ. 1). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΓΒ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὸ ἐπίπεδον δέ, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ τρίγωνον ΕΓΒ, εἰς τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἑκάστη τῶν ΕΓ, ΕΒ, καὶ εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον εὑρίσκονται καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ, (θ. 1). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ πᾶν τρίγωνον εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶναι εὐθεῖα.

Διότι ἂς τέμνωνται δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ γραμμὴ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΒ εἶναι εὐθεῖα.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.



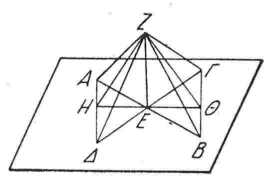
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσίν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς



Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Δ εἰς τὸ Β εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἡ εὐθεῖα ΔΕΒ (Ι αἴτ. 1), εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἡ εὐθεῖα ΔΖΒ. Θὰ ὑπάρχωσι τότε τῶν εὐθειῶν ΔΕΒ, ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ θὰ περιέχωσιν αὗται ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἄτοπον (Ι αἴτ. 9). Δὲν εἶναι ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕΒ, ΔΖΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸ Β πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθειῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

Διότι ἂς ὑψωθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὰς τεμνομένας κατὰ τὸ σημεῖον Ε εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ἀπὸ τοῦ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ε τυχοῦσα ἡ ΗΕΘ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἀκόμη ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΔ καὶ ΓΕ = ΕΒ καὶ γωνία ΑΕΔ ἴση πρὸς γωνίαν ΓΕΒ, καὶ ἡ βάσις ἄρα ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΔ = πρὸς τρίγωνον ΓΕΒ (Ι. 4). Ὥστε καὶ ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΒΓ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΑΕΗ ἴση πρὸς τὴν ΒΕΘ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, ἐκείνην ἐπὶ τῆς ὁποίας βαίνουσιν αἱ ἴσαι γωνίαι, τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· θὰ ἔχωσιν ἄρα ἴσας καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς πρὸς τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχως (Ι. 26). Ἄρα ΗΕ = ΕΘ καὶ ΑΗ = ΒΘ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ = ΕΒ καὶ ἡ ΖΕ εἶναι κοινὴ (τῶν τριγώνων ΑΕΖ, ΒΕΖ) καὶ κάθετος, ἡ βάσις ἄρα ΖΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΖΓ = ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΔ = ΓΒ, εἶναι δὲ καὶ ΖΑ = ΖΒ, αἱ δύο εὐθεῖαι ΖΑ, ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΖΒ, ΒΓ· καὶ ἐδείχθη ἡ βάσις ΖΔ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ· καὶ ἡ γωνία ΖΑΔ εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΒΓ (Ι. 8). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐδείχθη ΑΗ = ΒΘ, ἀλλὰ καὶ ΖΑ = ΖΒ, αἱ δύο πλευραὶ ΖΑ, ΑΗ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο, τὰς ΖΒ, ΒΘ. Καὶ ἐδείχθη γωνία ΖΑΗ = ΖΒΘ· ἡ βάσις ἄρα ΖΗ = πρὸς βάσιν ΖΘ. Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐδείχθη ΗΕ = ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, αἱ δύο πλευραὶ ΗΕ, ΕΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΘΕ, ΕΖ· καὶ ἡ βάσις ΖΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ· ἡ γωνία ἄρα ΗΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΕΖ. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΕΖ, ΘΕΖ εἶναι ὀρθή. Ἡ ΖΕ

ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

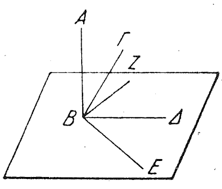
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΒΖ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ, ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς ἁφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἄρα εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διὰ τοῦ Ε τυχόντως ἀχθεῖσαν ΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κειμένας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Εὐθεῖα δὲ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν σχηματίζῃ ὀρθὰς γωνίας πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον εἶναι τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἡ ΖΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς δύο εὐθειῶν, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Β· λέγω, ὅτι αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν κεῖνται, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ, ΒΕ ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἡ δὲ ΒΓ ἐκτὸς αὐτοῦ, καὶ ἂς προεκβληθῇ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ὁριζόμενον ἐπίπεδον· εἶναι φανερόν, ὅτι τοῦτο θὰ σχηματίσῃ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κοινὴν τομήν, εὐθεῖαν γραμμὴν (θ. 3). Ἂς σχηματίσῃ τὴν ΒΖ. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΖ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΒΕ, εἶναι ἄρα κάθετος ἡ ΑΒ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΒΕ (θ. 4). Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΒΕ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ὥστε ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ εὑρισκομένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΖ εἶναι ὀρθή. Καθ' ὑπόθεσιν δὲ εἶναι καὶ ἡ ΑΒΓ ὀρθή· ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ. Καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εὑρίσκεται ἄρα ἡ ΒΓ ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

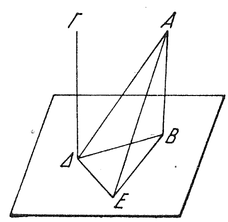
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή. ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ· πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

6.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἔστωσαν τὰ σημεῖα ἀφῆς πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τὰ Β, Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἡ ΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, θὰ εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ εὑρισκομένη ἐν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΓΔΒ, ΓΔΕ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΒ· καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας· ἡ βάσις ἄρα ΑΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ καὶ ΑΔ = ΒΕ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΑ· καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΑΕ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΑ (Ι. 8). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ. Ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς αὐτῶν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (θ. 5). Εἰς ὃ δὲ ἐπίπεδον κεῖνται αἱ ΔΒ, ΔΑ κεῖται καὶ ἡ ΑΒ· διότι πᾶν τρίγωνον κεῖται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (θ. 2). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Καὶ εἶναι ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΒΔΓ· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

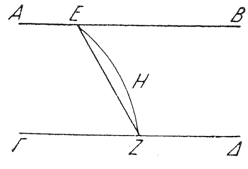
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ληφθῶσι δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ Ε, Ζ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μὲ τὰς παραλλήλους.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.



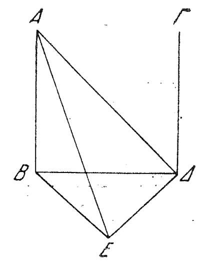
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔΒ ὀρθή. ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας



Διότι ἔστω ὅτι δὲν κεῖται, καὶ ὅτι κεῖται ἐκτὸς τούτου ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ τάμῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τῶν (ΑΒ, ΓΔ) κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν (θ. 3). Ἔστω τὴν ΕΖ· αἱ δύο ἄρα εὐθεῖαι ΕΗΖ, ΕΖ θὰ περιέχωσιν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἀδύνατον· ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ δὲν θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου· θὰ κεῖται ἄρα ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε εἰς τὸ Ζ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ληφθῶσι δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους.

8.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν ἡ ΑΒ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ἄλλη ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσι τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἄρα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (θ. 7). Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΔ, αἱ γωνίαι ἄρα ΑΒΔ, ΓΔΒ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (Ι. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΔ· καὶ ἡ ΓΔΒ ἄρα εἶναι ὀρθή· ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΒ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΔΒ· διότι ἑκατέρα εἶναι ὀρθή· ἡ βάσις ἄρα ΑΔ (τοῦ τριγώνου ΑΒΔ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (τριγ. ΒΔΕ). Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ καὶ ΒΕ = ΑΔ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΕΔ, ΔΑ. Καὶ ἡ βάσις αὐτῶν ἡ ΑΕ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΕΔΑ. Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΒ · ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΔ, ΔΑ (θ. 4). Ἡ ΕΔ ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΑ. Εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΑ κεῖται ἡ ΔΓ, ἐπειδὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον *καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ. ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς. ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.*

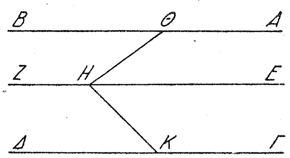
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.

ΒΔΑ κεῖνται αἱ ΑΒ, ΒΔ, εἰς τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν ΑΒ, ΒΔ κεῖται καὶ ἡ ΔΓ. Ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος εἰς τὸ σημεῖον τομῆς δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕ, ΔΒ· ὥστε ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΔΒ (θ. 4). Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΔΒ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ μία εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ μὴ κείμεναι μὲ αὐτὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Διότι ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ μὴ κείμεναι μὲ αὐτὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

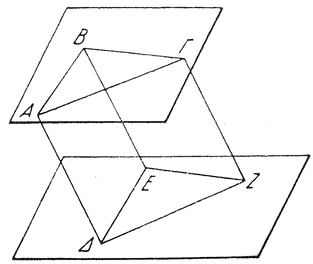
Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΗΘ, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΕΖ, ΑΒ, ἡ δὲ ΗΚ ἂς ἀχθῇ πάλιν κάθετος (ἐπὶ τὴν ΕΖ) κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΕ, ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΗΚ, ἡ ΕΖ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ (θ. 4). Καὶ εἶναι ἡ ΕΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ (θ. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΘΗΚ. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι (θ. 6). Ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας.

Διότι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἂς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ἂς μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση.



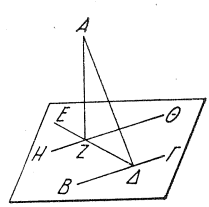
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν·

Διότι ἂς ληφθῶσιν αἱ ΒΑ = ΒΓ = ΕΔ = ΕΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ (Ι. 33). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΓΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΕ. Αἱ δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παράλληλοι καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μὲ τὴν εὐθεῖαν εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (θ. 9)· ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ συνδέουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου σημεῖον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· πρέπει νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Διότι ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ἡ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ (Ι. 12). Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΔΕ (Ι. 11), κειμένη εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΗΘ (Ι. 31).

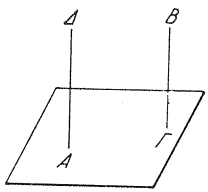
Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΔΑ, ΔΕ, ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔΑ (θ. 4). Καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΗΘ· ἐὰν δὲ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδόν τι, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (θ. 8)· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΔΑ. Ἄρα εἶναι κάθετος ἡ ΗΘ καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ, ΔΑ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ, ΔΑ· ἡ ΗΘ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΗ· εἶναι δὲ ἡ ΑΖ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ· ἡ ΑΖ ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ΄.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.



Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

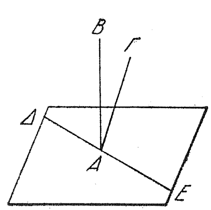
Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ΄.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ. Ἐὰν δὲ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν (θ. 4)· ἡ ΖΑ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΗΘ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν ΕΔ, ΗΘ εἶναι τὸ δοθέν· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἀπὸ δοθέντος ἄρα σημείου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἤχθη εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Νὰ ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἐκ σημείου κειμένου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον τὸ Α· πρέπει ἀπὸ τοῦ σημείου Α νὰ ὑψωθῇ εὐθεῖα γραμμὴ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἂς θεωρηθῇ σημεῖόν τι Β ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ΑΔ.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία ἐξ αὐτῶν ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐπὶ τὸ δοθὲν ἄρα ἐπίπεδον ὑψώθη κάθετος ἐκ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ σημείου τοῦ Α, ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α ἂς ὑψωθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΑ, ΑΓ· τοῦτο θὰ τάμῃ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ γραμμὴν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Α (θ. 3). Ἔστω τὴν ΔΑΕ· αἱ εὐθεῖαι ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ κειμένη ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου· ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ὀρθή· ἡ γωνία ἄρα ΓΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ. Καὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον.

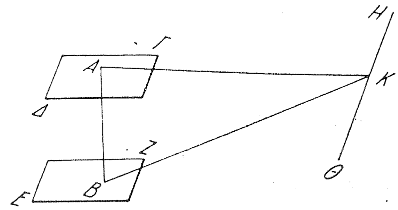
Δὲν θὰ ὑψωθῶσιν ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ



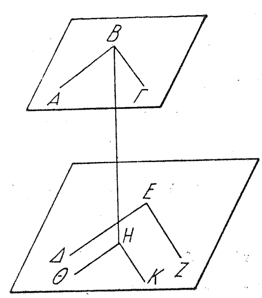
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός

14.

Τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἶναι παράλληλα.

Διότι ἔστω εὐθεῖά τις ἡ AB κάθετος ἐφ' ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων ΓΔ, EZ· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι,προεκτεινόμενα θὰ συναντηθῶσιν. Ἂς συναντηθῶσιν· ἡ κοινὴ τομή των βεβαίως θὰ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (θ. 3)· ἔστω ἡ HΘ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς HΘ τυχὸν σημεῖον τὸ K, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ AK, BK. Καὶ ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον EZ, ἡ AB ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν BK κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ EZ, τὸ ὁποῖον προεξετάθη· ἡ γωνία ἄρα ABK εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία BAK εἶναι ὀρθή. Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ABK αἱ δύο γωνίαι ABK, BAK ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα προεκτεινόμενα τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, EZ· τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΓΔ, EZ εἶναι παράλληλα.

Τὰ ἐπίπεδα ἄρα, ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος, εἶναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.

Διότι ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι αἱ AB, BΓ παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας τεμνομένας τὰς ΔE, EZ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα AB, BΓ καὶ ΔE , ΔZ προεκτεινόμενα δὲν θὰ συναντηθῶσι.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου B ἡ BH κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔE, EZ καὶ ἂς τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον H, καὶ διὰ τοῦ H πρὸς μὲν τὴν EΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ HΘ, πρὸς δὲ τὴν EZ ἡ HK. Καὶ ἐπειδὴ ἡ BH εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔE, EZ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔE, EZ, (ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν HΘ, HK κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔE, EZ· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν BHΘ, BHK εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ ἡ BA εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν HΘ, αἱ γωνίαι ἄρα HBA, BHΘ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθὰς (I. 29). Εἶναι δὲ ὀρθὴ ἡ BHΘ· εἶναι ἄρα ὀρθὴ καὶ ἡ HBA· ἡ HB ἄρα *ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΗΒ καὶ τῇ ΒΓ ἐστι πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΒ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΗΒ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.*

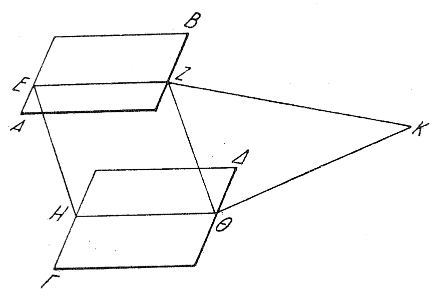
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη καὶ συμπιπτέτωσαν πρότερον κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.



Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΗΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΗΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας τὰς ΒΑ, ΒΓ, ἡ ΗΒ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΒΑ, ΒΓ. [Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἡ ΒΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν ΗΘ, ΗΚ εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ κάθετος ἡ ΗΒ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒ, ΒΓ]. Τὰ δὲ ἐπίπεδα, ἐπὶ τὰ ὁποῖα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος, εἶναι παράλληλα (θ. 14)· τὸ ἐπίπεδον ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου τινός, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι.

Διότι ἂς τέμνωνται δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, αἱ ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσι ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ ἢ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ε, Η. Ἄς προεκβληθῶσιν πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ καὶ ἂς συναντηθῶσι πρῶτον κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΖΚ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, καὶ πάντα ἄρα τὰ σημεῖα τῆς ΕΖΚ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ, (θ. 1). Ἓν δὲ τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΕΖΚ εἶναι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ Κ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ· τὰ ἐπίπεδα ἄρα ΑΒ, ΓΔ προεκβαλλόμενα θὰ συναντηθῶσι. Δὲν συναντῶνται ὅμως, διότι ὑπετέθησαν παράλληλα· δὲν θὰ συναντηθῶσιν ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι πρὸς τὸ μέρος τῶν Ζ, Θ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ προεκβαλλόμεναι καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν Ε, Η δὲν θὰ συναντηθῶσιν. Αἱ εὐθεῖαι δὲ αἱ προεκβαλλόμεναι καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη καὶ μὴ συναντώμεναι εἶναι παράλληλοι. Ἡ ΕΖ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ.

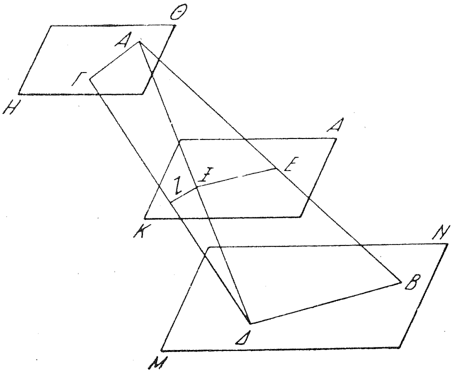
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα τέμνωνται ὑπὸ ἐπιπέδου τινός, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ,



ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα

17.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Διότι ἂς τέμνωνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ· λέγω, ὅτι εἶναι ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ καὶ ἂς συναντᾷ ἡ ΑΔ τὸ ἐπίπεδον ΚΛ κατὰ τὸ σημεῖον Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΞ, ΞΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΚΛ, ΜΝ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ εἶναι παράλληλοι (θ. 16). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΗΘ, ΚΛ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΞΖ εἶναι παράλληλοι. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΕΞ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ, εἶναι ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΑΞ : ΞΔ. Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἡ ΞΖ ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ, εἶναι ΑΞ : ΞΔ = ΓΖ : ΖΔ (VI. 2). Ἐδείχθη δὲ ΑΞ : ΞΔ = ΑΕ : ΕΒ· ἄρα ΑΕ : ΕΒ = ΓΖ : ΖΔ.

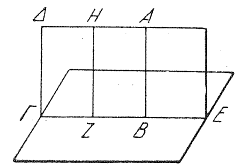
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον· λέγω, ὅτι πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Διότι ἂς διέρχεται διὰ τῆς ΑΒ τὸ ἐπίπεδον ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ΔΕ καὶ τοῦ δοθέντος ἡ ΓΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἡ ΖΗ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.



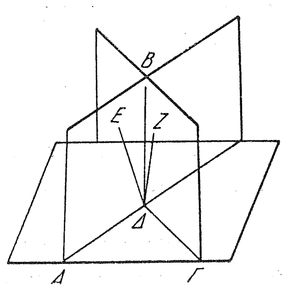
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδων.



Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ὁρ. 3)· ὥστε εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΕ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΖ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΖΒ ὀρθή· ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ (Ι. 28). Ἡ δὲ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (θ. 8). Καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, ὅταν αἱ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι κείμεναι εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο (ὁρ. 4). Καὶ ἐδείχθη ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων τὴν ΓΕ, κειμένη εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον τὸ ΔΕ· τὸ ἐπίπεδον ἄρα ΔΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ κάθετα ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Διότι ἔστω ὅτι δὲν εἶναι, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τοῦ σημείου Δ εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἡ ΕΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἡ ΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν, καὶ ἐπὶ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς τῆς ΑΔ ἤχθη κάθετος ἡ ΔΕ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ὁρ. 4). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ εἶναι ὑψωμέναι δύο κάθετοι κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου· ὅπερ ἀδύνατον (θ. 13). Οὐδεμία ἄρα ἄλλη κάθετος δύναται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΒΓ.

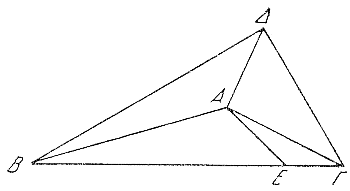
Ἐὰν ἄρα δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ



τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΔ, ΔΓ τῆς ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ

20.

Ἐὰν στερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, δύο οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

Διότι ἔστω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι φανερόν, ὅτι δύο τυχοῦσαι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης. Ἐὰν δὲ δὲν εἶναι ἴσαι, ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΒΑΓ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ μὲ πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΔΑΒ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΕ = ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε ἀχθεῖσα ἡ ΒΕΓ ἂς τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΒ, ΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ ΔΑ = ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ (τριγώνου) ἴσαι πρὸς δύο πλευρὰς ἄλλου τριγώνου ἀντιστοίχως· καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΕ· ἡ βάσις ἄρα ΔΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ΒΔ + ΔΓ $\rangle$ ΒΓ (I. 20), ἐξ ὧν ἡ ΔΒ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ τῆς λοιπῆς τῆς ΕΓ εἶναι μεγαλυτέρα. Καὶ ἐπειδὴ ΔΑ = ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ΔΓ $\rangle$ βάσεως ΕΓ, ἡ γωνία ἄρα ΔΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΕΑΓ (I. 25). Ἐδείχθη δὲ καὶ ΔΑΒ = ΒΑΕ· ἄρα ΔΑΒ + ΔΑΓ $\rangle$ ΒΑΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων τυχουσῶν γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς λοιπῆς.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία περιέχηται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, δύο οἱαιδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

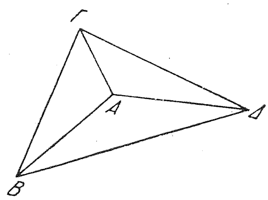
21.

Πᾶσα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΒΑΓ + ΓΑΔ + ΔΑΒ εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ παρὰ τὸ Β στερεὰ

Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

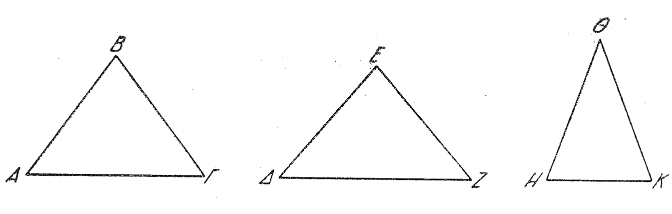


Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο τυχοῦσαι ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς (θ. 20)· αἱ γωνίαι ἄρα $ΓΒΑ + ΑΒΔ > ΓΒΔ$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους αἱ μὲν $ΒΓΑ + ΑΓΔ > ΒΓΔ$, αἱ δὲ $ΓΔΑ + ΑΔΒ > ΓΔΒ$· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι $ΓΒΑ + ΑΒΔ + ΒΓΑ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΑΔΒ >$ τῶν τριῶν $ΓΒΔ + ΒΓΔ + ΓΔΒ$. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς $ΓΒΔ + ΒΔΓ + ΒΓΔ = 2$ ὀρθαὶ (Ι. 32)· αἱ ἓξ ἄρα $ΓΒΑ + ΑΒΔ + ΒΓΑ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΑΔΒ > 2$ ὀρθῶν. Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ ἰσοῦνται πρὸς δύο ὀρθάς, αἱ ἐννέα ἄρα γωνίαι τῶν τριγώνων αἱ $ΓΒΑ + ΑΓΒ + ΒΑΓ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΓΑΔ + ΑΔΒ + ΔΒΑ + ΒΑΔ = 6$ ὀρθάς, ἐξ ὧν αἱ $ΑΒΓ + ΒΓΑ + ΑΓΔ + ΓΔΑ + ΑΔΒ + ΔΒΑ > 2$ ὀρθῶν· αἱ λοιπαὶ ἄρα τρεῖς αἱ $ΒΑΓ + ΓΑΔ + ΔΑΒ$ αἱ περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν.

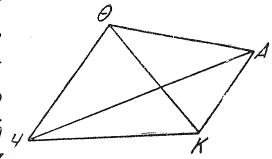
Πᾶσα ἄρα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰς ἴσας εὐθείας, νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, αἱ μὲν $ΑΒΓ + ΔΕΖ > ΗΘΚ$, αἱ δὲ $ΔΕΖ + ΗΘΚ > ΑΒΓ$, καὶ ἀκόμη αἱ $ΗΘΚ + ΑΒΓ > ΔΕΖ$, καὶ ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ = ΒΓ = ΔΕ = ΕΖ = ΗΘ = ΘΚ$, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τουτέστιν ὅτι δύο ἐκ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ οἱαιδήποτε εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι φανερόν, ὅτι ἀφοῦ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ γίνονται ἴσαι, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΚ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον αὐτῆς Θ ἂς κατασκευασθῇ ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΗΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν· καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσιν. πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

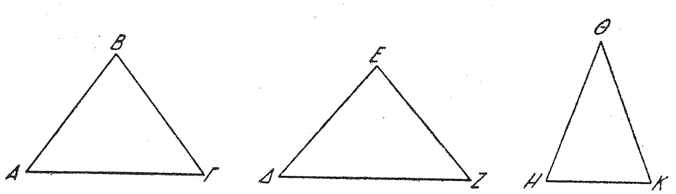


κγ΄.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω



τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΝΛ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΞΛ τῇ ΞΜ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΛΞ, ΞΜ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστιν ἴση·

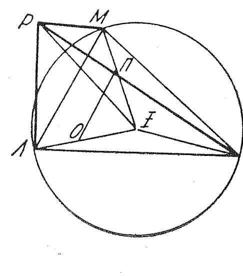
γωνία $ΚΘΛ = ΑΒΓ$· καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΛ ἴση πρὸς μίαν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΗΛ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο ΚΘ, ΘΛ καὶ ἡ παρὰ τὸ Β γωνία $= ΚΘΛ$, ἡ βάσις ἄρα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΛ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ $ΑΒΓ + ΗΘΚ > ΔΕΖ$, εἶναι δὲ $ΑΒΓ = ΚΘΛ$, ἄρα $ΗΘΛ > ΔΕΖ$. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ γωνία $ΗΘΛ > ΔΕΖ$, ἡ βάσις ἄρα $ΗΛ >$ τῆς βάσεως ΔΖ (I. 24). Ἀλλὰ $ΗΚ + ΚΛ > ΗΛ$ (I. 20). Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον $ΗΚ + ΚΛ > ΔΖ$. Εἶναι δὲ $ΚΛ = ΑΓ$· ἄρα $ΑΓ + ΗΚ > ΔΖ$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ μὲν $ΑΓ + ΔΖ > ΗΚ$, καὶ ἀκόμη αἱ $ΔΖ + ΗΚ > ΑΓ$. Εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία· πρέπει ὅμως αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι νὰ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, καὶ ἀκόμη αἱ τρεῖς νὰ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· πρέπει ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία.

Ἂς ληφθῇ $ΑΒ = ΒΓ = ΔΕ = ΕΖ = ΗΘ = ΘΚ$ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον (θ. 22). Ἂς κατασκευασθῇ τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἡ μὲν $ΑΓ = ΛΜ$, ἡ δὲ $ΔΖ = ΜΝ$, καὶ ἀκόμη ἡ $ΗΚ = ΝΛ$, καὶ ἂς γραφῇ περὶ τὸ τρίγωνον ΛΜΝ κύκλος ὁ ΛΜΝ (IV. 5), καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒ >$ τῆς ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι $ΑΒ \leqq ΛΞ$. Ἔστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΒ = ΛΞ$, ἀλλὰ ἡ μὲν $ΑΒ = ΒΓ$, ἡ δὲ $ΞΛ = ΞΜ$, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΛΞ, ΞΜ· καὶ ἡ βάσις ΑΓ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὴν ΛΜ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΛΞΜ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ἡ μὲν $ΔΕΖ = ΜΞΝ$, καὶ ἀκόμη ἡ $ΗΘΚ = ΝΞΛ$· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς τὰς ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς. Ἐλήφθησαν δὲ μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἄτοπον. Ἡ ΑΒ ἄρα δὲν διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστίν. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΛΟ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς ΟΠ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΡΞ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, βάσις ἄρα ἡ ΡΛ βάσει τῇ ΡΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΛ, ΡΜ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΡ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

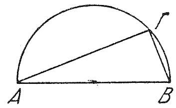


εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα· διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω μικροτέρα· καὶ ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΞΟ, ΒΓ = ΞΠ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΒΓ, εἶναι καὶ ΞΟ = ΞΠ· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΛΟ = ΠΜ. Ἡ ΛΜ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΠ (VI. 2) καὶ τὸ τρίγ. ΛΜΞ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ ΟΠΞ (I. 29)· εἶναι ἄρα ΞΛ : ΛΜ = ΞΟ : ΟΠ (VI. 4)· ἐναλλὰξ ΛΞ : ΞΟ = ΛΜ : ΟΠ (VI. 16). Εἶναι δὲ ΛΞ > ΞΟ· ἄρα καὶ ΛΜ > ΟΠ (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι ΛΜ = ΑΓ· εἶναι ἄρα ΑΓ > ΟΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΠ καὶ ἡ βάσις ΑΓ > βάσεως ΟΠ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ > τῆς γωνίας ΟΞΠ (I. 25). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΔΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΜΞΝ, ἡ δὲ ΗΘΚ τῆς ΝΞΛ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι αἱ ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΚ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν τριῶν ΛΞΜ + ΜΞΝ + ΝΞΛ. Ἀλλὰ ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΚ ἐλήφθησαν μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ΛΞΜ + ΜΞΝ + ΝΞΛ εἶναι μικρότεραι τεσσάρων ὀρθῶν. Ἀλλὰ εἶναι καὶ ἴσαι· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ΑΒ < ΛΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ἴση· εἶναι ἄρα ΑΒ > ΛΞ. Ἂς ὑψωθῇ λοιπὸν ἀπὸ τοῦ σημείου Ξ ἡ ΞΡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΛΜΝ (θ. 12) καὶ ἔστω $ΑΒ^2 — ΛΞ^2 = ΞΡ^2$, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΡΞ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΛΜΝ, εἶναι ἄρα ἡ ΡΞ κάθετος καὶ πρὸς ἑκάστην τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ. Καὶ ἐπειδὴ ΛΞ = ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΞΡ, ἡ βάσις ἄρα ΡΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΡΜ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΡΝ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΡΛ, ΡΜ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $ΑΒ^2 — ΛΞ^2 = ΞΡ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 = ΛΞ^2 + ΞΡ^2$. Εἶναι δὲ $ΛΞ^2 + ΞΡ^2 = ΛΡ^2$ (I. 47)· διότι ἡ γωνία ΛΞΡ εἶναι ὀρθή· ἄρα $ΑΒ^2 = ΡΛ^2$· ἄρα ΑΒ = ΡΛ. Ἀλλὰ ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ, ἑκατέρα δὲ τῶν ΡΜ, ΡΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΡΛ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ἐλήφθη ἡ βάσις ΛΜ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ, ἡ γωνία ἄρα ΛΡΜ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΑΒΓ (I. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ μὲν ΜΡΝ = ΔΕΖ, ἡ δὲ ΛΡΝ = ΗΘΚ.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα.

Ὃν δὲ τρόπον, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ᾿ αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΓΒ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ· ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

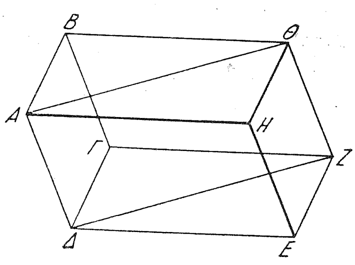


κδ΄.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ, ΓΖ ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

Ἐκ τριῶν ἄρα ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δοθείσας τρεῖς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, κατεσκευάσθη ἡ μὲ κορυφὴν τὸ Ρ στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λ ῆ μ μ α.

Πῶς δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$ ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς· ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $ΑΒ > ΛΞ$ καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΓ ἂς ἐναρμοσθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαμέτρου ΑΒ (IV. 1), καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ, ἡ ΑΓΒ ἄρα εἶναι ὀρθὴ (III. 31). Ἄρα $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΓΒ^2$ (I. 47). Ὥστε $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = ΓΒ^2$. Εἶναι δὲ $ΑΓ = ΛΞ$. Ἄρα $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΓΒ^2$. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν $ΞΡ = ΓΒ$, θὰ εἶναι $ΑΒ^2 - ΛΞ^2 = ΞΡ^2$· ὅπερ προέκειτο νὰ ποιηθῇ.

24.

Ἐὰν στερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα.

Διότι ἂς περιέχηται τὸ στερεὸν ΓΔΘΗ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτοῦ εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα.

Διότι ἐπειδὴ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΒΗ, ΓΕ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι (θ. 16). Ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ. Πάλιν, ἐπειδὴ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ τέμνονται ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ εἶναι παράλληλοι. Ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ΑΓ ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΘ, ΔΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων οὐχὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· θὰ περιέχωσιν ἄρα ἴσας γωνίας (θ. 15)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΒΘ ἴση πρὸς τὴν ΔΓΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο

ΔΓΖ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

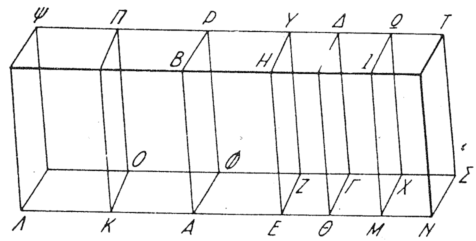
Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ, ΘΧ,



ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων τὰς ΔΓ, ΓΖ (Ι. 34), καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΓΖ, ἡ βάσις ἄρα ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΔΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΓΖ (Ι. 4). Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΒΗ, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕ· τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ = ΗΖ, τὸ δὲ ΑΕ = ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν περιέχηται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα αὐτοῦ εἶναι ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΗ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα τὰ ΡΑ, ΔΘ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΕΖΦ πρὸς τὴν βάσιν ΕΘΓΖ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒΖΥ πρὸς τὸ στερεὸν ΕΗΓΔ.

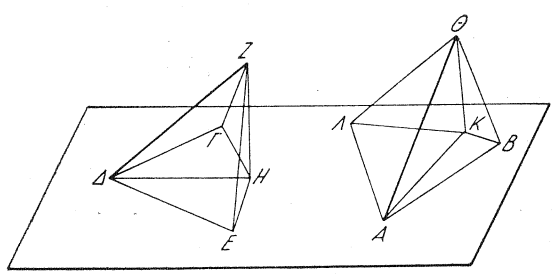
Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΘ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, καὶ ἂς ληφθῶσι πρὸς μὲν τὴν ΑΕ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΑΚ, ΚΛ, πρὸς δὲ τὴν ΕΘ ὁσαιδήποτε ἴσαι αἱ ΘΜ, ΜΝ καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ καὶ τὰ στερεὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι καὶ τὰ μὲν παραλληλόγραμμα ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἴσα πρὸς ἄλληλα, καὶ ἀκόμη τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἴσα πρὸς ἄλληλα· διότι κεῖνται ἀπέναντι (θ. 24). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὰ μὲν παραλληλόγραμμα ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἐπίσης, καὶ ἀκόμη τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν στερεῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ εἶναι ἴσα πρὸς τρία ἐπίπεδα (ἀντιστοίχως). Ἀλλὰ τὰ τρία εἶναι ἴσα πρὸς τὰς τρεῖς ἀπέναντι βάσεις (θ. 24)· τὰ τρία ἄρα στερεὰ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (ὁρ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· ὅσας ἄρα φορὰς ἡ βάσις ΛΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΑΖ, τόσας φορὰς καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ εἶναι τοῦ στερεοῦ ΑΥ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ὅσας φορὰς ἡ βάσις ΝΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΖΘ, τόσας εἶναι καὶ τὸ στερεὸν ΝΥ τοῦ στερεοῦ ΘΥ. Καὶ ἐὰν ἡ βάσις ΛΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΖ, εἶναι ἴσον καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ ἡ βάσις ΛΖ τῆς βάσεως ΝΖ, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ, ἐλλείπει. Διότι, ἐνῷ ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, δύο μὲν βάσεις αἱ ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεὰ τὰ ΑΥ, ΥΘ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βάσεως ΑΖ καὶ τοῦ στερεοῦ ΑΥ καὶ ἡ βάσις ΛΖ καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ, τῆς δὲ βάσεως ΘΖ καὶ τοῦ στερεοῦ ΘΥ καὶ ἡ *μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ ἥ τε ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΥ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ ἥ τε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΖΝ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

κϛ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΗΕ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ βάσις ΝΖ καὶ τὸ στερεὸν ΝΥ, καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ ἡ βάσις ΛΖ τῆς βάσεως ΖΝ, ὑπερέχει καὶ τὸ στερεὸν ΛΥ τοῦ στερεοῦ ΝΥ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴση, ἴσον, καὶ ἐὰν ἐλλείπῃ, ἐλλείπει. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΖ πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ, οὕτως τὸ στερεὸν ΑΥ πρὸς τὸ στερεὸν ΥΘ (V. ὁρ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ σημείου ἐπ' αὐτῆς ὡς κορυφῆς νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν στερεὰν γωνίαν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ Δ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ· πρέπει ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου ὡς κορυφῆς τοῦ Α νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ.

Διότι ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΕΔ, ΔΓ καὶ ἂς τέμνῃ αὕτη τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΗ, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Α πρὸς μὲν τὴν γωνίαν ΕΔΓ ἴση ἡ ΒΑΛ, πρὸς δὲ τὴν ΕΔΗ ἴση ἡ ΒΑΚ (Ι. 23), καὶ ἂς ληφθῇ ΑΚ = ΔΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΛ (θ. 12), καὶ ἂς ληφθῇ ΚΘ = ΗΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΑ· λέγω, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία Α ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν Δ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ.

Διότι ἂς ληφθῇ ΑΒ = ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου (ὁρ. 3)· ἑκατέρα ἄρα τῶν γωνιῶν ΖΗΔ, ΖΗΕ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΘΚΑ, ΘΚΒ εἶναι ὀρθή. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΚΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΕ ἀντιστοίχως, καὶ περιέχουσι γωνίας ἴσας, ἡ βάσις ἄρα ΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΕ (Ι. 4). Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ = ΗΖ· καὶ περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΘΒ = ΖΕ. Πάλιν, ἐπειδὴ δύο

δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση [ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσιν ἴσαι· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ εἰσιν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστιν ἴση]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

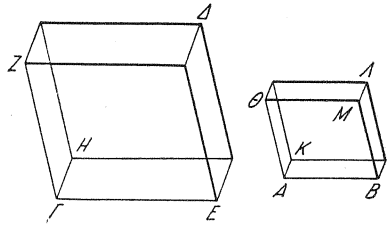
Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κζ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, τὴν δὲ ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ· καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΒ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα πλευραὶ αἱ ΑΚ, ΚΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΗ, ΗΖ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΑΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΔ (Ι. 4). Εἶναι δὲ καὶ ΑΒ = ΔΕ· δύο λοιπὸν αἱ ΘΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΖ, ΔΕ. Καὶ ἡ βάσις ἄρα ΘΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΕ· ἡ γωνία ἄρα ΒΑΘ = ΕΔΖ (Ι. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΘΑΛ = ΖΔΓ [διότι ἐὰν ληφθῇ ΑΛ = ΔΓ καὶ ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπειδὴ ὅλη ἡ ΒΑΛ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΕΔΓ, ἐξ ὧν ἐλήφθη ΒΑΚ = ΕΔΗ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΗΔ, ΔΓ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΚΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΓ. Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ = ΗΖ· δύο λοιπὸν αἱ ΛΚ, ΚΘ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΗ, ΗΖ· καὶ περιέχουσι γωνίας ὀρθάς· ἡ βάσις ἄρα ΘΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΔ, ΔΓ καὶ ἡ βάσις ΘΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΓ, ἡ γωνία ἄρα ΘΑΛ = ΖΓΔ]· Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΑΛ = ΕΔΓ.

'Επὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α κατεσκευάσθη στερεὰ γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν στερεὰν τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

27.

'Από τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγραφῇ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· πρέπει ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀναγραφῇ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΔ.

Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν γωνιῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ἴση πρὸς τὴν στερεὰν γωνίαν Γ, ὥστε ἡ μὲν ΒΑΘ = ΕΓΖ, ἡ δὲ ΒΑΚ = ΕΓΗ, ἡ δὲ ΚΑΘ = ΗΓΖ (θ. 26)· καὶ ἂς γίνῃ ΕΓ : ΓΗ = ΒΑ : ΑΚ καὶ ΗΓ : ΓΖ = ΚΑ : ΑΘ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι (διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη) ΕΓ : ΓΖ = ΒΑ : ΑΘ (V. 22). Καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒ καὶ τὸ στερεὸν ΑΛ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΕΓ : ΓΗ = ΒΑ : ΑΚ, καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΗΕ *ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.*

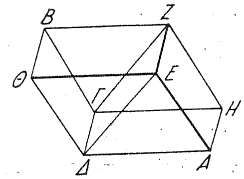
Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κη΄.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον· ἀπεναντίον γάρ· τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κθ΄.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΚΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖ καὶ ἀκόμη τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΓΔ εἶναι ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΑΛ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι, τὰ δὲ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν ΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν ΑΛ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ ἀνεγράφη στερεὸν τὸ ΑΛ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

28.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων, θὰ τμηθῇ τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου δίχα.

Διότι ἂς τμηθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ θὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ.

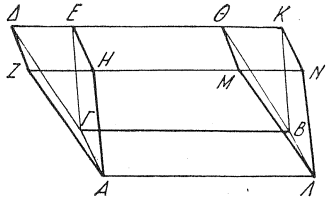
Διότι ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΓΗΖ = τρ. ΓΖΒ, τὸ δὲ ΑΔΕ = ΔΕΘ (Ι. 34), εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΑ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒ· διότι κεῖται ἀπέναντι· τὸ δὲ ΗΕ = ΓΘ (θ. 24), καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· διότι περιέχονται ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων καὶ κατὰ τὸ πλῆθος καὶ κατὰ τὸ μέγεθος (ὁρ. 10). Ὥστε ὅλον τὸ στερεὸν ΑΒ ἐτμήθη δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἔστω ὅτι καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Διότι ἐπειδὴ ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ ΓΒ ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΓΕ τρίγωνον τῷ ΘΒΚ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τρίγωνον τῷ ΜΛΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ πραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ· ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲ τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.



