ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

101

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ ΕΛΛΗΝΙΚΑΙ - ΛΑΤΙΝΙΚΑΙ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΥΠΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ

ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1975

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Τῆς ἐκδόσεως τοῦ α΄ τόμου

ἐπεμελήθη

ΚΩΝ. Γ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ ΕΛΛΗΝΙΚΑΙ - ΛΑΤΙΝΙΚΑΙ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBRI OCTO,

ET

SERENI ANTISSENSIS

DE SECTIONE

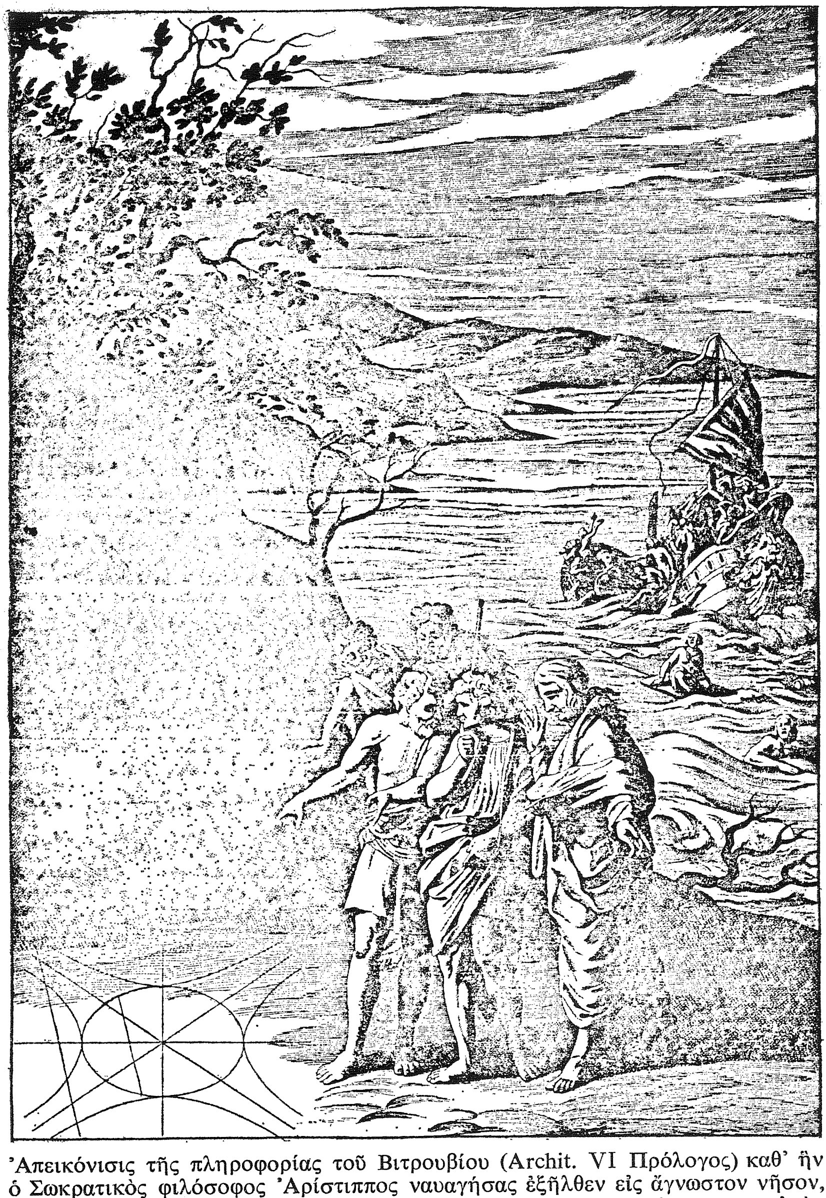
CYLINDRI & CONI

LIBRI DUO.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

Εἰκὼν τοῦ ἐξωφύλλου τῆς ἐκδόσεως τῶν Κωνικῶν ὑπὸ τοῦ 'Εδμ. Χάλλεϋ, 'Οξφόρδη 1710.



᾿Απεικόνισις τῆς πληροφορίας τοῦ Βιτρουβίου (Archit. VI Πρόλογος) καθ᾿ ἣν ὁ Σωκρατικὸς φιλόσοφος ᾿Αρίστιππος ναυαγήσας ἐξῆλθεν εἰς ἄγνωστον νῆσον, ὅπου ἀνεῦρε γεωμετρικὰ σχήματα καὶ καθησύχασε τοὺς συντρόφους του εἰπὼν ὅτι ἡ νῆσος κατοικεῖται ἀπὸ πολιτισμένους ἀνθρώπους (τὰ αὐτὰ λέγει καὶ ὁ Κικέρων διὰ τὸν Πλάτωνα De rep 17, 19).

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

τινὲς εἰς τὸ κείμενον τοῦ α' βιβλίου τῶν Κωνικῶν τοῦ 'Απολλωνίου ἐκδόσεως I. L. Heiberg, Lipsiae 1891.

Σελὶς 16. Ὡς στίχος 18 νὰ τεθῇ ⟨πόρισμα α'⟩
» 16. Ὡς στίχος 21 νὰ τεθῇ ⟨πόρισμα β'⟩
» 68, 20. Ἀντὶ Ἐὰν κώνου τομῇ νὰ τεθῇ Ἐὰν ⟨ἐν⟩ κώνου τομῇ
» 78, 19. Ἀντὶ Ἐὰν παραβολῇ νὰ τεθῇ Ἐὰν ⟨ἐν⟩ παραβολῇ
» 80, 7. Ἀντὶ Ἐὰν ἐλλείψει νὰ τεθῇ Ἐὰν ⟨ἐν⟩ ἐλλείψει
» 92, 24. Ἀντὶ σημεῖον ὅν τι νὰ τεθῇ σημεῖον ⟨τυχ⟩όν τι
» 116. Ὡς στίχος 13 νὰ τεθῇ ⟨πόρισμα α'⟩
» 118. Ὡς στίχος 1 νὰ τεθῇ ⟨πόρισμα β'⟩
» 126, 15. Ἀντὶ [ὡς πάντα πρὸς πάντα, ἓν πρὸς ἓν] νὰ τεθῇ ⟨καὶ συνθέντι⟩.
» 158. Ὡς στίχος 1 νὰ τεθῇ ⟨πόρισμα⟩.

Σημείωσις:

Σελὶς 194 κ.ἑ. Ὅπου παραπλεύρως τοῦ ἀρχαίου κειμένου σημειοῦται H, δηλοῦται ἡ σελὶς τῆς ἐκδόσεως Heiberg 1891 (Λειψίας).

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ ἔκδοσις τῶν Ἁπάντων τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ γενομένη δαπάναις τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, μὲ ἐνέπλησε θάρρους, ὅπως μὴ ὀρρωδήσω, ἐνώπιον τοῦ μεγάλου μόχθου, τὴν ἐπεξεργασίαν πρὸς ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, διὰ τὰ ὁποῖα γνωρίζομεν, ὅτι ἐξεδόθησαν διὰ τελευταίαν φορὰν ἐπὶ Ἑλληνικοῦ ἐδάφους ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου, περὶ τὸ 530 μ.Χ., ἐν Κωνσταντινουπόλει, ἤτοι πρὸ 1440 περίπου ἐτῶν. Εἰς λατινικὴν μετάφρασιν ἐκυκλοφορήθησαν ταῦτα ἐν τῇ Δυτικῇ Εὐρώπῃ κατὰ τὸν 13ον αἰῶνα. Ὁ Καρτέσιος (Descartes) εἶχε πλήρη γνῶσιν τούτων, ὅταν τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν ἐπενόησε τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν, ὡς ἰσχυρίζονται πολλοί. Ὅθεν, εἶναι εὔλογον τὸ ὕψιστον ἐθνικὸν ἐνδιαφέρον καὶ ἡ ἐπιμονὴ τοῦ Προέδρου τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος διὰ τὴν ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου ἐν Ἀθήναις. Χάρις εἰς τὸ Τεχνικὸν Ἐπιμελητήριον τῆς Ἑλλάδος, οἱ νέοι σπουδασταὶ θὰ ἔχωσι τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐνδιατρίψωσιν εἰς τὰ μεγάλα μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἐνδόξων ἡμῶν προγόνων, τὰ ὁποῖα ἀπετέλεσαν τὴν βάσιν τῆς συγχρόνου ἐπιστημονικῆς προόδου καὶ θὰ λαμπρύνωσιν ἐσαεί, πρὸς ὑπερηφάνειαν ἡμῶν τῶν νεωτέρων, τὸ πνευματικὸν οἰκοδόμημα τῆς ἀνθρωπότητος.

Ἂς ἐπιτραπῇ νὰ ἐκφράσωμεν ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης τὰς εὐχαριστίας καὶ τὴν εὐγνωμοσύνην ἡμῶν πρὸς τὸν Πρόεδρον τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, καθηγητὴν τοῦ Ἐθνικοῦ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Μετσοβίου Πολυτεχνείου κ. Ἀλέξανδρον Σφῆκαν, υἱὸν Ἐθνομάρτυρος τῶν Μακεδονικῶν ἀγώνων καὶ πρὸς τὰ μέλη τῆς Διοικούσης Ἐπιτροπῆς τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος διὰ τὴν προθυμίαν καὶ τὴν ἀρωγὴν αὐτῶν πρὸς ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς ἀρχαιότητος.

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Σεπτέμβριον 1973

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ Ἀπολλώνιος ἐγεννήθη εἰς τὴν Ἑλληνικὴν πόλιν Πέργην τῆς Παμφυλίας, κειμένην 15 χιλιόμ. ΒΑ τῆς παραθαλασσίας πόλεως Ἀτταλείας (Μ. Ἀσίας). Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὑπῆρχον πολλοὶ σημαίνοντες ἄνθρωποι μὲ τὸ ὄνομα Ἀπολλώνιος, ὁ μαθηματικὸς Ἀπολλώνιος φέρεται πρὸς διάκρισιν πάντοτε ὑπὸ τὸ ὄνομα Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος. Ὁ χρόνος τῆς γεννήσεως καὶ τοῦ θανάτου αὐτοῦ δὲν εἶναι ἀκριβῶς γνωστά.

Κατὰ τὸν Εὐτόκιον τὸν Ἀσκαλωνίτην (καταγόμενον ἐκ τῆς πόλεως Ἀσκαλὼν τῆς Παλαιστίνης), ὅστις ἤκμασεν ἐν Κωνσταντινουπόλει περὶ τὸ 530 μ.Χ. καὶ ἀρύεται τὰς πληροφορίας του ἐκ τοῦ βιογράφου τοῦ Ἀρχιμήδους Ἡρακλείδου, ὁ Ἀπολλώνιος ἤκμασε κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ βασιλέως τῆς Αἰγύπτου Πτολεμαίου τοῦ Γ′, τοῦ Εὐεργέτου (7)[1]), βασιλεύσαντος ἀπὸ τοῦ 246 - 221 π.Χ. Κατ' ἄλλην πληροφορίαν τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον αἰῶνα μ.Χ. ἀκμάσαντος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ Γραμματικοῦ Πτολεμαίου Χήνου, υἱοῦ τοῦ Ἡφαιστίωνος (59), ὁ Ἀπολλώνιος «ἐπ' ἀστρονομίᾳ περιβόητος γεγονώς», ἤκμασε κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Φιλοπάτορος, βασιλεύσαντος ἀπὸ τοῦ 221 - 205 π.Χ.

Ἐξ ἄλλου, ὁ Ἀπολλώνιος ἀφιέρωσε τὰ τελευταῖα βιβλία τῶν

---

1) Οἱ ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμοὶ δηλοῦσι τὸν αὔξοντα ἀριθμὸν τῶν μαρτυριῶν.

Κωνικῶν του εἰς τὸν βασιλέα τῆς Περγάμου Ἄτταλον τὸν Α', ὅστις ἐβασίλευσεν ἀπὸ τοῦ 241-197 π.Χ. Αὐταὶ εἶναι αἱ σωζόμεναι βιογραφικαὶ πληροφορίαι περὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων ἡ γέννησίς του τοποθετεῖται περὶ τὸ 260 π.Χ., ὁ δὲ θάνατός του περὶ τὸ 170 π.Χ. Εἶναι δηλαδὴ κατὰ ταῦτα ὁ Ἀπολλώνιος νεώτερος τοῦ Ἀρχιμήδους 30 ἔτη περίπου[1]).

Ὁ ἀνωτέρω ἀναφερόμενος βιογράφος τοῦ Ἀρχιμήδους Ἡρακλείδης γράφει ἀκόμη, ὡς ἀναφέρει ὁ Εὐτόκιος (7), ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἀντέγραψε πραγματείαν τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ Κωνικῶν», τὴν ὁποίαν παρουσίασεν ὡς ἰδικήν του. Ἡ πληροφορία αὕτη εἶναι ἀναξία καὶ διαψεύσεως καὶ ἀπορρίπτεται ἀσυζητητὶ ὑφ' ὅλων τῶν μεταγενεστέρων, οἵτινες θεωροῦσιν αὐτὴν παρεμβολήν τινα προερχομένην ἐκ φθόνου. Ὁ Εὐτόκιος, ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὰς ἀνωτέρω πληροφορίας του, προσθέτει, ὅτι κατὰ τὸν μαθηματικὸν Γεμῖνον (2ος - 1ος αἰ. π.Χ.), οἱ σύγχρονοι τοῦ Ἀπολλωνίου ὠνόμαζον αὐτὸν μέγαν γεωμέτρην (7).

Ὁ Ἀπολλώνιος ἐσπούδασεν εἰς τὸ Ἑλληνικὸν Πανεπιστήμιον τῆς Ἀλεξανδρείας, ὡς καὶ ὁ Ἀρχιμήδης, ὅπου εἶχε καθηγητὰς τοὺς διαδόχους τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν συνέταξε τὴν πραγματείαν του Κωνικὰ εἰς 8 βιβλία. Ὅταν τὸν ἐπεσκέφθη ἐκεῖ ὁ μαθηματικὸς Ναυκράτης καὶ ἤκουσε περὶ τῆς πραγματείας τῶν Κωνικῶν, τὸν παρεκάλεσεν ὅπως δώσῃ εἰς αὐτὸν ἀντίγραφον τοῦ ἔργου, ὅπερ καὶ ἐγένετο, καίτοι ὁ Ἀπολλώνιος εἶχε τὴν γνώμην ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἔχρῃζε καὶ ἄλλης ἐπεξεργασίας[2]). Μετὰ τὴν ἐπίσκεψιν τοῦ Ναυκράτους ὁ Ἀπολλώνιος ἐπεσκέφθη τὴν Ἔφεσον, ὅπου ἐγνωρίσθη μὲ τὸν μαθηματικὸν

---

1) W. Crönert, Πρακτικὰ Ἀκαδ. Βερολίνου 1900, σελ. 942-950 (Akad. d. Wiss. Berlin). M. Cantor, Gesch. der Mathem. I 1907, s. 333.

2) Εἰσαγωγὴ εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν Κωνικῶν.

Φιλωνίδην καὶ τὸν ἐκ Περγάμου μαθηματικὸν Εὔδημον. Ἀκολούθως ἐπεσκέφθη καὶ τὴν Πέργαμον ἔνθα διέτριψεν ἀρκετὸν χρόνον μετὰ τοῦ Εὐδήμου παρὰ τοῦ ὁποίου παρωτρύνθη ὅπως προβῇ εἰς νέαν ἐπεξεργασίαν τῶν Κωνικῶν. Τοῦτο ἔπραξεν, ὅταν ἐπανῆλθεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν.

Κατὰ πρῶτον ἀπέστειλεν εἰς τὸν Εὔδημον, εἰς τὴν Πέργαμον, τὸ ἀναθεωρηθὲν πρῶτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν μὲ ἀφιέρωσιν πρὸς αὐτόν. Ὀλίγον βραδύτερον ἀπέστειλεν εἰς αὐτὸν διὰ τοῦ υἱοῦ του ὀνομαζομένου καὶ αὐτοῦ «Ἀπολλωνίου», ἐπίσης μὲ ἀφιέρωσιν, καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν Κωνικῶν. Εἰς τὸ τρίτον βιβλίον δὲν ἐσώθη εἰσαγωγὴ καὶ ἀφιέρωσις. Φαίνεται ὅμως ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ τετάρτου βιβλίου, ὅτι καὶ τὸ τρίτον βιβλίον ἦτο ἀφιερωμένον εἰς τὸν Εὔδημον. Τὰ βιβλία 4, 5, 6, 7 εἶναι ἀφιερωμένα εἰς τὸν βασιλέα τῆς Περγάμου Ἄτταλον. Ἐκ τῶν 8 βιβλίων τῶν Κωνικῶν τὰ 4 πρῶτα ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικήν, ἐνῷ τὰ 3 ἑπόμενα εἰς τὴν ἀραβικήν. Τὸ ὄγδοον βιβλίον ἔχει ἀπολεσθῆ. Δὲν ἔχει γίνει ὅμως ἔρευνα εἰς τὰς βιβλιοθήκας τῶν Ἰνδιῶν, ὅπου ὑπάρχουσι πολλὰ χειρόγραφα εἰς τὴν ἀραβικήν, μὴ καταγεγραμμένα ἀκόμη εἰς καταλόγους.

Ἡ Ἱστορία τῶν κωνικῶν τομῶν

Ὁ ὅρος κωνικαὶ τομαὶ φαίνεται, ὅτι ἐδημιουργήθη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος[1]), ὅπου ὁ μαθηματικὸς Μέναιχμος, πιθανῶς δὲ καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος, εἶχεν ἀσχοληθῆ ἰδιαιτέρως μὲ τὰς τρεῖς κωνικὰς τομάς. Ὁ Ἐρατοσθένης εἰς τὸ σχετικὸν πρὸς τὸ δήλιον πρόβλημα ἐπίγραμμά του, λέγει,

---

1) Ἵδρυσις τῆς Ἀκαδημίας τῷ 387 π.Χ. καὶ συνεχὴς λειτουργία αὐτῆς μέχρι τοῦ 529 μ.Χ., ὅτε ἐκλείσθη ὑπὸ τοῦ Ἰουστινιανοῦ, ἕνεκα τοῦ θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ.

«μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας», ἐννοῶν προφανῶς τὴν σπουδὴν τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου[1]). Μετὰ τὸν Μέναιχμον μνημονεύονται ὡς συγγραφεῖς τῶν κωνικῶν ἢ κωνικῶν στοιχείων, ὁ Ἀρισταῖος ὁ πρεσβύτερος, ὁ Εὐκλείδης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος (27).

Τὰς βάσεις ὅμως σπουδῆς τῶν κωνικῶν τομῶν τὰς εἶχον θέσει ἤδη οἱ Πυθαγόρειοι ἀπὸ τοῦ 500 π.Χ. περίπου, χωρὶς ὅμως νὰ μνημονεύωνται ὑπ' αὐτῶν οἱ ὅροι κωνικαὶ τομαί.

Ἡ ἀνωτέρω γνώμη περὶ σπουδῆς τῶν κωνικῶν τομῶν ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων ἐνισχύεται ἐκ τῶν τεσσάρων προτάσεων τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου 1,44, 6,27, 6,28, 6,29, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται εἰς τοὺς Πυθαγορείους (56). Εἰς αὐτὰς γίνεται λόγος περὶ παραβολῆς χωρίου παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (τὴν παράμετρον). Ὁ Πλάτων συναφῶς, ἀντὶ τοῦ ῥήματος παραβάλλειν, χρησιμοποιεῖ τὸ ῥῆμα παρατείνειν (Μένων 86ε - 87β). Ἑρμηνεία τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων προτάσεων τοῦ Εὐκλείδου γίνεται κατωτέρω, ὅπου φαίνεται ὁ σύνδεσμος τοῦ Ἀπολλωνίου πρὸς τὸν Εὐκλείδην καὶ ὁ σύνδεσμος τοῦ Καρτεσίου (Descartes), μετὰ 1800 ἔτη, πρὸς τὸν Ἀπολλώνιον.

Μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους αἱ τρεῖς κωνικαὶ τομαὶ ὠνομάζοντο: ὀρθογωνίου κώνου τομὴ (ἡ παραβολή), ὀξυγωνίου κώνου τομὴ (ἡ ἔλλειψις) καὶ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴ (ἡ ὑπερβολή). Κατὰ τὸν Εὐκλείδην κῶνος εἶναι τὸ στερεὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον γράφεται ἐκ μιᾶς ὁλοκλήρου περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου, στρεφομένου περὶ τὴν μίαν κάθετον πλευράν, μένου-

---

1) Πρόκλος εἰς α' Εὐκλείδου σελ. 67, 9 - 12 (G. Friedlein, Leipzig 1878), Εὐτόκιος εἰς Ἀρχιμήδους Ἅπαντα [τόμ. Γ', σελ. 96, 17 (I. L. Heiberg, Leipzig 1915), Ε. Σ. Σταμάτη, Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ Τριχοτόμησις γωνίας, Ἀθῆναι 1949, σελ. 9.

σαν ἀκίνητον. Ὅταν ἡ πλευρὰ αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὴν ἄλλην κάθετον, ὁ κῶνος λέγεται ὀρθογώνιος, ὅταν εἶναι μικροτέρα ὁ κῶνος λέγεται ἀμβλυγώνιος, καὶ ὅταν εἶναι μεγαλυτέρα ὁ κῶνος λέγεται ὀξυγώνιος (Εὐκλ. 11, ὁρισμ. 18). Ὁ Ἀρχιμήδης ἔχει γράψει πραγματείαν ἐκ 32 προτάσεων εἰς τὴν ὁποίαν πραγματεύεται ποικίλα προβλήματα ἐπὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς παραβολοειδῶν, ὑπερβολοειδῶν, ἐλλειψοειδῶν. Τὰ δύο πρῶτα στερεὰ ἐκ τούτων τὰ ὀνομάζει κωνοειδῆ, ἐνῷ τὰ ἐλλειψοειδῆ ἐκ περιστροφῆς τὰ ὀνομάζει σφαιροειδῆ. Ὁ τίτλος τῆς πραγματείας αὐτῆς εἶναι «Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων». Εἰς τὴν τρίτην πρότασιν ὁμιλεῖ ὁ Ἀρχιμήδης «Περὶ κωνικῶν στοιχείων», ἀναφερόμενος προφανῶς εἰς τὴν ὑπὸ τὸν τίτλον αὐτὸν ἀπολεσθεῖσαν πραγματείαν τοῦ Εὐκλείδου.

Ἀποκλείεται κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν νὰ εἶχε γράψει ὁ Ἀρχιμήδης πραγματείαν «Περὶ κωνικῶν τομῶν», διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ ἀνεφέρετο σαφῶς εἰς τὴν ἰδικήν του πραγματείαν, ὅπως συνάγεται ἐκ τῆς πραγματείας του Λήμματα α', ὅπου ἀναφέρεται εἰς ἰδικάς του πραγματείας, εἰς τὰς προτάσεις 5, 6, 12.

Ὁ Ἀπολλώνιος ὥρισεν ἄλλως τὴν γένεσιν τοῦ κώνου ἢ ὁ Εὐκλείδης. Φαίνεται δέ, ὅτι ἐνεπνεύσθη ἐκ τῶν ἀνωτέρω μνημονευομένων προτάσεων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῶν εἰς αὐτὰς ὅρων: παραβάλλειν, ἐλλείπειν, ὑπερβάλλειν, καὶ ἔδωκε πρῶτος αὐτὸς τὴν νέαν ὀνομασίαν τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν: παραβολή, ἔλλειψις, ὑπερβολή. Πρῶτος δὲ ὁ Ἀπολλώνιος παρετήρησεν, ὅτι δὲν χρειάζονται τριῶν εἰδῶν κῶνοι διὰ νὰ ληφθῶσιν αἱ τρεῖς κωνικαὶ τομαί, ἀλλὰ μόνον εἷς κῶνος, ἀδιαφόρως ἂν οὗτος εἶναι ὀρθογώνιος, ἀμβλυγώνιος ἢ ὀξυγώνιος. Περὶ τούτων πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ Εὐτόκιος εἰς τὰ σχόλιά του τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου (7).

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Τὸ περιεχόμενον τῶν Κωνικῶν

Περὶ τοῦ περιεχομένου τῶν ὀκτὼ βιβλίων τῶν Κωνικῶν ὁμιλεῖ γενικῶς ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν πρὸς τὸν Εὔδημον ἀφιέρωσιν τὴν προτασσομένην εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιέχει 60 θεωρήματα. Μετὰ τὴν ἀφιέρωσιν ἀκολουθοῦσιν ὀκτὼ ὁρισμοὶ καὶ ἕπονται 16 θεωρήματα. Μετὰ τὸ 16ον θεώρημα προτάσσονται τρεῖς δεύτεροι ὁρισμοὶ καὶ ἀκολουθοῦσι τὰ θεωρήματα 17 - 60.

Τὰ δέκα πρῶτα θεωρήματα εἶναι προεισαγωγικά. Εἰς τὸ ἑνδέκατον σπουδάζεται ἡ γένεσις τῆς παραβολῆς καὶ δίδεται ὁ ὁρισμὸς τῆς παραμέτρου[1]), τὴν ὁποίαν καλεῖ ὀρθίαν ἢ «ἡ παρὰ τὴν ὁποίαν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως παρὰ τὴν διάμετρον».

Ἡ παράμετρος ὀνομάζεται ὀρθία (=κάθετος), διὰ τὸν ἑξῆς λόγον: Θεωροῦμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου ὁριζοντίαν τινὰ εὐθεῖαν ΟΑ κάθετον ἐπὶ ἄλλήν τινα ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΟΒ (ἄξονα). Ἐπὶ τῆς ΟΒ λαμβάνομεν τμῆμά τι ΟΓ. Τὸ ὀρθογώνιον ΟΑ $\times$ ΟΓ τὸ μετασχηματίζομεν εἰς τετράγωνον, ἔστω λ^2. Τὸ ἓν ἄκρον τῆς εὐθείας λ, καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΒ διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, εἶναι σημεῖον παραβολῆς. Καθ' ὅλην τὴν εὕρεσιν τῶν σημείων τῆς παραβολῆς,

---

1) (Λατινιστὶ ἡ παράμετρος =latus rectum). Ἐκ τῆς φράσεως τεταγμένως κατηγμέναι ἐλήφθη ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου (Descartes) ὁ ὅρος τῆς Ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, τεταγμένη =ordinate, ἐνῷ ἡ τετμημένη ὀνομάζεται ἀπολαμβανομένη ἢ ἀποτεμνομένη (λατινιστὶ = abscisa) (θ. 20), ληφθέντος καὶ τοῦ ὅρου αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου. Διότι, κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Καρτεσίου (1596—1650) ὑπῆρχεν εἰς τὴν Εὐρώπην ἡ λατινικὴ μετάφρασις τῶν τεσσάρων πρώτων βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

ἡ ληφθεῖσα εὐθεῖα ΟΑ (παράμετρος) εἶναι πάντοτε σταθερὰ καὶ κάθετος (=ὀρθία) ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΒ. Ἡ εὐθεῖα λ εἶναι τεταγμένως κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΟΒ, καὶ δ ύ ν α τ α ι, δηλαδὴ ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον παρέχει τὸ ἰσοδύναμον, παρὰ τὴν ΟΑ, παραβληθὲν ὀρθογώνιον ΟΑ × ΟΓ, ἤτοι [τὸ $\lambda^2 =$ ΟΑ × ΟΓ. Ἡ ἀνάλογος κατασκευὴ εἰς τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολήν, τηρουμένων τῶν εἰδικῶν διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν συνθηκῶν (ἰδὲ κατωτέρω τὰς σχετικὰς κατασκευὰς ἐκ τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου).

Εἰς τὸ 12ον θεώρημα γίνεται ἡ σπουδὴ τῆς κατασκευῆς τῆς ὑπερβολῆς, χρησιμοποιουμένων ὅρων καὶ λέξεων συναφῶν ἐκ τοῦ 29ου προβλήματος τοῦ 6ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὸ 13ον θεώρημα γίνεται ἡ σπουδὴ τῆς κατασκευῆς τῆς ἐλλείψεως, ἐνῷ εἰς τὸ 14ον ἀναφέρεται ἡ κατασκευὴ τῶν δύο κλάδων τῆς ὑπερβολῆς, οἵτινες ὀνομάζονται «ἀντικείμεναι τομαί». Εἰς τὰ λοιπὰ θεωρήματα τοῦ πρώτου βιβλίου γίνεται λόγος περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ περὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων.

Τὸ δεύτερον βιβλίον περιλαμβάνει 53 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα σπουδάζονται τὰ περὶ ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς καὶ συνεχίζεται ἡ ἔρευνα ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κωνικῶν τομῶν.

Τὸ τρίτον βιβλίον περιέχει 56 θεωρήματα. Εἰς τὰ πρῶτα 15 θεωρήματα ἐρευνῶνται αἱ σχέσεις τὰς ὁποίας ἔχουσι τὰ τρίγωνα καὶ τὰ τετράγωνα τὰ σχηματιζόμενα ἐκ τῆς συναντήσεως τῶν ἐφαπτομένων τῶν κωνικῶν τομῶν μὲ τὰς διαμέτρους τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς. Τὰ ἑπόμενα 8 θεωρήματα ἀφορῶσιν εἰς τὰ ὀρθογώνια τὰ σχηματιζόμενα ἐκ τμημάτων τῶν λαμβανομένων ἐκ τῆς τομῆς χορδῶν ἀγομένων εἰς τὰς κωνικὰς τομάς. Εἰς τὰ θεωρήματα 35 - 40 παρατηροῦμεν διαίρεσιν εὐθείας ἁρμονικῶς.

Εἰς τὸ 45ον θεώρημα γίνεται σπουδὴ διαφόρων σχέσεων, τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς ἐπιφανείας τινὸς προκυπτόντων σημείων. Τὰ σημεῖα ταῦτα ἐκ τῆς παραβολῆς τῆς ἐπιφανείας (ἢ παραθέσεως ἢ παρατάσεως τῆς ἐπιφανείας), εἶναι αἱ ἑστίαι τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, τῶν ὁποίων ἑστιῶν σπουδάζονται ὡρισμέναι ἰδιότητες. Περὶ ἑστίας τῆς παραβολῆς δὲν γίνεται λόγος ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου ἐνταῦθα, οὔτε ἀλλοῦ. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πάππου ὅμως (3ος αἰὼν μ.Χ.), ἦτο γνωστὴ ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς[1].

Ἐνταῦθα ἂς ἐπιτραπῇ νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὸν πρόλογον τοῦ Ἀπολλωνίου εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον, καθ' ὃν ἡ σύνθεσις γεωμετρικοῦ τόπου τριῶν ἢ τεσσάρων εὐθειῶν δὲν ἐπετεύχθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, παρὰ μόνον μερικῶς, καὶ αὐτὸ ὄχι μὲ ἐπιτυχίαν (οὐκ εὐτυχῶς), ἐνῷ τοῦτο, λέγει, ἐπιτυγχάνεται πλήρως διὰτῶν νέων ἀνακαλύψεων αὐτοῦ, τῶν περιεχομένων εἰς τὸ τρίτον βιβλίον.

Ὁ γεωμετρικὸς οὗτος τόπος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Δίδονται τρεῖς (ἢ τέσσαρες) εὐθεῖαι κατὰ τὴν θέσιν. Ἐὰν ἐκ δοθέντος σημείου ἀχθῶσι πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας, εὐθεῖαι ὑπὸ δεδομένας γωνίας καὶ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς δύο ἀχθείσας πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης (ἢ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο ἄλλων, ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι

---

1) Pappos, Collectio, vol. II. p. 1012, 24 - 1014, 24, F. Hultsch Berlin 1876 - 1878, Nachdruck (ἀνατύπωσις) Amsterdam, Hakkert, 1965.

τέσσαρες) εἶναι σταθερός, τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀφετηρία τῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν κεῖται ἐπὶ κωνικῆς τομῆς.

Τὸ τέταρτον βιβλίον περιέχει 57 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξετάζεται πόσα κοινὰ σημεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι κωνικαὶ τομαὶ τεμνόμεναι μεταξύ των ἢ μὲ περιφερείας κύκλων.

Παραδείγματος χάριν, δύο κωνικαὶ τομαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι τέσσαρα κοινὰ σημεῖα, τεμνόμεναι μεταξύ των, ἢ δύο κοινὰ σημεῖα ἐκ τομῆς καὶ ἓν ἐξ ἐπαφῆς, ἢ δύο σημεῖα ἐπαφῆς. Περαιτέρω, δύο παραβολαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον ἐξ ἐπαφῆς, ἐπίσης δὲ ἕν, παραβολὴ καὶ ὑπερβολή, ἐὰν ἡ παραβολὴ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ καμπύλη, ὅπως ἐπίσης ἕν, παραβολὴ καὶ ἔλλειψις, ἐὰν ἡ ἔλλειψις εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ καμπύλη.

Τὸ πέμπτον βιβλίον, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει 77 θεωρήματα, εἶναι τὸ σπουδαιότερον ἐκ τῶν σῳζομένων 7 βιβλίων. Εἰς αὐτὸ γίνεται σπουδὴ τῶν μεγίστων ἢ ἐλαχίστων εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν πρὸς τὰς κωνικὰς τομάς, ἐκ σημείων κειμένων ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτῶν ἢ μεταξὺ τῆς κωνικῆς τομῆς καὶ τοῦ ἄξονος, ἢ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ἀνευρίσκει τις, μεταξὺ ἄλλων, θεωρίαν τῶν κέντρων καμπυλότητος καὶ τὰς ἀρχὰς τῆς θεωρίας τῶν ἐνειλιγμένων[1]). Κατὰ τὴν γνώμην πολλῶν μελετητῶν τὸ βιβλίον τοῦτο θεωρεῖται ὡς ἓν ἐκ τῶν ἐξόχων μαθηματικῶν ἐπιτευγμάτων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος.

Τὸ ἕκτον βιβλίον περιέχει 33 θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται σπουδὴ τῆς ἰσότητος καὶ ὁμοιότητος τῶν κωνικῶν τομῶν.

Τὸ ἕβδομον βιβλίον περιλαμβάνει 51 θεωρήματα ἀφορῶντα εἰς τὰς συζυγεῖς διαμέτρους.

---

1) Moritz Cantor, Vorlesungen I, Leipzig 1907, S. 342.

Τὸ ὄγδοον βιβλίον, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Πάππου περιεῖχε 100 θεωρήματα - προβλήματα (29), θεωρεῖται μέχρι τῆς στιγμῆς ὡς ἀπολεσθέν. Δὲν ἀποκλείεται ὅμως νὰ εὑρεθῇ εἰς τὰς Ἰνδικὰς βιβλιοθήκας, ὅπου ὑπάρχουσιν ἀραβικὰ χειρόγραφα κατὰ χιλιάδας, μὴ καταγεγραμμένα ἀκόμη εἰς συναφεῖς καταλόγους, ὡς ἀνεφέρθη ἀνωτέρω.

Τὰ σχόλια τῶν Κωνικῶν

Τὰ σῳζόμενα σχόλια τῶν Κωνικῶν προέρχονται ἐκ τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Εὐτοκίου. Ἡ πραγματεία τοῦ Πάππου, ὅπου ταῦτα περιλαμβάνονται, εἶναι ἡ φέρουσα τὸν τίτλον «Πάππου Συναγωγὴ» (ἔκδ. F. Hultsch, τόμοι 3, Λειψία 1876-1878). Αὕτη εἶναι ἓν εἶδος Ἐγκυκλοπαιδείας μαθηματικῆς, ἡ ὁποία περιέχει καὶ πλείστας προτάσεις ὀφειλομένας προσωπικῶς εἰς τὸν Πάππον. Φαίνεται δέ, ὅτι ὁ Πάππος προσεπάθησε νὰ συγκεντρώσῃ εἰς τὴν συλλογήν του προτάσεις, τὰς ὁποίας παρέλειψεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὰ Στοιχεῖα του, μὴ θεωρήσας αὐτὰς ὡς στοιχειώδεις. Ὡρισμέναι κρίσεις, ἐν τῇ Συναγωγῇ τοῦ Πάππου, ἀφορῶσαι εἰς τὸ πρόσωπον τοῦ Ἀπολλωνίου, πιθανὸν νὰ προέρχωνται ἐκ παρεμβολῆς. Ὁ τίτλος τῶν σχολίων τοῦ Πάππου εἰς τὰ Κωνικὰ εἶναι «λήμματα». Ταῦτα, ὡς καὶ τὰ σῳζόμενα σχόλια εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ ἐν Βυζαντίῳ ἀκμάσαντος σχολιαστοῦ Εὐτοκίου (6ος αἰὼν) θὰ τεθῶσι μετὰ τὸ ἕβδομον βιβλίον τῶν Κωνικῶν. Σχόλια εἰς τὰ Κωνικὰ εἶχε γράψει καὶ ὁ ἐξ Ἀντινοείας*), τῆς Μέσης Αἰγύπτου, Ἕλλην μαθηματικὸς Σερῆνος

*) Ἡ Ἀντινόεια ἢ Ἀντινοούπολις, πόλις ἐπὶ τῆς ἀνατολικῆς ὄχθης τοῦ Νείλου (εἰς τὸ μέσον περίπου τῆς ἀποστάσεως Μέμφις - Θῆβαι), ἐκτίσθη τῷ 122 μ.Χ. ὑπὸ τοῦ Ῥωμαίου αὐτοκράτορος Ἀδριανοῦ εἰς μνήμην τοῦ ἐκεῖ πνιγέντος εὐνοουμένου του Ἀντινόου, τοῦ ὁποίου καὶ μαρμάρινον ἄγαλμα ὑπάρχει εἰς τὸ Μουσεῖον τῶν Δελφῶν.

(2ος αἰὼν μ.Χ.), τὰ ὁποῖα ἀπωλέσθησαν. Ἐπίσης ἀπωλέσθησαν καὶ τὰ σχόλια τῆς μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου Ὑπατίας, τῆς λιθοβοληθείσης ὑπὸ τοῦ μαινομένου ἐκ θρησκευτικοῦ φανατισμοῦ ὄχλου τῆς Ἀλεξανδρείας (415 μ.Χ.) (68), ἐπὶ Πατριάρχου Ἀλεξανδρείας καὶ πάσης Ἀφρικῆς, τοῦ Ἁγίου Κυρίλλου. Σῴζονται ἀκόμη ἀποσπάσματά τινα σχολίων τοῦ ἑβδόμου βιβλίου τῶν Κωνικῶν, ὑπὸ τοῦ Ἄραβος Abdolmelek Chiraz (Εἰσαγωγὴ P. ver Eecke, Les coniques d'Apollonius de Perge, Paris 1959).

Αἱ ἐκδόσεις τῶν Κωνικῶν

Οὐδὲν εἶναι γνωστὸν διὰ τὰς ἐκδόσεις τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, μετὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ πρωτοτύπου μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐτοκίου. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τῶν σχολίων του εἰς τὸ τέταρτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ἀπευθυνόμενος πρὸς τὸν Ἀνθέμιον (ἐκ τῶν ἀρχιτεκτόνων τοῦ Ναοῦ τῆς Ἁγίας Σοφίας), ὁ Εὐτόκιος ὁμιλεῖ δι' ἰδικήν του ἔκδοσιν τῶν Κωνικῶν γράφων τὰ ἑξῆς:

«Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε... ἔστι δὲ χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσι καὶ μάλιστα ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ἐκδόσεως, καὶ οὐδὲ σχολίων δεῖται. δέδεικται δὲ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς» (Apollonii Pergaei II, ἔκδ. I. L. Heiberg, Λειψία 1893, σελ. 354, 1 - 9).

Θεωρεῖται λίαν πιθανόν, ὅτι περὶ τὸ 820 μ.Χ. ὁ Πρύτανις τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Κωνσταντινουπόλεως Λέων ὁ μαθηματικός, ὅστις ἐξέδωκεν ἐκεῖ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀρχιμήδους, θὰ ἐξέδωκε καὶ τὰ Κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου.

Κατὰ τὸν 11ον αἰῶνα ἐδημοσιεύθη ἐν Ἱσπανίᾳ πραγματεία Ὀπτικῆς εἰς τὴν ἀραβικήν, τοῦ Ἄραβος al-Hazen. Εἰς αὐτὴν ὑπάρχουσιν ὡρισμένα θεωρήματα τοῦ Ἀπολλωνίου, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ θεωρία περὶ διαθλάσεως τοῦ φωτὸς καὶ περὶ λυκαυγοῦς.

Μέρη τοῦ ἔργου τοῦ al—Hazen περιέλαβεν εἰς πραγματείαν του ὁ ἐν Ἰταλίᾳ ἀκμάσας κατὰ τὸ τέλος τοῦ 13ου αἰῶνος Πολωνὸς Ciolek, ὁ ἐξιταλίσας τὸ ὄνομά του εἰς Vitelio. Μνημονεύονται ἐπίσης ἔργα τοῦ Ἀπολλωνίου (Κωνικὰ) εἰς τὴν λατινικὴν ἐκ τῆς ἀραβικῆς, ἐκδοθέντα ὑπὸ τοῦ Gerard Cremona κατὰ τὸν 13ον αἰῶνα. Τὸ Ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Κωνικῶν ἐκομίσθη εἰς τὴν Ἰταλίαν ἐκ τοῦ Βυζαντίου ὑπὸ τοῦ Francois Philelphe (1398 - 1480) μαθητοῦ ἐν Κωνσταντινουπόλει καὶ Φλωρεντίᾳ τοῦ Μανουὴλ Χρυσολωρᾶ, περὶ τὸ 1425, καὶ ἔμεινεν ἀχρησιμοποίητον μέχρι τοῦ 1501, ὅτε μέρος αὐτοῦ περιελήφθη λατινιστὶ εἰς τὸ ἐν Βενετίᾳ ἐκδοθὲν βιβλίον τοῦ Γεωργίου Valla, De expetendis et fugiendis rebus (δημοσιευθὲν μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Valla). Κατὰ τὸν 6ον αἰῶνα ἐσῴζετο πιθανῶς ὁλόκληρον τὸ Ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Κωνικῶν, διότι ὁ Εὐτόκιος μνημονεύει ἤδη τὸ ἕκτον βιβλίον (5). (Ἰδὲ Εἰσαγωγὴν Paul ver Eecke Les coniques d'Apollonius de Perge, Paris 1959).

Μετάφρασις ἐν Εὐρώπῃ εἰς τὴν λατινικήν, τῶν Κωνικῶν, βιβλία 1 - 4, ὑπάρχει ἤδη κατὰ τὸν 13ον αἰῶνα, μνημονεύεται δὲ καὶ ὁμοία μετάφρασις γενομένη κατὰ τὸν 15ον αἰῶνα ὑπὸ τοῦ Joh. Müller (ὑπὸ τὸ ὄνομα Regiomontanus).

Τῶν βιβλίων 1 - 7 ἐσώθη ἀραβικὴ μετάφρασις γενομένη ἐν Βαγδάτῃ ὑπὸ τοῦ Thabit Ibn Qurra (826-901). Τῶν αὐτῶν βιβλίων μετάφρασις εἰς τὴν ἀραβικὴν ἔγινεν ὑπὸ τοῦ Abalphat Ispachan. Ἓν ἐκ τῶν χειρογράφων τούτων ἀπέστειλεν ὡς δῶρον εἰς τὸν Φερδινάνδον τῶν Μεδίκων (ἐν Φλωρεντίᾳ), ὁ Πατριάρχης Ἀντιοχείας Ἰγνάτιος Νεάμας*). Ἐκ τοῦ χειρογράφου τούτου ἔγινε μετάφρασις εἰς τὴν λατινικὴν τῶν βιβλίων 5 - 7,

*) Κατὰ γενομένην παρ' ἡμῶν ἔρευναν εὑρέθη, ὅτι ὁ Φερδινάνδος τῶν Μεδίκων εἶναι νεώτερος τοῦ Πατριάρχου Ἰγνατίου, κατὰ 100 περίπου ἔτη.

ὑπὸ τοῦ λογίου Ἀβραὰμ τοῦ Ἐχελαίου, τοῦ καταγομένου δηλ. ἐκ τῆς πόλεως τῆς Παλαιστίνης Ἔχελα (Abraham Ecchelensis) ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τοῦ μαθηματικοῦ Borellus, καὶ δημοσίευσις κατὰ τὸ 1661 ἐν Φλωρεντίᾳ (Pauly - Wissowa R. E. Apollonios Sp. 157, 14).

Τὸ Ἑλληνικὸν κείμενον τῶν βιβλίων 1 - 4 καὶ μὲ λατινικὴν τούτων μετάφρασιν, ὡς καὶ ἡ ἐκ τῆς ἀραβικῆς εἰς τὴν λατινικὴν μετάφρασις τῶν βιβλίων 5 - 7, μετὰ τῶν λημμάτων τοῦ Πάππου ἐπὶ τῶν Κωνικῶν, καὶ τῶν σχολίων τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία, ὡς καὶ πραγματείας τοῦ Σερήνου περὶ τομῆς κυλίνδρου καὶ κώνου, ἐδημοσιεύθησαν εἰς θαυμασίαν ἔκδοσιν ἐν Ὀξφόρδῃ κατὰ τὸ 1710 ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου μαθηματικοῦ καὶ ἀστρονόμου Edmondus Halley (1656-1742), ὑπὸ τὸν τίτλον Apollonii Pergaei libri IV (εἰς τὴν πρώτην σελίδα γράφεται octo) priores cum Pappi Alexandrini lemmatis et Eutocii Ascalonitae commentariis κ.λπ. Τὸ χειρόγραφον εὑρίσκεται ἤδη ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῆς Ὀξφόρδης (Bodl. Uri 943).

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις χρησιμοποιεῖ διὰ τὰ βιβλία 1 - 4, καὶ διὰ τὰ λήμματα τοῦ Πάππου καὶ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου, τὴν ἔκδοσιν τοῦ I. L. Heiberg, τὴν γενομένην εἰς δύο τόμους, ἐν Λειψίᾳ κατὰ τὸ 1891 καὶ 1893, Apollonii Pergaei, quae graece exstant cum commentariis antiquis, Lipsiae, B. G. Teubner.

Ὁ Heiberg ἐχρησιμοποίησε τοὺς ἑξῆς κώδικας:

$\bar{V}$—cod. Vatican. Gr. 206 bombyc. saec. XII - XIII, fol.

V—cod. Vatican. Gr. 203 bombyc. saec. XIII, fol.

C—cod. Constantinopolitanus palatiis veteris nr. 40 bombyc. saec. XIII - XIV, fol.

P—cod. Paris Gr. 2342 chartac. saec. XIII, fol.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω κωδίκων ὁ Heiberg ἐχρησιμοποίησε καὶ τὰς ἐκδόσεις: Commandinus (1566), Halley (1710), Menus (1807) (Ἰδὲ βιβλιογραφίαν).

Τὰ βιβλία 5 - 7 μετεφράσθησαν ὑπ' ἐμοῦ ἐκ τῆς εἰς τὴν γαλλικὴν ἐκδόσεως τοῦ Paul ver Eecke, Les coniques d'Apollonius de Perge, Paris 1959, ὅστις ἐχρησιμοποίησε τὴν εἰς τὴν λατινικὴν ἐκ τῆς ἀραβικῆς ἔκδοσιν 1710 ἐν Λονδίνῳ, τοῦ Edm. Halley.

Διὰ τὰ σχόλια τοῦ Εὐτοκίου ὁ Heiberg γράφει :
In Eutocio his siglis usus sum: (Apollonii Pergaei II, praef. p. IV - V).

W—cod. Vatic. gr. 204 saec. X
V —cod. Vatic. gr. 203
W—cod. Vatic gr. 191, bombyc. saec. XIII
P.—cod. Paris 2342 saec. XIV
U —cod. Urbinas 73, chartac. saec. XVI
1. cod. Vatic. 1575 saec. XVI
2. cod. Mutin II D 4 saec. XV
3. cod. Paris. Gr. 2357 saec. XVI
4. cod. Paris. suppl. Gr. 451 saec. XV
5. cod. Paris. Gr. 2358, chartac. saec. XVI

Αἱ λοιπαὶ πραγματεῖαι τοῦ Ἀπολλωνίου

Ἐκτὸς τῶν Κωνικῶν, εἰς 8 βιβλία, ὁ Ἀπολλώνιος ἔγραψε καὶ πολλὰς ἄλλας πραγματείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἐσώθησαν αἱ κάτωθι τρεῖς :

1) Περὶ λόγου ἀποτομῆς, σωθεῖσα εἰς τὴν ἀραβικὴν εἰς δύο βιβλία (19).

2) Εὕρεσις δύο μέσων ἀναλόγων, ὅταν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι (λύσις τοῦ δηλίου προβλήματος) σωθεῖσα ὑπὸ τοῦ Εὐτοκίου (3).

3) Σύγκρισις δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου σωθεῖσα ὑπὸ τοῦ Ὑψικλέους (11).

Ἡ εἰς τὴν ἀραβικὴν σωθεῖσα πραγματεία Περὶ λόγου ἀποτομῆς ἐξεδόθη εἰς τὴν λατινικὴν ὑπὸ τοῦ Edmondus Halley ἐν Ὀξφόρδῃ κατὰ τὸ 1706 ὑπὸ τὸν τίτλον De sectione rationis, libri duo, ex arabico, Oxonii 1706. Τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς μεταφράσεως εἰς τὴν λατινικὴν τῆς πραγματείας ταύτης ἐγένετο ὑπὸ τοῦ E. Bernard. Θανόντος τούτου ἀπετελείωσε τὴν μετάφρασιν ὁ Gregorius καὶ ἐξέδωκεν ὁ Halley. Ὑπὸ τοῦ W. A. Disterweg ἐξεδόθη αὕτη ἐκ τῆς λατινικῆς εἰς τὴν γερμανικὴν ἐν Βερολίνῳ κατὰ τὸ 1824, ἐν παραφράσει (Εἰσαγωγὴ Paul ver Eecke).

Τὸ πρόβλημα τῆς περιφήμου ταύτης πραγματείας εἶναι τὸ ἑξῆς: Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δίδονται κατὰ τὴν θέσιν δύο ἀπεριόριστοι εὐθεῖαι, εἴτε τεμνόμεναι εἴτε παράλληλοι καὶ εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν δίδεται ἓν σημεῖον. Δίδεται ἐπίσης εἷς λόγος καὶ ἓν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν κείμενον, καὶ ζητεῖται διὰ τοῦ δοθέντος τούτου σημείου ν' ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ν' ἀποτέμνῃ τμήματα τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τῶν ὁποίων ὁ λόγος νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δοθέντα. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὑπάρχει πλῆθος περιπτώσεων τοῦ προβλήματος, ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς θέσεως τῶν σημείων καὶ τῶν εὐθειῶν.

Αἱ ἀπολεσθεῖσαι πραγματεῖαι τοῦ Ἀπολλωνίου

Αὗται εἶναι: Περὶ χωρίου ἀποτομῆς βιβλία δύο. 2) Περὶ διωρισμένης τομῆς βιβλία δύο. 3) Περὶ ἐπαφῶν βιβλία δύο.

4) Περὶ τόπων ἐπιπέδων βιβλία δύο. 5) Περὶ νεύσεων βιβλία δύο. 6) Περὶ ἀτάκτων ἀλόγων. 7) Ὠκυτόκιον. 8) Περὶ κοχλίου ἢ ἑλίκων. 9) Ἡ καθόλου πραγματεία. 10) Περὶ πυρίου (δηλ. Περὶ καυστικῶν κατόπτρων). 11) Περὶ τῆς κατασκευῆς ὑδραυλικοῦ ἁρμονίου. Περὶ τῆς τελευταίας ταύτης πραγματείας γίνεται λόγος εἰς δύο χειρόγραφα. Τὸ ἓν ἐκ τούτων ὑπάρχει εἰς τὴν Ἐθνικὴν Βιβλιοθήκην τῶν Παρισίων (ms. Paris 955) καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸ Βρεταννικὸν Μουσεῖον (ms. Brit. Mus. 1336)[1]). 12) Ἔργον ἀστρονομικόν. 13) Θεωρία ἀριθμῶν. 14) Περὶ λογιστικῶν. 15) Ἀναλυόμενος τόπος. 16) Ἀποδείξεις ἀξιωμάτων. 17) Κατασκευὴ ὡρολογίων. 18) Ὀπτική.

Τὸ πρόβλημα Περὶ χωρίου ἀποτομῆς (20) εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Περὶ λόγου ἀποτομῆς (19), μὲ τὴν διαφοράν, ὅτι τ' ἀποτεμνόμενα ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν τμήματα, εἰς τὸ Περὶ χωρίου ἀποτομῆς, πρέπει νὰ σχηματίζωσιν ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ δοθέν. Καὶ ἐνταῦθα ὑπάρχει πλῆθος περιπτώσεων. Ἡ πραγματεία ἀνακατεσκευάσθη ἐν Γερμανίᾳ ὑπὸ τὸν τίτλον: Die Bücher des Apollonius von Perga De SECTIONE SPATII wiederhergestellt von Dr. W. A. DIESTERWEG, ELBERFELD, 1827.

Τὸ πρόβλημα τῆς πραγματείας Περὶ διωρισμένης τομῆς (21) ἦτο: Δίδονται τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Νὰ προσδιορισθῇ ἄλλο σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὥστε ὁ λόγος $ΑΣ \times ΓΣ : ΒΣ \times ΔΣ$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δοθέντα λόγον. Καὶ τοῦ προβλήματος τούτου ὑπάρχει πλῆθος περιπτώσεων ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν σημείων.

Ἡ πραγματεία ἀνακατεσκευάσθη ἐν Γερμανίᾳ ὑπὸ τὸν τί-

1. Moritz Schneider, Die arabischen Übersetzungen aus dem griechischen, Akademische Druck und Verlagsanstalt, Graz 1960, S. 180-187.

τλον: Die Bücher des Apollonius von Perga De SECTIONE DETERMINATA wiederhergestellt von ROBERT SIMON und die angehängten Bücher des letzteren nach dem lateinischen frei bearbeitet von Dr. W. A. DISTERWEG, Bonn 1822.

Ἡ πραγματεία Περὶ ἐπαφῶν (22) περιλαμβάνει τὸ γενικὸν πρόβλημα: Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ὅστις νὰ διέρχηται ἢ νὰ ἐφάπτηται: σημείων, εὐθειῶν, κύκλων.

Ἐκ τῶν πληροφοριῶν τοῦ Πάππου ἔγινε κατὰ τὸν 18ον αἰῶνα ἀνακατασκευὴ τῆς ἀπολεσθείσης αὐτῆς πραγματείας ἐν Γερμανίᾳ καὶ Ὁλλανδίᾳ ὑπὸ τὸν τίτλον:

APOLLONII, DE TACTIONIBUS cum VIETAE LIBRORUM RESTITUTIONE von IOANNE GULIELMO CAMERER, GOTAE ET AMSTELODAMI, 1795.

Ἐὰν δὲν ἔχῃ δοθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου τὰ μερικὰ προβλήματα ἐπαφῆς εἶναι τὰ ἑξῆς δέκα:

Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ὅστις:

1) Νὰ διέρχηται διὰ τριῶν δεδομένων σημείων.

2) Νὰ διέρχηται διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας γραμμῆς.

3) Νὰ διέρχηται διὰ δύο δεδομένων σημείων καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθέντος κύκλου.

4) Νὰ διέρχηται διὰ δοθέντος σημείου καὶ νὰ ἐφάπτηται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

5) Νὰ διέρχηται διὰ δοθέντος σημείου καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος κύκλου.

6) Νὰ διέρχηται διὰ δοθέντος σημείου καὶ νὰ ἐφάπτηται δύο δοθέντων κύκλων.

7) Νὰ ἐφάπτηται τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

8) Νὰ ἐφάπτηται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ ἑνὸς δοθέντος κύκλου.

9) Νὰ ἐφάπτηται μιᾶς δοθείσης εὐθείας καὶ δύο δοθέντων κύκλων.

10) Νὰ ἐφάπτηται τριῶν δοθέντων κύκλων.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων σ, ε, κ τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας καὶ τοὺς κύκλους ἀντιστοίχως δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς δέκα περιπτώσεις τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς:

Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ὅστις νὰ διέρχηται ἢ νὰ ἐφάπτηται

σ,	σ,	σ
σ,	σ,	ε
σ,	σ,	κ
σ,	ε,	ε
σ,	ε,	κ
σ,	κ,	κ
ε,	ε,	ε
ε,	ε,	κ
ε,	κ,	κ
κ,	κ,	κ

Ὅπως βλέπομεν ὁ Ἀπολλώνιος ἐγνώριζε τοὺς συνδυασμοὺς τῶν τριῶν διαφόρων πραγμάτων σ, ε, κ ἀνὰ τρία μετ' ἐπαναλήψεως. Ὁ Πάππος ἀναφερόμενος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, λέγει, «ἐκ τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν (δηλ. σ, ε, κ) τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται δέκα» (23).

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου ἔχῃ δοθῇ, τότε ἔχομεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν τριῶν διαφόρων πραγμάτων ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ κάτωθι ἕξ, ἤτοι:

Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ὅστις

1) Νὰ διέρχηται διὰ δύο δοθέντων σημείων.

2) Νὰ διέρχηται διὰ δοθέντος σημείου καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας.

3) Νὰ διέρχηται διὰ δοθέντος σημείου καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθέντος κύκλου.
4) Νὰ ἐφάπτηται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.
5) Νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος κύκλου.
6) Νὰ ἐφάπτηται δύο δοθέντων κύκλων.

Συμβολικῶς, ἀφοῦ παραστήσωμεν διὰ α τὴν ἀκτῖνα τοῦ ζητουμένου κύκλου καὶ διὰ σ, ε, κ τὰ σημεῖα, τὰς εὐθείας καὶ τοὺς κύκλους ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς ἓξ περιπτώσεις τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς:

α,	σ,	σ
α,	σ,	ε
α,	σ,	κ
α,	ε,	ε
α,	ε,	κ
α,	κ,	κ

Καὶ ἐδῶ βλέπομεν, ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἐγνώριζε τοὺς συνδυασμοὺς τῶν τριῶν πραγμάτων ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως. Ὁ Πάππος ἀναφερόμενος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, λέγει: «ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆθος 6» (23).

Τὸ ἀκριβὲς περιεχόμενον τῆς ἀπολεσθείσης πραγματείας Περὶ τόπων ἐπιπέδων (24), (25) δὲν εἶναι γνωστόν. Ἐκ τῶν ὀλίγων στοιχείων, ἅτινα ἀναφέρει ὁ Πάππος ἀνακατεσκευάσθη ἡ πραγματεία αὕτη ὑπὸ τοῦ Peter G. Schott καὶ ἐδημοσιεύθη ἐν Würzburg (Γερμανία) κατὰ τὸ 1658. Ἄλλη ἀνακατασκευὴ ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Ἄγγλου Robert Simon δημοσιευθεῖσα ἐν Γλασκώβῃ (Glaskow) κατὰ τὸ 1749 εἰς τὴν λατινικήν. Ἡ ἀνακατασκευὴ αὕτη μετεφράσθη εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ τοῦ J. W. Camerer καὶ ἐδημοσιεύθη ἐν Λειψίᾳ κατὰ τὸ 1796. Καὶ ὑπὸ τοῦ

Fermat ἀνακατεσκευάσθη αὕτη καὶ περιελήφθη εἰς «Oeuvres de Fermat, par Tannery et Henry, Vol. I 3 - 51, Paris 1911».

Ἡ πραγματεία Περὶ νεύσεων (25), ἀποτελουμένη καὶ αὐτὴ ἐκ δύο βιβλίων, ἀπωλέσθη. Ὁ Πάππος διέσωσε μερικὰ στοιχεῖα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τὴν μαρτυρίαν (26). Καὶ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ ἑλίκων (θεωρ. 5 - 9), χρησιμοποιεῖ προτάσεις νεύσεως καὶ ἑπομένως εἶχε γνῶσιν τῆς θεωρίας αὐτῆς. Φαίνεται λοιπόν, ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἐπεξέτεινε τὴν θεωρίαν καὶ κατόπιν ἐδημοσίευσε τὴν συναφῆ πραγματείαν του. Ἀνακατασκευὴ τῆς πραγματείας τοῦ Ἀπολλωνίου Περὶ νεύσεων ἔγινεν ὑπὸ τοῦ Mario Ghetaldi, Roma 1630, τοῦ Alexander Anderson, Παρίσιοι 1612, τοῦ Samuel Horsley, Oxford 1770, καὶ ἐκ τούτου εἰς τὴν γερμανικὴν ὑπὸ τοῦ W. A. Diesterweg, Berlin 1823, τοῦ Chr. Hugenii Lugduni Batavorum 1654, τοῦ Reuben Barrow, London 1779, τοῦ Hugo Omérique, Gadibus 1698. (Εἰσαγωγὴ Paul ver Eecke).

Τὸ περιεχόμενον τῆς ἀπολεσθείσης πραγματείας Περὶ ἀτάκτων ἀλόγων (39 - 42), δυνάμεθα νὰ τὸ εἰκάσωμεν ἐκ τοῦ 10ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται περὶ τῶν ἀλόγων γραμμῶν. Φαίνεται, ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος ἐπεξέτεινε τὴν θεωρίαν αὐτὴν τῶν ἀσυμμέτρων.

Εἰς τὴν ἀπολεσθεῖσαν ἐπίσης πραγματείαν Ὠκυτόκιον περιείχετο τρόπος ὑπολογισμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ π, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Εὐτοκίου (4), καὶ μέθοδος συντομίας πολλαπλασιασμῶν (ὠκυτόκιον = ταχὺς τόκος = ταχεῖα γέννησις = ταχεῖα μέθοδος ἐκτελέσεως ἀριθμητικῶν πράξεων πολλαπλασιασμοῦ).

Ἐπίσης δὲν διεσώθη ἡ ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ καθόλου πραγματεία» (14). Θεωρεῖται πιθανόν, ὅτι αὕτη περιεῖχε θεωρίαν τῶν Ἀρχῶν τῶν Μαθηματικῶν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ ἀπολεσθεῖσα πραγματεία Περὶ πυρίου (=Καυστικῶν κατόπτρων) περιελάμβανε τὴν θεωρίαν τῶν καυστικῶν κατόπτρων, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ Ἀνθεμίου (1 - 2). Εἶναι πιθανόν, ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος εἶχε γνῶσιν συναφοῦς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους μὴ διασωθείσης, τὴν ὁποίαν ἐπεξέτεινε.

Καὶ εἰς τὴν ἀστρονομίαν ὁ Ἀπολλώνιος εἶχεν ἐπιτελέσει σπουδαῖα ἐπιτεύγματα. Μεταξὺ τούτων καταλέγεται ἡ θεωρία τῶν ἐπικύκλων, τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὁ Κλαύδιος Πτολεμαῖος διὰ τὴν ἑρμηνείαν ἀνωμαλιῶν τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν (56-57). Εἶχε δὲ ὁ Ἀπολλώνιος ὑπολογίσει καὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς σελήνης ἀπὸ τῆς γῆς (10).

Πρὸς εὐχερεστέραν σπουδὴν τῶν Κωνικῶν προτάσσομεν:

1. Ἰδιότητάς τινας τῶν ἀναλογιῶν ἐκ τοῦ 5ου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

2. Ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου 1,44, 6,28, 6,29 καὶ τοῦ θεωρήματος περὶ μεγίστου 6,27, τὰ ὁποῖα ἔχουσι σχέσιν μὲ τὴν παραβολήν, τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολήν. Θεωρεῖται λίαν πιθανόν, ὅτι ἐκ τῶν προτάσεων αὐτῶν ὁ Ἀπολλώνιος ὁρμώμενος ἔδωκεν εἰς τὰς τρεῖς κωνικὰς τομὰς τὰς ὀνομασίας παραβολή, ἔλλειψις, ὑπερβολή.

3. Ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν τῶν Κωνικῶν.

Ἡ βιβλιογραφία ἐστάλη φιλοφρόνως (ἐκτὸς 30 τίτλων) ὑπὸ τοῦ ἐν Παρισίοις Ἕλληνος ἐπιστήμονος κ. Γεωργίου Καγιᾶ, τοῦ ὁποίου παραθέτομεν εἰς τὴν οἰκείαν θέσιν συναφῆ ἐπιστολήν. Πρὸς τὸν κ. Καγιᾶν, ἂς ἐπιτραπῇ νὰ ἐκφράσωμεν ἐνταῦθα θερμοτάτας εὐχαριστίας.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Ὁρισμοί τινες ἐκ τοῦ πέμπτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου

Ὁρισμὸς 4. Ἐὰν $\alpha > \beta$ (α, β ἀκέραιοι), ὁ $(\alpha - \beta)\nu > \alpha$, ($\nu = 2, 3, 4 \ldots$). Τοῦτο εἶναι τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὔδοξον.

Ὁρισμ. 9. Ἐὰν $\alpha:\beta = \beta:\gamma$, (1), τότε $\alpha:\gamma = (\alpha:\beta)^2 = \alpha^2:\beta^2$. (πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ $\alpha:\beta$. Τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἔχει διπλασίονα λόγον ἢ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, σημαίνει, ὅτι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον [τῆς (1)] ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου.

Ὁρισμ. 10. Ἐὰν $\alpha:\beta = \beta:\gamma = \gamma:\delta$, τότε $\alpha:\delta = (\alpha:\beta)^3 = \alpha^3:\beta^3$. Ἐνῷ τέσσαρα μεγέθη τὰ α, β, γ, δ εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τέταρτον εἶναι τριπλασίων τοῦ λόγου τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον. Καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha:\beta = \beta:\gamma = \gamma:\delta = \ldots \varkappa:\lambda$, ὅπου τὸ πλῆθος τῶν λόγων εἶναι ν ($\nu = 2, 3, 4 \ldots$), τότε $\alpha:\lambda = (\alpha:\beta)^\nu = \alpha^\nu:\beta^\nu$.

Ὁρισμ. 11. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta = \ldots \varkappa:\lambda$ ὁμόλογα μεγέθη εἶναι τὰ $\alpha, \gamma \ldots \varkappa$, καὶ τὰ $\beta, \delta \ldots \lambda$.

Ὁρισμ. 12. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, ἐναλλὰξ λόγος εἶναι $\alpha:\gamma = \beta:\delta$. (θεώρ. 5, 16).

Ὁρισμ. 13. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, ἀνάπαλιν λόγος εἶναι $\beta:\alpha = \delta:\gamma$. (θεώρ. 5, 7 πόρ.).

Ὁρισμ. 14. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, σύνθεσις λόγου εἶναι $\alpha + \beta / \beta = \beta + \delta / \delta$. (θεώρ. 5, 18).

Ὁρισμ. 15. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, διαίρεσις λόγου (διελόντι) εἶναι $\alpha - \beta / \beta = \gamma - \delta / \delta$. (θεώρ. 5, 17).

Ὁρισμ. 16. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, ἀναστροφὴ λόγου εἶναι $\alpha / \alpha - \beta = \gamma / \gamma - \delta$. (θεώρ. 5, 19 πόρ.).

Ὁρισμ. 17. Ἐὰν

$$\begin{aligned} \alpha:\beta &= A:B \\ \beta:\gamma &= B:\Gamma \\ \vdots\ \ &\ \ \vdots \\ \mu:\nu &= M:N \end{aligned}$$

ὁ δι' ἴσου λόγος εἶναι $\alpha/\nu = A/N$, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων κατὰ μέλη (θεώρ. 5, 22).

Ὁρισμ. 18. Ἔστωσαν τὰ μεγέθη α, β, γ καὶ Α, Β, Γ, καὶ ἐκ τούτων αἱ σχέσεις $\alpha:\beta = B:\Gamma$, (1)
$\beta:\gamma = A:B$, (2). Καὶ αἱ δύο σχέσεις ὀνομάζονται τεταραγμένη ἀναλογία. Ὁ δι' ἴσου λόγος εἰς τὴν τεταραγμένην ἀναλογίαν εἶναι $\alpha:\gamma = A:\Gamma$, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 1 καὶ 2 κατὰ μέλη (θεώρ. 5, 23).

Εὐκλ. 5, 25. Ἐὰν ὑπάρχωσι τέσσαρα μεγέθη α, β, γ, δ, ὅπου α τὸ μέγιστον καὶ δ τὸ ἐλάχιστον, εἶναι δὲ $\alpha:\beta = \gamma:\delta$, θὰ εἶναι $\alpha + \delta > \beta + \gamma$.

Εὐκλ. 5, 12. Ἐὰν $\alpha:\beta = \gamma:\delta = \varepsilon:\zeta$ θὰ εἶναι $\alpha + \gamma + \varepsilon / \beta + \delta + \zeta = \alpha:\beta = \gamma:\delta = \varepsilon:\zeta$.

Συγκείμενος λόγος = τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων λόγων (6, 23). Διπλάσιος λόγος ἢ διπλασίων λόγος $\alpha/\beta \times \alpha/\beta = \alpha^2/\beta^2$.

Λόγος τριπλάσιος ἢ τριπλασίων $\alpha/\beta . \alpha/\beta . \alpha/\beta = \alpha^3/\beta^3$ κ.λπ.

Ὁρισμοί τινες
ἐκ τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου

18. Κῶνος εἶναι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν μένουσαν ἀκίνητον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε κινούμενον. Καὶ ἂν μὲν ἡ μένουσα ἀκίνητος κάθετος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον, τὴν ἐκτελοῦσαν τὴν περιστροφήν, ὁ κῶνος θὰ εἶναι ὀρθογώνιος, ἐὰν δὲ μικροτέρα, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μεγαλυτέρα, ὀξυγώνιος.

19. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου εἶναι ἡ μένουσα ἀκίνητος εὐθεῖα, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τὸ τρίγωνον.

20. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς περιστρεφομένης εὐθείας.

Προτάσεις

Κατωτέρω παραθέτομεν τὰς ἐκφωνήσεις, ἀκολούθως δὲ ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων 1,44, 6,28, 6,29 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ θεωρήματος 6,27 περὶ μεγίστου.

Τὰ τρία ἀνωτέρω προβλήματα ὡς ἀνεφέρθη ἤδη ἀφορῶσιν εἰς τὰς κωνικὰς τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, δηλ. εἰς τὴν παραβολήν, τὴν ἔλλειψιν καὶ τὴν ὑπερβολήν, χωρὶς νὰ γίνεται μνεία ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι πρόκειται περὶ κωνικῶν τομῶν.

Τὸ θεώρημα 6,27 ἀποτελεῖ διορισμόν, δηλαδὴ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος 6,28.

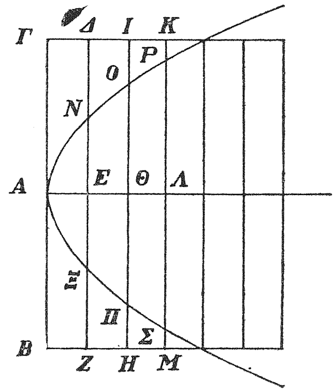
Αἱ ἐκφωνήσεις τῶν προβλημάτων καὶ τοῦ θεωρήματος

1,44 (π ρ ό β λ η μ α)

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ, παρὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παραβληθῇ τυχοῦσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια Γ (παραλληλόγραμμον ἰσοδύναμον πρὸς τρίγωνον), ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν Δ (Σχ. 1). Θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθή, εἰς τὸ σχῆμα ἡ ΒΑΛ. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΖΕ (εἰς τὸ ὁποῖον μετασχηματίζομεν τὸ τρίγωνον) τὸ ἔχομεν παραβάλει παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ὑπὸ τὴν γωνίαν ΒΑΛ. Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς ΕΞ.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν $A\Gamma = AB$ *καὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν* $\Gamma A\Lambda$, *ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον* $A\Gamma\Delta E$ *παρὰ τὴν εὐθεῖαν* $A\Gamma$ *ὑπὸ τὴν γωνίαν* $\Gamma A\Lambda = BA\Lambda$. *Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς* EN. *Τὸ παρὰ τὴν εὐθεῖαν* AB *παραβληθὲν παραλληλόγραμμον* $ABH\Theta$ *εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς* $\Theta\Pi$. *Τὸ παρὰ τὴν* $A\Gamma$ *παραβληθὲν παραλληλόγραμμον* $A\Gamma I\Theta$ *εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς* ΘO. *Τὰ σημεῖα* Ξ, N, Π, O *εἶναι σημεῖα τῆς παραβολῆς. Ἐὰν καλέσωμεν* $AB = A\Gamma = 2p$, $A\Theta = \chi$, $\Theta O = \psi$, *θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν* $\psi^2 = 2p\chi$, *ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας συντεταγμένων. Τὰ παραλληλόγραμμα* $ABZE$, $ABH\Theta$, $ABM\Lambda$ *εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν μετασχηματίσει τυχούσας εὐθυγράμμους ἐπιφανείας* Γ_1, Γ_2, Γ_3. *Τὰς αὐτὰς ἐπιφανείας ἔχομεν παραβάλει παρὰ τὴν εὐθεῖαν* $A\Gamma$ *καὶ ὑπὸ τὴν γωνίαν* $\Gamma A\Lambda$ *ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν* $BA\Lambda$. *Ὅθεν τὸ πρόβλημα περιέχει τὴν κατασκευὴν τῆς παραβολῆς ἐν ἐπιπέδῳ. Ἡ δοθεῖσα σταθερὰ εὐθεῖα* AB *εἶναι ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς.*



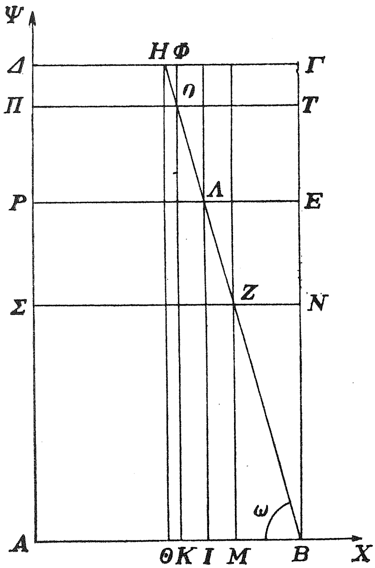
Σχῆμα 1

6, 27 (θεώρημα περὶ μεγίστου)

Ἐκ πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλλείπουσι σχήματα παραλληλόγραμμα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενον, μέγιστον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλ-

λόμενον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἐλλεῖπον.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ (Σχ. 2). Ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς ΑΒ ὑψοῦμεν τυχοῦσαν κάθετον τὴν ΘΗ καὶ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΘΗΔ, ΘΒΓΗ. (Ἡ ΘΗ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι κάθετος. Ἐξετάζομεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν). Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΘΒΓΗ, τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως πρὸς τοῦτο κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΘΒΓΗ. Τὸ παραβληθὲν παραλληλόγραμμον τὸ ΑΘΗΔ εἶναι τὸ μέγιστον τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων ἐπὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας ΑΒ παραλληλογράμμων. Τυχόντα ἄλλα «οὕτω πως παραβεβλημένα» παραλληλόγραμμα εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς: Φέρομεν τὴν διαγώνιον



Σχῆμα 2

ΗΒ καὶ ἐκ τῶν τυχόντων σημείων αὐτῆς Ο, Λ, Ζ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΔ. Τότε ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὰ ἑξῆς τρία παραλληλόγραμμα (πλὴν τοῦ ΑΘΗΔ). 1) Τὸ ΑΚΟΠ. Ἀπὸ τοῦτο ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΚΒΤΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΒΓΗ. 2) Τὸ ΑΙΛΡ. Ἀπὸ τοῦτο ἐλλείπει τὸ παραλλη-

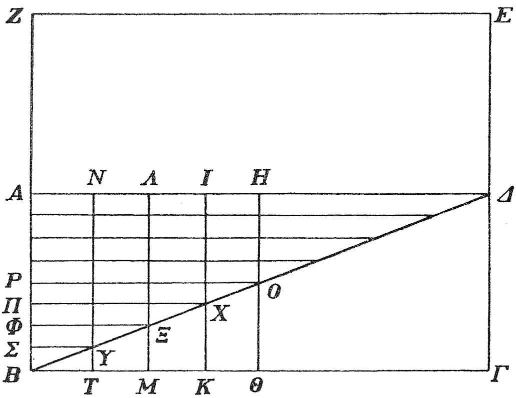
λόγραμμον ΙΒΕΛ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΒΓΗ. 3) Τὸ ΑΜΖΣ. Ἀπὸ τοῦτο ἐλλείπει τὸ παραλληλόγραμμον ΜΒΝΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΒΓΗ.

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ἀναλυτικῶς τὸ θεώρημα 27, θεωροῦμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ=α ἐπὶ τοῦ ἄξονος Χ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ψ. Ἔστω δὲ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΗΒ τὸ Ζ. Τὸ ἐμβαδὸν ΑΜΖΣ=Ε εἶναι συνάρτησις τῆς μορφῆς Ε=φ(χ, ψ), ὅπου ψ=φ(χ). Ἡ μεταβλητὴ ψ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ ἐκ τῆς σχέσεως ψ=(α—χ)εφω, ἐὰν καλέσωμεν ω τὴν γωνίαν ΗΒΘ. Ἐὰν ἡ γωνία ω εἶναι 45°, τότε λαμβάνομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς κύκλον. Ἐνταῦθα ὅμως δὲν πρόκειται περὶ κύκλου, ἀλλὰ περὶ ἐλλείψεως. Τὸ μέγιστον παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον λαμβάνεται, ἂν ΘΒ=ΑΘ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπαινίσσεται ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ «Μένων» (86ε — 87δ), ἔνθα ὁ Σωκράτης λέγει εἰς τὸν Μένωνα ὅτι, προκειμένου εἷς γεωμέτρης ν' ἀπαντήσῃ ἂν δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια εἶναι ἐγγράψιμος εἰς δοθέντα κύκλον, ὡς τρίγωνον, θὰ εἴπῃ, ὅτι ἄλλο συμβαίνει ἂν ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια παραταθῇ (κατὰ τὸν Εὐκλείδην παραβληθῇ) εἰς τὴν γραμμὴν αὐτοῦ (τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου) καὶ ἐλλείπῃ ἄλλη τόση ἐπιφάνεια ὅση εἶναι ἡ παρατεταμένη, καὶ ἄλλο ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο (Ἰδὲ προτεινομένην λύσιν τοῦ προβλήματος, Ε. Σ. Σταμάτη, περιοδικὸν «Πλάτων», 1951, τεῦχος Β', σελ. 218).

6, 28 (π ρ ό β λ η μ α).

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἐλλείπῃ *σχῆμα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν· πρέπει δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ ἴσον] νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου πρὸς τὸ ἐλλεῖπον [δηλ. τοῦ ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ πρὸς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐλλείπῃ ὅμοιον].*

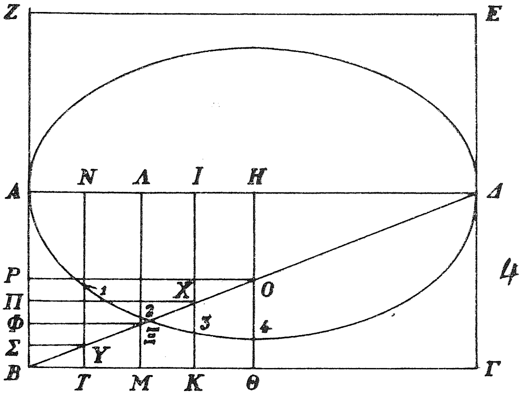
Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ παρὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον κατὰ τὸ πρόβλημα (Σχ. 3).



Σχῆμα 3

Θεωροῦμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον. Εἰς τὸ μέσον Ρ τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν κάθετον ΡΟ καὶ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΡΟΗ, ΡΒΘΟ. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΟ. Ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΟ λαμβάνομεν τυχόντα σημεῖα τὰ Υ, Ξ, Χ καὶ φέρομεν ἐκ τούτων τὰς καθέτους, τὰς ΥΣ, ΝΤ, ΞΦ, ΛΜ, ΧΠ, ΙΚ. Τότε παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὰ ἑξῆς τέσσαρα παραλληλόγραμμα·

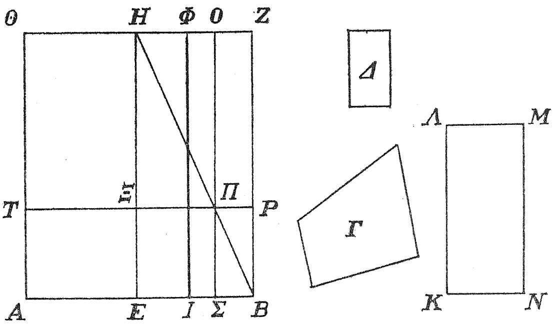
1) Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΣΥΝ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΤΝ) τὸ παραλ. ΣΒΤΥ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ (Εὐκλ. 1. 43). 2) Τὸ παραλ. ΑΦΞΛ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΜΛ) τὸ παραλ. ΦΒΜΞ, τὸ ὁποῖον *εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ. 3) Τὸ παραλ. ΑΠΧΙ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΚΙ) τὸ παραλ. ΠΒΚΧ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ. 4) Τὸ παραλ. ΑΡΟΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει (διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ παραλ. ΑΒΘΗ) τὸ παραλ. ΡΒΘΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΑΡΟΗ. Κατὰ τὸ θεώρημα 27 τὸ μέγιστον τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων παραλληλογράμμων εἶναι τὸ ΑΡΟΗ.*



Σχῆμα 4

Τὸ παραλλ. ΑΣΥΝ (Σχῆμα 4) εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{A\Sigma . AN}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΝΤ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Ν, λαμβάνομεν τμῆμα Ν1 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΦΞΛ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{A\Phi . A\Lambda}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΛΜ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Λ λαμβάνομεν τμῆμα Λ2 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Τὸ παραλ. ΑΠΧΙ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{A\Pi . AI}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΙΚ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Ι λαμβάνομεν τμῆμα Ι3 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Τὸ παραλ. ΑΡΟΗ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς $\sqrt{AP . AH}$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΘ ἀρχόμενοι *ἀπὸ τοῦ Η λαμβάνομεν τμῆμα Η4 ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ τετραγώνου. Ὅσον περισσότερα σημεῖα ἔχομεν λάβει ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΒΟ, τόσον ἀκριβεστέρα εἶναι ἡ προκειμένη κατασκευή. Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν ληφθεισῶν πλευρῶν τῶν τετραγώνων τὰ 1, 2, 3, 4 λαμβάνομεν τὸ 1/4 καμπύλης γραμμῆς, ἡ ὁποία εἶναι ἔλλειψις. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ΒΟ, ΑΗ, θὰ συναντηθῶσιν αὗται εἰς τὸ Δ. Σχηματίζομεν τὸ παραλ. ΖΒΓΕ καὶ λαμβάνοντες τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς ΟΔ ἐκτελοῦμεν τὴν αὐτὴν κατασκευήν, ἡ ὁποία θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ἄλλο 1/4 τῆς καμπύλης τὸ 4Δ. Τὸ συμμετρικὸν πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς καμπύλης, πρὸς τὸ Α4Δ, εἰς τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ ἄξονος ΑΔ μᾶς δίδει τὸ ἄλλο ἥμισυ τῆς ἐλλείψεως. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ λάβωμεν ἐπίσης, ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΖΔ καὶ λάβωμεν τυχόντα σημεῖα ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκτελέσωμεν ὁμοίαν τῆς ἀνωτέρω κατασκευήν. Ἂς καλέσωμεν τὴν δοθεῖσαν σταθερὰν εὐθεῖαν ΑΒ=2p, τὸ τυχὸν μῆκος ΑΔ=2α καὶ θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Ν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΔ, ὥστε ΑΝ=χ. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΤΝ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸ παραλ. ΣΒΤΥ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΡΒΘΟ, (τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΑΡΟΗ). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν θεωρουμένων παραλληλογράμμων ἔχομεν ΒΣ:ΣΥ=ΒΣ:χ=2p:2α, ἐξ ἧς ΒΣ=χ·p:α. Ἐὰν καλέσωμεν τὴν Ν1=ψ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν* $ψ^2=2p\cdot χ—pχ^2:α$, *ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας ὁ μέγας ἄξων ἐφάπτεται τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ΑΒ=2p εἶναι ἡ παράμετρος τῆς ἐλλείψεως. Ὅταν παραβληθῇ παρὰ τὴν ΑΒ τὸ μέγιστον παραλληλόγραμμον ΑΡΟΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλ. ΡΒΘΟ, ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδ. πρὸς τὸ παραλ. τοῦτο τετραγώνου εἶναι ὁ μικρὸς* *ἡμιάξων τῆς ἐλλείψεως ὁ Η4, ἤτοι* $(H4)^2 = \psi^2 = \beta^2 = \alpha \cdot p$. *('Ελάβομεν θετικῶς τὴν ΑΒ ἀντὶ τῆς ΑΖ, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀρχαίου κειμένου, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς ἀρνητικῆς ῥίζης τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως).*

Τὸ πρόβλημα 28 δὲν ἀφορᾷ μόνον εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς ἐλλείψεως. 'Αφορᾷ κυρίως εἰς τὴν λύσιν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (τῆς ἐλλείψεως) μὲ συντελεστὰς μὴ ῥητούς. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 5), ἡ δοθεῖσα τυχοῦσα εὐθύγραμμος



Σχῆμα 5

ἐπιφάνεια Γ καὶ τυχὸν παραλληλόγραμμον Δ. Πρέπει παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἰσοδ. πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν Γ ἀπὸ τοῦ ὁποίου νὰ ἐλλείπῃ παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν παραλ. Δ. Περιορισμὸς (διορισμός): Ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια Γ δὲν πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ παραβαλλομένου παραλ. ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέγιστον τῶν οὕτω πως παραβαλλομένων παραλληλογράμμων κατὰ τὸ θεώρημα 27). Ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Ε καὶ ἂς ἀναγραφῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ τὸ ΕΒΖΗ, καὶ ἂς συμ-

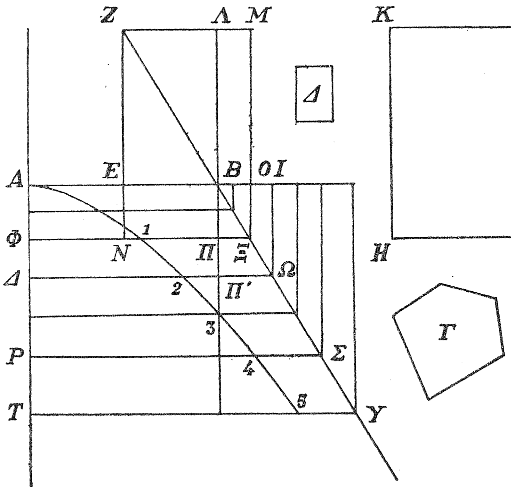
πληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗ. Ἐὰν τὸ ΑΗ εἶναι ἰσοδ. πρὸς τὸ εὐθύγραμμον Γ, τὸ ἐπιταχθὲν εἶναι γεγονός. Διότι παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παρεβλήθη παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ, ἰσοδ. πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Γ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐλλείπει ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλ. τὸ ΗΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν δὲν εἶναι παραλ. $ΑΗ=Γ$, θὰ εἶναι παραλ. $ΘΕ>Γ$ (ἀποκλείεται κατὰ τὸν διορισμὸν τοῦ θεωρ. 27 νὰ εἶναι $ΘΕ<Γ$). Ἔστω τὸ πλάτος κ καὶ τὸ μῆκος μ τοῦ δοθέντος παραλ. Δ, ὁπότε ἔχει κατασκευασθῇ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $κ:μ=ΕΒ:ΕΗ$. Ἀφοῦ παραλ. $ΘΕ>Γ$, θὰ εἶναι καὶ παραλ. $ΗΒ>Γ$. Λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν παραλ. $ΗΒ—Γ$ καὶ τὴν μετασχηματίζομεν εἰς παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ, ἔστω τὸ ΚΛΜΝ. [Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ παραλ. ΚΛΜΝ μετασχηματίζει ὁ Εὐκλείδης τὴν διαφορὰν παραλ. $ΗΒ—Γ$ εἰς παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι ἡ ΕΗ. Ἡ ἄλλη θὰ εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην μικροτέρα τῆς ΕΒ. Ἔστω, ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ εἶναι ἡ ΕΙ, ὁπότε τὸ ἴσον (κατὰ τὸ ἐμβαδὸν) πρὸς τὴν διαφορὰν παραλ. $ΗΒ—Γ$ παραλληλόγραμμον θὰ εἶναι τὸ ΗΕΙΦ. Μεταξὺ ΕΙ καὶ ΕΒ εὑρίσκει τὴν μέσην ἀνάλογον, ἔστω ΕΣ, καὶ μετασχηματίζει τὸ παραλ. ΗΕΙΦ εἰς ἰσοδ. πρὸς τοῦτο, καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ λαμβάνων ὡς πλάτος τὴν $ΕΣ=ΛΜ$ (θεώρ. 25), τὸ ΚΛΜΝ. Ἐκ τῆς εὑρέσεως τῆς μέσης ἀναλόγου $ΕΣ=ΛΜ$ θὰ ἔχωμεν $ΕΒ:ΛΜ=ΛΜ:ΕΙ$, ἐξ ἧς $(ΛΜ)^2=ΕΒ\cdot ΕΙ$, καὶ $ΛΜ=\sqrt{ΕΒ\cdot ΕΙ}$,(1). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΗΒ, Δ καὶ ΚΛΜΝ ἔχομεν $ΚΛ:ΛΜ=ΕΗ:ΕΒ$, ἐξ ἧς $ΚΛ=ΛΜ\cdot ΕΗ:ΕΒ$ (2). Ἐὰν καλέσωμεν $ΕΗ=α$, $ΕΒ=p$, τότε παραλ. $ΗΒ—Γ=α\cdot p—Γ$. Ἀφοῦ ἡ μία πλευρὰ τοῦ παραλ. $α\cdot p—Γ$ εἶναι $ΕΗ=α$, ἡ ἄλλη ΕΙ θὰ εἶναι $αp—Γ/α$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) θὰ ἔχωμεν $ΛΜ=\sqrt{\frac{αp—Γ}{α}\cdot p}$. Ἀντικα-

θιστῶντες εἰς τὴν (2) θὰ ἔχωμεν $ΚΛ = \frac{α}{p}\sqrt{\frac{αp—Γ}{α}} \cdot p$, *(3). Ἤτοι ἔχομεν ἐκφράσει τὴν ΚΛ συναρτήσει τῶν α, p καὶ Γ]. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ παραλ. ΗΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ παραλ. ΚΜ. Ἔστω ἡ μὲν ΚΛ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΗΖ. Εἶναι ἄρα ΗΕ〉ΚΛ καὶ ΖΗ〉ΛΜ. Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΗΕ ἴση πρὸς τὴν ΚΛ ἡ ΗΞ καὶ ἐπὶ τῆς ΗΖ ἴση πρὸς τὴν ΛΜ ἡ ΗΟ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΞΗΟΠ. Ἄρα τὸ ΗΠ εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ. Καὶ τὸ ΗΠ ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΗΒ. Τὸ ΗΠ ἄρα καὶ τὸ ΗΒ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαγωνίου τῆς ΗΠΒ. Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Π αἱ ΤΡ, ΟΣ. Ἀφοῦ ἡ διαφορὰ παραλ. ΗΒ—Γ εὑρέθη ἴση πρὸς παραλ. ΗΠ, θὰ εἶναι Γ=ΗΒ—ΗΠ, ἤτοι Γ=γνώμων ΕΒΖΟΠΞ, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ τὸ παραλ. ΑΣΠΤ, διότι παραλ. ΟΡ=παραλ. ΞΣ καὶ παραλ. ΞΒ =παραλ. ΤΕ. Παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἄρα παρεβλήθη τὸ παραλ. ΤΣ=Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐλλείπει τὸ παραλ. ΠΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ παραλ. ΗΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Δ. Εὑρέθη δηλ. ἡ ΠΣ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς ΣΟ—ΟΠ, (4). Ἡ ΣΟ=ΕΗ=α καὶ ἡ ΟΠ=ΚΛ. Καλοῦντες τὴν ΠΣ=χ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) τὴν ΣΟ, καὶ τὴν ΟΠ διὰ τῆς ἴσης ΚΛ ἐκ τῆς σχέσεως (3), θὰ ἔχωμεν* $χ=α — \frac{α}{p}\sqrt{\frac{αp—Γ}{α}} \cdot p$. *Εἰς τὸ θεώρημα δὲν ὑπολογίζεται ἡ θετικὴ ῥίζα. Ὅτι ἡ ΠΣ=χ εἶναι ῥίζα δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως φαίνεται ὡς ἑξῆς· Ἔστω, ὅτι εὑρέθη κατὰ τὴν κατασκευὴν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἡ εὐθεῖα ΠΣ=χ, ὅτε ΗΞ=α—χ, ἐνῷ ΕΗ=α, ΕΒ=p. Ἐκ τῆς σχέσεως ΣΒ:ΣΠ=p:α λαμβάνομεν* $ΣΒ=\frac{p}{α} \cdot χ$ *καὶ ἑπομένως* $ΕΣ=p—\frac{p}{α} \cdot χ$. *Ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια Γ θὰ ἰσοῦται κατὰ τὸ* *πρόβλημα καὶ τὸν διορισμὸν τοῦ θεωρ. 27 πρὸς ΗΕΒΖ—ΗΞΠΟ. Καὶ εἶναι* $HEBZ = \alpha . p$, $H\Xi\Pi O = (HE - E\Xi)$. $E\Sigma = (\alpha - \chi)\left(p - \frac{p}{a} \cdot \chi\right)$. *Ἤτοι* $\Gamma = \left(\alpha - \chi\right)\left(p - \frac{p}{a} \cdot \chi\right)$, *ἢ* $\Gamma = 2p\chi - \frac{p\chi^2}{a}$ *ἢ* $\frac{p\chi^2}{a} - 2p\chi + \Gamma = O$, *ἐξ ἧς* $\chi = \alpha \pm \sqrt{a^2 - \frac{a \cdot \Gamma}{p}} = \alpha \pm \frac{a}{p} \sqrt{\frac{ap - \Gamma}{a} \cdot p}$.

6, 29 (πρόβλημα).

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον νὰ παραβληθῇ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον νὰ ὑπερβάλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Γ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ὡς παραλληλόγραμμον καὶ νὰ ὑπερβάλῃ κατὰ παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ (Σχ. 6). Λαμβάνομεν τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ καὶ



Σχῆμα 6

ὑψοῦμεν κάθετον ΕΖ, ὥστε ΕΒ:ΕΖ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν πλευρῶν τοῦ $Δ = \frac{p}{a}$. Ἀναγράφομεν ἀπὸ τῆς ΕΒ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΛΒ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν Δ. Τὸ ἄθροισμα τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΛΒ+Γ, τὸ μετασχηματίζομεν εἰς παραλ. ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ Δ, ἔστω τὸ ΗΘ. Ἔστω δὲ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΖΛ ἡ ΚΘ, πρὸς δὲ τὴν ΖΕ ἡ ΚΗ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ παραλ. ΗΘ〉παραλ. ΖΒ, εἶναι ἄρα ΚΘ〉ΖΛ καὶ ΚΗ〉ΖΕ. Προεκτείνομεν τὰς ΖΛ, ΖΕ καὶ λαμβάνομεν ΖΛΜ=ΚΘ, ΖΕΝ=ΚΗ. Συμπληροῦμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΜΝ. Τὸ παραλ. ΜΝ ἄρα εἶναι ἴσον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΗΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΕΛ. Τὸ παραλ. ΜΝ ἄρα εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΕΛ. Καὶ τὸ παραλ. ΜΝ ἄρα καὶ τὸ παραλ. ΕΛ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν διαγώνιον. Ἂς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΖΞ καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ λοιπὸν ΗΘ=ΕΛ+Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ=ΜΝ, εἶναι ἄρα ΜΝ=ΕΛ+Γ. Ἑπομένως Γ=ΜΝ—ΕΛ. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι ὁ γνώμων ΒΕΝΞΜΛ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ=ΕΒ, παραλ. ΑΝ=παραλ. ΝΒ. Ἀλλὰ παραλ. ΝΒ=παραλ. ΛΟ. Εἶναι ἄρα παραλ. ΑΝ=παραλ. ΛΟ. Ἂς προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὸ παραλ. ΕΞ, ὅτε θὰ εἶναι ΑΞ=ΛΟ+ΕΞ= γνώμων ΒΕΝΞΜΛ, ἤτοι Γ=ΑΞ. Ἄρα παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ παρεβλήθη ἴσον παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον Γ τὸ ΑΞ, τὸ ὁποῖον ὑπερβάλλει (τὸ ΑΦΠΒ) κατὰ τὸ παραλ. ΠΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν Δ, ἐπειδὴ τὸ ΠΟ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΛ, πρὸς δ' τὸ Δ εἶναι ὅμοιον.

Ἐὰν καλέσωμεν ΕΖ=α, ΕΒ=p, ΟΞ=ΒΠ=χ, θὰ ἔχωμεν $\frac{BO}{\chi} = \frac{p}{a}$, ἐξ ἧς $BO = \frac{p}{a} \cdot \chi$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλ. ΑΒΠΦ= $2p \cdot \chi$, τοῦ δὲ παραλ. ΒΠΞΟ τὸ ἐμβαδὸν $= \chi \cdot BO$ ἢ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΒΟ διὰ τοῦ ἴσου της $= \frac{p\chi^2}{a}$. Ἑπομένως τὸ *ἄθροισμα τῶν δύο ἐμβαδῶν θὰ εἶναι* $2p\chi + \frac{p}{a} \cdot \chi^2$. *Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΦΞ ὑπάρχει σημεῖόν τι ἔστω τὸ 1, ὥστε* $(\Phi 1)^2 = 2p\chi + \frac{p}{a}\chi^2$, *ἤτοι ἡ εὐθεῖα Φ1 εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς* $2p\chi + \frac{p}{a} \cdot \chi^2$. *Ἐὰν καλέσωμεν ταύτην ψ, θὰ εἶναι* $\psi^2 = 2p\chi + \frac{p}{a} \cdot \chi^2$, *ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας συντεταγμένων. Ἡ κατασκευὴ παρέχει τὴν* $O\Xi = \chi$, *μίαν ῥίζαν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως. Ἄς ὑποθέσωμεν, διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὑπερβολῆς, ὅτι δίδεται ἄλλη τυχοῦσα εὐθύγραμμος ἐπιφάνεια ἔστω Γ′, καὶ ἔστω ὅτι μετασχηματίζομεν ταύτην εἰς τὸ ἰσοδ. παραλ. ΑΔΩΙ, τὸ ὁποῖον παραβάλλομεν παρὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Τότε παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἔχομεν παραβάλει τὸ παραλ. ΑΔΩΙ, τὸ ὁποῖον ὑπερβάλλει τὸ παραλ. ΑΔΠ′Β κατὰ τὸ παραλ. ΒΠ′ΩΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ παραλ. ΛΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ δοθὲν παραλ. Δ. Τοῦ ΑΔΩΙ ὑπάρχει ἰσοδύναμον τετράγωνον πλευρᾶς Δ2].*

Ὁρολογία]

Ὀρθία ἢ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρὰ = παράμετρος.

Πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ = πλάγιος ἄξων ὑπερβολῆς, δηλ. ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν δύο κλάδων τῆς ὑπερβολῆς.

Ἡ παρ' ἣν δύνανται = ἡ παράμετρος.

Τὸ εἶδος = τὸ ὀρθογώνιον σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ παράμετρος. Ἡ ἄλλη πλευρὰ μεταβάλλεται. Ἡ μετατροπὴ τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἰς τετράγωνα παρέχει τὰ σημεῖα κατασκευῆς τῶν κωνικῶν γραμμῶν.

Εἰς τὴν ὑπερβολήν, εἶδος = τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ παράμετρος καὶ ἡ ἄλλη, ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν δύο κλάδων τῆς ὑπερβολῆς.

Πλαγία πλευρὰ ἐλλείψεως = ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως.

Ὀρθὸς ἄξων ἐλλείψεως = ὁ μικρὸς ἄξων.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

τῶν διασωθέντων ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου *)

I. Εἰς τὴν ἑλληνικήν.

1. Κωνικῶν (28), (29).
2. Εὕρεσις δύο μέσων ἀναλόγων (3), (16).
3. Σύγκρισις δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου (11).

II. Εἰς τὴν ἀραβικήν.

4. Περὶ λόγου ἀποτομῆς (19), (20), (21).

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

τῶν ἀπολεσθέντων ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου

1. Περὶ χωρίου ἀποτομῆς (19), (21).
2. Περὶ διωρισμένης τομῆς (19), (22), (32).
3. Περὶ ἐπαφῶν (19), (23).
4. Περὶ τόπων ἐπιπέδων (19), (25), (35).
5. Περὶ νεύσεων (14), (19), (26), (27).
6. Περὶ ἀτάκτων ἀλόγων (39 - 42), (44).
7. Ὠκυτόκιον (4).
8. Περὶ κοχλίου ἢ ἑλίκων (38), (46), (69).
9. Ἡ καθόλου πραγματεία (14).
10. Περὶ πυρίου (καυστικῶν κατόπτρων) (1), (2).
11. Περὶ ὑδραυλικοῦ ἁρμονίου (ms. Paris 955) καὶ (ms. Brit. Museum 1336).
12. Ἔργον ἀστρονομικὸν (10), (56), (58), (60).
13. Θεωρία ἀριθμῶν (15).
14. Περὶ λογιστικῶν (9) (πρακτικὴ ἀριθμητική).
15. Ἀναλυόμενος τόπος (18).
16. Ἀποδείξεις ἀξιωμάτων (50), (51), (70).
17. Κατασκευὴ ὡρολογίων (63), (64).
18. Ὀπτικὴ (Αἱ ἐκδόσεις τῶν Κωνικῶν, εἰσαγωγὴ σελ. 13).

*) Οἱ ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμοὶ δηλοῦσι τὸν αὔξοντα ἀριθμὸν τῶν μαρτυριῶν.

ΠΙΝΑΞ I

Ἐμφαίνων τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ εἶδος τῶν προτάσεων τῶν 7 βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

	Εἶδος προτάσεων				
Βιβλία	Ὁρισμοί	Ὁρισμοὶ δεύτεροι	Θεωρήματα	Προβλήματα	Πορίσματα
Πρῶτον	8	3	60		7
Δεύτερον			45	8	1
Τρίτον			56		
Τέταρτον			57		
Πέμπτον			77		
Ἕκτον	10		27	6	
Ἕβδομον			51		2
Σύνολον	18	3	373	14	10
	18+3=21		373+14=387		

Ὄγδοον ἀπολεσθέν. Κατὰ τὸν Πάππον (29) τὸ σύνολον τῶν προτάσεων τῶν Κωνικῶν ἀνέρχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 487. Ἑπομένως τὸ ἀπολεσθὲν ὄγδοον βιβλίον περιεῖχεν 100 προτάσεις.

ΠΙΝΑΞ II

Ἐμφαίνων καὶ ἄλλως τὸ εἶδος καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προτάσεων τῶν 7 βιβλίων τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου.

		Βιβλίον 1
Ὁρισμοὶ πρῶτοι	8	
Ὁρισμοὶ δεύτεροι	3	(μετὰ τὸ 16 θεώρημα)
Θεωρήματα	60	
Πορίσματα	7	(1 εἰς τὸ θ. 1, 2 εἰς τὸ θ. 4, 1 εἰς τὸ θ. 7, 2 εἰς τὸ θ. 38, 1 εἰς τὸ θ. 51)
		Βιβλίον 2
Θεωρήματα	53	
Πόρισμα	1	(εἰς τὸ θ. 14)
Προβλήματα	8	(44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 53)
		Βιβλίον 3
Θεωρήματα	56	
		Βιβλίον 4
Θεωρήματα	57	
		Βιβλίον 5
Θεωρήματα	77	
		Βιβλίον 6
Ὁρισμοὶ	10	
Θεωρήματα	27	
Προβλήματα	6	(28, 29, 30, 31, 32, 33)
		Βιβλίον 7
Θεωρήματα	51	
Πορίσματα	2	(εἰς τὸ θ. 24)

Σύνολον: Ὁρισμοὶ 21, (8+3+10), Θεωρήματα 373 (60+45+56+57+77+27+51), Προβλήματα 14 (8+6), Πορίσματα 10 (7+1+2).

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

(Testimonia)

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

1. *Anthemius, of Tralles, Περὶ παραδόξων μηχανημάτων and Fragmentum Mathematicum Bobiense. A study in later greek geometry (ed. G. L. Huxley, Cambridge Mass. 1959) p. 54, 4 - 19 :*
(ab I. L. Heiberg, Mathematici graeci minores 71 ff. Det Kgl. Danske Widens Kabernes Selskab, Hist. - filologiske Meddeleser, 13, 3, Kopenhagen 1927).

καὶ τὰ μὲν πρὸς ἐμβολεῖς τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς κατασκευαζόμενα πυρία ⟨κατὰ⟩ τὸν προυποδεδειγμένον τρόπον ῥᾳδίως ἂν ἐξάπτοιτο πρὸς τῷ δεδομένῳ· τὰ δὲ περὶ τὰς τοῦ κύκλου περιφερείας πάλιν ὑποδεικτέον πηλίκῃ τε περιφερείᾳ καὶ ποῦ τὴν ἔξαψιν⟨ποι⟩ή⟨σε⟩ται.οἱ μὲν οὖν παλαιοὶ δ⟨ιέ⟩λαβον τὴν ἔξαψιν ποιεῖσθαι περὶ τὸ κέντρον τοῦ κατόπτρου, τοῦτο δὲ ψεῦδος Ἀπολλώνιος μάλα δεόν⟨τως⟩ ..... πρὸς τοὺς κατοπτρ⟨ικ⟩οὺς ἔδειξε⟨ν⟩, καὶ περὶ τίνα δὲ τόπον ἡ ἐκπύρωσις ἔσται, διασεσάφηκεν ἐν τῷ περὶ τοῦ πυρίου. ὃν δὲ τρόπον ἀποδεικνύουσιν οὐ δια ...... δε, ὃ καὶ δυσέργως καὶ διὰ μακροτέρων συνίστησιν. οὐ μὴν ἀλλὰ | τὰς μὲν ὑπ᾽ αὐτοῦ κομιζομένας ἀποδείξεις παρῶμεν, ἃς δ᾽ αὐτοὶ προσφέρομεν, ἐκθέσθαι πειραθῶμεν, οὐχ ὡς ἀντιπαρατιθέντες ἐκείναις ταῖς ἀποδείξεσιν· τοῦτο γὰρ ὡς ἀληθῶς κύκνοις χελιδόν⟨α⟩ εἰς ἴσον ἐλθεῖν·

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

1. Ἀνθέμιος, ἐκ τῶν Τράλλεων:

Καὶ τὰ μὲν καυστικὰ κάτοπτρα, τὰ κατασκευαζόμενα διὰ τὰς προσπτώσεις τῶν ἀκτίνων ἐπὶ παραβολικῆς ἐπιφανείας, κατὰ τὸν προαναφερθέντα τρόπον, εὐκόλως προκαλοῦσι ἔξαψιν (ἄναμμα) εἰς τὴν ἑστίαν τῆς παραβολῆς· διὰ δὲ τὰ κατεσκευασμένα διὰ προσπτώσεις ἐπὶ κυκλικῆς ἐπιφανείας πρέπει πάλιν νὰ ὑποδειχθῇ πόσον μεγάλη πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια καὶ ποῦ θὰ γίνεται ἡ ἔξαψις (τὸ ἄναμμα). Οἱ μὲν λοιπὸν παλαιοὶ ἀνέφερον, ὅτι ἡ ἔξαψις γίνεται περὶ τὸ κέντρον τοῦ κατόπτρου, τοῦτο ὅμως ὁ Ἀπολλώνιος ἀναμφισβητήτως τὸ ἀπέδειξεν εἰς τὴν πραγματείαν του πρὸς τοὺς ἐρευνητὰς τῶν καυστικῶν κατόπτρων, ὅτι εἶναι σφάλμα, καὶ διεσάφησεν κατὰ ποῖον τρόπον θὰ γίνεται ἡ ἐκπύρωσις, εἰς τὴν πραγματείαν του περὶ καυστικῶν κατόπτρων. Τὸν τρόπον δὲ τὸν ὁποῖον ἀποδεικνύουσιν ὄχι δια . . . δε, τὸ ὁποῖον καὶ μετὰ δυσκολίας ἀλλὰ καὶ λεπτομερέστερον συνιστᾷ. Ὅμως θὰ παραλείψωμεν ἐδῶ τὰς ἀποδείξεις του, καὶ θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐκθέσωμεν τὰς ἰδικάς μας, ὄχι διὰ νὰ τὰς ἀντιπαραβάλωμεν πρὸς τὰς ἀποδείξεις ἐκείνου· διότι, αὐτὸ θὰ ὡμοίαζε πράγματι, πρὸς τὴν σκέψιν κύκνου, ὅστις θέλει νὰ ἐξισωθῇ πρὸς χελιδόνι.

2. — — p. 56, 18 - 23 :

....

ἀντιπεπονθότα ὑπάρχει, κατὰ τὴν ἱστορίαν δείκνυνται καὶ παρὰ Ἀρχιμήδει καὶ παρὰ Ἀπολλωνίῳ καθαρῶς, ὥστε οὐκ ἀναγκαῖον ἡμᾶς πάλιν δεικνύναι, λαμβάνειν δὲ ἐξ ἑτοίμου χρήσιμον. τὸ μέντοι γε παρακολουθοῦν ἀναγκαῖον οὐκ ἄξιον παραπέμψαι· τῶν γὰρ τοιούτων ζήτησις οἰκεία καὶ [παντελῶς, ὡς ἔφην, τῷ δικαίως ἂν κληθέντι Μουσῶν υἱῷ προσήκουσα.

3. Eutocius in Archimedem III (sph. et cyl. 1) (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1915) p. 64,15 - 66,7 :

Ὡς Ἀπολλώνιος

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ ΒΑΓ ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΑΓ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΚΘΛ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Γ καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΜΘΝ καὶ τεμνέτω τὴν ΚΘΛ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν τὸ ΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΑ. τετμήσθω δίχα ἡ ΘΑ τῷ Ξ, καὶ κέντρῳ τῷ Ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς ΑΒ, ΑΓ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ Δ, Ε, ὥστε μέντοι τὰ Δ, Ε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τῷ Θ· ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ Θ τέμνοντος τὰς ΑΔ, ΑΕ καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὰ Δ, Ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζη-

2. — — :

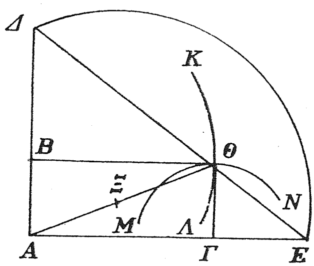
. . . .

Εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, κατὰ τὴν παράδοσιν δὲ ἀποδεικνύονται καὶ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου καθαρά, ὥστε δὲν ὑπάρχει ἀνάγκη νὰ τὰ ἀποδείξωμεν πάλιν ἡμεῖς, ἐνῷ εἶναι χρήσιμον νὰ τὰ λάβωμεν ἀπὸ τὰ ἕτοιμα. Διότι εἶναι ἀνάγκη νὰ τὰ παρακολουθῇ κανεὶς καὶ δὲν ἀξίζει νὰ τὰ ἀναβάλῃ· διότι, ὅπως εἶπα, ἡ τοιαύτη λεπτομερὴς ἀναζήτησις θὰ ἁρμόζῃ εἰς τὸν ἀποκληθέντα υἱὸν τῶν Μουσῶν.

3. Εὐτόκιος. Σχόλια εἰς Ἀρχιμήδη (περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου θεώρ. 1):

Ὡς Ἀπολλώνιος

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι ἀνάλογοι, αἱ ΒΑ, ΑΓ, σχηματίζουσαι ὀρθὴν γωνίαν, τὴν πρὸς τὸ Α, καὶ μὲ κέντρον μὲν τὸ Β, ἀκτῖνα δὲ τὴν ΑΓ ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἡ ΚΘΛ, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ περιφέρεια ἡ ΜΘΝ καὶ ἂς τέμνῃ αὕτη τὴν ΚΘΛ εἰς τὸ σημεῖον Θ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ· εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα ΒΓ παραλληλόγραμμον, διαγώνιος δὲ αὐτοῦ εἶναι ἡ ΘΑ. Ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΘΑ κατὰ τὸ Ξ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Ξ ἂς γραφῇ κύκλος τέμνων τὰς ΑΒ, ΑΓ ἐκβληθείσας, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, ὥστε τὰ σημεῖα Δ, Θ, Ε νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· τὸ ὁποῖον ἐπιτυγχάνεται, ὅταν κανὼν κινηθῇ περὶ τὸ Θ, τέμνων τὰς ΑΔ, ΑΕ, καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον κινηθῇ, μέχρις ὅτου αἱ εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς τὰ σημεῖα Δ, Ε



τούμενον· ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ, καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.

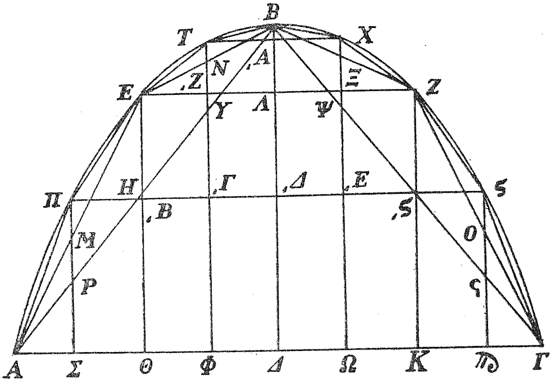
Ὠ κ υ τ ό κ ι ο ν

4. — — *(dimens. circuli 3) p. 258, 16 - 18 :*

Ἰστέον δέ, ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ [*rationem ambitus circuli ad diametrum*] δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών.

5. — — *p. 278, 20 - 280, 19 :*

Τοῦ δευτέρου θεωρήματος προλέγει τινὰ (*sc. Archimedes, De planorum. aequilibriis 2, 2*) δηλοῦντα πῶς δυνατὸν ἐν



τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καί φησιν (*sc. Archimedes*) ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. Ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστιν τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν εὑρεθέντα.

Ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς ΑΒΓ καὶ εὐθείας τῆς ΑΓ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ· φανερὸν δή, ὅτι κογίνωσιν ἴσαι. Διότι ἀφοῦ γίνῃ τοῦτο, εὑρέθη τὸ ζητούμενον· ἡ αὐτὴ δὲ κατασκευὴ ἔχει γίνει ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος καὶ τοῦ Φίλωνος, καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι ὑπάρχει ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις.

Συντομιευτήριον (ἀριθμητικῶν πράξεων)

4. — — (Σχόλια εἰς Κύκλου μέτρησιν Ἀρχιμήδους) :

Πρέπει δὲ νὰ γνωσθῇ, ὅτι καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἀπέδειξεν αὐτὸ ἐν τῷ Ὠκυτοκίῳ (τὸν λόγον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον) δι᾽ ἄλλων ἀριθμῶν μὲ μεγαλυτέραν προσέγγισιν.

5. — — :

Εἰς τὸ δεύτερον θεώρημα (Μηχανικὰ ἢ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν βιβλ. 2, θεώρ. 2) προλέγει μερικά, τὰ ὁποῖα δηλοῦσι πῶς εἶναι δυνατὸν εἰς μίαν παραβολὴν νὰ ἐγγραφῇ σχῆμα «γνωρίμως» καὶ λέγει (ὁ Ἀρχιμήδης), ὅτι αὐτὰ θ᾽ ἀποδειχθῶσιν εἰς τὰς καταλλήλους θέσεις. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ λεγόμενον εἶναι ἀσαφές, εἶναι ἀνάγκη νὰ εἴπωμεν μερικὰ περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν εὑρεθέντων ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου εἰς τὰς κωνικὰς τομάς.

Ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ τῆς παραβολῆς ΑΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ· εἶναι λοιπὸν *ρυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ Β σημεῖον· κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ Ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ἔσται τὸ [ἀπὸ] ΑΒΓ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετον ἀγομένην· οὐ γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ ΒΔ. Ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων τὰς Ε, Ζ δι' αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ ΒΔ, ὡς τὰς ΕΗΘ, Ζ,ϚΚ, ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων· δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροί εἰσι τῆς τομῆς. ἔσονται δὴ τὰ Ε, Ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων καὶ αἱ διὰ τῶν Ε, Ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς ΑΒ, ΒΓ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΕΛΖ παρὰ τὴν ΑΔΓ, ἐπειδὴ αἱ ΕΖ, ΖΚ παράλληλοί εἰσι καὶ ἴσαι διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις, ὡς ἐν τῷ Ϛ' τῶν Κωνικῶν δέδεικται (6, 19).*

6. — — p. 284, 25 - 286, 4 :

Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν Ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων πρὸς ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσὶ καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας· καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαί εἰσιν.

7. Apollonii Pergaei vol. II, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1893. s. 168 - 176 :

Εἰς τὸ πρῶτον.

Ἀπολλώνιος ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέ-

φανερόν, ὅτι κορυφὴ τοῦ τμήματος εἶναι τὸ σημεῖον Β· διότι ὁ Ἀπολλώνιος ἐκάλει κορυφὰς τῶν γραμμῶν τὰ πρὸς τὰς γραμμὰς (τὰς κων. τομὰς) πέρατα τῶν διαμέτρων. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὸ παραβολικὸν τμῆμα καὶ ὕψος ἴσον, τὴν ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ ἀγομένην κάθετον· διότι ἡ ΒΔ δὲν εἶναι πάντως ἄξων. Ἐὰν λοιπὸν ἀφοῦ λάβωμεν τὰς κορυφὰς τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων, τὰς Ε, Ζ, φέρωμεν δι' αὐτῶν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς π.χ. τὰς ΕΗΘ, ΖϚΚ, αὗται εἶναι διάμετροι τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ· διότι ἔχει δειχθῆ εἰς τὴν παραβολήν, ὅτι ὅλαι αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι διάμετροι τῆς τομῆς. Θὰ εἶναι λοιπὸν τὰ σημεῖα Ε, Ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων καὶ αἱ διὰ τῶν Ε, Ζ ἐφαπτόμεναι τῆς παραβολῆς, παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ ΕΛΖ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔΓ, ἐπειδὴ αἱ ΕΖ, ΖΚ εἶναι παράλληλοι καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι διάμετροι τῶν ἴσων τμημάτων καὶ ἐφαρμόζουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἔχει ἀποδειχθῆ εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν (6, 19).

6. — — :

Ὁ Ἀπολλώνιος ὥρισεν εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν, ὅμοια τμήματα, ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἀφοῦ ἀχθῶσιν εἰς ἕκαστον παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν, ἴσαι κατὰ τὸ πλῆθος, αἱ παράλληλοι καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας εὐθείας ἀπὸ τῶν διαμέτρων πρὸς τὰς κορυφάς, εὑρίσκονται εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας· καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ ὅλαι εἶναι ὅμοιαι.

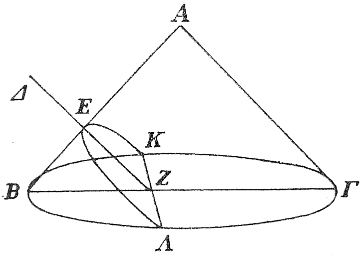
7. Σχόλια τοῦ Εὐτοκίου εἰς τὰ Κωνικά.

Εἰς τὸ πρῶτον

Ὁ Ἀπολλώνιος ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε συνάδελφε Ἀνθέμιε, γονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφυλίᾳ ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος ⟨Ἡρακλείδης⟩ ὁ τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων, ὃς καί φησι τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινοῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδη, τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὑρόντα ὑπὸ Ἀρχιμήδους μὴ ἐκδοθέντα ἰδιοποιήσασθαι, οὐκ ἀληθεύων κατά γε τὴν ἐμήν. ὅ τε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν πολλοῖς φαίνεται ὡς παλαιοτέρας τῆς στοιχειώσεως τῶν κωνικῶν μεμνημένος, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος οὐχ ὡς ἰδίας ἐπινοίας γράφει· οὐ γὰρ ἂν ἔφη ἐ π ὶ π λ έ ο ν κ α ὶ κ α θ ό λ ο υ μ ᾶ λ λ ο ν ἐ ξ ε ι ρ γ ά σ θ α ι τ α ῦ τ α π α ρ ὰ τ ὰ ὑ π ὸ τ ῶ ν ἄ λ λ ω ν γ ε γ ρ α μ μ έ ν α. ἀλλ' ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν, ὅτι οἱ παλαιοὶ κῶνον ὁριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν εἰκότως καὶ τοὺς κώνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι καὶ μίαν τομὴν ἐν ἑκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν ἔλλειψιν· καὶ ἔστι παρ' αὐτοῖς εὑρεῖν οὕτως ὀνομαζομένας τὰς τομάς. ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου εἴδους τριγώνου θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθὰς πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτο· παντὸς τριγώνου αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν. τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον κώνῳ ἐθεώρουν τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν ἐν ἀμβλυγωνίῳ γινομένην κώνῳ ἀπεδείκνυσαν, τὴν δὲ τοῦ ὀξυγωνίου ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν κώνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου·

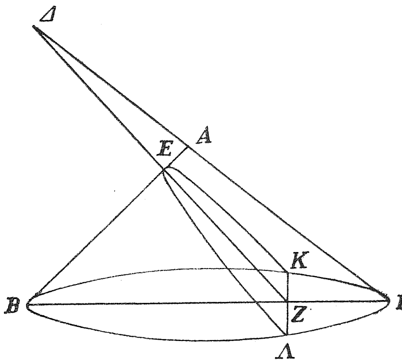
ἐγεννήθη μὲν εἰς τὴν Πέργην τῆς Παμφυλίας κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Εὐεργέτου (ἐβασίλευσεν ἀπὸ 286-222), ὅπως γράφει ὁ Ἡρακλείδης ὁ βιογράφος τοῦ Ἀρχιμήδους, ὁ ὁποῖος καὶ λέγει, ὅτι τὰ θεωρήματα τῶν Κωνικῶν τομῶν τὰ ἐπενόησε μὲν πρῶτον ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Ἀπολλώνιος δὲ ἀνευρὼν αὐτὰ μὴ ἐκδοθέντα ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰ ἰδιοποιήθη, μὴ λέγων τὴν ἀλήθειαν κατὰ τὴν γνώμην μου. Διότι καὶ ὁ Ἀρχιμήδης φαίνεται, ὅτι εἰς πολλὰ χρησιμοποιεῖ παλαιοτέρας γνώσεις περὶ τῶν στοιχείων τῶν Κωνικῶν τομῶν, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος δὲν γράφει, ὅτι τὰ Στοιχεῖα τῶν Κωνικῶν εἶναι ἰδική του ἐπινόησις· διότι δὲν θὰ ἔλεγεν, ὅτι ἐπεξειργάσθη ταῦτα περισσότερον καὶ γενικώτερον, ἐν σχέσει μὲ τοὺς προγενεστέρους του. Ἀλλ' ἀληθὲς εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λέγει ὁ Γεμῖνος (ἀκμὴ 2ον ἥμισυ τοῦ 1ου αἰῶνος π.Χ.), ὅτι οἱ παλαιοί, ὁρίζοντες τὸν κῶνον προερχόμενον ἐκ περιφορᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐνῷ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔμενεν ἀκίνητος, εὐλόγως ἐνόμιζον ὅτι ὅλοι οἱ κῶνοι γίνονται ὀρθοὶ (ὀρθογώνιοι) καὶ ἐλάμβανον μίαν τομὴν εἰς ἕκαστον, εἰς μὲν τὸν ὀρθογώνιον κῶνον τὴν τώρα λεγομένην παραβολήν, εἰς δὲ τὸν ἀμβλυγώνιον τὴν ὑπερβολήν, εἰς δὲ τὸν ὀξυγώνιον τὴν ἔλλειψιν· καὶ δύναταί τις εἰς αὐτοὺς νὰ εὕρῃ τὰς ὀνομασίας αὐτὰς τῶν τομῶν. Ἐνῷ λοιπὸν οἱ ἀρχαῖοι ἐθεώρουν τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας (τοῦ τριγώνου) εἰς ἕκαστον εἶδος τριγώνου, πρῶτον εἰς τὸ ἰσόπλευρον, κατόπιν εἰς τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ἔπειτα εἰς τὸ σκαληνόν, οἱ μεταγενέστεροι ἀπέδειξαν τὸ ἑξῆς καθολικώτερον θεώρημα· παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς· τὸ αὐτὸ συνέβη καὶ μὲ τὰς κωνικὰς τομάς· διότι τὴν μὲν λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐνόμιζον, ὅτι γίνεται μόνον κατὰ τὴν τομὴν ὀρθογωνίου κώνου, τεμνομένου δι' ἐπιπέδου καθέτως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν, γινομένην εἰς ἀμβλυγώνιον κῶνον ἀπεδείκνυον, τὴν δὲ ὀξυγωνίου γινομένην εἰς ὀξυγώνιον, φέροντες ἐπὶ ὅλων τῶν κώνων ὁμοίως τὰ ἐπίπεδα καθέτως δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλου τι ἐθεώρησεν, ὅτι ἐν παντὶ κώνῳ καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι κατὰ διάφορον τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον προσβολήν· ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ᾽ αὐτὸν γενόμενοι διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην ἐκάλουν. ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας. ὃ δὲ λέγει, σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν.

ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ τεμνέτω τὸν κῶνον· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΕΖ γωνιῶν. ὀρθογωνίου μὲν ὄντος τοῦ κώνου καὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς δύο ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε παράλληλος ἔσται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ. καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη παραβολὴ οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου.



ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ, δύο ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· τοῦτο δὲ σημαίνεται καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν ἀρχαίων ὀνομάτων τῶν γραμμῶν. Ὕστερα δὲ ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐσκέφθη κάτι τὸ γενικώτερον, ὅτι εἰς πάντα κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνὸν ὅλαι αἱ τομαὶ γίνονται ἀναλόγως τῆς διαφόρου φορᾶς τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον· τὸν ὁποῖον οἱ σύγχρονοί του θαυμάσαντες διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀποδεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων ὠνόμαζον μέγαν γεωμέτρην. Ταῦτα μὲν λοιπὸν ὁ Γεμῖνος ἀναφέρει εἰς τὸ ἕκτον βιβλίον του τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν. Ἐκεῖνο δέ, τὸ ὁποῖον λέγει θὰ τὸ κάμωμεν σαφὲς διὰ τῶν κατωτέρω σχημάτων.

Ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε ἡ ΔΕ καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐπίπεδον προεκβληθὲν ἂς τέμνῃ τὸν κῶνον· εἶναι ἄρα ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΕΔ, ΑΕΖ. Ἐνῷ λοιπὸν εἶναι ὀρθογώνιος ὁ κῶνος καὶ ἡ γωνία δηλαδὴ ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, ὡς εἰς τὸ πρῶτον σχῆμα, θὰ εἶναι αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΕΖ ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς· ὥστε ἡ ΔΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Καὶ γίνεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη παραβολή, κληθεῖσα οὕτω, διότι ἡ ΔΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ

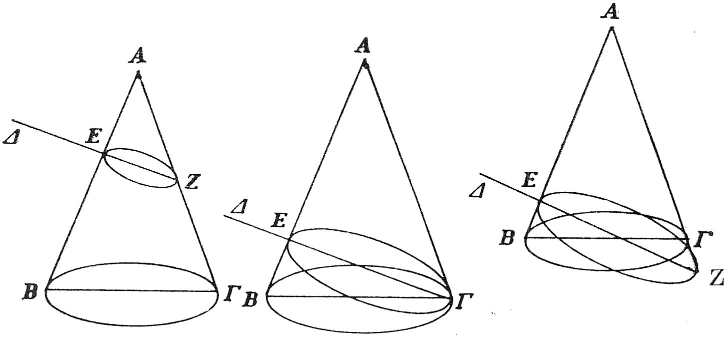


τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου.

Ἐὰν δὲ ὁ κῶνος εἶναι ἀμβλυγώνιος, ὡς εἰς τὸ δεύτερον σχῆμα, ὅπου δηλ. ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἀμβλεῖα, ὀρθὴ δὲ ἡ γωνία ΑΕΖ, θὰ εἶναι αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΕΖ μεγαλύτεραι δύο ὀρθῶν·

πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὸ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν τὰς εἰρημένας γωνίας, τουτέστι τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΒΑΓ, δύο ὀρθὰς ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου καὶ συμπίπτειν τῇ ΓΑ ἐκτός.

ἐὰν δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος ὀξείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσονται δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὥστε αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ὁπουδήποτε· προσαυξῆσαι γὰρ δύναμαι τὸν κῶνον. ἔσται οὖν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ



τομή, ἥτις καλεῖται ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα ἤτοι διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας ἢ διὰ τὸ τὴν ἔλλειψιν κύκλον εἶναι ἐλλιπῆ.

οὕτως μὲν οὖν οἱ παλαιοὶ ὑποθέμενοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τριγώνου καὶ ἔτι διαφόρους τοὺς κώνους ἐθεώρησαν καὶ ἐπὶ ἑκάστου ἰδίαν τομήν· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος τὸν κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνὸν τῇ διαφόρῳ τοῦ ἐπιπέδου κλίσει διαφόρους ἐποίησε τὰς τομάς.

ἔστω γὰρ πάλιν ὡς ἐπὶ τῶν αὐτῶν καταγραφῶν τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ ΚΕΛ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τῆς βάσεως ὥστε ἡ πλευρὰ ΔΕΖ δὲν θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ πρὸς τὰ μέρη τῶν ΖΓ, ἀλλὰ πρὸς τὰ μέρη τῶν Α, Ε, προεκβαλλομένης δηλαδὴ τῆς ΓΑ μέχρι τοῦ Δ. Θὰ σχηματίσῃ λοιπὸν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν, κληθεῖσαν οὕτω, διότι αἱ εἰρημέναι γωνίαι, δηλ. αἱ ΑΕΖ, ΒΑΓ εἶναι μεγαλύτεραι (ὑπερβάλλουσι) τῶν δύο ὀρθῶν, ἢ διότι ἡ ΔΕΖ ἐξέρχεται τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ συναντᾷ τὴν ΓΑ ἐκτός.

Ἐὰν δὲ ὁ κῶνος εἶναι ὀξυγώνιος, εἶναι δηλαδὴ ὀξεῖα ἡ γωνία ΒΑΓ, θὰ εἶναι αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΑΕΖ μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν (τὸ ἄθροισμά των)· ὥστε αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι θὰ συναντηθῶσιν ὁπουδήποτε· διότι δύναμαι νὰ αὐξήσω τὸν κῶνον. Θὰ εἶναι λοιπὸν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομή, ἡ ὁποία καλεῖται ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα, διότι αἱ προειρημέναι γωνίαι εἶναι μικρότεραι τῶν δύο ὀρθῶν, ἢ διότι ἡ ἔλλειψις εἶναι ἐλλιπὴς κύκλος.

Τοιουτοτρόπως λοιπὸν οἱ μὲν παλαιοὶ ὑποθέτοντες τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΔΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου διερχομένου τριγώνου, ἐθεώρησαν διαφόρους τοὺς κώνους καὶ ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου ἰδίαν τομήν· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέτων τὸν κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνόν, ἀναλόγως πρὸς τὴν διάφορον κλίσιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, ἔκαμε διαφόρους τὰς τομάς.

Διότι ἔστω πάλιν, εἰς τὰ αὐτὰ σχήματα, τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ ΚΕΛ, κοινὴ δὲ τομὴ αὐτοῦ καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου *τοῦ κώνου ἡ ΚΖΛ, κοινὴ δὲ πάλιν αὐτοῦ τοῦ ΚΕΛ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΕΖ, ἥτις καὶ διάμετρος καλεῖται τῆς τομῆς. ἐπὶ πασῶν οὖν τῶν τομῶν ὑποτίθεται τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, λοιπὸν δέ, εἰ μὲν ἡ ΕΖ παράλληλος εἴη τῇ ΑΓ, παραβολὴν γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομήν, εἰ δὲ συμπίπτει τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἡ ΕΖ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ὡς κατὰ τὸ Δ, γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ τομὴν ὑπερβολήν, εἰ δὲ ἐντὸς συμπίπτει τῇ ΑΓ ἡ ΕΖ, γίνεσθαι τὴν τομὴν ἔλλειψιν, ἣν καὶ θυρεὸν καλοῦσιν. καθόλου οὖν τῆς μὲν παραβολῆς ἡ διάμετρος παράλληλός ἐστι τῇ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ κώνου μέρη, τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη. κἀκεῖνο δὲ χρὴ εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξανομένων, ἡ δὲ ἔλλειψις οὐκέτι· πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει ὁμοίως τῷ κύκλῳ.*

πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτός φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμην συναγαγεῖν αὐτὰς ἐκ τῶν ἐμπιπτόντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν, ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους ὡς εἰκὸς τρόπους τῶν ἀποδείξεων.

8. *Hero Alexandrinus (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1912) vol. IV p. 156, 22 - 158, 2 :*

Ὡρίσατο ὁ Πλάτων τὴν γεωμετρίαν ... Ἀριστοτέλης ... Ζήνων ... Ἀρχιμήδης Συρακούσιος Δωρίδι φωνῇ, Εὐκλείδης, Ἀπολλώνιος, Εὔδοξος.

ἡ ΚΖΛ, κοινὴ δὲ τομὴ αὐτοῦ τοῦ ΚΕΛ ἐπιπέδου καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΕΖ, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ διάμετρος τῆς τομῆς· Εἰς ὅλας τὰς τομὰς ὑποθέτει τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, κατὰ τὰ λοιπὰ δέ, ἐὰν μὲν ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, γίνεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἡ ΚΕΛ τομὴ παραβολή, ἐὰν δὲ ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν πλευρὰν ΑΓ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ὅπως εἰς τὸ Δ, γίνεται ἡ ΚΕΑ τομὴ ὑπερβολή, ἐὰν δὲ ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΑΓ ἐντὸς γίνεται τομὴ ἡ ἔλλειψις, τὴν ὁποίαν καὶ καλοῦσι θυρεόν. Γενικῶς λοιπὸν τῆς μὲν παραβολῆς ἡ διάμετρος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μίαν πλευράν τοῦ τριγώνου, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συναντᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου πρὸς τὰ μέρη τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συναντᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου πρὸς τὰ πρὸς τὴν βάσιν μέρη. Καὶ ἐκεῖνο δὲ πρέπει νὰ γνωρίζῃ κανείς, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ εἶναι ἐκ τῶν αὐξανομένων εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ δὲ ἔλλειψις ὄχι· διότι ὁλόκληρος συγκλίνει πρὸς τὸν ἑαυτόν της, ὅπως ὁ κύκλος.

Ἐνῷ δὲ ὑπάρχουσι πολλαὶ ἐκδόσεις, ὅπως καὶ ὁ Ἀπολλώνιος λέγει εἰς τὴν ἐπιστολήν, ἐνόμισα καλλίτερον νὰ συναθροίσω αὐτὰς ἐκ τῶν ἐνόντων, παραθέτων τὰ σαφέστερα καθαρά, διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν προτάσεων, εἰς δὲ τὰ συντεταγμένα σχόλια νὰ ἐπισημαίνωνται, ὡς ἑπόμενον, οἱ διάφοροι τρόποι τῶν ἀποδείξεων.

8. Ἥρων Ἀλεξανδρεύς:

Ὁ Πλάτων ὥρισε τὴν γεωμετρίαν . . . ὁ Ἀριστοτέλης . . . Ζήνων . . . ὁ Ἀρχιμήδης ὁ Συρακούσιος γράψας εἰς τὴν Δωρικὴν διάλεκτον, ὁ Εὐκλείδης, ὁ Ἀπολλώνιος, ὁ Εὔδοξος.

9. — — *Lipsiae 1914, vol. V p. 114, 3 - 12 :*

Ὡς δεῖ κόγχην μετρεῖν ἐν τῇ πλίνθῳ, ἧς ἡ διάμετρος τοῦ κενώματος ποδῶν ιη′, οἱ πρωτοσφῆνες ἑκατέρωθεν ἐκ ποδὸς α′· εὑρεῖν τὸ στερεόν. ποίει οὕτως· σύνθες τοὺς τοῦ κενώματος πόδας ιη′ καὶ τοὺς πρωτοσφῆνας τοὺς β′· γίνονται πόδες κ′. ταῦτα ἐφ᾽ ἑαυτά· γίνονται υ′. καὶ πάλιν ἐπὶ τοὺς κ′ γίνονται ͵η′· καὶ ἐγένετο κύβος· ὧν L′ γίνονται ͵δ′, καὶ πάλιν ὧν κα′ γίνονται ρϟ′γ′ζ′· ὁμοῦ γίνονται πόδες ͵δρϟ′γ′ζ′. τοσαύτου ἔσται ἡ σφαῖρα, ὡς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ γ′ τῶν Λογιστικῶν.

10. *Hippolytus, Refutatio omnium haeresium IV (ed. Lud. Dunker – F. G. Schneidewin, Gottingae 1859) p. 66, 51 - 55 :*

Περίμετρος δὲ γῆς σταδίων μ^υ ⟨͵κε′⟩ καὶ φμγ′· ἀπόστημα δὲ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἐπὶ τὸν σεληνιακὸν κύκλον ὁ μὲν Σάμιος Ἀρίσταρχος ἀναγράφει σταδίων . . . ὁ δὲ Ἀπολλώνιος μυριάδ. φ′, ὁ δὲ Ἀρχιμήδης μυριάδ. φνδ′ καὶ μονάδ. δρλ′.

11. *Comparatio dodecaedri et icosaedri. Hypsicles, (Elementorum liber XIV qui fertur) ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1888 vol. V p. 2, 1 - 8, 5 :*

Βασιλείδης ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε ζητοῦντες τὸ ὑπὸ Ἀπολλωνίου

9. — — :

Πῶς πρέπει νὰ μετρῆται ὁ ὄγκος δοχείου ἐκ πλίνθων σχήματος κογχυλίου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος τοῦ κενοῦ μέρους εἶναι 18 πόδες (1 πούς = 0,326 ἕως 0,328 μ.), οἱ ἑκατέρωθεν πρῶτοι σφῆνες 1 πούς ἕκαστος. Κάνε ὡς ἑξῆς· πρόσθεσε τοὺς 18 πόδας τοῦ κενοῦ καὶ τοὺς 2 πόδας τῶν πρώτων σφηνῶν· γίνονται 20. Ταῦτα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν των· γίνονται 400. Καὶ πάλιν ἐπὶ 20· γίνονται 8000· καὶ ἔγινε κύβος· τὸ ἥμισυ τούτου εἶναι 4000. Τὸ 1/21 τοῦ 4000 γίνεται 190 καὶ 1/3 καὶ 1/7. Τὸ ἄθροισμα τοῦ 4000+1/3+1/7 =4190+1/3+1/7. Τόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, συμφώνως πρὸς ὅσα γράφει ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὸ 3ον βιβλίον τῶν Λογιστικῶν του (σημ. Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ σχήματος κογχυλίου (ἀχιβάδας) δοχείου κληθῇ δ, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $δ^3/2\ (1+1/21)$ κατὰ τὸν Ἀπολλώνιον).

10. Ἱππόλυτος, Κατὰ πασῶν αἱρέσεων ἔλεγχος:

Ἡ περίμετρος δὲ τῆς γῆς εἶναι στάδια 250543· τὴν ἀπόστασιν δὲ τῆς γῆς ἀπὸ τοῦ σεληνιακοῦ κύκλου, ὁ μὲν Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος ἀναγράφει σταδίων . . . ὁ δὲ Ἀπολλώνιος 5000000 στάδια, ὁ δὲ Ἀρχιμήδης 5544130 στάδια.

11. Σύγκρισις δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου. Ὑψικλῆς, εἰς τὸ φερόμενον ὡς 14ον βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ὁ Βασιλείδης ὁ καταγόμενος ἐκ Τύρου, ὦ Πρώταρχε, ὅταν ἦτο εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν καὶ συνεστήθη μὲ τὸν πατέρα μου, λόγῳ τῆς συγγενείας πρὸς τὴν ἐπιστήμην ἔμεινε μαζί του τὸν περισσότερον χρόνον τῆς παραμονῆς του. Καὶ κάποτε, ἐνῷ συνε-

συγγραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφηκέναι τὸν Ἀπολλώνιον, αὐτοὶ δὲ ταῦτα καθάραντες ἔγραψαν, ὡς ἦν ἀκούειν τοῦ πατρός· ἐγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ περιέχοντί τινα ἀπόδειξιν περὶ τοῦ προκειμένου, καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ἐπὶ τῇ τοῦ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν οὖν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν· καὶ γὰρ περιφέρεται δοκοῦν ὕστερον γεγράφθαι φιλοπόνως· ὅσα δ' ἐγὼ δοκῶ δεῖν, ὑπομνηματισάμενος ἔκρινα προσφωνῆσαί σοι διὰ μὲν τὴν ἐν ἅπασι τοῖς μαθήμασι, μάλιστα δὲ ἐν γεωμετρίᾳ προκοπὴν ἐμπειρικῶς κρινοῦντι τὰ ῥηθησόμενα, διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν πατέρα συνήθειαν καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν εὐμενῶς ἀκουσομένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη τοῦ μὲν προοιμίου πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι.

Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου πλευρᾶς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἔστω πενταγώνου πλευρὰ ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ΔΕ εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΔΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ζήτουν τὸ συγγραφὲν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ποῖον λόγον ταῦτα ἔχουσι μεταξύ των, ἐνόμισαν, ὅτι ὁ Ἀπολλώνιος δὲν τὰ εἶχε γράψει ὀρθῶς, αὐτοὶ δὲ τὰ ἐδημοσίευσαν διορθώσαντες αὐτά, ὅπως ἔλεγεν ὁ πατήρ μου. Ἐγὼ δὲ κατόπιν εὑρῆκα ἄλλο βιβλίον τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου καὶ μεγάλως ηὐχαριστήθην διὰ τὴν ἔρευναν τοῦ προβλήματος. Τὸ μὲν λοιπὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἀξίζει νὰ ἐξετασθῇ ἀπὸ κοινοῦ· διότι τὸ κυκλοφοροῦν φαίνεται, ὅτι ἐγράφη ὑπ' αὐτοῦ μεταγενεστέρως κατόπιν μετὰ προσοχῆς· ὅσα δὲ ἐγὼ ἐνόμισα πρέπον, ἀφοῦ τὰ ἐσχολίασα ἔκρινα, ὅτι πρέπει ν' ἀπευθυνθῶ πρὸς σέ, διὰ μὲν τὴν πρὸς ὅλα τὰ μαθήματα ἐπίδοσίν σου, μάλιστα δὲ διὰ τὴν πρὸς τὴν γεωμετρίαν πεῖραν σου, καὶ διὰ τὴν πρὸς τὸν πατέρα μου φιλίαν σου καὶ τὴν πρὸς ἐμὲ καλωσύνην σου, νομίζων, ὅτι εὐμενῶς θ' ἀκούσῃς τὴν πραγματείαν. Εἶναι ὥρα δὲ νὰ παύσω τὸ προοίμιον τοῦτο καὶ νὰ ἀρχίσω τὴν ἔκθεσιν τοῦ προβλήματος.

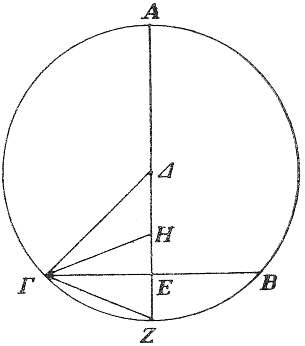
Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου ἀγομένη κάθετος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ ἔστω πλευρὰ τοῦ πενταγώνου ἡ ΒΓ, καὶ ἃς ληφθῇ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν ἐπ' εὐθείας τῆς ΔΕ αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΔΑ. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι τὸ ἥμισυ (τοῦ ἀθροίσματος) τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

Διότι, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, ΓΖ καὶ ἂς ληφθῇ ΕΖ = ΗΕ, *ΗΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς ΒΖΓ περιφερείας, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΓΖ, τῆς δὲ ΒΖΓ ἡμίσεια ἡ ΖΓ, καὶ ἡ ΑΓΖ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ΖΓ περιφερείας. τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΖΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΖΔΓ γωνίαν. τετραπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΖΔΓ. διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ. ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΓ. ἀλλὰ ἡ ΗΓ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΖΓ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΗΕ τῇ ΕΖ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΕ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΕ. συναμφότερος ἄρα ἡ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ΔΕ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, ἡ δὲ ΖΓ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου· ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.*

φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ ἐν τῷ ιγʹ βιβλίῳ θεωρήματος, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ τῶν $\bar{\varepsilon}$ σχημάτων συγκρίσει, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Η ἂς ἀχθῇ πρὸς τὸ Γ ἡ ΗΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι πενταπλασία τοῦ τόξου ΒΖΓ, καὶ εἶναι τὸ μὲν τόξον ΑΓΖ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης περιφερείας, τοῦ δὲ τόξου ΒΖΓ εἶναι ἥμισυ τὸ τόξον ΖΓ, εἶναι ἄρα καὶ τὸ τόξον ΑΓΖ πενταπλάσιον τοῦ τόξου ΖΓ. Εἶναι ἄρα τὸ τόξον ΑΓ $=4$ τόξ. ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ τόξ. ΑΓ : τόξ. ΖΓ $=$ γων. ΑΔΓ: γων. ΖΔΓ (Εὐκλ. 6, 33). Εἶναι ἄρα γων. ΑΔΓ $=4$ γων. ΖΔΓ. Εἶναι δὲ γων. ΑΔΓ $=$ 2 γων. ΕΖΓ (Εὐκλ. 3, 20)· εἶναι ἄρα καὶ γων. ΕΖΓ $=2$ γων. ΗΔΓ. Εἶναι δὲ καὶ γων. ΕΖΓ $=$ γων. ΕΗΓ (Εὐκλ. 1, 4). Εἶναι ἄρα γων. ΕΗΓ $=$ γων. 2 ΗΔΓ. Εἶναι ἄρα ἡ ΔΗ $=$ ΗΓ (Εὐκλ. 1, 32 . 1,6). Ἀλλὰ ἡ ΗΓ $=$ ΖΓ (Εὐκλ. 1,4). Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΔΗ $=$ ΖΓ. Εἶναι δὲ ἡ ΗΕ $=$ ΕΖ. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΔΕ $=$ ΕΖ $+$ ΖΓ. Ἂς προστεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέλη ἡ ΔΕ. Εἶναι ἄρα ΔΖ $+$ ΖΓ $=2$ΔΕ. Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΔΖ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΖΓ ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δεκαγώνου· εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.



Ἀλλὰ εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ (12) θεωρήματος τοῦ 13ου βιβλίου τῶν Στοιχείων, ὅτι ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ (ἐγγεγραμμένου) ἰσοπλεύρου τριγώνου κάθετος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Τοῦτο δὲ ἀποδεικνύεται ὑπὸ μὲν τοῦ Ἀρισταίου (τοῦ πρεσβυτέρου) εἰς τὸ βιβλίον του τὸ ἐπιγραφόμενον σύγκρισις τῶν πέντε σχημάτων (πολυέδρων), ὑπὸ δὲ τοῦ Ἀπολλωνίου εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τῆς πραγματείας του σύγκρισις τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου *οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον διὰ τὸ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον.*

12. *Ioannes Philoponos, in Analyt. post. 17 (Arist. p. 75 b 12, 17) C. A. G. vol. 13, 3, ed. Max. Wallies, Berolini 1909, p. 105 :*

Τοῦ μέντοι Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου ἐστὶν εἰς τοῦτο ἀπόδειξις, ὡς Παρμενίων φησίν, ἣν καὶ ἐκθήσομεν ἔχουσαν οὕτως·

δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων δύο μέσας ἀναλόγους εὑρεῖν.

ἔστωσαν δὲ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἤχθω ἡ ΑΓ, καὶ περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΕΓ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΑ καὶ ΒΓ ἐπ᾽ εὐθείας κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ διὰ τοῦ Δ σημείου οὕτως, ὥστε τὴν ΖΔ ἴσην εἶναι τῇ ΕΗ· τοῦτο δὲ ὡς αἴτημα λαμβάνεται ἀναπόδεικτον. φανερὸν δή, ὅτι καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΔΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΔΓ εἴληπται σημεῖον ἐκτὸς τὸ Ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΕ προσπίπτουσαι τέμνουσι τὸν κύκλον κατὰ τὰ Α, Δ σημεῖα, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗ, ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΗ, ΗΕ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΗ, ΗΕ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΔ· ἴσαι γάρ εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΔΗ, ἡ δὲ ΖΔ τῇ ΕΗ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΖΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΗ, ΗΓ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἥ τε ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΗ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων.

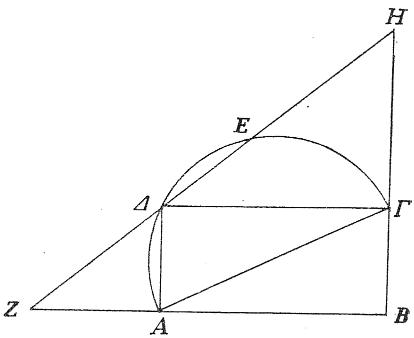
ὅπως τοῦ δωδεκαέδρου (ὄγκος) πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, διότι εἶναι ἡ αὐτὴ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου.

12. Ἰωάννης Φιλόπονος, εἰς σχόλια Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων τοῦ Ἀριστοτέλους:

Τοῦτο λοιπόν, ὡς λέγει ὁ μαθηματικὸς Παρμενίων, εἶναι ἀπόδειξις τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, τὴν ὁποίαν καὶ θὰ ἐκθέσωμεν ἔχουσαν ὡς ἑξῆς:

Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν ἀνίσων νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι ἀνάλογοι.

Ἔστωσαν δὲ αἱ δύο δοθεῖσαι ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἂς ληφθῶσιν, ὥστε νὰ περιέχωσιν ὀρθὴν γωνίαν τὴν ΑΒΓ, καὶ ἂς συμπληρωθῇ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ἡ ΑΓ καὶ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΕΓ, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ ΒΑ, καὶ ΒΓ ἐπ' εὐθείας μέχρι τῶν σημείων Ζ, Η, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ διὰ τοῦ σημείου Δ, οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΖΔ = ΕΗ· τοῦτο δὲ ὡς αἴτημα λαμβάνεται ἀναπόδεικτον. Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ΖΕ = ΔΗ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸν κύκλον ΑΔΓ ἐλήφθη ἐκτὸς τὸ σημεῖον Ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ δύο εὐθεῖαι προσπίπτουσαι αἱ ΖΒ, ΖΕ τέμνουσι τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Α, Δ, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΒΖ x ΖΑ = ὀρθογώνιον ΕΖ x ΖΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ΒΗ x ΗΓ = ΔΗ x ΗΕ. Εἶναι δὲ τὸ ΔΗ x ΗΕ = ΕΖ x ΖΔ· διότι εἶναι ἴσαι ἑκατέρα πρὸς ἑκατέραν, ἡ μὲν ΖΕ = ΔΗ, ἡ δὲ ΖΔ = ΕΗ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΒΖ x ΖΑ = ΒΗ x ΗΓ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΖΒ : ΒΗ = ΗΓ:ΖΑ. Ἀλλὰ ὡς ἡ ΖΒ:ΒΗ = ΖΑ : ΑΔ =



ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΓ, ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΓ, οὕτως ἥ τε ΗΓ πρὸς τὴν ΖΑ καὶ ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΒΓ. αἱ τέσσαρες ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΗΓ, ΖΑ, ΒΓ ἐφεξῆς ἀνάλογόν εἰσι [καὶ διὰ τοῦτο ἔσται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΓ. εἰ οὖν διπλασίων ὑποτεθείη ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος διπλασίων τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ].

13. *Leontios Scholastikos Minotauros ἢ Λέοντος φιλοσόφου Anthologia Graeca IX 578 (ed. H. Beckby, München 1958) p. 352 :*

Εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου.

Ὧν ἥδε βίβλος ἔνδον ὠδίνω, φίλε,
βαθὺς χαρακτὴρ καὶ περισκελὴς ἄγαν·
δεῖται κολυμβητοῦ δὲ πάντως Δηλίου.
εἰ δ' αὖ κυβιστήσει τις εἰς ἐμοὺς μυχοὺς
καὶ πᾶν μεταλλεύσειεν ἀκριβῶς βάθος,
γεωμετρῶν τὰ πρῶτα λήψεται γέρα,
σοφὸς δ' ἀναμφίλεκτος εἰσκριθήσεται.
τούτων δὲ μάρτυς ἐγγυητής τε Πλάτων.

14. *Marinus comm. in Euclidis Data (Eucl. op. omn. vol. VI, ed. H. Menge, Lipsiae 1896) p. 234, 13 - 17 :*

διὸ τῶν ἁπλούστερον καὶ μιᾷ τινι διαφορᾷ περιγράφειν τὸ δεδομένον προθεμένων οἱ μὲν τεταγμένον, ὡς Ἀπολλώνιος

ΔΓ:ΓΗ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. Εἶναι δὲ ἡ μὲν ΔΓ = ΑΒ, ἡ δὲ ΑΔ = ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ:ΓΗ = ΖΑ:ΑΔ. Ἦτο δὲ καί, ὡς ἡ ΖΒ:ΒΗ = ΑΒ:ΗΓ = ΗΓ:ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ:ΗΓ = ΗΓ:ΖΑ = ΖΑ:ΒΓ. Αἱ τέσσαρες ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΗΓ, ΖΑ, ΒΓ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ [καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ: ΒΓ = $ΑΒ^3$:$ΗΓ^3$. Ἐὰν λοιπὸν ὑποτεθῇ, ὅτι εἶναι ΑΒ = 2ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ $ΑΒ^3$ = $2ΗΓ^3$].

13. Λέοντος φιλοσόφου (Ἀνθολογία Ἑλλ. (Παλατίνη)).
Εἰς τὰ Κωνικὰ Ἀπολλωνίου.

Ἀπεριόριστον βάθος καὶ μεγάλην δυσκολίαν ἔχει, φίλε, τὸ βιβλίον αὐτὸ μὲ τὸ ὁποῖον βασανίζομαι· πάντως ἔχει ἀνάγκην (διὰ τὴν κατανόησιν) Δηλίου κολυμβητοῦ.

Ἐὰν δὲ κανεὶς θέλῃ νὰ διεισδύσῃ εἰς τὰ βάθη τῆς ψυχῆς μου καὶ νὰ μελετήσῃ αὐτὰ καθ' ὅλον τὸ βάθος, θὰ λάβῃ τὸ πρῶτον βραβεῖον τῆς γεωμετρίας, θὰ ἀναγνωρισθῇ δὲ ἀναμφισβήτητος σοφός.

Τούτων δὲ ὁ ἴδιος ὁ Πλάτων εἶναι μάρτυς καὶ ἐγγυητής.

14. Μαρῖνος, Σχόλια εἰς τὰ Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου:

Διὸ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ἐσκόπευον νὰ γράψωσιν ἁπλούστερον καὶ μὲ κάποιαν διαφορὰν τὸ δεδομένον (τὴν ἔννοιαν δηλ. δεδομένον), οἱ μὲν τὸ ὀνομάζουσι τεταγμένον, ὡς ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ νεύσεων καὶ εἰς τὴν Γενικήν του *ἐν τῷ περὶ νεύσεων καὶ ἐν τῇ καθόλου πραγματείᾳ, οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος.*

15. Pappus Alexandrinus (ed. Fridericus Hultsch, Berolini 1876 - 1878) I, 1 p. 2,1 — 24,30.

** γὰρ αὐτοὺς ἐλάσσονας μὲν εἶναι ἑκατοντάδος μετρεῖσθαι δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς.*

Ἔστωσαν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ν' ν' ν' μ' μ' λ'· ἔσονται ἄρα οἱ πυθμένες ε' ε' ε' δ' δ' γ'· ὁ ἄρα ἐξ αὐτῶν στερεὸς γίνεται μονάδων ͵ς. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων ἐστὶν ς' καὶ μετρούμενον ὑπὸ τετράδος λείπει δύο, ἔσται ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς [τῶν δεκάδων] μυριάδων ἁπλῶν ἑκατόν. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν δεκάδων στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν πυθμένων στερεὸν ποιεῖ τὸν ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς στερεόν, αἱ ἄρα μυριάδες ρ' ἐπὶ τὰς μονάδας ͵ς γενόμεναι ποιοῦσιν μυριάδας ξ' διπλᾶς, ὥστε ὁ ἐκ τῶν ν' ν' ν' μ' μ' λ' στερεός ἐστιν μυριάδων ξ' διπλῶν.

ιε'. Ἔστωσαν δὴ πάλιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐφ' ὧν τὰ Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρείσθω δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα τοὺς ἀριθμούς.

Γεγονέτω, καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους αὐτῶν μετρείσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος, καὶ ὑποκείσθω ὑπὸ ἕκαστον τῶν Β ἑκατοντὰς ἡ α', καὶ καθὸ μετρεῖται ἕκαστος τῶν Β ὑπὸ τῆς ἑκατοντάδος ἔστωσαν οἱ ἐφ' ὧν τὰ Γ· πυθμένες ἄρα πραγματείαν, οἱ ἄλλοι δὲ γράφουσι τοῦτο γνώριμον, ὅπως ὁ Διόδωρος.

15. Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς (ἔκδ. Fr. Hultsch, τόμοι 3, Βερολῖνον 1876 - 1878, τόμ. I) σελ. 2, 1 - 24, 30.

...νὰ εἶναι μὲν μικρότεροι ἑκατοντάδος νὰ διαιρῶνται δὲ διὰ δέκα, καὶ ἔστω, ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν χωρὶς νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Ἔστωσαν λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ 50 50 50 40 40 30· θὰ εἶναι οἱ πυθμένες 5 5 5 4 4 3· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν πυθμένων εἶναι 6000. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων εἶναι 6 καὶ διαιρούμενον διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον 2, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν [τῶν δοθεισῶν δεκάδων] ἁπλαῖ μυριάδες ἑκατὸν ($=100 \cdot 10000^1$). (σημ. μυριὰς ἁπλῆ $=10.000^1$, μυριὰς διπλῆ $=10.000^2$, μυριὰς τριπλῆ $=10.000^3$ ... κ.λπ.). Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν πυθμένων δίδει τὸ ζητούμενον ἀρχικὸν γινόμενον, θὰ εἶναι ἄρα $100 \cdot 10000^1 \cdot 6000 = 60$ μυριάδες διπλαῖ ($=60 \cdot 10000^2$). Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $60 \cdot 10000^2$ (=ἑξήκοντα μυριάδες διπλαῖ).

15. Ἔστωσαν πάλιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ παριστώμενοι δι' εὐθειῶν, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων εἶναι τὸ γράμμα Β, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι μικρότερος τοῦ 1000, νὰ διαιρῆται ὅμως διὰ τοῦ 100, καὶ ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν χωρὶς νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Ἂς γίνῃ, καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους αὐτῶν ἂς διαιρῆται πρῶτον διὰ 4, καὶ ἂς εἶναι κάτω ἀπὸ ἑκάστην εὐθεῖαν Β ἡ πρώτη ἑκατοντὰς (κατόπιν ἡ δευτέρα κ.λπ.) καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἱ διαιροῦντες ἕκαστον τῶν Β, ἔστωσαν οἱ ἐφ' ὧν τὰ γράμματα Γ· πυθμένες *εἰσὶν οἱ ἐφ᾽ ὧν τὰ Γ τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β. ὁ δὲ διὰ τῶν πυθμένων στερεὸς ἔστω ὁ Ε [τουτέστιν μονάδες ρκ′]. δείκνυται οὖν διὰ τῶν γραμμῶν ὁ διὰ τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β στερεὸς μυριάδων διπλῶν ρκ′, ἐπειδὴ καὶ ὁ διὰ τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β στερεὸς ἴσος ἐστὶν τῷ διὰ τῶν ἑκατοντάδων στερεῷ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν πυθμένων στερεόν, τουτέστιν διπλῆ μυριὰς α′ ἐπὶ τὰς ρκ′ μονάδας.*

᾿Αλλ᾽ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β μὴ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος· μετρούμενος ἄρα λείψει δυάδα ἐξ ἀνάγκης (τοῦτο γὰρ προδέδεικται), ὥστε καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἑκατοντάδων μετρούμενος ὑπὸ τετράδος· τὸ ἄρα πλῆθος τῶν ἑκατοντάδων μετρούμενον ὑπὸ δυάδος λείψει μίαν ἑκατοντάδα. ὁ τοίνυν διὰ τῶν ἑκατοντάδων στερεὸς ἔσται μυριάδων ρ′ ὁμωνύμων τῷ Ζ, τουτέστι διπλῶν, ὥστε δῆλον ὅτι ὁ διὰ τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β μυριάδες εἰσὶν ρ′ ὁμώνυμοι τῷ Ζ γενόμεναι ἐπὶ τὸν Ε [τὰς ρκ′ μονάδας]. γίνονται μυριὰς μία δισχίλιαι διπλῶν μυριάδων.

ις′. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, καὶ ὁ μὲν Α ὑποκείσθω ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, οἷον μονάδες φ′, ὁ δὲ Β ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, οἷον μονάδες μ′, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς.

Ἔστι δὲ φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν· οἱ γὰρ ε′ δ′ πυθμένες αὐτῶν ὄντες [μο. ε′ καὶ μο. δ′] πολλαπλασιασθέντες ποιοῦσι μονάδας κ′, χιλιάκις δὲ ὁ κ′ ἀριθμὸς ποιεῖ μυριάδας δύο ποιούσας τὸν ὑπὸ τῶν Α Β γινόμενον. τὸ δὲ γραμμικὸν δῆλον ἐξ ὧν ἔδειξεν ᾿Απολλώνιος.

εἶναι ἄρα οἱ ἀριθμοὶ ἐφ' ὧν (εὐθειῶν) τὰ γράμματα Γ, τῶν ἀριθμῶν τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν τὰ γράμματα Β. (π. χ. :

ἀριθμοὶ	Β	Β	Β	Β	Β
πυθμένες	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ
ἔστω τὰ Β	200	300	400	500	. . .
ἔστω τὰ Γ	2	3	4	5	. .)

Τὸ γινόμενον τῶν πυθμένων ἔστω Γ.Γ.Γ... =Ε [δηλ. 120]. Διότι ἔχει ἀποδειχθῇ γεωμετρικῶς, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν Β= $120 \cdot 10000^2$, ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον τῶν Β (ἀριθμητικῶς) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πυθμένων, δηλ. $120 \cdot 10000^2$.

'Αλλ' ἔστω τώρα, ὅτι ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Β δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4· ἑπομένως, ἐὰν γίνῃ ἡ διαίρεσις θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 2 κατ' ἀνάγκην (διότι τοῦτο ἔχει προαποδειχθῇ), ὥστε καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἑκατοντάδων διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 2· τὸ πλῆθος ἄρα τῶν ἑκατοντάδων $= 4Z+2$· τὸ πλῆθος ἄρα τῶν ἑκατοντάδων διαιρούμενον διὰ 2 $= 2Z+1$. Τὸ γινόμενον ἄρα τῶν ἑκατοντάδων εἶναι 100 μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὰς Ζ, δηλαδὴ διπλαῖ, ὥστε εἶναι φανερὸν τὸ γινόμενον τῶν μυριάδων, ὅπου τὰ γράμματα Β εἶναι 100 ὁμώνυμοι πρὸς τὰς μυριάδας Ζ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν πυθμένων Ε (2.3.4.5. =120 μονάδες). Τὸ τελικὸν γινόμενον ἄρα εἶναι $100 \cdot 10000^2 \cdot E = 100 \cdot 10000^2 \cdot 120 = 12000 \cdot 10000^2$, $[= (10000 + 2000) \cdot 10000^2]$.

16. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ ὁ μὲν Α ἔστω μικρότερος τοῦ 1000 διαιρούμενος ὅμως διὰ 100, ἔστω ὁ 500, ὁ δὲ Β μικρότερος μὲν τοῦ 100 διαιρούμενος ὅμως διὰ 10 ἔστω ὁ 40, καὶ ὅτι πρέπει νὰ εἴπωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν χωρὶς νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Εἶναι δὲ φανερὸν τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἀριθμῶν· διότι, ἀφοῦ οἱ πυθμένες αὐτῶν εἶναι 5 4, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι 20, ἐπὶ 1000 δὲ οὗτος δίδει μυριάδας 2=Α·Β. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις αὐτῶν ἔγινεν ἀπὸ τὸν 'Απολλώνιον.

ιζ′. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιη′ θεωρήματος. Ἔστω πλῆθος ἀριθμῶν τὸ ἐφ᾽ ὧν τὰ Α, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλο πλῆθος ἀριθμῶν τὸ ἐφ᾽ ὧν τὰ Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς.

Ἔστωσαν γὰρ πυθμένες τῶν μὲν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α οἱ ἐφ᾽ ὧν τὰ Η, μονάδες α′ καὶ β′ καὶ γ′ καὶ δ′, τῶν δὲ ἐφ᾽ ὧν τὰ Β οἱ ἐφ᾽ ὧν τὰ Θ, μονάδες β′ καὶ γ′ καὶ δ′ καὶ ε′, καὶ ληφθέντος τοῦ ἐκ τῶν πυθμένων στερεοῦ [τῶν β′ γ′ δ′ β′ γ′ δ′ ε′], τουτέστιν τοῦ Ε, μονάδων ὄντος ͵βωπ′, τὸ πλῆθος τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α προσλαβὸν τὸν διπλασίονα τοῦ πλήθους τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β μετρείσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος [κατὰ τὸν Ζ, μετρεῖ δὲ αὐτούς]. καὶ δείκνυσιν ὁ Ἀπολλώνιος τὸν ἐκ πάντων τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β στερεὸν μυριάδων τοσούτων, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ὁμωνύμων τῷ Ζ ἀριθμῷ, τουτέστιν τριπλῶν μυριάδων ͵βωπ′. [μία γὰρ μυριὰς ὁμώνυμος τῷ Ζ, τουτέστιν τριπλῆ, ἐπὶ τὸν Ε, τουτέστιν τὰ ͵βωπ′, γενομένη ποιεῖ τὸν ἐκ τῶν στερεῶν ἀριθμὸν τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ἀριθμῶν στερεὸς τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ὁμώνυμοι τῷ Ζ ἀριθμῷ].

Ἀλλὰ δὴ τὸ πλῆθος τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α, προσλαβὸν τὸν διπλασίονα τοῦ πλήθους τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β, μετρούμενον ὑπὸ τετράδος καταλειπέτω πρότερον ἕνα. καὶ συνάγει ὁ Ἀπολλώνιος ὅτι ὁ ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β στερεὸς

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

17. Ἐπὶ τοῦ 18ου θεωρήματος (σημ. ὡς φαίνεται, εἶναι σχόλια ἐπὶ τοῦ 18ου θεωρήματος τῆς ἀπολεσθείσης πραγματείας τοῦ Ἀπολλωνίου).

Ἔστω πλῆθος ἀριθμῶν, τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν, ὅπου τὰ γράμματα Α, ἕκαστος μικρότερος μὲν τοῦ 100, διαιρούμενος ὅμως διὰ 10, καὶ ἄλλο πλῆθος ἀριθμῶν, ὅπου τὰ γράμματα Β, τῶν ὁποίων ἕκαστος μικρότερος μὲν τοῦ 1000 διαιρούμενος ὅμως διὰ 100, καὶ ὅτι ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν χωρὶς νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Διότι ἔστωσαν πυθμένες τῶν μὲν ἀριθμῶν τῶν παριστωμένων διὰ τῶν εὐθειῶν Α οἱ ἀριθμοὶ τῶν εὐθειῶν ἐφ' ὧν τὰ γράμματα Η, ἤτοι μονάδες (πυθμένες) 1 2 3 4 τῶν δὲ ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τῶν ὁποίων εἶναι τὰ γράμματα Β, οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν, ὅπου τὰ γράμματα Θ, μονάδες 2 3 4 5, καὶ ἀφοῦ ληφθῇ τὸ γινόμενον τῶν πυθμένων $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = E = 2880$, τὸ πλῆθος τῶν Α + τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Β, ἂς διαιρῆται πρῶτον διὰ τοῦ 4 (ἔστω μὲ πηλίκον τὸν Ζ). Καὶ ἀποδεικνύει ὁ Ἀπολλώνιος, ὅτι τὸ γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν παραγόντων Α, Β εἶναι τόσαι μυριάδες, ὅσαι μονάδες ὑπάρχουσιν εἰς τὸν Ε, ὁμώνυμοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, τουτέστιν τριπλῶν μυριάδων 2880 (διότι μία μυριὰς ὁμώνυμος πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, τουτέστι τριπλῆ ($=10000^3$), ἐπὶ τὸν Ε, τουτέστιν τὰ 2880, δίδει γινόμενον τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν Α, Β· τὸ γινόμενον ἄρα τῶν ἀριθμῶν Α, Β εἶναι τόσαι μυριάδες ὅσαι μονάδες εἶναι ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Ζ (ἤτοι $2880 \cdot 10000^3$).

Ἀλλ' ἔστω ὅτι τὸ πλῆθος τῶν Α σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Β, διαιρούμενον διὰ 4 ἀφήνει ὑπόλοιπον 1. Καὶ συμπεραίνει ὁ Ἀπολλώνιος, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν Α, Β *μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ δεκαπλασίων τοῦ Ε, ἐὰν δὲ τὸ προειρημένον πλῆθος μετρούμενον ὑπὸ τετράδος καταλείπῃ δύο, ὁ ἐκ τῶν ἀριθμῶν στερεὸς τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Ε ἀριθμοῦ, ὅταν δὲ τρεῖς καταλειφθῶσιν, ἴσος ἐστὶν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς μυριάσιν τοσαύταις ὁμωνύμοις τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Ε ἀριθμοῦ.*

ιη'. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιθ' θεωρήματος. Ἔστω τις ἀριθμὸς ὁ Α ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλοι ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐλάσσονες δεκάδος οἷον οἱ Β Γ Δ Ε, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸν εἰπεῖν.

Ἔστω γὰρ καθ' ὃν μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῆς δεκάδος ὁ Ζ, τουτέστιν ὁ πυθμὴν τοῦ Α, καὶ εἰλήφθω ὁ ἐκ τῶν Ζ Β Γ Δ Ε στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Η· λέγω ὅτι ὁ διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς δεκάκις εἰσὶν οἱ Η.

Καὶ ἔστι φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν· τοῦ γὰρ Α ὑποκειμένου, φέρ' εἰπεῖν, μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων γ' καὶ τοῦ Γ μονάδων δ' καὶ τοῦ Δ μονάδων ε' καὶ τοῦ Ε μονάδων ϛ', ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς γίνεται μονάδες ͵ζσ'. ἀλλὰ καὶ τοῦ Ζ ὄντος μονάδων β', ὅς ἐστι πυθμὴν τοῦ Α, ὁ ἐκ τούτου καὶ τῶν Β Γ Δ Ε στερεὸς δεκάκις γενόμενος ἔσται μονάδες ͵ζσ', ἴσος τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ, τὸ δὲ γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται.

ιθ'. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, ὧν ἑκάτερος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, τῶν δὲ Γ Δ Ε ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος ἔστω, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸν εἰπεῖν.

εἶναι τόσαι μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Ζ, ὅσος εἶναι ὁ δεκαπλάσιος τοῦ Ε, ἐὰν δὲ τὸ προλεχθὲν πλῆθος διαιρούμενον διὰ τοῦ 4 δίδῃ ὑπόλοιπον 2, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν Α, Β εἶναι τόσαι μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Ζ, ὅσος εἶναι ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ Ε, ὅταν δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 3, τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ἴσον πρὸς τόσας μυριάδας ὁμωνύμους πρὸς τὸ Ζ, ὅσος εἶναι ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ Ε.

18. Ἐπὶ δὲ τοῦ 19 θεωρήματος. Ἔστω ἀριθμός τις Α μικρότερος μὲν τοῦ 100 διαιρούμενος δὲ διὰ 10, καὶ ἄλλοι ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 10, ὅπως οἱ Β, Γ, Δ, Ε καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν Α·Β·Γ·Δ·Ε.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Ζ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ τοῦ 10, δηλ. ὁ πυθμὴν τοῦ Α, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ γινόμενον Ζ·Β·Γ·Δ·Ε = Η· λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ὁ 10Η.

Καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀριθμῶν· διότι ἔστω, ὅτι ὁ Α = 20 καὶ ὁ Β = 3, ὁ Γ = 4, ὁ Δ = 5 καὶ ὁ Ε = 6, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνεται 7200. Ἀλλὰ καὶ Ζ = 2, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ πυθμὴν τοῦ Α, ὁπότε 2·10·Β·Γ·Δ·Ε = 7200 = Α·Β·Γ·Δ·Ε. Τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τούτου ἔδωσεν ὁ Ἀπολλώνιος.

19. Ἔστωσαν τώρα δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 100 διαιρεῖται δὲ διὰ τοῦ 10 καὶ οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, Ε ἕκαστος μικρότερος τοῦ 10, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν Α·Β·Γ·Δ·Ε.

Ἔστωσαν γὰρ τῶν Α Β πυθμένες οἱ Ζ Η· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς τοῦ ἐκ τῶν Ζ Η Γ Δ Ε στερεοῦ ἑκατονταπλάσιός ἐστιν.

Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος μονάδων κʹ καὶ τοῦ Β μονάδων λʹ καὶ τοῦ Γ μονάδων βʹ καὶ τοῦ Δ μονάδων γʹ καὶ τοῦ Ε μονάδων δʹ καὶ τοῦ Ζ μονάδων βʹ καὶ τοῦ Η μονάδων γʹ· ὁ γὰρ ὑπὸ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεός ἐστιν μ^{α} ͵δυʹ, ὁ δὲ ὑπὸ Ζ Η Γ Δ Ε μονάδες ρμδʹ, οὗτος δὲ γενόμενος ἑκατοντάκις ποιεῖ μ^{α} ͵δυʹ. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου.

κʹ. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ, καὶ ἔστω ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Δ Ε Ζ ἔστω ἐλάσσων δεκάδος, καὶ ἔστωσαν τῶν Α Β Γ πυθμένες οἱ Η Θ Κ, καὶ εἰλήφθω ὁ ἐκ τῶν Η Θ Κ Δ Ε Ζ στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Ξ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ στερεὸς ἴσος ἐστὶν χιλίοις τοῖς Ξ.

Ἔστι φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος λόγου χάριν μονάδων κʹ καὶ τοῦ Β μονάδων λʹ καὶ τοῦ Γ μονάδων μʹ καὶ τοῦ Δ μονάδων βʹ καὶ τοῦ Ε μονάδων γʹ καὶ τοῦ Ζ μονάδων δʹ, τοῦ δὲ Η μονάδων βʹ καὶ τοῦ Θ μονάδων γʹ καὶ τοῦ Κ μονάδων δʹ· ὁ γὰρ ὑπὸ Α Β Γ Δ Ε Ζ στερεός ἐστιν μυριάδων νζʹ ἁπλῶν καὶ μονάδων ͵ς, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Η Θ Κ πυθμένων καὶ τῶν Δ Ε Ζ ἔσται μονάδων φοςʹ, αὗται δὲ χιλιάκις γενόμεναι, τουτέστιν ὁ ἐκ πάντων στερεός, γίνεται μυριάδων ἁπλῶν νζʹ καὶ μονάδων ͵ς.

καʹ. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν πλείους τριῶν οἱ Α Β Γ Δ Ε, καὶ ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, τῶν δὲ Ζ Η Θ ἕκαστος ἔστω ἐλάσσων δεκάδος.

Τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ Ε πρότερον μετρείσθω ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Ο, καὶ ἔστωσαν τῶν Α Β Γ Δ Ε πυθμένες οἱ Κ Λ Μ Ν Ξ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ στερεὸς

Ἔστωσαν πυθμένες τῶν Α, Β οἱ Ζ, Η· λέγω, ὅτι ὁ $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = 100 \cdot Z \cdot H \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E$.

Διότι καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὅπου ἔστω τὸ $A = 20$, $B = 30$, $\Gamma = 2$, $\Delta = 3$, καὶ $E = 4$ καὶ $Z = 2$, καὶ τοῦ $H = 3$· διότι τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E$ εἶναι = μία μυριάς, καὶ $4400 = 14400$, τὸ δὲ γινόμενον $Z \cdot H \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = 144$, τὸ ὁποῖον ἐπὶ $100 = 14400$. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις αὐτοῦ ἔγινεν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου.

20. Ἀλλὰ τώρα ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἔστω ἕκαστος αὐτῶν μικρότερος μὲν τοῦ 100, διαιρούμενος δὲ διὰ 10, ἕκαστος δὲ τῶν Δ, Ε, Ζ ἔστω μικρότερος τοῦ 10, καὶ ἔστωσαν πυθμένες τῶν Α, Β, Γ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ ἂς ληφθῇ τὸ γινόμενον $H \cdot \Theta \cdot K \cdot \Delta \cdot E \cdot Z = \Xi$· Τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E \cdot Z = 1000\ \Xi$.

Τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὅταν π. χ. ὁ $A = 20$, $B = 30$, $\Gamma = 40$, $\Delta = 2$, $E = 3$, $Z = 4$, $H = 2$, $\Theta = 3$, $K = 4$· διότι τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E \cdot Z = 576000$, τὸ δὲ γινόμενον τῶν πυθμένων $H \cdot \Theta \cdot K \cdot \Delta \cdot E \cdot Z = 576$, τοῦτο δὲ ἐπὶ 1000, δηλ. τὸ τελικὸν γινόμενον $= 576000$.

21. Ἀλλὰ τώρα ἔστωσαν περισσότεροι τῶν τριῶν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ ἕκαστος αὐτῶν μικρότερος μὲν τοῦ 100, διαιρούμενος δὲ διὰ 10, τῶν δὲ Ζ, Η, Θ ἕκαστος μικρότερος τοῦ 10.

Ἔστω πρῶτον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε διαιρούμενον ἀκριβῶς διὰ 4 μὲ πηλίκον τὸν Ο, καὶ ἔστωσαν πυθμένες τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε οἱ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot Z \cdot H \cdot \Theta =$ μὲ Ο ὁμωνύμους μυριάδας τόσας, ὅσαι μο-

ἴσος ἐστὶν μυριάσιν ὁμωνύμοις τῷ Ο ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ στερεῷ τῷ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ.

Ἔστι δὲ φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὑποκειμένου λόγου χάριν μονάδων ι' καὶ τοῦ Β μονάδων κ' καὶ τοῦ Γ μονάδων λ' καὶ τοῦ Δ μονάδων μ', καὶ τῶν Κ Λ Μ Ν πυθμένων ὄντων μονάδων α' καὶ β' καὶ γ' καὶ δ'· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεός ἐστιν ἁπλῶν μυριάδων κδ', ὁ δὲ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ μυριάδων ἁπλῶν ρμδ', ὁ δὲ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν πυθμένων μονάδων κδ'· οὗτος δὲ γενόμενος ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ, ὄντα μονάδων ϛ', ποιεῖ μονάδας ρμδ', ὅσαι μυριάδες ἁπλαῖ εἰσιν τοῦ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τετράδα ἅπαξ μετρεῖν τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ Ε μὴ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος· μετρούμενον δὴ ἤτοι α' ἢ β' ἢ γ' λείψει. εἰ μὲν οὖν ἕνα λείψει, ἔσται ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδων ὁμωνύμων τῷ Ο, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν Ξ στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ γενόμενος δεκάκις, εἰ δὲ δύο λείψει, ἑκατοντάκις [γενόμενος ὁ εἰρημένος στερεός]. εἰ δὲ τρεῖς λείψει, ὅσων ὁ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν Ξ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ χιλιάκις γενόμενος ἔσται μονάδων, τοσούτων μυριάδων ὁμωνύμων τῷ Ο. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τοῦ στοιχείου δῆλον.

κβ'. Ἔστω ὁ μὲν Α ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Β Γ Δ ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεὸν εἰπεῖν.

Κείσθω γὰρ τοῦ μὲν Α πυθμὴν ὁ Ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν Ε Β Γ Δ ὁ Ζ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεὸς ἑκατοντάκις ἐστὶν ὁ Ζ.

Φανερὸν δὲ καὶ διὰ τοῦτο διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὑποκειμένου, φέρ' εἰπεῖν, μονάδων τ' καὶ τοῦ Β μονάδων γ' καὶ τοῦ Γ μονάδων δ' καὶ τοῦ Δ μονάδων ε'· ὁ μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν Α Β Γ Δ ἐστὶν μ^{α} ͵η, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Ε Β Γ Δ ἐστὶν μονάδων ρπ'· οὗτος νάδες εἶναι εἰς τὸ γινόμενον Κ · Λ · Μ · Ν ἐπὶ τὸν Ζ · Η · Θ ·

Εἶναι δὲ φανερὸν τοῦτο ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὅταν, ἔστω Α = 10, Β = 20, Γ = 30, Δ = 40, καὶ οἱ πυθμένες Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι 1, 2, 3, 4· τὸ γινόμενον ἄρα Α · Β · Γ · Δ = 240000, τὸ δὲ Α · Β · Γ · Δ · Ζ · Η · Θ = 1440000, τὸ δὲ γινόμενον τῶν πυθμένων Κ · Λ · Μ · Ν = 24· τοῦτο ἐπὶ τὸ γινόμενον Ζ · Η · Θ = 6, = 144, ὅσαι εἶναι αἱ μυριάδες τοῦ γινομένου Α · Β · Γ · Δ · Ζ · Η · Θ, διότι τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ διαιρούμενον διὰ 4 δίδει πηλίκον 1.

Ἀλλὰ τώρα τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἂς μὴ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 4· καὶ ἔστω, ὅτι διαιρούμενον ἀφίνει ὑπόλοιπον 1 ἢ 2 ἢ 3. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 1 τὸ γινόμενον Α · Β · Γ · Δ · Ε · Ζ · Η · Θ θὰ εἶναι τόσαι μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Ο, ὅσος εἶναι τὸ γινόμενον Κ · Λ · Μ · Ν · Ξ ἐπὶ τὸ γινόμενον Ζ · Η · Θ ἐπὶ 10, ἐὰν δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 2, τότε ἐπὶ 100, ἐὰν δὲ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 3, τότε ἐπὶ 1000. Ἡ δὲ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις ἔγινεν ἐκ τῆς στοιχειώδους πραγματείας (τοῦ Ἀπολλωνίου).

22. Ἔστω ὁ μὲν Α μικρότερος μὲν τοῦ 1000, διαιρούμενος δὲ διὰ 100, ἕκαστος δὲ τῶν Β, Γ, Δ μικρότερος τοῦ 10, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν Α, Β, Γ, Δ.

Διότι, ἂς ληφθῇ τοῦ μὲν Α ὁ πυθμὴν Ε, τὸ γινόμενον δὲ Ε · Β · Γ · Δ = Ζ· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον Α · Β · Γ · Δ = 100 Ζ.

Καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὅταν π.χ. τὸ Α = 300 τὸ Β = 3, τὸ Γ = 4, τὸ Δ = 5· διότι τὸ μὲν γινόμενον Α · Β · Γ · Δ = 10000 + 8000, τὸ δὲ 3 · 3 · 4 · 5 = 180· εἶναι δὲ 180 · 100 = 18000.

δὲ γενόμενος ἑκατοντάκις ἔσται μ^α ͵η. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τοῦ στοιχείου δῆλον.

κγ΄. Ἐπὶ δὲ τοῦ κδ΄ θεωρήματος. Τοῦ Α ὑποκειμένου λόγου χάριν μονάδων σ΄ καὶ τοῦ Β μονάδων τ΄ καὶ τοῦ Γ μονάδων β΄ τοῦ δὲ Δ μονάδων γ΄ καὶ τοῦ Ε μονάδων δ΄, ὁ στερεὸς ἐξ αὐτῶν ἔσται μυριάδων ἁπλῶν ρμδ΄, ἐπεὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετρεῖται ὑπὸ τετράδος ἅπαξ [κατὰ τὸν Κ], ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ Η πυθμένων καὶ τῶν Γ Δ Ε ἐστιν μονάδων ρμδ΄ [ὁ Θ στερεός· ἁπλῶν οὖν μυριάδων ρμδ΄ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεός].

Ἐὰν δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α Β μὴ μετρῆται ὑπὸ τετράδος, δῆλον ὅτι μετρούμενον κατὰ τὸν Κ λείψει δύο· τοῦτο γὰρ ἀνώτερον ἐδείχθη. διὰ δὴ τοῦτο [ἐκ τοῦ λείπεσθαι δύο] μυριάδες εἰσὶν ἑκατὸν ὁμώνυμοι τῷ Κ, καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς ὁ Θ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Ζ Η Γ Δ Ε στερεῷ ἐπὶ τὰς ἑκατὸν μυριάδας ὁμωνύμους τῷ Κ. τὸ γραμμικὸν ὡς Ἀπολλώνιος.

κδ΄. Ἐπὶ δὲ τοῦ κε΄ θεωρήματος. Ἔστω τῶν μὲν Α Β ἑκάτερος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Γ Δ Ε [ἔστω] ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν.

Ἔστωσαν γὰρ τῶν Α Β πυθμένες οἱ Θ Κ, καὶ τῷ ἐκ τῶν Θ Κ Γ Δ Ε στερεῷ ἴσος ἔστω ὁ Λ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς ἴσος ἐστὶν ἑκατὸν τοῖς Λ.

Ἔστι δὲ φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος μονάδων κ΄ καὶ τοῦ Β μονάδων κ΄, καὶ τοῦ Γ μονάδων ε΄ καὶ τοῦ Δ μονάδων ς΄ καὶ τοῦ Ε μονάδων ζ΄, καὶ τῶν Θ Κ πυθμένων ὄντων μονάδων β΄· ὁ γὰρ ὑπὸ τῶν Θ Κ Γ Δ Ε γίνεται στερεὸς μονάδων ωμ΄, οὗτος δὲ ἑκατοντάκις γενόμενος ἔσται μυριάδων η΄ μονάδων ͵δ, ἴσος τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ ἀριθμῷ.

Ἡ δὲ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις εἶναι φανερὰ ἐκ τῆς στοιχειώδους πραγματείας (τοῦ Ἀπολλωνίου).

23. Ἐπὶ δὲ τοῦ 24 θεωρήματος. Ἔστω π.χ. $A = 200$, $B = 300$, $\Gamma = 2$, $\Delta = 3$, $E = 4$, ὁπότε τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι $10000^1 \cdot 144$, ἐπειδὴ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α, Β διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 [κατὰ τὸν $K = 1$] τὸ δὲ γινόμενον τῶν πυθμένων $Z \cdot H$ ἐπὶ $\Gamma \cdot \Delta \cdot E = 144$ [ἐὰν τὸ γινόμενον κληθῇ Θ, τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = 144 \cdot 10000^1$].

Ἐὰν δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α, Β δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, εἶναι φανερόν, ὅτι διαιρούμενον θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 2 καὶ πηλίκον Κ· διότι αὐτὸ ἀπεδείχθη εἰς τὰ προηγούμενα. Ἐπειδὴ λοιπὸν [ὑπάρχει ὑπόλοιπον 2] ὑπάρχουν ἑκατὸν ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Κ μυριάδες (σημ. ἐνταῦθα τὸ 2 σημαίνει 1 καὶ 2 μηδενικὰ δεξιὰ $= 100$, ἐὰν δὲ τὸ $K = 2, 3, 4, 5, \ldots$, ὁμώνυμοι μυριάδες τοῦ Κ σημαίνει 10000^2, 10000^3, 10000^4, $10000^5 \ldots$), καὶ εἶναι τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = \Theta = Z \cdot H \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E \cdot 100 \cdot 10000^1$. (Εἰς τὴν πρώτην δύναμιν ὁ 10.000, διότι $K = 1$). Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις εἶναι ὡς ἡ τοῦ Ἀπολλωνίου.

24. Ἐπὶ δὲ τοῦ 25 θεωρήματος. Ἔστω ἑκάτερος τῶν Α, Β μικρότερος μὲν τοῦ 100, διαιρούμενος δὲ διὰ τοῦ 10, ἕκαστος δὲ τῶν Γ, Δ, Ε μικρότερος τοῦ 10, καὶ ζητεῖται τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Διότι, ἔστωσαν πυθμένες τῶν Α, Β οἱ Θ, Κ καὶ τὸ γινόμενον $\Theta \cdot K \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = \Lambda$· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = 100 \cdot \Lambda$.

Εἶναι δὲ τοῦτο φανερὸν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὅταν $A = 20$, $B = 20$, $\Gamma = 5$, $\Delta = 6$, $E = 7$, καὶ οἱ πυθμένες $\Theta = K = 2$· ὁπότε τὸ γινόμενον $\Theta \cdot K \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E = 840$, καὶ οὗτος ἐπὶ $100 = 8 \cdot 10000 + 4000 = 84000 = A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E$.

κε΄. Τὸ δ᾽ ἐπὶ πᾶσι θεώρημα κς΄ πρότασιν ἔχει καὶ ἀπόδειξιν τοιαύτην. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ἢ πλείους οἱ Α Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ ὁσοιδήποτε οἱ Γ Δ Ε, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλοι πάλιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Ζ Η Θ, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸν εἰπεῖν.

Ἔστωσαν γὰρ τῶν Α Β Γ Δ Ε πυθμένες οἱ Λ Μ Ν Ξ Ο. ὁ δὴ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετὰ τοῦ τῶν Γ Δ Ε ἁπλοῦ ἀριθμοῦ ἤτοι μετρεῖται ὑπὸ τετράδος ἢ οὔ.

Μετρείσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ, καὶ ὑποτετάχθωσαν τοῖς μὲν Α Β ἑκατοντάδες αἱ Π Ρ, τοῖς δὲ Γ Δ Ε δεκάδες αἱ Σ Τ Υ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα τοῦ πλήθους τῶν Π Ρ μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Σ Τ Υ μετρεῖται ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ]. καὶ φανερὸν ὅτι ὁ ἐκ τῶν Π Ρ Σ Τ Υ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Λ Μ Ν Ξ Ο ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ. εἰλήφθω δὴ ὁ ἐκ τῶν Λ Μ Ν Ξ Ο Ζ Η Θ στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Φ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Κ ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ Φ. τοῦτο δὲ γραμμικῶς Ἀπολλώνιος ἀπέδειξεν.

Ἐὰν δὲ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Γ Δ Ε μὴ μετρῆται ὑπὸ τετράδος, μετρούμενος ἄρα κατὰ τὸν Κ λείψει ἢ ἕνα ἢ δύο ἢ τρεῖς. εἰ μὲν οὖν ἕνα λείψει, ὁ ἐκ τῶν Π Ρ Σ Τ Υ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν δέκα ὁμώνυμοι τῷ Κ, εἰ δὲ δύο, μυριάδες ἑκατὸν ὁμώνυμοι τῷ Κ, εἰ δὲ τρεῖς, μυριάδες χίλιαι ὁμώνυμοι τῷ Κ. καὶ δῆλον

25. Τὸ δὲ γενικὸν θεώρημα 26 (τοῦ Ἀπολλωνίου) ἔχει τὴν ἑξῆς ἐκφώνησιν καὶ ἀπόδειξιν. Ἔστωσαν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, τῶν ὁποίων ἕκαστος νὰ εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 1000 νὰ διαιρῆται ὅμως διὰ τοῦ 100, καὶ ἄλλοι ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, Ε, τῶν ὁποίων ἕκαστος μὲν νὰ εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 100, νὰ διαιρῆται ὅμως διὰ 10, καὶ ἄλλοι πάλιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ οἱ Ζ, Η, Θ, τῶν ὁποίων ἕκαστος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 10, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον Α·Β·Γ·Δ·Ε·Ζ·Η·Θ.

Ἔστωσαν πυθμένες τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο. Ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α, Β σὺν τὸ πλῆθος τῶν Γ, Δ, Ε ἢ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ ὄχι.

Ἔστω πρῶτον ὅτι διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ δίδει πηλίκον Κ, καὶ κάτωθεν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων Α, Β ἂς γραφῶσιν αἱ ἑκατοντάδες Π, Ρ, κάτωθεν δὲ τῶν Γ, Δ, Ε αἱ δεκάδες Σ, Τ, Υ [καὶ τὸ διπλάσιον ἄρα τοῦ πλήθους τῶν Π, Ρ σὺν τὸ πλῆθος τῶν Σ, Τ, Υ διαιρεῖται διὰ 4 ἀκριβῶς καὶ δίδει πηλίκον Κ]. Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον Π·Ρ·Σ·Τ·Υ ἐπὶ τὸ γινόμενον Λ·Μ·Ν·Ξ·Ο = μὲ τὸ γινόμενον Α·Β·Γ·Δ·Ε. Ἂς ληφθῇ τὸ γινόμενον Λ·Μ·Ν·Ξ·Ο·Ζ·Η·Θ =Φ· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον Α·Β·Γ·Δ·Ε·Ζ·Η·Θ = τόσαι μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Κ, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸν Φ. Τοῦτο δὲ τὸ ἀπέδειξε γεωμετρικῶς ὁ Ἀπολλώνιος.

Ἐὰν δὲ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α, Β σὺν τὸ πλῆθος τῶν Γ, Δ, Ε δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, θὰ ἀφήσῃ πηλίκον Κ καὶ ὑπόλοιπον ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 1, τὸ γινόμενον Π·Ρ·Σ·Τ·Υ θὰ εἶναι δέκα μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Κ, ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 2, τὸ προηγούμενον γινόμενον θὰ εἶναι ἑκατὸν μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Κ, ἐὰν δὲ 3, θὰ εἶναι 1000 μυριάδες ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Κ. Καὶ εἶναι φανερὸν (ἐκ τῶν ἀποδείξεων *ἐκ τῶν γεγραμμένων ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται, ὅσος ὁ δεκαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ ἀριθμῷ, ἢ ὅσος ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ, ἢ ὅσος ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ.*

Τούτου δὴ [τοῦ θεωρήματος] προτεθεωρημένου πρόδηλον, πῶς ἐστιν τὸν δοθέντα στίχον πολλαπλασιάσαι καὶ εἰπεῖν τὸν γενόμενον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ πρῶτον τῶν γραμμάτων ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ δεύτερον τῶν γραμμάτων πολλαπλασιασθῆναι καὶ τὸν γενόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ τρίτον γράμμα καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς περαίνεσθαι μέχρι τοῦ διεξοδεύεσθαι τὸν στίχον, ὃν εἶπεν Ἀπολλώνιος ἐν ἀρχῇ [κατὰ τὸν στίχον] οὕτως·

[Σύγχρονος διατύπωσις ἁπλῆ τοῦ προηγουμένου γενικοῦ θεωρήματος.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον, π.χ. :
1) ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 100.000, διαιρουμένων ὅμως διὰ 10.000, 2) ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 10.000, διαιρουμένων ὅμως διὰ 1.000, 3) ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 1.000, διαιρουμένων ὅμως διὰ 100, 4) ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 100, διαιρουμένων ὅμως διὰ 10, 5) ἀριθμῶν μονοψηφίων. Π. χ. 80000 . 70000 . 60000 . 6000 . 5000 . 4000 . 400 . 300 . 40 . 30 . 6 . 5.

Τὸ πλῆθος τῶν (1) μικροτέρων τῶν 100.000, ἀριθμῶν εἶναι =3, (α)
Τὸ πλῆθος τῶν (2) μικροτέρων τῶν 10.000, ἀριθμῶν εἶναι =3, (β)
Τὸ πλῆθος τῶν (3) μικροτέρων τῶν 1000, ἀριθμῶν εἶναι =2, (γ)
Τὸ πλῆθος τῶν (4) μικροτέρων τῶν 100, ἀριθμῶν εἶναι =2, (δ)
Τὸ πλῆθος τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εἶναι =2.

Λαμβάνομεν τοὺς πυθμένας τῶν ἀριθμῶν καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὁπότε ἔχομεν :

τοῦ Ἀπολλωνίου), ὅτι τὸ γινόμενον $A \cdot B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot E \cdot Z \cdot H \cdot \Theta$ εἶναι τόσαι μυριάδες, ὅσος εἶναι ὁ δεκαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν Κ, ἢ ὅσος ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τοῦ Κ, ἢ ὅσος ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι πρὸς τὸν Κ.

Ἀφοῦ τώρα ἔχει ἐξετασθῆ [τὸ θεώρημα] αὐτὸ εἶναι φανερόν, πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ πολλαπλασιασμὸς εἰς δοθέντα στίχον καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον, ἀφοῦ πολλαπλασιασθῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τοῦ πρώτου γράμματος τοῦ στίχου, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ δευτέρου γράμματος τοῦ στίχου, τὸ προκῦπτον γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν τοῦ τρίτου γράμματος τοῦ στίχου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις ἐξαντλήσεως τοῦ στίχου, ὅπως π. χ. εἰς τὸν στίχον, τὸν ὁποῖον εἶπεν ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς πραγματείας του:

$\Pi = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5$ (οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοὶ λαμβάνονται ὡς πυθμένες). Καλοῦμεν:

Τὸ τετραπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν (α) εἶναι $4 \cdot 3 = 12 = \Sigma_1$. Τὸ τριπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν (β) εἶναι $3 \cdot 3 = 9 = \Sigma_2$. Τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν (γ) εἶναι $2 \cdot 2 = 4 = \Sigma_3$. Τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν (δ) εἶναι $1 \cdot 2 = 2 = \Sigma_4$. Τὸ ἄθροισμα τῶν πληθῶν αὐτῶν εἶναι $\Sigma = 12 + 9 + 4 + 2 = 27$. Διαιροῦμεν τὸν 27 διὰ τοῦ 4, ὁπότε ἔχομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 3. Τότε τὸ ζητούμενον τελικὸν γινόμενον Γ θὰ εἶναι:

$$\Gamma = \Pi \cdot 1000 \cdot (10000)^6.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν $\Sigma = 4K + \upsilon$ καὶ

$\upsilon = 0, \quad K = 1,$ τότε $\Gamma = \Pi \cdot \quad 1 \cdot (10000)^1$

$\upsilon = 1, \quad K = 2,$ » $\Gamma = \Pi \cdot \quad 10 \cdot (10000)^2$

$\upsilon = 2, \quad K = 3,$ » $\Gamma = \Pi \cdot 100 \cdot (10000)^3$

$\upsilon = 3, \quad K = 4,$ » $\Gamma = \Pi \cdot 1000 \cdot (10000)^4$ κ.λπ.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Ἀπολλωνίου δὲν ἐσώθη].

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι (τὸ δὲ κλεῖτέ φησιν ἀντὶ τοῦ ὑπομνήσατε).

Ἐπεὶ οὖν γράμματά ἐστιν λη′ τοῦ στίχου, ταῦτα δὲ περιέχει ἀριθμοὺς δέκα τοὺς ρ′ τ′ σ′ τ′ ρ′ τ′ σ′ χ′ υ′ ρ′, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μέν ἐστιν χιλιάδος μετρεῖται δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ ἀριθμοὺς ιζ′ τοὺς μ′ ι′ ο′ κ′ λ′ ι′ κ′ ο′ ξ′ ο′ ο′ ν′ ν′ ν′ κ′ ο′ ι′, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μέν ἐστιν ἑκατοντάδος μετρεῖται δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ τοὺς λοιποὺς [σὺν ταῖς μονάσιν] ια′ τοὺς α′ ε′ δ′ ε′ ε′ α′ ε′ ε′ ε′ α′ α′, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος, ἐὰν ἄρα [τοὺς δέκα ἀριθμοὺς διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς γενομένους κ′ προσθῶμεν τοῖς εἰρημένοις ἁπλῶς ἀριθμοῖς ἑπτακαίδεκα, τὰ γενόμενα ὁμοῦ λζ′ ἕξομεν τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ γενομένων ἀναλόγων, κἂν] τοῖς μὲν δέκα ἀριθμοῖς ὑποτάξωμεν ἰσαρίθμους δέκα κατὰ τάξιν ἑκατοντάδος, τοῖς δὲ ιζ′ ὁμοίως ὑποτάξωμεν δεκάδας ιζ′, φανερὸν ἐκ τοῦ ἀνώτερον λογιστικοῦ θεωρήματος ιβ′ ὅτι δέκα ἑκατοντάδες μετὰ τῶν ιζ′ δεκάδων ποιοῦσι μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα. [αἱ γὰρ δέκα ἑκατοντάδες δὶς γενόμεναι, τουτέστιν κ′, καὶ προσλαβοῦσαι τὰς ιζ′ δεκάδας γίνονται λζ′ ἀναλόγων ὄντα· μερισθέντα δὲ τὰ λζ′ εἰς τὸν δ′ ποιεῖ τὸν ἐκ τοῦ μερισμοῦ θ′ καὶ καταλείπεται α′, ὡς εἶναι μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα τὰ ἐκ τῶν ἑκατοντάδων δέκα καὶ δεκάδων ιζ′·]

Ἐπεὶ δὲ καὶ πυθμένες ὁμοῦ τῶν μετρουμένων ἀριθμῶν ὑπὸ ἑκατοντάδος καὶ τῶν μετρουμένων ὑπὸ δεκάδος εἰσὶν οἱ ὑποκείμενοι κζ′

α′ γ′ β′ γ′ α′ γ′ β′ ϛ′ δ′ α′
δ′ α′ ζ′ β′ γ′ α′ β′ ζ′ ϛ′ ζ′ ζ′ ε′ ε′ ε′ β′ ζ′ α′,

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

Ἐννέα Κόραι (Μοῦσαι) ὑμνήσατε τὸ ἔξοχον κράτος τῆς Ἀρτέμιδος (λέγει δὲ ἐδῶ τὸ κλεῖτε ἀντὶ τοῦ ὑμνήσατε).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ γράμματα τοῦ στίχου εἶναι 38, εἰς ταῦτα δὲ ὑπάρχουσι δέκα (10) ἀριθμοί, οἱ, ρʹ τʹ σʹ τʹ ρʹ τʹ σʹ χʹ υʹ ρʹ δηλ. 100 300 200 300 100 300 200 600 400 100, τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 1000 διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 100, καὶ δέκα ἑπτὰ (17) ἀριθμοί, οἱ μʹ ιʹ οʹ κʹ λʹ ιʹ κʹ οʹ ξʹ οʹ οʹ νʹ νʹ νʹ κʹ οʹ ιʹ δηλ. 40 10 70 20 30 10 20 70 60 70 70 50 50 50 20 70 10 τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ 100 διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 10, καὶ οἱ ἄλλοι ἕνδεκα (11) μονοψήφιοι, οἱ αʹ εʹ δʹ εʹ εʹ αʹ εʹ εʹ εʹ αʹ αʹ δηλ. 1 5 4 5 5 1 5 5 5 1 1 τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι μικρότερος τοῦ 10, ἐὰν ἄρα λάβωμεν τὸν διπλάσιον ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν δέκα (ἑκατοντάδων) καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $2 \cdot 10 = 20$ καὶ εἰς αὐτοὺς προσθέσωμεν τὸ πλῆθος ἁπλῶς τῶν δέκα ἑπτὰ δεκάδων, ἤτοι $20 + 17 = 37$, θὰ λάβωμεν τὴν σχετικὴν ἀναλογίαν (κατὰ τὸ γενικὸν θεώρημα), καὶ ἂν κάτωθεν ἑκάστου γράμματος θέσωμεν τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν, εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ προηγουμένου 12ου ἀριθμητικοῦ θεωρήματος (σημ. Ἐννοεῖ τοῦ κατὰ τὴν ἀρίθμησιν τοῦ Πάππου 12ου θεωρήματος, τὸ ὁποῖον δὲν ἐσώθη. Ἡ δὲ ἀρίθμησις τοῦ Πάππου ἀρχίζει προηγουμένως ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ 14ου θεωρήματος), ὅτι αἱ δέκα ἑκατοντάδες σὺν δέκα ἑπτὰ δεκάδες δίδουσι δέκα ἐνναπλᾶς μυριάδας (σημ. Κατὰ τὸ γενικὸν θεώρημα εἶναι $37 : 4$, $37 = 4 \cdot 9 + 1$, ὁπότε τὸ μὲν 1 σημαίνει 10 τὸ δὲ 9 σημαίνει 10000^9 ἤτοι $10 \cdot (1000)^9$).

[Διότι αἱ δέκα ἑκατοντάδες ἐπὶ δύο γίνονται 20, καὶ ἀφοῦ προσλάβωσι τὰς 17 δεκάδας γίνονται 37 μὲ τὴν σχετικὴν ἀναλογίαν· ἀφοῦ δὲ διαιρεθῇ ὁ 37 διὰ τοῦ 4 δίδει 9 καὶ ὑπόλοιπον 1, ὥστε νὰ εἶναι μυριάδες ἐνναπλαῖ 10, τὰ ἐκ τῶν ἑκατοντάδων 10 καὶ δεκάδων17].

Ἐπειδὴ δὲ οἱ πυθμένες τῶν ἀριθμῶν τῶν διαιρουμένων διὰ 100 καὶ τῶν διαιρουμένων διὰ 10 εἶναι οἱ κάτωθι 27

1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 6, 4, 1 (οἱ διὰ 100 εἶναι 10), καὶ
4, 1, 7, 2, 3, 1, 2, 7, 6, 7, 7, 5, 5, 5, 2, 7, 1 (οἱ διὰ 10 εἶναι

ἀλλὰ καὶ τῶν ἐλασσόνων δεκάδος εἰσὶν ια′, τουτέστιν ἀριθμοὶ οἱ

α′ ε′ δ′ ε′ ε′ α′ ε′ ε′ ε′ α′ α′,

ἐὰν τὸν ἐκ τούτων τῶν ια′ καὶ τὸν ἐκ τῶν κζ′ πυθμένων στερεὸν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσωμεν, ἔσται ὁ στερεὸς μυριάδων τετραπλῶν ιθ′ καὶ τριπλῶν ,ςλς′ καὶ διπλῶν ,ηυπ′.

[Ἴσος δὲ τούτῳ συνάγεται καὶ ὁ διὰ τῶν τοῦ στίχου πυθμένων ἅμα ταῖς μονάσιν

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι,

οἵ εἰσιν α′ α′ γ′ ε′ δ′ α′ δ′ ζ′ β′ β′ γ′ ε′ α′ γ′ ε′ β′ α′ α′ γ′ ζ′ β′ ε′ ς′ ζ′ ς′ ζ′ ε′ ε′ ε′ ε′ ε′ α′ β′ ζ′ δ′ α′ α′ α′.

ἓν γὰρ ἐπὶ α′ γίνεται α′
ἐπὶ γ′ γίνεται γ′
ἐπὶ ε′ γίνεται ιε′
ἐπὶ δ′ γίνεται ξ′
ἐπὶ α′ γίνεται ξ′
ἐπὶ δ′ γίνεται σμ′
ἐπὶ ζ′ γίνεται ,αχπ′
ἐπὶ β′ γίνεται ,γτξ′
ἐπὶ β′ γίνεται ,ςψκ′
ἐπὶ γ′ γίνεται μ^{α} β′ καὶ μ^{o} ρξ′
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{α} ι′ καὶ μ^{o} ω′
ἐπὶ α′ γίνεται μ^{α} ι′ καὶ μ^{o} ω′
ἐπὶ γ′ γίνεται μ^{α} λ′ καὶ μ^{o} ,βυ′
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{α} ρνα′ καὶ μ^{o} ,β
ἐπὶ β′ γίνεται μ^{α} τβ′ καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ α′ γίνεται μ^{α} τβ′ καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ α′ γίνεται μ^{α} τβ′ καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ γ′ γίνεται μ^{α} ϡζ′ καὶ μ^{o} ,β
ἐπὶ ζ′ γίνεται μ^{α} ,ςτν′ καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ β′ γίνεται μ^{β} α′ καὶ μ^{α} ,βψ′ καὶ μ^{o} ,η
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{β} ς′ καὶ μ^{α} ,γφδ′
ἐπὶ ς′ γίνεται μ^{β} λη′ καὶ μ^{α} ,ακδ′

17) ἀλλὰ καὶ οἱ μικρότεροι τοῦ δέκα εἶναι 11, τουτέστιν

1, 5, 4, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 1, 1

ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν 11 μονοψηφίων ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν 27 πυθμένων θὰ εἶναι τὸ τελικὸν γινόμενον τετραπλαῖ μυριάδες 19 καὶ τριπλαῖ 6036 καὶ διπλαῖ 8480, ἤτοι $19 \cdot 10000^4 + 6036 \cdot 10000^3 + 8480 \cdot 10000^2$.

["Ισον δὲ πρὸς τοῦτο συνάγεται καὶ ἂν γίνωσιν οἱ πολλαπλασιασμοὶ τῶν πυθμένων ἐπὶ τὰς μονάδας, τῶν ἀριθμῶν τοῦ στίχου

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι,

οἱ ὁποῖοι εἶναι : 1, 1, 3, 5, 4, 1 ,4, 7, 2, 2, 3, 5, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 3, 7, 2, 5, 6, 7, 6, 7, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 2, 7, 4, 1, 1, 1.

	μ^δ= μυριάδες τετραπλαῖ $=10000^4$	μ^γ= μυριάδες τριπλαῖ $=10000^3$	μ^β= μυριάδες διπλαῖ $=10000^2$	μ^α= μυριάδες ἁπλαῖ $=10000^1$	μ^0= μονάδες
διότι 1 ·1 =					1
1 ·3 =					3
3 ·5 =					15
·4 =					60
·4 =					240
·7 =					1680
·2 =					3360
·2 =					6720
·3 =				2	0160
·5 =				10	0800
·3 =				30	2400
·5 =				151	2000
·2 =				302	4000
·3 =				907	2000
·7 =				6350	4000
·2 =			1	2700	8000
·5 =			6	3504	0000
·6 =			38	1024	0000

ἐπὶ ζ′ γίνεται μ$^{\beta}$ *σξς′ καὶ μ*$^{\alpha}$ *͵ζρξη′*
ἐπὶ ς′ γίνεται μ$^{\beta}$ *͵αχ′ καὶ μ*$^{\alpha}$ *͵γη′*
ἐπὶ ζ′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *α′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵ασβ′ καὶ μ*$^{\alpha}$ *͵ανς′*
ἐπὶ ε′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *ε′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵ςι′ καὶ μ*$^{\alpha}$ *͵εσπ′*
ἐπὶ ε′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *κη′ καὶ μ*$^{\beta}$ *νβ′ καὶ μ*$^{\alpha}$ *͵ςυ′*
ἐπὶ ε′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *ρμ′ καὶ μ*$^{\beta}$ *σξγ′ καὶ μ*$^{\alpha}$ *͵β*
ἐπὶ ε′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *ψ′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵ατις′*
ἐπὶ ε′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *͵γφ′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵ςφπ′*
ἐπὶ α′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *͵γφ′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵ςφπ′*
ἐπὶ β′ γίνεται μ$^{\gamma}$ *͵ζα′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵γρξ′*
ἐπὶ ζ′ γίνεται μ$^{\delta}$ *δ′ καὶ μ*$^{\gamma}$ *͵θθ′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵βρκ′*
ἐπὶ δ′ γίνεται μ$^{\delta}$ *ιθ′ καὶ μ*$^{\gamma}$ *͵ςλς′ καὶ μ*$^{\beta}$ *͵ηυπ′.]*

*Αὗται δὴ συμπολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων στερεόν, τουτέστι τὰς προκειμένας μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα, ποιοῦσιν μυριάδας τρισκαιδεκαπλᾶς ρϟς′, δωδεκαπλᾶς τξη′, ἑνδεκαπλᾶς ͵δω′. [ἐνναπλαῖ γὰρ μυριάδες ἐπὶ μὲν τετραπλᾶς ποιοῦσι τρισκαιδεκαπλᾶς, ἐπὶ δὲ τριπλᾶς γενόμεναι ποιοῦσιν δωδεκαπλᾶς, καὶ ὁμοίως ἐπὶ διπλᾶς πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται ἑνδεκαπλαῖ ***] ταῦτα γὰρ πάντα προδέδεικται.*

Φατέον οὖν τὸν ἐξ ἀρχῆς στίχον

᾿Αρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι

πολλαπλασιασθέντα δι᾽ ἀλλήλων δύνασθαι μυριάδων πλῆθος τρισκαιδεκαπλῶν ρϟς′, δωδεκαπλῶν τξη′, ἑνδεκαπλῶν ͵δω′, συμφώνως τοῖς ὑπὸ ᾿Απολλωνίου κατὰ τὴν μέθοδον ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου προγεγραμμένοις.

·7 =			266	7168	0000	
·6 =			1600	3008	0000	
·7 =		1	1202	1056	0000	
·5 =		5	6010	5280	0000	
·5 =		28	0052	6400	0000	
·5 =		140	0263	2000	0000	
·5 =		700	1316	0000	0000	
·5 =		3500	6580	0000	0000	
·2 =		7001	3160	0000	0000	
·7 =	4	9009	2120	0000	0000	
·4 =	19	6036	8480	0000	0000]	

Αὗται λοιπὸν (αἱ μονάδες) πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, δηλαδὴ τὰς εὑρεθείσας ἐνναπλᾶς δέκα μυριάδας ($=10\cdot10000^9$) σχηματίζουσι 196 μυριάδας τρισκαιδεκαπλᾶς ($=196\cdot10000^{13}$), 368 μυριάδας δωδεκαπλᾶς ($=368\cdot10000^{12}$), 4800 ἑνδεκαπλᾶς ($=4800\cdot10000^{11}$), [διότι ἐνναπλαῖ μυριάδες ἐπὶ τὰς τετραπλᾶς δίδουσι τρισκαιδεκαπλᾶς*) (δηλαδὴ $10000^9 \cdot 10000^4 = 10000^{13}$), ἐπὶ δὲ τὰς τριπλᾶς δίδουσι δωδεκαπλᾶς (δηλ. $10000^9 \cdot 10000^3 = 10000^{12}$) καὶ ὁμοίως ἐπὶ διπλᾶς πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται ἑνδεκαπλαῖ (δηλ. $10000^9 \cdot 10000^2 = 10000^{11}$). . .] Διότι αὐτὰ ὅλα ἔχουσι προαποδειχθῆ.

Ἂς γράψωμεν λοιπὸν πάλιν τὸν ἀρχικὸν στίχον

Τῆς Ἀρτέμιδος τὸ ἔξοχον κράτος ὑμνήσατε ἐννέα κόραι.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστώμενοι ὑπὸ τῶν γραμμάτων πολλαπλασιασθῶσι μεταξύ των δίδουσι $196\cdot10000^{13} + 368 \cdot 10000^{12} + 4800 \cdot 10000^{11}$, συμφώνως πρὸς τὰ ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου κατὰ τὴν μέθοδον τὴν προγεγραμμένην εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ βιβλίου (ἀπολεσθεῖσαν).

*) Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι εἶναι γνωστὸν τὸ θεώρημα: γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

De duabus mediis proportionalibus

16. — — III, 20 p. 57, 7 - 56, 8 :

Τῶν ἐν γεωμετρίᾳ προβλημάτων οἱ παλαιοὶ τρία γένη φασὶν εἶναι, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά. τὰ μὲν οὖν δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτο ἂν εἰκότως ἐπίπεδα· καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι' ὧν λύεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ προβλήματα λύεται παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ πλειόνων, ταῦτα στερεὰ κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν ἀναγκαῖόν ἐστι χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείας, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς. τρίτον δ' ἔτι καταλείπεται γένος ὃ καλεῖται γραμμικόν· γραμμαὶ γὰρ ἕτεραι παρὰ τὰς εἰρημένας εἰς τὴν κατασκευὴν λαμβάνονται ποικιλωτέραν καὶ βεβιασμένην ἔχουσαι τὴν γένεσιν, ὁποῖαι τυγχάνουσιν αἱ ἕλικες καὶ τετραγωνίζουσαι καὶ κοχλοειδεῖς καὶ κισσοειδεῖς, πολλὰ καὶ παράδοξα περὶ αὐτὰς ἔχουσαι συμπτώματα. τοιαύτης δὴ τῆς διαφορᾶς τῶν προβλημάτων οὔσης οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι τὸ προειρημένον ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον οὐχ οἷοί τ' ἦσαν κατασκευάζειν τῷ γεωμετρικῷ λόγῳ κατακολουθοῦντες, ἐπεὶ μηδὲ τὰς τοῦ κώνου τομὰς ῥᾴδιον ἐν ἐπιπέδῳ γράφειν ἦν [ὡς δεῖ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ], τοῖς δὲ ὀργάνοις μεταλαβόντες αὐτὸ θαυμασίως εἰς χειρουργίαν καὶ κατασκευὴν ἐπιτήδειον ἤγαγον, ὡς ἔστιν ἰδεῖν [ἀπὸ τῶν φερομένων αὐτοῖς συνταγμάτων, λέγω δ'] ἐν τῷ Ἐρατοσθένους μεσολάβῳ καὶ τοῖς Φίλωνος καὶ Ἥρωνος μηχανικοῖς [ἢ κατα-

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

16. — — Περὶ τῶν δύο μέσων ἀναλόγων:

Οἱ παλαιοὶ λέγουσιν, ὅτι τὰ προβλήματα τῆς γεωμετρίας εἶναι τριῶν εἰδῶν, καὶ ὅτι ἄλλα μὲν ὀνομάζονται ἐπίπεδα, ἄλλα δὲ στερεά, καὶ ἄλλα γραμμικά. Καὶ ὅσα μὲν εἶναι δυνατὸν νὰ λύωνται δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας εὐλόγως λέγονται ἐπίπεδα προβλήματα· διότι αἱ γραμμαὶ διὰ τῶν ὁποίων λύονται τὰ προβλήματα αὐτὰ ἔχουσι τὴν γένεσιν εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ὅσα δὲ προβλήματα λύονται χρησιμοποιουμένης διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν μιᾶς ἢ περισσοτέρων κωνικῶν τομῶν, αὐτὰ ὀνομάζονται στερεὰ προβλήματα· διότι διὰ τὴν συναφῆ κατασκευὴν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ χρησιμοποιῶνται ἐπιφάνειαι στερεῶν σχημάτων, δηλ. κωνικαί. Ὑπολείπεται δὲ τὸ τρίτον εἶδος τῶν προβλημάτων, τὸ ὁποῖον καλεῖται γραμμικόν· διότι διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν λαμβάνονται ἄλλαι γραμμαί, ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω, αἵτινες ἔχουσι γένεσιν ποικιλωτέραν καὶ τεχνητήν, ὅπως εἶναι αἱ ἕλικες, καὶ αἱ τετραγωνίζουσαι καὶ αἱ κοχλιοειδεῖς (=κογχοειδεῖς Νικομήδους) καὶ αἱ κισσοειδεῖς (Διοκλέους. Ἰδὲ Ε. Σταμάτη, Τὸ δήλιον πρόβλημα καὶ ἡ τριχοτόμησις γωνίας, Ἀθῆναι 1949), αἱ ὁποῖαι ἔχουσι πολλὰς καὶ παραδόξους ἰδιότητας. Ἐνῷ λοιπὸν ὑπάρχει ἡ τοιαύτη διαφορὰ τῶν προβλημάτων, οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι, τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τῶν δύο μέσων ἀναλόγων, τὸ ὁποῖον ἐκ φύσεως εἶναι στερεόν, δὲν ἠδύναντο νὰ τὸ κατασκευάζωσι, συμφώνως πρὸς τὰς γεωμετρικὰς ἀπαιτήσεις, ἐπειδὴ δὲν ἦτο εὔκολον νὰ κατασκευάζωσιν εἰς τὸ ἐπίπεδον τὰς κωνικὰς τομὰς [πῶς πρέπει ὅταν δοθῶσι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι ἀνάλογοι, εἰς συνεχῆ ἀναλογίαν], ὡδήγησαν δὲ διὰ τῶν καταλλήλων συσκευῶν εἰς θαυμασίαν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὅπως φαίνεται [ἐκ τῶν φερομένων κατασκευῶν αὐτῶν, λέγω δὲ] ὅπως τὸ μεσόλαβον τοῦ Ἐρατοσθένους, καὶ τὰς μηχανικὰς συσκευὰς τοῦ Φίλωνος καὶ τοῦ Ἥρωνος. Διότι αὐτοὶ παραδεχόμενοι, ὅτι τὸ πρόβλημα *παλτικοῖς]. οὗτοι γὰρ ὁμολογοῦντες στερεὸν εἶναι τὸ πρόβλημα τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ μόνον ὀργανικῶς πεποίηνται [συμφώνως Ἀπολλωνίῳ τῷ Περγαίῳ, ὃς καὶ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ πεποίηται διὰ τῶν τοῦ κώνου τομῶν, καὶ ἄλλοι διὰ τῶν Ἀρισταίου τόπων στερεῶν, οὐδεὶς δὲ διὰ τῶν ἰδίως ἐπιπέδων καλουμένων], Νικομήδης δὲ λέλυκε διὰ κοχλοειδοῦς γραμμῆς, δι᾽ ἧς καὶ τὴν γωνίαν ἐτριχοτόμησεν.*

17. — — *IV, 57 p. 270, 1 - 272, 7 :*

λς΄. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον εἰς τρία ἴσα τεμεῖν οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι θελήσαντες ἠπόρησαν δι᾽ αἰτίαν τοιαύτην. τρία γένη φαμὲν εἶναι τῶν ἐν γεωμετρίᾳ προβλημάτων, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά. τὰ μὲν οὖν δι᾽ εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτ᾽ ἂν εἰκότως ἐπίπεδα· καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι᾽ ὧν εὑρίσκεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ λύεται προβλήματα παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ καὶ πλειόνων, στερεὰ ταῦτα κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείας, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς, ἀναγκαῖον. τρίτον δέ τι προβλημάτων ὑπολείπεται γένος τὸ καλούμενον γραμμικόν· γραμμαὶ γὰρ ἕτεραι παρὰ τὰς εἰρημένας εἰς τὴν κατασκευὴν λαμβάνονται ποικιλωτέραν ἔχουσαι τὴν γένεσιν καὶ βεβιασμένην μᾶλλον, ἐξ ἀτακτοτέρων ἐπιφανειῶν καὶ κινήσεων ἐπιπεπλεγμένων γεννώμεναι. τοιαῦται δέ εἰσιν αἵ τε ἐν τοῖς πρὸς ἐπιφανείαις καλουμένοις τόποις εὑρισκόμεναι γραμμαὶ ἕτεραί τε τούτων ποικιλώτεραι καὶ πολλαὶ τὸ πλῆθος ὑπὸ Δημητρίου τοῦ Ἀλεξανδρέως ἐν ταῖς γραμμικαῖς ἐπιστάσεσι εἶναι στερεὸν ἔκαμαν τὴν κατασκευὴν μόνον δι' ὀργάνων [συμφώνως πρὸς τὸν 'Απολλώνιον τὸν Περγαῖον, ὁ ὁποῖος ἔκαμε τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, καὶ ἄλλοι διὰ τῶν στερεῶν τόπων τοῦ 'Αρισταίου, κανεὶς δὲ δὲν ἐπεχείρησε λύσιν διὰ τῶν καλουμένων ἐπιπέδων ἰδίως γεωμετρικῶν τόπων], ὁ δὲ Νικομήδης ἔλυσε τὸ πρόβλημα διὰ τῆς κοχλοειδοῦς (=κογχοειδοῦς) γραμμῆς, διὰ τῆς ὁποίας ἐτριχοτόμησε καὶ τὴν (ὀξεῖαν) γωνίαν.

17. — — :

36. Οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι θελήσαντες νὰ τριχοτομήσωσι τὴν εὐθύγραμμον (ὀξεῖαν) γωνίαν εὑρέθησαν εἰς ἀπορίαν διὰ τὸν ἑξῆς λόγον. 'Ανεφέρομεν, ὅτι τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα εἶναι τριῶν εἰδῶν, καὶ ὅτι ἄλλα μὲν καλοῦνται ἐπίπεδα, ἄλλα στερεὰ καὶ ἄλλα γραμμικά. Τὰ προβλήματα λοιπὸν τὰ δυνάμενα νὰ λυθῶσι δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας εὐλόγως λέγονται ἐπίπεδα· διότι αἱ γραμμαὶ δι' ὧν λύονται τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ἔχουσι τὴν γένεσιν εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ὅσα δὲ προβλήματα λύονται μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς τῶν κωνικῶν τομῶν ἢ καὶ περισσοτέρων, αὐτὰ ὀνομάζονται στερεά· διότι εἶναι ἀναγκαῖον νὰ χρησιμοποιῶνται διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν ἐπιφάνειαι στερεῶν, λέγω δὲ ἐπιφάνειαι κωνικαί. Ὑπολείπεται δὲ τρίτον γένος τῶν προβλημάτων, τὸ ὁποῖον λέγεται γραμμικόν· διότι χρησιμοποιοῦνται ἄλλου εἴδους γραμμαί, ἐκτὸς τῶν εἰρημένων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὴν γένεσιν ποικιλωτέραν καὶ μᾶλλον τεχνητήν, γεννώμεναι ἐξ ἀτακτοτέρων ἐπιφανειῶν καὶ ἐπιπεπλεγμένων κινήσεων. Τοιαῦται δὲ γραμμαὶ εἶναι, αἱ ἀναφερόμεναι γραμμαὶ εἰς τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους ἐπιφανειῶν, καὶ ἄλλαι ποικιλώτεραι αὐτῶν, καὶ πολλαὶ ἔχουσιν εὑρεθῆ ὑπὸ τοῦ Δημητρίου τοῦ 'Αλεξανδρέως,

καὶ Φίλωνος τοῦ Τυανέως ἐξ ἐπιπλοκῆς πλεκτοειδῶν τε καὶ ἑτέρων παντοίων ἐπιφανειῶν εὑρισκόμεναι πολλὰ καὶ θαυμαστὰ συμπτώματα περὶ αὐτὰς ἔχουσαι. καί τινες αὐτῶν ὑπὸ τῶν νεωτέρων ἠξιώθησαν λόγου πλείονος, μία δέ τις ἐξ αὐτῶν ἐστιν ἡ καὶ παράδοξος ὑπὸ τοῦ Μενελάου κληθεῖσα γραμμή. τοῦ δὲ αὐτοῦ γένους ἕτεραι ἑλικές εἰσιν τετραγωνίζουσαί τε καὶ κοχλοειδεῖς καὶ κισσοειδεῖς. δοκεῖ δέ πως ἁμάρτημα τὸ τοιοῦτον οὐ μικρὸν εἶναι τοῖς γεωμέτραις, ὅταν ἐπίπεδον πρόβλημα διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν ὑπό τινος εὑρίσκηται, καὶ τὸ σύνολον ὅταν ἐξ ἀνοικείου λύηται γένους, οἷόν ἐστιν τὸ ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς πρόβλημα καὶ ἡ ἐν τῷ περὶ τῆς ἕλικος ὑπὸ Ἀρχιμήδους λαμβανομένη στερεοῦ νεῦσις ἐπὶ κύκλον· μηδενὶ γὰρ προσχρώμενον στερεῷ δυνατὸν εὑρεῖν τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον θεώρημα, λέγω δὴ τὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ κύκλου ἴσην ἀποδεῖξαι τῇ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένῃ εὐθείᾳ τῇ ἐκ τῆς γενέσεως ἕως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἕλικος [1].

Π ά π π ο υ Ἀ λ ε ξ α ν δ ρ έ ω ς Σ υ ν α γ ω γ ῆ ς ζ'
18. VII, 1 p. 634, 1 - 11 :

Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν

1) Ἡ μὲν παρατήρησις διὰ τὸν Ἀρχιμήδη δὲν εἶναι ὀρθή· διὰ δὲ τὸν Ἀπολλώνιον δὲν ἀναφέρεται τὸ ὑπονοούμενον θεώρημα τοῦ πέμπτου βιβλίου τῶν Κωνικῶν, καίτοι εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν δὲν παρατηρεῖται ἀνωμαλία τις. Πι-

εἰς τὰς γραμμικὰς ἐπιστάσεις, καὶ τοῦ Φίλωνος τοῦ Τυανέως, ἐξ ἐπιπλοκῆς πλεκτοειδῶν καὶ ἄλλων ποικίλων ἐπιφανειῶν ἔχουσαι πολλὰς καὶ θαυμαστὰς ἰδιότητας. Καὶ μερικαὶ ἐξ αὐτῶν ἔτυχον λεπτομερεστέρας ἐξετάσεως ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μία δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι καὶ ἡ κληθεῖσα ὑπὸ τοῦ Μενελάου παράδοξος γραμμή. Τοῦ αὐτοῦ δὲ γένους εἶναι καὶ αἱ τετραγωνίζουσαι καὶ αἱ κοχλοειδεῖς καὶ αἱ κισσοειδεῖς. Φαίνεται δὲ ὅτι δὲν εἶναι μικρὸν σφάλμα διὰ τοὺς γεωμέτρας, ὅταν ἐπίπεδον πρόβλημα λύηται ὑπό τινος διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν, καὶ τὸ σύνολον, ὅταν λύηται ἐξ ἀναρμοδίου εἴδους γραμμῶν, ὅπως εἶναι π. χ. τὸ εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου πρόβλημα ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ ἡ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ ἑλίκων (θ. 18) λαμβανομένη στερεοῦ νεῦσις εἰς τὸν κύκλον. διότι οὐδεὶς χρησιμοποιῶν στερεὸν (τόπον) εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρῃ τὸ ὑπ' αὐτοῦ ἀποδεικνυόμενον θεώρημα, ἐννοῶ δηλ. τὸ ν' ἀποδείξῃ, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τῆς πρώτης περιφορᾶς (τῆς γεννώσης τὴν ἕλικα εὐθείας) εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν (νοουμένην ἀκίνητον) τῆς περιφερομένης εὐθείας μέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῆς μετὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἕλικος.

18. Πάππου Ἀλεξανδρέως Συναγωγῆς βιβλ. 7.

Περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου γεωμετρικοῦ τόπου: Ὁ καλούμενος ἀναλυτικὸς γεωμετρικὸς τόπος, Ἑρμόδωρε παιδί μου, εἶναι ὡς πρὸς τὴν σύλληψιν ἰδιαιτέρα τις ὕλη παρεσκευασμένη μετὰ τὴν ποίησιν τῶν κοινῶν στοιχείων εἰς τοὺς ἐπιθυ-

---

θανὸν τὸ χειρόγραφον νὰ ἔχῃ ἔλλειψίν τινα. Κατὰ τὸν F. Hultsch, πιθανὸν ὁ Πάππος νὰ ἐννοῇ τὸ 52 πρόβλημα τοῦ α' βιβλίου τῶν Κωνικῶν, ὅπου ὑπάρχει κατασκευὴ παραβολῆς, ὄχι ἐσφαλμένη). (Πάππος, ἔκδ. F. Hultsch, Βερολῖνον 1876, σελ. 273, ὑποσημ.5)].

γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν. Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον.

19. — — VII, 3 p. 636, 18 - 30 :

Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶν τοιαύτη· Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον α′, Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς β′, χωρίου ἀποτομῆς β′, διωρισμένης τομῆς δύο, ἐπαφῶν δύο, Εὐκλείδου πορισμάτων τρία, Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν η′, Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε, Εὐκλείδου τόπων τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ δύο, Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λγ′, ὧν τὰς περιοχὰς μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν ἐξεθέμην σοι πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων καὶ τῶν διορισμῶν καὶ τῶν πτώσεων καθ᾽ ἕκαστον βιβλίον, ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα, καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον.

De sectionis rationis

20. — — VII, 5 p. 640, 4 - 25 :

Τῆς δ᾽ ἀποτομῆς τοῦ λόγου βιβλίων ὄντων β′ πρότασίς ἐστιν μία ὑποδιῃρημένη· διὸ καὶ μίαν πρότασιν οὕτως γράφω·

μοῦντας νὰ ἀναλαμβάνωσιν διὰ τῶν γραμμῶν δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων εἰς αὐτοὺς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο καθισταμένη χρήσιμος. Ἔχει δὲ γραφῆ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, καὶ τοῦ Εὐκλείδου τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ τοῦ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, χρησιμοποιοῦσα (ἡ τοιαύτη ὕλη) τὴν μέθοδον τῆς ἀναλύσεως καὶ τῆς συνθέσεως.

19. — — :

Τῶν προλεχθέντων δὲ τοῦ ἀναλυομένου γεωμετρικοῦ τόπου βιβλίων ἡ τάξις εἶναι ἡ ἀκόλουθος· Εὐκλείδου Δεδομένα βιβλίον 1, Ἀπολλωνίου Περὶ λόγου ἀποτομῆς βιβλία 2, Περὶ χωρίου ἀποτομῆς βιβλία 2, Περὶ διωρισμένης τομῆς βιβλία 2, Περὶ ἐπαφῶν βιβλία 2, Εὐκλείδου Περὶ πορισμάτων βιβλία 3, Ἀπολλωνίου Περὶ νεύσεων βιβλία 2, τοῦ αὐτοῦ (δηλ. Ἀπολλωνίου) Περὶ γεωμετρικῶν τόπων ἐπιπέδων βιβλία 2, Κωνικῶν βιβλία 8, Ἀρισταίου (τοῦ πρεσβυτέρου) Περὶ γεωμετρικῶν τόπων στερεῶν βιβλία 5, Εὐκλείδου Περὶ γεωμετρικῶν τόπων εἰς ἐπιφανείας βιβλία 2, Ἐρατοσθένους Περὶ μεσοτήτων βιβλία 2. Ἐν ὅλῳ βιβλία 33, τῶν ὁποίων τὸ περιεχόμενόν σοῦ ἐξέθεσα πρὸς σπουδὴν μέχρι τῶν Κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, ὡς ἐπίσης (σοῦ ἐξέθεσα) καὶ τὸ πλῆθος τῶν γεωμετρικῶν τόπων καὶ τῶν διερευνήσεων καὶ τῶν περιπτώσεων ἑκάστου βιβλίου, ἀλλὰ καὶ τὰ ἀπαραίτητα λήμματα, καὶ δὲν παρέλειψα καμμίαν ἔρευναν εἰς τὸ σύγγραμμά μου, ὡς ἐνόμιζον.

Περὶ λόγου ἀποτομῆς

20. — — :

Ἐνῷ τῆς πραγματείας Περὶ λόγου ἀποτομῆς ὑπάρχουσι δύο βιβλία, ἡ πρὸς ἐξέτασιν πρότασις εἶναι μόνον μία ὑποδιῃρημένη, τὴν ὁποίαν ἐκθέτω ὡς κάτωθι·

διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις λόγον ἐχούσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ πλῆθος λαβεῖν συμβέβηκεν. ὑποδιαιρέσεως γενομένης, ἕνεκα τῆς τε πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις αὐτῶν τε καὶ τῶν διορισμῶν. ἔχει γὰρ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τῶν λόγου ἀποτομῆς τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ ε', ὧν τρεῖς μέν εἰσιν μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ς' τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ' τόπου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ς' καὶ τοῦ ζ' τόπου. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον.

Λήμματα δὲ ἔχει τὰ λόγου ἀποτομῆς κ', αὐτὰ δὲ τὰ δύο βιβλία τῶν λόγου ἀποτομῆς θεωρημάτων ἐστὶν ρπα', κατὰ δὲ Περικλέα πλειόνων ἢ τοσούτων *).

De sectione spatii

21. — — *VII, 7 p. 640, 26 - 642, 18 :*

Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία μέν ἐστιν δύο, πρόβλημα δὲ κἀν τούτοις ἕν, ὑποδιαιρούμενον δίς· καὶ τούτων μία πρότασίς ἐστιν τὰ μὲν ἄλλα ὁμοίως ἔχουσα τῇ προτέρᾳ,

[*) Σημ. : Τὸ βιβλίον ἐσώθη εἰς τὴν ἀραβικήν, ἀνευρεθὲν κατὰ τὸ τέλος τοῦ 17ου αἰ. ὑπὸ τοῦ Edw. Bernard, ὅστις μετέφρασε μικρὸν τμῆμα εἰς τὴν λατινικήν. Ἡ ὅλη μετάφρασις εἰς τὴν λατινικὴν ἐγένετο καὶ ἐξεδόθη ἐν Ἀγγλίᾳ ὑπὸ

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ τέμνουσα εἰς δύο κατὰ τὴν θέσιν δοθείσας εὐθείας, τμήματα ἀπὸ τῶν εἰς αὐτὰς δοθέντων σημείων, ἔχοντα λόγον ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα. Συμβαίνει δὲ αἱ ἀποδείξεις νὰ εἶναι διάφοροι καὶ πολυπληθεῖς, λόγῳ ὑποδιαιρέσεως τῶν περιπτώσεων, ἕνεκα τῆς θέσεως τῶν εὐθειῶν μεταξύ των καὶ τῶν διαφόρων περιπτώσεων (θέσεων) τοῦ διδομένου σημείου καὶ διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἀναλύσεων καὶ τῶν συνθέσεων καὶ τῶν διερευνήσεων καὶ περιορισμῶν (=διορισμῶν). Διότι τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον Περὶ λόγου ἀποτομῆς ἔχει 7 τόπους, 24 περιπτώσεις, διορισμοὺς δὲ 5, ἐκ τῶν ὁποίων τρεῖς μὲν εἶναι μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι, καὶ ὁ μέγιστος μὲν εἶναι ὁ κατὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν τοῦ 5ου τόπου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ 6ου τόπου, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν (2αν περίπτωσιν) τοῦ 7ου τόπου, μέγιστοι δὲ (διορισμοὶ) οἱ κατὰ τὰς τετάρτας (περιπτώσεις) τοῦ 6ου καὶ τοῦ 7ου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον (τῆς πραγματείας) Περὶ λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους 14, περιπτώσεις δὲ 63, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου βιβλίου· διότι ἀναφέρεται (ἀνάγεται) ὅλον εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον.

Λήμματα δὲ ἔχουσι τὰ βιβλία Περὶ λόγου ἀποτομῆς 20, τὰ αὐτὰ δὲ δύο βιβλία Περὶ λόγου ἀποτομῆς ἔχουσι 181 θεωρήματα, κατὰ δὲ τὸν (μαθηματικὸν) Περικλέα ἔχουσι περισσότερα τούτων.

Περὶ χωρίου ἀποτομῆς

21. — — :

Τῆς πραγματείας Περὶ ἀποτομῆς τοῦ χωρίου ὑπάρχουσι δύο βιβλία, καὶ εἰς αὐτὰ ὅμως ὑπάρχει μόνον ἓν πρόβλημα ὑποδιαιρούμενον δύο φοράς· καὶ ἐκ τούτων ὑπάρχει μία πρότασις

τοῦ ἀστρονόμου καὶ μαθηματικοῦ Halley κατὰ τὸ 1706. Εἰς τὴν γερμανικὴν ἐξεδόθη κατὰ τὸ 1836 ὑπὸ τοῦ Aug. Richter. (M. Cantor Vor. ü. Gesch. der Mathematik I σελ. 344, ὑποσημείωσις. 1907 καὶ 1965, B. G. Teubner, Stuttgart)].

μόνῳ δὲ τούτῳ διαφέρουσα τῷ δεῖν τὰς ἀποτεμνομένας δύο εὐθείας ἐν ἐκείνῃ μὲν λόγον ἐχούσας δοθέντα ποιεῖν, ἐν δὲ ταύτῃ χωρίον περιεχούσας δοθέν. ῥηθήσεται γὰρ οὕτως· διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. καὶ αὕτη δὲ διὰ τὰς αὐτὰς αἰτίας τὸ πλῆθος ἔσχηκε τῶν γραφομένων. ἔχει δὲ τὸ μὲν α' βιβλίον χωρίου ἀποτομῆς τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμοὺς ζ', ὧν δ' μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν τοῦ β' τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν β' τοῦ δ', καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ς' τόπου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δ' τοῦ δ' τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου τόπου. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τῶν χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ', πτώσεις δὲ ξ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό.

Θεωρήματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον μη', τὸ δὲ δεύτερον ος'.

De sectione determinata

22. *— — VII, 9 p. 642, 19 - 644, 22 :*

Ἑξῆς δὲ τούτοις ἀναδέδοται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία β', ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστιν λέγειν, διεζευγμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν ἑνὶ σημείῳ τεμεῖν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐτὰ μὲν ἄλλα ἔχουσα ὁμοίως ὅπως ἡ προηγουμένη, μόνον δὲ κατὰ τοῦτο διαφέρουσα, ὅτι πρέπει αἱ ἀποτεμνόμεναι δύο εὐθεῖαι εἰς τὴν μίαν μὲν νὰ σχηματίζωσι λόγον ἴσον πρὸς δοθέντα, εἰς τὴν ἄλλην δὲ νὰ περιέχωσι χωρίον ἴσον πρὸς δοθέν. Ἡ ἐκφώνησις δὲ ἔχει ὡς ἑξῆς·

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ν' ἀχθῇ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ ἀπὸ τῶν δοθεισῶν κατὰ τὴν θέσιν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὰ ἐπ' αὐτῶν δοθέντα σημεῖα, δύο εὐθείας, τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν χωρίον. Καὶ ἡ πρότασις αὕτη διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους (σημ. ὡς εἰς τὸ Περὶ λόγου ἀποτομῆς) ἔχει πολλὰς περιπτώσεις. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον Περὶ χωρίου ἀποτομῆς τόπους (γεωμ.) 7, περιπτώσεις 24, διορισμοὺς 7, ἐκ τῶν ὁποίων 4 μὲν εἶναι μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ εἶναι μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ πρώτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τοῦ δευτέρου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ τετάρτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν τοῦ ἕκτου τόπου, ἐλάχιστος δὲ διορισμὸς εἶναι ὁ κατὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν τοῦ τρίτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην περίπτωσιν τοῦ τετάρτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τοῦ ἕκτου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον Περὶ χωρίου ἀποτομῆς ἔχει 13 τόπους, περιπτώσεις δὲ 60, διορισμοὺς δὲ τοὺς διορισμοὺς τοῦ πρώτου βιβλίου· διότι εἰς αὐτὸ ἀναφέρεται διὰ τοὺς διορισμούς.

Θεωρήματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον 48, τὸ δὲ δεύτερον 76.

Περὶ διωρισμένης τομῆς

22. — — :

Ἐν συνεχείᾳ πρὸς ταῦτα ἐκδίδονται δύο βιβλία τῆς διωρισμένης τομῆς, περὶ τῶν ὁποίων ἀξίζει νὰ εἴπωμεν μίαν πρότασιν, καὶ αὐτὴν δὲ διεζευγμένην· νὰ τμηθῇ δοθεῖσα ἀπεριόριστος εὐ-

θειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν ἤτοι πρὸς τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἔξω δοθείσης ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἐφ' ὁπότερ' ἂν χρῇ τῶν δοθέντων σημείων. καὶ ταύτης ἅτε δὶς διεζευγμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης διὰ πλειόνων ἡ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης. [δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος μὲν πάλιν ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν τριβακώτερον πειρώμενος. καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν πρώτων στοιχείων Εὐκλείδου, καὶ ταύτην πάλιν εἰσαγωγικώτερον ἐπαναγράφων δείξας τε καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίων.] ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα ς', ἐπιτάγματα ις', διορισμοὺς ε', ὧν μεγίστους μὲν δ', ἐλάχιστον δὲ ἕνα· καί εἰσιν μέγιστοι μὲν ὅ τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος καὶ ὁ κατὰ τὸ γ' τοῦ δ' προβλήματος καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ε' καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα θ', διορισμοὺς γ'· ὧν εἰσιν ἐλάχιστοι μὲν ὅ τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου, μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος.

Λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον κζ', τὸ δὲ δεύτερον κδ'. θεωρημάτων δέ ἐστιν τὰ δύο βιβλία διωρισμένης τομῆς πγ'.

θεῖα εἰς ἓν σημεῖον, ὥστε ἐκ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶ πρὸς τὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας δοθέντα σημεῖα, ἢ τὸ τετράγωνον μιᾶς, ἢ τὸ ὀρθογώνιον δύο ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν νὰ ἔχῃ δοθέντα λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς, ἢ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς μίαν ἀπολαμβανομένην καὶ τὴν ἐκτὸς δοθεῖσαν, ἢ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς δύο ἀπολαμβανομένας, ἐπὶ τῶν δύο ἂν εἶναι ἀνάγκη σημείων. Καὶ ταύτης ἐπειδὴ εἶναι δὶς διεζευγμένη καὶ ἔχει περὶ τὰ δύο σκέλη διορισμούς, ἡ ἀπόδειξις ἔγινε κατ' ἀνάγκην διὰ περισσοτέρων. ['Αποδεικνύει δὲ ταύτην ὁ 'Απολλώνιος μὲν πάλιν λαμβάνων εὐθείας ἄνευ περιορισμῶν, προσπαθῶν σαφέστερον. Ὡς τοῦτο γίνεται εἰς τὰ πρῶτα θεωρήματα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων (τοῦ Εὐκλείδου), καὶ ἐπαναγράφων ταύτην πάλιν λεπτομερέστερον, ἀποδείξας καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίων.] Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα 6, ἐπιτάγματα 16, διορισμοὺς 5 (περιορισμούς), ἐκ τῶν ὁποίων μεγίστους μὲν 4, ἐλάχιστον δὲ ἕνα· καὶ εἶναι μέγιστοι μὲν καὶ ὁ κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τετάρτου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πέμπτου, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τῆς διωρισμένης ἔχει 3 προβλήματα, 9 ἐπιτάγματα, διορισμοὺς 3· ἐκ τῶν ὁποίων ἐλάχιστοι μὲν εἶναι καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου, μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος.ν

Λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον 27, τὸ δὲ δεύτερον 24. Θεωρήματα δὲ καὶ τὰ δύο βιβλία τῆς πραγματείας «διωρισμένη τομή», ἔχουσιν 83.

De tactionibus

23. — — *VII, 11 p. 644, 23 - 648, 21 :*

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστιν βιβλία δύο. προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες. ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἐξῆς σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων (εἰ δοθείη) ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται ι'. ἤτοι γὰρ [τὰ] δεδομένα τρία σημεῖα ἢ τρεῖς εὐθεῖαι ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος ἢ τρεῖς κύκλοι. τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ δ' βιβλίῳ τῶν πρώτων στοιχείων· ὃ παρεῖμεν γράφειν· τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων τὸ αὐτό ἐστιν τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι, τὸ δὲ γ' δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων οὐσῶν (ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν) τὸ αὐτό ἐστιν τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι· τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς τοῦ β' ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις πάντων. καὶ τὰ ἑξῆς ς' ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας.

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

Περὶ ἐπαφῶν

23. — — :

Ἐν συνεχείᾳ πρὸς ταῦτα ὑπάρχουσι δύο βιβλία περὶ ἐπαφῶν. Φαίνεται δὲ ὅτι εἰς αὐτὰ εἶναι πολλαὶ προτάσεις, ἀλλὰ καὶ ἐκ τούτων ἐκθέτομεν μίαν, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἑξῆς· δοθέντων κατὰ τὴν θέσιν σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων, τριῶν οἱωνδήποτε, ν' ἀχθῇ κύκλος δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων (ἐὰν ἤθελε δοθῇ), ἢ νὰ εἶναι ἐφαπτόμενος ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. Ταύτης τῆς προτάσεως ἕνεκα τοῦ πλήθους τῶν ὁμοίων ἢ ἀνομοίων δεδομένων προτάσεων εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ὑπάρχωσι δέκα μερικαὶ προτάσεις· διότι ἐκ τριῶν ἀνομοίων γενῶν (ἐκ τριῶν στοιχείων α, β, γ,) γίνονται τριάδες ἄτακτοι δέκα (συνδυασμοὶ τῶν τριῶν πραγμάτων ἀνὰ τρία, μετ' ἐπαναλήψεως). Μία περίπτωσις εἶναι [τὰ] διδόμενα τρία σημεῖα, ἡ ἄλλη τρεῖς εὐθεῖαι, ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον, ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα, ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος, ἢ τρεῖς κύκλοι. Ἐκ τούτων αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις ἀπεδείχθησαν εἰς τὸ 4ον βιβλίον τῶν πρώτων στοιχείων· τὸ ὁποῖον δὲν ἀναγράφομεν· διότι τὸ ἐκ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ κύκλος, τὸ δὲ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων, (ἀλλὰ νὰ συναντῶνται καὶ αἱ τρεῖς) εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δοθὲν τρίγωνον· διότι, ὅταν ὑπάρχωσι δύο παράλληλοι καὶ μία τέμνουσα αὐτάς, ὡς μέρος τῆς β' ὑποδιαιρέσεως προγράφεται εἰς ὅλα αὐτά. Καὶ τὰ ἑπόμενα 6 γράφονται εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον, τὰ δὲ ὑπόλοιπα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, γράφονται μόνον εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον, διότι αἱ πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων καὶ τῶν εὐθειῶν εἶναι πολλαὶ καὶ ἔχουσιν ἀνάγκην πολλῶν περιορισμῶν (διερευνήσεων).

Ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστιν προβλημάτων παραλειπόμενον ὑπὸ τῶν ἀναδιδόντων, καὶ προσανέδωκα ἐν τοῖς πρότερον τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσύνοπτόν τε γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν ἐντελὲς δὲ καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλάβωμεν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι οὕτως ἔχει· ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον (εἰ δοθείη) ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν. αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ· ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆθος ϛʹ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ δύο δοθέντων κύκλων ἢ σημείου καὶ εὐθείας ἢ σημείου καὶ κύκλου ἢ εὐθείας καὶ κύκλου τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον ἀγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται, ταῦτα δὲ ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίσασθαι κατὰ πτῶσιν.

Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζʹ, τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δʹ.

Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία καʹ, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ξʹ.

De locis planis

24. *— — VII, 21 p. 660, 17 - 664, 7 :*

Τόπων ἐπιπέδων 2

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μέν εἰσιν ἐφεκτικοί, ὡς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν ἰδίων στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμήν, ἐπιφανείας δὲ ἐπι-

Εἰς τὰς προειρημένας ἐπαφὰς ὑπάρχει πλῆθος προβλημάτων παραλειπόμενον ὑπὸ τῶν ἐκδοτῶν, καὶ προσέθεσα τοῦτο εἰς τὰ προηγουμένως τῶν δύο βιβλίων ἐκτεθέντα· διότι ἦτο εὐσύνοπτον καὶ μᾶλλον εἰσαγωγικὸν πλῆρες δὲ καὶ συμπληρωματικὸν τοῦ εἴδους τῶν ἐπαφῶν. Ἂς περιλάβωμεν πάλιν ὅλα εἰς μίαν πρότασιν, ἡ ὁποία ἐν σχέσει μὲ τὴν προειρημένην εἶναι ἐλλιπὴς μὲν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πλεοναστικὴ δὲ κατὰ τὸ ἐπίταγμα καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς· ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων οἱωνδήποτε, δύο δοθέντων, νὰ γραφῇ κύκλος κατὰ τὸ μέγεθος δοθεὶς διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων διερχόμενος (ἐὰν ἤθελε δοθῇ), ἐφαπτόμενος δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν. Ἡ πρότασις αὕτη περιέχει ἤδη κατὰ τὸ πλῆθος ἓξ προβλήματα· διότι ἐκ τριῶν διαφόρων στοιχείων γίνονται διάφοροι ἄτακτοι δυάδες κατὰ τὸ πλῆθος 6 (Συνδυασμοὶ τριῶν πραγμάτων ἀνὰ δύο μετ' ἐπαναλήψεως)· διότι πρέπει, ὡς ἐλέχθη, νὰ ἀχθῇ ὁ δεδομένος κατὰ τὸ μέγεθος κύκλος, ἢ διὰ δύο δοθέντων σημείων, ἢ διὰ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ διὰ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ διὰ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ διὰ σημείου καὶ κύκλου, ἢ διὰ εὐθείας καὶ κύκλου, ταῦτα δὲ νὰ ἀναλυθῶσι καὶ νὰ συντεθῶσι καὶ νὰ διερευνηθῶσι ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως.

Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα 7, τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα 4.

Λήμματα δὲ ἔχουσι 21 καὶ τὰ δύο βιβλία, θεωρήματα δὲ 60.

24. Περὶ ἐπιπέδων γεωμετρικῶν τόπων βιβλία δύο:

Τῶν γεωμετρικῶν τόπων, γενικῶς, ἄλλοι μὲν εἶναι ἀντίστοιχοι, ὅπως καὶ ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τῶν Στοιχείων του λέγει, σημείου μὲν γεωμετρικὸν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ γεωμ. τόπον γραμμήν, ἐπιφανείας δὲ γεωμ. τόπον ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν, οἱ δὲ διεξοδικοί, ὡς σημείου μὲν γραμμήν, γραμμῆς δ' ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν, οἱ δὲ ἀναστροφικοί, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. [τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν, οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι καὶ οἱ στερεοί. γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσιν σημείων, οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείαις ἀναστροφικοὶ μέν εἰσιν σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν· οἱ μέντοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφανείαις δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι οὗτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν καὶ καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαί τε καὶ γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ ὅσοι εἰσὶν κώνων τομαὶ παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαί· γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσοι γραμμαί εἰσιν οὔτε εὐθεῖαι οὔτε κύκλοι οὔτε τινὲς τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶν τῷ γένει, ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων* ἐκείνοις.]

Οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι εἰς τὴν τῶν ἐπιπέδων [τούτων] τόπων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προσέθηκαν ἑτέρους, ὡς οὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν τὰ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω οὖν τὰ μὲν προσκείμενα ὕστερα, τὰ δ' ἐκ τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ·

ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου ὁτὲ μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὁτὲ δὲ τοῦ ἑτέρου, καὶ ὁτὲ μὲν ὁμοίως κειμένου φάνειαν, στερεοῦ δὲ ὅτι εἶναι γεωμ. τόπος, στερεόν, ἄλλοι δὲ γεωμ. τόποι εἶναι προχωρητικοί, ὅπως, γεωμ. τόπος σημείου εἶναι γραμμή, γεωμ. τόπος γραμμῆς εἶναι ἐπιφάνεια, ἐπιφανείας δὲ στερεόν, ἄλλοι δὲ γεωμ. τόποι εἶναι ἀκόμη προχωρητικοί, ὡς π.χ. σημείου μὲν γεωμ. τόπος εἶναι ἐπιφάνεια, γραμμῆς δὲ στερεόν. [Ἐκ τῶν γεωμετρικῶν δὲ τόπων εἰς τὸν ἀναλυόμενον γεωμ. τόπον, ἄλλοι μὲν ἐκ τῶν δεδομένων κατὰ τὴν θέσιν εἶναι ἀντίστοιχοι, ἄλλοι δὲ οἱ λεγόμενοι ἐπίπεδοι γεωμ. τόποι, καὶ οἱ στερεοὶ γεωμ. τόποι. Γραμμικοὶ προχωρητικοὶ τόποι εἶναι σημείων, οἱ δὲ πρὸς τὰς ἐπιφανείας εἶναι ἀναστροφικοὶ μὲν σημείων προχωρητικοὶ δὲ γραμμῶν· ὅμως οἱ γραμμικοὶ δεικνύονται ἐκ τῶν πρὸς τὰς ἐπιφανείας. Λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι καὶ αὐτοὶ περὶ τῶν ὁποίων συμπεραίνομεν, καὶ γενικῶς ὅσοι εἶναι εὐθεῖαι καὶ γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ λέγονται ὅσοι εἶναι τομαὶ κώνων, ἢ παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαί· γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσοι εἶναι γραμμαί, ὅμως οὔτε εὐθεῖαι οὔτε κύκλοι οὔτε ἐκ τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. Οἱ δὲ ὑπὸ τοῦ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας εἶναι κατὰ τὸ εἶδος ἐκ τῶν προλεχθέντων, ἐκ τῆς ἰδιότητος δὲ τῶν ὑποθέσεων * πρὸς ἐκείνους].

Οἱ μὲν λοιπὸν ἀρχαῖοι ἀποβλέποντες εἰς τὴν τάξιν τῶν ἐπιπέδων [τούτων] γεωμετρικῶν τόπων ἔγραψαν Στοιχεῖα περὶ αὐτῶν· τὴν ὁποίαν τάξιν δὲν ἔλαβον ὑπ' ὄψιν οἱ μεταγενέστεροι αὐτῶν καὶ προσέθεσαν ἄλλους τόπους, ἐπειδὴ αὐτοὶ δὲν εἶναι ἄπειροι κατὰ τὸ πλῆθος, ἐὰν κανεὶς θέλῃ νὰ προσθέσῃ τὰ ἔχοντα σχέσιν πρὸς τὰ τῆς τάξεως ἐκείνης. Θὰ θέσω λοιπὸν τὰ μὲν προσκείμενα ὡς ὕστερα, τὰ δὲ ἐκ τῆς τάξεως θὰ τὰ θέσω προηγούμενα, περιλαβὼν αὐτὰ εἰς μίαν, τὴν ἑξῆς πρότασιν·

ἐὰν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἢ ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι, ἢ περιέχουσι δεδομένην γωνίαν, καὶ ἢ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας λόγον δεδομένον, ἢ δεδομένον ἐμβαδόν, ἐφάπτεται δὲ τὸ πέρας τῆς μιᾶς εὐθείας ἐπιπέδου γεωμετρικοῦ τόπου, δεδομένου κατὰ τὴν θέσιν, καὶ τὸ πέρας τῆς ἄλλης εὐθείας θὰ ἐφάπτεται γεωμ. τόπου δεδομένου, ἄλλοτε μὲν τοῦ ὁμοειδοῦς, ἄλλοτε δὲ τοῦ ἄλλου, καὶ ἄλ-

πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὁτὲ δὲ ἐναντίως. ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων.

25. —— VII, 26 p. 666, 14 - 670, 2 :

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε·

*ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας·**)

ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας·

ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χω-

---

[*) Σ η μ. : Ἐκ τῆς φράσεως ταύτης συνάγεται ἡ κατασκευὴ τοῦ λεγομένου κύκλου τοῦ Ἀπολλωνίου. Εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν ἀπαντᾷ ἡ ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας ἡ ὁποία ἐπίσης ἀπαντᾷ εἰς κατασκευὴν τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Κωνικῶν χωρὶς νὰ ἀναφέρεται ἡ φράσις «ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας». Ὁ λεγόμενος ὅμως κύκλος τοῦ Ἀπολλωνίου εἶναι ἤδη γνωστὸς εἰς τὸν Ἀριστοτέλη, ὅστις τὸν χρησιμοποιεῖ εἰς τὰ Μετεωρολογικὰ διὰ ν' λοτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἄλλοτε δὲ ἐναντίως. Ταῦτα δὲ γίνονται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων.

25. — — :

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον (τῶν ἐπιπέδων γεωμ. τόπων) περιέχει τὰ ἑξῆς·

ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι καμφθῶσιν, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουσι κατά τι χωρίον, τὸ σημεῖον θὰ ἐφάπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας·

ἐὰν δὲ εὑρίσκωνται εἰς δοθέντα λόγον, θὰ ἐφάπτηται ἡ εὐθείας ἢ περιφερείας·

ἐὰν ὑπάρχῃ θέσει δεδομένη εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον καὶ ἀπὸ τούτου διαχθῇ πεπερασμένη εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς διαχθείσης ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὸ τμῆμα τὸ ἀπολαμβανόμενον ἢ πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον ἢ πρὸς ἄλλο δοθὲν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας αὐτῆς ἐδῶ θὰ ἐφάπτηται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι καμφθῶσι, καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς μιᾶς μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης κατὰ δοθὲν τετράγωνον ἢ εὑρίσκεται πρὸς αὐτὸ (τὸ τῆς ἄλλης) εἰς λόγον, τὸ σημεῖον θὰ ἐφάπτηται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἀπὸ ὁσωνδήποτε δεδομένων σημείων καμφθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἓν σημεῖον καὶ εἶναι τὰ ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν σχήματα

ἀποδείξῃ τὴν γένεσιν τοῦ οὐρανίου τόξου λέγων, ὅτι τοῦτο σχηματίζεται, ὅταν ἀκτῖνες ἐκ τοῦ παρατηρητοῦ ἐπὶ τῆς γῆς πρὸς τὸ οὐράνιον τόξον ἔχουσι λόγον σταθερὸν πρὸς ἀκτῖνας ἐκ τοῦ ἡλίου πρὸς τὸ οὐράνιον τόξον. Ὅταν ὑπάρχῃ ὁ σταθερὸς αὐτὸς λόγος εἰς τὰς ἀκτῖνας αὐτάς, τότε εἶναι δυνατὸς ὁ σχηματισμὸς τοῦ οὐρανίου τόξου ('Αριστοτέλης, μ γ 5, 375 b 16 - 377 a 28)].

ρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβάνῃ ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ, καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἐν κύκλῳ θέσει δεδομένῳ δοθέν τι σημεῖον ᾖ καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης ἤτοι μόνον ἢ τοῦτό τε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας·

καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν τὸ σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ δεδομένου σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς.

Ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ', λήμματα δὲ η'.

Inclinationum libri duo

26. — — VII, 27 p. 670, 3 - 672, 16 :

Νεύσεων δύο.

Νεύειν λέγεται γραμμὴ ἐπὶ σημεῖον, ἐὰν ἐπεκβαλλομένη ἐπ' αὐτὸ παραγίνηται. [καθόλου δὲ τὸ αὐτό ἐστιν, ἐάν τε ἐπὶ δοθὲν νεύειν σημεῖον λέγηται, ἐάν τέ ἐστίν τι ἐπ' αὐτῆς δοθέν, ἐάν τε διὰ δοθέντος ἐστὶν σημείου. ἐπέγραψαν δὲ ταῦτα νεύσεις ἀπὸ ἑνὸς τῶν εἰρημένων.] προβλήματος δὲ ὄντος καθολικοῦ τούτου

δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν τῷ μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθὲν σημεῖον, (τὸ ἄθροισμά των) ἴσα πρὸς δοθὲν χωρίον, τὸ σημεῖον θὰ ἐφάπτηται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων καμφθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παράλληλος πρὸς θέσει ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀπολαμβάνει ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθὲν σημεῖον, καὶ εἶναι τὰ ἀπὸ τῶν καμφθεισῶν σχήματα (τὸ ἄθροισμά των) ἴσα πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν ἀπολαμβανομένην (ἀποκοπτομένην), τὸ παρὰ τὴν κάμψιν σημεῖον θὰ ἐφάπτηται θέσει δεδομένης περιφερείας·

ἐὰν εἰς κύκλον, δεδομένον κατὰ τὴν θέσιν, ὑπάρχῃ δοθὲν σημεῖόν τι, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ εὐθεῖά τις, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐκτός, καὶ εἶναι τὸ τετράγωνον, τῆς μέχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου, ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς ὅλην τὴν εὐθεῖαν καὶ τὴν ἀπολαμβανομένην (ἀποκοπτομένην) ἐκτός, ἢ μόνον μὲ αὐτό, ἢ μὲ αὐτὸ καὶ μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ ἐντὸς δύο τμήματα, τὸ ἐκτὸς σημεῖον θὰ ἐφάπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας·

καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν τὸ σημεῖον ἐφάπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος ὑποτεθῇ, ὅτι δὲν ὑπάρχει, τὰ σημεῖα τὰ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ δεδομένου θὰ ἐφάπτωνται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς.

Ἔχουσι δὲ τὰ δύο βιβλία τῶν ἐπιπέδων γεωμετρικῶν τόπων θεωρήματα ἢ σχήματα 147, λήμματα δὲ 8.

26. — — :

Περὶ νεύσεων βιβλία δύο.

Γραμμὴ λέγεται ὅτι κατευθύνεται (νεύει) πρὸς σημεῖον, ἐὰν προεκτεινομένη καταλήγῃ εἰς αὐτό. [Γενικῶς δὲ εἶναι τὸ ἴδιον, καὶ ἐὰν λέγηται ὅτι κλίνει ἐπὶ δοθὲν σημεῖον, καὶ ἐὰν εἶναι ἐπ' αὐτῆς δοθέν τι, ἢ ἐὰν εἶναι διὰ δοθέντος σημείου.] Γενικὸν δὲ πρόβλημα τῶν νεύσεων εἶναι τὸ ἑξῆς·

ἐὰν δοθῶσι κατὰ τὴν θέσιν δύο γραμμαί, νὰ τεθῇ μεταξὺ τούτων εὐθεῖα δεδομένη κατὰ τὸ μέγεθος καταλήγουσα εἰς δοθὲν *ἐπὶ ταύτης τῶν ἐπὶ μέρους διάφορα τὰ ὑποκείμενα ἐχόντων ἃ μὲν [ἦν] ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεά, ἃ δὲ γραμμικά, τῶν ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες τὰ πρὸς πολλὰ χρησιμώτερα ἔδειξαν τὰ προβλήματα ταῦτα·*

θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι δοθεῖσαν τῷ μεγέθει εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν, νεύουσαν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου·

καὶ ῥόμβου δοθέντος καὶ ἐπεκβεβλημένης μιᾶς πλευρᾶς, ἁρμόσαι ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένην τῷ μεγέθει εὐθεῖαν νεύουσαν ἐπὶ τὴν ἀντικρὺς γωνίαν·

καὶ θέσει δοθέντος κύκλου, ἐναρμόσαι εὐθεῖαν μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθέν.

τούτων δὲ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τεύχει δέδεικται τὸ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας, ἔχον πτώσεις δ', καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον πτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου πτώσεις ἔχον β', ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τεύχει τὸ ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως πτώσεις ἐχούσης ι'· ἐν δὲ ταύταις ὑποδιαιρέσεις πλείονες διοριστικαὶ ἕνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας.