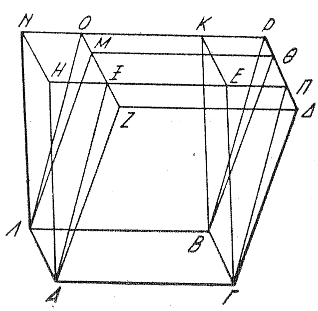
Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΓΜ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ, τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον,



εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΔΘ, ΕΚ (Ι. 34)· ὥστε καὶ ΔΘ = ΕΚ. Ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΕΘ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΘΚ. Ὥστε καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΒΚ (Ι. 4), τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΔΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΝ (Ι. 36). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΜΛΝ. Εἶναι δὲ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΓΖ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ, τὸ δὲ ΓΗ = ΒΝ· διότι κεῖνται ἀπέναντι (θ. 24)· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΛΝ, ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τὸ κοινὸν στερεόν, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΝ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῆς βάσεως ἀκμαὶ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ νὰ μὴ ἀπολήγωσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ ἂς συναντῶνται κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀκόμη ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΖΜ, ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο, Π καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ. Τὸ στερεὸν λοιπὸν ΓΜ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΖΔΘΜ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΟ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΞΠΡΟ· διότι εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΖΟ, ΔΡ (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ στερεὸν ΓΟ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΞΠΡΟ, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΒΛ, ἀπέναντι δὲ αὐτοῦ τὸ ΗΕΚΝ· διότι καὶ πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ. ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.

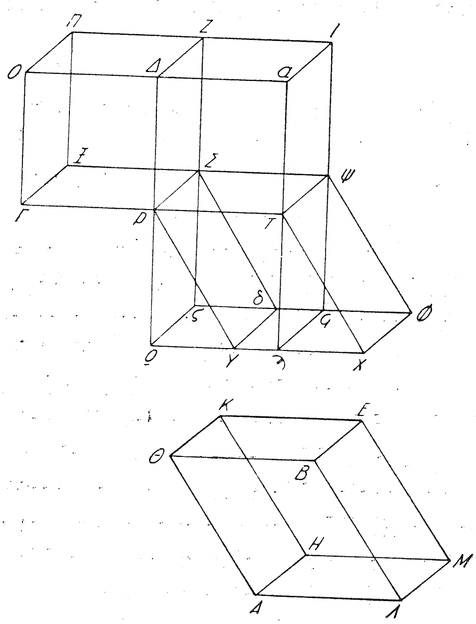
Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἡ ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλ-



ληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν αἱ ΔΡ, καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΗΠ, ΝΡ (θ. 29). Ὥστε καὶ τὸ στερεὸν ΓΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΝ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

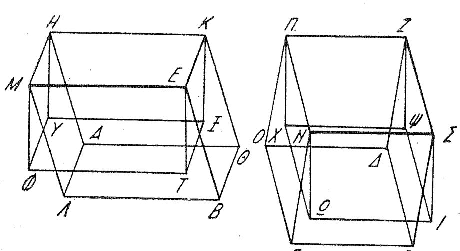
Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ.

Ἔστωσαν πρῶτον ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ ἀκμαὶ αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ εὐθεῖα ΡΤ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς εὐθείας ΓΡ καὶ μὲ τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Ρ ὡς κορυφὴν ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΤΡΥ = ΑΛΒ (Ι. 23), καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, πρὸς δὲ τὴν ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ καὶ ἡ βάσις ΡΧ καὶ τὸ στερεὸν ΨΥ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΛ, ΛΒ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΡΧ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΛ (VI. 14). Καὶ ἐπειδὴ πάλιν ΑΛ = ΡΤ καὶ ΛΜ = ΡΣ καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΜ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ΛΕ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΣΥ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΑΕ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΨΥ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία κείμενα ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία ἐπίσης πρὸς ἄλλα τρία ἀπέναντι· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΨΥ (ὁρ. 10). Ἂς προεκταθῶσιν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΔΩ παράλληλος ἡ ͵αΤϡ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ͵α, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΩΨ, ΡΙ. Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ΨΩ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ, ἀπέναντι δὲ τούτου τὸ ΩG, ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΨΥ, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΡΨ, ἀπέναντι δὲ τούτου τὸ ΥΦ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τϡ, ΤΧ, Σς, Σϭ, Ψς, ΨΦ καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας τὰς ΩΧ, ςΦ (θ. 29). Ἀλλὰ τὸ στερεὸν ΨΥ = στερεὸν ΑΕ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ στερεὸν ΨΩ = στερεὸν ΑΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΡΥΧΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΩΤ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς

ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ ‚αΤϡ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΟΔ κατὰ τὸ ‚α, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά. ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΩG, τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τϡ, ΤΧ, Σς, Σō, ΨG, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ, ς Φ. ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ· ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ, καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΤΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστιν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ, σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ.



ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΡΤ καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τῶν ΡΤ, ΩΧ (I. 35)· ἀλλὰ ΡΥΧΤ = ΓΔ, ἐπειδὴ ΡΥΧΔ = ΑΒ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΩΤ = ΓΔ. Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ : ΔΤ (V. 7). Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΓΙ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΡΖ ὄντος παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἡ βάσις ΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΔΤ, ὡς τὸ στερεὸν ΓΖ πρὸς τὸ στερεὸν ΡΙ (θ. 25). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΩΙ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΡΨ παραλλήλου ὄντος πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι βάσις ΩΤ : βάσιν ΤΔ = στερεὸν ΩΨ : στερεὸν ΡΙ. Ἀλλα ΓΔ : ΔΤ = ΩΤ : ΔΤ· καὶ συνεπῶς ΓΖ : ΡΙ = ΩΨ : ΡΙ. Ἑκάτερον ἄρα τῶν στερεῶν ΓΖ, ΩΨ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ ΡΙ· ἴσον ἄρα εἶναι τὸ στερεὸν ΓΖ πρὸς τὸ στερεὸν ΩΨ (V. 9). Ἀλλ' ἐδείχθη ΩΨ = ΑΕ· ἄρα ΑΕ = ΓΖ.

Ἔστω δεύτερον ὅτι αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ αἱ ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΝ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ, ΓΔ· λέγω πάλιν, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ. Διότι ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ν, Σ κάθετοι ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ ἂς τέμνωσι τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὰ σημεῖα Ξ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. Εἶναι λοιπὸν τὸ στερεὸν ΚΦ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΠΙ· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Ἀλλὰ τὸ μὲν στερεὸν ΚΦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΑΕ, τὸ δὲ ΠΙ πρὸς τὸ ΓΖ· διότι εἶναι ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας (θ. 30). Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΖ.

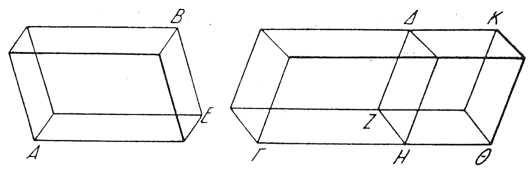
Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ΄.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ· ἐπί τε γαρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΘ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.



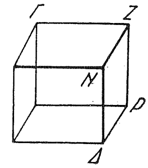
Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΚΟ στερεόν.



Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ

32.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΕ πρὸς τὴν βάσιν ΓΖ, οὕτω τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι ἂς παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΗ τὸ ΖΘ ἴσον πρὸς τὸ ΑΕ (Ι. 45), καὶ ἀπὸ τῆς βάσεως μὲν τῆς ΖΘ ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὸ ΓΔ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΗΚ. Ὅθεν εἶναι ἴσον τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΚ· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 31). Καὶ ἐπειδὴ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΔΗ παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΓΖ πρὸς τὴν βάσιν ΖΘ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΔΘ (θ. 25). Εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΖΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΕ, τὸ δὲ στερεὸν ΗΚ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΕ πρὸς τὴν βάσιν ΓΖ, οὕτως τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις.

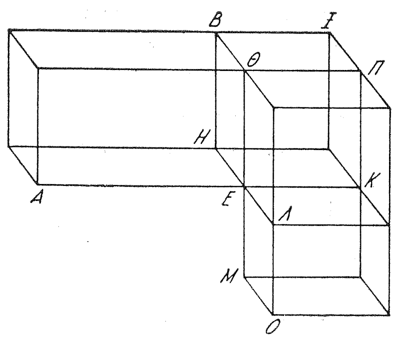
33.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ὁ λόγος τοῦ στερεοῦ ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $ΑΕ^3 : ΓΖ^3$.

Διότι ἂς προεκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ ἂς ληφθῇ ΕΚ = ΓΖ, ΕΛ = ΖΝ, ΕΜ = ΖΡ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛ καὶ τὸ στερεὸν ΚΟ.

Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΓΖ, ΖΝ, ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΚΕΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΖΝ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΑΕΗ = ΓΖΝ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΚΛ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΓΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ *αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΖ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. ἀλλ' ὡς ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ [μὲν] ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.*



Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλε-

τὸ μὲν παραλληλόγραμμον ΚΜ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ [παραλληλόγραμμον] ΓΡ καὶ ἀκόμη τὸ ΕΟ = ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΚΟ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία παραλληλόγραμμα τοῦ στερεοῦ ΓΔ. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τρία ἀπέναντί των (θ. 24)· ὅλον ἄρα τὸ στερεὸν ΚΟ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν ΓΔ. Ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΚ, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν παραλληλογράμμων ΗΚ, ΚΛ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὸ ΑΒ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΕΞ, ΛΠ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ΑΕ : ΓΖ = ΕΗ : ΖΝ = ΕΘ : ΖΡ (ὁρ. 9, VI ὁρ. 1), εἶναι δὲ καὶ ΓΖ = ΕΚ, ΖΝ = ΕΛ, ΖΡ = ΕΜ, εἶναι ἄρα ΑΕ : ΕΚ = ΗΕ : ΕΛ = ΘΕ : ΕΜ. Ἀλλὰ ΑΕ : ΕΚ = παραλ. ΑΗ : παραλ. ΗΚ, καὶ ΗΕ : ΕΛ = ΗΚ : ΚΛ, καὶ ΘΕ : ΕΜ = ΠΕ : ΚΜ (VI. 1)· καὶ ὡς ἄρα τὸ παραλ. ΑΗ : παραλ. ΗΚ = ΗΚ : ΚΛ = ΠΕ : ΚΜ. Ἀλλὰ ΑΗ : ΗΚ = στερεὸν ΑΒ : στερεὸν ΕΞ, καὶ ΗΚ : ΚΛ = στερεὸν ΞΕ : στερεὸν ΠΛ, καὶ ΠΕ : ΚΜ = στερεὸν ΠΛ : στερεὸν ΚΟ (θ. 32)· καὶ ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη εὑρίσκωνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τέταρτον ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον (V. ὁρ. 10)· ἄρα ΑΒ : ΚΟ = $ΑΒ^3$: $ΕΞ^3$. Ἀλλὰ ΑΒ : ΕΞ = παραλληλόγρ. ΑΗ : παραλληλόγρ. ΗΚ = εὐθεῖα ΑΕ : εὐθεῖα ΕΚ· ὥστε ΑΒ : ΚΟ = $ΑΕ^3$: $ΕΚ^3$. Εἶναι δὲ τὸ μὲν στερεὸν ΚΟ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΚ ἴση πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῆς ὁμολόγου αὐτοῦ πλευρᾶς ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΓΖ.

Τὰ ὅμοια ἄρα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εὑρίσκωνται ἐν ἀναλογίᾳ, θὰ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ στερεὸν παραλληλε-

πίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

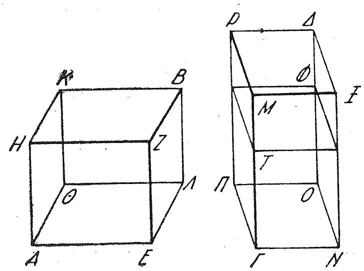
λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις [εἰ γὰρ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ [εἰ γὰρ μή, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἔξωθεν δὲ τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν· ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν,οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΤΠ βάσιν καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ πίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς ἴσας πρὸς τὴν πρώτην πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον παραλληλεπίπεδον τὸ ἔχον ἀκμὰς ἴσας πρὸς τὴν δευτέραν, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν τετάρτην ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν.

34.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB, ΓΔ· λέγω, ὅτι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων AB, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις EΘ πρὸς τὴν βάσιν NΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ AB.

(1). Διότι ἔστωσαν πρῶτον αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ αἱ AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ, ΠP κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις EΘ πρὸς τὴν βάσιν NΠ, οὕτως ἡ ΓM πρὸς τὴν AH.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν ἡ βάσις EΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν NΠ, εἶναι δὲ καὶ τὸ στερεὸν AB ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ ΓM = AH. Διότι τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (θ. 32), [διότι ἐὰν αἱ βάσεις EΘ, NΠ εἶναι ἴσαι, τὰ ὕψη ὅμως AH, ΓM ἄνισα, οὐδὲ τὸ στερεὸν AB θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἐλήφθη δὲ ἴσον· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισον τὸ ὕψος ΓM πρὸς τὸ ὕψος AH· ἴσον ἄρα]. Καὶ θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις EΘ πρὸς τὴν NΠ οὕτως ἡ ΓM πρὸς AH, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων AB, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(2). Τώρα ἂς μὴ εἶναι ἴση ἡ βάσις EΘ πρὸς τὴν βάσιν NΠ, ἀλλ' ἔστω μεγαλυτέρα ἡ EΘ. Εἶναι δὲ καὶ τὸ στερεὸν AB ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ· ἄρα ΓM > AH [διότι ἐὰν δὲν εἶναι, οὔτε τὰ στερεὰ AB, ΓΔ θὰ εἶναι ἴσα· ἐλήφθησαν δὲ ἴσα]. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ΓT = AH, καὶ ἂς συμπληρωθῇ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς NΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓT, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ στερεὸν AB = στερεὸν ΓΔ, ἔξω δὲ εἶναι τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον (V. 7), εἶναι ἄρα ὡς τὸ στερεὸν AB πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ στερεὸν AB πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως ἡ βάσις EΘ πρὸς τὴν βάσιν NΠ (θ. 32)· διότι τὰ στερεὰ AB, ΓΦ εἶναι ἰσοϋψῆ· ὡς δὲ τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως ἡ βάσις MΠ πρὸς τὴν βάσιν TΠ (θ. 25) καὶ ἡ ΓM

ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ [βάσει] ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ [βάσις] πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ, οὕτως ἥ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, ς, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστὶν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλλη-

πρὸς τὴν ΓΤ (VI. 1)· καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Εἶναι δὲ ΓΤ = ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

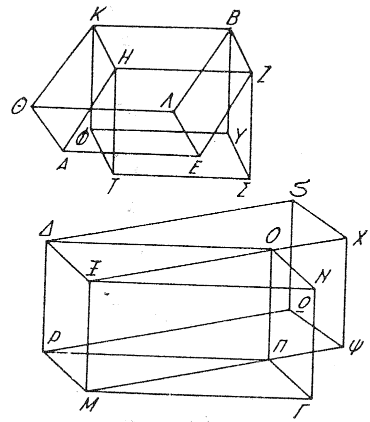
(3). Πάλιν τώρα ἂς εἶναι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι ἔστωσαν πάλιν αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις. Καὶ ἂν μὲν ΕΘ = ΝΠ, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ, εἶναι ἄρα ἴσον καὶ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

(4). Ἂς μὴ εἶναι τώρα ἡ βάσις ΕΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, ἀλλ' ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΕΘ· καὶ τὸ ὕψος ἄρα τοῦ στερεοῦ ΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὕψους τοῦ στερεοῦ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Ἂς ληφθῇ πάλιν ΓΤ = ΑΗ καὶ ἂς συμπληρωθῇ ὁμοίως τὸ στερεὸν ΓΦ. Ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, εἶναι δὲ ΑΗ = ΓΤ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ (θ. 32)· διότι τὰ στερεὰ ΑΒ, ΓΦ εἶναι ἰσοϋψῆ· ὡς δὲ ΓΜ : ΓΤ οὕτως καὶ ἡ βάσις ΜΠ πρὸς τὴν βάσιν ΠΤ (VI. 1) καὶ τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ (θ. 25). Καὶ ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΒ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ, οὕτως τὸ στερεὸν ΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΦ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἔχει πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα στερεὸν ΑΒ = στερεὸν ΓΔ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

(5). Ἂς μὴ εἶναι τώρα αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀκμαὶ αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ, ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΕΘ, ΝΠ κάθετοι καὶ ἂς τέμνωσιν αὗται τὰ ἐπίπεδα κατὰ τὰ σημεῖα Σ, Τ, Υ, Φ καὶ Χ, Ψ, Ω, Σ ἀντιστοίχως, καὶ ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΖΦ, ΞΩ· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ, αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ.

Ἐπειδὴ τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ = ΒΤ (θ. 29 — 30)· διότι εἶναι καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]· τὸ δὲ στερεὸν ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΨ· διότι πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀκμαὶ δὲν ἀπολήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΒΤ *λεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.*



Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν [ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα]· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ τῷ ΒΑ ἴσον ἐστίν· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς [εἰσι] τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν [ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἐστιν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν

εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΨ [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν, αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη]. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ (2ον μέρος τοῦ θεωρήματος). Εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΖΚ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΘ, ἡ δὲ βάσις ΞΡ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ. Τὰ δὲ ὕψη τῶν στερεῶν ΔΨ, ΒΤ καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ εἶναι τὰ αὐτά· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

(6). Πάλιν ἂς εἶναι τῶν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ΑΒ, ΓΔ, αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ὕψη, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτω τὸς ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ.

Διότι, ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΕΘ πρὸς τὴν βάσιν ΝΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ, εἶναι δὲ ἡ μὲν βάσις ΕΘ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΖΚ, ἡ δὲ ΝΠ πρὸς τὴν ΞΡ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτω τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΑΒ. Εἶναι δὲ τὰ ὕψη τῶν στερεῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ΒΤ, ΔΨ τὰ αὐτά· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΖΚ πρὸς τὴν βάσιν ΞΡ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΔΨ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΤ. Τῶν στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ΒΤ, ΔΨ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν [τὰ δὲ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα· τὸ στερεὸν ἄρα ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΨ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ· διότι εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]. Τὸ δὲ στερεὸν ΔΨ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΔΓ [διότι πάλιν εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἀπὸ τῶν βάσεων ἀναχωροῦσαι ἀκμαὶ δὲν καταλήγουσιν εἰς τὰς αὐτὰς εὐθείας]. Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

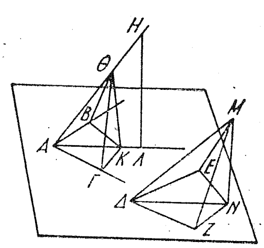
35.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀπὸ τῶν κορυφῶν δὲ αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι κείμεναι ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων τῶν γωνιῶν σχηματί-

ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ ΑΗ, ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα τὰ Η, Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Ν, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΛ παράλληλος ἡ ΘΚ. ἡ δὲ ΗΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ, ΝΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ, ΓΑ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ΓΑ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ, ΓΑ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν



ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΘΑ τῇ ΜΔ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἐστιν ἴση [οὕτως· ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκεινται γάρ· καὶ ἔστιν ἡ

ζουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἴσας γωνίας ἀντιστοίχως, ληφθῶσι δὲ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθεισῶν εὐθειῶν καὶ ἀπὸ τούτων ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐπιπέδων ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων ἀχθῶσιν εὐθεῖαι μέχρι τῶν κορυφῶν τῶν δοθεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αὗται μετὰ τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθεισῶν εὐθειῶν θὰ σχηματίζωσι γωνίας ἴσας.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ΒΑΓ, ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Α, Δ ἂς ἀχθῶσιν ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων αἱ ΑΗ, ΔΜ σχηματίζουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἴσας γωνίας ἀντιστοίχως, τὴν μὲν ΜΔΕ = ΗΑΒ, τὴν δὲ ΜΔΖ = ΗΑΓ, καὶ ἂς ληφθῶσι ἐπὶ τῶν ΑΗ, ΔΜ τυχόντα σημεῖα τὰ Η, Μ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Η, Μ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΒΑΓ, ΕΔΖ κάθετοι αἱ ΗΛ, ΜΝ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΑ, ΝΔ· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΗΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἂς ληφθῇ ΑΘ = ΔΜ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Θ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΛ. Ἡ δὲ ΗΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ (θ. 8). Ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Κ, Ν ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΔΖ, ΔΕ κάθετοι αἱ ΚΓ, ΝΖ, ΚΒ, ΝΕ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΓ, ΓΒ, ΜΖ, ΖΕ. Ἐπειδὴ $ΘΑ^2 = ΘΚ^2 + ΚΑ^2$ (Ι. 47), καὶ $ΚΑ^2 = ΚΓ^2 + ΓΑ^2$, θὰ εἶναι ἄρα $ΘΑ^2 = ΘΚ^2 + ΚΓ^2 + ΓΑ^2$. Εἶναι δὲ $ΘΚ^2 + ΚΓ^2 = ΘΓ^2$· ἄρα $ΘΑ^2 = ΘΓ^2 + ΓΑ^2$. Ἡ γωνία ἄρα ΘΓΑ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΔΖΜ εἶναι ὀρθή. Ἡ γωνία ἄρα ΑΓΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΔΖΜ. Εἶναι δὲ καὶ ΘΑΓ = ΜΔΖ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο γωνίας ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευράν, τὴν κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΘΑ = ΜΔ· θὰ ἔχωσι ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως (Ι. 26). Ἄρα ΑΓ = ΔΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ ΑΒ = ΔΕ [ὡς ἑξῆς· ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΒ, ΜΕ. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΘ^2 = ΑΚ^2 + ΚΘ^2$, καὶ $ΑΚ^2 = ΑΒ^2 + ΒΚ^2$, εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΚ^2 + ΚΘ^2 = ΑΘ^2$. Ἀλλὰ $ΒΚ^2 + ΚΘ^2 = ΒΘ^2$· διότι ἡ γωνία ΘΚΒ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ ἡ ΘΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἄρα $ΑΘ^2 = ΑΒ^2 + ΒΘ^2$· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΘ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γωνία ΔΕΜ εἶναι ὀρθή. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΒΑΘ = ΕΔΜ· ἐξ ὑποθέσεως· καὶ εἶναι ἡ ΑΘ = ΔΜ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ = ΔΕ]. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΑΓ = ΔΖ καὶ ΑΒ = ΔΕ, ὑπάρχουσι δύο πλευραὶ αἱ ΓΑ, ΑΒ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΔ, ΔΕ. Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΓΑΒ = ΖΔΕ· ἡ βάσις ἄρα ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖ καὶ τὸ τρίγωνον (ΑΒΓ) ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον (ΔΕΖ) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας (Ι. 4)· Ἡ γωνία ἄρα ΑΓΒ = ΔΖΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΑΓΚ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΔΖΝ· καὶ

ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστιν ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΜΝ ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α ἴση ἡ ΔΜ, καὶ συν-

ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΕΖΝ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι ΓΒΚ = ΖΕΝ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας πρὸς δύο ἀντιστοίχως καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ἐφ' ἧς κεῖνται αἱ ἴσαι γωνίαι, τὴν ΒΓ = ΕΖ· θὰ ἔχωσιν ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς (I. 26). Εἶναι ἄρα ἡ ΓΚ = ΖΝ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΓ = ΔΖ· δύο λοιπὸν πλευραὶ αἱ ΑΓ, ΓΚ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΖ, ΖΝ· καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας. Ἡ βάσις ἄρα ΑΚ = βάσιν ΔΝ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΘ = ΔΜ εἶναι καὶ $ΑΘ^2 = ΔΜ^2$. Ἀλλὰ $ΑΘ^2 = ΑΚ^2 + ΚΘ^2$· διότι ἡ γωνία ΑΚΘ εἶναι ὀρθή· καὶ $ΔΜ^2 = ΔΝ^2 + ΝΜ^2$· διότι ἡ ΔΝΜ εἶναι ὀρθή· ἄρα $ΑΚ^2 + ΚΘ^2 = ΔΝ^2 + ΝΜ^2$, ἐξ ὧν $ΑΚ^2 = ΔΝ^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΚΘ^2 = ΝΜ^2$· ἄρα ΘΚ = ΜΝ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΘΑ, ΑΚ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΔ, ΔΝ ἀντιστοίχως, καὶ ἐδείχθη βάσις ΘΚ = βάσιν ΜΝ, ἡ γωνία ἄρα ΘΑΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΜΔΝ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ τὰ λοιπὰ τῆς προτάσεως· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α.

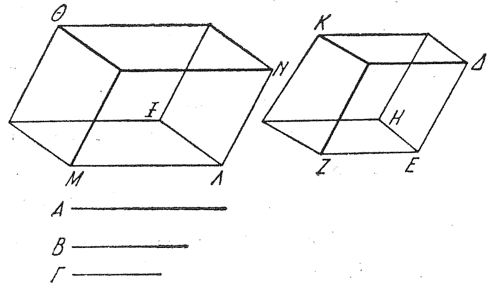
Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀχθῶσι δὲ πρὸς τὰς κορυφάς των πλάγιαι ἴσαι κείμεναι ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων περιέχουσαι δὲ γωνίας ἴσας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἀντιστοίχως, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ Α, Β, Γ ἤτοι Α : Β = Β : Γ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν Α × Β × Γ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $Β^3$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἂς ληφθῇ στερεὰ γωνία μὲ κορυφὴν τὸ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἑκάστη μὲν τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ ἴση πρὸς τὴν Β καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΕΚ, πρὸς δὲ τὴν Α ἴση ἡ ΛΜ, εστάτω πρὸς τῇ ΛΜ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΛΜ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΛΞ, ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛΝ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΝΛΜ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΛΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστίν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. καί ἐστι τὸ μὲν ΛΘ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λζ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΜ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Λ ἴση στερεὰ γωνία πρὸς τὴν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ε, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ΝΛΞ, ΞΛΜ, ΜΛΝ, καὶ ἂς ληφθῇ ΛΞ = Β καὶ ΛΝ = Γ. Καὶ ἐπειδὴ Α : Β = Β : Γ, εἶναι δὲ Α = ΛΜ καὶ Β = ΛΞ = ΕΔ, ἡ δὲ Γ = ΛΝ, εἶναι ἄρα ΛΜ : ΕΖ = ΔΕ : ΛΝ. Ὅθεν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΝΛΜ, ΔΕΖ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι· τὸ παραλληλόγραμμον ἄρα ΜΝ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖ (VI. 14). Καὶ ἐπειδὴ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι αἱ ΔΕΖ, ΝΛΜ εἶναι ἴσαι καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναχωροῦσιν ἀκμαὶ ἐκτὸς τῶν ἐπιπέδων των αἱ ΛΞ, ΕΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἀντιστοίχως, αἱ κάθετοι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ξ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΝΛΜ, ΔΕΖ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι (θ. 35, πόρ.)· ὥστε τὰ στερεὰ ΛΘ, ΕΚ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΘΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΚ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν στερεὸν ΛΘ = στερεὸν $\text{Α} \times \text{Β} \times \text{Γ}$, τὸ δὲ ΕΚ = στερεὸν Β^3· τὸ στερεὸν ἄρα παραλληλεπίπεδον $\text{Α} \times \text{Β} \times \text{Γ}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἰσόπλευρον μὲν Β^3, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προηγούμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

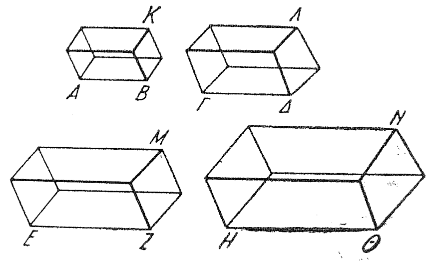
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω, ὅτι ΚΑ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ.

Διότι ἐπειδὴ τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΚΑ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΛΓ, ἄρα ΚΑ : ΛΓ = $(\text{ΑΒ} : \text{ΓΔ})^3$ (θ. 33). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ΜΕ : ΝΗ = $(\text{ΕΖ} : \text{ΗΘ})^3$. Καὶ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ. Καὶ ὡς ἄρα ΑΚ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεόν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

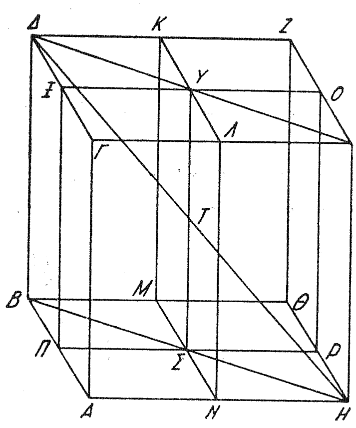


Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Κύβου γὰρ τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.



Ἐπεζεύχθωσιν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς

'Αλλὰ τώρα ἔστω τὸ στερεὸν ΑΚ : στερεὸν ΛΓ = στερεὸν ΜΕ : στερεὸν ΝΗ· λέγω, ὅτι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ.

Διότι, ἐπειδὴ πάλιν τὸ ΚΑ : ΛΓ = (ΑΒ : ΓΔ $)^3$ (θ. 33), εἶναι δὲ καὶ ΜΕ : ΝΗ = (ΕΖ : ΗΘ $)^3$, καὶ εἶναι ΚΑ : ΛΓ = ΜΕ : ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ.

'Εὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

'Εὰν αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν διέλθωσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Διότι ἂς τέμνωνται τοῦ κύβου ΑΖ αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τῶν ΓΖ, ΑΘ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἂς διέρχωνται τὰ ἐπίπεδα ΚΝ, ΞΡ, ἔστω δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΥΣ, διαγώνιος δὲ τοῦ κύβου ΑΖ ἡ ΔΗ. Λέγω, ὅτι ΥΤ = ΤΣ καὶ ΔΤ = ΤΗ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΞ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ΔΞΥ, ΥΟΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (Ι. 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΔΞ = ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ = ΥΟ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΔΥ = ΥΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΔΞΥ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΥΕ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας (Ι. 4)· ἡ γωνία ἄρα ΞΥΔ = ΟΥΕ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον βεβαίως ἡ ΔΥΕ εἶναι εὐθεῖα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΒΣΗ εἶναι εὐθεῖα, καὶ ἡ ΒΣ = ΣΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ, ἀλλὰ ἡ ΓΑ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ (θ. 9). Καὶ συνδέουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ (Ι. 33). Ἡ μὲν ἄρα γωνία ΕΔΤ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΗΤ· διότι εἶναι ἐναλλάξ· ἡ δὲ ΔΤΥ = ΗΤΣ (Ι. 15). Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ, ἔχοντα τὰς δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δύο γωνίας καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ἀπέναντι μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν, εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ· ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

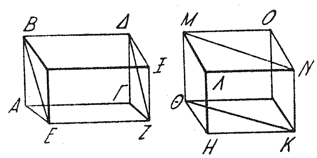
Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.



Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὴν ΔΥ = ΗΣ· διότι αὗται εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν ΔΕ, ΒΗ· ὅθεν θὰ ἔχωσι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς (I. 26). Ἄρα ἡ μὲν ΔΤ = ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ = ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν διέλθωσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Ἐὰν δύο πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἂς ἔχῃ βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ, τὸ δὲ τὸ τρίγωνον ΗΘΚ, ἔστω δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜΝ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ ΑΞ, ΗΟ. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ, εἶναι δὲ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΘΚ, εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα (θ. 31)· τὸ στερεὸν ἄρα ΑΞ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΗΟ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν στερεοῦ ΑΞ ἥμισυ τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ δὲ στερεοῦ ΗΟ ἥμισυ τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ· τὸ πρίσμα ἄρα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ.

Ἐὰν ἄρα δύο πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

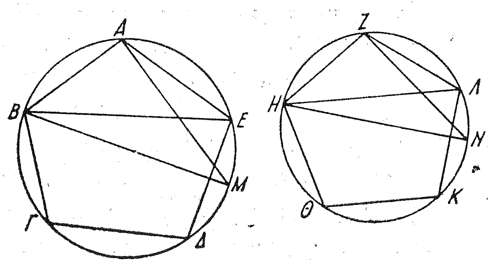
ιβ'.

α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΖΗΘ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ



γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἐστιν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Βιβλίον XII.

1.

Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΖΗΘ καὶ τὰ εἰς αὐτοὺς ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω, ὅτι $ΒΜ^2 : ΗΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ΑΒ ΓΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΖΗΘΚΛ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΒΑΕ = ΗΖΛ, καὶ εἶναι ΒΑ : ΑΕ = ΗΖ : ΖΛ (VI. ὁρ. 1). Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο τρίγωνα τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς μίαν γωνίαν τὴν ΒΑΕ = ΗΖΛ, τὰς δὲ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀναλόγους· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΛ (VI. 6). Ἡ γωνία ἄρα ΑΕΒ = ΖΛΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΒ = ΑΜΒ· διότι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (III. 27)· ἡ δὲ ΖΛΗ = ΖΝΗ. ἄρα καὶ ἡ ΑΜΒ = ΖΝΗ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ὀρθὴ ΒΑΜ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΗΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπήν. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΜ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΗΝ. Εἶναι ἄρα ΒΜ : ΗΝ = ΒΑ : ΗΖ (VI. 4). Ἀλλὰ $(ΒΜ : ΗΝ)^2 = ΒΜ^2 : ΗΝ^2$, καὶ $(ΒΑ : ΗΖ)^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ (VI. 20)· καὶ ὡς ἄρα $ΒΜ^2 : ΗΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΖΗΘΚΛ.

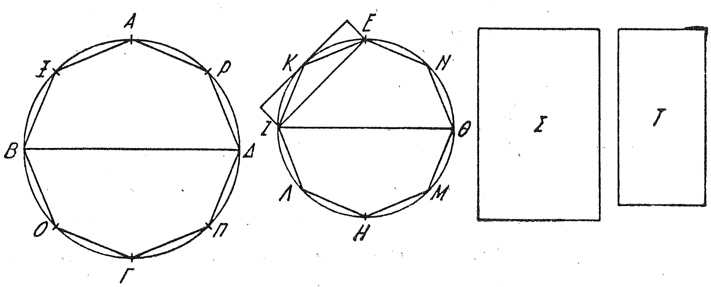
Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν



ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ κατα-

2.

Οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ $=$ ΒΔ^2 : ΖΘ^2.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ $=$ ΒΔ^2 : ΖΘ^2, θὰ εἶναι ὡς τὸ ΒΔ^2 πρὸς τὸ ΖΘ^2, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς μικρότερον ἢ πρὸς μεγαλύτερον χωρίον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Σ. Καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἐγγεγραμμένον ὅμως τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ὁ κύκλος εἶναι μικρότερος· ὥστε τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτό, ἐπειδή, ἐὰν διὰ τῶν σημείων Κ, Λ, Μ, Ν φέρωμεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερον τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦντος τμήματος τοῦ κύκλου. Τέμνοντες λοιπὸν τὰ ὑπολειπόμενα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ πράττοντες τοῦτο ἐπ' ἄπειρον, θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ΕΖΗΘ τοῦ χωρίου Σ. Διότι ἐδείχθη εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι ἂν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη καὶ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ἀπομένοντος ἀφαιρεθῇ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος, καὶ τοῦτο γίνηται ἐπ' ἄπειρον, θὰ ὑπολειφθῇ μέγεθός τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροτέρου μεγέθους. Ἂς ὑπολειφθῶσι λοιπὸν καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, ἣν ὑπερέχει ὁ κύκλος ΕΖΗΘ τοῦ χωρίου Σ. Τὸ ἀπομένον ἄρα πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χωρίου Σ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· εἶναι ἄρα ΒΔ^2 : ΖΘ^2 $=$ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ (θ. 1). Ἀλλὰ καὶ ΒΔ^2 :

λειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ. ἀνάπαλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύ-

$Z\Theta^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Σ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος πρὸς τὸ χωρίον Σ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν πολύγωνον, οὕτως τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ (V. 16). Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ κύκλος ΑΒΓΔ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· καὶ τὸ χωρίον ἄρα Σ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς $B\Delta^2$ πρὸς $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ $Z\Theta^2$ πρὸς $B\Delta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ εἶναι ὡς τὸ $B\Delta^2$ πρὸς $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Σ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς τὸ $Z\Theta^2$ πρὸς τὸ ΔB^2, οὕτως τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ (V. 7, πόρ.). Ἀλλ' ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (κατωτ. λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα τὸ $Z\Theta^2$ πρὸς τὸ $B\Delta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ $B\Delta^2$ πρὸς τὸ $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς χωρίον τι μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον· εἶναι ἄρα ὡς τὸ $B\Delta^2$ πρὸς τὸ $Z\Theta^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ.

Οἱ κύκλοι ἄρα εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Λέγω τώρα, ὅτι τοῦ χωρίου Σ ὄντος μεγαλυτέρου τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ.

Διότι ἂς γίνῃ ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸ χωρίον Τ. Λέγω, ὅτι τὸ χωρίον Τ εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Διότι, ἐπειδὴ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸ χωρίον Τ, ἐναλλὰξ εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύ-

κλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ΄.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνους ἐχούσας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΔΘ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση. δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ [ἐστιν] ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΘΚ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΛΘ.

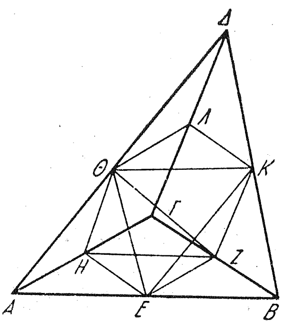
κλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ χωρίον Τ (V. 16). Εἶναι δὲ μεγαλύτερον τὸ χωρίον Σ τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ· καὶ ὁ κύκλος ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ χωρίου Τ (V. 14). Ὥστε εἶναι ὡς τὸ χωρίον Σ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς χωρίον τι μικρότερον τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Πᾶσα πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην ἐχούσας τριγώνους βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσας πρὸς ἀλλήλας πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τριγώνους καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο ἴσα πρίσματα· καὶ ὅτι τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Διότι ἂς τμηθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΕ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΚΖ, ΖΗ. Ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ = ΔΘ, ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΒ (VI. 2). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΘΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ ΘΕΒΚ ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ΘΚ = ΕΒ (I. 34). Ἀλλὰ ΕΒ = ΕΑ· ἄρα καὶ ΑΕ = ΘΚ. Εἶναι δὲ καὶ ΑΘ = ΘΔ· ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΑ, ΑΘ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΚΘ, ΘΔ· καὶ εἶναι ἡ γωνία ΕΑΘ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΘΔ, (I. 29)· ἡ βάσις ἄρα ΕΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΔ (I. 4). Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΕΘ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΘΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΛΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων καὶ μὴ εὑρισκομένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσιν γωνίας ἴσας (XI. 10). Ἡ γωνία ἄρα ΕΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΔΛ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο εὐθείας τὰς ΚΔ, ΔΛ, καὶ ἡ γωνία ΕΘΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΔΛ, ἡ βάσις ἄρα ΕΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΛ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΕΘΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΔΛ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΛ. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ εἶναι ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (XI. ὁρ. 10). Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἡ ΘΚ ἤχθη παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΚ *καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμίς, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον [ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον]. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. — Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα,*



καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα, ἐπειδήπερ [καὶ] ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα.

(I. 29) καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΔΒ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΘΚ (VI. ὁρ. 1). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΚΛ, τὸ δὲ ΑΔΓ πρὸς τὸ ΔΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, αἱ ὁποῖαι δὲν εὑρίσκονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας (XI. 10). Ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΚΘΛ. Καὶ εἶναι ΒΑ : ΑΓ = ΚΘ : ΘΛ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΘΚΛ (VI. 6). Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (XI. ὁρ. 9). Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ [ὥστε καὶ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ]. Ἑκατέρα ἄρα τῶν πυραμίδων ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ εἶναι ὁμοία πρὸς ὅλην τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ ΒΖ = ΖΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΗΖΓ (I. 41). Καὶ ἐπειδή, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ (τριγωνικά), καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ (XI. 39). Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων ἀφ' ἑνὸς ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, ἀφ' ἑτέρου ἐκείνου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΗΖΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, εἶναι μεγαλύτερον ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Θ, Δ, ἐπειδὴ καὶ ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΕΚ, τὸ μὲν πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ· διότι περιέχονται ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων. Ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ μὲν πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΒΖΗ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις

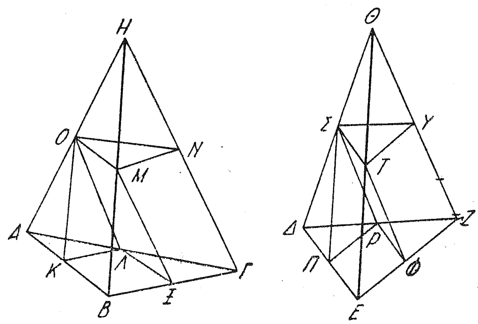
Ἡ ἄρα ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ.'