[Τὰ μὲν οὖν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπίπεδα ταῦτ' ἔστιν ἃ καὶ πρότερα δείκνυται, χωρὶς τῶν Ἐρατοσθένους μεσοτήτων· ὕστατα γὰρ ἐκεῖνα. τοῖς δὲ ἐπιπέδοις ἐφεξῆς τὴν τῶν στερεῶν ἡ τάξις ἀπαιτεῖ θεωρίαν· στερεὰ δὲ καλοῦσι προβλήματα οὐχ ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται, ἀλλ' ὅσα διὰ τῶν ἐπιπέδων μὴ δυνάμενα δειχθῆναι διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν δείκνυται, ὥστε ἀναγκαῖον πρότερον περὶ τούτων γράφειν. ἦν μὲν οὖν ἀναδεδομένα κωνικῶν στοιχείων

σημεῖον, εἰς τοῦτο δὲ ὑπάρχουσι διάφοροι μερικαὶ περιπτώσεις, ὅπου ἄλλοτε μὲν [εἶναι] ἐπίπεδα, ἄλλοτε δὲ στερεά, ἄλλοτε δὲ γραμμικὰ σχήματα, διαχωρίσαντες δὲ τὰ ἐπίπεδα ἔδειξαν τὰ ἑξῆς προβλήματα (τῶν νεύσεων) εἰς πλείστας περιπτώσεις χρησιμώτερα·

ἐὰν δοθῶσι κατὰ τὴν θέσιν ἡμικύκλιον καὶ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἢ δύο ἡμικύκλια ἔχοντα τὰς βάσεις ἐπ' εὐθείας, νὰ τεθῇ δοθεῖσα κατὰ τὸ μέγεθος εὐθεῖα μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν καταλήγουσα πρὸς τὴν ἀπέναντι γωνίαν τοῦ ἡμικυκλίου·

ἐὰν δοθῇ ῥόμβος καὶ ἐκβληθῇ ἡ μία πλευρά, νὰ προσαρμοσθῇ ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένη κατὰ τὸ μέγεθος εὐθεῖα καταλήγουσα πρὸς τὴν ἀπέναντι γωνίαν·

καὶ ἐὰν δοθῇ κατὰ τὴν θέσιν κύκλος νὰ ἐναρμοσθῇ εὐθεῖα εἰς αὐτὸν (νὰ γραφῇ χορδὴ) δεδομένη κατὰ τὸ μέγεθος καταλήγουσα εἰς δοθὲν σημεῖον.

Ἐκ τούτων δὲ εἰς μὲν τὸ πρῶτον βιβλίον ἀπεδείχθη τὸ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας ἔχον περιπτώσεις 4, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον περιπτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου ἔχον περιπτώσεις 2, εἰς δὲ τὸ δεύτερον βιβλίον τὸ ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως ἐχούσης περιπτώσεις 10· εἰς δὲ τὰς περιπτώσεις ταύτας πολλὰς ὑποδιαιρέσεις προσδιοριστικάς, ἕνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας.

[Τὰ μὲν λοιπὸν ἐπίπεδα εἰς τὸν ἀναλυόμενον τόπον εἶναι αὐτά, τὰ ὁποῖα ἐδείχθησαν καὶ προηγουμένως, χωρὶς τὰς μεσότητας τοῦ Ἐρατοσθένους· διότι αὐτὰ εἶναι τελευταῖα. Εἰς δὲ τὰ ἐφεξῆς ἐπίπεδα ἡ τάξις ἀπαιτεῖ τὴν θεωρίαν τῶν στερεῶν· στερεὰ δὲ προβλήματα καλοῦσιν ὄχι ὅσα προτείνονται εἰς τὰ στερεὰ σχήματα, ἀλλ' ὅσα μὴ δυνάμενα νὰ δειχθῶσι διὰ τῶν ἐπιπέδων, δεικνύονται διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν, ὥστε εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γράψωμεν προηγουμένως περὶ αὐτῶν. Ὑπῆρ-

πρότερον Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου ε´ τεύχη, ὡς ἂν ἤδη δυνατοῖς οὖσι τοῖς ταῦτα παραλαμβάνουσιν ἐπιτομώτερον γεγραμμένα.]

Ἔχει δὲ τὰ τῶν νεύσεων βιβλία δύο θεωρήματα μὲν ἤτοι διαγράμματα ρκε´, λήμματα δὲ λη´.

27. —— VII, 157 p. 820, 18-23:

Τὸ πρῶτον τῶν νεύσεων ἔχει προβλήματα θ´, διορισμοὺς τρεῖς· καί εἰσιν οἱ τρεῖς ἐλάσσονες ὅτε κατὰ τὸ πέμπτον καὶ ὁ κατὰ τὸ ζ´ πρόβλημα καὶ ὁ κατὰ τὸ θ´. τὸ δεύτερον νεύσεων ἔχει προβλήματα με´, διορισμοὺς τρεῖς, τόν τε κατὰ τὸ ιζ´ πρόβλημα καὶ τὸν κατὰ τὸ ιθ´ καὶ τὸν κατὰ τὸ κγ´· καί εἰσιν οἱ τρεῖς ἐλάσσονες.

[C o n i c a

28. —— VII, 30 p. 672, 17:

Κ ω ν ι κ ῶ ν η´.

Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ´ κωνικῶν Ἀπολλώνιος ἀναπληρώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα δ´ παρέδωκεν η´ κωνικῶν τεύχη. Ἀρισταῖος δέ, ὃς γέγραφε τὰ μέχρι τοῦ νῦν ἀναδιδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη ε´ συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς, ἐκάλει [καὶ οἱ πρὸ Ἀπολλωνίου] τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. ἐπεὶ δ᾽ ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν τούτων κώνων διαφόρως τεμνομένων αἱ γ´ γίνονται γραμμαί, διαπορήσας, ὡς φαίνεται, Ἀπολλώνιος τί δήποτε ἀποκληρώσαντες οἱ πρὸ αὐτοῦ ἣν μὲν ἐκάλουν ὀξυγωνίου κώνου τομὴν δυναμένην καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου εἶναι, ἣν δὲ ὀρθογωνίου εἶναι δυναμένην ὀξυγωνίου τε καὶ ἀμβλυγωνίου, ἣν δὲ ἀμβλυ-

χον λοιπὸν ἐκδεδομένα προηγουμένως τοῦ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου 5 βιβλία Κωνικῶν βιβλίων γεγραμμένα συντομώτερον διὰ τοὺς δυναμένους νὰ κατανοήσωσιν αὐτά.]

Περιέχουσι δὲ τὰ δύο βιβλία τῶν νεύσεων θεωρήματα ἢ σχήματα 125, λήμματα δὲ 38.

27. — — :

Τὸ πρῶτον βιβλίον τῶν νεύσεων ἔχει προβλήματα 9, προσδιορισμοὺς τρεῖς καὶ εἶναι οἱ τρεῖς μικρότεροι καὶ ὁ εἰς τὸ πέμπτον πρόβλημα, καὶ ὁ εἰς τὸ 7ον καὶ ὁ εἰς τὸ 9ον. Τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν νεύσεων ἔχει προβλήματα 45, προσδιορισμοὺς τρεῖς, ἤτοι εἰς τὸ 17ον πρόβλημα, εἰς τὸ 19ον καὶ εἰς τὸ 23ον· καὶ οἱ τρεῖς εἶναι μικρότεροι.

28. — — Κωνικά:

Κωνικῶν βιβλία ὀκτώ.

Τὰ 4 βιβλία τῶν Κωνικῶν τοῦ Εὐκλείδου συμπληρώσας ὁ Ἀπολλώνιος καὶ προσθέσας ἄλλα 4 παρέδωκεν 8 βιβλία τῶν Κωνικῶν. Ὁ δὲ Ἀρισταῖος, ὁ ὁποῖος ἔχει γράψει τὰ μέχρι σήμερον ἐκδιδόμενα 5 βιβλία Στερεῶν τόπων ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὰ Κωνικά, ὠνόμαζε [ὅπως καὶ οἱ πρὸ τοῦ Ἀπολλωνίου] ἐκ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν τὴν μίαν μὲν ὀξυγωνίου κώνου τομήν, τὴν ἄλλην δὲ ὀρθογωνίου κώνου τομήν, καὶ τὴν ἄλλην ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν τούτων κώνων τεμνομένων κατὰ διάφορον τρόπον γίνονται αἱ 3 κωνικαὶ γραμμαί, ἀπορήσας, ὡς φαίνεται, ὁ Ἀπολλώνιος, διὰ ποῖον λόγον διακρίσεως οἱ πρὸ αὐτοῦ ὠνόμαζον τὴν μὲν ὀξυγωνίου κώνου τομήν, ἡ ὁποία ἠδύνατο νὰ εἶναι καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου κώνου τομή, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, ἡ ὁποία ἠδύνατο νὰ εἶναι καὶ ὀξυγωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου, τὴν ἄλλην δὲ ἀμβλυγωνίου,

γωνίου δυναμένην εἶναι ὀξυγωνίου τε καὶ ὀρθογωνίου, μεταθεὶς τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου καλουμένην ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου ὑπερβολήν, ἑκάστην ἀπό τινος ἰδίου συμβεβηκότος. χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τετραγώνῳ, ἐν δὲ τῇ ἀμβλυγωνίου ὑπερβάλλον τετραγώνῳ, ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον. [τοῦτο δ' ἔπαθεν μὴ προσεννοήσας ὅτι κατά τινα ἰδίαν πτῶσιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸν κῶνον (καὶ γεννῶντος τρεῖς γραμμὰς) ἐν ἑκάστῳ τῶν κώνων ἄλλη καὶ ἄλλη τῶν γραμμῶν γίνεται, ἣν ὠνόμασεν ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ κώνου. ἐὰν γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον μιᾷ τοῦ κώνου πλευρᾷ, γίνεται μία μόνη τῶν τριῶν γραμμῶν, ἀεὶ ἡ αὐτή, ἣν ὠνόμασεν ὁ Ἀρισταῖος ἐκείνου τοῦ τμηθέντος κώνου τομήν.]

Ὁ δ' οὖν Ἀπολλώνιος οἷα περιέχει τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα κωνικῶν η' βιβλία λέγει κεφαλαιώδη θεὶς προδήλωσιν ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ πρώτου ταύτην· «περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶτ ὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλεῖον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξητασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν [καὶ τῶν ἀντικειμένων] συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους ἢ τίνας ἄξονας καλῶ εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παντοῖα χρήσιμα[τὰ]πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλείονα καὶ καλὰ καὶ ξένα κατανοήσαντες εὕρομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ ἡ ὁποία ἠδύνατο νὰ εἶναι καὶ ὀξυγωνίου καὶ ὀρθογωνίου, μεταθέσας τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου κώνου τομὴν καλουμένην ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου κώνου τομὴν παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν ὑπερβολήν, ἑκάστην δὲ ἔκ τινος ἰδιαιτέρου γνωρίσματος. Διότι χωρίον τι παραβαλλόμενον παρά τινα γραμμήν, εἰς μὲν τὴν ὀξυγωνιου κώνου τομὴν γίνεται ἐλλεῖπον τετράγωνόν τι, εἰς δὲ τὴν ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν γίνεται ὑπερβάλλον τετράγωνόν τι, εἰς δὲ τὴν ὀρθογωνίου κώνου τομὴν γίνεται οὔτε ἐλλεῖπον οὔτε ὑπερβάλλον (Εὐκλείδου 6, 28, 29. 1, 44). [Τοῦτο δὲ ἔπαθε μὴ κατανοήσας, ὅτι κατά τινα μίαν πτῶσιν τοῦ τέμνοντος τὸν κῶνον ἐπιπέδου (καὶ γεννῶντος τὰς τρεῖς γραμμάς), εἰς ἕκαστον τῶν κώνων γίνεται διάφορος γραμμή, τὴν ὁποίαν ὠνόμασεν ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ κώνου (σημ. δηλ. τοῦ ὀξυγωνίου - ἀμβλυγωνίου - ὀρθογωνίου). Διότι, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, γίνεται μία μόνη ἐκ τῶν τριῶν γραμμῶν, πάντοτε ἡ αὐτή, τὴν ὁποίαν ὁ Ἀρισταῖος ὠνόμασε τομὴν ἐκείνου τοῦ τμηθέντος κώνου.] (Σημ. : Τὰ ἐντὸς ἀγκυλῶν θεωροῦνται παρεμβολὴ καὶ ὄχι τοῦ Πάππου).

Ὁ Ἀπολλώνιος λοιπὸν ἀναφέρει περιληπτικῶς τὸ περιεχόμενον τῶν ὑπ' αὐτοῦ γραφέντων 8 κωνικῶν βιβλίων, θέσας εἰς τὸ προοίμιον τοῦ πρώτου βιβλίου τὴν ἑξῆς προδήλωσιν· «περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων (σημ. κλάδων τῆς ὑπερβολῆς) καὶ τὰς εἰς αὐτὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας, ἐξητασμένας περισσότερον καὶ καθολικώτερον, παρὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τὰ σχετικὰ μὲ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν [καὶ τῶν ἀντικειμένων] κλάδων ὑπερβολῆς, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα χρήσιμα γενικῶς διὰ τοὺς διορισμοὺς (ἀναγκαίας καὶ ἱκανὰς συνθήκας ἐπιλύσεως προβλήματος)· τὶ καλῶ δὲ διαμέτρους ἢ ἄξονας θὰ μάθῃς ἐκ τοῦ βιβλίου τούτου. Τὸ δὲ τρίτον βιβλίον περιέχει πολλὰ καὶ ποικίλα χρήσιμα καὶ διὰ τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ διὰ τοὺς διορισμούς, τῶν ὁποίων τὰ περισσότερα καὶ καλὰ καὶ ξένα ἀντιληφθέντες, εὕρομεν τὸν διὰ τριῶν καὶ 4 γραμμῶν τόπον μὴ ἐκτιθέμενον ὑπὸ *τρεῖς καὶ δ' γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προειρημένων τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ δ', ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμπίπτουσιν, καὶ ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ κύκλου περιφερείᾳ [κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλει] καὶ ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσιν. τὰ δὲ λοιπὰ δ' περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλεῖον, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν, τὸ δὲ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ κωνικῶν προβλημάτων διωρισμένων».*

Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα. ὃν δέ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς μὴ τετελειῶσθαι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ' ἂν αὐτὸς ἠδυνήθη οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς [ἀλλ' οὐδὲ μικρόν τι προσθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσιν] διά γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν ἄχρι τῶν κατ' Εὐκλείδην, ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. [ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς, καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν, ἐπιεικέστατος ὢν καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος, ὅσον δυνατὸν ἦν δεῖξαι τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν ἔγραψεν, οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον· τότε γὰρ ἦν ἀναγκαῖον ἐξελέγχειν, νῦν δ' οὐδαμῶς, ἐπείτοι καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς κωνικοῖς ἀτελῆ τὰ πλεῖστα καταλιπὼν οὐκ εὐθύνεται. προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύ-

τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ μέρος τι αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐχὶ ἐπιτυχῶς· διότι ἄνευ τῶν προειρημένων δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτελεσθῇ ἡ σύνθεσις. Τὸ δὲ 4ον βιβλίον περιέχει κατὰ πόσους τρόπους αἱ τομαὶ τῶν κώνων ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ ἀκόμη περισσότερα, περὶ τῶν ὁποίων οὐδὲν ἔχει γραφῇ παρὰ τῶν προηγουμένων μου, ὅπως π.χ. κατὰ πόσα σημεῖα συναντᾷ τομὴ κώνου περιφέρειαν τοῦ κύκλου, καὶ [κατὰ πόσα σημεῖα συναντῶνται] ἀντικείμενοι κλάδοι ὑπερβολῆς μὲ ἀντικειμένους κλάδους. Τὰ ὑπόλοιπα δὲ 4 βιβλία εἶναι σπουδαιότερα· διότι τὸ μὲν ἀσχολεῖται καθ' ὁλοκληρίαν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν, τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ περὶ διωρισμένων κωνικῶν προβλημάτων».

Ὁ Ἀπολλώνιος μὲν αὐτὰ γράφει. Τὸν γεωμ. τόπον δὲ τὸν ὁποῖον λέγει εἰς τὸ τρίτον βιβλίον, εἰς τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμάς, ὅτι δὲν ἐτελειώθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, οὔτε αὐτὸς ἠδυνήθη νὰ τελειώσῃ, οὔτε ἄλλος κανεὶς [ἀλλ' οὐδὲ νὰ προσθέσῃ τι εἰς τὰ ἐπ' αὐτοῦ γραφέντα ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου] διὰ τῶν μέχρι τῆς ἐποχῆς τοῦ Εὐκλείδου ἀποδειχθέντων περὶ κωνικῶν τομῶν θεωρημάτων, ὅπως καὶ αὐτὸς βεβαιώνει, λέγων, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ τελειωθῶσι χωρὶς τὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα αὐτὸς ἠναγκάσθη προηγουμένως νὰ ἀποδείξῃ. [Ὁ δὲ Εὐκλείδης παραδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον, ὡς ἐπαξίως γράψαντα τὰ κωνικὰ τὰ ὁποῖα παρέδωσε, καὶ μὴ προφθάσας ἢ μὴ θελήσας νὰ ἀντιπαραθέσῃ πρὸς αὐτὰ ὁμοίαν πραγματείαν, ὢν ἐπιεικέστατος καὶ εὐμενὴς πρὸς ὅλους, οἱ ὁποῖοι ἠδύναντο νὰ αὐξήσωσι τὰ μαθήματα (τὰ μαθηματικά), ὅπως τοῦτο πρέπει, καὶ οὐδόλως ἀποκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μέν, ὄχι ὅμως ἀλαζονικὸς ὅπως αὐτὸς (ὁ Ἀπολλώνιος), ὅσον ἦτο δυνατὸν ν' ἀποδείξῃ τοῦ (ἀναλυτικοῦ γεωμ.) τόπου διὰ τῶν κωνικῶν ἐκείνου (τοῦ Ἀρισταίου) ἀπέδειξε, ἐνῷ δὲν εἶπε, ὅτι τὸ ἀποδεικνυόμενον ἐτελείωσε· διότι τότε ἦτο ἀναγκαῖον νὰ γίνεται ἔλεγχος, τώρα ὅμως ὄχι, ἐπειδὴ *νηται προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου καὶ συσχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, ὅθεν ἔσχε καὶ τὴν τοιαύτην ἕξιν οὐκ ἀμαθῆ. οὗτος δὲ ὁ ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπος, ἐφ' ᾧ μέγα φρονεῖ προσθεὶς χάριν ὀφείλειν εἰδέναι τῷ πρώτῳ γράψαντι, τοιοῦτός ἐστιν.] ἐὰν γάρ, θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπό τινος [τοῦ αὐτοῦ] σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, τουτέστιν μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν. καὶ ἐὰν ἐπὶ δ' εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων, ὁμοίως τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης κώνου τομῆς.*

29. — — VII, 42 p. 682, 21 - 23 :

Ἔχει δὲ τὰ η' βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα υπζ', λήμματα δὲ [ἤτοι λαμβανόμενά ἐστιν εἰς αὐτὰ] ο'.].

30. — — VII, 63 p. 700, 9 - 18 :

[Ταῦτα λαμβάνεται εἰς τὴν τοῦ λόγου ἀποτομήν· ταῦτα καὶ εἰς τὴν τοῦ χωρίου ἀποτομὴν λαμβάνεται, διαφερόντως μόνον.]

καὶ αὐτὸς τὰ πλεῖστα τῶν κωνικῶν ἀφήσας ἀτελῆ δὲν εὐθύνεται. Ἠδυνήθη δὲ νὰ προσθέσῃ (ὁ Ἀπολλώνιος) εἰς τὸν (ἀναλυόμενον γεωμ.) τόπον τὰ ὑπολειπόμενα, λαβὼν ὑπ' ὄψει τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου γραφέντα ἤδη περὶ τοῦ τόπου, καὶ φοιτήσας εἰς τοὺς μαθητὰς τοῦ Εὐκλείδου πλεῖστον χρόνον, ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ὅπου δὲν ἔμαθε καὶ ὀλίγα πράγματα ἐπ' αὐτῶν. Ὁ τόπος δὲ αὐτὸς ὁ εἰς τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμάς, διὰ τὸν ὁποῖον ὑπερηφανεύεται μεγάλως, προσθέσας, ὅτι ὀφείλομεν νὰ χρεωστῶμεν χάριν εἰς ἐκεῖνον, ὁ ὁποῖος ἔγραψε (ἀπέδειξε) πρῶτος, ἔχει ὡς ἑξῆς.] Διότι, ἐὰν δοθῶσι τρεῖς εὐθεῖαι κατὰ τὴν θέσιν καὶ ἀπό τινος [τοῦ αὐτοῦ] σημείου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς τρεῖς, ὑπὸ δεδομένας γωνίας, καὶ εἶναι ὁ λόγος δοθεὶς τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς δύο εὐθείας, πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης, τὸ σημεῖον θὰ ἐφάπτηται κατὰ τὴν θέσιν στερεοῦ τόπου, τουτέστιν μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν. Καὶ ἐὰν εἰς τέσσαρας εὐθείας δεδομένας κατὰ τὴν θέσιν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ὑπὸ δεδομένας γωνίας, καὶ ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὰς δύο ἀχθείσας, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς δύο ἄλλας, εἶναι δοθείς, ὁμοίως τὸ σημεῖον θὰ ἐφάπτηται τῆς κατὰ τὴν θέσιν δεδομένης τομῆς κώνου.

29. — — :

Περιέχουσι δὲ τὰ 8 βιβλία τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου θεωρήματα ἢ σχήματα 487, λήμματα δὲ [ἢ λαμβανόμενα εἰς αὐτὰ] 70.

30. — — :

[Αὐτὰ λαμβάνονται εἰς τὴν ἀποτομὴν τοῦ λόγου· αὐτὰ δὲ λαμβάνονται καὶ εἰς τὴν ἀποτομὴν τοῦ χωρίου, μόνον διαφορετικά].

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς, χρήσιμον εἰς τὴν τοῦ ιγ′ τόπου ἀνακεφαλαίωσιν.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ, λαβεῖν ἐπεκβαλόντα τὴν ΑΔ δοθὲν τὸ Δ ποιοῦν τὸν τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

31. — — VII, 65 p. 702, 11 - p. 704, 6 :

[Τὸ πρῶτον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ζ′, πτώσεις κδ′, διορισμοὺς δὲ ε′, ὧν τρεῖς μὲν μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστιν μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε′ τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν β′ τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ′, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ἕκτου καὶ τοῦ ἑβδόμου. τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ′, πτώσεις δὲ ξγ′, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. τὸ πρῶτον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ζ′, πτώσεις κδ′, διορισμοὺς ζ′, ὧν δ′ μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστιν μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ πρώτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ β′ τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν β′ τοῦ δ′ τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου, ἐλάχιστοι δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ τρίτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν δ′ τοῦ δ′ καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ϛ′. τὸ δεύτερον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ′, πτώσεις ξ′, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό.]

[Ἐπιστήσειεν ἄν τις διὰ τί ποτε μὲν τὸ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον ἔχει τόπους ιδ′, τὸ δὲ τοῦ χωρίου ιγ′. ἔχει δὲ διὰ

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον τῆς πραγματείας λόγου ἀποτομή, χρήσιμον εἰς τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τοῦ 13ου τόπου.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, νὰ ληφθῇ ἀφοῦ προεκβληθῇ ἡ ΑΔ, δοθὲν τὸ σημεῖον Δ, σχηματίζον τὸν λόγον $\text{ΒΔ}:\text{ΔΑ} = \text{ΓΔ}:(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}-2\sqrt{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}})$.

31. — — :

[Τὸ πρῶτον βιβλίον τῆς πραγματείας Περὶ λόγου ἀποτομῆς ἔχει γεωμ. τόπους 7, περιπτώσεις 24, προσδιορισμοὺς δὲ 5, τῶν ὁποίων οἱ τρεῖς μὲν εἶναι μέγιστοι, οἱ δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ εἶναι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν τοῦ 5 τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν β′ περίπτωσιν τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν περίπτωσιν τοῦ ἑβδόμου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τοὺς τετάρτους τοῦ ἕκτου καὶ τοῦ ἑβδόμου. Τὸ δεύτερον βιβλίον τῆς πραγματείας Περὶ λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους 14, περιπτώσεις δὲ 63, προσδιορισμοὺς δὲ τοὺς προσδιορισμοὺς τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου βιβλίου· διότι ὅλον ἀνάγεται εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ πρῶτον βιβλίον τῆς πραγματείας Περὶ χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους 7, περιπτώσεις 24, προσδιορισμοὺς 7, τῶν ὁποίων 4 μὲν εἶναι μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ εἶναι μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ πρώτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν τοῦ β′ τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν β′ περίπτωσιν τοῦ δ′ τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν τοῦ ἕκτου, ἐλάχιστοι δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην περίπτωσιν τοῦ τρίτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ δ′ καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ 6ου. Τὸ δεύτερον βιβλίον τῆς πραγματείας Περὶ χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους 13, περιπτώσεις 60, προσδιορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου βιβλίου· διότι ἀνάγεται εἰς αὐτό.]

[Θὰ διηρωτᾶτο κανεὶς διατὶ ἆρά γε τὸ Περὶ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον βιβλίον ἔχει τόπους 14, τὸ δὲ (δεύτερον βιβλίον) Περὶ χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους 13. Τοῦτο συμβαίνει διὰ τόδε, ὅτι ὁ ζ′ ἐν τῷ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς τόπος παραλείπεται ὡς φανερός· ἐὰν γὰρ αἱ παράλληλοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ πέρατα πίπτωσιν, οἵα ἂν διαχθῇ, δοθὲν ἀποτέμνει χωρίον· ἴσον γὰρ γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν περάτων καὶ τῆς ἀμφοτέρων τῶν ἐξ ἀρχῆς τῇ θέσει δοθεισῶν εὐθειῶν συμβολῆς. ἐν δὲ τῷ λόγου ἀποτομῆς οὐκέτι ὁμοίως· διὰ τοῦτο οὖν προέχει τόπον ἕνα εἰς τὸ ἕβδομον τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ λοιπὰ ὄντα τὰ ⟨αὐτά⟩.]

32. —— VII, 67 p. 704, 7 - 13 :

Δ ι ω ρ ι σ μ έ ν η ς   τ ο μ ῆ ς   π ρ ῶ τ ο ν.

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πέμπτου προβλήματος.

α′. Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα, τὰ Γ Δ Ε, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ.

33. —— VII, 142 p. 798, 11 - 14 :

Ἀπῆκται ἄρα εἰς διωρισμένης α′· δεδομένων τριῶν εὐθειῶν τῶν ΘΔ ΔΚ Λ τεμεῖν τὴν ΔΚ κατὰ τὸ Η, καὶ ποιεῖν λόγον τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ ΗΔ ἴσου πρὸς ἴσον.

34. —— VII, 143 p. 802, 8 - 9 :

ἐν γὰρ τῇ διωρισμένῃ δέδεικται μεῖζον.

τὸν ἑξῆς λόγον, διότι ὁ 7ος τόπος εἰς τὸ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς παραλείπεται, ὡς φανερός· διότι, ἐὰν καὶ αἱ δύο παράλληλοι πίπτωσιν εἰς τὰ πέρατα, ὁποία εὐθεῖα καὶ ἂν διαχθῇ ἀποτέμνει δοθὲν χωρίον· διότι γίνεται ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν μεταξὺ τῶν περάτων καὶ τὴν συμβολὴν τῶν δύο ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὴν θέσιν δοθεισῶν εὐθειῶν. Εἰς δὲ τὸ βιβλίον Περὶ λόγου ἀποτομῆς δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον· διὰ τοῦτο λοιπὸν ἔχει ἕνα τόπον περισσότερον εἰς τὸ ἕβδομον τοῦ δευτέρου βιβλίου, ἐνῷ τὰ ἄλλα εἶναι τὰ αὐτά.]

32. — — :

Διωρισμένης τομῆς βιβλίον πρῶτον.

Λῆμμα χρήσιμον εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πέμπτου προβλήματος.

α΄. Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ x ΔΓ=ΒΔ x ΔΕ· λέγω, ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ : ΔΕ =ΑΒ x ΒΓ:ΑΕ x ΕΓ.

33. — — :

Ἀνήχθη ἄρα τὸ πρόβλημα εἰς διωρισμένης τομῆς βιβλίον πρῶτον (πρόβλημα 3, ἐπίταγμα 2), δηλ. δεδομένων τριῶν εὐθειῶν τῶν ΘΔ, ΔΚ, Λ νὰ τμηθῇ ἡ ΔΚ εἰς τὸ σημεῖον Η καὶ νὰ γίνῃ ΘΗ x ΗΚ : Λ x ΗΔ = ἴσον : ἴσον. (Εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα σημειώνει ὁ Πάππος, σελ. 802, 8 : διότι εἰς τὴν διωρισμένην τομὴν ἀπεδείχθη μεγαλύτερον. Εἰς δὲ τὴν διωρισμένην τομήν, σελ. 804, 13 θὰ εἶναι μεγαλύτερον τὸ ΘΗ x ΗΚ τοῦ ΘΤ x ΤΚ. Μαρτυρία 32).

34. — — :

Διότι εἰς τὴν διωρισμένην τομὴν ἀπεδείχθη μεγαλύτερον.

35. — — VII, 144 p. 802, 13 - 14 :

ἐπεὶ ἐν τῇ διωρισμένῃ δέδεικται ἔλασσον.

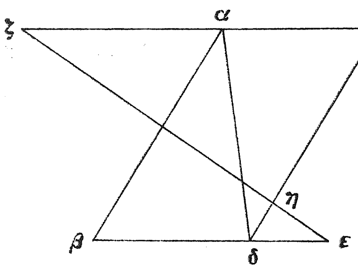
36. — — VII, 144 p. 804, 13 - 16 :

ἐν δὲ τῇ διωρισμένῃ μεῖζον ἔσται τὸ ὑπὸ ΘΗΚ τοῦ ὑπὸ ΘΤΚ.

37. — — VII, 231 p. 916, 26 - 918, 11 :

Εἰς τὸ πόρισμα τοῦ α′ βιβλίου (sc. Euclidis Porismata).

λη′. Θέσει ὄντος παραλληλογράμμου τοῦ ΑΔ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ε διαγαγεῖν τὴν ΕΖ καὶ ποιεῖν ἴσον τὸ ΖΓΗ τρίγωνον τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ ... καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ε εἰς θέσει τὰς ΑΓ ΓΔ διῆκται ἡ ΕΖ εἰς χωρίου ἀποτομήν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.



38. — — VIII, 49 p. 1108, 30 - 1110, 26 :

Πῶς δὲ κατασκευάζεται κοχλίας τὴν ἕλικα ἁρμοστὴν ἔχων τοῖς λοξοῖς ὀδοῦσι τοῦ δοθέντος τυμπάνου, φανερὸν οὕτως ἔσται.

Νοείσθω κύλινδρος ἰσοπαχῶς τετορνευμένος ὁ ΑΔΕΖ, πλευρὰ δ᾽ αὐτοῦ ἡ ΑΕ, καὶ εἰλήφθω μονοστρόφου ἕλικος ἐπ᾽

35. — — :

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διωρισμένην τομὴν ἀπεδείχθη μικρότερον.

36. — — :

Εἰς δὲ τὴν διωρισμένην τομὴν θὰ εἶναι μεγαλύτερον τὸ ΘΗ x ΗΚ τοῦ ΘΤ x ΤΚ.

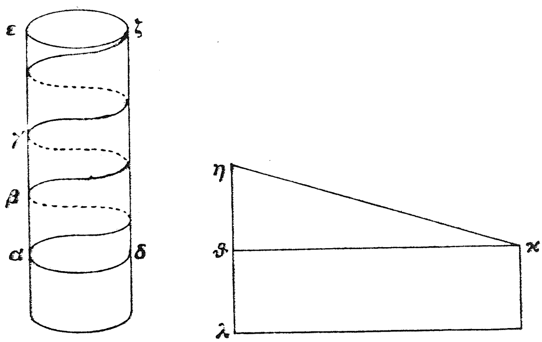
37. — — :

Εἰς τὸ πόρισμα τοῦ πρώτου βιβλίου.

Δοθέντος κατὰ τὴν θέσιν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔ, ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ Ε νὰ διαχθῇ ἡ ΕΖ καὶ νὰ γίνῃ τὸ τρίγωνον ΖΓΗ = παραλληλόγραμμον ΑΔ. . . καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ε εἰς δοθείσας κατὰ τὴν θέσιν τὰς ΑΓ, ΓΔ διήχθη ἡ ΕΖ εἰς χωρίου ἀποτομήν· εἶναι ἄρα ἡ ΕΖ δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν.

38. — — :

Πῶς δὲ κατασκευάζεται κοχλίας ἔχων τὴν ἕλικα ἁρμοστὴν



εἰς τοὺς λοξοὺς ὀδόντας τοῦ δοθέντος τυμπάνου, θὰ εἶναι φανερὸν ὡς ἑξῆς.

Ἂς νοηθῇ κύλινδρος ἰσοπαχῶς τορνευμένος ὁ ΑΔΕΖ πλευρὰ δὲ αὐτοῦ (γεννήτρια) ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς, μονοστρόφου *αὐτῆς διάστημα τὸ ΑΒ, καὶ λεπίδιον χαλκοῦν γεγενήσθω, οὗ τὸ μὲν ΗΘΚ μέρος τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔστω ὀρθὴν ἔχον τὴν Θ γωνίαν, τὸ δὲ λοιπὸν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΘΚΛ, ἴση δὲ κείσθω ἡ ΘΗ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΔΕΖ κυλίνδρου, καὶ περικαμπτέσθω τὸ λεπίδιον περὶ τὸν κύλινδρον, ἵνα καὶ τὸ ΘΚΛ παραλληλόγραμμον κύλινδρος γένηται ἁπτόμενος τοῦ ΔΕ, ὅταν εἰσαχθῇ, καὶ κείσθω τὸ μὲν Θ ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ Η ἐπὶ τὸ Β, καὶ οὕτως γράψομεν διὰ τῆς ΗΚ ὑποτεινούσης καμφθείσης [δὲ] τὴν καλουμένην μονόστροφον ἕλικα ὡς τὴν ΒΑ. καὶ πάλιν μεταθέντες τὸ λεπίδιον, ὥστε τὸ μὲν Θ κατὰ τὸ Β εἶναι τὸ δὲ Η κατὰ τὸ Γ, γράψομεν διὰ τῆς ΗΚ ἑτέραν ἕλικα μονόστροφον, ὥστε τὴν ὅλην εἶναι δίστροφον. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ τὸ Α ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται ὁμαλῶς κινούμενον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου κινηθεῖσα εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθίσταται καὶ τὸ εἰρημένον φέρεσθαι σημεῖον κατὰ τῆς ΑΒ εὐθείας γράψει τὴν μονόστροφον ἕλικα· τοῦτο γὰρ Ἀπολλώνιος ὁ Περγεὺς ἀπέδειξεν.*

39. Pappi commentarius in Elementorum libr. X, qui Arabice exstat et ex parte a Woepckio (Mémoires présentées par divers savans à l'académie des sciences 1856. XIV) cum interpretatione Francogallica editus est, p. 691:

Plus tard le grand Apollonius, dont le génie atteignit au plus haut degré de supériorité dans les mathématiques, ajouta à ces découvertes[1]*) d'admirables théories après bien des efforts et de travaux.*

1) Theaeteti de irrationalibus.

ἕλικος διάστημα (βῆμα) τὸ ΑΒ καὶ ἂς κατασκευασθῇ λεπίδιον ἐκ χαλκοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν μέρος ΗΘΚ ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν Θ, τὸ ἄλλο δὲ ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΘΚΛ, ἂς ληφθῇ δὲ ἡ ΘΗ = ΑΒ, ἡ δὲ ΘΚ = μὲ τὴν περίμετρον τοῦ κυλίνδρου ΑΔΕΖ, καὶ ἂς περικαμφθῇ τὸ λεπίδιον περὶ τὸν κύλινδρον, ἵνα καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΚΛ γίνῃ κύλινδρος ἐφαπτόμενος τοῦ ΔΕ κυλίνδρου, ὅταν εἰσαχθῇ, καὶ ἂς κεῖται τὸ μὲν Θ εἰς τὸ Α, τὸ δὲ Η εἰς τὸ Β, καὶ τοιουτοτρόπως γράφομεν διὰ τῆς ὑποτεινούσης ΗΚ καμφθείσης [δὲ] τὴν καλουμένην μονόστροφον ἕλικα, ὡς π.χ. τὴν ΒΑ. Καὶ πάλιν μεταθέτοντες τὸ λεπίδιον, ὥστε τὸ μὲν Θ νὰ εἶναι εἰς τὸ Β, τὸ δὲ Η εἰς τὸ Γ, γράφομεν διὰ τῆς ΗΚ ἄλλην ἕλικα μονόστροφον, ὥστε ἡ ὅλη νὰ εἶναι δίστροφος. Διότι εἰς ὃν χρόνον τὸ Α ἔρχεται εἰς τὸ Β κινούμενον ὁμαλῶς, εἰς τοῦτον ἡ ΑΒ κινηθεῖσα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθίσταται καὶ τὸ εἰρημένον σημεῖον φερόμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας θὰ γράψῃ τὴν μονόστροφον ἕλικα· διότι τοῦτο τὸ ἀπέδειξεν ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγεύς.

39. Σχόλια τοῦ Πάππου εἰς τὸ 10ον βιβλίον τῶν Στοιχείων, ἐκ τοῦ ἀραβικοῦ, ἐκδοθέντα ὑπὸ τοῦ (Γερμανοῦ) Woepcke διὰ τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τῆς Γαλλίας, κατὰ τὸ 1856. XIV σελ. 691 :

Βραδύτερον ὁ μέγας Ἀπολλώνιος, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα φθάνει τὸν ὕψιστον βαθμὸν ἀνωτερότητος εἰς τὰ μαθηματικά, προσέθεσεν εἰς τὰς ἀνακαλύψεις αὐτὰς (τοῦ Θεαιτήτου) λαμπρὰς θεωρίας κατόπιν σπουδαίων προσπαθειῶν καὶ ἐργασιῶν.

40. *Pappus in Elem. X p. 693 ed. Woepcke :*

Enfin, Apollonius distingua[1]*) les espèces des irrationnelles ordonnées, et découvrit la science des quantités appelées (irrationnelles) inordonnées, dont il produisit un très-grand nombre par des méthodes exactes.*

41. *Pappus in Elem. X p. 694 :*

Il faut aussi qu'on sache que, non-seulement lorsqu'on joint ensemble deux lignes rationnelles et commensurables en puissance, on obtient la droite de deux noms, mais que trois ou quatre lignes produisent d'une manière analogue la même chose. Dans le premier cas, on obtient la droite de trois noms, puisque la ligne entière est irrationnelle; et, dans le second cas, on obtient la droite de quatre noms, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La démonstration [de l'irrationnalité] de la ligne composée de trois lignes rationnelles et commensurables en puissance est exactement la même que la demonstration relative à la combinaison de deux lignes.

Mais il faut recommencer encore et dire que nous pouvons, non-seulement prendre une seule ligne moyenne entre deux lignes commensurables en puissance, mais que nous pouvons en prendre trois ou quatre, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, puisque nous pouvons prendre entre deux lignes droites données quelconques autant de lignes que nous voulons, en proportion continue.

---

1) H. e. ab inordinatis distinxit ut proprium quoddam genus.

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

40. σελ. 693 :

Τέλος ὁ Ἀπολλώνιος διέκρινε τὰ εἴδη τῶν διατεταγμένων ἀσυμμέτρων, καὶ ἀνεκάλυψε τὴν ἐπιστήμην τῶν μεγεθῶν τῶν καλουμένων ἀτάκτων ἀσυμμέτρων, ἐκ τῶν ὁποίων παρήγαγε πολὺ μεγάλον ἀριθμὸν δι' ἀκριβῶν μεθόδων.

41. σελ. 694 :

Πρέπει νὰ εἶναι γνωστὸν ἀκόμη ὅτι, οὐ μόνον ὅταν προστίθενται δύο ῥηταὶ εὐθεῖαι δυνάμει μόνον σύμμετροι λαμβάνεται ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος), ἀλλὰ καὶ ὅταν προστίθενται τρεῖς ἢ τέσσαρες εὐθεῖαι λαμβάνεται ἀνάλογος εὐθεῖα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λαμβάνεται εὐθεῖα ἐκ τριῶν ὀνομάτων (τριώνυμος), καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν λαμβάνεται εὐθεῖα ἐκ τεσσάρων ὀνομάτων (τετρώνυμος) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς εὐθείας ἐκ τῆς προσθέσεως τριῶν εὐθειῶν δυνάμει συμμέτρων εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτή, ὡς καὶ κατὰ τὴν πρόσθεσιν δύο εὐθειῶν.

Ἀλλὰ πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν, ὅτι δυνάμεθα οὐ μόνον νὰ λάβωμεν μίαν μέσην εὐθεῖαν μεταξὺ δύο εὐθειῶν δυνάμει συμμέτρων, ἀλλ' ὅτι δυνάμεθα ἀκόμη νὰ λάβωμεν τρεῖς ἢ τέσσαρας, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον, διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μεταξὺ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν οἱωνδήποτε, τόσας εὐθείας, ὅσας θέλωμεν, ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Et, de même, dans les lignes formées par addition, nous pouvons, non-seulement construire la droite de deux noms, mais nous pouvons aussi construire celle de trois noms, ainsi que la première et la seconde de trois médiales; puis, la ligne composée de trois droites incommensurables en puissance et telles que l'une d'elles donne avec chacune des deux autres une somme des carrés rationnelle, tandis que le rectangle compris sous les deux lignes est médial, de sorte qu'il en résulte une majeure composée de trois lignes. Et, d'une manière analogue, on obtient la droite qui peut une rationnelle et une médiale, composée de trois droites, et de même celle qui peut deux médiales.

Car, supposons trois lignes rationnelles commensurables en puissance seulement. La ligne composée de deux de ces lignes, à savoir la droite de deux noms, est irrationnelle, et, en conséquence, l'espace compris sous cette ligne et sous la ligne restante est irrationnel, et, de même, le double de l'espace compris sous ces deux lignes sera irrationnel. Donc, le carré de la ligne entière, composée de trois lignes, est irrationnel, et, conséquemment, la ligne est irrationnelle, et on l'appelle droite de trois noms.

Et, si l'on a quatres lignes commensurables en puissance, comme nous l'avons dit, le procédé sera exactement le même; et on traitera les lignes suivantes d'une manière analogue.

Qu'on ait ensuite trois lignes médiales commensurables en puissance, et dont l'une comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel; alors la droite composée

Ἐπίσης, εἰς τὰς προκυπτούσας ἐκ προσθέσεως εὐθείας, δυνάμεθα οὐ μόνον νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὐθεῖαν, ἀλλ' ἀκόμη καὶ τὴν ἐκ τριῶν ὀνομάτων, ὡς καὶ τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν τῶν τριῶν μέσων· κατόπιν τὴν εὐθεῖαν τὴν συντεθειμένην ἐκ τριῶν εὐθειῶν δυνάμει ἀσυμμέτρων, καὶ ἐκείνας καθ' ἃς ἡ μία ἐξ αὐτῶν δίδει μεθ' ἑκατέρας τῶν ἄλλων ἄθροισμα τετραγώνων ῥητῶν, ἐνῷ τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι μέσον, ὥστε νὰ σχηματίζηται ἡ μείζων ἐκ τριῶν εὐθειῶν. Καὶ κατ' ἀνάλογον τρόπον λαμβάνεται ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἓν ῥητὸν καὶ ἓν μέσον, ἀποτελούμενον ἐκ τριῶν εὐθειῶν, καὶ ἐπίσης ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς δύο μέσα.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν τρεῖς μόνον εὐθείας ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἀποτελουμένη ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) εἶναι ἄρρητος καὶ συνεπῶς τὸ χωρίον τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τῆς ἀπομενούσης εὐθείας εἶναι ἄρρητον, καὶ ἐπίσης, τὸ διπλάσιον τοῦ χωρίου τοῦ περιλαμβανομένου ὑπὸ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν θὰ εἶναι ἄρρητον. Ὅθεν τὸ τετράγωνον ὅλης τῆς εὐθείας, τῆς ἀποτελουμένης ἐκ τριῶν εὐθειῶν, εἶναι ἄρρητον, καὶ ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα εἶναι ἄρρητος καὶ καλεῖται ἐκ τριῶν ὀνομάτων (τριώνυμος).

Καὶ ὅταν ὑπάρχωσι τέσσαρες εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι, ὡς ἐλέχθη, ἡ μέθοδος εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτή· καὶ ἡ διαπραγμάτευσις τῶν ἑπομένων εὐθειῶν γίνεται κατ' ἀνάλογον τρόπον.

Ἔστω ἀκολούθως, ὅτι ὑπάρχουσι τρεῖς εὐθεῖαι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲ ἑκάστην τῶν δύο ἄλλων σχηματίζει ὀρθογώνιον ῥητόν· ὅθεν ἡ εὐθεῖα ἡ συν-

des deux lignes est irrationnelle et s'appelle la première de deux médiales; la ligne restante est médiale, et l'espace compris sous ces deux lignes est irrationnel. Conséquemment, le carré de la ligne entière est irrationnel. Le reste des autres lignes se trouve dans les mêmes circonstances. Les lignes composées s'étendent donc jusqu'à l'infini dans toutes les espèces formées au moyen de l'addition.

De même, il n'est pas nécessaire que, dans les lignes irrationnelles formées au moyen de la soustraction, nous nous bornions à n'y faire qu'une seule soustraction, de manière à obtenir l'apotome, ou le premier apotome de la médiale, ou le second apotome de la médiale, ou la mineure, ou la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, ou celle qui fait avec une surface médiale un tout médial; mais nous pourrons y effectuer deux ou trois ou quatre soustractions.

Lorsque nous faisons cela, nous démontrons, d'une manière analogue à ce qui précède, que les lignes restantes sont irrationnelles, et que chacune d'elles est une des lignes formées par soustraction. C'est-à-dire que, si d'une ligne rationnelle nous retranchons une autre ligne rationnelle commensurable à la ligne entière en puissance, nous obtenons pour ligne restante un apotome; et si nous retranchons de cette ligne retranchée et rationnelle, qu'Euclide appelle la congruente, une autre ligne rationnelle qui lui est commensurable en puissance, nous obtenons, comme partie restante, un apotome; de même que, si nous retranchons de la ligne rationnelle et retranchée de cette ligne une autre ligne qui lui est commensurable en puissance, le reste est un apo'ome. Il en est de même pour la soustraction des autres lignes.

τεθειμένη ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἄρρητος καὶ ὀνομάζεται ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ ἀπομένουσα εὐθεῖα εἶναι μέση καὶ τὸ χωρίον τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι ἄρρητον. Τὸ ὑπόλοιπον τῶν ἄλλων εὐθειῶν εὑρίσκεται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας. Ὅθεν αἱ συντιθέμεναι εὐθεῖαι ἐκτείνονται ἐπ' ἄπειρον, καθ' ὅλα τὰ εἴδη τὰ σχηματιζόμενα διὰ τῆς προσθέσεως.

Ἐπίσης, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, ὅπως εἰς τὰς ἀρρήτους εὐθείας τὰς σχηματιζομένας κατόπιν ἀφαιρέσεως, νὰ περιορισθῇ τις εἰς μίαν μόνον ἀφαίρεσιν, ὥστε νὰ λάβῃ τὴν ἀποτομήν, ἢ τὴν πρώτην ἀποτομὴν μέσης, ἢ τὴν δευτέραν ἀποτομὴν μέσης, ἢ τὴν ἐλάσσονα, ἢ τὴν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης, ἢ τὴν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐπιτελέσωμεν δύο ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας ἀφαιρέσεις.

Ὅταν κάμωμεν τοῦτο, ἀποδεικνύομεν κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὡς προηγουμένως, ὅτι αἱ ἀπομένουσαι εὐθεῖαι εἶναι ἄρρητοι, καὶ ὅτι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐκ τῶν σχηματιζομένων δι' ἀφαιρέσεως. Τουτέστιν, ἐὰν ἐκ μιᾶς ῥητῆς εὐθείας ἀφαιρέσωμεν ἄλλην εὐθεῖαν ῥητήν, δυνάμει μόνον σύμμετρον πρὸς τὴν ὅλην, λαμβάνομεν ὡς ὑπόλοιπον μίαν ἀποτομήν· καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἐκ τῆς ἀφαιρεθείσης αὐτῆς καὶ ῥητῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁ Εὐκλείδης ὀνομάζει ἰσοδύναμον, ἄλλην εὐθεῖαν ῥητήν, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς αὐτὴν δυνάμει σύμμετρος, λαμβάνομεν ὡς ὑπόλοιπον ἀποτομήν· ἐπίσης, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἐκ ῥητῆς εὐθείας, ἀφαιρεθείσης ἐκ τῆς εὐθείας αὐτῆς, ἄλλην εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι δυνάμει σύμμετρος πρὸς αὐτήν, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἀποτομή. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἄλλων εὐθειῶν.

Il est donc alors impossible de s'arrêter, soit dans les lignes formées par addition, soit dans celles formées par soustraction; mais on procède à l'infini, dans celles-là, en ajoutant, et dans celles-ci, en ôtant la ligne retranchée. Et, naturellement, l'infinité des quantités irrationnelles se manifeste par des procédés tels que les précédents, vu que la proportion continue ne s'arrête pas à un nombre déterminé pour les médiales, que l'addition n'a pas de fin pour les lignes formées par addition, et que la soustraction n'arrive pas non plus à un terme quelconque. [1])

42. *Pappus in Elem. X p. 701 :*

Les irrationnelles se divisent premièrement en inordonnées, c'est-à-dire celles qui tiennent de la matière qu'on appelle corruptible, et qui s'étendent à l'infini; et, secondement, en ordonnées, qui forment le sujet limité d'une science, et qui sont aux inordonnées comme les rationnelles sont aux irrationnelles ordonnées. Or Euclide s'occupa seulement des ordonnées qui sont homogènes aux rationnelles, et qui ne s'en éloignent pas considérablement; ensuite Apollonius s'occupa des inordonnées, entre lesquelles et les rationnelles la distance est très-grande.

43. *Proclus in Eucl. (ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873), p. 71, 17 - 21 :*

καθάπερ δὴ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (I p. 12, 3. 20, 10) καὶ Ἀπολλώνιος (*in libris*

1) Quid hinc de opere Apollonii concludi possit, exposuit Woepcke p. 706 sqq. uestigia doctrinae Apollonianae fortasse in additamento subditiuo Eucl. Elem. X, 112-115 p. 356-70 exstare, suspicatus sum in ed. Eucl. V p. LXXXV. Pappus tamen sine suspicione X, 115 legit; u. Woepcke p. 702.

Ὅθεν εἶναι ἀδύνατον νὰ σταματήσωμεν εἴτε εἰς τὰς ἐκ προσθέσεως σχηματιζομένας εὐθείας εἴτε εἰς τὰς ἐξ ἀφαιρέσεως· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν ἐπ' ἄπειρον εἴτε προσθέτοντες εἴτε ἀφαιροῦντες. Καὶ βεβαίως, ἡ ἀπειρία τῶν ἀρρήτων εὐθειῶν διαπιστοῦται ἐκ τῶν μεθόδων, αἱ ὁποῖαι προηγήθησαν, διότι ἡ συνεχὴς ἀναλογία δὲν σταματᾷ εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν μέσων, ὥστε ἡ πρόσθεσις νὰ μὴ ἔχῃ τέλος, διὰ τὰς ἐκ προσθέσεως σχηματιζομένας εὐθείας, καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ μὴ καταλήγῃ εἰς οἱονδήποτε ὅρον.

42. Πάππος εἰς 10ον βιβλίον Στοιχείων Εὐκλείδου, σελ. 701:

Αἱ ἄρρητοι εὐθεῖαι διαιροῦνται κατὰ πρῶτον εἰς ἀτάκτους, δηλαδὴ εἰς τοιαύτας, αἱ ὁποῖαι συνίστανται ἐξ ὕλης φθαρτῆς (ἐξαντλουμένης) καὶ ἐκείνης, ἥτις ἐκτείνεται εἰς τὸ ἄπειρον· καὶ δεύτερον εἰς διατεταγμένας, αἵτινες σχηματίζουσι τὸ ὡρισμένον θέμα μιᾶς ἐπιστήμης, καὶ εἶναι πρὸς τὰς ἀτάκτους, ὅπως εἶναι αἱ ῥηταὶ πρὸς τὰς διατεταγμένας ἀρρήτους. Ἀλλ' ὁ Εὐκλείδης ἀσχολεῖται μόνον μὲ τὰς διατεταγμένας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὁμογενεῖς πρὸς τὰς ῥητάς, καὶ δὲν ἀπέχουσι τούτων οὐσιωδῶς· ἔπειτα ὁ Ἀπολλώνιος μὲ τὰς ἀτάκτους, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ τῶν ῥητῶν, ἡ ἀπόστασις εἶναι πολὺ μεγάλη.

43. Πρόκλος, Σχόλια εἰς Στοιχεῖα Εὐκλείδου:

Ὅπως βεβαίως καὶ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ ὁ Ἀπολλώνιος καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι, φαίνονται, ὅτι *conicorum) καὶ οἱ ἄλλοι πάντες φαίνονται τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ [sc. Elementa] δεδειγμένοις [ὡς] ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι.*

44. — — p. 74, 22 - 24 :

ὥσπερ τὰ περὶ τῶν ἀτάκτων ἀλόγων, ἃ ὁ ***Ἀπολλώνιος*** *ἐπὶ πλέον ἐξειργάσατο.*

45. — — p. 100, 4 - 8 :

Τοσαῦτα περὶ τῆς γραμμῆς εἰρήσθω κατὰ τὰς θεωρικωτέρας ἐπιβολάς. ἀποδεξόμεθα δὲ καὶ τοὺς περὶ Ἀπολλώνιον λέγοντας, ὅτι γραμμῆς ἔννοιαν μὲν ἔχομεν, ὅταν τὰ μήκη μόνον ἢ τῶν ὁδῶν ἢ τῶν τοίχων ἀναμετρεῖν κελεύωμεν.

46. — — p. 104, 26 - 105, 15 :

Διαμφισβητοῦσι δέ τινες πρὸς τὴν διαίρεσιν ταύτην καί φασι μὴ μόνας εἶναι τὰς ἁπλᾶς γραμμάς, ἀλλὰ καὶ τρίτην ἄλλην, τὴν περὶ τὸν κύλινδρον ἕλικα γραφομένην, ὅταν εὐθείας κινουμένης περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου σημεῖον ὁμοταχῶς ἐπ' αὐτῆς κινῆται. γίνεται γὰρ ἕλιξ, ἧς ὁμοιομερῶς πάντα τὰ μέρη πᾶσιν ἐφαρμόζει, καθάπερ Ἀπολλώνιος ἐν τῷ περὶ τοῦ κοχλίου γράμματι δείκνυσιν. καὶ τοῦτο τὸ πάθος μόνη πέπονθεν ἑλίκων αὕτη. καὶ γὰρ τῆς ἐπιπέδου τὰ μόρια ἀνόμοια ἀλλήλοις καὶ τῆς περὶ τὸν κῶνον γραφομένης καὶ τῆς περὶ τὴν σφαῖραν. μόνη δὲ ὁμοιομερὴς ἡ κυλινδρική, καθάπερ δὴ καὶ ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφερὴς γραμμή· μήποτε οὖν τρεῖς εἰσιν αἱ ἁπλαῖ γραμμαὶ καὶ οὐ δύο μόνον;

Πρὸς δὴ ταύτην τὴν ἀπορίαν ἀπαντησόμεθα λέγοντες, ὁμοιομερῆ μὲν εἶναι τὴν ἕλικα ταύτην, ὡς καὶ Ἀπολλώνιος δέδειχεν, ἁπλῆν δὲ οὐδαμῶς.

χρησιμοποιοῦσι τὰ εἰς τὴν πραγματείαν αὐτὴν (τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου) ἀποδεδειγμένα ὡς ἀρχὰς ὡμολογημένας.

44. — — :

καθὼς τὰ περὶ τῶν ἀτάκτων ἀλόγων, τὰ ὁποῖα ὁ Ἀπολλώνιος ἐπεξειργάσθη περισσότερον.

45. — — :

Ἂς λεχθῶσι λοιπὸν περὶ τῆς γραμμῆς τόσα, συμφώνως πρὸς τὰς θεωρητικωτέρας ἑρμηνείας. Θὰ ἀποδεχθῶμεν δὲ καὶ τοὺς περὶ τὸν Ἀπολλώνιον λέγοντας, ὅτι ἔννοιαν μὲν ἔχομεν γραμμῆς, ὅταν προστάζωμεν νὰ γίνῃ μέτρησις τῶν μηκῶν, ἢ τῶν ὁδῶν ἢ τῶν τοίχων.

46. — — :

Διαμφισβητοῦσι δὲ μερικοὶ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ λέγουσιν, ὅτι δὲν εἶναι μόνον αἱ ἁπλαῖ γραμμαί, ἀλλ' ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη τρίτη, ἡ ἕλιξ ἡ γραφομένη περὶ τὸν κύλινδρον, ὅταν, ἐνῷ εὐθεῖα κινουμένη περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, σημεῖόν τι κινεῖται ἐπ' αὐτῆς ὁμαλῶς. Διότι γίνεται ἕλιξ, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ μέρη ἐφαρμόζωσιν εἰς ὅλα, ὅπως καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀποδεικνύει εἰς τὴν πραγματείαν περὶ τοῦ κοχλίου. Καὶ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἔχει μόνον αὐτή, ἐκ τῶν ἑλίκων. Διότι τὰ μόρια τῆς ἐπιπέδου ἕλικος εἶναι ἀνόμοια μεταξύ των, ὡς ἐπίσης καὶ τῆς περὶ τὸν κῶνον γραφομένης καὶ τῆς περὶ τὴν σφαῖραν. Μόνη δὲ ὁμοιομερὴς ἕλιξ εἶναι ἡ κυλινδρική, ὅπως ὁμοιομερὴς εἶναι καὶ ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ κυκλική. Μήπως λοιπὸν αἱ ἁπλαῖ γραμμαὶ εἶναι τρεῖς καὶ ὄχι μόνον δύο ;

Πρὸς τοὺς ἔχοντας λοιπὸν αὐτὴν τὴν ἀπορίαν θὰ ἀπαντήσωμεν λέγοντες, ὅτι ἡ ἕλιξ αὐτὴ εἶναι ὁμοιομερής, ὅπως ἀπέδειξεν ὁ Ἀπολλώνιος, καθόλου δὲ ἁπλῆ.

47. — — *p.* 123, 14 - 19 :

Τοιούτων δὴ τῶν ἀπόρων ὄντων καὶ τοῦ μὲν Εὐκλείδου κλίσιν λέγοντος τὴν γωνίαν, τοῦ δὲ ᾿Απολλωνίου συναγωγὴν ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ πρὸς ἑνὶ σημείῳ ὑπὸ κεκλασμένῃ γραμμῇ ἢ ἐπιφανείᾳ —δοκεῖ γὰρ οὗτος καθόλου πᾶσαν ἀφορίζεσθαι γωνίαν—.

48. — — *p.* 124, 17 - 19 :

καὶ τὴν ἰδιότητα τῆς γωνίας εὑρήσομεν συναγωγὴν μὲν οὐκ οὖσαν, ὥσ/περ καὶ ὁ ᾿Απολλώνιός φησιν, ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ.

49. — — *p.* 125, 14 - 18 :

ποσότητα δὲ εἰρήκασιν αὐτὴν (sc. τὴν γωνίαν), ὅσοι φασὶ || *τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν, ὧν καὶ ὁ Πλούταρχός ἐστιν, εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν ᾿Απολλώνιον.*

50. — — *p.* 183, 13 - 20 :

μάτην οὖν τῶν ἀξιωμάτων ᾿Απολλώνιος ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις παραδιδόναι. ὀρθῶς γὰρ καὶ ὁ Γεμῖνος ἐπέστησεν, ὅτι οἱ μὲν καὶ τῶν ἀναποδείκτων ἀποδείξεις ἐπενόησαν καὶ ἀπὸ ἀγνωστοτέρων μέσων τὰ γνώριμα πᾶσιν κατασκευάζειν ἐπεχείρησαν —ὃ δὴ πέπονθεν ὁ ᾿Απολλώνιος δεικνύναι βουλόμενος ὅτι ἀληθὲς τὸ ἀξίωμα τὸ λέγον τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι—.

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ

47. — — :

Ἐνῷ λοιπὸν ὑπάρχουσιν αὐταὶ αἱ ἀπορίαι, καθ' ἃς, ὁ μὲν Εὐκλείδης λέγει, ὅτι ἡ γωνία εἶναι κλίσις, ὁ δὲ Ἀπολλώνιος, ὅτι εἶναι συναγωγὴ ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ πρὸς ἓν σημεῖον, ὑπὸ τεθλασμένην γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν — διότι, φαίνεται, ὅτι οὗτος (ὁ Ἀπολλώνιος) ὁρίζει γενικῶς πᾶσαν γωνίαν . . .

48. — — :

Καὶ θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς γωνίας δὲν εἶναι συναγωγή, καθὼς ἰσχυρίζεται ὁ Ἀπολλώνιος, ὅτι εἶναι συναγωγὴ ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ.

49. — — :

Ποσότητα δὲ λέγουσιν αὐτὴν (τὴν γωνίαν), ὅσοι λέγουσιν, ὅτι γωνία εἶναι τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι καὶ ὁ Πλούταρχος, περιλαμβάνων εἰς τὴν αὐτὴν γνώμην καὶ τὸν Ἀπολλώνιον.

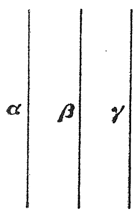
50. — — :

Ματαίως λοιπὸν ὁ Ἀπολλώνιος ἐπεχείρησε νὰ παραδώσῃ ἀποδείξεις τῶν ἀξιωμάτων. Διότι καὶ ὁ Γεμῖνος ὀρθῶς παρετήρησεν, ὅτι ἄλλοι μὲν ἐπενόησαν ἀποδείξεις καὶ τῶν ἀναποδείκτων καὶ ἐπεχείρησαν ἀπὸ ἀγνωστοτέρων μέσων νὰ κατασκευάσωσι τὰ εἰς ὅλους γνώριμα — πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἔπαθεν ὁ Ἀπολλώνιος ἐπιθυμῶν ν' ἀποδείξῃ τὴν ἀλήθειαν τοῦ ἀξιώματος τοῦ λέγοντος τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

51. — — p. 194, 4 - 195, 5 :

πολλοῦ ἄρα δεήσομεν ἡμεῖς τὸν γεωμέτρην Ἀπολλώνιον ἐπαινεῖν, ὃς καὶ τῶν ἀξιωμάτων ὡς οἴεται γέγραφεν ἀποδείξεις, ἀπεναντίας Εὐκλείδῃ φερόμενος. ὁ μὲν γὰρ καὶ τὸ ἀποδεικτὸν ἐν τοῖς αἰτήμασι κατηρίθμησεν, ὁ δὲ καὶ τῶν ἀναποδείκτων ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις εὑρίσκειν. ἦν δὲ ἄρα διωρισμένα ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων τῇ φύσει καὶ τῶν ἐπιστημῶν διαφέρον τὸ γένος τῶν τε περὶ τὰς ἀμέσους προτάσεις καὶ πάντῃ δι' ἐνάργειαν προσπιπτούσας καὶ τῶν ταῖς ἀποδείξεσι χρωμένων, αἳ τὰς ἀρχὰς ἀπ' ἐκείνων λαμβάνουσι καὶ λαβοῦσαι χρῶνται πρὸς τὰ οἰκεῖα συμπεράσματα δεόντως. ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις, ἣν ὁ Ἀπολλώνιος εὑρηκέναι πέπεισται τοῦ πρώτου τῶν ἀξιωμάτων, οὐδὲν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος γνωριμώτερον, εἰ μὴ καὶ πλέον ἀμφισβητούμενον, μάθοι τις ἂν ἐπιβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν. «ἔστω γάρ, φησί, τὸ α τῷ β ἴσον, τοῦτο δὲ τῷ γ, λέγω ὅτι καὶ τὸ α τῷ γ ἴσον. ἐπεὶ γὰρ τὸ α τῷ β ἴσον τὸν αὐτὸν αὐτῷ κατέχει τόπον, καὶ ἐπεὶ τὸ β τῷ γ ἴσον, τὸν αὐτὸν καὶ τούτῳ κατέχει τόπον. καὶ τὸ α ἄρα τῷ γ τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. ἴσα ἄρα ἐστίν».



52. — — p. 279, 16 - 280, 9 :

Ἀπολλώνιος δὲ ὁ Περγαῖος τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τοῦτον τὸν τρόπον. ἔστω, φησίν, ἡ αβ

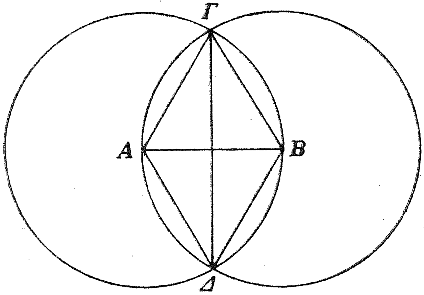
51. — — :

Θὰ πρέπει λοιπὸν ἡμεῖς νὰ ἐπαινέσωμεν πολὺ τὸν γεωμέτρην Ἀπολλώνιον, ὁ ὁποῖος, ὡς νομίζει, ἔγραψεν ἀποδείξεις καὶ τῶν ἀξιωμάτων, φερόμενος ἀντιθέτως πρὸς τὸν Εὐκλείδην. Διότι ὁ μὲν (Εὐκλείδης) καὶ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠδύνατο ν' ἀποδειχθῇ τὸ περιέλαβεν εἰς τὰ αἰτήματα, ὁ δὲ (Ἀπολλώνιος) ἐπεχείρησε νὰ εὕρῃ ἀποδείξεις καὶ τῶν ἀναποδείκτων. Ἦσαν δὲ ἄρα ταῦτα χωρισμένα μεταξύ των ἐκ φύσεως, καὶ τὸ γένος τῶν ἐπιστημῶν ἦτο διάφορον καὶ τῶν ἀφορωσῶν τὰς ἀμέσους προτάσεις καὶ πάντως διὰ τὴν σαφήνειαν ἀντιληπτὰς καὶ τῶν ἐχουσῶν ἀνάγκην ἀποδείξεων, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουσι τὰς ἀρχὰς ἐξ ἐκείνων, καὶ ἀφοῦ τὰς λάβωσι, τὰς χρησιμοποιοῦσι δεόντως διὰ τὰ οἰκεῖα συμπεράσματα. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ Ἀπολλώνιος ἔχει πεισθῇ ὅτι εὗρε, τοῦ πρώτου ἀξιώματος, οὐδὲν μᾶλλον ἔχει γνωριμώτερον τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος, εἰ μὴ καὶ περισσότερον ἀμφισβητούμενον, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ τὸ μάθῃ κανεὶς ἂν ἐξήταζε τὸ πρᾶγμα καὶ δι' ὀλίγων· «διότι, λέγει, ἔστω α = β, β = γ, λέγω, ὅτι καὶ α = γ. Διότι, ἐπειδὴ τὸ α = β, κατέχει τὸν αὐτὸν τόπον, ὅπως αὐτό, καὶ ἐπειδὴ τὸ β = γ θὰ κατέχῃ πρὸς αὐτὸ τὸν αὐτὸν τόπον. Καὶ τὸ α ἄρα πρὸς τὸ γ θὰ κατέχῃ τὸν αὐτὸν τόπον. Εἶναι ἄρα ἴσα».

(Σημ. : Ἀποκλείεται νὰ εἶπε τοιαύτας ἀνοησίας ὁ Ἀπολλώνιος καὶ εἶναι ἀπορίας ἄξιον, πῶς εἰς χειρόγραφον τοῦ Πρόκλου, ἢ τοῦ Γεμίνου ἐξ οὗ ἀντλεῖ ὁ Πρόκλος, παρεισέφρυσε τοιαύτη διατύπωσις).

52. — — :

Ὁ Ἀπολλώνιος δὲ ὁ Περγαῖος τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἔστω λέγει *εὐθεῖα πεπερασμένη, ἣν δεῖ δίχα τεμεῖν, καὶ κέντρῳ || τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἕτερος κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς τῶν κύκλων ἡ γδ. αὕτη δίχα τέμνει τὴν αβ εὐθεῖαν.*



ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ γα γβ — ἑκατέρα γὰρ ἴση τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, καὶ ἡ δα τῇ δβ ἴση διὰ τὰ αὐτά· ἡ ἄρα ὑπὸ αγδ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βγδ, ὥστε δίχα τέμνηται ἡ αβ διὰ τὸ τέταρτον. τοιαύτη τίς ἐστιν καὶ ἡ κατὰ Ἀπολλώνιον τοῦ προκειμένου προβλήματος ἀπόδειξις.

53. — — p. 282, 8 - 19 :

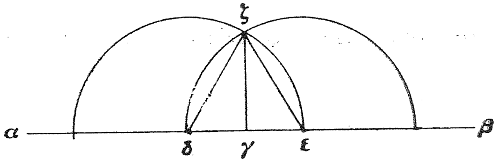
Ἀπολλώνιος δὲ τὴν πρὸς ὀρθὰς ἄγει τὸν τρόπον τοῦτον. ἐπὶ τῆς αγ τυχὸν τὸ δ, καὶ ἀπὸ τῆς γβ ἴση τῇ γδ ἡ γε, καὶ κέντρῳ τῷ δ, τῷ δὲ εδ διαστήματι γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ δε κύκλος γεγράφθω, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ γ ἤχθω [ἡ ζγ], λέγω ὅτι αὕτη ἐστὶν ἡ πρὸς ὀρθάς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ζδ ζε, ἴσαι ἔσονται· ἴσαι δὲ καὶ αἱ δγ γε καὶ κοινὴ ἡ ζγ, ὥστε καὶ αἱ πρὸς τῷ γ γωνίαι ἴσαι διὰ τὸ ὄγδοον. ὀρθαὶ ἄρα εἰσίν.

54. — — p. 335, 15 - 336, 8 :

Ταῦτα μὲν οὖν πρὸς τὴν τοῦ στοιχειωτοῦ κατασκευὴν συμβαλλόμεθα, τὴν δὲ Ἀπολλωνίου δεῖξιν οὐκ ἐπαινοῦμεν, ἡ πεπερασμένη δοθεῖσα εὐθεῖα αβ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ διχοτομήσωμεν, καὶ μὲ κέντρον τὸ α, ἀκτῖνα δὲ τὴν αβ ἂς γραφῇ κύκλος, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ β καὶ ἀκτῖνα τὴν βα ἂς γραφῇ ἄλλος κύκλος καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ἑνοῦσα τὰς τομὰς τῶν κύκλων ἡ γδ. Αὕτη τέμνει εἰς τὸ μέσον τὴν εὐθεῖαν αβ. Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ γα, γβ —εἶναι δὲ ἑκατέρα ἴση πρὸς τὴν αβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ δα = δβ· ἡ γωνία ἄρα αγδ = βγδ, ὥστε ἡ αβ τέμνεται εἰς τὸ μέσον ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ α′ βιβλίου τῶν Στοιχείων. Τοιαύτη περίπου εἶναι κατὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἡ ἀπόδειξις τοῦ προκειμένου προβλήματος.

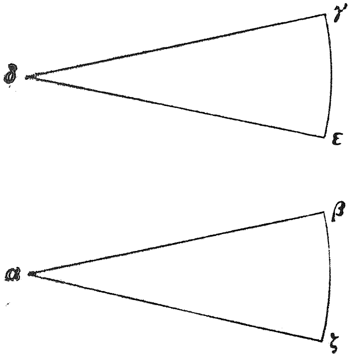
53. — — :

Ὁ Ἀπολλώνιος δὲ φέρει τὴν κάθετον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον· (ἐκ δοθέντος σημείου δοθείσης εὐθείας ν' ἀχθῇ πρὸς αὐτὴν κάθετος). Ἐπὶ τῆς εὐθείας αγ ἔστω τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀπὸ τῆς γβ ἴση πρὸς τὴν γδ ἡ γε, καὶ μὲ κέντρον τὸ δ ἀκτῖνα δὲ τὴν εδ ἂς γραφῇ κύκλος, καὶ πάλιν μὲ κέντρον τὸ ε καὶ ἀκτῖνα τὴν δε ἂς γραφῇ κύκλος, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ γ ἡ ζγ· λέγω, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος. Διότι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ζδ, ζε, θὰ εἶναι ἴσαι· εἶναι δὲ καὶ αἱ δγ, γε ἴσαι, καὶ ἡ ζγ εἶναι κοινή, ὥστε καὶ αἱ παρὰ τὸ γ γωνίαι εἶναι ἴσαι, κατὰ τὸ ὄγδοον θεώρημα (τοῦ α′ βιβλίου τῶν Στοιχείων). Εἶναι ἄρα ὀρθαί.



54. — — :

Πρὸς ταῦτα μὲν λοιπόν, δηλ. πρὸς τὴν κατασκευὴν τοῦ στοιχειωτοῦ (Εὐκλείδου) συμφωνοῦμεν, δὲν ἐπαινοῦμεν δὲ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Ἀπολλωνίου, διότι κατ' αὐτὴν χρησιμοποιοῦνται *ὡς δεομένην τῶν ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ δεικνυμένων. λαβὼν γὰρ ἐκεῖνος γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ γδε καὶ εὐθεῖαν τὴν αβ κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ γδ γράφει τὴν γε περιφέρειαν, καὶ ὡσαύτως κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ τὴν ζβ, καὶ ἀπολαβὼν τῇ γε ἴσην τὴν ζβ ἐπιζεύγνυσι τὴν αζ. καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυίας τὰς α δ γωνίας ἴσας ἀποφαίνει. δεῖ δὲ προλαβεῖν καὶ ὅτι ἡ αβ ἴση τῇ γδ, ἵνα καὶ οἱ κύκλοι ἴσοι ὦσι. τὴν οὖν τοιαύτην κατασκευὴν ὡς τοῖς ὕστερον προσχρωμένην ἀλλοτρίαν εἶναι τῆς στοιχειώσεως νομίζομεν, τὴν δὲ τοῦ γεωμέτρου προτίθεμεν ὡς ταῖς ἀρχαῖς ἑπομένην.*



55. — — p. 356, 6 - 12 :

Τοῦτον δὲ τὸν τρόπον εἰώθασι καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ διαλέγεσθαι περὶ τῶν γραμμῶν, ἑκάστου εἴδους τὸ σύμπτωμα παραδιδόντες. καὶ γὰρ Ἀπολλώνιος ἐφ' ἑκάστης τῶν κωνικῶν γραμμῶν, τί τὸ σύμπτωμα δείκνυσι, καὶ ὁ Νικομήδης ἐπὶ τῶν κογχοειδῶν, καὶ ὁ Ἱππίας ἐπὶ τῶν τετραγωνιζουσῶν, καὶ ὁ Περσεὺς ἐπὶ τῶν σπειρικῶν.

56. — — p. 419, 15 - 24 :

Ἔστι μὲν ἀρχαῖά φασιν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα, ἥ τε παραβολὴ τῶν τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ γ′ βιβλίον τῶν Στοιχείων. (Πρόκειται περὶ τοῦ 23ου θεωρ. τοῦ α′ βιβλίου τῶν Στοιχείων: ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ σημείου δοθέντος ἐπ' αὐτῆς, νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν. Τοῦτο τὸ ἀποδεικνύει ὁ Ἀπολλώνιος κατ' ἄλλον τρόπον, διάφορον τοῦ Εὐκλείδου). Διότι ἐκεῖνος (ὁ Ἀπολλώνιος) λαβὼν τυχοῦσαν γωνίαν, τὴν γδε καὶ εὐθεῖαν τὴν αβ, μὲ κέντρον τὸ δ καὶ ἀκτῖνα τὴν γδ γράφει τὸ τόξον γε καὶ ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ α καὶ ἀκτῖνα τὴν αβ, γράφει τὸ τόξον ζβ καὶ ἀφοῦ λάβῃ τὸ γε = ζβ φέρει τὴν αζ. Καὶ ἀποφαίνεται, ὅτι αἱ γωνίαι α, δ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων. Πρέπει δὲ νὰ προείπῃ ὅτι καὶ ἡ αβ = γδ, διὰ νὰ εἶναι καὶ οἱ κύκλοι ἴσοι. Ἀλλὰ νομίζομεν, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ χρησιμοποιοῦσα τὰ ἑπόμενα εἶναι ξένη πρὸς τὴν στοιχείωσιν, προτιμῶμεν δὲ τὴν κατασκευὴν τοῦ γεωμέτρου (Εὐκλείδου), ὡς ἀκολουθοῦσαν τὰς ἀρχὰς (τῆς στοιχειώσεως).

55. — — :

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον συνηθίζουσι νὰ διαλέγωνται καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ περὶ τῶν γραμμῶν, ἀναφέροντες τὰς ἰδιότητας ἑκάστου εἴδους αὐτῶν. Διότι καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀποδεικνύει ἐπὶ ἑκάστης τῶν κωνικῶν γραμμῶν ποία εἶναι ἡ ἰδιότης αὐτῆς, καὶ ὁ Νικομήδης ἐπὶ τῶν κογχοειδῶν καὶ ὁ Ἱππίας ἐπὶ τῶν τετραγωνιζουσῶν, καὶ ὁ Περσεὺς ἐπὶ τῶν σπειρικῶν.

56. — — Πρόκλος (σχόλιον εἰς 44ον θεώρημα τοῦ α′ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου):

Ὅπως λέγουσιν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον (μαθητὴν τοῦ Ἀριστοτέλους, ἐκ Ρόδου, πρῶτον γράψαντα Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν) αὐτὰ εἶναι εὑρήματα τῆς μελέτης τῶν Πυθαγορείων, *χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. Ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν, ἐκείνων τῶν παλαιῶν καὶ θείων ἀνδρῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ὁρώντων.*

57. *Simplicius, in Aristotelis categ. C. A. G. vol. VIII, ed. K. Kalbfleisch, Berolini 1907, p. 192, 15 - 30 :*

ἔστιν δὲ τετραγωνισμὸς κύκλου, ὅταν τῷ δοθέντι κύκλῳ ἴσον τετράγωνον συστησώμεθα. τοῦτο δὲ Ἀριστοτέλης μέν, ὡς ἔοικεν, οὔπω ἐγνώκει, παρὰ δὲ τοῖς Πυθαγορείοις ηὑρεῖσθαί φησιν Ἰάμβλιχος, «ὡς δῆλόν ἐστιν ἀπὸ τῶν Σέξτου τοῦ Πυθαγορείου ἀποδείξεων, ὃς ἄνωθεν κατὰ διαδοχὴν παρέλαβε τὴν μέθοδον τῆς ἀποδείξεως. καὶ ὕστερον δέ, φησίν, Ἀρχιμήδης διὰ τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς καὶ Νικομήδης διὰ τῆς ἰδίως τετραγωνιζούσης καλουμένης καὶ Ἀπολλώνιος διά τινος γραμμῆς, ἣν αὐτὸς μὲν κοχλιοειδοῦς ἀδελφὴν προσαγορεύει, ἡ αὐτὴ δέ ἐστιν τῇ Νικομήδους, καὶ Κάρπος δὲ διά τινος γραμμῆς, ἣν ἁπλῶς ἐκ διπλῆς κινήσεως καλεῖ, ἄλλοι τε πολλοὶ ποικίλως τὸ πρόβλημα κατεσκεύασαν», ὡς Ἰάμβλιχος ἱστορεῖ (sc. τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου).

Ἀστρονομικά

58. *Ptolemaeus Cl. Syntaxis mathematica (ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1903) XII p. 450, 1 - 451, 22 :*

Τούτων ἀποδεδειγμένων ἀκόλουθον ἂν εἴη καὶ τὰς καθ᾽ ἕκαστον τῶν πέντε πλανωμένων γινομένας προηγήσεις ἐ-

καὶ ἡ παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. Ἀπὸ τούτων δὲ λαβόντες τὰ ὀνόματα καὶ οἱ νεώτεροι μετέφερον αὐτὰ καὶ εἰς τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς, καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν ἐνῷ ἐκεῖνοι οἱ παλαιοὶ καὶ θεῖοι ἄνδρες (οἱ Πυθαγόρειοι) ἔβλεπον τὴν εἰς τὸ ἐπίπεδον σχεδίασιν χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην (τὴν παράμετρον) τὰ σημαινόμενα ὑπὸ τῶν ὀνομάτων τούτων.

57. Σιμπλίκιος. Σχόλια εἰς Κατηγορίας Ἀριστοτέλους:

Εἶναι δὲ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου, ὅταν πρὸς δοθέντα κύκλον κατασκευάσωμεν ἴσον τετράγωνον. Τοῦτο δέ, δὲν τὸ ἐγνώριζεν ἀκόμη ὁ Ἀριστοτέλης, λέγει δὲ ὁ Ἰάμβλιχος, ὅτι τὸ εἶχον εὕρει οἱ Πυθαγόρειοι, «ὡς εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδείξεων τοῦ Σέξτου τοῦ Ἐμπειρικοῦ, ὁ ὁποῖος παρέλαβε τὴν μέθοδον τῆς ἀποδείξεως ἀπὸ τοὺς παλαιούς, κατὰ τὴν παράδοσιν. Καὶ ὕστερον δέ, λέγει, ὁ Ἀρχιμήδης διὰ τῆς ἕλικος (Περὶ ἑλίκων θεώρ. 18) καὶ ὁ Νικομήδης διὰ τῆς ἰδίως τετραγωνιζούσης καλουμένης καὶ ὁ Ἀπολλώνιος διά τινος γραμμῆς, τὴν ὁποίαν αὐτὸς μὲν ὀνομάζει ἀδελφὴν τῆς κοχλιοειδοῦς, εἶναι δὲ ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τοῦ Νικομήδους, καὶ ὁ Κάρπος δὲ διά τινος γραμμῆς, τὴν ὁποίαν καλεῖ ἁπλῶς ἐκ διπλῆς κινήσεως προερχομένην, καὶ ἄλλοι πολλοὶ ἔλυσαν τὸ πρόβλημα ποικιλοτρόπως», ὡς ἱστορεῖ ὁ Ἰάμβλιχος.

Ἀστρονομικὰ

58. Πτολεμαίου Σύνταξις:

Ἀφοῦ ἀπεδείχθησαν ταῦτα ἂς ἐπιτραπῇ νὰ ἐξετάσωμεν ἀκολούθως τὰς καθ' ἕκαστον τῶν πέντε πλανητῶν γινομένας *λαχίστας τε καὶ μεγίστας ἐπισκέψασθαι καὶ δεῖξαι καὶ τὰς τούτων πηλικότητας ἀπὸ τῶν ἐκκειμένων ὑποθέσεων συμφώνους, ὡς ἔνι μάλιστα, γινομένας ταῖς ἐκ τῶν τηρήσεων καταλαμβανομέναις. εἰς δὲ τὴν τοιαύτην διάληψιν προαποδεικνύουσι μὲν καὶ οἵ τε ἄλλοι μαθηματικοὶ καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ὡς ἐπὶ μιᾶς τῆς παρὰ τὸν ἥλιον ἀνωμαλίας, ὅτι, ἐάν τε διὰ τῆς κατ' ἐπίκυκλον ὑποθέσεως γίνηται, τοῦ μὲν ἐπικύκλου περὶ τὸν ὁμόκεντρον τῷ ζῳδιακῷ κύκλον τὴν κατὰ μῆκος πάροδον εἰς τὰ ἑπόμενα τῶν ζῳδίων ποιουμένου, τοῦ δὲ ἀστέρος ἐπὶ τοῦ ἐπικύκλου περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ τὴν τῆς ἀνωμαλίας ὡς ἐπὶ τὰ ἑπόμενα τῆς ἀπογείου περιφερείας, καὶ διαχθῇ τις ἀπὸ τῆς ὄψεως ἡμῶν εὐθεῖα τέμνουσα τὸν ἐπίκυκλον οὕτως ὥστε τοῦ ἀπολαμβανομένου αὐτῆς ἐν τῷ ἐπικύκλῳ τμήματος τὴν ἡμίσειαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς ὄψεως ἡμῶν μέχρι τῆς κατὰ τὸ περίγειον τοῦ ἐπικύκλου τομῆς λόγον ἔχειν, ὃν τὸ τάχος τοῦ ἐπικύκλου πρὸς τὸ τάχος τοῦ ἀστέρος, τὸ γινόμενον σημεῖον ὑπὸ τῆς οὕτως διαχθείσης εὐθείας πρὸς τῇ περιγείῳ περιφερείᾳ τοῦ ἐπικύκλου διορίζει τάς τε ὑπολείψεις καὶ τὰς προηγήσεις, ὥστε κατ' αὐτοῦ γινόμενον τὸν ἀστέρα φαντασίαν ποιεῖσθαι στηριγμοῦ· ἐάν τε διὰ τῆς κατ' ἐκκεντρότητα ὑποθέσεως ἡ παρὰ τὸν ἥλιον ἀνωμαλία συμβαίνῃ τῆς τοιαύτης ἐπὶ μόνων τῶν πᾶσαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἡλίου ποιουμένων τριῶν ἀστέρων προχωρεῖν δυναμένης, τοῦ μὲν κέντρου τοῦ ἐκκέντρου περὶ τὸ τοῦ ζῳδιακοῦ κέντρον εἰς τὰ ἑπόμενα τῶν ζῳδίων ἰσοταχῶς τῷ ἡλίῳ φερομένου, τοῦ δὲ ἀστέρος ἐπὶ τοῦ ἐκκέντρου περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ εἰς τὰ προηγούμενα τῶν ζῳδίων ἰσοταχῶς τῇ τῆς ἀνωμαλίας παρόδῳ, καὶ διαχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐκκέντρου κύκλου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ζῳδιακοῦ,* προηγήσεις τὰς ἐλαχίστας καὶ τὰς μεγίστας καὶ νὰ δείξωμεν τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις ἐκ τῶν ἑρμηνευθεισῶν ὑποθέσεων ἐν συμφωνίᾳ μὲ τὰ ἀποτελέσματα τῶν παρατηρήσεων. Εἰς τὴν τοιαύτην ἔρευναν προαποδεικνύουσι μὲν καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, ὡς διὰ μίαν τὴν παρὰ τὸν ἥλιον ἀνωμαλίαν, ὅτι, ἐὰν συμβαίνῃ διὰ τῆς ὑποθέσεως τῶν ἐπικύκλων, τοῦ μὲν ἐπικύκλου σχηματίζοντος τὴν περὶ τὸν ὁμόκεντρον περὶ τὸν ζῳδιακὸν κύκλον κατὰ μῆκος διαδρομὴν εἰς τὰ ἑπόμενα τῶν ζῳδίων, τοῦ δὲ πλανήτου ἐπὶ τοῦ ἐπικύκλου περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ τὴν τῆς ἀνωμαλίας διαδρομήν, ὡς εἰς τὰ ἑπόμενα τοῦ ἀπογείου τόξου, καὶ διαχθῇ ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἡμῶν εὐθεῖα τέμνουσα τὸν ἐπίκυκλον οὕτως, ὥστε τοῦ ἀπολαμβανομένου τμήματος αὐτῆς εἰς τὸν ἐπίκυκλον τὸ ἥμισυ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἡμῶν μέχρι τῆς κατὰ τὸ περίγειον τοῦ ἐπικύκλου τομῆς, ὃν ἔχει ἡ ταχύτης τοῦ ἐπικύκλου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ πλανήτου, τὸ γινόμενον σημεῖον, ὑπὸ τῆς οὕτω διαχθείσης εὐθείας μέχρι τοῦ κατὰ τὸ περίγειον τόξον τοῦ ἐπικύκλου καθορίζει καὶ τὰς καθυστερήσεις καὶ τὰς προηγήσεις, ὥστε ὅταν ὁ ἀστὴρ (πλανήτης) φθάσῃ αὐτοῦ νὰ φαίνηται ὅτι μένει ἀκίνητος· ἐὰν δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἐκκεντρότητος συμβαίνῃ ἡ παρὰ τὸν ἥλιον ἀνωμαλία, ἡ δυναμένη νὰ προχωρῇ ἐπὶ μόνων τῶν πᾶσαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἡλίου λαμβανόντων τριῶν ἀστέρων (πλανητῶν), τοῦ μὲν κέντρου τοῦ ἐκκέντρου, περὶ τὸ κέντρον τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου εἰς τὰ ἑπόμενα τῶν ζῳδίων, ἰσοταχῶς φερομένου πρὸς τὸν ἥλιον, τοῦ δὲ ἀστέρος (πλανήτου) ἐπὶ τοῦ ἐκκέντρου περὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ εἰς τὰ προηγούμενα τῶν ζῳδίων ἰσοταχῶς πρὸς τὴν πάροδον τῆς ἀνωμαλίας, καὶ διαχθῇ εὐθεῖά τις ἐπὶ τοῦ ἐκκέντρου κύκλου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ζῳδιακοῦ, τουτέστι τοῦ κέντρου τοῦ ὀφθαλμοῦ, τουτέστι τῆς ὄψεως, οὕτως ἔχουσα ὥστε τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς ὅλης πρὸς τὸ ἔλασσον τῶν ὑπὸ τῆς ὄψεως γινομένων τμημάτων λόγον ἔχειν, ὃν τὸ τάχος τοῦ ἐκκέντρου πρὸς τὸ τάχος τοῦ ἀστέρος, κατ' ἐκεῖνο τὸ σημεῖον γιγνόμενος ὁ ἀστήρ, καθ' ὃ τέμνει ἡ εὐθεῖα τὴν περίγειον τοῦ ἐκκέντρου περιφέρειαν, τὴν τῶν στηριγμῶν φαντασίαν ποιήσεται.

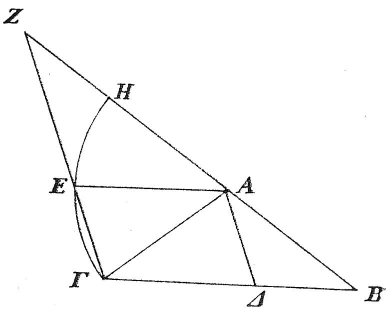
59. — — p. 456, 9 - 458, 2 :

προλαμβάνει λημμάτιον ὁ Ἀπολλώνιος τοιοῦτον, ὅτι, ἐὰν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ μείζονα ἔχοντος τὴν ΒΓ τῆς ΑΓ ἀποληφθῇ ἡ ΓΔ μὴ ἐλάσσων τῆς ΑΓ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΒΓΑ. δείκνυσι δ' οὕτως· συμπεπληρώσθω γάρ, φησίν, τὸ ΑΔΓΕ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ ΒΑ καὶ ΓΕ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. Ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΑΓ οὐκ ἔστιν ἐλάσσων, ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ ΑΕ γραφόμενος κύκλος ἤτοι διὰ τοῦ Γ ἐλεύσεται ἢ ὑπὲρ τὸ Γ· γεγράφθω δὴ διὰ τοῦ Γ ὁ ΗΕΓ. καὶ ἐπεὶ μεῖζον μέν ἐστιν τὸ ΑΕΖ τρίγωνον τοῦ ΑΕΗ τομέως, ἔλασσον δὲ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τομέως, μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΑΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΕΓ ἤπερ ὁ ΑΕΗ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΕΓ τομέα. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΕΗ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΕΓ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΕΑΖ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΑΓ γωνίαν, ὡς δὲ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΕΓ, οὕτως ἡ ΖΕ βάσις πρὸς τὴν ΕΓ· μείζονα λόγον ἄρα ἔχει ἡ ΖΕ βάσις πρὸς τὴν ΕΓ ἤπερ ἡ ὑπὸ ΖΑΕ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΑΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΑΓ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ·

οὕτως ἔχουσα, ὥστε τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης αὐτῆς ἀποστάσεως, πρὸς τὸ μικρότερον τῶν τμημάτων τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ νὰ ἔχῃ λόγον, ὃν ἔχει ἡ ταχύτης τοῦ ἐκκέντρου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀστέρος (πλανήτου), ὅταν ὁ ἀστὴρ φθάσῃ εἰς ἐκεῖνο τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνει ἡ εὐθεῖα τὸ περίγειον τόξον τοῦ ἐκκέντρου καὶ προκαλεῖ τὴν ἐντύπωσιν στάσεως (ἀκινησίας).

59. — — :

Προτάσσει δὲ τὸ ἑξῆς μικρὸν λῆμμα ὁ Ἀπολλώνιος, ὅτι, ἐὰν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχοντος μεγαλυτέραν πλευρὰν τὴν ΒΓ τῆς ΑΓ, ληφθῇ ἡ ΓΔ $\geqq$ ΑΓ, θὰ εἶναι ΓΔ : ΒΔ $\rangle$ γων. ΑΒΓ : γων. ΒΓΑ. Τὸ ἀποδεικνύει δὲ ὡς ἑξῆς· ἂς συμπληρωθῇ, λέγει, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΓΕ, καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῶσιν αἱ ΒΑ καὶ ΓΕ ἂς συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ $\geqq$ ΑΓ, ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΕ ἢ θὰ διέρχηται διὰ τοῦ Γ ἢ ἔξω τοῦ Γ· ἂς γραφῇ ὁ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Γ, ὁ ΗΕΓ (ὁπότε ΓΔ $=$ ΑΓ). Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν τρίγωνον ΑΕΖ $\rangle$ τοῦ τομέως ΑΕΗ, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΕΓ $\langle$ τομέως ΑΕΓ, θὰ εἶναι τρίγωνον ΑΕΖ : τρίγωνον ΑΕΓ $\rangle$ τομεὺς ΑΕΗ : τομεὺς ΑΕΓ. Ἀλλὰ ὡς μὲν τομεὺς ΑΕΗ : τομεὺς ΑΕΓ $=$ γων. ΕΑΖ : γων. ΕΑΓ, ὡς δὲ τρίγωνον ΑΕΖ : τρίγωνον ΑΕΓ $=$ βάσις ΖΕ:βάσις ΕΓ (Εὐκλ. 6,1)· εἶναι ἄρα ἡ βάσις ΖΕ:βάσις ΕΓ $\rangle$ γων. ΖΑΕ: γων. ΕΑΓ. Ἀλλὰ ὡς μὲν ΖΕ:ΕΓ $=$ΓΔ:ΔΒ (Εὐκλ. 6,2), εἶναι δὲ ἡ μὲν γων. ΖΑΕ $=$γων. ΑΒΓ, ἡ δὲ γων. ΕΑΓ $=$ ΒΓΑ



καὶ ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία πρὸς τὴν ΑΓΒ. φανερὸν δ' ὅτι καὶ πολλῷ μείζων ὁ λόγος ἔσται μὴ ἴσης ὑποτιθεμένης τῇ ΑΓ τῆς ΓΔ, τουτέστι τῆς ΑΕ, ἀλλὰ μείζονος.

60. *Ptolemaeus Chennus in Ptolemaeus Hephaestion*), Περὶ τῆς εἰς πολυμάθειαν καινῆς Ἱστορίας (Ptol. Heph. novarum historiarum) (ed. Ios. Imm. Gisl. Roulez, Lipsiae 1834) p. 33, 16 - 19 :*

Ἀπολλώνιος δ' ὁ ἐν τοῖς τοῦ Φιλοπάτορος χρόνοις ἐπ' ἀστρονομίᾳ περιβόητος γεγονὼς ε' ἐκαλεῖτο, διότι τὸ σχῆμα τοῦ ε' συμπεριφέρεται τῷ τῆς σελήνης, περὶ ἣν ἐκεῖνος μάλιστα ἠκρίβωτο.

61. *Theodoros Metochites (ed. K. N. Sathas, Byzantina Anecdota I, Venetia 1872) p. πη', 6 - 13 :*

τὴν δὲ περὶ τὰ στερεὰ τῆς ἐπιστήμης πολυπραγμοσύνην καὶ μάλιστα τὴν τῶν περὶ τὰ κωνικὰ θαυμάτων τῆς μαθηματικῆς ἄρρητον παντάπασι καὶ ἀνεννόητον, πρὶν ἢ ἐντυχεῖν ὁντιναοῦν καὶ προσχεῖν εὖ μάλα εὕρεσιν καὶ ἀποτύπωσιν Ἀπολλωνίου τοῦ ἐκ Πέργης ἀνδρὸς ὡς ἀληθῶς θαυμαστοτάτου τῶν ἐξ ἀρχῆς ἀνθρώπων, ὅσα ἐμὲ εἰδέναι, περὶ τὴν γεωμετρικὴν ἐπιστήμην, αὐτοῦ τε τὴν περὶ τὰ κυλινδρικὰ καὶ Σερήνου κατ' αὐτὸν ἀνδρὸς ἢ ὅτι ἔγγιστα.

62. *— — p. ρε', 13 - 20 :*

ἃ δὲ δὴ τ' εἴρηταί μοι πρότερον Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου κωνικὰ θαυμαστῆς ὄντως γεωμετρικῆς ἕξεως καὶ κράτους

*) Τὸ ὀρθὸν ὄνομα εἶναι Πτολεμαῖος Χῆννος, υἱὸς τοῦ Ἡφαιστίωνος (Ptolemaeus Chennos, Sohn des Hephestion. Vid. Der Philosoph und Grammatiker Ptolemaios Chennos, von Dr. Anton Chatzis, Paderborn 1914, p. I - IX).

(Εὐκλ. 1, 29)· εἶναι ἄρα καὶ ΓΔ : ΔΒ ⟩ γων. ΑΒΓ : γων. ΑΓΒ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ὁ λόγος θὰ εἶναι πολὺ μεγαλύτερος, ὅταν ὑποτεθῇ ἡ ΓΔ, δηλ. ἡ ΑΕ, ὅτι δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ μεγαλυτέρα.

60. Πτολεμαῖος Χῆννος:

Ὁ Ἀπολλώνιος δὲ ὁ κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ Φιλοπάτορος (Πτολεμαίου IV, βασιλ. 221 - 204 π.Χ.) περιβόητος εἰς τὴν ἀστρονομίαν καταστάς, ἐκαλεῖτο ἔψιλον, διότι τὸ σχῆμα τοῦ ἔψιλον ὁμοιάζει πρὸς τὸ σχῆμα τῆς σελήνης, διὰ τὴν ὁποίαν ἐκεῖνος πάρα πολὺ ἠσχολήθη.

61. Θεόδωρος Μετοχίτης:

Τὴν δὲ πολυπραγμοσύνην περὶ τὰ στερεὰ τῆς ἐπιστήμης καὶ μάλιστα τὴν τοιαύτην τῆς τῶν θαυμάτων περὶ τὰ κωνικὰ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία καθ' ὁλοκληρίαν εἶναι ἀνέκφραστος καὶ ἀκατανόητος προτοῦ κανεὶς εὕρῃ καὶ προσέξῃ πολὺ τὴν ἀνακάλυψιν καὶ τὴν διατύπωσιν τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ καταγομένου ἐκ τῆς πόλεως Πέργης, ἀνδρὸς πράγματι θαυμαστοτάτου ἐκ τῶν παλαιῶν, καθ' ὅσον γνωρίζω, περὶ τὴν γεωμετρικὴν ἐπιστήμην καὶ αὐτοῦ τὴν πραγματείαν περὶ τὰ κυλινδρικὰ (ἐθαύμασα) καὶ τοῦ Σερήνου, ὁ ὁποῖος ἦτο ἀντάξιος πρὸς αὐτὸν ἢ πλησιάζων πρὸς αὐτὸν εἰς μέγιστον βαθμόν.

62. — — :

Ἐκεῖνα δὲ τὰ κωνικά, διὰ τὰ ὁποῖα εἶπα προηγουμένως περὶ τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, θαυμαστῆς ὄντως γεωμε-

ἐν ταύτῃ τοῦ ἀνδρὸς δείγματα καὶ Σερήνου κυλινδρικὰ μάλιστ' ἐπονήθη μοι δυσδιεξίτητα ταῖς καταγραφαῖς ἐντυχεῖν καὶ κομιδῇ πως ἐργώδη συσχεῖν παντάπασιν, ὅσα γ' ἐμὲ εἰδέναι, διὰ τὴν ἐπίπεδον ἐπίσκεψιν, καὶ ἔστιν ὅτῳ οὖν χρῆσθαι καὶ πειρᾶσθαι, εἰ ἀληθὴς ὁ λόγος.

63. *Vitruvius, De architectura (ed. F. Krohn, Lipsiae 1912), I, 1.1 p. 8, 21 - 26 :*

Hi autem inveniuntur raro, ut aliquando fuerunt Aristarchus Samius, Philolaus et Archytas Tarentii, Apollonius Pergaeus, Eratosthenes Cyrenaeus, Archimedes et Scopinas ab Syracusis, qui multas res organicas, gnomonicas numero naturalibusque rationibus inventas atque explicatas posteris reliquerunt.

64. *— — IX, 8 p. 218, 1 - 11 :*

Hemicyclium excavatum ex quadrato ad enclimaque succisum Berosus Chaldaeus dicitur invenisse; scaphen sive hemisphaerium Aristarchus Samius, idem etiam discum in planitia; arachnen Eudoxus astrologus, nonnulli τρικῆς ἱκανότητος καὶ δυνάμεως, δείγματα εἰς τὴν πραγματείαν ταύτην, καὶ τὰ κυλινδρικὰ τοῦ Σερήνου, διὰ τὰ ὁποῖα ἐκουράσθην πολύ, δυσνόητα εἰς τὸ νὰ εὕρω τὰς ἀποδείξεις, καὶ κοπιώδη εἰς τὸ νὰ τὰ κατανοήσω γενικῶς, καθ' ὅσον γνωρίζω, διὰ τὴν ἐν ἐπιπέδῳ ἐξέτασιν, καὶ δύναταί τις νὰ τὰ ἐξετάσῃ καὶ νὰ δοκιμάσῃ ἂν εἶναι ἀληθῆ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα λέγω.

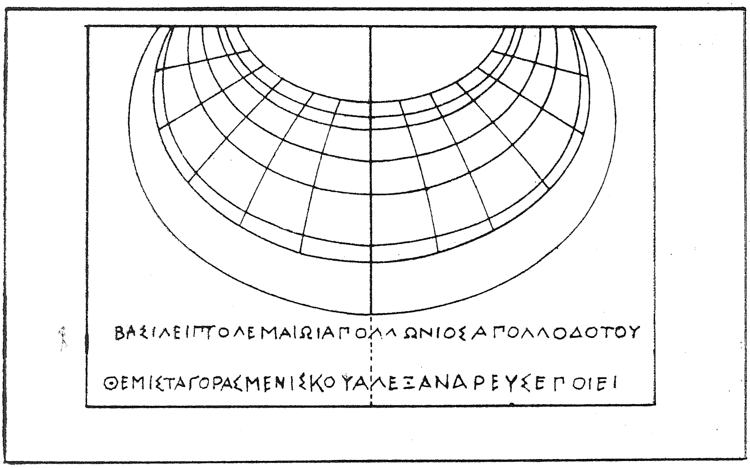
63. Βιτρούβιος, Περὶ Ἀρχιτεκτονικῆς:

Τοιοῦτοι ἄνδρες ὅμως (δηλ. μεγάλοι ἐπιστήμονες) εἶναι σπάνιοι, ὅπως π.χ. πρὸ ἐτῶν ἦτο ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος, ὁ Φιλόλαος καὶ ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, ὁ ἐκ τῆς Πέργης Ἀπολλώνιος, ὁ Ἐρατοσθένης ἐκ Κυρήνης, ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Σκοπίνας ἐκ Συρακουσῶν, οἱ ὁποῖοι ἔδοσαν εἰς τοὺς μεταγενεστέρους πολλὰ μηχανικὰ ἐργαλεῖα καὶ ὡρολόγια, τὰ ὁποῖα ἀνεκάλυψαν καὶ ἀνέπτυξαν δι' ὑπολογισμοῦ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει φυσικῶν νόμων.

64. — — :

Λέγεται , ὅτι ὁ Χαλδαῖος Βήροσος ἀνεκάλυψεν ἡλιακὸν ὡρολόγιον ὑπὸ μορφὴν ἡμικυκλίου, τὸ ὁποῖον ἐκκοιλαίνεται εἰς λίθινον παραλληλεπίπεδον καὶ κατὰ τὸ ὕψος τοῦ Πόλου προσαρ-

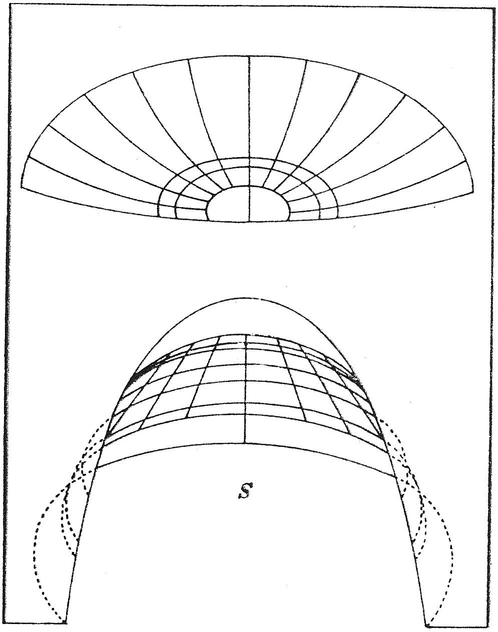
dicunt Apollonium; plinthium sive lacunar, quod etiam in Circo Flaminio est positum, Scopinas Syracusius; πρὸς τὰ ἱστορούμενα Parmenion, πρὸς πᾶν κλίμα Theodosius et Andrias, Patrocles pelecinum, Dionysodorus conum, Apollonius pharetram.

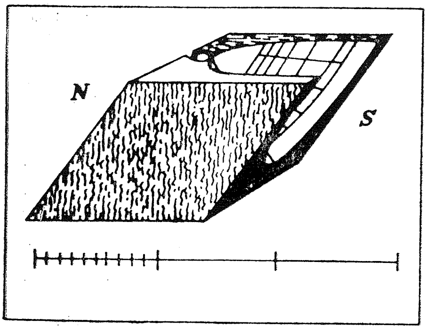


[Σημ. : Κατ' ἀνασκαφὰς γενομένας εἰς τὴν παρὰ τὸ ὄρος Λάτμος πόλιν Ἡράκλειαν (πλησίον τῆς Μιλήτου) εὑρέθη ἓν ὡρολόγιον τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸ ὁποῖον τώρα εὑρίσκεται εἰς τὸ Μουσεῖον τοῦ Λούβρου (Louvre) τῶν Παρισίων. Ὁ Hermann Diels, εἰς τὸ βιβλίον του, Antike Technik, 1920 καὶ 1924, Leipzig (Λειψία), B. G. Teubner, Ἀνατύπωσις (Nachdruck) Osnabrück, Otto Zeller, 1965 σελ. 177, σημειώνει ἐκ τοῦ βιβλίου G, καὶ O. Rayet, Annales de Chimie et Physique Sér. V, t. II, p. 61 ff. πίναξ I, τρία σχήματα ἡλιακοῦ ὡρολογίου τοῦ Ἀπολλωνίου καὶ ὑποθέτει εὐλόγως, ὅτι τὸ ὡρολόγιον τοῦτο δέον νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν Ἀπολλώνιον τὸν Περγαῖον, διότι οὐδεὶς ἄλλος Ἀπολλώνιος εἶναι γνωστός, ὡς ἀσχολούμενος μὲ τοιαῦτα θέματα. Ἐφ' ὅσον δεχθῶμεν τὴν ὀρθὴν ταύτην ἄποψιν, τότε ἔχομεν καὶ τὸ ὄνομα τοῦ πατρὸς τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀναφερομένου εἰς τὴν ἐπιγραφὴν τοῦ πρώτου σχήματος, ὡς υἱοῦ τοῦ Ἀπολλοδότου. Τὸ ὡρολόγιον τοῦτο εἶναι ἀφιερωμένον εἰς τὸν βασιλέα Πτολεμαῖον, τὸ κατεσκεύασε δὲ εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ὁ τεχνίτης Θεμισταγόρας, υἱὸς τοῦ Μενίσκου, ὡς διαβάζομεν εἰς τὴν ἐπιγραφήν :

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἀπολλώνιος Ἀπολλοδότου (ἀφιερώνει)
Θεμισταγόρας Μενίσκου Ἀλεξανδρεὺς ἐποίει].

μόζεται· ὑπὸ μορφὴν σκάφης ἢ ἡμισφαιρίου, ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος, ἐφεῦρεν ἡλιακὸν ὡρολόγιον καὶ ὑπὸ μορφὴν μιᾶς ὁριζοντίως τιθεμένης στρογγύλης πλακός· ὁ ἀστρονόμος Εὔδοξος ἐφεῦρεν ἡλιακὸν ὡρολόγιον τὸ ὀνομαζόμενον Ἀράχνη, ἢ ὡς μερικοὶ νομίζουσιν ἐφεῦρε τοῦτο ὁ Ἀπολλώνιος· ἓν ὀνομαζόμενον Πλινθίον ἢ Φάτνωμα, ὡς ἐπίσης ἓν τὸ ἐγκατεστημένον εἰς τὸν Ἱππόδρομον τοῦ Φλαμινίου, τὸ ἐφεῦρεν ὁ Σκοπίνας ἐκ Συρακουσῶν· ἓν διὰ τὰς χρονολογίας τὸ ἐφεῦρεν ὁ Παρμενίων· ἓν διὰ πᾶν γεωγραφικὸν πλάτος ὁ Θεοδόσιος καὶ ὁ Ἀνδρίας· ἓν καλούμενον Πελεκῖνον τὸ ἐφεῦρεν ὁ Πατροκλῆς· ἓν καλούμενον κῶνος, ὁ Διονυσόδωρος· ἓν καλούμενον Φαρέτρα τὸ ἐφεῦρεν ὁ Ἀπολλώνιος.





ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

65. *Scholia in elementorum librum X (ed. I. L. Heiberg, vol. V, Lipsiae 1888) p. 414, 12 - 16 :*

ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς περὶ ῥητῶν καὶ ἀλόγων οὐ πασῶν· τινὲς γὰρ αὐτῷ (sc. Eucl.) ὡς ἐνιστάμενοι ἐγκαλοῦσιν· ἀλλὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, ὧν συντιθεμένων γίνονται ἄπειροι ἄλογοι, ὧν τινας καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀναγράφει.

66. *Scholia ad Euclidis Data, (ed. H. Menge, Eucl. op. vol. VI, Lipsiae 1896) p. 264, 1 (Ad def. 13 - 15) :*

Τούτους Ἀπολλωνίου φασὶν εἶναι τοὺς τρεῖς ὅρους.

67. *Serenus de sectione cylindri prop. 16 p. 16 ed. Edm. Halley :*

Τούτων οὕτως ἐχόντων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἡ ΑΒΓ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν· ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ κώνου τῇ ἐλλείψει ὑπῆρχεν, ὡς ἐν τοῖς κωνικοῖς δείκνυται θεωρήματι ιε´ τοῖς δυναμένοις λέγειν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς αὐτὰ ὑπομνήμασι γεωμετρικῶς ἀπεδείξαμεν.

68. *Hypatia. Suidae Lexicon, pars IV, Π - Ψ, ed. Ada Adler, Lipsiae 1935, p. 644 - 646 :*

Ἡ Θέωνος τοῦ γεωμέτρου θυγάτηρ, τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου, καὶ αὐτὴ φιλόσοφος καὶ πολλοῖς γνώριμος· γυνὴ Ἰσιδώρου τοῦ φιλοσόφου. ἤκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας Ἀρκαδίου. ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον, τὸν ἀστρονομικὸν Κανόνα, εἰς τὰ Κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. αὕτη διεσπάσθη ὑπὸ τῶν Ἀλεξανδρέων, καὶ τὸ σῶμα αὐτῆς ἐνυβρισθὲν καθ' ὅλην τὴν πόλιν διεσπάρη. τοῦτο δὲ πέπομφε διὰ

65. Σχόλια εἰς Στοιχεῖα Εὐκλείδου βιβλίον 10:

Εἰς δὲ τὰ ἑπόμενα (διαλαμβάνει ὁ Εὐκλείδης) περὶ ῥητῶν καὶ ἀσυμμέτρων, ἀλλ' ὄχι ὅμως ὅλων· διότι μερικοὶ τὸν ἐγκαλοῦσιν ὡς ἔχοντες ἀντίθετον γνώμην· ἀλλὰ διαλαμβάνει τὰ τῶν ἁπλουστάτων εἰδῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἀθροίσματα παρέχουσιν ἀπείρους ἀσυμμέτρους εὐθείας, μερικὰς τῶν ὁποίων ἀναγράφει καὶ ὁ 'Απολλώνιος.

66. Σχόλια εἰς τὰ Δεδομένα τοῦ Εὐκλείδου:

Λέγουσιν, ὅτι οἱ τρεῖς αὐτοὶ ὁρισμοὶ εἶναι τοῦ 'Απολλωνίου.

67. Σερῆνος, Περὶ τομῆς κυλίνδρου, θεώρημα 16:

Τούτων οὕτως ἐχόντων εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒΓ τομὴ τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἔλλειψις· διότι ὅσα ἀπεδείχθησαν ἐδῶ ὑπάρχοντα περὶ τῆς τομῆς, ὅλα ὑπῆρχον ὁμοίως καὶ εἰς τὸν κῶνον, ὡς ἀποδεικνύεται καὶ εἰς τὸ 15 θεώρημα τῶν Κωνικῶν (τοῦ 'Απολλωνίου), εἰς τοὺς δυναμένους νὰ λέγωσι τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἡμεῖς εἰς τὰ σχόλια αὐτῶν (τῶν Κωνικῶν) ἀπεδείξαμεν γεωμετρικῶς.

68. 'Υπατία. Λεξικὸν Σουΐδα, μέρος 4, Π-Ψ, σελ. 644-646:

'Η κόρη τοῦ γεωμέτρου Θέωνος, τοῦ 'Αλεξανδρινοῦ φιλοσόφου, καὶ αὐτὴ φιλόσοφος καὶ πασίγνωστος· ἦτο σύζυγος τοῦ φιλοσόφου 'Ισιδώρου. "Ηκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας 'Αρκαδίου. "Εγραψε σχόλια εἰς τὸν Διόφαντον, σχόλια εἰς τὸν 'Αστρονομικὸν Κανόνα, σχόλια εἰς τὰ Κωνικὰ τοῦ 'Απολλωνίου. Αὕτη διεμελίσθη ὑπὸ τῶν 'Αλεξανδρέων καὶ τὸ σῶμα αὐτῆς διασυρθὲν καθ' ὅλην τὴν πόλιν διεσπάρη. Τοῦτο δὲ τὸ ἔπαθε διὰ τὸν φθόνον καὶ *τὸν φθόνον καὶ τὴν ὑπερβάλλουσαν σοφίαν, καὶ μάλιστα εἰς τὰ περὶ ἀστρονομίαν· ὡς μέν τινες ὑπὸ Κυρίλλου, ὡς δέ τινες διὰ τὸ ἔμφυτον τῶν Ἀλεξανδρέων θράσος καὶ στασιῶδες... ... ἤδη γοῦν Κύριλλον παριόντα διὰ τοῦ οἴκου τῆς Ὑπατίας ἰδεῖν πολὺν ὠθισμὸν ὄντα πρὸς ταῖς θύραις . . . ἐρωτήσαντα δὲ ὅ,τι εἴη τὸ πλῆθος καὶ περὶ οὗ κατὰ τὴν οἰκίαν ὁ θόρυβος, ἀκοῦσαι παρὰ τῶν ἑπομένων, ὅτι προσαγορεύοιτο νῦν ἡ φιλόσοφος Ὑπατία . . . οὕτω δηχθῆναι τὴν ψυχήν, ὥστε φόνον αὐτῇ ταχέως ἐπιβουλεῦσαι, πάντων φόνον ἀνοσιώτατον . . . ἄγος τοῦτο μέγιστον καὶ ὄνειδος προστρεψάμενοι τῇ πατρίδι.*

69. Scholia in elementorum librum I, (ed. I. L. Heiberg, Elementa vol. V, Leipzig 1888) p. 80, 23 :

λέξομεν δὴ πρὸς αὐτούς, ὅτι ὁμοιομερὴς μὲν ἡ τοιαύτη γραμμὴ (sc. ἕλιξ ἐπὶ κυλίνδρου), καὶ δέδειχεν Ἀπολλώνιος τοῦτο ἐν τῷ περὶ ἑλίκων, ἁπλῆ δὲ οὐδαμῶς ἐστιν·

70. — — p. 113, 27 :

ὁ γοῦν Ἀπολλώνιος καὶ τῶν ἀξιωμάτων ἀποδείξεις γέγραφεν ἀπεναντίως Εὐκλείδῃ φερόμενος.

71. — Librum XI — p. 596, 10 Ad def. 18 :

Γένεσιν καὶ ἐνταῦθα ὡρίσατο κώνου καὶ οὐ παντός, ἀλλὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς, ὁ δὲ Ἀπολλώνιος καλῶς ὡρίσατο ἐπὶ πλέον τὴν γένεσιν.

τὴν ὑπερβάλλουσαν σοφίαν, καὶ μάλιστα εἰς τὰ περὶ τὴν ἀστρονομίαν· καθὼς λέγουν μερικοὶ ὑπὸ τοῦ Κυρίλλου (τοῦ Ἁγίου Πατριάρχου, 415 μ.Χ.), καθὼς δὲ μερικοὶ ἄλλοι διὰ τὸ ἔμφυτον θράσος τῶν Ἀλεξανδρέων καὶ τὸ στασιῶδες... Ἐνῷ λοιπὸν ὁ Κύριλλος διήρχετο πρὸ τῆς οἰκίας τῆς Ὑπατίας καὶ εἶδε νὰ συνωθοῦνται πολλοὶ πρὸ τῶν θυρῶν... καὶ ὅταν ἠρώτησε τὶ συμβαίνει, καὶ ἔμαθε, ὅτι ἐχαιρέτιζον τὴν φιλόσοφον Ὑπατίαν ... ἐπειράχθη τόσον πολύ, ὥστε ἀμέσως διέταξε νὰ τὴν φονεύσουν, πάντων φόνον ἀνοσιώτατον (λιθοβολισμόν).. προσκομίσαντες εἰς τὴν πατρίδα τὸ μέγιστον τοῦτο ἄγος καὶ ὄνειδος.

69. Σχόλια εἰς Στοιχεῖα Εὐκλείδου βιβλίον 1:

Θὰ εἴπωμεν λοιπὸν πρὸς αὐτούς, ὅτι εἶναι ὁμοιομερὴς μὲν ἡ τοιαύτη γραμμὴ (δηλ. ἡ ἕλιξ ἐπὶ κυλίνδρου), καὶ ὁ Ἀπολλώνιος ἀπέδειξε τοῦτο εἰς τὴν πραγματείαν του περὶ ἑλίκων, καθόλου δὲ δὲν εἶναι ἁπλῆ·

70. — — :

Ὁ Ἀπολλώνιος λοιπὸν ἐπεχείρει καὶ ἀποδείξεις τῶν ἀξιωμάτων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν Εὐκλείδην.

71. Σχόλια εἰς τὸ 11 βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου:

Καὶ ἐδῶ (δηλ. εἰς τὸν ὁρισμὸν 18) ὥρισε (ὁ Εὐκλείδης) τὴν γένεσιν τοῦ κώνου, ὄχι ὅμως παντὸς κώνου, ἀλλὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς, ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὥρισεν ἐπὶ πλέον καλῶς τὴν γένεσιν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δημοσιεύομεν κατωτέρω ἐπιστολὴν τοῦ ἐν Παρισίοις διακεκριμένου Ἕλληνος ἐπιστήμονος κ. Γεωργίου Καγιᾶ, ὅστις ἀπέστειλεν εἰς ἡμᾶς φιλοφρόνως τὴν σχετικὴν πρὸς τὸν Ἀπολλώνιον βιβλιογραφίαν.

ELEMENTS POUR UNE BIBLIOGRAPHIE APOLLONIENNE

Dans la célèbre triade des grands géomètres de l'antiquité grecque (Euclide - Archimède - Apollonios) seul Archimède a réussi à trouver sa place dans l'histoire et cela parce qu'il a eu la chance(!) de tomber sous les coups d'un légionnaire de Marcellus. Sur les deux autres la tradition a été bien avare en renseignements, de sorte que, quelques anécdotes mises à part, on ignore presque tout sur eux. Par contre il est hors de doute que leur influence à tous trois sur le développement de la pensée mathématique moderne et contemporaine fut considérable dès le début de la rénaissance, comme en témoigne la volumineuse bibliographie accumulée depuis l'invention de l'imprimérie.

Une bibliographie euclidienne pendant cette période remplirait tout un volume, même si l'on exclue les innombrables travaux auxquels a donné lieu le postulat des parallèles.

Une première tentative de constitution d'une bibliographie archimédienne a déjà vu le jour à l'occasion de la publication de ses oeuvres complètes dans l'édition d'Athènes (Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη: 'Αρχιμήδους Ἅπαντα. Τόμος Α', Μέρος Α', σελὶς 309 κ.ἑπ., 'Αθῆναι 1970).

Il serait donc normal de joindre un travail analogue sur Apollonios à l'occasion de la présente édition. Il est clair, de par la nature du sujet, qu'une telle bibliographie ne peut prétendre être exhaustive, mais il est à espérer qu' elle pourrait constituer un point de départ utile pour une investigation plus poussée. Dans la mesure du possible nous avons donc indiqué à la fin de chaque référence sa côte dans les trois bibliothèques importantes qui nous ont été accessibles et que nous avons signalées par les sigles suivants :

U:	Bibliothèque	de l'Université (Paris, Sorbonne)
B.N.:	»	Nationale (Paris)
B.M.:	»	du British Museum (Londres)

La même notation est valable pour la bibliographie d' Archimède, précédemment signalée.

A cette occasion il est instructif de procéder à une comparaison bibliographique de ces trois géomètres (fig. 1) en groupant les éditions par tranches d'un demi-siècle. On ne s'étonnera pas outre mesure de la distribution se rapportant à Euclide, si l'on tient compte du fait que ses E l é m e n t s ont tenu une place de tout premier ordre dans l'enseignement universitaire d'abord, puis secondaire et cela jusqu' au milieu de ce siècle.

La courbe pour Archimède a grosso modo la même allure que celle d'Euclide à un facteur d'échelle près. Cela tient au fait que l'oeuvre de ce mathématicien est beaucoup moins élémentaire que les Eléments et de ce fait n'a pas pu trouver place dans l'enseignement conventionnel.

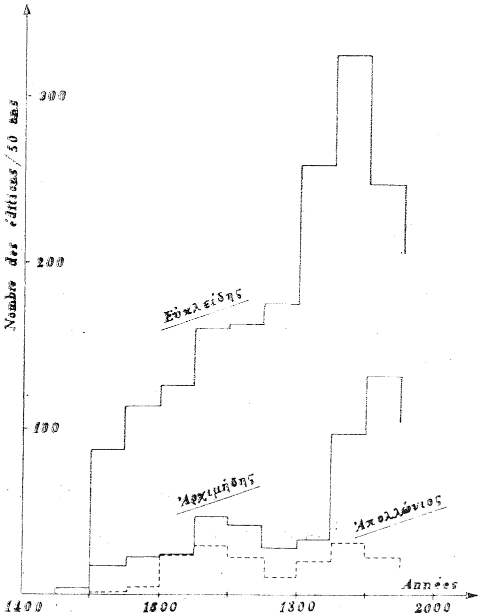


Fig. 1

Elle a par contre été à la base de toute recherche mathématique avancée depuis Galilée.

Toute différente est la distribution concernant Apollonios, qui semble avoir retenu un interêt constant pendant toute la période couverte par ce travail. Ainsi on verra François Viète prendre le nom d'Apollonius Gallus et

W. Snell celui d'Apollonius Batavus. Mais les recherches sur les coniques n'ont culminé que pendant le XIXème siècle et encore ces courbes n'étaient étudiées qu'au niveau universitaire. Si l'on ajoute à cela la difficulté de la lecture d'Apollonios, on comprendra aisément la rareté de sa diffusion, car, il faut avouer qu'il n'est pas à la portée de tout le monde.

Il n'est donc pas déplacé de saluer la présente édition (suite de celles de Diophante, d'Euclide et d'Archimède) comme un évènement considérable dans les annales de la Grèce moderne, qui semblait s'andormir sur ses gloires. Espérons que l'oeuvre si courageusement entreprise par Evanghelos Stamatis sera un stimulant puissant pour les générations futures, bréf un

κτῆμα ἐς ἀεί.

Georges J. Kayas
École Polytechnique - L.P.N.H.E.
17, Rue Descartes
75.005 Paris.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΓΕΝΙΚΗ

1) FABRICIUS J. A. Bibliotheca Graeca.... Hamburgi (1790 - 1809).
2) MURHARD F. W. A. Literatur der mathematischen Wissenschaften. Leipzig (1797 - 1805).
3) GRAESSE J. G. Th. Trésor des livres rares et précieux... Dresde (1859 - 1869).
4) KLUSMANN R. Bibliotheca Scriptorum classicorum et Graecorum et Latinorum (1878 - 1896).
5) ENGELMANN W. - PREUSS E. Bibliotheca Scriptorum classicorum. Leipzig (1880).
6) SCHWEIGER F. L. A. Handbuch der griechischen Bibliographie. Leipzig (1830).
7) HOFFMANN S. F. G. Lexicon Bibliographicum. Lipsiae (1875).
8) KAYSER C. G. Bücher - Lexicon.
9) Allgemeine Deutsche Bibliographie.
10) POGGENDORF J. C. Biographisch - literarisches Handwörterbuch.
11) QUERARD J. - M. La France littéraire. Paris (1827 - 1839).
12) HOEFER. Nouvelle bibliographie générale. Paris (1857 - 1866).
13) LORENZ O. Catalogue général de la librairie française. Paris (1827 - 1839).
14) BRUNET J. - C. Manuel du libraire. Paris (1860).
15) PAULY - WISSOWA. Real - Encyclopaedie der classischen Alterthumswissenschaften.
16) LAMBRINO S. Bibliographie de l'antiquité classique (1896 - 1914).
17) MAROUZEAU J. Dix années de bibliographie classique (1914 - 1924). Paris.
18) MAROUZEAU J. L'année philologique. Paris (1924 - 1970).
19) LUSTRUM, Internationales Forschungsbericht aus dem Bereich des klassischen Altertums. Göttingen.
20) GESAMT - KATALOG der WIEGENDRUCKE.

21) Catalogue général des imprimés de la Bibliothèque Nationale. Paris.
22) British Museum General Catalog of printed Books. London.
23) Gesamt-Katalog der preussischen Bibliotheken. Berlin (1934).
24) Berliner-Titeldrucke Fünfjahrskatalog. Berlin (1935).
25) Library of Congress Catalog.
26) SARTON G. Introduction to the History of Science. Baltimore (1927).
27) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin.
28) Critical Bibliographies published in ISIS.
29) Mathematical Review (U.S.A.).
30) Euclid-Archimedes-Apollonius of Perga-Nicomachus. Encyclopaedia Brittanica inc. Great Books of the Western World, vol. 11.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΕΙΔΙΚΗ

Περίπου 320. — Πάππος. Πληροφορίαι διὰ τὰς πραγματείας τοῦ Ἀπολλωνίου— Λήμματα εἰς τὰ Κωνικά. Ἀλεξάνδρεια.
» 530. — Εὐτόκιος. Ἀπολλωνίου Κωνικὰ καὶ σχόλια I-IV. Κωνσταντινούπολις.
» 820. — Λέων ὁ μαθηματικός. Ἀπολλωνίου Κωνικά. Κωνσταντινούπολις.
» 870. — al-Himsi (I-IV ἀραβιστί).
» 875. — Musa, Banu (I-VII ἀραβιστί).
» 994. — Abul Fath Isfahan (V-VII ἀραβιστί).
» 1000. — Abd el Melik (V-VII ἀραβιστί).

1537.— Apollonii Pergaei ... Opera per doctissimum philosophum Ioannem Baptistam Memum... de graeco in latinum traducta et noviter impressa.
Per B. Bindonum, Venetiis.
U: R. XVI. 366 folio.; B.N. Rés. g. V. 49; B.M. 8534. g. 8.
1548.— Maurolico. Fr. 1654. Messina.
1556.— Fabricius (In vita Berhardi) praeter posteriores a quarto Apollonii Pergaei Concicorum libros ex arabica lingua latine versos, scholiisque illustratos contulit quatuor priores

editos Bononiae 1556, cum graeco textu ab ibso margini addito et cum versione arabica.

1566.— APOLLONII Pergaei Cinicorum libri quatuor. Una cum PAPPI... Lemmatibus, et Commentariis EUTOCII Ascalonitae. SERENI Antinoensis... libri duo, nunc primum in lucem editi. Quae omnia super F. Commandinus. e graeco conuertit, et commentaria illusrauit.
Ex officina A. Benatii, Bononiae.

1596.— Roomen, Aven, Problema.
Apolloniarum, Würzburg. Zum B. M. 8534. e. 37.
Inhalt vgl. H. Bosmans, in : Ann. Soc. sci. Brüssel 29 (1905), S. 68/79.

1600.— Francesci Vietae Apollonius Gallus, seu excuscitata APOLLONII Pergaei geometria...
Excudebat D. Le Clerc, Parisiis.
B.N. V. 6210 bis(4) ; Rés. V. 836 ; B.M. C. 73. d. 9(1)

1607.— Marini Ghetaldi ... APOLLONIUS redivivus, seu Arestituta APOLLONII Pegaei Inclinationum geometria...
Apud B. Juntam, Venetiis.
B.N. V. 6079 (1)

1607.— Marini Ghetaldi... Supplementum Apollonii Galli, seu exsuscitata APOLLONII Pergaei Tactionum geometriae pars relique.
Apud V. Fiorinam, Venetiis.
B.N. V. 6079 (2)

1607.— Willebrordi Snellii. Περὶ Λόγου ἀποτομῆς καὶ περὶ Χωρίου ἀποτομῆς (APOLLONII) resuscitata geometria.
Ex officina Plantiniana Raphelengii, Lugodini.
B.N. Rés. V. 867.

1608.— Willebrordi Snellii Apollonius Batavus, seu exsucitata APOLLONII Pergaei. Περὶ Διωρισμένης τομῆς geometria.
Excudebat J. a Dorp, Lugodini.
B.N. Rés. V. 866 ; B.M. 1044. d. 21 (2).

1609.— Franciscus Vieta, Opera mathematica. Paris.

1612.— Alexandri Andersoni... Supplementum Apollonii redivivi sive Analysis problematis hactenus desiderati ad APOLLONII Pergaei doctrina Περὶ Νεύσεων, a Marini Ghe-

t a l d o ... hucusque non ita pridem restitutam...
Apud H. Beys, Parisiis.
B.N. V. 6212 (I), 6213, 6387 (I), Vz. 157 ; B.M. 530, i. 9 (2).

1613.— M a r i n i G h e t a l d i ... Apollonius redivivus, seu restituta APOLLONII Pergaei de Inclinationibus geometriae liber secundus.
Apud B. Baretium, Venetiis.
B.N. V. 6514 (4) ; B.M. 530. i. 9 (I).

1613.— W i l l e b r o r d u s S n e l l i u s, APOLLONII Pergaei libros sectione determinata et de rationis de spatii defectione latina versit.

1620.— I o a n n i s M e u r s i i, APOLLONIUS sive de antiquis eius nominis scriptoribus.
B.M. 235. e. 32 (2).

1625.— EUCLIDIS Data : opus ad vett. geometriae autt. ARCHIMEDIS, APOLLONII, PAPPI, EUTOCII caeterorumque non modo lectionem, sed ad geometr. quoque analyseos instaurationem plane necess. et a multis diu desider. C l. H a r d y e regis christianiss. bibl. n. pr. ed. latin vertit scholiisque illustravit commentarius gr. et lat. quo dati natura, darorumque Euclideorum utilitates explicantur.
Impressis Melch. Mondière, in insula Palatinae vico Harleo, ad insigne viperarum, Lutetia Parisinorum.

1626.— M e r s e n n e M. EUCLIDIS Elementorum libri, APOLLONII Pergaei Conicorum SERENI de sectione coni et cylindri libri, ARCHIMEDIS Opera, THEODOSII, MENELAI et MAUROLYCI Spherica, C o m m a n d i n i et L u c a e V a l e r i i libri de centro gravitatis. 3 Vol.
Ex typographia N. Caroli, Lutetia
B.N. V. 18195 (2).

1633.— P. H é r i g o n e, Cursus mathematicus Vol. I : APOLLONII Pergaei de determinata sectione geometria a W i l l e b r o r d o S n e l l i o restituta. Inclinationem geometria a M a r i n o G h e t a l d o restituta. Tactionum geometria a F. V i e t a restituta.
B.M. 8534. a. 6.

1634.— P. H é r i g o n e, Cours de mathématiques. Tom. I. Les cinq livres du lieu résolu.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1642.— Cl. Richardus (Traduction espagnole de l'édition de Commandinus).
Madrid.

1644.— P. Hérigone, Cursus mathematici tomus primus. Continens EUCLIDIS Elementorum libri XV, Appendicem geometriae planorum, Data EUCLIDIS, APOLLONII Pergaei de loco resoluto libri V, Doctrinam angularium sectionem.
Chez Sim. Piget, à Paris.
B.N. V. 18281 - 87, 18273.

1644.— Idem. ibid. 1625.

1644.— Mersenne M. Synopsis... p. 276 ss. (Traduction de Richardi corrigée par Mersenne avec un commentaire d' Eutocios corrigé par M. Meibomius).

1646.— Franciscus a Schooten, voir en 1656/7.

1654.— Curvilineorum amoenior contemplatio nec non examen circuli quadraturae. A R. P. Gregor. As. Vincentio Soc. Jesu propositae.
Apud Guilielm. Barbier, typographum regium, Lugduni.

1655.— APOLONII Pergaei Conicorum libri IV, cum commentariis. R; P. Claudii Richardi.
Apud H. et J. B. Verdussen, Antwerpriae.

1656/57.— Francisci a Schooten, Exercitationum Mathematicarum liber I. continens propositionum Arithmeticarum et Geometricarum Centuriam. II De constructione problematum simplicium geometricorum, seu quae solve possunt, ducendo tantum rectas lineas. III APOLLONII Pergaei loca plana restituta. IV De organica conicorum sectionum in plano descriptione triginta miscellaneas. Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus de Ratiociniis in Aleae ludo.
Lugduni Batavorum.
B.N. V. 6238; B.M. 8529. c. 5

1658.— Casselis: APOLLONIUS germanica versus prodiisse dicitur Casselis (Heilbronner: Hist. math. univ. p. 277).

1659.— De Maximis et Minimis geometria divinatio in quintum conicorum APOLLONII Pergaei adhuc desideratum... autore Vincentio Viviani.
Apud J. Cocchini, Florentiae.
B.N. Rés. V. 132; B.M. 8531. f. 23.

1661.— APOLLONII Pergaei conicorum libri V, VI, VII paraphraste A b a l p h a t o A s p h a h a n e n s i, nunc primum edit. Additus in calce ARCHIMEDIS Assumptorum liber. Ex codicibus arabicis A b r a h a m u s E c c h e l l e n s i s M a n o r i t a........ latinos reddidit 10. A l f o n s u s B o r e l l u s - ... curam in geometricis versioni contulit...
Apud J. Cocchini, Florentiae.
B.N. V. 1420, 5532, Rés. V. 112 ; B.M. 47. g. 2.

1669.— APOLLONII Pergaei Conicorum sectionum libri V, VI, VII, in gracia deperditi, jam vero ex arabico manuscripto... latinitate donnati a C h r i s t i a n o R a v i o ...
Sumtibus S. Reyheri, Kilonii.
B.N. V. 18196.

1671.— Elèments de Géomètrie, où par une méthode courte et aisée on peut apprendre ce qu'il faut savoir d'EUCLIDE, d'ARCHIMEDE, d'APOLLONIUS, et les plus belles inventions des anciens et des nouveaux Géomètres. Par le R. P. I g n a c e P a r d i e s de la S.d.J.
Sebastien Marbre - Cramoisy, Paris.

1671.— Idem. 1669. Florentiae.
U : LGt 31 /folio.

1675.— ARCHIMEDIS opera, APOLLONII Pergaei Conicorum libri IV, THEODOSII Spherica, methodo nova illustrata et succincte demonstrata per I s a a c u m B a r r o w.
Londini.
U : LGt 15 : 4° ; B.N. : V. 6075 - 77 ; B.M. : 529. f. 1,4.

1675.— I o. B r o n a u commentariis ARCHIMEDIS et APOLLONIIS Pergaei sectiones conicas.
Londini.

1678.— Idem. Ibid. 1671. (P a r d i e s).

1679.— Elementa Conica APOLLONII Pergaei et ARCHIMEDIS opera nova et breuiori methodo demenstrata a I o a n n e A l p h o n s o B o r e l l i o.
Apud Mascardum ; Romae.
B.M. 8531. a. II.

1679.— P. d e F e r m a t, Opera mathematica (Cf. 1891).
Tolosae.

1680.— Elementa Geometriae, in quibus methodo breui ac facila summe necessaria ex EUCLIDE, ARCHIMEDE, APOLLONIO et nobilissima veturum et recentiorum geometricorum inventa traductur per P. Ignat. Gastonem Pardies S. J. gallico idiomate conscripta, nunc vero post tertiam editionem in usum studiosaem juventutis latinitate donata a R. ab. Schmidio.
Hagae Comitum.

1683.— Idem. ibid 1671 (Pardies)

1683.— » » 1658

1684.— » 1680 (Pardies) Literis Jo. B. Wertheri, Jenae.

1685.— P. de La Hire, Sectiones Conicae... Adjecta... est brevis exposito propositionum septem librorum Conicorum APOLLONII Pergaei.
B. M. 47. g. II.

1690.— Idem. 1671 (Pardies)

1691.— Fardella Michelangiolo, Universae usualis mathematicae theoria in qua insigno res EUCLIDIS, APOLLONII, ARCHIMEDIS et THEODOSII propositiones demonstrantur.
Apud Hieron. Albriccium.

1691.— Idem. apud Petrum Vaulcurtum, Lugduni Batavorum.

1693.— Idem. 1680 (Pardies).

1695.— Idem. 1625 (Hardy).

1696.— Conicorum libri IV, una cum Lemmatibus PAPPI Alexandrini et Commentariis EUTOCII Ascalonitae. Quae olim primus vulgauit omnia F. Commandinus, e graeco a se conversa, expurgata mendis et commentariis illustrata.
Nicolò Felice Buti. Pistorii: Gatti.

1702.— APOLLONII Conica integritati fuae, ordini et nitori restituta ab Elia Astorino, Carmelita.
Napoli.

1704.— Bartholomaeus Intieri Florentinus in APOLLONIO ac SERENO promoto, qui liber praela exacit.
Neapoli.

1704.— Guil. Franc. Marchio Hospitalius, Des Sections Coniques. Paris.

1706.— APOLLONII Pergaei de Sectione rationis libri duo, ex arabico ms^{to} latine versi. Accudunt ejusdem de Sectione spatii libri

duo restituti... Paemittitur PAPPI Alexandrini praefatio ad VII um Collectionis Mathematicae ; nunc primum graeca edita, cum Lemmatis ejusdem PAPPI ad hos APOLLONII libro. Opera et studio Edmundi Halley.
Oxonii, e theatro Sheldoniano.
B.N. V. 18197 ; B.M. 529. f. 29 ; 51. d. 22.

1710.— APOLLONII Pergaei Conicorum libri octo, et SERENI Antinoensis De Sectione Cylindri & Coni libri duo (Conicorum libri IV priores, cum PAPPI Alexandrini Lemmatis et EUTOCII Ascalonitae commentariis). Ex add. MSS edidit Edmundus Halley.
E Theatro Sheldoniano, Oxoniae.
U. LGt 30a/f° ; B.N. V. 1419 ; B.M. 47. g. I/G. 3589.

1711.— Idem. 1680 (Pardies)

1718.— Paul Matt. Doriae ad Hyacinthum a Christophoro epistola, in qua offenditur parabolam APOLLONIAM...
Amstelodami.

1721.— Idem. 1680 (Pardies). Jenae.

1722.— Guido Grandi, Compendio delle sezioni conice di APOLLONIO, con aggunta di nove proprietà delle medessimi a sezioni.
Tartini & Franchi, Florentiae.

1723.— Quadraturae circuli, editis Gregorius a Sancto Vincentio Jesuita, cum Jacobus Milnes in sectionem conicarum elementis. (Cité par Fabricius p. 200).

1724.— Idem 1671 (Pardies). Chez Perre de Coup, Amsterdam.

1728.— Idem. 1704 (Traduction anglaise par E. Stone)

1731.— Institutiones mathematicae ec. quibus illustriora EUCLIDIS, ARCHIMEDIS, APOLLONIUS, aliorumque theoremata breviori, clariorique demonstratur. Auct. Od. Corsini.
Paperini ; Florentiae.

1734.— Elemente sectionem conicarum, conscripta ad usum Faustinae Pignatelli - edita vero in gratiam studiosae juventutis, auctore Nicolao de Martino, regio mathem. professore,
Neapoli.

1735.— Idem. 1731. Tartini et Franchi, Firenze.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1735.— R. Simson, Opera reliqua. De sectione determinata libri 2 restituti, duibus in super libris aucti.
Glascow.

1738.— Idem. 1680 (Pardies), curavit Fr. Faludi. Hungarus S. J.

1745.— Idem. 1680 (Pardies). Ex typ. Kaliwodiana, Viennae.

1749.— Apollonii Pergaei locorum planorum libri II, restituti a Roberto Simson...
In aedibus Academicis, excudebant R. et A. Foulis.
In aedibus academicis, Glasguae.
B.N. V. 6082 ; B.M. 529. k. 20.

1764.— The Two Books of Apollonius Pergaeus, concerning Tangencies, as they have been restored by F. Vieta and M. Ghetaldus. With a supplement. By J. Lawson.
Fletchers & Hodson, Cambridge.
B.M. 8535. cc. 24 (I).

1770.— Apollonii Pergaei Inclinationum libri duo. Restituebat S. Horsley.
E typogr. Clarendoniano, Oxonii.
B.M. 529. k. 21.

1771.— Idem. 1764 to which is now added a second supplement, being Mons. Fermat's treatise on spherical tangencies.
B. White, London.
B.N. V. 6083 (I).

1772.— The Two Books of Apollonius Pergaeus concerning determinate section, as they have been restored by Willebrordus Snellius, by John Lawson... to which are added the same two books by William Wales, being an entire new work.
B. White, London.
B.N. V. 6083 (2).

1773.— Apollonii Pergaei de Sectione Determinata libri duo restituti a Petro Giannini.
Parmae.

1776.— Idem. 1735 (R. Simson)
B.M. 8532. dd. 12.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

1779.— A Restitution of the Geometrical Treatise of APOLLONIUS Pergaeus on Inclinations. Also the Theory...
By Reuben Burrow.
London.

1792.— Io. Guil. Christiani, Kilonensis, comment. qua explicantur fundamenta calculi... quae tradiderunt EUCLIDES ARCHIMEDES, APOLLONIUS Pergaeus, innitantur calculi infiniti.
Göttingae.
B.M. 529. k. 24.

1795.— APOLLONII de Tactionibus quae supersunt, ac maxima lemmata PAPPI in hos libros, graece nunc primum edita... Cum Vietae librorum APOLLONII restitutione, adjectis observationibus... a Ioanne Guilielmo Camerer.
Apud C. G. Ettinger, Gothae Amstelodami.
U. LGt 24/8°; B.N. V. 18199; B.M. 529. g. 30 (3), 51. l. 10.

1796.— Ebene Oerter, wiederhergestellt von Rob. Simson. Aus dem latein. Übers. mit Berechnungen... begleitet von J. W. Camerer.
Cnobloch, Leipzig.

1799.— Στοιχείων Μαθηματικῶν ἐκ παλαιῶν καὶ νεωτέρων συνερανισθέντων ὑπὸ τοῦ Πανιερωτάτου Ἀρχιεπισκόπου πρῴην Ἀστραχανίου Κυρίου Νικηφόρου (Σημ. Θεοτόκη) φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ ἐκδοθέντων, ὅπως δωρεὰν διανέμωνται τοῖς ἐν τοῖς Ἑλληνομουσείοις φοιτῶσιν ὑπὸ τῶν τιμιωτάτων καὶ φιλογενῶν αὐταδέλφων ΖΩΣΙΜΑ, τόμος δεύτερος περιέχων τὰ Ἀρχιμήδεια θεωρήματα τὴν ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν καὶ τὰς τοῦ κώνου τομάς. Ἐν Μόσχᾳ, ἐν τῷ τῆς Κοινότητος Τυπογραφείῳ παρὰ Ῥηδηγέρῳ καὶ Κλαυδίῳ.

1802.— Σύνοψις τῶν κωνικῶν τομῶν Γουίδωνος τοῦ Γρανδῆ, ἐκ τῆς λατινίδος εἰς τὴν καθ' ἡμᾶς ἁπλουστέραν διάλεκτον, ἐξ ἧς μετήνεκται εἰς τὴν Ἑλληνικὴν παρὰ Ἰωνᾶ Ἱερομ. Σπαρμιώτου, νῦν πρῶτον τύποις ἐκδοθεῖσα ἐπιστασίᾳ καὶ διορθώσει Ἀνθίμου Γαζῆ. Ἐν Βιέννῃ. Τὰ Συμαϊκά, σύγγραμμα περιοδικόν, τόμ. Α', Ἀθῆναι 1972, Ἐπιμέλεια: Ἀλέξανδρος Σ. Καρανικόλας, σελ. 166.

1818.— Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des APOLLONIUS von Perge von den Berührungen von C. G. Haumann.
Holäufer, Breslau.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1820.— G. U. A. Vieth, Leitfaden zur vollständigen Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius, nach den Combinat. der gegebenen Elemente und ihren Lager gegeneinander entworfen von Fr. Vieta.
Ackermann, Dessau.

1821.— Apollonius Suevus sive Sectionum problema nunc demum restitutum, accedente censura in Vietam, ed. Guil. L. Christmann. Tubingae.
Hoffmann's Verlag, Stuttgart.

1822.— Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione determinata, wiederhergestellt von Robert Simson, und die angehängten Bücher des letzteren nach dem lateinischen, frei bearbeitet von Dr. W. A. Diesterweg.
Kupferberg, Mainz; Bohres, Bonn.
B.N. V. 18198 ; B.M. 8534. a. 19.

1823.— Die Bücher des Apollonius von Perga De Inclinationibus wiederhergestellt von S. Horsley.
B.M. 8534. c. 19.

1823.— Die Bücher des Apollonius von Perga De Inclinatinibus wiederhergestellt von Sam. Horsley, nach. d. Lat. frey bearb. von W. A. Diesterweg.
Reimer, Berlin.

1824.— Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione Rationis nach dem Lateinischen des Edm. Halley frey bearbeitet, und mit einem Anhange versehen von Dr. W. A. Diesterweg.
G. Reimer, Berlin.
B. M. 8534. c. 20.

1827.— Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione Spatii wiederhergestellt von Dr. W. A. Diesterweg.
Büschler, Elberfeld, Leipzig.
B.M. 8530, bbb. 2.

1828.— August Richter, Des Apollonius von Perga zwei Bücher von Raumschnitt. Ein Versuch in der alten Geometrie.
L. Voss, Leipzig.
B.M. 8530. bb. 5.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

1828.— Die Bücher des Apollonius von Perga De Sectione determinata analytisch bearbeitet und vermehrt von M. G. Grabow.
U. C. 808(24)/8°; B.M. 8533. bb. 40(I).

1832.— Tegnér Elof, Försök til en theoretisk ock practisk lära om Apollonii parabel (Préface de C.J.H. = Hill ?)
Lund.
B.M. 8529. d. 26.

1834.— Die Bücher des Apollonius De Sectione Spatii analytisch bearbeitet und mit einem Anhang von mehreren Aufgaben ähnl. Art versehen von M. G. Grabow.
Saüerländer, Frankfurt.

1836.— Ahrens, Ueber das Problem des Apollonius von Pergae von den Berührungen.
Augsburg.

1836.— Zwei Bücher von Verhältnisschnitt (de sectio rationis). Aus dem Latein. des Halley übers. u. mit Anmerkungen begleitet u. mit einem Anhang versehen von Aug. Richter.
Neumann - Hartmann, Elbing.

1837.— M. Chasles, Apperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géomètrie.
Paris.

1837.— Geometrische Analysis enthaltend : des Apollonius von Pergae Sectio Rationis, Spatii und Determinata, nebst einem Anhange zu der letztern. Neu bearbeitet von Prof. Dr. Georg Paucker.
Voss, Leipzig.
B.M. 8533. bb. 4.

1842.— Nesselmann, G.H.F., Die Algebra der Griechen, S. 125-133, Berlin.

1845.— Ley J. F., Ueber die Auflösung der Aufgaben des Apollonius von dem Bestimmten Schnitte.
Cöln.

1855.— Unger, Die Bedeutung der zwei Bücher des Apollonius von den Berührungen für die geometr. Analysis.
Erfurt.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1856.— Woepcke F. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles (Mémoires présentés à l'Acad. des Sci. 14, 658).
Imprimerie Impériale, Paris.
B.M. 14544. e. II(I).

1856.— Hellwig C. Das Problem des Apollonius.
B.M. 8531. cc. 27(3).

1859.— Stuermer, Das Berühurungsproblem des Apollonius von Perga. Ein Beitrag zum Unterricht in der Geometrie. Grünberg.

1860.— Gabely Emerich, Das Problem des Apollonius.
Wien.

1861.— Des Apollonius von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte, nebst dem durch Halley wiederhergestellten achten Bücher. Deutsch bearbeitet von. P. H. Balsam.
Berlin.
B.M. 8529. dd. 5.

1863.— Knitterscheid, Ein neues Supplement zum Problem des Apollonius von dem bestimten Schnitte.
Eupen.

1863.— Sieben Bücher über Kegelschnitte nebst dem durch Halley wiederhergestellt achten Buche deutsch bearbeitet von H. Balsam.
G. Reiner; Berlin.

1870.— Richter A. W. Das Apollonische Berührungsproblem. Bielefeld, Jena.

1870.— Broeckerhoff, Das Taktionsproblem des Apollonius.
Beuthen.

1874.— Stoll, Neue Beiträge zum Problem des Apollonius.
Bensheim.

1877.— Hunyady Jenö, Apollonius feladata a gömfelületen...
B.M. Ac. 825/47.

1878.— Schoemann H. Apollonius von Perga Περὶ Νεύσεων καὶ περὶ Διωρισμένης τομῆς. Putbus (1881).

1880.— Schilke E. Die Lösungen und Erweiterungen des Apollonischen Berührungsproblem.
Berlin.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

1880.— R u l f. W. Die APOLLONISCHEN Probleme für ähnliche Ellipsen. Pilsen.

1881.— A d o l p h K l e y e r, Das apollonische Berührungsproblem, Stuttgart.

1881.— T a n n e r y P. Quelques fragments d'APOLLONIUS de Perge. Bull. Sci. Math. et Astr. (2)5, 124.

1882.— L u e h m a n (v o n) F. De Sectio Rationis, Sectio Spatii und Sectio Determinata des APOLLONIUS nebst einigen verwandten geom. Aufgaben.
Königsberg.

1885.— H u t z e l s i e d e r F., Das APOLLONISCHE Taktionsproblem. Stuttgart.

1886.— Z e u t h e n H. G., Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.
Copenhagen.

1889.— Das fünfte Buch der Conica... in der arabischen Uebersetzung des T h a b i t i b n C o r r a h, herausgegeben ins Deutsche uebertragen und mit einer Einleitung versehen, von L. M. L u d w i g N i x.
W. Drugulin, Leipzig.
B.N. 8° Θ Lpz. ph. 990 ; B.M. 14544. d. 38.

1891/93.— APOLLONII Pergaei quae graece extant, cum commentariis antiquis. Editit et latine interpretatus est I. L. H e i b e r g.
Gr. et Lat.
B.G. Teubneri, Lipsiae.
U.R. 900(23) ; B.N. 8° Z. 27 ; B.M. 2047. b. I.

1891.— C r a n z, H e i n r i c h, Das apollonische Berührungsproblem (Kleyers Encyklopädie), Stuttgart.

1891.— P i e r r e d e F e r m a t, Oeuvres, Vol. III (APOLLONII Pergaei libri duo de Locis planis restituti.
Paris.

1892.— L e m o i n e E. Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'APOLLONIUS.
N o u v e l l e s A n n. d e s M a t h. (3) II, 453.

1892.— F o u c h é M. Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné.
N o u v e l l e s A n n. d e s M a t h. (3)II, 227, 331, 404.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1896.— Treatise on Conic Sections. Edited in modern notation with introductions, including an assay of the subject, by Thomas Little Heath.
University Press, Cambridge.
U. LGt 52/8°; B.N. 8° V. 26569.

1900.— Vaux (de) Carra, Notes sur les Mécaniques de Bédi ez-Zaman el Djazari et sur un appareil hydraulique attribué à Apollonius.
Ann. Intern. Hist. Congr. Paris (Sect. V.).

1900.— Crönert W. (Sur la date d'Apollonius).
Kön. Preus. Akad. d. Wissens. Berlin 2,942.

1906.— Simon, Max, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert, Leipzig (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband I), S.87/88, und 97/105.

1909.— Simon, Max, Geschichte der Mathematik im Altertum, Berlin.

1910.— Raymond C. Archibald, Discussion and History of certain geometrical Problems of Heraclitus and Apollonius.
B.M. 8506. d. 16(4).

1911.— Hoppe, Edmund, Mathematik und Astronomie im Klassischen Altertum. Heidelberg.

1914.— Arendt F., Eine Interpolation des Eutokios in unserem Apollonius text.
Bibl. Math. 14.97.

1915.— Domaschko A., Das Problem des Apollonius.
Kornenburg.

1920.— Tannery, Paul, Mémoires scientifiques I-IV, Toulouse - Paris.

1920.— Diels, Hermann, Antike Technik, Leipzig, Nachdruck Osnabrück 1965.

1921.— T. L. Heath, History of Greek Mathematics (Vol. II).

1923.— Les Coniques d'Apollonius de Perge. Oeuvres traduites... avec introduction et notes par Paul Ver Eecke.
Desclée de Brouver, Bruges.
U. LGt 44/4°; B.N. 4° V. 9385; B.M. 8531. i. 8. Ἀνατύπωσις. Paris 1959 - 1963.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

1924.— B o r t o l o t t i E. Quando, come e da chi venneto recuperati i sette libri Coniche di APOLLONIO.
Period. di Math. p. 118.

1925.— Auswahl aus den Werken des ARCHIMEDES und APOLLONIUS Besorgt von E. G o h l k e.
Frankfurt.

1925.— H e i b e r g, I. L. Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum, München.

1926.— Die Kegelschnitte des APOLLONIUS übersetzt von A. C z w a l i n a.
Oldenburg, München & Berlin.

1927.— K l i e m, F r. Auszüge und Berichte in Pappos (über Apollonios), Berlin.

1929.— B o r t o l o t t i E. A chi dobbiamo il recupero dell' opera di APOLLONIO su le coniche.
A r c h e i o n 9,395.

1930.— B o r t o l o t t i E. Le «Coniche» di APOLLONIO et il probleinverso delle tangenti di TORRICELLI.
A r c h e i o n 12, 267.

1930.— L o r i a G., Come giunse a Firenze il manoscritto Arabo dei libri V - VII delle «Coniche» di APOLLONIO.
A r c h e i o n 12, 13.

1930.— M e t z n e r K. APOLLONIUS von Perge im Rahmen des grossen Jahrhunderts griechischer Mathematikern.
N e u e J a h r b ü c h. f. P e d o g. p. 474.

1931.— A g o s t i n i A. Notizie sul recupero dei libri V - VII delle «Coniche» di APOLLONIO.
P e r i o d. d i M a t h e m. (IV) II. 293.

1932.— W a h l g r e n A. Tre första böcker om Kägelsnitten.
Seelig, Stockholm.

1935.— Λ ο υ κ ᾶ ς, Κ ω ν σ τ α ν τ ῖ ν ο ς. Ὁ ἀριθμὸς καὶ ἡ ἀρίθμησις ἀνὰ τοὺς αἰῶνας, ἐν Ἀθήναις.

1936.— K r a u s e M. Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker: Griechische Autoren (Περὶ Λόγου Ἀποτομῆς).
Q u e l l e n u. S t u d. z. G e s c h. d. M a t h. B3, 437.

1936.— C o o l i d g e J. L. The Origin of Analytic Geometry.
O s i r i s I, 231.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1937.— Karpinski L. C. Is there Progres in mathematical Discovery and did the Greeks have Analytical Geometry ? Isis 27, 46.

1939.— Apollonius of Perga, Conics. Book I. Translated into english from the Greek by Rob. Cateby Taliaferro. Annapolis, Md.

1940.— Thaer Cl. Die Würfelverdoppelung des Apollonius. Deutsch. Mathem. 5, 241.

1952.— Beeston A. F. L. The Marsch manuscript of Apollonius' Conica (Arab. N° 667). The Bodleian Libr. Record.

1961.— Waerden, W. L. van der. Ὁ Ἀπολλώνιος ὡς μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος. Ἀθῆναι. Διάλεξις. (Τὸ ἀγγλικὸν κείμενον παρὰ τῇ Ἑλληνικῇ Μαθηματικῇ Ἑταιρείᾳ).

1961.— Bieberbach, Lundwig. Zum Apollonischen Berührungsproblem, in Praxis der Mathematik 3, S. 141/147.

1963.— Hofmann, Joseph E., Über ein extremwertproblem des Apollonios und seine Behandlung bei Fermat. Nova Acta Leopoldina N. F. Bd. 27, Nr. 127, Halle/Saale.

1963.— Huxley G. Friends and contemporaries of Apollonius. Greek Rom. and Byzant. Studies: 4, 100.

1963.— Idem. 1923 (Ver Eecke) Blanchard, Paris.

1963.— Huxley G. Studies in Greek Astronomy. Greek Rom. and Byzant. Studies; 4. 83.

1966.— Idem. (1886) (Zeuthen) Hidelscheim.

1967.— Idem. 1926 (Czwalina). Wissensch. Buchgesel. Darmstadt.

1967.— Huxley G. Okytokion. Greek Rom. and Byzant. Studies, 8, 203.

1968.— Coxeter H. S. M. The Problem of Apollonius. Amer. Math. Month. 75, 5.

1970.— Hofmann, Joseph E. Über Kreisquadrupel und Heronische Dreiecke. I Das allgemeine Apollonische Berührungsproblem. (Crelles) «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 239/40, S. 220 - 238.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

1971.— Loria, Gino. Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, κατὰ μετάφρασιν ἐκ τοῦ ἰταλικοῦ πρωτοτύπου ὑπὸ Μιχαὴλ Κ. Κωβαίου, Τόμος Α', σελ. 84.

('Ιταλικὸς τίτλος : Storia delle Matematiche I, Milano). Ἔκδοσις Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας. Πρόλογος συγγραφέως εἰς Α' τόμον, Γένοβα, 1928.

1972.— Περιστερόπουλος, Ἀναστάσιος. Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαφῶν. Ἀθῆναι.

1972.— Hofmann, Joseph E. Über antike Beispiele zur Extremwertbestimmung und ihr weiterwirken, in Der Mathematik Unterricht 2, S. 10.

1973.— Περιστερόπουλος, Ἀναστάσιος. Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαφῶν, βιβλίον II. Λύσις διὰ τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, Ἀθῆναι.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ

ΚΩΝΙΚΩΝ α΄

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι, μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ᾽ ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετὰ σοῦ ἐν Περγάμῳ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν· πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος, τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν· οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἴομαί σε παρ᾽ ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ᾽ ὃν καιρὸν ἐσχόλαζε παρ᾽ ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτὼ βιβλίοις ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτὰ εἰς τὸ σπουδαιότερον διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες ἀεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ συμβέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχότων ἡμῖν μετειληφέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσῃς, ἐὰν περιπίπτῃς αὐτοῖς ἑτέρως ἔ-
H4 χουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα τέσσαρα πέπτωκεν εἰς ἀγωγὴν στοιχειώδη, περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα, τὸ δὲ

ΚΩΝΙΚΩΝ

Βιβλίον 1ον

Ὁ Ἀπολλώνιος εὔχεται πρὸς τὸν Εὔδημον νὰ χαίρῃ.

Ἐὰν ὑγιαίνῃς καὶ κατὰ τὰ ἄλλα εἶσαι εὐχαριστημένος τοῦτο μὲ εὐχαριστεῖ, καὶ ἐγὼ δὲ εἶμαι ἀρκετὰ καλά. Ὅτε δὲ εἴμεθα μαζὶ εἰς τὴν Πέργαμον εἶδον ὅτι μὲ πολὺ ἐνδιαφέρον ἤθελες νὰ πληροφορηθῇς περὶ τῶν ἐρευνῶν μου ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν· ὡς ἐκ τούτου σοῦ ἔστειλα τὸ πρῶτον βιβλίον, ἀφοῦ τὸ διώρθωσα, τὰ δὲ ὑπόλοιπα θὰ σοῦ τὰ στείλω, ὅταν τὰ ἔχω ἱκανοποιητικῶς τελειώσει· νομίζω δέ, ὅτι θὰ ἐνθυμεῖσαι ὅτι εἶχες ἀκούσει ἀπὸ ἐμέ, ὅτι τὴν σχετικὴν ἔρευναν ἔκαμα κατὰ παρότρυνσιν τοῦ γεωμέτρου Ναυκράτους, ὅταν διέμενε μεταξύ μας εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, καὶ ὅτι διαπραγματευθεὶς τὰ κωνικὰ εἰς ὀκτὼ βιβλία τοῦ τὰ ἔδωκα χωρὶς νὰ τὰ διορθώσω, ἐπειδὴ ἐβιάζετο νὰ ἀποπλεύσῃ, καὶ τὰ εἶχα γράψει ὅπως τὰ συνέλαβα ἐκ πρώτης ὄψεως. Τώρα ὅμως τὰ ἐκδίδω, ἀφοῦ εἶχα τὸν καιρὸν νὰ τὰ διορθώσω. Καὶ ἐπειδὴ συνέβη, ὥστε καὶ ἄλλοι νὰ λάβωσι γνῶσιν τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου, χωρὶς νὰ τὰ ἔχω διορθώσει, νὰ μὴ ἀπορήσῃς ἐὰν τυχὸν εὕρῃς αὐτὰ κατ᾽ ἄλλην διατύπωσιν. Ἐκ τῶν ὀκτὼ δὲ βιβλίων τὰ τέσσαρα πρῶτα περιέχουσι τὰ στοιχεῖα τῶν κωνικῶν, περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν κωνικῶν τομῶν (παραβολή, ἔλλειψις, ὑπερβολὴ μὲ τὸν ἕνα κλάδον) καὶ τῶν ἀντικειμένων (ὑπερβολὴ μὲ τοὺς δύο κλάδους) καὶ τὰς στοιχειώδεις ἰδιότητας αὐτῶν ἐπεξειργασμένας λεπτομερέστερον καὶ γενικώτερον, τὸ δὲ δεύτερον τὰ συμβαίνοντα περὶ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους καὶ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα, ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπά ἐστι περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλέον, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν, τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἱρῆται. εὐτύχει.

H6 *Ὅροι πρῶτοι*

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὅς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ᾽ ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περιενεχθεῖσα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τοὺς προσδιορισμούς· ἀπὸ τὸ βιβλίον δὲ τοῦτο θὰ μάθῃς τὶ καλῶ διαμέτρους καὶ τὶ ἄξονας. Τὸ δὲ τρίτον βιβλίον περιέχει πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα διὰ τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ πλεῖστα καὶ ὡραιότερα εἶναι νέα, τὰ ὁποῖα ἀφοῦ τὰ ἀνεκαλύψαμεν διεπιστώσαμεν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης δὲν εἶχεν εὕρει τὴν κατασκευὴν τοῦ τόπου ἐπὶ τριῶν καὶ τεσσάρων εὐθειῶν, παρὰ μόνον ἓν τυχὸν μέρος αὐτῶν καὶ τοῦτο οὐχὶ ἐπιτυχῶς· διότι ἄνευ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα εὕρομεν ἡμεῖς, δὲν ἦτο δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ κατασκευή. Τὸ δὲ τέταρτον βιβλίον περιέχει, κατὰ πόσους τρόπους αἱ κωνικαὶ τομαὶ συμπίπτουσι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ ἀκόμη πολλά, ἐκ τῶν ὁποίων οὐδὲν πρὸ ἡμῶν εἶχε γραφῇ, δηλαδὴ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμπίπτουσι. Τὰ ἄλλα δὲ βιβλία εἶναι πλουσιώτερα· διότι τὸ μὲν ἐξ αὐτῶν (τὸ πέμπτον) περιέχει ἐπὶ πλέον τὰ περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων, τὸ δὲ (τὸ ἕκτον) περιέχει τὰ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κωνικῶν τομῶν, τὸ δὲ (ἕβδομον) τὰ θεωρήματα περὶ τῶν διορισμῶν, τὸ δὲ (ὄγδοον) τὰ περὶ ὡρισμένων κωνικῶν προβλημάτων. Ὅμως, ὅταν ὅλα ἔχωσιν ἐκδοθῇ εἴθε νὰ τύχωσιν τῆς δεούσης κρίσεως παρὰ τῶν ἀναγνωστῶν. Εὐτύχει.

Ὁρισμοὶ πρῶτοι

1. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα πρὸς τὴν περιφέρειαν κύκλου, ὁ ὁποῖος δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὸ σημεῖον καὶ προεκβληθῇ αὕτη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, καὶ ἐνῷ τὸ σημεῖον μένει σταθερὸν ἡ εὐθεῖα ἀφοῦ περιστραφῇ περὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀποκατασταθῇ πάλιν εἰς τὴν ἀρχικήν της

τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, κορυφὴν δὲ αὐτῆς τὸ μεμενηκὸς σημεῖον, ἄξονα δὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

κῶνον δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς τε κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή, ἄξονα δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν, βάσιν δὲ τὸν κύκλον.

τῶν δὲ κώνων ὀρθοὺς μὲν καλῶ τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας, σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, κορυφὴν δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

H8 ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων διάμετρον καλῶ πλαγίαν μέν, ἥτις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου, ὀρθίαν δέ, ἥτις κειμένη μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν δίχα τέμνει, τεταγμένως δὲ θέσιν, τὴν ἐπιφάνειαν τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν συνδεομένων πρὸς ἀλλήλας κατὰ τὴν κορυφήν, ἑκάστη τῶν ὁποίων αὐξάνεται πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν ἡ γράφουσα εὐθεῖα προεκβάλλεται ἐπ' ἄπειρον, τὴν καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, κορυφὴν δὲ τὸ σταθερὸν σημεῖον, ἄξονα δὲ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

2. Κῶνον δὲ καλῶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τοῦ κύκλου καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κορυφὴ τῆς ἐπιφανείας, ἄξονα δὲ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, βάσιν δὲ τὸν κύκλον.

3. Ἐκ τῶν κώνων δὲ ὀρθοὺς μὲν καλῶ, τοὺς ἔχοντας τοὺς ἄξονας καθέτους ἐπὶ τὰς βάσεις, σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ ἔχοντας τοὺς ἄξονας καθέτους ἐπὶ τὰς βάσεις.

4. Ὡς διάμετρον δὲ πάσης καμπύλης γραμμῆς εὑρισκομένης εἰς ἓν ἐπίπεδον καλῶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς διχοτομεῖ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, κορυφὴν δὲ τῆς διαμέτρου τὸ σημεῖον αὐτῆς τὸ κείμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης, ἑκάστην δὲ τῶν παραλλήλων τὴν ὀνομάζω τεταγμένην ἐπὶ τὴν διάμετρον.

5. Ὁμοίως δὲ καὶ ὅταν ὑπάρχωσι δύο καμπύλαι εἰς ἓν ἐπίπεδον καλῶ διάμετρον πλαγίαν μὲν (εὐθεῖαν), ἡ ὁποία τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς διχοτομεῖ ὅλας τὰς γραμμάς, αἱ ὁποῖαι εἰς ἑκάστην τῶν (καμπύλων) γραμμῶν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, κορυφὰς δὲ τῶν (καμπύλων) γραμμῶν τὰ ἐπὶ τούτων πέρατα τῆς διαμέτρου, ὀρθίαν δὲ διάμετρον καλῶ ἐκείνην, ἡ ὁποία κειμένη μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων διχοτομεῖ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν

ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους [δύο] καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, ὧν ἑκατέρα διάμετρος οὖσα τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

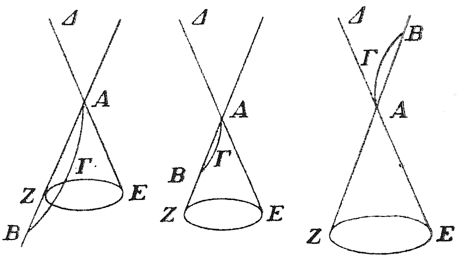
ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθεῖαν, ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς ἢ τῶν γραμμῶν πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους.

συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, αἵτινες διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους.

α′

Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσίν.

ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ



εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓΒ εὐθεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστίν.

H10 *εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστω, καὶ ἔστω ἡ γεγραφυῖα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ὁ δὲ κύκλος, καθ᾽ οὗ φέρεται ἡ ΕΔ, ὁ ΕΖ. ἐὰν δὴ μένοντος τοῦ Α σημείου ἡ ΔΕ εὐθεῖα φέρηται κατὰ τῆς τοῦ ΕΖ κύκλου περιφερείας, ἥξει καὶ* δύο καμπύλων, ἐνῷ ἑκάστη τῶν παραλλήλων ἔχει ταχθῆ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον.

6. Συζυγεῖς δὲ καλῶ δύο διαμέτρους καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, τῶν ὁποίων ἑκάστη διάμετρος οὖσα διχοτομεῖ τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην.

7. Ἄξονα δὲ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν καλῶ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς ἢ τῶν γραμμῶν τέμνει τὰς παραλλήλους καθέτως.

8. Συζυγεῖς δὲ καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, αἱ ὁποῖαι οὖσαι διάμετροι συζυγεῖς τέμνουσι τὰς παραλλήλους ἀλλήλων καθέτως.

1

Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Β, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓΒ. Λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓΒ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μὴ εὑρίσκεται, καὶ ἔστω ἡ γράψασα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ὁ δὲ κύκλος ἐπὶ τοῦ ὁποίου φέρεται ἡ ΕΔ, ὁ ΕΖ. Ἐὰν λοιπὸν μένοντος τοῦ σημείου Α σταθεροῦ ἡ εὐθεῖα ΔΕ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΕΖ, θὰ *διὰ τοῦ Β σημείου, καὶ ἔσται δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον.*

οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστί.

π ό ρ ι σ μ α

καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπί τι σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐὰν ἐπί τι τῶν ἐκτὸς ἐπιζευχθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας.

β′

Ἐὰν ἐφ᾽ ὁποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὴν κορυφήν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ᾽ οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐφ᾽ ὁποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ μὴ νευέτω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· πεσοῦν-
H12 *ται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ· ἔσται ἄρα ἡ ΒΓ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὥστε καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ΔΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ ἐκβεβλήσθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν ΒΓ εὐθεῖαν· τὸ γὰρ ΒΓΑ*

διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Β, καὶ θὰ ὑπάρχωσιν δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. (Εὐκλ. 1, κοιναὶ ἔννοιαι 9).

Ὄχι ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ἀγομένη εὐθεῖα δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· εἶναι ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Πόρισμα

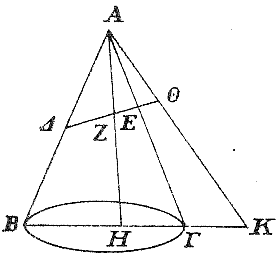
Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ σημεῖόν τι ἐκ τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας, θὰ πέσῃ αὕτη ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἂν ἀχθῇ ἐπὶ σημεῖόν τι ἐκ τῶν ἐκτός, θὰ εἶναι ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας.

2

Ἐὰν ἐφ' οἱασδήποτε ἐκ τῶν εἰς τὴν κορυφὴν συναντωμένων (κωνικῶν) ἐπιφανειῶν ληφθῶσι δύο σημεῖα καὶ ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα εὐθεῖα δὲν διευθύνεται πρὸς τὴν κορυφήν, αὕτη θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ προέκτασις αὐτῆς ἐπ' εὐθείας, θὰ πέσῃ ἐκτός.

Ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, ὁ δὲ κύκλος ἐπὶ τοῦ ὁποίου φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΓ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐφ' οἱασδήποτε τῶν εἰς τὴν κορυφὴν συναντωμένων ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἂς μὴ διευθύνεται πρὸς τὸ σημεῖον Α. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας (εἰς τὸ κοῖλον), ἡ δὲ προέκτασις αὐτῆς θὰ πέσῃ ἐκτός.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΑΔ καὶ ἂς προεκβληθῶσιν. Εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ πέσωσιν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (θ. 1). Ἔστω, ὅτι πίπτουσιν εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ. Ἡ ΒΓ ἄρα θὰ εἶναι ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὥστε θὰ εἶναι καὶ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΔΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΖ ἂς προεκβληθῇ. Αὕτη *τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· ὥστε καὶ τὸ Ζ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεῖα ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας· ἡ ἄρα ΔΕ ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.*



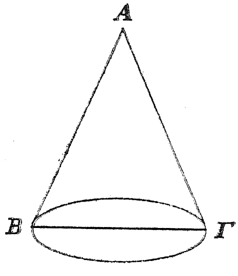
ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ. λέγω δή, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι αὐτῆς τὸ Θ μὴ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἢ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἢ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· πίπτει γὰρ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκβαλλομένην ὡς κατὰ τὸ Κ. ἡ ΕΘ ἄρα ἐκτός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

ἡ ἄρα ΔΕ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ᾿ εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

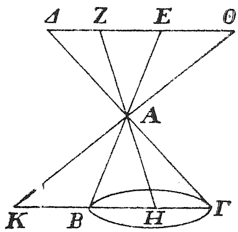
γʹ

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.

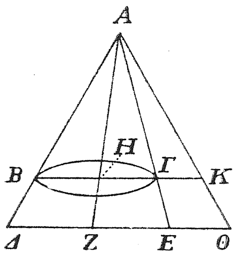
ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ Α σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς ΑΒ, ΑΓ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν ΒΓ εὐθεῖαν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν ἐστιν.



θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ· διότι τὸ τρίγωνον ΒΓΑ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Εὐκλ. 11, 2). Ἔστω, ὅτι τὴν συναντᾷ εἰς τὸ Η. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ Η εἶναι ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΗ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (θ. 1 πόρ.)· ὥστε καὶ τὸ Ζ εἶναι ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὅλα τὰ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεῖα εἶναι ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας.



Ἂς προεκβληθῇ τώρα ἡ ΔΕ μέχρι τοῦ Θ. Λέγω, ὅτι ἡ προεκβολὴ θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι τὸ Θ δὲν εἶναι ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΘ ἂς προεκβληθῇ· αὕτη θὰ πέσῃ ἢ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἢ ἐντὸς (θ. 1 καὶ πόρ.)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι πίπτει ἐπὶ τὴν προεκβολὴν τῆς ΒΓ, κατὰ τὸ Κ. Ἡ ΕΘ ἄρα εἶναι ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας.



Εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ προεκβολὴ αὐτῆς ἐκτός.

3

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τινὸς διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ εἶναι τρίγωνον.

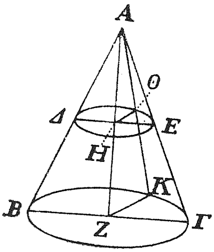
Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τινὸς διερχομένου διὰ τοῦ σημείου Α καὶ ἂς σχηματίζῃ ἐπὶ μὲν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὰς γραμμὰς ΑΒ, ΑΓ, εἰς δὲ τὴν βάσιν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον.

H14 ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομή ἐστι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ AB· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ $A\Gamma$. ἔστι δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ εὐθεῖα. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$.

ἐὰν ἄρα κῶνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.

δ′

Ἐὰν ὁποτεραοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ᾿ οὗ φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ κῶνος ἔσται.



ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ᾿ οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ $B\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ τῷ $B\Gamma$ κύκλῳ, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴν τὴν ΔE γραμμήν. λέγω, ὅτι ἡ ΔE γραμμὴ κύκλος ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἔχων τὸ κέντρον.

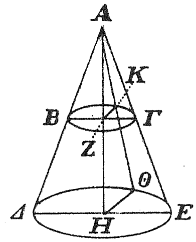
εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $B\Gamma$ κύκλου τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AZ. ἄξων ἄρα ἐστὶ καὶ συμβάλλει τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ H, καὶ ἐκβεβλήσθω τι διὰ τῆς AZ ἐπίπεδον. ἔσται δὴ ἡ τομὴ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$. καὶ

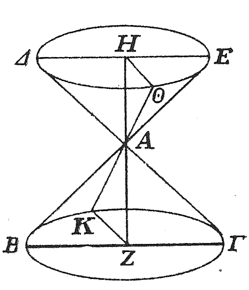
Διότι, ἐπειδὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Β ἀγομένη γραμμὴ εἶναι κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἡ ΑΒ ἄρα εἶναι εὐθεῖα· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΓ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΒΓ εὐθεῖα. Τὸ σχῆμα ἄρα ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον.