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΑΒ καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως



κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ [τρίγωνον], μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΗΖΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ τρίγωνον ΘΚΛ· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Θ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΘΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Τὰ εἰρημένα ἄρα δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ, ΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Θ, Δ.

Ἡ ὅλη ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, διῃρέθη καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας [καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἄλλης πυραμίδος, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΞ = ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ = ΛΓ (θ. 3), ἡ ΛΞ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΒΓ εἶναι διπλασία τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, εἶναι ἄρα ΒΓ : ΓΞ = ΕΖ : ΖΦ. Καὶ ἔχουσιν ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΓΞ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΔΕΖ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ (VI. 22)· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ (V. 16). Ἀλλ' ὡς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ (κατωτέρω λῆμμα)· καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, *οὕτως τὸ ΛΞΓ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλʼ ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.*

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλʼ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΞΓ, ΡΦΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥ τε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΞΛ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΟΜ, πρὸς τὸ πρίσμα τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΠΕΦΡ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΣΤ (XI. 39, V. 7 καὶ θ. 3). Καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΞΛ, ἀπέναντι δὲ ἡ ΟΜ, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὰ πρίσματα, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ ΠΕΦΡ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΣΤ, καὶ ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ καθ' ὅμοιον τρόπον ἐὰν αἱ πυραμίδες ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ διαιρεθῶσι καὶ εἰς δύο πρίσματα καὶ εἰς δύο πυραμίδας, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΟΜΝ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως τὰ δύο πρίσματα τῆς πυραμίδος ΟΜΝΗ πρὸς τὰ δύο πρίσματα τῆς πυραμίδος ΣΤΥΘ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΟΜΝ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ· διότι ἕκαστον τῶν τριγώνων ΟΜΝ, ΣΤΥ εἶναι ἴσον πρὸς ἕκαστον τῶν τριγώνων ΛΞΓ, ΡΦΖ ἀντιστοίχως. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα, Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διαιρέσωμεν καὶ εἰς δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὸ ἰσοπληθὲς ἄθροισμα τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΛΞΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΓ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

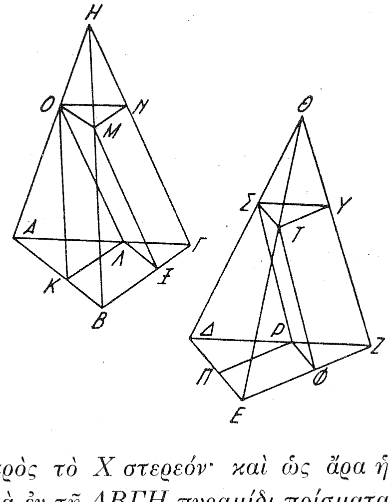
Διότι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος ἂς νοηθῶσιν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πυραμίδες ἐλήφθησαν ἰσοϋψεῖς. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ, θὰ τμηθῶσιν εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους (XI. 17). Καὶ ἔχει τμηθῆ ἡ ΗΓ δίχα κατὰ τὸ Ν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΝ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ τμηθῇ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜΝ δίχα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ θὰ τμηθῇ δίχα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΣΤΥ. Καὶ εἶναι ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ· εἶναι ἄρα ἴσαι καὶ αἱ ἀπὸ τῶν τριγώνων ΟΜΝ, *τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι. ἰσοϋψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοϋψῆ καὶ πρὸς ἄλληλά [εἰσιν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Χ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι



ΣΤΥ κάθετοι ἐπὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ. Τὰ πρίσματα ἄρα, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι τὰ τρίγωνα ΛΞΓ, ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ εἶναι ἰσοϋψῆ. Ὥστε καὶ τὰ ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀναγραφόμενα ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΛΞΓ πρὸς τὴν βάσιν ΡΦΖ, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

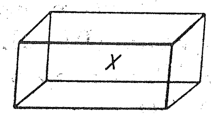
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ ἢ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ στερεὸν ἢ πρὸς μεγαλύτερον. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Χ καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· ὅθεν τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος (θ. 3). Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύπτουσαι πυραμίδες ἂς διαιρεθῶσιν ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἂς γίνεται πάντοτε, μέχρις ὅτου ὑπολειφθῶσι πυραμίδες τινὲς ἀπὸ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεραι τῆς ὑπεροχῆς καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ τοῦ στερεοῦ Χ (Χ. 1). Ἂς ὑπολειφθῶσι καὶ ἔστωσαν π.χ. αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· τὰ ὑπόλοιπα ἄρα πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι μεγαλύτερα τοῦ στερεοῦ Χ. Ἂς διαιρεθῇ καὶ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ (θ. 4). Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὸ στερεὸν Χ· καὶ ὡς ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὸ στερεὸν Χ, οὕτως τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὰ πρίσματα αὐτῆς, οὕτως τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὰ πρίσματα τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ τῶν πρισμάτων της· εἶναι ἄρα μεγαλύτερον καὶ τὸ στερεὸν Χ τῶν πρισμάτων τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὔπρίσματα. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

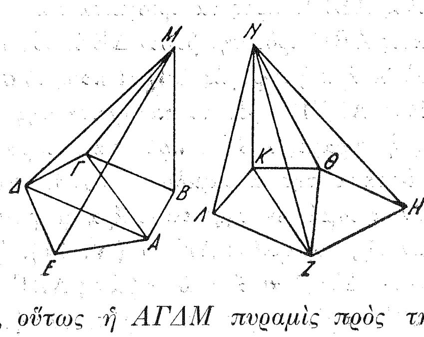


ϛ'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ· ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν,



τως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Χ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (λῆμμα 2 θεωρήμ.) καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ πρὸς μικρότερόν τι τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· ὅπερ ἐδείχθη ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι πολυγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Μ, Ν· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ.

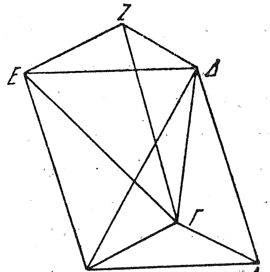
Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΖΘ, ΖΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο πυραμίδες αἱ ΑΒΓΜ, ΑΓΔΜ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις (θ. 5)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓΔ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΓΔΜ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΓΔ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΓΔΜ. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Δι' ἴσου ἄρα (V. 22) εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Καὶ διὰ συνθέσεως πάλιν (V. 18) εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΑΔΕ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΔΕΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ βάσις ΖΗΘΚΛ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως καὶ ἡ πυραμὶς ΖΗΘΚΛΝ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ. Καὶ ἐπειδὴ *οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΗΘ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΗΘΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

ζ΄.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις



μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ὑπάρχουσι δύο πυραμίδες αἱ ΑΔΕΜ, ΖΗΘΝ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΑΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ, οὕτως ἦτο ἡ πυραμὶς ΑΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔΕΜ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΝ (V. 22). Ἀλλ' ὅμως καὶ ὡς ἡ βάσις ΖΗΘ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἦτο καὶ ἡ πυραμὶς ΖΗΘΝ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ. Καὶ δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΚΛ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΜ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΗΘΚΛΝ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Πᾶν πρῖσμα ἔχον βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Ἔστω πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΔ (I. 34)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ. Ἀλλὰ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ΖΓΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΕ, τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΒΕ. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΓΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ. Ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, ἐδείχθη ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ, εἶναι ἴση πρὸς πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

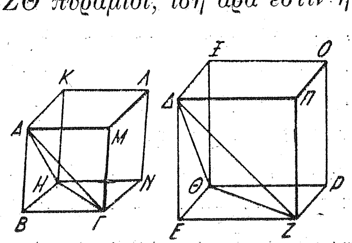
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα



ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τὸ σημεῖον Γ· διῃρέθη ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἐχούσας βάσεις τριγώνους.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ· διότι περιέχονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων· ἡ δὲ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Γ, ἐδείχθη ὅτι εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτήν, δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπέναντι δὲ ταύτης τὸ ΔΕΖ.

Πόρισμα.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς αὐτὴν [ἐπειδὴ καὶ ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχῃ ἄλλο εὐθύγραμμον σχῆμα (ἐκτὸς δηλ. τοῦ τριγώνου), τοιοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ σχῆμα τὸ ἀπέναντι τῆς βάσεως, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπέναντι τούτων ἐπίπεδα, τρίγωνα, καὶ εἶναι ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, εἶναι ἄρα ἴση ἡ μὲν γωνία ΑΒΓ πρὸς τὴν γωνίαν ΔΕΖ, ἡ δὲ ΗΒΓ πρὸς τὴν ΘΕΖ, ἡ δὲ ΑΒΗ πρὸς τὴν ΔΕΘ, καὶ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ μὲν ΒΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΡ, τὸ δὲ ΒΚ πρὸς τὸ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ εἶναι πρὸς τὰ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὰ τρία ἀπέναντι, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια πρὸς τὰ τρία ἀπέναντι (ΧΙ. 24). Τὰ στερεα ἄρα ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ περιέχονται ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων κατὰ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν. τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἡ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ τὸ πλῆθος. Τὸ στερεὸν ἄρα ΒΗΜΛ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουσι λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (XI. 33). Τὸ στερεὸν ἄρα ΒΗΜΛ ἔχει λόγον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ ὃν λόγον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΕΖ, εἰς τὸν κύβον. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τοῦ στερεοῦ, διότι καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, εἰς τὸν κύβον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

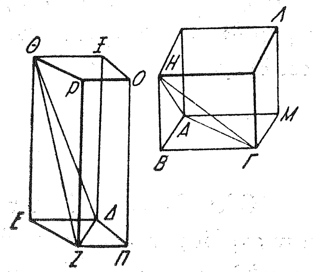
Ὅθεν εἶναι ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διότι ἐὰν διαιρεθῶσιν αὗται εἰς πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τριγώνους, ἐπειδὴ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων διαιροῦνται εἰς ὅμοια τρίγωνα καὶ ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα πρὸς τὰ ὅλα, θὰ εἶναι ὡς μία μερικὴ πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον (τῆς πρώτης πυραμίδος) πρὸς ἄλλην μερικὴν πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τρίγωνον (τῆς ἄλλης πυραμίδος), οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πυραμίδων (τῆς μιᾶς) τῶν ἐχουσῶν τριγώνους βάσεις πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν πυραμίδων (τῆς ἄλλης), τῶν ἐχουσῶν τριγώνους βάσεις, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. Ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς εἶναι πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8)· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα εἶναι πρὸς τὴν ἔχουσαν ὁμοίαν βάσιν ὡς ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸν κύβον.

9.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ ἐχουσῶν βάσεις τριγώνους αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ αἱ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις πυραμίδες, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσαι.

Διότι ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ· λέγω ὅτι τῶν πυραμίδων ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ.

Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ, καὶ εἶναι *πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.*



Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλὰ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμίς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τῆς μὲν πυραμίδος ΑΒΓΗ ἑξαπλάσιον τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ, τῆς δὲ πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι ἑξαπλάσιον τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ, εἶναι ἄρα τὸ στερεὸν ΒΗΜΛ ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν ΕΘΠΟ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν (XI. 34)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν βάσιν ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ. Ἀλλὰ ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (I. 34). Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὕψος τοῦ στερεοῦ ΕΘΠΟ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ στερεοῦ ΒΗΜΛ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ. Τῶν πυραμίδων ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

Ἀλλ' ἂς εἶναι τώρα αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ· λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

Διότι ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ, ἀλλ' ὡς εἶναι ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ, καὶ ὡς ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΜ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ πρὸς τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὕψος τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος ΑΒΓΗ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΒΗΜΛ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΒΜ πρὸς τὴν βάσιν ΕΠ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΒΗΜΛ. Τὰ στερεὰ δὲ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσα (XI. 34). Τὸ στερεὸν ἄρα παραλληλεπίπεδον ΒΗΜΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ΕΘΠΟ. Καὶ εἶναι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ, τοῦ δὲ παραλληλεπιπέδου ΕΘΠΟ ἕκτον μέρος ἡ πυραμὶς ΔΕΖΘ· εἶναι ἄρα ἴση ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ πρὸς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ.

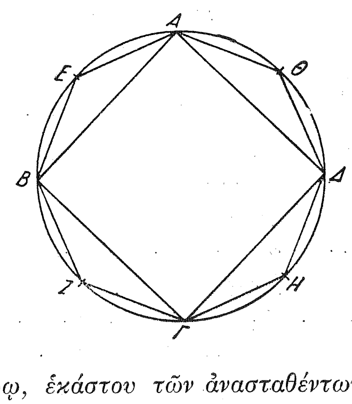
Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ ἐχουσῶν βάσεις τριγώνους αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ αἱ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις πυραμίδες, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιʹ.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κιλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντιν πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν



στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τρι-

10.

Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον.

Διότι ἂς ἔχῃ κῶνος καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς κύλινδρον τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἢ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου ἢ μικρότερος τοῦ τριπλασίου. Ἔστω πρότερον μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ὅθεν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (XII. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρίσμα ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον. Ὅθεν τὸ ἀνυψούμενον πρίσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδὴ καὶ ἂν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ εἶναι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψούμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις (XI. 32)· καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἄρα ἀνυψωθὲν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ εἶναι ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένου τετραγώνου· τὸ πρίσμα ἄρα τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ, ὡς ἐδείξαμεν προηγουμένως (XII. 2). Ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνυψωθέντων πρισμάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τμήματος, ἐπειδὴ ἐὰν διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀνυψώσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον, ἑκάστου τῶν ἀνυψωθέντων εἶναι τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα, τὰ ἡμίση· καὶ εἶναι τὰ τμήματα τοῦ κυλίνδρου μικρότερα τῶν ἀνυψωθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῶν ἀντιστοίχων κυλινδρικῶν τμημάτων. Τέμνοντες τώρα τὰ ὑπόλοιπα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ πράττοντες *γώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.*

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον κυλινδρικὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου (X. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον (θ. 7. πόρ.)· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ κώνου, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι ὁ κύλινδρος δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἑνὸς τρίτου τοῦ κυλίνδρου. Ἂς ἀναγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· τὸ τετράγωνον ἄρα ΑΒΓΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ (θ. 2). Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδή, ὡς ἐδείξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἐὰν περὶ τὸν κύκλον περιγράψωμεν τετράγωνον, θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ τὸ ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀνυψώσωμεν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, τὰ ὁποῖα καὶ καλοῦνται πρίσματα, θὰ εἶναι τὸ ἀνυψωθὲν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἥμισυ τοῦ ἀνυψωθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς αἱ βάσεις (XI. 32). Ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνυψωθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καὶ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου ἡ πυραμὶς ἡ ἀνυψωθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· διότι ἐμπεριέχει αὐτόν. Ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ *καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.*

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν [εἰσιν] οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς πυραμίδες ἔχουσαι τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα ἔχουσαν τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου (Χ. 1). Ἂς ἀπομείνωσι καὶ ἔστωσαν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖ ΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον· τὸ πρίσμα ἄρα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου· ὁ κύλινδρος ἄρα εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς αὐτὸν καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

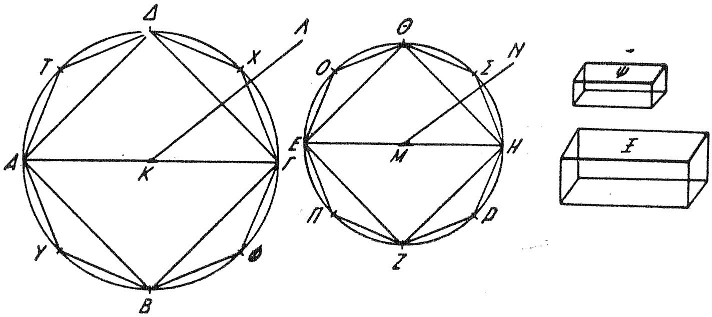
11.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΝ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι ἢ μικρότερον τοῦ κώνου ΕΝ ἢ μεγαλύτερον. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Ξ, καὶ καθ' ὃ εἶναι μικρότερον τὸ στερεὸν Ξ τοῦ κώνου ΕΝ πρὸς ἐκεῖνο ἔστω ἴσον τὸ στερεὸν Ψ· ὁ κῶνος ἄρα ΕΝ εἶναι ἴσος πρὸς τὰ στερεὰ Ξ σὺν Ψ. Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ τετράγωνον ἄρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου (θ. 2). Ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου, ἐπειδὴ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀνυψώ-

ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης. πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠ ΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγ-



γεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ σωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς περιγραφείσης· διότι εἶναι αὗται πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις (θ. 6)· εἶναι δὲ ὁ κῶνος μικρότερος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Π, Ρ, Σ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ. Ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος (θ. 2). Ἂς ἀνυψωθῇ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος κώνου. Ὅθεν τέμνοντες τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε, θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον τμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ Ψ. Ἂς λάβωμεν τοιοῦτον ὑπόλοιπον καὶ ἔστω ὅτι εἶναι τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνυψωθῇ ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι ὡς τὸ $ΑΓ^2$ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, οὕτως τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, ὡς δὲ τὸ $ΑΓ^2$ πρὸς τὸ $ΕΗ^2$, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ. Ὡς δὲ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, ὡς δὲ τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦ ΓΧ πρὸς τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν. Καὶ ὡς ἄρα ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΔΤΑΥΒΦΓΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὴν ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδα, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὴν ἐντὸς τοῦ κώνου ΕΝ πυραμίδα. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ κῶνος ΑΛ τῆς ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδος· καὶ τὸ στερεὸν ἄρα Ξ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἐντὸς τοῦ κώνου ΕΝ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ μικρότερον· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΕΝ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι δὲν εἶναι οὐδὲ ὡς ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ.

πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

'Αλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς [τοῖς κώνοις] κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

῎Εστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΝ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι εἶναι πρὸς μεγαλύτερον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Ἀλλ' ὡς τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΛ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΝ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΝ.

Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως εἶναι ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· διότι ἑκάτερος κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος ἑκατέρου κώνου ἀντιστοίχως (θ. 10). Καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ, οὕτως εἶναι οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς πρὸς τοὺς κώνους κύλινδροι.

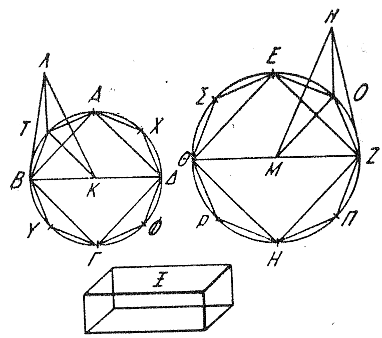
Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἄρα κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὸν κῶνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, εἶναι ὡς ὁ κύβος τῆς ΒΔ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΖΘ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ ὡς ὁ κύβος τῆς ΒΔ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΖΘ, θὰ εἶναι ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς στερεόν τι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ ὡς οἱ κύβοι (τῶν διαμέτρων). Ἂς εἶναι πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Ξ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ (IV. 6)· τὸ τετράγωνον ἄρα ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἀνυψωθεῖσα *τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν*



μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ· ὀρθαὶ γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν·

ἄρα πυραμὶς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος μέρους τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τώρα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ο, Π, Ρ, Σ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ. Καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος μέρους τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος. Καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες τώρα τὰ ἀπομένοντα τόξα δίχα καὶ φέροντες εὐθείας καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἐχούσας τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον ἀποτμήματά τινα τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς λάβωμεν τοιοῦτον ὑπόλοιπον καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· ἡ ὑπόλοιπος ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ στερεοῦ Ξ. Ἂς ἐγγραφῇ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἐπὶ τοῦ πολυγώνου ΑΤΒΥΓΦΔΧ πυραμὶς ἔχουσα τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τὸν κῶνον, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα (τριγώνων), τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΤΒ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΤ, ΜΟ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ εἶναι ὅμοιος πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ἄξων ΚΛ πρὸς τὸν ἄξονα ΜΝ (XI. ὁρισ. 24). Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΒΚΛ, ΖΜΝ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΒΚΛ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΜΝ (VI. 16). Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ αὗται εἶναι πλευραὶ ἴσων γωνιῶν τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδὴ ὅ,τι μέρος τῶν περὶ τὸ κέντρον Κ τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι ἡ γωνία ΒΚΤ, τὸ αὐτὸ μέρος τῶν περὶ τὸ κέντρον Μ τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι καὶ ἡ γωνία ΖΜΟ· ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΒΚΤ πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΜΟ. Πάλιν ἐπειδὴ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ, πρὸς τὴν ΜΝ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΒΚ ἴση πρὸς τὴν ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ πρὸς τὴν ΟΜ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ΤΚΛ, ΟΜΝ· διότι αὗται εἶναι ὀρθαί· αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· εἶναι ἄρα ὅμοιον τὸ τρίγωνον ΛΚΤ πρὸς τὸ τρίγωνον ΝΜΟ. Καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΚΒ, ΝΜΖ εἶναι ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΚΤ.

ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΤΚΒ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. τῶν ΛΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τοῖς κώνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥ ΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις [μὲν] τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος οὗ βάσις [μὲν] ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ [πολύγωνον], κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ξ [στερεὸν] πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις

ΖΜΟ εἶναι ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ (V. 22). Πάλιν ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΤΚ, ΝΟΜ, εἶναι ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΚΒ, ΟΜΖ εἶναι ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. 'Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. Δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. Τῶν τριγώνων ἄρα ΛΤΒ, ΝΟΖ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι· τὰ τρίγωνα ἄρα ΛΤΒ, ΝΟΖ εἶναι ἰσογώνια (VI. 5)· ὥστε εἶναι καὶ ὅμοια (VI. ὁρισ. 1). Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΒΚΤ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΖΜΟ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· διότι περιέχονται ὑπὸ ὁμοίων ἴσων τὸ πλῆθος ἐπιπέδων (XI. ὁρισμ. 9). Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ ἔχουσαι βάσεις τριγώνους εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8.). Ἡ πυραμὶς ἄρα ΒΚΤΛ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΜΟΝ εἶναι ὡς ὁ κύβος, τῆς ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. Καθ' ὅμοιον τρόπον φέροντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνυψοῦντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἐχούσας τὴν αὐτὴν κορυφὴν πρὸς τοὺς κώνους ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν (ἀντιστοίχων) πυραμίδων, πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος, τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς ΒΚ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν ΖΜ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (V. 12)· εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ πυραμὶς ΒΚΤΛ πρὸς τὴν πυραμίδα ΖΜΟΝ, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν· ὥστε καὶ ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν ἔχει λόγον ὃν ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὑπετέθη δὲ καὶ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, ἔχων λόγον πρὸς τὸ στερεὸν Ξ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὸ στερεὸν Ξ, οὕτως ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐντὸς αὐτοῦ πυραμίδος· διότι τὴν ἐμπεριέχει. Καὶ τὸ στερεὸν ἄρα Ξ *μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ [σημεῖον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.*

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ξ σημείων ἐπίπεδα εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Λ, πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ν, λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ ἔχει λόγον πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ πρὸς μεγαλύτερον τὸ Ξ. Ἀνάπαλιν ἄρα, (V. 7. πόρ.), τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον, ὃν ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Ξ πρὸς τὸν κῶνον ΑΒΓΔΛ, οὕτως εἶναι ὁ κῶνος ΕΖΗΘΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ (θ. 2 λῆμ.). Καὶ ὁ κῶνος ἄρα ΕΖΗΘΝ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τοῦ κώνου ΑΒΓΔΛ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τοῦ κώνου ΕΖΗΘΝ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Ὁ κῶνος ἄρα ΑΒΓΔΛ ἔχει πρὸς τὸν κῶνον ΕΖΗΘΝ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ εἶναι ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· διότι ὁ κύλινδρος ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως πρὸς τὸν κῶνον καὶ ἰσοϋψὴς πρὸς αὐτὸν εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου. Καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

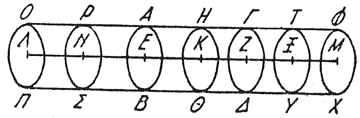
Οἱ ὅμοιοι ἄρα κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν κύλινδρος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, θὴ εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Διότι ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΑΔ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΗΘ ὄντος παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς τέμνῃ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Κ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος ΒΗ πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΕΚ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΖ.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ὁ ἄξων ΕΖ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μερῶν μέχρι τῶν σημείων Λ, Μ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ἴσοι ἄξονες πρὸς τὸν ἄξονα ΕΚ οἱ ΕΝ, ΝΛ, πρὸς δὲ τὸν ΖΚ ὁσοιδήποτε ἴσοι οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ ἂς νοηθῇ ὁ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΛΜ κύλινδρος ὁ ΟΧ, τοῦ ὁποίου βάσεις εἶναι οἱ κύκλοι ΟΠ, ΦΧ. Καὶ *παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

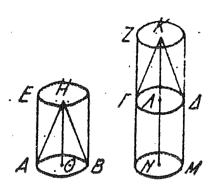


ιδʹ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλιν-



διὰ τῶν σημείων Ν, Ξ ἂς ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰ ΑΒ, ΓΔ καὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου ΟΧ καὶ ἔστωσαν τομαὶ τούτων οἱ περὶ τὰ κέντρα Ν, Ξ κύκλοι. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἄξονες ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ κύλινδροι ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11). Εἶναι δὲ αἱ βάσεις ἴσαι· καὶ οἱ κύλινδροι ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ ἄξονες ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, εἶναι δὲ καὶ οἱ κύλινδροι ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος, ὅσας φορὰς ἄρα εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὁ ἄξων ΚΛ τοῦ ἄξονος ΕΚ, τόσας φορὰς θὰ εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΒ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὅσας φορὰς εἶναι ὁ ἄξων ΜΚ τοῦ ἄξονος ΚΖ, τόσας φορὰς εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΧΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΔ. Καὶ ἐὰν μὲν ὁ ἄξων ΚΛ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἄξονα ΚΜ, θὰ εἶναι καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΧ, ἐὰν δὲ εἶναι μεγαλύτερος ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι μεγαλύτερος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερος, θὰ εἶναι μικρότερος. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρα μεγέθη, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, ἐλήφθησαν ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ἄξονος ΕΚ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΒΗ, καὶ ὁ ἄξων ΛΚ καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ, τοῦ δὲ ἄξονος ΚΖ καὶ τοῦ κυλίνδρου ΗΔ καὶ ὁ ἄξων ΚΜ καὶ ὁ κύλινδρος ΗΧ, καὶ ἀπεδείχθη, ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ ὁ ἄξων ΚΛ τοῦ ἄξονος ΚΜ, ὑπερέχει καὶ ὁ κύλινδρος ΠΗ τοῦ κυλίνδρου ΗΧ, καὶ ἐὰν εἶναι ἴσος, εἶναι ἴσος, καὶ ἐὰν εἶναι μικρότερος, εἶναι μικρότερος. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ ἄξων ΕΚ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΖ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΒΗ πρὸς τὸν κύλινδρον ΗΔ (V. ὁρ. 5)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ὕψη.

Διότι ἔστωσαν οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν κύκλων ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ.

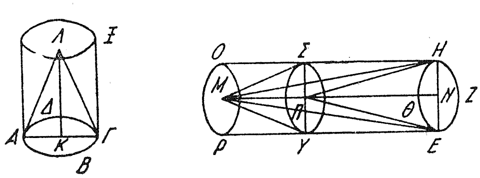
Διότι ἂς ἐκβληθῇ ὁ ἄξων ΚΛ ἐπὶ τὸ σημεῖον Ν, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς τὸν ἄξονα ΗΘ ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ ἂς νοηθῇ περὶ τὸν ἄξονα ΛΝ ὁ κύλινδρος ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ κύλινδροι ΕΒ, ΓΜ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11). Εἶναι δὲ αἱ βάσεις ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· εἶναι ἄρα ἴσοι καὶ οἱ κύλινδροι ΕΒ, ΓΜ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος ΖΜ ἔχει τμηθῇ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ παραλλήλου ὄντος πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα, εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΓΜ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΛΝ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ (θ. 13). Εἶναι δὲ ἴσος ὁ μὲν κύλινδρος ΓΜ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΒ, ὁ δὲ ἄξων ΛΝ πρὸς τὸν ἄξονα ΗΘ· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ. Ὡς δὲ ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ, οὕτως ὁ δρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΛΚ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΝ, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ τοῖς τῶν ΕΖΗΘ, ΡΟ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ, ΕΣ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος· ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΠΝ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος κῶνος ΑΒΗ πρὸς τὸν κῶνον ΓΔΚ (θ. 10). Καὶ ὡς ἄρα ὁ ἄξων ΗΘ πρὸς τὸν ἄξονα ΚΛ, οὕτως ὁ κῶνος ΑΒΗ πρὸς τὸν κῶνον ΓΔΚ καὶ ὁ κύλινδρος ΕΒ πρὸς τὸν κύλινδρον ΖΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν· καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, εἶναι ἴσοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἱ ὁποῖοι εἶναι καὶ ὕψη τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ ἂς συμπληρωθῶσιν οἱ κύλινδροι ΑΞ, ΕΟ. Λέγω, ὅτι τῶν κυλίνδρων ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ.

Διότι τὸ ὕψος ΛΚ ἢ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος ΜΝ ἢ ὄχι. Ἔστω πρότερον ἴσον. Εἶναι δὲ καὶ ὁ κύλινδρος ΑΞ ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις (θ. 11)· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓΔ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ. Ὥστε εἶναι καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος, ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ. Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι τὸ ὕψος ΛΚ ἴσον πρὸς τὸ ΜΝ, ἀλλ' ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΜΝ καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὕψους ΜΝ τὸ ΠΝ ἴσον πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Π ἂς τμηθῇ ὁ κύλινδρος ΕΟ διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΤΥΣ παραλλήλου πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων ΕΖΗΘ, ΡΟ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ὕψους δὲ τοῦ ΝΠ ἂς νοηθῇ κύλινδρος ὁ ΕΣ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύλινδρος ΑΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν κύλυνδρον ΕΣ (V. 7). Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν ΕΖΗΘ· διότι οἱ κύλινδροι ΑΞ, ΕΣ εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 11)· ὡς δὲ ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν ΕΣ, οὕτω τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ· διότι ὁ κύλινδρος ΕΟ ἐτμήθη ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα (θ. 13). Εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ. Εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὕψος ΠΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ. Τῶν κυλίνδρων ἄρα ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν.

Ἀλλὰ τώρα ἂς εἶναι τῶν κυλίνδρων ΑΞ, ΕΟ αἱ βάσεις ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως *πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.*

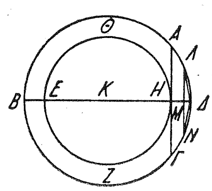
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΠΝ ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ ὕψος. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΠΝ [ὕψος], οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ. ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἡ ΛΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ιζ'.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μεί-

τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ· λέγω, ὅτι ὁ κύλινδρος ΑΞ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ.

Διότι ἀφοῦ γίνει ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΚΛ, εἶναι δὲ ἴσον τὸ ὕψος ΚΛ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ βάσις ΑΒΓΔ πρὸς τὴν βάσιν ΕΖΗΘ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ· διότι εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (θ. 11)· ὡς δὲ τὸ ὕψος ΜΝ πρὸς τὸ ὕψος ΠΝ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ (θ. 13)· εἶναι ἄρα ὡς ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΣ, οὕτως ὁ κύλινδρος ΕΟ πρὸς τὸν ΕΣ. Ἴσος ἄρα ὁ κύλινδρος ΑΞ πρὸς τὸν κύλινδρον ΕΟ. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ὑπαρχόντων δύο ὁμοκέντρων κύκλων νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

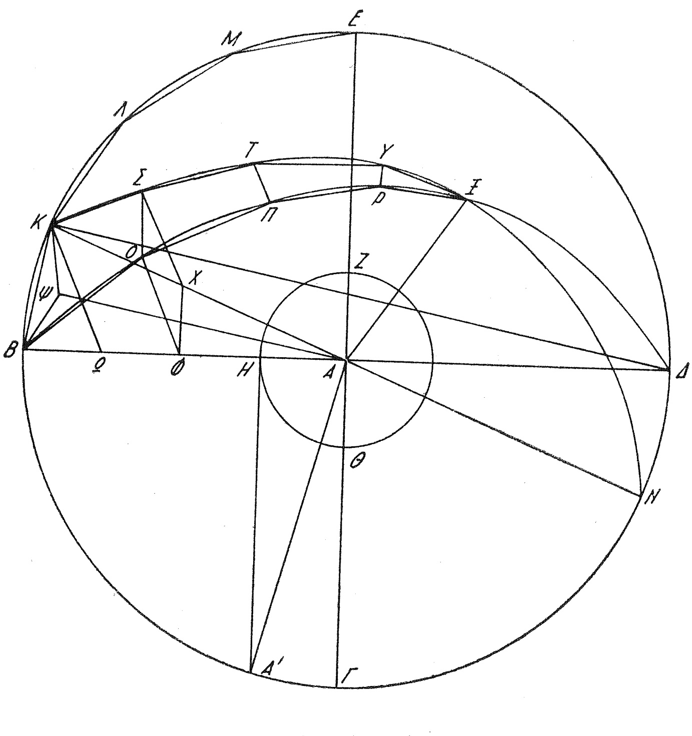
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ κέντρου Κ ἡ εὐθεῖα ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Η ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ ἡ ΗΑ καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Τέμνοντες τώρα τὸ τόξον ΒΑΔ δίχα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δίχα καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ ἀφήσωμεν κατά τινα στιγμὴν τόξον μικρότερον τοῦ ΑΔ (Χ. 1). Ἂς ἀφήσωμεν καὶ ἔστω τὸ ΛΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἡ ΛΜ καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΔ, ΔΝ· τὸ τόξον ΛΔ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΔΝ (ΙΙΙ. 3, Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΛΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ, ἡ ΛΝ ἄρα δὲν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον οἱ ΛΔ, ΔΝ δὲν ἐφάπτονται τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἐὰν τώρα ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ εὐθείας ἴσας πρὸς τὴν ΛΔ καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς ταύτην, θὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

17.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἂς νοηθῶσιν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· πρέπει νὰ ἐγγραφῇ *ζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.*

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύ-



κλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἂς τμηθῶσιν αἱ σφαῖραι δι' ἐπιπέδου τινος διὰ τοῦ κέντρου· αἱ τομαὶ θὰ εἶναι κύκλοι, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ σφαῖρα προέρχεται ἐκ τῆς στροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου, τῆς διαμέτρου μενούσης ἀκινήτου· ὥστε καὶ εἰς οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον θὰ σχηματίσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι καὶ τοῦ ἡμικυκλίου, δηλ. καὶ τοῦ κύκλου διάμετρος, εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν ἀγομένων εὐθειῶν. Ἔστω λοιπὸν εἰς μὲν τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, εἰς δὲ τὴν μικροτέραν σφαῖραν κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἂς ἀχθῶσι δύο διάμετροι αὐτῶν κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ ἀφοῦ ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι κύκλοι οἱ ΒΓΔΕ, ΖΗΘ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ἐφαπτόμενον τοῦ μικροτέρου κύκλου τοῦ ΖΗΘ, τοῦ ὁποίου πλευραὶ ἔστωσαν εἰς τὸ τεταρτημόριον ΒΕ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΚΑ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ν καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ ἡ ΑΞ καὶ ἂς τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἂς διέρχωνται ἐπίπεδα· ἕνεκα τῶν προηγουμένως λεχθέντων θὰ σχηματίσωσι ταῦτα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ἂς σχηματίσωσι, τῶν ὁποίων ἡμικύκλια ἔστωσαν τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπὶ τῶν διαμέτρων ΒΔ, ΚΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΞΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπίπεδα τὰ διὰ τῆς ΞΑ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ (XI. 18)· ὥστε καὶ τὰ ἡμικύκλια ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἡμικύκλια ΒΕΔ, ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι ἴσα· διότι εἶναι ἐπὶ ἴσων διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ (III. ὁρ. 1)· εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ τὰ τεταρτημόρια ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ. Ὅσαι ἄρα πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι εἰς τὸ τεταρτημόριον ΒΕ, τόσαι εἶναι καὶ εἰς τὰ τεταρτημόρια ΒΞ, ΚΞ ἴσαι πρὸς τὰς εὐθείας ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ. Ἂς ἐγγραφῶσι καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ· αὗται θὰ πέσωσι ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓΔΕ. Ἂς πέσωσι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΧΦ. Καὶ ἐπειδὴ εἰς ἴσα ἡμικύκλια τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐλήφθησαν ἴσαι χορδαὶ αἱ ΒΟ, ΚΣ (III. 28), καὶ εἶναι κάθετοι αἱ ΟΦ, ΣΧ, εἶναι ἄρα ἴση ἡ μὲν ΟΦ πρὸς τὴν ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ πρὸς τὴν ΚΧ (III. 27, I. 26). Εἶναι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΚΑ. Καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΦΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΧΑ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· ἡ ΧΦ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ (VI. 2). Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν *τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΕΔ, ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ· ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις [μὲν] τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.*

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ᾽ ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύ-

ΟΦ, ΣΧ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἡ ΟΦ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΧ (XI. 6). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν· ἄρα καὶ αἱ ΧΦ, ΣΟ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΧΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ, καὶ ἡ ΣΟ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΒ (I. 30). Καὶ συνδέουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ τετράπλευρον ἄρα ΚΒΟΣ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπειδὴ βεβαίως, ἐὰν ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας ἐξ αὐτῶν ληφθῶσι τυχόντα σημεῖα, ἡ τὰ σημεῖα συνδέουσα εὐθεῖα εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς παραλλήλους (XI. 7). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάτερον τῶν τετραπλεύρων ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ εὑρίσκεται εἰς ἓν ἐπίπεδον. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ εἰς ἓν ἐπίπεδον. Ἐὰν τώρα νοήσωμεν ἀπὸ τῶν σημείων Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ἠγμένας εὐθείας ἐπὶ τὸ Α θὰ σχηματισθῇ μεταξὺ τῶν τόξων ΒΞ, ΚΞ στερεόν τι σχῆμα πολύεδρον συγκείμενον ἐκ πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ τετράπλευρα ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ κατασκευάσωμεν τὰ αὐτὰ ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ΒΚ καὶ ἐπίσης ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, θὰ σχηματισθῇ σχῆμά τι πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν περιεχόμενον ὑπὸ πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ τρίγωνον ΥΡΞ καὶ τὰ ὁμοταγῆ πρὸς αὐτὰ (ὁμοίως διατεταγμένα), κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον δὲν θὰ ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι ὁ κύκλος ΖΗΘ.

Ἄς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΚΒΟΣ καὶ ἄς συναντήσῃ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὸ σημεῖον Ψ, καὶ ἄς *χθωσαν αἱ ΨΒ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.*

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρον ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΦ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ [τῶν] ΔΩ, ΩΒ, ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ΒΩ τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΔΩ, ΩΒ ἔλαττόν ἐστι ἢ διπλάσιον. καί ἐστι τῆς ΚΔ ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ. μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ***ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.***

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ἀχθῶσιν αἱ ΨΒ, ΨΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΨ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΚΒΟΣ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου (XI. ὁρισ. 3). Ἡ ΑΨ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΚ εἶναι καὶ τὸ AB^2 ἴσον πρὸς τὸ AK^2. Καὶ εἶναι $AB^2 = A\Psi^2 + \Psi B^2$ διότι ἡ γωνία Ψ εἶναι ὀρθὴ (I. 47)· καὶ $AK^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. Ἄρα $A\Psi^2 + \Psi B^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν $A\Psi^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $B\Psi^2$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΨK^2· ἡ ΒΨ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΨΚ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. Ὁ γραφόμενος ἄρα κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ψ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΨΒ, ΨΚ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΧΦ, εἶναι δὲ ἴση ἡ ΧΦ πρὸς τὴν ΣΟ, ἡ ΚΒ ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΟ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΚΒ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΟ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ εἶναι ἴσαι καὶ μικροτέρα ἡ ΟΣ καὶ ἡ ΒΨ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὸ KB^2 ἄρα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2\ B\Psi^2$. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΚΩ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΦ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $B\Delta < 2\ \Delta\Omega$, καὶ εἶναι $B\Delta : \Delta\Omega = \Delta B \times B\Omega : \Delta\Omega \times \Omega B$, ἀφοῦ ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΒΩ τετράγωνον καὶ συμπληρωθῇ τὸ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ἄρα $\Delta B \times B\Omega < 2\ \Delta\Omega \times \Omega B$. Καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΚΔ, εἶναι τὸ μὲν $\Delta B \times B\Omega = BK^2$, τὸ δὲ $\Delta\Omega \times \Omega B = K\Omega^2$ (III. 31, VI. 8 πόρ.)· εἶναι ἄρα $KB^2 < 2\ K\Omega^2$. Ἀλλὰ $KB^2 > 2\ B\Psi^2$· εἶναι ἄρα $K\Omega^2 > B\Psi^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΑ, εἶναι $BA^2 = AK^2$. Καὶ εἶναι $BA^2 = B\Psi^2 + \Psi A^2$, καὶ $KA^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$ (I. 47)· ἄρα $B\Psi^2 + \Psi A^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$, ἐξ ὧν τὸ $K\Omega^2 > B\Psi^2$· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΩA^2 εἶναι μικρότερον τοῦ ΨA^2. Εἶναι ἄρα ἡ $A\Psi > A\Omega$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ $A\Psi > AH$. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν βάσιν τοῦ πολυέδρου, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς μικροτέρας σφαίρας· ὥστε τὸ πολύεδρον δὲν θὰ ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐν ᾧ ἄρα ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι, ἐνεγράφη εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἄλλην σφαῖραν ἐγγραφῇ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρᾳ] στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

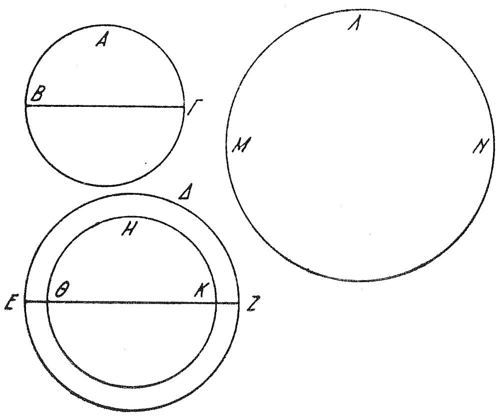
Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ [ἄρα] ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πο-τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΒΓΔΕ, τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς σφαίρας ΒΓΔΕ ἔχει λόγον πρὸς τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἄλλης σφαίρας, ὃν λόγον ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ΒΓΔΕ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἄλλης σφαίρας. Διότι ἀφοῦ διαιρεθῶσι τὰ στερεὰ εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς (ὁμοίας κατὰ τὴν τάξιν) πυραμίδας, αἱ πυραμίδες θὰ εἶναι ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (θ. 8. πόρ.)· ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τετράπλευρον ΚΒΟΣ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Α, ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὁμοταγῆ πυραμίδα τῆς ἄλλης σφαίρας, ὃν λόγον ἔχει ὁ κύβος, τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς ΑΒ τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας. Ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς ἐκ τῶν πυραμίδων τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Α σφαίρας πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῆς ἄλλης σφαίρας θὰ ἔχῃ λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα (V. 12)· ὥστε ὅλον τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἐχούσης κέντρον τὸ Α σφαίρας πρὸς ὅλον τὸ στερεὸν πολύεδρον τῆς ἄλλης σφαίρας θὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄλλης σφαίρας, τουτέστιν ἡ διάμετρος ΒΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἄλλης σφαίρας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἄς νοηθῶσι σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι ἐὰν ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἄς ἔχῃ πρότερον πρὸς μικροτέραν τὴν ΗΘΚ, καὶ ἂς νοηθῇ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ ὁμόκεντρος πρὸς τὴν ΗΘΚ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (θ. 17), ἂς ἐγγραφῇ δὲ καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ· τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ (θ. 17, πόρ.). Ἔχει δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ, οὕτως τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ σφαῖρα *λύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.*



Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΘΚ πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ πολυέδρου (V. 14). Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται ὑπ' αὐτοῦ. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μικροτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ ἔχει λόγον πρὸς μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς ἔχῃ πρὸς μεγαλυτέραν τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα (V. 7, πόρ.) ἡ σφαῖρα ΛΜΝ ἔχει πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς διαμέτρου ΕΖ πρὸς τὴν διάμετρον ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ σφαῖρα ΛΜΝ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ, οὕτως ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΑΒΓ, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΛΜΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕΖ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως (θ. 2, λῆμμα). Καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικροτέραν. Ἡ σφαῖρα ἄρα ΑΒΓ ἔχει πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος, τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

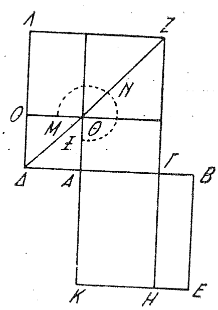
ιγ′.

α′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΘ. ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΓΚ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΘΖ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλασιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΑΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΟ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΑΟ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-

ΒΙΒΛΙΟΝ XIII.

1.

'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ ἡ εὐθεῖα ΑΔ, καὶ ἔστω ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι $(ΑΓ + ΑΔ)^2 = 5\ ΔΑ^2$.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἐν τῷ σχήματι ΔΖ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΖΓ μέχρι τοῦ Η. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΑΒ \times ΒΓ$ τὸ ὀρθογώνιον ΓΕ, τὸ δὲ $ΑΓ^2 = ΖΘ$· εἶναι ἄρα $ΓΕ = ΖΘ$. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΑ = 2ΑΔ$, εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΒΑ = ΚΑ$, ἡ δὲ $ΑΔ = ΑΘ$, εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΚΑ = 2ΑΘ$. Ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΓΚ πρὸς τὸ ΓΘ (VI. 1)· εἶναι ἄρα $ΓΚ = 2ΓΘ$. Εἶναι δὲ καὶ $ΛΘ + ΘΓ = 2ΓΘ$ (I. 43). Εἶναι ἄρα $ΚΓ = ΛΘ + ΘΓ$. 'Εδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΓΕ = ΘΖ$· ὅλον ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΒΑ = 2ΑΔ$, εἶναι $ΒΑ^2 = 4ΑΔ^2$, τουτέστι τὸ $ΑΕ = 4ΔΘ$. Εἶναι δὲ τὸ ΑΕ ἴσον πρὸς τὸν γνώμονα ΜΝΞ· καὶ ὁ γνώμων ἄρα ΜΝΞ εἶναι $= 4ΑΟ$· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ εἶναι $= 5ΑΟ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΔΖ = ΔΓ^2$, τὸ δὲ $ΑΟ = ΔΑ^2$· ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5\ ΔΑ^2$.

'Εὰν ἄρα εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος μετὰ τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

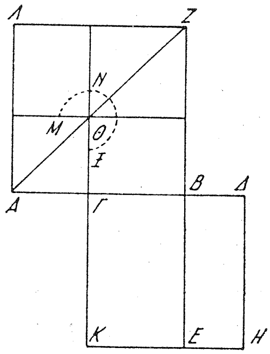
2.

'Εὰν τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τμήματος αὐτῆς, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ εἰρημένου τμήματος

μνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΑΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ. τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τοῦ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τῷ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΛΘ, ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ· ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ· τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς ΓΒ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ· πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Διότι ἔστω ὅτι τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒ εἶναι πενταπλάσιον τετραγώνου τμήματος αὐτῆς τοῦ ΑΓ, ἔστω δὲ ἡ ΓΔ $=$ 2ΑΓ· λέγω, ὅτι ὅταν ἡ ΓΔ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΓΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῶσιν ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ ἂς κατασκευασθῶσι τὰ ἐν τῷ σχήματι ΑΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΑ $^2 = 5$ ΑΓ ^{2}, τὸ ΑΖ $= 5$ ΑΘ. Ὁ γνώμων ἄρα ΜΝΞ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΓ $= 2$ ΓΑ, εἶναι ἄρα ΔΓ $^2 = 4$ ΓΑ ^{2}, τουτέστι τὸ ΓΗ $= 4$ ΑΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ γνώμων ΜΝΞ τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ· εἶναι ἄρα ὁ γνώμων ΜΝΞ $=$ ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΓ $= 2$ ΓΑ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΔΓ $=$ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ $=$ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῆς ΓΘ], εἶναι ἄρα διπλάσιον καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ (VI. 1). Εἶναι δὲ καὶ ΛΘ $+$ ΘΒ $= 2$ ΘΒ (I. 43)· εἶναι ἄρα τὸ ΚΒ $=$ ΛΘ $+$ ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ γνώμων ΜΝΞ ἴσος πρὸς τὸ ΓΗ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ ΘΖ $=$ ΒΗ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΒΗ $=$ ΓΔ $\times$ ΔΒ· διότι ἡ ΓΔ $=$ ΔΗ· τὸ δὲ ΘΖ $=$ ΓΒ^2· εἶναι ἄρα τὸ ΓΔ $\times$ ΔΒ $=$ ΓΒ ^{2}. Εἶναι ἄρα ὡς ΔΓ : ΓΒ $=$ ΓΒ : ΒΔ (VI. 17). Εἶναι δὲ ἡ ΔΓ $>$ ΓΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΓΒ $>$ ΒΔ (V. 14). Ὅταν ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα τὸ τετράγωνον εὐθείας γραμμῆς εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τμήματος αὐτῆς, καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ εἰρημένου τμήματος τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ὅτι δὲ 2ΑΓ $>$ ΒΓ, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω, εἰ δυνατόν, ΒΓ $=$ 2ΑΓ. Εἶναι ἄρα ΒΓ $^2 =$ 4 ΑΓ ^{2}· ἄρα ΒΓ $^2 +$ ΓΑ $^2 = 5$ ΓΑ ^{2}. Ἐλήφθη δὲ καὶ τὸ ΒΑ $^2 = 5$ ΓΑ ^{2}· εἶναι ἄρα ΒΑ $^2 =$ ΒΓ $^2 +$ ΓΑ ^{2}· ὅπερ ἀδύνατον (II. 4). Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ διπλασία τῆς ΑΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἡ μικροτέρα τῆς ΓΒ εἶναι διπλασία τῆς ΓΑ· διότι κατὰ μείζονα λόγον θὰ ἦτο τοῦτο ἄτοπον.

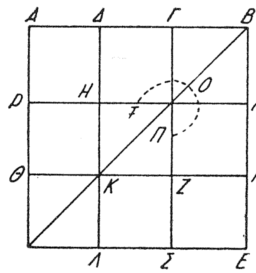
Ἡ διπλασία ἄρα τῆς ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ. ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον· ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ·



ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου. ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ. ἀλλὰ ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ

3.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ τετράγωνον, τοῦ μικροτέρου τμήματος σὺν τῷ ἡμίσει τοῦ μεγαλυτέρου, εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΔΓ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ διπλοῦν σχῆμα. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ $=$ 2 ΔΓ, εἶναι ἄρα ΑΓ $^2 =$ 4 ΔΓ ^{2}, τουτέστι τὸ ΡΣ $=$ 4 ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΒ $\times$ ΒΓ $=$ ΑΓ ^{2} (VI. ὁρ. 3, VI. 17), καὶ εἶναι τὸ ΑΒ $\times$ ΒΓ $=$ ΓΕ, τὸ ΓΕ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΡΣ. Εἶναι δὲ τὸ ΡΣ $=$ 4ΖΗ· ἄρα τὸ ΓΕ $=$ 4 ΖΗ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ $=$ ΔΓ, εἶναι καὶ ἡ ΘΚ $=$ ΚΖ. Ὥστε καὶ τὸ ΗΖ $^2 =$ ΘΛ ^{2}. Εἶναι ἄρα ἡ ΗΚ $=$ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ $=$ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ $=$ ΖΕ. Ἀλλὰ τὸ ΜΖ $=$ ΓΗ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΓΗ $=$ ΖΕ. Ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΓΝ· ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ $=$ ΓΕ. Ἀλλ' ἐδείχθη τὸ ΓΕ $=$ 4 ΗΖ· καὶ ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ $=$ 4 ΖΗ. Ὁ γνώμων ἄρα ΞΟΠ καὶ τὸ τετράγωνον ΖΗ εἶναι πενταπλάσια τοῦ ΖΗ. Ἀλλὰ ὁ γνώμων ΞΟΠ καὶ τὸ τετράγωνον ΖΗ εἶναι τὸ ΔΝ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΝ $=$ ΔΒ ^{2}, τὸ δὲ ΗΖ $=$ ΔΓ ^{2}. Εἶναι ἄρα τὸ ΔΒ $^2 =$ 5 ΔΓ ^{2}· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

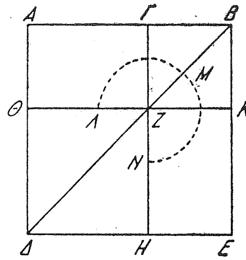
4.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ΑΒ $^2 +$ ΒΓ $^2 =$ 3 ΓΑ ^{2}.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ $\times$ ΒΓ $=$ ΑΓ ^{2} (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΒ $\times$ ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ΑΓ ^{2}

ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστιν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΚ, ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ· ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ [τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ] τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ [μὲν] ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

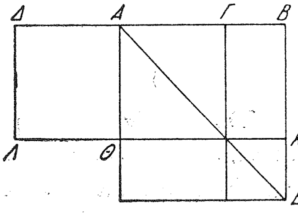


ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γραμμὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση [κείσθω] ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΘΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΕ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ· [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ]. ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλῳ τῷ ΑΕ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ· ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ· τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.



Ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὸ ΘΗ· εἶναι ἄρα τὸ $AK = ΘH$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $AZ = ZE$ (Ι. 43), ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ εἶναι ἴσον μὲ ὅλον τὸ ΓΕ· εἶναι ἄρα $AK + ΓE = 2AK$. Ἀλλὰ τὰ $AK + ΓE$ εἶναι ὁ γνώμων $ΛMN + ΓK^2$· ὁ γνώμων ἄρα $ΛMN + ΓK^2 = 2\ AK$. Ἀλλ' ὅμως ἐδείχθη καὶ $AK = ΘH$· ὁ γνώμων ἄρα ΛΜΝ καὶ τὸ $ΓK^2 = 2\ ΘH$· ὥστε ὁ γνώμων ΛΜΝ καὶ τὰ τετράγωνα $ΓK + ΘH$ ἰσοῦνται πρὸς τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΘΗ. Καὶ εἶναι ὁ μὲν γνώμων ΛΜΝ καὶ τὰ τετράγωνα $ΓK + ΘH = AE + ΓK = AB^2 + BΓ^2$, τὸ δὲ $HΘ = AΓ^2$. Ἄρα τὰ $AB^2 + BΓ^2 = 3\ AΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ προστεθῇ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἴση πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Διότι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ πρὸς τὴν ΑΓ ἔστω ἴση ἡ ΑΔ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Διότι ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ ἂς καταγραφῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, εἶναι ἄρα $AB \times BΓ = AΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $AB \times BΓ = ΓE$, τὸ δὲ $AΓ^2 = ΓΘ$· εἶναι ἄρα τὸ $ΓE = ΘΓ$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ ΓΕ εἶναι ἴσον τὸ ΘΕ (Ι. 43), πρὸς δὲ τὸ ΘΓ εἶναι ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΘΕ· [ἂς προστεθῇ τὸ κοινὸν ΘΒ]. Ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ εἶναι ἴσον πρὸς ὅλον τὸ ΑΕ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΚ τὸ $BΔ \times ΔA$· διότι ἡ $AΔ = ΔΛ$· τὸ δὲ $AE = AB^2$· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $BΔ \times ΔA = AB^2$. Εἶναι ἄρα $ΔB : BA = BA : AΔ$ (VI. 17). Εἶναι δὲ ἡ $ΔB > BA$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $BA > AΔ$ (V. 14).

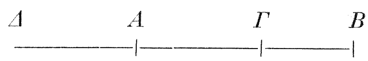
Ἡ ΔΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

'Εὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

'Εκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῆς ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ ΔΑ· ῥητὴ γάρ [ἐστιν] ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.



'Εὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

'Εὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

'Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ

6.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι εὐθεῖα ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΑ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΑΔ = ΒΑ : 2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ ἔχει προστεθῇ ἡ ΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5\ ΔΑ^2$ (θ. 1). Ἄρα τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· εἶναι ἄρα σύμμετρον τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ (X. 6). Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΔΑ^2$· διότι ἡ ΔΑ εἶναι ῥητή, οὖσα ἥμισυ τῆς ῥητῆς ΑΒ· εἶναι ἄρα ῥητὸν καὶ τὸ $ΓΔ^2$ (X. ὁρ. 9)· ῥητὴ ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΑ (X. 9)· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἀποτομὴ (X. 73). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$ (VI. ὁρ. 3, VI. 17). Ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἀποτομή, ἐὰν παραβληθῇ παρὰ τὴν ῥητὴν ΑΒ, θὰ σχηματίσῃ πλάτος τὴν ΒΓ. Τὸ τετράγωνον δὲ ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει ἀποτομὴν πρώτην (X. 97)· εἶναι ἄρα ἡ ΓΒ πρώτη ἀποτομή. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομή.

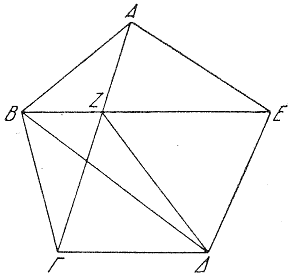
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι εὐθεῖα ἄλογος ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἢ αἱ συνεχεῖς ἢ αἱ μὴ συνεχεῖς εἶναι ἴσαι, τὸ πεντάγωνον εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἔστω πρότερον ὅτι αἱ τρεῖς συνεχεῖς γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ Α, Β, Γ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· λέγω, ὅτι τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΑ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΒΑ, ΑΕ, καὶ ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἡ βάσις ἄρα ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΕ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, ἡ μὲν ΒΓΑ πρὸς τὴν *τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.*



Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον

ΒΕΑ, ἡ δὲ ΑΒΕ πρὸς τὴν ΓΑΒ (I. 4)· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΖ (I. 6). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΒΕ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν ΖΕ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΓΔ ἴση πρὸς τὴν ΔΕ. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΖΓ, ΓΔ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΖΕ, ΕΔ· καὶ ἡ βάσις τῶν τριγώνων ἡ ΖΔ εἶναι κοινή· ἡ γωνία ἄρα ΖΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΖΕΔ (I. 8). Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓΑ ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς ὅλην τὴν ΑΕΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΓΔ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β· καὶ ἡ ΑΕΔ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Β, Γ· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ἴσαι αἱ συνεχεῖς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ ἔχουσαι κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Γ, Δ· λέγω, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον.

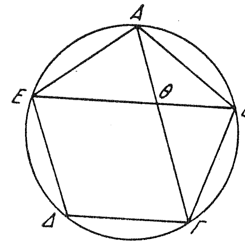
Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΕ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΒΓ, ΓΔ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (I. 4) · εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΒ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία ΒΕΔ ἴση πρὸς τὴν ΒΔΕ, ἐπειδὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ (I. 6). Καὶ ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΓΔΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΔΕ ἐλήφθη ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Γ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὰς Α, Γ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὰς γωνίας Α, Γ, Δ. Τὸ πεντάγωνον ἄρα ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσογώνιον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν ἀπέναντι δύο συνεχῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου ὑπάρχωσι πλευραί, αὗται τέμνονται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὰ μεγαλύτερα τμήματα εἶναι ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Διότι ἂς εἶναι ἀπέναντι τῶν δύο συνεχῶν γωνιῶν Α, Β τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΕ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Θ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν τέμνεται κατὰ τὸ Θ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ ὅτι τὰ μεγαλύτερα τμήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Διότι ἂς περιγραφῇ περὶ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ (IV. 14). Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΓ, καὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρειαι ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ. ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



θ.'

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχως, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν (I. 4.). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΒΑΓ ἴση πρὸς τὴν ΑΒΕ· εἶναι ἄρα ΑΘΕ = 2 ΒΑΘ (I. 32). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΕΑΓ = 2ΒΑΓ, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ τὸ τόξον ΕΔΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΓΒ (III. 28, VI. 33)· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΘΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ εὐθεῖα ΘΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΑ, τουτέστι τὴν ΑΒ (I. 6). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΕ, εἶναι καὶ ἡ γωνία ΑΒΕ ἴση πρὸς τὴν ΑΕΒ (I. 5). Ἀλλὰ ἡ ΑΒΕ ἐδείχθη ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ· καὶ ἡ ΒΕΑ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ. Καὶ ἡ ΑΒΕ εἶναι κοινὴ γωνία τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒΘ· ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία ἡ ΒΑΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΑΘΒ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΕ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΘ· ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΕΒ : ΒΑ = ΑΒ : ΒΘ (VI. 4). Εἶναι δὲ ΒΑ = ΕΘ· ἄρα εἶναι ΒΕ : ΕΘ = ΕΘ : ΘΒ. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μεγαλυτέρα ἄρα εἶναι καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. Ἡ ΒΕ ἄρα ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΘΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἔχει τμηθῇ κατὰ τὸ Θ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ ὅτι τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς ἡ ΓΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

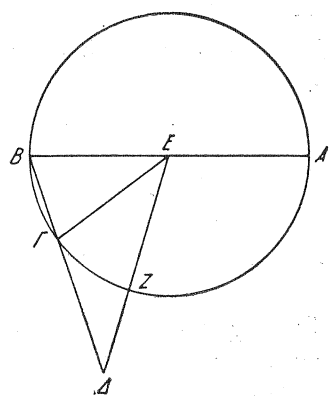
9.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου προστεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου.

Ἔστω ὁ κύκλος ΑΒΓ καὶ ἐκ τῶν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἐγγραφομένων σχημάτων, ἔστω ἡ μὲν ΒΓ πλευρὰ δεκαγώνου, ἡ δὲ ΓΔ ἑξαγώνου, καὶ ἔστωσαν κείμεναι ἐπ' εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΓΔ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ε (III. 1), καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ ἂς προεκταθῇ ἡ ΒΕ μέχρι τοῦ Α. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου δεκαγώνου, ἄρα τὸ τόξον ΑΓΒ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ τόξου ΒΓ· τὸ τόξον ἄρα ΑΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ΓΒ. Ὡς δὲ τὸ τόξον ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ, οὕτως εἶναι ἡ γωνία ΑΕΓ πρὸς τὴν ΓΕΒ (VI. 33)· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕΓ = 4 ΓΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΓ = 2 ΕΓΒ (I. 32). Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι ἴση π ρὸς τὴν ΓΔ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου

[ἐγγραφομένου]· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ. τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ. ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ Γ], καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

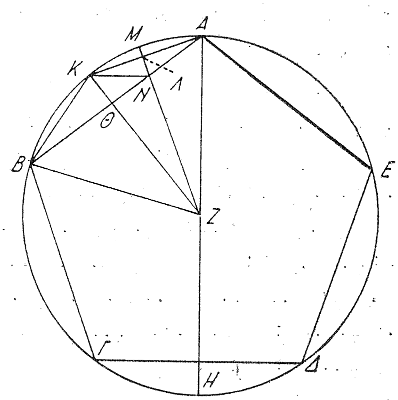


ι'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ,



τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ (IV. 15, πόρ.)· εἶναι ἴση καὶ ἡ γωνία ΓΕΔ πρὸς τὴν γωνίαν ΓΔΕ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΕΓΒ = 2 ΕΔΓ (I. 32). Ἀλλ' ἐδείχθη ἡ ΑΕΓ = 2 ΕΓΒ· εἶναι ἄρα ἡ ΑΕΓ = 4 ΕΔΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΕΓ = 4 ΒΕΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΕΔΓ = ΒΕΓ. Ἡ δὲ γωνία ΕΒΔ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, καὶ τοῦ ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕΔ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΓΒ (I. 32)· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΒΔ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΔΒ : ΒΕ = ΕΒ : ΒΓ (VI. 4). Εἶναι δὲ ΕΒ = ΓΔ. Εἶναι ἄρα ΒΔ : ΔΓ = ΔΓ : ΓΒ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΔ > ΔΓ· ἄρα καὶ ἡ ΔΓ > ΓΒ (V. 14). Ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΔ ἔχει τμηθῆ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΖ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ σημείου Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΖΘ, καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΚ ἡ ΖΛ, καὶ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Μ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΝ. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΕΔΗ, τῶν ὁποίων τὸ τόξον ΑΒΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΕΔ, τὸ λοιπὸν ἄρα τόξον ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν ΗΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΓΔ πλευρὰ πενταγώνου· ἡ ΓΗ ἄρα εἶναι δεκαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΑ = ΖΒ, καὶ ἡ ΖΘ εἶναι κάθετος, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΖΚ = ΚΖΒ (I. 5, I. 26). Ὥστε καὶ τὸ τόξον ΑΚ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΚΒ (III. 26). Εἶναι ἄρα τὸ τόξον ΑΒ διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΑΚ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΑΚ = 2 ΚΜ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι διπλάσιον *καὶ κάθετος ἡ ΖΘ ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστι διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ [ἐστι] διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΑΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΝ, βάσις ἄρα ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΛΝ ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΝ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΛΑΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ ἡ πρὸς τῷ Α. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΚΝΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΑ τρίγωνον τῷ ΚΝΑ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑΝ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.*

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιαʹ.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ τοῦ [ΑΒΓΔΕ] πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν τοῦ τόξου ΒΚ, εἶναι δὲ τὸ τόξον ΓΔ ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΒ, εἶναι ἄρα καὶ τὸ τόξον ΓΔ διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ. Εἶναι δὲ τὸ τόξον ΓΔ καὶ τοῦ τόξου ΓΗ διπλάσιον· τὸ τόξον ἄρα ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΒΚ. Ἀλλὰ τὸ ΒΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΚΜ, ἐπειδὴ εἶναι διπλάσιον καὶ τὸ ΚΑ· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα εἶναι διπλάσιον τοῦ ΚΜ. Ἀλλ' ὅμως καὶ τὸ τόξον ΓΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΒΚ· διότι τὸ τόξον ΓΒ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΑ. Καὶ ὅλον ἄρα τὸ τόξον ΗΒ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΜ· ὥστε καὶ ἡ γωνία ΗΖΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΖΜ (VI. 33). Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΗΖΒ διπλασία τῆς ΖΑΒ· διότι ἡ ΖΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΖ. Καὶ ἡ ΒΖΝ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΑΒ. Ἡ δὲ γωνία ΑΒΖ εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, καὶ τοῦ ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΒΝΖ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΖ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΒΖΝ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $AB : BZ = ZB : BN$ (VI. 4)· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $AB \times BN = BZ^2$ (VI. 17). Πάλιν ἐπειδὴ $ΑΛ = ΛΚ$, κοινὴ δὲ καὶ κάθετος ἡ ΛΝ, ἡ βάσις ἄρα ΚΝ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΑΝ· καὶ ἡ γωνία ἄρα $ΛΚΝ = ΛΑΝ$ (I. 4). Ἀλλὰ ἡ $ΛΑΝ = ΚΒΝ$ (III. 29, I. 5)· ἄρα καὶ ἡ $ΛΚΝ = ΚΒΝ$. Καὶ ἡ παρὰ τὸ Α γωνία εἶναι κοινὴ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ. Ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΚΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΚΝΑ (I. 32)· τὸ τρίγωνον ἄρα ΚΒΑ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΝΑ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία $BA : AK = KA : AN$ (VI. 4). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $BA \times AN = AK^2$ (VI. 17). Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $AB + BN = BZ^2$· εἶναι ἄρα $AB \times BN + BA \times AN$, ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς $BA^2 = BZ^2 + AK^2$ (II. 2). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΑ πλευρὰ πενταγώνου, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

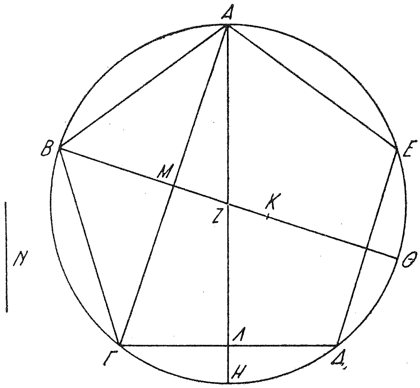
Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πλευρᾶς πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἔχοντα τὴν διάμετρον ῥητὴν ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΕ ἔχοντα ῥητὴν τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (X. 76).

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Ζ (III. 1), καὶ ἂς αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ὑπὸ ΛΑΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς ΖΑ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. ὡς δὲ ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. καί ἐστι τῆς μὲν ΛΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ.καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ ΔΓ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης καί ἐστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ



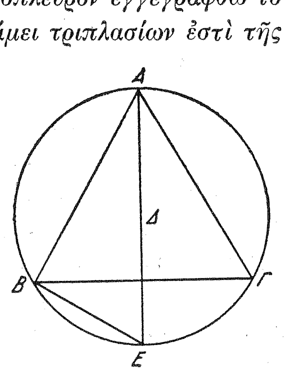
ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἂς προεκταθῶσι μέχρι τῶν σημείων Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ $ΖΚ = \frac{1}{4}$ ΑΖ. Ἔστω δὲ ῥητὴ ἡ ΑΖ· εἶναι ἄρα ῥητὴ καὶ ἡ ΖΚ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ εἶναι ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΑΔΗ, τῶν ὁποίων τὸ ΑΒΓ = ΑΕΔ, τὸ λοιπὸν τόξον ἄρα ΓΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ λοιπὸν ΗΔ. Καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΔ, αἱ γωνίαι παρὰ τὸ Λ εἶναι ὀρθαί, καὶ ΓΔ = 2 ΓΛ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ παρὰ τὸ Μ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ ΑΓ = 2 ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΛΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων καὶ τοῦ ΑΓΛ καὶ τοῦ ΑΜΖ ἡ ΛΑΓ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΜΖΑ (I. 32)· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΛ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΜΖ· ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΛΓ : ΓΑ = ΜΖ : ΖΑ (VI. 4)· καὶ τῶν ἡγουμένων ὅρων τὰ διπλάσια· εἶναι ἄρα ὡς 2 ΛΓ : ΓΑ = 2 ΜΖ : ΖΑ. Ὡς δὲ 2ΜΖ : ΖΑ = ΜΖ : $\frac{1}{2}$ ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ 2 ΛΓ : ΓΑ = ΜΖ : $\frac{1}{2}$ ΖΑ. Καὶ τῶν ἑπομένων ὅρων τὰ ἡμίση· εἶναι ἄρα ἡ 2 ΛΓ : $\frac{1}{2}$ ΓΑ = ΜΖ : $\frac{1}{4}$ ΖΑ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΔΓ = 2 ΛΓ, ἡ δὲ ΓΜ = $\frac{1}{2}$ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΚ = $\frac{1}{4}$ ΖΑ· εἶναι ἄρα ὡς ΔΓ : ΓΜ = ΜΖ : ΖΚ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι ΔΓ + ΓΜ : ΓΜ = ΜΚ : ΚΖ (V. 18)· καὶ ὡς ἄρα τὸ (ΔΓ + ΓΜ)^2 : ΓΜ^2 = ΜΚ^2 : ΚΖ^2. Καὶ ἐπειδή, ὅταν τμηθῇ ἡ πλευρὰ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς γωνίας τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, π.χ. ἡ ΑΓ, εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, τουτέστι τὴν ΔΓ (θ. 8), τὸ δὲ τετράγωνον, τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος σὺν τῷ ἡμίσει τῆς ὅλης, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου, τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ εἶναι ἡ ΓΜ ἡμίσεια τῆς ὅλης ΑΓ, εἶναι ἄρα (ΔΓ +ΓΜ)^2 = 5ΓΜ^2. Ὡς δὲ τὸ (ΔΓ +ΓΜ)^2 πρὸς τὸ ΓΜ^2, οὕτως ἐδείχθη τὸ ΜΚ^2 πρὸς τὸ ΚΖ^2· εἶναι ἄρα τὸ ΜΚ^2 =5ΚΖ^2. Εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ ΚΖ^2· διότι ἡ διάμετρος εἶναι ῥητή· εἶναι ἄρα ῥητὸν καὶ τὸ ΜΚ^2 (X.6, ὁρ. 4)· ἡ ΜΚ ἄρα εἶναι ῥητὴ (X. ὁρ. 3). [Σημ. Τὸ « δυνάμει μόνον » οὐδὲν νόημα ἔχει·εἶναι παρεμβολή]. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΖ =4ΖΚ, εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ =5ΚΖ· εἶναι ἄρα τὸ ΒΚ^2 =25ΚΖ^2. Εἶναι δὲ τὸ ΜΚ^2 =5ΚΖ^2· εἶναι ἄρα τὸ ΒΚ^2 = 5ΚΜ^2· τὸ ΒΚ^2 ἄρα πρὸς τὸ ΚΜ^2 δὲν ἔχει λόγον, ὃν ὄχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΚΜ (X. 9). Καὶ ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ῥητή. Αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (X. ὁρ. 3). Ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ἀφαιρεθῇ ῥητὴ οὖσα δυνάμει μόνον σύμμετρος πρὸς τὴν ὅλην, ἡ λοιπὴ εἶναι ἄλογος (καλουμένη) ἀποτομὴ (X. 73)· ἡ ΜΒ ἄρα εἶναι ἀποτομή, προσαρμόζουσα δὲ εἰς αὐτὴν ἡ ΜΚ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ τετάρτη ἀποτομή. Ἔστω ὅτι ΒΚ^2 — ΚΜ^2 = Ν^2· τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΒΚ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου ἑκατέρα αὐτῶν. αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΜΚ. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῇ Ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΖ τῇ ΖΒ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΖΒ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστιν· καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\varepsilon}$ πρὸς ἕν. ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\varepsilon}$ πρὸς $\overline{\delta}$, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσσυμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΒΘ, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΜΒ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ ἡ ΑΒ διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ.

Ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβʹ.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΔΕ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ.

τῆς ΚΜ κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς Ν. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ, εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμα, ἡ ΚΖ + ΖΒ = ΚΒ σύμμετρος πρὸς τὴν ΖΒ (X. 15). Ἀλλὰ ἡ ΒΖ εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΘ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΒΚ σύμμετρος πρὸς τὴν ΒΘ (X. 12). Καὶ ἐπειδὴ τὸ $BK^2 = 5KM^2$, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΒΚ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΚΜ, ὃν ἔχει 5 : 1. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $BK^2 : N^2 = 5 : 4$ (V. 19, πόρ.), ἤτοι οὐχὶ λόγος τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· εἶναι ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν Ν ἀσύμμετρος (μήκει) (X. 9)· τὸ BK^2 ἄρα ὑπερέχει τοῦ KM^2 κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς ἀσυμμέτρου (μήκει) πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΚ). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης τῆς ΒΚ ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ κατὰ τετράγωνον πλευρᾶς (μήκει) ἀσυμμέτρου πρὸς αὐτὴν (τὴν ΒΚ), καὶ ὅλη ἡ ΒΚ εἶναι σύμμετρος (μήκει) πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν τὴν ΒΘ, εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ τετάρτη ἀποτομὴ (X. ὁρισμοὶ τρίτοι, 4). Τὸ ὀρθογώνιον δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῆς καὶ τετάρτης ἀποτομῆς εἶναι ἄλογον (ἄρρητον), καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τοῦτο τετραγώνου εἶναι ἄλογος (ἄρρητος), καλεῖται δὲ ἐλάσσων (X. 94). Εἶναι δὲ $\Theta B \times BM = AB^2$, διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΘ, τὸ τρίγωνον ΑΒΘ γίνεται ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ καὶ εἶναι $\Theta B : BA = AB : BM$.

Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ πενταγώνου ΑΒ εἶναι ἄλογος ἡ καλουμένη ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ἐὰν εἰς κύκλον ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (IV.2)· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ (III.1) τὸ Δ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΔ ἂς προεκταθῇ μέχρι τοῦ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, τὸ τόξον ἄρα ΒΕΓ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἄρα τὸ τόξον ΒΕ εἶναι τὸ ἓν ἕκτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου· ἡ εὐθεῖα ἄρα ΒΕ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου· εἶναι ἄρα ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τὴν ΔΕ (IV. 15, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $AE = 2\Delta E$, εἶναι ἄρα τὸ $AE^2 = 4E\Delta^2$, τουτέστι $= 4BE^2$. Εἶναι δὲ τὸ $AE^2 = AB^2 + BE^2$ (III. 31, I. 47)· εἶναι ἄρα $AB^2 + BE^2 = 4BE^2$. Καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι τὸ $AB^2 = 3BE^2$. Εἶναι δὲ ἡ $BE = \Delta E$· εἶναι ἄρα τὸ $AB^2 = 3\Delta E^2$.

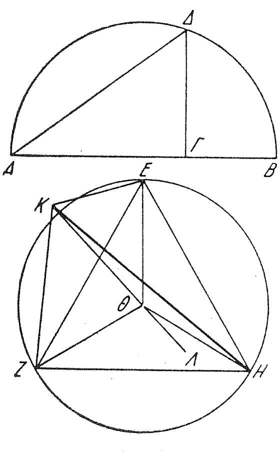
διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγʹ.

Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ· καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΘ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴνΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστη τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.



Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Νὰ κατασκευασθῇ πυραμὶς καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ δοθείσης σφαίρας, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἔστω ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒ (VI.10)· καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΑ· καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ ΕΖΗ ἔχων ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΕΖΗ (IV. 2)· καὶ ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Θ (III. 1) καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἂς ὑψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Θ ἡ ΘΚ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ΘΚ (ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΘΚ) εὐθεῖα ἡ ΘΚ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου ΕΖΗ (XI. ὁρ. 3). Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ πρὸς τὴν ΘΕ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΔΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΚΕ (I. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΔΑ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι διπλασία τῆς ΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ τριπλασία τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ $\mathrm{AB} : \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta}^2 : \mathrm{\Delta\Gamma}^2$, ὡς θὰ δειχθῇ ἐν συνεχείᾳ. Εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{A\Delta}^2 = 3\mathrm{\Delta\Gamma}^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $\mathrm{ZE}^2 = 3\mathrm{E\Theta}^2$ (θ. 12), καὶ εἶναι ἡ $\mathrm{\Delta\Gamma} = \mathrm{E\Theta}$· εἶναι ἄρα ἴση καὶ ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἐδείχθη ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ εἶναι ἴση πρὸς ἑκάστην τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ· τὰ τέσσαρα ἄρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ εἶναι ἰσόπλευρα. Κατεσκευάσθη ἄρα πυραμὶς ἐκ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΖΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Κ.

Πρέπει τώρα αὕτη νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρίτα δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΚΘ εὐθεῖα ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε [ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων]. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

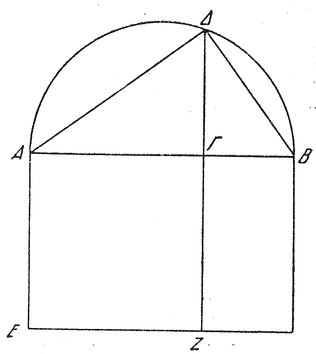
Λέγω δή, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ [ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΔΒ ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.



Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καί ἐστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ· τὸ δὲ ΒΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως

Διότι ἂς προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΚΘ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΘΛ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΘΛ =ΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΓ :ΓΔ =ΓΔ :ΓΒ (VI. 8 πόρ.), εἶναι δὲ ἡ μὲν ΑΓ =ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ =ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ = ΘΛ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΚΘ : ΘΕ = ΕΘ :ΘΛ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΚΘ $\times$ ΘΛ = ΕΘ^2 (VI. 17). Καὶ εἶναι ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΚΘΕ, ΕΘΛ· τὸ ἐπὶ τῆς ΚΛ ἄρα γραφόμενον ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε. [Ἐπειδὴ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΕΛ, ἡ γωνία ΛΕΚ γίνεται ὀρθή, διότι τὸ τρίγωνον ΕΛΚ γίνεται ἰσογώνιον πρὸς ἑκάτερον τῶν τριγώνων ΕΛΘ, ΕΘΚ]. Ἐὰν λοιπὸν διατηρουμένης σταθερᾶς τῆς ΚΛ τὸ ἡμικύκλιον ἀφοῦ περιστραφῇ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν του, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ ΖΛ, ΛΗ καὶ γίνωσιν ὁμοίως ὀρθαὶ αἱ παρὰ τὰ Ζ, Η γωνίαι· καὶ θὰ εἶναι ἡ πυραμὶς ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν. Διότι ἡ διάμετρος ΚΛ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας, ἐπειδὴ πρὸς μὲν τὴν ΑΓ εἶναι ἴση ἡ ΚΘ, πρὸς δὲ τὴν ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω τώρα, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ = 2ΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = 3ΒΓ· καὶ δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ἡ ΒΑ $= \frac{3}{2}$ ΑΓ, (διὰ διαιρέσεως δηλ. τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη). Ὡς δὲ ἡ ΒΑ : ΑΓ = ΒΑ^2 : ΑΔ^2 [ἐπειδὴ βεβαίως ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΒ εἶναι ὡς ἡ ΒΑ : ΑΔ = ΔΑ : ΑΓ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΔΑΓ καὶ εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (δηλ. ΒΑ : ΑΓ = ΒΑ^2 : ΑΔ^2 (V. ὁρ. 9)]. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΒΑ^2 $= \frac{3}{2}$ ΑΔ^2. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΒΑ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας, ἡ δὲ ΑΔ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς πυραμίδος.

Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Δέον νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ^2 : ΔΓ^2.