Ἐὰν ἄρα κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τινὸς διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ εἶναι τρίγωνον.

4

Ἐὰν οἱαδήποτε ἐκ τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν (τοῦ διπλοῦ κώνου) τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τινὸς παραλλήλου πρὸς τὸν κύκλον, πρὸς τὸν ὁποῖον φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα, τὸ μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας ἐναπολαμβανόμενον ἐπίπεδον θὰ εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας μέχρι τῆς κορυφῆς θὰ εἶναι κῶνος.





Ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, ὁ δὲ κύκλος ἐπὶ τοῦ ὁποίου φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ αὕτη δι' ἐπιπέδου τινὸς παραλλήλου πρὸς τὸν κύκλον ΒΓ, καὶ ἂς σχηματίζῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομὴν τὴν γραμμὴν ΔΕ. Λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΒΓ τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ. Εἶναι ἄρα αὕτη ἄξων καὶ συναντᾷ τὸ τέμνον ἐπίπεδον (ὁρισ. 1). Ἔστω, ὅτι τὸ συναντᾷ κατὰ τὸ Η καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΖ τυχὸν ἐπίπεδον. Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ

ἐπεὶ τὰ Δ, Η, Ε σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι
H16 δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗΕ· εἰλήφθω δή τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω. συμβαλεῖ δὴ τῇ ΒΓ περιφερείᾳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΖΚ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΔΕ, ΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ ΑΒΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΚΖ παράλληλος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΖΒ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΓ πρὸς ΗΕ καὶ ἡ ΖΚ πρὸς ΗΘ. καί εἰσιν αἱ τρεῖς αἱ ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Η σημείου πρὸς τὴν ΔΕ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ γραμμὴ τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

π ό ρ ι σ μ α α'

καὶ φανερόν, ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΔΕ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τῷ Α σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας κῶνός ἐστι.

π ό ρ ι σ μ α β'

καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου.

τομὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (θ. 3). Καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ, Η, Ε εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, εὑρίσκονται δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ εἶναι ἄρα ἡ ΔΗΕ εὐθεῖα (Εὐκλ. 11, 3). Ἂς ληφθῇ λοιπὸν σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς ΔΕ τὸ Θ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΑΘ ἂς προεκβληθῇ. Θὰ συναντήσῃ λοιπὸν τὴν περιφέρειαν ΒΓ. Ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΖΚ. Καὶ ἐπειδὴ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΔΕ, ΒΓ τέμνονται ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ, αἱ κοιναὶ τομαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι (Εὐκλ. 11, 16)· εἶναι ἄρα ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΖ. Εἶναι ἄρα ΖΑ : ΑΗ = ΖΒ: ΔΗ = ΖΓ: ΗΕ = ΖΚ : ΗΘ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ εἶναι ΒΖ = ΚΖ = ΖΓ· εἶναι ἄρα ΔΗ = ΗΘ = ΗΕ (Εὐκλ. 5, 9). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ὅλαι αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου Η πρὸς τὴν γραμμὴν ΔΕ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Ἡ γραμμὴ ἄρα ΔΕ εἶναι κύκλος ἔχων τὸ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Πόρισμα 1

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ κύκλου ΔΕ καὶ τῆς ὑπ' αὐτοῦ ἀπολαμβανομένης κωνικῆς ἐπιφανείας μέχρι τοῦ σημείου Α εἶναι κῶνος.

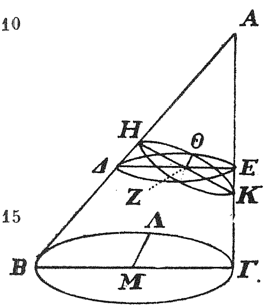
Πόρισμα 2

Καὶ ἔχει ἀποδειχθῇ συνάμα, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

ε′

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ
H18 κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, ἡ τομὴ κύκλος ἐστί, καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὴ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ τρίγωνον πρὸς τῷ Α σημείῳ τὸ ΑΚΗ ὅμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, τουτέστιν ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΚΗ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΗΘΚ γραμμήν. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμή.



εἰλήφθω γάρ τινα σημεῖαἐ πὶ τῶν ΗΘΚ, ΒΓ γραμμῶν τὰ Θ, Λ, καὶ ἀπὸ τῶν Θ, Λ σημείων ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων. πιπτέτωσαν ὡς αἱ ΖΘ, ΛΜ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΛΜ. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΖΕ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΛΜ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΖΘ, ΔΕ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. κύκλος ἄρα ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΔΕ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΒΓ, ἡ ὑπὸ ΑΔΕ

ΚΩΝΙΚΩΝ α'

5

Ἐὰν σκαληνὸς κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτως πρὸς τὴν βάσιν, τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου καθέτως μὲν πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος διερχόμενον τρίγωνον, ἐνῷ ἀφαιρεῖται πρὸς τὴν κορυφὴν τρίγωνον ὅμοιον μὲν πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον, κείμενον δὲ ἀντιθέτως (ὑπεναντίως), ἡ τομὴ εἶναι κύκλος, ἂς καλῆται δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία.

Ἔστω κῶνος σκαληνός, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καθέτου πρὸς τὸν κύκλον ΒΓ, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (θ. 3). Ἂς τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀφαιροῦντος πρὸς τὸ σημεῖον Α τρίγωνον τὸ ΑΚΗ, ὅμοιον μὲν πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, κείμενον δὲ ἀντιθέτως, δηλαδή, ὥστε ἡ γωνία ΑΚΗ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ. Καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν γραμμὴν ΗΘΚ. Λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΗΘΚ εἶναι κύκλος.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν γραμμῶν ΗΘΚ, ΒΓ σημεῖά τινα τὰ Θ, Λ, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων Θ, Λ ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· θὰ πέσωσι λοιπὸν αὗται ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων (Εὐκλ. 11 ὁρισ. 6). Ἂς πέσωσιν ὅπως αἱ ΖΘ, ΛΜ. Εἶναι ἄρα ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΛΜ (Εὐκλ. 11, 6). Ἂς ἀχθῇ δὲ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΔΖΕ· εἶναι δὲ καὶ ἡ ΖΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΛΜ. Τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὸ διερχόμενον διὰ τῶν ΖΘ, ΔΕ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου (Εὐκλ. 11, 15). Εἶναι ἄρα τοῦτο κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΔΕ (θ. 4). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΔΖ x ΖΕ = ΖΘ² (Εὐκλ. 6, 8). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΕ = γωνίαν ΑΒΓ (Εὐκλ.

γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΚΗ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΔΕ ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ ἴσαι [κατὰ κορυφήν]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΗ τρίγωνον τῷ ΚΖΕ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΚ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΖΔ
H20 *ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΖΗ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖΔ ἴσον ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΗΚ ἠγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΗΚ.*

κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, οὗ διάμετρος ἡ ΗΚ.

ϛʹ

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ᾿ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθείᾳ τινί, ἥ ἐστι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας τοῦ Μ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΜΝ. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΜΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ

1, 29). Ἡ δὲ γωνία ΑΚΗ ὑπετέθη ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ· καὶ ἡ γωνία ἄρα ΑΚΗ = γωνίαν ΑΔΕ. Εἶναι δὲ καὶ αἱ πρὸς τὸ σημεῖον Ζ γωνίαι ἴσαι [κατὰ κορυφὴν] (Εὐκλ. 1, 15). Εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΖΗ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΖΕ· εἶναι ἄρα ΕΖ: ΖΚ = ΗΖ:ΖΔ (Εὐκλ. 6, 4). Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΕΖ x ΖΔ = ὀρθογ. ΚΖ x ΖΗ (Εὐκλ. 6, 17). Ἀλλὰ ἐδείχθη τὸ ΕΖ x ΖΔ = ΖΘ²· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΚΖ x ΖΗ = ΖΘ² (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι α΄). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὅλαι αἱ κάθετοι αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ΗΘΚ ἐπὶ τὴν ΗΚ ἀχθεῖσαι σχηματίζουσι τετράγωνα ἴσα πρὸς τὰ ὀρθογώνια τῶν τμημάτων τῆς ΗΚ.

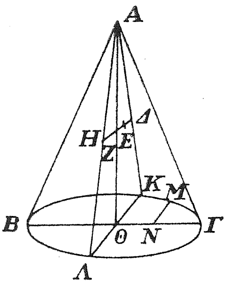
Εἶναι ἄρα ἡ τομὴ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΗΚ.

6

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς εὐθεῖάν τινα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, συναντήσῃ δὲ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον καὶ προεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς ἐπιφανείας, αὕτη θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ κοινὴν τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἀπό τινος σημείου Μ τῆς περιφερείας ΒΓ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΝ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἂς ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ ἡ ΔΕ. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ *ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τοῦ κώνου, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.*

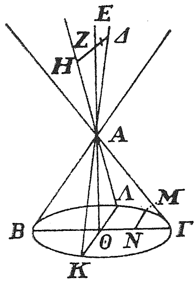
H22 *ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ περιφερείᾳ τοῦ ΒΓ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΜΝ· καὶ τῇ ΔΕ ἄρα. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΘΓ τῇ ΘΚ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΘ. ἡ δὲ ΑΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΕ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΑΘ συμπίπτει· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπ' εὐθείας, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ.*

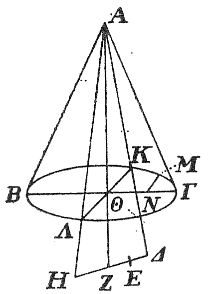


ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Η, Λ σημεῖα ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐστὶν ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΘ, ΑΚ, ΔΗ, ΚΛ ἐκβαλλομένῳ, ὅπερ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τρίγωνόν ἐστι, τὰ Α, Η, Λ ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριγώνου. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Λ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΛΚ τῇ ΚΘΛ βάσει παράλληλος ἦκται ἡ ΔΗ, καὶ διῆκταί τις ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖΘ, ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ. ἴση δὲ ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ, ἐπείπερ ἐν κύκλῳ τῷ ΒΓ κάθε-

τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ προεκτεινομένη πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κώνου, μέχρις ὅτου συναντήση τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, θὰ τμηθῆ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἂς ἀχθῆ ἡ ΑΔ καὶ ἂς προεκβληθῆ· θὰ συναντήση ἄρα τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΒΓ (θ. 1). Ἂς τὴν συναντήση κατὰ τὸ Κ καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἂς ἀχθῆ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΚΘΛ· θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΚΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ (Εὐκλ. 1, 28)· καὶ συνεπῶς καὶ πρὸς τὴν ΔΕ (Εὐκλ. 11, 9). Ἂς ἀχθῆ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΑΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΘΚ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΚ, ἡ ΔΕ ἄρα προεκβαλλομένη θὰ συναντήση τὴν ΑΘ (Εὐκλ. 6, 2). Ἡ δὲ ΑΘ εἶναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒΓ· θὰ συναντήση ἄρα ἡ ΔΕ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους θὰ συναντήση καὶ τὴν ΑΘ· ἂς τὴν συναντήση κατὰ τὸ Ζ καὶ ἂς προεκβληθῆ ἡ ΔΖ εὐθυγράμμως, μέχρις ὅτου συναντήση τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Ἂς τὴν συναντήση κατὰ τὸ Η. Λέγω, ὅτι ἡ ΔΖ = ΖΗ.





Διότι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Η, Λ εἶναι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐκβαλλόμενον διὰ τῶν ΑΘ, ΑΚ, ΔΗ, ΚΛ, τὸ ὁποῖον εἶναι τρίγωνον διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου (θ. 3), τὰ σημεῖα ἄρα Α, Η, Λ εἶναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τριγώνου. Ἡ γραμμὴ ἄρα ἡ διερχομένη διὰ τῶν Α, Η, Λ εἶναι εὐθεῖα. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΛΚ πρὸς τὴν βάσιν ΚΘΛ ἡ ΔΗ ἔχει ἀχθῆ παράλληλος, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἤχθη ἄλλη εὐθεῖα ἡ ΑΖΘ, εἶναι ὡς ΚΘ : ΘΛ = ΔΖ : ΖΗ (Εὐκλ. 6, 2). Εἶναι δὲ *τός ἐστιν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΚΛ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ.*

ζ'

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ H24 *βάσις τοῦ κώνου, κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ τριγώνου εὐθείᾳ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσοῦνται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ᾽ αὐτῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ αἰεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ᾽ ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.*

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ ΒΓ κύκλος, κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ ἤτοι πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ ἢ τῇ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ· κοινὴ δὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΖΗ. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ H26 *τῆς ΔΖΕ τομῆς τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλ-*

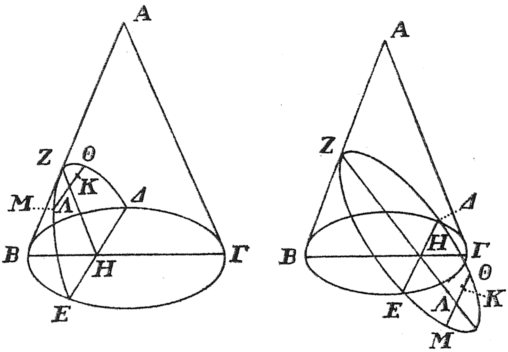
ΚΘ = ΘΛ, ἐπειδὴ εἰς τὸν κύκλον ΒΓ ἡ ΚΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον (Εὐκλ. 3, 3). Εἶναι ἄρα ΔΖ = ΖΗ.

7

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου, κατ' εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι κάθετος ἢ ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ ἐπὶ τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, τὴν ὁποίαν ἔκαμε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, αἵτινες εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου θὰ συναντήσωσι τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος διερχομένου τριγώνου καὶ ἐκβαλλόμεναι μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς θὰ τμηθῶσιν ὑπ' αὐτῆς εἰς τὸ μέσον, καὶ ἂν μὲν ὁ κῶνος εἶναι ὀρθός, ἡ εἰς τὴν βάσιν εὐθεῖα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον, ἐὰν δὲ εἶναι σκαληνός, δὲν θὰ εἶναι πάντοτε κάθετος, ἀλλὰ μόνον ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

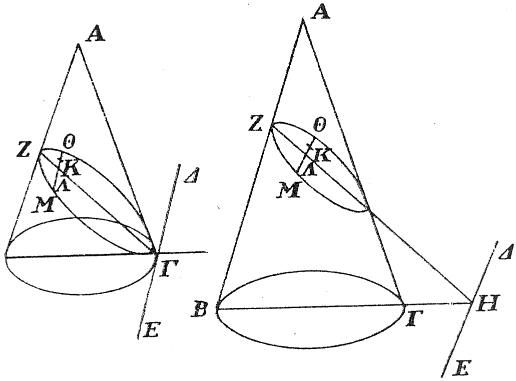
Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ κύκλος ΒΓ, κατὰ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ, ἡ ὁποία ἢ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἢ ἐπὶ τὴν προέκτασιν αὐτῆς, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ. Ἔστω δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΖΗ. Καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς ΔΖΕ τὸ Θ, καὶ ἂς ληλος ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΚ συμβαλεῖ τῇ ΖΗ καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τὸ Θ, καὶ ἔστι κάθετος ἡ ΔΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΗ παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ ΘΚ, συμβαλεῖ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ καὶ ἔστιν ἐν τῷ διὰ τῆς ΔΖΕ τομῆς ἐπιπέδῳ, ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομή ἐστι τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΗ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΖΗ· καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.



ἤτοι δὴ ὁ κῶνος ὀρθός ἐστιν, ἢ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίἀχθῇ διὰ τοῦ Θ ἡ ΘΚ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ. Λέγω, ὅτι ἡ ΘΚ θὰ συναντήσῃ τὴν ΖΗ καὶ προεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς ΔΖΕ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΖΗ.

Διότι, ἐπειδὴ ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, ἔχει τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ σχηματίζει τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχει ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ Θ, καὶ ἡ ΔΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ διὰ τοῦ Θ ἄρα ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΔΗ, τουτέστιν ἡ ΘΚ, θὰ συναντήσῃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ προεκβαλλομένη μέχρι



τοῦ ἄλλου μέρους τῆς ἐπιφανείας θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τοῦ τριγώνου (θ. 6). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ διὰ τοῦ Θ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ συναντᾷ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εἶναι εἰς τὸ διὰ τῆς ΔΖΕ τομῆς ἐπίπεδον, θὰ συναντήσῃ ἄρα τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων εἶναι ἡ ΖΗ· ἡ διὰ τοῦ Θ ἄρα ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ θὰ συναντήσῃ τὴν ΖΗ· καὶ προεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς ΔΖΕ θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς εὐθείας ΖΗ.

Τώρα, ἢ ὁ κῶνος εἶναι ὀρθός, ἢ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον

γωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ἢ οὐδέτερον.

ἔστω πρότερον ὁ κῶνος ὀρθός· εἴη ἂν οὖν καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΒΓ ὀρθόν ἐστι, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΓ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν
H28 *τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὀρθή ἐστιν. ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς.*

μὴ ἔστω δὴ ὁ κῶνος ὀρθός. εἰ μὲν οὖν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς. μὴ ἔστω δὴ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔστι δὲ καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθάς· ἡ ἄρα ΔΕ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς. καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐπιπέδῳ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΓ, ΗΖ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ΑΒΓ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΔΕ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΒΓ κύκλος· ὁ ΒΓ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν ἔσται πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστι πρὸς ὀρθάς.

π ό ρ ι σ μ α

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς ΔΖΕ τομῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΗ, ἐπείπερ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθεία τὸ ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΓ, ἢ δὲν συμβαίνει τίποτε ἐκ τῶν δύο.

Ἔστω πρῶτον ὁ κῶνος ὀρθός· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΓ (ὁρισ. 3, Εὐκλ. 11, 18). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ καὶ εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ εἰς ἓν τῶν ἐπιπέδων τὸ ΒΓ ἔχει ἀχθῇ κάθετος ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας συναντᾷ, τὰς εὑρισκομένας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ὥστε εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΖΗ.

Ἔστω τώρα ὁ κῶνος μὴ ὀρθός. Ἐὰν μὲν λοιπὸν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΓ, ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ. Ἀλλὰ ἂς μὴ εἶναι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΓ. Λέγω, ὅτι οὔτε ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι εἶναι· εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι ἐφ' ἑκάστην τῶν ΒΓ, ΖΗ κάθετος. Θὰ εἶναι ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐπίπεδον (Εὐκλ. 11, 4). Τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΓ, ΗΖ ἐπίπεδον εἶναι τὸ ΑΒΓ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Καὶ ὅλα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Εὐκλ. 11, 18). Ἓν δὲ ἐκ τῶν διὰ τῆς ΔΕ ἐπιπέδων εἶναι ὁ κύκλος ΒΓ· ὁ κύκλος ἄρα ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι κάθετον εἰς τὸν κύκλον ΒΓ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίθετον τῆς ὑποθέσεως. Ἡ ΔΕ ἄρα δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου λοιπὸν εἶναι φανερόν, ὅτι τῆς τομῆς ΔΖΕ διάμετρος εἶναι ἡ ΖΗ, ἐπειδὴ τὰς ἀγομένας παραλλήλους πρὸς εὐ-

τινὶ τῇ ΔΕ δίχα τέμνει, καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ΖΗ παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς.

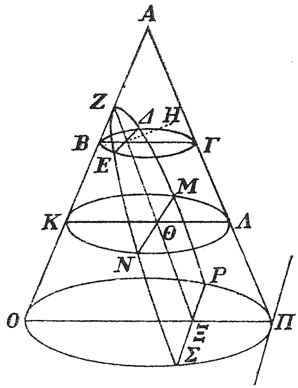
η′

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ H30 *εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς ἤτοι παρὰ μίαν ᾖ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἢ συμπίπτῃ αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, προσεκβάλληται δὲ ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παρὰ τὴν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθεῖαν.*

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸν ΒΓ κύκλον κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΖΕ γραμμήν· ἡ δὲ διάμετρος τῆς ΔΖΕ τομῆς ἡ ΖΗ ἤτοι παράλληλος ἔστω τῇ ΑΓ ἢ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου. λέγω, ὅτι καί, ἐὰν ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκβάλληται εἰς θεῖάν τινα τὴν ΔΕ τέμνει εἰς τὸ μέσον, καὶ ὅτι εἶναι δυνατὸν παράλληλοί τινες νὰ τέμνωνται ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΖΗ εἰς τὸ μέσον καὶ ὄχι καθέτως.

8

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν κάθετον οὖσαν ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομῆς ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἢ συμπίπτῃ πρὸς αὐτὴν ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, προεκβάλληται δὲ ἐπ' ἄπειρον καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, θὰ αὐξηθῇ ἐπ' ἄπειρον καὶ ἡ τομή, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς μέχρι τῆς κορυφῆς εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς πᾶσαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀγομένη ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος πρὸς τὴν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου εὐθεῖαν.



Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν ἔστω τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἂς τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὸν κύκλον ΒΓ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ οὖσαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν γραμμὴν ΔΖΕ· ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ΔΖΕ, ἡ ΖΗ, ἢ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἢ ἐκβαλλομένη νὰ συναντήσῃ αὐτὴν ἐκτὸς τοῦ σημείου Α. Λέγω, ὅτι καί, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκ-

ἄπειρον, καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· φανερὸν δή, ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ συνεκβληθήσονται. ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ ἤτοι παράλληλός ἐστιν ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου, αἱ ΖΗ, ΑΓ ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Η μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον
H32 *ἐπὶ τῆς ΖΗ τυχὸν τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΘΛ, τῇ δὲ ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ. κύκλος ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Ε, Μ, Ν σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς ἐστιν· ηὔξηται ἄρα ἡ ΔΖΕ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων· αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ ΚΛΜΝ κύκλου ηὔξηται καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καί, ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ ΜΔΖΕΝ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται.*

καὶ φανερόν, ὅτι πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις ἀπὸ τῆς ΖΘ εὐθείας πρὸς τῷ Ζ σημείῳ. ἐὰν γὰρ τῇ δοθείσῃ ἴσην θῶμεν τὴν ΖΞ καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΕ παράλληλον ἀγάγωμεν, συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ὥσπερ καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ ἀπεδείχθη συμπίπτουσα τῇ τομῇ κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα· ὥστε ἄγεταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ τομῇ παράλληλος οὖσα τῇ ΔΕ ἀπολαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ΖΗ εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ.

βάλλωνται ἐπ᾽ ἄπειρον, καὶ ἡ τομὴ ΔΖΕ θὰ αὐξηθῇ ἐπ᾽ ἄπειρον.

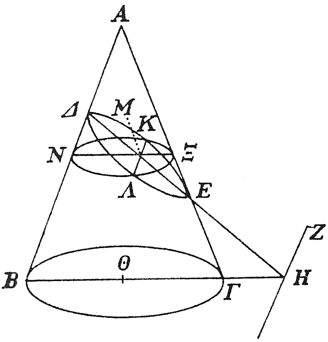
Διότι ἂς ἐκβληθῇ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· εἶναι φανερὸν λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ θὰ ἐκβληθῶσιν ἐπίσης. Ἐπειδὴ ἡ ΖΗ ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει πρὸς αὐτὴν ἐκτὸς τοῦ σημείου Α, αἱ ΖΗ, ΑΓ ἄρα ἐκβαλλόμεναι πέραν τῶν μερῶν Γ, Η οὐδέποτε θὰ συναντηθῶσιν. Ἂς προεκβληθῶσι λοιπόν, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖόν τι τὸ Θ ἐπὶ τῆς ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Θ πρὸς μὲν τὴν ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΚΘΛ, πρὸς δὲ τὴν ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὸ διερχόμενον διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διερχόμενον διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ (Εὐκλ. 11, 15). Τὸ ἐπίπεδον ἄρα ΚΛΜΝ εἶναι κύκλος (θ. 4). Καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Μ, Ν εἶναι εἰς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, εἶναι δὲ καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, εἶναι ἄρα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς· ἔχει αὐξηθῆ ἄρα καὶ ἡ γραμμὴ ΔΖΕ μέχρι τῶν σημείων Μ, Ν. Αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ κύκλου ΚΛΜΝ αὐξάνεται καὶ ἡ τομὴ ΔΖΕ μέχρι τῶν σημείων Μ, Ν. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καί, ἐὰν ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκβάλληται καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ τομὴ ΜΔΖΕΝ θὰ αὐξάνεται ἐπ᾽ ἄπειρον.

Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι πρὸς πᾶσαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἶναι δυνατὸν νὰ λαμβάνηται ἴση εὐθεῖα ἀπὸ τῆς ΖΘ μέχρι τοῦ σημείου Ζ. Διότι, ἐὰν πρὸς τὴν δοθεῖσαν θέσωμεν ἴσην τὴν ΖΞ καὶ διὰ τοῦ Ξ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, θὰ συνατήσῃ αὕτη τὴν τομήν, ὅπως ἀπεδείχθη, ὅτι καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ συναντᾷ τὴν τομὴν κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν· ὥστε ἄγεται εὐθεῖά τις συναντῶσα τὴν τομὴν παράλληλος οὖσα πρὸς τὴν ΔΕ, ἀπολαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ΖΗ εὐθεῖαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, μέχρι τοῦ σημείου Ζ.

θ′

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἠγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ *Α* σημεῖον, βάσις δὲ
H34 ὁ *ΒΓ* κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μήτε παραλλήλῳ ὄντι τῇ βάσει μήτε ὑπεναντίως, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν *ΔΚΕ* γραμμήν. λέγω, ὅτι ἡ *ΔΚΕ* γραμμὴ οὐκ ἔσται κύκλος.



εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, καὶ συμπιπτέτω τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῇ βάσει, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ *ΖΗ*, τὸ δὲ κέντρον τοῦ *ΒΓ* κύκλου ἔστω τὸ *Θ*, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν *ΖΗ* ἡ *ΘΗ*, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς *ΗΘ* καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον καὶ ποιείτω τομὰς ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τὰς *ΒΑ*, *ΑΓ* εὐθείας. ἐπεὶ οὖν τὰ *Δ*, *Ε*, *Η* σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τῆς *ΔΚΕ* ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν *Α*, *Β*, *Γ*, τὰ ἄρα *Δ*, *Ε*, *Η* σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ *ΗΕΔ*. εἰλήφθω δή τι ἐπὶ τῆς *ΔΚΕ* γραμμῆς σημεῖον τὸ *Κ*, καὶ διὰ τοῦ *Κ* τῇ *ΖΗ* παράλληλος ἤχθω ἡ *ΚΛ*· ἔσται δὴ ἴση ἡ *ΚΜ* τῇ *ΜΛ*. ἡ ἄρα *ΔΕ* διάμετρός ἐστι τοῦ *ΔΚΛΕ* κύκλου. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ *Μ* τῇ *ΒΓ* παράλληλος ἡ *ΝΜΞ*· ἔστι δὲ καὶ ἡ *ΚΛ* τῇ *ΖΗ* παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν *ΝΞ*, *ΚΜ* ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν *ΒΓ*, *ΖΗ*, τουτέστι τῇ

9

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου συναντῶντος ἑκάστην πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, νὰ μὴ εἶναι δὲ τοῦτο παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου οὔτε ἠγμένον ὑπεναντίως (ἀντιθέτως, ὡς εἰς τὸ θ. 5), ἡ τομὴ δὲν θὰ εἶναι κύκλος.

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου τινός, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν οὔτε ἀντιθέτως, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν γραμμὴν ΔΚΕ. Λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΚΕ δὲν εἶναι κύκλος.

Διότι, ἔστω ὅτι εἶναι, εἰ δυνατόν, καὶ ἂς συναντήσῃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὴν βάσιν, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΗ, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου ΒΓ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΗ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ διὰ τῆς ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὰς εἰς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν τὰς εὐθείας ΒΑ, ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Η εἶναι καὶ εἰς τὸ διὰ τῆς ΔΚΕ ἐπίπεδον, εἶναι δὲ καὶ εἰς τὸ διὰ τῶν Α, Β, Γ, τὰ σημεῖα ἄρα Δ, Ε, Η εἶναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων· εἶναι ἄρα εὐθεῖα ἡ ΗΕΔ (Εὐκλ. 11, 3). Ἂς ληφθῇ λοιπὸν ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΔΚΕ σημεῖον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ ἡ ΚΛ· θὰ εἶναι λοιπὸν ΚΜ = ΜΛ (θ. 7). Ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΔΚΛΕ (θ. 7 πόρ.). Ἂς ἀχθῇ τώρα διὰ τοῦ Μ πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΜΞ· εἶναι δὲ καὶ ἡ ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ· ὥστε τὸ διὰ τῶν ΝΞ, ΚΜ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ, τουτέστι πρὸς τὴν βάσιν (Εὐκλ. 11, 15), καὶ θὰ *βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ ΝΚΞ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΗ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΝΞ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΜΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ· κύκλος γὰρ ὑπόκειται ἡ ΔΚΕΛ γραμμή, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΔΕ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΜΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΜΔ, οὕτως ἡ ΕΜ πρὸς ΜΞ. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον τῷ ΞΜΕ τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ* H36 *ΔΝΜ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΕΞ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· παράλληλος γὰρ ἡ ΝΞ τῇ ΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΕΞ. ὑπεναντία ἄρα ἐστὶν ἡ τομή· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΔΚΕ γραμμή.*

ι´

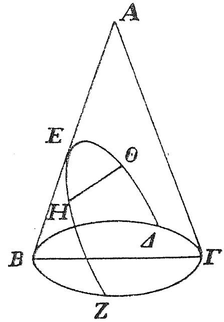
Ἐὰν ἐπὶ κώνου τομῆς ληφθῇ δύο σημεῖα, ἡ μὲν ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὴ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ γραμμήν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΕΖ δύο σημεῖα τὰ Η, Θ. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς ΔΕΖ γραμμῆς, ἡ δὲ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, εἴληπται δέ τινα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ Η, Θ, ἃ μή εἶναι ἡ τομὴ κύκλος (θ. 4). Ἔστω, ὅτι εἶναι ὁ ΝΚΞ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΗ, εἶναι καὶ ἡ ΚΜ κάθετος ἐπὶ τὴν ΝΞ (Εὐκλ. 11, 10)· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΝΜ x ΜΞ $=$ ΚΜ^2. Εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΔΜ x ΜΕ $=$ ΚΜ^2· διότι ἡ γραμμὴ ΔΚΕΛ ὑπετέθη κύκλος, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΔΕ. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΝΜ x ΜΞ $=$ ὀρθογ. ΔΜ x ΜΕ. Εἶναι ἄρα ὡς ΜΝ:ΜΔ $=$ ΕΜ : ΜΞ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΔΜΝ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΞΜΕ, καὶ ἡ γωνία ΔΝΜ $=$γων. ΜΕΞ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΝΜ $=$γων. ΑΒΓ· διότι ἡ ΝΞ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓ $=$ΜΕΞ. Εἶναι ἄρα ἡ τομὴ ἀντίθετος (ὑπεναντία) (θ. 5)· τὸ ὁποῖον δὲν ὑπετέθη. Δὲν εἶναι ἄρα ἡ γραμμὴ ΔΚΕ κύκλος.

10

Ἐὰν ἐπὶ τομῆς κώνου ληφθῶσι δύο σημεῖα, ἡ μὲν ἑνοῦσα τὰ σημεῖα εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς τομῆς, ἡ δὲ προέκτασις αὐτῆς θὰ πέσῃ ἐκτός.



Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂς τμηθῇ τώρα καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου γραμμὴν ΔΕΖ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπὶ τῆς ΔΕΖ δύο σημεῖα τὰ Η, Θ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἑνοῦσα τὰ σημεῖα Η, Θ εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γραμμῆς ΔΕΖ, ἡ δὲ προέκτασις αὐτῆς θὰ πέσῃ ἐκτός.

Διότι, ἐπειδὴ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, ἔχει τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, ἐλήφθησαν δὲ σημεῖά τινα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὸ Α, ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κώνου καὶ ἡ ἐπ᾿ εὐθείᾳ αὐτῇ ἐκτός· ὥστε καὶ τῆς ΔΖΕ τομῆς.

ια'

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ
H38 καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾿ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾿ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ π α ρ α β ο λ ή.

ἔστω κῶνος, οὗ τὸ Α σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾿ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ παράλ-

Η, Θ, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η εἰς τὸ Θ ἀγομένη εὐθεῖα δὲν διευθύνεται πρὸς τὸ Α, ἡ ἑνοῦσα ἄρα τὰ σημεῖα Η, Θ εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κώνου καὶ ἡ προέκτασις αὐτῆς θὰ πέσῃ ἐκτὸς (θ. 2)· ὥστε ἡ προέκτασις θὰ πέσῃ ἐκτὸς καὶ τῆς τομῆς ΔΖΕ.

11

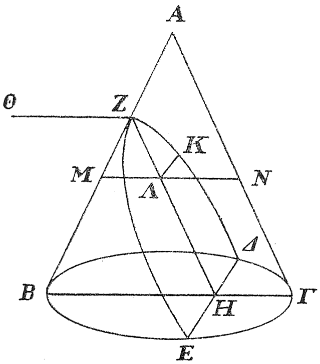
Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, προσέτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παραλλήλως πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις (τῆς ἀγομένης εὐθείας) ἀπὸ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ἡ ἄλλη δὲ πλευρὰ ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου· ἂς καλῆται δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ π α ρ α β ο λ ή.

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂς τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ οὖσαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ *ληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΖΗ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΚΛ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.*

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΜΝ· ἔστι
H40 *δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καὶ ἔστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΑ, τουτέστιν ἡ ΜΛ πρὸς ΛΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΛΝ πρὸς ΖΑ ὁ τοῦ ὑπὸ ΜΛΝ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς ἄρα ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τῆς ΖΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ*

ΖΗ ἔστω παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τὴν ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΖΗ κάθετος ἡ ΖΘ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς $ΒΓ^2 : ΒΑ \times ΑΓ = ΖΘ : ΖΑ$, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΔΕ παράλληλος ἡ ΚΛ. Λέγω, ὅτι $ΚΛ^2 = ΘΖ \times ΖΛ$.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Λ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἡ ΜΝ· εἶναι δὲ καὶ ἡ ΚΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὸ διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπίπεδον, τουτέστι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου (Εὐκλ. 11, 15). Τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὸ διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΜΝ (θ. 4). Καὶ ἡ ΚΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΜΛ \times ΛΝ = ΚΛ^2$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΒΓ^2 : ΒΑ \times ΑΓ = ΘΖ : ΖΑ$, καὶ εἶναι $ΒΓ^2 : ΒΑ \times ΑΓ = (ΒΓ : ΓΑ) \times (ΒΓ : ΒΑ)$, θὰ εἶναι ἄρα $ΘΖ : ΖΑ = (ΒΓ : ΓΑ) \times (ΓΒ : ΒΑ)$. Ἀλλὰ $ΒΓ : ΓΑ = ΜΝ : ΝΑ = ΜΛ : ΛΖ$ (Εὐκλ. 6, 4) καὶ $ΒΓ : ΒΑ = ΜΝ : ΜΑ = ΛΜ : ΜΖ$ (Εὐκλ. 6, 4) $= ΝΛ : ΖΑ$ (Εὐκλ. 6, 2). Εἶναι ἄρα $ΘΖ : ΖΑ = (ΜΛ : ΛΖ) \times (ΝΛ : ΖΑ)$. Εἶναι δὲ $(ΜΛ : ΛΖ) \times (ΛΝ : ΖΑ) = ΜΛ \times ΛΝ : ΛΖ \times ΖΑ$. Εἶναι ἄρα $ΘΖ : ΖΑ = ΜΛ \times ΛΝ : ΛΖ \times ΖΑ$. Ὡς δὲ $ΘΖ : ΖΑ$, τῆς ΖΛ λαμβανομένης κοινοῦ ὕψους, $= ΘΖ \times ΖΛ : ΛΖ \times ΖΑ$· ὡς ἄρα $ΜΛ \times ΛΝ : ΛΖ \times ΖΑ = ΘΖ \times ΖΛ : ΛΖ \times ΖΑ$. Εἶναι ἄρα $ΜΛ \times ΛΝ = ΘΖ$



ὑπὸ ΜΛΝ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. τὸ δὲ ὑπὸ ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

H42 καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ παραβολή, ἡ δὲ ΘΖ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΖΗ διάμετρον, καλείσθω δὲ καὶ ὀρθία.

ιβ′

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ᾽ εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑ π ε ρ β ο λ ή.

x ΖΛ (Εὐκλ. 5, 9). Τὸ δὲ ΜΛ x ΛΝ $=$ ΚΛ^2· εἶναι ἄρα καὶ ΚΛ$^2 =$ ΘΖ x ΖΛ.

Ἄς καλῆται δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ παραβολή, ἡ δὲ ΘΖ ἂς καλῆται ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ρυθμίζεται τὸ τετράγωνον τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένων, ἂς καλῆται δὲ καὶ ὀρθία (κάθετος, παράμετρος).

12

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι᾿ ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ δι᾿ ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾿ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συναντᾷ μίαν πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου· τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τῆς τομῆς παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς χωρίον παραβαλλόμενον πρὸς εὐθεῖάν τινα, πρὸς ἣν ἔχει λόγον ἡ ἐπ᾿ εὐθείας μὲν οὖσα πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς ἠγμένης εὐθείας ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παραλλήλως πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς μέχρι τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰ τμήματα τῆς βάσεως, τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τῆς ἀχθείσης εὐθείας, τὸ ἔχον πλάτος τὴν ὑπ᾿ αὐτῆς ἀπολαμβανομένην ἀπὸ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ὑποτείνουσαν τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου καὶ τὴν παράμετρον· ἂς καλῆται δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑ π ε ρ β ο λ ή.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ H44 ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ γραμμήν, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τῇ ΑΓ ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ τεμνέτω τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝ, διὰ δὲ τοῦ Ν τῇ ΖΛ παράλληλος ἡ ΝΟΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΛ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ τῇ ΖΝ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΛΟ, ΞΠ. λέγω, ὅτι ἡ ΜΝ δύναται τὸ ΖΞ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΛΞ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΡΝΣ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΡΝΣ. καὶ ἔστιν ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἡ ΜΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΡΝΣ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ H46 ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂς τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἑτέρου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν γραμμὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ ἐκβαλλομένη ἂς συναντᾷ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν ΑΓ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου κατὰ τὸ σημεῖον Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τὴν ΖΗ παράλληλος ἡ ΑΚ, καὶ ἂς τέμνῃ τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΖΛ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς $ΚΑ^2 : ΒΚ \times ΚΓ = ΖΘ : ΖΛ$, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΝ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Ν παράλληλος πρὸς τὴν ΖΛ ἡ ΝΟΞ, καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ ΘΛ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ ἂς ἀχθῶσι πρὸς τὴν ΖΝ παράλληλοι αἱ ΛΟ, ΞΠ. Λέγω, ὅτι τὸ $ΜΝ^2 =$ ὀρθογώνιον ΖΞ, τὸ ὁποῖον ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΛ, ἔχον πλάτος τὴν ΖΝ ὑπερβάλλον (δηλ. ὑπερέχον) κατὰ σχῆμα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΛΞ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΘΖ \times ΖΛ$ (Εὐκλ. 6, 29).

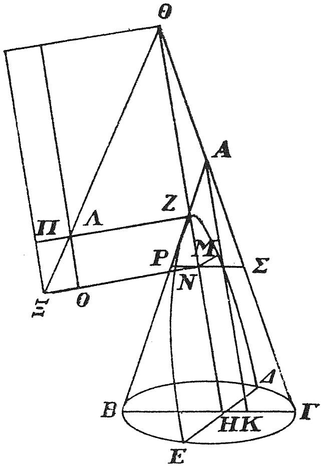
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ν πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΡΝΣ· εἶναι δὲ καὶ ἡ ΝΜ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὸ διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ, τουτέστι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου (Εὐκλ. 11, 15). Ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΡΝΣ (θ. 4). Καὶ εἶναι ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΜΝ· εἶναι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $ΡΝ \times ΝΣ = ΜΝ^2$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς $ΑΚ^2 : ΒΚ \times ΚΓ = ΖΘ : ΖΛ$, ὁ δὲ λόγος τοῦ $ΑΚ^2 : ΒΚ \times ΚΓ = (ΑΚ : ΚΓ) \times (ΑΚ : ΚΒ)$, καὶ ἄρα ΖΘ :

ΚΓ καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὁ τῆς ΖΘ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΣ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΖΝ πρὸς ΝΡ. ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΛ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ καὶ τοῦ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ καὶ τοῦ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ, τῆς ΖΝ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΝΞ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΣΝΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΞΝΖ. τὸ δὲ ἀπὸ ΜΝ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΣΝΡ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΞΝΖ ἐστι τὸ ΞΖ παραλληλόγραμμον. ἡ ἄρα ΜΝ δύναται τὸ ΞΖ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ ὑπερβάλλον τῷ ΛΞ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ. καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή, ἡ δὲ ΛΖ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΖΗ καταγόμεναι τεταγμένως· καλείσθω δὲ ἡ αὐτὴ καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ ΖΘ.

H48 *ιγ'*

᾽Εὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ κώ-

ΖΛ = (ΑΚ : ΚΓ) x (ΑΚ : ΚΒ). Ἀλλὰ ὡς ΑΚ : ΚΓ = ΘΗ : ΗΓ = ΘΝ : ΝΣ (Εὐκλ. 6, 4) καὶ ὡς ΑΚ : ΚΒ = ΖΗ : ΗΒ = ΖΝ : ΝΡ (Εὐκλ. 6, 4). Ὁ λόγος ἄρα ΘΖ : ΖΛ = (ΘΝ : ΝΣ) x (ΖΝ : ΝΡ). Ὁ δὲ λόγος (ΘΝ : ΝΣ) x (ΖΝ : ΝΡ) = ΘΝ x ΝΖ : ΣΝ x ΝΡ· καὶ ὡς ἄρα ΘΝ x ΝΖ : ΣΝ x ΝΡ = ΘΖ : ΖΛ = ΘΝ:ΝΞ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλὰ ὡς ΘΝ : ΝΞ, τῆς ΖΝ λαμβανομένης ὡς κοινοῦ ὕψους, = ΘΝ x ΝΖ : ΖΝ x ΝΞ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΝ x ΝΖ : ΣΝ x ΝΡ = ΘΝ x ΝΖ : ΞΝ x ΝΖ. Εἶναι ἄρα τὸ ΣΝxΝΡ = ΞΝ x ΝΖ (Εὐκλ. 5, 9). Ἐδείχθη δὲ τὸ $ΜΝ^2$ = ΣΝ x ΝΡ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΜΝ^2$ = ΞΝ x ΝΖ (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι α΄). Εἶναι δὲ τὸ ΞΝ x ΝΖ = τὸ παραλληλόγραμμον ΞΖ. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΜΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΞΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΖΛ ἔχον πλάτος τὴν ΖΝ, ὑπερβάλλον (ὑπερέχον) κατὰ τὸ σχῆμα ΛΞ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΘΖ x ΖΛ. Ἄς καλῆται δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή, ἡ δὲ ΛΖ, ἐκείνη παρὰ τὴν ὁποίαν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΖΗ καταγόμεναι τεταγμένως (παράμετρος)· ἄς καλῆται δὲ ἡ αὐτὴ (ἡ παράμετρος ΛΖ) καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ ΖΘ.



13

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου συναντῶντος μὲν ἑκατέραν πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τὸ ὁποῖον ὅμως νὰ μὴ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου οὔτε νὰ ἔχῃ ἀχθῇ ἀντιθέτως, τὸ νου ἠγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, τὸ δὲ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ᾽ ἣν δύνανται· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ἔ λ λ ε ι ψ ι ς.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ *Α* σημεῖον, βάσις δὲ ὁ *ΒΓ* κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ κώνου μήτε ὑπεναντίως ἠγμένῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπι-
H50 φανείᾳ τοῦ κώνου τὴν *ΔΕ* γραμμήν· κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔστω ἡ *ΖΗ* πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ *ΒΓ*, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ *ΕΔ*, καὶ ἀπὸ τοῦ *Ε* τῇ *ΕΔ* πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ *ΕΘ*, καὶ διὰ τοῦ *Α* τῇ *ΕΔ* παράλληλος ἤχθω ἡ *ΑΚ*, καὶ

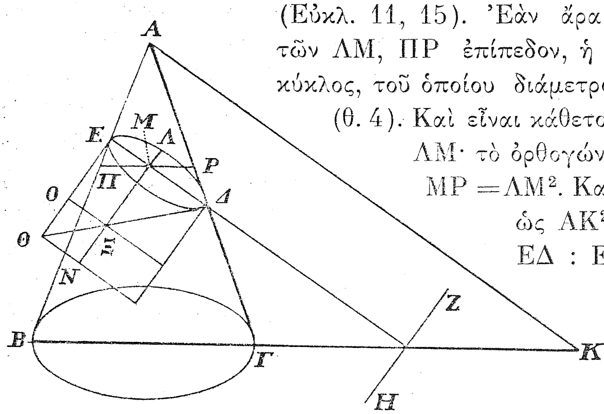
δὲ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον νὰ συναντῶνται κατ' εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ εἶναι κάθετος ἢ ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται παράλληλος ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς χωρίον, τὸ ὁποῖον ἔχει παραβληθῆ εἰς εὐθεῖάν τινα, πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἔχει ἀχθῆ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς μέχρι τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῆς μέχρι τῶν (ποδῶν) εὐθειῶν τοῦ τριγώνου, ἔχον πλάτος τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, τὸ ὁποῖον ἐλλείπει κατ' εἶδος (σχήματος) ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν διάμετρον καὶ τὴν παραβεβλημένην (τὴν παράμετρον)· ἂς καλῆται δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις.

Ἔστω κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῆ δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂς τμηθῆ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου συναντῶντος μὲν ἑκατέραν πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, νὰ μὴ εἶναι ὅμως παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου οὔτε νὰ ἔχῃ ἀχθῆ ἀντιθέτως, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τὴν γραμμὴν ΔΕ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔστω ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἂς ἀχθῆ ἐπὶ τὴν ΕΔ κάθετος ἡ ΕΘ, καὶ διὰ τοῦ Α πρὸς τὴν ΕΔ ἂς ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΑΚ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς τὸ $ΑΚ^2 : ΒΚ \times ΚΓ =$ ἡ $ΔΕ : ΕΘ$ καὶ ἂς *πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΛΜ δύναταί τι χωρίον, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΕΘ πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ.*

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΘ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΘΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΞΝ, διὰ δὲ τῶν Θ, Ξ τῇ ΕΜ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΝ, ΞΟ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΜΡ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΠΡ τῇ ΒΓ παράλληλός ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΖΗ παράλληλος, τὸ ἄρα διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΖΗ, ΒΓ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. καὶ ἔστι κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΠΜΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΘ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς
H52 *ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ ἄρα τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΜ πρὸς ΜΠ καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΞ. ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΞ, τῆς ΜΕ κοινοῦ*

ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς τὴν ΖΗ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΛΜ. Λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΛΜ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς χωρίον, τὸ ὁποῖον ἔχει παραβληθῇ παρὰ τὴν ΕΘ σχηματίζον πλάτος τὴν ΕΜ, ἐλλεῖπον σχῆμα κατὰ τὸ εἶδος ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΕ x ΕΘ.

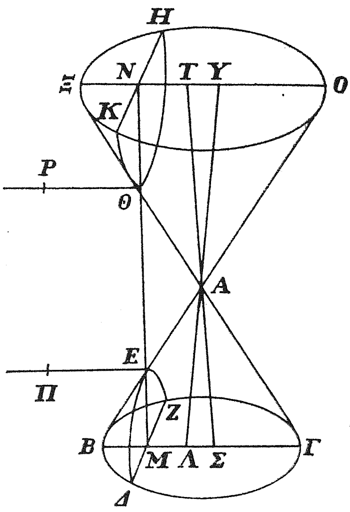
Διότι ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΘ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ πρὸς τὴν ΘΕ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΜΞΝ, διὰ δὲ τῶν Θ, Ξ πρὸς τὴν ΕΜ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι αἱ ΘΝ, ΞΟ, καὶ διὰ τοῦ Μ πρὸς τὴν ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΠΜΡ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΠΡ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, εἶναι δὲ καὶ ἡ ΛΜ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ, τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὸ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ διὰ τῶν ΖΗ, ΒΓ ἐπίπεδον, τουτέστι πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου



(Εὐκλ. 11, 15). Ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ θὰ εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ΠΡ (θ. 4). Καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΠΜ x ΜΡ $=$ ΛΜ^2. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΑΚ^2: ΒΚxΚΓ $=$ ΕΔ : ΕΘ, ὁ δὲ λόγος ΑΚ^2:ΒΚ xΚΓ$=$(ΑΚ: ΚΒ) x (ΑΚ: ΚΓ), ἀλλὰ ὡς μὲν ΑΚ : ΚΒ $=$ ΕΗ : ΗΒ $=$ ΕΜ : ΜΠ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ ΑΚ : ΚΓ $=$ΔΗ : ΗΓ $=$ΔΜ : ΜΡ, ὁ λόγος ἄρα ΔΕ : ΕΘ $=$ (ΕΜ: ΜΠ) x (ΔΜ : ΜΡ). Ὁ δὲ λόγος (ΕΜ : ΜΠ) x (ΔΜ : ΜΡ) $=$ ΕΜ x ΜΔ : ΠΜ x ΜΡ. Εἶναι ἄρα ὡς ΕΜ x ΜΔ $=$ ΠΜ xΜΡ $=$ ΔΕ : ΕΘ $=$ ΔΜ : ΜΞ (Εὐκλ. 6, 4). Ὡς δὲ ΔΜ : ΜΞ, τῆς ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΜΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΡ τῷ ὑπὸ ΞΜΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΠΜΡ ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· καὶ τὸ ὑπὸ ΞΜΕ ἄρα ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. ἡ ΛΜ ἄρα δύναται τὸ ΜΟ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΘΕ πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΟΝ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΔΕΘ. καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις, ἡ δὲ ΕΘ παρ’ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΕ τεταγμένως, ἡ δὲ αὐτὴ καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ ΕΔ.

ιδ′

Ἐὰν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, ἔσται ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ ἡ καλουμένη ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν ἥ τε διάμετρος ἡ αὐτὴ ἔσται, καὶ παρ’ ἃς δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθείᾳ ἴσαι, καὶ τοῦ εἴδους ἡ πλαγία πλευρὰ κοινὴ ἡ μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν· καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ ἀντικείμεναι.



H54 ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ τομῶν ἐστιν ἡ καλουμένη ὑπερβολή.

ΜΕ λαμβανομένης ὡς κοινοῦ ὕψους, $= ΔΜ \times ΜΕ : ΞΜ \times ΜΕ$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΔΜ \times ΜΕ : ΠΜ \times ΜΡ = ΔΜ \times ΜΕ : ΞΜ \times ΜΕ$. Εἶναι ἄρα τὸ $ΠΜ \times ΜΡ = ΞΜ \times ΜΕ$ (Εὐκλ. 5, 9). Ἐδείχθη δὲ ὅτι τὸ $ΠΜ \times ΜΡ = ΛΜ^2$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΞΜ \times ΜΕ = ΛΜ^2$. Τὸ τετράγωνον ἄρα τῆς ΛΜ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΜΟ, τὸ ὁποῖον ἔχει παραβληθῆ παρὰ τὴν ΘΕ, ἔχον πλάτος τὴν ΕΜ ἐλλεῖπον σχῆμα κατὰ τὸ εἶδος τὸ ΟΝ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $ΔΕ \times ΕΘ$. Ἂς καλῆται δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις, ἡ δὲ ΕΘ, ἂς καλῆται ἐκείνη καθ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΕ τεταγμένως (παράμετρος), ἡ ἰδία δὲ (ἡ παράμετρος ΕΘ) ἂς καλῆται καὶ ὀρθία, ἡ ΕΔ δὲ ἂς καλῆται πλαγία.

14

Ἐὰν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι τμηθῶσι δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς, θὰ ὑπάρχη εἰς ἑκατέραν τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ ἡ καλουμένη ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ διάμετρος καὶ αἱ δύο παράμετροι θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου (τὴν τομὴν εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἐκ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου) καὶ τοῦ σχήματος ἡ πλαγία πλευρὰ θὰ εἶναι κοινή, δηλ. ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν· ἂς καλοῦνται δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ (οἱ δύο κλάδοι τῆς ὑπερβολῆς) ἀντικείμεναι.

Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι, τῶν ὁποίων κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Α καὶ ἂς τμηθῶσι δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ἂς σχηματίζη τὸ ἐπίπεδον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν τομῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ εἶναι ἡ καλουμένη ὑπερβολή.

ἔστω γὰρ ὁ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἤχθω ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείᾳ παράλληλον αὐτῷ ἐπίπεδον τὸ ΞΗΟΚ· κοιναὶ δὲ τομαὶ τῶν ΗΘΚ, ΖΕΔ τομῶν καὶ τῶν κύκλων αἱ ΖΔ, ΗΚ· ἔσονται δὴ παράλληλοι. ἄξων δὲ ἔστω τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ΛΑΥ εὐθεῖα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΔ κάθετος ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διὰ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ποιήσει δὴ τομὰς ἐν μὲν τοῖς κύκλοις παραλλήλους εὐθείας τὰς ΞΟ, ΒΓ, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑΟ, ΓΑΞ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΗΚ πρὸς ὀρθάς, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ ἔστιν ἑκατέρα παράλληλος. καὶ ἐπεὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ταῖς τομαῖς συμβάλλει κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα ἐντὸς τῶν γραμμῶν, δῆλον ὡς καὶ τὰς γραμμὰς τέμνει τὸ ἐπίπεδον. τεμνέτω κατὰ τὰ Θ, Ε· τὰ ἄρα Μ, Ε, Θ, Ν σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τοῦ ἄξονός ἐστιν ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ εἰσιν αἱ γραμμαί· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΕΘΝ γραμμή. καὶ φανερόν, ὅτι τά τε Ξ, Θ, Α, Γ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ καὶ τὰ Β, Ε, Α, Ο· ἔν τε γὰρ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἐν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ. ἤχθωσαν
H56 δὴ ἀπὸ μὲν τῶν Θ, Ε τῇ ΘΕ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΘΡ, ΕΠ, διὰ δὲ τοῦ Α τῇ ΜΕΘΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΣΑΤ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΤΞ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἐπεὶ οὖν κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ πεποίηκε τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΜΖ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ πεποίηκε τομὴν ἐν

Διότι ἔστω ὁ κύκλος περὶ τὸν ὁποῖον φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαν παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς αὐτόν, τὸ ΞΗΟΚ· κοιναὶ τομαὶ τῶν τομῶν ΗΘΚ, ΖΕΔ καὶ τῶν κύκλων εἶναι αἱ ΖΔ, ΗΚ (θ. 4)· θὰ εἶναι δὲ αὗται παράλληλοι (Εὐκλ. 11, 16). Ἔστω δὲ ἄξων τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ΛΑΥ εὐθεῖα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ, ἀφοῦ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΔ ἂς ἐκβληθῇ μέχρι τῶν σημείων Β, Γ, καὶ διὰ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἄξονος ἂς ἐκβληθῇ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ σχηματίσῃ τομάς, εἰς μὲν τοὺς κύκλους παραλλήλους εὐθείας τὰς ΞΟ, ΒΓ (Εὐκλ. 11, 16), εἰς δὲ τὴν ἐπιφάνειαν τὰς ΒΑΟ, ΓΑΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ ΞΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΚ, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΔ καὶ εἶναι ἑκατέρα παράλληλος (Εὐκλ. 11, 10). Καὶ ἐπειδὴ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον συναντᾷ τὰς τομὰς κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ν ἐντὸς τῶν γραμμῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τέμνει καὶ τὰς γραμμάς. Ἂς τέμνῃ αὐτὰς κατὰ τὰ Θ, Ε· τὰ σημεῖα ἄρα Μ, Ε, Θ, Ν εὑρίσκονται εἰς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον, ὅπου εὑρίσκονται αἱ γραμμαί· εἶναι ἄρα εὐθεῖα ἡ γραμμὴ ΜΕΘΝ (Εὐκλ. 11, 3). Καὶ εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Ξ, Θ, Α, Γ εἶναι ἐπ᾽ εὐθείας καὶ τὰ Β, Ε, Α, Ο· διότι ταῦτα εἶναι καὶ εἰς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν καὶ εἰς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον. Ἂς ἀχθῶσι λοιπὸν ἀπὸ μὲν τῶν Θ, Ε κάθετοι ἐπὶ τὴν ΘΕ αἱ ΘΡ, ΕΠ, διὰ δὲ τοῦ Α πρὸς τὴν ΜΕΘΝ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΣΑΤ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς $ΑΣ^2 : ΒΣ \times ΣΓ = ΘΕ : ΕΠ$, ὡς δὲ $ΑΤ^2 : ΟΤ \times ΤΞ = ΕΘ : ΘΡ$. Καὶ ἐπειδὴ κῶνος τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Α, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΒΓ, ἔχει τμηθῇ δι᾽ ἐπιπέδου διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἔχει σχηματίσει τομὴν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχει τμηθῇ δὲ καὶ δι᾽ ἄλλου ἐπιπέδου τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΜΖ, ἡ ὁποία εἶναι κά-

τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ, ἡ δὲ διάμετρος ἡ ΜΕ ἐκβαλλομένη συμπέπτωκε μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΕΜ παράλληλος ἦκται ἡ ΑΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΜ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΕΠ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΕΠ, ἡ μὲν ΔΕΖ ἄρα τομὴ ὑπερβολή ἐστιν, ἡ δὲ ΕΠ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΕΜ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΗΘΚ ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, ἡ δὲ ΘΡ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΘΝ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ.

λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΡ τῇ ΕΠ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΞΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΓ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΞ, καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ. ἀλλ' ὁ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΓ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΣ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ὁ δὲ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΞ μετὰ
H58 *τοῦ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΟ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ, ἡ ΘΕ πρὸς ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΘΡ.*

ιε'

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου ἀχθεῖσα εὐθεῖα τεταγμένως ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ διάμετρος πρός τινα εὐθεῖαν, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀ-

θετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ἔχει σχηματίσει τομὴν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ΔΕΖ, ἡ δὲ διάμετρος ΜΕ ἐκβληθεῖσα ἔχει συναντήσει μίαν πλευρὰν τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς τὴν ΕΜ ἔχει ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΑΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἔχει ἀχθῆ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΜ ἡ ΕΠ, καὶ εἶναι ὡς $ΑΣ^2 : ΒΣ \times ΣΓ = ΕΘ : ΕΠ$, ἡ μὲν τομὴ ἄρα ΔΕΖ εἶναι ὑπερβολή, ἡ δὲ ΕΠ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τὴν ὁποίαν πολλαπλασιαζόμεναι αἱ ἐπὶ τὴν ΕΜ καταγόμεναι τεταγμένως, δίδουσι ἰσοδύναμα τετράγωνα (ἡ παράμετρος), πλαγία δὲ τοῦ εἴδους (τοῦ σχήματος) πλευρὰ ἡ ΘΕ (θ. 12). Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΗΘΚ εἶναι ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΘΝ, ἡ δὲ ΘΡ εἶναι ἐκείνη ἐπὶ τὴν ὁποίαν πολλαπλασιαζόμεναι αἱ ἐπὶ τὴν ΘΝ καταγόμεναι τεταγμένως, δίδουσιν ἰσοδύναμα τετράγωνα (ἡ παράμετρος), πλαγία δὲ πλευρὰ τοῦ εἴδους ἡ ΘΕ.

Λέγω, ὅτι ἡ $ΘΡ = ΕΠ$. Διότι, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΞΟ, εἶναι ὡς ἡ $ΑΣ:ΣΓ = ΑΤ:ΤΞ$, καὶ ὡς ἡ $ΑΣ : ΣΒ = ΑΤ : ΤΟ$ (Εὐκλ. 6, 4). Ἀλλὰ $(ΑΣ : ΣΓ) \times (ΑΣ : ΣΒ) = ΑΣ^2 : ΒΣ \times ΣΓ$, καὶ $(ΑΤ : ΤΞ) \times (ΑΤ : ΤΟ) = ΑΤ^2 : ΞΤ \times ΤΟ$· εἶναι ἄρα ὡς $ΑΣ^2 : ΒΣ \times ΣΓ = ΑΤ^2 : ΞΤ \times ΤΟ$. Καὶ εἶναι ὡς μὲν $ΑΣ^2 : ΒΣ \times ΣΓ = ΘΕ : ΕΠ$, ὡς δὲ $ΑΤ^2 : ΞΤ \times ΤΟ = ΘΕ : ΘΡ$· καὶ ὡς ἄρα $ΘΕ : ΕΠ = ΕΘ : ΘΡ$ (Εὐκλ. κοιναὶ ἔννοιαι α΄). Εἶναι ἄρα $ΕΠ = ΘΡ$ (Εὐκλ. 5, 9).

15

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς διαμέτρου ἐλλείψεως, ἀφοῦ ἀχθῆ εὐθεῖα τεταγμένη, ἐκβληθῆ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη μέχρι τῆς τομῆς, καὶ γίνῃ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ διάμετρος πρός τινα εὐθεῖαν, τὸ τετράγωνον πάσης εὐθείας, ἀγομένης ἀπὸ τῆς *χθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ἐφ᾽ ἣν ἄγονται καὶ τῆς παρ᾽ ἣν δύνανται, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφ᾽ ἣν κατῆκται.*

ἔστω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τεταγμένως καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς ἡ ΔΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ποιείσθω ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ
H60 *μὲν τοῦ Θ τῇ ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Λ τῇ ΘΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΛΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΕΔΖ.*

ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΑΒ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Ξ, Γ τῇ ΑΝ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΞΟ, ΓΠ, διὰ δὲ τῶν Ν, Ο, Π τῇ ΑΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΝΥ, ΟΣ, ΤΠ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΓ τῷ ΑΠ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ΑΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΝ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΠ, καὶ ἡ ΠΤ πρὸς ΤΝ, ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΓΑ, τουτέστι τῇ ΤΠ, καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΤΑ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΑΠ τῷ ΤΡ, τὸ δὲ ΞΤ τῷ ΤΥ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΟΤ τῷ ΟΡ ἐστιν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ τομῆς ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν, παραλλήλου πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον ἔχον πλάτος τὴν ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μέχρι τῆς τομῆς, ἐλλεῖπον κατὰ σχῆμα, ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν εὐθεῖαν ἐφ' ἣν ἄγονται αὗται καὶ τὴν παράμετρον, καὶ προεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ ἐκείνης τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ὁποίαν κατήχθη.

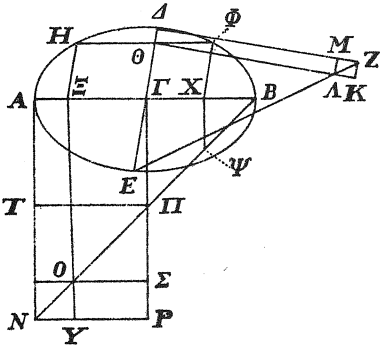
Ἔστω ἔλλειψις, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ σημεῖον Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ τεταγμένως καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἀπὸ τὰ δύο μέρη μέχρι τῆς τομῆς ἡ ΔΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ ΔΕ : ΑΒ $=$ΑΒ:ΔΖ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΛ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΖ, διὰ δὲ τῶν σημείων Ζ, Λ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΘΔ αἱ ΖΚ, ΛΜ. Λέγω, ὅτι $\mathrm{Η}\Theta^2 = \Delta\Lambda$, τὸ ὁποῖον παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ ἔχον πλάτος τὴν ΔΘ, ἐλλεῖπον σχῆμα τὸ ΛΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΕΔ x ΔΖ.

Διότι ἔστω παράμετρος ἡ ΑΝ παραλλήλως πρὸς τὴν ὁποίαν κατάγονται τεταγμένως εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΔΕ παράλληλος ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Ξ, Γ πρὸς τὴν ΑΝ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι αἱ ΞΟ, ΓΠ, διὰ δὲ τῶν Ν, Ο, Π πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι αἱ ΝΥ, ΟΣ, ΤΠ· εἶναι ἄρα τὸ μὲν $\Delta\Gamma^2 =$ΑΠ, τὸ δὲ $\mathrm{Η}\Xi^2 =$ΑΟ (θ. 13). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΒΑ : ΑΝ $=$ ΒΓ : ΓΠ $=$ ΠΤ : ΤΝ (Εὐκλ. 6, 4) καὶ εἶναι ΒΓ $=$ ΓΑ $=$ ΤΠ, καὶ ΓΠ $=$ ΤΑ, εἶναι ἄρα τὸ μὲν ΑΠ $=$ ΤΡ, τὸ δὲ ΞΤ $=$ ΤΥ (Εὐκλ. 6, 1). Καὶ ἐπειδὴ ΟΤ $=$ ΟΡ (Εὐκλ. 1, 43), κοινὸν δὲ τὸ ΝΟ, εἶναι

ΝΟ, τὸ ΤΥ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΣ. ἀλλὰ τὸ ΤΥ τῷ ΤΞ ἐστιν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΤΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ ΠΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΟ μετὰ τοῦ ΠΟ· ὥστε τὸ ΠΑ τοῦ ΑΟ ὑπερέχει τῷ ΟΠ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΠ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΑΟ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΗ, τὸ δὲ ΟΠ ἴσον τῷ ὑπὸ ΟΣΠ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστι τῆς ΞΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΗ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ· ὑπερεῖχε δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ.
H62 *καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. καὶ ἔστι τῷ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΠΓΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΣΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΣ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΘΔ τῷ ὑπὸ ΠΣΟ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΣ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΖΛ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΖ.*

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐκβαλλομένη ἡ ΘΗ ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΔΕ.

ἐκβεβλήσθω γὰρ καὶ συμβαλλέτω τῇ τομῇ κατὰ τὸ Φ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Φ τῇ ΗΞ παράλληλος ἤχθω ἡ ΦΧ, διὰ δὲ τοῦ Χ τῇ ΑΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἄρα τὸ ΤΥ = ΝΣ. Ἀλλὰ τὸ ΤΥ = ΤΞ, κοινὸν δὲ τὸ ΤΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ ΠΑ = ΑΟ + ΠΟ· ὥστε τὸ ΠΑ ὑπερέχει τοῦ ΑΟ κατὰ τὸ ΟΠ. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΑΠ = $\Gamma\Delta^2$, τὸ δὲ ΑΟ = $\Xi\mathrm{H}^2$, τὸ δὲ ΟΠ = ΟΣ x ΣΠ· τὸ $\Gamma\Delta^2$ ἄρα ὑπερέχει τοῦ $\mathrm{H}\Xi^2$ κατὰ τὸ ΟΣ x ΣΠ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΔΕ ἔχει τμηθῆ εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ, εἶναι ἄρα ΕΘ x ΘΔ + $\Gamma\Theta^2$ = $\Gamma\Delta^2$ (Εὐκλ. 2, 5) = ΕΘ x ΘΔ + $\Xi\mathrm{H}^2$. Εἶναι ἄρα $\Gamma\Delta^2$ - $\Xi\mathrm{H}^2$ = ΕΘ x ΘΔ· ἦτο δὲ $\Gamma\Delta^2$-$\mathrm{H}\Xi^2$=ΟΣ x ΣΠ· εἶναι ἄρα ΕΘ x ΘΔ = ΟΣ x ΣΠ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΕ : ΑΒ = ΑΒ : ΔΖ, εἶναι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΔΕ : ΔΖ = $\Delta\mathrm{E}^2$: AB^2 (Εὐκλ. 5, ὁρ. 9) = $\Gamma\Delta^2$: $\Gamma\mathrm{B}^2$ (Εὐκλ. 5, 15). Καὶ εἶναι $\Gamma\Delta^2$ = ΠΓ x ΓΑ = ΠΓ x ΓΒ·



καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ : ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΕΘ : ΘΛ, τουτέστι τὸ ΕΘ x ΘΔ : ΔΘ x ΘΛ = ΠΓ x ΓΒ : $\Gamma\mathrm{B}^2$, τουτέστι τὸ ΠΣ x ΣΟ : $\mathrm{O}\Sigma^2$ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ εἶναι ΕΘ x ΘΔ = ΠΣ x ΣΟ· εἶναι ἄρα ΔΘ x ΘΛ = $\mathrm{O}\Sigma^2$ (Εὐκλ. 5, 9) = $\mathrm{H}\Theta^2$. Εἶναι ἄρα $\mathrm{H}\Theta^2$ = ὀρθογώνιον ΔΛ, τὸ ὁποῖον παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ ἐλλεῖπον τὸ σχῆμα ΖΛ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΔ x ΔΖ.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ προεκβαλλομένη ἡ ΘΗ μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς θὰ τμηθῆ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΔΕ.

Διότι ἂς προεκβληθῆ καὶ ἂς συναντήσῃ τὴν τομὴν (ἐννοεῖται ἡ κωνικὴ τομή, ἡ ἔλλειψις) κατὰ τὸ Φ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Φ ἂς ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν ΗΞ ἡ ΦΧ, διὰ δὲ τοῦ Χ πρὸς τὴν ΑΝ ἂς ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΧΨ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΞ = ΦΧ (Εὐκλ.

ἐστὶν ἡ $H\Xi$ τῇ ΦX, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Xi$ τῷ ἀπὸ τῆς ΦX. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $H\Xi$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Xi O$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΦX ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $AX\Psi$. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $O\Xi$ πρὸς τὴν ΨX, οὕτως ἡ XA πρὸς $A\Xi$. καὶ ἔστιν ὡς ἡ $O\Xi$ πρὸς τὴν ΨX, οὕτως ἡ ΞB πρὸς BX· καὶ ὡς ἄρα ἡ XA πρὸς $A\Xi$, οὕτως ἡ ΞB πρὸς BX. καὶ διελόντι ὡς ἡ $X\Xi$ πρὸς ΞA, οὕτως ἡ $X\Xi$ πρὸς XB. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Xi$ τῇ XB. ἔστι δὲ καὶ ἡ $A\Gamma$ τῇ ΓB ἴση.
H64 καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $\Xi\Gamma$ τῇ ΓX ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ $H\Theta$ τῇ $\Theta\Phi$. ἡ ἄρα ΘH ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς $\Delta\Theta$.

ιϛʹ

Ἐὰν διὰ τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων συζυγὴς τῇ προϋπαρχούσῃ διαμέτρῳ.

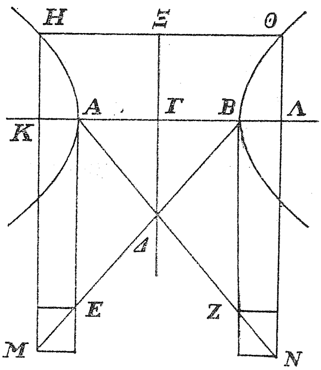
ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ AB κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι διάμετρός ἐστιν ἡ $\Gamma\Delta$ συζυγὴς τῇ AB.

ἔστωσαν γὰρ παρ᾽ ἃς δύνανται αἱ καταγόμεναι αἱ AE, BZ εὐθεῖαι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ AZ, BE ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ H, καὶ διὰ μὲν τοῦ H τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$, ἀπὸ δὲ τῶν H, Θ κατήχθωσαν τεταγμένως αἱ HK, $\Theta\Lambda$, 1, 34), εἶναι ἄρα τὸ $ΗΞ^2 = ΦΧ^2$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $ΗΞ^2 = ΑΞ \times ΞΟ$, τὸ δὲ $ΦΧ^2 = ΑΧ \times ΧΨ$ (θ. 13). Εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΟΞ : ΨΧ = ΧΑ : ΑΞ (Εὐκλ. 6, 16). Καὶ εἶναι ὡς ἡ ΟΞ : ΨΧ = ΞΒ : ΒΧ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΑ : ΑΞ = ΞΒ : ΒΧ. Καὶ δι' ἀφαιρέσεως (τῶν λόγων, διελόντι) εἶναι ΧΞ:ΞΑ = ΧΞ:ΧΒ (Εὐκλ. 5, 17). Εἶναι ἄρα ἡ ΑΞ = ΧΒ (Εὐκλ. 5, 9). Εἶναι δὲ καὶ ΑΓ = ΓΒ· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΞΓ = ΓΧ· ὥστε καὶ ἡ ΗΘ = ΘΦ. Ἡ ΘΗ ἄρα προεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἄλλου μέρους τῆς τομῆς τέμνεται εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΔΘ.

16

Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην, θὰ εἶναι αὕτη διάμετρος τῶν ἀντικειμένων συζυγὴς πρὸς τὴν προϋπάρχουσαν διάμετρον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι συζυγὴς διάμετρος πρὸς τὴν ΑΒ.



Διότι ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΖ παράμετροι, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΒΕ ἂς προεκβληθῶσι, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου κλάδου τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΗΘ, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων Η, Θ ἂς καταχθῶσι τεταγμένως αἱ ΗΚ, ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Κ, Λ πρὸς τὰς ΑΕ, ΒΖ ἂς ἀχθῶσι πα-

διὰ δὲ τῶν Κ, Λ ταῖς ΑΕ, ΒΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜ, ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚΜ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΛΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΑ.
H66 καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΛΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΒ, τῆς ΚΑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΝΛ πρὸς ΛΑ, τῆς ΒΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΛΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΛΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΛΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΚΑ τῷ ὑπὸ ΝΛΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΓ ὅλῃ τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ τῇ ΞΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΞΓΔ· καὶ ἔστι παράλληλος τῇ ΑΒ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΞΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

ὅροι β'

Τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τῆς τομῆς καλείσθω, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομὴν προσπίπτουσα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς.

ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἡ διχοτομία τῆς πλαγίας πλευρᾶς κέντρον καλείσθω.

ράλληλοι αἱ ΚΜ, ΛΝ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΗΚ $=$ ΘΛ (Εὐκλ. 1, 34), εἶναι ἄρα $\mathrm{HK}^2 = \Theta\Lambda^2$. Ἀλλὰ τὸ μὲν $\mathrm{HK}^2 = \mathrm{AK} \times \mathrm{KM}$, τὸ δὲ $\Theta\Lambda^2 = \mathrm{B}\Lambda \times \Lambda\mathrm{N}$ (θεώρ. 12)· τὸ ἄρα $\mathrm{AK} \times \mathrm{KM} = \mathrm{B}\Lambda \times \Lambda\mathrm{N}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΕ $=$ ΒΖ (θ. 14), εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΕ : ΑΒ $=$ ΒΖ : ΒΑ (Εὐκλ. 5, 9). Ἀλλὰ ὡς μὲν ἡ ΑΕ : ΑΒ $=$ ΜΚ : ΚΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΒ : ΒΑ $=$ ΝΛ : ΛΑ (Εὐκλ. 6, 4). Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΚ : ΚΒ $=$ ΝΛ : ΛΑ. Ἀλλὰ ὡς ἡ ΜΚ : ΚΒ, τῆς ΚΑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, $= \mathrm{MK} \times \mathrm{KA} : \mathrm{BK} \times \mathrm{KA}$, ὡς δὲ ἡ ΝΛ : ΛΑ, τῆς ΒΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, $= \mathrm{N}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B} : \mathrm{A}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B}$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ $\mathrm{MK} \times \mathrm{KA} : \mathrm{BK} \times \mathrm{KA} = \mathrm{N}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B} : \mathrm{A}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B}$. Καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ $\mathrm{MK} \times \mathrm{KA} : \mathrm{N}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B} = \mathrm{BK} \times \mathrm{KA} : \mathrm{A}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B}$ (Εὐκλ. 5, 16). Καὶ εἶναι τὸ $\mathrm{MK} \times \mathrm{KA} = \mathrm{N}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B}$· εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{BK} \times \mathrm{KA} = \mathrm{A}\Lambda \times \Lambda\mathrm{B}$· εἶναι ἄρα ἡ ΑΚ $=$ ΛΒ. Εἶναι δὲ καὶ ἡ ΑΓ $=$ ΓΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΓ $=$ πρὸς ὅλην τὴν ΓΛ· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ $=$ ΞΘ (Εὐκλ. 1,34). Ἡ ΗΘ ἄρα ἔχει τμηθῆ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΞΓΔ· καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΞΓΔ διάμετρος συζυγὴς πρὸς τὴν ΑΒ.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι

1. Τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου ἂς καλῆται κέντρον τῆς τομῆς, ἡ δὲ προσπίπτουσα ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομὴν ἂς καλῆται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς.

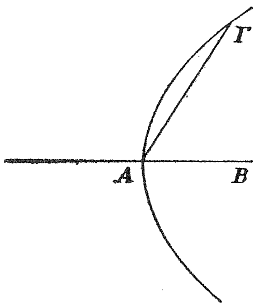
2. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀντικειμένων κλάδων τῆς ὑπερβολῆς ἡ διχοτομία τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἂς καλῆται κέντρον.

ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην μέσον τε λόγον ἔχουσα τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ δίχα τεμνομένη ὑπὸ τοῦ κέντρου δευτέρα διάμετρος καλείσθω.

H68 *ιζ′*

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γραμμῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι τοῦ Α σημείου, παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.



εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν κώνου τομῇ εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμβαλεῖ τῇ ΑΒ διαμέτρῳ καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ᾽ αὐτῆς. ἡ ΑΓ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΑΒ· ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται· διόπερ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ιη′

Ἐὰν ⟨ἐν⟩ κώνου τομῇ εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, ληφθῇ δέ τι σημεῖον

3. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμένη παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην καὶ οὖσα μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ εἴδους (δηλ. τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος πλευρὰς τὴν πλαγίαν πλευρὰν (πλαγίαν διάμετρον) καὶ τὴν παράμετρον) καὶ τεμνομένη εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τοῦ κέντρου ἂς καλῆται δευτέρα διάμετρος.

17

Ἐὰν εἰς τομὴν κώνου ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γραμμῆς εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην αὕτη θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἔστω κώνου τομή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Διότι, ἐὰν δὲν πέσῃ ἐκτός, ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐντός, ὡς ἡ ΑΓ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τομὴν κώνου ἐλήφθη τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, ἡ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἄρα ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ θὰ τμηθῇ ὑπ' αὐτῆς εἰς τὸ μέσον (θ. 7). Ἡ ΑΓ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΑΒ· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη πίπτει ἐκτὸς τῆς τομῆς. Δὲν θὰ πέσῃ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἀγομένη παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην ἐντὸς τῆς (κωνικῆς) γραμμῆς· θὰ πέσῃ ἄρα ἐκτός· κατὰ συνέπειαν εἶναι αὕτη ἐφαπτομένη τῆς τομῆς.

18

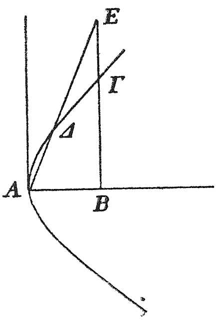
Ἐὰν εὐθεῖα συναντῶσα κώνου τομὴν ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πίπτῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς, ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐντὸς

ἐντὸς τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ συμπιπτούσῃ, ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἔστω κώνου τομὴ καὶ συμπίπτουσα αὐτῇ ἡ AZB εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ διὰ
H70 τοῦ Γ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EZ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ τῇ AB συμπίπτει τις εὐθεῖα ἡ EZ, καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ EZ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν E, Z, φανερόν, ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπίπτει, ἐὰν δὲ ἐκτὸς τοῦ E σημείου, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὰ Δ, E μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἐπὶ τὰ Z, B ἐκβαλλομένη συμπίπτει. ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ·

ιθ'.

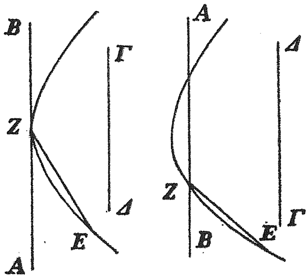


Ἐν πάσῃ κώνου τομῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, συμπεσεῖται τῇ τομῇ·

ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ B, καὶ διὰ τοῦ B παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ $B\Gamma$. λέγω, ὅτι ἡ $B\Gamma$ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν συναντῶσαν, ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Ἔστω τομὴ κώνου καὶ συναντῶσα αὐτὴν ἡ ΑΖΒ εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἂς πίπτῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐντὸς τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.



Διότι ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ εὐθεῖά τις ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν ΕΖ. Καὶ ἐὰν μὲν τὴν συναντήσῃ μεταξὺ τῶν Ε, Ζ, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ συναντήσῃ καὶ τὴν τομήν, ἐὰν δὲ τὴν συναντήσῃ ἐκτὸς τοῦ σημείου Ε, προηγουμένως θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν. Ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη πρὸς τὰ μέρη Δ, Ε, θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ πρὸς τὰ μέρη Ζ, Β ἐκβαλλομένη θὰ τὴν συναντήσῃ. Ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

19

Εἰς πᾶσαν τομὴν κώνου, ἡ εὐθεῖα ἥτις ἄγεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου παραλλήλως πρὸς τεταγμένως κατηγμένην θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Ἔστω κώνου τομή, τῆς ὁποίας διάμετρος ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Β, καὶ διὰ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΓ. Λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ· ἔστι δὲ καὶ τὸ Α ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς
H72 πίπτει τῆς τομῆς, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΑΔ, καὶ ἔστι τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἡ ΒΓ, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα συμπεσεῖται τῇ ΑΔ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Α, Δ σημείων, φανερόν, ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται, εἰ δὲ ἐκτὸς τοῦ Δ ὡς κατὰ τὸ Ε, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

κʹ

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἔσται ὡς τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

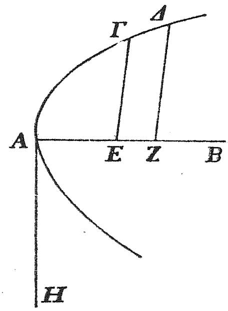
ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπ᾽ αὐτῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ.

ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ ΑΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΖ τῷ ὑπὸ ΖΑΗ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΑΗ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑΗ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΖΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑΗ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ.

Διότι ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ· εἶναι δὲ καὶ τὸ Α ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἄρα ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς τομῆς (θ. 10). Καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Α παράλληλος ἀγομένη εὐθεῖα πρὸς τεταγμένως κατηγμένην πίπτει ἐκτὸς τῆς τομῆς (θ. 17), καὶ ἡ ΑΔ συναντᾷ αὐτήν, καὶ εἶναι πρὸς τὴν κατηγμένην παράλληλος ἡ ΒΓ, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΔ. Καὶ ἂν μὲν τὴν συναντήσῃ μεταξὺ τῶν σημείων Α, Δ, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ συναντήσῃ καὶ τὴν τομήν, ἂν δὲ τὴν συναντήσῃ ἐκτὸς τοῦ Δ, ὡς κατὰ τὸ Ε, θὰ συναντήσῃ προηγουμένως τὴν τομήν. Ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἄρα παραλλήλως πρὸς τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

20

Ἐὰν εἰς παραβολὴν καταχθῶσιν ἀπὸ τῆς τομῆς δύο εὐθεῖαι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα αὐτῶν μεταξύ των, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς.



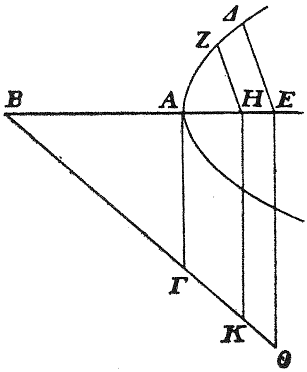
Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς σημεῖά τινα τὰ Γ, Δ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἂς καταχθῶσιν τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς τὸ $ΔΖ^2 : ΓΕ^2 = ΖΑ : ΑΕ$.

Διότι ἔστω παράμετρος τῆς παραβολῆς ἡ ΑΗ· εἶναι ἄρα τὸ μὲν $ΔΖ^2 = ΖΑ \times ΑΗ$, τὸ δὲ $ΓΕ^2 = ΕΑ \times ΑΗ$ (θ. 11). Εἶναι ἄρα ὡς τὸ $ΔΖ^2 : ΓΕ^2 = ΖΑ \times ΑΗ : ΕΑ \times ΑΗ$. Ὡς δὲ τὸ $ΖΑ \times ΑΗ : ΕΑ \times ΑΗ = ΖΑ : ΑΕ$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΔΖ^2 : ΓΕ^2 = ΖΑ : ΑΕ$.

κα'

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται τὰ
H74 ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, πρὸς ἄλληλα δέ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

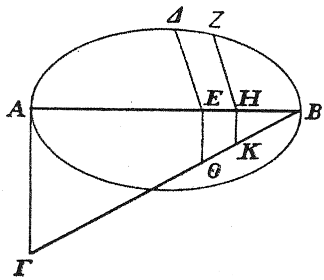
ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ *ΑΒ*, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ *ΑΓ*, καὶ κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως αἱ *ΔΕ*, *ΖΗ*. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΗΒ*, οὕτως ἡ *ΑΓ* πρὸς *ΑΒ*, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΕ*, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΗΒ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ*.



ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ *ΒΓ* διορίζουσα τὸ εἶδος, καὶ διὰ τῶν *Ε*, *Η* τῇ *ΑΓ* παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ *ΕΘ*, *ΗΚ*· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τῷ ὑπὸ *ΚΗΑ*, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς *ΔΕ* τῷ ὑπὸ *ΘΕΑ*. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ *ΚΗ* πρὸς *ΗΒ*, οὕτως ἡ *ΓΑ* πρὸς *ΑΒ*, ὡς δὲ ἡ *ΚΗ* πρὸς *ΗΒ*, τῆς *ΑΗ* κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ *ΚΗΑ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΒΗΑ*, ὡς ἄρα ἡ *ΓΑ* πρὸς *ΑΒ*, οὕτως τὸ ὑπὸ *ΚΗΑ*, τουτέστι τὸ ἀπὸ *ΖΗ*, πρὸς τὸ ὑπὸ *ΒΗΑ*. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστι καί, ὡς τὸ ἀπὸ *ΔΕ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΒΕΑ*, οὕτως ἡ *ΓΑ* πρὸς *ΑΒ*. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΒΗΑ*, οὕτως τὸ ἀπὸ *ΔΕ* πρὸς τὸ

21

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι τὰ τετράγωνα αὐτῶν πρὸς μὲν τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τὰ ἔχοντα πλευρὰς τὰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς διαμέτρου μέχρι τῶν ἄκρων τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους (τοῦ σχήματος), ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ (ἡ παράμετρος) πρὸς τὴν πλαγίαν (πλάγιον ἄξονα), μεταξύ των δέ, θὰ εἶναι ὡς τὰ ὀρθογώνια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.



Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ AB, παράμετρος δὲ ἡ ΑΓ, καὶ ἂς καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως αἱ ΔΕ, ZH. Λέγω, ὅτι εἶναι ὡς μὲν τὸ $ZH^2 : AH \times HB = A\Gamma : AB$, ὡς δὲ τὸ $ZH^2 : \Delta E^2 = AH \times HB : AE \times EB$.

Διότι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ διορίζουσα τὸ εἶδος (τὸ ὀρθογώνιον σχῆμα τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι ἡ παράμετρος καὶ ἄλλη ἡ ΒΑ), καὶ διὰ τῶν Ε, Η ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ αἱ ΕΘ, ΗΚ· εἶναι ἄρα τὸ μὲν $ZH^2 = KH \times HA$, τὸ δὲ $\Delta E^2 = \Theta E \times EA$ (θ. 12 καὶ 13). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $KH : HB = \Gamma A : AB$ (Εὐκλ· 6, 4), ὡς δὲ $KH : HB$, τῆς ΑΗ λαμβανομένης ὡς κοινοῦ ὕψους, $= KH \times HA : BH \times HA$, ὡς ἄρα ἡ $\Gamma A : AB = KH \times HA = ZH^2 : BH \times HA$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς τὸ $\Delta E^2 : BE \times EA = \Gamma A : AB$. Καὶ ὡς ἄρα τὸ $ZH^2 : BH \times HA = \Delta E^2$:

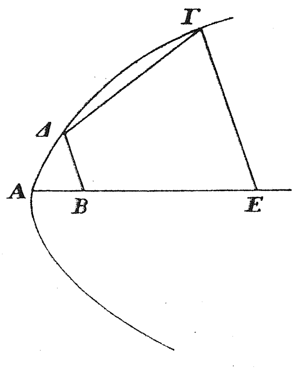
ὑπὸ ΒΕΑ· ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ.