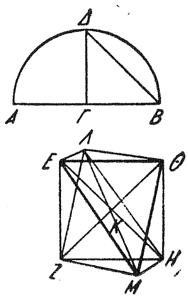
Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸ προηγουμένως καταγραφὲν ἡμικύκλιον, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΖΒ. Ἐπειδὴ λοιπὸν διότι τὸ τρίγωνον ΔΑΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ὡς ἡ ΒΑ : ΑΔ = ΔΑ : ΑΓ εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ $\times$ ΑΓ = ΑΔ^2 (VI. 17). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = τὸ ΕΒ : τὸ ΒΖ (VI. 1), καὶ εἶναι τὸ μὲν ΕΒ = ΒΑ $\times$ ΑΓ· διότι ΕΑ = ΑΓ· τὸ δὲ ΒΖ = ΑΓ $\times$ ΓΒ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΒΑ $\times$ ΑΓ : ΑΓ $\times$ ΓΒ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΒΑ $\times$ ΑΓ = ΑΔ^2, τὸ δὲ ΑΓ $\times$ ΓΒ = ΔΓ^2· διότι ἡ κάθετος ΔΓ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τῆς βάσεως τῶν ΑΓ, ΓΒ (VI. 8, πόρ.), διότι ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθή. Ὡς ἄρα ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΑΔ^2 : ΔΓ^2· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιον ἐστι τοῦ ἀπὸ ΕΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘΕ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσι αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.



Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ

14.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀκτάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ προηγουμένως, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Κ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ ἡ ΚΛ καὶ ἂς προεκταθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ, ΚΜ πρὸς μίαν τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση, ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΚΕ = ΚΘ$, καὶ ἡ γωνία ΕΚΘ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΘΕ^2 = 2ΕΚ^2$ (Ι. 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΛΚ = ΚΕ$, καὶ ἡ γωνία ΛΚΕ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $ΕΛ^2 = 2ΕΚ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΘΕ^2 = 2ΕΚ^2$· εἶναι ἄρα τὸ $ΛΕ^2 = ΕΘ^2$· ἄρα ἡ $ΛΕ = ΕΘ$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ $ΛΘ = ΘΕ$· τὸ τρίγωνον ἄρα ΛΕΘ εἶναι ἰσόπλευρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Λ, Μ, εἶναι ἰσόπλευρον· κατεσκευάσθη ἄρα ὀκτάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ὀκτὼ ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

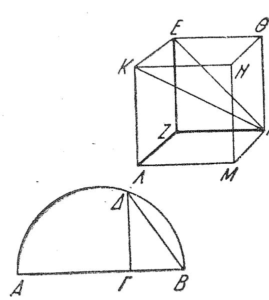
Διότι, ἐπειδὴ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ γραφόμενον ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, ἐάν, ἀφοῦ μείνῃ σταθερὰ ἡ ΛΜ, περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ, Η, Θ, καὶ θὰ περιλαμβάνεται τὸ ὀκτάεδρον ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ *δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΜ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.*

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΗΖ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΖ· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΗ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν τῆς δοθείσης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΛΚ = ΚΜ, εἶναι δὲ κοινὴ ἡ ΚΕ, καὶ περιέχουσιν ὀρθὰς γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ΛΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΕΜ (I. 4). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΛΕΜ εἶναι ὀρθή· διότι βαίνει ἐπὶ ἡμικυκλίου (III. 31)· εἶναι ἄρα τὸ $ΛΜ^2 = 2ΛΕ^2$ (I. 47). Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΓ = ΓΒ εἶναι ἡ ΑΒ = 2ΒΓ. Εἶναι δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΔ^2$ (VI. 8, V. ὁρ .9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 2ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΛΜ^2 = 2ΛΕ^2$. Καὶ εἶναι τὸ $ΔΒ^2 = ΛΕ^2$· διότι ἐλήφθη ἡ ΕΘ = ΔΒ. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΑΒ^2 = ΛΜ^2$· εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = ΛΜ. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· ἡ ΛΜ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας.

Περιελήφθη ἄρα τὸ ὀκτάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας. Καὶ συναπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Νὰ κατασκευασθῇ κύβος καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὅπως καὶ ἡ πυραμίς, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἄς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ καὶ ἄς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ = 2ΓΒ (VI. 10), καὶ ἄς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἄς ληφθῇ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἔχον τὴν πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ ἄς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἄς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ πρὸς μίαν τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κατεσκευάσθη ἄρα κύβος ὁ ΖΝ περιεχόμενος ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων. Πρέπει τώρα αὐτὸς νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Διότι ἄς ἀχθῶσιν αἱ ΚΗ, ΕΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΚΕΗ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΚΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΗ δηλαδὴ καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΗ (XI. ὁρ. 3), τὸ ἡμικύκλιον ἄρα τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΚΗ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΗΖ εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, εἶναι ἄρα κάθετος ἡ ΗΖ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΚ (XI. 4)· ὥστε καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Ζ. Ὁμοίως θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ κύβου. Ἐὰν λοιπόν, παραμενούσης σταθερᾶς τῆς ΚΗ, ἀφοῦ περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴ *ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΔΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.*

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

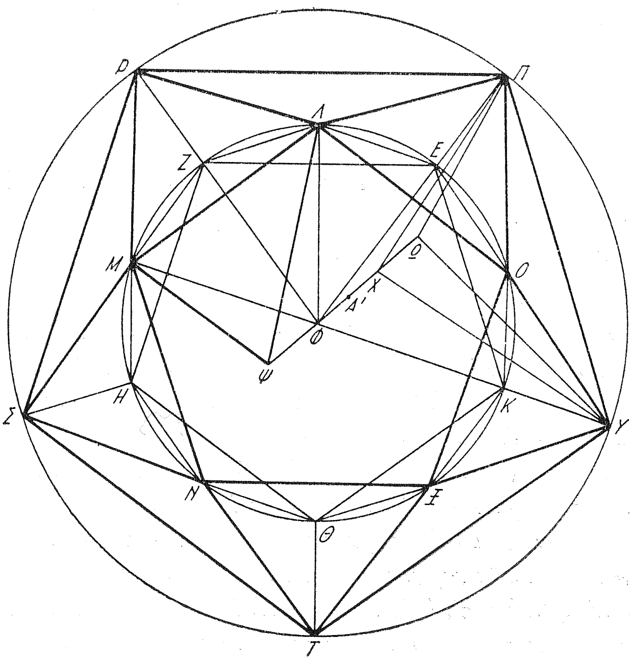
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ θέσιν, ἀφ' ἧς ἤρξατο στρεφόμενον, ὁ κύβος θὰ ἔχῃ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΗΖ $=$ ΖΕ, καὶ ἡ παρὰ τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα τὸ $\text{ΕΗ}^2 = 2\text{ΕΖ}^2$ (I. 47). Εἶναι δὲ ἡ ΕΖ $=$ ΕΚ· εἶναι ἄρα τὸ $\text{ΕΗ}^2 = 2\text{ΕΚ}^2$· ὥστε τὰ $\text{ΗΕ}^2 + \text{ΕΚ}^2$, τουτέστι τὸ $\text{ΗΚ}^2 = 3\text{ΕΚ}^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ $=$ 3ΒΓ, εἶναι δὲ $\text{ΑΒ} : \text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}^2 : \text{ΒΔ}^2$, εἶναι ἄρα τὸ $\text{ΑΒ}^2 = 3\text{ΒΔ}^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $\text{ΗΚ}^2 = 3\text{ΚΕ}^2$. Καὶ ἐλήφθη ἡ ΚΕ $=$ ΔΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΚΗ $=$ ΑΒ. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας.

Ὁ κύβος ἄρα περιελήφθη ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ συναπεδείχθη, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Νὰ κατασκευασθῇ εἰκοσάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ $=$ 4ΓΒ, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἔστω ἴση πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ (IV. 11), καὶ ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. Εἶναι ἄρα ἰσόπλευρον καὶ τὸ πεντάγωνον ΛΜΝΞΟ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΟ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου. Καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, Κ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ, αἵτινες νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἄρα ἡ ΕΠ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΥ (XI. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἴση πρὸς αὐτήν· αἱ ἑνοῦσαι δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εὐθείας εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Ἡ ΠΥ ἄρα εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΚ. Εἶναι δὲ ἡ ΕΚ πλευρὰ πενταγώνου ἰσοπλεύρου· καὶ ἡ ΠΥ ἄρα εἶναι πλευρὰ πενταγώνου ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ ἐγγραφομένου. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου πενταγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘΚ· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΠΡΣΤΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΠΕ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ *δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ,*

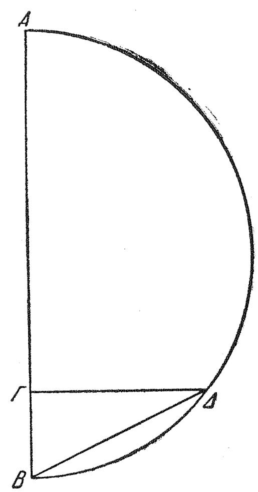


ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καί ἐστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ

ΕΟ δεκαγώνου, καὶ εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία ΠΕΟ, ἡ ΠΟ ἄρα εἶναι πλευρὰ πενταγώνου· διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΟΥ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πλευρὰ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΠΟΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ εἶναι ἰσόπλευρον. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ ἐδείχθη πλευρὰ πενταγώνου, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πλευρὰ πενταγώνου, εἶναι ἄρα ἰσόπλευρον τὸ τρίγωνον ΠΛΟ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν τριγώνων ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ τὸ σημεῖον Φ (III. 1)· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ ἂς ἀνυψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ἡ ΦΩ, καὶ ἂς προεκβληθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἂς ἀφαιρεθῇ, ὥστε νὰ εἶναι ἑξαγώνου μὲν πλευρὰ ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, εἶναι ἄρα παράλληλος ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΠΕ (XI. 6). Εἶναι δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (I. 33). Εἶναι δὲ ἡ ΕΦ πλευρὰ ἑξαγώνου· καὶ ἡ ΠΧ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΠΧ εἶναι ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΧΩ δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΠΧΩ εἶναι ὀρθὴ (XI. ὁρ. 3, I. 29), εἶναι ἄρα ἡ ΠΩ πλευρὰ πενταγώνου (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΥΩ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου, ἐπειδὴ βεβαίως, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, θὰ εἶναι ἀπέναντι καὶ ἴσαι, καὶ ἡ ΦΚ ὡς ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΧΥ πλευρὰ ἑξαγώνου. Ἡ δὲ ΧΩ εἶναι δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΥΧΩ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ΥΩ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πλευρὰ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΠΥΩ εἶναι ἰσόπλευρον. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ω, εἶναι ἰσόπλευρον. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΦΛ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΦΨ δεκαγώνου, καὶ ἡ γωνία ΛΦΨ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἄρα ἡ ΛΨ πλευρὰ πενταγώνου (θ. 10). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΦ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΜΨ εἶναι πλευρὰ πενταγώνου. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· τὸ τρίγωνον ἄρα ΛΜΨ εἶναι ἰσόπλευρον. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ψ, εἶναι ἰσόπλευρον. Κατεσκευάσθη ἄρα εἰκοσάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων.

αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΦ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.



Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΕ, οὕτως ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΦΨ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΕ, ΕΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΕΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΕΩ, ΦΕΩ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α΄. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΦΩ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ, ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν ΧΑ΄ πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ΄ τοῦ ἀπὸ τῆς Α΄Χ. καί ἐστι τῆς μὲν ΩΑ΄ διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ Α΄Χ διπλῆ ἡ ΦΧ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΦ. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΦΧ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΧΩ δεκαγώνου, ἡ ΦΩ ἄρα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΦΧ (θ. 9)· εἶναι ἄρα ὡς ΩΦ : ΦΧ = ΦΧ : ΧΩ. Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΦΧ πρὸς τὴν ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ πρὸς τὴν ΦΨ· εἶναι ἄρα ὡς ΩΦ : ΦΕ = ΕΦ : ΦΨ. Καὶ εἶναι αἱ γωνίαι ΩΦΕ, ΕΦΨ ὀρθαί· ἐὰν ἄρα φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΕΩ, ἡ γωνία ΨΕΩ εἶναι ὀρθὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΨΕΩ, ΦΕΩ (VI. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΩΦ : ΦΧ = ΦΧ : ΧΩ, καὶ εἶναι ἴση ἡ μὲν ΩΦ πρὸς τὴν ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΠ, εἶναι ἄρα ὡς ΨΧ : ΧΠ = ΠΧ : ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΠΨ, ἡ γωνία παρὰ τὸ Π θὰ εἶναι ὀρθὴ (VI. 8)· τὸ ἡμικύκλιον ἄρα τὸ γραφόμενον ἐπὶ τῆς ΨΩ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Π (I. 31). Καὶ ἐὰν παραμενούσης σταθερᾶς τῆς ΨΩ ἀφοῦ περιστραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, ἀφ' ἧς ἤρξατο στρεφόμενον, θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ θὰ ἔχῃ περιληφθῇ τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ σφαίρας. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὑπὸ τῆς δοθείσης. Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α′. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΦΩ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μικρότερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΩΧ, τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΩΧ σὺν τῷ ἡμίσει τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος τὸ ΧΑ′, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος (θ. 3)· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ΩΑ′ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς Α′Χ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΩΨ = 2 ΩΑ′, ἡ δὲ ΦΧ = 2Α′Χ· εἶναι ἄρα τὸ $ΩΨ^2 = 5 \times Φ^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ = 4 ΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = 5ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΔ^2$ (VI. 8, V. ὁρ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 5ΒΔ^2$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $ΩΨ^2 = 5ΦΧ^2$. Καὶ εἶναι ἡ ΔΒ = ΦΧ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΒ = ΨΩ. Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον τῆς δοθείσης σφαίρας. Περιελήφθη ἄρα τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας.

κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου, αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. λέγω, ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστι. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (X. 76). Διότι, ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ῥητή, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ, εἶναι ἄρα ῥητὴ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΕΖΗΘΚ· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι ῥητή. Ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ἔχοντα τὴν διάμετρον ῥητὴν ἐγγραφῇ πεντάγωνον ἰσόπλευρον, ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων (θ. 11). Ἡ πλευρὰ δὲ τοῦ πενταγώνου ΕΖΗΘΚ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἡ πλευρὰ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Π ό ρ ι σ μ α.

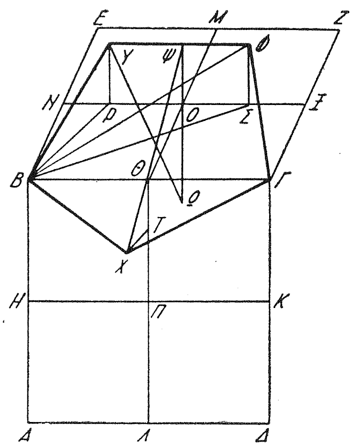
Ὅθεν ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πενταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἔχει ἀναγραφῇ τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας σύγκειται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο πλευρῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Νὰ κατασκευασθῇ δωδεκάεδρον καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας, ὡς καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἄς ληφθῶσι τοῦ προειρημένου κύβου (θ. 15) δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ ἂς τμηθῇ ἑκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ σημεῖα Ρ, Σ, Τ, καὶ ἔστω μεγαλύτερα τμήματα αὐτῶν τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων Ρ, Σ, Τ κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τοῦ κύβου ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἴσαι πρὸς τὰς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. Λέγω, ὅτι τὸ πεντάγωνον ΥΒΧΓΦ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ εἰς ἓν ἐπίπεδον καὶ ἀκόμη ὅτι εἶναι ἰσογώνιον. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΝΟ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΡΟ, εἶναι ἄρα τὰ τετράγωνα $ON^2 + NP^2 = 3PO^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἡ μὲν $ON = NB$, ἡ δὲ $OP = P\Upsilon$· ἄρα $BN^2 + NP^2 = 3P\Upsilon^2$. Πρὸς δὲ τὰ $BN^2 + NP^2$ εἶναι ἴσον τὸ BP^2 (I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $BP^2 = 3P\Upsilon^2$· ὥστε τὰ $BP^2 + P\Upsilon^2 = 4P\Upsilon^2$. Πρὸς δὲ τὰ $BP^2 + P\Upsilon^2$ εἶναι ἴσον τὸ $B\Upsilon^2$

ΒΡ, ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΡΥ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΣΡ τῆς ΟΡ, τουτέστι τῆς ΡΥ, ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ ἑκατέρα τῶν ΒΥ, ΥΦ ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρα τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘΧ· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ, ΟΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. καί ἐστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον.



Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ [ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ, ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ], ἴση δὲ ἡ ΟΡ τῇ ΟΣ [ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ], ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΣΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία), τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΦ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΒΦ βάσει τῇ ΒΓ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον·

(I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $BY^2 = 4YP^2$· ἄρα εἶναι $BY = 2PY$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $\Phi Y = 2YP$, ἐπειδὴ βεβαίως εἶναι καὶ ἡ $\Sigma P = 2OP$, τουτέστι $2PY$· εἶναι ἄρα ἡ $BY = Y\Phi$. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ εἶναι ἴση πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΥ, ΥΦ. Τὸ πεντάγωνον ἄρα ΒΥΦΓΧ εἶναι ἰσόπλευρον. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ εὑρίσκεται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς ἑκατέραν τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου κειμένη ἡ ΟΨ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΨΘ, ΘΧ· λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εἶναι εὐθεῖα. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΘΠ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΠΤ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Theta\Pi : \Pi T = \Pi T : T\Theta$. Εἶναι δὲ ἡ μὲν $\Theta\Pi = \Theta O$, ἡ δὲ $\Pi T = TX = O\Psi$· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Theta O : O\Psi = XT : T\Theta$. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ πρὸς τὴν ΤΧ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΔ (XI. 6)· ἡ δὲ ΤΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΨ· διότι ἑκατέρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΖ. Ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῶσι κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς δύο πλευράς, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν νὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (VI. 32)· εἶναι ἄρα ἐπ' εὐθείας ἡ ΨΘ καὶ ἡ ΘΧ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα κεῖται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου (XI. 1)· εἰς ἓν ἄρα ἐπίπεδον κεῖται τὸ πεντάγωνον ΥΒΧΓΦ.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Διότι ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΟ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ρ καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΟΡ [εἶναι ἄρα ὡς $NO + OP : ON = NO : OP$], εἶναι δὲ ἡ $OP = O\Sigma$ [εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Sigma N : NO = NO : O\Sigma$], ἡ ΝΣ ἄρα τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΝΟ (θ. 5)· εἶναι ἄρα τὰ $N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἴση ἡ μὲν ΝΟ πρὸς τὴν ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ πρὸς τὴν ΣΦ· ἄρα τὰ $N\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3NB^2$· ὥστε τὰ $\Phi\Sigma^2 + \Sigma N^2 + NB^2 = 4NB^2$. Πρὸς δὲ τὰ $\Sigma N^2 + NB^2$ εἶναι ἴσον τὸ ΣB^2 (I. 47)· εἶναι ἄρα τὰ $B\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2$, τουτέστι τὸ $B\Phi^2$ (διότι ἡ γωνία ΦΣΒ εἶναι ὀρθὴ) τετραπλάσιον τοῦ NB^2 (XI. ὁρ. 3)· εἶναι ἄρα ἡ $\Phi B = 2BN$. Εἶναι δὲ καὶ ἡ $B\Gamma = 2BN$, εἶναι ἄρα ἡ $B\Phi = B\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ πρὸς δύο τὰς ΒΧ, ΧΓ εἶναι ἴσαι, καὶ ἡ βάσις ΒΦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ (I. 8), ἡ γωνία ἄρα ΒΥΦ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΒΧΓ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΥΦΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΧΓ· αἱ τρεῖς ἄρα γωνίαι ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἴσαι. Ἐὰν δὲ ἰσοπλεύρου πενταγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ πεντάγωνον θὰ εἶναι ἰσογώνιον (θ. 7)· εἶναι ἄρα τὸ πεντάγωνον ΒΥΦΓΧ ἰσογώνιον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ πεντάγωνον ἄρα ΒΥΦΓΧ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον, καὶ εἶναι ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ κύβου *ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καί ἐστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.*

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ] ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καί ἐστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καί ἐστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ, ΣΞ. μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ, ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῆς ΒΓ. Ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν δώδεκα πλευρῶν τοῦ κύβου κατασκευάσωμεν τὰ αὐτά, θὰ συσταθῇ στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ δώδεκα ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων πενταγώνων, τὸ ὁποῖον καλεῖται δωδεκάεδρον.

Πρέπει τώρα αὐτὸ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Διότι ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω κατὰ τὴν ΨΩ· συναντᾷ ἄρα ἡ ΟΩ τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα· διότι τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὸ προτελευταῖον θεώρημα τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου (XI. 38). Ἂς τέμνωνται κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα εἶναι κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΝΣ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΝΟ, εἶναι ἄρα τὰ $ΝΣ^2 + ΣΟ^2 = 3\ ΝΟ^2$ (θ. 4). Εἶναι δὲ ἡ μὲν $ΝΣ = ΨΩ$, ἐπειδὴ βεβαίως καὶ ἡ μὲν $ΝΟ = ΟΩ$, ἡ δὲ $ΨΟ = ΟΣ$. Ἀλλ' ὅμως καὶ ἡ $ΟΣ = ΨΥ$, ἐπειδὴ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΡΟ· εἶναι ἄρα τὰ $ΩΨ^2 + ΨΥ^2 = 3\ ΝΟ^2$. Πρὸς δὲ τὰ $ΩΨ^2 + ΨΥ^2$ εἶναι ἴσον τὸ $ΥΩ^2$ (I. 47)· εἶναι ἄρα τὸ $ΥΩ^2 = 3\ ΝΟ^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· διότι προαπεδείχθη, νὰ κατασκευασθῇ κύβος καὶ νὰ περιληφθῇ ὑπὸ σφαίρας καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου (θ. 15). Ἐὰν δὲ ὅλον (τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου εἶναι τριπλάσιον) τοῦ ὅλου (τετραγώνου τῆς πλευρᾶς), εἶναι καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος· καὶ εἶναι ἡ ΝΟ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου· ἡ ΥΩ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ σημεῖον ἄρα Υ εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· περιελήφθη ἄρα τὸ δωδεκάεδρον ὑπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἄρρητος ἡ καλουμένη ἀποτομὴ (X. 73).

Διότι ἐπειδὴ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς ΝΟ, ἡ ὁποία ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, εἶναι ἡ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ, ἡ ὁποία ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΟΣ, εἶναι ἄρα ὅλης τῆς ΝΞ τεμνομένης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΡΣ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὡς ἡ $ΝΟ : ΟΡ = ΟΡ : ΡΝ$, ἰσχύει τοῦτο καὶ διὰ τὰ διπλάσια· διότι τὰ μέρη ἔχουσι πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τὸν αὐτὸν λόγον (V. 15)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΝΞ : ΡΣ = ΡΣ : ΝΡ + ΣΞ$ (V. 14). Εἶναι δὲ ἡ $ΝΞ > ΡΣ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΡΣ > ΝΡ + ΣΞ$· τέμνεται ἄρα ἡ ΝΞ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος καί ἐστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

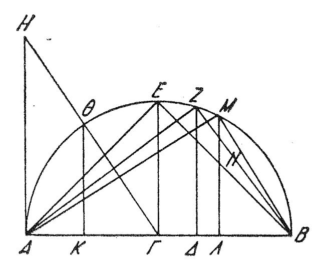
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΔΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΖΒ τρίγωνον τῷ ΑΖΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΖ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.



Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΖ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυ-καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ ΡΣ. Εἶναι δὲ ἡ ΡΣ = ΥΦ· τῆς ΝΞ ἄρα τεμνομένης εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι ῥητὴ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, εἶναι ἄρα ῥητὴ ἡ ΝΞ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ κύβου. Ἐὰν δὲ ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἄρρητος (ἡ καλουμένη) ἀποτομὴ (θ. 6).

Ἡ ΥΦ ἄρα, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου, εἶναι ἄρρητος ἀποτομή.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὅθεν εἶναι φανερὸν ἐκ τούτου ὅτι, ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Νὰ ἐκτεθῶσιν αἱ πλευραὶ τῶν πέντε σχημάτων καὶ νὰ συγκριθῶσι πρὸς ἀλλήλας.

Ἂς ληφθῇ ἡ διάμετρος τῆς δοθείσης σφαίρας ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ κατὰ τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ = ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ = 2ΔΒ, καὶ ἂς γραφῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΔ = 2ΔΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = 3ΔΒ. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ἡ ΒΑ = $\frac{3}{2}$ ΑΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΒΑ : ΑΔ = ΒΑ^2 : ΑΖ^2· διότι τὸ τρίγωνον ΑΖΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΖΔ (VI. 8) (καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων εἶναι ΒΑ : ΑΖ = ΑΖ : ΑΔ καὶ V. ὁρισ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ ΒΑ^2 = $\frac{3}{2}$ ΑΖ^2. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος (θ. 13). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΑΖ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ = 2ΔΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = 3ΒΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ : ΒΔ = ΑΒ^2 : ΒΖ^2 (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΖ, ΒΖΔ, καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς σχέσεως ΑΒ : ΒΖ = ΒΖ : ΒΔ, καὶ V. ὁρισ. 9)· εἶναι ἄρα τὸ ΑΒ^2 = 3ΒΖ^2. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου (θ. 15). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΒΖ ἄρα εἶναι πλευρὰ τοῦ κύβου.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΓ = ΓΒ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ = 2ΒΓ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΑΒ^2 : ΒΕ^2 (VI. 8, V. ὁρ. 9, ὡς ἀνωτέρω)· εἶναι ἄρα τὸ ΑΒ^2 = 2ΒΕ^2. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας διπλάσιον τοῦ τετρα-

νάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΕ ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ· ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΓΒ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστι διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστι διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καί ἐστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΛΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ· ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλ-

γώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου (θ. 14). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΒΕ ἄρα εἶναι πλευρὰ τοῦ ὀκταέδρου.

Ἂς ἀχθῇ τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΑΗ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΗ $=$ ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΑ $=$ 2ΑΓ· διότι ἡ ΗΑ $=$ ΑΒ· εἶναι δὲ ΗΑ : ΑΓ $=$ ΘΚ : ΚΓ (VI. 4), εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΘΚ $=$ 2ΚΓ. Ἄρα εἶναι τὸ $\Theta K^2 = 4K\Gamma^2$· εἶναι ἄρα τὰ $\Theta K^2 + \Gamma K^2$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\Theta\Gamma^2 = 5K\Gamma^2$ (I. 47). Εἶναι δὲ ἡ ΘΓ $=$ ΓΒ· εἶναι ἄρα τὸ $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ $=$ 2ΓΒ, ἐξ ὧν ἡ ΑΔ $=$ 2ΔΒ, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ εἶναι διπλασία τῆς λοιπῆς τῆς ΔΓ. Εἶναι ἄρα ἡ ΒΓ $=$ 3ΓΔ· εἶναι ἄρα τὸ $B\Gamma^2 = 9\ \Gamma\Delta^2$. Εἶναι δὲ τὸ $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$· εἶναι ἄρα τὸ $\Gamma K^2 >$ τοῦ $\Gamma\Delta^2$. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΚ $>$ ΓΔ. Ἂς ληφθῇ ἡ ΓΛ $=$ ΓΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΛΜ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$, καὶ εἶναι τῆς μὲν ΒΓ διπλασία ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλασία ἡ ΚΛ, εἶναι ἄρα τὸ $AB^2 = 5K\Lambda^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον (θ. 16 πόρ.). Καὶ εἶναι ἡ ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον· ἡ ΚΛ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου ἐγγραφομένου εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον (4. 15, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας σύγκειται ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο πλευρῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον (θ. 16 πόρ.), καὶ εἶναι ἡ μὲν ΑΒ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ΚΛ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, καὶ ἡ ΑΚ $=$ ΛΒ, εἶναι ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΛΒ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ ἀνεγράφη τὸ εἰκοσάεδρον. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΛΒ εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ· διότι εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΚΛ, ἐπειδὴ εἶναι ἴση καὶ πρὸς τὴν ΘΚ· διότι ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ εἶναι ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασία τῆς ΚΓ· εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ πενταγώνου (θεώρ. X καὶ I. 47). Ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου (θ. 16)· εἶναι ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ εἰκοσαέδρου.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΒ εἶναι πλευρὰ κύβου, ἂς τμηθῇ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα εἶναι πλευρὰ δωδεκαέδρου (θ. 17. πόρ.).

Καὶ ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι τὰ τρία δεύτερα μὲν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΑΖ τῆς πυραμίδος, διπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΒΕ τοῦ ὀκταέδρου, τριπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΖΒ τοῦ κύβου, ἐὰν εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἴσον μὲ ἓξ τετράγωνα, τὸ τετράγωνον μὲν τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρα τοιαῦτα τετράγωνα, τὸ τετράγωνον δὲ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου ἴσον μὲ τρία τοιαῦτα τετράγωνα, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου ἴσον μὲ δύο τοιαῦτα τετράγωνα. Εἶναι ἄρα τὸ μὲν τε-

λήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΛΚ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ [τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ]. πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον· ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ τράγωνον τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος τὰ τέσσαρα τρίτα μὲν τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου, διπλάσιον δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τὰ τρία δεύτερα τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Αἱ μὲν λοιπὸν εἰρημέναι πλευραὶ τῶν τριῶν σχημάτων, ἐννοῶ δηλαδὴ τῆς πυραμίδος, καὶ τοῦ ὀκταέδρου καὶ τοῦ κύβου, εἶναι πρὸς ἀλλήλας εἰς ῥητοὺς λόγους. Αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, ἐννοῶ δηλαδὴ καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὴν τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἶναι εἰς λόγους ῥητούς· διότι εἶναι ἄρρητοι, ἡ μὲν ὡς ἐλάσσων (θ. 16), ἡ δὲ ὡς ἀποτομὴ (θ. 17).

Ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου ἡ ΜΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΖΔΒ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΑΒ, (VI. 8), ἰσχύει ἡ ἀναλογία $\Delta B : BZ = BZ : BA$ (VI. 4). Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας (V. ὁρ. 9)· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $\Delta B : BA = \Delta B^2 : BZ^2$· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ $AB : B\Delta = ZB^2 : B\Delta^2$. Εἶναι δὲ ἡ $AB = 3\ B\Delta$· εἶναι ἄρα τὸ $ZB^2 = 3\ B\Delta^2$. Εἶναι δὲ καὶ τὸ $A\Delta^2 = 4\ \Delta B^2$· διότι ἡ $A\Delta = 2\Delta B$· εἶναι ἄρα τὸ $A\Delta^2 > $ τοῦ ZB^2· εἶναι ἄρα $A\Delta > ZB$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι ἡ $A\Lambda > ZB$. Καὶ ὅταν μὲν ἡ ΑΛ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΚΛ, ἐπειδὴ βεβαίως ἡ ΛΚ εἶναι πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΚΑ πλευρὰ δεκαγώνου (θ. 9)· ὅταν δὲ ἡ ΖΒ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΝΒ· εἶναι ἄρα ἡ $K\Lambda > NB$. Εἶναι δὲ ἡ $K\Lambda = \Lambda M$· εἶναι ἄρα ἡ $\Lambda M > NB$ [τῆς δὲ ΛΜ εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ΜΒ]. Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον ἡ ΜΒ οὖσα πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΝΒ, ἡ ὁποία εἶναι πλευρὰ τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω τώρα, ὅτι ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πέντε σχημάτων οὐδὲν ἄλλο σχῆμα κατασκευάζεται περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων ἴσων πρὸς ἄλληλα.

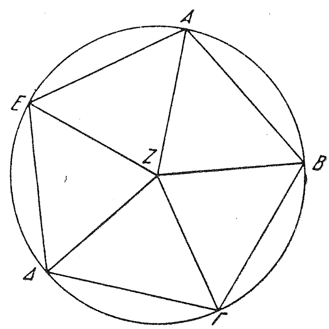
Διότι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων ἢ ἐν γένει ἐπιπέδων δὲν κατασκευάζεται (τρίεδρος) στερεὰ γωνία (XI. ὁρισ. 11). Ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων κατασκευάζεται ἡ στερεὰ γωνία τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων συνερχομένων πρὸς ἓν σημεῖον δὲν ὑπάρχει στερεὰ γωνία· διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι δύο τρίτα ὀρθῆς, θὰ εἶναι αἱ ἓξ ἴσαι πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον· διότι πᾶσα στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ μικροτέρων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν (XI. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους οὐδὲ ὑπὸ περισσοτέρων τῶν ἓξ ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ *πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.*

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε τοῦ πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καί εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



auf $\frac{6}{5}$ gleich Rechten

γωνία. Ὑπὸ τριῶν δὲ τετραγώνων περιέχεται ἡ γωνία τοῦ κύβου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· διότι θὰ εἶναι πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν περιέχεται ἡ γωνία τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων εἶναι ἀδύνατον νὰ περιέχεται· διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου εἶναι μία καὶ ἓν πέμπτον ὀρθῆς, θὰ εἶναι αἱ τέσσαρες γωνίαι μεγαλύτεραι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὅπερ ἀδύνατον. Ὅμως οὐδὲ ὑπὸ ἑτέρων πολυγώνων σχημάτων εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Δὲν κατασκευάζεται ἄρα ἄλλο στερεὸν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων σχημάτων ἐκτὸς τῶν εἰρημένων πέντε σχημάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δὲ ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου εἶναι μία καὶ ἓν πέμπτον ὀρθῆς, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

Διότι ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἂς περιγραφῇ περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ (IV. 14), καὶ ἂς ληφθῇ αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ (III. 1), καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. Ἄρα τέμνουσιν αὗται τὰς παρὰ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε γωνίας τοῦ πενταγώνου δίχα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὸ Ζ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἰσοῦνται πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, μία ἄρα ἐξ αὐτῶν, ὡς ἡ ΑΖΒ εἶναι μία ὀρθὴ μεῖον ἓν πέμπτον· αἱ λοιπαὶ ἄρα αἱ ΖΑΒ + ΑΒΖ εἶναι μία ὀρθὴ καὶ ἓν πέμπτον. Εἶναι δὲ ἴση ἡ ΖΑΒ πρὸς τὴν ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ γωνία ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου εἶναι μία ὀρθὴ καὶ ἓν πέμπτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I.

ΕΤΕΡΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

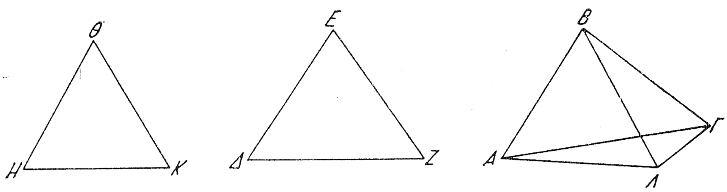
1.

Εἰς βιβλ. XI θεώρ. 22

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὔ,



ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ· μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ μετὰ ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι: συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυσὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΛΓ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές

ΑΛΛΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1.

Εἰς τὸ βιβλίον XI θεώρ. 22.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, τῶν ὁποίων αἱ δύο ἔστωσαν μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται, ἂς περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. Λέγω, ὅτι εἶναι δυνατὸν ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΓ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἄλλης καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται.

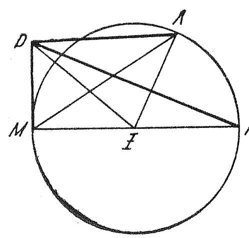
Ἐὰν μὲν λοιπὸν πάλιν αἱ παρὰ τὰ σημεῖα, Β, Ε, Θ γωνίαι εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ θὰ εἶναι αἱ δύο μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς. Ἐὰν δὲ ὄχι, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Β, Ε, Θ γωνίαι καὶ μεγαλυτέρα ἡ παρὰ τὸ Β ἑκατέρας τῶν παρὰ τὰ σημεῖα Ε, Θ· θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΓ μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ (Ι. 24). Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ $+ ΔΖ > ΗΚ$ καὶ $ΑΓ + ΗΚ > ΔΖ$. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ $ΔΖ + ΗΚ > ΑΓ$. Διότι ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Β, ἡ γωνία ΑΒΛ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΗΘΚ (Ι. 23), καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μίαν τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΛ, ΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ πρὸς δύο τὰς ΗΘ, ΘΚ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΑΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΗΚ (Ι. 4). Καὶ ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὰ σημεῖα Ε, Θ γωνίαι εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ΑΒΓ, τῶν ὁποίων ἡ $ΗΘΚ = ΑΒΛ$, ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ παρὰ τὸ Ε γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΛΒΓ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΔΕ, ΕΖ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ γωνία $ΔΕΖ > ΛΒΓ$, ἡ βάσις ἄρα ΔΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΛΓ. Ἐδείχθη δὲ $ΗΚ = ΑΛ$· εἶναι ἄρα $ΔΖ + ΗΚ > ΑΛ + ΛΓ$· ἀλλὰ αἱ $ΑΛ + ΛΓ > ΑΓ$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι $ΔΖ + ΗΚ > ΑΓ$. Τῶν εὐθειῶν ἄρα ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ αἱ δύο εἶναι μεγαλύτεραι τῆς λοιπῆς καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν λαμβάνωνται· εἶναι δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων πρὸς τὰς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

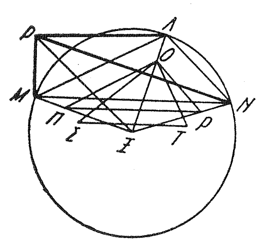
2.

Εἰς βιβλ. XI θεώρ. 23.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ. λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση. καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΛΞ. ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων· πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον. ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.



ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ. λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΛ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστιν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δύο ταῖς ΑΒΓ, ΗΘΚ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν. καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ καὶ ἴσην αὐτὴν ἀποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.



λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον

2.

Εἰς τὸ βιβλ. XI θεώρ. 23.

Ἀλλ' ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΞΛ. Λέγω πάλιν ὅτι εἶναι ΑΒ $>$ ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ΑΒ $\leqq$ ΛΞ. Ἔστω πρότερον ἴση. Εἶναι λοιπὸν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, πρὸς δύο τὰς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι πρὸς τὴν ΜΝ, ἴσαι. Ἀλλὰ ἐλήφθη ΜΝ $=$ ΔΖ. Εἶναι ἄρα καὶ αἱ ΔΕ $+$ ΕΖ ἴσαι πρὸς τὴν ΔΖ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα. Διότι κατὰ μείζονα λόγον τὸ ἀδύνατον θὰ εἶναι μεγαλύτερον. Εἶναι ἄρα ΑΒ $>$ ΛΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ἀνυψώσωμεν τὴν ΞΡ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ὥστε νὰ εἶναι ΞΡ$^2 =$ ΑΒ$^2 -$ ΛΞ^2, συντίθεται πάλιν τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ τώρα ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΛΞ, ΜΞ. Λέγω τώρα, ὅτι καὶ τοιουτοτρόπως εἶναι ΑΒ $>$ ΛΞ. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ εἶναι ἢ ἴση ἢ μικροτέρα. Ἔστω πρότερον ἴση. Ὑπάρχουσι λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΞ, ΞΛ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΑΓ ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΜΛ· ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΞΛ (Ι. 8). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΗΘΚ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΛΞΝ. Ὅλη ἄρα ἡ ΜΞΝ εἶναι ἴση πρὸς ΑΒΓ $+$ ΗΘΚ. Ἀλλὰ αἱ ΑΒΓ $+$ ΗΘΚ $>$ ΔΕΖ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΜΞΝ $>$ ΔΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ δύο πλευραὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΜΞ, ΞΝ, καὶ ἡ βάσις ΔΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΜΝ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΜΝΞ ἴση πρὸς τὴν ΔΕΖ (Ι. 8). Ἐδείχθη δὲ καὶ μεγαλυτέρα· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ ἴση πρὸς τὴν ΛΞ. Ἐν συνεχείᾳ δὲ θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα. Εἶναι ἄρα μεγαλυτέρα. Καὶ ἐὰν πάλιν ἀνυψώσωμεν τὴν ΞΡ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ λάβωμεν αὐτὴν οὕτως, ὥστε ΞΡ$^2 =$ ΑΒ$^2 -$ ΛΞ^2, πάλιν συντίθεται τὸ πρόβλημα.

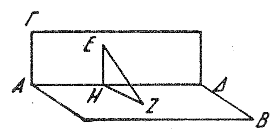
Λέγω λοιπόν, ὅτι οὔτε μικροτέρα εἶναι ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω. Καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, πρὸς δὲ τὴν ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ $=$ΒΓ, εἶναι καὶ ΞΟ $=$ ΞΠ. Ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΟΛ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΠΜ. Εἶναι ἄρα ἡ ΛΜ τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ, ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστι μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δύο ταῖς ΣΟ, ΟΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον.

3.

Εἰς βιβλ. XI θεώρ. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται.



μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔστω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, παράλληλος πρὸς τὴν ΠΟ (VI. 2) καὶ τὸ τρίγωνον ΛΜΞ εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΠΞΟ (Ι. 29). Εἶναι ἄρα ΞΛ : ΛΜ = ΞΟ : ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ΛΞ : ΞΟ = ΛΜ : ΟΠ. Εἶναι δὲ ΛΞ > ΞΟ· εἶναι ἄρα καὶ ΛΜ > ΟΠ (V. 14). Ἀλλὰ ΛΜ = ΑΓ· εἶναι ἄρα καὶ ΑΓ > ΟΠ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΠ ἀντιστοίχως, καὶ ἡ βάσις ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΟΠ, ἡ γωνία ἄρα ΑΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΟΞΠ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ἐὰν λάβωμεν τὴν ΞΡ ἴσην πρὸς ἑκατέραν τῶν ΞΟ, ΞΠ καὶ φέρωμεν τὴν [1] ΟΡ, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΗΘΚ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΟΞΡ. Ἄς κατασκευασθῇ λοιπὸν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΞ καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Ξ, ὡς κορυφῆς, γωνία ΛΞΣ = ΑΒΓ καὶ γωνία ΛΞΤ = ΗΘΚ, καὶ ἂς ληφθῇ ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ ἴση πρὸς τὴν ΟΞ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΟΞ, ΞΣ, καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΟΞΣ, ἡ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν βάσιν ΟΣ (Ι. 4). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ΛΝ = ΟΤ. Καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ, εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΣΟ, ΟΤ, καὶ ἡ γωνία ΜΛΝ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΣΟΤ, εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΜΝ μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΣΤ (Ι. 24). Ἀλλὰ ΜΝ = ΔΖ· εἶναι ἄρα καὶ ΔΖ > ΣΤ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΣΞ, ΞΤ, καὶ ἡ βάσις ΔΣ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως ΣΤ, εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΕΖ μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΣΞΤ (Ι. 25). Εἶναι δὲ ἡ ΣΞΤ = ΑΒΓ + ΗΘΚ. Ἡ γωνία ἄρα ΔΕΖ > ΑΒΓ + ΗΘΚ. Ἀλλὰ καὶ μικροτέρα· ὅπερ ἀδύνατον.

[1. Σημ. Πρόκειται περὶ τῆς ΟΡ ἐντὸς τοῦ κύκλου.]

3.

Εἰς τὸ βιβλ. XI θεώρ. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἀπό τινος σημείου ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον, ἡ ἀγομένη κάθετος θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων.

Διότι ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΑ.

Διότι ἂς μὴ πέσῃ, καὶ εἰ δυνατόν, ἂς πέσῃ ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ ἂς συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ ἔστω κάθετος ἡ ΖΗ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ (XI. ὁρ. 4), καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ, ἡ γωνία ἄρα *ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ. ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

4.

Εἰς βιβλ. XII θεώρ. 4.

Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΒΚΛΞ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΠΕΡΦ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. συνθέντι ἐστὶν ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα, οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα, οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ὡς δὲ τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰς ΜΝΟΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Εἰς βιβλ. XII θεώρ. 17.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΑ', καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΑ'. τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης

ΖΗΕ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ· ἄρα ἡ ΕΖΗ εἶναι ὀρθή. Εἶναι λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι ἴσαι πρὸς ὀρθάς· ὅπερ ἀδύνατον (Ι.17). Δὲν θὰ πέσῃ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἀγομένη κάθετος ἐκτὸς τῆς ΔΑ. Θὰ πέσῃ ἄρα ἐπὶ τὴν ΔΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Εἰς τὸ βιβλ. XII θεώρ. 4.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΑΒΓΗ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ἀλλ' ὅμως καὶ τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΔΕΖΘ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, εἶναι ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΒΚΛΞ, ἀπέναντι δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΟ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΞΔ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ ΠΕΡΦ, ἀπέναντι δὲ ἡ ΣΤ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΡΦΖ, ἀπέναντι δὲ τὸ ΣΤΥ. Διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ΚΒΞΛΜΟ + ΛΞΓΜΝΟ : ΛΞΓΜΝΟ = ΠΕΦΡΣΤ + ΡΦΖΣΤΥ : ΡΦΖΣΤΥ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΚΒΞΛΜΟ + ΛΞΓΜΝΟ : ΛΞΓΜΝΟ + ΡΦΖΣΤΥ = ΛΞΓΜΝΟ : ΡΦΖΣΤΥ. Ὡς δὲ τὸ πρίσμα ΛΞΓΜΝΟ πρὸς τὸ πρίσμα ΡΦΖΣΤΥ, οὕτως ἐδείχθη ἡ βάσις ΛΞΓ πρὸς τὴν ΡΦΖ, καὶ ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΑΒΓΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΔΕΖΘ δύο πρίσματα. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον ὡς τὰς ΜΝΟΗ, ΣΤΥΘ, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΜΝΟ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΤΥΘ δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ βάσις ΜΝΟ πρὸς τὴν βάσιν ΣΤΥ, οὕτως ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΔΕΖ, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΑΒΓΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΔΕΖΘ δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΤΥΘ δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ θὰ ἀποδειχθῶσι καὶ ἐπὶ τῶν προκυπτόντων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πυραμίδων ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ καὶ ἁπλῶς ὅλων τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Εἰς τὸ βιβλ. XII θεώρ. 17.

Ὅμως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἄλλως προχειρότερον, ὅτι ΑΨ $>$ ΑΗ. Ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗ ἡ ΗΑ′, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΑ′. Τέμνοντες λοιπὸν τὸ τόξον ΕΒ δίχα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δίχα καὶ πράττοντες τοῦτο πάντοτε θὰ καταλείψωμεν τόξον τι, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ τόξου τοῦ

τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΑ'. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΑ'. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΚ γωνία. μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΒΨ. ἀλλὰ τῆς ΚΒ μείζων ἐστὶν ἡ ΗΑ'· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΑ' μείζων ἐστὶ τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΑ' τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΑ' τῇ ΑΒ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΑ' τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΑ' ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΑ', τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΑ' ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ'· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

6.

Εἰς βιβλ. XIII ϑεώρ. 6.

Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστι. ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον. σύμμετρον τμῆμά ἐστι τὸ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστι. κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΔΓ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ὃν μὲν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΑ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. τὸ δὲ ᾱ ἀποτομὴν παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ἀποτομὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΒ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστιν. ἐὰν ἄρα ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστιν.

7.

Εἰς βιβλ. XIII ϑεώρ. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφότερος ἡ ὅλη καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.

κύκλου ΒΓΔΕ τοῦ ἔχοντος χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ΗΑ'. Ἂς ὑπολειφθῇ καὶ ἔστω τὸ τόξον ΚΒ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΚΒ μικροτέρα τῆς ΗΑ'. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΒΚΣΟ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, καὶ εἶναι $ΟΒ = ΒΚ = ΚΣ$, καὶ ἡ ΟΣ εἶναι μικροτέρα, εἶναι ἄρα ἀμβλεῖα ἡ γωνία ΒΨΚ. Ἄρα $ΚΒ > ΒΨ$. Ἀλλ' εἶναι $ΗΑ' > ΚΒ$· κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι $ΗΑ' > ΒΨ$· εἶναι ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς $ΗΑ' >$ τοῦ $ΒΨ^2$. Καὶ ἐπειδὴ $ΑΑ' = ΑΒ$, εἶναι καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΑ' ἴσον πρὸς $ΑΒ^2$. Ἀλλὰ πρὸς μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ΑΑ' εἶναι ἴσα τὰ $ΑΗ^2 + Α'Η^2$, πρὸς δὲ τὸ $ΑΒ^2$ εἶναι ἴσα τὰ $ΒΨ^2 + ΨΑ^2$· εἶναι ἄρα $ΑΗ^2 + Α'Η^2 = ΒΨ^2 + ΨΑ^2$, τῶν ὁποίων τὸ $ΒΨ^2 < Α'Η^2$· τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΨΑ^2 > ΑΗ^2$· εἶναι ἄρα $ΑΨ > ΑΗ$.

6.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 6.

Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἀποτομή. Διότι ἂς τμηθῇ ἡ ῥητὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ. Τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι σύμμετρον. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀποτομή. Ἂς ληφθῇ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ ἡ ΑΔ (σχῆμα θ. 6 τοῦ XIII). Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2 = 5ΔΑ^2$, εἶναι δὲ ῥητὸν τὸ $ΔΑ^2$, ἄρα εἶναι ῥητὸν καὶ τὸ $ΔΓ^2$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΔΓ^2 = 5ΔΑ^2$, ἄρα τὸ $ΔΓ^2$ πρὸς τὸ $ΔΑ^2$ δὲν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ὃν λόγον ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΓ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΔΑ. Καὶ ἑκατέρα εἶναι ῥητή· ἄρα αἱ ΓΔ, ΔΑ εἶναι ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἀποτομή. Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ ῥητή, καὶ παρὰ τὴν ΑΒ παρεβλήθη τὸ $ΑΓ^2$ ὡς ὀρθογώνιον $ΑΒ \times ΒΓ$. Τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν σχηματίζει πλάτος ἀποτομὴν πρώτην (Χ. 97). Καὶ ἡ ΓΒ ἄρα εἶναι ἀποτομή. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀποτομή. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἑκάτερον τῶν τμημάτων εἶναι ἀποτομή.

7.

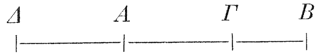
Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, θὰ εἶναι ὡς τὸ ἄθροισμα ὅλης μὲ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα.

Διότι ἂς τμηθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι εἶναι ὡς $ΒΑ + ΑΓ : ΑΒ = ΒΑ : ΑΓ$.

Κείσθω γὰρ τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστι τὸ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΔΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΔΑ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



8.

Εἰς βιβλ. XIII θεωρ. 1 - 5.

Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.

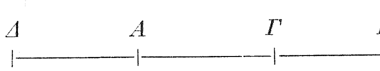
Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Τοῦ $\overline{α}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἔστι δέ· διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ.



Διότι ἂς ληφθῇ $ΑΔ = ΑΓ$· λέγω, ὅτι εἶναι $ΒΔ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$. Διότι ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, εἶναι ἄρα ὡς $ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ$. Εἶναι δὲ $ΑΓ = ΑΔ$· εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΔ = ΑΓ : ΓΒ$· ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς $ΔΑ : ΑΒ = ΒΓ : ΓΑ$· διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ὡς $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$. Εἶναι δὲ $ΔΑ = ΑΓ$· εἶναι ἄρα ὡς $ΒΑ + ΑΓ : ΑΒ = ΒΑ : ΑΓ$. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη ὡς $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ$, εἶναι δὲ $ΓΑ = ΔΑ$, εἶναι ἄρα ὡς $ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ$. Καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα, ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεωρ. 1-5

Τί εἶναι ἀνάλυσις καὶ τί εἶναι σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν λοιπὸν εἶναι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ἀποδειχθέντος, διὰ τῶν ἑπομένων συλλογισμῶν ἀποδεικνυομένου ὡς ἀληθοῦς.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ἀποδεικνυομένου, διὰ σειρᾶς ἀληθῶν προτάσεων.

Τοῦ α′ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ σχήματος.

(σχ. θεωρήματος).

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· λέγω, ὅτι τὸ $ΓΔ^2 = 5ΑΔ^2$.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2 = 5ΑΔ^2$, τὸ δὲ $ΓΔ^2 = ΓΑ^2 + ΑΔ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ$, εἶναι ἄρα $ΓΑ^2 + ΑΔ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ = 5ΑΔ^2$· δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι $ΓΑ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ = 4ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $2ΓΑ \times ΑΔ = ΒΑ \times ΑΓ$· διότι $ΒΑ = 2ΑΔ$· καὶ $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΒΓ$· διότι ἡ ΑΒ ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον· εἶναι ἄρα $ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ = 4ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ = ΑΒ^2$. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΒ^2 = 4ΑΔ^2$. Εἶναι δέ· διότι $ΑΒ = 2ΑΔ$.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΒΑ τὸ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\overline{\beta}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον· διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἔστι δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΑ. διελόντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως

Σύνθεσις.

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΑΒ^2 = 4ΑΔ^2$, ἀλλὰ τὸ $ΒΑ^2 = ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ$ (ΙΙ. 2), εἶναι ἄρα $ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ = 4ΑΔ^2$. Ἀλλὰ $ΒΑ \times ΑΓ = 2ΔΑ \times ΑΓ$, καὶ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$· εἶναι ἄρα $ΑΓ^2 + 2ΔΑ \times ΑΓ = 4ΑΔ^2$· ὥστε $ΔΑ^2 + ΑΓ^2 + 2ΔΑ \times ΓΑ = 5ΑΔ^2$. Τὰ δὲ $ΔΑ^2 + ΑΓ^2 + 2ΔΑ \times ΑΓ = ΓΔ^2$ (ΙΙ. 4). Εἶναι ἄρα τὸ $ΓΔ^2 = 5ΑΔ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ β′ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ σχήματος.

(σχ. θεωρήματος).

Διότι ἂς εἶναι τὸ τετράγωνον εὐθείας τινὸς τῆς ΓΔ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου μέρους αὐτῆς τῆς ΔΑ, τῆς δὲ ΔΑ ἔστω διπλασία ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ τέμνεται εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$. Εἶναι δὲ καὶ $ΒΑ \times ΑΓ = 2ΔΑ \times ΑΓ$· διότι ἡ $ΒΑ = 2ΑΔ$· εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ + ΒΑ \times ΑΓ$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $ΑΒ^2 = 2ΔΑ + ΑΓ + ΑΓ^2$. Εἶναι δὲ τὸ $ΑΒ^2 = 4ΔΑ^2$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $2ΔΑ \times ΑΓ + ΑΓ^2 = 4ΑΔ^2$· ὥστε $ΔΑ^2 + ΑΓ^2 + 2ΔΑ \times ΑΓ$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $ΓΔ^2 = 5ΔΑ^2$. Εἶναι δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $ΓΔ^2 = 5ΔΑ^2$, τὸ δὲ $ΓΔ^2 = ΔΑ^2 + ΑΓ^2 + 2ΔΑ \times ΑΓ$, εἶναι ἄρα $ΔΑ^2 + ΑΓ^2 + 2ΔΑ \times ΑΓ = 5ΔΑ$. Δι' ἀφαιρέσεως εἶναι $2ΔΑ \times ΑΓ + ΑΓ^2 = 4ΔΑ^2$· εἶναι δὲ καὶ $ΑΒ^2 = 4ΑΔ^2$· εἶναι ἄρα $2ΔΑ \times ΑΓ$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς $ΒΑ \times ΑΓ$ σὺν $ΑΓ^2 = ΑΒ^2$. Ἀλλὰ $ΑΒ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΒΑ \times ΑΓ$ (ΙΙ. 2)· εἶναι ἄρα $ΒΑ \times ΑΓ + ΑΒ \times ΒΓ = ΒΑ \times ΑΓ + ΑΓ^2$ · καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν $ΒΑ \times ΑΓ$, τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$· εἶναι ἄρα $ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ$. Εἶναι δὲ $ΒΑ > ΑΓ$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΑΓ > ΓΒ$· ἡ ΑΒ ἄρα ἐτμήθη εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ γ̅ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

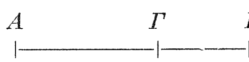
Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ· διελόντι τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ. τῷ δὲ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ. ἔστι δέ· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΔΓ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ. συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ δ̅ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ.



Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· διελόντι τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δέ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καί ἐστι μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ,

Τοῦ γ′ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Διότι ἂς τμηθῇ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἥμισυ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ $ΒΔ^2 = 5ΓΔ^2$.

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $ΒΔ^2 = 5ΓΔ^2$, τὸ δὲ $ΔΒ^2 = ΑΒ \times ΒΓ + ΔΓ^2$ (II. 6), εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ + ΔΓ^2 = 5ΔΓ^2$· δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ = 4ΔΓ^2$. Εἶναι δὲ $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ. Εἶναι ἄρα τὸ $ΑΓ^2 = 4ΔΓ^2$. Εἶναι δέ· διότι $ΑΓ = 2ΔΓ$.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπειδὴ $ΑΓ = 2ΔΓ$, εἶναι τὸ $ΑΓ^2 = 4ΔΓ^2$. Ἀλλὰ $ΑΓ^2 = ΑΒ \times ΒΓ$· εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = 4ΔΓ^2$. Διὰ προσθέσεως ἄρα εἶναι $ΑΒ \times ΒΓ + ΔΓ^2 = 5ΔΓ^2 = ΔΒ^2$ (II. 6)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ δ′ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Διότι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3ΑΓ^2$.

Διότι, ἐπειδὴ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3ΑΓ^2$, ἀλλὰ $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2$ (II. 7), εἶναι ἄρα $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2 = 3ΑΓ^2$· δι' ἀφαιρέσεως ἄρα εἶναι $2ΑΒ \times ΒΓ = 2ΑΓ^2$· ὥστε $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$. Εἶναι δέ· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

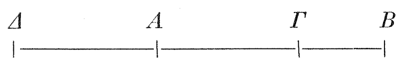
Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ εἶναι μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, εἶναι ἄρα $ΑΒ \times ΒΓ = ΑΓ^2$· εἶναι ἄρα $2ΑΒ \times ΒΓ =$

ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· συνθέντι τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\overline{ε}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δέ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.



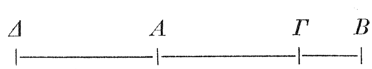
Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Εἰς βιβλ. XIII θεώρ. 17.

Ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ. προσκείσθω δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς ΑΒ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ, αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἡ ΑΓ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστιν· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἡ ΑΔ, τῆς δὲ ΓΒ ἡ ΓΔ.



$2ΑΓ^2$· καὶ διὰ προσθέσεως ἄρα εἶναι $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2 = 3ΑΓ^2$. Ἀλλὰ $2ΑΒ \times ΒΓ + ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ (II. 7)· εἶναι ἄρα $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3ΑΓ^2$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ ε΄ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις.

Διότι εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΔ = ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΔΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ, εἶναι ἄρα ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ. Εἶναι δὲ ΑΔ = ΑΓ· εἶναι ἄρα ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων ἄρα εἶναι ΒΔ : ΔΑ = ΑΒ : ΒΓ (V. 19 πόρ.) καὶ διὰ διαιρέσεως ἄρα τῶν λόγων εἶναι ΒΑ : ΑΔ = ΑΓ : ΓΒ (V. 17). Εἶναι δὲ ΑΔ = ΑΓ· εἶναι ἄρα ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ. Εἶναι δέ· διότι ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, εἶναι ἄρα ΒΑ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ. Εἶναι δὲ ΑΓ = ΑΔ· εἶναι ἄρα ΒΑ : ΑΔ = ΑΓ : ΓΒ· καὶ διὰ συνθέσεως τῶν λόγων (V. 18) εἶναι ΒΔ : ΔΑ = ΑΒ : ΒΓ· καὶ δι' ἀναστροφῆς τῶν λόγων εἶναι (V. 19 πόρ.) ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΓ. Εἶναι δὲ ΑΓ = ΑΔ· εἶναι ἄρα ΔΒ : ΒΑ = ΒΑ : ΑΔ. Ἡ ΔΒ ἄρα ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 17.

Διότι ἡ ῥητὴ ΑΒ ἂς τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεγαλύτερον τὸ ΑΓ. Ἂς πρόσκειται δὲ ἡ ΑΔ = ΑΒ : 2. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΔ ῥητή. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $ΓΔ^2 = 5ΔΑ^2$ (XIII. 1), εἶναι ἄρα αἱ ΓΔ, ΔΑ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἡ ΑΓ ἄρα εἶναι ἀποτομή. Εἶναι δὲ ῥητὴ ἡ ΑΒ. Τὸ δὲ τετράγωνον ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον σχηματίζει πλάτος ἀποτομὴν (X. 97)· ἡ ΒΓ ἄρα εἶναι ἀποτομή. Ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ εἶναι ἀποτομή· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ εἶναι ἡ ΑΔ, τῆς δὲ ΓΒ ἡ ΓΔ.

10.

Εἰς βιβλ. XIII θεώρ. 18.

Ἄλλως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΒ τριγώνῳ. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ πενταπλάσιον. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μεῖζόν ἐστιν. μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ. μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΒΝ μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστιν, δείξομεν οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστιν, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΒ ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ δύο τῶν ἀπὸ ΒΝ μεῖζόν ἐστιν. ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ ΒΝ μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Εἰς τὸ βιβλ. XIII θεώρ. 18.

Ἄλλως ὅτι ἡ $MB > NB$.

Διότι, ἐπειδὴ $A\Delta = 2\Delta B$, εἶναι ἄρα $AB = 3B\Delta$. Εἶναι δὲ $AB : B\Delta = AB^2 : BZ^2$, διότι τὸ τρίγωνον ZAB εἶναι ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον $Z\Delta B$. Εἶναι ἄρα τὸ $AB^2 = 3BZ^2$. Ἐδείχθη δὲ τὸ $AB^2 = 5K\Lambda^2$. Εἶναι ἄρα $5K\Lambda^2 = 3ZB^2$. Ἀλλὰ εἶναι $3ZB^2 > 6NB^2$. Καὶ ἄρα $5K\Lambda^2 > 6NB^2$. Ὥστε καὶ ἓν τὸ $K\Lambda^2 > NB^2$. Εἶναι ἄρα $K\Lambda > NB$. Εἶναι δὲ $K\Lambda = \Lambda M$. Εἶναι ἄρα $\Lambda M > NB$. Κατὰ μείζονα ἄρα λόγον εἶναι $MB > BN$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ $3ZB^2 > 6NB^2$, ἀποδεικνύομεν ὡς ἑξῆς· διότι, ἐπειδὴ $BN > NZ$, εἶναι ἄρα $ZB \times BN > BZ \times ZN$. Εἶναι ἄρα $ZB \times BN + BZ \times ZN > 2BZ \times ZN$. Ἀλλὰ $ZB \times BN + BZ \times ZN = ZB^2$ (II. 2), καὶ $BZ \times ZN = NB^2$. Εἶναι ἄρα $ZB^2 > 2BN^2$. Ἓν ἄρα τὸ ZB^2 εἶναι μεγαλύτερον δύο BN^2. Ὥστε καὶ $3ZB^2 > 6BN^2$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ.

λς΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΕ, ΖΔ, ΔΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΗΔ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΘΔ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΚ στερεόν, καὶ κείσθω τῇ Β ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΛ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΕΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΘ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΜΛ, ΛΝ, ΝΛ, ΛΞ, ΞΛ, ΛΜ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΜ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ κείσθω τῇ Β ἴση ἑκατέρα τῶν ΞΛ, ΛΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΛΠ στερεόν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΔΕ, ἡ δὲ Β ἑκατέρᾳ τῶν ΞΛ, ΛΟ, ἡ δὲ Γ τῇ ΔΘ, ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΜΛ, οὕτως ἡ ΟΛ πρὸς τὴν ΔΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, ΘΡ παραλληλόγραμμον τῷ ΟΛΜΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοί εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφεστᾶσιν αἱ ΗΔ, ΞΛ, ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ τῇ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἀφῃρημέναι εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΗΔ, ΞΛ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ τῷ ΛΠ. καί ἐστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς Β. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.

36.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι ἀνάλογοι, τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μέσης ἰσόπλευρον μὲν στερεόν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προειρημένον.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἀναλογίᾳ αἱ Α, Β, Γ, ὡς $Α : Β = Β : Γ$. Λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν $Α \times Β \times Γ$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον στερεόν. Ἂς ληφθῇ $ΑΕ = Α$ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΕ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ ἂς κατασκευασθῇ πρὸς τυχοῦσαν εὐθύγραμμον στερεὰν γωνίαν ἴση εὐθύγραμμος στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΕ, ΖΔ, ΔΘ, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς μὲν τὴν Β ἴση ἡ ΗΔ, πρὸς δὲ τὴν Γ ἴση ἡ ΘΔ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν ΔΚ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΛΜ = Β$, καὶ ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΛ καὶ μὲ κορυφὴν ἐπ' αὐτῆς τὸ σημεῖον Λ πρὸς τὴν στερεὰν εὐθύγραμμον γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΕΔ, ΔΗ, ΗΔ, ΔΘ ἴση στερεὰ εὐθύγραμμος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΜΛ, ΛΝ, ΝΛ, ΛΞ, ΞΛ, ΛΜ, ὥστε νὰ εἶναι ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ πρὸς τὴν ΝΛ, ΛΜ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΝΛ, ΛΞ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἂς ληφθῇ πρὸς τὴν Β ἴση ἑκατέρα τῶν ΞΛ, ΛΟ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ στερεὸν ΛΠ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Α : Β = Β : Γ$, ἴση δὲ ἡ μὲν Α πρὸς ΔΕ, ἡ δὲ Β πρὸς ἑκατέραν τῶν ΞΛ, ΛΟ, ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν ΔΘ, εἶναι ἄρα $ΔΕ : ΜΛ = ΟΛ : ΔΘ$. Καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, πλευραὶ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι (VI. 14)· εἶναι ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΔΘ, ΘΡ ἴσον πρὸς τὸ ΟΛΜΣ. Καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουσιν ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν ἔχουσιν ἀχθῇ κάθετοι ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αἱ ΗΔ, ΞΛ, περιέχουσιν ἴσας γωνίας τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔΗ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔΕ πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛΜ, καὶ ἀφοῦ γίνει ἀφαίρεσις εἶναι ἴσαι αἱ εὐθεῖαι ΗΔ, ΞΛ, αἱ κάθετοι ἄρα αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν σημείων Η, Ξ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν ΘΔ, ΔΕ, ΟΛ, ΛΜ θὰ εἶναι ἴσαι. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι ἴσα, εἶναι ἴσα. Εἶναι ἄρα τὸ $ΔΚ = ΛΠ$. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ ΛΠ τὸ $Β^3$. Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ περιεχόμενον στερεὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεὸν ἰσόπλευρον μέν, ἰσογώνιον δὲ πρὸς τὸ προειρημένον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὗται ἀνάλογον ἔσονται.

ἔστωσαν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἡ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν· πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο. ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ ΓΛ· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἥ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ πρὸς τὴν ΗΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἥ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣΤ τῷ ΗΝ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣΤ. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΣΥ στερεόν. τὸ ΕΜ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΗΝ, ΣΥ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΝ τῷ ΣΥ, καὶ ὁμόλογός ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, ἴση δὲ ἡ ΣΤ τῷ ΗΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὐτὴ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύβου διαμέτρου.

37.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀνάλογοι, εἶναι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογα. Καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἀνάλογα, καὶ αὗται εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀνάλογοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ, καὶ ἂς ἀναγραφῶσιν ἀφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΚ, ΓΛ, ΕΜ, ΗΝ. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΝ. Διότι ἂς γίνῃ ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΓΔ : Ξ = Ξ : Ο. Ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ ΑΚ, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ ΓΛ· εἶναι δὲ ΕΖ : ΗΘ = ΗΘ : Π = Π : Ρ. Εἶναι ἄρα ΕΖ : Ρ = ΕΜ : ΗΝ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ, ἀλλὰ ὡς ΑΒ : ΓΔ = ΓΔ : Ξ = Ξ : Ο, ὡς δὲ ΕΖ : ΗΘ = ΗΘ : Π = Π : Ρ, δι' ἴσου ἄρα (δηλ. διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη) εἶναι ΑΒ : Ο = ΕΖ : Ρ (V. 22). Ἀλλὰ ΑΒ : Ο = στερεὸν ΑΚ : στερεὸν ΓΛ, καὶ ΕΖ : Ρ = στερεὸν ΕΜ : στερεὸν ΗΝ. Ὡς ἄρα τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως εἶναι τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΝ.

Ἔστω τώρα πάλιν ὡς τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΗΝ. Λέγω, ὅτι εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ. Διότι ἂς γίνῃ ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΣΤ, καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΣΤ ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΝ καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣΤ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΣΤ, εἶναι ἄρα καὶ ὡς τὸ στερεὸν ΑΚ πρὸς τὸ στερεὸν ΓΛ, οὕτως τὸ στερεὸν ΕΜ πρὸς τὸ στερεὸν ΣΥ. Τὸ ΕΜ ἄρα ἔχει πρὸς ἑκάτερον τῶν ΗΝ, ΣΥ τὸν αὐτὸν λόγον. Εἶναι ἄρα τὸ ΗΝ = ΣΥ, καὶ ἡ ΗΘ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ΣΤ. Εἶναι ἄρα ΗΘ = ΣΤ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΣΤ, εἶναι δὲ ΣΤ = ΗΘ, εἶναι ἄρα ΑΒ : ΓΔ = ΕΖ : ΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τοῦ κύβου τμηθῶσι δίχα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐκβληθῶσιν ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων θὰ τέμνῃ τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου δίχα, καὶ αὐτὴ θὰ τέμνεται δίχα ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου.

κύβου γὰρ τοῦ ΑΒ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΔ, ΑΕ, ΒΖ, ΗΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ, ΕΓ, ΒΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΒ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΜ, ΠΞ, ΝΛ, ΟΡ, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΣΤ, διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ ΒΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΣΤ δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν τοῦ κύβου διαμέτρων.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΔΑ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΕ ἡμίσεια ἡ ΓΝ, τῆς δὲ ΔΑ ἡμίσεια ἡ ΛΑ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΛΑ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΣΝ τῇ ΣΛ ἴση. δύο δὴ αἱ ΓΝ, ΝΣ δυσὶ ταῖς ΛΑ, ΛΣ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΝΣ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΣΛΑ ἴσῃ· βάσις ἄρα ἡ ΓΣ βάσει τῇ ΣΑ ἴση, καὶ τὸ ΓΝΣ τρίγωνον τῷ ΑΛΣ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ τῶν ΝΣ, ΣΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΑ ταῖς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΝΣ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν ΓΣΝ, ΝΣΑ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΣ τῇ ΣΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΤ τῇ ΤΗ ἐπ' εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ τῇ ΕΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι παράλληλοι εἰσίν, αἱ ΓΒ, ΑΗ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΒΗ, καί ἐστι τῆς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΣΑ, τῆς δὲ ΒΗ ἡμίσεια ἡ ΒΤ. αἱ ΣΑ, ΒΤ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΣΤ, ΑΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΣΥ τῇ ΥΤ, ἡ δὲ ΑΥ τῇ ΥΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ ΚΛΝ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓΔΕ, καὶ ἔστω τὸ ΒΓΔΕ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΝΚΛ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου δι-

Διότι ἂς τμηθῶσιν τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τοῦ κύβου ΑΒ τῶν ΓΔ, ΑΕ, ΒΖ, ΗΘ αἱ πλευραὶ αἱ ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ, ΕΓ, ΒΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΒ δίχα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἂς ἐκβληθῶσιν ἐπίπεδα τὰ ΚΜ, ΠΞ, ΝΛ, ΟΡ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΣΤ, διαγώνιος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ ΒΑ. Λέγω, ὅτι ἡ ΣΤ τέμνει δίχα τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου, καὶ αὐτὴ θὰ τέμνεται δίχα ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. Ἐπειδὴ εἶναι ΓΕ $=$ ΔΑ, καὶ εἶναι ΓΝ $= \frac{1}{2}$ ΓΕ καὶ ΛΑ $= \frac{1}{2}$ ΔΑ, εἶναι ἄρα ΓΝ $=$ ΛΑ· εἶναι δὲ καὶ ΣΝ $=$ ΣΛ. Δύο λοιπὸν αἱ ΓΝ, ΝΣ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο τὰς ΛΑ, ΛΣ· καὶ ἡ γωνία ΓΝΣ $=$ γων. ΣΛΑ· ἡ βάσις ἄρα ΓΣ $=$ βάσιν ΣΑ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΝΣ $=$ τρίγ. ΑΛΣ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν· εἶναι ἄρα ἡ γωνία τῶν πλευρῶν ΓΣ, ΣΝ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν ΛΣ, ΣΑ. Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ γωνία τῶν πλευρῶν ΝΣ, ΣΑ· εἶναι ἄρα αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΑ ἴσαι πρὸς τὰς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ. Ἀλλὰ αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς· εἶναι δηλ. ἐπί τινος εὐθείας τῆς ΝΣ καὶ ἐκ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΝΣ καὶ σχηματίζουσαι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ΓΣΝ $+$ ΝΣΑ ἴσας πρὸς δύο ὀρθάς· κεῖται ἄρα ἡ ΓΣ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὴν ΣΑ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΒΤ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πρὸς τὴν ΤΗ. Καὶ ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΕΘ, ἀλλὰ εἶναι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι παράλληλοι (XI. 9), εἶναι ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΗ ἴσαι καὶ παράλληλοι. Καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ ΓΑ, ΒΗ, καὶ εἶναι ΣΑ $= \frac{1}{2}$ ΓΑ, καὶ ΒΤ $= \frac{1}{2}$ ΒΗ. Εἶναι ἄρα αἱ ΣΑ, ΒΤ ἴσαι καὶ παράλληλοι· καὶ ἔχουσιν ἀχθῇ αἱ ΣΤ, ΑΒ. Εἶναι ἄρα ΣΥ $=$ ΥΤ καὶ ΑΥ $=$ ΥΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, τὰ πρίσματα θὰ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ καὶ τὸ μὲν ἂς ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, τὸ ΚΛΝ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓΔΕ, καὶ ἔστω τὸ ΒΓΔΕ $=$ 2ΝΚΛ. Λέγω, ὅτι τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα. Διότι ἂς συμπληρωθῶσι τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ παραλληλόγραμμον ΒΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΝΚΛ, εἶναι δὲ τοῦ τριγώνου ΝΚΛ διπλάσιον τὸ *πλάσιον τὸ ΝΛ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΛ τῷ ΝΛ. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν ΒΔ, ΝΛ ἰσοϋψῆ ἐστι στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΛ, ΗΛ, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΔ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΛ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜ πρίσμα. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἄρα πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Εὐκλείδου στοιχείων στερεῶν $\overline{ια}$.

XII.

Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{\iota\beta}$.

1.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ, καὶ ἐν τοῖς ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΗΘΚΛΜ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΖ, ΘΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον· ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΖ, ΘΜ, ΗΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΑΕ, ΘΗΜ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΜ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΜ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΜΘ τῇ ὑπὸ ΗΝΘ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν ΒΑΖ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΘΗΝ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΝ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΗΘΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ΘΗ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΘΝ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον, παραλληλόγραμμον ΝΛ, εἶναι ἄρα ἴσον τὸ ΒΔ πρὸς τὸ ΝΛ. Τὰ ἐπὶ ἴσων λοιπὸν βάσεων τῶν ΒΔ, ΝΛ ὑπάρχοντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ἴσα. Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΔ εἶναι ἥμισυ τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ δὲ ΗΛ εἶναι ἥμισυ τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα ΗΘΚΛΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.

Εὐκλείδου Στοιχείων ιβ′

1.

Τὰ εἰς τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ καὶ εἰς τοὺς ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ ἔστωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΗΘΚΛΜ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΖ, ΘΝ. Λέγω, ὅτι εἶναι $ΒΖ^2 : ΘΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγ. ΗΘΚΛΜ. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΑΖ, ΘΜ, ΗΝ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΒΑ : ΑΕ = ΘΗ : ΗΜ καὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ΒΑΕ, ΘΗΜ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΘΜ· εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΑΕΒ = γων. ΗΘΜ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΖΒ, ἡ δὲ ΗΜΘ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΗΝΘ. Εἶναι δὲ ἡ ὀρθὴ ΒΑΖ ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν ΘΗΝ. Ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν λοιπὴν τὴν ΗΘΝ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΖ ἰσογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΘΝ. Ἰσχύει ἄρα ἡ ἀναλογία ΒΖ : ΒΑ = ΘΝ : ΘΗ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΒΖ : ΘΝ = ΒΑ : ΘΗ. Καὶ ἐπειδὴ $ΒΖ^2 : ΘΝ^2 = (ΖΒ : ΘΝ)^2$, εἶναι δὲ καὶ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ πρὸς πολύγωνον $ΗΘΚΛΜ = (ΑΒ : ΗΘ)^2$, καὶ εἶναι ΒΖ : ΘΝ = ΑΒ : ΗΘ, καὶ ὡς ἄρα $ΒΖ^2 : ΘΝ^2 =$ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ : πολύγωνον ΗΘΚΛΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (σχῆμα XII. 2. Ἀντὶ Σ τὸ Φ καὶ κύκλος $ΕΖΗΘ = Φ + Χ$).

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΔ, ΖΘ. Λέγω, ὅτι εἶναι $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ. Διότι ἐὰν δὲν *οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Φ, καὶ τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ ΦΧ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ. τὸ ΕΖΗΘ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. [ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου]. ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὴ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Χ χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε ΕΖΘ κύκλου καὶ τοῦ Χ χωρίου ἀφήρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος, καὶ τοῦτο ἀεὶ γεγένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἔλασσον ἔσται τοῦ Χ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓ ΠΔΡ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωχωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἔλασσον τὸ Φ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.*

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ὡς δὲ τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

εἶναι $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλ. ΑΒΓΔ : κύκλ. ΕΖΗΘ, θὰ εἶναι πρὸς μικρότερόν τι χωρίον ἢ πρὸς μεγαλύτερον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἔστω πρότερον πρὸς μικρότερον τὸ Φ, καὶ ἔστω κύκλος $ΕΖΗΘ = Φ + Χ$, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΕΖΗΘ τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ. Τὸ τετράγωνον ἄρα ΕΖΗΘ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ. Ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ κατὰ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. [Ἕκαστον ἄρα τρίγωνον τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος]. Ἕκαστον ἄρα τῶν τριγώνων ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τμήματος. Ἐὰν λοιπὸν γίνῃ τοιουτοτρόπως ἡ διαίρεσις, θὰ ληφθῶσι τοιαῦτα τμήματα ἐξ ὅλου τοῦ κύκλου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ χωρίου Χ. Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. Ἐν ᾧ λοιπὸν ὑπάρχουσι δύο μεγέθη ἄνισα καὶ ὁ κύκλος ΕΖΘ καὶ τὸ χωρίον Χ ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφῃρέθη μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος καὶ τοῦτο ἔγινε πάντοτε, καὶ ἀπέμεινε χωρίον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ Χ (Χ. 1). Τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ χωρίου Φ. Ἂς ἐγγραφῇ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ ὅμοιον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Φ, ἀλλ' ὅμως εἶναι καὶ $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ, εἶναι ἄρα κύκλος ΑΒΓΔ : χωρίον Φ = πολύγωνον ΑΞΒΟΓΠΔΡ : πολύγωνον ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς τὸ ἐντὸς αὐτοῦ πολύγωνον, οὕτως τὸ χωρίον Φ πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΚΖΛ ΗΜΘΝ. Εἶναι δὲ ὁ κύκλος ΑΒΓΔ μεγαλύτερος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· εἶναι ἄρα καὶ τὸ χωρίον Φ μεγαλύτερον τοῦ πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Ἀλλ' ὅμως τὸ Φ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ κύκλος ΑΒΓΔ πρὸς μικρότερόν τι χωρίον τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεγαλύτερον. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸ Φ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $ΖΘ^2 : ΔΒ^2 =$ χωρίον Φ : κύκλον ΑΒΓΔ. Ὡς δὲ τὸ χωρίον Φ πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ὁ κύκλος ΕΖΗΘ πρὸς μικρότερόν τι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ χωρίον. Ὡς ἄρα τὸ $ΖΘ^2 : ΒΔ^2 =$ κύκλος ΕΖΗΘ : μικρότερόν τι τοῦ κύκλου ΑΒΓΔ χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἀπεδείχθη. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : μεγαλύτερόν τι τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ χωρίον. Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα $ΒΔ^2 : ΖΘ^2 =$ κύκλος ΑΒΓΔ : κύκλον ΕΖΗΘ.

3.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.

ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μὲν ἔστω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΗΛ, ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΖΔ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΖΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΕΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΖΘ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΘ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΕΑ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ. καὶ ἡ μὲν ΑΕ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΘΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΔ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον τῷ ΖΘΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΘ τρίγωνον τῷ ΖΔΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. τὸ δὲ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΖΘΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΖ, ΖΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΘΔ, ΔΚ κεῖνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΔΚ γωνίᾳ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΕΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΘΔ, ΔΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΔΚ ἴση ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τῷ ΘΔΚ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διῄρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ.

λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΗΛΒ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΛΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, ᾖ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΘΒΛ, ΕΖΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ ΕΒΖΘ καὶ τοῦ ΕΒΛΗ καὶ ἔτι τοῦ ΖΘΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΓΛ, ΖΘΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΗΓ, ΛΓΘΚ, ΖΗΛΘ. διῄρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο

3.

Πᾶσα πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τρίγωνον διαιρεῖται καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Δ (σχ. XII. 3). Λέγω, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ διαιρεῖται καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. Ἂς τμηθῶσιν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΗΛ, ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΖ = ΖΔ, ἡ δὲ ΒΘ = ΘΔ, εἶναι ἄρα ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΘ. Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἡ δὲ ΑΖ = ΖΔ, εἶναι ἄρα ἡ ΒΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. Εἶναι ἄρα τὸ ΕΒΖΘ παραλληλόγραμμον. Εἶναι ἄρα ἡ μὲν ΕΒ = ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ = ΒΘ. Ἀλλ' ἡ μὲν ΒΕ = ΕΑ, ἡ δὲ ΒΘ = ΘΛ. Καὶ ἡ μὲν ΑΕ ἄρα εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ = ΘΔ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΖ = ΖΔ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΘΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΘ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΔΚ. Τὸ δὲ τρίγωνον ΑΕΗ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΘΚ. Καὶ ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΖ, ΖΗ, εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΘΔ, ΔΚ, καὶ δὲν κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, θὰ περιέχωσι γωνίας ἴσας (XI. 10). Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΕΖΗ = γων. ΘΔΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο πλευραὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, εἶναι ἴσαι πρὸς δύο τὰς ΘΔ, ΔΚ ἀντιστοίχως, καὶ γωνία ΕΖΗ = γων. ΘΔΚ, ἡ βάσις ἄρα ΕΗ = βάσιν ΘΚ. Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΖΗ = τρίγ. ΘΔΚ καὶ ὅμοιον. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ, εἶναι ἴση καὶ ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν ἔχουσαν βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ. [Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ, εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν ἔχουσαν βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφὴν δὲ τὸ σημεῖον Δ]. Διηρέθη ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην.

Λέγω τώρα, ὅτι διηρέθη καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. Διότι ἐπειδὴ ἡ ΒΛ = ΛΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΕΗΛΒ = δύο τρίγωνα ΗΛΓ. Καὶ ἐπειδὴ ἀπεδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα εἶναι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, εἶναι δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου (XI. 39) τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΘΒΛ, ΕΖΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ ΕΒΖΘ καὶ τοῦ ΕΒΛΗ καὶ ἀκόμη τοῦ ΖΘΛΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΓΛ, ΖΘΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΗΓ, ΛΓΘΚ, ΖΗΛΘ. Διηρέθη ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα

πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

4.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΛΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΓ τριγώνῳ. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΛ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΜΝΞ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΗΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΝ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΥΤ ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα. τὰ δ' ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΥ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΑΕΗ βάσις πρὸς τὴν ΜΠΣ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΕΗΖ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΠΣΡ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ ΖΘΚ βάσις πρὸς τὴν ΤΡΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΖΘΚΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΡΤΥΟ πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

ἴσα, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος.

4.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο πυραμίδες οὖσαι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο ἴσα πρίσματα, θὰ εἶναι ὡς ἡ βάσις τῆς μιᾶς πυραμίδος πρὸς τὴν βάσιν τῆς ἄλλης πυραμίδος, οὕτως πάντα τὰ εἰς τὴν μίαν πυραμίδα πρίσματα πρὸς πάντα τὰ εἰς τὴν ἄλλην πυραμίδα ἰσοπληθῆ πρίσματα.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες οὖσαι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Δ, Ο, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως πάντα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς πάντα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ ἰσοπληθῆ πρίσματα.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΗ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΓ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΓ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν ΝΞ καὶ ΞΦ. Καὶ εἶναι ΒΓ : ΓΛ = ΝΞ : ΞΦ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΛΗΓ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΜΝΞ πρὸς τὸ τρίγωνον ΣΦΞ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ τρίγωνον ΗΛΓ πρὸς τὸ τρίγωνον ΣΦΞ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΛΗΓ, ΖΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΣΦΞ, ΡΤΝ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΛΗΓ, ΖΘΚ, πρὸς τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΣΦΞ, ΡΥΤ. Ἀλλὰ τὰ μὲν πρίσματα εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσια τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΛΗΓ, ΖΘΚ. Τὰ δὲ πρίσματα εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ εἶναι διπλάσια τοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἀπέναντι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ΣΦΞ, ΡΤΥ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ πρίσματα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ἡ βάσις ΑΕΗ πρὸς τὴν βάσιν ΜΠΣ, οὕτως τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΕΗΖ πρίσματα πρὸς τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΠΣΡ πρίσματα. Ὡς δὲ ἡ βάσις ΖΘΚ πρὸς τὴν βάσιν ΤΡΥ, οὕτως εἶναι τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΖΘΚΔ πρίσματα πρὸς τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΡΤΥΟ πρίσματα. Θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα.

5.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ αἱ ΑΒΓΔ, ΜΝΞΟ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα, ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ Ω, καὶ τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι ἴσα ἔστω τὰ Ω, Χ χωρία, καὶ διῃρήσθω ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος ἢ τὸ ἥμισυ. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα λήψομέν τινας πυραμίδας ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἳ ἔσονται ἐλάσσονες τοῦ Χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΜΠΣΡ, ΤΥΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τοῖς στερεοῖς εἰς τὰ καταλελημμένα ἀποτμήματα ἐλάσσονά εἰσι τοῦ Χ. λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Ω στερεοῦ. διῃρήσθω ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς ὁμοίως τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι τῇ ΑΒΓΔ πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὸ Ω στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα πάντα, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων πάντων. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ω στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρισμάτων πάντων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΝΞ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΔ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΔ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος στερεόν. ὡς ἄρα ἡ ΜΝΞ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸςτὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς

5.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες καὶ ἔχουσαι τριγώνους βάσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες ἔχουσαι τριγώνους βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΜΝΞ, αἱ ΑΒΓΔ, ΜΝΞΟ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα Δ, Ο. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ, θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ ἢ πρὸς μικρότερον τῆς ΜΝΞΟ στερεὸν ἢ πρὸς μεγαλύτερον. Ἔστω πρὸς μικρότερον τὸ Ω καὶ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἔστωσαν ἴσα τὰ χωρία $\Omega + X$, καὶ ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΜΝΞΟ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα. Εἶναι ἄρα τὰ πρίσματα μεγαλύτερα τοῦ ἡμίσεος τῆς ὅλης πυραμίδος (XII, 3). Τέμνοντες τώρα (συνεχῶς) τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας καὶ εἰς δύο πυραμίδας ἴσας πρὸς ἀλλήλας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ὅλην καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα θὰ λάβωμεν πυραμίδας τινὰς ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ στερεοῦ Χ. Ἂς λάβωμεν καὶ ἔστωσαν αἱ ΜΠΣΡ, ΤΥΟ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ πυραμὶς εἶναι ἴση πρὸς τὰ στερεά, τὰ ληφθέντα ἀποτμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ Χ. Τὰ ὑπόλοιπα ἄρα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τοῦ στερεοῦ Ω. Ἂς διαιρεθῇ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ ὁμοίως πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα, εἶναι ἄρα ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὸ στερεὸν Ω, οὕτως ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ πρίσματα πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς ὅλα τὰ εἰς αὐτὴν πρίσματα, οὕτως τὸ στερεὸν Ω πρὸς ὅλα τὰ εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ ἰσοπληθῆ πρίσματα. Εἶναι δὲ μεγαλυτέρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ ὅλων τῶν εἰς αὐτὴν πρισμάτων (XII, 3). Εἶναι ἄρα καὶ τὸ στερεὸν Ω μεγαλύτερον ὅλων τῶν εἰς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ πρισμάτων. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΜΝΞΟ.

Λέγω τώρα, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεγαλύτερον. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι ὡς ἡ βάσις ΜΝΞ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως τὸ στερεὸν Ω πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ. Ὡς δὲ τὸ στερεὸν Ω πρὸς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΔ, οὕτως εἶναι ἡ πυραμὶς ΜΝΞΟ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ. Ὡς ἄρα ἡ βάσις ΜΝΞ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, οὕτως εἶναι ἡ πυραμὶς ΜΝΞΟ πρὸς στερεόν τι μικρότερον τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ· ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, *ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς στερεόν τι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΜΝΞΟ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὔτε πρὸς μικρότερον. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ βάσις ΑΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΜΝΞ, οὕτως ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν πυραμίδα ΜΝΞΟ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σημείωσις. Ὅπου εἰς τὰ θεωρήματα τῶν παραρτημάτων δὲν ὑπάρχουσι σχήματα, νοοῦνται τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων εἰς τὰ οἰκεῖα Βιβλία τῶν Στοιχείων.

Τὰ θεωρήματα 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 τῆς ἐκδόσεως Heiberg τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦμεν δὲν ἔχουσι σχήματα καὶ αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν δὲν συμφωνοῦσι πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τοῦ XII Βιβλίου. Κατόπιν τούτου δὲν προέβημεν εἰς τὴν μετάφρασιν αὐτῶν οὔτε ἠθελήσαμεν νὰ ἐπιφέρωμεν μεταβολὰς εἰς τὰ γράμματα, διὰ νὰ προσαρμόσωμεν τὰς ἀποδείξεις πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τοῦ XII Βιβλίου. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ὀρθῆς διατυπώσεως θὰ πρέπῃ νὰ γίνῃ ἀντιβολὴ πρὸς τοὺς παπύρους τῆς Βιβλιοθήκης τοῦ Βατικανοῦ ἢ ἄλλης τινὸς Βιβλιοθήκης, ἔνθα ὑπάρχουσιν οἱ συναφεῖς κώδικες τῶν Στοιχείων. Ἐν ἐλλείψει τῶν παπύρων θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γίνῃ προσαρμογὴ τῶν ἀποδείξεων πρὸς τὰ σχήματα τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων τοῦ XII Βιβλίου.

7.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ἔστω πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν ΓΖΔ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΒΖ, ΖΕ. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Β σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μέν εἰσιν ΑΒΓΔ, ΕΑΕΖ, κορυφὴ δὲ τὰ Β, Ζ σημεῖα.

8.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΖΗ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.

συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεά. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΕΖ, ΖΗ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΡ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΕΘ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΝΒ τῷ ΖΠ. ἀλλὰ τὰ μὲν ΒΝ, ΑΔ, ΒΜ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΛΔ, ΜΝ, ΑΛ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ΖΡ, ΕΘ, ΠΖ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘΟ, ΕΟ, ΡΠ ἴσα ἐστίν. ὅλον ἄρα το ΒΔΜΛ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΔΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΖΘΡΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓ πυραμὶς τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς· καὶ ἡ ΑΒΓΔ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΕΖΗΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ.

9.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΕΖΗ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεῖα. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων τριγώνων βάσιν ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΔΜΛ, ΖΘΡΘ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΔ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΔΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΕΖΗΘ ἑξαπλάσιον τὸ ΖΘΡΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος. ὡς δὲ ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν. ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΔΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεῶν καὶ τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ἀντιπεπονθέτωσαν δὴ πάλιν τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι· τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος, ὡς δὲ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΔ πυραμίδος ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων καὶ τῶν ΒΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεῶν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ, ΑΒΓΔ πυραμίς, τοῦ δὲ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμίς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος καὶ ὕψος ἴσον.

ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλάσιος, ἔσται ἄρα ἤτοι μείζων ἢ τριπλάσιος ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος τῷ ΡΣ στερεῷ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΔΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ. ἕκαστον ἀνεσταμένων πρισμάτων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τοῦ Ρ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζων ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τῷ Ρ στερεῷ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ΕΖΗΘ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθή-

10.

Πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Διότι ἂς ἔχῃ κῶνος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς κύλινδρον τὸν κύκλον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου.

Διότι ἐὰν δὲν εἶναι ὁ κύλινδρος τριπλάσιος τοῦ κώνου, θὰ εἶναι ἄρα ἢ μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου ἢ μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου κατὰ τὸ ΡΣ στερεόν. Καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πρίσμα ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον. Τὸ ἀνυψωθὲν ἄρα πρίσμα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἂς ἀνυψωθῶσιν ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΔΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πρίσματα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κύλινδρον. Ἕκαστον τῶν ἀνυψωθέντων πρισμάτων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τμήματος. Ἐὰν γίνῃ συνεχῶς τοιαύτη κατασκευή, θὰ ληφθῶσι τμήματά τινα τοῦ ὅλου κυλίνδρου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ Ρ. Ἂς ληφθῶσι καὶ ἂς εἶναι τὰ τμήματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. Τὸ ἀπομεῖναν ἄρα πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒ ΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον, εἶναι τριπλάσιον τῆς πυραμίδος τῆς ἐχούσης βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΕΒ ΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ μὲ τὸν κύλινδρον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κύλινδρον. Ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται εἰς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

Λέγω τώρα, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τριπλασίου.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω μικρότερος. Ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ στερεοῦ Ρ, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον. Εἶναι ἄρα ἡ ἀνυψωθεῖσα πυραμὶς μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κώνου. Ἂς τμηθῶσι τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ δίχα κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἂς ἀνασταθῇ ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ πυραμὶς ἰσοϋψὴς πρὸς τὸν κῶνον. Ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνυψωθεισῶν πυραμίδων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ κώνου. Ἐὰν γίνῃ *σεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἔλαττον αὐτοῦ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστιν ἡ ΑΕΒ ΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. [τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος] τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ἐστίν.*

11.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, ἔσται ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Α στερεόν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΣ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΕΞ, ΞΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΣ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΖΘΜΝ κῶνος τοῦ Α στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΞΖ, ΘΗΠ, ΘΡΕ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ Α στερεοῦ. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΞΖΟ ΗΠΘΡ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΓΒΤΓΥΔΦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΣΒΠΥΔΦ συνεχῶς τοιαύτη κατασκευή, θὰ ληφθῶσι τμήματά τινα ἐξ ὅλου τοῦ κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ (Ρ). Ἂς ληφθῶσιν καὶ ἔστω ὅτι ἔχουσιν ἀνυψωθῆ πυραμίδες ἀπὸ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. Ἡ ἀπομείνασα ἄρα πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗ ΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον. Ἀλλ' ἡ πυραμίς, τῆς ὁποίας βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓ ΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, [εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ πρίσματος] τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον. Καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖ ΓΗΔΘ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν τὸν κύκλον ΑΒΓΔ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸν κῶνον. Ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται εἰς αὐτόν· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα ὁ κύλινδρος μικρότερος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δέ, ὅτι δὲν εἶναι οὔτε μεγαλύτερος τοῦ τριπλασίου. Εἶναι ἄρα τριπλάσιος.

πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Α στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΘΝ κώνου στερεόν.

λέγω δὴ οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον. ὡς δὲ τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου τοῦ ΑΒΓΔΛ στερεοῦ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. καί ἐστι μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τριπλάσιος τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου, τοῦ δὲ ΕΖΗΘΝ κώνου τριπλάσιος ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κύλινδρον.

nicht
Heiberg-Ausgabe!

12.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν ἔστωσαν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ. λέγω, *ὅτι ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς ΖΘ.*

εἰ γὰρ μὴ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Α, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, Ο Π, Ρ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ, ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΕ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΕΞ, ΞΖ, ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΕ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὑτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Α στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΞΖ, ΖΟΗ, ΗΠΘ, ΘΡΕ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΞΖΟΗ ΠΘΡΕ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΞΖΟΗΠΘΡΕ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε πολύγωνον τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολυγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, τρίγωνον ἐφεστάτω τὸ ΛΣΒ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΞΟ ΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον ἐφεστάτω τὸ ΝΖΞ τρίγωνον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΚ, ΜΞ. ἐπεὶ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν ἀνάλογόν εἰσιν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΜΖ. ὡς ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΖ· καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΒ, ΜΝ, ΜΖ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΛ τρίγωνον τῷ ΜΝΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΖΝ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΝΖ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΣΚΛ, ΞΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΚΛ τρίγωνον τῷ ΞΜΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ· ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΓ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΞ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΚΣ, ΖΜΞ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΣ τρίγωνον τῷ ΖΜΞ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΚ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΞΜ πρὸς ΞΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΣΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΞΝ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΣ *πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΣΒ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ. ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΣΒ τρίγωνον τῷ ΝΞΖ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΜΞΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΚΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΖΞ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜΘ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΞΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΘΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΣΚ, ΜΚ, ΦΚΑ, ΚΔΥ, ΥΚΓ, ΚΓΤ, ΚΤΒ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΞΜΕ, ΕΜΡ, ΜΘΡ, ΜΘΠ, ΜΠΝ, ΗΜΘ, ΜΟΖ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΜΟΦΑ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔχει δὲ καὶ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΓΠΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μείζων δὴ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Α στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΔΒ. ὡς δὲ τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον, οὕτως* *ὁ ΕΖΗΘΜΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κώνου στερεόν. ὁ ΕΖΗΘΜΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΛ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ ΑΒΓΔΚΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.*

13. (Heiberg 12)

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΘ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα. ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδήποτε ὁ ΖΞ, ΖΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠΡΣ, ΤΥΦΧ ἴσοι ὄντες τοῖς ΑΒΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΗΡ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΒΗ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶ ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. εἰ μὲν οὖν ἴσος ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΚΛ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ Η κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶν καὶ ὁ ΠΗ *κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον.*

14.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτό εἰσιν ὕψος, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΒΕ κύλινδρος τῷ ΓΜ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΜ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονί ἐστιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΒΕ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὅ τε ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον.

15.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖνοι ἴσοι εἰσίν.

ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, [ΕΖΗΘ] κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΕΖ, ΗΘ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος.

τὸ γὰρ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἴσος δέ ἐστιν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΚΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ βάσις τῇ ΓΔ βάσει. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΗΘ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ, καὶ ἀπὸ *βάσεως τῆς ΓΔ, ὕψους δὲ τοῦ ΗΚ νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ ΓΔΚ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ἴσος δὲ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΚ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ ἄρα κώνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.*

ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΒΞ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΘΔ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. πάλιν γὰρ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΗΘ τῷ ΕΖ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΚ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΖΒ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, ὡς δὲ τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, οὕτως ὁ ΓΔΘΔΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔ κῶνον ἢ κύλινδρον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἐστίν. ἴσος ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

ἔστωσαν δύο κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΔΕΖ.

ἤχθωσαν τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ΖΘ. ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΕΖ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΓΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΔ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλήψομέν τινα περιφέρειαν, ἥτις ἔσται ἐλάσσων τῆς ΗΓ. λελήφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΚΛ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΓΜ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΓ, ΓΜ πολυγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΚΜ, ἡ δὲ ΗΘ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου, ἡ ΚΜ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου. πολλῷ ἄρα οὐδετέρα τῶν ΚΓ, ΓΜ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου. ἐὰν ἄρα τῇ ΚΓ περιφερείᾳ ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶμεν κατὰ τὸ ἑξῆς καὶ ἐπιζευγνύομεν εὐθείας, ἔσται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖ, καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον ἀρτιόπλευρόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἢ καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὖσαι τὸ Α. δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. ποιήσει δὴ τομὰς μεγίστους κύκλους. ποιείτω τοὺς ΑΒΓΔ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ΒΓΔ κύκλος ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ, ὁ δὲ ΕΖΗ ἐν τῇ ἐλάσσονι. καὶ ἤχθωσαν τοῦ ΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΕ, ΓΔ. καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων ΒΓΔ, ΕΖΗ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΑ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΝ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΜΞ καὶ τῆς ΑΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσει δὴ τομὰς κύκλους. ποιείτω, ὧν ἡμικύκλια ἔστω τὰ ΓΝΔ, ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΓΔ, ΓΝΔ, ΜΝΞ κύκλοι ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν ἑκατέρῳ τῷ ΓΝ, ΜΝ τῇ ΜΓ ἴσαι. ἐνηρμόσθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΓΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΝ, ΝΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΟ, ΤΠ, ΕΡ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΟΦ, ἀπὸ δὲ τοῦ Υ ἐπὶ τὴν ΜΞ ἡ ΥΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΝΑ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΝΑ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΓΝΔ κύκλος.

ὁ ΓΝΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΔ κύκλον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΔ κύκλον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΝΔ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΒΓΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν τῷ ΓΝΔ ἐπιπέδῳ ἡ ΟΦ, ἡ ΟΦ ἄρα καὶ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΧ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΥΧ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΥΜ τῇ ΟΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΜ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΟΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΥΜ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΜΧ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ καὶ ΔΓΦ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΞΜ. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΦ τῇ ΜΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΓΑ ὅλῃ τῇ ΑΜ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΜΓ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓΘ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΥ τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΟ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΓΦΟ γωνία· τῷ δ' ἀπὸ τῆς ΜΥ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΧΟ γωνία· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΧ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΟ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΧΥ ἐστιν ἴσον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΟ τῇ ΥΧ. ἔστι δὲ αὕτη καὶ παράλληλος. καὶ αἱ ΦΧ, ΟΥ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ἡ ἄρα ΦΧ τῇ ΓΜ ἐστι παράλληλος. καὶ ἡ ΓΜ ἄρα τῇ ΟΥ ἐστι παράλληλος. καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν εἴληπται τυχόντα σημεῖα τὰ Ν, Μ, Ο, Γ, καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΜΥ, ΓΟ. αἱ ἄρα ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ, ΟΥ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὸ ΥΜΓΟ τετράπλευρον. τὸ ἄρα ΥΜΓΟ τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΡΣ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΣΡΝ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδω. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΥ τῇ ΓΟ, καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΓ τῇ ΥΟ, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Μ, Γ, Υ, Ο σημεῖα. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΜΓΥΟ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ. τὸ Ψ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὰ Μ, Γ, Ο, Υ σημεῖα κύκλου. ἐπεζεύχθω ἡ ΨΓ. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΜΓΟΥ, καὶ τρεῖς αἱ ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΓ τῆς ΥΟ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΦ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ΜΕ ἐπὶ τὴν ΓΦ κάθετος ἡ ΜΩ. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΓΩ τῆς ΩΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΩ πρὸς τὴν ΩΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΩΜ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΜΩ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΜΩ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΜ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΛ. ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ψ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ. ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΩΑ γωνία. τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΩ μεῖζόν ἐστι τοῦ *ἀπὸ τῆς ΓΨ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΩ. μείζων ἄρα ἡ ΨΑ τῆς ΑΩ· ἡ δὲ ΑΩ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. πολλῷ ἄρα ἡ ΨΑ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΓΟΥ ἐπίπεδόν ἐστιν. τὸ ἄρα ΜΓΟΥ ἐπίπεδον οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετραπλεύρων οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὐδὲ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἐὰν δὴ ἐν ἑκάστῃ τῶν λοιπῶν τεταρτημορίων τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἕξομεν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.*

Ἐὰν δὴ εἰς ἑτέραν σφαίραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψωμεν, ἔσται ἑκάστη τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ καὶ τὸ ΝΟΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ὁμοία τῇ ὁμοταγεῖ πυραμίδι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ἑκάστη ἄρα τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἐχουσῶν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετράπλευρα καὶ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

18.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων.

ἔστωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ σφαιρῶν ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

εἰ γὰρ μὴ ἔχει ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα ἤτοι πρὸς ἐλάσσονά τινα σφαῖραν τῆς ΔΕΖ ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν πολύεδρον. τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ τριπλασίονα λόγον ἤπερ

18.

Αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν αἱ σφαῖραι ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον ὃν οἱ κύβοι τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΕΖ.

Διότι ἐὰν ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ δὲν ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ, θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς σφαῖραν μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν (διαμέτρων) ΒΓ, ΕΖ. Ἂς ἔχῃ πρότερον λόγον ἴσον πρὸς μικροτέραν σφαῖραν τὴν ΗΘΚ καὶ ἂς νοηθῶσιν αἱ σφαῖραι ΔΕΖ, ΗΘΚ ὁμόκεντροι, καὶ ἐν ᾧ ὑπάρχουσι δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι αἱ ΔΕΖ, ΗΘΚ νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἐφάπτηται τῆς ἐπιφανείας τῆς μικροτέρας σφαίρας τῆς ΗΘΚ (θ. 17), καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΒΓ ἄρα στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον ἔχει λόγον ὃν ἔχει *ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον [πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον]. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεοῦ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων· ἐμπεριέχεται γάρ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.*

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα λόγον ἐχέτω τῆς ΔΕΖ σφαίρας πρὸς τὴν Λ ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. ὡς δὲ ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ΑΒΓ σφαῖρα [ἄρα] πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εὐκλείδου στοιχείων $\overline{\iota\beta}$.

ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ λόγον, ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΗΘΚ, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον [πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον]. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ σφαῖρα ΗΘΚ πρὸς τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ μεγαλυτέρα τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΔΕΖ στερεοῦ πολυέδρου. Ἀλλὰ εἶναι καὶ μικροτέρα· διότι ἐμπεριέχεται· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς σφαῖραν μικροτέραν τῆς ΔΕΖ λόγον ἴσον, πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ΒΓ, ΕΖ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς σφαῖραν τινα μικροτέραν τῆς ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν οἱ κύβοι τῶν ΕΖ, ΒΓ.

Λέγω τώρα, ὅτι ἡ σφαῖρα ΑΒΓ οὐδὲ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ σφαῖραν τῆς ΔΕΖ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ΒΓ, ΕΖ.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς ἔχῃ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς σφαῖραν μεγαλυτέραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ, τὴν σφαῖραν Λ, λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ΒΓ, ΕΖ. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ σφαῖρα Λ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ ἔχει λόγον, ὃν ὁ κύβος τῆς ΕΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ σφαῖρα Λ πρὸς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ, οὕτως εἶναι ἡ σφαῖρα ΔΕΖ πρὸς σφαῖράν τινα μικροτέραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ. Καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ΔΕΖ πρὸς μικροτέραν τινὰ σφαῖραν τῆς σφαίρας ΑΒΓ ἔχει λόγον ὃν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΕΖ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν ἔχει ἄρα ἡ σφαῖρα ΑΒΓ πρὸς μεγαλυτέραν τινὰ σφαῖραν τῆς σφαίρας ΔΕΖ λόγον, ὅν ἔχει ὁ κύβος τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς μικροτέραν. Ἡ σφαῖρα (ἄρα) ΑΒΓ πρὸς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ κύβου τῆς ΒΓ πρὸς τὸν κύβον τῆς ΕΖ.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Βιβλίον XI.

1. « ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ...» θεωρεῖται παρεμβολή, διότι δὲν ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀπόδειξιν. Εἰς ἄλλους παπύρους (ἐκτὸς τοῦ παπύρου Peyrard, ἰδὲ εἰσαγωγὴν I τόμου), ὑπάρχει ἀντὶ τούτου « ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι εἰ μὴ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον· ἄλλως θὰ συμπίπτωσι ».

33. Πόρισμα. Αἱ εὐθεῖαι νοοῦνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογία, ὡς $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, διὰ νὰ εἶναι $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$. Τὴν πρότασιν ὅμως ταύτην τὴν περιλαμβάνει ὁ δέκατος ὁρισμὸς τοῦ V βιβλίου. Ὅθεν γεννᾶται ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν γνησιότητα τοῦ πορίσματος. Εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἐὰν ληφθῇ $\delta = 2\alpha$ καὶ θεωρηθῇ ἡ α ὡς ἀκμὴ κύβου, ἡ $\beta = \alpha\sqrt[3]{2}$ εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ διπλασίου κύβου (δήλιον πρόβλημα).

39. Τὰ πρίσματα νοοῦνται τριγωνικά.

Βιβλίον XII.

2. Τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα εἶναι θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ καὶ ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμὴ περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ σχολιαστοῦ τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, Σιμπλικίου [1] (περὶ τὸ 550 μ. Χ.). Ὁ Σιμπλίκιος ἀρύεται τὰς πληροφορίας του, ὡς λέγει ὁ ἴδιος, παρὰ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Εὐδήμου, ὅστις ἔγραψε τὴν πρώτην ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (ἀπολεσθεῖσαν), καὶ τοῦ Ἀλεξάνδρου τοῦ Ἀφροδισιέως (περὶ τὸ 200 μ. Χ.). Τὸ θεώρημα στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου (τὸ διατυπωθὲν ὅμως τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, ἰδὲ εἰσαγωγὴν εἰς τὸν I τόμον, σ. 23) καὶ τὸ κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν (πρῶτον θεώρημα τοῦ X βιβλίου). Κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας οἱ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ὠνόμαζον τὴν ἐν τῷ θεωρήματι ἐφαρμοζομένην ἀποδεικτικὴν μέθοδον ἐξαντλητικὴν μέθοδον. Ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ὅμως τοῦ διανυομένου αἰῶνος ἀναγνωρίζεται γενικῶς, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη ἦτο ἀτυχὴς καὶ ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι τὸ πρῶτον εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἁπάντων θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

---

1. Σχόλια Σιμπλικίου εἰς Φυσικ. Η′ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἔκδοσις Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου καὶ Ἐγκυκλοπαιδεία Pauly-Wissowa, ἄρθρον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ ($=K_1$), ΕΖΗΘ ($=K_2$) καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν ἀντιστοίχως, αἱ ΒΔ, ΖΘ.

Λέγω, ὅτι $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{K_2}$ (1). Ὑποτίθεται $K_1 \neq K_2$.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{Σ}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $\lessgtr K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{Σ}$ (2), ἔνθα $Σ < K_2$, καὶ $K_2 = Σ + ε$, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικρὰ ἐπιφάνεια.

Εἰς τὸν κύκλον K_2 περιγράφομεν καὶ ἐγγράφομεν τετράγωνον. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου, δηλ. τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον K_2 ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον κλπ. μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὰ ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα μεταξὺ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X. 1 τῶν Στοιχείων, καθ' ὃ ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λαμβάνομεν κάποτε μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κύκλου (K_2) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἀπέμειναν τέσσαρα κυκλικὰ τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΚΖ. Ἐὰν ἐγγράψωμεν ὀκτάγωνον καὶ τὸ ἀφαιρέσωμεν, ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐξ ἑκάστου τῶν 4 κυκλικῶν τμημάτων ΕΚΖ (ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ) περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διότι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΚΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΕΚΖ. Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΕΚΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΕΚΖ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΕΚΖ. Ὅθεν κατὰ τὴν ἐγγραφὴν ὀκταγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει 4 τρίγωνα ΕΚΖ, ἤτοι περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ κύκλου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. Κατὰ τὴν ἐγγραφὴν δεκαεξαγώνου θὰ ἔχωμεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ κύκλου καὶ ὀκταγώνου, κατὰ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς ἀπόδειξιν. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἔστω ὅτι κατὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ (νυοστοῦ) πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_2$, ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου K_2 κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = Σ + ε \qquad (3)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων $< ε$ (4).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma \qquad (5).$$

Εἰς τὸν κύκλον K_1 ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 τὸ ΑΞΒΟ ΓΠΔΡ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII. 1 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} \qquad (6).$$

Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$.

'Επειδὴ $\Pi_1 < K_1$, διότι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον περιέχεται ὑπὸ τοῦ κύκλου, εἶναι καὶ $\Pi_2 < \Sigma$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη, ὅτι εἶναι $\Pi_2 > \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_2. Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$ (7) ἔνθα Μ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1.

2. Ἔστω δεύτερον ὅτι εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ (8), ἔνθα $\Sigma > K_2$.

'Εκ τῆς (8) ἀνάπαλιν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$. Τῶν Σ, K_1, K_2 λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Τ,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T} \qquad (9).$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (9) καὶ $K_1 > T$ (V. 14). 'Εκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$, ἔνθα $T < K_1$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (7) ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1.

'Αφοῦ λοιπὸν δὲν εἶναι $\Sigma \lessgtr K_2$, εἶναι $\Sigma = K_2$.

Σημ. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως δύναται νὰ γίνῃ χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς τετάρτης ἀναλόγου, διὰ τῆς συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων, ὡς ἔγινε τοῦτο καὶ διὰ τὸ πρῶτον μέρος.

Ὑποτίθεται ὅτι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$ καὶ $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικρόν.

Ἔστω ὅτι μετὰ τὴν περιγραφὴν πολυγώνου τινὸς ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου K_2 ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \qquad (1)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$ (2).

Διὰ προσθέσεως τῶν (2) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν, Περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον K_2 πολύγωνον $\Pi_2 < \Sigma$ (3), ἐὰν καλέσωμεν τὸ τελευταῖον περιγραφὲν πολύγωνον Π_2.

Εἰς τὸν κύκλον K_1 περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 πολύγωνον τὸ Π_1. Κατὰ τὸ XII.1 θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}.\ \text{Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν}\ \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}.$$

Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, διότι ὁ κύκλος περιέχεται ὑπὸ τοῦ πολυγώνου, εἶναι καὶ $\Pi_2 > \Sigma$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$.

Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, ἔνθα $M > K_1$.

Θεωροῦμεν λογικὸν τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ ἐπινοητὴς τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς ἐγγραφῆς πολυγώνων θὰ εἶχεν ἐπινοήσει καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων. Εἰς τὸ λογικὸν τοῦτο συμπέρασμα ἀντιστρατεύεται τὸ ἑξῆς ἐπιχείρημα.

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων πρέπει νὰ δειχθῇ προηγουμένως ὅτι κατὰ τὴν περιγραφὴν εἰς τὸν κύκλον τοῦ ν πολυγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ (ν - 1) πολυγώνου καὶ τοῦ κύκλου. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην παρέχει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει μόνον ἐκείνας τὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας δὲν ἔχουσιν ἀποδείξει οἱ πρὸ αὐτοῦ μαθηματικοί.

5. Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ θεωρήματος 2.

Ἔστωσαν αἱ πυραμίδες ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{\Delta EZ\Theta}$. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$, ἔνθα X στερεὸν $\lessgtr \Delta EZ\Theta$.

1. Ἔστω πρότερον $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$ (1), ἔνθα $X < \Delta EZ\Theta$ καὶ $\Delta EZ\Theta = X + \varepsilon$, ἔνθα ε στερεὸν ὁσονδήποτε μικρόν.

Διαιροῦμεν τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ εἰς δύο ἴσας πυραμίδας ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ (θ. 3). Κατὰ τὸ αὐτὸ θ. 3 τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν δύο πυραμίδων. Ἀφαιροῦντες τὰ δύο πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Τῶν ἀπομεινασῶν δύο πυραμίδων διαιροῦμεν ἑκατέραν εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ, ἤτοι λαμβάνομεν 4 πυραμίδας ἴσας καὶ 4 πρίσματα ἴσα. Ἀφαιροῦντες τὰ 4 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῶν 2 πυραμίδων, τὰς ὁποίας ἐλάβομεν κατὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν τῆς ΔΕΖΘ, περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διαιροῦμεν τὰς 4 ἴσας πυραμίδας εἰς 8 ἴσας πυραμίδας καὶ ὁμοίας πρὸς τὰς προηγουμένας καὶ 8 ἴσα πρίσματα. Ἀφαιροῦντες τὰ 8 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῶν 4 πυραμίδων. Συνεχίζομεν τὴν διαίρεσιν τῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πρισμάτων, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον πυραμίδας τινάς, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ. 1 τῶν Στοιχείων. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις $\Delta E Z \Theta = X + \varepsilon$ (2)

Ὄγκος ὑπολειφθεισῶν πυραμίδων $< \varepsilon$ (3).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (3) ἀπὸ τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Ὄγκος συνόλου ἀφαιρεθέντων πρισμάτων $> X$, ἢ $\Pi_2 > X$, (4)

ἂν καλέσωμεν Π_2 τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τούτων. (Τὸ πλῆθος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς προόδου $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{\nu}$).

Διαιροῦμεν ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς καὶ τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῆς τόσα τὸ πλῆθος πρίσματα, ὅσα ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ, καλοῦμεν δὲ τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τούτων Π_1. Κατὰ τὸ θ. 4 εἶναι $\dfrac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$ (5). Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\dfrac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \dfrac{AB\Gamma H}{X}$ (6), (ἔνθα $X < \Delta EZ\Theta$). Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν $\dfrac{AB\Gamma H}{X} = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$. Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ὑπ' αὐτῆς περιεχομένων πρισμάτων Π_1, εἶναι ἄρα καὶ $X > \Pi_2$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (4) ἀπεδείχθη $\Pi_2 > X$. Ὥστε δὲν εἶναι $\dfrac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \dfrac{AB\Gamma H}{X}$, ἔνθα $X < \Delta EZ\Theta$. Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\dfrac{\Delta EZ}{AB\Gamma} = \dfrac{\Delta EZ\Theta}{M}$, ἔνθα Μ στερεόν τι $< AB\Gamma H$.

2. Ἔστω δεύτερον $\dfrac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \dfrac{AB\Gamma H}{X}$, ἔνθα $X > \Delta EZ\Theta$.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\dfrac{\Delta EZ}{AB\Gamma} = \dfrac{X}{AB\Gamma H}$ (7).

Τῶν Χ, ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Σ,

$$\frac{X}{ΑΒΓΗ} = \frac{ΔΕΖΘ}{Σ} \quad (8).$$

Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $X > ΔΕΖΘ$. Εἶναι ἄρα καὶ $ΑΒΓΗ > Σ$ (9). Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν

$$\frac{ΔΕΖ}{ΑΒΓ} = \frac{ΔΕΖΘ}{Σ}, \text{ ἔνθα } Σ < ΑΒΓΗ \text{ (ἐκ τῆς 9).}$$

Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι βάσις : βάσιν = ἀντίστοιχος πυραμίς : στερεὸν μικρότερον τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ὥστε $X = ΔΕΖΘ$, ἤτοι $\dfrac{ΑΒΓ}{ΔΕΖ} = \dfrac{ΑΒΓΗ}{ΔΕΖΘ}$.

10. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι κύλινδρος = 3 κῶνοι (βάσις καὶ ὕψος τὰ αὐτά), θὰ εἶναι κύλινδρος $\gtrless$ 3 κώνων.

1. Ἔστω πρῶτον κύλινδρος > 3 κώνων καὶ κύλινδρος = 3 κῶνοι + ε, ἔνθα ε στερεὸν ὄγκου ὁσονδήποτε μικροῦ. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πρισμάτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν κυλινδρικὰ τμήματα (ἔστω τὰ ἀπὸ τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΒ...), τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{κύλινδρος} = 3 \text{ κῶνοι} + ε \qquad (1)$$
$$\text{ὄγκος ἀπομεινάντων κυλινδρικῶν τμημάτων} < ε \qquad (2).$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ > 3 κώνων ἐχόντων βάσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτὸ) ἢ πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ > κώνου ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτό). Ὅπερ ἀδύνατον, διότι ὁ κῶνος ἐμπεριέχει τὴν πυραμίδα.

2. Ἔστω δεύτερον κύλινδρος < 3 κώνων (βάσις, ὕψος τὰ αὐτὰ)

$$\text{ἢ κῶνος} > \frac{1}{3} \text{ κυλίνδρου,}$$

ὁπότε θὰ εἶναι κῶνος $= \frac{1}{3}$ κυλίνδρου + ε, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου στερεόν.

Διὰ συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κώνου, θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{κῶνος} = \frac{1}{3}\ \text{κυλίνδρου} + \varepsilon \qquad (3)$$

$$\text{ἀπομείναντα τμήματα κώνου} < \varepsilon \qquad (4).$$

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) λαμβάνομεν :

πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ $> \frac{1}{3}$ κυλίνδρου (ὕψος τὸ αὐτό), ἢ

πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ $>$ κυλίνδρου. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ πρίσμα ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου.

11. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{ΕΖΗΘ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\text{ΕΝ}}$, θὰ εἶναι $\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{ΕΖΗΘ}} = \frac{\text{ΑΛ}}{\Xi}$, ἔνθα Ξ στερεὸν $\lessgtr$ ΕΝ.

1. Ἔστω πρότερον Ξ $<$ ΕΝ καὶ ΕΝ $= \Xi + \Psi$, ἔνθα Ψ στερεὸν ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Ἀνυψοῦντες ἀπὸ τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ συνεχῶς πυραμίδας, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιροῦντες ταύτας ἀπὸ τοῦ κώνου θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα κώνου μικρότερα τοῦ Ψ (Χ. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{ΕΝ} = \Xi + \Psi \qquad (1)$$

$$\text{ἀπομείναντα τμήματα κώνου} < \Psi \qquad (2).$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν :

πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ $> \Xi$ (3) (ἐὰν ἡ τελευταίως ἀφαιρεθεῖσα πυραμὶς εἶχε βάσιν τὸ ἀνωτέρω πολύγωνον καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ τοῦ κώνου). Ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Καλοῦμεν Κ_1 τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΑΓ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον Π_1 καὶ Κ_2 τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΕΗ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον Π_2. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΕΗ}^2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ καὶ $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΕΗ}^2} = \frac{\text{Κ}_1}{\text{Κ}_2}$, θὰ εἶναι ἄρα $\frac{\text{Κ}_1}{\text{Κ}_2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ (4).

Εἶναι δὲ $\frac{\text{Κ}_1}{\text{Κ}_2} = \frac{\text{ΑΛ}}{\Xi}$ (5), ἔνθα Ξ $<$ ΕΝ, καὶ $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\text{πυραμίς, } \Pi_1 \cdot \upsilon}{\text{πυραμίς, } \Pi_2 \cdot \upsilon}$ (6) ἂν καλέσωμεν υ τὸ ὕψος ΚΛ $=$ ΜΝ.

Ἐκ τῶν (4), (5), (6) λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΛ}}{\Xi} = \frac{\text{πυραμίς, } \Pi_1 \cdot \upsilon}{\text{πυραμίς, } \Pi_2 \cdot \upsilon}$ (7).