H76 κβ′

Ἐὰν παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐντός, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκτὸς τῆς τομῆς τῇ ΑΒ.

κατήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως αἱ ΓΕ, ΔΒ· ἔστω δὲ πρῶτον ἡ τομὴ παραβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ παραβολῇ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, μείζων δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΑΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. ὥστε καὶ ἡ ΓΕ τῆς ΔΒ μείζων ἐστί. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.



ἀλλὰ δὴ ἔστω ὑπερβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒΑ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κγ′

Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνῃ μεταξὺ κειμένη τῶν δύο

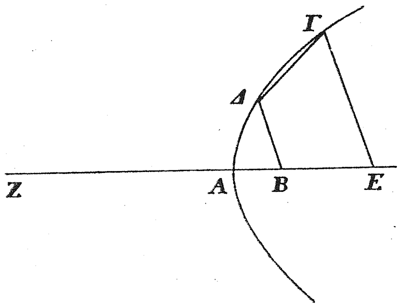
$BE \times EA$· ἐναλλὰξ εἶναι, ὡς τὸ $ZH^2 : \Delta E^2 = BH \times HA : BE \times EA$ (Εὐκλ. 5, 16).

22

Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν κατὰ δύο σημεῖα μὴ συναντῶσα τὴν διάμετρον ἐντός, ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς τέμνῃ εὐθεῖά τις τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Διότι ἂς καταχθῶσιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως αἱ ΓΕ, ΔΒ· ἔστω δὲ πρῶτον ἡ τομὴ παραβολή. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὴν παραβολὴν εἶναι ὡς τὸ $\Gamma E^2 : \Delta B^2 = EA : AB$ (θ. 20), μεγαλυτέρα δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΑΒ, εἶναι ἄρα $\Gamma E^2 > \Delta B^2$. Ὥστε καὶ ἡ $\Gamma E > \Delta B$. Καὶ εἶναι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον ΑΒ ἐκτὸς τῆς τομῆς.



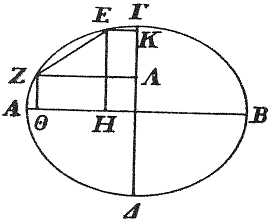
Ἀλλὰ τώρα ἡ τομὴ ἔστω ὑπερβολή. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὴν ὑπερβολὴν εἶναι, ὡς τὸ $\Gamma E^2 : B\Delta^2 = ZE \times EA : ZB \times BA$ (θ. 21), εἶναι ἄρα καὶ $\Gamma E^2 > \Delta B^2$. Καὶ εἶναι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

23

Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνῃ κειμένη μεταξὺ τῶν δύο διαμέ-

διαμέτρων, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

H78 *ἔστω ἔλλειψις, ἧς διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν ἡ ΕΖ μεταξὺ κειμένη τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκτὸς τῆς τομῆς.*



κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ τεταγμένως ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΗΕ, ΖΘ, ἐπὶ δὲ τὴν ΔΓ αἱ ΕΚ, ΖΛ. ἔστιν ἄρα, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΑ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ· ἔγγιον γὰρ τὸ Η τῆς διχοτομίας· τὸ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τοῦ ὑπὸ ΔΚΓ μεῖζον· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΕ τοῦ ἀπὸ ΖΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ τοῦ ἀπὸ ΕΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῆς ΕΚ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κδʹ

Ἐὰν ⟨ἐν⟩ παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα καθ᾽ ἓν σημεῖον συμπίπτουσα ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ.

ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ συμπιπτέτω αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΓΔΕ κατὰ τὸ Δ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ.

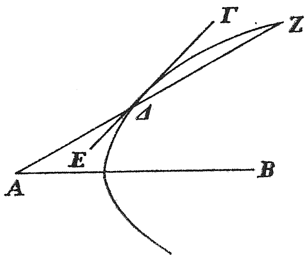
τρων, ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἔστω ἔλλειψις, τῆς ὁποίας διάμετροι εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς τέμνῃ εὐθεῖά τις τὴν τομὴν ἡ ΕΖ κειμένη μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Διότι ἂς καταχθῶσιν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ τεταγμένως ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΗΕ, ΖΘ, ἐπὶ δὲ τὴν ΔΓ αἱ ΕΚ, ΖΛ. Εἶναι ἄρα ὡς μὲν τὸ $ΕΗ^2 : ΖΘ^2 = ΒΗ \times ΗΑ : ΒΘ \times ΘΑ$, ὡς δὲ τὸ $ΖΛ^2 : ΕΚ^2 = ΔΛ \times ΛΓ : ΔΚ \times ΚΓ$ (θ. 21). Καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΒΗ \times ΗΑ > ΒΘ \times ΘΑ$· διότι τὸ Η εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὴν διχοτομίαν·*) τὸ δὲ $ΔΛ \times ΛΓ > ΔΚ \times ΚΓ$· εἶναι ἄρα τὸ μὲν $ΗΕ^2 > ΖΘ^2$, τὸ δὲ $ΖΛ^2 > ΕΚ^2$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ μὲν $ΗΕ > ΖΘ$, ἡ δὲ $ΖΛ > ΕΚ$. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ μὲν ΗΕ πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ πρὸς τὴν ΕΚ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

24

Ἐὰν εὐθεῖα συναντῶσα παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν εἰς ἓν σημεῖον ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πίπτῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς, θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον.



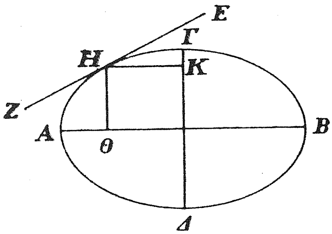
Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς συναντᾷ αὐτὴν ἡ εὐθεῖα ΓΔΕ κατὰ τὸ Δ καὶ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἂς πίπτῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον ΑΒ.

*) [Σημ. Χρησιμοποιεῖ τὸ θεώρημα, ἂν τὸ ἄθροισμα δύο εὐθειῶν (ἢ ἀριθμῶν) εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μέγιστον ἂν αἱ εὐθεῖαι γίνωσιν ἴσαι].

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Z, καὶ ἐπε-
H80 ζεύχθω ἡ ΔZ· ἡ ΔZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς. συμπιπτέτω κατὰ τὸ A· καὶ ἔστι μεταξὺ τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ZΔA ἡ ΓΔE. καὶ ἡ ΓΔE ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κε´

Ἐὰν ⟨ἐν⟩ ἐλλείψει εὐθεῖα συμπίπτουσα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων.



ἔστω ἔλλειψις, ἧς διάμετροι αἱ AB, ΓΔ, καὶ ταύτῃ συμπιπτέτω τις εὐθεῖα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἡ EZ κατὰ τὸ H καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω ὅτι ἡ EZ συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν AB, ΓΔ.

κατήχθωσαν ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰς AB, ΓΔ τεταγμένως αἱ HΘ, HK. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ HK τῇ AB, συμπέπτωκε δέ τις τῇ HK ἡ HZ, καὶ τῇ AB ἄρα συμπεσεῖται. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ΓΔ συμπεσεῖται ἡ EZ.

κϛ´

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.

ἔστω πρότερον παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ABΓ, ὀρθία δὲ ἡ AΔ, καὶ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ EZ. λέγω, ὅτι ἡ EZ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

H82 εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς EZ τὸ E, καὶ ἀπὸ

Διότι ἂς ληφθῆ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῆ ἡ ΔΖ· ἡ ΔΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήση τὴν διάμετρον τῆς τομῆς (θ. 22). Ἂς τὴν συναντήση κατὰ τὸ Α· καὶ εἶναι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΖΔΑ ἡ ΓΔΕ. Καὶ ἡ ΓΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήση τὴν διάμετρον ἐκτὸς τῆς τομῆς.

25

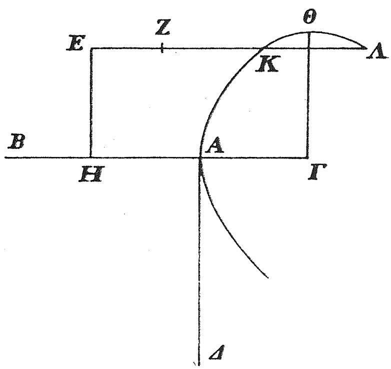
Ἐὰν εὐθεῖα συναντῶσα ἔλλειψιν μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη πίπτη ἐκτὸς τῆς τομῆς, θὰ συναντήση ἑκατέραν τῶν διαμέτρων.

Ἔστω ἔλλειψις, τῆς ὁποίας διάμετροι εἶναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἂς συναντᾶ ταύτην εὐθεῖά τις μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Η καὶ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἂς πίπτη ἐκτὸς τῆς τομῆς. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ θὰ συναντήση ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ.

Ἂς καταχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ τεταγμένως αἱ ΗΘ, ΗΚ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, συναντᾶ δὲ εὐθεῖά τις τὴν ΗΚ ἡ ΗΖ, θὰ συναντήση ἄρα καὶ τὴν ΑΒ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΕΖ θὰ συναντήση τὴν ΓΔ.

26

Ἐὰν εἰς παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τῆς τομῆς, θὰ συναντήση τὴν τομὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον.



Ἔστω προηγουμένως παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒΓ, παράμετρος δὲ ἡ ΑΔ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῆ παράλληλος ἡ ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήση τὴν τομήν.

Διότι ἂς ληφθῆ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ

τοῦ Ε παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ μεῖζον ἔστω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΓΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΘΓ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΘΓ τῆς ΕΗ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ΘΓ· ὥστε καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται.

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ.

λέγω δή, ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ Κ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴν εὐθεῖα τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ παράλληλος. ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτει τῇ τομῇ.

ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολή, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω. τῶν αὐτῶν δὴ κατασκευασθέντων ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΜΓΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ὑπὸ ΜΓΑ ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΗΕ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ἀπὸ ΕΗ. ὥστε καὶ ἡ ΓΘ τῆς ΕΗ μείζων ἐστί, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον συμβήσεται.

H84 κζ′

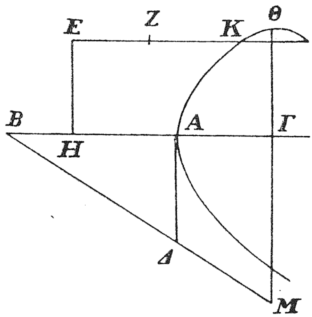
Ἐὰν παραβολῆς τὴν διάμετρον εὐθεῖα τέμνῃ, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ταύτην τέ-

Ε ἂς ἀχθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΕΗ, καὶ ἔστω $ΔΑ \times ΑΓ > ΗΕ^2$ καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἂς ὑψωθῇ τεταγμένως ἡ ΓΘ· εἶναι ἄρα $ΘΓ^2 = ΔΑ \times ΑΓ$ (θ. 11). Εἶναι δὲ $ΔΑ \times ΑΓ > ΕΗ^2$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΘΓ^2 > ΕΗ^2$· εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΘΓ > ΕΗ$. Καὶ εἶναι αὗται παράλληλοι· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ΘΓ· ὥστε θὰ συναντᾷ καὶ τὴν τομήν.

Ἂς τὴν συναντᾷ κατὰ τὸ Κ.

Λέγω τώρα, ὅτι θὰ τὴν συναντήσῃ μόνον κατὰ ἓν σημεῖον τὸ Κ. Διότι ἐὰν εἶναι δυνατὸν ἂς τὴν συναντήσῃ καὶ κατὰ τὸ Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εὐθεῖα τέμνει παραβολὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς (θ. 22)· ὅπερ ἄτοπον· διότι ἔχει ληφθῇ παράλληλος. Ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν μόνον εἰς ἓν σημεῖον.



Ἔστω τώρα, ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολή, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ (παράμετρος) καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΒ καὶ ἂς προεκβληθῇ. Ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ὡς προηγουμένως, ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΔ παράλληλος ἡ ΓΜ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $ΜΓ \times ΓΑ > ΔΑ \times ΑΓ$, καὶ εἶναι τὸ μὲν $ΜΓ \times ΓΑ = ΓΘ^2$ (θ. 22), τὸ δὲ $ΔΑ \times ΑΓ > ΗΕ^2$, εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΓΘ^2 > ΕΗ^2$. Ὥστε καὶ ἡ $ΓΘ > ΕΗ$, καὶ θὰ συμβῶσι τὰ αὐτὰ ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα (θ. 22).

27

Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ μνέτω τις εὐθεῖα ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἤχθω γάρ τις ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

ἤτοι δὴ ἡ ΓΔ τῇ ΑΕ παράλληλός ἐστιν ἢ οὔ.

εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν αὐτῇ, τεταγμένως κατῆκται, ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

μὴ ἔστω δὴ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀλλ᾽ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ ΑΕ κατὰ τὸ Ε. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ συμπίπτει ἐπὶ τὰ μέρη, ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ Ε, φανερόν· εἰ γὰρ τῇ ΑΕ συμβάλλει, πολὺ πρότερον τέμνει τὴν τομήν.

λέγω, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται ἡ ΜΑ καὶ τεταγμένως ἡ ΗΖ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΖ, καὶ παρατεταγμένως ἡ ΒΚ συμπιπτέτω τῇ ΔΓ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΒ τῷ ἀπὸ ΑΔ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΔ, ἡ ΔΑ πρὸς ΑΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΖ ἐστιν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐπειδὴ
H86 δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ ΒΑΖ, ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΜ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΜ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΜ. τὸ δὲ ἀπὸ ΖΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΑΜ διὰ

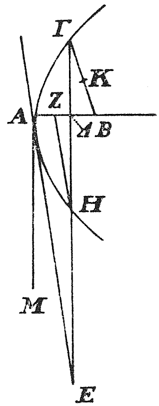
ταύτην ἂς τέμνῃ εὐθεῖά τις ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ ΓΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Διότι ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς (θ. 17).

Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ ἢ ὄχι.

Ἐὰν μὲν λοιπὸν εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτήν, θὰ εἶναι τεταγμένως κατηγμένη, ὥστε ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν (θ. 19).

Ἀλλὰ τώρα ἔστω μὴ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ, ἀλλ' ἐκβαλλομένη ἂς συναντήσῃ τὴν ΑΕ κατὰ τὸ Ε. Ὅτι μὲν λοιπὸν θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν εἰς τὰ μέρη, πρὸς τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ Ε, εἶναι φανερόν· διότι ἐὰν συναντᾷ τὴν ΑΕ, πολὺ προηγουμένως τέμνει τὴν τομήν.



Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὰ ἄλλα μέρη, ἐκβαλλομένη συναντᾷ τὴν τομήν. Διότι ἔστω παράμετρος ἡ ΜΑ καὶ τεταγμένως (κατηγμένη) ἡ ΗΖ, καὶ ἔστω $ΑΔ^2 = ΒΑ x ΑΖ$, καὶ ἡ ΒΚ παραλλήλως τεταγμένη ἂς συναντᾷ τὴν ΔΓ κατὰ τὸ Γ. Ἐπειδὴ τὸ $ΖΑ x ΑΒ = ΑΔ^2$, εἶναι ὡς ἡ $ΑΒ : ΑΔ = ΔΑ : ΑΖ$ (Εὐκλ. 6, 17)· καὶ ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ ΒΔ : τὴν ὑπόλοιπον τὴν $ΔΖ = ΒΑ : ΑΔ$ (Εὐκλ. 5, 19). Καὶ ὡς ἄρα τὸ $ΒΔ^2 : ΖΔ^2 = ΒΑ^2 : ΑΔ^2$. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΔ^2 = ΒΑ x ΑΖ$ εἶναι ὡς ἡ $ΒΑ : ΑΖ = ΒΑ^2 : ΑΔ^2$ (Εὐκλ. 5, ὁρισ. 9) $= ΒΔ^2 : ΔΖ^2$. Ὡς δὲ τὸ $ΒΔ^2 : ΔΖ^2 = ΒΓ^2 : ΖΗ^2$, ὡς δὲ ἡ $ΑΒ : ΑΖ = ΒΑ x ΑΜ : ΖΑ x ΑΜ$. Ὡς ἄρα τὸ $ΒΓ^2 : ΖΗ^2 = ΒΑ x ΑΜ : ΖΑ x ΑΜ$· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ $ΒΓ^2 : ΒΑ x ΑΜ = ΖΗ^2 : ΖΑ x ΑΜ$ (Εὐκλ. 5, 16). Τὸ δὲ $ΖΗ^2 = ΖΑ x ΑΜ$ διὰ τὴν τομὴν (Ὁρισμὸς τὴν τομήν· καὶ τὸ ἀπὸ $B\Gamma$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ BAM. πλαγία δὲ ἡ AM, παρατεταγμένως δὲ ἡ $B\Gamma$. ἡ ἄρα τομὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ συμπίπτει τῇ τομῇ ἡ $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ Γ.

κη′

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν ἡ AB διάμετρος, καὶ τῆς A τομῆς ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς τὸ E, καὶ διὰ τοῦ E τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ EZ. λέγω, ὅτι ἡ EZ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ AB διαμέτρῳ, καὶ ἔστι παράλληλος αὐτῇ ἡ EZ, ἡ EZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ H, καὶ τῇ HB ἴση κείσθω ἡ $A\Theta$, καὶ διὰ
H88 τοῦ Θ τῇ ZE παράλληλος ἤχθω ἡ ΘK, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ $K\Lambda$, καὶ τῇ $\Lambda\Theta$ ἴση κείσθω ἡ HM, καὶ παρατεταγμένως ἤχθω ἡ MN, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἡ HN. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $K\Lambda$ τῇ MN, ἡ δὲ $K\Theta$ τῇ HN, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΛM, ὅμοιόν ἐστι τὸ $K\Theta\Lambda$ τρίγωνον τῷ HMN τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Lambda\Theta$ τῇ HM· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Lambda$ τῇ MN. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ $K\Lambda$ τῷ ἀπὸ MN ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\Lambda\Theta$ τῇ HM, ἡ δὲ $A\Theta$ τῇ BH, κοινὴ δὲ ἡ AB, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Lambda$ τῇ AM· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ BAA τῷ ὑπὸ AMB. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ BAA

παραβολῆς) (θ. 11)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΒΓ^2 = ΒΑ \times ΑΜ$. Εἶναι δὲ πλαγία ἡ ΑΜ, παράλληλος δὲ πρὸς τεταγμένην ἡ ΒΓ. Ἡ τομὴ ἄρα διέρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ ἡ ΓΔ συναντᾷ τὴν τομὴν κατὰ τὸ Γ.

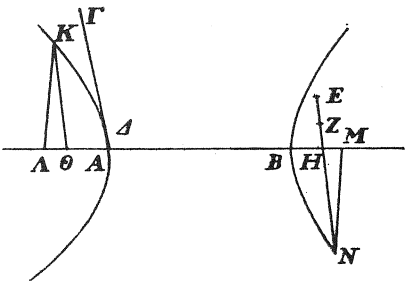
28

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται ἑνὸς τῶν ἀντικειμένων κλάδων τῆς ὑπερβολῆς, ληφθῇ δὲ σημεῖόν τι ἐντὸς τοῦ ἄλλου κλάδου αὐτῆς, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, αὕτη ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Ἔστωσαν ἀντικείμενοι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ τῆς Α τομῆς ἂς ἐφάπτηται εὐθεῖά τις ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐντὸς τῆς ἄλλης τομῆς τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ. Λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἔχει ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον ΑΒ (θ. 24), καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὴν ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν διάμετρον· ἂς τὴν συναντήσῃ κατὰ τὸ Η, καὶ ἂς ληφθῇ $ΗΒ = ΑΘ$, καὶ διὰ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΖΕ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΚΛ, καὶ ἂς ληφθῇ $ΛΘ = ΗΜ$, καὶ ἂς ἀχθῇ παραλλήλως τεταγμένη ἡ ΜΝ, καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΝ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ δὲ ΚΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ μία εὐθεῖα εἶναι ἡ ΛΜ, τὸ τρίγωνον ΚΘΛ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΗΜΝ. Καὶ εἶναι $ΛΘ = ΗΜ$· εἶναι ἄρα καὶ $ΚΛ = ΜΝ$ (Εὐκλ. 6, 4). Ὥστε καὶ τὸ $ΚΛ^2 = ΜΝ^2$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἡ μὲν $ΛΘ = ΘΜ$, ἡ δὲ $ΑΘ = ΒΗ$, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, εἶναι ἄρα ἡ $ΒΛ = ΑΜ$· εἶναι ἄρα $ΒΛ \times ΛΑ = ΑΜ \times ΜΒ$. Ὡς ἄρα $ΒΛ \times ΛΑ : ΚΛ^2$

πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ· καὶ ἔστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. τὸ Ν ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν. ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ τὸ Ν.



ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

κθ′

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις εὐθεῖα προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν, ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὴν ἑτέραν τομήν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ ΓΔ τεμνέτω τὴν ΑΔ τομήν. λέγω, ὅτι καὶ τὴν ἑτέραν τομὴν τεμεῖ.

H90 τεταγμένως γὰρ κατήχθω ἡ ΕΔ, καὶ τῇ ΑΕ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΒΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΔ τῷ ἀπὸ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΖΗ, καὶ εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΕΖ, καὶ παράλληλος

$= AM \times MB : MN^2$. Καὶ εἶναι, ὡς $B\Lambda \times \Lambda A : \Lambda K^2 =$ ἡ πλαγία πρὸς τὴν παράμετρον (θ. 21)· καὶ ὡς ἄρα $AM \times MB : MN^2 =$ ἡ πλαγία πρὸς τὴν παράμετρον. Τὸ Ν ἄρα εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τομῆς. Ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομὴν κατὰ τὸ Ν.

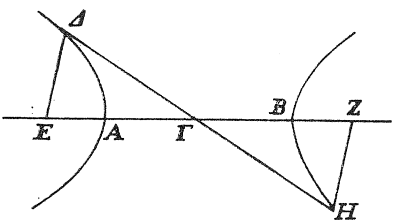
Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν τομήν.

29

Ἐὰν πρὸς μίαν τῶν τομῶν εἰς ἀντικειμένους κλάδους ὑπερβολῆς προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖα, αὕτη ἐκβαλλομένη θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ἄλλην τομήν.

Ἔστωσαν ἀντικείμενοι κλάδοι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ ΓΔ ἂς τέμνῃ τὴν τομὴν ΑΔ. Λέγω, ὅτι θὰ τμήσῃ καὶ τὴν ἄλλην τομήν.

Διότι ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΕΔ, καὶ ἂς ληφθῇ $AE = BZ$, καὶ ἀχθῇ τεταγμένως ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπειδὴ $EA = BZ$, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, εἶναι ἄρα $BE \times EA = AZ \times ZB$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $BE \times EA : \Delta E^2 =$ ἡ πλαγία : τὴν παράμετρον, ἀλλὰ καὶ $AZ \times ZB : ZH^2 =$



ἡ πλαγία : τὴν παράμετρον (θ. 21), καὶ ὡς ἄρα $BE \times EA : \Delta E^2 = AZ \times ZB : ZH^2$. Εἶναι δὲ $BE \times EA = AZ \times ZB$· εἶναι ἄρα $E\Delta^2 = ZH^2$ (Εὐκλ. 5, 9). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ μὲν $E\Gamma = \Gamma Z$, ἡ δὲ $\Delta E = ZH$, καὶ εἶναι εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἡ ΕΔ εἶναι ἡ ΕΔ τῇ ΖΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εὐθεῖά ἐστι. καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τεμεῖ καὶ τὴν ἑτέραν τομήν.

λ′

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις εὐθεῖα ἀχθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον.

ἔστω ἔλλειψις ἢ ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΓΕ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ.

ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΖ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν H92 ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. καὶ ὡς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τῷ ἀπὸ ΑΓ τὸ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ ΖΓ τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἴση ἄρα ἡ ΖΓ τῇ ΓΗ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΔΖ, ΗΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ.

λα′

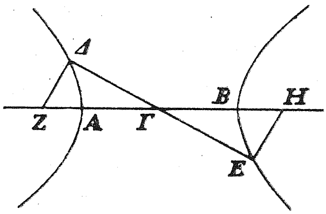
Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον πρὸς τῇ κορυφῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἶναι εὐθεῖα (Εὐκλ. 6, 32). Καὶ ἡ ΓΔ ἄρα θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ἄλλην τομήν.

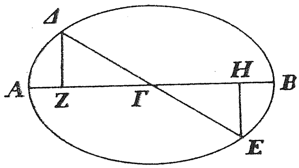
30

Ἐὰν εἰς ἔλλειψιν ἢ εἰς ἀντικειμένους κλάδους ὑπερβολῆς ἀχθῇ πρὸς τὰ δύο μέρη τοῦ κέντρου εὐθεῖα συναντῶσα τὴν τομήν, αὕτη θὰ τέμνεται κατὰ τὸ κέντρον εἰς τὸ μέσον.

Ἔστω ἔλλειψις ἢ ἀντικείμενοι κλάδοι, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἔστω ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ἡ ΔΓΕ. Λέγω, ὅτι ΓΔ = ΓΕ.

Διότι ἂς ἀχθῶσι τεταγμένως αἱ ΔΖ, ΕΗ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι





ΒΖ x ΖΑ : ΖΔ² = ἡ πλαγία : τὴν παράμετρον, ἀλλὰ καὶ ΑΗ x ΗΒ : ΗΕ² = ἡ πλαγία : τὴν παράμετρον (θ. 21), καὶ ὡς ἄρα ΒΖ x ΖΑ : ΖΔ² = ΑΗ x ΗΒ : ΗΕ². Καὶ ἐναλλάξ, εἶναι ΒΖ x ΖΑ : ΑΗ x ΗΒ = ΔΖ² : ΗΕ² (Εὐκλ. 5, 16). Ὡς δὲ ΔΖ² : ΗΕ² = ΖΓ² : ΓΗ² (Εὐκλ. 6, 4)· ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΒΖ x ΖΑ: ΖΓ² =ΑΗ x ΗΒ : ΓΗ² (Εὐκλ. 5, 16). Καὶ ὡς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως διὰ συνθέσεως (Εὐκλ. 5, 18) ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν (Εὐκλ. 5, 7 πόρ.) καὶ δι᾽ ἀναστροφῆς (Εὐκλ. 5, 19 πόρ.), τὸ ΑΓ² : ΓΖ²=ΒΓ² : ΓΗ²· καὶ ἐναλλάξ. Εἶναι δὲ ΑΓ²= ΓΒ²· εἶναι ἄρα ΖΓ² = ΓΗ². Εἶναι ἄρα ΖΓ = ΓΗ. Καὶ εἶναι παράλληλοι αἱ ΔΖ, ΗΕ· εἶναι ἄρα ΔΓ = ΓΕ (Εὐκλ. 6, 4).

31

Ἐὰν ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ σχήματος ὑπερβολῆς ληφθῇ σημεῖόν τι ἔχον ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς τῆς τομῆς τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ προσπέσῃ εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν, προσεκβληθεῖσα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς κατὰ τὰ ἑπόμενα μέρη τῆς τομῆς.

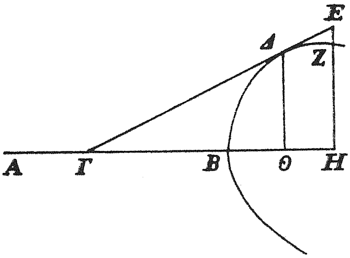
ἔστω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖόν τι τὸ Γ μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον τὴν ΓΒ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, καὶ προσπιπτέτω τις εὐθεῖα πρὸς τὴν τομὴν ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

H94 εἰ γὰρ δυνατόν, ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς ὡς ἡ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΘ, καὶ ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΕΗ τῇ ΔΘ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ διὰ τὴν τομήν, τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ. ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔΕ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἐντὸς ἄρα. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς ΑΓ σημείων πολλῷ μᾶλλον ἐντὸς πεσεῖται, ἐπειδὴ καὶ τῆς ΓΔ ἐντὸς πεσεῖται.

λβ′

Ἐὰν κώνου τομῆς διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, ἐφάπτεται τῆς τομῆς, καὶ εἰς οὐχὶ μικροτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπέσῃ εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν, αὕτη προσεκβληθεῖσα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς τομῆς κατὰ τὰ ἑπόμενα μέρη τῆς τομῆς. (Εἶδος = ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο κορυφῶν τῶν κλάδων τῆς ὑπερβολῆς δηλ. ἡ πλαγία πλευρὰ καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ παράμετρος).

Ἔστω ὑπερβολὴ τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ ὥστε ἡ ΓΒ νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς ΑΒ, καὶ ἂς προσπέσῃ εὐθεῖά τις πρὸς τὴν τομὴν ἡ ΓΔ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς τομῆς.



Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς ὡς ἡ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΘ, καὶ ἔστω προηγουμένως ἡ ΑΓ = ΓΒ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ $\mathrm{EH}^2 : \Delta\Theta^2 > \mathrm{ZH}^2 : \Delta\Theta^2$ (Εὐκλ. 5, 8), ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\mathrm{EH}^2 : \Delta\Theta^2 = \mathrm{H}\Gamma^2 : \Gamma\Theta^2$, διότι ἡ ΕΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΘ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ τὸ $\mathrm{ZH}^2 : \Delta\Theta^2 = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} : \mathrm{A}\Theta \times \Theta\mathrm{B}$ ἕνεκα τῆς τομῆς (θ. 21), εἶναι ἄρα τὸ $\mathrm{H}\Gamma^2 : \Gamma\Theta^2 > \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} : \mathrm{A}\Theta \times \Theta\mathrm{B}$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $\Gamma\mathrm{H}^2 : \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} > \Gamma\Theta^2 : \mathrm{A}\Theta \times \Theta\mathrm{B}$. Διὰ διαιρέσεως ἄρα εἶναι $\Gamma\mathrm{B}^2 : \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} > \Gamma\mathrm{B}^2 : \mathrm{A}\Theta \times \Theta\mathrm{B}$· ὅπερ ἀδύνατον (Εὐκλ. 5, 8). Δὲν θὰ πέσῃ ἄρα ἡ ΓΔΕ ἐκτὸς τῆς τομῆς· θὰ πέσῃ ἄρα ἐντός. Καὶ διὰ τοῦτο, πολὺ περισσότερον θὰ πέσῃ ἐντός, ἡ ἀπό τινος σημείου τῆς ΑΓ ἀγομένη, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΓΔ θὰ πέσῃ ἐντός.

32

Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς τομῆς κώνου ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην, αὕτη ἐφάπτεται τῆς τομῆς, *τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.*

ἔστω κώνου τομὴ πρότερον ἡ καλουμένη παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρατεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΓ.

H96 *ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.*

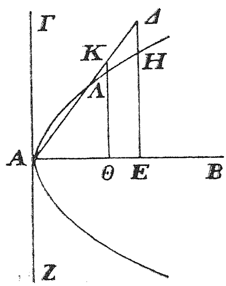
εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΗΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τουτέστιν ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ. πεποιήσθω οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος ἤχθω τῇ ΕΔ ἡ ΘΛΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΘ, καὶ ἔστιν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΖΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΘΛ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ. ἴση ἄρα ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΖ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρατεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΓ.

καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τομῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς εὐθείας δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Ἔστω πρῶτον κώνου τομὴ ἡ καλουμένη παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ τεταγμένη παράλληλος ἡ ΑΓ.

Ὅτι μὲν λοιπὸν πίπτει ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἔχει ἀποδειχθῇ (θ. 17). Λέγω τώρα, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τῆς τομῆς δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

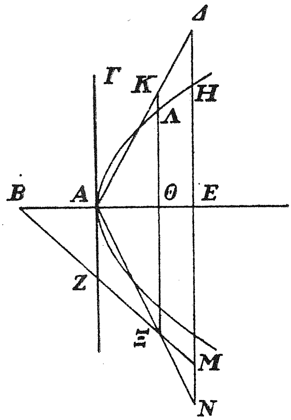


Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς παρεμπέσῃ ἡ ΑΔ, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Δ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένη ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω παράμετρος ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπειδὴ $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 > ΗΕ^2 : ΕΑ^2$ (Εὐκλ. 5, 8) καὶ εἶναι $ΗΕ^2 = ΖΑ \times ΑΕ$ (θ. 11), εἶναι ἄρα $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 > ΖΑ \times ΑΕ : ΕΑ^2$, τουτέστι $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 > ΖΑ : ΑΕ$. Ἂς γίνῃ τώρα ὡς $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 = ΖΑ : ΑΘ$, καὶ διὰ τοῦ Θ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ ἡ ΘΛΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 = ΖΑ : ΑΘ = ΖΑ \times ΑΘ : ΑΘ^2$, καὶ εἶναι $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 = ΚΘ^2 : ΘΑ^2$, καὶ εἶναι $ΖΑ \times ΑΘ = ΘΛ^2$ (θ. 11), καὶ ὡς ἄρα $ΚΘ^2 : ΘΑ^2 = ΛΘ^2 : ΘΑ^2$. Εἶναι ἄρα $ΚΘ = ΘΛ$ (Εὐκλ. 5, 9)· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τῆς τομῆς ἄλλη εὐθεῖα.

Ἔστω τώρα ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος ἔστω ἡ ΑΒ, παράμετρος δὲ ἡ ΑΖ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΖ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἂς ἀχθῇ παράλληλος τεταγμένη ἡ ΑΓ.

H98 ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως ἀπ᾽ αὐτοῦ κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΜ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΜ, πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΝ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΝ τεμνέτω τὴν ΖΜ κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ξ τῇ ΖΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΘ, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΑΓ ἡ ΘΛΚ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΝ, ἔστιν ὡς ἡ ΝΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ, τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ, ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ. ὡς ἄρα ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ, τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ· μέση ἄρα ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΚΘ τῶν ΞΘΑ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ ἴσον διὰ τὴν τομήν· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΛ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

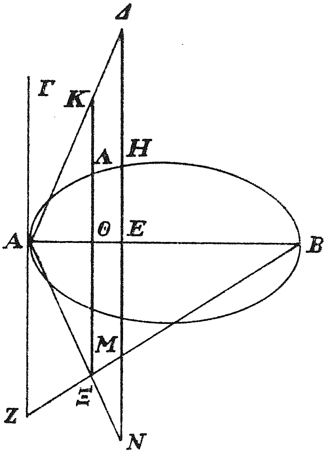


λγ΄

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ, καὶ τῇ ἀπολαμ-

Ὅτι μὲν λοιπὸν πίπτει ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἔχει ἀποδειχθῆ (θ. 17. Εὐκλ. 3, 16). Λέγω τώρα, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τῆς τομῆς δὲν θὰ παρεμπέση ἄλλη εὐθεῖα.

Διότι ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἃς παρεμπέση ὡς ἡ ΑΔ, καὶ ἃς ληφθῆ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Δ καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἃς καταχθῆ



τεταγμένως ἡ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε ἃς ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ ἡ ΕΜ. Καὶ ἐπειδὴ $HE^2 = AE \times EM$ (θ. 12 - 13), ἃς γίνῃ $\Delta E^2 = AE \times EN$, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῆ ἡ ΑΝ ἃς τέμνῃ τὴν ΖΜ κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ξ ἃς ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΑ ἡ ΞΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ ἡ ΘΛΚ. Ἐπειδὴ λοιπὸν $\Delta E^2 = AE \times EN$, εἶναι ὡς $NE : E\Delta = \Delta E : EA$ (Εὐκλ. 6, 17)· καὶ ὡς ἄρα $NE : EA = \Delta E^2 : EA^2$. Ἀλλὰ $NE : EA = \Xi\Theta : \Theta A$ καὶ $\Delta E^2 : EA^2 = K\Theta^2 : \Theta A^2$ (Εὐκλ. 6, 4). Ὡς ἄρα $\Xi\Theta : \Theta A = K\Theta^2 : \Theta A^2$· εἶναι ἄρα μέση ἀνάλογος ἡ ΚΘ τῶν ΞΘ, ΘΑ. Εἶναι ἄρα $\Theta K^2 = A\Theta \times \Theta\Xi$ (Εὐκλ. 6, 17)· εἶναι δὲ καὶ $\Lambda\Theta^2 = A\Theta \times \Theta\Xi$ διὰ τὴν τομὴν (θ. 12 - 13)· εἶναι ἄρα $K\Theta^2 = \Theta\Lambda^2$· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ παρεμπέση ἄρα, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τῆς τομῆς, ἄλλη εὐθεῖα.

33

Ἐὰν εἰς παραβολὴν ληφθῆ σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ καταχθῆ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου *βανομένη ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση ἐπ᾽ εὐθείας ἀπ᾽ ἄκρας αὐτῆς, ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.*

H100 *ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΕΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.*

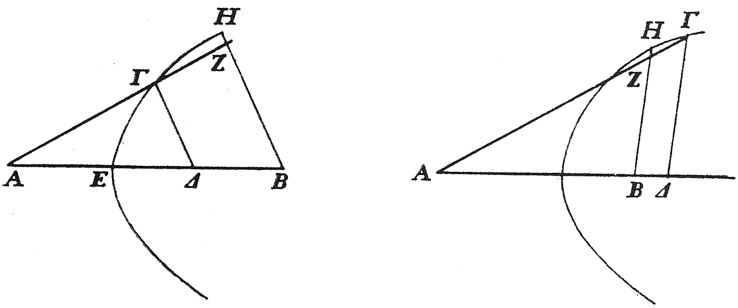
εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἡ ΒΕ πρὸς ΔΕ, ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΔ, τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐναλλὰξ ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴσης γὰρ οὔσης τῆς ΑΕ τῇ ΕΔ τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΑΔ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ τοῦ ἀπὸ ΒΑ ἐστὶν ἔλασσον· τῆς γὰρ ΑΒ οὐκ ἔστι διχοτομία τὸ Ε σημεῖον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ ἐντὸς πίπτει τῆς τομῆς· ἐφάπτεται ἄρα.

λδ′

᾽Εὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν

τομῆς τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς κορυφῆς ληφθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἴση, ἡ ἀπὸ τοῦ γινομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον τῆς τομῆς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.

Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ πρὸς τὴν ΕΔ ἂς ληφθῇ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΓ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη θὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς τομῆς.



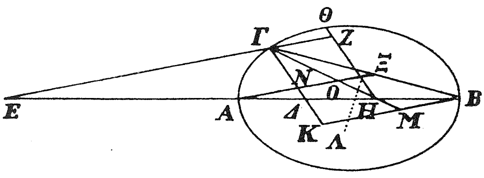
Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ὅτι θὰ πέσῃ ἐντὸς ὡς ἡ ΓΖ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{BH}^2 : \Gamma\Delta^2 > \mathrm{ZB}^2 : \Gamma\Delta^2$ (Εὐκλ. 5, 8), ἀλλ' ὡς μὲν $\mathrm{ZB}^2 : \Gamma\Delta^2 = \mathrm{BA}^2 : \mathrm{A}\Delta^2$ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ $\mathrm{HB}^2 : \Gamma\Delta^2 = \mathrm{BE} : \Delta\mathrm{E}$ (θ. 20), εἶναι ἄρα $\mathrm{BE} : \mathrm{E}\Delta > \mathrm{BA}^2 : \mathrm{A}\Delta^2$. Ἀλλὰ $\mathrm{BE} : \mathrm{E}\Delta = 4\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} : 4\mathrm{AE} \times \mathrm{E}\Delta$· εἶναι ἄρα καὶ $4\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} : 4\mathrm{AE} \times \mathrm{E}\Delta > \mathrm{BA}^2 : \mathrm{A}\Delta^2$. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $4\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} : \mathrm{AB}^2 > 4\mathrm{AE} \times \mathrm{E}\Delta : \mathrm{A}\Delta^2$· ὅπερ ἀδύνατον· διότι, ἐπειδὴ $\mathrm{AE} = \mathrm{E}\Delta$ εἶναι $4\mathrm{AE} \times \mathrm{E}\Delta = \mathrm{A}\Delta^2$ καὶ $4\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} < \mathrm{BA}^2$· διότι τὸ σημεῖον Ε δὲν εἶναι εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Δὲν θὰ πέσῃ ἄρα ἡ ΑΓ ἐντὸς τῆς τομῆς· ἄρα ἐφάπτεται.

34

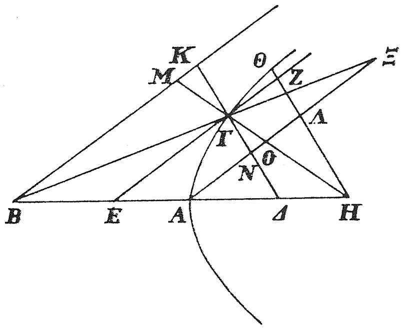
Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι H102 τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, τοῦτον ἔχῃ τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα, ἡ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ *ΑΒ*, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ *Γ*, καὶ ἀπὸ τοῦ *Γ* τεταγμένως ἤχθω ἡ *ΓΔ*, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς *ΔΑ*, οὕτως ἡ *ΒΕ* πρὸς *ΕΑ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΕΓ*. λέγω, ὅτι ἡ *ΓΕ* ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ὡς ἡ *ΕΓΖ*, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ *Ζ*, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ *ΗΖΘ*, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν *Α*, *Β* τῇ *ΕΓ* παράλληλοι αἱ *ΑΛ*, *ΒΚ*, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ *ΔΓ*, *ΒΓ*, *ΗΓ* ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ *Μ*, *Ξ*, *Κ* σημεῖα. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς *ΔΑ*, οὕτως ἡ *ΒΕ* πρὸς *ΕΑ*, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ *ΒΔ* πρὸς *ΔΑ*, οὕτως ἡ *ΒΚ* πρὸς *ΑΝ*, ὡς δὲ ἡ *ΒΕ* πρὸς *ΑΕ*, οὕτως ἡ *ΒΓ* πρὸς *ΓΞ*, τουτέστιν ἡ *ΒΚ* πρὸς *ΞΝ*, ὡς ἄρα ἡ *ΒΚ* πρὸς *ΑΝ*, ἡ *ΒΚ* πρὸς *ΝΞ*· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΝ* τῇ *ΝΞ*. τὸ ἄρα ὑπὸ *ΑΝΞ* μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ *ΑΟΞ*. ἡ *ΝΞ* ἄρα πρὸς *ΞΟ* μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *ΟΑ* πρὸς *ΑΝ*. ἀλλ' ὡς ἡ *ΝΞ* πρὸς *ΞΟ*, ἡ *ΚΒ* πρὸς *ΒΜ*· ἡ *ΚΒ* ἄρα πρὸς *ΒΜ* μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ *ΟΑ* πρὸς *ΑΝ*. τὸ ἄρα ὑπὸ *ΚΒ*, *ΑΝ* μεῖζόν



διάμετρον εὐθεῖα καὶ ὃν λόγον ἔχουσι μεταξύ των αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης μέχρι τῶν ἄκρων τοῦ πλαγίου ἄξονος τοῦ σχήματος, τοῦτον ἔχωσι τὰ τμήματα τοῦ πλαγίου ἄξονος, ὥστε τὰ πρὸς τὴν κορυφὴν τμήματα νὰ εἶναι ὁμόλογα, ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὸ ἐπὶ τοῦ πλαγίου ἄξονος ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς.



Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ ἂς γίνῃ ΒΔ : ΔΑ = ΒΕ : ΕΑ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΓ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς τέμνῃ τὴν τομήν, ὡς ἡ ΕΓΖ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπ' αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΗΖΘ, καὶ ἂς ἀχθῶσι διὰ τῶν Α, Β παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΓ αἱ ΑΛ, ΒΚ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, ΒΓ, ΗΓ ἂς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων Μ, Ξ, Κ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΔ : ΔΑ = ΒΕ : ΕΑ, ἀλλὰ ὡς μὲν ΒΔ : ΔΑ = ΒΚ : ΑΝ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ ΒΕ : ΑΕ = ΒΓ : ΓΞ = ΒΚ : ΞΝ (Εὐκλ. 6, 2 καὶ 6, 4), θὰ εἶναι ἄρα ΒΚ : ΑΝ = ΒΚ : ΝΞ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα ΑΝ = ΝΞ (Εὐκλ. 5, 9). Εἶναι ἄρα ΑΝ x ΝΞ 〉 ΑΟ x ΟΞ. Εἶναι ἄρα ΝΞ : ΞΟ 〉 ΟΑ : ΑΝ. Ἀλλὰ ΝΞ : ΞΟ = ΚΒ : ΒΜ (Εὐκλ. 6, 4)· εἶναι ἄρα ΚΒ : ΒΜ 〉 ΟΑ : ΑΝ. Ἑπομένως ΚΒ x

H104 ἔστι τοῦ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ. ὥστε τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΝΑΔ τριγώνων, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. ἐναλλὰξ τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΓ τέμνει τὴν τομήν· ἐφάπτεται ἄρα.

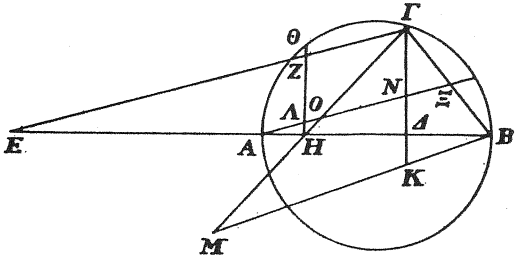
λε΄

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ἴσην ἀπολήψεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῇ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΒ.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἄνισος αὐτῇ, καὶ τῇ ΑΗ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω

ΑΝ $\rangle$ ΜΒ x ΑΟ. Ὥστε ΚΒ x ΑΝ : ΓΕ² $\rangle$ ΜΒ x ΑΟ : ΓΕ² (Εὐκλ. 5, 8). Ἀλλ' ὡς μὲν ΚΒ x ΑΝ : ΓΕ² = ΒΔ x ΔΑ : ΔΕ², διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΝΑΔ, ὡς δὲ ΜΒ x ΑΟ : ΓΕ² = ΒΗ x ΗΑ : ΗΕ²· εἶναι ἄρα ΒΔ x ΔΑ : ΔΕ² $\rangle$ ΒΗ x ΗΑ : ΗΕ². Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ΒΔ x ΔΑ : ΑΗ x ΒΗ $\rangle$ ΔΕ² : ΕΗ². Ἀλλ' ὡς μὲν ΒΔ x ΔΑ : ΑΗ x ΗΒ = ΓΔ²: ΗΘ² (θ. 21), ὡς



δὲ ΔΕ² : ΕΗ² = ΓΔ² : ΖΗ² (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ἄρα ΓΔ² : ΘΗ² $\rangle$ ΓΔ² : ΖΗ². Εἶναι ἄρα ΘΗ $\langle$ ΖΗ (Εὐκλ. 5, 8)· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν τέμνει ἄρα ἡ ΕΓ τὴν τομήν· ἐφάπτεται ἄρα.

35

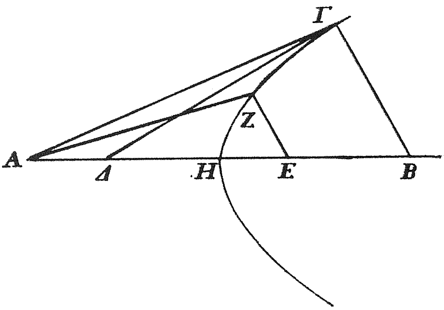
Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται παραβολῆς συναντῶσα τὴν διάμετρον ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὅσον καὶ ἡ κορυφὴ τῆς τομῆς ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς τόπον οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα θὰ παρεμπέσῃ.

Ἔστω παραβολὴ τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἀναχθῇ τεταγμένως ἡ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ. Λέγω, ὅτι εἶναι ἡ ΑΗ = ΗΒ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἔστω ἄνισος πρὸς αὐτήν, καὶ ἔστω ΑΗ = ΗΕ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΖ. ἡ ΑΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· ὅπερ ἀδύνατον· δυοῖν γὰρ ἔσται εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἴση ἄρα.

λέγω δή, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

H106 εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΗΔ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΕΖ. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται αὐτῆς. ὥστε συμπεσεῖται τῇ ΔΓ, καὶ δυοῖν εὐθειῶν ἔσται τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.



λϛʹ

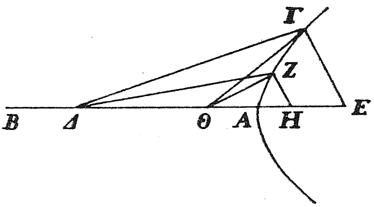
Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἴδους πλευρᾷ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης ἡ ΑΖ. Ἡ ΑΖ ἄρα ἐκβαλλομένη θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ (θ. 33)· ὅπερ ἀδύνατον· διότι τότε θὰ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἔχουσαι τὰ αὐτὰ πέρατα (Εὐκλ. κοιναὶ ἔνν. 9)· δὲν εἶναι ἄρα ἄνισος ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ· εἶναι ἄρα ἴση.

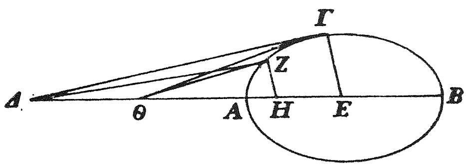
Λέγω τώρα, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα θὰ παρεμπέσῃ.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς παρεμπέσῃ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστω ΗΔ = ΗΕ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ τεταγμένως ἡ ΕΖ. Ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἄρα ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς (θ. 33)· ἐκβαλλομένη ἄρα θὰ πέσῃ ἐκτὸς αὐτῆς. Ὥστε θὰ συναντήσῃ τὴν ΔΓ, καὶ θὰ ὑπάρχωσι δύο εὐθεῖαι ἔχουσαι τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. Δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄρα μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ΑΓ ἄλλη εὐθεῖα.

36

Ἐὰν εὐθεῖά τις ἐφάπτηται ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συναντῶσα τὸν πλάγιον ἄξονα τοῦ σχήματος, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα τεταγμένως, θὰ εἶναι ὡς ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης μέχρι τοῦ πέρατος τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς ἐφαπτομένης μέχρι τοῦ ἄλλου πέρατος τοῦ πλαγίου ἄξονος, οὕτως ἡ ἀπόστασις





πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

H108 *ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ.*

εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΑ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΗΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα συμπεσεῖται τῇ ΓΔ. δυοῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν· ὅπερ ἄτοπον.

λέγω, ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΓΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΑ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΗΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΘΓ. δυοῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔσται· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

λζʹ

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ ἀπὸ τῆς κατηγμένης μέχρι τοῦ πέρατος τοῦ πλαγίου ἄξονος πρὸς τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κατηγμένης μέχρι τοῦ ἄλλου πέρατος τοῦ ἄξονος τούτου, ὥστε αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ νὰ εἶναι συνεχεῖς καὶ εἰς τὸν τόπον τὸν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς τοῦ κώνου δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΕ. Λέγω, ὅτι εἶναι ΒΕ : ΕΑ = ΒΔ : ΔΑ.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, ἔστω ὅτι εἶναι ΒΔ : ΔΑ = ΒΗ : ΗΑ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ τεταγμένως ἡ ΗΖ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἐπιζευγνυμένη ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς (θ. 34)· ἐκβαλλομένη ἄρα θὰ συναντήσῃ τὴν ΓΔ· ὑπάρχουσιν ἄρα δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον (Εὐκλ. κοιν. ἔνν. 9).

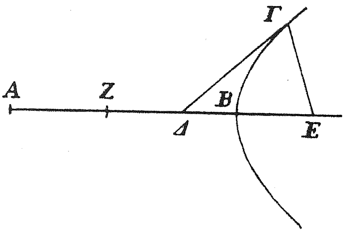
Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.

Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς παρεμπέσῃ ὡς ἡ ΓΘ, καὶ ἂς γίνῃ ΒΘ : ΘΑ = ΒΗ : ΗΑ, καὶ ἂς ἀνυψωθῇ τεταγμένως ἡ ΗΖ· ἡ εὐθεῖα ἄρα ἡ ἐπιζευγνυμένη ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὸ Ζ θὰ συναντήσῃ τὴν ΘΓ. Θὰ εἶναι ἄρα δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ παρεμπέσῃ ἄρα εἰς τὸν τόπον, τὸν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, ἄλλη εὐθεῖα.

37

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κατηγμένης μέχρι τοῦ κέντρου τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς ἐφα-

τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς H110 *ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης τετράγωνον, ὃν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν.*



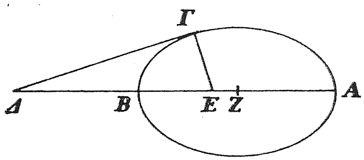
ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΕ, κέντρον δὲ ἔστω τὸ Ζ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΖΒ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΕ, ἔσται, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ. συνθέντι ἄρα ἐστίν, ὡς συναμφότερος ἡ ΑΔ, ΔΒ πρὸς ΔΒ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΑΕ, ΕΒ πρὸς ΕΒ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση· ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἐροῦμεν· ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΕ, ΕΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΖΒ πρὸς ΖΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΖΔ τῷ ἀπὸ ΖΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ, τουτέστιν ἡ ΑΖ πρὸς ΔΒ, ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ· συνθέντι, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΕΔ. ἔστι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύ-

πτομένης μέχρι τοῦ κέντρου τῆς τομῆς θὰ σχηματίσῃ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς μέχρι τῆς τομῆς, μετὰ δὲ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης θὰ περιέχῃ χωρίον ἔχον λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον. (Εἰς τὴν ὑπερβολὴν κέντρον τῆς τομῆς εἶναι τὸ σημεῖον διχοτομίας τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν δύο κορυφῶν τῶν κλάδων τῆς ὑπερβολῆς).

Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΕ, κέντρον δὲ ἔστω τὸ Ζ. Λέγω, ὅτι τὸ ΔΖ x ΖΕ = ΖΒ², καὶ ΔΕ x ΕΖ : ΕΓ² = πλάγιος ἄξων: παράμετρος.

Διότι ἐπειδὴ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς καὶ ἡ ΓΕ ἔχει καταχθῇ τεταγμένως, θὰ εἶναι ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΒ (θ. 36). Διὰ συνθέσεως ἄρα εἶναι ΑΔ + ΔΒ : ΔΒ = ΑΕ + ΕΒ = ΕΒ (Εὐκλ. 5, 18). Ἂς λάβωμεν τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων ὅρων τῆς ἀναλογίας (Εὐκλ. 5, 15)· ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς θὰ εἴπωμεν· ὅτι 1/2 (ΑΕ + ΕΒ) = ΖΕ καὶ 1/2ΑΒ = ΖΒ· εἶναι ἄρα ΖΕ: ΕΒ = ΖΒ : ΖΔ. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι ΕΖ:ΖΒ = ΖΒ:ΖΔ (Εὐκλ. 5, 19 πόρ.)· εἶναι ἄρα ΕΖ x ΖΔ = ΖΒ² (Εὐκλ. 6, 17). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΖΕ : ΕΒ = ΖΒ : ΒΔ = ΑΖ : ΔΒ, ἐναλλὰξ



εἶναι ΑΖ : ΖΕ = ΔΒ : ΒΕ (Εὐκλ. 5, 16)· διὰ συνθέσεως εἶναι ΑΕ : ΕΖ = ΔΕ : ΕΒ (Εὐκλ. 5, 18)· ὥστε ΑΕ x ΕΒ = ΖΕ x ΕΔ (Εὐκλ. 6, 16). Εἶναι δὲ ΑΕ x ΕΒ : ΓΕ² = πλάγιος ἄξων: παράμετρος (θ. 21)· καὶ ὡς ἄρα ΖΕ x ΕΔ : ΓΕ² = πλάγιος ἄξων: παράμετρος. Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου θὰ εἴπωμεν κλου· ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΔ, ΔΒ ἡμίσειά ἐστιν H112 ἡ ΔΖ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΕ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΖ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἔσται. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

λη'

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου τετραγώνῳ, μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

H114 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΗΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΗΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω τῆς τομῆς ἡ ΕΛΖ συμπίπτουσα τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Ζ, παράλληλος δὲ ἔστω τῇ ΑΒ ἡ ΘΕ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΗΘ ὅτι $1/2(\text{ΑΔ}+\text{ΔΒ}) = \text{ΔΖ}$, καὶ $1/2\text{ΑΒ} = \text{ΖΒ}$· εἶναι ἄρα $\text{ΖΔ} : \text{ΔΒ} = \text{ΖΒ} : \text{ΒΕ}$. Δι' ἀναστροφῆς ἄρα εἶναι $\text{ΔΖ} : \text{ΖΒ} = \text{ΒΖ} : \text{ΖΕ}$ (Εὐκλ. 5, 19 πόρ). Εἶναι ἄρα $\text{ΔΖ} \times \text{ΖΕ} = \text{ΒΖ}^2$ (Εὐκλ. 6, 17). Ἀλλὰ τὸ μὲν $\text{ΔΖ} \times \text{ΖΕ} = \text{ΔΕ} \times \text{ΕΖ} + \text{ΖΕ}^2$ (Εὐκλ. 2, 3). τὸ δὲ $\text{ΒΖ}^2 = \text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ} + \text{ΖΕ}^2$ (Εὐκλ. 2, 5). Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΕΖ^2· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα $\text{ΔΕ} \times \text{ΕΖ}$ = πρὸς τὸ ὑπόλοιπον $\text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ}$. Θὰ εἶναι ἄρα $\text{ΔΕ} \times \text{ΕΖ} : \text{ΓΕ}^2 = \text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ} : \text{ΓΕ}^2$ (Εὐκλ. 5, 7). Ἀλλὰ $\text{ΑΕ} \times \text{ΕΒ} : \text{ΓΕ}^2$ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος (θ. 21). Ὡς ἄρα $\text{ΔΕ} \times \text{ΕΖ} : \text{ΕΓ}^2$ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος.

38

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου συναντᾷ τὴν δευτέραν (συζυγῆ) διάμετρον καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης μέχρι τοῦ κέντρου τῆς τομῆς μετὰ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης μέχρι τοῦ κέντρου τῆς τομῆς θὰ σχηματίζῃ ὀρθογώνιον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεος τῆς δευτέρας διαμέτρου, μετὰ δὲ τῆς εὐθείας τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης θὰ σχηματίζῃ χωρίον ἔχον λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα.

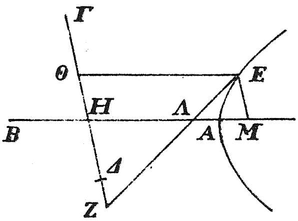
Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΗΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΗΔ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΕΛΖ συναντῶσα τὴν ΓΔ κατὰ τὸ Ζ, παράλληλος δὲ ἔστω πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΘΕ. Λέγω, ὅτι τὸ τῷ ἀπὸ ΗΓ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

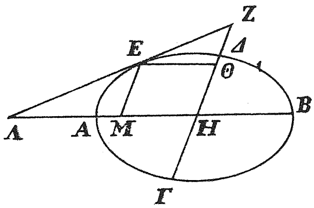
ἤχθω τεταγμένως ἡ ΜΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ᾽ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία ἡ ΒΑ πρὸς ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· καὶ τὰ τέταρτα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ, τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΜ πρὸς ΜΕ, τουτέστι πρὸς ΗΘ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΛΜ πρὸς ΜΕ. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΛ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΛ, τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. H116 καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΜΗΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΗΛ τῷ ἀπὸ ΗΑ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ.

πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΗΜ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΘΕ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΘΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

ὀρθογώνιον $ZH \times H\Theta = H\Gamma^2$ καὶ ὅτι εἶναι τὸ $H\Theta \times \Theta Z : \Theta E^2$ $=$ παράμετρος : πλάγιος ἄξων.

Ἄς ἀχθῇ τεταγμένως ἡ ΜΕ· εἶναι ἄρα $HM \times M\Lambda : ME^2 =$ πλάγιος ἄξων : παράμετρος (θ. 37). Ἀλλ' εἶναι πλάγιος ἄξων $BA : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta$: παράμετρος· καὶ ὡς ἄρα πλάγιος ἄξων: παράμετρος $= AB^2 : \Gamma\Delta^2$ (Εὐκλ. 5, ὁρισ. 9)· καὶ τὰ τέταρτα τούτων, τουτέστι $HA^2 : H\Gamma^2$ (Εὐκλ. 5, 15)· καὶ ὡς ἄρα $HM \times M\Lambda : ME^2 = HA^2 : H\Gamma^2$. Τὸ δὲ $HM \times M\Lambda : ME^2 = (HM : ME) \times$





$(\Lambda M : ME) = (HM : H\Theta) \times (\Lambda M : ME)$ (Εὐκλ. 1, 34). Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\Gamma H^2 : HA^2 = (EM : MH) \times (EM : M\Lambda) = (\Theta H : HM) \times (ZH : H\Lambda)$ (Εὐκλ. 6, 4). Τὸ ἄρα $H\Gamma^2 : HA^2 = (\Theta H : HM) \times (ZH : H\Lambda) = (ZH \times H\Theta) : (MH \times H\Lambda)$. Εἶναι ἄρα $ZH \times H\Theta : MH \times H\Lambda = \Gamma H^2 : HA^2$. Καὶ ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι $ZH \times H\Theta : \Gamma H^2 = MH \times H\Lambda : HA^2$. Εἶναι δὲ $MH \times H\Lambda = HA^2$ (θ. 37)· εἶναι ἄρα $ZH \times H\Theta = H\Gamma^2$.

Πάλιν, ἐπειδὴ εἶναι ὡς παράμετρος : πλάγιος ἄξων $= EM^2 : HM \times M\Lambda$, καὶ $EM^2 : HM \times M\Lambda = (EM : HM) \times (EM : M\Lambda) = (\Theta H : \Theta E) \times (ZH : H\Lambda) = (\Theta H : \Theta E) \times (Z\Theta : \Theta E) = (Z\Theta \times \Theta H : \Theta E^2)$ (Εὐκλ. 6, 4), εἶναι ἄρα $Z\Theta \times \Theta H : \Theta E^2 =$ παράμετρος : πλάγιος ἄξων.

⟨πόρισμα α′⟩

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ κατηγμένῃ πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἡ μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης.

ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΗΔ· ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ. καὶ τὰ διπλᾶ τῶν ἡγουμένων· ἔστι δὲ διπλασία τῆς ΗΖ συναμφότερος ἡ ΓΖ, ΖΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΗ τῇ ΗΔ, τῆς δὲ ΗΓ διπλασία ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΓΖΔ πρὸς ΖΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

⟨πόρισμα β′⟩

H118 *φανερὸν δὴ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὅτι ἡ ΕΖ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ἐάν τε ἴσον ᾖ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἐάν τε λόγον ἔχῃ τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ τὸν εἰρημένον· δειχθήσεται γὰρ ἀντιστρόφως.*

λθ′

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμέ-

⟨Πόρισμα 1⟩

Ὑπὸ τὰς αὐτὰς προϋποθέσεις νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς κατηγμένης, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ ἄλλου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης, πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἄλλου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης.

Διότι ἐπειδὴ ΖΗ x ΗΘ = ΗΓ^2, τουτέστι ΖΗ x ΗΘ = ΓΗ x ΗΔ· διότι ΓΗ = ΗΔ· θὰ εἶναι ἄρα ΖΗ x ΗΘ = ΓΗ x ΗΔ· εἶναι ἄρα ΖΗ : ΗΔ = ΓΗ : ΗΘ (Εὐκλ. 6, 16). Καὶ δι' ἀναστροφῆς εἶναι ΗΖ : ΖΔ = ΗΓ : ΓΘ (Εὐκλ. 5, 19 πόρ.). Καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων (Εὐκλ. 5, 15)· εἶναι δὲ 2ΗΖ = ΓΖ + ΖΔ, διότι ΓΗ = ΗΔ, καὶ 2ΗΓ = ΓΔ· ὡς ἄρα ΓΖ + ΖΔ: ΖΔ = ΔΓ : ΓΘ. Καὶ διὰ διαιρέσεως εἶναι ΓΖ : ΖΔ = ΔΘ : ΘΓ (Εὐκλ. 5, 17)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

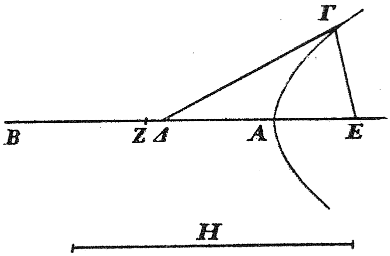
⟨Πόρισμα 2⟩

Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι ἡ ΕΖ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, εἴτε ἐὰν ΖΗ x ΗΘ = ΗΓ^2, εἴτε ἐὰν ΖΘ x ΘΗ : ΘΕ^2 ἔχει λόγον τὸν εἰρημένον· διότι τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀντιστρόφως.

39

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ληφθῇ ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία εἶναι μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἄλλη μεταξὺ τῆς νης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

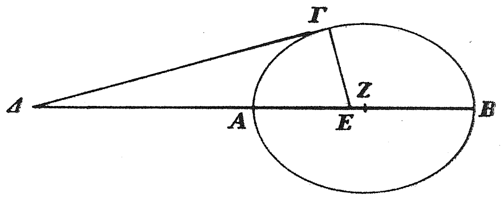
ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΖΕ, ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ.



ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΕΓ, Η. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ, Η πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τουτέστιν ἡ Η πρὸς ΕΓ,
H120 ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ἔστιν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΕΓ, ἡ Η πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΕ πρὸς Η καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Η πρὸς ΕΔ, ἀλλ᾽ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς Η, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς ΔΕ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν καὶ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ.

κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ ἔχῃ πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον (γινόμενον λόγων) καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἄλλη ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΕ. Λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν μίαν τῶν ΖΕ, ΕΔ ἔχει λόγον πρὸς τὸν συγκείμενον καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ παράμετρος πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα, καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἄλλη ἐκ τῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ.

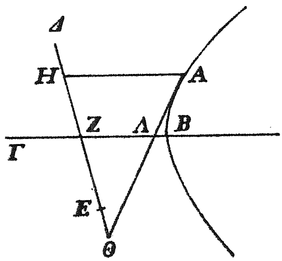


Διότι ἔστω $ZE \times E\Delta = E\Gamma \times H$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς $ZE \times E\Delta : \Gamma E^2 =$ πλάγιος ἄξων : παράμετρος (θ. 37), εἶναι δὲ $ZE \times E\Delta = \Gamma E \times H$, εἶναι ἄρα $\Gamma E \times H : \Gamma E^2$, τουτέστιν $H : E\Gamma =$ πλάγιος ἄξων : παράμετρος. Καὶ ἐπειδὴ $ZE \times E\Delta = \Gamma E \times H$, εἶναι $EZ : E\Gamma = H : E\Delta$ (Εὐκλ. 6, 16). Καὶ ἐπειδὴ $\Gamma E : E\Delta = (\Gamma E : H) \times (H : E\Delta)$, ἀλλ' εἶναι ὡς μὲν $\Gamma E : H =$ παράμετρος : πλάγιος ἄξων, ὡς δὲ $H : \Delta E = ZE : E\Gamma$, θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ $\Gamma E : E\Delta$ λόγον ἴσον (πρὸς τὸν συγκείμενον καὶ ἐκ τοῦ λόγου), τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ παράμετρος : πλάγιον ἄξονα ἐπὶ $ZE : E\Gamma$. (συγκείμενος λόγος = γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων λόγων).

μʹ

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην.

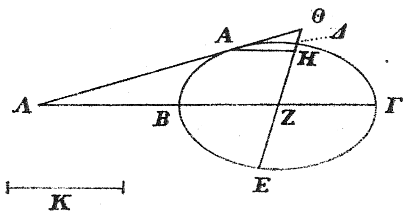
ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ $BZ\Gamma$, δευτέρα δὲ ἡ ΔZE, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ $\Theta\Lambda A$, καὶ τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ AH. λέγω, ὅτι ἡ AH πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΘH, ZH τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἡ ἑτέρα τῶν ΘH, ZH πρὸς τὴν HA.



H122 ἔστω τῷ ὑπὸ ΘHZ ἴσον τὸ ὑπὸ HA, K. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ὑπὸ ΘHZ πρὸς τὸ ἀπὸ HA, τῷ δὲ ὑπὸ ΘHZ ἴσον τὸ ὑπὸ HA, K, καὶ τὸ ὑπὸ HA, K ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ HA, τουτέστιν ἡ K πρὸς AH, ἔστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἐπεὶ ἡ AH πρὸς HZ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ AH πρὸς K καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ K πρὸς HZ, ἀλλʼ ὡς μὲν ἡ HA πρὸς K, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ ἡ K πρὸς HZ, ἡ ΘH πρὸς HA διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΘHZ τῷ ὑπὸ AH, K, ἡ AH

40

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου συναντᾷ τὴν δευτέραν διάμετρον καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ληφθῇ ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων, ἡ μὲν μία εἶναι μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, θὰ ἔχῃ πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον, καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἄλλη ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην.



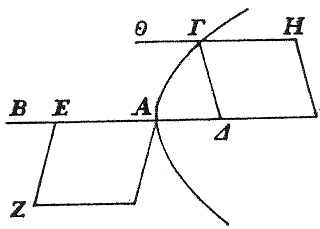
Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖΓ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΔΖΕ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη ἡ ΘΛΑ καὶ πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν μίαν ἐκ τῶν ΘΗ, ΖΗ θὰ ἔχῃ λόγον τὸν συγκείμενον καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ πλάγιος ἄξων πρὸς τὴν παράμετρον καὶ ἡ ἄλλη ἐκ τῶν ΘΗ, ΖΗ πρὸς τὴν ΗΑ.

Ἔστω ΘΗ x ΗΖ = ΗΑ x Κ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι παράμετρος : πλάγιος ἄξων = ΘΗ x ΗΖ : ΗΑ² (θ. 38), πρὸς δὲ τὸ ΘΗ x ΗΖ = ΗΑ x Κ, εἶναι ἄρα καὶ ΗΑ x Κ : ΗΑ², τουτέστιν Κ : ΗΑ = παράμετρος : πλάγιος ἄξων. Καὶ ἐπειδὴ ΑΗ : ΗΖ = συγκείμενον λόγον (ΑΗ : Κ) x (Κ : ΗΖ), ἀλλὰ ὡς μὲν ΗΑ : Κ = πλάγιος ἄξων : παράμετρος, ὡς δὲ Κ : ΗΖ = ΘΗ : ΗΑ, ἐπειδὴ ΘΗ x ΗΖ = ΑΗ x Κ (Εὐκλ. 6, 16), εἶναι ἄρα ΑΗ :

ἄρα πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΘ πρὸς ΗΑ.

μα'

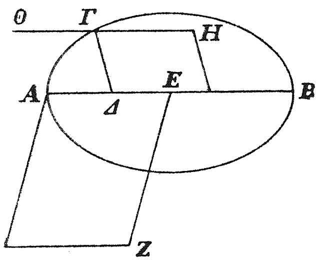
Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖα καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπό τε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀναγραφῇ εἴδη παραλληλόγραμμα ἰσογώνια, ἔχῃ δὲ ἡ κατηγμένη πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευράν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους τῆς τομῆς ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου
H124 εἴδει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει.



ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΓΔ ἰσογώνια εἴδη ἀναγεγράφθω τὰ ΑΖ, ΔΗ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ τὸν συγκείμενον ἐχέτω λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΖ, ΗΖ = συγκείμενον λόγον (γινόμενον) τοῦ λόγου πλάγιος ἄξων: παράμετρος ἐπὶ ΗΘ : ΗΑ.

41

Ἐὰν εἰς ὑπερβολὴν ἢ ἔλλειψιν ἢ περιφέρειαν κύκλου εὐθεῖα καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου (ἀκτῖνος διὰ τὸν κύκλον) ἀναγραφῶσι παραλληλόγραμμα σχήματα ἰσογώνια, ἔχῃ δὲ ἡ κατηγμένη πλευρὰ πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ σχήματος λόγον τὸν συγκείμενον καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ σχήματος, καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος τῆς τομῆς πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα, τὸ σχῆμα τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης σχήματος, ἀπὸ τοῦ σχήματος τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης σχήματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σχῆμα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.



Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΓΔ ἂς ἀναγραφῶσι ἰσογώνια σχήματα τὰ ΑΖ, ΔΗ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ ἂς ἔχῃ λόγον τὸν συγκείμενον καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐκ τοῦ λόγου τῆς παραμέτρου πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα. Λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ σχῆμα τὸ ὅμοιον πρὸς

ΗΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ ὅμοιον τῷ ΑΖ μετὰ τοῦ ΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ.

πεποιήσθω γάρ, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἀλλʼ ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΘ, ὡς δὲ ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ τῷ ὑπὸ ΔΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τουτέστιν ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ἔτι δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ. κοι-
H126 νὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΓΘ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ λόγος λοιπῷ τῷ τῆς ΘΓ πρὸς ΓΗ λόγῳ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἀλλʼ ὡς μὲν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΓΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΒΔΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ, τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΑ· ἰσογώγώνια γάρ ἐστι καὶ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς ΗΓ πρὸς ΑΕ καὶ τῆς ΓΔ πρὸς ΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ΗΔ πρὸς ΑΖ.

λεκτέον τοίνυν ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς· [ὡς πάντα πρὸς πάντα, ἓν πρὸς ἓν] ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν σχημάτων ΑΖ, ΗΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ σχῆμα, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖ, μετὰ τοῦ ΗΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΖ.

Διότι ἂς γίνη, ὡς παράμετρος : πλάγιος ἄξων = ΔΓ : ΓΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ΔΓ : ΓΘ = παράμετρος : πλάγιος ἄξων, ἀλλὰ ΔΓ : ΓΘ = ΔΓ² : ΔΓ x ΓΘ, ὡς δὲ παράμετρος: πλάγιος ἄξων = ΔΓ² : ΒΔ x ΔΑ, εἶναι ἄρα ΒΔ x ΔΑ =ΔΓ x ΓΘ (Εὐκλ. 5, 9). Καὶ ἐπειδὴ ΔΓ : ΓΗ ἔχει λόγον (τὸν συγκείμενον) ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν λόγων (ΑΕ : ΕΖ) x (παράμετρος : πλάγιος ἄξων), τουτέστιν ΔΓ : ΓΘ, ἀκόμη δὲ ἡ ΔΓ : ΓΗ ἔχει λόγον (τὸν συγκείμενον) ἴσον μὲ τὸ γινόμενον (ΔΓ : ΓΘ) x (ΘΓ : ΓΗ), ὁ συγκείμενος ἄρα λόγος (ΑΕ : ΕΖ) x (ΔΓ: ΓΘ) εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν συγκείμενον λόγον (ΔΓ : ΓΘ) x (ΘΓ x ΓΗ). Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ κοινὸς λόγος ΓΔ : ΓΘ· ὁ ὑπόλοιπος ἄρα λόγος ΑΕ : ΕΖ πρὸς τὸν ὑπόλοιπον λόγον ΘΓ : ΓΗ εἶναι ὁ αὐτός. Ἀλλ' ὡς μὲν ΘΓ : ΓΗ = ΘΓ x ΓΔ : ΗΓ x ΓΔ, ὡς δὲ ΑΕ : ΕΖ = ΑΕ² : ΑΕ x ΕΖ· ὡς ἄρα ΘΓ x ΓΔ : ΗΓ x ΓΔ= ΕΑ² : ΑΕ x ΕΖ. Τὸ δὲ ΘΓ x ΓΔ ἐδείχθη ἴσον πρὸς τὸ ΒΔ x ΔΑ· ὡς ἄρα ΒΔ x ΔΑ : ΗΓ x ΓΔ = ΑΕ² : ΑΕ x ΕΖ. Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι ΒΔ x ΔΑ : ΑΕ²= ΗΓ x ΓΔ : ΑΕ x ΕΖ (Εὐκλ. 5, 16). Ὡς δὲ ΗΓ x ΓΔ : ΑΕ x ΕΖ = παραλληλόγραμμον ΔΗ : παραλ. ΖΑ· διότι εἶναι ἰσογώνια καὶ ἔχουσι λόγον τὸ γινόμενον τῶν λόγων (ΗΓ : ΑΕ) x (ΓΔ : ΕΖ)· καὶ ὡς ἄρα ΒΔ x ΔΑ : ΕΑ² = τὸ ΗΔ : πρὸς τὸ ΑΖ.

Τώρα πρέπει νὰ εἴπωμεν διὰ τὴν ὑπερβολήν· [ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, οὕτως ἕκαστος ἀριθμητὴς πρὸς ἕκαστον παρονομαστὴν] (σημείωσις: τοῦτο ἐγράφη ἐσφαλμένως ὑπὸ τοῦ ἀντιγραφέως · τὸ ὀρθὸν εἶναι: διὰ συνθέσεως τοῦ προηγουμένου τύπου). Ἐκ τοῦ προηγουμένου λαμβάνομεν (ΒΔ x ΔΑ + ΑΕ²) : ΑΕ² = ΗΔ + ΑΖ : ΖΑ (Εὐκλ.

πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ· ὡς ἄρα τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ. τὸ ἀπὸ ΕΔ ἄρα εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΗΔ, ΑΖ.

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐροῦμεν· ἐπεὶ οὖν ὡς ὅλον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς ὅλον τὸ ΑΖ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΗ, καὶ λοιπόν ἐστι πρὸς λοιπόν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀπὸ δὲ H128 *τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, λοιπόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΖ. ἀλλʼ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ τῇ ὑπεροχῇ, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ. μετὰ τοῦ ΔΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ.*

μβ′

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπʼ αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατη-

5, 18), τουτέστι $ΔΕ^2 : ΕΑ^2 = ΗΔ + ΑΖ : ΑΖ$ (Εὐκλ. 2, 6). Ὡς δὲ $ΕΔ^2 : ΕΑ^2 =$ τὸ σχῆμα ἀπὸ ΕΔ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον πρὸς τὸ ΑΖ : ΑΖ (Εὐκλ. 6, 20 πόρ.)· ὡς ἄρα ΗΔ + ΑΖ : ΑΖ = τὸ σχῆμα ἀπὸ ΕΔ τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖ : ΑΖ. Τὸ σχῆμα ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΔ τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖ = ΗΔ + ΑΖ.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου θὰ εἴπωμεν· ἐπειδὴ $ΑΕ^2 : ΑΖ =$ τὸ ἀφαιρεθὲν ΑΔ x ΔΒ : τὸ ἀφαιρεθὲν ΔΗ (Εὐκλ. 5, 16), τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι πρὸς τὸ ὑπόλοιπον=ὅλον: ὅλον (Εὐκλ. 5, 19). Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $ΕΑ^2$ τὸ ΒΔ x ΔΑ, ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ $ΔΕ^2$ (Εὐκλ. 2, 5)· ὡς ἄρα $ΔΕ^2$ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, τὴν ὁποίαν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως εἶναι τὸ $ΑΕ^2 : ΑΖ$. Ἀλλὰ $ΑΕ^2 : ΑΖ = ΔΕ^2 :$ τὸ ἀπὸ ΔΕ σχῆμα τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖ (Εὐκλ. 6, 20 πόρ. καὶ 5, 16)· ὡς ἄρα $ΔΕ^2 : ΑΖ - ΔΗ = ΔΕ^2 :$ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ σχῆμα, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖ. Εἶναι ἄρα τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖ = ΑΖ - ΔΗ (Εὐκλ. 5, 9). Μετὰ τοῦ ΔΗ ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΖ.

42

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη παραβολῆς συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἀφοῦ δὲ ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι καὶ ἡ μία μὲν ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι παράλληλος τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ἄλλη δὲ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐκ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ σχηματιζόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ἔχον πλευρὰν μένης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

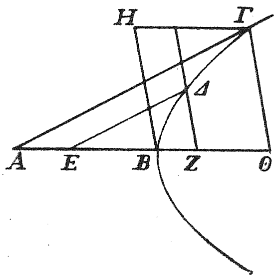
ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΘ, καὶ ἀπό τινος σημείου τυχόντος κατήχθω ἡ ΔΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΖ ἡ ΓΗ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΘΓ ἡ ΒΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως
H130 κατῆκται ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΘ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆς ΘΒ. τὸ ΑΘΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ διὰ τὴν τομήν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΗ παραλληλόγραμμον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ΑΘΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΘ τρίγωνον τῷ ΗΘ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

μγʹ

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην καὶ τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς παραλλήλου μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς.

Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, καὶ ἃς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ ἃς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΓΘ, καὶ ἀπό τινος τυχόντος σημείου ἃς καταχθῇ ἡ ΔΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ἃς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΑΓ παράλληλος ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΖ ἡ ΓΗ, διὰ δὲ τοῦ Β παράλληλος πρὸς τὴν ΘΓ ἡ ΒΗ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖ.



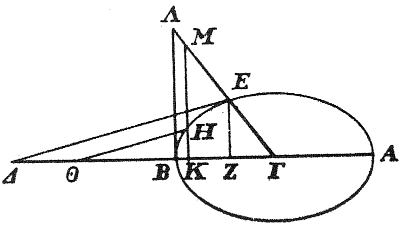
Διότι, ἐπειδὴ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ κατήχθη τεταγμένως ἡ ΓΘ θὰ εἶναι ΑΒ $=$ΒΘ· εἶναι ἄρα ΑΘ $=2$ΘΒ. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΑΘΓ $=$ παραλληλόγραμμον ΒΓ (Εὐκλ. 1, 41). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς $\Gamma\Theta^2 : \Delta Z^2 = \Theta B : BZ$, διὰ τὴν τομὴν (θ. 20), ἀλλὰ ὡς μὲν $\Gamma\Theta^2 : \Delta Z^2 =$ τρίγωνον ΑΓΘ : τρίγωνον ΕΔΖ (Εὐκλ. 6, 19), ὡς δὲ ΘΒ : ΒΖ $=$ παραλληλόγραμμον ΗΘ: παραλληλόγραμμον ΗΖ (Εὐκλ. 6, 1), εἶναι ἄρα ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΘ : τὸ τρίγωνον ΕΔΖ $=$ τὸ παραλληλόγραμμον ΘΗ : τὸ παραλληλόγραμμον ΖΗ. Ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς τὸ τρίγωνον ΑΘΓ : τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓ $=$ τὸ τρίγωνον ΕΔΖ : τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖ. Εἶναι δὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΘ $=$ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΘ· εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΔΖ $=$πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖ.

43

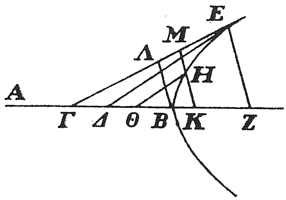
Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ

ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου
H132 *πρὸς τῷ κέντρῳ τριγώνου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.*

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΚ, διὰ δὲ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΛ. λέγω, ὅτι τὸ ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΓΛΒ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΚΘ τριγώνῳ.



ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΕΔ, κατηγμένη δέ ἐστιν ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ· ἕξει ἄρα ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΒΛ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀχθῇ πρὸς αὐτὴν διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος συναντῶσα τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν, ἀφοῦ δὲ ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς, ἀχθῶσι ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία μὲν νὰ εἶναι παράλληλος τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ἄλλη δὲ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ σχηματιζόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἀποτέμνει ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς, κατὰ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ὅμοιον πρὸς τὸ ἀποτεμνόμενον, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου πρὸς τὸ κέντρον τριγώνου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου σχηματιζόμενον τρίγωνον, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ἀποτεμνόμενον.

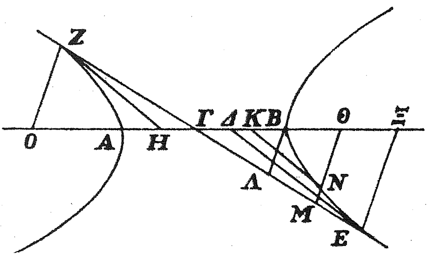


Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην παράλληλος ἡ ΗΘ, καὶ ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΗΚ, διὰ δὲ τοῦ Β ἂς ἀνυψωθῇ τεταγμένως ἡ ΒΛ. Λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον ΚΜΓ διαφέρει (ὑπερέχει) τοῦ τριγώνου ΓΛΒ κατὰ τὸ τρίγωνον ΗΚΘ.

Διότι ἐπειδὴ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΕΔ, εἶναι δὲ κατηγμένη ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον (τὸ γινόμενον) ἐκ τοῦ λόγου τῆς ΓΖ : ΖΕ καὶ τοῦ λόγου τῆς παραμέτρου πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα (θ. 39). Ἀλλὰ ὡς μὲν ΕΖ : ΖΔ $=$ ΗΚ : ΚΘ, ὡς δὲ ΓΖ : ΖΕ $=$ ΓΒ : ΒΛ (θ. 39)· θὰ ἔχῃ ἄρα ἡ ΗΚ : ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῆς ΒΓ : ΒΛ καὶ ἐκ τοῦ λόγου πλαγίαν. καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι τὸ ΓΚΜ τρίγωνον τοῦ ΒΓΛ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΘΚ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων τὰ αὐτὰ δέδεικται.

μδ'

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα H134 τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἑτέρας τομῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς, οὗ ἔτυχε σημείου, καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην ἀπὸ τῆς ἁφῆς τεταγμένως, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΖ, ΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΖΑ τομῆς τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΖΗ, τεταγμένως δὲ ἡ ΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ὡς ἡ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΟ παράλληλος ἡ ΒΛ, καὶ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ΒΕ τομῆς τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν τεταγμένως κατήχθω ἡ ΝΘ, τῇ δὲ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΚ. λέγω, τῆς παραμέτρου πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα. Καὶ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ τεσσαρακοστὸν πρῶτον θεώρημα, τὸ τρίγωνον ΓΚΜ διαφέρει (ὑπερέχει) τοῦ τριγώνου ΒΓΛ κατὰ τὸ τρίγωνον ΗΘΚ· διότι καὶ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων ἀπεδείχθησαν τὰ αὐτά.

44

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν ἀντικειμένων (ἑνὸς κλάδου ὑπερβολῆς) συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖά τις , καὶ πρὸς ταύτην διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἄλλης τομῆς ἀχθῇ παράλληλος συναντῶσα τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν, ἀφοῦ δὲ ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον, καταχθῶσιν (δύο) εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ ἄλλη δὲ παράλληλος πρὸς τὴν κατηγμένην ἀπὸ τῆς ἁφῆς τεταγμένως, τὸ σχηματιζόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἀποτέμνει ἡ κατηγμένη πρὸς τὸ κέντρον τῆς τομῆς, κατὰ τὸ ἐκ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τρίγωνον τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ἀποτεμνόμενον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι (ἀντικείμενοι κλάδοι ὑπερβολῆς) αἱ ΑΖ, ΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπό τινος σημείου ἐκ τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ΖΑ, τοῦ Ζ, ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΖΗ, τεταγμένως δὲ ἡ ΖΟ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΖ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη, ὡς ἡ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΟ ἡ ΒΛ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς ΒΕ τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἂς καταχθῇ τεταγμένως ἡ ΝΘ, πρὸς δὲ τὴν ΖΗ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΝΚ. Λέγω, ὅτι τὸ ὅτι τὸ ΘΚΝ τρίγωνον τοῦ ΓΜΘ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ.

διὰ γὰρ τοῦ Ε τῆς ΒΕ τομῆς ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΕΔ, τεταγμένως δὲ ἡ ΕΞ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΕΔ, τῇ ΖΗ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ. ἡ δὲ ΝΚ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΗ· καὶ τῇ ΕΔ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΝΚ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν
H136 ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΕ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, τεταγμένως δὲ ἡ ΕΞ, καὶ τῇ ΕΞ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΛ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, ἀφ' οὗ τεταγμένως μὲν κατῆκται ἡ ΝΘ, παράλληλος δὲ ἦκται τῇ ΔΕ ἡ ΚΝ, τὸ ἄρα ΝΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΜΓ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΒΓΛ τριγώνῳ· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ μγ' θεωρήματι δέδεικται.

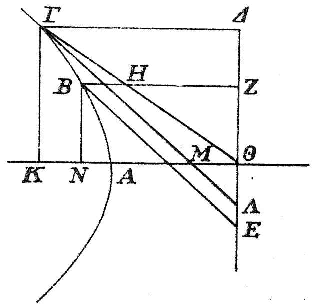
με'

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ληφθέντος δέ, οὗ ἔτυχεν, ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τρίγωνον ΘΚΝ εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου ΓΜΘ κατὰ τὸ τρίγωνον ΓΒΛ.

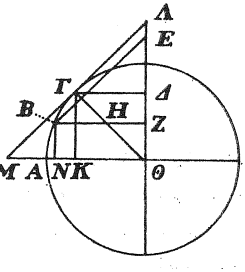
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Ε τῆς τομῆς ΒΕ ἐφαπτομένη ἡ ΕΔ, τεταγμένη δὲ ἡ ΕΞ. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ ΖΑ, ΒΕ εἶναι ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ διέρχεται ἡ ΖΓΕ, καὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΕΔ, ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ. Ἡ δὲ ΝΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ· εἶναι ἄρα παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΕΔ ἡ ΝΚ (Εὐκλ. 1, 30), ἡ δὲ ΜΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΕ εἶναι ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς εἶναι ἡ ΔΕ, τεταγμένως δὲ ἔχει ἀχθῇ ἡ ΕΞ, καὶ πρὸς τὴν ΕΞ εἶναι παράλληλος ἡ ΒΛ, καὶ ἔχει ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, ἀπὸ τοῦ ὁποίου τεταγμένως μὲν ἔχει καταχθῇ ἡ ΝΘ, παράλληλος δὲ ἔχει ἀχθῇ ἡ ΚΝ πρὸς τὴν ΔΕ, τὸ τρίγωνον ἄρα ΝΘΚ εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου ΘΜΓ κατὰ τὸ τρίγωνον ΒΓΛ (ΝΘΚ = ΘΜΓ — ΒΓΛ)· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὸ 43 θεώρημα.

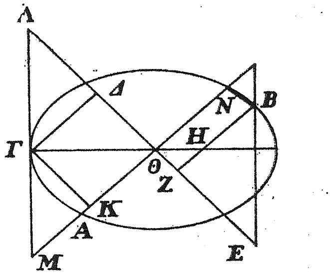
45

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου συναντᾷ τὴν δευτέραν διάμετρον καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖά τις ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην διάμετρον, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ εὐθεῖα, ἀφοῦ ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον, ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ ἄλλη παράλληλος πρὸς τὴν κατηγμένην, τὸ σχηματιζόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἀποτέμνει ἡ κατηγμένη πρὸς τὸ κέντρον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς εἶναι μεγαλύτερον κατὰ τὸ *τὸ κέντρον τῆς τομῆς, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς.*



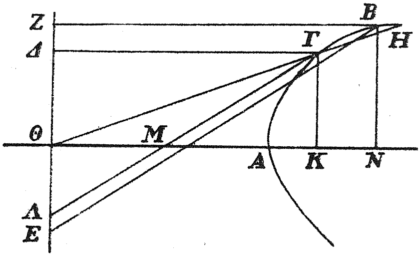
ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΘ, δευτέρα δὲ ἡ ΘΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν ΓΜΛ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΓΔ ἤχθω παρὰ τὴν ΑΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΓ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν ση-
H138 *μεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΒΖ παρὰ τὰς ΛΓ, ΓΔ. λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τοῦ ΗΘΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΛΓΘ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλεί-*



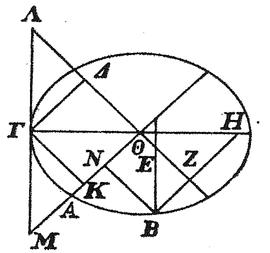


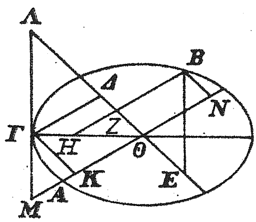
ψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ΖΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΛΘ.

ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΓΚ, ΒΝ παρὰ τὴν ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓΜ, κατῆκται δὲ ἡ ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς ΚΓ, καὶ τοῦ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς.



Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, ἡ ΑΒΓ, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΑΘ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΘΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν ΓΜΛ ἂς ἐφάπτηται κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΓΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΓ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἂς ἀχθῶσιν αἱ





ΒΕ, ΒΖ παράλληλοι πρὸς τὰς ΛΓ, ΓΔ. Λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ τρίγωνον ΒΕΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου ΗΘΖ κατὰ τὸ τρίγωνον ΛΓΘ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου (τὸ ΒΕΖ) μετὰ τοῦ ΖΗΘ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΓΛΘ.

Διότι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΚ, ΒΝ παράλληλοι πρὸς τὴν ΔΘ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΓΜ εἶναι ἐφαπτομένη, ἔχει δὲ καταχθῇ ἡ ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΘ θὰ ἔχῃ λόγον ἴσον πρὸς τὸν συγκείμενον

ὃν ἔχει τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΓΔ πρὸς ΔΛ· ἡ ΓΚ ἄρα πρὸς ΚΘ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΛ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἔστι τὸ ΓΔΛ τρίγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ εἶδος, τὸ δὲ ΓΚΘ, τουτέστι τὸ ΓΔΘ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ, τουτέστι τῆς ΔΘ· τὸ ΓΔΛ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΓΚΘ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ ΓΔΘ μετὰ τοῦ ΓΔΛ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν τοῦτο ἐδείχθη ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΔΛ τρίγωνον τοῦ ΓΚΘ ἤτοι τοῦ ΓΔΘ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, διαφέρει δὲ καὶ τῷ ΓΘΛ τριγώνῳ, ἴσον ἄρα τὸ ΓΘΛ τρί-
H140 γωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ τριγώνῳ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΖΕ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΓΔΛ, τὸ δὲ ΗΖΘ τῷ ΓΔΘ, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΖΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΝ κατηγμένης, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα πρότερον τὸ ΒΖΕ τοῦ ΗΘΖ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ· ὥστε καὶ τῷ ΓΛΘ.

μϛʹ

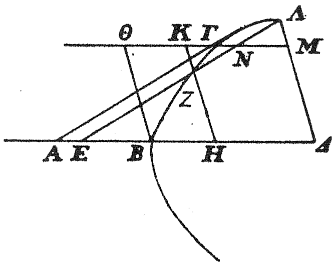
Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, ἡ διὰ τῆς ἁφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τέμνει.

(γινόμενον τῶν δύο λόγων) ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΓ, καὶ ἐκ τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ παράμετρος τοῦ σχήματος πρὸς τὸν πλάγιον ἄξονα (θ. 39)· ὡς δὲ ΜΚ : ΚΓ = ΓΔ : ΔΛ (Εὐκλ. 6, 4)· ἡ ΚΓ : ΚΘ ἄρα ἔχει λόγον ἴσον πρὸς τὸν (ΓΔ : ΔΛ) x (παράμετρος : πλάγιος ἄξων). Καὶ εἶναι τὸ τρίγωνον ΓΔΛ τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ, τὸ δὲ τρίγωνον ΓΚΘ, τουτέστι τὸ ΓΔΘ, εἶναι τὸ σχῆμα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ, τουτέστι τῆς ΔΘ· τὸ τρίγωνον ἄρα ΓΔΛ τοῦ τριγώνου ΓΚΘ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς εἶναι μεγαλύτερον κατὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τρίγωνον, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΛ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ τρίγωνον ΓΔΘ μετὰ τοῦ τριγώνου ΓΔΛ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ αὐτό· διότι τοῦτο ἐδείχθη καὶ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν εἰς τὸ 41 θεώρημα. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΓΔΛ διαφέρει τοῦ τριγώνου ΓΚΘ ἢ τοῦ ΓΔΘ κατὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τρίγωνον, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΛ, διαφέρει δὲ καὶ κατὰ τὸ ΓΘΛ τρίγωνον, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΘΛ ἴσον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ, τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΛ τρίγωνον (Εὐκλ. 1, 29). Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ μὲν τρίγωνον ΒΖΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΛ, τὸ δὲ ΗΖΘ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΘ, ἔχει ἄρα τὸν αὐτὸν λόγον. Καὶ εἶναι τὸ μὲν ΒΖΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης ΒΝ, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα (θ. 41) τὸ ΒΖΕ διαφέρει τοῦ ΗΘΖ κατὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ (τρίγωνον), τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΔΛ· ὥστε διαφέρει καὶ κατὰ τὸ τρίγωνον ΓΛΘ.

46

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη παραβολῆς συναντᾷ τὴν διάμετρον, ἡ ἀγομένη διὰ τῆς ἀφῆς παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον τὰς ἀγομένας εὐθείας εἰς τὴν τομήν, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τομῆς, παραλλήλους πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, τέμνει εἰς τὸ μέσον.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒΔ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΓΜ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΛΝΖΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΛΝ τῇ ΝΖ.



ἤχθωσαν τεταγμένως αἱ ΒΘ, ΚΖΗ, ΛΜΔ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΛΔ τρίγωνον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΕΖΗ τῷ
H142 ΒΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΜ παραλληλόγραμμον λοιπῷ τῷ ΛΖΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΜΔΗΖΝ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΖΝ τρίγωνον τῷ ΛΜΝ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΚΖ τῇ ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΖΝ τῇ ΛΝ.

μζ′

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, δίχα τεμεῖ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τυχὸν ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΝΟΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΞΝΖ, ΒΛ, ΞΜΚ. διὰ τὰ

Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒΔ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΘΓΜ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΑΓ παράλληλος ἡ ΛΝΖΕ. Λέγω, ὅτι εἶναι ἡ ΛΝ = ΝΖ.

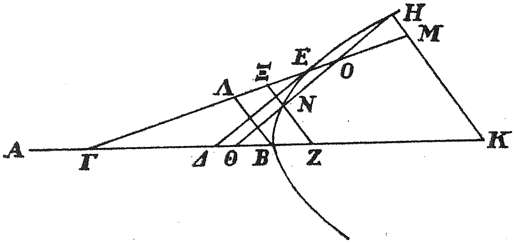
Ἂς ἀχθῶσι τεταγμένως αἱ ΒΘ, ΚΖΗ, ΛΜΔ. Ἐπειδὴ λοιπὸν συμφώνως πρὸς τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ 42 θεώρημα εἶναι τὸ τρίγωνον ΕΛΔ = παραλληλόγραμμον ΒΜ, τὸ δὲ ΕΖΗ = ΒΚ, τὸ ὑπόλοιπον ἄρα, τὸ παραλληλόγραμμον ΗΜ = πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τετράπλευρον ΛΖΗΔ. Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος, τὸ πεντάπλευρον ΜΔΗΖΝ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα, τὸ τρίγωνον ΚΖΝ = ΛΜΝ. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΛΜ· εἶναι ἄρα ΖΝ = ΛΝ (Εὐκλ. 6, 22 πόρ.).

47

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἀχθῇ εὐθεῖα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς τομῆς, αὕτη θὰ τέμνῃ εἰς τὸ μέσον τὰς εἰς τὴν τομὴν ἀγομένας εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

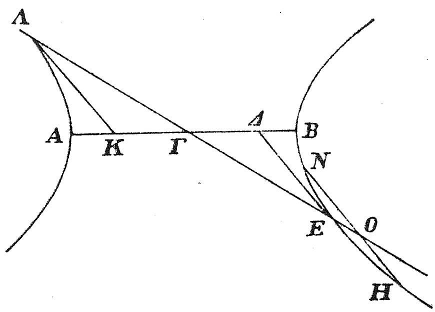
Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ καὶ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΘΝΟΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ΝΟ = ΟΗ.

Διότι ἂς καταχθῶσι τεταγμένως αἱ ΞΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ. Εἶναι δεδειγμένα ἄρα ἐν τῷ μγ΄ θεωρήματι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΘΝΖ H144 τρίγωνον τῷ ΛΒΖΞ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ ΛΒΚΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΗΚΖ τετράπλευρον λοιπῷ τῷ ΜΚΖΞ ἐστιν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΟΝΖΚΜ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΜΗ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΝΞΟ ἐστιν ἴσον. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

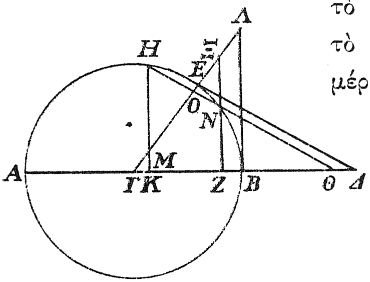


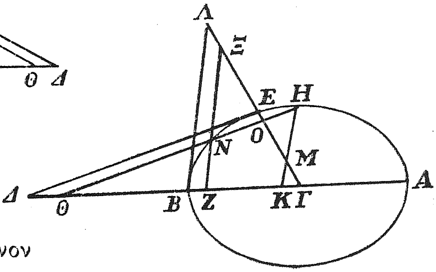
μη΄

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τέμῃ τὴν ἑτέραν τομήν, ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΛΚ παράλἄρα κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ 43 θεώρημα τὸ μὲν τρίγωνον ΘΝΖ = πρὸς τὸ τετράπλευρον ΛΒΖΞ, τὸ δὲ τρίγωνον ΗΘΚ = πρὸς τὸ τετράπλευρον ΛΒΚΜ· καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τετράπλευρον τὸ ΝΗΚΖ = πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΜΚΖΞ. Ἄς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος, τὸ πεντάπλευρον ΟΝΖΚΜ·





τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΜΝ = πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τὸ ΝΞΟ. Καὶ εἶναι ἡ ΜΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΝΞ· εἶναι ἄρα ἡ ΝΟ = ΟΗ (Εὐκλ. 6, 22 πόρ.).

48

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν ἀντικειμένων τομῶν (ἑνὸς κλάδου ὑπερβολῆς) συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου διερχομένη εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τέμνῃ τὴν ἄλλην τομήν, οἱαδήποτε ἄλλη εὐθεῖα ἂν ἀχθῇ εἰς τὴν ἄλλην τομὴν παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, θὰ τμηθῇ ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης εἰς τὸ μέσον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαί, τῶν ὁποίων διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἂς ἐφάπτηται τῆς τομῆς Α ἡ ΚΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΛΓ καὶ ἂς ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς Β τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν ἂς ἀχθῇ ληλος ἤχθω ἡ ΝΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ ἐστιν ἴση.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΕΔ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΛΚ παράλληλός ἐστιν. ὥστε καὶ τῇ ΝΗ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΝΗ, ἧς κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ ἐπέζευκται ἡ ΓΕ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος τῇ ΔΕ ἦκται ἡ ΝΗ, διὰ τὸ προδεδειγμένον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

H146

μθ'

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς πεπορισμένης εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΜΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔΝ, τεταγμένως δὲ ἀνήχθω ἡ ΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, εὐθεῖά τις ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΚΛΠ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστιν ὅτι διαμέτρου οὔσης τῆς ΔΛ ὀρθία ἐστὶν ἡ Η.

παράλληλος πρὸς τὴν ΛΚ ἡ ΝΗ. Λέγω, ὅτι ἡ ΝΟ = ΟΗ.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΕΔ· ἡ ΕΔ ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΚ (Εὐτόκιος εἰς τὸ θ. 44). Ὥστε εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΝΗ (Εὐκλ. 1, 30). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΒΝΗ εἶναι ὑπερβολή, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ Γ, καὶ ἡ ΔΕ εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ἔχει ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ, καὶ ἐλήφθη ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθη ἡ ΝΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ, διὰ τὸ προαποδειχθὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς (θ. 47) εἶναι ἡ ΝΟ = ΟΗ.

49

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη παραβολῆς συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν κατηγμένην τεταγμένως, καὶ γίνῃ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία θὰ ἀχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον, θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς πορισθείσης (κατὰ τὴν ὑπόθεσιν) εὐθείας καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς μέχρι τῆς ἁφῆς (τῆς τετμημένης).

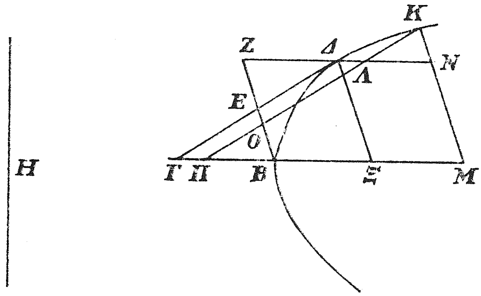
Ἔστω παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΜΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΔΝ, ἂς ἀνυψωθῇ δὲ τεταγμένως ἡ ΖΒ καὶ ἂς γίνῃ ὡς ΕΔ : ΔΖ = εὐθεῖά τις ἡ Η : 2ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Κ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ΚΛΠ. Λέγω, ὅτι τὸ $ΚΛ^2 = Η \times ΔΛ$, τουτέστιν ὅτι διαμέτρου οὔσης τῆς ΔΛ ἡ Η εἶναι παράμετρος (θ. 11).

κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΞ, ΚΝΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, τεταγμένως δὲ κατῆκται ἡ ΔΞ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΞ. ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΖΔ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον τῷ ΕΖΔ τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΕΒΜΝ σχῆμα·
H148 τὸ ἄρα ΔΓΜΝ τετράπλευρον τῷ ΖΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, τουτέστι τῷ ΚΠΜ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΛΠΜΝ τετράπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΛΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ὑπὸ Η, ΔΛ.

ν'

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ

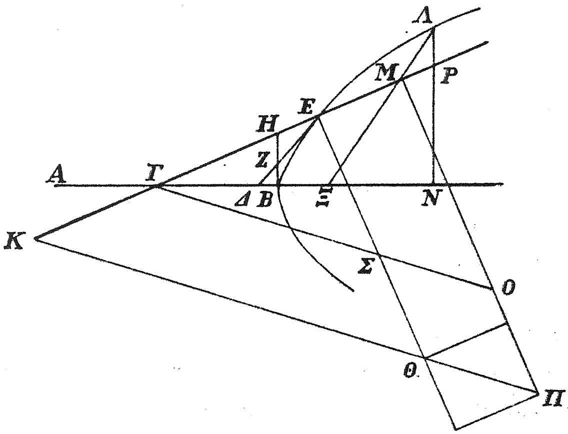
Διότι ἂς καταχθῶσι τεταγμένως αἱ ΔΞ, ΚΝΜ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ἔχει δὲ καταχθῆ τεταγμένως ἡ ΔΞ, εἶναι ΓΒ = ΒΞ (θ. 35). Ἡ δὲ ΒΞ = ΖΔ (Εὐκλ. 1, 34)· εἶναι ἄρα καὶ ΓΒ = ΖΔ. Ὥστε καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΒ = τρίγωνον ΕΖΔ (Εὐκλ. 6, 19). Ἂς προστεθῇ κοινὸν τὸ σχῆμα ΔΕΒΜΝ· τὸ τετράπλευρον ἄρα ΔΓΜΝ = παραλληλόγραμμον ΖΜ, τουτέστι = πρὸς τὸ τρίγωνον ΚΠΜ (θ. 42). Ἂς ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος τὸ τετράπλευρον ΛΠΜΝ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΛΝ = παραλληλόγραμμον ΛΓ. Καὶ εἶναι ἡ γωνία ΔΛΠ = γωνίαν ΚΛΝ (Εὐκλ. 1, 15)· εἶναι ἄρα ΚΛ x ΛΝ = 2ΛΔ x ΔΓ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἡ ΕΔ : ΔΖ = ἡ Η : 2ΓΔ, εἶναι δὲ καὶ ΕΔ : ΔΖ = ΚΛ : ΛΝ (Εὐκλ. 6, 4), εἶναι ἄρα καὶ Η : 2ΓΔ = ΚΛ : ΛΝ. Ἀλλ' ὡς μὲν ΚΛ : ΛΝ = $ΚΛ^2$: ΚΛ x ΛΝ, ὡς δὲ Η : 2ΓΔ = τὸ Η x ΔΛ : 2ΓΔ x ΔΛ. ὡς ἄρα $ΚΛ^2$: ΚΛ x ΛΝ = Η x ΔΛ : 2ΓΔ x ΔΛ. Καὶ ἐναλλὰξ (Εὐκλ. 5, 16)· εἶναι δὲ τὸ ΚΛ x ΛΝ = 2ΓΔ x ΔΛ· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $ΚΛ^2$ = Η x ΔΛ.



50

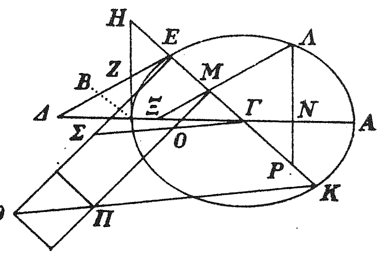
Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ περιφερείας κύκλου συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς, ἀφοῦ ἀνυψωθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην συναντήσῃ τὴν διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν, καὶ γίνῃ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς ἀνυψωθείσης

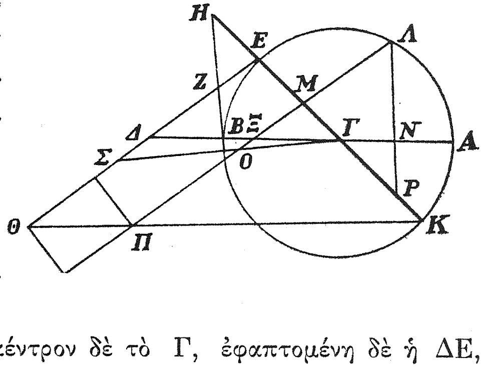
τῆς ἀνηγμένης πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου
H150 *ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεταί τι χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχο-*



μένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἐλλεῖπον.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΓΚ, καὶ διὰ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΘ, καὶ γινέσθω, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΚ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἀχθείσης διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς ἀνυψωθείσης, εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, τὸ τετράγωνον πάσης εὐθείας ἀχθείσης ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν παραλλήλου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἶναι ἴσον πρὸς ὀρθογώνιον παρακείμενον πρὸς τὴν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ληφθεῖσαν παράλληλον, ἔχον πλάτος τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τὴν ἀφήν, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς ληφθείσης (ποπρισθείσης) εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου (ὀρθογώνιον) ἐλλεῖπον.





Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ περιφέρεια κύκλου, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ ἂς ἐκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, **καὶ** ἂς ληφθῇ ΕΓ $=$ ΓΚ, καὶ διὰ τοῦ Β ἂς ἀνυψωθῇ τεταγμένως ἡ ΒΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Ε ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΓ ἡ ΕΘ, καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ΖΕ : ΕΗ $=$ ΕΘ : 2ΕΔ, καὶ ἀφοῦ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΚ ἂς *ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Λ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜΞ, τῇ δὲ ΒΗ ἡ ΛΡΝ, τῇ δὲ ΕΘ ἡ ΜΠ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ ΛΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ.*

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΠ παράλληλος ἡ ΓΣΟ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΓ, ἡ ΕΣ H152 *πρὸς ΣΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΣ τῇ ΣΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΘΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καὶ ἔστι τῆς ΕΘ ἡμίσεια ἡ ΕΣ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ· ὡς ἄρα ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΝΓ τρίγωνον τοῦ ΗΒΓ τριγώνου, τουτέστι τοῦ ΓΔΕ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἐδείχθη, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἔλασσον τῷ ΛΝΞ, κοινῶν ἀφαιρεθέντων ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τε ΕΓΔ τριγώνου καὶ τοῦ ΝΡΜΞ τετραπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ΜΞΓ τριγώνου, τὸ ΛΜΡ τρίγωνον τῷ ΜΕΔΞ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΜΞ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΜΡ τῇ ὑπὸ ΕΜΞ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΜΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἥ τε ΜΞ πρὸς ΕΔ καὶ ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ, ὡς ἄρα ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ, ἡ ΜΞ πρὸς ΔΕ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς ΕΣ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΜΞ, ΕΔ πρὸς ΕΔ· ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς συναμφότερον τὴν ΞΜ, ΕΔ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΜΞ, ΔΕ, τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΕΜ, ὡς δὲ ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου* ἐκβληθῇ, καὶ ἂς ληφθῇ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Λ, καὶ δι' αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ ἡ ΛΜΞ, πρὸς δὲ τὴν ΒΗ παράλληλος ἡ ΛΡΝ, πρὸς δὲ τὴν ΕΘ παράλληλος ἡ ΜΠ. Λέγω, ὅτι τὸ $ΛΜ^2 = ΕΜ \times ΜΠ$.

Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΚΠ παράλληλος ἡ ΓΣΟ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ ΕΓ = ΓΚ, ὡς δὲ ΕΓ : ΚΓ = ΕΣ : ΣΘ (Εὐκλ. 6, 2), εἶναι ἄρα ΕΣ = ΣΘ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ΖΕ : ΕΗ = ΘΕ : 2ΕΔ, καὶ εἶναι 1/2ΕΘ = ΕΣ, εἶναι ἄρα ὡς ΖΕ:ΕΗ = ΣΕ : ΕΔ. Ὡς δὲ ΖΕ : ΕΗ = ΛΜ : ΜΡ (Εὐκλ. 6, 4)· ὡς ἄρα ΛΜ : ΜΡ = ΣΕ : ΕΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΡΝΓ εἰς μὲν τὴν ὑπερβολὴν ἐδείχθη μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου ΗΒΓ, τουτέστι τοῦ τριγώνου ΓΔΕ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μικρότερον κατὰ τὸ ΛΝΞ (θ. 43) (ἐπὶ ὑπερβολῆς ΡΝΓ = ΗΒΓ + ΛΝΞ = ΓΔΕ + ΛΝΞ, ἐπὶ ἐλλείψεως καὶ κύκλου ΡΝΓ = ΗΒΓ - ΛΝΞ), ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσι τὰ κοινά, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΔ καὶ τὸ τετράπλευρον ΝΡΜΞ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ τρίγωνον ΜΞΓ, θὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΛΜΡ = τετράπλευρον ΜΕΔΞ. Καὶ εἶναι ἡ ΜΞ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἡ γωνία ΛΜΡ = γωνία ΕΜΞ (Εὐκλ. 1, 15)· εἶναι ἄρα τὸ ΛΜ x ΜΡ = ΕΜ x (ΕΔ + ΜΞ). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ΜΓ : ΓΕ = ΜΞ : ΕΔ καὶ ΜΓ : ΓΕ = ΜΟ : ΕΣ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς ἄρα ΜΟ : ΕΣ = ΜΞ : ΔΕ. Καὶ διὰ συνθέσεως εἶναι, ὡς ΜΟ + ΣΕ : ΕΣ = ΜΞ + ΕΔ : ΕΔ (Εὐκλ. 5, 18)· ἐναλλὰξ εἶναι, ὡς ΜΟ + ΣΕ : ΞΜ + ΕΔ = ΣΕ : ΕΔ (Εὐκλ. 5, 16). Ἀλλ' ὡς μὲν ΜΟ + ΕΣ : ΜΞ + ΔΕ = (ΜΟ + ΕΣ) x ΕΜ = (ΜΞ + ΕΔ) x ΕΜ, ὡς δὲ ΣΕ : ΕΔ = ΖΕ : ΕΗ = ΛΜ : ΜΡ = $ΛΜ^2$: ΛΜ x ΜΡ (Εὐκλ. 6, 4)· ὡς ἄρα τὸ (ΜΟ + ΕΣ) x ΜΕ : (ΜΞ +

τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ
H154 καὶ τῆς ΕΜ, τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΛΜ τῷ ὑπὸ ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΣΕ τῇ ΣΘ ἴση, ἡ δὲ ΣΘ τῇ ΟΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ.

να΄

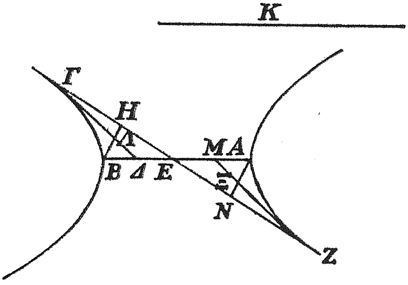
Ἐὰν ὁποτερασοῦν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ τις εὐθεῖα ἕως τῆς ἑτέρας τομῆς, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἀναχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην καὶ συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ γενηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν προσπορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς προσπορισθείσης εὐθείας.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ
H156 τὸ Ε, καὶ ἤχθω τῆς Β τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπε-

ΕΔ) x ΕΜ = ΛΜ² : ΛΜ x ΜΡ. Καὶ ἐναλλὰξ εἶναι, ὡς (ΜΟ + ΕΣ) x ΜΕ : ΜΛ² = (ΜΞ + ΕΔ) x ΜΕ : ΛΜ x ΜΡ (Εὐκλ. 5, 16). Εἶναι δὲ τὸ ΛΜ x ΜΡ = ΜΕ (ΜΞ + ΕΔ)· εἶναι ἄρα καὶ τὸ ΛΜ² = ΕΜ x (ΜΟ + ΕΣ). Καὶ εἶναι ἡ μὲν ΣΕ = ΣΘ, ἡ δὲ ΣΘ = ΟΠ (Εὐκλ. 1, 34)· εἶναι ἄρα τὸ ΛΜ² = ΕΜ x ΜΠ.

51

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφαπτομένη μιᾶς τῶν ἀντικειμένων τομῶν (ἑνὸς τῶν κλάδων τῆς ὑπερβολῆς) συναντᾷ τὴν διάμετρον, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ εὐθεῖά τις μέχρι τῆς ἄλλης τομῆς (τοῦ ἄλλου κλάδου), ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθῇ εὐθεῖα παραλλήλως πρὸς κατηγμένην τεταγμένως καὶ συναντᾷ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν, καὶ γίνῃ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, τὸ τετράγωνον οἱασδήποτε εὐθείας ἀγομένης εἰς τὴν ἄλλην τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ παραβεβλημένον εἰς τὴν προσπορισθεῖσαν εὐθεῖαν (ὡς μίαν πλευρὰν) ἔχον πλάτος (ἄλλην πλευράν), τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς μέχρι τῆς ἁφῆς, ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς προσποριςθείσης εὐθείας.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς Β ἡ ΓΔ, ζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ ΒΛΗ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ, εὐθεῖά τις ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ.

ὅτι μὲν οὖν αἱ ἐν τῇ ΒΓ τομῇ παράλληλοι τῇ ΓΔ ἐπὶ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΕΓ δύνανται τὰ παρὰ τὴν Κ παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῇ ἁφῇ ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ, φανερόν· διπλασία γάρ ἐστιν ἡ ΖΓ τῆς ΓΕ.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν τῇ ΖΑ τομῇ τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη τῆς ΑΖ τομῆς ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΑΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΑΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΔ, ΜΖ, ἴση ἄρα καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΜΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΖ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, τουτέστι τῆς ΜΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΖ πρὸς ΖΝ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΑΝ, καὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΞΖ πρὸς ΖΝ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΖΜ, ὅσαι ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς παράλληλοι τῇ ΖΜ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΕΖ, δυνήσονται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς Κ εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ Ζ σημείῳ ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ.

⟨πόρισμα⟩

H158 **Δεδειγμένων δὲ τούτων συμφανές, ὅτι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον ἀπα-**

καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ καὶ ἂς ἀχθῇ τεταγμένως ἡ ΒΛΗ καὶ ἂς γίνῃ, ὡς ΛΓ : ΓΗ = εὐθεῖά τις Κ : 2ΓΔ.

Ὅτι μὲν λοιπὸν τὰ τετράγωνα τῶν εἰς τὴν τομὴν ΒΓ ἀγομένων εὐθειῶν, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΕΓ, εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων ἐχόντων μίαν πλευρὰν τὴν Κ καὶ ὡς πλάτη τὴν εὐθεῖαν, τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῶν μέχρι τῆς ἁφῆς ὑπερβάλλοντα κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΖ x Κ, εἶναι φανερὸν (θ. 50)· διότι ἡ ΖΓ = 2ΓΕ (θ. 30).

Λέγω τώρα, ὅτι συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὴν τομὴν ΖΑ.

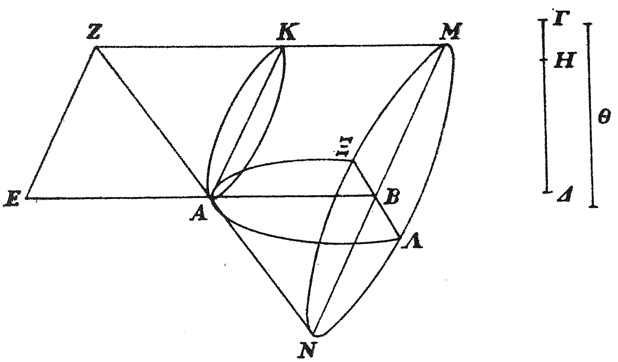
Διότι ἂς ἀχθῇ διὰ τοῦ Ζ ἡ ΜΖ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ΑΖ, καὶ ἂς ἀναχθῇ τεταγμένως ἡ ΑΞΝ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ΒΓ, ΑΖ εἶναι ἀντικείμεναι, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΔ, ΜΖ, εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΜΖ. Εἶναι δὲ καὶ ΓΕ = ΕΖ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα =ΕΜ (Εὐκλ. 1, 4). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ΛΓ : ΓΗ = Κ : 2ΓΔ = Κ : 2ΜΖ, καὶ ὡς ἄρα ΞΖ : ΖΝ = Κ : 2ΜΖ (Εὐκλ. 6, 4). Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΑΖ εἶναι ὑπερβολὴ τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΜΖ, καὶ ἔχει ἀχθῆ τεταγμένως ἡ ΑΝ, καὶ εἶναι ὡς ΞΖ : ΖΝ = Κ : 2ΖΜ, τὰ τετράγωνα ὁσωνδήποτε εὐθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τῆς τομῆς παραλλήλως πρὸς τὴν ΖΜ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ΕΖ, θὰ ἰσοῦνται πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν Κ καὶ τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῶν μέχρι τοῦ σημείου Ζ ὑπερβάλλον κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ΓΖ x Κ (θ. 50).

⟨Πόρισμα⟩

Ἀποδεδειγμένων δὲ τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς μὲν τὴν παραβολὴν ἑκάστη τῶν παραλλήλως πρὸς τὴν ἐκ τῆς γενέσεως γομένων εὐθειῶν διάμετρός ἐστιν, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ τῇ ἐλλείψει καὶ ταῖς ἀντικειμέναις ἑκάστη τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ διότι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ αἱ καταγόμεναι ἐφ' ἑκάστην τῶν διαμέτρων παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα ὀρθογώνια δυνήσονται, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ ταῖς ἀντικειμέναις τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα τῷ αὐτῷ εἴδει, ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα καὶ ἐλλείποντα τῷ αὐτῷ εἴδει, καὶ διότι πάντα, ὅσα προδέδεικται περὶ τὰς τομὰς συμβαίνοντα συμπαραβαλλομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων παραλαμβανομένων τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

νβ'

Εὐθείας δοθείσης ἐν ἐπιπέδῳ καθ' ἓν σημεῖον πεπερασμένης εὑρεῖν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην παραβολήν, ἧς διάμετρος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφὴ δὲ τὸ



πέρας τῆς εὐθείας, ἥτις δὲ ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἑτέρας τινὸς δοθείσης εὐθείας.

διάμετρον ἀγομένων εὐθειῶν εἶναι διάμετρος (θ. 46), εἰς δὲ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὰς ἀντικειμένας εἶναι διάμετρος ἑκάστη τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένων εὐθειῶν (θ. 47 - 48), καὶ ὅτι εἰς μὲν τὴν παραβολὴν αἱ καταγόμεναι (ἀγόμεναι τεταγμένως) ἐφ' ἑκάστην τῶν διαμέτρων παραλλήλως πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, θὰ ἔχωσι τετράγωνα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παραβεβλημένα ὀρθογώνια (θ. 49), εἰς δὲ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀντικειμένας θὰ ἔχωσι τετράγωνα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ εἰς αὐτὴν παραβεβλημένα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα κατὰ τὸ αὐτὸ σχῆμα (θ. 50 - 51), εἰς δὲ τὴν ἔλλειψιν, θὰ ἔχωσι τετράγωνα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβεβλημένα καὶ ἐλλείποντα κατὰ τὸ αὐτὸ σχῆμα, καὶ ὅτι ὅλα ὅσα προαπεδείχθησαν ὡς συμβαίνοντα εἰς τὰς τομάς, συμπαραβαλλομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων τῶν λαμβανομένων κατόπιν, θὰ συμβαίνωσι τὰ αὐτά.

52

Εὐθείας δοθείσης εἰς ἐπίπεδον πεπερασμένης κατὰ ἓν σημεῖον νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον τομὴ κώνου ἡ καλουμένη παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφὴ δὲ τὸ πέρας τῆς εὐθείας, τὸ τετράγωνον οἱασδήποτε εὐθείας, ἡ ὁποία ἤθελε καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν, θὰ εἶναι ἴσον (ἰσοδύναμον) μὲ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς (παραβολῆς) καὶ ἄλλην τινὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

ἔστω θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ πεπερασμένη κατὰ τὸ Α, ἑτέρα δὲ ἡ ΓΔ τῷ μεγέθει, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω H160 πρότερον ὀρθή· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ παραβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, ὀρθία δὲ ἡ ΓΔ, αἱ δὲ καταγόμεναι τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, τουτέστιν ἵνα ἄξων ᾖ ἡ ΑΒ.

ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ εἰλήφθω τῆς ΓΔ τέταρτον μέρος ἡ ΓΗ, τῆς δὲ ΓΗ μείζων ἔστω ἡ ΕΑ, καὶ τῶν ΓΔ, ΕΑ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ Θ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΑ, τὸ ἀπὸ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΕΑ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τετραπλασία· καὶ τὸ ἀπὸ Θ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἔλαττόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον. ἡ Θ ἄρα τῆς ΕΑ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ· ὥστε δύο αἱ ΕΑ τῆς Θ μείζονές εἰσι. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῆς Θ καὶ δύο τῶν ΕΑ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τοίνυν ἐπὶ τῆς ΕΑ τρίγωνον τὸ ΕΑΖ ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ Θ τῇ ΖΕ, καὶ ἤχθω τῇ μὲν ΖΕ παράλληλος ἡ ΑΚ, τῇ δὲ ΕΑ ἡ ΖΚ, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΑ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΑΖΚ ἐπίπεδον. ἔσται δὴ ὀρθὸς ὁ κῶνος· ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΚ. τετμήσθω δὲ ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΚΑ κύκλῳ, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν ΜΝΞ κύκλον, ὀρθὸν δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΜΖΝ ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ ΜΝΞ κύκλου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου κοινὴ τομὴ ἡ ΜΝ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἔστω δὲ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὀρθὸς δέ ἐστι καὶ πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, ἡ κοινὴ ἄρα αὐ-
H162 τῶν τομὴ ἡ ΞΛ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, τουτέστι

Ἔστω κατὰ τὴν θέσιν δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ πεπερασμένη κατὰ τὸ Α, ἄλλη εὐθεῖα δὲ δεδομένη κατὰ τὸ μέγεθος ἡ ΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω πρότερον ὀρθή· πρέπει νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν νὰ εἶναι ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, παράμετρος δὲ ἡ ΓΔ, αἱ δὲ καταγόμεναι εὐθεῖαι θὰ καταχθῶσιν εἰς ὀρθὴν γωνίαν, ὥστε ἡ ΑΒ νὰ εἶναι ἄξων τῆς παραβολῆς.

Ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἂς ληφθῇ τέταρτον μέρος τῆς ΓΔ ἡ ΓΗ, τῆς δὲ ΓΗ ἔστω μεγαλυτέρα ἡ ΕΑ, καὶ τῶν ΓΔ, ΕΑ ἂς ληφθῇ μέση ἀνάλογος ἡ Θ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΓΔ : ΕΑ = Θ^2 : ΕΑ^2$ (Εὐκλ. 5, ὁρισ. 9). Ἡ δὲ $ΓΔ < 4ΕΑ$· εἶναι ἄρα καὶ τὸ $Θ^2 < 4ΕΑ^2$. Ἡ Θ ἄρα $< 2ΕΑ$· ὥστε $2ΕΑ > Θ$. Εἶναι ἄρα δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς Θ καὶ δύο εὐθειῶν ΕΑ (Εὐκλ. 1, 22). Ἂς κατασκευασθῇ λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΕΑ τρίγωνον τὸ ΕΑΖ κάθετον ἐπὶ τὸ ληφθὲν ἐπίπεδον, ὥστε ἡ μὲν $ΕΑ = ΑΖ$, ἡ δὲ $Θ = ΖΕ$, καὶ ἂς ἀχθῇ πρὸς μὲν τὴν ΖΕ παράλληλος ἡ ΑΚ, πρὸς δὲ τὴν ΕΑ παράλληλος ἡ ΖΚ, καὶ ἂς νοηθῇ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ εἶναι τὸ σημεῖον Ζ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΚΑ κύκλος, κάθετος ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΑΖΚ διερχόμενον ἐπίπεδον. Θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κῶνος ὀρθὸς (ὁρισμ. 3)· διότι ἡ $ΑΖ = ΖΚ$. Ἂς τμηθῇ δὲ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν κύκλον ΚΑ, καὶ ἂς σχηματίζῃ τομὴν τὸν κύκλον ΜΝΞ (θ. 4), κάθετον δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΜΖΝ διερχόμενον ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ κύκλου ΜΝΞ καὶ τοῦ τριγώνου ΜΖΝ κοινὴ τομὴ ἡ ΜΝ· εἶναι ἄρα αὕτη διάμετρος τοῦ κύκλου. Ἔστω δὲ τοῦ ληφθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΞΛ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ κύκλος ΜΝΞ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ληφθὲν ἐπίπεδον, εἶναι δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΜΖΝ, ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΞΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΜΖΝ (Εὐκλ. 11, 19), *τὸ ΚΖΑ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τριγώνῳ ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΜΝ, ΑΒ. πάλιν ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΜΝΞ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν ΜΝΞ κύκλον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΞΛ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΜΝ, ἥ κοινή ἐστι τομὴ τοῦ τε ΜΝΞ κύκλου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου ἡ ΑΒ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΚΜ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ ἄρα γινομένη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ καταχθήσονται γωνίᾳ· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΞΛ πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ τρεῖς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΓΔ, Θ, ΕΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΖΚ, ἡ δὲ Θ τῇ ΕΖ καὶ τῇ ΑΚ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΑΚ, ἡ ΑΚ πρὸς ΑΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΑΖ, τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΖΚ. ὀρθία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ια´ θεωρήματι.*

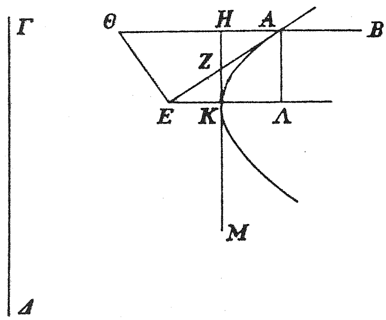
νγ´

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία
H164 *ὀρθή, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΕ, καὶ τῆς ΓΔ ἔστω ἡμίσεια ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΕΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΛ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΛ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΛ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΕΛ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω*

τουτέστι τὸ ΚΖΑ· εἶναι ἄρα κάθετος καὶ πρὸς ὅλας τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ τρίγωνον (Εὐκλ. 11 ὁρισ. 3). Ὥστε εἶναι κάθετος καὶ ἐφ' ἑκάστην τῶν ΜΝ, ΑΒ. Ἐπειδὴ πάλιν ὁ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΜΝΞ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ, ἔχει τμηθῆ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΜΖΝ, καὶ σχηματίζει τομὴν τὸν κύκλον ΜΝΞ, ἔχει δὲ τμηθῆ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου, τέμνοντος τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΞΛ, κάθετον οὖσαν ἐπὶ τὴν ΜΝ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ τομὴ τοῦ κύκλου ΜΝΞ καὶ τοῦ τριγώνου ΜΖΝ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ληφθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ τριγώνου ΜΖΝ, ἡ ΑΒ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ΖΚΜ ἡ γινομένη ἄρα εἰς τὸ ληφθὲν ἐπίπεδον τομὴ τοῦ κώνου εἶναι παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ (θ. 11), αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς εὐθεῖαι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΑΒ θὰ ἔχωσι καταχθῆ κατ' ὀρθὴν γωνίαν· διότι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΞΛ, οὖσαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΔ, Θ, ΕΑ εὑρίσκονται ἐν ἀναλογίᾳ, εἶναι δὲ ἡ μὲν ΕΑ $=$ ΑΖ $=$ ΖΚ, ἡ δὲ Θ $=$ ΕΖ $=$ ΑΚ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΓΔ:ΑΚ $=$ ΑΚ:ΑΖ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΔ : ΑΖ $=$ ΑΚ^2 : ΑΖ^2 (Εὐκλ. 5, ὁρισ. 9) $=$ ΑΚ^2 : ΑΖ x ΖΚ. Εἶναι ἄρα ἡ ΓΔ παράμετρος τῆς τομῆς· διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὸ 11 θεώρημα.

53

Τῶν αὐτῶν δοθέντων ἂς μὴ εἶναι ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἂς εἶναι πρὸς αὐτὴν ἴση ἡ γωνία ΘΑΕ, καὶ ἔστω 1/2ΓΔ $=$ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΕ ἂς ἀχθῆ κάθετος ἡ ΘΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε ἂς ἀχθῆ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΘ ἡ ΕΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΛ ἂς ἀχθῆ κάθετος ἡ ΑΛ, καὶ ἂς τμηθῆ εἰς τὸ μέσον ἡ ΕΛ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΕΛ ἂς ἀχθῆ κάθετος *ἡ ΚΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΛΚΜ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΛΚ, ΚΜ, τῆς μὲν ΚΛ θέσει πεπερασμένης κατὰ τὸ Κ, τῆς δὲ ΚΜ μεγέθει, καὶ γωνίας ὀρθῆς γεγράφθω παραβολή, ἧς*



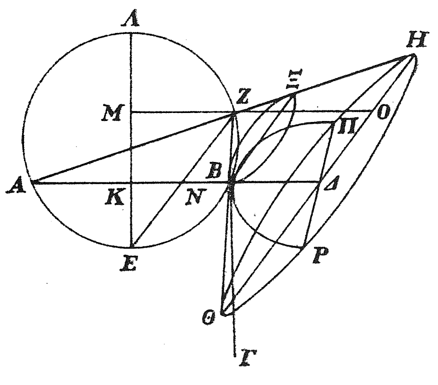
διάμετρος ἡ ΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Κ, ὀρθία δὲ ἡ ΚΜ, ὡς προδέδεικται· ἥξει δὲ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΛ τῷ ὑπὸ ΛΚΜ, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΕΑ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΚ τῇ ΚΛ. καὶ ἔστιν ἡ ΘΑ τῇ ΕΚΛ παράλληλος· ἡ ΘΑΒ διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς, αἱ δὲ ἐπ᾽ αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ΑΕ δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς ΑΒ. καταχθήσονται δὲ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΑΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΖ, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Α, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘΕ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ. ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΕΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΘΑ διπλῆ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ. διὰ δὴ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μθ' θεωρήματι ὀρθία ἐστὶν ἡ ΓΔ.

H166 *νδ'*

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῆς ἑτέρας ἐκβαλλομένης ἐπὶ ταὐτὰ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ὅπως ἡ ΚΜ καὶ ἂς ἐκβληθῇ αὕτη ἐπὶ τὰ σημεῖα Ζ, Η, καὶ ἔστω $ΑΛ^2 = ΛΚ \times ΚΜ$. Καὶ ἐνῷ ἔχουσι δοθῇ δύο εὐθεῖαι αἱ ΛΚ, ΚΜ, ἡ μὲν ΚΛ δεδομένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ πεπερασμένη κατὰ τὸ Κ, ἡ δὲ ΚΜ κατὰ τὸ μέγεθος, καὶ γωνία ὀρθή, ἂς γραφῇ παραβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Κ, παράμετρος δὲ ἡ ΚΜ, ὡς ἀπεδείχθη προηγουμένως (θ. 52)· θὰ διέλθῃ δὲ αὕτη διὰ τοῦ Α, διότι $ΑΛ^2 = ΛΚ \times ΚΜ$ (θ. 11), καὶ θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς ἡ ΕΑ, ἐπειδὴ ΕΚ = ΚΛ (θ. 33). Καὶ εἶναι ἡ ΘΑ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΚΛ· ἡ ΘΑΒ ἄρα εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς, αἱ δὲ ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΕ θὰ τμηθῶσιν εἰς τὸ μέσον ὑπὸ τῆς ΑΒ (θ. 46). Θὰ ἔχωσι δὲ καταχθῇ ὑπὸ γωνίαν τὴν ΘΑΕ (Εὐκλ. 1, 29). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΘ = γωνίαν ΑΗΖ, κοινὴ δὲ γωνία ὅπου τὸ σημεῖον Α, εἶναι ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΘΕ ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΗΖ. Εἶναι ἄρα ὡς ΘΑ : ΕΑ = ΖΑ : ΑΗ (Εὐκλ. 6, 4)· ὡς ἄρα 2ΑΘ : 2ΑΕ = ΖΑ : ΑΗ (Εὐκλ. 5, 15). Εἶναι δὲ ΓΔ = 2ΘΑ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ : ΑΗ = ΓΔ : 2ΑΕ. Εἶναι ἄρα κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ 49 θεώρημα ἡ ΓΔ παράμετρος.

54

Ἐὰν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ἡ μία δὲ ἐκβληθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκβληθείσης τομὴ κώνου ἡ καλουμένη ὑπερβολὴ κειμένη εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας, ὥστε ἡ



ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος εἴη τῆς τομῆς, κορυφὴ δὲ τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον, ἥτις δὲ ἂν καταχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον γωνίαν ποιοῦσα ἴσην τῇ δοθείσῃ, δυνήσεται παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒΓ ἐπιπέδῳ ὑπερβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Β, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΒΔ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΒΓ παρακείμενα πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ Β ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι
H168 πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τὸ ἐν τῷ ΑΖΒ μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΕΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΛ. εἰ μὲν οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, τῷ Λ ἂν ἐχρησάμεθα, εἰ δὲ μή, γινέσθω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΚΛ τὴν ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΕΖ, ΖΒ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΒΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση

μὲν προσεκβληθεῖσα νὰ εἶναι διάμετρος τῆς (κωνικῆς) τομῆς, κορυφὴ δὲ ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας, τὸ τετράγωνον οἱασδήποτε εὐθείας καταγομένης ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καὶ σχηματιζούσης γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν θὰ ἰσοῦται μὲ παραβαλλόμενον ὀρθογώνιον εἰς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν, ἔχον πλάτος τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης ἐκ τῆς κορυφῆς, ὑπερβάλλον (τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο) κατὰ σχῆμα ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀρχικῶς δοθεισῶν εὐθειῶν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο πεπερασμέναι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ· πρέπει νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ΑΒΓ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν θὰ εἶναι ἡ ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Β, παράμετρος δὲ ἡ ΒΓ, τὰ δὲ τετράγωνα τῶν καταγομένων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΒΔ εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παρὰ τὴν ΒΓ παραβαλλόμενα ὀρθογώνια ἔχοντα πλάτη τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν ἐκ τοῦ σημείου Β, ὑπερβάλλοντα κατὰ σχῆμα ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ x ΒΓ.

Ἔστω πρότερον ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἂς ἀνασταθῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ εἰς αὐτὸ περὶ τὴν ΑΒ (ὡς διάμετρον) ἂς γραφῇ ὁ κύκλος ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸ τμῆμα ΑΕΒ πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τὸ εἰς τὸ τμῆμα ΑΖΒ νὰ μὴ ἔχῃ μεγαλύτερον λόγον τοῦ λόγου τῆς ΑΒ: ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ ΑΕΒ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἂς ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΚ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Λ· εἶναι ἄρα διάμετρος ἡ ΕΛ (Εὐκλ. 3, 1). Ἐὰν μὲν λοιπὸν εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΕΚ : ΚΛ, θὰ ἐχρησιμοποιοῦμεν τὸ Λ, ἐὰν δὲ ὄχι, ἂς γίνῃ ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΕΚ : ΚΜ, ὅπου ΚΜ $<$ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ Μ ἂς ἀχθῇ πρὸς τὴν ΑΒ παράλληλος ἡ ΜΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΕΖ, ΖΒ, καὶ διὰ τοῦ Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος

ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΕ τῇ ὑπὸ ΑΞΒ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΖΒ τῇ ὑπὸ ΞΒΖ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΞΒΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΞΒ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΞ. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν ΒΞ διάμετρον κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ ΒΖΞ τρίγωνον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθός· ἴση γὰρ ἡ ΖΒ τῇ ΖΞ. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ΒΖ, ΖΞ, ΜΖ, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΒΞ κύκλῳ· ἔσται δὴ ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ ΗΠΡ· ὥστε διάμετρος ἔσται τοῦ κύκλου ἡ ΗΘ. κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ ΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ ΠΔΡ· ἔσται δὴ ἡ ΠΔΡ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΒ ὀρθή· ἑκάτερος γὰρ τῶν ΞΒ, ΘΗ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ΖΗΘ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΠΔΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΖΗΘ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ
H170 *αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ κατ' εὐθεῖαν τὴν ΠΔΡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΗΔΘ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΗΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β συμπίπτει τῇ ΗΖ κατὰ τὸ Α, ὑπερβολὴ ἄρα ἔσται ἡ τομὴ διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΠΒΡ, ἧς κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Β σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΒΔ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΠΔΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. ἴσον*

πρὸς τὴν ΖΕ ἡ ΒΞ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία ΑΖΕ = γωνίαν ΕΖΒ (Εὐκλ. 3, 27), ἀλλ' ἡ μὲν γωνία ΑΖΕ = ΑΞΒ, ἡ δὲ ΕΖΒ = ΞΒΖ, εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΞΒΖ = ΖΞΒ (Εὐκλ. 1, 29)· εἶναι ἄρα καὶ ἡ ΖΒ = ΖΞ (Εὐκλ. 1, 6). Ἂς νοηθῇ κῶνος, τοῦ ὁποίου κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Ζ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν διάμετρον ΒΞ κύκλος, κάθετος ὢν ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΒΖΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κῶνος ὀρθὸς (ὁρισ. 3)· διότι ἡ ΖΒ = ΖΞ. Ἂς ἐκβληθῶσι λοιπὸν αἱ ΒΖ, ΖΞ, ΜΖ, καὶ ἂς τμηθῇ ὁ κῶνος δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν κύκλον ΒΞ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ τομὴ κύκλος (θ. 4). Ἔστω ὁ ΗΠΡ· ὥστε διάμετρος τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἡ ΗΘ (θ. 4 πόρ.). Κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ ΠΔΡ· θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΠΔΡ κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΒ· διότι ἑκάτερος τῶν ΞΒ, ΘΗ κύκλος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΖΗΘ, προσέτι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΖΗΘ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΠΔΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΖΗΘ (Εὐκλ. 11, 19)· καὶ μὲ ὅλας ἄρα τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ εὑρισκομένας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον θὰ σχηματίζῃ γωνίας ὀρθὰς (Εὐκλ. 11, ὁρισ. 3). Καὶ ἐπειδὴ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΗΘ, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ, ἔχει τμηθῇ δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΖΗΘ, ἔχει τμηθῇ δὲ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου, τοῦ ὑποκειμένου, κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΠΔΡ κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΔΘ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΗΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β συναντᾷ τὴν ΗΖ κατὰ τὸ Α, εἶναι ἄρα ἡ τομὴ ΠΒΡ συμφώνως πρὸς τὰ προαποδειχθέντα (θ. 12) ὑπερβολή, τῆς ὁποίας κορυφὴ μὲν εἶναι τὸ σημεῖον Β, αἱ δὲ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ θὰ εἶναι κάθετοι· διότι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΠΔΡ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΕΚ : ΚΜ, ὡς δὲ ΕΚ:ΚΜ = ΕΝ:ΝΖ, τουτέστι = ΕΝ x ΝΖ : ΝΖ^2 (Εὐκλ. 6, 2), θὰ εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ : ΒΓ = ΕΝ x ΝΖ : ΝΖ^2. Εἶναι δὲ τὸ δὲ τὸ ὑπὸ ΕΝΖ τῷ ὑπὸ ΑΝΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΑΝ πρὸς ΝΖ καὶ τῆς ΒΝ πρὸς ΝΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΝ πρὸς ΝΖ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΝ πρὸς ΝΖ, ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ· ἡ ἄρα ΑΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΖΟ τῇ ΑΔ· πλαγία μὲν ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ ιβ' θεωρήματι δέδεικται.

H172 νε'

Μὴ ἔστω δὴ ἡ δεδομένη γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΘ· δεῖ δὴ γράψαι ὑπερβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν τῇ ὑπὸ ΘΑΒ γωνίᾳ καταχθήσονται.

τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἤχθω τις εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τῶν ΖΔΘ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΔΛ, καὶ κείσθω τῇ ΛΔ ἴση ἡ ΔΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΛΖΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ ΚΖ ἡ ΛΝ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν ΚΛ, ΛΝ γεγράφθω ὑπερβολή, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ ἔσται ἡ ΚΛ, ὀρθία δὲ ἡ ΛΝ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τῆς

$ΕΝ \times ΝΖ = ΑΝ \times ΝΒ$ (Εὐκλ. 3, 35)· ὡς ἄρα ἡ $ΑΒ:ΓΒ = ΑΝ \times ΝΒ : ΝΖ^2$. Τὸ δὲ $ΑΝ \times ΝΒ:ΝΖ = (ΑΝ : ΝΖ) \times (ΒΝ : ΝΖ)$· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΝ : ΝΖ = ΑΔ : ΔΗ = ΖΟ : ΟΗ$ (Εὐκλ. 6, 4), ὡς δὲ ἡ $ΒΝ : ΝΖ = ΖΟ : ΟΘ$· εἶναι ἄρα $ΑΒ : ΒΓ = (ΖΟ: ΟΗ) \times (ΖΟ : ΟΘ)$, τουτέστι $= ΖΟ^2 : ΗΟ \times ΟΘ$. Εἶναι ἄρα, ὡς ἡ $ΑΒ : ΒΓ = ΖΟ^2:ΗΟ \times ΟΘ$. Καὶ εἶναι παράλληλος ἡ ΖΟ πρὸς τὴν ΑΔ· εἶναι ἄρα πλαγία μὲν πλευρὰ (διάμετρος) ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ (παράμετρος) ἡ ΒΓ· διότι αὐτὰ ἀπεδείχθησαν εἰς τὸ 12 θεώρημα.

55

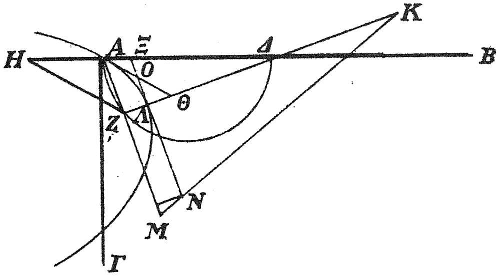
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση πρὸς τὴν ΒΑΘ· πρέπει λοιπὸν νὰ γραφῇ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν θὰ εἶναι ἡ ΑΒ, παράμετρος δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι θὰ καταχθῶσιν εἰς τὴν γωνίαν ΘΑΒ.

Ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ ἡμικύκλιον εὐθεῖά τις παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ, ἡ ΖΗ, σχηματίζουσα τὸν λόγον $ΖΗ^2 : ΔΗ \times ΗΑ = ΑΓ : ΑΒ$, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΘΔ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Δ καὶ τῶν ΖΔ, ΔΘ ἔστω μέση ἀνάλογος ἡ ΔΛ, καὶ ἂς εἶναι $ΛΔ = ΔΚ$, καὶ $ΑΖ^2 = ΛΖ \times ΖΜ$, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Λ ἂς ἀχθῇ ἡ ΛΝ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ξ. Καὶ ἐνῷ ἐδόθησαν δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι κάθετοι μεταξύ των αἱ ΚΛ, ΛΝ, ἂς γραφῇ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας πλάγιος μὲν ἄξων θὰ εἶναι ἡ ΚΛ, παράμετρος δὲ ἡ ΛΝ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τῆς (κωνικῆς)

τομῆς ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται πλάτη ἔχουσαι τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ Λ ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΚΛΝ· ἥξει δὲ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α· ἴσον γάρ ἐστι τὸ ἀπὸ ΑΖ τῷ ὑπὸ ΛΖΜ. καὶ ἐφάψεται αὐτῆς ἡ ΑΘ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΖΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΛ. ὥστε ἡ ΑΒ διά-
H174 μετρός ἐστι τῆς τομῆς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ, τουτέστι τὴν ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ λόγος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ. ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, ἡ ΟΑ πρὸς ΑΞ· ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ, ἡ ΟΑ πρὸς ΑΞ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, παρ᾽ ἣν δύνανταί ἐστιν ἡ ΑΓ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ν´ θεωρήματι.

νς´

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις εὑρεῖν περὶ διάμετρον τὴν ἑτέραν αὐτῶν κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ἔλλειψιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ἧς κορυφὴ ἔσται τὸ πρὸς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ σημεῖον, τομῆς θὰ καταχθῶσι σχηματίζουσαι ὀρθὴν γωνίαν, ἔχουσαι πλάτη τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν μέχρι τοῦ Λ (σχηματίζουσαι ὀρθογώνια) ὑπερβάλλοντα κατὰ τὸ ὅμοιον σχῆμα πρὸς τὸ ΚΛ x ΛΝ (θ. 54)· θὰ διέλθῃ δὲ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α· διότι τὸ $ΑΖ^2 = ΛΖ \times ΖΜ$ (θ. 12). Καὶ θὰ ἐφάπτηται αὐτῆς ἡ ΑΘ (θ. 37)· διότι τὸ $ΖΔ \times ΔΘ = ΔΛ^2$. Ὥστε ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς τομῆς (θ. 51 πόρισ.). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ $ΓΑ : 2ΑΔ = ΓΑ : ΑΒ$



$= ΖΗ^2 : ΔΗ \times ΗΑ$, ἀλλὰ ἡ $ΓΑ : 2ΑΔ = (ΓΑ : 2ΑΘ) \times (2ΑΘ : 2ΔΑ)$, τουτέστιν $2ΑΘ : 2ΔΑ = ΘΑ : ΑΔ = ΖΗ : ΗΔ$ (Εὐκλ. 6, 4), θὰ εἶναι ἄρα $ΓΑ : ΑΒ = (ΓΑ : 2ΑΘ) \times (ΖΗ : ΗΔ)$. Εἶναι δὲ καὶ $ΖΗ^2 : ΔΗ \times ΗΑ = (ΖΗ : ΗΔ) \times (ΖΗ : ΗΑ)$· εἶναι ἄρα $(ΓΑ : 2ΑΘ) \times (ΖΗ : ΗΔ) = (ΖΗ : ΗΑ) \times (ΖΗ : ΗΔ)$. Ἂς ἀφαιρεθῇ ὁ κοινὸς λόγος ΖΗ : ΗΔ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ $ΓΑ : 2ΑΘ = ΖΗ : ΗΑ$. Ὡς δὲ ἡ $ΖΗ : ΗΑ = ΟΑ : ΑΞ$ (Εὐκλ. 6, 4)· ὡς ἄρα ἡ $ΓΑ : 2ΑΘ = ΟΑ : ΑΞ$. Ὅταν δὲ τοῦτο συμβῇ ἡ ΑΓ εἶναι παράμετρος· διότι τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὸ 50 θεώρημα.

56

Ὅταν δοθῶσι δύο πεπερασμέναι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας νὰ εὑρεθῇ περὶ διάμετρον τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τομὴ ἡ καλουμένη ἔλλειψις εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν, τῆς ὁποίας κορυφὴ θὰ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὰ δὲ τετράγωνα

αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν γω-
H176 *νίᾳ δοθείσῃ δυνήσονται τὰ παρακείμενα ὀρθογώνια παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν πλάτος ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.*

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν μείζων ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ γράψαι ἔλλειψιν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΑΓ παρακείμενα πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τῷ Α ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ.

ἔστω δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἐν αὐτῷ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γεγράφθω τὸ ΑΔΒ, οὗ διχοτομία ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ο τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ε· ἔσται δή, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ, ἡ ΒΑ πρὸς ΑΞ, τουτέστιν ἡ ΔΑ πρὸς ΑΟ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΑ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ δι᾽ αὐτοῦ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΛ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ· ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ ΖΟ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΗΚ κατὰ
H178 *τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ γωνία*

τῶν καταγομένων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παρακείμενα (παραβαλλόμενα) ὀρθογώνια παρὰ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν, ἔχοντα πλάτος τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν μέχρι τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ἐλλείποντα σχῆμα ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχόμενον.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ κάθετοι μεταξύ των, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ· πρέπει λοιπὸν εἰς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον νὰ γράψωμεν ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν θὰ εἶναι ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, παράμετρος δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι θὰ καταχθῶσιν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ ὑπὸ δεδομένην γωνίαν καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ παρακείμενα τῆς ΑΓ ὀρθογώνια, ἔχοντα πλάτη τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν μέχρι τοῦ Α, ἐλλείποντα σχῆμα ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΒΑ x ΑΓ.

Ἔστω δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθὴ καὶ ἂς ἀνασταθῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἂς γραφῇ εἰς αὐτὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΔΒ, τοῦ ὁποίου τὸ μέσον εἶναι τὸ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΓ = ΑΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ πρὸς τὴν ΔΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ο πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΟΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΖ καὶ ἂς συναντᾷ τὴν ΑΒ ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Ε· θὰ εἶναι λοιπόν, ὡς ἡ ΑΒ : ΑΓ = ΒΑ : ΑΞ (Εὐκλ. 5, 7) = ΔΑ : ΑΟ (Εὐκλ. 6, 4) = ΔΕ : ΕΖ (Εὐκλ. 6, 2). Καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΖΑ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ πρὸς τὴν ΔΕ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΗΛ καὶ ἂς συναντήσῃ τὴν ΑΒ ἐκβληθεῖσαν, κατὰ τὸ Κ· ἂς ἐκβληθῇ τώρα ἡ ΖΟ καὶ ἂς συναντήσῃ τὴν ΗΚ κατὰ τὸ Λ. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον ΑΔ = τόξον ΔΒ εἶναι ἡ γωνία ΑΒΔ = ΔΖΒ (Εὐκλ. 3, 27). Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΖΑ =

δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΖΔΑ, ΖΑΔ ἐστὶν ἴση, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΑΔ τῇ ὑπὸ ΖΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΔΑ τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΒΑ ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΒΖΔ. ἔστι δὲ καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΛΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΑ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΒ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΖΗΘ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση.

γεγράφθω δὴ περὶ τὴν ΘΗ κύκλος ὁ ΗΘΝ ὀρθὸς πρὸς τὸ ΘΗΖ τρίγωνον, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθὸς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΗΖ τῇ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΗΘΝ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΘΗΖ ἐπίπεδον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἄρα πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔσται. ἔστω δὴ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΚΜ· ἡ ΚΜ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΗΘΖ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΚ, ΚΜ, ὅ ἐστι τὸ ὑποκείμενον, κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΚΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΗΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει ταῖς ΖΗ, ΖΘ πλευραῖς τοῦ κώνου, ἡ ἄρα γινομένη τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς διάμε-
H180 τρός ἐστιν ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ,

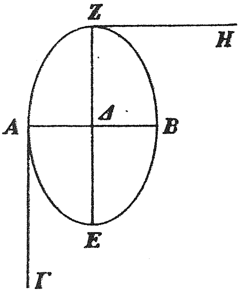
μὲ δύο γωνίας, ΖΔΑ + ΖΑΔ (Εὐκλ. 1, 32), ἀλλὰ ἡ μὲν ΖΑΔ = ΖΒΔ, ἡ δὲ ΖΔΑ = ΖΒΑ (Εὐκλ. 3, 27), εἶναι ἄρα καὶ ἡ γωνία ΕΖΑ = ΔΒΑ = ΒΖΔ. Εἶναι δὲ καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΗ· ἡ γωνία ἄρα ΕΖΑ = ΖΗΘ, ἡ δὲ ΔΖΒ = ΖΘΗ (Εὐκλ. 1, 29). Ὥστε καὶ ἡ ΖΗΘ = ΖΘΗ (Εὐκλ. 1, 6) καὶ ἡ ΖΗ = ΖΘ.

Ἂς γραφῇ περὶ τὴν ΘΗ κύκλος ὁ ΗΘΝ κάθετος ἐπὶ τὸ τρίγωνον ΘΗΖ, καὶ ἂς νοηθῇ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΗΘΝ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ· θὰ εἶναι λοιπὸν ὁ κῶνος ὀρθός, διότι ΗΖ = ΖΘ (ὁρισ. 3). Καὶ ἐπειδὴ ὁ κύκλος ΗΘΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΘΗΖ, εἶναι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἄρα θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον (Εὐκλ. 11, 19). Ἔστω λοιπὸν ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΚΜ · ἡ ΚΜ ἄρα εἶναι κάθετος ἐφ' ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΚΗ (Εὐκλ. 11, ὁρισ. 3). Καὶ ἐπειδὴ κῶνος, τοῦ ὁποίου βάσις μὲν εἶναι ὁ κύκλος ΗΘΝ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον Ζ, ἔχει τμηθῇ δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος καὶ σχηματίζει τομὴν τὸ τρίγωνον ΗΘΖ, ἔχει δὲ τμηθῇ καὶ δι' ἄλλου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν ΑΚ, ΚΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑποκείμενον, κατὰ τομὴν εὐθεῖαν τὴν ΚΜ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κώνου ΖΗ, ΖΘ, εἶναι ἄρα ἡ γινομένη τομὴ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας διάμετρος εἶναι ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι θὰ καταχθῶσιν εἰς ὀρθὴν γωνίαν (θ. 13)· διότι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΚΜ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ ΔΕ : ΕΖ = ΔΕ x ΕΖ = ΒΕ x ΕΑ : ΕΖ^2 (Εὐκλ. 3, 36), τὸ δὲ ΒΕ x ΕΑ : ΕΖ^2 = ΒΕ : ΕΖ x (ΑΕ : ΕΖ), ἀλλὰ ὡς μὲν ἡ ΒΕ : ΕΖ = ΒΚ : ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ : ΕΖ = ΑΚ : ΚΗ = ΖΛ : ΛΗ (Εὐκλ.

ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΗ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΘ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΛΘ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΛΘ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ιγʹ θεωρήματι.

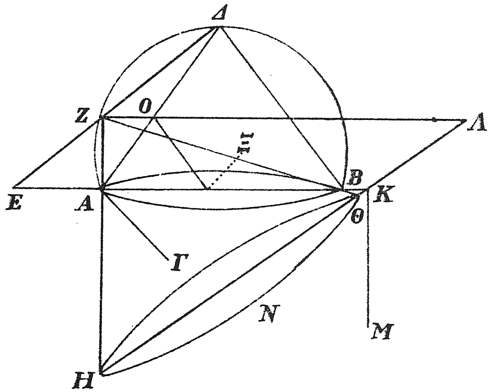
νζʹ

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ ΑΒ ἐλάσσων τῆς ΑΓ, καὶ δέον ἔστω περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γράψαι ἔλλειψιν, ὥστε ὀρθίαν εἶναι τὴν ΑΓ.



τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΔΖ, καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΖΔ τῇ ΔΕ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ἀπὸ ΕΖ, ἔστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς
H182 τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ, τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. τὸ δὲ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΔΕ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ, τὸ ὑπὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. δύο οὖν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων καὶ μείζονος οὔσης τῆς ΕΖ γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΕΖ, ὀρθία δὲ ἡ ΖΗ· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ ΖΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ·

6, 4), εἶναι ἄρα ΒΑ : ΑΓ = (ΖΛ : ΛΗ) x (ΖΛ : ΛΘ), ἤτοι (ΖΛ : ΛΗ) x (ΖΛ : ΛΘ) = ΖΛ² : ΗΛ x ΛΘ· εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ ΑΓ = ΖΛ² : ΗΛ x ΛΘ. Ὅταν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ ἡ ΑΓ εἶναι παράμετρος τοῦ σχήματος, ὡς ἀπεδείχθη εἰς τὸ 13 θεώρημα.



57

Τῶν αὐτῶν δοθέντων ἔστω ἡ ΑΒ μικροτέρα τῆς ΑΓ, καὶ ἔστω ὅτι περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ πρέπει νὰ γράψωμεν ἔλλειψιν, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ εἶναι παράμετρος.

Ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΕΔΖ, καὶ πρὸς τὸ ΒΑ x ΑΓ ἔστω = ΖΕ², ὥστε ΖΔ = ΔΕ, καὶ πρὸς τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΖΗ, καὶ ἂς γίνῃ ὡς ἡ ΑΓ : ΑΒ = ΕΖ : ΖΗ· εἶναι ἄρα ΕΖ 〉 ΖΗ (Εὐκλ. 6, 14). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΓΑ x ΑΒ = ΕΖ², εἶναι ὡς ἡ ΓΑ : ΑΒ = ΖΕ² : ΑΒ² (Εὐκλ. 5, 17. 5 ὁρισ. 19) καὶ = ΔΖ² : ΔΑ² (Εὐκλ. 5, 15). Ὡς δὲ ἡ ΓΑ : ΑΒ = ΕΖ : ΖΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ : ΖΗ = ΖΔ² : ΔΑ². Τὸ δὲ ΖΔ² = ΖΔ x ΔΕ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ : ΖΗ = ΕΔ x ΔΖ : ΑΔ². Ἐνῷ λοιπὸν ἔχουσι δοθῇ δύο πεπερασμέναι εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ΕΖ ἂς γραφῇ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΕΖ, παράμετρος δὲ ἡ ΖΗ (θ. 56)· θὰ διέλθῃ λοιπὸν ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α, ἐπειδὴ εἶναι ΖΔ x ΔΕ : ΔΑ² = ΕΖ : ΖΗ ἐλεύσεται οὖν καὶ διὰ τοῦ Β. γέγραπται οὖν ἔλλειψις περὶ τὴν ΑΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔΒ, ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. ὥστε ὀρθία ἐστὶν ἡ ΑΓ.

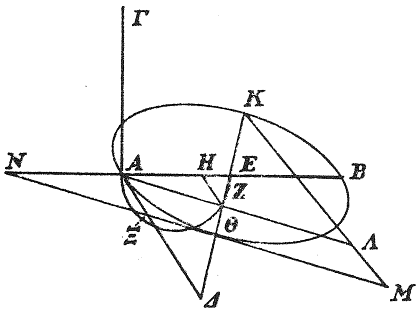
νη΄

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΕ, καὶ ἐν αὐτῷ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τῶν ΔΕΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΕΘ, καὶ τῇ ΕΘ ἴση κείσθω ἡ ΕΚ, καὶ πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΘΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΘΜΞ παράλληλος γινομένη τῇ ΑΖΛ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς
H184 ἀλλήλαις τῶν ΚΘ, ΘΜ γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος πλαγία ἡ ΚΘ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΜ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΘΚ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΖΑ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΘΕ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β ἡ τομή, καὶ ἔσται κέντρον μὲν τὸ Ε, διάμετρος δὲ ἡ ΑΕΒ. καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΔΑ διὰ τὸ

(θ. 21). Καὶ εἶναι ἡ ΑΔ = ΔΒ· θὰ διέλθῃ λοιπὸν καὶ διὰ τοῦ Β (θ. 21). Ἔχει λοιπὸν γραφῇ περὶ τὴν ΑΒ ἔλλειψις. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΓΑ : ΑΒ = $ΖΔ^2 : ΔΑ^2$, τὸ δὲ $ΔΑ^2$ = ΑΔ x ΔΒ, εἶναι ἄρα ὡς ἡ ΓΑ : ΑΒ = $ΔΖ^2$: ΑΔ x ΔΒ. Ὥστε ἡ ΑΓ εἶναι παράμετρος (θ. 21).

58

Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ εἶναι ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστω ἴση πρὸς αὐτὴν ἡ ΒΑΔ, καὶ ἂς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΕ, καὶ εἰς αὐτὸ πρὸς τὴν ΑΔ ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΖΗ σχηματίζουσα τὸν λόγον $ΖΗ^2$: ΑΗ x ΗΕ = ΓΑ : ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΕΖ καὶ ἂς ἐκβληθῶσι, καὶ ἂς ληφθῇ τῶν ΔΕ, ΕΖ μέση ἀνάλογος ἡ ΕΘ, καὶ πρὸς τὴν ΕΘ ἂς ληφθῇ ἴση ἡ ΕΚ, καὶ ἂς γίνῃ πρὸς τὸ $ΑΖ^2$ = ΘΖ x ΖΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἡ ΘΜΞ γινομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖΛ (Εὐκλ. 1, 28)· διότι ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία εἶναι ὀρθὴ (Εὐκλ. 3, 31). Καὶ ἐνῷ ἔχουσι δοθῇ δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι κάθετοι μεταξύ των, αἱ ΚΘ, ΘΜ, ἂς γραφῇ ἔλλειψις, τῆς ὁποίας πλαγία διάμετρος εἶναι ἡ ΚΘ, παράμετρος δὲ ἡ ΘΜ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΘΚ θὰ καταχθῶσιν εἰς ὀρθὴν γωνίαν (θ. 56 - 57)· θὰ διέλθῃ λοιπὸν ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α, διότι $ΖΑ^2$ = ΘΖ x ΖΛ (θ. 13).



Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἡ μὲν ΘΕ = ΕΚ, ἡ δὲ ΑΕ = ΕΒ, ἡ τομὴ θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ Β, καὶ θὰ εἶναι κέντρον μὲν τὸ Ε, διάμετρος ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΔΕΖ τῷ ἀπὸ ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ καὶ τοῦ τῆς διπλασίας τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ, ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τούτου τοῦ λόγου ἔσται ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΞΑ πρὸς ΑΝ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ.

νθ′

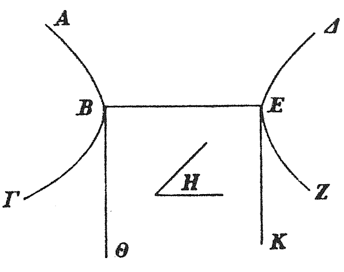
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμένων εὑρεῖν ἀντικειμένας, ὧν διάμετρός ἐστι μία τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, κορυφὴ δὲ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, αἱ δὲ
H186 καταγόμεναι ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ἑτέραν παρακείμενα καὶ ὑπερβάλλοντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμέναι αἱ ΒΕ, ΒΘ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Η· δεῖ δὴ γράψαι ἀντικειμένας περὶ μίαν τῶν ΒΕ, ΒΘ, ὥστε τὰς καταγομένας κατάγεσθαι ἐν γωνίᾳ τῇ Η.

καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΕ, ΒΘ γεγράφθω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἔσται πλαγία ἡ ΒΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΕ καταχθήσονται ἐν γωνίᾳ τῇ Η, καὶ ἔστω ἡ ΑΒΓ· τοῦτο δὲ ἡ ΑΕΒ (θ. 51, πόρισ.). Καὶ θὰ ἐφάπτηται τῆς τομῆς ἡ ΔΑ (θ. 38), διότι ΔΕ x ΕΖ $=$ ΕΘ². Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, ὡς ἡ ΓΑ : ΑΒ $=$ ΖΗ² : ΑΗ x ΗΕ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΑ : ΑΒ $=$ (ΓΑ : 2ΔΑ) x (2ΑΔ : ΑΒ) $=$ (ΓΑ : 2ΔΑ) x (ΔΑ : ΑΕ), τὸ δὲ ΖΗ² : ΑΗ x ΗΕ $=$ (ΖΗ : ΗΕ) x (ΖΗ : ΗΑ), εἶναι ἄρα (ΓΑ : 2ΑΔ) x (ΔΑ : ΑΕ) $=$ (ΖΗ : ΗΕ) x (ΖΗ : ΗΑ). Ἀλλὰ ὡς ἡ ΔΑ : ΑΕ $=$ ΖΗ : ΗΕ (Εὐκλ. 6, 4)· καὶ ἀφοῦ ἀφαιρεθῆ ὁ κοινὸς οὗτος λόγος θὰ εἶναι ὡς ἡ ΓΑ : 2ΑΔ $=$ ΖΗ : ΗΑ $=$ ΞΑ : ΑΝ (Εὐκλ. 6, 4). Ὅταν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ ἡ ΑΓ εἶναι παράμετρος τοῦ σχήματος.

59

Ὅταν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀντικείμεναι, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι μία τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, κορυφὴ δὲ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, τὰ δὲ τετράγωνα τῶν καταγομένων εἰς ἑκατέραν τῶν τομῶν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν θὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ εἰς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν παρακείμενα (παραβαλλόμενα) καὶ ὑπερβάλλοντα κατὰ σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὰς δοθείσας.



Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι πεπερασμέναι κάθετοι μεταξύ των αἱ ΒΕ, ΒΘ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Η· πρέπει νὰ γραφῶσιν ἀντικείμεναι περὶ μίαν τῶν ΒΕ, ΒΘ, ὥστε αἱ καταγόμεναι νὰ κατάγωνται ὑπὸ τὴν γωνίαν Η.

Καὶ ἐνῷ ἔχουσι δοθῆ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΕ, ΒΘ ἂς γραφῇ ὑπερβολή, τῆς ὁποίας διάμετρος πλαγία θὰ εἶναι ἡ ΒΕ, παράμετρος δὲ τοῦ σχήματος ἡ ΘΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας ΒΕ θὰ καταχθῶσιν ὑπὸ τὴν γωνίαν Η, καὶ ἔστω γὰρ ὡς δεῖ γενέσθαι, προγέγραπται. ἤχθω δὲ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ ἴση οὖσα τῇ ΒΘ, καὶ γεγράφθω ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ ΔΕΖ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΒΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΕΚ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς τεταγμένως καταχθήσονται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῇ Η. φανερὸν δή, ὅτι αἱ Β, Ε εἰσιν ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν μία ἐστί, καὶ αἱ ὀρθίαι ἴσαι.

ξ′

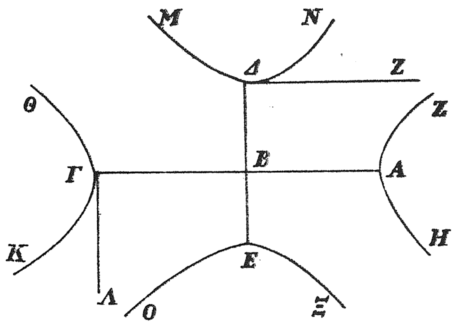
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δίχα τεμνουσῶν ἀλλήλας γράψαι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν ἀντικειμένας τομάς, ὥστε εἶναι αὐτῶν συζυγεῖς διαμέτρους τὰς εὐθείας, καὶ τὴν τῶν δύο
H188 ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας αἱ ΑΓ, ΔΕ· δεῖ δὴ περὶ ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον γράψαι ἀντικειμένας, ἵνα ὦσιν αἱ ΑΓ, ΔΕ συζυγεῖς ἐν αὐταῖς, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τὸ τῶν περὶ τὴν ΑΓ εἶδος δύνηται, ἡ δὲ ΑΓ τὸ τῶν περὶ τὴν ΔΕ.

ἔστω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΛ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ ΛΓ τῇ ΓΑ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀντικειμένη ἡ ΑΒΓ· διότι πῶς πρέπει τοῦτο νὰ γίνῃ ἔχει προαποδειχθῆ (θ. 55). Ἄς ἀχθῆ λοιπὸν διὰ τοῦ Ε κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ ἡ ΕΚ ἴση πρὸς τὴν ΒΘ, καὶ ἂς γραφῆ ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ ΔΕΖ, τῆς ὁποίας διάμετρος μὲν εἶναι ἡ ΒΕ, παράμετρος δὲ τοῦ σχήματος ἡ ΕΚ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς θὰ καταχθῶσι τεταγμένως ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Η (θ. 55). Εἶναι λοιπὸν φανερόν, ὅτι αἱ Β, Ε εἶναι ἀντικείμεναι , διάμετρος δὲ αὐτῶν εἶναι μία, καὶ αἱ παράμετροι εἶναι ἴσαι.

60

Ὅταν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι μεταξύ των εἰς τὸ μέσον νὰ γραφῶσι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν τομαὶ ἀντικείμεναι, ὥστε αἱ εὐθεῖαι νὰ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι αὐτῶν καὶ τὸ τετράγωνον τῆς μιᾶς διαμέτρου τῶν ἀντικειμένων νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ἄλλην διάμετρον καὶ τὴν παράμετρον τῶν ἄλλων ἀντικειμένων, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης διαμέτρου νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον πλευρὰς τὴν ἄλλην διάμετρον καὶ τὴν παράμετρον τῶν ἄλλων ἀντικειμένων.



Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι μεταξύ των εἰς τὸ μέσον αἱ ΑΓ, ΔΕ· πρέπει λοιπὸν περὶ τὴν ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον νὰ γραφῶσιν ἀντικείμεναι, ἵνα εἰς αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΕ εἶναι συζυγεῖς διάμετροι, καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ΔΕ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ περὶ τὴν ΑΓ ὀρθογώνιον (ἔχον πλευρὰν τὴν ΑΓ καὶ τὴν παράμετρον τὴν ΓΛ), τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΑΓ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ περὶ τὴν ΔΕ ὀρθογώνιον (ἔχον πλευρὰς τὴν ΔΕ καὶ τὴν παράμετρον ΔΖ).

Ἔστω $ΔΕ^2 = ΑΓ \times ΓΛ$ καὶ ἔστω κάθετος ἡ ΛΓ ἐπὶ τὴν ἀλλήλαις τῶν ΑΓ, ΓΛ γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΖΑΗ, ΘΓΚ, ὧν διάμετρος μὲν ἔσται πλαγία ἡ ΓΑ, ὀρθία δὲ ἡ ΓΛ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν ΓΑ καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ. ἔσται δὴ ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων· μέσον τε γὰρ λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην οὖσα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Β. ἔστω δὴ πάλιν τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΔΖ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ ΔΖ τῇ ΔΕ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων τῶν ΕΔ, ΔΖ γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΜΔΝ, ΟΕΞ, ὧν διάμετρος μὲν πλαγία ἡ ΔΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΔΖ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν καταχθήσονται ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ· ἔσται δὴ καὶ τῶν ΜΔΝ, H190 ΞΕΟ δευτέρα διάμετρος ἡ ΑΓ. ὥστε ἡ μὲν ΑΓ τὰς τῇ ΔΕ παραλλήλους μεταξὺ τῶν ΖΑΗ, ΘΓΚ τομῶν δίχα τέμνει, ἡ δὲ ΔΕ τὰς τῇ ΑΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

καλείσθωσαν δὲ αὗται αἱ τομαὶ συζυγεῖς.

ΓΑ. Καὶ ἐνῷ ἔχουσι δοθῇ δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των αἱ ΑΓ, ΓΛ ἂς γραφῶσιν ἀντικείμεναι αἱ ΖΑΗ, ΘΓΚ, τῶν ὁποίων πλαγία μὲν διάμετρος θὰ εἶναι ἡ ΓΑ παράμετρος δὲ ἡ ΓΛ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν ΓΑ θὰ καταχθῶσιν ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν (θ. 59). Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων (πρῶτοι ὁρισμ. 3)· διότι ἡ ΔΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΓ, ΔΛ (Εὐκλ. 6, 17) καὶ οὖσα παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην ἔχει τμηθῇ εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Β. Ἔστω τώρα πάλιν τὸ $ΑΓ^2 = ΔΕ \times ΔΖ$ καὶ ἔστω κάθετος ἡ ΔΖ ἐπὶ τὴν ΔΕ. Καὶ ἐνῷ ἔχουσι δοθῇ δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των αἱ ΕΔ, ΔΖ, ἂς γραφῶσιν ἀντικείμεναι αἱ ΜΔΝ, ΟΕΞ, τῶν ὁποίων πλαγία μὲν διάμετρος (πλάγιος ἄξων) εἶναι ἡ ΔΕ, παράμετρος δὲ τοῦ σχήματος εἶναι ἡ ΔΖ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν θὰ καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν ΔΕ ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν (θ. 59)· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ τῶν ΜΔΝ, ΞΕΟ δευτέρα διάμετρος ἡ ΑΓ (πρῶτοι ὁρισμ. 3). Ὥστε ἡ μὲν ΑΓ τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΔΕ τὰς μεταξὺ τῶν τομῶν ΖΑΗ, ΘΓΚ τὰς τέμνει εἰς τὸ μέσον, ἡ δὲ ΔΕ τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ (θ. 16)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ἂς κληθῶσι δὲ αἱ τομαὶ αὗται συζυγεῖς.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Α

Β

Γ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Δ

Ε

Ζ

Η

Θ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

Ι

Κ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Λ

Μ

N

O

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

Π

Ρ

Σ

Τ

Υ

Φ

Χ

Ω

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς
59, 7. Ἀντὶ ΚΕΑ νὰ τεθῇ ΚΕΛ.
174, 11. Ἀντὶ andormir ἀνάγνωθι endormir.
204, 5. Πρὸ τοῦ στίχου 5 νὰ τεθῇ ὁ ἀριθμὸς 5.
204, 10. Ἀντὶ 15 ἀνάγνωθι 10.

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ
ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ «ΠΑΤΡΙΣ» Α.Ε.
ΑΘΗΝΑΙ, ΙΕΡΑ ΟΔΟΣ 58
ΤΗΛΕΦ. 365.347—368.216