Ἐπειδὴ κῶνος ΑΛ $>$ πυραμίδος, $\Pi_1 \cdot \upsilon$, εἶναι ἄρα καὶ Ξ $>$ πυραμίδος, $\Pi_2 \cdot \upsilon$, (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη ὅτι Ξ $< \Pi_2 \cdot \upsilon$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι $\frac{\text{Κ}_2}{\text{Κ}_1} = \frac{\text{ΕΝ}}{\text{Μ}}$, ἔνθα Μ στερεὸν $<$ τοῦ κώνου ΑΛ.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{Ξ}$, ἔνθα $Ξ >$ κώνου ΕΝ.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{K_2}{K_1} = \frac{Ξ}{ΑΛ}$ (1). Τῶν Ξ, ΑΛ, ΕΝ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{Ξ}{ΑΛ} = \frac{ΕΝ}{Χ}$ (2). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $Ξ > ΕΝ$. Εἶναι ἄρα καὶ $ΑΛ > Χ$ (V. 14).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{K_2}{K_1} = \frac{ΕΝ}{Χ}$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κύκλος : κύκλον = κῶνος : μικρότερον ἀντιστοίχου κώνου στερεόν. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{Ξ \lessgtr ΕΝ}$, καὶ συνεπῶς εἶναι $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{ΕΝ}$.

Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\text{κύλινδρος}}{\text{κύλινδρον}}$.

12. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{\text{κῶνος } ΑΒΓΔΛ}{\text{κῶνος } ΕΖΗΘΝ} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$ (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἰσχύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓΔΛ}{Ξ} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$, ἔνθα Ξ στερεὸν $\lessgtr$ κώνου ΕΖΗΘΝ.

1. Ἔστω πρότερον $Ξ <$ ΕΖΗΘΝ καὶ $ΕΖΗΘΝ = Ξ + ε$, ἔνθα ε στερεὸν ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων καὶ ἀφαιρέσεως τούτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε (X. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$ΕΖΗΘΝ = Ξ + ε \qquad (1)$$

καὶ ἀποτμήματα κώνου $< ε$ (2).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν

πυραμὶς (βάσις ΕΟΖΠΗΡΘΣ, ὕψος ΜΝ) $> Ξ$. (3).

Εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγράφομεν τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἔχουσαν ὕψος τὸ ΚΛ. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τὰ τρίγωνα ΒΚΛ, ΖΜΝ εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα ΒΚΤ, ΖΜΟ καὶ τὰ τρίγωνα ΛΚΤ, ΝΜΟ. Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΚΒ, ΝΜΖ εἶναι $\frac{ΛΒ}{ΒΚ} = \frac{ΝΖ}{ΖΜ}$ (4) καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων

ΒΚΤ, ΖΜΟ εἶναι $\frac{KB}{BT}=\frac{MZ}{ZO}$ (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (4) καὶ (5) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda B}{BT}=\frac{NZ}{ZO}$. Ἀνάπαλιν ἡ σχέσις αὕτη εἶναι $\frac{BT}{\Lambda B}=\frac{ZO}{NZ}$ (6). Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΤΚ, ΝΟΜ εἶναι $\frac{\Lambda T}{TK}=\frac{NO}{OM}$ (7), καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΚΒ, ΟΜΖ εἶναι $\frac{KT}{TB}=\frac{MO}{OZ}$ (8). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (7) καὶ (8) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda T}{TB}=\frac{NO}{OZ}$ (9). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (9) καὶ (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{T\Lambda}{\Lambda B}=\frac{NO}{NZ}$, ἤτοι καὶ ἡ τετάρτη ἕδρα τῆς πυραμίδος ΒΚΤΛ ἡ ΒΤΛ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τετάρτην ἕδραν τῆς πυραμίδος ΖΜΟΝ τὴν ΖΟΝ. Αἱ πυραμίδες ἄρα αὗται εἶναι ὅμοιαι. Εἶναι ἄρα $\frac{BK T\Lambda}{ZMON}=\frac{BK^3}{ZM^3}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$ (θ. 8).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι $\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}=\frac{TKA\Lambda}{OMEN}=\frac{AKX\Lambda}{EM\Sigma N}=\frac{XK\Delta\Lambda}{\Sigma M\Theta N}=\frac{\Delta K\Phi\Lambda}{\Theta MPN}=\frac{\Phi K\Gamma\Lambda}{PMHN}=\frac{\Gamma K\Upsilon\Lambda}{HM\Pi N}=\frac{\Upsilon KB\Lambda}{M\Pi ZN}$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν (V. 12) θὰ εἶναι $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=$

$$\frac{BKT\Lambda+TKA\Lambda+AKX\Lambda+XK\Delta\Lambda+\Delta K\Phi\Lambda+\Phi K\Gamma\Lambda+\Gamma K\Upsilon\Lambda+\Upsilon KB\Lambda}{ZMON+OMEN+EM\Sigma N+\Sigma M\Theta N+\Theta MPN+PMHN+HM\Pi N+M\Pi ZN}$$

ἢ $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=\frac{\text{πυραμίς, } ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X\Lambda}{\text{πυραμίς, } EOZ\Pi HP\Theta\Sigma N}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$.

Ὑπετέθη δὲ καὶ $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$, ἔνθα Ξ < κώνου ΕΖΗΘΝ.

Εἶναι ἄρα $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{\text{πυραμίς, } ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X\Lambda}{\text{πυραμίς, } EOZ\Pi HP\Theta\Sigma N}$.

Ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ > πυραμίδος ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ, εἶναι ἄρα καὶ στερεὸν Ξ > πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη Ξ < πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ.

Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$, ἔνθα Ξ < κώνου ΕΖΗΘΝ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι

$\frac{\text{κῶνος } EZH\Theta N}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{Z\Theta^3}{B\Delta^3}$, ἔνθα Ξ < κώνου ΑΒΓΔΛ.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$, ἔνθα Ξ $\rangle$ κώνου ΕΖΗΘΝ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{Ξ}{ΑΒΓΔΛ} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$ (1). Τῶν Ξ, ΑΒΓΔΛ, ΕΖΗΘΝ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{Ξ}{ΑΒΓΔΛ} = \frac{ΕΖΗΘΝ}{Χ}$ (2). Ἐπειδὴ ὑπετέθη Ξ $\rangle$ ΕΖΗΘΝ, εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓΔΛ $\rangle$ Χ (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{ΕΖΗΘΝ}{Χ} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$, ἔνθα Χ $\langle$ κώνου ΑΒΓΔΛ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον, ἑνὸς κώνου : διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον ἄλλου κώνου = πρῶτος κῶνος : στερεὸν μικρότερον τοῦ ἄλλου κώνου. Ὅθεν ἀφοῦ δὲν εἶναι Ξ $\lessgtr$ κώνου ΕΖΗΘΝ, θὰ εἶναι Ξ = κῶνος ΕΖΗΘΝ καὶ συνεπῶς $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κῶνος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$.

Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς κῶνοι = κύλινδρος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους, θὰ εἶναι $\frac{\text{κύλινδρος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κύλινδρος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$.

17. Τὸ $ΚΒ^2$ εἶναι $\rangle$ $2ΒΨ^2$, διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου = $2ΒΨ^2$. Ἐπειδὴ δὲ ΚΒ = ΚΣ = ΒΟ $\rangle$ ΟΣ, ἕπεται ΚΒ $\rangle$ πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου τεραγώνου.

18. Ἔστωσαν αἱ σφαῖραι ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ διάμετροι αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{ΑΒΓ}{ΔΕΖ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$ (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓ}{ΗΘΚ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$, ἔνθα ΗΘΚ σφαῖρα $\lessgtr$ σφαίρας ΔΕΖ.

1. Ἔστω πρότερον $\frac{ΑΒΓ}{ΗΘΚ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$ (2), ἔνθα ΗΘΚ σφαῖρα $\langle$ σφαίρας ΔΕΖ. Θεωροῦμεν τὰς σφαίρας ὁμοκέντρους. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_2$. Ἐπίσης ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν εἰς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_1$. Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3} \qquad (3).$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΗΘΚ}} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ $\rangle$ τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου πολυέδρου Π_1. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ $\rangle$ τοῦ πολυέδρου Π_2 (V. 14). Ἀλλὰ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ πολυέδρου Π_2 καὶ συνεπῶς εἶναι μικροτέρα αὐτοῦ· ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΗΘΚ}} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$, ἔνθα ΗΘΚ $\langle$ ΔΕΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι καὶ $\frac{\text{ΔΕΖ}}{\Sigma} = \frac{\text{ΕΖ}^3}{\text{ΒΓ}^3}$, ἔνθα Σ σφαῖρα $\langle$ σφαίρας ΑΒΓ (α).

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΛΜΝ}} = \frac{\text{ΒΓ}^3}{\text{ΕΖ}^3}$, ἔνθα ΛΜΝ σφαῖρα $\rangle$ σφαίρας ΔΕΖ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{\text{ΛΜΝ}}{\text{ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΕΖ}^3}{\text{ΒΓ}^3}$ (1). Τῶν σφαιρῶν ΛΜΝ, ΑΒΓ, ΔΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν σφαῖραν ἔστω Σ, ἤτοι $\frac{\text{ΛΜΝ}}{\text{ΑΒΓ}} = \frac{\text{ΔΕΖ}}{\Sigma}$ (2). Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΛΜΝ $\rangle$ ΔΕΖ, εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓ $\rangle$ Σ (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{\text{ΔΕΖ}}{\Sigma} = \frac{\text{ΕΖ}^3}{\text{ΒΓ}^3}$, ἔνθα Σ $\langle$ ΑΒΓ. Ὅπερ ἀδύνατον.

Διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (α). Ὥστε δὲν εἶναι ΗΘΚ $\lessgtr$ ΔΕΖ, ἤτοι ΗΘΚ = ΔΕΖ.

Παρατήρησις ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 2, 5, 11, 12, 18.

Εἰς τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (1), ἔνθα α $\rangle$ γ, διὰ νὰ συναχθῇ τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ β $\rangle$ δ, λαμβάνεται ὁ ἐναλλὰξ λόγος $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, ἐν ᾧ εἰς τὸ συναφὲς θεώρημα τοῦ V. 14 ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς (1), ὅτι ἂν α $\gtreqless$ γ εἶναι καὶ β $\gtreqless$ δ.

Σημ. Τοῦ θεωρήματος 6 δὲν ὑπάρχει ἄλλη ἀπόδειξις εἰς τὸ Παράρτημα II.

Βιβλίον XIII.

1. Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς εὐθείας α τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον εἶναι x, θὰ εἶναι καὶ

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

2. Ἀντίστροφον προηγουμένου.

3. Ἐὰν $x^2 = \alpha\,(\alpha - x)$ εἶναι καὶ $\left[(\alpha - x) + \frac{x}{2}\right]^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2.$

4. Ἐὰν $x^2 = \alpha\,(\alpha - x)$ εἶναι καὶ $\alpha^2 + (\alpha - x)^2 = 3x^2.$

5. Ἐὰν $x^2 = \alpha\,(\alpha - x)$ εἶναι καὶ $\alpha^2 = (\alpha + x)\,x.$

6. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι ῥητή, ρ, καὶ εἶναι $x^2 = \rho\,(\rho - x)$, ἡ x καὶ ἡ $(\rho - x)$ εἶναι ἀποτομαί.

Κατὰ τὸ θεώρ. 1 εἶναι $\left(x + \frac{\rho}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{\rho}{2}\right)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$. Τὰ μονώνυμα τῆς διαφορᾶς x εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73). Ἐὰν εἰς τὴν $(\rho - x)$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν x διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς της, θὰ ἔχωμεν $\rho - x = \frac{3\rho}{2} - \frac{\rho}{2}\sqrt{5}$. Καὶ ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀποτομή, διότι τὰ μονώνυμα τοῦ β΄ μέλους εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73).

9. Ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου εἶναι $\frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (IV. 10). Κατὰ τὸ θεώρημα ἡ ὅλη εὐθεῖα θὰ εἶναι

$$\rho + \left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{\rho}{2}\sqrt{5} + \frac{\rho}{2},$$

ρ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ταύτης τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ $\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} + \frac{\rho}{2}\right) - \rho = \frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$, τὸ μικρότερον τμῆμα. Ἤτοι $\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}\right) = \rho^2.$

11. Ἔστω ἡ ῥητὴ διάμετρος $B\Theta = 2\rho$, καὶ $ZK = \frac{\rho}{4}$. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος εἶναι $BK^2 = 5KM^2$ (1) καὶ εἶναι $BM = BK - KM$.

Ἀντικαθιστῶντες ἐνταῦθα ἐκ τῆς (1) τὴν ΒΚ λαμβάνομεν $\mathrm{BM} = \mathrm{BK}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (2). Εἶναι δὲ $\mathrm{BK} = \frac{5\rho}{4}$. Συνεπῶς $\mathrm{BM} = \frac{5\rho}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BM} \times \mathrm{B\Theta} = \frac{10\rho^2}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathrm{AB} = \frac{\rho}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, (3), ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Αὕτη εἶναι ἐλάσσων (Χ. 76). Εἶναι ὅμως δεδομένη ὑπὸ τὴν μὴ ἀνεπτυγμένην μορφὴν τοῦ Χ. 94 (τοῦ α′ μέλους τοῦ θ. τούτου· ἰδὲ ἐπεξήγησιν). Ἡ (3) γράφεται $\rho\sqrt{\frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. Κατὰ τὸ Χ. 94 θὰ εἶναι

$$\rho\sqrt{\frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\rho}{2}\sqrt{5\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} - \frac{\rho}{2}\sqrt{5\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \quad (4).$$

(Ἡ εἰς τὸ Χ. 94 σχέσις $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ εἶναι ἐνταῦθα $1^2 + 2^2 = 5$).

Τὸ β′ μέλος τῆς (4) εἶναι ἡ μορφὴ τῆς ἐλάσσονος τοῦ Χ. 76, ἤτοι εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μονωνύμων εἶναι ῥητὸν $\left(\text{τὸ } \frac{5\rho^2}{2}\right)$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων εἶναι μέσον, ἤτοι περιέχει τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ $\left(\text{τὸ } \frac{5\rho^2}{4\sqrt{5}}\right)$.

16. Ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἐγγράφεται πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου, λαμβάνεται συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἐγγράφεται τὸ εἰκοσάεδρον καὶ εἶναι $\rho = \frac{2r}{\sqrt{5}}$, ἐὰν r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων κατὰ τὸ θ. 11.

'Επὶ τοῦ θεωρήματος τὸ ὁποῖον μνημονεύεται εἰς τὸν πρόλογον ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο».

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων θεώρημα τοῦ Euler. 'Ο Max Zacharias εἰς τὸ ἔργον του Στοιχειώδης Γεωμετρία τοῦ 'Επιπέδου καὶ τοῦ Χώρου, 1930, σελ. 172 (Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Göschens Lehrbücherei B. 16) γράφει ἐπὶ τούτου τὰ ἑξῆς·

« Τὸ θεώρημα διετυπώθη, ὡς πρῶτος παρετήρησεν ὁ R. Baltzer τῷ 1861, ἤδη πρὸ τοῦ Euler, ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου (Descartes), ὡς συνάγεται ἐκ παρεφθαρμένου τινὸς ἀντιγράφου διατηρηθέντος ὑπὸ τοῦ Leibnitz καὶ δημοσιευθέντος μόλις τῷ 1860. Καὶ δὴ καὶ εἶναι πιθανὸν ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης τὸ ἐγνώριζεν. 'Ο Euler τὸ ἀνεκάλυψεν ἐκ νέου τῷ 1752 κατ' ἀρχὰς δι' ἐπαγωγῆς καὶ τὸ ἐδημοσίευσεν ἄνευ ὅμως ἀποδείξεως, τὴν ὁποίαν εὗρεν ἀμέσως μετὰ ταῦτα (Descartes, Oeuvres inéd., Paris 1860, σ. 214. Euler, Nov. Comm. Petz. (1752 - 1753) 4 (τυπωθὲν 1758) σ. 109 καὶ 140. Baltzer, Berl. Mon. Ber. 1861, σ. 1043) ».

'Εκ τῆς διατυπουμένης ἀνωτέρω γνώμης τοῦ M. Zacharias ὅτι πιθανὸν ὁ 'Αρχιμήδης ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ διερευνήσωμεν τὸ πρᾶγμα. Πρὸ παντὸς πρέπει νὰ εὑρεθῇ, εἰς ποῖα στοιχεῖα στηρίζει ὁ M. Zacharias τὴν γνώμην του ταύτην. 'Εγράψαμεν εἰς διακεκριμένους ἐν Γερμανίᾳ μαθηματικούς, ἀσχολουμένους εἰδικῶς μὲ τὰ 'Ελληνικὰ μαθηματικά, ἀλλὰ δυστυχῶς δὲν ἦσαν οὗτοι εἰς θέσιν νὰ παράσχωσιν εἰς ἡμᾶς συναφεῖς πληροφορίας. Οὔτε ἐλάβομεν ζητηθὲν ἀντίγραφον τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης πραγματείας τοῦ Baltzer.

Veranlassung

untersuchen, prüfen

Auskunft

Abschrift

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΓΕΝΟΜΕΝΑΙ ΕΝ Τῌ ΑΚΑΔΗΜΙᾼ ΑΘΗΝΩΝ

1. *Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου. Συνεδρία 11 - 6 - 1953.

Διὰ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης, λαμβανομένης ἀφορμῆς ἐκ παρατηρήσεως τοῦ G. Vacca [1], *γενομένης τῷ 1910, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς (ὁ καλούμενος καὶ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς ἢ ἐκ τῆς ἀληθείας τῶν ν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν ν + 1) ἐφαρμόζεται εἰς πλεῖστα θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Πρὸς τοῦτο μνημονεύονται 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 20 θεωρ. τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, 2) Τὸ χωρίον ἐκ τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων (73 b 32) τοῦ Ἀριστοτέλους « Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται » καὶ 3) Ἐκ τῶν συγχρόνων ἀποδείξεων τὸ θεώρημα « ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων (πεπερασμένου) εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστος παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς».*

Ὁ E. Lindelœf [2] *διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου γράφει τὰ ἑξῆς· « Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις ἓν γινόμενον ἐκ τριῶν συναρτήσεων*

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi),$$

τὰς ὁποίας ὅλας ὑποθέτομεν διὰ $\chi = \chi_0$ *συνεχεῖς. Ἐν ᾧ τώρα τὰς δύο ἔστω πρώτας συναρτήσεις θεωροῦμεν ὡς μίαν, δυνάμεθα τὴν δοθεῖσαν παράστασιν νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι* $u_1(\chi)\ u_2(\chi)$ *καὶ* $u_3(\chi)$. *Καὶ αἱ δύο αὗται συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς διὰ* $\chi = \chi_0$, *ἤτοι* $u_3(\chi)$ *κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ* $u_1(\chi)\ u_2(\chi)$ *κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν θεώρημα.*

[Σημ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔστω (α) λέγει : ἐὰν αἱ 2 συναρτήσεις $u(\chi)$

---

1. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 240, σελ. 79, Λειψία 1935, ὑπὸ Clemens Thaer, παρατήρησις εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

2. Ernst Lindelöf, Einführung in die Höhere Analysis, γερμανικὴ ἔκδοσις ὑπὸ E. Ullrich μετὰ τὴν πρώτην σουηδικὴν καὶ τὴν δευτέραν φινλανδικήν, σελ. 41, B. G. Teubner, 1950, Λειψία.

καὶ $v(\chi)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ $\chi = \chi_0$ εἶναι καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $u(\chi)$ $v(\chi)$ συνεχές]. Κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα εἶναι συνεπῶς καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων [τῶν $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ καὶ $u_3(\chi)$] συνεχὲς διὰ $\chi = \chi_0$ καὶ κατὰ ταῦτα ἀπεδείχθη τὸ θεώρημά μας ἐπίσης καὶ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων.

Ἐὰν τώρα ἔχωμεν γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi)\ u_4(\chi),$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι συνεχὴς διὰ $\chi = \chi_0$, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι τοῦ ἑνὸς $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ $u_3(\chi)$ καὶ τοῦ ἄλλου $u_4(\chi)$. Ὁ πρῶτος παράγων εἶναι συνεχὴς κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν (περὶ τριῶν συναρτήσεων), ὁ δεύτερος εἶναι συνεχὴς καθ' ὑπόθεσιν. Καὶ κατὰ τὸ θεώρημα (α) εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ $u_3(\chi)$ καὶ $u_4(\chi)$ συνεχές. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ πέντε συναρτήσεις κλπ. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν χρειάζεται, διότι δυνάμεθα ὅλας αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις νὰ τὰς συμπεριλάβωμεν εἰς μίαν ἀπόδειξιν, καθ' ἣν ἀποδεικνύομεν :

Ἐὰν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον n συναρτήσεων, ἰσχύει τοῦτο ἐπίσης διὰ γινόμενον $n+1$ συναρτήσεων, ἔνθα n δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς 2, 3, 4 ....

Ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἐν γινόμενον n συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι συνεχές, θεωροῦμεν τὸ γινόμενον $n+1$ συναρτήσεων

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi) \ldots u_n(\chi)\ u_{n+1}(\chi), \qquad (1)$$

ἔνθα ἕκαστος παράγων διὰ $\chi = \chi_0$ εἶναι συνεχής.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι ἔχομεν γινόμενον μόνον δύο παραγόντων, τῶν $u_1(\chi)$ $u_2(\chi) \ldots u_n(\chi)$ καὶ $u_{n+1}(\chi)$. Ἕκαστος παράγων ἐκ τούτων εἶναι συνεχὴς διὰ $\chi = \chi_0$, διότι ὑπεθέσαμεν ὅτι τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ n παράγοντας. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ θεώρημα (α) ἔχομεν ἀποδείξει τὴν συνέχειαν διὰ γινόμενον δύο παραγόντων, ἕπεται ὅτι ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι τὸ γινόμενον (1) εἶναι διὰ $\chi = \chi_0$ συνεχές. Ὅθεν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθὲς ἐπίσης διὰ γινόμενον $n+1$ παραγόντων, ἐὰν εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον n παραγόντων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι ».

Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ὁ Lindelœf ἀκολουθεῖ πιστότατα τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 20οῦ θεωρήματος τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ὀλίγους μῆνας μετὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν ἐλάβομεν παρὰ τοῦ Ὁλλανδοῦ καθηγητοῦ Hans Freudenthal (Μαθηματικὸν Ἰνστιτοῦτον τοῦ Πανεπιστημίου Rijks) πραγματείαν του γερμανιστί, ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς », δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ φύλλον 22 τοῦ 1953 τῆς τριμηνιαίας Ἐπιθεωρήσεως τοῦ Διεθνοῦς Ἀρχείου τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν, (ARCHIVES INTERNATIONALES D' HISTOIRE DES SCIENCES, Revue trimestrielle de l' Union Interna-

tionale d' Histoire des Sciences, Publiée avec le concours financier de l' UNESCO) Numéro 22-1953. Pages 17 à 37).

Μεταφέρομεν ἐνταῦθα τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα σημεῖα τῆς πραγματείας ταύτης.

« Λίαν ἐνωρὶς ὁ 'Ιάκωβος Μπερνοῦλι (Jakob Bernoulli, 1645 — 1705) ἐθεωρεῖτο ὁ ἐπινοητὴς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Ἔπειτα ἀπέδωκαν τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου εἰς τὸν Pascal (1623 — 1662). Εἰς τὰς περισσοτέρας ὅμως νέας πραγματείας θεωρεῖται ὅτι ὁ πρῶτος ἐπινοήσας τὴν μέθοδον ταύτην εἶναι ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος [1]. *Εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς γνώμης ταύτης συνετέλεσεν ὁ G. Vacca, ὅστις ἀνέφερε πέντε θεωρήματα ἐκ τοῦ 2ου βιβλίου τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Μαυρολύκου καὶ προεκάλεσε οὕτω τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν πρόκειται περὶ ἐφαρμογῆς τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.*

'Ο Vacca μνημονεύει, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τῶν 'Αριθμητικῶν του τονίζει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἠσχολήθη μόνον μὲ τοὺς ἐπιπέδους, τοὺς στερεούς, τοὺς τετραγώνους καὶ τοὺς κύβους ἀριθμούς, ἐν ᾧ διὰ τοὺς τριγώνους, πενταγώνους, ἑξαγώνους, ἑπταγώνους πολὺ ὀλίγαι ἔρευναι ἔγιναν καὶ ὅτι αὐτός, ὁ Μαυρόλυκος, ἐπιθυμεῖ νὰ ἐπανορθώσῃ τὴν παράλειψιν ταύτην τοῦ Εὐκλείδου.

Οὔτε ἐκ τῆς Εἰσαγωγῆς οὔτε ἐκ τοῦ λοιποῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰσήγαγε καὶ ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ...».

« Εἰς τὸ θεώρημα 84 πρόκειται περὶ τῶν πολυγωνικῶν — πυραμιδικῶν ἀριθμῶν [2]. *Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τούτου, εὑρίσκομεν ἐνταῦθα γνησίαν πλήρη ἐπαγωγήν... 'Εν τῷ συνόλῳ εὗρον εἰς τὸν Μαυρόλυκον δύο παραδείγματα γνησίας καὶ ἓν τοιοῦτο ἀμφιβόλου, πλήρους ἐπαγωγῆς ».*

'Ακολουθεῖ ἡ ἔρευνα ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 22, 32, 35, 36 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Καὶ ὁ Freudenthal ἐπὶ τούτου ἐπάγεται : « Συμπερασματικῶς δύναταί τις νὰ εἴπῃ, ὅτι ἐπίσης καὶ εἰς τὸν Εὐκλείδην (δηλ. παραλλήλως πρὸς τὸν Μαυρόλυκον, ὅστις ἐγνώριζεν ἄριστα τὸν Εὐκλείδην) παρατηροῦνται μερικὰ παρα-

---

1. 'Ο Φ. Μαυρόλυκος ἐγεννήθη ἐν Μεσσήνῃ τῆς Σικελίας τῷ 1494, ἐκ γονέων 'Ελλήνων, οἵτινες κατέφυγον εἰς 'Ιταλίαν ἐκ Κωνσταντινουπόλεως μετὰ τὴν ἅλωσιν αὐτῆς ὑπὸ τῶν Τούρκων. 'Απέθανε τῷ 1575. 'Ο πατήρ του ἦτο ἐκ τῶν λογίων ἀνδρῶν τῆς Κωνσταντινουπόλεως. 'Ο Φ. Μαυρόλυκος ἠσπάσθη τὸν Καθολικισμόν, γενόμενος μοναχός. [ἰδὲ Μεγάλη 'Ιταλικὴ 'Εγκυκλοπαιδεία]. Μετέφρασεν ἐκ τῆς 'Ελληνικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τὰ Φαινόμενα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ σφαιρικὰ τοῦ Θεοδοσίου καὶ τοῦ Μενελάου καὶ ἐξέδωκε παράφρασιν τοῦ περὶ Κέντρου βάρους τοῦ 'Αρχιμήδους.

2. Περὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων διαλαμβάνει ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς ἐν τῇ 'Αριθμητικῇ Εἰσαγωγῇ, ἔκδ. R. Hoche, Teubner, σελ. 99 κ. ἑ.

δείγματα πλήρους ἐπαγωγῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερον στοιχειώδη ἢ τὰ τοῦ Μαυρολύκου, ἀλλὰ περὶ συστηματικῆς ἐφαρμογῆς ἢ διατυπώσεως τῆς Ἀρχῆς δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος. Ὁ ἰσχυρισμὸς ὅμως τοῦ Tropfke καὶ τοῦ Günther, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς εἶναι ὁπωσδήποτε ἀπορριπτέος ».

« Τὸ ἀκριβέστατον ὅμως ὑπόδειγμα (μέχρι τοῦ 19ου αἰῶνος) πλήρους ἐπαγωγῆς δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς ἀπόσπασμα Πυθαγορείου θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ἐσώθη διὰ τοῦ Θέωνος (τοῦ Σμυρναίου), τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ τοῦ Πρόκλου. Πρόκειται διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται διὰ τῆς ἐπαγωγῆς

$$a_1 = d_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + d_n\,, \qquad d_{n+1} = d_n + 2a_n$$

(Σημ. Ἴδε εἰσαγωγὴν εἰς II τόμον Εὐκλείδου, σελ. 8).

«Ἐὰν θέλῃ τις δύναται νὰ θεωρήσῃ ἀκόμη ἓν παράδειγμα πλήρους ἐπαγωγῆς τὸ ὑπὸ τοῦ B. L. van der Waerden σημειούμενον ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Σιμπλικίου εἰς τὰ Φυσικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους [1]. Πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ χωρίου περὶ τοῦ Ζήνωνος :

Προδείξας γὰρ ὅτι ‘ εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ’ ἂν εἴη ’, ἐπάγει ‘ εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου· καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος· καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· ’ [Ἑρμηνεία : διότι προαποδείξας ὅτι « ἐὰν τὸ ὂν δὲν ἔχῃ μέγεθος, δὲν θὰ ὑπάρχῃ, ἐπάγεται « ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ, εἶναι ἀνάγκη ἕκαστον μέρος αὐτοῦ νὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πάχος καὶ ἀπόστασιν τὸ ἓν μέρος ἀπὸ τοῦ ἄλλου. Καὶ περὶ τοῦ προηγουμένως κειμένου μέρους ἰσχύει τὸ αὐτό· διότι καὶ ἐκεῖνο θὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πρὸ αὐτοῦ θὰ κεῖται ἄλλο· διότι τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τὸ εἴπῃ τις μίαν μόνον φορὰν καὶ νὰ ἰσχύῃ γενικῶς »].

2. *Μία παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (19 - 1 - 1953).

Ἴδε Εἰσαγωγὴν II τόμου τῶν Στοιχείων, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953, σελὶς 17.

1. Math. Ann. 117 (1939), 148. — SIMPL. Phys. 140, 34.

3. *Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (10 - 12 - 1953).

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος 27 τοῦ VI Βιβλίου τῶν Στοιχείων περὶ μεγίστου (τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν) εἶναι γενική.

4. *Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (4 - 6 - 1954).

Διὰ παραθέσεως χωρίων ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων ὑποστηρίζεται, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ οὐχὶ ἁπλῶς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἐκ τῶν χωρίων τούτων μνημονεύομεν δύο τοῦ Ἀριστοτέλους

α΄. « Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ » (Ἠθικὰ Νικομάχεια Ε΄ ΙΙΙ 8).

β΄. « Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται » (Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4). [Σημ. Ὁ Ross διορθώνει « κατὰ μὴ συμμέτρου δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται », ὅπερ παρουσιάζεται μὴ ἀποδίδον ἔννοιάν τινα. Ὁ Apelt δέχεται τὸ ὀρθόν].

5. *Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2 - 6 - 1955).

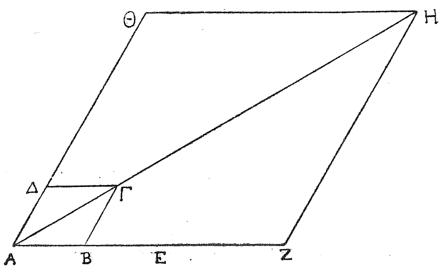
Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως (ὡς γνωστὰς) τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \quad \text{καὶ}$$

$$265^2 = 3.153^2 - 2\,, \qquad 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θ. ΙΙ. 10 τῶν Στοιχείων, διὰ τοῦ ὁποίου κατὰ τὸν Πρόκλον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον ὑπολογίζεται ἡ $\sqrt{2}$ διὰ κατασκευῆς τετραγώνων (ἴδε Εἰσαγωγὴν ΙΙ τόμου, σ. 8) εὑρίσκονται οἱ ἀνωτέρω τύποι τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ κατασκευῆς συνεχῶν ῥόμβων.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ῥόμβον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία $AB\Gamma = 120^0$. *Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ. Καλοῦμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ῥόμβου* $AB = \alpha_1$ *καὶ τὴν διαγώνιον* $A\Gamma = \delta_1$. *Κατὰ τὸ ΙΙ 12 τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν* $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$ (1) *καὶ συνεπῶς* $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. *Ἐπὶ τῆς προεκτά-*



σεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE = AB = \alpha_1$ *καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα* $EZ = A\Gamma = \delta_1$. *Κατὰ τὸ ΙΙ 10 τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν*

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2, \quad \text{καὶ ἐκ ταύτης}$$

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2 \qquad (2).$$

Εἶναι ἄρα καὶ $$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1^2 \qquad (3).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν (1) *εἶναι* $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$. *Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ β'. μέλος τῆς* (3) *λαμβάνομεν*

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2$$

ἢ $$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = (3\alpha_1 + 2\delta_1)^2 \qquad (4).$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ, ὅτι ἡ μὲν $2\alpha_1 + \delta_1$, *ἣν καλοῦμεν* α_2, *εἶναι ἡ πλευρά, ἡ δὲ* $3\alpha_1 + 2\delta_1$ *ἣν καλοῦμεν* δ_2, *εἶναι ἡ διαγώνιος δευτέρου ῥόμβου τοῦ ΑΒΖΗΘ, ὁμοίου πρὸς τὸν πρῶτον, τὸν ΑΒΓΔ. Ὅθεν εὑρέθη ὁ νόμος κατασκευῆς ὁμοίων ῥόμβων. Ἡ πλευρὰ ἑκάστου τούτων εἶναι* $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ *καὶ ἡ διαγώνιος* $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Οἱ συναφεῖς πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἤτοι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι τῶν συνεχῶν ῥόμβων, θὰ εἶναι

	Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ (*πλευρὰ*)	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ* (*διαγώνιος*)
πρώτου ῥόμβου	α_1	δ_1
δευτέρου ῥόμβου	$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
τρίτου ῥόμβου	$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
τετάρτου ῥόμβου	$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
	$\vdots$	$\vdots$
ν ῥόμβου	$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, *λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 5$
$\alpha_3 = 11$	$\delta_3 = 19$
$\alpha_4 = 41$	$\delta_4 = 71$
$\alpha_5 = 153$	$\delta_5 = 265$
$\vdots$	$\vdots$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσομεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3}$$

καὶ

$$\begin{aligned} 1^2 &= 3 \cdot 1^2 - 2 \\ 5^2 &= 3 \cdot 3^2 - 2 \\ 19^2 &= 3 \cdot 11^2 - 2 \\ 71^2 &= 3 \cdot 41^2 - 2 \\ 265^2 &= 3 \cdot 153^2 - 2 \\ &\vdots \\ y^2 &= 3 \cdot \chi^2 - 2 \end{aligned}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$, *λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσομεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 3 \cdot 1^2 + 1 \\ 7^2 &= 3 \cdot 4^2 + 1 \\ 26^2 &= 3 \cdot 15^2 + 1 \end{aligned}$$

$$97^2 = 3 \cdot 56^2 + 1$$
$$362^2 = 3 \cdot 209^2 + 1$$
$$1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1$$
$$\vdots$$
$$y^2 = 3 \cdot \chi^2 + 1$$

Εὑρέθησαν δηλ. οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἄνευ ἀποδείξεων (ὡς εὑρεθέντας ὑπὸ προγενεστέρων του), ἤτοι

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

καὶ $265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2, \quad 1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1.$

[Σημ. Ἡ λῆψις 1) $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ καὶ 2) $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$ εἶναι χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων, τῆς σήμερον λεγομένης iteratio. Αὕτη ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Συναφὴς εἶναι ἡ ἀνακοίνωσις ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 14.6.1956].

6. *Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2-6-1955).

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης πραγματείας διὰ τὴν $\sqrt{3}$ εὑρίσκεται ἡ $\sqrt{\lambda}$ διὰ $\lambda \geqq 5$, (ἀκέραιον) ἐκ τῶν ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι :

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
α_1	δ_1
$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = \lambda\alpha_1 + 2\delta_1$
$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = \lambda\alpha_2 + 2\delta_2$
$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = \lambda\alpha_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = \lambda\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

καὶ $$\frac{\delta_1}{\alpha_1} < \frac{\delta_3}{\alpha_3} < \frac{\delta_5}{\alpha_5} < \cdots \sqrt{\lambda} \cdots < \frac{\delta_6}{\alpha_6} < \frac{\delta_4}{\alpha_4} < \frac{\delta_2}{\alpha_2}$$

(λαμβάνεται $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$).

Εἶναι δὲ ἀκόμη $\delta_\nu^2 = \lambda\alpha_\nu^2 + (\lambda - 4)^\nu (-1)^\nu$.

7. *Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.*

Διὰ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (24 - 11 - 1955).

Εἰς τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους αὐτοῦ γίνεται, κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ταύτην, ὡς καὶ τοῦ πρώτου, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γ' θεωρήματος τῆς Κύκλου μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους.

8. *Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (12 - 1 - 1956).

Εἰς τὸ χωρίον τοῦτο ὁ Πλάτων γράφει ὅτι ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ καὶ ὅτι μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς $\sqrt{17}$ ἐσταμάτησεν. Ὑποστηρίζεται διὰ τῆς πραγματείας ταύτης ἐπὶ τῇ βάσει χωρίων παλαιῶν συγγραφέων, ὅτι ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται ἐνταῦθα τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν $\sqrt{17}$. Μνημονεύονται 1) Ὁ μουσικὸς τόνος διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος ὁ $\frac{9}{8}$, 2) Ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτου 9 καὶ 8 ἰσοῦται πρὸς 17, 3) Ὅτι οἱ ὅροι οὗτοι 9 καὶ 8 εἶναι οἱ μέσοι ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6 : 8 = 9 : 12, 4) Ὅτι τὸ πλῆθος τῶν συλλαβῶν τοῦ πρώτου στίχου τῆς Ὀδυσσείας «ἄνδρα μοι ἔννεπε...» εἶναι 17, 5) Ὅτι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας καὶ ἡ μικροτέρα 8, ἤτοι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας 6 : 8 = 9 : 12, ἐξ ἧς κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ τοῦ Πυθαγόρου.

9. *Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (14 - 6 - 1956).

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις, καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος χ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi = \varphi(\chi)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω χ_0, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi_{n+1} = \varphi(\chi_n)$, $[n = 0, 1, 2....]$

κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν χ_1, χ_2, χ_3.... Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν ξ, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi = \varphi(\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι᾽ ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἀποδεικνύεται διὰ συναφῶν παραδειγμάτων, ὅτι ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου.

10. Ἐπὶ τοῦ Χ Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (17 - 1 - 1957).

Παρέχεται νέα ἑρμηνεία τοῦ περιεχομένου τοῦ Χ Βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ ὑποστηρίζεται, ὅτι σκοπὸς τοῦ Βιβλίου τούτου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται διὰ τὴν κατασκευὴν τούτου τὰ ἁπλούστατα τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν.

11. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, μέρος ΙΙ.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (31 - 1 - 1957).

Διὰ τῆς παραθέσεως στίχων ἐκ τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου φαίνεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἦτο ἱερὸς καὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὁμήρου. Συνεπῶς ἐνισχύεται ἔτι περαιτέρω ἡ κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς 12.1.1956 ὑποστηριχθεῖσα ἄποψις, ὅτι ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ *ὑπαινίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ

Ἀρχιμήδους τετραγωνισμὸς παραβολῆς, Ἀθῆναι, 1946.

Ἀρχιμήδους Μηχανικά I, Ἀθῆναι, 1946.

Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, Ἀθῆναι, 1949.

Ἀρχιμήδους, Κύκλου μέτρησις, Ἀθῆναι, 1950.

Εὐκλείδου, Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλ. I, II, III, IV. Τόμ. I, Ἀθῆναι, 1952, ἔκδ. Νικ. Σάκκουλα.

Εὐκλείδου, Γεωμετρία — Θεωρία Ἀριθμῶν, Στοιχείων Βιβλ. V, VI, VII, VIII, IX, Τόμ. II, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων (Ὑπουργείου Παιδείας), Ἀθῆναι, 1953.

Μαθήματα ἱστορίας τοῦ πολιτισμοῦ. Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικά. [Ἐκ τῶν παραδόσεων ἐν τῇ Σχολῇ Γενικῆς Μορφώσεως Ἀνωτέρων Ἀξιωματικῶν τοῦ Γενικοῦ Ἐπιτελείου Στρατοῦ]. Ἀθῆναι 1956. Ἔκδ. Ἀνδ. Σιδέρη.

Εὐκλείδου, Περὶ Ἀσυμμέτρων, Στοιχείων Βιβλ. X, Τόμ. III, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι, 1956/1957.

Εὐκλείδου, Στερεομετρία, Στοιχείων Βιβλ. XI, XII, XIII. Τόμ. IV, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων (Ὑπουργείου Παιδείας), Ἀθῆναι 1957.

Ἐπιμελητὴς ἐκδόσεως ΣΠ. ΜΑΓΓΙΝΑΣ (ἀπ. Δ. Σ. ΟΕΣΒ 11145/22.3.57)

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουσι τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Echtheit

᾿Αντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. ῾Ο διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (᾿Εφ. Κυβ. 1946, Α' 108).

fertigmachen

verkaufen

+ Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως σχολικ.(ῶν) βιβλίων + Βιβλιόσημον

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1957 (IX) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 2.000

᾿Εκτύπωσις - βιβλιοδεσία ΑΔΕΛΦΩΝ Γ. ΡΟΔΗ, Κεραμεικοῦ 40 — ᾿Αθῆναι

a